

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
40	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
70	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
74	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
81	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
81	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
98	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
113	2.3	تفرقی عامل
118	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
133	2.5	پولر کوئی مساوات
142	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسکی
151	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
162	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
169	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
173	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
184	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

191	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
191	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
202	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
211	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
214	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
223	4	نظام تفرقی مساوات
224	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
233	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
247	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
248	4.3.1	خطی نظام
252	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
269	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
278	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
287	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
295	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
296	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
305	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
306	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
321	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
339	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
344	5.3.1	عملی استعمال
358	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
373	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
379	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
385	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
393	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
403	6	لاپلاس متبادلہ
404	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
413	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
425	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
446	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
464	6.5	الچھاؤ
473	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
481	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

489	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
493	7	خطی الجبرا: سمتیات
493	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
495	7.2	سمتیہ کے اجزاء
501	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
509	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
515	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
528	7.6	اندرونی ضرب فضا
530	7.7	سمتی ضرب
533	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
544	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
553	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
554	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
564	8.2	قابلی ضرب
570	8.2.1	تبدیلی محل
583	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
596	8.3.1	صف زینہ دار صورت
604	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
618	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
624	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
627	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
643	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
658	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
675	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
676	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
686	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
694	9.3	تشاکلی، مخرب تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
701	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
715	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
727	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
727	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
730	10.2	سمتی علم الاحصاء
736	10.3	منحنی
742	10.4	لبانی قوس
748	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
753	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

760	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
766	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
779	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
784	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
792	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
797	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء۔ تکمیل کے مسئلے
798	11.1	خطی تکمیل
803	11.2	خطی تکمیل کا حل
811		اضافی ثبوت
815		ب مفید معلومات
815	1.1	ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 11

سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے

تکمل سے آپ بخوبی واقف ہیں جس کو سمتی تکملی علم الاحصاء¹ وسعت دیتا ہے۔ یوں منحنی پر تکمل، جسے خطی تکمل² کہتے ہیں، سطح پر تکمل جسے سطحی تکمل³ کہتے ہیں اور حجم پر تکمل جسے حجمی تکمل⁴ کہتے ہیں، حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مزید ایک قسم کی تکمل کا دوسری قسم کی تکمل میں تبادلہ کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے بعض اوقات نسبتاً آسان تکمل حاصل ہوتا ہے۔ یوں سطح میں مسئلہ گرین⁵ کی مدد سے خطی تکمل کو دو درجی تکمل میں یا دو درجی تکمل کو خطی تکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ گاوسی مسئلہ ارتکاز⁶ کی مدد سے حجمی تکمل کو سطحی تکمل یا سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ مسئلہ سٹوکس⁷ کی مدد سے تین درجی تکمل کو خطی تکمل یا خطی تکمل کو تین درجی تکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

سمتی تکملی الاحصاء کا انجینئری، طبیعیات، ٹھوس میکانیات، سیالی میکانیات اور دیگر میدان میں اہم کردار پایا جاتا ہے۔

vector calculus¹

line integral²

surface integral³

volume integral⁴

Green's theorem⁵

Gauss's convergence theorem⁶

Stoke's theorem⁷

11.1 خطی تکمیل

درج ذیل تفاعل f کی x محور پر $x = a$ تا $x = b$ قطعی تکمیل ہے

$$(11.1) \quad \int_a^b f(x) dx$$

جہاں وقفہ a اور b کے درمیان ہر نقطے پر f معین ہے۔ خطی تکمیل میں f کا تکمیل سطح میں (یا فضا میں) منحنی C پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں C کے ہر نقطے پر f معین ہے۔

خطی تکمیل کی تعریف عین قطعی تکمیل کی تعریف کی مانند ہے۔ خطی تکمیل کچھ یوں ہے۔

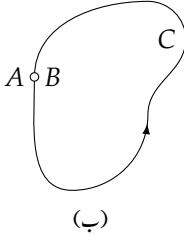
ہم فضا میں منحنی C لیتے ہیں اور اس پر ایک رخ کو مثبت سمت کہتے ہیں۔ یوں منحنی پر الٹ چلتے ہوئے منفی سمت حاصل ہوگی۔ مثبت سمت میں چلتے ہوئے منحنی پر ابتدائی نقطے کو A اور اختتامی نقطے کو B کہتے ہیں۔ جیسا شکل 11.1-ب میں دکھایا گیا ہے ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ ہم مقام ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں C بند راہ کہلاتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ C سادہ منحنی (حصہ 10.3) ہے جس کو

$$(11.2) \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad (a \leq s \leq b)$$

