

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8	مستطیل جھلی
1006	13.9	قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10	دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11	مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024	13.12	کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ-ہنڈر
1030	13.13	لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات

1037	14	مطلوبہ اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1	مخلوط اعداد
1047	14.2	مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3	مخلوط سطح میں مخنثیات اور خطے
1059	14.4	مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5	کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6	ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7	قوت نمائی تفاعل
1089	14.8	تکوینیاتی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9	لوگار تھم۔ عمومی طاقت

1103	15	محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1	نقشہ کشی
1116	15.2	محافظ زاویہ نقش
1125	15.3	خطی کسری تبادلہ
1129	15.4	مخصوص خطی کسری تبادلہ
1137	15.5	نقش زیر دیگر تفاعل

1139	ا	اضافی ثبوت
1143	ب	منفید معلومات
1143	1.ب	ا ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔



کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 15

### محافظ زاویہ نقشہ کشی

اگر  $z$  سطح میں دائرہ کار  $D$  میں مخلوط تفاعل  $w = f(z)$  معین ہو، تب  $D$  میں ہر نقطہ کا مطابقتی نقطہ  $w$  سطح میں پایا جاتا ہے۔ یوں  $D$  کا مطابقتی،  $f(z)$  کے حلقہ کا نقشہ،  $w$  سطح پر حاصل ہو گا۔ جیومیٹریائی نقشہ ذہن میں تفاعل کی تصویر قائم کرتا ہے۔ مختلف منحنیات اور خطوں کے نقوش دیکھ کر مخلوط تفاعل سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔

جیسا ہم دیکھیں گے، اگر  $f(z)$  تحلیلی ہو تب  $f(z)$  سے حاصل نقشہ میں زاویے تبدیل نہیں ہوں گے ماسوائے ان نقطوں پر جہاں  $f'(z) = 0$  ہو۔ ایسا نقشہ محافظ زاویہ نقشہ<sup>1</sup> کہلاتا ہے۔

محافظ زاویہ نقشہ کشی<sup>2</sup> کے ذریعہ دیے گئے پیچیدہ خطے کا تبادلہ سادہ خطے میں کرتے ہوئے نظریہ مخفی قوہ کی دو بعدی سرحدی مسائل حل کیے جاتے ہیں۔ اسی وجہ سے محافظ زاویہ نقشہ کشی انجینئری میں اہمیت رکھتی ہے۔

ہم نقشہ کشی کی تعریف پیش کرنے کے بعد نقشہ کشی کا عمل سکھائیں گے۔ اس کے بعد کئی بنیادی تحلیلی تفاعل کے نقوش پیش کریں گے۔

---

conformal map<sup>1</sup>  
conformal mapping<sup>2</sup>

## 15.1 نقشہ کشی

حقیقی متغیر  $x$  کے حقیقی تفاعل  $y = f(x)$  کی منحنی کو کارٹیس  $xy$  سطح پر کھینچا جاسکتا ہے۔ اس خط کو تفاعل کی ترسیم کہتے ہیں۔ چونکہ مخلوط متغیر  $z$  کو جیومیٹریکی طور پر مخلوط سطح میں نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہی کچھ  $w$  کے لئے بھی درست ہے لہذا مخلوط تفاعل

$$(15.1) \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$$

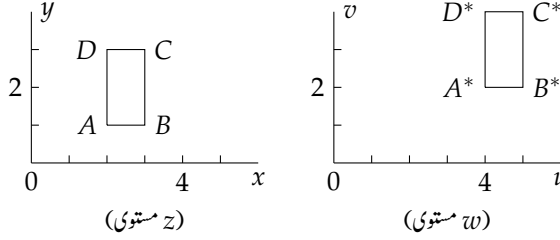
کی صورت حال زیادہ پیچیدہ ہے۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم ان دو متغیرات کے لئے دو علیحدہ علیحدہ مخلوط سطحیں استعمال کریں۔ ایک  $z$  سطح جس میں  $z = x + iy$  دکھایا جائے اور دوسری  $w$  سطح جس میں مطابقتی  $w = u + iv$  دکھایا جائے۔ یوں  $f(z)$  کی دائرہ کار  $D$  میں ہر  $z$  کے لئے تفاعل  $f(z)$  سطح  $w$  میں قیمت  $w = f(z)$  مختص کرے گا۔ اس معین تعلق کو  $f$  کی دائرہ کار کی سطح  $w$  میں <sup>3</sup> نقشہ کشی <sup>4</sup> (یا تبادل) کہتے ہیں، یا  $f$  کی دائرہ کار کا  $f$  کے حلقہ پر <sup>5</sup> نقشہ کشی کہتے ہیں۔

$w_0 = f(z_0)$  جو نقطہ  $z_0$  کا مطابقتی نقطہ ہے،  $f(z)$  کے لحاظ سے نقشے میں،  $z_0$  کا عکس نقطہ <sup>6</sup> یا عکس <sup>7</sup> کہلاتا ہے۔ اگر  $z$  کسی منحنی پر حرکت کرے اور  $f(z)$  استمراری (ناکہ مستقل) ہو تب مطابقتی نقطہ  $w = f(z)$  عمومی طور پر سطح  $w$  میں منحنی  $C^*$  پر حرکت کرے گا۔ اس منحنی کو منحنی  $C$  کا عکس کہیں گے۔ لفظ "عکس" کسی بھی نقطوں کے سلسلے اور خطہ کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ ایسی نقشہ کشی کی خواص کی تفتیش،  $z$  سطح میں منحنیات اور خطے اور  $w$  سطح میں ان کے عکس پر غور اور  $w$  سطح میں منحنیات اور خطے اور  $z$  سطح میں ان کے عکس پر غور کرنے سے کی جاسکتی ہے۔ اس طرح انفرادی نقطوں پر غور کرنے سے حاصل معلومات سے زیادہ معلومات حاصل ہو گی۔

اگرچہ  $w$  اور  $z$  کو دو علیحدہ علیحدہ سطحوں سے ظاہر کیا جاتا ہے، بعض اوقات یوں سوچنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے کہ اصل اور نقش ایک ہی سطح پر پائے جاتے ہوں اور عمومی اصطلاحات مثلاً "گھومنا" اور "مستقیم حرکت" استعمال کرنا۔ یوں  $w = z + 3$  مستقیم حرکت کہلائے گی جو  $z$  سطح میں ہر نقطہ کو دائیں جانب تین اکایاں منتقل کرتی ہے۔

into<sup>3</sup>  
mapping<sup>4</sup>  
onto<sup>5</sup>  
image point<sup>6</sup>  
image<sup>7</sup>



شکل 15.1: مستقیم حرکت  $w = z + 2 + i$

تحلیل تفاعل  $w = u + iv = f(z)$  جس نقشہ کو ظاہر کرتا ہو، کی کسی مخصوص خاصیت جاننے کے لئے ہم  $z$  سطح میں سیدھے لکیروں مستقل  $x =$  اور مستقل  $y =$  کا  $w$  سطح میں عکس پر غور کر سکتے ہیں۔ اسی طرح ہم دائرہ مستقل  $|z| =$  یا مبداسے گزرتی سیدھی لکیروں کی عکس پر غور کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مستقل  $u(x, y) =$  اور مستقل  $v(x, y) =$  منحنیات پر  $z$  سطح میں غور کر سکتے ہیں۔ ان منحنیات کو  $u$  اور  $v$  کی بھوار منحنیات<sup>8</sup> کہتے ہیں۔ ہم سادہ اشکال مثلاً چکور، تکتوں، مستطیل وغیرہ اور ان کے عکس پر بھی غور کر سکتے ہیں۔

آئیں چند مثالوں کی مدد سے ان حقائق کو بہتر سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مثال 15.1: خطی تبادل  $w = ax + b$  درج ذیل نقش مستقیم حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔

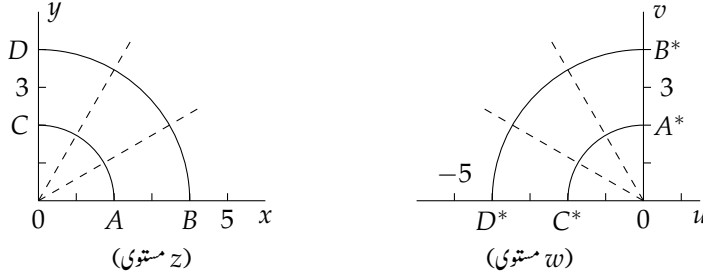
$$(15.2) \quad w = z + b$$

شکل 15.1 میں مساوات 15.2 کو  $w = z + 2 + i$  کے لئے دکھایا گیا ہے جہاں مستطیل اور اس کا عکس دکھائے گئے ہیں جو یکساں ہیں (کیوں؟)۔  $A$  کا عکس  $A^*$ ، وغیرہ۔ زیادہ پیچیدہ اشکال میں نقطوں کو اس طرح ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مساوات 15.2 میں  $b = 0$  پر کرنے سے مماثل تبادل<sup>9</sup>

$$w = z$$

حاصل ہوتا ہے جو ہر نقطے کو اپنے آپ پر نقش کرتا ہے۔

<sup>8</sup> level curves  
<sup>9</sup> identity transformation



شکل 15.2: گھڑی کی الٹ رخ گھومنے کا زاویہ  $\frac{\pi}{2}$  ہے۔

درج ذیل تبادل

$$w = az \quad (|a| = 1)$$

مقررہ زاویہ  $\angle a$  سے گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.2 میں  $w = iz$  یعنی گھڑی کی سوئیوں کی گھومنے کی الٹ رخ  $\frac{\pi}{2}$  زاویہ سے گھومنا دکھایا گیا ہے۔

درج ذیل تبادل

$$w = az \quad (a \text{ مثبت حقیقی})$$

میں  $a > 1$  اتساع جبکہ  $0 < a < 1$  سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح

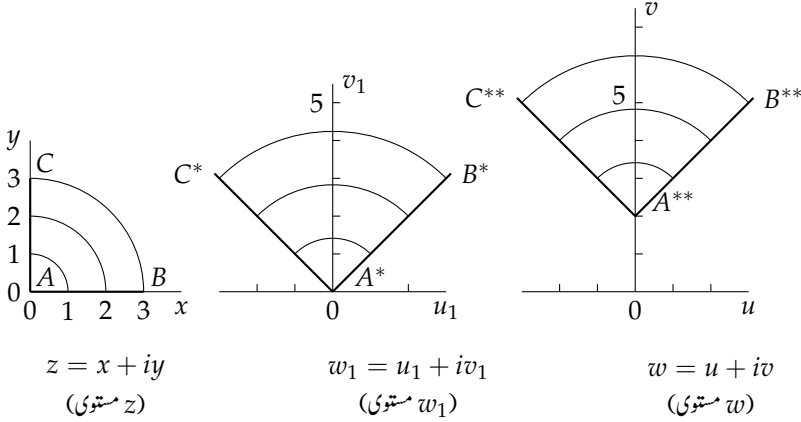
$$(15.3) \quad w = az \quad (a \text{ اختیاری})$$

