

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیاچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
40	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
70	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
74	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
81	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
81	2.1	متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
98	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
113	2.3	تفرقی عامل
118	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
133	2.5	پولر کوئی مساوات
142	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
151	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
162	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
169	2.8.1	برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک
173	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
184	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

191	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
191	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
202	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
211	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
214	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
223	4	نظام تفرقی مساوات
224	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
233	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
247	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
248	4.3.1	خطی نظام
252	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
269	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
278	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
287	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
295	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
296	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
305	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
306	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
321	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
339	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
344	5.3.1	عملی استعمال
358	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
373	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
379	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
385	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
393	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
403	6	لاپلاس متبادلہ
404	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
413	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
425	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
446	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
464	6.5	الچھاؤ
473	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
481	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

489	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
493	7	خطی الجبرا: سمتیات
493	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
495	7.2	سمتیہ کے اجزاء
501	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
509	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
515	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
528	7.6	اندرونی ضرب فضا
530	7.7	سمتی ضرب
533	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
544	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
553	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
554	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
564	8.2	قابلی ضرب
570	8.2.1	تبدیلی محل
583	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
596	8.3.1	صف زینہ دار صورت
604	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
618	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
624	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
627	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
643	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
658	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
675	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
676	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
686	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
694	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
701	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
715	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
727	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
727	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
730	10.2	سمتی علم الاحصاء
736	10.3	منحنی
742	10.4	لبائی قوس
749	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
755	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

761 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
768 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
780 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
786 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
793 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
799	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء۔ تکمیل کے مسئلے
800 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
805 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
814 . . . . .	11.3	دوہرہ تکمیل
827 . . . . .	11.4	دوہرہ تکمیل سے خطی تکمیل کا حصول
829		اضافی ثبوت
833		ب مفید معلومات
833 . . . . .	1.	ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 11

### سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے

تکمل سے آپ بخوبی واقف ہیں جس کو سمتی تکملی علم الاحصاء<sup>1</sup> وسعت دیتا ہے۔ یوں منحنی پر تکمل، جسے خطی تکمل<sup>2</sup> کہتے ہیں، سطح پر تکمل جسے سطحی تکمل<sup>3</sup> کہتے ہیں اور حجم پر تکمل جسے حجمی تکمل<sup>4</sup> کہتے ہیں، حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مزید ایک قسم کی تکمل کا دوسری قسم کی تکمل میں تبادلہ کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے بعض اوقات نسبتاً آسان تکمل حاصل ہوتا ہے۔ یوں سطح میں مسئلہ گرین<sup>5</sup> کی مدد سے خطی تکمل کو دو درجی تکمل میں یا دو درجی تکمل کو خطی تکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ گاوسی مسئلہ ارتکاز<sup>6</sup> کی مدد سے حجمی تکمل کو سطحی تکمل یا سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ مسئلہ سٹوکس<sup>7</sup> کی مدد سے تین درجی تکمل کو خطی تکمل یا خطی تکمل کو تین درجی تکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

سمتی تکملی الاحصاء کا انجینئری، طبیعیات، ٹھوس میکانیات، سیالی میکانیات اور دیگر میدان میں اہم کردار پایا جاتا ہے۔

---

vector calculus<sup>1</sup>

line integral<sup>2</sup>

surface integral<sup>3</sup>

volume integral<sup>4</sup>

Green's theorem<sup>5</sup>

Gauss's convergence theorem<sup>6</sup>

Stoke's theorem<sup>7</sup>

## 11.1 خطی تکمیل

درج ذیل تفاعل  $f$  کی  $x$  محور پر  $x = a$  تا  $x = b$  قطعی تکمیل ہے

$$(11.1) \quad \int_a^b f(x) dx$$

جہاں وقفہ  $a$  اور  $b$  کے درمیان ہر نقطے پر  $f$  معین ہے۔ خطی تکمیل میں  $f$  کا تکمیل سطح میں (یا فضا میں) منحنی  $C$  پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں  $C$  کے ہر نقطے پر  $f$  معین ہے۔

خطی تکمیل کی تعریف عین قطعی تکمیل کی تعریف کی مانند ہے۔ خطی تکمیل کچھ یوں ہے۔

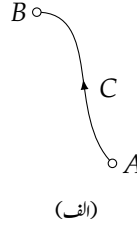
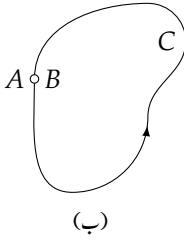
ہم فضا میں منحنی  $C$  لیتے ہیں اور اس پر ایک رخ کو مثبت سمت کہتے ہیں۔ یوں منحنی پر الٹ چلتے ہوئے منفی سمت حاصل ہوگی۔ مثبت سمت میں چلتے ہوئے منحنی پر ابتدائی نقطے کو  $A$  اور اختتامی نقطے کو  $B$  کہتے ہیں۔ جیسا شکل 11.1-ب میں دکھایا گیا ہے ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ ہم مقام ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں  $C$  بند راہ کہلاتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $C$  سادہ منحنی (حصہ 10.3) ہے جس کو

$$(11.2) \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad (a \leq s \leq b)$$

ظاہر کرتی ہے [جہاں  $s$  منحنی کی لمبائی قوس ہے (حصہ 10.4)] اور پورے  $C$  پر  $\mathbf{r}(s)$  استمراری ہے جس کا (پورے  $C$  پر) تفرق  $\mathbf{r}'$  موجود ہے اور یہ تفرق غیر صفر سمتیہ ہے۔ اس طرح  $C$  بھوار منحنی<sup>8</sup> کہلائے گی یعنی  $C$  کے ہر نقطے پر  $C$  کا منفرد مماس پایا جاتا ہے اور منحنی پر چلنے سے مماس کی سمت میں تبدیلی استمراری ہوتی ہے۔

فرض کریں کہ  $f(x, y, z)$  متغیر  $s$  کا ایسا استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم)  $C$  کے ہر نقطے پر معین ہے۔ ہم  $C$  کو بے قاعدہ طریقے سے  $n$  عدد ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.2)۔ یوں ہر ٹکڑے کی لمبائی مختلف ہو سکتی ہے۔ ہم ابتدائی سر سے شروع کرتے ہوئے ان ٹکڑوں کے سروں کو  $P_0 (= A)$ ،  $P_1$ ،  $P_2$ ، ...،  $P_n (= B)$  سے اور  $s$  کی مطابقتی قیمتوں کو

$$s_0 (= a) < s_1 < s_2 < \dots < s_n (= b)$$



شکل 11.1: سمت بند منحنی

سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم ہر ٹکڑے پر بے قاعدگی سے کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً  $P_0$  اور  $P_1$  کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ  $Q_1$  چنتے ہیں،  $P_1$  اور  $P_2$  کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ  $Q_2$  چنتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ یوں ہر ٹکڑے پر نقطہ باقی ٹکڑوں پر نقطوں سے ضروری نہیں کہ کوئی مشابہت رکھتا ہو۔ ان نقطوں پر  $f$  کی قیمتوں کو لیتے ہوئے ہم مجموعہ

$$(11.3) \quad J_n = \sum_{m=1}^n f(x_m, y_m, z_m) \Delta s_m$$

لیتے ہیں جہاں  $x_m, y_m, z_m$  نقطہ  $Q_m$  کے محدد ہیں اور  $\Delta s_m$  اس ٹکڑے کی لمبائی ہے جس پر  $Q_m$  واقع ہے۔

