انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ xi

1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات 1

1.1 نمونہ کشی 2

1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔ 14

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات 23

1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل 39

1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی 51

1.6 عمودی خطوط کی نسلیں 68

1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت 72

2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات 79

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 79

2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 95

2.3 تفرقی عامل 110

2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش 114

2.5 یولر کوشی مساوات 130

2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی 138

2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 147

2.8 جبری ارتعاش۔ گمک 159

2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک 165

2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی 169

2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 180

3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات 187
3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 187
3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 198
3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 207
3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 210

4 نظام تفرقی مساوات 219
4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 220
4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 229
4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی 243
4.3.1 خطی نظام 244
4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 248
4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام 265
4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 273
4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 282
4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام 290
4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب 291

5 طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل 299
5.1 ترکیب طاقتی تسلسل 300
5.2 لیژانڈر مساوات۔ لیژانڈر کثیر رکنی 315
5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس 332
5.3.1 عملی استعمال 337
5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل 351
5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل 366
5.6 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ 372
5.7 مسئلہ سٹیورم لیوویل 378
5.8 قائمیت لیژانڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل 385

6 لاپلاس تبادلہ 395
6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت 396
6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات 405
6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل 417
6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاو 437
6.5 الجھاو 454
6.6 لاپلاس بدل کی تکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 463
6.7 تفرقی مساوات کے نظام 471

6.8 لاپلاس بدل کے عمومی کلیے 479

7 خطی الجبرا: سمتیات 483
7.1 غیر سمتیات اور سمتیات 483
7.2 سمتیہ کے اجزاء 485
7.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب 491
7.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت 499
7.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) 505
7.6 اندرونی ضرب فضا 518
7.7 سمتی ضرب 520
7.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب 522
7.9 غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب 533

8 خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام 541
8.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب 542
8.2 قالبی ضرب 552
8.2.1 تبدیلی محل 558
8.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط 570
8.3.1 صف زینہ دار صورت 582
8.4 خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا 590
8.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی 604
8.6 دو درجی اور تین درجی مقطع قالب 610
8.7 مقطع۔ قاعدہ کریمر 613
8.8 معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط 629
8.9 سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ 644

9 خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب 661
9.1 امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول 662
9.2 امتیازی مسائل کے چند استعمال 672
9.3 تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب 680
9.4 امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجی صورت 687
9.5 مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں 700

10 سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل 711
10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان 711
10.2 سمتی علم الاحصاء 713
10.3 منحنی 720
10.4 لمبائی قوس 726
10.5 مماس، انحنا اور مروڑ 733
10.6 سمتی رفتار اور اسراع 738

10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ . . . 745
10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان . . . 751
10.9 تبادل محددی نظام اور تبادل ارکان سمتیات . . . 764
10.10 سمتی میدان کی پھیلاو . . . 769
10.11 سمتی تفاعل کی گردش . . . 777

11 سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے 781
11.1 خطی تکمل . . . 782
11.2 خطی تکمل کا حل . . . 787
11.3 دوہرا تکمل . . . 796
11.4 دوہرا تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ . . . 810
11.5 سطحیں . . . 820
11.6 مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ . . . 825
11.7 سطحی تکمل . . . 837
11.8 تہرا تکمل۔ گاوس کا مسئلہ پھیلاو . . . 845
11.9 مسئلہ پھیلاو کے نتائج اور استعمال . . . 850
11.10 مسئلہ سٹوکس . . . 861
11.11 مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال . . . 866
11.12 راہ سے آزاد خطی تکمل . . . 869

12 فوریئر تسلسل 883
12.1 دوری تفاعل، تکونیاتی تسلسل . . . 884
12.2 فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات . . . 889
12.3 اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل . . . 902
12.4 جفت اور طاق تفاعل . . . 907
12.5 نصف حلقہ اتساع . . . 916
12.6 فوریئر عددی سر کا بغیر تکمل حصول . . . 923
12.7 جبری ارتعاش . . . 931
12.8 تقریب بذریعہ تکونی کثیر رکنی۔ مکعب خلل . . . 936
12.9 فوریئر تکمل . . . 940

13 جزوی تفرقی مساوات 953
13.1 بنیادی تصورات . . . 953
13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج . . . 958
13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب) . . . 960
13.4 مساوات موج کا دالومبیغ حل . . . 973
13.5 یک بعدی بہاو حرارت . . . 979
13.6 لا متناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاو حرارت . . . 987

13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دو ابعادی مساوات موج . . . 993
13.8 مستطیل جھلی . . . 996
13.9 قطبی محدد میں لاپلاسی . . . 1006
13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل . . . 1010
13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ مخفی قوہ . . . 1018
13.12 کروی محدد میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیژانڈر . . . 1024
13.13 لاپلاس تبادل برائے جزوی تفرقی مساوات . . . 1030

14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیلی تفاعل 1037
14.1 مخلوط اعداد . . . 1038
14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات . . . 1047
14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے . . . 1054
14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیلی تفاعل . . . 1059
14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات . . . 1067
14.6 ناطق تفاعل۔ جذر . . . 1078
14.7 قوت نمائی تفاعل . . . 1084
14.8 تکونیاتی اور ہذلولی تفاعل . . . 1089
14.9 لوگارتھم۔ عمومی طاقت . . . 1095

15 محافظ زاویہ نقشہ کشی 1103
15.1 نقشہ کشی . . . 1104
15.2 محافظ زاویہ نقش . . . 1116
15.3 خطی کسری تبادل . . . 1125
15.4 مخصوص خطی کسری تبادل . . . 1129
15.5 نقش زیر دیگر تفاعل . . . 1138
15.6 ریمان سطحیں . . . 1149

16 مخلوط تکملات 1157
16.1 مخلوط مستوی میں خطی تکمل . . . 1157
16.2 مخلوط خطی تکمل کی خواص . . . 1168
16.3 کوشی کا مسئلہ تکمل . . . 1172
16.4 خطی تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمل . . . 1184
16.5 کوشی کا کلیہ تکمل . . . 1189
16.6 تحلیلی تفاعل کے تفرق . . . 1194

17 ترتیب اور تسلسل 1201
17.1 ترتیب . . . 1201
17.2 تسلسل . . . 1208
17.3 کوشی اصول مرکوزیت برائے ترتیب اور تسلسل . . . 1213

17.4 یک سر حقیقی ترتیب۔ لیبنٹز آزمائش برائے حقیقی تسلسل 1220
17.5 تسلسل کی مرکوزیت اور انفراج کی آزمائشیں 1225
17.6 تسلسل پر اعمال 1236

18 طاقتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لورنٹ تسلسل 1243
18.1 طاقتی تسلسل 1243
18.2 طاقتی تسلسل کی روپ میں تفاعل 1255
18.3 ٹیلر تسلسل 1262
18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل 1268

ا اضافی ثبوت 1273

ب مفید معلومات 1277
1.ب اعلی تفاعل کے مساوات 1277

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 18

طاقتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لورنٹ تسلسل

مخلوط تجزیہ میں طاقتی تسلسل (حصہ 18.1) اہم ترین ہے چونکہ یہ تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔اسی طرح ہر تحلیلی تفاعل کا طاقتی تسلسل پایا جاتا ہے جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں۔یہ ٹیلر تسلسل حقیقی علم الاحصاء کی ٹیلر تسلسل کی مخلوط مماثل ہیں۔بلکہ حقیقی ٹیلر تسلسل میں حقیقی متغیرہ کی جگہ مخلوط متغیرہ پر کرتے ہوئے ہم حقیقی تفاعل کو مخلوط دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں۔

باب کے آخری حصے میں تحلیلی تفاعل کی لورنٹ تسلسل پر غور کیا جائے گا۔ لورنٹ تسلسل میں غیر تابع متغیرہ کی مثبت اور منفی عدد صحیح طاقت پائے جاتے ہیں۔جیسا ہم اگلے باب میں دیکھیں گے، یہ تسلسل حقیقی اور مخلوط تکمل کی قیمت حاصل کرنے میں مدد گار ثابت ہوتی ہیں۔

