انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 6

لاپلاس تبادلہ

لاپلاس بدل کی ترکیب سے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات حل کیے جاتے ہیں۔یہ ترکیب تین قدم پر مشتمل ہے۔

- پہلا قدم: ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے سادہ ضمنی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔
- دوسرا قدم: ضمنی مساوات کو خالصتاً الجبرائی طور پر حل کیا جاتا ہے۔
- تیسرا قدم: ضمنی مساوات کے حل کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے اصل حل حاصل کیا جاتا ہے۔

یوں لاپلاس بدل تفرقی مساوات کے مسئلے کو سادہ الجبرائی مسئلہ میں تبدیل کرتا ہے۔تیسرے قدم پر الٹ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے عموماً ایسی جدول کا سہارا لیا جاتا ہے جس میں تفاعل اور تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل درج ہوں۔

انجینئری میں لاپلاس بدل کی ترکیب اہم کردار ادا کرتی ہے، بالخصوص ان مسائل میں جہاں جبری تفاعل غیر استمراری ہو، مثلاً جب جبری تفاعل کچھ وقفے کے لئے کار آمد ہو یا جبری تفاعل غیر سائن نما دہراتا تفاعل ہو۔

اب تک غیر متجانس مساوات کا عمومی حل حاصل کرتے ہوئے پہلے مطابقتی متجانس مساوات کا حل اور پھر غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل حاصل کیا جاتا رہا۔لاپلاس بدل کی ترکیب میں عمومی حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) مسائل کے حل میں عمومی حل حاصل کرنے کے بعد ابتدائی (سرحدی) شرائط پر کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی چونکہ حل یہ شرائط شامل ہوتے ہیں۔

6.1 لاپلاس بدل۔الٹ لاپلاس بدل۔خطیت

فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر معین ہے۔ ہم $f(t)$ کو e^{-st} سے ضرب دیتے ہوئے، t کے ساتھ، 0 تا ∞ ، تکمل لیتے ہیں۔ اگر ایسا تکمل موجود ہو تو یہ s پر منحصر ہو گا لہٰذا اس کو $F(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

تفاعل $F(s)$ کو تفاعل $f(t)$ کا **لاپلاس بدل**[1] کہا جاتا ہے اور اس کو $\mathcal{L}(f)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

$f(t)$ سے $F(s)$ کے حصول کو **لاپلاس تبادلہ**[2] کہتے ہیں۔

اسی طرح $f(t)$ کو $F(s)$ کا **الٹ لاپلاس بدل**[3] کہتے ہیں جسے $\mathcal{L}^{-1}(F)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) \tag{6.3}$$

علامت نویسی
اصل تفاعل کو چھوٹے لاطینی حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ لاپلاس بدل کو اسی حرف تہجی کی بڑی صورت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $f(t)$ کا بدل $F(s)$ ہو گا اور $g(t)$ کا لاپلاس بدل $G(s)$ ہو گا۔

مثال 6.1: تفاعل $f(t) = 1$ ، جہاں $t \geq 0$ ہے، کا لاپلاس بدل مساوات 6.2 سے بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty$$

[1] Laplace transform
[2] Laplace transformation
[3] inverse Laplace transform

ہو گا جو $s>0$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}$$

تکمل 6.2 کی علامت پر آسائش ضرور ہے لیکن اس پر مزید غور کی ضرورت ہے۔اس تکمل کا وقفہ لامتناہی ہے۔ایسے تکمل کو **غیر مناسب تکمل**[4] کہتے ہیں اور حزب تعریف، اس کی قیمت درج ذیل اصول کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$$

یوں اس مثال میں اس آسائش علامت کا مطلب درج ذیل ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}e^0\right]=\frac{1}{s},\quad (s>0)$$

اس پورے باب میں تکمل کی یہی علامت استعمال کی جائے گی۔

مثال 6.2: تفاعل $f(t)=e^{at}$ جہاں $t\geq 0$ اور a مستقل ہے کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دریافت کریں۔

حل: مساوات 6.2 سے

$$\mathcal{L}(e^{at})=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\bigg|_0^\infty$$

ملتا ہے۔اب اگر $s-a>0$ ہو (یعنی s کی قیمت a سے زیادہ چنی گئی ہو۔) تب درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a}$$

---

[4] improper integral

اگرچہ ہم بالکل اسی طرز پر دیگر تفاعل کے لاپلاس بدل بذریعہ تکمل حاصل کر سکتے ہیں، حقیقت میں لاپلاس تبادلہ کے ایسی کئی خواص ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے دیگر لاپلاس بدل نہایت عمدگی کے ساتھ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔لاپلاس تبادلہ کی ایک خاصیت خطیت ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

مسئلہ 6.1: لاپلاس تبادلہ کی خطیت
لاپلاس تبادلہ خطی عمل ہے۔یوں ایسے تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$ ، جن کے لاپلاس بدل موجود ہوں، کے عمومی مجموعے کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

ثبوت : لاپلاس تبدلہ کی تعریف سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]
\end{aligned}$$

مثال 6.3: آئیں تفاعل $f(t) = \cosh at$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.1 اور مثال 6.2 کی مدد سے لکھیں۔ چونکہ $\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at}+e^{-at})$ ہے لہٰذا

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

ہو گا جہاں $s > a \geq 0$ چنا گیا ہے۔

مثال 6.4: آئیں تفاعل $\sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔چونکہ $\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$ ہے لہٰذا مسئلہ خطیت سے تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

مثال 6.5: $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل:انہیں $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ اور $\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) - \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

جدول 6.1 میں چند اہم بنیادی تفاعل اور ان کے لاپلاس بدل دیے گئے ہیں۔اس جدول میں دیے لاپلاس بدل جاننے کے بعد ہم تقریباً ان تمام تفاعل کے بدل، لاپلاسی خواص سے حاصل کر پائیں گے، جو ہمیں درکار ہوں گے۔

جدول 6.1 میں پہلا، دوسرا اور تیسرا کلیہ چوتھے کلیے سے اخذ کیے جا سکتے ہیں جبکہ چوتھا کلیہ از خود پانچویں کلیہ میں مساوات 5.93 استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(n+1) = n!$ لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے، جہاں n غیر منفی $n \geq 0$ عدد صحیح ہے۔ پانچواں کلیہ، لاپلاس بدل کی تعریف مساوات 6.2

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-st} t^a \,\mathrm{d}t$$

میں $st = x$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.91 کے استعمال سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{\mathrm{d}x}{s} = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^a \,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a+1)}{s+1}, \qquad (s>0)$$

جدول 6.1: چند بنیادی تفاعل $f(t)$ اور ان کے لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$

$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$	شمار	$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$	شمار
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	7	$\frac{1}{s}$	1	1
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	8	$\frac{1}{s^2}$	t	2
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	9	$\frac{2!}{s^3}$	t^2	3
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	10	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n $(n=1,2,\cdots)$	4
$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$	11	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	t^a $(a>0)$	5
$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\sin\omega t$	12	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	6

s منتقلی

تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل جانتے ہوئے تفاعل $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل درج ذیل مسئلہ کی مدد سے فوراً لکھا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 6.2: منتقلی کا پہلا مسئلہ، s منتقلی
اگر تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو (جہاں کسی k کے لئے $s>k$ ہے) تب تفاعل $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s-a)$ ہو گا (جہاں $s-a>k$ ہے)۔

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$$

اس مساوات کو الٹ لاپلاس بدل کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$e^{at}f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]$$

ثبوت: لاپلاس بدل کے تکمل مساوات 6.2 میں s کی جگہ $s-a$ پر کرتے ہوئے

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t=\mathcal{L}[e^{at}f(t)] \tag{6.4}$$

ملتا ہے۔اگر کسی k $s>k$ کے لئے $F(s)$ موجود ہو یعنی اس کی قیمت محدود ہو تب $s-a>k$ کے لئے پہلا تکمل بھی موجود ہو گا (یعنی محدود قیمت کا ہو گا)۔ اس کلیے کے دونوں اطراف کا الٹ لاپلاس بدل لینے سے مسئلے کی دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال 6.6: قصری ارتعاش
جدول 6.1 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے بدل کو استعمال کرتے ہوئے جدول میں گیارہ اور بارہ شمار پر دیے گئے لاپلاس بدل کو مسئلہ 6.2 کی مدد سے فوراً لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\qquad \mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}(f)=\frac{4s+24}{s^2+2s+101}$$

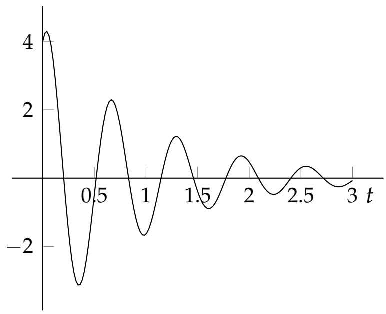
حل:اس کو درکار صورت

$$f=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s+1)+2(10)}{(s+1)^2+10^2}\right]=4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+10^2}\right]+2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)^2+10^2}\right]$$

میں لاتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f=e^{-t}(4\cos 10t+2\sin 10t)$$

جسے شکل 6.1 میں دکھایا گیا ہے۔یہ قصری ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل 6.1: قصری ارتعاش (مثال 6.6)

لاپلاس بدل کی وجودیت اور یکتائی

اگر تمام $t \geq 0$ کے لئے، کسی مستقل k اور M پر تفاعل f **بڑھنے کی پابندی**

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{kt} \tag{6.5}$$

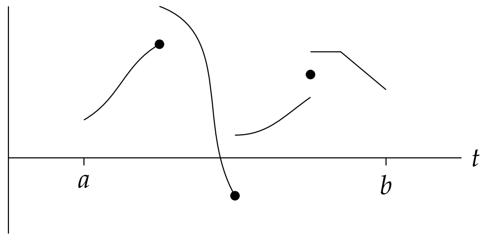
پر پورا اترتا ہو، تب اس کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔ ہم کہتے ہیں کہ نہایت تیزی سے نہ بڑھنے والے تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔

$f(t)$ کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے البتہ اس کا ٹکڑوں میں **استمراری**[5] ہونا لازم ہے۔ اگر محدود وقفہ $a \leq t \leq b$ جس پر $f(t)$ معین ہو، کو کئی ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے پر $f(t)$ استمراری ہو اور t کا اندرون ٹکڑے سے ٹکڑے کے (دونوں) سروں تک پہنچنے پر $f(t)$ کی قیمت کا **حد**[6] محدود حاصل ہو تب $f(t)$ **ٹکڑوں میں استمراری** کہلائے گا۔ ایسی صورت میں، جیسا شکل 6.2 میں دکھایا گیا ہے، محدود **چھلانگ**[7] پائے جائیں گے جو غیر استمراری صورت کی واحد وجہ ہو گی۔ عموماً عملی مسائل اسی نوعیت کے ہوتے ہیں۔ درج ذیل مسئلہ بھی اسی نوعیت کا ہے۔

