انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ v

1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات 1

1.1 نمونہ کشی 2
1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔ 13
1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات 22
1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل 40
1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی 52
1.6 عمودی خطوط کی نسلیں 70
1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت 74

2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات 81

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 81
2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 98
2.3 تفرقی عامل 113
2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش 118
2.5 یولر کوشی مساوات 134
2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی 143
2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 152
2.8 جبری ارتعاش۔ گمک 164
2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک 170
2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی 174
2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 185

3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات 193

3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 193
3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 205

3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 214
3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 217

4 نظام تفرقی مساوات 225
4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 226
4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 235
4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی 250
4.3.1 خطی نظام 251
4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 254
4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔استحکام 272
4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 281
4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 290
4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام 298
4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب 299

5 طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔اعلٰی تفاعل 309
5.1 ترکیب طاقتی تسلسل 310
5.2 لیژانڈر مساوات۔ لیژانڈر کثیر رکنی 325
5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس 343
5.3.1 عملی استعمال 348
5.4 مساوات بیسل؛ بیسل تفاعل 362

ا اضافی ثبوت 345

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 5

طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔اعلیٰ تفاعل

گزشتہ بابوں میں **مستقل عددی سر** والے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو **بنیادی تفاعل** تھے۔بنیاد تفاعل مثلاً $\sin 3t$ ، t^6 اور e^{2t} کو آپ **علم الاحصاء**[1] سے جانتے ہیں۔**متغیر عددی سر** والے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ **لیژانڈر، بیسل اور بیش ہندسی مساوات** اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔یہ مساوات اور ان کے حل **لیژانڈر تفاعل، بیسل تفاعل اور بیش ہندسی تفاعل** انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہٰذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف ترکیبوں پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل **طاقتی تسلسل**[2] $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا اس کو **ترکیب طاقتی تسلسل**[3] کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو $\ln x$ یا کسری طاقت x^r سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو **ترکیب فروبنیوس**[4] کہلاتی ہے۔جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کار آمد ثابت ہوتا ہے لہٰذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلیٰ حل جنہیں آپ علم الاحصاء سے نہیں جانتے **اعلیٰ تفاعل**[5] کہلاتے ہیں۔

calculus[1]
power series[2]
power series method[3]
Frobenius method[4]
higher functions or special functions[5]

5.1 ترکیب طاقتی تسلسل

متغیر عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً **ترکیب طاقتی تسلسل** سے حل کرتے ہوئے طاقتی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔اس طاقتی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے، حل کا خط کھینچا جا سکتا ہے، کلیات ثابت کیے جا سکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جا سکتی ہے۔اس حصے میں طاقتی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ $x-x_0$ کا طاقتی تسلسل درج ذیل ہے

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots \tag{5.1}$$

جس میں x متغیر ہے جبکہ a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\dots$ تسلسل کے **عددی سر**[6] کہلاتے ہیں اور x_0 مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا **وسط**[7] کہلاتا ہے۔جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً **علامت مجموعہ**[8] ($\sum$) کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں اشاریہ[9] مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔درج بالا مساوات میں m بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔علامت مجموعہ کے نیچے $m=0$ اور اس کے اوپر ∞ مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔تسلسل کا وسط صفر $(x_0=0)$ ہونے کی صورت میں x کا طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{5.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقتی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کی تسلسل ہے جس میں $x-x_0$ (یا x) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

---

[6] coefficients
[7] center
[8] summation
[9] index

مثال 5.1: مکلارن تسلسل در حقیقت میں طاقتی تسلسل ہیں

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1, \text{ہندسی تسلسل}) \\
e^x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \\
\cos x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots
\end{aligned}$$

ترکیب طاقتی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقتی تسلسل دیکھے۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقتی تسلسل حل
تفرقی مساوات $y' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلی قدم میں حل کو طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.3}$$

تسلسل کا جزو با جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m x^{m-1} \tag{5.4}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots) = 0$$

x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تفاعل e^{-x} کی مکلارن تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots) = a_0e^{-x}$$

یہاں آپ $y'' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ حاصل کریں۔

اب اس ترکیب کی عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلے مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔پہلی قدم میں ہم خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.5}$$

میں $p(x)$ اور $q(x)$ کو x کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ از خود کثیر رکنی ہوں تب

پہلی قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسری قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح y' اور درج ذیل y'' لکھتے ہوئے

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} \tag{5.6}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔ تیسری قدم میں x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری x^1 ، x^2 ، ... کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔ یوں تمام عددی سر کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیژانڈر مساوات

درج ذیل مساوات کروی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔اس کو حل کریں۔

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حل: مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}(1-x^2)(2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + 6\cdot 5a_6x^4 \cdots)\\ -2x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots)\\ +2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) = 0\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}(2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + 6\cdot 5a_6x^4 \cdots)\\ +(-2a_2x^2 - 3\cdot 2a_3x^3 - 4\cdot 3a_4x^4 - 5\cdot 4a_5x^5 - \cdots)\\ +(-2a_1x - 2\cdot 2a_2x^2 - 3\cdot 2a_3x^3 - 4\cdot 2a_4x^4 - \cdots)\\ +(2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3 + 2a_4x^4 + \cdots) = 0\end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(2a_2 + 2a_0) + (3\cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x\\ +(4\cdot 3a_4 - 2a_2 - 2\cdot 2a_2 + 2a_2)x^2\\ +(5\cdot 4a_5 - 3\cdot 2a_3 - 3\cdot 2a_3 + 2a_3)x^3\\ +(6\cdot 5a_6 - 4\cdot 3a_4 - 4\cdot 2a_4 + 2a_4)x^4 + \cdots = 0\end{aligned}$$

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری x ، x^2 ، x^3 ، $\cdots$ کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے بالترتیب a_2 ، a_3 ، a_4 ، $\cdots$ کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3} \\
a_5 &= \frac{a_3}{2} = 0 \quad (\text{چونکہ } a_3 = 0 \text{ ہے}) \\
a_6 &= \frac{3}{5}a_4 = -\frac{a_0}{5}
\end{aligned}
$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots)$$

جس میں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل x اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \cdots$ پر مشتمل ہے جو **لیژانڈر کثیر رکنی**[10] $P_n(x)$ اور **لیژانڈر تفاعل**[11] $Q_n(x)$ کے رکن ہیں۔یہاں $x = P_1(x)$ اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots = -Q_1(x)$ ہیں جہاں منفی علامت روایتی ہے۔ n لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا **درجہ**[12] کہلاتا ہے۔یہاں $n = 1$ ہے لہٰذا لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔

نظریہ طاقتی تسلسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ $s_n(x)$ لکھتے ہیں جس کو n **جزوی مجموعہ**[13] کہتے ہیں۔

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{5.7}$$

Legendre polynomials[10]
Legendre function[11]
order[12]
nth partial sum[13]

یہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔مساوات 5.1 سے $s_n(x)$ منفی کرنے سے بقایا $R_n(x)$ حاصل ہوتا ہے جس کو $a_n(x - x_0)^n$ کے بعد مساوات 5.1 کا بقایا[14] کہتے ہیں۔

$$R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \cdots \tag{5.8}$$

یوں ہندسی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

کے جزوی مجموعے اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \cdots \\ s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \end{aligned}$$

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ $\cdots$ کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔اگر کسی $x = x_1$ کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرتکز ہو مثلاً

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر تسلسل 5.1 مرکوز[15] ہے جبکہ $s(x_1)$ کو تسلسل 5.1 کی قیمت[16] یا مجموعہ کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_1 - x_0)^m$$

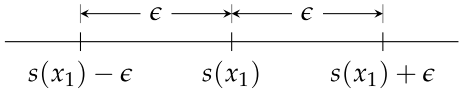
اس طرح کسی بھی n کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1) \tag{5.9}$$

اس کے برعکس اگر $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ ، $\cdots$ کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر مساوات 5.1 منفرج[17] ہے۔

---

[14] remainder
[15] converge
[16] value or sum
[17] divergent



شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔

مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت ϵ کے لئے ایسا N (جس کی قیمت ϵ پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام $n > N$ کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\left|R_n(x_1)\right| = \left|s(x_1) - s_n(x_1)\right| < \epsilon \qquad n > N \text{ تمام} \tag{5.10}$$

جیومیٹریائی طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ $s_n(x_1)$ جہاں $n > N$ ہے $s(x_1) - \epsilon$ اور $s(x_1) + \epsilon$ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں x_1 پر مساوات 5.1 کا مجموعہ $s(x_1)$ تقریباً $s_n(x_1)$ کے برابر ہو گا۔ مزید یہ کہ $s(x_1)$ اور $s_n(x_1)$ میں فرق کو ہم n بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

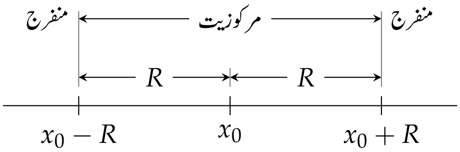
طاقتی تسلسل کہاں مرکوز ہوتی ہے؟ تسلسل 5.1 میں $x = x_0$ پر a_0 کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا تسلسل کی قیمت a_0 ہو گی۔ یوں $x = x_0$ پر تسلسل a_0 پر مرکوز ہوتی ہے۔ کبھی کبھار x کی واحد اسی قیمت پر تسلسل مرتکز ہو گا۔ اگر x کے دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرتکز ہو تب x کی یہ قیمتیں ارتکازی وقفہ[18] کہلاتا ہے۔ یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔ محدود وقفہ جس کا وسط x_0 ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں طاقتی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام x پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے x پر تسلسل مرکوز ہو گا

$$|x - x_0| < R \tag{5.11}$$

جبکہ $|x - x_0| > R$ پر تسلسل منفرج ہو گا۔ ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طاقتی تسلسل x کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں R رداس ارتکاز[19] کہلاتا ہے۔ (مخلوط طاقتی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول ٹکیا ہوتا ہے جس کا رداس R ہو گا)۔ اگر تسلسل تمام x پر مرکوز ہو تب ہم $R = \infty$ یعنی $\frac{1}{R} = 0$ لکھتے ہیں۔

[18] convergence interval
[19] convergence radius



شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.11 جس کا وسط x_0 ہے۔

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جا سکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد ($\lim$) موجود اور غیر صفر ہو۔ اگر یہ حد لامتناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط x_0 پر مرکوز ہو گا۔

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}} \tag{5.12}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|} \tag{5.13}$$

مثال 5.4: رداس ارتکاز ∞، 1 اور 0

تینوں تسلسل میں $m \to \infty$ لیتے ہوئے رداس ارتکاز R دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \to 0, \quad R \to \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! x^m = 1 + x + 2x^2 + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{(m+1)!}{m!}\right| = m + 1 \to \infty, \quad R \to 0$$

لامتناہی رداس ارتکاس $R \to \infty$ سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ $R = 0$ بے کار صورت ہے۔ عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔

درج بالا مثال میں $\frac{1}{1-x}$ کے طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز $R=1$ حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط $x_0=0$ ہے۔مساوات 5.11 کے تحت $|x|<1$ کے لئے طاقتی تسلسل تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کو ظاہر کرتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔نقطہ $x=0.2$ پر تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-0.2}=1.25$ ہے جبکہ اس کے تسلسل میں $x=0.2$ پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
1&=1 && \text{ایک رکن}\\
1+0.2&=1.2\\
1+0.2+0.2^2&=1.24\\
1+0.2+0.2^2+0.2^3&=1.248\\
1+0.2+0.2^2+0.2^3+0.2^4&=1.2496 && \text{پانچ ارکان}
\end{aligned}
$$

طاقتی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کے اصل قیمت کے $\frac{1.2496}{1.25}\times 100=99.968$ فی صد ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی x پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جا سکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرج ہے۔آئیں رداس ارتکاز کے باہر $x=1.2$ پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل کریں۔تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-1.2}=-5$ حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
1&=1\\
1+1.2&=2.2\\
1+1.2+1.2^2&=3.64\\
1+1.2+1.2^2+1.2^3&=5.368
\end{aligned}
$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ x پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرج ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔طاقتی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہو گی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{5.14}$$

