

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

| | | |
|-----|---|---|
| 1 | درجہ اول سادہ تفرقی مساوات | 1 |
| 2 | 1.1 نمونہ کشی | |
| 13 | 1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔ | |
| 22 | 1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات | |
| 40 | 1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل | |
| 52 | 1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی | |
| 70 | 1.6 عمودی خطوط کی نسلیں | |
| 74 | 1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت | |
| 81 | 2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات | 2 |
| 81 | 2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات | |
| 98 | 2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات | |
| 113 | 2.3 تفرقی عامل | |
| 118 | 2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش | |
| 134 | 2.5 پولر کوئی مساوات | |
| 143 | 2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی | |
| 152 | 2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات | |
| 164 | 2.8 جبری ارتعاش۔ گمک | |
| 170 | 2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک | |
| 174 | 2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی | |
| 185 | 2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل | |
| 193 | 3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات | 3 |
| 193 | 3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات | |
| 205 | 3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات | |

| | | |
|---------------|-------|--|
| 214 | 3.3 | غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات |
| 217 | 3.4 | مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل |
| 225 | 4 | نظام تفرقی مساوات |
| 226 | 4.1 | قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق |
| 235 | 4.2 | سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے |
| 250 | 4.3 | نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی |
| 251 | 4.3.1 | خطی نظام |
| 254 | 4.4 | مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب |
| 272 | 4.5 | نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام |
| 281 | 4.6 | کئی تراکیب برائے غیر خطی نظام |
| 290 | 4.6.1 | سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ |
| 298 | 4.7 | سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام |
| 299 | 4.7.1 | نامعلوم عددی سر کی ترکیب |
| 309 | 5 | طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل |
| 310 | 5.1 | ترکیب طافقی تسلسل |
| 325 | 5.2 | لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کثیر رکنی |
| 343 | 5.3 | مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس |
| 348 | 5.3.1 | عملی استعمال |
| 362 | 5.4 | مساوات۔ میل اور میل تفاعل |
| 377 | 5.5 | میل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل |
| 385 | 6 | لاپلاس متبادلہ |
| 386 | 6.1 | لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت |
| 395 | 6.2 | تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات |
| 408 | 6.3 | s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل |
| 429 | 6.4 | ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ |
| 447 | 6.5 | الچھاو |
| 456 | 6.6 | لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات |
| 465 | 6.7 | تفرقی مساوات کے نظام |
| 473 | 6.8 | لاپلاس بدل کے عمومی کلیے |
| 477 | 7 | خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام |
| 478 | 7.1 | قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب |
| 488 | 7.2 | قابلی ضرب |
| 495 | 7.2.1 | تبدیلی محل |

| | | |
|---------------|-------------------------------------|-----|
| 508 | خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط | 7.3 |
| 521 | 7.3.1 صف زینہ دار صورت | |
| 529 | خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا | 7.4 |
| 543 | خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی | 7.5 |
| 548 | دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب | 7.6 |
| 551 | مقطع۔ قاعدہ کریمر | 7.7 |
| 568 | معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط | 7.8 |
| 583 | سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی متبادلہ | 7.9 |

| | | |
|---------------|--|-----|
| 601 | سمتیات عارضی باب | 8 |
| 601 | غیر سمتیات اور سمتیات | 8.1 |
| 603 | سمتیہ کے اجزاء | 8.2 |
| 609 | سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب | 8.3 |
| 618 | سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت | 8.4 |
| 624 | اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) | 8.5 |

| | | |
|-----|------------|---|
| 561 | اضافی ثبوت | ا |
|-----|------------|---|

| | | |
|---------------|---------------------------|---|
| 565 | مفید معلومات | ب |
| 565 | 1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات | |

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 8

سمتیت عارضی باب

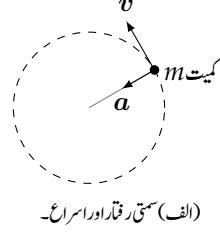
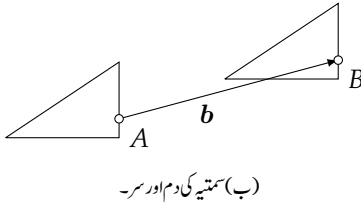
beginning very the at it palce shall i addition. latest the of 9.4 to 9.1 sec is this
issues. the all resolves chapter. this 7th my of

8.1 غیر سمتیت اور سمتیت

طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جنہیں ان کی مقدار سے مکمل طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً کمیت، درجہ حرارت، برقی بار، وقت، رقبہ، حجم، فاصلہ، برقی دباؤ وغیرہ۔ ان میں سے ہر ایک کو (مقدار کی موزوں اکائی چن کر) ایک عدد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایسی تمام مقداروں کو غیر سمتیت¹ کہتے ہیں۔ غیر سمتی مقدار کی قیمت پر چننی گئی محدود کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔

اس کے برعکس طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں بھی پائی جاتی ہیں جن کی مکمل اظہار کے لئے ان کی قیمت کے علاوہ ان کی سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ ان کی ایک مثال میکانی قوت ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ قوت کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں تیر کی سمت، قوت کی سمت اور تیر کی لمبائی (کسی پیمائش کے تحت) قوت کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ شکل 8.1-الف میں ہلکے دھاگے سے بندھی ہوئی کمیت m کی دائری حرکت دکھائی گئی ہے۔ کمیت کی

¹ scalars



شکل 8.1: سمتیہ کی تفصیل۔

لمحاتی سمتی رفتار v کو تیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس تیر کی سمت، کمیت کی لمحاتی سمتی رفتار دیتی ہے جبکہ تیر کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی سمتی رفتار کی قیمت دیتی ہے۔ شکل میں کمیت کی اسراع a بھی دکھائی گئی ہے جہاں a کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی اسراع کی قیمت دیتی ہے۔

سیدھی سطح میں تکون کی (بلا گھومے) منتقلی شکل 8.1-ب میں دکھائی گئی ہے۔ اس حرکت کو (تکون کے ہر نقطے کی) طے فاصلے کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ تکون پر کسی نقطے کی ابتدائی مقام A سے اختتامی مقام B تک سمتی خط سے اس حرکت کو ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یوں سمتی خط b ، تکون کے ایک نقطے کی A سے B منتقلی دکھاتی ہے۔ تکون کے ہر نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک سمتی خطوط کھینچ کر ہمیں سمتی خطوط کی نسل ملتی ہے جس میں تمام سمتی خطوط کی لمبائی ایک جیسی اور سمت ایک جیسی ہو گی (یعنی یہ آپس میں متوازی ہوں گے)۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک سمتی خط، تکون کے ایک نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک منتقلی کو ظاہر کرتی ہے۔

