

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 یولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

- 3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات . . . . . 214
- 3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل . . . . . 217

#### 4 نظام تفرقی مساوات 225

- 4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق . . . . . 226
- 4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے . . . . . 235
- 4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی . . . . . 250
- 4.3.1 خطی نظام . . . . . 251
- 4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب . . . . . 254
- 4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام . . . . . 272
- 4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام . . . . . 281
- 4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ . . . . . 290
- 4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام . . . . . 298
- 4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب . . . . . 299

#### 5 طاقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل 309

- 5.1 ترکیب طاقی تسلسل . . . . . 310
- 5.2 لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کثیر رکنی . . . . . 324
- 5.3 مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس . . . . . 342
- 5.3.1 عملی استعمال . . . . . 346

#### اضافی ثبوت 345

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 5

# طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

گزشتہ بابوں میں مستقل عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو بنیادی تفاعل تھے۔ بنیاد تفاعل مثلاً  $\sin 3t$ ،  $t^6$  اور  $e^{2t}$  کو آپ علم الاحصاء<sup>1</sup> سے جانتے ہیں۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ لیڈانڈر، بیسل اور بیش ہندسی مساوات اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔ یہ مساوات اور ان کے حل لیڈانڈر تفاعل، بیسل تفاعل اور بیش ہندسی تفاعل انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف ترکیبوں پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل طاقتی تسلسل<sup>2</sup>  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہذا اس کو ترکیب طاقتی تسلسل<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو  $\ln x$  یا کسری طاقت  $x^r$  سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو ترکیب فروبنیوس<sup>4</sup> کہلاتی ہے۔ جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کارآمد ثابت ہوتا ہے لہذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلیٰ حل جنہیں آپ علم الاحصاء سے نہیں جانتے اعلیٰ تفاعل<sup>5</sup> کہلاتے ہیں۔

<sup>1</sup>calculus

<sup>2</sup>power series

<sup>3</sup>power series method

<sup>4</sup>Frobenius method

<sup>5</sup>higher functions or special functions



## 5.1 ترکیب طاقتی تسلسل

متغیر عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کرتے ہوئے طاقتی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طاقتی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے، حل کا خط کھینچا جاسکتا ہے، کلیات ثابت کیے جاسکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس حصے میں طاقتی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ  $x - x_0$  کا طاقتی تسلسل درج ذیل ہے

$$(5.1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

جس میں  $x$  متغیر ہے جبکہ  $a_0, a_1, a_2, \dots$  تسلسل کے عددی سر<sup>6</sup> کہلاتے ہیں اور  $x_0$  مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا وسط<sup>7</sup> کہلاتا ہے۔ جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً علامت مجموعہ<sup>8</sup>  $(\sum)$  کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں اشاریہ<sup>9</sup> مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔ درج بالا مساوات میں  $m$  بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔ علامت مجموعہ کے نیچے  $m = 0$  اور اس کے اوپر  $\infty$  مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔ تسلسل کا وسط صفر  $(x_0 = 0)$  ہونے کی صورت میں  $x$  کا طاقتی تسلسل

$$(5.2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقتی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کی تسلسل ہے جس میں  $x - x_0$  (یا  $x$ ) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

coefficients<sup>6</sup>  
center<sup>7</sup>  
summation<sup>8</sup>  
index<sup>9</sup>

مثال 5.1: مکلازن تسلسل در حقیقت میں طاقی تسلسل ہیں

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1, \text{ ہندسی تسلسل})$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

ترکیب طاقی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقی تسلسل دیکھے۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقی تسلسل حل  
تفرقی مساوات  $y' + y = 0$  کو ترکیب طاقی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلی قدم میں حل کو طاقی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$(5.3) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

تسلسل کا جزو با جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$(5.4) \quad y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} ma_mx^{m-1}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) = 0$$

$x$  کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \dots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تفاعل  $e^{-x}$  کی مکملان تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots) = a_0e^{-x}$$

یہاں آپ  $y'' + y = 0$  کو ترکیب طاقی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل  $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$  حاصل کریں۔

اب اس ترکیب کی عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلے مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں ہم خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(5.5) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

میں  $p(x)$  اور  $q(x)$  کو  $x$  کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل  $x - x_0$  کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں  $x - x_0$  کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر  $p(x)$  اور  $q(x)$  از خود کثیر دکنی ہوں تب

پہلی قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسری قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح  $y'$  اور درج ذیل  $y''$  لکھتے ہوئے

$$(5.6) \quad y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_mx^{m-2}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔ تیسری قدم میں  $x$  کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری  $x^1$ ،  $x^2$ ، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔ یوں تمام عددی سر کو  $a_0$  اور  $a_1$  کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیٹرانڈر مساوات  
درج ذیل مساوات کروی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حل: مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} (1 - x^2)(2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + 6 \cdot 5a_6x^4 \dots) \\ - 2x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots) \\ + 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} (2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + 6 \cdot 5a_6x^4 \dots) \\ + (-2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 3a_4x^4 - 5 \cdot 4a_5x^5 - \dots) \\ + (-2a_1x - 2 \cdot 2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 2a_4x^4 - \dots) \\ + (2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3 + 2a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو  $x$  کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (2a_2 + 2a_0) + (3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x \\ + (4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 2a_2)x^2 \\ + (5 \cdot 4a_5 - 3 \cdot 2a_3 - 3 \cdot 2a_3 + 2a_3)x^3 \\ + (6 \cdot 5a_6 - 4 \cdot 3a_4 - 4 \cdot 2a_4 + 2a_4)x^4 + \dots = 0 \end{aligned}$$

باب 5. مل متقی تسل سے سادہ تصرفی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تنفس

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری  $x$ ،  $x^2$ ،  $x^3$ ، ... کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے بالترتیب  $a_2$ ،  $a_3$ ،  $a_4$ ، ... کو  $a_0$  اور  $a_1$  کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$a_2 = -a_0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{2} = 0 \quad (\text{چونکہ } a_3 = 0 \text{ ہے})$$

$$a_6 = \frac{3}{5}a_4 = -\frac{a_0}{5}$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \dots)$$

جس میں  $a_0$  اور  $a_1$  اختیاری مستقل ہیں۔ یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل  $x$  اور  $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \dots$  پر مشتمل ہے جو لیژانڈر کثیر رکنی  $P_n(x)$ <sup>10</sup> اور لیژانڈر تفاعل  $Q_n(x)$ <sup>11</sup> کے رکن ہیں۔ یہاں  $x = P_1(x)$  اور  $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \dots = -Q_1(x)$  ہیں جہاں منفی علامت روایتی ہے۔  $n$  لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ <sup>12</sup> کہلاتا ہے۔ یہاں  $n = 1$  ہے لہذا لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔

نظریہ طاقتی تسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ  $s_n(x)$  لکھتے ہیں جس کو  $n$  جزوی مجموعہ <sup>13</sup> کہتے ہیں۔

$$(5.7) \quad s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

Legendre polynomials<sup>10</sup>

Legendre function<sup>11</sup>

order<sup>12</sup>

nth partial sum<sup>13</sup>

یہاں  $n = 0, 1, 2, \dots$  ممکن ہے۔ مساوات 5.1 سے  $s_n(x)$  منفی کرنے سے بقایا  $R_n(x)$  حاصل ہوتا ہے جس کو  $a_n(x - x_0)^n$  کے بعد مساوات 5.1 کا بقایا<sup>14</sup> کہتے ہیں۔

$$(5.8) \quad R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \dots$$

یوں ہندسی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

کے جزوی مجموعے اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \dots \\ s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \dots \end{aligned}$$

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں  $s_0(x)$ ،  $s_1(x)$ ،  $s_2(x)$  کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔ اگر کسی  $x = x_1$  کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرکوز ہو مثلاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ  $x = x_1$  پر تسلسل 5.1 مرکوز<sup>15</sup> ہے جبکہ  $s(x_1)$  کو تسلسل 5.1 کی قیمت<sup>16</sup> یا مجموعہ کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_1 - x_0)^m$$

اس طرح کسی بھی  $n$  کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(5.9) \quad s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1)$$

اس کے برعکس اگر  $s_0(x)$ ،  $s_1(x)$ ،  $s_2(x)$  کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ  $x = x_1$  پر مساوات 5.1 منفرج<sup>17</sup> ہے۔

