انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ix

1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات 1

1.1 نمونہ کشی 2

1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔ 14

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات 23

1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل 40

1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی 52

1.6 عمودی خطوط کی نسلیں 70

1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت 74

2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات 81

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 81

2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 98

2.3 تفرقی عامل 113

2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش 118

2.5 یولر کوشی مساوات 133

2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی 142

2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 151

2.8 جبری ارتعاش۔ گمک 162

2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک 169

2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی 173

2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 184

3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات 191
3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 191
3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 202
3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 211
3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 214

4 نظام تفرقی مساوات 223
4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 224
4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 233
4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی 247
4.3.1 خطی نظام 248
4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 252
4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام 269
4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 278
4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 287
4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام 295
4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب 296

5 طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل 305
5.1 ترکیب طاقتی تسلسل 306
5.2 لیژانڈر مساوات۔ لیژانڈر کثیر رکنی 321
5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس 339
5.3.1 عملی استعمال 344
5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل 358
5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل 373
5.6 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ 379
5.7 مسئلہ سٹیورم لیوویل 385
5.8 قائمیت لیژانڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل 393

6 لاپلاس تبادلہ 403
6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت 404
6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات 413
6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل 425
6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاو 446
6.5 الجھاو 464
6.6 لاپلاس بدل کی تکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 473
6.7 تفرقی مساوات کے نظام 481

6.8 لاپلاس بدل کے عمومی کلیے 489

7 خطی الجبرا: سمتیات 493
7.1 غیر سمتیات اور سمتیات 493
7.2 سمتیہ کے اجزاء 495
7.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب 501
7.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت 509
7.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) 515
7.6 اندرونی ضرب فضا 528
7.7 سمتی ضرب 530
7.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب 533
7.9 غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب 544

8 خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام 553
8.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب 554
8.2 قالبی ضرب 564
8.2.1 تبدیلی محل 570
8.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط 583
8.3.1 صف زینہ دار صورت 596
8.4 خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا 604
8.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی 618
8.6 دو درجی اور تین درجی مقطع قالب 624
8.7 مقطع۔ قاعدہ کریمر 627
8.8 معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط 643
8.9 سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ 658

9 خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب 675
9.1 امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول 676
9.2 امتیازی مسائل کے چند استعمال 686
9.3 تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب 694
9.4 امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجی صورت 701
9.5 مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں 715

10 سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل 727
10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان 727
10.2 سمتی علم الاحصاء 730
10.3 منحنی 736
10.4 لمبائی قوس 743
10.5 مماس، انحنا اور مروڑ 748
10.6 سمتی رفتار اور اسراع 753

10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ 760
10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان 767
10.9 تبادل محددی نظام اور تبادل ارکان سمتیات 779
10.10 سمتی میدان کی پھیلاو 785
10.11 سمتی تفاعل کی گردش 792

11 سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے 797
11.1 خطی تکمل 798

ا اضافی ثبوت 803

ب مفید معلومات 807
1.ب اعلی تفاعل کے مساوات 807

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 11

سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے

تکمل سے آپ بخوبی واقف ہیں جس کو سمتی تکملی علم الاحصاء[1] وسعت دیتا ہے۔یوں منحنی پر تکمل، جسے خطی تکمل[2] کہتے ہیں، سطح پر تکمل جسے سطحی تکمل[3] کہتے ہیں اور حجم پر تمکل جسے حجمی تکمل[4] کہتے ہیں، حاصل کیا جا سکتا ہے۔مزید ایک قسم کی تکمل کا دوسری قسم کی تکمل میں تبادلہ کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے بعض اوقات نسبتاً آسان تکمل حاصل ہوتا ہے۔یوں سطح میں مسئلہ گرین[5] کی مدد سے خطی تکمل کو دو درجی تکمل میں یا دو درجی تکمل کو خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔گاوسی مسئلہ ارتکاز[6] کی مدد سے حجمی تکمل کو سطحی تکمل یا سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔مسئلہ سٹوکس[7] کی مدد سے تین درجی تکمل کو خطی تکمل یا خطی تکمل کو تین درجی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

