انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 22

خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب

اس باب میں ہم خطی الجبرائی مساوات کے نظام کے حل، مناسب سیدھی لکیروں کا حصول اور قابلی امتیازی اقدار کے حصول کے اہم ترین تراکیب پر غور کریں گے۔یہ تراکیب اور اس سے ملتے جلتے تراکیب عملاً انتہائی اہم ثابت ہوتے ہیں جو انجینئری یا دیگر شعبوں (مثلاً شماریات) کے مسائل حل کرنے میں کام آتے ہیں۔

22.1 خطی مساوات کا نظام۔گاوسی اسقاط، معکوس قالب

n نا معلوم متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ کے m خطی مساوات کے نظام (یا m ہمزاد خطی مساوات) سے مراد درج ذیل روپ کی مساوات

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{22.1}
$$

کا سلسلہ ہے جہاں عددی سر a_{jk} اور b_j معلوم اعداد ہیں۔ تمام b_j صفر ہونے کی صورت میں یہ نظام **متجانس**[1] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر متجانس**[2] کہتے ہیں۔ اگر آپ قالبی ضرب (حصہ 8.2) سے آشنا ہوں تب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 22.1 کو ایک سمتی مساوات

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{22.2}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں **عددی سر قالب** $\boldsymbol{A} = [a_{ik}]$ درج ذیل $m \times n$ قالب ہے

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

جبکہ $\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیہ قطار ہیں۔ نظام 22.1 کے حل سے مراد اعداد $x_1, \cdots, x_n$ کا سلسلہ ہے جو ان تمام m مساوات کو مطمئن کرتے ہیں اور نظام 22.1 کے حل سمتیہ سے مراد سمتیہ $\boldsymbol{x}$ ہے جس کے اجزاء نظام 22.1 کے حل ہیں۔

زیادہ تعداد کی مساوات کے نظام کا حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7) قابل عمل نہیں ہے۔ زیادہ بہتر ترکیب **گاوسی اسقاط** ہے جس کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال 22.1: **گاوسی اسقاط**
درج ذیل نظام کو حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2w + x + 2y + z &= 6 \\ 6w - 6x + 6y + 12z &= 36 \\ 4w + 3x + 3y - 3z &= -1 \\ 2w + 2x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

حل: **پہلا قدم:** ہم پہلی مساوات کے مضرب کو باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے w حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -9x \qquad +9z &= 18 \\ x - y \; -5z &= -13 \\ x - 3y \qquad &= 4 \end{aligned}$$

---

[1] homogeneous
[2] nonhomogeneous

دوسرا قدم: ان میں پہلی مساوات کے مضرب باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے x حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -y - 4z &= -11 \\ -3y + z &= 6 \end{aligned}$$

تیسرا قدم: ان میں پہلی مساوات کے مضرب کو باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے y حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$13z = 39$$

آخری قدم: ہم اب واپس پر کرتے ہوئے تمام نا معلوم متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 13z &= 39 & z &= 3 \\ -y - 4\cdot 3 &= -11 & y &= -1 \\ -9x \qquad + 9\cdot 3 &= 18 & x &= 1 \\ 2w + 1 + 2\cdot(-1) + 3 &= 6 & w &= 2 \end{aligned} \tag{22.3}$$

□

مثال 22.1 میں $a_{11} \neq 0$ تھا۔ اگر ایسا نہ ہوتا تب ہم باقی مساوات سے w حذف کرنے میں ناکام ہوتے۔ یوں $a_{11} = 0$ کی صورت میں نظام میں مساوات کی ترتیب بدلی جائے گی تا کہ نظام میں پہلی مساوات کا پہلا عددی سر غیر صفر ہو (اور ہو سکتا ہے کہ نا معلوم متغیرات کی ترتیب بھی بدلنی پڑے)۔ باقی قدم پر بھی ایسا ہی کرنا پڑ سکتا ہے۔ اس طرح درج ذیل ترکیب حاصل ہوتی ہے جس کی اطلاق کے بعد حاصل قیمتیں پر کرتے ہوئے تمام متغیرات حاصل کیے جاتے ہیں۔

الخوارزمی: گاوسی اسقاط[3]

مساوات 22.2 میں $m = n$ کی صورت میں $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے ساتھ بطور آخری صف $\boldsymbol{b}$ شامل کرتے ہوئے $n \times (n+1)$ قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ حاصل ہو گا جس کے لئے گاوسی اسقاط کی **الکراجی**[4] درج ذیل ہے۔

$k = 1$ تا $k = n - 1$ کے لئے کریں:
ایسا کم تر $j \geq k$ تلاش کریں کہ $b_{jk} \neq 0$ ہو۔

---

[3] algorithm
[4] algorithm

اگر ایسا کوئی j نہیں پایا جاتا ہو تب بتائیں کہ $\boldsymbol{A}$ نادر ہے اور حساب روک دیں،
ورنہ $\boldsymbol{B}$ کے صف j اور صف k کے اجزاء کا آپس میں تبادلہ کرتے ہوئے چلتے رہیں۔
$j = k+1$ تا $j = n$ کے لئے کریں:
$q : \frac{b_{jk}}{b_{kk}}$
$p = k+1$ تا $p = n+1$ کے لئے کریں:
$b_{jp} : b_{jp} - q b_{kp}$
اگر $b_{nn} = 0$ ہو تب بتائیں کہ $\boldsymbol{A}$ نادر ہے اور حساب روک دیں۔

ہر قدم پر پہلی مساوات کے پہلی متغیر کے عددی سر کو **چول عددی سر**[5] کہتے ہیں جس کا غیر صفر ہونا ضروری ہے۔اگر چول عددی سر کی قیمت کم ہو تب ہمیں مطابقتی مساوات کا بڑا مضرب باقی مساوات سے منفی کرنا ہو گا جس سے تعداد ہندسہ خلل بڑھتے ہوئے نتائج متاثر کرے گا۔اس سے بچنے کی ترکیب سمجھنے سے پہلے آئیں ایک مثال سے ایسا ہوتے دیکھیں۔

مثال 22.2: **کم چول عددی سر سے پیدا مشکلات**
درج ذیل نظام

$$0.0004x_1 + 1.402x_2 = 1.406$$
$$0.4003x_1 - 1.502x_2 = 2.501$$

کا حل $x_1 = 10$ ، $x_2 = 1$ ہے۔ہم چار ہندسی غیر مقررہ نقطہ نظام استعمال کرتے ہوئے اس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہیں۔

(الف) پہلی مساوات کو مساوات چول لیتے ہوئے ہم اس کو $q = \frac{0.4003}{0.0004} = 1001$ سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کر کے

$$-1405x_2 = -1404$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں $x_2 = \frac{-1404}{-1405} = 0.9993$ ہو گا اور یوں پہلی مساوات سے $x_1 = 10$ کی بجائے

$$x_1 = \frac{1}{0.0004}(1.406 - 1.402 \cdot 0.9993) = \frac{0.005}{0.0004} = 12.5$$

حاصل ہو گا۔اس ناکامی کی وجہ $|a_{12}|$ کے لحاظ سے $|a_{11}|$ کی کم قیمت ہے جو x_2 میں تعداد ہندسہ خلل کی قلیل قیمت سے x_1 کی قیمت میں بہت زیادہ خلل پیدا کرتا ہے۔

---

[5] pivotal coefficient

(ب) آئیں اب دوسری مساوات کو چول مساوات لے کر اس کو $\frac{0.0004}{0.4003} = 0.0009993$ سے ضرب دے کر پہلی مساوات سے منفی کرتے ہوئے

$$1.404x_2 = 1.404$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں $x_2 = 1$ حاصل ہو گا جس کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 10$ ملتا ہے۔یہاں $|a_{22}|$ کے لحاظ سے $|a_{21}|$ بہت کم نہیں ہے لہٰذا x_2 میں معمولی تعداد ہندسہ خلل x_1 کی قیمت میں بڑا خلل پیدا نہیں کرتا ہے۔یہی ہماری کامیابی کی وجہ ہے۔یقیناً $x_2 = 1.002$ کی صورت میں بھی دوسری مساوات سے $x_1 = \frac{2.501+1.505}{0.4003} = 10.01$ حاصل ہوتا جو بہت بہتر نتیجہ ہے۔ □

