

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

xi

دیباچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور نکلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجرى ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکملى علم الاحصاء تکمل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمل
787	11.2	خطی تکمل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمل
810	11.4	دوہرہ تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمل
845	11.8	تہرہ تکمل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8	مستطیل جھلی
1006	13.9	قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10	دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11	مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024	13.12	کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13	لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14	مطلوبہ اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1	مخلوط اعداد
1047	14.2	مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3	مخلوط سطح میں منحنيات اور خطے
1059	14.4	مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5	کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6	ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7	قوت نمائی تفاعل
1089	14.8	تکونیائی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9	لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15	محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1	نقشہ کشی
1116	15.2	محافظ زاویہ نقشہ کشی
1125	15.3	خطی کسری تبادلہ
1129	15.4	منصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5	نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6	ریمان سطحیں
1157	16	مطلوبہ مکملات
1157	16.1	مطلوبہ مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2	مطلوبہ خطی مکمل کی خواص
1172	16.3	کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4	خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5	کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6	تحلیلی تفاعل کے تفرق
1201	17	ترتیب اور تسلسل
1201	17.1	ترتیب
1208	17.2	تسلسل
1213	17.3	کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمینٹز آزمائش برائے حقیقی تسلسل	17.4
1225	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں	17.5
1236	تسلسل پر اعمال	17.6
1243	18 حلقہ تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل	
1243	18.1 حلقہ تسلسل	
1256	18.2 حلقہ تسلسل کی روپ میں تفاعل	
1263	18.3 ٹیلر تسلسل	
1269	18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل	
1274	18.5 حلقہ تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب	
1281	18.6 یکساں استرار	
1293	18.7 لوگوں تسلسل	
1303	18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت	
1315	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ	
1315	19.1 بقیہ	
1322	19.2 مسئلہ بقیہ	
1327	19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ	
1335	19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام	
1343	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی تودہ	
1344	20.1 ساکن برقی سکون	
1350	20.2 دوبعدی بہا و سیال	
1359	20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص	
1364	20.4 پوسوں کلیہ مکمل	
1371	21 اعدادی تجزیہ	
1372	21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر	
1374	21.2 دہرانے سے مساوات کا حل	
1386	21.3 متناہی فرق	
1392	21.4 باہمی تحریف	
1401	21.5 پیکدار منحنیات	
1408	21.6 اعدادی مکمل اور تفرق	
1420	21.7 متقارب اتساع	
1433	22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب	
1433	22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقاط، معکوس قالب	
1443	22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ	

1451	22.3	خطی مساوات کا نظام: بدخونی
1455	22.4	ترکیب کمتر مربع
1461	22.5	قالب کے امتیازی اقدار کی شمول
1470	22.6	امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ
1475	23	اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات
1475	23.1	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1486	23.2	دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1493	23.3	اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1496	23.3.1	مسئلہ ڈرشلے
1499	23.3.2	بدلتی رخ خفی ترکیب
1506	23.4	مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ - غیر منظم سرحد
1513	23.5	اعدادی تراکیب برائے قطع مکانی مساوات
1522	23.6	اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات
1527	24	احتمال اور شماریات
1527	24.1	حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد
1529	24.2	نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم
1539	24.3	عمومی اوسط اور عمومی تغیریت
1544	24.4	بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات
1551	24.5	احتمال
1560	24.6	مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات
1566	24.7	بلا منصوبہ متغیرات - غیر مسلسل اور استمراری تقسیم
1574	24.8	تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت
1582	24.9	ثنائی، پوکس، اور بیش ہندی تقسیم
1590	24.10	عمومی تقسیم
1600	24.11	ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں
1613	24.12	بلا منصوبہ نمونہ بندی - بلا منصوبہ اعداد
1616	24.13	مقدار معلوم کا اندازہ لگانا
1620	24.14	وقد اعتماد
1634	24.15	قیاس کی پرکھ - فیصلے
1651	24.16	ضبط معیار
1659	24.17	قبولیت نمونہ
1667	24.18	عمدگی موافقت
1672	24.19	غیر مقدار معلوم پرکھ
1677	24.20	پیکشوں کی جوڑیاں - سیدھے خطوط کو موافق بنانا
1687	ا	اضافی ثبوت
1691	ب	مفید معلومات

1691 1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

1701 ج جدول

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 24

احتمال اور شماریات

بڑے پیمانے پر مصنوعات کی پیداوار اور تجرباتی مواد کے تجزیہ کے لئے حسابی شماریات بہت اہم ہے۔ اس باب کی شروع میں مواد کا جدول اور ترسیم سے اظہار پر غور کیا جائے گا۔ چونکہ شماریات کی بنیاد حسابی احتمال ہے لہذا اس کے بعد حسابی احتمال کے بنیادی تصورات اور اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ باب کا باقی حصہ شماریات کے اہم ترین تراکیب پر مشتمل ہے۔

24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد

انجینئری شماریات میں ہمیں ایسے تجربات کی بناوٹ اور تشخیص سے غرض ہو گا جو عملی مسائل کے بارے میں معلومات فراہم کر سکے، مثلاً، خام مال یا تیار کردہ مصنوعات کے معیار کی جانچ پڑتال، مشین اور آلات یا مصنوعات کی تیاری میں استعمال تراکیب کا آپس میں موازنہ، مزدور کی پیداوار، صارفین کا نئی مصنوعات کے لئے رد عمل، مختلف حالات میں کیمیائی عمل سے حاصل پیداوار، خام لوہا کی کثافت اور اس میں لوہے کی مقدار کا تعلق، مختلف درجہ حرارت پر ایئر کنڈشر نظام کی کارکردگی، فولاد میں کاربن کی مقدار اور فولاد کی راک ویل¹ سختی کا تعلق، وغیرہ وغیرہ۔

مثال کے طور پر، بڑے پیمانے پر (پتچ، بلب، موبائل فون وغیرہ کی) پیداوار کے عمل میں عموماً بے عیب² اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا اترے ہیں، اور عیب دار³ اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا نہیں اترتے ہیں،

Rockwell¹
nondefective²
defective³

پائے جائیں گے۔ درکار خواص میں دھرا کا قطر، بلب کی کم سے کم عرصہ زندگی⁴، برقیاتی مصنوعات میں استعمال برقی مزاحمت کی قیمت کے حدود، کتاب میں استعمال کاغذ کی موٹائی، خود کار بھری گئی بوتل میں مشروب کی کم سے کم مقدار، برقی سوئچ کا زیادہ سے زیادہ دورانیہ رد عمل، اور کپڑے کی کم سے کم مضبوطی شامل ہیں۔

مصنوعات کی معیار میں فرق متعدد وجوہات (مثلاً خام مال، خود کار مشین کی کارکردگی، کاریگر کی کاریگری) کی بنا ممکن ہے جن کو قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہے لہذا انہیں بے ترتیب تبدیلیاں⁵ تصور کیا جات ہے۔ پیداوار کے تراکیب کی کارکردگی اور متذکرہ بالا دیگر مثالوں میں بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔

ہر ایک پیدا کردہ رکن کو پرکھنے کے لئے عموماً بہت وقت درکار ہو گا اور ایسا کرنا خاصہ مہنگا ہو گا۔ اگر پرکھنے کے دوران رکن ضائع ہوتا ہو تب ہر رکن کو پرکھنا ممکن نہیں ہو گا۔ اسی لئے تمام ارکان کو پرکھنے کی بجائے چند ارکان کو بطور نمونہ⁶ پرکھا جاتا ہے اور اس نمونہ کے نتائج سے کل تعداد (آبادی⁷) کے بارے میں رائے بنائی جاتی ہے۔ اگر 10000 پتچوں کی کھیپ سے 100 پتچوں کے نمونہ کو پرکھا جائے اور اس میں 5 پتچے عیب دار نکلیں تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس کھیپ میں 5% پتچے عیب دار ہوں گے، پس اتنا ضروری ہے کہ نمونہ کو بلا منصوبہ⁸ چنا جائے یعنی کھیپ میں موجود ہر پتچے کا بطور نمونہ منتخب ہونے کا امکان⁹ ایک جیسا ہو۔ ظاہر ہے کہ ایسی رائے مکمل طور پر درست نہیں ہو سکتی ہے اور یہ کہنا کہ ٹھیک 5% پتچے عیب دار ہوں گے عموماً درست نہیں ہو گا لیکن عام طور پر عملی زندگی میں اتنی درست رائے (یا نتیجہ) کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ جتنے زیادہ ارکان کو پرکھا جائے ہمیں نتائج پر اتنا زیادہ اعتماد ہوتا ہے۔ حسابی احتمال کا نظریہ ان خیالات کو ٹھوس شکل دیتا ہے اور نتائج پر کتنا اعتبار کیا جائے، اس کی ناپ بھی پیش کرتا ہے۔ یوں شماریات کی بنیاد نظریہ احتمال ہے۔

اسی طرح خام لوہا میں لوہے کی فی صد مقدار μ جاننے کی خاطر ہم بلا منصوبہ n تعداد کے نمونے لیتے ہوئے ان میں لوہے کی فی صد مقدار تجرباتی طور دریافت کریں گے۔ ان n نمونوں کے تجرباتی نتائج x_1, \dots, x_n کی اوسط $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ لوہے کی فی صد مقدار μ کی تخمین ہو گی۔

مختلف نوعیت کے مسائل کے لئے مختلف تراکیب اور تکنیک درکار ہوں گے البتہ مسئلے کی تشکیل سے حل تک کے قدم عموماً ایک جیسے ہوتے ہیں۔ انہیں یہاں پیش کرتے ہیں۔

lifetime⁴
random variation⁵
sample⁶
population⁷
at random⁸
chance⁹

- مسئلے کی تشکیل۔ مسئلے کو ٹھیک ٹھیک بیان کرنا اور تفتیشی عمل کے حدود تعین کرنا ضروری ہے تاکہ شماریاتی تفتیش کی لاگت، تفتیش کار کی مہارت اور دستیاب سہولیات کو مد نظر رکھتے ہوئے مخصوص وقت میں قابل استعمال نتائج حاصل ہوں۔ اسی قدم میں واضح تصورات سے حسابی نمونہ¹⁰ کی تخلیق¹¹ بھی شامل ہے۔ (مثال کے طور پر ہم نے تعین کرنا ہو گا کہ عیب دار رکن سے کیا مراد ہے۔)
- تجربہ کی تخلیق۔ آخری مرحلے میں استعمال ہونے والی شماریاتی ترکیب کا انتخاب، نمونہ کی جسامت (جتنے ارکان کا تجربہ یا ان پر تجربہ کیا جائے گا، وغیرہ) اور طبعی ترکیب اور تکنیک جو بروئے کار لائے جائیں گے کا انتخاب اس قدم میں کیا جائے گا۔ کم سے کم وقت اور لاگت کے ساتھ زیادہ سے زیادہ معلومات حاصل کرنا مقصد ہے۔
- تجربہ یا مواد جمع کرنے کا عمل۔ اس قدم میں قواعد پر سختی سے عمل کرنا ضروری ہے۔
- جدول بندی۔ اس قدم میں تجرباتی نتائج کو واضح اور سادہ جدول کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور ساتھ ہی انہیں ترسیم کیا جاسکتا ہے یا انہیں ڈبہ ترسیم¹² کی صورت میں دکھایا جاسکتا ہے۔ اس قدم میں نمونہ کی اوسط اور قیمتوں میں پھیل کے تخمین کا حساب بھی کیا جاتا ہے۔
- شماریاتی رائے زنی۔ اس قدم میں کوئی مخصوص شماریاتی ترکیب کو نمونہ سے حاصل نتائج پر لاگو کرتے ہوئے نا معلوم خواص کے بارے میں رائے قائم کی جاتی ہے تاکہ ہم مطلوبہ جواب حاصل کر سکیں۔

24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم

شماریاتی تجربہ کے دوران عموماً مشاہدوں (زیادہ تر صورتوں میں اعداد) کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جنہیں ہم اسی ترتیب سے لکھتے ہیں جس میں انہیں حاصل کیا گیا ہو۔ ایک مثال جدول 24.1 میں دی گئی ہے۔ سینٹ اور بجری (کنکریٹ) سے معیاری ٹھوس بیلن (قطر 15.24 cm اور لمبائی 30.48 cm) بنا کر 28 دن¹³ بعد انہیں چیرا گیا۔ یوں ہمیں ایک نمونہ حاصل ہوا جو 100 نمونہ اعداد پر مشتمل ہے۔ یوں نمونہ کی جسامت¹⁴ $n = 100$ ہے۔

¹⁰ mathematical model

¹¹ لفظ "نمونہ" اور لفظ "حبابی نمونہ" علیحدہ معنی رکھتے ہیں۔ اسی لئے حبابی نمونہ کو بطور اصطلاح لینے ہوئے پورا لکھا جائے گا یعنی "حبابی نمونہ"۔

¹² bar graph

¹³ سینٹ کو مکمل مضبوط ہونے کے لئے اسنے دن درکار ہوتے ہیں۔

¹⁴ size

جدول 24.1: کنکریٹ بیلن چرنے کے لئے درکار فی مربع سنٹی میٹر قوت (N cm^{-2})

320	380	340	410	380	340	360	350	320	370
350	340	350	360	370	350	380	370	300	420
370	390	390	440	330	390	330	360	400	370
320	350	360	340	340	350	350	390	380	340
400	360	350	390	400	350	360	340	370	420
420	400	350	370	330	320	390	380	400	370
390	330	360	380	350	330	360	300	360	360
360	390	350	370	370	350	390	370	370	340
370	400	360	350	380	380	360	340	330	370
340	360	390	400	370	410	360	400	340	360

اس حصے میں ہم نمونہ کو جدول اور ترسیم کی صورت میں ظاہر کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم ان تراکیب کو جدول 24.1 کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

جدول 24.1 میں دی گئی معلومات جاننے کی خاطر ہم مواد کو ترتیب دیتے ہیں۔ ہم (کم سے کم قیمت) 310 ، 320 ، ... ، 440 (زیادہ سے زیادہ قیمت) کو ایک قطار میں لکھتے ہیں۔ اس کے بعد جدول 24.1 کے ہر صف سے گزرتے ہوئے ہر عدد کے لئے اس قطار میں مطابقتی مقام کی صف میں نشان شمار¹⁵ کھینچتے ہیں۔ اس طرح ہمیں جدول 24.2 کی پہلی دو قطاروں کا جدول حاصل ہو گا۔ نشان شمار کی گنتی کو جدول کی تیسری قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ یہ گنتی نمونہ میں کسی عدد x کی تعداد دیتی ہے جس کو نمونہ میں x کی حتمی تعدد¹⁶ یا مختصر تعدد¹⁷ کہتے ہیں۔ اس کو نمونہ میں ارکان کی تعداد n سے تقسیم کرنے سے ہمیں اضافی تعدد¹⁸ حاصل ہوتی ہے جس کو جدول 24.2 کی چوتھی قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ یہاں $n = 100$ ہے لہذا $x = 330$ کی تعدد 6 اور اضافی تعدد 0.06 یا 6% ہے۔

کسی مخصوص x کے لئے نمونہ میں x اور x سے کم قیمتوں کی تمام تعدد کا مجموعہ لیتے ہوئے مجموعی تعدد¹⁹ حاصل ہوتی ہے جس کو پانچویں قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $x = 350$ کا مطابقتی مجموعی تعدد 37 ہے جس کے تحت 350 اور اس سے کم قیمتوں کی تعداد 37 ہے۔ اس کو جسامت n سے تقسیم کرنے

¹⁵ tally mark
¹⁶ absolute frequency
¹⁷ frequency
¹⁸ relative frequency
¹⁹ cumulative frequency

جدول 24.2: جدول تقسیم برائے جدول 24.1 کا نمونہ

1	2	3	4	5	6
مضبوطی	حتی تعدد		اضافی تعدد	مجموعی تعدد	مجموعی اضافی تعدد
	نشان شمار				
300		2	0.02	2	0.02
310		0	0.00	2	0.02
320		4	0.04	6	0.06
330		6	0.06	12	0.12
340		11	0.11	23	0.23
350		14	0.14	37	0.37
360		16	0.16	53	0.53
370		15	0.15	68	0.68
380		8	0.08	76	0.76
390		10	0.10	86	0.86
400		8	0.08	94	0.94
410		2	0.02	96	0.96
420		3	0.03	99	0.99
430		0	0.00	99	0.99
440		1	0.01	100	1.00

سے چھٹی قطار میں درج مجموعی اضافی تعدد²⁰ حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر چھٹی قطار سے ہم دیکھتے ہیں کہ نمونہ میں 76% قیمتیں 380 کے برابر یا اس سے کم ہیں۔

اگر نمونہ میں کوئی قیمت نہ پائی جاتی ہو تب اس قیمت کی تعدد 0 ہوگی۔ اگر نمونہ میں تمام قیمتیں ایک جیسی ہوں تب اس قیمت کی تعدد n اور اضافی تعدد $\frac{n}{n} = 1$ ہوگی۔ چونکہ یہی تعدد کی دو انتہائی قیمتیں ہیں لہذا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.1: (اضافی تعدد)
اضافی تعدد کی کم سے کم قیمت 0 اور زیادہ سے زیادہ قیمت 1 ہے۔

فرض کریں کہ جسامت n کے نمونہ میں درج ذیل m مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad (m \leq n)$$

جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m$$

ہیں۔ تب ہم درج ذیل تفاعل²¹ متعارف کر سکتے ہیں

$$(24.1) \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} \bar{f}_j & \text{جب } x = x_j \text{ ہو} \\ 0 & \text{کسی بھی قیمت } x \text{ کے لئے جو نمونہ میں نہ پایا جاتا ہو} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

جس کو نمونہ کا تعددی تفاعل²² کہتے ہیں۔ یہ نمونہ میں قیمتوں کی تقسیم (پھیل) دیتا ہے۔ اسی لئے ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل نمونہ کی تعددی تقسیم²³ دیتا ہے۔

مثال کے طور پر جدول 24.2 میں تعددی تفاعل کی قیمتیں قطار 4 میں دکھائی گئی ہیں جہاں $\bar{f}(300) = 0.02$ ، $\bar{f}(310) = 0$ ، $\bar{f}(320) = 0.04$ ، وغیرہ، ہیں۔

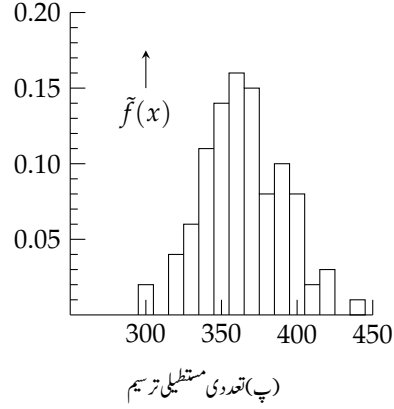
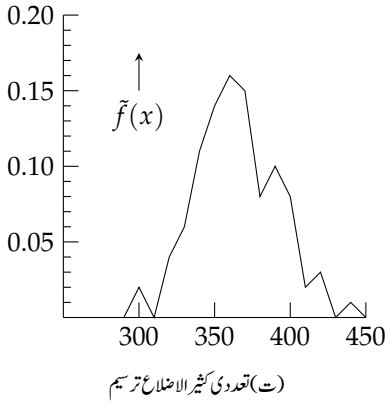
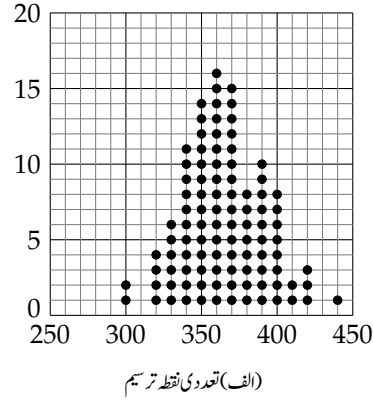
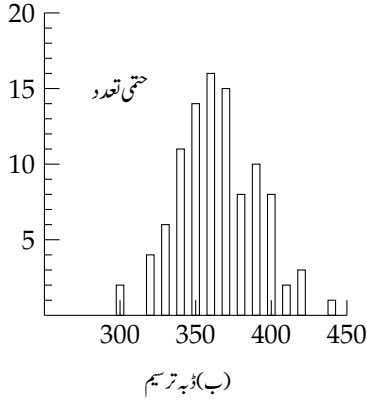
جسامت n کے نمونہ میں تمام تعدد کا مجموعہ n کے برابر ہو گا۔ (کیوں؟) اس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

²⁰cumulative relative frequency

²¹ہم \bar{f} استعمال کرتے ہیں چونکہ f کو تعددی تفاعل کے لئے استعمال کیا جانے کا جس کا استعمال کثرت سے ہوگا۔

²²frequency function of the sample

²³frequency distribution

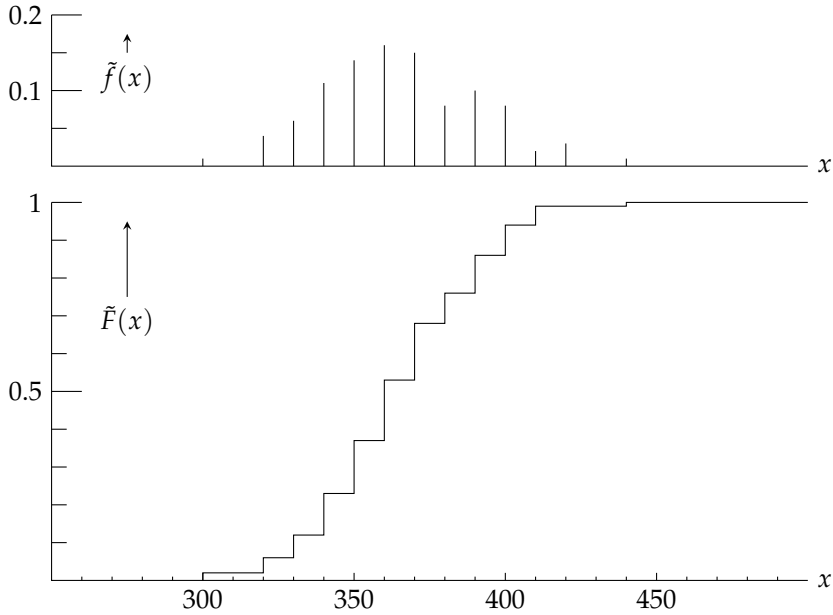


شکل 24.1: ترسیم برائے جدول 24.2

مسئلہ 24.2: اضافی تعدد کا مجموعہ
کسی بھی نمونہ میں تمام اضافی تعدد کا مجموعہ 1 کے برابر ہو گا، یعنی:

$$\sum_{j=1}^m \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \cdots + \tilde{f}(x_m) = 1$$

نمونہ کا ترسیمی اظہار شکل 24.1-الف تا شکل 24.1-ت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 24.1-پ میں ہر مستطیل کا رقبہ مطابقتی اضافی تعدد کے برابر ہو گا لہذا عمودی محدود پر اضافی تعدد فی اکائی رقبہ ہو گا۔ چونکہ شکل 24.1-پ میں تمام



شکل 24.2: تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ اور مجموعی تعددی تفاعل $\tilde{F}(x)$ برائے جدول 24.2

مستطیل کی چوڑائی ایک جیسی ہے لہذا عمودی محدود پر قیمتیں $\tilde{f}(x)$ کے راست متناسب ہوں گی۔ البتہ مستطیل کو چوڑائیاں مختلف ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہو گا۔ شکل 24.1-ت میں بھی یہی صورت حال ہو گی۔

ہم اب درج ذیل تفاعل متعارف کرتے ہیں

$$\tilde{F}(x) = \text{کم تمام قیمتوں کے اضافی تعدد کا مجموعہ}$$

جس کو نمونے کا مجموعی تعددی تفاعل²⁴ یا مختصراً تقسیمی تفاعل نمونہ²⁵ کہتے ہیں۔ شکل 24.2 میں مثال دی گئی ہے۔

$\tilde{F}(x)$ سیڑھی تفاعل (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہے جس میں ٹھیک ان x پر جہاں $\tilde{f}(x) \neq 0$ ہو $\tilde{f}(x)$ کے برابر چلانگ پائے جاتے ہیں۔ پہلی چلانگ نمونہ کی کم سے کم قیمت اور آخری چلانگ نمونہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پر پائی جائے گی۔ آخری چلانگ کے بعد $\tilde{F}(x) = 1$ رہے گا۔

²⁴cumulative frequency function of the sample
²⁵sample distribution function

جدول 24.3: کپاس کے سوئی دھاگے کو توڑنے کے لئے درکار قوت (نیوٹن میں)

114	118	86	107	87	94	82	81	98	84
120	126	98	89	114	83	94	106	96	111
123	110	83	118	83	96	96	74	91	81
102	107	103	80	109	71	96	91	86	129
130	104	86	121	96	96	127	94	102	87

$\tilde{F}(x)$ اور $\tilde{f}(x)$ کا تعلق درج ذیل ہے

$$(24.2) \quad \tilde{F}(x) = \sum_{t \leq x} \tilde{f}(t)$$

جہاں $t \leq x$ کا مطلب ہے کہ کسی بھی x کے لئے ان تمام $\tilde{f}(x)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے t کی قیمت x کے برابر یا x سے کم ہو۔

اگر کسی نمونہ میں مختلف اعداد کی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس کا جدولی اور تریسی اظہار غیر ضروری طور پر مشکل ہو گا جس کو گروہ بندی²⁶ سے آسان بنانا ممکن ہے۔ آئیں گروہ بندی کے عمل کو سمجھیں۔

دیے گئے نمونہ کے لحاظ سے ہم ایسا وقفہ I منتخب کرتے ہیں جس میں تمام نمونی قیمتیں شامل ہوں۔ ہم I کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں جماعتی وقفہ²⁷ کہتے ہیں۔ ان جماعتی وقفوں کے وسطی نقطوں کو جماعتی وسطی نقطے²⁸ یا جماعتی نشان²⁹ کہتے ہیں۔ ہر جماعتی وقفہ میں پائے جانے والے نمونی قیمتیں کو طبقہ³⁰ کہتے ہیں۔ طبقہ میں نمونی قیمتوں کی تعداد کو جماعتی تعدد³¹ کہتے ہیں جس کو جسامت نمونہ n سے تقسیم کرنے سے اضافی جماعتی تعدد³² حاصل ہو گا۔ اس تعدد $\tilde{f}(x)$ کو جو جماعتی نشان کے تابع ہے گروہ بند نمونہ کا تعددی تفاعل³³ کہتے ہیں۔ اسی طرح مجموعی اضافی جماعتی تعدد $\tilde{F}(x)$ جو جماعتی نشان کے تابع ہے گروہ بند نمونہ کا تقسیمی تفاعل³⁴ کہلاتا ہے۔ جدول 24.3 اور جدول 24.4 میں مثال دیا گیا ہے۔

grouping²⁶
class intervals²⁷
class midpoints²⁸
class marks²⁹
class³⁰
class frequency³¹
relative class frequency³²
frequency function of the grouped sample³³
distribution!function of the grouped sample³⁴

جدول 24.4: تعددی جدول برائے جدول 24.3 (گروہ بند)

جماعتی وقفہ	جماعتی نشان x	حتمی تعدد		$f(x)$	$\bar{F}(x)$
		نشان شمار			
65 – 75	70		2	0.04	0.04
75 – 85	80		8	0.16	0.20
85 – 95	90		11	0.22	0.42
95 – 105	100		12	0.24	0.66
105 – 115	110		8	0.16	0.82
115 – 125	120		5	0.10	0.92
125 – 135	130		4	0.08	1.00
		مجموعہ	50	1.00	

جماعتوں کی تعداد جتنی کم رکھی جائے، گروہ بند نمونہ کی تقسیم اتنی سادہ ہوگی اور اتنی ہی زیادہ معلومات کھوئی جائے گی چونکہ اصل نمونی قیمتیں اب صریحاً نظر نہیں آئیں گی۔ گروہ بندی کرتے وقت دھیان رکھیں کہ صرف غیر ضروری معلومات کھوئی جائے۔ گروہ بند نمونہ استعمال کرتے ہوئے مشکلات سے بچنے کی خاطر درج ذیل اصولوں کا خیال رکھیں۔

• جماعتی وقفے برابر رکھیں۔

• جماعتی نشان یوں منتخب کریں کہ جماعتی نشان سادہ اعداد (جن میں غیر صفر ہندسوں کی تعداد کم سے کم ہو) پر واقع ہوں۔

• اگر نمونی قیمت x_j دو جماعتوں کی سرحد پر واقع ہو تب یہ قیمت اس طبقہ میں شامل کیا جائے گا جو x_j سے شروع ہوتا ہو۔

سوالات

سوال 24.1 تا سوال 24.9 میں دیے گئے نمونہ کا تعددی جدول بنائیں اور نمونہ کو تعددی نقطہ ترسیم، ڈبہ ترسیم اور مستطیل ترسیم کی صورت میں دکھائیں۔

سوال 24.1: مزاحمت کی قیمت اوہم Ω میں۔

99	100	102	101	98	103	100	102	99	101
100	100	99	101	100	102	99	101	98	100

سوال 24.2:

6	2	4	1	2	4	3	3	2	1	6	5	6	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

سوال 24.3: برقی سوئچ کا سینڈوں میں دورانیہ رد عمل

1.3	1.4	1.1	1.5	1.4	1.3	1.2	1.4	1.5	1.3
1.2	1.3	1.5	1.4	1.4	1.6	1.3	1.5	1.1	1.4

سوال 24.4: خام کونلہ میں کونلہ کی فی صد مقدار

87	86	85	87	86	87	86	81	77	85
86	84	83	83	82	84	83	79	82	73

سوال 24.5: چادری فولاد کی تنش مضبوطی [kg mm^{-2}]

44	43	41	41	44	44	43	44	42	45	43	43	44	45	46
42	45	41	44	44	43	44	46	41	43	45	45	42	44	44

سوال 24.6: خود کار نظام سے 100 کاغذ کے گھٹے بنانے میں کمی بیشی

0	-1	0	0	1	1	2	0	1	0
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---

سوال 24.7: ایک ہی قسم کے گاڑیوں کا تیل کا خرچہ۔ [کلو میٹر فی لیٹر]

12	11.5	11	12.5	11	12
----	------	----	------	----	----

سوال 24.8: خود کار نظام سے بھری گئی تھیلوں کا گرام میں وزن

200 203 199 198 201 200 201 201

سوال 24.9: اندرون شہر چلتی ریل گاڑی کا اڈے پر ٹھیک وقت پر پہنچنے سے انحراف (منٹوں میں)³⁵

3 4 1 0 2 2 3 1 5 3

سوال 24.10: سوال 24.3 کے نمونہ کی مجموعی تعددی تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.11: جدول 24.4 کے گروہ بند نمونہ کا ڈبہ ترسیم، مستطیل ترسیم اور تعددی کثیر الاضلاع ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.12: جدول 24.1 میں جماعتی وقفوں کے جماعتی نشان 300 ، 320 ، 340 ، ... پر لیتے ہوئے مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔ اس کے مستطیل ترسیم کھینچ کا شکل 24.1-پ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 24.13: جدول 24.3 میں جماعتی نشان 75 ، 85 ، 95 ، ... لے کر مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔ اس کے مستطیل ترسیم کا سوال 24.10 کے ترسیم سے موازنہ کریں۔

سوال 24.14: 1500 تجرباتی نتائج میں سب سے کم ناپ 10.8 cm اور سب سے زیادہ ناپ 11.9 cm تھی۔ اس مواد کی گروہ بندی لے لئے جماعتی وقفہ تجویز کریں۔

³⁵ امید کی جاسکتی ہے کہ ایک دن ہماری ریل گاڑیاں بھی وقت کی اتنی پابند ہوں گی۔

24.3 نمونی اوسط اور نمونی تغیریت

تعددی تفاعل (یا تقسیمی تفاعل) نمونہ کی صحیح تصویر کشی کرتا ہے۔ اس تفاعل سے ہم نمونہ کے کئی خواص کا حساب لگا سکتے ہیں مثلاً نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت، پھیل، تفاعل، وغیرہ۔ اس حصہ میں ہم ایسے اہم ترین دو قیمتوں، نمونی اوسط اور نمونی تغیریت، پر غور کریں گے۔

نمونہ x_1, x_2, \dots, x_n کی اوسط قیمت یا مختصراً نمونی اوسط³⁶ کو \bar{x} سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$(24.3) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

تمام نمونی قیمتوں کے مجموعہ کو جسامت n سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی اوسط حاصل ہو گا۔ ظاہر ہے کہ یہ نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت دے گا۔

نمونہ x_1, x_2, \dots, x_n کی نمونی تغیریت³⁷ کو s^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$(24.4) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$$

نمونہ اوسط \bar{x} سے نمونی قیمتوں کے انحراف کے مربعوں کو $n-1$ سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی تغیریت حاصل ہو گی۔ یہ نمونی قیمتوں کی انحراف یا پھیل کی ناپ ہے۔ نمونی تغیریت غیر منفی عدد ہو گا۔ نمونی تغیریت s^2 کا مثبت جذر معیاری انحراف³⁸ کہلاتا ہے جس کو s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 24.1: نمونی اوسط اور نمونی تغیریت
بے ترتیب منتخب کیے گئے کیلوں کی (سٹی میٹروں میں) لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81

sample mean³⁶
sample variance³⁷
standard deviation³⁸

مساوات 24.3 سے نمونی اوسط

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(0.80 + 0.81 + 0.81 + 0.82 + \cdots + 0.81) = 0.811 \text{ cm}$$

اور مساوات 24.4 سے نمونی تغیریت

$$s^2 = \frac{1}{9}[(0.80 - 0.811)^2 + \cdots + (0.81 - 0.811)^2] = 0.000054 \text{ cm}^2$$

ہے۔ ایک جیسی نمونی قیمتوں کو اکٹھا لکھنے سے حساب نسبتاً آسان بنایا جاسکتا ہے جیسے

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(2 \cdot 0.80 + 5 \cdot 0.81 + 3 \cdot 0.82) = 0.811 \text{ cm}$$

جہاں قوسین میں تین مختلف نمونی قیمتوں $x_1 = 0.80$ ، $x_2 = 0.81$ اور $x_3 = 0.82$ کو ان کی تعدد سے ضرب دیا گیا ہے۔ اسی طرح

$$s^2 = \frac{1}{9}[(2(0.800 - 0.811)^2 + 5(0.810 - 0.811)^2 + 3(0.820 - 0.811)^2] = 0.000054$$

□

ہو گا۔

اس مثال میں ہم نے \bar{x} اور s^2 کو نمونہ کے تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ کی مدد سے حاصل کرنا دیکھا۔ اگر ایک نمونہ میں m مختلف اعدادی قیمتیں

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

پائی جاتی ہوں جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2), \dots, \tilde{f}(x_m)$$

ہوں تب حساب کے لئے درکار تعدد درج ذیل ہوں گے

$$n\tilde{f}(x_1), n\tilde{f}(x_2), \dots, n\tilde{f}(x_m)$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 سے

$$(24.5) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m x_j n\tilde{f}(x_j)$$

اور

$$(24.6) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 n \tilde{f}(x_j)$$

حاصل ہو گا۔ دھیان رہے کہ مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 میں ہم تمام نمونی قیمتوں پر مجموعہ لیتے ہیں جبکہ مساوات 24.5 اور مساوات 24.6 میں ہم اعدادی طور مختلف نمونی قیمتوں پر مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔ حتمی تعدد $n \tilde{f}(x_j)$ عدد صحیح ہوں گے جبکہ اضافی تعدد $\tilde{f}(x_j)$ عموماً غیر عدد صحیح ہوں گے۔

چونکہ $x_j - \bar{x}$ کی حتمی قیمت نمونی اوسط کی نسبت بہت کم ہو سکتی ہے لہذا s^2 کے مذکورہ بالا کلیات کی استعمال سے (خود کار حساب میں) ملحوظ ہند سے ضائع ہوں گے۔ ہم s^2 کا ایک ایسا کلیہ اخذ کرتے ہیں جو ان مشکلات سے دو چار نہ ہو۔ ہم مساوات 24.4 میں

$$(x_j - \bar{x})^2 = x_j^2 - 2x_j\bar{x} + \bar{x}^2$$

پر کرتے ہوئے تین مجموعے

$$\sum (x_j - \bar{x})^2 = \sum x_j^2 - 2\bar{x} \sum x_j + \sum \bar{x}^2$$

حاصل کرتے ہیں جہاں آخری مجموعہ $n\bar{x}^2$ کے برابر ہے۔ مساوات 24.3 سے \bar{x} کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$-2\bar{x} \sum x_j = -\frac{2}{n} (\sum x_j)^2 \quad \text{اور} \quad n\bar{x}^2 = \frac{1}{n} (\sum x_j)^2$$

لکھا جاسکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$(24.7) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right]$$

حاصل ہو گا۔ اسی طرح مساوات 24.6 کو تبدیل کرتے ہوئے

$$(24.8) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^m x_j^2 n \tilde{f}(x_j) - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m x_j n \tilde{f}(x_j) \right)^2 \right]$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.1 میں مساوات 24.5 اور مساوات 24.8 (جدول 24.5) سے پہلے کی طرح $\bar{x} = \frac{8.11}{10} = 0.811$ اور

$$s^2 = \frac{1}{9} \left(6.5777 - \frac{8.11^2}{10} \right) = \frac{0.00049}{9} = 0.000054$$

حاصل ہوتے ہیں۔

جدول 24.5: اوسط اور تغیریت کا حساب برائے مثال 24.1

x_j	$10\tilde{f}(x_j)$	$x_j \cdot 10\tilde{f}(x_j)$	x_j^2	$x_j^2 \cdot 10\tilde{f}(x_j)$
0.80	2	1.60	0.6400	1.2800
0.81	5	4.05	0.6561	3.2805
0.82	3	2.46	0.6724	2.0172

سوالات

سوال 24.15: گزشتہ حصے کی سوال 24.2 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 3.47$, $s^2 = 2.98$

سوال 24.16: گزشتہ حصے کی سوال 24.4 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 84$, $s^2 = \frac{1251}{95}$

سوال 24.17: نمونہ 2, 1, 4, 5 کا مستطیل ترسیم کھینچیں۔ ترسیم کو دیکھ کر \bar{x} اور s کی قیمتوں کا اندازہ لگائیں۔ \bar{x} ، s^2 اور s کی قیمتوں کا حساب لگائیں۔
جواب: $\bar{x} = 3$, $s^2 = 3.3$, $s = 1.817$

سوال 24.18: دکھائیں کہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نمونی قیمتوں کے بیچ \bar{x} ہو گا۔

سوال 24.19: نمونہ کا نمونہ میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو نمونہ کا ³⁹ کہتے ہیں۔ مثال 24.1 میں دیے گئے نمونہ کا تلاش کریں۔
جواب: 0.02

سوال 24.20: صدویہ، وسطانیہ نمونہ کی p ویں صدویہ ⁴⁰ سے مراد ایسا عدد Q_p ہے کہ کم از کم $p\%$ نمونی قیمتیں Q_p سے کم یا اس کے برابر ہوں اور ساتھ ہی $(100 - p)\%$ نمونی قیمتیں اس سے زیادہ یا اس کے برابر ہوں۔ اگر ایک سے زیادہ ایسا عدد پایا جاتا ہو (جس صورت میں ان اعداد کا وقفہ پایا جائے گا) تب p ویں صدویہ سے مراد ان اعداد کا اوسط (یعنی وقفے کا وسطی نقطہ) ہو گا۔ بالخصوص Q_{50} کو وسطانیہ ⁴¹ کہتے ہیں جس کو \bar{x} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وسطانیہ

³⁹ range
⁴⁰ percentile
⁴¹ median

کو نصف چوتھائی⁴² بھی کہتے ہیں۔ جدول 24.2 کے نمونہ کا وسطانیہ \bar{x} تلاش کریں۔
جواب: 360

سوال 24.21: نمونہ کی Q_{25} اور Q_{75} صدویہ کو بالترتیب نچلی چوتھائی⁴³ اور بالائی چوتھائی⁴⁴ کہتے ہیں جبکہ $Q_{75} - Q_{25}$ جو پھیل کی ناپ ہے کو چوتھائی⁴⁵ کہتے ہیں۔ جدول 24.2 کے نمونہ کا Q_{25} ، Q_{75} اور $Q_{75} - Q_{25}$ تلاش کریں۔
جواب: 350, 380, 30

سوال 24.22: جدول 24.3 کے لئے سوال 24.21 کو حل کریں۔
جواب: $\frac{345}{4}$, $\frac{439}{4}$, $\frac{47}{2}$

سوال 24.23: عادیہ نمونہ میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت کو نمونہ کی عادیہ⁴⁶ کہتے ہیں۔ یہ سب سے عام قدر ہوتی ہے۔ درج ذیل نمونہ کی اوسط، وسطانیہ اور عادیہ تلاش کریں۔ ان پر تبصرہ کریں۔

قیمت	100	1000	1 000 000
تعداد	100	90	20

جواب: 100 = عادیہ، 1000 = وسطانیہ، 10 000 = اوسط

سوال 24.24: مبدا کام اگر $x_j = x_j^* + c$ ہو جہاں $j = 1, \dots, n$ اور c کوئی مستقل ہوتو دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c + \bar{x}^*, \quad \left(\bar{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^* \right) \quad \text{اور} \quad s^2 = s^{*2}$$

ہوں گے جہاں x_j^* قیمتوں کی تغیریت s^{*2} ہے۔ (عملی استعمال میں c یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ x_j^* کی حتمی قیمتیں چھوٹی ہوں۔ جیومیٹریائی طور پر یہ مبدا کی تبدیلی کے مترادف ہے لہذا اس کو ترکیب مبدا کام⁴⁷ کہتے ہیں۔)

سوال 24.25: ترکیب مبدا کام کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

⁴²middle quartile

⁴³lower quartile

⁴⁴upper quartile

⁴⁵interquartile range

⁴⁶mode

⁴⁷method of working origin

سوال 24.26: مکمل رمز نویسی

اگر $x_j = c_1 x_j^* + c_2$ ہو جہاں $j = 1, \dots, n$ جبکہ c_1 اور c_2 مستقل ہیں تب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}^* + c_2, \quad s^2 = c_1^2 s^{*2}$$

ہوں گے جہاں \bar{x}^* اور s^{*2} کی معنی سوال 24.24 میں پیش کی گئی ہیں۔ اس کو ترکیب مکمل رمز نویسی⁴⁸ کہتے ہیں۔ (اس ترکیب سے قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے نتائج کی جلد جانچ پڑتال کی جاسکتی ہے۔)

سوال 24.27: اس ترکیب کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

سوال 24.28: کسی بھی نمونہ کی گروہ بندی سے عموماً نمونی اوسط متاثر ہو گا۔ دکھائیں کہ نمونی اوسط میں تبدیل $\frac{1}{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے جہاں ہر ایک جماعتی وقفہ کی لمبائی 1 ہے۔

سوال 24.29: جدول 24.3 کی غیر گروہ بند نمونہ کی گروہ بندی جدول 24.4 میں کی گئی ہے۔ دونوں مواد کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔ نتائج کا آپس میں موازنہ کریں۔

جواب: $\bar{x} = 99.4, s^2 = 254.7$: گروہ بند $\bar{x} = 99.2, s^2 = 234.7$: غیر گروہ بند

24.4 بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات

شماریاتی تجربات یا شماریاتی مشاہدے سے ہمیں نمونے حاصل ہوں گے جن کی مدد سے ہم متعلقہ آبادی کے بارے میں نتائج اخذ کرنا چاہیں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے حسابی احتمال کی مدد سے ہمیں آبادی کے حسابی نمونے بنانے ہوں گے۔ یہ نظریہ حسابی شماریات کی بنیاد ہے جس کی گہرائی میں ہم اپنی ضرورت کے مطابق جائیں گے۔ اس حصہ میں کئی بنیادی تصورات کو متعارف کیا جائے گا۔

ایک بلا منصوبہ تجربہ یا بلا منصوبہ مشاہدہ، جنہیں ہم مختصراً تجربہ⁴⁹ یا مشاہدہ⁵⁰ کہیں گے، سے مراد وہ عمل ہے جو درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

method of full coding⁴⁸
experiment⁴⁹
observation⁵⁰

- اس کو طے شدہ قواعد کے تحت سرانجام دیا جاتا ہے جو عمل کو مکمل طور پر بیان کرتے ہیں۔
- اس عمل کو جتنی بار چاہیں دوبارہ انجام دیا جاسکتا ہے۔
- ہر مرتبہ عمل کا نتیجہ اتفاق پر منحصر ہوگا (یعنی نتیجہ ان اثرات پر منحصر ہے جنہیں ہم قابو نہیں کر سکتے ہیں) لہذا قبل از وقت یکتا طور پر نتیجہ جاننا ممکن نہیں ہوگا۔
- ایک مرتبہ تجربے کے عمل سے حاصل نتیجہ کو اس کوشش⁵¹ کا انجام⁵² کہتے ہیں۔

اس کی مثال (کرکٹ کی کھیل کی آغاز میں) سکہ پھینکنا، لوڈو⁵³ کی کھیل میں پانسہ⁵⁴ پھینکنا، 100 پیچ کی ڈبی سے 10 بیٹیوں کا انتخاب یا مختلف حالات میں کیمیائی عمل کی پیداوار تعین کرنا اور دیگر تجربات مثلاً بلا منصوبہ 20 افراد کا انتخاب اور ان کا فشار خون⁵⁵ تعین کرنا یا کسی موضوع پر ان کی رائے جاننا ہیں۔

کسی تجربہ کے تمام ممکنہ انجام کے سلسلہ کو اس تجربہ کی نمونی فضا⁵⁶ کہتے ہیں جس کو S سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہر ایک انجام کو S کا رکن⁵⁷ یا نقطہ⁵⁸ کہتے ہیں۔ تنہا تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ متناہی جبکہ لامتناہی تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ لامتناہی کہلائے گا۔

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے بلا منصوبہ تجربہ کے ساتھ درج ذیل نمونی سلسلہ منسلک کیا جاسکتا ہے،

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

چونکہ پانسہ پھینکنے کے بعد (چھ ممکنات میں سے) کسی ایک رخ رکے گا۔

صنعتی پیداوار سے ہم ایک رکن نکال کر دیکھ سکتے ہیں کہ آیا وہ بے عیب یا عیب دار ہے۔ یوں S دو ارکان D (عیب دار) اور N (بے عیب) پر مشتمل ہوگا جنہیں اعداد مثلاً 0 (عیب دار) اور 1 (بے عیب) سے بھی

⁵¹ trial⁵² outcome⁵³ ludo⁵⁴ ایک کعب جس کی چھ سطحوں پر ایک تا چھ نقطے ہوتے ہیں۔⁵⁵ blood pressure⁵⁶ sample space⁵⁷ element⁵⁸ point

ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اب اگر ہم ایک سے زیادہ اقسام کے عیب میں تمیز کریں تب نمونی فضا دو سے زائد نقطوں پر مشتمل ہو گا۔

کپاس کی مضبوطی کے تجربہ (جدول 24.3) میں نمونی فضا لامتناہی ہو گا چونکہ دھاگہ توڑنے کے لئے درکار قوت کسی مخصوص میں کوئی بھی مثبت قیمت ہو سکتی ہے۔

عملی مسائل میں ہمیں انفرادی انجام سے زیادہ دلچسپی نہیں ہو گی بلکہ ہم صرف اتنا جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا کسی مخصوص سلسلہ انجام سے تعلق ہے (یا نہیں ہے)۔ ظاہر ہے کہ ایسا ہر سلسلہ A پوری نمونی فضا S کا ذیلی سلسلہ ہو گا۔ اس کو وقوعہ⁵⁹ کہتے ہیں۔

چونکہ کوئی بھی انجام S کا ذیلی سلسلہ ہو گا لہذا یہ ایک مخصوص قسم کا وقوعہ ہو گا جس کو بنیادی وقوعہ کہتے ہیں۔ اسی طرح پوری فضا S بھی ایک مخصوص وقوعہ ہے۔

مثال 24.2: پانچ پانی کے ٹلکوں (جنہیں ایک تا پانچ سے ظاہر کیا جاتا ہے) میں سے دو ٹلکے منتخب کیے جاتے ہیں۔ نمونی فضا درج ذیل دس ممکنہ انجام پر مشتمل ہو گی۔

1,2 1,3 1,4 1,5 2,3 2,4 2,5 3,4 3,5 4,5

اب اگر ہم عیب دار ٹلکوں میں دلچسپی رکھتے ہوں تب ہمیں درج ذیل تین انجاموں میں فرق کرنا ہو گا۔

دونوں عیب دار ہیں: C , ایک عیب دار ہے: B , کوئی بھی عیب دار نہیں ہے: A

فرض کریں کہ ٹلکوں میں 1,2,3 عیب دار ہیں تب درج ذیل ہو گا۔

4,5, منتخب کرنے سے A ہو گا

1,4 1,5 2,4 2,5 3,4 3,5 منتخب کرنے سے B ہو گا

1,2 1,3 2,3 منتخب کرنے سے C ہو گا

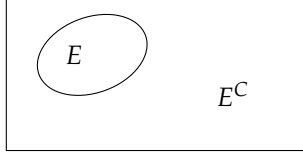
□

نمونی فضا S اور تجربہ کے انجام کو وین اشکال⁶⁰ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ شکل 24.3 میں چکور کے اندر نقطوں کا سلسلہ S کو ظاہر کرتے ہے۔ تب مستطیل کے اندر بند منحنی کا اندرون کسی وقوعہ کو ظاہر کرے گا جس کو ہم E سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان تمام ارکان (انجاموں) کا سلسلہ جو E میں شامل نہیں ہیں کو S میں E کا متمم کہتے ہیں جس کو E^c یا \bar{E} سے ظاہر کیا گیا ہے۔

⁵⁹ event

⁶⁰ Venn diagram

⁶¹ یا \bar{E} سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو ہم استعمال نہیں کریں گے چونکہ اس کو کسی دوسرے مقصد (بندش سلسلہ) کے لئے مختص کیا گیا ہے۔



شکل 24.3: دین شکل میں نمونی سلسلہ S اور وقوعات E اور E^C دکھائے گئے ہیں

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں

جب جفت عدد حاصل ہو : E

کا متمم

جب طاق عدد حاصل ہو : E^C

ہو گا۔ ایسا وقوعہ جس میں کوئی انجام نہ پایا جاتا ہو کو خالی وقوعہ⁶² یا نا ممکن وقوعہ⁶³ کہتے ہیں جس کو \emptyset سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ کسی تجربہ میں A اور B کوئی دو وقوعات ہیں۔ تب وہ وقوعہ جو S میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو A یا B یا دونوں میں پائے جاتے ہوں کو A اور B کا اشتراک⁶⁴ کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A \cup B$$

