انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

عمومی تقسیم کی صورت میں پرکھ

درج ذیل مثال عملاً اہم قیاس کے پرکھ کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 24.23: **(معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ)**
فرض کریں کہ X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے۔نمونی جسامت $n = 10$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = \mu_0 = 24$ کو درج ذیل تین متبادل کے بالمقابل پرکھیں۔

$$\text{(الف)}\ \mu > \mu_0 \qquad \text{(ب)}\ \mu < \mu_0 \qquad \text{(پ)}\ \mu \neq \mu_0$$

حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 0.05$ منتخب کرتے ہیں۔اوسط کی اندازاً قیمت درج ذیل سے حاصل ہو گی۔

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots , X_n)$$

اگر قیاس درست ہو تب X عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 24$ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n} = 0.9$ ہو گی (مسئلہ 24.20)۔لہٰذا ہم فاصل قیمت c کو ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے حاصل کر سکتے ہیں۔
صورت الف: ہم $P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$ سے c تعین کرتے ہیں۔

$$P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{c-24}{\sqrt{0.9}} = 1.645$ یعنی $c = 25.56$ حاصل ہوتا ہے جو μ_0 سے بڑی قیمت ہے (اور جو شکل 24.20 میں سب سے اوپر دکھائی گئی صورت ہے)۔ اگر $\overline{x} \le 25.56$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جائے گا۔ اگر $\overline{x} > 25.56$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جائے گا۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\eta(\mu) &= P(\overline{X} > 25.56)_\mu = 1 - P(\overline{X} \le 25.56)_\mu \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{25.56-\mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu)\end{aligned} \tag{24.139}$$

صورت ب: فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $c = 24 - 1.56 = 22.24$ ملتا ہے۔اگر $\overline{x} \geq 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔اگر $\overline{x} < 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\eta(\mu) = P(\overline{X} \leq 22.44)_{\mu} = \Phi\Big(\frac{22.44 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = \Phi(23.65 - 1.05\mu) \tag{24.140}$$

صورت پ: چونکہ عمومی تقسیم تشاکلی ہے، ہم $\mu = 24$ سے c_1 اور c_2 کو ایک جیسے فاصلے پر چن کر، مثلاً $c_1 = 24 - k$ اور $c_2 = 24 + k$ ، مستقل k کو درج ذیل سے تعین کرتے ہیں۔

$$P(24 - k \leq \overline{X} \leq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{k}{\sqrt{0.9}} = 1.960$ یعنی $k = 1.86$ حاصل ہو گا۔یوں $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$ اور $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$ ہوں گے۔اگر $\overline{x}$ کی قیمت c_1 سے چھوٹی نہ ہو اور c_2 سے بڑی نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔اس کے علاوہ ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\eta(\mu) &= P(\overline{X} < 22.14)_{\mu} + P(\overline{X} > 25.86)_{\mu}\\ &= P(\overline{X} < 22.14)_{\mu} + 1 - P(\overline{X} \leq 25.86)_{\mu}\\ &= 1 + \Phi\Big(\frac{22.14 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{25.86 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big)\\ &= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu)\end{aligned} \tag{24.141}$$

نتیجتاً خاصیت کارکردگی $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$ درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Phi\Big(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big)\\ &= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu)\end{aligned}$$

شکل سے ظاہر ہے کہ $n = 10$ کی خاصیت کارکردگی کی مطابقتی منحنی کی ڈھلوان زیادہ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ n بڑھانے سے بہتر پرکھ حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی عملی استعمال میں n کو کم سے کم لیکن اتنا زیادہ رکھا جاتا ہے کہ پرکھ μ اور μ_0 میں انحراف، جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں، کو واضح کرے۔ مثال کے طور پر اگر انحراف ہماری دلچسپی ∓ 2 اکائی ہو، ہم شکل سے دیکھتے ہیں کہ $n = 10$ بہت کم ہو گا چونکہ جب $\mu = 24 - 2 = 22$ یا $\mu = 24 + 2 = 26$ ہو تب β تقریباً $50\,\%$ ہو گا۔اس کے برعکس، $n = 100$ اس صورت کافی ہو گا۔ □

مثال 24.24: نا معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ
رسی کی تنشی مضبوطی $n = 16$ کا نمونہ لے کر ناپی گئی۔نمونی اوسط $\overline{x} = 4482\,\text{kg}$ اور نمونی معیاری انحراف $s = 115\,\text{kg}$ حاصل ہوئے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تنشی مضبوطی عمومی بلا منصوبہ متغیر ہے۔ قیاس $\mu_0 = 4500\,\text{kg}$ کو متبادل $\mu_1 = 4400\,\text{kg}$ کے مقابلے میں پرکھیں۔یہاں μ_0 وہ قیمت ہو سکتی ہے جو پیداکار نے فراہم کی ہو جبکہ μ_1 سابقہ تجربات کا نتیجہ ہو سکتا ہے۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو تب مسئلہ 24.21 کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n}\ \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} = 4\ \frac{\overline{X} - 4500}{S}$$

کا t تقسیم $n - 1 = 15$ درجہ آزادی کا ہو گا۔ فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے $c = -1.75$ حاصل ہو گا۔نمونہ سے T کی مشاہدہ سے حاصل قیمت $t = \frac{4(4482-4500)}{115} = -0.626$ ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $t > c$ ہے لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہمیں مزید جدول بند قیمتیں درکار ہوں گی جن پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔ □

مثال 24.25: (عمومی تقسیم کی تغیریت کی پرکھ)
عمومی آبادی کے $n = 15$ جسامت اور نمونی تغیریت $s^2 = 13$ کے نمونہ سے قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$ کو متبادل $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$ میں مقابلے میں پرکھیں۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو تب

$$Y = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} = 14\frac{S^2}{10} = 1.4S^2$$

کا مربع خا تقسیم $n - 1 = 14$ درجہ آزادی کا ہو گا (مسئلہ 24.22)۔ ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل سے 14 درجہ آزادی کے لئے $c = 23.68$ حاصل ہو گا

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05 \quad \Longrightarrow \quad P(Y \leq c) = 0.95$$

جو Y کی **فاصل قیمت** ہے۔یوں $S^2 = \frac{\sigma_0^2 Y}{n-1} = 0.714Y$ کا **مطابقتی فاصل قیمت** $c^* = 0.714 \cdot 23.68 = 16.91$ ہو گا۔چونکہ $s^2 < c^*$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں،

اگر متبادل درست ہو تب متغیر

$$Y_1 = 14\frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7S^2$$

کے مربع خا تقسیم کا درجہ آزادی 14 ہو گا۔یوں ہمارے پرکھ کی طاقت

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \le 11.84)_{\sigma^2 0} \approx 62\,\%$$

ہو گی اور ہم دیکھتے ہیں قسم دوم غلطی کا امکان (جو $38\,\%$ ہے) بہت زیادہ ہے جس کو کم کرنے کے لئے نمونی جسامت بڑھانی ضروری ہے۔ □

مثال 24.26: دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا آپس میں موازنہ

نا معلوم اوسط μ_1 کی عمومی تقسیم کا نمونہ $x_1, \cdots, x_{n1}$ اور دوسری عمومی تقسیم جس کی اوسط μ_2 نا معلوم ہو کا نمونہ $y_1, \cdots, y_{n2}$ استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل مثلاً $\mu_1 > \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھنا چاہتے ہیں۔تغیرات جاننا ضروری نہیں ہے لیکن انہیں ایک جیسا[163] تصور کیا جاتا ہے۔دو صورتیں عملاً اہم ہیں۔

پہلی صورت: نمونوں کی جسامت ایک جیسی ہے۔مزید پہلے نمونہ کی ہر قیمت کا دوسرے نمونہ میں مطابقتی ٹھیک ایک قیمت پایا جاتا ہے، چونکہ مطابقتی قیمتیں ایک ہی انسان یا چیز کی بدولت پائی جاتی ہیں (**جوڑی دار موازنہ**[164])؛مثال کے طور پر ایک ہی چیز کی دو مختلف طریقوں سے ناپ، یا ایک ہی جانور کی دو آنکھوں کی ناپ، یا زیادہ عمومی طور پر جہاں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نمونوں کی جوڑی قیمتیں ایک جیسے انسانوں یا چیزوں (مثلاً جڑواں بھائی، گاڑھی کے اگلے ٹائر، وغیرہ) سے حاصل کی گئی ہوں۔تب ہم مطابقتی قیمتوں کا فرق لے کر، مثال 24.24 میں دی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، اس قیاس کو پرکھیں گے کہ ان فرق کی مطابقتی آبادی کی اوسط 0 ہے۔اگر ممکن ہو تب ہم اسی ترکیب کو استعمال کریں گے ورنہ ہمیں درج ذیل ترکیب استعمال کرنی ہو گی۔

دوسری صورت: دونوں نمونے غیر تابع ہیں اور ان کی جسامت مختلف ہو سکتی ہے۔تب ہم درج ذیل طریقے سے بڑھتے ہیں۔فرض کریں کہ متبادل $\mu_1 > \mu_2$ ہے۔ہم معنی خیز سطح α منتخب کرتے ہیں۔ہم نمونی اوسط $\overline{x}$ ،

---

[163] اگر اگلے مثال کا پرکھ واضح کرے کہ تغیرات میں واضح فرق پایا جاتا ہے تب ایک جیسے $n_1 = n_2 = n$ ، مثلاً $n > 30$ منتخب کرتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ مساوات تخمیناً عمومی بلا منصوبہ متغیر، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے، کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے، اور مثال 24.23 کی طرز پر حل کریں۔

[164] paired comparison

$\overline{y}$ اور $(n_1-1)s_1^2$ ، $(n-1)s_2^2$ کا حساب کرتے ہیں جہاں s_1^2 اور s_2^2 نمونی تغیریت ہیں۔ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں n_1+n_2-2 درجہ آزادی لیتے ہوئے ہم c کو

$$P(T \leq c) = 1-\alpha \tag{24.142}$$

سے تعین کرتے ہیں۔آخر میں ہم درج ذیل کا حساب کرتے ہیں۔

$$t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \; \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}} \tag{24.143}$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر قیاس درست ہو تب یہ t تقسیم کے n_1+n_2-2 درجہ آزادی کے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے۔اگر $t_0 \leq c$ ہو تب قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔اگر $t_0 > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے۔

اگر متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ ہو تب مساوات 24.142 کی جگہ درج ذیل استعمال کیا جائے گا۔

$$P(T \leq c_1) = 0.5\alpha, \quad P(T \leq c_2) = 1-0.5\alpha \tag{24.142*}$$

دھیان رہے کہ ایک جیسی نمونی جسامت $n_1=n_2=n$ کے لئے مساوات 24.143 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$t_0 = \sqrt{n} \; \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_1^2-s_2^2}} \tag{24.144}$$

اس کی وضاحت کے لئے آئیں درج ذیل دو نمونوں پر غور کرتے ہیں جو ایک ہی کام میں دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی ہے۔

