

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کشی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
69	1.6 عمودی خطوط کی تسلیں
73	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکسانیت

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

عموماً طبعی تعلقات کو تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح عموماً انجینئرنگ مسائل تفرقی مساوات کی صورت میں پیش آتے ہیں۔ اسی لئے اس کتاب کی ابتدا تفرقی مساوات اور ان کے حل سے کی جاتی ہے۔

سادہ تفرقی مساوات¹ سے مراد ایسی تفرقی مساوات ہے جس میں ایک عدد آزاد متغیرہ پایا جاتا ہو۔ اس کے برعکس جزوی تفرقی مساوات² ایک سے زائد آزاد متغیرات پر منحصر ہوتی ہے۔ جزوی تفرقی مساوات کا حل نسبتاً مشکل ثابت ہوتا ہے۔

کسی بھی حقیقی صورت حال یا مشاہدے کی نقشہ کشی کرتے ہوئے اس کا ریاضی نمونہ³ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سائنس کے مختلف میدان مثلاً انجینئرنگ، طبیعیات، علم کیمیا، حیاتیات، کمپیوٹر وغیرہ میں درپیش مسائل کی صحیح تفرقی مساوات کا حصول اور ان کے حل پر تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

باب-20 میں سادہ تفرقی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر پیش کیا جائے گا۔ یہ باب بقایا کتاب سے مکمل طور پر علیحدہ رکھا گیا ہے۔ یوں کتاب کے پہلے دو باب کے بعد باب-20 پڑھا جاسکتا ہے۔

پہلے باب کا آغاز درجہ اول کے سادہ تفرقی مساوات کے حصول، مساوات کے حل اور حل کی تشریح سے کیا جاتا ہے۔ پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات میں صرف ایک عدد نا معلوم تفاعل کا ایک درجی تفرق پایا جاتا ہے۔ ایسی

¹ ordinary differential equation
² partial differential equation
³ mathematical model



شکل 1.1: نمونہ کشی، حل اور تشریح۔

مساوات میں ایک سے زیادہ درجے کا تفرق نہیں پایا جاتا۔ نامعلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ باب کے اختتام میں تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت⁴ اور یکتائی⁵ پر غور کیا جائے گا۔

تفرقی مساوات سمجھنے کی خاطر ضروری ہے کہ انہیں کاغذ اور قلم سے حل کیا جائے البتہ کمپیوٹر کی مدد سے آپ حاصل جواب کی درستگی دیکھنا چاہیں تو اس میں کوئی حرج نہیں ہے۔

1.1 نمونہ کشی

شکل 1.1 کو دیکھیے۔ انجینئرنگ مسئلے کا حل تلاش کرنے میں پہلا قدم مسئلے کو مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔ مسئلے کو مختلف متغیرات اور تفاعل کے تعلقات کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کو ریاضی نمونہ⁶ کہا جاتا ہے۔ ریاضی نمونے کا حصول، نمونے کا ریاضیاتی حل اور حل کی تشریح کے عمل کو نمونہ کشی⁷ کہا جاتا ہے۔ نمونہ کشی کی صلاحیت تجربے سے حاصل ہوتی ہے۔ کسی بھی نمونہ کی حل میں کمپیوٹر مدد کر سکتا ہے البتہ نمونہ کشی میں کمپیوٹر عموماً کوئی مدد فراہم نہیں کر پاتا۔

عموماً طبعی مقدار مثلاً اسراع اور رفتار در حقیقت میں تفرق کو ظاہر کرتے ہیں لہذا بیشتر ریاضی نمونے مختلف متغیرات اور تفاعل کے تفرق پر مشتمل ہوتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات⁸ کہا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو اس تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہو۔ تفرقی مساوات کا حل جانتے ہوئے مساوات میں موجود متغیرات اور تفاعل کے ترسیم کھینچے جاسکتا ہے اور ان پر غور کیا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات پر غور سے پہلے چند بنیادی تصورات تشکیل دیتے ہیں جو اس باب میں استعمال کی جائیں گی۔

existence⁴
 uniqueness⁵
 mathematical model⁶
 modeling⁷
 differential equation⁸

سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعل کی ایک درجی یا بلند درجی تفرقی پائے جاتے ہوں۔ نامعلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں نامعلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیر x (یا t) کے تفاعل بھی پائے جاسکتے ہیں۔ درج ذیل چند سادہ تفرقی مساوات ہیں

$$(1.1) \quad y' = \sin x$$

$$(1.2) \quad y' + \frac{6}{7}y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$(1.3) \quad y''' + 2y' - 11y'^2 = 0$$

جہاں $y' = \frac{dy}{dx}$ ، $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ، وغیرہ ہیں۔

دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل کے تفرقی پر مشتمل مساوات کو جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ ان کا حل سادہ تفرقی مساوات سے زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔ جزوی تفرقی مساوات پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ غیر تابع متغیرات x اور y پر منحصر تابع تفاعل $u(x, y)$ کی جزوی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے۔

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

n درجی تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعل y کی بلند تر تفرقی n درجے کی ہو۔ یوں مساوات 1.1 اول درجے کی مساوات ہے، مساوات 1.2 دوسرے درجے جبکہ مساوات 1.3 تیسرے درجے کی مساوات ہے۔

اس باب میں پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ ایسی مساوات میں اکائی درجہ تفرقی y' کے علاوہ نامعلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیر کا کوئی بھی تفاعل پایا جاسکتا ہے۔ ایک درجے کی سادہ تفرقی مساوات کو

$$(1.5) \quad F(y, y', x) = 0$$

یا

$$(1.6) \quad y' = f(x, y)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 1.5 خفی⁹ صورت کہلاتی ہے جبکہ مساوات 1.6 صریح¹⁰ صورت کہلاتی ہے۔ یوں خفی مساوات $x^2y' - 2y^3 = 0$ کی صریح صورت $y' = 2\frac{y^3}{x^2}$ ہے۔

implicit⁹
explicit¹⁰

حل کا تصور

ایک تفاعل

$$(1.7) \quad y = h(x)$$

جو کھلے وقفہ ¹¹ $a \leq x \leq b$ پر معین ¹² ہو اور پورے وقفے پر اس کا تفرق پایا جاتا ہو، اس صورت مساوات 1.5 کا حل ہو گا جب $h(x)$ اور $h'(x)$ کو مساوات 1.5 میں بالترتیب $y(x)$ اور $y'(x)$ کی جگہ پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر ہوں۔ تفاعل $h(x)$ کا خط منحنی حل ¹³ کہلائے گا۔

یہاں کھلے وقفے سے مراد ایسا وقفہ ہے جس کے آخری سر a اور b وقفے کا حصہ نہ ہوں۔ کھلا وقفہ لامتناہی ہو سکتا ہے مثلاً $-\infty \leq x \leq b$ یا $a \leq x \leq \infty$ اور یا $-\infty \leq x \leq \infty$ یعنی حقیقی محور۔

مثال 1.1: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty \leq x \leq \infty$ پر تفاعل $y = cx$ تفرقی مساوات $y = y'x$ کا حل ہے جہاں c ایک اختیاری مستقل ¹⁴ ہے۔

حل: پورے وقفے پر $y = cx$ معین ہے۔ اسی طرح اس کا تفرق $y' = c$ بھی پورے وقفے پر پایا جاتا ہے۔ ان بنیادی شرائط پر پورا اترنے کے بعد تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$y = cx \implies (cx) = (c)x$$

مساوات کے دونوں اطراف برابر ہیں لہذا $y = cx$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

مثال 1.2: حل بذریعہ مکمل: مساوات $y' = \cos t$ کا حل بذریعہ مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی $y = \int \cos t$ جس سے $y = c - \sin t$ حاصل ہوتا ہے جو نسل حل ¹⁵ ہے۔ حاصل حل میں c اختیاری مستقل

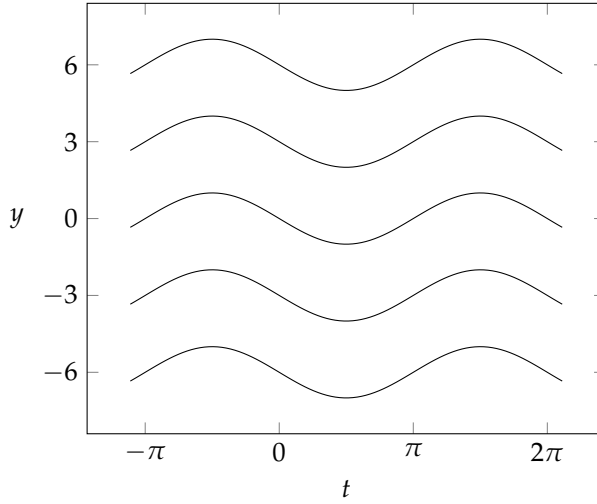
¹¹ open interval

¹² defined

¹³ solution curve

¹⁴ arbitrary constant

¹⁵ solution family



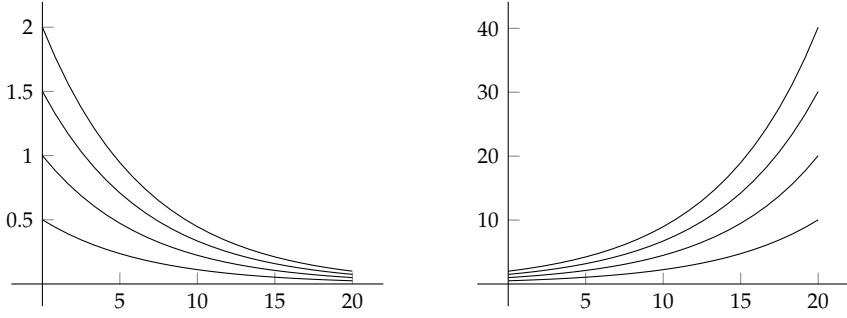
شکل 1.2: مثال 1.2 کے خط۔

ہے۔ اختیاری مستقل کی ہر انفرادی قیمت تفرقی مساوات کا ایک منفرد حل دیتا ہے۔ یوں $c = 3.24$ پر کرتے ہوئے $y = 3.24 - \sin t$ حل حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.2 میں $c = -6, -3, 0, 3, 6$ سے حاصل حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 1.3: مساوات مالتھس قوت نمائی تفاعل $y = ce^{kt}$ کے تفرق سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$(1.8) \quad y' = \frac{dy}{dt} = kce^{kt} = ky$$

یوں $y' = ky$ تفرقی مساوات کا حل $y = ce^{kt}$ ہے۔ مثبت k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی اضافے کی نمونہ کشی کرتی ہے۔ جرسوموں کی تعداد اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے۔ وسیع رقبے کے ملک میں کم انسانی



(الف) قوت نمائی گھٹاؤ۔ مساوات $y' = -0.15y$ کا حل۔

(الف) قوت نمائی اضافہ۔ مساوات $y' = 0.15y$ کا حل۔

شکل 1.3: قوت نمائی تفرقی مساوات کی نسل حل۔

آبادی اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے جہاں اس کو قانون مالٹھس¹⁶ کہا¹⁷ جاتا ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = 0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

منفی k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی گھٹاؤ مثلاً تابکاری تحلیل¹⁸ کو ظاہر کرتی ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = -0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 1.5 میں تابکاری تحلیل کے مسئلے پر مزید غور کیا گیا ہے۔

درج بالا مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ درج اول سادہ تفرقی مساوات کے حل میں ایک عدد اختیاری مستقل c پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کا ایسا حل جس میں اختیاری مستقل c پایا جاتا ہو عمومی حل¹⁹ کہلاتا ہے۔

(بعض اوقات c مکمل طور اختیاری مستقل نہیں ہوتا بلکہ اس کی قیمت کو کسی وقفے پر محدود کرنا لازم ہوتا ہے۔)

ہم یکتا²⁰ عمومی حل حاصل کرنے کی ترکیب سیکھیں گے۔

¹⁶ Malthus' law

¹⁷ یہ قانون انگریزی ماہر معاشیات ٹامس روبرٹ مالتھس (1766-1834) کے نام ہے۔

¹⁸ radioactive decay

¹⁹ general solution

²⁰ unique

جیومیٹریائی طور پر سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل لامتناہی حل کے خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جہاں c کی ہر انفرادی قیمت منفرد خط دیتی ہے۔ عمومی حل میں c کی کوئی مخصوص قیمت مثلاً $c = -3.501$ یا $c = 0$ پر کرنے سے ہمیں جبری حل²¹ ملتا ہے۔ جبری حل میں کوئی اختیاری مستقل نہیں پایا جاتا۔

عام طور پر عمومی حل قابل حصول ہوتا ہے جس میں c کی مخصوص قیمت پر کرتے ہوئے درکار جبری حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بعض اوقات تفرقی مساوات ایسا حل بھی رکھتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ ایسے حل کو نادر²² حل کہتے ہیں۔ صفحہ 12 پر سوال 1.16 میں نادر حل کی مثال دی گئی ہے۔

ابتدائی قیمت سوال

عام طور پر عمومی حل میں ابتدائی قیمتیں²³ x_0 اور y_0 پر کرنے سے جبری حل حاصل کیا جاتا ہے جہاں $y(x_0) = y_0$ ہے۔ جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ خط حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہے۔ سادہ تفرقی مساوات اور مساوات کے ابتدائی قیمتوں کو ابتدائی قیمت سوال²⁴ کہا جاتا ہے۔ یوں صریح سادہ تفرقی مساوات کی صورت میں ابتدائی قیمت سوال درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(1.9) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

مثال 1.4: ابتدائی قیمت سوال: درج ذیل ابتدائی قیمت سوال کو حل کریں۔

$$y' = 5y, \quad y(0) = 3.2$$

حل: تفرقی مساوات کو $\frac{dy}{y} = 5 dx$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمیل لینے سے $y = ce^{5x}$ عمومی حل حاصل ہوتا ہے جس میں $x = 0$ پر $y = 3.2$ پر کرنے سے $y(0) = ce^0 = 3.2$ لکھا جائے گا جس سے $c = 3.2$ ملتا ہے۔ یوں ابتدائی قیمت سوال کا جبری حل $y = 3.2e^{5x}$ ہے۔

²¹ particular solution

²² singular solution

²³ initial values

²⁴ initial value problem

نمونہ کشی پر مزید بحث

نمونہ کشی کو مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے لہذا ایسا ہی کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے پہلی قدم پر مسئلے کو تفرقی مساوات کا جامہ پہنایا جائے گا۔ دوسری قدم پر تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کیا جائے گا۔ تیسرے قدم پر ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے جبری حل حاصل کیا جائے گا۔ آخر میں چوتھا قدم حاصل جواب کی تشریح ہوگی۔

مثال 1.5: تابکار مادے کی موجودہ کمیت 2 mg ہے۔ اس کی کمیت مستقبل میں دریافت کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ کسی بھی لمحے پر تابکاری تحلیل کی شرح اس لمحے پر موجود تابکار مادے کی کمیت کے راست تناسب ہے۔

• پہلا قدم: مسئلے کو مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔ کمیت کو y سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں کسی بھی لمحے پر تابکاری کی شرح سے مراد $y' = \frac{dy}{dt}$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہذا تجربے سے حاصل معلومات کو درج ذیل تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جائے گا جہاں تناسبی مستقل k مثبت قیمت ہے۔

$$(1.10) \quad \frac{dy}{dt} = -ky$$

مثال 1.3 میں آپ نے دیکھا کہ تفرقی مساوات میں منفی کی علامت سے تفرقی مساوات کا قوت نمائی گھٹتا ہوا حل حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہذا درج بالا مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی گئی ہے۔ تابکار اشیاء کے مستقل k کی قیمتیں تجربے سے حاصل کئے جاتے ہیں مثلاً ریڈیم $^{226}_{88}\text{Ra}$ کا $k = 1.4 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ ہے۔

ابتدائی کمیت 2 mg ہے۔ ابتدائی وقت کو $t = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی معلومات $y(0) = 2\text{ mg}$ لکھی جائے گی۔ (غیر تابع متغیر وقت t کی بجائے کچھ اور مثلاً x ہونے کی صورت میں بھی (x_0, y_0) یا $y(x_0) = y_0$ کو ابتدائی معلومات ہی کہا جاتا ہے۔ اسی طرح تابع متغیر y کی قیمت $t \neq 0$ پر معلوم

ہو سکتی ہے مثلاً $y(x_n) = y_n$ اور ایسی صورت میں (x_n, y_n) ابتدائی معلومات کہلاتی ہے۔ یوں دیے مسئلے سے درج ذیل ابتدائی قیمت سوال حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.11) \quad y' = -ky, \quad y(0) = 2mg$$

• دوسرا قدم: ابتدائی قیمت سوال کا عمومی حل درج ذیل ہے جہاں c اختیاری مستقل جبکہ k کی قیمت تابکار مادے پر منحصر ہے۔

$$(1.12) \quad y = c^{-kt}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $t = 0$ پر $y = 2mg$ ہے جس کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں درج ذیل جبری حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.13) \quad y = 2e^{-kt} \quad (k > 0)$$

جبری حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ حاصل حل درست ہے۔ اسی طرح جبری حل سے ابتدائی معلومات حاصل کریں۔

$$\frac{dy}{dt} = -kce^{-kt} = -ky, \quad y(0) = 2e^{-0} = 2$$

• حاصل جبری حل کی تشریح: مساوات 1.13 کو شکل 1.4 میں دکھایا گیا ہے جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر یہ مساوات تابکار مادے کی درست کمیت دیتا ہے۔ لمحہ لامتناہی پر تابکار مادے کی کمیت $y(\infty) = 2e^{-k\infty} = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

