انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 13

جزوی تفرق مساوات

مختلف طبعی اور جیومیٹریائی مسائل جہاں دو یا دو سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل پایا جاتے ہوں، جزوی تفرقی مساوات کو جنم دیتے ہیں۔یہ متغیرات وقت اور خلا کے محدد ہو سکتے ہیں۔اس باب میں انجینئری نقطہ نظر سے اہم مسائل پر غور کیا جائے گا۔ان مساوات کو طبعی نظام کی نمونہ کے طور پر حاصل کرنے کے بعد ابتدائی قیمت اور سرحدی قیمت مسائل حل کرنے کی تراکیب پر غور کیا جائے گا، یعنی ان مساوات کو دی گئی طبعی شرائط کے مطابق حل کیا جائے گا۔
ہم دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کو لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

13.1 بنیادی تصورات

دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کی نا معلوم تفاعل اور اس کی ایک یا ایک سے زیادہ تفرقات پر مبنی مساوات کو **جزوی تفرقی مساوات**[1] کہتے ہیں۔ بلند تر تفرق کا درجہ مساوات کا **درجہ**[2] کہلاتا ہے۔
سادہ تفرقی مساوات کی طرح اگر جزوی تفرقی مساوات میں تابع متغیر (نا معلوم تفاعل) اور اس کے تفرق کی طاقت اکائی ہو تب یہ تفرقی مساوات **خطی**[3] کہلائے گی۔اگر مساوات کا ہر رکن تابع متغیرہ یا تابع متغیرہ کی تفرقات میں سے کوئی ایک تفرق ہو تب اس کو **ہم جنسی**[4] کہیں گے ورنہ یہ **غیر ہم جنسی**[5] کہلائے گی۔

[1] partial differential equation
[2] order
[3] linear
[4] homogeneous
[5] non homogeneous

مثال 13.1: اہم خطی دو درجی جزوی تفرقی مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{یک بعدی مساوات موج} \tag{13.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{یک بعدی مساوات حرارت} \tag{13.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{دو بعدی لاپلاس مساوات} \tag{13.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad \text{دو بعدی پوئسن مساوات} \tag{13.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{تین بعدی لاپلاس مساوات} \tag{13.5}$$

یہاں c مستقل ہے، t وقت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ x ، y ، z کارتیسی محدد ہیں۔مساوات 13.4 میں اگر $f(x,y) \neq 0$ ہو تب یہ غیر ہم جنسی ہو گی۔باقی تمام مساوات ہم جنسی ہیں۔ □

فضا میں غیر تابع متغیرہ کی کسی خطہ R میں جزوی تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو خود اور جس کے وہ تمام تفرقات جو اس مساوات میں پائے جاتے ہوں کسی ایسے خطے میں موجود ہوں جس کا R حصہ ہو اور یہ تمام مل کر پورے خطہ R میں اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔(عموماً R کی سرحد پر اس تفاعل کا استمراری ہونا اور درکار تفرقات کا خطہ کے اندرون معین ہونے کے ساتھ ساتھ خطہ کے اندرون مساوات کو مطمئن کرنا درکار ہو گا۔)

عموماً جزوی تفرقی مساوات کے تمام حل کی تعداد بہت زیادہ ہو گی۔ مثلاً جیسا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل

$$u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2) \tag{13.6}$$

جو ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں مساوات 13.3 کے حل ہیں۔ہم بعد میں دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کا یکتا حل حاصل کرنے کی خاطر مزید معلومات درکار ہو گی جو طبعی حالت سے حاصل ہو گی۔مثال کے طور پر کبھی کبھار سرحد کے کسی حصے پر درکار حل کی قیمت معلوم ہو گی (**سرحدی شرائط**[6]) جب کہ بعض اوقات ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر حل کی قیمت معلوم ہو گی (**ابتدائی شرائط**[7])۔

[6] boundary conditions
[7] initial conditions

ہم جانتے ہیں کہ اگر سادہ تفرقی مساوات خطی اور ہم جنسی ہو تب اس کی معلوم حل سے مزید حل بذریعہ خطی میل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ جزوی تفرقی مساوات کے لئے بھی ایسا کرنا ممکن ہے جیسا درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 13.1: بنیادی مسئلہ
اگر کسی خطہ R میں خطی ہم جنسی جزوی تفرقی مساوات کے دو حل u_1 اور u_2 ہوں تب

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

جہاں c_1 اور c_2 کوئی مستقل ہیں، بھی اس خطے میں اس مساوات کا حل ہو گا۔

اس مسئلے کا ثبوت نہایت آسان اور مسئلہ 2.1 کی ثبوت سے ملتا جلتا ہے لہٰذا یہ آپ پر چھوڑا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 13.1: مسئلہ 13.1 کو دو اور تین متغیرات کی دو درجی جزوی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔

سوال 13.2: تصدیق کریں کہ مساوات 13.6 میں دیے گئے تمام تفاعل مساوات 13.3 کے حل ہیں۔
جواب: $u = x^2 + y^2$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$ ہو گا۔انہیں مساوت 13.3 میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ ملتا ہے۔یوں u تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3 تا سوال 13.8 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل لاپلاس مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3: $u = 2xy$

سوال 13.4: $u = e^x \sin y$

سوال 13.5: $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

سوال 13.6: $u = x^3 - 3xy^2$

سوال 13.7: $u = \sin x \sinh y$

سوال 13.8: $u=x^4-6x^2y^2+y^4$

سوال 13.9 تا سوال 13.11 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل حراری مساوات 13.2 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.9: $u=e^{-2t}\cos x$

سوال 13.10: $u=e^{-t}\sin 3x$

سوال 13.11: $u=e^{-4t}\cos\omega x$

سوال 13.12 تا سوال 13.14 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.12: $u=x^2+4t^2$

سوال 13.13: $u=x^3+3xt^2$

سوال 13.14: $u=\sin\omega ct\sin\omega x$

سوال 13.15: تصدیق کریں کہ $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ تین بعدی لاپلاس مساوات 13.5 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.16: تصدیق کریں کہ $u(x,y)=a\ln(x^2+y^2)+b$ دو بعدی لاپلاس مساوات 13.3 کا حل ہے۔دی گئی سرحدی شرائط کے تحت دائرہ $x^2+y^2=1$ پر $u=0$ اور دائرہ $x^2+y^2=9$ پر $u=5$ ہے۔مستقل a اور b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ u ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرے۔حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.17: تصدیق کریں کہ $u(x,t)=v(x+ct)+w(x-ct)$ موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔یہاں u اور v دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل ہیں۔

اگر جزوی تفرقی مساوات میں صرف ایک متغیر کے ساتھ تفرقات پائے جاتے ہوں تب اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کر کے حل کیا جا سکتا ہے جہاں باقی متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔سوال 13.18 تا سوال 13.21 کو حل کریں جہاں u کے متغیرات x اور y ہیں۔

سوال 13.18: $u_{xx}-u=0$
جواب: $u=c_1(y)e^x+c_2(y)e^{-x}$

سوال 13.19: $u_y + yu = 0$
جواب: $u = c(x)e^{-\frac{y^2}{2}}$

سوال 13.20: $u_{yy} + 9u = 0$
جواب: $u = c_1(y)\cos 3x + c_2(y)\sin 3x$

سوال 13.21: $u_x + 2xyu = 0$
جواب: $u = c(y)e^{-x^2 y}$

سوال 13.22 تا سوال 13.25 میں $u_x = p$ لیتے ہوئے حل تلاش کریں۔

سوال 13.22: $u_{xy} = 0$
جواب: $u = v(x) + w(y)$

سوال 13.23: $u_{xy} = u_x$

سوال 13.24: $u_{xy} + u_x = 0$
جواب: $u = v(x)e^{-y} + w(y)$

سوال 13.25: $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$

سوال 13.26 تا سوال 13.29 میں دیے گئے تفرقی مساوات کی نظام کے حل تلاش کریں۔

سوال 13.26: $u_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0$
جواب: $u = axy + bx + cy + k$

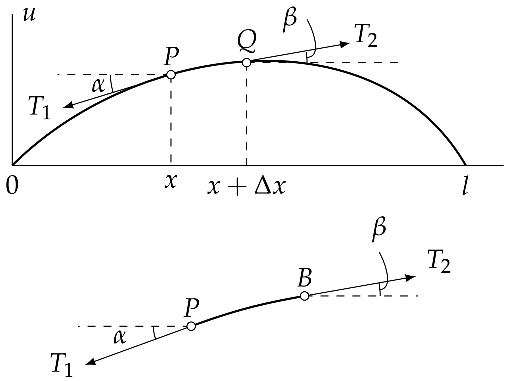
سوال 13.27: $u_x = 0, \quad u_y = 0$

سوال 13.28: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0$
جواب: $u = cx + g(y)$

سوال 13.29: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = 0$

سوال 13.30: تصدیق کریں کہ اگر سطح $z = z(x, y)$ پر منحنی $z = c$ محور x کے متوازی سیدھے خطوط ہوں، جہاں c مستقل ہے، تب z تفرقی مساوات $z_x = 0$ کا حل ہو گا۔ایسی ایک مثال بھی پیش کریں۔

سوال 13.31: تصدیق کریں کہ $yz_x - xz_y = 0$ کا حل $z = z(x, y)$ سطح گردش ہے۔اس کی مثال پیش کریں۔ (اشارہ: $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ لے کر تفرقی مساوات کو $z_\theta = 0$ میں تبدیل کریں۔)



