

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور نکلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارجون اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781 . . . . .	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
787 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
796 . . . . .	11.3	دوہرہ تکمیل
810 . . . . .	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820 . . . . .	11.5	سطحیں
825 . . . . .	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837 . . . . .	11.7	سطحی تکمیل
845 . . . . .	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850 . . . . .	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861 . . . . .	11.10	مسئلہ سٹوکس
866 . . . . .	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869 . . . . .	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883 . . . . .	12	فوریئر تسلسل
884 . . . . .	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889 . . . . .	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902 . . . . .	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907 . . . . .	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916 . . . . .	12.5	نصف حلقہ الساع
923 . . . . .	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931 . . . . .	12.7	جبری ارتعاش
936 . . . . .	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940 . . . . .	12.9	فوریئر تکمیل
953 . . . . .	13	جزوی تفرقی مساوات
953 . . . . .	13.1	بنیادی تصورات
958 . . . . .	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960 . . . . .	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973 . . . . .	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979 . . . . .	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987 . . . . .	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993 . . . . .	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996 . . . . .	13.8 مستطیل جھلی
1006 . . . . .	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010 . . . . .	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018 . . . . .	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024 . . . . .	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030 . . . . .	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037 . . . . .	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038 . . . . .	14.1 مخلوط اعداد
1047 . . . . .	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054 . . . . .	14.3 مخلوط سطح میں منحنيات اور خطے
1059 . . . . .	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067 . . . . .	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078 . . . . .	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084 . . . . .	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089 . . . . .	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095 . . . . .	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103 . . . . .	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104 . . . . .	15.1 نقشہ کشی
1116 . . . . .	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125 . . . . .	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129 . . . . .	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138 . . . . .	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149 . . . . .	15.6 ریمان سطحیں
1157 . . . . .	16 مخلوط مکملات
1157 . . . . .	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168 . . . . .	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172 . . . . .	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184 . . . . .	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189 . . . . .	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194 . . . . .	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201 . . . . .	17 ترتیب اور تسلسل
1201 . . . . .	17.1 ترتیب
1208 . . . . .	17.2 تسلسل
1213 . . . . .	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220 . . . . .	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمینٹز آزمائش برائے حقیقی تسلسل	17.4
1225 . . . . .	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں	17.5
1236 . . . . .	تسلسل پر اعمال	17.6
1243 . . . . .	18 حلقہ تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل	
1243 . . . . .	18.1 حلقہ تسلسل	
1256 . . . . .	18.2 حلقہ تسلسل کی روپ میں تفاعل	
1263 . . . . .	18.3 ٹیلر تسلسل	
1269 . . . . .	18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل	
1274 . . . . .	18.5 حلقہ تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب	
1281 . . . . .	18.6 یکساں استرار	
1293 . . . . .	18.7 لوگوں تسلسل	
1303 . . . . .	18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت	
1315 . . . . .	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ	
1315 . . . . .	19.1 بقیہ	
1322 . . . . .	19.2 مسئلہ بقیہ	
1327 . . . . .	19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ	
1335 . . . . .	19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام	
1343 . . . . .	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی تودہ	
1344 . . . . .	20.1 ساکن برقی سکون	
1350 . . . . .	20.2 دوبعدی بہا و سیال	
1359 . . . . .	20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص	
1364 . . . . .	20.4 پوسوں کلیہ مکمل	
1371 . . . . .	21 اعدادی تجزیہ	
1372 . . . . .	21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر	
1374 . . . . .	21.2 دہرانے سے مساوات کا حل	
1386 . . . . .	21.3 متناہی فرق	
1392 . . . . .	21.4 باہمی تحریف	
1401 . . . . .	21.5 لچکدار منحنیات	
1408 . . . . .	21.6 اعدادی مکمل اور تفرق	
1420 . . . . .	21.7 متقارب اتساع	
1433 . . . . .	22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب	
1433 . . . . .	22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقاط، معکوس قالب	
1443 . . . . .	22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ	



1451	22.3	خطی مساوات کا نظام: بدخونی
1455	22.4	ترکیب کمتر مربع
1461	22.5	قالب کے امتیازی اقدار کی شمول
1470	22.6	امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ
1475	23	اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات
1475	23.1	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1486	23.2	دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1493	23.3	اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1496	23.3.1	مسئلہ ڈرشلے
1499	23.3.2	بدلتی رخ خفی ترکیب
1506	23.4	مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ - غیر منظم سرحد
1513	23.5	اعدادی تراکیب برائے قطع مکانی مساوات
1522	23.6	اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات
1527	24	احتمال اور شماریات
1527	24.1	حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد
1529	24.2	نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم
1539	24.3	عمومی اوسط اور عمومی تغیریت
1544	24.4	بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات
1551	24.5	احتمال
1560	24.6	مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات
1566	24.7	بلا منصوبہ متغیرات - غیر مسلسل اور استمراری تقسیم
1574	24.8	تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت
1582	24.9	ثنائی، پوکس، اور بیش ہندی تقسیم
1590	24.10	عمومی تقسیم
1599	24.11	ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں
1612	24.12	بلا منصوبہ نمونہ بندی - بلا منصوبہ اعداد
1615	24.13	مقدار معلوم کا اندازہ لگانا
1619	24.14	وقد اعتماد
1633	24.15	قیاس کی پرکھ - فیصلے
1649	24.16	ضبط معیار
1657	24.17	قبولیت نمونہ
1664	24.18	عمدگی موافقت
1670	24.19	غیر مقدار معلوم پرکھ
1674	24.20	پیکشوں کی جوڑیاں - سیدھے خطوط کو موافق بنانا
1683	ا	اضافی ثبوت
1687	ب	مفید معلومات