$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}$$

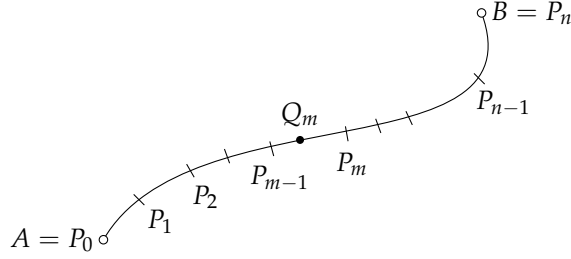
ہم اس طرح کے مجموعے مکمل بے قاعدگی سے  $n = 2, 3, \dots$  کے لئے یوں حاصل کرتے ہیں کہ جیسے جیسے  $n$  کی قیمت لامتناہی تک پہنچے،  $\Delta s$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں مجموعوں کا تسلسل  $J_2, J_3, \dots$  ملتا ہے۔ اس تسلسل کی حد کو  $C$  پر  $A$  تا  $B$  تفاعل  $f$  کی خطی تکمیل<sup>9</sup> کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z) ds$$

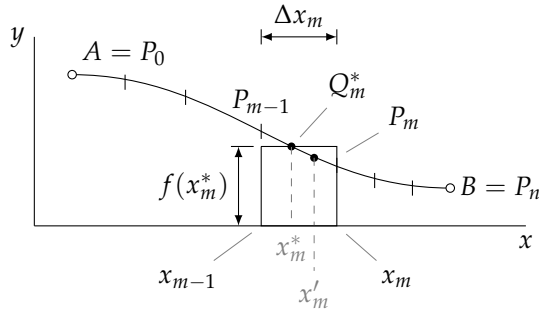
منحنی  $C$  کو تکمیل کی راہ کہتے ہیں جبکہ  $f(x, y, z)$  کو متکمل<sup>10</sup> کہتے ہیں۔

چونکہ  $f$  کو استمراری فرض کیا گیا اور  $C$  ہموار ہے لہذا یہ حد موجود ہو گا جس کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کی چناؤ کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔  $C$  پر کسی بھی نقطہ  $P$  کا تعین لمبائی قوس  $s$  سے کیا جاتا ہے۔ یوں

line integral<sup>9</sup>  
integrand<sup>10</sup>



شکل 11.2: C کی ٹکڑوں میں تقسیم



شکل 11.3: رقبہ اور عمل (مثال 11.1)

A اور B کا تعین مطابقتی  $s = a$  اور  $s = b$  سے کیا جائے گا لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(11.4) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds$$

جو قطعی تکمیل ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمیل بھی تسلسل  $J_2, J_3, \dots$  کی حد کو کہتے ہیں جس کی قیمت پر نا تو ٹکڑوں کی تقسیم اور نا ہی ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر پایا جاتا ہے۔ مثال 11.1 میں مزید تفصیل دی گئی ہے۔

مثال 11.1: تکمیل کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کے چناؤ کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے  
 آئیں دیکھتے ہیں کہ تکمیل کی قیمت پر راہ کی ٹکڑوں میں تقسیم اور ان ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر کیوں نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 11.3 میں تفاعل  $y = f(x)$  دکھایا گیا ہے جس کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ ان نقطوں کے درمیان تفاعل کو بے قاعدہ ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ وقفہ  $P_{m-1}$  تا  $P_m$  کے مابین تفاعل

کے نیچے چھوٹا رقبہ  $\Delta S_m$  ہے۔ شکل 11.3 میں ایک مستطیل دکھایا گیا ہے جو نقطہ  $Q_m^*$  سے گزرتا ہے۔  $Q_m^*$  یوں چنا گیا ہے کہ مستطیل کا رقبہ عین  $\Delta S_m$  کے برابر ہو۔

$$\Delta S_m = f(x_m^*)\Delta x_m \quad (\Delta x_m = x_m - x_{m-1})$$

اس وقفے پر بغیر کسی قاعدہ دوسرا نقطہ  $Q_m$  بھی چنا گیا ہے۔ اس نقطے سے گزرتی مستطیل کا رقبہ  $f(x'_m)\Delta x_m$  ہو گا جہاں  $Q_m$  کا  $x$  محدود  $x'_m$  ہے۔

اب استمراری تفاعل سے مراد یہ ہے کہ ہم کسی بھی نقطہ پر  $\Delta x$  اتنی کم لے سکتے ہیں کہ  $\Delta x$  وقفے پر تفاعل میں کل تبدیلی زیادہ سے زیادہ  $\epsilon$  ہو جہاں  $\epsilon$  جتنی بھی چھوٹی قیمت کیوں نہ ہو۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$|f(x'_m) - f(x_m^*)| \leq \epsilon$$

جس کو

$$f(x'_m) = f_m^* + t\epsilon \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $t$  ایسا متغیر ہے جس کی قیمت منفی اکائی سے مثبت اکائی تک ممکن ہے۔ یوں  $Q'_m$  سے گزرتی مستطیل کا رقبہ

$$f(x'_m)\Delta x_m = (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m$$

ہو گا۔ یہ رقبہ اس صورت کم سے کم ہو گا جب  $t = -1$  ہو اور اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب  $t = 1$  ہو۔ ان دونوں صورتوں میں مستطیل کا رقبہ اصل تفاعل کے نیچے رقبے سے مختلف ہو گا۔ تمام ٹکڑوں پر بے قاعدگی سے نقطے چنتے ہوئے تمام مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^n (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{m=1}^n f_m^*\Delta x_m + \epsilon \sum_{m=1}^n t\Delta x_m$$

اب چونکہ  $|t| \leq 1$  ہے لہذا دائیں جانب مجموعے کے اندر قیمت کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت  $t = 1$  پر حاصل ہو گی۔ (حقیقت میں چونکہ ضروری نہیں ہے کہ  $t$  کی قیمت ہر مرتبہ اکائی ہی ہو لہذا اس مجموعے کی قیمت  $b - a$  سے کم ہو گی۔) اب چونکہ  $\epsilon$  کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں لہذا ہم اسے اتنا کم رکھتے ہیں کہ  $\epsilon(b - a)$  قابل نظر انداز ہو۔ درج بالا میں پہلا مجموعہ ان مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ ہے جن کا رقبہ عین تفاعل کے نیچے رقبے کے برابر رکھا گیا تھا لہذا  $\Delta x_m$  کی ہر قیمت پر یہ مجموعہ اصل رقبے کے برابر ہی ہو گا۔ یوں درج بالا سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{m=1}^n (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{i=m}^n f_m^*\Delta x_m$$

جو  $x = a$  تا  $x = b$  تقابل کے نیچے کل رقبہ ہے۔

یوں آپ نے دیکھا کہ ہر ٹکڑے پر  $Q_m$  بالکل بے قاعدگی سے چلتے ہوئے تقابل کے نیچے اصل رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

□

عمومی مفروضہ

اس کتاب میں فرض کیا جائے گا کہ خطی تکمل کی ہر راہ ٹکڑوں میں بھوار<sup>11</sup> ہے، یعنی کہ راہ کو محدود تعداد کی ہموار ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

بدن راہ پر خطی تکمل کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

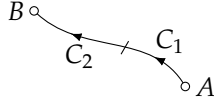
$$\oint_C \quad \left( \int_C \text{ کی جگہ} \right)$$