وہ مساوات جس کے x_1 کا عددی سر باقی مساواتوں کے x_1 کے عددی سر سے بڑا ہو کو پہلی مساوات منتخب کرتے ہوئے اور اسی طرح دوسری قدم پر x_2 کے لحاظ سے مساوات منتخب کرتے ہوئے نظام میں پہلی، دوسری، تیسری، . . . مساوات منتخب کی جا سکتی ہے۔اس عمل کو **جزوی چول**[6] کہتے ہیں۔ **مکمل چول**[7] میں ہم پورے نظام میں سب سے بڑے حتمی عددی سر کو چول عددی سر لیتے ہوئے باقی مساوات میں سے اس کا مطابقتی متغیر حذف کرتے ہیں۔اگلی قدم میں اسی ترکیب کو دہراتے ہیں اور اسی طرح آخر تک چلتے ہیں۔عملاً مکمل چول کی ترکیب زیادہ مہنگی ثابت ہوتی ہے لہٰذا جزوی چول کی ترکیب ہی استعمال کی جاتی ہے۔

ہم پوری مساوات کو بڑی عدد سے ضرب دے کر کسی بھی عددی سر کی قیمت بڑھا سکتے ہیں لیکن ایسا کرنے سے نتائج پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے۔مساوات کو جزو ضربی سے ضرب دینے کو **تبدیلی پیما صف**[8] کہتے ہیں۔عملاً ہم 10 (یا کمپیوٹر کی اساس β) کی طاقت سے مساوات کو ضرب دے کر عددی سر کی سب سے بڑی حتمی قیمت کو 0.1 اور 1 (یعنی β^{-1} اور 1) کے بیچ لاتے ہیں۔

عملاً ہم تبدیل پیما جزوی چول استعمال کرتے ہیں یعنی حذف کی k ویں قدم (جہاں $k = 1, 2, \cdots$ ہو گا) میں ہم باقی میسر $n - k$ مساواتوں میں سے اس کو مساوات چول منتخب کرتے ہیں جس کے متغیر x_k کے عددی سر اور اس مساوات میں سب سے بڑی حتمی قیمت کے عددی سر کے حاصل تقسیم کی حتمی قیمت سب سے زیادہ ہو۔

گاوسی اسقاط میں پیدا ہونے والے خلل پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔

---

[6] partial pivoting
[7] total pivoting
[8] scaling

ترکیب گاوس میں ترمیم

ترکیب گاوس کے کئی ترامیم ممکن ہیں۔ہم شولسکی[9] کے ایک قاعدہ پر مبنی ترمیم پیش کرتے ہیں۔ شولسکی[10] کا قاعدہ کہتا ہے کہ حتمی مثبت چکور قالب A کو

$$A = LU \tag{22.4}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں L اور U بالترتیب نچلا تکونی قالب اور بالائی تکونی قالب ہیں۔ L اور U عملاً یکتا ہوں گے۔ہم مساوات کو حل کیے بغیر L اور U کو حاصل کر سکتے ہیں (نیچے مثال دیکھیں)۔ n متغیرات کے n مساوات کا نظام $Ax = b$ حل کرنے کے لئے ہم مساوات 22.4 کا سہارا لیتے ہوئے نظام کو

$$LUx = b$$

لکھتے ہیں۔اس کو بائیں طرف L^{-1} سے ضرب دے کر

$$Ux = z \qquad z = L^{-1}b \tag{22.5}$$

حاصل ہو گا جو اس نظام کی تکونی صورت ہے۔ہم پہلے z کو درج ذیل تعلق

$$Lz = b \tag{22.6}$$

سے حاصل کر کے بعد میں

$$Ux = z \tag{22.7}$$

سے x حاصل کریں گے۔بہت سی اہم مسائل میں A تشاکل قالب ہو گا جس کی بنا $U = L^T$ ہو گا (درج ذیل مثال دیکھیں)۔

مثال 22.3: ترکیب شولسکی
آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ نظام

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ 2x + 3y + 4z &= 20 \\ 3x + 4y + z &= 14 \end{aligned}$$

---

[9] فرانسیسی ریاضی دان اندرلوئی شولسکی [1875-1918]
[10] Cholesky

کا حل $x = 1$ ، $y = 2$ ، $z = 3$ ہے۔ہم اس حل کو ترکیب شولسکی سے حاصل کرتے ہیں۔عددی سر قالب تشاکلی ہے لہٰذا $U = L^T$ ہو گا۔ ہم ضرب قالب کی تعریف استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

کے دونوں اطراف مطابقتی اجزاء کو برابر پر کرتے ہوئے U کے اجزاء حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے ہمیں بالترتیب $a_{11}^2 = 1$ مثلاً $a_{11} = 1$ جس سے $a_{11}a_{12} = a_{12} = 2$ ، $a_{11}a_{13} = a_{13} = 3$ ، $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 4 + a_{22}^2 = 3$ مثلاً $a_{22} = i\left(\sqrt{-1}\right)$ اور اس سے

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} = 6 + ia_{23} = 4, \quad a_{23} = i2$$

اور آخر میں

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 9 - 4 + a_{33}^2 = 1$$

سے مثلاً $a_{33} = i2$ حاصل ہو گا۔یوں مساوات 22.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 3 & i2 & i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ i8 \\ i6 \end{bmatrix}$$

دے گا۔آخر میں ہم مساوات 22.7 حل کرتے ہیں یعنی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & i & i2 \\ 0 & 0 & i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ i8 \\ i6 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

□

گاوسی اسقاط کی دوسری ترمیم کو گاوس جارڈن اسقاط کہتے ہیں۔اس ترکیب میں قالب کو "تکونی صورت" کی بجائے مزید چال چلتے ہوئے "وتری صورت" میں تبدیل کرتے ہوئے قیمتوں کے واپس پر کرنے کے عمل سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ان اضافی چال کی بنا مساوات کا نظام حل کرنے میں کوئی آسانی پیدا نہیں ہوتی ہے۔البتہ معکوس قالب حاصل کرنے میں صورت حال مختلف ہے جہاں ترکیب گاوس اور ترکیب گاوس جارڈن دونوں میں n^3 ضرب درکار ہیں۔

معکوس قالب

غیر نادر چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس اب اصولی طور پر n عدد نظام

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_j \qquad (j = 1, \cdots, n) \tag{22.8}$$

کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $n \times n$ اکائی قالب کا j واں قطار $\boldsymbol{b}_j$ ہے۔

البتہ اکائی قالب $\boldsymbol{I}$ پر ترکیب گاوس جارڈن کی طرح عمل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کی تخفیف سے $\boldsymbol{I}$ حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}^{-1}$ کے حصول کو ترجیح دی جاتی ہے۔

سوالات

سوال 22.1 تا سوال 22.11 کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔ سوال 22.1:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 2,\ y = 1$

سوال 22.2:

$$\begin{aligned} -2x + y &= 5 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

جوابات: $x = -2,\ y = 1$

سوال 22.3:

$$\begin{aligned} -3x - y &= -3 \\ 5x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 0,\ y = 3$

سوال 22.4:

$$
\begin{aligned}
x - y + z &= 2\\
2x + y - 3z &= -3\\
3x + 2y + z &= 7
\end{aligned}
$$

جوابات: $x = -1,\ y = 1,\ z = 2$

سوال 22.5:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= -2\\
-2x + y - 3z &= 13\\
-3x + 2y - z &= 10
\end{aligned}
$$

