انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ xiii

1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات 1
1.1 نمونہ کشی 2
1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔ 14
1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات 23
1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل 39
1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی 51
1.6 عمودی خطوط کی نسلیں 68
1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت 72

2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات 79
2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 79
2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 95
2.3 تفرقی عامل 110
2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش 114
2.5 یولر کوشی مساوات 130
2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ورونسکی 138
2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 147
2.8 جبری ارتعاش۔ گمک 159
2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک 165
2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی 169
2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 180

3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات 187
3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 187
3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 198
3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 207
3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 210

4 نظام تفرقی مساوات 219
4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 220
4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 229
4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی 243
4.3.1 خطی نظام 244
4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 248
4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام 265
4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 273
4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 282
4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام 290
4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب 291

5 طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل 299
5.1 ترکیب طاقتی تسلسل 300
5.2 لیجنڈر مساوات۔ لیجنڈر کثیر رکنی 315
5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس 332
5.3.1 عملی استعمال 337
5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل 351
5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل 366
5.6 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ 372
5.7 مسئلہ سٹیورم لیوویل 378
5.8 قائمیت لیجنڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل 385

6 لاپلاس تبادلہ 395
6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت 396
6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات 405
6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل 417
6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاو 437
6.5 الجھاو 454
6.6 لاپلاس بدل کی تکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 463
6.7 تفرقی مساوات کے نظام 471

6.8 لاپلاس بدل کے عمومی کلیے 479

7 خطی الجبرا: سمتیات 483
7.1 غیر سمتیات اور سمتیات 483
7.2 سمتیہ کے اجزاء 485
7.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب 491
7.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت 499
7.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) 505
7.6 اندرونی ضرب فضا 518
7.7 سمتی ضرب 520
7.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب 522
7.9 غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب 533

8 خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام 541
8.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب 542
8.2 قالبی ضرب 552
8.2.1 تبدیلی محل 558
8.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط 570
8.3.1 صف زینہ دار صورت 582
8.4 خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا 590
8.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی 604
8.6 دو درجی اور تین درجی مقطع قالب 610
8.7 مقطع۔ قاعدہ کریمر 613
8.8 معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط 629
8.9 سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ 644

9 خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب 661
9.1 امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول 662
9.2 امتیازی مسائل کے چند استعمال 672
9.3 تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب 680
9.4 امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجی صورت 687
9.5 مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں 700

10 سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل 711
10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان 711
10.2 سمتی علم الاحصاء 713
10.3 منحنی 720
10.4 لمبائی قوس 726
10.5 مماس، انحنا اور مروڑ 733
10.6 سمتی رفتار اور اسراع 738

10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ . . . 745
10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان . . . 751
10.9 تبادل محددی نظام اور تبادل ارکان سمتیات . . . 764
10.10 سمتی میدان کی پھیلاو . . . 769
10.11 سمتی تفاعل کی گردش . . . 777

11 سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے 781
11.1 خطی تکمل . . . 782
11.2 خطی تکمل کا حل . . . 787
11.3 دوہرا تکمل . . . 796
11.4 دوہرا تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ . . . 810
11.5 سطحیں . . . 820
11.6 مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ . . . 825
11.7 سطحی تکمل . . . 837
11.8 تہرا تکمل۔ گاوس کا مسئلہ پھیلاو . . . 845
11.9 مسئلہ پھیلاو کے نتائج اور استعمال . . . 850
11.10 مسئلہ سٹوکس . . . 861
11.11 مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال . . . 866
11.12 راہ سے آزاد خطی تکمل . . . 869

12 فوریئر تسلسل 883
12.1 دوری تفاعل، تکونیاتی تسلسل . . . 884
12.2 فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات . . . 889
12.3 اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل . . . 902
12.4 جفت اور طاق تفاعل . . . 907
12.5 نصف حلقہ اتساع . . . 916
12.6 فوریئر عددی سر کا بغیر تکمل حصول . . . 923
12.7 جبری ارتعاش . . . 931
12.8 تقریب بذریعہ تکونی کثیر رکنی۔ مکعب خلل . . . 936
12.9 فوریئر تکمل . . . 940

13 جزوی تفرقی مساوات 953
13.1 بنیادی تصورات . . . 953
13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج . . . 958
13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب) . . . 960
13.4 مساوات موج کا دالومبیغ حل . . . 973
13.5 یک بعدی بہاو حرارت . . . 979
13.6 لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاو حرارت . . . 987

13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دو ابعادی مساوات موج . . . 993
13.8 مستطیل جھلی . . . 996
13.9 قطبی محدد میں لاپلاسی . . . 1006
13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل . . . 1010
13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ مخفی قوہ . . . 1018
13.12 کروی محدد میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیژانڈر . . . 1024
13.13 لاپلاس تبادل برائے جزوی تفرقی مساوات . . . 1030

14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیلی تفاعل 1037
14.1 مخلوط اعداد . . . 1038
14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات . . . 1047
14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے . . . 1054
14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیلی تفاعل . . . 1059
14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات . . . 1067
14.6 ناطق تفاعل۔ جذر . . . 1078
14.7 قوت نمائی تفاعل . . . 1084
14.8 تکونیاتی اور ہذلولی تفاعل . . . 1089
14.9 لوگارتھم۔ عمومی طاقت . . . 1095

15 محافظ زاویہ نقشہ کشی 1103
15.1 نقشہ کشی . . . 1104
15.2 محافظ زاویہ نقش . . . 1116
15.3 خطی کسری تبادل . . . 1125
15.4 مخصوص خطی کسری تبادل . . . 1129
15.5 نقش زیر دیگر تفاعل . . . 1138
15.6 ریمان سطحیں . . . 1149

16 مخلوط تکملات 1157
16.1 مخلوط مستوی میں خطی تکمل . . . 1157
16.2 مخلوط خطی تکمل کی خواص . . . 1168
16.3 کوشی کا مسئلہ تکمل . . . 1172
16.4 خطی تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمل . . . 1184
16.5 کوشی کا کلیہ تکمل . . . 1189
16.6 تحلیلی تفاعل کے تفرق . . . 1194

17 ترتیب اور تسلسل 1201
17.1 ترتیب . . . 1201
17.2 تسلسل . . . 1208
17.3 کوشی اصول مرکوزیت برائے ترتیب اور تسلسل . . . 1213

17.4 یک سر حقیقی ترتیب۔ لیبنٹز آزمائش برائے حقیقی تسلسل . . . 1220
17.5 تسلسل کی مرکوزیت اور انفراج کی آزمائشیں . . . 1225
17.6 تسلسل پر اعمال . . . 1236

18 طاقتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوغوں تسلسل 1243
18.1 طاقتی تسلسل . . . 1243
18.2 طاقتی تسلسل کی روپ میں تفاعل . . . 1256
18.3 ٹیلر تسلسل . . . 1263
18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل . . . 1268
18.5 طاقتی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب . . . 1274
18.6 یکساں استمرار . . . 1281
18.7 لوغوں تسلسل . . . 1294
18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت . . . 1303

19 تکمل بذریعہ ترکیب بقیہ 1317
19.1 بقیہ . . . 1317
19.2 مسئلہ بقیہ . . . 1324
19.3 حقیقی تکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ . . . 1329
19.4 حقیقی تکمل کے دیگر اقسام . . . 1337

20 مخلوط تحلیلی تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ 1345
20.1 ساکن برقی سکون . . . 1346
20.2 دوبعدی بہاو سیال . . . 1352
20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص . . . 1361
20.4 پوسوں کلیہ تکمل . . . 1366

21 اعدادی تجزیہ 1373
21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر . . . 1374
21.2 دہرانے سے مساوات کا حل . . . 1376
21.3 متناہی فرق . . . 1388
21.4 باہمی تحریف . . . 1394
21.5 لچکدار منحنیات . . . 1403
21.6 اعدادی تکمل اور تفرق . . . 1410
21.7 متقارب اتساع . . . 1422

22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب 1435
22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی اسقاط، معکوس قالب . . . 1435
22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ . . . 1445

22.3 خطی مساوات کا نظام: بدخوئی 1453
22.4 ترکیب کمتر مربع 1457
22.5 قالب کے امتیازی اقدار کی شمول 1463
22.6 امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ 1472

23 اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات 1477
23.1 یک درجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب 1477
23.2 دودرجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب 1488
23.3 اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات 1495
23.3.1 مسئلہ ڈرشلے 1498
23.3.2 بدلتی رخ خفی ترکیب 1501
23.4 مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ۔ غیر منظم سرحد 1508
23.5 اعدادی تراکیب برائے قطع مکافی مساوات 1515
23.6 اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات 1524

24 احتمال اور شماریات 1529
24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد 1529
24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم 1531
24.3 نمونی اوسط اور نمونی تغیریت 1541
24.4 بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات 1546
24.5 احتمال 1553
24.6 مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات 1562
24.7 بلا منصوبہ متغیرات۔ غیر مسلسل اور استمراری تقسیم 1568
24.8 تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت 1576
24.9 ثنائی، پوئسن، اور بیش ہندسی تقسیم 1584
24.10 عمومی تقسیم 1592
24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں 1602
24.12 بلا منصوبہ نمونہ بندی۔ بلا منصوبہ اعداد 1614
24.13 مقدار معلوم کا اندازہ لگانا 1617
24.14 وقفہ اعتماد 1622

ا اضافی ثبوت 1635

ب مفید معلومات 1639
1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات 1639

ج جدول 1649

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم ایک مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ واحد ایک بلا منصوبہ متغیر، مثلاً X، وابستہ کرنا ہو گا۔ حصہ 24.7 سے ہم جانتے ہیں کہ اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم $F(x) = P(X \le x)$ اس تقسیم کو مکمل طور پر تعین کرتا ہے، چونکہ ہر وقفہ $a < X \le b$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم دو مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ دو بلا منصوبہ متغیرات، مثلاً X اور Y، وابستہ کرنا ہو گا۔ مثال کے طور پر فولاد کی راک ویل سختی کو X اور اس میں کاربن کی مقدار کو Y ظاہر کر سکتے ہیں۔ ہر ایک تجربہ اعداد کی جوڑی $X = x$، $Y = y$ دے گی جس کو مختصراً (x, y) لکھا اور XY مستوی پر بطور نقطہ دکھایا جا سکتا ہے۔ ہم اب ایک مستطیل $a_1 < X \le b_1$، $a_2 < Y \le b_2$ پر غور کرتے ہیں (شکل 24.14)۔ اگر ایسے ہر ایک مستطیل کے لئے ہمیں مطابقتی احتمال

$$P(a_1 < X \le b_1,\ a_2 < Y \le b_2)$$

معلوم ہو تب ہم کہتے ہیں کہ **دو بعدی بلا منصوبہ متغیر**[119] (X, Y) یا بلا منصوبہ متغیرات X اور Y کا **دو بعدی تفاعل احتمال**[120] ہمیں معلوم ہے۔ تفاعل