خطی تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے کہ قطعی تکمل کی درج ذیل جانی پہچانی خصوصیات خطی تکمل کے لئے بھی درست ہیں

$$\begin{aligned} (الف) \quad \int_C k f \, ds &= k \int_C f \, ds \quad (k \text{ مستقل}) \\ (ب) \quad \int_C (f + g) \, ds &= \int_C f \, ds + \int_C g \, ds \\ (پ) \quad \int_C f \, ds &= \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds \end{aligned} \quad (11.5)$$

جہاں مساوات 11.5-پ میں راہ  $C$  کو دو ٹکڑوں  $C_1$  اور  $C_2$  میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ان ٹکڑوں کی سمت بندی عین  $C$  کی طرح ہے (شکل 11.4)۔ راہ پر تکمل لیتے ہوئے دائری سمت تبدیل کرنے سے حاصل قیمت 1- سے ضرب ہوگی۔

<sup>11</sup> piecewise smooth



شکل 11.4: تکمل کی راہ کو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

## 11.2 خطی تکمل کا حل

خطی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے اس کو حل کیا جاتا ہے۔ ایسا تکمل کی راہ  $C$  کی روپ کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ آپس اس عمل کو دیکھتے ہیں۔

اگر  $C$  کی روپ

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad a \leq s \leq b$$

ہو (جہاں  $s$  راہ  $C$  کی لمبائی قوس ہے) تب ہم مساوات 11.4 کی مدد سے درج ذیل استعمال کرتے ہیں۔

$$(11.6) \quad \int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] \, ds$$

اگر  $C$  کی روپ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

ہو (جہاں  $t$  کوئی مقدار معلوم ہے) تب ہم

$$(11.7) \quad \int_C f(x, y, z) \, ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} \, dt$$

استعمال کرتے ہیں جہاں مساوات 10.31 سے

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

ہے اور گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی فرض کیا گیا ہے کہ  $\mathbf{r}(t)$  اور  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  دونوں استمراری ہیں اور  $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$  ہے۔



آئیں مساوات 11.7 حاصل کرتے ہیں۔ ہم  $r$  کی جگہ

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t)\vec{i} + \vec{y}(t)\vec{j} + \vec{z}(t)\vec{k}$$

لکھ کر قوس لمبائی  $s(t)$  حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد  $r(s(t)) = \vec{r}(t)$  یعنی  $x(s(t)) = \vec{x}(t)$  ،  
وغیرہ لکھ کر مساوات 11.6 کے دائیں ہاتھ میں قطعی تکمل کے قاعدے کے تحت

$$\int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds = \int_{t_0}^{t_1} f[\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t)] \frac{ds}{dt} dt$$

حاصل کرتے ہیں جو (استعمال کی گئی علامتوں میں تبدیل کے علاوہ) عین مساوات 11.7 ہے۔

چونکہ عموماً  $r(t)$  معلوم یا قابل معلوم ہو گا لہذا مساوات 11.7 عملی مسائل کی تقریباً تمام صورتوں کو حل کر پاتا ہے۔

مثال 11.2: برائے مساوات 11.6  
تفاعل  $f(x, y) = x^3 y$  کا شکل 11.5 میں دکھائی گئی گول قوس

$$r(s) = \cos s \vec{i} + \sin s \vec{j} \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$$

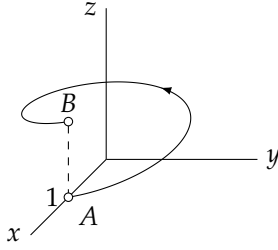
پر تکمل حاصل کریں۔

حل: چونکہ  $x(s) = \cos s$  اور  $y(s) = \sin s$  ہیں لہذا مساوات 11.5 سے درج ذیل ملتا ہے۔

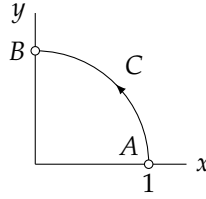
$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \int_C x^3 y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 s \sin s ds \\ &= \int_1^0 -u^3 du = \frac{1}{4} \quad (u = \sin s) \end{aligned}$$

□

مثال 11.3: برائے مساوات 11.7  
 $xy$  مستوی میں نقطہ  $A : (-1, 1, 0)$  سے نقطہ  $B : (1, 5, 0)$  تک راہ  $y = 2x + 3$  پر  $\int_C x^2 y ds$  کی قیمت دریافت کریں۔



(ب) فضائیں خطی مکمل کی راہ (مثال 11.4)



(الف) سطح میں مکمل کی راہ (مثال 11.2)

شکل 11.5: سطح میں راہ اور فضائیں راہ۔

حل: ہم C کو درج ذیل مقدار معلوم روپ<sup>12</sup> میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t + 3)\mathbf{j} \quad -1 \leq t \leq 1$$

یوں

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{5}$$

ہو گا۔ راہ پر رہتے ہوئے  $x^2y = t^2(2t + 3) = 2t^3 + 3t^2$  ہو گا لہذا مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C x^2y \, ds = \sqrt{5} \int_{-1}^1 (2t^3 + 3t^2) \, dt = 2\sqrt{5}$$

□

مثال 11.4: فضائیں راہ پر خطی مکمل

پتچ دار راہ کو شکل 11.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر  $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, ds$  دریافت کریں۔

حل: پتچ دار راہ کی مساوات

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

<sup>12</sup> ظاہر ہے کہ ہم  $t = x$  لیتے ہوئے راہ کو  $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + (2x + 3)\mathbf{j}$  بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ہے لہذا

$$\dot{\mathbf{r}} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{2}$$

ہو گا۔ اس راہ پر چلتے ہوئے

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^2 = (1 + t^2)^2$$

ہو گا اور یوں مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 ds &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)^2 dt \\ &= \sqrt{2} \left[ \frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{2(2\pi)^3}{3} + 2\pi \right] \approx 3013 \end{aligned}$$

□

ایسا خطی تکمل جس کا متکمل تجربی تفاعل ہو یا جو پیچیدہ قطعی تکمل دیتا ہو کو تکمل کے اعدادی طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔

کئی معاملوں میں خطی تکمل کے متکمل درج ذیل روپ رکھتے ہیں

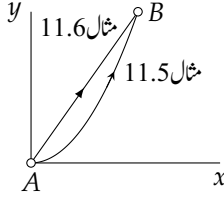
$$(11.8) \quad g(x, y, z) \frac{dx}{ds}, \quad g(x, y, z) \frac{dy}{ds}, \quad g(x, y, z) \frac{dz}{ds}$$

جہاں  $\frac{dx}{ds}$ ،  $\frac{dy}{ds}$  اور  $\frac{dz}{ds}$  تکمل کی راہ کی مقدار معلوم روپ میں موجود تفاعل کے تفرق ہیں۔ ایسی صورت میں ہم

$$(11.9) \quad \int_C g(x, y, z) \frac{dx}{ds} ds = \int_C g(x, y, z) dx$$

لکھتے ہیں۔ باقی دو صورتوں کے لئے بھی ایسا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی راہ C پر ان طرز کے تکمل کے مجموعے کو درج ذیل سادہ صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$(11.10) \quad \int_C f dx + \int_C g dy + \int_C h dz = \int_C (f dx + g dy + h dz)$$



شکل 11.6: مکمل کے دو مختلف راہ (مثال 11.5 اور مثال 11.6)

راہ C کی روپ استعمال کرتے ہوئے تین میں سے دو آزاد متغیرات کو حذف کرتے ہوئے حاصل قطعی مکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ تیسرا آزاد متغیر اس قطعی مکمل کا متغیر ہو گا۔