میں $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کے طاقتی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقتی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ایسا تفاعل $f(x)$ جس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا مثبت رداس ارتکاز پایا جاتا ہو، x_0 پر **تحلیلی**[20] کہلاتا ہے ورنہ اس نقطے کو غیر تحلیلی کہیں گے (مثال 5.5 دیکھیں)۔اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 **معیاری صورت** میں ہے یعنی یہ y'' سے شروع ہوتا ہے۔اگر دو درجی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پایا جاتا ہو، یعنی اس میں $h(x)y''$ پایا جاتا ہو تب مساوات کو $h(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

مسئلہ 5.1: طاقتی تسلسل حل کی وجودیت

اگر مساوات 5.14 میں p ، q اور r نقطہ $x = x_0$ پر تحلیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل $x = x_0$ پر تحلیلی ہو گا اور اس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رداس ارتکاز $R > 0$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت آپ کتاب کے آخر میں صفحہ 343 پر حوالہ [2] سے پڑھ سکتے ہیں۔(دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ x محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رداس ارتکاز کی لمبائی x_0 سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں p ، q اور r میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تحلیلی ہو۔

مثال 5.5: تفاعل غیر تحلیلی ہونے کے کئی وجوہات ممکن ہیں۔اس کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

- **تفاعل غیر معین** ہو سکتا ہے مثلاً $f(x) = \frac{1}{x-x_0}$ جس کی **قیمت** $x = x_0$ پر غیر معین ہے۔

[20] analytic

- تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

- تفاعل استمراری ہونے کے باوجود غیر ہموار[21] ہو سکتا ہے۔ایسا تفاعل جس کے تمام تفرق $x = x_0$ پر پائے جاتے ہوں ہموار کہلاتا ہے۔درج ذیل تفاعل کا دو درجی تفرق $x = x_0$ پر نہیں پایا جاتا۔

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 & x \geq x_0 \\ -(x - x_0)^2 & x < x_0 \end{cases}$$

تفاعل ہموار ہونے کے باوجود اس کی ٹیلر تسلسل نقطہ $x = x_0$ پر منفرج ہو سکتی مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

اس ہموار تفاعل کے تمام تفرق نقطہ $x = 0$ پر صفر کے برابر ہیں لہٰذا اس کی ٹیلر تسلسل صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے جو تفاعل کو ظاہر نہیں کر سکتی۔

طاقتی تسلسل پر مختلف عمل

طاقتی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقتی تسلسلوں کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح) x کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقتی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقتی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

---

[21] not smooth

$|x - x_0| < R$ پر مرکوز ہو، جہاں $R > 0$ ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی انہیں x پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان x پر تفرق y' کو ظاہر کرے گا۔

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \qquad (|x - x_0| < R)$$

اسی طرح دو درجی، تین درجی اور بلند درجی تفرقات بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقتی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m \tag{5.15}$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m)(x - x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ $f(x) + g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقتی تسلسل کو رکن بارکن ضرب دیا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں۔اب پہلی تسلسل کے ہر رکن کو دوسری تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے $x - x_0$ کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$\begin{aligned} a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x - x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x - x_0)^2 + \cdots \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_mb_0)(x - x_0)^m \end{aligned}$$

مرکوز ہو گا اور $f(x)g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ارتکاز دریافت کریں۔

سوال 5.1: $\sum\limits_{\infty}^{m=0}(m+1)mx^m$
جواب: $R=1$

سوال 5.2: $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{k^m}$
جواب: $R=k$

سوال 5.3: $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
جواب: $R=\infty$

سوال 5.4: $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^m x^m$
جواب: $R=\frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقتی تسلسل حل کریں۔

سوال 5.5: $y'=-2xy$
جواب: $y=a_0(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+-\cdots)=a_0e^{-x^2}$

سوال 5.6: $y''+y=0$
جواب: $y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2}x^2-\frac{a_1}{6}x^3+-\cdots=a_0\cos x+a_1\sin x$

سوال 5.7: $(1-x)y'=y$
جواب: $y=a_0(1+x+x^2+x^3+\cdots)=-\frac{a_0}{1-x}$

سوال 5.8: جہاں k مستقل مقدار ہے $xy'-3y=k$
جواب: $y=cx^3-\frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاقتی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لامحدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں x کے صرف طاق یا صرف جفت طاقت پائیں جاتے ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9: $y''-y'+xy=0$
جواب: $y=a_0(1-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{240}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{24}-\cdots)$

سوال 5.10: $y''-y'-xy=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{144}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^5}{20}+\cdots)$

سوال 5.11: $y''-y'-x^2y=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{60}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots)$

سوال 5.12: $y''-xy'-x^2y=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{90}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots)$

سوال 5.13: $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$
جواب: $y=a_0(1-3x^2)+a_1(x-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\cdots)$ ؛ جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
$\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{s}{s+1}x^{s+1}$ کے پہلے جزو کی نشاندہی $s=0$ کرتا ہے۔اس مجموعے میں $k=s+1$ پر کرتے ہوئے نیا مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر x^m پایا جاتا ہو۔اس عمل کو منتقلی اشاریہ[22] کہتے ہیں۔حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k}x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی $k=1$ کرتا ہے۔

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
مجموعہ $\sum\limits_{p=2}^{\infty}\frac{p+2}{(p+1)!}x^{p+3}$ میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر x^m ہو۔

جواب: $\sum\limits_{m=5}^{\infty}\frac{m-1}{(m-2)!}x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.19 کو ترکیب طاقتی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں x^3 تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل a_0 (اور a_1) دریافت

[22] shifting index

کریں۔دیے گئے نقطہ x_1 پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں تک جواب لکھیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

جوابات: $y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \cdots$ ، $a_0 = 6$ ، $y(1) = -514$

سوال 5.17:

$$y'' + 4xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad x_1 = 0.1$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{6} + \cdots)$ ، $a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$ ، $y(0.1) = 1.094$

سوال 5.18:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = 0.5$$

جوابات: $y = a_0(1 - 6x^2 + 3x^4 + \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{3})$ ، $a_0 = 0$ ، $a_1 = -\frac{3}{2}$ ، $y(0.5) = -0.437$

سوال 5.19:

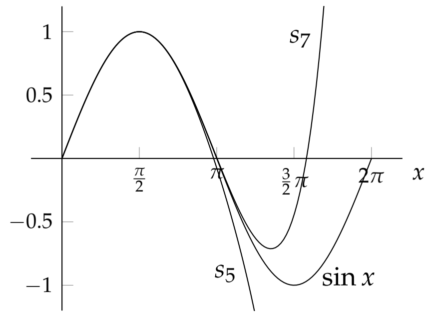
$$(x - 4)y' = xy, \quad y(1) = 5, \quad x_1 = 2$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{256} + \cdots)$ ، $a_0 = 5.827$ ، $y(2) = 2.307$

سوال 5.20: کمپیوٹر کا استعمال

طاقتی تسلسل سے تفاعل کی قیمت جزوی تسلسل سے حاصل کی جاتی ہے۔تفاعل $\sin x$ کی تسلسل سے بذریعہ کمپیوٹر، تسلسل میں اجزاء کی تعداد مختلف لیتے ہوئے سائن کا خط کھینچیں۔آپ دیکھیں گے کے کم اجزاء لینے سے اصل تفاعل (یعنی $\sin x$) اور تسلسل میں فرق بہت جلد واضح ہوتا ہے جبکہ زیادہ تعداد میں اجزاء لینے سے یہ فرق دیر بعد نمودار ہوتا ہے۔

جوابات: شکل 5.3 میں $\sin x$ کا جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔



شکل 5.3: سوال 5.20 کا خط۔ $\sin x$ کے علاوہ جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 دکھائے گئے ہیں۔

5.2 لیژانڈر مساوات۔ لیژانڈر کثیر رکنی

لیژانڈر تفرقی مساوات[23][24]

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (\text{مستقل ہے } n) \tag{5.16}$$

طبیعیات کے اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک ہے جو متعدد مسائل، بالخصوص کرہ کے سرحدی قیمت مسئلوں، میں سامنے آتی ہے۔

مساوات میں مقدار معلوم n کی قیمت اصل مسئلے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے لہٰذا مساوات 5.16 درحقیقت سادہ تفرقی مساوات کی نسل کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم نے لیژانڈر مساوات، جس میں $n=1$ تھا، کو مثال 5.3 میں حل کیا (جس کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ مساوات 5.16 کے کسی بھی حل کو **لیژانڈر تفاعل**[25] کہتے ہیں۔ لیژانڈر تفاعل اور ایسے دیگر اعلیٰ تفاعل، جو علم الاحصاء میں نہیں پائے جاتے، کے مطالعہ کو **نظریہ اعلیٰ تفاعل**[26] کہتے ہیں۔ دیگر اعلیٰ تفاعل اگلے حصوں میں سامنے آئیں گے۔

مساوات 5.16 کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ نقطہ $x=0$ پر **تحلیلی تفاعل** ہیں [مثال 5.6 دیکھیں] لہٰذا لیژانڈر مساوات

[23] فرانسیسی ریاضی دان اڈریان مری لیژانڈر [1752-1833] نے اعلیٰ تفاعل، بیضوی تکمل اور اعدادی نظریہ پر کام کیا۔
[24] Legendre's equation
[25] Legendre function
[26] special functions theory

پر مسئلہ 5.1 کا اطلاق ہوتا ہے اور اس کا حل طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔طاقتی تسلسل

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.17}$$

اور اس کے تفرقات کو مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے مستقل $n(n+1)$ کو k لکھتے ہوئے

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}-2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}+k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m=0$$

یعنی

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}-\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m}-\sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^{m}+\sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m=0$$

حاصل ہوتا ہے۔یہاں آپ مثال 5.3 کی طرح مجموعوں کے چند ابتدائی ارکان لکھ کر آگے بڑھ سکتے ہیں یا پھر درج ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ تمام مجموعوں کو x کی یکساں طاقت کی صورت (x^s) میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $s=m-2$ یعنی $m=s+2$ پر کرتے ہیں جبکہ بقایا تین مجموعوں میں m کی جگہ s پر کرتے ہیں۔یوں پہلے مجموعے کا پہلا رکن $m=2$ اب $s=0$ ہو گا اور a_m کی جگہ a_{s+2} لکھا جائے گا۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s-\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_s x^s-\sum_{s=1}^{\infty} 2s a_s x^s+\sum_{s=0}^{\infty} k a_s x^s=0 \tag{5.18}$$

درج بالا مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لٰہذا مساوات کا بایاں ہاتھ بھی صفر کے برابر ہو گا اور یوں x کے ہر طاقت کے عددی سروں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔یوں x^0 کے عددی سر سے شروع کرتے ہوئے باری باری x^1 ، x^2 ، . . . کے عددی سر صفر کے برابر لکھتے ہیں۔مساوات 5.18 کا دوسرا مجموعہ x^2 اور تیسرا مجموعہ x^1 سے شروع ہوتا ہے لٰہذا ان میں x^0 نہیں پایا جاتا ہے۔یوں پہلے اور چوتھے مجموعوں سے x^0 کے عددی سر جمع کرتے ہوئے صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$$2\cdot 1a_2+n(n+1)a_0=0 \tag{5.19}$$

جہاں k کی جگہ واپس $n(n+1)$ لکھا گیا ہے۔اسی طرح x^1 پہلے، تیسرے اور چوتھے مجموعوں میں پایا جاتا ہے جن سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$3\cdot 2a_3+[-2+n(n+1)]a_1=0 \tag{5.20}$$

بلند طاقتی اجزاء x^2 ، x^3 ، . . . تمام مجموعوں میں پائے جاتے ہیں لٰہذا ان کے لئے x^s کے عددی سروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$(s+2)(s+1)a_{s+2}+[-s(s-1)-2s+n(n+1)]a_s=0 \tag{5.21}$$

چکور قوسین $[\cdots]$ کے اندر قوسین کو کھول کر ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}-s(s-1)-2s+n(n+1) &= -s^2+s-2s+n^2+n = n^2-s^2+n-s\\ &= (n-s)(n+s)+n-s\\ &= (n-s)(n+s+1)\end{aligned}$$