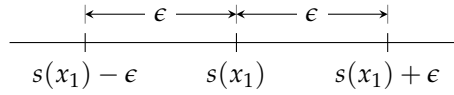
remainder<sup>14</sup>

converge<sup>15</sup>

value or sum<sup>16</sup>

divergent<sup>17</sup>

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تعریفی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تناسل



شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔

مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت  $\epsilon$  کے لئے ایسا  $N$  (جس کی قیمت  $\epsilon$  پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام  $n > N$  کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(5.10) \quad |R_n(x_1)| = |s(x_1) - s_n(x_1)| < \epsilon \quad n > N \quad \text{تمام}$$

جیومیٹری طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ  $s_n(x_1)$  جہاں  $n > N$  ہے  $s(x_1) - \epsilon$  اور  $s(x_1) + \epsilon$  کے درمیان پایا جاتا ہے۔ عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں  $x_1$  پر مساوات 5.1 کا مجموعہ  $s(x_1)$  تقریباً  $s_n(x_1)$  کے برابر ہو گا۔ مزید یہ کہ  $s(x_1)$  اور  $s_n(x_1)$  میں فرق کو ہم  $n$  بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

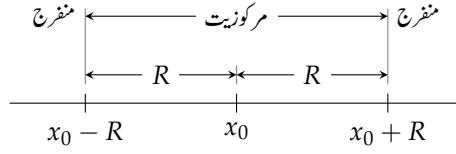
طافقی تسلسل کہاں مرکوز ہوتی ہے؟ تسلسل 5.1 میں  $x = x_0$  پر  $a_0$  کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہذا تسلسل کی قیمت  $a_0$  ہو گی۔ یوں  $x = x_0$  پر تسلسل  $a_0$  پر مرکوز ہوتی ہے۔ کبھی کبھار  $x$  کی واحد اسی قیمت پر تسلسل مرکوز ہو گا۔ اگر  $x$  کے دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرکوز ہو تب  $x$  کی یہ قیمتیں ارتکازی وقفہ<sup>18</sup> کہلاتا ہے۔ یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔ محدود وقفہ جس کا وسط  $x_0$  ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں طافقی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام  $x$  پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے  $x$  پر تسلسل مرکوز ہو گا

$$(5.11) \quad |x - x_0| < R$$

جبکہ  $|x - x_0| > R$  پر تسلسل منفرج ہو گا۔ ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طافقی تسلسل  $x$  کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں  $R$  رداس ارتکاز<sup>19</sup> کہلاتا ہے۔ (مخلوط طافقی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول نکلیا ہوتا ہے جس کا رداس  $R$  ہو گا)۔ اگر تسلسل تمام  $x$  پر مرکوز ہو تب ہم  $R = \infty$  یعنی  $\frac{1}{R} = 0$  لکھتے ہیں۔

<sup>18</sup> convergence interval  
<sup>19</sup> convergence radius



شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.1.1 جس کا وسط  $x_0$  ہے۔

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جاسکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد (  $\lim$  ) موجود اور غیر صفر ہو۔ اگر یہ حد لامتناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط  $x_0$  پر مرکوز ہو گا۔

$$(5.12) \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}}$$

$$(5.13) \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|}$$

مثال 5.4: رداس ارتکاز  $\infty$ ، 1 اور 0  
تینوں تسلسل میں  $m \rightarrow \infty$  لیتے ہوئے رداس ارتکاز  $R$  دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{1}{1} \right| = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! x^m = 1 + x + 2x^2 + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{(m+1)!}{m!} \right| = m+1 \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow 0$$

لامتناہی رداس ارتکاز  $R \rightarrow \infty$  سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ  $R = 0$  بے کار صورت ہے۔ عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔



باب 5. طاقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

درج بالا مثال میں  $\frac{1}{1-x}$  کے طاقی تسلسل کا رداس ارتکاز  $R = 1$  حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط  $x_0 = 0$  ہے۔ مساوات 5.11 کے تحت  $|x| < 1$  کے لئے طاقی تسلسل تفاعل  $\frac{1}{1-x}$  کو ظاہر کرتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔ نقطہ  $x = 0.2$  پر تفاعل کی قیمت  $\frac{1}{1-0.2} = 1.25$  ہے جبکہ اس کے تسلسل میں  $x = 0.2$  پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1 &= 1 && \text{ایک رکن} \\ 1 + 0.2 &= 1.2 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 &= 1.24 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 &= 1.248 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 + 0.2^4 &= 1.2496 && \text{پانچ ارکان} \end{aligned}$$

طاقی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کے اصل قیمت کے  $\frac{1.2496}{1.25} \times 100 = 99.968$  فی صد ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔ بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی  $x$  پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جاسکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرج ہے۔ آئیں رداس ارتکاز کے باہر  $x = 1.2$  پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل کریں۔ تفاعل کی قیمت  $\frac{1}{1-1.2} = -5$  حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 1.2 &= 2.2 \\ 1 + 1.2 + 1.2^2 &= 3.64 \\ 1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 &= 5.368 \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔ یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ  $x$  پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرج ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل  $\frac{1}{1-x}$  کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔ طاقی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہوگی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$(5.14) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

میں  $p(x)$ ،  $q(x)$  اور  $r(x)$  کے طاقتی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقتی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ ایسا تفاعل  $f(x)$  جس کو  $x - x_0$  کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا ثابت رد اس ارتکاز پایا جاتا ہو،  $x_0$  پر تھیلی<sup>20</sup> کہلاتا ہے۔ اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 معیاری صورت میں ہے یعنی یہ  $y''$  سے شروع ہوتا ہے۔ اگر دو درجی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پایا جاتا ہو، یعنی اس میں  $h(x)y''$  پایا جاتا ہو تب مساوات کو  $h(x)$  سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

مسئلہ 5.1: طاقتی تسلسل حل کی وجودیت

اگر مساوات 5.14 میں  $p$ ،  $q$  اور  $r$  نقطہ  $x = x_0$  پر تھیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل  $x = x_0$  پر تھیلی ہو گا اور اس کو  $x - x_0$  کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رد اس ارتکاز  $R > 0$  ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت آپ کتاب کے آخر میں صفحہ 343 پر حوالہ [2] سے پڑھ سکتے ہیں۔ (دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ  $x$  محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رد اس ارتکاز کی لمبائی  $x_0$  سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں  $p$ ،  $q$  اور  $r$  میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تھیلی ہو۔

طاقتی تسلسل پر مختلف عمل

طاقتی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقتی تسلسلوں کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح)  $x$  کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔ یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقتی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

<sup>20</sup>analytic

باب 5. طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرق

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقتی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جاسکتا ہے۔ اگر طاقتی تسلسل

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

انہیں  $x$  پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان  $x$  پر تفرق  $y'$  کو ظاہر کرے گا۔ جہاں  $R < 0$  ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \quad (|x - x_0| < R)$$

اسی طرح دو درجی، تین درجی اور بلند درجی تفرقات بھی حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقتی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر طاقتی تسلسل

$$(5.15) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے  $f(x)$  اور  $g(x)$  ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) (x - x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ  $f(x) + g(x)$  کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر  $x$  پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقتی تسلسل کو رکن باریک ضرب دیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے  $f(x)$  اور  $g(x)$  ہیں۔ اب پہلی تسلسل کے ہر رکن کو دوسری تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے  $x - x_0$  کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_m b_0)(x - x_0)^m \end{aligned}$$

مرکوز ہو گا اور  $f(x)g(x)$  کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر  $x$  پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

### سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ارتکاز دریافت کریں۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)mx^m \quad \text{سوال 5.1}$$

جواب:  $R = 1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{k^m} \quad \text{سوال 5.2}$$

جواب:  $R = k$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad \text{سوال 5.3}$$

جواب:  $R = \infty$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m x^m \quad \text{سوال 5.4}$$

جواب:  $R = \frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقتی تسلسل حل کریں۔

$$y' = -2xy \quad \text{سوال 5.5}$$

جواب:  $y = a_0(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots) = a_0 e^{-x^2}$

$$y'' + y = 0 \quad \text{سوال 5.6}$$

جواب:  $y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{a_1}{6} x^3 + \dots = a_0 \cos x + a_1 \sin x$

$$(1-x)y' = y \quad \text{سوال 5.7}$$

جواب:  $y = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = -\frac{a_0}{1-x}$