سوالات

سوالات 1.1 تا 1.8 کے جوابات بذریعہ مکمل حاصل کریں یا کسی تفاعل کی تفرق سے جواب حاصل کریں۔

$$1.1: \quad y' + 3 \sin 2\pi x = 0$$



شکل 1.4: مثال 1.5 کی معنی-تایکاری تحلیل $y = 2e^{-kt}$ جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔

جواب: $y = \frac{3}{2\pi} \cos 2\pi x + c$

سوال 1.2: $y' + xe^{-x^2} = 0$

جواب: $y = \frac{e^{-x^2}}{2} + c$

سوال 1.3: $y' = 4e^{-x} \cos x$

جواب: $y = 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + c$

سوال 1.4: $y' = y$

جواب: $y = ce^x$

سوال 1.5: $y' = -y$

جواب: $y = ce^{-x}$

سوال 1.6: $y' = 2.2y$

جواب: $y = ce^{2.2x}$

سوال 1.7: $y' = 1.5 \sinh 3.2x$

جواب: $y = \frac{15}{32} \cosh 3.2x + c$

سوال 1.8: $y'' = -y$

جواب: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

سوال 1.9 تا سوال 1.15 ابتدائی قیمت سوالات ہیں جن کے عمومی حل دیے گئے ہیں۔ انہیں تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہی عمومی جوابات ہیں۔ عمومی جواب سے جبری جواب حاصل کریں۔ جبری جواب کا خط کھینچیں۔

سوال 1.9: $y' + 2y = 0.8, \quad y = ce^{-2x} + 0.4, \quad y(0) = 1.2$

جواب: $y = 0.8e^{-2x} + 0.4$

سوال 1.10: $y' + x + y = 0, \quad y = ce^{-x} - x + 1, \quad y(0) = \pi$

جواب: $y = \pi e^{-x} - e^{-x} - x + 1$

سوال 1.11: $y' = 2x + e^x, \quad y = e^x + x^2 + c, \quad y(0) = 1$

جواب: $y = e^x + x^2$

سوال 1.12: $y' + 4xy = 0, \quad y = ce^{-2x^2}, \quad y(0) = 2$

جواب: $y = 2e^{-2x^2}$

سوال 1.13: $yy' = 2x, \quad y^2 = 2x^2 + c, \quad y(1) = 6$

جواب: $y^2 = 2x^2 + 34$

سوال 1.14: $y' = y + y^2, \quad y = \frac{c}{e^{-x} - c}, \quad y(0) = 0.1$

جواب: $y = \frac{1}{e^{(-x+23.98)} - 1}$

سوال 1.15: $y' \tan x = y - 4, \quad y = c \sin x + 4, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$

جواب: $y = 4 - 4 \sin x$

سوال 1.16: نادر حل: بعض اوقات سادہ تفرقی مساوات کا ایسا حل بھی پایا جاتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ ایسے حل کو نادر حل²⁶ کہا جاتا ہے۔ مساوات $y^2 - xy' + y = 0$ کا عمومی حل $y = cx - c^2$ ہے جبکہ اس کا نادر حل $y = \frac{x^2}{4}$ ہے۔ ان حل کا تفرق لیتے ہوئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

سوال 1.17 تا سوال 1.21 نقشہ کشی کے سوالات ہیں۔

سوال 1.17: تابکار مادے کی نصف زندگی $t_{\frac{1}{2}}$ سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں تابکار مادے کی کمیت نصف ہو جاتی ہے۔ مثال 1.5 میں ریڈیم $^{226}_{88}\text{Ra}$ کی نصف زندگی دریافت کریں۔

جواب: تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0 e^{-kt}$ میں لمحہ $t = 0$ پر (ابتدائی) کمیت y_0 ہے جبکہ مستقبل میں لمحہ t پر کمیت y ہے۔ ہم وہ دورانیہ جانتا چاہتے ہیں جس میں کمیت نصف رہ جائے یعنی جب $y = \frac{y_0}{2}$ رہ جائے۔ تابکاری مساوات میں $y = \frac{y_0}{2}$ پر کرتے ہوئے $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kt}$ لکھا جائے گا جس سے $t_{\frac{1}{2}} = 4.95 \times 10^{10} \text{ s}$ یعنی 1569.6 سال حاصل ہوتا ہے۔ یوں ریڈیم کی مقدار 1569.6 سالوں میں نصف رہ جائے گی۔

سوال 1.18: ریڈیم ہم جا $^{224}_{88}\text{Ra}$ کی نصف زندگی تقریباً 3.6 دن ہے۔ دو گرام (2 g) ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک دن بعد کتنی رہ جائے گی۔ دو گرام ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک سال بعد کتنی رہ جائے گی۔

جوابات: 1.65 g ، $6 \times 10^{-31} \text{ g}$

سوال 1.19: ایک جہاز کی رفتار مستقل اسراع a سے مسلسل بڑھ رہی ہے۔ رفتار کی تبدیلی کی شرح $\frac{dv}{dt}$ کو اسراع کہتے ہیں۔ ان معلومات سے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے لمحہ t پر رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔ اگر $t = 0$ پر ابتدائی رفتار u ہو تب v کی مساوات کیا ہوگی؟

جوابات: $v = u + at$ ، $v = at + c$

²⁶singular solution
²⁷isotope

سوال 1.20: رفتار سے مراد وقت کے ساتھ فاصلے کی تبدیلی کی شرح $\frac{dx}{dt}$ ہے۔ سوال 1.19 میں رفتار کی مساوات $v = u + at$ حاصل کی گئی جسے $\frac{dx}{dt}$ کے برابر پر کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی فاصلہ $x = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی قیمت سوال کو حل کرتے ہوئے x کی مساوات حاصل کریں۔

$$x = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ جوابات:}$$

سوال 1.21: آواز سے کم رفتار پر پرواز کرنے والے جہاز کی کارگزاری ہوا کے دباؤ پر منحصر ہوتی ہے۔ ان کی کارگزاری $10\,500\text{ m}$ تا $12\,000\text{ m}$ کی اونچائی پر بہترین حاصل ہوتی ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ $10\,500\text{ m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباؤ دریافت کریں۔ طبعی معلومات: اونچائی کے ساتھ دباؤ میں تبدیلی کی شرح y' ہوا کے دباؤ y کے راست تناسب ہوتی ہے۔ تقریباً 5500 m کی اونچائی پر ہوا کا دباؤ سمندر کی سطح پر ہوا کے دباؤ y_0 کی نصف ہوتا ہے۔

$$\text{جواب: } 0.27y_0 \text{ یعنی تقریباً ایک چوتھائی}$$

$$1.2 \quad y' = f(x, y) \text{ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔}$$

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

$$(1.14) \quad y' = f(x, y)$$

سادہ معنی رکھتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ y' سے مراد y کی ڈھلوان ہے۔ یوں مساوات 1.14 کا وہ حل جو نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہو اس کا اس نقطے پر ڈھلوان $y'(x_0)$ ہو گا کہ درج بالا مساوات کے تحت اس نقطے پر f کی قیمت کے برابر ہو گا۔

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 1.14 کو حل کرنے کے تریسیمی²⁸ یا اعدادی²⁹ طریقے دریافت کر سکتے ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے تریسیمی اور اعدادی طریقے اس لئے بھی اہم ہیں کہ کئی تفرقی مساوات کا کوئی تحلیلی³⁰ حل نہیں پایا جاتا جبکہ ہر قسم کے تفرقی مساوات کا تریسیمی اور اعدادی حل حاصل کرنا ممکن ہے۔

graphical²⁸
numerical²⁹
analytic³⁰

میدان کی سمت: تریسی طریقہ

ہم xy سطح پر جگہ جگہ مساوات 1.14 سے حاصل ڈھلوان کی چھوٹی لمبائی کی سیدھی لکیریں کھینچ سکتے ہیں۔ ہر نقطے پر ایسی لکیر اس نقطے پر میدان کی سمت دیتی ہے۔ اس میدان سمت³¹ یا میدان ڈھال³² میں تفرقی مساوات کا منحنی حل³³ کھینچا جاسکتا ہے۔

منحنی حل کو کھینچنے کی ترکیب کچھ یوں ہے۔ کسی بھی نقطے پر ڈھلوان کی سمت میں چھوٹی لکیر کھینچیں۔ اس لکیر کو آہستہ آہستہ یوں موڑیں کہ لکیر کے اختتامی نقطے پر لکیر کی ڈھلوان عین اس نقطے کی ڈھلوان برابر ہو۔ اسی طرح آگے بڑھتے رہیں۔ ڈھال میدان میں نقطے جتنے قریب قریب ہوں تفرقی مساوات کا منحنی حل اتنا درست ہو گا۔

شکل 1.5 میں

$$(1.15) \quad y' = x - y$$

کا ڈھال میدان دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چند منحنی حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

آئیں اب اعدادی طریقہ سیکھیں۔ سادہ ترین اعدادی طریقہ ترکیب یولر کہلاتا ہے۔ پہلے اسی پر بحث کرتے ہیں۔

یولر کی اعدادی ترکیب

درجہ اول تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو استعمال کرتے ہوئے ترکیب یولر³⁴ ہم فاصلہ نقطوں x_0 ، $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، ... پر تقریباً درست قیمتیں دیتا ہے یعنی

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

direction field³¹
slope field³²
solution curve³³
Euler's method³⁴



شکل 1.5: درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = x - y$ کا ڈھال میدان اور منفی حل۔

یا

(1.16)

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

h کو قدم کہتے ہیں۔ شکل 1.6-الف میں y_1 کا حصول دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی نقطہ y_0 اور ترکیب یولر سے حاصل کردہ y_1 کو چھوٹے دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں h کی قیمت کم کرنے کا اثر دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹا قدم لینے سے اصل حل $y(x_1)$ اور یولر سے حاصل y_1 میں فرق (غلطی) کم ہو جاتا ہے۔ یوں قدم کو چھوٹا سے چھوٹا کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ درست حل دریافت کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 1.15 کا عمومی حل $y = ce^{-x} + x - 1$ ہے جس سے نقطہ $(0,0)$ سے گزرتا حل $y = e^{-x} + x - 1$ ملتا ہے۔ اس طرح کے حل ہم جلد حاصل کر پائیں گے۔ اس وقت صرف اتنا ضروری ہے کہ آپ دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکیں کہ یہی درست حل ہے۔

جدول 1.1 میں قدم $h = 0.1$ لیتے ہوئے نقطہ $(0,0)$ سے گزرتا ہوا مساوات 1.15 کا ترکیب یولر (مساوات 1.16) سے حل حاصل کیا گیا ہے۔ آئیں اس جدول کو حاصل کریں۔

ابتدائی نقطہ $(x_0, y_0) = (0,0)$ ہے جس کا اندراج جدول 1.1 کے پہلے صف میں کیا گیا ہے۔ ان قیمتوں کو



شکل 1.6: ترکیب یولر کا پہلا قدم۔

استعمال کرتے ہوئے (x_1, y_1) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 0 + 0.1(0 - 0) = 0$$

جدول 1.1 کے دوسرے صف میں ان قیمتوں کا اندراج کیا گیا ہے جن سے (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0 + 0.1(0.1 - 0) = 0.01$$

یہ قیمتیں بھی جدول میں درج ہیں۔ اسی طرح (x_3, y_3) حاصل کرتے ہوئے جدول میں درج کئے گئے ہیں۔

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.01 + 0.1(0.2 - 0.01) = 0.029$$

جدول کی آخری صف حاصل کرتے ہیں۔

$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

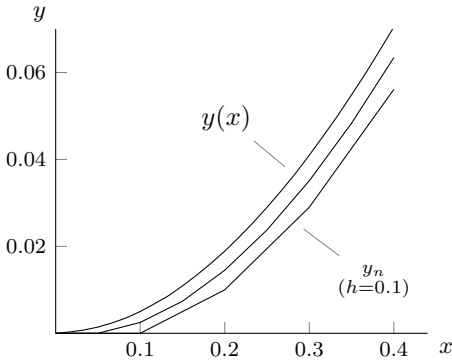
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.029 + 0.1(0.3 - 0.029) = 0.0561$$

شکل 1.7-الف میں ترکیب یولر سے حاصل حل اور ریاضیاتی حل $y(x)$ کا موازنہ کیا گیا ہے۔ شکل-الف میں یولر حل سے حاصل نقطوں کو سیدھی لکیروں سے ملاتے ہوئے مسلسل حل حاصل کیا جاسکتا ہے جسے شکل-ب میں y_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y(x)$ بھی دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ $h = 0.05$ استعمال کرتے ہوئے

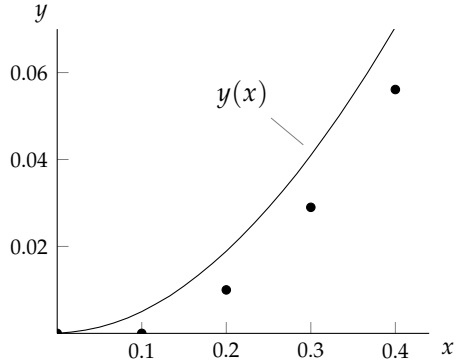
1.2. $y' = f(x, y)$ کا حیو میٹر یائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پور۔

جدول 1.1: ترکیب پور۔

نقطی	$y(x)$	y_n	x_n	n
0	0	0	0	0
0.00484	0.00484	0.0	0.1	1
0.00873	0.01873	0.01	0.2	2
0.01182	0.04082	0.029	0.3	3
0.01422	0.07032	0.0561	0.4	4



(ب)



(الف)

شکل 1.7: ترکیب پور سے حاصل حل کار یانمیاتی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

حاصل پولر حل کو بھی دکھایا گیا ہے جو $y(x)$ اور y_n کے بیچ میں پایا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ h کی قیمت کم کرنے سے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 1.22 تا سوال 1.28 کے میدان ڈھال کو قلم و کاغذ سے کھینچتے ہوئے دیے ابتدائی نقطوں سے گزرتے منحنی حل حاصل کریں۔ چند ڈھال میدان شکل 1.8 اور شکل 1.9 میں دیے گئے ہیں۔

سوالات

سوال 1.22: $y' = 1 + y^2, \quad (\frac{\pi}{4}, 1)$

سوال 1.23: $y' = 1 - y^2, \quad (0, 0)$

سوال 1.24: $yy' + 8x = 0, \quad (1, 1)$

سوال 1.25: $y' = y - y^2, \quad (1, 0)$

سوال 1.26: $y' = x + \frac{1}{y}, \quad (0, 1)$

سوال 1.27: $y' = \sin^2 x, \quad (0, 1)$

سوال 1.28: $y' = \sin^2 y, \quad (0, 0)$

ڈھال میدان کے استعمال سے تفرقی مساوات کے تمام حل سامنے آ جاتے ہیں۔ بعض اوقات تفرقی مساوات کا تحلیلی حل حاصل کرنا ممکن ہی نہیں ہوتا۔ درج ذیل دو سوالات میں ڈھال میدان سے اخذ حل اور دیے گئے تحلیلی حل کا موازنہ کرتے ہوئے ڈھال میدان سے حاصل حل کی درستگی کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔

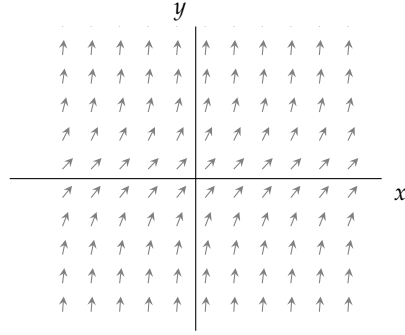
سوال 1.29: $y' = \sin x, \quad (\frac{\pi}{2}, 0), \quad y = -\cos x$

سوال 1.30: $y' = 3x^2, \quad (0, 0), \quad y = x^3$

1.2. $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب - میدان کی سمت اور ترکیب پور



$$y' = 1 - y^2 \quad (\text{ب})$$

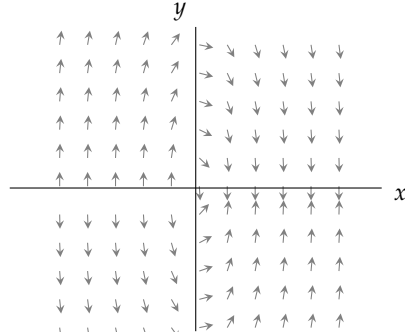


$$y' = 1 + y^2 \quad (\text{الف})$$

شکل 1.8: سوال 1.22 اور سوال 1.23 کے ڈھال میدان۔



$$y' = y - y^2 \quad (\text{ب})$$



$$y' = -\frac{8x}{y} \quad (\text{الف})$$

شکل 1.9: سوال 1.24 اور سوال 1.25 کے ڈھال میدان۔

سوال 1.31: سوال 1.23، سوال 1.25 اور سوال 1.28 میں بے قابو متغیرہ x صریحاً ظاہر نہیں کیا گیا ہے۔ ایسی مساوات جن میں بے قابو متغیرہ کو صریحاً ظاہر نہ کیا جائے خود مختار³⁵ سادہ تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ خود مختار سادہ تفرقی مساوات کے ہم میلان³⁶ حل $f(x, y) = c$ کی شکل و صورت کیا ہو گی؟