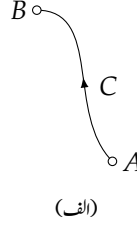
ظاہر کرتی ہے [جہاں s منحنی کی لمبائی قوس ہے (حصہ 10.4)] اور پورے C پر $\mathbf{r}(s)$ استمراری ہے جس کا (پورے C پر) تفرق \mathbf{r}' موجود ہے اور یہ تفرق غیر صفر سمتیہ ہے۔ اس طرح C بھوار منحنی⁸ کہلائے گی یعنی C کے ہر نقطے پر C کا منفرد مماس پایا جاتا ہے اور منحنی پر چلنے سے مماس کی سمت میں تبدیلی استمراری ہوتی ہے۔

فرض کریں کہ $f(x, y, z)$ متغیر s کا ایسا استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کے ہر نقطے پر معین ہے۔ ہم C کو بے قاعدہ طریقے سے n عدد ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.2)۔ یوں ہر ٹکڑے کی لمبائی مختلف ہو سکتی ہے۔ ہم ابتدائی سر سے شروع کرتے ہوئے ان ٹکڑوں کے سروں کو $P_0 (= A)$ ، P_1 ، P_2 ، ...، $P_n (= B)$ سے اور s کی مطابقتی قیمتوں کو

$$s_0 (= a) < s_1 < s_2 < \dots < s_n (= b)$$



(ب)



(الف)

شکل 11.1: سمت بند منحنی

سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم ہر ٹکڑے پر بے قاعدگی سے کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً P_0 اور P_1 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_1 چنتے ہیں، P_1 اور P_2 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_2 چنتے ہیں وغیرہ۔ یوں ہر ٹکڑے پر نقطہ باقی ٹکڑوں پر نقطوں سے ضروری نہیں کہ کوئی مشابہت رکھتا ہو۔ ان نقطوں پر f کی قیمتوں کو لیتے ہوئے ہم مجموعہ

$$J_n = \sum_{m=1}^n f(x_m, y_m, z_m) \Delta s_m$$

لیتے ہیں جہاں x_m, y_m, z_m نقطہ Q_m کے محدد ہیں اور Δs_m اس ٹکڑے کی لمبائی ہے جس پر Q_m واقع ہے۔

$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}$$

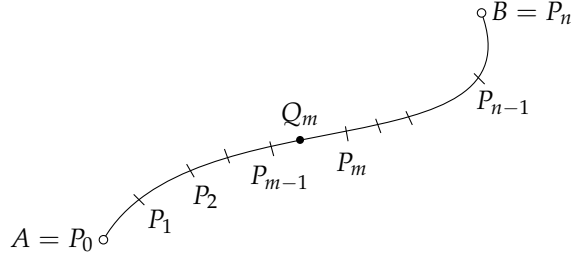
ہم اس طرح کے مجموعے مکمل بے قاعدگی سے $n = 2, 3, \dots$ کے لئے یوں حاصل کرتے ہیں کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی تک پہنچے، Δs کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں مجموعوں کا تسلسل J_2, J_3, \dots ملتا ہے۔ اس تسلسل کی حد کو C پر A تا B تفاعل f کی خطی تکمل⁹ کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z) ds$$

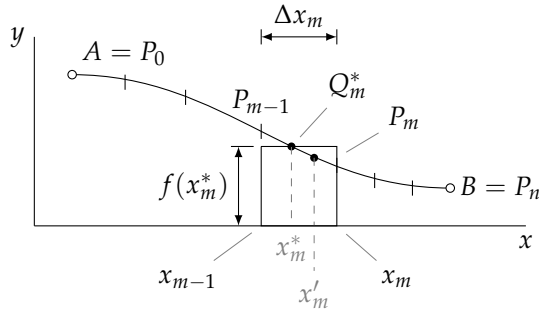
منحنی C کو تکمل کی راہ کہتے ہیں جبکہ $f(x, y, z)$ کو متکمل¹⁰ کہتے ہیں۔