1687 . . . . . 1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

1697 ج جدول

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 24.19 غیر مقدار معلوم پرکھ

حصہ 24.15 کے پرکھ عمومی آبادی کے لئے تھے۔ کئی بار آبادی کی تقسیم غیر عمومی یا نامعلوم تقسیم رکھتی ہے۔ ایسی صورت میں ہم غیر مقدار معلوم پرکھ<sup>192</sup> یا تقسیم پاک پرکھ<sup>193</sup> استعمال کر سکتے ہیں جس کی بنیاد شاریات رجحان<sup>194</sup> ہے لہذا اس کو کسی بھی استمراری تقسیم کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ البتہ عمومی تقسیم کے لئے حصہ 24.15 کے پرکھ بہتر نتائج دیتے ہیں۔ تقسیم پاک پرکھ کو سمجھنے کی خاطر ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 24.31: پرکھ برائے علامت وسطانیہ

مساوات  $F(x) = 0.5$  کے حل  $x = \bar{\mu}$  کو وسطانیہ کہتے ہیں، جہاں  $F$  تفاعل تقسیم ہے۔ مثال 24.26 کا نمونی فرق، یعنی،

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس  $\bar{\mu} = 0$  کو پرکھتے ہیں جو کہتا ہے کہ کام کرنے کے دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی تقریباً ایک جیسی ہے۔

حل: ہم متبادل  $\bar{\mu} > 0$  اور معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہوئے۔ اگر قیاس درست ہو تب مثبت فرق کا احتمال  $p$  اور منفی فرق کا احتمال ایک جیسے ہوں گے۔ یوں  $p = 0.5$  ہو گا اور بلا منصوبہ متغیر

$$X = n \text{ قیمتوں میں مثبت قیمتوں کا مجموعہ}$$

کا تقسیم ثنائی ہو گا جس کا  $p = 0.5$  ہو گا۔ ہمارے نمونے میں 8 قیمتیں ہیں۔ ہم 0 قیمتوں کو خارج کرتے ہیں چونکہ ان کا فیصلہ پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ تب 6 قیمتیں رہ جاتی ہیں۔ یہ تمام قیمتیں مثبت ہیں۔ چونکہ

$$P(X = 6) = \binom{6}{6} (0.5)^6 (0.5)^0 = 0.0156 = 1.56\% < \alpha$$

ہے لہذا ہم قیاس نامنظور کرتے ہیں۔

اگر ان 6 قیمتوں میں صرف 1 قیمت منفی ہوتی تب

$$P(X \geq 5) = \binom{6}{5} (0.5)^5 \cdot 0.5 + \binom{6}{6} (0.5)^6 = 10.9\%$$

<sup>192</sup> nonparametric test  
<sup>193</sup> distribution-free test  
<sup>194</sup> order statistics

ہوتا اور ہم قیاس کو نا منظور نہ کرتے۔

□

مثال 24.32: بلا منصوبہ رجحان کے لئے پرکھ  
تار کو کاٹنے کے لئے ایک مشین استعمال کی جاتی ہے۔ لگاتار کئی لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

29 31 28 30 32

اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ مشین تار کو بغیر کسی رجحان کاٹی ہے، یعنی مشین مسلسل بڑھتی یا مسلسل گھٹتی لمبائی کی تار نہیں کاٹی ہے۔ فرض کریں کہ مشین کی قسم سے ایسا ظاہر ہوتا ہے کہ یہ مسلسل بڑھتی لمبائی کی تار کاٹے گی (مثبت رجحان)۔

حل: جتنی بار کوئی بڑی قیمت کسی چھوٹی قیمت سے پہلے رونما ہو، ہم ان تبدیلیوں کی تعداد گنتے ہیں۔

29 قیمت 28 قیمت سے پہلے آتی ہے: (1 تبدیلی)

31 کی قیمت 28 اور 30 سے پہلے آتی ہے: (2 تبدیلیاں)

باقی تین قیمتیں بڑھتی رجحان رکھتی ہیں۔ یوں نمونہ میں  $1 + 2 = 3$  تبدیلیاں پائی جاتی ہیں۔ ہم اب بلا منصوبہ متغیر

$T =$  تعداد تبدیلیاں

پر غور کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو (غیر رجحانی)، تب پانچ اجزاء 1 2 3 4 5 کے  $5! = 120$  ترتیبی اجتماعات میں ہر ایک کا احتمال  $\frac{1}{120}$  ہو گا۔ ہم ان ترتیبی اجتماعات کو ان کی تبدیلیوں کے لحاظ سے لکھتے ہیں:

$T = 3$									
1	2	5	4	3					
1	3	4	5	2					
1	3	5	2	4					
1	4	2	5	3					
1	4	3	2	5					
1	5	2	3	4					
2	1	4	5	3					
2	1	5	3	4					
2	3	1	5	4					
2	3	4	1	5					
2	4	1	3	5					
3	1	2	5	4					
3	1	4	2	5					
3	2	1	4	5					
4	1	2	3	5					
					$T = 2$				
					1	2	4	5	3
					1	2	5	3	4
					1	3	2	5	4
					1	3	4	2	5
					1	4	2	3	5
					2	1	3	5	4
					2	1	4	3	5
					2	3	1	4	5
					3	1	2	4	5
					$T = 1$				
					1	2	3	5	4
					1	2	4	3	5
					1	3	2	4	5
					2	1	3	4	5
					$T = 0$				
					1	2	3	4	5

