

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کثی	1.1
13	1.2 $y = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات	2.1
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
113	2.3 تفرقی عامل	2.3
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
134	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسکی	2.6
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	2.8.1
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کثی	2.9
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10
193	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	3.1
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	3.2

3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	214
3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	217
4	نظام تفرقی مساوات	225
4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	226
4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	235
4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	250
4.3.1	خطی نظام	251
4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	254
4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام	272
4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام	281
4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ	290
4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	298
4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب	299
5	طابقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	309
5.1	ترکیب طابقی تسلسل	310
5.2	لیٹرنڈر مساوات۔ لیٹرنڈر کثیر رکنی	325
5.3	مبسوط طابقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس	343
5.3.1	عملی استعمال	348
5.4	مساوات بیسل اور بیسل تفاعل	362
5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	377
6	لاپلاس متبادلہ	385
6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	386
6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	395
6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیزھی تفاعل	408
6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	429
6.5	الچھاؤ	447
6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرقی۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	456
6.7	تفرقی مساوات کے نظام	465
6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے	473
7	سمتیات عارضی باب	477
7.1	غیر سمتیات اور سمتیات	477
7.2	سمتیہ کے اجزاء	479
7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب	485

494	سمتی فضا۔ خطی تابعت اور غیر تابعت	7.4
500	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)	7.5
513	اندرونی ضرب فضا	7.6
515	سمتی ضرب	7.7
517	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب	7.8
528	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب	7.9
537	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام	8
538	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب	8.1
548	قالبی ضرب	8.2
555	8.2.1 تبدیلی محل	
568	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط	8.3
581	8.3.1 صف زینہ دار صورت	
589	خطی غیر تابعت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا	8.4
603	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی	8.5
608	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب	8.6
611	مقطع۔ قاعدہ کریمر	8.7
628	معکوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط	8.8
643	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ	8.9
661	9 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ	
667	9.1 مسئلہ سیورم لیوویل	
674	9.2 قائمیت لیوینڈر کشیر رکنی اور بیسل تفاعل	
679	اضافی ثبوت	ا
683	ب مفید معلومات	
683	1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات	

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 9

قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ

لیٹنڈر تفاعل (حصہ 5.2) اور بیسل تفاعل کی ایک خاصیت جسے قائمیت¹ کہتے ہیں انجینئری حساب میں نمایاں کردار ادا کرتی ہے۔ اس حصے میں قائمیت سے وابستہ تصورات اور علامت نویسی سیکھتے ہیں۔ اگلے حصے میں ایسی سرحدی قیمت مسائل (سٹیورم لیوویل مسائل) پر غور کیا جائے گا جن کے حل قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ دیتے ہیں۔ ان مسائل پر غور کے دوران حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے لیٹنڈر تفاعل اور بیسل تفاعل پر غور کیا جائے گا۔

آئیں پہلے تفاعل کی قائمیت کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر حقیقی قیمت تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ معین ہیں اور اس وقفے پر ان تفاعل کے حاصل ضرب $g_m(x)g_n(x)$ کا مکمل موجود ہے۔ اس مکمل کو روایتی طور پر (g_m, g_n) لکھا جاتا ہے۔

$$(9.1) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx$$

اگر درج بالا مکمل صفر کے برابر ہو تب تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر قائمہ الزاویہ² کہلاتے ہیں۔

$$(9.2) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

orthogonality¹
orthogonal²

حقیقی قیمت تفاعل کا سلسلہ $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، ... اس صورت وقفہ $a \leq x \leq b$ پر قائم الزاویہ سلسلہ³ کہلائے گا جب اس وقفے پر یہ تمام تفاعل معین اور تمام مکمل (g_m, g_n) موجود ہوں اور اس سلسلے میں تمام ممکنہ منفرد جوڑیوں کے یہ مکمل صفر کے برابر ہوں۔

(g_m, g_m) کے غیر صفر جذر کو g_m کا معیار⁴ کہتے ہیں جسے عموماً $\|g_m\|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(9.3) \quad \|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x) dx}$$

ہم پوری بحث کے دوران درج ذیل فرض کریں گے۔

عمومی مفروضہ: تمام تفاعل جن پر غور کیا جا رہا ہو محدود ہیں، جن مکمل پر غور کیا جا رہا ہو وہ موجود ہیں اور معیار غیر صفر ہیں۔

ظاہر ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر ایسے قائم الزاویہ سلسلہ g_1 ، g_2 ، ... جن میں ہر تفاعل کا معیار اکائی (1) ہو درج ذیل تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(9.4) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad (m = 1, 2, \dots) \\ 1 & m = n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