چونکہ f کو استمراری فرض کیا گیا اور C ہموار ہے لہذا یہ حد موجود ہو گا جس کی قیمت پر ٹکڑوں کی چنناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کی چنناؤ کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ C پر کسی بھی نقطہ P کا تعین لمبائی قوس s سے کیا جاتا ہے۔ یوں

line integral⁹
integrand¹⁰



شکل 11.2: C کی ٹکڑوں میں تقسیم



شکل 11.3: رقبہ اور عمل (مثال 11.1)

A اور B کا تعین مطابقتی $s = a$ اور $s = b$ سے کیا جائے گا لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(11.3) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds$$

جو قطعی تکمیل ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمیل بھی تسلسل J_2, J_3, \dots کی حد کو کہتے ہیں جس کی قیمت پر نا تو ٹکڑوں کی تقسیم اور نا ہی ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر پایا جاتا ہے۔ مثال 11.1 میں مزید تفصیل دی گئی ہے۔

مثال 11.1: تکمیل کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کے چناؤ کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے
 آئیں دیکھتے ہیں کہ تکمیل کی قیمت پر راہ کی ٹکڑوں میں تقسیم اور ان ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر کیوں نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 11.3 میں تفاعل $y = f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ ان نقطوں کے درمیان تفاعل کو بے قاعدہ ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ وقفہ P_{m-1} تا P_m کے مابین تفاعل

کے نیچے چھوٹا رقبہ ΔS_m ہے۔ شکل 11.3 میں ایک مستطیل دکھایا گیا ہے جو نقطہ Q_m^* سے گزرتا ہے۔ Q_m^* یوں چنا گیا ہے کہ مستطیل کا رقبہ عین ΔS_m کے برابر ہو۔

$$\Delta S_m = f(x_m^*)\Delta x_m \quad (\Delta x_m = x_m - x_{m-1})$$

اس وقفے پر بغیر کسی قاعدہ دوسرا نقطہ Q_m بھی چنا گیا ہے۔ اس نقطے سے گزرتی مستطیل کا رقبہ $f(x'_m)\Delta x_m$ ہو گا جہاں Q_m کا x محدود x'_m ہے۔

اب استمراری تفاعل سے مراد یہ ہے کہ ہم کسی بھی نقطہ پر Δx اتنی کم لے سکتے ہیں کہ Δx وقفے پر تفاعل میں کل تبدیلی زیادہ سے زیادہ ϵ ہو جہاں ϵ جتنی بھی چھوٹی قیمت کیوں نا ہو۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$|f(x'_m) - f(x_m^*)| \leq \epsilon$$

جس کو

$$f(x'_m) = f_m^* + t\epsilon \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں t ایسا متغیر ہے جس کی قیمت منفی اکائی سے مثبت اکائی تک ممکن ہے۔ یوں Q'_m سے گزرتی مستطیل کا رقبہ

$$f(x'_m)\Delta x_m = (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m$$

ہو گا۔ یہ رقبہ اس صورت کم سے کم ہو گا جب $t = -1$ ہو اور اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $t = 1$ ہو۔ ان دونوں صورتوں میں مستطیل کا رقبہ اصل تفاعل کے نیچے رقبے سے مختلف ہو گا۔ تمام ٹکڑوں پر بے قاعدگی سے نقطے چنتے ہوئے تمام مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^n (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{m=1}^n f_m^*\Delta x_m + \epsilon \sum_{m=1}^n t\Delta x_m$$

