

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاسی
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل

1015 اضافی ثبوت ا

1019 مفید معلومات ب

1019	1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات
----------------	----------------------------

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 13

جزوی تفرقی مساوات

مختلف طبعی اور جیومیٹریائی مسائل جہاں دو یا دو سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل پایا جاتے ہوں، جزوی تفرقی مساوات کو جنم دیتے ہیں۔ یہ متغیرات وقت اور خلا کے محدود ہو سکتے ہیں۔ اس باب میں انجینئری نقطہ نظر سے اہم مسائل پر غور کیا جائے گا۔ ان مساوات کو طبعی نظام کی نمونہ کے طور پر حاصل کرنے کے بعد ابتدائی قیمت اور سرحدی قیمت مسائل حل کرنے کی تراسیب پر غور کیا جائے گا، یعنی ان مساوات کو دی گئی طبعی شرائط کے مطابق حل کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کو لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جاسکتا ہے۔

13.1 بنیادی تصورات

دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کی نامعلوم تفاعل اور اس کی ایک یا ایک سے زیادہ تفرقات پر مبنی مساوات کو جزوی تفرقی مساوات¹ کہتے ہیں۔ بلند تر تفرق کا درجہ مساوات کا درجہ² کہلاتا ہے۔

سادہ تفرقی مساوات کی طرح اگر جزوی تفرقی مساوات میں تابع متغیر (نامعلوم تفاعل) اور اس کے تفرق کی طاقت اکائی ہو تب یہ تفرقی مساوات خطی³ کہلائے گی۔ اگر مساوات کا ہر رکن، تابع متغیر یا تابع متغیرہ کی تفرقات میں سے کوئی ایک تفرق ہو تب اس کو ہم جنسی⁴ کہیں گے ورنہ یہ غیر ہم جنسی⁵ کہلائے گی۔

partial differential equation¹
order²
linear³
homogeneous⁴
non homogeneous⁵

مثال 13.1: اہم خطی دو درجی جزوی تفرقی مساوات

$$(13.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ایک بعدی مساوات موج}$$

$$(13.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ایک بعدی مساوات حرارت}$$

$$(13.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{دو بعدی لاپلاس مساوات}$$

$$(13.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{دو بعدی پوئسن مساوات}$$

$$(13.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{تین بعدی لاپلاس مساوات}$$

یہاں c مستقل ہے، t وقت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ x ، y ، z کارتیسیس مختصات ہیں۔ مساوات 13.4 میں اگر $f(x, y) \neq 0$ ہو تب یہ غیر ہم جنسی ہوگی۔ باقی تمام مساوات ہم جنسی ہیں۔ \square

فضا میں غیر تابع متغیرہ کی کسی خطہ R میں جزوی تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو خود اور جس کے وہ تمام تفرقات جو اس مساوات میں پائے جاتے ہوں کسی ایسے خطے میں موجود ہوں جس کا R حصہ ہو اور یہ تمام حل کر پورے خطہ R میں اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔ (عموماً R کی سرحد پر اس تفاعل کا استمراری ہونا اور درکار تفرقات کا خطہ کے اندرون معین ہونے کے ساتھ ساتھ خطہ کے اندرون مساوات کو مطمئن کرنا درکار ہوگا۔)

عموماً جزوی تفرقی مساوات کے تمام حل کی تعداد بہت زیادہ ہوگی۔ مثلاً جیسا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل

$$(13.6) \quad u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2)$$

جو ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں مساوات 13.3 کے حل ہیں۔ ہم بعد میں دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کا کتنا حل حاصل کرنے کی خاطر مزید معلومات درکار ہوگی جو طبعی حالت سے حاصل ہوگی۔ مثال کے طور پر کبھی کبھار سرحد کے کسی حصے پر درکار حل کی قیمت معلوم ہوگی (سرحدی شرائط⁶) جب کہ بعض اوقات ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر حل کی قیمت معلوم ہوگی (ابتدائی شرائط⁷)۔

boundary conditions⁶
initial conditions⁷

ہم جانتے ہیں کہ اگر سادہ تفرقی مساوات خطی اور ہم جنسی ہو تب اس کی معلوم حل سے مزید حل بذریعہ خطی میل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ جزوی تفرقی مساوات کے لئے بھی ایسا کرنا ممکن ہے جیسا درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 13.1: بنیادی مسئلہ
اگر کسی خطہ R میں خطی ہم جنسی جزوی تفرقی مساوات کے دو حل u_1 اور u_2 ہوں تب

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

جہاں c_1 اور c_2 کوئی مستقل ہیں، بھی اس خطے میں اس مساوات کا حل ہو گا۔

اس مسئلے کا ثبوت نہایت آسان اور مسئلہ 2.1 کی ثبوت سے ملتا جلتا ہے لہذا یہ آپ پر چھوڑا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 13.1: مسئلہ 13.1 کو دو اور تین متغیرات کی دو درجی جزوی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔

سوال 13.2: تصدیق کریں کہ مساوات 13.6 میں دیے گئے تمام تفاعل مساوات 13.3 کے حل ہیں۔
جواب: $u = x^2 + y^2$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$ ہو گا۔ انہیں مساوات 13.3 میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ ملتا ہے۔ یوں u تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3 تا سوال 13.8 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل لاپلاس مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = 2xy \quad \text{سوال 13.3}$$

$$u = e^x \sin y \quad \text{سوال 13.4}$$

$$u = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{سوال 13.5}$$

$$u = x^3 - 3xy^2 \quad \text{سوال 13.6}$$

$$u = \sin x \sinh y \quad \text{سوال 13.7}$$

$$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{سوال 13.8}$$

سوال 13.9 تا سوال 13.11 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل حراری مساوات 13.2 کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = e^{-2t} \cos x \quad \text{سوال 13.9}$$

$$u = e^{-t} \sin 3x \quad \text{سوال 13.10}$$

$$u = e^{-4t} \cos \omega x \quad \text{سوال 13.11}$$

سوال 13.12 تا سوال 13.14 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = x^2 + 4t^2 \quad \text{سوال 13.12}$$

$$u = x^3 + 3xt^2 \quad \text{سوال 13.13}$$

$$u = \sin \omega ct \sin \omega x \quad \text{سوال 13.14}$$

سوال 13.15: تصدیق کریں کہ $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ تین بعدی لاپلاس مساوات 13.5 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.16: تصدیق کریں کہ $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ دو بعدی لاپلاس مساوات 13.3 کا حل ہے۔ دی گئی سرحدی شرائط کے تحت دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر $u = 0$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ پر $u = 5$ ہے۔ مستقل a اور b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ u ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرے۔ حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.17: تصدیق کریں کہ $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$ موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔ یہاں u اور v دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل ہیں۔

اگر جزوی تفرقی مساوات میں صرف ایک متغیر کے ساتھ تفرقات پائے جاتے ہوں تب اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کر کے حل کیا جاسکتا ہے جہاں باقی متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔ سوال 13.18 تا سوال 13.21 کو حل کریں جہاں u کے متغیرات x اور y ہیں۔

$$u_{xx} - u = 0 \quad \text{سوال 13.18}$$

$$u = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x} \quad \text{جواب}$$

سوال 13.19: $u_y + yu = 0$

جواب: $u = c(x)e^{-\frac{y^2}{2}}$

سوال 13.20: $u_{yy} + 9u = 0$

جواب: $u = c_1(y) \cos 3x + c_2(y) \sin 3x$

سوال 13.21: $u_x + 2xyu = 0$

جواب: $u = c(y)e^{-x^2y}$

سوال 13.22 تا سوال 13.25 میں $u_x = p$ لیتے ہوئے حل تلاش کریں۔

سوال 13.22: $u_{xy} = 0$

جواب: $u = v(x) + w(y)$

سوال 13.23: $u_{xy} = u_x$

سوال 13.24: $u_{xy} + u_x = 0$

جواب: $u = v(x)e^{-y} + w(y)$

سوال 13.25: $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$

سوال 13.26 تا سوال 13.29 میں دیے گئے تفرقی مساوات کی نظام کے حل تلاش کریں۔

سوال 13.26: $u_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0$

جواب: $u = axy + bx + cy + k$

سوال 13.27: $u_x = 0, \quad u_y = 0$

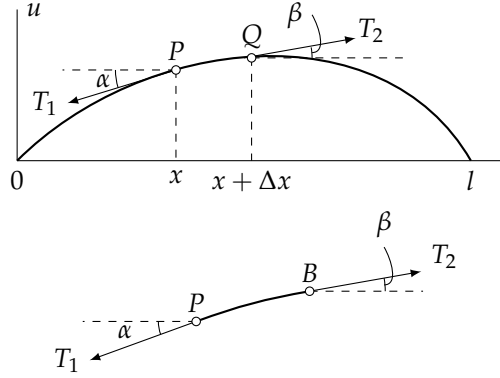
سوال 13.28: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0$

جواب: $u = cx + g(y)$

سوال 13.29: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = 0$

سوال 13.30: تصدیق کریں کہ اگر سطح $z = z(x, y)$ پر منحنی $z = c$ محور x کے متوازی سیدھے خطوط ہوں، جہاں c مستقل ہے، تب z تفرقی مساوات $z_x = 0$ کا حل ہو گا۔ ایسی ایک مثال بھی پیش کریں۔

سوال 13.31: تصدیق کریں کہ $yz_x - xz_y = 0$ کا حل $z = z(x, y)$ سطح گردش ہے۔ اس کی مثال پیش کریں۔ (اشارہ: $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ لے کر تفرقی مساوات کو $z_\theta = 0$ میں تبدیل کریں۔)



شکل 13.1: ارتعاش پذیر تار

13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج

ایک چمک دار تار کو لمبائی l تک کھینچ کر سروں سے باندھا جاتا ہے۔ ساکن تار کو x محور پر تصور کریں۔ اس تار کو کسی نقطہ یا نقاط سے کھینچ کر لمحہ $t = 0$ پر چھوڑا دیا جاتا ہے تاکہ یہ ارتعاش کر سکے۔ ہم تار کی ارتعاش معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی لمحہ $t > 0$ پر ساکن حالت سے تار کی نقطہ x کا انحراف $u(x, t)$ جاننا چاہتے ہیں (شکل 13.1)۔ کسی بھی نظام کا ریاضی نمونہ اخذ کرتے وقت کئی ترسیلی مفروضے فرض کیے جاتے ہیں تاکہ حاصل مساوات ضرورت سے زیادہ پیچیدہ نہ ہوں۔ ہم سادہ تفرقی مساوات کی طرح جزوی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہوئے بھی ایسا کریں گے۔

موجودہ مسئلے میں ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

- (الف) تار کی کمیت فی اکائی لمبائی یکساں ہے (ہم جنسی تار)۔ تار مکمل طور پر چمکدار ہے اور مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے۔
- (ب) تار کو اتنا تان کر باندھا گیا ہے کہ اس میں تناؤ، ثقلی قوت سے بہت زیادہ ہو۔ یوں ثقلی قوت کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔
- (پ) تار سیدھی کھڑی سطح میں حرکت کرتا ہے۔ تار پر کوئی بھی نقطہ اپنے ساکن مقام سے بہت کم انحراف کرتا ہے لہذا ہر نقطے پر تار کی انحراف اور ڈھلوان کی حتمی قیمتیں قلیل ہوں گی۔

ہم توقع کر سکتے ہیں کہ یوں حاصل جزوی تفرقی مساوات کا حل $u(x, t)$ ، "غیر کامل" ہم جنسی تار جس میں ثقلی میدان سے بہت زیادہ تناؤ ہو کا صحیح نقش پیش کرے گا۔

مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر غور کرتے ہیں جس میں تناؤ T پایا جاتا ہے (شکل 13.1)۔ چونکہ مڑنے کے خلاف تار مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے لہذا ہر نقطے پر تار میں تناؤ اس نقطے پر تار کا مماسی ہو گا۔ فرض کریں کہ تار کے ٹکڑے کی سروں P اور Q پر تناؤ T_1 اور T_2 ہے۔ چونکہ تار افقی حرکت نہیں کرتا ہے لہذا اس ٹکڑے پر تناؤ کا کل افقی جزو صفر کے برابر ہو گا۔ یوں شکل 13.1 کو دیکھ کر

$$T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0$$

یا

$$(13.7) \quad T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{مستقل}$$

لکھا جاسکتا ہے یعنی ہر ایسے ٹکڑے پر بائیں اور دائیں رخ یکساں (مستقل T) تناؤ ہو گا۔ انتصابی رخ میں T_1 اور T_2 کے اجزاء $-T_1 \sin \alpha$ اور $T_2 \sin \beta$ ہیں جہاں اوپر رخ تناؤ کو مثبت تصور کیا گیا ہے۔ نیوٹن کی دوسری قانون کے تحت ان دو قوتوں کا مجموعہ تار کے ٹکڑے کی کمیت $\rho \Delta x$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا جہاں اسراع، x اور $x + \Delta x$ کے مابین کسی نقطے کی اسراع ہو گی۔ تار کی کمیت فی اکائی لمبائی ρ ہے جبکہ تار کے ٹکڑے کی لمبائی Δx ہے۔ یوں

$$(13.8) \quad T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ہو گا۔ اس کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(13.9) \quad \frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_2 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

آپ تسلی کر لیں کہ چونکہ مساوات 13.7 میں $T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T$ ہے لہذا مساوات 13.8 کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہوئے کہیں $T_2 \cos \beta$ ، کہیں $T_1 \cos \alpha$ اور کہیں T سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

اب $\tan \alpha$ اور $\tan \beta$ تار کی x اور $x + \Delta x$ پر مماس ہے یعنی

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \quad \text{اور} \quad \tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

جہاں جزوی تفرق اس لئے استعمال کیے گئے ہیں کہ u متغیر t کا بھی تابع ہے۔ یوں مساوات 13.9 کو Δx سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں Δx کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے

$$(13.10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو ایک ایک بعدی مساوات موج⁸ کہتے ہیں۔ مساوات 13.10 ہمارے مسئلے کی درکار جزوی تفرقی مساوات ہے جو ہم جنسی اور دو درجی ہے۔ مساوات میں مستقل $\frac{T}{\rho}$ کو c کی بجائے c^2 سے ظاہر کیا گیا ہے تاکہ واضح رہے کہ یہ مثبت مستقل ہے۔ اس مساوات کا حل اگلے حصے میں حاصل کیا جائے گا۔

