

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781 . . . . .	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
787 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
796 . . . . .	11.3	دوہرہ تکمیل
810 . . . . .	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820 . . . . .	11.5	سطحیں
825 . . . . .	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837 . . . . .	11.7	سطحی تکمیل
845 . . . . .	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850 . . . . .	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861 . . . . .	11.10	مسئلہ سٹوکس
866 . . . . .	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869 . . . . .	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883 . . . . .	12	فوریئر تسلسل
884 . . . . .	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889 . . . . .	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902 . . . . .	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907 . . . . .	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916 . . . . .	12.5	نصف حلقہ الساع
923 . . . . .	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931 . . . . .	12.7	جبری ارتعاش
936 . . . . .	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940 . . . . .	12.9	فوریئر تکمیل
953 . . . . .	13	جزوی تفرقی مساوات
953 . . . . .	13.1	بنیادی تصورات
958 . . . . .	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960 . . . . .	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973 . . . . .	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979 . . . . .	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987 . . . . .	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993 . . . . .	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996 . . . . .	13.8 مستطیل جھلی
1006 . . . . .	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010 . . . . .	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018 . . . . .	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024 . . . . .	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030 . . . . .	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037 . . . . .	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038 . . . . .	14.1 مخلوط اعداد
1047 . . . . .	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054 . . . . .	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059 . . . . .	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067 . . . . .	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078 . . . . .	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084 . . . . .	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089 . . . . .	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095 . . . . .	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103 . . . . .	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104 . . . . .	15.1 نقشہ کشی
1116 . . . . .	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125 . . . . .	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129 . . . . .	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138 . . . . .	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149 . . . . .	15.6 ریمان سطحیں
1157 . . . . .	16 مخلوط مکملات
1157 . . . . .	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168 . . . . .	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172 . . . . .	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184 . . . . .	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189 . . . . .	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194 . . . . .	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201 . . . . .	17 ترتیب اور تسلسل
1201 . . . . .	17.1 ترتیب
1208 . . . . .	17.2 تسلسل
1213 . . . . .	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220 . . . . .	17.4	یک سر حقیقی ترتیب۔ لیسنز آزمائش برائے حقیقی تسلسل
1225 . . . . .	17.5	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں
1236 . . . . .	17.6	تسلسل پر اعمال

1243 . . . . .	18	طابق تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوغوں تسلسل
1243 . . . . .	18.1	طابق تسلسل
1256 . . . . .	18.2	طابق تسلسل کی روپ میں تفاعل
1263 . . . . .	18.3	ٹیلر تسلسل
1268 . . . . .	18.4	بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل
1274 . . . . .	18.5	طابق تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب
1281 . . . . .	18.6	یکساں استرار
1293 . . . . .	18.7	لوغوں تسلسل
1303 . . . . .	18.8	لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور قدرت

1315 . . . . .	19	مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ
1315 . . . . .	19.1	بقیہ
1322 . . . . .	19.2	مسئلہ بقیہ
1327 . . . . .	19.3	حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ
1335 . . . . .	19.4	حقیقی مکمل کے دیگر اقسام

1343 . . . . .	20	مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ
1344 . . . . .	20.1	ساکن برقی سکون
1350 . . . . .	20.2	دو بعدی بہا و سیال
1359 . . . . .	20.3	ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص
1364 . . . . .	20.4	پوسوں کلیہ مکمل

1371 . . . . .	21	اعدادی تجزیہ
1372 . . . . .	21.1	خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر
1374 . . . . .	21.2	دہرانے سے مساوات کا حل
1385 . . . . .	21.3	متناہی فرق

1393 . . . . .	ا	اضافی ثبوت
1397 . . . . .	ب	منفید معلومات
1397 . . . . .	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 21

### اعدادی تجزیہ

انجینئری حساب کا نتیجہ آخر کار اعدادی ہوتا ہے لہذا انجینئری طالب علم کے لئے بنیادی اعدادی تراکیب<sup>1</sup> جاننا ضروری ہیں جن کی مدد سے دیے گئے مواد سے اعدادی جوابات اخذ کرنا ممکن ہو۔

بعض اوقات نظریہ سے حاصل کردہ جوابات عملاً قابل استعمال نہیں ہوتے ہیں، مثلاً ایک درجی خطی تفرقی مساوات کے حل کا تکمیلی کلیہ (حصہ 1.5)، خطی الجبرائی مساوات کے نظام کا مقطع کی مدد سے حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7)۔ کئی بار نظریہ صرف حل کی وجودیت کی یقین دہانی کرتا ہے لیکن اصل حل حاصل کرنے کے بارے میں کوئی مدد فراہم نہیں کرتا ہے۔

اعدادی تراکیب کی اہمیت کمپیوٹر کی ایجاد کی نظر ہے۔ ہم ان تراکیب کے نظریہ اور عملی استعمال پر غور کریں گے۔ تجزیہ خلل<sup>2</sup> پر بھی غور کیا جائے گا جو اعدادی تراکیب میں زیادہ اہمیت کے حامل ہے۔

---

numerical methods<sup>1</sup>  
error analysis<sup>2</sup>

## 21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر

چونکہ اعدادی تراکیب میں متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے متناہی تعداد کے چال کے بعد جواب حاصل کیا جاتا ہے لہذا یہ تراکیب متناہی چال<sup>3</sup> ہیں جو اصل (نامعلوم) بالکل درست حل کا تقریب<sup>4</sup> پیش کرتے ہیں ماسوائے ان چند صورتوں میں جب اصل جواب کافی سادہ ناطق عدد ہو اور ہم کوئی ایسا اعدادی ترکیب استعمال کریں جو یہی بالکل درست جواب فراہم کرتا ہو۔

اگر کسی مقدار کی اندازاً قیمت  $a^*$  ہو اور اس کی اصل قیمت  $a$  ہو تب فرق  $a^* - a = \xi$  کو  $a^*$  کا حتمی خلل یا مختصراً  $a^*$  کا خلل<sup>5</sup> کہتے ہیں۔ یوں

$$\text{خلل} + \text{اصل قیمت} = \text{تقریب} \quad a^* = a + \xi$$

ہو گا۔  $a^*$  کی اضافی خلل<sup>6</sup>  $\xi_r$  کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\xi_r = \frac{\xi}{r} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خلل}}{\text{اصل قیمت}} \quad (a \neq 0)$$

ظاہر ہے اگر  $|\xi|$  کی قیمت  $|a^*|$  کی قیمت سے بہت کم ہو تب  $\xi_r \approx \frac{\xi}{a^*}$  ہو گا۔ ہم ایک نئی مقدار  $\gamma = a - a^* = -\xi$  متعارف کرتے ہیں جس کو ہم درستگی<sup>7</sup> کہیں گے۔ یوں

$$a = a^* + \gamma \quad \text{درستگی} + \text{تقریب} = \text{اصل قیمت}$$

ہو گا۔ آخر میں  $a^*$  کی حد خلل<sup>9</sup> سے مراد عدد  $\beta$  ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$|a^* - a| \leq \beta \quad \implies \quad |\xi| \leq \beta$$