جوابات: $x = -1,\ y = 2,\ z = -3$

سوال 22.6:

$$
\begin{aligned}
2x - y + 4z &= 2\\
x + y - 3z &= 11\\
-3x + y - z &= -3
\end{aligned}
$$

جوابات: $x = 4,\ y = 10,\ z = 1$

سوال 22.7:

$$
\begin{aligned}
x - 2y + z &= 1\\
3x - 2y - z &= -1
\end{aligned}
$$

جوابات: $x = y,\ z = y + 1$

سوال 22.8:

$$
\begin{aligned}
x - 2y + z &= 0\\
2x - 2z &= -4
\end{aligned}
$$

جوابات: $x = y - 1,\ z = y + 1$

سوال 22.9:

$$
\begin{aligned}
4x - 3y + 3z &= 0\\
8x + 7y - 7z &= 0
\end{aligned}
$$

جوابات: $x = 0,\ z = y$

سوال 22.10:

$$\begin{aligned}2w - 4x + 3y - z &= 3\\ w - 2x + 5y - 3z &= 0\\ 3w - 6x - y - z &= 0\end{aligned}$$

جوابات: $w = 2x + 1, y = 1, z = 2$

سوال 22.11:

$$\begin{aligned}3w - x + 8y - 2z &= -2\\ -w + 2x - 13y + 3z &= 3\\ 4w + 3x - 9y + z &= 1\end{aligned}$$

جوابات: $w = 0,\ x = 2y,\ z = 3y + 1$

سوال 22.12: **(تعداد قدم)** کسی بھی اعدادی ترکیب کی کارکردگی کی ناپ اس ترکیب سے حل نکالنے کے لئے درکار کل حسابی اعمال کی تعداد ہے۔ دکھائیں کہ $m = n$ کی صورت میں، واپس پر کرنے کے عمل کے علاوہ، مساوات 22.1 کو گاوسی اسقاط سے حل کرنے کے لئے $\frac{1}{2}n(n-1)$ تقسیم، $\frac{1}{3}n(n^2-1)$ ضرب اور $\frac{1}{3}n(n^2-1)$ جمع حاصل کرنے ہوں گے۔ یوں بڑی n کی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{n^3}{3}$ ضرب اور جمع درکار ہوں گے۔ تقسیم کی تعداد کم ہونے کی بنا رد کی جا سکتی ہے۔

سوال 22.13: دکھائیں کہ $m = n$ کی صورت میں گاوسی اسقاط سے مساوات 22.1 حل کرنے کے دوران واپس پر کرنے کے عمل میں $\frac{1}{2}n(n-1)$ ضرب، $\frac{1}{2}n(n-1)$ جمع اور n تقسیم درکار ہوں گے۔

سوال 22.14: قلم و کاغذ سے حل کرتے ہوئے ہم عموماً صرف عددی سر لکھ کر ان پر حسابی عمل کرتے ہیں۔ یوں مثال 22.1 میں پہلے قدم کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں S_1 سے مراد پہلی صف ہے۔ یوں $S_2 - 3S_1$ سے مراد دوسری صف سے پہلی صف کی تین گنا کی تفریق ہے۔

$$\begin{array}{rrrrrrl}2 & 1 & 2 & 1 & 6 & 12 & S_1\\ 0 & -9 & 0 & 9 & 18 & 18 & S_2 - 3S_1\\ 0 & 1 & -1 & -5 & -13 & -18 & S_3 - 2S_1\\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 2 & S_4 - S_1\end{array}$$

سوال 22.4 میں اس طرح تمام قدم لکھیں۔

سوال 22.15: **(گاوس جارڈن اسقاط)** مثال 22.1 میں گاوسی اسقاط درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{aligned}
2w \ +x + 2y \ +z &= \ \ 6 && \text{(الف)}\\
-9x \qquad +9z &= \ \ 18 && \text{(ب)}\\
-y \ -4z &= -11 && \text{(پ)}\\
13z &= \ \ 39 && \text{(ت)}
\end{aligned}$$

5 گاوس جارڈن اسقاط میں ہم (ب) استعمال کرتے ہوئے (الف) سے x حذف کرتے ہیں۔اس کے بعد (پ) کی مدد سے (الف) اور (ب) سے y حذف کرتے ہیں[(ب) سے حذف کی یہاں ضرورت نہیں ہے] اور آخر میں (ت) کی مدد سے (الف)، (ب)، (پ) سے z حذف کرتے ہیں۔دکھائیں کہ ایسا کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
2w \qquad\qquad &= 4\\
-9x \qquad &= -9\\
-y \quad &= 1\\
13z &= 39
\end{aligned}$$

ان مساوات کو حل کرتے ہوئے $w = 2$ ، $x = 1$ ، $y = -1$ اور $z = 3$ حاصل کریں۔

سوال 22.16: گاوس جارڈن اسقاط سے سوال 22.5 حل کریں۔

سوال 22.17: درج ذیل نظام پر مثال 22.2 کی طرح بحث کریں۔

$$\begin{aligned}
0.0003x_1 + 3.0000x_2 &= 2.0001\\
1.0000x_1 + 1.0000x_2 &= 1.0000
\end{aligned}$$

22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ

گزشتہ حصہ میں گاوسی اسقاط پر غور کیا گیا جو خطی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بلا واسطہ تراکیب میں سے ایک ہے۔ان تراکیب میں ہم پہلے سے بتا سکتے ہیں کہ حل حاصل کرنے کی خاطر کتنی حساب درکار ہو گی۔اس کے

بر عکس **بالواسطہ ترکیب** یا **اعادہ**[11] میں ہم تخمینی قیمت سے شروع کر کے، بار بار حساب دہراتے ہوئے، حل کی بہتر سے بہتر تخمین کی طرف بڑھتے ہیں۔یوں جتنی زیادہ درستگی درکار ہو اتنا زیادہ حساب درکار ہو گا۔

اعادہ کی تراکیب ہم اس صورت استعمال کرتے ہیں جب ارتکاز کی شرح زیادہ ہو اور یوں بلا واسطہ تراکیب سے زیادہ جلدی حل حاصل ہو۔ عملی استعمال کی ایک اہم ترکیب اعادہ کو **گاوس زائڈل اعادہ**[12] کہتے ہیں۔ جس کو ہم ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔درج ذیل نظام پر غور کریں۔

$$
\begin{aligned}
w \quad & -0.25x - 0.25y & &= 50\\
-0.25w \quad & +x & -0.25z &= 50\\
-0.25w \quad & +y & -0.25z &= 25\\
& -0.25x - 0.25y & +z &= 25
\end{aligned}
\tag{22.9}
$$

(اس قسم کے نظام جزوی تفرقی مساوات کے حل اور لچکدار منحنی کی باہمی تحریف کے دوران پیش آتے ہیں۔) ہم اس نظام کو درج ذیل صورت میں

$$
\begin{aligned}
w &= & 0.25x + 0.25y & & +50\\
x &= 0.25w & & +0.25z & +50\\
y &= 0.25w & & +0.25z & +25\\
z &= & 0.25x & +0.25y + & +25
\end{aligned}
\tag{22.10}
$$

لکھ کر انہیں اعادہ میں استعمال کرتے ہیں یعنی ہم تمام متغیرات کی تخمینی قیمتوں مثلاً $w_0 = 100$ ، $x_0 = 100$ ، $y_0 = 100$ ، $z_0 = 100$ سے ابتدا کرتے ہوئے بہتر تخمین

$$
\begin{aligned}
w_1 &= & 0.25x_0 + 0.25y_0 & & +50 &= 100.00\\
x_1 &= 0.25w_1 & & +0.25z_0 & +50 &= 100.00\\
y_1 &= 0.25w_1 & & +0.25z_0 & +25 &= 75.00\\
z_1 &= & 0.25x_1 & +0.25y_1 + & +25 &= 68.75
\end{aligned}
\tag{22.11}
$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 22.10 کے دائیں ہاتھ تازہ ترین قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 22.11 حاصل کی گئی ہیں۔ہر مرتبہ متغیر کی تازہ ترین قیمت استعمال کی جاتی ہے۔یوں دوسری مساوات میں میں w_0 کی بجائے (w کی تازہ ترین قیمت) w_1 استعمال کی جائے گی۔اسی طرح آخری مساوات میں x_1 اور y_1 استعمال کیے گئے