لہٰذا مساوات 5.21 سے

$$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s=0,1,\cdots) \tag{5.22}$$

حاصل ہوتا ہے جو کلیہ توالی[27] کہلاتا ہے۔کلیہ توالی کی مدد سے، a_0 اور a_1 کے علاوہ، بقایا تمام عددی سر، دو قدم پچھلی عددی سر استعمال کرتے ہوئے دریافت کیے جاتے ہیں۔ یوں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔ کلیہ توالی کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 & a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1\\
a_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}a_2 & a_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}a_3\\
&= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 & &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 5.17 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y(x) = a_0y_1(x)+a_1y_2(x) \tag{5.23}$$

جہاں

$$y_1(x) = 1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-+\cdots \tag{5.24}$$

اور

$$y_2(x) = x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-+\cdots \tag{5.25}$$

ہیں۔یہ تسلسل $|x|<1$ کے لئے مرکوز ہیں۔بعض اوقات تسلسل کا کوئی عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں کلیہ توالی کے تحت اگلے تمام عددی سر بھی صفر ہوں گے اور یوں تسلسل محدود ارکان پر مشتمل ہوتا

[27] recurrence relation, recursion formula

ہے۔چونکہ مساوات 5.24 میں x کے جفت طاقت پائے جاتے ہیں جبکہ مساوات 5.25 میں x کے طاق طاقت پائے جاتے ہیں للٰذا $\frac{y_1}{y_2}$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا ہے اور یوں y_1 اور y_2 آپس میں خطی تعلق نہیں رکھتے للٰذا یہ خطی طور غیر تابع حل ہیں۔یوں مساوات 5.23 کھلے وقفہ $-1 < x < 1$ پر عمومی حل ہے۔

دھیان رہے کہ $x = \mp 1$ پر $1 - x^2 = 0$ ہو گا للٰذا سادہ تفرقی مساوات کی معیاری صورت میں عددی سر غیر تحلیلی ہوں گے۔یوں حیرانی کی بات نہیں ہے کہ تسلسل 5.24 اور تسلسل 5.24 کا ارتکازی وقفہ وسیع نہیں ہے ماسوائے اس صورت میں جب اجزاء کی تعداد محدود ہونے کی بنا تسلسل کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے۔

کثیر رکنی حل۔لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$

طاقتی تسلسل کے تخفیف سے کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے جس کا حل، ارتکازی شرط کے قید سے آزاد، تمام x کے لئے پایا جاتا ہے۔ایسے اعلٰی تفاعل جو سادہ تفرقی مساوات کے حل ہوتے ہیں میں یہ صورت عموماً پائی جاتی ہے جن سے مختلف نسل کے اہم کثیر رکنی حاصل ہوتے ہیں۔لیژانڈر مساوات میں n کی قیمت غیر منفی عدد صحیح ہونے کی صورت میں $s = n$ پر مساوات 5.22 صفر کے برابر ہوتا ہے للٰذا $a_{n+2} = 0$ ہو گا اور یوں $a_{n+4} = 0$ ، $a_{n+6} = 0$ ، $\cdots$ ہوں گے۔جفت n کی صورت میں y_1 کثیر رکنی ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں y_2 کثیر رکنی ہو گا۔ان کثیر رکنی کو مستقل مقدار سے ضرب دیتے ہوئے لیژانڈر کثیر رکنی[28] حاصل ہوتی ہیں جنہیں $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔روایتی طور پر اس مستقل مقدار کو درج ذیل طریقے سے چنا جاتا ہے۔

تسلسل میں x^n کے عددی سر a_n کو

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \qquad n \text{ مثبت عدد ہے} \tag{5.26}$$

چنا [مثال 5.7 دیکھیں] جاتا ہے (جبکہ $n = 0$ کی صورت میں $a_n = 1$ چنا جاتا ہے)۔ مساوات 5.22 کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے دیگر عددی سر حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \qquad (s \le n-2) \tag{5.27}$$

---

[28] Legendre polynomial

کثیر رکنی میں x کی بلند تر طاقت کے عددی سر a_n کو مساوات 5.26 کے تحت چننے سے $x = 1$ پر تمام P_n کی قیمت اکائی $[P_n(1) = 1]$ حاصل ہوتی ہے [شکل 5.4 دیکھیں]۔یہی a_n یوں چننے کی وجہ ہے۔مساوات 5.27 میں $s + 2 = n$ یعنی $s = n - 2$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.26 سے a_n پر کرتے ہیں۔

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

شمار کنندہ میں $(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)!$ اور نسب نما میں $(n!)^2$ کو $n!n!$ لکھ کر اس میں $n! = n(n-1)!$ اور $n! = n(n-1)(n-2)!$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں $n(n-1)2n(2n-1)$ کٹ جاتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned} a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} \end{aligned}$$

اور دیگر عددی سر حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں درج ذیل عمومی کلیہ لکھا جا سکتا ہے۔

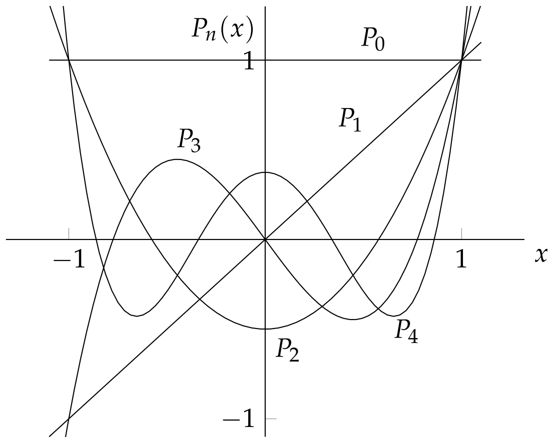
$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \qquad (n - 2m \geq 0) \tag{5.28}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفرقی مساوات 5.16 کا کثیر رکنی حل

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!}x^{n-2} + - \cdots \end{aligned} \tag{5.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ عدد صحیح ہو گا اور M اس عدد صحیح کے برابر ہو گا [مثال 5.8 دیکھیں]۔درج بالا n درجی لیژانڈر کثیر رکنی[29] کہلاتا ہے اور اس کو $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند پہلے لیژانڈر کثیر رکنی

[29] Legendre polynomial



شکل 5.4: لیژانڈر کثیر رکنی۔

جنہیں شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر آپس میں **عمودی**[30] ہیں۔یہ **خصوصیت فوریئر لیژانڈر** تسلسل کے لئے ضروری ہے جن پر فوریئر تسلسل کے باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال 5.6: لیژانڈر مساوات 5.16 سے $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت میں لکھتے ہوئے ثابت کریں کی اس کے عددی سر $x=0$ پر تحلیلی ہیں۔

حل: لیژانڈر مساوات کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}=0$ حاصل ہوتا ہے

---

orthogonal[30]

جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ ہیں جن کی مکلارن تسلسل درج ذیل ہیں۔

$$\frac{n(n+1)}{1-x^2} = n(n+1)(1+x^2+x^4+\cdots)$$
$$\frac{-2x}{1-x^2} = -2(x+x^3+x^5+\cdots)$$

پہلی تسلسل کا $\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$ ہیں لہٰذا اس کا رداس ارتکاز $R = 1$ ہے۔ دوسری تسلسل کا بھی $\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$ اور $R = 1$ ہیں۔ یوں دونوں تسلسل تحلیلی ہیں۔

مثال 5.7: درج ذیل مساوات کے بائیں ہاتھ سے اس کا دایاں ہاتھ حاصل کریں۔

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$$

حل: پہلے $n = 3$ کے لئے حل کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں شمار کنندہ میں طاق اعداد (جو طاق مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو ایک طرف اور جفت اعداد (جو جفت مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو دوسری طرف منتقل کرتے ہوئے ہر جفت عدد سے 2 کا ہندسہ نکالا گیا ہے۔

$$\frac{(2\cdot 3)!}{2^3(3!)^2} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^3(3\cdot 2\cdot 1)^2} = \frac{6\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^3(3!)^2} = \frac{2^3(3\cdot 2\cdot 1)\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^3(3!)^2} = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{3!}$$

شمار کنندہ میں اعداد کو ترتیب دیتے ہوئے اور اس میں سب سے بڑے عدد 5 کو $2\cdot 3-1$ لکھتے ہوئے $\frac{1\cdot 3\cdot(2\cdot 3-1)}{3!}$ لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں یہی سب کچھ عمومی عددی صحیح n کے لئے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{2^n n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{n!}\\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}
\end{aligned}$$

مثال 5.8: لیژانڈر کثیر رکنی مجموعہ [مساوات 5.29] کی بالائی حد M ہے۔ M کی قیمت دریافت کریں۔

حل: مساوات 5.22 لیژانڈر کثیر رکنی کے عددی سر دیتی ہے جس کے تحت $s=n$ پر عددی سر صفر ($a_{n+2}=0$) کے برابر ہو گا اور یوں بقایا عددی سر a_{n+4} ، a_{n+6} ، $\dots$ بھی صفر کے برابر ہوں گے۔یوں کثیر رکنی میں x کی زیادہ سے زیادہ طاقت n ہو گی۔اس طرح $n=5$ کی صورت میں a_5x^5 ، a_3x^3 اور a_1x^1 پایا جائے گا جبکہ $n=8$ کی صورت میں a_8x^8 ، a_6x^6 ، a_4x^4 ، a_2x^2 اور a_0 پائے جائیں گے۔ آپ نے دیکھا کہ طاق n کی صورت میں کثیر رکنی میں کل $\frac{n-1}{2}$ پائے گئے جبکہ جفت n کی صورت میں ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ تھی۔یوں طاق n کی صورت میں $M=\frac{n-1}{2}$ اور جفت n کی صورت میں $M=\frac{n}{2}$ ہو گا جہاں M عدد صحیح ہے۔

مثال 5.9: (کلیہ روڈریگیس)
تفاعل $(x^2-1)^n$ کو الکراجی کے مسئلہ ثنائی[31] سے پھیلا کر اس کا n درجی تفرق لیں۔حاصل جواب کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل کریں جس کو کلیہ روڈریگیس[32] کہتے ہیں۔

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \tag{5.31}$$

حل: $(x^2-1)^n$ کو مسئلہ الکراجی سے پھیلاتے ہوئے $n+1$ ارکان ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y=(x^2-1)^n&=(x^2)^n+\frac{n}{1!}(x^2)^{n-1}(-1)^1+\frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^{n-2}(-1)^2+\cdots \\ &+\frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^2(-1)^{n-2}+\frac{n}{1!}(x^2)(-1)^{n-1}+(-1)^n \end{aligned} \tag{5.32}$$

---

[31] binomial theorem ابو بکر ابن محمد ابن الحسین الکراجی[953-1029]ایران کے ریاضی دان تھے۔
[32] Rodrigues' formula فرانسیسی ریاضی دان بنجامن اولانڈے روڈریگیس[1794-1851]

اس مساوات کا آخری رکن مستقل مقدار $(-1)^n$ ہے جبکہ اس رکن سے ایک پہلے رکن میں x^2 پایا جاتا ہے۔یوں y' لینے سے آخری رکن صفر ہو جائے گا لہٰذا y' میں n ارکان رہ جائیں گے۔ y' کے آخری رکن میں x^1 پایا جائے گا۔ y'' لینے سے یہ رکن مستقل مقدار ہو جائے گا جبکہ ارکان کی تعداد میں مزید کمی رو نما نہیں ہو گی۔اسی طرح y''' لینے سے ایک اور رکن کم ہو جائے گا اور $n-1$ ارکان رہ جائیں گے۔ y'''' لینے سے ارکان کی تعداد میں کمی پیدا نہیں ہو گی۔یوں ہر دو مرتبہ تفرق لینے سے تعداد اکائی کی پیدا ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ n درجی تفرق $y^{(n)}$ لینے کے بعد ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ ہو گی جس کو ہم M سے ظاہر کرتے ہیں اور جو صحیح عدد ہو گا۔

مساوات 5.32 کو مجموعے کی صورت میں لکھتے ہیں جس میں $m=0$ تا $m=n$ ارکان یعنی $n+1$ ارکان ہیں۔

$$y=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(x^2)^{n-m}(-1)^m}{(n-m)!m!}=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!}x^{2n-2m} \tag{5.33}$$