خلل کی تین قسمیں تجربی خلل، قطع چال خلل اور تعداد اعداد خلل ہیں۔ تجربی خلل<sup>10</sup> سے مراد مواد میں خلل ہے (جو تجربی ناپ کی وجہ سے ہو سکتے ہیں)۔ بالکل درست جواب تک پہنچنے کی خاطر متناہی (یا لامتناہی) تعداد کے حسابی

finite processes<sup>3</sup>

approximation<sup>4</sup>

error<sup>5</sup>

relative error<sup>6</sup>

correction<sup>7</sup>

<sup>8</sup> بعض اوقات خلل کی تعریف  $\gamma = -\xi$  لی جاتی ہے۔ آپ کسی ایک تعریف کو تسلیم کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ ہم خلل کی تعریف  $\xi$  لیں گے۔

error bound<sup>9</sup>

Experimental errors<sup>10</sup>

چال (قدم) درکار ہوں گے۔ حقیقت میں کسی خاص تعداد کے چال بعد حساب روک دیا جاتا ہے اور یوں قطع چال خلیل<sup>11</sup> پیدا ہو گا۔ ہر قدم پر حساب کے دوران کمپیوٹر متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے کمتر ہندسہ سے کم قیمتوں کو رد کرتا ہے جس سے تعداد ہندسہ خلیل<sup>12</sup> پیدا ہو گا جس پر ہم اب غور کرتے ہیں۔

اعشاری نظام میں ہر عدد کو متناہی یا لامتناہی تعداد کے اعشاری ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کمپیوٹر لامتناہی تعداد کے ہندسوں کو ذخیرہ نہیں کر سکتا ہے لہذا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی عدد کو متناہی تعداد کی ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ان اعداد کو دو طریقوں سے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ مقررہ نقطہ<sup>13</sup> نظام میں نقطہ اعشاریہ کے بعد مقررہ تعداد کے ہندسے پائے جاتے ہیں مثلاً 35.143 ، 5.000 ، 0.076 جبکہ غیر مقررہ نقطہ<sup>14</sup> نظام میں ملحوظ ہندسوں<sup>15</sup> کی تعداد متعین ہوتی ہے مثلاً  $0.6723 \times 10^2$  ،  $-0.2354 \times 10^{-4}$  اور  $0.1000 \times 10^1$ ۔ جہاں ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔ عدد  $c$  کے ملحوظ ہندسہ سے مراد  $c$  کا ہر ہندسہ ہے ماسوائے پہلا غیر صفر عدد کی بائیں جانب صفر جو اعشاریہ کا مقام تعین کرتا ہو۔ (یوں اس کے علاوہ ہر صفر بھی  $c$  کا ملحوظ ہندسہ ہو گا۔) مثال کے طور پر 5420 ، 1.340 اور 0.001460 میں سے ہر ایک میں چار ملحوظ ہندسے<sup>16</sup> ہیں۔

تعداد ہندسہ خلیل کا قاعدہ اب بیان کرتے ہیں۔ ( $k$  ملحوظ ہندسوں تک قطع کرنے کی تعریف بھی یہی ہے پس اس میں ہندسہ کی جگہ ملحوظ ہندسہ پر کریں۔)

$k + 1$  والے ہندسہ اور اس کے بعد تمام ہندسوں کو رد کریں۔ اگر رد شدہ عدد مقام  $k$  کی اکائی کی نصف سے کم ہو تب مقام  $k$  پر ہندسہ کو تبدیل نہ کریں ("گھٹانا")۔ اگر رد شدہ عدد مقام  $k$  کی اکائی کی نصف سے زیادہ ہو تب مقام  $k$  کی ہندسے کے ساتھ 1 جمع کریں ("بڑھانا")۔ اگر رد شدہ عدد مقام  $k$  کی اکائی کا نصف ہو تب اگر مقام  $k$  کا ہندسہ طاق ہو تب اس کو بڑھا کر جفت بنائیں۔ (مثال کے طور پر 3.45 اور 3.55 کو اعشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک قطع کرتے ہوئے بالترتیب 3.4 اور 3.6 حاصل ہو گا۔)

اس قاعدہ کا آخری حصہ یقینی بناتا ہے کہ عدد کا کمتر حصہ رد کرتے ہوئے اوسطاً برابر مرتبہ عدد بڑھایا اور گھٹایا جاتا ہے۔

<sup>11</sup> Truncation error

<sup>12</sup> rounding error

<sup>13</sup> fixed point

<sup>14</sup> floating point

<sup>15</sup> significant digits

<sup>16</sup> ایسا جدول جو  $k$  ملحوظ ہندسے دیتا ہو میں، جب تک کہا جاتا ہے کہ ایسا نہیں ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ دیا گیا عدد  $a^*$  بالکل درست قیمت  $a$  سے آخری ہندسے کی  $\pm 0.5$  اکاپاں مختلف ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر  $a = 1.1996$  ہو تب چار ملحوظ ہندسوں کا جدول  $a^* = 1.200$  دے گا۔

اگر ہم 1.2535 کو 3، 2 اور 1 اشاریہ تک قطع کریں تب ہمیں بالترتیب 1.254، 1.25 اور 1.3 حاصل ہو گا لیکن، بغیر مزید معلومات کے، 1.25 کو ایک اشاریہ تک قطع کرنے سے ہمیں 1.2 ملتا ہے۔

تعداد ہندسہ خلل کی وجہ سے کوئی بھی حساب مکمل غلط ہو سکتا ہے۔ عموماً چال کی تعداد بڑھانے سے یہ خلل بڑھتا ہے۔ یوں حسابی پروگرام کو اس خلل کی نقطہ نظر سے دیکھنا ضروری ہو گا اور اس خلل کو کم سے کم کرنا لازم ہو گا۔

## 21.2 دہرانے سے مساوات کا حل

ہمیں عموماً مساوات

$$(21.1) \quad f(x) = 0$$

کے حل درکار ہوتے ہیں یعنی ایسے عدد  $X_0$  کہ  $f(X_0)$  صفر کے برابر ہو جہاں  $f$  دیا گیا تفاعل ہے۔ مثال کے طور پر  $\cosh x = \sec x$ ،  $\tan x = x$ ،  $\sin x = 0.5x$ ،  $x^3 + x = 1$ ،  $x^2 - 3x + 2 = 0$  اور  $\cosh x \cos x = -1$  کو مساوات 21.1 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں پہلے دو میں  $f$  کثیر رکنی ہے لہذا یہ دونوں الجبرائی مساوات<sup>17</sup> ہیں جن کے حل کو جذر<sup>18</sup> کہتے ہیں۔ باقی ماوردائی مساوات<sup>19</sup> ہیں جن میں ماوردائی تفاعل استعمال ہوئے ہیں۔ حقیقتاً صرف انتہائی سادہ صورتوں میں مکمل درست حل نکالنے والے کلیات موجود ہوں گے۔ عموماً دہرانے کی ترکیب یا دیگر تراکیب سے اصل حل کے قریب قریب حل حاصل کریں گے۔