زاویہ  $\angle a$  سے گھومنے کو اور ساتھ ہی یکساں اتساع یا سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ درج ذیل تبادل

$$(15.4) \quad w = az + b$$

خطی تبادل<sup>10</sup> کہلاتا ہے جو گھومنے کے ساتھ اتساع یا سکڑاو  $w_1 = az$  کے ساتھ ساتھ مستقیم حرکت  $w = w_1 + b$  کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.3 میں  $w = (1+i)z + 2i$  تبادل دکھایا گیا ہے جو گھڑی کی الٹ رخ  $\frac{\pi}{4}$  زاویے کے گھومنے اور  $|1+i| = \sqrt{2}$  تناسب کی اتساع کے بعد اوپر کی رخ مستقیم حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ □

<sup>10</sup>linear transformation



شکل 15.3: خطی تباد  $w = (1 + i)z + 2i$  جس میں گھومنا، اتساع  $w_1 = (1 + i)z$  اور مستقیم حرکت  $w = w_1 + 2i$  شامل ہے۔

مثال 15.2: نقش  $w = z^2$  ہم درج ذیل نقش پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$(15.5) \quad w = z^2$$

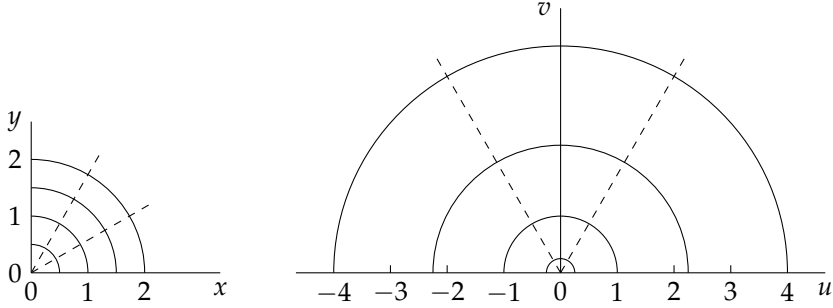
یہاں قطبی محدود استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ یوں  $z = e^{i\theta}$  اور  $w = Re^{i\phi}$  لیتے ہوئے مساوات 15.5 لکھی جائے گی جس سے

$$R = r^2, \quad \phi = 2\theta$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں دائروں مستقل  $r = r_0$  کا نقش دائرے مستقل  $R = r_0^2$  ہوں گے جبکہ مبداء سے گزرتی سیدھی لکیروں مستقل  $\theta = \theta_0$  کا نقش دگنی زاویہ پر لکیریں مستقل  $\phi = 2\theta_0$  ہوں گی۔ خاص کر  $z$  سطح میں مثبت حقیقی محور ( $\theta = 0$ ) کا نقش  $w$  سطح میں مثبت حقیقی محور ہو گا جبکہ  $z$  سطح میں مثبت خیالی محور  $\theta = \frac{\pi}{2}$  کا نقش  $w$  سطح میں منفی حقیقی محور ہو گا۔ یہ نقش مبداء پر ہر زاویہ کو دگنا کرتا ہے۔ ربع اول  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  کا نقش بالائی نصف  $w$  سطح ہو گی (شکل 15.4)۔

مستطیل محدود میں تباد  $w = z^2$  درج ذیل دے گا۔

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$$

شکل 15.4: نقش  $w = z^2$ 

حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$(15.6) \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

ملتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $u$  اور  $v$  کی ہموار سطحات متساوی الاضلاع قطع زائد ہوں گے جن کی متقارب لکیریں  $y = \pm x$  اور محد کی محور ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں مساوات 15.6 میں دیے گئے خطوط ایک دوسرے کی عمودی مطلق خطوط (حصہ 1.6) ہیں۔ شکل 15.5 میں  $z$  سطح میں دو خطے  $w$  سطح میں مستطیل پر نقش ہوں گے۔ ظاہر ہے کہ ہر نقطہ  $w \neq 0$  سطح  $z$  میں ٹھیک دو نقطوں کا عکس ہو گا۔

ہم مساوات 15.6 استعمال کرتے ہوئے سیدھی خطوط مستقل  $x = c$  اور مستقل  $y = k$  کا عکس تلاش کر سکتے ہیں۔ خط مستقل  $x = c$  کا عکس

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy$$

سے  $y$  حذف کرتے ہوئے

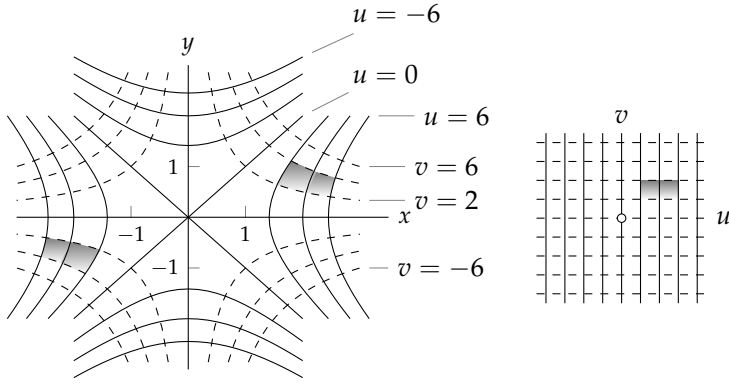
$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

حاصل ہوتا ہے جو قطع مکانی کو ظاہر کرتی ہے جو بائیں رخ کھلتا ہے۔ مبدا اس قطع مکانی کا ماسکہ ہو گا۔ اسی طرح مستقل  $y = k$  کا عکس

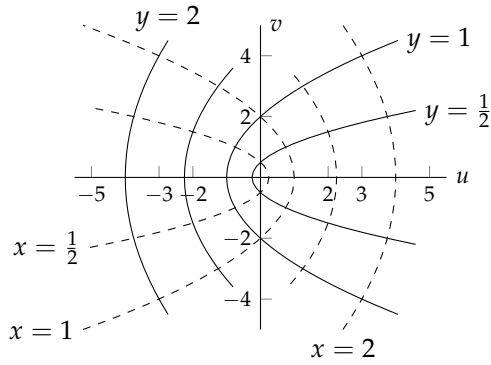
$$v^2 = 4k^2(k^2 + u)$$

□

ہو گا جو دائیں کو کھلتا ہوا قطع مکانی ہے جس کا ماسکہ عین مبدا پر ہے (شکل 15.6)۔



شکل 15.5: نقش  $w = z^2$  کی صورت میں  $u$  اور  $v$  کی ہموار سطحیں



شکل 15.6: نقش  $w = z^2$  میں سیدھے خطوط  $x = c$  اور  $y = c^*$  کے عکس



شکل 15.7: نقش  $w = z^n$ 

## باقی طاقت

$$(15.7) \quad w = z^n, \quad n = 3, 4, \dots$$

پر بھی اسی طرح غور کیا جاسکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ ان کی ہموار سطحات کی مساوات مزید پیچیدہ ہوں گی۔ زاویائی خطہ  $0 \leq \angle z \leq \frac{\pi}{n}$  بالائی نصف  $w$  سطح پر نقش ہو گا (شکل 15.7)۔

منفی طاقت کی نقش  $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots$  پر بھی قطبی محدود کی مدد سے غور کیا جاسکتا ہے۔ عملاً اہم ترین صورت درج ذیل مثال میں دی گئی ہے۔

مثال 15.3: نقش  $w = \frac{1}{z}$ ۔ الٹ جانا ہم درج ذیل نقش پر غور کرتے ہیں۔

$$(15.8) \quad w = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$$

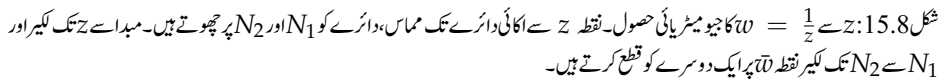
قطبی محدود استعمال کرتے ہوئے  $z = re^{i\theta}$  اور  $w = Re^{i\phi}$  لکھتے ہیں۔ یوں مساوات 15.8 سے

$$(15.9) \quad R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta \quad (r \neq 0)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ  $w = \frac{1}{z}$  ( $z \neq 0$ )، مبدا سے نکلتی سیدھی لکیر جو  $\bar{z}$  سے گزرتی ہو پر واقع ہے۔ مبدا سے اس نقطے کا فاصلہ  $\frac{1}{|z|}$  ہے۔

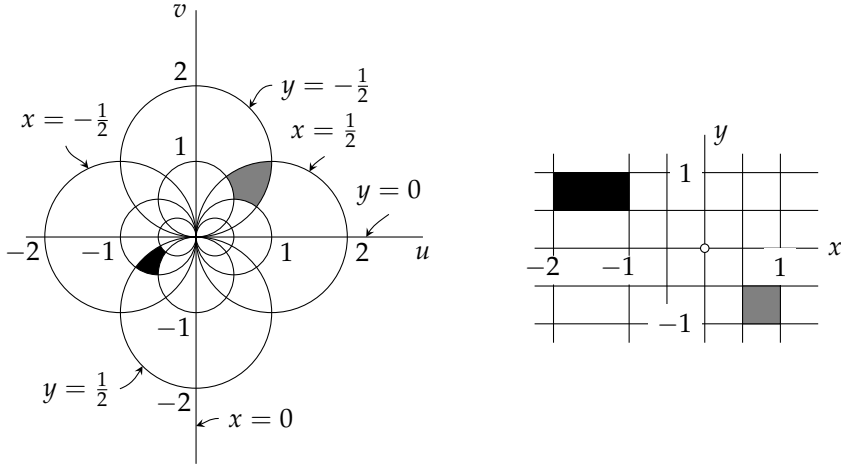
جیومیٹریائی طور پر  $z$  کو اکائی دائرے میں الٹاتے ہوئے اس کا  $x$  محور میں عکس لینے سے  $w = \frac{1}{z}$  حاصل ہو گا۔ آپ متشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے اس حقیقت کو ثابت کر سکتے ہیں (شکل 15.8)۔

شکل 15.9 میں دکھایا گیا ہے کہ  $w = \frac{1}{z}$  نقش، افقی اور کھڑی سیدھی لکیروں کو دائروں یا سیدھی لکیروں پر عکس کرتی ہے۔ یہاں تک کہ درج ذیل جملہ ہر صورت درست ہو گا۔


$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (A, B, C, D \text{ حقیقی})$$
$$Az\bar{z} + B\frac{z+\bar{z}}{2} + C\frac{z-\bar{z}}{i2} + D = 0$$
$$A + B \frac{w + \bar{w}}{2} + C \frac{\bar{w} - w}{i2} + Dw\bar{w} = 0$$
$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو  $D \neq 0$  کی صورت میں دائرہ ہو گا جبکہ  $D = 0$  کی صورت میں  $w$  سطح میں سیدھی لکیر ہو گی۔