سوال 5.8: جہاں  $k$  مستقل مقدار ہے  $xy' - 3y = k$  جواب:  $y = cx^3 - \frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاقی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔ تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لامحدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں  $x$  کے صرف طاق یا صرف جفت طاقت پائیں جاتے ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9:  $y'' - y' + xy = 0$  جواب:  $y = a_0(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{240} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} - \dots)$

سوال 5.10:  $y'' - y' - xy = 0$  جواب:  $y = a_0(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{144} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} + \dots)$

سوال 5.11:  $y'' - y' - x^2y = 0$  جواب:  $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots)$

سوال 5.12:  $y'' - xy' - x^2y = 0$  جواب:  $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \dots) + a_1(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots)$

سوال 5.13:  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$  جواب:  $y = a_0(1 - 3x^2) + a_1(x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \dots)$  جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی کے پہلے جزو کی نشاندہی  $s = 0$  کرتا ہے۔ اس مجموعے میں  $k = s + 1$  پر کرتے ہوئے نیا مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر  $x^m$  پایا جاتا ہو۔ اس عمل کو منتقلی اشاریہ<sup>21</sup> کہتے ہیں۔ حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی  $k = 1$  کرتا ہے۔

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی  
مجموعہ  $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{p+2}{(p+1)!} x^{p+3}$  میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر  $x^m$  ہو۔

جواب:  $\sum_{m=5}^{\infty} \frac{m-1}{(m-2)!} x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.19 کو ترکیب طاقتی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں  $x^3$  تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل  $a_0$  (اور  $a_1$ ) دریافت کریں۔ دیے گئے نقطہ  $x_1$  پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔ جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں تک جواب لکھیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

جوابات:  $y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \dots$   
 $y(1) = -514$  ،  $a_0 = 6$

سوال 5.17:

$$y'' + 4xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad x_1 = 0.1$$

جوابات:  $y = a_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \dots) + a_1(x - \frac{5x^3}{6} + \dots)$   
 $y(0.1) = 1.094$  ،  $a_1 = 1$  ،  $a_0 = 1$

سوال 5.18:

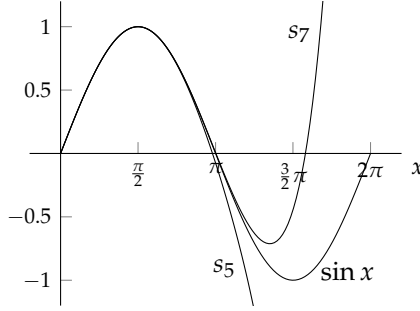
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = 0.5$$

جوابات:  $y = a_0(1 - 6x^2 + 3x^4 + \dots) + a_1(x - \frac{5x^3}{3} + \dots)$   
 $y(0.5) = -0.437$  ،  $a_1 = -\frac{3}{2}$  ،  $a_0 = 0$

سوال 5.19:

$$(x - 4)y' = xy, \quad y(1) = 5, \quad x_1 = 2$$

جوابات:  $y(2) = 2.307$  ،  $a_0 = 5.827$  ،  $y = a_0(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{256} + \dots)$



شکل 5.3: سوال 5.20 کا خط۔  $\sin x$  کے علاوہ جزوی مجموعہ  $s_5$  اور  $s_7$  دکھائے گئے ہیں۔

سوال 5.20: کمپیوٹر کا استعمال  
طاقی تسلسل سے تفاعل کی قیمت جزوی تسلسل سے حاصل کی جاتی ہے۔ تفاعل  $\sin x$  کی تسلسل سے بذریعہ کمپیوٹر، تسلسل میں اجزاء کی تعداد مختلف لیتے ہوئے سائن کا خط کھینچیں۔ آپ دیکھیں گے کہ کم اجزاء لینے سے اصل تفاعل (یعنی  $\sin x$ ) اور تسلسل میں فرق بہت جلد واضح ہوتا ہے جبکہ زیادہ تعداد میں اجزاء لینے سے یہ فرق دیر بعد نمودار ہوتا ہے۔

جوابات: شکل 5.3 میں  $\sin x$  کا جزوی مجموعہ  $s_5$  اور  $s_7$  کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

## 5.2 لیژنڈر مساوات۔ لیژنڈر کثیر رکنی

لیژنڈر تفرقی مساوات<sup>2322</sup>

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (n \text{ مستقل ہے}) \quad (5.16)$$

طبیعیات کے اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک ہے جو متعدد مسائل، بالخصوص کرہ کے سرحدی قیمت مسئلوں، میں سامنے آتی ہے۔

<sup>2322</sup>فرانسیسی ریاضی دان اڈریان مری لیژنڈر [1752-1833] نے اعلیٰ تفاعل، بیضوی شکل اور اعدادی نظریہ پر کام کیا۔  
<sup>23</sup>Legendre's equation

مساوات میں مقدار معلوم  $n$  کی قیمت اصل مسئلے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے لہذا مساوات 5.16 درحقیقت سادہ تفرقی مساوات کی نسل کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم نے لیٹنڈر مساوات، جس میں  $n = 1$  تھا، کو مثال 5.3 میں حل کیا (جس کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ مساوات 5.16 کے کسی بھی حل کو لیٹنڈر تفاعل<sup>24</sup> کہتے ہیں۔ لیٹنڈر تفاعل اور ایسے دیگر اعلیٰ تفاعل، جو علم الاحصاء میں نہیں پائے جاتے، کے مطالعہ کو نظریہ اعلیٰ تفاعل<sup>25</sup> کہتے ہیں۔ دیگر اعلیٰ تفاعل اگلے حصوں میں سامنے آئیں گے۔

مساوات 5.16 کو  $1 - x^2$  سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس کے عددی سر  $\frac{-2x}{1-x^2}$  اور  $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$  نقطہ  $x = 0$  پر تحلیلی تفاعل ہیں [مثال 5.5 دیکھیں] لہذا لیٹنڈر مساوات پر مسئلہ 5.1 کا اطلاق ہوتا ہے اور اس کا حل طاقی تسلسل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ طاقی تسلسل

$$(5.17) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

اور اس کے تفرقات کو مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے مستقل  $n(n+1)$  کو  $k$  لکھتے ہوئے

$$(1 - x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں آپ مثال 5.3 کی طرح مجموعوں کے چند ابتدائی ارکان لکھ کر آگے بڑھ سکتے ہیں یا پھر درج ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ تمام مجموعوں کو  $x$  کی یکساں طاقت کی صورت ( $x^s$ ) میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں  $s = m - 2$  یعنی  $m = s + 2$  پر کرتے ہیں جبکہ بقایا تین مجموعوں میں  $m$  کی جگہ  $s$  پر کرتے ہیں۔ یوں پہلے مجموعے کا پہلا رکن  $m = 2$  اب  $s = 0$  ہوگا اور  $a_m$  کی جگہ  $a_{s+2}$  لکھا جائے گا۔

$$(5.18) \quad \sum_{s=0}^{\infty} (s+2)(s+1)a_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} 2s a_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} k a_s x^s = 0$$

درج بالا مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہذا مساوات کا بایاں ہاتھ بھی صفر کے برابر ہوگا اور یوں  $x$  کے ہر طاقت کے عددی سروں کا مجموعہ صفر کے برابر ہوگا۔ یوں  $x^0$  کے عددی سر سے شروع کرتے ہوئے باری باری



باب 5. طاقی تسلسل سے سادہ تفریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تناسل

$x^1$  ،  $x^2$  ، ... کے عددی سر صفر کے برابر لکھتے ہیں۔ مساوات 5.18 کا دوسرا مجموعہ  $x^2$  اور تیسرا مجموعہ  $x^1$  سے شروع ہوتا ہے لہذا ان میں  $x^0$  نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں پہلے اور چوتھے مجموعوں سے  $x^0$  کے عددی سر جمع کرتے ہوئے صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$$(5.19) \quad 2 \cdot 1a_2 + n(n+1)a_0 = 0$$

جہاں  $k$  کی جگہ واپس  $n(n+1)$  لکھا گیا ہے۔ اسی طرح  $x^1$  پہلے، تیسرے اور چوتھے مجموعوں میں پایا جاتا ہے جن سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(5.20) \quad 3 \cdot 2a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0$$