مثال 11.5: برائے مساوات 11.9 اور مساوات 11.10  
خطی مکمل  $\int_C [x^2 y^2 dx + (x - y + z) dy + xz dz]$  کی قیمت دریافت کریں۔ مکمل کی راہ سطح  $z = 5$  میں قوس مکانی  $y = x^2$  میں نقطہ  $A : (0, 0, 5)$  تا نقطہ  $B : (1, 1, 5)$  ہے (شکل 11.6-الف)۔

حل: چونکہ  $y = x^2$  ہے لہذا  $\frac{dy}{dx} = 2x$  یا  $dy = 2x dx$  ہو گا۔ چونکہ  $z = 5$  غیر متغیر ہے لہذا مکمل کے آخری جزو کا مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^1 [x^2 x^4 dx + (x - x^2 + 5)2x dx] = \int_0^1 (x^6 - 2x^3 + 2x^2 + 10x) dx = \frac{223}{42} \approx 5.31$$

□

مثال 11.6: درج بالا مثال کے مکمل کو انہیں دو نقطوں کے درمیان سطح  $z = 5$  میں راہ  $y = x$  پر حاصل کریں (شکل 11.6-ب)۔

حل: اب  $dy = dx$  ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 [x^2 x^2 dx + (x - x + 5)x dx] = \int_0^1 (x^4 + 5) dx = \frac{26}{5} = 5.2$$

□

مثال 11.5 اور مثال 11.6 میں ایک جیسے مکمل، ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ پائے گئے البتہ ان مثالوں میں راہ مختلف تھی۔ کمل کے جوابات بھی مختلف تھے۔ اس نتیجے کے مطابق کمل کی قیمت ابتدائی نقطہ، اختتامی نقطہ اور مکمل کے علاوہ راہ پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ اس بنیادی حقیقت پر مزید غور اسی باب میں کیا جائے گا۔

بعض اوقات مساوات 11.10 کے  $f$ ،  $g$ ،  $h$  سمتیہ  $v$  کے ارکان  $v_1$ ،  $v_2$ ،  $v_3$  ہوں گے

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k = f i + g j + h k$$

لہذا

$$v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = \left( v_1 \frac{dx}{ds} + v_2 \frac{dy}{ds} + v_3 \frac{dz}{ds} \right) ds$$

ہو گا جہاں قوسین میں بند حصہ سمتیہ  $v$  اور اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k \quad (\text{حصہ 10.5 دیکھیں})$$

کا اندرونی ضرب ہے۔  $r$  کمل کی راہ  $C$  ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$(11.11) \quad \int_C (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = \int -Cv \cdot \frac{dr}{ds} ds$$

جس کو عموماً

$$\int_C v \cdot \frac{dr}{ds} ds = \int_C v \cdot dr$$

لکھا جاتا ہے جہاں

$$(11.12) \quad dr = dx i + dy j + dz k$$

ہے۔

مثال 11.7: قوت اور کام  
ایک ذرہ پر متغیر قوت  $f$  عمل کرتی ہے جو ذرے کو راہ  $C$  پر ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک منتقل کرتی ہے۔ اس قوت سے سرزد کام<sup>13</sup> درج ذیل خطی کمل دیتی ہے

$$(11.13) \quad W = \int_C f \cdot dr$$

جہاں تکمل کو راہ پر منتقلی کی سمت میں حاصل کیا جاتا ہے۔ مثال 7.7 میں کام کی تعریف اور تکمل کی تعریف بطور مجموعہ استعمال کرتے ہوئے درج بالا خطی تکمل لکھا گیا ہے۔

ہم وقت  $t$  کو تکمل کا متغیر چنتے ہیں۔ یوں

$$dr = \frac{dr}{dt} dt = dv dt$$

ہو گا جہاں  $v$  سمتی رفتار سمتیہ ہے۔ یوں مساوات 11.13 درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.14) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt$$

جہاں ابتدائی لمحہ  $t_0$  اور اختتامی لمحہ  $t_1$  ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت

$$(11.15) \quad \mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}}$$

ہو گا لہذا مساوات 11.14 سے درج ذیل ملتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) dt = \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \Big|_{t_0}^{t_1}$$

جس کے تحت ذرے کی میکانی توانائی میں اضافہ عین کام کے برابر ہے۔ یہ میکانات کا بنیادی قاعدہ ہے۔

□

### سوالات

11.1 سوال 11.8 میں دریافت کریں۔  
راہ کی مثبت سمت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے کی رخ رکھتے ہوئے  $\int_C (x^2 + y^2) ds$  کی قیمت سوال 11.1

سوال 11.1: سیدھے خط  $y = -4x$  پر نقطہ  $(0,0)$  تا نقطہ  $(1,-4)$  -

جواب:  $\frac{17\sqrt{17}}{3}$

سوال 11.2: سیدھے خط  $y = 3x$  پر نقطہ  $(0,0)$  تا نقطہ  $(2,6)$  -

جواب:  $\frac{80\sqrt{10}}{3}$

سوال 11.3: سیدھے خط پر نقطہ  $(1,2)$  تا نقطہ  $(3,0)$  -

جواب:  $\frac{34\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.4: سیدھے خط پر نقطہ  $(3,0)$  تا نقطہ  $(1,2)$  -

جواب:  $-\frac{34\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.5: گھڑی کی الٹ رخ دائرہ  $x^2 + y^2 = 9$  پر نقطہ  $(3,0)$  تا نقطہ  $(0,3)$  -

جواب:  $\frac{27\pi}{2}$

سوال 11.6:  $x$  محور پر  $(0,0)$  تا  $(2,0)$  اور یہاں سے  $y$  محور کے متوازی  $(2,2)$  تک۔

جواب:  $\frac{40}{3}$

سوال 11.7:  $y$  محور پر  $(0,0)$  تا  $(0,2)$  اور یہاں سے  $x$  محور کے متوازی  $(2,2)$  تک۔

جواب:  $\frac{40}{3}$

سوال 11.8: نقطہ  $(0,0)$  سے سیدھے خط پر نقطہ  $(2,2)$  تک۔

جواب:  $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.9: کمل  $\int_C (x+z)y \, ds$  کی قیمت کو دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  ،  $z = 2$  پر نقطہ  $(0,0,2)$  تا نقطہ  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$  دریافت کریں (گھڑی کی الٹ رخ)۔

جواب:  $\frac{9}{4} - \sqrt{2}$

تکمیل  $\int_C (3y^2 dx - x^2 dy)$  کی قیمت کو سوال 11.10 تا سوال 11.12 میں دیے راہ پر دریافت کریں۔

سوال 11.10: سیدھے خط پر نقطہ  $(0,1)$  تا نقطہ  $(1,0)$  -

جواب:  $\frac{4}{3}$

سوال 11.11: قوس مکانی  $y = x^2$  پر نقطہ  $(0,0)$  تا نقطہ  $(1,1)$  -

جواب:  $\frac{1}{10}$

سوال 11.12: دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  پر گھڑی کی الٹ رخ نقطہ  $(1,0)$  تا نقطہ  $(1,1)$  -

جواب:  $-\frac{8}{3}$

سوال 11.13 تا سوال 11.18 میں دی گئی راہ پر قوت  $f = 2xi + zj - yk$  کا کام دریافت کریں۔

