انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 20

مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ

مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ انجینئری حساب میں اہم ترین جزوی تفرقی مساوات میں سے ایک ہے چونکہ یہ ثقلی میدان (حصہ 10.8)، ساکن برقی میدان (حصہ 13.11)، برقرار حال ایصال حرارت (حصہ 15.5)، داب ناپذیر بہاو سیال، وغیرہ کے مسئلوں میں پایا جاتا ہے۔ اس مساوات کے حل کو **نظریہ مخفی قوہ**[1] کہتے ہیں۔

دو بعدی صورت جہاں u کارتیسی محدد کے دو محور x اور y کے تابع ہو میں لاپلاس مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ تب اس کے حل مخلوط تحلیلی تفاعل (حصہ 14.5) کے ساتھ گہرا تعلق رکھتے[2] ہیں۔ ہم اس تعلق پر اب تفصیلاً غور کرتے ہیں اور ماقوا حرکیات اور برقی سکون سے چند مثال بھی پیش کریں گے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ تحلیلی تفاعل کے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے ہارمونی تفاعل کی مختلف عمومی خواص بیان کی جا سکتی ہیں۔ آخر میں ہم دائری قرص پر مساوات لاپلاس کے سرحدی مسائل کے حل کا ایک اہم عمومی کلیہ (پوسوں تکملی کلیہ) اخذ کریں گے۔

[1] potential theory

[2] تین بعدی صورت میں ایسا گہرا تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

20.1 ساکن برقی سکون

بار بردار ذرات کے مابین قوت کشش یا دفع کو کلیہ کولمب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہ قوت تفاعل u جس کو **برقی ساکن مخفی قوہ**[3] کہتے ہیں کی ڈھلوان ہے، اور بار سے پاک نقطوں پر u مساوات لاپلاس (حصہ 13.11)

$$\nabla^2 u = 0$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ سطحیں $u =$ مستقل کو **ہم قوہ سطحیں**[4] کہتے ہیں۔ہر نقطہ N پر u کی ڈھلوان نقطہ N پر سطح $u =$ مستقل کی قائمہ ہو گی، یعنی برقی قوت اور ہم قوہ سطح آپس میں قائمہ ہوں گے۔

مثال 20.1: **متوازی چادروں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ**
دو لامتناہی وسعت کی متوازی موصل چادر جنہیں بالترتیب U_1 اور U_2 برقی دباو پر رکھا گیا ہے کے درمیان مخفی قوہ تلاش کریں (شکل 20.1-الف)۔چادروں کی شکل سے ظاہر ہے کہ u صرف x کا تابع ہو گا لہٰذا مساوات لاپلاس $u'' = 0$ صورت اختیار کرتی ہے۔دو مرتبہ تکمل لے کر $u = ax + b$ حاصل ہوتا ہے جہاں مستقل a اور b کو چادروں پر برقی دباو u کی سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر اگر چادر $x = -1$ اور $x = 1$ پر واقع ہوں تب حل

$$u(x) = \frac{1}{2}(U_2 - U_1)x + \frac{1}{2}(U_2 + U_1)$$

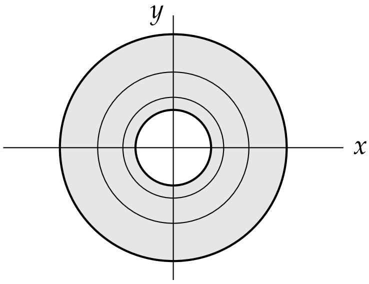
ہو گا۔ہم قوہ سطحیں چادروں کے متوازی سطحیں ہوں گی۔ □

مثال 20.2: **ہم محور نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ**
دو لامتناہی لمبائی کی ہم محور موصل نلکیاں جنہیں بالترتیب U_1 اور U_2 مخفی قوہ پر رکھا گیا ہو کے درمیان مخفی قوہ تلاش کریں (شکل 20.1-ب)۔ یہاں تشاکل کی بنا u صرف $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا تابع ہو گا اور مساوات لاپلاس

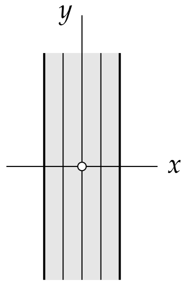
$$ru'' + u' = 0 \qquad \text{(مساوات 13.96 دیکھیں)}$$

---

[3] electrostatic potential
[4] equipotential surfaces



(ب)ہم محور موصل نلکیوں کے درمیان مخفی قوہ



(الف)متوازی چادروں کے درمیان مخفی قوہ

شکل 20.1: اشکال برائے مثال 20.1 اور مثال 20.2

صورت اختیار کرتی ہے۔ علیحدگی متغیرات کے بعد تکمل لینے سے

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{r}, \quad \ln u' = -\ln r + \tilde{a}, \quad u' = \frac{a}{r}, \quad u = a \ln r + b$$

حاصل ہو گا جہاں مستقل a اور b کو ہم محوری نلکیوں پر u کی دی گئی قیمتوں سے حاصل کیا جائے گا۔ اگرچہ لامتناہی لمبائی کی موصل نلکی کہیں نہیں پائی جاتے ہے، ہماری حاصل کردہ مخفی قوہ کسی بھی لمبی موصل نلکی کے اندر، نلکی کی سروں سے دور، اصل مخفی قوہ کے بہت قریب مخفی قوہ دے گی۔ □

اگر مخفی قوہ صرف دو کارتیسی محدد x اور y پر منحصر ہو تب مساوات لاپلاس درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{20.1}$$

مستوی xy میں ہم قوہ سطحیں $u =$ مستقل بطور ہم قوہ خطوط نظر آئیں گی۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $u(x, y)$ ہارمونی ہے یعنی اس کے دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ اب اگر $u(x, y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x, y)$ ہو (حصہ 14.5) تب تفاعل

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

متغیرہ $z = x + iy$ کا تحلیلی تفاعل ہو گا۔ اس تفاعل کو حقیقی مخفی قوہ u کا **مطابقتی مخلوط مخفی قوہ**[5] کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ u کا جوڑی دار، ما سوائے جمعی حقیقی جزو کے، یکتا ہو گا۔

---

[5] complex potential

چونکہ خطوط $v =$ مستقل ہم قوہ خطوط $u =$ مستقل کو قائمہ الزاویہ قطع کرتی ہیں [ما سوائے ان نقطوں پر جہاں $F'(z) = 0$ ہو] لہٰذا ان کی سمت اور برقی قوت کی سمت ایک ہو گی۔اسی لئے $v =$ مستقل کو **خطوط قوت**[6] کہتے ہیں۔

مثال 20.3: **مخلوط مخفی قوہ**
مثال 20.1 میں u کا جوڑی دار $v = ay$ ہے۔یوں مخلوط مخفی قوہ

$$F(z) = az + b = ax + b + iay$$

ہو گا اور خطوط قوت x محور کے متوازی سیدھی لکیریں ہوں گی۔ □

مثال 20.4: **مخلوط مخفی قوہ**
مثال 20.2 میں

$$u = a \ln r + b = a \ln|z| + b$$

ہے جس کا جوڑی دار $v = \underline{/z}$ ہے۔یوں مخلوط مخفی قوہ $F(z) = a \ln z + b$ ہو گا اور قوت کے خطوط مبدا سے گزرتی سیدھی لکیریں ہوں گی۔ $F(z)$ کو ایسی منبع لکیر کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کا xy مستوی میں عکس مبدا ہو۔ □