بلند طاقتی اجزاء  $x^2$  ،  $x^3$  ، ... تمام مجموعوں میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کے لئے  $x^s$  کے عددی سروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$(5.21) \quad (s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0$$

چکور توسین  $[\dots]$  کے اندر توسین کو کھول کر ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} -s(s-1) - 2s + n(n+1) &= -s^2 + s - 2s + n^2 + n = n^2 - s^2 + n - s \\ &= (n-s)(n+s) + n - s \\ &= (n-s)(n+s+1) \end{aligned}$$

لہذا مساوات 5.21 سے

$$(5.22) \quad a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \quad (s = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتا ہے جو کلیہ توانی<sup>26</sup> کہلاتا ہے۔ کلیہ توانی کی مدد سے،  $a_0$  اور  $a_1$  کے علاوہ، بقایا تمام عددی سر، دو قدم بچھلی عددی سر استعمال کرتے ہوئے دریافت کیے جاتے ہیں۔ یوں  $a_0$  اور  $a_1$  اختیاری مستقل ہیں۔ کلیہ توانی کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 & a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1 \\ a_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3}a_2 & a_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4}a_3 \\ &= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 & &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں مساوات 5.17 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$(5.23) \quad y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

جہاں

$$(5.24) \quad y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \dots$$

اور

$$(5.25) \quad y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \dots$$

ہیں۔ یہ تسلسل  $|x| < 1$  کے لئے مرکوز ہیں۔ بعض اوقات تسلسل کا کوئی عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں کلیہ توانی کے تحت اگلے تمام عددی سر بھی صفر ہوں گے اور یوں تسلسل محدود ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ چونکہ مساوات 5.24 میں  $x$  کے جفت طاقت پائے جاتے ہیں جبکہ مساوات 5.25 میں  $x$  کے طاق طاقت پائے جاتے ہیں لہذا  $\frac{y_1}{y_2}$  مستقل مقدار نہیں ہو سکتا ہے اور یوں  $y_1$  اور  $y_2$  آپس میں خطی تعلق نہیں رکھتے لہذا یہ خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ یوں مساوات 5.23 کھلے وقفہ  $-1 < x < 1$  پر عمومی حل ہے۔

دھیان رہے کہ  $x = \pm 1$  پر  $1 - x^2 = 0$  ہو گا لہذا سادہ تفرقی مساوات کی معیاری صورت میں عددی سر غیر تحلیلی ہوں گے۔ یوں حیرانی کی بات نہیں ہے کہ تسلسل 5.24 اور تسلسل 5.24 کا ارتکازی وقفہ وسیع نہیں ہے ماسوائے اس صورت میں جب اجزاء کی تعداد محدود ہونے کی بنا تسلسل کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے۔

کثیر رکنی حل۔ لیٹنڈر کثیر رکنی  $P_n(x)$

طاقی تسلسل کے تخفیف سے کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے جس کا حل، ارتکازی شرط کے قید سے آزاد، تمام  $x$  کے لئے پایا جاتا ہے۔ ایسے اعلیٰ تفاعل جو سادہ تفرقی مساوات کے حل ہوتے ہیں میں یہ صورت عموماً پائی جاتی ہے جن سے مختلف نسل کے اہم کثیر رکنی حاصل ہوتے ہیں۔ لیٹنڈر مساوات میں  $n$  کی قیمت غیر منفی عدد صحیح ہونے کی صورت میں  $s = n$  پر مساوات 5.22 صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا  $a_{n+2} = 0$  ہو گا اور یوں  $a_{n+4} = 0$  ،  $a_{n+6} = 0$  ، ہوں گے۔ جفت  $n$  کی صورت میں  $y_1$  کثیر رکنی ہو گا جبکہ طاق  $n$  کی صورت میں  $y_2$

کثیر رکنی ہو گا۔ ان کثیر رکنی کو مستقل مقدار سے ضرب دیتے ہوئے لیژانڈر کثیر رکنی<sup>27</sup> حاصل ہوتی ہیں جنہیں  $P_n(x)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ روایتی طور پر اس مستقل مقدار کو درج ذیل طریقے سے چنا جاتا ہے۔

تسلسل میں  $x^n$  کے عددی سر  $a_n$  کو

$$(5.26) \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \quad n \text{ مثبت عدد ہے}$$

چنا [مثال 5.6 دیکھیں] جاتا ہے (جبکہ  $n = 0$  کی صورت میں  $a_n = 1$  چنا جاتا ہے)۔ مساوات 5.22 کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے دیگر عددی سر حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(5.27) \quad a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \quad (s \leq n-2)$$

کثیر رکنی میں  $x$  کی بلند تر طاقت کے عددی سر  $a_n$  کو مساوات 5.26 کے تحت چننے سے  $x = 1$  پر تمام  $P_n$  کی قیمت اکائی [ $P_n(1) = 1$ ] حاصل ہوتی ہے [شکل 5.4 دیکھیں]۔ یہی  $a_n$  یوں چننے کی وجہ ہے۔ مساوات 5.27 میں  $s+2 = n$  یعنی  $s = n-2$  پر کرتے ہوئے مساوات 5.26 سے  $a_n$  پر کرتے ہیں۔

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

شمار کنندہ میں  $(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)!$  اور نسب نما میں  $(n!)^2$  کو  $n!n!$  لکھ کر اس میں  $n! = n(n-1)!$  اور  $n! = n(n-1)!$  پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!} \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں  $n(n-1)2n(2n-1)$  کٹ جاتے ہیں۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} \end{aligned}$$

اور دیگر عددی سر حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یوں درج ذیل عمومی کلیہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.28) \quad a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^m m! (n-m)! (n-2m)!} \quad (n-2m \geq 0)$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے لیژنڈر تفرقی مساوات 5.16 کا کشیر رکنی حل

$$(5.29) \quad \begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^m m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1! (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب  $\frac{n}{2}$  یا  $\frac{n-1}{2}$  عدد صحیح ہو گا اور  $M$  اس عدد صحیح کے برابر ہو گا [مثال 5.7 دیکھیں]۔ درج بالا  $n$  درجی لیژنڈر کشیر رکنی<sup>28</sup> کہلاتا ہے اور اس کو  $P_n(x)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند پہلے لیژنڈر کشیر رکنی جنہیں شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہیں۔

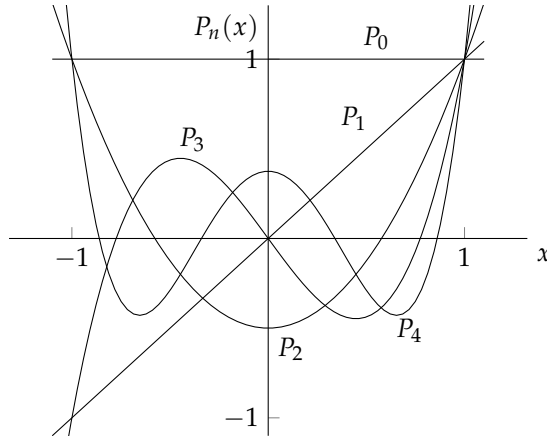
$$(5.30) \quad \begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

لیژنڈر کشیر رکنی  $P_n(x)$  وقفہ  $-1 \leq x \leq 1$  پر آپس میں عمودی<sup>29</sup> ہیں۔ یہ خصوصیت فوریر لیژنڈر تسلسل کے لئے ضروری ہے جن پر فوریر تسلسل کے باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال 5.5: لیژنڈر مساوات 5.16  $1 - x^2$  سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت میں لکھتے ہوئے ثابت کریں کی اس کے عددی سر  $x = 0$  پر تحلیل ہیں۔

حل: لیژنڈر مساوات کو  $1 - x^2$  سے تقسیم کرتے ہوئے  $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$  حاصل ہوتا ہے جس کے عددی سر  $\frac{-2x}{1-x^2}$  اور  $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$  ہیں جن کی مکمل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{1-x^2} &= n(n+1)(1+x^2+x^4+\dots) \\ \frac{-2x}{1-x^2} &= -2(x+x^3+x^5+\dots) \end{aligned}$$