اس سے سمتیہ کی درج ذیل تعریف بیان کی جاسکتی ہے۔ تعریف: سمتیہ سمتی خط کو سمتیہ² کہتے ہیں۔ اس کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی اور سمت کو سمتیہ کی سمت کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب ان کی لمبائی ایک جیسی ہو اور ان کی سمت ایک جیسی ہو۔

سمتیہ کی لمبائی کو سمتیہ کی اقلیدسی معیار³ (یا معیار) اور سمتیہ کی مقدار⁴ بھی کہتے ہیں۔

vector²
Euclidean norm³
magnitude⁴

سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو سمتیہ کی دم⁵ اور اختتامی نقطے کو سمتیہ کا سر⁶ کہتے ہیں۔ یوں شکل 8.1-ب میں نقطہ B سمتیہ b کی دم ہے جبکہ نقطہ A اس کا سر ہے۔

ہم سمتیات کو موٹی لکھائی میں چھوٹی حروف تہجی مثلاً a ، b ، v ، وغیرہ، سے ظاہر کرتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں اسراع کو \vec{a} یا \vec{a} لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ a کی مقدار کو $|a|$ لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ہم سمتیہ کو بغیر گھمائے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کر سکتے ہیں⁷ یعنی ہم سمتیہ کی دم کہیں پر بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ سمتیہ کی دم کا مقام مقرر کرنے سے اس کے سر کا مقام بھی مقرر ہو گا۔

اگر دو سمتیات a اور b ایک دوسرے کے برابر ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں

(8.1)

$$a = b$$

اور اگر یہ آپس میں برابر نہ ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

(8.2)

$$a \neq b$$

کسی بھی سمتیہ کو تریسی طور پر موزوں لمبائی اور سمت کی سمتی خط سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

ایسا سمتیہ جس کی لمبائی اکائی (1) ہو اکائی سمتیہ⁸ کہلاتا ہے۔

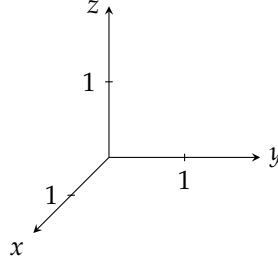
8.2 سمتیہ کے اجزاء

تین بُعدی فضا میں نقطہ ایک جیومیٹریائی چیز ہے جس کو محدودی نظام میں تین مرتب اعداد (تصور کیا جاسکتا ہے یا) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی انداز میں پیش کی، جسے محدودی نظام کی استعمال سے الجبرائی انداز میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

tail⁵
head⁶

⁷ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی صورتیں پائی جاتی ہیں جہاں سمتیہ کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ آپ مباحثات سے جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر یکدرا مادیے پر قوت کا اطلاق، قوت کی سمت میں کبیر پر رہتے ہوئے، کسی بھی نقطے پر کیا جاسکتا ہے۔ اس سے قابل منتقلی سمتیہ کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ اس کے برعکس، یکدرا مادیے پر قوت کے اطلاق کا نقطہ تبدیل کرنے سے نتائج تبدیل ہوں گے جو ناقابل قبول بات ہے۔ یہ حقیقت مقید سمتیہ کی تصور کو جنم دیتی ہے۔ اس کتاب میں صرف قابل منتقلی سمتیات پر بات کی جائے گی۔

unit vector⁸



شکل 8.2: کارتیسی نظام محدودی

نظام محدود کے محور⁹، آپس میں عمودی تین متقاطع سیدھے خطوط ہوں گے۔ ان کے مقام انقطاع کو محدودی نظام کا مرکز¹⁰ کہتے ہیں۔ ہم تینوں محور پر پیمائشی ناپ ایک جیسی چنتے ہیں لہذا محور پر مرکز سے اکائی فاصلے پر $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ نقطے پائے جائیں گے۔ اس محدودی نظام کو فضا میں کارتیسی نظام محدود¹¹ (شکل 8.2 سے رجوع کریں) کہتے ہیں۔

ہم اب ابتدائی نقطہ A سے اختتامی نقطہ B تک سمتیہ a پر غور کرتے ہیں (شکل 8.3-الف)۔ اگر نقطہ A کے محور (x_1, y_1, z_1) اور نقطہ B کے محور (x_2, y_2, z_2) ہوں تب درج ذیل اعداد، اس کارتیسی محدودی نظام کے لحاظ سے، سمتیہ a کے اجزاء¹² کہلاتے ہیں۔

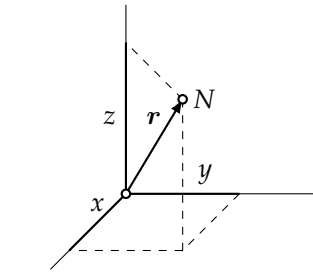
$$(8.3) \quad a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1$$

سمتیہ کی تعریف کے تحت a کی لمبائی سے مراد A سے B تک کی لمبائی \overline{AB} ہے جو مساوات 8.3 میں دیے گئے اجزاء کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کے تحت درج ذیل ہو گا۔

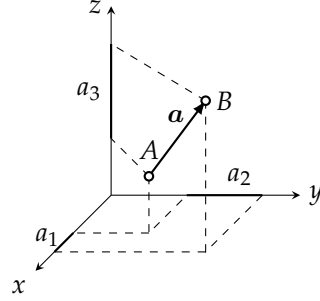
$$(8.4) \quad |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

مثال 8.1: سمتیہ کے اجزاء اور اس کی لمبائی
سمتیہ a کی دم $(-2, 3, 1)$ اور سر $(5, -2, 7)$ ہیں۔ اس سمتیہ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی دریافت کریں۔

coordinates⁹origin¹⁰Cartesian coordinate system¹¹components¹²



(ب) تعین کر سمتیہ کے سر کے محور اس سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔



(الف) اجزاء سمتیہ

شکل 8.3: سمتیہ کے اجزاء اور تعین کر سمتیہ۔

حل: اجزاء $a_1 = 5 - (-2) = 7$, $a_2 = -2 - 3 = -5$, $a_3 = 7 - 1 = 6$ اور لمبائی

$$|a| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{110}$$

ہے۔ اگر ہم سمتیہ a کی دم کو نقطہ $(4, 1, 3)$ پر منتقل کریں تب اس کا سر $(11, -4, 9)$ پر ہو گا۔

مساوات 8.3 میں دیے گئے اجزاء کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر a کی دم کو کارتیسی محدود کی مرکز پر منتقل کیا جائے تب a کے اجزاء اس کی سر کے محور ہوں گے۔ ایسا سمتیہ جس کو شکل 8.3-ب میں دکھایا گیا ہے تعین کر سمتیہ¹³ کہلاتا ہے اور اس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

a کی دم کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے سمتیہ کا سر بھی اتنا ہی اپنی جگہ سے ہلتا ہے لہذا مساوات 8.3 سے ظاہر ہے کہ سمتیہ a کے اجزاء a_1 , a_2 اور a_3 کی قیمت پر a کی ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں کسی بھی معین کارتیسی محدودی نظام کے حوالے سے سمتیہ کو مکمل طور پر تین (محوری) اعداد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

