

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینیری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخلوط اعداد
1047	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1 نقشہ کشی
1116	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6 ریمان سطحیں
1157	16 مخلوط مکملات
1157	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201	17 ترتیب اور تسلسل
1201	17.1 ترتیب
1208	17.2 تسلسل
1213	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220	17.4	یک سر حقیقی ترتیب۔ لیسنر آزمائش برائے حقیقی تسلسل
1225	17.5	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں
1236	17.6	تسلسل پر اعمال

1243	18	طافی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لورنٹ تسلسل
1243	18.1	طافی تسلسل
1255	18.2	طافی تسلسل کی روپ میں تفاعل

1259	ا	اضافی ثبوت
----------------	---	------------

1263	ب	مفید معلومات
1263	ب.1	اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 18

طاقتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لورنٹ تسلسل

مخلوط تجزیہ میں طاقتی تسلسل (حصہ 18.1) اہم ترین ہے چونکہ یہ تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔ اسی طرح ہر تحلیلی تفاعل کا طاقتی تسلسل پایا جاتا ہے جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں۔ یہ ٹیلر تسلسل حقیقی علم الاحصاء کی ٹیلر تسلسل کی مخلوط مماثل ہیں۔ بلکہ حقیقی ٹیلر تسلسل میں حقیقی متغیرہ کی جگہ مخلوط متغیرہ پر کرتے ہوئے ہم حقیقی تفاعل کو مخلوط دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں۔

باب کے آخری حصے میں تحلیلی تفاعل کی لورنٹ تسلسل پر غور کیا جائے گا۔ لورنٹ تسلسل میں غیر تابع متغیرہ کی مثبت اور منفی عدد صحیح طاقت پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم اگلے باب میں دیکھیں گے، یہ تسلسل حقیقی اور مخلوط مکمل کی قیمت حاصل کرنے میں مددگار ثابت ہوتی ہیں۔

18.1 طاقتی تسلسل

گزشتہ باب کے حصہ 17.2 میں مستقل اجزاء کی تسلسل کی تعریف پیش کی گئی۔ اگر تسلسل کے اجزاء متغیر، مثلاً، متغیر z کے تفاعل ہوں تب کسی مقررہ z کے لئے یہ تمام اجزاء کوئی مستقل ہوں گے لہذا وہ تمام تعریف یہاں بھی قابل استعمال ہوں گے۔ ظاہر ہے کہ ایسا تسلسل جس کے اجزاء متغیر z کے تفاعل ہوں کے جزوی مجموعے، باقی اور

مجموعہ بھی z کے تفاعل ہوں گے۔ عموماً ایسا تسلسل z کی کچھ قیمتوں، مثلاً، کسی خطے میں تمام z کے لئے مرککز ہو گا، جبکہ z کی دیگر قیمتوں کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔

مخلوط تجزیہ میں متغیر اجزاء کی اہم ترین تسلسل طاقی تسلسل ہے۔ متغیر $z - a$ کی طاقی تسلسل¹ درج ذیل روپ کی لاتنا ہی تسلسل کو کہتے ہیں

$$(18.1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - a)^m = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots$$

جہاں z کوئی متغیر ہے جبکہ c_0, c_1, \dots ، جنہیں عددی سر² کہتے ہیں، مستقل قیمتیں ہیں اور a ، جس کو تسلسل کا مرکوز³ کہتے ہیں، مستقل ہے۔ طاقی تسلسل میں طاقیت m صرف غیر منفی ہو سکتا ہے⁴۔

$a = 0$ کی صورت میں طاقی تسلسل کی درج ذیل مخصوص روپ حاصل ہوتی ہے جو z کی طاقی تسلسل ہے۔

$$(18.2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

طاقی تسلسل کی مرکوزیت کو سادہ طریقے سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ آئیں تین عمومی مثالوں سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 18.1: قرص میں مرکوزیت، ہندسی تسلسل
ہندسی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \dots$$

□ $|z| < 1$ کی صورت میں حتیٰ مرککز جبکہ $|z| \geq 1$ کی صورت میں منفرج ہے (مسئلہ 17.13)۔

