

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ وروئسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

214	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	3.3
217	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	3.4
225	نظام تفرقی مساوات	4
226	4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	
235	4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	
250	4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	
251	4.3.1 خطی نظام	
254	4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	
272	4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام	
281	4.6 کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام	
290	4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادل	
298	4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	
299	4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب	
309	5 طاقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	5
310	5.1 ترکیب طاقی تسلسل	
325	5.2 لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کثیر رکنی	
343	5.3 مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس	
348	5.3.1 عملی استعمال	
362	5.4 مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل	
377	5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	
385	6 لاپلاس متبادل	6
386	6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	
395	6.2 تفرقات اور نکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	
408	6.3 $s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل	
429	6.4 ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	
447	6.5 الجھاؤ	
456	6.6 لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	
465	6.7 تفرقی مساوات کے نظام	
473	6.8 لاپلاس بدل کے عمومی یکے	
477	7 خطی الجبرا۔ سمتیات	7
478	7.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب	
488	7.2 قالبی ضرب	
494	7.2.1 تبدیلی محل	

377

ا اضافی ثبوت

381

ب مفید معلومات

381 . . . . . 1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 7

### خطی الجبرا۔ سمتیات

خطی الجبرا وسیع مضمون ہے جس میں قالب اور سمتیات، مقطع قالب، خطی مساوات کے نظام، سمتی فضا اور خطی تبادلہ، آگنی قیمت مسائل، اور دیگر موضوعات شامل ہیں۔ اس کا استعمال انجینئری، طبیعیات، جیومیٹری، کمپیوٹر سائنس، معاشیات اور دیگر میدانوں میں پایا جاتا ہے۔

متعدد اعداد و شمار یا متعدد تفاعل کو مربوط طریقے سے قالب<sup>1</sup> اور سمتیات<sup>2</sup> کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب اور سمتیات ہی خطی الجبرا کی زبان ہیں۔

---

matrices<sup>1</sup>  
vectors<sup>2</sup>

## 7.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

مستطیلی ترتیب وار فہرست کو قالب کہتے ہیں۔ درج ذیل قالب کی مثال ہیں۔ قالب میں درج اعداد یا تفاعل کو قالب کے اندراجات یا قالب کے ارکان<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

$$(7.1) \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -2 & 1.2 \\ -6 & 0 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ln x & -e^x \\ e^{3x} & 3.2x^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3.22 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

بالائی بائیں ہاتھ قالب کے ارکان 0.1، -2، 1.2، -6، 0 اور 23 ہیں۔ اس قالب کے دو صف<sup>4</sup> اور تین قطار<sup>5</sup> ہیں۔ افقی اندراجات کی لکیر کو صف اور عمودی اندراجات کی لکیر کو قطار کہتے ہیں۔ بالائی درمیانی قالب میں 3 صف اور 3 قطار پائے جاتے ہیں۔ ایسا قالب جس میں صفوں کی تعداد، قطاروں کی تعداد کے برابر ہو مربع قالب<sup>6</sup> کہلاتا ہے۔ یوں بالائی دائیں ہاتھ قالب بھی مربع قالب ہے۔ بالائی درمیانی قالب میں ارکان کو  $a_{mn}$  سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں دو عدد اشاریہ  $m$  اور  $n$  بالترتیب اس صف اور قطار کو ظاہر کرتے ہیں جہاں یہ رکن پایا جاتا ہو۔ قالب میں اندراجات کے مقام کی وضاحت اسی معیاری ترکیب سے کی جاتی ہے۔ یوں  $a_{23}$  رکن دوسرے صف اور تیسرے قطار میں پایا جاتا ہے۔

ایسا قالب جو صرف ایک عدد صف یا صرف ایک عدد قطار پر مشتمل ہو، سمتیہ<sup>7</sup> کہلاتا ہے۔ یوں نچلے دائیں ہاتھ دو ارکان پر مشتمل سمتیہ قطار<sup>8</sup> پایا جاتا ہے جبکہ نچلے بائیں ہاتھ سمتیہ صف<sup>9</sup> پایا جاتا ہے۔ چونکہ سمتیہ قطار میں کوئی صف نہیں پایا جاتا لہذا اس میں ارکان کے مقام کو صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح سمتیہ صف میں بھی ارکان کا مقام صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں سمتیہ قطار میں  $a_1 = 3.22$  اور  $a_2 = -\frac{4}{5}$  ہیں۔

عملی استعمال میں مواد کے ذخیرہ اور اس پر عمل کرنے میں قالب کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ درج ذیل مثال دیکھیں

elements<sup>3</sup>  
rows<sup>4</sup>  
columns<sup>5</sup>  
square matrix<sup>6</sup>  
vector<sup>7</sup>  
column vector<sup>8</sup>  
row vector<sup>9</sup>