عموماً خطی میل کی مدد سے زیادہ پیچیدہ مخفی قوہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔درج ذیل مثال میں ایسا کیا گیا ہے۔

مثال 20.5: **جوڑی منبع لکیروں کی مخلوط مخفی قوہ**
$z = x_1$ اور $z = x_2$ پر یکساں لیکن مخالف علامت کی بار بردار منبع لکیریں پائی جاتی ہیں۔ان کا مخلوط مخفی قوہ تلاش کریں۔ مثال 20.2 اور مثال 20.2 سے ان منبع لکیروں کی مخفی قوہ

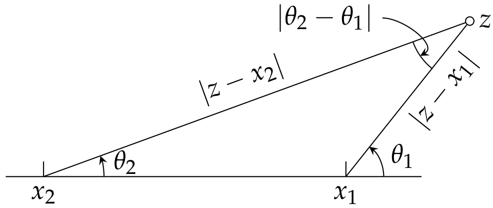
$$u_1 = -c \ln|z - x_1|, \quad u_2 = c \ln|z - x_2|$$

ہوں گی جو درج ذیل مخلوط مخفی قوہ کے حقیقی اجزاء ہیں۔

$$F_1(z) = -c \ln(z - x_1), \quad F_2(z) = c \ln(z - x_2)$$

---

[6] force lines



شکل 20.2: شکل برائے مثال 20.5

یوں دونوں منبع لکیروں کا مجموعی مخلوط مخفی قوہ

$$F(z)=F_1(z)+F_2(z)=c\ln\frac{z-x_2}{z-x_1} \tag{20.2}$$

ہو گا۔ہم قوہ خطوط درج ذیل منحنیات

$$u=F(z)\ \text{حقیقی}=c\ln\frac{|z-x_2|}{|z-x_1|}=\text{مستقل}$$

ہوں گی جو دائرے ہیں۔ قوت کی لکیریں درج ذیل منحنیات

$$v=F(z)\ \text{خیالی}=c\,\underline{/\tfrac{z-x_2}{z-x_1}}=c[\underline{/z-x_2}-\underline{/z-x_1}]=\text{مستقل}$$

یعنی

$$v=c(\theta_2-\theta_1)=\text{مستقل}$$

ہوں گی (شکل 20.2)۔اب در حقیقت $|\theta_2-\theta_1|$ نقطہ z سے x_1 اور x_2 تک لکیروں کے مابین زاویہ ہے۔یوں قوت کی لکیریں ایسی منحنیات ہوں گی جن پر قطع x_1x_2 کا زاویہ تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ مساوات 20.2 میں دیے گیے تفاعل کو ایسی غیر ہم محور نلکی برق گیر کے اندر کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کے دونوں نلکیوں کے محور متوازی ہوں۔ □

سوالات

سوال 20.1 تا سوال 20.4 میں لا متناہی لمبائی کے دو ہم محور نلکیوں کے رداس r_1 اور $r_2\ (>r_1)$ ہیں جنہیں بالترتیب برقی دباو U_1 اور U_2 پر رکھا جاتا ہے۔ان نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ u تلاش کریں۔

سوال 20.1: $r_1 = 1,\ r_2 = 5,\ U_1 = 0,\ U_2 = 100\,\mathrm{V}$
جواب: $u = \frac{100}{\ln 5}\ln r = 62.13\ln r$

سوال 20.2: $r_1 = 0.5,\ r_2 = 2,\ U_1 = -110,\ U_2 = 110\,\mathrm{V}$
جواب: $u = \frac{220}{\ln 4}\ln r$

سوال 20.3: $r_1 = 2,\ r_2 = 20,\ U_1 = 100,\ U_2 = 200\,\mathrm{V}$
جواب: $u = \frac{100}{\ln 10}(\ln r + \ln 5)$

سوال 20.4: $r_1 = 3,\ r_2 = 6,\ U_1 = 100,\ U_2 = 50\,\mathrm{V}$
جواب: $u = -\frac{50}{\ln 2}(\ln r - 50\ln 12)$

سوال 20.5: مخلوط مخفی قوہ $F(z) = \frac{1}{z}$ کی ہم قوہ خطوط تلاش کریں اور ان کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: $(x - \frac{1}{2c})^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$

سوال 20.6: نقطہ $z = a$ اور $z = -a$ پر آپس میں الٹ علامتی بار سے بار بردار منبع کی لکیریں پائی جاتی ہیں۔ہم قوہ خطوط کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 20.7: نقطہ $z = a$ اور $z = -a$ پر یکساں علامتی بار سے بار بردار منبع کی لکیریں پائی جاتی ہیں۔ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔
جواب: $u = c\ln(z^2 - a^2) \overset{\text{حقیقی}}{=} c\ln\left|z^2 - a^2\right|$

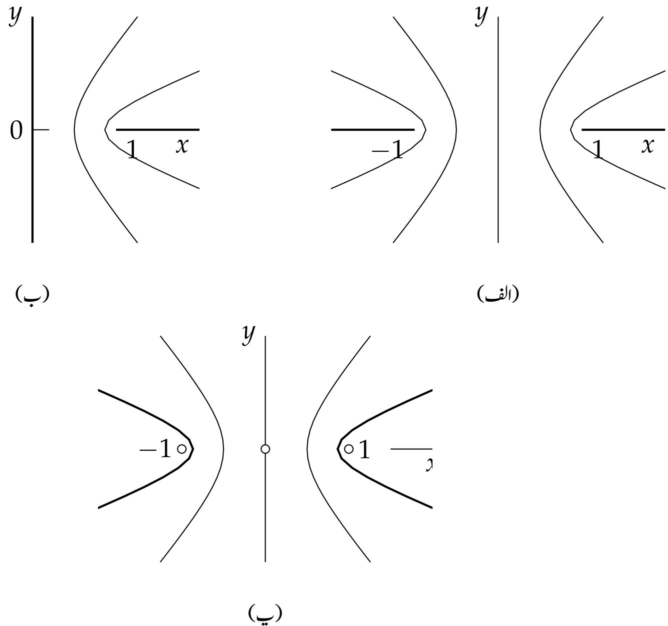
سوال 20.8: دکھائیں کہ $F(z) = \cos^{-1} z$ کو شکل 20.3 میں دکھائی گئی تینوں شکل کی موصل چادروں کی مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

سوال 20.9: دکھائیں کہ $F(z) = \cosh^{-1} z$ کو دو ہم ماسکہ ترخیمی نلکیوں کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔
جواب:

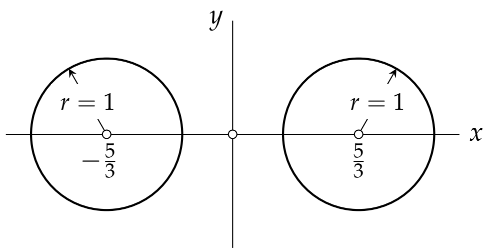
$$z = x + iy = \cosh(u + iv) = \cosh u\cos v + i\sinh u\sin v,\quad \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1$$