شکل 13.1: ارتعاش پذیر تار

13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج

ایک لچک دار تار کو لمبائی l تک کھینچ کر سروں سے باندھا جاتا ہے۔ساکن تار کو x محور پر تصور کریں۔اس تار کو کسی نقطہ یا نقاط سے کھینچ کر لمحہ $t = 0$ پر چھوڑا دیا جاتا ہے تا کہ یہ ارتعاش کر سکے۔ہم تار کی ارتعاش معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی لمحہ $t > 0$ پر ساکن حالت سے تار کی نقطہ x کا انحراف $u(x, t)$ جاننا چاہتے ہیں (شکل 13.1)۔ کسی بھی نظام کا ریاضی نمونہ اخذ کرتے وقت کئی تسہیلی مفروضے فرض کیے جاتے ہیں تا کہ حاصل مساوات ضرورت سے زیادہ پیچیدہ نہ ہوں۔ہم سادہ تفرقی مساوات کی طرح جزوی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہوئے بھی ایسا کریں گے۔

موجودہ مسئلے میں ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

(الف) تار کی کمیت فی اکائی لمبائی یکساں ہے (ہم جنسی تار)۔ تار مکمل طور پر لچکدار ہے لہٰذا یہ مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے۔

(ب) تار کو اتنا تان کر باندھا گیا ہے کہ اس میں تناو، ثقلی قوت سے بہت زیادہ ہو۔یوں ثقلی قوت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

(پ) تار سیدھی کھڑی سطح میں حرکت کرتا ہے۔تار پر کوئی بھی نقطہ اپنے ساکن مقام سے بہت کم انحراف کرتا ہے لہٰذا ہر نقطے پر تار کی انحراف اور ڈھلوان کی حتمی قیمتیں قلیل ہوں گی۔

ہم توقع کر سکتے ہیں کہ یوں حاصل جزوی تفرق مساوات کا حل $u(x,t)$ ، "غیر کامل" ہم جنسی تار جس میں ثقلی میدان سے بہت زیادہ تناو ہو کا صحیح نقش پیش کرے گا۔

مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر غور کرتے ہیں (شکل 13.1)۔چونکہ مڑنے کے خلاف تار مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے لہٰذا ہر نقطے پر تار میں تناو اس نقطے پر تار کا مماسی ہو گا۔فرض کریں کہ تار کے ٹکڑے کی سروں P اور Q پر تناو T_1 اور T_2 ہے۔چونکہ تار افقی حرکت نہیں کرتا ہے لہٰذا اس ٹکڑے پر تناو کا افقی جزو صفر کے برابر ہو گا۔ یوں شکل 13.1 کو دیکھ کر

$$T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0$$

یا

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{مستقل} \tag{13.7}$$

لکھا جا سکتا ہے یعنی دونوں سروں پر یکساں افقی تناو (T) ہو گا۔ انتصابی رخ میں T_1 اور T_2 کے اجزاء $-T_1 \sin\alpha$ اور $T_2 \sin\beta$ ہیں جہاں اوپر رخ تناو کو مثبت تصور کیا گیا ہے۔ نیوٹن کی دوسری قانون کے تحت ان دو قوتوں کا مجموعہ تار کے ٹکڑے کی کمیت $\rho\Delta x$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا جہاں اسراع، x اور $x+\Delta x$ کے مابین کسی نقطے کی اسراع ہو گی۔ تار کی کمیت فی اکائی لمبائی ρ ہے جبکہ تار کے ٹکڑے کی لمبائی Δx ہے۔یوں

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13.8}$$

ہو گا۔اس کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_2 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13.9}$$

آپ تسلی کر لیں کہ چونکہ مساوات 13.7 میں $T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$ ہے لہٰذا مساوات 13.8 کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہوئے کہیں $T_2 \cos\beta$ ، کہیں $T_1 \cos\alpha$ اور کہیں T سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

اب $\tan\beta$ اور $\tan\alpha$ تار کی x اور $x+\Delta x$ پر مماس ہے یعنی

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \quad \text{اور} \quad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

جہاں جزوی تفرق اس لئے استعمال کیے گئے ہیں کہ u متغیرہ t کا بھی تابع ہے۔یوں مساوات 13.9 کو Δx سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{\Delta x}\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}\Big]=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں Δx کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{13.10}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو **یک بعدی مساوات موج**[8] کہتے ہیں۔ مساوات 13.10 ہمارے مسئلے کی درکار جزوی تفرقی مساوات ہے جو ہم جنسی اور دو درجی ہے۔مساوات میں مستقل $\frac{T}{\rho}$ کو c کی بجائے c^2 سے ظاہر کیا گیا ہے تا کہ واضح رہے کہ یہ مثبت مستقل ہے۔اس مساوات کا حل اگلے حصے میں حاصل کیا جائے گا۔

13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ لچک دار تار کی ارتعاش کو جزوی تفرقی مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad \text{مساوات موج} \tag{13.11}$$