مثال 7.1: خطی نظام

درج ذیل خطی نظام میں  $x_1$ ،  $x_2$  اور  $x_3$  نامعلوم متغیرات ہیں۔

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 15$$

$$5x_1 + 3x_3 = 11$$

آئیں درج بالا نظام میں  $x_1$ ،  $x_2$  اور  $x_3$  کے عددی سروں سے عددی سر قالب  $A^{10}$  لکھیں۔  $A$  قالب میں ہر رکن کا مقام عین خطی مساوات کے مطابق ہو گا۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

چونکہ تیسری مساوات میں  $x_2$  نہیں پایا جاتا لہذا اس کا عددی سر صفر کے برابر ہو گا اور یوں  $A$  میں  $a_{32} = 0$  درج کیا گیا ہے۔ عددی سر قالب  $A$  میں مساوات کے دائیں ہاتھ کی معلومات کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب  $\tilde{A}^{11}$  ملتا ہے۔

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 15 \\ 5 & 0 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

چونکہ افزودہ قالب  $\tilde{A}$  سے تینوں مساوات لکھ جاسکتے ہیں لہذا دیے گئے خطی نظام کو  $\tilde{A}$  مکمل طور ظاہر کرتا ہے۔ یوں ہم  $\tilde{A}$  کو حل کرتے ہوئے نامعلوم متغیرات  $x_1$ ،  $x_2$  اور  $x_3$  حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنا جلد سمجھایا جائے گا۔ فی الحال تسلی کر لیں کہ اس نظام کا حل  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = -2$  اور  $x_3 = 2$  ہے۔

نامعلوم متغیرات کو  $x_1$ ،  $x_2$  اور  $x_3$  سے ظاہر کرنے کی بجائے دیگر علامتوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے مثلاً  $x$ ،  $y$  اور  $z$ ۔

coefficient matrix<sup>10</sup>  
augmented matrix<sup>11</sup>

مثال 7.2: فروخت کھانا

$$A = \begin{bmatrix} \text{ہفتہ} & \text{اتوار} & \text{پیر} & \text{منگل} & \text{بدھ} & \text{جمعرات} & \text{جمع} \\ \text{الف} & 20 & 19 & 18 & 13 & 23 & 32 \\ \text{ب} & 25 & 17 & 5 & 14 & 12 & 10 \\ \text{پ} & 17 & 14 & 9 & 18 & 16 & 29 \end{bmatrix}$$

ایک دکان کی تین اشیاء کی ہفتہ وار فروخت درج بالا قالب میں دی گئی ہے۔ ہر ہفتے کی فروخت کو اسی طرح قالبوں میں لکھا جاسکتا ہے۔ مہینے کے آخر میں تمام قالبوں کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لینے سے ہر دن، تینوں اشیاء کی کل فروخت کی فہرست حاصل ہوگی۔

عمومی تصورات اور علامت نویسی

آئیں اب تک پیش کیے گئے تصورات کو باضابطہ دستوری صورت دیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے بڑے حروف سے قالب کو ظاہر کریں گے مثلاً  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، ...، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً  $A = [a_{jk}]$  وغیرہ۔ ایسا قالب جس میں  $m$  صف اور  $n$  قطار ہوں،  $m \times n$  (اس کو  $m$  ضرب  $n$  پڑھیں) قالب کہلاتا ہے (پہلے صف اور بعد میں قطار آئے گا) اور  $m \times n$  قالب کی جسامت<sup>12</sup> کہلاتی ہے۔ یوں  $m \times n$  قالب درج ذیل صورت کا ہوگا۔

$$(7.2) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مساوات 7.1 میں بالائی بائیں قالب  $2 \times 3$  جسامت کا ہے جبکہ نیچلا بائیں قالب  $1 \times 3$  جسامت کا ہے۔

مساوات 7.2 میں ہر رکن کو دو عدد اشاریہ سے پہچانا جاتا ہے جہاں پہلا اشاریہ صف اور دوسرا اشاریہ قطار ہے۔ یوں  $a_{23}$  دوسرے صف اور تیسرے قطار پر موجود اندراج ہے۔

ایسا قالب جس میں  $m = n$  ہو  $n \times n$  چکور قالب کہلاتا ہے۔ چکور قالب کا وہ وتر جس پر  $a_{11}$  ،  $a_{22}$  ،  $\dots$  ،  $a_{nn}$  پائے جاتے ہیں، قالب کا مرکزی وتر<sup>13</sup> کہلاتا ہے۔ مساوات 7.1 میں ایک چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان  $a_{11}$  ،  $a_{22}$  اور  $a_{33}$  ہیں جبکہ دوسرے چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان  $\ln x$  اور  $3.2x^2$  ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے، چکور قالب نہایت اہم ہیں۔