105	108	86	103	103	107	124	105
89	92	84	97	103	107	111	97

فرض کریں کہ مطابقتی آبادی عمومی ہے اور ان کی تغیریت ایک جیسی ہے۔آئیں قیاس $\mu_1=\mu_2$ کو متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ (تغیریت کی ایک جیسا ہونے کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔)

حل: ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\overline{x} = 105.125, \quad \overline{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000$$

ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔مساوات 24.142* میں $0.5\alpha = 2.5\,\%$ ، $1 - 0.5\alpha = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں 14 درجہ آزادی سے $c_1 = -2.15$ اور $c_2 = 2.15$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 24.144 میں $n = 8$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$t_0 = \frac{\sqrt{8} \cdot 7.625}{\sqrt{190.125}} = 1.56$$

چونکہ $c_1 \leq t_0 \leq c_2$ ہے ہم دونوں صورتوں میں ایک جیسی اوسط کے قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

پہلی صورت اس مثال پر لاگو ہوتی ہے چونکہ پہلی دونوں نمونوں کی پہلی نمونی قیمت ایک قسم کے کام کے لئے حاصل کی گئی۔اسی طرح دونوں نمونوں کی دوسری نمونی قیمت کسی دوسرے کام کے لئے حاصل کی گئی، وغیرہ۔یوں ہم ان نمونی قیمتوں کا مطابقتی فرق

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

اور مثال 24.24 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0$ پر کھ سکتے ہیں جہاں μ اس فرق کی اوسط ہے۔ہم اس کا منطقی متبادل $\mu \neq 0$ لیتے ہیں۔نمونی اوسط $\bar{d} = 7.625$ اور نمونی تغیریت $s^2 = 45.696$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$t = \frac{\sqrt{8}(7.625 - 0)}{\sqrt{45.696}} = 3.19$$

$P(T \leq c_1) = 2.5\,\%$ ، $P(T \leq c_2) = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں $n - 1 = 7$ درجہ آزادی سے $c_1 = -2.37$ اور $c_2 = 2.37$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں چونکہ $t = 3.19$ معلوم شدہ c_1 اور c_2 کے بیچ نہیں پایا جاتا ہے۔اس طرح ہمارا موجودہ پرکھ، جو اسی نمونوں پر مبنی ہے لیکن زیادہ معلومات کو استعمال کرتا ہے، دکھاتا ہے کہ نتائج میں فرق کافی ہے۔ $\square$

مثال 24.27: **(دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا موازنہ)**
گزشتہ مثال کے دو نمونے استعمال کرتے ہوئے قیاس $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو پرکھیں۔فرض کریں کہ مطابقتی آبادیاں عمومی ہیں اور تجربہ کی نوعیت سے متبادل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ہو گا۔
حل: ہم $s_1^2 = 106.125$ اور $s_2^2 = 84.000$ حاصل کرتے ہیں۔ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔ $P(V \leq c) = 1 - \alpha = 95\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 8.ج میں $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$

درجہ آزادی سے $c = 3.79$ تعین ہوتا ہے۔ہم آخر میں $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.26$ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $v_0 \leq c$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔اگر $v_0 > c$ ہوتا ہم اس کو نا منظور کرتے۔

قیاس درست ہونے کی صورت میں v_0 ایسے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے جس کی تقسیم درجہ آزادی $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ کی F **تقسیم**[165] ہے۔ (m, n) درجہ آزادی کے F تقسیم[166] کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہے

$$F(z) = \begin{cases} K_{mn} \int_0^z t^{\frac{m-2}{2}} (mt+n)^{-\frac{m+n}{2}} \,\mathrm{d}t & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \tag{24.145}$$

جہاں $K_{mn} = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$ ہے۔ $\square$

سوالات

سوال 24.201: صفحہ 1554 پر جدول 24.6 میں امجد کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ سکہ منصفانہ ہے، یعنی خط اور شیر کا احتمال ایک جیسا ہے۔ $\alpha = 5\,\%$ منتخب کریں۔

جواب: اگر قیاس $p = 0.5$ درست ہو تب 4040 کوششوں میں خط کی تعداد $= X$ تقریباً عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 2020$ اور تغیریت $\sigma^2 = 1010$ ہو گی (حصہ 24.10)۔

$P(X \leq c) = \Phi(\frac{c-2020}{\sqrt{1010}}) = 0.95, \;\; c = 2072 > 2048$ ہے لہٰذا قیاس نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.202: مشرف کا مواد استعمال کرتے ہوئے سوال 24.201 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.203: عمومیت تصور کرتے ہوئے اور $\sigma^2 = 4$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = 15.0$ کو متبادل (الف) $\mu = 12.0$ اور (ب) $\mu = 15.8$ کے بالمقابل پرکھیں۔نمونی جسامت 10 اور نمونی اوسط $\bar{x} = 14$ لیں جبکہ $\alpha = 5\,\%$ منتخب کریں۔

جواب: (الف) $c = 13.96 > 12.00$ ہے۔ قیاس کو نا منظور کریں۔

(ب) $c = 16.04 > 15.80$ ہے۔قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

[165] F-distribution

[166] انگلستانی ماہر جینیات رونلڈ ایلمر فشر [1890-1962]

سوال 24.204: اگر بڑی نمونی جسامت، مثلاً 100 ، استعمال کی جائے تب سوال 24.203 میں باقی مواد ($\overline{x} = 14$ ، $\alpha = 5\,\%$ ، وغیرہ) تبدیل کیے بغیر نتیجے میں کیا تبدیلی پیدا ہو گی؟

سوال 24.205: دو طرفہ پرکھ، $5\,\%$ سطح پر استعمال کرتے ہوئے سوال 24.203 میں خطہ نا منظوری تلاش کریں؟
جواب: $\mu < 13.76$ یا $\mu > 16.24$

سوال 24.206: سوال 24.203-الف میں پرکھ کی طاقت تلاش کریں۔

سوال 24.207: مثال 24.23-الف اور ب کی خاصیت کارکردگی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.208: دکھائیں کہ عمومی تقسیم میں قیاس $H_0 : \mu = \mu_0$ اور متبادل $H_1 : \mu = \mu_1$ کی پرکھ میں دو اقسام کی غلطیوں کو نمونی جسامت کافی بڑھا کر جتنا چاہیں کم (ما سوائے صفر کرنے کے) کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.209: $\mu = 0$ کو $\mu > 0$ کے بالمقابل سطح $\alpha = 5\,\%$ پر کھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونہ $1, -1, 1, 3, -8, 6, 0$ لیں جو مصنوعی سیارہ ٹلسٹار کی 143 ویں گردش میں مدار سے مضرب 0.01 ریڈیئن انحراف ہے۔
جواب: $t = \sqrt{7}\frac{0.286-0}{4.31} = 0.18 < c = 1.94$ ہے لہٰذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.210: مثال 24.1 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0.80\,\text{cm}$ (ڈبے پر درج لمبائی) کو متبادل $\mu \neq 0.80\,\text{cm}$ کے مقابل پرکھیں۔ (عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ لیں۔)

سوال 24.211: ایک مشین ڈبوں میں فی ڈبہ $1000\,\text{g}$ تیل بھرتی ہے۔ آپ جاننا چاہتے ہیں کہ آیا $\alpha = 5\,\%$ سطح پر اوسط کی درکار کمیت $1000\,\text{g}$ سے تجاوز زیادہ ہے۔ اگر ایسا ہو تب مشین میں مطابقت پیدا کرنی ہو گی۔ ایک قیاس اور متبادل بنائیں اور انہیں پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونی جسامت 20 جس کی اوسط $996\,\text{g}$ اور معیاری انحراف $5\,\text{g}$ ہو استعمال کریں۔
جواب: متبادل $\mu \neq 1000$ ، $t = \sqrt{20}\frac{996-1000}{5} = -3.58 < c = -2.09$ (ضمیمہ ج جدول 6.ج درجہ آزادی 19)۔ قیاس $\mu = 1000\,\text{g}$ کو نا منظور کریں۔

سوال 24.212: ایک مخصوص ٹائر کی اوسط زندگی $32\,000\,\text{km}$ اور معیاری انحراف $4000\,\text{km}$ ہے۔ کیا ٹائر کا پیداکار یہ دعویٰ کر سکتا ہے کہ اس کے بنائے ہوئے ٹائروں کی اوسط زندگی $30\,000\,\text{km}$ سے زیادہ ہے۔ متبادل قیاس بناتے ہوئے اس کو $5\,\%$ سطح پر پرکھیں۔

سوال 24.213: برقی دباو کو بیک وقت دو عدد وولٹ پیما سے ناپا جاتا ہے۔ ان کے نتائج میں فرق

$$0.8, 0.2, -0.3, 0.1, 0.0, 0.5, 0.2$$

وولٹ ہے۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے کیا ہم $5\,\%$ سطح کے لحاظ سے وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ دونوں وولٹ پیما کی پیمانہ بندی[167] میں کوئی معنی خیز فرق نہیں پایا جاتا ہے۔
جواب: $\mu = 0$ کو متبادل $\mu \neq 0$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ $t = 2.11 < c = 2.37$ (درجہ آزادی 7)۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.214: ایک معیاری دوائی ایک مخصوص مرض میں مبتلا $70\,\%$ مریضوں کو صحتیاب کرتی ہے اور ایک نئی دوائی پہلے 200 مریضوں میں سے 148 کو صحتیاب کرتی ہے۔ کیا $\alpha = 5\,\%$ لیتے ہوئے ہم وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ نئی دوائی زیادہ بہتر ہے؟

سوال 24.215: ماضی میں ایک مشین جو فی ڈبہ $25\,\mathrm{kg}$ چینی بھرتی تھی کا معیاری انحراف $0.4\,\mathrm{kg}$ تھا۔ قیاس $H_0 : \sigma = 0.4$ کو متبادل $H_1 : \sigma > 0.4$ کے بالمقابل پرکھیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے نمونی جسامت 10 جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.4$ ہو لیں اور $\alpha = 5\,\%$ منتخب کریں۔
جواب: $14.06 = \frac{9 \cdot 0.5^2}{0.4^2} < 16.92 = \alpha = 5\,\%, c$ ہے۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.216: فرض کریں کہ معیاری انحراف کسی مخصوص حد سے کم، مثلاً، 5 گھنٹوں سے کم، ہونے کی صورت میں بیٹری سے چلنے والی مشینوں میں تمام بیٹریوں کو مخصوص مدت کے بعد بیک وقت تبدیل کرنا کم مہنگا پڑتا ہے بہ نسبت ہر بیٹری کو اس وقت تبدیل کرنے کے جب وہ خراب ہو جائے۔ ایک موزوں پرکھ بنا کر اس قیاس کو پرکھیں۔ عرصہ زندگی کے 28 قیمتیں جن کا معیاری انحراف $s = 3.5$ گھنٹے ہو استعمال کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ لیں۔ عمومیت تصور کریں۔

