انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 21

اعدادی تجزیہ

انجینئری حساب کا نتیجہ آخر کار اعدادی ہوتا ہے لہٰذا انجینئری طالب علم کے لئے بنیادی **اعدادی تراکیب**[1] جاننا ضروری ہیں جن کی مدد سے دیے گئے مواد سے اعدادی جوابات اخذ کرنا ممکن ہو۔

بعض اوقات نظریہ سے حاصل کردہ جوابات عملاً قابل استعمال نہیں ہوتے ہیں، مثلاً یک درجی خطی تفرقی مساوات کے حل کا تکملی کلیہ (حصہ 1.5)، خطی الجبرائی مساوات کے نظام کا مقطع کی مدد سے حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7)۔ کئی بار نظریہ صرف حل کی وجودیت کی یقین دہانی کرتا ہے لیکن اصل حل حاصل کرنے کے بارے میں کوئی مدد فراہم نہیں کرتا ہے۔

اعدادی تراکیب کی اہمیت کمپیوٹر کی ایجاد کی نظر ہے۔ ہم ان تراکیب کے نظریہ اور عملی استعمال پر غور کریں گے۔ **تجزیہ خلل**[2] پر بھی غور کیا جائے گا جو اعدادی تراکیب میں زیادہ اہمیت کے حامل ہے۔

[1] numerical methods
[2] error analysis

21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر

چونکہ اعدادی تراکیب میں متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے متناہی تعداد کے چال کے بعد جواب حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا یہ تراکیب متناہی چال[3] ہیں جو اصل (نا معلوم) بالکل درست حل کی تخمین[4] پیش کرتے ہیں ماسوائے ان چند صورتوں میں جب اصل جواب کافی سادہ ناطق عدد ہو اور ہم کوئی ایسا اعدادی ترکیب استعمال کریں جو یہی بالکل درست جواب فراہم کرتا ہو۔

اگر کسی مقدار کی اندازاً قیمت a^* ہو اور اس کی اصل قیمت a ہو تب فرق $\epsilon = a^* - a$ کو a^* کا حتمی خلل یا مختصراً a^* کا خلل[5] کہتے ہیں۔یوں

$$a^* = a + \epsilon \qquad \text{خلل} + \text{اصل قیمت} = \text{تخمین}$$

ہو گا۔ a^* کی اضافی خلل[6] ϵ_r کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{r} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خلل}}{\text{اصل قیمت}} \qquad (a \neq 0)$$

ظاہر ہے اگر $|\epsilon|$ کی قیمت $|a^*|$ کی قیمت سے بہت کم ہو تب $\epsilon_r \approx \frac{\epsilon}{a^*}$ ہو گا۔ہم ایک نئی مقدار $\gamma = a - a^* = -\epsilon$ متعارف کرتے ہیں جس کو ہم درستگی[7] [8] کہیں گے۔یوں

$$a = a^* + \gamma \qquad \text{درستگی} + \text{تخمین} = \text{اصل قیمت}$$

ہو گا۔آخر میں a^* کی حد خلل[9] سے مراد عدد β ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\left|a^* - a\right| \le \beta \qquad \implies \qquad |\epsilon| \le \beta$$

خلل کی تین قسمیں تجربی خلل، قطع چال خلل اور تعداد اعداد خلل ہیں۔تجربی خلل[10] سے مراد مواد میں خلل ہے (جو تجربی ناپ کی وجہ سے ہو سکتے ہیں)۔بالکل درست جواب تک پہنچنے کی خاطر متناہی (یا لامتناہی) تعداد کے حسابی

[3] finite processes
[4] approximation
[5] error
[6] relative error
[7] correction
[8] بعض اوقات خلل کی تعریف $\gamma = -\epsilon$ لی جاتی ہے۔آپ کسی ایک تعریف کو تسلیم کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ہم خلل کی تعریف ϵ لیں گے۔
[9] error bound
[10] Experimental errors

چال (قدم) درکار ہوں گے۔ حقیقت میں کسی خاص تعداد کے چال بعد حساب روک دیا جاتا ہے اور یوں **قطع چال خلل**[11] پیدا ہو گا۔ ہر قدم پر حساب کے دوران کمپیوٹر متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے کمتر ہندسہ سے کم قیمتوں کو رد کرتا ہے جس سے **تعداد ہندسہ خلل**[12] پیدا ہو گا جس پر ہم اب غور کرتے ہیں۔

اعشاری نظام میں ہر عدد کو متناہی یا لامتناہی تعداد کے اعشاری ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کمپیوٹر لامتناہی تعداد کے ہندسوں کو ذخیرہ نہیں کر سکتا ہے لہٰذا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی عدد کو متناہی تعداد کی ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ان اعداد کو دو طریقوں سے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ **مقررہ نقطہ**[13] نظام میں نقطہ اعشاریہ کے بعد مقررہ تعداد کے ہندسے پائے جاتے ہیں مثلاً 35.143 ، 5.000 ، 0.076 جبکہ **غیر مقررہ نقطہ**[14] نظام میں **ملحوظ ہندسوں**[15] کی تعداد متعین ہوتی ہے مثلاً 0.6723×10^2 ، -0.2354×10^{-4} اور -0.1000×10^1 جہاں ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔عدد c کے ملحوظ ہندسہ سے مراد c کا ہر ہندسہ ہے ماسوائے پہلا غیر صفر عدد کی بائیں جانب صفر جو اعشاریہ کا مقام تعین کرتا ہو۔ (یوں اس کے علاوہ ہر صفر بھی c کا ملحوظ ہندسہ ہو گا۔) مثال کے طور پر 5420 ، 1.340 اور 0.001460 میں سے ہر ایک میں چار ملحوظ ہندسے[16] ہیں۔

تعداد ہندسہ خلل کا قاعدہ اب بیان کرتے ہیں۔(k ملحوظ ہندسوں تک قطع کرنے کی تعریف بھی یہی ہے پس اس میں ہندسہ کی جگہ ملحوظ ہندسہ پر کریں۔)

$k+1$ واں ہندسہ اور اس کے بعد تمام ہندسوں کو رد کریں۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کی نصف سے کم ہو تب مقام k پر ہندسہ کو تبدیل نہ کریں ("گھٹانا")۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کی نصف سے زیادہ ہو تب تب مقام k کی ہندسے کے ساتھ 1 جمع کریں ("بڑھانا")۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کا نصف ہو تب اگر مقام k کا ہندسہ طاق ہو تب اس کو بڑھا کر جفت بنائیں۔(مثال کے طور پر 3.45 اور 3.55 کو اشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک قطع کرتے ہوئے بالترتیب 3.4 اور 3.6 حاصل ہو گا۔)

اس قاعدہ کا آخری حصہ یقینی بناتا ہے کہ عدد کا کمتر حصہ رد کرتے ہوئے اوسطاً برابر مرتبہ عدد بڑھایا اور گھٹایا جاتا ہے۔

---

[11] Truncation error

[12] rounding error

[13] fixed point

[14] floating point

[15] significant digits

[16] ایسا جدول جو k ملحوظ ہندسے دیتا ہو میں، جب تک کہا نا جائے کہ ایسا نہیں ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ دیا گیا عدد a^* ، بالکل درست قیمت a سے آخری ہندسے کی ∓ 0.5 اکائیاں مختلف ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $a = 1.1996$ ہو تب چار ملحوظ ہندسوں کا جدول $a^* = 1.200$ دے گا۔

اگر ہم 1.2535 کو 3 ، 2 اور 1 اشاریہ تک قطع کریں تب ہمیں بالترتیب 1.254 ، 1.25 اور 1.3 حاصل ہو گا لیکن، بغیر مزید معلومات کے، 1.25 کو ایک اشاریہ تک قطع کرنے سے ہمیں 1.2 ملتا ہے۔

تعداد ہندسہ خلل کی وجہ سے کوئی بھی حساب مکمل غلط ہو سکتا ہے۔ عموماً چال کی تعداد بڑھانے سے یہ خلل بڑھتا ہے۔ یوں حسابی پروگرام کو اس خلل کی نقطہ نظر سے دیکھنا ضروری ہو گا اور اس خلل کو کم سے کم کرنا لازم ہو گا۔

21.2 دہرانے سے مساوات کا حل

ہمیں عموماً مساوات

$$f(x)=0 \tag{21.1}$$

کے حل درکار ہوتے ہیں یعنی ایسے عدد X_0 کہ $f(X_0)$ صفر کے برابر ہو جہاں f دیا گیا تفاعل ہے۔ مثال کے طور پر $x^2-3x+2=0$ ، $x^3+x=1$ ، $\sin x=0.5x$ ، $\tan x=x$ ، $\cosh x=\sec x$ اور $\cosh x\cos x=-1$ کو مساوات 21.1 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں پہلے دو میں f کثیر رکنی ہے لہٰذا یہ دونوں الجبرائی مساوات[17] ہیں جن کے حل کو جذر[18] کہتے ہیں۔ باقی ماورائی مساوات[19] ہیں جن میں ماورائی تفاعل استعمال ہوئے ہیں۔ حقیقتاً صرف انتہائی سادہ صورتوں میں مکمل درست حل نکالنے والے کلیات موجود ہوں گے۔ عموماً ہم دہرانے کی ترکیب یا دیگر تراکیب سے اصل حل کا تخمینہ حاصل کریں گے۔

اعدادی دہرانے کے طریقہ میں ہم اختیاری x_0 منتخب کرتے ہوئے درج ذیل روپ کلیہ

$$x_{n+1}=g(x_n) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{21.2}$$

سے، بار بار حل کرتے ہوئے، ترتیب $x_0,x_1,x_2,\cdots$ حاصل کرتے ہیں جہاں g کسی ایسے وقفہ پر معین ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہو اور g کا حلقہ اسی وقفہ پر ہے۔ یوں ہم یک بعد دیگرے $x_1=g(x_0)$ ، $x_2=g(x_1)$ ، $x_3=g(x_2)$ ، $\cdots$ حاصل کرتے ہیں۔

اس حصہ میں دائرہ کار اور حلقہ $g(x)$ دونوں حقیقی لکیر پر ہوں گے۔ زیادہ عمومی معمہ میں x یا g اور یا دونوں سمتیات ہو سکتے ہیں۔

---

[17] algebraic equations
[18] roots
[19] transcendental equations

دہرانے کے تراکیب اعدادی تجزیہ کے لئے انتہائی اہم ہیں۔

مساوات 21.1 کو حل کرنے کے لئے دہرانے کے تراکیب کئی طریقوں سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ہم ان میں سے تین خصوصاً اہم طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

الجبرائی تبادل۔ ہم مساوات 21.1 کو الجبرائی طور پر تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل روپ حاصل کر سکتے ہیں

$$x = g(x) \tag{21.3}$$

جو مساوات 21.2 کی روپ میں ہے۔مساوات 21.3 کے حل کو g کا **مقررہ نقطہ**[20] کہتے ہیں۔دیے گئے مساوات 21.1 کے کئی مطابقتی مساوات 21.3 ہو سکتے ہیں جن کے ترتیب $x_0, x_1, \cdots$ مختلف (اور x_0 کے تابع) ہوں گے۔آئیں ایک سادہ مثال دیکھتے ہیں جس میں یہ حقائق ابھر کر سامنے آتے ہیں۔