ایسا قالب جس میں  $m \neq n$  ہو  $m \times n$  مستطیل<sup>14</sup> قالب کہلاتا ہے۔ مستطیل قالب کی ایک مخصوص قسم چکور قالب ہے۔

### سمتیات

صرف ایک صف یا ایک قطار پر مبنی قالب کو سمتیہ کہتے ہیں۔ سمتیہ کے اندراج کو سمتیہ کے اجزاء<sup>15</sup> کہتے ہیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے چھوٹے حروف سے سمتیہ کو ظاہر کریں گے مثلاً  $a$  ،  $b$  ،  $c$  ،  $\dots$  اور یا اس کو چکور توسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً  $a = [a_j]$  وغیرہ۔ سمتیہ صف کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4.2 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

اسی طرح سمتیہ قطار کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

main diagonal<sup>13</sup>  
rectangular matrix<sup>14</sup>  
components<sup>15</sup>

مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

آئیں پہلے مساوات کا تصور جانتے ہیں۔

تعریف: دو قالب  $A$  اور  $B$  اس صورت مساوی ہوں گے جب دونوں قالب کی جسامت برابر ہو اور ان کے نظیری ارکان آپس میں برابر ہوں یعنی  $a_{11} = b_{11}$  ،  $a_{12} = b_{12}$  ، ... ہوں۔ غیر مساوی قالب مختلف<sup>16</sup> کہلاتے ہیں۔ یوں مختلف جسامت کے قالب ہر صورت مختلف ہوں گے۔ مساوات کا تعلق  $A = B$  لکھا جاتا ہے۔

مثال 7.3: قالبوں کی مساوات  
اگر درج ذیل قالب مساوی ہوں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

تب  $a_{11} = 2$  ،  $a_{12} = -3$  ،  $a_{21} = 0$  اور  $a_{22} = 3.2$  ہوں گے اور ہم  $A = B$  لکھ سکتے ہیں۔ درج ذیل تمام قالب آپس میں مختلف ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تعریف: قالبوں کا مجموعہ  
دو یکساں جسامت کے قالب  $A = [a_{jk}]$  اور  $B = [b_{jk}]$  کا مجموعہ  $A + B$  لکھا جائے گا جس کے اندراجات  $a_{jk} + b_{jk}$  کو  $A$  اور  $B$  کے نظیری ارکان کے مجموعے سے حاصل کیا جائے گا۔ دو مختلف جسامت کے قالبوں کا مجموعہ حاصل کرنا ناممکن ہے۔

مثال 7.4: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہوں تب  $A + B$ ،  $a + b$  اور  $0A + b$  حاصل کریں۔حل: چونکہ  $A$  اور  $B$  کی یکساں جسامت ہے لہذا انہیں جمع کیا جاسکتا ہے۔ مجموعہ درج ذیل ہوگا۔

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+7 & -1+3 & 3+0 \\ 1+1 & 0+2 & -2+1 \\ 3+2 & 2-1 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

اسی طرح چونکہ  $a$  اور  $b$  کی جسامت یکساں ہے لہذا انہیں جمع کیا جاسکتا ہے۔ ان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$a + b = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 3+2 \\ -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

چونکہ  $A$  اور  $b$  کی جسامت یکساں نہیں ہے لہذا  $0A + b$  حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

تعریف: غیر سمتی ضرب

کسی بھی  $m \times n$  قالب  $A = [a_{jk}]$  اور کسی بھی غیر سمتی مقدار (عدد)  $c$  کا حاصل ضرب  $cA$  لکھا جاتا ہے جو ایسا  $m \times n$  قالب  $cA = [ca_{jk}]$  ہے جس کا ہر رکن  $A$  کے نظیری رکن کو  $c$  سے ضرب دیتے حاصل کیا جاتا ہے۔



ہم  $A(-1)$  کو  $-A$  لکھتے ہیں اور اس کو  $A$  کا نفی کہتے ہیں۔ اسی طرح  $A(-k)$  کو  $-kA$  لکھا جاتا ہے۔  $A + (-B)$  کو  $A - B$  لکھا جاتا ہے جو  $A$  اور  $B$  کا فرق<sup>17</sup> کہلاتا ہے (فرق صرف یکساں جسامت کے قالب کا حاصل کیا جاسکتا ہے)۔

مثال 7.5: غیر سمتی ضرب  
اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.3 \\ 0.6 & -1.5 \\ 0 & 6.0 \end{bmatrix}$$

ہو تب درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$-A = \begin{bmatrix} -1.2 & -3.3 \\ -0.6 & 1.5 \\ 0 & -6.0 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{3}A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -5 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad 0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر قالب  $B$  میں مختلف اشیاء کی کلوگرام کمیت درج ہو تب  $1000B$  قالب انہیں اشیاء کی کمیت گرام میں دے گا۔