بیان کرتی ہے جہاں $u(x,t)$ تار کی انحراف ہے۔تار کی حرکت جاننے کی خاطر اس مساوات کا حل درکار ہو گا بلکہ ہمیں مساوات 13.11 کا ایسا حل $u(x,t)$ درکار ہے جو نظام پر لاگو شرائط کو بھی مطمئن کرے۔چونکہ تار کے دونوں سر غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا تمام t کے لئے $x=0$ اور $x=l$ پر سرحدی شرائط

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0 \tag{13.12}$$

لاگو ہیں۔تار کی حرکت ابتدائی انحراف (لمحہ $t=0$ پر انحراف) اور ابتدائی رفتار (لمحہ $t=0$ پر رفتار) پر منحصر ہو گی۔ابتدائی انحراف کو $f(x)$ اور ابتدائی رفتار کو $g(x)$ سے ظاہر کرتے ہوئے **ابتدائی شرائط**[9]

$$u(x,0)=f(x) \tag{13.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) \tag{13.14}$$

---

[8] one dimensional wave equation
[9] initial conditions

لکھی جائیں گی۔ ہمیں اب مساوات 13.12 کا ایسا حل چاہیے جو سرحدی شرائط مساوات اور ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرے۔ ہم درج ذیل اقدام کے ذریعہ ایسا حل تلاش کریں گے۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے ہم جزوی تفرقی مساوات سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔
دوسرا قدم۔ ہم ان سادہ تفرقی مساوات کے ایسے حل تلاش کریں گے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔
تیسرا قدم۔ حاصل حل سے ایسے حل حاصل کیے جائیں گے جو ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتے ہوں۔

ان اقدام کی تفصیل درج ذیل ہے۔

پہلا قدم۔ ترکیب ضرب مساوات 13.11 کے حل دو عدد تفاعل کا حاصل ضرب

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{13.15}$$

کی روپ میں دیتا ہے جہاں ہر ایک تفاعل صرف ایک متغیرہ x یا t کا تابع ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں اس ترکیب کے کئی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مساوات 13.15 کے تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

ملتا ہے جہاں ($'$) سے مراد x کے ساتھ تفرق اور (.) سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ انہیں مساوات 13.11 میں پر کر کے

$$F\ddot{G} = c^2F''G$$

دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا دایاں ہاتھ صرف متغیرہ x پر منحصر ہے جبکہ اس کا بایاں ہاتھ صرف متغیرہ t پر منحصر ہے۔ اب t تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن اس مساوات کے تحت دونوں اطراف برابر ہیں اور دایاں ہاتھ t تبدیل کرنے سے ہر گز تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ t تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اسی طرح x تبدیل کرنے سے صرف دایاں ہاتھ کا تبدیل ہونا ممکن ہے لیکن

دونوں اطراف برابر ہیں اور x کی تبدیلی ہے بایاں ہاتھ ہر گز تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔یوں اس مساوات کے دونوں اطراف غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا انہیں مستقل k کے برابر لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k$$

جس سے درج ذیل دو عدد مساوات علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہے جہاں k نا معلوم مستقل ہے۔

$$F'' - kF = 0 \tag{13.16}$$

$$\ddot{G} - c^2kG = 0 \tag{13.17}$$

دوسرا قدم۔ ہم مساوات 13.16 اور مساوات 13.17 کے حل F اور G حاصل کرتے ہوئے ایسا $u = FG$ دریافت کرتے ہیں جو تمام t کے لئے سرحدی شرائط مساوات 13.12 کو مطمئن کرتا ہو یعنی:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l,t) = F(l)G(t) = 0$$

اب اگر درج بالا میں $G \equiv 0$ ہو تب $u \equiv 0$ ہو گا جس میں ہم کوئی دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہٰذا $G \neq 0$ ہو گا۔یوں درج بالا سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\text{(الف)} \quad F(0) = 0, \qquad \text{(ب)} \quad F(l) = 0 \tag{13.18}$$

اگر مساوات 13.16 میں $k = 0$ ہو تب اس مساوات کا عمومی حل $F = ax + b$ ہو گا جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $a = 0$ ، $b - 0$ یعنی $F \equiv 0$ یا $u \equiv$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔مثبت $k = \mu^2$ کے لئے مساوات 13.16 کا عمومی حل

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

ہے جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $A = 0$ ، $B = 0$ یعنی $F \equiv 0$ یا $u \equiv= 0$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔یوں ہمارے پاس منفی $k = -p^2$ لینا رہ جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.16 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$F'' + p^2F = 0$$