سوال 24.217: تیل کی قسم A کو 9 ایک جیسی گاڑیوں میں ایک جیسے حالات میں استعمال کیا گیا جنہوں نے اوسط 20.2 کلومیٹر فی لٹر اور معیاری انحراف 0.5 دیا۔ انہیں حالات میں تیل کی بہتر قسم B کو اس جیسی 10 گاڑیوں میں استعمال کیا گیا جن سے اوسط 21.8 اور معیاری انحراف 0.6 حاصل ہوا۔ کیا B بہت بہتر نتائج دیتا ہے؟ اس قیاس کو $\alpha = 5\,\%$ پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کریں۔
جواب: $t_0 = \sqrt{\frac{10 \cdot 9 \cdot 17}{19}} \frac{21.8 - 20.2}{\sqrt{9 \cdot 0.6^2 + 8 \cdot 0.5^2}} = 6.3 > c = 1.74$ (درجہ آزادی 17 ہے۔)

---

[167] calibration

سوال 24.218: ماسوائے عرصہ زندگی، بلب A اور B ایک جیسے ہیں۔ایک خریدار دونوں قسم کے 100 بلب کو پرکھتا ہے۔قسم A کی اوسط عرصہ زندگی $1120\,\mathrm{h}$ اور معیاری انحراف $75\,\mathrm{h}$ جبکہ B کی اوسط $1064\,\mathrm{h}$ اور معیاری انحراف $82\,\mathrm{h}$ حاصل ہوتے ہیں۔ کیا عرصہ زندگی میں معنی خیز فرق پایا جاتا ہے؟ (عمومیت فرض کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ سطح پر پرکھیں۔)

سوال 24.219: نمونی جسامت 10 اور 16 اور تغیریت $s_1^2 = 50$ اور $s_2^2 = 30$ لیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ سطح پر قیاس $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو متبادل $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ کے بالمقابل پرکھیں۔
جواب: $v_0 = \frac{50}{30} = 1.67 < c = 2.59$ [درجہ آزادی $(9, 15)$ ہے۔] قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.220: دو نمونے $50, 90, 100, 90, 110, 80$ اور $110, 110, 120, 110, 130, 110, 120$ لوہے کی ڈھلائی کے دوران دو مختلف بالٹیوں میں دو مختلف وقتوں پر درجہ حرارت $(^\circ\mathrm{C})$ میں فرق دیتی ہیں۔ کیا پہلے نمونہ کی تغیریت دوسرے سے زیادہ ہے؟ عمومیت فرض کریں اور $\alpha = 5\,\%$ لیں۔

24.16 ضبط معیار

پیداوار کا کوئی بھی عمل اتنا ٹھیک نہیں ہوتا ہے کہ تمام پیداوار مکمل طور پر ایک جیسی ہو۔ بہت ساری معمولی، غیر قابو وجوہات کی بنا ان میں ہر صورت معمولی فرق پایا جاتا ہے جس کو امکانی فرق تصور کیا جا سکتا ہے۔یہ ضروری ہے کہ پیداوار کی درکار خاصیت کی قیمت درست ہو (مثلاً لمبائی، مضبوطی، یا جو بھی خاصیت کسی مخصوص صورت میں درکار ہو)۔ اس مقصد کے لئے اس قیاس کو پرکھا جاتا ہے کہ پیداوار درکار خاصیت، مثلاً $\mu = \mu_0$ ، رکھتے ہیں جہاں μ_0 درکار قیمت ہے۔اگر ایسا پوری کھیپ کی پیداوار (مثلاً، 100000 پیچوں کی کھیپ) کے بعد کیا جائے تب پرکھ ہمیں بتائے گا کہ پیداوار کتنی اچھی یا کتنی خراب ہے لیکن ظاہر ہے کہ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کوئی بہتری نہیں لا سکتے ہیں۔بہتری لانے کے لئے ضروری ہے کہ پرکھ دوران پیداوار کیا جائے۔ایسا عموماً مقررہ دورانیہ (مثلاً ہر 30 منٹ یا ہر گھنٹہ) بعد جاتا ہے اور اس کو **ضبط معیار**[168] کہتے ہیں۔ہر مرتبہ ایک جیسی جسامت (عملاً 3 یا 10 اجزاء) کا نمونہ لیا جاتا ہے۔قیاس نا منظور ہونے کی صورت میں عمل پیداوار روک کر اس وجہ کو تلاش کیا جاتا ہے جس کی بنا انحراف پیدا ہوا ہے۔

---

[168] quality control

اگر ہم عمل پیدا وار کو روک دیں اگرچہ سب ٹھیک چل رہا ہو تب ہم غلطی قسم اول کر رہے ہوں گے۔اگر خرابی کے باوجود ہم عمل پیداوار کو نا روکیں تب ہم غلطی قسم دوم کر رہے ہوں گے (حصہ 24.15)۔

ہر پرکھ کا نتیجہ کو ترسیمی صورت میں **نقشہ ضبط**[169] پر ظاہر[170] کیا جاتا ہے۔

اوسط کا نقشہ ضبط

شکل 24.22 میں نقشہ ضبط کی مثال دکھائی گئی ہے۔اوسط کے نقشہ ضبط پر **نچلی حد ضبط**[171] LCL ، **وسطی خط ضبط**[172] CL اور **بالائی حد ضبط**[173] UCL دکھائے گئے ہیں۔ یہ حدود مثال 24.23-پ میں فاصل قیمتوں c_1 اور c_2 کے مطابقتی ہیں۔جیسے ہم نمونی اوسط نچلی حد ضبط یا بالائی حد ضبط سے تجاوز کر جائے ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ عمل پیداوار "بے قابو" ہے، یعنی، ہم کہتے ہیں کہ عمل پیداوار میں تبدیلی رو نما ہوئی ہے۔جب بھی کوئی نقطہ حدود ضبط سے تجاوز کرے عمل پیداوار میں مداخلت کی ضرورت ہو گی۔

اگر ہم حدود ضبط ڈھیلے رکھیں تب ہم عمل پیداوار میں نا پسندیدہ تبدیلی کو پکڑ نہیں پائیں گے۔اس کے برعکس حدود ضبط بہت سخت رکھنے سے ہم بار بار عمل پیداوار کو روک کر نا پسندیدہ تبدیلی کی غیر موجود وجہ تلاش کرتے رہیں گے جس سے پیداوار بری طرح متاثر ہو گی۔عموماً معنی خیز سطح $\alpha = 1\,\%$ منتخب کی جاتی ہے۔صفحہ 1628 پر مسئلہ 24.20 اور ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کی صورت میں اوسط کے مطابقتی حد ضبط

$$\text{LCL} = \mu_0 - 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{اور} \quad \text{UCL} = \mu_0 + 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{24.146}$$

ہوں گے۔یہاں فرض کیا گیا ہے کہ ہمیں σ معلوم ہے۔اگر σ نا معلوم ہو تب پہلی 20 یا 30 نمونوں کی معیاری انحراف حاصل کر کے ان کی اوسط کو σ کی تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل 24.22 میں اوسط کو لکیر سے جوڑا جاتا ہے جو محض نتائج کو واضح کرنے میں مدد دیتی ہے۔

---

[169] control chart

[170] امریکی ماہر شماریات والٹر انڈر و شوہارٹ[1891-1967] نے یہ نقشہ 1924 میں تجویز کیا جو معیار کو قابو کرنے میں انتہائی موثر ثابت ہوا ہے۔

[171] lower control limit (LCL)

[172] central control line (CL)

[173] upper control limit (UCL)

تغیریت کا نقشہ ضبط

اوسط کے ساتھ ساتھ عموماً تغیریت، معیاری انحراف یا سعت کو بھی قابو رکھا جاتا ہے۔عمومی تقسیم کی صورت میں معیاری انحراف کا نقشہ ضبط بناتے ہوئے مثال 24.25 میں استعمال ترکیب بروئے کار لاتے ہوئے حدود ضبط تعین کیے جا سکتے ہیں۔روایتی طور پر صرف بالائی حد ضبط استعمال کیا جاتا ہے۔مثال 24.25 سے یہ حد

$$\text{UCL} = \frac{\sigma^{\,2} c}{n-1} \tag{24.147}$$

ہو گا جہاں c کو مساوات

$$P(Y > c) = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad P(Y \le c) = 1 - \alpha$$

اور ضمیمہ ج کی جدول 7.ج (مربع خا تقسیم) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کیا جاتا ہے؛ یہاں نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ S^2 کی حاصل قیمت s^2 کا بالائی حد ضبط سے تجاوز کا احتمال α (5% یا 1%) ہے۔

اگر ہم تغیریت کے نقشہ ضبط میں نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط استعمال کرنا چاہیں تب یہ حدود

$$\text{LCL} = \frac{\sigma^2 c_1}{n-1}, \quad \text{UCL} = \frac{\sigma^2 c_2}{n-1} \tag{24.148}$$

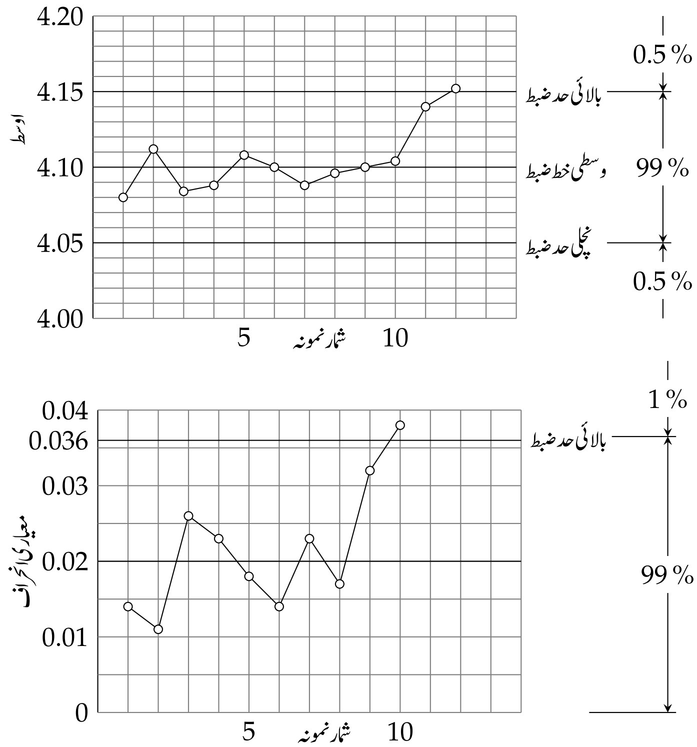
ہوں گے جہاں c_1 اور c_2 کو $n-1$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(Y \le c_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(Y \le c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \tag{24.149}$$

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط

تغیریت کے نقشہ ضبط کی طرح ہمیں بالائی حد ضبط

$$\text{UCL} = \frac{\sigma \sqrt{c}}{\sqrt{n-1}} \tag{24.150}$$



شکل 24.22: اوسط اور معیاری انحراف کے نقشہ ضبط برائے جدول 24.12

جدول 24.12: بارہ نمونے جہاں ہر نمونہ 5 قیمتوں (چھوٹی نلکیوں کے ملی میٹروں میں قطر) پر مشتمل ہے