ایسے سلسلے کو وقفہ $a \leq x \leq b$ پر معیاری قائم الزاویہ سلسلہ⁵ کہتے ہیں۔

کسی بھی قائم الزاویہ سلسلے کے ہر تفاعل کو، زیر غور وقفے پر، اس تفاعل کی معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری قائم الزاویہ سلسلہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 9.1: تفاعل $g_m(x) = \sin mx$ جہاں $m = 1, 2, \dots$ کا سلسلہ وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر قائم الزاویہ ہے کیونکہ ان تفاعل کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (ضمیمہ ب میں مساوات 11.ب)۔

$$(9.5) \quad \begin{aligned} (g_m, g_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \quad (m \neq n) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = 0 \end{aligned}$$

orthogonal set³

norm⁴

orthonormal set⁵

ان تفاعل کا معیار $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$ ہے۔

$$\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi \quad (m = 1, 2, \dots)$$

یوں اس سلسلے سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}$$

مثال 9.2: کوسائن تفاعل $\cos mx$ کے سلسلے کو بھی مثال 9.1 کی طرح قائمہ الزاویہ ثابت کیا جاسکتا ہے۔ مزید تمام $m, n = 0, 1, \dots$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \, dx = 0$$

یوں ظاہر ہے کہ درج ذیل سلسلہ وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots$$

جس سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots$$

قائمہ الزاویہ سلسلہ استعمال کرتے ہوئے مختلف تفاعل کو تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ وقفہ $1 \leq x \leq b$ پر $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، ... کوئی بھی قائمہ الزاویہ سلسلہ ہے۔ اب فرض کریں کہ $f(x)$ کوئی بھی تفاعل ہے جس کو ان $g(x)$ کی ایسی تسلسل

$$(9.6) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots$$

لکھنا ممکن ہو جو مرکوز ہو۔ اس تسلسل کو $f(x)$ کی عمومی فوریر تسلسل⁶ کہتے ہیں جبکہ c_1, c_2, \dots کو ان قائمہ الزاویہ سلسلے کے لحاظ سے تسلسل کے فوریر مستقل⁷ کہتے ہیں۔

قائمیت کی بنا ان مستقل کو نہایت آسانی سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 9.6 کے دونوں اطراف کو $g_m(x)$ (معین m) سے ضرب دیتے ہوئے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر مکمل لینے سے درج ذیل ملتا ہے جہاں فرض کیا گیا ہے کہ جزو در جزو مکمل لیا جاسکتا ہے۔

$$(f, g_m) = \int_a^b f g_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (g_n, g_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n g_m dx$$

بائیں ہاتھ جن تہملات میں $n = m$ ہو، وہ $(g_n, g_m) = \|g_m\|^2$ کے برابر ہوں گے جبکہ قائمیت کی بنا باقی تمام تہملات صفر کے برابر ہوں گے لہذا

$$(9.7) \quad (f, g_m) = c_m \|g_m\|^2$$

ہو گا اور یوں فوریر مستقل کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.8) \quad c_m = \frac{(f, g_m)}{\|g_m\|^2} = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b f(x) g_m(x) dx \quad (m = 1, 2, \dots)$$

مثال 9.3: فوریر تسلسل
مساوات 9.6 کو مثال 9.2 کے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ کی صورت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(9.9) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

اور مساوات 9.8 اب درج ذیل دے گا۔

$$(9.10) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

اب اگر تسلسل 9.9 مرکوز ہو تب یہ $f(x)$ کی فوریر تسلسل کہلائے گا اور a_0 ، a_n ، b_n اس کے فوریر عددی سر⁸ کہلائیں گے۔ کلیات 9.10 کو ان عددی سر کے یولر کلیات⁹ کہتے ہیں۔

ایسے کئی اہم سلسلے پائے جاتے ہیں جو از خود قائمہ الزاویہ نہیں ہیں البتہ ان کے حقیقی تفاعل g_1 ، g_2 ، ... درج ذیل پر پورا اترتے ہیں جہاں $p(x)$ کوئی غیر صفر تفاعل ہے۔

$$(9.11) \quad \int_a^b p(x)g_m(x)g_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

ہم کہتے ہیں کہ ایسا سلسلہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل قدر¹⁰ $p(x)$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ ہے۔ g_m کے معیار کی تعریف اب درج ذیل ہے۔

$$(9.12) \quad \|g_m\| = \sqrt{\int_a^b p(x)g_m^2 dx}$$

اگر سلسلے کے ہر تفاعل g_m کا معیار اکائی (1) ہو تب وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے یہ سلسلہ معیاری قائمہ الزاویہ کہلائے گا۔

ہم $h_m = \sqrt{p}g_m$ اور $h_n = \sqrt{p}g_n$ لکھ کر مساوات 9.11 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(9.13) \quad \int_a^b h_m(x)h_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