مجموعہ قالب اور غیر سمتی ضرب کے قواعد

مجموعہ اعداد کے قواعد سے یکساں جسامت  $m \times n$  کے قالبوں کے مجموعے کے درج ذیل قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \quad (\text{یعنی } A + B + C) \\ A + 0 &= A \\ A - A &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

درج بالا موٹی لکھائی میں صفر 0 ایسے  $m \times n$  صفر قالب<sup>18</sup> کو ظاہر کرتی ہے جس کے تمام ارکان صفر 0 کے برابر ہوں۔ اگر  $m = 1$  یا  $n = 1$  ہو تب اس کو صفر سمتیہ<sup>19</sup> کہیں گے۔

یوں مجموعہ قالب قانون تبادل اور قانون تلازم پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح غیر سمتی ضرب درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 c(A + B) &= cA + cB \\
 (c + k)A &= cA + kA \\
 c(kA) &= (ck)A \quad (\text{یعنی } ckA) \\
 1A &= A
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

### سوالات

سوال 7.1 تا سوال 7.3 عمومی سوالات ہیں۔ سوال 7.1:  $A = [a_{jk}]$  لکھتے ہوئے مثال 7.2 میں  $[a_{12}]$  اور  $[a_{25}]$  کیا ہیں۔

جوابات:  $[a_{12}] = 23$  اور  $[a_{25}] = 0$

سوال 7.2: مثال 7.2 میں دیے گئے قالب کی جسامت لکھیں۔

جواب:  $3 \times 7$

سوال 7.3: مثال 7.4 میں قالب  $A$  کی مرکزی وتر لکھیں۔

جواب: 2، 0 اور 1

<sup>18</sup> zero matrix  
<sup>19</sup> zero vector

سوال 7.4 تا سوال 7.10 میں قابلوں کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب حاصل کرنے ہوں گے۔ ان سوالات میں درکار قالب درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.4:  $0.5A$ ،  $0.2B$ ،  $-2u$

جوابات:

$$0.5A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1.0 \\ 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.2B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad -2u = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سوال 7.5:  $3A + 2B$ ،  $2C - E$ ،  $-3u + v - 2w$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 7 & 1 & 9 \\ 6 & 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9.5 \\ -5.7 \\ -6.4 \end{bmatrix}$$

سوال 7.6:  $5A - 3A$ ،  $6(3)B$ ،  $(3 \cdot 6)B$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 7.7:  $3(2C + 5D), \quad 0.2(0.1E - 0.3D)$   
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 66 & 18 \\ 9 & 57 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.08 & -0.24 \\ 0.12 & -0.2 \\ 0.22 & -0.1 \end{bmatrix}$$

سوال 7.8:  $E + (D + C), \quad (D + E) + C, \quad A + C, \quad 0B + D$   
جوابات: چونکہ  $A$  اور  $C$  کی جسامت یکساں نہیں ہے لہذا انہیں جمع نہیں کیا جاسکتا ہے۔ غیر یکساں جسامت کی بنا  $0B + D$  بھی حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$$E + (D + C) = (D + E) + C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 20 & -4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

سوال 7.9:  $u, v$  اور  $w$  کو خلاء میں قوت کے اجزاء تصور کرتے ہوئے ان کے مجموعے سے کل قوت دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{bmatrix} 5.3 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.10: متوازن صورت  
تمام قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہونے کی صورت کو متوازن<sup>20</sup> حال کہتے ہیں۔

ایسا قوت  $x$  دریافت کریں کہ  $u, v, w$  اور  $x$  متوازن حال میں ہوں۔

$$x = \begin{bmatrix} -5.3 \\ -3.1 \\ -3.2 \end{bmatrix}$$

## 7.2 قلابی ضرب

قالبی ضرب سے مراد دو عدد قابلوں کا آپس میں ضرب ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ چند مثالیں حل کرتے ہوئے قالبی ضرب کو اچھی طرح سمجھیں۔ قالبی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: قالبی ضرب

$A = [a_{jk}]$  قالب  $m \times n$  اور  $B = [b_{jk}]$  قالب  $r \times p$  کا (اسی ترتیب سے) حاصل ضرب  $C = AB$  صرف  $r = n$  کی صورت میں ممکن ہو گا اور یہ  $m \times p$  قالب  $C = [c_{jk}]$  ہو گا جس کے اندراجات درج ذیل ہوں گے۔

(7.5)

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}, \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