یوں ہم قوہ خطوط $u =$ مستقل ہم ماسکہ ترخیم ہیں۔

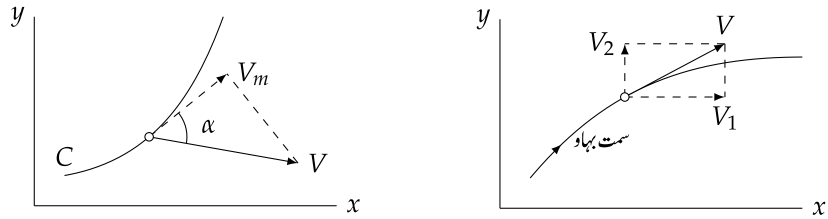
سوال 20.10: شکل 20.4 میں لامتناہی لمبائی کے دو نلکیاں دکھائی گئی ہیں۔بایاں نلکی پر $u = -1$ اور دایاں نلکی پر $u = 1$ ہے۔نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ u تلاش کریں۔ اشارہ۔ سوال 20.6 کا نتیجہ استعمال کریں۔



شکل 20.3: شکل برائے سوال 20.8



شکل 20.4: شکل برائے سوال 20.10



(الف) سمتی رفتار

(ب) منحنی C کو سمتی رفتار کا مماسی جزو

شکل 20.5: سمت بہاو اور سمتی رفتار

20.2 دو بعدی بہاو سیال

ہارمونی تفاعل بہاو سیال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔آئیں غیر پچپچا سیال کا دو بعدی برقرار بہاو پر غور کرتے ہیں۔یہاں "دو بعدی" کا مطلب ہے کہ xy مستوی کے متوازی تمام سطحوں میں سیال کی حرکت یکساں ہے اور حرکت ان سطحوں کے متوازی ہے۔ایسی صورت میں صفر xy سطح میں حرکت پر غور کرنا کافی ہو گا۔"برقرار" کا مطلب ہے کہ سمتی رفتار وقت کا تابع نہیں ہے۔

کسی بھی نقطہ (x, y) پر بہاو کی سمتی رفتار پائی جائے گی جس کو اس کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا سمتی رفتار ایک سمتیہ ہو گا۔چونکہ مخلوط سطح میں کوئی بھی عدد a ایک سمتیہ کو ظاہر کرتا ہے (جو مبدا سے عدد a کی مطابقتی مقام تک کا سمتیہ ہو گا) لہٰذا ہم بہاو کی سمتی رفتار کو مخلوط متغیرہ سے ظاہر کر سکتے ہیں مثلاً

$$V = V_1 + iV_2 \tag{20.3}$$

جہاں مخلوط سطح پر سمتی رفتار کے x اور y سمت میں اجزاء بالترتیب V_1 اور V_2 ہوں گے اور V حرکت کرتے ذرات کی راہ کو مماسی ہو گا۔ایسی راہ کو سمت بہاو[7] کہتے ہیں (شکل 20.5-الف)۔

اب کسی ایک ہموار منحنی C پر غور کریں جس کی لمبائی قوس کو ہم s سے ظاہر کرتے ہیں۔فرض کریں کہ C کو مماسی سمتی رفتار V کا جزو حقیقی متغیرہ V_m ہے (شکل 20.5-ب) تب C پر s کی بڑھتی رخ خطی تکمل

$$\int_C V_m \, \mathrm{d}s \tag{20.4}$$

[7] streamline

کو C پر سیال کی **دائری بہاو**[8] کہتے ہیں۔دائری بہاو کو C کی لمبائی سے تقسیم کرنے سے منحنی C پر اوسط سمتی رفتار[9] حاصل ہوتی ہے۔اب شکل 20.5 سے

$$V_m = |V| \cos \alpha$$

لکھا جا سکتا ہے۔نتیجتاً C کے اکائی مماسی سمتیہ (حصہ 15.2)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + i\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

اور V کا اندرونی ضرب (حصہ 7.5) V_m ہو گا جہاں C کو $z(s) = x(s) + iy(s)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔اس طرح $V_m \, \mathrm{d}s$ کو

$$V_m \, \mathrm{d}s = V \cdot \mathrm{d}z = V_1 \, \mathrm{d}x + V_2 \, \mathrm{d}y \qquad (\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i \, \mathrm{d}y)$$

لکھا جا سکتا ہے۔(یہاں اچھی طرح سمجھ لیں کہ یہ دو سمتیات کے مابین غیر سمتی ضرب ہے نا کہ مخلوط ضرب۔)

اب فرض کریں کہ C ایک بند منحنی ہے یعنی سادہ تعلق دائرہ کار D کا سرحد۔تب اگر ایسا دائرہ کار جس میں D اور C شامل ہوں میں V کے استمراری جزوی تفرق پائے جاتے ہوں تب مسئلہ گرین (حصہ 11.4) کے تحت C پر دائری بہاو کو دوہرا تکمل

$$\int_C (V_1 \, \mathrm{d}x + V_2 \, \mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{20.5}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔دائیں ہاتھ تکمل کے اندر تفاعل کا ایک سادہ طبعی مطلب ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ C ایک دائرہ ہے جس کا رداس r ہے۔تب دائری بہاو کو $2\pi r$ سے تقسیم کرنے سے سیال کی C پر اوسط سمتی رفتار حاصل ہو گی جس کو r سے تقسیم کرتے ہوئے دائرے کی محور پر سیال کی زاویائی سمتی رفتار ω_0 حاصل ہوتی ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\pi r^2} \iint_D \frac{1}{2} \Big(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y} \Big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{20.6}$$

---

[8] circulation

[9] اوسط قیمتوں کی تعریفیں درج ذیل ہیں۔

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x =$ وقفہ $a \le x \le b$ پر f کی اوسط قیمت ہے۔

$\frac{1}{l} \int_C f(s) \, \mathrm{d}s = C$ پر f کی اوسط قیمت ہے جہاں C کی لمبائی l ہے۔

$\frac{1}{A} \iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = D$ میں f کی اوسط قیمت ہے جہاں D کا رقبہ A ہے۔

دایاں ہاتھ قرص D جس کی سرحد C ہے پر درج ذیل تفاعل کی اوسط قیمت[10] ہے۔

$$\omega = \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\Big) \tag{20.7}$$

تفاعل ω **گھومنا**[11] کہلاتا ہے جبکہ 2ω کو حرکت کی **گردابیت**[12] کہتے ہیں۔اگر $r \to 0$ ہو تب مساوات 20.6 کے دایاں ہاتھ کی حد، C کی مرکز پر ω کی قیمت دے گی۔یوں اگر دائرہ C سکڑ کر نقطہ (x, y) مانند رہ جائے تب سیال کے دائری ٹکڑے کی زاویائی سمتی رفتار کی تحدیدی قیمت $w(x, y)$ ہو گی۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر سیال کا کروی ٹکرا یک دم ٹھوس صورت اختیار کرے اور ساتھ ہی باقی تمام سیال ہٹا دیا جائے تب اس ٹکڑے کی زاویائی سمتی رفتار ω ہو گی (حصہ 10.11 دیکھیں)۔