وہ سمتیہ جس کے اجزاء $0, 0, 0$ ہوں معدوم سمتیہ¹⁴ یا صفر سمتیہ¹⁵ 0 کہلاتا ہے۔ یوں کوئی بھی تین اعداد بہ شمول $0, 0, 0$ سمتیہ کے اجزاء ہو سکتے ہیں۔

position vector¹³
null vector¹⁴
zero vector¹⁵

معین نظام محدود کی صورت میں ہر مرتبہ تین اعداد ایک منفرد سمتیہ کو ظاہر کریں گے۔ یہ تین اعداد سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔ اسی طرح معین نظام محدود میں ہر سمتیہ کے اجزاء سے سمتیہ کو تین مرتبہ اعداد کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی نقطہ نظر سے کی گئی۔ ہم اب تین مرتبہ حقیقی اعداد (جو سمتیہ کے اجزاء کہلاتے ہیں) کو سمتیہ کی تعریف کہہ سکتے ہیں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتیہ کی جیومیٹریائی صورت حاصل کر سکتے ہیں۔

یوں دو سمتیات a اور b صرف اور صرف اس صورت ایک جیسے ہوں گے جب ان کے تین مطابقتی اجزاء ایک جیسے ہوں۔ لہذا درج ذیل سمتی مساوات

$$a = b$$

سے مراد درج ذیل تین مساوات ہیں جہاں $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ایک ہی کارٹیزی نظام محدود میں بالترتیب a اور b کے مطابقتی اجزاء ہیں۔

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

ظاہر ہے کہ اگر ایک سمتیہ کوئی حقیقی یا جیومیٹریائی چیز ہو تب اس کی لمبائی اور سمت پر چنی گئی نظام محدود کا کوئی اثر نہیں ہونا چاہیے۔ اجزائے سمتیہ کو ایک نظام محدود سے دوسری نظام محدود میں منتقل کرنے کے قواعد پر یہ حقیقت کچھ شرائط عائد کرتی ہے جن پر اگلے بابوں میں تبصرہ کیا جائے گا۔

اگلے باب میں سمتیہ کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہر مرتبہ n اعداد کو سمتیہ تصور کیا جائے گا، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے۔

سوالات

سوال 8.1 تا سوال 8.10 میں سمتیہ u کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ سمتیہ u کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی $|u|$ حاصل کریں۔ u کا خط کھینچیں۔

$$\text{سوال 8.1: } A : (2, 3, 0), \quad B : (-4, 6, 0)$$

$$\text{جوابات: } |u| = 3\sqrt{5}, \quad u_1 = -6, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 0$$

سوال 8.2: $A : (5, 3, 1), \quad B : (1, 7, 2)$

جوابات: $|u| = \sqrt{33} \quad , \quad u_1 = -4 \quad , \quad u_2 = 4 \quad , \quad u_3 = 1$

سوال 8.3: $A : (1.2, -1, 2.5), \quad B : (2.4, 1.6, -3.2)$

جوابات: $|u| = 6.38 \quad , \quad u_1 = 1.2 \quad , \quad u_2 = 2.6 \quad , \quad u_3 = -5.7$

سوال 8.4: $A : (0, 0, 3), \quad B : (4, 0, 0)$

جوابات: $|u| = 5 \quad , \quad u_1 = 4 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = -3$

سوال 8.5: $A : (3, 3, 3), \quad B : (1, 1, 1)$

جوابات: $|u| = 2\sqrt{3} \quad , \quad u_1 = -2 \quad , \quad u_2 = -2 \quad , \quad u_3 = -2$

سوال 8.6: $A : (1, 1, 1), \quad B : (3, 3, 3)$

جوابات: $|u| = 2\sqrt{3} \quad , \quad u_1 = 2 \quad , \quad u_2 = 2 \quad , \quad u_3 = 2$

سوال 8.7: $A : (2, 2, 2), \quad B : (2, 2, 0)$

جوابات: $|u| = 0 \quad , \quad u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = 0$ ؛ یہ صفر سمتیہ ہے۔

سوال 8.8: $A : (0, 7, 8), \quad B : (-3, 1, 8)$

جوابات: $|u| = 3\sqrt{5} \quad , \quad u_1 = -3 \quad , \quad u_2 = 6 \quad , \quad u_3 = 0$

سوال 8.9: $A : (100, 200, 300), \quad B : (100, 204, 303)$

جوابات: $|u| = 5 \quad , \quad u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 4 \quad , \quad u_3 = 3$

سوال 8.10: $A : (-5, -6, -2), \quad B : (-8, -6, -4)$

جوابات: $|u| = \sqrt{13} \quad , \quad u_1 = -3 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = -2$

سوال 8.11 تا سوال 8.20 میں ابتدائی نقطہ A اور سمتیہ کے اجزاء دیے گئے ہیں۔ سمتیہ کا اختتامی نقطہ دریافت کریں۔

سوال 8.11: $A : (-2, 3, 1); \quad 3, 1, 4$
جواب: $1, 4, 5$

سوال 8.12: $A : (0, 0, 0); \quad 5, 1, 7$
جواب: $5, 1, 7$

سوال 8.13: $A : (5, 2, -6); \quad 0, 0, 0$
جواب: $5, 2, -6$

سوال 8.14: $A : (3, 6, 1); \quad -5, -7, 2$
جواب: $-2, -1, 3$

سوال 8.15: $A : (4, 4, 4); \quad 4, 4, 4$
جواب: $8, 8, 8$

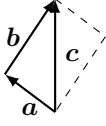
سوال 8.16: $A : (7, 7, 7); \quad -7, -7, -7$
جواب: $0, 0, 0$

سوال 8.17: $A : (-3, -4, -5); \quad 3, 4, 5$
جواب: $0, 0, 0$

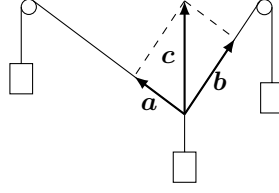
سوال 8.18: $A : (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}); \quad -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 1$
جواب: $-1, 1, \frac{4}{3}$

سوال 8.19: $A : (0.2, -0.1, 0.5); \quad 1.1, -0.4, -0.3$
جواب: $1.3, -0.5, 0.2$

سوال 8.20: $A : (11.3, -10, -15.8); \quad 12.6, 9, -14$
جواب: $23.9, -1, -29.8$



(ب) سمتیوں کا مجموعہ بذریعہ متوازی الاضلاع



(الف) قوتوں کا مجموعہ بذریعہ تجربہ

شکل 8.4: تجربہ سے قوتوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کے مجموعے کا حصول حاصل ہوتا ہے۔

8.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب

چونکہ ہم سمتیات کو حساب کتاب کے لئے استعمال کرنا چاہتے ہیں لہذا سمتیات کے دو عدد الجبرائی اعمال پیش کرتے ہیں جنہیں سمتیات کا مجموعہ اور سمتیات کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کہتے ہیں۔

تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ دو قوتوں کا حاصل، متوازی الاضلاع (شکل 8.4) سے ملتا ہے۔ اس سے سمتیات کے مجموعے کی درج ذیل تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: سمتیات کا مجموعہ

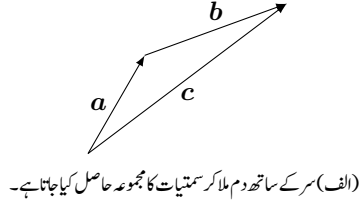
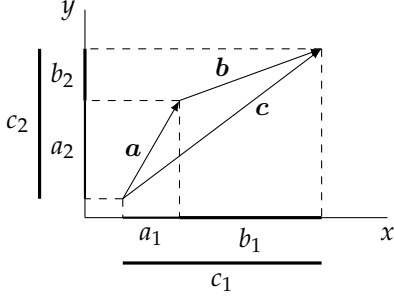
دو سمتیات a اور b کو لیتے ہوئے a کے سر کے ساتھ b کی دم ملائیں۔ اب a اور b کی مجموعے کی تعریف وہ سمتیہ c ہے جو a کی دم سے b کے سر تک کھینچی جائے گی (شکل 8.5-الف)۔ اس عمل کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(8.5) \quad c = a + b$$

سمتیات کی مجموعے کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر کسی معین کارتیسی نظام محدود میں a کے اجزاء a_1, a_2 اور a_3 جبکہ b کے اجزاء b_1, b_2 اور b_3 ہوں تب حاصل جمع سمتیہ c کے اجزاء c_1, c_2 اور c_3 درج ذیل ہوں گے۔

$$(8.6) \quad c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3$$

شکل 8.5-ب میں اس عمل کو سطح پر دکھایا گیا ہے، اور فضا میں بھی بالکل ایسا ہی ہو گا۔



(الف) سر کے ساتھ دم ملا کر سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ب) سمتیات کے مطابق اجزاء کو جمع کرتے ہوئے حاصل جمع سمتیہ کے اجزاء حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 8.5: مجموعہ سمتیات۔

مجموعہ کی تعریف یا مساوات 8.6 سے مجموعہ سمتیات کی درج ذیل خصوصیات ملتی ہیں جہاں $-a$ سے مراد ایسا سمتیہ ہے جس کی لمبائی $|a|$ اور سمت a کے الٹ ہو۔

$$\begin{aligned}
 & \text{(الف)} \quad a + b = b + a \quad \text{قانون تبادلہ} \\
 & \text{(ب)} \quad (u + v) + w = u + (v + w) \quad \text{قانون تلازم} \\
 & \text{(پ)} \quad a + 0 = 0 + a \\
 & \text{(ت)} \quad a + (-a) = 0
 \end{aligned}
 \tag{8.7}$$

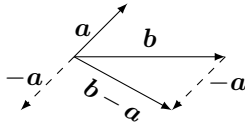
مساوات 8.7-ب میں ہم $u + v + w$ لکھ سکتے ہیں اور یہی طریقہ زیادہ اعداد کے سمتیات کا مجموعہ لکھنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مجموعہ $a + a$ کی جگہ $2a$ لکھا جاتا ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ ان سے $-a$ کے استعمال سے ہم سمتیات کا دوسرا الجبرائی عمل بیان کرتے ہیں۔

سمتیات کا غیر سمتیات (اعداد) کے ساتھ ضرب

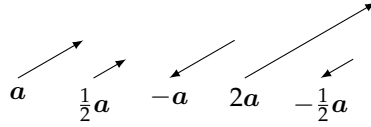
اگر a ایک سمتیہ اور q کوئی حقیقی عدد ہو تب سمتیہ qa کی تعریف درج ذیل ہے۔

qa کی لمبائی $|q||a|$ ہے۔

اگر $a \neq 0$ ہو اور $q > 0$ ہو تب qa کی سمت وہی ہوگی جو a کی تھی۔



(ب) سمتیات کا فرق



(الف) سمتیات کا غیر سمتیات کے ساتھ ضرب۔

شکل 8.6: سمتیات کا غیر سمتیہ کے ساتھ ضرب اور سمتیات کا فرق۔

اگر $a \neq 0$ ہو اور $q < 0$ ہو تب qa کی سمت a کی سمت کے الٹ ہو گی۔

اگر $a = 0$ یا $q = 0$ ہو (اور یا دونوں صفر ہوں) تب $qa = 0$ ہو گا۔

ان قواعد کی سادہ مثالیں شکل 8.6-الف میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر a کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں تب اسی نظام محدود میں qa کے اجزاء qa_1 ، qa_2 اور qa_3 ہوں گے۔ اسی طرح سمتیہ کی تعریف سے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} q(a + b) &= qa + qb \\ (c + k)a &= ca + ka \\ c(ka) &= (ck)a \quad \text{جس کو } cka \text{ لکھا جاتا ہے} \\ 1a &= a \end{aligned} \quad (8.8)$$

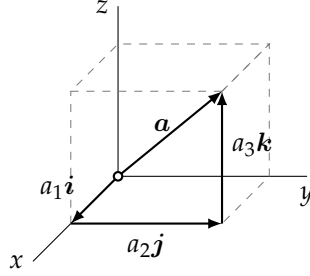
مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 سے درج ذیل اخذ کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} 0a &= 0 \\ (-1)a &= -a \end{aligned} \quad (8.9)$$

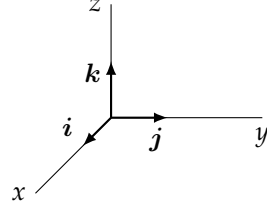
ہم $b - a$ کی جگہ $b - a$ لکھ سکتے ہیں (شکل 8.6-ب)۔

کسی بھی ایک کارتیسی نظام محدود کو استعمال کرتے ہوئے، ہم سمتیہ a جس کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں کو تین ایسی سمتیات کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں جو اس کارتیسی نظام کے تین محور کے متوازی ہوں۔ ہم اس کارتیسی نظام کے ساتھ تین ایسے اکائی سمتیات، جنہیں ہم i ، j اور k کہیں گے، وابستہ کرتے ہیں جن کی مثبت سمت اس کارتیسی نظام کے محور کی مثبت سمت ہو۔ یوں a کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (شکل 8.7)۔

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad (8.10)$$



(ب) سمتیہ کا تین اکائی سمتیات کی مدد سے اظہار



(الف) اکائی سمتیات i, j اور k

شکل 8.7: اکائی سمتیات اور ان کا استعمال۔

شکل 8.7-الف میں اکائی سمتیات i ، j اور k کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کی دم کو کارتیسی نظام کے مرکز پر رکھا گیا ہے۔ یہ اکائی سمتیات آپس میں عمودی یا قاعہ¹⁶ ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ i ، j اور k اس نظام محدود کی ثلاثہ اکائی قاعہ سمتیات ہیں۔

کسی بھی سمتیہ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کرتے ہوئے اسی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔ یوں a کی سمت میں اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(8.11) \quad \text{اکائی سمتیہ} = \frac{a}{|a|}$$