□

شکل 15.9: نقش  $w = \frac{1}{z}$ 

## سوالات

سوال 15.1 تا سوال 15.3 میں زیر نقش  $w = (1 - i)z + 2$  دیے گئے منحنیات یا خطوں کا عکس تلاش کریں۔ عکس کو  $w$  سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.1:  $x = 0, 1, 2, 3$   
جواب:  $v = u - 2 - 2x, \quad v = u - 2, u - 4, u - 6, u - 8$

سوال 15.2:  $y = 0, -1, -2, -3$   
جواب:  $v = -u + 2 + 2y, \quad v = -u + 2, -u, -u - 2, -u - 4$

سوال 15.3:  $|z + 2| \leq 2$   
جواب:  $|w - i2| \leq 2\sqrt{2}$

سوال 15.4 تا سوال 15.9 میں نقش  $w = u + iv = z^2$  ہے۔ دیے گئے منحنیات کا عکس تلاش کرتے ہوئے انہیں  $w$  سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.4:  $y = x$   
جواب:  $u = 0, v \geq 0$

سوال 15.5:  $y = 0, 1, 2, 3$   
 جواب:  $v = 2y\sqrt{u + y^2}, \quad v = 0, \pm 2\sqrt{u + 1}, \pm 4\sqrt{u + 4}, \pm 6\sqrt{u + 9}$

سوال 15.6:  $x = 0, 1, 2, 3$   
 جواب:  $x = 0$  پر  $v = 0, u < 0$  ہو گا جبکہ عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$v = 2x\sqrt{x^2 - u}, v = 0, \pm 2\sqrt{1 - u}, \pm 4\sqrt{4 - u}, \pm 6\sqrt{9 - u}$$

سوال 15.7:  $y = 1 + x$   
 جواب:  $u = x^2 - y^2, v = 2xy$  میں  $y = 1 + x$  پر کرنے سے  
 $u = -1 - 2x, v = 2x(1 + x)$  ملتا ہے۔ یوں  $x = -\frac{1}{2}(1 + u)$  حاصل کرتے  
 ہوئے  $v = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$  حاصل ہو گا۔

سوال 15.8:  $y = 1 - x$   
 جواب:  $v = \frac{1}{2}(u + 1)(u + 3)$

سوال 15.9:  $y^2 = 1 + x^2$   
 جواب:  $u = -1$

سوال 15.10 تا سوال 15.15 میں نقش  $w = z^2$  ہے۔ دیا گیا خطہ  $w$  سطح میں حاصل کرتے ہوئے  $w$  سطح میں دکھائیں۔

سوال 15.10:  $|z| \geq 3$   
 جواب:  $|w| \geq 9$

سوال 15.11:  $|z| < 2$   
 جواب:  $|w| < 4$

سوال 15.12:  $\angle z < \frac{\pi}{3}$   
 جواب:  $\angle w < \frac{2\pi}{3}$

سوال 15.13:  $1 < x < 2$   
 جواب: قطع مکافی  $v^2 = 4(1 - u)$  اور  $v^2 = 16(4 - x)$  کے درمیان خطہ۔

سوال 15.14:  $0 \leq y \leq 1$ جواب: قطع مکانی  $v^2 = 4(1+u)$  اور مثبت  $u$  محور اور ان دونوں کے درمیان خطہ۔سوال 15.15:  $-\frac{\pi}{4} < \angle z < \frac{\pi}{2}$ جواب:  $-\frac{\pi}{2} < \angle w < \pi$ سوال 15.16 تا سوال 15.21 میں دیے سیدھی لکیروں اور دائروں کا زیر نقش  $w = \frac{1}{z}$  عکس دریافت کریں۔سوال 15.16:  $|z| = 1$ جواب:  $|w| = 1$ سوال 15.17:  $|z+1| = 1$ 

جواب:

$$|z+1| = 1, \quad \left| \frac{1}{w} + 1 \right| = 1, \quad |1+w| = |w|, \quad |u+iv+1| = |u+iv|$$

$$(u+1)^2 + v^2 = u^2 + v^2, \quad u = -\frac{1}{2}$$

سوال 15.18:  $|z+1| = 1$ جواب:  $u = \frac{1}{2}$ سوال 15.19:  $|z-i2| = 2$ جواب:  $v = -\frac{1}{4}$ سوال 15.20:  $y = x - 1$ 

جواب:  $z = x + iy$  سے  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  اور  $y = \frac{1}{i2}(z - \bar{z})$  لکھتے ہوئے  $y = x - 1$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $z = \frac{1}{w}$  اور  $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$  کا استعمال کرتے ہوئے دونوں اطراف کو  $i2$  سے ضرب دیا گیا ہے۔

$$\frac{1}{i2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - 1, \quad z - \bar{z} = i(z + \bar{z}) - i2$$

اس میں  $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$  پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کو  $w\bar{w}$  سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = i\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) - i2, \quad \bar{w} - w = i(\bar{w} + w) - i2w\bar{w},$$

$$-i2v = i2u - i2w\bar{w}, \quad u^2 - u + v^2 - v = 0,$$

$$(u - \frac{1}{2})^2 + (v - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}, \quad \left| w - \frac{1}{2}(1+i) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.21:  $x = 1$  سے  $z = x + iy$  کے نقطے  $x = 1$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $z = \frac{1}{\bar{w}}$  اور  $\bar{z} = \frac{1}{w}$  کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = 1, \quad \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} = 2, \quad \bar{w} + w = 2w\bar{w}, \quad 2u = 2(u^2 + v^2),$$

$$u^2 - u + v^2 = 0, \quad (u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}, \quad \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

سوال 15.22: زیر نقش  $w = \frac{1}{z}$  خطہ  $-2 < x < 1, -1 < y < 1$  کا عکس تلاش کریں۔  
جواب: وہ خطہ جس کے حدود  $\left|w + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ ،  $\left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ،  $\left|w - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$  اور  $\left|w + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$  دائرے ہوں۔

سوال 15.23: زیر نقش  $w = \frac{1}{z}$  خطہ  $1 < x < 2$  کا عکس تلاش کریں۔  
جواب: دائرہ  $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$  اور دائرہ  $\left|w - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$  کے درمیان خطہ۔

سوال 15.24: زیر نقش  $w = \frac{1}{z}$  کن سیدھی لکیروں کا عکس سیدھی لکیریں اور کن کا عکس دائرے ہیں۔ اسی طرح کن دائروں کا عکس دائرے اور کن کا عکس سیدھی لکیریں ہیں؟  
جواب: اگر سیدھی لکیر  $Bx + Cy + D = 0$  میں  $D = 0$  ہو تب عکس سیدھی لکیر ہوگی ورنہ عکس دائرہ ہوگا۔ اسی طرح اگر دائرہ  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$  میں  $D = 0$  ہو تب عکس سیدھی لکیر ہوگی ورنہ عکس دائرہ ہوگا۔

سوال 15.25: دکھائیں کہ زیر نقش  $w = \frac{1}{z}$  دائرہ اور منعکس دائرہ عموماً ہم مرکز نہیں ہوں گے۔  
جواب: دائرہ  $|z - z_0| = r$  کا مرکز  $z_0 = x_0 + iy_0$  ہے۔ زیر نقش  $w = \frac{1}{z}$  اس دائرے کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں تیسری قدم پر  $|w_0 - w| = |w - w_0|$  کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\left|\frac{1}{w} - \frac{1}{w_0}\right| = r, \quad \left|\frac{w_0 - w}{ww_0}\right| = r, \quad |w - w_0| = r|ww_0|$$

اس دائرے کا مرکز  $w_0 = \frac{1}{z_0}$  ہے جو اصل دائرے کی مرکز  $z_0$  سے مختلف ہے۔ ( $z_0 = 1$  کی صورت میں  $w_0 = 1$  ہو گا لہذا دائرہ اور عکس ہم مرکز ہوں گے۔)

سوال 15.26: زیر نقش  $w = \frac{1}{z}$  نقطہ  $3 + i4$  کا عکس  $\frac{1}{3+i4}$  جیومیٹریائی طریقے سے دریافت کریں۔

سوال 15.27: زاویائی خطہ  $0 \leq \angle z \leq \frac{\pi}{4}$  کا زیر نقش  $w = z$  ،  $w = iz$  ،  $w = -iz$  ،  $w = z^2$  ،  $w = -z^2$  ،  $w = -iz^2$  اور  $w = z^3$  عکس دریافت کریں اور انہیں  $w$  سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.28: زیر نقش  $w = \frac{1}{z}$  ،  $w = \frac{i}{z}$  ،  $w = \frac{1}{z^2}$  اور  $w = \frac{i}{z^2}$  سوال 15.27 میں دیے گئے خطے کا عکس تلاش کریں۔

سوال 15.29: ایسا نقش  $w = u + iv = f(z)$  دریافت کریں جو آدھی سطح  $x \geq 0$  کو خطہ  $u \geq 2$  پر عکس کرے اور ساتھ ہی ساتھ نقطہ  $z = 0$  کو نقطہ  $w = 2 + i$  پر عکس کرے۔  
جواب:  $w = z + 2 + i$

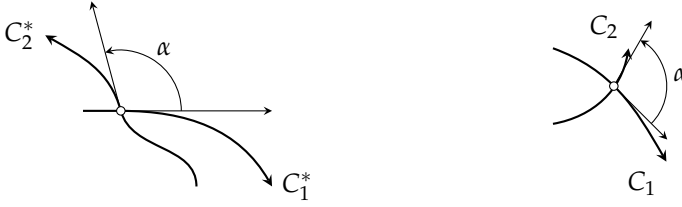
سوال 15.30: ایسا نقش  $w = u + iv = f(z)$  تلاش کریں جو زاویائی خطہ  $0 < \angle z < \frac{\pi}{3}$  کو خطہ  $u < 1$  پر عکس کرتا ہو۔  
جواب:  $w = iz^3$

## 15.2 محافظ زاویہ نقش

ہم اب تحلیلی تفاعل کی نقش کی اہم ترین خاصیت یعنی محافظت زاویہ<sup>12</sup> پر تبصرہ کرتے ہیں۔

سطح میں ایسا نقش جو سمت بند منحنیات کے درمیان زاویوں کی مقدار اور ان زاویوں کی مثبت سمت برقرار رکھتا ہو محافظ زاویہ نقش<sup>13</sup> کہلاتا ہے، یعنی دو سمت بند منحنیات کا زاویہ تقاطع اور اس زاویہ کی مثبت سمت، عکس کی (مطابقتی سمت بن) منحنیات کا زاویہ تقاطع اور اس زاویہ کی مثبت سمت ایک جیسے ہوں گے۔ یہاں دو منحنیات کے مابین زاویہ سے مراد ان کی نقطہ تقاطع پر مماثل کے مابین زاویہ  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ) ہے (شکل 15.10)۔

conformality<sup>12</sup>  
conformal<sup>13</sup>



شکل 15.10: منحنیات  $C_1$  اور  $C_2$  کا محافظ زاویہ نقش میں عکس بالترتیب  $C_1^*$  اور  $C_2^*$  ہے۔