18.1 طاقتی تسلسل

گزشتہ باب کے حصہ 17.2 میں مستقل اجزاء کی تسلسل کی تعریف پیش کی گئی۔اگر تسلسل کے اجزاء متغیر، مثلاً، متغیر z کے تفاعل ہوں تب کسی مقررہ z کے لئے یہ تمام اجزاء کوئی مستقل ہوں گے لہٰذا وہ تمام تعریف یہاں بھی قابل استعمال ہوں گے۔ظاہر ہے کہ ایسا تسلسل جس کے اجزاء متغیر z کے تفاعل ہوں کے جزوی مجموعے، باقی اور

مجموعہ بھی z کے تفاعل ہوں گے۔ عموماً ایسا تسلسل z کی کچھ قیمتوں، مثلاً، کسی خطے میں تمام z کے لئے مرتکز ہو گا، جبکہ z کی دیگر قیمتوں کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔

مخلوط تجزیہ میں متغیر اجزاء کی اہم ترین تسلسل طاقتی تسلسل ہے۔ متغیر $z-a$ کی **طاقتی تسلسل**[1] درج ذیل روپ کی لامتناہی تسلسل کو کہتے ہیں

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{18.1}$$

جہاں z کوئی متغیر ہے جبکہ $c_0, c_1, \cdots$ ، جنہیں **عددی سر**[2] کہتے ہیں، مستقل قیمتیں ہیں اور a ، جس کو تسلسل کا **مرکز**[3] کہتے ہیں، مستقل ہے۔ طاقتی تسلسل میں طاقت m صرف غیر منفی ہو سکتا ہے[4]۔

$a = 0$ کی صورت میں طاقتی تسلسل کی درج ذیل مخصوص روپ حاصل ہوتی ہے جو z کی طاقتی تسلسل ہے۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{18.2}$$

طاقتی تسلسل کی مرکوزیت کو سادہ طریقے سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ آئیں تین عمومی مثالوں سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 18.1: قرص میں مرکوزیت، ہندسی تسلسل

ہندسی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$|z| < 1$ کی صورت میں حتمی مرتکز جبکہ $|z| \geq 1$ کی صورت میں منفرج ہے (مسئلہ 17.13)۔ □

مثال 18.2: پورے متناہی مستوی میں مرکوزیت

درج ذیل طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

---

[1] power series
[2] coefficients
[3] center
[4] منفی m والے تسلسل پر اسی باب میں بعد میں غور کیا جائے گا۔

تناسبی آزمائش کے تحت ہر (متناہی) z کے لئے حتمی مرتکز ہے۔در حقیقت کسی بھی مقررہ z کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

□

مثال 18.3: **صرف مرکز پر مرکوزیت**
درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \cdots$$

صرف مرکز $z = 0$ پر مرتکز ہے جبکہ ہر $z \neq 0$ کے لئے تسلسل منفرج ہے۔یہی نتیجہ تناسبی آزمائش سے مقررہ z کے لئے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$\left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = (n+1)|z| \to \infty \qquad (n \to \infty, \quad z \neq 0)$$

□

$z = a$ کے لئے طاقتی تسلسل مساوات 18.1 مرتکز ہے چونکہ تب $z - a = 0$ ہو گا اور تسلسل واحد ایک جزو c_0 پر مشتمل ہو گا۔ جیسا آپ نے مثال 18.3 میں دیکھا، بعض اوقات z کی یہ واحد قیمت ہو گی جس پر تسلسل مرتکز ہو گا۔البتہ اگر تسلسل 18.3 کسی $z_0 \neq a$ کے لئے مرتکز ہو تب تسلسل z کی ہر اس قیمت کے لئے مرتکز ہو گا جس کا فاصلہ مرکز سے z_0 کے فاصلے سے کم ہو۔

مسئلہ 18.1: **طاقتی تسلسل کی مرکوزیت**
اگر مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقتی تسلسل نقطہ $z = a$ پر مرتکز ہو تب یہ ہر اس z پر حتمی مرتکز ہو گا جس کے لئے $|z - a| < |z_0 - a|$ ہو، یعنی ایسے دائرے کے اندر ہر z پر جو z_0 سے گزرتا ہو اور جس کا مرکز a ہو۔

ثبوت : چونکہ مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقتی تسلسل z_0 پر مرتکز ہے لہٰذا مسئلہ 17.5 کے تحت

$$c_n(z_0 - a)^n \to 0 \qquad n \to \infty$$

ہو گا یعنی $z = z_0$ پر اس تسلسل کے اجزاء محدود ہوں گے، مثلاً ہر $n = 0, 1, 2, \cdots$ کے لئے

$$\left|c_n(z_0 - a)^n\right| < M \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ہو گا۔اس سے درج ذیل ملتا ہے

$$\left|c_n(z_0 - a)^n\right| = \left|c_n(z_0 - a)^n\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n\right| < M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

لہٰذا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n(z_0 - a)^n\right| < \sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n = M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n \tag{18.3}$$

ہو گا۔چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ $|z-a| < |z_0 - a|$ لہٰذا

$$\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$$

ہو گا اور یوں مساوات 18.3 کی دائیں ہاتھ (ہندسی) تسلسل مرتکز ہو گا۔یوں مساوات 18.3 کا بایاں ہاتھ بھی مرتکز ہو گا لہٰذا مساوات 18.1 میں دیا گیا تسلسل $|z-a| < |z_0 - a|$ کی صورت میں حتمی مرتکز ہو گا۔

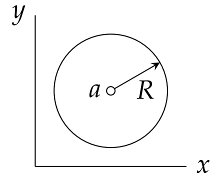
□

مثال 18.2 اور مثال 18.3 میں ہم نے دیکھا کہ طاقتی تسلسل تمام z یا صرف $z = a$ پر مرتکز ہو سکتا ہے۔آئیں ان دو صورتوں کو فی الحال نظر انداز کریں۔اب اگر کوئی طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) دیا گیا ہو تب ہم مخلوط مستوی میں ان تمام z پر غور کرتے ہیں جہاں تسلسل مرتکز ہو۔فرض کریں کہ R ایسا کم تر حقیقی عدد ہو کہ مرکز a سے ہر ایسے نقطے کا فاصلہ زیادہ سے زیادہ R ہو۔(مثال کے طور پر مثال 18.1 میں $R = 1$ ہے۔) تب مسئلہ 18.1 کے تحت رداس R کے دائرہ جس کا مرکز a ہو میں تمام z پر تسلسل مرتکز ہو گا یعنی ان تمام z پر جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

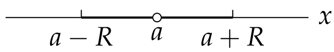
$$|z-a| < R \tag{18.4}$$

اور R کی تعریف کے تحت ان تمام z پر جو

$$|z-a| > R$$



(الف) دائرہ ارتکاز



(ب) حقیقی طاقتی تسلسل کا ارتکازی وقفہ

شکل 18.1: دائرہ ارتکاز اور وقفہ ارتکاز

کو مطمئن کرتے ہوں، تسلسل منفرج ہو گا۔ دائرہ

$$|z-a| = R$$

کو **دائرہ ارتکاز**[5] کہتے ہیں جبکہ R کو **رداس ارتکاز**[6] کہتے ہیں (شکل 18.1-الف)۔

دائرہ مرکوزیت کے نقطوں پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر مثال 18.1 میں $R = 1$ ہے اور دائرہ مرکوزیت $|z| = 1$ کے ہر نقطہ پر تسلسل منفرج ہے۔ طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$$

تناسبی آزمائش کے تحت $|z| < 1$ پر مرتکز اور $|z| > 1$ پر منفرج ہے۔ عین $z = 1$ پر یہ ہارمونی تسلسل کی صورت اختیار کرتا ہے جو منفرج ہے جبکہ $z = -1$ پر یہ $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \cdots$ صورت اختیار کرتا ہے جو مرتکز ہے (مثال 17.3)۔ آپ نے دیکھا کہ دائرہ مرکوزیت کے کچھ نقطوں پر تسلسل مرتکز اور کچھ نقطوں پر تسلسل منفرج ہو سکتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم حقیقی طاقتی تسلسل مساوات 18.1 کی بات کی جائے جس کے عددی سر اور مرکز حقیقی ہوں اور متغیرہ $z = x$ ہو تب x محور پر مساوات 18.4 **ارتکازی وقفہ**[7] کو ظاہر کرے گا جس کی لمبائی $2R$ اور درمیانہ نقطہ $x = a$ ہو گا (شکل 18.1-ب)۔