اب $z=x^{2n-2m}$ پر نظر رکھیں۔اس کے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
z'&=(2n-2m)x^{2n-2m-1}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-1)!}x^{2n-2m-1}\\
z''&=(2n-2m)(2n-2m-1)x^{2n-2m-2}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-2)!}x^{2n-2m-2}\\
z'''&=(2n-2m)(2n-2m-1)(2n-2m-2)x^{2n-2m-3}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-3)!}x^{2n-2m-3}\\
&\vdots\\
z^{(k)}&=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-k)!}x^{2n-2m-k}\\
z^{(n)}&=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-n)!}x^{2n-2m-n}=\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}
\end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.33 کا n درجی تفرق لکھتے ہیں

$$y^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]=\sum_{m=0}^{M}\frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!}\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}$$

جس کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

مثال 5.10: روڈریگیس مساوات 5.31 استعمال کرتے ہوئے n مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

حل :فرض کریں کہ $y = (x-1)^3$ ہے۔یوں $y' = 3(x-1)^2$ ، $y'' = 3\cdot 2(x-1)$ ، $y''' = 3\cdot 2\cdot 1$ اور $y^{(4)} = 0$ ہوں گے جن سے $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ ، $y''(1) = 0$ ، $y'''(1) = 3!$ اور $y(1)^{(4)} = 0$ حاصل ہوتے ہیں۔اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $y_1 = (x-1)^n$ کی صورت میں

$$y_1 = (x-1)^n, \quad y_1^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x-1)^{n-m}, \quad y_1^{(m)}(1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.34}$$

اور $y_2 = (x+1)^n$ کی صورت میں

$$y_2 = (x-1)^n, \quad y_2^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x+1)^{n-m}, \quad y_2^{(m)}(-1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.35}$$

ہو گا جہاں $\delta_{n,m}$ کی تعریف درج ذیل ہے (یعنی $m = n$ کی صورت میں $\delta = 1$ جبکہ $m \neq n$ کی صورت میں $\delta = 0$ ہے)۔

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{5.36}$$

مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $y_1 = (x-1)^n$ کے تمام تفرقات کی قیمت $x = 1$ پر صفر ہو گی ماسوائے n درجی تفرق، جس کی قیمت $n!$ ہو گی۔ مساوات 5.35 یہی کچھ $y_2 = (x+1)^n$ کے بارے میں $x = -1$ پر کہتی ہے۔

اب اگر $X=(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n=y_1y_2$ ہو تب **کلیہ لیبنٹز**[33] سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m}=\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\overbrace{\frac{\mathrm{d}^{m-s} y_1}{\mathrm{d}x^{m-s}}}^{M}\cdot\overbrace{\frac{\mathrm{d}^s y_2}{\mathrm{d}x^s}}^{N}$$

اگر $m\neq n$ ہو، اور بالخصوص اگر $m<n$ ہو، تب مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $M(x=1)=0$ ہو گا جبکہ مساوات 5.35 کہتی ہے کہ تب $N(x=-1)=0$ ہو گا۔ان نتائج کی بنا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m}=0 \tag{5.37}$$

مساوات 5.31 کو استعمال کرتے ہوئے $P_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n[(x^2-1)^n]}{\mathrm{d}x^n}=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_n^2\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

ہو گا جہاں تکمل بالحصص استعمال کیا گیا ہے۔مساوات 5.37 کے تحت $\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\Big|_1=\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\Big|_{-1}=0$ ہے لہٰذا آخری قدم پر تکمل کے باہر تمام حصہ صفر کے برابر ہے اور یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_n^2\,\mathrm{d}x&=\frac{-1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{-1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-2} X}{\mathrm{d}x^{n-2}}\bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+2} X}{\mathrm{d}x^{n+2}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-2} X}{\mathrm{d}x^{n-2}}\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

جہاں دوبارہ تکمل بالحصص لیا گیا ہے۔پہلی کی طرح اب بھی تکمل کا باہر والا حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر بار بیرونی حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔یوں s مرتبہ تکمل لیتے اور بیرونی حصے کو صفر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-1}^{1}P_n^2\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^s}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+s} X}{\mathrm{d}x^{n+s}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-s} X}{\mathrm{d}x^{n-s}}\,\mathrm{d}x$$

---

[33] Leibnitz formula

آخر کار $s=n$ ہو گا اور یوں درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}^0 X}{\mathrm{d}x^0}=X$ لکھا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+n} X}{\mathrm{d}x^{n+n}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-n} X}{\mathrm{d}x^{n-n}}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{2n} X}{\mathrm{d}x^{2n}}\cdot X\,\mathrm{d}x$$

$X=(x^2-1)^n$ کا الکراجی ثنائی تسلسل مساوات 5.32 دیتی ہے جس کا $2n$ درجی تفرق لینے سے، پہلے رکن کے علاوہ، تمام ارکان صفر کے برابر ہو جاتے ہیں۔یوں اس کا $2n$ درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}^{2n} X}{\mathrm{d}x^{2n}}=(2n)!$ ہو گا جس سے درج بالا تکمل یوں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} X\,\mathrm{d}x \tag{5.38}$$

لکھا جاتا ہے۔آئیں $\int X\,\mathrm{d}x$ کو تکمل بالحصص کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}(x-1)^n(x+1)^n\,\mathrm{d}x\\ &= (x-1)^n\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} n(x-1)^{n-1}\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر ہے۔اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر مرتبہ تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ s مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے اور تکمل کے باہر حصے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X\,\mathrm{d}x &= (-1)^s\int_{-1}^{1}[n(n-2)\cdots(n-s+1)](x-1)^{n-s}\frac{(x+1)^{n+s}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+s)}\,\mathrm{d}x\\ &= (-1)^s\int_{-1}^{1}\frac{n!(x-1)^{n-s}}{(n-s)!}\frac{n!(x+1)^{n+s}}{(n+s)!}\end{aligned}$$

آخر کار $s = n$ ہو گا جس پر درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-n}}{(n-n)!} \frac{n!(x+1)^{n+n}}{(n+n)!} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_{-1}^{1} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

جہاں $0! = 1$ (مساوات 5.94) پر کیا گیا ہے۔درج بالا نتیجے کو مساوات 5.38 میں پر کرتے ہیں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \tag{5.39}$$

جہاں منفی ایک کا جفت طاقت اکائی کے برابر $[(-1)^{2n} = 1]$ ہے۔

مثال 5.11: درج ذیل ثابت کریں جہاں $n \neq m$ ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \neq m) \tag{5.40}$$

حل: فرض کریں کہ $X = (x^2-1)^n$ اور $Y = (x^2-1)^m$ ہیں۔ یوں مساوات 5.31 کے تحت $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ اور $P_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m}$ ہوں گے لہٰذا

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n} \cdot \frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m} \,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔چونکہ n اور m برابر نہیں ہیں لہٰذا ان میں ایک کی قیمت دوسرے سے کم ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $n < m$ ہے۔گزشتہ مثال کی طرح، درج بالا کو بار بار تکمل بالحصص سے حل کرتے ہوئے، ہر بار تکمل کے باہر

حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور آخر کار درج ذیل ملتا ہے۔ مساوات 5.36 کے تحت Y کا صرف اور صرف m درجی تفرق غیر صفر ہے درج ذیل صفر کے برابر ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{\mathrm{d}^{m-n} Y}{\mathrm{d}x^{m-n}} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{\mathrm{d}^{m-n+1} Y}{\mathrm{d}x^{m-n+1}} \bigg|_{-1}^{1} = 0$$

مثال 5.12: پیداکار تفاعل

الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ کا تسلسل لکھ کر اس میں $v = 2xu - u^2$ پر کریں۔ ان میں u^0 ارکان کا مجموعہ حاصل کریں۔اسی طرح u^1 ارکان کا مجموعہ،اور u^2 ارکان کا مجموعہ، . . . حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ ان مجموعوں کا عددی سر بالترتیب P_0 ، P_1 ، P_2 ، . . . ہو گا یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n \tag{5.41}$$

حل:آئیں P_0 ، P_1 اور P_2 کے لئے حل کریں۔ دیے تفاعل کا الکراجی ثنائی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3v^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5v^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7v^4}{2^4 \cdot 4!} + \cdots$$

چونکہ u^2 کا عدد سر P_2 ہو گا اور درج بالا تسلسل کے پہلے تین ارکان میں کے بعد u کے زیادہ بلند طاقت پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم تسلسل کے پہلے تین ارکان پر نظر رکھتے ہیں۔اس تسلسل میں $v = 2xu - u^2$ پر کرتے ہوئے درکار نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
(1-v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(2xu-u^2)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3(2xu-u^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \cdots \\
&= 1 + (xu - \frac{u^2}{2}) + \frac{3}{8}(4x^2u^2 + u^4 - 4xu^3) + \cdots \\
&= \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{(x)}_{P_1} u + \underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)}_{P_2} u^2 + \cdots
\end{aligned}$$

سوالات

سوال 5.21 تا سوال 5.26 لیژانڈر کثیر رکنی اور تفاعل پر مبنی ہیں۔

سوال 5.21: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n=0$ لیتے ہوئے $P_0(x)=1$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقت کے x پائے جاتے ہیں لہٰذا $n=0$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n=0$ پر کرتے اور $0!=1$ لیتے ہوئے $P_0(x)=1$ ملتا ہے۔ [$0!=1$ کا ثبوت **گیما تفاعل**[34] کی مدد سے اسی باب میں دیا جائے گا۔]

سوال 5.22: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n=1$ لیتے ہوئے $P_1(x)$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقتی x پائے جاتے ہیں لہٰذا $n=1$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n=1$ پر کرتے ہوئے $P_1(x)=x$ ملتا ہے۔

سوال 5.23: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 سے $P_3(x)$ تا $P_5(x)$ حاصل کریں جنہیں مساوات 5.30 میں پیش کیا گیا ہے۔

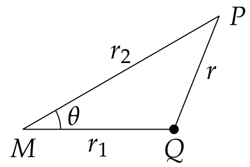
سوال 5.24: $P_0(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n=0$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1-x^2)y''-2xy'=0$ ہو گی اور $y=P_0=1$ ، $y'=P_0'=0$ اور $y''=P_0''=0$ ہوں گے۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1-x^2)(0)-2x(0)$ یعنی 0 حاصل ہوتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.25: $P_1(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n=1$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ ہو گی جبکہ $y=P_1=x$ ، $y'=P_1'=1$ اور $y''=P_1''=0$ ہیں۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے

[34] Gamma function



شکل 5.5: نقطہ برقی بار کا برقی میدان [سوال 5.27]۔

بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1-x^2)(0)-2x(1)+2(x)$ یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.26: $P_3(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کے حل ہیں۔

جوابات: $n=3$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی صورت $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ ہو گی جبکہ $y=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ ، $y'=\frac{1}{2}(15x^2-3)$ اور $y''=15x$ ہیں جنہیں مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)(15x)-2x[\tfrac{1}{2}(15x^2-3)]+12[\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)]$$

یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.27: **نظریہ مخفی توانائی**
آپ نقطہ برقی بار کے برقی میدان سے بخوبی واقف ہیں۔شکل 5.5 میں محدد کے مرکز M سے ہٹ کر نقطہ بار Q پایا جاتا ہے جس کا عمومی مقام P پر برقی دباو $V=\frac{Q}{4\pi\epsilon r}=\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}$ ہے۔ $\frac{Q}{4\pi\epsilon}$ کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.41 کی استعمال سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}=\frac{1}{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m \tag{5.42}$$

جواب: $r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=r_2^2[1-2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cos\theta+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2]$ لکھتے ہوئے $u=\frac{r_1}{r_2}$ اور $x=\cos\theta$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 5.28: درج ذیل ثابت کریں۔مساوات 5.41 کو استعمال کریں۔

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n,\quad P_{2n+1}(0)=0$$

سوال 5.29: **بونٹ کلیہ توالی**

مساوات 5.41 کا u تفرق لے کر دوبارہ مساوات 5.41 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل **بونٹ کلیہ توالی**[35] حاصل کریں۔

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x), \qquad n=1,2,\cdots \tag{5.43}$$