مثال 18.2: پورے متناہی مستوی میں مرکوزیت
درج ذیل طاقی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

power series¹

coefficients²

center³

⁴ منفی m والے تسلسل پر اسی باب میں بعد میں غور کیا جائے گا۔

تناسی آزمائش کے تحت ہر (متناہی) z کے لئے حتمی مرکز ہے۔ درحقیقت کسی بھی مقررہ z کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

مثال 18.3: صرف مرکز پر مرکوزیت
درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \dots$$

صرف مرکز $z = 0$ پر مرکوز ہے جبکہ ہر $z \neq 0$ کے لئے تسلسل منفرج ہے۔ یہی نتیجہ تناسی آزمائش سے مقررہ z کے لئے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$\left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = (n+1)|z| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty, \quad z \neq 0)$$

□

$z = a$ کے لئے طاقی تسلسل مساوات 18.1 مرکز ہے چونکہ تب $z - a = 0$ ہو گا اور تسلسل واحد ایک جزو c_0 پر مشتمل ہو گا۔ جیسا آپ نے مثال 18.3 میں دیکھا، بعض اوقات z کی یہ واحد قیمت ہو گی جس پر تسلسل مرکز ہو گا۔ البتہ اگر تسلسل 18.3 کسی $z_0 \neq a$ کے لئے مرکوز ہو تب تسلسل z کی ہر اس قیمت کے لئے مرکوز ہو گا جس کا فاصلہ مرکز سے z_0 کے فاصلے سے کم ہو۔

مسئلہ 18.1: طاقی تسلسل کی مرکوزیت

اگر مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقی تسلسل نقطہ $z = a$ پر مرکوز ہو تب یہ ہر اس z پر حتمی مرکز ہو گا جس کے لئے $|z - a| < |z_0 - a|$ ہو، یعنی ایسے دائرے کے اندر ہر z پر جو z_0 سے گزرتا ہو اور جس کا مرکز a ہو۔

ثبوت: چونکہ مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقی تسلسل z_0 پر مرکوز ہے لہذا مسئلہ 17.5 کے تحت

$$c_n (z_0 - a)^n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

ہو گا یعنی $z = z_0$ پر اس تسلسل کے اجزاء محدود ہوں گے، مثلاً ہر $n = 0, 1, 2, \dots$ کے لئے

$$|c_n(z_0 - a)^n| < M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ہو گا۔ اس سے درج ذیل ملتا ہے

$$|c_n(z_0 - a)^n| = \left| c_n(z_0 - a)^n \left(\frac{z - a}{z_0 - a} \right)^n \right| < M \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n$$

لہذا

$$(18.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z_0 - a)^n| < \sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n$$

ہو گا۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ $|z - a| < |z_0 - a|$ لہذا

$$\left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right| < 1$$

ہو گا اور یوں مساوات 18.3 کی دائیں ہاتھ (ہندسی) تسلسل مرتکز ہو گا۔ یوں مساوات 18.3 کا بائیں ہاتھ بھی مرتکز ہو گا لہذا مساوات 18.1 میں دیا گیا تسلسل $|z - a| < |z_0 - a|$ کی صورت میں حتمی مرتکز ہو گا۔

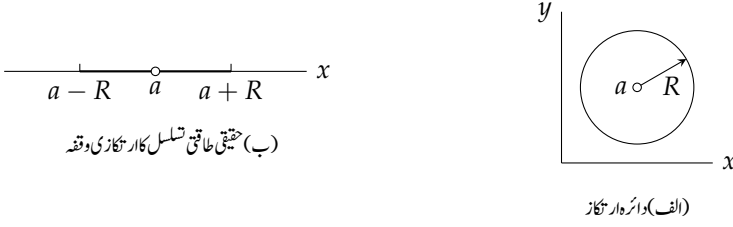
□

مثال 18.2 اور مثال 18.3 میں ہم نے دیکھا کہ طاقی تسلسل تمام z یا صرف $z = a$ پر مرتکز ہو سکتا ہے۔ انیس ان دو صورتوں کو فی الحال نظر انداز کریں۔ اب اگر کوئی طاقی تسلسل (مساوات 18.1) دیا گیا ہو تب ہم مخلوط مستوی میں ان تمام z پر غور کرتے ہیں جہاں تسلسل مرتکز ہو۔ فرض کریں کہ R ایسا کم تر حقیقی عدد ہو کہ مرکز a سے ہر ایسے نقطے کا فاصلہ زیادہ سے زیادہ R ہو۔ (مثال کے طور پر مثال 18.1 میں $R = 1$ ہے۔) تب مسئلہ 18.1 کے تحت رداس R کے دائرہ جس کا مرکز a ہو میں تمام z پر تسلسل مرتکز ہو گا یعنی ان تمام z پر جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