مسئلہ 6.3: مسئلہ وجودیت لاپلاس بدل
اگر نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر تفاعل $f(t)$ معین اور ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.5

---

[5] piecewise continuous
[6] limit
[7] jumps



شکل 6.2: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$۔ غیر استمراری مقام پر تفاعل کی قیمت کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

پر، تمام $t \geq 0$ اور کسی مستقل M اور k کے لئے، پورا اترتا ہو تب لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ تمام $s > k$ کے لئے موجود ہو گا۔

ثبوت: چونکہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے لہٰذا t محور کے کسی بھی محدود وقفے پر $e^{-st}f(t)$ قابل تکمل ہے۔ مساوات 6.5 کو دیکھ کر، $s > k$ تصور کرتے ہوئے (جو درج ذیل آخری تکمل میں درکار ہے)، لاپلاس بدل کی وجودیت کا ثبوت حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|\mathcal{L}(f)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\infty \left|f(t)\right| e^{-st}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty Me^{kt}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s-k}$$

کسی بھی تفاعل کا مساوات 6.5 میں دیے گئے شرط پر پورا اترنے کو با آسانی دیکھا جا سکتا ہے، مثلاً $\cosh t < e^t$ یا $t^n < n!e^t$ (چونکہ $\frac{t^n}{n!}$ مکلارن تسلسل کا ایک رکن ہے)۔ ایسا تفاعل جو مساوات 6.5 پر پورا نہ اترتا ہو کی مثال e^{t^2} ہے۔آپ سوال 6.15 میں دیکھیں گے کہ مسئلہ 6.3 میں دیے گئے شرائط لاپلاس بدل کی وجودیت کے لئے کافی ہیں نا کہ لازمی ہیں۔

یکتائی

اگر کسی تفاعل کا لاپلاس بدل موجود ہو تو یہ بدل یکتا ہو گا۔اسی طرح اگر (حقیقی مثبت محور پر معین) دو تفاعل کے لاپلاس بدل یکساں ہوں تب یہ تفاعل، کسی بھی مثبت لمبائی کے وقفے پر، آپس میں مختلف نہیں ہو سکتے ہیں، البتہ تنہا نقطوں پر ان کی قیمت غیر یکساں ہو سکتی ہے۔یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ الٹ لاپلاس بدل یکتا ہے۔ بالخصوص دو ایسے استمراری تفاعل جن کا لاپلاس بدل یکساں ہو، آپس میں مکمل طور پر یکساں ہوں گے۔

سوالات

سوال 6.1 تا سوال 6.8 میں لاپلاس بدل حاصل کریں۔ a اور b کو مستقل تصور کریں۔

سوال 6.1: $2t-3$
جواب: $\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}$

سوال 6.2: $(at+b)^2$
جواب: $a(\frac{b}{s^2}+\frac{2a}{s^3})+b(\frac{b}{s}+\frac{a}{s^2})$

سوال 6.3: $\sin 2\pi t$
جواب: $\frac{2\pi}{s^2+4\pi^2}$

سوال 6.4: $\sin^2 2\pi t$
جواب: $\frac{8\pi^2}{s(s^2+16\pi^2)}$

سوال 6.5: $e^{-3t}\sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

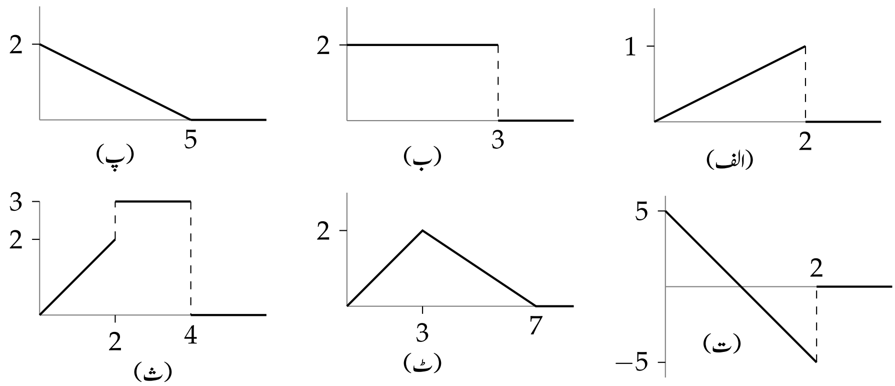
سوال 6.6: $e^{2t}\cos 3t$
جواب: $\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

سوال 6.7: $\cos(2t-\frac{\pi}{3})$
جواب: $\frac{\frac{s}{2}+\sqrt{3}}{s^2+4}$

سوال 6.8: $2\sin(5t+\pi)$
جواب: $\frac{-10}{s^2+25}$

سوال 6.9: شکل 6.3-الف میں ٹکڑوں میں استمراری تفاعل دکھایا گیا ہے۔ تمام ٹکڑوں کی ریاضی مساوات حاصل کریں۔ تکمل 6.2 کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1-e^{-2s}(2s+1)}{2s^2}$



شکل 6.3: سوال 6.9 تا سوال 6.9 کے اشکال۔

سوال 6.10: شکل 6.3-ب میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2}{s}(1-e^{-3s})$

سوال 6.11: شکل 6.3-پ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2e^{-5s}+10s-2}{5s^2}$

سوال 6.12: شکل 6.3-ت میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{5(s+1)e^{-2s}+5(s-1)}{s^2}$

سوال 6.13: شکل 6.3-ٹ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{4-7e^{-3s}+3e^{-7s}}{6s^2}$

سوال 6.14: شکل 6.3-ث میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1+(s-1)e^{-2s}-3se^{-4s}}{s^2}$

سوال 6.15: وجودیت
تفاعل $\frac{1}{\sqrt{t}}$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ایسا کرتے ہوئے $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (مساوات 5.97) کا استعمال کریں۔
اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ مسئلہ 6.3 میں دیے شرائط کافی ہیں نا کہ لازمی۔

جواب: $\frac{\sqrt{\pi}}{s}$

سوال 6.16: e^{at} کا لاپلاس بدل $\cosh at$ اور $\sinh at$ کے لاپلاس بدل سے حاصل کریں۔

جواب: $e^{at} = \sinh at + \cosh at$ لکھ کر جواب $\frac{1}{s-a}$ ملتا ہے۔

سوال 6.17: پیمائشی فیتہ میں ردوبدل
ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{F(\frac{s}{c})}{c}$ ہو گا جہاں c مستقل ہے۔اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے $\mathcal{L}(\cos t)$ سے $\mathcal{L}(\cos \omega t)$ حاصل کریں۔

جواب: مساوات 6.2 استعمال کرتے ہوئے کلیہ ثابت ہو گا۔

سوال 6.18: الٹ لاپلاس بدل کی خطیت
$\mathcal{L}$ کی خطیت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\mathcal{L}^{-1}$ خطی ہے۔

سوال 6.19 تا سوال 6.26 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.19: $\frac{0.5s+1.3}{s^2+1.69}$
جواب: $\sin(1.3t) + 0.5\cos(1.3t)$

سوال 6.20: $\frac{4s+1}{s^2-16}$
جواب: $\frac{1}{8}(17e^{4t} + 15e^{-4t})$

سوال 6.21: $\frac{s}{m^2s^2+n^2}$
جواب: $\frac{\cos\frac{nt}{m}}{m^2}$

سوال 6.22: $\frac{1}{(s+3)(s-2)}$
جواب: $\frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})$

سوال 6.23: $\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^5}$
جواب: $t^2+\frac{t^4}{8}$

سوال 6.24: $\frac{3s+8}{s^2-9}$
جواب: $\frac{1}{6}(17e^{3t}+e^{-3t})$

سوال 6.25: $\frac{s-1}{s^2-s-6}$
جواب: $\frac{1}{5}(2e^{3t}+3e^{-2t})$

سوال 6.26: $\frac{1}{(s-a)(s+b)}$
جواب: $\frac{1}{a+b}(e^{at}-e^{-bt})$

سوال 6.27 تا سوال 6.38 **منتقلی** s پر مبنی ہیں۔ سوال 6.27 تا سوال 6.30 میں لاپلاس بدل جبکہ سوال 6.31 تا سوال 6.38 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.27: te^{2t}
جواب: $\frac{1}{(s-2)^2}$

سوال 6.28: $e^{-3t}\sin 5t$
جواب: $\frac{5}{(s+3)^2+5^2}$

سوال 6.29: $0.25e^{-1.5t}\cos(3\pi t)$
جواب: $\frac{0.25(s+1.5)}{(s+1.5)^2+(3\pi)^2}$

سوال 6.30: $\sinh t\sin\omega t$
جواب: $\frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{(s-1)^2+\omega^2}-\frac{\omega}{(s+1)^2+\omega^2}\right]$

سوال 6.31: $\frac{m}{(s+n)^2}$
جواب: mte^{-nt}

سوال 6.32: $\frac{3}{(s+5)^4}$
جواب: $\frac{t^3e^{-5t}}{2}$

سوال 6.33: $\frac{3}{(s+\sqrt{5})^3}$
جواب: $\frac{3t^2e^{-\sqrt{5}t}}{2}$

سوال 6.34: $\frac{4}{s^2+2s+5}$
جواب: $2e^{-t}\sin 2t$

سوال 6.35: $\frac{\pi}{s^2+8\pi s+17\pi^2}$
جواب: $e^{-4\pi t}\sin \pi t$

سوال 6.36: $\frac{3s+22}{s^2+8s+41}$
جواب: $e^{-4t}(2\sin 5t+3\cos 5t)$

سوال 6.37: $\frac{s+a+b}{(s+a)^2+b^2}$
جواب: $e^{-at}(\cos bt+\sin bt)$

سوال 6.38: $\frac{a}{s+c}+\frac{b}{(s+c)^2}$
جواب: $(a+bt)e^{-ct}$

6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔سادہ تفرقی مساوات

لاپلاس بدل کو استعمال کرتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل حل کیے جاتے ہیں۔لاپلاس بدل کے استعمال سے احصائی اعمال کی جگہ الجبرائی اعمال استعمال کیے جاتے ہیں۔یوں $f(t)$ کا تفرق، $F(s)$ کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہو گا جبکہ $f(t)$ کا تکمل، $F(s)$ کو s سے تقسیم کرنے کے مترادف ہو گا۔

مسئلہ 6.4: $f(t)$ کی تفرق کا لاپلاس بدل

اگر $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہو، مساوات 6.5 پر پورا اترتا ہو اور $f'(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو تب، $s>k$ کی صورت میں، $f'(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f')=s\mathcal{L}(f)-f(0)\qquad (s>k) \tag{6.6}$$