سوال 11.13:  $x$  محور پر  $(0,0,0)$  تا  $(1,0,0)$  -

جواب: 1

سوال 11.14:  $z = 2$  سطح میں  $y$  محور پر  $(0,0,2)$  تا  $(0,1,2)$  -

جواب: 2

سوال 11.15: سطح مکانی  $y = x^2$  ،  $z = 1$  پر  $(0,0,1)$  تا  $(1,1,1)$  -

جواب: 2

سوال 11.16: سطح مکانی  $y = z^4$  ،  $x = 2$  پر  $(0,2,0)$  تا  $(1,2,1)$  -

جواب:  $\frac{3}{5}$

سوال 11.17: سیدھے خط  $y = x$  ،  $z = 2x$  پر  $(0,0,0)$  تا  $(1,1,2)$  -



جواب: 1

سوال 11.18: سیدھے خط  $z = 2x^3$  ،  $y = x^2$  پر  $(0,0,0)$  تا  $(1,1,2)$  -جواب:  $\frac{3}{5}$ 

سوال 11.19: مان لیں کہ قوس  $C$  کے تمام نقطوں پر  $p$  معین ہے اور کہ  $|p|$  محدود ہے یعنی  $C$  پر  $|p| < M$  ہے جہاں  $M$  کوئی مثبت عدد ہے۔ ثابت کریں کہ

$$(11.16) \quad \left| \int_C p \cdot dr \right| < Ml$$

ہو گا جہاں  $C$  کی لمبائی  $l$  ہے۔

جواب: اندرونی ضرب کے تحت  $p \cdot dr = |p| |dr| \cos \theta$  ہو گا۔ چونکہ  $|p| < M$  ہے اور  $\cos \theta \leq 1$  ہے لہذا  $|p| \cos \theta < M$  ہو گا۔ خطی تکمیل کی تعریف مساوات 11.3 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $|dr| = \Delta s$  لکھی گئی ہے۔

$$J_n = \sum_{m=1}^n |p| \cos \theta \Delta s_m < \sum_{m=1}^n M \Delta s_m = M \sum_{m=1}^n \Delta s_m = Ml$$

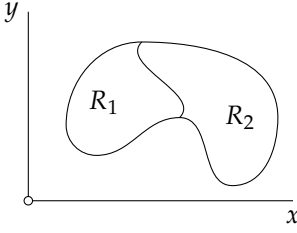
### 11.3 دوہرا تکمیل

وقفہ  $a \leq x \leq b$  کے ہر نقطے پر معین تفاعل  $f(x)$  کا  $x$  محور پر  $a$  تا  $b$  قطعی تکمیل

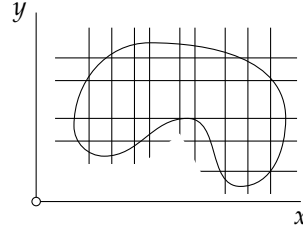
$$\int_a^b f(x) dx$$

لکھا جاتا ہے۔ دوہرا تکمیل کی صورت میں  $xy$  سطح میں بند محدود خطہ  $R$  کے ہر نقطے پر معین تفاعل  $f(x, y)$  متکامل ہو گا۔

<sup>14</sup> "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو معقول وسعت کے دائرے میں گھیرا جاسکتا ہے۔



(ب) خطے کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔



(الف) R کے متعدد ٹکڑے

شکل 11.7: دوہرا تکمیل کی تعریف اور خواص

دوہرا تکمیل کی تعریف قطعی تکمیل کی تعریف سے مشابہت رکھتی ہے۔ ہم  $x$  اور  $y$  محور کے متوازی خطوط کھینچ کر خطہ  $R$  کو ٹکڑے کرتے ہیں (شکل 11.7-الف)۔  $R$  کے اندر ٹکڑوں کو 1 تا  $n$  کہتے ہیں۔ ہر ٹکڑے میں کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً  $k$  مستطیلی ٹکڑے میں نقطہ  $(x_k, y_k)$  ہو گا۔ تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k \quad (11.17)$$

لیتے ہیں جہاں  $k$  مستطیلی ٹکڑے کا رقبہ  $A_k$  ہے۔ ہم مثبت عدد  $n$  کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے  $n$  کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد  $J_{n1}, J_{n2}, \dots$  کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $R$  میں  $f(x, y)$  استمراری ہے اور  $R$  کو لامتناہی تعداد کی ہموار منحنیات گھیرتی ہیں۔ ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ حقیقی اعداد  $J_{n1}, J_{n2}, \dots$  کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں  $(x, y_k)$  کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا۔ اس حد کو خطہ  $R$  پر  $f(x, y)$  کا دوہرا تکمیل<sup>15</sup> کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

دوہرا تکمیل کی تعریف سے ظاہر ہے یہ قطعی تکمیل کی طرح کئی خواص رکھتا ہے۔ فرض کریں کہ خطہ  $R$  میں متعین

اور استمراری  $f$  اور  $g$  تفاعل کے متغیرات  $x$  اور  $y$  ہیں۔ تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\iint_R k f \, dx \, dy = k \iint_R f \, dx \, dy \quad (k \text{ مستقل ہے})$$

$$(11.18) \quad \iint_R (f + g) \, dx \, dy = \iint_R f \, dx \, dy + \iint_R g \, dx \, dy$$

$$\iint_R f \, dx \, dy = \iint_{R_1} f \, dx \, dy + \iint_{R_2} f \, dx \, dy \quad (\text{شکل 11.7-ب})$$

مزید  $R$  میں کم از کم ایک ایسا نقطہ  $(x_0, y_0)$  ضرور پایا جاتا ہے کہ درج ذیل تعلق درست ثابت ہو

$$(11.19) \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = f(x_0, y_0) A$$

جہاں خطہ  $R$  کا رقبہ  $A$  ہے۔ یہ تعلق دوہرا نکملات کا اوسط قیمت مسئلہ<sup>16</sup> کہلاتا ہے۔

خطہ  $R$  پر دوہرا نکملات کو یکے بعد دیگرے دو عدد تکمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ انہیں اس ترکیب کو سمجھیں۔

فرض کریں کہ  $R$  کو درج ذیل غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے (شکل 11.8-الف)

$$a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x)$$

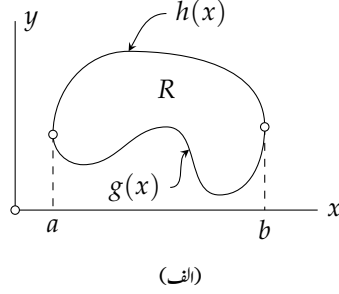
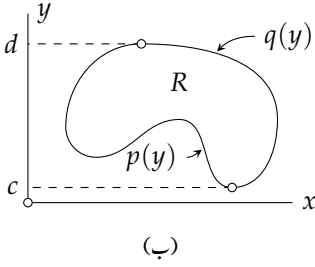
تب  $y = g(x)$  اور  $y = h(x)$  خطہ  $R$  کی سرحد کو ظاہر کریں گے اور

$$(11.20) \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right] dx$$

ہو گا۔ ہم پہلے (چکور قوسین میں بند) اندرونی تکمل

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy$$

کی قیمت حاصل کرتے ہیں جہاں  $x$  بطور مقدار معلوم کردار ادا کرتا ہے لہذا اس تکمل کا حاصل  $x$  کا تفاعل  $F(x)$  ہو گا۔ اس کے بعد  $x$  محور پر  $F(x)$  کا تکمل  $a$  تا  $b$  حاصل کرتے ہوئے دوہرا تکمل (مساوات 11.20) کی قیمت حاصل ہو گی۔



شکل 11.8: تجزیہ دوہرا تکامل

اسی طرح اگر  $R$  کو درج ذیل غیر مساوات (شکل 11.8-ب)

$$c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y)$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب درج ذیل ہو گا

$$(11.21) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

جہاں اندرونی تکامل کا حاصل  $y$  کا تفاعل ہو گا جس کو  $y$  محور پر  $c$  تا  $d$  تکامل کرتے ہوئے دوہرا تکامل کی قیمت حاصل ہو گی۔