مثال 8.2: کسی کارتیسی نظام میں اگر $a = 3i - 2k$ اور $b = -5i + 4j + 2k$ ہوں، تب درج ذیل ہوں گے۔

$$3a = 9i - 6k, \quad -b = 5i - 4j - 2k, \quad 1.2a - 0.5b = 6.1i - 2j - 3.4k$$

orthogonal¹⁶

مثال 8.3: کسی سمتیہ a کی دم A پر ہے جبکہ اس کا سر B پر ہے۔ اسی سمت میں کسی بھی سمتیہ کو la لکھا جا سکتا ہے جہاں l غیر سمتی مستقل ہے۔ اب اگر la سمتیہ کی دم A پر ہو تب $l = 0$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر نقطہ A پر ہو گا جبکہ $l = 1$ کی صورت میں اس کا سر نقطہ B پر ہو گا۔ اسی طرح $l = \frac{1}{2}$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر a کے عین وسط پر ہو گا۔

مثال 8.4: اکائی سمتیہ

سمتیہ $a = 2i - 5j + 3k$ کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔ اسی سمت میں ایسا سمتیہ حاصل کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔

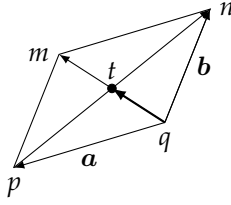
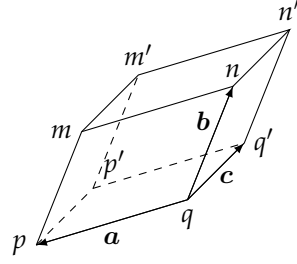
حل: a کی لمبائی $|a| = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38}$ ہے۔ یوں مساوات 8.11 کے تحت a کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\frac{a}{|a|} = \frac{2i - 5j + 3k}{\sqrt{38}}$$

ہو گا۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کو غیر سمتی l سے ضرب دینے سے اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل ہوتا ہے لہذا درکار سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$7 \frac{a}{|a|} = \frac{14i - 35j + 21k}{\sqrt{38}} = 2.27i - 6.68j + 3.41k$$

مثال 8.5: a ، b اور c شکل 8.8-الف میں دکھائے گئے چٹا ڈبے کے تین قریبی کنارے ہیں۔ ڈبے کی سامنے سطح $mnpq$ کا وتر v_{mq} اور v_{np} دریافت کریں جہاں وتر v_{mq} کی دم q اور سر m ہیں۔ جیسا

(ب) وتر نقطہ t پر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

(الف) چٹاؤ با۔

شکل 8.8: سمتیات کا استعمال۔ مثال 8.5

شکل 8.8-ب میں دکھایا گیا ہے، وتری سمتیات v_{mq} اور v_{np} ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ t دریافت کرتے ہوئے ثابت کریں کہ دونوں وتر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

حل: شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$r_{mq} = a + c, \quad r_{np} = -a + c$$

شکل 8.8-ب سے ظاہر ہے کہ q کو ابتدائی نقطہ تصور کرتے ہوئے t تک کئی راستوں سے پہنچا جا سکتا ہے۔ چونکہ t وتر v_{mq} پر پایا جاتا ہے لہذا q سے t تک سمتیہ کو $v_{tq} = l_1 v_{mq}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_1 < 1$ ممکن ہے۔ اسی طرح q سے پہلے p اور یہاں سے v_{np} کی سمت میں چلتے ہوئے بھی نقطہ t تک پہنچنا ممکن ہے۔ ایسا کرتے ہوئے $v_{tq} = a + l_2 v_{np}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_2 < 1$ ممکن ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$(8.12) \quad v_{tq} = l_1 v_{mq} = a + l_2 v_{np} \implies l_1(a + c) = a + l_2(-a + c)$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$a(l_1 - 1 + l_2) + c(l_1 - l_2) = 0$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ a اور b غیر صفر ہیں اور ان کی سمتیں بھی مختلف ہیں لہذا درج بالا مساوات صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب دونوں قوسین صفر ہوں یعنی:

$$\begin{aligned} l_1 - 1 + l_2 &= 0 \\ l_1 - l_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔ اب $l_1 = \frac{1}{2}$ کی صورت میں مساوات 8.12 سے $v_{tq} = \frac{1}{2}v_{mq}$ ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ نقطہ t عین mq کے وسط میں پایا جاتا ہے۔ مساوات 8.12 کے اگلے حصے سے اسی طرح ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ t عین np کے وسط میں پایا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 8.21 تا سوال 8.30 میں $a = 2i - j + k$ ، $b = -3i - 2j + 4k$ اور $c = -2k$ لیں۔

سوال 8.21: $-4a, \frac{1}{4}a, 4a$
 جوابات: $-4a = -8i + 4j - 4k$, $\frac{1}{4}a = \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}j + \frac{1}{4}k$, $4a = 8i - 4j + 4k$

سوال 8.22: $a + b, b + a$
 جوابات: $-i - 3j + 5k$

سوال 8.23: $a - b, b - a, a - b - c$
 جوابات: $a - b = 5i + j - 3k$, $b - a = -5i - j + 3k$, $a - b - c = 5i + j - k$

سوال 8.24: $|a - b|, |b - a|, |a - b - c|$
 جوابات: $\sqrt{35}, \sqrt{35}, 3^{\frac{3}{2}}$

سوال 8.25: $|a + b|, |a| + |b|$
 جوابات: $5.916, 7.835$

سوال 8.26: $|a - b|, |a| - |b|$
 جوابات: $5.916, -2.936$

سوال 8.27: $\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}, \frac{c}{|c|}$
 جوابات: $0.82i - 0.41j + 0.41k, -0.56i - 0.31j + 0.74k, -k$

سوال 8.28: $\frac{a+c}{|a+c|}, \frac{b-c}{|b-c|}, \frac{a+b+c}{|a+b+c|}$
 جوابات: $-0.17i - 0.51j + 0.85k, -0.43i - 0.29j + 0.86k, -0.23i - 0.69j + 0.69k$

سوال 8.29: $(a + b) + c, a + (b + c)$
جوابات: $-i - 3j + 3k$

سوال 8.30: $4(a - b), 4a - 4b$
جوابات: $20i + 4j - 12k$

سوال 8.31: قوت $n = 2i - j - 3k$ اور $p = -3i - 2j + 7k$ ہیں۔ ایسی قوت m دریافت کریں کہ m, n اور p توازن میں ہوں۔

جواب: $m = i + 3j - 4k$

سوال 8.32: ثابت کریں کہ شکل 8.8 میں وتر $m'q$ اور $n'p$ ایک دونوں کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

جواب: $v_{m'q} = a + b + c$ اور $v_{n'p} = -a + b + c$ ہیں۔ اب $v_{tq} = l_1 v_{m'q}$ اور اسی طرح $v_{tq} = a + l_2 v_{n'p}$ لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں برابر پر کرتے ہوئے