وہ وقوعہ جو S میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو A اور B دونوں میں پائے جاتے ہوں کو A اور B کا تقاطع⁶⁵ کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ شکل 24.4 میں اشتراک اور تقاطع کو دین شکل پر دکھایا گیا ہے۔

$$A \cap B$$

اگر A اور B میں کوئی وقوعہ مشترک نہ ہو تب $A \cup B = \emptyset$ ہو گا اور ہم کہیں گے کہ A اور B بے ربط وقوعہ⁶⁶ یا باہمی بلا شرکت وقوعہ⁶⁷ ہیں۔

⁶² empty event

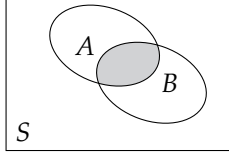
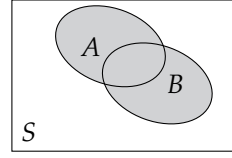
⁶³ impossible event

⁶⁴ union

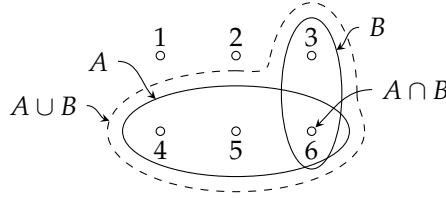
⁶⁵ intersection

⁶⁶ disjoint events

⁶⁷ mutually exclusive events

(ب) تقاطع $A \cap B$ (الف) اشتراک $A \cup B$

شکل 24.4: نمونی فضا S میں دو وقعات A ، B اور (گہری سیاہی میں) ان کی اشتراک اور تقاطع کی وین شکل



شکل 24.5: وین شکل برائے مثال 24.3

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں $B \cap C = \emptyset$ ہے جبکہ $B \cup C$ ایک یا دو عیب دار نلکیاں ہیں۔

مثال 24.3: پانسہ پھینکنے کے ایک تجربہ میں درج ذیل وقوعہ

A : 4 سے چھوٹا عدد نہ ہو

B : 3 سے قابل تقسیم عدد ہو

□ کا اشتراک $A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ اور تقاطع $A \cap B = \{6\}$ ہو گا (شکل 24.5)۔

اگر وقوعہ A کے تمام ارکان وقوعہ B میں پائے جاتے ہوں تب A کو B کا ذیلی وقوعہ⁶⁸ کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$A \subset B \quad \text{یا} \quad B \supset A$$

ظاہر ہے کہ $A \subset B$ کی صورت میں اگر B واقع پذیر ہو تب لازماً A بھی وقوع پذیر ہو گا۔ مثال کے طور پر وقوعہ $D = \{4, 6\}$ پانسہ کے ہفت نتائج کے وقوعہ $E = \{2, 4, 6\}$ کا ذیلی وقوعہ ہے۔

⁶⁸ subevent

فرض کریں کہ نمونی فضا S میں کئی وقوعات A_1, \dots, A_m ہیں۔ تب ان m وقوعات میں سے ایک میں یا ایک سے زیادہ میں پائے جانے والے تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ان m وقوعات کا اشتراک ہو گا جس کو

$$\bigcup_{j=1}^m A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$$

لکھا جاتا ہے۔ ان تمام وقوعات میں پائے جانے والے ارکان پر مشتمل وقوعہ A_1, \dots, A_m کا تقاطع ہو گا جس کو

$$\bigcap_{j=1}^m A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$$

لکھا جاتا ہے۔

زیادہ عمومی طور پر فرض کریں کہ S میں لامتناہی ارکان A_1, \dots, A_m, \dots پائے جاتے ہیں۔ تب اشتراک

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو کم سے کم کسی ایک مذکورہ بالا وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔ اسی طرح تقاطع

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو مذکورہ بالا تمام وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔

اگر وقوعات A_1, \dots, A_m, \dots یوں ہوں کہ ان میں سے کسی ایک کا واقع ہونے سے باقی کسی وقوعہ کا واقع ہونا ناممکن ہو تب کسی بھی $j \neq k$ کے لئے $A_j \cap A_k = \emptyset$ ہو گا اور ایسی وقوعات کو بے ربط وقوعات یا باہمی بلا شرکت وقوعات کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں A, B, C بے ربط وقوعات ہیں۔

فرض کریں کہ ہم بے منصوبہ تجربہ n مرتبہ کرتے ہوئے n قیمتوں پر مشتمل نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ ان n کوششوں میں وقوعہ A اور وقوعہ B کے اضافی تعدد بالترتیب $\tilde{f}(A)$ اور $\tilde{f}(B)$ ہیں۔ تب وقوعہ $A \cup B$ کی اضافی تعدد

$$(24.9) \quad \tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A \cap B)$$

ہوگی۔ اگر A اور B باہمی بلا شرکت ہوں تب $\tilde{f}(A \cap B) = 0$ اور

$$(24.10) \quad \tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B)$$

ہوگا۔ یہ کلیات شکل 24.4 میں دکھائے گئے وین شکل سے صاف ظاہر ہیں۔ ان کا باضابطہ ثبوت آپ سے سوال 24.34 میں مانگا گیا ہے۔

سوالات

سوال 24.30: دو سکے پھینکنے کے نمونی فضا کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.31: پانسہ کی جوڑی ایک مرتبہ پھینکی جاتی ہے۔ اس تجربہ کا نمونی فضا بنائیں جس میں تمام ارکان ہوں۔ اس شکل پر درج ذیل وقوعات کی نشاندہی کریں۔ (الف) دونوں یکساں عدد ہیں۔ (ب) دونوں اعداد کا مجموعہ 7 سے زیادہ ہے۔ (پ) دونوں اعداد کا مجموعہ 5 ہے۔

سوال 24.32: تین برقیاتی پرزوں کا عرصہ زندگی کا نمونی فضا تلاش کریں۔
جواب: غیر منفی اعداد کے تمام مرتب تین اعداد کا فضا۔

سوال 24.33: ایک تجربہ میں چادر میں سوراخ کر کے سوراخ کا قطر ناپا جاتا ہے۔ سوراخ کا قطر 2.9 cm اور 3.1 cm کے بیچ ہے۔ E کا متمم تلاش کریں۔

سوال 24.34: مساوات 24.9 کو ثابت کریں۔
جواب: $A \cup B$ صرف اور صرف اس صورت ہوگا جب $A \cap B$ یا $A \cap B^C$ یا $A^C \cap B$ ہو۔ یہ تینوں باہمی بلا شرکت ہیں۔ فرض کریں کہ نمونہ میں متعلقہ حتمی تعداد n_1 ، n_2 ، n_3 ہو۔ تب $\tilde{f}(A) = \frac{n_1+n_2}{n}$ ، $\tilde{f}(B) = \frac{n_1+n_3}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cap B) = \frac{n_1}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cup B) = \frac{n_1+n_2+n_3}{n}$ ہوں گے۔ ان سے مساوات 24.9 حاصل ہوتا ہے۔

سوال 24.35: ایک ڈبیا میں 20 قلم ہیں جن میں سے 10 قلم بے عیب ہیں۔ 8 قلموں میں عیب A ، 5 قلموں میں عیب B اور 3 قلموں میں دونوں عیب پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ بلا منصوبہ ایک قلم نکالا جاتا ہے۔ متعلقہ نمونی فضا S کی وین شکل بنائیں جس میں A قسم کے عیب کا وقوعہ E_A اور B قسم کے

عیب کا وقوعہ E_B دکھایا گیا ہو۔ مزید $E_A \cup E_B$ ، $E_A \cap E_B$ ، $E_A^C \cap E_B^C$ ، $E_A^C \cap E_B$ ، $E_A \cap E_B^C$ ، $E_A \cup E_B^C$ ، $E_A^C \cup E_B^C$ ، $E_A^C \cup E_B$ ، $E_A \cup E_B$ بھی دکھائیں۔ ہر وقوعہ میں انجام کی تعداد بتائیں۔

سوال 24.36: وین شکل کی مدد سے درج ذیل قواعد کو پرکھیں۔

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

سوال 24.37: قوانین ڈی مارگن وین اشکال بناتے ہوئے درج ذیل ڈی مارگن قوانین⁶⁹ کی تصدیق کریں۔

$$\begin{aligned} (A \cup B)^C &= A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C &= A^C \cup B^C \end{aligned}$$

سوال 24.38: متمم کی تعریف سے درج ذیل اخذ کریں جہاں نمونی فضا S کا A کوئی ذیلی سلسلہ ہے۔

$$(A^C)^C = A, \quad S^C = \emptyset, \quad \emptyset^C = S, \quad A \cup A^C = S, \quad A \cap A^C = \emptyset$$

سوال 24.39: وین شکل استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $A \subset B$ صرف اور صرف تب ہو گا جب $A \cup B = B$ ہو۔ $A \subset B$ کے لئے $A \cap B$ کی صورت میں شرط تلاش کریں۔

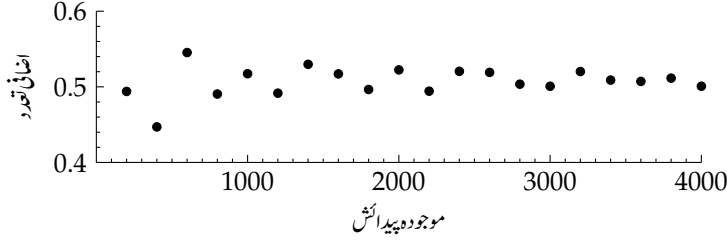
24.5 احتمال

تجربہ سے ثابت ہوتا ہے کہ عموماً بلا منصوبہ تجربات کی اضافی تعدد میں شمار یاتی یکسانیت پائی جاتی ہے۔ یعنی ایسے تجربہ کے مختلف لمبی تسلسل میں کسی وقوعہ کے مطابقتی اضافی تعدد تقریباً ایک جیسے ہوں گے۔ اس کی مثالیں جدول 24.6 اور شکل 24.6 میں دکھائی گئی ہیں۔ (سکہ پھینکنے سے شیر یا خط حاصل ہوتا ہے۔) شکل 24.6 میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسے جیسے لڑکوں کی تعداد بڑھتی ہے ویسے ویسے لڑکوں کی فی صد میں اتر چڑھاؤ کم ہوتی جاتی ہے۔ عیب دار اشیاء کا فی صد بھی ایسا ہی رویہ رکھتا ہے اور اس طرح کے دیگر مثال بھی دیے جاسکتے ہیں۔

⁶⁹De Morgan's laws

جدول 24.6: سکہ پھینکنے کے نتائج

شیر کی اضافی تعدد	جتنی مرتبہ شیر حاصل ہوا	جتنی مرتبہ سکہ پھینکا گیا	تجربہ کرنے والا
0.5069	2048	4040	امجد
0.5016	6019	12 000	مشرف
0.5005	12 012	24 000	مشرف



شکل 24.6: وقوعہ "لڑکے کی پیدائش"

چونکہ عموماً بلا منصوبہ تجربات میں شماریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے، ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ ایسے تجربہ میں وقوعہ E کے لئے ایسا عدد $P(E)$ پایا جاتا ہے کہ تجربہ بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دینے سے E کا اضافی تعدد تخمیناً $P(E)$ ہو گا۔ ہم $P(E)$ کو بلا منصوبہ تجربہ میں E کا احتمال⁷⁰ کہتے ہیں۔ دھیان رہے کہ یہ عدد E کی حتمی خاصیت نہیں ہے بلکہ کسی نمونی فضا S یعنی کسی بلا منصوبہ تجربہ سے متعلق ہے۔

جب ہم کہتے ہیں کہ E کا احتمال $P(E)$ ہے، اس سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ اگر اس تجربہ کو بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دیا جائے تب اضافی تعدد $f(E)$ عملی طور پر لازماً $P(E)$ کے تخمیناً برابر ہو گا۔ (یہاں "تخمیناً برابر" کو ہم نے "ٹھیک برابر" بنانا ہو گا۔ اس کے لئے ہمیں حصہ 24.10 تک انتظار کرنا ہو گا۔)

متعارف کردہ احتمال یوں تجربی اضافی تعدد سے وابستہ ہے۔ اس طرح ضروری ہے کہ یہ اضافی تعدد کی چند بنیادی خواص رکھتا ہو۔ یہ خواص مسئلہ 24.1، مسئلہ 24.2 اور مساوات 24.10 سے اخذ کیے جاسکتے ہیں جنہیں حسابی احتمال کے مسلمات کہتے ہیں۔

حسابی احتمال کے مسلمات

probability⁷⁰

• (الف) اگر نمونی فضا S میں E ایک وقوعہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$(24.11) \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

• (ب) تمام نمونی فضا کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(24.12) \quad P(S) = 1$$

• (پ) اگر A اور B باہمی بلا شرکت وقوعات (حصہ 24.4) ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(24.13) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

لا متناہی نمونی فضا کی صورت میں ہمیں مسلمہ - پ کی جگہ مسلمہ - پ * استعمال کرنا ہو گا۔

• (پ*) اگر E_1, E_2, \dots باہمی بلا شرکت وقوعات ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(24.13^*) \quad P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$$

مسلمہ - پ سے الگراجی مانخوؤ کے ذریعہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.3: (قاعدہ جمع برائے باہمی بلا شرکت وقوعات)

اگر E_1, \dots, E_m باہمی بلا شرکت ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(24.14) \quad P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_m)$$

آپ مساوات 24.9 کا درج ذیل مماثل ثابت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.4: (قاعدہ جمع برائے صوابدید وقوعات)

نمونی فضا S میں وقوعات A اور B کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(24.15) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مزید وقوعہ E اور اس کا متمم وقوعہ E^C (حصہ 24.4) بلا شرکت ہیں لہذا $E \cup E^C = S$ ہو گا۔ یوں
مسئلہ - ب اور پ سے

$$P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C) = 1$$

حاصل ہو گا جس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.5: (قاعدہ انعام)

نمونی فضا S میں وقوعہ E اور اس کے متمم وقوعہ E^C کے احتمال کا تعلق درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$P(E) = 1 - P(E^C) \quad (24.16)$$

اس کلیہ کو وہاں استعمال کیا جاسکتا ہے جہاں $P(E^C)$ کا حساب $P(E)$ کے حساب سے زیادہ آسان ہو۔ مثال
24.5 میں اس کی استعمال دکھائی جائے گی۔

ہم نمونی فضا S میں وقوعات کے احتمال کی قیمت کس طرح مقرر کر سکتے ہیں؟

اگر S متناہی ہو اور k ارکان پر مشتمل ہو اور تجربہ سے ظاہر ہوتا ہو کہ ان k انجام کا امکان ایک جیسا ہے
تب ہم ہر انجام کے احتمال کو یکساں قیمت مختص کر سکتے ہیں اور مسئلہ - ب کے تحت یہ احتمال لازماً $\frac{1}{k}$ ہو گا۔ اس
صورت میں احتمال کا حساب، وقوعات کے ارکان کی گنتی کے مترادف ہو گا۔

مثال 24.4: منصفانہ پانسہ

منصفانہ پانسہ سے مراد یکساں خاصیت اور بالکل مربع شکل کا پانسہ ہے۔ پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
ہے۔ یوں $P(1) = \frac{1}{6}$ ، $P(2) = \frac{1}{6}$ ، \dots ، $P(6) = \frac{1}{6}$ ہو گا۔ اس سے اور مسئلہ 24.3 سے ہم دیکھتے
ہیں کہ

وقوعہ جس میں بالائی سطح پر جفت نقطے ہوں: A

کا احتمال $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔ اسی طرح

وقوعہ جس میں بالائی سطح پر 4 نقطوں سے زیادہ نقطے ہوں: B

کا احتمال $P(B) = P(5) + P(6) = \frac{1}{3}$ ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔ زیادہ پیچیدہ صورتیں اگلے حصے میں پیش کی جائیں گی۔ □

مثال 24.5: سکے اچھالنا

پانچ سکے ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں۔ کم از کم ایک خط حاصل ہونے کا احتمال تلاش کریں۔
حل: چونکہ ہر ایک سکے خط یا شیر دے سکتا ہے لہذا نمونی فضا $2^5 = 32$ ارکان پر مشتمل ہے۔ منصفانہ سکے کی صورت میں ہر انجام کو ایک جیسا احتمال $\frac{1}{32}$ مختص کیا جاسکتا ہے۔ تب وقوعہ A^C جس میں کوئی بھی خط حاصل نہ ہو صرف 1 رکن پر مشتمل ہوگا لہذا $P(A^C) = \frac{1}{32}$ ہوگا۔ اس طرح $P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{31}{32}$ حاصل ہوتا ہے۔ □

اگر تجربہ کی نوعیت سے ایسا ظاہر نہ ہو کہ متناہی انجام یکساں برابر امکان رکھتے ہیں یا اگر نمونی فضا متناہی نہ ہو تب، حسابی احتمال کے مسلمات پر پورا اترتے ہوئے، ہم لمبی قوت میں کوشش دہرا کر اضافی تعدد کو استعمال کرتے ہوئے احتمال کی قیمتیں مختص کرتے ہیں۔

اس طرح ہمیں تخمینی قیمتیں حاصل ہوں گی لیکن اس سے کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ کلاسیکی طبیعیات میں ہمیں عموماً ایسی صورت حال کا سامنا ہوتا ہے مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مادہ کی کوئی کمیت ہوتی ہے لیکن اس کمیت کی ٹھیک قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ نظریہ بنانے میں یہ رکاوٹ پیدا نہیں کرتی ہے۔

اگر ہمیں شک ہو کہ ہم نے درست طریقہ سے احتمال کی قیمتیں مختص نہیں کی ہیں تب ہم شماریاتی پرکھ کا سہارا لے سکتے ہیں جس پر حصہ 24.18 میں غور کیا جائے گا۔

عموماً یہ جانتے ہوئے کہ وقوعہ A ہو چکا ہے ہمیں وقوعہ B کا احتمال درکار ہوگا۔ اس کو دیے گئے A کی صورت میں B کا مشروط احتمال⁷¹ کہتے ہیں جس کو $P(B|A)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں A بطور نئی (تخفیف شدہ) نمونی فضا کردار ادا کرتا ہے اور یہ احتمال $P(A)$ کا وہ (کسری) حصہ ہوگا جو $A \cap B$ کا مطابق ہو۔ یوں

$$(24.17) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad [P(A) \neq 0]$$

ہو گا۔ اسی طرح دیے گئے B کی صورت میں A کا مشروط احتمال

$$(24.18) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad [P(B) \neq 0]$$

ہو گا۔

مساوات 24.17 اور مساوات 24.18 کو $P(A \cap B)$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.6: قاعدہ ضرب

اگر نمونی فضا S میں A اور B وقوعات ہوں اور $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہو تب

$$(24.19) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

ہو گا۔

اگر A اور B ایسے وقوعات ہوں کہ

$$(24.20) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ہو تب انہیں غیر تابع وقوعات⁷² کہتے ہیں۔ اب اگر $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہوں تب مساوات 24.17، مساوات 24.18 اور مساوات 24.19 کے تحت

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

ہوں گے جس کا مطلب ہے کہ A کا احتمال B کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا اور اسی طرح B کا احتمال A کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا۔

اسی طرح m وقوعات A_1, \dots, A_m اس صورت غیر تابع ہوں گے جب کسی بھی k وقوعات A_1, \dots, A_k (جہاں $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m$ اور $k = 2, 3, \dots, m$ ہیں) کے لئے درج ذیل ہو۔

$$(24.21) \quad P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_k})$$

دھیان کریں کہ چیزوں کے سلسلہ سے چیز نکالنے، یعنی آبادی سے نمونہ حاصل کرنے، کے دو طریقے پائے جاتے ہیں۔

⁷² independent events

- نمونہ واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔ ہم کل سے جس چیز کو بلا منصوبہ نکالتے ہیں، اسی چیز کو واپس کل میں رکھ کر کل کو اچھی طرح گڈ مڈ کرتے ہیں۔ اس کے بعد اگلا نمونہ نکالا جاتا ہے۔
- نمونہ واپس نہ رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔ ہم نمونہ نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔

مثال 24.6: واپس رکھتے ہوئے اور بغیر واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول ایک ڈبیا میں 10 بیج پائے جاتے ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔ دو بیج بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ دونوں بیج بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ ہم درج ذیل وقوعات پر غور کرتے ہیں۔

پہلا نکالا گیا بیج بے عیب ہے۔ $A :$

دوسرا نکالا گیا بیج بے عیب ہے۔ $B :$

چونکہ 10 میں سے 7 بیج بے عیب ہیں اور ہم بلا منصوبہ بیج نکالتے ہیں لہذا ہر بیج کا نکالے جانے کا امکان $\frac{1}{10}$ ہے۔ یوں $P(A) = \frac{7}{10}$ ہو گا۔ اگر ہم اس بیج کو واپس ڈبیا میں رکھ دیں تب دوسری مرتبہ بیج نکالنے میں اور پہلی مرتبہ بیج نکالنے میں کوئی فرق نہیں ہو گا لہذا $P(B) = \frac{7}{10}$ ہو گا۔ یہ وقوعات غیر تابع ہیں اور

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49 = 49\%$$

ہو گا۔ اس کے برعکس اگر ہم نمونہ واپس نہ رکھیں تب A وقوع پذیر ہونے کے بعد دوسری مرتبہ ڈبیا میں کل 9 بیج ہوں گے جن میں سے 3 عیب دار ہیں لہذا $P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ہو گا۔ مسئلہ 24.6 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \approx 47\%$$

□

سوالات

سوال 24.40: 5 منصفانہ سکے اچھال کر کم سے کم 1 خط حاصل کرنے کا کیا احتمال ہے؟
جواب: $\frac{31}{32}$

سوال 24.41: تین منصفانہ پانسہ اچھالے جاتے ہیں۔ وقوعہ E جس میں کم از کم دو اعداد مختلف حاصل ہوتے ہیں کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.42: 100 بیج کی کھیپ میں 10 عیب دار ہیں۔ اس کھیپ سے 3 بیج بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ (الف) بغیر واپس رکھے، (ب) واپس رکھتے ہوئے، تینوں بیج بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) $0.9^3 = 72.9\%$ ، (ب) $\frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} = 72.65\%$

سوال 24.43: تین برتن ہیں اور ہر برتن میں 5 مرچ ہیں جن پر 1 تا 5 لکھا گیا ہے۔ ہر برتن سے ایک مرچ نکالا جاتا ہے۔ وقوعہ E جس میں نکالے گئے مرچ پر لکھے اعداد کا مجموعہ 3 سے زیادہ ہو کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.44: 100 لوہے کے سلاخوں کے جتھا میں 25 سلاخ زیادہ لمبے، 25 کم لمبے اور 50 صحیح لمبائی کے ہیں۔ اگر 2 سلاخ بلا منصوبہ نکالے جائیں اور انہیں واپس نہ رکھا جائے تب (الف) دونوں ٹھیک لمبائی کے، (ب) ایک ٹھیک لمبائی کا، (پ) دونوں غلط لمبائی کے، (ت) دو کم لمبائی کے سلاخ نکالنے کے احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) 24.75% ، (ب) 50.5% ، (پ) 24.75% ، (ت) 6.06%

سوال 24.45: کافی عرصہ سے ایک کارخانے میں گلاس بنائے جا رہے ہیں جن میں عیب دار گلاسوں کی شرح برقرار 2% ہے۔ ہر آدھا گھنٹہ بعد دو گلاس نکال کر پرکھے جاتے ہیں۔ اس وقوعہ کا کیا احتمال ہے کہ (الف) دونوں گلاس بے عیب ہوں، (ب) ایک گلاس بے عیب ہو، (پ) دونوں گلاس عیب دار ہوں؟ تینوں صورتوں کے احتمال کا مجموعہ کیا ہے؟

سوال 24.46: ایک ڈیزل انجن سے برقی جزیئر چلایا جاتا ہے۔ 30 دن کے عرصہ میں ڈیزل انجن میں مرمت کی ضرورت کا احتمال 5% جبکہ جزیئر میں مرمت کی ضرورت کا احتمال 6% ہے۔ کسی مخصوص دورانیہ میں دونوں کے مرمت کی ضرورت کا احتمال کیا ہوگا؟
جواب: 10.7%

سوال 24.47: کسی مشین میں ہوا کا دباؤ خود کار نظام سے قابو کیا جاتا ہے۔ یہ خود کار نظام 6 ٹرانزسٹر⁷³ پر مبنی ہے۔ کسی دورانیہ میں ہر ایک ٹرانزسٹر کے خراب ہونے کا احتمال 0.05 ہے۔ خود کار نظام صرف اس صورت کام کر سکتا ہے جب تمام ٹرانزسٹر ٹھیک ہوں۔ کسی دورانیہ میں خود کار نظام کے خراب ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال 24.48: ایک ڈبیا میں 100 بیج ہیں جن میں سے 10 بیجوں میں A قسم کا عیب، 5 میں B قسم کا عیب اور 2 میں دونوں اقسام کے عیب پائے جاتے ہیں۔ پہلے نکالے گئے بیج میں A قسم کا عیب پایا جاتا ہے۔ اس بیج میں B قسم کے عیب کا احتمال کیا ہوگا؟

$$P(E_B|E_A) = \frac{P(E_A \cap E_B)}{P(E_A)} = \frac{0.02}{0.10} = 20\% \quad \text{جواب:}$$

سوال 24.49: دو منصفانہ پانسے اچھالے جاتے ہیں۔ ایک پانسہ 5 دیتا ہے۔ دونوں کا مجموعہ 9 سے زیادہ ہونے کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.50: اگر $P(A^C) = 0.2$ ، $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B^C) = 0.4$ ہوں تب $P(B|A \cup B^C)$ کیا ہوگا؟ (شمارہ۔ وین شکل استعمال کریں۔)

$$\frac{0.4}{0.9} = 0.44 \quad \text{جواب:}$$

سوال 24.51: مسئلہ 24.4 کو ثابت کریں۔

سوال 24.52: مسئلہ 24.3 کو ثابت کریں۔

سوال 24.53: مسئلہ 24.6 کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

سوال 24.54: دکھائیں کہ اگر A کا ذیلی سلسلہ B ہو تب $P(B) \leq P(A)$ ہوگا۔

$$\text{جواب: } A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) = B \cup (A \cap B^C) \quad \text{ہے جبکہ مسلمہ۔ پ سے}$$

$$P(A \cap B^C) \geq 0 \quad \text{ہے۔ چونکہ } P(A) = P(B) + P(A \cap B^C) \geq P(B)$$

24.6 مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات

گزشتہ حصہ سے ہم جانتے ہیں کہ k مساوی انجام پر مشتمل متناہی نمونی فضا S میں ہر انجام کا احتمال $\frac{1}{k}$ ہے اور وقوعہ A کا احتمال حاصل کرنے کی خاطر ہم A وقوعات کو گنتے ہیں۔ یوں اگر وقوعہ m مرتبہ سرانجام ہو تب $P(A) = \frac{m}{k}$ ہو گا۔ انجام کی گنتی کے لئے درج ذیل کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

فرض کریں کہ چیزوں یا ارکان کی تعداد n ہے۔ انہیں کسی بھی ترتیب سے ایک صف میں رکھا جاسکتا ہے۔ ایسی ہر ترتیب ان چیزوں کی ایک مرتب اجتماع⁷⁴ کہلاتی ہے۔

مسئلہ 24.7: مرتب اجتماعات

n مختلف چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی جہاں تمام چیزیں مرتب اجتماعات میں شامل ہیں۔

$$(24.22) \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad \text{اس کو "عدد ضربیہ" } n \text{ پڑھیں}$$

مرتب اجتماع میں پہلی جگہ کو n مختلف طریقوں سے پر کیا جاسکتا ہے۔ پہلی جگہ پر کرنے کے بعد $n-1$ ارکان رہ جاتے ہیں لہذا دوسری جگہ کو $n-1$ مختلف طریقوں سے پر کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح چلتے ہوئے درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.8: مرتب اجتماعات

اگر n چیزوں کو c مختلف جماعتوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہو جہاں ہر ایک جماعت میں تمام چیزیں بالکل یکساں ہوں جبکہ ہر جماعت میں چیزیں دوسری تمام جماعتوں کی چیزوں سے مختلف ہوں تب ان چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد

$$(24.23) \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_c!} \quad (n_1 + n_2 + \cdots + n_c = n)$$

ہو گی جہاں تمام چیزیں لی گئی ہیں اور j ویں جماعت میں چیزوں کی تعداد n_j ہے۔

n چیزوں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرنے سے ایسی مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جن میں صرف k چیزیں شامل ہوں گی۔ ایک ہی k ارکان کی دو مرتب اجتماعات جن میں ارکان کی ترتیب مختلف ہو،

⁷⁴ permutation

تعریف کی رو، سے مختلف مرتب اجتماعات ہوں گی۔ مثال کے طور پر تین حروف a, b, c میں سے ایک وقت دو حروف منتخب کرتے ہوئے ab, ac, bc, ba, ca, cb مرتب اجتماعات ملتی ہیں۔

n چیزوں میں سے k چیزوں کی مرتب اجتماعات، جہاں چیز واپس رکھی جائے، حاصل کرتے ہوئے کسی بھی چیز کو پہلی مقام پر رکھ کر، دوسری جگہ کوئی بھی چیز بشمول پہلی چیز رکھی جاسکتی ہے۔ اسی طرح باقی جگہ پر کیے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر a, b, c میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے واپس رکھتے ہوئے کل $3^2 = 9$ مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جس میں مذکورہ بالا 6 مرتب اجتماعات اور aa, bb, cc شامل ہیں۔ آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.63)۔

مسئلہ 24.9: مرتب اجتماعات

بغیر واپس رکھے، n مختلف چیزوں میں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد

$$(24.24) \quad n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

حاصل ہو گی جبکہ منتخب چیز واپس رکھتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$(24.24^*) \quad n^k$$

مرتب اجتماعات (کی تعداد) میں نا صرف چیزیں اہمیت رکھتی ہیں بلکہ ان چیزوں کی ترتیب بھی اہمیت رکھتی ہے۔ اس کے برعکس دی گئے چیزوں کے غیر مرتب اجتماعات⁷⁵ سے مراد ایک یا ایک سے زیادہ چیزوں کی وہ انتخاب ہے جس میں چیزوں کی ترتیب کو رد کیا جاتا ہے۔ دو قسم کے غیر ترتیبی اجتماعات پائے جاتے ہیں۔

بغیر واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جاسکتے ہیں۔ ہر سلسلہ میں k مختلف چیزیں ہوں گی اور کسی بھی دو سلسلوں میں بالکل ایک جیسی چیزیں نہیں پائی جائیں گی۔

اس کے علاوہ، چیزوں کو واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جاسکتے ہیں۔

مثال کے طور پر 3 حروف a, b, c میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے بغیر واپس رکھے ab ، ac ، bc حاصل کیے جاسکتے ہیں جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے ab ، ac ، bc ، aa ، bb ، cc حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

مسئلہ 24.10: غیر مرتب اجتماعات
بغیر واپس رکھے، n چیزوں میں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرتے ہوئے

$$(24.25) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

غیر مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے غیر مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$(24.25^*) \quad \binom{n+k-1}{k}$$

مسائل 24.25 کے ساتھ منسلک فقرہ مسئلہ 24.9 کے پہلے حصے سے اخذ ہوتا ہے یعنی n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے ان k چیزوں کے مرتب اجتماعات $k!$ ہوں گے جن میں صرف چیزوں کی ترتیب مختلف ہوگی (مسئلہ 24.7) لیکن مسئلہ 24.10 کے پہلے فقرے کے تحت ان k چیزوں کا صرف ایک غیر مرتب اجتماع پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ الگراجی مانوڈ سے حاصل کیا جاسکتا ہے (سوال 24.64)۔

مثال 24.7: مسئلہ 24.7 اور مسئلہ 24.8 کا استعمال
ایک ڈبیا میں 10 مختلف قسم کے پیچ ہیں جنہیں ایک مخصوص ترتیب سے مشین میں لگایا جاتا ہے۔ ان پیچوں کو ڈبیا سے بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔ انہیں ڈبیا سے درکار ترتیب میں نکلنے کا احتمال P بہت کم (مسئلہ 24.7) یعنی

$$P = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800} \approx 0.00003\%$$

ہوگا۔ اگر ڈبیا میں 6 دائیں ہاتھ اور 4 بائیں ہاتھ پیچ ہوں اور 6 دائیں ہاتھ پیچ پہلے اور 4 بائیں ہاتھ پیچ بعد میں درکار ہوں تب اس ترتیب میں پیچ نکلنے کا احتمال P (مسئلہ 24.8) درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{6!4!}{10!} = \frac{1}{210} \approx 0.5\%$$

□

مثال 24.8: مسئلہ 24.9 کا استعمال
ایک خفی خط میں حروف کو 5 کی گروہ (الفاظ) میں لکھا جاتا ہے۔ مساوات 24.24* سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل

$$26^5 = 11\,881\,376$$

مختلف الفاظ ممکن ہیں۔ مساوات 24.24 کے تحت ایسے الفاظ جن میں ہر حرف زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ استعمال ہو کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{26!}{(26-5)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$$

□

مثال 24.9: مسئلہ 24.10 کا استعمال
500 چیزوں میں سے 5 چیز بلا منصوبہ منتخب کرتے ہوئے

$$\binom{500}{5} = \frac{500!}{5!495!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497 \cdot 496}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 255\,244\,687\,600$$

□

نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

آئیں عدد ضربیہ تفاعل کے بار میں کچھ باتیں کریں۔ صفر کا عدد ضربیہ (0!) کی تعریف

$$(24.26) \quad 0! = 1$$

ہے۔ باقی عدد صحیح کے عدد ضربیہ درج ذیل کلیہ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(24.27) \quad (n+1)! = (n+1)n!$$

بڑی عدد کے لئے یہ کلیہ بہت بڑے اعداد دیتا ہے۔ ہم بڑے عدد n کی صورت میں عموماً درج ذیل کلیہ سٹرلنگ⁷⁶ استعمال کرتے ہیں⁷⁷

$$(24.28) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (e = 2.718\ldots)$$

⁷⁶ Stirling formula

⁷⁷ انگلستانی ریاضی دان جیمس سٹرلنگ [1692-1770]

جہاں \sim سے مراد یہ ہے کہ n کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہونے سے مساوات 24.28 کی دونوں ہاتھ کا تناسب 1 کے قریب تر ہو گا۔

ثنائی عددی سر⁷⁸ کی تعریف درج ذیل کلیہ ہے۔

$$(24.29) \quad \binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} \quad (k \geq 0, \text{ عدد صحیح})$$

شمار کنندہ میں k اجزاء ہیں۔ مزید ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

$$(24.30) \quad \binom{a}{0} = 1 \implies \binom{0}{0} = 1$$

عدد صحیح $a = n$ کے لئے مساوات 24.29 سے

$$(24.31) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (n \geq 0, 0 \leq k \leq n)$$

حاصل ہو گا۔ چونکہ

$$(24.32) \quad \binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \quad (k \geq 0, \text{ عدد صحیح})$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا ثنائی عددی سر کو تکرار سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 24.29 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(24.33) \quad \binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \quad (k \geq 0, \text{ عدد صحیح}; m > 0)$$

متعدد دیگر کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں جن میں سے ہم

$$(24.34) \quad \sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad (k \geq 0, n \geq 1, \text{ عدد صحیح})$$

اور

$$(24.35) \quad \sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

پیش کرتے ہیں۔

سوالات

سوال 24.55: تمام چار اعداد 1, 2, 3, 4 لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.56: تمام پانچ حروف تہجی د، ڈ، ذ، ر، ٹ لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.57: دس افراد میں سے تین افراد کے کتنے پنچلیت بنائی جاسکتی ہیں؟
جواب: $\binom{10}{3} = 120$

سوال 24.58: گاڑی کے نمبر پلیٹ پر دو حروف تہجی اور تین اعداد لکھ کر کتنے مختلف نمبر پلیٹ بنائے جاسکتے ہیں؟

سوال 24.59: 100 کی کھیپ سے 3 چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں؟
جواب: $\binom{100}{3} = 161700$

سوال 24.60: ایک لوٹے میں 2 سیاہ، 3 سفید، اور 4 سرخ گیند پڑے ہیں۔ ہم بلا منصوبہ ایک گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔ اس کے بعد دوسرا گیند نکل کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔ اس کا احتمال تلاش کریں کہ پہلے 2 سیاہ، اس کے بعد 3 سفید اور آخر میں 4 سرخ گیند نکلیں۔

سوال 24.61: ہمارے پار 6 مختلف رنگ ہیں۔ ہم کتنے طریقوں سے (الف) 2، (ب) 3 رنگ منتخب کر سکتے ہیں؟
جواب: 15, 15

سوال 24.62: 10 کی کھیپ میں 2 چیزیں عیب دار ہیں۔ ان میں سے چار چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں کہ ان میں کوئی بھی چیز عیب دار نہ ہوں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں کہ ان میں 1 چیز عیب دار ہو؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں کہ ان میں 2 چیزیں عیب دار ہوں؟

سوال 24.63: مسئلہ 24.9 ثابت کریں۔

جواب: ثبوت کا طریقہ کار وہی ہے جو مسئلہ 24.7 میں استعمال کیا گیا ہے لیکن اب n کی جگہ ہم k جگہیں پر کرتے ہیں۔ اگر واپس رکھنا ممکن ہو تب k میں سے ہر ایک کو n اشیاء سے پر کیا جاسکتا ہے۔

سوال 24.64: مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ ثابت کریں۔ اشارہ۔ مساوات 24.34 استعمال کریں۔

سوال 24.65: مساوات 24.28 استعمال کرتے ہوئے $4!$ اور $8!$ کی تخمینی قیمتیں حاصل کریں۔ ان تخمینی قیمتوں کا حتمی اور اضافی خلل کیا ہے؟ جواب: $1\%, 400, 39\,902; 2\%, 0.5, 23.5$

سوال 24.66: ایک کھیپ سے 4 چیزوں کا نمونہ، بغیر واپس رکھے حاصل کیا جاتا ہے۔ مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات کی تعداد کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 24.67: مساوات 24.29 سے مساوات 24.32 حاصل کریں۔

سوال 24.68: (مسئلہ ثنائی) مسئلہ ثنائی 79 کے تحت

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ہو گا۔ یوں $a^k b^{n-k}$ کا عددی سر $\binom{n}{k}$ ہے۔ کیا مسئلہ 24.10 سے آپ یہ اخذ کر سکتے ہیں یا آپ سمجھتے ہیں کہ یہ محض اتفاق ہے۔

سوال 24.69: مسئلہ ثنائی (سوال 24.68) کو

$$(1 + b)^p (1 + b)^q = (1 + b)^{p+q}$$

پر لاگو کرتے ہوئے مساوات 24.35 ثابت کریں۔

24.7 بلا منصوبہ متغیرات۔ غیر مسلسل اور استمراری تقسیم

دو پانسے اچھال کر 2 تا 12 عدد صحیح مجموعہ X حاصل ہو گا لیکن اگلے اچھال میں حاصل X کی پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ X "امکان" پر منحصر ہے۔ اسی طرح اگر ہم پیچوں کی کھیپ سے 5 کا

نمونہ لے کر ان کی لمبائی ناپنا چاہیں تو ہم پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں کہ ان میں سے کتنے عیب دار ہوں گے؛ یوں عیب دار بیچوں کی تعداد X "امکان" پر منحصر ہوگی۔

بلا منصوبہ متغیر X ⁸⁰ سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کی قیمت حقیقی اعداد اور "امکان" پر منحصر ہوں۔ بلا منصوبہ متغیر کو امکانی متغیر⁸¹ بھی کہتے ہیں۔ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ تفاعل X درج ذیل خواص رکھتا ہے۔

• تجربہ کی نمونی فضا S پر X معین ہے اور اس کی قیمتیں حقیقی اعداد ہیں۔

• فرض کریں کہ a کوئی حقیقی عدد اور I کوئی وقفہ ہیں۔ تب S میں ان تمام انجام کا سلسلہ جن کے لئے $X = a$ ہو کا احتمال پوری طرح معین ہوگا اور یہی کچھ S میں ان تمام انجام کے لئے درست ہوگا جن کے لئے X کی قیمت I میں ہو۔ یہ احتمال حصہ 24.5 میں دی گئی مسلمات کے تحت ہوں گی۔

اگرچہ یہ تعریف عمومی ہے جس میں بہت سے تفاعل شامل ہیں، ہم دیکھیں گے کہ عملاً اہم بلا منصوبہ متغیرات کے اقسام اور ان کی مطابقتی "تقسیم احتمال" کی تعداد بہت کم ہیں۔

اگر ہم بلا منصوبہ تجربہ سرانجام دیں اور عدد a کا مطابقتی وقوعہ حاصل ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تجربہ کی کوشش میں بلا منصوبہ متغیر X قیمت a اختیار⁸² کرتا ہے۔ ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ ہم نے قیمت $X = a$ کا مشاہدہ⁸³ کیا۔ بجائے "عدد" a کا مطابقتی وقوعہ "کہنے کے ہم مختصراً کہتے ہیں، "وقوعہ $X = a$ "۔ مطابقتی احتمال $P(X = a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح وقوعہ

X وقفہ $a < X < b$ میں کوئی قیمت اختیار کرتا ہے

کا احتمال $P(a < X < b)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وقوعہ

(c کے برابر یا c سے کم قیمت X اختیار کرتا ہے) $X \leq c$

کا احتمال $P(X \leq c)$ سے ظاہر کیا جائے گا اور وقوعہ

(c سے زیادہ قیمت X اختیار کرتا ہے) $X > c$

random variable⁸⁰

stochastic variable⁸¹

assume⁸²

observed⁸³

کا احتمال $p(X > c)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

مندرجہ بالا دو آخری توقعات باہمی بلا شرکت ہیں لہذا حصہ 24.5 کے مسلمہ-پ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(X \leq c) + P(X > c) = P(-\infty < X < \infty)$$

چونکہ $-\infty < X < \infty$ پورا نمونی فضا کو ظاہر کرتا ہے لہذا مسلمہ-ب کے تحت دایاں ہاتھ 1 کے برابر ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

$$(24.36) \quad P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \quad (\text{اختیاری } c)$$

مثال کے طور پر، اگر X وہ عدد ہو جو پانسہ اچھال کر حاصل ہوتا ہو، تب

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(1 < X < 2) = 0, \quad P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{3}, \\ P(0 \leq X \leq 3.2) = \frac{1}{2}, \quad P(X > 4) = \frac{1}{3}, \quad P(X \leq 0.5) = 0, \quad \dots$$

ہوں گے۔

عموماً صورتوں میں بلا منصوبہ متغیرات غیر مسلسل⁸⁴ یا استمراری⁸⁵ ہوں گے۔ ان دونوں پر باری باری غور کرتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیر X اور اس کا مطابقتی تقسیم اس صورت غیر مسلسل کہلاتے ہیں جب X درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

• ان قیمتوں کا تعداد جن کے لئے X کا احتمال غیر 0 ہو متناہی یا قابل شمار لا متناہی ہوں۔

• اگر وقفہ $a < X \leq b$ میں ایسا قیمت نہ پایا جاتا ہو، تب $P(a < X \leq b) = 0$ ہو گا۔

فرض کریں کہ

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots$$

وہ قیمتیں ہیں جن کے لئے X کا مثبت احتمال پایا جاتا ہو اور فرض کریں کہ مطابقتی احتمال درج ذیل ہیں۔

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \dots$$

تب $P(X = x_1) = p_1$ ، وغیرہ ہو گا۔ ہم اب تفاعل

$$(24.37) \quad f(x) = \begin{cases} p_j & x = x_j \\ 0 & x \neq x_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

متعارف کرتے ہیں۔ $f(x)$ کو X کا تفاعل احتمال⁸⁶ کہتے ہیں۔

discrete⁸⁴
continuous⁸⁵
probability function⁸⁶

چونکہ $P(S) = 1$ (حصہ 24.5 مسلمہ-ب) ہے لہذا لازمی طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$(24.38) \quad \sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1$$

اگر ہمیں بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر X کا احتمال معلوم ہو، تب ہم کسی بھی وقفہ $a < X \leq b$ کے لحاظ سے $P(a < X \leq b)$ کا حساب کر سکتے ہیں جو درحقیقت

$$(24.39) \quad P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_j \leq b} f(x_j) = \sum_{a < x_j \leq b} p_j$$

ہو گا جو اس وقفہ میں تمام x_j کے لئے احتمال $f(x_j) = p_j$ کا مجموعہ ہے۔ بند، کھلا یا لامتناہی وقفہ کے لئے صورت حال تقریباً اسی طرح ہے۔ اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ بلا منصوبہ متغیر X کے لئے تفاعل احتمال $f(x)$ ، تقسیم احتمال⁸⁷، یا مختصراً، تقسیم⁸⁸ کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

اگر X کوئی بلا منصوبہ متغیر ہو، جو ضروری نہیں کہ غیر مسلسل ہو، تب کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے

$$X \leq x \quad (x \text{ سے کم یا } x \text{ کے برابر کوئی بھی قیمت } X \text{ اختیار کر سکتا ہے})$$

کا مطابقتی احتمال $P(X \leq x)$ پایا جائے گا۔ ظاہر ہے کہ $P(X \leq x)$ کی قیمت x کے انتخاب پر منحصر ہو گی؛ یہ x کا تفاعل ہو گا جس کو X کا تفاعل تقسیم⁸⁹ کہتے⁹⁰ ہیں جس کو $F(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$(24.40) \quad F(x) = P(X \leq x)$$

ہو گا۔ چونکہ کسی بھی a اور $b > a$ کے لئے

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

ہے لہذا

$$(24.41) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

⁸⁷probability distribution

⁸⁸distribution

⁸⁹distribution function

⁹⁰بعض مصنف $F(x)$ کو مجموعی تفاعل تقسیم کہتے ہیں، خصوصاً وہ جو $f(x)$ کو تفاعل احتمال کہتے ہیں۔

ہو گا جس سے ظاہر ہے کہ X کی تقسیم کو تفاعل تقسیم کی طرح پر تعین کرتا ہے لہذا اس کو احتمال کے حساب کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

فرض کریں کہ X ایک غیر مسلسل متغیر ہے۔ تب ہم تفاعل تقسیم $F(x)$ کو تفاعل احتمال $f(x)$ کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ یقیناً مساوات 24.39 ($a = -\infty$ اور $b = x$ کے ساتھ) پر کرتے ہوئے

$$(24.42) \quad F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

حاصل ہو گا جہاں دایاں ہاتھ $x_j \leq x$ کے لئے ان تمام $f(x_j)$ کا مجموعہ ہے۔ سادہ مثالیں شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں دکھائی گئی ہیں جو دو پانسے کو ایک بار اچھال کر حاصل ہوا ہے۔ دونوں اشکال میں $f(x)$ کو ڈبہ ترسیم کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 24.7 میں $x = 1, 2, \dots, 6$ کے لئے $f(x) = \frac{1}{6}$ اور اس کے علاوہ $f(x) = 0$ ہے جو پانسے اچھال کر حاصل ہوئے ہیں جبکہ شکل 24.8 میں $f(x)$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں جو دو پانسے کا حاصل مجموعہ ہے۔

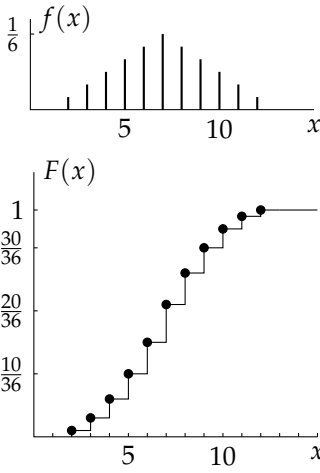
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

دو پانسے کے تجربہ میں چونکہ $6 \cdot 6 = 36$ ممکنہ مساوی امکاناتی انجام ہیں لہذا ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{36}$ ہے۔ صرف (1,1) کے لئے (جہاں پہلا عدد ایک پانسے اور دوسرا عدد دوسرے پانسے کا نتیجہ ہے) $X = 2$ ہو گا؛ اسی طرح (1,2) اور (2,1) انجام کے لئے $X = 3$ ہو گا؛ (1,3)، (2,2)، (3,1) کے لئے $X = 4$ ہو گا، وغیرہ۔

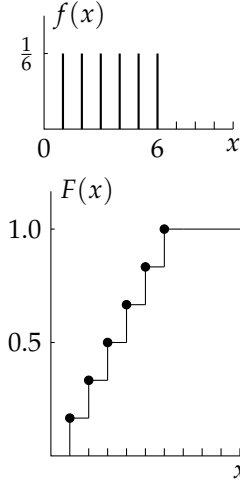
صرف وہ x_1, x_2, x_3, \dots قیمتیں جن کے لئے بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر X مثبت احتمال رکھتا ہو X کی ممکنہ قیمتیں⁹¹ کہلاتی ہیں۔ جس وقفہ میں کوئی ممکنہ قیمت نہ پائی جاتی اس وقفہ میں تفاعل تقسیم $F(x)$ مستقل ہو گا۔ اس طرح $F(x)$ سیڑھی تفاعل (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہو گا جس میں $x = x_j$ پر اوپر رخ $p_j = P(X = x_j)$ چھلانگ پائی جائے گی جبکہ دو چھلانگوں کے بیچ یہ مستقل ہو گا۔ شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں ایسا صاف ظاہر ہے۔

ہم اب استمراری بلا منصوبہ متغیر کی تعریف پیش کرتے ہیں اور اس پر غور کرتے ہیں۔ ایک بلا منصوبہ متغیر X اور اس کا مطابق تفاعل تقسیم تب استمراری کہلاتے ہیں جب اس کا تفاعل تقسیم $F(x) = P(X \leq x)$ مثبت ہو

⁹¹ possible values



شکل 24.8: $f(x)$ احتمال اور $F(x)$ تقسیم



شکل 24.7: $f(x)$ احتمال اور $F(x)$ تقسیم

اور اسے درج ذیل مکمل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو⁹²

$$(24.43) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(v) dv$$

جہاں مکمل استمراری ہے، ماسوائے v کی تنہا تعداد کے قیمتوں کے لئے۔ مکمل f کو تقسیم کی کثافت احتمال یا مختصر اکثافت کہتے ہیں۔ ہر اس x پر جہاں $f(x)$ استمراری ہو وہاں مساوات 24.43 کو تقسیم کرتے ہوئے

$$F'(x) = f(x)$$

حاصل ہو گا۔ اس لحاظ سے تقسیم کا تفرق کثافت ہے۔

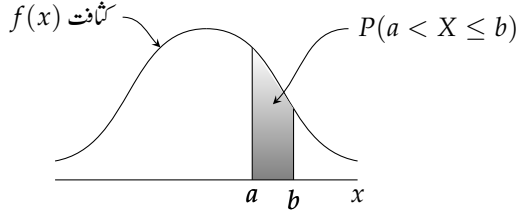
مساوات 24.43 اور حصہ 24.5 کے مسلمہ -ب کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$(24.44) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv = 1$$

مساوات 24.41 اور مساوات 24.43 سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(24.45) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(v) dv$$