نمونی شمار	نمونی قیمتیں					$\overline{x}$	s	R
1	4.06	4.08	4.08	4.08	4.10	4.080	0.014	0.04
2	4.10	4.10	4.12	4.12	4.12	4.112	0.011	0.02
3	4.06	4.06	4.08	4.10	4.12	4.084	0.026	0.06
4	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
5	4.08	4.10	4.12	4.12	4.12	4.108	0.018	0.04
6	4.08	4.10	4.10	4.10	4.12	4.100	0.014	0.04
7	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
8	4.08	4.08	4.10	4.10	4.12	4.096	0.017	0.04
9	4.06	4.08	4.10	4.12	4.14	4.100	0.032	0.08
10	4.06	4.08	4.10	4.12	4.16	4.104	0.038	0.10
11	4.12	4.14	4.14	4.14	4.16	4.140	0.014	0.04
12	4.14	4.14	4.16	4.16	4.16	4.152	0.011	0.02

درکار ہو گا جس کو مساوات 24.147 سے حاصل کیا گیا ہے۔مثال کے طور پر جدول 24.12 میں $n = 5$ ہے۔مطابقتی آبادی کو عمومی تصور کرتے ہوئے جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.02$ ہو، $\alpha = 1\%$ منتخب کرتے ہوئے 4 درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور مساوات

$$P(Y \leq c) = 1 - \alpha = 99\,\%$$

سے فاصل قیمت $c = 13.28$ حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 24.150 سے

$$\text{UCL} = \frac{0.02\sqrt{13.28}}{\sqrt{4}} = 0.0365$$

حاصل ہو گا جس کو شکل 24.22 کے نچلے حصے میں دکھایا گیا ہے۔

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط جس میں بالائی حد ضبط اور نچلا حد ضبط پائے جاتے ہوں کو مساوات 24.148 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سعت کا نقشہ ضبط

اگر ہم σ^2 یا σ کو قابو رکھتے ہوں تب ہمیں بالترتیب s^2 یا s کا حساب کرنا ہو گا۔ایسا کرنا غیر تربیت یافتہ شخص کے لئے مشکل ہوتا ہے لٰہذا ہم تغیریت یا معیاری انحراف کی حد ضبط کی جگہ سعت $R =$ (نمونہ کی زیادہ

سے زیادہ قیمت منفی نمونہ کی کم سے کم قیمت) استعمال کرنا چاہیں گے۔ عمومی تقسیم کی صورت میں یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ معیاری انحراف σ کی قیمت بلا منصوبہ متغیر R^* کی توقع کے راست متناسب ہے جس کی مشاہدے سے حاصل قیمت R ہو، یعنی $\sigma = \lambda_n E(R^*)$ ، جہاں جزو λ_n کی قیمت نمونی جسامت پر منحصر ہے اور اس کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.89	0.59	0.49	0.43	0.40	0.37	0.35	0.34	0.32

n	12	14	16	18	20	30	40	50
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.31	0.29	0.28	0.28	0.27	0.25	0.23	0.22

چونکہ R صرف دو نمونی قیمتوں پر منحصر ہے لہٰذا یہ نمونے کے بارے میں s کے لحاظ سے کم معلومات فراہم کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ نمونی جسامت n جتنی بڑی ہو گی، s کی جگہ R استعمال کرنے سے، اتنی زیادہ معلومات ہم ضائع کریں گے۔ عملاً اگر n کی قیمت 10 سے زائد ہو تب s استعمال کیا جاتا ہے۔

دھیان رہے کہ سعت سے معیاری انحراف کا جلدی سے اندازہ لگانا عملی استعمال میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 24.221: ایک مشین چکنا تیل کو ٹین کی بوتل میں یوں بھرتی ہے کہ عمومی آبادی حاصل ہو جس کی اوسط 1 لٹر اور معیاری انحراف 0.03 لٹر ہو۔ اوسط کے لئے شکل 24.22 کی طرح نقشہ درکار ہے۔ نمونی جسامت 6 فرض کرتے ہوئے نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط تلاش کریں۔

جواب: نچلی حد ضبط $\text{LCL} = 1 - \frac{2.58 \cdot 0.03}{\sqrt{6}} = 0.968$ جبکہ بالائی حد ضبط $\text{UCL} = 1.032$

سوال 24.222: سوال 24.221 میں دکھائیں کہ $\alpha = 0.3\,\%$ سطح سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔ ان کی اعدادی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{LCL} = \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{UCL} = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

سوال 24.223: معنی خیز سطح تبدیل کیے بغیر ہمیں سوال 24.221 میں نمونی جسامت کتنی رکھنی ہو گی تاکہ بالائی اور نچلی حد ضبط قریب قریب ہوں، مثلاً $\text{UCL} - \text{LCL} = 0.05$

جواب: $n = 10$

سوال 24.224: اگر ہم غیر عمومی آبادی کے لئے مساوات 24.146 کے حدود ضبط والا نقشہ ضبط استعمال کریں تب ان حدود کا کیا مطلب ہو گا؟

سوال 24.225: عمومی آبادی کی اوسط قابو کرتے ہوئے $\text{UCL} - \text{LCL}$ کو نصف کرنے کی خاطر نمونی جسامت کو کس طرح تبدیل کرنا ہو گا؟
جواب: نمونی جسامت کو 4 گنا بڑھانا ہو گا۔

سوال 24.226: قابلوں کی پیداوار میں سے 2 جسامت کے 10 نمونے لئے گئے۔ان کی لمبائی ملی میٹروں میں درج ذیل ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لمبائی	27.4	27.4	27.5	27.3	27.9	27.6	27.6	27.8	27.5	27.3
	27.6	27.4	27.7	27.4	27.5	27.5	27.4	27.3	27.4	27.7

فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 27.5 اور تغیریت 0.024 ہے۔مساوات 24.146 استعمال کرتے ہوئے اوسط کے لئے نقش ضبط بنائیں اور نمونی اوسط اس پر ترسیم کریں۔
جواب: $\frac{2.58\sqrt{0.024}}{\sqrt{2}} = 0.283, \text{UCL} = 27.783, \text{LCL} = 27.217$

سوال 24.227: لوہے کی چادر موٹائی کے درج ذیل نمومے 30 منٹ کے وقفوں پر حاصل کیے گئے۔ان کی اوسط کو نقش ضبط پر ترسیم کریں۔فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 5 اور معیاری انحراف 1.55 ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
نمونی قیمتیں	3	3	5	7	7	4	5	6	5	5
	4	6	2	5	3	4	6	4	5	2
	8	6	5	4	6	3	4	6	6	5
	4	8	6	4	5	6	6	4	4	3

سوال 24.228: سعت کے نقشہ ضبط پر سوال 24.227 کے نمونی سعت کو ترسیم کریں۔

سوال 24.229: $\lambda_n = \frac{\sigma}{E(R^*)}$ بالمقابل n ترسیم کریں۔ λ_n متغیر n کا یک سر گھٹتا تفاعل ہے۔اس کی وجہ بیان کریں۔

سوال 24.230: حدود ضبط کے باہر اوسط کا نقطہ نظام میں خرابی کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہم (الف) 1σ حد، (ب) 2σ حد، منتخب کریں تب ہم کتنی بار نظام میں غیر موجود خرابی کو تلاش کرنے کی کوشش کریں گے۔ (عمومیت فرض کریں۔)
جواب: تقریباً $30\,\%$ $(5\,\%)$ صورتوں میں

سوال 24.231: ایک خود کار خراد کی مشین پر قابلے بنائے جاتے ہیں۔ مسلسل رگڑ سے پیدا تبدیلی، اوسط کی نقش ضبط پر کس طرح رونما ہو گی؟ خراد کی مشین میں یک دم تبدیلی کس طرح نقش ضبط پر نظر آئے گی؟

سوال 24.232: **(عیب داروں کی تعداد)** 3σ حدود ضبط کے لحاظ سے UCL ، CL اور LCL کے کلیات عیب دار کے نقشہ ضبط کے لئے تلاش کریں۔ (فرض کریں کہ شماریاتی ضبط میں p عیب دار کو ظاہر کرتا ہے۔)

$$\mathrm{UCL} = np + 3\sqrt{np(1-p)}, \mathrm{CL} = np, \mathrm{LCL} = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

سوال 24.233: **خاصیت کی نقش ضبط** برتنوں کی پیداوار سے جسامت 100 کے نمونے حاصل کیے گئے۔ عیب دار (رستا برتنوں) کی تعداد (اسی ترتیب سے) درج ذیل تھی۔

3 7 6 1 4 5 4 9 7 0 5 6 13 4 9 0 2 1 12 8

گزشتہ تجربہ سے ہم جانتے ہیں کہ اگر عمل پیداوار میں خرابی نہ ہو تب عیب دار کی اوسط تعداد $p\%$ ہوتی ہے۔ ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے عیب دار نقشہ ضبط (جس کو p نقشہ بھی کہتے ہیں) بنائیں، یعنی، $\mathrm{LCL} = 0$ لیں اور 3σ حدود کے لئے حاصل عیب دار (فی صد) کو UCL لیں، جہاں بلا منصوبہ متغیر $\overline{X}$ = نمونہ میں فی صد عیب دار کی تغیریت σ^2 ہے۔ کیا عمل پیداوار قابو میں ہے؟

سوال 24.234: **فی اکائی عیب دار کی تعداد** فی اکائی عیب دار کے نقشہ (جس کو c نقشہ بھی کہتے ہیں) کو فی اکائی عیب دار X (مثلاً 10 میٹر کاغذ میں عیبوں کی تعداد، جہاز کے ایک پر میں غیر موجود کیلوں کی تعداد، وغیرہ) کو قابو کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ (الف) X کی تقسیم کو پوئسن تقسیم تصور کرتے ہوئے $\mu \mp 3\sigma$ کے لحاظ سے LCL ، CL اور UCL کے کلیات بنائیں۔ (ب) شیشے کی چادر میں عیب کے لئے **عمل قابو**[174] کے لئے CL ، LCL اور UCL تلاش کریں؛ فرض کریں کہ جب عمل پیداوار شماریاتی قابو میں ہو تب اوسطاً یہ عدد 2.5 فی چادر ہے۔