مثال 21.1: دہرانے کی ترکیب
مساوات $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ کے لئے دہرانے کی ترکیب عمل میں لائیں۔چونکہ ہمیں اس مساوات کے حل

$$x = 1.5 \mp \sqrt{1.25}, \quad x_1 = 2.618\,034, \quad x_2 = 0.381\,966$$

معلوم ہیں، ہم دہرانے کے عمل کے دوران خلل کا رویہ دیکھ سکتے ہیں۔ہم دیے گئے مساوات سے

$$x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2+1) \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2+1) \tag{21.4}$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ترتیب ملتی ہے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 0.667, \quad x_2 = 0.481, \quad x_3 = 0.411, \quad x_4 = 0.390, \cdots$$

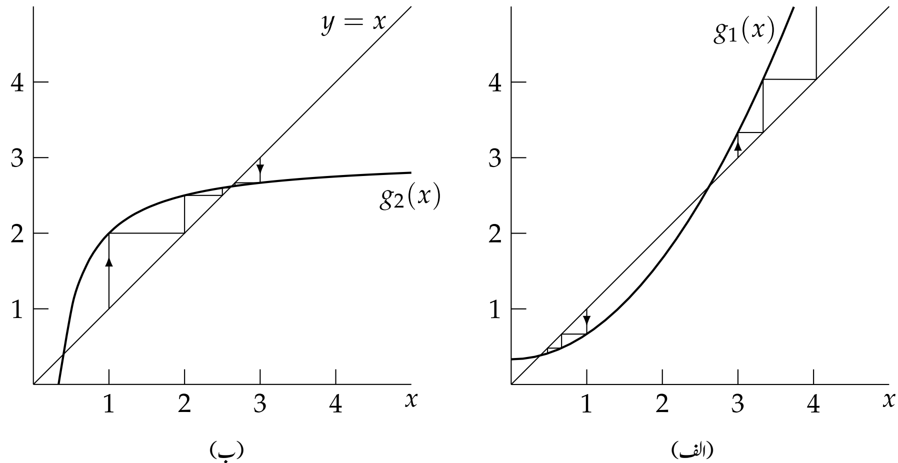
جو چھوٹے جذر کی طرف گامزن ہے (شکل 21.1-الف)۔اگر ہم $x_0 = 3.000$ منتخب کریں تب درج ذیل ملتا ہے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.766, \quad x_4 = 11.414, \cdots$$

جو منفرج ترتیب ہے (شکل 21.1-الف)۔دی گئی مساوات سے درج ذیل بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \tag{21.5}$$

---
[20] fixed point



شکل 21.1: اشکال برائے مثال 21.1

اب x_0 منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 2.000, \quad x_2 = 2.500, \quad x_3 = 2.600, \quad x_4 = 2.615, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے جو بڑے جذر کی طرف گامزن ترتیب ہے (شکل 21.1-ب)۔اسی طرح $x_0 = 3$ منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 2.667, \quad x_2 = 2.625, \quad x_3 = 2.619, \quad x_4 = 2.618, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 21.1-ب)۔ شکل کو دیکھ کر واضح ہوتا ہے کہ مرکوزیت اس صورت ہو گی جب حل کی پڑوس میں منحنی $g(x)$ کی ڈھلوان سیدھے خط $y = x$ کی ڈھلوان سے کم ہو۔ہم اب دیکھتے ہیں کہ مرکوزیت کے لئے $|g'(x) < 1|$ کی شرط کافی ہے (جہاں خط $y = x$ کی ڈھلوان $y' = 1$ ہے)۔ □

اگر x_0 کا مطابقتی مساوات 21.2 سے حاصل کردہ ترتیب $x_0, x_1, \cdots$ مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب مرتکز ہے۔

ارتکاز کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کے کئی اہم عملی استعمال پائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 21.1: (ارتکاز)
فرض کریں کہ $x = g(x)$ کا حل $x = s$ ہے اور فرض کریں کہ کسی ایسے وقفہ J ، جس میں s پایا جاتا

ہو، پر $g(x)$ کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر J میں $\left|g'(x)\right| \leq \alpha < 1$ ہو تب مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب J میں ہر x_0 کے لئے مرتکز ہو گی۔

ثبوت: تفرقی علم الاحصاء کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت x اور s کے درمیان ایسا ξ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا،

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s)$$

جہاں x وقفہ J میں پایا جاتا ہے۔ چونکہ $g(s) = s$ اور $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $\cdots$ ہیں لہٰذا ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}|x_n - s| &= \left|g(x_{n-1}) - g(s)\right| = \left|g'(\xi)\right||x_{n-1} - s| \leq \alpha|x_{n-1} - s| \\ &\leq \alpha^2|x_{n-2} - s| \leq \cdots \leq \alpha^n|x_0 - s|\end{aligned}$$

چونکہ $\alpha < 1$ ہے لہٰذا $n \to \infty$ کرنے سے $\alpha^n \to 0$ اور $|x_n - s| \to 0$ ہوں گے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 21.2: دہرانے کا طریقہ۔ مسئلہ 21.1

دہرانے کے طریقہ سے $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا حل تلاش کریں۔ اس مساوات کا جلدی سے خاکہ بنا کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ ہم اس مساوات سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

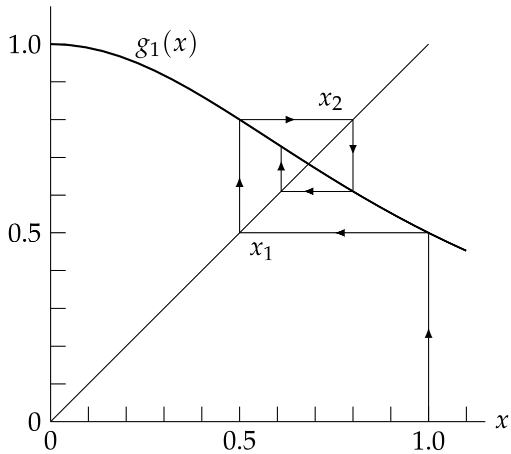
$$x = g_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n^2}$$

یوں کسی بھی x کے لئے $\left|g_1'(x)\right| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} < 1$ ہو گا لہٰذا تمام x پر مرکوزیت پائی جائے گی۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 21.2)

$$x_1 = 0.500, \quad x_2 = 0.800, \quad x_3 = 0.610, \quad x_4 = 0.729, \quad x_5 = 0.653, \quad x_6 = 0.701, \cdots$$

جبکہ چھ ہندسوں تک درست اصل جذر $s = 0.682\,328$ ہے۔ ہم مساوات سے درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_2(x) = 1 - x^3, \quad \left|g_2'(x)\right| = 3x^2$$



شکل 21.2: شکل برائے مثال 21.2

جذر کے قریب $|g_2'|$ کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے لہٰذا ہم ارتکاز کی توقع نہیں کر سکتے ہیں۔آپ $x_0 = 1$ ، $x_0 = 0.5$ ، $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے اپنی تسلی کر سکتے ہیں۔ □

مساوات $f(x) = 0$ ، جہاں f قابل تفرق ہے، کو ترکیب نیوٹن سے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب میں ہم $f(x)$ کا تخمینہ اس کے موزوں مماس سے حاصل کرتے ہیں۔اس ترکیب میں ہم f کی ترسیم سے حاصل x_0 پر f کا مماس بناتے ہیں۔یہ مماس x محور کو x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل 21.3)۔یوں

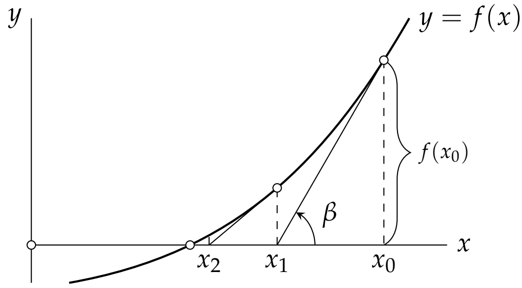
$$\tan\beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ہو گا۔اگلے قدم پر ہم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حاصل کرتے ہیں۔اسی طرح چلتے ہوئے جذر تک پہنچا جاتا ہے۔یوں دہرانے کے طریقے کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{21.6}$$



شکل 21.3: ترکیب نیوٹن

مثال 21.3: جذر المربع

کسی مثبت حقیقی عدد c کا جذر المربع حاصل کرنے کے لئے دہرانے کی ترکیب بنائیں۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کریں۔ہمارے پاس $\sqrt{c}$ یعنی $f(x) = x^2 - c = 0$ ہے لٰہذا $f'(x) = 2x$ ہو گا۔یوں مساوات 21.6 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

اب اس ترکیب سے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کرتے ہیں۔ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = 1.500\,000, \quad x_2 = 1.416\,667, \quad x_3 = 1.414\,216, \quad x_4 = 1.414\,214, \cdots$$

2 کا جذر المربع 1.414 213 562 ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب دیتا ہے۔ □

مثال 21.4: ماورائی مساوات کا دہرانے کی ترکیب سے حل

مساوات $x = 2\sin x$ کا مثبت حل تلاش کریں۔ہم $f(x) = x - 2\sin x$ لکھتے ہوئے $f'(x) = 1 - 2\cos x$ حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 21.6 کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2\sin x_n}{1 - 2\cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n\cos x_n)}{1 - 2\cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}$$

جدول 21.1: جدول برائے مثال 21.4

n	x_n	N_n	D_n	x_{n+1}
0	2.000	3.483	1.832	1.901
1	1.901	3.125	1.648	1.896
2	1.896	3.107	1.639	1.896

f کی ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا حل $x_0 = 2$ کے قریب ہے۔یوں ہم جدول 21.1 حاصل کرتے ہیں۔چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 1.8955 ہے۔ □

مثال 21.5: ترکیب نیوٹن کا الجبرائی مساوات پر اطلاق مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔مساوات 21.6 سے درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

$x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x_1 = 0.750\,000, \quad x_2 = 0.686\,047, \quad x_3 = 0.682\,340, \quad x_4 = 0.682\,328, \cdots$$

x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔مثال 21.2 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ مثال بہت تیزی کے ساتھ اصل حل پر مرکوز ہوتا ہے۔اس سے دہرانے کی ترکیب کے درجہ کا تصور پیدا ہوتا ہے جس پر اب بات کی جائے گی۔ □

فرض کریں کہ مساوات $x = g(x)$ کا حل s ہے اور $x_{n+1} = g(x_n)$ ایک دہرانے کی ترکیب ہے جو اس حل کی تخمین x_n دیتی ہے۔تب $x_n = s + \epsilon_n$ ہو گا جہاں x_n میں خلل ϵ_n ہے۔فرض کریں کہ g متعدد بار قابل تفرق ہے لہٰذا ٹیلر کے کلیہ سے

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \cdots \\ &= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \cdots \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔جزو $g(s)$ کے بعد پہلی غیر صفر جزو میں ϵ کے قوت نما کو دہرانے کی ترکیب (جس کو g تعین کرتا ہے) کا **درجہ**[21] کہتے ہیں۔چونکہ $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \epsilon_{n+1}$ یعنی x_{n+1} کا خلل