13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ چلک دار تار کی ارتعاش کو جزوی تفرقی مساوات

$$(13.11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{مساوات موج}$$

بیان کرتی ہے جہاں $u(x, t)$ تار کی انحراف ہے۔ تار کی حرکت جاننے کی خاطر اس مساوات کا حل درکار ہو گا بلکہ ہمیں مساوات 13.11 کا ایسا حل $u(x, t)$ درکار ہے جو نظام پر لاگو شرائط کو بھی مطمئن کرے۔ چونکہ تار کے دونوں سر غیر تغیر پذیر ہیں لہذا تمام t کے لئے $x = 0$ اور $x = l$ پر سرحدی شرائط

$$(13.12) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

لاگو ہیں۔ تار کی حرکت ابتدائی انحراف (لمحہ $t = 0$ پر انحراف) اور ابتدائی رفتار (لمحہ $t = 0$ پر رفتار) پر منحصر ہوگی۔ ابتدائی انحراف کو $f(x)$ اور ابتدائی رفتار کو $g(x)$ سے ظاہر کرتے ہوئے ابتدائی شرائط⁹

$$(13.13) \quad u(x, 0) = f(x)$$

$$(13.14) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

⁸ one dimensional wave equation
⁹ initial conditions

لکھی جائیں گی۔ ہمیں اب مساوات 13.12 کا ایسا حل چاہیے جو سرحدی شرائط مساوات اور ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرے۔ ہم درج ذیل اقدام کے ذریعہ ایسا حل تلاش کریں گے۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے ہم جزوی تفرقی مساوات سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔

دوسرا قدم۔ ہم ان سادہ تفرقی مساوات کے ایسے حل تلاش کریں گے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔

تیسرا قدم۔ حاصل حل سے ایسے حل حاصل کیے جائیں گے جو ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتے ہوں۔

ان اقدام کی تفصیل درج ذیل ہے۔

پہلا قدم۔ ترکیب ضرب مساوات 13.11 کے حل دو عدد تفاعل کا حاصل ضرب

$$(13.15) \quad u(x, t) = F(x)G(t)$$

کی روپ میں دیتا ہے جہاں ہر ایک تفاعل صرف ایک متغیر x یا t کا تابع ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں اس ترکیب کے کئی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مساوات 13.15 کے تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

ملتا ہے جہاں (\cdot) سے مراد x کے ساتھ تفرق اور $(\ddot{\cdot})$ سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ انہیں مساوات 13.11 میں پر کر کے

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

دونوں اطراف کو $c^2 FG$ سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا دایاں ہاتھ صرف متغیر x پر منحصر ہے جبکہ اس کا بائیں ہاتھ صرف متغیر t پر منحصر ہے۔ اب t تبدیل کرنے سے صرف بائیں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن اس مساوات کے تحت دونوں اطراف برابر ہیں اور دایاں ہاتھ t تبدیل کرنے سے ہرگز تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ t تبدیل کرنے سے بائیں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اسی طرح x تبدیل کرنے سے صرف دایاں ہاتھ کا تبدیل ہونا ممکن ہے لیکن

دونوں اطراف برابر ہیں اور x کی تبدیلی ہے بایاں ہاتھ ہرگز تبدیل نہیں ہوتا ہے لہذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ یوں اس مساوات کے دونوں اطراف غیر تغیر پذیر ہیں لہذا انہیں مستقل k کے برابر لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

جس سے درج ذیل دو عدد مساوات علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہے جہاں k نا معلوم مستقل ہے۔

$$(13.16) \quad F'' - kF = 0$$

$$(13.17) \quad \ddot{G} - c^2 k G = 0$$

دوسرا قدم۔ ہم مساوات 13.16 اور مساوات 13.17 کے حل F اور G حاصل کرتے ہوئے ایسا $u = FG$ دریافت کرتے ہیں جو تمام t کے لئے سرحدی شرائط مساوات 13.12 کو مطمئن کرتا ہو یعنی:

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0$$

اب اگر درج بالا میں $G \equiv 0$ ہو تب $u \equiv 0$ ہو گا جس میں ہم کوئی دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہذا $G \neq 0$ ہو گا۔ یوں درج بالا سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(13.18) \quad \text{(الف)} \quad F(0) = 0, \quad \text{(ب)} \quad F(l) = 0$$

اگر مساوات 13.16 میں $k = 0$ ہو تب اس مساوات کا عمومی حل $F = ax + b$ ہو گا جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $a = 0$ ، $b = 0$ یعنی $F \equiv 0$ یا $u \equiv 0$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔ مثبت $k = \mu^2$ کے لئے مساوات 13.16 کا عمومی حل

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

ہے جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $A = 0$ ، $B = 0$ یعنی $F \equiv 0$ یا $u \equiv 0$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔ یوں ہمارے پاس منفی $k = -p^2$ لینا رہ جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.16 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$F'' + p^2 F = 0$$

اس کا عمومی حل

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

ہے جو مساوات 13.18-الف کی مدد سے

$$F(0) = A = 0$$

لہذا $F = B \sin px$ ہو گا جو مساوات 13.18-ب کے ساتھ مل کر

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

دیتی ہے۔ اب اگر $B = 0$ ہو تب $F \equiv 0$ یعنی $u \equiv 0$ ہو گا جو غیر دلچسپ حل ہے لہذا $B \neq 0$ ہے۔ اس طرح $\sin pl = 0$ ہو گا۔ ہم جانتے ہیں کہ $\sin n\pi = 0$ ہوتا ہے لہذا یوں درج ذیل ملتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

$$(13.19) \quad pl = n\pi \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l}$$

ہم $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے لامحدود تعداد کے حل $F(x) = F_n(x)$ یعنی

$$(13.20) \quad F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, \dots$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.18 میں دیے گئے سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ چونکہ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ہوتا ہے لہذا منفی عدد صحیح $n = -1, -2, \dots$ لینے سے یہی حل منفی علامت کے ساتھ دوبارہ ملتے ہیں۔

اب مساوات 13.19 کے تحت k کی قیمت صرف $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{l})^2$ ممکن ہے۔ k کی ان قیمتوں کے ساتھ مساوات 13.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

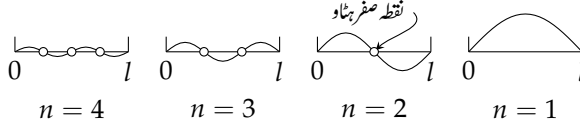
$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t$$

ہے۔ یوں تفاعل $u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t)$

$$(13.21) \quad u_n(x, t) = (B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, \dots)$$



شکل 13.2: تار کے قائمہ انداز اور نقطہ صفر ہٹاؤ۔

مساوات 13.17 کے ایسے حل ہیں جو مساوات 13.18 میں دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان تفاعل کو ارتعاش پذیر تار کے آنگنی تفاعل¹⁰ یا امتیازی تفاعل¹¹ کہتے ہیں جبکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ کی قیمتوں کو ارتعاش پذیر تار کے آنگنی اقدار¹² یا امتیازی اقدار¹³ کہتے ہیں۔ مزید $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ کا سلسلہ طیف¹⁴ کہلاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک u_n ایک مخصوص ہارمونی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے جس کی تعدد $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2l}$ چکر فی اکائی وقت ہے۔ اس حرکت کو تار کی n ویں قائمہ انداز¹⁵ کہتے ہیں۔ پہلا قائمہ انداز جس کا $n = 1$ ہو گا بنیادی انداز¹⁶ کہلاتا ہے جبکہ باقی n ویں ہارمونی انداز¹⁷ کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 13.21 میں

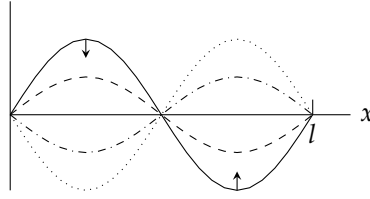
$$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \implies x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}l$$

ہے لہذا n ویں قائمہ انداز کے $n-1$ نقطہ صفر ہٹاؤ¹⁸ پائے جائیں گے۔ ان نقطوں پر تار ساکن رہتی ہے (شکل 13.2)۔

شکل 13.3 میں دوسرا قائمہ انداز مختلف لمحات t پر دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی لمحہ پر تار کی شکل سائن تفاعل کی ہو گی۔ جب تار کا بایاں آدھا حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت تار کا دایاں آدھا حصہ اوپر کی طرف حرکت کرے گا۔ اسی طرح جب بایاں حصہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت دایاں حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔ تار کا درمیانہ نقطہ حرکت نہیں کرتا ہے لہذا یہ نقطہ صفر ہٹاؤ ہے۔ باقی انداز بھی اسی طرح کی خاصیت رکھتے ہیں۔

تیسرا قدم۔ ظاہر ہے کہ ایک عدد حل $u_n(x, t)$ عموماً ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے۔ اب چونکہ مساوات 13.11 خطی اور ہم جنسی ہے لہذا بنیادی مسئلہ 13.1 کے تحت مساوات

- eigenfunctions¹⁰
- characteristic functions¹¹
- eigenvalues¹²
- characteristic values¹³
- spectrum¹⁴
- normal mode¹⁵
- fundamental mode¹⁶
- harmonics¹⁷
- node¹⁸



شکل 13.3: مختلف t پر دو سراقائمہ انداز

13.11 کی محدود تعداد کے حلوں u_n کا مجموعہ بھی مساوات 13.11 کا حل ہو گا۔ اس طرح ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم لامتناہی تسلسل

$$(13.22) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 13.22 اور ابتدائی شرط مساوات 13.13 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.23) \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.13 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x, 0)$ تقابل $f(x)$ کی فوریر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$(13.24) \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.22 کا t کے ساتھ تفرق لے کر اور ابتدائی شرط مساوات 13.14 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x) \end{aligned}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.14 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n^* اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $t = 0$ پر $\frac{\partial u}{\partial t}$ تقابل $g(x)$ کی فوریر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

اور چونکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ ہے لہذا

$$(13.25) \quad B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 13.24 اور مساوات 13.25 میں حاصل کیے گئے عددی سر کو مساوات 13.22 میں پر کرنے سے حاصل تسلسل $u(x, t)$ ، مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرے گا بشرطیکہ حاصل $u(x, t)$ مرتکز ہو اور اس کی x اور t کے ساتھ جزو در جزو دو درجی تفرق لینے سے حاصل تسلسل مرتکز ہو اور ان کے مجموعے بالترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہوں جو استمراری ہیں۔

اب تک مساوات 13.22 محض ریاضی حل کے طور پر سامنے آیا ہے۔ آئیں اس کی اصل حقیقت کو قائم کریں۔ ہم اپنی آسانی کی خاطر ابتدائی رفتار $g(x)$ صفر لیتے ہیں۔ یوں $B_n^* = 0$ ہوں گے لہذا مساوات 13.22 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$(13.26) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ہم ضمیمہ ب کا کلیہ 11. استعمال کرتے ہوئے

$$\cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{2} \left[\sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x - ct) \right\} + \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\} \right]$$

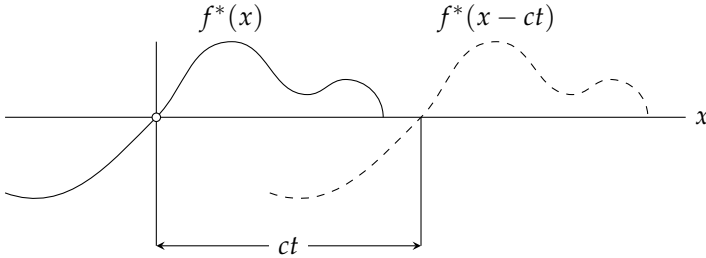
لکھ سکتے ہیں جس کو مساوات 13.26 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x - ct) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 13.23 میں x کی جگہ $x - ct$ اور $x + ct$ پر کرنے سے یہی دو تسلسل حاصل ہوتے ہیں لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(13.27) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]$$

جہاں f کی طاق دوری توسیع جس کا دوری عرصہ $2l$ ہو تفاعل f^* ہے (شکل 13.4)۔ چونکہ وقفہ $0 \leq x \leq l$ پر ابتدائی انحراف $f(x)$ استمراری ہے جبکہ $x = 0$ اور $x = l$ پر انحراف صفر ہے لہذا مساوات

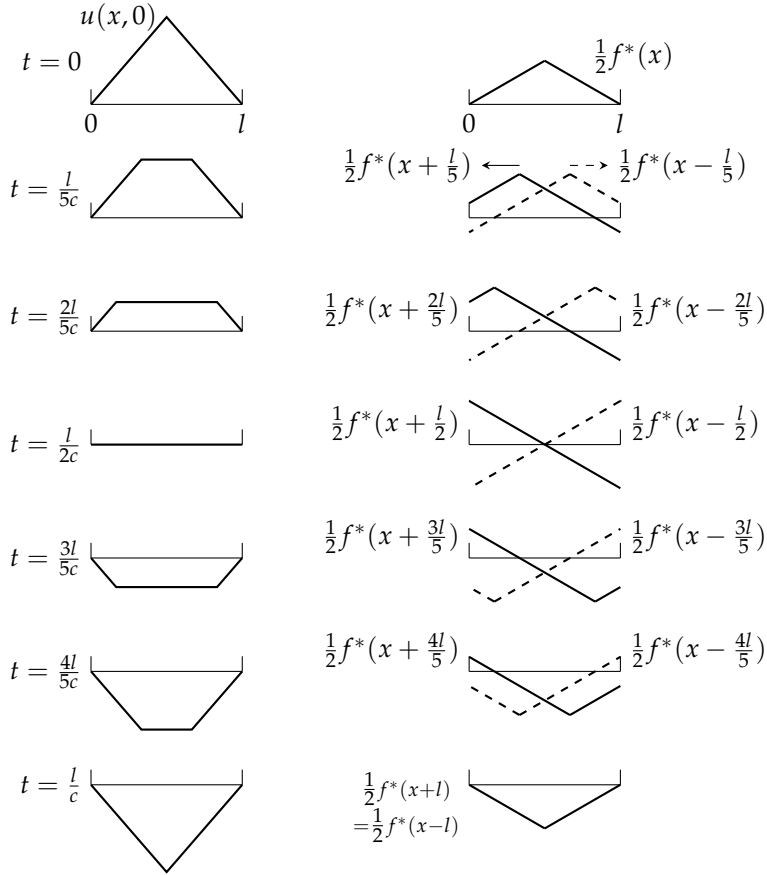
شکل 13.4: $f(x)$ کی طاق توسیع

شکل 13.5: مساوات 13.27 کی معنی

13.27 سے ظاہر ہے کہ $u(x, t)$ دونوں متغیرات x اور t کی تمام قیمتوں پر استمراری ہو گا۔ مساوات 13.27 کا تفرق لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 13.11 کا حل ہے بشرطیکہ وقفہ $0 < x < l$ پر $f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہو اور $x = 0$ اور $x = l$ پر اس کے یک طرفہ دو درجی تفرق پائے جاتے ہوں جن کی قیمت صفر کے برابر ہو۔ اس طرح یہ حقیقت قائم ہوتی ہے کہ ان شرائط پر پورا اترتا ہوا تسلسل $u(x, t)$ مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

