

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کثی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروسکی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کثی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدود کی نظام اور تبادل ارکان سمیت
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش

781	11	سمتی عملی علم الاحصاء۔ مکمل کے مسئلے
782	11.1	خطی مکمل
787	11.2	خطی مکمل کا حل
796	11.3	دوہرہ مکمل
810	11.4	دوہرہ مکمل کا خطی مکمل میں متبادل
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی مکمل
845	11.8	تہرہ مکمل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سنوکس
866	11.11	مسئلہ سنوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی مکمل

883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، ہکونیاتی تسلسل

889	ا	اضافی ثبوت
-----	---	------------

893	ب	مفید معلومات
893	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 12

### فوریہ تسلسل

انجینیری مسائل میں دوری تفاعل عموماً پائے جاتے ہیں جن کو سادہ دوری تفاعل مثلاً  $\sin$  اور  $\cos$  کی روپ میں لکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اسی عمل سے فوریہ تسلسل<sup>1</sup> ابھر کر سامنے آتی ہے جو سادہ تفرقی مساوات اور جزوی تفرقی مساوات کے حل میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

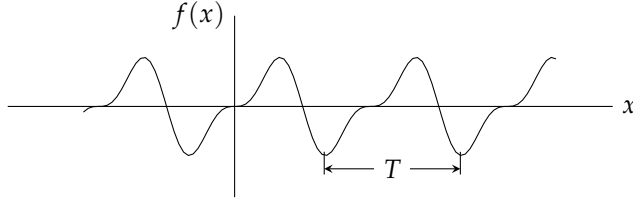
فوریہ تسلسل کا نظریہ پیچیدہ ہے جبکہ اس کا استعمال نہایت آسان ہے۔ چونکہ بہت سارے غیر استمراری تفاعل کا فوریہ تسلسل حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ ان کا ٹیلر تسلسل نہیں پایا جاتا ہے لہذا فوریہ تسلسل کو ٹیلر تسلسل کی عالمگیر صورت تصور کیا جاسکتا ہے۔

اس باب میں فوریہ تسلسل سے وابستہ تصورات، حقائق اور تکنیکی تراکیب پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ ان کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں ان کا استعمال دکھایا جائے گا۔

اس باب کی آخری حصے میں فوریہ مکمل پر غور کیا جائے گا جنہیں اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں استعمال کیا جائے گا۔

---

<sup>1</sup> فرانسیسی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات جیمز پیٹسٹ پوسٹ فوریہ [1768-1830]



شکل 12.1: دوری تفاعل

## 12.1 دوری تفاعل، تگونیاتی تسلسل

تفاعل  $f(x)$  اس صورت دودی<sup>2</sup> کہلاتا ہے کہ جب پورے حقیقی  $x$  پر  $f(x)$  معین ہو اور ایسا مثبت عدد  $T$  پایا جاتا ہو کہ تمام  $x$  پر درج ذیل درست ہو۔

$$(12.1) \quad f(x+T) = f(x) \quad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

عددی  $T$  کو  $f(x)$  کا دوری عرصہ<sup>3</sup> کہتے<sup>4</sup> ہیں۔  $T$  کے برابر  $f(x)$  کے کسی بھی وقفے کا ترسیم دہراتے ہوئے ایسے تفاعل کا ترسیم حاصل کیا جاتا ہے (شکل 12.1)۔ عملی استعمال میں عموماً دوری اعمال اور تفاعل پائے جاتے ہیں۔

دوری تفاعل کی مثالیں  $\sin x$  اور  $\cos x$  ہیں۔ اس کے علاوہ مستقل  $f = c$  بھی دوری تفاعل کی تعریف (مساوات 12.1 پر ہر مثبت  $T$  کے لئے) پورا اترنے کی بنا دوری تفاعل ہے۔

مساوات 12.1 سے ظاہر ہے کہ عدد صحیح  $n$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