[21] order

ہے، اور ارتکاز کی صورت میں بڑی n کے لئے ϵ_n چھوٹا ہو گا للٰذا ترکیب کا درجہ اس کی مرکوزیت کی ناپ ہے۔

ترکیب نیوٹن دو درجی ہے
ترکیب نیوٹن کے لئے درج ذیل ہے

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

اور چونکہ $f(s) = 0$ ہے للٰذا $g'(s) = 0$ ہو گا؛ یوں ترکیب نیوٹن کم از کم دو درجی ہے۔ایک اور تفرق کے بعد $g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}$ ملتا ہے جو عموماً غیر صفر ہو گا۔ مثال 21.2 میں $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ اور $g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ہیں للٰذا یہ یک درجی دہرانے کی ترکیب ہے۔

$f(x) = 0$ کے حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے لیکن حل کے قریب $f(x)$ کی ترسیم کو دیکھتے ہوئے، ترکیب نیوٹن کی جیومیٹریائی تصور کو مد نظر رکھتے ہوئے عموماً اس مشکل سے چھٹکارا حاصل کرنا ممکن ہو گا۔ اگر درکار حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہو تب x_{n+1} کی بہتر قیمت حاصل کرنے کی خاطر $f(x_n)$ اور $f'(x_n)$ کے زیادہ درست قیمتیں حاصل کرنا ضروری ہو گا۔ ایسی مساوات کو بد خو[22] کہتے ہیں۔

$f(x) = 0$ کو حل کرنے کی تیسری ترکیب جس کو **مقام غلط کی ترکیب**[23] کہتے ہیں پر اب غور کرتے ہیں۔اس ترکیب میں ہم منحنی $f(x)$ کو تخمیناً ایک وتر سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 21.4)۔یہ وتر محور x کو

$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - bf(x_0)}{f(b) - f(x_0)} \tag{21.7}$$

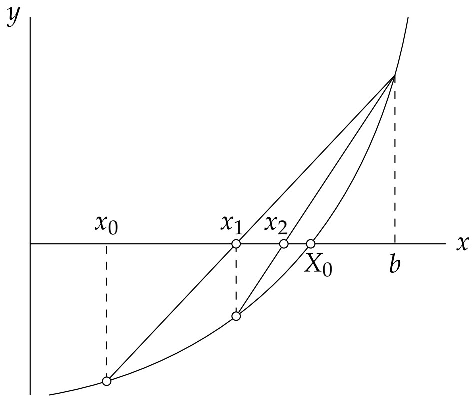
پر قطع کرتا ہے جو $f(x) = 0$ کے حل X_0 کے قریب ہو گا۔اگلے قدم پر اس سے بہتر حل

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)} \tag{21.8}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح بتدریج بہتر حل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ b کو X_0 کے قریب کرنے سے ارتکاز کو بہتر بنایا جا سکتا ہے۔ عموماً قیاس کے ذریعہ ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

---

[22] ill-conditioned
[23] method of false position



شکل 21.4: منحنی کا تخمینی وتر

مثال 21.6: مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا وہ جذر تلاش کریں جو $x = 1$ کے قریب واقع ہے (مثال 21.2)۔ چونکہ $f(0.5) = -0.375$ اور $f(1) = 1$ ہیں لہٰذا ہم $x_0 = 0.5$ اور $b = 1$ منتخب کر سکتے ہیں۔ مساوات 21.7 سے

$$x_1 = \frac{0.5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

حاصل ہو گا جبکہ مساوات 21.8 سے $x_2 = 0.672$ ملتا ہے۔ ہم اسی طرح بتدریج بہتر حل تلاش کر سکتے ہیں۔
□

سوالات

سوال 21.1: $x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 1$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.900\,000$

سوال 21.2: $x^3 - 1.2x^2 + 2x - 2.4 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 2$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.478\,261$

سوال 21.3: سوال 21.1 میں دیے گئے مساوات کے جذر 0.9 ، 1.1 اور 1.9 ہیں۔اگرچہ $x_0 = 1$ جذر 0.9 اور 1.1 کے قریب ہے لیکن ترکیب نیوٹن ان کی جگہ جذر 1.9 تلاش کرتا ہے۔ایسا کیوں ہے؟ x_0 کی کوئی اور قیمت منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے جذر 1.1 حاصل کریں۔
جواب: تفاعل $f(x)$ کو $x_0 = 1$ پر مماس x محور کو عین $x = 1.9$ پر قطع کرتا ہے۔آپ $x_0 = 1.2$ یا کوئی اور عدد منتخب کر سکتے ہیں۔

سوال 21.4 تا سوال 21.7 میں دیے مساوات کی ترکیب نیوٹن کی مدد سے تمام جذر تلاش کریں۔

سوال 21.4: $\cos x = x$
جواب: 0.739

سوال 21.5: $x + \ln x - 2$
جواب: 1.577

سوال 21.6: $2x + \ln x - 1$
جواب: 0.687

سوال 21.7: $x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82$
جواب: $-1.3, \quad 1.4$

سوال 21.8: دکھائیں کہ مثال 21.2 میں $\left|g_1'(x)\right|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\tilde{x} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ پر حاصل ہو گی اور کہ یہ قیمت $\left|g'(\tilde{x})\right| = \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0.65$ کے برابر ہے۔

سوال 21.9: ایسا کیوں ہے کہ مثال 21.1 میں یک سر ترتیب حاصل ہوتی ہے لیکن مثال 21.2 میں ایسا نہیں ہوتا ہے؟

سوال 21.10: مثال 21.2 کی آخر میں دہرانے کی ترکیب سے حاصل قیمتوں کو از خود حاصل کریں اور شکل 21.2 کی طرز کا شکل بنائیں۔

سوال 21.11: مساوات $x^5 = x + 0.2$ کو مساوات 21.2 کی صورت میں لکھ کر $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے اس کا جذر تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = -0.2$ ، $x_2 = -0.200\,32$ ، $x_3 = -0.200\,323$

سوال 21.12: سوال 21.11 میں دیے گئے مساوات کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ مساوات کو $x = \sqrt[5]{x + 0.2}$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے اس جذر کو تلاش کریں۔
جواب: 1.0447

سوال 21.13: سوال 21.12 میں اگر آپ $x = x^5 - 0.2$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کریں تو کیا حاصل ہو گا؟
جواب: $-0.200\,322$

سوال 21.14: دہرانے کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کی مساوات $x = \tan x$ کا کم تر جذر تقریباً 4.49 ہے۔اشارہ۔ مساوات کی ترسیم سے اخذ کریں کہ جذر $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ کے قریب پایا جاتا ہے؛ مساوات کو $x = \pi + \tan^{-1} x$ (کیوں؟) لکھ کر آگے بڑھیں۔

سوال 21.15: $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے $\sqrt{5}$ کو مثال 21.3 کی ترکیب سے حاصل کرتے ہوئے x_1, x_2, x_3, x_4 تلاش کریں۔اب $\sqrt{5} = 2.236\,068$ استعمال کرتے ہوئے خلل حاصل کریں۔
جواب: $\epsilon_1 = 0.236\,068$ ، $\epsilon_2 = 0.013\,932$ ، $\epsilon_3 = 0.000\,043$ ، $\epsilon_4 = 0.000\,000$

سوال 21.16: دکھائیں کہ مثال 21.3 میں ہمارے پاس

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{c}{x_n}\right)^2$$

ہے جو درستگی کی ناپ ہے۔دکھائیں کہ تخمیناً

$$\left|x_n - \sqrt{c}\right| \approx \frac{1}{2}\left|x_n - \frac{c}{x_n}\right|$$

ہو گا۔ اس کا اطلاق سوال 21.15 پر کریں۔

سوال 21.17: مثبت x محور پر ایسا وقفہ تلاش کریں کہ $c = 2$ لیتے ہوئے مسئلہ 21.1 کی شرط کو مثال 21.3 کے دہرانے کی ترکیب مطمئن کرتی ہو۔
جواب: $\alpha < 1 , \quad x \geq \sqrt{\frac{2}{1+2\alpha}}$

سوال 21.18: جذر الکعب کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $x_0 = 2$ سے شروع کر کے تین قدم چل کر $\sqrt[3]{7}$ تلاش کریں۔

سوال 21.19: مثبت عدد c کا k واں جذر حاصل کرنے کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔
جواب: $f(x) = x^k - c, \quad x_{n+1} = (1 - \frac{1}{k})x_n + \frac{c}{kx_n^{k-1}}$

سوال 21.20: $x^4 = 2$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1$

سوال 21.21: $x^4 = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1.260$

سوال 21.22: $3\sin x = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1.49$

سوال 21.23: سوال 21.20 میں حاصل کردہ مثبت جذر ہر صورت اصل جذر سے معمولی کم ہو گا۔ایسا کیوں ہے؟

سوال 21.24: ترکیب نیوٹن میں $f'(x)$ کا حساب کرنا ہوتا ہے۔ عملی استعمال میں کبھی کبھار یہ قدم کافی پیچیدہ ثابت ہو سکتا ہے۔ $f'(x)$ سے چھٹکارا حاصل کرنا کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کی جگہ $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ استعمال کیا جائے۔یوں حاصل کردہ کلیہ کا غلط مقام کلیہ کے ساتھ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 21.25: فرض کریں بند وقفہ I میں g استمراری ہے اور اس کا حلقہ بھی I میں پایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات $x = g(x)$ کا کم از کم ایک حل اس وقفہ میں پایا جائے گا۔دکھائیں کہ اس وقفہ میں مساوات کے زیادہ جذر بھی ممکن ہیں۔

21.3 متناہی فرق

متناہی فرق کا استعمال اعدادی تجزیہ کے کئی شاخوں میں پایا جاتا ہے مثلاً دو قیمتوں کے درمیان قیمت کا تخمینہ لگانے میں، جدول کی جانچ پڑتال میں، تخمینہ لگانے میں، تفرق میں، اور تفرقی مساوات کے حل میں۔ ہم فرض کرتے ہیں

جدول 21.2: تفاعل $f(x) = x^3,\ x = -3(1)3$ کا جدول فرق

x	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق	چوتھا فرق
−3	−27				
		19			
−2	−8		−12		
		7		6	
−1	−1		−6		0
		1		6	
0	0		0		0
		1		6	
1	1		6		0
		7		6	
2	8		12		
		19			
3	27				

کہ ہمیں تفاعل f کی اعدادی قیمتوں $f_j = f(x_j)$ کا جدول دیا گیا ہے جہاں نقطے x_j ایک جیسے فاصلے پر ہیں۔

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \cdots \quad (h > 0, \text{مقررہ})$$

$f(x_j)$ کو عموماً کسی کلیہ یا تجربہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم جدول میں ہر $f(x)$ کو اگلی (بڑی) x کی مطابقتی قیمت سے تفریق کرتے ہوئے **پہلا فرق**[24] حاصل کرتے ہیں۔جدول 21.2 میں اس کی مثال پیش کی گئی ہے جہاں $f(x) = x^3,\ x = -3(1)3$ ہیں[25]۔یہی طریقہ پہلی فرق پر لاگو کرتے ہوئے f کا **دوسرا فرق**[26] حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح باقی فرق بھی حاصل کیے جاتے ہیں۔جدول فرق میں ہر فرق کو اپنی قطار میں گزشتہ قطار (جس سے فرق حاصل کیا گیا ہے) کی اندراج کی درمیان برابر مقام پر درج کیا جاتا ہے۔نقطہ اعشاریہ اور فرق کی بائیں صفروں کو نظر انداز کیا جاتا ہے (جدول 21.3)۔