[174] control process

24.17 قبولیت نمونہ

بڑے پیمانہ پر پیداوار میں، جہاں پیداکار خریدار کو N اشیاء کی کھیپ مہیا کرتا ہے، قبولیت نمونہ لاگو کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں ہر کھیپ کو قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ کرنا ہو گا۔ کھیپ سے n جسامت کے نمونے کا معائنہ کرتے ہوئے **عیب دار اشیاء**، جنہیں مختصراً **عیب دار**[175] کہتے ہیں، کی تعداد کو مد نظر رکھ کر عموماً فیصلہ کیا جاتا ہے۔ جو اشیاء درکار تخصیص (بیان کردہ خواص، مثلاً جسامت، رنگ، مضبوطی، یا جو بھی اہمیت رکھتا ہو) پر پورا نہیں اترتے ہیں، انہیں عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔ اگر نمونہ میں عیب دار اشیاء کی تعداد x طے شدہ عدد $c\,(<n)$ سے زیادہ نہ ہو تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اگر $x>c$ ہو تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔ c کو عیب دار کی قابل قبول تعداد یا **تعداد قبولیت**[176] کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ پیدا کار اور خریدار کو **نمونی منصوبہ**[177] پر اتفاق کرنا ہو گا، یعنی، نمونی جسامت n کی قیمت اور تعداد قبولیت c کی قیمت۔چونکہ یہ ایک نمونہ پر منحصر ہے لہٰذا اس کو **واحد نمونی منصوبہ**[178] کہتے ہیں۔ **دوہرا نمونی منصوبہ** پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

فرض کریں کہ کھیپ قبول ہونے کا وقوعہ A ہے۔ظاہر ہے کہ مطابقتی احتمال $P(A)$ ناصرف n اور c بلکہ کھیپ میں عیب داروں کی تعداد M پر بھی منحصر ہے۔فرض کریں کہ نمونہ میں عیب داروں کی تعداد بلا منصوبہ متغیر X ہے اور ہم بغیر واپس رکھے نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ تب (حصہ 24.9)

$$P(A)=P(X\le c)=\sum_{x=0}^{c}\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{24.151}$$

ہو گا۔اگر $M=0$ (کھیپ میں کوئی عیب دار نہیں ہے) ہو تب X کی قیمت لازماً 0 ہو گی اور

$$P(A)=\frac{\binom{0}{0}\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}}=1$$

ہو گا۔ مقررہ n اور c اور بڑھتے M کی صورت میں احتمال $P(M)$ گھٹتا ہے۔اگر $M=N$ (کھیپ میں تمام اشیاء عیب دار) ہو، تب X کی قیمت لازماً n ہو گی اور $P(A)=P(X\le c)=0$ ہو گا چونکہ $c<n$ ہے۔

---

defectives[175]
acceptance number[176]
sampling plan[177]
single sampling plan[178]

نسبت $\theta=\frac{M}{N}$ کو کھیپ میں **نسبت عیب دار**[179] کہتے ہیں۔دھیان رہے کہ $M=N\theta$ ہے اور مساوات 24.151 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P(A;\theta)=\sum_{x=0}^{c}\frac{\binom{N\theta}{x}\binom{N-N\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{24.152}$$

چونکہ θ کی قیمت $N+1$ قیمتوں $0,\frac{1}{N},\frac{2}{N},\cdots,\frac{N}{N}$ میں سے ایک ہو سکتی ہے، احتمال $P(A)$ صرف ان قیمتوں کے لئے معین ہو گا۔مقررہ n اور c کے لئے ہم $P(A)$ بالمقابل θ ترسیم کر سکتے ہیں۔یہ $N+1$ نقطے ہوں گے۔ان نقطوں سے ہموار منحنی گزاری جا سکتی ہے جس کو مد نظر نمونی منصوبہ کی **منحنی خاصیت کارکردگی**[180] (OC منحنی) کہتے ہیں۔

مثال 24.28: لکڑی میں سوراخ کرنے والی ایک مخصوص قسم کے ورموں کو 20 فی ڈبیا بند کیا جاتا ہے اور مذکورہ زیر نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ 2 ورموں کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے اور دونوں ورمے غیر عیب دار ہونے کی صورت میں ڈبے کو قبول کیا جاتا ہے۔یہاں $N=20$ ، $n=2$ ، $c=0$ ہیں لہٰذا مساوات 24.152 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$P(A;\theta)=\frac{\binom{20\theta}{0}\binom{20-20\theta}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{(20-20\theta)(19-20\theta)}{380}$$

اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

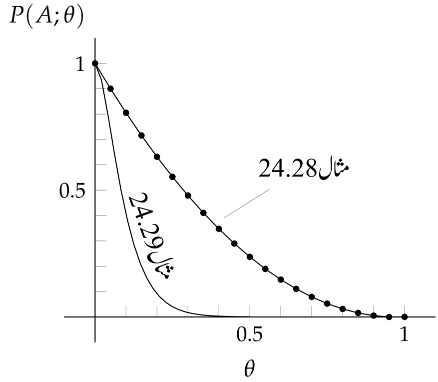
θ	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	$\cdots$
$P(A;\theta)$	1.00	0.90	0.81	0.72	0.63	$\cdots$

منحنی خاصیت کارکردگی کو شکل 24.23 میں دکھایا گیا ہے۔ □

عملی صورتوں میں عموماً θ چھوٹا ہو گا (10 % سے کم)۔ عموماً صورتوں میں جسامت کھیپ N بہت بڑا (1000 ، 10000 ، وغیرہ) ہو گا لہٰذا ہم مساوات 24.151 اور مساوات 24.152 میں بیش ہندسی تقسیم کو تخمیناً ثنائی تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں جس میں $p=\theta$ لیا جائے گا۔اب اگر n ایسا ہو کہ $n\theta$ معتدل (مثلاً 20 سے کم)

---

[179] fraction defective
[180] operating characteristic curve



شکل 24.23: منحنیات خاصیت کارکردگی برائے مثال 24.28 اور مثال 24.29

ہو، تب ہم اس تقسیم کو $\mu = np$ اوسط کی پوئسن تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں۔یوں مساوات 24.152 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(A;\theta) \sim e^{-\mu} \sum_{x=0}^{c} \frac{\mu^x}{x!} \qquad (\mu = n\theta) \tag{24.153}$$

مثال 24.29: فرض کریں کہ بری کھیپ کے لئے مذکورہ ذیل واحد نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ $n = 20$ نمونہ لیا جاتا ہے۔اگر اس میں 1 سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اگر نمونہ میں 2 یا اس سے زیادہ عیب دار ہوں تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔اس منصوبہ میں مساوات 24.153 درج ذیل دیتا ہے

$$P(A;\theta) \sim e^{-20\theta}(1 + 20\theta)$$

جس کی مطابقتی منحنی شکل 24.23 میں دکھائی گئی ہے۔ □

ہم اب قبولیت نمونہ میں دو اقسام کے غلطیوں پر غور کرتے ہیں اور n اور c منتخب کرنے کی تفصیل پیش کرتے ہیں۔قبولیت نمونہ میں پیداکار اور خریدار کے غرض مختلف ہوں گے۔پیداکار چاہے گا کہ "اچھی" یا "قابل قبول" کھیپ کی مسترد ہونے کا احتمال، جس کو ہم α سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ خریدار چاہے گا کہ "خراب" یا "نا قابل قبول" کھیپ کے قبول ہونے کا احتمال، جس کو ہم β سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ دونوں اس پر اتفاق کرتے ہیں کہ جس کھیپ کے لئے θ کی قیمت ایک مخصوص عدد θ_0

جدول 24.13: پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ کا تعلق

معائنہ نمونہ	پرکھ قیاس
سطح قابل قبول معیار $\theta = \theta_0$	قیاس $\theta = \theta_0$
سطح قابل مسترد معیار $\theta = \theta_1$	متبادل $\theta = \theta_1$
عیب دار کی قابل قبول تعداد c	فاصل قیمت c
$\theta \leq \theta_0$ کھیپ مسترد ہونے کا احتمال α (خطر پیداکار)	قسم اول غلطی کا احتمال α (معنی خیز سطح)
$\theta \geq \theta_1$ کھیپ قبول ہونے کا احتمال β (خطر خریدار)	قسم دوم غلطی کا احتمال β

سے تجاوز نہ کرے تب کھیپ "قابل قبول" ہو گا جبکہ وہ کھیپ جس کے لئے θ کی قیمت ایک مخصوص عدد θ_1 کے برابر یا اس سے زیادہ ہو تب کھیپ "نا قابل قبول" ہو گا۔ تب وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \leq \theta_0$ ہو کے مسترد ہونے کا احتمال α ہو گا جس کو **خطر پیداکار**[181] کہتے ہیں۔ یہ قیاس کی پرکھ کی قسم اول غلطی کے مترادف ہے (حصہ 24.15)۔ وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \geq \theta_1$ ہو کے قبول ہونے کا احتمال β ہو گا جس کو **خطر خریدار**[182] کہتے ہیں۔ یہ حصہ 24.15 میں قسم دوم غلطی کے مترادف ہے۔ شکل میں ان کی وضاحت کی گئی ہے۔ θ_0 کو **سطح قابل قبول معیار**[183] اور θ_1 کو **سطح قابل مسترد معیار**[184] کہتے ہیں جبکہ کھیپ $\theta_0 < \theta < \theta_1$ کو **لا تعلق کھیپ**[185] کہتے ہیں۔

شکل سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $(\theta_0, 1-\alpha)$ اور نقطہ (θ_1, β) منحنی خاصیت کارکردگی پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ بڑی کھیپ کے لئے ہم θ_0 ، $\theta_1 (> \theta_0)$ ، α ، β منتخب کرتے ہوئے n اور c یوں تعین کر سکتے ہیں کہ منحنی خاصیت کارکردگی ان نقطوں کے قریب سے گزرتی ہو۔ متعین α ، β ، θ_0 اور θ_1 کے لئے نمونی منصوبے شائع کیے گئے ہیں۔

پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ میں قریبی تعلق پایا جاتا ہے جس کو جدول 24.13 میں دکھایا گیا ہے۔

نمونی عمل ازخود خریدار کو مکمل تحفظ فراہم نہیں کرتا ہے۔ درحقیقت اگر پیداکار کو اجازت ہو کہ وہ خراب کھیپ کو دوبارہ قبول ہونے کے لئے پیش کرے تب آخر کار خراب کھیپ بھی قبول ہو جائیں گے۔ خریدار کو اس صورت حال سے بچانے کی خاطر پیداکار اس بات سے اتفاق کر سکتا ہے کہ مسترد کھیپ کو **سدھارا**[186] جائے گا یعنی اس کا

producer's risk[181]
consumer's risk[182]
acceptable quality level[183]
rejectable quality level[184]
indifferent lot[185]
rectified[186]