اگر $f'(x)$ اور $f''(x)$ محض ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہوں، یا اگر وقفہ کے سروں پر یک طرفہ تفرقات غیر صفر ہوں تب ہر ایک t کے لئے محدود تعداد کی x قیمتوں پر مساوات 13.11 کے u کی دو درجی تفرقات غیر معین ہوں گے۔ ان نقطوں کے علاوہ باقی تمام نقطوں پر u مساوات موج کو مطمئن کرے گی لہذا ہم $u(x, t)$ کو وسیع معنوں میں مسئلے کا حل تصور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تکنیکی ابتدائی انحراف کی صورت میں حاصل حل اس نوعیت کا ہو گا۔

آئیں مساوات 13.27 کی طبعی معنی سمجھتے ہیں۔ جیسا شکل 13.5 میں دکھایا گیا ہے، $f^*(x)$ کی ترسیم کو ct اکائیاں دائیں منتقل کرنے سے $f^*(x - ct)$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $f^*(x - ct)$ ، $(c > 0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ دائیں جانب کو حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح $f^*(x + ct)$ ، $(c > 0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ بائیں جانب کو حرکت کرتی ہے اور $u(x, t)$ ان دونوں کا مجموعہ ہے۔



شکل 13.6: مثال 13.2 کا مختلف لمحات پر دائیں کو اور بائیں کو حرکت کرتے اجزاء اور ان کا مجموعہ حل $u(x, t)$

مثال 13.2: تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں تار کی ارتعاش مساوات موج 13.11 کا حل تکونی ابتدائی انحراف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

اور ابتدائی رفتار صفر $g(x) = 0$ کی صورت میں حاصل کریں۔
حل: چونکہ $g(x) \equiv 0$ ہے لہذا مساوات 13.26 میں $B_n^* = 0$ ہو گا جبکہ B_n کو صفحہ 919 پر مساوات 12.35 دے گی۔ یوں مساوات 13.26 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi c}{l} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} x \cos \frac{3\pi c}{l} t + \dots \right]$$

اس حل کی ترسیم کھینچنے کی خاطر ہم $u(x, 0) = f(x)$ سے شروع کرتے ہوئے مساوات 13.27 کی مدد لیتے ہیں۔ یوں شکل 13.6 حاصل ہوتی ہے۔
□

سوالات

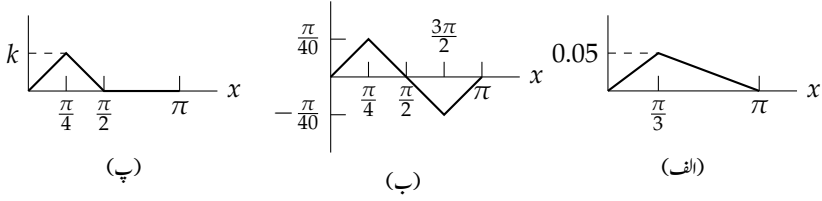
سوال 13.32 تا سوال 13.40 میں تار کی لمبائی $l = \pi$ اور $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$ ہے۔ تار کے سرے ٹھوس نقطوں کے ساتھ باندھے گئے ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ سوال میں دی گئی ہے۔ ارتعاش پذیر تار کا انحراف $u(x, t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.32: $0.02 \sin x$
جواب: $u = 0.02 \cos t \sin x$

سوال 13.33: $k \sin 2x$
جواب: $u = k \cos 2t \sin 2x$

سوال 13.34: $k(\sin x - \sin 2x)$
جواب: $u = k(\cos t \sin x - \cos 2t \sin 2x)$

سوال 13.35: شکل 13.7-الف
جواب: $\frac{9\sqrt{3}k}{2\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos t \sin x + \frac{1}{2^2} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{4^2} \cos 4t \sin 4x \dots \right)$



شکل 13.7: اشکال برائے سوالات 13.35، 13.36 اور 13.37

سوال 13.36: شکل 13.7-ب
جواب: $\frac{4}{5\pi} \left(\frac{1}{2^2} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{6^2} \cos 6t \sin 6x + \frac{1}{10^2} \cos 10t \sin 10x \cdots \right)$

سوال 13.37: شکل 13.7-پ
جواب: $\frac{4k}{\pi^2} \left[2(\sqrt{2} - 1) \cos t \sin x + \cos 2t \sin 2x - 2(\sqrt{2} - \frac{1}{9}) \cos 3t \sin 3x \cdots \right]$

سوال 13.38: $kx(x - \pi)$
جواب: $\frac{8k}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} \cos t \sin x - \frac{1}{3^2} \cos 3t \sin 3x - \frac{1}{5^2} \cos 5t \sin 5x \cdots \right)$

سوال 13.39:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ k(x - \pi)^2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $4k \left[\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos t \sin x - \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) \cos 3t \sin 3x \cdots \right]$

سوال 13.40:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -k(x - \pi)^2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $k \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right) \cos 2t \sin 2x + \frac{k\pi}{4} \cos 4t \sin 4x + k \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{27\pi} \right) \cos 6t \sin 6x \cdots$

سوال 13.41 تا سوال 13.43 میں $c^2 = 1$ ہے، تار کی لمبائی $l = \pi$ ہے اور تار کے سرے ٹھوس نقطوں سے بندھے ہیں۔ ابتدائی رفتار $g(x)$ اور ابتدائی انحراف $f(x)$ ہیں۔ ارتعاش پذیر تار کی انحراف $u(x, t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.41: $f = 0, \quad g = kx \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \quad g(x) = k(\pi - x) \quad (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi)$

جواب: $\frac{4k}{\pi} (\frac{1}{1^3} \sin t \sin x - \frac{1}{3^3} \sin 3t \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5t \sin 5x \cdots)$

سوال 13.42: $f = 0, \quad g = k \sin 3x$
جواب: $\frac{k}{3} \sin 3t \sin 3x$

سوال 13.43: $f = k \sin 2x, \quad g = -k \sin 2x$
جواب: $-\frac{k}{2} \sin 2t \sin 2x$

سوال 13.44: تناو T چارگنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ $c^2 = \frac{T}{\rho}$ ہے لہذا T چارگنا کرنے سے c دگنا ہو گا جس سے بنیادی انداز کی تعدد دگنی ہو گی۔

سوال 13.45: تار کی لمبائی چارگنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: بنیادی انداز کی تعدد چارگنا کم ہو گی۔

سوال 13.46 تا سوال 13.53 میں دیے گئے جزوی تفرقی مساوات کو علیحدگی متغیرات کے طریقہ سے حل کریں۔

سوال 13.46: $u_x + u_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x+y)}$

سوال 13.47: $u_x - u_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x-y)}$

سوال 13.48: $xu_x - yu_y = 0$
جواب: $u = kxy$

سوال 13.49: $u_x - yu_y = 0$
جواب: $u = cy^k e^{kx}$

سوال 13.50: $yu_x - xu_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x^2+y^2)}$

سوال 13.51: $u_x + u_y = 2(x + y)u$
 جواب: $u = ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$

سوال 13.52: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
 جواب: $u = (A \cos kx + B \sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$

سوال 13.53: $u_{xy} - u = 0$
 جواب: $u = ce^{x+y}$

سوال 13.54 تا سوال 13.58 چمکدار تار کی جبری ارتعاش پر مبنی ہیں۔

سوال 13.54: چمک دار تار کی جبری ارتعاش کا الجبرائی نمونہ درج ذیل جزوی تفرقی مساوات ہے جہاں اکائی لمبائی پر بیرونی قوت $P(x, t)$ تار کے عمودی عمل کرتا ہے۔

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho} \quad (13.28)$$

دیے گئے مسئلے سے اس جزوی تفرقی مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 13.55: سائن نما بیرونی قوت $P = A\rho \sin \omega t$ کی صورت میں درج ذیل ثابت کریں

$$\frac{P}{\rho} = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

جہاں $k_n(t) = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t$ ہے۔ یوں جفت n کی صورت میں $k_n = 0$ اور طاق n کی صورت میں $k_n = \frac{4A}{n\pi} \sin \omega t$ ہو گا۔ مزید ثابت کریں کہ مساوات 13.11 میں

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

سوال 13.56: ثابت کریں کہ سوال 13.55 کے $\frac{P}{\rho}$ اور u کو مساوات 13.28 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ثابت کریں کہ $\lambda_n^2 \neq \omega^2$ کی صورت میں اس کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t + \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

سوال 13.57: ایسے B_n اور B_n^* دریافت کریں کہ u ابتدائی شرائط $u(x, 0) = f(x)$ اور $u_t(x, 0) = 0$ کو مطمئن کرے (سوال 13.56)۔

سوال 13.58: ثابت کریں کہ گمک $\lambda_n = \omega$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \sin \omega t - \frac{A}{n\pi\omega} (1 - \cos n\pi) t \cos \omega t$$

13.4 مساوات موج کا دالو بیخ حل

گزشتہ حصہ میں مساوات موج

$$(13.29) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

کا حل مساوات 13.27 حاصل کیا گیا۔ یہی حل نہایت آسانی سے مساوات 13.29 کا موزوں بدل لیتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں نئے غیر تابع متغیرات¹⁹

$$(13.30) \quad v = x + ct, \quad z = x - ct$$

متعارف کرتے ہوئے u کو متغیرات v اور z کا تفاعل لکھتے ہیں۔ اس طرح مساوات 13.29 میں تفرقات اب v اور z کے لحاظ سے زنجیری ترکیب (حصہ 10.7) کی مدد سے لکھے جائیں گے۔ جزوی تفرق کو زیر نوشت سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 13.30 سے $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ لکھے جائیں گے۔ ہم اپنی آسانی کے لئے ہم v اور z متغیرات کے تفاعل کو بھی u سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

¹⁹ یہاں بتانا چلوں کہ جزوی تفرقی مساوات کا عمومی نظریہ اس طرح کے متبادل حاصل کرنے کی قدم باقدم ترکیب پیش کرتی ہے۔

دائیں ہاتھ پر زنجیری ترکیب لاگو کرتے ہوئے اور $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ پر کرتے ہوئے

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

ملتا ہے۔ مساوات 13.29 کی دوسری تفرق کو بھی اسی طرح لکھتے ہیں۔

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

ان نتائج کو مساوات 13.29 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(13.31) \quad u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

آپ نے دیکھا کہ نئے متغیرات متعارف کرنے سے حاصل مساوات 13.31 نہایت آسانی سے دو مرتبہ مکمل لینے سے حل ہو سکتی ہے۔ ایک مرتبہ z کے ساتھ مکمل لینے سے

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

حاصل ہو گا جہاں نا معلوم تفاعل $h(v)$ متغیر v کے تابع ہو سکتا ہے۔ اس کا مکمل v کے ساتھ لیتے ہیں

$$u = \int h(v) dv + \psi(z)$$

جہاں $\psi(z)$ متغیر z کا نا معلوم تفاعل ہے۔ درج بالا میں مکمل کا حاصل از خود v کا تفاعل ہو گا جس کو نا معلوم تفاعل $\phi(v)$ لکھتے ہوئے مساوات 13.31 کی مدد سے

$$(13.32) \quad u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو موج کی مساوات 13.29 کا دالومبیغ حل²⁰ کہتے ہیں۔

تفاعل ϕ اور ψ کو ابتدائی معلومات سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ آئیں صفر ابتدائی رفتار اور ابتدائی انحراف $u(x, 0) = f(x)$ کے لئے ان تفاعل کو حاصل کریں۔

مساوات 13.32 کا تفرق لیتے ہیں

$$(13.33) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct)$$

²⁰d'Alembert solution

²¹فرانسیسی ریاضی دان ڈان ڈانیس ڈالومبیغ [1717-1783]

جہاں (') سے مراد قوسین میں بند پوری دلیل $x + ct$ اور $x - ct$ کے لحاظ سے بالترتیب تفرق ہے۔ مساوات 13.32، مساوات 13.33 اور ابتدائی معلومات سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0$$

آخری مساوات یعنی $\psi' = \phi'$ سے $\psi = \phi + k$ حاصل ہوتا ہے جس کو پہلی مساوات کے ساتھ ملا کر $2\phi + k = f$ یا $\phi = \frac{f-k}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ ان حاصل کردہ ϕ اور ψ کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.32 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(13.34) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)]$$

جو عین مساوات 13.27 ہے۔ آپ یہاں تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات 13.27 پر لاگو ابتدائی سرحدی شرائط مساوات 13.12 کی بنا f طاق ہوگا اور اس کا دوری عرصہ $2l$ ہوگا۔

ہمارے اس نتیجہ کے تحت دو عدد ابتدائی شرائط اور سرحدی شرائط مل کر مساوات موج کا حل یکتا طور پر تعین کرتی ہیں۔

سوالات

سوال 13.59: مساوات 13.30 دیکھ کر x اور t کو v اور z کی صورت میں لکھتے ہوئے مساوات 13.31 سے مساوات 13.29 حاصل کریں۔

سوال 13.60 تا سوال 13.65 میں مساوات 13.34 استعمال کرتے ہوئے شکل 13.6 کی طرح مختلف لمحات پر تار کی انحراف $u(x, t)$ کی ترسیم کھینچیں۔ تار کی لمبائی اکائی (1) ہے اور اس کے دونوں سرے ہل نہیں سکتے ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر ہے جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ ہے۔ k کی کوئی بھی چھوٹی قیمت مثلاً $k = 0.01$ لیں۔

$$\text{سوال 13.60: } f(x) = k \sin 2\pi x$$

$$\text{سوال 13.61: } f(x) = kx(1 - x)$$

$$\text{سوال 13.62: } f(x) = k(x - x^3)$$

سوال 13.63: $f(x) = k(x^2 - x^4)$

سوال 13.64: $f(x) = k(x^3 - x^5)$

سوال 13.65: $f(x) = k \sin^2 \pi x$

سوال 13.66 تا سوال 13.70 میں دیے گئے متبادل استعمال کرتے ہوئے جزوی تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 13.66: $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x, z = xy)$

سوال 13.67: $u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y)$
جواب: $u = f_1(x) + f_2(x + y)$

سوال 13.68: $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x - y)$

سوال 13.69: $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y)$
جواب: $u = xf_1(x + y) + f_2(x + y)$

سوال 13.70: $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y, z = 2x - y)$