یوں پہلے جزو  $A$  میں قطاروں کی تعداد  $n$  دوسرے جزو  $B$  کی صفوں کی تعداد  $r$  کے برابر ہونا لازمی ہے۔ مساوات 7.5 میں  $c_{jk}$  کو  $A$  کے  $j$  صف کے ہر رکن کو  $B$  کے  $k$  قطار کے نظیری رکن سے ضرب دیتے ہوئے تمام  $n$  حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں صف ضرب قطار سے قالبی ضرب حاصل کیا جاتا ہے۔ قالبی ضرب  $n = 3$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

جہاں  $A$  کی پہلی صف کے ارکان کو  $B$  کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے  $c_{11}$  حاصل ہو گا۔ اسی طرح  $A$  کی پہلی صف کے ارکان کو  $B$  کی دوسری قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے  $c_{12}$  حاصل ہو گا اور  $A$  کی دوسری صف کے ارکان کو  $B$  کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے  $c_{21}$  حاصل ہو گا۔ اس عمل کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

چونکہ سمتیہ در حقیقت قلاب کی مخصوص صورت ہے لہذا قلاب اور سمتیہ کا ضرب بھی بالکل اسی طرح حاصل کیا جائے گا۔ قلابی ضرب کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال 7.6: قلابی ضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 10 \\ 4 \cdot 9 + 6 \cdot 8 & 4 \cdot 7 + 6 \cdot 10 \\ 5 \cdot 9 + 2 \cdot 8 & 5 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 37 \\ 84 & 88 \\ 61 & 55 \end{bmatrix}$$

مثال 7.7: قلاب اور سمتیہ کا ضرب

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{جبکہ} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{ناممکن}$$

درج بالا میں قلاب اور سمتیہ کی جگہ تبدیل کرنے سے پہلے جزو کی قطاروں اور دوسرے جزو کی صفوں کی تعداد یکساں نہیں رہتی لہذا ایسا ضرب ناممکن ہے۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ  $AB$  اور  $BA$  برابر ہوں اور یہ کہ دونوں ضرب کا حصول ممکن ہو۔

سوال 7.11:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ سمتیات کی جگہ تبدیل کرنے سے حاصل ضرب تبدیل ہوتا ہے یعنی قلبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا۔

مثال 7.8: قلبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا لہذا عموماً  $AB \neq BA$  ہوگا

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 & 199 \\ -199 & -199 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ قلبی ضرب میں اجزاء کی جگہ تبدیل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کے علاوہ قلبی ضرب، عام اعدادی ضرب کے درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned} & \text{(الف)} \quad (kA)B = k(AB) = A(kB) \quad (kAB \text{ یا } AkB) \\ & \text{(ب)} \quad A(BC) = (AB)C \quad (\text{یعنی } ABC) \\ & \text{(پ)} \quad (A+B)C = AC + BC \\ & \text{(ت)} \quad C(A+B) = CA + CB \end{aligned} \quad (7.6)$$

درج بالا میں  $k$  کوئی عدد ہے اور یہ قواعد اس صورت درست ہوں گے کہ بائیں ہاتھ کے قالب، قلبی ضرب کی تعریف پر پورا اترتے ہوں۔ درج بالا میں مساوات-ب قانون تلازم<sup>21</sup> کہلاتا ہے جبکہ مساوات-پ اور مساوات-ت قانون تقسیم<sup>22</sup> کہلاتا ہے۔

چونکہ قلبی ضرب صف ضرب قطار کو کہتے ہیں لہذا مساوات 7.5 کو زیادہ خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(7.7) \quad c_{jk} = a_j b_k, \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

associative law<sup>21</sup>  
distributive law<sup>22</sup>

جہاں  $a_j$  قالب  $A$  کا صف  $j$  اور  $b_k$  قالب  $B$  کا قطار  $k$  ہے۔

$$a_j b_k = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = [a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}]$$

مثال 7.9: صف اور قطار سمتیہ کی صورت میں ضرب ارکان  
 $3 \times 3$  قالب  $A = [a_{jk}]$  اور  $3 \times 4$  قالب  $B = [b_{jk}]$  کو ضرب دینے سے درج لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.8) \quad AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 \end{bmatrix}$$

مثال 7.10:  $3 \times 3$  قالب  $A = [a_{jk}]$  اور  $3 \times 4$  قالب  $B = [b_{jk}]$  درج ذیل ہیں۔ مساوات 7.8 سے  $AB$  حاصل کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: یہاں  $a_1 = [1 \ 0 \ 2]$ ،  $a_2 = [2 \ 1 \ 1]$  اور  $a_3 = [3 \ 2 \ 1]$  ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1 b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 4 = 6$$



اسی طرح بقایا ارکان حاصل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 10 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

قالبی ضرب بذریعہ کمپیوٹر

مساوات 7.8 کو ذرہ مختلف طریقے سے لکھتے ہیں۔  $A$  کو جوں کا توں جبکہ  $B$  کو سمتیہ قطار کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(7.9) \quad AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix}$$