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ نقش  $w = f(z)$  ان تمام نقطوں پر محافظ زاویہ ہے جہاں  $f(z)$  تحلیل ہے، ماسوائے ان نقطوں پر جہاں تفرق  $f'(z)$  کی قیمت صفر ہے۔ ایسے نقطہ کو نقطہ فاصل<sup>14</sup> کہتے ہیں۔ مثلاً  $f(z) = z^2$  کی صورت میں  $z = 0$  پر  $f'(z) = 2z = 0$  ہے لہذا  $z = 0$  پر نقش محافظ زاویہ نہیں ہے اور اس نقطہ پر زاویہ دگنا ہوتا ہے (مثال 15.2)۔

اس مقصد کے لئے ہمیں منحنیات اور ان کی عکس پر غور کرنا ہو گا۔ مخلوط سطح  $z$  میں منحنی  $C$  کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(15.10) \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

جہاں  $t$  حقیقی مقدار معلوم ہے۔ مثال کے طور پر تفاعل

$$z(t) = r \cos t + ir \sin t$$

دائرہ  $|z| = r$  کو ظاہر کرتا ہے جبکہ تفاعل

$$z(t) = t + it^2$$

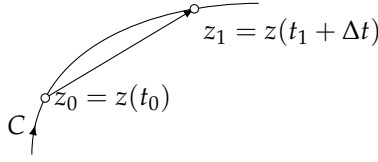
قطع مکانی  $y = x^2$  کو ظاہر کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ مساوات 15.10 میں بڑھتے  $t$  سے حاصل رخ کو منحنی پر مثبت سمت<sup>15</sup> کہتے ہیں۔ یوں مساوات 15.10 منحنی  $C$  پر سمت بندی تعین کرتی ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 15.10 میں  $z(t)$  قابل تفرق ہے اور تفرق  $\dot{z}(t)$  استمراری اور ہر نقطہ پر غیر صفر ہے۔ تب  $C$  کے ہر نقطہ پر یکتا مماس پایا جائے گا اور  $C$  بھوار منحنی<sup>16</sup> کہلائے گی۔  $C$  پر مثبت سمت کا مماس پر مطابقتی سمت اس مماس پر مثبت سمت کہلاتی ہے اور ایسا مماس سمت بند کہلاتا ہے۔

<sup>14</sup>critical point

<sup>15</sup>positive sense

<sup>16</sup>smooth curve





شکل 15.11: مساوات 15.11 کی استنباط

$C$  پر  $z_0 = z(t_0)$  اور  $z_1 = z(t_1 + \Delta t)$  نقطوں سے گزرتی وہ تحدیدی سیدھی لکیر جو  $\Delta z \rightarrow 0$  کرنے سے حاصل ہو، نقطہ  $z_0$  پر  $C$  کی مماس کہلاتی ہے (حصہ 10.5 دیکھیں)۔ اب عدد  $z_1 - z_0$  کو  $z_0$  سے  $z_1$  تک سمتیہ (شکل 15.11) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے اور  $\frac{z_1 - z_0}{\Delta t}$ ، جہاں  $\Delta t > 0$  ہے، کی مطابقتی سمتیہ کی وہی سمت ہوگی جو اس سمتیہ کی ہے۔ یوں درج ذیل کا مطابقتی سمتیہ

$$(15.11) \quad \dot{z}(t_0) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$$

نقطہ  $z_0$  پر  $C$  کا مماس ہوگا اور اس سمتیہ اور مثبت  $x$  محور کے مابین زاویہ  $\angle \dot{z}(t_0)$  ہوگا۔

اب ایسے غیر مستقل تحلیلی تفاعل  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  کی نقش پر غور کریں جو اس دائرہ کار میں معین ہو جس میں  $C$  پایا جاتا ہو۔ اس نقش میں  $C$  کا عکس، سطح  $w$  میں منحنی  $C^*$  ہوگی یعنی:

$$w(t) = f[z(t)]$$

$C^*$  پر نقطہ  $w(t_0)$  کا مطابقتی نقطہ  $z_0 = z(t_0)$  ہے اور  $\dot{w}(t_0)$  اس نقطہ پر  $C^*$  کی مماسی سمتیہ ہے۔ اب زنجیری قاعدہ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(15.12) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt}$$

لہذا  $f'(z_0) \neq 0$  کی صورت میں ہم دیکھتے ہیں کہ  $\dot{w}(t_0) \neq 0$  ہوگا اور  $w(t_0)$  پر  $C^*$  کا یکتا مماس موجود ہوگا جو مثبت  $u$  محور کے ساتھ  $\angle \dot{w}(t_0)$  زاویہ بنائے گا۔ چونکہ حاصل ضرب کی دلیل جزو ضربی کی دلیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے لہذا مساوات 15.12 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\angle \dot{w}(t_0) = \angle f'(z_0) + \angle \dot{z}(t_0)$$

یوں زیر نقش نقطہ  $z_0$  پر  $C$  کا سمتی مماس زاویہ

$$(15.13) \quad \angle \dot{w}(t_0) - \angle \dot{z}(t_0) = \angle f'(z_0)$$

سے گھوم جائے گا جو  $C$  اور  $C^*$  کی مماسوں کے مابین زاویہ کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 15.13 کا دایاں ہاتھ  $C$  کے غیر تابع ہے لہذا یہ زاویہ بھی  $C$  کی انتخاب کے تابع نہیں ہو گا۔ یوں تبادل  $w = f(z)$  نقطہ  $z_0$  سے گزرتی ہوئی تمام منحنیات کی مماس کو ایک ہی زاویہ  $\angle f'(z_0)$  سے گھومائے گی۔ اس طرح نقطہ  $z_0$  سے گزرتی ایسی دو منحنیات جن کی مماس کے مابین ایک مخصوص زاویہ ہو کی عکس کی منحنیات کی مماس کے مابین بھی، نقطہ  $z_0$  کے مطابقتی نقطہ  $w_0$  پر، مقدار اور سمت دونوں میں، یہی مخصوص زاویہ ہو گا۔ اس سے درج ذیل بنیادی نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

### مسئلہ 15.1: محافظ زاویہ نقش

تحلیلی تعامل  $f(z)$  کا نقش محافظ زاویہ ہے، ماسوائے ان نقطوں پر جہاں تفرق  $f'(z)$  صفر کے برابر ہو۔

### مثال 15.4: محافظت زاویہ زیر $w = z^2$

نقش  $w = z^2$  محافظ زاویہ ہے ماسوائے نقطہ  $z = 0$  پر جہاں  $w' = 2z = 0$  ہے۔ شکل 15.4 اور شکل 15.6 میں دکھایا گیا ہے کہ عکسی منحنیات ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں ماسوائے  $z = 0$  پر جہاں زاویے دگنا ہو جاتے ہیں یعنی اس نقطے پر سیدھے خط  $\angle z = c$  کا عکس سیدھا خط  $\angle w = 2c$  ہو گا (شکل 15.4)۔ □

مزید تفرق کی تعریف سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

یوں نقش  $w = f(z)$  چھوٹے قطعات کی لمبائی کو تقریباً  $|f'(z_0)|$  گنا بڑھاتا ہے۔ کسی چھوٹے شکل کا عکس تقریباً اصل صورت برقرار رکھے گا۔ چونکہ  $f'(z_0)$  ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر تبدیل ہوتا ہے لہذا وسیع شکل کا عکس عموماً اصل سے بہت مختلف ہو گا۔

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 14.40 اور کوشی ریمان مساوات سے

$$(15.14) \quad |f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

یعنی

$$(15.15) \quad \left| f'(z) \right|^2 = \left| \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}} \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}} \right| = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں نقش  $w = f(z)$  کی حقیقی روپ

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

استعمال کرتے ہوئے مقطع، یعقوبی<sup>17</sup> (حصہ 11.3) کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں شرط  $f'(z_0) \neq 0$  سے مراد ہے کہ  $z_0$  پر یعقوبی غیر صفر ہے۔ اس شرط کی بنا نقش  $w = f(z)$  کو کافی چھوٹی پڑوس میں محدود کرنے سے ایک ایک مطابقتی<sup>18</sup> نقش حاصل ہوتی ہے یعنی ہر انفرادی نقطے کا منفرد عکس پایا جاتا ہے۔ اس حقیقت کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 15.5: نقش  $w = z^2$  ماسوائے  $z = 0$  کے، کافی چھوٹی پڑوس میں ایک ایک مطابقت رکھتا ہے۔ نقطہ  $z = 0$  کی پڑوس میں یہ نقش ایک ایک مطابقت نہیں رکھتا ہے۔ پوری  $z$  سطح یوں  $w$  سطح پر نقش ہوتی ہے کہ  $w$  سطح کا ہر نقطہ  $w \neq 0$  سطح  $z$  کی دو نقطوں کا عکس ہوتا ہے۔ مثلاً  $z = 1$  اور  $z = -1$  دونوں  $w = 1$  پر عکس ہوتے ہیں بلکہ  $z_1$  اور  $-z_1$  کا ایک ہی عکس  $w = z_1^2$  ہو گا۔ □

محافظ زاویہ نقش کی عملی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ دو حقیقی متغیرات کی ہارمونی تفاعل محافظ زاویہ تبادل کے بعد نئی متغیرات کے لحاظ سے ہارمونی رہتا ہے (مسئلہ 15.2)۔ اس کے دور رس اثرات ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ہمیں دو بعدی نظریہ مخفی قوہ میں سرحدی مسئلہ حل کرنا ہو یعنی ہمیں دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل دائرہ کار  $D$  میں درکار ہو جو  $D$  کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ ایسے موقع پر عین ممکن ہے کہ ہم ایسا محافظ زاویہ نقش استعمال کر پائیں جو  $D$  کو ایک سادہ خطہ  $D^*$ ، جیسے آدھی سطح یا دائری قرص، پر عکس کر سکے۔ ہم مساوات لاپلاس کے  $D^*$  کے لحاظ سے حل کا اسی نقش کے ذریعہ الٹ حاصل کرتے ہوئے اصل مسئلے کا حل تلاش کر پائیں گے۔ یہ انتہائی طاقتور ترکیب درج ذیل مسئلہ کے تحت ممکن ہے۔

مسئلہ 15.2: ہارمونی تفاعل اور محافظ زاویہ نقش

تحلیلی تفاعل  $w = f(z)$  کی، ایک ایک مطابقتی، محافظ زاویہ تبادل سے ہارمونی تفاعل  $h(x, y)$ ، تبدیل شدہ متغیرات کے لحاظ سے ہارمونی رہتا ہے۔