اس کا عمومی حل

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

ہے جو مساوات 13.18-الف کی مدد سے

$$F(0) = A = 0$$

لہٰذا $F = B \sin px$ ہو گا جو مساوات 13.18-ب کے ساتھ مل کر

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

دیتی ہے۔اب اگر $B = 0$ ہو تب $F \equiv 0$ یعنی $u \equiv 0$ ہو گا جو غیر دلچسپ حل ہے لہٰذا $B \neq 0$ ہے۔اس طرح $\sin pl = 0$ ہو گا۔ہم جانتے ہیں کہ $\sin n\pi = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یوں درج ذیل ملتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

$$pl = n\pi \qquad \implies \qquad p = \frac{n\pi}{l} \tag{13.19}$$

ہم $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے لامحدود تعداد کے حل $F(x) = F_n(x)$ یعنی

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.20}$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.18 میں دیے گئے سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔چونکہ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ہوتا ہے لہٰذا منفی عدد صحیح $n = -1, -2, \ldots$ لینے سے یہی حل منفی علامت کے ساتھ دوبارہ ملتے ہیں۔

اب مساوات 13.19 کے تحت k کی قیمت صرف $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{l})^2$ ممکن ہے۔ k کی ان قیمتوں کے ساتھ مساوات 13.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

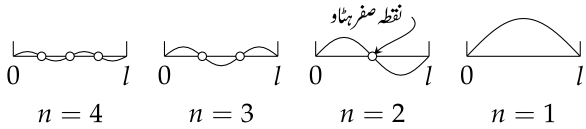
$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t$$

ہے۔یوں تفاعل $u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t)$

$$u_n(x,t) = (B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{13.21}$$



شکل 13.2: تار کے قائمہ انداز اور نقطہ صفر ہٹاو۔

مساوات 13.17 کے ایسے حل ہیں جو مساوات 13.18 میں دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ان تفاعل کو ارتعاش پذیر تار کے **آئگنی تفاعل**[10] یا **امتیازی تفاعل**[11] کہتے ہیں جبکہ $\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$ کی قیمتوں کو ارتعاش پذیر تار کے **آئگنی اقدار**[12] یا **امتیازی اقدار**[13] کہتے ہیں۔ مزید $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$ کا **سلسلہ طیف**[14] کہلاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک u_n ایک مخصوص ہارمونی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے جس کی تعدد $\frac{\lambda_n}{2\pi}=\frac{cn}{2l}$ چکر فی اکائی وقت ہے۔ اس حرکت کو تار کی n ویں **قائمہ انداز**[15] کہتے ہیں۔ پہلا قائمہ انداز جس کا $n=1$ ہو گا **بنیادی انداز**[16] کہلاتا ہے جبکہ باقی کو n ویں **ہارمونی انداز**[17] کہتے ہیں۔چونکہ مساوات 13.21 میں

$$\sin\frac{n\pi x}{l}=0 \qquad \implies \qquad x=\frac{l}{n},\frac{2l}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}l$$

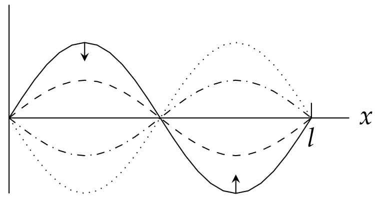
ہے لہٰذا n ویں قائمہ انداز کے $n-1$ **نقطہ صفر ہٹاو**[18] پائے جائیں گے۔ ان نقطوں پر تار ساکن رہتی ہے (شکل 13.2)۔

شکل 13.3 میں دوسرا قائمہ انداز مختلف لمحات t پر دکھایا گیا ہے۔کسی بھی لمحہ پر تار کی شکل سائن تفاعل کی ہو گی۔جب تار کا بایاں آدھا حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت تار کا دایاں آدھا حصہ اوپر کو حرکت کرے گا۔اسی طرح جب بایاں حصہ اوپر کو حرکت کرتا ہے اس وقت دایاں حصہ نیچے کو حرکت کرتا ہے۔تار کا درمیانہ نقطہ حرکت نہیں کرتا ہے لہٰذا یہ نقطہ صفر ہٹاو ہے۔باقی انداز بھی اسی طرح کی خاصیت رکھتے ہیں۔

تیسرا قدم۔ ظاہر ہے کہ ایک عدد حل $u_n(x,t)$ عموماً ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے۔اب چونکہ مساوات 13.11 خطی اور ہم جنسی ہے لہٰذا بنیادی مسئلہ 13.1 کے تحت مساوات

---

[10] eigenfunctions
[11] characteristic functions
[12] eigenvalues
[13] characteristic values
[14] spectrum
[15] normal mode
[16] fundamental mode
[17] harmonics
[18] node



شکل 13.3: مختلف t پر دوسرا قائمہ انداز

13.11 کی محدود تعداد کے حلوں u_n کا مجموعہ بھی مساوات 13.11 کا حل ہو گا۔ اس طرح ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم لامتناہی تسلسل

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{13.22}$$

پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 13.22 اور ابتدائی شرط مساوات 13.13 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \tag{13.23}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.13 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x,0)$ تفاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.22 کا t کے ساتھ تفرق لے کر اور ابتدائی شرط مساوات 13.14 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}\right]_{t=0} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x)
\end{aligned}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.14 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n^* اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $t = 0$ پر $\frac{\partial u}{\partial t}$ تفاعل $g(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x$$