اور یوں ظاہر ہے کہ h_m تفاعل قائمہ الزاویہ ہیں۔

اگر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے، وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، ... قائمہ الزاویہ ہوں اور اگر کسی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل عمومی فوریر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو (مساوات 9.6 دیکھیں)

$$(9.14) \quad f(x) = c_1g_1(x) + c_2g_2(x) + \dots$$

Fourier coefficients⁸
Euler formulae⁹
weight function¹⁰

تب اس سلسلے کے لحاظ سے فوریر مستقل c_1, c_2, \dots کو بھی پہلی کی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے بس فرق اتنا ہے کہ اب مساوات 9.14 کے دونوں اطراف کو (g_m کی بجائے) pg_m سے ضرب دے کر آگے بڑھا جائے گا۔ باقی سب کچھ پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں تقابل کا معیار اب مساوات 9.12 دے گا۔

$$(9.15) \quad c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b p(x)f(x)g_m(x) dx \quad (m = 1, 2, \dots)$$

سوالات

سوال 9.1 تا سوال 9.10 میں ثابت کریں کہ دیے گئے وقفے پر دیا گیا سلسلہ قائمہ الزاویہ ہے۔ معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ بھی دریافت کریں۔

سوال 9.1: $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots$

سوال 9.2: $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \quad 0 \leq x \leq \pi$
جوابات: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 3x, \dots$

سوال 9.3: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \dots, \quad -1 \leq x \leq 1$
جوابات: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \dots$

سوال 9.4: $1, \cos 2x, \cos 4x, \cos 6x, \dots, \quad 0 \leq x \leq \pi$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 6x, \dots$

سوال 9.5: $1, \cos \frac{2n\pi}{T}x, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad 0 \leq x \leq T$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2n\pi}{T}x, \dots$

سوال 9.6: $\sin \frac{2n\pi}{T}x, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad 0 \leq x \leq T$
جوابات: $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2n\pi}{T}x, \dots$

سوال 9.7: (حصہ 5.2 کے لیٹنڈر تقابل) $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, \quad -1 \leq x \leq 1$
جوابات: $\frac{P_0}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}P_1, \sqrt{\frac{5}{2}}P_2, \sqrt{\frac{7}{2}}P_3, \dots$

سوال 9.8: ایسے a_0, b_0, \dots, c_2 دریافت کریں کہ وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر g_1, g_2 اور g_3 معیاری قائمہ الزاویہ ہوں۔ حاصل جواب کا لیٹنڈر تعامل کے ساتھ موازنہ کریں۔
 $g_1 = a_0, g_2 = b_0 + b_1x, g_3 = c_0 + c_1x + c_2x^2$

سوال 9.9: ثابت کریں کہ اگر وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تعامل $g_1(x), g_2(x), \dots$ قائمہ الزاویہ ہوں تب وقفہ $\frac{a-k}{c} \leq t \leq \frac{b-k}{c}$ پر تعامل $g_1(ct+k), g_2(ct+k), \dots$ قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

سوال 9.10: سوال 9.9 کے نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے سوال 9.1 سے سوال 9.5 کا نتیجہ حاصل کریں۔

9.1 مسئلہ سٹیورم لیوویل

انجینئری حساب میں کئی اہم قائمہ الزاویہ سلسلوں کے تعامل وقفہ $a \leq x \leq b$ پر بطور درج ذیل دو درجی تفرقی مساوات کے حل سامنے آتے ہیں

$$(9.16) \quad [r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0$$

جو درج ذیل شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

$$(9.17) \quad \begin{aligned} (الف) \quad & k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad (k_1 \text{ اور } k_2 \text{ بیک وقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \\ (ب) \quad & l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \quad (l_1 \text{ اور } l_2 \text{ بیک وقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \end{aligned}$$

یہاں λ مقدار معلوم ہے جبکہ k_1, k_2, l_1, l_2 حقیقی مستقل ہیں۔

مساوات 9.16 کو مساوات سٹیورم لیوویل¹¹ کہتے ہیں۔ مساوات 9.17 وقفے کے آخری سروں a اور b سے تعلق رکھتے ہیں لہذا انہیں سرحدی شرائط کہتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ لیٹنڈر، بیسل اور دیگر مساوات کو مساوات 9.16 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات اور سرحدی شرائط مل کر سرحدی مسئلہ¹² دیتے ہیں۔ مساوات 9.16 اور مساوات 9.17 کے سرحدی مسئلے کو سٹیورم لیوویل مسئلہ¹³ کہتے ہیں۔

¹¹ Sturm-Liouville equation
¹² boundary problem

¹³ سونڈر لینڈ کے ریاضی دان جیکوبس چارلس فرائگونس سٹیورم [1803-1882] اور فرانسیسی ریاضی دان یوسف لیوویل [1809-1882]