---

[11] iterative method
[12] Gauss-Seidel iteration

ہیں۔اگلے قدم میں مزید بہتر نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \qquad 0.25x_1 + 0.25y_1 \qquad\qquad + 50 = 93.75\\
x_2 &= 0.25w_2 \qquad\qquad\qquad +0.25z_1 + 50 = 90.62\\
y_2 &= 0.25w_2 \qquad\qquad\qquad +0.25z_1 + 25 = 65.62\\
z_2 &= \qquad\qquad 0.25x_2 \quad +0.25y_2 + \; + 25 = 64.06
\end{aligned}
$$

آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ درست حل $w = x = 87.5$ ، $y = z = 62.5$ ہے۔

ہم ثبوت پیش کیے بغیر بتانا چاہتے ہیں کہ ترکیب گاوس زائڈل ہر ابتدائی تخمینی قیمتوں کے لئے صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب **قالب اعادہ**[13] C (مساوات 22.13 دیکھیں) کے ہر امتیازی قدر کی حتمی قیمت 1 سے کم ہو اور ارتکاز کی شرح **رداس طیف** (یعنی ان حتمی قیمتوں میں سب سے زیادہ قیمت) پر منحصر ہے۔قالب C کو اب حاصل کرتے ہیں۔فرض کریں کہ درج ذیل n خطی مساوات کا نظام ہے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

جہاں سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ کے اجزاء نا معلوم متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ ہیں۔فرض کریں کہ ابتدائی تخمین $\boldsymbol{x}_{(0)}$ کے لحاظ سے $\boldsymbol{x}_{(0)}, \boldsymbol{x}_{(1)}, \cdots$ گاوس زائڈل اعادہ سے یک بعد دیگرے حاصل تخمینی نتائج کی ترتیب ہے۔اگر یہ ترتیب نظام کے حل کو مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ ترکیب $\boldsymbol{x}_{(0)}$ کے لحاظ سے مرتکز ہے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $j = 1, \cdots, n$ کے لئے $a_{jj} = 1$ ہے (نظام کی ایسی صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم مساواتوں کو یوں ترتیب دیتے ہیں کہ تمام وتری جزو غیر صفر ہوں اور وتری جزو سے مطابقتی مساوات تقسیم کرتے ہیں)۔ہم اب $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{L}} + \tilde{\boldsymbol{U}}$ لکھ سکتے ہیں جہاں $\tilde{\boldsymbol{U}}$ اور $\tilde{\boldsymbol{L}}$ بالترتیب بالائی تکونی قالب اور نچلا تکونی قالب ہیں جن کے مرکزی وتر کے اجزاء صفر ہیں جبکہ $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب ہے جو n صف پر مشتمل ہے۔ $\boldsymbol{A}$ کی اس صورت کو $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ میں پر کرتے ہوئے $(\boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{L}} + \tilde{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ حاصل ہو گا۔روایتی طور پر $\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}$ اور $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}$ لکھا جاتا ہے۔یوں

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$$

ہو گا جس سے کلیہ گاوس زائڈل

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{x}_{(m+1)} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_{(m)} \qquad (m = 0, 1, \cdots) \tag{22.12}$$

[13] iteration matrix

اخذ ہوتا ہے۔درحقیقت $\boldsymbol{U}$ بالائی تکونی قالب ہے جس کے غیر صفر اجزاء ان مقامات کے مطابقتی ہیں جن کی تازہ ترین تخمینی قیمتیں ابھی حاصل نہیں کی گئی ہیں۔اس کے برعکس $\boldsymbol{L}$ نچلا تکونی قالب ہے جس کے غیر صفر اجزاء ان مقامات کے مطابقتی ہیں جن کی تازہ ترین تخمینی قیمتیں $\boldsymbol{x}_{(m+1)}$ ہم حاصل کر چکے ہیں۔مساوات 22.12 کو $\boldsymbol{x}_{(m+1)}$ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{x}_{(m+1)} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{(m)}, \qquad \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} \tag{22.13}$$

حاصل ہو گا۔اعادہ گاوس زائڈل کی ارتکاز ، قالب اعادہ $\boldsymbol{C}$ کی امتیازی اقدار کی مشروط ہے۔

ہم $\boldsymbol{x}_{(m)} = [x_j^{(m)}]$ لکھ کر اعادہ گاوسی زائڈل کو درج ذیل بیان کر سکتے ہیں۔

الخوارزمی:اعادہ گاوس زائڈل

نظام $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ جہاں $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ میں $j = 1, \cdots, n$ کے لئے $a_{jj} \neq 0$ ہے، دیا گیا ہے۔

منتخب کریں کوئی $\boldsymbol{x}_{(0)}$

حاصل کریں $v_{jk} = -\frac{a_{jk}}{a_{jj}}$ جب $j \neq k$ ہو؛ $j,k = 1, \cdots, n$

حاصل کریں $\tilde{b}_j = \frac{b_j}{a_{jj}}$

m کے لئے 0 تا اختتام کریں: $j = 1, \cdots, n$ کے لئے کریں

$$x_j^{(m+1)} := \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk}x_k^{(m+1)} + \sum_{k=j+1}^{n} v_{jk}x_k^{(m)} + \tilde{b}_j$$

اختتام کی تصدیق کریں۔

یہاں اختتام کی تصدیق سے مراد ایسی صورت ہے جہاں مطلوبہ درستگی حاصل ہو جائے، یا قدموں کی درکار تعداد پوری ہو جائے یا مزید لاگو شرائط مطمئن ہوں۔

اعادہ یعقوبی

اعادہ گاوس زائڈل مسلسل اصلاح کی ترکیب ہے جس میں تازہ ترین نئی تخمینی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔اگر نئی قیمتوں کو صرف اس وقت حساب کے لئے استعمال کیا جائے جب تمام متغیرات کی نئی قیمتیں حاصل کر لی جائیں

تب بیک وقت اصلاح کی ترکیب حاصل ہو گی۔**اعادہ یعقوبی** اس قسم کی ایک ترکیب ہے۔ یہ ترکیب اعادہ گاوس زائڈل کی طرح ہے پس اس میں نئی قیمتیں صرف اس صورت پر کی جاتی ہیں جب تمام متغیرات کی قیمتیں حاصل کر لی جائیں۔یوں $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ کو $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ صورت میں لکھ کر اعادہ یعقوبی کی قابلی اظہار

$$\boldsymbol{x}_{(m+1)}=\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_{(m)} \tag{22.14}$$

ہو گی۔ یہ ترکیب زیادہ تر نظریاتی اہمیت رکھتی ہے۔یہ $\boldsymbol{x}_{(0)}$ کی ہر منتخب قیمت کے لئے صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گی جب $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ کا رداس طیف 1 سے کم ہو؛ یہاں بھی $j=1,\cdots,n$ کے لئے $a_{jj}=1$ فرض کیا جاتا ہے۔

نظام $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ کی صورت میں ہم بقیہ[14] $\boldsymbol{r}$ متعارف کر سکتے ہیں جس کی تعریف

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}$$

ہے۔ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\boldsymbol{x}$ نظام کا حل ہو۔یوں تخمینی حل کی صورت میں $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$ ہو گا۔اعادہ گاوس زائڈل میں ہم ہر منزل پر تخمینی حل کے ایک جزو میں ترمیم یا اسے ڈھیل دیتے ہوئے $\boldsymbol{r}$ کے ایک جزو گھٹا کر صفر کرتے ہیں۔یوں اعادہ گاوس زائڈل ان تراکیب میں سے ایک ہے جنہیں **تراکیب ڈھیل**[15] کہتے ہیں۔