ہم صرف **ناگھومتے**[13] سیال پر غور کرتے ہیں یعنی ایسا سیال جس کا ω پورے خطہ D پر صفر کے برابر ہو،

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y} = 0$$

جہاں تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کی گئی ہے۔

ہم مزید فرض کرتے ہیں کہ سیال داب ناپذیر ہے۔تب ہر اس خطہ میں،جس میں نا کوئی **منبع**[14] (سوال 20.20) اور نا ہی کوئی **گڑھا**[15] پایا جاتا ہو یعنی جس میں سیال نا پیدا ہوتا ہو اور نا ہی غائب ہوتا ہو، مساوات 10.121 کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}y} = 0 \tag{20.8}$$

ہو گا۔

اگر D سادہ تعلق خطہ ہو اور بہاو ناگھومنے والی ہو تب مسئلہ 11.9 کے تحت خطی تکمل

$$\int_C (V_1\,\mathrm{d}x + V_2\,\mathrm{d}y) \tag{20.9}$$

---

[10] اوسط کی تعریف کے لئے گزشتہ حاشیہ دیکھیں
[11] rotation
[12] vorticity
[13] irrotational
[14] source
[15] sink

D میں راہ کا تابع نہیں ہو گا۔یوں D میں مقررہ نقطہ (a, b) سے D میں متغیر نقطہ (x, y) تک تکمل حاصل کرنے سے نقطہ (x, y) کا تابع تفاعل مثلاً $\Phi(x, y)$ حاصل ہو گا:

$$\Phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} (V_1 \, \mathrm{d}x + V_2 \, \mathrm{d}y) \tag{20.10}$$

تفاعل $\Phi(x, y)$ کو حرکت کی سمتی رفتار **مخفی قوہ**[16] کہتے ہیں۔اب چونکہ درج بالا تکمل راہ کا تابع نہیں ہے لہٰذا $V_1 \, \mathrm{d}x + V_2 \, \mathrm{d}y$ قطعی تفرق (حصہ 11.12) ہو گا یعنی یہ تفاعل $\Phi(x, y)$ کا تفرق ہو گا:

$$V_1 \, \mathrm{d}x + V_2 \, \mathrm{d}y = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, \mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \, \mathrm{d}y \tag{20.11}$$

یوں

$$V_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{20.12}$$

ہو گا لہٰذا سمتی رفتار سمتیہ تفاعل $\Phi(x, y)$ کی ڈھلوان (حصہ 10.8) ہو گی۔

$$V = V_1 + iV_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{20.13}$$

منحنی $\Phi(x, y) =$ مستقل کو **ہم قوہ خط**[17] کہتے ہیں۔چونکہ Φ کی ڈھلوان V ہے لہٰذا ($V \neq 0$ کی صورت میں) ہر نقطہ پر V اور اس نقطہ سے گزرتا ہم قوہ خط آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

مساوات 20.12 کو مساوات 20.8 میں پر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ Φ مساوات لاپلاس

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

کو مطمئن کرتا ہے۔فرض کریں کہ $\Phi(x, y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $\Psi(x, y)$ ہو، تب[(ماسوائے اس نقطہ پر جہاں (مساوات 20.14 میں دیا گیا) $F'(z) = 0$ ہو] ہر ایک نقطہ پر منحنیات

$$\Psi(x, y) = \text{مستقل}$$

---

[16] velocity potential
[17] equipotential lines

اور ہم قوہ خطوط $\Phi(x,y) =$ مستقل آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گی۔یوں منحنیات $\Psi(x,y) =$ مستقل کے مماس کی سمت اور سیال کی سمتی رفتار کی سمت ایک جیسی ہوں گی۔نتیجتاً منحنیات $\Psi(x,y) =$ مستقل سیال کی سمت بہاو خط ہوں گے۔تفاعل $\Psi(x,y) =$ مستقل کو بہاو کا **تفاعل بہاو**[18] کہتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ Φ اور Ψ دونوں کے استمراری دوہرا جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔تب مخلوط تفاعل

$$F(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \tag{20.14}$$

بہاو کے خطہ میں تحلیلی ہو گا۔اس تفاعل کو بہاو کی **مخلوط مخفی قوہ**[19] کہتے ہیں۔ Φ اور Ψ کے ساتھ علیحدہ علیحدہ کام کرنے سے مخلوط مخفی قوہ کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

مساوات 20.14 کا تفرق لے کر اور مساوات کوشی ریمان استعمال کرتے ہوئے بہاو کی سمتی رفتار حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں

$$F'(z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = V_1 - iV_2$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$V = V_1 + iV_2 = \overline{F'(z)} \tag{20.15}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اس طرح دو بعدی، نا گھومنے والی، داب نا پذیر سیال کی برقرار بہاو کو تحلیلی تفاعل کی صورت میں بیان کیا جا سکتا ہے اور مخلوط تجزیہ کے تراکیب، مثلاً محافظ زاویہ نقش، استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

چونکہ وہ سرحد جس کو بہاو پار نہ کر سکتا ہو بہاو سمت ہو گا لہٰذا سرحدی شرائط مسائل میں بہاو سمت تفاعل Ψ نہایت اہم ثابت ہوتا ہے۔زیر محافظ زاویہ نقش، بہاو سمت کا تبادل سطح عکس میں بہاو سمت پر ہو گا۔پیچیدہ بہاو کے حصول اور ان پر غور کے لئے سادہ بہاو کا میل زیر استعمال لایا جا سکتا ہے۔دو بہاو F_1 ، F_2 کا مجموعہ $F = F_1 + F_2$ دونوں بہاو کی سمتی رفتار کی سمتیات کا سمتی مجموعہ سے حاصل بہاو کا مخلوط مخفی قوہ ہو گا۔چونکہ مساوات لاپلاس خطی اور متجانس ہے لہٰذا دو ہارمونی تفاعل کا مجموعہ بھی ہارمونی ہو گا۔

---

[18] stream function
[19] complex potential

دھیان رہے کہ اگرچہ برقی سکون میں دی گئی سرحدیں (موصل سطحیں) ہم قوہ خطوط ہوں گی، ماقوا حرکیات میں یہ سرحدیں بہاو سمت ہوں گی اور ہم قوہ خطوط کے قائمہ الزاویہ ہوں گی۔

آئیں ایک عمومی مثال کو دیکھیں۔مزید مسائل سوالات میں پیش کیے گئے ہیں۔

مثال 20.6: کونے کے ساتھ بہاو
مخلوط مخفی قوہ

$$F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \tag{20.16}$$

ایسی بہاو کو ظاہر کرتا ہے جس کے ہم قوہ خطوط درج ذیل قطع زائد

$$\Phi = x^2 - y^2 = \text{مستقل}$$

اور بہاو سمت درج ذیل قطع زائد

$$\Psi = 2xy = \text{مستقل}$$

ہوں گی۔مساوات 20.15 سے درج ذیل سمتی رفتار سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$V = 2\bar{z} = 2(x - iy), \quad \implies \quad V_1 = 2x, \quad V_2 = -2y$$