اعدادی دہرانے کے طریقہ میں ہم اختیاری  $x_0$  منتخب کرتے ہوئے درج ذیل روپ کلیہ

$$(21.2) \quad x_{n+1} = g(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

سے، بار بار حل کرتے ہوئے، ترتیب  $x_0, x_1, x_2, \dots$  حاصل کرتے ہیں جہاں  $g$  کسی ایسے وقفہ پر معین ہے جس پر  $x_0$  پایا جاتا ہو اور  $g$  کا حلقہ اسی وقفہ پر ہے۔ یوں ہم یک بعد دیگرے  $x_1 = g(x_0)$ ،  $x_2 = g(x_1)$ ،  $x_3 = g(x_2)$ ، ... حاصل کرتے ہیں۔

اس حصہ میں دائرہ کار اور حلقہ  $g(x)$  دونوں حقیقی لکیر پر ہوں گے۔ زیادہ عمومی معامہ میں  $x$  یا  $g$  اور یا دونوں سمتیات ہو سکتے ہیں۔

<sup>17</sup> algebraic equations

<sup>18</sup> roots

<sup>19</sup> transcendental equations

دہرانے کے تراکیب اعدادی تجزیہ کے لئے انتہائی اہم ہیں۔

مساوات 21.1 کو حل کرنے کے لئے دہرانے کے تراکیب کئی طریقوں سے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ ہم ان میں سے تین خصوصاً اہم طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

الجبرائی تبادلہ۔ ہم مساوات 21.1 کو الجبرائی طور پر تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل روپ حاصل کر سکتے ہیں

$$(21.3) \quad x = g(x)$$

جو مساوات 21.2 کی روپ میں ہے۔ مساوات 21.3 کے حل کو  $g$  کا مقررہ نقطہ<sup>20</sup> کہتے ہیں۔ دیے گئے مساوات 21.1 کے کئی مطابقتی مساوات 21.3 ہو سکتے ہیں جن کے ترتیب  $x_0, x_1, \dots$  مختلف (اور  $x_0$  کے تابع) ہوں گے۔ آئیں ایک سادہ مثال دیکھتے ہیں جس میں یہ حقائق ابھر کر سامنے آتے ہیں۔

مثال 21.1: دہرانے کی ترکیب

مساوات  $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$  کے لئے دہرانے کی ترکیب عمل میں لائیں۔ چونکہ ہمیں اس مساوات کے حل

$$x = 1.5 \pm \sqrt{1.25}, \quad x_1 = 2.618034, \quad x_2 = 0.381966$$

معلوم ہیں، ہم دہرانے کے عمل کے دوران خلل کا رویہ دیکھ سکتے ہیں۔ ہم دیے گئے مساوات سے

$$(21.4) \quad x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \implies x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں  $x_0 = 1$  منتخب کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ترتیب ملتی ہے

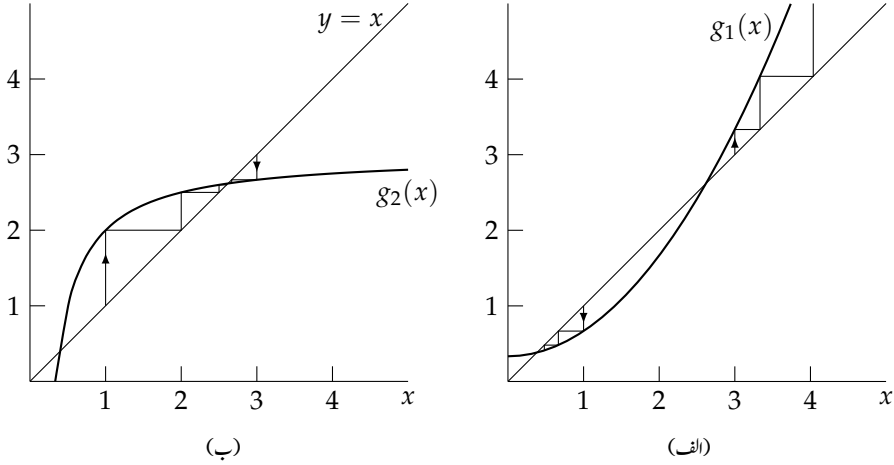
$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 0.667, \quad x_2 = 0.481, \quad x_3 = 0.411, \quad x_4 = 0.390, \dots$$

جو چھوٹے جذر کی طرف گامزن ہے (شکل 21.1-الف)۔ اگر ہم  $x_0 = 3.000$  منتخب کریں تب درج ذیل ملتا ہے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.766, \quad x_4 = 11.414, \dots$$

جو منفرد ترتیب ہے (شکل 21.1-الف)۔ دی گئی مساوات سے درج ذیل بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(21.5) \quad x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x} \implies x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$$



شکل 21.1: اشکال برائے مثال 21.1

اب  $x_0$  منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 2.000, \quad x_2 = 2.500, \quad x_3 = 2.600, \quad x_4 = 2.615, \dots$$

حاصل ہوتا ہے جو بڑے جذر کی طرف گامزن ترتیب ہے (شکل 21.1-ب)۔ اسی طرح  $x_0 = 3$  منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 2.667, \quad x_2 = 2.625, \quad x_3 = 2.619, \quad x_4 = 2.618, \dots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 21.1-ب)۔ شکل کو دیکھ کر واضح ہوتا ہے کہ مرکوزیت اس صورت ہوگی جب حل کی پڑوس میں منحنی  $g(x)$  کی ڈھلوان سیدھے خط  $y = x$  کی ڈھلوان سے کم ہو۔ ہم اب دیکھتے ہیں کہ مرکوزیت کے لئے  $|g'(x)| < 1$  کی شرط کافی ہے (جہاں خط  $y = x$  کی ڈھلوان  $y' = 1$  ہے)۔ □

اگر  $x_0$  کا مطابقتی مساوات 21.2 سے حاصل کردہ ترتیب  $x_0, x_1, \dots$  مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب موثر ہے۔

ارتکاز کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کے کئی اہم عملی استعمال پائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 21.1: (ارتکاز)

فرض کریں کہ  $x = g(x)$  کا حل  $x = s$  ہے اور فرض کریں کہ کسی ایسے وقفہ  $J$ ، جس میں  $s$  پایا جاتا



ہو، پر  $g(x)$  کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر  $J$  میں  $|g'(x)| \leq \alpha < 1$  ہو تب مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب  $J$  میں ہر  $x_0$  کے لئے مرکب ہوگی۔

ثبوت: تفرقی علم الاحصاء کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت  $x$  اور  $s$  کے درمیان ایسا جی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا،

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s)$$

جہاں  $x$  وقفہ  $J$  میں پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $g(s) = s$  اور  $x_1 = g(x_0)$ ،  $x_2 = g(x_1)$ ، ... ہیں لہذا ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} |x_n - s| &= |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(\xi)| |x_{n-1} - s| \leq \alpha |x_{n-1} - s| \\ &\leq \alpha^2 |x_{n-2} - s| \leq \dots \leq \alpha^n |x_0 - s| \end{aligned}$$

چونکہ  $\alpha < 1$  ہے لہذا  $n \rightarrow \infty$  کرنے سے  $\alpha^n \rightarrow 0$  اور  $|x_n - s| \rightarrow 0$  ہوں گے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 21.2: دہرانے کا طریقہ۔ مسئلہ 21.1