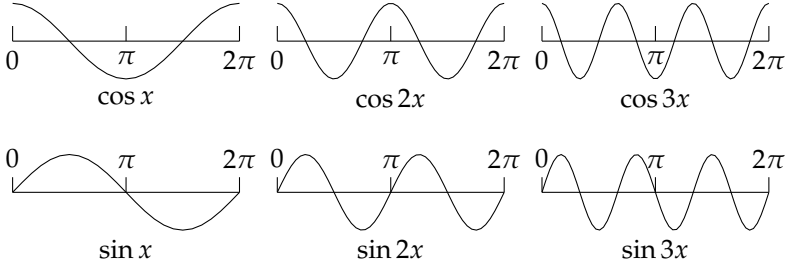
$$f(x+nT) = f(x) \quad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

یوں  $2T$ ،  $3T$ ،  $4T$ ، ... بھی تفاعل  $f(x)$  کے دوری عرصے ہیں۔ مزید اگر تفاعل  $f(x)$  کا اور  $g(x)$  کا دوری عرصہ  $T$  ہو تب درج ذیل تفاعل

$$h(x) = af(x) + bg(x) \quad \text{مستقل } a, b$$

periodic<sup>2</sup>  
period<sup>3</sup>

<sup>4</sup> تفاعل  $f(x)$  کا کم تر دوری عرصہ  $T (> 0)$ ، اگر موجود ہو،  $f(x)$  کا اولی دوری عرصہ کہلاتا ہے۔ مثلاً  $\sin x$  اور  $\sin 2x$  کا بالترتیب اولی دوری عرصہ  $2\pi$  اور  $\pi$  ہے جبکہ مستقل  $f = c$  کا کوئی دوری عرصہ نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 12.2: سائن اور کوسائن تقابل جن کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہے

کا دوری عرصہ بھی  $T$  ہو گا جہاں  $a$  اور  $b$  مستقل ہیں۔

اس باب کی شروع میں ہم ایسے مختلف تقابل جن کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو کو درج ذیل سادہ تقابل کی روپ میں ظاہر کرنا سیکھیں گے

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

جن کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہے (شکل 12.2)۔ ہم دیکھیں گے کہ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل طرز کی تسلسل حاصل ہوگی

$$(12.2) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

جہاں  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  حقیقی مستقل ہوں گے۔ اس تسلسل کو تکنیاتی تسلسل<sup>5</sup> کہتے ہیں جبکہ  $a_n$  اور  $b_n$  تسلسل کی عددی سر<sup>6</sup> کہلاتے ہیں۔ چونکہ اس تسلسل کے ہر رکن کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہے لہذا اگر یہ تسلسل مرکوز ہو تب یہ ایسا تقابل ہو گا جس کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔

انجینئری میں واقع تقابل پیچیدہ ہوتے ہیں جنہیں سادہ دوری تقابل کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ عملی استعمال، مثلاً ارتعاش، میں پائے جانے والا تقریباً ہر دوری تقابل  $f(x)$  جس کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو کو فوریر تسلسل کی روپ میں لکھنا ممکن ہو گا۔ ہم مساوات 12.2 کے عددی سر حاصل کرنے کے ایسے کلیات دریافت کریں گے جو  $f(x)$  پر منحصر ہوں گے اور جنہیں استعمال کرتے ہوئے حاصل تسلسل مرکوز ہو گا جس کا مجموعہ  $f(x)$  کے برابر ہو گا۔ اس کے بعد ہم حاصل کلیات کو عمومی شکل دیتے ہوئے ان کو کسی بھی دوری عرصہ کے تقابل کے لئے قابل استعمال بنائیں گے۔ ایسا کرنا نہایت آسان ثابت ہو گا۔

trigonometric series<sup>5</sup>  
coefficients<sup>6</sup>

## سوالات

سوال 12.1: دیے گئے تفاعل کا کم تر دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x$$

جوابات:  $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$

سوال 12.2: اگر تفاعل  $f(x)$  کا دوری عرصہ  $T$  ہو تب ثابت کریں کہ  $nT$  جہاں  $n = 2, 3, \dots$  ہے بھی اس تفاعل کا دوری عرصہ ہو گا۔