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ λ کی کسی بھی قیمت کے لئے سٹیورم لیوویل مسئلے کا غیر اہم صفر حل $y \equiv 0$ پایا جاتا ہے جو پورے وقفے پر $y(x) = 0$ دیتا ہے۔ اگر غیر صفر اہم حل $y \not\equiv 0$ موجود ہوں تو انہیں امتیازی تفاعل یا آنگنی تفاعل¹⁴ کہتے ہیں اور λ کی ان قیمتوں جن کے لئے مسئلے کا حل موجود ہو کو امتیازی قیمت یا آنگنی قدر¹⁵ کہتے ہیں۔

مثال 9.4: درج ذیل سٹیورم لیوویل مسئلے کے آنگنی قدر اور آنگنی تفاعل دریافت کریں۔

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

حل: λ کی منفی قیمتوں $\lambda = -v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = c_1 e^{vx} + c_2 e^{-vx}$$

دیے گئے سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے $c_1 = c_2 = 0$ اور $y \equiv 0$ ملتا ہے جو آنگنی تفاعل نہیں ہے۔ $\lambda = 0$ کی صورت میں بھی یہی صورت حال پائی جاتی ہے۔ مثبت $\lambda = v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = A \cos vx + B \sin vx$$

پہلی سرحدی شرط سے $y(0) = A = 0$ ملتا ہے۔ دوسری سرحدی شرط سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$y(\pi) = B \sin v\pi = 0 \implies v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$v = 0$ سے $y \equiv 0$ ملتا ہے جبکہ $B = 1$ لیتے ہوئے $\lambda = v^2 = 1, 4, 9, \dots$ کے لئے

$$y(x) = \sin vx \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

ملتا ہے۔ یوں اس مسئلے کے آنگنی اقدار $\lambda = v^2$ ہیں جہاں $v = 1, 2, \dots$ ہیں اور ان کے مطابق آنگنی تفاعل $y(x) = \sin vx$ ہیں۔

سٹیورم لیوویل مسئلہ درج ذیل قائمیت کی خاصیت رکھتا ہے۔

مسئلہ 9.1: آگنی تفاعل کی قائمیت
فرض کریں کہ مساوات 9.16 میں دیے گئے سیورم لیوویل مسئلے میں p ، q ، r اور r' حقیقی قیمت تفاعل ہیں جو وقفہ $a \leq x \leq b$ پر استمراری ہیں۔ فرض کریں کہ دو منفرد آگنی قدر λ_m اور λ_n کے لئے مساوات 9.16 میں دیے گئے سیورم لیوویل مسئلے کے مطابقتی حل $y_m(x)$ اور $y_n(x)$ ہیں۔ اس وقفے پر تفاعل قدر p کے لحاظ سے y_m اور y_n قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

اگر $r(a) = 0$ ہو تب مساوات 9.17-الف کی ضرورت نہیں ہوگی لہذا اس کو مسئلے سے نکالا جاسکتا ہے۔ اسی طرح اگر $r(b) = 0$ تب مساوات 9.17-ب کی ضرورت نہیں ہوگی لہذا اس کو مسئلے سے نکالا جاسکتا ہے۔ اگر $r(a) = r(b)$ ہو تب مساوات 9.17 کی جگہ درج ذیل شرط لکھی جاسکتی ہے۔

$$(9.18) \quad y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

ثبوت: چونکہ y_m اور y_n اس مسئلے کے حل ہیں لہذا یہ مساوات 9.16 پر پورا اترتے ہیں اور یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(ry'_m)' + (q + \lambda_m p)y_m = 0$$

$$(ry'_n)' + (q + \lambda_n p)y_n = 0$$

پہلی مساوات کو y_n اور دوسری مساوات کو $-y_m$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعے لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n)py_my_n &= y_m(ry'_n)' - y_n(ry'_m)' \\ &= [(ry'_n)y_m - (ry'_m)y_n]' \end{aligned}$$

آپ آخری مساوات $[(ry'_n)y_m - (ry'_m)y_n]'$ کو کھول کر پہلی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کر سکتے ہیں۔ چونکہ قیاس کے تحت r اور r' استمراری ہیں جبکہ y_m اور y_n مسئلے کے حل ہیں لہذا $[(ry'_n)y_m - (ry'_m)y_n]'$ استمراری ہے۔ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر اس کا مکمل لیتے ہیں

$$(9.19) \quad (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b py_my_n dx = [r(y'_ny_m - y'_my_n)]_a^b$$

جہاں دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہے۔

$$(9.20) \quad r(b)[y'_n(b)y_m(b) - y'_m(b)y_n(b)] - r(a)[y'_n(a)y_m(a) - y'_m(a)y_n(a)]$$