دہرانے کے طریقہ سے  $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$  کا حل تلاش کریں۔ اس مساوات کا جلدی سے خاکہ بنا کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا جذر  $x = 1$  کے قریب پایا جاتا ہے۔ ہم اس مساوات سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

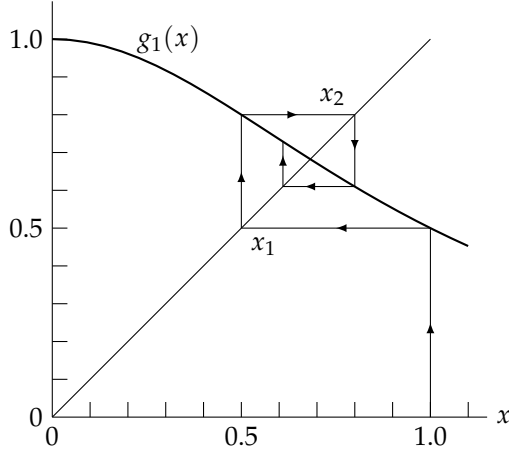
$$x = g_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n^2}$$

یوں کسی بھی  $x$  کے لئے  $|g'_1(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} < 1$  ہو گا لہذا تمام  $x$  پر مرکوزیت پائی جائے گی۔ ہم  $x_0 = 1$  منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 21.2)

$$x_1 = 0.500, \quad x_2 = 0.800, \quad x_3 = 0.610, \quad x_4 = 0.729, \quad x_5 = 0.653, \quad x_6 = 0.701, \dots$$

جبکہ چھ ہندسوں تک درست اصل جذر  $s = 0.682328$  ہے۔ ہم مساوات سے درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_2(x) = 1 - x^3, \quad |g'_2(x)| = 3x^2$$



شکل 21.2: مثال 21.2

جذر کے قریب  $|g'_2|$  کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے لہذا ہم ارٹکاز کی توقع نہیں کر سکتے ہیں۔ آپ  $x_0 = 1$  ،  
 $x_0 = 0.5$  ،  $x_0 = 2$  سے شروع کرتے ہوئے اپنی تسلی کر سکتے ہیں۔  
☐

مساوات  $f(x) = 0$  ، جہاں  $f$  قابل تفرق ہے، کو ترکیب نیوٹن سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب میں ہم  $f(x)$  کا تخمینہ اس کے مماسوں سے حاصل کرتے ہیں۔ اس ترکیب میں ہم  $f$  کی ترسیم سے حاصل  $x_0$  پر  $f$  کا مماس بناتے ہیں۔ یہ مماس  $x$  محور کو  $x_1$  پر قطع کرتا ہے (شکل 21.3)۔ یوں

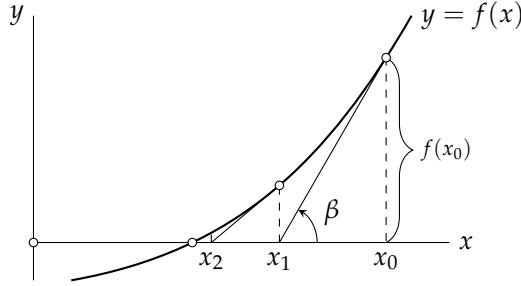
$$\tan \beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ہو گا۔ اگلے قدم پر ہم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اسی طرح چلتے ہوئے جذر تک پہنچا جاتا ہے۔ یوں دہرانے کے طریقے کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(21.6) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, \dots)$$



شکل 21.3: ترکیب نیوٹن

مثال 21.3: جذر المربع

کسی مثبت حقیقی عدد  $c$  کا جذر المربع حاصل کرنے کے لئے دہرانے کی ترکیب بنائیں۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے  $c = 2$  کا جذر المربع تلاش کریں۔ ہمارے پاس  $\sqrt{c}$  یعنی  $f(x) = x^2 - c = 0$  ہے لہذا  $f'(x) = 2x$  ہو گا۔ یوں مساوات 21.6 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

اب اس ترکیب سے  $c = 2$  کا جذر المربع تلاش کرتے ہیں۔ ہم  $x_0 = 1$  منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = 1.500\,000, \quad x_2 = 1.416\,667, \quad x_3 = 1.414\,216, \quad x_4 = 1.414\,214, \dots$$

2 کا جذر المربع 1.414 213 562 ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $x_4$  چھ ملخوظ ہندسوں تک درست جواب دیتا ہے۔ □

مثال 21.4: ماورائی مساوات کا دہرانے کی ترکیب سے حل

مساوات  $2 \sin x = x$  کا مثبت حل تلاش کریں۔ ہم  $f(x) = x - 2 \sin x$  لکھتے ہوئے  $f'(x) = 1 - 2 \cos x$  حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 21.6 کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2 \sin x_n}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n \cos x_n)}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}$$

جدول 21.1: جدول برائے مثال 21.4

$x_{n+1}$	$D_n$	$N_n$	$x_n$	$n$
1.901	1.832	3.483	2.000	0
1.896	1.648	3.125	1.901	1
1.896	1.639	3.107	1.896	2

$f$  کی ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا حل  $x_0 = 2$  کے قریب ہے۔ یوں ہم جدول 21.1 حاصل کرتے ہیں۔ چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 1.8955 ہے۔ □

مثال 21.5: ترکیب نیوٹن کا الجبرائی مساوات پر اطلاق مساوات  $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$  کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔ مساوات 21.6 سے درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

$x_0 = 1$  سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x_1 = 0.750000, \quad x_2 = 0.686047, \quad x_3 = 0.682340, \quad x_4 = 0.682328, \dots$$

$x_4$  چھ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔ مثال 21.2 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ مثال بہت تیزی کے ساتھ اصل حل پر مرکوز ہوتا ہے۔ اس سے دہرانے کی ترکیب کے درجہ کا تصور پیدا ہوتا ہے جس پر اب بات کی جائے گی۔ □

فرض کریں کہ مساوات  $x = g(x)$  کا حل  $s$  ہے اور  $x_{n+1} = g(x_n)$  ایک دہرانے کی ترکیب ہے جو اس حل کے قریب قریب قیمت  $x_n$  دیتی ہے۔ تب  $x_n = s + \epsilon_n$  ہو گا جہاں  $x_n$  میں خلل  $\epsilon_n$  ہے۔ فرض کریں کہ  $g$  متعدد بار قابل تفرق ہے لہذا ٹیلر کے کلیہ سے

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x_n) = g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \dots \\ &= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \dots \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ جزو  $g(s)$  کے بعد پہلی غیر صفر جزو میں  $\epsilon$  کے قوت نما کو دہرانے کی ترکیب (جس کو  $g$  تعین کرتا ہے) کا درجہ <sup>21</sup> کہتے ہیں۔ چونکہ  $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \epsilon_{n+1}$  یعنی  $x_{n+1}$  کا خلل

order<sup>21</sup>

ہے، اور ارتکاز کی صورت میں بڑی  $n$  کے لئے  $\epsilon_n$  چھوٹا ہو گا لہذا ترکیب کا درجہ اس کی مرکزیت کی ناپ ہے۔