شکل 5.4: لیمنڈر کثیر رکنی۔

پہلی تسلسل کا  $\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$  ہیں لہذا اس کا رداس ارتکاز  $R = 1$  ہے۔ دوسری تسلسل کا بھی  $\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$  اور  $R = 1$  ہیں۔ یوں دونوں تسلسل تحلیل ہیں۔

مثال 5.6: درج ذیل مساوات کے بائیں ہاتھ سے اس کا دایاں ہاتھ حاصل کریں۔

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$$

حل: پہلے  $n = 3$  کے لئے حل کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں شمار کنندہ میں طاق اعداد (جو طاق مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو ایک طرف اور جفت اعداد (جو جفت مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو دوسری طرف منتقل کرتے ہوئے ہر جفت عدد سے 2 کا ہندسہ نکالا گیا ہے۔

$$\frac{(2 \cdot 3)!}{2^3 (3!)^2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3 (3 \cdot 2 \cdot 1)^2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3 (3!)^2} = \frac{2^3 (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3 (3!)^2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{3!}$$

شمار کنندہ میں اعداد کو ترتیب دیتے ہوئے اور اس میں سب سے بڑے عدد 5 کو  $2 \cdot 3 - 1$  لکھتے ہوئے  $\frac{1 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3 - 1)}{3!}$  لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں یہی سب کچھ عمومی عددی صحیح  $n$  کے لئے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
 \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5) \cdots 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\
 &= \frac{2n(2n-2)(2n-4) \cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\
 &= \frac{2^n n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\
 &= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{n!} \\
 &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}
 \end{aligned}$$

مثال 5.7: لیٹنڈر کشیر رکنی مجموعہ [مساوات 5.29] کی بالائی حد  $M$  ہے۔  $M$  کی قیمت دریافت کریں۔

حل: مساوات 5.22 لیٹنڈر کشیر رکنی کے عددی سر دیتی ہے جس کے تحت  $s = n$  پر عددی سر صفر  $(a_{n+2} = 0)$  کے برابر ہو گا اور یوں بقایا عددی سر  $a_{n+4}, a_{n+6}, \dots$  بھی صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں کشیر رکنی میں  $x$  کی زیادہ سے زیادہ طاقت  $n$  ہو گی۔ اس طرح  $n = 5$  کی صورت میں  $a_5 x^5, a_3 x^3$  اور  $a_1 x^1$  پایا جائے گا جبکہ  $n = 8$  کی صورت میں  $a_8 x^8, a_6 x^6, a_4 x^4, a_2 x^2$  اور  $a_0$  پائے جائیں گے۔ آپ نے دیکھا کہ طاق  $n$  کی صورت میں کشیر رکنی میں کل  $\frac{n-1}{2}$  پائے گئے جبکہ جفت  $n$  کی صورت میں ارکان کی تعداد  $\frac{n}{2}$  تھی۔ یوں طاق  $n$  کی صورت میں  $M = \frac{n-1}{2}$  اور جفت  $n$  کی صورت میں  $M = \frac{n}{2}$  ہو گا جہاں  $M$  عدد صحیح ہے۔

مثال 5.8: (کلیہ روڈریگیس)

تفاعل  $(x^2 - 1)^n$  کو الکرارجی کے مسئلہ ثنائی<sup>30</sup> سے پھیلا کر اس کا  $n$  درجی تفرق لیں۔ حاصل جواب کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل کریں جس کو کلیہ روڈریگیس<sup>31</sup> کہتے ہیں۔

$$(5.31) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

حل:  $(x^2 - 1)^n$  کو مسئلہ الکرارجی سے پھیلاتے ہوئے  $n + 1$  ارکان ملتے ہیں۔

$$(5.32) \quad y = (x^2 - 1)^n = (x^2)^n + \frac{n}{1!} (x^2)^{n-1} (-1)^1 + \frac{n(n-1)}{2!} (x^2)^{n-2} (-1)^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1)}{2!} (x^2)^2 (-1)^{n-2} + \frac{n}{1!} (x^2) (-1)^{n-1} + (-1)^n$$

اس مساوات کا آخری رکن مستقل مقدار  $(-1)^n$  ہے جبکہ اس رکن سے ایک پہلے رکن میں  $x^2$  پایا جاتا ہے۔ یوں  $y'$  لینے سے آخری رکن صفر ہو جائے گا لہذا  $y'$  میں  $n$  ارکان رہ جائیں گے۔  $y'$  کے آخری رکن میں  $x^1$  پایا جائے گا۔  $y''$  لینے سے یہ رکن مستقل مقدار ہو جائے گا جبکہ ارکان کی تعداد میں مزید کمی رونما نہیں ہوگی۔ اسی طرح  $y'''$  لینے سے ایک اور رکن کم ہو جائے گا اور  $n - 1$  ارکان رہ جائیں گے۔  $y''''$  لینے سے ارکان کی تعداد میں کمی پیدا نہیں ہوگی۔ یوں ہر دو مرتبہ تفرق لینے سے تعداد اکائی کمی پیدا ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $n$  درجی تفرق  $y^{(n)}$  لینے کے بعد ارکان کی تعداد  $\frac{n}{2}$  یا  $\frac{n-1}{2}$  ہوگی جس کو ہم  $M$  سے ظاہر کرتے ہیں اور جو صحیح عدد ہو گا۔

مساوات 5.32 کو مجموعے کی صورت میں لکھتے ہیں جس میں  $m = 0$  تا  $m = n$  ارکان یعنی  $n + 1$  ارکان ہیں۔

$$(5.33) \quad y = \sum_{m=0}^n \frac{n! (x^2)^{n-m} (-1)^m}{(n-m)! m!} = \sum_{m=0}^n \frac{n! (-1)^m}{(n-m)! m!} x^{2n-2m}$$

<sup>30</sup> binomial theorem ابو بکر ابن محمد ابن الحسن ابن کراچی [1029-953] ایران کے ریاضی دان تھے۔

<sup>31</sup> Rodrigues' formula فرانسسی ریاضی دان بنجامن اولانڈے روڈریگیس [1794-1851]

اب  $z = x^{2n-2m}$  پر نظر رکھیں۔ اس کے تفرق لیتے ہیں۔

$$z' = (2n - 2m)x^{2n-2m-1} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - 1)!} x^{2n-2m-1}$$

$$z'' = (2n - 2m)(2n - 2m - 1)x^{2n-2m-2} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - 2)!} x^{2n-2m-2}$$

$$z''' = (2n - 2m)(2n - 2m - 1)(2n - 2m - 2)x^{2n-2m-3} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - 3)!} x^{2n-2m-3}$$

⋮

$$z^{(k)} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - k)!} x^{2n-2m-k}$$

$$z^{(n)} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - n)!} x^{2n-2m-n} = \frac{(2n - 2m)!}{(n - 2m)!} x^{n-2m}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.33 کا  $n$  درجی تفرق لکھتے ہیں

$$y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] = \sum_{m=0}^n \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!} \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!} x^{n-2m}$$

جس کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

مثال 5.9: روڈریگیس مساوات 5.31 استعمال کرتے ہوئے  $n$  مرتبہ مکمل بالخصص لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

حل: فرض کریں کہ  $y = (x-1)^3$  ہے۔ یوں  $y' = 3(x-1)^2$  ،  $y'' = 3 \cdot 2(x-1)$  ،  $y''' = 3 \cdot 2 \cdot 1$  اور  $y^{(4)} = 0$  ہوں گے جن سے  $y(1) = 0$  ،  $y'(1) = 0$  ،  $y''(1) = 0$  ،



باب 5. ط متقی تسلسل سے سادہ تعریفی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسیر

3!  $y'''(1) = 0$  اور  $y(1)^{(4)} = 0$  حاصل ہوتے ہیں۔ اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ  $y_1 = (x-1)^n$  کی صورت میں

$$(5.34) \quad y_1 = (x-1)^n, \quad y_1^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!} (x-1)^{n-m}, \quad y_1^{(m)}(1) = n! \delta_{n,m}$$

اور  $y_2 = (x+1)^n$  کی صورت میں

$$(5.35) \quad y_2 = (x+1)^n, \quad y_2^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!} (x+1)^{n-m}, \quad y_2^{(m)}(-1) = n! \delta_{n,m}$$