$$(18.4) \quad |z - a| < R$$

اور R کی تعریف کے تحت ان تمام z پر جو

$$|z - a| > R$$



شکل 18.1: دائرہ ارتکاز اور وقفہ ارتکاز

کو مطمئن کرتے ہوں، تسلسل منفرج ہو گا۔ دائرہ

$$|z - a| = R$$

کو دائرہ ارتکاز⁵ کہتے ہیں جبکہ R کو رداس ارتکاز⁶ کہتے ہیں (شکل 18.1-الف)۔

دائرہ مرکزیت کے نقطوں پر تسلسل مرکب یا منفرج ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر مثال 18.1 میں $R = 1$ ہے اور دائرہ مرکزیت $|z| = 1$ کے ہر نقطہ پر تسلسل منفرج ہے۔ طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

تناسبی آزمائش کے تحت $|z| < 1$ پر مرکب اور $|z| > 1$ پر منفرج ہے۔ عین $z = 1$ پر یہ ہارمونی تسلسل کی صورت اختیار کرتا ہے جو منفرج ہے جبکہ $z = -1$ پر یہ $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \dots$ صورت اختیار کرتا ہے جو مرکب ہے (مثال 17.3)۔ آپ نے دیکھا کہ دائرہ مرکزیت کے کچھ نقطوں پر تسلسل مرکب اور کچھ نقطوں پر تسلسل منفرج ہو سکتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم حقیقی طاقتی تسلسل مساوات 18.1 کی بات کی جائے جس کے عددی سر اور مرکز حقیقی ہوں اور متغیر $z = x$ ہو تب x محور پر مساوات 18.4 ارتکازی وقفہ⁷ کو ظاہر کرے گا جس کی لمبائی $2R$ اور درمیانہ نقطہ $x = a$ ہو گا (شکل 18.1-ب)۔

اگر طاقتی تسلسل مساوات 18.1 تمام z پر (مثال 18.2 کی طرح) مرکب ہو تب ہم

$$R = \infty \quad \text{اور} \quad \frac{1}{R} = 0$$

convergence circle⁵
convergence radius⁶
interval of convergence⁷

لکھتے ہیں اور اگر تسلسل (مثال 18.3 کی طرح) صرف مرکز $z = a$ پر مرکوز ہو تب ہم

$$R = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{1}{R} = \infty$$

لکھتے ہیں۔ ان روایات کو استعمال کرتے ہوئے ارتکاز کے رداس R کو تسلسل کی عددی سروں سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی:

مسئلہ 18.2: ارتکاز کا رداس

اگر ترتیب $\sqrt[n]{|c_n|}$, $n = 1, 2, \dots$ مرکوز ہو اور اس کا حد L ہو، تب طاقی تسلسل (مساوات 18.1) کا رداس ارتکاز R درج ذیل ہو گا

$$(18.5) \quad R = \frac{1}{L}$$

جو $L = 0$ کی صورت میں $R = \infty$ دے گا اور تسلسل (مساوات 18.1) تمام z کے لئے مرکوز ہو گا۔

اگر یہ ترتیب مرکوز نہ ہو لیکن محدود ہو، تب

$$(18.6) \quad R = \frac{1}{l}$$

ہو گا جہاں ترتیب کے تحدیدی نقطوں میں سب سے بڑا تحدیدی نقطہ l ہے۔

اگر یہ ترتیب غیر محدود ہو، تب $R = 0$ ہو گا اور تسلسل صرف $z = a$ پر مرکوز ہو گا۔

ثبوت: اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0$$

ہو تب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = |z-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |z-a| L$$

ہو گا۔ چونکہ تسلسل (مساوات 18.1) کے اجزاء $w_n = c_n(z-a)^n$ ہیں لہذا جذری آزمائش (حصہ 17.5) کے تحت

$$|z-a| < \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z-a| < L < 1$$

کی صورت میں تسلسل حتمی مرکز ہو گا جبکہ

$$|z - a| > \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z - a| L > 1$$

کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔ اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L = 0$$

