

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کشی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔
15	2 سوالات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

عموماً طبعی تعلقات کو تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح عموماً انجینئرنگ مسائل تفرقی مساوات کی صورت میں پیش آتے ہیں۔ اسی لئے اس کتاب کی ابتدا تفرقی مساوات اور ان کے حل سے کی جاتی ہے۔

سادہ تفرقی مساوات¹ سے مراد ایسی تفرقی مساوات ہے جس میں ایک عدد آزاد متغیرہ پایا جاتا ہو۔ اس کے برعکس جزوی تفرقی مساوات² ایک سے زائد آزاد متغیرات پر منحصر ہوتی ہے۔ جزوی تفرقی مساوات کا حل نسبتاً مشکل ثابت ہوتا ہے۔

کسی بھی حقیقی صورت حال یا مشاہدے کی نقشہ کشی کرتے ہوئے اس کا ریاضی نمونہ³ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سائنس کے مختلف میدان مثلاً انجینئرنگ، طبیعیات، علم کیمیا، حیاتیات، کمپیوٹر وغیرہ میں درپیش مسائل کی صحیح تفرقی مساوات کا حصول اور ان کے حل پر تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

باب-20 میں سادہ تفرقی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر پیش کیا جائے گا۔ یہ باب بقایا کتاب سے مکمل طور پر علیحدہ رکھا گیا ہے۔ یوں کتاب کے پہلے دو باب کے بعد باب-20 پڑھا جاسکتا ہے۔

پہلے باب کا آغاز درجہ اول کے سادہ تفرقی مساوات کے حصول، مساوات کے حل اور حل کی تشریح سے کیا جاتا ہے۔ پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات میں صرف ایک عدد نا معلوم تفاعل کا ایک درجی تفرق پایا جاتا ہے۔ ایسی

¹ ordinary differential equation
² partial differential equation
³ mathematical model



شکل 1.1: نمونہ کشی، حل اور تشریح۔

مساوات میں ایک سے زیادہ درجے کا تفرق نہیں پایا جاتا۔ نامعلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ باب کے اختتام میں تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت⁴ اور یکتائی⁵ پر غور کیا جائے گا۔

تفرقی مساوات سمجھنے کی خاطر ضروری ہے کہ انہیں کاغذ اور قلم سے حل کیا جائے البتہ کمپیوٹر کی مدد سے آپ حاصل جواب کی درستگی دیکھنا چاہیں تو اس میں کوئی حرج نہیں ہے۔

1.1 نمونہ کشی

شکل 1.1 کو دیکھیے۔ انجینئرنگ مسئلے کا حل تلاش کرنے میں پہلا قدم مسئلے کو مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔ مسئلے کو مختلف متغیرات اور تفاعل کے تعلقات کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کو ریاضی نمونہ⁶ کہا جاتا ہے۔ ریاضی نمونے کا حصول، نمونے کا ریاضیاتی حل اور حل کی تشریح کے عمل کو نمونہ کشی⁷ کہا جاتا ہے۔ نمونہ کشی کی صلاحیت تجربے سے حاصل ہوتی ہے۔ کسی بھی نمونہ کی حل میں کمپیوٹر مدد کر سکتا ہے البتہ نمونہ کشی میں کمپیوٹر عموماً کوئی مدد فراہم نہیں کر پاتا۔

عموماً طبعی مقدار مثلاً اسراع اور رفتار در حقیقت میں تفرق کو ظاہر کرتے ہیں لہذا بیشتر ریاضی نمونے مختلف متغیرات اور تفاعل کے تفرق پر مشتمل ہوتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات⁸ کہا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو اس تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہو۔ تفرقی مساوات کا حل جانتے ہوئے مساوات میں موجود متغیرات اور تفاعل کے ترسیم کھینچے جاسکتا ہے اور ان پر غور کیا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات پر غور سے پہلے چند بنیادی تصورات تشکیل دیتے ہیں جو اس باب میں استعمال کی جائیں گی۔

existence⁴
 uniqueness⁵
 mathematical model⁶
 modeling⁷
 differential equation⁸

سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعل کی ایک درجی یا بلند درجی تفرقی پائے جاتے ہوں۔ نامعلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں نامعلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیر x (یا t) کے تفاعل بھی پائے جاسکتے ہیں۔ درج ذیل چند سادہ تفرقی مساوات ہیں

$$(1.1) \quad y' = \sin x$$

$$(1.2) \quad y' + \frac{6}{7}y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$(1.3) \quad y''' + 2y' - 11y'^2 = 0$$

جہاں $y' = \frac{dy}{dx}$ ، $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ، وغیرہ ہیں۔

دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل کے تفرقی پر مشتمل مساوات کو جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ ان کا حل سادہ تفرقی مساوات سے زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔ جزوی تفرقی مساوات پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ غیر تابع متغیرات x اور y پر منحصر تابع تفاعل $u(x, y)$ کی جزوی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے۔

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

n درجی تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعل y کی بلند تر تفرقی n درجے کی ہو۔ یوں مساوات 1.1 اول درجے کی مساوات ہے، مساوات 1.2 دوسرے درجے جبکہ مساوات 1.3 تیسرے درجے کی مساوات ہے۔