اب چونکہ $|t| \leq 1$ ہے لہذا دائیں جانب مجموعے کے اندر قیمت کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت $t = 1$ پر حاصل ہو گی۔ (حقیقت میں چونکہ ضروری نہیں ہے کہ t کی قیمت ہر مرتبہ اکائی ہی ہو لہذا اس مجموعے کی قیمت $b - a$ سے کم ہو گی۔) اب چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں لہذا ہم اسے اتنا کم رکھتے ہیں کہ $\epsilon(b - a)$ قابل نظر انداز ہو۔ درج بالا میں پہلا مجموعہ ان مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ ہے جن کا رقبہ عین تفاعل کے نیچے رقبے کے برابر رکھا گیا تھا لہذا Δx_m کی ہر قیمت پر یہ مجموعہ اصل رقبے کے برابر ہی ہو گا۔ یوں درج بالا سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{m=1}^n (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{i=m}^n f_m^*\Delta x_m$$

جو $x = a$ تا $x = b$ تقابل کے نیچے کل رقبہ ہے۔

یوں آپ نے دیکھا کہ ہر ٹکڑے پر Q_m بالکل بے قاعدگی سے چلتے ہوئے تقابل کے نیچے اصل رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

□

عمومی مفروضہ

اس کتاب میں فرض کیا جائے گا کہ خطی تکمل کی ہر راہ ٹکڑوں میں بھوار¹¹ ہے، یعنی کہ راہ کو محدود تعداد کی ہموار ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

بدن راہ پر خطی تکمل کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

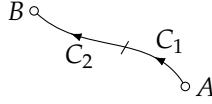
$$\oint_C \quad \left(\int_C \text{ کی جگہ} \right)$$

خطی تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے کہ قطعی تکمل کی درج ذیل جانی پہچانی خصوصیات خطی تکمل کے لئے بھی درست ہیں

$$(11.4) \quad \begin{aligned} & \text{(الف)} \quad \int_C k f \, ds = k \int_C f \, ds \quad (k \text{ مستقل}) \\ & \text{(ب)} \quad \int_C (f + g) \, ds = \int_C f \, ds + \int_C g \, ds \\ & \text{(پ)} \quad \int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds \end{aligned}$$

جہاں مساوات 11.4-پ میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ان ٹکڑوں کی سمت بندی عین C کی طرح ہے (شکل 11.4)۔ راہ پر تکمل لیتے ہوئے دائری سمت تبدیل کرنے سے حاصل قیمت 1- سے ضرب ہوگی۔

¹¹ piecewise smooth



شکل 11.4: تکمل کی راہ کو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

11.2 خطی تکمل کا حل

خطی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے اس کو حل کیا جاتا ہے۔ ایسا تکمل کی راہ C کی روپ کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ آئیں اس عمل کو دیکھتے ہیں۔

اگر C کی روپ

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad a \leq s \leq b$$

ہو (جہاں s راہ C کی لمبائی قوس ہے) تب ہم مساوات 11.3 کی مدد سے درج ذیل استعمال کرتے ہیں۔

$$(11.5) \quad \int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] \, ds$$

اگر C کی روپ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

ہو (جہاں t کوئی مقدار معلوم ہے) تب ہم

$$(11.6) \quad \int_C f(x, y, z) \, ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} \, dt$$

استعمال کرتے ہیں جہاں مساوات 10.31 سے

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

ہے اور گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی فرض کیا گیا ہے کہ $\mathbf{r}(t)$ اور $\dot{\mathbf{r}}(t)$ دونوں استمراری ہیں اور $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ ہے۔

آئیں مساوات 11.6 حاصل کرتے ہیں۔ ہم r کی جگہ

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t)\mathbf{i} + \vec{y}(t)\mathbf{j} + \vec{z}(t)\mathbf{k}$$

لکھ کر قوس لمبائی $s(t)$ حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد $r(s(t)) = \vec{r}(t)$ یعنی $x(s(t)) = \vec{x}(t)$ ،
وغیرہ لکھ کر مساوات 11.5 کے دائیں ہاتھ میں قطعی تکمل کے قاعدے کے تحت

$$\int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds = \int_{t_0}^{t_1} f[\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t)] \frac{ds}{dt} dt$$

حاصل کرتے ہیں جو (استعمال کی گئی علامتوں میں تبدیل کے علاوہ) عین مساوات 11.6 ہے۔

چونکہ عموماً $r(t)$ معلوم یا قابل معلوم ہو گا لہذا مساوات 11.6 عملی مسائل کی تقریباً تمام صورتوں کو حل کر پاتا ہے۔