ترکیب نیوٹن دو درجی ہے  
ترکیب نیوٹن کے لئے درج ذیل ہے

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

اور چونکہ  $f(s) = 0$  ہے لہذا  $g'(s) = 0$  ہو گا؛ یوں ترکیب نیوٹن کم از کم دو درجی ہے۔ ایک اور تفرق کے بعد  $g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}$  ملتا ہے جو عموماً غیر صفر ہو گا۔ مثال 21.2 میں  $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$  اور  $g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$  ہیں لہذا یہ یک درجی دہرانے کی ترکیب ہے۔

$f(x) = 0$  کے حل کے قریب  $f'(x) = 0$  ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے لیکن حل کے قریب  $f(x)$  کی ترسیم کو دیکھتے ہوئے، ترکیب نیوٹن کی جیومیٹریائی تصور کو مد نظر رکھتے ہوئے عموماً اس مشکل سے چھٹکارا حاصل کرنا ممکن ہو گا۔ اگر درکار حل کے قریب  $f'(x) = 0$  ہو تب  $x_{n+1}$  کی بہتر قیمت حاصل کرنے کی خاطر  $f(x_n)$  اور  $f'(x_n)$  کے زیادہ درست قیمتیں حاصل کرنا ضروری ہو گا۔ ایسی مساوات کو بد خو<sup>22</sup> کہتے ہیں۔

$f(x) = 0$  کو حل کرنے کی تیسری ترکیب جس کو مقام غلط کی ترکیب<sup>23</sup> کہتے ہیں پر اب غور کرتے ہیں۔ اس ترکیب میں منحنی  $f(x)$  کا مشابہ وتر تصور کیا جاتا ہے (شکل 21.4)۔ یہ وتر محور  $x$  کو

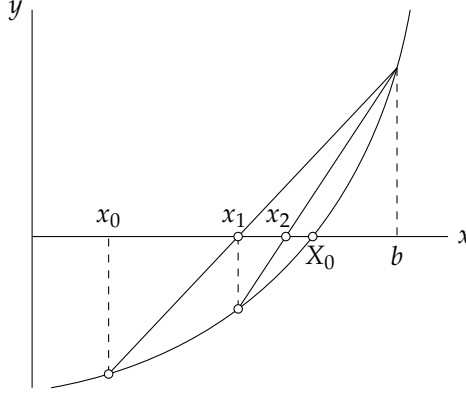
$$(21.7) \quad x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

پر قطع کرتا ہے جو  $f(x) = 0$  کے حل  $X_0$  کے قریب ہو گا۔ اگلے قدم پر اس سے بہتر حل

$$(21.8) \quad x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بتدریج بہتر حل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔  $b$  کو  $X_0$  کے قریب کرنے سے ارتکاز کو بہتر بنایا جاسکتا ہے۔ عموماً قیاس کے ذریعہ ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

<sup>22</sup> ill-conditioned  
<sup>23</sup> method of false position



شکل 21.4: منحنی کا مشاہدہ وتر سے کیا گیا ہے

مثال 21.6: مساوات  $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$  کا وہ جذر تلاش کریں جو  $x = 1$  کے قریب واقع ہے (مثال 21.2)۔ چونکہ  $f(0.5) = -0.375$  اور  $f(1) = 1$  ہیں لہذا ہم  $x_0 = 0.5$  اور  $b = 1$  منتخب کر سکتے ہیں۔ مساوات 21.7 سے

$$x_1 = \frac{0.5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

حاصل ہو گا جبکہ مساوات 21.8 سے  $x_2 = 0.672$  ملتا ہے۔ ہم اسی طرح بتدریج بہتر حل تلاش کر سکتے ہیں۔ □

### سوالات

سوال 21.1:  $x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 = 0$  کا جذر ترکیب نیوٹن میں  $x_0 = 1$  لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔  
جواب:  $x_1 = 1.900000$

سوال 21.2:  $x^3 - 1.2x^2 + 2x - 2.4 = 0$  کا جذر ترکیب نیوٹن میں  $x_0 = 2$  لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔  
جواب:  $x_1 = 1.478261$

سوال 21.3: سوال 21.1 میں دیے گئے مساوات کے جذر 0.9 ، 1.1 اور 1.9 ہیں۔ اگرچہ  $x_0 = 1$  جذر 0.9 اور 1.1 کے قریب ہے لیکن ترکیب نیوٹن ان کی جگہ جذر 1.9 تلاش کرتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟  $x_0$  کی کوئی اور قیمت منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے جذر 1.1 حاصل کریں۔  
جواب: تفاعل  $f(x)$  کو  $x_0 = 1$  پر مماس  $x$  محور کو عین  $x = 1.9$  پر قطع کرتا ہے۔ آپ  $x_0 = 1.2$  یا کوئی اور عدد منتخب کر سکتے ہیں۔

سوال 21.4 تا سوال 21.7 میں دیے مساوات کی ترکیب نیوٹن کی مدد سے تمام جذر تلاش کریں۔

سوال 21.4:  $\cos x = x$   
جواب: 0.739

سوال 21.5:  $x + \ln x - 2$   
جواب: 1.577

سوال 21.6:  $2x + \ln x - 1$   
جواب: 0.687

سوال 21.7:  $x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82$   
جواب: 1.4, -1.3,

سوال 21.8: دکھائیں کہ مثال 21.2 میں  $|g'_1(x)|$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت  $\tilde{x} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$  پر حاصل ہوگی اور کہ یہ قیمت  $|g'(\tilde{x})| = \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0.65$  کے برابر ہے۔

سوال 21.9: ایسا کیوں ہے کہ مثال 21.1 میں یک سر ترتیب حاصل ہوتی ہے لیکن مثال 21.2 میں ایسا نہیں ہوتا ہے؟

سوال 21.10: مثال 21.2 کی آخر میں دہرانے کی ترکیب سے حاصل قیمتوں کو از خود حاصل کریں اور شکل 21.2 کی طرز کا شکل بنائیں۔

سوال 21.11: مساوات  $x^5 = x + 0.2$  کو مساوات 21.2 کی صورت میں لکھ کر  $x_0 = 0$  سے شروع کرتے ہوئے اس کا جذر تلاش کریں۔  
جواب:  $x_1 = -0.2$  ،  $x_2 = -0.20032$  ،  $x_3 = -0.200323$

سوال 21.12: سوال 21.11 میں دیے گئے مساوات کا جذر  $x = 1$  کے قریب پایا جاتا ہے۔ مساوات کو  $x = \sqrt[5]{x+0.2}$  لکھ کر  $x_0 = 1$  سے شروع کرتے ہوئے اس جذر کو تلاش کریں۔  
جواب: 1.0447

سوال 21.13: سوال 21.12 میں اگر آپ  $x = x^5 - 0.2$  لکھ کر  $x_0 = 1$  سے شروع کریں تو کیا حاصل ہو گا؟  
جواب: -0.200 322

سوال 21.14: دہرانے کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مساوات  $x = \tan x$  کا کم تر جذر تقریباً 4.49 ہے۔ اشارہ۔ مساوات کی ترسیم سے اخذ کریں کہ جذر  $x_0 = \frac{3\pi}{2}$  کے قریب پایا جاتا ہے؛ مساوات کو  $x = \pi + \tan^{-1} x$  (کیوں؟) لکھ کر آگے بڑھیں۔