اس باب میں پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ ایسی مساوات میں اکائی درجہ تفرقی y' کے علاوہ نامعلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیر کا کوئی بھی تفاعل پایا جاسکتا ہے۔ ایک درجے کی سادہ تفرقی مساوات کو

$$(1.5) \quad F(y, y', x) = 0$$

یا

$$(1.6) \quad y' = f(x, y)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 1.5 خفی⁹ صورت کہلاتی ہے جبکہ مساوات 1.6 صریح¹⁰ صورت کہلاتی ہے۔ یوں خفی مساوات $x^2y' - 2y^3 = 0$ کی صریح صورت $y' = 2\frac{y^3}{x^2}$ ہے۔

implicit⁹
explicit¹⁰

حل کا تصور

ایک تفاعل

$$(1.7) \quad y = h(x)$$

جو کھلے وقفہ ¹¹ $a \leq x \leq b$ پر معین ¹² ہو اور پورے وقفے پر اس کا تفرق پایا جاتا ہو، اس صورت مساوات 1.5 کا حل ہو گا جب $h(x)$ اور $h'(x)$ کو مساوات 1.5 میں بالترتیب $y(x)$ اور $y'(x)$ کی جگہ پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر ہوں۔ تفاعل $h(x)$ کا خط منحنی حل ¹³ کہلائے گا۔

یہاں کھلے وقفے سے مراد ایسا وقفہ ہے جس کے آخری سر a اور b وقفے کا حصہ نہ ہوں۔ کھلا وقفہ لامتناہی ہو سکتا ہے مثلاً $-\infty \leq x \leq b$ یا $a \leq x \leq \infty$ اور یا $-\infty \leq x \leq \infty$ یعنی حقیقی محور۔

مثال 1.1: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty \leq x \leq \infty$ پر تفاعل $y = cx$ تفرقی مساوات $y = y'x$ کا حل ہے جہاں c ایک اختیاری مستقل ¹⁴ ہے۔

حل: پورے وقفے پر $y = cx$ معین ہے۔ اسی طرح اس کا تفرق $y' = c$ بھی پورے وقفے پر پایا جاتا ہے۔ ان بنیادی شرائط پر پورا اترنے کے بعد تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$y = cx$$

$$(cx) = (c)x$$

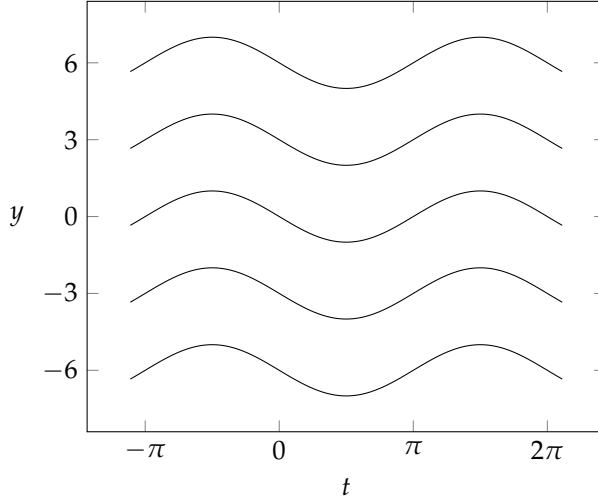
مساوات کے دونوں اطراف برابر ہیں لہذا $y = cx$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

¹¹ open interval

¹² defined

¹³ solution curve

¹⁴ arbitrary constant



شکل 1.2: مثال 1.2 کے خط۔

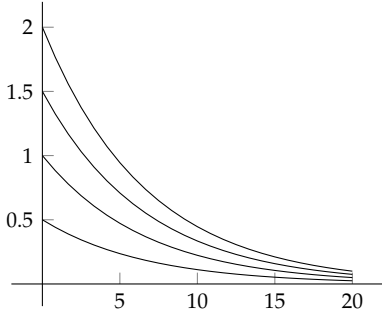
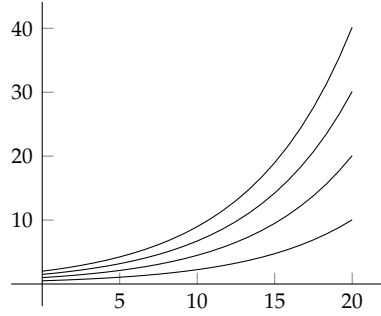
مثال 1.2: حل بذریعہ مکمل: مساوات $y' = \cos t$ کا حل بذریعہ مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی $y = \int \cos t$ جس سے $y = c - \sin t$ حاصل ہوتا ہے جو نسل حل¹⁵ ہے۔ حاصل حل میں c اختیاری مستقل ہے۔ اختیاری مستقل کی ہر انفرادی قیمت تفرقی مساوات کا ایک منفرد حل دیتا ہے۔ یوں $c = 3.24$ پر کرتے ہوئے $y = 3.24 - \sin t$ حل حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.2 میں $c = -6, -3, 0, 3, 6$ سے حاصل حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 1.3: قوت نمائی تعامل $y = ce^{kt}$ کے تفرق سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$y' = \frac{dy}{dt} = kce^{kt} = ky$$