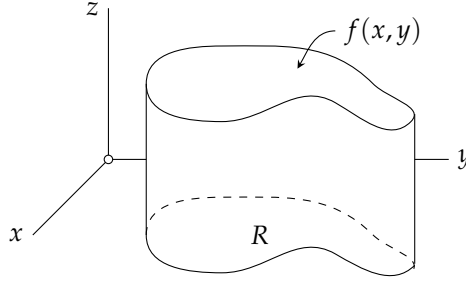
اگر  $R$  کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن نہ ہو لیکن  $R$  کو ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب علیحدہ علیحدہ ہر ٹکڑے پر  $f(x, y)$  کا دوہرا تکامل حاصل کرتے ہوئے تمام کا مجموعہ لیتے ہوئے  $R$  پر  $f(x, y)$  کے دوہرا تکامل کی قیمت حاصل ہو گی۔

دوہرا تکامل کے عملی استعمال

دوہرا تکامل کے کئی عملی جیومیٹریائی اور طبعی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مثلاً  $R$  کا رقبہ  $A$ <sup>17</sup> درج ذیل ہے۔

$$A = \iint_R dx dy$$

area<sup>17</sup>



شکل 11.9: دوہرا کمل بطور حجم

چونکہ مساوات 11.17 میں جزو  $f(x_k, y_k) \Delta A_k$  سے مراد اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم ہے جس کے بنیاد کا رقبہ  $A_k$  اور قد  $f(x_k, y_k)$  ہے (شکل 11.9) لہذا خطہ  $R$  کے اوپر سطح  $z = f(x, y) (> 0)$  کے نیچے حجم  $H$  درج ذیل ہے۔

$$H = \iint_R f(x, y) dx dy$$

فرض کریں کہ مستوی  $xy$  میں پھیلے کیت کی کثافت (کیت فی اکائی رقبہ) کو  $f(x, y)$  ظاہر کرتی ہے۔ تب  $R$  میں کل کیت  $M$  درج ذیل ہوگی۔

$$M = \iint_R f(x, y) dx dy$$

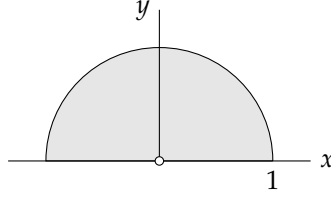
$R$  میں موجود کیت کی مرکز ثقل<sup>18</sup> کے محدد

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x f(x, y) dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y f(x, y) dx dy$$

ہوں گے۔ خطہ  $R$  میں موجود کیت کے  $x$  اور  $y$  محور کے گرد جمودی معیار اثر<sup>19</sup> بالترتیب  $I_x$  اور  $I_y$  ہوں گے

$$I_x = \iint_R y^2 f(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_R x^2 f(x, y) dx dy$$

<sup>18</sup> center of gravity  
<sup>19</sup> moment of inertia



شکل 11.10: کثافت کیت (مثال 11.8)

جبکہ مبدا کے گرد اس کی قطبی جمودی معیار اثر  $I_0$  ہوگی۔

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy$$

مثال 11.8: عملی دوہرا کٹل

خطہ  $R: 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$  میں کثافت کیت  $f(x, y) = 1$  ہے (شکل 11.10)۔ مرکز ثقل اور جمودی معیار اثر  $I_0$ ،  $I_y$ ،  $I_x$  دریافت کریں۔

حل:  $R$  میں کل کیت  $M$  درج ذیل ہے (جہاں آخری قدم پر مکمل میں  $x = \sin \theta$  پر کیا گیا ہے)۔

$$M = \iint_R 1 dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

چونکہ  $f(x, y) = 1$  ہے لہذا کل کیت عین نصف دائرے کے رقبے کے برابر ہے۔ مرکز ثقل کے محدود

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2}{\pi} \iint_R x dx dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy \right] dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^0 z^2 dz = 0 \quad (\sqrt{1-x^2} = z) \end{aligned}$$

اور

$$\bar{y} = \frac{2}{\pi} \iint_R y dx dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right] dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{4\pi}{3}$$

polar moment of inertia<sup>20</sup>

ہیں۔ مزید

$$I_x = \iint_R y^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{8}$$

اور

$$I_y = \iint_R x^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right] dx = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{8}$$

سے قطبی جمودی معیار اثر  $I_0$  درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{4}$$

مثال 11.9 میں  $I_x$  کو نسبتاً آسان ترکیب سے حاصل کیا گیا ہے۔

□

ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمل

$$\int_a^b f(x) dx$$

میں

$$x = x(u)$$

پر کرتے ہوئے نیا متغیر  $u$  متعارف کیا جاتا ہے، جہاں کسی وقفہ  $\alpha \leq u \leq \beta$  پر تفاعل  $x(u)$  اور اس کا تفرق استمراری اور  $x(\alpha) = a$  ،  $x(\beta) = b$  [یا  $x(\alpha) = b$  ،  $x(\beta) = a$ ] ہیں اور جیسے جیسے  $x(u)$  وقفہ  $a$  تا  $b$  پر تبدیل ہوتا ہو ویسے ویسے وقفہ  $\alpha$  تا  $\beta$  پر  $u$  تبدیل ہوتا ہو۔ یوں

$$(11.22) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(u)] \frac{dx}{du} du$$

لکھا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $a=0, b=1$  کی صورت میں  $x = \sin u$  پر کرتے ہوئے

$$f[x(u)] = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u, \quad \frac{dx}{du} = \cos u, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

ہوں گے جن سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{\pi}{4}$$

دوہرا مکمل

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

کی صورت میں ہم نئے متغیرات  $u, v$  متعارف کرنے کی خاطر

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

لکھتے ہیں، جہاں  $uv$  سطح میں کسی خطہ  $R^*$  پر تعامل  $x(u, v)$ ،  $y(u, v)$  اور ان کے ایک درجی جزوی تفرق استمراری ہوں تاکہ  $R^*$  میں ہر نقطہ  $(u_0, v_0)$  کا خطہ  $R$  میں مطابقتی نقطہ  $[x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)]$  پایا جائے اور مزید پورے  $R^*$  پر یعقوبی  $J^{21}$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثبت اور یا پورے  $R^*$  پر یعقوبی  $J^{22}$  منفی ہو۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$(11.23) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

یوں مکمل کو  $u, v$  کی صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ  $dx dy$  کی جگہ  $du dv$  ضرب یعقوبی  $J$  کی حتمی قیمت لکھی جاتی ہے۔

Jacobian<sup>21</sup>

<sup>22</sup> جرمن ریاضی دان [1804-1851] کارل گٹاف یعقوب یعقوبی



مثال کے طور پر قطبی محدد  $r^{23}$  اور  $\theta$  متعارف کرنے کی خاطر ہم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

لکھتے ہیں لہذا

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

ہوگا اور یوں

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f[r \cos \theta, r \sin \theta] r dr d\theta$$

لکھا جائے گا جہاں  $xy$  سطح میں خطہ  $R$  کا سطح  $r\theta$  میں مطابقتی خطہ  $R^*$  ہے۔

مثال 11.9: مساوات 11.23 استعمال کرتے ہوئے مثال 11.8 کی  $I_x$  دوبارہ دریافت کریں۔

حل:

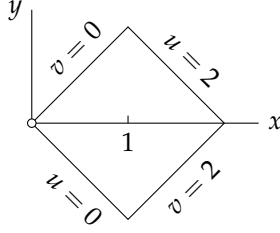
$$I_x = \iint_R y^2 dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