جدول فرق میں فرق کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے رائج ہیں۔ان میں سے جو بھی طریقہ استعمال کیا جائے، جدول میں نہ کوئی فرق تبدیل ہو گا اور نا ہی اس کا مقام۔پہلی (اور غالباً اہم ترین) اظہار جس کو **وسطی فرق**[27] کہتے

[24] first difference
[25] $x = a(h)b$ کا مطلب ہے کہ تفاعل کی قیمتیں $x = a$، $x = x + h$، $x = a + 2h$، $\cdots$، $x = b$ پر دی گئی ہیں۔
[26] second difference
[27] central difference

جدول 21.3: تفاعل $f(x)=\frac{1}{x},\ x=1(0.2)2$ کا جدول فرق۔ ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔

x	$f(x)=x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق
1.0	1.0000			
		-1667		
1.2	0.8333		477	
		-1190		-180
1.4	0.7143		297	
		-893		-98
1.6	0.6250		199	
		-694		-61
1.8	0.5556		138	
		-556		
2.0	0.5000			

ہیں درج ذیل ہے

$$
\begin{array}{ccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \delta f_{-3/2} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} \\
x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{1/2} \\
x_1 & f_0 & & \delta^2 f_1 & \\
 & & \delta f_{3/2} & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}
$$

جہاں $\delta f_{-3/2}=f_{-1}-f_{-2}$ اور $\delta f_{-1/2}=f_0-f_{-1}$ ہیں۔ وسطی فرق کا عمومی جزو

$$\delta f_{m+1/2}=f_{m+1}-f_m \tag{21.9}$$

ہے جہاں دائیں ہاتھ دو زیر نوشت کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔اسی طرح

$$\delta^2 f_m=\delta f_{m+1/2}-\delta f_{m-1/2}$$

ہو گا۔ دیگر فرق بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ایک جیسی زیر نوشت والے اجزاء ایک ہی صف میں پائے جاتے ہیں۔(دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ جدول میں x کی سب سے چھوٹی قیمت x_0 ہو۔مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0=1.6$ لے سکتے ہیں؛ تب $f_0=0.6250$ ، $\delta f_{1/2}=-0.0694$ ، $\delta^2 f_0=0.0199$ ، $\dots$ ہوں گے۔)

دوسری اظہار جس کو آگے فرق[28] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{llllll}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \Delta f_{-2} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \Delta^2 f_{-2} & \\
 & & \Delta f_{-1} & & \Delta^3 f_{-2} \\
x_0 & f_0 & & \Delta^2 f_{-1} & \\
 & & \Delta f_0 & & \Delta^3 f_{-1} \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & \\
 & & \Delta f_1 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

جس میں $\Delta f_{-2} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$ اور $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ ہیں۔اس کا عمومی جزو

$$\Delta f_m = f_{m+1} - f_m \tag{21.10}$$

ہے۔اسی طرح

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m$$

ہو گا۔مثال کے طور پر اگر جدول 21.3 میں $x_0 = 1.6$ لیا جائے تب $f_0 = 0.6250$ ، $\Delta f_0 = -0.0694$ ، $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ ہوں گے۔ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں نیچے کی رخ یا جدول میں آگے رخ لکیروں پر پائے جائیں گے۔

تیسری اظہار جس کو پیچھے فرق[29] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{llllll}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \nabla f_{-1} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \nabla^2 f_0 & \\
 & & \nabla f_0 & & \nabla^3 f_1 \\
x_0 & f_0 & & \nabla^2 f_1 & \\
 & & \nabla f_1 & & \nabla^3 f_2 \\
x_1 & f_1 & & \nabla^2 f_2 & \\
 & & \nabla f_2 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

جہاں $\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$ اور $\nabla f_1 = f_1 - f_0$ ہیں۔عمومی جزو

$$\nabla f_m = f_m - f_{m-1} \tag{21.11}$$

---

[28] forward difference
[29] backward difference

جدول 21.4: غلطی تمام فرق میں پھیل جاتی ہے۔ یہاں تفاعل $f(x) = \sqrt{x},\ x = 2.0(0.1)2.6$ ہے اور ملحوظ ہندسے چار ہیں۔ غلطی $f(2.3)$ میں ہے۔

x	$\sqrt{x}$	فرق			$\sqrt{x}$	فرق			غلطی ϵ کا پھیلنا			
2.0	1.4142				1.41412							
		349				349						
2.1	1.4491		-8		1.4491		8					
		341		1		341		$\underline{11}$				ϵ
2.2	1.4832		-7		1.4832		$\underline{3}$				ϵ	
		334		-1		$\underline{344}$		$-\underline{31}$		ϵ		-3ϵ
2.3	1.5166		-8		$\underline{1.5176}$		$-\underline{28}$		ϵ		-2ϵ	
		326		1		$\underline{316}$		$\underline{31}$		$-\epsilon$		3ϵ
2.4	1.5492		-7		1.5492		$\underline{3}$				ϵ	
		319		2		319		$-\underline{8}$				$-\epsilon$
2.5	1.5811		-5		1.5811		$-\underline{5}$					
		314				314						
2.6	1.6125				1.6125							

ہو گا۔اسی طرح

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1}$$

ہو گا۔ باقی اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں پر اوپر رخ یا جدول میں پیچھے رخ لکیروں پر پائے جاتے ہیں۔ جدول کی آخر میں حساب کے دوران پیچھے فرق عموماً زیادہ مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0 = 1.6$ لیں تب $\nabla f_0 = \Delta f_{-1} = \delta f_{-1/2} = -0.0893$ ہو گا۔یوں عمومی طور پر

$$\delta^n f_m = \Delta^n f_{m-n/2} = \nabla^n f_{m+n/2}$$

ہو گا۔

جدول میں غلطیوں کی نشاندہی کرنے کے لئے فرق کا سہارا لیا جاتا ہے۔جیسا جدول 21.4 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل میں خلل ϵ جلد تمام فرق میں پھیل جاتا ہے۔یوں فرق میں بہت زیادہ اتار چڑھاو تفاعل کی قیمت میں غلطی کو ظاہر کرتی ہے۔ظاہر ہے کہ کم تعداد کی ملحوظ ہندسوں کی بنا معمولی اتار چڑھاو ہر صورت پائی جائے گی۔

تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں بھی فرق اہم کردار ادا کرتا ہے۔قدم h لیتے ہوئے n درجی کثیر رکنی $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ کے جدول فرق میں تمام n ویں فرق مستقل ($n!h^na_0$ کے برابر) ہوں گے اور ان سے بلند فرق صفر ہوں گے۔ایسا اس لئے ہو گا کہ پہلے فرق

$$p_n(x+h) - p_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] + \cdots = a_0nhx^{n-1} + \cdots$$

کا درجہ $n-1$ ہے، دوسرے فرق کے کثیر رکنی کا درجہ $n-2$ ہو گا اور اس کے پہلے جزو کا عددی سر $a_0n(n-1)h^2$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔یوں اگر تفاعل f کے جدول فرق میں n ویں فرق کسی حلقہ میں تقریباً مستقل ہوں تب جدول کی قیمتوں کو اس حلقہ میں n درجی کثیر رکنی p_n سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔آئیں دیے گیے f کی صورت میں کثیر رکنی p_n کے حصول کی ایک ترکیب دیکھیں۔

مثال 21.7: تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنا

جدول 21.4 میں دوسرا فرق تقریباً مستقل (-7 کے برابر) ہیں۔یوں ہم دیے گئے تفاعل کی تخمینی دو درجی کثیر رکنی p_2 تلاش کر سکتے ہیں۔ہم پہلے جدول فرق بناتے ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام دوسرے فرق ٹھیک ٹھیک -7 کے برابر ہیں ہم حلقہ کے وسط میں تفاعل کی کوئی قیمت اور پہلا فرق منتخب کرتے ہیں مثلاً 1.5166 اور 334 جس سے جدول 21.5 حاصل ہوتا ہے۔ p_2 کے پہلے عددی سر کو

$$\text{دوسرا فرق} = a_0 2!h^2 = a_0 \cdot 2 \cdot 0.1^2 = -0.0007$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔یوں $a_0 = -\frac{0.0007}{0.02} = -0.035$ ملتا ہے۔اس طرح

$$p_1(x) = p_2(x) + 0.035x^2$$

درجہ اول ہو گا اور جدول 21.5 سے ہم حساب لگا کر دیکھتے ہیں کہ اس کے پہلے صفر تقریباً مستقل (0.04915) ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ یہ a_h کے برابر ہے۔یوں $a_1 = \frac{0.04915}{0.1} = 0.4915$ حاصل ہوتا ہے۔آخر میں $p_1(x) - 0.4915x = a_2 = 0.5713$ ہو گا لہٰذا

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.5713$$

ہو گا۔اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ فرق کو استعمال کرتے ہوئے تخمینی کثیر رکنی حاصل کرنے سے پہلے، تخمینی کثیر رکنی کی درستگی کا معیار جانا جا سکتا ہے۔ تخمینی کثیر رکنی کی حصول کے دیگر تراکیب پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

□

جدول 21.5: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کو دو درجی کثیر رکنی p_2 سے ظاہر کرنا

x	$p_2(x)$	فرق	
2.0	1.4143		
		348	
2.1	1.4491		-7
		341	
2.2	1.4832		-7
		334	
2.3	1.5166		-7
		327	
2.4	1.5493		-7
		320	
2.5	1.5813		-7
		313	
2.6	1.6126		

سوالات

سوال 21.26: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.2 حاصل کریں۔

سوال 21.27: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.3 حاصل کریں۔

سوال 21.28: جدول 21.3 میں $x_0 = 1.2$ منتخب کرتے ہوئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.29: $x_0 = 2$ منتخب کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = x^3$ کا $x = 0(1)5$ کے لئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.30: درج ذیل دکھائیں۔

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$$
$$\delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}$$

سوال 21.31: $f(x)=\frac{1}{x+1}$ کی قیمتیں $x=0(0.2)1$ کے لئے (الف) دو ملحوظ ہندسوں، (ب) تین ملحوظ ہندسوں اور (پ) چار ملحوظ ہندسوں تک حاصل کریں۔ان کے مطابقتی جدول فرق میں تعداد ہندسہ خلل کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 21.32: $x=0(1)10$ کے لئے $f(x)=x^2$ کا جدول فرق مکمل کریں۔ایک اور جدول میں $f(5)=25$ کی جگہ 26 لکھتے ہوئے پہلا فرق، دوسرا فرق، تیسرا فرق اور چوتھا فرق تلاش کریں۔جدول میں غلطی کا پھیلنا دیکھیں۔

سوال 21.33: فرق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل جدول کی جانچ پڑتال کریں۔

x	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	0.250	0.244	0.242	0.233	0.227	0.222