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y) \tag{24.81}$$

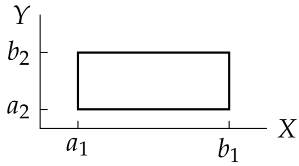
کو اس تقسیم یا (X, Y) کا **تقسیمی تفاعل**[121] کہتے ہیں۔ چونکہ (سوال 24.145)

$$\begin{aligned} &P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) \\ &\quad = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \end{aligned} \tag{24.82}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 24.81 تقسیم کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

---

[119] two-dimensional random variable
[120] two-dimensional probability distribution
[121] distribution function



شکل 24.14: دو بعدی تقسیم کا تصور

غیر مسلسل دو بعدی تقسیمیں

اگر (X,Y) درج ذیل خواص رکھتا ہو تب متغیر (X,Y) اور اس کا مطابقتی تقسیم **غیر مسلسل** کہلائے گا۔

X,Y متناہی تعداد یا قابل شمار لامتناہی تعداد کی جوڑی قیمتیں (x,y) اختیار کر سکتا ہے جن کے مطابقتی احتمال مثبت ہوں گے۔ ہر ایسا دائرہ کار جس میں ایسی کوئی جوڑی نہ پائی جاتی ہو کا احتمال 0 ہو گا[122]۔

فرض کریں کہ x_i, y_j ایسی کوئی جوڑی ہے اور $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ ہے (جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ p_{ij} کسی مخصوص i,j کی جوڑیوں کے لئے صفر بھی ہو سکتا ہے)۔ تفاعل

$$f(x,y)=\begin{cases} p_{ij} & x=x_i, y=y_j \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases} \tag{24.83}$$

کو (X,Y) کا **تفاعل احتمال** کہتے ہیں؛ یہاں غیر تابع طور پر $i=1,2,\cdots$ اور $j=1,2,\cdots$ ہیں۔ مساوات 24.42 کا مماثل

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} f(x_i,y_j) \tag{24.84}$$

ہے اور مساوات 24.38 کی جگہ درج ذیل شرط ہو گا۔

$$\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)=1 \tag{24.85}$$

---

[122] دھیان رہے کہ پہلی خاصیت سے یہ نہیں کہا جا سکتا ہے

مثال کے طور پر اگر ہم ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے اچھال کر

$$X = \text{ایک روپیہ کی خط کی تعداد}$$
$$Y = \text{پانچ روپیہ کی خط کی تعداد}$$

پر غور کریں تب X اور Y کی قیمت 0 یا 1 ہو سکتی ہے اور تفاعل احتمال

$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = \frac{1}{4}$ ورنہ (ان کے علاوہ) $f(x,y) = 0$ ہو گا۔

استمراری دوبعدی تقسیمیں

(X,Y) اور اس کا تقسیم اس صورت استمراری کہلاتے ہیں جب مطابقتی تفاعل تقسیم کو دوہرا تکمل

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x^*,y^*)\,\mathrm{d}x^*\,\mathrm{d}y^* \tag{24.86}$$

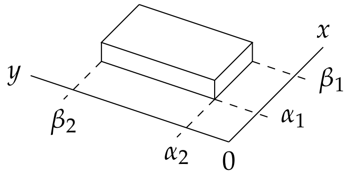
کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں $f(x,y)$ معین، غیر منفی اور پورے مستوی میں محدود ہے ماسوائے متناہی تعداد کے استمراری قابل تفرق منحنیات پر۔ $f(x,y)$ کو تقسیم کی **کثافت احتمال** کہتے ہیں۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{24.87}$$

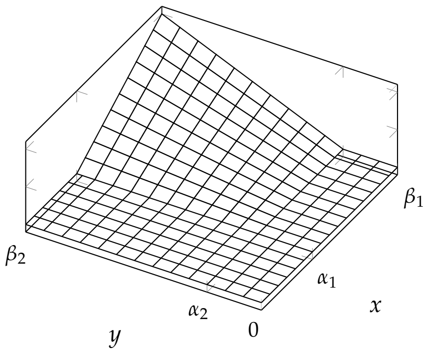
مثال کے طور پر (شکل 24.15)

$$\text{جب } (x,y) \text{ مستطیل } R \text{ میں ہو تب } f(x,y) = \frac{1}{k} \text{ ورنہ } f(x,y) = 0 \tag{24.88}$$

مستطیل R میں یکساں تقسیم کو ظاہر کرتا ہے؛ یہاں k مستطیل کا رقبہ یعنی $k = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)$ ہے۔اس تقسیم کو شکل 24.16 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 24.15: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل احتمال کثافت



شکل 24.16: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل تقسیم

دو بعدی غیر مسلسل تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

فرض کریں کہ بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر (X,Y) کا تفاعل احتمال $f(x,y)$ ہے۔ اگر $X=x$ ہو، جبکہ Y جس میں ہمیں دلچسپی نہیں ہے کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہو، تب تفاعل احتمال $P(X=x,Y$ اختیاری$)$ کو $f_1(x)$ لکھا جا سکتا ہے جو x کا تابع تفاعل ہے۔ یوں

$$f_1(x)=P(X=x,Y\ \text{اختیاری})=\sum_y f(x,y) \tag{24.89}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اس x کے لئے ہم $f(x,y)$ کی تمام غیر صفر قیمتوں کا مجموعہ لیا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ $f_1(x)$ ایک بلا منصوبہ متغیر تقسیمی احتمال کا تفاعل احتمال ہے۔ اس تقسیم کو دیے گئے دو بعدی تقسیم کے لحاظ سے X کا **حاشیہ تقسیم**[123] کہا جاتا ہے۔ اس کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_1(x)=P(X\le x,Y\ \text{اختیاری})=\sum_{x^*\le x} f_1(x^*) \tag{24.90}$$

اسی طرح تفاعل احتمال

$$f_2(y)=P(X\ \text{اختیاری},Y=y)=\sum_x f(x,y)) \tag{24.91}$$

[123] marginal distribution

جدول 24.7: تاش سے ملکہ اور بادشاہ کا حصول

x \ y	0	1	2	3	$f_1(x)$
0	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
1	$\frac{300}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	0	$\frac{432}{2197}$
2	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	0	0	$\frac{36}{2197}$
3	$\frac{1}{2197}$	0	0	0	$\frac{1}{2197}$
$f_2(y)$	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{726}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	

دیے گئے دو بعدی تقسیم کا Y کے لحاظ سے **حاشیہ تقسیم** تعین کرتا ہے۔مساوات 24.91 میں ہم y کے مطابقتی غیر صفر $f(x,y)$ کا مجموعہ لیتے ہیں۔اس تقسیم کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y \leq y) = \sum_{y^* \leq y} f_2(y^*) \tag{24.92}$$

ظاہر ہے کہ بلا منصوبہ متغیر (X,Y) کے دونوں حاشیہ تقسیم غیر مسلسل ہیں۔

جدول 24.7 میں ان کی مثال دی گئی ہے جہاں تاش کے پتوں سے تین پتے نکال کر واپس رکھے جاتے ہیں۔ملکہ کے حصول کو X جبکہ بادشاہ کے حصول کو Y سے ظاہر کیا گیا ہے۔تاش کے کل 52 پتے ہوتے ہیں جن میں 4 ملکہ اور 4 بادشاہ کے پتے ہوتے ہیں۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ہو گا۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ یا بادشاہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{2}{13}$ ہو گا۔اس طرح اس بلا منصوبہ تجربہ کا مطابقتی تفاعل احتمال

$$f(x,y) = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!}\left(\frac{1}{13}\right)^x\left(\frac{2}{13}\right)^y\left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} \qquad (x+y \leq 3)$$

ہو گا اور ان کے علاوہ $f(x,y) = 0$ ہو گا۔جدول 24.7 میں $f(x,y)$ ، $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ دیے گئے ہیں۔

دو بعدی استمراری تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

اسی طرح کثافت $f(x,y)$ والے استمراری متغیر X, Y کے لئے ہم

$$(X \leq x, Y \text{ اختیاری}) \quad \text{یا} \quad (X \leq x, -\infty < Y < \infty)$$

پر غور کر سکتے ہیں جس کا مطابقتی احتمال

$$F_1(x) = P(X \le x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x^*$$

ہو گا جس میں

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{24.93}$$

لکھتے ہوئے

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x^*)\,\mathrm{d}x^* \tag{24.94}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $f_1(x)$ اور $F_1(x)$ کو بالترتیب دیے گئے استمراری تقسیم کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم X کی **کثافت** اور **تقسیمی تفاعل** کہتے ہیں۔ دیے گئے دو بعدی استمراری تقسیم کے لحاظ سے تفاعل

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{24.95}$$

کو حاشیہ تقسیم Y کی کثافت اور

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y^*)\,\mathrm{d}y^* = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y^*)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^* \tag{24.96}$$

کو حاشیہ تقسیم Y کا تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ استمراری تقسیم کے دونوں حاشیہ تقسیم استمراری ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کی تابعیت اور غیر تابعیت

دو بعدی (X,Y) تقسیم جس کا تفاعل تقسیم $F(x,y)$ ہو کے بلا منصوبہ متغیرات X اور Y اس صورت **غیر تابع** کہلاتے ہیں جب تمام (x,y) کے لئے

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y) \tag{24.97}$$

ہو ورنہ انہیں تابع کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ X اور Y دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہوں۔تب X اور Y اس صورت غیر تابع ہوں گے جب ان کے مطابقتی تفاعل احتمال یا کثافتیں $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں (سوال 24.160)۔

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \tag{24.98}$$

مثال کے طور پر جدول 24.7 میں متغیرات تابع ہیں۔ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے ایک بار اچھال کر متغیرات

$X =$ پانچ روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد $\quad Y =$ ایک روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد,

0 یا 1 قیمت اختیار کر سکتے ہیں اور یہ متغیرات غیر تابع ہیں۔

تابعیت اور غیر تابعیت کی تصور کو n بعدی تقسیم $X_1, \cdots, X_n$ جس کا تفاعل احتمال

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_! \leq x_1, \cdots X_n \leq x_n)$$

ہو کے n بلا منصوبہ متغیرات تک وسعت دی جا سکتی ہے۔اگر تمام $x_1, \cdots, x_n$ کے لئے

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(n) \tag{24.99}$$

ہو جہاں X_j کے حاشیہ تقسیم کا تقسیمی تفاعل $F_j(x_j)$ ہو، یعنی

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j, X_k \text{ اختیاری}, k \neq j)$$