یوں $y' = ky$ تفرقی مساوات کا حل $y = ce^{kt}$ ہے۔ مثبت k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی اضافے کی نمونہ کشی کرتی ہے۔ جرسوموں کی تعداد اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے۔ وسیع رقبے کے ملک میں کم انسانی

¹⁵solution family

(الف) قوت نمائی گھٹاؤ۔ مساوات $y' = -0.15y$ کا حل۔(الف) قوت نمائی اضافہ۔ مساوات $y' = 0.15y$ کا حل۔

شکل 1.3: قوت نمائی تفرقی مساوات کی نسل حل۔

آبادی اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے جہاں اس کو قانون مالٹھس¹⁶ کہا¹⁷ جاتا ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = 0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

منفی k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی گھٹاؤ مثلاً تابکاری تحلیل¹⁸ کو ظاہر کرتی ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = -0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 1.5 میں تابکاری تحلیل کے مسئلے پر مزید غور کیا گیا ہے۔

درج بالا مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ درج اول سادہ تفرقی مساوات کے حل میں ایک عدد اختیاری مستقل c پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کا ایسا حل جس میں اختیاری مستقل c پایا جاتا ہو عمومی حل¹⁹ کہلاتا ہے۔

(بعض اوقات c مکمل طور اختیاری مستقل نہیں ہوتا بلکہ اس کی قیمت کو کسی وقفے پر محدود کرنا لازم ہوتا ہے۔)

ہم یکتا²⁰ عمومی حل حاصل کرنے کی ترکیب سیکھیں گے۔

¹⁶ Malthus' law

¹⁷ یہ قانون انگریزی ماہر معاشیات ٹامس روبرٹ مالتھس (1766-1834) کے نام ہے۔

¹⁸ radioactive decay

¹⁹ general solution

²⁰ unique

جیومیٹریائی طور پر سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل لامتناہی حل کے خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جہاں c کی ہر انفرادی قیمت منفرد خط دیتی ہے۔ عمومی حل میں c کی کوئی مخصوص قیمت مثلاً $c = -3.501$ یا $c = 0$ پر کرنے سے ہمیں جبری حل²¹ ملتا ہے۔ جبری حل میں کوئی اختیاری مستقل نہیں پایا جاتا۔

عام طور عمومی حل قابل حصول ہوتا ہے جس میں c کی مخصوص قیمت پر کرتے ہوئے درکار جبری حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بعض اوقات تفرقی مساوات ایسا حل بھی رکھتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ ایسے حل کو نادر²² حل کہتے ہیں۔ صفحہ 12 پر سوال 1.16 میں نادر حل کی مثال دی گئی ہے۔

ابتدائی قیمت سوال

عام طور پر عمومی حل میں ابتدائی قیمتیں²³ x_0 اور y_0 پر کرنے سے جبری حل حاصل کیا جاتا ہے جہاں $y(x_0) = y_0$ ہے۔ جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ خط حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہے۔ سادہ تفرقی مساوات اور مساوات کے ابتدائی قیمتوں کو ابتدائی قیمت سوال²⁴ کہا جاتا ہے۔ یوں صریح سادہ تفرقی مساوات کی صورت میں ابتدائی قیمت سوال درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(1.8) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

مثال 1.4: ابتدائی قیمت سوال: درج ذیل ابتدائی قیمت سوال کو حل کریں۔

$$y' = 5y, \quad y(0) = 3.2$$

حل: تفرقی مساوات کو $\frac{dy}{y} = 5 dx$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمیل لینے سے $y = ce^{5x}$ عمومی حل حاصل ہوتا ہے جس میں $x = 0$ پر $y = 3.2$ پر کرنے سے $y(0) = ce^0 = 3.2$ لکھا جائے گا جس سے $c = 3.2$ ملتا ہے۔ یوں ابتدائی قیمت سوال کا جبری حل $y = 3.2e^{5x}$ ہے۔

²¹ particular solution

²² singular solution

²³ initial values

²⁴ initial value problem

نمونہ کشی پر مزید بحث

نمونہ کشی کو مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے لہذا ایسا ہی کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے پہلی قدم پر مسئلے کو تفرقی مساوات کا جامہ پہنایا جائے گا۔ دوسری قدم پر تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کیا جائے گا۔ تیسرے قدم پر ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے جبری حل حاصل کیا جائے گا۔ آخر میں چوتھا قدم حاصل جواب کی تشریح ہوگی۔

مثال 1.5: تابکار مادے کی موجودہ کمیت 2 mg ہے۔ اس کی کمیت مستقبل میں دریافت کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ کسی بھی لمحے پر تابکاری تحلیل کی شرح اس لمحے پر موجود تابکار مادے کی کمیت کے راست تناسب ہے۔