غیر نادر چکور قالب کا معکوس بھی اعادہ کے ذریعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔عدد a کے معکوس x سے مراد ایسا عددی ہے جو $ax=1$ کو مطمئن کرتا ہو۔ترکیب نیوٹن کو تفاعل $f(x)=x^{-1}-a$ پر لاگو کرتے ہوئے تقسیم کے عمل کے بغیر x حاصل کیا جا سکتا ہے۔چونکہ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ہے لٰہذا اعادہ نیوٹن

$$x_{m+1}=x_m-(x_m^{-1}-a)(-x_m^2)=x_m(2-ax_m)$$

ہو گا۔اس کو دیکھ کر ہم $\boldsymbol{A}$ کے معکوس $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$ کے لئے درج ذیل کلیہ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{X}_{(m+1)}=\boldsymbol{X}_{(m)}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AX}_{(m)}) \tag{22.15}$$

یہ عمل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا (یعنی $m\to\infty$ کرنے سے $\boldsymbol{A}^{-1}$ دے گا) جب $\boldsymbol{X}_{(0)}$ کی ایسی قیمت منتخب کی جائے کہ $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AX}_{(0)}$ کے ہر امتیازی قدر کی حتمی قیمت 1 سے کم ہو۔یہ ترکیب اس صورت موزوں ثابت ہوتی ہے جب پیش آنے والے ضرب آسان ہوں (مثلاً جب $\boldsymbol{A}$ میں بہت سارے صفر ہوں)۔عملاً $\boldsymbol{X}_{(0)}$ کی موزوں قیمت منتخب کرنا اگر نا ممکن نہیں تو مشکل ضرور ثابت ہوتا ہے۔اسی لئے کسی دوسرے ترکیب سے حاصل معکوس کو اس ترکیب سے صرف زیادہ درست بنایا جاتا ہے۔

---

[14] residual
[15] relaxation methods

سوالات

سوال 22.18 تا سوال 22.21 کو اعادہ گاوس زائڈل سے حل کریں۔ابتدائی قیمتیں $1, 1, 1$ لیں۔ تین قدم تک چلیں۔

سوال 22.18:

$$\begin{aligned} 10x + y \quad +z &= 6 \\ x + 10y \quad +z &= 6 \\ x + y \quad +10z &= 6 \end{aligned}$$

جواب: درست حل $0.5, 0.5, 0.5$ ہے۔

سوال 22.19:

$$\begin{aligned} 4x + y \quad &= -8 \\ 4y \quad +z &= 2 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

سوال 22.20:

$$\begin{aligned} 10x - y - z &= 13 \\ x + 10y + z &= 36 \\ -x - y + 10z &= 35 \end{aligned}$$

جواب: درست حل $2, 3, 4$ ہے۔

سوال 22.21:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + z &= 14 \\ x + 5y - z &= 10 \\ x + y + 8z &= 20 \end{aligned}$$

سوال 22.22: (الف) $0, 0, 0$ اور (ب) $10, 10, 10$ سے ابتدا کرتے ہوئے سوال 22.18 کے نظام کو اعادہ گاوس زائڈل سے حل کریں۔ تین قدم تک چلیں۔

سوال 22.23: $1,1,1$ سے ابتدا کرتے ہوئے سوال 22.18 کے نظام کو تین قدم تک اعادہ گاوس زائڈل اور اعادہ یعقوبی سے حل کریں۔ نتائج کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 22.24: مساوات 22.9 میں دی گئی نظام کا حل کتاب میں دیا گیا ہے۔اس حل کی تمام قدموں کی تصدیق کریں۔اس نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

سوال 22.25: کتاب میں مساوات 22.9 کے اعادہ گاوس زائڈل کے مزید دو قدم چلیں۔

سوال 22.26: مساوات 22.9 کے نظام کے لئے مساوات 22.13 کی مدد سے $\boldsymbol{C}$ تلاش کریں۔
جواب:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0.0625 & 0.25 \\ 0 & 0.0625 & 0.0625 & 0.25 \\ 0 & 0.03125 & 0.03125 & 0.125 \end{bmatrix}$$

سوال 22.27: $w_0 = 100$ ، $x_0 = 100$ ، $y_0 = 100$ ، $z_0 = 100$ سے ابتدا کرتے ہوئے اعادہ یعقوبی سے مساوات 22.9 کے نظام کا حل دو قدم تک حاصل کریں۔کتاب میں دیے گئے حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 22.28: $0,0,0$ سے ابتدا کرتے ہوئے دکھائیں کہ درج ذیل نظام کے لئے اعادہ گاوس زائڈل مرتکز ہے جبکہ اعادہ یعقوبی منفرج ہے۔

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

جواب: اعادہ یعقوبی $0,0,0$ کے بعد $2,2,2$ اور اس کے بعد $0,0,0$ ، $\cdots$ دیتا ہے۔اعادہ گاوس زائڈل کی اعادہ قالب $\boldsymbol{C}$ کے تمام جزو کی حتمی قیمت 1 سے کم ہے لہٰذا یہ اعادہ مرتکز ہو گا۔یہاں $\boldsymbol{C}$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0 & 0.125 & 0.375 \end{bmatrix}$$

سوال 22.29: عین ممکن ہے کہ ہم سوچیں کہ اعادہ یعقوبی سے اعادہ گاوس زائڈل بہتر ہے۔ حقیقت میں ان اعادہ کا آپس میں موازنہ کرنا ممکن نہیں ہے۔اس حیران کن حقیقت کو دیکھنے کی خاطر درج ذیل نظام کو دونوں اعادہ سے حل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ اعادہ یعقوبی مرتکز ہو گا جبکہ اعادہ گاوس زائڈل منفرج ہو گا۔(اشارہ۔ امتیازی اقدار کا سہارا لیں)

$$\begin{aligned} x \qquad\; +z &= 2 \\ -x + y \qquad &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

سوال 22.30: قالب $\boldsymbol{A}$ کے تخمینی معکوس $\boldsymbol{X}_{(0)}$ پر غور کریں جہاں

$$\boldsymbol{X}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.4 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ہیں۔مساوات 22.15 کی مدد سے $\boldsymbol{X}_{(1)}$ حاصل کریں۔ $\boldsymbol{A}^{-1}$ تلاش کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\boldsymbol{X}_{(0)}$ کا ہر جزو $\boldsymbol{A}^{-1}$ کے مطابقتی جزو سے زیادہ سے زیادہ 0.1 انحراف کرتا ہے جبکہ $X_{(1)}$ کا مطابقتی جزو 0.03 انحراف کرتا ہے۔

جواب:

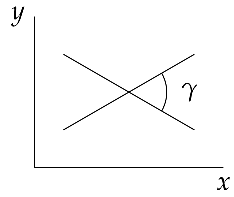
$$\boldsymbol{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.49 & -0.1 & 0.51 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.51 & 0.3 & -1.47 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.5 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix}$$

سوال 22.31: درج ذیل $\boldsymbol{X}_{(0)}$ اور $\boldsymbol{A}$ کے لئے مساوات 22.15 کے ارتکاز کی تصدیق کرتے ہوئے دو قدم چل کر درست حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

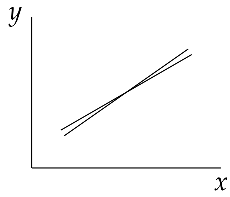
$$\boldsymbol{X}_{(0)} = \begin{bmatrix} 2.9 & -0.9 \\ -4.9 & 1.9 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