وغیرہ

ان سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$P(T \leq 3) = \frac{1}{120} + \frac{4}{120} + \frac{9}{120} + \frac{15}{120} = \frac{29}{120} = 24\%$$

لہذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

ضمیمہ ج کی جدول 9 ج میں بلا رجحان صورت میں بلا منصوبہ متغیر  $T$  کی تقسیم دی گئی ہے۔ ہمارے تراکیب اور اس جدول کی قیمتیں استمراری تقسیمات کے کئے ہیں۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ نمونہ کی تمام قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہوں گی۔ پور و پور کی بنا عملاً چند نمونی قیمتیں ایک جیسی ہو سکتی ہیں۔ اگر  $m$  قیمتیں ایک جیسی ہوں تب  $\frac{m(m-1)}{4}$  اجزاء کی ترتیبی اجتماعات میں تبدیلیوں کے تعداد کی اوسط جمع کریں، یعنی، ایک جیسی قیمتوں کے ہر جوڑی کے لئے  $\frac{1}{2}$ ، ایک جیسی تین قیمتوں کے لئے  $\frac{3}{2}$ ، وغیرہ۔ □

### سوالات

سوال 24.267: 10 کوششوں میں سے 7 کوششوں میں قسم الف ہوئی چھلنی نے قسم ب ہوائی چھلنی سے زیادہ صاف ہوا پیدا کی، 1 کوشش میں چھلنی ب نے زیادہ صاف ہوا پیدا کی جبکہ 2 کوششوں میں دونوں کے نتائج ایک جیسے تھے۔ کیا چھلنی الف زیادہ بہتر ہے؟  
جواب: قیاس: الف اور ب ایک جیسی معیار رکھتی ہیں۔ تب 8 کوششوں میں 7 یا 8 بار الف کے حق میں وقوع کا احتمال 3.5% ہے۔ قیاس کو نا منظور کریں۔

سوال 24.268: کن صورتوں میں ہم پرکھ علامت کو استمراری تقسیم کی اوسط پرکھنے کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔

سوال 24.269: پرکھ علامت کو سوال 24.209 کے نمونہ پر لاگو کریں۔  
جواب:  $P(X \leq 2) = 0.5^6(1 + 6 + 15) = 34\%$  قیاس  $\tilde{\mu} = 0$  کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.270: اگر  $\tilde{\mu} = 0$  کی بجائے قیاس  $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$  ہو تب آپ پرکھ علامت کو کس طرح استعمال کریں گے۔ ( $\mu_0$  کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔)

سوال 24.271: 16 جسامت کے نمونہ میں 10 مثبت، 4 منفی اور 2 قیمتیں صفر ہیں۔ (ضمیمہ ج کی جدول 1. ج میں درکار قیمتیں نہیں دی گئی ہیں۔ آپ کو یہ قیمتیں حاصل کرنی ہوں گی۔)  
جواب: اگر  $\bar{\mu} = 0$  ہو، 14 میں سے 4 یا 4 سے کم عدد قیمتیں منفی ہونے کا احتمال 9% ہے۔ قیاس  $\bar{\mu} = 0$  کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.272:  $\bar{\mu} = 5$  میٹر لمبائی سلاخ پیدا کرنے کے عمل کے ایک نمونہ میں 4 سلاخوں کی لمبائی ٹھیک ہے، 15 کی لمبائی کم اور 3 کی لمبائی زیادہ ہے۔ کیا اس عمل کو درست کرنے کی ضرورت ہے؟ (عمومی تقسیم کو ثنائی تقسیم کا تخمینہ لیں۔ حصہ 24.10)

سوال 24.273: مسئلہ 24.15 استعمال کیے بغیر سوال 24.272 کو حل کریں۔  
جواب: 3 یا اس سے کم سلاخوں کی لمبائی 5 میٹر سے زیادہ ہونے کا ٹھیک احتمال 0.38% ہے۔ یہ سوال 24.272 میں حاصل تخمینہ احتمال سے کچھ کم ہے۔

سوال 24.274: 10 مریضوں میں سے ہر ایک کو دو مختلف نیند کی دوائیاں دی گئی۔ درج ذیل جدول ان کے اثرات (سونے کے دورانیے میں گھنٹوں میں اضافہ) پیش کرتا ہے۔ پر کھ علامت کی مدد سے دیکھیں کہ آیا ان میں فرق معنی خیز ہے۔

A	1.9	0.8	1.1	0.1	-0.1	4.4	5.5	1.6	4.6	3.4
B	0.7	-1.6	-0.2	-1.2	-0.1	3.4	3.7	0.8	0.0	2.0
فرق	1.2	2.4	1.3	1.3	0.0	1.0	1.8	0.8	4.6	1.4

سوال 24.275: مثال 24.24 میں سمجھائے گئے پر کھ کو سوال 24.274 پر لاگو کریں۔ (سوال میں دیے گئے نمونہ کی آبادی کو عمومی تصور کریں۔)  
جواب: قیاس  $\mu = 0$ ؛ متبادل  $\mu > 0$ ،  $\bar{x} = 1.58$ ،  
 $t = \sqrt{10} \cdot \frac{1.58}{1.23} = 4.06 > c = 1.83 (\alpha = 5\%)$ ؛ قیاس نا منظور۔