اگر طاقتی تسلسل مساوات 18.1 تمام z پر (مثال 18.2 کی طرح) مرتکز ہو تب ہم

$$R = \infty \qquad \text{اور} \qquad \frac{1}{R} = 0$$

convergence circle[5]
convergence radius[6]
interval of convergence[7]

لکھتے ہیں اور اگر تسلسل (مثال 18.3 کی طرح) صرف مرکز $z=a$ پر مرتکز ہو تب ہم

$$\frac{1}{R}=\infty \quad \text{اور} \quad R=0$$

لکھتے ہیں۔ان روایات کو استعمال کرتے ہوئے ارتکاز کے رداس R کو تسلسل کی عددی سروں سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

مسئلہ 18.2: ارتکاز کا رداس
اگر ترتیب $\sqrt[n]{\lvert c_n\rvert},\; n=1,2,\cdots$ مرتکز ہو اور اس کا حد L ہو، تب طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کا رداس ارتکاز R درج ذیل ہو گا

$$R=\frac{1}{L} \tag{18.5}$$

جو $L=0$ کی صورت میں $R=\infty$ دے گا اور تسلسل (مساوات 18.1) تمام z کے لئے مرتکز ہو گا۔

اگر یہ ترتیب مرکوز نہ ہو لیکن محدود ہو، تب

$$R=\frac{1}{l} \tag{18.6}$$

ہو گا جہاں ترتیب کے تحدیدی نقطوں میں سب سے بڑا تحدیدی نقطہ l ہے۔

اگر یہ ترتیب غیر محدود ہو، تب $R=0$ ہو گا اور تسلسل صرف $z=a$ پر مرتکز ہو گا۔

ثبوت: اگر

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert c_n\rvert}=L\neq 0$$

ہو تب

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert c_n(z-a)^n\rvert}=\lvert z-a\rvert\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert c_n\rvert}=\lvert z-a\rvert L$$

ہو گا۔چونکہ تسلسل (مساوات 18.1) کے اجزاء $w_n=c_n(z-a)^n$ ہیں لہٰذا جذری آزمائش (حصہ 17.5) کے تحت

$$\lvert z-a\rvert<\frac{1}{L}=R \quad \text{یا} \quad \lvert z-a\rvert L<1$$

کی صورت میں تسلسل حتمی مرتکز ہو گا جبکہ

$$|z-a| > \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z-a|\, L > 1$$

کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔اگر

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L = 0$$

ہو تب حد کی تعریف کے تحت کسی بھی $\epsilon > 0$ مثلاً $\epsilon = \frac{1}{2|z_1-a|}$ کے لئے جہاں z_1 مستقل ہے، ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_1-a|} \qquad (\text{ہر } n > N)$$

اس سے ہمیں

$$|c_n| < \frac{1}{(2|z_1-a|)^n} \quad \implies \quad \left|c_n(z_1-a)^n\right| < \frac{1}{2^n}$$

ملتا ہے۔اب چونکہ $\sum 2^{-n}$ مرتکز ہے لہٰذا تقابلی آزمائش (حصہ 17.5) کے تحت $z = z_1$ کے لئے تسلسل (مساوات 18.1) حتمی مرتکز ہے۔چونکہ z_1 اختیاری ہے لہٰذا تسلسل ہر z کے لئے حتمی مرتکز ہے۔یوں مساوات 18.5 کا ذکر کرنے والے فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ہم اب اس فقرے کو ثابت کرتے ہیں جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتا ہے۔ مسئلہ بُلزانو وائشٹراس 17.6 کے تحت l موجود ہو گا اور چونکہ $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$ ہے لہٰذا $l > 0$ ہو گا۔حد کی تعریف کے تحت کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے n کی لامتناہی تعداد کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$l-\epsilon < \sqrt[n]{|c_n|} < l+\epsilon \qquad n \text{ کی لامتناہی تعداد}$$

اس کو مثبت مقدار $|z-a|$ سے ضرب دینے سے عدم مساوات

$$|z-a|\,(l-\epsilon) < \sqrt[n]{\left|c_n(z-a)^n\right|} \tag{18.7}$$

اور

$$\sqrt[n]{\left|c_n(z-a)^n\right|} < |z-a|\,(l+\epsilon) < \tag{18.8}$$

حاصل ہوتی ہیں۔چونکہ l سب سے بڑا تحدیدی نقطہ ہے لہٰذا عدم مساوات 18.8 کے دائیں ہاتھ سے بڑے اجزاء کی تعداد متناہی ہو گی اور یوں کافی بڑے تمام n، مثلاً $n > N$، کے لئے بھی عدم مساوات 18.8 مطمئن ہو گی۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$|z-a| < \frac{1}{l} \tag{18.9}$$

کے لئے طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کا ارتکاز عدم مساوات 18.8 سے ثابت ہوتا ہے۔در حقیقت، اگر ہم درج ذیل منتخب کریں

$$\epsilon = \frac{1-l|z-a|}{2|z-a|}$$

تب مساوات 18.9 کے تحت $\epsilon > 0$ ہو گا اور عدم مساوات 18.8 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < \frac{1+l|z-a|}{2} \qquad (n > N)$$

مساوات 18.9 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں ہاتھ اکائی سے کم ہے لہٰذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل مرتکز ہو گا۔اس کے برعکس اگر

$$|z-a| > \frac{1}{l}$$

ہو تب

$$\epsilon = \frac{l|z-a|-1}{2|z-a|}$$

منتخب کرتے ہوئے $\epsilon > 0$ حاصل ہو گا اور عدم مساوات 18.7 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > \frac{|z-a|\,l+1}{2} > 1$$

یوں جذری آزمائش کے تحت ان z کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔یوں اس فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتی ہے۔

آخر میں اگر ترتیب $\sqrt[n]{|c_n|}$ غیر محدود ہو، تب، انفراج کی تعریف کے تحت، کسی بھی K کے لئے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > K \qquad n \text{ کی لامتناہی تعداد کے لئے}$$

ہو گا۔ہم $K=\frac{1}{|z-a|}$ منتخب کرتے ہیں جہاں $z \neq a$ ہے اور یوں عدم مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z-a|} \quad \implies \quad \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1$$

لہٰذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔یوں اس مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب طاقتی تسلسل کے مجموعہ اور ان کی تفریق پر غور کرتے ہیں۔

دو طاقتی تسلسل کو جزو در جزو ان تمام z کے لئے جمع کیا جا سکتا ہے جن پر دونوں تسلسل مرتکز ہوں۔ یہ نتیجہ مسئلہ 17.18 سے اخذ ہوتا ہے۔

آئیں دو طاقتی تسلسل

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_1 + c_1 z + \cdots \tag{18.10}$$

کی جزو در جزو ضرب پر غور کرتے ہیں۔بائیں تسلسل کی ہر جزو کو دائیں تسلسل کی ہر جزو سے ضرب دے کر z کی ایک جیسی طاقتوں کو یکجا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)z + (a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0)z^2 + \cdots \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \cdots + z_nc_0)z^n \end{aligned} \tag{18.11}$$

ملتا ہے۔اس کو مساوات 18.10 میں دی گئی تسلسلوں کا **کوشی حاصل ضرب**[8] کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.3: **طاقتی تسلسلوں کا کوشی حاصل ضرب**
مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کی دائرہ ارتکاز کے اندر ہر z کے لئے کوشی حاصل ضرب (مساوات 18.11) حتمی مرتکز ہو گا۔اگر ان تسلسلوں کے مجموعے بالترتیب $g(z)$ اور $h(z)$ ہوں تب کوشی حاصل ضرب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$s(z) = g(z)h(z) \tag{18.12}$$

[8] Cauchy product

ثبوت : کوشی حاصل ضرب(مساوات 18.11) کا عمومی جزو

$$p_n = (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \cdots + z_nc_0)z^n$$