سوال 22.32: $\boldsymbol{X}_{(m)} = \boldsymbol{A}^{-1}$ سے مساوات 22.15 کے ذریعہ $\boldsymbol{X}_{(m+1)} = \boldsymbol{A}^{-1}$ حاصل کریں۔

سوال 22.33: دکھائیں کہ مساوات 22.9 میں w اور x آپس میں بدلنے اور y اور z کو آپس میں بدلنے سے نظام میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے اس نظام کو گھٹا کر دو نا معلوم متغیرات کی دو مساوات کا نظام حاصل کریں۔



(الف) خوش خو نظام



(ب) بد خو نظام

شکل 22.1: دو متغیرات کے دو خطی مساوات کے نظام

22.3 خطی مساوات کا نظام: بد خوئی

وہ خطی مساوات کا نظام جس کے عددی سروں میں معمولی خلل کی بنا یا حل کرنے کے دوران معمولی خلل پیدا ہونے سے حل پر معمولی اثر پڑتا ہو کو خوش خو[16] کہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات حل کی پر زور نشاندہی کرتے ہیں۔

وہ خطی مساوات کا نظام جس کے عددی سروں میں معمولی خلل یا دوران حل معمولی خلل نتائج پر بڑا اثر ڈالتے ہوں بد خو[17] کہلاتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات حل کی کمزور نشاندہی کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر، دو سیدھی لکیروں کو دو متغیرات کے دو خطی مساوات ظاہر کریں گے۔ایسا نظام صرف اور صرف اس صورت بد خو ہو گا جب ان لکیروں کے مابین زاویہ γ چھوٹا ہو یعنی صرف اور صرف جب لکیریں آپس میں تقریباً متوازی ہوں (شکل 22.1)۔ایسی صورت میں معمولی خلل سے نقطہ تقاطع میں بہت زیادہ تبدیلی رونما ہو گی۔اگرچہ زیادہ تعداد کی مساواتوں کے بڑے نظام کے لئے ایسی سادہ جیومیٹریائی مثال پیش نہیں کی جا سکتی ہے، بہر حال بڑی نظام کے لئے بھی صورت حال اصولی طور پر ایسی ہی ہو گی۔

مثال 22.4: بد خو نظام
درج ذیل نظام

$$\begin{aligned} 0.9999x - 1.0001y &= 1 \\ x \qquad\quad - y &= 1 \end{aligned}$$

---

[16] well-conditioned
[17] ill-conditioned

کا حل $x = 0.5$ ، $y = -0.5$ ہے جبکہ نظام

$$\begin{aligned} 0.9999x - 1.0001y &= 1 \\ x \qquad - y &= 1 + \epsilon \end{aligned}$$

کا حل $x = 0.5 + 5000.5\epsilon$ ، $y = -0.5 + 4999.5\epsilon$ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام بد خو ہے۔دائیں ہاتھ ϵ تبدیلی نتائج میں تخمیناً 5000ϵ کی تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ □

ندرت تک پہنچنے کے عمل کو بد خوئی تصور کیا جا سکتا ہے۔دوران حساب ملحوظ ہندسوں کے کھوئے جانے سے بد خوئی عیاں ہوتی ہے۔یوں درست منعکس یا حل کا حصول زیادہ دشوار ثابت ہوتا ہے۔

بد خوئی کی صورت میں (اگر تعداد ہندسہ خلل پایا جاتا ہو تب) کسی مقررہ اعشاریہ تک درست نتائج حاصل کرنے کی خاطر حساب میں نسبتاً بہت زیادہ اعشاریہ تک اعداد استعمال کرنے ہوں گے۔اگر بد خو نظام کا دایاں ہاتھ اور عددی سر کسی کلیہ سے حاصل کیے جا سکتے ہوں تب ہم انہیں جتنی درستگی تک چاہیں حاصل کر سکتے ہیں لہٰذا بد خوئی کا مسئلہ اتنا سنگین نہیں ہو گا۔اس کے برعکس اگر نظام کا دایاں ہاتھ اور اس کے عددی سر تجربہ سے حاصل کیے گئے ہوں تب (چونکہ کسی حد سے بہتر تجرباتی نتائج حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہٰذا) ان میں خلل کی گنجائش کو رد نہیں کیا جا سکتا ہے اور صورت حال زیادہ سنگین ہو گی۔ہمیں ماننا ہو گا کہ نظام کے مواد میں خلل کی بنا بد خو نظام کے حل میں بھی بہت خلل پایا جائے گا۔ایسی صورت میں بہتر ہو گا کہ ہم نظام کو کسی ایسی مساواتوں سے ظاہر کریں جو نسبتاً زیادہ خوش خو ہو۔

بد خوئی کی چند علامتیں پیش کرتے ہیں۔نظام کے دائیں ہاتھ اجزاء اور زیادہ سے زیادہ $|a_{jk}|$ کے لحاظ سے $|\boldsymbol{A}|$ مقطع چھوٹا ہو گا۔کم درست تخمینی حل بہت کم بقیہ پیدا کرتا ہو گا (نیچے دیکھیں)۔حل کے اجزاء کی حتمی قیمتوں کی نسبت $\boldsymbol{A}^{-1}$ کے اجزاء کی حتمی قیمتیں بڑی ہوں گی۔

مرکزی وتر کے اجزاء کی حتمی قیمت باقی اجزاء کی حتمی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں خوش خو نظام پایا جائے گا۔اگر چکور قالب جس کے بڑے اجزاء 0.1 اور 10 کے بیچ ہوں کے معکوس کے بڑے اجزاء بھی لگ بھگ انہیں حدود میں پائے جاتے ہوں تب ان سے منسلک مساوات کا نظام خوش خو ہو گا۔

بد خوئی کی صورت میں ہم

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{22.16}$$

کے تخمینی حل $\boldsymbol{x}_{(1)}$ سے بہتر حل تلاش کرنا چاہیں گے۔ $\boldsymbol{x}_{(1)}$ کے لحاظ سے اس نظام کا مطابقتی بقیہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}_{(1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)}$$

یوں

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}_{(1)}$$

لہٰذا

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{(1)}) = \boldsymbol{r}_{(1)} \tag{22.17}$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ مساوات 22.17 کے حل کو بطور $\boldsymbol{r}_{(1)}$ کی درستگی استعمال کرتے ہوئے مساوات 22.16 کا حل حاصل ہو گا۔جب تک نظام بہت زیادہ بد خو نہ ہو، $\boldsymbol{r}_{(1)}$ کے اجزاء $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء سے کم ہوں گے۔

سوالات

سوال 22.34: مثال 22.4 میں نظام کو سب سے بڑی حتمی قیمت والے عددی سر سے تقسیم کرتے ہوئے حاصل نظام کے قالب کا مقطع حاصل کریں۔تبصرہ کریں۔کیا بد خو نظام کے قالب کے مقطع کی قیمت بڑی ہو سکتی ہے؟
جواب: -0.0002

سوال 22.35: $\zeta = x + y + 1$ اور $\eta = x - y - 1$ پر کرتے ہوئے مثال 22.4 سے دوسرا بد خو نظام حاصل کریں۔

سوال 22.36: درج ذیل دونوں نظام کو حل کریں۔ان حل کا آپس میں موازنہ کریں۔نتائج پر تبصرہ کریں۔

$$\begin{aligned} 2x + 1.4y &= 1.4 \\ 1.4x + y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 1.4y &= 1.44 \\ 1.4x + y &= 1 \end{aligned}$$

جواب: $x = 0, y = 1; \quad x = 1, y = -0.4$

سوال 22.37: درج ذیل دونوں نظام کو حل کریں۔ان حل کا آپس میں موازنہ کریں۔نتائج پر تبصرہ کریں۔

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= -2 \\ -7x + 10y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x - 7y &= -2 \\ -7x + 10y &= 3.1 \end{aligned}$$