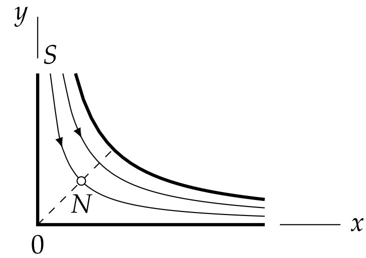
رفتار (سمتیہ کی مقدار) درج ذیل ہو گی۔

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

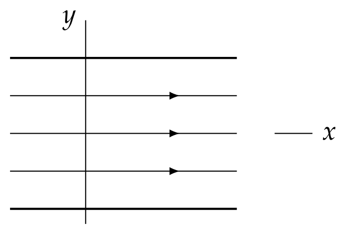
اس بہاو کو ایسی ندی کی بہاو تصور کیا جا سکتا ہے جس کے اطراف کارتیسی محدد کے مثبت محور اور قطع زائد مثلاً $xy = 1$ ہو (شکل 20.6)۔ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بہاو سمت S پر نقطہ N پر رفتار کم تر ہو گا۔یہ وہ نقطہ ہے جہاں ندی کی عمودی تراش رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا۔ □

سوالات

سوال 20.11: (متوازی بہاو) دکھائیں کہ $F(z) = Kz$ (جہاں K مثبت حقیقی ہے) دائیں رخ یکساں بہاو کو ظاہر کرتی ہے جس کو دو متوازی لکیروں (تین بعدی فضا میں دو متوازی چادروں) کے درمیان یکساں بہاو تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 20.7)۔ سمتی رفتار سمتیہ، بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔



شکل 20.6: کونے پر بہاو



شکل 20.7: یکساں متوازی بہاو

جواب: $V = V_1 = K,\ Ky =$ مستقل $,\ Kx =$ مستقل

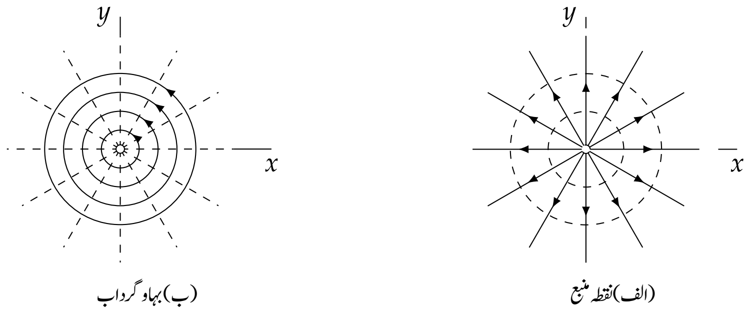
سوال 20.12: دکھائیں کہ کونے پر بہاو کو $F(z) = iz^2$ ظاہر کرتی ہے۔ بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں اور انہیں ترسیم کریں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں۔

سوال 20.13: مثال 20.6 کی بہاو محافظ نقش کی استعمال سے سوال 20.11 سے حاصل کریں۔ آپ کو ربع اول کا نقش بالائی نصف مستوی پر کرنا ہو گا۔

سوال 20.14: مخلوط مخفی قوہ $F(z) = z^3$ کے بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔ انہیں ترسیم کریں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں اور وہ تمام نقطے دریافت کریں جہاں یہ سمتیہ x محور کے متوازی ہے۔

سوال 20.15 تا سوال 20.19 میں دی گئی مخلوط مخفی قوہ $F(z)$ پر غور کریں۔ ہم قوہ خطوط اور بہاو سمت کی ترسیم کھینچیں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں اور وہ تمام نقطے دریافت کریں جہاں یہ سمتیہ x محور کے متوازی ہے۔

سوال 20.15: $F = iz$
جواب: منفی y محور کے رخ متوازی بہاو۔ $V = -i$



شکل 20.8: اشکال برائے سوال 20.20 اور سوال 20.21

سوال 20.16: $F = -ikz$ k حقیقی عدد صحیح ہے۔

سوال 20.17: $F = (1+i)z$
جواب: $y = -x$ کی رخ متوازی بہاو۔ $V = 1 - i$

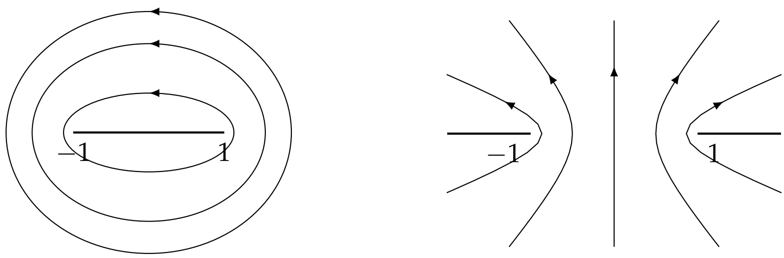
سوال 20.18: $F = z^2 + z$

سوال 20.19: $F = iz^3$
جواب: $V = -6xy + 3i(y^2 - x^2)$ ؛ $y = x$ اور $y = -x$ پر $V_2 = 0$ ہے۔

سوال 20.20: **منبع اور گڑھا** مخلوط مخفی قوہ $F(z) = \frac{c}{2\pi} \ln z$ پر غور کریں جہاں c حقیقی مثبت ہے۔ دکھائیں کہ $V = \frac{c}{2\pi r^2}(x + iy)$ ہو گا جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ یہ رداسی باہر رخ بہاو کو ظاہر کرتی ہے (شکل 20.8-الف)۔ یہ نقطہ $z = 0$ پر منبع[20] کا مخفی قوہ ہو گا (یعنی فضا میں $x = 0$ ، $y = 0$ پر منبع لکیر)۔ مستقل c کو منبع کا زور یا اخراج کہا جاتا ہے۔ اگر c منفی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $z = 0$ پر بہاو کا گڑھا[21] پایا جاتا ہے۔ اب بہاو رداسی اندر رخ کو ہے اور مخلوط مخفی قوہ کے نقطہ نادر $z = 0$ پر بہاو غائب ہو جاتی ہے۔

سوال 20.21: **(لکیر گرداب)** دکھائیں کہ $F(z) = -\frac{iK}{2\pi} \ln z$ جہاں K حقیقی ہے، مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ بہاو کو ظاہر کرتی ہے (شکل 20.8-ب)۔ نقطہ $z = 0$ **گرداب**[22] ہے۔ گرداب کے گرد ہر ایک چکر لگانے سے مخفی قوہ بڑھ جاتی ہے جہاں ہر مرتبہ بڑھنے کی مقدار K ہو گی۔

---
[20] source
[21] sink
[22] vortex



(ب) چادر کے گرد بہاو

(ا) شگاف سے بہاو

شکل 20.9: اشکال برائے سوال 20.26 اور سوال 20.27

سوال 20.22: نقطہ $z = -a$ پر اکائی زور کی منبع کے بہاو کا مخلوط مخفی قوہ تلاش کریں۔

سوال 20.23: دکھائیں کہ دو بہاو کے سمتی رفتار سمتیات کا سمتی مجموعہ حاصل کرنے سے ایسا بہاو حاصل ہو گا جس کا مخلوط مخفی قوہ ان بہاو کے مخلوط مخفی قوہ کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

سوال 20.24: سوال 20.22 اور سوال 20.23 کے مخفی قوہ جمع کرتے ہوئے بہاو سمت کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 20.25: $F(z) = \frac{1}{z}$ کے بہاو کی بہاو سمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ چھوٹے $|a|$ کے لئے سوال 20.24 کے بہاو سمت موجودہ بہاو سمت کی طرح ہیں۔