ہے۔اب عمومی تکونی عدم مساوات 14.26 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} |p_0| + |p_1| &= |a_0c_0| + |(a_0c_1 + a_1c_0)z| \leq (|a_0| + |a_1z|)(|c_0| + |c_1z|), \\ |p_0| + |p_1| + |p_2| &\leq (|a_0| + |a_1z| + \left|a_2z^2\right|)(|c_0| + |c_1z| + \left|c_2z^2\right|), \end{aligned}$$

جس کی تصدیق آپ دائیں ہاتھ ضرب حاصل کرتے ہوئے کر سکتے ہیں؛ اسی طرح درج ذیل عمومی عدم مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} (18.13) \quad & |p_0| + |p_1| + \cdots + |p_n| \\ & \leq (|a_0| + |a_1z| + \cdots + |a_nz^n|)(|c_0| + |c_1z| + \cdots + |c_nz^n|) \end{aligned}$$

اگر z مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کے دائرہ ارتکاز کے اندر پایا جاتا ہو، تب عدم مساوات 18.13 کا دایاں ہاتھ محدود ہو گا لہٰذا جزوی مجموعوں کی ترتیب کا مجموعہ $|p_0| + |p_1| + \cdots$ بھی محدود ہو گا۔چونکہ $|p_n| \geq 0$ ہے لہٰذا یہ ترتیب یک سر بڑھتا ترتیب ہو گا اور مسئلہ 17.10 کے تحت مرتکز ہو گا۔یوں یہ تسلسل مرتکز ہے اور حاصل ضرب تسلسل (مساوات 18.11) حتمی مرتکز ہو گا۔

ہم اب مساوات 18.12 کو ثابت کرتے ہیں۔ ہم اس حقیقت کو بروئے کار لاتے ہیں کہ مساوات 18.11 کی ہر ردوبدل ان z کے لئے حتمی مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ مساوات 18.12 دیتی ہے (مسئلہ 17.20)۔ہم ان میں سے ایک مخصوص ردوبدل $p_0^* + p_1^* + \cdots$ پر غور کرتے ہیں جہاں p_n^* درج ذیل ہے۔

$$(a_nc_0 + a_0c_n)z^n + (a_nc_1 + a_1c_n)z^{n+1} + \cdots + (a_nc_{n-1} + a_{n-1}c_n)z^{2n-1} + a_nc_nz^{2n}$$

ظاہر ہے کہ

$$a_0c_0 = p_0^*, \quad (a_0 + a_1z)(c_0 + c_1z) = p_0^* + p_1^*$$

اور عمومی جزو

$$(a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n)(c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n) = p_0^* + p_1^* + \cdots p_n^*$$

ہیں۔اب n کو لامتناہی تک پہنچانے سے مساوات 18.12 حاصل ہوتی ہے۔یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 18.4: **کوشی حاصل ضرب**
ہندسی تسلسل $1 + z + z^2 + \cdots$ کا $|z| < 1$ کی صورت میں **مجموعہ** $\frac{1}{1-z}$ ہے (حصہ 17.5)۔ مسئلہ 18.3 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^m = (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z + z^2 + \cdots)$$
$$= 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \qquad (|z| < 1)$$

□

سوالات

سوال 18.1: اگر ترتیب $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$، جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے، مرتکز ہو اور اس کا حد L ہو تب دکھائیں کہ طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کی ارتکاز کے دائرے کا رداس، $L > 0$ کی صورت میں $R = \frac{1}{L}$ ہو گا جبکہ $L = 0$ کی صورت میں $R = \infty$ ہو گا۔

سوال 18.2: اگر مساوات 18.2 میں دی گئی تسلسل کی ارتکاز کا رداس (جو متناہی تصور کیا گیا ہو) R ہے، تب دکھائیں کہ $\sum c_m z^{2m}$ کی ارتکاز کا رداس $\sqrt{R}$ ہو گا۔

سوال 18.3 تا سوال 18.18 میں ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

سوال 18.3: $\sum_{n=0}^{\infty} (z - i2)^n$
جواب: 1

سوال 18.4: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^n}$

سوال 18.5: $\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{z}{3}\right)^n$
جواب: 3

سوال 18.6: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}$

سوال 18.7: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$
جواب: ∞

سوال 18.8: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

سوال 18.9: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$
جواب: ∞

سوال 18.10: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n$

سوال 18.11: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$
جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 18.12: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

سوال 18.13: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
جواب: ∞

سوال 18.14: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

سوال 18.15: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 6^n (z-i)^n$
جواب: $\frac{1}{6}$

سوال 18.16: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!)^2 z^n$

سوال 18.17: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{2n} z^n$
جواب: $\frac{1}{9}$

سوال 18.18: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{2^n} z^n$

سوال 18.19: اگر $\sum c_n z^n$ تمام متناہی z کے لئے مرتکز ہو تب دکھائیں کہ $n \to \infty$ کے لئے $\sqrt[n]{|c_n|} \to 0$ ہو گا۔ کوئی مثال پیش کریں۔

سوال 18.20: ارتکاز کے دائرے پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔ ہندسی تسلسل کے لئے اس حقیقت کو دکھائیں۔

18.2 طاقتی تسلسل کی روپ میں تفاعل

اس حصے میں ہم دکھائیں گے کہ طاقتی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں۔ اس کا الٹ یعنی ہر تحلیلی تفاعل کو طاقتی تسلسل (جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے کو اگلے حصے میں ثابت کیا جائے گا۔ ان دو وجوہات کی بنا طاقتی تسلسل مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ اختیاری طاقتی تسلسل ہے جس کی ارتکاز کا رداس R غیر صفر ہے۔ تب اس تسلسل کا مجموعہ z کا تفاعل ہو گا مثلاً $f(z)$ جس کو ہم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{18.14}$$

لکھتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $f(z)$ کو طاقتی تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ مثال کے طور پر اکائی دائرہ $|z| = 1$ کے اندر ہندسی تسلسل تفاعل $f(z) = \frac{1}{1-z}$ کو ظاہر کرتی ہے (مسئلہ 17.13)۔

مسئلہ 18.4: استمرار
$R > 0$ کی صورت میں $z = 0$ پر مساوات 18.14 میں تفاعل $f(z)$ استمراری ہے۔

ثبوت: ہم درج ذیل دکھانا چاہتے ہیں۔

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = c_0 \tag{18.15}$$

ہم اختیاری مثبت عدد $r < R$ منتخب کرتے ہیں۔چونکہ مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل قرص $|z| < R$ میں حتمی مرتکز ہے لہٰذا درج ذیل تسلسل مرتکز ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, r^n \qquad (0 < r < R)$$

فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ K ہے۔تب ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\left|f(z) - c_0\right| = \left|z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}\right| \le |z| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |z|^{n-1} \le |z|\, K \qquad (0 < |z| \le r)$$

اب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے، ان تمام z پر جو $|z| < \sigma$ کو مطمئن کرتے ہوں جہاں σ ایسا حقیقی مثبت عدد ہے جو r اور $\frac{\epsilon}{K}$ دونوں سے چھوٹا ہو، $\left|f(z) - c_0\right| < \epsilon$ ہو گا۔یوں حد کی تعریف کے تحت مساوات 18.15 مطمئن ہو گا لہٰذا مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب یکتائی پر غور کرتے ہیں۔ہم دکھائیں گے کہ ایک ہی تفاعل $f(z)$ کو ایک ہی مرکز والے دو مختلف طاقتی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہو گا۔اگر $f(z)$ کو مرکز a کی طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جائے تب ایسا تسلسل یکتا ہو گا۔اس اہم حقیقت کی حقیقی اور مخلوط تجزیہ میں عموماً ضرورت پیش آتی ہے۔ہم اس کو درج ذیل مسئلہ میں پیش کرتے ہیں (جہاں عمومیت کھوئے بغیر $a = 0$ تصور کیا گیا ہے)۔

مسئلہ 18.5: طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثلت

فرض کریں کہ مثبت R کے لئے تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{اور} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$|z| < R$ پر مرتکز ہیں اور ان تمام z پر ان کا مجموعہ ایک جیسا ہے۔تب دونوں تسلسل مماثل ہوں گے یعنی تمام n کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$a_n = b_n \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{18.16}$$