مثال 11.2: برائے مساوات 11.5

تفاعل $f(x, y) = x^3 y$ کا شکل 11.5 میں دکھائی گئی گول قوس

$$r(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$$

پر تکمل حاصل کریں۔

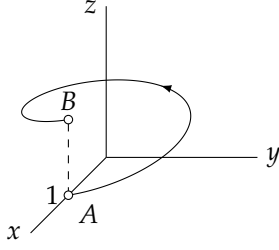
حل: چونکہ $x(s) = \cos s$ اور $y(s) = \sin s$ ہیں لہذا مساوات 11.5 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \int_C x^3 y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 s \sin s ds \\ &= \int_1^0 -u^3 du = \frac{1}{4} \quad (u = \sin s) \end{aligned}$$

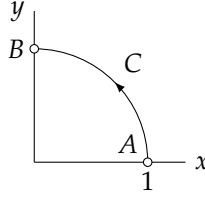
□

مثال 11.3: برائے مساوات 11.6

xy مستوی میں نقطہ $A : (-1, 1, 0)$ سے نقطہ $B : (1, 5, 0)$ تک راہ $y = 2x + 3$ پر $\int_C x^2 y ds$ کی قیمت دریافت کریں۔



(ب) فضائیں خطی مکمل کی راہ (مثال 11.4)



(الف) سطح میں مکمل کی راہ (مثال 11.2)

شکل 11.5: سطح میں راہ اور فضائیں راہ۔

حل: ہم C کو درج ذیل مقدار معلوم روپ¹² میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t + 3)\mathbf{j} \quad -1 \leq t \leq 1$$

یوں

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{5}$$

ہو گا۔ راہ پر رہتے ہوئے $x^2y = t^2(2t + 3) = 2t^3 + 3t^2$ ہو گا لہذا مساوات 11.6 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C x^2y \, ds = \sqrt{5} \int_{-1}^1 (2t^3 + 3t^2) \, dt = 2\sqrt{5}$$

□

مثال 11.4: فضائیں راہ پر خطی مکمل

پتچ دار راہ کو شکل 11.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, ds$ دریافت کریں۔

حل: پتچ دار راہ کی مساوات

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

¹² ظاہر ہے کہ ہم $t = x$ لیتے ہوئے راہ کو $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + (2x + 3)\mathbf{j}$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ہے لہذا

$$\dot{r} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} = \sqrt{2}$$

ہو گا۔ اس راہ پر چلتے ہوئے

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^2 = (1 + t^2)^2$$

ہو گا اور یوں مساوات 11.6 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 ds &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)^2 dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{2(2\pi)^3}{3} + 2\pi \right] \approx 3013 \end{aligned}$$

□

ایسا خطی تکمل جس کا متکمل تجربی تفاعل ہو یا جو پیچیدہ قطعی تکمل دیتا ہو کو تکمل کے اعدادی طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔

کئی معاملوں میں خطی تکمل کے متکمل درج ذیل روپ رکھتے ہیں

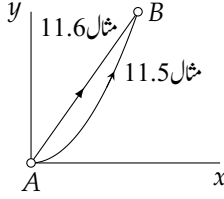
$$(11.7) \quad g(x, y, z) \frac{dx}{ds}, \quad g(x, y, z) \frac{dy}{ds}, \quad g(x, y, z) \frac{dz}{ds}$$

جہاں $\frac{dx}{ds}$ ، $\frac{dy}{ds}$ اور $\frac{dz}{ds}$ تکمل کی راہ کی مقدار معلوم روپ میں موجود تفاعل کے تفرق ہیں۔ ایسی صورت میں ہم

$$(11.8) \quad \int_C g(x, y, z) \frac{dx}{ds} ds = \int_C g(x, y, z) dx$$

لکھتے ہیں۔ باقی دو صورتوں کے لئے بھی ایسا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی راہ C پر ان طرز کے تکمل کے مجموعے کو درج ذیل سادہ صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$(11.9) \quad \int_C f dx + \int_C g dy + \int_C h dz = \int_C (f dx + g dy + h dz)$$