جواب: چونکہ y' کا دارومدار x پر نہیں ہے لہذا x تبدیل کرنے سے y کا میلان تبدیل نہیں ہو گا اور $f(x, y) = c$ افقی محور کے متوازی خط ہوں گے۔

ایک جسم y محدود پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر نقطہ $y = 0$ سے جسم کا فاصلہ $y(t)$ ہے۔ سوالات 1.32 تا سوال 1.34 میں دئے شرائط کے مطابق جسم کی رفتار کی نمونہ کشی کریں۔ ریاضی نمونے کی ڈھال میدان بناتے ہوئے دیے گئے ابتدائی معلومات پر پورا اترتا منحنی خط کھینچیں۔

سوال 1.32: جسم کی رفتار ضرب فاصلہ $y(t)$ مستقل ہے جو 4 کے برابر ہے جبکہ $y(0) = 4$ کے برابر ہے۔

جوابات: $y' = 4$ ، $y = 8t + 16$

سوال 1.33: رفتار ضرب وقت فاصلے کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 1$ پر فاصلہ $y(1) = 2$ ہے۔

جوابات: $y' = t$ ، $y = 2t$

سوال 1.34: مربع رفتار منفی مربع فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔ ابتدائی فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔

جوابات: $y' = \sqrt{1 + y^2}$ ، $\sinh^{-1} y = t + \sinh^{-1} 1$

سوال 1.35: ہوائی جہاز سے چھلانگ لگا کر زمین تک خیریت سے بذریعہ چھتری اترنا جاسکتا ہے۔ گرتے ہوئے شخص پر آپس میں الٹ، دو عدد قوتیں عمل کرتی ہیں۔ پہلی قوت زمینی کشش $F_1 = mg$ ہے جہاں m اس شخص کی کمیت اور $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ثقلی اسراع ہے۔ یہ قوت انسان کو زمین کی طرف اسراع دیتی ہے۔ دوسری قوت چھتری پر ہوا کے رگڑ سے پیدا قوت ہے جو اس شخص کی رفتار کو بڑھنے سے روکتی ہے۔ چھتری پر ہوا کے رگڑ سے

autonomous ordinary differential equations³⁵
isoclines³⁶

رفتار کے مربع کے متناسب قوت $F_2 = cv^2$ پیدا ہوتی ہے۔ نیوٹن کی مساوات حرکت کہتی ہے کہ کسی بھی جسم پر قوت، اس جسم کی کمیت ضرب اسراع کے برابر ہوتی ہے۔ چھتری سے زمین پر اترتے شخص کی نمونہ کشی کرتے ہوئے رفتار v کی سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ کمیت کو $m = 1$ اور مستقل کو $c = 1$ لیتے ہوئے ڈھال میدان کھینچیں۔ تصور کریں کہ چھتری اس لمحہ کھلتی ہے جب شخص کی رفتار $v = 15 \text{ ms}^{-1}$ ہو۔ ایسی صورت میں منحنی حل حاصل کریں۔ اس شخص کی اختتامی رفتار کیا ہوگی؟ کیا چھتری پر قوت رفتار کے راست متناسب ہونے کی صورت میں بھی چھتری کے ذریعہ ہوائی جہاز سے زمین تک خیریت سے چھلانگ لگائی جاسکتی ہے؟

جوابات: $mg - cv^2 = m \frac{dv}{dt}$ ؛ گرنے کی رفتار اس قیمت پر رہتی ہے جہاں نیچے جانب قوت mg اور چھتری کی رکاوٹی اوپر جانب قوت cv^2 برابر ہوں۔ ایسی صورت میں گرتے شخص کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی یعنی $y' = 0$ ہوتا ہے۔ تفرقی مساوات میں $y' = 0$ پر کرتے اور $m = c = 1$ لیتے ہوئے اختتامی رفتار حاصل ہوتی ہے۔ $v(t = \infty) = 3.13 \text{ ms}^{-1}$

سوال 1.36: گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ ہے۔ رداس r کو مستقل تصور کرتے ہوئے دائرے کی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ڈھال میدان کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا آپ ڈھال میدان کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ منحنی حل گول دائرے ہیں؟ اسی طرح $x^2 + 9y^2 = c$ کا تفرق لیتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کی ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا ڈھال میدان کو دیکھ کر کہا جاسکتا ہے کہ منحنی حل بیضوی ہوگا؟

جوابات: $y' = -\frac{x}{9y}$ ، $y' = -\frac{x}{y}$

سوال 1.37 تا سوال 1.40 کو ترکیب یولر سے حل کریں۔ کل پانچ ہم فاصلہ نقطوں پر حل حاصل کریں۔ ایک ہی کارٹیسی محدود پر حاصل y_1 تا y_5 اور سوال میں دئے گئے حل $y(x)$ کا خط کھینچیں۔ سوال 1.37:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1, \quad y(x) = e^{-x}$$

جوابات: $y_1 = 0.9$ ، $y_2 = 0.81$ ، $y_3 = 0.729$ ، $y_4 = 0.6561$ ، $y_5 = 0.59049$

سوال 1.38:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{-x}$$



شکل 1.10: سوال 1.36 کی ڈھال میدان۔

جوابات: $y_1 = 0.99$ ، $y_2 = 0.9801$ ، $y_3 = 0.9703$ ، $y_4 = 0.9606$ ، $y_5 = 0.95099$

سوال 1.39:

$$y' = 1 + 3x^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1, \quad y(x) = x^3 + x$$

جوابات: $y_1 = 2.1$ ، $y_2 = 2.203$ ، $y_3 = 2.315$ ، $y_4 = 2.442$ ، $y_5 = 2.59$

سوال 1.40:

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{x^2-4}$$

جوابات: $y_1 = 1.04$ ، $y_2 = 1.0818$ ، $y_3 = 1.1255$ ، $y_4 = 1.1712$ ، $y_5 = 1.2190$

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات

متعدد اہم سادہ تفرقی مساوات کو الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$(1.17) \quad g(y)y' = f(x)$$

جس کو مزید یوں

$$g(y) \frac{dy}{dx} dx = f(x) dx$$

یعنی

$$g(y) dy = f(x) dx$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں جانب صرف y متغیرہ اور دائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے لہذا اس کا مکمل لیا جاسکتا ہے۔

$$(1.18) \quad \int g(y) dy = \int f(x) dx + c$$

اگر $g(y)$ اور $f(x)$ قابل مکمل تفاعل ہوں تب مساوات 1.18 سے مساوات 1.17 کا حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب کو ترکیب علیحدگی متغیرات³⁷ کہتے ہیں۔ مساوات 1.17 کو قابل علیحدگی مساوات³⁸ کہتے ہیں۔

مثال 1.6: مساوات $y' = 1 + y^2$ قابل علیحدگی مساوات ہے چونکہ اس کو

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx$$

لکھا جاسکتا ہے جس کے دونوں اطراف کا مکمل لیتے ہوئے

$$\tan^{-1} y = x + c$$

یعنی

$$y = \tan(x + c)$$

حاصل ہوتا ہے جو تفرقی مساوات کا درکار حل ہے۔ حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ یہی صحیح حل ہے۔

مثال 1.7: قابل علیحدگی تفرقی مساوات $y' = xe^{-x}y^3$ کو علیحدہ کرتے ہوئے دونوں اطراف کا مکمل لے کر حل کرتے ہیں۔

$$y^{-3} dy = xe^{-x} dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = c - (x+1)e^{-x} \quad \text{مکمل لیا گیا ہے}$$

$$y^2 = \frac{1}{2(x+1)e^{-x} - 2c}$$

مثال 1.8: درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1$$

حل: مساوات کے متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے مکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{dy}{y} = - \int 2x dx + c$$

$$\ln y = -x^2 + c_1$$

$$y = ce^{-x^2}$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = 0$ یعنی $c = e^{c_1} = 1$ ملتا ہے لہذا تفرقی مساوات کا جبری حل $y = e^{-x^2}$ ہے جسے شکل 1.11 میں دکھایا گیا ہے اور جو گھنٹی نما³⁹ ہے۔



شکل 1.11: مثال 1.8 کا گھنٹی نما عمل۔

مثال 1.9: کاربن سے عمر دریافت کرنے کا طریقہ
 طبعی معلومات: کائناتی شعاعیں⁴⁰ فضا میں تابکار کاربن $^{14}_6\text{C}$ بناتی ہیں۔ یہ عمل زمین کی پیدائش سے اب تک ہوتا آ رہا ہے۔ وقت کے ساتھ فضا میں $^{14}_6\text{C}$ اور $^{12}_6\text{C}$ ہم جا⁴¹ کی تناسب ایک مخصوص قیمت حاصل کر چکی ہے۔ کوئی بھی جاندار سانس لے کر یا خوراک کے ذریعہ فضا سے کاربن جذب کرتا ہے۔ یوں جب تک جانور زندہ رہے اس کی جسم میں دونوں ہم جا کاربن کی تناسب وہی ہوگی جو فضا میں ان کی تناسب ہے۔ البتہ مرنے کے بعد جسم میں تابکار کاربن کی مقدار تابکاری تحلیل کی بنا گھٹتی ہے جبکہ غیر تابکار کاربن کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ تابکار کاربن $^{14}_6\text{C}$ کی نصف زندگی 5715 سال ہے۔

اہرام مصر میں دفن مومیائی ہوئی فرعون کی لاش میں $^{14}_6\text{C}$ اور $^{12}_6\text{C}$ کا تناسب فضا کے تناسب کا 56.95 % ہے۔ لاش کی عمر دریافت کریں۔

cosmic rays⁴⁰
 isotopes⁴¹

حل: تابکار کاربن کی نصف زندگی سے تابکاری تحلیل کا مستقل k دریافت کرتے ہیں۔

$$y_0 e^{-k(5715)} = \frac{y_0}{2}, \quad e^{-k(5715)} = \frac{1}{2}, \quad -k = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{5715}, \quad k = 0.0001213$$

لاش میں ہم جا کاربن کی تناسب سے لاش کی عمر حاصل کرتے ہیں۔

$$e^{-0.0001213t} = 0.5695, \quad -0.0001213t = \ln 0.5695, \quad t = 4641$$

یوں فرعون کی لاش 4641 سال پرانی ہے۔

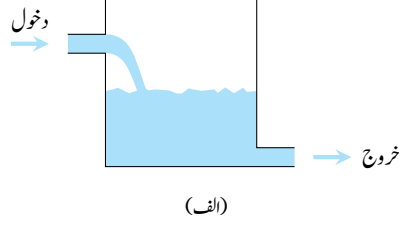
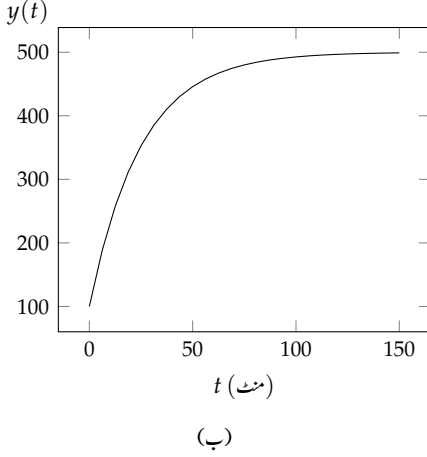
مثال 1.10: مرکب بنانے کا عمل کیمیائی صنعت میں مرکب بنانے کا عمل عام ہے۔ شکل 1.12-الف میں پانی کی ٹینکی دکھائی گئی ہے جس میں ابتدائی طور پر 1000 لٹر پانی پایا جاتا ہے۔ اس پانی میں کل 100 kg نمک ملا یا گیا ہے۔ پانی کو مسلسل ہلانے سے ٹینکی میں کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ ٹینکی میں 40 لٹری منٹ کی شرح سے نمکین پانی شامل کیا جاتا ہے۔ اس پانی میں نمک کی مقدار 0.5 kg l^{-1} ہے۔ ٹینکی سے نمکین پانی کا انخلا 40 لٹری منٹ ہے۔ ٹینکی میں نمک کی کل مقدار بالمقابل وقت دریافت کریں۔

حل: چونکہ ٹینکی میں پانی شامل ہونے کی شرح اور پانی خارج ہونے کی شرح برابر ہے یہ لہذا ٹینکی میں پانی کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ ٹینکی میں داخل ہونے والا ایک لٹر کا نمکین پانی 0.5 kg نمک ٹینکی میں شامل کرتا ہے۔ یوں 40 لٹری منٹ سے داخل ہوتا پانی $40 \times 0.5 = 20 \text{ kg min}^{-1}$ سے نمک شامل کرتا ہے۔ کسی بھی لمحہ ٹینکی میں کل نمک کو y کلوگرام لکھتے ہوئے ٹینکی میں نمک کی کثافت کو $\frac{y}{1000}$ کلوگرام فی لٹر لکھا جاسکتا ہے۔ یوں خارج ہوتا پانی $40 \times \frac{y}{1000}$ کلوگرام فی منٹ نمک خارج کرتا ہے۔ اس طرح نمک میں اضافے کی شرح $\frac{dy}{dt}$ کو

$$\begin{aligned} y' &= \text{نمک خارج ہونے کی شرح} - \text{نمک شامل ہونے کی شرح} \\ &= 20 - \frac{40y}{1000} \end{aligned}$$

یعنی

$$(1.19) \quad y' = 0.04(500 - y)$$



شکل 1.12: مثال 1.10 میں مرکب بنانے کا عمل۔

لکھا جاسکتا ہے جو قابل علیحدگی مساوات ہے لہذا اس میں متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکمیل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{y - 500} = -0.04 dt, \quad \ln|y - 500| = -0.04t + c_1, \quad y = 500 + ce^{-0.04t}$$

ٹینکی میں ابتدائی نمک کی کل مقدار 100 kg ہے۔ اس معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے مساوات کا مستقل c حاصل کرتے ہیں۔

$$100 = 500 + c^{-0.04(0)}, \quad c = -400$$

یوں کسی بھی لمحے ٹینکی میں کل نمک کی مقدار درج ذیل ہے جس کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$y(t) = 500 - 400e^{-0.04t}$$

شکل-ب کے مطابق ٹینکی میں آخر کار کل 500 kg نمک پایا جائے گا۔ یہی جواب بغیر کسی مساوات لکھے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ٹینکی میں لگاتار نمکین پانی شامل کیا جائے اور اس سے پرانا پانی خارج کیا جائے تو آخر کار ٹینکی میں صرف نیا شامل کردہ پانی ہی پایا جائے گا۔ چونکہ شامل کردہ پانی میں 0.5 کلوگرام فی لٹر نمک پایا جاتا ہے لہذا 1000 لٹر کی ٹینکی میں کل نمک $1000 \times 0.5 = 500 \text{ kg}$ ہو گا۔

مثال 1.11: نیوٹن قانون ٹھنڈک گرمیوں میں ایک دفتر کا درجہ حرارت ایئر کنڈیشنر کی مدد سے 21°C پر رکھا جاتا ہے۔ صبح سات بجے ایئر کنڈیشنر چالو کیا جاتا ہے اور شام نو بجے اس کو بند کر دیا جاتا ہے۔ ایک مخصوص دن کو شام نو بجے بیرونی درجہ حرارت 40°C ہوتا ہے جبکہ صبح سات بجے بیرونی درجہ حرارت 30°C تک گر چکا ہوتا ہے۔ دفتر کے اندر رات دو بجے درجہ حرارت 26°C ہوتا ہے۔ صبح سات بجے دفتر کے اندر درجہ حرارت معلوم کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ حرارتی توانائی کو با آسانی منتقل کرتے جسم (مثلاً لوہا) کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح جسم اور اس کے گرد ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست تناسب ہوتا ہے۔ اس کو نیوٹن کا قانون ٹھنڈک⁴² کہا جاتا ہے۔

حل: پہلا قدم: سب سے پہلے نمونہ کشی کرتے ہیں۔ دفتر کے اندرونی حرارت کو T سے ظاہر کرتے ہیں جبکہ بیرونی حرارت کو T_b سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں نیوٹن کا قانون ٹھنڈک کی ریاضیاتی صورت درج ذیل ہوگی۔

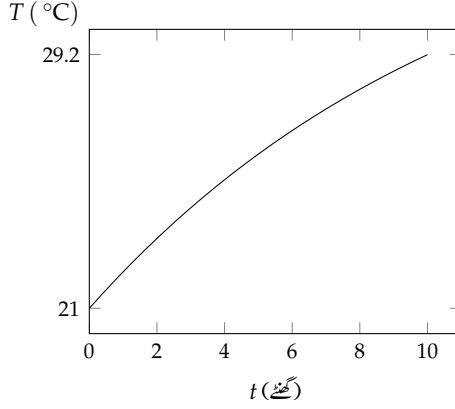
$$(1.20) \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_b)$$

دوسرا قدم: عمومی حل کی تلاش: اگرچہ دفتر کی دیواریں اور چھت حرارتی توانائی با آسانی منتقل نہیں کرتی ہم اسی کلیے کا سہارا لیتے ہوئے مسئلہ حل کریں گے۔ یہاں بیرونی درجہ حرارت مستقل قیمت نہیں ہے لہذا درجہ بالا مساوات کو حل کرنا مشکل ہو گا۔ انجینئرنگ کے شعبے میں عموماً ایسی ہی مشکلات کا سامنا کرنا ہوتا ہے۔ ہمیں مسئلے کی سادہ صورت حل کرنا ہوگی۔ اگر ہم تصور کریں کہ T_b مستقل قیمت ہے تب درجہ بالا مساوات کے متغیرات علیحدہ کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ بیرونی درجہ حرارت 30°C تا 40°C رہا ہے لہذا ہم اس کی اوسط قیمت یعنی 35°C کو بیرونی درجہ حرارت تصور کرتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔ مساوات کے متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے مکمل لے کر اس کو حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dT}{T - 35} = k dt, \quad \ln|T - 35| = kt + c_1, \quad T - 35 = ce^{kt}$$