ثبوت : ہم الکراجی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{18.17}$$

z کو صفر تک پہنچانے سے مسئلہ 18.4 کے تحت $a_0 = b_0$ ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $n = 0, 1, \cdots, m$ کے لئے $a_n = b_n$ ہیں۔تب مساوات 18.17 میں دونوں ہاتھ ابتدائی $m + 1$ اجزاء حذف کرنے کے بعد $(\neq 0)$ z^{m+1} سے تقسیم کرتے ہوئے

$$a_{m+1} + a_{m+2}z + a_{m+3}z^2 + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2}z + b_{m+3}z^2 + \cdots$$

ملتا ہے۔ مسئلہ 18.4 کے تحت دونوں میں سے ہر ایک تسلسل $z = 0$ پر استمراری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $a_{m+1} = b_{m+1}$ ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اب طاقتی تسلسل کی جزو در جزو تفرق اور تکمل لینے پر غور کرتے ہیں۔تسلسل $c_1 + c_1z + c_2z^2 + \cdots$ کا تفرق لینے سے درج ذیل تسلسل حاصل ہوتی ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_nz^{n-1} = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \cdots \tag{18.18}$$

اس کو طاقتی تسلسل کی **تفرقی تسلسل**[9] کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.6: جزو در جزو تفرق
تفرقی تسلسل کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

ثبوت : فرض کریں کہ $nc_n = c_n^*$ ہے۔تب $\sqrt[n]{|c_n^*|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|}$ ہو گا۔چونکہ $n \to \infty$ کرنے سے $\sqrt[n]{n} \to 0$ ہو گا لہٰذا یا دونوں ترتیب $\sqrt[n]{|c_n^*|}$ اور $\sqrt[n]{|c_n|}$ مرتکز ہوں گے اور ان کا ایک ہی حد ہو گا اور یا دونوں ترتیب منفرج ہوں گے۔اگر دونوں ترتیب منفرج ہوں، تب دونوں یا غیر محدود ہوں گے یا دونوں محدود ہوں گے۔اگر دونوں محدود ہوں تب ان کے سب سے بڑے تحدیدی نقطے ایک جیسے ہوں گے۔ یوں اس سے اور مسئلہ 18.2 سے موجودہ مسئلے کا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔

□

---

[9] derived series

مثال 18.5: طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$$

کی ارتکاز کا رداس $R=1$ ہے۔ہندسی تسلسل کا تفرق لے کر مسئلہ 18.6 کی اطلاق سے ایسا حاصل ہوتا ہے۔ $\square$

مسئلہ 18.7: **جزو در جزو تکمل**
تسلسل $c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$ کا جزو در جزو تکمل لینے سے حاصل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}=c_0z+\frac{c_1}{2}z^2+\frac{c_2}{3}z^3+\cdots$$

کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

اس مسئلہ کا ثبوت مسئلہ 18.6 کی ثبوت کی طرح ہے۔

طاقتی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں اور تفرقی تسلسل (جو تسلسل کا جزو در جزو تفرق لے کر حاصل کیا جاتا ہے) ان تفاعل کی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں۔

مسئلہ 18.8: **تحلیلی تفاعل۔ ان کے تفرق**
غیر صفر رداس ارتکاز R والی طاقتی تسلسل دائرہ ارتکاز کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ان تفاعل کے بلند درجی تفرق حاصل کرنے کی خاطر اصل طاقتی تسلسل کے جزو در جزو تفرق لیے جاتے ہیں؛یوں حاصل تمام تسلسلوں کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس جیسا ہو گا۔

ثبوت: ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ کسی بھی عددی صحیح $n\geq 2$ کے لئے

$$\text{(الف)}\quad \frac{b^n-a^n}{b-a}-na^{n-1}=(b-a)A_n \tag{18.19}$$

ہو گا جہاں

$$\text{(ب)}\quad A_n=b^{n-2}+2ab^{n-3}+3a^2b^{n-4}+\cdots+(n-1)a^{n-2}$$

ہے۔ہم الکراجی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔سادہ حساب سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 2$ کے لئے مساوات 18.19 مطمئن ہوتی ہیں۔فرض کریں کہ $n = k$ کے لئے مساوات 18.19 مطمئن ہوتی ہیں۔ہم دکھاتے ہیں کہ یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی یہ مساوات مطمئن ہوں گی۔ ہم $n = k + 1$ کے لئے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = \frac{b^{k+1} - ba^k + ba^k - a^{k+1}}{b - a} = b\frac{b^k - a^k}{b - a} + a^k$$

مساوات 18.19-الف کے تحت دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا

$$b[(b - a)A_k + ka^{k-1}] + a^k$$

جس کو

$$(b - a)[bA_k + ka^{k-1}] + ka^k + a^k$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $n = k$ لیتے ہوئے چکور قوسین میں بند حصے کو مساوات 18.19-ب سے

$$b^{k-1} + 2ab^{k-2} + \cdots + (k - 1)b^{k-2} + ka^{k-1} = A_{k+1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ہمیں

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = (b - a)A_{k+1} + (k + 1)a^k$$

ملتا ہوتا ہے جو $n = k + 1$ لیتے ہوئے مساوات 18.19 ہے۔اس طرح کسی بھی $n \geq 2$ کے لئے مساوات 18.19 ثابت ہوتا ہے۔

ہم اب مسئلہ 18.8 کے فقروں کو ثابت کرتے ہیں۔درج ذیل روپ پر غور کریں۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

فرض کریں کہ اس کی ارتکاز کا رداس R غیر صفر ہے۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی بھی مقررہ z جہاں $|z| < R$ ہے کے لئے $\Delta z \to 0$ کرنے سے $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ کی قیمت تفرقی تسلسل مساوات 18.18 تک پہنچتی ہے جس کو ہم $f_1(z)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔جزو در جزو مجموعہ لے کر

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n\Big[\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1}\Big]$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 18.19 میں $b = z + \Delta z$ ، $a = z$ اور $b - a = \Delta z$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا تسلسل

$$\Delta z \sum_{n=2}^{\infty} c_n[(z+\Delta z)^{n-2} + 2z(z+\Delta z)^{n-3} + \cdots + (n-1)z^{n-2}]$$

لکھا جا سکتا ہے اور $|z| \le R_0$ اور $|z + \Delta z| \le R_0$ جہاں $R_0 < R$ ہے کے لئے اس کی حتمی قیمت درج ذیل سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے

$$|\Delta z| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n|\, n(n-1)R_0^{n-2} \tag{18.20}$$

جہاں عددی سر $1, 2, \cdots, n-1$ میں سب سے بڑا عددی سر $n-1$ ہے اور اجزاء کی تعداد n ہے۔ مساوات 18.20 میں دیا گیا تسلسل دوسری تفرقی تسلسل کے ساتھ R_0 پر قریبی تعلق رکھتا ہے۔بلکہ اس تفرقی مساوات کے عددی سر c_n ہیں (جبکہ مساوات 18.20 کے تسلسل کے عددی سر $|c_n|$ ہیں) اور مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.1 کے تحت $R_0\,(< R)$ پر حتمی مرتکز ہے۔ اس سے مراد مساوات 18.20 کے تسلسل کی R_0 پر مرکوزیت ہے؛ فرض کریں کہ اس کی قیمت $K(R_0)$ ہے، تب ہمارا نتیجہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left|\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z)\right| \le |\Delta z|\, K(R_0)$$

$\Delta \to 0$ لیتے ہوئے اور جانتے ہوئے کہ $R_0\,(< R)$ اختیاری ہے، ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دائرہ ارتکاز کے اندر کسی بھی نقطہ پر $f(z)$ تحلیلی ہو گا اور اس کے تفرق کو تفرقی تسلسل ظاہر کرے گا۔اس سے بلند درجی تفرق کا فقرہ الکراجی ماخوذ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔یوں مسئلہ 18.8 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 18.8 سے ہم دیکھتے ہیں کہ $f(z)$ (مساوات 18.14) کا m واں تفرق $f^{(m)}(z)$ درج ذیل ہو گا۔

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)c_n z^{n-m} \qquad (|z| < R) \tag{18.21}$$