<sup>17</sup>Jacobian  
<sup>18</sup>one to one

ثبوت : پہلا ثبوت جوڑی دار ہارمونی تفاعل کی موجودگی فرض کرتا ہے  
فرض کریں کہ دائرہ کار  $D$  میں ہارمونی تفاعل  $h(x, y)$  ہے اور  $D$  میں  $h(x, y)$  کا جوڑی دار<sup>19</sup> ہارمونی  
تفاعل  $g(x, y)$  ہے، نتیجتاً  $h + ig$  دائرہ کار  $D$  میں  $z = x + iy$  کا تحلیلی تفاعل  $H(z)$  ہو گا۔ ہم  
فرض کر چکے ہیں کہ نقش  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ایک مطابقتی اور محافظ زاویہ ہے لہذا  
 $D$  کا عکس  $D^*$  دائرہ کار ہے؛ ساتھ ہی  $D$  میں  $f'(z) \neq 0$  ہے اور الٹ تفاعل  $z = F(w)$  جو  $D^*$   
کو واپس  $D$  پر عکس کرتا ہو موجود ہے۔  $D^*$  میں  $F(w)$  تحلیلی ہے: یقیناً اس کا تفرق درج ذیل ہے۔

$$\frac{dF}{dw} = \frac{1}{df/dz}$$

اس کلیہ کا ثبوت حقیقی علم الاحصاء کی طرح ہے۔ یوں  $H[F(w)]$  دائرہ کار  $D^*$  میں  $w$  کا تحلیلی تفاعل ہو  
گا۔ اس کا حقیقی جزو  $h[x(u, v), y(u, v)]$  ہو گا جو  $D^*$  میں  $u$  اور  $v$  کا ہارمونی تفاعل ہے۔

□

ثبوت : دوسرا ثبوت بلا جوڑی دار ہارمونی تفاعل  
فرض کریں کہ  $D$  میں  $h(x, y)$  ہارمونی ہے۔ پہلے کی طرح ہم اب بھی  $z = x + iy = F(w)$  استعمال  
کرتے ہوئے  $h[x(u, v), y(u, v)]$  حاصل کرتے ہیں۔ ہم اپنی آسانی کی خاطر، اس تفاعل، جو  $u$  اور  $v$  کا  
تابع ہے، کو دوبارہ  $h$  سے ہی ظاہر کرتے ہیں اور دکھاتے ہیں کہ  $D^*$  میں یہ ہارمونی ہے جہاں  $D^*$  زیر نقش  
 $w = f(z)$  دائرہ کار  $D$  کا عکس ہے۔ ہم زنجیری قاعدہ بروئے کار لاتے ہیں

$$h_x = h_u u_x + h_v v_x$$

جہاں زیر نوشت میں  $x$  اور  $y$  تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم زنجیری قاعدہ ایک بار دوبارہ استعمال کرتے ہیں اور  
ان ارکان کے نیچے خط کھینچتے ہیں جو  $h_{xx} + h_{yy}$  مجموعہ حاصل کرتے وقت آپس میں کٹ جائیں گے۔

$$h_{xx} = \underline{h_u u_{xx}} + (\underline{h_{uu} u_x} + \underline{h_{uv} v_x}) u_x + \underline{h_v v_{xx}} + (\underline{h_{vu} u_x} + \underline{h_{vv} v_x}) v_x$$

بالکل اسی طرح ہم  $h_{yy}$  حاصل کر سکتے ہیں جو درج بالا میں  $x$  کی جگہ  $y$  اور  $y$  کی جگہ  $x$  لکھنے سے  
حاصل ہو گا۔ ان دونوں کا مجموعہ  $h_{xx} + h_{yy}$  ہمیں درکار ہے۔ اب چونکہ  $w = u + iv$  تحلیلی ہے لہذا مسئلہ  
14.3 کے تحت

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

<sup>19</sup> حصہ 14.5 دیکھیں۔ ہم بغیر ثبوت دے دیتے ہیں کہ اگر  $D$  سادہ تعلق (تعریف حصہ 11.12) والا خطہ ہو تب جوڑی دار ہارمونی تفاعل موجود ہو گا۔

ہوگا اور ساتھ ہی مجموعہ میں  $h_{vu} = h_{uv}$  کو

$$u_x v_x + u_y v_y$$

ضرب کرتا ہے جو مساوات کو شی ریمان کے تحت صفر کے برابر ہے۔ یوں مجموعہ

$$h_{xx} + h_{yy} = h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(v_x^2 + v_y^2)$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات کو شی ریمان کی مدد سے

$$(h_{uu} + h_{vv})(u_x^2 + v_x^2)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 15.14 استعمال کرتے ہوئے

$$(15.16) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ محافظت زاویہ کی وجہ سے  $f'(z) \neq 0$  ہے اور ہم فرض کر چکے ہیں کہ  $D$  میں بایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہذا قوسین میں بند حصہ  $D^*$  میں لازماً صفر کے برابر ہوگا۔

□

نظریہ مخفی قوہ میں محافظ زاویہ نقش کی ترکیب استعمال کرنے میں سب سے مشکل قدم اس نقش کا جاننا ہے جو دیے گئے خطہ کو سادہ خطہ پر نقش کرتا ہو۔ اس کے لئے ہمیں تجربہ درکار ہوگا اور ساتھ ہی ساتھ بنیادی تحلیلی تفاعل کی خواص نقش کی گہری سمجھ ضروری ہوگی۔ اس ضرورت کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم اہم ترین بنیادی تحلیلی تفاعل پر غور کریں گے۔

### سوالات

سوال 15.31: تحلیلی تفاعل کی نقش میں منحنیات  $c = \text{مستقل}$  اور  $|z| = c^* = \text{مستقل}$  کیوں ایک دوسرے کو  $90^\circ$  درجہ پر قطع کرتی ہیں؟  
جواب: چونکہ محافظ زاویہ نقش میں زاویے تبدیل نہیں ہوتے ہیں۔

سوال 15.32: ایسا نقطہ جہاں  $f'(z) \neq 0$  ہو پر تحلیلی تفاعل  $w = u + iv = f(z)$  کی ہموار منحنیات  $c = \text{مستقل} = u$  اور  $v = \text{مستقل} = c^*$  کیوں ایک دوسرے کو  $90^\circ$  پر قطع کرتی ہیں؟

سوال 15.33: کیا نقش  $w = \bar{z} = x - iy$  زاویوں کی مقدار اور مثبت سمت برقرار رکھتا ہے؟  
جواب: نہیں۔ مقدار برقرار رہتا ہے لیکن مثبت سمت الٹ ہوتی ہے۔

سوال 15.34 تا سوال 15.39 میں دیے منحنیات کو  $z$  سطح  $(z = x + iy)$  میں  $z = z(t)$  روپ میں لکھیں۔

سوال 15.34:  $x^2 + y^2 = 4$   
جواب:  $z(t) = 2 \cos t + i 2 \sin t$

سوال 15.35:  $y = \frac{1}{x}$   
جواب:  $z(t) = t + \frac{i}{t}$

سوال 15.36:  $y = 3x^2$   
جواب:  $z(t) = t + i 3t^2$

سوال 15.37:  $x^2 - y^2 = 1$   
جواب:  $z(t) = \cosh t + i \sinh t$

سوال 15.38:  $y = ax + b$   
جواب:  $z(t) = t + i(at + b)$

سوال 15.39:  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$   
جواب:  $z(t) = -2 + 4 \cos t + i(3 + 4 \sin t)$

سوال 15.40 تا سوال 15.45 میں ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں نقش  $w = f(z)$  محافظ زاویہ نہیں ہے۔  
سوال  $f(z)$  میں دیا گیا ہے۔

سوال 15.40:  $z^3$   
جواب:  $z = 0$

سوال 15.41:  $\cos z$   
جواب:  $z = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

سوال 15.42:  $z + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$   
جواب:  $z = \pm 1$

سوال 15.43:  $e^{z^2}$   
جواب:  $z = 0$

سوال 15.44:  $z^3 - z^2$   
جواب:  $z = 0, \frac{2}{3}$

سوال 15.45:  $az^2 + bz + c$   
جواب:  $z = -\frac{b}{2a}$

سوال 15.46 تا سوال 15.49 میں درج ذیل تفاعل  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  کے لئے مساوات 15.15 کی تصدیق کریں۔

سوال 15.46:  $e^z$

سوال 15.47:  $\sin z$

سوال 15.48:  $\cos z$

سوال 15.49:  $z^2 - 4z$

سوال 15.50: مسئلہ 15.2 کی دوسری ثبوت میں ہر مساوات کو تفصیلاً لکھیں۔

سوال 15.51: مسئلہ 15.2 کی تصدیق  $f(z) = 2z + 1$  کے لئے کریں۔  $h(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

## 15.3 خطی کسری تبادل

خطی کسری تبادل<sup>20</sup> یا موبیوس تبادل<sup>21</sup> سے مراد درج ذیل روپ کی تبادل ہے

$$(15.17) \quad w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

جہاں مستقل  $a, b, c, d$  حقیقی یا مخلوط اعداد ہو سکتے ہیں۔ شرط  $ad - bc \neq 0$  سمجھنے کی خاطر مساوات 15.17 کا تفرق

$$w' = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

لیتے ہیں۔ اب  $ad - bc \neq 0$  سے مراد  $w' \neq 0$  ہے جو محافظ زاویہ نقش دے گا جبکہ  $ad - bc = 0$  غیر دلچسپ صورت  $w' \equiv 0$  یا  $w = c$  مستقل  $w$  دے گا جس پر مزید کوئی بحث نہیں کی جائے گی۔

مساوات 15.17 کی مخصوص صورتیں مثلاً مستقیم حرکت

$$(15.18) \quad w = z + b$$

گھومنا اور پھیلاؤ یا سکڑاؤ

$$(15.19) \quad w = az$$

الٹ جانے کے بعد  $x$  محور میں انعکاس

$$(15.20) \quad w = \frac{1}{z}$$

اور خطی تبادل

$$(15.21) \quad w = az + b$$

پر ہم بحث کر چکے ہیں۔

میسوط مخلوط سطح۔ یہ ایک اہم معاملہ ہے جس کو مساوات 15.17 کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے۔ مساوات 15.17 کے تحت  $cz + d \neq 0$  کی صورت میں ہر  $z$  کا مطابق یکتا مخلوط عدد  $w = az + b$  ہوگا۔ فرض کریں کہ

linear fractional transformation<sup>20</sup>  
Möbius transformation<sup>21</sup>