تیسرا قدم: جبری حل کا حصول: اگر شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا جائے اور وقت کو گھنٹوں میں ناپا جائے تب $T(0) = 21$ لکھا جائے گا جسے درجہ بالا میں پر کرتے ہوئے $c = -14$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں جبری حل

$$T = 35 - 14e^{kt}$$



شکل 1.13: مثال 1.11: دفتر کا اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت۔

چوتھا قدم: مستقل k کا حصول: ہم جانتے ہیں کہ رات دو بجے اندرونی درجہ حرارت 26°C ہے۔ یاد رہے کہ شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا گیا لہذا رات دو بجے $t = 5$ ہو گا۔ یوں $T(5) = 26$ لکھا جائے گا۔ ان معلومات کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے k حاصل کرتے ہوئے مکمل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$26 = 35 - 14e^{5k}, \quad k = -0.088, \quad T = 35 - 14e^{-0.088t}$$

آخری قدم: صبح سات بجے اندرونی درجہ حرارت کا تخمینہ لگاتے ہیں یعنی $t = 10$ پر درجہ حرارت درکار ہے۔

$$T = 35 - 14e^{-0.088(10)} = 29.2^\circ\text{C}$$

پوری رات میں اندرونی درجہ حرارت 8.2°C بڑھ گیا ہے۔ شکل 1.13 میں اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت دکھایا گیا ہے۔

مثال 1.12: پانی کا انخلاء: پانی کی ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش $B = 2\text{ m}^2$ ہے۔ ٹینکی کی تہہ میں $r = 0.5\text{ cm}$ رداس کا گول سوراخ ہے جس سے پانی نکل رہا ہے۔ ٹینکی میں پانی کی ابتدائی گہرائی $h_1 = 1.5\text{ m}$ ہے۔ ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی۔

طبعی معلومات: پانی کی سطح پر m کمیت پانی کی مخفی توانائی mgh ہے جہاں $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ثقلی اسراع اور h پانی کی گہرائی ہے۔ سوراخ سے خارج ہوتے وقت یہ مخفی توانائی حرکی توانائی $\frac{mv^2}{2}$ میں تبدیل ہو جاتی ہے جہاں v رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔ مخفی توانائی اور حرکی توانائی کو برابر لکھتے ہوئے v کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad v = \sqrt{2gh}$$

شکل 1.14- الف میں پانی کی دھار دکھائی گئی ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں دھار سوراخ کے قریب سکڑتا ہے۔ اگر سوراخ کا رقبہ a ہو تب سکڑے ہوئے مقام پر دھار کا رقبہ عمودی تراش $0.6a$ ہوتا ہے۔ یوں سوراخ سے نکلا تمام پانی رقبہ $0.6a$ سے گزرتا ہے اور یہی وہ مقام ہے جہاں پانی کا ہر ذرہ ایک ہی سمت میں رفتار v سے حرکت کرتا ہے۔

شکل 1.14- ب میں ایک نالی دکھائی گئی ہے جس میں پانی کی رفتار v ہے۔ نالی کا رقبہ عمودی تراش A ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر مقام m پر موجود پانی کا ذرہ وقت Δt میں $v\Delta$ فاصلہ طے کرتے ہوئے مقام n تک پہنچ جائے گا۔ یوں Δt کے دوران مقام m سے گزرا ہوا پانی نالی کو m تا n بھرے گا۔ اس پانی کی مقدار $\Delta M = Av\Delta t$ ہو گی۔ اسی کلیے کو استعمال کرتے ہوئے شکل 1.14- الف میں dt دورانیے میں کل $dM = 0.6av dt$ پانی خارج ہو گا۔ یوں پانی کی شرح انخلا درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{dM}{dt} = 0.6a\sqrt{2gh} \quad (1.21)$$

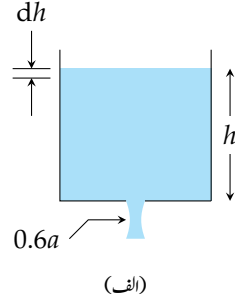
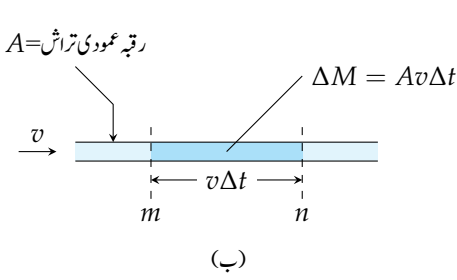
اس مساوات کو قانون ثاری سلی⁴³ کہتے ہیں۔

حل: دورانیہ dt میں پانی کی انخلا کے بنا ٹینکی میں پانی کی گہرائی dh کم ہو گی جو $B dh$ حجم کی کمی کو ظاہر کرتی ہے جہاں B ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ چونکہ پانی کے انخلا سے ٹینکی میں پانی کم ہوتا ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو دیے گئے مسئلے کا تفریقی مساوات ہے۔

$$0.6a\sqrt{2gh} dt = -B dh \quad (1.22)$$

متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} dt, \quad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} t + c$$



شکل 1.14: مثال 1.12: پانی کا انخلاء اور پانی کے دھار کا سکڑنا۔

ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر پانی کی گہرائی h_1 ہے۔ ان معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = 2h_1$ ملتا ہے لہذا تفرقی مساوات کا جبری حل درج ذیل ہے۔

$$(1.23) \quad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + 2\sqrt{h_1}$$

خالی ٹینکی سے مراد $h = 0$ ہے۔ جبری حل میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے ٹینکی خالی کرنے کے لئے درکار وقت حاصل کرتے ہیں۔

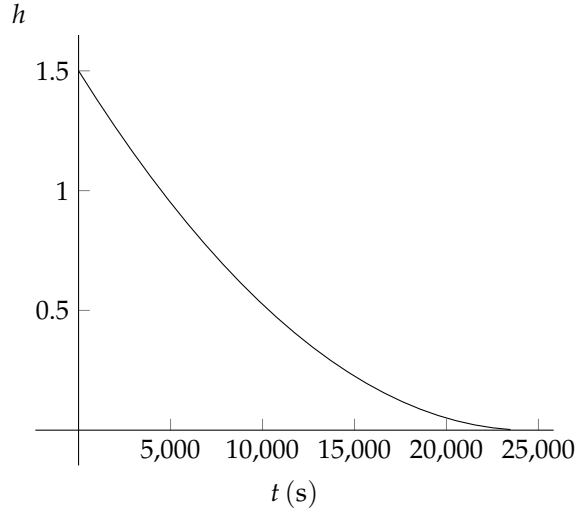
$$2\sqrt{0} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + 2\sqrt{h_1}, \quad t = \frac{2\sqrt{h_1}B}{0.6a\sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{1.5} \times 2}{0.6\pi 0.005^2 \sqrt{2} \times 9.8} = 23482 \text{ s} \approx 6.52 \text{ h}$$

مساوات 1.23 کو شکل 1.15 میں دکھایا گیا ہے۔ یاد رہے کہ 23482 s میں ٹینکی خالی ہو جاتی ہے لہذا ترسیم کو اتنے وقت کے لئے ہی کھینچا گیا ہے۔

علیحدگی متغیرات کی جامع ترکیب

بعض اوقات ناقابل علیحدگی تفرقی مساوات کے متغیرات کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات کو قابل علیحدگی بنایا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب کو درج ذیل عملاً اہم قسم کی مساوات کے لئے سیکھتے ہیں جہاں $f(\frac{y}{x})$ قابل تفرق تفاعل ہے مثلاً



شکل 1.15: مثال 1.12: ٹینکی خالی ہونے کا عمل۔

$\cos \frac{y}{x}$ ، $e^{(y/x)}$ وغیرہ۔

$$(1.24) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

مساوات کی صورت دیکھتے ہوئے $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1.25) \quad y = ux, \quad y' = u + xu'$$

جنہیں $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ میں پر کرتے ہوئے $u + xu' = f(u)$ یعنی $xu' = f(u) - u$ ملتا ہے۔ اگر $f(u) - u \neq 0$ ہو تب متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.26) \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

مثال 1.13: تفاعل $xy' - y = 2x$ کو حل کریں۔

حل: تفاعل کو $y' = \frac{y}{x} + 2$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہوئے مساوات 1.25 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u + xu' = u + 2, \quad du = 2 \frac{dx}{x}, \quad u = 2 \ln|x| + c$$

اس میں u کی جگہ واپس $\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے جواب حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y}{x} = 2 \ln|x| + c, \quad y = 2x \ln|x| + cx$$

سوالات

سوال 1.41 تا سوال 1.49 کے عمومی حل حاصل کریں۔ حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 1.41: $y^2 y' + x^2 = 0$

جواب: $x^3 + y^3 = c$

سوال 1.42: $yy' + x = 0$

جواب: $x^2 + y^2 = c$

سوال 1.43: $y' = \sec^2 y$

جواب: $y = \tan x + c$

سوال 1.44: $y' \cos x = y \sin x$

جواب: $y = c \sec x$

سوال 1.45: $y' = ye^{x-1}$

جواب: $\ln|y| = e^{x-1} + c$

سوال 1.46: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y + x^2 \sin^2 \frac{y}{x}$ کو حل کریں۔

جواب: $\frac{\cos \frac{y}{x} - 1}{\cos \frac{y}{x} + 1} = ce^{2x}$

سوال 1.47: $y' = (2x + y)^2$ کو حل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر $u = 2x + y$ پر کرنا ہو گا۔

جواب: $y = -2x + \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x + c)$

سوال 1.48: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y^2 + y$ کو حل کریں۔

جواب: $y = -\frac{x}{x+c}$

سوال 1.49: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = x - y$ کو حل کریں۔

جواب: $xy - x^2 = c$

ابتدائی قیمت سوال 1.50 تا سوال 1.56 کے جبری حل حاصل کریں۔

سوال 1.50:

$$xy' + y = 0, \quad y(2) = 8$$

جواب: $y = \frac{16}{x}$

سوال 1.51:

$$y' = 1 + 9y^2, \quad y(1) = 0$$

جواب: $y = \frac{1}{3} \tan[3(x - 1)]$

سوال 1.52:

$$y' \cos^2 x = \sin^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{جواب: } \tan y = \frac{1}{1 - \tan x}$$

سوال 1.53:

$$y' = -4xy, \quad y(0) = 5$$

$$\text{جواب: } y = 5e^{-2x^2}$$

سوال 1.54:

$$y' = -\frac{2x}{y}, \quad y(1) = 2$$

$$\text{جواب: } 2x^2 + y^2 = 6$$

سوال 1.55:

$$y' = (x + y - 4)^2, \quad y(0) = 5$$

$$\text{جواب: } x + y - 4 = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

سوال 1.56:

$$xy' = y + 3x^4 \cos^2 \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0$$

$$\text{جواب: اس میں } u = \frac{y}{x} \text{ پر کرنے سے } \tan \frac{y}{x} = x^3 - 1 \text{ ملتا ہے۔}$$

سوال 1.57: کسی بھی لمحے پر جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح، اس لمحے موجود جرثوموں کی تعداد کے راست تناسب ہے۔ اگر ان کی تعداد دو گھنٹوں میں دگنی ہو جائے تب چار گھنٹوں بعد ان کی تعداد کتنی ہوگی؟ چوبیس گھنٹوں بعد کتنی ہوگی؟

جوابات: $y = y_0 e^{0.34657t}$ ، $4y_0$ ، $4095y_0$

سوال 1.58: جرثوموں کی شرح پیدائش موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ ان کی شرح اموات بھی موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح کیا ہوگی؟ تعداد بالمقابل وقت کیا ہوگا؟ تعداد کہاں متوازن صورت اختیار کرے گی؟

جوابات: $\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y$ جہاں α اور β بالترتیب پیدائشی اور امواتی راست تناسب کے مستقل ہیں۔ تعداد بالمقابل وقت کی مساوات $y = y_0 e^{(\alpha - \beta)t}$ ہے۔ اگر $\alpha > \beta$ ہو تب تعداد بڑھتی رہے گی۔ اس کے برعکس اگر $\alpha < \beta$ ہو تب تعداد گھٹتی رہے گی حتیٰ کہ جراثیم فنا ہو جائیں اور $\alpha = \beta$ کی صورت میں تعداد وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگی۔

سوال 1.59: عموماً جاندار مرنے کے بعد مکمل طور پر خاک میں مل جاتے ہیں اور ان کا نشان تک نہیں رہتا البتہ بعض اوقات حالات یوں ہوتے ہیں کہ ان کا جسم پتھر میں بدل جاتا ہے۔ اس پتھریلی جسم میں موجود $^{14}_6\text{C}$ اور $^{12}_6\text{C}$ ہم جاکے تناسب سے اس کی عمر کا تخمینہ لگایا جاسکتا ہے۔ دو ہزار سال پرانی پتھریلی مچھلی میں کاربن کا تناسب، ابتدائی تناسب کے کتنا گنا ہوگا؟

جواب: 69.5 %

سوال 1.60: طبیعیات میں بار بردار⁴⁴ ذروں کو مسرع خطی⁴⁵ کے ذریعہ اسراع دی جاتی ہے۔ تصور کریں کہ مسرع خطی میں $^4_2\text{He}^{2+}$ داخل ہوتا ہے جس کی رفتار مستقل اسراع کے ساتھ 1.2 ms دورانیے میں 10^3 ms^{-1} سے بڑھا کر $1.6 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}$ کر دی جاتی ہے۔ اسراع دریافت کریں۔ اس دورانیے میں ذرہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

جوابات: $1.25 \times 10^7 \text{ ms}^{-2}$ ، 10.2 m

سوال 1.61: ایک ٹینکی میں 2000 لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں 150 kg نمک ملا یا گیا ہے۔ پانی کو مسلسل ہلانے سے کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ ٹینکی میں 10 لٹرنی منٹ تازہ پانی شامل کیا جاتا ہے۔ ٹینکی سے پانی کا اخراج بھی 10 لٹرنی منٹ ہے۔ ایک گھنٹہ بعد ٹینکی میں کل کتنا نمک پایا جائے گا؟

جوابات: $y = 150e^{-\frac{t}{200}}$ ، $y = 111 \text{ kg}$

سوال 1.62: مریض کے زبان کے نیچے تھرمائیٹر رکھ کر اس کا درجہ حرارت ناپا جاتا ہے۔ کمرے اور مریض کے درجہ حرارت بالترتیب 25°C اور 40°C ہیں۔ زبان کے نیچے رکھنے کے ایک منٹ بعد تھرمائیٹر کا پڑا 35°C تک پہنچتا ہے۔ تھرمائیٹر کتنی دیر میں اصل درجہ حرارت کے قریب (مثلاً 39.9°C) پہنچ پائے گا؟

جواب: $T = 40 - 15e^{-1.204t}$ ، $t = 4.16 \text{ min}$

سوال 1.63: سرطان⁴⁶ کی مہلک بیماری میرے خاندان کے کئی افراد کی جان لے چکی ہے۔ سن 1960 میں اپنا کین لایرڈ⁴⁷ سرطان کی رسولی کی افزائش کو ٹھیک طرح گامپرتز تفاعل⁴⁸ سے ظاہر کرنے میں کامیاب ہوئے۔

سرطانی رسولی میں جسم کا نظام تباہ ہو جاتا ہے۔ یوں رسولی میں موجود خلیوں تک آکسیجن اور خوراک کا پہنچنا ممکن نہیں رہتا۔ رسولی کے اندرونی خلیے آکسیجن اور خوراک کی کمی کی بنا مر جاتے ہیں۔ ان حقائق کی نمونہ کشی درج ذیل گامپرتز تفریقی مساوات کرتی ہے جہاں y رسولی کی کمیت ہے۔

(1.27) $y' = -Ay \ln y, \quad A > 0$

جواب: $\ln y = ce^{-At}$

سوال 1.64: دھوپ میں کپڑے کی نمی خشک ہونی کی شرح کپڑے میں موجود نمی کے راست تناسب ہوتی ہے۔ اگر پہلے پندرہ منٹ میں نصف پانی خشک ہو جائے تب 99.9% پانی کتنی دیر میں خشک ہو گا؟ ہم 99.9% خشک کو مکمل خشک تصور کر سکتے ہیں۔

جواب: $y = y_0 e^{-0.0462t}$ ، 49.8 min

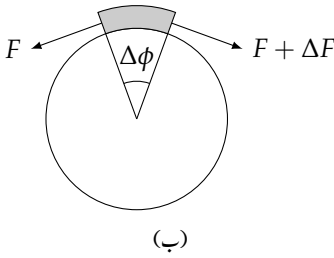
سوال 1.65: رگڑ دو سطحوں کو آپس میں رگڑنے سے قوت رگڑ پیدا ہوتی ہے جو اس حرکت کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ خشک سطحوں پر پیدا قوت $|F| = \mu|N|$ سے حاصل کی جاسکتی ہے جہاں N دونوں سطحوں پر عمودی قوت، μ حرکی رگڑ کا مستقل⁴⁹ اور F رگڑ سے پیدا قوت ہے۔