تب یہ بلا منصوبہ متغیرات غیر تابع کہلاتے ہیں ورنہ ان متغیرات کو تابع کہتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل

فرض کریں کہ بلا منصوبہ متغیر (X,Y) کا تفاعل احتمال یا کثافت $f(x,y)$ اور تقسیمی تفاعل $F(x,y)$ ہیں اور فرض کریں کہ $g(x,y)$ غیر مستقل استمراری تفاعل ہے جو تمام (x,y) پر معین ہے۔تب $Z = g(X,Y)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔مثال کے طور پر ہم دو پانسہ پھینکتے ہیں۔پہلے پانسہ عدد X اور دوسرا پانسہ عدد Y دیتا ہے۔ عدد $Z = X + Y$ ان دونوں کا مجموعہ ہے (شکل 24.8)۔

اگر n $(X_1, \cdots, X_n)$ بعدی متغیر ہوا ور تمام $(x_1, \cdots, x_n)$ پر $g(x_1, \cdots, x_n)$ معین غیر مستقل استمراری تفاعل ہو تب $Z = g(X_1, \cdots, X_n)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔

غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر (X,Y) کی صورت میں ان تمام $f(x,y)$ کا مجموعہ لیتے ہوئے جن کے لئے $g(x,y)$ کی قیمت زیر غور y کے برابر ہو، ہم $Z=g(X,Y)$ کا تفاعل احتمال $f(z)$ حاصل کر سکتے ہیں، یعنی:

$$f(z)=P(Z=z)=\sum_{g(x,y)=z}\sum f(x,y) \tag{24.100}$$

Z کا تقسیمی تفاعل

$$F(z)=P(Z\le z)=\sum_{g(x,y)\le z}\sum f(x,y) \tag{24.101}$$

ہے جہاں ہم ان $f(x,y)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے $g(x,y)\le z$ ہو۔

بلا منصوبہ استمراری متغیر (X,Y) کے لئے اسی طرح

$$F(z)=P(Z\le z)=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{24.102}$$

ہو گا جہاں ہر z کے لئے ہم xy مستوی میں خطہ $g(x,y)\le z$ پر تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$g(X,Y)$ کی حسابی توقع۔ مجموعہ اوسط اور تغیریت

درج ذیل عدد کو $g(X,Y)$ کی **حسابی توقع**[124] یا مختصراً **توقع** کہتے ہیں۔

$$E(g(X,Y))=\begin{cases}\sum\limits_x\sum\limits_y g(x,y)f(x,y) & [\text{غیر مسلسل } (X,Y)]\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & [\text{استمراری } (X,Y)]\end{cases} \tag{24.103}$$

یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ دوہرا مجموعہ حتمی مرتکز ہے اور xy مستوی پر $|g(x,y)|\,f(x,y)$ کا تکمل موجود ہے۔ درج ذیل کلیہ کو سوال 24.99 کی طرز پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$E(ag(X,Y)+bh(X,Y))=aE(g(X,Y))+bE(h(X,Y)) \tag{24.104}$$

---
[124] mathematical expectation

اس کے ایک مخصوص صورت $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ ہے اور الکراجی ماخوذ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.16: **(مجموعہ اوسط)**
بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعے کی اوسط (توقع) ان کے انفرادی اوسط کا مجموعہ ہو گا، یعنی:

$$E(X_1 + X_2, \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \tag{24.105}$$

مزید درج ذیل با آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 24.17: **اوسطوں کا حاصل ضرب**
غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے حاصل ضرب کی اوسط ان کے انفرادی اوسط کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا، یعنی:

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n) \tag{24.106}$$

ثبوت: فرض کریں کہ X اور Y بلا منصوبہ متغیرات ہیں (جہاں دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہیں)۔ تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ ہو گا۔ غیر مسلسل صورت میں

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x,y) = \sum_x xf_1(x) \sum_y yf_2(y) = E(X)E(Y)$$

لکھا جا سکتا ہے اور استمراری صورت میں بھی ثبوت اسی طرح کا ہے۔اس نتیجہ کو n غیر تابع متغیرات تک وسعت دینے سے مساوات 24.106 ثابت ہوتی ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب تغیریت کے مجموعہ پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ $Z = X + Y$ ہے اور Z کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔سوال 24.97 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma^2 = E([Z-\mu]^2) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

مساوات 24.104 سے دائیں ہاتھ پہلے جزو کو

$$E(Z^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کو مسئلہ 24.17 کی مدد سے

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔انہیں σ^2 کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

سوال 24.97 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ پہلی لکیر پر دیا گیا تعلق X اور Y کی تغیریت کا مجموعہ ہے جنہیں ہم بالترتیب σ_1^2 اور σ_2^2 سے ظاہر کرتے ہیں۔دوسری لکیر پر مقدار

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{24.107}$$

کو X اور Y کی **باہمی تغیریت**[125] کہتے ہیں۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY} \tag{24.108}$$

اگر X اور Y غیر تابع ہوں تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ لہٰذا $\sigma_{XY} = 0$ اور

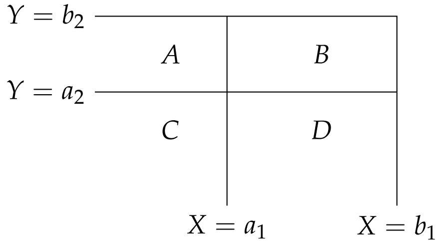
$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{24.109}$$

ہو گا۔دو سے زائد متغیرات تک وسعت دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.18: (تغیرات کا مجموعہ)
غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعہ کی تغیریت ان متغیرات کے انفرادی تغیریت کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 24.145: مساوات 24.82 کو ثابت کریں۔
جواب: شکل 24.17 میں (X, Y) احتمال $F(b_1, b_2)$ کے ساتھ A ، B ، C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, b_2)$ کے ساتھ A یا C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(b_1, a_2)$ کے



شکل 24.17: شکل برائے سوال 24.145

ساتھ C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, a_2)$ کے ساتھ C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے لہٰذا B سے قیمت حاصل کرنے کا احتمال مساوات 24.82 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

سوال 24.146: شکل 24.15 اور شکل 24.16 میں دیے تقسیم کے حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔

سوال 24.147: فرض کریں کہ $8 \leq x \leq 12$ اور $0 \leq y \leq 2$ میں $f(x, y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ۔ k ، $P(X \leq 11, 1 \leq Y \leq 1.5)$ اور $P(9 \leq X \leq 12, Y \leq 1)$ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{8}$

سوال 24.148: ایک کاغذ کی اوسط کمیت $10\,\mathrm{g}$ اور معیاری انحراف $0.05\,\mathrm{g}$ ہے۔ ایسی $10\,000$ کاغذوں کی ڈھیر کی اوسط کمیت اور تغیریت کیا ہو گی؟

سوال 24.149: فرض کریں کہ $x > 0$ ، $y > 0$ اور $x + y < 3$ میں $f(x, y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ $f(x, y)$ ترسیم کریں۔ $P(X + Y \leq 1)$ اور $P(Y > X)$ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}$

سوال 24.150: ایک خالی ڈبے کی اوسط $2\,\mathrm{kg}$ اور معیاری انحراف $0.1\,\mathrm{kg}$ ہے۔ اس ڈبے میں مال کی اوسط $75\,\mathrm{kg}$ اور تغیریت $0.8\,\mathrm{kg}$ ہے۔ بھرے ڈبے کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.151: خطہ $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ میں بلا منصوبہ متغیرات کی کثافتیں $f(x, y) = x + y$ اور $g(x, y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$ ہیں۔ دکھائیں کہ ان کی حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہیں۔

[125] covariance

سوال 24.152: ایسی دو مختلف غیر مسلسل تقسیم کی مثال دیں جن کے حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہوں۔

سوال 24.153: چار گراریوں کو یوں یکجا کیا جاتا ہے کہ ان کے بیچ فاصلہ رہے۔ گراریوں کے بیچ باریک چادر کی ٹکیا رکھ کر فاصل پیدا کیا جاتا ہے۔ گراری کی موٹائی کی اوسط 5.020 cm اور معیاری انحراف 0.003 cm ہے جبکہ ٹکیا کی موٹائی کی اوسط 0.040 cm اور معیاری انحراف 0.002 cm ہے۔ بلا منصوبہ 4 گراریوں اور 3 ٹکیوں سے بنائی گئی پوری گراری کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے۔
جواب: تقریباً 20.200, 0.007

سوال 24.154: لوہے کی چادروں اور کاغذ کو تہہ در تہہ رکھ کر ٹرانسفارمر کا قالب بنایا جاتا ہے۔ اگر لوہے کی چادر کی موٹائی کی اوسط 0.5 mm اور معیاری انحراف 0.05 mm ہو اور کاغذ کی موٹائی کی اوسط 0.05 mm اور معیاری انحراف 0.02 mm ہو تب 50 لوہے کی چادروں اور 49 کاغذوں سے بنائے گئے قالب کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.155: خطہ $x^2+y^2<1$ میں (X,Y) کی کثافت $f(x,y)=k$ ہے جبکہ اس خطہ کے باہر کثافت صفر ہے۔ k تلاش کریں۔ حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔ احتمال $P(X^2+Y^2<\frac{1}{2})$ تلاش کریں۔
جواب: $k=\frac{1}{\pi};f_1(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},f_2(y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},50\,\%$

سوال 24.156: ایک پنیا اور سوراخ کے قطر بالترتیب X سنٹی میٹر اور Y سنٹی میٹر ہیں۔ فرض کریں کہ (X,Y) کی کثافت

$$\text{اگر}\quad 0.99<x<1.01,1.00<y<1.02 \quad \text{ہو تب}\quad f(x,y)=2500$$

ہے ورنہ $f=0$ ہے۔ حاشیہ تقسیمیں حاصل کریں۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ منتخب کردہ پنیا 1.00 سنٹی میٹر کی سوراخ میں ٹھیک بیٹھے گا؟

سوال 24.157: خطہ $x\ge 0,y\ge 0$ میں (X,Y) کی کثافت $f(x,y)=e^{-(x+y)}$ ہے جبکہ باقی جگہوں پر $f=0$ ہے۔ $P(X>Y)$ تلاش کریں۔
جواب: 50 %

سوال 24.158: سوال 24.157 میں حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔

سوال 24.159: ایک برقیاتی آلہ میں دو برقیاتی پرزے پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ پہلا پرزہ X مہینوں تک اور دوسرا پرزہ Y مہینوں تک کام کر سکتا ہے۔فرض کریں کہ (X,Y) کی احتمال کثافت

$$f(x,y)=0.01e^{-0.1(x+y)} \qquad x>0, y>0$$

جبکہ اس کے علاوہ $f=0$ ہے۔(الف) کیا X اور Y تابع ہیں؟ (ب) حاشیہ تقسیم کی کثافت تلاش کریں۔ (پ) پہلے پرزے کی زندگی 10 مہینے یا اس سے زیادہ ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟
جواب: غیر تابع، $f_1(x)=0.1e^{-0.1x}, x>0; f_2(y)=0.1e^{-0.1y}, y>0; 36.8\,\%$ ہے

سوال 24.160: مساوات 24.98 سے منسلک فقرہ ثابت کریں۔

سوال 24.161: فرض کریں کہ (X,Y) کا تفاعل احتمال $f(0,0)=f(1,1)=\frac{1}{8}$ ، $f(0,1)=f(1,0)=\frac{3}{8}$ ہے۔کیا X اور Y غیر تابع ہیں؟
جواب: جی نہیں

سوال 24.162: مسئلہ 24.16 کو استعمال کرتے ہوئے ثنائی تقسیم کی اوسط μ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 24.163: مسئلہ 24.18 کی مدد سے ثنائی تقسیم کی تغیریت σ^2 کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 24.164: مسئلہ 24.16 کی مدد سے بیش ہندسی تقسیم کی اوسط کا کلیہ حاصل کریں۔کیا مسئلہ 24.18 کی مدد سے اس تقسیم کی تغیریت کا کلیہ حاصل کیا جا سکتا ہے؟

24.12 بلا منصوبہ نمونہ بندی۔بلا منصوبہ اعداد

حصہ 24.3 تا حصہ 24.11 میں نظریہ احتمال پر غور کیا گیا۔اس باب کے باقی حصوں میں شماریات پر غور کیا جائے گا۔آبادی کے حسابی نمونے بنانے میں نظریہ شماریات مدد دیتا ہے۔شماریاتی تراکیب، جن پر غور کیا جائے گا، نظریہ اور حقیقی مشاہدوں کے مابین تعلقات پیش کرتے ہیں۔یوں نمونہ بندی کے ذریعہ آبادی کے بارے میں نتائج حاصل کیے جا سکتے ہیں (شماریاتی رائے زنی؛ حصہ 24.1)۔

اب تک اتنا جاننا کافی تھا کہ آبادی کے نمونہ سے مراد آبادی سے اشیاء کا انتخاب ہے (حصہ 24.1 میں مثالیں) لیکن اب ہمیں اس تصور کی تعریف باریک بینی سے دینی ہو گی۔حقیقتاً کسی بھی آبادی سے نمونہ بندی کے ذریعہ معنی خیز نتائج حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ نمونہ **بلا منصوبہ انتخاب**[126] ہو، یعنی آبادی میں ہر چیز کا منتخب ہو کر نمونے میں شامل ہونے کے احتمال کی قیمت معلوم ہو۔یہ شرط ہر صورت (کم از کم تخمینی طور پر) پوری کرنا لازم ہے ورنہ حاصل نتائج مکمل طور پر بے معنی اور غلط ہو سکتے ہیں۔

لامتناہی نمونی فضا کی صورت میں نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی، یعنی، کسی بلا منصوبہ تجربہ کو n مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے حاصل n بلا منصوبہ نمونی قیمتیں ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوں گی۔ عمومی آبادی سے حاصل نمونوں کے لئے یہ یقینی طور پر درست ہے۔متناہی نمونی فضا کی صورت میں اگر ہم واپس رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی؛ اگر ہم واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب، آبادی کی جسامت کے لحاظ سے نمونے کی جسامت چھوٹی رکھتے ہوئے (مثلاً 1000 کی آبادی سے 5 یا 10 کا نمونہ لیتے ہوئے)، حاصل نمونی قیمتیں عملاً غیر تابع ہوں گی۔اس کے برعکس اگر ہم بغیر واپس رکھتے ہوئے متناہی آبادی سے بڑے نمونے لیں تب تابعیت کا بہت زیادہ اثر پایا جائے گا۔

بلا منصوبہ انتخاب کی شرط پر پورا اترنا آسان نہیں ہے۔کئی وجوہات نمونہ بندی کے عمل پر اثر انداز ہو سکتی ہیں۔مثال کے طور پر اگر ایک خریدار نے 80 کی ڈھیر سے 10 کا انتخاب کر کے ڈھیر خریدنے یا نہ خریدنے کا فیصلہ کرنا ہو تب وہ طبعی طور پر ان 10 چیزوں کا انتخاب کس طرح کرے گا کہ $\binom{80}{10}$ ممکنات میں سے ہر ایک کے منتخب ہونے کا احتمال ایک جیسا ہو؟

اس مسئلے کی حل کے لئے مختلف تراکیب تشکیل دی گئی ہیں۔ہم اب ایک ایسے طریقہ کار پر غور کرتے ہیں جس کو عموماً استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم اس ڈھیر کے اجزاء کو 1 تا 80 کے شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔اس کے بعد ہم ضمیمہ ج میں بلا منصوبہ اعداد کی جدول استعمال کرتے ہوئے 10 اجزاء چنتے ہیں۔بلا منصوبہ اعداد کے جدول کو ہم یوں استعمال کرتے ہیں کہ ہم پہلے 0 سے 99 کوئی صف بلا منصوبہ منتخب کرتے ہیں۔بلا منصوبہ صف منتخب کرنے کی خاطر ہم ایک سکہ کو 7 مرتبہ اچھال کر 7 ثنائی ہندسوں پر مبنی عدد حاصل کرتے ہیں جس میں خط کو 1 اور شیر کو 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یہ ثنائی عدد 0 تا 127 کو ظاہر کر سکتا ہے۔ 99 سے بڑا عدد حاصل ہونے کی صورت میں عدد کو رد کرتے ہوئے سکہ دوبارہ 7 مرتبہ اچھالا جاتا ہے حتیٰ کہ ہمیں 0 تا 99 کوئی عدد حاصل ہو جو صف دے گا۔اس کے بعد اسی طرح ہم بلا منصوبہ 0 تا 9 قطار منتخب کرتے ہیں۔بلا منصوبہ قطار منتخب کرنے کی خاطر سکہ 4 مرتبہ اچھال کر

[126] random selection

4 ثنائی ہندسوں کا عدد حاصل کیا جاتا ہے۔فرض کریں کہ صف کے لئے $(= 26)$ 0011010 اور قطار کے لئے $(= 7)$ 0111 حاصل ہو تب جدول کے 26 ویں صف اور 7 ویں قطار سے 44973 حاصل کرتے ہوئے اس کے پہلے دو ہندسوں پر مبنی عدد 44 لیا جاتا ہے جبکہ باقی ہندسوں کو رد کیا جاتا ہے۔اسی قطر میں نیچے چلتے ہوئے اعداد کے پہلے دو ہندسے لیتے ہوئے درج ذیل اعداد حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$44 \quad 44 \quad 83 \quad 91 \quad 55 \quad \cdots$$

ہم 80 سے بڑے اعداد رد کرتے ہیں اور کسی بھی عدد کو ایک سے زیادہ مرتبہ شامل نہیں کرتے ہیں۔یوں درکار بلا منصوبہ اعداد کا درج ذیل سلسلہ حاصل ہوتا ہے جس کے تحت اجزاء کو منتخب کیا جائے گا۔

$$44 \quad 55 \quad 53 \quad 03 \quad 52 \quad 61 \quad 67 \quad 78 \quad 39 \quad 54$$

زیادہ اجزاء کے نمونہ کے لئے یہ طریقہ کار موزوں نہیں ہے۔ اسی لئے ایسے اعداد جن کی خاصیت بلا منصوبہ اعداد کی طرح ہو، پیدا کرنے کے کئی طریقے بنائے گئے ہیں جنہیں کمپیوٹر کی زبان میں **پیدا کار بلا منصوبہ اعداد**[127] کہتے ہیں۔

سوالات

سوال 24.165: فرض کریں کہ مذکورہ بالا مثال میں ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول کے صف 83 اور قطار 2 سے شروع کرتے ہوئے اوپر رخ چلیں۔تب کون سے اجزاء نمونہ میں شامل کیے جائیں گے؟
جواب: $38, 69, 02, 49, 23, 52, 73, 29, 09, 05$

سوال 24.166: ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول استعمال کرتے ہوئے 250 کی ڈھیر سے 20 اجزاء بلا منصوبہ منتخب کریں۔

سوال 24.167: منصفانہ پانسہ کو بلا منصوبہ انتخاب کے لئے کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے؟

سوال 24.168: ایک بلا منصوبہ متغیر Y پر غور کریں جس کی خطہ $0 < y < 1$ میں کثافت یکساں $f(y) = 1$ جبکہ خطہ سے باہر $f = 0$ ہے۔ہم بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے با آسانی Y (یعنی Y کی قیمتوں)

[127] random number generator

کا **نقل اتار**[128] سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر 2 اعشاریہ تک کے 20 قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کے جدول کے کسی بھی (بلا منصوبہ) قطار اور صف سے شروع کرتے ہوئے نیچے چلتے ہوئے، پانچ ہندسوں پر مشتمل دیے اعداد کے صرف پہلے دو ہندسوں کو لیتے ہوئے ان کے بائیں جانب اعشاریہ پر کرتے ہوئے اعداد حاصل کر سکتے ہیں۔ہم ایک سے زیادہ مرتبہ آنے والے اعداد کو بھی شامل کرتے ہیں۔فرض کریں ہم صف 36 اور قطار 3 سے شروع کرتے ہیں۔دکھائیں کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔ان کا تعددی نقطہ ترسیم کھینچیں۔

0.89	0.40	0.67	0.86	0.87	0.86	0.06	0.20	0.38	0.12
0.68	0.50	0.53	0.10	0.08	0.90	0.19	0.85	0.53	0.98

سوال 24.169: بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے کسی بھی بلا منصوبہ استمراری متغیر X کی نقل اتاری جا سکتی ہے۔ایسا کرنے کی خاطر ہم X کی تفاعل تقسیم کو ترسیم کرتے ہیں۔ سوال 24.168 کی طرز پر بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے متغیر Y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے انہیں y محدد پر ترسیم کریں اور ان کے مطابقتی X قیمتیں پڑھیں۔سوال 24.168 کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے عمومی بلا منصوبہ متغیر X ، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو، کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کریں۔جماعتی نشان -2 ، -1 ، 0 ، 1 اور 2 لیتے ہوئے x کی ان 20 نمونی قیمتوں کا مستطیلی ترسیم کھینچیں۔
جواب: جماعتی تعدد 1 ، 5 ، 7 ، 6 ، 1 ہیں۔