شکل 11.6: مکمل کے دو مختلف راہ (مثال 11.5 اور مثال 11.6)

راہ C کی روپ استعمال کرتے ہوئے تین میں سے دو آزاد متغیرات کو حذف کرتے ہوئے حاصل قطعی مکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ تیسرا آزاد متغیر اس قطعی مکمل کا متغیر ہو گا۔

مثال 11.5: برائے مساوات 11.8 اور مساوات 11.9
خطی مکمل $\int_C [x^2 y^2 dx + (x - y + z) dy + xz dz]$ کی قیمت دریافت کریں۔ مکمل کی راہ سطح $z = 5$ میں قوس قطع مکانی $y = x^2$ پر میں نقطہ $A : (0, 0, 5)$ تا نقطہ $B : (1, 1, 5)$ ہے (شکل 11.6-الف)۔

حل: چونکہ $y = x^2$ ہے لہذا $\frac{dy}{dx} = 2x$ یا $dy = 2x dx$ ہو گا۔ چونکہ $z = 5$ غیر متغیر ہے لہذا مکمل کے آخری جزو کا مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^1 [x^2 x^4 dx + (x - x^2 + 5)2x dx] = \int_0^1 (x^6 - 2x^3 + 2x^2 + 10x) dx = \frac{223}{42} \approx 5.31$$

□

مثال 11.6: درج بالا مثال کے مکمل کو انہیں دو نقطوں کے درمیان سطح $z = 5$ میں راہ $y = x$ پر حاصل کریں (شکل 11.6-ب)۔

حل: اب $dy = dx$ ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 [x^2 x^2 dx + (x - x + 5)x dx] = \int_0^1 (x^4 + 5) dx = \frac{26}{5} = 5.2$$

□

مثال 11.5 اور مثال 11.6 میں ایک جیسے مستکمل، ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ پائے گئے البتہ ان مثالوں میں راہ مختلف تھی۔ کمل کے جوابات بھی مختلف تھے۔ اس نتیجے کے مطابق کمل کی قیمت ابتدائی نقطہ، اختتامی نقطہ اور مستکمل کے علاوہ راہ پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ اس بنیادی حقیقت پر مزید غور اسی باب میں کیا جائے گا۔

بعض اوقات مساوات 11.9 کے f ، g ، h سمتیہ v کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 ہوں گے

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k = f i + g j + h k$$

لہذا

$$v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = \left(v_1 \frac{dx}{ds} + v_2 \frac{dy}{ds} + v_3 \frac{dz}{ds} \right) ds$$

ہو گا جہاں قوسین میں بند حصہ سمتیہ v اور اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k \quad (\text{حصہ 10.5 دیکھیں})$$

کا اندرونی ضرب ہے۔ r کمل کی راہ C ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$(11.10) \quad \int_C (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = \int -C v \cdot \frac{dr}{ds} ds$$

جس کو عموماً

$$\int_C v \cdot \frac{dr}{ds} ds = \int_C v \cdot dr$$

لکھا جاتا ہے جہاں

$$(11.11) \quad dr = dx i + dy j + dz k$$

ہے۔

مثال 11.7: قوت اور کام
ایک ذرہ پر قوت f عمل کرتی ہے جو ذرے کو راہ C پر ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک منتقل کرتی ہے۔ اس قوت سے سرزد کام درج ذیل خطی کمل دیتی ہے

$$(11.12) \quad W = \int_C f \cdot dr$$

جہاں تکمل کو راہ پر منتقلی کی سمت میں حاصل کیا جاتا ہے۔ مثال 7.7 میں کام کی تعریف اور تکمل کی تعریف بطور مجموعہ استعمال کرتے ہوئے درج بالا خطی تکمل لکھا گیا ہے۔

ہم وقت t کو تکمل کا متغیر چنتے ہیں۔ یوں

$$dr = \frac{dr}{dt} dt = dv dt$$

ہو گا جہاں v سمتی رفتار سمتیہ ہے۔ یوں مساوات 11.12 درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.13) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} f \cdot v dt$$