ثبوت : ہم یہ فرض کرتے ہوئے کہ f' بھی استمراری ہے مساوات 6.6 ثابت کرتے ہیں۔یوں لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) اور تکمل بالحصص سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) \, \mathrm{d}t = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t = f(0) + sF(s)$$

چونکہ $f(t)$ مساوات 6.5 پر پورا اترتی ہے لٰہذا $s > k$ کی صورت میں $t = \infty$ پر $e^{-st}f(t)$ صفر دیگا جبکہ $t = 0$ پر یہ $f(0)$ دیگا۔آخری تکمل $\mathcal{L}(f) = F(s)$ کے برابر ہے جس کا حل، $s > k$ کی صورت میں، مسئلہ 6.3 کے تحت موجود ہے۔یوں $\mathcal{L}(f')$ کا حل موجود ہے۔

اگر f' ٹکڑوں میں استمراری ہو تب درج بالا ثبوت میں تکمل کو ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے (وقفے) پر f' استمراری ہو۔ سوال 6.52 میں اس پر غور کیا گیا ہے۔

f'' پر مساوات 6.6 لاگو کر کے حاصل جواب میں مساوات 6.6 پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \tag{6.7}$$

اسی ترکیب کو f''' پر لاگو کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \tag{6.8}$$

ملتا ہے۔اس ترکیب کو بار بار استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 6.5: بلند درجی تفرق f^n

اگر $f(t)$ اور اس کے تفرقات $f'(t)$ ، $f''(t)$ ، $\cdots$ ، $f^{(n-1)}(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہوں، مساوات 6.5 پر پورا اترتے ہوں اور $f^{(n)}(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر **ٹکڑوں میں استمراری** ہو تب، $s > k$ کی صورت میں، $f^{(n)}(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{6.9}$$

مثال 6.7: تفاعل $f(t)=t^2$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f'=2t$ اور $f''=2$ ہیں۔یوں $f(0)=0$ ، $f'(0)=0$ اور $f''(0)=2$ ملتے ہیں۔اب $\mathcal{L}(2)=\frac{2}{s}$ ہے لہٰذا مساوات 6.7 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو جدول 6.1 کے عین مطابق ہے۔

$$\mathcal{L}(f'')=\mathcal{L}(2)=\frac{2}{s}=s^2\mathcal{L}(f), \quad \implies \quad \mathcal{L}(t^2)=\frac{2}{s^3}$$

عموماً کسی بھی تفاعل کا لاپلاس بدل کئی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔

مثال 6.8: تفاعل $f(t)=\sin^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0)=0$ ہے جبکہ $f'=2\sin t\cos t=\sin 2t$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(\sin 2t)=\frac{2}{s^2+4}=s\mathcal{L}(f) \quad \implies \quad \mathcal{L}(f)=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

مثال 6.9: تفاعل $f(t)=t\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0)=0$ ہے جبکہ

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \sin\omega t - \omega t\cos\omega t, \quad f'(0)=0,\\
f''(t) &= 2\omega\cos\omega t - \omega^2 t\sin\omega t = 2\omega\cos\omega t - \omega^2 f(t)
\end{aligned}
$$

ہیں۔یوں مساوات 6.7 استعمال کرتے ہوئے

$$
\mathcal{L}(f'') = 2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t) - \omega^2\mathcal{L}(f) = s^2\mathcal{L}(f)
$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل پر کرتے

$$
(s^2+\omega^2)\mathcal{L}(f) = 2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}
$$

ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$
\mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}
$$

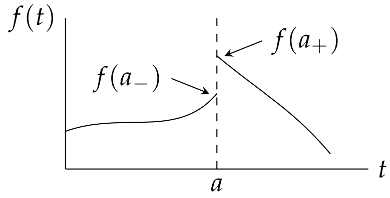
مثال 6.10: تفاعل $f(t)=t\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل:ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
f(t) &= t\cos\omega t, \quad f(0)=0\\
f'(t) &= \cos\omega t - \omega t\sin\omega t, \quad f'(0)=1\\
f''(t) &= -2\omega\sin\omega t - \omega^2 f(t)
\end{aligned}
$$

یوں مساوات 6.7 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'') &= s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - sf'(0)\\
&= s^2F(s) - 1
\end{aligned}
$$



شکل 6.4: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$ (مثال 6.11)

ساتھ ہی ساتھ f'' کی مساوات کا لاپلاس بدل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= \mathcal{L}[-2\omega \sin \omega t - \omega^2 f(t)] \\ &= -\frac{2\omega^2}{s^2+\omega^2} - \omega^2 F(s)\end{aligned}$$

ان دونوں جوابات کو برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$F(s) = \mathcal{L}[t \cos \omega t] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{6.10}$$

مثال 6.11: استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.4 دیتی ہے۔آئیں ٹکڑوں میں استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔شکل 6.4 کے تفاعل میں $t = a(>0)$ پر تفاعل غیر استمراری ہے جبکہ بقایا تمام شرائط وہی ہیں جو مسئلہ 6.4 میں تھے۔اس تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

شکل 6.4 میں دکھایا گیا تفاعل $t = a$ غیر استمراری ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $t = a$ پر تفاعل چھلانگ[8] لگاتا ہے یا کہ تفاعل میں $t = 0$ پر چھلانگ پائی جاتی ہے۔نقطہ چھلانگ تک بائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد[9] کو $f(a_-)$ لکھا جاتا ہے جبکہ نقطہ چھلانگ تک دائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد کو $f(a_+)$ لکھا جاتا ہے۔یوں $t = a$ پر تفاعل کی چھلانگ $f(a_+) - f(a_-)$ ہو گی۔

jump[8]
limit[9]

لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو ایسے ٹکڑوں (وقفوں) میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ہر وقفے پر $f(t)$ استمراری ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_{a_+}^{\infty} e^{-st} f' \, \mathrm{d}t + \int_0^{a_-} e^{-st} f' \, \mathrm{d}t$$

پہلے تکمل کا ابتدائی حد a_+ ہے جو $t = a$ کے دائیں طرف کو ظاہر کرتی ہے جہاں تفاعل کی قیمت $f(a_+)$ ہے۔اسی طرح دوسری تکمل کا اختتامی حد a_- ہے جس پر تفاعل کی قیمت $f(a_-)$ ہے۔انہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ تکمل بالحصص سے

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f') &= e^{-st} f(t) \Big|_{a_+}^{\infty} + s \int_{a_+}^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t + e^{-st} f(t) \Big|_0^{a_-} + s \int_0^{a_-} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \\
&= -e^{-sa} f(a_+) + s \int_{a_+}^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t + e^{-sa} f(a_-) - f(0) + s \int_0^{a_-} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \\
&= s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t - f(0) - e^{-sa} [f(a_+) - f(a_-)] \\
&= sF(s) - f(0) - e^{-sa} [f(a_+) - f(a_-)]
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں e^{-st} استمراری ہونے کی بدولت $e^{-sa_+} = s^{-sa_-} = s^{-sa}$ ہے۔

مثال 6.12: تفرقی مساوات
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

حل: پہلا قدم ضمنی مساوات کا حصول ہے۔تا معلوم تفاعل $y(t)$ کا لاپلاس بدل $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ لکھ کر مساوات 6.6 اور مساوات 6.7 میں دیے گئے ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y') &= sY - y(0) = sY - 2 \\
\mathcal{L}(y'') &= s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - 2s + 1
\end{aligned}$$

انہیں دیے گئے تفرق مساوات میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔ Y کی مساوات کو **ضمنی مساوات**[10] کہتے ہیں۔

$$s^2Y + 3sY + 2Y = 2s + 5$$

دوسرا قدم ضمنی مساوات کا الجبرائی حل ہے۔موجودہ ضمنی مساوات کو

$$(s+1)(s+2)Y = 2s + 5$$

لکھ کر جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Y = \frac{2s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

تیسرا قدم الٹ لاپلاس بدل حاصل کرنا ہے۔جدول 6.1 سے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] = 3e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں خطیت (مسئلہ 6.1) استعمال کرتے ہوئے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے کا حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = 3e^{-t} - e^{-2t}$$

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ لاپلاس بدل سے تفرقی مساوات کے حل میں شروع سے ابتدائی قیمتیں مسئلے کا حصہ بنتی ہیں۔

تفاعل کے تکمل کا لاپلاس بدل

ہم نے دیکھا کہ تفاعل کے تفرق کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہے۔چونکہ تکمل اور تفرق آپس میں الٹ اعمال ہیں لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تفاعل کے تکمل کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل تقسیم s ہو گا۔

[10] subsidiary equation

مسئلہ 6.6: $f(t)$ کی تکمل کا لاپلاس بدل
اگر $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.5 پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \qquad (s > 0,\, s > k) \tag{6.11}$$

ثبوت : فرض کریں کہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے اور مساوات 6.5 پر پورا اترتی ہے۔اب گر منفی k کے لئے مساوات 6.5 کی شرط پوری ہوتی ہو تب مثبت k کے لئے بھی یہ شرط پوری ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ k مثبت ہے لہٰذا تکمل

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.12}$$

استمراری ہو گا اور مساوات 6.5 کے استعمال سے

$$\left|g(t)\right| \le \int_0^t \left|f(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \le M\int_0^t e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{M}{k}(e^{kt}-1) \qquad (k > 0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔مزید ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f(t)$ غیر استمراری ہو، $g'(t) = f(t)$ ہو گا۔اس طرح $g'(t)$ ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو گا لہٰذا مسئلہ 6.4 کے تحت

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \qquad (s > k)$$

ہو گا۔اب مساوات 6.12 سے $g(0) = 0$ ملتا ہے لہٰذا $\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(g)$ ہو گا جو مساوات 6.11 ہی ہے۔

مساوات 6.11 میں $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ لکھ کر اور اطراف بدل کر، الٹ لاپلاس بدل لینے سے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.13}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 6.11 کی جڑواں مساوات ہے۔

مثال 6.13: $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے تفاعل $f(t)$ حاصل کریں۔

حل: جدول 6.1

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

دیتی ہے۔یوں مسئلہ 6.6 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]=\frac{1}{\omega}\int_0^t\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

حاصل ہو گا۔مسئلہ 6.6 ایک مرتبہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]=\frac{1}{\omega^2}\int_0^t(1-\cos\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

سوالات

سوال 6.39: $\sin^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.8 میں حاصل کیا گیا۔یہاں $\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$ لکھ کر لاپلاس بدل دوبارہ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{2}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}]=\frac{2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.40: $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.8 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.41: $\cos^2 t=1-\sin^2 t$ لکھ کر $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.42: ہم نے مثال 6.13 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کیا۔اسی کو درج ذیل لکھ کر دوبارہ الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)$$

سوال 6.43: مسئلہ 6.4 استعمال کرتے ہوئے $\sin \omega t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.44: تفاعل $f(t)=\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.7 حاصل کریں۔