ہو تب حد کی تعریف کے تحت کسی بھی $\epsilon > 0$ مثلاً $\epsilon = \frac{1}{2|z_1 - a|}$ کے لئے جہاں z_1 مستقل ہے، ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_1 - a|} \quad (n > N)$$

اس سے ہمیں

$$|c_n| < \frac{1}{(2|z_1 - a|)^n} \implies |c_n(z_1 - a)^n| < \frac{1}{2^n}$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $\sum 2^{-n}$ مرکز ہے لہذا تقابلی آزمائش (حصہ 17.5) کے تحت $z = z_1$ کے لئے تسلسل (مساوات 18.1) حتمی مرکز ہے۔ چونکہ z_1 اختیاری ہے لہذا تسلسل ہر z کے لئے حتمی مرکز ہے۔ یوں مساوات 18.5 کا ذکر کرنے والے فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ہم اب اس فقرے کو ثابت کرتے ہیں جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتا ہے۔ مسئلہ بلزانو والٹسٹر اس 17.6 کے تحت l موجود ہو گا اور چونکہ $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$ ہے لہذا $l > 0$ ہو گا۔ حد کی تعریف کے تحت کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے n کی لامتناہی تعداد کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{|c_n|} < l + \epsilon \quad n \text{ کی لامتناہی تعداد}$$

اس کو مثبت مقدار $|z - a|$ سے ضرب دینے سے عدم مساوات

$$(18.7) \quad |z - a| (l - \epsilon) < \sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|}$$

اور

$$(18.8) \quad \sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|} < |z - a| (l + \epsilon) <$$

حاصل ہوتی ہیں۔ چونکہ l سب سے بڑا تحدیدی نقطہ ہے لہذا عدم مساوات 18.8 کے دائیں ہاتھ سے بڑے اجزاء کی تعداد متناہی ہو گی اور یوں کافی بڑے تمام n ، مثلاً $n > N$ ، کے لئے بھی عدم مساوات 18.8 مطمئن ہو گی۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$(18.9) \quad |z - a| < \frac{1}{l}$$

کے لئے طاقی تسلسل (مساوات 18.1) کا ارتکاز عدم مساوات 18.8 سے ثابت ہوتا ہے۔ درحقیقت، اگر ہم درج ذیل منتخب کریں

$$\epsilon = \frac{1 - l|z - a|}{2|z - a|}$$

تب مساوات 18.9 کے تحت $\epsilon > 0$ ہو گا اور عدم مساوات 18.8 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|} < \frac{1 + l|z - a|}{2} \quad (n > N)$$

مساوات 18.9 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں ہاتھ اکائی سے کم ہے لہذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل مرتکز ہو گا۔ اس کے برعکس اگر

$$|z - a| > \frac{1}{l}$$

ہو تب

$$\epsilon = \frac{l|z - a| - 1}{2|z - a|}$$

منتخب کرتے ہوئے $\epsilon > 0$ حاصل ہو گا اور عدم مساوات 18.7 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|} > \frac{|z - a|l + 1}{2} > 1$$

یوں جذری آزمائش کے تحت ان z کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔ یوں اس فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتی ہے۔

آخر میں اگر ترتیب $\sqrt[n]{|c_n|}$ غیر محدود ہو، تب، انفراج کی تعریف کے تحت، کسی بھی K کے لئے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > K \quad \text{کی لاتیہی تعداد کے لئے}$$

ہو گا۔ ہم $K = \frac{1}{|z-a|}$ منتخب کرتے ہیں جہاں $z \neq a$ ہے اور یوں عدم مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z-a|} \implies \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1$$

لہذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔ یوں اس مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب طاقی تسلسل کے مجموعہ اور ان کی تفریق پر غور کرتے ہیں۔

دو طاقی تسلسل کو جزو در جزو ان تمام z کے لئے جمع کیا جا سکتا ہے جن پر دونوں تسلسل مرتکز ہوں۔ یہ نتیجہ مسئلہ 17.18 سے اخذ ہوتا ہے۔

آئیں دو طاقی تسلسل

$$(18.10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_1 + c_1 z + \dots$$

کی جزو در جزو ضرب پر غور کرتے ہیں۔ بائیں تسلسل کی ہر جزو کو دائیں تسلسل کی ہر جزو سے ضرب دے کر z کی ایک جیسی طاقتوں کو یکجا کرتے ہوئے

$$(18.11) \quad a_0 c_0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0)z + (a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0)z^2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \dots + z_n c_0) z^n$$