سوال 24.276: نچلی چوتھائی  $q_{25}$  (جس کی تعریف  $F(q_{25}) = 0.25$  ہے) کے لئے پر کھ علامت بنائیں۔

سوال 24.277: 8 قیمتوں کا نمونہ جس میں 7 کی قیمت  $20^\circ\text{C}$  سے کم اور 1 کی قیمت  $20^\circ\text{C}$  سے زیادہ ہو استعمال کرتے ہوئے خود کار حراری سوئچ ٹھیک  $20^\circ\text{C}$  پر مقرر ہونے کے قیاس کو بالمقابل کہ سوئچ کم درجہ حرارت پر مقرر ہے، پرکھیں۔



جواب:  $P(X \geq 1) = 0.5^8(1 + 8) = 3.5\% < \alpha = 5\%$  اس قیاس کو نا منظور کریں کہ سوئچ ٹھیک درجہ حرارت پر مقرر ہے۔

سوال 24.278: وولٹ پیا کی پیمائش درجہ حرارت  $T[^\circ\text{C}]$  سے آزاد ہے کے قیاس کو بالمقابل کہ اس کی پیمائش بڑھتے  $T$  کے ساتھ بڑھتی ہے پرکھیں۔ مستقل برقی دباؤ مہیا کرتے ہوئے حاصل درج ذیل پیمائشوں کا نمونہ استعمال کریں۔

$T[^\circ\text{C}]$ درجہ حرارت	10	20	30	40	50
$V[\text{V}]$ پیمائش	99.8	101.0	100.4	100.8	101.5

سوال 24.279:  $n = 4$  لیتے ہوئے مثال 24.32 میں دی گئی جدول کی طرح جدول بنائیں۔

سوال 24.280: کیا کھاد سے گندم کی استعمال سے پیداوار  $X [\text{kg}/\text{acre}]$  بڑھتی ہے؟ کھاد کی بڑھتی مقدار کے لحاظ سے مرتب درج ذیل نمونہ استعمال کریں۔

15.2 16.8 13.2 16.6 17.2 17.5 17.3 18.1

سوال 24.281: مثال 24.32 کے پرکھ کو درج ذیل نمونہ پر لاگو کریں۔ (اون میں ڈائی سلفائیڈ کی مقدار  $x$  جس کو کیمیائی عمل سے ناگزیری گئی اوون میں مقدار کے فی صد میں ناپا گیا ہے۔ اون میں پانی کی فی صد مقدار  $y$  ہے۔)

$x$	10	15	30	40	50	55	80	100
$y$	50	46	43	42	36	39	37	33

24.20 پیمائشوں کی جوڑیاں۔ سیدھے خطوط کو موافق بنانا

ہم اب ایسی تجربات پر غور کرتے ہیں جن میں ہم جوڑی مقدار ناپتے یا ان کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ ہم تجربات کو درج ذیل دو اقسام میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

• تجزیہ باہمی رشتہ<sup>195</sup> میں دونوں متغیرات بلا منصوبہ ہوں گے اور ہم ان کے درمیان رشتہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ (اس کتاب میں شاریات کی اس شاخ پر غور نہیں کی جائے گی۔)

• رجعی تجزیہ<sup>196</sup> میں دو میں سے ایک متغیر، مثلاً  $x$ ، کو عام متغیر تصور کیا جاتا ہے، یعنی، اس کی ناپ میں خاطر خواہ خلل نہیں پایا جاتا ہے۔ دوسرا متغیر،  $y$ ، بلا منصوبہ متغیر ہے۔  $x$  کو غیر تابع متغیر کہتے ہیں اور ہم جاننا چاہتے ہیں کہ  $y$ ، متغیر  $x$  کا کتنا تابع ہے؟ اس کی ایک اچھی مثال فشار خون  $y$  ہے جو انسان کے عمر  $x$  کی تابع ہے، جس کو ہم اب سے  $x$  پر  $y$  کی رجعت کہیں گے۔

تجربہ کرنے والا پہلے  $x$  کی  $n$  قیمتیں  $x_1, \dots, x_n$  منتخب کرتا ہے اور اس کے بعد ان  $x$  پر  $y$  کی قیمتیں مشاہدے سے حاصل کرتا ہے۔ یوں اس کو درج ذیل صورت کا نمونہ ملتا ہے۔

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

رجعی تجزیہ میں فرض کیا جاتا ہے کہ  $y$  کی اوسط  $\mu$ ، متغیر  $x$  کے تابع ہے، یعنی، ان کے مابین عام تعلق  $\mu = \mu(x)$  پایا جاتا ہے۔  $\mu(x)$  کی منحنی کو  $y$  کی  $x$  پر رجعی منحنی کہتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم سادہ ترین صورت پر غور کرتے ہیں جہاں  $\mu(x)$  خطی تفاعل  $\mu(x) = \alpha + \beta x$  ہے۔ ہم نمونی قیمتوں کو  $xY$  مستوی پر ترسیم کر کے، ان پر سیدھی خط بٹھا کر، اس خط کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی  $x$  کے لحاظ سے  $\mu(x)$  کی اندازاً قیمت حاصل کرنا چاہیں گے تاکہ کسی بھی  $x$  سے حاصل  $y$  کی متوقع قیمت ہم جان سکیں۔ اگر نقطے بکھرے ہوں تب، خط کو آنکھ کی مدد سے ٹھیک بٹھانا غیر یقینی ہو گا لہذا ہمیں حسابی طریقہ درکار ہو گا جو صرف نقطوں پر منحصر کیلئے نتیجہ دے۔ ایک بہت زیادہ استعمال ہونے والی ترکیب، جس کو گاوس نے بنایا، کمزور مربعوں کی ترکیب<sup>197</sup> کہلاتی ہے۔ ہمارے موجودہ ضرورت کو مد نظر رکھتے ہوئے اس کو درج ذیل بیان کیا جاسکتا ہے۔