• پہلا قدم: مسئلے کو مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔ کمیت کو y سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں کسی بھی لمحے پر تابکاری کی شرح سے مراد $y' = \frac{dy}{dt}$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہذا تجربے سے حاصل معلومات کو درج ذیل تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جائے گا جہاں تناسبی مستقل k مثبت قیمت ہے۔

$$(1.9) \quad \frac{dy}{dt} = -ky$$

مثال 1.3 میں آپ نے دیکھا کہ تفرقی مساوات میں منفی کی علامت سے تفرقی مساوات کا قوت نمائی گھٹتا ہوا حل حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہذا درج بالا مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی گئی ہے۔ تابکار اشیاء کے مستقل k کی قیمتیں تجربے سے حاصل کئے جاتے ہیں مثلاً ریڈیم $^{226}_{88}\text{Ra}$ کا $k = 1.4 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ ہے۔

ابتدائی کمیت 2 mg ہے۔ ابتدائی وقت کو $t = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی معلومات $y(0) = 2\text{ mg}$ لکھی جائے گی۔ (غیر تابع متغیر وقت t کی بجائے کچھ اور مثلاً x ہونے کی صورت میں بھی (x_0, y_0) یا $y(x_0) = y_0$ کو ابتدائی معلومات ہی کہا جاتا ہے۔ اسی طرح تابع متغیر y کی قیمت $t \neq 0$ پر معلوم

ہو سکتی ہے مثلاً $y(x_n) = y_n$ اور ایسی صورت میں (x_n, y_n) ابتدائی معلومات کہلاتی ہے۔ یوں دیے مسئلے سے درج ذیل ابتدائی قیمت سوال حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.10) \quad y' = -ky, \quad y(0) = 2mg$$

• دوسرا قدم: ابتدائی قیمت سوال کا عمومی حل درج ذیل ہے جہاں c اختیاری مستقل جبکہ k کی قیمت تابکار مادے پر منحصر ہے۔

$$(1.11) \quad y = c^{-kt}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $t = 0$ پر $y = 2mg$ ہے جس کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں درج ذیل جبری حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.12) \quad y = 2e^{-kt} \quad (k > 0)$$

جبری حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ حاصل حل درست ہے۔ اسی طرح جبری حل سے ابتدائی معلومات حاصل کریں۔

$$\frac{dy}{dt} = -kce^{-kt} = -ky$$

$$y(0) = 2e^{-0} = 2$$

• حاصل جبری حل کی تشریح: مساوات 1.12 کو شکل 1.4 میں دکھایا گیا ہے جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر یہ مساوات تابکار مادے کی درست کمیت دیتا ہے۔ لمحہ لامتناہی پر تابکار مادے کی کمیت $y(\infty) = 2e^{-k\infty} = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

سوالات 1.1 تا 1.8 کے جوابات بذریعہ مکمل حاصل کریں یا کسی تفاعل کی تفرق سے جواب حاصل کریں۔

$$\text{سوال 1.1: } y' + 3 \sin 2\pi x = 0$$

$$\text{جواب: } y = \frac{3}{2\pi} \cos 2\pi x + c$$



شکل 1.4: مثال 1.5 کی معنی-تائیدی تحلیل $y = 2e^{-kt}$ جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔

سوال 1.2: $y' + xe^{-x^2} = 0$

جواب: $y = \frac{e^{-x^2}}{2} + c$

سوال 1.3: $y' = 4e^{-x} \cos x$

جواب: $y = 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + c$

سوال 1.4: $y' = y$

جواب: $y = ce^x$

سوال 1.5: $y' = -y$

جواب: $y = ce^{-x}$

سوال 1.6: $y' = 2.2y$

جواب: $y = ce^{2.2x}$

سوال 1.7: $y' = 1.5 \sinh 3.2x$

جواب: $y = \frac{15}{32} \cosh 3.2x + c$

$$y'' = -y \quad \text{سوال 1.8:}$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \text{جواب:}$$

سوال 1.9 تا سوال 1.15 ابتدائی قیمت سوالات ہیں جن کے عمومی حل دیے گئے ہیں۔ انہیں تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہی عمومی جوابات ہیں۔ عمومی جواب سے جبری جواب حاصل کریں۔ جبری جواب کا خط کھینچیں۔

$$y' + 2y = 0.8, \quad y = ce^{-2x} + 0.4, \quad y(0) = 1.2 \quad \text{سوال 1.9:}$$

$$y = 0.8e^{-2x} + 0.4 \quad \text{جواب:}$$

$$y' + x + y = 0, \quad y = ce^{-x} - x + 1, \quad y(0) = \pi \quad \text{سوال 1.10:}$$

$$y = \pi e^{-x} - e^{-x} - x + 1 \quad \text{جواب:}$$

$$y' = 2x + e^x, \quad y = e^x + x^2 + c, \quad y(0) = 1 \quad \text{سوال 1.11:}$$