سوال 13.71: خطی جزوی تفرقی مساوات کی اقسام
درج ذیل طرز کی مساوات

(13.35) $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$

کو $AC - B^2 > 0$ کی صورت میں بیضوی²²، $AC - B^2 = 0$ کی صورت میں قطع مکانی²³ اور $AC - B^2 < 0$ کی صورت میں قطع زائد²⁴ کہتے ہیں۔ یہاں A ، B اور C از خود x اور y کے تفاعل ہو سکتے ہیں۔ مساوات 13.35 سطح xy کی مختلف حصوں میں مختلف قسم کا ہو سکتا ہے۔ تصدیق کریں کہ

لاپلاسی مساوات $u_{xx} + u_{yy} = 0$ بیضوی ہے

حراری مساوات $u_t = c^2 u_{xx}$ قطع مکانی ہے

جبکہ مساوات موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ قطع زائد ہے۔

elliptic²²
parabolic²³
hyperbolic²⁴

اس کے برعکس $0 = u_{yy} + y u_{xx}$ بالائی نصف سطح پر بیضوی، x محور پر قطع مکانی اور نیچے نصف سطح پر قطع زائد ہے۔

سوال 13.72: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع زائد ہو تب $v = \phi(x, y)$ اور $z = \psi(x, y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $R^*(v, z, u, u_v, u_z) = u_{vz}$ صورت میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں $\phi = c_1$ اور $\psi = c_2$ (مستقل ہیں) مساوات $0 = Ay'^2 - 2By' + C$ کے حل $y = y(x)$ ہیں۔ تصدیق کریں کہ مساوات 13.29 کی صورت میں درج ذیل تبادل حاصل ہوں گے۔

$$\phi = x + ct, \quad \psi = x - ct$$

جواب: مساوات موج کو $0 = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ لکھ کر $A = 1$ ، $B = 0$ اور $C = -c^2$ ملتے ہیں۔ چونکہ ہمارے متغیرات t اور x ہیں لہذا مساوات 13.35 کو $0 = 1u_{tt} + 0 - c^2 u_{xx}$ لکھ سکتے ہیں۔ یوں ہمیں $0 = A(\frac{dx}{dt})^2 - 2B(\frac{dx}{dt}) - c^2$ یعنی $0 = (\frac{dx}{dt})^2 - c^2$ یا $\frac{dx}{dt} = \mp c$ کے حل درکار ہیں جو $x = \mp ct + k$ یعنی $x \mp ct = k$ ہیں۔ یوں $\phi = x + ct$ اور $\psi = x - ct$ ملتے ہیں۔

سوال 13.73: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع مکانی ہو تب $v = x$ اور $z = \psi(x, y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $R^*(v, z, u, u_v, u_z) = u_{vv}$ صورت میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں ψ حاصل کرنے کی ترکیب سوال 13.72 میں دی گئی ہے۔ اس حقیقت کو سوال 13.68 کی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔
جواب: $0 = (y' - 1)^2 - 2y' + 1 = y'^2 - 2y' + 1$ سے $y = x + c$ یا $\psi(x, y) = x - y$ ملتا ہے۔
اور $v = x$ اور $z = x - y$ ہیں۔

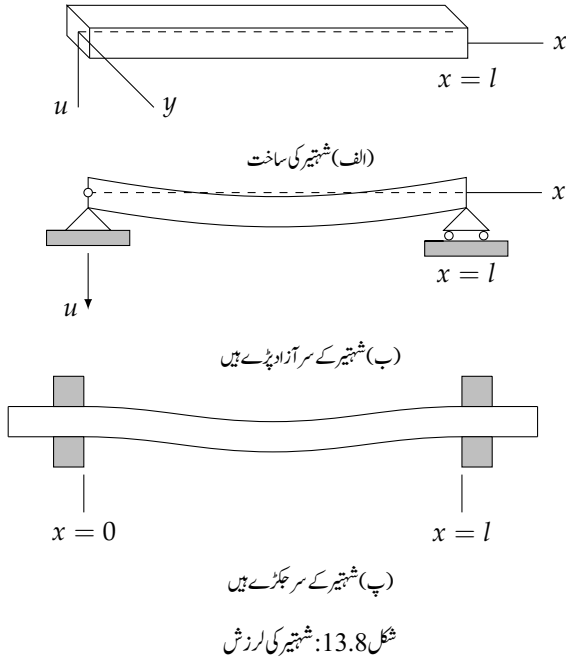
سوال 13.74 تا سوال 13.78 شہتیر کی لرزش میں مبنی ہیں۔

سوال 13.74: افقی شہتیر (شکل 13.8-الف) کی انتصابی لرزش درج ذیل جزوی تفرقی مساوات دیتی ہے

$$(13.36) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad c^2 = \frac{EI}{\rho A}$$

جہاں E ینگ مقیاس پک، محور y کے لحاظ سے I جمودی معیار اثر، ρ کثافت اور A رقبہ عمودی تراش ہیں۔ مساوات 13.36 میں $u = F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے علیحدگی متغیرات سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{F^{(4)}}{F} &= -\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \beta^4 = \text{مستقل}, \\ F(x) &= A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x, \\ G(t) &= a \cos c\beta^2 t + b \sin c\beta^2 t \end{aligned}$$



سوال 13.75: ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے مساوات 13.36 کے وہ حل $u_n = F_n(x)G_n(t)$ دریافت کریں جو درج ذیل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں (شکل 13.8-ب)۔

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{شہتیر کے دونوں سر دیوار پر آزاد رکھے گئے ہیں}$$

$$u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0 \quad \text{یوں سروں پر صفر معیار اثر لہذا صفر گولائی ہوگی}$$

جواب:

$$F_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad G_n = a_n \cos \frac{cn^2 \pi^2 t}{l^2}$$

سوال 13.76: مساوات 13.36 کا وہ حل جو سوال 13.75 کے شرائط کے ساتھ ابتدائی انحراف $u(x, 0) = f(x) = x(l - x)$ کو مطمئن کرتا ہو حاصل کریں۔

سوال 13.77: شہتیر کے دونوں سروں سے جکڑنے سے کیا ابتدائی شرائط پیدا ہوں گے (شکل 13.8-پ)؟

جواب: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0$

سوال 13.78: تصدیق کریں کہ سوال 13.74 میں حاصل $F(x)$ سوال 13.77 میں دی گئی شرائط کو اس صورت مطمئن کرتا ہے جب βl درج ذیل مساوات کے جذر ہوں۔

$$\cosh \beta l \cos \beta l = 1 \quad (13.37)$$

مساوات 13.37 کے چند حل کا تخمینہ لگائیں۔

13.5 یک بعدی بہاؤ حرارت

ہم جنسی مادہ میں حرارت کی بہاؤ حراری مساوات (حصہ 11.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

دیتی ہے جہاں $u(x, y, z, t)$ جسم کا درجہ حرارت، K جسم کی حراری موصلیت، σ جسم کی مخصوص حراری استعداد اور ρ جسم کے مادہ کی کثافت ہے۔ $\nabla^2 u$ درجہ حرارت u کا لاپلاسی ہے جو کارتیسی نظام کی محدود x ، y ، z کے لحاظ سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

آئیں ایک لمبی سلاخ یا تار جو x محور پر رکھی گئی ہو میں درجہ حرارت پر غور کرتے ہیں (شکل 13.9)۔ یہ سلاخ ہم جنسی مادہ سے بنی ہے اور اس کا رقبہ عمودی تراش یکساں ہے۔ اس سلاخ کے اطراف کو مکمل طور پر غیر موصل سے گھیر کر عاجز شدہ کیا گیا ہے لہذا سلاخ میں حرارت کی بہاؤ صرف لمبائی کے رخ ممکن ہے۔ اس طرح u صرف x اور t پر منحصر ہو گا لہذا حراری مساوات درج ذیل یک بعدی حراری مساوات²⁵ کی صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (13.38)$$

ہم مساوات 13.38 کو کئی اہم سرحدی شرائط اور ابتدائی شرائط کے لئے حل کرتے ہیں۔ ہم یک بعدی حراری مساوات کو مساوات موج کی طرح حل کرتے ہوئے دیکھیں گے کہ اس کا حل مکمل طور پر مساوات موج کے حل سے مختلف



شکل 13.9: لمبی سلاخ

ہو گا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ حراری مساوات میں $\frac{\partial u}{\partial t}$ جبکہ مساوات موج میں $\frac{\partial u}{\partial t^2}$ پایا جاتا ہے۔ (یوں سوال 13.71 میں جزوی تفرقی مساوات کی درجہ بندی یقیناً نہایت اہمیت کے حامل ہے۔)

آئیں پہلے اس صورت کو دیکھیں جہاں سلاخ کے سر $x = 0$ اور $x = l$ صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہوں۔ اس طرح سرحدی شرائط تمام t کے لئے

$$(13.39) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

ہوں گے جو ہو بہو مساوات 13.12 کی طرح ہیں۔ فرض کریں کہ سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ یوں ابتدائی شرط

$$(13.40) \quad u(x, 0) = f(x)$$

ہو گی۔ ہم مساوات 13.38 کا ایسا حل $u(x, t)$ دریافت کرتے ہیں جو مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

پہلا قدم۔ ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.38 کا ایسا حل حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.39 کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں درج ذیل سے شروع کرتے ہیں۔

$$(13.41) \quad u(x, t) = F(x)G(t)$$

مساوات 13.41 اور اس کے تفرق کو مساوات 13.38 میں پر کرتے ہوئے

$$FG = c^2 F''G$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $(')$ سے مراد x کے ساتھ تفرق اور (\cdot) سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو $c^2 FG$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(13.42) \quad \frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا بائیں ہاتھ صرف t اور دایاں ہاتھ صرف x پر منحصر ہے لہذا حصہ 13.3 کی طرح ہم اخذ کرتے ہیں کہ مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کسی مستقل مثلاً k کے برابر ہوں گے۔ آپ خود تسلی کر سکتے ہیں کہ

$k \geq 0$ سے حاصل حل $u = FG$ جو مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا ہو $u \equiv 0$ ہے (جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے ہیں)۔ اس طرح مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کو منفی $k = -p^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$(13.43) \quad F'' + p^2 F = 0$$

$$(13.44) \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

دوسرا قدم۔ مساوات 13.43 کا عمومی حل

$$(13.45) \quad F(x) = A \cos px + B \sin px$$

ہے لہذا مساوات 13.39 کے تحت

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0$$

ہو گا۔ اب $G(t) \equiv 0$ کی صورت میں $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہذا ہم $F(0) = 0$ اور $F(l) = 0$ چنتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں مساوات 13.45 سے $F(0) = A = 0$ اور

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

ملتے ہیں جہاں $B = 0$ لینے سے $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہذا $B \neq 0$ اور

$$\sin px = 0 \implies p = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ہوں گے۔ اس طرح $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات 13.42 کو مطمئن کرنے والا مساوات 13.43 کا درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

یہاں بھی حصہ 13.3 کی طرح $n = -1, -2, \dots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے۔

ہم اب مساوات 13.44 پر غور کرتے ہیں جو $p = \frac{n\pi}{l}$ کی صورت میں درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

اس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

ہے جہاں B_n مستقل ہے۔ اس طرح مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا مساوات 13.38 کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$(13.46) \quad u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو مساوات 13.40 کو بھی مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں

$$(13.47) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \quad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \right)$$

جو مساوات 13.40 کے ساتھ مل کر

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

دیتی ہے۔ یوں اگر مساوات 13.47 نے مساوات 13.40 کو مطمئن کرنا ہو تب B_n یوں منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x, 0)$ تقابل $f(x)$ کی طاق دوری توسیع کی تسلسل یعنی فوریئر سائن تسلسل ہو جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے (مساوات 12.34)۔

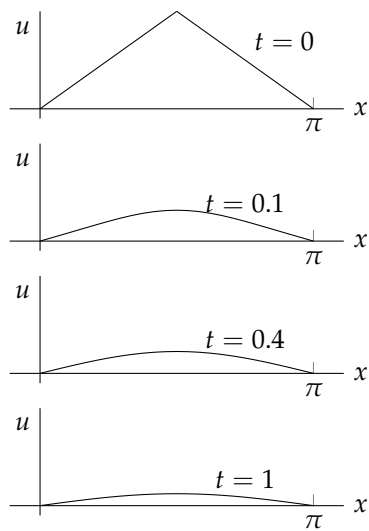
$$(13.48) \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ وقفہ $0 \leq x \leq l$ پر تقابل $f(x)$ ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہے اور اس وقفہ کے تمام اندرونی نقطوں پر اس کے یک طرفہ تفرق (شکل 12.4) پائے جاتے ہیں۔ ان شرائط کے ساتھ مساوات 13.47 میں دی گیا تسلسل، جس کے عددی سر مساوات 13.48 دیتی ہے، ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔

حاصل حل میں قوت نمائی جزو کی بنا جیسے جیسے t لامتناہی کے قریب تر پہنچے مساوات 13.47 کے تمام ارکان ویسے ویسے صفر کے قریب تر پہنچتے ہیں۔ تنزل کی شرح n پر منحصر ہو گی۔

مثال 13.3: ابتدائی درجہ حرارت

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ l - x & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$



شکل 13.10: مختلف لمحات پر مثال 13.3 کا حل

اور $l = \pi$ کی صورت میں مساوات 13.48 سے

$$(13.49) \quad B_n = \frac{2}{l} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right)$$

ملتا ہے جو طاق n کی صورت میں $B_n = 0$ اور جفت n کی صورت میں

$$B_n = \frac{4}{n^2\pi} \quad (n = 1, 5, 9, \dots)$$

$$B_n = -\frac{4}{n^2\pi} \quad (n = 3, 7, 11, \dots)$$

دیتا ہے۔ یوں حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 13.10 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x e^{-c^2 t} - \frac{1}{9} \sin 3x e^{-9c^2 t} + \dots \right]$$

□

سوالات

سوال 13.79: شکل 13.10 کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔ دونوں میں کیا اہم فرق پایا جاتا ہے۔
جواب: شکل 13.10 غیر ارتعاشی ہے جبکہ مساوات موج کا حل ارتعاشی ہے

سوال 13.80: مساوات 13.46 میں کسی مخصوص n کے لئے K ، σ اور ρ کا تنزل پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟
جواب: K بڑھنے سے تنزل بڑھتی ہے جبکہ σ اور ρ کے بڑھنے سے تنزل گھٹتی ہے۔