100 % معائنہ کرتے ہوئے ہر جزو کو پرکھا جائے گا اور کھیپ میں تمام عیب دار اشیاء کی جگہ بے عیب اشیاء رکھے جائیں گے[187]۔ فرض کریں ایک کارخانہ $100\theta\%$ عیب دار اشیاء بناتا ہے اور مسترد کھیپ کو سدھارا جاتا ہے۔ تب N جسامت کے K کھیپ میں KN اشیاء ہوں گے جن میں سے $KN\theta$ عیب دار ہوں گے۔ کھیپوں میں سے $KP(A;\theta)$ قبول کیے جائیں گے؛ ان میں کل $KPN\theta$ عیب دار اجزاء ہوں گے۔ مسترد اور سدھارے گئے کھیپ میں کوئی عیب دار جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں سدھارنے کے بعد K کھیپ میں عیب دار کا تناسب $\frac{KPN\theta}{KN} = \theta P(A;\theta)$ ہو گا۔ θ کی اس تفاعل کو **اوسط خارجی معیار**[188] کہتے ہیں جس کو $\mathrm{AOQ}(\theta)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، یعنی:

$$\mathrm{AOQ}(\theta) = \theta P(A;\theta) \tag{24.154}$$

اگر نمونی منصوبہ دیا گیا ہو تب یہ تفاعل اور منحنی اوسط خارجی معیار کو $P(A;\theta)$ اور منحنی خاصیت کارکردگی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کی مثال شکل میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ $\mathrm{AOQ}(0) = 0$ ہو گا۔ چونکہ $P(A;1) = 0$ ہے لہٰذا $\mathrm{AOQ}(1) = 0$ ہو گا۔ اس سے اور $\mathrm{AOQ}(\theta) \geq 0$ سے ہم یہ نتیجہ حاصل کرتے ہیں کہ کسی $\theta = \theta^*$ پر اس تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جس کی مطابقتی قیمت $\mathrm{AOQ}(\theta^*)$ کو **اوسط خارجی حد معیار**[189] کہتے ہیں۔ یہ خراب ترین معیار ہے جو سدھارنے کے عمل کے ساتھ قابل قبول ہو گا۔

کئی نمونی منصوبے ایک ہی اوسط خارجی حد معیار دے سکتے ہیں۔ یوں اگر خریدار صرف اوسط خارجی حد معیار میں دلچسپ ہو تب پیداکار وہ نمونی منصوبہ منتخب کر سکتا ہے جس میں نمونے کا حصول کم سے کم ہو، یعنی نمونی معائنے کی تعداد کم سے کم ہو۔ یہ تعداد درج ذیل ہے

$$nP(A;\theta) + N(1 - P(A;\theta))$$

جہاں پہلا جزو قبول شدہ کھیپوں اور دوسرا جزو مسترد اور سدھارے گئے کھیپ کے مطابقتی اجزاء ہیں؛ حقیقت میں سدھارنے کے عمل میں کھیپ کے تمام N اجزاء کو پرکھا جاتا ہے، اور کھیپ مسترد ہونے کا احتمال $1 - P(A;\theta)$ ہے۔

ہم بتانا چاہتے ہیں کہ معائنے کے عمل کو **دوہرا نمونی منصوبہ**[190] استعمال کرتے ہوئے کم کیا جا سکتا ہے جس میں جسامت n کے نمونے کو جسامت n_1 اور n_2 (جہاں $n_1 + n_2 = n$) کے دو نمونوں میں تقسیم کیا جاتا

[187] ظاہر ہے کہ اگر معائنہ سے اشیاء تباہ ہوتے ہوں یا ہر جزو کا معائنہ کرنا اشیاء کی قیمت سے زیادہ مہنگا پڑتا ہو تب ہر جزو کے معائنے کی بجائے مسترد کھیپ کو کم دام فروخت کیا جائے گا۔
[188] average outgoing quality
[189] average outgoing quality limit
[190] double sampling plan

ہے۔اگر کھیپ بہت اچھی یا بہت خراب ہو تب کھیپ قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ ایک نمونے کو دیکھ کر کیا جا سکتا ہے چونکہ توقع کی جا سکتی ہے کہ دوسرے نمونے کا معیار درمیانہ ہو گا۔ہم دوہرا نمونی منصوبہ اور سدھارنے کا عمل استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قسم کے منصوبے استعمال کر سکتے ہیں جہاں نمونوں میں عیب دار کی تعداد بالترتیب x_1 اور x_2 ہے۔

- اگر $x_1 \le c_1$ ہو، کھیپ قبول کریں۔اگر $x_1 > c_2$ ہو، کھیپ مسترد کریں۔
- اگر $c_1 < x_1 \le c_2$ ہو، دوسرا نمونہ بھی استعمال کریں۔اگر $x_1 + x_2 \le c_2$ ہو، کھیپ قبول کریں۔اگر $x_1 + x_2 > c_2$ ہو، کھیپ مسترد کریں۔

سوالات

سوال 24.235: ایک صارف قلم پرکھنے کے لئے واحد نمونی منصوبہ استعمال کرتا ہے جس میں نمونی جسامت 40 اور تعداد قبولیت 1 ہے۔ضمیمہ ج کی جدول ج.2 استعمال کرتے ہوئے 0.25 %, 0.5 %, 1 %, 2 %, 5 %, 10 % عیب دار کھیپ کے قبول ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ منحنی OC کو ترسیم کریں۔
جواب: $0.9953, 0.9825, 0.9384, \cdots$

سوال 24.236: حسابی کیلکولیٹر کی بیٹریوں کی بڑی کھیپوں کو مذکورہ ذیل منصوبہ کے تحت پرکھا جاتا ہے۔کھیپ سے بلا منصوبہ 30 بیٹریاں منتخب کر کے پرکھی جاتی ہیں۔اگر اس نمونہ میں زیادہ سے زیادہ 1 عیب دار بیٹری ہو تب اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے ورنہ اس کر مسترد کیا جاتا ہے۔پوئسن تقسیم استعمال کرتے ہوئے اس منصوبے کی OC منحنی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.237: سوال 24.236 میں AOQ منحنی ترسیم کریں۔سدھارنے کے عمل کے ساتھ اوسط خارجی حد معیار تعین کریں۔
جواب: $\theta = 0.054$ پر 0.028

سوال 24.238: $n = 50$ اور $c = 0$ کی صورت میں سوال 24.236 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.239: مثال 24.28 میں بیش ہندسی تقسیم کی تخمینی ثنائی تقسیم تلاش کرتے ہوئے تخمینی اور اصل قیمت کا موازنہ کریں۔
جواب: $(1-\theta)^2$

سوال 24.240: مثال 24.28 میں سطح قابل قبول معیار 0.1 اور سطح قابل مسترد معیار 0.6 ہونے کی صورت میں خطی پیداکار اور خطر خریدار کیا ہوں گے؟

سوال 24.241: پیچوں کی کھیپ میں θ تناسب عیب دار ہیں۔اس کھیپ سے 5 کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے۔اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے اگر نمونہ میں (الف) کوئی بھی عیب دار نہ ہو، (ب) زیادہ سے زیادہ ایک عیب دار ہو۔ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے OC منحنیات تلاش کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں اور ان کا آپس میں موازنہ کریں۔
جواب: $(1-\theta)^5, (1-\theta)^5+5\theta(1-\theta)^4$

سوال 24.242: برقی فتیلہ کی کھیپ سے 3 کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے۔اگر نمونہ میں ایک سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اس نمونی منصوبہ پر تنقید کریں۔بالخصوص $50\,\%$ عیب دار کی کھیپ قبول ہونے کا احتمال حاصل کریں۔ (ثنائی تقسیم استعمال کریں۔)

سوال 24.243: $c=0$ اور n کی بڑھتی قیمت (مثلاً $n=2,3,4,\cdots$) کی نمونی منصوبوں کا موازنہ کریں اور ان کو ترسیم کریں۔ (ثنائی تقسیم استعمال کریں۔)
جواب: $P(A;\theta)=(1-\theta)^n$

سوال 24.244: $c=1$ لیتے ہوئے سوال 24.243 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.245: OC منحنی میں اچھی معیار اور خراب معیار کو علیحدہ کرنے کا انتصابی حصہ کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟
جواب: چونکہ n متناہی ہے۔

سوال 24.246: $n=5$ اور $c=10$ لیتے ہوئے بڑی کھیپ کے لئے واحد نمونی منصوبہ کے OC اور AOQ منحنیات ترسیم کریں۔

سوال 24.247: خطر خریدار $5\,\%$ کے لئے سوال 24.246 کی منحنی سے θ_0 تلاش کریں۔ خطر پیداکار $10\,\%$ کے لئے سوال 24.246 کی منحنی سے θ_1 تلاش کریں۔
جواب: $\theta_0\approx 0.01, \theta_1\approx 0.37$

سوال 24.248: $n=4$ اور $c=1$ لیتے ہوئے سوال 24.246 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.249: ہم گھڑیوں کی بڑی کھیپوں سے 100 جسامت کے نمونے لیتے ہیں۔ہم چاہتے ہیں کہ سطح قابل قبول معیار 5 % اور خطر پیداکار 2 % ہو۔ ہمیں تعداد قبولیت c کی کیا قیمت منتخب کرنی ہو گی؟ (عمومی تقسیم استعمال کریں۔)
جواب: 9

سوال 24.250: اگر سطح قابل مسترد معیار 12 % ہو تب سوال 24.249 میں خطر خریدار کیا ہو گا؟

سوال 24.251: $n = 5$ اور $c = 0$ کی صورت میں سطح قابل قبول معیار $\theta_0 = 1\,\%$ اور سطح قابل مسترد معیار $\theta_1 = 15\,\%$ فرض کرتے ہوئے واحد نمونی منصوبہ میں خطر تلاش کریں۔
جواب: $\alpha = 5\,\%, \beta = 44\,\%$

سوال 24.252: $n = 5$ اور $c = 0$ لیتے ہوئے بڑی کھیپ کے لئے واحد نمونی منصوبہ استعمال کرتے ہوئے OC منحنی اور AOQ منحنی تلاش کرتے ہوئے ترسیم کریں۔ اوسط خارجی سطح معیار بھی تلاش کریں۔

24.18 عمدگی موافقت

ہم نمونہ $x_1, \dots, x_n$ استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھنا چاہتے ہیں کہ جس آبادی سے نمونہ لیا گیا ہو اس کا تفاعل تقسیم $F(x)$ ہے۔ظاہر ہے کہ نمونے کا تفاعل تقسیم $\tilde{F}(x)$ اصل تفاعل تقسیم $F(x)$ کا تخمین ہو گا اور اگر یہ $F(x)$ کی "اچھی تخمین" دیتا ہو تب ہم اس قیاس کو نامنظور نہیں کریں گے کہ تفاعل $F(x)$ اس آبادی کا تفاعل تقسیم ہے۔اگر $\tilde{F}(x)$ تفاعل $F(x)$ سے بہت زیادہ انحراف کرتا ہو تب ہم اس قیاس کو نامنظور کریں گے۔

اس طرح فیصلہ کرنے کے لئے ضروری ہے ہم جانتے ہوں کہ قیاس درست ہونے کی صورت میں $F(x)$ سے $\tilde{F}(x)$ کتنا انحراف کر سکتا ہے۔اس خاطر ہم ایک مقدار متعارف کرتے ہیں جو $F(x)$ سے $\tilde{F}(x)$ کا انحراف ناپتا ہے اور ہمیں اس مفروضہ کے تحت، کہ قیاس درست ہے، اس مقدار کا تفاعل احتمال درکار ہو گا۔آئیں اس کو حاصل کرتے ہیں۔ ہم عدد c یوں تعین کرتے ہیں کہ، قیاس درست ہونے کی صورت میں، c سے زائد انحراف کا ایک چھوٹا پیشگی مختص احتمال ہو۔ بہر حال، اگر c سے زیادہ انحراف پایا جاتا ہو تب ہمیں قیاس درست ہونے پر