جواب: مساوات 5.41 کا ایک درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$ لیتے ہوئے دوبارہ مساوات 5.41 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\frac{-\frac{1}{2}(-2x+2u)}{(1-2xu+u^2)\sqrt{1-2xu+u^2}}=\sum nP_nu^{n-1}\\
\implies &\frac{x-u}{1-2xu+u^2}\sum P_nu^n=\sum nP_nu^{n-1}\\
\implies &x\sum P_nu^n-\sum P_nu^{n+1}=\sum nP_nu^{n-1}-2x\sum nP_nu^n+\sum nP_nu^{n+1}
\end{aligned}$$

اب دونوں جانب u^n کے عددی سر برابر لیتے ہیں۔

$$xP_n-P_{n-1}=(n+1)P_{n+1}-2xnP_n+(n-1)P_{n-1}$$

اس کو ترتیب دے کر درکار نتیجہ $(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.30: **شریک لیژانڈر تفاعل**

درج ذیل مساوات

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{5.44}$$

میں $y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+[n(n+1)-m(m+1)]u=0 \tag{5.45}$$

صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ درج بالا مساوات کا حل

$$u=\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$$

ہے جس کے شریک $y(x)$ کو $P_n^m(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو **شریک لیژانڈر تفاعل**[36] کہتے ہیں۔

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} \tag{5.46}$$

شریک لیژانڈر تفاعل کوانٹم میکانیات[37] میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

---

[35] Bonnet's recursion
[36] associated Legendre's functions
[37] quantum mechanics

جواب: مساوات 5.44 میں $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u$ پر کرنے سے مساوات 5.45 حاصل ہوتا ہے۔بقایا حصے کو اب حل کرتے ہیں۔ لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں $D^m[y] = D^{m-1}[y'] = D^m[y]$ ، $D^m[y''] = D^{m+2}[y]$ ، . . . ہو گا۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ کو

$$D^m[(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] = -D^m[(x^2-1)y''] - 2D^m[xy'] + n(n+1)D^m[y]$$

لکھتے ہیں جس میں

$$\begin{aligned}
D^m[(x^2-1)y''] &= (x^2-1)D^m[y''] + 2mxD^{m-1}[y''] + m(m-1)D^{m-2}[y''] \\
&= (x^2-1)D^{m+2}[y] + 2mxD^{m+1}[y] + m(m-1)D^m[y] \\
D^m[xy'] &= xD^m[y'] + mD^{m-1}[y'] = xD^{m+1}[y] + mD^m[y] \\
D^m[y] &= D^m[y]
\end{aligned}$$

پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)D^{m+2}[y] - 2(m+1)xD^{m+1}[y] + [n(n+1) - m(m+1)]D^m[y]$$

ملتا ہے جس میں $D^m[y] = y^m = u$ ، $D^{m+1} = y^{m+1} = u'$ اور $D^{m+2} = y^{m+2} = u''$ لیتے ہوئے

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ابتدائی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر تھا۔ اس مساوات کا حل $u = y^m$ ہے جہاں y ازخود لیژانڈر مساوات کا حل ہے یعنی $u = \frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ ہے۔

سوال 5.31: گزشتہ سوال میں شریک لیژانڈر تفاعل کا حل P_n^m حاصل کیا گیا۔مساوات 5.31 کی مدد سے اس کو لکھیں۔

جواب: $P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n]$

5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ترکیب فروبنیوس

کئی نہایت اہم دو درجی سادہ تفرقی مساوات، مثلاً **بیسل تفاعل** (جس پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا)، کے عددی سر تحلیلی [حصہ 5.1 میں تعریف دی گئی ہے] نہیں ہیں۔اس کے باوجود انہیں تسلسل (طاقتی تسلسل ضرب لوگارتھم یا طاقتی تسلسل ضرب x کی کسری طاقت، ...) سے حل کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو **ترکیب فروبنیوس**[38] کہتے ہیں[39]۔ درج ذیل مسئلہ طاقتی ترکیب کو وسعت دیتے ہوئے ترکیب فروبنیوس کا استعمال ممکن بناتا ہے۔

مسئلہ 5.2: ترکیب فروبنیوس

$x = 0$ پر تحلیلی $b(x)$ اور $c(x)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0 \tag{5.47}$$

کا کم از کم ایک عدد حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5.48}$$

جہاں r حقیقی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے اور $a_0 \neq 0$ ہے۔

مساوات 5.47 کا (خطی طور غیر تابع) دوسرا حل بھی پایا جاتا ہے جو مساوات 5.48 کی طرز کا ہو سکتا ہے (جس میں r مختلف ہو گا اور تسلسل کے عددی سر بھی مختلف ہوں گے) اور یا اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔

اس مسئلے میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں x_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔مسئلے میں $a \neq 0$ کا مطلب ہے کہ بذریعہ تجزی قوسین سے x کی بلند تر ممکنہ طاقت بذریعہ تجزی باہر نکالی جاتی ہے۔

بیسل تفاعل کو مساوات 5.47 کی طرز پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2}y = 0 \qquad (\text{مقدار معلوم ہے } v)$$

[38] Frobenius method

[39] جرمن ریاضی دان فرڈینانڈ گیوگ فروبنیوس [1849-1917]

جس میں $b(x) = 1$ اور $c(x) = x^2 - v^2$ دونوں $x = 0$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا اس پر درج بالا مسئلہ لاگو ہو گا۔سادہ طاقتی تسلسل سے بیسل تفاعل کا حل ممکن نہیں ہے۔

مساوات 5.48 میں طاقتی تسلسل کو x کی ایسی طاقت سے ضرب دیا گیا ہے جو منفی یا کسری ہو سکتا ہے۔یاد رہے کہ غیر منفی طاقت کے x پر مبنی تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔

مسئلہ فروبنیوس کے ثبوت([جو کتاب کے آخر میں حوالہ [2] میں دیا گیا ہے) کے لئے اعلٰی درجہ مخلوط تجزیہ[40] درکار ہے لہٰذا اسے پیش نہیں کیا جائے گا۔

اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے p اور q تحلیلی ہوں تب x_0 **غیر نادر نقطہ**[41] کہلائے گا۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

اگر $x = x_0$ درج بالا مساوات کا نادر نقطہ ہو اور $(x - x_0)p$ اور $(x - x_0)^2q$ نقطہ $x = x_0$ پر تحلیلی ہوں تب x_0 **منظم نادر نقطہ**[42] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر منظم نادر نقطہ**[43] کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے h ، p اور q تحلیلی ہوں اور $h \neq 0$ ہو (تا کہ ہم تفرقی مساوات کو h سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کر سکیں) تب x_0 **منظم نقطہ**[44] کہلائے گا ورنہ اسے **نادر نقطہ**[45] کہیں گے۔

$$\tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = 0$$

مثال 5.13: مساوات $(x+1)y'' + 2xy' - 3y = 0$ کو $x + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $p = \frac{2x}{x+1}$ اور $q = -\frac{3}{x+1}$ ملتے ہیں جو $x = -1$ پر غیر تحلیلی ہیں۔یوں $x = -1$ مساوات کا نادر نقطہ ہے۔اب $(x+1)p = 2x$ اور $(x+1)^2q = -3(x+1)$ دونوں $x = -1$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا $x = -1$ منظم نادر نقطہ ہے۔

---

[40] advanced complex analysis
[41] regular point
[42] regular singular point
[43] irregular singular point
[44] regular point
[45] singular point

اشاری مساوات حل ظاہر کرتی ہے

آئیں مساوات 5.47 کو ترکیب فروبنیوس سے حل کریں۔ مساوات 5.47 کو x^2 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0 \tag{5.49}$$

چونکہ $b(x)$ اور $c(x)$ تحلیلی ہیں لہٰذا انہیں طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \quad c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

اور اگر b یا(اور) c کثیر رکنی ہوں تب b یا(اور) c کو جوں کا توں رہنے دیا جاتا ہے۔ مساوات 5.48 کا جزو در جزو تفرق لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y &= a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots \\ y' &= ra_0x^{r-1} + (r+1)a_1x^r + (r+2)a_2x^{r+1} + \cdots \\ y'' &= r(r-1)a_0x^{r-2} + (r+1)(r)a_1x^{r-1} + (r+2)(r+1)a_2x^r + \cdots \end{aligned} \tag{5.50}$$

مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کا مساوات 5.50 سے موازنہ کریں۔طاقتی تسلسل $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_mx^m$ کے تفرق $y' = \sum_{m=1}^{\infty} mc_mx^{m-1}$ کا پہلا رکن $m = 1$ اور اس کے دو درجی تفرق کا پہلا رکن $m = 2$ ہے جبکہ موجودہ دونوں تفرقی تسلسل کا پہلا رکن $m = 0$ ہے۔

درج بالا تفرقات کو نہایت خوش اسلوبی کے ساتھ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r-1} = x^{r-1}[ra_0 + (r+1)a_1x + \cdots] \\ y'' &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-2} = x^{r-2}[r(r-1)a_0 + (r+1)ra_1x + \cdots] \end{aligned} \tag{5.51}$$

ان تمام کو مساوات 5.49 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x^r[r(r-1)a_0 + \cdots] + (b_0 + b_1x + \cdots)x^r(ra_0 + \cdots) \\ + (c_0 + c_1x + \cdots)x^r(a_0 + a_1x + \cdots) = 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

اب ہم x^r ، x^{r+1} ، x^{r+2} ، . . . کے عددی مجموعوں کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔سب سے کم طاقت x^r ہے جس کا عددی سر درج ذیل ہے۔

$$[r(r-1)+b_0r+c_0]a_0=0$$

چونکہ مسئلہ فروبنیوس کے تحت $a_0 \neq 0$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$r(r-1)+b_0r+c_0=0 \qquad \text{(اشاری مساوات)} \tag{5.53}$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کو سادہ تفرقی مساوات 5.47 کی **اشاری مساوات**[46] کہتے ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے تفرقی مساوات کے حل کی اساس حاصل ہوتی ہے جن میں ایک حل مساوات 5.48 کی طرز کا ہو گا جس میں r کی قیمت درج بالا اشاری مساوات کا جذر ہو گا۔دوسرے حل کی تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں جنہیں اشاری مساوات سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

- پہلی صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر نہیں ہے۔
- دوسری صورت:اشاری مساوات کے دو یکساں جذر پائے جاتے ہیں۔
- تیسری صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر ہے۔

پہلی صورت میں جوڑی دار مخلوط جذر $r_1=a+ib$ اور $r_2=\bar{r_1}=a-ib$ شامل ہیں چونکہ ان کا فرق $r_1-r_2=i2b$ خیالی عدد ہے جو حقیقی عدد صحیح نہیں ہے۔ مسئلہ 5.3 (جسے ضمیمے میں ثابت کیا گیا ہے) اساس کی صورت دیتی ہے جہاں ارتکاز کا عمومی ثبوت نہیں دیا گیا ہے۔ہاں انفرادی تسلسل کی مرکوزیت عام طریقے سے ثابت کی جا سکتی ہے۔ دوسری صورت میں لوگارتھمی جزو کا ہونا لازم ہے جبکہ تیسری صورت میں ہو سکتا ہے کہ لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہو یا نہ پایا جاتا ہو۔

مسئلہ 5.3: ترکیب فروبنیوس۔ حل کی اساس۔ تین صورتیں۔
فرض کریں کہ سادہ تفرقی مساوات 5.47 مسئلہ 5.2 پر پورا اترتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 کے جذر r_1 اور r_2 ہیں تب تین صورتیں پائی جاتی ہیں۔

---

[46] indicial equation

پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر نہیں ہے۔ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{5.54}$$

اور

$$y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \tag{5.55}$$

ہو گی جہاں عددی سر مساوات 5.52 میں $r = r_1$ اور $r = r_2$ پر کرتے ہوئے حاصل کیے جائیں گے۔

دوسری صورت: یکساں جذر $r_1 = r_2 = r$ کی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.56}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^r(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \qquad (x > 0) \tag{5.57}$$

ہو گی۔

تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{5.58}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = K y_1(x)\ln x = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.59}$$