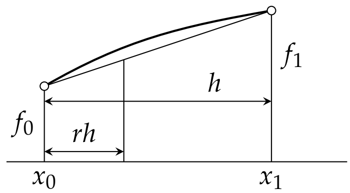
سوال 21.34: مثال 21.7 میں کی گئی تمام حساب خود کریں۔

21.4 باہمی تحریف

عموماً تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کا جدول دیا گیا ہو گا اور ہمیں ان x پر تفاعل کی قیمت درکار ہو گی جو جدول میں دیے گئے x کی قیمتوں کے درمیان پائے جاتے ہوں۔ایسی قیمتوں کے حصول کی عمل کو ہم **باہمی تحریف**[30] کہیں گے۔اس عمل میں $f(x)$ کی استعمال ہونے والی قیمتوں کو **چول قیمتیں**[31] کہتے ہیں۔باہمی تحریف کی ترکیب اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ نقطہ x کے قریب تفاعل $f(x)$ کو کثیر رکنی p سے ظاہر کرنا ممکن ہے لٰہذا x کے قریب کسی بھی نقطے پر p کی قیمت کو اس نقطے پر تفاعل کی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

---

[30] interpolation
[31] pivotal values



شکل 21.5: خطی باہمی تحریف

سادہ ترین طریقہ **خطی باہمی تحریف**[32] ہے۔اس ترکیب میں جدول میں درکار x کی دونوں جانب درج نقطوں x_0 اور x_1 کے مابین سیدھی قطع سے اس خطہ میں $f(x)$ کو ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 21.5)۔یوں جیسا ہم چھوٹی جماعتوں کی حساب سے جانتے ہیں، نقطہ $x = x_0 + rh$ پر f کی قیمت تخمیناً

$$f(x) \approx p_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0 \qquad (r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le 1) \tag{21.12}$$

ہو گی۔یوں اگر $\ln 9.0 = 2.197$ اور $\ln 9.5 = 2.251$ ہوں تب $\ln 9.2$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $r = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$ حاصل کر کے

$$\ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4(\ln 9.5 - \ln 9.0) = 2.219$$

حاصل کرتے ہیں۔

خطی باہمی تحریف اس صورت تسلی بخش ہو گی جب جدول میں x کی قیمتیں اتنی قریب قریب ہوں کہ ان کے مابین منحنی سے سیدھی قطعات کی انحراف کم ہو، مثلاً ہر x_0 اور x_1 کے درمیان ہر x کے لئے انحراف جدول میں آخری ہندسہ کی اکائی کی نصف ($\frac{1}{2}$) سے کم ہو۔

دو درجی باہمی تحریف[33] میں ہم x_0 اور $x_2 = x_0 + 2h$ کے درمیان منحنی f کو ایسی دو درجی قطع مکافی سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) اور (x_2, f_2) سے گزرتی ہو۔یوں بہتر کلیہ

$$f(x) \approx p_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 \qquad (r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le 2) \tag{21.13}$$

---

[32] linear interpolation
[33] quadratic interpolation

اخذ ہوتا ہے جہاں $x = x_0 + rh$ ہے۔یوں $x = x_0 \; (r = 0)$ کے لئے دایاں ہاتھ f_0 کے برابر ہو گا؛ $x = x_1 \; (r = 1)$ کے لئے بایاں ہاتھ $f_0 + \Delta f_0 = f_1$ کے برابر ہو گا اور $x = x_2 \; (r = 2)$ کے لئے اس کی قیمت

$$f_0 + 2(f_1 - f_0) + [(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)] = f_2$$

ہو گی۔

مثال 21.8: **خطی اور دو درجی باہمی تحریف**
اگر $\ln 9.0 = 2.1972$ اور $\ln 9.5 = 2.2513$ ہوں تب مساوات 21.12 سے $\ln 9.2 = 2.2188$ حاصل ہوتا ہے جو تین ملحوظ ہندسوں تک درست ہے جبکہ $\ln 10.0 = 2.3026$ لیتے ہوئے مساوات 21.13

$$\ln 9.2 = 2.1972 + 0.4 \cdot 0.0541 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2}(-0.0028) = 2.2192$$

دیتی ہے جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ □

مزید بہتر جوابات حاصل کرنے کی خاطر زیادہ بلند درجی کثیر رکنی استعمال کرنی ہو گی۔ $n + 1$ مختلف نقطوں پر قیمتوں سے یکتا n درجی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ہمیں یہاں ایسی کثیر رکنی p_n درکار ہے کہ

$$p_n(x_0) = f_0, \cdots, p_n(x_n) = f_n$$

ہوں جہاں $f_0 = f(x_0)$ ، $\cdots$ ، $f_n = f(x_n)$ جدول میں f کی قیمتیں ہیں۔یہ کثیر رکنی **آگے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[34]

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) &= f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots \\ &\quad + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \end{aligned} \tag{21.14}$$

$$\left(x = x_0 + rh,\; r = \frac{x - x_0}{h},\; 0 \le r \le n\right)$$

دیتی ہے۔اس کلیہ میں $n = 1$ پر کرنے سے مساوات 21.12 اور $n = 2$ پر کرنے سے مساوات 21.13 حاصل ہوتا ہے۔ہمیں اب $p_n(x_k) = f_k \; (k = 0, 1, \cdots, n)$ ثابت کرنا ہو گا۔ مساوات 21.14 کے دائیں ہاتھ سے

$$f_k = \binom{k}{0} f_0 + \binom{k}{1}\Delta f_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{k}{k}\Delta^k f_0 \tag{21.15}$$

[34] Newton's forward-difference interpolation formula

لکھا جا سکتا ہے جہاں **ثنائی عددی**[35] سر درج ذیل ہیں جہاں $s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s$ کے برابر ہے۔

$$\binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{s!} \quad (s \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{21.16}$$

در حقیقت مساوات 21.14 میں $r = k$ پر کرنے سے مساوات 21.14 کا دایاں ہاتھ اور مساوات 21.15 بالکل ایک جیسے ہوں گے۔مساوات 21.15 کو الکراجی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت : $k = 0$ کے لئے مساوات 21.15 درست ہے۔فرض کریں کہ یہ $k = q$ کے لئے بھی درست ہے۔تب مساوات 21.15 میں $k = q$ استعمال کر کے، Δ کی اطلاق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} f_{q+1} &= f_q + \Delta f_q \\ &= \binom{q}{0} f_0 + \binom{q}{1} \Delta f_0 + \binom{q}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{q}{q} \Delta^q f_0 \\ &\quad + \binom{q}{0} \Delta f_0 + \binom{q}{1} \Delta^2 f_0 + \binom{q}{2} \Delta^3 f_0 + \cdots + \binom{q}{q} \Delta^{q+1} f_0 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں $\Delta^s f_0$ کا عددی سر (مساوات 21.16)

$$\binom{q}{s} + \binom{q}{s-1} = \binom{q+1}{s}$$

ہے جو $k = q + 1$ کے لئے مساوات 21.15 دیتا ہے۔یوں الکراجی ماخوذ کے ذریعہ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مساوات 21.14 کی طرح ایسا کلیہ جو پیچھے فرق پر مبنی ہو، **پیچھے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[36]

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) &= f_0 + r\nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \cdots \\ &\quad + \frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!}\nabla^n f_0 \end{aligned} \tag{21.17}$$

ہے جہاں مساوات 21.14 کی طرح $x = x_0 + rh,\ r = \frac{x-x_0}{h},\ 0 \leq r \leq n$ ہیں۔

---

[35] binomial coefficients
[36] Newton's backward-difference interpolation formula

باہمی تحریف کے کلیات اور استعمال پر کثیر مواد پایا جاتا ہے۔مثال کے طور پر صرف جفت درجہ فرق پر مبنی کلیات پائے جاتے ہیں۔اس طرز کا ایک انتہائی اہم اور سادہ ترین کلیہ ایورٹ[37] درج ذیل ہے۔

$$f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!}\delta^2 f_0 + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\delta^2 f_1 \tag{21.18}$$

جہاں $0 \le r \le 1$, $r = \frac{x-x_0}{h}$ ہیں۔

مثال 21.9: کلیہ ایورٹ کا استعمال

تفاعل $e^{1.24}$ کی قیمت مساوات 21.18 میں دیے گئے کلیہ ایورٹ اور درج ذیل جدول سے حاصل کریں۔

x	e^x	δ^2
1.2	3.3201	333
1.3	3.6693	367

اب $r = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$ ہے لہٰذا مساوات 21.18 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned} e^{1.24} &\approx 0.6 \cdot 3.3201 + 0.4 \cdot 3.6693 + \frac{1.6 \cdot 0.6 \cdot (-0.4)}{6} \cdot 0.0333 \\ &\quad + \frac{1.4 \cdot 0.4 \cdot (-0.6)}{6} \cdot 0.0367 \\ &= 3.4598 - 0.0021 - 0.0021 = 3.4556 \end{aligned}$$

جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔دھیان رہے کہ خطی باہمی تحریف 3.4598 دیتی ہے جو صرف دو ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔(آپ $e^{1.1} = 3.0042$ اور $e^{1.4} = 4.0552$ استعمال کرتے ہوئے دوسرے فرق کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں۔) □

عمومی کلیہ ایورٹ[38] درج ذیل ہے

$$\begin{aligned} f(x) = qf_0 + rf_1 + \binom{q+1}{3}\delta^2 f_0 + \binom{r+1}{3}\delta^2 f_1 \\ + \binom{q+2}{5}\delta^4 f_0 + \binom{r+2}{5}\delta^4 f_1 + \cdots \end{aligned} \tag{21.19}$$

---

[37] Everett formula
[38] Everett formula

جہاں $0 \le r \le 1$، $r = \frac{x-x_0}{h}$ اور $q = 1 - r$ ہیں۔اس کلیہ میں $\delta^4 f_0$ اور $\delta^2 f_0$ کے عددی سروں کی نسبت

$$\frac{\binom{q+2}{5}}{\binom{q+1}{3}} = \frac{q^2-4}{20}$$

ہے۔اسی طرح $\delta^4 f_1$ اور $\delta^2 f_1$ کے عددی سروں کی نسبت $\frac{r^2-4}{20}$ ۔یہ دونوں نسبت وقفہ 0 تا 1 میں بہت کم تبدیل ہوتے ہیں۔یوں اگر ان کی جگہ ان کی کوئی موزوں اوسط قیمت μ منتخب کی جائے تب **تبدیل شدہ دوسرے فرق**[39]

$$\delta_m^2 f = \delta^2 f + \mu\delta^4 f, \quad \mu = -0.18393 \tag{21.20}$$

استعمال کرتے ہوئے چوتھی فرق کے اثر کو مساوات 21.18 میں سمویا جا سکتا ہے، جہاں μ کی دی گئی قیمت ایک موزوں قیمت ہے۔

ہم بغیر ثبوت پیش کیے بتلانا چاہتے ہیں کہ اگر $x_0, x_1, \cdots, x_n$ کے آپس میں فاصلے اختیاری ہوں تب n درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) ، $\cdots$ ، (x_n, f_n) سے گزرتا ہو، جہاں $f_j = f(x_j)$ ہے، **منقسم فرق باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[40]

$$\begin{aligned} f(x) \approx f_0 &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \cdots \\ &+ (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,\cdots,x_n] \end{aligned} \tag{21.21}$$