سوال 21.15:  $x_0 = 2$  سے شروع کرتے ہوئے  $\sqrt{5}$  کو مثال 21.3 کی ترکیب سے حاصل کرتے ہوئے  $x_1, x_2, x_3, x_4$  تلاش کریں۔ اب  $\sqrt{5} = 2.236 068$  استعمال کرتے ہوئے خلل حاصل کریں۔  
جواب:  $\epsilon_4 = 0.000 000$  ،  $\epsilon_3 = 0.000 043$  ،  $\epsilon_2 = 0.013 932$  ،  $\epsilon_1 = 0.236 068$

سوال 21.16: دکھائیں کہ مثال 21.3 میں ہمارے پاس

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4} \left( x_n - \frac{c}{x_n} \right)^2$$

ہے جو درستگی کی ناپ ہے۔ دکھائیں کہ تقریباً

$$|x_n - \sqrt{c}| \approx \frac{1}{2} \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right|$$

ہو گا۔ اس کا اطلاق سوال 21.15 پر کریں۔

سوال 21.17: مثبت  $x$  محور پر ایسا وقفہ تلاش کریں کہ  $c = 2$  لیتے ہوئے مسئلہ 21.1 کی شرط کو مثال 21.3 کے دہرانے کی ترکیب مطمئن کرتی ہو۔  
جواب:  $x \geq \sqrt{\frac{2}{1+2\alpha}}$  ،  $\alpha < 1$

سوال 21.18: جذر الکعب کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے  $x_0 = 2$  سے شروع کر کے تین قدم چل کر  $\sqrt[3]{7}$  تلاش کریں۔



سوال 21.19: مثبت عدد  $c$  کا  $k$  واں جذر حاصل کرنے کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔  
جواب:  $f(x) = x^k - c, \quad x_{n+1} = (1 - \frac{1}{k})x_n + \frac{c}{kx_n^{k-1}}$

سوال 21.20:  $x^4 = 2$  کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔  
جواب: 0, 1

سوال 21.21:  $x^4 = 2x$  کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔  
جواب: 0, 1.260

سوال 21.22:  $3 \sin x = 2x$  کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔  
جواب: 0, 1.49

سوال 21.23: سوال 21.20 میں حاصل کردہ مثبت جذر ہر صورت اصل جذر سے معمولی کم ہو گا۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال 21.24: ترکیب نیوٹن میں  $f'(x)$  کا حساب کرنا ہوتا ہے۔ عملی استعمال میں کبھی کبھار یہ قدم کافی پیچیدہ ثابت ہو سکتا ہے۔  $f'(x)$  سے چھٹکارا حاصل کرنا کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کی جگہ  $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$  استعمال کیا جائے۔ یوں حاصل کردہ کلیہ کا غلط مقام کلیہ کے ساتھ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 21.25: فرض کریں بند وقفہ  $I$  میں  $g$  استمراری ہے اور اس کا حلقہ بھی  $I$  میں پایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات  $x = g(x)$  کا کم از کم ایک حل اس وقفہ میں پایا جائے گا۔ دکھائیں کہ اس وقفہ میں مساوات کے زیادہ جذر بھی ممکن ہیں۔

### 21.3 تنہائی فرق

تنہائی فرق کا استعمال اعدادی تجزیہ کے کئی شاخوں میں پایا جاتا ہے مثلاً دو قیمتوں کے درمیان قیمت کا تخمینہ لگانے میں، جدول کی جانچ پڑتال میں، تخمینہ لگانے میں، تفرق میں، اور تفرقی مساوات کے حل میں۔ ہم فرض کرتے ہیں

جدول 21.2: تفاعل  $f(x) = x^3$ ,  $x = -3(1)3$  کا جدول فرق

$x$	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق	چوتھا فرق
-3	-27	19			
-2	-8	7	-12	6	
-1	-1	1	-6	6	0
0	0	1	0	6	0
1	1	7	6	6	0
2	8	19	12		
3	27				

کہ ہمیں تفاعل  $f$  کی اعدادی قیمتوں  $f_j = f(x_j)$  کا جدول دیا گیا ہے جہاں نقطے  $x_j$  ایک جیسے فاصلے پر ہیں۔

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \dots \quad (h > 0, \text{ مقررہ})$$

$f(x_j)$  کو کسی کلیہ یا اس کو تجربہ سے حاصل کیا گیا ہے۔ ہم اب جدول میں ہر  $f(x)$  کو اگلی بڑی  $x$  کی مطابقتی قیمت سے تفریق کرتے ہوئے پہلا فرق<sup>24</sup> حاصل کرتے ہیں۔ جدول 21.2 میں اس کی مثال پیش کی گئی ہے جہاں  $f(x) = x^3$ ,  $x = -3(1)3$  ہیں۔<sup>25</sup> یہی طریقہ پہلی فرق پر لاگو کرتے ہوئے  $f$  کا دوسرا فرق<sup>26</sup> حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح باقی فرق بھی حاصل کیے جاتے ہیں۔ جدول فرق میں ہر فرق کو اپنی قطار میں گزشتہ قطار (جس سے فرق حاصل کیا گیا ہے) کی اندراج کی درمیان برابر مقام پر درج کیا جاتا ہے۔ نقطہ اعشاریہ اور فرق کی بائیں صفوں کو نظر انداز کیا جاتا ہے (جدول 21.3)۔

جدول فرق میں فرق کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے رائج ہیں۔ ان میں سے جو بھی طریقہ استعمال کیا جائے، جدول میں نہ کوئی فرق تبدیل ہو گا اور نہ ہی اس کا مقام۔ پہلی (اور غالباً اہم ترین) اظہار جس کو وسطی فرق<sup>27</sup> کہتے

first difference<sup>24</sup>  
 $x = a(h)b$  <sup>25</sup> کا مطلب ہے کہ تفاعل کی قیمتیں  $a$   $x = a + h$   $x = x + h$   $x = a + 2h$   $x = b \dots x$  پر دی گئی ہیں۔  
 second difference<sup>26</sup>  
 central difference<sup>27</sup>

جدول 21.3: تفاعل  $2(0.2)$ ،  $x = 1$ ،  $f(x) = \frac{1}{x}$  کا جدول فرق۔ ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔

$x$	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق
1.0	1.0000			
1.2	0.8333	-1667		
1.4	0.7143	-1190	477	-180
1.6	0.6250	-893	297	-98
1.8	0.5556	-694	199	-61
2.0	0.5000	-556	138	

ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & & & & \\
 & \delta f_{-3/2} & & & & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & & & \\
 & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} & & & \\
 x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & & & \\
 & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{1/2} & & & \\
 x_1 & f_0 & & \delta^2 f_1 & & & \\
 & \delta f_{3/2} & & & & & \\
 x_2 & f_2 & & & & & 
 \end{array}$$