جہاں ابتدائی لمحہ t_0 اور اختتامی لمحہ t_1 ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت

$$(11.14) \quad f = m\ddot{r} = m\dot{v}$$

ہو گا لہذا مساوات 11.13 سے درج ذیل ملتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m\dot{v} \cdot v dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v \cdot v \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} |v|^2 \right) dt = \frac{m}{2} |v|^2 \Big|_{t_0}^{t_1}$$

جس کے تحت ذرے کی میکانی توانائی میں اضافہ عین کام کے برابر ہے۔ یہ میکانات کا بنیادی قاعدہ ہے۔

□

مسئلہ 11.1: سمت راہ محفوظ رکھتا مقدار معلوم متبادل

راہ کی ایسی تمام مقدار معلوم صورتیں جو C کی مثبت سمت محفوظ رکھتی ہوں کے خطی تکمل کی قیمت یکساں ہوگی۔

ثبوت: ثبوت زنجیری قاعدہ سے حاصل ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ راہ $r(t)$ ہے جہاں $a \leq t \leq b$ ہے۔ اب متبادل $t = \phi(t^*)$ پر غور کرتے ہیں جو وقفہ t کا متبادل $a^* \leq t^* \leq b^*$ پر کرتا ہے اور جس کا تفرق $\frac{dt}{dt^*}$ مثبت ہے۔ ہم $r(t) = r(\phi(t^*)) = r^*(t^*)$ لکھ کر آگے بڑھتے ہیں۔ یوں $dt = \frac{dt}{dt^*} dt^*$ ہو گا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(r^*) \cdot d\mathbf{r}^* &= \int_{a^*}^{b^*} \mathbf{F}(r(\phi(t^*))) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt^*} dt^* \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(r(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_C \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

□

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 142 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |q| + |p|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

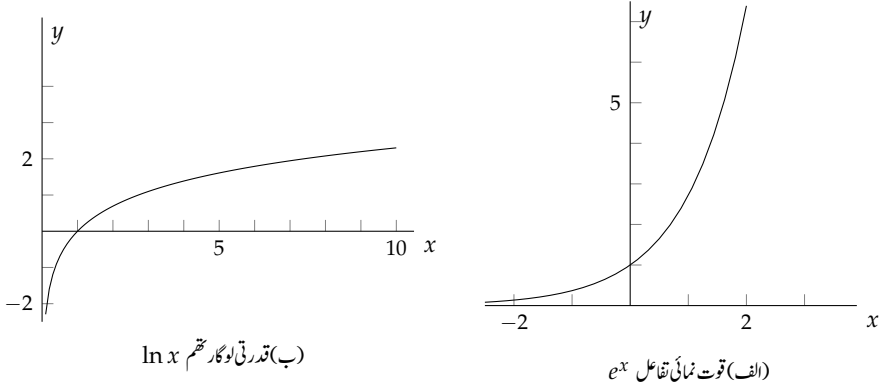
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

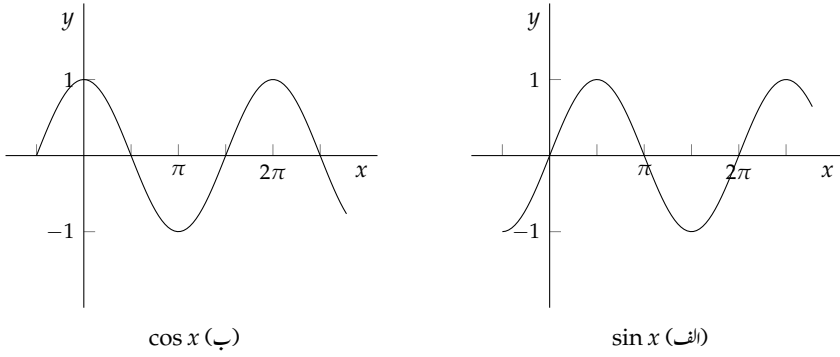
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}
 \end{aligned}$$