□

مثال 11.10: درج ذیل دوہرا تکمیل حل کریں

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

جہاں  $R$  کو شکل 11.11 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 11.11: مثال 11.10 میں مکمل کا خطہ

حل:  $R$  کی شکل کو دیکھ کر ہم  $x + y = u$  اور  $x - y = v$  تبادلاً چنتے ہیں۔ یوں  $x = \frac{1}{2}(u + v)$  اور  $y = \frac{1}{2}(u - v)$  ہو گئے اور یقینی درج ذیل ہو گا۔

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$R$  کا مطابقتی چکور  $0 \leq u \leq 2$  ،  $0 \leq v \leq 2$  ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{8}{3}$$

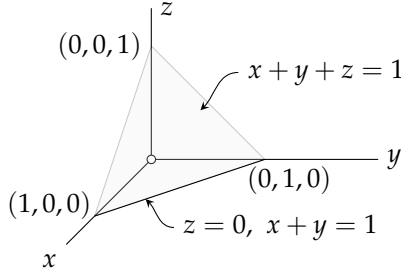
□

### سوالات

سوال 11.20 تا سوال 11.26 حل کریں۔ مکمل کا خطہ بیان کریں۔

سوال 11.20:  $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y^2) dx dy$  جواب:  $\frac{10}{3}$

سوال 11.21:  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$  جواب:  $\frac{\pi}{8}$



شکل 11.12: سطح  $x + y + z = 1$  کے نیچے ربع اول میں چو سطح

سوال 11.22:  $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$  جواب:  $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.23:  $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy dy dx$  جواب:  $\frac{1}{24}$

سوال 11.24:  $\int_0^2 \int_0^{4-2x} (x + y) dy dx$  جواب: 8

سوال 11.25:  $\int_0^2 \int_{1+x}^{5-x} (1 + xy) dy dx$  جواب: 12

سوال 11.26:  $\int_0^1 \int_{1+x}^{5-x} (1 - xy) dy dx$  جواب: -1

سوال 11.27 تا سوال 11.30 میں فضا میں خطہ دیا گیا ہے۔ اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 11.27: کارٹیزی نظام کے ربع اول میں سطح  $x + y + z = 1$  کے نیچے چو سطح۔

جواب: شکل 11.12 میں سطح  $x + y + z = 1$  کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے جو  $x$ ،  $y$  اور  $z$  محور کو بالترتیب  $(1,0,0)$ ،  $(0,1,0)$  اور  $(0,0,1)$  پر چھوتی ہے۔ ربع اول میں چو سطحی کے کونے  $(0,0,0)$ ،  $(1,0,0)$ ،  $(0,1,0)$  اور  $(0,0,1)$  ہیں۔ مستوی  $xy$  پر  $z = 0$  ہو گا لہذا دی گئی سطح  $xy$  مستوی

کو خط  $x + y = 1$  یعنی  $x = 1 - y$  پر قطع کرتی ہے۔ یوں ربع اول میں  $x = 0$  اور  $x = 1 - y$  کے مابین خطہ  $R$  ہو گا۔  $R$  کے کونے  $(0,0,0)$ ،  $(1,0,0)$  اور  $(0,1,0)$  ہیں۔ اس طرح ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_0^{1-y} z \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1 - x - y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left( x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_0^{1-y} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (y^2 - 2y + 1) \, dy = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

سوال 11.28: وہ جو سطح جس کو سطح  $2x + 6y + z = 12$  ربع اول سے کاٹی ہے۔  
جواب: 216

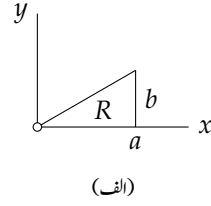
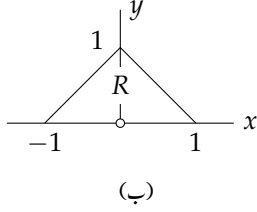
سوال 11.29: وہ حجم جس کو نکلی  $x^2 + y^2 = 1$  اور نکلی  $y^2 + z^2 = 1$  گھیرتی ہیں۔  
جواب: نکلی  $y^2 + z^2 = 1$  سے حجم کی بالائی سطح  $z = \sqrt{1 - y^2}$  اور نیچلی سطح  $z = -\sqrt{1 - y^2}$  ملتے ہیں۔ مشابہت سے ہم مکمل کو بالائی سطح اور  $xy$  مستوی کے درمیان حاصل کرتے ہوئے حاصل جواب کو 2 سے ضرب دے سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا جہاں  $x^2 + y^2 = 1$  سے  $x$  کے حدود  $-\sqrt{1 - y^2}$  اور  $\sqrt{1 - y^2}$  لکھے گئے ہیں۔

$$H = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z \, dx \, dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - y^2} \, dx \, dy = \frac{16}{3}$$

سوال 11.30: سطح  $z = x^2$  اور سطح  $x = z^2$  کے درمیان  $y = 0$  تا  $y = 2$  جواب: یہ سطحیں  $x = 0$  اور  $x = 1$  پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ بالائی سطح  $z = \sqrt{x}$  ہے (تسلی کر لیں)۔ یوں  $xy$  مستوی اور بالائی سطح کے مابین حجم معلوم کرتے ہوئے اس سے  $xy$  مستوی اور نیچلی سطح کے مابین حجم منفی کرتے ہیں۔

$$H = \int_2^0 \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx \, dy = \frac{2}{3}$$

سوال 11.31 تا سوال 11.34 میں کیت کے مرکز ثقل کے محدد  $\bar{x}$ ،  $\bar{y}$  معلوم کریں۔ خطہ  $R$  اور اس میں کیت کی کثافت  $f(x, y)$  دی گئی ہے۔



شکل 11.13: خطہ کثافت (سوال 11.35)

سوال 11.31:  $f(x, y) = 1$ ,  $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$   
جوابات:  $\bar{x} = 1, \bar{y} = \frac{3}{2}$

سوال 11.32:  $f(x, y) = 1$ ,  $R : x^2 + y^2 \leq 1$ , ربع اول  
جوابات:  $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4\pi}{3}$

سوال 11.33:  $f(x, y) = x + y$ ,  $R : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$   
جوابات:  $\bar{x} = \frac{12}{7}, \bar{y} = \frac{50}{21}$

سوال 11.34:  $f(x, y) = xy$ ,  $R : y \leq 4 - 3x$ , ربع اول  
جوابات:  $\bar{x} = \frac{8}{15}, \bar{y} = \frac{8}{5}$

سوال 11.35: شکل 11.13 میں دکھائے گئے خطہ R میں کمیتی کثافت  $f(x, y) = 1$  پایا جاتا ہے۔ جمودی معیار اثر  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  دریافت کریں۔

جوابات:

(الف)  $I_x = \frac{ab^3}{12}, I_y = \frac{a^3b}{4}, I_0 = I_x + I_y$

(ب)  $I_x = I_y = \frac{1}{6}, I_0 = \frac{1}{3}$

قطبی محدود استعمال کرتے ہوئے سوال 11.36 تا سوال 11.39 میں  $\iint_R f(x, y) dx dy$  کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.36:  $f = x + y$ ,  $R : x^2 + y^2 < 4, y \geq 0$   
جواب:  $\frac{11}{3}$

سوال 11.37:  $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $R : x^2 + y^2 \leq a$ ,  $y \geq 0$ ,  $x \geq 0$  : جواب:  $\frac{a^3 \pi}{6}$