ہو گا جہاں  $\delta_{n,m}$  کی تعریف درج ذیل ہے (یعنی  $m = n$  کی صورت میں  $\delta = 1$  جبکہ  $m \neq n$  کی صورت میں  $\delta = 0$  ہے)۔

$$(5.36) \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

مساوات 5.34 کہتی ہے کہ  $y_1 = (x-1)^n$  کے تمام تفرقات کی قیمت  $x = 1$  پر صفر ہوگی ماسوائے  $n$  درجی تفرق، جس کی قیمت  $n!$  ہوگی۔ مساوات 5.35 یہی کچھ  $y_2 = (x+1)^n$  کے بارے میں  $x = -1$  پر کہتی ہے۔

اب اگر  $X = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n (x+1)^n = y_1 y_2$  ہو تب کلیہ لیبنٹز<sup>32</sup> سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{d^m X}{dx^m} = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \overbrace{\frac{d^{m-s} y_1}{dx^{m-s}}}^M \cdot \overbrace{\frac{d^s y_2}{dx^s}}^N$$

اگر  $m \neq n$  ہو، اور بالخصوص اگر  $m < n$  ہو، تب مساوات 5.34 کہتی ہے کہ  $M(x=1) = 0$  ہو گا جبکہ مساوات 5.35 کہتی ہے کہ تب  $N(x=-1) = 0$  ہو گا۔ ان نتائج کی بنا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.37) \quad \frac{d^m X}{dx^m} = 0$$

مساوات 5.31 کو استعمال کرتے ہوئے  $\frac{d^n X}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2-1)^n]}{dx^n} = P_n$  لکھا جاسکتا ہے لہذا

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2 dx &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^n X}{dx^n} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \left[ \frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} dx \end{aligned}$$

ہو گا جہاں تکمل بالخصص استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 5.37 کے تحت  $\left. \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \right|_1 = \left. \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \right|_{-1} = 0$  ہے لہذا آخری قدم پر تکمل کے باہر تمام حصہ صفر کے برابر ہے اور یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2 dx &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} dx \\ &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \left[ \left. \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-2} X}{dx^{n-2}} \right|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} \cdot \frac{d^{n-2} X}{dx^{n-2}} dx \right] \end{aligned}$$

جہاں دوبارہ تکمل بالخصص لیا گیا ہے۔ پہلی کی طرح اب بھی تکمل کا باہر والا حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار تکمل بالخصص لیتے ہوئے ہر بار بیرونی حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ یوں  $s$  مرتبہ تکمل لیتے اور بیرونی حصے کو صفر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^s}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+s} X}{dx^{n+s}} \cdot \frac{d^{n-s} X}{dx^{n-s}} dx$$

آخر کار  $s = n$  ہو گا اور یوں درج ذیل حاصل ہو گا جہاں  $\frac{d^0 X}{dx^0} = X$  لکھا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+n} X}{dx^{n+n}} \cdot \frac{d^{n-n} X}{dx^{n-n}} dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{2n} X}{dx^{2n}} \cdot X dx$$

$X = (x^2 - 1)^n$  کا انکراجی ثنائی تسلسل مساوات 5.32 دیتی ہے جس کا  $2n$  درجی تفرق لینے سے، پہلے رکن کے علاوہ، تمام ارکان صفر کے برابر ہو جاتے ہیں۔ یوں اس کا  $2n$  درجی تفرق  $\frac{d^{2n} X}{dx^{2n}} = (2n)!$  ہو گا جس سے درج بالا تکمل یوں

$$(5.38) \quad \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 X dx$$

لکھا جاتا ہے۔ آئیں  $\int X dx$  کو تکمل بالخصص کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 X dx &= \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx \\ &= (x-1)^n \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 n(x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} dx \end{aligned}$$

تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار تکمل بالخصص لیتے ہوئے ہر مرتبہ تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔  $s$  مرتبہ تکمل بالخصص لیتے ہوئے اور تکمل کے باہر حصے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 X dx &= (-1)^s \int_{-1}^1 [n(n-2) \cdots (n-s+1)] (x-1)^{n-s} \frac{(x+1)^{n+s}}{(n+1)(n+2) \cdots (n+s)} dx \\ &= (-1)^s \int_{-1}^1 \frac{n!(x-1)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{n!(x+1)^{n+s}}{(n+s)!} \end{aligned}$$

آخر کار  $s = n$  ہو گا جس پر درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 X dx &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{n!(x-1)^{n-n}}{(n-n)!} \frac{n!(x+1)^{n+n}}{(n+n)!} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

جہاں  $0! = 1$  پر کیا گیا ہے۔ درج بالا نتیجے کو مساوات 5.38 میں پر کرتے ہیں

$$(5.39) \quad \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

جہاں منفی ایک کا جفت طاقت اکائی کے برابر  $[(-1)^{2n} = 1]$  ہے۔

مثال 5.10: درج ذیل ثابت کریں جہاں  $n \neq m$  ہے۔

$$(5.40) \quad \int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0 \quad (n \neq m)$$

حل: فرض کریں کہ  $X = (x^2 - 1)^n$  اور  $Y = (x^2 - 1)^m$  ہیں۔ یوں مساوات 5.31 کے تحت

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n X}{dx^n} \quad \text{اور} \quad P_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m Y}{dx^m} \quad \text{ہوں گے لہذا}$$

$$\int_{-1}^1 P_n P_m dx = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 \frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^m Y}{dx^m} dx$$

ہوگا۔ چونکہ  $n$  اور  $m$  برابر نہیں ہیں لہذا ان میں ایک کی قیمت دوسرے سے کم ہوگی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $n < m$  ہے۔ گزشتہ مثال کی طرح، درج بالا کو بار بار تکمیل بالخصوص سے حل کرتے ہوئے، ہر بار تکمیل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور آخر کار درج ذیل ملتا ہے۔ مساوات 5.36 کے تحت  $Y$  کا صرف اور صرف  $m$  درجی تفرق غیر صفر ہے درج ذیل صفر کے برابر ہے۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n P_m dx &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{d^{m-n} Y}{dx^{m-n}} dx \\ &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \left. \frac{d^{m-n+1} Y}{dx^{m-n+1}} \right|_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

مثال 5.11: پیداکار تفاعل

اکراچی کے مسئلہ ثنائی سے  $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$  کا تسلسل لکھ کر اس میں  $v = 2xu - u^2$  پر کریں۔ ان میں  $u^0$  ارکان کا مجموعہ حاصل کریں۔ اسی طرح  $u^1$  ارکان کا مجموعہ، اور  $u^2$  ارکان کا مجموعہ، ... حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان مجموعوں کا عددی سر بالترتیب  $P_0$ ،  $P_1$ ،  $P_2$ ، ... ہوگا یعنی

$$(5.41) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n$$

حل: ہمیں  $P_0$ ،  $P_1$  اور  $P_2$  کے لئے حل کریں۔ دیے تفاعل کا اکراچی ثنائی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 v^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 v^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 v^4}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

چونکہ  $u^2$  کا عدد سر  $P_2$  ہو گا اور درج بالا تسلسل کے پہلے تین ارکان میں کے بعد  $u$  کے زیادہ بلند طاقت پائے جاتے ہیں لہذا ہم تسلسل کے پہلے تین ارکان پر نظر رکھتے ہیں۔ اس تسلسل میں  $v = 2xu - u^2$  پر کرتے ہوئے درکار نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (1-v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(2xu - u^2)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3(2xu - u^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots \\ &= 1 + \left(xu - \frac{u^2}{2}\right) + \frac{3}{8}(4x^2u^2 + u^4 - 4xu^3) + \dots \\ &= \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{(x)}_{P_1}u + \underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)}_{P_2}u^2 + \dots \end{aligned}$$

### سوالات

سوال 5.21 تا سوال 5.26 لیٹنڈر کثیر رکنی اور تفاعل پر مبنی ہیں۔

سوال 5.21: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں  $n = 0$  لیتے ہوئے  $P_0(x) = 1$  حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیٹنڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقت کے  $x$  پائے جاتے ہیں لہذا  $n = 0$  کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن  $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$  ہی پایا جائے گا جس میں  $n = 0$  پر کرتے اور  $0! = 1$  لیتے ہوئے  $P_0(x) = 1$  ملتا ہے۔ [ $0! = 1$  کا ثبوت گیما تفاعل<sup>33</sup> کی مدد سے اسی باب میں دیا جائے گا۔]