⁹² $F(x)$ استمراری ہے لیکن $F(x)$ کے استمراری ہونے سے مساوات 24.43 کی موجودگی ثابت نہیں ہوتی ہے۔ چونکہ ایسے استمراری تقسیم جنہیں مساوات 24.43 کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو عملاً بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا اصطلاحات "استمراری بلا منصوبہ متغیر" اور "استمراری تقسیم" جو بہت زیادہ استعمال کی جاتی ہیں سے پریشانی پیدا ہونے کا امکان بہت کم ہو گا۔



شکل 24.9: شکل برائے مساوات 24.45

یوں جیسا شکل 24.9 میں دکھایا گیا ہے، کثافت $f(x)$ کے منحنی کے نیچے $x = a$ اور $x = b$ کے بیچ رقبہ احتمال کے برابر ہو گا۔

ظاہر ہے کہ کسی بھی مقررہ a اور $b (> a)$ کے لئے وقفہ $a < X \leq b$ ، $a < X < b$ اور $a \leq X < b$ کے احتمال ایک جیسے ہوں گے جو غیر مسلسل صورت حال سے مختلف ہے۔

استمراری تقسیم کے مثال (سوالات) اگلے حصے کے سوالات اور آنے والے حصوں میں پیش کئے جائیں گے۔

سوالات

سوال 24.70: تفاعل احتمال $f(x) = \frac{x^2}{14}$ ($x = 1, 2, 3$) اور تفاعل تقسیم کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.71: X کا تفاعل احتمال $f(2) = \frac{1}{2}$ ، $f(3) = \frac{1}{4}$ ، $f(4) = \frac{1}{8}$ ، $f(5) = \frac{1}{8}$ ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ X کی قیمت 4 سے کم ہوگی؟

سوال 24.72: ایک مشین کو X سالوں کے بعد تبدیل کرنا ضروری ہے۔ X کا تفاعل احتمال $f(1) = 0.3$ ، $f(2) = 0.4$ ، $f(3) = 0.2$ ، $f(4) = 0.1$ ہے۔ f اور F کو ترسیم کریں۔

سوال 24.73: کسی پٹرول پمپ میں ایک دن کی درکار پٹرول بلا منصوبہ متغیر X ہے۔ فرض کریں کہ $2000 < x < 6000$ کے لئے X کی کثافت $f(x) = k$ ہے ورنہ 0 ہے۔ k تلاش کریں اور تفاعل

تقسیم $F(x)$ ترسیم کریں۔
جواب:

$$k = \frac{1}{4000}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2000 \\ \frac{x}{4000} - 0.5 & 2000 \leq x < 6000 \\ 1 & x \geq 6000 \end{cases}$$

سوال 24.74: $x > 0$ کے لئے $f(x) = ce^{-x}$ جبکہ $x < 0$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ c تلاش کریں۔ f اور F کر ترسیم کریں۔

سوال 24.75: 3 پانسہ اچھال کر ان کا مجموعہ لے کر بلا منصوبہ متغیر X حاصل کیا جاتا ہے۔ تفاعل احتمال $f(x)$ ترسیم کریں۔
جواب: $f(3) = \frac{1}{216}, f(4) = \frac{3}{216}, \dots$

سوال 24.76: کاغذ کے گتے کی موٹائی X ملی میٹر ہے۔ فرض کریں کہ $1.9 < x < 2.1$ کے لئے کثافت $f(x) = kx$ ہے ورنہ $f(x) = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ گتے کی موٹائی 1.95 اور 2.05 کے بیچ ہو؟

سوال 24.77: ایک سکہ کو اتنی مرتبہ (X) اچھالا جاتا ہے جب تک خط حاصل نہ ہو۔ دکھائیں کہ اس تجربہ کا تفاعل احتمال $f(x) = 2^{-x}, (x = 1, 2, \dots)$ ہو گا۔ دکھائیں کہ $f(x)$ مساوات 24.38 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 24.78: $0 \leq x \leq 1$ کے لئے $f(x) = kx^2$ ہے ورنہ $f(x) = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ ایسا عدد c تلاش کریں کہ $P(X \leq c) = 72.9\%$ ہو۔

سوال 24.79: بلب کی عرصہ زندگی X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی کثافت

$$f(x) = 6[0.25 - (x - 1.5)^2] \quad 1 \leq x \leq 2$$

اور باقی x کے لئے $f(x) = 0$ ہے، جہاں $x = 1$ سے مراد 1000 گھنٹے ہیں۔ کیا احتمال ہے کہ سڑک کے اشارے پر پہلے 1200 گھنٹوں میں تین میں سے کسی ایک بھی بلب کی تبدیل کرنے کی ضرورت پیش نہ آئے؟
جواب: $P(X > 1200) = \int_{1.2}^2 6[0.25 - (x - 1.5)^2] dx = 0.896^3 = 72\%$

سوال 24.80: کسی دکان کی فروخت اور منافع کی نسبت X ہے۔ فرض کریں کہ X کی تفاعل تقسیم $x < 2$ کے لئے $F(x) = 0$ ، $2 \leq x < 3$ کے لئے $F(x) = \frac{x^2-4}{5}$ اور $x \geq 3$ کے لئے $F(x) = 1$ ہے۔ کثافت تلاش کر کے ترسیم کریں۔ X کی قیمت 2.5 (40% منافع) اور 5 (20% منافع) کے بیچ میں ہونے کا کیا احتمال ہے؟

سوال 24.81: X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جو کوئی بھی حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ وقوعہ $X \leq b$ ، $X < b$ ، $X \geq c$ ، $X > c$ ، $b < X \leq c$ ، $b \leq X < c$ کے متمم کے کیا احتمال ہوں گے؟
جواب: $X \leq b$ یا $X > c$ ، $X < b$ یا $X \geq c$ ، $b < X < c$ ، $b \leq X \leq c$ ۔

سوال 24.82: ایک ڈبہ میں 4 دائیں ہاتھ پیچ اور 6 بائیں ہاتھ پیچ پائے جاتے ہیں۔ بغیر واپس رکھے، دو پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ نکالے گئے بائیں ہاتھ پیچوں کی تعداد X ہے۔ احتمال $P(X=1)$ ، $P(X=0)$ ، $P(1 < X < 2)$ ، $P(X \leq 1)$ ، $P(X \geq 1)$ ، $P(X > 1)$ ، $P(0.5 < X < 10)$ تلاش کریں۔

سوال 24.83: دکھائیں کہ $b < c$ سے مراد $P(X \leq b) \leq P(X \leq c)$ ہے۔

24.8 تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت

تقسیم کے اوسط⁹³ کو μ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(24.46) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad \mu &= \sum_j x_j f(x_j) & \text{(غیر مسلسل تقسیم)} \\ \text{(ب)} \quad \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{(استمراری تقسیم)} \end{aligned}$$

مساوات 24.46-الف میں زیر غور بلا منصوبہ متغیر X کا تفاعل احتمال $f(x)$ ہے اور ہم تمام ممکنہ قیمتوں (حصہ 24.7) پر مجموعہ لیتے ہیں۔ مساوات 24.46-ب میں X کی کثافت $f(x)$ ہے۔ اوسط کو X کی حسابی توقع⁹⁴

⁹³ mean
⁹⁴ mathematical expectation

بھی کہتے ہیں جس کو $E(X)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.46-
الف کی تسلسل حقیقی مرتکز ہوگی اور $-\infty$ سے ∞ تک $|x| f(x)$ کا مکمل موجود ہوگا۔ اگر یہ مکمل موجود نہ
ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تقسیم کی اوسط نہیں ہائی جاتی ہے؛ ایسی صورت عملی انجینئری میں شاذ و نادر پائی جاتی ہے۔

$x = c$ کے لحاظ سے ایک تقسیم کو اس صورت تشاکلی کہتے ہیں جب ہر حقیقی x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا
ہو۔

$$f(c+x) = f(c-x) \quad (24.47)$$

آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.84)۔

مسئلہ 24.11: (تشاکلی تقسیم کا اوسط)

اگر ایک تقسیم $x = c$ کے لحاظ سے تشاکلی ہو اور اس کا اوسط μ ہو تب $\mu = c$ ہوگا۔

تقسیم کی تغیریت⁹⁵ کو σ^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad \sigma^2 &= \sum_j (x_j - \mu)^2 f(x_j) && \text{(غیر مسلسل تقسیم)} \\ \text{(ب)} \quad \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx && \text{(استمراری تقسیم)} \end{aligned} \quad (24.48)$$

جہاں تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.48-الف میں دی گئی تسلسل حقیقی مرتکز ہے اور مساوات
24.48-ب کا مکمل موجود ہے۔

غیر مسلسل تقسیم کی صورت میں اگر کسی ایک نقطہ پر $f(x) = 1$ اور باقی ہر جگہ $f(x) = 0$ ہو تب
 $\sigma^2 = 0$ ہوگا جو عملاً غیر دلچسپ صورت ہے۔ اس غیر دلچسپ صورت کے علاوہ ہر صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma^2 > 0 \quad (24.49)$$

تغیریت کا مثبت جذر معیاری انحراف⁹⁶ کہلاتا ہے جس کو σ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

⁹⁵ variance
⁹⁶ standard deviation

بلا منصوبہ متغیر X جن قیمتوں کو اختیار کر سکتا ہے، تغیریت کو ان قیمتوں کی پھیل کی ناپ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مثال 24.10: (اوسط اور تغیریت)
بلا منصوبہ متغیر

سکہ اچھال کر شیر کا حاصل ہونا $X =$

کے ممکنہ قیمتیں $X = 0$ اور $X = 1$ ہیں جن کا احتمال $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ اور $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ ہے۔ مساوات 24.46-الف سے اوسط $\mu = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 24.46-ب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sigma^2 = (0 - \frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

□

مثال 24.11: یکساں تقسیم
وہ تقسیم جس کی کثافت $a < x < b$ کے لئے

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a < x < b)$$

اور باقی x کے لئے $f = 0$ ہو، وقفہ $a < x < b$ میں یکساں تقسیم⁹⁷ کہلاتی ہے۔ مسئلہ 24.11 یا مساوات 24.48-الف سے $\mu = \frac{a+b}{2}$ اور مساوات 24.48-ب سے تغیریت حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

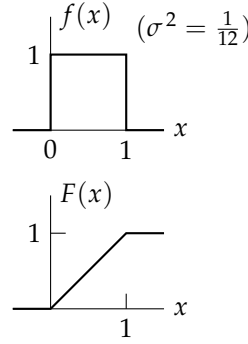
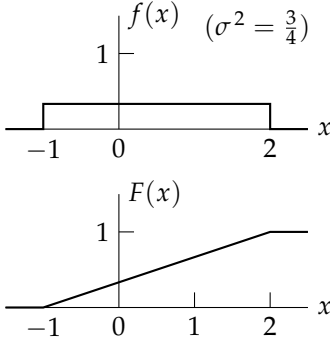
□

شکل 24.10 میں چند خصوصی مثالیں پیش کی گئی ہیں جو دکھاتی ہیں کہ σ^2 پھیل کی ناپ ہے۔

مسئلہ 24.12: (خطی تبادل)

اگر بلا منصوبہ متغیر X کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو تب بلا منصوبہ متغیر $X^* = c_1 X + c_2$ ($c_1 \neq 0$) کی اوسط

$$(24.50) \quad \mu^* = c_1 \mu + c_2$$



شکل 24.10: یکساں تقسیم جن کی ایک جیسی اوسط (0.5) لیکن مختلف تغیریت σ^2 ہے

اور تغیریت

$$(24.51) \quad \sigma^{*2} = c_1^2 \sigma^2$$

ہو گی۔

ثبوت : ہم پہلے $c_1 > 0$ فرض کرتے ہوئے مساوات 24.50 کو استمراری صورت کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ X محور پر چھوٹے سے وقفہ Δx کا مطابقتی احتمال (تخمیناً) $f(x)\Delta x$ ہو گا جو ہر صورت X^* محور پر مطابقتی چھوٹے وقفہ $\Delta x^* = c_1 \Delta x$ پر احتمال $f^*(x^*)\Delta x^*$ کے برابر ہو گا لہذا $x^* = c_1 x + c_2$ کے مطابقتی، X کی کثافت $f(x)$ اور X^* کی کثافت $f^*(x^*)$ تعلق $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{c_1}$ کو مطمئن کریں گے۔ چونکہ $\frac{dx^*}{dx} = c_1$ ہے لہذا $dx^* = c_1 dx$ اور $f^*(x^*) dx^* = f(x) dx$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} \mu^* &= \int_{-\infty}^{\infty} x^* f^*(x^*) dx^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x + c_2) f(x) dx \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

جہاں آخری مکمل مساوات 24.44 کے تحت 1 کے برابر ہو گا۔ یوں مساوات 24.50 ثابت ہوتی ہے۔ چونکہ

$$x^* - \mu^* = (c_1 x + c_2) - (c_1 \mu + c_2) = c_1 x - c_1 \mu$$

ہے لہذا تغیریت کی تعریف سے

$$\sigma^{*2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x^* - \mu^*)^2 f^*(x^*) dx^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x - c_1 \mu)^2 f(x) dx = c_1^2 \sigma^2$$

حاصل ہو گا۔ $c_1 < 0$ سے نتائج تبدیل نہیں ہوتے ہیں چونکہ اس سے دو اضافی منفی کی علامتیں ملتی ہیں، ایک x میں کھل کے رخ کی تبدیلی کی بنا (دھیان رہے کہ $x^* = -\infty$ کا مطابقتی $x = \infty$ ہے) اور دوسرا $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{-c_1}$ کی بنا؛ یہاں $-c_1 > 0$ درکار ہو گا چونکہ کثافت غیر منفی قیمت ہے۔

غیر مسلسل کثافت کے لئے مسئلے کا ثبوت بھی بالکل ایسا ہی ہے۔

□

مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے ہم درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.13: (معیاری متغیر) اگر بلا منصوبہ متغیر X کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو، تب مطابقتی متغیر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی۔

Z کو X کا مطابقتی معیاری متغیر⁹⁸ کہتے ہیں۔

اگر X کوئی بلا منصوبہ متغیر اور $g(X)$ کوئی استمراری تفاعل ہو جو تمام حقیقی X کے لئے معین ہو تب عدد

$$(24.52) \quad (الف) \quad E(g(X)) = \sum_j g(x_j) f(x_j) \quad (X \text{ غیر مسلسل})$$

$$(ب) \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (X \text{ استمراری})$$

کو $g(X)$ کی حسابی توقع⁹⁹ کہتے ہیں۔ یہاں f بالترتیب تفاعل احتمال یا کثافت ہے۔

مساوات 24.52 میں $g(X) = X^k$ ($k = 1, 2, \dots$) لیتے ہوئے بالترتیب

$$(24.53) \quad E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad \text{اور} \quad E(X^k) = \sum_j x_j^k f(x_j)$$

⁹⁸ standardized variable
⁹⁹ mathematical expectation

حاصل ہوتے ہیں۔ $E(X^k)$ کو X کا k واں معیار اثر¹⁰⁰ کہتے ہیں۔ مساوات 24.52 میں $g(X) = (X - \mu)^k$ لیتے ہوئے بالترتیب

(24.54)

$$E([X - \mu]^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \quad \text{اور} \quad E([X - \mu]^k) = \sum_j (x_j - \mu)^k f(x_j)$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں X کے k ویں وسطی معیار اثر¹⁰¹ کہتے ہیں۔ آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

(24.55)

$$E(1) = 1$$

(24.56)

$$\mu = E(X)$$

(24.57)

$$\sigma^2 = E([X - \mu]^2)$$

سوالات

سوال 24.84: مسئلہ 24.11 ثابت کریں۔
جواب:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^c t f(t) dt + \int_c^{\infty} t f(t) dt \\ &= - \int_{\infty}^0 (c - x) f(c - x) dx + \int_0^{\infty} (c + x) f(c + x) dx = 2c \int_0^{\infty} f(c + x) dx = c \end{aligned}$$

غیر مسلسل تقسیم کے لئے بھی ثبوت اسی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سوال 24.85: ایک تقسیم کی کثافت $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ہے۔ اس کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\mu = 0, \sigma^2 = 2$

سوال 24.86: $0 \leq x \leq 2$ کے لئے X کی کثافت $f(x) = 0.5x$ ہے جبکہ باقی x کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ دکھائیں کہ X کی اوسط $\frac{4}{3}$ اور تغیریت $\frac{2}{9}$ ہے۔

سوال 24.87: $Y = -2X + 5$ کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔ بلا منصوبہ متغیر X سوال 24.86 میں دیا گیا ہے۔

سوال 24.88: سوال 24.86 کے X کا مطابقتی معیاری بلا منصوبہ متغیر تلاش کریں۔
جواب: $\frac{X - \frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}$

سوال 24.89: مسئلہ 24.12 کو غیر مسلسل صورت کے لئے ثابت کریں۔

سوال 24.90: مسئلہ 24.13 کو مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے اخذ کریں۔
جواب: مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 میں $c_1 = \frac{1}{\sigma}$ اور $c_2 = -\frac{\mu}{\sigma}$ پر کریں۔

سوال 24.91: ایک مخصوص قسم کے ٹائر بلا منصوبہ متغیر X (ہزار کلو میٹر) چلتے ہیں۔ X کی کثافت $x > 0$ کے لئے $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ ورنہ 0 ہے جہاں $\theta (> 0)$ مقدار معلوم ہے۔ (الف) ایسے ایک ٹائر سے کتنے کلو میٹر طے کیے جاسکتے ہیں؟ (ب) اگر $\theta = 0.05$ ہو تب کم سے کم 30000 کلو میٹر تک پہنچنے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.92: ایک کارخانے میں کیل بنائے جاتے ہیں جن کا وتر X سنٹی میٹر ہے۔ فرض کریں کہ X کی کثافت $0.9 < x < 1.1$ کے لئے $f(x) = k(x - 0.9)(1.1 - x)$ ورنہ 0 ہے۔ k معلوم کریں، $f(x)$ کو ترسیم کریں اور μ اور σ^2 کو تلاش کریں۔
جواب: $k = 750, \mu = 1, \sigma^2 = 0.002$

سوال 24.93: سوال 24.92 میں اگر کیل کے وتر کا 1 cm سے انحراف 0.06 cm بڑھ جائے تب اس کو عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔ کتنے فی صد کیل عیب دار ہوں گے؟

سوال 24.94: ایک پٹرول پمپ کو ہر جمعرات دوپہر کے وقت پٹرول مہیا کیا جاتا ہے۔ فروخت پٹرول کا حجم X ہزار لٹر ہے۔ $0 \leq x \leq 1$ کے لئے X کی کثافت احتمال $f(x) = 6x(1 - x)$ ورنہ 0 ہے۔ اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\mu = \frac{1}{2}, \sigma^2 = \frac{1}{20}$

سوال 24.95: سوال 24.94 میں پٹرول کی ٹینکی کا حجم کتنا ہو گا اگر ایک ہفتہ میں ٹینکی خالی ہونے کا احتمال 10% ہو؟

سوال 24.96: مساوات 24.55، مساوات 24.56 اور مساوات 24.57 ثابت کریں۔

سوال 24.97: دکھائیں کہ $E(X - \mu) = 0$ اور $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$ ہوں گے۔

سوال 24.98: فرض کریں کہ X کی کثافت $0 < x < 1$ کے لئے $f(x) = 2x$ ورنہ 0 ہے۔ تمام معیار اثر تلاش کریں۔ سوال 24.97 میں دیے گئے کلیہ سے σ^2 حاصل کریں۔
جواب: $E(X^k) = \frac{2}{k+2}, \sigma^2 = \frac{1}{18}$

سوال 24.99: دکھائیں کہ $E(ag(X) + bh(X)) = aE(g(X)) + bE(h(X))$ ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

سوال 24.100: وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر یکساں تقسیم کے معیار اثر تلاش کریں۔
جواب: $E(X^k) = \frac{1}{k+1}$

سوال 24.101: (ترجہاں) عدد $\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E([X - \mu]^3)$ کو X کا ترجہاں¹⁰² کہتے ہیں۔ اس اصطلاح کا جواز پیش کرنے کی خاطر دکھائیں کہ μ کے لحاظ سے تشاکلی X کے لئے اگر تیسرا وسطی معیار اثر موجود ہو تب یہ معیار اثر صفر ہو گا۔

سوال 24.102: $x > 0$ کے لئے کثافت تقسیم $f(x) = xe^{-x}$ ورنہ $f = 0$ کی صورت میں کثافت تقسیم کا ترجہاں تلاش کریں۔ $f(x)$ کو ترسیم کریں۔
جواب: مکمل بالحصص لیں $\sigma^2 = 2, \gamma = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

سوال 24.103: (معیار اثر کا پیدا کار تفاعل) بلا منصوبہ غیر مسلسل یا استمراری متغیر X کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل درج ذیل کلیات دیتے ہیں

$$G(t) = E(e^{tX}) = \sum_j e^{tx_j} f(x_j) \quad \text{اور} \quad G(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

جہاں فرض کیا گیا ہے کہ مجموعہ کی علامت کے اندر اور مکمل کی علامت کے اندر تفرق لیا جاسکتا ہے۔ دکھائیں کہ $E(X^k) = G^{(k)}(0)$ ہو گا اور بالخصوص $\mu = G'(0)$ ہو گا جہاں $G^{(k)}(t)$ سے مراد t کے لحاظ سے G کا k واں تفرق ہے۔

24.9 ثنائی، پوسن، اور بیش ہندسی تقسیم

ہم اب چند مخصوص غیر مسلسل تقسیم پر غور کرتے ہیں جو شماریات کے لئے اہم ہیں۔

ثنائی تقسیم

ہم ایک تجربہ کو n مرتبہ بلا منصوبہ سرانجام دینے میں وقوع A کے واقع ہونے کی تعداد سے حاصل ثنائی تقسیم پر غور کرتے ہیں جہاں ایک کوشش میں A کا احتمال $P(A) = p$ فرض کیا جائے گا۔ تب ایک کوشش میں A کے ناواقع ہونے کا احتمال $q = 1 - p$ ہو گا۔ یہ تجربہ n مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے ہم بلا منصوبہ متغیر

$$X = A \text{ واقع ہونے کی تعداد}$$

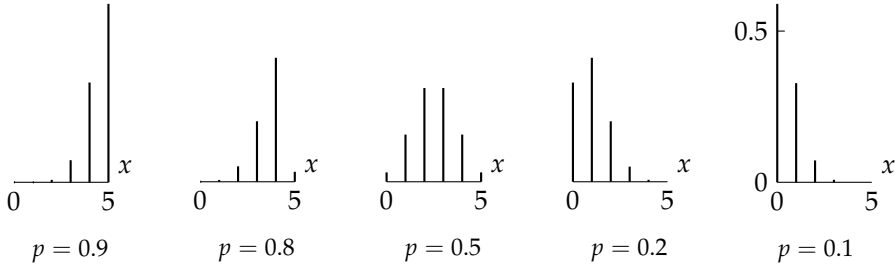
پر غور کرتے ہیں۔ تب X کی قیمتیں $0, 1, \dots, n$ ہو سکتی ہیں۔ ہمیں ان اعداد کے مطابقتی احتمال تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ اس مقصد کے لئے ہم ان قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت، مثلاً $X = x$ پر غور کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ n میں سے x کوششوں میں A واقع ہوا ہے جبکہ $n - x$ کوششوں میں A واقع نہیں ہوا ہے۔ یہ سب کچھ یوں

$$(24.58) \quad \underbrace{AA \cdots A}_x \underbrace{BB \cdots B}_{n-x}$$

نظر آئے گا۔ یہاں $B = A^c$ ہے؛ یعنی A واقع نہیں ہوا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام کوششیں بلا منصوبہ ہے یعنی یہ ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتی ہیں۔ تب چونکہ $P(A) = p$ اور $P(B) = q$ ہیں لہذا مساوات 24.58 کا مطابقتی احتمال

$$\underbrace{pp \cdots p}_x \underbrace{qq \cdots q}_{n-x} = p^x q^{n-x}$$

ہو گا۔ ظاہر ہے کہ x گنا A اور $n - x$ گنا B کو مختلف انداز (ترتیب) میں لکھنے کا ایک طریقہ مساوات 24.58 دیتا ہے لہذا مسئلہ 24.3 کے تحت $p^x q^{n-x}$ کو x گنا A اور $n - x$ گنا B کے کل مختلف انداز میں لکھنے کی تعداد سے ضرب دینے سے احتمال $P(X = x)$ حاصل ہو گا۔ ہم n کوششوں کو 1 تا n سے



شکل 24.11: مختلف p اور $n = 5$ کے لئے مساوات 24.59 میں دی گئی ثنائی تقسیم

ظاہر کرتے ہوئے ان میں سے ان x کوششوں منتخب کرتے ہیں جن میں A واقع پذیر ہوا ہو۔ چونکہ x منتخب کرنے کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی ہے لہذا مساوات 24.25 کے تحت n میں سے x کا انتخاب $\binom{n}{x}$ مختلف انداز سے کیا جاسکتا ہے۔ یوں $X = x$ کا مطابقتی احتمال $P(X = x)$

$$(24.59) \quad f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

ہوگا جبکہ x کے کسی دوسری قیمت کے لئے $f(x) = 0$ ہوگا۔ n کوششوں میں ٹھیک x مرتبہ A واقع ہونا کا احتمال مساوات 24.59 دیتی ہے جہاں ایک کوشش میں A واقع ہونے کا احتمال p ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ مساوات 24.59 میں دی گئی تقسیم کو ثنائی تقسیم¹⁰³ کہتے ہیں۔ A کے واقع ہونے کو کامیابی¹⁰⁴ جبکہ اس کے ناواقع ہونے کو ناکامی¹⁰⁵ کہتے ہیں۔ p کو ایک کوشش میں کامیابی کا احتمال کہتے ہیں۔ شکل 24.11 میں $n = 5$ اور مختلف p کے لئے مساوات 24.59 ترسیم کیا گیا ہے۔

ثنائی تقسیم کی اوسط (سوال 24.107)

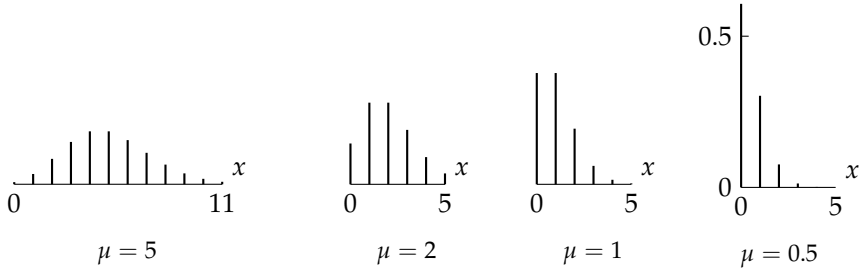
$$(24.60) \quad \mu = np$$

اور تغیریت (سوال 24.107)

$$(24.61) \quad \sigma^2 = npq$$

ہے۔ دھیان رہے کہ $p = 0.5$ پر μ کے لحاظ سے تقسیم تشاکلی ہے۔

binomial distribution¹⁰³
success¹⁰⁴
failure¹⁰⁵



شکل 24.12: مختلف p اور $n = 5$ کے لئے مساوات 24.62 میں دی گئی پوسن تقسیم

پوسن تقسیم

ایسی غیر مسلسل تقسیم جس کا تفاعل احتمال درج ذیل ہو پوسن تقسیم¹⁰⁶ کہلاتی¹⁰⁷ ہے۔

$$(24.62) \quad f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

شکل 24.12 میں $n = 5$ اور مختلف μ کے لئے مساوات 24.62 میں دی گئی پوسن تقسیم ترسیم کی گئی ہے۔
 $p \rightarrow 0$ اور $n \rightarrow \infty$ کی صورت اوسط $\mu = np$ ایک متناہی قیمت کے قریب تر ہوگی اور ثنائی تقسیم کی تحدیدی صورت پوسن تقسیم دیتی ہے۔ پوسن تقسیم کی اوسط μ اور تغیریت (سوال 24.108) درج ذیل ہے۔

$$(24.63) \quad \sigma^2 = \mu$$

اکائی دورانیہ (وقت) میں کسی چوک سے گزرتی گاڑیوں کی تعداد، اکائی لمبائی کے تار میں عیبوں کی تعداد، کاغذ کے اکائی رقبہ میں عیبوں کی تعداد، وغیرہ پوسن تقسیم سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

واپس رکھ کر اور واپس نہ رکھ کر نمونے کا حصول۔ بیش ہندسی تقسیم

واپس رکھ کر نمونہ حاصل کرنے میں ثنائی تقسیم (مثال 24.6) اہم ہے۔ مثال کے طور پر ایک ڈبیا میں N پیچ ہیں جن میں سے M پیچ عیب دار ہیں۔ اگر ہم ڈبے سے ایک پیچ بلا منصوبہ نکالیں تب عیب دار پیچ کے حصول کا

¹⁰⁶ Poisson distribution

¹⁰⁷ سیوں دنی پوسوں

احتمال

$$p = \frac{M}{N}$$

ہو گا۔ یوں واپس رکھ کر حاصل، x پیچوں کے نمونہ میں عیب دار پیچوں کی تعداد x ہونے کا احتمال (مساوات 24.59)

$$(24.64) \quad f(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{M}{N}\right)^x \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

ہو گا۔ واپس نہ رکھ کر حاصل نمونہ میں احتمال

$$(24.65) \quad f(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

ہو گا۔ مساوات 24.65 میں دی گئی تقسیم کو بیش ہندسی تقسیم¹⁰⁸ کہتے ہیں¹⁰⁹۔

مساوات 24.65 ثابت کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 24.25 کے تحت

• (الف) N اشیاء میں سے n اشیاء کے انتخاب کے $\binom{N}{n}$ مختلف طریقے ہیں،

• (ب) M میں سے x عیب دار کے انتخاب کے $\binom{M}{x}$ مختلف طریقے ہیں،

• (پ) $N - M$ میں سے $n - x$ بے عیب کے انتخاب کے $\binom{N-M}{n-x}$ مختلف طریقے ہیں،

اور (ب) میں ہر طریقہ کے ساتھ (پ) کا ہر طریقہ لے کر، بغیر واپس رکھتے ہوئے n میں سے x عیب دار کی انتخاب کے کل طریقے حاصل ہوں گے۔ چونکہ (الف) تمام وقوعات کا مجموعہ ہے اور ہم بلا منصوبہ انتخاب کرتے ہیں لہذا اس طرح کے ہر طریقہ کا احتمال $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ ہو گا۔ یوں مساوات 24.65 ثابت ہوتا ہے۔

بیش ہندسی تقسیم کی اوسط (سوال 24.121)

$$(24.66) \quad \mu = n \frac{M}{N}$$

hypergeometric distribution¹⁰⁸

¹⁰⁹ چونکہ اس تقسیم کے معیار اثر کے پیدا کار تقابل کو بیش ہندسی تقابل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} \quad (24.67)$$

ہے۔

مثال 24.12: واپس رکھ کر اور نا رکھ کر نمونے کا حصول
ایک ڈبہ میں 10 تصاویر ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔ ہم بلا منصوبہ 2 تصاویر ڈبے سے نکالتے ہیں۔ بلا
منصوبہ متغیر

نمونہ میں عیب دار کی تعداد $X =$

کا تفاعل احتمال تلاش کریں۔
حل: یہاں $N = 10$ ، $M = 3$ ، $N - M = 7$ اور $n = 2$ ہیں۔ واپس رکھ کر نمونہ حاصل
کرتے ہوئے مساوات 24.64 کے تحت

$$f(x) = \binom{2}{x} \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{2-x}, \quad f(0) = 0.49, \quad f(1) = 0.42, \quad f(2) = 0.09$$

حاصل ہوتا ہے۔ واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کرتے ہوئے مساوات 24.65 سے

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x} \binom{7}{2-x}}{\binom{10}{2}}, \quad f(0) = f(1) = \frac{21}{45} \approx 0.47, \quad f(2) = \frac{3}{45} \approx 0.07$$

□

حاصل ہوتا ہے۔

اگر n کے لحاظ سے N ، M اور $N - M$ بہت بڑی مقدار ہوں تب واپس رکھتے ہوئے اور واپس نہ رکھتے
ہوئے حاصل کردہ نمونے تقریباً ایک جیسے ہوں گے لہذا ایسی صورت میں بیش ہندسی تقسیم کی جگہ $p = \frac{M}{N}$ لیتے
ہوئے ثنائی تقسیم استعمال کی جاسکتی ہے، جو نسبتاً سادہ تفاعل ہے۔

یوں بہت بڑی آبادی (لامتناہی آبادی) سے، واپس رکھتے ہوئے یا واپس نہ رکھتے ہوئے، نمونہ حاصل کرتے ہوئے
ثنائى تقسیم استعمال کی جاسکتی ہے۔

سوالات

سوال 24.104: چار سکے ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں۔ بلا منصوبہ متغیر "X = تعداد خط" کا تفاعل احتمال تلاش کریں؟ 0 خط، 1 خط، کم سے کم 1 خط اور زیادہ سے زیادہ 3 خط کا احتمال حاصل کریں۔
جواب: 0.0625, 0.25, 0.9375, 0.9375

سوال 24.105: نشانے پر تیر مارنے کا امکان 10% ہے۔ 10 تیر چلائے جاتے ہیں۔ کم سے کم ایک بار نشانہ لگنے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال 24.106: 24 گھنٹوں کے پرکھ میں $p = 1\%$ امکان ہے کہ ایک خاص قسم کا بلب زائل ہو جائے گا۔ ایسے 10 بلبوں کا، کوئی بھی بلب خراب ہوئے بغیر، مسلسل 24 گھنٹے روشنی دینے کا احتمال کیا ہوگا۔
جواب: $0.99^{10} \approx 90.4\%$

سوال 24.107: مسئلہ ثنائی استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ ثنائی تقسیم کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل (سوال 24.103) درج ذیل ہے اور مساوات 24.60 اور مساوات 24.61 کو ثابت کریں۔

$$G(t) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n$$

سوال 24.108: دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل درج ذیل ہے اور مساوات 24.63 کو ثابت کریں۔

$$G(t) = e^{-\mu} e^{\mu e^t}$$

سوال 24.109: دکھائیں کہ $E([X - \mu]^3) = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$ ہوگا۔ اس کو اور سوال 24.108 کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کا ترچھاپن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ہے جو کہتا ہے کہ μ کی بڑی قیمت کے لئے یہ تقسیم تقریباً تشاکلی ہے (شکل 24.12)۔

سوال 24.110: دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کا تفاعل تقسیم $F(\infty) = 1$ کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 24.111: ایک ٹیلیفون تقسیم کار تختی اوسطاً 600 ٹیلیفون کے لئے کافی ہے۔ یہ ایک منٹ میں زیادہ سے زیادہ 10 نئے ٹیلیفون ملا سکتی ہے۔ پوسٹن تقسیم استعمال کرتے ہوئے اس بات کا احتمال تلاش کریں کہ کسی ایک منٹ میں یہ تقسیم کار تختی ناکافی ثابت ہو گا۔

سوال 24.112: ایک کارخانے میں 50Ω کے برقی مزاحمت پیدا کیے جاتے ہیں جن میں سے وہ مزاحمت بے عیب تصور کیے جاتے ہیں جن کی مزاحمت 45Ω اور 55Ω کے بیچ ہو۔ عیب دار مزاحمت کا احتمال 0.2% ہے۔ ان مزاحمتوں کو 100 کی کھیپ میں، ضمانت کے ساتھ فروخت کیا جاتا ہے۔ تقسیم پوسٹن استعمال کرتے ہوئے ایک کھیپ میں عیب دار مزاحمت نکلنے کا احتمال حاصل کریں۔
جواب: $1 - e^{-0.2} = 0.1813$

سوال 24.113: فرض کریں کہ ایک مشین کے پیدا کردہ بیچوں میں سے 3% عیب دار ہوتے ہیں۔ ایک ڈبیا میں 50 بیچ بھرے جاتے ہیں۔ تقسیم پوسٹن استعمال کرتے ہوئے ایک ڈبیا میں x عیب دار بیچ نکلنے کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.114: ایک پل سے جمع کے دن صبح 8 تا 10 بجے فی منٹ X گاڑیاں گزرتی ہیں۔ فرض کریں کہ X کو پوسٹن تقسیم ظاہر کرتی ہے جس کا اوسط 5 ہے۔ کسی ایک منٹ میں 3 یا 3 سے کم گاڑیاں گزرنے کا احتمال تلاش کریں۔
جواب: 0.265

سوال 24.115: ایک مقناطیسی پٹی کے 100 میٹر لمبائی میں اوسطاً 2 عیب پائے جاتے ہیں۔ 300 میٹر لمبی پٹی (الف) میں x عیب کا احتمال کیا ہو گا، (ب) بلا عیب ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.116: گتے کے ڈبا میں 20 فٹیلے ہیں جن میں سے 5 عیب دار ہیں۔ اس ڈبا سے بلا منصوبہ 3 فٹیلے بغیر واپس رکھے بطور نمونہ نکالے جاتے ہیں۔ اس نمونہ میں x عیب دار فٹیلے ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.117: ایک تقسیم کار 100 قلم کے ڈبوں فروخت کرتا ہے۔ وہ اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ کسی ایک ڈبے میں سے زیادہ سے زیادہ 10% قلم عیب دار ہوں گے۔ ایک خریدار ہر ڈبے میں سے 10 قلم بغیر واپس رکھے نکال کر پرکھتا ہے۔ کوئی بھی قلم عیب دار نہ ہونے کی صورت میں وہ ڈبا خرید لیتا ہے ورنہ وہ ڈبے کو نہیں خریدتا۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ڈبے میں 10 عیب دار قلم ہوں (لہذا یہ ضمانت پر پورا اترتا ہے) اور خریدار اس ڈبے کو نہ خریدے؟

سوال 24.118: سوال 24.117 میں کیا احتمال ہے کہ ایک ڈبے میں 20 عیب دار قلم ہونے کے باوجود خریدار اسے خرید لیتا ہے؟

سوال 24.119: ایک کارخانے میں پیچوں کی پیداوار کی جاتی ہے۔ ہر گھنٹہ بلا منصوبہ n پیچ کا نمونہ حاصل کر کے پرکھا جاتا ہے۔ ایک یا ایک سے زیادہ عیب دار پیچ حاصل ہونے کی صورت میں کام روک کر مشینوں کی کارکردگی تسلی بخش بنائی جاتی ہے۔ n کتنا ہو گا اگر 10% عیب دار پیچ کی صورت میں 95% احتمال ہے کہ کام روکا جائے گا؟

سوال 24.120: 1 سے لے کر 13 تک عدد کو علیحدہ علیحدہ کاغذ پر لکھا جاتا ہے۔ ان میں سے بلا منصوبہ تین کاغذ نکالے جاتے ہیں جبکہ ایک شخص بغیر دیکھے تینوں پر لکھے اعداد بتاتا ہے۔ کیا احتمال ہے کہ وہ (الف) کوئی بھی درست عدد نہ بتائے، (ب) ایک عدد ٹھیک بتائے، (پ) دو عدد ٹھیک بتائے، (ت) تینوں اعداد ٹھیک بتائے؟

جواب: $\frac{120}{286}, \frac{135}{286}, \frac{30}{286}, \frac{1}{286}$

سوال 24.121: مساوات 24.66 کو ثابت کریں۔

سوال 24.122: (متعدد رکنی تقسیم) k باہمی بلا شرکت وقوعات A_1, \dots, A_k کے احتمال بالترتیب p_1, \dots, p_k ہیں جہاں $p_1 + \dots + p_k = 1$ ہے۔ فرض کریں کہ n باہمی بلا شرکت کوشش کیے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ ان میں A_1 کی تعداد x_1, \dots, x_k کی تعداد x_k ہونے کا احتمال

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$$

ہو گا جہاں $0 \leq x_j \leq n$ ، $j = 1, \dots, k$ ، اور $x_1 + \dots + x_n = n$ ہیں۔ ایسی تقسیم جس کی تعادل تقسیم درج بالا ہو کو متعدد رکنی تقسیم¹¹⁰ کہتے ہیں۔

سوال 24.123: برقی مزاحمت کی پیداوار میں 3% کی مزاحمت $R < 198 \Omega$ اور 5% کی مزاحمت $R > 201 \Omega$ ہے۔ بلا منصوبہ 20 مزاحمتوں کے نمونہ میں $R < 198 \Omega$ کے x_1 اور $R > 201 \Omega$ کے x_2 مزاحمت حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟

24.10 عمومی تقسیم

ایسی تقسیم جس کی کثافت

$$(24.68) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\sigma > 0)$$

ہو کو عمومی تقسیم¹¹¹ یا گاوسی تقسیم¹¹² کہتے ہیں۔ اس طرح تقسیم والا بلا منصوبہ متغیر عمومی¹¹³ یا عمومی بانٹا ہوا¹¹⁴ کہلاتا ہے۔ عملی دلچسپی کے بہت سارے بلا منصوبہ متغیرات عمومی یا تخمیناً عمومی ہیں اور یا ان کا تبادلہ با آسانی عمومی بلا منصوبہ متغیرات میں کیا جاسکتا ہے۔ اس کے علاوہ کئی پیچیدہ تقسیم کو تخمیناً عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ شماریاتی پرکھ کے کئی ثبوت میں بھی یہ تقسیم کردار ادا کرتی ہے۔

مساوات 24.68 میں تقسیم کی اوسط μ اور اس کا معیاری انحراف σ ہے۔ $f(x)$ کی منفی μ کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور اس کو قوس جرس¹¹⁵ کہتے ہیں۔ قوس جرس کو شکل 24.13 میں $\mu = 0$ اور σ کے کئی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ $\mu > 0$ ($\mu < 0$) کے لئے قوس کی شکل تبدیل نہیں ہوتی البتہ یہ $|\mu|$ اکائیاں دائیں (بائیں) منتقل ہوتا ہے۔ σ^2 کی قیمت جتنی کم ہو، $x = \mu$ پر قوس کی چوٹی اتنی زیادہ بلند ہوگی اور چوٹی کے دونوں اطراف ڈھلوان اتنی زیادہ ہوگی (شکل 24.13) جو تغیریت کے تصور کے عین مطابق ہے۔

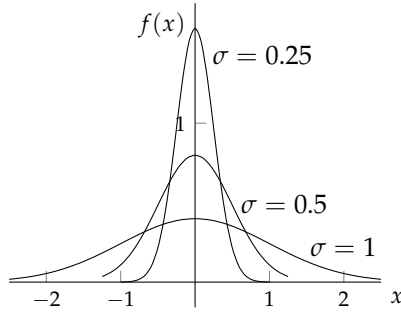
مساوات 24.68 سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کا تقسیمی تفاعل

$$(24.69) \quad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

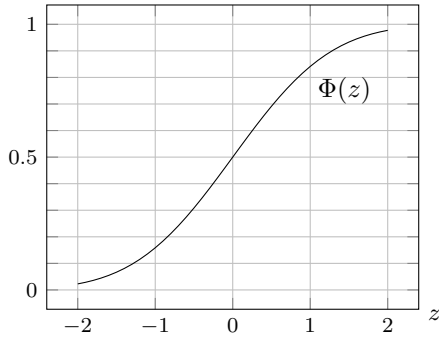
ہو گا۔ یوں مساوات 24.45 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(24.70) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

normal distribution¹¹¹Gauss distribution¹¹²normal¹¹³normally distributed¹¹⁴bell curve¹¹⁵



شکل 24.13: عمومی تقسیم کی کثافت (مساوات 24.68) برائے $\mu = 0$ اور مختلف σ



شکل 24.14: اوسط 0 اور تغیریت 1 کے عمومی تقسیم کا تقابل تقسیم $\Phi(z)$

مساوات 24.69 کا مکمل بنیادی طریقوں سے حاصل کرنا ممکن نہیں ہے البتہ اس کو درج ذیل مکمل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے (شکل 24.14)

$$(24.71) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

جو عمومی تقسیم کا وہ تفاعل ہے جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے اور جس کو جدول بند کیا گیا ہے۔ یہ جدول ضمیمہ ج میں پیش کیے گئے ہیں۔ اگر $\frac{v-\mu}{\sigma} = u$ لیا جائے تب $\frac{du}{dv} = \frac{1}{\sigma}$ اور $dv = \sigma du$ ہو گا اور ہمیں $-\infty$ تا $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ مکمل لینا ہو گا۔ مساوات 24.69 سے یوں

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du$$

حاصل ہو گا جس میں σ کٹ جاتا ہے اور جس کا دایاں ہاتھ مساوات 24.71 دیتا ہے جہاں $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ یعنی:

$$(24.72) \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

اس سے اور مساوات 24.70 سے درج ذیل ایک اہم کلیہ اخذ ہوتا ہے۔

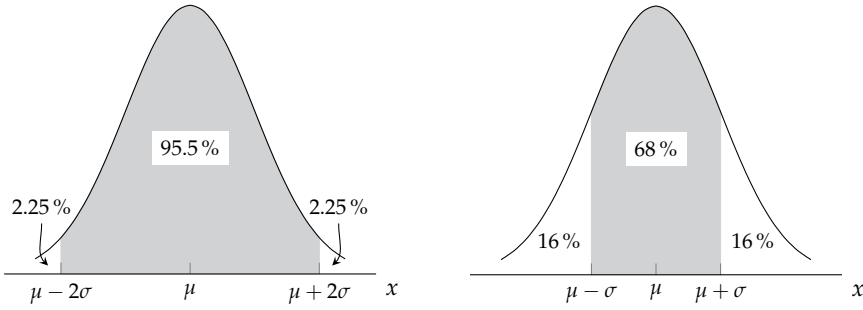
$$(24.73) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

بالخصوص $a = \mu - \sigma$ اور $b = \mu + \sigma$ کی صورت میں دایاں ہاتھ $\Phi(1) - \Phi(-1)$ کے برابر ہے؛ $a = \mu - 2\sigma$ اور $b = \mu + 2\sigma$ کی صورت میں دایاں ہاتھ $\Phi(2) - \Phi(-2)$ کے برابر ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ تفاعل $\Phi(z)$ کی قیمتیں جدول سے دیکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے (شکل 24.15)۔

$$(24.74) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad & P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 68\% \\ \text{(ب)} \quad & P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.5\% \\ \text{(پ)} \quad & P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\% \end{aligned}$$

یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ بلا منصوبہ عمومی متغیر X کی بہت ساری قیمتیں درج ذیل طرح بانٹی گئی ہوں گی۔

- (الف) تقریباً $\frac{2}{3}$ قیمتیں $\mu - \sigma$ اور $\mu + \sigma$ کے بیچ ہوں گی،
- (ب) تقریباً 95% قیمتیں $\mu - 2\sigma$ اور $\mu + 2\sigma$ کے بیچ ہوں گی،



شکل 24.15: اظہار مساوات 24.74

• (پ) تقریباً $99\frac{3}{4}\%$ قیمتیں $\mu - 3\sigma$ اور $\mu + 3\sigma$ کے بیچ ہوں گی

جس کو درج ذیل طریقہ سے بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

وہ قیمت جس کی μ سے دوری σ سے زیادہ ہو، 3 کوششوں میں تقریباً 1 مرتبہ واقع ہوگی، جبکہ وہ قیمت جس کی μ سے دوری 2σ یا 3σ سے زیادہ ہو، بالترتیب 20 اور 400 کوششوں میں تقریباً 1 مرتبہ واقع ہوگی۔ یوں عملی طور پر تمام قیمتیں $\mu - 3\sigma$ اور $\mu + 3\sigma$ کے بیچ پائی جائیں گی۔ اس دو اعداد کو تین سگما حدود¹¹⁶ کہتے ہیں۔

اسی طرح درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(24.75) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad & P(\mu - 1.96\sigma < X \leq \mu + 1.96\sigma) = 95\% \\ \text{(ب)} \quad & P(\mu - 2.58\sigma < X \leq \mu + 2.58\sigma) = 99\% \\ \text{(پ)} \quad & P(\mu - 3.29\sigma < X \leq \mu + 3.29\sigma) = 99.9\% \end{aligned}$$

درج ذیل مثال ضمیمہ ج میں دیے گئے عمومی تقسیم کی جدول کا استعمال سمجھنے میں مدد دیں گی۔

مثال 24.13: درج ذیل احتمال ضمیمہ ج کی مدد سے تلاش کریں جہاں X عمومی ہے جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے۔

$$\text{(الف)} P(X \leq 2.44), \text{ (ب)} P(X \leq -1.16), \text{ (پ)} P(X \geq 1), \text{ (ت)} P(2 \leq X \leq 10)$$

¹¹⁶ three-sigma limits

حل: ہم ضمیمہ ج سے جوابات پڑھ کر لکھتے ہیں۔

$$(الف) \quad 0.9927, \quad (ب) \quad 0.1230, \quad (پ) \quad 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587, \\ (ت) \quad \Phi(10) = 1.0000 \text{ (کیوں؟)}, \Phi(2) = 0.9772, \Phi(10) - \Phi(2) = 0.0228$$

□

مثال 24.14: گزشتہ مثال کو دوبارہ حل کریں۔ اس مرتبہ فرض کریں کہ X عمومی ہے جس کی اوسط 0.8 اور تغیریت 4 ہے۔
جواب: ضمیمہ ج اور مساوات 24.73 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(الف) \quad F(2.44) = \Phi\left(\frac{2.44 - 0.80}{2}\right) = \Phi(0.82) = 0.7939 \\ (ب) \quad F(-1.16) = \Phi(-0.98) = 0.1635 \\ (پ) \quad 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \Phi(0.1) = 0.4602 \\ (ت) \quad F(10) - F(2) = \Phi(4.6) - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

□

مثال 24.15: فرض کریں کہ X عمومی ہے جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے۔ ایسا مستقل c تلاش کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(الف) \quad P(X \geq c) = 10\%, \quad (ب) \quad P(X \leq c) = 5\% \\ (پ) \quad P(0 \leq X \leq c) = 45\%, \quad (ت) \quad P(-c \leq X \leq c) = 99\%$$

حل: ضمیمہ ج سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(الف) \quad 1 - P(X \leq c) = 1 - \Phi(c) = 0.1, \Phi(c) = 0.9, c = 1.282, \\ (ب) \quad c = -1.645, \\ (پ) \quad \Phi(c) - \Phi(0) = \Phi(c) - 0.5 = 0.45, \Phi(c) = 0.95, c = 1.645, \\ (ت) \quad c = 2.576$$

□

سوال 24.124: فرض کریں کہ X عمومی ہے جس کی اوسط -2 اور تغیریت 0.25 ہے۔ ایسا c تلاش کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

(الف) $P(X \geq c) = 0.2$, (ب) $P(-c \leq X \leq -1) = 0.5$

(پ) $P(-2 - c \leq X \leq -2 + c) = 0.9$, (ت) $P(-2 - c \leq X \leq -2 + c) = 99.6\%$

حل: ضمیمہ ج سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

(الف) $1 - P(X \leq c) = 1 - \Phi\left(\frac{c+2}{0.5}\right) = 0.2$,

$\Phi(2c+4) = 0.8, 2c+4 = 0.842, c = -1.579$

(ب) $\Phi\left(\frac{-1+2}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{-c+2}{0.5}\right) = 0.9772 - \Phi(4-2c) = 0.5$,