پہلی صورت: اگر $r(a) = 0$ اور $r(b) = 0$ ہوں تب مساوات 9.20 صفر کے برابر ہو گا لہذا مساوات 9.19 کا بائیں ہاتھ بھی صفر ہو گا اور چونکہ y_m اور y_n منفرد ہیں ہمیں مساوات 9.17 میں دیے گئے سرحدی شرائط کے استعمال کے بغیر درج ذیل قائمیت ملتی ہے۔

$$(9.21) \quad \int_a^b p y_m y_n dx = 0 \quad (m \neq n)$$

دوسری صورت: اگر $r(b) = 0$ لیکن $r(a) \neq 0$ ہو تب مساوات 9.20 کا بائیں حصہ صفر کے برابر ہو گا۔ آئیں مساوات 9.20 کے دائیں حصے پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 9.17-الف کے تحت

$$k_1 y_n(a) + k_2 y'_n(a) = 0$$

$$k_1 y_m(a) + k_2 y'_m(a) = 0$$

ہو گا۔ فرض کریں کہ $k_2 \neq 0$ ہے۔ یوں پہلی مساوات کو $y_m(a)$ اور دوسری مساوات کو $-y_n(a)$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_2 [y'_n(a) y_m(a) - y'_m(a) y_n(a)] = 0$$

اب چونکہ $k_2 \neq 0$ ہے لہذا قوسین میں بند تفاعل صفر کے برابر ہو گا۔ اب قوسین میں بند تفاعل عین مساوات 9.20 کے دائیں حصے میں قوسین میں بند حصہ ہے لہذا مساوات 9.20 صفر کے برابر ہو گا اور یوں مساوات 9.19 سے مساوات 9.21 ملتی ہے۔

تیسری صورت: اگر $r(a) = 0$ لیکن $r(b) \neq 0$ ہو تب بالکل دوسری صورت کی طرح مساوات 9.21 حاصل کی جاسکتی ہے۔

چوتھی صورت: اگر $r(a) \neq 0$ اور $r(b) \neq 0$ ہوں تب مساوات 9.17 کے دونوں شرائط استعمال کرتے ہوئے دوسری اور تیسری صورت کی طرز پر مساوات 9.21 حاصل ہو گی۔

پانچویں صورت: اگر $r(a) = r(b)$ ہو تب مساوات 9.20 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$r(b) [y'_n(b) y_m(b) - y'_m(b) y_n(b) - y'_n(a) y_m(a) + y'_m(a) y_n(a)]$$

جو پہلی کی طرح مساوات 9.17 کے استعمال سے صفر کے برابر ثابت ہوتا ہے۔ یہاں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 9.18 کی مدد سے بھی درج بالا صفر کے برابر ثابت ہوتی ہے لہذا ہم مساوات 9.17 کی جگہ مساوات 9.18 کی شرط استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات 9.19 سے مساوات 9.21 ملتی ہے اور مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مثال 9.5: مثال 9.4 کے تفرقی مساوات کو مساوات 9.16 کے طرز پر لکھتے ہوئے $q = 0$ ، $r = 1$ اور $p = 1$ ملتے ہیں۔ مسئلہ 9.1 کے تحت وقفہ $0 \leq x \leq \pi$ پر اس کے آگنی تفاعل قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

مثال 9.6: فوریر تسلسل
آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ مثال 9.3 میں پائے جانے والے درج ذیل تفاعل

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

درج ذیل سیورم لیوویل مسئلے کے آگنی تفاعل ہیں

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi)$$

لہذا مسئلہ 9.1 کے تحت وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر یہ آپس میں قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں۔ اس مثال کے سرحدی شرائط مساوات 9.18 کی طرز کے ہیں۔

ایسی عمومی فوریر تسلسل جس میں (قائمہ الزاویہ) آگنی تفاعل کا سلسلہ استعمال ہو آگنی تفاعل پھیلاؤ¹⁶ کہلاتی ہے۔

مسئلہ 9.2: حقیقی آگنی اقدار
اگر سیورم لیوویل مسئلہ جسے مساوات 9.16 اور مساوات 9.17 میں پیش کیا گیا ہے، مسئلہ 9.1 کے شرائط پر پورا اترتا ہو اور پورے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر مثبت ہو (یا اس پورے وقفہ پر p منفی ہو) تب اس سیورم لیوویل مسئلے کے تمام آگنی اقدار حقیقی ہوں گی۔