سوال 12.3: ثابت کریں کہ اگر تفاعل  $f(x)$  کا اور تفاعل  $g(x)$  کا دوری عرصہ  $T$  ہو تب تفاعل  $h(x) = af(x) + bg(x)$  کا دوری عرصہ بھی  $T$  ہو گا، جہاں  $a$  اور  $b$  مستقل ہیں۔ یوں دوری عرصہ  $T$  رکھنے والے تمام تفاعل سمتی فضا پیدا کرتے ہیں۔

سوال 12.4: ثابت کریں کہ تفاعل مستقل  $f(x) = \cos x$  ایسا دوری تفاعل ہے جس کا دوری عرصہ  $T$  کوئی بھی مثبت عدد ہو سکتا ہے۔

سوال 12.5: ثابت کریں کہ تفاعل  $f(x)$  کا دوری عرصہ  $T$  ہونے کی صورت میں  $x$  کے دوری تفاعل  $f(ax), a \neq 0$  کا دوری عرصہ  $\frac{T}{a}$  ہو گا جبکہ  $x$  کے دوری تفاعل  $f(\frac{x}{b}), b \neq 0$  کا دوری عرصہ  $bT$  ہو گا۔ ان نتائج کی تصدیق  $f(x) = \cos x, a = b = 2$  کے لئے کریں۔

سوال 12.6 تا سوال ?? میں دیے گئے تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

$$\sin x, \quad \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x, \quad \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \quad \text{سوال 12.6}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{سوال 12.7 اور}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

ہے۔ سوال 12.6 کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.8:

$$\sin 2\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x + \frac{1}{5} \sin 10\pi x$$

سوال 12.9:

$$\sin x, \quad \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.10:

$$-\cos x, \quad -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x, \quad -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x,$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{سوال 12.11}$$

$$f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{سوال 12.12}$$



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z \leq |2yy'|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$



مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

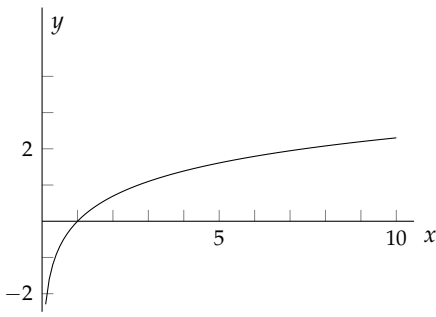
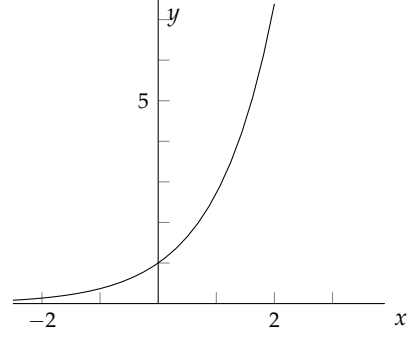
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

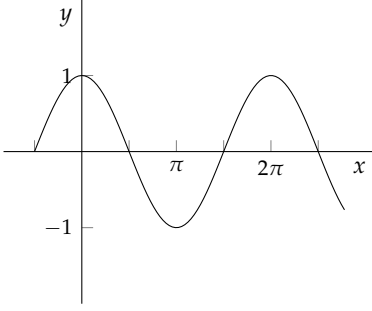
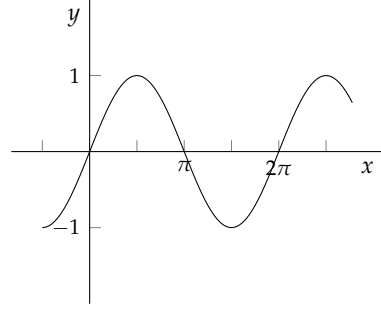
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$

(ب) قدرتی لوگار تھم  $\ln x$ (الف) قوت نمائی تفاعل  $e^x$ 

شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل

(ب)  $\cos x$ (الف)  $\sin x$ 

شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے مکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}
 \end{aligned}$$