نقطوں پر سیدھا خط یوں بٹھایا جائے کہ نقطوں کا سیدھی لکیر سے فاصلوں کا مربع کم سے کم ہو، جہاں نقطہ اور سیدھی لکیر کے مابین فاصلہ انتصابی رخ ( $y$  محور کے متوازی) ناپا جاتا ہے۔

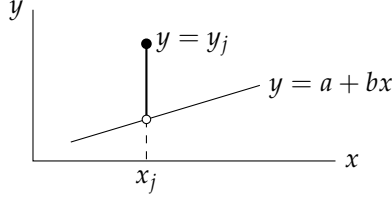
مفروضہ (الف)

نمونہ  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  میں تمام  $x$  قیمتیں  $x_1, \dots, x_n$  ایک جیسی نہیں ہیں۔

<sup>195</sup> correlation analysis

<sup>196</sup> regression analysis

<sup>197</sup> method of least squares



شکل 24.24: نقطہ  $(x_j, y_j)$  سے سیدھے خط  $y = a + bx$  کا انتصابی فاصلہ

جماعت  $n$  کے نمونہ  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  پر غور کریں۔ نمونی قیمت  $(x_j, y_j)$  کی سیدھی لکیر  $y = a + bx$  سے انتصابی رخ فاصلہ  $y$  محور کے متوازی ناپا گیا فاصلہ  $|y_j - a - bx_j|$  ہو گا (شکل 24.24)۔ یوں ان فاصلوں کے مربع کا مجموعہ

$$q = \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2 \quad (24.156)$$

ہو گا۔ کمتر مربعوں کی ترکیب میں ہم  $a$  اور  $b$  یوں منتخب کرتے ہیں کہ  $q$  کی قیمت کم سے کم حاصل ہو۔  $q$  کی قیمت  $a$  اور  $b$  پر منحصر ہے اور اس کی کم سے کم قیمت درج ذیل لازمی شرائط سے حاصل ہوگی۔

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0 \quad (24.157)$$

ہم دیکھیں گے کہ ان شرائط سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے

$$y - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \quad (24.158)$$

جہاں

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \quad \text{اور} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n) \quad (24.159)$$

ہیں۔ مساوات 24.157 کو نمونے کی  $y$  قیمتوں کا نمونے کی  $x$  قیمتوں پر رجعی خط<sup>198</sup> کہتے ہیں۔ اس کی ڈھلوان  $b$  کو  $x$  پر  $y$  کا تجزی عددی سر<sup>199</sup> کہتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (24.160)$$

<sup>198</sup> regression line  
<sup>199</sup> regression coefficient

ہو گا جہاں

$$(24.161) \quad s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{j=1}^n x_j^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right]$$

اور

$$(24.162) \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{j=1}^n x_j y_j - \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n x_j \right) \left( \sum_{j=1}^n y_j \right) \right]$$

ہوں گے۔  $s_{xy}$  کو نمونے کی باہمی تغیریت<sup>200</sup> کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ مساوات 24.158 میں دیا گیا رجعی خط نقطہ  $(\bar{x}, \bar{y})$  سے گزرے گا۔

مساوات 24.158 کو حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 24.156 اور مساوات 24.157 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial a} &= -2 \sum (y_j - a - bx_j) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial b} &= -2 \sum x_j (y_j - a - bx_j) = 0 \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے (جہاں  $j$  پر 1 تا  $n$  مجموعے لیے جاتے ہیں)۔ یوں

$$\begin{aligned} na + b \sum x_j &= \sum y_j \\ a \sum x_j + b \sum x_j^2 &= \sum x_j y_j \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ مفروضہ -الف کے تحت خطی مساوات کے نظام (مساوات 24.161)

$$n \sum x_j^2 - \left( \sum x_j \right)^2 = n(n-1)s_1^2$$

کا مقطع غیر صفر ہو گا اور اس نظام کا یکتا حل (مساوات 24.159، مساوات 24.161، مساوات 24.162)

$$(24.163) \quad a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad b = \frac{n \sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{n(n-1)s_1^2}$$

پایا جائے گا۔ اس سے مساوات 24.158 حاصل ہوتا ہے جس میں  $b$  کی قیمت مساوات 24.160 تا مساوات 24.162 دیتے ہیں۔ ( $s_1^2$  کے دو تعلقات کا ایک جیسا ہونے کو آپ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.294)؛ اسی طرح  $s_{xy}$  کے لئے بھی آپ کر سکتے ہیں)

جدول 24.16: چڑے کی حجم میں کمی  $y$  کا دباؤ  $x$  پر رجعت

دی گئی قیمتیں		معاون قیمتیں	
$x_j$	$y_j$	$x_j^2$	$x_j y_j$
4000	2.3	16 000 000	9200
6000	4.1	36 000 000	24 600
8000	5.7	64 000 000	45 600
10 000	6.9	100 000 000	69 000
28 000	19.0	216 000 000	148 400