ثبوت: فرض کریں کہ اس سٹیورم لیوویل مسئلے کا $\lambda = \alpha + i\beta$ آگنی قدر ہے جس کا مطابقتی آگنی تفاعل درج ذیل ہے جہاں α ، β ، u اور v حقیقی ہیں۔

$$(9.22) \quad y(x) = u(x) + iv(x)$$

اس کو مساوات 9.16 میں پر کرتے ہوئے

$$(ru' + irv')' + (q + \alpha p + i\beta p)(u + iv) = 0$$

ملتا ہے جس کے حقیقی اور خیالی حصوں کو علیحدہ علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل دو مساوات ملتے ہیں۔

$$(ru')' + (q + \alpha p)u - \beta pv = 0$$

$$(rv')' + (q + \alpha p)v - \beta pu = 0$$

پہلی مساوات کو v اور دوسری مساوات کو $-u$ سے ضرب دے کر مجموعہ لیتے ہیں

$$\begin{aligned} -\beta(u^2 + v^2)p &= u(rv')' - v(ru')' \\ &= [(rv')u - (ru')v]' \end{aligned}$$

جس کا $x = a$ تا $x = b$ تکمل درج ذیل ہے۔

$$-\beta \int_a^b (u^2 + v^2)p \, dx = [r(uv' - u'v)]_a^b$$

مسئلہ 9.1 کی ثبوت کی طرز پر، سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے دایاں ہاتھ صفر کے برابر ملتا ہے۔ چونکہ y آگنی تفاعل ہے لہذا $u^2 + v^2 \neq 0$ ہو گا۔ اب y اور p استمراری ہیں اور پورے وقفے پر $p > 0$ ہے (یا پورے وقفے پر $p < 0$ ہے) لہذا تکمل کا بائیں ہاتھ صفر نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں $\beta = 0$ ہو گا لہذا $\lambda = \alpha$ حقیقی ہو گا۔ یوں مسئلے کا ثبوت پورا ہوتا ہے۔

مثال 9.5 اور مثال 9.6 کے آگنی اقدار مسئلہ 9.2 کے تحت حقیقی ہیں۔

سوالات

سوال 9.11: مثال 9.4 کے لئے مسئلہ 9.1 ثابت کریں۔

سوال 9.12: مسئلہ 9.1 میں تیسری اور چوتھی صورت کا ثبوت مکمل کریں۔

سوال 9.13: اگر مساوات 9.16 اور مساوات 9.17 میں دیے گئے مسئلے کی آگنی قدر λ_0 اور مطابقتی آگنی تفاعل $y = y_0$ ہوں تب ثابت کریں کہ λ_0 کا مطابقتی آگنی تفاعل $y = \alpha y_0$ بھی ہوگا جہاں α غیر صفر اختیاری مستقل ہے۔ (اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے ایسے آگنی تفاعل دریافت کئے جاسکتے ہیں جن کا معیار اکائی ہو۔)

سوال 9.14 تا سوال 9.21 میں دیے گئے سیورم لیوویل مسئلوں کے آگنی قدر اور آگنی تفاعل دریافت کریں۔

سوال 9.14: $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(l) = 0$ جوابات: $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, $y_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$ جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہیں۔ چونکہ $n = 0$ سے $y = 0$ ملتا ہے جو آگنی تفاعل نہیں ہے لہذا $n = 0$ جواب میں شامل نہیں کیا جائے گا۔

سوال 9.15: $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$ جوابات: $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]^2$, $y_n = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہیں۔

سوال 9.16: $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(l) = 0$ جوابات: $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]^2$, $y_n = \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہیں۔

سوال 9.17: $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$ جوابات: $\lambda = \left[\frac{n(2n+1)\pi}{l} \right]^2$, $y_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہیں۔

سوال 9.18: $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$ جوابات: $\lambda = n^2$, $y_n = \cos nx$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہیں۔

سوال 9.19: $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$, $y(1) = 0$, $y(e) = 0$ جوابات: $\lambda = n^2 \pi^2$, $y_n = \sin(n\pi \ln|x|)$ جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہے۔

سوال 9.20: $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ جوابات: $\lambda = n^2$ ، $y_n = e^{-x} \sin nx$ جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہے۔

سوال 9.21: ثابت کریں کہ مسئلہ سٹیورم لیوویل

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

کے حل مساوات $\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ اس مساوات کے کتنے حل ممکن ہیں۔

جواب: لا تعداد

سوال 9.22: ایسا سٹیورم لیوویل مسئلہ دریافت کریں جس کے آگنی تقابل درج ذیل ہوں۔

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x \dots$$

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

9.2 قائمیت لیٹنڈر کثیر رکنی اور بیسل تقابل

لیٹنڈر مساوات (مساوات 5.16) کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1) \quad (9.23)$$

لہذا یہ مساوات سٹیورم لیوویل (حصہ 9.1) ہے جہاں $r = 1 - x^2$ ، $q = 0$ اور $p = 1$ ہیں۔ چونکہ $x = \pm 1$ پر $r = 0$ ہے لہذا سرحدی شرائط کے بغیر وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر اس سے مسئلہ سٹیورم لیوویل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $n = 0, 1, 2, \dots$ پر اس مسئلے کے حل لیٹنڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ ہیں لہذا یہ آگنی تقابل ہیں جو مسئلہ 9.1 کے تحت قائم الزاویہ ہوں گے یعنی