$\Phi(4-2c) = 0.4772, 4-2c = -0.057, c = 2.03$

(پ) $\Phi\left(\frac{-2+c+2}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{-2-c+2}{0.5}\right)$

$= \Phi(2c) - \Phi(-2c) = 0.9, 2c = 1.645, c = 0.823$

(ت) $\Phi(2c) - \Phi(-2c) = 99.6\%, 2c = 2.878, c = 1.439$

مثال 24.16: ایک کارخانے میں ایک خاص مونائی کی لوہے کی چادریں بنائی جاتی ہیں۔ یہ کام خود کار مشین کرتے ہیں۔ خام مال میں فرق اور درجہ حرارت، لرزش وغیرہ کی بنا مشینوں کا رویہ اور استعمال آلات میں معمولی تبدیلیاں رونما ہوتی ہیں جنہیں قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ان وجوہات کی بنا چادریں ایک دوسرے سے مختلف ہوتی ہیں۔ یوں ہم چادر کی مونائی X (ملی میٹر) کو بلا منصوبہ متغیر تصور کر سکتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ متغیر عمومی ہے جس کی اوسط $\mu = 10 \text{ mm}$ اور معیاری انحراف $\sigma = 0.02 \text{ mm}$ ہے۔ ہم عیب دار چادروں کی تعداد جاننا چاہیں گے۔ عیب دار چادر وہ چادر ہے جس کی مونائی (الف) 9.97 mm سے کم ہو، (ب) 10.05 mm سے زیادہ ہو، (پ) کا اوسط (10 mm) سے انحراف 0.03 mm سے زیادہ ہو۔ (ت) ہم اعداد $10 - c$ اور $10 + c$ منتخب کرنا چاہتے ہیں کہ عیب دار چادروں کی تعداد 5% سے زیادہ نہ ہو۔ (ٹ) جزو-ت میں $\mu = 10.01 \text{ mm}$ کرنے سے عیب دار کی فی صد تعداد پر کیا اثر پڑے گا؟

حل: ضمیمہ ج استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$(الف) \quad P(X \leq 9.97) = \Phi\left(\frac{9.97 - 10.00}{0.02}\right) = \Phi(-1.5) = 0.0668 \approx 6.7\%$$

$$(ب) \quad P(X \geq 10.05) = 1 - P(X \leq 10.05) = 1 - \Phi\left(\frac{10.05 - 10.00}{0.02}\right) \\ = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 \approx 0.6\%$$

$$(پ) \quad P(9.97 \leq X \leq 10.03) = \Phi\left(\frac{10.03 - 10.00}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{9.97 - 10.00}{0.02}\right) \\ = \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.8664; \implies 1 - 0.8664 \approx 13\%$$

(ت) مساوات 24.75-الف سے

$$c = 1.96\sigma = 0.039$$

یوں جواب 9.961 mm اور 10.039 mm ہے۔

$$(ث) \quad P(9.961 \leq X \leq 10.039) = \Phi\left(\frac{10.039 - 10.010}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{9.961 - 10.010}{0.02}\right) \\ = \Phi(1.45) - \Phi(-2.45) = 0.9265 - 0.0071 \approx 92\%$$

لہذا جواب 8% ہو گا۔ آپ نے دیکھا کہ مشین میں معمولی تبدیلی سے عیب دار چادروں کی تعداد میں بہت زیادہ اضافہ پیدا ہوتا ہے۔

□

بلا منصوبہ عمومی متغیر سے خطی تبادل کے ذریعہ بلا منصوبہ عمومی متغیر ہی حاصل ہو گا۔ مساوات 24.72 سے آپ یقیناً درج ذیل حاصل کر پائیں گے۔

مسئلہ 24.14: (خطی تبادل)

اگر X عمومی ہو اور اس کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو تب $X^* = c_1X + c_2$ ($c_1 \neq 0$) عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu^* = c_1\mu + c_2$ اور تغیریت $\sigma^{*2} = c_1^2\sigma^2$ ہو گی۔

بڑی n کی صورت میں شائی تقسیم کو تخمیناً عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ بڑی n کی صورت میں تفاعل تقسیم

$$(24.76) \quad f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

کے ثنائی عددی سر اور طاقت سادہ نہیں رہتے اور ان سے چھٹکارا حاصل کرنے میں بہتری ہے۔

مسئلہ 24.15: (ڈی موئے ور اور لاپلاس کا تحدیدی مسئلہ)
بڑی n کے لئے

$$f(x) \sim f^*(x) \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

ہو گا جہاں f کو مساوات 24.76 میں پیش کیا گیا ہے جبکہ

$$(24.77) \quad f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

عمومی تقسیم کی کثافت ہے جس کی اوسط $\mu = np$ اور تغیریت $\sigma^2 = npq$ ہے (جو ثنائی تقسیم کی اوسط اور تغیریت ہیں) اور علامت \sim (مقارنی برابر) کا مطلب ہے کہ جیسے جیسے n لامتناہی کے قریب تر ہوتا جائے ویسے ویسے دونوں اطراف کی نسبت 1 کے قریب تر ہوتی جائے گی۔ مزید کسی بھی غیر منفی اعداد صحیح a اور $b (> a)$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(24.78) \quad P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^b \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

$$\alpha = \frac{a - np - 0.5}{\sqrt{npq}}, \quad \beta = \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{npq}}$$

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔ اس مسئلے کے ثبوت سے ظاہر ہوتا ہے کہ غیر مسلسل سے استمراری صورت میں تبادلے کی بنا اصلاح کی ضرورت پیش آتی ہے جو اجزاء 0.5، α اور β کی صورت میں نظر آتا ہے۔

سوالات

سوال 24.125: دکھائیں کہ مساوات 24.68 کے نقاط تصریف¹¹⁷ $x = \mu + \sigma$ اور $x = \mu - \sigma$ پر پائے جاتے ہیں۔ نقطہ تصریف سے مراد وہ نقطہ ہے جس پر منحنی کی شکل محدب سے مجوف یا مجوف سے محدب ہوتی ہو۔

¹¹⁷ inflexion points

سوال 24.126: دکھائیں $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

سوال 24.127: X عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 80 اور تغیریت 9 ہے۔ $P(X > 83)$ ، $P(X < 81)$ ، $P(X < 80)$ اور $P(78 < X < 82)$ تلاش کریں۔
جواب: 0.1587, 0.6306, 0.5, 0.4950

سوال 24.128: X عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 105 اور تغیریت 25 ہے۔ $P(X \leq 112.5)$ ، $P(X > 100)$ اور $P(110.5 < X < 111.25)$ تلاش کریں۔
جواب:

سوال 24.129: X عمومی ہے جس کی اوسط 14 اور تغیریت 4 ہے۔ ایسا c کہ $P(X \leq c) = 95\%$ ، $P(X \leq c) = 5\%$ ، $P(-c \leq X \leq c) = 99\%$ ہو تلاش کریں۔
جواب: 17.29, -17.29, 19.152

سوال 24.130: X عمومی ہے جس کی اوسط 3.6 اور تغیریت 0.01 ہے۔ ایسا c تلاش کریں کہ $P(X \leq c) = 50\%$ ، $P(X > c) = 10\%$ ، $P(-c < X \leq c) = 99.9\%$ ہوں۔

سوال 24.131: گاڑی کی ایک مخصوص بیڑی کی زندگی X عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 4 سال اور معیاری انحراف 1 سال ہے۔ صنعت گر بیڑی کی تین سال کی ضمانت دیتا ہے۔ اس کو ضمانت کی بنا کتنی فی صد بیڑیاں مہیا کرنی ہوں گی؟
جواب: 16%

سوال 24.132: ایک سکہ 4040 مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ 2048 شیر حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.133: ایک صنعت کار کاغذ بناتا ہے جس کی کمیت عمومی متغیر ہے جس کی اوسط $\mu = 1.950$ g اور معیاری انحراف $\sigma = 0.025$ g ہے۔ کاغذ کو 1000 کی جتھوں میں فروخت کیا جاتا ہے۔ ایک جتھا میں کتنے کاغذ 2 g سے زیادہ بھاری ہوں گے؟
جواب: تقریباً 22

سوال 24.134: مثال 24.16 کے جزو-پ میں عیب دار چادروں کی تعداد 6% کے لئے σ کتنا ہو گا؟

سوال 24.135: برقی مزاحمت کا پیدا کار تجربہ سے جانتا ہے کہ اس کے بنائے گئے مزاحمت کی قیمت عمومی متغیر ہے جس کی اوسط $\mu = 150 \Omega$ اور معیاری انحراف $\sigma = 5 \Omega$ ہے۔ کتنے فی صد کی مزاحمت 148Ω اور

152 Ω کے بیچ ہوگی؟ کتنے فی صد کی مزاحمت 140Ω اور 160Ω کے بیچ ہوگی؟
جواب: 31.1 %, 95.5 %

سوال 24.136: ایک پلاسٹک اینٹ کی طاقت توڑ X (کلوگرام) عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 1250 kg اور معیاری انحراف 55 kg ہے۔ وہ کمیت تلاش کریں جس پر پلاسٹک ٹوٹنے کا انحراف 5 % سے زیادہ نہ ہو۔

سوال 24.137: ایک صارف کو $0.280 \pm 0.002 \text{ cm}$ قطر کے قابلے درکار ہیں۔ ایک صنعت کار کے بنائے گئے قابلوں کی $\mu = 0.279 \text{ cm}$ اور $\sigma = 0.001 \text{ cm}$ ہے اور ان کی تقسیم عمومی ہے۔ اس صنعت کار کے کتنے فی صد قابلے صارف کی تخصیص پر پورا اترتے ہیں؟
جواب: 84 %

سوال 24.138: ایک فروش کار 1000 بلب گتے کے ایک ڈبے میں بیچتا ہے۔ $p = 1\%$ لیتے ہوئے مساوات 24.78 کی مدد سے اس بات کا احتمال تلاش کریں کہ ایک ڈبے میں 1 % سے زیادہ بلب خراب نہیں ہوں گے۔

سوال 24.139: جدول عمومی استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.75 میں دیے گئے نتائج حاصل کریں۔

سوال 24.140: مسئلہ 24.14 ثابت کریں۔

سوال 24.141: اگر X عمومی ہو جس کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے تب $X - \mu$ کی تقسیم کیا ہوگی؟
جواب: $X - \mu$ بھی عمومی ہوگا۔ اس کی اوسط $-\mu$ اور تغیریت σ^2 ہوگی۔

سوال 24.142: (بڑے اعداد کے لئے برنولی کا قاعدہ)
فرض کریں کہ ایک تجربہ میں وقوعہ A کا احتمال p ($0 < p < 1$) ہے، اور فرض کریں کہ n بلا منصوبہ کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد X ہے۔ دکھائیں کہ کسی بھی $\epsilon > 0$ کے $n \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل ذیل ہوگا۔

$$(24.79) \quad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

سوال 24.143: $\Phi^2(\infty)$ میں قطبی محدود ($u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$) متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 \quad (24.80)$$

جواب:

$$\Phi^2(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} du dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = 1$$

سوال 24.144: مساوات 24.80 اور مکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مساوات 24.68 میں σ معیاری تقسیم کا معیاری انحراف ہے۔

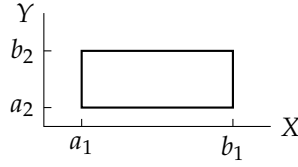
24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم ایک مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ واحد ایک بلا منصوبہ متغیر، مثلاً X ، وابستہ کرنا ہو گا۔ حصہ 24.7 سے ہم جانتے ہیں کہ اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم $F(x) = P(X \leq x)$ اس تقسیم کو مکمل طور پر تعین کرتا ہے، چونکہ ہر وقفہ $a < X \leq b$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم دو مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ دو بلا منصوبہ متغیرات، مثلاً X اور Y ، وابستہ کرنا ہو گا۔ مثال کے طور پر فولاد کی راک ویل سختی کو X اور اس میں کاربن کی مقدار کو Y ظاہر کر سکتے ہیں۔ ہر ایک تجربہ اعداد کی جوڑی $X = x$ ، $Y = y$ دے گی جس کو مختصراً (x, y) لکھا اور XY مستوی پر بطور نقطہ دکھایا جاسکتا ہے۔ ہم اب ایک مستطیل $a_1 < X \leq b_1$ ، $a_2 < Y \leq b_2$ پر غور کرتے ہیں (شکل 24.16)۔ اگر ایسے ہر ایک مستطیل کے لئے ہمیں مطابقتی احتمال

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2)$$



شکل 24.16: دو بعدی تقسیم کا تصور

معلوم ہو تب ہم کہتے ہیں کہ دو بعدی بلا منصوبہ متغیر (X, Y) ¹¹⁹ یا بلا منصوبہ متغیرات X اور Y کا دو بعدی تفاعل احتمال¹²⁰ ہمیں معلوم ہے۔ تفاعل

$$(24.81) \quad F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

کو اس تقسیم یا (X, Y) کا تقسیمی تفاعل¹²¹ کہتے ہیں۔ چونکہ (سوال 24.145)

$$(24.82) \quad \begin{aligned} P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) \\ = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 24.81 تقسیم کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

غیر مسلسل دو بعدی تقسیمیں

اگر (X, Y) درج ذیل خواص رکھتا ہو تب متغیر (X, Y) اور اس کا مطابقتی تقسیم غیر مسلسل کہلائے گا۔

X, Y متناہی تعداد یا قابل شمار لامتناہی تعداد کی جوڑی قیمتیں (x, y) اختیار کر سکتا ہے جن کے مطابقتی احتمال مثبت ہوں گے۔ ہر ایسا دائرہ کار جس میں ایسی کوئی جوڑی نہ پائی جاتی ہو کا احتمال 0 ہو گا¹²²۔

فرض کریں کہ x_i, y_j ایسی کوئی جوڑی ہے اور $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ ہے (جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ p_{ij} کسی مخصوص i, j کی جوڑیوں کے لئے صفر بھی ہو سکتا ہے)۔ تفاعل

$$(24.83) \quad f(x, y) = \begin{cases} p_{ij} & x = x_i, y = y_j \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

¹¹⁹ two-dimensional random variable

¹²⁰ two-dimensional probability distribution

¹²¹ distribution function

¹²² وہی ان رے کہ پہلی خاصیت سے یہ نہیں کہا جاسکتا ہے

کو (X, Y) کا تفاعل احتمال کہتے ہیں؛ یہاں غیر تابع طور پر $i = 1, 2, \dots$ اور $j = 1, 2, \dots$ ہیں۔ مساوات 24.42 کا مماثل

$$(24.84) \quad F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

ہے اور مساوات 24.38 کی جگہ درج ذیل شرط ہو گا۔

$$(24.85) \quad \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$$

مثال کے طور پر اگر ہم ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے اچھا کر

X = ایک روپیہ کی خط کی تعداد

Y = پانچ روپیہ کی خط کی تعداد

پر غور کریں تب X اور Y کی قیمت 0 یا 1 ہو سکتی ہے اور تفاعل احتمال

$$f(x, y) = 0 \text{ (ان کے علاوہ) } f(0, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = \frac{1}{4}$$

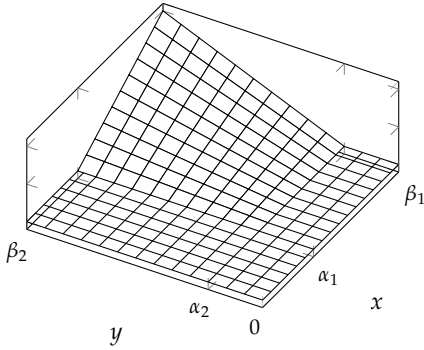
استمراری دوبعدی تقسیمیں

(X, Y) اور اس کا تقسیم اس صورت استمراری کہلاتے ہیں جب مطابقتی تفاعل تقسیم کو دوہرا مکمل

$$(24.86) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x^*, y^*) dx^* dy^*$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں $f(x, y)$ معین، غیر منفی اور پورے مستوی میں محدود ہے ماسوائے متناہی تعداد کے استمراری قابل تفرق منحنیات پر۔ $f(x, y)$ کو تقسیم کی کثافت احتمال کہتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(24.87) \quad P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy$$



شکل 24.17: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل احتمال کثافت

شکل 24.18: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل تقسیم

مثال کے طور پر (شکل 24.17)

$$(24.88) \quad \text{جب } (x, y) \text{ مستطیل } R \text{ میں ہو تب } f(x, y) = \frac{1}{k} \text{ ورنہ } f(x, y) = 0$$

مستطیل R میں یکساں تقسیم کو ظاہر کرتا ہے؛ یہاں k مستطیل کا رقبہ یعنی $k = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)$ ہے۔ اس تقسیم کو شکل 24.18 میں دکھایا گیا ہے۔

دو بعدی غیر مسلسل تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

فرض کریں کہ بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر (X, Y) کا تفاعل احتمال $f(x, y)$ ہے۔ اگر $X = x$ ہو، جبکہ Y جس میں ہمیں دلچسپی نہیں ہے کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہو، تب تفاعل احتمال (اختیاری $P(X = x, Y)$ کو $f_1(x)$ لکھا جاسکتا ہے جو x کا تابع تفاعل ہے۔ یوں

$$(24.89) \quad f_1(x) = P(X = x, Y \text{ اختیاری}) = \sum_y f(x, y)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں اس x کے لئے ہم $f(x, y)$ کی تمام غیر صفر قیمتوں کا مجموعہ لیا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ $f_1(x)$ ایک بلا منصوبہ متغیر تقسیمی احتمال کا تفاعل احتمال ہے۔ اس تقسیم کو دیے گئے دو بعدی تقسیم کے لحاظ ہے

X کا حاشیہ تقسیم¹²³ کہا جاتا ہے۔ اس کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$(24.90) \quad F_1(x) = P(X \leq x, Y \text{ اختیاری}) = \sum_{x^* \leq x} f_1(x^*)$$

اسی طرح تفاعل احتمال

$$(24.91) \quad f_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y = y) = \sum_x f(x, y)$$

دیے گئے دو بعدی تقسیم کا Y کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم تعین کرتا ہے۔ مساوات 24.91 میں ہم y کے مطابقتی غیر صفر $f(x, y)$ کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اس تقسیم کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$(24.92) \quad F_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y \leq y) = \sum_{y^* \leq y} f_2(y^*)$$

ظاہر ہے کہ بلا منصوبہ متغیر (X, Y) کے دونوں حاشیہ تقسیم غیر مسلسل ہیں۔

جدول 24.7 میں ان کی مثال دی گئی ہے جہاں تاش کے پتوں سے تین پتے نکال کر واپس رکھے جاتے ہیں۔ ملکہ کے حصول کو X جبکہ بادشاہ کے حصول کو Y سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تاش کے کل 52 پتے ہوتے ہیں جن میں 4 ملکہ اور 4 بادشاہ کے پتے ہوتے ہیں۔ یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ہو گا۔ یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ یا بادشاہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{2}{13}$ ہو گا۔ اس طرح اس بلا منصوبہ تجربہ کا مطابقتی تفاعل احتمال

$$f(x, y) = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!} \left(\frac{1}{13}\right)^x \left(\frac{2}{13}\right)^y \left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} \quad (x+y \leq 3)$$

ہو گا اور ان کے علاوہ $f(x, y) = 0$ ہو گا۔ جدول 24.7 میں $f(x, y)$ ، $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ دیے گئے ہیں۔

دو بعدی استمراری تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

اسی طرح کثافت $f(x, y)$ والے استمراری متغیر X, Y کے لئے ہم

$$(X \leq x, Y \text{ اختیاری}) \quad \text{یا} \quad (X \leq x, -\infty < Y < \infty)$$

جدول 24.7: تاش سے ملکہ اور بادشاہ کا حصول

$x \backslash y$	0	1	2	3	$f_1(x)$
0	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
1	$\frac{300}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	0	$\frac{432}{2197}$
2	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	0	0	$\frac{36}{2197}$
3	$\frac{1}{2197}$	0	0	0	$\frac{1}{2197}$
$f_2(y)$	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{726}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	

پر غور کر سکتے ہیں جس کا مطابقتی احتمال

$$F_1(x) = P(X \leq x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y) dy \right) dx^*$$

ہو گا جس میں

$$(24.93) \quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

لکھتے ہوئے

$$(24.94) \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x^*) dx^*$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $f_1(x)$ اور $F_1(x)$ کو بالترتیب دیے گئے استمراری تقسیم کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم X کی کثافت اور تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ دیے گئے دو بعدی استمراری تقسیم کے لحاظ سے تفاعل

$$(24.95) \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

کو حاشیہ تقسیم Y کی کثافت اور

$$(24.96) \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y^*) dy^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y^*) dx dy^*$$

کو حاشیہ تقسیم Y کا تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ استمراری تقسیم کے دونوں حاشیہ تقسیم استمراری ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کی تابعیت اور غیر تابعیت

دو بعدی (X, Y) تقسیم جس کا تفاعل تقسیم $F(x, y)$ ہو کے بلا منصوبہ متغیرات X اور Y اس صورت
غیر تابع کہلاتے ہیں جب تمام (x, y) کے لئے

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \quad (24.97)$$

ہو ورنہ انہیں تابع کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ X اور Y دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہوں۔ تب X اور Y اس صورت غیر
تابع ہوں گے جب ان کے مطابقتی تفاعل احتمال یا کثافتیں $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں
(سوال 24.160)۔

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) \quad (24.98)$$

مثال کے طور پر جدول 24.7 میں متغیرات تابع ہیں۔ ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے ایک بار اچھال کر متغیرات

پانچ روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد $Y =$ ، ایک روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد $X =$

0 یا 1 قیمت اختیار کر سکتے ہیں اور یہ متغیرات غیر تابع ہیں۔

تابعیت اور غیر تابعیت کی تصور کو n بعدی تقسیم X_1, \dots, X_n جس کا تفاعل احتمال

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

ہو کے n بلا منصوبہ متغیرات تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ اگر تمام x_1, \dots, x_n کے لئے

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdots F_n(x_n) \quad (24.99)$$

ہو جہاں X_j کے حاشیہ تقسیم کا تقسیمی تفاعل $F_j(x_j)$ ہو، یعنی

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j, X_k \text{ اختیاری}, k \neq j)$$

تب یہ بلا منصوبہ متغیرات غیر تابع کہلاتے ہیں ورنہ ان متغیرات کو تابع کہتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل

فرض کریں کہ بلا منصوبہ متغیر (X, Y) کا تفاعل احتمال یا کثافت $f(x, y)$ اور تقسیمی تفاعل $F(x, y)$ ہیں اور فرض کریں کہ $g(x, y)$ غیر مستقل استمراری تفاعل ہے جو تمام (x, y) پر معین ہے۔ تب $Z = g(X, Y)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔ مثال کے طور پر ہم دو پانسہ پھینکتے ہیں۔ پہلے پانسہ عدد X اور دوسرا پانسہ عدد Y دیتا ہے۔ عدد $Z = X + Y$ ان دونوں کا مجموعہ ہے (شکل 24.8)۔

اگر n (X_1, \dots, X_n) بعدی متغیر ہوا اور تمام (x_1, \dots, x_n) پر $g(x_1, \dots, x_n)$ معین غیر مستقل استمراری تفاعل ہو تب $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔

غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر (X, Y) کی صورت میں ان تمام $f(x, y)$ کا مجموعہ لیتے ہوئے جن کے لئے $g(x, y)$ کی قیمت زیر غور y کے برابر ہو، ہم $Z = g(X, Y)$ کا تفاعل احتمال $f(z)$ حاصل کر سکتے ہیں، یعنی:

$$(24.100) \quad f(z) = P(Z = z) = \sum_{g(x,y)=z} \sum f(x, y)$$

Z کا تقسیمی تفاعل

$$(24.101) \quad F(z) = P(Z \leq z) = \sum_{g(x,y) \leq z} \sum f(x, y)$$

ہے جہاں ہم ان $f(x, y)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے $g(x, y) \leq z$ ہو۔

بلا منصوبہ استمراری متغیر (X, Y) کے لئے اسی طرح

$$(24.102) \quad F(z) = P(Z \leq z) = \int \int_{g(x,y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

ہو گا جہاں ہر z کے لئے ہم xy مستوی میں خطہ $g(x, y) \leq z$ پر مکمل حاصل کرتے ہیں۔

$g(X, Y)$ کی حسابی توقع۔ مجموعہ اوسط اور تغیریت

درج ذیل عدد کو $g(X, Y)$ کی حسابی توقع¹²⁴ یا مختصراً توقع کہتے ہیں۔

$$(24.103) \quad E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y) & [(X, Y) \text{ غیر مسلسل}] \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy & [(X, Y) \text{ استمراری}] \end{cases}$$

یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ دوہرا مجموعہ حتمی مرتکز ہے اور xy مستوی پر $|g(x, y)| f(x, y)$ کا مکمل موجود ہے۔ درج ذیل کلیہ کو سوال 24.99 کی طرز پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$(24.104) \quad E(ag(X, Y) + bh(X, Y)) = aE(g(X, Y)) + bE(h(X, Y))$$

اس کے ایک مخصوص صورت $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ہے اور الگراچی مانوڈ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.16: (مجموعہ اوسط)

بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعے کی اوسط (توقع) ان کے انفرادی اوسط کا مجموعہ ہوگا، یعنی:

$$(24.105) \quad E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

مزید درج ذیل با آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 24.17: اوسطوں کا حاصل ضرب

غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے حاصل ضرب کی اوسط ان کے انفرادی اوسط کے حاصل ضرب کے برابر ہوگا، یعنی:

$$(24.106) \quad E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_n)$$

ثبوت: فرض کریں کہ X اور Y بلا منصوبہ متغیرات ہیں (جہاں دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہیں)۔ تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ ہوگا۔ غیر مسلسل صورت میں

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy f(x, y) = \sum_x x f_1(x) \sum_y y f_2(y) = E(X)E(Y)$$

¹²⁴ mathematical expectation

لکھا جاسکتا ہے اور استمراری صورت میں بھی ثبوت اسی طرح کا ہے۔ اس نتیجہ کو n غیر تابع متغیرات تک وسعت دینے سے مساوات 24.106 ثابت ہوتی ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب تغیریت کے مجموعہ پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ $Z = X + Y$ ہے اور Z کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔ سوال 24.97 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sigma^2 = E([Z - \mu]^2) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

مساوات 24.104 سے دائیں ہاتھ پہلے جزو کو

$$E(Z^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کو مسئلہ 24.17 کی مدد سے

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں σ^2 کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

سوال 24.97 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ پہلی لکیر پر دیا گیا تعلق X اور Y کی تغیریت کا مجموعہ ہے جنہیں ہم بالترتیب σ_1^2 اور σ_2^2 سے ظاہر کرتے ہیں۔ دوسری لکیر پر مقدار

$$(24.107) \quad \sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

کو X اور Y کی باہمی تغیریت¹²⁵ کہتے ہیں۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(24.108) \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY}$$

اگر X اور Y غیر تابع ہوں تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ لہذا $\sigma_{XY} = 0$ اور

$$(24.109) \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

ہو گا۔ دو سے زائد متغیرات تک وسعت دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.18: (تغیرات کا مجموعہ)

غیر تابع بلا منسوب متغیرات کے مجموعہ کی تغیریت ان متغیرات کے انفرادی تغیریت کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

$Y = b_2$	A	B
$Y = a_2$	C	D
	$X = a_1$	$X = b_1$

شکل 24.19: شکل برائے سوال 24.145

سوالات

سوال 24.145: مساوات 24.82 کو ثابت کریں۔
 جواب: شکل 24.19 میں (X, Y) احتمال $F(b_1, b_2)$ کے ساتھ A ، B ، C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, b_2)$ کے ساتھ A یا C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(b_1, a_2)$ کے ساتھ C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, a_2)$ کے ساتھ C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے لہذا B سے قیمت حاصل کرنے کا احتمال مساوات 24.82 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

سوال 24.146: شکل 24.17 اور شکل 24.18 میں دیے تقسیم کے حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔

سوال 24.147: فرض کریں کہ $8 \leq x \leq 12$ اور $0 \leq y \leq 2$ میں $f(x, y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ، k ، $P(X \leq 11, 1 \leq Y \leq 1.5)$ اور $P(9 \leq X \leq 12, Y \leq 1)$ تلاش کریں۔
 جواب: $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{8}$

سوال 24.148: ایک کاغذ کی اوسط کمیت 10 g اور معیاری انحراف 0.05 g ہے۔ ایسی 10000 کاغذوں کی ڈھیر کی اوسط کمیت اور تغیریت کیا ہوگی؟

سوال 24.149: فرض کریں کہ $x > 0$ ، $y > 0$ اور $x + y < 3$ میں $f(x, y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ $f(x, y)$ ترسیم کریں۔ $P(X + Y \leq 1)$ اور $P(Y > X)$ تلاش کریں۔
 جواب: $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}$

سوال 24.150: ایک خالی ڈبے کی اوسط 2 kg اور معیاری انحراف 0.1 kg ہے۔ اس ڈبے میں مال کی اوسط 75 kg اور تغیریت 0.8 kg ہے۔ بھرے ڈبے کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.151: خطہ $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ میں بلا منصوبہ متغیرات کی کثافتیں $f(x, y) = x + y$ اور $g(x, y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$ ہیں۔ دکھائیں کہ ان کی حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہیں۔

سوال 24.152: ایسی دو مختلف غیر مسلسل تقسیم کی مثال دیں جن کے حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہوں۔

سوال 24.153: چار گراریوں کو یوں یکجا کیا جاتا ہے کہ ان کے بیچ فاصلہ رہے۔ گراریوں کے بیچ باریک چادر کی ٹکڑیاں رکھ کر فاصلہ پیدا کیا جاتا ہے۔ گراری کی موٹائی کی اوسط 5.020 cm اور معیاری انحراف 0.003 cm ہے جبکہ ٹکڑیاں کی موٹائی کی اوسط 0.040 cm اور معیاری انحراف 0.002 cm ہے۔ بلا منصوبہ 4 گراریوں اور 3 ٹکڑیوں سے بنائی گئی پوری گراری کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے۔
جواب: تقریباً 20.200, 0.007

سوال 24.154: لوہے کی چادروں اور کاغذ کو تہہ در تہہ رکھ کر ٹرانسفارمر کا قالب بنایا جاتا ہے۔ اگر لوہے کی چادر کی موٹائی کی اوسط 0.5 mm اور معیاری انحراف 0.05 mm ہو اور کاغذ کی موٹائی کی اوسط 0.05 mm اور معیاری انحراف 0.02 mm ہو تب 50 لوہے کی چادروں اور 49 کاغذوں سے بنائے گئے قالب کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.155: خطہ $x^2 + y^2 < 1$ میں (X, Y) کی کثافت $f(x, y) = k$ ہے جبکہ اس خطہ کے باہر کثافت صفر ہے۔ k تلاش کریں۔ حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔ احتمال $P(X^2 + Y^2 < \frac{1}{2})$ تلاش کریں۔
جواب: $k = \frac{1}{\pi}$; $f_1(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}$, $f_2(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2}$, 50 %

سوال 24.156: ایک پٹیا اور سورخ کے قطر بالترتیب X سنٹی میٹر اور Y سنٹی میٹر ہیں۔ فرض کریں کہ (X, Y) کی کثافت

$$f(x, y) = 2500 \quad \text{اگر} \quad 0.99 < x < 1.01, 1.00 < y < 1.02$$

ہے ورنہ $f = 0$ ہے۔ حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ منتخب کردہ پٹیا 1.00 سنٹی میٹر کی سورخ میں ٹھیک بیٹھے گا؟

سوال 24.157: خطہ $x \geq 0, y \geq 0$ میں (X, Y) کی کثافت $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ ہے جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ $P(X > Y)$ تلاش کریں۔
جواب: 50 %

سوال 24.158: سوال 24.157 میں حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔

سوال 24.159: ایک برقیاتی آلہ میں دو برقیاتی پرزے پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ پہلا پرزہ X مہینوں تک اور دوسرا پرزہ Y مہینوں تک کام کر سکتا ہے۔ فرض کریں کہ (X, Y) کی احتمال کثافت

$$f(x, y) = 0.01e^{-0.1(x+y)} \quad x > 0, y > 0$$

جبکہ اس کے علاوہ $f = 0$ ہے۔ (الف) کیا X اور Y تابع ہیں؟ (ب) حاشیہ تقسیم کی کثافت تلاش کریں۔
(پ) پہلے پرزے کی زندگی 10 مہینے یا اس سے زیادہ ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟
جواب: غیر تابع، 36.8 %، $f_1(x) = 0.1e^{-0.1x}, x > 0; f_2(y) = 0.1e^{-0.1y}, y > 0$ ہے

سوال 24.160: مساوات 24.98 سے منسلک فقرہ ثابت کریں۔

سوال 24.161: فرض کریں کہ (X, Y) کا تفاعل احتمال $f(0, 1) = \frac{1}{8}$ ، $f(0, 0) = f(1, 1) = \frac{1}{8}$ ہے۔ کیا X اور Y غیر تابع ہیں؟
جواب: جی نہیں

سوال 24.162: مسئلہ 24.16 کو استعمال کرتے ہوئے ثنائی تقسیم کی اوسط μ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 24.163: مسئلہ 24.18 کی مدد سے ثنائی تقسیم کی تغیریت σ^2 کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 24.164: مسئلہ 24.16 کی مدد سے بیش ہندسی تقسیم کی اوسط کا کلیہ حاصل کریں۔ کیا مسئلہ 24.18 کی مدد سے اس تقسیم کی تغیریت کا کلیہ حاصل کیا جاسکتا ہے؟

24.12 بلا منصوبہ نمونہ بندی۔ بلا منصوبہ اعداد

حصہ 24.3 تا حصہ 24.11 میں نظریہ احتمال پر غور کیا گیا۔ اس باب کے باقی حصوں میں شماریات پر غور کیا جائے گا۔ آبادی کے حسابی نمونے بنانے میں نظریہ شماریات مدد دیتا ہے۔ شماریاتی تراکیب، جن پر غور کیا جائے گا، نظریہ اور حقیقی مشاہدوں کے مابین تعلقات پیش کرتے ہیں۔ یوں نمونہ بندی کے ذریعہ آبادی کے بارے میں نتائج حاصل کیے جاسکتے ہیں (شماریاتی رائے زنی؛ حصہ 24.1)۔

اب تک اتنا جاننا کافی تھا کہ آبادی کے نمونہ سے مراد آبادی سے اشیاء کا انتخاب ہے (حصہ 24.1 میں مثالیں) لیکن اب ہمیں اس تصور کی تعریف باریک بینی سے دینی ہوگی۔ حقیقتاً کسی بھی آبادی سے نمونہ بندی کے ذریعہ معنی خیز نتائج حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ نمونہ بلا منصوبہ انتخاب¹²⁶ ہو، یعنی آبادی میں ہر چیز کا منتخب ہو کر نمونے میں شامل ہونے کے احتمال کی قیمت معلوم ہو۔ یہ شرط ہر صورت (کم از کم تخمینی طور پر) پوری کرنا لازم ہے ورنہ حاصل نتائج مکمل طور پر بے معنی اور غلط ہو سکتے ہیں۔

لاتناہی نمونی فضا کی صورت میں نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی، یعنی، کسی بلا منصوبہ تجربہ کو n مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے حاصل n بلا منصوبہ نمونی قیمتیں ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوں گی۔ عمومی آبادی سے حاصل نمونوں کے لئے یہ یقینی طور پر درست ہے۔ تنہا نمونی فضا کی صورت میں اگر ہم واپس رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی؛ اگر ہم واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب، آبادی کی جسامت کے لحاظ سے نمونے کی جسامت چھوٹی رکھتے ہوئے (مثلاً 1000 کی آبادی سے 5 یا 10 کا نمونہ لیتے ہوئے)، حاصل نمونی قیمتیں عملاً غیر تابع ہوں گی۔ اس کے برعکس اگر ہم بغیر واپس رکھتے ہوئے تنہا آبادی سے بڑے نمونے لیں تب تابعیت کا بہت زیادہ اثر پایا جائے گا۔

بلا منصوبہ انتخاب کی شرط پر پورا اترنا آسان نہیں ہے۔ کئی وجوہات نمونہ بندی کے عمل پر اثر انداز ہو سکتی ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ایک خریدار نے 80 کی ڈھیر سے 10 کا انتخاب کر کے ڈھیر خریدنے یا نہ خریدنے کا فیصلہ کرنا ہو تب وہ طبعی طور پر ان 10 چیزوں کا انتخاب کس طرح کرے گا کہ $\binom{80}{10}$ ممکنات میں سے ہر ایک کے منتخب ہونے کا احتمال ایک جیسا ہو؟

اس مسئلے کی حل کے لئے مختلف تراکیب تشکیل دی گئی ہیں۔ ہم اب ایک ایسے طریقہ کار پر غور کرتے ہیں جس کو عموماً استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم اس ڈھیر کے اجزاء کو 1 تا 80 کے شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ضمیمہ ج میں بلا منصوبہ اعداد کی جدول استعمال کرتے ہوئے 10 اجزاء چنتے ہیں۔ بلا منصوبہ اعداد کے جدول کو ہم یوں استعمال کرتے ہیں کہ ہم پہلے 0 سے 99 کوئی صف بلا منصوبہ منتخب کرتے ہیں۔ بلا منصوبہ صف منتخب کرنے کی خاطر ہم ایک سکہ کو 7 مرتبہ اچھال کر 7 ثنائی ہندسوں پر مبنی عدد حاصل کرتے ہیں جس میں خط کو 1 اور شیر کو 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ ثنائی عدد 0 تا 127 کو ظاہر کر سکتا ہے۔ 99 سے بڑا عدد حاصل ہونے کی صورت میں عدد کو رد کرتے ہوئے سکہ دوبارہ 7 مرتبہ اچھالا جاتا ہے حتیٰ کہ ہمیں 0 تا 99 کوئی عدد حاصل ہو جو صف دے گا۔ اس کے بعد اسی طرح ہم بلا منصوبہ 0 تا 9 قطار منتخب کرتے ہیں۔ بلا منصوبہ قطار منتخب کرنے کی خاطر سکہ 4 مرتبہ اچھال کر 4 ثنائی ہندسوں کا عدد حاصل کیا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ صف کے لئے $(= 26) 0011010$ اور قطار کے لئے $(= 7) 0111$ حاصل ہو تب جدول کے 26 ویں صف اور 7 ویں قطار سے 44973 حاصل کرتے ہوئے اس کے پہلے دو ہندسوں پر مبنی عدد 44 لیا جاتا ہے جبکہ باقی ہندسوں کو رد کیا جاتا ہے۔ اسی قطر میں نیچے چلتے ہوئے اعداد کے پہلے دو ہندسے لیتے ہوئے درج ذیل اعداد حاصل کیے جاتے ہیں۔

44 44 83 91 55 . . .

ہم 80 سے بڑے اعداد رد کرتے ہیں اور کسی بھی عدد کو ایک سے زیادہ مرتبہ شامل نہیں کرتے ہیں۔ یوں درکار بلا منصوبہ اعداد کا درج ذیل سلسلہ حاصل ہوتا ہے جس کے تحت اجزاء کو منتخب کیا جائے گا۔

44 55 53 03 52 61 67 78 39 54

زیادہ اجزاء کے نمونہ کے لئے یہ طریقہ کار موزوں نہیں ہے۔ اسی لئے ایسے اعداد جن کی خاصیت بلا منصوبہ اعداد کی طرح ہو، پیدا کرنے کے کئی طریقے بنائے گئے ہیں جنہیں کمپیوٹر کی زبان میں پیدا کار بلا منصوبہ اعداد¹²⁷ کہتے ہیں۔

سوالات

سوال 24.165: فرض کریں کہ مذکورہ بالا مثال میں ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول کے صف 83 اور قطار 2 سے شروع کرتے ہوئے اوپر رخ چلیں۔ تب کون سے اجزاء نمونہ میں شامل کیے جائیں گے؟
جواب: 38, 69, 02, 49, 23, 52, 73, 29, 09, 05

سوال 24.166: ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول استعمال کرتے ہوئے 250 کی ڈھیر سے 20 اجزاء بلا منصوبہ منتخب کریں۔

سوال 24.167: منصفانہ پانسہ کو بلا منصوبہ انتخاب کے لئے کس طرح استعمال کیا جاسکتا ہے؟

سوال 24.168: ایک بلا منصوبہ متغیر Y پر غور کریں جس کی خطہ $0 < y < 1$ میں کثافت یکساں $f(y) = 1$ جبکہ خطہ سے باہر $f = 0$ ہے۔ ہم بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے باآسانی Y (یعنی Y کی قیمتوں) کا نقل اتار¹²⁸ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر 2 اعشاریہ تک کے 20 قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کے جدول کے کسی بھی (بلا منصوبہ) قطار اور صف سے شروع کرتے ہوئے نیچے چلتے ہوئے، پانچ ہندسوں پر مشتمل دیے اعداد کے صرف پہلے دو ہندسوں کو لیتے ہوئے ان کے بائیں جانب اعشاریہ پر کرتے ہوئے اعداد حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم ایک سے زیادہ مرتبہ آنے والے اعداد کو بھی شامل کرتے ہیں۔ فرض کریں ہم صف 36 اور قطار 3 سے شروع کرتے ہیں۔ دکھائیں کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔ ان کا تعددی نقطہ ترسیم کھینچیں۔

0.89	0.40	0.67	0.86	0.87	0.86	0.06	0.20	0.38	0.12
0.68	0.50	0.53	0.10	0.08	0.90	0.19	0.85	0.53	0.98

سوال 24.169: بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے کسی بھی بلا منصوبہ استمراری متغیر X کی نقل اتاری جاسکتی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم X کی تفاعل تقسیم کو ترسیم کرتے ہیں۔ سوال 24.168 کی طرز پر بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے متغیر Y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے انہیں y محدود پر ترسیم کریں اور ان کے مطابقتی X قیمتیں پڑھیں۔ سوال 24.168 کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے عمومی بلا منصوبہ متغیر X ، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو، کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کریں۔ جماعتی نشان -2، -1، 0، 1 اور 2 لیتے ہوئے x کی ان 20 نمونی قیمتوں کا مستطیلی ترسیم کھینچیں۔

جواب: جماعتی تعدد 1، 5، 7، 6، 1 ہیں۔

سوال 24.170: سوال 24.169 کا طریقہ کار غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔ اگر دو منصفانہ پانسہ پھینک کر حاصل اعداد کا مجموعہ X ہو تب اس طریقہ کو کس طرح استعمال کیا جائے گا؟

24.13 مقدار معلوم کا اندازہ لگانا

تقسیمات میں پائی جانے والے مقدار مثلاً ثنائی تقسیم میں p ، عمومی تقسیم میں μ اور σ ، کو مقدار معلوم¹²⁹ کہتے ہیں۔

ایک نقطہ پر مقدار معلوم کی اندازاً قیمت (نقطی اندازہ¹³⁰) ایک عدد (حقیقی محور پر نقطہ) ہو گا جس کو دیے گئے نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے جو مقدار معلوم کی اصل قیمت کی تخمین ہو گی۔ وقفہ اندازہ¹³¹ (یعنی وقفہ اعتبار¹³²)، جس پر اگلے حصے میں بحث کی جائے گی، کو نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مقدار معلوم کی قیمت کا اندازہ لگانا ایک اہم مسئلہ ہے۔

آبادی کی اوسط μ کا اندازہ لگانے کی خاطر ہم نمونے کی اوسط \bar{x} لے سکتے ہیں جس سے ہمیں μ کا اندازہ $\hat{\mu} = \bar{x}$ حاصل ہوتا ہے، یعنی

$$(24.110) \quad \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

جہاں نمونہ کی جسامت n ہے۔ اسی طرح آبادی کی تغیریت کا اندازہ σ^2 در حقیقت مطابقتی نمونے کی تغیریت s^2 ہو گی، یعنی:

$$(24.111) \quad \widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

ظاہر ہے کہ مساوات 24.110 اور مساوات 24.111 ان تقسیمات کی مقدار معلوم کی اندازاً قیمت دیتے ہیں جن میں μ اور σ^2 صریحاً پائے جاتے ہیں؛ عمومی تقسیم اور پوائسن تقسیم ایسی تقسیمات ہیں۔ ثنائی تقسیم میں $p = \frac{\mu}{n}$ (مساوات 24.60) ہے۔ اس صورت میں اگر z ویں کوشش میں وقوعہ A جس کا احتمال p ہے واقع ہو تب مساوات 24.110 میں $x_j = 1$ ہو گا اور اگر اس کوشش میں A واقع نہ ہو تب $x_j = 0$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 24.110 سے p کا اندازہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(24.112) \quad \hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$$

parameters¹²⁹
point estimate¹³⁰
interval estimate¹³¹
confidence interval¹³²

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 24.110 ترکیب معیار اثر¹³³ کی ایک مخصوص صورت ہے۔ اس ترکیب میں جس مقدار معلوم کی اندازاً قیمت درکار ہو، اس کو تقسیم کی معیار اثر کی صورت میں لکھا جاتا ہے (حصہ 24.8)۔ حاصل کلیات میں ان معیار اثر کی جگہ نمونہ سے حاصل مطابقتی معیار اثر پر کرتے ہوئے درکار اندازے حاصل کیے جاتے ہیں۔ یہاں نمونہ x_1, \dots, x_n کا k وال معیار اثر درج ذیل ہے۔

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k$$

اندازے حاصل کرنے کی دوسری ترکیب کو زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب¹³⁴ کہتے ہیں۔ اس ترکیب کو سمجھنے کی خاطر ہم غیر مسلسل (یا استمراری) بلا منصوبہ متغیر X پر غور کرتے ہیں جس کا تفاعل احتمال واحد متغیر θ پر منحصر ہے۔ ہم n غیر تابع قیمتوں x_1, \dots, x_n کا نمونہ لیتے ہیں۔ تب غیر مسلسل صورت میں n جسامت کے نمونہ میں بالکل یہی قیمتیں حاصل ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$l = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n) \quad (24.113)$$

استمراری صورت میں، چھوٹے چھوٹے وقفوں $x_i \leq x \leq x_i + \Delta x$ ($i = 1, 2, \dots, n$) میں قیمتیں حاصل کرنے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$f(x_1)\Delta x f(x_2)\Delta x \cdots f(x_n)\Delta x = l(\Delta x)^n \quad (24.114)$$

چونکہ $f(x_i)$ متغیر θ کا تابع ہے لہذا تفاعل l متغیرات x_1, \dots, x_n اور θ کا تابع ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں x_1, \dots, x_n دیے گئے ہیں اور یہ مقررہ قیمتیں ہیں۔ تب l متغیر θ کا تابع ہو گا جس کو تفاعل امکان¹³⁵ کہتے ہیں۔ زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب کا بنیادی تصور بہت سادہ ہے۔ ہم نامعلوم قیمت θ کے لئے وہ تخمین چنتے ہیں جس سے l کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہو۔ اگر تفاعل l متغیر θ کا قابل تفرق تفاعل ہو تب (سرحد سے ہٹ کر) l کی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے درج ذیل لازمی شرط ہے۔

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \quad (24.115)$$

(ہم یہاں جزوی تفرق لکھتے ہیں چونکہ l متغیرات x_1, \dots, x_n کا بھی تابع ہے۔) مساوات 24.115 کا حل جو x_1, \dots, x_n کا تابع ہے θ کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کہلاتا ہے۔ چونکہ $f(x) \geq 0$ اور $f(x)$

method of moments¹³³
maximum likelihood method¹³⁴
likelihood function¹³⁵

کی زیادہ سے زیادہ قیمت عموماً ثابت ہوتی ہے اور $\ln l$ ایک سر بڑھتا تفاعل ہے لہذا مساوات 24.115 کی جگہ درج ذیل بھی استعمال کیا جاسکتا ہے

$$(24.116) \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0$$

جس سے عموماً حساب میں آسانی پیدا ہوتی ہے۔

اگر X کی تقسیم میں r مقدار معلوم $\theta_1, \dots, \theta_r$ پائے جاتے ہوں تب مساوات 24.115 کی جگہ r لازمی شرائط $\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_r} = 0$ ہوں گے اور مساوات 24.116 کی جگہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(24.117) \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0$$

مثال 24.17: عمومی تقسیم

عمومی تقسیم کی صورت میں μ اور σ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔
حل: مساوات 24.68 اور مساوات 24.113 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \left(\frac{1}{\sigma} \right)^n e^{-h} \quad h = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

دونوں ہاتھ لوگار تھم لیتے ہیں۔

$$\ln l = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - h$$

مساوات 24.117 میں پہلی شرط $\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = 0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = -\frac{\partial h}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \quad \implies \quad \sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0$$

جس کا حل μ کا درکار اندازہ $\hat{\mu}$ ہے، یعنی:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

مساوات 24.117 میں دوسری شرط $\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = 0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

μ کی جگہ $\hat{\mu}$ پر کرتے ہوئے σ^2 کے لئے حل کر کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

دھیان رہے کہ یہ نتیجہ مساوات 24.111 سے مختلف ہے۔ ہم اندازوں کی عمدگی کی قواعد پر بحث نہیں کر سکتے ہیں لیکن اتنا جاننا ضروری ہے کہ چھوٹی n کے لئے مساوات 24.111 بہتر نتائج دیتی ہے۔ □

سوالات

سوال 24.171: $x \geq 0$ کے لئے کثافت $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ اور $x < 0$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ θ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_j} = \frac{1}{\bar{x}}$

سوال 24.172: سوال 24.171 میں اوسط μ تلاش کر کے $f(x)$ میں پر کریں۔ μ کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ وہی ہے جو سوال 24.171 کے θ کے اندازے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سوال 24.173: معلوم تغیریت $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کی عمومی تقسیم کے μ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\hat{\mu} = \bar{x}$

سوال 24.174: $\mu = 0$ کی صورت میں عمومی تقسیم پر زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازے کی ترکیب لاگو کریں۔

سوال 24.175: (پوئسن تقسیم) زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازہ کی ترکیب کا اطلاق تقسیم پوئسن پر کریں۔
جواب: $\hat{\mu} = \bar{x}$

سوال 24.176: (یکساں تقسیم) حصہ 24.8 میں دیے گئے یکساں تقسیم کی صورت میں دکھائیں کہ مقدار معلوم a اور b کو زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے پہلی جزوی تفرق کو صفر کے برابر پر نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت میں زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کس طرح لگایا جاسکتا ہے؟

سوال 24.177: (ثنائی تقسیم) p کے لئے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

جواب: n کوششوں میں کامیابی کی تعداد $k = \frac{k}{n}, \hat{p} = \frac{k}{n}, k = 0, 1, \dots, n$ سے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