متعدد متوازی جڑے کمپیوٹر کو علیحدہ علیحدہ  $b_1, b_2, \dots, b_p$  یا انہیں کئی کئی علیحدہ سمتیہ قطار فراہم کیے جاتے ہیں اور ساتھ ہی تمام کو  $A$  بھی فراہم کیا جاتا ہے۔ یوں قالبی ضرب کے اجزاء  $Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_p$  بہ یک وقت (نسبتاً بہت کم وقت میں) حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 7.11: درج ذیل کو مساوات 7.9 کی مدد سے حل کریں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 7.9 سے قالبی ضرب کے قطار حاصل کرتے ہیں جنہیں ایک ہی قالب میں یکجا کرتے ہوئے درج بالا جواب ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

خطی تبادل اور قابل ضرب

دو متغیرات پر مبنی خطی تبادل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$(7.10) \quad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

جس کو سمتیت کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.11) \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

اب اگر  $x_1x_2$  نظام از خود  $w_1w_2$  پر مبنی ہو یعنی

$$(7.12) \quad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned}$$

یا

$$(7.13) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{bmatrix}$$

تب  $y_1y_2$  نظام بالواسطہ  $w_1w_2$  پر مبنی ہو گا۔ آئیں اس تعلق کو جانیں۔

مساوات 7.10 میں مساوات 7.12 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2 \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$(7.14) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned}$$

ماتا ہے جہاں

$$(7.15) \quad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

لیا گیا ہے۔ اس تعلق کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.16) \quad y = Cw = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{bmatrix}$$

آئیں قلبی ضرب  $AB$  حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ  $C = AB$  ہے۔

$$(7.17) \quad AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = C$$

بڑے جسامت کے قابلوں کے لئے بھی  $C = AB$  بالکل اسی طرح ثابت کیا جاتا ہے۔ یوں  $y$ ،  $x$  اور  $w$  متغیرات کی تعداد بالترتیب  $m$ ،  $n$  اور  $p$  کی صورت میں  $A$ ،  $B$  اور  $C$  قابلوں کی جسامت بالترتیب  $m \times n$ ،  $n \times p$  اور  $m \times p$  ہوگی جہاں  $C = AB$  ہے۔ قلبی ضرب (مساوات 7.5) کی تعریف مساوات 7.17 کی بدولت ہے۔

### 7.2.1 تبدیلی محل

قالب کے صفوں کو بطور قطار (یعنی قطاروں کو بطور صف) لکھ کر تبدیل محل قالب<sup>23</sup> حاصل ہوتا ہے اور اس عمل کو<sup>24</sup> کہتے ہیں۔ سمتیہ کی تبدیلی محل بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔ اس طرح قالب کا صف، تبدیل محل قالب کا قطار ہوگا اور یونہی قالب کا قطار، تبدیل محل قالب کا صف ہوگا۔ چکور قالب کے ارکان کا مرکزی وتر میں "عکس" لینے سے بھی تبدیل محل قالب حاصل ہوگا۔ مرکزی وتر کے دونوں اطراف یکساں مقامات پر ارکان کی آپس میں جگہ تبدیل کرنے سے ان کا "عکس" حاصل ہوگا۔ یوں  $a_{12}$  اور  $a_{21}$  آپس میں جگہ تبدیل کریں گے،  $a_{13}$  اور  $a_{31}$  آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ قالب  $A$  سے حاصل تبدیل محل قالب کو  $A^T$  سے ظاہر کیا جائے گا۔ درج ذیل مثال دیکھیں۔

مثال 7.12: تبدیل محل قالب  
قالب  $A$  کا تبدیل محل  $A^T$  درج ذیل ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

<sup>23</sup>transpose matrix  
<sup>24</sup>transposition

درج بالا کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

چکور قالب اور اس کا تبدیل محل درج ذیل ہیں۔ چکور قالب اور اس کے تبدیل محل قالب میں مرکزی وتر کے ارکان جگہ تبدیل نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل، سمتیہ قطار ہو گا اور یونی سمتیہ قطار کا تبدیل محل، سمتیہ صف ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

تبدیل محل کا تبدیل محل اصل قالب ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

تعریف: قالب اور سمتیہ کا تبدیل محل

$m \times n$  قالب  $A = [a_{jk}]$  کا تبدیل محل  $n \times m$  قالب  $A^T$  ہے جس کا پہلا صف،  $A$  کا پہلا قطار، اس کا دوسرا صف  $A$  کا دوسرا قطار، وغیرہ وغیرہ ہوں گے۔ یوں مساوات 7.2 میں دیے گئے  $A$  کا تبدیل محل  $A^T$  درج ذیل ہو گا۔

$$(7.18) \quad A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل سمتیہ قطار ہو گا جبکہ سمتیہ قطار کا تبدیل محل سمتیہ صف ہو گا۔