سوال 20.26: دکھائیں کہ $F(z) = \cosh^{-1} z$ کے بہاو سمت، ہم ماسکہ قطع زائد ہوں گی جن کے ماسکہ $z = \mp 1$ ہیں اور بہاو کو شگاف سے گزرتی بہاو تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 20.9-الف)۔

سوال 20.27: دکھائیں کہ $F(z) = \cos^{-1} z$ کو ترخیم یا چادر ($z = -1$ تا $z = 1$ سیدھی قطع) کے گرد بہاو کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ دکھائیں کہ بہاو سمت ہم ماسکہ ترخیم ہیں جن کے ماسکہ $z = \mp 1$ پر ہیں (شکل 20.9-ب)۔

سوال 20.28: **(بیلن کے گرد بہاو)** $F(z) = z + z^{-1}$ پر غور کریں۔ $z = re^{i\theta}$ لیتے ہوئے دکھائیں کہ سمتی قوہ $(r - r^{-1}) \sin\theta =$ مستقل ہیں اور سمتی قوہ $(r - r^{-1}) \sin\theta = 0$ اکائی دائرہ اور x محور پر مشتمل ہے، اور بڑے $|z|$ کے لئے بہاو تقریباً یکساں اور متوازی ہے جس کو اکائی رداس کے بیلن کے گرد بہاو تصور کیا جا سکتا ہے۔ بہاو کا نقطہ ٹھہراو تلاش کریں (جہاں سمتی رفتار صفر ہو گی)۔

جواب: نقطہ $z=-1$ اور $z=1$ پر $V=1-\bar{z}^{-1}=0$ ہو گا۔

سوال 20.29: **(دائری بہاو کے ساتھ بیلن کے گرد بہاو)** سوال 20.21 اور سوال 20.28 کے مخفی قوہ جمع کرتے ہوئے دکھائیں کہ بیلن کی سطح $|z|=1$ سمت بہاو ہے۔سمتی رفتار تلاش کریں اور دکھائیں کہ نقطہ ٹھراو

$$z=\frac{iK}{4\pi}\sqrt{-\frac{K^2}{16\pi^2}+1}$$

ہیں جو $K=0$ کی صورت میں $z=\mp 1$ دیتی ہے۔ K بڑھانے سے دونوں نقطہ ٹھراو اکائی دائرہ پر اوپر رخ منتقل ہوں گے حتیٰ کہ $K=4\pi$ پر دونوں $z=i$ پر آن ملیں گے۔اگر $K>4\pi$ کیا جائے تب ایک نقطہ ٹھراو خیالی محور پر بیلن کے باہر اور دوسرا خیالی محور پر بیلن کے اندر منتقل ہوتا ہے۔بیلن کے اندر نقطہ ٹھراو کی کوئی طبعی معنی نہیں ہے۔

20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص

اس حصہ میں ہارمونی تفاعل کی عمومی خواص کو مخلوط تحلیلی تفاعل کے نتائج سے حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔

فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں تفاعل $u(x,y)$ ہارمونی ہے۔تب ہم کوشی ریمان کلیات کی مدد سے $u(x,y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x,y)$ تلاش کیا جا سکتا ہے۔یوں $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی ہو گا (حصہ 14.5 دیکھیں اور صفحہ 1121 پر حاشیہ دیکھیں)۔ یہ وہ تعلق ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم تحلیلی تفاعل کے خواص سے ہارمونی تفاعل کے خواص اخذ کر سکتے ہیں۔چونکہ تحلیلی تفاعل کے ہر درجہ کے تفرق پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 20.1: **(جزوی تفرق)**
ایسا تفاعل $u(x,y)$ جو سادہ تعلق دائرہ کار D میں ہارمونی ہو کا D میں ہر درجہ کا جزوی تفرق پایا جائے گا۔

مزید اگر سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب کوشی کلیہ تکمل (مساوات 16.31) کے تحت

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \tag{20.17}$$

ہو گا جہاں D میں C ایک سادہ بند راہ ہے اور نقطہ z_0 اس راہ کے اندر پایا جاتا ہے۔ C کو دائرہ

$$z = z_0 + re^{i\phi}$$

منتخب کرتے ہوئے جس کا مرکز z_0 اور رداس r ہے، D میں

$$z - z_0 = re^{i\phi}, \quad \mathrm{d}z = ire^{i\phi} \, \mathrm{d}\phi$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں مساوات 20.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

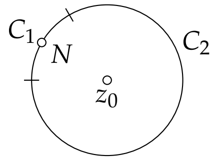
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\phi}) \, \mathrm{d}\phi \tag{20.18}$$

دایاں ہاتھ دائرہ C پر f کی اوسط قیمت ہے (یعنی تکمل کی قیمت تقسیم راہ کی لمبائی)۔اس سے درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 20.2: **تحلیلی تفاعل کی اوسط قیمت**
فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں f تحلیلی ہے۔تب D میں نقطہ z_0 پر $f(z)$ کی قیمت D میں ایسے کسی بھی دائرے پر $f(z)$ کی اوسط قیمت ہو گی جس کا مرکز z_0 ہو۔

تحلیلی تفاعل کی ایک اہم خاصیت درج ذیل ہے۔

مسئلہ 20.3: **تحلیلی تفاعل کی زیادہ سے زیادہ معیار کا مسئلہ**
فرض کریں کہ D محدود خطہ ہے اور D میں اور D کی سرحد پر $f(z)$ تحلیلی اور غیر مستقل تفاعل ہے۔تب $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کے اندر کسی بھی نقطہ پر نہیں ہو گی۔نتیجتاً $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کی سرحد پر ہو گی۔اگر D میں $f(z) \neq 0$ تب یہی کچھ $|f(z)|$ کی کم سے کم قیمت کے لئے بھی درست ہو گا۔



شکل 20.10: ثبوت مسئلہ 20.3

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ D کے اندر نقطہ z_0 پر $\lvert f(z)\rvert$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ہم دیکھیں گے کہ اس مفروضہ سے تضاد پیدا ہوتا ہے۔فرض کریں کہ وہ زیادہ سے زیادہ قیمت $M = \lvert f(z_0)\rvert$ ہے۔چونکہ $f(z)$ غیر مستقل ہے لہٰذا $\lvert f(z)\rvert$ مستقل نہیں ہو گا۔نتیجتاً ہم ایسا دائرہ C جس کا اندرون D کے اندر ہو تلاش کر سکتے ہیں جس کا مرکز z_0 اور رداس r ہو، اور C پر کسی نقطہ N پر $\lvert f(z)\rvert$ کی قیمت M سے کم ہو۔چونکہ $\lvert f(z)\rvert$ استمراری ہے لہٰذا C پر ایسا قوس C_1، جس پر N پایا جاتا ہو، پایا جائے گا جس پر $f(z)$ کی قیمت M سے کم ہو گی مثلاً C_1 پر تمام z کے لئے $\lvert f(z)\rvert \le M-\epsilon\,(\epsilon > 0)$ ہو گا (شکل 20.10)۔اگر C_1 کی لمبائی l_1 ہو تب متمم قوس C_2 کی لمبائی $2\pi r - l_1$ ہو گی۔ مساوات 16.16 کا اطلاق مساوات 20.17 پر کرتے ہوئے جہاں $\lvert z-z_0\rvert = r$ ہے درج ذیل

$$\begin{aligned}
M = \lvert f(z_0)\rvert &\le \frac{1}{2\pi}\left\lvert \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right\rvert + \frac{1}{2\pi}\left\lvert \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right\rvert \\
&\le \frac{1}{2\pi}(M-\epsilon)\frac{1}{r}l_1 + \frac{1}{2\pi}M\frac{1}{r}(2\pi r - l_1) = M - \frac{\epsilon l_1}{2\pi r} < M
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کے تحت $M < M$ ہے جو تضاد ہے۔یوں ہمارا مفروضہ درست نہیں تھا لہٰذا مسئلہ کا پہلا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔

اب مسئلے کا آخری فقرہ ثابت کرتے ہیں۔اگر D میں $f(z) \neq 0$ ہو تب D میں $\frac{1}{f(z)}$ تحلیلی ہو گا۔جو فقرہ ہم ثابت کر چکے ہیں اس کے تحت D کی سرحد پر $\frac{1}{\lvert f(z)\rvert}$ پایا جائے گا۔اب $\frac{1}{\lvert f(z)\rvert}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے مراد $\lvert f(z)\rvert$ کی کم سے کم قیمت ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ان مسئلوں سے اب ہم ہارمونی تفاعل کے مطابقتی نتائج حاصل کرتے ہیں۔

مسئلہ 20.4: (ہارمونی تفاعل)
فرض کریں D ایک سادہ تعلق محدود دائرہ کار ہے جس کی سرحدی منحنی C ہے۔ اگر تفاعل $u(x,y)$ ایسے دائرہ کار میں ہارمونی ہو جس میں D اور C پائے جاتے ہوں تب $u(x,y)$ کے درج ذیل خواص ہوں گے۔
(الف) D میں نقطہ (x_0,y_0) پر $u(x,y)$ کی قیمت، D میں ایسے کسی بھی دائرہ پر $u(x,y)$ کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو۔
(ب) D میں نقطہ (x_0,y_0) پر $u(x,y)$ کی قیمت، D میں ایسے کسی بھی دائری قرص پر $u(x,y)$ کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو۔
(پ) **اصول زیادہ سے زیادہ قیمت** اگر $u(x,y)$ غیر مستقل ہو تب D میں $u(x,y)$ کی نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی کوئی کم سے کم قیمت پائی جائے گی۔ نتیجتاً $u(x,y)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت D کی سرحد پر پائی جائیں گی۔
(ت) اگر C پر $u(x,y)$ مستقل ہو تب $u(x,y)$ مستقل ہو گا۔
(ٹ) اگر D میں اور C پر $h(x,y)$ ہارمونی ہو اور اگر C پر $h(x,y)=u(x,y)$ ہو تب پورے D میں $h(x,y)=u(x,y)$ ہو گا۔

ثبوت: مساوات 20.18 کے دونوں اطراف حقیقی جزو لے کر

$$u(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)_{\text{حقیقی}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\phi,y_0+r\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

پہلا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔ ہم درج بالا کے دونوں اطراف کو r سے ضرب دے کر، r کے ساتھ 0 تا r_0 تکمل حاصل کرتے ہیں جہاں D میں دائری قرص جس کا مرکز (x_0,y_0) ہے کا رداس r_0 ہے۔ یوں بایاں ہاتھ $\frac{1}{2}r_0^2u(x_0,y_0)$ کے برابر حاصل ہو گا۔ اس طرح

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\phi,y_0+r\sin\phi)r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$$

حاصل ہوتا ہے جو دوسرے فقرے کا ثبوت ہے۔

اب تیسرا فقرہ ثابت کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ D میں $u(x,y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x,y)$ ہے۔ تب D میں $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی ہو گا اور D میں

$$F(z)=e^{f(z)}$$

بھی ہارمونی ہو گا۔اس کی حقیقی قیمت

$$\left|F(z)\right| = e^{f(z)_{\text{حقیقی}}} = e^{u(x,y)}$$

ہو گی۔مسئلہ 20.3 کے تحت، $\left|F(z)\right|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کے اندر نہیں پائی جائے گی۔چونکہ e^u حقیقی متغیرہ u کا یک سر بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا فقرہ-پ میں u کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی بات اخذ ہوتی ہے جس میں u کی جگہ $-u$ استعمال کرتے ہوئے u کی کم سے کم قیمت کی بات بھی ثابت ہوتی ہے۔

اگر u مستقل ہو مثلاً $u = k$ تب فقرہ-پ کے تحت u کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت برابر ہوں گے جس سے فقرہ-ت اخذ ہوتا ہے۔

اگر C پر اور D میں u اور h ہارمونی ہوں تب C پر اور D میں $h - u$ بھی ہارمونی ہو گا لہٰذا مفروضہ کے تحت C پر ہر جگہ $h - u = 0$ ہو گا۔یوں فقرہ-ت کے تحت پورے D میں $h - u = 0$ ہو گا جس سے فقرہ-ٹ اخذ ہوتا ہے۔اس طرح مسئلہ کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 20.4 کا آخری فقرہ انتہائی اہم ہے۔اس کے تحت D کی سرحد پر ہارمونی تفاعل کی قیمت سے D کے اندر ہارمونی تفاعل یکتا طور پر تعین ہوتا ہے۔عموماً D میں $u(x,y)$ کا ہارمونی ہونا اور D کی سرحد پر $u(x,y)$ کا استمراری[23] ہونا ضروری ہو گا۔ایسی صورت میں بھی مسئلہ 20.4 کا فقرہ-پ کارآمد ہو گا۔دی گئی سرحدی قیمتوں سے $u(x,y)$ کی قیمتیں تعین کرنے کو دو بعدی متغیرات کی مساوات لاپلاس کا مسئلہ ڈرشلے[24] کہتے ہیں۔مسئلہ 20.4 سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 20.5: **مسئلہ ڈرشلے**
اگر دیے گئے خطہ اور دیے گئے سرحد پر دو متغیرات کی مساوات لاپلاس کے مسئلہ ڈرشلے کا حل موجود ہو تب یہ حل یکتا ہو گا۔

---

[23] یعنی اگر D کی سرحد پر (x_0, y_0) اور D کے اندر (x,y) ہو تب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u(x_0, y_0)$ ہو۔

[24] Dirichlet problem

سوالات

سوال 20.30: تفاعل $f(z) = (z+2)^2, z_0 = 1$ کے لئے مسئلہ 20.2 کی تصدیق کریں۔دائرے کا رداس 1 اور مرکز z_0 ہے۔

سوال 20.31: تفاعل $f(z) = z^2$ اور مستطیل $-2 < x < 2, -1 < y < 1$ کے لئے مسئلہ 20.3 کی تصدیق کریں۔

سوال 20.32: تفاعل $f(z) = e^z$ اور کسی بھی محدود دائرہ کار میں مسئلہ 20.3 کی تصدیق کریں۔اشارہ۔ $|e^z| = e^x$ یک سر ہے۔