سوال 13.81: u_1 ، u_2 اور u_3 کا ترسیم $B_n = 1$ ، $c = 1$ اور $l = \pi$ لیتے ہوئے $t = 0$ ، $t = 1$ اور $t = 2$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.82: ایک سلاخ جس کے اطراف مکمل طور پر عاجز شدہ ہیں کے سر برقرار $u(0, t) = U_1$ اور $u(0, l) = U_2$ پر رکھے گئے ہیں۔ سلاخ کی لمبائی l ہے۔ بہت دیر بعد (یعنی $t \rightarrow \infty$ پر) سلاخ میں درجہ حرارت $u_I(x)$ دریافت کریں۔
جواب: $u_I = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l}$ جہاں $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.83 تا سوال 13.88 میں لوہے کی سلاخ کا درجہ حرارت $u(x, t)$ دریافت کریں۔ سلاخ کی لمبائی $L = 1\text{ m}$ ہے جبکہ لوہے کے مستقل $K = 73\text{ W m}^{-1}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ، $\sigma = 444\text{ J kg}^{-1}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ اور $\rho = 7860\text{ kg/m}^3$ ہیں۔ سلاخ کا رقبہ عمودی تراش 1 cm^2 ہے جبکہ اس کے سر 0°C پر برقرار رکھے گئے ہیں۔ ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ سلاخ کے اطراف عاجز شدہ ہیں۔

سوال 13.83:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$u = \frac{4}{\pi^2} (e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{1}{9} e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x + \dots) \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$\text{سوال 13.84: } f(x) = \sin \pi x \quad u = e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

سوال 13.85:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$u = \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^3}\right)e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + \left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{\pi^3}\right)e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x(L-x) \quad \text{سوال 13.86:}$$

$$u = \frac{8}{\pi^3}(e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x + \dots) \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x(L-x^2) \quad \text{سوال 13.87:}$$

$$u = \frac{12}{\pi^3}e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{3}{2\pi^3}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x \sin \pi x \quad \text{سوال 13.88:}$$

$$u = \frac{1}{2}e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{16}{9\pi^2}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

سوال 13.89: ایک سلاخ جس کی لمبائی L ہے ہر طرف سے (بشمول دونوں سر) عاجز شدہ ہے۔ ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ طبعی معلومات: سلاخ کے سر سے حراری توانائی کا اخراج سر پر $\frac{\partial u}{\partial x}$ کے راست تناسب ہو گا۔ تصدیق کریں کہ دی گئی معلومات درج ذیل کے مترادف ہے۔

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جہاں A_0 اور A_n مساوات 12.32 سے درج ذیل ہیں۔

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

سوال 13.90: سوال 13.89 میں $t \rightarrow \infty$ پر $u \rightarrow A_0$ ملتا ہے۔ کیا یہ آپ کے توقع کے مطابق ہے؟

سوال 13.91 تا سوال 13.95 کو سوال 13.89 میں دی گئی صورت حال کے لئے حل کریں جہاں $l = \pi$ اور $c = 1$ ہیں۔

سوال 13.91: $f(x) = 1$
جواب: $u(x, t) = 1$

سوال 13.92: $f(x) = x$
جواب: $u = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(e^{-t} \cos x + \frac{1}{9}e^{-9t} \cos 3x + \frac{1}{25}e^{-25t} \cos 5x \dots)$

سوال 13.93: $f(x) = x^2$
جواب: $u = \frac{\pi^2}{3} - 4(e^{-t} \cos x - \frac{1}{4}e^{-4t} \cos 2x + \frac{1}{9}e^{-9t} \cos 3x \dots)$

سوال 13.94:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $u = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}(e^{-4t} \cos 2x + \frac{1}{9}e^{-36t} \cos 6x + \frac{1}{25}e^{-100t} \cos 10x \dots)$

سوال 13.95:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -1 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $u = \frac{4}{\pi}(e^{-t} \cos x - \frac{1}{3}e^{-9t} \cos 3x + \frac{1}{5}e^{-25t} \cos 5x \dots)$

سوال 13.96: فرض کریں کہ سوال 13.82 میں ابتدائی درجہ حرارت $u(x, 0) = f(x)$ ہے۔ ثابت کریں کہ کسی بھی لمحے پر سلاخ میں درجہ حرارت $u(x, y) = u_I(x) + u_{II}(x, t)$ ہوگی جہاں u_I پہلی کی طرح ہے جبکہ u_{II} درج ذیل ہے

$$u_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

جہاں B_n درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - u_I(x)] \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{n\pi} [(-1)^n U_2 - U_1] \end{aligned}$$

13.6 لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

ہم اطراف سے عاجز شدہ ایسی سلاخ جو دونوں جانب لامتناہی تک لمبی ہو کی صورت میں حراری مساوات

$$(13.50) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

پر غور کریں گے۔ ایسی صورت میں ہمارے پاس کوئی سرحدی شرط نہیں ہے جبکہ ابتدائی معلومات درج ذیل ہے۔

$$(13.51) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

اس مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.50 میں $u(x, t) = F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$(13.52) \quad F'' + p^2 F = 0$$

$$(13.53) \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

جن کا موازنہ مساوات 13.43 اور مساوات 13.44 کے ساتھ کرتے ہوئے درج ذیل حل لکھے جاسکتے ہیں

$$F(x) = A \cos px + B \sin px \quad \text{اور} \quad G(t) = e^{-c^2 p^2 t}$$

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔ اس طرح مساوات 13.50 کا حل

$$(13.54) \quad u(x, t; p) = FG = (A \cos px + B \sin px)e^{-c^2 p^2 t}$$

ہو گا۔ [گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی علیحدگی کا مستقل k منفی لینا ہو گا یعنی $k = -p^2$ چونکہ مثبت k کی صورت میں مساوات 13.54 میں مسلسل بڑھتی قوت نمائی تفاعل پیدا ہوتا ہے جس کا کوئی طبعی مطلب ممکن نہیں ہے۔]

مساوات 13.54 کی تفاعل میں p کی قیمتوں کو کسی مستقل عدد کا ضربی لے کر ان تفاعل کی تسلسل لکھی جاسکتی ہے لیکن ایسی تسلسل لمحہ $t = 0$ پر x کے لحاظ سے دوری ہو گی لیکن $f(x)$ غیر دوری ہے۔ یوں فطری بات ہے کہ ہم فوریزر تسلسل کی بجائے فوریزر کھل کی طرف رجحان کریں۔

چونکہ مساوات 13.54 میں A اور B اختیاری مستقل ہیں لہذا ہم انہیں p کے تفاعل $A = A(p)$ اور $B = B(p)$ تصور کر سکتے ہیں۔ چونکہ حراری مساوات خطی اور ہم جنسی ہے لہذا

$$(13.55) \quad u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t; p) dp = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \sin px] e^{-c^2 p^2 t} dp$$

مساوات 13.50 کا حل ہو گا بشرطیکہ یہ مکمل موجود ہو اور یہ دو مرتبہ x کے ساتھ اور ایک مرتبہ t کے ساتھ قابل تفرق ہو۔

مساوات 13.55 اور ابتدائی معلومات مساوات 13.51 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.56) \quad u(x, 0) = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \sin px] dp = f(x)$$

مساوات 12.69 اور مساوات 12.70 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(13.57) \quad A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos pv \, dv, \quad B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \sin pv \, dv$$

صفحہ 952 پر مساوات 12.82 کے تحت اس مکمل کو

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(px - pv) \, dv \right] dp$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 13.55 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(px - pv) e^{-c^2 p^2 t} \, dv \right] dp$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس دوہرا مکمل کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے ہم اس کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(13.58) \quad u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \left[\int_0^\infty e^{-c^2 p^2 t} \cos(px - pv) \, dp \right] dv$$

اندرونی مکمل کو درج ذیل کلیہ کی مدد سے حل کیا جاسکتا ہے۔

$$(13.59) \quad \int_0^\infty e^{-s^2} \cos 2bs \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

مساوات 13.59 میں نیا متغیر p متعارف کرتے ہوئے $s = cp\sqrt{t}$ لکھ کر اور

$$b = \frac{x-v}{2c\sqrt{t}}$$

لیتے ہوئے مساوات 13.59 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\int_0^\infty e^{-c^2 p^2 t} \cos(px - pv) dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}}$$

جس کو مساوات 13.58 میں پر کرتے ہوئے

$$(13.60) \quad u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} dv$$

ملتا ہے۔ آخر میں ہم مکمل کا متغیر $z = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ متعارف کرتے ہوئے

$$(13.61) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} dz$$

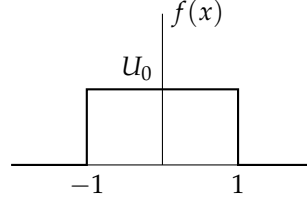
حاصل کرتے ہیں۔ تمام x کے لئے محدود $f(x)$ اور ہر محدود وقفہ پر قابل مکمل $f(x)$ کی صورت میں یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مساوات 13.60 اور مساوات 13.61 دونوں مساوات 13.50 اور مساوات 13.51 کو مطمئن کرتے ہیں لہذا یہ موجودہ مسئلے کا حل ہیں۔

مثال 13.4: لانتناہی لمبائی کی سلاخ میں درجہ حرارت
لانتناہی لمبائی کی سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت درج ذیل ہے (شکل 13.4)۔

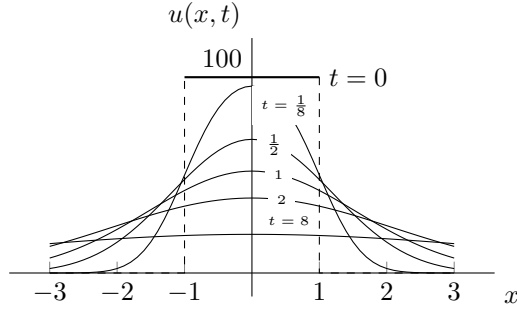
$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{مستقل} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

مساوات 13.60 سے

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} dv$$



شکل 13.11: ابتدائی درجہ حرارت (مثال 13.4)

شکل 13.12: حل $u(x, t)$ برائے مثال 13.4

لکھتے ہیں۔ تکمیل کا نیا متغیرہ $z = \frac{x-vt}{2c\sqrt{t}}$ استعمال کرتے ہوئے -1 تا 1 پر v کا تکمیل $\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}$ تا $\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}$ پر z کے تکمیل میں تبدیل ہو گا یعنی؛

$$(13.62) \quad u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \quad (z > 0)$$

اس تکمیل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے البتہ اس کو تفاعل خلیہ²⁶ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 13.12 میں $u(x, t)$ کو $U_0 = 100^\circ\text{C}$ ، $c^2 = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ کے لئے لمحات $t = \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1, 2, 8$ پر دکھایا گیا ہے۔

□

سوالات

سوال 13.97: نقطہ $x = 0.5, 1, 1.5$ پر مثال 13.4 میں $U_0 = 100^\circ\text{C}$ اور $c^2 = 1\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$ لے کر حاصل کردہ درجہ حرارت $u(x, t)$ کی ترسیم مختلف لمحات پر کھینچیں۔ کیا جوابات آپ کی سوچ کے مطابق ہیں؟

تفاعل خلل درج ذیل مکمل کو کہتے ہیں

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw$$

جو انجینئری میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اس سے واقفیت پیدا کرنے کی خاطر سوال 13.98 تا سوال 13.105 حل کریں۔

سوال 13.98: تصدیق کریں کہ تفاعل خلل طاق ہے۔

سوال 13.99: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_a^b e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a), \quad \int_{-b}^b e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} b$$

سوال 13.100: قلم و کاغذ سے مکمل e^{-w^2} کی قیمتوں کا جدول بناتے ہوئے اس کی ترسیم کھینچیں جو قوس جرس²⁷ کہلاتی ہے۔

سوال 13.101: قوس جرس (جس کو آپ نے سوال 13.100 میں حاصل کیا) کے نیچے رقبہ معلوم کرتے ہوئے

$\operatorname{erf} x$ کا جدول $x = 0, 0.2, 0.4, \dots, 1, 1.5, 2$ کے لئے حاصل کریں۔ قوس جرس پر افقی اور انتصابی لکیریں کھینچ کر قوس کے نیچے مکعب گن کر رقبہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

جوابات: نقطہ اعشاریہ کے بعد صرف دو اعداد لیتے ہوئے۔
0.00, 0.22, 0.43, 0.60, 0.74, 0.84, 0.97, 1.00

سوال 13.102: تفاعل خلل کی مکمل e^{-w^2} کی مکملارن تسلسل حاصل کریں۔ اس تسلسل کا مکمل لے کر

تفاعل خلل $\operatorname{erf} x$ کی مکملارن تسلسل دریافت کریں۔

جواب: $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} \dots \right)$

سوال 13.103: مساوات 13.62 سے درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{1-x}{2c\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{1+x}{2c\sqrt{t}} \right] \quad (t > 0)$$

سوال 13.104: اگر $x > 0$ کی صورت میں $f(x) = 1$ اور $x < 0$ کی صورت میں $f(x) = 0$ ہو تب تصدیق کریں کہ مساوات 13.61 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (t > 0)$$

سوال 13.105: چونکہ $\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے لہذا سوال 13.104 سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x}{2c\sqrt{t}}$$

سوال 13.106: نصف لامتناہی لمبی سلاخ (0 تا ∞) کے $x = 0$ پر سر کو صفر درجہ پر رکھا گیا ہے جبکہ اس کی ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ ثابت کریں کہ اس مسئلہ کا حل درج ذیل ہے جہاں $\tau = 2c\sqrt{t}$ ہے۔

$$(13.63) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(x + \tau w) e^{-w^2} dw - \int_{\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(-x + \tau w) e^{-w^2} dw \right]$$

سوال 13.107: $f(v)$ کو طاق تصور کرتے ہوئے مساوات 13.60 سے مساوات 13.63 حاصل کریں۔

سوال 13.108: $f(x) = 1$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ سوال 13.106 میں درج ذیل حل حاصل ہو گا۔

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\tau}} e^{-w^2} dw = \operatorname{erf} \frac{x}{2c\sqrt{t}} \quad (t > 0)$$

سوال 13.109: درج ذیل ابتدائی معلومات کی صورت میں مساوات 13.63 کیا صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & \text{باقی جگہوں پر} \end{cases} \quad (a > 0)$$

جواب:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a-x}{\tau}}^{\frac{b-x}{\tau}} e^{-w^2} dw - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a+x}{\tau}}^{\frac{b+x}{\tau}} e^{-w^2} dw$$

سوال 13.110: $f(x) = 1$ پر $x > 0$ اور $f(x) = -1$ پر $x < 0$ لیتے ہوئے مساوات 13.60 یا مساوات 13.61 کی استعمال سے سوال 13.108 کا نتیجہ حاصل کریں۔