$$y = e^x + x^2 \quad \text{جواب:}$$

$$y' + 4xy = 0, \quad y = ce^{-2x^2}, \quad y(0) = 2 \quad \text{سوال 1.12:}$$

$$y = 2e^{-2x^2} \quad \text{جواب:}$$

$$yy' = 2x, \quad y^2 = 2x^2 + c, \quad y(1) = 6 \quad \text{سوال 1.13:}$$

$$y^2 = 2x^2 + 34 \quad \text{جواب:}$$

$$y' = y + y^2, \quad y = \frac{c}{e^{-x} - c}, \quad y(0) = 0.1 \quad \text{سوال 1.14:}$$

$$y = \frac{1}{e^{(-x+23.98)} - 1} \quad \text{جواب:}$$

$$y' \tan x = y - 4, \quad y = c \sin x + 4, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{سوال 1.15:}$$

$$y = 4 - 4 \sin x \quad \text{جواب:}$$

سوال 1.16: نادر حل: بعض اوقات سادہ تفرقی مساوات کا ایسا حل بھی پایا جاتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ ایسے حل کو نادر حل²⁶ کہا جاتا ہے۔ مساوات $y'' - xy' + y = 0$ کا عمومی حل $y = cx - c^2$ ہے جبکہ اس کا نادر حل $y = \frac{x^2}{4}$ ہے۔ ان حل کا تفرق لیتے ہوئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

سوال 1.17 تا سوال 1.21 نقشہ کشی کے سوالات ہیں۔

سوال 1.17: تابکار مادے کی نصف زندگی $t_{\frac{1}{2}}$ سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں تابکار مادے کی کمیت نصف ہو جاتی ہے۔ مثال 1.5 میں ریڈیم ^{286}Ra کی نصف زندگی دریافت کریں۔

جواب: تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0 e^{-kt}$ میں لمحہ $t = 0$ پر (ابتدائی) کمیت y_0 ہے جبکہ مستقبل میں لمحہ t پر کمیت y ہے۔ ہم وہ دورانیہ جاننا چاہتے ہیں جس میں کمیت نصف رہ جائے یعنی جب $y = \frac{y_0}{2}$ رہ جائے۔ تابکاری مساوات میں $y = \frac{y_0}{2}$ پر کرتے ہوئے $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kt}$ لکھا جائے گا جس سے $t_{\frac{1}{2}} = 4.95 \times 10^{10} \text{ s}$ یعنی 1569.6 سال حاصل ہوتا ہے۔ یوں ریڈیم کی مقدار 1569.6 سالوں میں نصف رہ جائے گی۔

سوال 1.18: ریڈیم ہم ^{224}Ra کی نصف زندگی تقریباً 3.6 دن ہے۔ دو گرام (2 g) ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک دن بعد کتنی رہ جائے گی۔ دو گرام ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک سال بعد کتنی رہ جائے گی۔

جوابات: 1.65 g ، $6 \times 10^{-31} \text{ g}$

سوال 1.19: ایک جہاز کی رفتار مستقل اسراع a سے مسلسل بڑھ رہی ہے۔ رفتار کی تبدیلی کی شرح $\frac{dv}{dt}$ کو اسراع کہتے ہیں۔ ان معلومات سے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے لمحہ t پر رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔ اگر $t = 0$ پر ابتدائی رفتار u ہو تب v کی مساوات کیا ہوگی؟

جوابات: $v = u + at$ ، $v = at + c$

سوال 1.20: رفتار سے مراد وقت کے ساتھ فاصلے کی تبدیلی کی شرح $\frac{dx}{dt}$ ہے۔ سوال 1.19 میں رفتار کی مساوات $v = u + at$ حاصل کی گئی جسے $\frac{dx}{dt}$ کے برابر پر کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی فاصلہ $x = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی قیمت سوال کو حل کرتے ہوئے x کی مساوات حاصل کریں۔

1.2. $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پور۔

$$x = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ جوابات:}$$

سوال 1.21: آواز سے کم رفتار پر پرواز کرنے والے جہاز کی کارگزاری ہوا کے دباؤ پر منحصر ہوتی ہے۔ ان کی کارگزاری $10\,500\text{ m}$ تا $12\,000\text{ m}$ کی اونچائی پر بہترین حاصل ہوتی ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ $10\,500\text{ m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباؤ دریافت کریں۔ طبعی معلومات: اونچائی کے ساتھ دباؤ میں تبدیلی کی شرح y' ہوا کے دباؤ y کے راست تناسب ہوتی ہے۔ تقریباً 5500 m کی اونچائی پر ہوا کا دباؤ سمندر کی سطح پر ہوا کے دباؤ y_0 کی نصف ہوتا ہے۔

جواب: $0.27y_0$ یعنی تقریباً ایک چوتھائی

$$1.2 \quad y' = f(x, y) \text{ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پور۔}$$

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

$$(1.13) \quad y' = f(x, y)$$

سادہ معنی رکھتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ y' سے مراد y کی ڈھلوان ہے۔ یوں مساوات 1.13 کا وہ حل جو نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہو اس کا اس نقطے پر ڈھلوان $y'(x_0)$ ہوگا کہ درج بالا مساوات کے تحت اس نقطے پر f کی قیمت کے برابر ہوگا۔