بعض اوقات قالب اور بعض اوقات تبدیل محل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ تبدیلی محل کے قواعد درج ذیل ہیں۔

$$(7.19) \quad \begin{aligned} (الف) \quad & (A^T)^T = A \\ (ب) \quad & (A + B)^T = A^T + B^T \\ (پ) \quad & (cA)^T = cA^T \\ (ت) \quad & (AB)^T = B^T A^T \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ مساوات 7.19-ت میں دائیں ہاتھ قابلوں کی ترتیب بائیں ہاتھ کی ترتیب کے الٹ ہے۔ سوال 7.25 میں آپ کو درج بالا تعلقات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 7.13: درج ذیل قالب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.19-ت ثابت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

حل: پہلے مساوات 7.19-ت کا بائیں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ قالبی ضرب  $AB$  لینے کے بعد

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

اس کا تبدیل محل حاصل کرتے ہیں۔

$$(7.20) \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

آئیں اب مساوات 7.19-ت کا دایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ یوں  $B^T$  اور  $A^T$  حاصل کرنے کے بعد

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ان کا قالبی ضرب لیتے ہیں۔

$$(7.21) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

چونکہ  $a_{11}b_{11} = b_{11}a_{11}$ ،  $a_{12}b_{21} = b_{21}a_{12}$ ، ... ہیں لہذا مساوات 7.20 اور مساوات 7.21 کے دائیں ہاتھ آپس میں برابر ہیں لہذا ان کے بائیں ہاتھ بھی آپس میں برابر ہوں گے۔ اس طرح مساوات 7.19-ت ثابت ہوا۔

### مخصوص قالب

چند اقسام کے قالب عملی استعمال کے لحاظ سے زیادہ اہم ہیں۔ ان پر غور کرتے ہیں۔

### تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب

ایسا چکور قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے برابر  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  ہو تشاکلی<sup>25</sup> قالب کہلاتا ہے۔ ایسا قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے نفی کے برابر  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$  ہو منحرف تشاکلی<sup>26</sup> قالب کہلاتا ہے۔

$$(7.22) \quad \begin{array}{ll} \text{تشاکلی} & \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad (a_{jk} = a_{kj}) \\ \text{منحرف تشاکلی} & \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, \quad (a_{jk} = -a_{kj} \text{ اور } a_{jj} = 0) \end{array}$$

<sup>25</sup>symmetric  
<sup>26</sup>skew-symmetric

مثال 7.14: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب

$$\text{تشاکلی } A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{منحرف تشاکلی } B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

تکوئی قالب

بالائی تکوئی قالب<sup>27</sup> اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور اس سے بالائی جانب پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر سے نیچے کی طرف تمام ارکان صفر ہوں۔ اسی طرح نچلا تکوئی قالب<sup>28</sup> اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے نیچے پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر کے بالائی جانب تمام ارکان صفر کے برابر ہوں۔

مثال 7.15: بالائی تکوئی اور نچلا تکوئی قالب

$$\text{بالائی تکوئی قالب } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{نچلا تکوئی قالب } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

upper triangular matrix<sup>27</sup>  
lower triangular matrix<sup>28</sup>

## وتری قلب

ایسا چکور قلب جس میں غیر صفر ارکان صرف مرکزی وتر پر پائے جاتے ہوں وتری قلب<sup>29</sup> کہلاتا ہے۔ مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر ہوں گے۔

اگر وتری قلب  $S$  کے تمام ارکان یکساں، مثلاً  $c$  کے برابر ہوں، تب  $S$  غیر سمی قلب<sup>30</sup> کہلائے گا۔ کسی بھی چکور قلب  $A$  جس کی جسامت  $S$  کی جسامت کے برابر ہو، کا  $S$  کے ساتھ قلبی ضرب کا حاصل، غیر سمی مقدار  $c$  اور  $A$  کے حاصل ضرب کے برابر ہوگا۔

$$(7.23) \quad AS = SA = cA$$

ایسا غیر سمی قلب جس کے ارکان اکائی (1) کے برابر ہوں اکائی قلب<sup>31</sup> کہلاتا ہے جسے  $I_n$  یا  $I$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اکائی قلب کی صورت میں درج بالا مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(7.24) \quad AI = IA = A$$

مثال 7.16: وتری قلب  $D$ ، غیر سمی قلب  $S$  اور اکائی قلب  $I$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 7.17: کارخانے کے اخراجات

ایک کارخانے میں تین اقسام کے کھلونے (الف، ب اور پ) تیار ہوتے ہیں۔ ایک کھلونا تیار کرنے کے اخراجات