اور چونکہ $\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$ ہے لہٰذا

$$B_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n=1,2,\cdots \tag{13.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.24 اور مساوات 13.25 میں حاصل کیے گئے عددی سر کو مساوات 13.22 میں پر کرنے سے حاصل تسلسل $u(x,t)$ ، مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرے گا بشرطیکہ حاصل $u(x,t)$ مرتکز ہو اور اس کی x اور t کے ساتھ جزو در جزو دو درجی تفرق لینے سے حاصل تسلسل مرتکز ہو اور ان کے مجموعے بالترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہوں جو استمراری ہیں۔

اب تک مساوات 13.22 محض ریاضی حل کے طور پر سامنے آیا ہے۔آئیں اس کی اصل حقیقت کو قائم کریں۔ہم اپنی آسانی کی خاطر ابتدائی رفتار $g(x)$ صفر لیتے ہیں۔یوں $B_n^*=0$ ہوں گے لہٰذا مساوات 13.22 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l} \tag{13.26}$$

ہم ضمیمہ ب کا کلیہ 11.ب استعمال کرتے ہوئے

$$\cos\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{1}{2}\Big[\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\Big\}+\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\Big\}\Big]$$

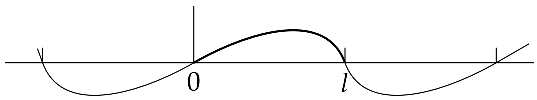
لکھ سکتے ہیں جس کو مساوات 13.26 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\Big\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\Big\}$$

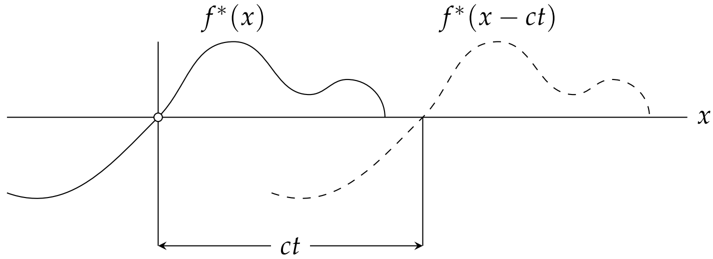
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 13.23 میں x کی جگہ $x-ct$ اور $x+ct$ پر کرنے سے یہی دو تسلسل حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)] \tag{13.27}$$

جہاں f کی طاق دوری توسیع جس کا دوری عرصہ $2l$ ہو تفاعل f^* ہے (شکل 13.4)۔چونکہ وقفہ $0\le x\le l$ پر ابتدائی انحراف $f(x)$ استمراری ہے جبکہ $x=0$ اور $x=l$ پر انحراف صفر ہے لہٰذا مساوات



شکل 13.4: $f(x)$ کی طاق توسیع



شکل 13.5: مساوات 13.27 کی معنی

مساوات 13.27 سے ظاہر ہے کہ $u(x,t)$ دونوں متغیرات x اور t کی تمام قیمتوں پر استمراری ہو گا۔ مساوات 13.27 کا تفرق لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 13.11 کا حل ہے بشرطیکہ وقفہ $0 < x < l$ پر $f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہو اور $x = 0$ اور $x = l$ پر اس کے یک طرفہ دو درجی تفرق پائے جاتے ہوں جن کی قیمت صفر کے برابر ہو۔ اس طرح یہ حقیقت قائم ہوتی ہے کہ ان شرائط پر پورا اترتا ہوا تسلسل $u(x,t)$ مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

اگر $f'(x)$ اور $f''(x)$ محض ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہوں، یا اگر وقفہ کے سروں پر یک طرفہ تفرقات غیر صفر ہوں تب ہر ایک t کے لئے محدود تعداد کی x قیمتوں پر مساوات 13.11 کے u کی دو درجی تفرقات غیر معین ہوں گے۔ ان نقطوں کے علاوہ باقی تمام نقطوں پر u مساوات موج کو مطمئن کرے گی لہٰذا ہم $u(x,t)$ کو وسیع معنوں میں مسئلے کا حل تصور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں حاصل حل اس نوعیت کا ہو گا۔

آئیں مساوات 13.27 کی طبعی معنی سمجھتے ہیں۔ جیسا شکل 13.5 میں دکھایا گیا ہے، $f^*(x)$ کی ترسیم کو ct اکائیاں دائیں منتقل کرنے سے $f^*(x-ct)$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $f^*(x-ct),\ (c>0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ دائیں جانب کو حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح $f^*(x+ct),\ (c>0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ بائیں جانب کو حرکت کرتی ہے اور $u(x,t)$ ان دونوں کا مجموعہ ہے۔