کا دایاں ہاتھ ہو گا جہاں **منقسم فرق**[41] درج ذیل دہرانے کے تعلقات دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1] &= \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}, \cdots \\ f[x_0,\cdots,x_k] &= \frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \end{aligned} \tag{21.22}$$

اگر $x_k = x_0 + kh$ (یکساں فاصلے) ہو تب $f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$ ہو گا اور مساوات 21.21 سے مساوات 21.14 حاصل ہو گی۔

باہمی تحریف کی مختلف تراکیب فرق میں ہم فرق معلوم کرتے ہیں جس کو جدول کی درستگی کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔البتہ کس درجہ کی باہمی تحریف استعمال کی جائے، عموماً اس سوال کا جدول میں جواب نہیں دیا جاتا

---

[39] modified second differences

[40] Newton's divided difference interpolation formula

[41] divided difference

ہے۔ لیگرینج باہمی تحریف[42] کی ترکیب لیگرینج باہمی تحریف کے کلیہ

$$f(x) \approx \mathrm{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k \tag{21.23}$$

پر مبنی ہے جہاں ضروری نہیں ہے کہ $x_0, \cdots, x_n$ برابر فاصلوں پر ہوں اور

$$\begin{aligned} l_0(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\ l_k(x) &= (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n), \quad 0<k<n \\ l_n(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{21.24}$$

ہیں۔ مساوات 21.23 کو $n+1$ **نقطوں کا کلیہ لیگرینج** کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 21.24 سے $j \neq k$ کی صورت میں $l_k(x_j) = 0$ اور $x = x_k$ کی صورت میں $\frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} = f_k$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $\mathrm{L}_n(x_k) = f_k$ ہو گا۔ اس ترکیب میں فرق حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور ہم مختلف f_k کے اثرات کو سیدھ و سیدھ دیکھ سکتے ہیں۔ ہاں اب حساب زیادہ مشکل ضرور ہو گا اور جدول میں غلطی کی جانچ پڑتال ممکن نہیں ہو گی۔ اس لئے ضروری ہے کہ یہ ترکیب صرف مستند جدول پر لاگو کیا جائے۔

مثال 21.10: لیگرینج کلیہ باہمی تحریف کا استعمال
$\ln 9.2$ کی قیمت مساوات 21.23 اور درج ذیل قیمتوں کی مدد سے تلاش کریں۔

x	9.0	9.5	10.0	11.0
$\ln x$	2.197 22	2.251 29	2.302 59	2.397 90

ہمارے پاس $l_0(x) = (x-9.5)(x-10)(x-11)$ ، $l_1(x) = (x-9)(x-10)(x-11)$ ، $\cdots$ ہیں۔ یوں

$$\ln 9.2 = \frac{-0.43200}{-1.00000} \cdot 2.19722 + \frac{0.28800}{0.37500} \cdot 2.25129 + \frac{0.10800}{-0.50000} \cdot 2.30259 + \frac{0.04800}{3.00000} \cdot 2.39790 = 2.21920$$

ہو گا جو پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ □

[42] Lagrangian interpolation

جدول 21.6: جدول برائے سوال 21.36 تا سوال 21.41

x	$\sin x$	پہلا فرق	دوسرا فرق
0.0	0.000 00		
		19 867	
0.2	0.198 67		−792
		19 075	
0.4	0.389 42		−1553
		17 522	
0.6	0.564 64		−2250
		15 272	
0.8	0.717 36		−2861
		12 411	
1.0	0.841 47		

سوالات

سوال 21.35: دکھائیں کہ مساوات 21.13 میں دیا گیا قطع مکافی نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتا ہے۔

جدول 21.6 کو سوال 21.36 تا سوال 21.41 میں استعمال کریں۔

سوال 21.36: $\sin 0.26$ کی قیمت خطی باہمی تحریف (مساوات 21.12) سے تلاش کریں۔ دکھائیں کہ اعشاریہ کے بعد پہلے دو ہندسے بالکل ٹھیک ہیں۔

سوال 21.37: $\sin 0.26$ کی قیمت دو درجی باہمی تحریف یعنی مساوات 21.13 کی مدد سے حاصل کریں۔ دکھائیں پہلے تین ملحوظ ہندسے بالکل درست ہیں۔
جواب: 0.257 53

سوال 21.38: جدول 21.6 میں تیسرے فرق اور چوتھے فرق شامل کرتے ہوئے $\sin 0.26$ کی قیمت مساوات 21.14 کی مدد سے (الف) $n = 3$ اور (ب) $n = 4$ لیتے ہوئے حاصل کریں۔ نتائج کا موازنہ پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $\sin 0.26 = 0.257\,08$ کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $n = 3$ سے تین ملحوظ ہندسوں تک اور $n = 4$ سے پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہو گا۔

سوال 21.39: $\sin 0.26$ کو مساوات 21.17 کی مدد سے (الف) $n = 1$ لے کر اور (ب) $n = 2$ لے کر حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں پہلے دو ملحوظ ہندسے درست ہوں گے۔یوں موجودہ نتیجہ سوال 21.36 کے نتیجہ سے کم درست ہے۔ کیوں؟
جوابات: (الف) 0.258 27، (ب) 0.258 27

سوال 21.40: جدول 21.6 کو وسیع کرتے ہوئے (الف) $n = 3$ لے کر، (ب) $n = 4$ لے کر اور (پ) $n = 5$ لے کر مساوات 21.17 کی مدد سے $\sin 0.26$ کی قیمت تلاش کریں۔آپ کو $x = -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2$ پر $\sin x$ کی قیمتیں درکار ہوں گی اور مطابقتی فرق درکار ہوں گے۔سائن تفاعل کی کون سی خاصیت اس وسعت کو آسان بناتی ہے۔موجودہ نتائج سوال 21.38 کے نتائج سے کیوں کم ٹھیک ہیں؟
جوابات: (الف) 0.257 09، (ب) 0.257 05 اور (پ) 0.257 08؛ جواب (پ) پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔

سوال 21.41: دکھائیں کہ بہت کم محنت کے ساتھ کلیہ ایورٹ (مساوات 21.18) استعمال کرتے ہوئے $\sin 0.26 = 0.257\,07$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.42: مثال 21.9 میں کی گئی حساب کی تصدیق کریں۔

سوال 21.43: $f(2.0) = 1.414\,214$، $f(2.3) = 1.516\,575$ اور $f(2.6) = 1.612\,452$ استعمال کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی دو درجی باہمی تحریف کریں۔نتائج کا جدول 21.5 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جوابات: $f(x) \approx 0.566\,106 + 0.496\,098x - 0.036\,022x^2$

سوال 21.44: درج ذیل دکھائیں۔

$$\Delta^k f_n = \binom{k}{0} f_{n+k} - \binom{k}{1} f_{n+k-1} + - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} f_n$$

سوال 21.45: $f(1) = 2$، $f(2) = 11$ اور $f(4) = 77$ استعمال کرتے ہوئے عمومی کلیہ لیگرینج (مساوات 21.23) سے $f(3)$ تلاش کریں۔
جواب: $8x^2 - 15x + 9, \quad 36$

سوال 21.46: $\ln 8.5 = 2.140\,07$ لیں جبکہ $\ln 9.0$، $\ln 9.5$، $\ln 10$ کی قیمتیں مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔ $\ln 9.2$ کو (الف) $n = 3$ اور $x_0 = 8.8$ لیتے ہوئے مساوات 21.14 سے حاصل کریں؛ (ب) $n = 3$ اور $x_0 = 10$ لیتے ہوئے مساوات 21.17 سے حاصل کریں۔

سوال 21.47: $\ln 8.5 = 2.140\,07$ لیں جبکہ $\ln 9$ ، $\ln 10$ اور $\ln 11$ مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔اب $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 سے $\ln 9.2$ کی قیمت تلاش کریں۔حاصل جواب کا مثال 21.10 کے نتیجہ سے موازنہ کریں۔
جواب: $2.219\,21$ جو کم درست ہے چونکہ آخری ہندسہ میں 1 اکائی کا خلل ہے۔

سوال 21.48: سوال 21.46 میں دی گئی مواد استعمال کرتے ہوئے $\ln 9.2$ کی قیمت (الف) مساوات 21.18 استعمال کرتے ہوئے، (ب) $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 21.49: فرض کریں کہ $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $x_3 = x_0 + 3h$ ہیں اور $r = \frac{x - x_0}{h}$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $n = 3$ کے لئے ہم مساوات 21.23 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) \approx -\binom{r-1}{3} f_0 + \frac{r(r-2)(r-3)}{2} f_1 - \frac{r(r-1)(r-3)}{2} f_2 + \binom{r}{3} f_3$$

سوال 21.50: سوال 21.49 کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 21.48-ب کا نتیجہ دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 21.51: **(فرق کی جانچ پڑتال)** دکھائیں کہ قطار میں دیے گئے اندراجات کا مجموعہ گزشتہ قطر کی آخری اور پہلی اندراج کے فرق کے برابر ہو گا۔اس جزوی پرکھ کی جدول 21.3 پر اطلاق کریں۔

21.5 لچکدار منحنیات

ٹکڑوں میں تخمینی کثیر رکنی کو لچکدار منحنی کہتے ہیں۔اس کا مطلب ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر ہم دیے گیے تفاعل $f(x)$ کا تخمینی تفاعل $g(x)$ حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ ہم چاہیں گے کہ تخمینی تفاعل اصل تفاعل کے قریب سے قریب تر نمائندگی کرے۔ہم $g(x)$ کو حاصل کرنے کی خاطر وقفہ $a \le x \le b$ کو چھوٹے خانوں (ٹکڑوں)

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{21.25}$$

میں تقسیم کرتے ہیں جہاں خانوں کے سروں کو جوڑ[43] کہا جاتا ہے۔ہر خانے پر $g(x)$ کو ایک ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ خانے کی سروں پر $g(x)$ بار بار قابل تفرق ہو۔یوں پورے وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $f(x)$ کو تخمینی کثیر رکنی سے ظاہر کرنے کی بجائے ہم اس کو n عدد کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں حاصل تخمینی $g(x)$ باہمی تحریف میں بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر وقفہ $a \le x \le b$ کے ہر ایک خانے میں کثیر رکنی سے $g(x)$ کا ارتعاشی کم ہو گا۔ یوں حاصل تفاعل $g(x)$ کو **لچکدار منحنیات**[44] کہتے ہیں۔

ہم ہر خانے کا تخمینی خطی تفاعل استعمال کر سکتے ہیں لیکن ایسا تفاعل خانہ کی جوڑوں پر غیر استمراری ہو گا۔ایسا تفاعل جو وقفہ $a \le x \le b$ کے ہر نقطہ پر کئی بار قابل تفرق ہو بہتر ثابت ہوتا ہے۔