سوال 24.170: سوال 24.169 کا طریقہ کار غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔اگر دو منصفانہ پانسہ پھینک کر حاصل اعداد کا مجموعہ X ہو تب اس طریقہ کو کس طرح استعمال کیا جائے گا؟

24.13 مقدار معلوم کا اندازہ لگانا

تقسیمات میں پائی جانے والے مقدار مثلاً ثنائی تقسیم میں p ، عمومی تقسیم میں μ اور σ ، کو **مقدار معلوم**[129] کہتے ہیں۔

---

[128] simulation
[129] parameters

ایک نقطہ پر مقدار معلوم کی اندازاً قیمت (**نقطی اندازہ**[130]) ایک عدد (حقیقی محور پر نقطہ) ہو گا جس کو دیے گئے نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے جو مقدار معلوم کی اصل قیمت کی تخمین ہو گی۔ **وقفہ اندازہ**[131] (یعنی **وقفہ اعتماد**[132])، جس پر اگلے حصے میں بحث کی جائے گی، کو نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔مقدار معلوم کی قیمت کا اندازہ لگانا ایک اہم مسئلہ ہے۔

آبادی کی اوسط μ کا اندازہ لگانے کی خاطر ہم نمونے کی اوسط $\overline{x}$ لے سکتے ہیں جس سے ہمیں μ کا اندازہ $\widehat{\mu} = \overline{x}$ حاصل ہوتا ہے، یعنی

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{24.110}$$

جہاں نمونہ کی جسامت n ہے۔اسی طرح آبادی کی تغیریت کا اندازہ $\widehat{\sigma^2}$ در حقیقت مطابقتی نمونے کی تغیریت s^2 ہو گی، یعنی:

$$\widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 \tag{24.111}$$

ظاہر ہے کہ مساوات 24.110 اور مساوات 24.111 ان تقسیمات کی مقدار معلوم کی اندازاً قیمت دیتے ہیں جن میں μ اور σ^2 صریحاً پائے جاتے ہیں؛ عمومی تقسیم اور پوئسن تقسیم ایسی تقسیمات ہیں۔ثنائی تقسیم میں $p = \frac{\mu}{n}$ (مساوات 24.60) ہے۔ اس صورت میں اگر j ویں کوشش میں وقوعہ A جس کا احتمال p ہے واقع ہو تب مساوات 24.110 میں $x_j = 1$ ہو گا اور اگر اس کوشش میں A واقع نہ ہو تب $x_j = 0$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 24.110 سے p کا اندازہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\widehat{p} = \frac{\overline{x}}{n} \tag{24.112}$$

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 24.110 **ترکیب معیار اثر**[133] کی ایک مخصوص صورت ہے۔اس ترکیب میں جس مقدار معلوم کی اندازاً قیمت درکار ہو، اس کو تقسیم کی معیار اثر کی صورت میں لکھا جاتا ہے (حصہ 24.8)۔حاصل کلیات میں ان معیار اثر کی جگہ نمونہ سے حاصل مطابقتی معیار اثر پر کرتے ہوئے درکار اندازے حاصل کیے جاتے ہیں۔یہاں نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کا k واں معیار اثر درج ذیل ہے۔

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k$$

---

[130] point estimate
[131] interval estimate
[132] confidence interval
[133] method of moments

اندازے حاصل کرنے کی دوسری ترکیب کو **زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب**[134] کہتے ہیں۔اس ترکیب کو سمجھنے کی خاطر ہم غیر مسلسل (یا استمراری) بلا منصوبہ متغیر X پر غور کرتے ہیں جس کا تفاعل احتمال واحد متغیر θ پر منحصر ہے۔ ہم n غیر تابع قیمتوں $x_1, \cdots, x_n$ کا نمونہ لیتے ہیں۔تب غیر مسلسل صورت میں n جسامت کے نمونہ میں بالکل یہی قیمتیں حاصل ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$l = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \tag{24.113}$$

استمراری صورت میں، چھوٹے چھوٹے وقفوں $x_i \leq x \leq x_i + \Delta x \;(i = 1, 2, \cdots, n)$ میں قیمتیں حاصل کرنے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$f(x_1)\Delta x f(x_2)\Delta x \cdots f(x_n)\Delta x = l(\Delta x)^n \tag{24.114}$$

چونکہ $f(x_i)$ متغیر θ کا تابع ہے لہٰذا تفاعل l متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ اور θ کا تابع ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں $x_1, \cdots, 2.0_n$ دیے گئے ہیں اور یہ مقررہ قیمتیں ہیں۔تب l متغیر θ کا تابع ہو گا جس کو **تفاعل امکان**[135] کہتے ہیں۔ زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب کا بنیادی تصور بہت سادہ ہے۔ہم نا معلوم قیمت θ کے لئے وہ تخمین چنتے ہیں جس سے l کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہو۔اگر تفاعل l متغیر θ کا قابل تفرق تفاعل ہو تب (سرحد سے ہٹ کر) l کی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے درج ذیل لازمی شرط ہے۔

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \tag{24.115}$$

(ہم یہاں جزوی تفرق لکھتے ہیں چونکہ l متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ کا بھی تابع ہے۔) مساوات 24.115 کا حل جو $x_1, \cdots, x_n$ کا تابع ہے θ کے **زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ** کہلاتا ہے۔چونکہ $f(x) \geq 0$ اور $f(x)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت عموماً مثبت ہوتی ہے اور $\ln l$ یک سر بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا مساوات 24.115 کی جگہ درج ذیل بھی استعمال کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0 \tag{24.116}$$

جس سے عموماً حساب میں آسانی پیدا ہوتی ہے۔

اگر X کی تقسیم میں r مقدار معلوم $\theta_1, \cdots, \theta_r$ پائے جاتے ہوں تب مساوات 24.115 کی جگہ r لازمی شرائط $\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0, \cdots, \frac{\partial l}{\partial \theta_r} = 0$ ہوں گے اور مساوات 24.116 کی جگہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0 \tag{24.117}$$

---

[134] maximum likelihood method
[135] likelihood function

مثال 24.17: **عمومی تقسیم**

عمومی تقسیم کی صورت میں μ اور σ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

حل: مساوات 24.68 اور مساوات 24.113 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$l=\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)^n\Big(\frac{1}{\sigma}\Big)^n e^{-h}\qquad h=\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

دونوں ہاتھ لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$\ln l=-n\ln\sqrt{2\pi}-n\ln\sigma-h$$

مساوات 24.117 میں پہلی شرط $\frac{\partial\ln l}{\partial\mu}=0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial\ln l}{\partial\mu}=-\frac{\partial h}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\qquad\implies\qquad\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu=0$$

جس کا حل μ کا درکار اندازہ $\widehat{\mu}$ ہے، یعنی:

$$\widehat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$

مساوات 24.117 میں دوسری شرط $\frac{\partial\ln l}{\partial\sigma}=0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial\ln l}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}-\frac{\partial h}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

μ کی جگہ $\widehat{\mu}$ پر کرتے ہوئے σ^2 کے لئے حل کر کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\widetilde{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\overline{x})^2$$

دھیان رہے کہ یہ نتیجہ مساوات 24.111 سے مختلف ہے۔ہم اندازوں کی عمدگی کی قواعد پر بحث نہیں کر سکتے ہیں لیکن اتنا جاننا ضروری ہے کہ چھوٹی n کے لئے مساوات 24.111 بہتر نتائج دیتی ہے۔ □

سوالات

سوال 24.171: $x \geq 0$ کے لئے کثافت $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ اور $x < 0$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ θ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{\theta} = \frac{n}{\sum x_j} = \frac{1}{\bar{x}}$

سوال 24.172: سوال 24.171 میں اوسط μ تلاش کر کے $f(x)$ میں پر کریں۔ μ کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ وہی ہے جو سوال 24.171 کے θ کے اندازے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.173: معلوم تغیریت $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کی عمومی تقسیم کے μ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{\mu} = \overline{x}$

سوال 24.174: $\mu = 0$ کی صورت میں عمومی تقسیم پر زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازے کی ترکیب لاگو کریں۔

سوال 24.175: (پوئسن تقسیم) زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازہ کی ترکیب کا اطلاق تقسیم پوئسن پر کریں۔
جواب: $\widehat{\mu} = \overline{x}$

سوال 24.176: (یکساں تقسیم) حصہ 24.8 میں دیے گئے یکساں تقسیم کی صورت میں دکھائیں کہ مقدار معلوم a اور b کو زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے پہلی جزوی تفرق کو صفر کے برابر پر نہیں کیا جا سکتا ہے۔اس صورت میں زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کس طرح لگایا جا سکتا ہے؟

سوال 24.177: (ثنائی تقسیم) p کے لئے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: n کوششوں میں کامیابی کی تعداد $l = p^k(1-p)^{n-k}, \widehat{p} = \frac{k}{n}, k =$

سوال 24.178: وقوعہ A واقع ہونے تک کوششوں کی تعداد X ہے۔دکھائیں کہ X کا تفاعل احتمال $f(x) = pq^{x-1}, x = 1, 2, \cdots$ ہے جہاں واحد کوشش میں A واقع ہونے کا احتمال p ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ X کی واحد قیمت x کے مشاہدے میں p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

سوال 24.179: سوال 24.178 میں نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$

سوال 24.180: سوال 24.177 کو وسعت دیتے ہیں۔فرض کریں کہ n کوششوں کو m مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔پہلی n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_1 ہے، دوسری n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_2 ہے، $\cdots$، m ویں n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_m ہے۔ان معلومات سے p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

24.14 وقفہ اعتماد

گزشتہ حصہ میں مقدار معلوم کی نقطی اندازہ پر غور کیا گیا۔اب ہم **وقفی اندازہ**[136] پر غور کریں گے۔

حسابی تخمینی کلیات استعمال کرتے ہوئے ضروری ہے کہ ہم جاننے کی کوشش کریں کہ تخمینی قیمت اور اصل درست قیمت میں کتنا فرق ہے۔مثال کے طور پر اعدادی تکملی تراکیب میں زیادہ سے زیادہ خلل کے کلیات پائے جاتے ہیں جس سے ہم جان سکتے ہیں کہ تخمینی قیمت اور اصل قیمت میں کتنا فرق پایا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ ہم کسی تکمل کا اعدادی تخمینی قیمت 2.47 اور اصل قیمت سے زیادہ سے زیادہ ممکنہ خلل ∓ 0.02 حاصل کریں۔تب ہم پوری یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تکمل کی اصل قیمت $2.47 - 0.02 = 2.45$ تا $2.47 + 0.02 = 2.49$ قیمتوں میں شامل ہے، یعنی اصل قیمت $2.47 - 0.02 = 2.45$ یا اس سے زیادہ اور $2.47 + 0.02 = 2.49$ یا اس سے کم ہو گی۔