مثال 13.2: تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں تار کی ارتعاش
مساوات موج 13.11 کا حل تکونی ابتدائی انحراف

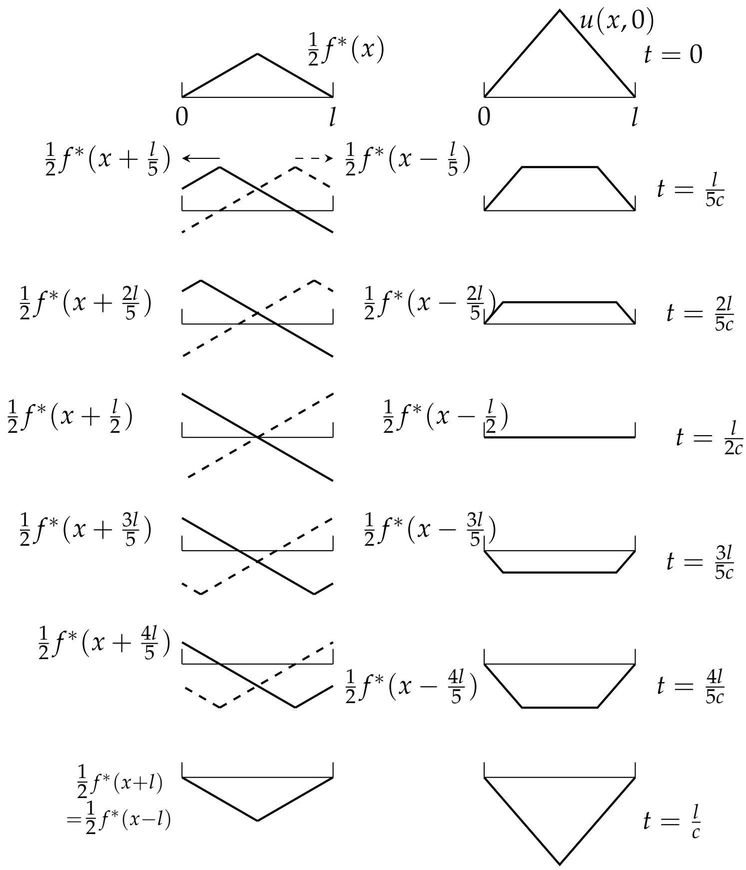
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

اور ابتدائی رفتار صفر $g(x) = 0$ کی صورت میں حاصل کریں۔
حل: چونکہ $g(x) \equiv 0$ ہے لٰہذا مساوات 13.26 میں $B_n^* = 0$ ہو گا جبکہ B_n کو صفحہ 919 پر مساوات 12.35 دے گی۔یوں مساوات 13.26 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u(x,t) = \frac{8k}{\pi^2}\Big[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi c}{l}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3\pi c}{l}t + - \cdots\Big]$$

اس حل کی ترسیم کھینچنے کی خاطر ہم $u(x,0) = f(x)$ سے شروع کرتے ہوئے مساوات 13.27 کی مدد لیتے ہیں۔یوں شکل 13.6 حاصل ہوتی ہے۔ □

سوالات



شکل 13.6: مثال 13.2 کا مختلف لمحات پر حل $u(x,t)$

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

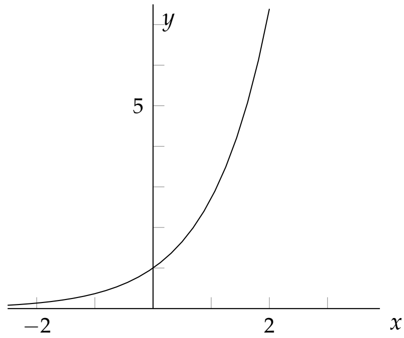
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

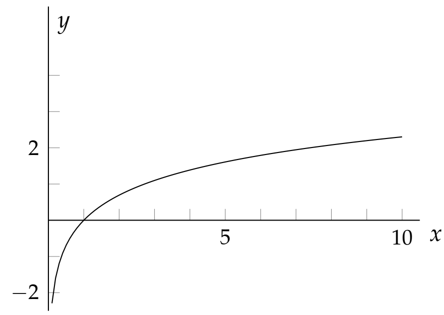
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

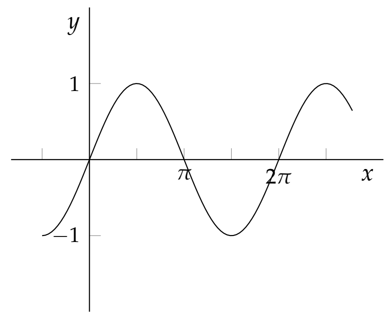


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

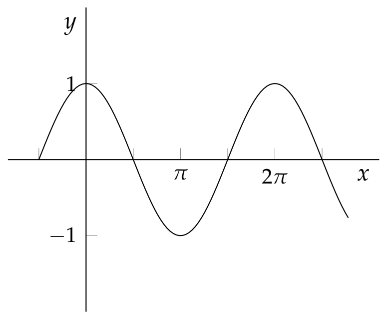


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



$\sin x$ (الف)