ملتا ہے۔ اس کو مساوات 18.10 میں دی گئی تسلسلوں کا کوشی حاصل ضرب⁸ کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.3: طاقی تسلسلوں کا کوشی حاصل ضرب

مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کی دائرہ ارتکاز کے اندر ہر z کے لئے کوشی حاصل ضرب (مساوات 18.11) حتمی مرتکز ہو گا۔ اگر ان تسلسلوں کے مجموعے بالترتیب $g(z)$ اور $h(z)$ ہوں تب کوشی حاصل ضرب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$(18.12) \quad s(z) = g(z)h(z)$$

ثبوت: کوئی حاصل ضرب (مساوات 18.11) کا عمومی جزو

$$p_n = (a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \cdots + z_n c_0) z^n$$

ہے۔ اب عمومی تکنیکی عدم مساوات 14.26 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} |p_0| + |p_1| &= |a_0 c_0| + |(a_0 c_1 + a_1 c_0)z| \leq (|a_0| + |a_1 z|)(|c_0| + |c_1 z|), \\ |p_0| + |p_1| + |p_2| &\leq (|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2|)(|c_0| + |c_1 z| + |c_2 z^2|), \end{aligned}$$

جس کی تصدیق آپ دائیں ہاتھ ضرب حاصل کرتے ہوئے کر سکتے ہیں؛ اسی طرح درج ذیل عمومی عدم مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$(18.13) \quad |p_0| + |p_1| + \cdots + |p_n| \leq (|a_0| + |a_1 z| + \cdots + |a_n z^n|)(|c_0| + |c_1 z| + \cdots + |c_n z^n|)$$

اگر z مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کے دائرہ ارتکاز کے اندر پایا جاتا ہو، تب عدم مساوات 18.13 کا دایاں ہاتھ محدود ہو گا لہذا جزوی مجموعوں کی ترتیب کا مجموعہ $|p_0| + |p_1| + \cdots$ بھی محدود ہو گا۔ چونکہ $|p_n| \geq 0$ ہے لہذا یہ ترتیب یک سر بڑھتا ترتیب ہو گا اور مسئلہ 17.10 کے تحت مرتکز ہو گا۔ یوں یہ تسلسل مرتکز ہے اور حاصل ضرب تسلسل (مساوات 18.11) حتی مرتکز ہو گا۔

ہم اب مساوات 18.12 کو ثابت کرتے ہیں۔ ہم اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہیں کہ مساوات 18.11 کی ہر رد و بدل ان z کے لئے حتی مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ مساوات 18.12 دیتی ہے (مسئلہ 17.20)۔ ہم ان میں سے ایک مخصوص رد و بدل $p_0^* + p_1^* + \cdots$ پر غور کرتے ہیں جہاں p_n^* درج ذیل ہے۔

$$(a_n c_0 + a_0 c_n) z^n + (a_n c_1 + a_1 c_n) z^{n+1} + \cdots + (a_n c_{n-1} + a_{n-1} c_n) z^{2n-1} + a_n c_n z^{2n}$$

ظاہر ہے کہ

$$a_0 c_0 = p_0^*, \quad (a_0 + a_1 z)(c_0 + c_1 z) = p_0^* + p_1^*$$

اور عمومی جزو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)(c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n) = p_0^* + p_1^* + \cdots + p_n^*$$

ہیں۔ اب n کو لامتناہی تک پہنچانے سے مساوات 18.12 حاصل ہوتی ہے۔ یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 18.4: کوشی حاصل ضرب

ہندسی تسلسل $1 + z + z^2 + \dots$ کا $|z| < 1$ کی صورت میں مجموعہ $\frac{1}{1-z}$ ہے (حصہ 17.5)۔ مسئلہ 18.3 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^m = (1+z+z^2+\dots)(1+z+z^2+\dots) \\ &= 1 + 2z + 3z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z| < 1) \end{aligned}$$

□

سوالات

سوال 18.1: اگر ترتیب $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ ، جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہے، مرتکز ہو اور اس کا حد L ہو تب دکھائیں کہ طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کی ارتکاز کے دائرے کا رداس، $L > 0$ کی صورت میں $R = \frac{1}{L}$ ہو گا جبکہ $L = 0$ کی صورت میں $R = \infty$ ہو گا۔