اگلے حصے میں ہم دیکھیں گے کہ ہر تحلیلی تفاعل کو طاقتی تسلسل ظاہر کر سکتا ہے۔

سوالات

سوال 18.21: اگر مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل جفت ہو تب ثابت کریں کہ طاق n کے c_n صفر ہوں گے۔ (مسئلہ 18.5 استعمال کریں۔)

سوال 18.22: اگر مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل طاق ہو تب ثابت کریں کہ جفت n کے c_n صفر ہوں گے۔ مثال پیش کریں۔

سوال 18.23: مسئلہ 18.5 کا اطلاق $(1+z)^p(1+z)^q = (1+z)^{p+q}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں جہاں p اور q مثبت عدد صحیح ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} \binom{q}{r-n} = \binom{p+q}{r}$$

سوال 18.24: ہندسی تسلسل کے لئے مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.7 کی تصدیق کریں۔

ہندسی تسلسل پر مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.7 کے اطلاق سے سوال 18.25 تا سوال 18.30 میں دیے تسلسل کی ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

سوال 18.25: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}(z-i)^n$
جواب: 5

سوال 18.26: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n}$

سوال 18.27: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n}(z+i2)^n$
جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 18.28:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

سوال 18.29:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1} z^{n+k}$$

جواب: 1

سوال 18.30:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1} \left(\frac{z}{3}\right)^{n}$$

18.3 ٹیلر تسلسل

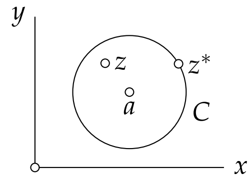
حقیقی علم الاحصاء میں ٹیلر تسلسل انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے۔ہم اب دیکھیں گے کہ مخلوط تجزیہ میں اس کی عمومی صورت پائی جاتی ہے جو اس سے بھی زیادہ اہم ہے۔

آئیں نقطہ $z=a$ کی پڑوس میں تحلیلی تفاعل $f(z)$ پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ اس پڑوس میں دائرہ C پایا جاتا ہے جس کا مرکز a ہے۔ہم z_0 اور z کی جگہ بالترتیب z اور z^* لکھتے ہوئے کوشی کا کلیہ تکمل (مساوات 16.31) استعمال کرتے ہیں

$$f(z)=\frac{1}{i2\pi}\int\limits_{C}\frac{f(z^*)}{z^*-z}\,\mathrm{d}z^* \tag{18.22}$$

جہاں C کے اندر z اختیاری مقررہ نقطہ ہے اور z^* مخلوط تکمل کا متغیرہ ہے (شکل 18.2)۔ہم اب مساوات 18.22 میں $\frac{1}{z^*-z}$ کی طاقتی تسلسل $z-a$ کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔ہم پہلے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{z^*-z}=\frac{1}{z^*-a-(z-a)}=\frac{1}{(z^*-a)\left(1-\frac{z-a}{z^*-a}\right)} \tag{18.23}$$



شکل 18.2: شکل برائے مساوات 18.22

چونکہ z^* دائرہ C پر پایا جاتا ہے جبکہ z دائرے کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا

$$\left|\frac{z-a}{z^*-a}\right| < 1 \tag{18.24}$$

ہو گا۔

ہندسی تسلسل سے

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+\cdots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $q=\frac{z-a}{z^*-a}$ پر کرنے سے

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{z^*-a}} = 1+\frac{z-a}{z^*-a}+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^n+\frac{\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^{n+1}}{\frac{z-a}{z^*-a}}$$

ملتا ہے۔ہم اس کو مساوات 18.23 میں پر کرنے کے بعد مساوات 18.23 کو مساوات 18.22 میں پر کرتے ہیں۔ چونکہ z اور a مستقل ہیں لہٰذا ہم $z-a$ کی طاقتوں کو تکمل کی علامت سے باہر نکال سکتے ہیں۔یوں مساوات 18.22 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{z^*-a}\,\mathrm{d}z^* + \frac{z-a}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^2}\,\mathrm{d}z^* + \cdots \\ + \frac{(z-a)^n}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z^* + R_n(z) \end{aligned} \tag{18.25}$$

جہاں آخری جزو درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{i2\pi} \int\limits_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)} \, \mathrm{d}z^* \tag{18.26}$$

مساوات 16.36 استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 18.25 کو

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(z) \tag{18.27}$$

لکھ سکتے ہیں جو کلیہ ٹیلر[10] کہلاتا ہے جبکہ $R_n(z)$ کو باقی کہتے ہیں۔چونکہ تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا ہر درجے کا تفرق پایا جاتا ہے لٰہذا ہم مساوات 18.27 میں n جتنا چاہیں بڑا لے سکتے ہیں۔مساوات 18.27 میں $n \to \infty$ کرنے سے

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (z-a)^m \tag{18.28}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 18.28 کو $f(z)$ کا **ٹیلر تسلسل**[11] کہتے ہیں جس کا مرکز a ہے۔اس کی وہ مخصوص صورت جس میں $a = 0$ ہو $f(z)$ کا **مکلارن تسلسل**[12] کہلاتا ہے۔

ظاہر ہے کہ مساوات 18.28 میں دیا گیا تسلسل اس صورت مرتکز ہو گا اور $f(z)$ کو ظاہر کرے گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{n \to \infty} R_n(z) = 0 \tag{18.29}$$

مساوات 18.29 کو ثابت کرنے کی خاطر ہم مساوات 18.26 پر غور کرتے ہیں۔چونکہ z^* دائرہ C پر ہے جبکہ z اس دائرے کے اندر ہے لٰہذا $|z^* - z| > 0$ ہو گا۔چونکہ $f(z)$ دائرہ C پر اور اس دائرے کے اندر تحلیلی ہے لٰہذا $\frac{f(z^*)}{z^*-z}$ کی حتمی قیمت محدود ہو گی، مثلاً C پر تمام z^* کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left| \frac{f(z^*)}{z^*-z} \right| < \tilde{M}$$

Taylor's formula[10]
Taylor series[11]
Maclaurin series[12]

فرض کریں کہ C کا رداس r ہے۔تب C پر تمام z^* کے لئے $r = |z^* - a|$ ہو گا جبکہ C کی لمبائی $2\pi r$ ہو گی۔یوں مساوات 18.26 پر مساوات 16.16 کا اطلاق کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
|R_n| &= \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}\,\mathrm{d}z^*\right| \\
&< \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\tilde{M}\frac{1}{r^{n+1}}2\pi r = \tilde{M}r\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1}
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔اب n کی قیمت لامتناہی تک پہنچانے سے دایاں ہاتھ، مساوات 18.24 کے تحت، صفر تک پہنچے گا۔یوں C کے اندر تمام z کے لئے مساوات 18.29 ثابت ہوتا ہے۔چونکہ مسئلہ 18.5 کے تحت $f(z)$ کا مساوات 18.28 کی روپ میں اظہار یکتا ہے، یعنی مساوات 18.28 وہ واحد طاقتی تسلسل ہے جس کا مرکز a ہے اور جو $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا ہم حاصل نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ کو صورت میں بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 18.9: **مسئلہ ٹیلر**

فرض کریں کہ دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے اور D میں $z = a$ کوئی نقطہ ہے۔تب ایسا واحد ایک طاقتی تسلسل موجود ہو گا جس کا مرکز a ہو اور جو $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہو؛ اس تسلسل کی روپ

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \tag{18.30}
$$

ہے جہاں

$$
b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \qquad n = 0, 1, \cdots
$$

ہے؛ D میں اس بڑے سے بڑے کھلے قرص جس کا مرکز a ہو میں یہ تسلسل کارآمد ہو گا۔مساوات 18.30 کے باقی $R_n(z)$ کو مساوات 18.26 ظاہر کرتی ہے۔ تسلسل کے عددی سر عدم مساوات

$$
|b_n| \le \frac{M}{r^n} \tag{18.31}
$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں دائرہ $|z-a| = r$ پر $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت M ہے۔

کوشی عدم مساوات 16.39 سے عدم مساوات 18.31 حاصل ہوتی ہے۔

عملاً مساوات 18.29 کہتی ہے کہ ان تمام z کے لئے جن پر مساوات 18.30 منفرج ہو، مساوات 18.30 کے n ویں جزوی مجموعہ کی قیمت $f(z)$ کی قیمت کے اتنی قریب ہو گی جتنا درکار ہو، پس ہمیں n اتنا بڑا لینا ہو گا۔