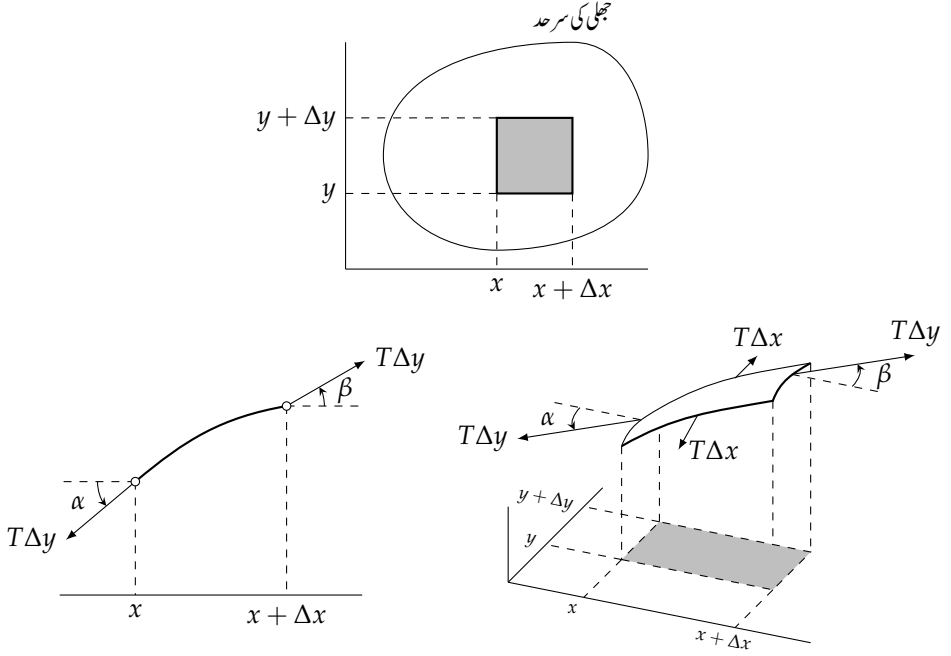
سوال 13.111: ثابت کریں کہ سوال 13.60 میں کوئی دو نقطے کا ایک ہی درجہ حرارت تک پہنچنے کے لئے درکار وقت ان نقطوں کا سرحد $x = 0$ سے فاصلہ کے مربع کے راست تناسب ہو گا۔

13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج

ارتعاش کی میدان میں ایک اور اہم مسئلے کے طور پر تنفی ہوئی جھلی، مثلاً طبل پر چڑھا ہوا چڑے کا پردہ، کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ موجودہ تجزیہ حصہ 13.2 میں ارتعاش تار کی مانند ہو گا۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

- (الف) اکائی رقبہ پر جھلی کی کیت یکساں ہے (ہم جنسی جھلی)۔ جھلی مکمل پلکدار اور اتنی باریک ہے کہ مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتی ہے۔
- (ب) جھلی کو تان کر، اس کی پوری سرحد سے xy مستوی میں باندھا گیا ہے۔ جھلی میں ہر نقطہ پر اور ہر رخ فی اکائی لمبائی تناو T یکساں ہے جو ارتعاش کے دوران تبدیل نہیں ہوتی۔
- (پ) حرکت کے دوران جھلی کی انحراف $u(x, y, t)$ ، جھلی کی جسامت کے لحاظ سے کم ہے اور تمام زاویہ میلان چھوٹے ہیں۔

اگرچہ حقیقت میں ان مفروضوں پر مکمل طور پورا اترنا ممکن نہیں ہے، تہی جھلی کی قلیل عرضی لرزش ان مفروضوں پر تقریباً پورا اترتی ہیں۔



شکل 13.13: ارتعاش پذیر جھلی

جھلی کی حرکت کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم جھلی کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرتے ہیں (شکل 13.13)۔ چونکہ جھلی کی انحراف اور زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہذا اس ٹکڑے کے اطراف کی لمبائی تقریباً Δx اور Δy ہوگی۔ اکائی لمبائی پر قوت کو تناؤ T کہتے ہیں لہذا اس ٹکڑے کے اطراف پر قوت $T\Delta x$ اور $T\Delta y$ عمل کرے گی۔ چونکہ جھلی مکمل یکساں ہے لہذا یہ قوتیں جھلی کی مماسی ہوں گی۔

ہم پہلے قوتوں کی افقی اجزاء پر غور کرتے ہیں۔ اطراف پر قوت کو زاویہ میلان کی کوسائن سے ضرب دینے سے ان کی افقی جزو حاصل ہوگی۔ چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہذا ان کی کوسائن تقریباً اکائی (1) کے برابر ہوں گے۔ یوں مخالف کناروں پر تقریباً برابر قوتیں پائی جائیں گی۔ یوں افقی رخ جھلی کی حرکت قابل نظر انداز ہوگی لہذا ہم جھلی کی حرکت کو عرضی حرکت تصور کرتے ہیں یعنی جھلی صرف اوپر نیچے حرکت کرتی ہے۔

اس ٹکڑے کی کناروں پر کھڑی رخ (yu سطح کی متوازی) قوتوں کے اجزاء²⁸

$$T\Delta y \sin \beta \quad \text{اور} \quad -T\Delta y \sin \alpha$$

ہوں گے جہاں منفی علامت نیچے رخ کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں ہم ان کے \sin کی جگہ ان کے \tan استعمال²⁹ کر سکتے ہیں۔ یوں ان دو عدد قوتوں کا مجموعہ

$$(13.64) \quad \begin{aligned} T\Delta y(\sin \beta - \sin \alpha) &\approx T\Delta y(\tan \beta - \tan \alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \end{aligned}$$

ہوگا جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں جبکہ y اور $y + \Delta y$ کے درمیان y_1 اور y_2 کوئی نقطے ہیں۔ اسی طرح ٹکڑے کے باقی دو کناروں پر قوتوں کے انتصابی اجزاء کا مجموعہ

$$(13.65) \quad T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

ہوگا جہاں x اور $x + \Delta x$ کے درمیان x_1 اور x_2 کوئی نقطے ہیں۔

نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت مساوات 13.64 اور مساوات 13.65 میں دی گئی قوتوں کا مجموعہ جھلی کے ٹکڑے کی کمیت $\rho \Delta A$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہوگا۔ یہاں بلا انحراف فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے جبکہ بلا انحراف ٹکڑے کا رقبہ $\Delta A = \Delta x \Delta y$ ہے۔ یوں

$$\rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

ہوگا جہاں بائیں ہاتھ تفرق ٹکڑے کے کسی موزوں نقطہ (\bar{x}, \bar{y}) پر حاصل کیا جائے گا۔ $\rho \Delta x \Delta y$ سے دونوں اطراف کو تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y} \right]$$

Δx اور Δy کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے درج ذیل جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوگی

$$(13.66) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

²⁸ دھیان رہے کہ کنارے پر چلتے ہوئے زاویہ میلان تبدیل ہوگا۔ α اور β زیر غور کنارے کے کسی موزوں نقطہ پر زاویہ میلان ہوں گے۔
²⁹ چھوٹے زاویہ θ کا $\tan \theta \approx \sin \theta$ ہوتا ہے۔

جس کو دو ابعادی مساوات موج³⁰ کہتے ہیں۔ قوسین میں بند u کا لاپلاسی $\nabla^2 u$ ہے (حصہ 10.8) لہذا مساوات 13.66 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.67) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

13.8 مستطیل جہلی

ارتعاش پذیر جہلی کے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل دو ابعادی مساوات موج کا حل $u(x, y, t)$ تلاش کرنا ہوگا

$$(13.68) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

جو تمام $t \geq 0$ کے لئے پوری سرحد پر سرحدی شرط

$$(13.69) \quad u = 0$$

اور دو عدد ابتدائی شرائط

$$(13.70) \quad u(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{ابتدائی انحراف}$$

اور

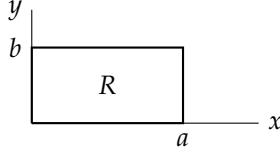
$$(13.71) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y) \quad \text{ابتدائی رفتار}$$

کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط ارتعاش پذیر تار کے شرائط کی مانند ہیں۔ آئیں شکل 13.14 میں دکھائی گئی مستطیل جہلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.68 کا ایسا حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.69 کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں

$$(13.72) \quad u(x, y, t) = F(x, y)G(t)$$

³⁰two dimensional wave equation



شکل 13.14: مستطیل جہلی

کو مساوات 13.68 میں پر کرتے ہیں

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

جہاں $(')$ جزوی تفرق اور (\cdot) وقت t کے ساتھ تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔ دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy})$$

ملتا ہے۔ اب بایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر نہیں ہے لہذا دونوں اطراف کسی مستقل A کے برابر ہیں۔ آپ حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہوئے تسلی کر سکتے ہیں کہ A کے صرف منفی قیمتیں استعمال کرنے سے ایسا غیر صفر حل حاصل ہو گا جو مساوات 13.69 کی شرط کو مطمئن کرتا ہو۔ اس منفی مستقل کو $-v^2$ سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -v^2$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دو علیحدہ علیحدہ سادہ تفرقی مساوات

$$(13.73) \quad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \quad (\lambda = cv)$$

$$(13.74) \quad F_{xx} + F_{yy} + v^2 F = 0$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

ہم مساوات 13.74 کا حل تلاش کرتے ہیں جو جہلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہو گا۔ ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب دوبارہ لاگو کرتے ہوئے

$$(13.75) \quad F(x, y) = H(x)Q(y)$$

لیتے ہیں جو کو مساوات 13.74 میں پر کرنے سے

$$\frac{d^2 H}{dx^2} Q = - \left(H \frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 H Q \right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کے دونوں اطراف کو HQ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = - \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right)$$

ملتا ہے جہاں بائیں ہاتھ تفاعل صرف x پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف y پر منحصر ہے۔ یوں دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔ یہاں بھی صرف منفی قیمت کا مستقل مثلاً $-k^2$ غیر صفر حل دیتے ہیں۔ یوں

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = - \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right) = -k^2$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$(13.76) \quad \frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H = 0$$

$$(13.77) \quad \frac{d^2 Q}{dy^2} + p^2 Q = 0 \quad (p^2 = v^2 - k^2)$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ مساوات 13.76 اور مساوات 13.77 کے حل عمومی

$$H(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad \text{اور} \quad Q(y) = C \cos py + D \sin py$$

ہیں جہاں A ، B ، C اور D مستقل ہیں۔ یوں مساوات 13.72 اور مساوات 13.69 سے ظاہر ہے کہ جھلی کی سرحد پر $F = HQ$ صفر ہو گا۔ جیسا آپ شکل 13.14 سے دیکھ سکتے ہیں، جھلی کی سرحد $x = a$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ اور $y = b$ ہے۔ یوں درج ذیل شرائط لکھے جاسکتے ہیں۔

$$H(0) = 0, \quad H(a) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0$$

اس طرح $H(0) = A = 0$ ہو گا جبکہ

$$H(a) = B \sin ka = 0$$

میں $B = 0$ لینے سے (غیر دلچسپ حل) $H \equiv 0$ یعنی $F \equiv 0$ ملتا ہے لہذا ہم $B \neq 0$ فرض کرتے ہیں۔ یوں $\sin ka = 0$ ہو گا جس سے $ka = m\pi$ یعنی

$$(13.78) \quad k = \frac{m\pi}{a} \quad (m \text{ عدد صحیح})$$

حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح $C = 0$ جبکہ $D \neq 0$ سے $p = \frac{n\pi}{b}$ حاصل ہوتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔ یوں درج ذیل حل ملتے ہیں۔

$$H_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \text{اور} \quad Q_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

(ارتعاش پذیر تار کی طرح یہاں بھی $m, n = -1, -2, \dots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے چونکہ ایسا کرنے سے یہی حل ضرب -1 دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔) یوں $B = 1$ اور $D = 1$ چنتے ہوئے مساوات 13.74 کے حل درج ذیل ہوں گے

$$(13.79) \quad F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

جو جھلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہیں۔

چونکہ مساوات 13.77 میں $p^2 = v^2 - k^2$ ہے اور مساوات 13.73 میں $\lambda = cv$ ہے لہذا

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}$$

ہو گا۔ یوں $k = \frac{m\pi}{a}$ اور $p = \frac{n\pi}{b}$ کا مطابقتی λ مساوات 13.73 میں

$$(13.80) \quad \lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

ہو گا اور مساوات 13.73 کا مطابقتی عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_{mn}(t) = B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn}t$$

یوں مساوات 13.73 کے غیر صفر حل $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$ درج ذیل ہوں گے

$$(13.81) \quad u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

جن میں λ_{mn} مساوات 13.80 دے گی۔ تفاعل u_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے آنگنی تفاعل³¹ یا امتیازی تفاعل³² کہتے ہیں جبکہ λ_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے آنگنی اقدار³³ یا امتیازی اقدار³⁴ کہتے ہیں۔ تفاعل u_{mn} کی تعدد $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ ہوگی۔

a اور b کی مختلف قیمتیں ایک ہی امتیازی قدر دیتے ہوئے کئی مختلف تفاعل F_{mn} دے سکتی ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ جھلی میں ایک ہی تعدد کے کئی مختلف انداز کے ارتعاش ممکن ہیں جن کی صفر ہٹاؤ لکیریں³⁵ مختلف ہوں گی۔ ارتعاش پذیر جھلی پر وہ لکیریں جو حرکت نہیں کرتی ہیں صفر ہٹاؤ لکیریں کہلاتی ہیں۔ آئیں اس کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 13.5: مکعب جھلی

ایک مکعب جھلی کا $a = 1$ ، $b = 1$ ہے۔ مساوات 13.80 سے

(13.82)

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2}$$

لہذا

$$\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$$

ہو گا لیکن $m \neq n$ کے لئے مطابقتی تفاعل

$$F_{mn} = \sin m\pi x \sin n\pi y \quad \text{اور} \quad F_{nm} = \sin n\pi x \sin m\pi y$$

ہیں جو ایک جیسے نہیں ہیں۔ مثلاً $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ کے مطابقتی تفاعل

$$F_{12} = \sin \pi x \sin 2\pi y \quad \text{اور} \quad F_{21} = \sin 2\pi x \sin \pi y$$

ہوں گے۔ یوں مطابقتی حل

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^* \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{12}$$

$$u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^* \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$

³¹eigenfunctions

³²characteristic functions

³³eigenvalues

³⁴characteristic values

³⁵nodal lines

کی صفر ہٹاؤ لکیریں بالترتیب $y = \frac{1}{2}$ اور $x = \frac{1}{2}$ ہوں گی (شکل 13.15)۔ اگر $B_{12} = 1$ اور $B_{12}^* = 0$ ہوں تب

$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t (F_{12} + B_{21}F_{21})$$