سوال 18.2: اگر مساوات 18.2 میں دی گئی تسلسل کی ارتکاز کا رداس (جو متناہی تصور کیا گیا ہو) R ہے، تب دکھائیں کہ $\sum c_m z^{2m}$ کی ارتکاز کا رداس \sqrt{R} ہو گا۔

سوال 18.3 تا سوال 18.18 میں ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

سوال 18.3: $\sum_{n=0}^{\infty} (z - i2)^n$ جواب: 1

سوال 18.4: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^n}$

سوال 18.5: $\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{z}{3}\right)^n$ جواب: 3

سوال 18.6: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}$

سوال 18.7: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$
جواب: ∞

سوال 18.8: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

سوال 18.9: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$
جواب: ∞

سوال 18.10: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n$

سوال 18.11: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$
جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 18.12: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

سوال 18.13: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
جواب: ∞

سوال 18.14: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

سوال 18.15: $\sum_{n=0}^{\infty} 6^n (z - i)^n$
جواب: $\frac{1}{6}$

سوال 18.16: $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 z^n$

سوال 18.17: $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n} z^n$
جواب: $\frac{1}{9}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{2^n} z^n \quad \text{سوال 18.18}$$

سوال 18.19: اگر $\sum c_n z^n$ تمام تنہائی z کے لئے مرکب ہو تب دکھائیں کہ $n \rightarrow \infty$ کے لئے $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow 0$ ہو گا۔ کوئی مثال پیش کریں۔

سوال 18.20: ارتکاز کے دائرے پر تسلسل مرکب یا منفرد ہو سکتا ہے۔ ہندسی تسلسل کے لئے اس حقیقت کو دکھائیں۔

18.2 طاقی تسلسل کی روپ میں تفاعل

اس حصے میں ہم دکھائیں گے کہ طاقی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں۔ اس کا الٹ یعنی ہر تحلیلی تفاعل کو طاقی تسلسل (جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے کو اگلے حصے میں ثابت کیا جائے گا۔ ان دو وجوہات کی بنا طاقی تسلسل مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ اختیاری طاقی تسلسل ہے جس کی ارتکاز کا رداس R غیر صفر ہے۔ تب اس تسلسل کا مجموعہ z کا تفاعل ہو گا مثلاً $f(z)$ جس کو ہم

$$(18.14) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (|z| < R)$$

لکھتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $f(z)$ کو طاقی تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ مثال کے طور پر اکائی دائرہ $|z| = 1$ کے اندر ہندسی تسلسل تفاعل $f(z) = \frac{1}{1-z}$ کو ظاہر کرتی ہے (مسئلہ 17.13)۔

مسئلہ 18.4: استمرار

$R > 0$ کی صورت میں $z = 0$ پر مساوات 18.14 میں تفاعل $f(z)$ استمراری ہے۔

ثبوت: ہم درج ذیل دکھانا چاہتے ہیں۔

$$(18.15) \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = c_0$$

ہم اختیاری مثبت عدد $r < R$ منتخب کرتے ہیں۔ چونکہ مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل قرص $|z| < R$ میں حتمی مرتکز ہے لہذا درج ذیل تسلسل مرتکز ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \quad (0 < r < R)$$

فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ K ہے۔ تب ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$|f(z) - c_0| = \left| z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} \right| \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |z|^{n-1} \leq |z| K \quad (0 < |z| \leq r)$$

اب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے، ان تمام z پر جو $|z| < \sigma$ کو مطمئن کرتے ہوں جہاں σ ایسا حقیقی مثبت عدد ہے جو r اور $\frac{\epsilon}{K}$ دونوں سے چھوٹا ہو، $|f(z) - c_0| < \epsilon$ ہو گا۔ یوں حد کی تعریف کے تحت مساوات 18.15 مطمئن ہو گا لہذا مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب یکتائی پر غور کرتے ہیں۔ ہم دکھائیں گے کہ ایک ہی تفاعل $f(z)$ کو ایک ہی مرکز والے دو مختلف طاقی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ اگر $f(z)$ کو مرکز a کی طاقی تسلسل سے ظاہر کیا جائے تب ایسا تسلسل یکتا ہو گا۔ اس اہم حقیقت کی حقیقی اور مخلوط تجزیہ میں عموماً ضرورت پیش آتی ہے۔ ہم اس کو درج ذیل مسئلہ میں پیش کرتے ہیں (جہاں عمومیت کھوئے بغیر $a = 0$ تصور کیا گیا ہے)۔