سوال 22.38: دکھائیں کہ دو لکیروں

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

کے مابین زاویہ γ درج ذیل تعلق دیتا ہے۔

$$\tan\gamma = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}$$

بد خوئی کے نقطہ سے اس کلیہ پر تبصرہ کریں۔

سوال 22.39: مثال 22.4 اور سوال 22.36 کے نظام کے لئے زاویہ γ سوال 22.38 کی مدد سے حاصل کریں۔ نتائج پر تبصرہ کریں۔

سوال 22.40: دکھائیں کہ درج ذیل نظام کا حل $x_1 = 1$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 1$ ہے۔

$$6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 21$$
$$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24$$
$$8x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 26$$

نظام کا مقطع تلاش کریں اور $x_1 = -0.8$ ، $x_2 = 2.9$ ، $x_3 = 0.7$ کے لحاظ سے نظام کا بقیہ حاصل کریں۔
جواب: $-0.1, 0.1, 0 \quad 1;$

سوال 22.41: دکھائیں کہ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.01 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 111 & -100 \\ -110 & 100 \end{bmatrix}$$

کا $\boldsymbol{AB}$ تقریباً اکائی قالب کے برابر ہے جبکہ $\boldsymbol{BA}$ ایسا نہیں ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 22.42: **(قالب ہلبرٹ)** گاوسی اسقاط سے نظام

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}z = 1$$
$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z = 0$$
$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{5}z = 0$$

کا حل $x = 9$ ، $y = -36$ ، $z = 30$ تلاش کریں۔اب ایک وقت میں صرف دو ملحوظ ہندسے استعمال کرتے ہوئے اس نظام کو دوبارہ حل کریں۔نتائج کا موازنہ کریں اور ان پر تبصرہ کریں۔(اس نظام کے عددی سر قالب کو 3×3 قالب ہلبرٹ کہتے ہیں۔)

جواب: پہلی قدم میں $0.08y + 0.09z = -0.50$ ، $0.08y + 0.09z = -0.33$ حاصل ہو گا جہاں 0.165 کو دو ملحوظ ہندسوں میں عمومی قاعدہ کے تحت 0.16 لکھا گیا ہے۔دوسری قدم میں $0.17 = 0$ حاصل ہو گا جو کوئی معنی نہیں رکھتا ہے۔اگر ہم 0.165 کو 0.17 لکھیں تب $z = 17$ ، $y = -23$ ، $x = 7.0$ حاصل ہو گا۔نظام بد خو ہے۔

سوال 22.43: تعریف کی رو سے $n \times n$ قالب ہلبرٹ $\boldsymbol{H}_n = [h_{jk}]$ کے اجزاء $h_{jk} = \frac{1}{j+k-1}$ ہوں گے۔ n بڑھانے سے معکوس $\boldsymbol{H}_n^{-1}$ کے اجزاء کی حتمی قیمتیں بہت زیادہ شرح سے بڑھتی ہیں۔اس حقیقت کو دیکھنے کی خاطر $\boldsymbol{H}_2^{-1}$ ، $\boldsymbol{H}_3^{-1}$ ، $\boldsymbol{H}_4^{-1}$ تلاش کریں۔

22.4 ترکیب کمتر مربع

n عدد نقطوں (عددی جوڑیاں)

$$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$$

کے لحاظ سے **تلاش موزون منحنی**[18] سے مراد ایسے تفاعل $f(x)$ کی تلاش ہے جو $j = 1, \cdots, n$ کے لئے $f(x_j) \approx y_j$ پر پورا اترتا ہو۔تفاعل کی قسم (مثلاً کثیر رکنی، قوت نمائی تفاعل، سائن تفاعل، کوسائن تفاعل) کے بارے میں معلومات مسئلے کی نوعیت (یعنی طبعی وجوہات) سے حاصل کی جا سکتی ہے۔عموماً صورتوں میں کسی مخصوص درجے کی کثیر رکنی سے موزوں منحنی حاصل کرنا ممکن ہو گا۔

اگر ہمیں سختی سے مکمل برابری $f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n$ درکار ہو تب باہمی تحریف کے کلیات استعمال کرتے ہوئے ہم کافی زیادہ درجے کی کثیر رکنی $f(x)$ حاصل کر سکتے ہیں۔البتہ کئی بار ایسا کرنے سے قابل قبول نتائج حاصل نہیں ہوتے ہیں۔مثال کے طور پر ان ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل چار نقطوں

$$(-1.0, 1.000), \quad (-0.1, 1.099), \quad (0.2, 0.808), \quad (1.0, 1.000) \tag{22.18}$$

[18] curve fitting

(ب) چار نقطوں سے گزرتی ہوئی سیدھی لکیر

(الف) چار نقطوں سے گزرتی ہوئی کثیر رکنی

شکل 22.2: تلاش موزوں منحنی

سے گزرتی لیگرینج کثیر رکنی $f(x) = x^3 - x + 1$ تلاش کر سکتے ہیں جس کو شکل 22.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔البتہ شکل 22.2-ب کو دیکھ کر صاف ظاہر ہوتا ہے کہ یہ نقطے تقریباً ایک سیدھی لکیر پر پائے جاتے ہیں۔اگر یہ نقطے کسی تجربہ سے حاصل کیے گئے ہوں تب ظاہر ہے کہ ان نقطوں میں خلل پایا جائے گا اور سیدھی لکیر پر پائے جانے والے نقطے اسی طرح دکھائی دیں گے۔اب اگر تجربے کی طبیعیات کہتی ہے کہ نتائج سیدھی لکیر پر آنے چاہیے تب ہم سیدھی لکیر کو ہم درست تصور کریں گے۔ایسی موزوں منحنی سے کسی دوسری x کے لئے بھی قیمتیں اخذ کی جا سکتی ہیں۔عموماً صورتوں میں آنکھ سے دیکھ کر موزوں سیدھی لکیر تلاش کی جا سکتی ہے البتہ بہت زیادہ بکھرے ہوئے نقطوں کی صورت میں ایسا کرنا قابل اعتماد نہیں ہو گا اور حسابی تراکیب استعمال کرنا بہتر ہو گا۔ایسی ایک اہم ترکیب جو گاوس نے پیش کی **ترکیب کمتر مربع**[19] کہلاتی ہے۔

ترکیب کمتر مربع

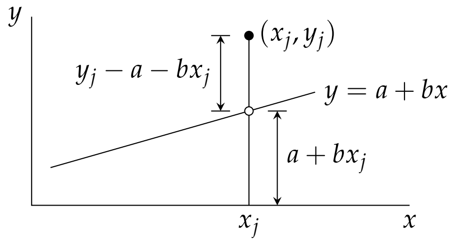
سیدھی لکیر

$$y = a + bx$$

کو نقطوں $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ کے بیچ یوں رکھنا ہے کہ نقطوں سے لکیر تک فاصلوں کے مربع کا مجموعہ کم سے کم ہو جہاں فاصلہ عمودی رخ (y کے متوازی) ناپا جاتا ہے۔

شکل 22.3 میں نقطہ (x_j, y_j) اور لکیر $y = a + bx$ دکھائے گئے ہیں۔ $(x_j, 0)$ سے لکیر تک انتصابی فاصلہ $a + bx_j$ ہے۔یوں (x_j, y_j) سے لکیر تک انتصابی فاصلہ $|y_j - a - bx_j|$ ہو گا۔یوں تمام دیے گئے نقطوں

[19] method of least squares



شکل 22.3: نقطہ کا لکیر سے انتصابی فاصلہ

کا لکیر سے انتصابی فاصلوں کے مربع کا مجموعہ

$$q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_j)^2$$

ہو گا جہاں q کی قیمت a اور b کے تابع ہو گی۔ q کی کم سے کم قیمت تلاش کرنے کی شرائط درج ذیل ہیں (جہاں ہم $j = 1$ تا $j = n$ مجموعہ لیتے ہیں۔)