سوال 24.178: وقوع A واقع ہونے تک کوششوں کی تعداد X ہے۔ دکھائیں کہ X کا تفاعل احتمال $f(x) = pq^{x-1}, x = 1, 2, \dots$ ہے جہاں واحد کوشش میں A واقع ہونے کا احتمال p ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ X کی واحد قیمت x کے مشاہدے میں p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

سوال 24.179: سوال 24.178 میں نمونہ x_1, \dots, x_n سے p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

جواب: $\hat{p} = \frac{1}{x}$

سوال 24.180: سوال 24.177 کو وسعت دیتے ہیں۔ فرض کریں کہ n کوششوں کو m مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔ پہلی n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_1 ہے، دوسری n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_2 ہے، \dots ، m ویں n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_m ہے۔ ان معلومات سے p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

24.14 وقفہ اعتماد

گزشتہ حصہ میں مقدار معلوم کی نقطی اندازہ پر غور کیا گیا۔ اب ہم وقفی اندازہ¹³⁶ پر غور کریں گے۔

حسابی تخمینی کلیات استعمال کرتے ہوئے ضروری ہے کہ ہم جاننے کی کوشش کریں کہ تخمینی قیمت اور اصل درست قیمت میں کتنا فرق ہے۔ مثال کے طور پر اعدادی تکلی تراکیب میں زیادہ سے زیادہ خلل کے کلیات پائے جاتے ہیں جس سے ہم جان سکتے ہیں کہ تخمینی قیمت اور اصل قیمت میں کتنا فرق پایا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ ہم کسی تکمل کا اعدادی تخمینی قیمت 2.47 اور اصل قیمت سے زیادہ سے زیادہ ممکنہ خلل ± 0.02 حاصل کریں۔ تب ہم پوری یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تکمل کی اصل قیمت $2.47 - 0.02 = 2.45$ تا $2.47 + 0.02 = 2.49$

قیمتوں میں شامل ہے، یعنی اصل قیمت $2.47 - 0.02 = 2.45$ یا اس سے زیادہ اور $2.47 + 0.02 = 2.49$ یا اس سے کم ہوگی۔

مقدار معلوم θ کا اندازہ لگاتے ہوئے ہم نمونی قیمتوں پر منحصر ایسے دو مقدار جاننا چاہیں گے جن میں یقینی طور پر اصل قیمت شامل ہو۔ البتہ ہم جانتے ہیں کہ نمونی قیمتوں سے 100% درست نتائج حاصل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یوں حقیقت پسندی سے کام لیتے ہوئے ہم اس مسئلے کو درج ذیل بیان کرتے ہیں۔

احتمال γ کی قیمت کو 1 کے قریب منتخب کریں (مثلاً، $\gamma = 95\%$ یا $\gamma = 99\%$ ، وغیرہ)۔ اس کے بعد ایسے دو مقدار Θ_1 اور Θ_2 منتخب کریں جن میں مقدار معلوم θ کی اصل قیمت کے شامل ہونے کا احتمال γ ہو۔

ہم سو فی صد یقین کے ساتھ جاننے کی "ناممکن شرط" کی بجائے تقریباً 1 احتمال کی "ممکن شرط" پیش کرتے ہیں۔

دیے گئے نمونہ x_1, \dots, x_n سے ان دو مقداروں کی قیمتوں کا حساب لگایا جائے گا۔ ان n قیمتوں کو مشاہدے سے حاصل n بلا منصوبہ متغیرات X_1, \dots, X_n کی قیمتیں تصور کریں۔ تب Θ_1 اور Θ_2 ان بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل ہوں گے اور یوں خود بھی بلا منصوبہ متغیرات ہوں گے۔ اس طرح ہماری شرط درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$P(\Theta_1 \leq \theta \leq \Theta_2) = \gamma$$

اگر ہمیں تفاعل Θ_1 اور Θ_2 معلوم ہوں، تب دیے گئے نمونہ سے ہم Θ_1 کی اعدادی قیمت θ_1 اور Θ_2 کی اعدادی قیمت θ_2 کا حساب لگا سکتے ہیں۔ وہ وقفہ جس کے سر θ_1 اور θ_2 ہوں، نامعلوم مقدار معلوم θ کا وقفہ اعتماد¹³⁷ یا وقتی اندازہ¹³⁸ کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

θ_1 کو θ کی نچلی حد اعتماد¹³⁹ اور θ_2 کو اس کی بالائی حد اعتماد¹⁴⁰ کہتے ہیں۔ عدد γ کو سطح اعتماد¹⁴¹ کہتے ہیں۔ ہم عموماً $\gamma = 95\%$ یا $\gamma = 99\%$ اور کبھی کبھار $\gamma = 99.9\%$ منتخب کرتے ہیں۔

¹³⁷ confidence interval

¹³⁸ interval estimate

¹³⁹ lower confidence limit

¹⁴⁰ upper confidence limit

¹⁴¹ confidence level

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک نمونہ حاصل کر کے مطابقتی وقفہ اعتماد تعین کرنا چاہیں، تب مقدار معلوم کی اصل قیمت شامل کرنے والے وقفہ کے حصول کا احتمال γ ہو گا۔

مثال کے طور پر اگر ہم $\gamma = 95\%$ منتخب کریں، تب ہم توقع کر سکتے ہیں کہ 95% نمونے جو ہم حاصل کریں ایسے اعتمادی وقفے دیں گے جن میں θ کی قیمت شامل ہو گی اور باقی 5% میں ایسا نہیں ہو گا۔ یوں 20 میں سے تقریباً 19 صورتوں میں یہ فقرہ کہ "اعتمادی وقفہ میں θ شامل ہے" درست ہو گا جبکہ باقی صورتوں میں یہ فقرہ غلط ہو گا۔

$\gamma = 95\%$ کی بجائے $\gamma = 99\%$ منتخب کرنے سے ہم توقع کریں گے کہ 100 میں سے 99 صورتوں میں یہ فقرہ درست ہو گا۔ البتہ ہم دیکھیں گے کہ $\gamma = 99\%$ کے مطابقتی وقفے $\gamma = 95\%$ کے مطابقتی وقفوں سے لمبے ہوں گے۔ γ بڑھانے کا یہ ایک نقصان ہے۔

کسی حقیقی صورت میں γ کی کیا قیمت منتخب کرنی چاہیے؟ یہ محض حسابی دلچسپی کی بات نہیں ہے بلکہ عملی استعمال میں، غلط قیمت منتخب کرنے کی صورت میں نقصان کو مد نظر رکھتے ہوئے، اس کا جواب ہمیں ہر صورت دینا ہو گا۔

صاف ظاہر ہے کہ موجودہ ترکیب اور آنے والے دیگر تراکیب میں غیر یقینی صورت حال کی وجہ نمونہ بندی کا طریقہ کار ہے۔ یوں ماہر شاریات کو اپنی غلطیوں کے بارے میں جواب دینے کے لئے تیار ہونا چاہیے۔ تاہم کسی بھی روزگار میں ایسا ہی ہو گا مثلاً قاضی اور ساہوکار بھی امکان کے قواعد سے نہیں بچ پاتے۔ ماہر شاریات غلطی کرنے کا احتمال تو جانتا ہے جبکہ قاضی اور ساہوکار کو یہ سہولت میسر نہیں ہے۔

اعتمادی وقفے برائے عمومی تقسیم کے μ اور σ^2

ہم اب عمومی تقسیم کی اوسط μ (جدول 24.8، جدول 24.9) اور تغیریت σ^2 (جدول 24.10) کے اعتمادی وقفے حاصل کرنا سیکھتے ہیں جس کا مطابقتی نظریہ اس حصے کے آخر میں پیش کیا جائے گا۔

مثال 24.18: معلوم تغیریت کی صورت میں عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد
 $n = 100$ کا نمونہ جس کی اوسط $\bar{x} = 5$ ہو استعمال کرتے ہوئے تغیریت $\sigma^2 = 9$ والی عمومی تقسیم کے لئے 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

جدول 24.8: معلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کے اوسط μ کے وقفہ اعتماد کا تعین

<p>پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\%$ یا $\gamma = 99\%$ وغیرہ۔ دوسرا قدم: مطابقتی c تلاش کریں۔</p>				
γ	0.90	0.95	0.99	0.999
c	1.645	1.960	2.576	3.291
<p>تیسرا قدم: نمونہ x_1, \dots, x_n سے اوسط \bar{x} حاصل کریں۔ چوتھا قدم: $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ μ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہوگا۔</p>				
<p>(24.118) $\{\bar{x} - k \leq \mu \leq \bar{x} + k\}$ اعتماد</p>				

حل: پہلا قدم: $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔
دوسرا قدم: اس کا مطابقتی $c = 1.960$ ہے۔
تیسرا قدم: $\bar{x} = 5$ دیا گیا ہے۔
چوتھا قدم: ہمیں $k = \frac{1.960 \cdot 3}{\sqrt{100}} = 0.588$ درکار ہے لہذا $\bar{x} - k = 4.412$ ، $\bar{x} + k = 5.588$ ہو گا جن سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\{4.412 \leq \mu \leq 5.588\} \text{ اعتماد}$$

□

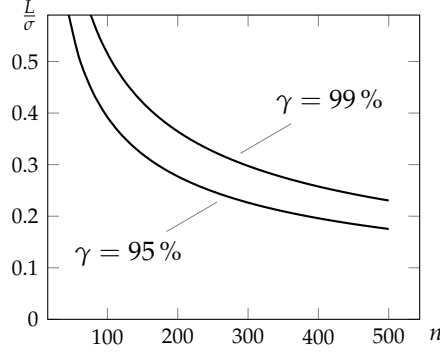
مثال 24.19: مخصوص لمبائی کا اعتمادی وقفہ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت گزشتہ مثال میں 95% اعتمادی وقفہ جس کی لمبائی $L = 0.4$ ہو حاصل کرنے کے لئے n کتنا ہوگا؟
حل: وقفے کی لمبائی مساوات 24.118 کے تحت $L = 2k = \frac{2c\sigma}{\sqrt{n}}$ ہے جس کو n کے لئے حل کرتے ہوئے

$$n = \left(\frac{2c\sigma}{L}\right)^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں $n = \left(\frac{2 \cdot 1.960 \cdot 3}{0.4}\right)^2 \approx 870$ ہے۔

شکل 24.20 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ اعتماد کی لمبائی L جتنی کم ہو، نمونے کی جسامت n اتنی زیادہ منتخب کرنی ہوگی۔

□



شکل 24.20: وقفہ اعتماد کی لمبائی بالمتقابل نمونی جسامت n

نا معلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد تعین کرنا جدول 24.9 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ تقریباً جدول 24.8 کی طرح ہے، ماسوائے k کی قیمتوں کے۔ مزید c کی قیمت n پر منحصر ہے اور اس اس کو ضمیمہ ج میں t تقسیم کے تفاعل کی جدول 10. ج سے حاصل کرنا لازمی ہے جہاں t تقسیم¹⁴² کے تفاعل

$$F(z) = K_m \int_{-\infty}^z \left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} du$$

کی قیمتوں کے مطابقتی z قیمتیں دی گئی ہیں۔ یہاں $K_m = \Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}) / [\sqrt{m\pi}\Gamma(\frac{1}{2}m)]$ ایک مستقل ہے اور $\Gamma(\alpha)$ گیمما تفاعل (ضمیمہ ب مساوات 22. ب) ہے۔ $m(1, 2, \dots)$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی درجہ آزادی کی تعداد¹⁴³ کہتے ہیں۔

مثال 24.20: نا معلوم تغیریت والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد
جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے لئے اوسط μ کا 99% وقفہ اعتماد تعین کریں۔ فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے۔ (اس مفروضے کا جواز حصہ 24.18 میں دیا جائے گا۔)
حل: پہلا قدم: $\gamma = 0.99$ درکار ہے۔
دوسرا قدم: چونکہ $n = 100$ ہے لہذا $F(c) = \frac{1}{2}(1 + 0.99) = 0.995$ کا حل $c = 2.63$ حاصل ہوتا ہے۔ (چونکہ اس کتاب میں 99 درجہ آزادی کا t تقسیم نہیں دیا گیا ہے لہذا 100 درجہ آزادی کی قطار سے c حاصل کیا گیا ہے۔)

¹⁴² t تقسیم کو انگلستانی ماہر شماریات ولیم سیلی گوسٹ [1876-1937] نے دریافت کیا۔
¹⁴³ number of degrees of freedom

جدول 24.9: نامعلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کے اوسط μ کے وقفہ اعتدال کا تعین

	<p>پہلا قدم: وقفہ اعتدال منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\%$ یا $\gamma = 99\%$، وغیرہ۔ دوسرا قدم: درج ذیل مساوات کا حل c،</p>
(24.119)	$F(c) = \frac{1}{2}(1 + \gamma)$
	<p>$n - 1$ درجہ آزادی کے t تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول 10) میں نمونی جسامت n لیتے ہوئے سے حاصل کریں۔ تیسرا قدم: نمونہ x_1, \dots, x_n سے اوسط \bar{x} اور تغیریت s^2 حاصل کریں۔ چوتھا قدم: $k = \frac{sc}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ μ کا وقفہ اعتدال درج ذیل ہوگا۔</p>
(24.120)	$\{\bar{x} - k \leq \mu \leq \bar{x} + k\}$

تیسرا قدم: حساب سے $\bar{x} = 364.70$ اور $s = \sqrt{720.1} = 26.83$ ملتے ہیں۔
چوتھا قدم: ہم $k = \frac{26.83 \cdot 2.63}{10} = 7.06$ حاصل کرتے ہیں لہذا وقفہ اعتدال درج ذیل ہوگا۔

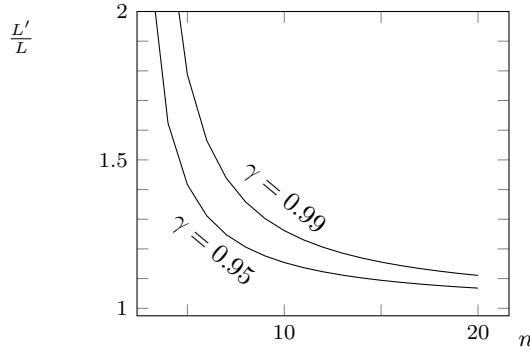
$$\{357.64 \leq \mu \leq 371.76\}$$

موازنے کی خاطر فرض کریں کہ ہمیں $\sigma = 26.83$ معلوم ہے۔ تب جدول 24.8 سے $k = \frac{2.576 \cdot 26.83}{\sqrt{100}} = 6.91$ حاصل ہوتا جس کے تحت $\{357.79 \leq \mu \leq 371.61\}$ اعتدال حاصل ہوتا ہے۔ دونوں نتائج میں معمولی فرق پایا جاتا ہے۔ بڑی n کی صورت میں نتائج میں فرق بہت کم ہوتا ہے لیکن کم n کی صورت میں دونوں نتائج میں واضح فرق پایا جائے گا (شکل 24.21)۔

جدول 24.10 میں عمومی تقسیم کی تغیریت کا وقفہ اعتدال تعین کرنے کے قدم دیے گئے ہیں۔ جو جدول 24.8 اور جدول 24.9 کی طرح ہیں، پس، یہاں دو مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرنے ہوں گے۔ دونوں مستقل کو ضمیمہ ج میں جدول 11 ج سے حاصل کیا جاتا ہے جس میں تفاعل تقسیم

$$F(z) = \begin{cases} C_m \int_0^z e^{-u^2/2} u^{(m-2)/2} du & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

کی قیمتوں کے لئے z کے مطابقتی قیمتیں دی گئی ہیں۔ اس تقسیم کو χ^2 تقسیم (مربع خا تقسیم) کہتے ہیں۔ یہاں $C_m = \frac{1}{[2^{m/2} \Gamma(m/2)]}$ اور $m = 1, 2, \dots$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی درجہ آزادی کی تعداد کہتے ہیں۔



شکل 24.21: $\gamma = 0.99$ اور $\gamma = 0.95$ لیتے ہوئے وقفہ اعتماد کی لمبائی L' (مساوات 24.120) اور L (مساوات 24.118) کی نسبت بالمقابل نمونی جسامت n ، جہاں s اور σ ایک جیسے ہیں۔

جدول 24.10: عمومی تقسیم کی تغیریت σ^2 کے وقفہ اعتماد کا تعین جہاں اوسط جاننا ضروری نہیں ہے

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\%$ یا $\gamma = 99\%$ ، وغیرہ۔

دوسرا قدم: درج ذیل مساوات کے حل c_1 اور c_2

$$(24.121) \quad F(c_1) = \frac{1}{2}(1 - \gamma), \quad F(c_2) = \frac{1}{2}(1 + \gamma)$$

کو مربع غا تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول 11.1، جہاں جسامت نمونہ n سے $n - 1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کریں۔ تیسرا قدم: نمونہ x_1, \dots, x_n کی تغیریت s^2 سے $(n - 1)s^2$ حاصل کریں۔

چوتھا قدم: $k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_1}$ اور $k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_2}$ کا حساب لگائیں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہوگا۔

$$(24.122) \quad \text{اعتماد} \{k_2 \leq \sigma^2 \leq k_1\}$$

مثال 24.21: عمومی تقسیم کے تغیریت کا وقفہ اعتماد
 جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے تغیریت کا وقفہ اعتماد تلاش کریں۔
 حل: پہلا قدم: $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔
 دوسرا قدم: چونکہ $n = 100$ ہے لہذا ہم $c_1 = 73.4$ اور $c_2 = 128$ حاصل کرتے ہیں۔
 تیسرا قدم: جدول 24.2 سے $99s^2 = 71291$ حاصل ہوتا ہے۔
 چوتھا قدم: وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\{\sigma^2 \mid 556 \leq \sigma^2 \leq 972\}$$

□

دیگر تقسیمات

کافی بڑے نمونے لیتے ہوئے دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد گزشتہ تراکیب سے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ عملاً، اگر نا معلوم تقسیم کا ترچھا پن کم ہو تب μ کا وقفہ اعتماد حاصل کرنے کے لئے نمونی جسامت کم سے کم $n = 20$ لینا چاہیے اور σ^2 کا وقفہ اعتماد کے لئے کم سے کم $n = 50$ لینا چاہیے۔ اس کی تفصیل اس حصے کے آخر میں پیش کی جائے گی۔

جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 میں دیے گئے تراکیب کا نظریہ

ہم اب درج ذیل سادہ تصور استعمال کرتے ہوئے اس نظریہ پر غور کرتے ہیں جو وقفہ اعتماد حاصل کرنے کی ان تراکیب کو ممکن بناتی ہے۔

اب تک ہم نمونی قیمتوں x_1, \dots, x_n کو واحد بلا منصوبہ متغیر X کی مشاہدے سے حاصل n قیمتیں تصور کرتے رہے ہیں۔ ہم ان n قیمتوں کو n بلا منصوبہ متغیرات X_1, \dots, X_n ، جن کی تقسیم ایک جیسی ہے (جو X کی تقسیم ہے)، کی ایک مشاہدے کی قیمتیں بھی تصور کر سکتے ہیں جنہیں غیر تابع اس لئے تصور کیا جاسکتا ہے کہ نمونی قیمتیں کو غیر تابع تصور کیا گیا ہے۔

جدول 24.8 میں مساوات 24.118 اخذ کرنے کے لئے درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.19: (بلا منصوبہ عمومی متغیرات کا مجموعہ) فرض کریں کہ X_1, X_2, \dots, X_n بلا منصوبہ غیر تابع عمومی متغیرات ہیں جن کے اوسط بالترتیب μ_1, \dots, μ_n اور تغیریت بالترتیب $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ ہیں۔ تب بلا منصوبہ متغیر

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

ہو گی۔ μ اور σ^2 کے فقرے مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18 دیتے ہیں جبکہ X عمومی ہونے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

اس مسئلے سے اور مسئلہ 24.14 اور مسئلہ 24.13 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.20: اگر X_1, \dots, X_n غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن میں سے ہر ایک کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو، تب بلا منصوبہ متغیر

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \quad (24.123)$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط μ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n}$ ہو گی، اور بلا منصوبہ متغیر

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \quad (24.124)$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی۔

آئیں مساوات 24.118 اخذ کرتے ہیں۔ اس حصے کی شروع میں ہم نے چاہا کہ ہم ایسے دو بلا منصوبہ متغیرات Θ_1 اور Θ_2 حاصل کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

$$P(\Theta_1 \leq \mu \leq \Theta_2) = \gamma \quad (24.125)$$

جہاں γ منتخب کردہ ہے، اور نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ Θ_1 کی قیمت θ_1 اور Θ_2 کی قیمت θ_2 حاصل کرتے ہوئے درج ذیل وقفہ اعتماد حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\{\theta_1 \leq \mu \leq \theta_2\}$$

موجودہ صورت میں ایسا کرنے کی خاطر ہم γ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہیں اور ضمیمہ ج کی جدول 24.8 سے ایسا c حاصل کرتے ہیں جو $P(-c \leq Z \leq c) = \gamma$ کو مطمئن کرتا ہو۔ (جدول 24.8 میں γ کی مختلف قیمتوں کے لئے c کی قیمتیں اسی طرح حاصل کی گئی ہیں)۔ مساوات 24.123 میں دیا گیا Z استعمال کرتے ہوئے عدم مساوات $-c \leq Z \leq c$ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$-c \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq c$$

جس کو μ کی عدم مساوات میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ اس کو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ سے ضرب کر $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ لکھتے ہوئے $-k \leq \bar{X} - \mu \leq k$ ملتا ہے۔ اس کو -1 سے ضرب دے کر \bar{X} جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{X} + k \geq \mu \geq \bar{X} - k \quad (24.126)$$

یوں $P(-c \leq Z \leq c) = \gamma$ سے مراد $P(\bar{X} - k \leq \mu \leq \bar{X} + k) = \gamma$ ہے جو مساوات 24.125 کی طرز کا ہے جہاں $\Theta_1 = \bar{X} - k$ اور $\Theta_2 = \bar{X} + k$ ہوں گے۔ یوں ہمارے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیرات $\bar{X} - k$ اور $\bar{X} + k$ وہ قیمتیں اختیار کریں گے جن میں نامعلوم اوسط μ شامل ہو گا۔ جہاں تک n غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات X_1, \dots, X_n کی مشاہدہ سے حاصل، جدول 24.8 میں دی گئی، نمونی قیمتیں x_1, \dots, x_n ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ نمونی اوسط \bar{x} مساوات 24.123 کی مشاہدہ سے حاصل قیمت ہے جس کو مساوات 24.126 میں پر کرتے ہوئے مساوات 24.118 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 24.120 اخذ کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.21: فرض کریں کہ X_1, \dots, X_n غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن میں ہر ایک کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔ تب بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \quad (24.127)$$

کی تقسیم $n - 1$ درجہ آزادی کی t تقسیم (صفحہ 1624) ہو گی؛ یہاں \bar{X} کو مساوات 24.123 اور

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \quad (24.128)$$

دیتے ہیں۔ اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسوات 24.120 کا ثبوت مساوات 24.118 کی ثبوت کی طرح کا ہے۔ ہم γ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہوئے ضمیمہ ج کی جدول 10. ج سے $n - 1$ درجہ آزادی کا ایسا c حاصل کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(24.129) \quad P(-c \leq T \leq c) = F(c) - F(-c) = \gamma$$

چونکہ t تقسیم تشاکلی ہے لہذا $F(-c) = 1 - F(c)$ ہو گا اور یوں مساوات 24.129 سے مساوات 24.119 حاصل ہو گا۔ مساوات 24.129 میں پہلے کی طرح $-c \leq T \leq c$ کے تبادلہ سے

$$(24.130) \quad \bar{X} - K \leq \mu \leq \bar{X} + K \quad K = \frac{cS}{\sqrt{n}}$$

حاصل ہو گا اور یوں مساوات 24.129 سے $P(\bar{X} - K \leq \mu \leq \bar{X} + K) = \gamma$ حاصل ہو گا۔ مساوات 24.130 میں مشاہدے سے حاصل \bar{X} کی قیمت \bar{x} اور S^2 کی قیمت s^2 پر کرتے ہوئے مساوات 24.120 حاصل ہو گا۔

مسوات 24.122 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل کی ضرورت ہو گی۔

مسئلہ 24.22: مسئلہ 24.21 کے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$(24.131) \quad Y = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma^2}$$

کا تقسیم $n - 1$ درجہ آزادی کا مربع خا تقسیم (صفحہ 1625) ہو گا؛ یہاں S^2 کو مساوات 24.128 میں پیش کیا گیا ہے۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسوات 24.122 کا ثبوت مساوات 24.118 اور مساوات 24.120 کی ثبوتوں کی طرح ہے۔ ہم 0 اور 1 کے بیچ عدد γ منتخب کرتے ہیں۔ ضمیمہ ج میں جدول سے ایسے c_1 اور c_2 کی حاصل کریں جو درج ذیل (مسوات 24.121) کو مطمئن کرتے ہوں۔

$$P(Y \leq c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2}(1 - \gamma), \quad P(Y \leq c_2) = F(c_2) = \frac{1}{2}(1 + \gamma)$$

تفریق سے

$$P(c_1 \leq Y \leq c_2) = P(Y \leq c_2) - P(Y \leq c_1) = \gamma$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 24.131 میں دیے Y سے $c_1 \leq Y \leq c_2$ کے تبادلہ سے σ^2 کی عدم مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم

$$\frac{n-1}{c_2} S^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{n-1}{c_1} S^2$$

حاصل کرتے ہیں۔ مشاہدے سے حاصل S^2 کی قیمت s^2 کرتے ہوئے مساوات 24.122 حاصل ہو گا۔

دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد

دیگر تقسیمات کے لئے بھی ہم وقفہ اعتماد کو جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 سے حاصل کر سکتے ہیں، پس نمونوں کی جسامت بڑی رکھنی ہو گی۔ یہ درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 24.23: (مسئلہ وسطی حد)

فرض کریں کہ X_1, \dots, X_m, \dots غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن کی تقسیم ایک جیسی ہے لہذا ان کی اوسط μ ایک جیسی ہو گی اور ان کی تغیریت σ^2 ایک جیسی ہو گی۔ فرض کریں کہ $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ ہے تب بلا منصوبہ متغیر

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (24.132)$$

مقاربی عمومی¹⁴⁴ ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی، یعنی، Z_n کا تفاعل تقسیم $F_n(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر X_1, \dots, X_n غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی ایک جیسی اوسط μ اور ایک جیسی تغیریت σ^2 ہو، تب ان کے مجموعہ $X = X_1 + \dots + X_n$ کے درج ذیل خواص ہوں گے۔

asymptotically normal¹⁴⁴

• (الف) X کی اوسط $n\mu$ اور تغیریت $n\sigma^2$ ہوگی (مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18)۔

• (ب) اگر یہ متغیرات عمومی ہوں تب X بھی عمومی ہوگا (مسئلہ 24.19)۔

اگر یہ متغیرات عمومی نہ ہوں تب مذکورہ بالا شق-ب درست نہیں ہوگا، البتہ بڑی n کی صورت میں X تخمیناً عمومی (مسئلہ 24.23) ہوگا اور یہی وجہ ہے کہ n کی قیمت بڑی لیتے ہوئے ان تراکیب کو دیگر تقسیمات کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

سوالات

سوال 24.181: عمومی صورتوں میں نقطی اندازہ سے وقتی اندازہ کیوں زیادہ کارآمد ہوتے ہیں؟

سوال 24.182: 100 جسامت کا نمونہ جس کی اوسط 38.25 ہو استعمال کرتے ہوئے عمومی آبادی جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے کی اوسط μ کے لئے 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.183: نمونی جسامت کو گھٹا کر 25 کرنے سے سوال 24.182 میں وقفہ اعتماد پر کیا اثر ہوگا؟
جواب: وقفہ اعتماد دگنا ہو جائے گا۔

سوال 24.184: نمونہ 28, 24, 31, 27, 22 استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف $\sigma = 2.2$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقتی اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.185: اوسط 16.30 اور جسامت 290 والا نمونہ استعمال کرتے ہوئے شکل 24.20 کی مدد سے تغیریت $\sigma^2 = 0.36$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقتی اعتماد تعین کریں۔
جواب: $\{16.21 \leq \mu \leq 16.39\}$ اعتماد

سوال 24.186: مساوات 24.118 میں 95% وقفہ اعتماد کی لمبائی (الف) 2σ (ب) σ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت n تلاش کریں۔

سوال 24.187 تا سوال 24.191 میں فرض کریں کہ دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے حاصل کیا گیا ہے۔ آبادی کی اوسط μ کے لئے 99% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.187: 325, 320, 325, 335
جواب: $\{307 \leq \mu \leq 345\}$ اعتماد

سوال 24.188: 20 قاپلوں کا نمونہ جس کی اوسط 10.20 cm اور تغیریت $\sigma^2 = 0.04 \text{ cm}^2$ ہو۔

سوال 24.189: سلاخ کی ملی میٹروں میں لمبائی 124, 127, 126, 122, 124
جواب: $\{120.6 \leq \mu \leq 128.6\}$ اعتماد

سوال 24.190: پشاور تالاہور موٹروے پر بلا منصوبہ 500 گاڑیوں کو روک کر ان کے بریک پرکھے جاتے ہیں جن میں سے 87 گاڑیوں کے بریک کمزور ثابت ہوتے ہیں۔ اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے موٹروے پر کمزور بریک والی گاڑیوں کی فی صد کے لئے 95 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.191: ثنائی تقسیم کی مقدار معلوم p کے لئے 99 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔ صفحہ 1552 پر جدول 24.6 کی آخری صف میں مشرف کے نتائج استعمال کریں۔
جواب: $\{0.492 \leq p \leq 0.509\}$ اعتماد

سوال 24.192 تا سوال 24.192 میں عمومی آبادی سے نمونے حاصل کیے گئے ہیں۔ آبادی کی تغیریت σ^2 کی 95 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.192: 145.3, 145.1, 145.4, 146.2

سوال 24.193: نمونی جسامت 30 اور تغیریت 0.0007 ہے۔
جواب: $\{0.00044 \leq \sigma^2 \leq 0.00127\}$ اعتماد

سوال 24.194: درجہ حرارت کمرہ پر ایک مخصوص قسم کی دھات کی حتمی تنشی مضبوطی (kg cm^{-2}):
17.6, 19.7, 18.1, 17.8, 17.8, 17.7, 17.6, 17.7, 17.9, 18

سوال 24.195: یورینیم U^{35} کی انشقاق سے پیدا تاخیری نیوٹران گروہ (تیسرا گروہ جس کی نصف زندگی 6.2 سیکنڈ ہے) کی اوسط توانائی (keV): 435, 451, 430, 444, 438
جواب: $\{23 \leq \sigma^2 \leq 553\}$ اعتماد

سوال 24.196: 80 km h^{-1} کی رفتار سے سفر کرتے ہوئے ایک گاڑی کی فی کلومیٹر خارج کردہ CO (گرام): 10.8, 11.1, 11.2, 11, 11.3, 10.8, 10.9, 11.2

سوال 24.197: اگر X عمومی ہو جس کی اوسط 27 اور تغیریت 16 ہو تب $-X$ ، $3X$ اور $5X - 2$ کے تقسیم، اوسط اور تغیریت کیا ہوں گے؟
جواب: تینوں عمومی، اوسط $-27, 81, 133$ اور تغیریت $16, 144, 400$ ہوں گے۔

سوال 24.198: اگر X_1 اور X_2 غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی اوسط بالترتیب 23، 4 اور تغیریت بالترتیب 3، 1 ہوں تب $4X_1 - X_2$ کی تقسیم، اوسط اور تغیریت کیا ہوں گے؟

سوال 24.199: ایک مشین Y کلوگرام کیت کے ڈبوں میں X کلوگرام نمک بھرتی ہے جہاں X اور Y کی اوسط بالترتیب 100 کلوگرام، 5 کلوگرام اور تغیریت بالترتیب 1 کلوگرام، 0.5 کلوگرام ہیں۔ کتنے فی صد بھرے گئے ڈبوں کی کیت 104 کلوگرام اور 106 کلوگرام کے بیچ ہوگی؟
جواب: $P(104 \leq Z \leq 106) = 63\%$

سوال 24.200: اگر سینٹ کی بوری کی کیت X عمومی متغیر ہو جس کی اوسط 40 kg اور تغیریت 2 kg ہو تب ایک ٹرک میں کتنی بوریاں رکھی جاسکتی ہیں تاکہ بوریوں کی کل کیت کا 2000 kg سے تجاوز کرنے کا احتمال 5% ہو۔

24.15 قیاس کی پرکھ۔ فیصلے

بلا منصوبہ متغیر کی تقسیم کے بارے میں کچھ فرض کرنے کو شماریاتی قیاس¹⁴⁵ کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر کسی تقسیم کے بارے میں یہ فرض کرنا کہ اس کی اوسط 20.3 ہے شماریات قیاس ہو گا۔ ایسا عمل جس سے ہم معلوم کر سکیں کہ آیا ہمارا قیاس ٹھیک ہے اور ہم اس کو منظور¹⁴⁶ کریں یا کہ یہ غلط ہے اور ہم اس کو نا منظور¹⁴⁷ کریں شماریاتی پرکھ¹⁴⁸ کہلاتا ہے۔

یہ پرکھ عموماً استعمال کیے جاتے ہیں اور ہم جاننا چاہیں گے کہ یہ کیوں اہم ہیں۔ ہمیں عموماً ایسی صورتوں میں فیصلہ کرنا ہوتا ہے جہاں امکانی تبدیلیاں عمل پیرا ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ہمیں دو ممکنات میں سے ایک کو چننا ہو، ہمارا فیصلہ کسی شماریاتی پرکھ پر منحصر ہو سکتا ہے۔

¹⁴⁵ hypothesis

¹⁴⁶ accept, not reject

¹⁴⁷ reject

¹⁴⁸ test

مثال کے طور پر اگر ہمیں ایک خرد کی مشین پر قابل بنانا ہو جن کی قطر مخصوص حدود میں رہنا ضروری ہو اور ہم چاہتے ہیں کہ زیادہ سے زیادہ 2% قابل عیب دار ہوں تب ہم اس خرد پر بنائے گئے قابلوں سے 100 قابلوں کا نمونہ حاصل کرتے ہوئے قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کو پرکھ کر دیکھیں گے کہ آیا مطابقتی آبادی کی تغیریت σ^2 کسی مخصوص قیمت σ_0^2 کے برابر ہے۔ σ_0^2 کو یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ 2% قابل عیب دار حاصل ہوں۔ اس کا متبادل پرکھ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ہے۔ ہم پرکھ کے نتیجہ کو دیکھ کر قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کو منظور کرتے ہوئے اسی خرد کو استعمال کرتے ہیں یا ہم اس کو نا منظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ہے اور اس سے بہتر خرد استعمال کرتے ہیں۔ نا منظوری کی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ σ_0^2 سے σ^2 کا معنی خیز انحراف¹⁴⁹ پایا جاتا ہے، یعنی انحراف ناگزیر امکانی وجوہات کی بنا نہیں ہے بلکہ خرد کی ناقص پن کی وجہ سے ہے۔

ہو سکتا ہے کہ کسی دوسری جگہ پر ہمیں دو چیزوں کا آپس میں موازنہ کرنا ہو، مثلاً، دو ادویات، ایک کام سرانجام دینے کے دو تراکیب، ناپنے کے دو طریقے، دو مشینوں پر بنائے گئے چیزوں کی معیار، وغیرہ وغیرہ۔ موزوں پرکھ کے نتیجہ کے تحت ہم ایک دوائی کو منتخب کریں گے، کام کرنے کی بہتر ترکیب منتخب کریں گے، وغیرہ۔

قیاس عمومی درج ذیل سے حاصل ہو گا۔

• ضرورت معیاری پیداوار سے قیاس پیش کیا جاسکتا ہے۔ (سخت نگرانی اور احتیاط کے ساتھ زیادہ تعداد کی چیزیں پیدا کرنے سے قابل حصول معیار کے بارے میں تجربہ حاصل ہوتا ہے۔)

• گزشتہ تجربہ سے حاصل معلوم قیمتوں پر قیاس منحصر ہو سکتا ہے۔

• قیاس ایک نظریہ پر مبنی ہو سکتا ہے جس کو آپ پرکھنا چاہتے ہیں۔

• بعض اوقات اتفاقی مشاہدے پر قیاس مبنی ہو سکتا ہے۔

آئیں ایک تعارفی مثال سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 24.22: قیاس کا پرکھ

ایک بچہ پیدا ہونے کو بلا منصوبہ تجربہ تصور کیا جاسکتا ہے جس کے دو ممکنہ انجام ہیں، یعنی لڑکا B اور لڑکی G۔ وجدانی طور پر ہم قیاس کر سکتے ہیں کہ دونوں کا احتمال ایک جیسا ہو گا البتہ کچھ لوگوں کا متبادل قیاس ہے کہ نو زائدہ

¹⁴⁹significant deviation

بچوں میں لڑکوں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے۔ ہم قیاس کو پرکھنا چاہتے ہیں۔ اگر ہم انجام B کے احتمال کو p سے ظاہر کریں تب ہم قیاس $p = 50\% = 0.5$ کو پرکھا جاسکتا ہے۔ متبادل قیاس $p > 0.5$ کو بھی پرکھا جاسکتا ہے۔ ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔

اس پرکھ کے لئے ایک شہر میں ایک سال میں پیداہونے والے بچوں سے ہم $n = 3000$ نمونہ منتخب کرتے ہیں جن میں سے 1578 لڑکے ہیں۔

اگر قیاس درست ہو تب $n = 3000$ کی نمونہ میں اوسطاً تقریباً 1500 نو زائدہ لڑکے متوقع ہوں گے۔ اگر متبادل درست ہو تب 1500 سے اوسطاً زائدہ لڑکے متوقع ہوں گے۔ یوں اگر حقیقتاً نو زائدہ لڑکوں کی تعداد 1500 سے بہت زیادہ ہو تب ہم اس کو قیاس غلط ہونے کی نشانی تصور کرتے ہوئے قیاس کو نا منظور کریں گے۔

ہم سب سے پہلے ایک فاصل قیمت c متعین کرتے ہیں۔ متبادل کی بنا c کی قیمت 1500 سے زیادہ ہو گی۔ c تعین کرنے کا ایک طریقہ نیچے پیش کیا گیا ہے۔ تب نو زائدہ لڑکوں کی تعداد c سے زیادہ ہونے کی صورت میں ہم قیاس کو نا منظور کریں گے اور اگر نو زائدہ لڑکوں کی تعداد c سے زیادہ نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کریں گے۔

اب ہمیں c کی ایسی قیمت منتخب کرنی ہو گی جو معمولی بلا منصوبہ انحراف اور زیادہ معنی خیز انحراف میں تمیز کرے۔ ہر شخص کی اپنی ایک منفرد رائے ہو سکتی ہے لیکن ہمیں حسابی دلائل کے تحت چلنا ہو گا جو موجودہ صورت میں بہت سادہ ہیں (جیسے آپ اب دیکھیں گے)۔

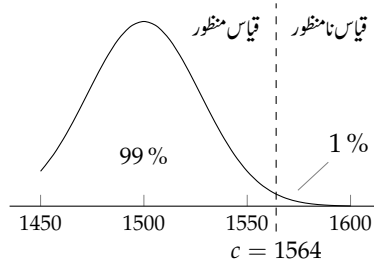
ہم c یوں تعین کرتے ہیں کہ قیاس درست ہونے کی صورت میں c سے زیادہ لڑکوں کا احتمال بہت کم ہو مثلاً α ۔ روایتی طور پر $\alpha = 1\%$ یا $\alpha = 5\%$ منتخب کیا جاتا ہے۔ $\alpha = 1\%$ (یا $\alpha = 5\%$) منتخب کرتے ہوئے ہم 100 میں (یا 20 میں) 1 زیادہ لڑکوں کی صورت میں بھی قیاس کو نا منظور کرتے ہیں اگرچہ قیاس درست ہے۔ اس نقطے پر ہم بعد میں غور کریں گے۔ آئیں ہم $\alpha = 1\%$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل بلا منصوبہ متغیر پر غور کرتے ہیں۔

بچوں کی 3000 پیدائشوں میں لڑکوں کی تعداد X

یہ فرض کرتے ہوئے قیاس درست ہے ہم c کی فاصل قیمت کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کرتے ہیں

$$P(X > c)_{p=0.5} = \alpha = 0.01 \quad (24.133)$$

جہاں مفروضے کو زیر نوشت میں $p = 0.5$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اگر لڑکوں کی حقیقی تعداد 1578 منتخب c سے زیادہ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کریں گے۔ اگر $c \leq 1578$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کریں گے۔



شکل 24.22: درست قیاس کی صورت میں X کی تخمینی تقسیم (مثال 24.22)۔ فاصل قیمت $c = 1564$ ہے

مساوات 24.133 سے c حاصل کرنے کی خاطر ہمیں X کی تقسیم معلوم ہونی چاہیے۔ موجودہ مثال کے لئے ثنائی تقسیم کافی درست ہے۔ یوں اگر قیاس درست ہو تب ثنائی تقسیم میں X کی $p = 0.5$ اور $n = 300$ ہوں گے۔ اس تقسیم کو تخمینی طور پر ایسی عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جس کی اوسط $\mu = np$ اور تغیریت $\sigma^2 = npq = 750$ ہو (حصہ 24.10)۔ (ہم اپنی آسانی کی خاطر مساوات 24.78 میں جزو 0.5 کو رد کرتے ہیں۔) تقسیم کی منحنی کو شکل 24.22 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 24.133 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \approx 1 - \Phi\left(\frac{c - 1500}{\sqrt{750}}\right) = 0.01$$

ضمیمہ ج کی جدول 8 سے $\frac{c-1500}{\sqrt{750}} = 2.326$ حاصل ہوتا ہے لہذا $c = 1564$ ہو گا۔ چونکہ $c = 1578 > c$ ہے لہذا ہم قیاس کو نامنظور کرتے ہوئے فیصلہ کرتے ہیں کہ $p > 0.5$ ہے۔ یوں پرکھ مکمل ہوتا ہے۔

300 کے نمونہ کے لئے مساوات 24.133 میں X کو 300 پیدائشوں میں لڑکوں کی تعداد لیتے ہوئے فاصل قیمت $c = 170$ حاصل ہو گی اور نمونہ میں 158 (جو وہی فی صد ہے جو بڑی جسامت کے نمونہ میں تھی) لڑکے ہونے کی صورت میں $c < 158$ حاصل ہو گا اور ہم قیاس کو منظور کریں گے۔ یہ ایک دلچسپ صورت حال ہے جس سے یہ حقیقت اجاگر ہوتی ہے کہ پرکھ کی افادیت نمونی جسامت n بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ ہمیں n اتنا بڑا لینا ہو گا کہ عملی صورت میں زیر غور متغیر کے بارے میں درست نتائج حاصل ہوں۔ ساتھ ہی ساتھ n زیادہ بڑا بھی نہیں ہونا چاہیے تاکہ وقت اور سرمایہ کا ضیاع نہ ہو۔ عموماً صورتوں میں پہلے چھوٹا تجربہ کرتے ہوئے بہتر n کو تعین کرنا ممکن ہو گا۔

□

متبادل کا تصور۔ متبادل کی قسمیں

جس قیاس کو پرکھا جا رہا ہو اس کو پسندیدہ قیاس¹⁵⁰ کہتے ہیں اور اس کا مخالفانہ قیاس (مثلاً مثال 24.22 میں $p > 0.5$) کو متبادل قیاس¹⁵¹ یا مختصراً متبادل کہتے ہیں۔ عدد α (یا $100\alpha\%$) کو پرکھ کی معنی خیز سطح¹⁵² کہتے ہیں جبکہ c فاصل قیمت¹⁵³ کہلاتا ہے۔ جس خطے میں وہ قیمتیں پائی جاتی ہوں جن کے لئے قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے، اس خطے کو خطہ نا منظوری¹⁵⁴ یا خطہ فاصل¹⁵⁵ کہتے ہیں۔ وہ خطہ جس میں پائے جانے والی قیمتوں کے لئے قیاس کو منظور کیا جاتا ہے خطہ منظوری¹⁵⁶ کہلاتا ہے۔ α کو عموماً $\alpha = 5\%$ منتخب کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ ایک تقسیم میں مقدار معلوم θ کی قیمت نا معلوم ہے۔ فرض کریں کہ ہم قیاس $\theta = \theta_0$ کو پرکھنا چاہتے ہیں۔ اس کے درج ذیل تین متبادل قیاس پائے جاتے ہیں۔

$$(24.134) \quad \theta > \theta_0$$

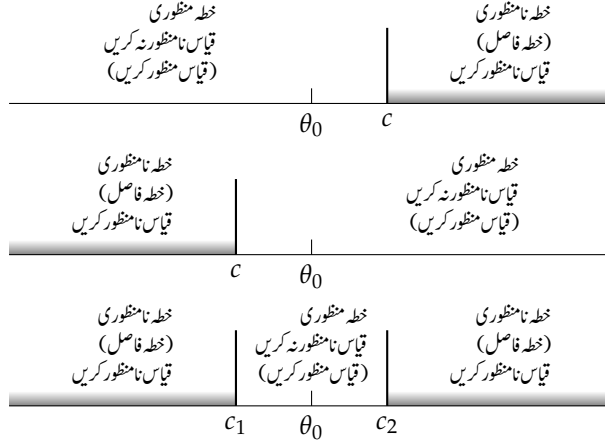
$$(24.135) \quad \theta < \theta_0$$

$$(24.136) \quad \theta \neq \theta_0$$

مساوات 24.134 اور مساوات 24.135 کو یک طرفہ متبادل¹⁵⁷ جبکہ مساوات 24.136 کو دو طرفہ متبادل¹⁵⁸ کہتے ہیں۔ مثال 24.22 میں دو طرفہ متبادل پر غور کیا گیا (جہاں $\theta_0 = p = 0.5$ اور $\theta_0 = p > 0.5$)۔ θ_0 کی دائیں جانب c پایا جاتا ہے اور خطہ نا منظور c سے لے کر ∞ ہو گا اور اس پرکھ کو دایاں طرفہ پرکھ¹⁵⁹ کہتے ہیں۔ مساوات 24.135 میں θ_0 کی بائیں جانب c پایا جاتا ہے، اور خطہ نا منظوری c سے $-\infty$ تک ہو گا (شکل 24.23) اور اس پرکھ کو بایاں طرفہ پرکھ کہیں گے۔ ان دونوں قسم کے پرکھ کو یک طرفہ پرکھ کہتے ہیں۔ مساوات 24.136 کی صورت میں ہمارے پاس دو فاصل قیمتیں c_1 اور c_2 ($c_2 > c_1$) ہوں گی اور خطہ نا منظوری c_1 تا $-\infty$ اور c_2 تا ∞ ہو گا، اور پرکھ کو دو طرفہ پرکھ کہیں گے۔

تینوں اقسام کے متبادل عملاً اہم ہیں۔ مثال کے طور پر مساوات 24.135 مادہ کی مضبوطی کی پرکھ میں ہمیں پیش آ سکتا ہے جہاں θ_0 درکار مضبوطی ہو سکتی ہے جبکہ متبادل غیر پسندیدہ کمزوری کو ظاہر کرے گا۔ درکار قیمت سے زیادہ

default hypothesis¹⁵⁰alternative hypothesis¹⁵¹significant level¹⁵²critical value¹⁵³rejection region¹⁵⁴critical region¹⁵⁵acceptance region¹⁵⁶one-sided alternatives¹⁵⁷two-sided alternative¹⁵⁸right-sided test¹⁵⁹



شکل 24.23: مساوات 24.134 کی متبادل (بالائی شکل)، مساوات 24.135 کی متبادل (درمیانی شکل) اور مساوات 24.136 کی متبادل (پچلی شکل) کی صورت میں پرکھ

مضبوطی کی صورت میں مادہ منظور کیا جائے گا لہذا اس کو علیحدہ سے پرکھنے کی ضرورت نہیں ہوگی۔ مساوات 24.136 ایسی صورت میں اہم ہو گا جیسے دھرا کی قطر جہاں θ_0 درکار قطر کو ظاہر کرے گا جبکہ اس سے کم یا زیادہ موٹائی دونوں برابر مسئلہ خیز ہوں گے لہذا درکار موٹائی کے دونوں جانب انحراف پر نظر رکھنا ضروری ہو گا۔

پرکھ میں غلطیوں کے اقسام

ہم اب متبادل، جس کو ہم اپنی آسانی کی خاطر واحد عدد θ_1 تصور کرتے ہیں، کے لحاظ سے قیاس $\theta = \theta_0$ کے پرکھ سے غلط فاصلوں کے خطرات پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں $\theta_1 > \theta_0$ ہے لہذا ہمارے پاس دایاں طرفہ پرکھ ہو گا۔ (بایاں طرفہ یا دو طرفہ پرکھ کے لئے بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔) دیے گئے نمونہ x_1, \dots, x_n سے ہم قیمت $\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_n)$ کا حساب لگاتے ہیں۔ اگر $\hat{\theta} > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے (جیسا مثال 24.22 میں کیا گیا)۔ اگر $\hat{\theta} \leq c$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جاتا ہے۔ $\hat{\theta}$ کی قیمت کو بلا منصوبہ متغیر

$$\hat{\Theta} = g(X_1, \dots, X_n)$$

کی مشاہدے سے حاصل قیمت تصور کیا جاسکتا ہے چونکہ x_j کو X_j کی مشاہدے سے حاصل قیمت تصور کیا جا سکتا ہے، جہاں $j = 1, \dots, n$ ہے۔ ان پرکھ میں غلطی کرنے کے درج ذیل دو امکانات پائے جاتے ہیں۔

جدول 24.11: متبادل $\theta = \theta_1$ کے لحاظ سے قیاس $\theta = \theta_0$ کی پرکھ میں پہلی اور دوسری قسم کا غلط

	نامعلوم حقیقت	
	$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_1$
نتیجہ	<p>ٹھیک فیصلہ</p> <p>$P = 1 - \alpha$</p>	<p>دوسری قسم کا غلط</p> <p>$P = \beta$</p>
	<p>پہلی قسم کا غلط</p> <p>$P = \alpha$</p>	<p>ٹھیک فیصلہ</p> <p>$P = 1 - \beta$</p>