$c \neq 0$  ہے۔ تب  $z = -\frac{d}{c}$ ، جس کے لئے  $cz + d = 0$  ہے، کا مطابقتی کوئی عدد  $w$  نہیں ہو گا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم  $w$  سطح کے ساتھ ایک "غیر مناسب نقطہ" منسلک کریں۔ اس نقطہ کو لامتناہی پر نقطہ<sup>22</sup> کہتے ہیں جس کو  $\infty$  کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مخلوط سطح بشمول  $\infty$  کو مبسوط مخلوط سطح<sup>23</sup> کہتے ہیں۔ لامتناہی پر نقطہ کے بغیر مخلوط سطح کو متناہی مخلوط سطح<sup>24</sup> کہتے ہیں۔ ہم اب  $w = \infty$  کو زیر نقش مساوات 15.17 نقطہ  $z = -\frac{d}{c}$  ( $d \neq 0$ ) کا عکس تصور کرتے ہیں۔ اگر مساوات 15.17 میں  $c = 0$  ہو تب  $a \neq 0$  اور  $d \neq 0$  (کیوں؟<sup>25</sup>) کی صورت میں  $w = \infty$  کو مبسوط مخلوط  $z$  سطح کی غیر مناسب نقطہ  $z = \infty$  کا عکس تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 15.17 کا الٹ نقش حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.17 کو  $z$  کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(15.22) \quad z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

جب  $c \neq 0$  ہو تب  $cw - a = 0$  نقطہ  $w = \frac{a}{c}$  پر ہو گا، اور ہم  $w = \frac{a}{c}$  کو  $z = \infty$  کا مطابقتی نقطہ تصور کریں گے۔ اس کے برعکس اگر  $c = 0$  ہو تب  $a \neq 0$ ،  $d \neq 0$  ہوں گے<sup>26</sup> اور ہم  $w = \infty$  کو نقطہ  $z = \infty$  کا عکس تصور کریں گے۔ اس طرح مساوات 15.17 مبسوط  $z$  سطح کی ایک ایک مطابقتی عکس مبسوط  $w$  سطح دے گی؛ ہم کہتے ہیں کہ ہر خطی کسری تبادل مساوات 15.17 مبسوط سطح کو ایک ایک مطابقت کے ساتھ اپنے آپ پر عکس کرتی ہے۔

ہماری موجودہ گفتگو سے درج ذیل کہا جا سکتا ہے۔

عمومی رائے۔  $z = \infty$  کی صورت میں مساوات 15.17 بے معنی صورت  $\frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d}$  اختیار کرتی ہے۔ ہم  $c \neq 0$  کی صورت میں اس کو  $w = \frac{a}{c}$  تصور کرتے ہیں جبکہ  $c = 0$  کی صورت میں ہم اس کو  $w = \infty$  تصور کرتے ہیں۔

مقررہ نقطہ۔ نقش  $w = f(z)$  کے مقررہ نقطہ<sup>27</sup> سے مراد ایسا نقطہ ہے جس کا عکس یہی مخلوط عدد ہو۔ یوں مقررہ نقطہ کو درج ذیل مساوات

$$w = f(z) = z$$

point at infinity<sup>22</sup>

extended complex plane<sup>23</sup>

finite complex plane<sup>24</sup>

<sup>25</sup> اس لئے کہ اگر  $c = 0$  ہو تب صرف  $a \neq 0$  اور  $d \neq 0$  کی صورت میں مساوات 15.17 محافظ زاویہ نقش دیتی ہے۔

<sup>26</sup> چونکہ محافظ زاویہ نقش صرف انہیں شرائط کو پورا کرنے سے حاصل ہو گا۔

fixed point<sup>27</sup>

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 15.17 کا مقررہ نقطہ

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

یعنی

$$(15.23) \quad cz^2 - (a - d)z - d = 0$$

سے

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4b}}{2}$$

حاصل ہوں گے البتہ  $a = d \neq 0$  ،  $b = c$  کی صورت میں درج بالا دو درجی مساوات (نا قابل حل ہو گا اور اس) کے تمام عددی سر صفر ہوں گے، اور مساوات 15.17 مماثل تبادل  $w = z$  دے گی۔ اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.3: مقررہ نقطہ

ایک خطی کسری تبادل، ناکہ مماثل تبادل، کے زیادہ سے زیادہ دو مقررہ نقطے ہوں گے۔ ایسا خطی کسری تبادل جس کے تین یا تین سے زائد مقررہ نقطے ہوں لازماً مماثل تبادل ہو گا۔

عملاً اہم مخصوص خطی کسری تبادل اور خطی کسری تبادل کی مزید عمومی خصوصیات پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 15.52 تا سوال 15.61 میں دیے نقش کے مقررہ نقطے تلاش کریں۔

سوال 15.52:  $w = iz$

جواب:  $iz = z, \quad z(i - 1) = 0, \quad z = 0$

سوال 15.53:  $w = iz - 3$

جواب:  $z = -\frac{3}{2}(1 + i)$

سوال 15.54:  $w = z^2$   
جواب:  $z = 0, 1$

سوال 15.55:  $w = (z + 1 + i)^2$   
جواب:  $z = -1, -i2$

سوال 15.56:  $w = z^3$   
جواب:  $z = 0, \mp 1$

سوال 15.57:  $w = -z^3$   
جواب:  $z = 0, \mp i$

سوال 15.58:  $w = -iz^2$   
جواب:  $z = 0, i$

سوال 15.59:  $w = \frac{2z-1}{z+2}$   
جواب:  $z = \mp i$

سوال 15.60:  $w = \frac{5z+4}{z+5}$   
جواب:  $z = \mp 2$

سوال 15.61:  $w = \frac{i3z-1}{z+i3}$   
جواب:  $z = \mp i$

سوال 15.62 تا سوال 15.64 میں ایسا نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے سوال میں دیے گئے ہیں۔

سوال 15.62:  $i, -i$   
جواب:  $w = \frac{az+b}{a-bz}$  ملتا ہے جس میں  $a = 0$  پر کرنے سے درکار جواب  $w = -\frac{1}{z}$  حاصل ہوتا ہے۔ آپ تسلی کر لیں کہ  $b = 0$  پر کرنے سے  $w = z$  ملتا ہے جو مماثل نقش ہے یعنی ہر نقطہ اس کا مقررہ نقطہ ہے۔

سوال 15.63:  $1, -1$   
جواب:  $w = \frac{az+b}{bz+a}$  ملتا ہے جس میں  $a = 0$  پر کرنے سے  $w = \frac{1}{z}$  حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.64:  $1$   
جواب:  $a + b = c + d$  میں  $a = d = 1, b = c = 0$  پر کرنے سے  $w = z$  حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.65: ایسے تمام نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے  $z = i, -i$  ہوں۔  
جواب:  $w = \frac{az+b}{a-bz}$

سوال 15.66: ایسے تمام نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے  $z = 1, -1$  ہوں۔  
جواب:  $w = \frac{az+b}{bz+a}$

سوال 15.67: ایسا نقش تلاش کریں جس کا متناہی سطح میں کوئی بھی مقررہ نقطہ نہ ہو۔ (اشارہ: مساوات 15.23 استعمال کریں۔)  
جواب: تمام مستقیم حرکت

## 15.4 مخصوص خطی کسری تبادل

اس حصے میں چند سادہ دائرہ کار کو دوسرے دائرہ کار پر عکس کرنے کے لئے درکار خطی کسری تبادل

$$(15.24) \quad w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

کے حصول پر غور کیا جائے گا اور مساوات 15.24 کی خصوصیات پر بحث کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔ ایسا درج ذیل کی مدد سے ممکن ہو گا۔

مسئلہ 15.4: دائرے اور سیدھی لکیریں  
ہر خطی کسری تبادل مساوات 15.24  $z$  سطح کی تمام دائروں اور سیدھی لکیروں کو  $w$  سطح کی تمام دائروں اور سیدھی لکیروں پر عکس کرتا ہے۔

ثبوت: مستقیم حرکت اور گھومنے سے کوئی شکل تبدیل نہیں ہوتی لہذا ثبوت کی ضرورت نہیں ہے، یکساں پھیلاؤ یا سکڑاؤ کی صورت میں بھی صاف ظاہر ہے کہ دائرے اور سیدھی لکیریں اپنی شکلیں برقرار رکھیں گی لہذا ثبوت کی ضرورت نہیں ہے۔ نقش  $w = \frac{1}{z}$  کو ہم مثال 15.3 میں دیکھ سکے ہیں۔ ان تمام کی مرکب کے لئے بھی ایسا ہی ہو

گا۔ یوں  $c \neq 0$  کی صورت میں یہ مساوات 15.24 کے لئے درست ہو گا چونکہ تب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا

$$(15.25) \quad w = K \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} \quad (K = -\frac{ad - bc}{c})$$

جس میں درج ذیل

$$w_1 = cz, \quad w_2 = w_1 + d, \quad w_3 = \frac{1}{w_2}, \quad w_4 = Kw_3$$

پر کرتے ہوئے  $w = w_4 \frac{a}{c}$  لکھا جا سکتا ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ مساوات 15.24 درحقیقت مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 میں دیے گئے مخصوص متبادل کا مرکب ہے۔

□

خطی کسری متبادل مساوات 15.24 حقیقتاً صرف تین مستقل، یعنی  $a, b, c, d$  میں سے کسی ایک کا باقی تینوں کے ساتھ نسبت، پر منحصر ہے۔ اس ضرورت کی کہ،  $z$  سطح میں کسی تین منفرد نقطوں کا  $w$  سطح میں مخصوص عکس ہوں، سے یکتا خطی کسری متبادل حاصل ہوتا ہے یعنی:

مسئلہ 15.5: تین نقطے جن کا عکس دیا گیا ہو  
تین منفرد نقطوں  $z_1, z_2, z_3$  کو تین منفرد نقطوں  $w_1, w_2, w_3$  پر صرف اور صرف ایک عدد خطی کسری متبادل  $w = f(z)$  کے ذریعہ عکس کیا جا سکتا ہے۔ یہ متبادل درج ذیل خفی مساوات دیتی ہے۔

$$(15.26) \quad \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

(اگر ان میں سے ایک نقطہ  $\infty$  ہو تب ان دو فرق کا کسر جن میں یہ نقطہ پایا جاتا ہو کی جگہ 1 لکھا جائے گا۔)

ثبوت: مساوات 15.26 کی روپ  $F(w) = G(z)$  ہے جہاں  $F$  اور  $G$  متعلقہ متغیرات کے خطی کسری متبادل ہیں۔ اس سے ہم  $w = f(z) = F^{-1}[G(z)]$  لکھ سکتے ہیں جہاں  $F^{-1}$  سے مراد  $F$  کا الٹ متبادل ہے۔ چونکہ خطی کسری متبادل اور خطی کسری متبادلوں کا مرکب بھی خطی کسری متبادل ہوتے ہیں (سوال 15.70) لہذا  $w = f(z)$  خطی کسری متبادل ہو گا۔ مزید مساوات 15.26 سے درج ذیل ملتے ہیں۔

$$F(w_1) = 0, \quad F(w_2) = 1, \quad F(w_3) = \infty$$

$$G(z_1) = 0, \quad G(z_2) = 1, \quad G(z_3) = \infty$$

یوں  $w_1 = f(z_1)$  ،  $w_2 = f(z_2)$  ،  $w_3 = f(z_3)$  ہوں گے۔ اس سے ایسے تبادل  $w = f(z)$  کی موجودگی ثابت ہوتی ہے جو  $z_3$  ،  $z_2$  ،  $z_1$  کو بالترتیب  $w_3$  ،  $w_2$  ،  $w_1$  پر عکس کرتا ہو۔