جواب: $f(0)=0$ ہے جبکہ $f'=\omega \cos \omega t$ اور $f''=-\omega^2 \sin \omega t=-\omega^2 f$ ہیں۔یوں $f'(0)=\omega$ ملتا ہے۔ مساوات 6.7 سے $\mathcal{L}(f'')=-\omega^2\mathcal{L}(f)=s^2\mathcal{L}(f)-s(0)-\omega$ لکھا جائے گا جس سے جدول 6.1 میں دیا گیا جواب $\mathcal{L}(f)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ملتا ہے۔

سوال 6.45: تفاعل $f(t)=\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.7 حاصل کریں۔جدول سے جواب دیکھیں۔

سوال 6.46: مسئلہ 6.5 استعمال کرتے ہوئے $f(t)=t^n$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں جہاں t عدد صحیح ہے۔

جواب:چونکہ $f(0)=0$ ، $f'(0)=0$ ، $\cdots$ ، $f^{(n-1)}(0)=0$ ہیں جبکہ $f^n=n!$ ہے لہٰذا مسئلہ 6.5 سے $\mathcal{L}(f^n)=s^nF(s)$ لکھا جائے گا جبکہ $\mathcal{L}(f^{(n)})=\mathcal{L}(n!)=\frac{n!}{s}$ ہے۔یوں $\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.47: ہم نے مثال 6.10 میں $t\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا۔اسی طرز پر $t\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

سوال 6.48: $t\sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$

سوال 6.49: $t\cosh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

سوال 6.50: مثال 6.10 اور سوال 6.47 میں بالترتیب $t\cos\omega t$ اور $t\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا گیا۔انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t) \tag{6.14}$$

جواب: $t\sin\omega t$ کے بدل سے $\mathcal{L}^{-1}\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}=t\sin\omega t$ لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 6.6 سے $\mathcal{L}^{-1}\frac{2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}=\int_0^t\tau\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$ ملتا ہے۔دائیں ہاتھ تکمل بالحصص سے $\frac{\sin\omega t}{\omega^3}-\frac{t\cos\omega t}{\omega^2}$ ملتا ہے۔ان نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.51: درج ذیل ثابت کریں۔سوال 6.50 کی طرز پر حل کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t) \tag{6.15}$$

سوال 6.52: $f'(t)$ میں محدود چھلانگ نقطہ t_1 ، t_2 ، $\cdots$ ، t_n پر پائے جاتے ہیں جبکہ $f(t)$ استمراری ہے۔ $t_1<t_2<\cdots<t_n$ لیتے ہوئے مسئلہ 6.4 ثابت کریں۔

جواب:

$$\mathcal{L}(f')=\int_0^{t_{1-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\int_{t_{1+}}^{t_{2-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\int_{t_{2+}}^{t_{3-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\cdots+\int_{t_{n+}}^{\infty}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t$$

لکھ کر تکمل بالحصص حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')&=e^{-st}f(t)\Big|_0^{t_{1-}}+s\int_0^{t_{1-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{1+}}^{t_{2-}}+s\int_{t_{1+}}^{t_{2-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\\&+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{2+}}^{t_{3-}}+s\int_{t_{2+}}^{t_{3-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\cdots+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{n+}}^{\infty}+s\int_{t_{n+}}^{\infty}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.16}$$

اب $f(t)$ استمراری ہے لہٰذا مساوات 6.16 میں متعدد تکملات کو یکجا کیا جا سکتا ہے

$$s\int_0^{t_{1-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + s\int_{t_{1+}}^{t_{2-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + s\int_{t_{n+}}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

جبکہ بقایا اجزاء سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} e^{(-st_{1-})} f(t_{1-}) - f(0) + e^{(-st_{2-})} f(t_{2-}) - e^{(-st_{1+})} f(t_{1+}) + e^{(-st_{3-})} f(t_{3-}) \\ - e^{(-st_{2+})} f(t_{2+}) + \cdots + e^{(-\infty)} f(\infty) - e^{(-st_{n+})} f(t_{n+}) \end{aligned}$$

چونکہ $f(t)$ استمراری ہے لہٰذا $e^{(-st_{m-})} f(t_{m-}) = e^{(-st_{m+})} f(t_{m+}) = e^{(-st_m)} f(t_m)$ ہو گا۔یوں $e^{(-st_{1-})} f(t_{1-})$ اور $-e^{(-st_{1+})} f(t_{1+})$ آپس میں کٹ جائیں گے۔اسی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔پہلے دو اجزاء میں سے $f(0)$ بچتا ہے جبکہ $f(t)$ محدود تفاعل ہونے کی بنا $e^{-\infty} f(\infty) = 0$ ہو گا۔اس طرح مسئلہ 6.4 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوال 6.53 تا سوال 6.63 کو مسئلہ 6.6 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 6.53: $\frac{1}{s^2+s}$
جواب: $1 - e^{-t}$

سوال 6.54: $\frac{6}{s^2+4s}$
جواب: $\frac{3}{2}(1 - e^{-4t})$

سوال 6.55: $\frac{3}{s^2-9s}$
جواب: $\frac{1}{3}(e^{9t} - 1)$

سوال 6.56: $\frac{9}{s^3+9s}$
جواب: $1 - \cos 3t$

سوال 6.57: $\frac{4}{s^2(s+2)}$
جواب: $e^{-2t} + 2t - 1$

سوال 6.58: $\frac{4}{s^3(s+2)}$
جواب: $-\frac{e^{-2t}}{2} + t^2 - t + \frac{1}{2}$

سوال 6.59: $\frac{12}{s(s^2+4)}$
جواب: $3-3\cos 2t$

سوال 6.60: $\frac{12}{s^2(s^2+4)}$
جواب: $3t-\frac{3}{2}\sin 2t$

سوال 6.61: $\frac{32}{s(s^2-16)}$
جواب: $2\cosh 4t-2$

سوال 6.62: $\frac{32}{s^2(s^2-16)}$
جواب: $\frac{1}{2}\sinh 4t-2t$

سوال 6.63: $\frac{6}{s^4(s^2+1)}$
جواب: $6\sin t+t^3-6t$

لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت سوالات 6.64 تا 6.70 حل کریں۔

سوال 6.64: $y''+\pi^2 y=0,\quad y(0)=1,\, y'(0)=0$
جواب: $y=\cos \pi t$

سوال 6.65: $y''+\omega^2 y=0,\quad y(0)=A,\, y'(0)=B$
جواب: $y=A\cos\omega t+\frac{B}{\omega}\sin\omega t$

سوال 6.66: $y''-5y'+6y=0,\quad y(0)=1,\, y'(0)=-1$
جواب: $y=4e^{2t}-3e^{3t}$

سوال 6.67: $y''-y'-2y=0,\quad y(0)=2,\, y'(0)=1$
جواب: $y=e^{2t}+e^{-t}$

سوال 6.68: $y''-2y'+y=0,\quad y(0)=2,\, y'(0)=1$
جواب: $y=(2-t)e^{t}$

سوال 6.69: $y''-ky'=0,\quad y(0)=2,\, y'(0)=k,\, k>0$
جواب: $y=1+e^{kt}$

سوال 6.70: $y'' + ky' - 2k^2y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 2k$
جواب: $y = 2e^{kt}$

سوال 6.71: جبری، بلا تقصیر ارتعاش
ثابت کریں کہ درج ذیل

$$y'' + \omega^2 y = r(t)$$

کے ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے جہاں $R(s)$ $r(t)$ کا لاپلاس بدل ہے۔ ω مستقل ہے اور $r(t)$ جبری تفاعل ہے۔

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

دھیان رہے کہ جواب کا پہلا جزو صرف اور صرف ابتدائی معلومات پر منحصر ہے جبکہ جواب کے دوسرے جزو پر ابتدائی معلومات کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی،اکائی سیڑھی تفاعل

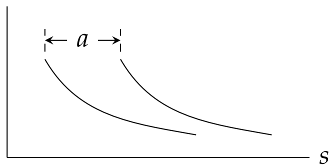
اب تک ہم لاپلاس بدل کے کئی خواص جان چکے ہیں۔ اس حصے میں دو مزید خصوصیات پیش کیے جائیں گے جنہیں s محور پر منتقلی (مسئلہ 6.7) اور t محور پر منتقلی (مسئلہ 6.8) کہتے ہیں۔

مسئلہ 6.7: s محور پر منتقلی؛ منتقلی کا پہلا مسئلہ
اگر $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو جہاں $s > k$ ہے، تب $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s-a)$ ہو گا جہاں $s - a > k$ ہے۔یوں اگر

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

ہو تب

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$



شکل 6.5: منتقلی کا پہلا مسئلہ، s محور پر منتقلی

ہو گا۔یوں اصل تفاعل کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ پر کرنے کے مترادف ہے یعنی لاپلاس بدل s محور پر اپنی جگہ سے سرک کر نئی جگہ منتقل ہو جاتا ہے (شکل 6.5 دیکھیں)۔

ثبوت : لاپلاس بدل کی تعریف

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

استعمال کرتے ہوئے s کی جگہ $s-a$ پر کرتے ہیں۔

$$F(s-a)=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty} e^{-st}[e^{at} f(t)]\,\mathrm{d}t=\mathcal{L}[e^{at} f(t)]$$

مثال 6.14: منتقلی کا پہلا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے جدول 6.1 میں درج تفاعل t^n ، $\sin\omega t$ اور $\cos\omega t$ کو e^{at} سے ضرب دے کر لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[e^{at} t^n]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$
$$\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

مثال 6.15: قصری آزاد ارتعاش
چھت سے لٹکی لچکدار اسپرنگ کے نچلے سرے سے کمیت $m = 3$ لٹکائی گئی ہے۔اسپرنگ کا ینگ مقیاس لچک $k = 6$ ہے۔کمیت کے ساکن مقام سے فاصلہ $y(t)$ ہے۔کمیت کو ابتدائی طور پر $y(0) = 4$ پر رکھ کر اس کو ابتدائی رفتار $y'(0) = -3$ دی جاتی ہے۔فرض کریں کہ کمیت کی رفتار کے راست متناسب قصری قوت عمل کرتی ہے جہاں قصری مستقل $c = 12$ کے برابر ہے۔کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل:کمیت کی حرکت کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ بیان کرتا ہے

$$y'' + 2y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = -3$$

جس کا ضمنی مساوات

$$s^2Y - 4s + 3 + 2(sY - 4) + 4Y = 0$$

ہے۔ضمنی مساوات کا حل لکھتے ہیں۔

$$Y = \frac{4s+5}{s^2+2s+4} = \frac{4(s+1)}{(s+1)^2+3} + \frac{1}{(s+1)^2+3}$$

اب ہم جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3}\right) = \cos\sqrt{3}t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right) = \sin\sqrt{3}t$$