شک و شبہ ہو گا اور ہم قیاس کو نا منظور کریں گے۔اس کے برعکس اگر انحراف c سے تجاوز نہ کرتا ہو، تا کہ تفاعل $\tilde{F}(x)$ تفاعل $F(x)$ کی اچھی تخمین ہو، ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ظاہر ہے کہ قیاس نا منظور نہ کرنے کی صورت میں ہمارے پاس قیاس نا منظور کرنے کا ناکافی ثبوت ہے اور یہ اس امکان کو خارج نہیں کرتی ہے کہ پرکھ میں دیگر تفاعل بھی نا منظور نہیں ہوں گے۔یوں صورت حال کافی حد تک حصہ 24.15 کی طرح ہے۔

جدول 24.14 میں اس طرز کی پرکھ دکھائی گئی ہے[191]۔اس پرکھ کا جواز کچھ یوں ہے کہ اگر قیاس درست ہو، تب χ_0^2 اس بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہو گی جس کی تفاعل تقسیم $K-1$ درجہ آزادی (یا $K-r-1$ درجہ آزادی اگر r مقدار معلوم کا اندازہ لگایا گیا ہو) کی مربع خا تقسیم تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے جیسے جیسے n لامتناہی تک پہنچے کی کوشش کرتا ہے۔کم سے کم 5 نمونی قیمتوں کا جدول 24.14 کے ہر وقفہ میں پائے جانے کی شرط کی وجہ متناہی بلا منصوبہ n کی صورت میں اس بلا منصوبہ متغیر کی تقسیم کا صرف تخمینی طور پر مربع خا تقسیم ہونا ہے۔ (اس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔) اگر نمونہ اتنا چھوٹا ہو کہ اس شرط کو مطمئن کرنا ممکن نہ ہو تب پرکھ سے حاصل نتیجہ کو بہت احتیاط کے ساتھ استعمال کریں۔

مثال 24.30: عمومیت کا پرکھ

کیا صفحہ 1533 پر جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے لیا گیا ہے؟

حل: μ اور σ^2 کی زیادہ سے زیادہ امکانی اندازے $\hat{\mu} = \bar{x} = 364.7$ اور $\tilde{\sigma}^2 = 712.9$ ہیں۔جدول 24.15 میں کیا گیا حساب $\chi_0^2 = 2.790$ دیتا ہے۔ہم $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔چونکہ $K = 10$ ہے اور ہم مقدار معلوم کا اندازہ $r = 2$ لگاتے ہیں، ہم $K - r - 1 = 7$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول ج.7 سے $P(\chi^2 \le c) = 95\,\%$ کا حل $c = 14.07$ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $\chi^2 < c$ ہے لہٰذا ہم آبادی کا عمومی ہونے کا قیاس نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 24.253: تین مشینوں میں سے ہر ایک مشین پر بنائے جانے والے کیلوں سے 200 جسامت کے نمونے حاصل کیے گئے۔ ان نمونوں میں عیب دار کیلوں کی تعداد $7, 8, 12$ تھی۔کیا یہ فرق معنی خیز ہے؟ ($\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)

[191] اس پرکھ کو رونلڈ ایلمر فشر نے متعارف کیا۔

جدول 24.14: جس آبادی سے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ حاصل کیا گیا ہو اس آبادی کا تفاعل تقسیم $F(x)$ ہونے کی قیاس کا مربع خا پرکھ

پہلا قدم: x محور کو K وقفوں $I_1, I_2, \cdots, I_K$ میں یوں تقسیم کریں کہ ہر وقفہ میں دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کے کم سے کم 5 قیمتیں پائی جاتی ہوں۔ وقفہ I_j میں نمونی قیمتوں کی شمار b_j تعین کریں جہاں $j = 1, \cdots, K$ ہے۔ اگر نمونی قیمت دو وقفوں کی مشترک سرحد پر پائی جاتی ہو تب دونوں مطابقتی b_j میں 0.5 جمع کریں۔

دوسرا قدم: $F(x)$ استعمال کرتے ہوئے زیر غور بلا منصوبہ متغیر X کا وقفہ I_j میں کوئی بھی قیمت اختیار کرنے کا احتمال p_j بذریعہ حساب تلاش کریں، جہاں $j = 1, \cdots, K$ ہے۔ درج ذیل بذریعہ حساب حاصل کریں (جو قیاس درست ہونے کی صورت میں وقفہ I_j میں نمونی قیمتوں کا نظیری متوقع شمار ہے)۔

$$e_j = np_j$$

تیسرا قدم: درج ذیل انحراف کا حساب کریں۔

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} \tag{24.155}$$

چوتھا قدم: معنی خیز سطح ($5\%, 1\%$، وغیرہ) منتخب کریں۔

پانچواں قدم: درج ذیل مساوات کا حل c، ضمیمہ ج کی جدول 7.ج میں $K-1$ درجہ آزادی لیتے ہوئے، تلاش کریں۔

$$P(\chi^2 \le c) = 1 - \alpha$$

اگر $F(x)$ کے r مقدار معلوم ہمیں معلوم نہ ہوں اور ان کی زیادہ سے زیادہ امکانی اندازے (حصہ 24.13) استعمال کیے جا رہے ہوں تب ($K-1$ کی بجائے) $K-r-1$ درجہ آزادی استعمال کریں۔ اگر $\chi_0^2 \le c$ ہو، قیاس کو نامنظور نہ کریں۔ اگر $\chi_0^2 > c$ ہو، قیاس کو نامنظور کریں۔

جدول 24.15: حساب برائے مثال 24.30

x_j	$\frac{x_j-364.7}{26.7}$	$\Phi\left(\frac{x_j-364.7}{26.7}\right)$	$e_j = 100p_j$	b_j	اجزاء مساوات 155.24
$-\infty\cdots325$	$-\infty\cdots-1.49$	$0.0000\cdots0.0681$	6.81	6	0.096
$325\cdots335$	$-1.49\cdots-1.11$	$0.0681\cdots0.1335$	6.54	6	0.045
$335\cdots345$	$-1.11\cdots-0.74$	$0.1335\cdots0.2296$	9.61	11	0.201
$345\cdots355$	$-0.74\cdots-0.36$	$0.2296\cdots0.3594$	12.98	14	0.080
$355\cdots365$	$-0.36\ldots\ 0.00$	$0.3594\cdots0.5000$	14.06	16	0.268
$365\cdots375$	$0.00\cdots\ 0.39$	$0.5000\cdots0.6517$	15.17	15	0.002
$375\cdots385$	$0.39\cdots\ 0.76$	$0.6517\cdots0.7764$	12.47	8	1.602
$385\cdots395$	$0.76\cdots\ 1.13$	$0.7764\cdots0.8708$	9.44	10	0.033
$395\cdots405$	$1.13\cdots\ 1.51$	$0.8708\cdots0.9345$	6.37	8	0.417
$405\cdots\infty$	$1.51\cdots\ \infty$	$0.9345\cdots1.0000$	6.55	6	0.046
					$\chi_0^2 = 2.790$

جواب: تینوں مشینوں میں عیب دار کیلوں کی تعداد ایک جیسا کو قیاس H_0 لے کر $p = \frac{27}{600} = 4.5\,\%$ اندازہ حاصل ہو گا۔یوں $\chi_0^2 = \frac{1}{9}(2^2+1^2+3^2) = 1.56 < 5.99$ ہو گا ($\alpha = 5\,\%$ ، اور درجہ آزادی 2 ہے)۔ نتیجہ: نہیں

سوال 24.254: دوپہر ایک بجے سے دو بجے تک ایک دکان پر متواتر پانچ دنوں میں بالترتیب $92, 60, 66, 62, 90$ صارفین آئے۔اس قیاس کو پرکھیں کہ ان دنوں میں صارفین کی تعداد ایک جیسی ہے۔($\alpha = 5\,\%$ لیں۔)

سوال 24.255: گرگر یوہان مینڈل کے ایک کلاسیکی تجربہ کے نتیجہ میں 355 پیلے مٹر اور 123 سبز مٹر کے دانے حاصل ہوئے۔کیا یہ نظریہ مینڈل کے مطابق ہے جس کے تحت نسبت پیلے مٹر:سبز مٹر کی قیمت $3 : 1$ ہونی چاہیے۔

جواب: $K = 2, n = 355+123 = 478, e_1 = 478\cdot\frac{3}{4} = 358.5, e_2 = 478\cdot\frac{1}{4} = 119.5,$ $\chi_0^2 = \frac{(355-358.5)^2}{358.5} + \frac{(123.0-119.5)^2}{119.5} = 0.137 < c,$ ہے جہاں $c = 3.84$ (درجہ آزادی 1 ، $\alpha = 5\,\%$) ہے۔لہٰذا ہم وثوق سے کہتے ہیں کہ نظری قیمتوں سے انحراف محض بلا منصوبہ اثرات ہیں۔

سوال 24.256: ایک پیداکار دعویٰ کرتا ہے کہ عمل پیداوار میں صرف $2.5\,\%$ استرے تیز دھار نہیں ہوتے ہیں۔اس قیاس کو متبادل: $2.5\,\%$ سے زیادہ تعداد تعداد تیز دھار نہیں ہوتے، پرکھیں۔ 400 استروں کا نمونہ استعمال کریں جن میں 17 تیز دھار نہیں ہیں۔($\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)

سوال 24.257: بلا منصوبہ اعداد کی جدول میں طاق اور جفت اعداد کی تعداد تقریباً ایک جیسی ہونی چاہیے۔ضمیمہ ج کی جدول 5.ج کے صف 0 میں دیے گئے 50 اعداد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں۔($\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)
جواب: 20 طاق اور 30 جفت اعداد، $K = 2$ جماعتیں، $\chi_0^2 = 2 < 3.84$ لہٰذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.258: ایک سکہ کو 50 بار اچھالا جاتا ہے۔خط کی کم سے کم تعداد (25 سے زیادہ) کیا ہو گی جس پر سکہ منصفانہ ہونے کی قیاس کو 5 % کی سطح پر نا منظور کیا جائے گا۔

سوال 24.259: ایک معیاری طریقہ پر پیدا کردہ لوہے کی ایک مخصوص قسم کی سلاخوں میں سے 25 % سلاخ 900 kg کی بوجھ ڈالنے سے ٹوٹ جاتے ہیں۔ایک نئے طریقہ سے پیدا 80 سلاخوں پر اتنا ہی بوجھ ڈالنے سے 27 سلاخ ٹوٹ جاتے ہیں۔ کیا نیے طریقہ سے پیدا سلاخوں کے ٹوٹ جانے کی شرح وہی ہے؟
جواب: $\alpha = 5\,\%$ جہاں $\chi_0^2 = \frac{49}{20} + \frac{49}{60} = 3.27 < c = 3.84$ اور درجہ آزادی 1 ہے۔نتیجہ: جی ہاں۔