ہے جہاں جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو (یعنی زیادہ قیمت کے جذر کو r_1 کہتے ہیں) اور K کی قیمت صفر بھی ہو سکتی ہے۔اگر $K = 0$ ہو تب دوسرا حل بھی پہلی حل کی طرح لکھنا ممکن ہو گا (مثال 5.17 دیکھیں)۔ بعض اوقات r_2 استعمال کرتے ہوئے حل y_2^* کے دو حصے پائے جائیں گے۔اس کا ایک حصہ در حقیقت میں r_1 سے حاصل حل y_1 ہی ہو گا جبکہ دوسرا حصہ نیا حل ہو گا یعنی $y_2^* = y_2 + k y_1$ لہٰذا اساس لکھتے ہوئے y_1 اور y_2 لیا جائے گا (سوال 5.36 کا جواب دیکھیں)۔

5.3.1 عملی استعمال

اشاری مساوات 5.53 کے جذر دریافت کرنے کے بعد ترکیب فروبنیوس بالکل طاقتی ترکیب کی طرح ہے۔ مساوات 5.54 تا مساوات 5.59 محض حل کی صورت دیتے ہیں جبکہ دوسرا حل عموماً **تخفیف درجہ** (حصہ 2.1) کی ترکیب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔

اشاری مساوات کے جذر حاصل کرنے کے بعد (زیادہ قیمت کی جذر) r_1 سے پہلا حل $y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کریں۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \cdots$) کے برابر نہ ہونے کی صورت میں دوسرا حل (کم قیمت کی جذر) r_2 کو استعمال کرتے ہوئے $y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا۔

$r_1 = r_2$ کی صورت میں دوسرے حل میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔ایسی صورت میں دوسرا حل $y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل نہیں ہو گا لہٰذا دوسرا حل تخفیف درجہ کی مدد سے حاصل کیا جائے گا۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \cdots$) کے برابر ہونے کی صورت میں کبھی کبھار $y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا ورنہ اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا اور اس حل کو بذریعہ تخفیف درجہ حاصل کیا جائے گا۔آپ پہلے $y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ ہی استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔

$y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کرتے ہوئے تین ممکنہ صورتیں پیدا ہوتی ہیں (اس حصے کے سوالات کے جوابات دیکھیں)۔پہلی صورت میں ایسی تسلسل y_2 حاصل ہوتی ہے جس میں صرف ایک عدد اختیاری مستقل پایا جاتا ہو لہٰذا عمومی حل y_1 اور y_2 کا مجموعہ ہو گا۔دوسری صورت میں تسلسل کو $ay_1 + by_2^*$ لکھنا ممکن ہو گا جہاں a اور b اختیاری مستقل ہوں گے لہٰذا اس حل میں y_1 بھی شامل ہے۔اس طرح عمومی حل $ay_1 + by_2^*$ ہو گا۔تیسری صورت میں $y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے عددی سر حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ دوسرے حل میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے لہٰذا تخفیف درجہ سے حل حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.14: یولر کوشی مساوات۔ پہلی، دوسری اور تیسری صورتیں۔ بلا لوگارتھمی جزو
مساوات یولر کوشی (حصہ 2.5)

$$x^2y'' + b_0xy' + c_0y = 0 \qquad (b_0 \text{ اور } c_0 \text{ مستقل ہیں})$$

میں $y = x^r$ پر کرنے سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$r(r-1) + b_0r + c_0 = 0$$

جو اشاری مساوات ہے [اور $y = x^r$ مساوات 5.48 کی ایک صورت ہے]۔ دو منفرد جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^{r_1}$ ، $y_2 = x^{r_2}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ دوہری جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^r$ ، $y_2 = x^r \ln x$ حاصل ہوتی ہے۔ مساوات یولر کوشی کی صورت میں تیسری صورت نہیں پائی جاتی۔

مثال 5.15: دوسری صورت۔ (دوہرا جذر)
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0 \tag{5.60}$$

(یہ بیش ہندسی[47] مساوات کی ایک مخصوص صورت ہے۔)

حل دیے گئے مساوات کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 کے شرائط پر پورا اترتی ہے۔ یوں مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.60 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-1}\\ + 3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r} = 0\end{aligned} \tag{5.61}$$

---

[47] hypergeometric equation

x کی کمتر طاقت x^{r-1}، جو دوسرے اور چوتھے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$[-r(r-1)-r]a_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = 0$$

اشاری مساوات کا دوہرا جذر $r=0$ حاصل ہوتا ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.61 میں $r=0$ پر کرتے ہوئے x^s کی عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$s(s-1)a_s - (s+1)sa_{s+1} + 3sa_s - (s+1)a_{s+1} + a_s = 0$$

$a_{s+1} = a_s$ ملتا ہے۔یوں $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots$ ہو گا لہٰذا $a_0 = 1$ چنتے ہوئے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1)$$

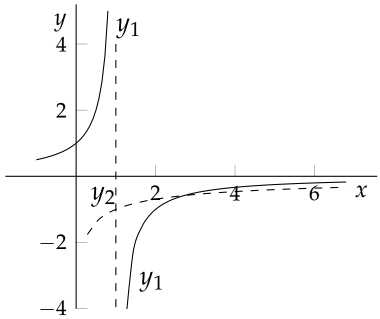
دوسرا حل: دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ (حصہ 2.1) حاصل کرتے ہیں۔یوں $y_2 = uy_1$ اور اس کے تفرقات کو مساوات میں پر کرتے ہوئے (صفحہ 94 پر) مساوات 2.15 ملتا ہے جس کو یہاں استعمال کرتے ہیں۔یہاں $p = \frac{3x-1}{x(x-1)}$ ہے لہٰذا

$$\int p \,\mathrm{d}x = \int \frac{3x-1}{x(x-1)} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = 2\ln(x-1) + \ln x$$

ہو گا اور یوں مساوات 2.15 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u' = v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,\mathrm{d}x} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 x} = \frac{1}{x}, \quad u = \ln x, \quad y_2 = uy_1 = \frac{\ln x}{1-x}$$

y_1 اور y_2 جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے وقفہ $0<x<1$ اور $1<x<\infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا اس وقفے پر یہ حل کی اساس ہیں۔



شکل 5.6: مثال 5.15 کے حل۔

مثال 5.16: لوگارتھمی جزو والا دوسرا حل
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(x^2-x)y''-xy'+y=0 \tag{5.62}$$

حل: مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.62 میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2-x)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-2}-x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r-1} \\ +\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}=0$$

x^2 اور x کو مجموعوں کے اندر لے جاتے ہوئے اور x کی یکساں طاقتوں کا اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2a_mx^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-1}=0 \tag{5.63}$$

x کی کم تر طاقت x^{r-1}، جو $m=0$ پر کرنے سے دوسرے مجموعے سے ملتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرنے سے

$$r(r-1)=1$$

یعنی $r_1=1$ اور $r_2=0$ ملتے ہیں (جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1-r_2>0$ ہو۔) جن میں فرق عدد صحیح کے برابر ہے لہٰذا یہ تیسری صورت ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.63 کو یکساں طاقت کی صورت میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $m = s$ اور دوسرے مجموعے میں $s = m - 1$ یعنی $m = s + 1$ پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+r-1)^2 a_s x^{s+r} - \sum_{s=-1}^{\infty}(s+r+1)(s+r)a_{s+1}x^{s+r} = 0 \tag{5.64}$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1} = \frac{(s+r-1)^2}{(s+r+1)(s+r)}a_s$$

ملتا ہے جس میں $r = 1$ پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1} = \frac{s^2}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots) \tag{5.65}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $a_1 = 0$ ، $a_2 = 0$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔یوں $a_0 = 1$ چنتے ہوئے پہلا حل $y_1 = a_0 x^{r_1} = x$ ملتا ہے۔

دوسرا حل: ترکیب تخفیف درجہ (حصہ 2.1) استعمال کرتے ہوئے $y_2 = uy_1 = xu$ لیتے ہیں۔اس طرح $y_2' = u + u'x$ اور $y_2'' = xu'' + 2u'$ ہوں گے۔انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x)(xu'' + 2u') - x(xu' + u) + xu = 0$$

اس میں xu کٹ جاتا ہے۔بقایا مساوات کو x سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0$$

اس کو جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنا گیا ہے۔)

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x-2}{x^2-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}, \qquad \ln u' = \ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right|$$

اس کو قوت نمائی طور پر لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنتے ہیں۔)

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \qquad u = \ln x + \frac{1}{x}, \qquad y_2 = uy_1 = x\ln x + 1$$

y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں اور y_2 میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے۔یوں مثبت x پر یہ حل کی اساس ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے بیش ہندسی مساوات حل ہوتا ہے جس کے حل میں کئی اہم تفاعل شامل ہیں۔بعض اوقات دیے گئے مساوات کو مساوات 5.47 کی صورت میں لانے میں دشواری پیش آتی ہے۔یوں

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جس کے آخری جزو کو $\frac{x}{x}$ سے ضرب دیتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{x}{x^2(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جو درکار صورت ہے جس میں $p = \frac{3x-1}{x-1}$ اور $q = \frac{x}{x-1}$ ہیں۔

ترکیب فروبنیوس کو استعمال کرتے ہوئے عموماً اتنا کافی ہوتا ہے کہ مساوات کو $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ شکل میں لایا جائے۔ درج ذیل سوالات حل کرتے ہوئے ایسا ہی کریں۔

مسئلہ 5.2 میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی ممکن ہے جہاں x_0 مساوات کا نادر نقطہ ہے۔یوں عمومی تفرقی مساوات

$$(x-x_0)^2\alpha(x)y'' + (x-x_0)\beta(x)y' + \gamma(x)y = 0 \tag{5.66}$$

جس میں $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ اور $\gamma(x)$ تحلیلی ہوں (لہٰذا انہیں درج لکھا جا سکتا ہے)

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots$$

کو ترکیب فروبنیوس سے حل کرتے ہوئے اشاری مساوات

$$\alpha_0 r^2 + (\beta_0 - \alpha_0)r + \gamma_0 = 0 \tag{5.67}$$

حاصل ہو گی۔مساوات 5.66 کو $\alpha(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.47 طرز کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.66 میں $x_0 = 0$ پر کرنے سے مساوات 5.47 حاصل ہوتی ہے۔مساوات 5.66 کا حل

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-x_0)^m \tag{5.68}$$

لکھ کر حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.17: تیسری صورت میں بعض اوقات r_2 سے حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔
اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں کبھی کبھار دوسرا حل $y_2 = x^{r_2}\sum c_m x^m$ نہیں لکھا جا سکتا ہے۔اس مثال میں اس بات کی وضاحت ہو گی۔آئیں درج ذیل مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$2xy'' - 4y' - y = 0$$

اس مساوات میں $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ اور اس کے تفرقات

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}, \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

پر کرتے ہوئے

$$2x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2} - 4\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=0}^{\infty}2(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty}4(m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

ملتا ہے۔تینوں مجموعوں سے x^{r-1} باہر نکالتے ہوئے کاٹتے ہیں۔

$$x^{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}2(m+r)(m+r-1)c_m x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty}4(m+r)c_m x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} = 0$$

پہلے اور دوسرے مجموعے میں $s = m$ اور تیسرے مجموعے میں $s = m+1$ پر کرتے ہیں تاکہ x کے تمام طاقت یکساں لکھیں جائیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}2(s+r)(s+r-1)c_s x^{s} - \sum_{s=0}^{\infty}4(s+r)c_s x^{s} - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^{s} = 0$$

آپ نے دیکھا کہ تیسرے مجموعے کا پہلا رکن اب $s = 1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔پہلے دو مجموعوں کا پہلا پہلا رکن مجموعے کے باہر لکھتے ہیں تاکہ تمام مجموعوں کا پہلا رکن ایک ہی جگہ سے شروع ہو۔

$$\begin{aligned}2(0+r)(0+r-1)c_0x^0 &+ \sum_{s=1}^{\infty}2(s+r)(s+r-1)c_s x^{s}\\ &- 4(0+r)c_0x^0 - \sum_{s=1}^{\infty}4(s+r)c_s x^{s} - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^{s} = 0\end{aligned}$$

یوں تمام مجموعوں کا پہلا رکن $s=1$ ظاہر کرے گا۔ تینوں مجموعوں کو اکٹھا لکھتے ہیں

$$\underbrace{[2r(r-1)-4r]}_{2r(r-3)}c_0+\sum_{s=1}^{\infty}[2(s+r)(s+r-1)c_s-4(s+r)c_s-c_{s-1}]x^s=0 \tag{5.69}$$