ہم کعبی لچکدار منحنیات پر غور کرتے ہیں جو عملی استعمال کے نقطہ نظر سے غالباً اہم ترین ہیں۔تعریف کی رو سے وقفہ $a \le x \le b$ پر مساوات 21.25 میں دیے گئے خانوں کے لحاظ سے **کعبی لچکدار منحنی**[45] $g(x)$ سے مراد استمراری تفاعل $g(x)$ ہے جس کے استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پورے وقفہ پر پائے جاتے ہوں اور جس کو ہر خانہ پر ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہو جس کا درجہ تین سے زیادہ نہ ہو۔یوں ہر خانہ میں $g(x)$ کو ایک کعبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جائے گا۔

اگر وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہو اور اس وقفہ کے خانے (مساوات 21.25) منتخب کیے گئے ہوں تب، گزشتہ حصہ کی طرح، $f(x)$ کی تخمینی کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوئے حاصل ہو گی۔

$$g(x_0) = f(x_0), \quad g(x_1) = f(x_1), \cdots \quad , g(x_n) = f(x_n) \tag{21.26}$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ ایسا کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ پایا جاتا ہے جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتا ہو۔اب اگر $g(x)$ درج ذیل بھی شرائط

$$g'(x_0) = k_0, \quad g'(x_n) = k_n \tag{21.27}$$

(جہاں k_0 اور k_n دیے گئی عدد ہیں) پر بھی پورا اترتا ہو تب $g(x)$ یکتا ہو گا۔درج ذیل مسئلہ لچکدار منحنی کی موجودگی اور یکتائی کو بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 21.2: **کعبی لچکدار منحنیات**
فرض کریں کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے اور اس وقفہ کے خانے مساوات 21.25 میں

[43] nodes
[44] splines or flexible curves
[45] cubic spline

دیے گئے ہوں اور فرض کریں کہ k_0 اور k_n کوئی دو عدد ہوں۔تب مساوات 21.25 کے لحاظ سے ایسا صرف اور صرف ایک کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ موجود ہو گا جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.27 کو مطمئن کرتا ہو۔

ثبوت : تعریف کی رو سے ہر خانہ I_j میں، جس کو $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ ظاہر کرتا ہے، لچکدار منحنی $g(x)$ اور کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ ایک جیسے ہوں گے اور درج ذیل کو مطمئن کریں گے۔

$$p_j(x_j) = f(x_j), \quad p_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) \tag{21.28}$$

ہم $\frac{1}{x_{j+1}-x_j} = c_j$ اور

$$p_j'(x_j) = k_j, \quad p_j'(x_{j+1}) = k_{j+1} \tag{21.29}$$

لکھتے ہیں جہاں a_0 اور a_n دیے گئے ہیں جبکہ $k_1, \cdots, k_{n-1}$ بعد میں حاصل کیے جائیں گے۔ $p_j(x)$ کو مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 میں دیے چار شرائط کو مطمئن کرنا ہو گا۔سیدھے حساب سے ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ ایسا کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} p_j(x) = & f(x_j)c_j^2(x-x_{j+1})^2[1+2c_j(x-x_j)] \\ & + f(x_{j+1})c_j^2(x-x_j)^2[1-2c_j(x-x_{j+1})] \\ & + k_jc_j^2(x-x_j)(x-x_{j+1})^2 \\ & + k_{j+1}c_j^2(x-x_j)^2(x-x_{j+1}) \end{aligned} \tag{21.30}$$

اس کا دو درجی تفرق درج ذیل دیگا۔

$$p_j'' = -6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) - 4c_jk_j - 2c_jk_{j+1} \tag{21.31}$$

$$p_j''(x_{j+1}) = -6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) + 2c_jk_j + 4c_jk_{j+1} \tag{21.32}$$

تعریف کی رو سے $g(x)$ کی استمراری دو درجی تفرق پائے جاتے ہیں۔اس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$p_{j-1}''(x_j) = p_j''(x_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1$$

مساوات 21.32 میں j کی جگہ $j-1$ اور مساوات 21.31 استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $n-1$ عدد مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$c_{j-1}k_{j-1} + 2(c_{j-1}+c_j)k_j + c_jk_{j+1} = 3[c_{j-1}^2\nabla f_j + c_j^2\nabla f_{j+1}] \tag{21.33}$$

جہاں $\nabla f_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$ اور $\nabla f_{j+1} = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ ہیں جبکہ $j = 1, \cdots, n-1$ ہے۔ اس $n-1$ عدد مساوات کے نظام کا حل $k_1, \cdots, k_{n-1}$ یکتا ہو گا چونکہ اس نظام کے تمام عددی سر غیر منفی ہیں اور مرکزی وتر پر ہر جزو، مطابقتی صف کے باقی اجزاء کے مجموعہ سے زیادہ ہے لہٰذا عددی سر قالب صفر نہیں ہو سکتا ہے۔اس طرح ہم جوڑ پر $g(x)$ کی یک درجی تفرق کے یکتا $k_1, \cdots, k_{n-1}$ حاصل کرتے ہیں۔اس طرح ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اس مسئلے کو ایک مثال کی مدد سے دیکھیں۔

مثال 21.11: **تخمینی لچکدار منحنی**
وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر $x_0 = -1$ ، $x_1 = 0$ اور $x_2 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^4$ کی ایسی تخمینی کعبی لچکدار منحنی تلاش کریں جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتی ہو اور $g'(-1) = f'(-1)$ ، $g'(1) = f'(1)$ ہوں۔
حل: ہمیں درج ذیل کے عددی سر تلاش کرنے ہوں گے۔

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$p_1(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$p_0(0) = p_1(0) = f(0) = 0$ سے $a_0 = b_0 = 0$ ملتے ہیں جبکہ $p_0'(0) = p_1'(0)$ سے $a_1 = b_1$ اور $p_0''(0) = p_1''(0)$ سے $a_2 = b_2$ حاصل ہوتے ہیں۔یوں

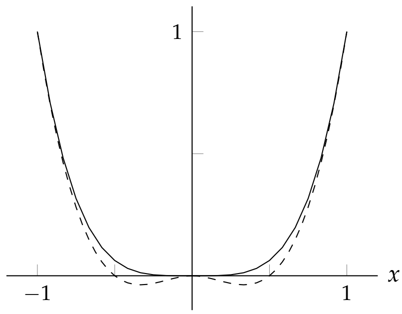
$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$
$$p_1(x) = b_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

ہو گا۔باقی چار عددی سروں کو باقی چار شرائط سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} p_0(-1) &= -a_3 + a_2 - a_1 = f(-1) = 1 \\ p_1(1) &= b_3 + a_2 + a_1 = f(1) = 1 \\ p_0'(-1) &= 3a_3 - 2a_2 + a_1 = f'(-1) = -4 \\ p_1'(1) &= 3b_3 + 2a_2 + a_1 = f'(1) = 4 \end{aligned} \tag{21.34}$$

اس نظام کا حل $a_1 = 0$ ، $a_2 = -1$ ، $a_3 = -2$ ، $b_3 = 2$ ہے۔یوں درکار لچکدار منحنی

$$g(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2 & -1 \le x \le 0 \\ 2x^3 - x^2 & 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{21.35}$$



شکل 21.6: تفاعل $f(x)$ اور (نقطہ دار) کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ (مثال 21.11)

ہو گی (شکل 21.6 میں نقطہ دار منحنی)۔ □

لچکدار منحنیات کی ایک دلچسپ کمتر خوبی ہے جس کو اب اخذ کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ مسئلہ 21.2 میں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر $f(x)$ استمراری ہے اور اس وقفہ پر $f(x)$ کے یک درجی اور دو درجی استمراری تفرق پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ مساوات 21.27 کی صورت درج ذیل ہے (مثال 21.11 کی طرح)۔

$$g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b) \tag{21.36}$$

تب a اور b پر $f' - g'$ صفر ہو گا۔ تکمل بالحصص سے

$$\int_a^b g''(x)[f''(x) - g''(x)] \,\mathrm{d}x = -\int_a^b g'''(x)[f'(x) - g'(x)] \,\mathrm{d}x$$

حاصل ہو گا۔ چونکہ وقفہ کے ہر چھوٹے حصے پر $g'''(x)$ مستقل ہے لہٰذا دائیں ہاتھ تکمل کو کسی ایک ٹکڑے پر حاصل کرتے ہوئے $c[f(x) - g(x)]$ ملتا ہے جہاں c مستقل ہے اور تکمل کی یہ قیمت ٹکڑے کے سروں پر حاصل کی جائے گی جو مساوات 21.26 کی بنا صفر حاصل ہو گی۔ چونکہ ہر ٹکڑے پر تکمل صفر ہے لہٰذا پورے وقفے پر تکمل صفر ہو گا۔ اس طرح درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f''(x) g''(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b g''(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

نتیجتاً

$$\int_a^b [f''(x) - g''(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x - 2\int_a^b f''(x)g''(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b g''(x)^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x - \int_a^b g''(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔ بائیں ہاتھ متکمل غیر منفی ہے لہٰذا تکمل بھی غیر منفی ہو گا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g''(x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{21.37}$$

اس نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 21.3: **کعبی لچکدار منحنی کی کمتر خاصیت**
فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ اور اس کے یک درجی اور دو درجی تفرق استمراری ہوں۔ فرض کریں کہ اس وقفہ کے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $g(x)$ مطابقتی کعبی لچکدار منحنی ہو جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.36 کو مطمئن کرتی ہو۔ تب $f(x)$ اور $g(x)$ مساوات 21.37 کو مطمئن کریں گے جس میں علامت مساوات $(=)$ اس صورت کو ظاہر کرتی ہے جب $f(x)$ کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ ہو۔

سوالات

سوال 21.52: تصدیق کریں کہ مساوات 21.30 میں دیا گیا $p_j(x)$ مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 21.53: مساوات 21.31 اور مساوات 21.32 کو مساوات 21.30 سے اخذ کریں۔

سوال 21.54: مثال 21.11 پر غور کریں۔ دکھائیں کہ مثال میں دی گئی شرائط کے تحت مساوات 21.30 درج ذیل دے گی

$$p_0(x) = -2x^3 - x^2 + k_1 x(x+1)^2$$
$$p_1(x) = \quad 2x^3 - x^2 + k_1 x(x-1)^2$$

جبکہ مساوات 21.33 سے $k_1 = 0$ حاصل ہو گا اور یوں مساوات 21.35 حاصل ہو گی۔

سوال 21.55: مثال 21.11 میں کعبی لچکدار منحنی کا موازنہ پورے وقفہ پر دو درجی تخمینی کثیر رکنی $p(x)$ کے ساتھ کریں۔ $f(x)$ سے $g(x)$ اور $p(x)$ کی زیادہ سے زیادہ انحراف کتنی ہیں۔

سوال 21.56: مساوات 21.34 میں دیے گئے نظام کا حل تلاش کریں۔

سوال 21.57: دکھائیں کہ وقفہ کے خانوں کے لحاظ سے کعبی لچکدار منحنیات سمتی فضا (حصہ 7.4) بناتے ہیں۔

سوال 21.58: دکھائیں کہ وقفہ کے دیے گئے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $n+1$ یکتا کعبی لچکدار منحنیات $g_0(x), \cdots, g_n(x)$ موجود ہوں گی جو $g_j'(a) = g_j'(b) = 0$ اور

$$g_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

کو مطمئن کریں گی۔
جواب: مسئلہ 21.2 سے ایسا اخذ ہوتا ہے۔

سوال 21.59: دکھائیں کہ اگر ایک لچکدار منحنی تین بار قابل تفرق ہو تب یہ ضرور کثیر رکنی ہو گا۔