سوال 24.260: موٹروے کی تین لینوں میں ایک مخصوص دورانیہ کے دوران، ایک ہی رخ چلتی گاڑیوں کی تعداد بالترتیب 910 ، 850 اور 720 گاڑیاں گنی گئیں۔کیا ہم وثوق کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تینوں لینوں پر سے ایک جتنی گاڑیاں گزریں؟

سوال 24.261: ایک کلاسیکی تجربہ میں پانسہ 20000 مرتبہ پھینکا گیا جس میں $1, \cdots, 6$ ہندسوں کی حتمی تعدد $3407, 3631, 3176, 2916, 3448, 3422$ حاصل ہوئی۔ $\alpha = 5\,\%$ استعمال کرتے ہوئے پانسہ کے منصفانہ ہونے کی قیاس کو پرکھیں۔
جواب: $K = 6, \chi_0^2 = 94.19, c = 11.07$ قیاس نا منظور کیا جاتا ہے۔

سوال 24.262: کیا صفحہ 1538 پر جدول 24.4 میں دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے لیا گیا؟
جواب: $\bar{x} = 99.4, \tilde{\sigma} = 15.8, K = 5$ (حدود $-\infty, 95, 95, 105, 115, \infty$ ہیں۔) $\chi_0^2 = 0.7 <$ $c = 5.99$ $(\alpha = 5\,\%)$ قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔

سوال 24.263: درج ذیل نمونہ جس آبادی سے لیا گیا اس آبادی کو عمومیت کے لئے پرکھیں جہاں 0.3 mm موٹی فولادی چادروں کی تنشی مضبوطی x [$\mathrm{kg\,mm^{-2}}$] ہے۔

x	حتمی تعدد	x	حتمی تعدد
< 42.0	15	$43.5 - 44.0$	22.5
$42.0 - 42.5$	11	$44.0 - 44.5$	19.5
$42.5 - 43.0$	15	$44.5 - 45.0$	12
$43.0 - 43.5$	14	> 45.0	19

سوال 24.264: درج ذیل مواد استعمال کرتے ہوئے آبادی کو پوئسن تقسیم کے لئے پرکھیں۔ 7.5 سیکنڈ میں الفا ذرات کی تعداد x اور $a(x)$ ان کی حتمی تعدد (=وقفوں کی تعداد جن میں ٹھیک x ذرے دیکھے گئے) ہے۔ یہ کلاسیکی تجربہ ارنسٹ ردرفورڈ اور ہانس گائیگر نے 1910 سرانجام دیا۔

x	$a(x)$	x	$a(x)$	x	$a(x)$
0	57	5	408	10	10
1	203	6	273	11	4
2	383	7	139	12	2
3	525	8	45	≥ 13	0
4	532	9	27		

جواب: آخری تینوں صفوں کو ایک ساتھ لیتے ہوئے $K - r - 1 = 7$ ہو گا جہاں $r = 1$ ہے چونکہ اوسط کا اندازہ حاصل کیا گیا ہے۔ $\chi_0^2 = 12.8 < c = 16.92$ ہے جہاں $\alpha = 5\,\%$ لیا گیا ہے۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.265: پوئسن تقسیم کی آبادی سے 1000 کاغذ لئے گئے۔ اس قیاس کو پرکھیں۔ درج ذیل ایک کاغذ پر دھبوں کی تعداد x ہے اور $a(x)$ حتمی تعدد (x دھبوں والے کاغذوں کی تعداد) ہے۔

x	0	1	2	3	4	≥ 5
$a(x)$	419	352	154	56	19	0

سوال 24.266: کیا یہ ممکن ہے کہ ہم $\chi_0^2 = 0$ حاصل کریں اگرچہ نمونی تفاعل تقسیم پرکھے جانے والے تفاعل تقسیم $F(x)$ سے مختلف ہو؟

24.19 غیر مقدار معلوم پرکھ

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

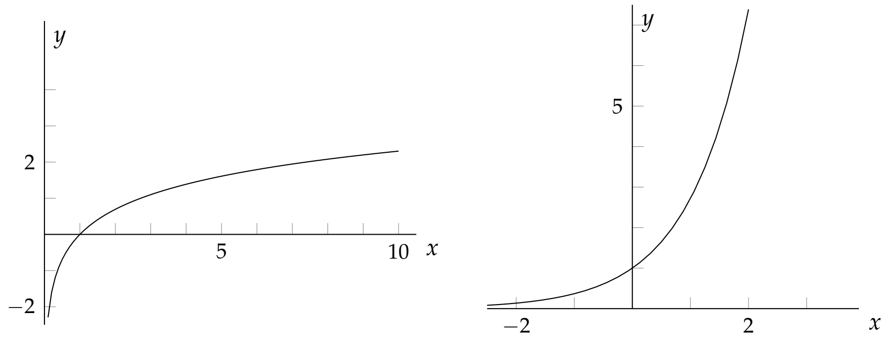
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

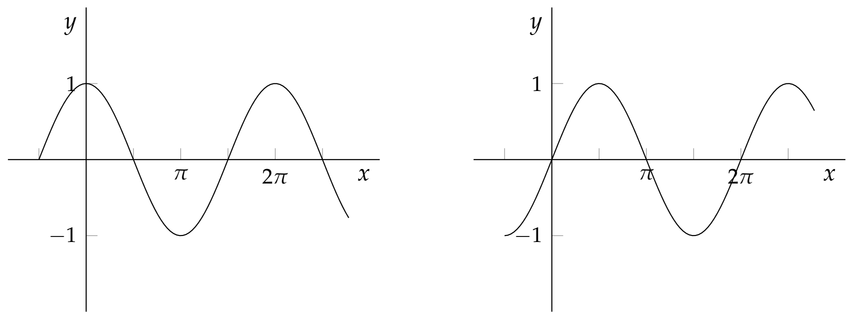
$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب)قدرتی لوگارتھم $\ln x$ (الف)قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



$\cos x$ (ب) $\sin x$ (الف)

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{-\log x}=10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

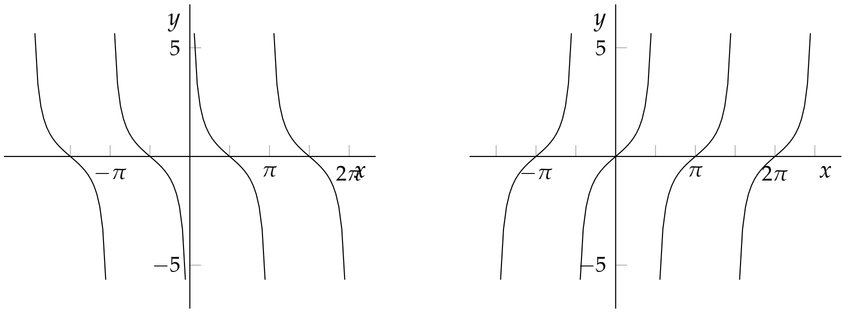
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



(ب) $\cot x$ (الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}\\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

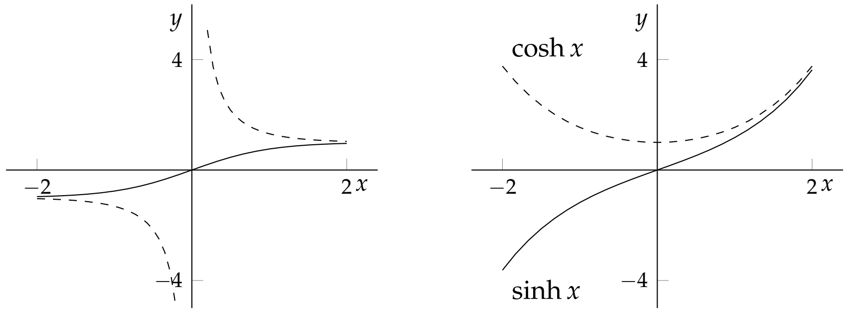
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y\\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{23.ب}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{24.ب}$$

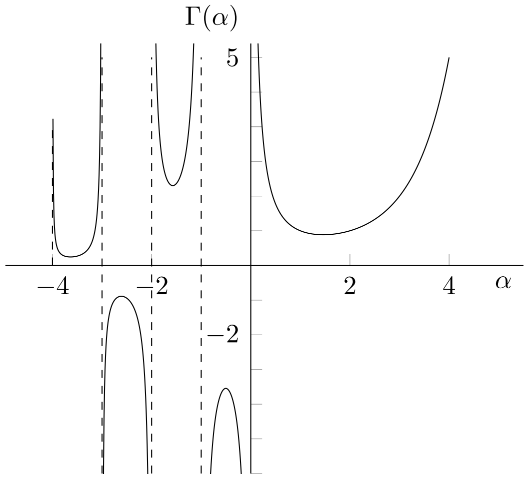
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{25.ب}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\qquad(\alpha\neq 0,-1,\cdots)\tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha=0,-1,-2,\cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)\approx\sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}\tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

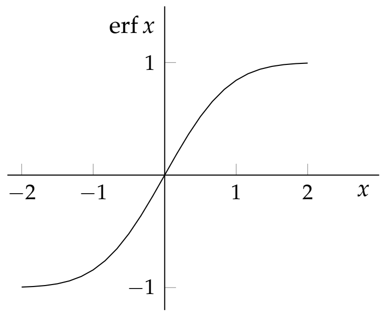
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

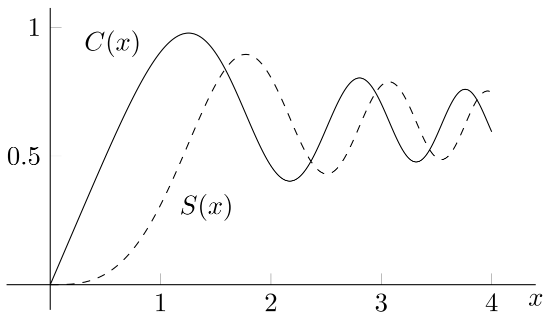
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{ب.37}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{ب.38}$$

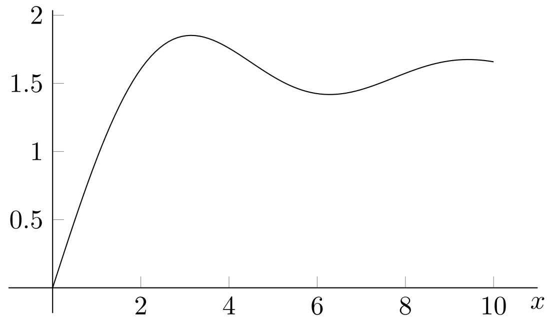
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.39}$$

$\text{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.40}$$

---
[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

ضمیمہ ج

جدول

جدول 1.ج: ثنائی تقسیم

جدول 2.ج: پوئسن تقسیم

جدول 3.ج: عمومی تقسیم

جدول 4.ج: عمومی تقسیم

جدول 5.ج: شبلا منصوبہ اعداد

جدول 6.ج: t تقسیم

جدول 7.ج: مربع خا تقسیم

جدول 8.ج: مربع ایف تقسیم