⁴⁶cancer

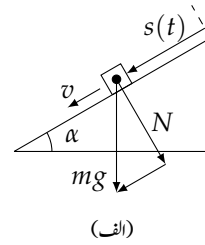
⁴⁷Anna Kane Laird

⁴⁸Benjamin Gompertz

⁴⁹coefficient of kinetic friction



(ب)



(الف)

شکل 1.16: سوال 1.65 اور سوال 1.66 کے اشکال۔

شکل 1.16-الف میں α زاویہ کی سطح پر m کمیت کا جسم دکھایا گیا ہے۔ اس پر ثقلی قوت (وزن) mg عمل کرتا ہے۔ اس قوت کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ پہلا حصہ N ہے جو سطح کے عمودی ہے۔ دوسرا حصہ سطح کے متوازی ہے جو جسم کو اسراع دیتا ہے۔ کمیت 10 kg ، ثقلی اسراع $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ، رگڑ کا مستقل $\mu = 0.25$ اور زاویہ $\alpha = 30^\circ$ ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔ یہ جسم کتنی دیر میں کل 15 m فاصلہ طے کرے گا؟

جواب: $mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = m \frac{dv}{dt}$ ، $v = 3.93t \text{ ms}^{-1}$ ، 2.76 s

سوال 1.66: شکل 1.16-ب میں گول جسم کے گرد لپیٹی گئی رسی کا چھوٹا حصہ دکھایا گیا ہے۔ تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ رسی کے چھوٹے حصے کے سروں پر قوت میں فرق زاویہ $\Delta\phi$ اور قوت F کے راست متناسب ہوتا ہے۔ رسی کو جسم کے گرد کتنی مرتبہ لپیٹنے سے ایک شخص 500 گنا زیادہ قوت کے گاڑی کو روک سکتا ہے؟

جوابات: $F = F_0 e^{\phi}$ ، $\phi = 6.21 \text{ rad}$ ، یعنی 1.98 مرتبہ لپیٹنا ضروری ہے۔

سوال 1.67: کارٹیزیی محدد کے محور پر گول دائرے $x^2 + y^2 = r^2$ کا تفرقی مساوات y_1' حاصل کریں۔ اسی طرح محور سے گزرتے ہوئے سیدھے خط کا تفرقی مساوات y_2' حاصل کریں۔ دونوں تفرقی مساوات کا حاصل ضرب کیا ہوگا؟ اس حاصل ضرب سے آپ کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

جواب: $y_1' y_2' = -1$ ؛ آپس میں عمودی ہیں۔

سوال 1.68: آپ کو ایسے تفاعل سے ضرور واسطہ پڑیگا جس کا تحلیلی مکمل حاصل کرنا ممکن نہیں ہوگا۔ ایسا ایک تفاعل x^2 ہے۔ اس تفاعل کی مکلاورن تسلسل 50 کے پہلے چار ارکان کا مکمل حاصل کریں۔

جواب: $\int e^{x^2} \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{36} + \dots$

سوال 1.69: قانون ٹاری سلی
کروی ٹینکی کا رداس R ہے۔ اس کی تہہ میں چھوٹا سوراخ ہے جس کا رداس r ہے۔ پوری طرح بھری ہوئی ٹینکی
کتنی دیر میں خالی ہوگی۔ اگر $R = 1 \text{ m}$ اور $r = 1 \text{ cm}$ ہو تب ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہوگی؟

جواب: $0.6\pi r^2 \sqrt{2gh} dt = -\pi[R^2 + (h - R)^2] dh$
 t خالی = $\frac{44R^2 \sqrt{gR}}{9gr^2}$ ، $t + c = -\frac{\sqrt{2gh}}{9gr^2} (30R^2 - 10hR + 3h^2)$
 دیے رداس کی ٹینکی 4.34 h یعنی چار گھنٹے اور بیس منٹ میں خالی ہوگی۔

1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل

ایسا تعامل $u(x, y)$ جس کے بلا جوڑ⁵¹ جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کا (مکمل) تفرق درج ذیل ہے۔

$$(1.28) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

یوں اگر $u(x, y) = c$ ہو تب $du = 0$ ہو گا۔

مثال کے طور پر $u = xy + 2(x - y) = 7$ کا تفرق

$$du = (y + 2) dx + (x - 2) dy = 0$$

ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2}{x - 2}$$

الٹ چلتے ہوئے اس تفرقی مساوات کو ہم حل کر سکتے ہیں۔ اس مثال سے ایک ترکیب جنم دیتی ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔

⁵¹continuous partial differential

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ یعنی

$$(1.29) \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

کو اس صورت قطعی تفرقی مساوات⁵² کہتے ہیں جب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو جہاں $u(x, y)$ کوئی تفاعل ہے۔

$$(1.30) \quad \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

یوں مساوات 1.29 کو

$$(1.31) \quad du = 0$$

لکھ کر مکمل لیتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی خفی حل⁵³

$$(1.32) \quad u(x, y) = c$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.29 اور مساوات 1.30 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 1.29 تب قطعی تفرقی مساوات ہو گا جب ایسا $u(x, y)$ پایا جاتا ہو کہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو۔

$$(1.33) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M$$

$$(1.34) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

ان سے ہم تفرقی مساوات کے قطعی ہونے کا شرط اخذ کرتے ہیں۔

سطح xy پر ایسا خطہ جس کا سرحد بند منحنی ہو اور یہ منحنی اپنے آپ کو نہ کاٹتا ہو پر تصور کریں کہ M اور N ایسے بے جوڑ⁵⁴ (یعنی استمراری) تفاعل ہیں جن کے درجہ اول تفرق بھی اس خطے پر بے جوڑ ہیں۔ تب مساوات 1.33 کے تفرق درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

exact differential equation⁵²

implicit solution⁵³

continuous⁵⁴

استمراری شرط کی بنا $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ برابر ہیں لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.35) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{شرط قطعیت}$$

مساوات 1.29 کا قطعی تفرقی مساوات ہونے کے لئے مساوات 1.35 پر پورا اتنا لازمی⁵⁵ اور کافی⁵⁶ ہے۔

قطعی تفرقی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 1.33 کا x مکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1.36) \quad u = \int M dx + k(y)$$

جہاں مکمل کا مستقل از خود y کا تفاعل ہو سکتا ہے۔ مکمل کا مستقل $k(y)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.36 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial y}$ لیتے ہوئے مساوات 1.34 کی مدد سے $\frac{dk}{dy}$ حاصل کرتے ہیں جس کا y مکمل لینے سے k حاصل ہو گا۔ (مثال 1.14 دیکھیں۔)

اسی طرح مساوات 1.34 کا y مکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1.37) \quad u = \int N dy + m(x)$$

جہاں مکمل کا مستقل از خود x کا تفاعل ہو سکتا ہے۔ مکمل کا مستقل $m(x)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.37 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial x}$ لیتے ہوئے مساوات 1.33 کی مدد سے $\frac{dm}{dx}$ حاصل کرتے ہیں جس کا x مکمل لینے سے m حاصل ہو گا۔

مثال 1.14: قطعی تفرقی مساوات
درج ذیل کو حل کریں۔

$$(1.38) \quad (1 + 2xy^3) dx + (2y + 3x^2y^2) dy = 0$$

necessary condition⁵⁵
sufficient condition⁵⁶

حل: پہلے ثابت کرتے ہیں کہ یہ مساوات قطعی ہے۔ یہ مساوات 1.29 کی طرح ہے جہاں

$$M = 1 + 2xy^3$$

$$N = 2y + 3x^2y^2$$

ہیں۔ $\frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\frac{\partial N}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

جو مساوات 1.35 پر پورا اترتے ہیں لہذا دی گئی مساوات قطعی تفرقی مساوات ہے۔ آئیں اب اس کو حل کرتے ہیں۔

مساوات 1.36 کو استعمال کرتے ہیں۔

$$(1.39) \quad u = \int (1 + 2xy^3) dx + k(y) = x + x^2y^3 + k(y)$$

اس کا y جزوی تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.34 کا استعمال کرتے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{dk}{dy} = N = 2y + 3x^2y^2$$

ہوئے $\frac{dk}{dy}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dk}{dy} = 2y$$

اس کا y تکمیل لیتے ہوئے k حاصل کرتے ہیں

$$(1.40) \quad k = \int 2y dy = y^2 + c_1$$

جہاں c_1 تکمیل کا مستقل ہے۔ چونکہ k صرف y پر منحصر ہے لہذا c_1 مستقل x پر منحصر نہیں ہو سکتا۔ یوں مساوات 1.39 اور مساوات 1.40 سے قطعی تفرقی مساوات کا حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.41) \quad u(x, y) = x + x^2y^3 + y^2 + c_1 = 0$$

آخر میں مساوات 1.41 کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.38 حاصل کر کے حاصل حل کی درستگی ثابت کرتے ہیں۔

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (1 + 2xy^3) dx + (3x^2y^2 + 2y) dy$$

مثال 1.15: جبری حل

$N = 2y + 3x^2y^2$ لیتے ہوئے مساوات 1.38 کو حل کریں جہاں $x = 1$ پر $y = 2$ ہے۔

حل: $\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2y + 3x^2y^2$ کا y مکمل

$$(1.42) \quad u = \int (2y + 3x^2y^2) dy + m(x) = y^2 + x^2y^3 + m(x)$$

لے کر اس سے $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 + \frac{dm}{dx}$$

جو M کے برابر ہوگا

$$2xy^3 + \frac{dm}{dx} = M = 1 + 2xy^3$$

جس سے

$$\frac{dm}{dx} = 1, \quad m = x + c_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 1.42 میں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا حل ملتا ہے۔

$$u = y^2 + x^2y^3 + x + c_2 = 0$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$2^2 + (1^2)(2^3) + 1 + c_2 = 0, \quad c = -13$$

ماتا ہے جس سے جبری حل لکھتے ہیں۔

$$y^2 + x^2 y^3 + x - 13 = 0$$

مثال 1.16: غیر قطعی مساوات

مساوات $-y dx + x dy = 0$ میں $M = -y$ اور $N = x$ ہیں لہذا $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$ لیکن $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ ہے۔ یوں دیا گیا مساوات غیر قطعی⁵⁷ ہے۔ یوں قطعی مساوات کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے۔ آئیں قطعی مساوات کی ترکیب استعمال کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 1.36 سے

$$u = \int -y dx + k(y) = -xy + k(y)$$

ماتا ہے جس کا y تفرق $\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \frac{dk}{dy}$ ہے جسے N یعنی x کے برابر کرنے سے $\frac{dk}{dy} = 2x$ ملتا ہے جس کا مکمل $k = 2xy + c$ ہے۔ اب مستقل k صرف y پر منحصر ہو سکتا ہے جبکہ حاصل k اس شرط پر پورا نہیں اترتا لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں قطعی تفرقی مساوات کی ترکیب اس مثال میں دیے تفرقی مساوات کے حل کے لئے ناقابل استعمال ہے۔ آپ N سے شروع کرتے ہوئے حل کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ آپ اس راستے سے بھی حل حاصل نہیں کر پائیں گے۔

تخفیف بذریعہ جزو مکمل

مثال 1.16 میں تفاعل $-y dx + x dy = 0$ غیر قطعی تھا البتہ اس کو $\frac{1}{x^2}$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے جو قطعی مساوات ہے۔ آپ مساوات 1.35 استعمال کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ واقعی قطعی مساوات ہے۔ حاصل قطعی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.43) \quad -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c$$

اس ترکیب کو عمومی بناتے ہوئے ہم کہتے ہیں کہ غیر قطعی مساوات مثلاً

$$(1.44) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

کو ایک مخصوص تفاعل F سے ضرب دینے سے قطعی مساوات

$$(1.45) \quad FP dx + FQ dy = 0$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔ تفاعل F جزو تکمیل⁵⁸ کہلاتا ہے اور یہ عموماً x اور y پر منحصر ہو گا۔ حاصل قطعی مساوات کو حل کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

مثال 1.17: جزو تکمیل
مساوات 1.43 میں جزو تکمیل $\frac{1}{x^2}$ تھا لہذا اس کا حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$FP dx + FQ dy = \frac{-y dx + x dy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c$$

مساوات $-y dx + x dy = 0$ کے مزید جزو تکمیل $\frac{1}{y^2}$ ، $\frac{1}{xy}$ اور $\frac{1}{x^2+y^2}$ ہیں جن سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{-y dx + x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad \frac{x}{y} = c$$

$$\frac{-y dx + x dy}{xy} = -d\left(\ln \frac{x}{y}\right), \quad \ln \frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = x$$

$$\frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1} \frac{x}{y}\right), \quad \tan^{-1} \frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = c$$

جزو مکمل کا حصول

مساوات $M dx + N dy = 0$ کی قطعیت کا شرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ مساوات 1.35 ہے۔ مساوات $FP dx + FQ dy = 0$ کے لئے اس شرط کو درج ذیل لکھا جائے گا

$$(1.46) \quad \frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ)$$

جس کو زنجیری طریقہ تفرق سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں زیر نوشت تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(1.47) \quad F_y P + FP_y = F_x Q + FQ_x$$

یہ مساوات عموماً پیچیدہ ہو گا لہذا ہم اس پر مزید وقت ضائع نہیں کرتے۔ ہم ایسے جزو مکمل تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو صرف x یا صرف y پر منحصر ہو۔ صرف x پر منحصر جزو مکمل کی صورت میں $F = F(x)$ لکھا جائے گا اور $F_y = 0$ ہو گا جبکہ $F_x = F' = \frac{dF}{dx}$ ہو گا۔ یوں مساوات 1.46 درج ذیل صورت اختیار کر لیا

$$(1.48) \quad FP_y = F'Q + FQ_x$$

جسے FQ سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(1.49) \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$$

اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 1.1: اگر مساوات 1.44 سے مساوات 1.49 میں حاصل کردہ R صرف x پر منحصر ہو تب مساوات 1.44 کا جزو مکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.49 کا مکمل لے کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(1.50) \quad F(x) = e^{\int R(x) dx}$$

اسی طرح $F = F(y)$ کی صورت میں مساوات 1.49 کی جگہ درج ذیل ملتا ہے

$$(1.51) \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{P} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]$$

جس سے درج بالا مسئلے کی جوڑی ملتی ہے۔

مسئلہ 1.2: اگر مساوات 1.44 سے مساوات 1.51 میں حاصل کردہ R صرف y پر منحصر ہو تب مساوات 1.44 کا جزو مکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.51 کا مکمل لے کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(1.52) \quad F(y) = e^{\int R(y) dy}$$

مثال 1.18: جزو مکمل

دیے مساوات کا جزو مکمل حاصل کرتے ہوئے اس کا عمومی حل حاصل کریں۔ ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ سے جبری حل حاصل کریں۔

$$(1.53) \quad (e^{x+y} + ye^y) dx + (xe^y - 1) dy = 0$$

حل: پہلا قدم: غیر قطعیت ثابت کرتے ہیں۔ مساوات 1.35 پر درج ذیل پورا نہیں اترتا لہذا غیر قطعیت ثابت ہوتی ہے۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^y + ye^y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

دوسرا قدم: جزو مکمل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 1.49 سے حاصل R کی قیمت x اور y دونوں پر منحصر ہے

$$R = \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right] = \frac{1}{xe^y - 1} (e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y)$$

لہذا مسئلہ 1.1 قابل استعمال نہیں ہے۔ آئیں مسئلہ 1.2 استعمال کر کے دیکھیں۔ R کو مساوات 1.51 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{P} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] = \frac{1}{e^{x+y} + ye^y} (e^y - e^{x+y} - e^{-y} - ye^y) = -1$$

مساوات 1.52 سے جزو مکمل $F(y) = e^{-y}$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.53 کو F سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل قطعی مساوات ملتی ہے۔ اس کو قطعیت کے لئے پرکھ کر دیکھیں۔ آپ کو شرط قطعیت کے دونوں اطراف اکائی حاصل ہو گا۔

$$(e^x + y) dx + (x - e^{-y}) dy = 0$$

مساوات 1.36 استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں۔

$$u = \int (e^x + y) dx + k(y) = e^x + xy + k(y)$$

اس کا y تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.34 کے استعمال سے $\frac{dk}{dy}$ حاصل کرتے ہیں جس کا مکمل k ہو گا۔

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{dk}{dy} = x - e^{-y}, \quad \frac{dk}{dy} = N = -e^{-y}, \quad k = e^{-y} + c_1$$

یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.17 میں دکھایا گیا ہے۔

$$(1.54) \quad u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = c$$

تیسرا قدم: جبری حل حاصل کرتے ہیں۔ ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے مستقل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

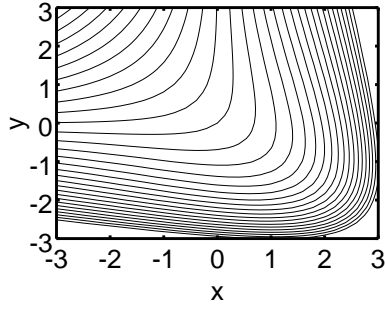
$$e^0 + (0)(-2) + e^{-(-2)} = c, \quad c = e^2$$

یوں جبری حل $e^x + xy + e^{-y} = e^2 = 7.389$ ہے۔

چھوٹا قدم: عمومی حل اور جبری حل کو واپس دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