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (9.24)$$

اور ان آگنی تفاعل کا معیار مساوات 5.39 دیتی ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(9.25) \quad \|P_m\| = \sqrt{\int_{-1}^1 P_m^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \quad m = 0, 1, \dots$$

بیسل تفاعل (حصہ 5.4) جو مساوات بیسل (مساوات 5.76) پر پورا اترتے ہیں کے اہم انجینیری استعمال پائے جاتے ہیں مثلاً دائری سطح کی ارتعاش جس پر اس کتاب میں غور کیا جائے گا۔ مساوات بیسل کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$s^2 j_n + s j_n + (s^2 - n^2) J_n = 0$$

جہاں تفاعل کا s کے ساتھ تفرق کو نقطہ ظاہر کرتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ n غیر منفی عدد صحیح ہے۔
 $s = \lambda x$ لیتے ہوئے جہاں λ غیر صفر مستقل ہے ہم $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda}$ اور زنجیری تفرق سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں ' سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$j_n = \frac{J_n'}{\lambda}, \quad \ddot{j}_n = \frac{J_n''}{\lambda^2}$$

انہیں مساوات بیسل میں پر کر کے

$$x^2 J_n''(\lambda x) + x J_n'(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda x) = 0$$

ملتا ہے جس کو x سے تقسیم کر کے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(9.26) \quad [x J_n'(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x \right) J_n(\lambda x) = 0$$

جو n کی ہر معین قیمت کے لئے ایک مساوات سٹیورم لیوویل دیتا ہے جہاں مقدار معلوم کو λ کی بجائے λ^2 لکھا گیا ہے اور

$$p(x) = x, \quad q(x) = -\frac{n^2}{x}, \quad r(x) = x$$

ہیں۔ چونکہ $x = 0$ پر $r(x) = 0$ ہے لہذا مسئلہ 9.1 کے تحت وقفہ $0 \leq x \leq R$ پر مساوات 9.26 کے وہ حل جو درج ذیل سرحدی شرط پر پورا اترتے ہوں تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیں گے۔ (یہاں دھیان رہے کہ $n \neq 0$ کی صورت میں تفاعل q نقطہ $x = 0$ پر غیر استراری ہے البتہ اس کا مسئلہ 9.1 کے ثبوت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔)

$$(9.27) \quad J_n(\lambda R) = 0$$

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $J_n(s)$ کے لامحدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ $J_n(s)$ کے مثبت صفروں کو $\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \alpha_{3n} \dots$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں مساوات 9.27 کی شرط تب پوری ہوگی جب

$$(9.28) \quad \lambda R = \alpha_{mn} \implies \lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

ہو جس سے درج ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 9.3: بیسل تفاعل کی قائمیت

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(1.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(1.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(1.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

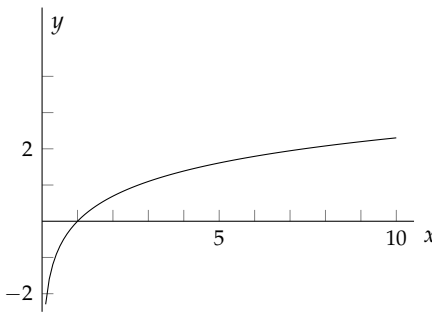
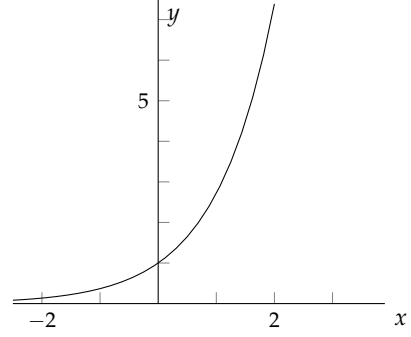
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

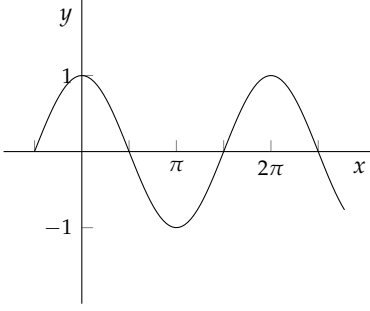
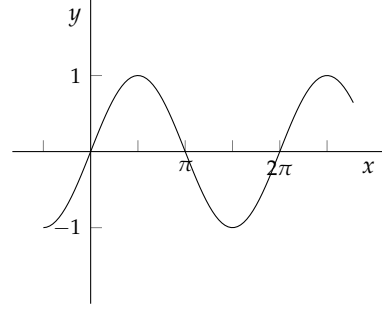
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$