ہیں لہٰذا مسئلہ 6.7 کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t}(4\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t)$$

t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل

منتقلی کے پہلے مسئلے میں ہم نے دیکھا کہ تفاعل $f(t)$ کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ لکھنے کے مترادف ہے۔اب ہم منتقلی کا دوسرا مسئلہ (مسئلہ 6.8) پیش کرتے ہیں جس کے تحت تفاعل $f(t)$ میں t کی جگہ $t-a$ پر کرنا، لاپلاس بدل $F(s)$ کو (تقریباً) e^{-as} سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔

مسئلہ 6.8: t محور پر منتقلی؛ منتقلی کا دوسرا مسئلہ
اگر تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو تب $e^{-as}F(s)$ ، جہاں $a>0$ ہے، درج ذیل تفاعل کا لاپلاس بدل ہو گا۔

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ f(t-a) & t>a\end{cases}$$

ہیوی سائیڈ سیڑھی تفاعل[11] ، جسے شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے، کی تعریف[12] درج ذیل ہے۔ہیوی سائیڈ سیڑھی تفاعل کو **اکائی سیڑھی تفاعل**[13] بھی کہتے ہیں۔

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}\tag{6.17}$$

$t<a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل کی قیمت صفر ہے جبکہ $t>a$ پر اس کی قیمت اکائی ہے۔عین $t=a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل **غیر معین**[14] ہے اور یہاں اس میں اکائی کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔

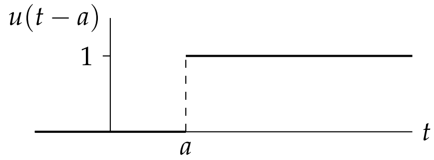
اکائی سیڑھی تفاعل کو زیر استعمال لاتے ہوئے ہم $\tilde{f}(t)$ کو $f(t-a)u(t-a)$ لکھ سکتے ہیں جس کی مثال شکل 6.7 میں دکھائی گئی ہے۔اس طرح مسئلہ 6.8 کہتا ہے کہ

$$e^{-as}F(s)=\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]\tag{6.18}$$

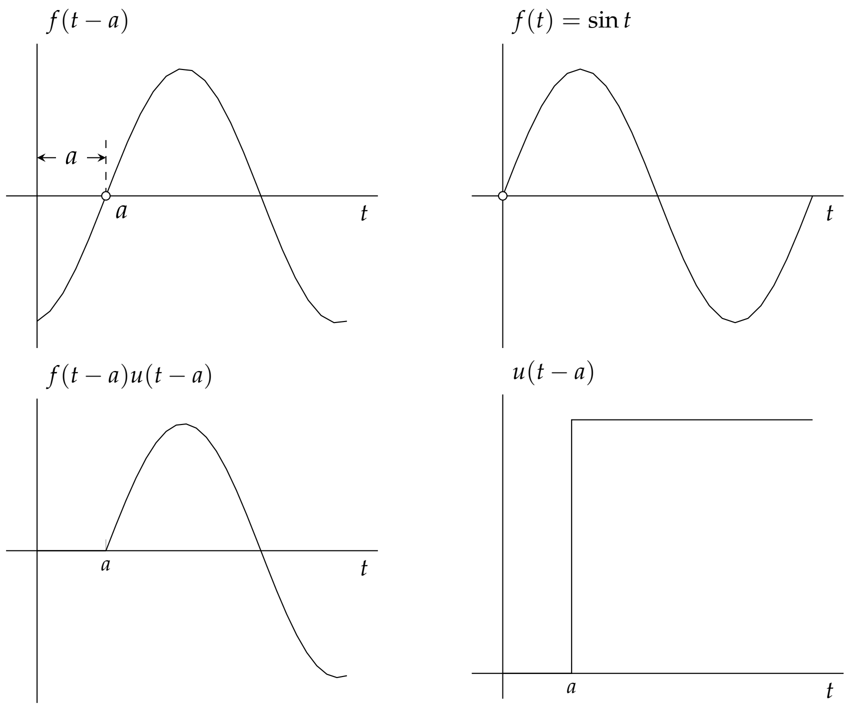
جسے الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)u(t-a)\tag{6.19}$$

[11] Heaviside step function
[12] الیور ہیوی سائیڈ [1850-1925] خود لکھ پڑھ کر برقی مہندس، ریاضی دان اور ماہر طبیعیات بنے۔ یہ انگلستانی تھے۔
[13] unit step function
[14] undefined



شکل 6.6:اکائی سیڑھی تفاعل $u(t-a)$



شکل 6.7: $f(t-a)u(t-a)$ جہاں $f(t)=\sin t$ ہے۔

ثبوت: مسئلہ 6.8 کا ثبوت
لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $\tau + a = t$ پر کرتے ہوئے

$$e^{-as}F(s) = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر اندرون تکمل مقدار کی قیمت وقفہ $t = 0$ تا $t = a$ کے درمیان صفر کے برابر ہو تب اس تکمل کے حدود کو 0 تا ∞ لکھا جا سکتا ہے۔یہی کچھ اندرونِ تکمل کو $u(t-a)$ سے ضرب دیتے ہوئے کرنا ممکن ہے لہٰذا درج بالا کو

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

اکائی سیڑھی تفاعل نہایت اہم تفاعل ہے۔آئیں اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_0^a e^{-st} 0\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty e^{-st} 1\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_a^\infty$$

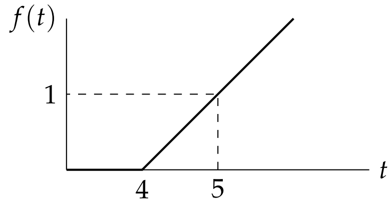
لکھتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے جہاں $s > 0$ ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \qquad (s > 0) \tag{6.20}$$

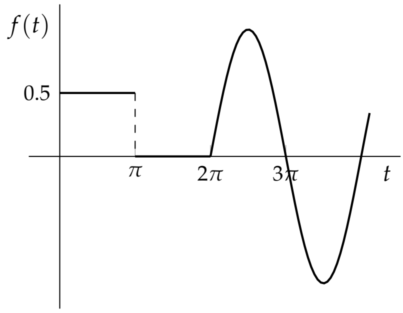
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $a = 0$ کی صورت میں $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ ملتا ہے۔

لاپلاس بدل کی عملی استعمال

لاپلاس بدل کے بارے میں اب ہم اتنا جانتے ہیں کہ اس کو استعمال کرتے ہوئے ایسے مشکل مسائل (مثلاً مثال 6.18، مثال 6.19 اور مثال 6.20) حل کریں جنہیں دیگر طریقوں سے حل کرنا نسبتاً زیادہ دشوار ہو گا۔



(الف) مثال 6.16 کا تفاعل۔



(ب) مثال 6.17 کا تفاعل۔

شکل 6.8: مثال 6.16 اور مثال 6.17 کے تفاعل۔

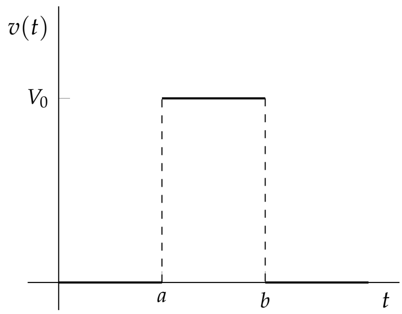
مثال 6.16: تفاعل $\frac{e^{-4s}}{s^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل دریافت کریں۔

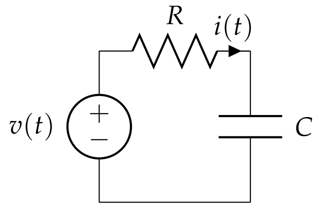
حل: چونکہ $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t$ ہے لہٰذا مسئلہ 6.8 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔ شکل 6.8-الف دیکھیں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^2}\right) = (t-4)u(t-4)$$

مثال 6.17: شکل 6.8-ب میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0.5 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$





شکل 6.9: مثال 6.18 کا دور اور داخلی دباو۔

حل: اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے دیے گئے تفاعل کو لکھتے ہیں

$$f(t) = 0.5u(t) - 0.5u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t$$

جہاں $\sin(t-2\pi) = \sin t$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 6.20، مساوات 6.18 اور جدول 6.1 کی مدد سے لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

مثال 6.18: ایک عدد چکور موج پر RC دور کا رد عمل

مزاحمت اور برق گیر کا سلسلہ وار دور شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو ایک عدد چکور موج $v(t)$ مہیا کی جاتی ہے۔ دور میں برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ شکل 6.9 سے رجوع کریں۔

حل: کرخوف مساوات دباو سے

$$i(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v(t)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں داخلی دباو کو دو عدد اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے

$$v(t) = V_0(u(t-a) - u(t-b))$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 6.20 اور مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$I(s)R + \frac{I(s)}{sC} = \frac{V_0}{s}[e^{-as} - e^{-bs}]$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$I(s) = \left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}}\right)[e^{-as} - e^{-bs}]$$

اب ہم جدول 6.1 سے جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}}\right) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

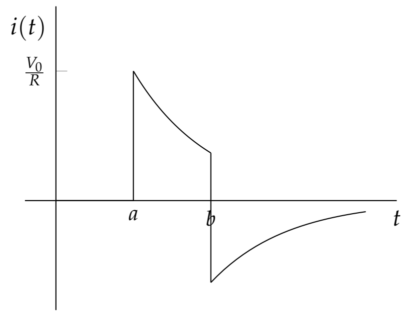
کے برابر ہے لہٰذا اصل حل مسئلہ 6.8 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}(I) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-bs}F(s)] \\ &= \frac{V_0}{R}[e^{-\frac{(t-a)}{RC}}u(t-a) - e^{-\frac{(t-b)}{RC}}u(t-b)] \end{aligned}$$

جس کو یوں

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ K_1 e^{-\frac{t}{RC}} & a < t < b \\ (K_1 - K_2)e^{-\frac{t}{RC}} & t > b \end{cases}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $K_1 = \frac{V_0}{R}e^{\frac{a}{RC}}$ اور $K_2 = \frac{V_0}{R}e^{\frac{b}{RC}}$ ہیں۔ برقی رو $i(t)$ کو شکل 6.10 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 6.10: مثال 6.18 کی رو $i(t)$

مثال 6.19: بلا تقصیر نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور داخلی موج
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y'' + 4y = r(t), \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

حل: داخلی جبری قوت کو $r(t) = 2[u(t) - u(t-1)]$ لکھا جا سکتا ہے۔ دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$s^2Y + 4Y = \frac{2}{s}(1 - e^{-s})$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

