

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کشی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
70	1.6 عمودی خطوط کی تسلیں
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکسانیت
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
113	2.3 تفرقی عامل
117	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
132	2.5 پولر کوئی مساوات
141	2.6 حل کی وجودیت اور یکسانی؛ ورنسکی
150	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
162	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک
168	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک
172	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی
183	2.10 متعین متغیرات بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
191	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات
191	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
203	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

212	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
215	3.4	متعین متغیرات بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
223	4	نظام تفرقی مساوات
224	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
173	۱	اضافی ثبوت

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 4

نظام تفرقی مساوات

گزشتہ باب میں آپ نے بلند درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔ اس باب میں سادہ تفرقی مساوات حل کرنے کا نیا طریقہ دکھایا جائے گا جس میں n درجی سادہ تفرقی مساوات سے n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جائے گا۔ اس نظام کو حل کرنا بھی سکھایا جائے گا۔ تفرقی مساوات کے نظام کو قالب اور سمتیہ کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے لہذا حصہ 4.1 میں قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق پر غور کیا جائے گا۔

اسی باب میں تفرقی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بجائے تمام مساوات کی مجموعی طرز عمل پر غور کیا جائے گا جس سے نظام کے حل کی توازن¹ کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہے۔ انجینئری میں متوازن نظام اہمیت رکھتے ہیں۔ متوازن نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی، بعد کے لمحات پر معمولی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔ اس ترکیب سے مساوات کا اصل حل دریافت نہیں ہوتا لہذا اس کو کیفی ترکیب² کہتے ہیں۔ جس ترکیب سے نظام کا اصل حل حاصل ہوتا ہو اس کو مقداری ترکیب³ کہتے ہیں۔

stability¹
qualitative method²
quantitative method³

4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق

تفرقی مساوات کے نظام پر غور کے دوران قالب اور سمتیات استعمال کئے جائیں گے۔

دو عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام

$$(4.1) \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

میں دو عدد نا معلوم تفاعل $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ پائے جاتے ہیں۔ ان مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل $g_1(t)$ اور $g_2(t)$ بھی موجود ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر مبنی نظام

$$(4.2) \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

میں $y_1(t)$ تا $y_n(t)$ نا معلوم تفاعل پائے جائیں گے۔ درج بالا ہر مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل بھی پائے جاسکتے ہیں۔

تکنیکی اصطلاحات

قالب۔ نظام 4.1 کے عددی سر (جو مستقل یا متغیرات ممکن ہیں) کو 2×2 قالب A^4 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$(4.3) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

اسی طرح نظام 4.2 کے عددی سر کو $n \times n$ قالب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.4) \quad \mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قالب میں درج a_{11} ، a_{12} ، a_{21} وغیرہ کو اندراجات⁵ کہتے ہیں۔ افقی لکیروں کو صف⁶ جبکہ عمودی لکیروں کو قطار⁷ کہتے ہیں۔ قالب 4.3 میں پہلا صف $[a_{11} \ a_{12}]$ جبکہ دوسرا صف $[a_{21} \ a_{22}]$ ہے۔ اسی طرح پہلا قطار درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

اندراجات کی علامتی اظہار میں دوگنا زیر نوشت کا پہلا عدد صف کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دوسرا عدد قطار کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں a_{21} دوسری صف اور پہلی قطار کا اندراج ہے۔ اسی طرح قالب 4.3 کا مرکزی وتر⁸ a_{11} اور a_{22} پر مبنی ہے جبکہ قالب 4.4 کا مرکزی وتر a_{11} ، a_{22} ، \dots ، a_{nn} پر مبنی ہے۔ ہمیں یہاں صرف مربع قالب⁹ درکار ہوں گے۔ مربع قالب سے مراد ایسی قالب ہے جس میں صفوں کی تعداد قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ قالب 4.3 اور قالب 4.4 مربع قالب ہیں۔

سمتیہ۔ ایک قطار اور n اندراج کا سمتیہ قطار¹⁰ درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اسی طرح ایک صف اور n اندراج کا سمتیہ صف¹¹ درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \cdots \ v_n]$$

entry⁵

row⁶

column⁷

main diagonal⁸

square matrix⁹

column vector¹⁰

row vector¹¹

قالب اور سمتیات کے ساتھ حساب

برابری مساوات۔ دو عدد $n \times n$ قالب صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے تمام نظیری اندراجات برابر ہوں۔ ظاہر ہے کہ دو قالب کی برابری کے لئے لازم ہے کہ ان میں صفوں کی تعداد یکساں ہو اور ان میں قطاروں کی تعداد یکساں ہو۔ یوں $n = 2$ کی صورت میں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

صرف اور صرف اس صورت برابر $(A = B)$ ہوں گے جب

$$a_{11} = b_{11}, \quad a_{12} = b_{12}$$

$$a_{21} = b_{21}, \quad a_{22} = b_{22}$$

ہوں۔ دو عدد سمتیہ صف (یا دو عدد سمتیہ قطار) صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب دونوں میں اندراجات کی تعداد n برابر ہو اور ان کے تمام نظیری اندراجات برابر ہوں۔ یوں

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

کی صورت میں $v = x$ صرف اور صرف تب ہو گا جب

$$v_1 = x_1 \quad \text{اور} \quad v_2 = x_2$$

ہوں۔

مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر دونوں قالب کے نظیری اندراج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ دونوں قالب یکساں $m \times n$ ہونا لازم ہے۔ اسی طرح دونوں سمتیہ صف (یا دونوں سمتیہ قطار) میں برابر ارکان ہونا لازم ہے۔ یوں 2×2 قالب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$(4.5) \quad A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, \quad v + x = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix}$$

غیر سمتی ضرب یعنی مستقل عدد c سے ضرب