غلطی قسم اول

جدول 24.11 میں پرکھ درست ہے لیکن Θ قیمت $\hat{\theta} > c$ اختیار کرتا ہے جس کی بنا اس پرکھ کو نا منظور کیا جاتا ہے (لہذا متبادل کو منظور کیا جاتا ہے) ظاہر ہے کہ ایسی غلطی کا احتمال

$$P(\hat{\Theta} > c)_{\theta=\theta_0} = \alpha \quad (24.137)$$

ہو گا جو معنی خیز سطح کے برابر ہے۔

غلطی قسم دوم

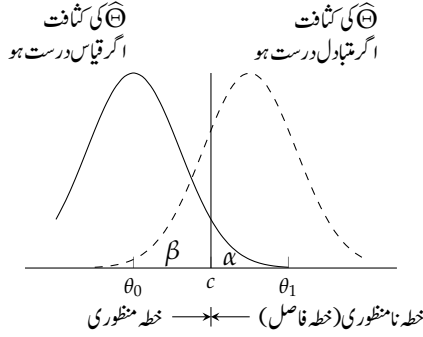
جدول 24.11 پر نظر رکھیں۔ قیاس غلط ہے لیکن اس کو منظور کیا جاتا ہے، چونکہ $\hat{\Theta}$ قیمت $\hat{\theta} \leq c$ اختیار کرتا ہے۔ ایسی غلطی کرنے کے احتمال کو β سے ظاہر کیا جاتا ہے؛ لہذا

$$P(\hat{\Theta} \leq c)_{\theta=\theta_1} = \beta \quad (24.138)$$

ہو گا۔ $\eta = 1 - \beta$ کو پرکھ کی طاقت¹⁶⁰ کہتے ہیں جو غلطی کی قسم دوم سے بچنے کا احتمال ہے۔

مساوات 24.137 اور مساوات 24.138 سے ظاہر ہے کہ α اور β دونوں c پر منحصر ہیں اور ہم چاہیں گے کہ ہم ایسا c منتخب کریں کہ غلطیاں کرنے کے احتمال کم سے کم ہوں۔ البتہ شکل 24.24 سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہ متضادم ضروریات ہیں۔ α گھٹانے کی خاطر c کو دائیں منتقل کرنا ہو گا جس سے β بڑھتا ہے۔ حقیقت میں ہم α (5% یا 1%) منتخب کر کے c تعین کرتے ہیں اور آخر میں β کا حساب کرتے ہیں۔ اگر β بڑی ہو جس سے طاقت $\eta = 1 - \beta$ چھوٹی حاصل ہو گی تب ہمیں زیادہ بڑا نمونہ (جس کی وجہ جلد سامنے آئے گی) لے کر پرکھ دہرانا چاہیے۔

¹⁶⁰power



شکل 24.24: قیاس $\theta = \theta_0$ بالمتبادل متبادل $\theta = \theta_1 (> \theta_0)$ کی پرکھ میں قسم اول اور دوم غلطیوں کی وضاحت

اگر متبادل واحد عدد نہ ہو بلکہ مساوات 24.134 تا مساوات 24.136 کی طرح ہو تب β تفاعل ہو گا جو θ کا تابع ہو گا۔ تفاعل $\beta(\theta)$ کو پرکھ کی خاصیت کا کردگی¹⁶¹ کہتے ہیں اور اس کی منحنی کو منحنی خاصیت کا کردگی کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں $\eta = 1 - \beta$ بھی θ کے تابع ہو گا اور تفاعل $\eta(\theta)$ کو پرکھ کا تفاعل طاقت¹⁶² کہتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ ایسی پرکھ جس کی بنا کوئی قیاس θ_0 منظور ہو سے یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ یہی سب سے بہتر یا واحد قیاس ہے۔ یوں لفظ "منظور" کی جگہ "نا منظور نہ کرنا" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔

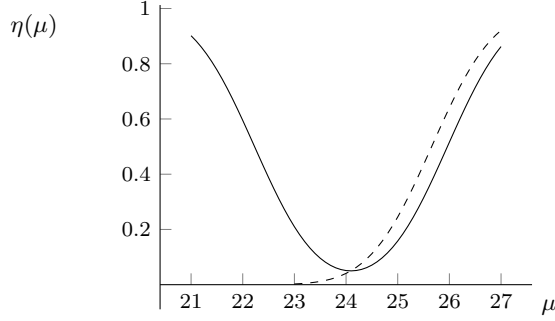
عمومی تقسیم کی صورت میں پرکھ

درج ذیل مثال عملاً اہم قیاس کے پرکھ کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 24.23: (معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ)
فرض کریں کہ X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے۔ نمونی جسامت $n = 10$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = \mu_0 = 24$ کو درج ذیل تین متبادل کے بالمتبادل پرکھیں۔

(الف) $\mu > \mu_0$ (ب) $\mu < \mu_0$ (پ) $\mu \neq \mu_0$

¹⁶¹ operating characteristic
¹⁶² power function



شکل 24.25: طاقت $\eta(\mu)$ ؛ مثال 24.23 الف (نقطہ دار خط) اور پ (ٹھوس خط)

حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 0.05$ منتخب کرتے ہیں۔ اوسط کی اندازاً قیمت درج ذیل سے حاصل ہو گی۔

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots, X_n)$$

اگر قیاس درست ہو تب X عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 24$ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n} = 0.9$ ہو گی (مسئلہ 24.20)۔ لہذا ہم فاصل قیمت c کو ضمیمہ ج کی جدول 8 ج سے حاصل کر سکتے ہیں۔
صورت الف: ہم $P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$ سے c تعین کرتے ہیں۔

$$P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 8 ج سے $\frac{c-24}{\sqrt{0.9}} = 1.645$ یعنی $c = 25.56$ حاصل ہوتا ہے جو μ_0 سے بڑی قیمت ہے (اور جو شکل 24.23 میں سب سے اوپر دکھائی گئی صورت ہے)۔ اگر $\bar{x} \leq 25.56$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جائے گا۔ اگر $\bar{x} > 25.56$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جائے گا۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہو گی (شکل 24.25 الف)۔

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\bar{X} > 25.56)_{\mu} = 1 - P(\bar{X} \leq 25.56)_{\mu} \\ (24.139) \quad &= 1 - \Phi\left(\frac{25.56 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu) \end{aligned}$$

صورت ب: فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\right) = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 8. ج سے $c = 24 - 1.56 = 22.24$ ملتا ہے۔ اگر $\bar{x} \geq 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔ اگر $\bar{x} < 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$(24.140) \quad \eta(\mu) = P(\bar{X} \leq 22.44)_\mu = \Phi\left(\frac{22.44 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) = \Phi(23.65 - 1.05\mu)$$

صورت پ: چونکہ عمومی تقسیم تشاکلی ہے، ہم $\mu = 24$ سے c_1 اور c_2 کو ایک جیسے فاصلے پر چن کر، مثلاً $c_1 = 24 - k$ اور $c_2 = 24 + k$ ، مستقل k کو درج ذیل سے تعین کرتے ہیں۔

$$P(24 - k \leq \bar{X} \leq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95$$

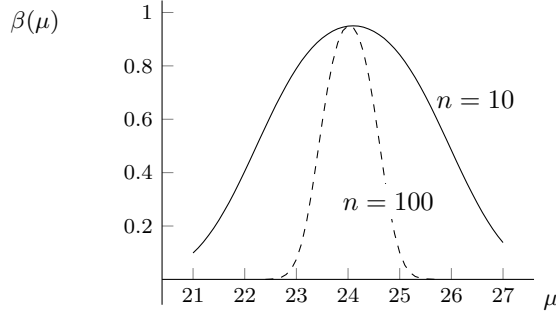
ضمیمہ ج کی جدول 8. ج سے $\frac{k}{\sqrt{0.9}} = 1.960$ یعنی $k = 1.86$ حاصل ہو گا۔ یوں $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$ اور $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$ ہوں گے۔ اگر \bar{x} کی قیمت c_1 سے چھوٹی نہ ہو اور c_2 سے بڑی نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے (شکل 24.25 پ)۔

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\bar{X} < 22.14)_\mu + P(\bar{X} > 25.86)_\mu \\ &= P(\bar{X} < 22.14)_\mu + 1 - P(\bar{X} \leq 25.86)_\mu \\ (24.141) \quad &= 1 + \Phi\left(\frac{22.14 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{25.86 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) \\ &= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu) \end{aligned}$$

نتیجتاً خاصیت کارکردگی $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$ درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= \Phi\left(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) \\ &= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu) \end{aligned}$$

شکل 24.26 سے ظاہر ہے کہ $n = 10$ کی خاصیت کارکردگی کی مطابقتی منحنی کی ڈھلوان زیادہ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ n بڑھانے سے بہتر پرکھ حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی عملی استعمال میں n کو کم سے کم لیکن اتنا زیادہ رکھا جاتا ہے کہ پرکھ μ اور μ_0 میں انحراف، جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں، کو واضح کرے۔ مثال کے طور پر اگر انحراف ہماری دلچسپی ± 2 اکائی ہو، ہم شکل سے دیکھتے ہیں کہ $n = 10$ بہت کم ہو گا چونکہ جب $\mu = 24 - 2 = 22$ یا $\mu = 24 + 2 = 26$ ہو تب β تقریباً 50% ہو گا۔ اس کے برعکس، $n = 100$ اس صورت کا کافی ہو گا۔ □



شکل 24.26: دو مختلف جسامت n کے لئے خاصیت کارکردگی کے منحنیات۔ (مثال 24.23-پ)

مثال 24.24: نا معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ
 رسی کی تنشی مضبوطی $n = 16$ کا نمونہ لے کر ناپی گئی۔ نمونی اوسط $\bar{x} = 4482 \text{ kg}$ اور نمونی معیاری انحراف $s = 115 \text{ kg}$ حاصل ہوئے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تنشی مضبوطی عمومی بلا منصوبہ متغیر ہے۔ قیاس $\mu_0 = 4500 \text{ kg}$ کو متبادل $\mu_1 = 4400 \text{ kg}$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ یہاں μ_0 وہ قیمت ہو سکتی ہے جو پیدا کرنے فراہم کی ہو جبکہ μ_1 سابقہ تجربات کا نتیجہ ہو سکتا ہے۔
 حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\%$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو تب مسئلہ 24.21 کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} = 4 \frac{\bar{X} - 4500}{S}$$

کا t تقسیم $n - 1 = 15$ درجہ آزادی کا ہو گا۔ فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 10 ج سے $c = -1.75$ حاصل ہو گا۔ نمونہ سے T کی مشاہدہ سے حاصل قیمت $t = \frac{4(4482 - 4500)}{115} = -0.626$ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $t > c$ ہے لہذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہمیں مزید جدول بند قیمتیں درکار ہوں گی جن پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔ □

مثال 24.25: (عمومی تقسیم کی تغیریت کی پرکھ)

عمومی آبادی کے $n = 15$ جسامت اور نمونی تغیریت $s^2 = 13$ کے نمونہ سے قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$ کو

متبادل $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$ میں مقابلے میں پرکھیں۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\%$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو تب

$$Y = (n-1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} = 14 \frac{S^2}{10} = 1.4S^2$$

کا مربع خا تقسیم $n-1 = 14$ درجہ آزادی کا ہو گا (مسئلہ 24.22)۔ ضمیمہ ج کی جدول 11. ج اور درج ذیل سے
14 درجہ آزادی کے لئے $c = 23.68$ حاصل ہو گا

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05 \implies P(Y \leq c) = 0.95$$

جو Y کی فاصل قیمت ہے۔ یوں $S^2 = \frac{\sigma_0^2 Y}{n-1} = 0.714Y$ کا مطابقتی فاصل قیمت $c^* = 0.714 \cdot 23.68 = 16.91$ ہو گا۔ چونکہ $s^2 < c^*$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں،

اگر متبادل درست ہو تب متغیر

$$Y_1 = 14 \frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7S^2$$

کے مربع خا تقسیم کا درجہ آزادی 14 ہو گا۔ یوں ہمارے پرکھ کی طاقت

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \leq 11.84)_{\sigma^2=20} \approx 62\%$$

ہو گی اور ہم دیکھتے ہیں قسم دوم غلطی کا امکان (جو 38% ہے) بہت زیادہ ہے جس کو کم کرنے کے لئے نمونی
جسامت بڑھانی ضروری ہے۔ □

مثال 24.26: دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا آپس میں موازنہ

نا معلوم اوسط μ_1 کی عمومی تقسیم کا نمونہ x_1, \dots, x_{n1} اور دوسری عمومی تقسیم جس کی اوسط μ_2 نا معلوم
ہو کا نمونہ y_1, \dots, y_{n2} استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل مثلاً $\mu_1 > \mu_2$ کے مقابلے
میں پرکھنا چاہتے ہیں۔ تغیرات جاننا ضروری نہیں ہے لیکن انہیں ایک جیسا¹⁶³ تصور کیا جاتا ہے۔ دو صورتیں عملاً اہم
ہیں۔
پہلی صورت: نمونوں کی جسامت ایک جیسی ہے۔ مزید پہلے نمونہ کی ہر قیمت کا دوسرے نمونہ میں مطابقتی ٹھیک ایک قیمت

¹⁶³ اگر اگلے مثال کا پرکھ واضح کرے کہ تغیرات میں واضح فرق پایا جاتا ہے تب ایک جیسے $n_1 = n_2 = n$ مثلاً $n > 30$ منتخب کرتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے
کہ مساوات تجزیہ عمومی بلا مضبوط متغیر، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے، کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے، اور مثال 24.23 کی طرز پر حل کریں۔

پایا جاتا ہے، چونکہ مطابقتی قیمتیں ایک ہی انسان یا چیز کی بدولت پائی جاتی ہیں (جوڑی دار موازنہ¹⁶⁴)؛ مثال کے طور پر ایک ہی چیز کی دو مختلف طریقوں سے ناپ، یا ایک ہی جانور کی دو آنکھوں کی ناپ، یا زیادہ عمومی طور پر جہاں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نمونوں کی جوڑی قیمتیں ایک جیسے انسانوں یا چیزوں (مثلاً جڑواں بھائی، گاڑھی کے اگلے ٹائر، وغیرہ) سے حاصل کی گئی ہوں۔ تب ہم مطابقتی قیمتوں کا فرق لے کر، مثال 24.24 میں دی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، اس قیاس کو پرکھیں گے کہ ان فرق کی مطابقتی آبادی کی اوسط 0 ہے۔ اگر ممکن ہو تب ہم اسی ترکیب کو استعمال کریں گے ورنہ ہمیں درج ذیل ترکیب استعمال کرنی ہوگی۔

دوسری صورت: دونوں نمونے غیر تابع ہیں اور ان کی جسامت مختلف ہو سکتی ہے۔ تب ہم درج ذیل طریقے سے بڑھتے ہیں۔ فرض کریں کہ متبادل $\mu_1 > \mu_2$ ہے۔ ہم معنی خیز سطح α منتخب کرتے ہیں۔ ہم نمونی اوسط \bar{x} ، \bar{y} اور s_1^2 ، s_2^2 کا حساب کرتے ہیں جہاں s_1^2 اور s_2^2 نمونی تغیریت ہیں۔ ضمیمہ ج کی جدول 10. ج میں $n_1 + n_2 - 2$ درجہ آزادی لیتے ہوئے ہم c کو

$$P(T \leq c) = 1 - \alpha \quad (24.142)$$

سے تعین کرتے ہیں۔ آخر میں ہم درج ذیل کا حساب کرتے ہیں۔

$$t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \quad (24.143)$$

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اگر قیاس درست ہو تب یہ t تقسیم کے $n_1 + n_2 - 2$ درجہ آزادی کے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے۔ اگر $t_0 \leq c$ ہو تب قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔ اگر $t_0 > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے۔

اگر متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ ہو تب مساوات 24.142 کی جگہ درج ذیل استعمال کیا جائے گا۔

$$P(T \leq c_1) = 0.5\alpha, \quad P(T \leq c_2) = 1 - 0.5\alpha \quad (24.142^*)$$

دھیان رہے کہ ایک جیسی نمونی جسامت $n_1 = n_2 = n$ کے لئے مساوات 24.143 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} \quad (24.144)$$

اس کی وضاحت کے لئے آئیں درج ذیل دو نمونوں پر غور کرتے ہیں جو دو مختلف حالات میں ایک ہی کام پر مزدور کی کارکردگی ہے۔

105	108	86	103	103	107	124	105
89	92	84	97	103	107	111	97

فرض کریں کہ مطابقتی آبادی عمومی ہے اور ان کی تغیریت ایک جیسی ہے۔ آئیں قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ (تغیریت کی ایک جیسا ہونے کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔)
حل: ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = 105.125, \quad \bar{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000$$

ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\%$ منتخب کرتے ہیں۔ مساوات 24.142^* میں $0.5\alpha = 2.5\%$ ، $1 - 0.5\alpha = 97.5\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 10.10 ج میں 14 درجہ آزادی سے $c_1 = -2.15$ اور $c_2 = 2.15$ حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 24.144 میں $n = 8$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$t_0 = \frac{\sqrt{8} \cdot 7.625}{\sqrt{190.125}} = 1.56$$

چونکہ $c_1 \leq t_0 \leq c_2$ ہے ہم دونوں صورتوں میں ایک جیسی اوسط کے قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

پہلی صورت اس مثال پر لاگو ہوتی ہے چونکہ پہلی دونوں نمونوں کی پہلی نمونی قیمت ایک قسم کے کام کے لئے حاصل کی گئی۔ اسی طرح دونوں نمونوں کی دوسری نمونی قیمت کسی دوسرے کام کے لئے حاصل کی گئی، وغیرہ۔ یوں ہم ان نمونی قیمتوں کا مطابقتی فرق

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

اور مثال 24.24 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0$ پرکھ سکتے ہیں جہاں μ اس فرق کی اوسط ہے۔ ہم اس کا منطقی متبادل $\mu \neq 0$ لیتے ہیں۔ نمونی اوسط $\bar{d} = 7.625$ اور نمونی تغیریت $s^2 = 45.696$ ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$t = \frac{\sqrt{8}(7.625 - 0)}{\sqrt{45.696}} = 3.19$$

$n - 1 = 7$ میں $P(T \leq c_2) = 97.5\%$ ، $P(T \leq c_1) = 2.5\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 10.10 ج میں $c_2 = 2.37$ اور $c_1 = -2.37$ حاصل ہوتے ہیں لہذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں چونکہ

$t = 3.19$ معلوم شدہ c_1 اور c_2 کے بیچ نہیں پایا جاتا ہے۔ اس طرح ہمارا موجودہ پرکھ، جو اسی نمونوں پر مبنی ہے لیکن زیادہ معلومات کو استعمال کرتا ہے، دکھاتا ہے کہ نتائج میں فرق کافی ہے۔ □

مثال 24.27: (دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا موازنہ)
گزشتہ مثال کے دو نمونے استعمال کرتے ہوئے قیاس $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو پرکھیں۔ فرض کریں کہ مطابقتی آبادیاں عمومی ہیں اور تجربہ کی نوعیت سے متبادل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ہو گا۔
حل: ہم $s_1^2 = 106.125$ اور $s_2^2 = 84.000$ حاصل کرتے ہیں۔ ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\%$ منتخب کرتے ہیں۔ $P(V \leq c) = 1 - \alpha = 95\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 12. ج میں $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$ درجہ آزادی سے $c = 3.79$ تعین ہوتا ہے۔ ہم آخر میں $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.26$ حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $v_0 \leq c$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ اگر $v_0 > c$ ہوتا ہم اس کو نا منظور کرتے۔

قیاس درست ہونے کی صورت میں v_0 ایسے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے جس کی تقسیم درجہ آزادی $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ کی F تقسیم¹⁶⁵ ہے۔ (m, n) درجہ آزادی کے F تقسیم¹⁶⁶ کا تفاعل تقسیم درجہ ذیل ہے

$$(24.145) \quad F(z) = \begin{cases} K_{mn} \int_0^z t^{\frac{m-2}{2}} (mt+n)^{-\frac{m+n}{2}} dt & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

□

جہاں $K_{mn} = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$ ہے۔

سوالات

سوال 24.201: صفحہ 1552 پر جدول 24.6 میں امجد کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ سکے منصفانہ ہے، یعنی خط اور شیر کا احتمال ایک جیسا ہے۔ $\alpha = 5\%$ منتخب کریں۔
جواب: اگر قیاس $p = 0.5$ درست ہو تب 4040 کوششوں میں خط کی تعداد X تقریباً عمومی ہو گا

¹⁶⁵ F-distribution
¹⁶⁶ انگلستانی ماہر جینیات رنلڈ فیلڈ [1890-1962]

جس کی اوسط $\mu = 2020$ اور تغیریت $\sigma^2 = 1010$ ہوگی (حصہ 24.10)۔
 $P(X \leq c) = \Phi\left(\frac{c-2020}{\sqrt{1010}}\right) = 0.95$, $c = 2072 > 2048$ ہے لہذا قیاس نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.202: مشرف کا مواد استعمال کرتے ہوئے سوال 24.201 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.203: عمومیت تصور کرتے ہوئے اور $\sigma^2 = 4$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = 15.0$ کو متبادل (الف) $\mu = 12.0$ اور (ب) $\mu = 15.8$ کے بالمقابل پرکھیں۔ نمونی جسامت 10 اور نمونی اوسط $\bar{x} = 14$ لیں جبکہ $\alpha = 5\%$ منتخب کریں۔
 جواب: (الف) $c = 13.96 > 12.00$ ہے۔ قیاس کو نا منظور کریں۔
 (ب) $c = 16.04 > 15.80$ ہے۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.204: اگر بڑی نمونی جسامت، مثلاً 100، استعمال کی جائے تب سوال 24.203 میں باقی مواد ($\bar{x} = 14$ ، $\alpha = 5\%$ ، وغیرہ) تبدیل کیے بغیر نتیجے میں کیا تبدیلی پیدا ہوگی؟

سوال 24.205: دو طرفہ پرکھ، 5% سطح پر استعمال کرتے ہوئے سوال 24.203 میں خطہ نا منظوری تلاش کریں؟
 جواب: $\mu < 13.76$ یا $\mu > 16.24$

سوال 24.206: سوال 24.203-الف میں پرکھ کی طاقت تلاش کریں۔

سوال 24.207: مثال 24.23-الف اور ب کی خاصیت کارکردگی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.208: دکھائیں کہ عمومی تقسیم میں قیاس $H_0: \mu = \mu_0$ اور متبادل $H_1: \mu = \mu_1$ کی پرکھ میں دو اقسام کی غلطیوں کو نمونی جسامت کافی بڑھا کر جتنا چاہیں کم (ما سوائے صفر کرنے کے) کیا جاسکتا ہے۔

سوال 24.209: $\mu = 0$ کو $\mu > 0$ کے بالمقابل سطح $\alpha = 5\%$ پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونہ $1, -1, 1, 3, -8, 6, 0$ لیں جو مصنوعی سیارہ ٹلسٹار کی 143 ویں گردش میں مدار سے مضرب 0.01 ریڈیئن انحراف ہے۔

جواب: $c = 1.94 > t = \sqrt{7} \frac{0.286-0}{4.31} = 0.18$ ہے لہذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.210: مثال 24.1 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0.80 \text{ cm}$ (ڈبے پر درج لمبائی) کو متبادل $\mu \neq 0.80 \text{ cm}$ کے مقابل پرکھیں۔ (عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\%$ لیں۔)

سوال 24.211: ایک مشین ڈبوں میں فی ڈبہ 1000 g تیل بھرتی ہے۔ آپ جاننا چاہتے ہیں کہ آیا $\alpha = 5\%$ سطح پر اوسط کی درکار کیت 1000 g سے تجاوز زیادہ ہے۔ اگر ایسا ہو تب مشین میں مطابقت پیدا کرنی ہوگی۔ ایک قیاس اور متبادل بنائیں اور انہیں پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونی جسامت 20 جس کی اوسط 996 g اور معیاری انحراف 5 g ہو استعمال کریں۔

جواب: متبادل $\mu \neq 1000$ ، $c = -2.09$ ، $-3.58 < c = \sqrt{20} \frac{996-1000}{5} = -3.58$ (ضمیمہ ج جدول 10.1 ج درجہ آزادی 19)۔ قیاس $\mu = 1000$ g کو نا منظور کریں۔

سوال 24.212: ایک مخصوص ٹائر کی اوسط زندگی 32 000 km اور معیاری انحراف 4000 km ہے۔ کیا ٹائر کا پیدا کار یہ دعویٰ کر سکتا ہے کہ اس کے بنائے ہوئے ٹائروں کی اوسط زندگی 30 000 km سے زیادہ ہے۔ متبادل قیاس بناتے ہوئے اس کو 5% سطح پر پرکھیں۔

سوال 24.213: برقی دباؤ کو بیک وقت دو عدد وولٹ پیا سے ناپا جاتا ہے۔ ان کے نتائج میں فرق

$$0.8, 0.2, -0.3, 0.1, 0.0, 0.5, 0.2$$

وولٹ ہے۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے کیا ہم 5% سطح کے لحاظ سے وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ دونوں وولٹ پیا کی پیمانہ بندی ¹⁶⁷ میں کوئی معنی خیز فرق نہیں پایا جاتا ہے۔

جواب: $\mu = 0$ کو متبادل $\mu \neq 0$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ $c = 2.37$ ، $t = 2.11 < c$ (درجہ آزادی 7)۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.214: ایک معیاری دوائی ایک مخصوص مرض میں مبتلا 70% مریضوں کو صحتیاب کرتی ہے اور ایک نئی دوائی پہلے 200 مریضوں میں سے 148 کو صحتیاب کرتی ہے۔ کیا $\alpha = 5\%$ لیتے ہوئے ہم وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ نئی دوائی زیادہ بہتر ہے؟

سوال 24.215: ماضی میں ایک مشین جو فی ڈبہ 25 kg چینی بھرتی تھی کا معیاری انحراف 0.4 kg تھا۔ قیاس $H_0: \sigma = 0.4$ کو متبادل $H_1: \sigma > 0.4$ کے بالمقابل پرکھیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے نمونی جسامت 10 جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.4$ ہو لیں اور $\alpha = 5\%$ منتخب کریں۔

جواب: $\frac{9 \cdot 0.5^2}{0.4^2} = 14.06 < c = 16.92$ ، $\alpha = 5\%$ ہے۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.216: فرض کریں کہ معیاری انحراف کسی مخصوص حد سے کم، مثلاً، 5 گھنٹوں سے کم، ہونے کی صورت میں بیڑی سے چلنے والی مشینوں میں تمام بیڑیوں کو مخصوص مدت کے بعد بیک وقت تبدیل کرنا کم مہنگا پڑتا

ہے بہ نسبت ہر بیٹری کو اس وقت تبدیل کرنے کے جب وہ خراب ہو جائے۔ ایک موزوں پرکھ بنا کر اس قیاس کو پرکھیں۔ عرصہ زندگی کے 28 قیمتیں جن کا معیاری انحراف $s = 3.5$ گھنٹے ہو استعمال کرتے ہوئے $\alpha = 5\%$ لیں۔ عمومیت تصور کریں۔

سوال 24.217: تیل کی قسم A کو 9 ایک جیسی گاڑیوں میں ایک جیسے حالات میں استعمال کیا گیا جنہوں نے اوسط 20.2 کلومیٹر فی لٹر اور معیاری انحراف 0.5 دیا۔ انہیں حالات میں تیل کی بہتر قسم B کو اس جیسی 10 گاڑیوں میں استعمال کیا گیا جن سے اوسط 21.8 اور معیاری انحراف 0.6 حاصل ہوا۔ کیا B بہت بہتر نتائج دیتا ہے؟ اس قیاس کو $\alpha = 5\%$ پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کریں۔

$$\text{جواب: } t_0 = \sqrt{\frac{10 \cdot 9 \cdot 17}{19}} \frac{21.8 - 20.2}{\sqrt{9 \cdot 0.6^2 + 8 \cdot 0.5^2}} = 6.3 > c = 1.74 \quad (\text{درجہ آزادی } 17 \text{ ہے۔})$$

سوال 24.218: ماسوائے عرصہ زندگی، بلب A اور B ایک جیسے ہیں۔ ایک خریدار دونوں قسم کے 100 بلب کو پرکھتا ہے۔ قسم A کی اوسط عرصہ زندگی 1120h اور معیاری انحراف 75h جبکہ B کی اوسط 1064h اور معیاری انحراف 82h حاصل ہوتے ہیں۔ کیا عرصہ زندگی میں معنی خیز فرق پایا جاتا ہے؟ (عمومیت فرض کرتے ہوئے $\alpha = 5\%$ سطح پر پرکھیں۔)

سوال 24.219: نمونی جسامت 10 اور 16 اور تغیریت $s_1^2 = 50$ اور $s_2^2 = 30$ لیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\%$ سطح پر قیاس $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو متبادل $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ کے بالمقابل پرکھیں۔ جواب: $v_0 = \frac{50}{30} = 1.67 < c = 2.59$ [درجہ آزادی (9, 15) ہے۔] قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.220: دو نمونے 50, 90, 100, 90, 110, 80 اور 110, 110, 120, 110, 130, 110, 120 لوہے کی ڈھلائی کے دوران دو مختلف بالٹیوں میں دو مختلف وقتوں پر درجہ حرارت ($^{\circ}\text{C}$) میں فرق دیتی ہیں۔ کیا پہلے نمونہ کی تغیریت دوسرے سے زیادہ ہے؟ عمومیت فرض کریں اور $\alpha = 5\%$ لیں۔

24.16 ضبط معیار

پیداوار کا کوئی بھی عمل اتنا ٹھیک نہیں ہوتا ہے کہ تمام پیداوار مکمل طور پر ایک جیسی ہو۔ بہت ساری معمولی، غیر قابو وجوہات کی بنا ان میں ہر صورت معمولی فرق پایا جاتا ہے جس کو امکانی فرق تصور کیا جاسکتا ہے۔ یہ ضروری ہے کہ

پیداوار کی درکار خاصیت کی قیمت درست ہو (مثلاً لمبائی، مضبوطی، یا جو بھی خاصیت کسی مخصوص صورت میں درکار ہو)۔ اس مقصد کے لئے اس قیاس کو پرکھا جاتا ہے کہ پیداوار درکار خاصیت، مثلاً $\mu = \mu_0$ ، رکھتے ہیں جہاں μ_0 درکار قیمت ہے۔ اگر ایسا پوری کھپ کی پیداوار (مثلاً، 100000 پیپوں کی کھپ) کے بعد کیا جائے تب پرکھ ہمیں بتائے گا کہ پیداوار کتنی اچھی یا کتنی خراب ہے لیکن ظاہر ہے کہ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کوئی بہتری نہیں لا سکتے ہیں۔ بہتری لانے کے لئے ضروری ہے کہ پرکھ دوران پیداوار کیا جائے۔ ایسا عموماً مقررہ دورانیہ (مثلاً ہر 30 منٹ یا ہر گھنٹہ) بعد جاتا ہے اور اس کو ضبط معیار¹⁶⁸ کہتے ہیں۔ ہر مرتبہ ایک جیسی جسامت (مثلاً 3 یا 10 اجزاء) کا نمونہ لیا جاتا ہے۔ قیاس نا منظور ہونے کی صورت میں عمل پیداوار روک کر اس وجہ کو تلاش کیا جاتا ہے جس کی بنا انحراف پیدا ہوا ہے۔

اگر ہم عمل پیداوار کو روک دیں اگرچہ سب ٹھیک چل رہا ہو تب ہم غلطی قسم اول کر رہے ہوں گے۔ اگر خرابی کے باوجود ہم عمل پیداوار کو ناروکیں تب ہم غلطی قسم دوم کر رہے ہوں گے (حصہ 24.15)۔

ہر پرکھ کا نتیجہ کو ترسیسی صورت میں نقشہ ضبط¹⁶⁹ پر ظاہر¹⁷⁰ کیا جاتا ہے۔

اوسط کا نقشہ ضبط

شکل 24.27 میں نقشہ ضبط کی مثال دکھائی گئی ہے۔ اوسط کے نقشہ ضبط پر پچلی حد ضبط¹⁷¹ LCL، وسطی خط ضبط¹⁷² CL اور بالائی حد ضبط¹⁷³ UCL دکھائے گئے ہیں۔ یہ حدود مثال 24.23-پ میں فاصل قیمتوں c_1 اور c_2 کے مطابقتی ہیں۔ جیسے ہم نمونی اوسط پچلی حد ضبط یا بالائی حد ضبط سے تجاوز کر جائے ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ عمل پیداوار "بے قابو" ہے، یعنی، ہم کہتے ہیں کہ عمل پیداوار میں تبدیلی رونما ہوئی ہے۔ جب بھی کوئی نقطہ حدود ضبط سے تجاوز کرے عمل پیداوار میں مداخلت کی ضرورت ہوگی۔

اگر ہم حدود ضبط ڈھیلے رکھیں تب ہم عمل پیداوار میں ناپسندیدہ تبدیلی کو پکڑ نہیں پائیں گے۔ اس کے برعکس حدود ضبط بہت سخت رکھنے سے ہم بار بار عمل پیداوار کو روک کر ناپسندیدہ تبدیلی کی غیر موجود وجہ تلاش کرتے رہیں

quality control¹⁶⁸

control chart¹⁶⁹

¹⁷⁰ امریکی ماہر شماریات والٹر انڈرو شوہارٹ [1891-1967] نے یہ نقشہ 1924 میں تجویز کیا جو معیار کو قابو کرنے میں انتہائی موثر ثابت ہوا ہے۔

lower control limit (LCL)¹⁷¹

central control line (CL)¹⁷²

upper control limit (UCL)¹⁷³

گے جس سے پیداوار بری طرح متاثر ہوگی۔ عموماً معنی خیز سطح $\alpha = 1\%$ منتخب کی جاتی ہے۔ صفحہ 1628 پر مسئلہ 24.20 اور ضمیمہ ج کی جدول 8.8 سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کی صورت میں اوسط کے مطابقتی حد ضبط

$$(24.146) \quad LCL = \mu_0 - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{اور} \quad UCL = \mu_0 + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ہوں گے۔ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ ہمیں σ معلوم ہے۔ اگر σ نا معلوم ہو تب پہلی 20 یا 30 نمونوں کی معیاری انحراف حاصل کر کے ان کی اوسط کو σ کی تخمینی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل 24.27 میں اوسط کو لکیر سے جوڑا جاتا ہے جو محض نتائج کو واضح کرنے میں مدد دیتی ہے۔

تغیریت کا نقشہ ضبط

اوسط کے ساتھ ساتھ عموماً تغیریت، معیاری انحراف یا سعت کو بھی قابو رکھا جاتا ہے۔ عمومی تقسیم کی صورت میں معیاری انحراف کا نقشہ ضبط بناتے ہوئے مثال 24.25 میں استعمال ترکیب بروئے کار لاتے ہوئے حدود ضبط تعین کیے جاسکتے ہیں۔ روایتی طور پر صرف بالائی حد ضبط استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال 24.25 سے یہ حد

$$(24.147) \quad UCL = \frac{\sigma^2 c}{n-1}$$

ہو گا جہاں c کو مساوات

$$P(Y > c) = \alpha \implies P(Y \leq c) = 1 - \alpha$$

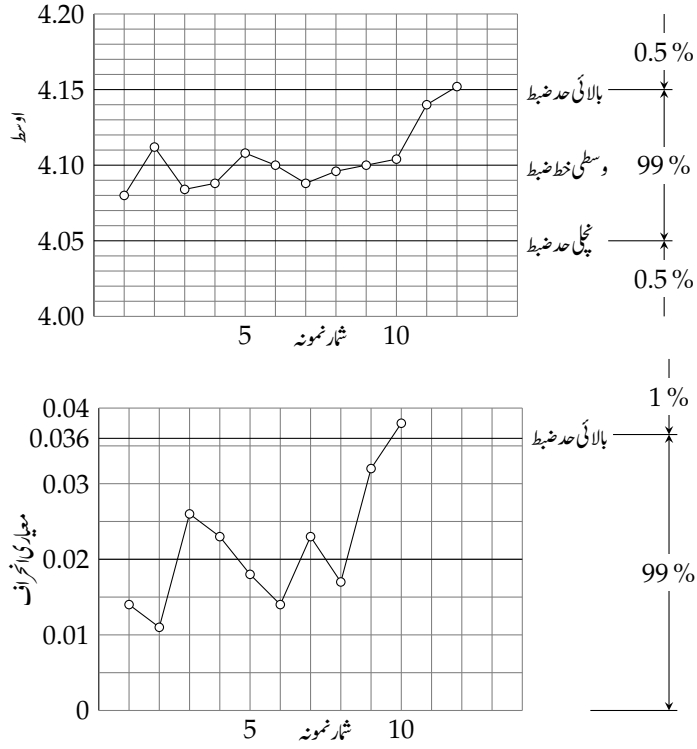
اور ضمیمہ ج کی جدول 11.ج (مربع خا تقسیم) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کیا جاتا ہے؛ یہاں نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ S^2 کی حاصل قیمت s^2 کا بالائی حد ضبط سے تجاوز کا احتمال α (5% یا 1%) ہے۔

اگر ہم تغیریت کے نقشہ ضبط میں نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط استعمال کرنا چاہیں تب یہ حدود

$$(24.148) \quad LCL = \frac{\sigma^2 c_1}{n-1}, \quad UCL = \frac{\sigma^2 c_2}{n-1}$$

ہوں گے جہاں c_1 اور c_2 کو $n-1$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 11.ج اور درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$(24.149) \quad P(Y \leq c_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(Y \leq c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$



شکل 24.27: اوسط اور معیاری انحراف کے نقشہ ضبط برائے جدول 24.12

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط

تغیریت کے نقشہ ضبط کی طرح ہمیں بالائی حد ضبط

$$(24.150) \quad UCL = \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{n-1}}$$

درکار ہو گا جس کو مساوات 24.147 سے حاصل کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر جدول 24.12 میں $n = 5$ ہے۔ مطابقتی آبادی کو عمومی تصور کرتے ہوئے جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.02$ ہو، $\alpha = 1\%$ منتخب کرتے ہوئے 4 درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 11 ج اور مساوات $P(Y \leq c) = 1 - \alpha = 99\%$

سے فاصل قیمت $c = 13.28$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں مساوات 24.150 سے

$$UCL = \frac{0.02\sqrt{13.28}}{\sqrt{4}} = 0.0365$$

حاصل ہو گا جس کو شکل 24.27 کے نچلے حصے میں دکھایا گیا ہے۔

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط جس میں بالائی حد ضبط اور نچلا حد ضبط پائے جاتے ہوں کو مساوات 24.148 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سعت کا نقشہ ضبط

اگر ہم σ^2 یا σ کو قابو رکھتے ہوں تب ہمیں بالترتیب s^2 یا s کا حساب کرنا ہو گا۔ ایسا کرنا غیر تربیت یافتہ شخص کے لئے مشکل ہوتا ہے لہذا ہم تغیریت یا معیاری انحراف کی حد ضبط کی جگہ سعت $R =$ (نمونہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت منفی نمونہ کی کم سے کم قیمت) استعمال کرنا چاہیں گے۔ عمومی تقسیم کی صورت میں یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ معیاری انحراف σ کی قیمت بلا منصوبہ متغیر R^* کی توقع کے راست متناسب ہے جس کی مشاہدے سے حاصل قیمت R ہو، یعنی $\sigma = \lambda_n E(R^*)$ ، جہاں جزو λ_n کی قیمت نمونی جسامت پر منحصر ہے اور اس کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.89	0.59	0.49	0.43	0.40	0.37	0.35	0.34	0.32
n	12	14	16	18	20	30	40	50	
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.31	0.29	0.28	0.28	0.27	0.25	0.23	0.22	

جدول 24.12: بارہ نمونے جہاں ہر نمونہ 5 قیمتوں (چھوٹی ٹلکیوں کے ملی میٹروں میں قطر) پر مشتمل ہے

نمونہ شمار	نمونہ قیمتیں					\bar{x}	s	R
1	4.06	4.08	4.08	4.08	4.10	4.080	0.014	0.04
2	4.10	4.10	4.12	4.12	4.12	4.112	0.011	0.02
3	4.06	4.06	4.08	4.10	4.12	4.084	0.026	0.06
4	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
5	4.08	4.10	4.12	4.12	4.12	4.108	0.018	0.04
6	4.08	4.10	4.10	4.10	4.12	4.100	0.014	0.04
7	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
8	4.08	4.08	4.10	4.10	4.12	4.096	0.017	0.04
9	4.06	4.08	4.10	4.12	4.14	4.100	0.032	0.08
10	4.06	4.08	4.10	4.12	4.16	4.104	0.038	0.10
11	4.12	4.14	4.14	4.14	4.16	4.140	0.014	0.04
12	4.14	4.14	4.16	4.16	4.16	4.152	0.011	0.02

چونکہ R صرف دو نمونی قیمتوں پر منحصر ہے لہذا یہ نمونے کے بارے میں s کے لحاظ سے کم معلومات فراہم کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ نمونی جسامت n جتنی بڑی ہوگی، s کی جگہ R استعمال کرنے سے، اتنی زیادہ معلومات ہم ضائع کریں گے۔ عملاً اگر n کی قیمت 10 سے زائد ہو تب s استعمال کیا جاتا ہے۔

دھیان رہے کہ سعت سے معیاری انحراف کا جلدی سے اندازہ لگانا عملی استعمال میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 24.221: ایک مشین چکانا تیل کو ٹین کی بوتل میں یوں بھرتی ہے کہ عمومی آبادی حاصل ہو جس کی اوسط 1 لٹر اور معیاری انحراف 0.03 لٹر ہو۔ اوسط کے لئے شکل 24.27 کی طرح نقشہ درکار ہے۔ نمونی جسامت 6 فرض کرتے ہوئے پچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط تلاش کریں۔

جواب: پچلی حد ضبط $UCL = 1.032$ جبکہ بالائی حد ضبط $LCL = 1 - \frac{2.58 \cdot 0.03}{\sqrt{6}} = 0.968$

سوال 24.222: سوال 24.221 میں دکھائیں کہ $\alpha = 0.3\%$ سطح سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔ ان کی اعدادی قیمتیں تلاش کریں۔

$$LCL = \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}, \quad UCL = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

سوال 24.223: معنی خیز سطح تبدیل کیے بغیر ہمیں سوال 24.221 میں نمونی جسامت کتنی رکھنی ہو گی تاکہ بالائی اور نیچلی حد ضبط قریب قریب ہوں، مثلاً $UCL - LCL = 0.05$ جواب: $n = 10$

سوال 24.224: اگر ہم غیر عمومی آبادی کے لئے مساوات 24.146 کے حدود ضبط والا نقشہ ضبط استعمال کریں تب ان حدود کا کیا مطلب ہو گا؟

سوال 24.225: عمومی آبادی کی اوسط قابو کرتے ہوئے $UCL - LCL$ کو نصف کرنے کی خاطر نمونی جسامت کو کس طرح تبدیل کرنا ہو گا؟
جواب: نمونی جسامت کو 4 گنا بڑھانا ہو گا۔

سوال 24.226: قابلوں کی پیداوار میں سے 2 جسامت کے 10 نمونے لئے گئے۔ ان کی لمبائی ملی میٹروں میں درج ذیل ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لمبائی	27.4	27.4	27.5	27.3	27.9	27.6	27.6	27.8	27.5	27.3
	27.6	27.4	27.7	27.4	27.5	27.5	27.4	27.3	27.4	27.7

فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 27.5 اور تغیریت 0.024 ہے۔ مساوات 24.146 استعمال کرتے ہوئے اوسط کے لئے نقش ضبط بنائیں اور نمونی اوسط اس پر ترسیم کریں۔
جواب: $\frac{2.58\sqrt{0.024}}{\sqrt{2}} = 0.283, UCL = 27.783, LCL = 27.217$

سوال 24.227: لوہے کی چادر مونٹائی کے درج ذیل نمومے 30 منٹ کے وقفوں پر حاصل کیے گئے۔ ان کی اوسط کو نقش ضبط پر ترسیم کریں۔ فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 5 اور معیاری انحراف 1.55 ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	3	3	5	7	7	4	5	6	5	5
نمونی قیمتیں	4	6	2	5	3	4	6	4	5	2
	8	6	5	4	6	3	4	6	6	5
	4	8	6	4	5	6	6	4	4	3

سوال 24.228: سعت کے نقشہ ضبط پر سوال 24.227 کے نمونی سعت کو ترسیم کریں۔

سوال 24.229: $\lambda_n = \frac{\sigma}{E(R^*)}$ بالقابل n ترسیم کریں۔ λ_n متغیر n کا ایک سرگھٹتا تفاعل ہے۔ اس کی وجہ بیان کریں۔

سوال 24.230: حدود ضبط کے باہر اوسط کا نقطہ نظام میں خرابی کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہم (الف) 1σ حد، (ب) 2σ حد، منتخب کریں تب ہم کتنی بار نظام میں غیر موجود خرابی کو تلاش کرنے کی کوشش کریں گے۔ (عمومیت فرض کریں۔)

جواب: تقریباً (5%) 30% صورتوں میں

سوال 24.231: ایک خود کار خراج کی مشین پر قابو بنائے جاتے ہیں۔ مسلسل رگڑ سے پیدا تبدیلی، اوسط کی نقش ضبط پر کس طرح رونما ہوگی؟ خراج کی مشین میں یک دم تبدیلی کس طرح نقش ضبط پر نظر آئے گی؟

سوال 24.232: (عیب داروں کی تعداد) 3σ حدود ضبط کے لحاظ سے UCL، CL اور LCL کے کلیات عیب دار کے نقشہ ضبط کے لئے تلاش کریں۔ (فرض کریں کہ شاریاتی ضبط میں p عیب دار کو ظاہر کرتا ہے۔)

$$UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)}, CL = np, LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

سوال 24.233: خاصیت کی نقش ضبط برتنوں کی پیداوار سے جسامت 100 کے نمونے حاصل کیے گئے۔ عیب دار (رستا برتنوں) کی تعداد (اسی ترتیب سے) درج ذیل تھی۔

3 7 6 1 4 5 4 9 7 0 5 6 13 4 9 0 2 1 12 8

گزشتہ تجربہ سے ہم جانتے ہیں کہ اگر عمل پیداوار میں خرابی نہ ہو تب عیب دار کی اوسط تعداد $p\%$ ہوتی ہے۔ ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے عیب دار نقشہ ضبط (جس کو p نقشہ بھی کہتے ہیں) بنائیں، یعنی، $LCL = 0$ لیں اور 3σ حدود کے لئے حاصل عیب دار (فی صد) کو UCL لیں، جہاں بلا منصوبہ متغیر \bar{X} = نمونہ میں فی صد عیب دار کی تغیریت σ^2 ہے۔ کیا عمل پیداوار قابو میں ہے؟

سوال 24.234: فی اکائی عیب دار کی تعداد فی اکائی عیب دار کے نقشہ (جس کو c نقشہ بھی کہتے ہیں) کو فی اکائی عیب دار X (مثلاً 10 میٹر کاغذ میں عیبوں کی تعداد، جہاز کے ایک پر میں غیر موجود کیلوں کی تعداد، وغیرہ) کو قابو کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ (الف) X کی تقسیم کو پوکسن تقسیم تصور کرتے ہوئے $\mu \pm 3\sigma$ کے لحاظ سے CL، LCL اور UCL کے کلیات بنائیں۔ (ب) شیشے کی چادر میں عیب کے لئے عمل قابو¹⁷⁴ کے لئے CL، LCL اور UCL تلاش کریں؛ فرض کریں کہ جب عمل پیداوار شاریاتی قابو میں ہو تب اوسطاً یہ عدد 2.5 فی چادر ہے۔

24.17 قبولیت نمونہ

بڑے پیمانہ پر پیداوار میں، جہاں پیداوار خریدار کو N اشیاء کی کھیپ مہیا کرتا ہے، قبولیت نمونہ لاگو کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہر کھیپ کو قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ کرنا ہو گا۔ کھیپ سے n جسامت کے نمونے کا معائنہ کرتے ہوئے عیب دار اشیاء، جنہیں مختصراً عیب دار¹⁷⁵ کہتے ہیں، کی تعداد کو مد نظر رکھ کر عموماً فیصلہ کیا جاتا ہے۔ جو اشیاء درکار تخصیص (بیان کردہ خواص، مثلاً جسامت، رنگ، مضبوطی، یا جو بھی اہمیت رکھتا ہو) پر پورا نہیں اترتے ہیں، انہیں عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔ اگر نمونہ میں عیب دار اشیاء کی تعداد x طے شدہ عدد c ($c < n$) سے زیادہ نہ ہو تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔ اگر $x > c$ ہو تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔ c کو عیب دار کی قابل قبول تعداد یا تعداد قبولیت¹⁷⁶ کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ پیداوار اور خریدار کو غنوی منصوبہ¹⁷⁷ پر اتفاق کرنا ہو گا، یعنی، غنوی جسامت n کی قیمت اور تعداد قبولیت c کی قیمت۔ چونکہ یہ ایک نمونہ پر منحصر ہے لہذا اس کو واحد غنوی منصوبہ¹⁷⁸ کہتے ہیں۔ دوہرا غنوی منصوبہ پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

فرض کریں کہ کھیپ قبول ہونے کا وقوعہ A ہے۔ ظاہر ہے کہ مطابقتی احتمال $P(A)$ نا صرف n اور c بلکہ کھیپ میں عیب داروں کی تعداد M پر بھی منحصر ہے۔ فرض کریں کہ نمونہ میں عیب داروں کی تعداد بلا منصوبہ متغیر X ہے اور ہم بغیر واپس رکھے نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ تب (حصہ 24.9)

$$(24.151) \quad P(A) = P(X \leq c) = \sum_{x=0}^c \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

ہو گا۔ اگر $M = 0$ (کھیپ میں کوئی عیب دار نہیں ہے) ہو تب X کی قیمت لازماً 0 ہو گی اور

$$P(A) = \frac{\binom{0}{0} \binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$$

ہو گا۔ مقررہ n اور c اور بڑھتے M کی صورت میں احتمال $P(M)$ گھٹتا ہے۔ اگر $M = N$ (کھیپ میں تمام اشیاء عیب دار) ہو، تب X کی قیمت لازماً n ہو گی اور $P(A) = P(X \leq c) = 0$ ہو گا چونکہ $c < n$ ہے۔

defectives¹⁷⁵
acceptance number¹⁷⁶
sampling plan¹⁷⁷
single sampling plan¹⁷⁸

نسبت $\theta = \frac{M}{N}$ کو کھیپ میں نسبت عیب دار¹⁷⁹ کہتے ہیں۔ دھیان رہے کہ $M = N\theta$ ہے اور مساوات 24.151 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(24.152) \quad P(A; \theta) = \sum_{x=0}^c \frac{\binom{N\theta}{x} \binom{N-N\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

چونکہ θ کی قیمت $N+1$ قیمتوں $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N}{N}$ میں سے ایک ہو سکتی ہے، احتمال $P(A)$ صرف ان قیمتوں کے لئے معین ہو گا۔ مقررہ n اور c کے لئے ہم $P(A)$ بالمقابل θ ترسیم کر سکتے ہیں۔ یہ $N+1$ نقطے ہوں گے۔ ان نقطوں سے ہموار منحنی گزاری جاسکتی ہے جس کو مد نظر نمونی منصوبہ کی منحنی خاصیت کارکردگی¹⁸⁰ (OC منحنی) کہتے ہیں۔

مثال 24.28: لکڑی میں سوراخ کرنے والی ایک مخصوص قسم کے درموں کو 20 فی ڈیبا بند کیا جاتا ہے اور مذکورہ زیر نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ 2 درموں کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے اور دونوں درمے غیر عیب دار ہونے کی صورت میں ڈبے کو قبول کیا جاتا ہے۔ یہاں $N = 20$ ، $n = 2$ ، $c = 0$ ہیں لہذا مساوات 24.152 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$P(A; \theta) = \frac{\binom{20\theta}{0} \binom{20-20\theta}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{(20-20\theta)(19-20\theta)}{380}$$

اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

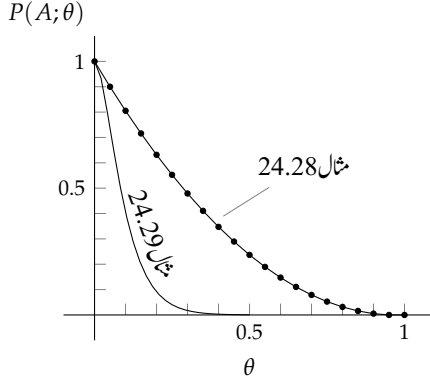
θ	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	...
$P(A; \theta)$	1.00	0.90	0.81	0.72	0.63	...