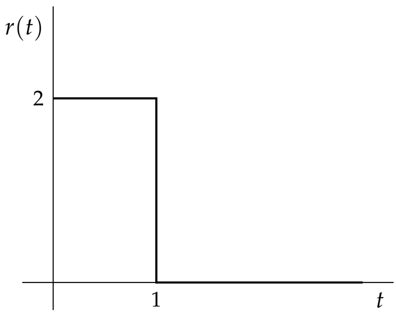
$$Y = \frac{2}{s(s^2+4)}(1 - e^{-s})$$

اب جدول 6.1 کے تحت $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4}) = \sin 2t$ ہے لہٰذا مساوات 6.13 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+4)}\right] = \int_0^t \sin 2\tau \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

اب مسئلہ 6.8 زیر استعمال لاتے ہوئے اصل جواب لکھتے ہیں

$$y(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] - \frac{1}{2}[1 - \cos 2(t-1)]u(t-1)$$



شکل 6.11: مثال 6.19 اور مثال 6.20 کا داخلی تفاعل۔

جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ رد عمل دو مختلف ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}[\cos 2(t-1) - \cos 2t] & t > 1 \end{cases}$$

مثال 6.20: قصری نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور موج

درج ذیل قصری ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.11 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y'' + 4y' + 3y = r(t) \qquad y(0) = 0,\, y'(0) = 0$$

حل: ضمنی مساوات لکھ کر

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{2}{s}(1 - e^{-s})$$

حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$Y = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}(1 - e^{-s})$$

$F(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}$ کا جزوی کسری پھیلاو

$$F(s) = \frac{2}{3s} + \frac{1}{3(s+3)} - \frac{1}{s+1}$$

ہے لہٰذا

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t}$$

ہو گا۔یوں مسئلہ 6.8 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

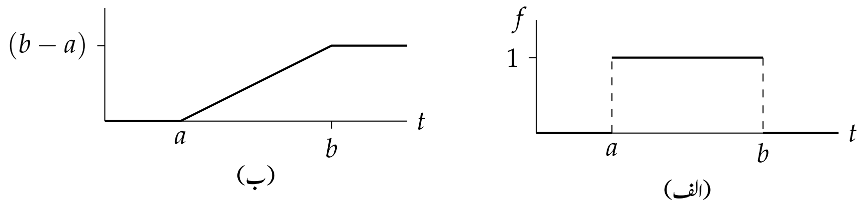
$$\mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s}) = f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{e^{-3(t-1)}}{3} - e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے اصل حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = f(t) - f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t} & 0 < t < 1 \\ (1-e^3)\frac{e^{-3t}}{3} - (1-e)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

مثال 6.21: شکل 6.12-الف میں تفاعل $f(t)$ اور شکل-ب میں اس کا تکمل دکھایا گیا ہے۔ $f(t)$ کے بدل سے شکل-ب کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: شکل 6.12-الف کا لاپلاس بدل $F = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$ ہے لہٰذا شکل-ب کا بدل $\frac{F}{s} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s^2}$ ہو گا۔



شکل 6.12: مثال 6.21 کے اشکال۔

سوالات

سوال 6.72 تا سوال 6.75 کے لاپلاس بدل دریافت کریں۔

سوال 6.72: $e^{-3t}\sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

سوال 6.73: $e^{-t}\cos(\omega t-\theta)$
جواب: $\frac{(s+1)\cos\theta+\omega\sin\theta}{(s+1)^2+\omega^2}$

سوال 6.74: $e^{-at}(A\sin\omega t+B\cos\omega t)$
جواب: $\frac{\omega A+(s+a)B}{(s+a)^2+\omega^2}$

سوال 6.75: $e^{2t}(3t-4t^2)$
جواب: $\frac{3}{(s-2)^2}-\frac{8}{(s-2)^3}$

سوال 6.76 تا سوال 6.79 میں بذلولی سائن اور بذلولی کوسائن کو قوت نمائی تفاعل کی صورت میں لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.76: $e^{-at}\sinh\omega t$
جواب: $\frac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2}$

سوال 6.77: $\sinh at\sin at$
جواب: $\frac{2a^2s}{s^4+4a^4}$

سوال 6.78: $\sinh at \sin \omega t$
جواب: $\frac{\omega}{2[(s-a)^2+\omega^2]} - \frac{\omega}{2[(s+a)^2+\omega^2]}$

سوال 6.79: $t \cosh at$
جواب: $\frac{1}{2(s-a)^2} + \frac{1}{2(s+a)^2}$

سوال 6.80 تا سوال 6.83 میں $\mathcal{L}^{-1}$ دریافت کریں۔

سوال 6.80: $\frac{s+4}{(s+1)^2+9}$
جواب: $e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t)$

سوال 6.81: $\frac{s-2}{s^2+4s+8}$
جواب: $e^{-2t}(\cos 2t - 2\sin 2t)$

سوال 6.82: $\frac{2}{(s+1)^3} - \frac{6}{(s+1)^4}$
جواب: $e^{-t}(t^2 + t^3)$

سوال 6.83: $\frac{as+b}{(s-c)^2+\omega}$
جواب: $e^{ct}[\frac{(ac+b)}{\omega} \sin \omega t + a \cos \omega t]$

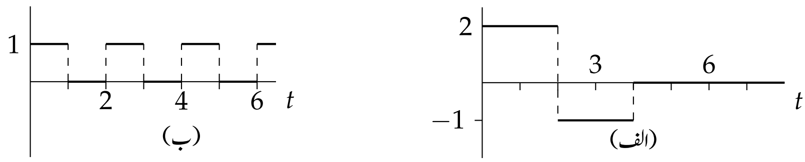
سوال 6.84 تا سوال 6.87 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں لاپلاس بدل کی استعمال سے حل کریں۔

سوال 6.84: $y(0) = -2,\ y'(0) = 1 \qquad y'' + 2y' + 10y = 0,$
جواب: $y = -e^{-t}(2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t)$

سوال 6.85: $y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \qquad y'' - 6y' + 9y = 0,$
جواب: $y = (1-t)e^{3t}$

سوال 6.86: $y(0) = -1,\ y'(0) = 1 \qquad y'' - 2y' + 5y = 0,$
جواب: $y = e^{t}(\sin 2t - \cos 2t)$

سوال 6.87: $y(0) = 2,\ y'(0) = -1 \qquad y'' + 10y' + 25 = 0,$
جواب: $y = (9t + 2)e^{-5t}$



شکل 6.13: سوال 6.88 اور سوال 6.89 کے اشکال۔

اکائی سیڑھی تفاعل استعمال کرتے ہوئے سوال 6.88 تا سوال 6.93 میں دیے گئے خطوط کو لکھ کر ان کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.88: شکل 6.13-الف میں دکھائے گیے خط بقایا تمام t پر صفر کے برابر ہے۔

جواب: $\frac{1}{s}(2-3e^{-2s}+e^{-4s})$

سوال 6.89: شکل 6.13-ب مسلسل موج ہے۔

جواب:

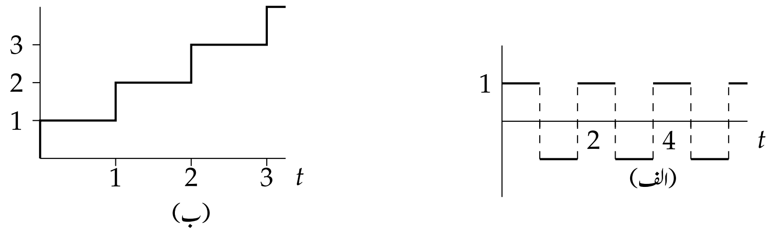
$$
\begin{aligned}
f(t) &= u(t)-u(t-1)+u(t-2)-u(t-3)+u(t-4)-u(t-5)+-\cdots\\
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{s}(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+e^{-4s}-e^{-5s}+-\cdots)\\
&= \frac{1}{s}\left[\frac{1-(-e^{-s})^n}{1+e^{-s}}\right]=\frac{1}{s(1+e^{-s})}
\end{aligned}
$$

$n\to\infty$ ، $s>0$ پر $e^{-sn}\to 0$ ہو گا۔

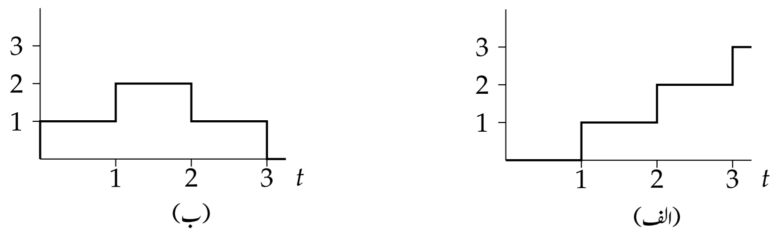
سوال 6.90: شکل 6.14-الف مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= u(t)-2u(t-1)+2u(t-2)-2u(t-3)+2u(t-4)-2u(t-5)+-\cdots\\
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{2e^{-3s}}{s}+\frac{2e^{-4s}}{s}-\frac{2e^{-5s}}{s}+-\cdots\\
&= -\frac{1}{s}+\frac{2}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{2e^{-3s}}{s}+\frac{2e^{-4s}}{s}-+\cdots=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s(1+e^{-s})}
\end{aligned}
$$



شکل 6.14: سوال 6.90 اور سوال 6.91 کے اشکال۔



شکل 6.15: سوال 6.92 اور سوال 6.93 کے اشکال۔

سوال 6.91: شکل 6.14-ب مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$f(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + \cdots$$
$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

سوال 6.92: شکل 6.15-الف مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$f(t) = u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + \cdots$$
$$\mathcal{L}(f) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

سوال 6.93: شکل 6.15-ب غیر مسلسل موج ہے۔ بقایا تمام t پر موج صفر کے برابر ہے۔

جواب: $\frac{1}{s}(1+e^{-s}-e^{-2s}-e^{-3s})$

سوال 6.94 تا سوال 6.97 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.94: $\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}$
جواب: $f=u(t-2)-u(t-3)$ یعنی $2<t<3$ کے لئے $f=1$ ہے جبکہ بقایا اوقات $f=0$ ہے۔

سوال 6.95: $\frac{e^{-s}}{s^2}$
جواب: $(t-1)u(t-1)$

سوال 6.96: $\frac{e^{-s}+2e^{-2s}-4e^{-3s}}{s^2}$
جواب: $t<1$ ، $1<t<2$ ، $2<t<3$ اور $3<t$ پر $f=0$ ، $f=t-1$ ، $f=3t-5$ اور $f=-t+11$ ہیں۔

سوال 6.97: $\frac{6(e^{-2s}-e^{-3s})}{s^3}$
جواب: $t<2$ ، $2<t<3$ اور $3<t$ کے لئے $f=0$ ، $f=(t-2)^2$ اور $f=2t-5$ ہے۔

سوال 6.98 تا سوال 6.102 کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.98: $(t-3)u(t-3)$
جواب: $\frac{e^{-3s}}{s^2}$

سوال 6.99: $tu(t)$
جواب: $\frac{1}{s^2}$

سوال 6.100: $u(t-\pi)\sin t$
جواب: $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