ہم ثابت کرتے ہیں کہ نقش  $w = f(z)$  یکتا ہے۔ فرض کریں کہ  $w = g(z)$  دوسرا خطی کسری تبادل ہے جو  $z_3$  ،  $z_2$  ،  $z_1$  کو بالترتیب  $w_3$  ،  $w_2$  ،  $w_1$  پر عکس کرتا ہے۔ تب اس کا الٹ  $g^{-1}(w)$  نقاط  $w_3$  ،  $w_2$  ،  $w_1$  کو بالترتیب  $z_3$  ،  $z_2$  ،  $z_1$  پر عکس کرے گا لہذا مرکب تبادل  $H = g^{-1}[f(z)]$  نقاط  $z_3$  ،  $z_2$  ،  $z_1$  کو اپنے آپ پر عکس کرے گا۔ اس طرح اس کے تین مقررہ نقطے ہوں گے۔ یوں مسئلہ 15.3 کے تحت  $H$  مماثل نقش ہو گا لہذا  $g(z) \equiv f(z)$  ہو گا۔

مسئلے کا آخری جملہ گزشتہ حصے میں عمومی دائرے کی بنا ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

نصف سطحوں کا اقراص پر نقش۔ یہ عملاً اہم نقش ہے جو مخفی قوہ کے مسائل کے علاوہ دیگر جگہوں پر کام آتا ہے۔ آئیں بالائی نصف سطح  $y \geq 0$  کو اکائی قرص  $|w| \leq 1$  پر نقش کریں۔  $x$  محور بالائی سطح کی سرحد ہے اور ظاہر ہے کہ اس کو اکائی دائرہ  $|z| = 1$  پر نقش کرنا ہو گا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم  $x$  محور پر تین نقطے منتخب کرتے ہوئے انہیں اکائی دائرے پر اپنی مرضی کے تین نقطوں پر نقش کریں اور مسئلہ 15.5 کا اطلاق کریں۔ پس دھیان کرنا ہو گا کہ نصف سطح  $y \geq 0$  اکائی دائرے کے اندر نا کہ باہر نقش ہو۔

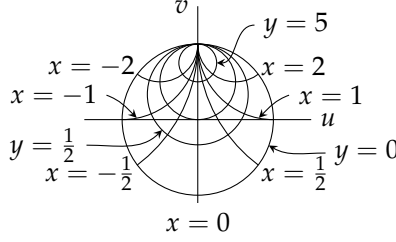
مثال 15.6: نصف سطح کا اکائی قرص پر نقش

ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو  $z_3 = 1$  ،  $z_2 = 0$  ،  $z_1 = -1$  کو بالترتیب  $w_3 = 1$  ،  $w_2 = -i$  ،  $w_1 = -1$  پر عکس کرتا ہو۔  
حل: مساوات 15.26 سے

$$\frac{w - (-1)}{w - 1} \cdot \frac{-i - 1}{-1 - (-1)} = \frac{z - (-1)}{z - 1} \cdot \frac{0 - 1}{0 - (-1)}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل نقش حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.27) \quad w = \frac{z - i}{-iz + 1}$$



شکل 15.12: خطی کسری نقش برائے مثال 15.6

آئیں دیکھتے ہیں کہ اس نقش کے مخصوص خصوصیات بغیر زیادہ کوشش دریافت کیے جا سکتا ہے۔ سیدھی لکیریں مستقل  $x$  اور مستقل  $y$  کے نقش حاصل کرتے ہیں۔ اب  $z = i$  نقطہ  $w = 0$  کا مطابقتی نقطہ ہے جبکہ  $z = \infty$  کا مطابقتی نقطہ  $w = i$  ہے۔ اب اگر  $z = iy$  ہو تب  $w = \frac{i(y-1)}{y+1}$  ہو گا؛ یعنی مثبت خیالی محور کا عکس  $u = 0, -1 \geq v \geq 1$  ہو گا۔ اب چونکہ نقش محافظ زاویہ ہے اور سیدھی لکیروں کو عکس سیدھی لکیریں یا دائرے ہوں گے لہذا لکیر مستقل  $y$  کا نقش نقطہ  $z = \infty$  سے گزرتا دائرے ہوں گی یعنی  $w = i$  سے گزرتے ہوئے دائرے جن کا مرکز  $v$  محور پر ہو گا۔ اسی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا لکیریں مستقل  $x$  ایسی دائروں پر نقش ہوں گی جو مستقل  $y$  کی عکس کی عمودی ہوں (شکل 15.12)۔ نچلا نصف سطح اکائی دائرہ  $|w| = 1$  کی باہر ہو گا۔ □

مثال 15.7: نقطہ  $\infty$  ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو  $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$  کو بالترتیب  $w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = 1$  پر عکس کرتا ہو۔  
حل: مساوات 15.26 سے

$$\frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{i+1} = \frac{z-0}{z-\infty} \cdot \frac{1-\infty}{1-0} = \frac{1-\infty}{z-\infty} \cdot \frac{z-0}{1-0}$$

لکھ کر  $\frac{1-\infty}{z-\infty}$  کی جگہ 1 پر کرتے ہوئے

$$\frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{i+1} = 1 \cdot \frac{z-0}{1-0}$$

حاصل کرتے ہیں جس سے درج ذیل نقش ملتا ہے۔

$$(15.28) \quad w = \frac{z-i}{z+i}$$

□

نصف سطحات کا نصف سطحات پر نقش۔ عملی اہمیت کا یہ دوسرا نقش ہے جس پر غور کرتے ہیں۔ ہم بالائی نصف سطح  $y \geq 0$  کو بالائی نصف سطح  $v \geq 0$  پر عکس کرتے ہیں۔ یوں  $x$  محور کو  $u$  محور پر نقش کیا جائے گا۔

مثال 15.8: نصف سطح کا نصف سطح پر نقش

ایسا خطہ کسری نقش تلاش کریں جو  $z_1 = -2$ ،  $z_2 = 0$ ،  $z_3 = 2$  کو بالترتیب  $w_1 = \infty$ ،  $w_2 = \frac{1}{4}$ ،  $w_3 = \frac{3}{8}$  پر نقش کرے۔

حل: جیسا آپ خود معلوم کر سکتے ہیں درکار نقش درج ذیل ہے۔  $x$  محور کا عکس کیا ہو گا؟

$$(15.29) \quad w = \frac{z+1}{2z+4}$$

□

اقراص کا اقراس پر نقش۔ عملی استعمال کے نقش کی یہ تیسری قسم ہے۔ ہم  $z$  سطح میں اکائی قرص کو  $w$  سطح میں اکائی قرص پر نقش کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا جو نقطہ  $z_0$  کو اکائی قرص کی مرکز  $w = 0$  پر نقش کرتا ہے (سوال 15.72)۔

$$(15.30) \quad w = \frac{z - z_0}{cz - 1}, \quad c = \bar{z}_0, \quad |z_0| < 1$$

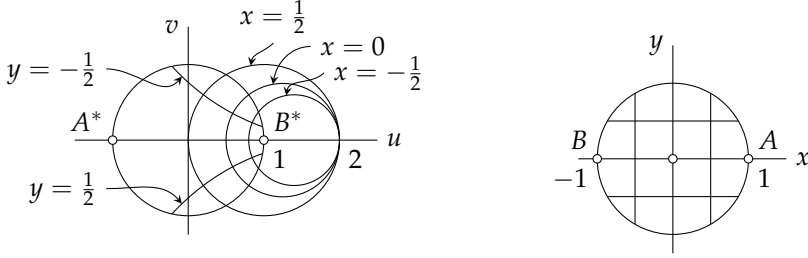
مثال 15.9: اکائی قرص کا اکائی قرص پر عکس  
فرض کریں کہ  $z_0 = \frac{1}{2}$  ہے۔ یوں مساوات 15.30 سے

$$w = \frac{2z - 1}{z - 2}$$

حاصل ہو گا۔ حقیقی محور کا نقش حقیقی محور ہی ہے۔ بالخصوص

$$w(-1) = 1, \quad w(0) = \frac{1}{2}, \quad w(1) = -1$$





شکل 15.13: نقش برائے مثال 15.9

ہیں۔ چونکہ نقش محافظ زاویہ ہے اور سیدھی لکیروں کا نقش سیدھی لکیریں یا دائرے ہوں گی اور  $w(\infty) = 2$  ہے لہذا مستقل  $x = 1$  لکیروں کے عکس نقطہ  $w = 2$  سے گزرتی دائرے ہوں گی جن کے مراکز  $u$  محور پر ہوں گے۔ مستقل  $y = 1$  کے نقش متذکرہ بالا کی عمودی ہوں گی (شکل 15.13)۔ □

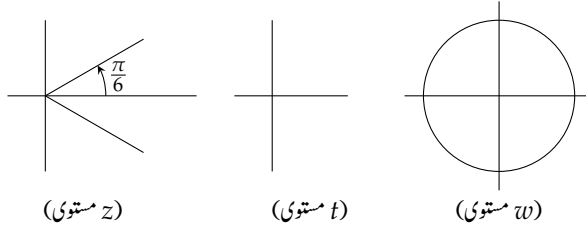
زاویائی خطہ کا اکائی قرص پر نقش حاصل کرنے کی خاطر خطی کسری نقش کے ساتھ  $w = z^n$  روپ کا تبادل استعمال کرنا ہو گا جہاں  $n > 1$  ہو گا۔

مثال 15.10: زاویائی خطہ کا اکائی قرص پر نقش  
زاویائی خطہ  $D: -\frac{\pi}{6} \leq \angle \leq \frac{\pi}{6}$  کا اکائی قرص  $|w| \leq 1$  پر نقش تلاش کریں۔  
حل: ہم پہلے نقش  $t = z^3$  کے ذریعہ دیے گئے زاویائی خطے کو دایاں نصف  $t$  سطح پر نقش کرتے ہیں۔ اس کے بعد خطی کسری نقش مثلاً

$$w = i \frac{t-1}{t+1}$$

کی مدد سے اس نصف سطح کو اکائی قرص پر نقش کرتے ہیں۔ درج بالا میں  $t = z^3$  پر کرتے ہوئے درکار نقش

$$w = i \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}$$



شکل 15.14: نقش برائے مثال 15.10

□

حاصل ہوتی ہے (شکل 15.14)۔

## سوالات

سوال 15.68: نقش  $w = \frac{z+i}{iz+4}$  کو مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 کے مرکب کے طور پر لکھیں۔