□

منحنی خاصیت کارکردگی کو شکل 24.28 میں دکھایا گیا ہے۔

عملی صورتوں میں عموماً θ چھوٹا ہو گا (10% سے کم)۔ عموماً صورتوں میں جسامت کھیپ N بہت بڑا (1000 ، 10000 ، وغیرہ) ہو گا لہذا ہم مساوات 24.151 اور مساوات 24.152 میں بیش ہندسی تقسیم کو تخمیناً ثنائی تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں جس میں $p = \theta$ لیا جائے گا۔ اب اگر n ایسا ہو کہ $n\theta$ معتدل (مثلاً 20 سے کم)

¹⁷⁹ fraction defective
¹⁸⁰ operating characteristic curve



شکل 24.28: منحنیات خاصیت کارکردگی برائے مثال 24.28 اور مثال 24.29

ہو، تب ہم اس تقسیم کو $\mu = np$ اوسط کی پوسٹن تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات 24.152 سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(24.153) \quad P(A; \theta) \sim e^{-\mu} \sum_{x=0}^c \frac{\mu^x}{x!} \quad (\mu = n\theta)$$

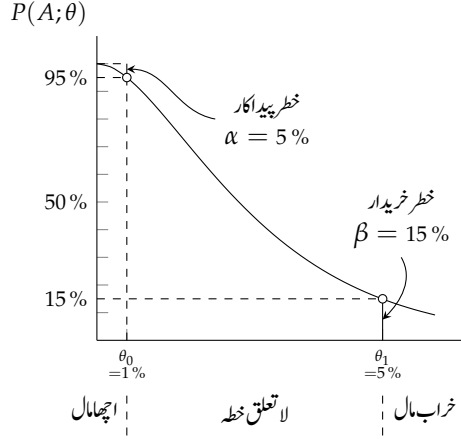
مثال 24.29: فرض کریں کہ بڑی کھیپ کے لئے مذکورہ ذیل واحد نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ $n = 20$ نمونہ لیا جاتا ہے۔ اگر اس میں 1 سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔ اگر نمونہ میں 2 یا اس سے زیادہ عیب دار ہوں تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔ اس منصوبہ میں مساوات 24.153 درج ذیل دیتا ہے

$$P(A; \theta) \sim e^{-20\theta} (1 + 20\theta)$$

□

جس کی مطابقتی منحنی شکل 24.28 میں دکھائی گئی ہے۔

ہم اب قبولیت نمونہ میں دو اقسام کے غلطیوں پر غور کرتے ہیں اور n اور c منتخب کرنے کی تفصیل پیش کرتے ہیں۔ قبولیت نمونہ میں پیداکار اور خریدار کے غرض مختلف ہوں گے۔ پیداکار چاہے گا کہ "اچھی" یا "قابل قبول" کھیپ کی مسترد ہونے کا احتمال، جس کو ہم α سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ خریدار چاہے گا کہ "خراب" یا "نا قابل قبول" کھیپ کے قبول ہونے کا احتمال، جس کو ہم β سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ دونوں اس پر اتفاق کرتے ہیں کہ جس کھیپ کے لئے θ کی قیمت ایک مخصوص عدد θ_0



شکل 24.29: منحنی خاصیت کارکردگی، خطی پیدا کار اور خطر خریدار

سے تجاوز نہ کرے تب کھیپ "قابل قبول" ہو گا جبکہ وہ کھیپ جس کے لئے θ کی قیمت ایک مخصوص عدد θ_1 کے برابر یا اس سے زیادہ ہو تب کھیپ "نا قابل قبول" ہو گا۔ تب وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \leq \theta_0$ ہو کے مسترد ہونے کا احتمال α ہو گا جس کو خطر پیدا کار¹⁸¹ کہتے ہیں۔ یہ قیاس کی پرکھ کی قسم اول غلطی کے مترادف ہے (حصہ 24.15)۔ وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \geq \theta_1$ ہو کے قبول ہونے کا احتمال β ہو گا جس کو خطر خریدار¹⁸² کہتے ہیں۔ یہ حصہ 24.15 میں قسم دوم غلطی کے مترادف ہے۔ شکل 24.29 میں ان کی وضاحت کی گئی ہے۔ θ_0 کو سطح قابل قبول معیار¹⁸³ اور θ_1 کو سطح قابل مسترد معیار¹⁸⁴ کہتے ہیں جبکہ کھیپ $\theta_0 < \theta < \theta_1$ کو لا تعلق کھیپ¹⁸⁵ کہتے ہیں۔

شکل 24.29 سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $(\theta_0, 1 - \alpha)$ اور نقطہ (θ_1, β) منحنی خاصیت کارکردگی پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ بڑی کھیپ کے لئے ہم θ_0 ، θ_1 ($> \theta_0$)، α ، β منتخب کرتے ہوئے n اور c یوں تعین کر سکتے ہیں کہ منحنی خاصیت کارکردگی ان نقطوں کے قریب سے گزرتی ہو۔ متعین θ_0 ، β ، α اور θ_1 کے لئے نمونی منصوبے شائع کیے گئے ہیں۔

پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ میں قریبی تعلق پایا جاتا ہے جس کو جدول 24.13 میں دکھایا گیا ہے۔

producer's risk¹⁸¹

consumer's risk¹⁸²

acceptable quality level¹⁸³

rejectable quality level¹⁸⁴

indifferent lot¹⁸⁵

جدول 24.13: پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ کا تعلق

معائنہ نمونہ	پرکھ قیاس
سطح قابل قبول معیار $\theta = \theta_0$	قیاس $\theta = \theta_0$
سطح قابل مسترد معیار $\theta = \theta_1$	متبادل $\theta = \theta_1$
عیب دار کی قابل قبول تعداد c	فاصل قیمت c
$\theta \leq \theta_0$ کھپ مسترد ہونے کا احتمال α (خطر پیدا کار)	قسم اول غلطی کا احتمال α (معنی خیز سطح)
$\theta \geq \theta_1$ کھپ قبول ہونے کا احتمال β (خطر خریدار)	قسم دوم غلطی کا احتمال β

نمونی عمل از خود خریدار کو مکمل تحفظ فراہم نہیں کرتا ہے۔ درحقیقت اگر پیدا کار کو اجازت ہو کہ وہ خراب کھپ کو دوبارہ قبول ہونے کے لئے پیش کرے تب آخر کار خراب کھپ بھی قبول ہو جائیں گے۔ خریدار کو اس صورت حال سے بچانے کی خاطر پیدا کار اس بات سے اتفاق کر سکتا ہے کہ مسترد کھپ کو سدھارا¹⁸⁶ جائے گا یعنی اس کا 100% معائنہ کرتے ہوئے ہر جزو کو پرکھا جائے گا اور کھپ میں تمام عیب دار اشیاء کی جگہ بے عیب اشیاء رکھے جائیں گے¹⁸⁷۔ فرض کریں ایک کارخانہ 100% عیب دار اشیاء بناتا ہے اور مسترد کھپ کو سدھارا جاتا ہے۔ تب N جسامت کے K کھپ میں KN اشیاء ہوں گے جن میں سے $KN\theta$ عیب دار ہوں گے۔ کھپوں میں سے $KP(A; \theta)$ قبول کیے جائیں گے؛ ان میں کل $KPN\theta$ عیب دار اجزاء ہوں گے۔ مسترد اور سدھارے گئے کھپ میں کوئی عیب دار جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں سدھارنے کے بعد K کھپ میں عیب دار کا تناسب $\frac{KPN\theta}{KN} = \theta P(A; \theta)$ ہو گا۔ θ کی اس تفاعل کو اوسط خارجی معیار¹⁸⁸ کہتے ہیں جس کو $AOQ(\theta)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، یعنی:

$$(24.154) \quad AOQ(\theta) = \theta P(A; \theta)$$

اگر نمونی منصوبہ دیا گیا ہو تب یہ تفاعل اور منحنی اوسط خارجی معیار کو $P(A; \theta)$ اور منحنی خاصیت کارکردگی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کی مثال شکل 24.30 میں دکھائی گئی ہے۔

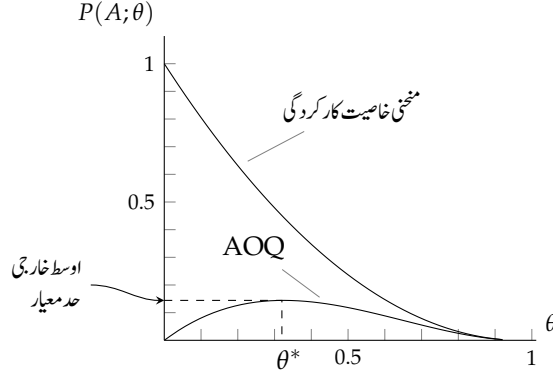
ظاہر ہے کہ $AOQ(0) = 0$ ہو گا۔ چونکہ $P(A; 1) = 0$ ہے لہذا $AOQ(1) = 0$ ہو گا۔ اس سے اور $AOQ(\theta) \geq 0$ سے ہم یہ نتیجہ حاصل کرتے ہیں کہ کسی $\theta = \theta^*$ پر اس تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جس کی مطابقتی قیمت $AOQ(\theta^*)$ کو اوسط خارجی حد معیار¹⁸⁹ کہتے ہیں۔ یہ خراب ترین معیار ہے جو سدھارنے کے عمل کے ساتھ قابل قبول ہو گا۔

rectified¹⁸⁶

¹⁸⁷ ظاہر ہے کہ اگر معائنہ سے اشیاء تباہ ہوتے ہوں یا ہر جزو کا معائنہ کرنا اشیاء کی قیمت سے زیادہ مہنگا پڑتا ہو تب ہر جزو کے معائنے کی بجائے مسترد کھپ کو کم دام فروخت کیا جائے گا۔

average outgoing quality¹⁸⁸

average outgoing quality limit¹⁸⁹



شکل 24.30: منحنی خاصیت کارکردگی اور اوسط خارجی حد معیار کی منحنی برائے شکل 24.28 میں مثال 24.28 کا دیا گیا نمونی منصوبہ

کئی نمونی منصوبے ایک ہی اوسط خارجی حد معیار دے سکتے ہیں۔ یوں اگر خریدار صرف اوسط خارجی حد معیار میں دلچسپ ہو تب پیدا کار وہ نمونی منصوبہ منتخب کر سکتا ہے جس میں نمونے کا حصول کم سے کم ہو، یعنی نمونی معائنے کی تعداد کم سے کم ہو۔ یہ تعداد درج ذیل ہے

$$nP(A; \theta) + N(1 - P(A; \theta))$$

جہاں پہلا جزو قبول شدہ کھپوں اور دوسرا جزو مسترد اور سدھارے گئے کھپ کے مطابق اجزاء ہیں؛ حقیقت میں سدھارنے کے عمل میں کھپ کے تمام N اجزاء کو پرکھا جاتا ہے، اور کھپ مسترد ہونے کا احتمال $1 - P(A; \theta)$ ہے۔

ہم بتانا چاہتے ہیں کہ معائنے کے عمل کو دوہرا نمونی منصوبہ¹⁹⁰ استعمال کرتے ہوئے کم کیا جاسکتا ہے جس میں جسامت n کے نمونے کو جسامت n_1 اور n_2 (جہاں $n_1 + n_2 = n$) کے دو نمونوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ اگر کھپ بہت اچھی یا بہت خراب ہو تب کھپ قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ ایک نمونے کو دیکھ کر کیا جاسکتا ہے چونکہ توقع کی جاسکتی ہے کہ دوسرے نمونے کا معیار درمیانہ ہو گا۔ ہم دوہرا نمونی منصوبہ اور سدھارنے کا عمل استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قسم کے منصوبے استعمال کر سکتے ہیں جہاں نمونوں میں عیب دار کی تعداد بالترتیب x_1 اور x_2 ہے۔

• اگر $x_1 \leq c_1$ ہو، کھپ قبول کریں۔ اگر $x_1 > c_2$ ہو، کھپ مسترد کریں۔

¹⁹⁰double sampling plan

• اگر $c_1 < x_1 \leq c_2$ ہو، دوسرا نمونہ بھی استعمال کریں۔ اگر $x_1 + x_2 \leq c_2$ ہو، کھپ قبول کریں۔ اگر $x_1 + x_2 > c_2$ ہو، کھپ مسترد کریں۔

سوالات

سوال 24.235: ایک صارف قلم پر کھنے کے لئے واحد نمونہ منصوبہ استعمال کرتا ہے جس میں نمونی جسامت 40 اور تعداد قبولیت 1 ہے۔ ضمیمہ ج کی جدول 6. ج استعمال کرتے ہوئے 0.25%, 0.5%, 1%, 2%, 5%, 10% عیب دار کھپ کے قبول ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ منحنی OC کو ترسیم کریں۔
جواب: 0.9953, 0.9825, 0.9384, ...

سوال 24.236: حسابی کیلو لیٹر کی بیٹریوں کی بڑی کھپوں کو مذکورہ ذیل منصوبہ کے تحت پرکھا جاتا ہے۔ کھپ سے بلا منصوبہ 30 بیٹریاں منتخب کر کے پرکھی جاتی ہیں۔ اگر اس نمونہ میں زیادہ سے زیادہ 1 عیب دار بیٹری ہو تب اس کھپ کو قبول کیا جاتا ہے ورنہ اس کو مسترد کیا جاتا ہے۔ پوائسن تقسیم استعمال کرتے ہوئے اس منصوبے کی OC منحنی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.237: سوال 24.236 میں AOQ منحنی ترسیم کریں۔ سدھارنے کے عمل کے ساتھ اوسط خارجی حد معیار تعین کریں۔
جواب: $\theta = 0.054$ پر 0.028

سوال 24.238: $n = 50$ اور $c = 0$ کی صورت میں سوال 24.236 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.239: مثال 24.28 میں بیش ہندسی تقسیم کی تخمینی ثنائی تقسیم تلاش کرتے ہوئے تخمینی اور اصل قیمت کا موازنہ کریں۔
جواب: $(1 - \theta)^2$

سوال 24.240: مثال 24.28 میں سطح قابل قبول معیار 0.1 اور سطح قابل مسترد معیار 0.6 ہونے کی صورت میں خطی پیدا کار اور خطر خریدار کیا ہوں گے؟

سوال 24.241: پتچوں کی کھپ میں θ تناسب عیب دار ہیں۔ اس کھپ سے 5 کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کھپ کو قبول کیا جاتا ہے اگر نمونہ میں (الف) کوئی بھی عیب دار نہ ہو، (ب) زیادہ سے زیادہ ایک عیب

دار ہو۔ ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے OC منحنیات تلاش کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں اور ان کا آپس میں موازنہ کریں۔
جواب: $(1 - \theta)^5, (1 - \theta)^5 + 5\theta(1 - \theta)^4$

سوال 24.242: برقی فٹیلہ کی کھیپ سے 3 کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر نمونہ میں ایک سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔ اس نمونی منصوبہ پر تنقید کریں۔ بالخصوص 50% عیب دار کی کھیپ قبول ہونے کا احتمال حاصل کریں۔ (ثنائى تقسيم استعمال کریں۔)

سوال 24.243: $c = 0$ اور n کی بڑھتی قیمت (مثلاً $n = 2, 3, 4, \dots$) کی نمونی منصوبوں کا موازنہ کریں اور ان کو ترسیم کریں۔ (ثنائى تقسيم استعمال کریں۔)
جواب: $P(A; \theta) = (1 - \theta)^n$

سوال 24.244: $c = 1$ لیتے ہوئے سوال 24.243 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.245: OC منحنی میں اچھی معیار اور خراب معیار کو علیحدہ کرنے کا انتصابی حصہ کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟
جواب: چونکہ n متناہی ہے۔

سوال 24.246: $n = 5$ اور $c = 10$ لیتے ہوئے بڑی کھیپ کے لئے واحد نمونی منصوبہ کے OC اور AOQ منحنیات ترسیم کریں۔

سوال 24.247: خطر خریدار 5% کے لئے سوال 24.246 کی منحنی سے θ_0 تلاش کریں۔ خطر پیدا کار 10% کے لئے سوال 24.246 کی منحنی سے θ_1 تلاش کریں۔
جواب: $\theta_0 \approx 0.01, \theta_1 \approx 0.37$

سوال 24.248: $n = 4$ اور $c = 1$ لیتے ہوئے سوال 24.246 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.249: ہم گھڑیوں کی بڑی کھیپوں سے 100 جسامت کے نمونے لیتے ہیں۔ ہم چاہتے ہیں کہ سطح قابل قبول معیار 5% اور خطر پیدا کار 2% ہو۔ ہمیں تعداد قبولیت c کی کیا قیمت منتخب کرنی ہوگی؟ (عمومی تقسیم استعمال کریں۔)
جواب: 9

سوال 24.250: اگر سطح قابل مسترد معیار 12% ہو تب سوال 24.249 میں خطر خریدار کیا ہوگا؟

سوال 24.251: $n = 5$ اور $c = 0$ کی صورت میں سطح قابل قبول معیار $\theta_0 = 1\%$ اور سطح قابل مسترد معیار $\theta_1 = 15\%$ فرض کرتے ہوئے واحد نمونی منصوبہ میں خطر تلاش کریں۔
جواب: $\alpha = 5\%, \beta = 44\%$

سوال 24.252: $n = 5$ اور $c = 0$ لیتے ہوئے بڑی کھپ کے لئے واحد نمونی منصوبہ استعمال کرتے ہوئے OC منحنی اور AOQ منحنی تلاش کرتے ہوئے ترسیم کریں۔ اوسط خارجی سطح معیار بھی تلاش کریں۔

24.18 عہدگی موافقت

ہم نمونہ x_1, \dots, x_n استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھنا چاہتے ہیں کہ جس آبادی سے نمونہ لیا گیا ہو اس کا تفاعل تقسیم $F(x)$ ہے۔ ظاہر ہے کہ نمونے کا تفاعل تقسیم $\bar{F}(x)$ اصل تفاعل تقسیم $F(x)$ کا تخمینہ ہو گا اور اگر یہ $F(x)$ کی "اچھی تخمینہ" دیتا ہو تب ہم اس قیاس کو نا منظور نہیں کریں گے کہ تفاعل $F(x)$ اس آبادی کا تفاعل تقسیم ہے۔ اگر $\bar{F}(x)$ تفاعل $F(x)$ سے بہت زیادہ انحراف کرتا ہو تب ہم اس قیاس کو نا منظور کریں گے۔

اس طرح فیصلہ کرنے کے لئے ضروری ہے ہم جانتے ہوں کہ قیاس درست ہونے کی صورت میں $F(x)$ سے $\bar{F}(x)$ کتنا انحراف کر سکتا ہے۔ اس خاطر ہم ایک مقدار متعارف کرتے ہیں جو $F(x)$ سے $\bar{F}(x)$ کا انحراف ناپتا ہے اور ہمیں اس مفروضہ کے تحت، کہ قیاس درست ہے، اس مقدار کا تفاعل احتمال درکار ہو گا۔ آئیں اس کو حاصل کرتے ہیں۔ ہم عدد c یوں تعین کرتے ہیں کہ، قیاس درست ہونے کی صورت میں، c سے زائد انحراف کا ایک چھوٹا بیشگی مختص احتمال ہو۔ بہر حال، اگر c سے زیادہ انحراف پایا جاتا ہو تب ہمیں قیاس درست ہونے پر شک و شبہ ہو گا اور ہم قیاس کو نا منظور کریں گے۔ اس کے برعکس اگر انحراف c سے تجاوز نہ کرتا ہو، تاکہ $\bar{F}(x)$ تفاعل $F(x)$ کی اچھی تخمینہ ہو، ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ قیاس نا منظور نہ کرنے کی صورت میں ہمارے پاس قیاس نا منظور کرنے کا نا کافی ثبوت ہے اور یہ اس امکان کو خارج نہیں کرتی ہے کہ پرکھ میں دیگر تفاعل بھی نا منظور نہیں ہوں گے۔ یوں صورت حال کافی حد تک حصہ 24.15 کی طرح ہے۔

جدول 24.14 میں اس طرز کی پرکھ دکھائی گئی ہے¹⁹¹۔ اس پرکھ کا جواز کچھ یوں ہے کہ اگر قیاس درست ہو، تب χ^2_0 اس بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہو گی جس کی تفاعل تقسیم $K - 1$ درجہ آزادی (یا

¹⁹¹ اس پرکھ کو رولڈنلبر فشر نے متعارف کیا۔

جدول 24.14: جس آبادی سے نمونہ x_1, \dots, x_n حاصل کیا گیا ہو اس آبادی کا تفاعل تقسیم $F(x)$ ہونے کی قیاس کا مربع خاپرکھ

پہلا قدم: x محور کو K وقفوں I_1, I_2, \dots, I_K میں یوں تقسیم کریں کہ ہر وقفہ میں دیے گئے نمونہ x_1, \dots, x_n کے کم سے کم 5 قیمتیں پائی جاتی ہوں۔ وقفہ I_j میں نمونی قیمتوں کی شمار b_j تعین کریں جہاں $j = 1, \dots, K$ ہے۔ اگر نمونی قیمت دو وقفوں کی مشترک سرحد پر پائی جاتی ہو تب دونوں مطابقتی b_j میں 0.5 جمع کریں۔

دوسرا قدم: $F(x)$ استعمال کرتے ہوئے زیر غور بلا منصوبہ متغیر X کا وقفہ I_j میں کوئی بھی قیمت اختیار کرنے کا احتمال p_j بذریعہ حساب تلاش کریں، جہاں $j = 1, \dots, K$ ہے۔ درج ذیل بذریعہ حساب حاصل کریں (جو قیاس درست ہونے کی صورت میں وقفہ I_j میں نمونی قیمتوں کا نظیری متوقع شمار ہے)۔

$$e_j = np_j$$

تیسرا قدم: درج ذیل انحراف کا حساب کریں۔

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} \quad (24.155)$$

چوتھا قدم: معنی خیز سطح (1%, 5% وغیرہ) منتخب کریں۔
پانچواں قدم: درج ذیل مساوات کا حل c ، ضمیمہ ج کی جدول 11.1 ج میں $K - 1$ درجہ آزادی لیتے ہوئے، تلاش کریں۔

$$P(\chi^2 \leq c) = 1 - \alpha$$

اگر $F(x)$ کے r مقدار معلوم ہمیں معلوم نہ ہوں اور ان کی زیادہ سے زیادہ امکانی اندازے (حصہ 24.13) استعمال کیے جا رہے ہوں تب $K - 1$ کی بجائے $K - r - 1$ درجہ آزادی استعمال کریں۔ اگر $\chi_0^2 \leq c$ ہو، قیاس کونا منظور نہ کریں۔ اگر $\chi_0^2 > c$ ہو، قیاس کونا منظور کریں۔

$K - r - 1$ درجہ آزادی اگر r مقدار معلوم کا اندازہ لگایا گیا ہو) کی مربع خات تقسیم تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے جیسے جیسے n لامتناہی تک پہنچے کی کوشش کرتا ہے۔ کم سے کم 5 نمونی قیمتوں کا جدول 24.14 کے ہر وقفہ میں پائے جانے کی شرط کی وجہ متناہی بلا منصوبہ n کی صورت میں اس بلا منصوبہ متغیر کی تقسیم کا صرف تخمینی طور پر مربع خات تقسیم ہونا ہے۔ (اس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا)۔ اگر نمونہ اتنا چھوٹا ہو کہ اس شرط کو مطمئن کرنا ممکن نہ ہو تب پرکھ سے حاصل نتیجہ کو بہت احتیاط کے ساتھ استعمال کریں۔

مثال 24.30: عمومیت کا پرکھ

کیا صفحہ 1531 پر جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے لیا گیا ہے؟

حل: μ اور σ^2 کی زیادہ سے زیادہ امکانی اندازے $\hat{\mu} = \bar{x} = 364.7$ اور $\hat{\sigma}^2 = 712.9$ ہیں۔ جدول

جدول 24.15: حساب برائے مثال 24.30

x_j	$\frac{x_j - 364.7}{26.7}$	$\Phi\left(\frac{x_j - 364.7}{26.7}\right)$	$e_j = 100p_j$	b_j	اجزاء مساوات 155.24
$-\infty \dots 325$	$-\infty \dots -1.49$	$0.0000 \dots 0.0681$	6.81	6	0.096
$325 \dots 335$	$-1.49 \dots -1.11$	$0.0681 \dots 0.1335$	6.54	6	0.045
$335 \dots 345$	$-1.11 \dots -0.74$	$0.1335 \dots 0.2296$	9.61	11	0.201
$345 \dots 355$	$-0.74 \dots -0.36$	$0.2296 \dots 0.3594$	12.98	14	0.080
$355 \dots 365$	$-0.36 \dots 0.00$	$0.3594 \dots 0.5000$	14.06	16	0.268
$365 \dots 375$	$0.00 \dots 0.39$	$0.5000 \dots 0.6517$	15.17	15	0.002
$375 \dots 385$	$0.39 \dots 0.76$	$0.6517 \dots 0.7764$	12.47	8	1.602
$385 \dots 395$	$0.76 \dots 1.13$	$0.7764 \dots 0.8708$	9.44	10	0.033
$395 \dots 405$	$1.13 \dots 1.51$	$0.8708 \dots 0.9345$	6.37	8	0.417
$405 \dots \infty$	$1.51 \dots \infty$	$0.9345 \dots 1.0000$	6.55	6	0.046
					$\chi_0^2 = 2.790$

24.15 میں کیا گیا حساب $\chi_0^2 = 2.790$ دیتا ہے۔ ہم $\alpha = 5\%$ منتخب کرتے ہیں۔ چونکہ $K = 10$ ہے اور ہم مقدار معلوم کا اندازہ $r = 2$ لگاتے ہیں، ہم $K - r - 1 = 7$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 11 ج سے $P(\chi^2 \leq c) = 95\%$ کا حل $c = 14.07$ حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $\chi^2 < c$ ہے لہذا ہم آبادی کا عمومی ہونے کا قیاس نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 24.253: تین مشینوں میں سے ہر ایک مشین پر بنائے جانے والے کیلوں سے 200 جسامت کے نمونے حاصل کیے گئے۔ ان نمونوں میں عیب دار کیلوں کی تعداد 7, 8, 12 تھی۔ کیا یہ فرق معنی خیز ہے؟ ($\alpha = 5\%$ استعمال کریں۔)

جواب: تینوں مشینوں میں عیب دار کیلوں کی تعداد ایک جیسا کو قیاس H_0 لے کر $p = \frac{27}{600} = 4.5\%$ اندازہ حاصل ہو گا۔ یوں $\chi_0^2 = \frac{1}{9}(2^2 + 1^2 + 3^2) = 1.56 < 5.99$ ہو گا ($\alpha = 5\%$)، اور درجہ آزادی 2 ہے۔ نتیجہ: نہیں

سوال 24.254: دوپہر ایک بجے سے دو بجے تک ایک دکان پر متواتر پانچ دنوں میں بالترتیب 92, 60, 66, 62, 90 صارفین آئے۔ اس قیاس کو پرکھیں کہ ان دنوں میں صارفین کی تعداد ایک جیسی ہے۔ ($\alpha = 5\%$ لیں۔)

سوال 24.255: گرگریوہان مینڈل کے ایک کلاسیکی تجربہ کے نتیجہ میں 355 پیلے مٹر اور 123 سبز مٹر کے دانے حاصل ہوئے۔ کیا یہ نظریہ مینڈل کے مطابق ہے جس کے تحت نسبت پیلے مٹر: سبز مٹر کی قیمت 3 : 1 ہونی چاہیے۔

جواب: $K = 2, n = 355 + 123 = 478, e_1 = 478 \cdot \frac{3}{4} = 358.5, e_2 = 478 \cdot \frac{1}{4} = 119.5,$
 $\chi_0^2 = \frac{(355-358.5)^2}{358.5} + \frac{(123-119.5)^2}{119.5} = 0.137 < c,$ (درجہ آزادی 1، $\alpha = 5\%$) ہے۔ لہذا ہم وٹوق سے کہتے ہیں کہ نظیری قیتوں سے انحراف محض بلا منصوبہ اثرات ہیں۔

سوال 24.256: ایک پیدا کار دعویٰ کرتا ہے کہ عمل پیداوار میں صرف 2.5% استرے تیز دھار نہیں ہوتے ہیں۔ اس قیاس کو متبادل: 2.5% سے زیادہ تعداد تعداد تیز دھار نہیں ہوتے، پرکھیں۔ 400 استروں کا نمونہ استعمال کریں جن میں 17 تیز دھار نہیں ہیں۔ ($\alpha = 5\%$ استعمال کریں۔)

سوال 24.257: بلا منصوبہ اعداد کی جدول میں طاق اور جفت اعداد کی تعداد تقریباً ایک جیسی ہونی چاہیے۔ ضمیمہ ج کی جدول 9.ج کے صف 0 میں دیے گئے 50 اعداد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں۔ ($\alpha = 5\%$ استعمال کریں۔)

جواب: 20 طاق اور 30 جفت اعداد، $K = 2$ جماعتیں، $\chi_0^2 = 2 < 3.84$ ، لہذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.258: ایک سکھ کو 50 بار اچھالا جاتا ہے۔ خط کی کم سے کم تعداد (25 سے زیادہ) کیا ہوگی جس پر سکھ منصفانہ ہونے کی قیاس کو 5% کی سطح پر نا منظور کیا جائے گا۔

سوال 24.259: ایک معیاری طریقہ پر پیدا کردہ لوہے کی ایک مخصوص قسم کی سلاخوں میں سے 25% سلاخ 900 kg کی بوجھ ڈالنے سے ٹوٹ جاتے ہیں۔ ایک نئے طریقہ سے پیدا 80 سلاخوں پر اتنا ہی بوجھ ڈالنے سے 27 سلاخ ٹوٹ جاتے ہیں۔ کیا نئے طریقہ سے پیدا سلاخوں کے ٹوٹ جانے کی شرح وہی ہے؟
 جواب: $\chi_0^2 = \frac{49}{20} + \frac{49}{60} = 3.27 < c = 3.84$ جہاں $\alpha = 5\%$ اور درجہ آزادی 1 ہے۔ نتیجہ: جی ہاں۔

سوال 24.260: موٹروے کی تین لینوں میں ایک مخصوص دورانیہ کے دوران، ایک ہی رخ چلتی گاڑیوں کی تعداد بالترتیب 910، 850 اور 720 گاڑیاں گنی گئیں۔ کیا ہم وٹوق کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تینوں لینوں پر سے ایک جتنی گاڑیاں گزریں؟

سوال 24.261: ایک کلاسیکی تجربہ میں پانسہ 20000 مرتبہ پھینکا گیا جس میں 6، 1، 2، 3، 4، 5، 6 ہندسوں کی حتمی تعدد 3407، 3631، 3176، 2916، 3448، 3422 حاصل ہوئی۔ $\alpha = 5\%$ استعمال کرتے ہوئے پانسہ کے

منصفانہ ہونے کی قیاس کو پرکھیں۔

جواب: $K = 6, \chi_0^2 = 94.19, c = 11.07$ قیاس نا منظور کیا جاتا ہے۔

سوال 24.262: کیا صفحہ 1536 پر جدول 24.4 میں دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے لیا گیا؟
جواب: $K = 5, \bar{x} = 99.4, \tilde{\sigma} = 15.8, c = 5.99 (\alpha = 5\%)$ قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔
 $\chi_0^2 = 0.7 < \infty, 95, 95, 105, 115, \infty$ (حدود) ہیں۔

سوال 24.263: درج ذیل نمونہ جس آبادی سے لیا گیا اس آبادی کو عمومیت کے لئے پرکھیں جہاں 0.3 mm موٹی فولادی چادروں کی تنشی مضبوطی x [kg mm^{-2}] ہے۔

x	حتمی تعدد	x	حتمی تعدد
< 42.0	15	$43.5 - 44.0$	22.5
$42.0 - 42.5$	11	$44.0 - 44.5$	19.5
$42.5 - 43.0$	15	$44.5 - 45.0$	12
$43.0 - 43.5$	14	> 45.0	19

سوال 24.264: درج ذیل مواد استعمال کرتے ہوئے آبادی کو پوسن تقسیم کے لئے پرکھیں۔ 7.5 سیکنڈ میں الفا ذرات کی تعداد x اور $a(x)$ ان کی حتمی تعدد (= وقفوں کی تعداد جن میں ٹھیک x ذرے دیکھے گئے) ہے۔ یہ کلاسیکی تجربہ ارنسٹ ردفورڈ اور ہانس گانگیر نے 1910ء سرانجام دیا۔

x	$a(x)$	x	$a(x)$	x	$a(x)$
0	57	5	408	10	10
1	203	6	273	11	4
2	383	7	139	12	2
3	525	8	45	≥ 13	0
4	532	9	27		

جواب: آخری تینوں صفوں کو ایک ساتھ لیتے ہوئے $K - r - 1 = 7$ ہو گا جہاں $r = 1$ ہے چونکہ اوسط کا اندازہ حاصل کیا گیا ہے۔ $c = 16.92 > \chi_0^2 = 12.8$ ہے جہاں $\alpha = 5\%$ لیا گیا ہے۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.265: پوسن تقسیم کی آبادی سے 1000 کاغذ لئے گئے۔ اس قیاس کو پرکھیں۔ درج ذیل ایک کاغذ پر دھبوں کی تعداد x ہے اور $a(x)$ حتمی تعدد (x دھبوں والے کاغذوں کی تعداد) ہے۔

x	0	1	2	3	4	≥ 5
$a(x)$	419	352	154	56	19	0

سوال 24.266: کیا یہ ممکن ہے کہ ہم $\chi_0^2 = 0$ حاصل کریں اگرچہ نمونی تفاعل تقسیم پر کھے جانے والے تفاعل تقسیم $F(x)$ سے مختلف ہو؟

24.19 غیر مقدار معلوم پرکھ

حصہ 24.15 کے پرکھ عمومی آبادی کے لئے تھے۔ کئی بار آبادی کی تقسیم غیر عمومی یا نامعلوم تقسیم رکھتی ہے۔ ایسی صورت میں ہم غیر مقدار معلوم پرکھ¹⁹² یا تقسیم پاک پرکھ¹⁹³ استعمال کر سکتے ہیں جس کی بنیاد شہادت رجحان¹⁹⁴ ہے لہذا اس کو کسی بھی استمراری تقسیم کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ البتہ عمومی تقسیم کے لئے حصہ 24.15 کے پرکھ بہتر نتائج دیتے ہیں۔ تقسیم پاک پرکھ کو سمجھنے کی خاطر ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 24.31: پرکھ برائے علامت و وسطانیہ
مساوات $F(x) = 0.5$ کے حل $x = \bar{\mu}$ کو وسطانیہ کہتے ہیں، جہاں F تفاعل تقسیم ہے۔ مثال 24.26 کا نمونی فرق، یعنی،

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\bar{\mu} = 0$ کو پرکھتے ہیں جو کہتا ہے کہ کام کرنے کے دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی تقریباً ایک جیسی ہے۔

حل: ہم متبادل $\bar{\mu} > 0$ اور معنی خیز سطح $\alpha = 5\%$ منتخب کرتے ہوئے۔ اگر قیاس درست ہو تب مثبت فرق کا احتمال p اور منفی فرق کا احتمال ایک جیسے ہوں گے۔ یوں $p = 0.5$ ہو گا اور بلا منصوبہ متغیر

$$n \text{ قیمتوں میں مثبت قیمتوں کا مجموعہ } X =$$

کا تقسیم ثنائی ہو گا جس کا $p = 0.5$ ہو گا۔ ہمارے نمونے میں 8 قیمتیں ہیں۔ ہم 0 قیمتوں کو خارج کرتے ہیں چونکہ ان کا فیصلہ پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ تب 6 قیمتیں رہ جاتی ہیں۔ یہ تمام قیمتیں مثبت ہیں۔ چونکہ

$$P(X = 6) = \binom{6}{6} (0.5)^6 (0.5)^0 = 0.0156 = 1.56\% < \alpha$$

¹⁹² nonparametric test
¹⁹³ distribution-free test
¹⁹⁴ order statistics

ہے لہذا ہم قیاس نا منظور کرتے ہیں۔

اگر ان 6 قیمتوں میں صرف 1 قیمت منفی ہوتی تب

$$P(X \geq 5) = \binom{6}{5} (0.5)^5 \cdot 0.5 + \binom{6}{6} (0.5)^6 = 10.9\%$$

□

ہوتا اور ہم قیاس کو نا منظور نہ کرتے۔

مثال 24.32: بلا منصوبہ رجحان کے لئے پرکھ
تار کو کاٹنے کے لئے ایک مشین استعمال کی جاتی ہے۔ لگاتار کئی لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

29 31 28 30 32

اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ مشین تار کو بغیر کسی رجحان کاٹتی ہے، یعنی مشین مسلسل بڑھتی یا مسلسل گھٹتی لمبائی کی تار نہیں کاٹتی ہے۔ فرض کریں کہ مشین کی قسم سے ایسا ظاہر ہوتا ہے کہ یہ مسلسل بڑھتی لمبائی کی تار کاٹے گی (مثبت رجحان)۔

حل: جتنی بار کوئی بڑی قیمت کسی چھوٹی قیمت سے پہلے رونما ہو، ہم ان تبدیلیوں کی تعداد گنتے ہیں۔

29 قیمت 28 قیمت سے پہلے آتی ہے: (1 تبدیلی)

31 کی قیمت 28 اور 30 سے پہلے آتی ہے: (2 تبدیلیاں)

باقی تین قیمتیں بڑھتی رجحان رکھتی ہیں۔ یوں نمونہ میں $1 + 2 = 3$ تبدیلیاں پائی جاتی ہیں۔ ہم اب بلا منصوبہ متغیر

$$T = \text{تعداد تبدیلیاں}$$

پر غور کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو (غیر رجحانی)، تب پانچ اجزاء 1 2 3 4 5 کے $5! = 120$ ترتیبی اجتماعات

نتائج ایک جیسے تھے۔ کیا چھلنی الف زیادہ بہتر ہے؟
جواب: قیاس: الف اور ب ایک جیسی معیار رکھتی ہیں۔ تب 8 کوششوں میں 7 یا 8 بار الف کے حق میں وقوع کا احتمال 3.5 % ہے۔ قیاس کو نا منظور کریں۔

سوال 24.268: کن صورتوں میں ہم پر کھ علامت کو استراری تقسیم کی اوسط پر کھنے کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔

سوال 24.269: پر کھ علامت کو سوال 24.209 کے نمونہ پر لاگو کریں۔
جواب: $P(X \leq 2) = 0.5^6(1 + 6 + 15) = 34\%$ قیاس $\bar{\mu} = 0$ کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.270: اگر $\bar{\mu} = 0$ کی بجائے قیاس $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0$ ہو تب آپ پر کھ علامت کو کس طرح استعمال کریں گے۔ (μ_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔)

سوال 24.271: 16 جسامت کے نمونہ میں 10 مثبت، 4 منفی اور 2 قیمتیں صفر ہیں۔ (ضمیمہ ج کی جدول 5.5 میں درکار قیمتیں نہیں دی گئی ہیں۔ آپ کو یہ قیمتیں حاصل کرنی ہوں گی۔)
جواب: اگر $\bar{\mu} = 0$ ہو، 14 میں سے 4 یا 4 سے کم عدد قیمتیں منفی ہونے کا احتمال 9 % ہے۔ قیاس $\bar{\mu} = 0$ کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.272: $\bar{\mu} = 5$ میٹر لمبائی سلاخ پیدا کرنے کے عمل کے ایک نمونہ میں 4 سلاخوں کی لمبائی ٹھیک ہے، 15 کی لمبائی کم اور 3 کی لمبائی زیادہ ہے۔ کیا اس عمل کو درست کرنے کی ضرورت ہے؟ (عمومی تقسیم کو ثنائی تقسیم کا تخمینہ لیں۔ حصہ 24.10)

سوال 24.273: مسئلہ 24.15 استعمال کیے بغیر سوال 24.272 کو حل کریں۔
جواب: 3 یا اس سے کم سلاخوں کی لمبائی 5 میٹر سے زیادہ ہونے کا ٹھیک احتمال 0.38 % ہے۔ یہ سوال 24.272 میں حاصل تخمینہ احتمال سے کچھ کم ہے۔

سوال 24.274: 10 مریضوں میں سے ہر ایک کو دو مختلف نیند کی دوائیاں دی گئی۔ درج ذیل جدول ان کے اثرات (سونے کے دورانیے میں گھنٹوں میں اضافہ) پیش کرتا ہے۔ پر کھ علامت کی مدد سے دیکھیں کہ آیا ان میں فرق معنی خیز ہے۔

A	1.9	0.8	1.1	0.1	-0.1	4.4	5.5	1.6	4.6	3.4
B	0.7	-1.6	-0.2	-1.2	-0.1	3.4	3.7	0.8	0.0	2.0
فرق	1.2	2.4	1.3	1.3	0.0	1.0	1.8	0.8	4.6	1.4

سوال 24.275: مثال 24.24 میں سمجھائے گئے پرکھ کو سوال 24.274 پر لاگو کریں۔ (سوال میں دیے گئے نمونہ کی آبادی کو عمومی تصور کریں۔)

جواب: قیاس $\mu = 0$ ؛ متبادل $\mu > 0$ ، $\bar{x} = 1.58$ ، $t = \sqrt{10} \cdot \frac{1.58}{1.23} = 4.06 > c = 1.83$ ($\alpha = 5\%$)؛ قیاس نا منظور۔

سوال 24.276: نیچلی چوتھائی q_{25} (جس کی تعریف $F(q_{25}) = 0.25$ ہے) کے لئے پرکھ علامت بنائیں۔

سوال 24.277: 8 قیمتوں کا نمونہ جس میں 7 کی قیمت 20°C سے کم اور 1 کی قیمت 20°C سے زیادہ ہو استعمال کرتے ہوئے خود کار حراری سوئچ ٹھیک 20°C پر مقرر ہونے کے قیاس کو بالمقابل کہ سوئچ کم درجہ حرارت پر مقرر ہے، پرکھیں۔

جواب: $P(X \geq 1) = 0.5^8(1 + 8) = 3.5\% < \alpha = 5\%$ ؛ اس قیاس کو نا منظور کریں کہ سوئچ ٹھیک درجہ حرارت پر مقرر ہے۔

سوال 24.278: وولٹ پیا کی پیمائش درجہ حرارت $T[^\circ\text{C}]$ سے آزاد ہے کے قیاس کو بالمقابل کہ اس کی پیمائش بڑھتے T کے ساتھ بڑھتی ہے پرکھیں۔ مستقل برقی دباؤ مہیا کرتے ہوئے حاصل درج ذیل پیمائشوں کا نمونہ استعمال کریں۔

$T[^\circ\text{C}]$ درجہ حرارت	10	20	30	40	50
$V[\text{V}]$ پیمائش	99.8	101.0	100.4	100.8	101.5

سوال 24.279: $n = 4$ لیتے ہوئے مثال 24.32 میں دی گئی جدول کی طرح جدول بنائیں۔

سوال 24.280: کیا کھاد سے گندم کی استعمال سے پیداوار X [kg/رقبہ] بڑھتی ہے؟ کھاد کی بڑھتی مقدار کے لحاظ سے مرتب درج ذیل نمونہ استعمال کریں۔

15.2 16.8 13.2 16.6 17.2 17.5 17.3 18.1

سوال 24.281: مثال 24.32 کے پرکھ کو درج ذیل نمونہ پر لاگو کریں۔ (اون میں ڈائی سلفائیڈ کی مقدار x جس کو کیمیائی عمل سے ناگزری گئی اوون میں مقدار کے فی صد میں ناپا گیا ہے۔ اون میں پانی کی فی صد مقدار y ہے۔)

x	10	15	30	40	50	55	80	100
y	50	46	43	42	36	39	37	33

24.20 پیمائشوں کی جوڑیاں۔ سیدھے خطوط کو موافق بنانا

ہم اب ایسی تجربات پر غور کرتے ہیں جن میں ہم جوڑی مقدار ناپتے یا ان کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ ہم تجربات کو درج ذیل دو اقسام میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

• تجزیہ باہمی رشتہ¹⁹⁵ میں دونوں متغیرات بلا منصوبہ ہوں گے اور ہم ان کے درمیان رشتہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ (اس کتاب میں شاریات کی اس شاخ پر غور نہیں کی جائے گی۔)

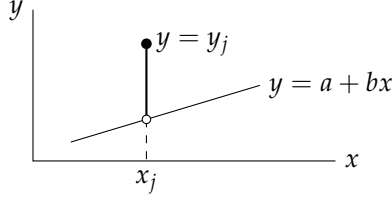
• رجعی تجزیہ¹⁹⁶ میں دو میں سے ایک متغیر، مثلاً x ، کو عام متغیر تصور کیا جاتا ہے، یعنی، اس کی ناپ میں خاطر خواہ خلل نہیں پایا جاتا ہے۔ دوسرا متغیر، y ، بلا منصوبہ متغیر ہے۔ x کو غیر تابع متغیر کہتے ہیں اور ہم جاننا چاہتے ہیں کہ y ، متغیر x کا کتنا تابع ہے؟ اس کی ایک اچھی مثال فشار خون y ہے جو انسان کے عمر x کی تابع ہے، جس کو ہم اب سے x پر y کی رجعت کہیں گے۔

تجربہ کرنے والا پہلے x کی n قیمتیں x_1, \dots, x_n منتخب کرتا ہے اور اس کے بعد ان x پر y کی قیمتیں مشاہدے سے حاصل کرتا ہے۔ یوں اس کو درج ذیل صورت کا نمونہ ملتا ہے۔

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

رجعی تجزیہ میں فرض کیا جاتا ہے کہ y کی اوسط μ ، متغیر x کے تابع ہے، یعنی، ان کے مابین عام تعلق $\mu = \mu(x)$ پایا جاتا ہے۔ $\mu(x)$ کی منحنی کو y کی x پر رجعی منحنی کہتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم سادہ ترین صورت پر غور کرتے ہیں جہاں $\mu(x)$ خطی تفاعل $\mu(x) = \alpha + \beta x$ ہے۔ ہم نمونی قیمتوں کو x مستوی پر ترسیم کر کے، ان پر سیدھی خط بٹھا کر، اس خط کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی x کے لحاظ سے $\mu(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کرنا چاہیں گے تاکہ کسی بھی x سے حاصل y کی متوقع قیمت ہم جان سکیں۔ اگر نقطے بکھرے ہوں تب، خط کو آنکھ کی مدد سے ٹھیک بٹھانا غیر یقینی ہو گا لہذا ہمیں حسابی طریقہ درکار ہو گا جو صرف نقطوں پر منحصر یکتا نتیجہ دے۔ ایک بہت زیادہ استعمال ہونے والی ترکیب، جس کو گاوس نے بنایا، کمتر مربعوں کی ترکیب¹⁹⁷ کہلاتی ہے۔ ہمارے موجودہ ضرورت کو مد نظر رکھتے ہوئے اس کو درج ذیل بیان کیا جاسکتا ہے۔

¹⁹⁵ correlation analysis¹⁹⁶ regression analysis¹⁹⁷ method of least squares



شکل 24.31: نقطہ (x_j, y_j) سے سیدھے خط $y = a + bx$ کا انتصابی فاصلہ

نقطوں پر سیدھا خط یوں بٹھایا جائے کہ نقطوں کا سیدھی لکیر سے فاصلوں کا مربع کم سے کم ہو، جہاں نقطہ اور سیدھی لکیر کے مابین فاصلہ انتصابی رخ y محور کے متوازی) ناپا جاتا ہے۔

مفروضہ (الف)

نمونہ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ میں تمام x قیمتیں x_1, \dots, x_n ایک جیسی نہیں ہیں۔

جسامت n کے نمونہ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ پر غور کریں۔ نمونی قیمت (x_j, y_j) کی سیدھی لکیر $y = a + bx$ سے انتصابی رخ فاصلہ y محور کے متوازی ناپا گیا فاصلہ $|y_j - a - bx_j|$ ہو گا (شکل 24.31)۔ یوں ان فاصلوں کے مربع کا مجموعہ

$$q = \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2 \quad (24.156)$$

ہو گا۔ کمتر مربعوں کی ترکیب میں ہم a اور b یوں منتخب کرتے ہیں کہ q کی قیمت کم سے کم حاصل ہو۔ q کی قیمت a اور b پر منحصر ہے اور اس کی کم سے کم قیمت درج ذیل لازمی شرائط سے حاصل ہوگی۔

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0 \quad (24.157)$$

ہم دیکھیں گے کہ ان شرائط سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے

$$y - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \quad (24.158)$$

جہاں

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \quad \text{اور} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n) \quad (24.159)$$

ہیں۔ مساوات 24.157 کو نمونے کی y قیمتوں کا نمونے کی x قیمتوں پر رجعی خط¹⁹⁸ کہتے ہیں۔ اس کی ڈھلوان b کو x پر y کا تجزی عددی سر¹⁹⁹ کہتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ

$$(24.160) \quad b = \frac{s_{xy}}{s_1^2}$$

ہو گا جہاں

$$(24.161) \quad s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right]$$

اور

$$(24.162) \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n x_j y_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) \right]$$

ہوں گے۔ s_{xy} کو نمونے کی باہمی تغیریت²⁰⁰ کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ مساوات 24.158 میں دیا گیا رجعی خط نقطہ (\bar{x}, \bar{y}) سے گزرے گا۔

مساوات 24.158 کو حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 24.156 اور مساوات 24.157 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial a} &= -2 \sum (y_j - a - bx_j) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial b} &= -2 \sum x_j (y_j - a - bx_j) = 0 \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے (جہاں j پر 1 تا n مجموعے لیے جاتے ہیں)۔ یوں

$$\begin{aligned} na + b \sum x_j &= \sum y_j \\ a \sum x_j + b \sum x_j^2 &= \sum x_j y_j \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ مفروضہ -الف کے تحت خطی مساوات کے نظام (مساوات 24.161)

$$n \sum x_j^2 - \left(\sum x_j \right)^2 = n(n-1)s_1^2$$

regression line¹⁹⁸

regression coefficient¹⁹⁹

covariance²⁰⁰

جدول 24.16: چمڑے کی حجم میں کمی [%] کا دباؤ x پر رجعت

دی گئی قیمتیں		معاون قیمتیں	
x_j	y_j	x_j^2	$x_j y_j$
4000	2.3	16 000 000	9200
6000	4.1	36 000 000	24 600
8000	5.7	64 000 000	45 600
10 000	6.9	100 000 000	69 000
28 000	19.0	216 000 000	148 400