سوال 11.38:  $f = x^2 + y^2$ ,  $R : x^2 + y^2 \leq a$  : جواب:  $\frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.39:  $f = e^{-x^2 - y^2}$ ,  $R : x^2 + y^2 = 9$  اور  $x^2 + y^2 = 16$  کے درمیان چھلا : جواب:  $\pi(e^{-9} - e^{-16})$

سوال 11.40 تا سوال 11.41 میں یقینی دریافت کریں۔ حاصل جواب کی جیومیٹریائی وجہ بیان کریں۔

سوال 11.40: مستقیم حرکت  $x = u + a$ ,  $y = v + b$  : جواب: 1

سوال 11.41: مرکز کے گرد گھومنا  $x = u \cos \phi - v \sin \phi$ ,  $y = u \sin \phi + v \cos \phi$  : جواب: 1

11.4 دوہرا تکمیل سے خطی تکمیل کا حصول



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 142 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$



اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $1 + |q| + |p| = h$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

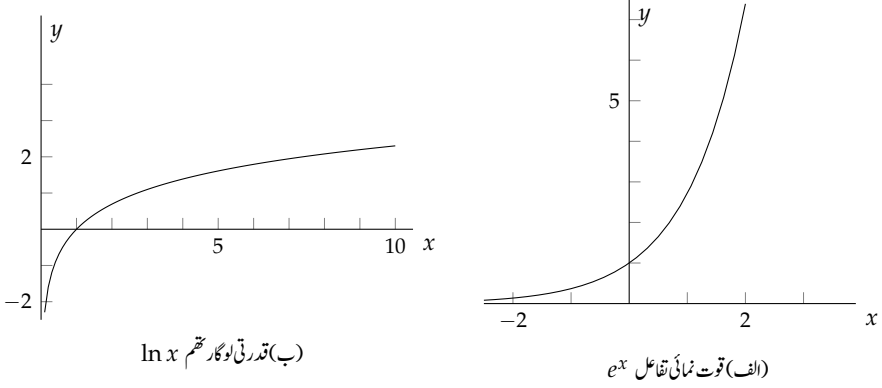
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

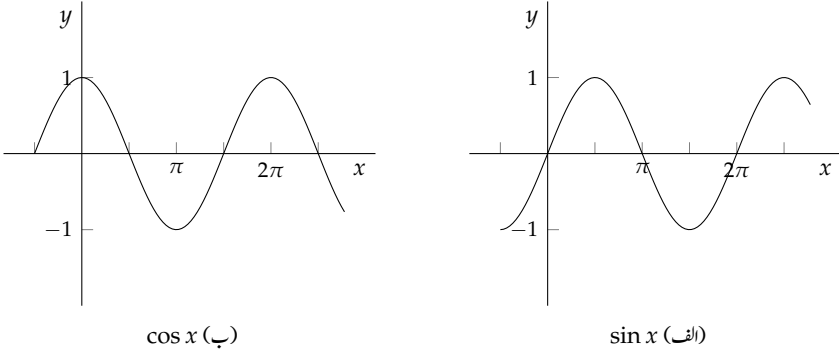
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (\text{ب.5})$$

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}
 \end{aligned}$$

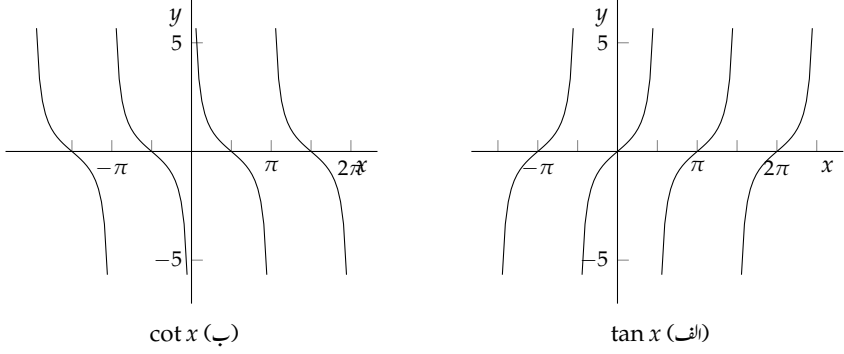
$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

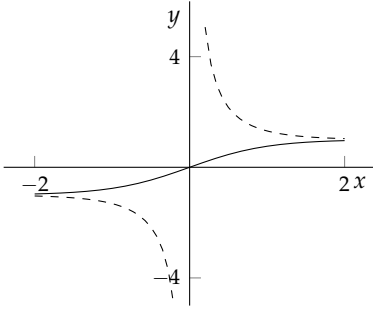
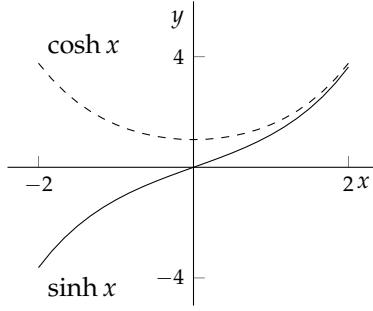
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

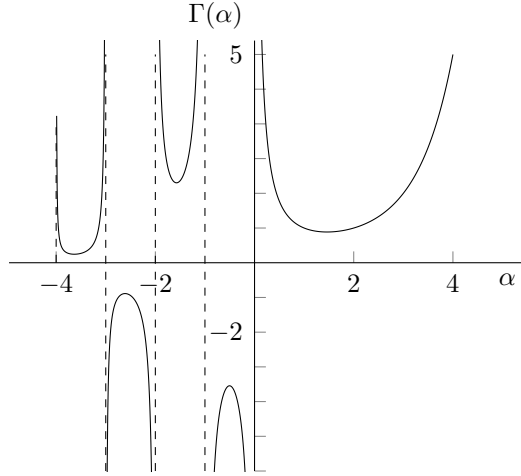
$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔





شکل 5. ب: گیمما تفاعل

گیمما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیمما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیمما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیمما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35.ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

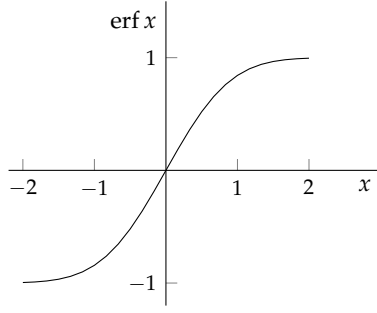
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

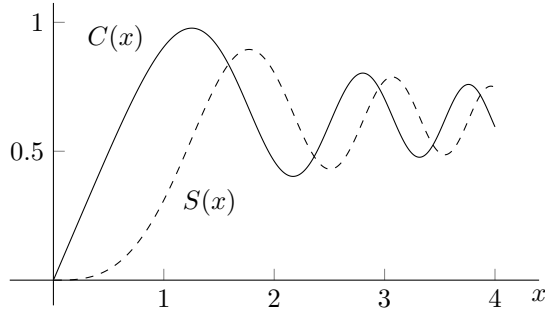
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

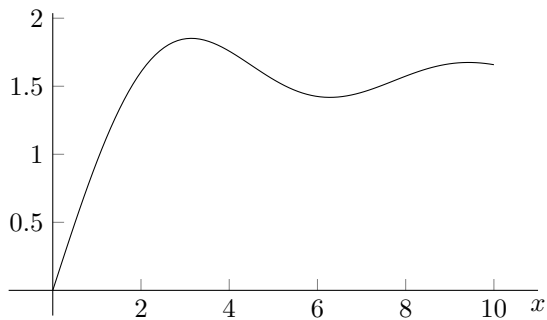
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Si  $\infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