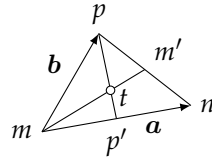
$$l_1(a + b + c) = a + l_2(-a + b + c)$$

یعنی $a(l_1 - 1 + l_2) + b(l_1 - l_2) + c(l_1 - l_2) = 0$ تو سین صفر ہوں گے۔ یوں حاصل ہمزاد مساوات $l_1 - 1 + l_2 = 0$ اور $l_1 - l_2 = 0$ حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔

سوال 8.33: تینوں کی تین کونوں سے سامنے اطراف کی وسط کو ملانے والے خط ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔ t کے دونوں اطراف، خط کی لمبائی کا نسبت دریافت کریں۔

جواب: تینوں کو شکل 8.9-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں mn کی وسط پر نقطہ p' اور pn کی وسط پر نقطہ m' دکھائے گئے ہیں۔ یوں سمتیہ $v_{m'n}$ جس کی دم نقطہ n پر ہے کو $v_{m'n} = \frac{1}{2}(b - a)$ لکھا جاسکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $v_{m'm} = a + v_{m'n}$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $v_{p'p} = \frac{1}{2}a - b$ لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے $v_{tm} = b + l_1 v_{p'p}$ اور $v_{tm} = l_2 v_{m'm}$ لکھے جاسکتے ہیں۔ انہیں حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{2}{3}$ ملتا ہے۔ یوں $m'm$ خط کے دو حصوں کا تناسب $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ یعنی $2 : 1$ ہو گا۔

سوال 8.34: تینوں کے کونے $A(1, -2, 4)$ ، $B(5, 1, 3)$ اور $C(2, 3, 1)$ ہیں۔ BC پر D پایا جاتا ہے جہاں $\overline{BD} = 2\overline{CD}$ ہے۔ اس کو شکل 8.34-ب میں دکھایا گیا ہے۔ خط AD کی لمبائی دریافت کریں۔



$a = b + 2c$, $b = 3i + 2k$, $c = 2i - j - k$, $l = 10$:8.38 سوال
جوابات: $9.61i - 2.74j$, $0.96i - 0.27j$

8.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے تمام سمتیات کا سلسلہ V جو سمتی مجموعہ (مساوات 8.7) اور سمتی ضرب (مساوات 8.8) کے الجبرائی قواعد پر پورا اترتا ہو کو سمتی فضا¹⁷ یا خطی فضا¹⁸ کہتے ہیں۔ سمتی فضا کا تصور اس لئے اہم ہے کہ عملی دلچسپی کے دیگر سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادل وغیرہ پر مبنی ہوں پائے جاتے ہیں جن کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب کی بالکل ایسی ہی فطری تعریف کی جاسکتی ہے۔

مسئلہ 8.1: حقیقی سمتی فضا

اگر سلسلہ V کے ارکان a ، b ، ... درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے ہیں) پر پورا اترتے ہوں تب V حقیقی سمتی فضا¹⁹ یا حقیقی خطی فضا کہلاتا ہے اور یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) سمتیات کہلاتے ہیں۔

(الف) سمتی جمع V کے ہر دو سمتیات a اور b کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو a اور b کا مجموعہ کہلاتا اور $a + b$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) قانون تبادل۔ V کے ہر دو ارکان a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.13) \quad a + b = b + a$$

(الف-2) قانون تلازم۔ V کے ہر تین ارکان a ، b اور c کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.14) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{جو } a + b + c \text{ لکھا جاتا ہے})$$

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو صفر سمتیہ کہلاتا اور 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.15) \quad a + 0 = a$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ a کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-a$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$(8.16) \quad a + (-a) = 0$$

vector space¹⁷
linear space¹⁸
real vector space¹⁹

(ب) غیر سمتی ضرب۔ حقیقی اعداد غیر سمتی کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ a کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو a اور c کا حاصل ضرب کہلاتا اور ca (یا ac) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

(ب-1) قانون جزئی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.17) \quad c(a + b) = ca + cb$$

(ب-2) قانون جزئی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.18) \quad (c + k)a = ca + ka$$

(ب-3) قانون وابستگی۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.19) \quad c(ka) = (ck)a \quad (\text{جو } cka \text{ لکھا جاتا ہے})$$

(ب-4) V میں ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.20) \quad 1 \cdot a = a$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے مخلوط سمتی فضا کی مسلکی تعریف حاصل ہو گی۔

سمتی فضا پر مزید بحث حصہ 7.9 میں کی جائے گی۔ انہیں اب سمتی فضا کی چند اہم خصوصیات پر غور کریں۔

فرض کریں کہ $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ سلسلہ V کے ارکان ہیں۔ ان کے خطی مجموعے²⁰ سے مراد درج ذیل ہے جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔

$$c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \dots + c_m a_{(m)}$$

سمتی فضا کی تعریف کے تحت درج بالا از خود V کا رکن سمتیہ ہو گا۔ اس طرز کی تمام مجموعوں کا سلسلہ S ، ان سمتیات کا احاطہ²¹ کہلاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ یہ سمتیات S کے پیدا کار²² ہیں۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔

خطی مجموعے کو استعمال کرتے ہوئے ہم خطی تابعیت اور خطی غیر تابعیت متعارف کرتے ہیں۔

سمتیات $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ اس صورت خطی طور غیر تابع سلسلہ پیدا کرتے ہیں جب درج ذیل

$$(8.21) \quad c_1 a_{(1)} + \dots + c_m a_{(m)} = 0$$

سے مراد $c_1 = 0, \dots, c_m = 0$ ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 7.84 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ خطی طور تابع²³ کہلاتے ہیں۔

$m = 1$ کی صورت میں مساوات 7.84 سے $ca = 0$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ a اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $a \neq 0$ ہو۔

مثال 8.6: خطی طور تابع اور خطی طور غیر تابع سمتیات کے سلسلے

سمتیات $a = i + 2j + k$ ، $b = 3k$ اور $c = 2i + 4j$ خطی طور تابع ہیں چونکہ $6a - 2b - 3c = 0$ لکھ کر $a = \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c$ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے برعکس i ، j اور k خطی طور غیر تابع ہیں۔

اگر V میں غیر تابع سمتیات کی تعداد n ہو جبکہ V میں موجود n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا بُعد n ہو گا اور V کو n بُعدی کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو

span²¹
generator²²
linearly dependent²³

V کی اساس ²⁴ کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ منفرد ہوگا۔

اس کی مثال فضا کے تمام سمتیات (حصہ 8.1) کی سمتی فضا ہے۔ اس سمتی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عدد سمتیات i, j, k اور (حصہ 8.3) کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ فضا s بُعدی ہے۔

اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$(8.22) \quad c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \cdots + c_m a_{(m)} = 0$$