ہاتھ سے نتائج حاصل کرنے کو آسان بنانے کی خاطر ہم

$$(24.164) \quad x_j = c_1 x_j^* + l_1, \quad y_j = c_2 y_j^* + l_2$$

استعمال کرتے ہیں جن میں  $c_1$ ،  $c_2$ ،  $l_1$ ،  $l_2$  یوں منتخب کیے جاتے ہیں کہ متبادل قیمتیں  $x_j^*$ ،  $y_j^*$  سادہ ترین ہوں۔ ہم متبادل قیمتیں استعمال کرتے ہوئے  $\bar{x}^*$ ،  $\bar{y}^*$ ،  $x_1^{*2}$ ،  $s_{xy}^*$  بذریعہ حساب تلاش کرنے کے بعد درج ذیل تلاش کرتے ہیں۔

$$(24.165) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= c_1 \bar{x}^* + l_1, & \bar{y} &= c_2 \bar{y}^* + l_2 \\ s_1^2 &= c_1^2 s_1^{*2}, & s_{xy} &= c_1 c_2 s_{xy}^* \end{aligned}$$

مثال 24.33: رجعی خط

ایک مخصوص چڑے کی حجم میں کمی  $y$  بالمتقابل مقررہ دباؤ  $x$  ناپے گئے۔ کرہ ہوائی کے دباؤ کو دباؤ کی اکائی لی گئی ہے۔ نتائج جدول 24.16 میں پیش کیے گئے ہیں۔  $y$  کا  $x$  پر رجعی خط تلاش کریں۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ  $n = 4$  ہے اور  $\bar{x} = \frac{28000}{4} = 7000$ ،  $\bar{y} = \frac{19.0}{4} = 4.75$ ،

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{3} \left( 216 000 000 - \frac{28 000^2}{4} \right) = \frac{20 000 000}{3} \\ s_{xy} &= \frac{1}{3} \left( 148 400 - \frac{28 000 \cdot 19}{4} \right) = \frac{15 400}{3} \end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں  $b = \frac{15 400}{20 000 000} = 0.000 777$  ہو گا اور رجعی خط درج ذیل ہو گا۔

$$y - 4.75 = 0.000 77(x - 7000) \implies y = 0.000 77x - 0.64$$



ہم درج ذیل دو مفروضے فرض کرتے ہیں۔

(ب) مفروضہ

ہر مقررہ  $x$  کے لئے بلا منصوبہ متغیر  $Y$  عمومی ہے جس کی اوسط

(24.166)

$$\mu(x) = \alpha + \beta x$$

اور تغیریت  $\sigma^2$  ہے جہاں تغیریت  $x$  کا تابع نہیں ہے۔

(پ) مفروضہ

نمونہ  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  لینے کے لئے  $n$  مرتبہ تجربات غیر تابع طریقے سے سرانجام دیے گئے۔

زیر مفروضہ الف تا پ دکھایا جاسکتا ہے کہ  $\beta$  کا زیادہ سے زیادہ امکانی اندازہ مساوات 24.160 میں دیا گیا رجعی عددی سر  $b$  ہو گا۔ اسی لئے  $\beta$  کو آبادی کا رجعی عددی سر<sup>201</sup> کہتے ہیں۔

زیر مفروضہ الف تا پ، جیسا جدول 24.17 میں دکھایا گیا ہے، ہم  $\beta$  کا وقفہ اعتماد حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 24.34: رجعی عددی سر کا وقفہ اعتماد

جدول 24.16 میں دی گئی نمونی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے جدول 24.17 میں دی گئی ترکیب سے  $\beta$  کا وقفہ اعتماد تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ہم  $\gamma = 0.95$  منتخب کرتے ہیں۔

دوسرا قدم: مساوات 24.167 کو  $F(c) = 0.975$  لکھ سکتے ہیں۔ ضمیمہ ج کی جدول 6 سے  $n - 2 = 2$  درجہ آزادی کے لئے  $c = 4.30$  حاصل ہوتا ہے۔

تیسرا قدم: مثال 24.33 ہمیں  $3s_1^2 = 20\,000\,000$  اور  $b = 0.000\,77$  دیتی ہے۔ جدول 24.16 سے ہم درج ذیل بذریعہ حساب حاصل کرتے ہیں۔

$$3s_2^2 = 102.2 - \frac{19^2}{4} = 11.95, \quad q_0 = 11.95 - 20\,000\,000 \cdot 0.000\,77^2 = 0.092$$

جدول 24.17: زیر مفروضہ الف تاپ مساوات 24.166 میں دیے گئے  $\beta$  کا وقفہ اعتماد

پہلا قدم: سطح اعتماد  $\gamma$  (95%، 99% وغیرہ) منتخب کریں۔  
دوسرا قدم:  $n - 2$  درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 6.6 سے درج ذیل مساوات کا حل  $c$  تلاش کریں۔ (نمونہ جسامت  $n$ )

$$(24.167) \quad F(c) = \frac{1}{2}(1 + \gamma)$$

تیسرا قدم: نمونہ  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.161 سے  $s_1^2$ ، مساوات 24.162 سے  $s_{xy}$ ، مساوات 24.160 سے  $b$ ،

$$(24.168) \quad (n-1)s_2^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n y_j \right)^2$$

اور

$$(24.169) \quad q_0 = (n-1)(s_2^2 - b^2 s_1^2)$$

حاصل کریں۔  
چوتھا قدم:  $k = c \sqrt{\frac{q_0}{(n-2)(n-1)s_1^2}}$  کو بذریعہ حساب حاصل کریں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہوگا۔

$$(24.170) \quad \{b - k \leq \beta \leq b + k\} \text{ اعتماد}$$

چوتھا قدم: یوں  $k = 4.30 \sqrt{\frac{0.092}{2.20000000}} = 0.000206$  حاصل ہو گا لہذا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\{0.00056 \leq \beta \leq 0.00098\}$$