سوالات

سوال 1.70 تا سوال 1.81 کو قطعیت کے لئے پرکھیں اور حل کریں۔ غیر قطعی صورت میں دیا گیا جزو مکمل استعمال کریں یا اس کو بھی حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہو، وہاں جبری حل حاصل کریں۔



شکل 1.17: مثال 1.18

سوال 1.70:

$$2xy \, dx + x^2 \, dy = 0$$

جواب: $y = \frac{c}{x^2}$

سوال 1.71:

$$x^2 \, dx + y \, dy = 0$$

جواب: $2x^3 + 3y^2 = c$

سوال 1.72:

$$[\sin x + (x + y^3) \cos x] \, dx + 3y^2 \sin x \, dy = 0$$

جواب: $\sin x(x + y^3)$

سوال 1.73:

$$(y + 1) dx + (x + 1) dy = 0$$

جواب: $x + xy + y = c$

سوال 1.74:

$$(e^y + ye^x + y) dx + (xe^y + e^x + x) dy = 0$$

جواب: $xe^y + xy + ye^x$

سوال 1.75:

$$\frac{y^2 + 4x}{x} dx + 2y dy = 0$$

جواب: $u = (2x + y^2)x = c$ ، $F = x$

سوال 1.76:

$$ye^x(2x + 1 + 2y^2) dx + e^x(x + 2y) dy = 0$$

جواب: $ye^{2x}(x + y) = c$ ، $F = e^x$

سوال 1.77:

$$(2y^2 + 2xy + y) dx + (2y + x) dy = 0$$

جواب: $e^{2x}(y^2 + xy) = c$ ، $F = e^{2x}$

سوال 1.78:

$$y dx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0, \quad y(1) = 1$$

1.4. قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل

جواب: $xe^{2y} - \ln y = e^2$ ، $F = \frac{e^{2y}}{y}$

سوال 1.79:

$$3(y+1)dx = 2x dy, \quad y(1) = 3, \quad F = \frac{y+1}{x^4}$$

جواب: $y+1 = 4x^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.80:

$$y dx + [y + \tan(x+y)] dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad F = \cos(x+y)$$

جواب: $y \sin(x+y) = \frac{\pi}{2}$

سوال 1.81:

$$(a+1)y dx + (b+1)x dy = 0, \quad y(1) = 1, \quad F = x^a y^b$$

جواب: $x^{a+1}y^{b+1} = 0$

سوال 1.82: جزو مکمل کو مزید بہتر سمجھنے کی خاطر کسی بھی تفاعل مثلاً $u = e^{2x}(y^2 + xy) = c$ کے مکمل تفرق کو $M dx + N dy = 0$ صورت میں لکھیں یعنی $e^{2x}(2y^2 + 2xy + y) dx + e^{2x}(2y + x) dy = 0$ جو قطعی مساوات ہے۔ تفرقی مساوات کو e^{2x} سے تقسیم کرنے سے غیر قطعی مساوات $(2y^2 + 2xy + y) dx + (2y + x) dy = 0$ ملتا ہے۔ اس غیر قطعی مساوات کو e^{2x} سے ضرب دیتے ہوئے قطعی بنایا جاسکتا ہے لہذا e^{2x} اس غیر قطعی مساوات کا جزو مکمل ہے۔

1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی

ایسے سادہ درجہ اول تفرقی مساوات جنہیں درجہ ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہو خطی⁵⁹ کہلاتے ہیں

$$(1.55) \quad y' + p(x)y = r(x)$$

جبکہ ایسے مساوات جنہیں الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درجہ بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر خطی کہلاتے ہیں۔

خطی مساوات 1.55 کی بنیادی خاصیت یہ ہے کہ اس میں تابع متغیر y اور تابع متغیرہ کا تفرق y' دونوں خطی ہیں جبکہ $p(x)$ اور $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ اگر غیر تابع متغیرہ وقت ہو تب x کی جگہ t لکھا جاتا ہے۔

مساوات 1.55 خطی مساوات کی معیاری صورت ہے جس کے پہلے رکن y' کا جزو ضربی اکائی ہے۔ ایسی مساوات جس میں y' کی بجائے $f(x)y'$ پایا جاتا ہو کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے، اس کی معیاری صورت حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں خطی مساوات $e^x = (x + \sqrt{x})y' + y \sec x$ کو $(x + \sqrt{x})$ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے معیاری صورت $y' + \frac{\sec x}{x + \sqrt{x}}y = \frac{e^x}{x + \sqrt{x}}$ میں لکھا جاسکتا ہے۔

دائیں ہاتھ $r(x)$ قوت⁶⁰ کو ظاہر کر سکتی ہے جبکہ مساوات کا حل $y(x)$ ہٹاؤ⁶¹ ہو سکتا ہے۔ اسی طرح $r(x)$ برقی دباؤ⁶² ہو سکتا ہے جبکہ $y(x)$ برقی دو⁶³ ہو سکتی ہے۔ انجینئری میں $r(x)$ کو عموماً درآمدہ⁶⁴ یا جبری تفاعل⁶⁵ کہتے ہیں جبکہ $y(x)$ کو ماحصل⁶⁶ یا رد عمل⁶⁷ کہتے ہیں۔

linear⁵⁹force⁶⁰displacement⁶¹voltage⁶²current⁶³input⁶⁴forcing function⁶⁵output⁶⁶response⁶⁷

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم مساوات 1.55 کو خطہ $a < x < b$ میں حل کرنا چاہتے ہیں۔ اس خطے کو J کہا جائے گا۔ پہلے اس مساوات کی سادہ صورت حل کرتے ہیں جس میں J پر تمام x کے لئے $r(x)$ صفر کے برابر ہو۔ (اس کو بعض اوقات $r(x) \equiv 0$ لکھا جاتا ہے۔) ایسی صورت میں مساوات 1.55 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$(1.56) \quad y' + p(x)y = 0$$

جس کو متجانس⁶⁸ مساوات کہتے ہیں۔ متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx, \quad \ln|y| = - \int p(x) dx + c_1$$

دونوں اطراف کا قوت نمائی لیتے ہوئے متجانس خطی مساوات 1.56 کا حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.57) \quad y(x) = ce^{-\int p(x) dx}, \quad (c = \mp e^{c_1} \quad \text{جب} \quad y \leq 0)$$

یہاں $c = 0$ بھی چننا جاسکتا ہے جو غیر اہم حل⁶⁹ $y(x) = 0$ دیتا ہے۔

غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب مساوات 1.55 کو اس صورت میں حل کرتے ہیں جب J پر کہیں کہیں یا پورے خطے پر $r(x)$ غیر صفر ہو۔ ایسی صورت میں مساوات 1.55 غیر متجانس⁷⁰ کہلاتا ہے۔ غیر متجانس مساوات کی خوشگوار خاصیت یہ ہے کہ اس کا جزو مکمل $F(x)$ صرف x پر منحصر ہوتا ہے لہذا اس کو مسئلہ 1.1 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ جزو مکمل کو حاصل کرتے ہیں۔ غیر قطعی مساوات 1.55 کو ترتیب دے کر F سے ضرب دیتے ہوئے قطعی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$(py - r) dx + dy = 0, \quad F(py - r) dx + F dy = 0$$

homogeneous⁶⁸
trivial solution⁶⁹
heterogeneous⁷⁰

جس سے مساوات 1.35 کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(py - r)] = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{یعنی} \quad Fp = \frac{\partial F}{\partial x}$$

متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے مکمل لیتے ہوئے F حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dF}{F} = p dx, \quad \ln|F| = h(x) = \int p(x) dx \quad \text{لہذا} \quad F = e^h$$

مساوات 1.55 کو جزو مکمل F سے ضرب دیتے اور $\frac{dh}{dx} = p$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$e^h y' + e^h h' y = e^h r \quad \text{یعنی} \quad (e^h y)' = e^h r$$

جس کا مکمل لیتے ہیں۔

$$e^h y = \int e^h r dx + c$$

دونوں اطراف کو e^h سے تقسیم کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات 1.55 کا حل ملتا ہے۔

$$(1.58) \quad y = e^{-h} \left(\int e^h r dx + c \right), \quad h = \int p(x) dx$$

یوں مساوات 1.55 کا حل درج بالا مکمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو نسبتاً آسان ثابت ہوتا ہے۔ اگر درج بالا مکمل بھی مشکل ثابت ہو تب تفرقی مساوات کا حل اعدادی ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہاں بتلاتا چلوں (سوال 1.83 دیکھیں) کہ h کے حصول میں مکمل کا مستقل کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہذا اسے صفر تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.58 کا مکمل درآئیدہ $r(x)$ پر منحصر ہے جبکہ ابتدائی معلومات مکمل کا مستقل c تعین کرتی ہیں۔ اس مساوات کو درج ذیل لکھتے ہوئے

$$(1.59) \quad y = e^{-h} \int e^h r dx + ce^{-h}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(1.60) \quad \text{ابتدائی معلومات سے پیدا رد عمل} + \text{درآئیدہ سے پیدا رد عمل} = \text{کل ماحصل}$$

مثال 1.19: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' + y \cot x = 2x \operatorname{cosec} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حل: یہاں $p = \cot x$ اور $r = \operatorname{cosec} x$ ہیں۔

$$h(x) = \int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

یوں مساوات 1.58 میں

$$e^h = \sin x, \quad e^{-h} = \operatorname{cosec} x, \quad e^h r = (\sin x)(2x \operatorname{cosec} x) = 2x$$

ہیں لہذا عمومی حل

$$y = \operatorname{cosec} x \left(\int 2x \, dx + c \right) = \operatorname{cosec} x (x^2 + c)$$

ہو گا۔ ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = -\frac{\pi^2}{4}$ ملتا ہے لہذا جبری حل درج ذیل ہے

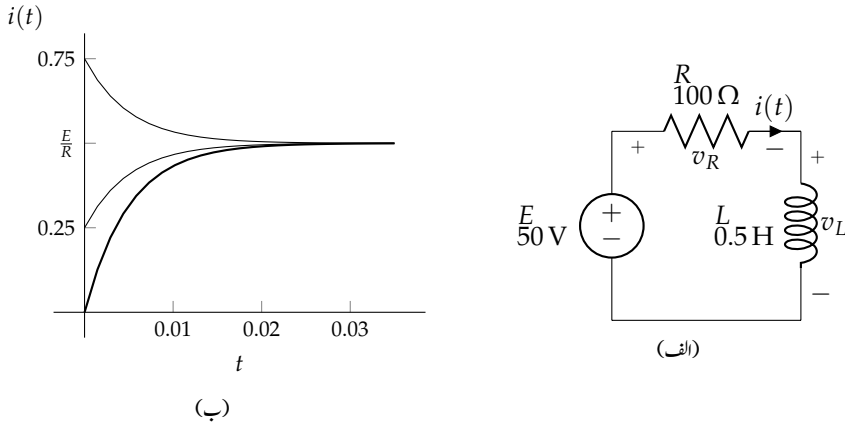
$$y = \operatorname{cosec} x \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right)$$

جس میں $x^2 \operatorname{cosec} x$ درآئیدہ کا پیدا کردہ رد عمل ہے جبکہ $-\frac{\pi^2}{4} \operatorname{cosec} x$ ابتدائی معلومات کا پیدا کردہ رد عمل ہے۔

مثال 1.20: برقی دور

شکل 1.18 میں مزاحمت R ⁷¹ اور امالہ L ⁷² سلسلہ وار جڑے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر برقی دباؤ E ⁷³ برقی دور پر لاگو کیا جاتا ہے جو دور میں برقی دو $i(t)$ ⁷⁴ کو جنم دیتا ہے۔ ابتدائی رو صفر ($i(0)=0$) کے برابر ہے۔

resistance⁷¹
inductor⁷²
electric voltage⁷³
electric current⁷⁴



شکل 1.18: مثال 1.20 کا سلسلہ وار برقی دور۔

طبعی معلومات: رو i مزاحمت پر قانون اوہم⁷⁵ کے تحت دباؤ $v_R = iR$ پیدا کرتی ہے اور امالہ پر دباؤ $v_L = L \frac{di}{dt}$ پیدا کرتی ہے۔ کرخوف قانون دباؤ⁷⁶ کے تحت ان برقی دباؤ کا مجموعہ درآئیدہ دباؤ E کے برابر ہو گا۔

حل: یہاں غیر تابع متغیرہ وقت t ہے جبکہ تابع متغیرہ رو $i(t)$ ہے۔ کرخوف کے قانون کے تحت

$$v_L + v_R = E, \quad Li' + Ri = E, \quad i' + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

لکھا جائے گا جہاں آخری قدم پر L سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے۔ اس کو مساوات 1.58 کی مدد سے حل کرتے ہیں جہاں x کی جگہ t اور y کی جگہ i استعمال ہو گا۔ یہاں $p = \frac{R}{L}$ اور $r = \frac{E}{L}$ ہیں لہذا $h = \frac{R}{L}t$ ہو گا اور عمومی حل

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\int e^{\frac{R}{L}t} \frac{E}{L} dx + c \right)$$

لکھا جائے گا۔ مکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(1.61) \quad i = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} + c \right) = \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}$$

⁷⁵ Ohm's law
⁷⁶ Kirchhoff's voltage law

شکل 1.18- الف میں پرزوں کی قیمتیں دی گئی ہیں جن سے $\frac{E}{R} = \frac{50}{100} = 0.5$ اور $\frac{R}{L} = \frac{100}{0.5} = 200$ ملتا ہے لہذا عمومی حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.62) \quad i = 0.5 + ce^{-200t}$$

مساوات 1.61 میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات میں $ce^{-\frac{R}{L}t}$ جزو $t \rightarrow \infty$ پر صفر کے برابر ہو گا لہذا کافی دیر بعد رو پہلے جزو $\frac{E}{R}$ کے برابر ہو گی جسے رو کی بوقرار حال⁷⁷ قیمت کہتے ہیں۔ یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کافی دیر بعد رو کی قیمت کا دارومدار ابتدائی معلومات پر منحصر نہیں ہے۔ رو کتنی جلدی برقرار حال قیمت اختیار کرتی ہے، اس کا دارومدار $\frac{R}{L}$ کی قیمت پر ہے۔

مساوات 1.61 میں ابتدائی معلومات $i(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $c = -0.5$ ملتا ہے لہذا جبری حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.18- ب میں موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل میں ابتدائی قیمت $i(0) = 0.25$ اور $i(0) = 0.75$ سے حاصل جبری حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

$$(1.63) \quad i(t) = 0.5(1 - e^{-200t})$$

مثال 1.21: جسم میں ہارمونز کی مقدار

جسم میں موجود غدود⁷⁸ یعنی گلی، خون میں مختلف مرکبات (ہارمونز)⁷⁹ خارج کرتے ہوئے مختلف نظام کو قابو کرتے ہیں۔ تصور کریں کہ خون سے ایک مخصوص ہارمون مسلسل ہٹایا جاتا ہے۔ ہٹانے کی شرح اس لمحے موجود ہارمون کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ ساتھ ہی ساتھ تصور کریں کہ روزانہ غدود اس ہارمون کو خون میں ایک مخصوص انداز سے خارج کرتی ہے۔ خون میں موجود ہارمون کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ صبح چھ بجے خون میں ہارمون کی مقدار y_0 لیتے ہوئے جبری حل حاصل کریں۔

حل: پہلا قدم نمونہ کشی ہے۔ چوبیس گھنٹوں میں خارج ہونے کے عمل کو $a + b \sin(\frac{2\pi t}{24})$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ چونکہ خون میں ہارمون خارج ہونے سے خون میں ہارمون کی مقدار بڑھتی ہے لہذا $a \geq b$ ہو گا۔ یوں

steady state⁷⁷
gland⁷⁸
hormones⁷⁹

خارج کردہ ہارمون کی مقدار مثبت ہو گی۔ کسی بھی لمحے خون میں ہارمون کی مقدار کی تبدیلی کی شرح، اس لمحے خون میں ہارمون کے داخل ہونے کی مقدار اور اس کی ہٹائی جانے والی مقدار میں فرق کے برابر ہو گا۔ یوں مسئلے کا تفریق مساوات درج ذیل ہو گا۔

(1.64)

$$\frac{dy(t)}{dt} = a + b \sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right) - ky(t) \quad \text{یعنی} \quad y' - ky = a + b \sin \omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{24}$$

دوسرا قدم: عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $p = k$ ہے لہذا $h = \int k dt = kt$ ہو گا۔ اسی طرح $r = a + b \sin \omega t$ ہے لہذا مساوات 1.58 سے عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو تکمیل بالخصص⁸⁰ حل کیا گیا ہے

$$\begin{aligned} y &= e^{-kt} \int e^{kt} (a + b \sin \omega t) dt + ce^{-kt} \\ &= e^{-kt} e^{kt} \left[\frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] + ce^{-kt} \\ &= \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + ce^{-kt} \end{aligned}$$

عمومی حل کا آخری جزو وقت بڑھنے سے آخر کار صفر ہو جاتا ہے۔ یوں برقرار حل⁸¹ بقایا اجزاء پر مشتمل ہے۔