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 8.22 درست ہوگا چونکہ ایسی صورت میں $0 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 8.22 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات خطی طور غیر تابع ²⁵ کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات کا خطی طور غیر تابع سلسلہ ²⁶ ہے۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.22 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات خطی طور تابع ²⁷ کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 8.22 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$a_{(1)} = k_2 a_{(2)} + \cdots + k_m a_{(m)} \quad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($a_{(1)} = 0$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔ اگر $m = 1$ ہو تب مساوات 8.22 کو ہم $c_1 a_{(1)} = 0$ لکھیں گے جس میں $k_1 \neq 0$ اس صورت ہو سکتا ہے جب $a_{(1)} = 0$ ہو جو خطی تابعت کی تعریف کے تحت خطی طور تابع ہے۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 8.2: خطی طور تابعت

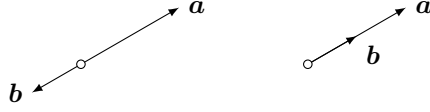
اگر مساوات 8.22 صرف اور صرف اس صورت درست ہو جب تمام c_1 تا c_m صفر ہوں تب $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ خطی طور تابع ہوں گے۔

²⁴ basis

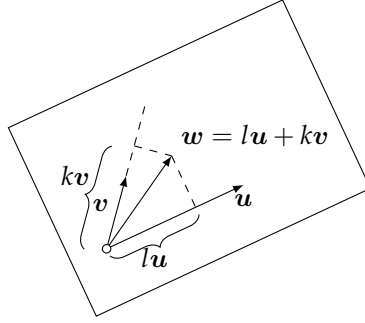
²⁵ linear independent

²⁶ linearly independent set

²⁷ linearly dependent



شکل 8.10: ہم خطی سمتیات۔



شکل 8.11: ہم سطحی سمتیات۔

درج بالا لازم اور معقول (کافی) شرط کو ہی عموماً تابعدیت کی تعریف تصور کی جاتی ہے۔

اگر ان میں کوئی ایک سمتیہ بھی صفر سمتیہ ہو تب $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ خطی طور غیر تابع ہوں گے، مثلاً $a_{(1)} = 0$ کی صورت میں مساوات 8.22 میں $k_1 \neq 0$ اور $k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0$ ہو سکتا ہے۔

سہ بُعدی فضا میں دو عدد خطی طور تابع سمتیات ہم خطی²⁸ ہوں گے (شکل 8.10) یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہوں تب یہ ایک ہی سیدھی خط پر واقع ہوں گے۔ ایسے تین سمتیات u, v, w جو خطی طور تابع سلسلہ پیدا کرتے ہوں ہم سطحی²⁹ کہلاتے ہیں، یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہوں تب یہ سمتیات ایک ہی سیدھی سطح پر واقع ہوں گے (شکل 8.11)۔ درحقیقت خطی تابعدیت کا مطلب یہ ہے کہ ایک سمتیہ کو بقایا سمتیات کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ سہ بُعدی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عددی سمتیات i, j, k کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے لہذا سہ بُعدی فضا میں چار یا چار سے زیادہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

collinear²⁸
coplanar²⁹

سوالات

ثابت کریں کہ سوال 8.39 تا سوال 8.42 میں دیے گئے سمتیات کا سلسلہ سمتی فضا پیدا کرتا ہے۔ اس فضا کی بُعد اور اساس دریافت کریں۔

سوال 8.39: سہ بُعدی فضا وہ تمام سمتیات جن کا پہلا جزو صفر ہے۔

جوابات: 2 ؛ j ، k

سوال 8.40: ایسے تمام سمتیات جنہیں $bi + k(j + k)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں b اور k کوئی بھی غیر سمتی ہو سکتے ہیں۔

جوابات: 2 ؛ i ، $j + k$

سوال 8.41: ایسے تمام n مرتب اعداد (a_1, \dots, a_n) کا سلسلہ جن کے مجموعے کی تعریف اور غیر سمتی کے ساتھ ضرب کی تعریف درج ذیل ہو۔

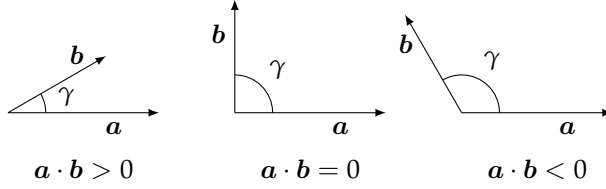
$$(a_n, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$c(a_n, \dots, a_n) = (ca_n, \dots, ca_n)$$

جوابات: n ؛ $(1, 0, \dots, 0)$ ، $(0, 1, \dots, 0)$ ، \dots ، $(0, 0, \dots, 1)$

سوال 8.42: ایسے تمام تفاعل جنہیں $y(x) = a \cos x + b \sin x$ لکھا جاسکتا ہے جہاں a اور b اختیاری مستقل ہیں۔ ان تفاعل کے مجموعے اور غیر سمتیات کے ساتھ ضرب عمومی قواعد کے تحت ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\sin x$ ، $\cos x$



شکل 8.12: سمتیات کے مابین زاویہ۔

8.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)

سہ بُعدی فضا میں سمتیات a اور b کی اندرونی ضرب³⁰ جس کو $a \cdot b$ لکھا جاتا ہے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\gamma (0 \leq \gamma \leq \pi)$ سمتیات a اور b کے مابین زاویہ ہے (جو دونوں سمتیات کی دم ایک ہی نقطہ پر رکھ کر ناپا جاتا ہے)۔ (شکل 8.12)

$$(8.23) \quad \begin{aligned} a \cdot b &= |a||b| \cos \gamma & (a \neq 0, b \neq 0) \\ a \cdot b &= 0 & (a = 0 \text{ یا } b = 0 \text{ یا } a = b = 0) \end{aligned}$$

اندرونی ضرب کو ضرب نقطہ³¹ بھی کہتے ہیں۔ اندرونی ضرب کا حاصل غیر سمتی (حقیقی عدد) ہوتا ہے اور یوں اندرونی ضرب کو غیر سمتی ضرب³² بھی کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 8.23 میں $\cos \gamma$ کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 8.12) لہذا اندرونی ضرب کی قیمت بھی مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے۔ زاویہ 0 تا π کے درمیان صرف $\gamma = \frac{\pi}{2}$ پر $\cos \gamma = 0$ ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.3: قائمیت³³

دو عدد غیر صفر سمتیات آپس میں صرف اور صرف اس صورت قائم الزاویہ (عمودی) ہوں گے جب ان کا اندرونی ضرب صرف کے برابر ہو۔

inner product³⁰
dot product³¹
scalar product³²
orthogonality³³

مساوات 8.23 میں $b = a$ پر کرنے سے $a \cdot a = |a|^2$ حاصل ہوتا ہے اور یوں سمتیہ کی لمبائی (اقلیدسی معیار) کو اندرونی ضرب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(8.24) \quad |a| = \sqrt{a \cdot a} \quad (\geq 0)$$

درج بالا اور مساوات 8.23 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.25) \quad \cos \gamma = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a \cdot a} \sqrt{b \cdot b}}$$