مقدار معلوم θ کا اندازہ لگاتے ہوئے ہم نمونی قیمتوں پر منحصر ایسے دو مقدار جاننا چاہیں گے جن میں یقینی طور پر اصل قیمت شامل ہو۔البتہ ہم جانتے ہیں کہ نمونی قیمتوں سے 100 % درست نتائج حاصل کرنا ممکن نہیں ہے۔یوں حقیقت پسندی سے کام لیتے ہوئے ہم اس مسئلے کو درج ذیل بیان کرتے ہیں۔

---

[136] interval estimate

احتمال γ کی قیمت کو 1 کے قریب منتخب کریں (مثلاً، $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ)۔ اس کے بعد ایسے دو مقدار Θ_1 اور Θ_2 منتخب کریں جن میں مقدار معلوم θ کی اصل قیمت کے شامل ہونے کا احتمال γ ہو۔

ہم سو فی صد یقین کے ساتھ جاننے کی "نا ممکن شرط" کی بجائے تقریباً 1 احتمال کی "ممکن شرط" پیش کرتے ہیں۔

دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے ان دو مقداروں کی قیمتوں کا حساب لگایا جائے گا۔ ان n قیمتوں کو مشاہدے سے حاصل n بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ کی قیمتیں تصور کریں۔ تب Θ_1 اور Θ_2 ان بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل ہوں گے اور یوں خود بھی بلا منصوبہ متغیرات ہوں گے۔ اس طرح ہماری شرط درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$P(\Theta_1 \leq \theta \leq \Theta_2) = \gamma$$

اگر ہمیں تفاعل Θ_1 اور Θ_2 معلوم ہوں، تب دیے گئے نمونہ سے ہم Θ_1 کی اعدادی قیمت θ_1 اور Θ_2 کی اعدادی قیمت θ_2 کا حساب لگا سکتے ہیں۔ وہ وقفہ جس کے سر θ_1 اور θ_2 ہوں، نا معلوم مقدار معلوم θ کا **وقفہ اعتماد**[137] یا **وقفی اندازہ**[138] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\text{اعتماد}\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

θ_1 کو θ کی **نچلی حد اعتماد**[139] اور θ_2 کو اس کی **بالائی حد اعتماد**[140] کہتے ہیں۔ عدد γ کو **سطح اعتماد**[141] کہتے ہیں۔ ہم عموماً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ اور کبھی کبھار $\gamma = 99.9\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک نمونہ حاصل کر کے مطابقتی وقفہ اعتماد تعین کرنا چاہیں، تب مقدار معلوم کی اصل قیمت شامل کرنے والے وقفہ کے حصول کا احتمال γ ہو گا۔

مثال کے طور پر اگر ہم $\gamma = 95\,\%$ منتخب کریں، تب ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $95\,\%$ نمونے جو ہم حاصل کریں ایسے اعتمادی وقفے دیں گے جن میں θ کی قیمت شامل ہو گی اور باقی $5\,\%$ میں ایسا نہیں ہو گا۔ یوں 20 میں سے تقریباً 19 صورتوں میں یہ فقرہ کہ "اعتمادی وقفہ میں θ شامل ہے" درست ہو گا جبکہ باقی صورتوں میں یہ فقرہ غلط ہو گا۔

[137] confidence interval
[138] interval estimate
[139] lower confidence limit
[140] upper confidence limit
[141] confidence level

جدول 24.8: معلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کے اوسط μ کے وقفہ اعتماد کا تعین

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔
دوسرا قدم: مطابقتی c تلاش کریں۔

γ	0.90	0.95	0.99	0.999
c	1.645	1.960	2.576	3.291

تیسرا قدم: نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے اوسط $\overline{x}$ حاصل کریں۔
چوتھا قدم: $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ μ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{\overline{x} - k \le \mu \le \overline{x} + k\} \tag{24.118}$$

$\gamma = 95\,\%$ کی بجائے $\gamma = 99\,\%$ منتخب کرنے سے ہم توقع کریں گے کہ 100 میں سے 99 صورتوں میں یہ فقرہ درست ہو گا۔البتہ ہم دیکھیں گے کہ $\gamma = 99\,\%$ کے مطابقتی وقفے $\gamma = 95\,\%$ کے مطابقتی وقفوں سے لمبے ہوں گے۔ γ بڑھانے کا یہ ایک نقصان ہے۔

کسی حقیقی صورت میں γ کی کیا قیمت منتخب کرنی چاہیے؟ یہ محض حسابی دلچسپی کی بات نہیں ہے بلکہ عملی استعمال میں، غلط قیمت منتخب کرنے کی صورت میں نقصان کو مد نظر رکھتے ہوئے، اس کا جواب ہمیں ہر صورت دینا ہو گا۔

صاف ظاہر ہے کہ موجودہ ترکیب اور آنے والے دیگر تراکیب میں غیر یقینی صورت حال کی وجہ نمونہ بندی کا طریقہ کار ہے۔یوں ماہر شماریات کو اپنی غلطیوں کے بارے میں جواب دینے کے لئے تیار ہونا چاہیے۔تاہم کسی بھی روزگار میں ایسا ہی ہو گا مثلاً قاضی اور ساہو کار بھی امکان کے قواعد سے نہیں بچ پاتے۔ ماہر شماریات غلطی کرنے کا احتمال تو جانتا ہے جبکہ قاضی اور ساہو کار کو یہ سہولت میسر نہیں ہے۔

اعتمادی وقفے برائے عمومی تقسیم کے μ اور σ^2

ہم اب عمومی تقسیم کی اوسط μ (جدول 24.8، جدول 24.9) اور تغیریت σ^2 (جدول 24.10) کے اعتمادی وقفے حاصل کرنا سیکھتے ہیں جس کا مطابقتی نظریہ اس حصے کے آخر میں پیش کیا جائے گا۔

مثال 24.18: معلوم تغیریت کی صورت میں عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد
$n = 100$ کا نمونہ جس کی اوسط $\bar{x} = 5$ ہو استعمال کرتے ہوئے تغیریت $\sigma^2 = 9$ والی عمومی تقسیم کے لئے $95\,\%$ وقفہ اعتماد تعین کریں۔
حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔
دوسرا قدم: اس کا مطابقتی $c = 1.960$ ہے۔
تیسرا قدم: $\bar{x} = 5$ دیا گیا ہے۔
چوتھا قدم: ہمیں $k = \frac{1.960 \cdot 3}{\sqrt{100}} = 0.588$ درکار ہے لہٰذا $\bar{x} - k = 4.412$ ، $\bar{x} + k = 5.588$ ہو گا جن سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{4.412 \le \mu \le 5.588\}$$

□

مثال 24.19: مخصوص لمبائی کا اعتمادی وقفہ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت
گزشتہ مثال میں $95\,\%$ اعتمادی وقفہ جس کی لمبائی $L = 0.4$ ہو حاصل کرنے کے لئے n کتنا ہو گا؟
حل: وقفے کی لمبائی مساوات 24.118 کے تحت $L = 2k = \frac{2c\sigma}{\sqrt{n}}$ ہے جس کو n کے لئے حل کرتے ہوئے

$$n = \left(\frac{2c\sigma}{L}\right)^2$$

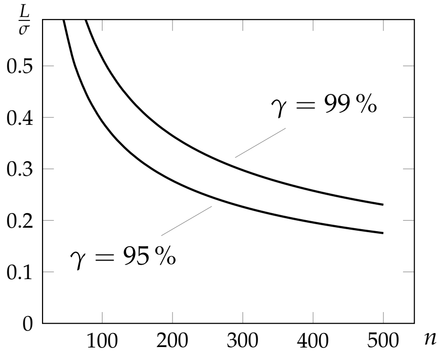
حاصل ہوتا ہے۔یہاں $n = (\frac{2 \cdot 1.960 \cdot 3}{0.4})^2 \approx 870$ ہے۔

شکل 24.18 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ اعتماد کی لمبائی L جتنی کم ہو، نمونے کی جسامت n اتنی زیادہ منتخب کرنی ہو گی۔ □

نا معلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد تعین کرنا جدول 24.9 میں دکھایا گیا ہے۔یہ تقریباً جدول 24.8 کی طرح ہے ماسوائے k کی قیمتوں کے۔مزید c کی قیمت n پر منحصر ہے اور اس اس کو ضمیمہ ج میں t تقسیم کے تفاعل کی جدول 6.ج سے حاصل کرنا لازمی ہے جہاں t تقسیم[142] کے تفاعل

$$F(z) = K_m \int_{-\infty}^{z} \left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} \mathrm{d}u$$

[142] t تقسیم کو انگلستانی ماہر شماریات ولیم سیلی گوسٹ [1876-1937] نے دریافت کیا۔



شکل 24.18: وقفہ اعتماد کی لمبائی بالمقابل نمونی جسامت n

جدول 24.9: نامعلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کے اوسط μ کے وقفہ اعتماد کا تعین

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔
دوسرا قدم: درج ذیل مساوات کا حل c،

$$F(c) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.119}$$

$n-1$ درجہ آزادی کے t تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول 6.ج میں نمونی جسامت n لیتے ہوئے) سے حاصل کریں۔
تیسرا قدم: نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے اوسط $\overline{x}$ اور تغیریت s^2 حاصل کریں۔
چوتھا قدم: $k = \frac{sc}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ μ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{\overline{x} - k \le \mu \le \overline{x} + k\} \tag{24.120}$$

کی قیمتوں کے مطابقتی z قیمتیں دی گئی ہیں۔ یہاں $K_m = \Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2})/[\sqrt{m\pi}\Gamma(\frac{1}{2}m)]$ ایک مستقل ہے اور $\Gamma(\alpha)$ گیما تفاعل (ضمیمہ ب مساوات 22.ب) ہے۔ $m\ (1, 2, \cdots)$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی **درجہ آزادی کی تعداد**[143] کہتے ہیں۔

مثال 24.20: نا معلوم تغیریت والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد

جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے لئے اوسط μ کا $99\,\%$ وقفہ اعتماد تعین کریں۔ فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے۔ (اس مفروضے کا جواز بعد میں دیا جائے گا۔)
حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.99$ درکار ہے۔

[143] number of degrees of freedom

دوسرا قدم: چونکہ $n = 100$ ہے لہٰذا $c = 2.63$ حاصل ہوتا ہے۔
تیسرا قدم: حساب سے $\bar{x} = 364.70$ اور $s = \sqrt{720.1} = 26.83$ ملتے ہیں۔
چوتھا قدم: ہم $k = \frac{26.83 \cdot 2.63}{10} = 7.06$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{357.64 \le \mu \le 371.76\}$$