سوال 6.101: $u(t-\frac{2\pi}{\omega})\sin\omega t$
جواب: $\frac{\omega(1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}})}{s^2+\omega^2}$

سوال 6.102: $t^2u(t-1)$
جواب: $\frac{(s^2+2s+2)e^{-s}}{s^3}$

سوال 6.103 تا سوال 6.105 کے تفاعل دیے گئے وقفے کے باہر صفر کے برابر ہیں۔ ان کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.103: $(0 < t < \frac{\pi}{\omega}) \qquad A\sin\omega t$
جواب: $\frac{A}{s^2+\omega^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}})$

سوال 6.104: $(0 < t < \frac{\pi}{2\omega}) \qquad A\cos\omega t$
جواب: $\frac{A}{s^2+\omega^2}(s+\omega e^{-\frac{\pi s}{2\omega}})$

سوال 6.105: $(0 < t < 1) \qquad t^2$
جواب: $\frac{2-(s^2+2s+2)e^{-s}}{s^3}$

سوال 6.106 تا سوال 6.111 کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.106: $\frac{e^{-3s}}{s}$
جواب: $u(t-3)$

سوال 6.107: $\frac{e^{-4s}}{s^2}$
جواب: $(t-4)u(t-4)$

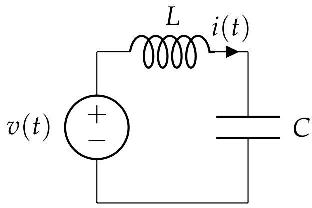
سوال 6.108: $\frac{e^{-3s}}{s-4}$
جواب: $e^{4(t-3)}u(t-3)$

سوال 6.109: $\frac{\omega e^{-2s}}{s^2+\omega^2}$
جواب: $\sin[\omega(t-2)]u(t-2)$

سوال 6.110: $\frac{1-e^{-2s}}{s^2+9}$
جواب: $\frac{1}{3}\sin 3t u(t) - \frac{1}{3}\sin[3(t-2)]u(t-2)$

سوال 6.111: $\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$
جواب: وقفہ $t > \pi$ پر تفاعل $f = -e^{(\pi-t)}\sin(t-\pi)u(t-\pi)$ ہے۔ بقایا اوقات تفاعل صفر کے برابر ہے۔

سوال 6.112 تا سوال 6.113 میں $L = 1\,\mathrm{H}$ اور $C = 1\,\mathrm{F}$ لیتے ہوئے برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ داخلی دباو $v(t)$ سوال میں دیا گیا ہے۔



شکل 6.16: سوال 6.112 تا سوال 6.113 کا دور۔

سوال 6.112: $0 < t < a$ داخلی دباو $v(t) = t$ ہے۔ بقایا اوقات $v(t) = 0$ ہے۔

جواب:

$$Li' + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t = t[1-u(t-a)] = t-(t-a)u(t-a)-au(t-a)$$

$$i = \begin{cases} 1-\cos t & 0<t<a \\ \cos(t-a)-a\sin(t-a)-\cos t & t>a \end{cases}$$

سوال 6.113: $0 < t < \pi$ پر $v(t) = 1-e^{-t}$ ہے جبکہ بقایا اوقات $v(t) = 0$ ہے۔

جواب:

$$i = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t) & 0<t<a \\ -\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})\cos t+\frac{1}{2}(3-e^{-\pi})\sin t & t>\pi \end{cases}$$

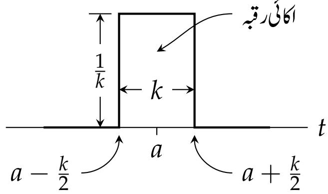
سوال 6.114: ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{F(\frac{s}{a})}{a}$ ہو گا۔اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے $\cos t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.115: ثابت کریں کہ مساوات 6.18 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو عملاً زیادہ بہتر صورت ہے۔

$$e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)] = \mathcal{L}[f(t)u(t-a)] \tag{6.21}$$

جواب: نیا تفاعل $\tilde{f}(t)$ جہاں $\tilde{f}(t) = f(t+a)$ ہے زیر استعمال لاتے ہیں۔یوں $f(t) = \tilde{f}(t-a)$ ہو گا۔یوں مساوات 6.18 سے درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-a)] = \mathcal{L}[\tilde{f}(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[\tilde{f}(t)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)]$$



شکل 6.17: ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔

6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاو

الیکٹران کی کمیت کو نقطہ کمیت تصور کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح اس کی برقی بار کو نقطہ بار تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں کارتیسی محور کے مرکز پر موجود الیکٹران کی کمیت مرکز پر پائی جائے گی جبکہ مرکز سے ہٹ کر کسی بھی نقطے پر کمیت صفر کے برابر ہو گی۔نقطہ کمیت یا نقطہ بار کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل**[15] سے ظاہر[16] کیا جاتا ہے۔اسی طرح گیند کو بلے سے مارتے ہوئے یا بندوق سے گولی چلاتے وقت انتہائی کم دورانیے کے لئے قوت عمل میں آتی ہے۔ایسی قوت کو بھی ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایسی برقی یا میکانی قوت (یا عمل) جو انتہائی کم دورانیے کے لئے کار آمد ہو کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل** سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلے کو لاپلاس بدل کی مدد سے نہایت عمدگی کے ساتھ حل کیا جا سکتا ہے۔

ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل کو شکل 6.17 کی مدد سے سمجھتے ہیں جس میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے، جہاں k مثبت اور چھوٹی قیمت ہے۔

$$f_k(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{k} & a - \frac{k}{2} < t < a + \frac{k}{2} \\ 0 & \text{بقایا } t \end{cases} \tag{6.22}$$

یہ تفاعل کسی ایسی قوت کو ظاہر کر سکتی ہے جس کی مقدار $\frac{1}{k}$ ہو اور جو لمحہ $t = a - \frac{k}{2}$ تا $t = a + \frac{k}{2}$ عمل پیرا ہو۔ میکانیات میں ایسی قوت کا، لمحہ $t = a - \frac{k}{2}$ تا $t = a + \frac{k}{2}$، **تکمل میکانی ضرب**[17] کہلاتی ہے۔برقی

---

[15] Dirac delta function

[16] ماہر طبیعیات، پال اڈرین مارٹ ڈیراک [1902-1984] (جرمنی کے ارون روڈالف یوسف شروڈِنگر کے ساتھ مشترق) نوبل انعام یافتہ [1933]، انگلستان کے رہائشی (جن کا تعلق سوئزرلینڈ سے تھا) نے کوانٹم میکانیات میں کلیدی کردار ادا کیا۔

[17] impulse

میدان میں ایسے برقی دباو کو برقی ضرب کہا جاتا ہے۔ شکل 6.17 میں ضرب درج ذیل ہے۔

$$I_k = \int_0^\infty f_k(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_{a-\frac{k}{2}}^{a+\frac{k}{2}} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = 1 \tag{6.23}$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ k کی قیمت کم سے کم کرنے سے ضرب کی قیمت پر کیا اثر پڑتا ہے۔ہم f_k کی قیمت کی حد $k \to 0$ پر حاصل کرتے ہیں جہاں $k > 0$ ہے۔اس حد کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل یا اکائی ضرب تفاعل**[18] پکارا اور $\delta(t-a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta(t-a) = \lim_{k\to 0} f_k(t-a) \tag{6.24}$$

$\delta(t-a)$ کو، علم الاحصاء میں سادہ تفاعل کی رسمی مطلب کے تحت تفاعل نہیں سمجھا جا سکتا ہے البتہ اسے **عمومی تفاعل**[19] کے تحت تفاعل سمجھا جا سکتا ہے۔یہ حقیقت سمجھنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ f_k کا I_k اکائی (1) ہے لہٰذا مساوات 6.22 اور مساوات 6.23 میں $k \to 0$ پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases} \qquad \int_0^\infty \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{6.25}$$

جبکہ علم الاحصاء کے تحت، ایسے تفاعل کا تکمل صفر کے برابر ہو گا جس کی قیمت، ماسوائے کسی ایک نقطہ پر، صفر کے برابر ہو۔ اس کے باوجود ضرب تفاعل استعمال کرتے ہوئے، اپنی آسانی کی خاطر، ہم $\delta(t-a)$ کو سادہ تفاعل تصور کرتے ہیں۔ بالخصوص $\delta(t-a)$ کی چننے[20] کی خاصیت استعمال کرتے ہوئے استمراری تفاعل $g(t)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a_-} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t + \int_{a_-}^{a_+} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t \\ + \int_{a_+}^\infty g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

چونکہ $t \neq 0$ پر $\delta(t-a) = 0$ ہے لہٰذا درج بالا دائیں ہاتھ پہلا اور تیسرا تکمل صفر کے برابر ہیں۔یوں

$$\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_{a_-}^{a_+} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = g(a)\int_{a_-}^{a_+} \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = g(a) \tag{6.26}$$

[18] unit impulse function

[19] روسی ریاضی دان سرگی لووچ سوبولو [1908-1989] نے عمومی تفاعل کے نظریے کی بنیاد رکھی۔

[20] sifting property

حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a لامتناہی کم وسعت کا ہو گا جس پر $g(t)$ کی قیمت میں تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے۔یوں اس نقطے پر $g(t)$ کی قیمت، مستقل مقدار $g(a)$ ہو گی۔اس مستقل مقدار $g(a)$ کو تکمل کے باہر لے جایا گیا ہے جبکہ $\delta(t-a)$ کا تکمل اکائی کے برابر ہے۔

$\delta(t-a)$ کا لاپلاس بدل حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$f_k(t-a)=\frac{1}{k}u[t-(a-\tfrac{k}{2})]-\frac{1}{k}u[t-(a+\tfrac{k}{2})]$$

لہٰذا

$$\mathcal{L}(f_k)=\frac{e^{-(a-\frac{k}{2})s}}{ks}-\frac{e^{-(a+\frac{k}{2})s}}{ks}=e^{-as}\left(\frac{e^{\frac{ks}{2}}-e^{-\frac{ks}{2}}}{ks}\right)$$

ہو گا۔اب $k\to 0$ پر درج بالا $\mathcal{L}[\delta(t-a)]$ دے گا۔ہم $e^{\mp x}=1\mp x+\frac{x^2}{2!}\mp+\cdots$ استعمال کرتے ہوئے قوسین کو پھیلا کر لکھتے ہیں۔

$$\frac{e^{\frac{ks}{2}}-e^{-\frac{ks}{2}}}{ks}=\frac{(1+\frac{ks}{2}+\frac{(\frac{ks}{2})^2}{2!}+\cdots)-(1-\frac{ks}{2}+\frac{(\frac{ks}{2})^2}{2!}-\cdots)}{ks}=\frac{ks+\frac{1}{3}(\frac{ks}{2})^3+\cdots}{ks}$$