ہم مسئلہ ٹیلر سے دیکھتے ہیں کہ مساوات 18.30 کی ارتکاز کا رداس کم از کم a سے D کی سرحد تک کم سے کم فاصلہ جتنا ہو گا۔اگرچہ رداس ارتکاز اس سے بڑا ہو سکتا ہے لیکن تب D کی ان تمام نقطوں پر جو ارتکاز کے دائرے کے اندر پائے جاتے ہوں پر ضروری نہیں ہے کہ تسلسل $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہو۔

مخلوط تحلیلی تفاعل کی ایک انوکھی خاصیت یہ ہے کہ ان کی ہر درجے کے تفرق پائے جاتے ہیں اور اب ہم نے ان کی دوسری انوکھی خاصیت دریافت کی ہے کہ ان کو ہر صورت مساوات 18.30 میں دی گئی طاقتی تسلسل کی روپ میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ حقیقی تفاعل کے لئے عموماً ایسا درست نہ ہو گا۔ایسے حقیقی تفاعل پائے جاتے ہیں جن کے ہر درجے کے تفرق پائے جاتے ہیں لیکن انہیں طاقتی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہے؛ مثلاً $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ جب $x \neq 0$ ہو اور $f(z) = 0$ جب $x = 0$ ہو۔

ہماری موجودہ اور گزشتہ حصے کے طاقتی تسلسل کے تبصروں کے مابین درج ذیل مسئلہ تعلق پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 18.10: غیر صفر ارتکاز کے رداس والا ہر وہ طاقتی تسلسل جو تفاعل کو ظاہر کرتا ہے، اس تفاعل کا ٹیلر تسلسل ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ درج ذیل طاقتی تسلسل کا غیر صفر رداس ارتکاز R ہو۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

تب یہ قرص $|z-a| < R$ میں کسی تفاعل $f(z)$ کو ظاہر کرے گا یعنی:

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots$$

مسئلہ 18.8 کے تحت

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z-a) + \cdots$$

اور

$$f^{(n)}(z) = n! b_n + (n+1)n \cdots 3 \cdot 2 \cdot b_{n+1}(z-a) + \cdots$$

ہو گا اور یہ تمام تسلسل قرص $|z-a| < R$ میں مرتکز ہوں گے اور تحلیلی تفاعل کو ظاہر کریں گے۔یوں یہ تفاعل $z=a$ پر استمراری ہوں گے۔یوں $z=a$ لیتے ہوئے

$$f(a)=b_0, \quad f'(a)=b_1, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(a)=n!b_n, \cdots$$

ملتے ہیں۔ چونکہ یہ کلیات مسئلہ ٹیلر کے کلیات کے عین مطابق ہیں لہٰذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

وہ نقطہ جس پر تفاعل $f(z)$ غیر تحلیلی صورت اختیار کرتا ہو $f(z)$ کا **نادر نقطہ**[13] کہلاتا ہے؛ ہم کہتے ہیں کہ اس نقطہ پر $f(z)$ کی ندارت پائی جاتی ہے۔یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ وہ نقطہ $z=z_0$ جس پر $f(z)$ قابل تفرق نہ ہو لیکن z_0 کے ہر پڑوس میں $f(z)$ قابل تفرق ہو تب z_0 کو $f(z)$ کا **نادر نقطہ** کہیں گے۔

اس تصور کے تحت دائرہ ارتکاز[14] پر $f(z)$ (کی طاقتی تسلسل مساوات 18.30) کا کم از کم ایک نادر نقطہ پایا جائے گا۔

ٹیلر تسلسل کی عملی استعمال سے پہلے مختلف مرکزی نقطوں کے گرد تسلسل کی تصور اور تحلیلی استمرار کی تصور پر بھی بات کرتے ہیں۔فرض کریں غیر صفر رداس ارتکاز R کے تفاعل $f(z)$ کا $z-a$ طاقتوں کا طاقتی تسلسل دیا گیا ہے جس کے مجموعہ کو ہم $f(z)$ سے ظاہر کرتے ہیں یعنی؛

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \tag{18.32}$$

مسئلہ 18.8 سے ہم جانتے ہیں کہ قرص $|z-a|<R$ میں $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔مسئلہ 18.10 کے تحت مساوات 18.32 تفاعل $f(z)$ کا ایسا ٹیلر تسلسل ہو گا جس کا مرکز a ہے۔ہم اس قرص میں کوئی نقطہ b منتخب کرتے ہوئے مسئلہ ٹیلر کی مدد سے $f(z)$ کے لئے

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n \tag{18.33}$$

---

[13] singular point

[14] مساوات 18.30 کا رداس ارتکاز عموماً a سے $f(z)$ کے قریب ترین نادر نقطے تک فاصلے کے برابر ہو گا، لیکن اس سے زیادہ بھی ہو سکتا ہے؛ مثال کے طور پر $\operatorname{Ln} z$ منفی حقیقی محور پر نادر ہے اور $a=-1+i$ سے اس منفی محور تک فاصلہ 1 ہے لیکن $\operatorname{Ln} z$ کا ٹیلر تسلسل جس کا مرکز $a=-1+i$ ہو کی ارتکاز کا رداس $\sqrt{2}$ ہے۔

شکل 18.3: مختلف مرکز کے گرد طاقتی تسلسل کا حصول اور تحلیلی استمرار

حاصل کرتے ہیں جس کے عددی سر مساوات 18.32 کے تفرق میں $z = b$ پر کرنے سے حاصل ہوں گے:

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(b) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{n}{k} a_k (b-a)^{k-n}$$

یہ نئی تسلسل کم از کم قرص $|z-b| < R - |b|$ میں کارآمد ہو گی (شکل 18.3-الف)۔البتہ کئی بار مساوات 18.33 کی ارتکاز کا رداس $R - |b|$ سے بڑا ہو گا (شکل 18.3-ب) لٰہذا مساوات 18.33 تفاعل $f(z)$ کو قرص $|z-a| < R$ کے باہر وسعت دے گی (شکل 18.3-ب میں سیاہ خطہ)۔کسی ارتکازی خطے میں ایک تحلیلی تفاعل کی دی گئی طاقتی تسلسل کو اس خطے سے باہر وسعت دینے کو تحلیلی استمرار[15] کہتے ہیں۔

18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل

مثال 18.6: ہندسی تسلسل

فرض کریں کہ $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ہے۔تب $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ اور $f^{(n)}(0) = n!$ ہوں گے۔یوں $\frac{1}{1-z}$ کا مکلارن تسلسل درج ذیل ہندسی تسلسل ہو گا۔

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.34}$$

$f(z)$ نقطہ $z = 1$ پر نادر ہے؛ یہ نقطہ ارتکاز کے دائرے پر واقع ہے۔ □

[15] analytic continuation

مثال 18.7: قوت نمائی تفاعل

ہم جانتے ہیں کہ قوت نمائی تفاعل e^z (حصہ 14.7) تمام z پر تحلیلی ہے اور $(e^z)' = e^z$ ہے لہٰذا $a = 0$ لیتے ہوئے مساوات 18.30 سے درج ذیل مکلارن تسلسل حاصل ہوتا ہے۔

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \tag{18.35}$$

یہی تسلسل e^x کے مکلارن تسلسل میں x کی جگہ z پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

آئیں اب مساوات 18.35 کی مدد سے قوت نمائی تفاعل کے حاصل ضرب کا کلیہ

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{18.36}$$

دریافت کریں۔ ہم

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

سے شروع کرتے ہیں۔ چونکہ دونوں تسلسل مرتکز ہیں لہٰذا ہم انہیں جزو در جزو ضرب کر سکتے ہیں؛ حاصل ضرب میں ان اجزاء کا مجموعہ جن کے لئے $k + m = n$ ہے درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
&\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!} + \cdots + \frac{z_1}{1!}\frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z_2^n}{n!} \\
&\qquad = \frac{1}{n!}[z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \cdots + z_2^n] = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

یوں دونوں تسلسل کے حاصل ضرب کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}$$