(ب) قدرتی لوگار تھم $\ln x$ (الف) قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل

(ب) $\cos x$ (الف) $\sin x$

شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے مکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}
 \end{aligned}$$

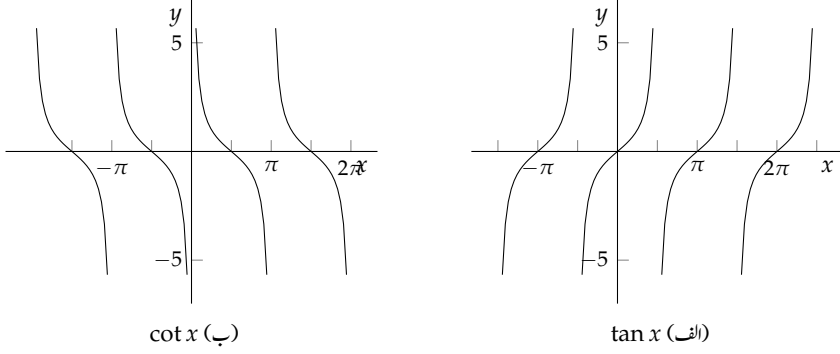
$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

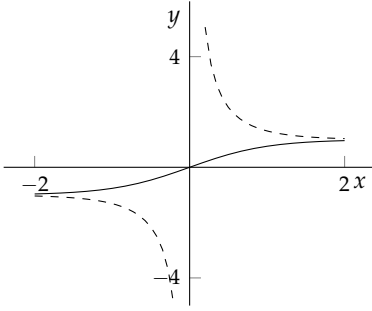
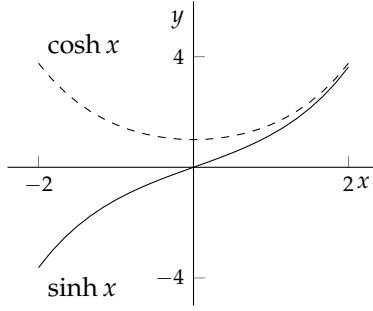
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (\text{ب.25})$$

مساوات 24. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{ب.26})$$

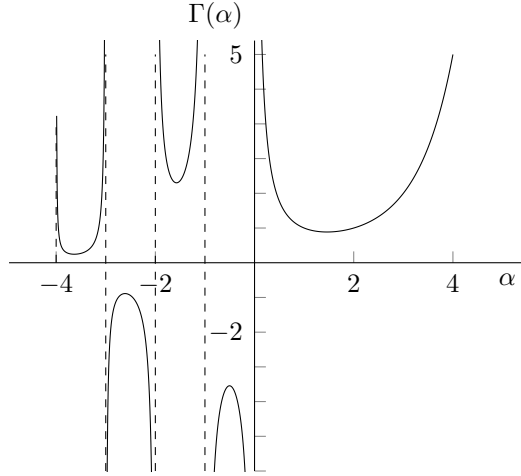
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (\text{ب.27})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیمما تفاعل

گیمما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیمما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیمما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیمما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

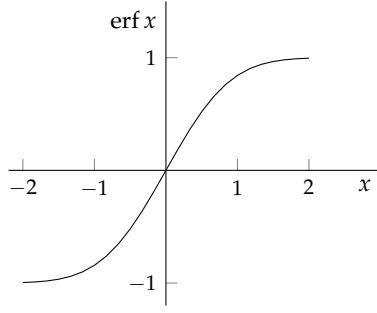
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

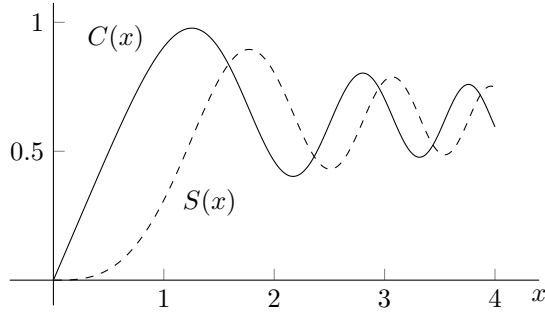
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

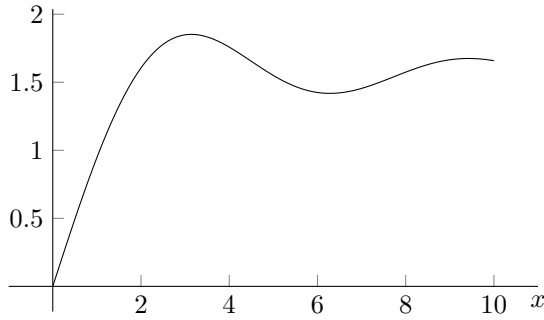
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Si $\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