مسئلہ 18.5: طاقی تسلسل کا مسئلہ مماثلت
فرض کریں کہ مثبت R کے لئے تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{اور} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$|z| < R$ پر مرتکز ہیں اور ان تمام z پر ان کا مجموعہ ایک جیسا ہے۔ تب دونوں تسلسل مماثل ہوں گے یعنی تمام n کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(18.16) \quad a_n = b_n \quad n = 0, 1, \dots$$

ثبوت : ہم الگرا جی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$(18.17) \quad a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots \quad (|z| < R)$$

z کو صفر تک پہنچانے سے مسئلہ 18.4 کے تحت $a_0 = b_0$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $n = 0, 1, \dots, m$ کے لئے $a_n = b_n$ ہیں۔ تب مساوات 18.17 میں دونوں ہاتھ ابتدائی $m+1$ اجزاء حذف کرنے کے بعد z^{m+1} ($\neq 0$) سے تقسیم کرتے ہوئے

$$a_{m+1} + a_{m+2}z + a_{m+3}z^2 + \dots = b_{m+1} + b_{m+2}z + b_{m+3}z^2 + \dots$$

ملتا ہے۔ مسئلہ 18.4 کے تحت دونوں میں سے ہر ایک تسلسل $z = 0$ پر استمراری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں $a_{m+1} = b_{m+1}$ ہو گا۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اب طاقی تسلسل کی جزو در جزو تفرق اور مکمل لینے پر غور کرتے ہیں۔ تسلسل $c_1 + c_1z + c_2z^2 + \dots$ کا تفرق لینے سے درج ذیل تسلسل حاصل ہوتی ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \dots$$

اس کو طاقی تسلسل کی تفرقی تسلسل⁹ کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.6: جزو در جزو تفرق تفرقی تسلسل کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

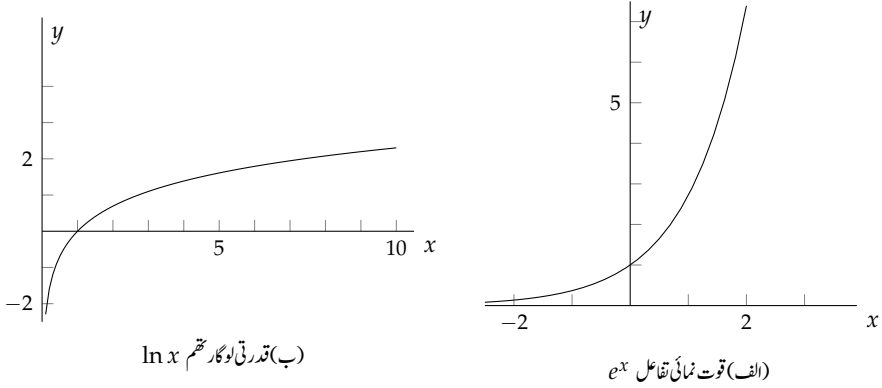
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

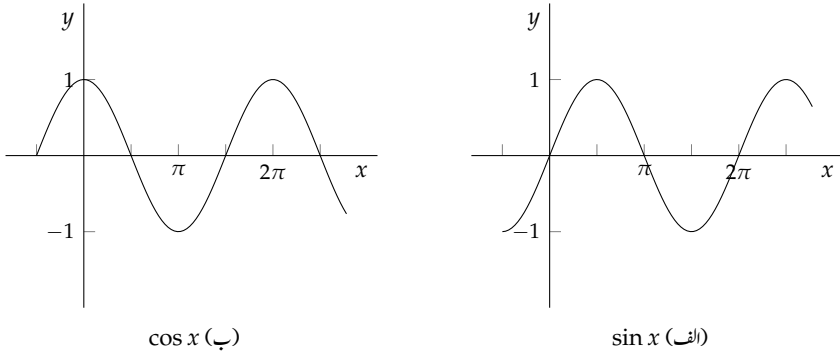
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