جواب: مساوات 15.25 سے  $K = -\frac{5}{i} = i5$  اور  $w = \frac{i5}{iz+4} + \frac{1}{i}$  لکھ کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$w_1 = iz, w_2 = w_1 + 4, w_3 = \frac{1}{w_2}, w_4 = i5w_3, w = w_4 + \frac{1}{i} = w_4 - i$$

سوال 15.69: مسئلہ 15.4 کو  $w = az, a \neq 0$  کے لئے ثابت کریں۔

سوال 15.70: دکھائیں کہ دو خطی کسری تبادول کا مجموعہ بھی خطی کسری تبادول ہو گا۔

سوال 15.71: مساوات 15.28 میں دیے نقش کو مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 کے مرکب کے طور پر لکھیں۔

جواب:  $w = -i2\frac{1}{z+i} + 1$

سوال 15.72: مسئلہ 15.5 سے مساوات 15.30 حاصل کریں۔

سوال 15.73: ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو  $|z| \leq 1$  کو  $|w| \leq 1$  پر اور نقطہ  $z = \frac{i}{4}$  کو  $w = 0$  پر نقش کرتا ہو۔ سیدھی لکیریں مستقل  $x$  اور مستقل  $y$  کی عکس کی ترسیم کھینچیں۔

جواب:  $w = \frac{4z-i}{-iz-4}$

سوال 15.74: مساوات 15.27 کا الٹ دریافت کریں۔ دکھائیں کہ مساوات 15.27 سیدھی مستقل  $x =$  لکیروں کو ایسی دائروں پر نقش کرتا ہے جن کا مرکز  $v = 1$  پر ہوتا ہے۔

سوال 15.75 تا سوال 15.84 میں ایسا نقش تلاش کریں جو

سوال 15.75:  $z : 0, 1, \infty$  کو بالترتیب  $w : \infty, 1, 0$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = \frac{1}{z}$

سوال 15.76:  $z : 0, 1, i$  کو بالترتیب  $w : 2, 3, 2 + i$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = z + 2$

سوال 15.77:  $z : 0, 1, 2$  کو بالترتیب  $w : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = \frac{4-z}{2z+4}$

سوال 15.78:  $z : -1, 0, 1$  کو بالترتیب  $w : 0, 1, \infty$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = \frac{z+1}{1-z}$

سوال 15.79:  $z : 0, i, i2$  کو بالترتیب  $w : \infty, -1, 1$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = \frac{3z-i4}{z}$

سوال 15.80:  $z : 0, 1, 2$  کو بالترتیب  $w : -1, -i, 1$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = -\frac{z-1-i}{iz-1-i}$

سوال 15.81:  $z : -i, 0, i$  کو بالترتیب  $w : \infty, -1, 1$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = \frac{3z-i}{z+i}$

سوال 15.82:  $z : -1, 0, i$  کو بالترتیب  $w : -1, 1, 1 + i$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = \frac{z(3+i2)+2+i}{z+2+i}$

سوال 15.83:  $z : -1, 0, -i$  کو بالترتیب  $w : 1, 0, i$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = -z$

سوال 15.84:  $z : 0, 1, \infty$  کو بالترتیب  $w : \infty, 1 + i, 2$  پر نقش کرتا ہو۔  
جواب:  $w = \frac{2z-1+i}{z}$

سوال 15.85 تا سوال 15.87 میں ایسے تمام خطی کسری نقش تلاش کریں جن کی خاصیت دی گئی ہے۔

سوال 15.85:  $z_1 = 0$  مقررہ نقطہ ہے۔  
جواب:  $w = \frac{az}{cz+d}$

سوال 15.86:  $z_1 = 0$  اور  $z_2 = \infty$  مقررہ نقطے ہیں۔  
جواب:  $z_1$  کے لئے حل کرتے ہوئے  $b = 0$  حاصل ہوتا ہے۔  $z_2$  کے لئے  $\frac{a\infty}{c\infty+d} = \infty$  لکھا جائے گا۔ صفحہ 1126 پر عمومی رائے استعمال کرتے ہوئے  $c = 0$  چنتے ہوئے  $\infty = \infty$  لکھا جائے گا جس سے مزید کوئی معلومات فراہم نہیں ہوتی۔ یوں  $b = 0$  اور  $c = 0$  استعمال کرتے ہوئے درکار نقش  $w = \frac{az}{d} = a^*z$  ملتا ہے۔ اگر ہم  $c \neq 0$  لیتے تب عمومی رائے سے  $\frac{a}{c} = \infty$  لکھا جاتا جو  $c = 0$  دیتا ہے۔  
سوال 15.87:  $x$  محور کا عکس  $u$  محور ہے۔  
جواب: تمام چار عددی سر حقیقی ہیں۔ (تمام عددی سر میں یکساں مخلوط جزو ضربی بھی ممکن ہے۔)

سوال 15.88: ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے  $-1$  اور  $1$  ہوں اور جو  $0$  کو  $ip$  پر نقش کرتا ہو جہاں  $p$  حقیقی ہے۔ بتلائیں کہ  $p = 0$  اور  $p - 1$  کی صورتوں میں کیسے نقش حاصل ہوں گے۔  
جواب:  $w = \frac{z+ip}{ipz+1}$  جو  $p = 0$  کی صورت میں مماثل نقش  $w = z$  دیتا ہے جبکہ  $p = 1$  کی صورت میں  $w = \frac{z+i}{iz+1}$  دیتا ہے جو نصف سطح کو اکائی دائرے کے اندر عکس کرتا ہے۔

سوال 15.89: ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو ربع دوم کو  $w$  سطح میں اکائی دائرے کی اندرون پر عکس کرتا ہو۔  
جواب:  $w = -\frac{z^2+1}{iz^2+1}$

سوال 15.90: ایسا خطی کسری نقش  $w = f(z)$  تلاش کریں جو  $2 \leq y \leq x+1$  کی پٹی کو اکائی قرص  $|w| \leq 1$  پر عکس کرتا ہو۔

سوال 15.91: ایسا خطی کسری نقش  $w = f(z)$  تلاش کریں جو زاویائی خطہ  $0 \leq \angle z \leq \frac{\pi}{4}$  کو اکائی قرص  $|w| \leq 1$  پر عکس کرتا ہو۔  
جواب:  $w_3 = \frac{z^4-i}{-iz^4+1}$



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□





## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

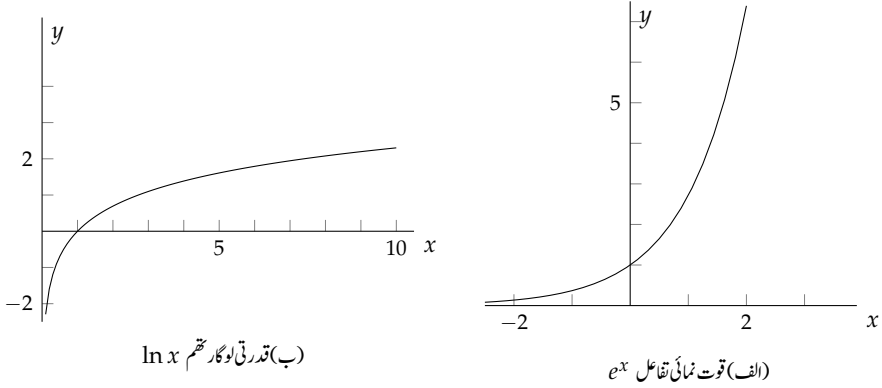
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

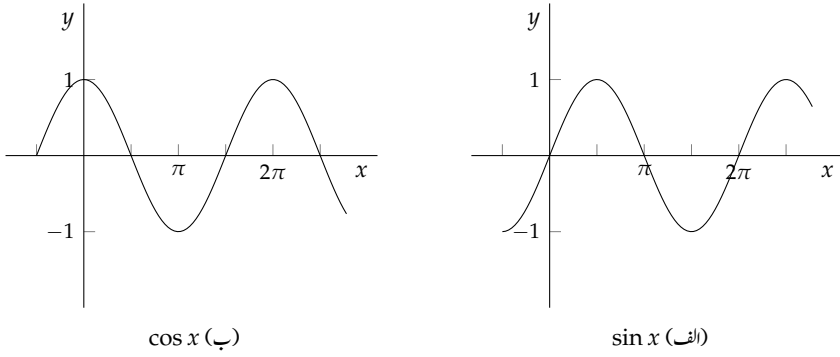
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

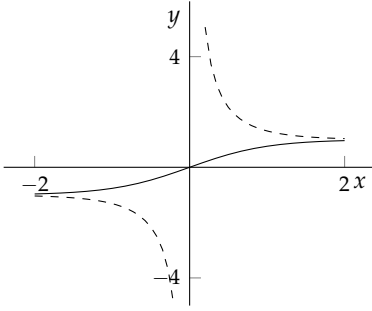
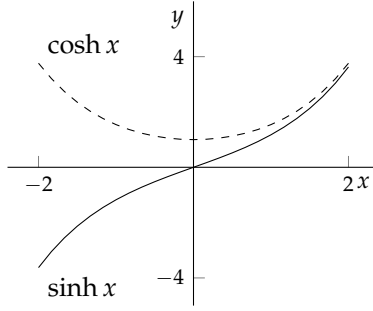
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

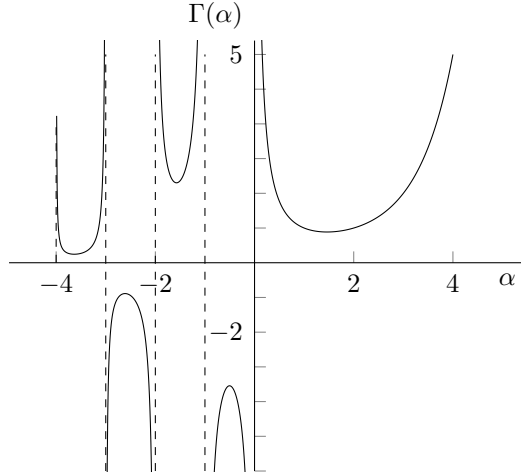
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$





شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

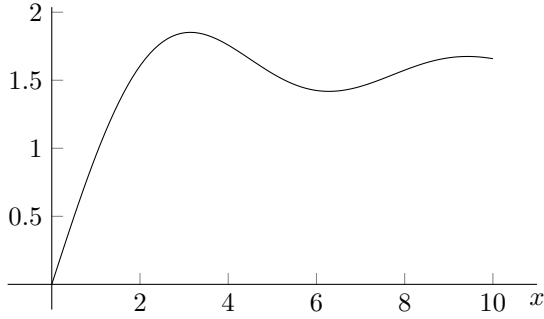
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