جہاں پہلا رکن اشاری مساوات $2r(r-3)=0$ دیتا ہے جس کے جذر $r_1=3$ اور $r_2=0$ ہیں۔ (یاد رہے کہ بڑی مقدار کے جذر کو r_1 لکھا جاتا ہے اور اسی کی مدد سے پہلا حل حاصل کیا جاتا ہے۔)

مساوات 5.69 میں $r=r_1=3$ پر کرتے ہوئے

$$[2\cdot3(3-1)-4\cdot3]c_0+\sum_{s=1}^{\infty}[2(s+3)(s+3-1)c_s-4(s+3)c_s-c_{s-1}]x^s=0$$

یعنی

$$\sum_{s=1}^{\infty}[2s(s+3)c_s-c_{s-1}]x^s=0$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل کلیہ توالی لکھی جا سکتا ہے۔

$$c_s=\frac{1}{2s(s+3)}c_{s-1}\qquad(s\geq1)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_1&=\frac{1}{2\cdot1(1+3)}c_0=\frac{1}{2\cdot1(4)}c_0\\
c_2&=\frac{1}{2\cdot2(2+3)}c_1=\frac{1}{2\cdot2(2+3)}\cdot\frac{1}{2\cdot1(4)}c_0=\frac{1}{2^2(2\cdot1)(5\cdot4)}c_0\\
&=\frac{3\cdot2\cdot1}{2^2(2\cdot1)(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}c_0=\frac{6}{2^2(2\cdot1)(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}c_0\\
c_3&=\frac{1}{2\cdot3(3+3)}c_2=\frac{1}{2\cdot3(6)}\cdot\frac{6}{2^2(2\cdot1)(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}c_0\\
&=\frac{6}{2^3(3\cdot2\cdot1)(6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}c_0\\
&\vdots\\
c_s&=\frac{6}{2^s s!(s+3)!}c_0
\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ آخری کلیہ $s=0$ اور $s=1$ کے لئے بھی کار آمد ہے لہٰذا ہم عمومی کلیہ توالی

$$c_s = \frac{6}{2^s s!(s+3)!}c_0 \qquad (s=0,1,2,\cdots)$$

اور پہلا حل

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{6}{2^m m!(m+3)!}c_0 x^m = c_0 x^3 \sum_{m=0}^{\infty}\frac{6}{2^m m!(m+3)!}x^m$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $r=r_2=0$ کو استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 5.69 میں $r=0$ پر کرتے ہوئے

$$[2\cdot 0(0-1)-4\cdot 0]c_0 + \sum_{s=1}^{\infty}[2(s+0)(s+0-1)c_s - 4(s+0)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

ملتا ہے جس میں c_0 کا عددی سر صفر کے برابر ہے جبکہ x_s کے عددی سر سے درج ذیل کلیہ توالی لکھا جا سکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2s(s-3)}c_{s-1}$$

اس کلیہ توالی کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0\\
c_2 &= \frac{1}{2\cdot 2(2-3)}c_1 = \frac{1}{2\cdot 2(2-3)}\frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0\\
c_3 &= \frac{1}{2\cdot 3\underbrace{(3-3)}_{=0}}c_2 = \frac{1}{2\cdot 3(3-3)}\frac{1}{2\cdot 2(2-3)}\frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0 = \frac{c_0}{0}
\end{aligned}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $c_0 \neq 0$ کی صورت میں $c_3=\infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ c_0 صفر نہیں ہو سکتا۔ایسا ہونے سے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جو $y_2=0$ دیگا۔اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں ہر بار ایک عددی سر $\frac{c_0}{0}$ حاصل ہو گا جس کی بنا چھوٹا جذر استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 5.32 تا سوال 5.44 کی اساس کو ترکیب فروبنیوس سے حاصل کریں۔ حاصل تسلسل کو بطور تفاعل پہچاننے کی کوشش کریں۔

سوال 5.32: $x^2y''+4xy'+(x^2+2)y=0$
جواب: $y_1=x^{-1}(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-+\cdots)$ ، $y_2=x^{-1}(x-\frac{x^3}{12}+\frac{x^5}{360}-+\cdots)$

سوال 5.33: $xy''+2y'+xy=0$
جواب: $y_1=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-+\cdots=\frac{\sin x}{x}$ ، $y_2=\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\cdots=\frac{\cos x}{x}$

سوال 5.34: $(x-1)^2y''-2(x-1)y'+2y=0$
جواب:اس طرز کے مساوات میں بہتر ہوتا ہے کہ $X=x-x_0=x-1$ اور $Y(X)$ استعمال کیا جائے جس سے درج بالا مساوات $X^2Y''-2XY'+2Y=0$ لکھی جاتی ہے۔حل کرنے کے بعد واپس x کا استعمال کریں۔ $r_1=2$ ، $r_2=1$ ہیں۔ $r=r_1=2$ استعمال کرتے ہوئے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جبکہ $r=r_2=1$ استعمال کرتے ہوئے حل $y=(x-1)^1[c_0+c_1(x-1)]$ ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل ہیں لہٰذا یہ عمومی حل ہے۔یوں اساس $y_1=x-1$ اور $y_2=(x-1)^2$ ہے۔

سوال 5.35: $y''+xy'+(1-\frac{2}{x^2})y=0$
جواب: $r_1=0$ $r_2=-3$ ہیں جن میں عددی صحیح فرق پایا جاتا ہے جو تیسری صورت ہے۔یوں r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1=c_2(x^2-\frac{3}{10}x^4+\frac{3}{56}x^6-\frac{1}{144}x^8+\cdots)$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 استعمال کرتے ہوئے $y_2=c_2x^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.36: $xy''+3y'+4x^3y=0$
جواب: $r_1=0$ اور $r_2=-2$ ہیں۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_1=x^0(1-\tfrac{1}{6}x^4+\tfrac{1}{120}x^8+\cdots)=\frac{\sin x^2}{x^2}$$

ملتا ہے جبکہ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_2^*=c_0(\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^6}{24}+\cdots)+c_2(1-\frac{x^4}{6}+\frac{x^8}{120}-\cdots)$$

ملتا ہے جہاں آخری قوسین در حقیقت y_1 ہی ہے لٰہذا اساس لکھتے ہوئے اس حصے کو رد کیا جاتا ہے۔اس طرح اساس درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \tfrac{1}{6}x^4 + \tfrac{1}{120}x^8 + \cdots = \tfrac{\sin x^2}{x^2} \\ y_2 &= \frac{1}{x^2} - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^6 + \cdots = \tfrac{\cos x^2}{x^2} \end{aligned}$$

سوال 5.37: $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$

جواب: $r_1 = r_2 = 3$ ہے جو دوسری صورت ہے۔یوں پہلا حل $y_1 = x^3$ ملتا ہے جبکہ دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ ($y_2 = x^3u$ پر کرتے ہوئے) $y_2 = x^3 \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.38: $xy'' + y' - xy = 0$

جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ملتا ہے۔ $y_1 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \cdots$ ، $y_2 = y_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{8 \cdot 16} - \cdots$

سوال 5.39: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$

جواب: $r_1 = 2$ ، $r_2 = -2$ میں فرق عدد صحیح ہے۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے $y_1 = x^2$ ملتا ہے۔اگر آپ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے y_1 کی طرز کا حل حاصل کرنا چاہیں تو آپ کو $y_2 = x^{-2}(c_0 + c_4x^4) = c_0x^{-2} + c_4x^2$ ملتا ہے جس میں x^2 در حقیقت y_1 ہے جسے رد کرتے ہوئے اساس میں $y_2 = \frac{1}{x^2}$ لکھا جائے گا۔

سوال 5.40: $x^2y'' + 6xy' + (6 - 4x^2)y = 0$

جواب: $r_1 = -2$ ، $r_2 = -3$ ہیں۔ r_1 سے $y_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{15}x^2 + \cdots = \frac{\sinh 2x}{2x^3}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 سے $y = c_0(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \cdots) + c_1y_1$ ملتا ہے لٰہذا $y_2 = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \cdots$ لکھا جائے گا یعنی $y_2 = \frac{\cosh 2x}{x^3}$ ہے۔

سوال 5.41: $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$

جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ہے جو دوسری صورت ہے۔اساس $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x$ اور $y_2 = e^x \ln x$ ہیں۔

سوال 5.42: $xy'' + (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$

جواب: $r_1 = r_2 = 0$ جبکہ $y_1 = e^{-x}$ اور $y_2 = e^{-x} \ln x$ ہیں۔

سوال 5.43: $y'' + (x - 1)y = 0$

جواب: $r_1 =$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 سے ایسا تسلسل ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل پائے جاتے

ہیں لہٰذا اس تسلسل کو دو عدد تفاعل میں لکھتے ہوئے اساس $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{30} + \cdots$ اور $y_2 = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} - \cdots$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 5.44: $xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = 0$

جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = e^x$ ملتا ہے۔دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لکھ کر تخفیف درجی کے استعمال سے $y_2 = \frac{e^x}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.45: **گاوس بیش ہندسی مساوات**

درج ذیل تفرقی مساوات

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{5.70}$$

جہاں a ، b اور c مستقل ہیں **گاوس بیش ہندسی مساوات**[48] کہلاتی ہے۔ثابت کریں کہ اس کی اشاری مساوات کے جذر $r_1 = 0$ اور $r_2 = 1 - c$ ہیں۔ثابت کریں کہ $r = r_1 = 0$ کے لئے ترکیب فروبنیوس کے استعمال سے درج ذیل حل ملتا ہے جہاں $c \neq 0, -1, -2, \cdots$ ہے۔

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots \tag{5.71}$$

یہ تسلسل **بیش ہندسی تسلسل**[49] کہلاتی ہے جس کا مجموعہ عموماً $F(a,b,c;x)$ لکھا اور **بیش ہندسی تفاعل**[50] پکارا جاتا ہے۔

سوال 5.46: ثابت کریں کہ $|x| < 1$ کے لئے تسلسل 5.71 مرتکز ہے۔

جواب: $\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(a+m)(b+m)}{(m+1)!(c+m)}\frac{m!(c+m-1)}{(1+m-1)(b+m-1)}\right| = 1$ ہے لہٰذا $R < 1$ ہو گا۔

سوال 5.47: بیش ہندسی تفرقی مساوات کا حل مساوات 5.71 مستقل a اور b کی کن قیمتوں پر کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے گا۔

جواب: $a = 0, -1, -2, -\cdots$ اور $b = 0, -1, -2, -\cdots$

Gauss' hypergeometric equation[48]
hypergeometric series[49]
hypergeomitric function[50]

سوال 5.48: $a=b=c=1$ کی صورت میں تسلسل 5.71 سے ہندسی تسلسل[51] حاصل کریں۔

جواب: $F(1,1,1;x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$

سوال 5.49: ثابت کریں کہ $F(1,1,1;x)=F(1,b,b;x)=F(a,1,a;x)$ یعنی ہندسی تسلسل ہے۔اسی سے تفاعل $F(a,b,c;x)$ کا نام بیش ہندسی تفاعل نکلا ہے۔

سوال 5.50: ثابت کریں کہ سوال 5.45 میں $r_2=1-c$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.70 کا دوسرا حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے جہاں $c\neq 2,3,4,7\cdots$ ہے۔

$$y_2(x)=x^{1-c}\left(1+\frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)}x\right.$$
$$\left.+\frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)}x^2+\cdots\right) \tag{5.72}$$

سوال 5.51: ثابت کریں کہ مساوات 5.72 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y_2(x)=x^{1-c}F(a-c+a,b-c+1,2-c;x) \tag{5.73}$$

سوال 5.52: ثابت کریں کہ $c\neq 0,\mp1,\mp2,\mp3\mp\cdots$ کی صورت میں مساوات 5.70 کے حل کی اساس مساوات 5.71 اور مساوات 5.72 ہیں۔

سوال 5.53: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
(1+x)^n&=F(-n,b,b;-x)\\
(1-x^n)&=1-nxF(1-n,1,2;x)\\
\tan^{-1}x&=xF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2};-x^2)\\
\sin^{-1}x&=xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};x^2)\\
\ln(1+x)&=xF(1,1,2;-x)\\
\ln\frac{1+x}{1-x}&=2xF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2};x^2)
\end{aligned}$$