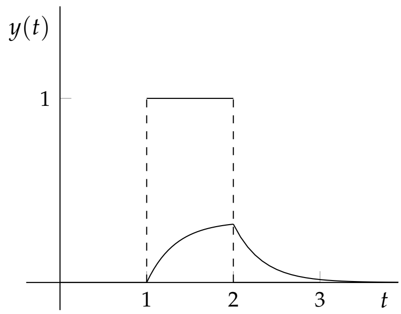
یوں $k\to 0$ پر قوسین کی حد درج ذیل ہو گی

$$\lim_{k\to 0}\frac{ks+\frac{1}{3}(\frac{ks}{2})^3+\cdots}{ks}=1$$

لہٰذا ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)]=e^{-as} \tag{6.27}$$

اکائی سیڑھی تفاعل اور اکائی ضرب تفاعل کے لاپلاس بدل جانتے ہوئے انہیں تفرقی مساوات کے حل میں استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔



شکل 6.18: اسپرنگ اور کمیت کا قصری نظام (مثال 6.22)۔

مثال 6.22: درج ذیل اسپرنگ اور کمیت کی قصری نظام (حصہ 2.8) کا رد عمل، شکل 6.18 میں دکھائے گئے، اکائی چکور جبری قوت کی صورت میں حاصل کریں۔

$$y'' + 4y' + 3y = r(t) = u(t-1) - u(t-2) \qquad y(0) = 0, \, y'(0) = 0 \tag{6.28}$$

حل: دیے گئے تفرقی مساوات سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔ایسا مساوات 6.6، مساوات 6.7 اور مساوات 6.20 کی مدد سے کیا جائے گا۔

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

ضمنی مساوات کا حل

$$Y = \frac{1}{s(s^2+4s+3)}(e^{-s} - e^{-2s}) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}(e^{-s} - e^{-2s})$$

ہے جس کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہے۔

$$Y = \left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)}\right](e^{-s} - e^{-2s})$$

چکور قوسین کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)}\right] = \frac{1}{3} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{6}$$

مسئلہ 6.8 کی مدد سے حل $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)(e^{-s}-e^{-2s})]$ لکھتے ہیں جسے شکل 6.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
y(t)&=\mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s})-\mathcal{L}(Fe^{-2s})=f(t-1)u(t-1)-f(t-2)u(t-2)\\
&=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ \frac{1}{3}-\frac{e^{-(t-1)}}{2}+\frac{e^{-3(t-1)}}{6} & 1<t<2\\ -\frac{e^{-(t-1)}}{2}+\frac{e^{-(t-2)}}{2}+\frac{e^{-3(t-1)}}{6}-\frac{e^{-3(t-2)}}{6} & t>2\end{cases}
\end{aligned}$$

مثال 6.23: گزشتہ مثال میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر اکائی چکور قوت لاگو کی گئی۔موجودہ مثال میں اسپرنگ اور کمیت کی اسی نظام کو لمحہ $t=1$ پر ہتھوڑی سے اکائی ضرب لگایا جاتا ہے۔نظام کا رد عمل دریافت کریں۔

حل:نظام کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y''+4y'+3y=r(t)=\delta(t-1)\qquad y(0)=0,\,y'(0)=0$$

جس کی ضمنی مساوات

$$s^2Y+4sY+3Y=e^{-s}$$

کا حل لکھتے ہیں۔

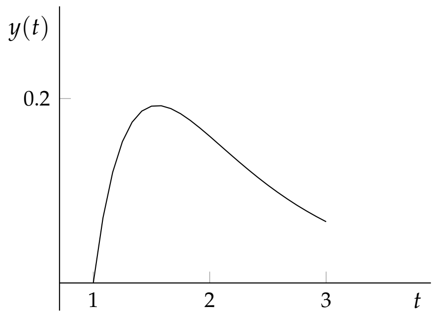
$$Y=\frac{1}{(s+1)(s+3)}e^{-s}=\left[\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{2(s+3)}\right]e^{-s}$$

چکور قوسین کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

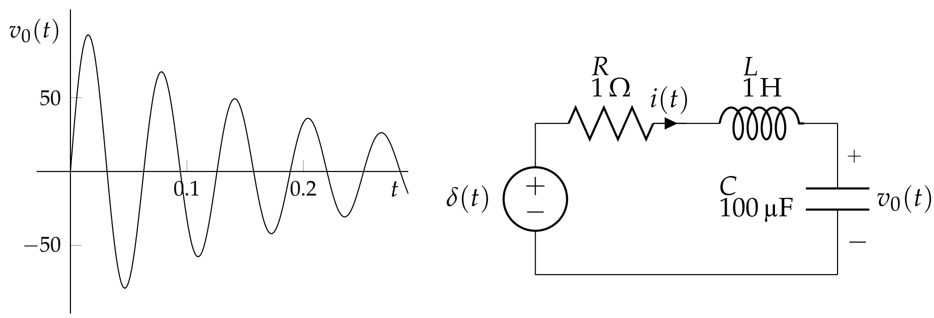
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{2(s+3)}\right]=\frac{e^{-t}}{2}-\frac{e^{-3t}}{2}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے $y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)$ حاصل کرتے ہیں جسے شکل 6.19 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
y(t)&=\mathcal{L}^{-1}[Fe^{-s}]=f(t-1)u(t-1)\\
&=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ \frac{e^{-(t-1)}}{2}-\frac{e^{-3(t-1)}}{2} & t>1\end{cases}
\end{aligned}$$



شکل 6.19: اکائی ضرب پر اسپرنگ اور کمیت کے نظام کا ردعمل (مثال 6.23)۔



شکل 6.20: سلسلہ وار دور (مثال 6.24)۔

مثال 6.24: سلسلہ وار جڑے مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو لمحہ $t=0$ پر اکائی ضرب دباو مہیا کیا جاتا ہے۔اس برقی دور کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔برق گیر پر دباو $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل:مسئلے کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t=Lq''+Rq'+\frac{q}{C}=\delta(t)$$

جس کی ضمنی مساوات درج ذیل ہے جہاں برقی پرزوں کی قیمتیں بھی پر کی گئی ہیں۔

$$(s^2+10s+10000)Q=1$$

ضمنی مساوات کا حل

$$Q=\frac{1}{(s+5)^2+9975}\approx\frac{1}{(s+5)^2+99.87^2}$$

ہے جس کے الٹ لاپلاس بدل سے q حاصل کرتے ہوئے $v_0=\frac{q}{C}$ دریافت کرتے ہیں۔

$$q(t)=\frac{e^{-5t}}{99.87}\sin 99.87t \qquad\implies\qquad v_0(t)=\frac{q(t)}{C}=100.13e^{-5t}\sin 99.87t$$

جزوی کسری پھیلاو پر مزید تبصرہ

ہم نے دیکھا کہ عموماً ضمنی مساوات کی صورت $Y(s)=\frac{F(s)}{G(s)}$ ہوتی ہے جہاں $F(s)$ اور $G(s)$ کثیر رکنی ہوتے ہیں۔الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے حل $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ حاصل کیا جاتا ہے۔الٹ لاپلاس بدل لینے سے پہلے کسر کو جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے کا الٹ لاپلاس بدل با آسانی حاصل کرنا ممکن ہو۔

$G(s)$ میں غیر دہراتا جزو $s-a$ سے جزوی کسری پھیلاو کے ذریعہ $\frac{A}{s-a}$ رکن حاصل ہو گا جس کا الٹ لاپلاس بدل Ae^{at} ہے۔اسی طرح بلند درجی اجزاء $(s-a)^2$ اور $(s-a)^3$ درج ذیل ارکان دیتے ہیں

$$\frac{A_1}{(s-a)}+\frac{A_2}{(s-a)^2} \qquad \text{اور} \qquad \frac{A_1}{s-1}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\frac{A_3}{(s-a)^3}$$

جن کے الٹ لاپلاس بدل $(A_1+A_2t)e^{at}$ اور $(A_1+A_2t+\frac{1}{2}A_3t^2)e^{at}$ ہیں۔

$G(s)$ میں غیر دہراتے مخلوط جوڑی $(s-a)(s-\bar{a})$ جہاں $a=\alpha+i\beta$ اور $\bar{a}=\alpha-i\beta$ ہیں سے درج ذیل جزوی کسری رکن حاصل ہوتا ہے

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

جبکہ دہراتے مخلوط جوڑی مثلاً $[(s-a)(s-\bar{a})]^2$ سے درج ذیل ارکان ملتے ہیں۔

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{Cs+D}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

مثال 6.25: جزوی کسری پھیلاو استعمال کرتے ہوئے $\frac{3s-2}{s^2-s}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: نسب نما میں s اور $s-1$ غیر دہراتے جزو ہیں۔یوں دیے گئے تفاعل کو $\frac{A}{s}$ اور $\frac{B}{s-1}$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{3s-2}{s(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}$$

جس میں A اور B معلوم کرنا باقی ہے۔دونوں اطراف کو $s(s-1)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$3s-2=A(s-1)+Bs$$

ملتا ہے۔اس مساوات میں $s=0$ پر کرتے ہوئے A حاصل ہو گا جبکہ $s=1$ پر کرتے ہوئے B حاصل ہو گا۔یوں

$$3(0)-2=A(0-1)+B(0) \quad\implies\quad A=2$$

اور

$$3(1)-2=A(1-1)+B(1) \quad\implies\quad B=1$$

ملتے ہیں لہٰذا دیے گئے تفاعل کو

$$\frac{3s-2}{s(s-1)}=\frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=2+e^t$$

مثال 6.26: جزوی کسری پھیلاو استعمال کرتے ہوئے $F(s)=\frac{s^2-4s}{(s+2)^3}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں $s+2$ دہراتا جزو ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس میں A ، B اور C معلوم کرنا باقی ہے۔

$$\frac{s^2-4s}{(s+2)^3}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{(s+2)^3}$$

دونوں اطراف کو $(s+2)^3$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$s^2-4s=A(s+2)^2+B(s+2)+C$$

$s=-2$ پر کرتے ہوئے $C=12$ ملتا ہے۔مساوات کا ایک درجی تفرق لے کر $s=-2$ پر کرنے سے B حاصل ہو گا جبکہ دو درجی تفرق لے کر $s=-2$ پر کرنے سے A حاصل ہو گا۔ یوں

$$\begin{aligned}
&2s-4=2A(s+2)+B \implies 2(-2)-4=2A(-2+2)+B \implies B=-8\\
&2=2A \implies A=1
\end{aligned}$$

ملتے ہیں۔یوں دیے گئے تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو اور اس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
F(s)&=\frac{s^2-4s}{(s+2)^3}=\frac{1}{s+2}-\frac{8}{(s+2)^2}+\frac{12}{(s+2)^3}\\
\mathcal{L}^{-1}(F)&=e^{-2t}(1-8t+6t^2)
\end{aligned}$$

سوالات

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.