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 1.13 کو حل کرنے کے تریسی²⁸ یا اعدادی²⁹ طریقے دریافت کر سکتے ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے تریسی اور اعدادی طریقے اس لئے بھی اہم ہیں کہ کئی تفرقی مساوات کا کوئی تحلیلی³⁰ حل نہیں پایا جاتا جبکہ ہر قسم کے تفرقی مساوات کا تریسی اور اعدادی حل حاصل کرنا ممکن ہے۔

graphical²⁸
numerical²⁹
analytic³⁰

میدان کی سمت: تریسی طریقہ

ہم xy سطح پر جگہ جگہ مساوات 1.13 سے حاصل ڈھلوان کی چھوٹی لمبائی کی سیدھی لکیریں کھینچ سکتے ہیں۔ ہر نقطے پر ایسی لکیر اس نقطے پر میدان کی سمت دیتی ہے۔ اس میدان سمت³¹ یا میدان ڈھال³² میں تفرقی مساوات کا منحنی حل³³ کھینچا جاسکتا ہے۔

منحنی حل کو کھینچنے کی ترکیب کچھ یوں ہے۔ کسی بھی نقطے پر ڈھلوان کی سمت میں چھوٹی لکیر کھینچیں۔ اس لکیر کو آہستہ آہستہ یوں موڑیں کہ لکیر کے اختتامی نقطے پر لکیر کی ڈھلوان عین اس نقطے کی ڈھلوان برابر ہو۔ اسی طرح آگے بڑھتے رہیں۔ ڈھال میدان میں نقطے جتنے قریب قریب ہوں تفرقی مساوات کا منحنی حل اتنا درست ہو گا۔

شکل 1.5 میں

$$(1.14) \quad y' = x - y$$

کا ڈھال میدان دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چند منحنی حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

آئیں اب اعدادی طریقہ سیکھیں۔ سادہ ترین اعدادی طریقہ ترکیب یولر کہلاتا ہے۔ پہلے اسی پر بحث کرتے ہیں۔

یولر کی اعدادی ترکیب

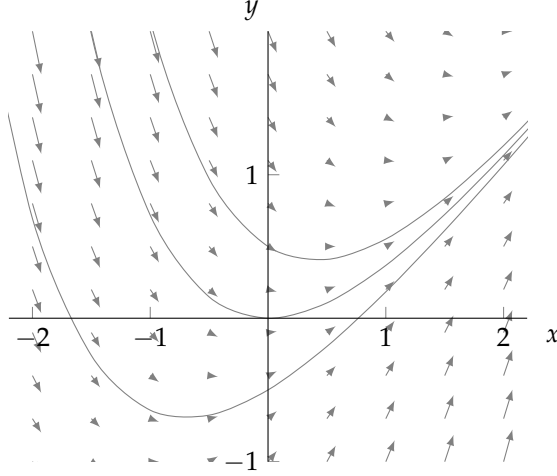
درجہ اول تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو استعمال کرتے ہوئے ترکیب یولر³⁴ ہم فاصلہ نقطوں x_0 ، $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، ... پر تقریباً درست قیمتیں دیتا ہے یعنی

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

direction field³¹
slope field³²
solution curve³³
Euler's method³⁴



شکل 1.5: درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = x - y$ کا ڈھال میدان اور منحنی حل۔

یا

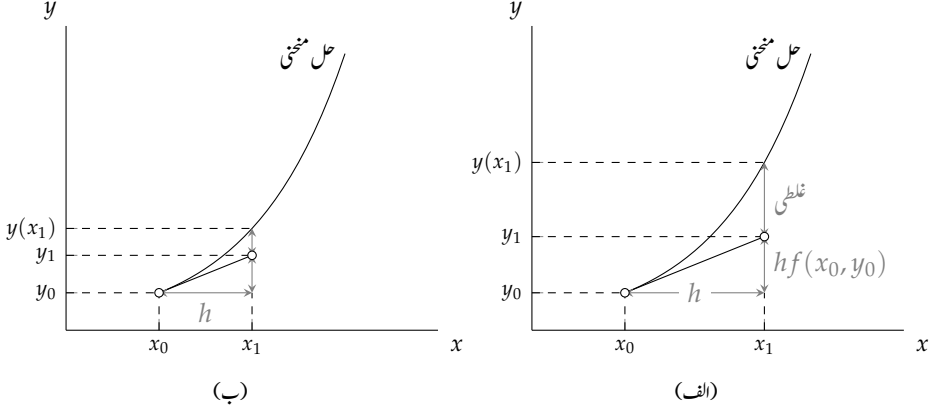
(1.15)

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

h کو قدم کہتے ہیں۔ شکل 1.6-الف میں y_1 کا حصول دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی نقطہ y_0 اور ترکیب یولر سے حاصل کردہ y_1 کو چھوٹے دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں h کی قیمت کم کرنے کا اثر دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹا قدم لینے سے اصل حل $y(x_1)$ اور یولر سے حاصل y_1 میں فرق (غلطی) کم ہو جاتا ہے۔ یوں قدم کو چھوٹا سے چھوٹا کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ درست حل دریافت کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 1.14 کا عمومی حل $y = ce^{-x} + x - 1$ ہے جس سے نقطہ $(0, 0)$ سے گزرتا حل $y = e^{-x} + x - 1$ ملتا ہے۔ اس طرح کے حل ہم جلد حاصل کر پائیں گے۔ اس وقت صرف اتنا ضروری ہے کہ آپ دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکیں کہ یہی درست حل ہے۔