جہاں  $\delta f_{-3/2} = f_{-1} - f_{-2}$  اور  $\delta f_{-1/2} = f_0 - f_{-1}$  ہیں۔ وسطی فرق کا عمومی جزو

$$(21.9) \quad \delta f_{m+1/2} = f_{m+1} - f_m$$

ہے جہاں دائیں ہاتھ دوسرا فرق کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔ اسی طرح

$$\delta^2 f_m = \delta f_{m+1/2} - \delta f_{m-1/2}$$

ہو گا۔ دیگر فرق بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسی زیر نوشت والے اجزاء ایک ہی صف میں پائے جاتے ہیں۔ (دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ جدول میں  $x$  کی سب سے چھوٹی قیمت  $x_0$  ہو۔ مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم  $x_0 = 1.6$  لے سکتے ہیں؛ تب  $f_0 = 0.6250$ ،  $\delta f_{1/2} = -0.0694$ ،  $\delta^2 f_0 = 0.0199$  (ہوں گے۔)

دوسری اظہار جس کو آگے فرق<sup>28</sup> کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & \\
 & \Delta f_{-2} & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & \Delta^2 f_{-2} & \\
 & \Delta f_{-1} & \Delta^3 f_{-2} & \\
 x_0 & f_0 & \Delta^2 f_{-1} & \\
 & \Delta f_0 & \Delta^3 f_{-1} & \\
 x_1 & f_1 & \Delta^2 f_0 & \\
 & \Delta f_1 & & \\
 x_2 & f_2 & & 
 \end{array}$$

جس میں  $\Delta f_{-2} = f_{-1} - f_{-2}$  ،  $\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$  اور  $\Delta f_0 = f_1 - f_0$  ہیں۔ اس کا عمومی جزو

$$(21.10) \quad \Delta f_m = f_{m+1} - f_m$$

ہے۔ اسی طرح

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m$$

ہوگا۔ مثال کے طور پر اگر جدول 21.3 میں  $x_0 = 1.6$  لیا جائے تب  $f_0 = 0.6250$  ،  $\Delta f_0 = -0.0694$  ،  $\Delta^2 f_0 = 0.0138$  ہوں گے۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں نیچے کی رخ یا جدول میں آگے رخ لکیروں پر پائے جائیں گے۔

تیسری اظہار جس کو پیچھے فرق<sup>29</sup> کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & \\
 & \nabla f_{-1} & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & \nabla^2 f_0 & \\
 & \nabla f_0 & \nabla^3 f_1 & \\
 x_0 & f_0 & \nabla^2 f_1 & \\
 & \nabla f_1 & \nabla^3 f_2 & \\
 x_1 & f_1 & \nabla^2 f_2 & \\
 & \nabla f_2 & & \\
 x_2 & f_2 & & 
 \end{array}$$

جہاں  $\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$  ،  $\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$  اور  $\nabla f_1 = f_1 - f_0$  ہیں۔ عمومی جزو

$$(21.11) \quad \nabla f_m = f_m - f_{m-1}$$

forward difference<sup>28</sup>  
backward difference<sup>29</sup>

جدول 21.4: غلطی تمام فرق میں پھیل جاتی ہے۔ یہاں تفاعل  $2.6(0.1)2.0$ ،  $x = \sqrt{x}$ ،  $f(x)$  ہے اور ملحوظ ہندسے چار ہیں۔ غلطی  $f(2.3)$  میں ہے۔

$x$	$\sqrt{x}$	فرق	$\sqrt{x}$	فرق	غلطی $\epsilon$ کا پھیلاؤ
2.0	1.4142		1.41412		
2.1	1.4491	349	1.4491	349	
2.2	1.4832	341	1.4832	341	$\epsilon$
2.3	1.5166	334	1.5176	316	$-3\epsilon$
2.4	1.5492	319	1.5492	319	$-2\epsilon$
2.5	1.5811	314	1.5811	314	$\epsilon$
2.6	1.6125		1.6125		$3\epsilon$

ہو گا۔ اسی طرح درج ذیل ہو گا اور باقی اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1}$$

ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں پر اوپر رخ یا جدول میں پیچھے رخ لکیروں پر پائے جاتے ہیں۔ جدول کی آخر میں حساب کے دوران پیچھے فرق عموماً زیادہ مددگار ثابت ہوتا ہے۔

جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم  $x_0 = 1.6$  لیں تب  $\delta f_{-1/2} = \Delta f_{-1} = \nabla f_0 = -0.0893$  ہو گا۔ یوں عمومی طور پر

$$\delta^n f_m = \Delta^n f_{m-n/2} = \nabla^n f_{m+n/2}$$

ہو گا۔

جدول میں غلطیوں کی نشاندہی کرنے کے لئے فرق کا سہارا لیا جاتا ہے۔ جیسا جدول 21.4 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل میں خلل  $\epsilon$  جلد تمام فرق میں پھیل جاتا ہے۔ یوں فرق میں بہت زیادہ اثر چڑھاؤ تفاعل کی قیمت میں غلطی کو ظاہر کرتی ہے۔ ظاہر ہے کہ کم تعداد کی ملحوظ ہندسوں کی بنا معمولی اثر چڑھاؤ ہر صورت پائی جائے گی۔

تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں بھی فرق اہم کردار ادا کرتا ہے۔ قدم  $h$  لیتے ہوئے  $n$  درجی کثیر رکنی  $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  کے جدول فرق میں تمام  $n$  ویں فرق مستقل ( $n!h^n a_0$ ) کے برابر) ہوں گے اور ان سے بلند فرق صفر ہوں گے۔ ایسا اس لئے ہو گا کہ پہلا فرق

$$p_n(x+h) - p_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] + \dots = a_0nhx^{n-1} + \dots$$

کا درجہ  $n-1$  ہے، دوسرے فرق کے کثیر رکنی کا درجہ  $n-2$  ہو گا اور اس کے پہلے جزو کا عددی سر  $a_0n(n-1)h^2$  ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ یوں اگر تفاعل  $f$  کے جدول فرق میں  $n$  ویں فرق کسی حلقہ میں تقریباً مستقل ہوں تب جدول کی قیمتوں کو اس حلقہ میں  $n$  درجی کثیر رکنی  $p_n$  سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ آئیں دیے گئے  $f$  کی صورت میں کثیر رکنی  $p_n$  کے حصول کی ایک ترکیب دیکھیں۔

مثال 21.7: تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنا

جدول 21.4 میں دوسرا فرق تقریباً مستقل ( $-7$  کے برابر) ہیں۔ یوں ہم دو درجی کثیر  $p_2$  رکنی تلاش کر سکتے ہیں جو دیے گئے تفاعل کے مشابہ ہو گا۔ ہم پہلے جدول فرق بناتے ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام دوسرے فرق ٹھیک ٹھیک  $-7$  کے برابر ہیں ہم حلقہ کے وسط میں تفاعل کی کوئی قیمت اور پہلا فرق منتخب کرتے ہیں مثلاً  $1.5166$  اور  $334$  جس سے جدول 21.5 حاصل ہوتا ہے۔  $p_2$  کا پہلے عددی سر کو  $a_02!h^2 = -0.0007$  سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں  $a_0 = -\frac{0.0007}{0.02} = -0.035$  ملتا ہے۔ اس طرح  $p_1(x) = p_2(x) + 0.035x^2$  درجہ اول ہو گا اور جدول 21.5 سے ہم حساب لگا کر دیکھتے ہیں کہ اس کے پہلے صفر تقریباً مستقل ( $0.04915$ ) ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ یہ  $a_1$  کے برابر ہے۔ یوں  $a_1 = \frac{0.04915}{0.1} = 0.4915$  حاصل ہوتا ہے۔ آخر میں  $a_2 = 0.5713$  ہو گا لہذا