$\cos x$ (ب)

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

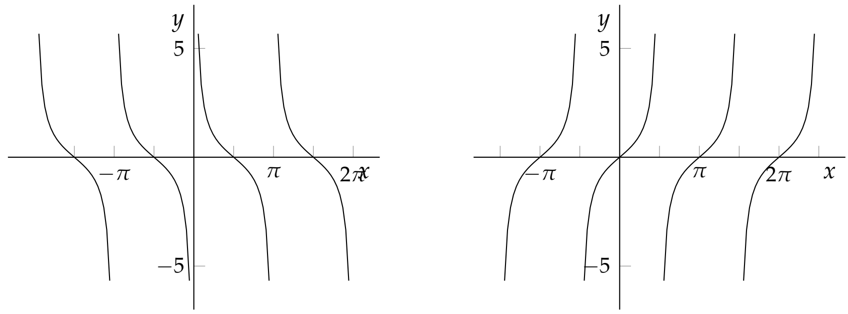
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



(ب) $\cot x$ (الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

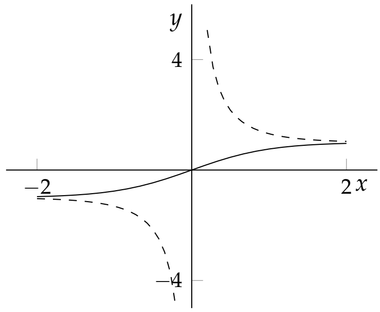
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.22}$$

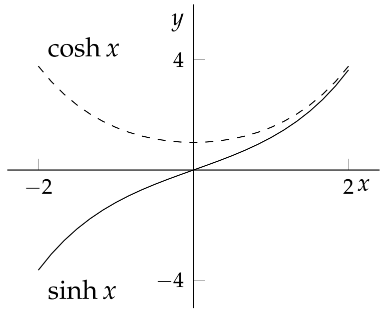
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$



(ب)ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔



(الف)ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{ب.26}$$

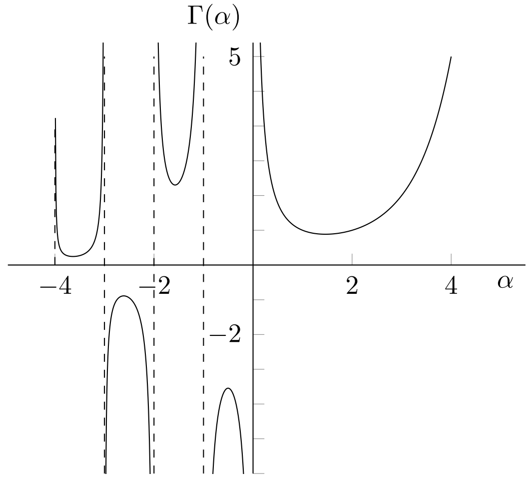
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\qquad(\alpha>0)\tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x)\tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\qquad(x>0,\ y>0)\tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\tag{ب.34}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

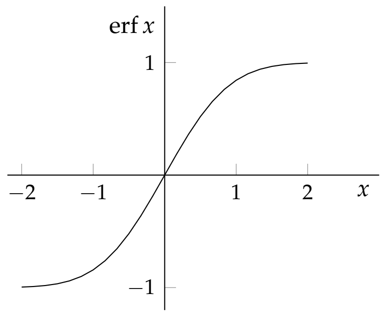
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)\tag{ب.36}$$

$erf\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

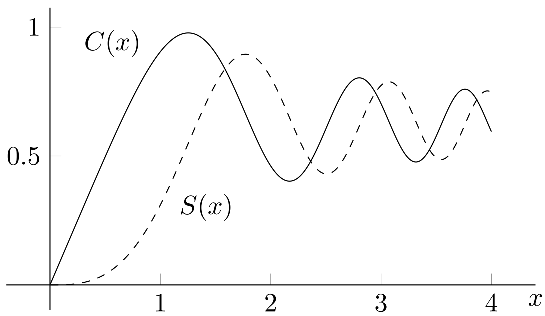
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکمل تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

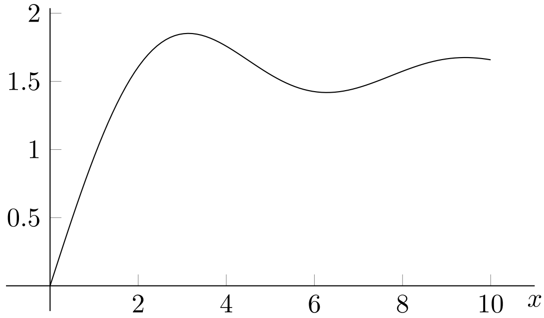
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.41}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x)=\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$