سوال 20.33: تفاعل $f(x) = \cos x$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 0$ پر پائے جاتی ہے۔مسئلہ 20.3 کے تحت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مقیاسی سطح $f(z) = \cos z$ (حصہ 14.9) کی زیادہ سے زیادہ قیمت $z = 0$ پر نہیں ہو سکتی ہے۔

سوال 20.34: سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ غیر مستقل اور تحلیلی تفاعل ہے اور بند منحنی $|f(z)| = c$ دائرہ کار D میں پائی جاتی ہے جہاں c مستقل ہے۔دکھائیں کہ $f(z) = 0$ اس دائرے کے اندر کسی نقطہ پر ہو گا۔مثال پیش کریں۔

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

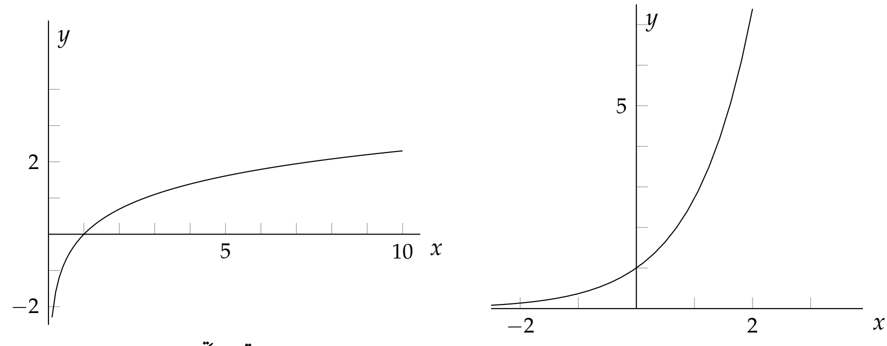
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

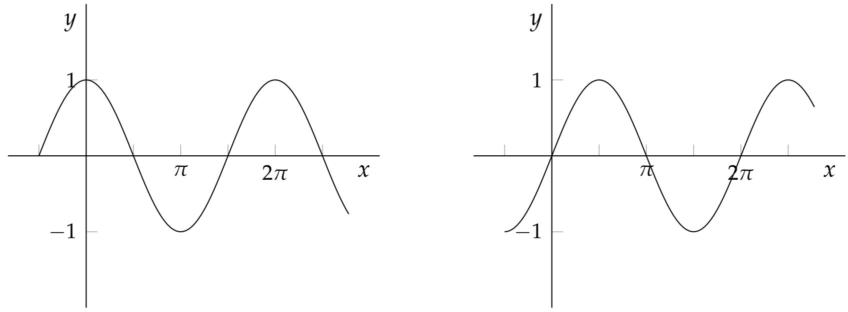
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$

(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\, 17'\, 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{(ب.5)}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

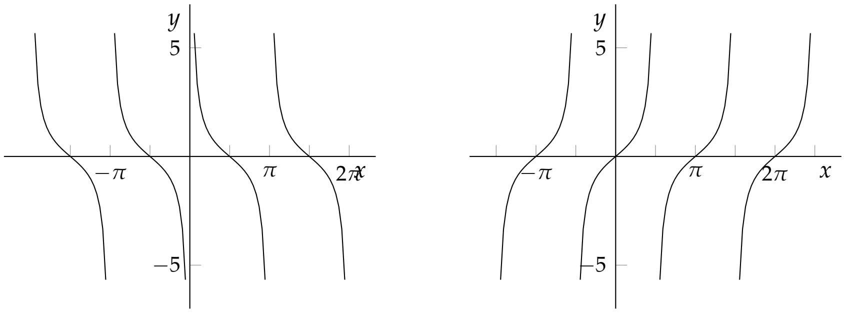
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

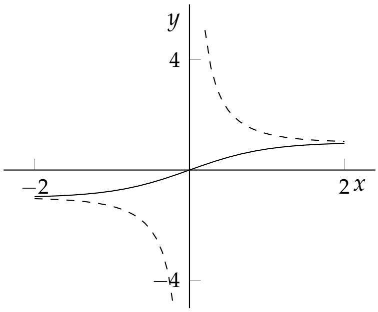
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned} \tag{ب.20}$$

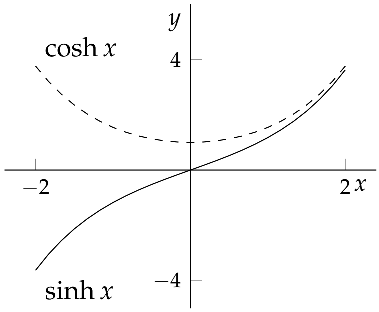
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{ب.24}$$

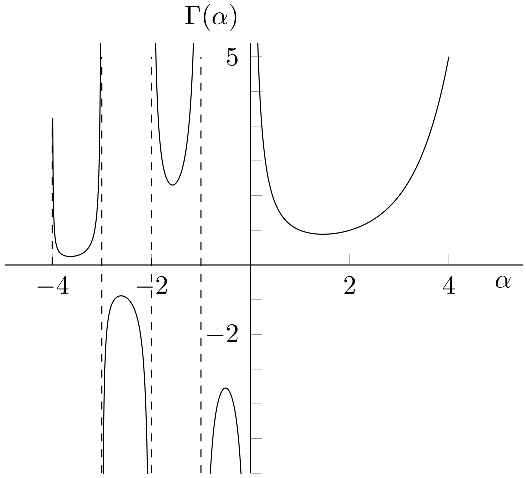
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

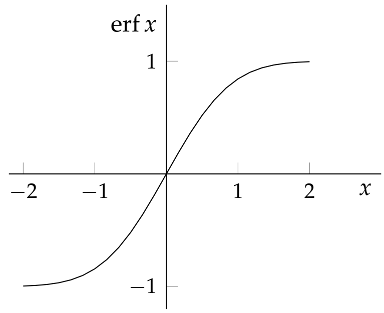
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

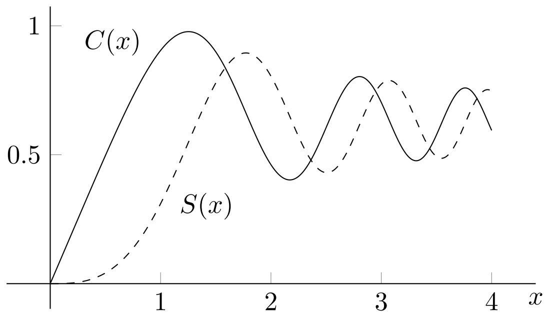
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکمل تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{C}(x)=\int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{S}(x)=\int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

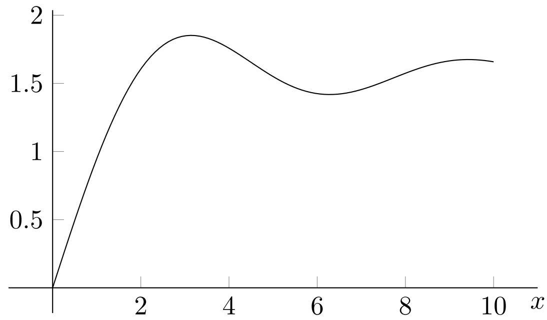
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\operatorname{Si}\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\operatorname{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si}(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$