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.5713$$

ہو گا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ فرق کو استعمال کرتے ہوئے کثیر رکنی حاصل کرنے سے پہلے مشابہ کثیر رکنی کی درستگی کا معیار جانا جاسکتا ہے۔ مشابہ کثیر رکنی کی حصول کے دیگر تراکیب پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

□

جدول 21.5: تقابل  $f(x) = \sqrt{x}$  کو دودرجی کثیررکنی  $p_2$  سے ظاہر کرنا

$x$	$p_2(x)$	فرق
2.0	1.4143	348
2.1	1.4491	—7
2.2	1.4832	341
2.3	<u>1.5166</u>	—7
2.4	1.5493	327
2.5	1.5813	—7
2.6	1.6126	320
		313





## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



ضمیمہ ب

## مفید معلومات

### 1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارتم (شکل 1. ب-ب)

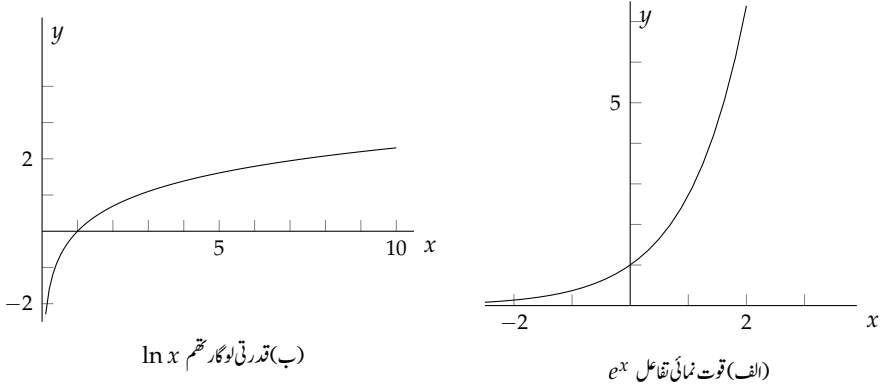
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

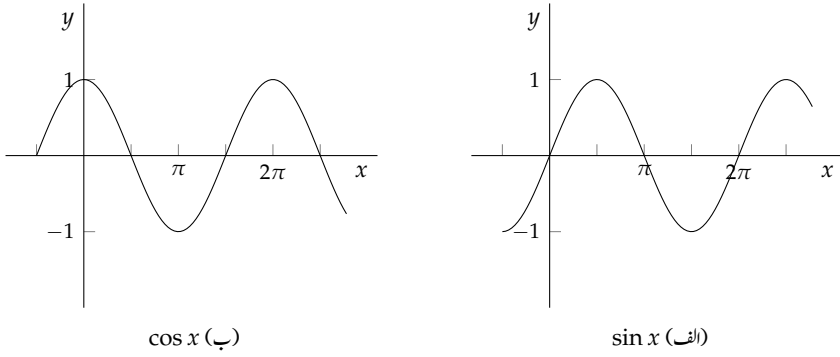
اساس دس کا لوگارتم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

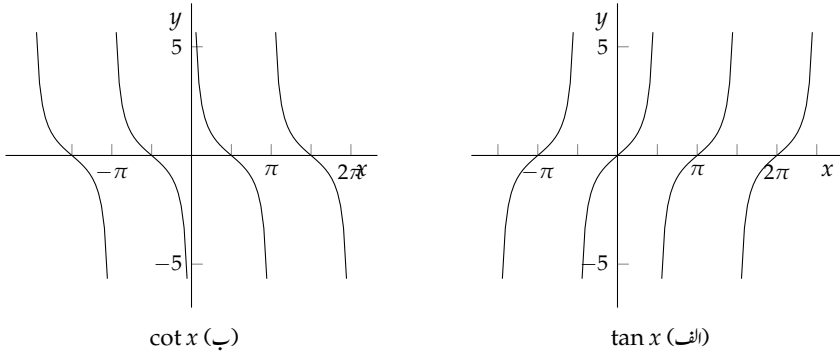
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

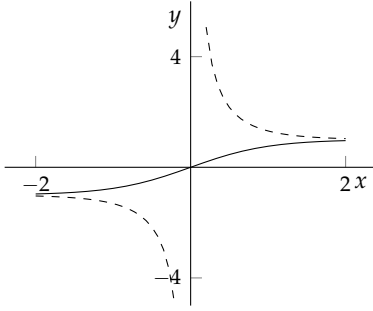
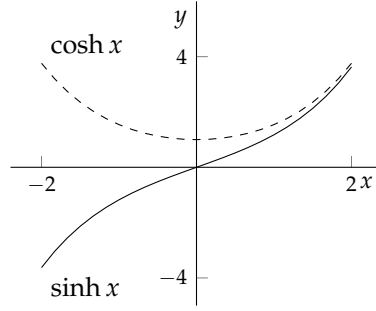
$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$



(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

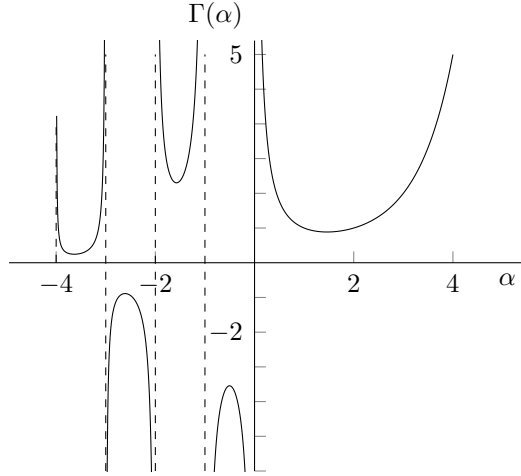
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

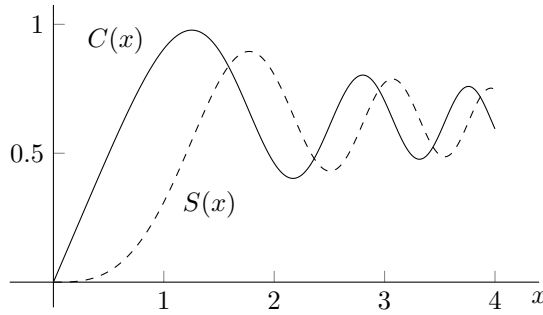
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

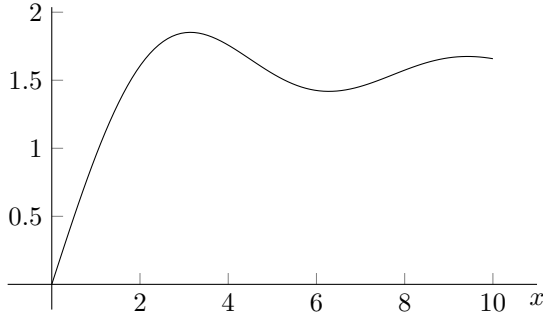
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