جدول 1.1 میں قدم $h = 0.1$ لیتے ہوئے نقطہ $(0, 0)$ سے گزرتا ہوا مساوات 1.14 کا ترکیب یولر (مساوات 1.15) سے حل حاصل کیا گیا ہے۔ شکل 1.7-الف میں ترکیب یولر سے حاصل حل اور ریاضیاتی حل $y(x)$ کا موازنہ کیا گیا ہے۔ شکل-الف میں یولر حل سے حاصل نقطوں کو سیدھی لکیروں سے ملاتے ہوئے مسلسل حل حاصل کیا جاسکتا ہے جسے شکل-ب میں y_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y(x)$ بھی دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی



شکل 1.6: ترکیب یولر کا پہلا قدم۔

جدول 1.1: ترکیب یولر۔

نقطہ	$y(x)$	y	x	n
0	0	0	0	0
0.00484	0.00484	0.0	0.1	1
0.00873	0.01873	0.01	0.2	2
0.01182	0.04082	0.029	0.3	3
0.01422	0.07032	0.0561	0.4	4

ساتھ $h = 0.05$ استعمال کرتے ہوئے حاصل یولر حل کو بھی دکھایا گیا ہے جو $y(x)$ اور y_n کے بیچ میں پایا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ h کی قیمت کم کرنے سے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 1.22 تا سوال 1.28 کے میدان ڈھال کو قلم و کاغذ سے کھینچتے ہوئے دیے ابتدائی نقطوں سے گزرتے منحنی حل حاصل کریں۔ سوال 1.22:

$$y' = 1 + y^2, \quad \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$$

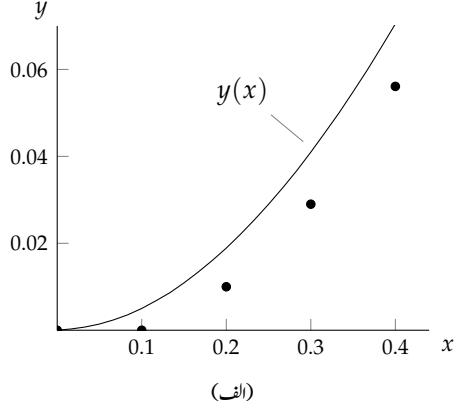
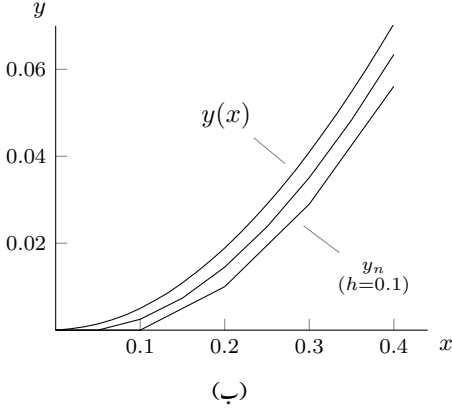
سوال 1.23:

$$y' = 1 - y^2, \quad (0, 0)$$

سوال 1.24:

$$yy' + 8x = 0, \quad (1, 1)$$

1.2. $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریکی مطلب - میدان کی سمت اور ترکیب پورے



شکل 1.7: ترکیب پورے سے حاصل حل کاربنائیاتی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

سوال 1.25:

$$y' = y - y^2, \quad (1, 0)$$

سوال 1.26:

$$y' = x + \frac{1}{y}, \quad (0, 1)$$

سوال 1.27:

$$y' = \sin^2 x, \quad (0, 1)$$

سوال 1.28:

$$y' = \sin^2 y, \quad (0, 0)$$

ڈھال میدان کے استعمال سے تفرقی مساوات کے تمام حل سامنے آ جاتے ہیں۔ بعض اوقات تفرقی مساوات کا تجزیاتی حل حاصل کرنا ممکن ہی نہیں ہوتا۔ درج ذیل دو سوالات میں ڈھال میدان سے اخذ حل اور دیے گئے تجزیاتی حل کا موازنہ کرتے ہوئے ڈھال میدان سے حاصل حل کی درستگی کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ سوال 1.29:

$$y' = \sin x, \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad y = -\cos x$$

سوال 1.30:

$$y' = 3x^2, \quad (0,0), \quad y = x^3$$

سوال 1.31: سوال 1.23، سوال 1.25 اور سوال 1.28 میں بے قابو متغیرہ x صریحاً ظاہر نہیں کیا گیا ہے۔ انہیں خود مختار³⁵ سادہ تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ خود مختار سادہ تفرقی مساوات کے ہم میلان³⁶ حل $f(x, y) = c$ کی شکل و صورت کیا ہوگی؟

جواب: چونکہ y' کا دارومدار x پر نہیں ہے لہذا x تبدیل کرنے سے y کا میلان تبدیل نہیں ہوگا اور $f(x, y) = c$ افقی محور کے متوازی خط ہوں گے۔