موازنے کی خاطر فرض کریں کہ ہمیں $\sigma = 26.83$ معلوم ہے۔تب جدول 24.8 سے $k = \frac{2.576 \cdot 26.83}{\sqrt{100}} = 6.91$ حاصل ہوتا جس کے تحت $\{357.79 \le \mu \le 371.61\}$ اعتماد حاصل ہوتا ہے۔دونوں نتائج میں معمولی فرق پایا جاتا ہے۔بڑی n کی صورت میں نتائج میں فرق بہت کم ہوتا ہے لیکن کم n کی صورت میں دونوں نتائج میں واضح فرق پایا جائے گا۔ □

جدول 24.10 میں عمومی تقسیم کی تغیریت کا وقفہ اعتماد تعین کرنے کے قدم دیے گئے ہیں۔ جو جدول 24.8 اور جدول 24.9 کی طرح ہیں، پس، یہاں دو مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرنے ہوں گے۔دونوں مستقل کو ضمیمہ ج میں جدول 7.ج سے حاصل کیا جاتا ہے جس میں تفاعل تقسیم

$$F(z) = \begin{cases} C_m \int_0^z e^{-u^2/2}\, u^{(m-2)/2}\, \mathrm{d}u & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

کی قیمتوں کے لئے z کے مطابقتی قیمتیں دی گئی ہیں۔اس تقسیم کو χ^2 تقسیم (مربع خا تقسیم) کہتے ہیں۔یہاں $C_m = \frac{1}{[2^{m/2}\Gamma(m/2)]}$ اور $m = 1, 2, \cdots$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی درجہ آزادی کی تعداد کہتے ہیں۔

مثال 24.21: عمومی تقسیم کے تغیریت کا وقفہ اعتماد
جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے تغیریت کا وقفہ اعتماد تلاش کریں۔
حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔
دوسرا قدم: چونکہ $n = 100$ ہے لہٰذا ہم $c_1 = 73.4$ اور $c_2 = 128$ حاصل کرتے ہیں۔
تیسرا قدم: جدول 24.2 سے $99s^2 = 71291$ حاصل ہوتا ہے۔
چوتھا قدم: وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{556 \le \sigma^2 \le 972\}$$

□

جدول 24.10: عمومی تقسیم کی تغیریت σ^2 کے وقفہ اعتماد کا تعین جہاں اوسط جاننا ضروری نہیں ہے

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ ، وغیرہ۔
دوسرا قدم: درج ذیل مساوات کے حل c_1 اور c_2

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.121}$$

کو مربع خا تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول 7.ج، جسامت نمونہ $n =$) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کریں۔ **تیسرا قدم:** نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کی تغیریت s^2 سے $(n-1)s^2$ حاصل کریں۔
چوتھا قدم: $k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_1}$ اور $k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_2}$ کا حساب لگائیں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{k_2 \le \sigma^2 \le k_1\} \tag{24.122}$$

دیگر تقسیمات

کافی بڑے نمونے لیتے ہوئے دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد گزشتہ تراکیب سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ عملاً، اگر نا معلوم تقسیم کا ترچھاپن کم ہو تب μ کا وقفہ اعتماد حاصل کرنے کے لئے نمونی جسامت کم سے کم $n = 20$ لینی چاہیے اور σ^2 کا وقفہ اعتماد کے لئے کم سے کم $n = 50$ لینا چاہیے۔ اس کی تفصیل اس حصے کے آخر میں پیش کی جائے گی۔

جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 میں دیے گئے تراکیب کا نظریہ

ہم اب درج ذیل سادہ تصور استعمال کرتے ہوئے اس نظریہ پر غور کرتے ہیں جو وقفہ اعتماد حاصل کرنے کی ان تراکیب کو ممکن بناتی ہے۔

اب تک ہم نمونی قیمتوں $x_1, \cdots, x_n$ کو واحد بلا منصوبہ متغیر X کی مشاہدے سے حاصل n قیمتیں تصور کرتے رہے ہیں۔ ہم ان n قیمتوں کو n بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ ، جن کی تقسیم ایک جیسی ہے (جو X کی تقسیم ہے)، کی ایک مشاہدے کی قیمتیں بھی تصور کر سکتے ہیں جنہیں غیر تابع اس لئے تصور کیا جا سکتا ہے کہ نمونی قیمتیں کو غیر تابع تصور کیا گیا ہے۔

جدول 24.8 میں مساوات 24.118 اخذ کرنے کے لئے درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.19: **(بلا منصوبہ عمومی متغیرات کا مجموعہ)**
فرض کریں کہ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ بلا منصوبہ غیر تابع عمومی متغیرات ہیں جن کے اوسط بالترتیب $\mu_1, \cdots, \mu_n$ اور تغیریت بالترتیب $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2$ ہیں۔ تب بلا منصوبہ متغیر

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$

ہو گی۔ μ اور σ^2 کے فقرے مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18 دیتے ہیں جبکہ X عمومی ہونے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

اس مسئلے سے اور مسئلہ 24.14 اور مسئلہ 24.13 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.20: اگر $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن میں سے ہر ایک کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو، تب بلا منصوبہ متغیر

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \tag{24.123}$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط μ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n}$ ہو گی، اور بلا منصوبہ متغیر

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \tag{24.124}$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی۔

آئیں مساوات 24.118 اخذ کرتے ہیں۔اس حصے کی شروع میں ہم نے چاہا کہ ہم ایسے دو بلا منصوبہ متغیرات Θ_1 اور Θ_2 حاصل کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

$$P(\Theta_1 \le \mu \le \Theta_2) = \gamma \tag{24.125}$$

جہاں γ منتخب کردہ ہے، اور نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ Θ_1 کی قیمت θ_1 اور Θ_2 کی قیمت θ_2 حاصل کرتے ہوئے درج ذیل وقفہ اعتماد حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\text{اعتماد}\{\theta_1 \le \mu \le \theta_2\}$$

موجودہ صورت میں ایسا کرنے کی خاطر ہم γ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہیں اور ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے ایسا c حاصل کرتے ہیں جو $P(-c \le Z \le z) = \gamma$ کو مطمئن کرتا ہو۔ (جدول 24.8 میں γ کی مختلف قیمتوں کے لئے c کی قیمتیں اسی طرح حاصل کی گئی ہیں۔) مساوات 24.123 میں دیا گیا Z استعمال کرتے ہوئے عدم مساوات $-c \le Z \le c$ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$-c \le \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \le c$$

جس کو μ کی عدم مساوات میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔اس کو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ سے ضرب کر $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ لکھتے ہوئے $-k \le \overline{X} - \mu \le k$ ملتا ہے۔اس کو -1 سے ضرب دے کر $\overline{X}$ جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\overline{X} + k \ge \mu \ge \overline{X} - k \tag{24.126}$$

یوں $P(-c \le Z \le c) = \gamma$ سے مراد $P(\overline{X} - k \le \mu \le \overline{X} + k) = \gamma$ ہے جو مساوات 24.125 کی طرز کا ہے جہاں $\Theta_1 = \overline{X} - k$ اور $\Theta_2 = \overline{X} + k$ ہوں گے۔یوں ہمارے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیرات $\overline{X} - k$ اور $\overline{X} + k$ وہ قیمتیں اختیار کریں گے جن میں نا معلوم اوسط μ شامل ہو گا۔ جہاں تک n غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ کی مشاہدہ سے حاصل، جدول 24.8 میں دی گئی، نمونی قیمتیں $x_1, \cdots, x_n$ ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ نمونی اوسط $\bar{x}$ مساوات 24.123 کی مشاہدہ سے حاصل قیمت ہے جس کو مساوات 24.126 میں پر کرتے ہوئے مساوات 24.118 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 24.120 اخذ کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.21: فرض کریں کہ $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن میں ہر ایک کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔تب بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \tag{24.127}$$

کی تقسیم $n-1$ درجہ آزادی کی t تقسیم (صفحہ 1625) ہو گی؛ یہاں $\overline{X}$ کو مساوات 24.123 اور

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}\right)^2 \tag{24.128}$$

دیتے ہیں۔ اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 24.120 کا ثبوت مساوات 24.118 کی ثبوت کی طرح کا ہے۔ہم γ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہوئے ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے $n-1$ درجہ آزادی کا ایسا c حاصل کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$P(-c \le T \le c) = F(c) - F(-c) = \gamma \tag{24.129}$$

چونکہ t تقسیم تشاکلی ہے لہٰذا $F(-c) = 1 - F(c)$ ہو گا اور یوں مساوات 24.129 سے مساوات 24.119 حاصل ہو گا۔مساوات 24.129 میں پہلے کی طرح $-c \le T \le c$ کے تبادلہ سے

$$\overline{X} - K \le \mu \le \overline{X} + K \qquad K = \frac{cS}{\sqrt{n}} \tag{24.130}$$

حاصل ہو گا اور یوں مساوات 24.129 سے $P(\overline{X} - K \le \mu \le \overline{X} + K) = \gamma$ حاصل ہو گا۔مساوات 24.130 میں مشاہدے سے حاصل $\overline{X}$ کی قیمت $\overline{x}$ اور S^2 کی قیمت s^2 پر کرتے ہوئے مساوات 24.120 حاصل ہو گا۔

مساوات 24.122 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل کی ضرورت ہو گی۔

مسئلہ 24.22: مسئلہ 24.21 کے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$Y = (n-1)\,\frac{S^2}{\sigma^2} \tag{24.131}$$

کا تقسیم $n-1$ درجہ آزادی کا مربع خا تقسیم (صفحہ 1627) ہو گا؛ یہاں S^2 کو مساوات 24.128 میں پیش کیا گیا ہے۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 24.122 کا ثبوت مساوات 24.118 اور مساوات 24.120 کی ثبوتوں کی طرح ہے۔ہم 0 اور 1 کے بیچ عدد γ منتخب کرتے ہیں۔ضمیمہ ج میں جدول سے ایسے c_1 اور c_2 کی حاصل کریں جو درج ذیل (مساوات 24.121) کو مطمئن کرتے ہوں۔

$$P(Y \leq c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad P(Y \leq c_2) = F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma)$$

تفریق سے

$$P(c_1 \leq Y \leq c_2) = P(Y \leq c_2) - P(Y \leq c_1) = \gamma$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 24.131 میں دیے Y سے $c_1 \leq Y \leq c_2$ کے تبادلہ سے σ^2 کی عدم مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم

$$\frac{n-1}{c_2}S^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{n-1}{c_1}S^2$$

حاصل کرتے ہیں۔مشاہدے سے حاصل S^2 کی قیمت s^2 کرتے ہوئے مساوات 24.122 حاصل ہو گا۔

دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد

دیگر تقسیمات کے لئے بھی ہم وقفہ اعتماد کو جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 سے حاصل کر سکتے ہیں، پس نمونوں کی جسامت بڑی رکھنی ہو گی۔یہ درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 24.23: (مسئلہ وسطی حد)
فرض کریں کہ $X_1, \cdots, X_m, \cdots$ غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن کی تقسیم ایک جیسی ہے لہٰذا ان کی اوسط μ ایک جیسی ہو گی اور ان کی تغیریت σ^2 ایک جیسی ہو گی۔فرض کریں کہ $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ ہے تب بلا منصوبہ متغیر