یوں مساوات 18.36 ثابت ہوتی ہے۔

مزید مساوات 18.35 میں $z = iy$ پر کرنے کے بعد مسئلہ 17.18 کی اطلاق سے

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ دائیں ہاتھ تسلسل حقیقی تفاعل $\cos y$ اور $\sin y$ کے مکلارن تسلسل ہیں لہٰذا ان سے کلیہ یولر

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{18.37}$$

حاصل ہوتا ہے (مساوات 14.64)۔ مساوات 18.37 کو e^x سے ضرب دے کر مساوات 18.36 کا استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.60 حاصل ہو گا۔ مساوات 18.35 کو قوت نمائی تفاعل کی تعریف لیتے ہوئے ہم اس سے حصہ 14.7 کے تمام کلیات حاصل کر سکتے ہیں۔ □

مثال 18.8: تکونیاتی اور ہذلولی تفاعل

مساوات 18.35 کو مساوات 14.74 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots \end{aligned} \tag{18.38}$$

$z = x$ کی صورت میں ان سے بالترتیب حقیقی تفاعل $\cos x$ اور $\sin x$ کی جانی پہچانی مکلارن تسلسل حاصل ہوتی ہیں۔اسی طرح مساوات 18.35 کو مساوات 14.84 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \end{aligned} \tag{18.39}$$

□

مثال 18.9: لوگارتھم

مساوات 18.30 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.40}$$

z کی جگہ $-z$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کو -1 سے ضرب دے کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$-\operatorname{Ln}(1-z) = \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.41}$$

ان دونوں تسلسل کو جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \qquad (|z| < 1) \tag{18.42}$$

□

سوالات

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لٰہذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لٰہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad \text{پر تمام } x \; I \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 8.ا اور مساوات 9.ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 10.ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 2.ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{1.ب}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

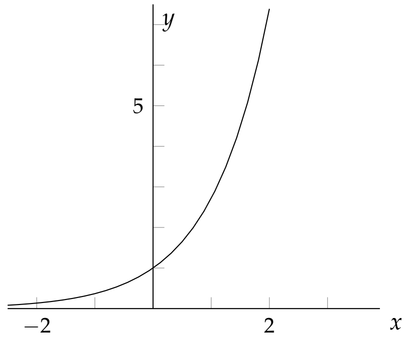
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{2.ب}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

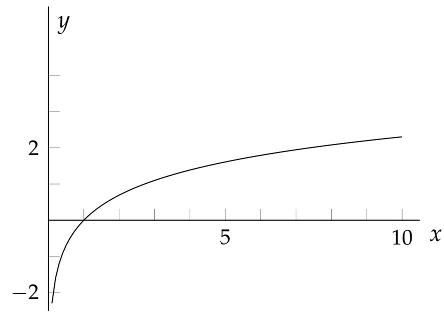
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{3.ب}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{4.ب}$$

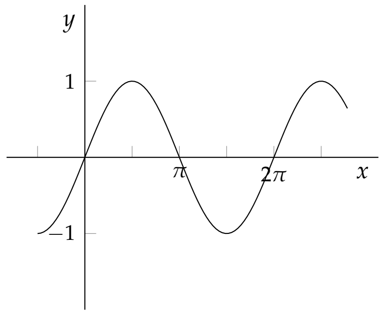


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

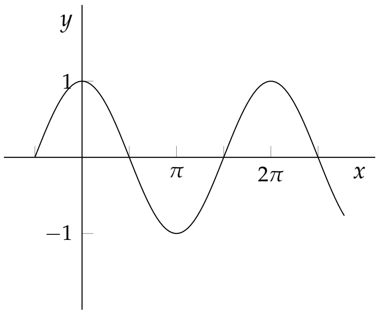


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$



(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

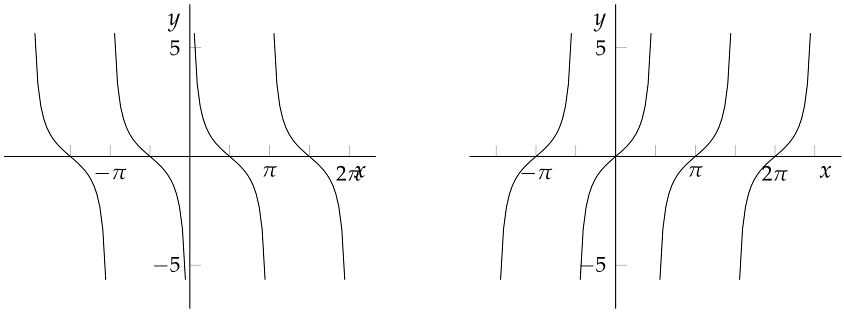
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



(الف) $\tan x$ (ب) $\cot x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}
\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\
\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}
\end{gathered}$$ (ب.17)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$ (ب.18)

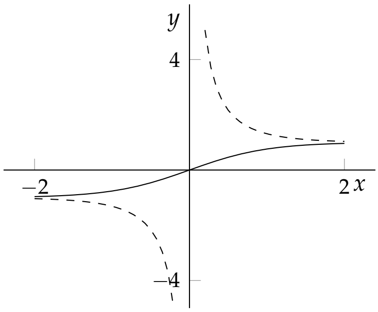
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$ (ب.19)

$$\begin{aligned}
\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y
\end{aligned}$$ (ب.20)

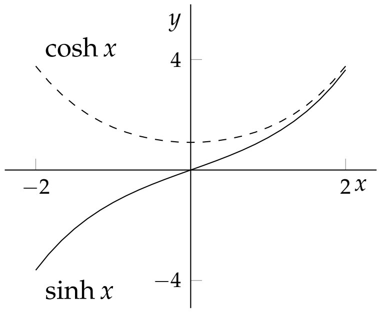
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$ (ب.21)

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$ (ب.22)



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

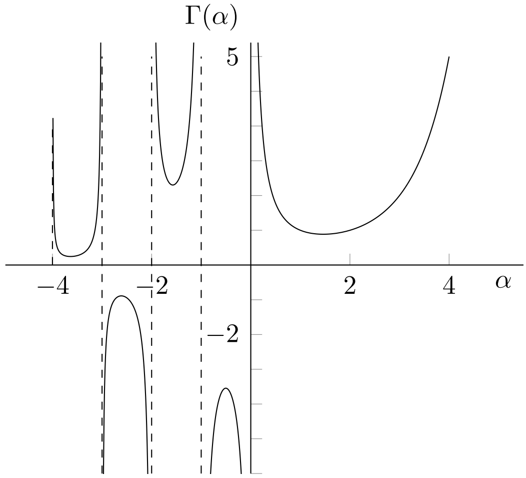
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

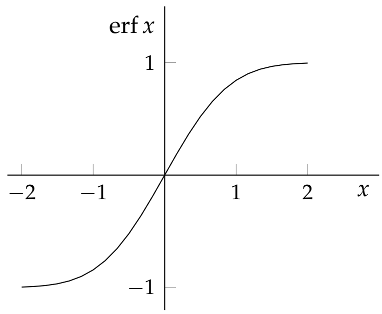
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

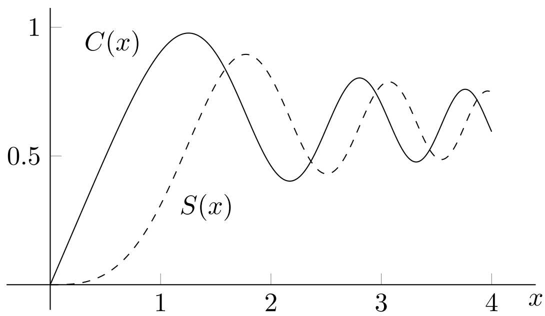
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

تکمل سائن (شکل 8.ب)

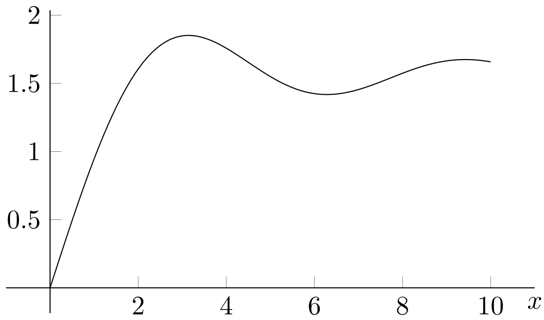
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

---

complementary functions[1]



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$