سمتی تکملی علم الاحصاء کا انجینئری، طبیعیات، ٹھوس میکانیات، سیالی میکانیات اور دیگر میدان میں اہم کردار پایا جاتا ہے۔

[1] vector calculus
[2] line integral
[3] surface integral
[4] volume integral
[5] Green's theorem
[6] Gauss's convergence theorem
[7] Stoke's theorem

شکل 11.1: سمت بند منحنی

11.1 خطی تکمل

درج ذیل قطعی تکمل

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1}$$

تفاعل $f(x)$ کا x محور پر $x = a$ تا $x = b$ ایک درجی تکمل ہے۔خطی تکمل سے مراد تفاعل، جسے متکمل[8] کہتے ہیں، کا فضا یا سطح میں منحنی C پر تکمل ہے۔

یوں C کو منحنی مقدار معلوم صورت (حصہ 10.3) میں لکھنا ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (a \le t \le b) \tag{11.2}$$

C کو تکمل کی راہ[9] کہتے ہیں۔شکل 11.1-الف میں راہ A سے ابتدا ہو کر B پر اختتام پذیر ہوتی ہے لہٰذا $A: \boldsymbol{r}(a)$ ابتدائی نقطہ اور $B: \boldsymbol{r}(b)$ اختتامی نقطہ ہو گا اور یوں C سمت بند منحنی ہو گی۔ A سے B جانب سمت جو بڑھتی t کو ظاہر کرتی ہے کو C کی مثبت دائری سمت یا مثبت سمت کہتے ہیں جس کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اب جیسا شکل 11.1-ب میں دکھایا گیا ہے، A اور B ہم مکانی ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں C بند راہ[10] کہلاتی ہے۔

اگر C کا مماس ہر نقطے پر انفرادی ہو جس کی سمت C پر چلنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہو تب C ہموار[11] کہلائے گی۔یاد رہے کہ مساوات 11.2 میں دیا گیا $\boldsymbol{r}(t)$ قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق $\boldsymbol{r}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری ہے جو C کے ہر نقطے پر غیر صفر سمتیہ ہے۔

[8] integrand
[9] path of integration
[10] closed path
[11] smooth

عمومی مفروضہ

اس کتاب میں فرض کیا جائے گا کہ خطی تکمل کی ہر راہ ٹکڑوں میں ہموار[12] ہے، یعنی کہ راہ کو محدود تعداد کی ہموار ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

خطی تکمل کی تعریف اور اس کا حصول

راہ $C : \boldsymbol{r}(t)$ پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ کی سمتی تکمل کی تعریف درج ذیل ہے

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) \, \mathrm{d}t \qquad (\boldsymbol{r}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}) \tag{11.3}$$

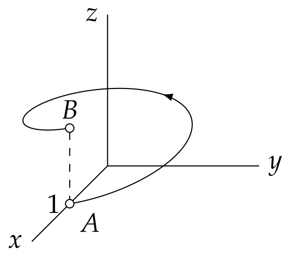
جہاں C کی مقدار معلوم صورت $\boldsymbol{r}(t)$ مساوات 11.2 دیتی ہے۔ضرب نقطہ (اندرونی ضرب) پر حصہ 7.5 میں غور کیا گیا ہے۔مساوات 11.3 کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہیں جہاں حصہ 10.4 کی طرح $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = [\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z]$ اور $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_C (F_1 \, \mathrm{d}x + F_2 \, \mathrm{d}y + F_3 \, \mathrm{d}z) \\ &= \int_C (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z') \, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{11.4}$$