ہو گا جو ایک اور انداز ارتعاش ہے جس کی امتیازی قدر $c\pi\sqrt{5}$ ہے۔ اس تفاعل کی صفر ہٹاؤ لکیریں درج ذیل مساوات کے حل ہوں گی۔

$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \sin \pi x \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \sin \pi y = 0$$

اب $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استعمال کرتے ہوئے درج بالا کو

$$\sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi y + B_{21} \cos \pi x) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا حل B_{21} پر منحصر ہو گا۔

مساوات 13.82 سے ہم دیکھتے ہیں کہ λ_{mn} کے دو مزید مطابقتی تفاعل ممکن ہیں۔ مثلاً چار تفاعل F_{81} ، F_{18} ، F_{74} اور F_{47} کی $\lambda_{18} = \lambda_{81} = \lambda_{47} = \lambda_{74} = c\pi\sqrt{65}$ ہے چونکہ؛

$$1^1 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$$

ایسا اس لئے ممکن ہے کہ 65 کو دو اعداد صحیح کے مربع کا مجموعہ مختلف طریقوں سے لکھنا ممکن ہے۔ گاوس کے ایک مسئلہ کے تحت ایسا ہر اس صورت ہو گا جہاں دو اعداد کے مربع کا مجموعہ کے اجزاء مفرد میں کم از کم دو مختلف $4n + 1$ صورت کے ہوں، جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔ یہاں دو اعداد کے مربع کے مجموعہ 65 کو

$$65 = 5 \cdot 13 = (4 + 1)(12 + 1)$$

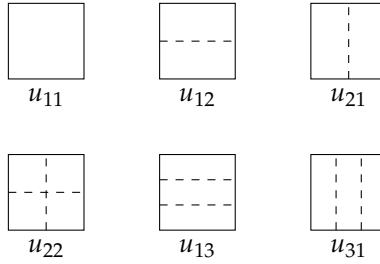
□

لکھنا ممکن ہے۔

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.70 اور مساوات 13.71 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہیں۔ ہم دوہرا تسلسل³⁶

$$(13.83) \quad \begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

³⁶ ہم حل کی یکتائی اور درجہ کا زبرد فور نہیں کریں گے۔



شکل 13.15: کلب جملی کے حل $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{13}, u_{31}$ کی صفر بننا لکیریں۔

کو لیتے ہیں جو مساوات 13.70 کے ساتھ درج ذیل دوہرا فوریر تسلسل ³⁷ دیتی ہے۔

$$(13.84) \quad u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x, y)$$

مستطیل R (شکل 13.14) میں f ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ استمراری ہونے کی صورت میں $f(x, y)$ کو اس دوہرا فوریر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا۔ اس دوہرا فوریر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل لے کر

$$(13.85) \quad K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

مساوات 13.84 کو

$$(13.86) \quad f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

لکھ سکتے ہیں جو مقررہ y کی صورت میں $f(x, y)$ کی فوریر سائن تسلسل ہے جس کا متغیر x ہو گا جس کے عددی سر صفحہ 916 پر مساوات 12.34 کے تحت

$$(13.87) \quad K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

ہوں گے۔ مزید مساوات 13.85 تقابل $K_m(y)$ کی فوریر سائن تسلسل ہے لہذا اس کے عددی سر صفحہ 916 پر مساوات 12.34 کے تحت

$$(13.88) \quad B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

ہوں گے۔ مساوات 13.88 اور مساوات 13.87 کو ملا کر درج ذیل عمومی یولر کلیہ³⁸ حاصل ہوتا ہے

$$(13.89) \quad B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

جو دوہرا تسلسل (مساوات 13.84) میں تفاعل $f(x, y)$ کے عددی سر B_{mn} دیتی ہے۔

یوں مساوات 13.83 میں B_{mn} تفاعل $f(x, y)$ سے حاصل ہوتے ہیں۔ B_{mn}^* حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.83 کا t کے ساتھ جزوی تفرق لے کر ابتدائی شرط مساوات 13.71 استعمال کرتے ہوئے

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^* \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x, y)$$

حاصل کرتے ہیں۔ مستطیل R (شکل 13.14) میں g ، $\frac{\partial g}{\partial x}$ ، $\frac{\partial g}{\partial y}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ استمراری ہونے کی صورت میں $g(x, y)$ کو اس دوہرا فوریر تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں پہلی کی طرح بڑھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(13.90) \quad B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

یوں مساوات 13.89 اور مساوات 13.90 سے حاصل B_{mn} اور B_{mn}^* مساوات 13.83 میں پر کرتے ہوئے حاصل حل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرے گا۔

سوالات

سوال 13.112: جھلی میں تناؤ بڑھانے سے مساوات 13.81 میں دی گئی حل کی تعداد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ c بڑھتا ہے لہذا تعداد بھی بڑھے گی۔

سوال 13.113: مساوات 13.81 کی صفر ہٹاؤ لکیریں $a = b = 1$ لے کر $m = 1, 2, 3, 4$ اور $n = 1, 2, 3, 4$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.114: مساوات 13.81 کی صفر ہٹاؤ لکیریں $a = 2$ اور $b = 1$ لے کر $m = 1, 2, 3, 4$ اور $n = 1, 2, 3, 4$ کے لئے کھینچیں۔

³⁸ generalized Euler formula

سوال 13.115: اکائی لمبائی کے اطراف والی مکعب جھلی کے مزید ایسے امتیازی اقدار حاصل کریں جن کے مطابقتی امتیازی تفاعل کی تعدد چار عدد ہو۔

سوال 13.116: مستطیل جھلی جس کے اطراف $a = 2$ اور $b = 1$ ہیں کے ایسے امتیازی اقدار حاصل کریں جن کے مطابقتی امتیازی تفاعل کی تعدد دو یا دو سے زیادہ ہو۔
جواب: $c\pi\sqrt{260}, (F_{4,16}, F_{16,14}), \dots$

سوال 13.117: تصدیق کریں کہ یکساں c والی تمام ممکنہ مستطیل جھلی جن کا رقبہ A ہو میں مکعب جھلی کی u_{11} (مساوات 13.81) کی تعدد کم تر ہوگی۔

سوال 13.118: مقررہ m, n اور A کے لئے سوال 13.117 کی طرح کم تر تعدد کی شرط اخذ کریں۔
جواب: مساوات 13.80 میں $a = \frac{A}{b}$ پر کرتے ہوئے حاصل λ کا a کے ساتھ تفرق، صفر کے برابر کرتے ہوئے

$$\lambda^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2 a^2}{A^2} \right), \implies 2\lambda \frac{d\lambda}{da} = c^2 \pi^2 \left(-\frac{2m^2}{a^3} + \frac{2n^2 a}{A^2} \right) = 0$$

کمتر λ کی شرط $\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$ حاصل کرتے ہیں۔

سوال 13.119 تا سوال 13.123 میں تفاعل $f(x, y)$ (0 < x < a, 0 < y < b) کا مساوات 13.84 کی طرز کا دوہرا فوریر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 13.119: $f = 1$
جواب: $B_{mn} = \frac{16}{mn\pi^2}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$

سوال 13.120: $f = x + y$
جواب: $B_{mn} = \frac{4}{mn\pi^2} [a(-1)^{m+n} - a(-1)^m + b(-1)^{m+n} - b(-1)^n]$

سوال 13.121: $f = xy$
جواب: $B_{mn} = \frac{4ab(-1)^{m+n}}{mn\pi^2}$

سوال 13.122: $f = xy(a - x)(b - y)$
جواب: $B_{mn} = \frac{64a^2b^2}{m^3n^3\pi^6}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$

سوال 13.123: $f = xy(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$
 جواب: $B_{mn} = \frac{144a^3b^3(-1)^{m+n}}{m^3n^3\pi^6}$

سوال 13.124: ثابت کریں کہ فی اکائی رقبہ بیرونی قوت $P(x, y, t)$ کی صورت میں xy مستوی میں جھلی کی ارتعاش درج ذیل مساوات دیتی ہے جہاں فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے۔ بیرونی قوت جھلی کی عمودی عمل کرتی ہے۔

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u + \frac{P}{\rho}$$

سوال 13.125 تا سوال 13.128 میں ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x, y)$ ہے۔ جھلی کی انحراف $u(x, y, t)$ دریافت کریں جہاں $c = 1$ اور $a = b = 1$ ہیں۔

سوال 13.125: $f = 0.1xy(1 - x)(1 - y)$
 جواب:

$$u(x, y, t) = \frac{6.4}{\pi^6} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ طاق}}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ طاق}}}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^3} \cos(\pi t \sqrt{m^2 + n^2}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

سوال 13.126: $f = kx(1 - x^2)(1 - y^2)$
 جواب:

$$\frac{24k}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^3 n^3} [2(-1)^n - (n^2 \pi^2 + 1)] \cos(\pi t \sqrt{m^2 + n^2}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

سوال 13.127: $f = k \sin \pi x \sin 2\pi y$
 جواب: $u(x, y, t) = k \cos \pi \sqrt{5} t \sin \pi x \sin 2\pi y$

سوال 13.128: $f = k \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y$
 جواب: $B_{2n} = B_{m2} = 0, B_{11} = \frac{64k}{9\pi^2}, B_{13} = -\frac{64k}{45\pi^2}, B_{31} = -\frac{64k}{45\pi^2}, B_{33} = \frac{64k}{225\pi^2} \dots$

سوال 13.129: باریک مکعب چادر کے اطراف صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہیں جبکہ اس کی دونوں سطحیں عاجز شدہ ہیں۔ چادر کی ایک طرف کی لمبائی π ہے۔ ابتدائی درجہ حرارت $u(x, y, 0) = f(x, y)$ ہے۔ دو

ابعادی حراری مساوات $u_t = c^2 \nabla^2 u$ پر علیحدگی متغیرات کی ترکیب لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx \sin ny e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

جہاں B_{mn} درج ذیل ہے۔

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx \, dy$$

سوال 13.130: $f(x, y) = xy(\pi - x)(\pi - y)$ کی صورت میں سوال 13.129 میں دیے گئے چادر کا حل تلاش کریں۔
جواب:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{m^3 n^3 \pi^2} \sin mx \sin ny e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

13.9 قطبی محدود میں لاپلاسی

سرحدی شرائط کی جزوی تفرقی مساوات کا حل تلاش کرتے ہوئے عموماً ایسا محدود استعمال کیا جاتا ہے جس کے لحاظ سے سرحد کی روپ سادہ ہو۔ اگلے حصے میں دائری جھلی پر غور کیا جائے گا جس کو حل کرنے کے لئے قطبی محدود³⁹ سود مند ثابت ہو گا جس کے متغیرات r اور θ کی تعریف درج ذیل ہیں۔

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

قطبی محدود میں جھلی کی دائری سرحد کی مساوات $r =$ مستقل ہوگی۔

r اور θ استعمال کرتے ہوئے مساوات موج کی لاپلاسی

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

³⁹polar coordinates

کا اظہار ان محدد میں کرنا ہو گا لہذا آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل کو غور سے پڑھیں۔

ہم حصہ 13.4 کی طرح زنجیری ترکیب استعمال کریں گے۔ اپنی آسانی کی خاطر ہم جزوی تفرق کو زیر نوشت میں x ، y یا t لکھ کر ظاہر کریں گے جبکہ متغیرات r, θ, t کے تفاعل $u(x, y, t)$ کو اسی حرف u سے ظاہر کریں گے۔

صفحہ 747 پر مساوات 10.69 کا زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

ملتا ہے۔ ایک بار دوبارہ x کے ساتھ تفرق لے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\ &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \end{aligned} \quad (13.91)$$

زنجیری قاعدہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x \quad \text{اور} \quad (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x$$

لکھا جاسکتا ہے۔ جزوی تفرق r_x اور θ_x حاصل کرنے کی خاطر ہمیں

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{اور} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

کا تفرق لینا ہو گا جس سے

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{r^2}$$

حاصل ہو گا۔ ان کا x تفرق لینے سے

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = -y \left(-\frac{2}{r^3} \right) r_x = \frac{2xy}{r^4}$$

ملتا ہے۔ ان تمام کو مساوات 13.91 میں پر کرتے ہیں۔ ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق کو استمراری تصور کرتے ہوئے $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ لکھ کر یوں درج ذیل سادہ صورت حاصل ہو گی۔

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2 \frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2 \frac{xy}{r^4} u_\theta \quad (13.92)$$

بالکل اسی طرح درج ذیل بھی حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(13.93) \quad u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2 \frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - 2 \frac{xy}{r^4} u_\theta$$

مساوات 13.92 اور مساوات 13.93 کا مجموعہ لے کر قطبی محدود میں لاپلاسی حاصل کرتے ہیں۔

$$(13.94) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

سوالات

سوال 13.131: مساوات 13.94 کو درج ذیل صورت میں لکھ کر دکھائیں۔

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

سوال 13.132: اگر مساوات 13.94 میں لاپلاسی θ سے آزاد ہو تب $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{u_r}{r}$ لکھی جائے گی۔ u کو θ سے آزاد فرض کرتے ہوئے کارتیسی محدود میں لاپلاسی سے سیدھا یہ نتیجہ حاصل کریں۔

سوال 13.133: مساوات 13.94 کو واپس کارتیسی محدود میں لے جائیں۔

سوال 13.134: اگر x ، y کارتیسی محدود ہوں تب دکھائیں کہ $x^* = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ اور $y^* = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ بھی کارتیسی محدود ہیں۔ لاپلاسی کو کارتیسی محدود x^* ، y^* میں حاصل کریں۔
جواب: $\nabla^2 u = u_{x^*x^*} + u_{y^*y^*}$

سوال 13.135: لاپلاسی $\nabla^2 u$ کو نئی محدود $x^* = ax + b$ ، $y^* = cy + d$ میں لکھیں جہاں x ، y کارتیسی محدود ہیں جبکہ a ، b ، c اور d مستقل ہیں۔
جواب: $\nabla^2 u = a^2 u_{x^*x^*} + c^2 u_{y^*y^*}$

سوال 13.136: نلکی محدود⁴⁰ میں لاپلاسی
نلکی محدود ρ ، ϕ ، z کی تعریف درج ذیل ہے

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

⁴⁰cylindrical coordinates

جہاں x ، y ، z کارٹیزی محدد ہیں۔ لاپلاسی کو نکلی محدد میں لکھیں۔
جواب: $\nabla^2 u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi} + u_{zz}$

سوال 13.137: کروی محدد r ، θ ، ϕ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \sin \theta$$

اگر متقابل $u(x, y, z)$ صرف محدد $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کا تابع ہو تب درج ذیل حاصل کریں۔