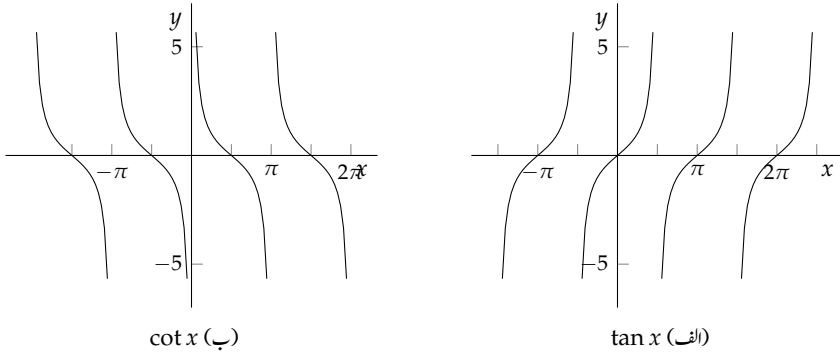
$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

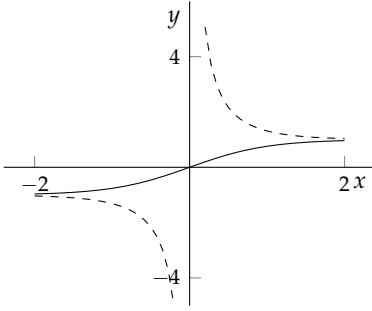
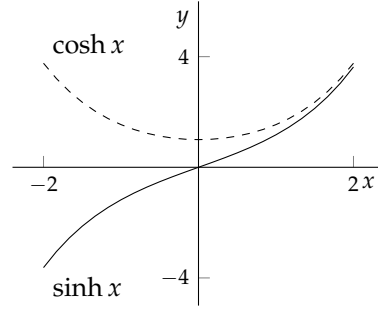
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

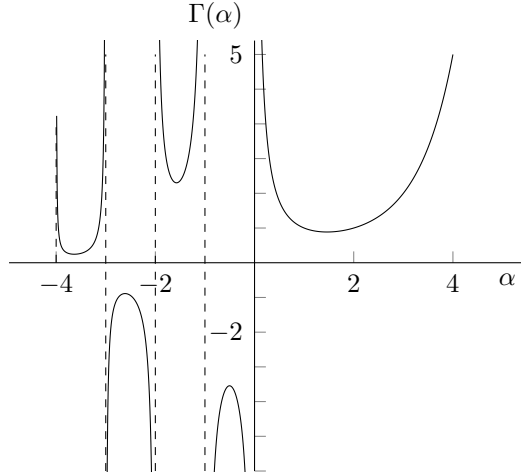
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

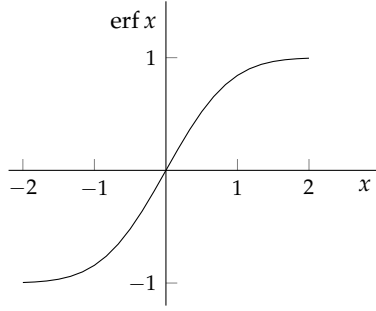
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

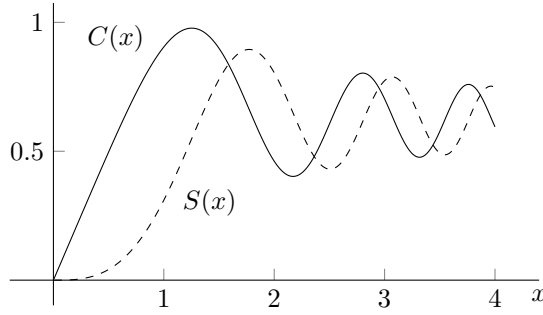
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

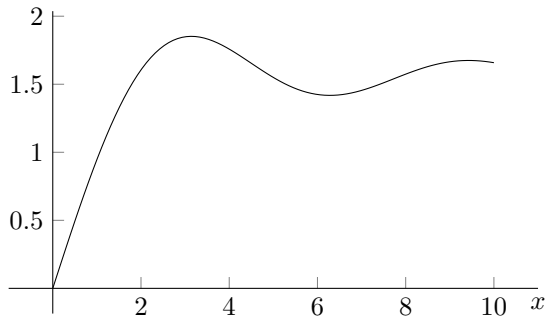
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