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial a} &= -2 \sum (y_j - a - bx_j) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial b} &= -2 \sum x_j (y_j - a - bx_j) = 0 \end{aligned} \tag{22.19}$$

یوں

$$\begin{aligned} an + b \sum x_j &= \sum y_j \\ a \sum x_j + b \sum x_j^2 &= \sum x_j y_j \end{aligned} \tag{22.20}$$

حاصل ہوتی ہیں جنہیں ہمارے مسئلے کی **انتصابی مساوات**[20] کہتے ہیں۔

مثال 22.5: سیدھی لکیر
ترکیب کمتر مربع استعمال کرتے ہوئے مساوات 22.18 میں دیے گئے چار نقطوں کے بیچ موزوں سیدھی لکیر تلاش کریں۔
حل: یہاں

$$n = 4, \quad \sum x_j = 0.1, \quad \sum x_j^2 = 2.05, \quad \sum y_j = 3.907, \quad \sum x_j y_j = 0.0517$$

[20] normal equations

ہیں لہٰذا انتصابی مساوات

$$
\begin{aligned}
4a + 0.10b &= 3.9070 \\
0.1a + 2.05b &= 0.0517
\end{aligned}
$$

ہوں گے جن کا حل $a = 0.9773$ ، $b = -0.0224$ ہے۔یوں درج ذیل سیدھی لکیر (شکل 22.2-ب) حاصل ہو گی۔

$$
y = 0.9773 - 0.0224x
$$

$\square$

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل ب.1-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل ب.1-ب)

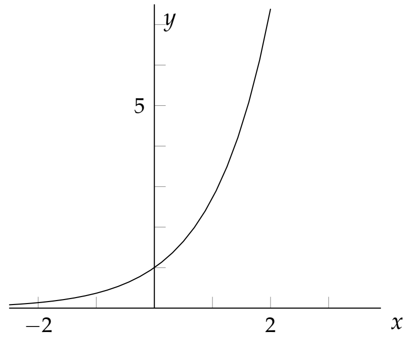
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

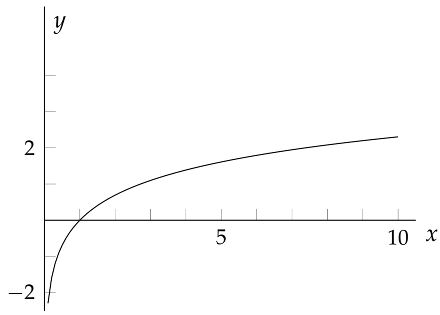
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

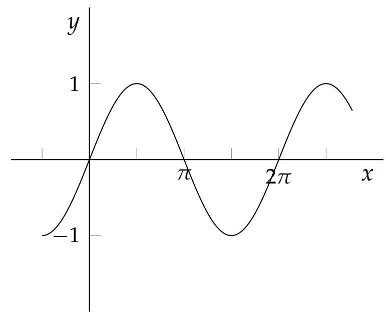


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

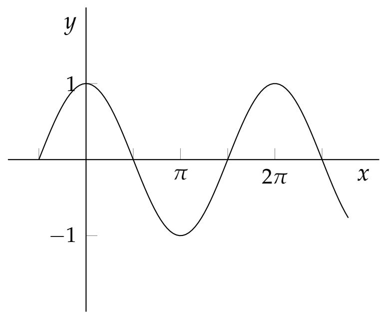


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$



(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{-\log x}=10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
1^\circ &= 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}\\
1\,\text{radian} &= 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ
\end{aligned}
$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

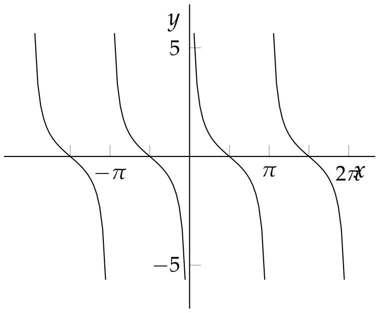
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

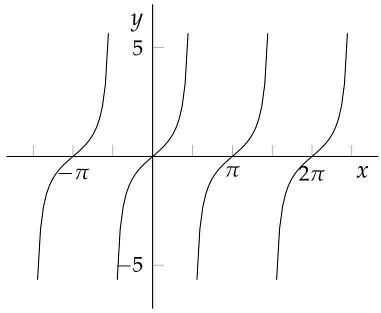
ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



(ب) $\cot x$



(الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.17}$$
$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

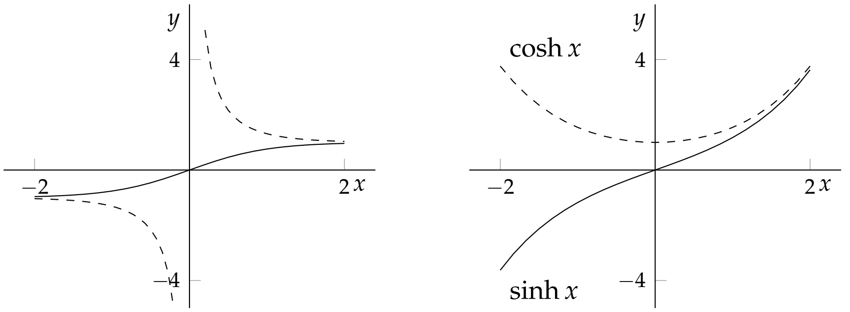
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{ب.24}$$

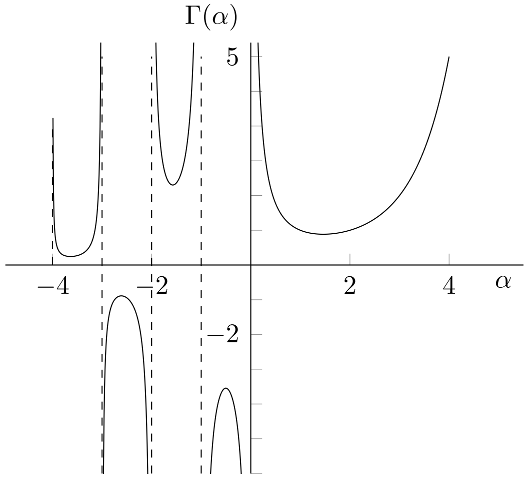
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیح منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

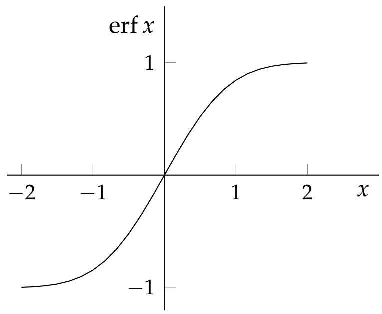
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

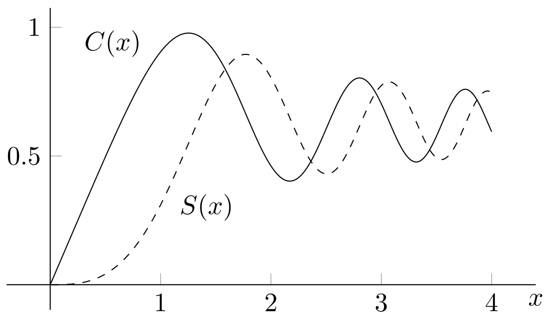
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔**مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{ب.37}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{ب.38}$$

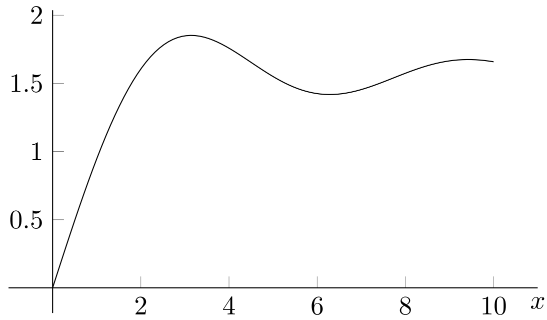
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$