کا مقطع غیر صفر ہو گا اور اس نظام کا یکتا حل (مساوات 24.159، مساوات 24.161، مساوات 24.162)

$$(24.163) \quad a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad b = \frac{n \sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{n(n-1)s_1^2}$$

پایا جائے گا۔ اس سے مساوات 24.158 حاصل ہوتا ہے جس میں b کی قیمت مساوات 24.160 تا مساوات 24.162 دیتے ہیں۔ (s_1^2) کے دو تعلقات کا ایک جیسا ہونے کو آپ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.294)؛ اسی طرح s_{xy} کے لئے بھی آپ کر سکتے ہیں)

ہاتھ سے نتائج حاصل کرنے کو آسان بنانے کی خاطر ہم

$$(24.164) \quad x_j = c_1 x_j^* + l_1, \quad y_j = c_2 y_j^* + l_2$$

استعمال کرتے ہیں جن میں c_1 ، c_2 ، l_1 ، l_2 یوں منتخب کیے جاتے ہیں کہ متبادل قیمتیں x_j^* ، y_j^* سادہ ترین ہوں۔ ہم متبادل قیمتیں استعمال کرتے ہوئے \bar{x}^* ، \bar{y}^* ، s_1^{*2} ، s_{xy}^* بذریعہ حساب تلاش کرنے کے بعد درج ذیل تلاش کرتے ہیں۔

$$(24.165) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= c_1 \bar{x}^* + l_1, & \bar{y} &= c_2 \bar{y}^* + l_2 \\ s_1^2 &= c_1^2 s_1^{*2}, & s_{xy} &= c_1 c_2 s_{xy}^* \end{aligned}$$

مثال 24.33: رجعی خط

ایک مخصوص چمڑے کی حجم میں فی صد کمی y بالمتقابل مقررہ دباؤ x ناپے گئے۔ کرہ ہوائی کے دباؤ کو دباؤ کی اکائی لی گئی ہے۔ نتائج جدول 24.16 میں پیش کیے گئے ہیں۔ y کا x پر رجعی خط تلاش کریں۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $n = 4$ ہے اور $\bar{x} = \frac{28000}{4} = 7000$ ، $\bar{y} = \frac{19.0}{4} = 4.75$ ،

$$s_1^2 = \frac{1}{3} \left(216\,000\,000 - \frac{28\,000^2}{4} \right) = \frac{20\,000\,000}{3}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{3} \left(148\,400 - \frac{28\,000 \cdot 19}{4} \right) = \frac{15\,400}{3}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $b = \frac{15\,400}{20\,000\,000} = 0.000\,777$ ہو گا اور رجعی خط درج ذیل ہو گا۔

$$y - 4.75 = 0.000\,77(x - 7000) \implies y = 0.000\,77x - 0.64$$

□

ہم درج ذیل دو مفروضے فرض کرتے ہیں۔

مفروضہ (ب)

ہر مقررہ x کے لئے بلا منصوبہ متغیر Y عمومی ہے جس کی اوسط

(24.166)

$$\mu(x) = \alpha + \beta x$$

اور تغیریت σ^2 ہے جہاں تغیریت x کا تابع نہیں ہے۔

مفروضہ (پ)

نمونہ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ لینے کے لئے n مرتبہ تجربات غیر تابع طریقے سے سرانجام دیے گئے۔

زیر مفروضہ الف تا پ دکھایا جاسکتا ہے کہ β کا زیادہ سے زیادہ امکانی اندازہ مساوات 24.160 میں دیا گیا رجعی عددی سر b ہو گا۔ اسی لئے β کو آبادی کا رجعی عددی سر²⁰¹ کہتے ہیں۔

زیر مفروضہ الف تا پ، جیسا جدول 24.17 میں دکھایا گیا ہے، ہم β کا وقفہ اعتماد حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 24.34: رجعی عددی سر کا وقفہ اعتماد

جدول 24.16 میں دی گئی نمونی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے جدول 24.17 میں دی گئی ترکیب سے β کا وقفہ اعتماد

²⁰¹ regression coefficient

جدول 24.17: زیر مفروضہ الف تاپ مساوات 24.166 میں دیے گئے β کا وقفہ اعتماد

<p>پہلا قدم: سطح اعتماد γ (95%، 99% وغیرہ) منتخب کریں۔ دوسرا قدم: $n - 2$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ چکی جدول 10. جسے درج ذیل مساوات کا حل c تلاش کریں۔ (نمونہ جسامت $n =$)</p>	$F(c) = \frac{1}{2}(1 + \gamma) \quad (24.167)$
<p>تیسرا قدم: نمونہ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.161 سے s_1^2، مساوات 24.162 سے s_{xy}، مساوات 24.160 سے b،</p>	$(n-1)s_2^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)^2 \quad (24.168)$
<p>اور</p>	$q_0 = (n-1)(s_2^2 - b^2 s_1^2) \quad (24.169)$
<p>حاصل کریں۔ چوتھا قدم: $k = c \sqrt{\frac{q_0}{(n-2)(n-1)s_1^2}}$ کو بذریعہ حساب حاصل کریں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہوگا۔</p>	$\{b - k \leq \beta \leq b + k\} \quad (24.170)$

تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ہم $\gamma = 0.95$ منتخب کرتے ہیں۔

دوسرا قدم: مساوات 24.167 کو $F(c) = 0.975$ لکھ سکتے ہیں۔ ضمیمہ ج کی جدول 10 ج سے $n - 2 = 2$ درجہ آزادی کے لئے $c = 4.30$ حاصل ہوتا ہے۔

تیسرا قدم: مثال 24.33 ہمیں $3s_1^2 = 20\,000\,000$ اور $b = 0.000\,77$ دیتی ہے۔ جدول 24.16 سے ہم درج ذیل بذریعہ حساب حاصل کرتے ہیں۔

$$3s_2^2 = 102.2 - \frac{19^2}{4} = 11.95, \quad q_0 = 11.95 - 20\,000\,000 \cdot 0.000\,77^2 = 0.092$$

چوتھا قدم: یوں $k = 4.30 \sqrt{\frac{0.092}{2 \cdot 20\,000\,000}} = 0.000\,206$ حاصل ہو گا لہذا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\{0.000\,56 \leq \beta \leq 0.000\,98\}$$

□

سوالات

سوال 24.282: آنکھ سے سیدھا خط تلاش کریں۔ ایک گاڑی 35 km h^{-1} کی رفتار سے چل رہی ہے جبکہ گاڑی کی (کلو میٹر فی گھنٹہ) رفتار x بالمقابل (میٹروں میں) رکنے کے لئے درکار فاصلہ y درج ذیل ہے۔

x	20	30	40	50
y	50	95	150	210

جواب: تقریباً 120 m

سوال 24.283: $x_j = 2000x_j^* + 4000$ اور $y_j = 0.1y_j^* + 5$ لیتے ہوئے مثال 24.33 کے نتائج حاصل کریں۔

سوال 24.284: ایسا نمونہ حاصل کریں جس کے لئے $b = 0$ ہو۔

سوال 24.285 تا سوال 24.289 میں x پر y کی نمونی رجعی خط ترسیم کریں۔

سوال 24.285: سوال 24.281 کا نمونہ استعمال کریں۔

سوال 24.286: $(1, 1), (2, 1.7), (3, 3)$
جواب: $y = x - 0.1$

سوال 24.287: ڈیزل انجن کی درج ذیل زاویائی رفتار x (فی منٹ چکر) بالمقابل طاقت y (کلو واٹ)

x	400	500	600	700	750
y	580	1030	1420	1880	2100

سوال 24.288: ایک مخصوص فولاد کی بد شکلی x [mm] اور برینل سختی y [kg mm⁻²]²⁰²

x	6	9	11	13	22	26	28	33	35
y	68	67	65	53	44	40	37	34	32

جواب: $y - 48.89 = -1.32(x - 20.33)$

سوال 24.289: کلورانیفتھالین کا گاڑھاپن x [%] اور دیکم کی اموات y [%]

x	0.04	0.15	0.30	1.00	2.00
y	3	16	13	70	90

زیر مفروضہ ب اور پ، سوال 24.290 تا سوال 24.295 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے، رجعی عددی سر β کا 95 % وقفہ اعتماد تلاش کریں۔

سوال 24.290: $(1, 1), (2, 2 + a), (3, 3)$ جہاں a مستقل ہے۔
جواب: $2s_1^2 = 2, 2s_{xy} = 2, b = 1, 2s_2^2 = 2 + \frac{2}{3}p^2, q_0 = \frac{2}{3}p^2$
 $k = \frac{12.7a}{\sqrt{3}} = 7.3a$ ($\gamma = 95\%$) اعتماد، $\{1 - 7.3a \leq \beta \leq 1 + 7.3a\}$

سوال 24.291: سوال 24.287 کا نمونہ۔

24.20. پیسٹشوں کی جوڑیاں۔ سیدھے خطوط کو موافق بنانا

سوال 24.292: سوال 24.288 کا نمونہ۔

جواب: $\{-1.58 \leq \beta \leq -1.06\}$ اعتماد $k = 2.37 \sqrt{\frac{76}{7.944}} = 0.254, q_0 = 76$

سوال 24.293: ہوا میں نمی کا تناسب x [%] بالمتقابل جیلی نمادہ کا پھیل y [%]

x	10	20	30	40
y	0.8	1.6	2.3	2.8

سوال 24.294: مساوات 24.161 میں ایک ہاتھ سے دوسرا ہاتھ حاصل کریں۔ اشارہ۔ مربع لے کر \bar{x} کی تعریف پر کرتے ہوئے سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 24.295: مساوات 24.162 میں دائیں ہاتھ کو بائیں ہاتھ سے حاصل کریں۔

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

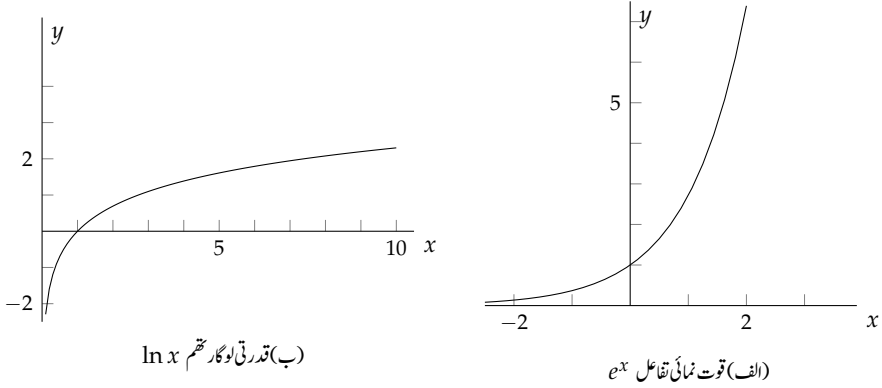
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

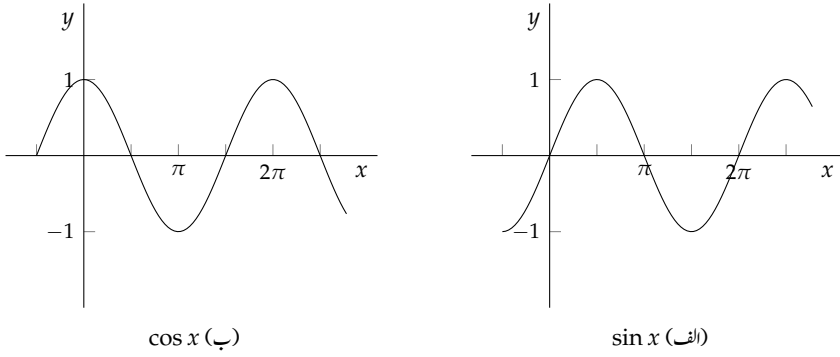
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

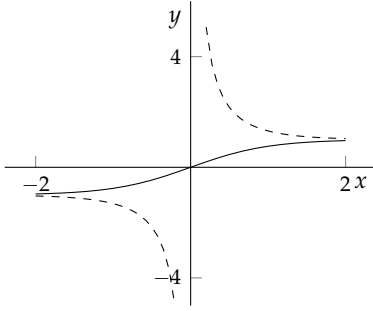
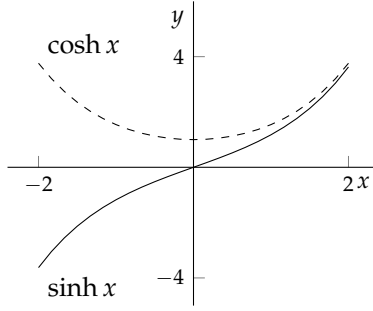
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

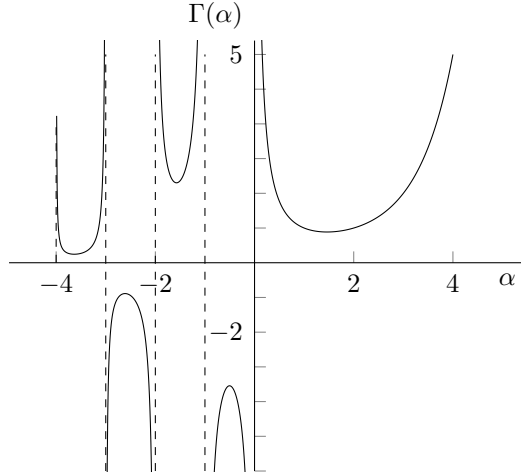
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

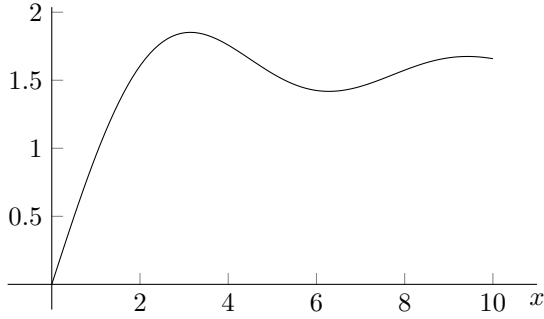
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

ضمیمہ ج

جدول

$J_0(x)$ کے صفر $x = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, \dots$ پر پائے جاتے ہیں۔
 $J_1(x)$ کے صفر $x = 0, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \dots$ پر پائے جاتے ہیں۔

جدول 1. ج: بیسل تفاعل (قسم اول)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0	1.0000	0.0000	3.4	-0.3643	0.1792	6.8	0.2931	-0.0652
0.1	0.9975	0.0499	3.5	-0.3801	0.1374	6.9	0.2981	-0.0349
0.2	0.9900	0.0995	3.6	-0.3918	0.0955	7	0.3001	-0.0047
0.3	0.9776	0.1483	3.7	-0.3992	0.0538	7.1	0.2991	0.0252
0.4	0.9604	0.1960	3.8	-0.4026	0.0128	7.2	0.2951	0.0543
0.5	0.9385	0.2423	3.9	-0.4018	-0.0272	7.3	0.2882	0.0826
0.6	0.9120	0.2867	4	-0.3971	-0.0660	7.4	0.2786	0.1096
0.7	0.8812	0.3290	4.1	-0.3887	-0.1033	7.5	0.2663	0.1352
0.8	0.8463	0.3688	4.2	-0.3766	-0.1386	7.6	0.2516	0.1592
0.9	0.8075	0.4059	4.3	-0.3610	-0.1719	7.7	0.2346	0.1813
1.0	0.7652	0.4401	4.4	-0.3423	-0.2028	7.8	0.2154	0.2014
1.1	0.7196	0.4709	4.5	-0.3205	-0.2311	7.9	0.1944	0.2192
1.2	0.6711	0.4983	4.6	-0.2961	-0.2566	8	0.1717	0.2346
1.3	0.6201	0.5220	4.7	-0.2693	-0.2791	8.1	0.1475	0.2476
1.4	0.5669	0.5419	4.8	-0.2404	-0.2985	8.2	0.1222	0.2580
1.5	0.5118	0.5579	4.9	-0.2097	-0.3147	8.3	0.0960	0.2657
1.6	0.4554	0.5699	5	-0.1776	-0.3276	8.4	0.0692	0.2708
1.7	0.3980	0.5778	5.1	-0.1443	-0.3371	8.5	0.0419	0.2731
1.8	0.3400	0.5815	5.2	-0.1103	-0.3432	8.6	0.0146	0.2728
1.9	0.2818	0.5812	5.3	-0.0758	-0.3460	8.7	-0.0125	0.2697
2	0.2239	0.5767	5.4	-0.0412	-0.3453	8.8	-0.0392	0.2641
2.1	0.1666	0.5683	5.5	-0.0068	-0.3414	8.9	-0.0653	0.2559
2.2	0.1104	0.5560	5.6	0.0270	-0.3343	9	-0.0903	0.2453
2.3	0.0555	0.5399	5.7	0.0599	-0.3241	9.1	-0.1142	0.2324
2.4	0.0025	0.5202	5.8	0.0917	-0.3110	9.2	-0.1367	0.2174
2.5	-0.0484	0.4971	5.9	0.1220	-0.2951	9.3	-0.1577	0.2004
2.6	-0.0968	0.4708	6	0.1506	-0.2767	9.4	-0.1768	0.1816
2.7	-0.1424	0.4416	6.1	0.1773	-0.2559	9.5	-0.1939	0.1613
2.8	-0.1850	0.4097	6.2	0.2017	-0.2329	9.6	-0.2090	0.1395
2.9	-0.2243	0.3754	6.3	0.2238	-0.2081	9.7	-0.2218	0.1166
3	-0.2601	0.3391	6.4	0.2433	-0.1816	9.8	-0.2323	0.0928
3.1	-0.2921	0.3009	6.5	0.2601	-0.1538	10.8	-0.2032	-0.1422
3.2	-0.3202	0.2613	6.6	0.2740	-0.1250	11.8	0.0020	-0.2323
3.3	-0.3443	0.2207	6.7	0.2851	-0.0953	12.8	0.1887	-0.1114

جدول 2. ج: بیسل تفاعل (قسم دوم)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5	-0.309	0.148
0.5	-0.445	-1.471	3	0.377	0.325	5.5	-0.339	-0.024
1	0.088	-0.781	3.5	0.189	0.410	6	-0.288	-0.175
1.5	0.382	-0.412	4	-0.017	0.398	6.5	-0.173	-0.274
2	0.510	-0.107	4.5	-0.195	0.301	7	-0.026	-0.303

جدول 3. ج: گیماتفاعل

α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$
1	1.000 000	1.22	0.913 106	1.44	0.885 805	1.66	0.901 668	1.88	0.955 071
1.02	0.988 844	1.24	0.908 521	1.46	0.885 604	1.68	0.905 001	1.9	0.961 766
1.04	0.978 438	1.26	0.904 397	1.48	0.885 747	1.7	0.908 639	1.92	0.968 774
1.06	0.968 744	1.28	0.900 718	1.5	0.886 227	1.72	0.912 581	1.94	0.976 099
1.08	0.959 725	1.3	0.897 471	1.52	0.887 039	1.74	0.916 826	1.96	0.983 743
1.10	0.951 351	1.32	0.894 640	1.54	0.888 178	1.76	0.921 375	1.98	0.991 708
1.12	0.943 590	1.34	0.892 216	1.56	0.889 639	1.78	0.926 227	2	1.000 000
1.14	0.936 416	1.36	0.890 185	1.58	0.891 420	1.8	0.931 384	2.02	1.008 621
1.16	0.929 803	1.38	0.888 537	1.6	0.893 515	1.82	0.936 845	2.04	1.017 576
1.18	0.923 728	1.4	0.887 264	1.62	0.895 924	1.84	0.942 612	2.06	1.026 868
1.2	0.918 169	1.42	0.886 356	1.64	0.898 642	1.86	0.948 687	2.08	1.036 503

جدول 4. ج: فیکتوریل تفاعل

n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$
1	1	0.000 000	6	720	2.857 332	11	39 916 800	7.601 156
2	2	0.301 030	7	5040	3.702 431	12	479 001 600	8.680 337
3	6	0.778 151	8	40 320	4.605 521	13	6 227 020 800	9.794 280
4	24	1.380 211	9	362 880	5.559 763	14	87 178 291 200	10.940 408
5	120	2.079 181	10	3 628 800	6.559 763	15	1 307 674 368 000	12.116 500

جدول 5.5: ثنائی تقسیم۔ تقاضا احتمال $f(x)$ اور تقاضا تقسیم $F(x)$

n	x	$p = 0.1$		$p = 0.2$		$p = 0.3$		$p = 0.4$		$p = 0.5$	
		$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
1	0	0.9000	0.9000	0.8000	0.8000	0.7000	0.7000	0.6000	0.6000	0.5000	0.5000
	1	0.1000	1.0000	0.2000	1.0000	0.3000	1.0000	0.4000	1.0000	0.5000	1.0000
2	0	0.8100	0.8100	0.6400	0.6400	0.4900	0.4900	0.3600	0.3600	0.2500	0.2500
	1	0.1800	0.9900	0.3200	0.9600	0.4200	0.9100	0.4800	0.8400	0.5000	0.7500
	2	0.0100	1.0000	0.0400	1.0000	0.0900	1.0000	0.1600	1.0000	0.2500	1.0000
3	0	0.7290	0.7290	0.5120	0.5120	0.3430	0.3430	0.2160	0.2160	0.1250	0.1250
	1	0.2430	0.9720	0.3840	0.8960	0.4410	0.7840	0.4320	0.6480	0.3750	0.5000
	2	0.0270	0.9990	0.0960	0.9920	0.1890	0.9730	0.2880	0.9360	0.3750	0.8750
	3	0.0010	1.0000	0.0080	1.0000	0.0270	1.0000	0.0640	1.0000	0.1250	1.0000
4	0	0.6561	0.6561	0.4096	0.4096	0.2401	0.2401	0.1296	0.1296	0.0625	0.0625
	1	0.2916	0.9477	0.4096	0.8192	0.4116	0.6517	0.3456	0.4752	0.2500	0.3125
	2	0.0486	0.9963	0.1536	0.9728	0.2646	0.9163	0.3456	0.8208	0.3750	0.6875
	3	0.0036	0.9999	0.0256	0.9984	0.0756	0.9919	0.1536	0.9744	0.2500	0.9375
	4	0.0001	1.0000	0.0016	1.0000	0.0081	1.0000	0.0256	1.0000	0.0625	1.0000
5	0	0.5905	0.5905	0.3277	0.3277	0.1681	0.1681	0.0778	0.0778	0.0313	0.0313
	1	0.3281	0.9185	0.4096	0.7373	0.3602	0.5282	0.2592	0.3370	0.1563	0.1875
	2	0.0729	0.9914	0.2048	0.9421	0.3087	0.8369	0.3456	0.6826	0.3125	0.5000
	3	0.0081	0.9995	0.0512	0.9933	0.1323	0.9692	0.2304	0.9130	0.3125	0.8125
	4	0.0005	1.0000	0.0064	0.9997	0.0284	0.9976	0.0768	0.9898	0.1563	0.9688
	5	0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0024	1.0000	0.0102	1.0000	0.0313	1.0000
6	0	0.5314	0.5314	0.2621	0.2621	0.1176	0.1176	0.0467	0.0467	0.0156	0.0156
	1	0.3543	0.8857	0.3932	0.6554	0.3025	0.4202	0.1866	0.2333	0.0938	0.1094
	2	0.0984	0.9842	0.2458	0.9011	0.3241	0.7443	0.3110	0.5443	0.2344	0.3438
	3	0.0146	0.9987	0.0819	0.9830	0.1852	0.9295	0.2765	0.8208	0.3125	0.6563
	4	0.0012	0.9999	0.0154	0.9984	0.0595	0.9891	0.1382	0.9590	0.2344	0.8906
	5	0.0001	1.0000	0.0015	0.9999	0.0102	0.9993	0.0369	0.9959	0.0938	0.9844
	6	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0041	1.0000	0.0156	1.0000
7	0	0.4783	0.4783	0.2097	0.2097	0.0824	0.0824	0.0280	0.0280	0.0078	0.0078
	1	0.3720	0.8503	0.3670	0.5767	0.2471	0.3294	0.1306	0.1586	0.0547	0.0625
	2	0.1240	0.9743	0.2753	0.8520	0.3177	0.6471	0.2613	0.4199	0.1641	0.2266
	3	0.0230	0.9973	0.1147	0.9667	0.2269	0.8740	0.2903	0.7102	0.2734	0.5000
	4	0.0026	0.9998	0.0287	0.9953	0.0972	0.9712	0.1935	0.9037	0.2734	0.7734
	5	0.0002	1.0000	0.0043	0.9996	0.0250	0.9962	0.0774	0.9812	0.1641	0.9375
	6	0.0000	1.0000	0.0004	1.0000	0.0036	0.9998	0.0172	0.9984	0.0547	0.9922
	7	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0002	1.0000	0.0016	1.0000	0.0078	1.0000
8	0	0.4305	0.4305	0.1678	0.1678	0.0576	0.0576	0.0168	0.0168	0.0039	0.0039
	1	0.3826	0.8131	0.3355	0.5033	0.1977	0.2553	0.0896	0.1064	0.0313	0.0352
	2	0.1488	0.9619	0.2936	0.7969	0.2965	0.5518	0.2090	0.3154	0.1094	0.1445
	3	0.0331	0.9950	0.1468	0.9437	0.2541	0.8059	0.2787	0.5941	0.2188	0.3633
	4	0.0046	0.9996	0.0459	0.9896	0.1361	0.9420	0.2322	0.8263	0.2734	0.6367
	5	0.0004	1.0000	0.0092	0.9988	0.0467	0.9887	0.1239	0.9502	0.2188	0.8555
	6	0.0000	1.0000	0.0011	0.9999	0.0100	0.9987	0.0413	0.9915	0.1094	0.9648
	7	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0012	0.9999	0.0079	0.9993	0.0313	0.9961
	8	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0039	1.0000

جدول 6.ج: پوسن تقسیم۔ تفاعل احتمال $f(x)$ اور تفاعل تقسیم $F(x)$

x	$\mu = 0.1$		$\mu = 0.2$		$\mu = 0.3$		$\mu = 0.4$		$\mu = 0.5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.9048	0.9048	0.8187	0.8187	0.7408	0.7408	0.6703	0.6703	0.6065	0.6065
1	0.0905	0.9953	0.1637	0.9825	0.2222	0.9631	0.2681	0.9384	0.3033	0.9098
2	0.0045	0.9998	0.0164	0.9989	0.0333	0.9964	0.0536	0.9921	0.0758	0.9856
3	0.0002	1.0000	0.0011	0.9999	0.0033	0.9997	0.0072	0.9992	0.0126	0.9982
4	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0007	0.9999	0.0016	0.9998
5							0.0001	1.0000	0.0002	1.0000

x	$\mu = 0.6$		$\mu = 0.7$		$\mu = 0.8$		$\mu = 0.9$		$\mu = 1$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.5488	0.5488	0.4966	0.4966	0.4493	0.4493	0.4066	0.4066	0.3679	0.3679
1	0.3293	0.8781	0.3476	0.8442	0.3595	0.8088	0.3659	0.7725	0.3679	0.7358
2	0.0988	0.9769	0.1217	0.9659	0.1438	0.9526	0.1647	0.9371	0.1839	0.9197
3	0.0198	0.9966	0.0284	0.9942	0.0383	0.9909	0.0494	0.9865	0.0613	0.9810
4	0.0030	0.9996	0.0050	0.9992	0.0077	0.9986	0.0111	0.9977	0.0153	0.9963
5	0.0004	1.0000	0.0007	0.9999	0.0012	0.9998	0.0020	0.9997	0.0031	0.9994
6			0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0003	1.0000	0.0005	0.9999
7									0.0001	1.0000

[illegible]

جدول 7. ج: عمومی تقسیم-تفاعل تقسیم $\Phi(z)$: $[\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \Phi(0) = 0.5000]$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.01	0.9778	2.51	0.9940
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.02	0.9783	2.52	0.9941
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.03	0.9788	2.53	0.9943
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.04	0.9793	2.54	0.9945
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.05	0.9798	2.55	0.9946
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.06	0.9803	2.56	0.9948
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.07	0.9808	2.57	0.9949
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.08	0.9812	2.58	0.9951
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.09	0.9817	2.59	0.9952
0.10	0.5398	0.6	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	2.1	0.9821	2.60	0.9953
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	2.11	0.9826	2.61	0.9955
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	2.12	0.9830	2.62	0.9956
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	2.13	0.9834	2.63	0.9957
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	2.14	0.9838	2.64	0.9959
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	2.15	0.9842	2.65	0.9960
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	2.16	0.9846	2.66	0.9961
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	2.17	0.9850	2.67	0.9962
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	2.18	0.9854	2.68	0.9963
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	2.19	0.9857	2.69	0.9964
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.7	0.9554	2.20	0.9861	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	2.21	0.9864	2.71	0.9966
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	2.22	0.9868	2.72	0.9967
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	2.23	0.9871	2.73	0.9968
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	2.24	0.9875	2.74	0.9969
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	2.25	0.9878	2.75	0.9970
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	2.26	0.9881	2.76	0.9971
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	2.27	0.9884	2.77	0.9972
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	2.28	0.9887	2.78	0.9973
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	2.29	0.9890	2.79	0.9974
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	2.30	0.9893	2.80	0.9974
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649	2.31	0.9896	2.81	0.9975
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656	2.32	0.9898	2.82	0.9976
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664	2.33	0.9901	2.83	0.9977
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671	2.34	0.9904	2.84	0.9977
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678	2.35	0.9906	2.85	0.9978
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686	2.36	0.9909	2.86	0.9979
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693	2.37	0.9911	2.87	0.9979
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699	2.38	0.9913	2.88	0.9980
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706	2.39	0.9916	2.89	0.9981
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713	2.4	0.9918	2.90	0.9981
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719	2.41	0.9920	2.91	0.9982
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726	2.42	0.9922	2.92	0.9982
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732	2.43	0.9925	2.93	0.9983
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738	2.44	0.9927	2.94	0.9984
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744	2.45	0.9929	2.95	0.9984
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750	2.46	0.9931	2.96	0.9985
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756	2.47	0.9932	2.97	0.9985
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761	2.48	0.9934	2.98	0.9986
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767	2.49	0.9936	2.99	0.9986
0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772	2.50	0.9938	3.00	0.9987

جدول 8. ج: عمومی تقسیم

%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
1	-2.326	0.013	41	-0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	-2.054	0.025	42	-0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	-1.881	0.038	43	-0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	-1.751	0.050	44	-0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	-1.645	0.063	45	-0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	-1.555	0.075	46	-0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	-1.476	0.088	47	-0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	-1.405	0.100	48	-0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	-1.341	0.113	49	-0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	-1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	-1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	-1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	-1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	-1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	-1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	-0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	-0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	-0.915	0.228	58	0.202	0.806	97.5	1.960	2.241
19	-0.878	0.240	59	0.228	0.824	98	2.054	2.326
20	-0.842	0.253	60	0.253	0.842	99	2.326	2.576
21	-0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	-0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	-0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	-0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	-0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	-0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	-0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	-0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	-0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	-0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	-0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	-0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	-0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	-0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	-0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	-0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	-0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	-0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	-0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	-0.253	0.524	80	0.842	1.282			

جدول 9 ج: بلا منصوبہ اعداد

شمار صف	شمار قطار									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	87331	82442	28104	26432	83640	17323	68764	84728	37995	96106
1	33628	17364	01409	87803	65641	33433	48944	64299	79066	31777
2	54680	13427	72496	16967	16195	96593	55040	53729	62035	66717
3	51199	49794	49407	10774	98140	83891	37195	24066	61140	65144
4	78702	98067	61313	91661	59861	54437	77739	19892	54817	88645
5	55672	16014	24892	13089	00410	81458	76156	28189	40595	21500
6	18880	58497	03862	32368	59320	24807	63392	79793	63043	09425
7	10242	62548	62330	05703	33535	49128	66298	16193	55301	01306
8	54993	17182	94618	23228	83895	73251	68199	64639	83178	70521
9	22686	50885	16006	04041	08077	33065	35237	05502	94755	72062
10	42349	03145	15770	70665	53291	32288	41568	66079	98705	31029
11	18093	09553	39428	75464	71329	86344	80729	40916	18860	51780
12	11535	03924	84252	74795	40193	84597	42497	21918	91384	84721
13	35066	73848	65351	53270	63341	70177	92373	17604	42204	60476
14	57477	22809	73558	96182	96779	01604	25748	59553	64876	94611
15	48647	33850	52956	45410	88212	05120	99391	32276	55961	41775
16	86857	81154	22223	74950	53296	67767	55866	49361	66937	81818
17	20182	36907	94644	99122	09774	29189	27212	79000	50217	71077
18	83687	31231	01133	41432	54542	60204	81618	09586	34481	87683
19	81315	12390	46074	47810	90171	36313	95440	77583	28506	38808
20	87026	52826	58341	76549	04105	66191	12914	55348	07907	06978
21	34301	76733	07251	90524	21931	83695	41340	53581	64582	60210
22	70734	24337	32674	49508	49751	90489	63202	24380	77943	09942
23	94710	31527	73445	32839	68176	53580	85250	53243	03350	00128
24	76462	16987	07775	43162	11777	16810	75158	13894	88945	15539
25	14348	28403	79245	69023	64196	46398	05964	64715	11330	17515
26	74618	89317	30146	25606	94507	98104	04239	44973	37636	88866
27	99442	19200	85406	45358	86253	60638	38858	44964	54103	57287
28	26869	44399	89452	06652	31271	00647	46551	83050	92058	83814
29	80988	08149	50499	98584	28385	63680	44638	91864	96002	87802
30	07511	79047	89289	17774	67194	37362	85684	55505	97809	67056
31	49779	12138	05048	03535	27502	63308	10218	53296	48687	61340
32	47938	55945	24003	19635	17471	65997	85906	98694	56420	78357
33	15604	06626	14360	79442	13512	87595	08542	03800	35443	52823
34	12307	27726	21864	00045	16075	03770	86978	52718	02693	09096
35	02450	28053	66134	99445	91316	25727	89399	85272	67148	78358
36	57623	54382	35236	89244	27245	90500	75430	96762	71968	65838
37	91762	78849	93105	40481	99431	03304	21079	86459	21287	76566
38	87373	31137	31428	67050	64309	44914	80711	61738	61498	24288
39	67094	41485	54149	86088	10192	21174	39948	67286	29938	32476
40	94456	66767	76922	87627	71834	57688	04878	78348	68970	60048
41	68359	75292	27710	86889	81678	79798	58360	39175	75667	65782
42	52393	31404	32584	06837	79762	13168	76055	54833	22841	98889
43	59565	91254	11847	20672	37625	41454	86861	55824	79793	74575
44	48185	11066	20162	38230	16043	48409	47421	21195	98008	57305
45	19230	12187	86659	12971	52204	76546	63272	19312	81662	96557
46	84327	21942	81727	68735	89190	58491	55329	96875	19465	89687
47	77430	71210	00591	50124	12030	50280	12358	76174	48353	09862
48	12462	19108	70512	53926	25595	97085	03833	59806	12351	64253
49	11684	06644	57816	10078	45021	47751	38285	773520	08434	65627

شمار صف	شمار تظار									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	12896	36576	68686	08462	65652	76571	70891	09007	04581	01684
51	59090	05111	27587	90349	30789	50304	70650	06646	70126	15284
52	42486	67483	65282	19037	80588	73076	41820	46651	40442	40718
53	88662	03928	03249	85910	97533	88643	29829	21557	47328	36724
54	69403	03626	92678	59460	15465	83516	54012	80509	55976	46115
55	56434	70543	38696	98502	32092	95505	62091	39549	30117	98209
56	58227	62694	42837	29183	11393	68463	25150	86338	95620	39836
57	41272	94927	15413	40505	33123	63218	72940	98349	57249	40170
58	36819	01162	30425	15546	16065	68459	35776	64276	92868	07372
59	31700	66711	26115	55755	33584	18091	38709	57276	74660	90392
60	69855	63699	36839	90531	97125	87875	62824	03889	12538	24740
61	44322	17569	45439	41455	34324	90902	07978	26268	04279	76816
62	62226	36661	87011	66267	78777	78044	40819	49496	39814	73867
63	27284	19737	98741	72531	52741	26699	98755	19657	08665	16818
64	88341	21652	94743	77268	79525	44769	66583	30621	90534	62050
65	53266	18783	51903	56711	38060	69513	61963	80470	88018	86510
66	50527	49330	24839	42529	03944	95219	88724	37247	84116	23023
67	15655	07852	77206	35944	71446	30573	19405	57824	23576	23301
68	62057	22206	03314	83465	57466	10465	19891	32308	01900	67484
69	41769	56091	19892	96253	92808	45785	52774	49674	68103	65032
70	25993	72416	44473	41299	93095	17338	69802	98548	02429	85238
71	22842	57871	04470	37373	34516	04042	04078	35336	34393	97573
72	55704	31982	05234	22664	22181	40358	28089	15790	33340	18852
73	94258	18706	09437	96041	90052	80862	20420	24323	11635	91677
74	74145	20453	29657	98868	56695	53483	87449	35060	98942	62697
75	88881	12673	73961	89884	73247	97670	69570	88888	58560	72580
76	01508	56780	52223	35632	73347	71317	46541	88023	36656	76332
77	92069	43000	23233	06058	82527	25250	27555	20426	60361	63525
78	53366	35249	02117	68620	39388	69795	73215	01846	16983	78560
79	88057	54097	49511	74867	32192	90071	04147	46094	63519	07199
80	85492	82238	02668	91854	86149	28590	77853	81035	45561	16032
81	39453	62123	69611	53017	34964	09786	24614	49514	01056	18700
82	82627	98111	93870	56969	69566	62662	07353	84838	14570	14508
83	61142	51743	38209	31474	96095	15163	54380	77849	20465	03142
84	12031	32528	61311	53730	89032	16124	58844	35386	45521	59368
85	31313	59838	29147	76882	74328	09955	63673	96651	53264	29871
86	50767	41056	97409	44376	62219	35439	70102	99248	71179	26052
87	30522	95699	84966	26554	24768	72247	84993	85375	92518	16334
88	74176	19870	89874	64799	03792	57006	57225	36677	46825	14087
89	17114	93248	37065	91346	04657	93763	92210	43676	44944	75798
90	53005	11825	64608	87587	05742	31914	55044	41818	29667	77424
91	31985	81539	79942	49471	46200	27639	94099	42085	79231	03932
92	63499	60508	77522	15624	15088	78519	52279	79214	43623	69166
93	30506	42444	99047	66010	91657	37160	37408	85714	21420	80996
94	78248	16841	92357	10130	68990	38307	61022	56806	81016	38511
95	64996	84789	50185	32200	64382	29752	11876	00664	54547	62597
96	11963	13157	09136	01769	30117	71486	80111	09161	08371	71749
97	44335	91450	43456	90449	18338	19787	31339	60473	06606	89788
98	42277	11868	44520	01113	11341	11743	97949	49718	99176	42006
99	77562	18863	58515	90166	78508	14864	19111	57183	85808	59385

جدول 10. ج: t تقسیم

$F(z)$	درج آزادی									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.32	0.29	0.28	0.27	0.27	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.73	0.62	0.58	0.57	0.56	0.55	0.55	0.55	0.54	0.54
0.8	1.38	1.06	0.98	0.94	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.88
0.9	3.08	1.89	1.64	1.53	1.48	1.44	1.41	1.40	1.38	1.37
0.95	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.89	1.86	1.83	1.81
0.975	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
0.99	31.82	6.96	4.54	3.75	3.36	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76
0.995	63.66	9.92	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17
0.999	318.31	22.33	10.21	7.17	5.89	5.21	4.79	4.50	4.30	4.14

$F(z)$	درج آزادی									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.53	0.53
0.8	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86
0.9	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.33	1.33
0.95	1.80	1.78	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.72
0.975	2.20	2.18	2.16	2.14	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09
0.99	2.72	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57	2.55	2.54	2.53
0.995	3.11	3.05	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.85
0.999	4.02	3.93	3.85	3.79	3.73	3.69	3.65	3.61	3.58	3.55

$F(z)$	درج آزادی									
	22	24	26	28	30	40	50	100	200	∞
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25	0.25
0.7	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52
0.8	0.86	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.84	0.84
0.9	1.32	1.32	1.31	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28
0.95	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.68	1.68	1.66	1.65	1.64
0.975	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.97	1.96
0.99	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.33
0.995	2.82	2.80	2.78	2.76	2.75	2.70	2.68	2.63	2.60	2.58
0.999	3.50	3.47	3.43	3.41	3.39	3.31	3.26	3.17	3.13	3.09

جدول 11. ج: مربع خاتقیم

$F(z)$	درجه آزادی									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19

$F(z)$	درجه آزادی									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.72	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00

$F(z)$	درجه آزادی									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.95	32.67	33.92	35.17	36.42	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67

$F(z)$	درجه آزادی							
	40	50	60	70	80	90	100	(تخمین) > 100
0.005	20.71	27.99	35.53	43.28	51.17	59.20	67.33	$\frac{1}{2}(h - 2.58)^2$
0.01	22.16	29.71	37.48	45.44	53.54	61.75	70.06	$\frac{1}{2}(h - 2.33)^2$
0.025	24.43	32.36	40.48	48.76	57.15	65.65	74.22	$\frac{1}{2}(h - 1.96)^2$
0.05	26.51	34.76	43.19	51.74	60.39	69.13	77.93	$\frac{1}{2}(h - 1.64)^2$
0.95	55.76	67.50	79.08	90.53	101.88	113.15	124.34	$\frac{1}{2}(h + 1.64)^2$
0.975	59.34	71.42	83.30	95.02	106.63	118.14	129.56	$\frac{1}{2}(h + 1.96)^2$
0.99	63.69	76.15	88.38	100.43	112.33	124.12	135.81	$\frac{1}{2}(h + 2.33)^2$
0.995	66.77	79.49	91.95	104.21	116.32	128.30	140.17	$\frac{1}{2}(h + 2.58)^2$

جدول 12. ج: الف تقسیم

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	$m = \infty$
1	241.88	245.95	248.01	250.10	251.14	251.77	253.04	254.31
2	19.40	19.43	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.40
12	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
15	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.01
17	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.96
18	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.84
22	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.78
24	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
26	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
28	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.65
30	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.62
32	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67	1.59
34	2.12	1.97	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65	1.57
36	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62	1.55
38	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61	1.53
40	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
50	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
60	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.39
70	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.35
80	1.95	1.79	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.32
90	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.30
100	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.28
150	1.89	1.73	1.64	1.54	1.48	1.44	1.34	1.22
200	1.88	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.19
1000	1.84	1.68	1.58	1.47	1.41	1.36	1.26	1.08
∞	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.01

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
150	6.81	4.75	3.91	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	$m = \infty$
1	6055.85	6157.28	6208.73	6260.65	6286.78	6302.52	6334.11	6365.85
2	99.40	99.43	99.45	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	26.87	26.69	26.50	26.41	26.35	26.24	26.13
4	14.55	14.20	14.02	13.84	13.75	13.69	13.58	13.46
5	10.05	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
6	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
7	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.65
8	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.96	4.86
9	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.41	4.31
10	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
11	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.60
12	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.36
13	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.17
14	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.00
15	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.87
16	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.75
17	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.65
18	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.57
19	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.49
20	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.42
22	3.26	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.31
24	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
26	3.09	2.81	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.13
28	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.06
30	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.01
32	2.93	2.65	2.50	2.34	2.25	2.20	2.08	1.96
34	2.89	2.61	2.46	2.30	2.21	2.16	2.04	1.91
36	2.86	2.58	2.43	2.26	2.18	2.12	2.00	1.87
38	2.83	2.55	2.40	2.23	2.14	2.09	1.97	1.84
40	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.80
50	2.70	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.82	1.68
60	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.60
70	2.59	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.54
80	2.55	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.65	1.49
90	2.52	2.24	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.46
100	2.50	2.22	2.07	1.89	1.80	1.74	1.60	1.43
150	2.44	2.16	2.00	1.83	1.73	1.66	1.52	1.33
200	2.41	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.28
1000	2.34	2.06	1.90	1.72	1.61	1.54	1.38	1.11
∞	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.01

جدول 13 ج: بلا منصوبہ متغیر T کا تقابل تقسیم $F(x) = P(T \leq x)$ (برائے حصہ 24.19)

x	$n=3$	x	$n=4$	x	$n=5$	x	$n=6$	x	$n=7$	x	$n=8$	x	$n=9$	x	$n=10$	x	$n=11$
0	0.	0.	0.	0	0.	0	0.	1	0.	2	0.	4	0.	6	0.	8	0.
1	167	1	167	1	042	1	008	2	005	3	003	5	003	7	002	9	002
	500	2	375	2	117	2	028	3	015	4	007	6	006	8	005	10	003
				3	242	3	068	4	035	5	016	7	012	9	008	11	005
				4	408	4	136	5	068	6	031	8	022	10	014	12	008
						5	235	6	119	7	054	9	038	11	023	13	013
						6	360	7	191	8	089	10	060	12	036	14	020
						7	500	8	281	9	138	11	090	13	054	15	030
								9	386	10	199	12	130	14	078	16	043
								10	500	11	274	13	179	15	108	17	060
										12	360	14	238	16	146	18	082
										13	452	15	306	17	190	19	109
												16	381	18	242	20	141
												17	460	19	300	21	179
														20	364	22	223
														21	431	23	271
														22	500	24	324
																25	381
																26	440
																27	500

x	$n=20$	x	$n=19$	x	$n=18$	x	$n=17$	x	$n=16$	x	$n=15$	x	$n=14$	x	$n=13$	x	$n=12$
50	0.	43	0.	38	0.	32	0.	27	0.	23	0.	18	0.	14	0.	11	0.
51	001	44	001	39	001	33	001	28	001	24	001	19	001	15	001	12	001
52	002	45	002	40	002	34	002	29	002	25	002	20	002	16	002	13	002
53	003	46	003	41	003	35	003	30	003	26	003	21	003	17	003	14	003
54	004	47	004	42	004	36	004	31	004	27	004	22	004	18	004	15	004
55	005	48	005	43	005	37	005	32	005	28	005	23	005	19	005	16	005
56	006	49	006	44	006	38	006	33	006	29	006	24	006	20	006	17	006
57	007	50	007	45	007	39	007	34	007	30	007	25	007	21	007	18	007
58	008	51	008	46	008	40	008	35	008	31	008	26	008	22	008	19	008
59	010	52	010	47	010	41	010	36	010	32	010	27	010	23	010	20	010
60	012	53	012	48	012	42	012	37	012	33	012	28	012	24	012	21	012
61	014	54	014	49	014	43	014	38	014	34	014	29	014	25	014	22	014
62	017	55	017	50	017	44	017	39	017	35	017	30	017	26	017	23	017
63	020	56	020	51	020	45	020	40	020	36	020	31	020	27	020	24	020
64	023	57	023	52	023	46	023	41	023	37	023	32	023	28	023	25	023
65	027	58	027	53	027	47	027	42	027	38	027	33	027	29	027	26	027
66	032	59	032	54	032	48	032	43	032	39	032	34	032	30	032	27	032
67	037	60	037	55	037	49	037	44	037	40	037	35	037	31	037	28	037
68	043	61	043	56	043	50	043	45	043	41	043	36	043	32	043	29	043
69	049	62	049	51	049	45	049	40	049	36	049	31	049	27	049	24	049
70	056	63	056	52	056	46	056	41	056	37	056	32	056	28	056	25	056
71	064	64	064	53	064	47	064	42	064	38	064	33	064	29	064	26	064
72	073	65	073	54	073	48	073	43	073	39	073	34	073	30	073	27	073
73	082	66	082	55	082	49	082	44	082	40	082	35	082	31	082	28	082
74	093	67	093	56	093	50	093	45	093	41	093	36	093	32	093	29	093
75	104	68	104	57	104	51	104	46	104	42	104	37	104	33	104	30	104
76	117	69	117	58	117	52	117	47	117	43	117	38	117	34	117	31	117
77	130	70	130	59	130	53	130	48	130	44	130	39	130	35	130	32	130
78	144	71	144	60	144	54	144	49	144	45	144	40	144	36	144	33	144
79	159	72	159	61	159	55	159	50	159	46	159	41	159	37	159	34	159
80	176	73	176	62	176	56	176	51	176	47	176	42	176	38	176	35	176
81	193	74	193	63	193	57	193	52	193	48	193	43	193	39	193	36	193
82	211	75	211	64	211	58	211	53	211	49	211	44	211	40	211	37	211
83	230	76	230	65	230	59	230	54	230	50	230	45	230	41	230	38	230
84	250	77	250	66	250	60	250	55	250	51	250	46	250	42	250	39	250
85	271	78	271	67	271	61	271	56	271	52	271	47	271	43	271	40	271
86	293	79	293	68	293	62	293	57	293	53	293	48	293	44	293	41	293
87	315	80	315	69	315	63	315	58	315	54	315	49	315	45	315	42	315
88	339	81	339	70	339	64	339	60	339	55	339	51	339	46	339	43	339
89	362	82	362	71	362	65	362	61	362	56	362	52	362	47	362	44	362
90	387	83	387	72	387	66	387	62	387	57	387	53	387	48	387	45	387
91	411	84	411	73	411	67	411	63	411	58	411	54	411	49	411	46	411
92	436	85	436	74	436	68	436	64	436	59	436	55	436	51	436	48	436
93	462			75	462	69	462	65	462	60	462	56	462	52	462	49	462
94	487			76	487	70	487	66	487	61	487	57	487	53	487	50	487

جدول 14. ج: تفاعل خلل، سائن اور کوسائن کمالات

x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{Si}(x)$	$\operatorname{ci}(x)$	x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{Si}(x)$	$\operatorname{ci}(x)$
0.0	0.0000	0.0000	∞	2.0	0.9953	1.6054	-0.4230
0.2	0.2227	0.1996	1.0422	2.2	0.9981	1.6876	-0.3751
0.4	0.4284	0.3965	0.3788	2.4	0.9993	1.7525	-0.3173
0.6	0.6039	0.5881	0.0223	2.6	0.9998	1.8004	-0.2533
0.8	0.7421	0.7721	-0.1983	2.8	0.9999	1.8321	-0.1865
1.0	0.8427	0.9461	-0.3374	3.0	1.0000	1.8487	-0.1196
1.2	0.9103	1.1080	-0.4205	3.2	1.0000	1.8514	-0.0553
1.4	0.9523	1.2562	-0.4620	3.4	1.0000	1.8419	0.0045
1.6	0.9763	1.3892	-0.4717	3.6	1.0000	1.8219	0.0580
1.8	0.9891	1.5058	-0.4568	3.8	1.0000	1.7934	0.1038
2.0	0.9953	1.6054	-0.4230	4.0	1.0000	1.7582	0.1410