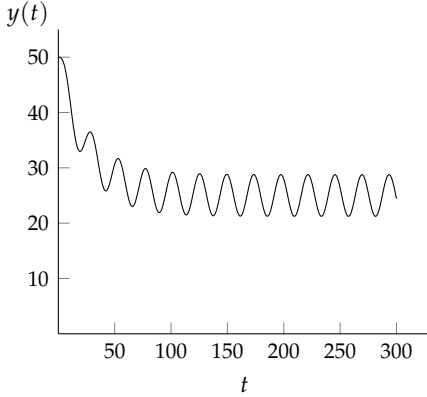
آخر قدم: ابتدائی معلومات سے جبری حل حاصل کرتے ہیں۔ صبح چھ بجے کو لمحہ $t = 0$ تصور کرتے ہوئے ابتدائی معلومات کو $y(0) = y_0$ لکھا جاسکتا ہے۔ ان قیمتوں کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$y_0 = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos 0 + \omega \sin 0) + ce^0, \quad \text{یعنی} \quad c = y_0 - \frac{a}{k} - \frac{bk}{k^2 + \omega^2}$$

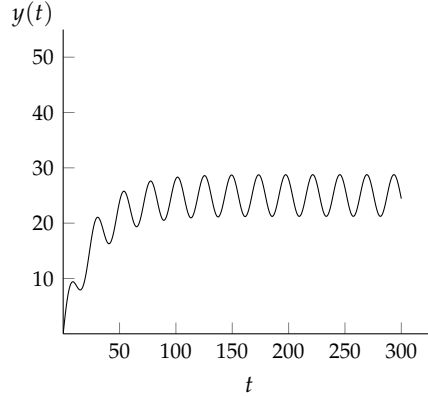
اس طرح جبری حل درج ذیل ہو گا۔ جبری حل کو $a = 1$ ، $b = 1$ ، $k = 0.04$ اور $y_0 = 0$ لیتے ہوئے جسے شکل 1.19 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y_0 = 50$ لیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خون میں ہارمون کی مقدار بہت جلد ایک مخصوص اوسط قیمت پر پہنچ پاتی ہے۔

$$y = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \left(y_0 - \frac{a}{k} - \frac{bk}{k^2 + \omega^2} \right) e^{-kt}$$

integration by parts⁸⁰
steady state response⁸¹



(ب)



(الف)

شکل 1.19: مثال 1.21: خون میں ہارمون کی مقدار بالمتقابل وقت۔

حصول خطی مساوات بذریعہ تخفیف۔ برنولی مساوات

ایسے بہت سارے نظام ہیں جن کے غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کو خطی بنایا جاسکتا ہے۔ ان میں برنولی مساوات⁸²

$$(1.65) \quad y' + p(x)y = g(x)y^a, \quad a \text{ حقیقی عدد ہے}$$

انتہائی اہم⁸³ ہے۔ برنولی مساوات $a = 0$ اور $a = 1$ کی صورت میں خطی ہے۔ اس کے علاوہ یہ غیر خطی ہے۔ آئیں اس کو تبدیل کرتے ہوئے خطی مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}$$

کا تفرق لیتے ہوئے اس میں مساوات 1.65 سے y' پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u' &= (1-a)y^{-a}y' \\ &= (1-a)y^{-a}(gy^a - py) \\ &= (1-a)g - (1-a)py^{1-a} \\ &= (1-a)g - (1-a)pu \end{aligned}$$

⁸²Bernoulli equation

⁸³یعقوب برنولی (1654-1705): سوئزر لینڈ کے برنولی خاندان نے دنیا کو کئی اہم ریاضی داں دیے۔ یعقوب برنولی ان میں سر فہرست ہے۔ انہوں نے علم الامکانیات میں بہت کام کیا۔ قوت نمائی کا مستقل e بھی انہوں نے دریافت کیا۔

یوں خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(1.66) \quad u + (1 - a)u' = (1 - a)g$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 1.22: ورہلسٹ مساوات برائے نمو آبادی درج ذیل برنولی مساوات کو ورہلسٹ⁸⁴ مساوات کہتے ہیں جو غو آبادی⁸⁵ کی تفرقی مساوات ہے۔ اس کو حل کریں۔ (سوال 1.109 کو بھی دیکھیں۔)

$$(1.67) \quad y' = ay - by^2$$

حل: اس کو مساوات 1.65 کی صورت $y' - ay = -by^2$ میں لکھ کر $a = 2$ ملتا ہے۔ یوں ہم $u = y^{1-a} = y^{-1}$ کے تفرق میں مساوات 1.67 سے y' پر کرتے ہیں

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(ay - by^2) = -ay^{-1} + b = -ua + b$$

جس سے خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u' + au = b$$

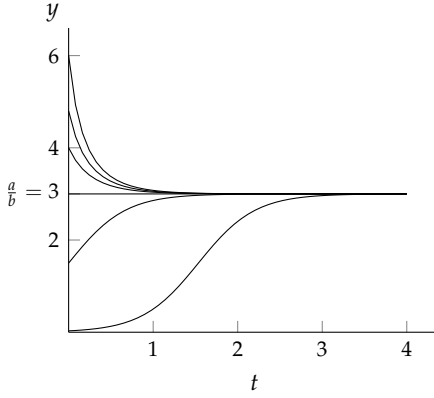
حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.58 سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$u = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

چونکہ $u = y^{-1}$ ہے لہذا اس سے درج ذیل ملتا ہے جس کو شکل 1.20 میں دکھایا گیا ہے۔

$$(1.68) \quad y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}}$$

مساوات 1.67 کو دیکھ کر $y(t) = 0$ حل بھی لکھا جاسکتا ہے۔



شکل 1.20: مثال 1.22: نموآبادی کا خط۔

مثال 1.23: بدلنے کا طریقہ
مساوات 1.58 کو ایک دلچسپ ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے جسے بدلنے کا طریقہ⁸⁶ کہتے ہیں۔ متجانس مساوات $y' + p(x)y = 0$ کا حل $y_1 = ce^{-\int p(x) dx}$ مساوات 1.57 دیتا ہے جس کو $y_1 = ce^{-h}$ لکھتے ہیں۔ تصور کریں کہ غیر متجانس مساوات $y' + p(x)y = e(x)$ کا حل $y_2 = uy_1$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ ہو گا۔ غیر متجانس مساوات میں y_2 اور y_2' پر کرتے ہیں۔

$$u'y_1 + uy_1' + puy_1 = r, \quad u'y_1 + u(y_1' + py_1) = r, \quad u'y_1 = r$$

چونکہ y_1 متجانس مساوات کا حل ہے لہذا آخری قدم پر $y' + py = 0$ پر کرتے ہوئے $u'y_1 = r$ حاصل کیا گیا ہے۔ اس سے u بذریعہ مکمل حاصل کرتے ہوئے y_2 لکھتے ہیں جو مساوات 1.58 ہے۔

$$u = \int \frac{r}{y_1} dx, \quad u = \int re^h dx + c, \quad \text{لہذا} \quad y_2 = uy_1 = e^{-h} \left[\int re^h dx + c \right]$$

نمو آبادی

ورہلٹ مساوات پودوں، جانوروں اور انسانی آبادی کی نمو کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں $b = 0$ پر کرنے سے مالتھس مساوات 1.8 ملتی ہے جو آبادی کی بے روک نمو دیتی ہے۔ ورہلٹ مساوات میں جزو $-by^2$ آبادی بے قابو بڑھنے سے روکتی ہے۔ ورہلٹ مساوات کو $y' = ay(1 - \frac{b}{a}y)$ لکھ کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{b}{a}y < 1$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل بڑھے گی جب تک $\frac{b}{a}y < 1$ ہو، $\frac{b}{a}y > 1$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل گھٹے گی جب تک $\frac{b}{a}y < 1$ ہو گا۔ دونوں صورتوں میں عین $\frac{b}{a}y = 1$ یعنی $y = \frac{a}{b}$ پر آبادی میں تبدیلی رک جائے گی۔ شکل 1.20 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

ورہلٹ نمو آبادی کی مساوات میں غیر تابع متغیر t صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا یہ خود مختار مساوات ہے۔ خود مختار مساوات

$$(1.69) \quad y' = f(y)$$

کے مستقل حل پائے جاتے ہیں جنہیں متوازن حل⁸⁷ یا متوازن نقطے⁸⁸ کہا جاتا ہے۔ خود مختار مساوات میں تفاعل $f(y)$ کے صفر $(f(y)=0)$ پر $y' = 0$ ہو گا جس کا حل $y = c$ ہے جہاں c مکمل کا مستقل ہے۔ تفاعل کے صفر کو مساوات 1.69 کے فاصل نقطے⁸⁹ کہتے ہیں۔ مساوات 1.67 کے فاصل نقطے $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔ یوں اس مساوات کے مستقل حل $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔ متوازن حل کو دو گروہ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں مستحکم⁹⁰ اور غیر مستحکم⁹¹ متوازن حل کہتے ہیں۔ ان کو شکل 1.20 کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے جہاں $y = \frac{a}{b} = 3$ مستحکم حل ہے جبکہ $y = 0$ غیر مستحکم حل ہیں۔

سوالات

سوال 1.83: مساوات 1.58 میں h کے حصول میں مکمل کا مستقل صفر لیا جاسکتا ہے۔ ایسا کیوں ممکن ہے؟

⁸⁷equilibrium solution

⁸⁸equilibrium points

⁸⁹critical points

⁹⁰stable

⁹¹unstable

سوال 1.84: ثابت کریں:

$$e^{\ln x} = x, \quad e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, \quad e^{-\ln \sec x} = \cos x$$

سوال 1.85 تا سوال 1.95 کے عمومی حل تلاش کریں۔ ابتدائی معلومات کی صورت میں جبری حل حاصل کریں اور اس کا خط کھینچیں۔

سوال 1.85:

$$y' - y = 2$$

جواب: $y = ce^x - 2$

سوال 1.86:

$$y' - 4y = 2x$$

جواب: $y = ce^{4x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}$

سوال 1.87:

$$y' + 5y = e^{5x}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $y = \frac{e^{5x}}{10} + \frac{19}{10}e^{-5x}$

سوال 1.88:

$$y' + 6y = 4 \sin 4x, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 6$$

جواب: $y = \frac{9}{13} \sin 4x - \frac{6}{13} \cos 4x + \frac{69}{13}e^{\frac{3\pi}{4} - 6x}$

سوال 1.89:

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 3$$

جواب: $y = 1 + 2e^{-x^2}$

سوال 1.90:

$$xy' = 2y + x^3e^x$$

جواب: $y = x^2e^x + cx^2$

سوال 1.91:

$$y' + y \tan x = \sin x$$

جواب: $y = c \cos x - \cos x \ln \cos x$

سوال 1.92:

$$y' + y \cos x = e^{-\sin x}$$

جواب: $y = xe^{-\sin x} + ce^{-\sin x}$

سوال 1.93:

$$\cos xy' + (4y - 2) \sec x = 0$$

جواب: $y = \frac{1}{2} + ce^{-4 \tan x}$

سوال 1.94:

$$y' = (y - 4) \tan x, \quad y(0) = 3$$

جواب: $y = 4 - \sec x$

سوال 1.95:

$$xy' + 6y = 5x^3, \quad y(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{5}{9}x^3 + \frac{4}{9x^6}$

سوال 1.96 تا سوال 1.100 میں خطی سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات زیر بحث لائیں جائیں گے۔ انہیں خصوصیات کی بنا انہیں غیر خطی سادہ تفرقی مساوات پر فوقیت حاصل ہے جو یہ خصوصیات نہیں رکھتے۔ نمونہ کشی کرتے ہوئے انہیں وجوہات کی وجہ سے خطی مساوات حاصل کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ ان سوالات میں آپ کو متجانس اور غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

سوال 1.96: متجانس مساوات 1.56 کے حل y_1 اور y_2 کا عمومی مجموعہ $ay_1 + by_2$ بھی اس کا حل ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ ثابت کریں کہ غیر متجانس مساوات 1.55 یہ خصوصیات نہیں رکھتا۔

سوال 1.97: مساوات 1.56 کا غیر اہم حل $y \equiv 0$ [یعنی x کی ہر قیمت کے لئے $y(x) = 0$ ہے] پایا جاتا ہے جبکہ غیر متجانس مساوات 1.55 [جس میں $r(x) \neq 0$ ہو] کا ایسا حل نہیں پایا جاتا۔

سوال 1.98: مساوات 1.56 کے حل y_1 اور مساوات 1.55 کے حل y_2 کا مجموعہ $y_1 + y_2$ بھی مساوات 1.55 کا حل ہے۔

سوال 1.99: مساوات 1.55 کے دو عدد حل y_1 اور y_2 کا فرق $y_1 - y_2$ مساوات 1.56 کا حل ہے۔

سوال 1.100: اگر $y' + p(x)y = r_a(x)$ کا حل y_1 اور $y' + p(x)y = r_b(x)$ کا حل y_2 ہو جہاں دونوں مساوات کے $p(x)$ یکساں ہیں تو آپ $y_1 + y_2$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

اس حصے میں سیکھے گئے ترکیب یا علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہوئے سوال 1.101 تا سوال 1.106 کے عمومی حل حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہوں وہاں جبری حل بھی حاصل کریں۔

سوال 1.101:

$$y' + y = y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

جواب: $\frac{y-1}{y} = e^x$

سوال 1.102:

$$y' + xy = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $(y - 1)(y + 1) = 3^{-x^2}$

سوال 1.103:

$$y' + y = \frac{x}{y}$$

جواب: $2y^2 + 1 - 2x = ce^{-2x}$

سوال 1.104:

$$y' = 5y - 15y^2$$

جواب: $\frac{3y-1}{y} = ce^{-5x}$

سوال 1.105:

$$y' = \frac{\cot y}{x+1}, \quad y(0) = 1$$

جواب: $(x+1) \cos y = 2$

سوال 1.106:

$$2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x, \quad (y^2 = z \text{ پر کریں})$$

جواب: $\frac{2e^x y^2 - x e^{2x}}{2x} = c$

سوال 1.107: پانی کو چولہے پر برتن میں گرم کیا جاتا ہے۔ برتن کو آگ سے اتارتے وقت پانی کا درجہ حرارت 99°C ہے جبکہ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 90°C ہے۔ فضا کا درجہ حرارت 32°C ہے۔ پانی کتنی دیر میں تقریباً فضا کے درجہ حرارت (مثلاً 33°C) پر پہنچے گا؟

جواب: تقریباً چار گھنٹے اور پچاس منٹ۔

سوال 1.108: مریض کو قطرہ قطرہ نمکیات کا محلول بذریعہ شریان دیا جاتا ہے جس میں دوائی حل کی گئی ہے۔ لمحہ $t = 0$ سے مریض کو مسلسل a گرام فی منٹ دوائی دی جاتی ہے جبکہ جسم کا نظام دوائی کو مسلسل خون سے نکال کر خارج کرتا ہے۔ خون سے دوائی ہٹانے کی شرح خون میں کل دوائی کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کریں اور مساوات کو حل کریں۔

جوابات: $y' = a - ky$ اور لمحہ $t = 0$ پر خون میں دوائی کی مقدار صفر ہے، $y = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt})$

سوال 1.109: وبائی بیماری کا پھیلاؤ
وبائی بیماری ایک شخص سے دوسرے شخص کو منتقل ہوتے ہوئے بڑھتی ہے۔ تصور کریں کہ ایک مخصوص وبا کی پھیلاؤ سانس کے ذریعہ ہوتی ہے جو دو اشخاص کے قریب ہونے سے ممکن ہے۔ یوں وبا میں اضافے کی شرح مریض اور صحت مند شخص کے قریب آنے کے راست تناسب ہے۔ تصور کریں شہر میں کل آبادی a ہے جبکہ لمحہ t پر بیماروں کی تعداد $y(t)$ ہے۔ تصور کریں کہ تمام لاگ مکمل آزادی کے ساتھ آپس میں ملتے جلتے ہیں۔ اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے مسئلے کا تفرقی مساوات حاصل کریں۔ مساوات کو حل کریں۔

حل: کسی بھی لمحے y لوگ بیمار اور بقایا یعنی $a - y$ لوگ صحت مند ہیں۔ اگر dt دورانیے میں ایک بیمار شخص کسی ایک شخص سے ملے تو $\frac{a-y}{a}$ امکان ہے کہ وہ صحت مند شخص سے ملا ہو گا۔ اسی دورانیے میں بقایا بیمار بھی کسی سے ملے ہوں گے لہذا بیمار اور صحت مند کے ملنے کا امکان $y \left(\frac{a-y}{a} \right)$ ہو گا۔ اس طرح بیماری میں اضافے کی شرح کو $y' = ky \left(\frac{a-y}{a} \right)$ لکھا جاسکتا ہے جو مساوات 1.67 ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک شخص بیمار تصور کرتے ہوئے اس کا حل $\frac{y}{y-a} = \frac{e^t}{1-a}$ ملتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow a$ ہو گا یعنی آخر کار وبا پورے شہر میں پھیل جائے گی۔

سوال 1.110: ایک جھیل میں $200 \times 10^6 \text{ m}^3$ پانی پایا جاتا ہے جس میں ماہی گیروں کی غفلت سے گندگی کی مقدار 5% تک بڑھ جاتی ہے جس سے ماہی گیری متاثر ہو رہی ہے۔ جھیل سے سالانہ $20 \times 10^6 \text{ m}^3$ پانی

خارج ہوتا ہے اور اتنا ہی تازہ پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ تازہ پانی میں 0.6% گندگی پائی جاتی ہے۔ جھیل کو صاف کرنے کی غرض سے اس میں ماہی گیری ممنوع کر دی جاتی ہے۔ جھیل میں گندگی کی مقدار کتنی مدت میں 2% رہ جائے گی؟