سوال 5.22: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں  $n = 1$  لیتے ہوئے  $P_1(x)$  حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیٹنڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقتی  $x$  پائے جاتے ہیں لہذا  $n = 1$  کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن  $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$  ہی پایا جائے گا جس میں  $n = 1$  پر کرتے ہوئے  $P_1(x) = x$  ملتا ہے۔

سوال 5.23: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 سے  $P_3(x)$  تا  $P_5(x)$  حاصل کریں جنہیں مساوات 5.30 میں پیش کیا گیا ہے۔

سوال 5.24:  $P_0(x)$  کو لیٹنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیٹنڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات:  $n = 0$  کی صورت میں لیٹنڈر مساوات 5.16 کی شکل  $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$  ہوگی اور جبکہ  $y = P_0 = 1$ ،  $y' = P'_0 = 0$  اور  $y'' = P''_0 = 0$  ہوں گے۔  $y$ ،  $y'$  اور  $y''$  کو مساوات کے دائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے  $(1 - x^2)(0) - 2x(0) = 0$  یعنی حاصل ہوتا ہے جو تمام  $x$  پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.25:  $P_1(x)$  کو لیٹنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیٹنڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات:  $n = 1$  کی صورت میں لیٹنڈر مساوات 5.16 کی شکل  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$  ہوگی جبکہ  $y = P_1 = x$ ،  $y' = P'_1 = 1$  اور  $y'' = P''_1 = 0$  ہیں۔  $y$ ،  $y'$  اور  $y''$  کو مساوات کے دائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے  $(1 - x^2)(0) - 2x(1) + 2(x) = 0$  ملتا ہے جو تمام  $x$  پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.26:  $P_3(x)$  کو لیٹنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیٹنڈر مساوات کے حل ہیں۔

جوابات:  $n = 3$  کی صورت میں لیٹنڈر مساوات 5.16 کی صورت  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$  ہوگی جبکہ  $y = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ،  $y' = \frac{1}{2}(15x^2 - 3)$  اور  $y'' = 15x$  ہیں جنہیں مساوات کے دائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے

$$(1 - x^2)(15x) - 2x[\frac{1}{2}(15x^2 - 3)] + 12[\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)]$$

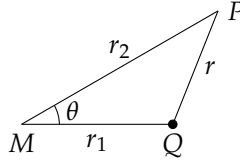
یعنی 0 ملتا ہے جو تمام  $x$  پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.27: نظریہ مخفی توانائی

آپ نقطہ برقی بار کے برقی میدان سے بخوبی واقف ہیں۔ شکل 5.5 میں محدود کے مرکز  $M$  سے ہٹ کر نقطہ بار  $Q$  پایا جاتا ہے جس کا عمومی مقام  $P$  پر برقی دباؤ  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}}$  ہے۔ کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.41 کی استعمال سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$(5.42) \quad \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}} = \frac{1}{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos \theta) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m$$

باب 5.5: متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرق



شکل 5.5: نقطہ برقی بار کا برقی میدان [سوال 5.27]۔

جواب:  $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta = r_2^2 [1 - 2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cos \theta + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2]$  لکھتے ہوئے  $u = \frac{r_1}{r_2}$  اور  $x = \cos \theta$  لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 5.28: درج ذیل ثابت کریں۔ مساوات 5.41 کو استعمال کریں۔

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

سوال 5.29: بونٹ کلیہ توالی  
مساوات 5.41 کا  $u$  تفرق لے کر دوبارہ مساوات 5.41 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل بونے کلیہ توالی<sup>34</sup> حاصل کریں۔

$$(5.43) \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

جواب: مساوات 5.41 کا ایک درجی تفرق  $\frac{d}{du}$  لیتے ہوئے دوبارہ مساوات 5.41 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} & \frac{-\frac{1}{2}(-2x+2u)}{(1-2xu+u^2)\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum nP_n u^{n-1} \\ \Rightarrow & \frac{x-u}{1-2xu+u^2} \sum P_n u^n = \sum nP_n u^{n-1} \\ \Rightarrow & x \sum P_n u^n - \sum P_n u^{n+1} = \sum nP_n u^{n-1} - 2x \sum nP_n u^n + \sum nP_n u^{n+1} \\ & \text{اب دونوں جانب } u^n \text{ کے عددی سر برابر لیتے ہیں۔} \end{aligned}$$

$$xP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1}$$

اس کو ترتیب دے کر درکار نتیجہ  $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$  حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.30: شریک لیژنڈر تفاعل  
درج ذیل مساوات

$$(5.44) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

میں  $y(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} u(x)$  پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔

$$(5.45) \quad (1 - x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے لیژنڈر مساوات 5.16 کا  $m$  درجی تفرق  $\frac{d^m P_n}{dx^m}$  لیتے ہوئے ثابت کریں کہ درج بالا مساوات کا حل

$$u = \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

ہے جس کے شریک  $y(x)$  کو  $P_n^m(x)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو شریک لیژنڈر تفاعل<sup>35</sup> کہتے ہیں۔

$$(5.46) \quad P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

شریک لیژنڈر تفاعل کو انٹیم میکانیات<sup>36</sup> میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

جواب: مساوات 5.44 میں  $y = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} u$  پر کرنے سے مساوات 5.45 حاصل ہوتا ہے۔ بقایا حصے کو اب حل کرتے ہیں۔ لیژنڈر مساوات 5.16 کا  $m$  درجی تفرق صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں  $D^m[y] = D^{m-1}[y']$  ،  $D^{m+1}[y] = D^m[y']$  ،  $\dots$  ہو گا۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ کو

$$D^m[(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] = -D^m[(x^2 - 1)y''] - 2D^m[xy'] + n(n+1)D^m[y]$$

لکھتے ہیں جس میں

$$\begin{aligned} D^m[(x^2 - 1)y''] &= (x^2 - 1)D^m[y''] + 2mx D^{m-1}[y''] + m(m-1)D^{m-2}[y''] \\ &= (x^2 - 1)D^{m+2}[y] + 2mx D^{m+1}[y] + m(m-1)D^m[y] \\ D^m[xy'] &= xD^m[y'] + mD^{m-1}[y'] = xD^{m+1}[y] + mD^m[y] \\ D^m[y] &= D^m[y] \end{aligned}$$



پر کرتے ہوئے

$$(1 - x^2)D^{m+2}[y] - 2(m+1)x D^{m+1}[y] + [n(n+1) - m(m+1)]D^m[y]$$

ملتا ہے جس میں  $D^{m+2} = y^{m+2} = u''$  اور  $D^{m+1} = y^{m+1} = u'$  ،  $D^m[y] = y^m = u$  لیتے ہوئے

$$(1 - x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ابتدائی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر تھا۔ اس مساوات کا حل  $u = y^m$  ہے جہاں  $y$  از خود لیٹنڈر مساوات کا حل ہے یعنی  $u = \frac{d^m P_n}{dx^m}$  ہے۔

سوال 5.31: گزشتہ سوال میں شریک لیٹنڈر تفاعل کا حل  $P_n^m$  حاصل کیا گیا۔ مساوات 5.31 کی مدد سے اس کو لکھیں۔

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x^2 - 1)^n] \quad \text{جواب:}$$

### 5.3 مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس

کئی نہایت اہم دو درجی سادہ تفرقی مساوات، مثلاً بیسل تفاعل (جس پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا)، کے عددی سر تخیلی [حصہ 5.1 میں تعریف دی گئی ہے] نہیں ہیں۔ اس کے باوجود انہیں تسلسل (طاقی تسلسل ضرب لوگار تھم یا طاقی تسلسل ضرب  $x$  کی کسری طاقت، ...) سے حل کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو ترکیب فروبنیوس<sup>37</sup> کہتے<sup>38</sup> ہیں۔ درج ذیل مسئلہ طاقی ترکیب کو وسعت دیتے ہوئے ترکیب فروبنیوس کا استعمال ممکن بناتا ہے۔

مسئلہ 5.2: ترکیب فروبنیوس

$x = 0$  پر تخیلی  $b(x)$  اور  $c(x)$  کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں سادہ تفرقی مساوات

$$(5.47) \quad y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0$$

<sup>37</sup>Frobenius method  
<sup>38</sup>جرمن ریاضی دان فرڈینانڈ گیوگ فروبنیوس [1917-1849]