اندرونی ضرب کی تعریف سے درج ذیل خصوصیات اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

$$(8.26) \quad \begin{aligned} & \text{(الف)} \quad [q_1 a + q_2 b] \cdot c = q_1 a \cdot c + q_2 b \cdot c \quad (\text{خطیت}) \\ & \text{(ب)} \quad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{تثاکل}) \\ & \text{(پ)} \quad \left. \begin{aligned} a \cdot a &\geq 0 \\ a \cdot a &= 0 \text{ اگر } a = 0 \end{aligned} \right\} \text{ مثبت ہونا} \end{aligned}$$

یوں ضرب نقطہ استبدالی اور سمتیات کی جمع کے لئے جزیقی تقسیمی ہے۔ مساوات 8.26 میں $q_1 = 1$ اور $q_2 = 1$ لینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.27) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{جزیقی تقسیم})$$

مساوات 8.23 اور $\cos \gamma \leq 1$ سے درج ذیل شوارز عدم مساوات^{34 35} ملتی ہے۔

$$(8.28) \quad |a \cdot b| \leq |a||b| \quad (\text{شوارز عدم مساوات})$$

درج بالا اور مساوات 8.24 استعمال کرتے ہوئے آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

$$(8.29) \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{تکوینی عدم مساوات})$$

مساوات 8.24 کی مدد سے

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ |a - b|^2 &= (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b \end{aligned}$$

³⁴ Schwarz inequality
³⁵ جرمن ریاضی دان ہرمن امندس شوارز [1843-1921]

لکھ کر دونوں مساوات جمع کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.30) \quad |a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \quad (\text{متوازی الاضلاع مساوات})$$

سمتیات کو اجزاء کی صورت میں لکھ کر

$$a = a_1i + a_2j + a_3k, \quad b = b_1i + b_2j + b_3k$$

ان کا غیر سمتی ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1i + a_2j + a_3k) \cdot (b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= a_1b_1i \cdot i + a_1b_2i \cdot j + a_1b_3i \cdot k + a_2b_1j \cdot i + a_2b_2j \cdot j + a_2b_3j \cdot k \\ &\quad + a_3b_1k \cdot i + a_3b_2k \cdot j + a_3b_3k \cdot k \end{aligned}$$

اب چونکہ i اور j آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں لہذا مساوات 8.23 میں $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ہو گا اور یوں $i \cdot j = 0$ ہو گا۔ اسی طرح چونکہ i اور j ایک ہی سمت میں ہیں لہذا مساوات 8.23 میں $\gamma = 0$ ہو گا اور یوں $i \cdot i = 1$ ہو گا۔ اسی عمل سے آپ درج ذیل غیر سمتی ضرب کے تعلقات لکھ سکتے ہیں جنہیں درج بالا میں

$$(8.31) \quad i \cdot i = 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1$$

$$(8.32) \quad i \cdot j = 0, \quad j \cdot k = 0, \quad k \cdot i = 0$$

پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.33) \quad a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

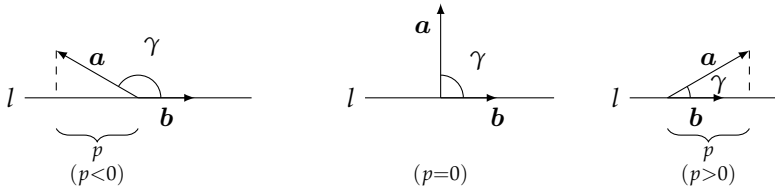
اگر a اور b ($b \neq 0$) سمتیات کے مابین زاویہ γ ہو تب درج ذیل حقیقی عدد

$$p = |a| \cos \gamma$$

b کی سمت میں a کا جزو یا عمودی ساہ³⁶ ہو گا۔ اگر $a = 0$ ہو تب γ غیر معین (بے معنی) ہو گا اور ہم $p = 0$ لیں گے۔

یوں b کی سمت میں خط l پر a کے عمودی سائے کی لمبائی $|p|$ ہو گی۔ p کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 8.13)۔

projection³⁶

شکل 8.13: b کی سمت میں a کا جزو۔

یوں کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات i ، j اور k کی سمت میں سمتیہ $a = a_1i + a_2j + a_3k$ کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں گے۔

مساوات 8.25 کی مدد سے درج ذیل ہو گا

$$(8.34) \quad p = a \cos \gamma = \frac{a \cdot b}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

اور اگر b اکائی سمتیہ ہو تب اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.35) \quad p = a \cdot b$$

سمتی ضرب کی استعمال کے چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

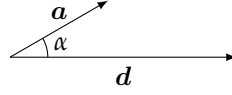
مثال 8.7: قوت اور کام

فرض کریں کہ قوت a کسی چیز کو اپنی جگہ سے ہٹا کر سمتی فاصلہ d منتقل کرتا ہے۔ d کی سمت میں قوت کا جزو ضرب $|d|$ کام W کی تعریف ہے یعنی

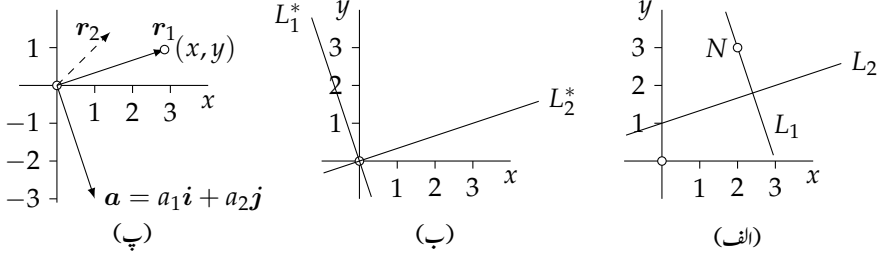
$$(8.36) \quad W = |a||d| \cos \alpha = a \cdot b$$

جہاں a اور d کے درمیان زاویہ α ہے۔ (شکل 8.14)

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ a کی سمت میں d کا جزو ضرب $|a|$ بھی کام کی تعریف ہے۔



شکل 8.14: قوت اور کام (مثال 8.7)



شکل 8.15: قائمہ الزاویہ خطوط۔ مثال 8.8

مثال 8.8: سیدھی سطح میں واقع قائمہ الزاویہ سیدھے خطوط
سیدھی سطح پر قائمہ الزاویہ دو سیدھے خطوط L_1 اور L_2 شکل 8.15-الف میں دکھائے گئے ہیں۔ L_2 کی مساوات $x - 3y - 3 = 0$ ہے۔ نقطہ $N(2, 3)$ سے گزرتا ایسے خط (L_1) کی مساوات دریافت کریں جو L_2 کے عمودی ہو۔

حل: L_2 کی مساوات کی طرح کارتیسی نظام میں کسی بھی سیدھے خط کو $ax + by = c$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اگر $c = 0$ ہو تب یہ خط کارتیسی نظام کے مرکز $(0, 0)$ سے گزرے گا۔ یوں L_2 کی مساوات میں مستقل کی قیمت صفر کرنے سے L_2^* حاصل ہو گا جسے شکل 8.15 میں دکھایا گیا ہے۔

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.