□

### سوالات

سوال 24.282: آنکھ سے سیدھا خط تلاش کریں۔ ایک گاڑی  $35 \text{ km h}^{-1}$  کی رفتار سے چل رہی ہے جبکہ گاڑی کی (کلو میٹر فی گھنٹہ) رفتار  $x$  بالمتقابل (میٹروں میں) رکنے کے لئے درکار فاصلہ  $y$  درج ذیل ہے۔

$x$	20	30	40	50
$y$	50	95	150	210

جواب: تقریباً 120 m

سوال 24.283:  $x_j = 2000x_j^* + 4000$  اور  $y_j = 0.1y_j^* + 5$  لیتے ہوئے مثال 24.33 کے نتائج حاصل کریں۔

سوال 24.284: ایسا نمونہ حاصل کریں جس کے لئے  $b = 0$  ہو۔

سوال 24.285 تا سوال 24.289 میں  $x$  پر  $y$  کی نمونی رجعی خط ترسیم کریں۔

سوال 24.285: سوال 24.281 کا نمونہ استعمال کریں۔

سوال 24.286:  $(1, 1), (2, 1.7), (3, 3)$  جواب:  $y = x - 0.1$

سوال 24.287: ڈیزل انجن کی درج ذیل زاویائی رفتار  $x$  (فی منٹ چکر) بالمتقابل طاقت  $y$  (کلو واٹ)

$x$	400	500	600	700	750
$y$	580	1030	1420	1880	2100



سوال 24.288: ایک مخصوص فولاد کی بد شکلی  $x$  [mm] اور برینل سختی  $y$  [kg mm<sup>-2</sup>]<sup>202</sup>

$x$	6	9	11	13	22	26	28	33	35
$y$	68	67	65	53	44	40	37	34	32

جواب:  $y - 48.89 = -1.32(x - 20.33)$

سوال 24.289: کلورائیٹھالین کا گاڑھاپن  $x$  [%] اور دیم کی اموات  $y$  [%]

$x$	0.04	0.15	0.30	1.00	2.00
$y$	3	16	13	70	90

زیر مفروضہ ب اور پ، سوال 24.290 تا سوال 24.295 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے، رجعی عدد  $\beta$  کا 95% وقفہ اعتماد تلاش کریں۔

سوال 24.290:  $(1, 1), (2, 2 + a), (3, 3)$  جہاں  $a$  مستقل ہے۔  
جواب:  $2s_1^2 = 2, 2s_{xy} = 2, b = 1, 2s_2^2 = 2 + \frac{2}{3}p^2, q_0 = \frac{2}{3}p^2,$   
 $k = \frac{12.7a}{\sqrt{3}} = 7.3a$  ( $\gamma = 95\%$ ) اعتماد،  $\{1 - 7.3a \leq \beta \leq 1 + 7.3a\}$

سوال 24.291: سوال 24.287 کا نمونہ۔

سوال 24.292: سوال 24.288 کا نمونہ۔

جواب:  $q_0 = 76, k = 2.37\sqrt{\frac{76}{7.944}} = 0.254$ , اعتماد =  $\{-1.58 \leq \beta \leq -1.06\}$

سوال 24.293: ہوا میں نمی کا تناسب  $x$  [%] بالمتقابل جبلی نما مادہ کا پھیل  $y$  [%]

$x$	10	20	30	40
$y$	0.8	1.6	2.3	2.8

سوال 24.294: مساوات 24.161 میں ایک ہاتھ سے دوسرا ہاتھ حاصل کریں۔ اشارہ۔ مربع لے کر  $\bar{x}$  کی تعریف پر کرتے ہوئے سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 24.295: مساوات 24.162 میں دائیں ہاتھ کو بائیں ہاتھ سے حاصل کریں۔

## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z \leq |2yy'|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو مکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا مکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### 1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

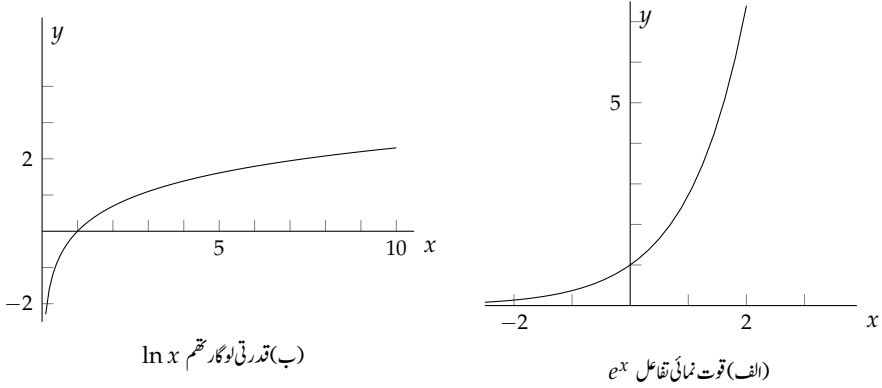
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