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \tag{24.132}$$

متقاربی عمومی[144] ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی، یعنی، Z_n کا تفاعل تقسیم $F_n(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

---

[144] asymptotically normal

جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی ایک جیسی اوسط μ اور ایک جیسی تغیریت σ^2 ہو، تب ان کے مجموعہ $X = X_1 + \cdots + X_n$ کے درج ذیل خواص ہوں گے۔

- (الف) X کی اوسط $n\mu$ اور تغیریت $n\sigma^2$ ہو گی (مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18)۔
- (ب) اگر یہ متغیرات عمومی ہوں تب X بھی عمومی ہو گا (مسئلہ 24.19)۔

اگر یہ متغیرات عمومی نہ ہوں تب مذکورہ بالا شق-ب درست نہیں ہو گا، البتہ بڑی n کی صورت میں X تخمیناً عمومی (مسئلہ 24.23) ہو گا اور یہی وجہ ہے کہ n کی قیمت بڑی لیتے ہوئے ان تراکیب کو دیگر تقسیمات کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 24.181: عمومی صورتوں میں نقطی اندازہ سے وقفی اندازہ کیوں زیادہ کار آمد ہوتے ہیں؟

سوال 24.182: 100 جسامت کا نمونہ جس کی اوسط 38.25 ہو استعمال کرتے ہوئے عمومی آبادی جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے کی اوسط μ کے لئے 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.183: نمونی جسامت کو گھٹا کر 25 کرنے سے سوال 24.182 میں وقفہ اعتماد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: وقفہ اعتماد دگنا ہو جائے گا۔

سوال 24.184: نمونہ $28, 24, 31, 27, 22$ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف $\sigma = 2.2$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقفی اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.185: اوسط 16.30 اور جسامت 290 والا نمونہ استعمال کرتے ہوئے شکل 24.18 کی مدد سے تغیریت $\sigma^2 = 0.36$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقفی اعتماد تعین کریں۔
جواب: اعتماد$\{16.21 \le \mu \le 16.39\}$

سوال 24.186: مساوات 24.118 میں 95% وقفہ اعتماد کی لمبائی (الف) 2σ (ب) σ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت n تلاش کریں۔

سوال 24.187 تا سوال 24.191 میں فرض کریں کہ دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے حاصل کیا گیا ہے۔آبادی کی اوسط μ کے لئے 99% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.187: 325, 320, 325, 335
جواب: $\{307 \leq \mu \leq 345\}$اعتماد

سوال 24.188: 20 قابلوں کا نمونہ جس کی اوسط $10.20\,\mathrm{cm}$ اور تغیریت $\sigma^2 = 0.04\,\mathrm{cm}^2$ ہو۔

سوال 24.189: سلاخ کی ملی میٹروں میں لمبائی 124, 127, 126, 122, 124
جواب: $\{120.6 \leq \mu \leq 128.6\}$اعتماد

سوال 24.190: پشاور تا لاہور موٹروے پر بلا منصوبہ 500 گاڑیوں کو روک کر ان کے بریک پرکھے جاتے ہیں جن میں سے 87 گاڑیوں کے بریک کمزور ثابت ہوتے ہیں۔اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے موٹروے پر کمزور بریک والی گاڑیوں کی فی صد کے لئے 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.191: ثنائی تقسیم کی مقدار معلوم p کے لئے 99% وقفہ اعتماد تعین کریں۔صفحہ 1554 پر جدول 24.6 کی آخری صف میں مشرف کے نتائج استعمال کریں۔
جواب: $\{0.492 \leq p \leq 0.509\}$اعتماد

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

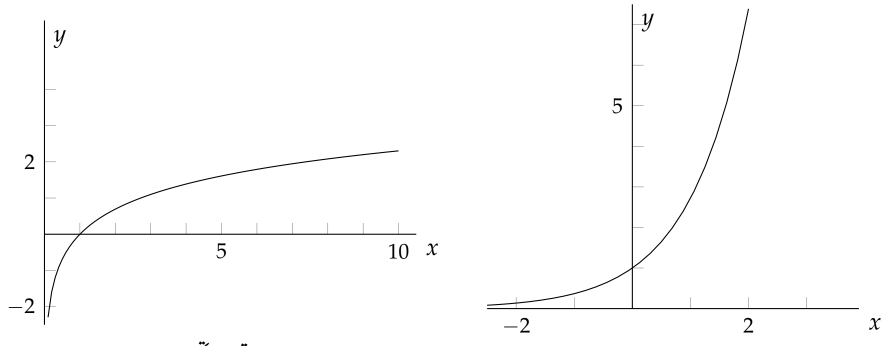
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

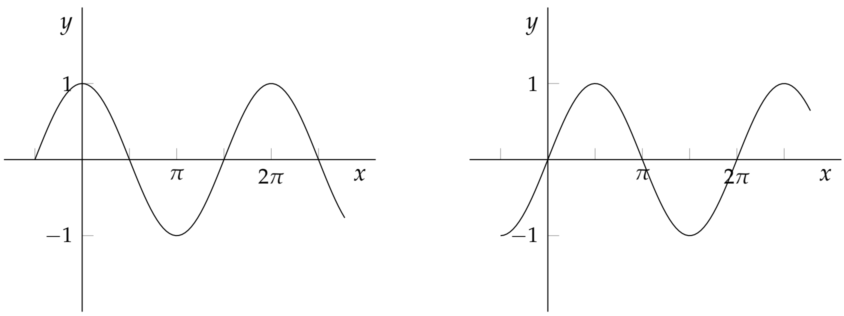
$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x (ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$ (ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

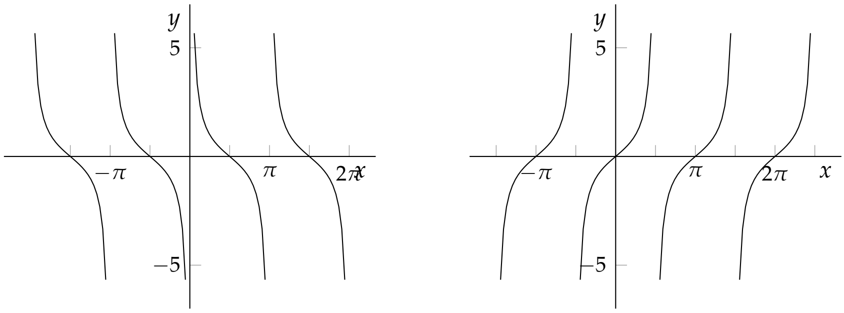
(ب.13)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



(ب) $\cot x$ (الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

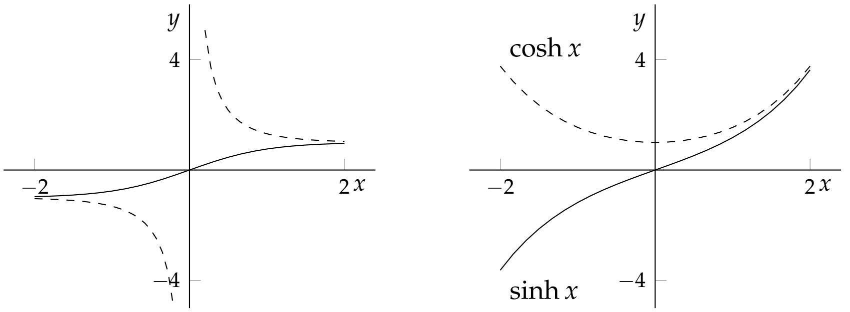
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{gathered}\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{gathered} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{ب.24}$$

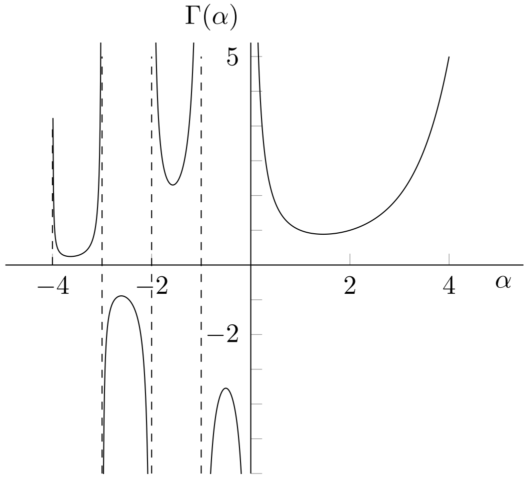
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

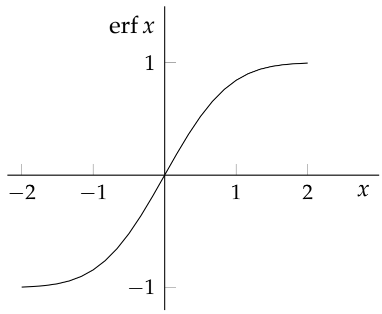
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

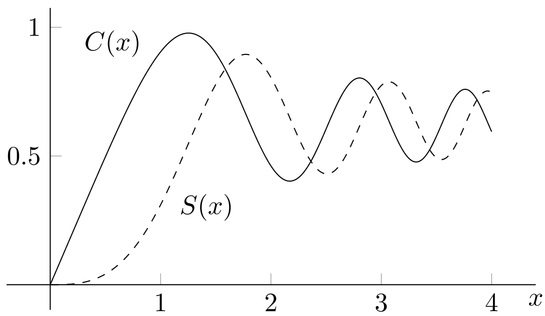
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

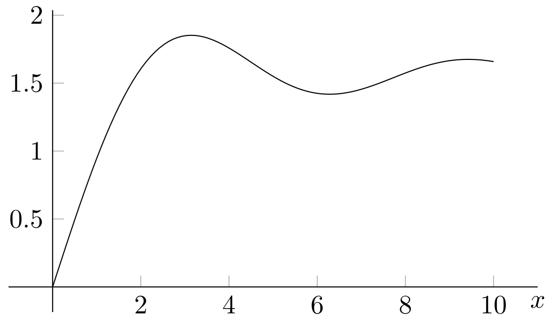
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1]complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{ci}(x)=\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

ضمیمہ ج

جدول

جدول 1.ج: ثنائی تقسیم

جدول 2.ج: پوئسن تقسیم

جدول 3.ج: عمومی تقسیم

جدول 4.ج: عمومی تقسیم

جدول 5.ج: شبلا منصوبہ اعداد

جدول 6.ج: t تقسیم

جدول 7.ج: مربع خا تقسیم