کا کم از کم ایک عدد حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(5.48) \quad y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad (a_0 \neq 0)$$

جہاں  $r$  حقیقی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے اور اس کی قیمت یوں چنی جاتی ہے کہ  $a_0 \neq 0$  ہو۔

مساوات 5.47 کا (خطی طور غیر تابع) دوسرا حل بھی پایا جاتا ہے جو مساوات 5.48 کی طرز کا ہو سکتا ہے (جس میں  $r$  مختلف ہو گا اور تسلسل کے عددی سر بھی مختلف ہوں گے) اور یا اس میں لوگار تھی جزو پایا جائے گا۔

اس مسئلے میں  $x$  کی جگہ  $x - x_0$  بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں  $x_0$  کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ مسئلے میں  $a \neq 0$  شرط بیان نہیں کرتا بلکہ اس کا مطلب ہے کہ بذریعہ تجزی قوسین سے  $x$  کی بلند تر طاقت باہر نکالی جاتی ہے۔

بیسل تفاعل کو مساوات 5.47 کی طرز پر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2}y = 0 \quad (v \text{ مقدار معلوم ہے})$$

جس میں  $b(x) = 1$  اور  $c(x) = x^2 - v^2$  دونوں  $x = 0$  پر تحلیل ہیں لہذا اس پر درج بالا مسئلہ لاگو ہو گا۔ سادہ طاقتی تسلسل سے بیسل تفاعل کا حل ممکن نہیں ہے۔

مساوات 5.48 میں طاقتی تسلسل کو  $x$  کی ایسی طاقت سے ضرب دیا گیا ہے جو منفی بھی ہو سکتا ہے۔ یاد رہے کہ غیر منفی طاقت کے  $x$  پر مبنی تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔

مسئلہ فروبنیوس کے ثبوت ([جو کتاب کے آخر میں حوالہ [2] میں دیا گیا ہے) کے لئے اعلیٰ درجہ مخلوط تجزیہ<sup>39</sup> درکار ہے لہذا اسے پیش نہیں کیا جائے گا۔

اگر  $x_0$  پر درج ذیل مساوات کے  $p$  اور  $q$  تحلیل ہوں تب  $x_0$  غیر نادر نقطہ<sup>40</sup> کہلائے گا۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

advanced complex analysis<sup>39</sup>  
regular point<sup>40</sup>

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرقی

اسی طرح اگر  $x_0$  پر درج ذیل مساوات کے  $h$ ،  $p$  اور  $q$  تحلیلی ہوں اور  $h \neq 0$  ہو (تا کہ ہم تفرقی مساوات کو  $h$  سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کر سکیں) تب  $x_0$  غیر نادر نقطہ<sup>41</sup> کہلائے گا ورنہ اسے نادر نقطہ<sup>42</sup> کہیں گے۔

$$\tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = 0$$

اشاری مساوات حل ظاہر کرتی ہے

آئیں مساوات 5.47 کو ترکیب فرونیوس سے حل کریں۔ مساوات 5.47 کو  $x^2$  سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(5.49) \quad x^2 y'' + x b(x) y' + c(x) y = 0$$

چونکہ  $b(x)$  اور  $c(x)$  تحلیلی ہیں لہذا انہیں طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \quad c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

اور اگر  $b$  یا  $c$  کثیر رکنی ہوں تب  $b$  یا  $c$  کو جوں کا توں رہنے دیا جاتا ہے۔ مساوات 5.48 کا جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} = x^{r-1} [r a_0 + (r+1) a_1 x + \dots]$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2} = x^{r-2} [r(r-1) a_0 + (r+1) r a_1 x + \dots]$$

ان تمام کو مساوات 5.49 میں پر کرتے ہیں۔

$$(5.50) \quad x^r [r(r-1) a_0 + \dots] + (b_0 + b_1 x + \dots) x^r (r a_0 + \dots) + (c_0 + c_1 x + \dots) x^r (a_0 + a_1 x + \dots) = 0$$

اب ہم  $x^r$ ،  $x^{r+1}$ ،  $x^{r+2}$ ، ... کے عددی مجموعوں کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔ سب سے کم طاقت  $x^r$  ہے جس کا عددی سر درج ذیل ہے۔

$$[r(r-1) + b_0 r + c_0] a_0 = 0$$

regular point<sup>41</sup>  
singular point<sup>42</sup>

چونکہ مسئلہ فروبنیوس کے تحت  $a_0 \neq 0$  ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(5.51) \quad r(r-1) + b_0r + c_0 = 0 \quad (\text{اشاری مساوات})$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کو سادہ تفرقی مساوات 5.47 کی اشاری مساوات<sup>43</sup> کہتے ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے تفرقی مساوات کے حل کی اساس حاصل ہوتی ہے جن میں ایک حل مساوات 5.48 کی طرز کا ہو گا جس میں  $r$  کی قیمت درج بالا اشاری مساوات کا جذر ہو گا۔ دوسرے حل کی تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں جنہیں اشاری مساوات سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

- پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق عدد صحیح  $(1, 2, \dots, 3)$  کے برابر نہیں ہے۔

- دوسری صورت: اشاری مساوات کے دو یکساں جذر پائے جاتے ہیں۔

- تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق عدد صحیح  $(1, 2, \dots, 3)$  کے برابر ہے۔

پہلی صورت میں جوڑی دار مخلوط جذر  $r_1 = a + ib$  اور  $r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$  شامل ہیں چونکہ ان کا فرق  $r_1 - r_2 = i2b$  خیالی عدد ہے جو حقیقی عدد صحیح نہیں ہے۔ اساس کی صورت مسئلہ 5.3 (جسے ضمیمے میں ثابت کیا گیا ہے) دیتی ہے جہاں ارتکاز کا عمومی ثبوت نہیں دیا گیا ہے۔ ہاں انفرادی تسلسل کی مرکزیت عام طریقے سے ثابت کی جاسکتی ہے۔ دوسری صورت میں لوگار تھمی جزو کا ہونا لازم ہے جبکہ تیسری صورت میں ہو سکتا ہے کہ لوگار تھمی جزو پایا جاتا ہو یا نہ پایا جاتا ہو۔

مسئلہ 5.3: ترکیب فروبنیوس۔ حل کی اساس۔ تین صورتیں۔ فرض کریں کہ سادہ تفرقی مساوات 5.47 مسئلہ 5.2 پر پورا اترتا ہے اور اشاری مساوات 5.51 کی جذر  $r_1$  اور  $r_2$  ہیں تب تین صورتیں پائی جاتی ہیں۔

پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح  $(1, 2, 3, \dots)$  کے برابر نہیں ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$(5.52) \quad y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

اور

$$(5.53) \quad y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots)$$

ہو گی جہاں عددی سر مساوات 5.50 میں  $r = r_1$  اور  $r = r_2$  پر کرتے ہوئے سے حاصل کیے جائیں گے۔

دوسری صورت: یکساں جذر  $r_1 = r_2 = r$  کی صورت میں حل کی اساس

$$(5.54) \quad y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \quad \left[r = \frac{1}{2}(1 - b_0)\right]$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$(5.55) \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^r(A_1x + A_2x^2 + \dots) \quad (x > 0)$$

ہو گی۔

تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$(5.56) \quad y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$(5.57) \quad y_2(x) = Ky_1(x) \ln x = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots) \quad \left[r = \frac{1}{2}(1 - b_0)\right]$$

ہے جہاں جذریوں لکھے جاتے ہیں کہ  $r_1 - r_2 > 0$  ہو اور  $K$  کی قیمت صفر بھی ہو سکتی ہے۔

### 5.3.1 عملی استعمال

اشاری مساوات 5.51 کے جذر دریافت کرنے کے بعد ترکیب فروبنیوس بالکل طاقی ترکیب کی طرح ہے۔ مساوات 5.52 تا مساوات 5.57 محض حل کی صورت دیتے ہیں جبکہ دوسرا حل عموماً تخفیف درجہ (حصہ 2.1) کی ترکیب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 5.12: پولر کوشی مساوات۔ پہلی، دوسری اور تیسری صورتیں۔ بلا لوگار تھی جزو  
مساوات پولر کوشی (حصہ 2.5)

$$(5.58) \quad x^2 y'' + b_0 x y' + c_0 y = 0 \quad (c_0 \text{ اور } b_0 \text{ مستقل ہیں})$$

## حوالہ

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