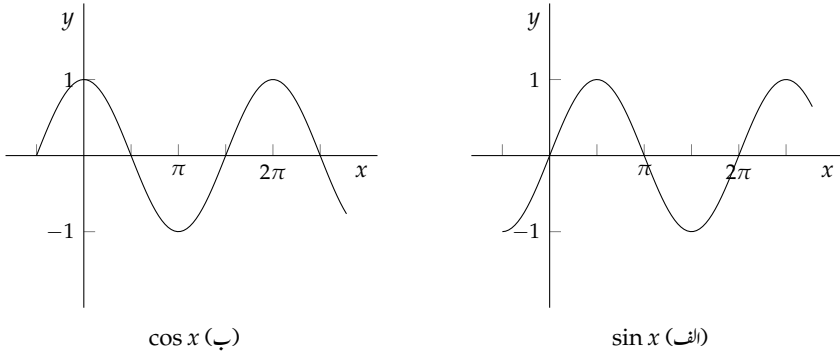
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

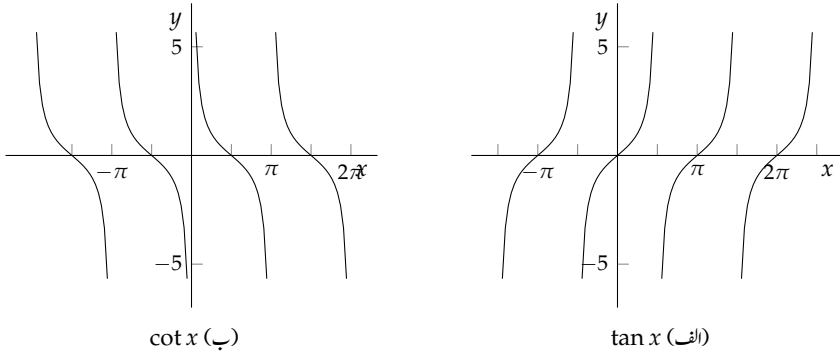
(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$





شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

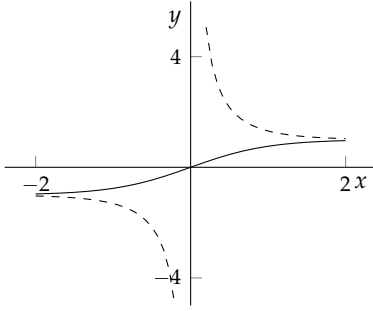
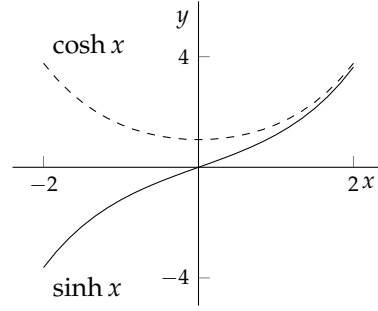
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (\text{ب.23})$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{ب.24})$$

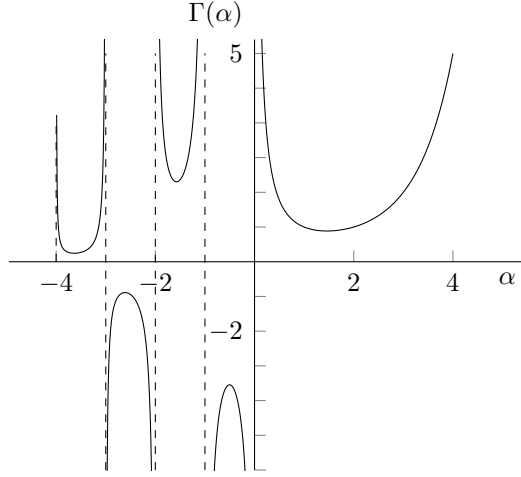
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (\text{ب.25})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

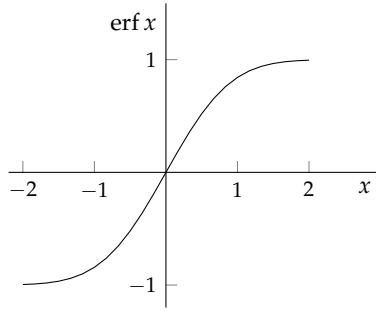
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

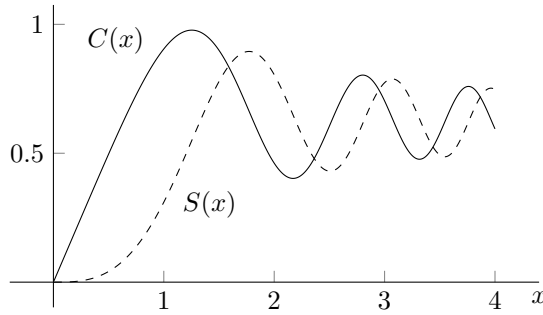
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

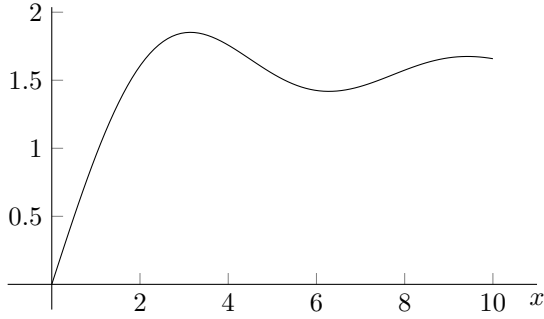
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Si  $\infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$



ضمیمہ ج

جدول

جدول 1. ج: شنائی تقسیم



جدول 2. ج: پوسن تقسیم

جدول 3. ج: عمومی تقسیم

جدول 4. ج: عمومی تقسیم

جدول 5. ج: بشلا منصوبہ اعداد

جدول 6. ج:  $t$  تقسیم

جدول 7. ج: مربع خا تقسیم

جدول 8. ج: مربع ایف تقسیم

جدول 9. ج: ؟؟