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r$$

جواب: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ سے آگے بڑھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r} \\ u_x &= u_r r_x = \frac{x}{r} u_r, \quad u_y = \frac{y}{r} u_r, \quad u_z = \frac{z}{r} u_r \\ u_{xx} &= \frac{1}{r} u_r - \frac{x}{r^2} r_x u_r + \frac{x}{r} u_{rr} r_x = \left(\frac{x}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) \\ u_{yy} &= \left(\frac{y}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right), \quad u_{zz} = \left(\frac{z}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \end{aligned}$$

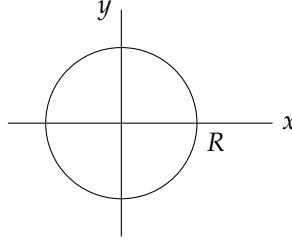
سوال 13.138: کروی محدد⁴¹ میں لاپلاسی

کروی محدد r ، θ ، ϕ کی تعریف سوال 13.137 میں دی گئی ہے۔ لاپلاسی کو کروی محدد میں لکھیں۔
جواب:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_{\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\phi\phi}$$

سوال 13.139: ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ کی سطح کو صفر درجہ حرارت پر رکھا گیا ہے جبکہ کرہ میں درجہ حرارت $f(r)$ ہے جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہے۔ ثابت کریں کہ کرہ میں درجہ حرارت درج ذیل مساوات کا وہ حل ہو گا

$$u_t = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$$



شکل 13.16: دائری جھلی

جو $u(R, t) = 0$, $u(r, 0) = f(r)$ شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

سوال 13.140: ثابت کریں کہ $v = ru$ لینے سے سوال 13.139 کا مسئلہ $v_t = c^2 v_{rr}$, $v(R, t) = 0$, $v(r, 0) = rf(r)$ اختیار کرتا ہے۔ اس کے ساتھ $v(0, t) = 0$ شامل کریں چونکہ $r = 0$ پر u کا محدود ہونا لازم ہے۔ اس مسئلے کو علیحدگی متغیرات سے حل کریں۔

13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل

ہم اب رداس R کی دائری جھلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں (شکل 13.16)۔ قطبی محدود استعمال کرتے ہوئے $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ لکھے جائیں گے جبکہ مساوات 13.66 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے (مساوات 13.94)۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

اس حصہ میں ہم رداسی تشاکلی حل $u(r, t)$ حاصل کرتے ہیں جو θ پر منحصر نہیں ہوں گے۔ ایسی صورت میں مساوات موج درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$(13.95) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

چونکہ جھلی کو سرحد $r = R$ سے باندھا گیا ہے لہذا سرحدی شرط درج ذیل ہوگا۔

$$(13.96) \quad u(R, t) = 0$$

θ سے آزاد حل اس صورت پائے جائیں گے جب ابتدائی حالت بھی θ سے آزاد ہو۔ یوں ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گے۔

$$(13.97) \quad u(r, 0) = f(r) \quad \text{ابتدائی انحراف}$$

$$(13.98) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(r) \quad \text{ابتدائی رفتار}$$

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.95 کے وہ حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.96 کو مطمئن کرتے ہوں۔ یوں

$$(13.99) \quad u(r, t) = W(r)G(t)$$

کے تفرقات کو مساوات 13.95 میں پر کرتے ہوئے حاصل مساوات کے دونوں اطراف کو c^2WG سے تقسیم کر کے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r}W \right)$$

حاصل کرتے ہیں جہاں (·) وقت t کے ساتھ تفرق جبکہ (') جزوی تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔ درج بالا کے دونوں اطراف کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔ سرحدی شرط مطمئن کرتے ہوئے غیر صفر حل کے لئے ضروری ہے کہ یہ مستقل منفی ہو مثلاً $-k^2$ لہذا درج بالا کو

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r}W \right) = -k^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$(13.100) \quad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0, \quad \lambda = ck$$

$$(13.101) \quad W'' + \frac{1}{r}W' + k^2W = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ ہم پہلے مساوات 13.101 پر غور کرتے ہیں جس میں نیا متغیر $s = kr$ متعارف کرتے ہوئے لکھ کر $\frac{1}{r} = \frac{k}{s}$

$$W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds} k \quad W'' = \frac{d^2 W}{ds^2} k^2$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں مساوات 13.101 میں پر کر کے مشترکہ مستقل k^2 کر رہ کر دے ہوئے

$$(13.102) \quad \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو حصہ 5.4 کا مساوات 5.76 ہے جس میں $\nu = 0$ ہے۔ اس کو مساوات بیسل⁴² کہتے ہیں جس کا عمومی حل (حصہ 5.5) درج ذیل ہے۔

$$W = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s)$$

J_0 اور Y_0 بالترتیب صفر درجہ کے بیسل تفاعل کی پہلی قسم اور دوسری قسم کہلاتے ہیں۔ چونکہ جھلی کی انحراف ہر صورت محدود ہوگی جبکہ $s \rightarrow 0$ کرنے سے $Y_0 \rightarrow \infty$ ہوتا ہے لہذا ہمیں $C_2 = 0$ منتخب کرنا ہو گا۔ ظاہر ہے کہ غیر صفر حل حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ $C_1 \neq 0$ ہو۔ ہم $C_1 = 1$ چنتے ہیں جس سے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(13.103) \quad W(r) = J_0(s) = J_0(kr)$$

جھلی کی سرحد $r = R$ پر $u(R, t) = W(R)G(t) = 0$ ہو گا جس میں $G(t) \equiv 0$ منتخب کرنے سے $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہذا

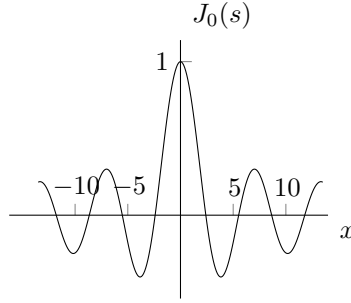
$$W(R) = J_0(kR) = 0$$

ہو گا۔ بیسل تفاعل J_0 کے لا محدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ ہم $J_0(s)$ کے مثبت صفروں کو $s = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 13.17)۔ ہم یہاں بتلاتے چلیں کہ J_0 کی چند صفروں کی (چار ہندسوں تک درست) اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\alpha_1 = 2.4048, \quad \alpha_2 = 5.5201, \quad \alpha_3 = 8.6537, \quad \alpha_4 = 11.7915, \quad \alpha_5 = 14.9309$$

ہم دیکھتے ہیں کہ بیسل تفاعل کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ مساوات 13.103 سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

$$(13.104) \quad kR = \alpha_m \implies k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}, \quad m = 1, 2, \dots$$

شکل 13.17: بیل تفاعل $J_0(s)$

یوں تفاعل

$$(13.105) \quad W_m(r) = J_0(k_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) \quad m = 1, 2, \dots$$

مساوات 13.101 کا وہ حل ہو گا جو جھلی کی سرحد پر صفر ہے۔

یوں $\lambda = \lambda_m = ck_m$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.100 کا مطابقتی حل

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + c_2 \sin \lambda_m t$$

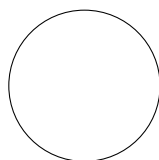
ہو گا۔ اس طرح مساوات 13.95 کے ایسے حل جو سرحدی شرط مساوات 13.96 کو مطمئن کرتے ہوں درج ذیل ہوں گے جہاں $m = 1, 2, \dots$ ہے۔

$$(13.106) \quad u_m(r, t) = W_m(r) G_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + c_2 \sin \lambda_m t) J_0(k_m r)$$

$u_m(r, t)$ اس مسئلے کے امتیازی تفاعل ہیں جبکہ λ_m مسئلے کے امتیازی اقدار ہیں۔

ارتعاش کی u_m حصہ کو m ویں عمودی انداز⁴³ کہتے ہیں جس کی تعدد $\frac{\lambda_m}{2\pi}$ چکر فی اکائی وقت ہو گی۔ x محور پر سائن تفاعل کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ پایا جاتا ہے جبکہ J_0 کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ستار کا سر اور طبلہ کی ڈھول مکمل طور پر مختلف سنائی دیتے ہیں۔ شکل میں دکھائے گئے جھلی کی عمودی انداز کو شکل 13.17 سے با آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

Bessel's equation⁴²
 m^{th} normal mode⁴³



شکل 13.18

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

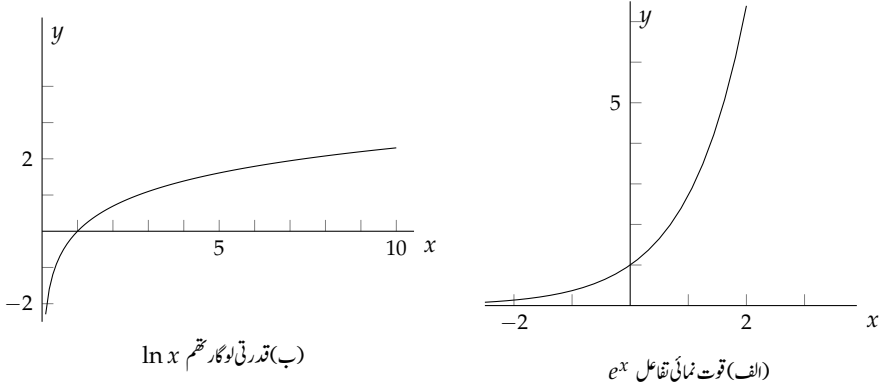
$$(2. ب) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

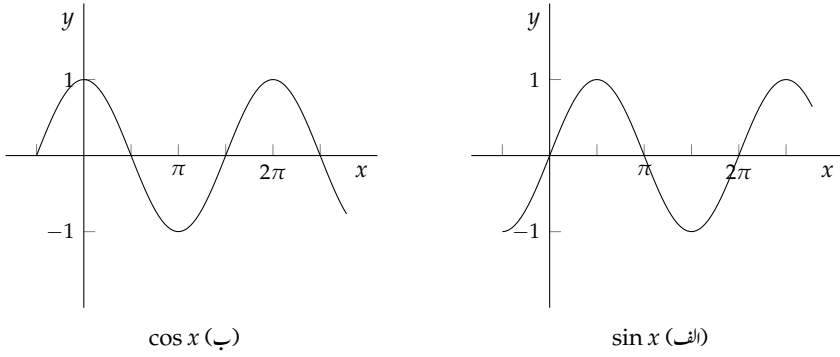
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(3. ب) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

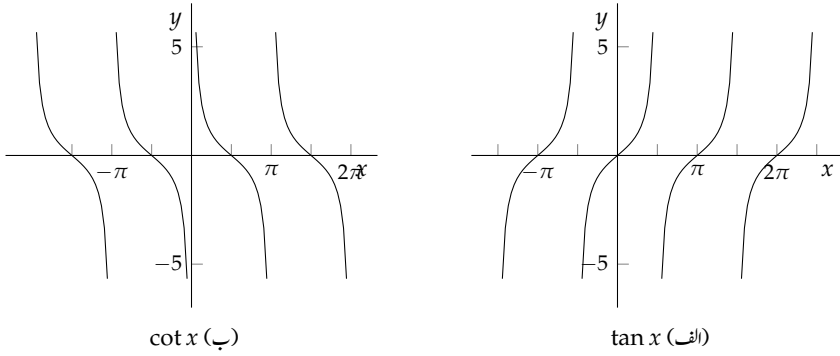
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

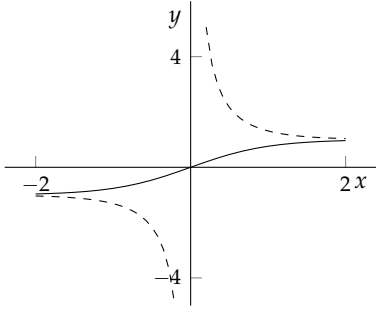
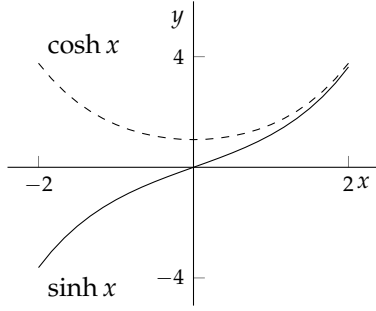
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

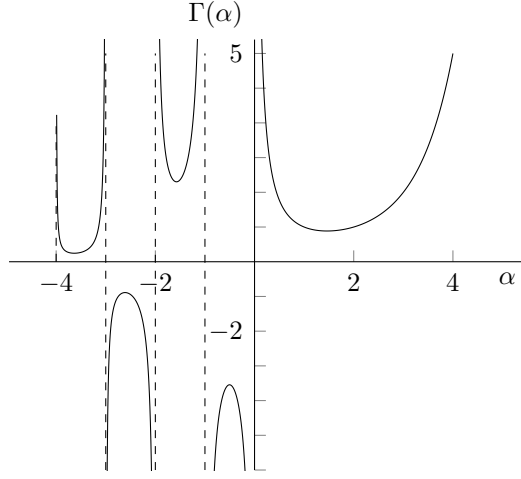
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

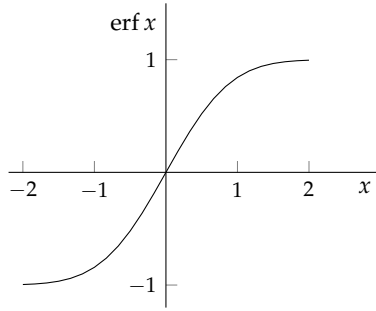
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

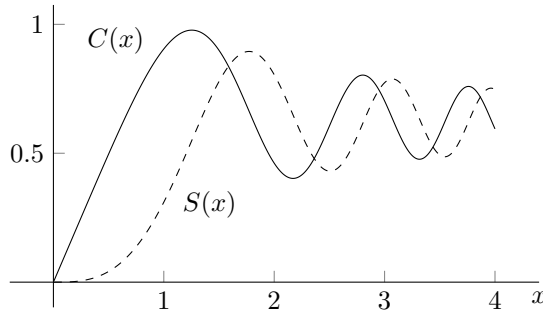
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

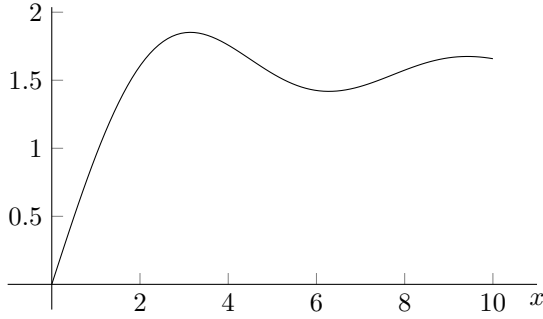
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