جواب: جھیل میں کل گندگی کو $y(t)$ لکھتے ہوئے $y' = 120000 - 0.1y$ ملتا ہے جس کا عمومی حل $y = (1.2 + 8.8e^{-0.1t}) \times 10^6$ ہے۔ جھیل کو درکار حد تک صفائی کے لئے 11.45 سال درکار ہوں گے۔

سوال 1.111 سے سوال 1.114 میں ماہی گیری کو مثال بنایا گیا ہے۔ یہی حقائق ملک میں پالتو مال مویشی پر بھی لاگو ہوتا ہے۔

سوال 1.111: ایسا جھیل جس میں ماہی گیری منع ہو میں مچھلی کی تعداد مساوات دیتی ہے۔ ماہی گیری کی اجازت کے بعد مساوات کیا ہو گی؟ تصور کریں کہ مچھلی پکڑنے کی شرح مچھلی کی لحاظی تعداد کے راست تناسب ہے۔

حل: مچھلی پکڑنے کی شرح کو py لکھتے ہوئے نئی مساوات $y' = ay - by^2 - py$ ہو گی۔

سوال 1.112: سوال 1.111 میں مچھلی پکڑنے کی شرح اس قدر ہے کہ مچھلی کی تعداد تبدیل نہیں ہوتی۔ مچھلی کی تعداد کیا ہو گی؟

حل: مچھلی کی تعداد تبدیل نہ ہونے سے مراد $y' = 0$ ہے لہذا $y' = ay - by^2 - py = 0$ لکھتے ہوئے $y = 0$ اور $y = \frac{a-p}{b}$ ملتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جھیل سے مسلسل $p \left(\frac{a-p}{b}\right)$ پیداوار لی جاسکتی ہے۔

سوال 1.113: سوال 1.111 میں $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیتے ہوئے تفریقی مساوات کو حل کریں۔ اس شرح سے پیداوار لیتے ہوئے ماہی گیری کی مستقبل کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

جواب: $y = \frac{0.9}{1 - e^{-0.9t - 0.198}}$ ؛ اس شرح سے $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow 0$ ہو گا اور ماہی گیری ممکن نہ رہ پائے گی۔

سوال 1.114: ماہی گیری کے شعبے کو برقرار رکھنے کی خاطر سوال 1.111 میں دو سال ماہی گیری کے بعد دو سال کا وقفہ دیا جاتا ہے جس میں ماہی گیری ممنوع ہوتی ہے اور جس دوران جھیل میں مچھلی کی آبادی دوبارہ بڑھتی ہے۔ اس

مسئلے کو آٹھ سال کے لئے حل کرتے ہوئے حل کا خط کھینچیں۔ $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیں۔

سوال 1.115: جنگل میں بھیڑیا کی آبادی میں شرح موت لمبائی آبادی کے راست تناسب ہے جبکہ شرح پیدائش بھیڑیوں کی جوڑی کی اتفاقی ملاپ کے راست تناسب ہے۔ اس مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ غیر تغیر آبادی دریافت کریں۔

حل: بھیڑیا کی کل آبادی y میں آدھے نز اور آدھے مادہ ہوں گے۔ دورانیہ dt میں ایک جوڑی کے ملاپ کا امکان $\frac{y}{2}$ کے راست تناسب ہے۔ یوں $\frac{y}{2}$ جوڑیوں کے ملاپ کا امکان $\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right)$ ہو گا۔ یوں شرح تبدیلی $y' = ay^2 - by$ لکھی جائے گی جہاں $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔ غیر تغیر آبادی سے مراد $y' = 0$ ہے جس سے $y = 0$ اور $y = \frac{b}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y > \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا جس کی بنا آبادی مسلسل بڑھے گی۔ اس کے برعکس $y < \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا اور آبادی مسلسل گھٹے گی۔

سوال 1.116: شہروں کے بند مکانوں میں باہر فضا کی نسبت زیادہ آلودگی پائی جاتی ہے۔ گھر کے اندر جانور یا پودوں سے یہ مسئلہ مزید سنگین صورت اختیار کر لیتا ہے۔ قابل رہائش ہونے کے لئے لازم ہے کہ مکان میں ہوا کا بہاؤ پایا جاتا ہو۔ ایک عمارت کا حجم 1500 m^3 ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر تمام کھڑکیاں کھول دی جاتی ہیں جس کے بعد $200 \text{ m}^3/\text{h}$ تازہ ہوا مسلسل عمارت میں ایک رخ سے داخل ہوتی ہے اور اتنی ہی ہوا دوسری جانب خارج ہوتی ہے۔ عمارت میں پتکھے ہوا کو مسلسل حرکت میں رکھتے ہیں۔ کتنی دیر بعد 90% ہوا تازہ ہو گی؟

جواب: 17 گھنٹے اور 16 منٹ۔

1.6 عمودی خطوط کی نسلیں

ایک نسل کے خطوط کے عمودی مقطاع خطوط معلوم کرنا طبیعیات کے اہم مسائل میں سے ایک ہے۔ حاصل خطوط کو دیے گئے خطوط کے عمودی مقطاع خطوط⁹² کہتے ہیں اور اسی طرح دیے گئے خطوط کو حاصل کردہ خطوط کے عمودی مقطاع خطوط کہتے ہیں۔

زاویہ تقاطع⁹³ سے مراد نقطہ تقاطع پر دو خطوط کے مماس کے مابین زاویہ ہے۔

⁹²orthogonal trajectories
⁹³angle of intersection

عمودی خطوط کو عموماً تفرقی مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر $G(x, y, c) = 0$ ایک ہی نسل کے خطوط کو ظاہر کرتی ہو تب مستقل c کی ہر انفرادی قیمت نسل کے ایک منفرد خط کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ اس مساوات میں ایک عدد مستقل (c) پایا جاتا ہے لہذا ان خطوط کو ایک عدد متعین متغیر⁹⁴ کے خطوط کی نسل کہا جاتا ہے۔

آئیں درج ذیل خطوط کو مثال بناتے ہوئے اس ترکیب کو سیکھیں۔

$$(1.70) \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = c$$

مماس کی ڈھلوان y' کو تفرق کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.71) \quad \frac{2x}{4} + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{4y}$$

تفرقی مساوات میں c نہیں پایا جاسکتا۔ آپس میں عمودی خطوط کے ڈھلوان کا حاصل ضرب منفی اکائی (-1) کے برابر ہو گا۔ یوں درکار خطوط کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$(1.72) \quad y' = \frac{4y}{x}$$

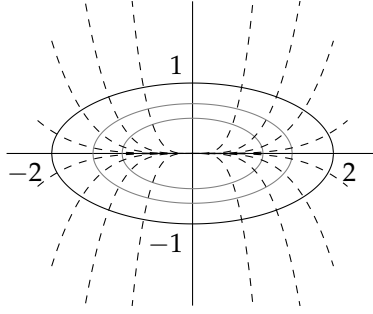
علیحدگی متغیرات کرتے ہوئے مکمل سے عمودی خطوط حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.73) \quad \frac{dy}{y} = 4 \frac{dx}{x}, \quad y = c_1 x^4$$

اس مساوات کے مستقل کو c_1 لکھا گیا ہے جس کا ہر انفرادی قیمت نسل کی منفرد خط دیتا ہے۔ شکل 1.21 میں $c = 1$ لیتے ہوئے مساوات 1.70 کو گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیروں سے مختلف c سے حاصل نسل کے دیگر خطوط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 1.73 کو شکل میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ مستقل c_1 کے مثبت اور منفی قیمتیں لے کر ان خطوط کو کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ٹھوس خطوط کی نسل اور نقطہ دار خطوط کی نسل ایک دونوں کو عمودی قطع کرتے ہیں۔

سوالات

سوال 1.117 تا سوال 1.122 کے عمودی تقاطع خطوط دریافت کریں۔



شکل 1.21: عمودی خطوط کی نسلیں۔

سوال 1.117:

$$y = 2x + c$$

جواب: $y = -\frac{x}{2} + c_1$

سوال 1.118:

$$3y = -2x + c$$

جواب: $y = \frac{3x}{2} + c_1$

سوال 1.119:

$$y^2 = 3x + c$$

جواب: $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x}$

سوال 1.120:

$$y = x^2 + c$$

جواب: $y = \ln \frac{c_1}{\sqrt{|x|}}$

سوال 1.121:

$$G(x, y, c) = e^x \cos y = c$$

جواب: $\sin y = c_1 e^{-x}$

سوال 1.122:

$$2y = \frac{3}{x} + c$$

جواب: $y = \frac{2x^3}{9} + c_1$

سوال 1.123 تا سوال 1.125 عملی استعمال کے چند سوالات ہیں۔

سوال 1.123: ہم قوتہ خطوط اور ثقلی قوت

ثقلی قوت کی سمت زمین کی محور کو ہے۔ کارتیسی محدود پر اس قوت کی سمت کو $y = cx$ لکھا جاسکتا ہے۔ ان کی عمودی خطوط حاصل کریں جو ہم قوتہ خطوط⁹⁵ کہلاتے ہیں۔

جواب: ہم جانتے ہیں کہ y' کی مساوات c سے پاک ہونا لازمی ہے لہذا $y' = c$ میں دی گئی مساوات سے $c = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $y' = \frac{y}{x}$ حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح عمودی خطوط کی ڈھلوان $y' = -\frac{x}{y}$ ہوگی جس کا مکمل $x^2 + y^2 = c_1$ دیتا ہے۔

سوال 1.124: ہم محوری تار

حساس برقی اشارات کی ترسیل عموماً ہم محوری تار⁹⁶ کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ موصل نکلی کے محور پر موصل تار رکھنے سے ہم محوری تار حاصل ہوتی ہے۔ ہم محوری تار کو کارتیسی z محور پر رکھتے ہوئے دونوں موصل تاروں کے درمیانی خطے میں ہم قوتہ خطوط کی مساوات $u(x, y) = x^2 + y^2 = c$ حاصل ہوتی ہے جو z محور پر پڑی نکلی سطحوں کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم قوتہ خطوط کے عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں جو برقی میدان⁹⁷ کو ظاہر کرتی ہیں۔

equipotential lines⁹⁵
coaxial cable⁹⁶
electric field⁹⁷

$$y = c_1 x: \text{جواب}$$

سوال 1.125: ہم حرارت خطوط

درجہ حرارت میں فرق، حرارتی توانائی کی منتقلی کا سبب ہے لہذا حرارتی توانائی کی منتقلی ہم حرارت خطوط⁹⁸ کے عمودی ہو گی۔ کسی خطے میں ہم حرارتی خطوط کو $2x^2 + 5y^2 = c$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ان کی عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں۔

$$y^2 = c_1 x^5: \text{جواب}$$

1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتاہیت

کسی بھی متغیرہ کی حتمی قیمت صفر یا مثبت $|k| \geq 0$ ہوتی ہے لہذا درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا کوئی حل نہیں پایا جاتا۔ اس تفرقی مساوات کا واحد حل $y = 0$ ہے جو ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اترتا۔

$$2|y'| + 3|y| = 0, \quad y(0) = 2$$

اس کے برعکس درج ذیل مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل یعنی $y = x^3 + 2$ پایا جاتا ہے۔

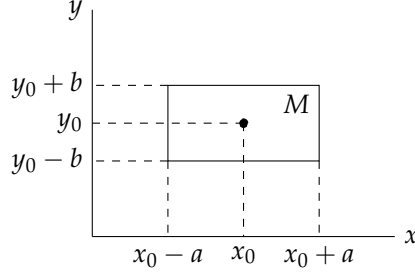
$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 2$$

درج ذیل تفرقی مساوات کے لامتناہی حل $y = -1 + cx$ پائے چونکہ $x = 0$ پر c کی کسی بھی قیمت کے لئے $y = -1$ ہی ہے۔

$$xy' = y + 1, \quad y(0) = -1$$

یوں ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$(1.74) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$



شکل 1.22: وجودیت اور یکتائی کے مسئلوں کا مستطیل۔

کے حل کے بارے میں درج ذیل دو اہم سوالات اٹھتے ہیں۔

وجودیت حل

کن صورتوں میں مساوات 1.74 طرز کے تفرقی مساوات کا ایک (یا ایک سے زیادہ) حل ممکن ہے۔

یکتائی حل

کن صورتوں میں مساوات 1.74 طرز کے تفرقی مساوات کا زیادہ سے زیادہ ایک حل ممکن ہے۔ (یوں ایک سے زیادہ حل رد کئے جاتے ہیں۔)

قبل از حل یہ جاننا کہ آیا ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا حل پایا جاتا ہے اور آیا کہ اس کا حل یکتا ہے انتہائی اہم معلومات ہیں جنہیں درج ذیل مسئلوں سے جاننا ممکن ہے۔

مسئلہ 1.3: مسئلہ وجودیت
مستطیل خطے

$$(1.75) \quad M : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$$

شکل 1.22 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ اس خطے میں ابتدائی قیمت سادہ تفرقی مساوات

$$(1.76) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

کا دایاں ہاتھ $f(x, y)$ استمراری تفاعل⁹⁹ ہے جو خطے کے تمام نقطوں (x, y) پر بے جوڑ ہے۔ مزید اس خطے میں تفاعل کی قیمت محدود¹⁰⁰ ہے یعنی

$$(1.77) \quad |f(x, y)| \leq K \quad \text{پر } (x, y) \text{ تمام نقطوں کے مستطیل کے تمام نقطوں}$$

جہاں K محدود قیمت کا مستقل ہے۔ ایسی صورت میں ابتدائی قیمت مساوات 1.76 کا کم از کم ایک حل پایا جاتا ہے۔ یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔ α کی قیمت a اور $\frac{b}{K}$ کی قیمتوں میں سے کم قیمت کے برابر ہے۔

تفاعل $f(x, y) = 2x + y^2$ خطہ $|x| < 1$ ، $|y| < 1$ میں محدود تفاعل ہے جس کی زیادہ سے زیادہ حتمی قیمت $K = 3$ ہے۔ اس کے برعکس تفاعل $\tan x$ خطہ $|x| < \frac{\pi}{5}$ میں غیر محدود ہے چونکہ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ اسی خطے میں پایا جاتا ہے جہاں $\tan \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$ ہے۔

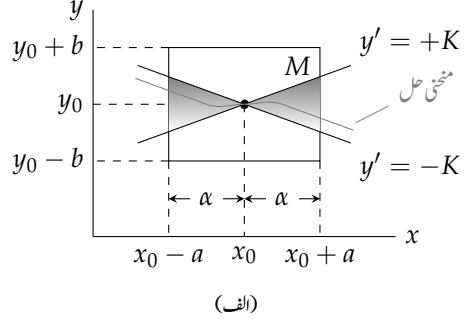
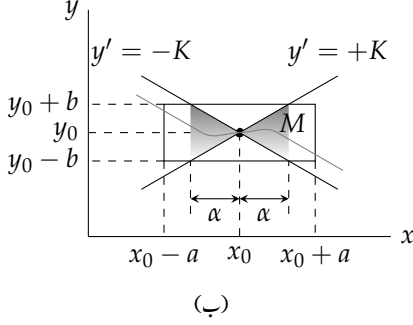
مسئلہ 1.4: مسئلہ یکسانی شکل 1.22 کے مستطیل میں تمام نقطوں (x, y) پر $f(x, y)$ اور $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ استمراری اور محدود تفاعل ہیں یعنی

$$(1.78) \quad |f(x, y)| < K_a, \quad \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| < K_b$$

ایسی صورت میں مساوات 1.76 کا زیادہ سے زیادہ ایک عدد حل پایا جاتا ہے۔ یوں مسئلہ 1.3 کے تحت تفرقی مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل پایا جاتا ہے اور یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔

درج بالا دو مسئلوں کے ثبوت اس کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہیں۔ البتہ انہیں شکل 1.23 کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے۔ مساوات 1.77 کے تحت $f(x, y)$ یعنی y' کی قیمت کم سے کم $-K$ اور زیادہ سے زیادہ $+K$ ممکن ہے۔ شکل میں $y' = \pm K$ کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔ یوں (x_0, y_0) سے گزرتا خط کسی صورت $y' = \pm K$ سے باہر نہیں نکل سکتے۔ شکل میں نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہوا مساوات 1.76 کا حل ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا

⁹⁹ continuous function
¹⁰⁰ bounded



شکل 1.23: مساوات 1.77 میں دی گئی شرط اور α -

ہے۔ چونکہ اس کا ڈھلوان $\mp K$ سے تجاوز نہیں کر سکتا لہذا تفرقی مساوات کا حل ہر صورت $y' = \mp K$ خطوط کے درمیان خطے میں پایا جائے گا جسے سائے دار¹⁰¹ دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.23-الف میں منحنی حل کو دیکھیے۔ سائے دار خطے میں رہتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ حل $|x - x_0| < \alpha$ پر پایا جائے گا جہاں $\alpha = a$ کے برابر ہے۔ شکل-ب میں منحنی حل مستطیل M سے باہر نکل جاتا ہے۔ چونکہ مستطیل کے باہر $f(x, y)$ اور $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ کے بارے میں کچھ نہیں کہا جاسکتا ہے لہذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $|x - x_0| < \alpha$ پر حل پایا جاتا ہے جہاں $\alpha = \frac{b}{K}$ کے برابر ہے۔