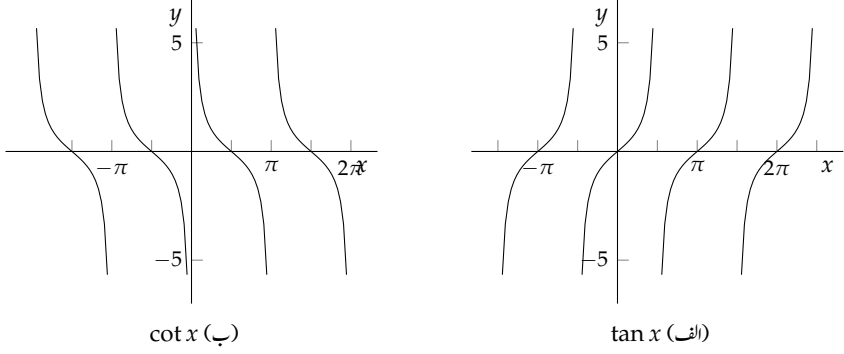
$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

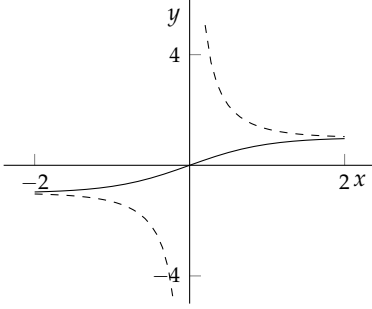
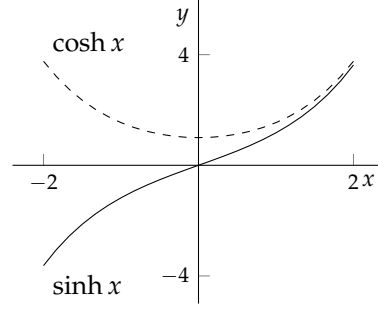
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

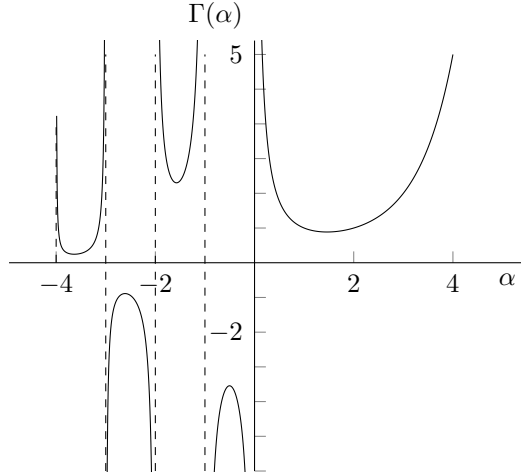
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$



نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

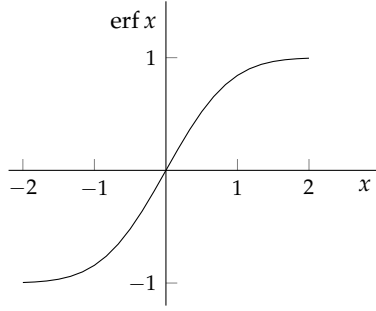
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

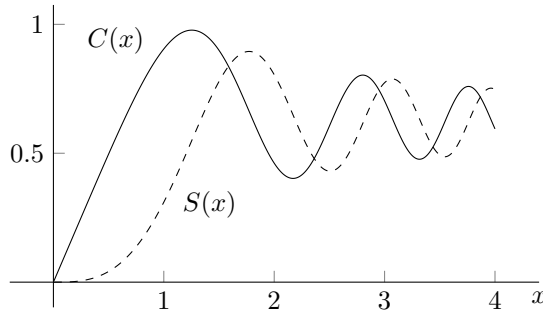
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

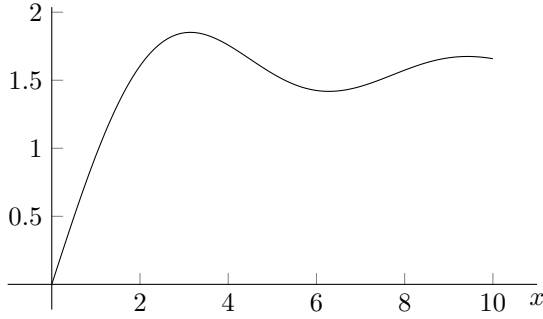
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