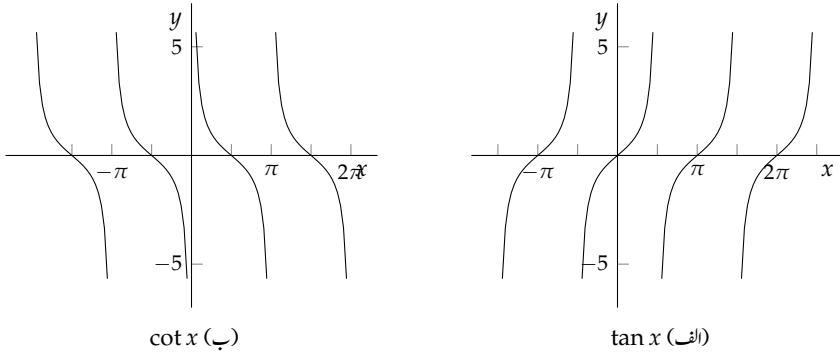
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

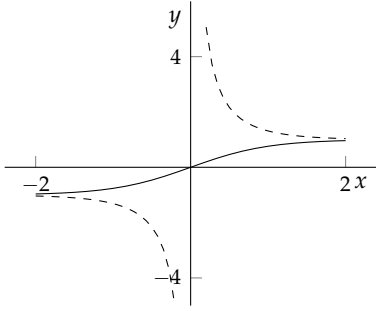
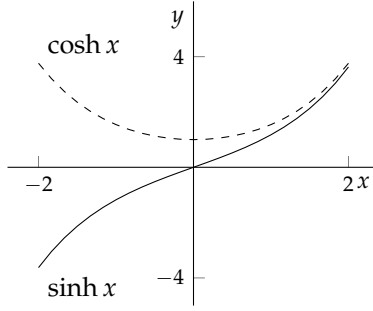
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

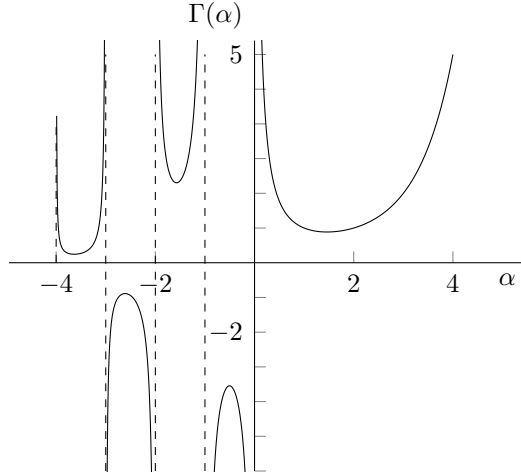
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

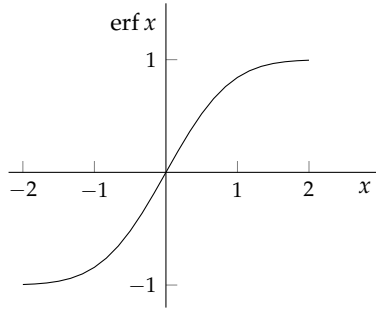
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

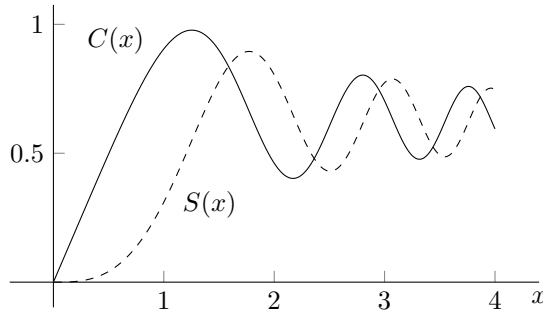
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

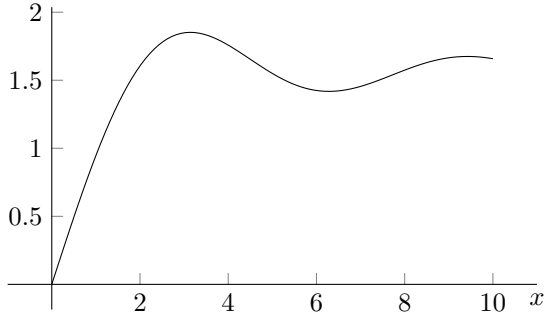
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