[51] geometric series

سوال 5.54: درج ذیل مساوات میں A ، B ، C ، D اور K مستقل ہیں، $\dot{y}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ہے اور $t^2 + At + B$ کے منفرد جذر t_1 اور t_2 ہیں۔

$$(t^2 + At + B)\ddot{y} + (Ct + D)\dot{y} + Ky = 0 \tag{5.74}$$

اس مساوات میں نیا متغیر $x = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ پر کرتے ہوئے بیش ہندسی مساوات حاصل کریں جس میں

$$Ct_1 + D = -c(t_2 - t_1), \quad C = a + b + 1, \quad K = ab$$

ہوں گے۔

جواب: چونکہ $t^2 + At + B$ کے منفرد ($t_2 \neq t_1$) جذر t_1 اور t_2 ہیں للہذا $t^2 + At + B = (t - t_1)(t - t_2)$ لکھا جا سکتا ہے۔ اب نیا متغیرہ $x = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ لیتے ہوئے $t = (t_2 - t_1)x + t_1$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$t - t_1 = (t_2 - t_1)x, \quad t - t_2 = (t_2 - t_1)(x - 1),$$
$$(t - t_1)(t - t_2) = (t_2 - t_1)^2 x(x - 1), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t_2 - t_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

ہوں گے جنہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$x(1 - x)y'' - \left(\frac{Ct_1 + D}{t_2 - t_1} + Cx\right)y' - Ky = 0 \tag{5.75}$$

ملتا ہے۔

سوال 5.55 تا سوال 5.57 کے عمومی حل بیش ہندسی تفاعل کی صورت میں دریافت کریں۔

سوال 5.55: $2x(1 - x)y'' - (1 + 5x)y' - y = 0$
جواب: $y = c_1 F(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; x) + c_2 x^{\frac{3}{2}} F(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}; x)$

سوال 5.56: $4(t^2 - 3t + 2)\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$
جواب: $y = c_1 F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t - 1) + c_2 (t - 1)^{\frac{1}{2}}$

سوال 5.57: $2(t^2 - 5t + 6)\ddot{y} + (2t - 3)\dot{y} - 8y = 0$
جواب: $y = c_1 F(2, -2, -\frac{1}{2}; t - 2) + c_2 (t - 2)^{\frac{3}{2}} F(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; t - 2)$

5.4 مساوات بیسل؛ بیسل تفاعل

اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک **بیسل مساوات**[52]

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5.76}$$

ہے جہاں ν[53] حقیقی مستقل ہے جس کی قیمت صفر یا مثبت ہو گی۔یہ مساوات عموماً نلکی تشاکلی مسائل میں سامنے آتی ہے۔بیسل مساوات کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (\frac{x^2-\nu^2}{x^2})y = 0$ حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 پر پورا اترتی ہے۔یوں بیسل مساوات کے حل کو ترکیب فروبنیوس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5.77}$$

مساوات 5.77 اور اس کے ایک درجی اور دو درجی تفرقات کو مساوات 5.76 میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہوئے $c_0, c_1, \cdots$ حاصل کرتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x^{s+r} پہلے، دوسرے اور تیسرے مجموعوں میں $m = s$ پر کرنے اور تیسرے مجموعے میں $m = s - 2$ پر کرنے سے ملتے ہیں۔یوں $s = 0$ اور $s = 1$ کی صورت میں تیسرا مجموعہ کوئی حصہ نہیں ڈالے گا جبکہ $s = 2$ کی صورت میں چاروں مجموعے حصہ ڈالیں گے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0 + ra_0 - \nu^2 a_0 &= 0 \qquad (s = 0) \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \nu^2 a_1 &= 0 \qquad (s = 1) \\ (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - \nu^2 a_s &= 0 \qquad (s = 2, 3, \cdots) \end{aligned} \tag{5.78}$$

چونکہ $a_0 \neq 0$ ہے لہٰذا مساوات 5.78 کی پہلی مساوات سے **اشاری مساوات**

$$(r+\nu)(r+\nu) = 0 \tag{5.79}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $r_1 = \nu (\geq 0)$ اور $r_2 = -\nu$ ہیں۔

---

[52] Bessel's equation

[53] ν یونانی حرف تہجی نیو ہے۔

توالی عددی سر؛ $r = r_1 = \nu$

دوسری مساوات 5.78 میں $r = \nu$ پر کرتے ہوئے $(2\nu + 1)a_1 = 0$ ملتا ہے۔اب چونکہ ν غیر منفی ہے لہٰذا $2\nu + 1$ صفر کے برابر نہیں ہو سکتا اور یوں $a_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔تیسری مساوات 5.78 میں $r = \nu$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(s + 2\nu)sa_s + a_{s-2} = 0 \tag{5.80}$$

چونکہ $a_1 = 0$ اور $\nu \geq 0$ ہے لہٰذا مساوات 5.80 سے $s_3 = 0$ ، $s_5 = 0$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔ یوں تمام طاق عددی سر صفر کے برابر ہیں۔جفت عددی سر حاصل کرنے کی خاطر مساوات 5.80 میں $s = 2m$ پر کرتے ہوئے

$$(2m + 2\nu)2ma_{2m} + a_{2m-2} = 0$$

یعنی

$$a_{2m} - \frac{1}{2^2 m(\nu + m)} a_{2m-2}, \qquad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.81}$$

ملتا ہے۔مساوات 5.81 سے c_2 ، c_4 ، $\cdots$ لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2^2 2(\nu + 2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(\nu + 1)(\nu + 2)} \end{aligned}$$

اور یوں عمومی کلیہ

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + m)}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔

عددی صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل تفاعل $J_n(x)$

ν کی عدد صحیح قیمت کو روایتی طور پر n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.82 درج ذیل لکھی جائے گی

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.83}$$

جس میں a_0 اختیاری مستقل ہے۔مساوات 5.83 پر مبنی تسلسل میں بھی اختیاری مستقل a_0 پایا جائے گا۔ہم اختیاری مستقل کی قیمت $a_0 = 1$ چن سکتے ہیں البتہ اس سے بہتر قیمت

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \tag{5.84}$$

ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! n!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

یعنی

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!(n+m)!}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.85}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آپ نے دیکھا کہ $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چننے سے بڑھتی ضربیہ $(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$ کو نہایت عمدگی کے ساتھ **عدد ضربیہ**[54] $(n+m)!$ میں ضم کیا گیا ہے۔درج بالا عددی سر کو تسلسل 5.77 میں پر کرتے ہوئے، اور یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $c_1 = 0$ ، $c_3 = 0$ ، $\cdots$ ہیں، بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل $J_n(x)$

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \qquad (n \ge 0) \tag{5.86}$$

ملتا ہے جو درجہ n **بیسل تفاعل کی پہلی قسم**[55] کہلاتی ہے۔بیسل تفاعل 5.86 تمام x کے لئے مرتکز ہے یعنی (جیسا آپ عددی سر کی شرح $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ سے ثابت کر سکتے ہیں) اس کا رداس ارتکاز لامتناہی $R = \infty$ ہے۔یوں $J_n(x)$ تمام x کے لئے معین ہے۔عددی سر کے نسب نما میں عدد ضربیہ $(n+m)!$ کی بنا تسلسل بہت تیزی سے مرکوز ہوتی ہے۔

---

[54] factorial
[55] Bessel function of the first kind of order n

مثال 5.18: بیسل تفاعل $J_0(x)$ اور $J_1(x)$
مساوات 5.86 میں $n=0$ پر کرتے ہوئے **درجہ 0 کا بیسل تفاعل** $J_0(x)$

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}=1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+-\cdots \tag{5.87}$$

حاصل ہوتا ہے (شکل دیکھیں) جو کوسائن تفاعل کی مانند ہے۔اسی طرح مساوات 5.86 میں $n=1$ پر کرتے ہوئے **درجہ 1 کا بیسل تفاعل** $J_1(x)$

$$J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!(m+1)!}=x-\frac{x^3}{2^3 1!2!}+\frac{x^5}{2^5 2!3!}-\frac{x^7}{2^7 3!4!}+-\cdots \tag{5.88}$$

حاصل ہوتا ہے (شکل دیکھیں) جو سائن تفاعل کی مانند ہے لیکن جیسا آپ دیکھیں گے بیسل تفاعل کے صفر یکساں فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں اور x بڑھانے سے تفاعل کا حیطہ کم ہوتا جاتا ہے۔

مساوات 5.76 کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y=0$ ملتی ہے جس پر توجہ دیں۔ x کی زیادہ قیمت پر $\frac{1}{x}$ اور $\frac{\nu^2}{x^2}$ کو رد کرتے ہوئے بیسل مساوات سے $y''+y=0$ حاصل ہوتا ہے جس کے حل $\cos x$ اور $\sin x$ ہیں۔آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{y'}{x}$ بطور تقصیری مستقل کردار ادا کرتے ہوئے بیسل تفاعل کا حیطہ گھٹانے میں مدد دے گی۔ زیادہ x کی صورت میں درج ذیل ثابت کیا جا سکتا ہے

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{5.89}$$

جہاں $\sim$ کو **متقاربی برابر**[56] پڑھیں اور جس کا مطلب ہے کہ کسی بھی قطعی n پر دونوں اطراف کی شرح، $x\to\infty$ پر اکائی کے برابر ہو گی۔

مساوات 5.89 کم $x(>0)$ کی صورت میں بھی بہترین ثابت ہوتی ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے $J_0(x)$ کے ابتدائی تین صفر 2.356 ، 5.498 اور 8.639 حاصل ہوتے ہیں جبکہ ان کی حقیقی قیمتیں بالترتیب 2.405 ، 5.520 اور 8.654 ہیں۔دونوں جوابات میں فرق 0.049 ، 0.022 اور 0.015 ہے۔

[56] asymptotically equal

بیسل تفاعل جہاں $\nu \geq 0$ کوئی بھی قیمت ہو سکتی ہے۔گیما تفاعل

گزشتہ حصے میں ہم نے عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل مساوات کا ایک حل دریافت کیا۔آئیں اب کسی بھی قیمت کے $\nu > 0$ کے لئے بیسل تفاعل کا عمومی حل تلاش کریں۔مساوات 5.84 میں ہم نے $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چنا جبکہ موجودہ صورت میں ہم

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{5.90}$$

چنتے ہیں جہاں گیما تفاعل[57] Γ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu \,\mathrm{d}t \qquad (\nu > -1) \tag{5.91}$$

دھیان رہے کہ بائیں ہاتھ $\nu + 1$ جبکہ دائیں ہاتھ تکمل کے اندر ν لکھا گیا ہے۔تکمل بالحصص سے

$$\Gamma(\nu+1) = -e^{-t} t^\nu \Big|_0^\infty + \nu \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} \,\mathrm{d}t = 0 + \nu\Gamma(\nu)$$

یعنی گیما تفاعل کا بنیادی تعلق

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \tag{5.92}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.91 میں $\nu = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \,\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

ملتا ہے۔اس طرح مساوات 5.92 سے $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$ ، $\Gamma(3) = 3\Gamma(2) = 2!$ اور یوں

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.93}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ عدد ضربی درحقیقت گیما تفاعل کی ایک مخصوص صورت ہے۔یوں عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.90 سے مساوات 5.84 ہی حاصل ہوتی ہے۔

گیما تفاعل سے $0!$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $\Gamma(n+1) = n!$ ہے لہٰذا

$$0! = \Gamma(1) = 1 \tag{5.94}$$

[57] gamma function

کے برابر ہے۔

مساوات 5.90 استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو لکھتے ہیں۔

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

اب مساوات 5.92 کے تحت $(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2)$ ، $(\nu+2)\Gamma(\nu+2) = \Gamma(\nu+3)$ وغیرہ لکھے جا سکتے ہیں اور یوں

$$(\nu+1)(\nu+2)\cdot(\nu+m)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+m+1)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.95}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $r = r_1 = \nu$ کی صورت میں بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.96}$$

$J_\nu(x)$ کو درجہ ν **بیسل تفاعل کی پہلی قسم**[58] کہتے ہیں۔

جیسا آپ شرح عدد سر کی ترکیب سے ثابت کر سکتے ہیں، مساوات 5.96 تمام x پر مرتکز ہے۔

خواص بیسل تفاعل

---

[58] Bessel function of order ν

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.