ایک جسم y محدود پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر نقطہ $y = 0$ سے جسم کا فاصلہ $y(t)$ ہے۔ سوالات 1.32 تا سوال 1.34 میں دئے شرائط کے مطابق جسم کی رفتار کی نمونہ کشی کریں۔ ریاضی نمونے کی ڈھال میدان بناتے ہوئے دیے گئے ابتدائی معلومات پر پورا اترتا منحنی خط کھینچیں۔

سوال 1.32: جسم کی رفتار ضرب فاصلہ $y(t)$ مستقل ہے جو 4 کے برابر ہے جبکہ $y(0) = 4$ کے برابر ہے۔

$$y = 8t + 16, \quad yy' = 4 \quad \text{جوابات:}$$

سوال 1.33: رفتار ضرب وقت فاصلے کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 1$ پر فاصلہ $y(1) = 2$ ہے۔

$$y = 2t, \quad y = y't \quad \text{جوابات:}$$

سوال 1.34: مربع رفتار منفی مربع فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔ ابتدائی فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔

$$\sinh^{-1} y = t + \sinh^{-1} 1, \quad y' = \sqrt{1 + y^2} \quad \text{جوابات:}$$

سوال 1.35: ہوائی جہاز سے چھلانگ لگا کر زمین تک خیریت سے بذریعہ چھتری اتر جا سکتا ہے۔ گرتے ہوئے شخص پر آپس میں الٹ، دو عدد قوتیں عمل کرتی ہیں۔ پہلی قوت زمینی کشش $F_1 = mg$ ہے جہاں m اس شخص

³⁵autonomous ordinary differential equations
³⁶isoclines

کی کمیت اور $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع ہے۔ یہ قوت انسان کو زمین کی طرف اسراع دیتی ہے۔ دوسری قوت چھتری پر ہوا کے رگڑ سے پیدا قوت ہے جو اس شخص کی رفتار کو بڑھنے سے روکتی ہے۔ چھتری پر ہوا کے رگڑ سے رفتار کے مربع کے متناسب قوت $F_2 = cv^2$ پیدا ہوتی ہے۔ نیوٹن کی مساوات حرکت کہتی ہے کہ کسی بھی جسم پر قوت، اس جسم کی کمیت ضرب اسراع کے برابر ہوتی ہے۔ چھتری سے زمین پر اترتے شخص کی نمونہ کشی کرتے ہوئے رفتار v کی سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ کمیت کو $m = 1$ اور مستقل کو $c = 1$ لیتے ہوئے ڈھال میدان کھینچیں۔ تصور کریں کہ چھتری اس لمحہ کھلتی ہے جب شخص کی رفتار $v = 15 \text{ ms}^{-1}$ ہو۔ ایسی صورت میں منحنی حل حاصل کریں۔ اس شخص کی اختتامی رفتار کیا ہوگی؟ کیا چھتری پر قوت رفتار کے راست متناسب ہونے کی صورت میں بھی چھتری کے ذریعہ ہوائی جہاز سے زمین تک خیریت سے چھلانگ لگائی جاسکتی ہے؟

جوابات: $mg - cv^2 = m \frac{dv}{dt}$ ؛ گرنے کی رفتار اس قیمت پر رہتی ہے جہاں نیچے جانب قوت mg اور چھتری کی رکاوٹی اوپر جانب قوت cv^2 برابر ہوں۔ ایسی صورت میں گرتے شخص کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی یعنی $y' = 0$ ہوتا ہے۔ تفرقی مساوات میں $y' = 0$ پر کرتے اور $m = c = 1$ لیتے ہوئے اختتامی رفتار $v(t = \infty) = 3.13 \text{ ms}^{-1}$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 1.36 تا سوال 1.39 کو ترکیب یولر سے حل کریں۔ کل پانچ ہم فاصلہ نقطوں پر حل حاصل کریں۔ ایک ہی کارتیسی محدود پر حاصل y_1 تا y_5 اور سوال میں دئے گئے حل $y(x)$ کا خط کھینچیں۔ سوال 1.36:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1, \quad y(x) = e^{-x}$$

$$y_5 = 0.59049, \quad y_4 = 0.6561, \quad y_3 = 0.729, \quad y_2 = 0.81, \quad y_1 = 0.9$$

سوال 1.37:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{-x}$$

$$y_5 = 0.95099, \quad y_4 = 0.9606, \quad y_3 = 0.9703, \quad y_2 = 0.9801, \quad y_1 = 0.99$$

سوال 1.38:

$$y' = 1 + 3x^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1, \quad y(x) = x^3 + x$$

$$y_5 = 2.59, \quad y_4 = 2.442, \quad y_3 = 2.315, \quad y_2 = 2.203, \quad y_1 = 2.1$$

سوال 1.39:

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{x^2-4}$$

جوابات: $y_1 = 1.04$ ، $y_2 = 1.0818$ ، $y_3 = 1.1255$ ، $y_4 = 1.1712$ ، $y_5 = 1.2190$

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات