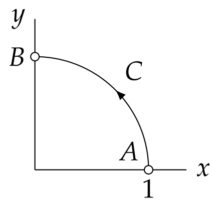
بند راہ کی صورت میں ہم $\int_C$ کی بجائے $\oint_C$ لکھتے ہیں۔یاد رہے کہ اندرونی ضرب کی بنا مساوات 11.4 کا متکمل غیر سمتی مقدار ہو گا۔درحقیقت $\frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}$ تفاعل $\boldsymbol{F}$ کا مماسی جزو ہے (کسی بھی سمت میں تفاعل کا جزو اندرونی ضرب کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے)۔

مساوات 11.4 قطعی تکمل ہے جہاں محور t کی مثبت سمت میں (یعنی بڑھتے t کی سمت میں) تفاعل کا متغیر t وقفہ $a \le t \le b$ پر حرکت کرتا ہے۔استمراری $\boldsymbol{F}$ اور ٹکڑوں میں ہموار C کی صورت میں، چونکہ $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ٹکڑوں میں ہموار ہو گا لہٰذا، یہ تکمل موجود ہو گا۔

---
[12] piecewise smooth



(ب) فضا میں خطی تکمل کی راہ (مثال 11.2)



(الف) سطح میں تکمل کی راہ (مثال 11.1)

شکل 11.2: سطح میں راہ اور فضا میں راہ۔

میکانیات میں راہ C پر چلتے ہوئے قوت $\boldsymbol{F}$ سے سر زد کام[13] مساوات 11.4 دیتی ہے۔یوں مساوات 11.4 کو **تکمل کام**[14] کہتے ہیں۔دیگر خطی تکمل پر اسی حصے میں غور کیا جائے گا۔

مثال 11.1: سطح میں خطی تکمل

سمتی تفاعل $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$ کا شکل 11.2-الف میں دکھائی گئی راہ پر، گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، $t = 0$ تا $t = \frac{\pi}{2}$ سمتی تکمل (مساوات 11.4) حاصل کریں۔

حل: راہ C کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

اس راہ پر سمتی تفاعل درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = x(t)\boldsymbol{i} + x(t)y(t)\boldsymbol{j} = \cos t\boldsymbol{i} + \cos t\sin t\boldsymbol{j}$$

مساوات 11.4 میں $\boldsymbol{r}'(t) = -\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j}$ پر کرتے ہوئے تکمل لے کر جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos t\boldsymbol{i} + \cos t\sin t\boldsymbol{j}] \cdot [-\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j}]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t\sin t + \cos^2 t\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\cos^2 t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

---

[13] work
[14] work integral

□

مثال 11.2: فضا میں راہ پر خطی تکمل ہو بہو سطح میں راہ پر خطی تکمل کی طرح حاصل کیا جاتا ہے

تفاعل $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ کا شکل 11.2-ب کی پیچ دار راہ پر ابتدائی نقطہ $(1,0,0)$ تا اختتامی نقطہ $(0,0,2\pi)$ خطی تکمل حاصل کریں۔

حل: پیچ دار راہ کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

ہے لہٰذا $\boldsymbol{r}' = -\sin t\boldsymbol{i} + \cos \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ہو گا۔اس راہ پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{F}$ میں x ، y ، z کی قیمتیں راہ سے ہٹ کر نہیں ہو سکتی ہیں لہٰذا راہ پر تفاعل درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = \sin t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + \cos t\boldsymbol{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

یوں مساوات 11.4 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}(t) = \int_0^{2\pi} [\sin t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + \cos t\boldsymbol{k}] \cdot [-\sin t\boldsymbol{i} + \cos \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}] \, \mathrm{d}t = -\pi$$

□

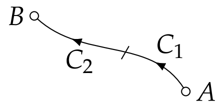
خطی تکمل کی خواص

قطعی تکمل کی خواص سے خطی تکمل کی درج ذیل مطابقتی خواص حاصل ہوتی ہیں

$$\int_C k\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = k \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (k \text{ مستقل}) \tag{11.5}$$

$$\int_C (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_C \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.6}$$

$$\int_C k\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \int_{C_1} k\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} k\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.7}$$



شکل 11.3: تکمل کی راہ کو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے (مساوات 11.7)۔

جہاں مساوات 11.7 میں راہ C کو دو ایسے ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں تقسیم کیا گیا ہے جن کی سمت بندی C کی سمت بندی کے عین مطابق ہے (شکل 11.3)۔مساوات 11.6 میں تینوں تکمل کی راہ کی سمت بندی ایک دوسرے جیسی ہے۔اگر سمت بندی الٹ کر دی جائے تب تکمل کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔البتہ مثبت سمت محفوظ رہنے کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

مسئلہ 11.1: سمت راہ محفوظ رکھتے مقدار معلوم تبادل
راہ کی ایسی تمام مقدار معلوم صورتیں جو C کی مثبت سمت محفوظ رکھتی ہوں کے خطی تکمل کی قیمت یکساں ہو گی۔

ثبوت:

□

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 142 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

$\square$

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل ب.1-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل ب.1-ب)

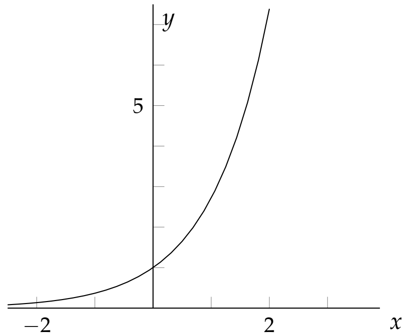
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

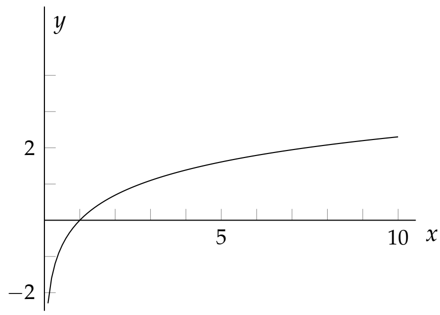
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

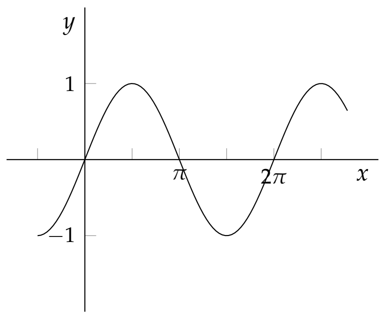


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

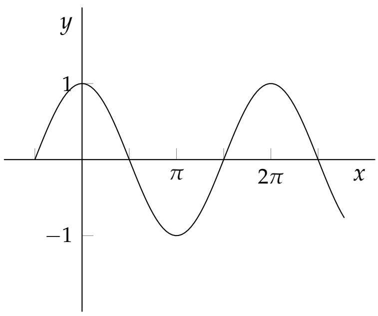


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$



(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad} \\ 1\,\text{radian} &= 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ \end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (5.ب)$$

$$
\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
\end{aligned} \tag{ب.6}
$$

$$
\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{ب.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)
\end{aligned} \tag{ب.8}
$$

$$
\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \tag{ب.9}
$$

$$
\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{ب.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]
\end{aligned} \tag{ب.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\
\cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\
\cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}
\end{aligned} \tag{ب.12}
$$

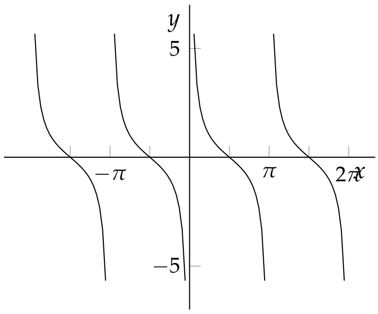
$$
A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A} \tag{ب.13}
$$

$$
A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B} \tag{ب.14}
$$

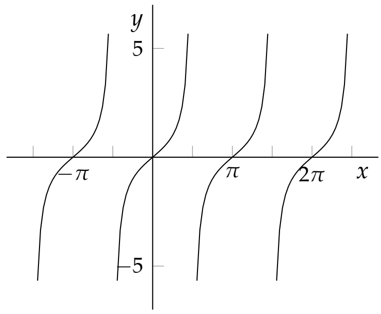
ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

$$
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x} \tag{ب.15}
$$

$$
\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \tag{ب.16}
$$



$\cot x$ (ب)



$\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$ (ب.17)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$ (ب.18)

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$ (ب.19)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$ (ب.20)

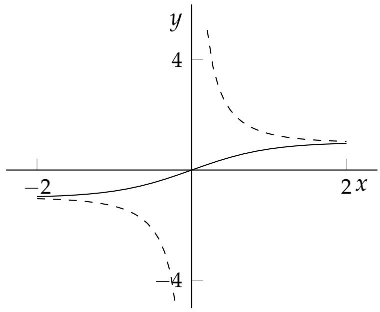
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$ (ب.21)

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y\\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned}$$ (ب.22)

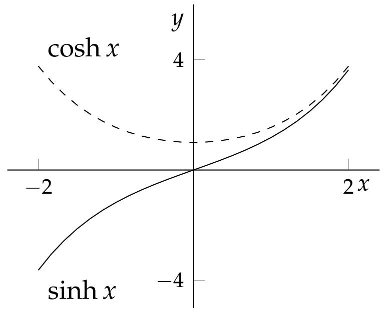
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$ (ب.23)

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$ (ب.24)



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

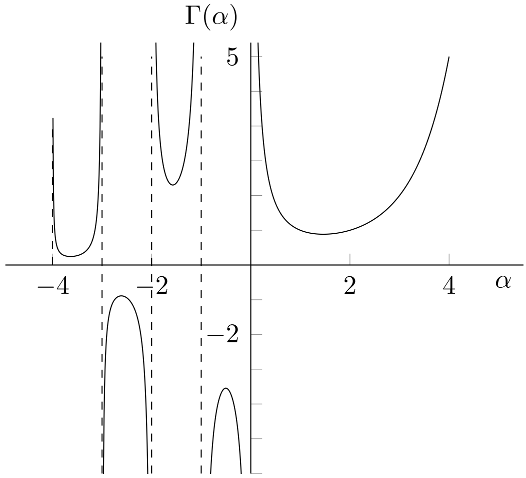
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

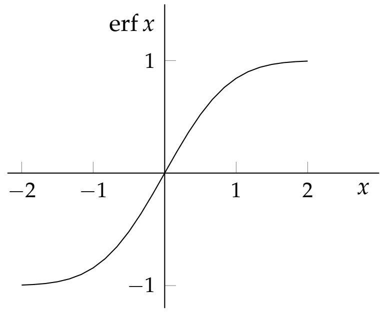
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.36}$$

$erf \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

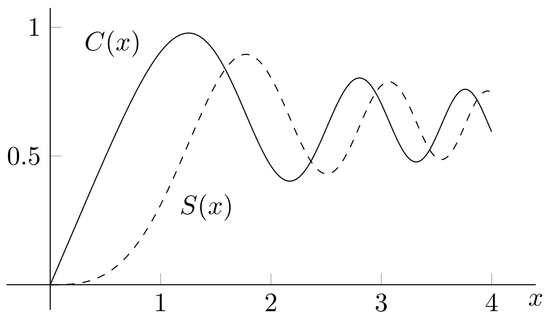
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{39.ب}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{40.ب}$$

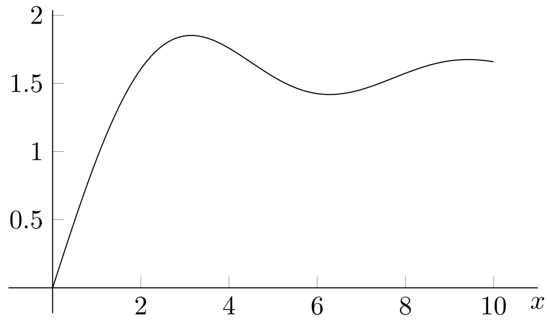
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{41.ب}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{42.ب}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$