<sup>29</sup>diagonal matrix  
<sup>30</sup>scalar matrix  
<sup>31</sup>unit matrix



قالب  $A$  میں دیے گئے ہیں۔ قالب  $B$  ایک ہفتے کی پیداوار دیتا ہے۔ جمع اور جمع رات کے دن تعطیل ہوتی ہے۔ ایسا قالب  $C$  حاصل کریں جو اس ایک ہفتے میں پیدا کیے گئے کھلونوں پر خرچ اخراجات پیش کرے۔

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 50 \\ 15 & 12 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{پ} \\ \text{ب} \\ \text{الف} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 2.0 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ہفتہ} \\ \text{اتوار} \\ \text{پیر} \\ \text{منگل} \\ \text{بدھ} \end{matrix} \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{matrix}$$

حل:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2840.0 & 3865.0 & 2480.0 & 4065.0 & 4265.0 \\ 227.0 & 305.4 & 202.6 & 321.2 & 335.4 \\ 74.6 & 100.6 & 66.2 & 105.6 & 110.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{matrix}$$

### سوالات

سوال 7.12: چکور قالب ایسا چکور قالب جو تشاکلی اور منحرف تشاکلی ہو کی صورت کیا ہو گا۔

حل: صفر قالب

سوال 7.13 تا سوال 7.25 میں درج ذیل قالب استعمال کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.13:  $A^T, B^T, a^T, b^T$

$$A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad a^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.14:  $AB, BA$

$$AB = \begin{bmatrix} -17 & -14 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 20 \\ 12 & -9 & -18 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.15:  $(AB)^T, B^T A^T, A^T B^T$

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -6 \\ -14 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad A^T B^T = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 20 & -18 & 10 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.16:  $AA^T, A^2$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 29 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 13 \\ 20 & 13 & 38 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 17 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 22 & 39 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.17:  $BB^T, B^2$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 25 & -16 & 0 \\ -16 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ -8 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.18:  $CC^T, BC$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad BC = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -13 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.19:  $2A - 3B, (2A - 3B)^T, 2A^T - 3B^T$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} -15 & -8 & 8 \\ 12 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2A - 3B)^T = 2A^T - 3B^T = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.20:  $Ba, Ba^T, Bb, Bb^T$

$$Ba = Ba^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Bb^T = Bb = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.21:  $Aa, Aa^T, Ab, Ab^T$

جوابات:  $Aa = Aa^T = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, Ab = Ab^T = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

سوال 7.22:  $(Ab)^T, b^T A^T$

جوابات:  $(Ab)^T = b^T A^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

سوال 7.23:  $ABC, ABa, ABb$

جوابات:  $\begin{bmatrix} -49 & -36 \\ -5 & -6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -75 \\ -15 \\ -11 \end{bmatrix}$

سوال 7.24:  $ab, ba, aB, Bb$

جوابات:  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}, [-1]$

سوال 7.25:  $a + b, a^T + b, a + b^T$

جوابات:  $a + b$  ممکن نہیں ہے اور  $a + b^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, a^T + b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

سوال 7.26:  $AB$  کو سوال 7.13 میں حاصل کیا گیا ہے۔ اسی کو دوبارہ  $A$  کے قطار اور  $B$  کے صف استعمال کرتے ہوئے دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 7.27: مساوات 7.19 کو عمومی  $2 \times 2$  قالب کے لئے ثابت کریں۔

سوال 7.28: قانون تبادلہ

ایسا  $2 \times 2$  قالب  $B$  دریافت کریں کہ  $AB = BA$  ہو جہاں  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ہے۔

جواب:  $B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

سوال 7.29: ثابت کریں کہ کسی بھی چکور قالب  $C$  کے لئے  $C + C^T$  تشاکلی ہے جبکہ  $C - C^T$  منحرف تشاکلی ہیں۔

سوال 7.30: درج بالا سوال کے تحت  $T = C + C^T$  اور  $M = C - C^T$  لکھا جاسکتا ہے جہاں  $T$  تشاکلی اور  $M$  منحرف تشاکلی قالب ہیں۔ سوال 7.13 تا سوال 7.25 میں استعمال کیے گئے  $A$  کو تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ ان قالبوں کو دریافت کریں۔

$$T = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.31: ثابت کریں کہ تشاکلی  $A$  اور تشاکلی  $B$  کا قالمی ضرب  $AB$  اس صورت تشاکلی ہوگا جب  $A$  اور  $B$  آپس میں (ضرب میں) قابل تبادل ہوں یعنی جب  $AB = BA$  ہو۔

$$\text{جواب: } AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

سوال 7.32: کن صورتوں میں منحرف تشاکلی قالبوں کا قالمی ضرب منحرف تشاکلی قالب دیگا؟

$$\text{جواب: } AB = -BA$$



- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.