سوال 21.60: ایسا ممکن ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ کی دو قریبی خانوں کی لچکدار منحنیات ایک جیسی ہوں۔اس طرز کی لچکدار منحنیات دیکھنے کی خاطر وقفہ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کی خانوں $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \sin x$ کی ایسی لچکدار منحنیات تلاش کریں جو $g'(-\frac{\pi}{2}) = f'(-\frac{\pi}{2})$ اور $g'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})$ کو مطمئن کرتی ہوں۔
جواب: $g(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x$

سوال 21.61: مساوات 21.37 کی جیومیٹریائی مطلب کچھ یوں ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ لچکدار منحنی، مربع انحنا کے تکمل کی قیمت کو کم کرنے کی کوشش کرتی ہے۔اس پر بحث کریں۔

21.6 اعدادی تکمل اور تفرق

اعدادی تکمل[46] سے مراد قطعی تکمل

$$J = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \tag{21.38}$$

کی اعدادی قیمت کی تلاش ہے جہاں a اور b دیے گئے ہوں گے اور f دیا گیا تفاعل یا تفاعل کی قیمتوں کا جدول ہو گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم ایسا قابل تفرق تفاعل F تلاش کر سکیں جس کا تفرق f ہو تب J کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

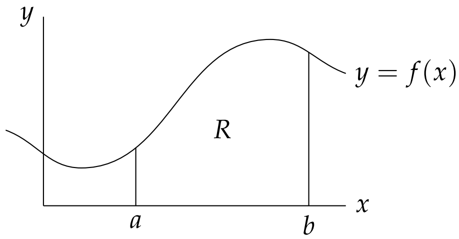
$$J = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)]$$

انجینئری میں عموماً ایسے تکمل پائے جاتے ہیں جن کا متکمل جدول کی صورت میں ہو گا یا تکمل کو متناہی تعداد کے بنیادی تفاعل کی صورت میں ظاہر کرنا نا ممکن ہو گا اور یا F کی صریح صورت پیچیدہ اور غیر مفید ثابت ہو گی۔ ایسی صورتوں میں اعدادی تکمل کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

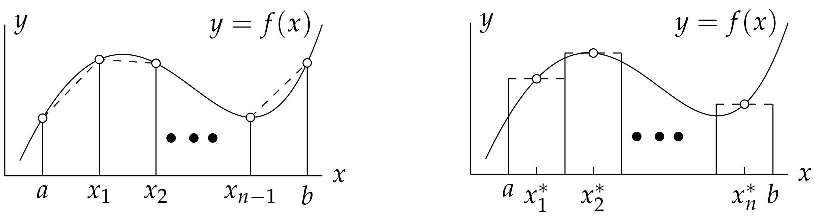
چونکہ وقفہ $a \le x \le b$ میں تفاعل $f(x)$ کے نیچے خطہ R کا رقبہ J ہے (شکل 21.7) لہٰذا ہم گتے سے R کی شکل کاٹ کر، گتے کی اس ٹکڑے کے وزن کو اکائی رقبہ گتے کی وزن سے تقسیم کرتے ہوئے R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم **کاغذ ترسیم**[47] پر R کی شکل بنا کر ڈبے گن کر بھی R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ رقبہ کی بہتر ناپ کے لئے **سطح پیما**[48] کا استعمال ضروری ہو گا۔

متکمل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہوئے اعدادی تراکیب بنائے جا سکتے ہیں۔ سادہ ترین کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم تکمل کے وقفہ کو $h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n عدد برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ٹکڑے پر تفاعل کو مستقل تفاعل $f(x_j^*)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں x_j^* ٹکڑے کا وسطی نقطہ ہے (شکل 21.8-الف)۔ یوں f

numerical integration[46]
graph paper[47]
planimeter[48]



شکل 21.7: قطعی تکمل کی جیو میٹریائی معنی



(ب) ذوزنقہ قاعدہ

(الف) مستطیل قاعدہ

شکل 21.8: اعدادی تکمل

کو **سیڑھی تفاعل**[49] (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ظاہر کرے گی۔ شکل 21.8-الف کے n مستطیلوں کے انفرادی رقبے $hf(x_1^*), \cdots, hf(x_n^*)$ ہیں جن کا مجموعہ اعدادی تکمل کا **مستطیل قاعدہ**[50]

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)], \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right) \tag{21.39}$$

دیتی ہے۔

---

step function[49]
rectangular rule[50]

تفاعل f کو ٹکڑوں میں خطی قطعات (شکل 21.8-ب) سے ظاہر کرنے سے اعدادی تکمل کا **ذوزنقہ قاعدہ**[51]

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x+2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)] \tag{21.40}$$

حاصل ہو گا جہاں $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $x_0\,(=a), x_1, x_2, c\ldots, x_{n-1}, x_n\,(=b)$ وہی نقطے ہیں جو مساوات 21.40 میں استعمال کیے گئے ہیں۔یوں $x_j = x_0 + jh$ ہو گا۔شکل 21.8-ب کے n ذوزنقہ کے انفرادی رقبے

$$\tfrac{1}{2}[f(a) + f(x_1)]h, \quad \tfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]h, \quad \cdots, \tfrac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(b)]h$$

ہیں جن کا مجموعہ مساوات 21.40 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

J^* میں خلل (حصہ 21.1) ϵ درج ذیل ہو گا۔

$$\epsilon = J^* - J$$

اگر $f(x)$ خطی تفاعل ہو تب $\epsilon = 0$ ہو گا اور تمام x کے لئے f' مستقل اور f'' صفر ہو گا۔عین ممکن ہے کہ کسی عمومی تفاعل f (جس کا استمراری دو درجی تفرق پایا جاتا ہو) کی صورت میں ہم **حد خلل**[52] (یعنی خلل ϵ کی حد) تلاش کر سکیں جو f'' پر منحصر ہو۔اس خاطر ہم b کی جگہ متغیر t لیتے ہوئے مساوات 21.40 کا اطلاق $n = 1$ کے لئے کرتے ہیں۔تب مطابقتی خلل

$$\epsilon(t) = \frac{t-a}{2}[f(a) + f(t)] - \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon(a) = 0$ ہے جو ایک غیر دلچسپ نتیجہ ہے۔تفرق لینے سے

$$\epsilon'(t) = \frac{1}{2}[f(a) + f(t)] + \frac{t-a}{2}f'(t) - f(t)$$

حاصل ہو گا۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon'(a) = 0$ ہے۔مزید ایک بار تفرق لینے سے

$$e''(t) = \frac{1}{2}(t-a)f''(t)$$

---

[51] trapezoidal rule
[52] error bound

حاصل ہو گا جس میں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 پر کرنے سے وقفے پر تمام t کے لئے حد خلل

$$\frac{1}{2}(t-a)M_2^* \leq \epsilon''(t) \leq \frac{1}{2}(t-a)M_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ a تا t تکمل لینے سے

$$\frac{1}{4}(t-a)^2M_2^* \leq \epsilon'(t)-\epsilon'(a) \leq \frac{1}{4}(t-a)^2M_2$$

حاصل ہو گا جس میں $\epsilon'(a)=0$ اور $\epsilon(a)=0$ پر کرتے ہوئے دوبارہ تکمل لے کر $t=a+h$ لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{12}h^3M_2^* \leq \epsilon(a+h) \leq \frac{1}{2}h^3M_2$$

باقی $n-1$ ٹکڑوں کے خلل کے لئے اسی طرح کے $n-1$ عدد مطابقتی عدم مساوات حاصل ہوں گے۔ان تمام n عدم مساوات کا مجموعہ a تا b تکمل کے لئے خلل ϵ کی عدم مساوات دے گا۔چونکہ $h=\frac{b-a}{n}$ ہے لہٰذا ہمیں

$$KM_2^* \leq \epsilon \leq KM_2, \qquad \left[K=\frac{(b-a)^3}{12n^2}\right] \tag{21.41}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے وقفہ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 ہے۔

مثال 21.12: ذوزنقہ قاعدہ۔ تخمینہ خلل

$n=10$ لیتے ہوئے تکمل $J=\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت مساوات 21.40 کی مدد سے حاصل کریں۔جدول 21.7 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$J \approx 0.1(0.5\cdot 1.367\,879+6.778\,167)=0.746\,211$$

چونکہ $f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$ ہے لہٰذا

$$M_2^*=f''(0)=-2, \quad M_2=f''(1)=0.735\,759$$

ہوں گے۔مزید $K=\frac{1}{1200}$ ہے لہٰذا مساوات 21.41 کے تحت

$$-0.001\,667 \leq \epsilon \leq 0.000\,614$$

جدول 21.7: جدول برائے مثال 21.12

J	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$	
0	0	0	1.000 000	
1	0.1	0.01		0.990 050
2	0.2	0.04		0.960 789
3	0.3	0.09		0.913 931
4	0.4	0.16		0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801
6	0.6	0.36		0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626
8	0.8	0.64		0.527 292
9	0.9	0.81		0.444 858
10	1.0	1.00	0.367 879	
		مجموعہ	1.367 879	6.778 167

ہو گا۔یوں J کی درست قیمت

$0.746\,211 + 0.001\,667 = 0.747\,878$ اور $0.746\,211 - 0.000\,614 = 0.745\,597$

کے درمیان ہو گی۔ (چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 0.746 824 ہے۔) □

f کی ٹکڑوں میں مستقل تخمین سے مستطیل قاعدہ (مساوات 21.39) حاصل ہوا جبکہ f کی ٹکڑوں میں خطی تخمین سے ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) حاصل ہوا۔ ٹکڑوں میں دو درجی تخمین سے **قاعدہ سمسن**[53] اخذ ہو گا جو، سادہ ہونے کے باوجود، عموماً مسئلوں کا کافی درست جواب دیتا ہے۔ قاعدہ سمسن اخذ کرنے کی خاطر ہم وقفہ $a \le x \le b$ کو ایک جیسی لمبائیوں کے جفت تعداد کی ٹکڑوں، مثلاً $2n$ ، میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $x_0\,(a), x_1, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}\,(b)$ ہوں گے۔ ہم پہلی دو ٹکڑوں کو لیتے ہیں اور $f(x)$ کو وقفہ $x_0 \le x \le x_0 + 2h$ میں نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی لیگرینج کثیر رکنی

[53]برطانوی ریاضی دان طامس سمسن [1710-1761]

$p_2(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں f_j سے مراد $f(x_j)$ ہے۔ مساوات 21.23 سے

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2 \tag{21.42}$$

ہو گا جہاں نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ اور $2h^2$ کے برابر ہیں۔ $s=\frac{x-x_1}{h}$ لکھتے ہوئے $x-x_0=(s+1)h$ ، $x-x_1=sh$ اور $x-x_2=(s-1)h$ ہوں گے۔یوں

$$p_2(x)=\frac{1}{2}s(s-1)f_0-(s+1)(s-1)f_1+\frac{1}{2}(s+1)sf_2 \tag{21.43}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب ہم x کے ساتھ x_0 تا x_2 تکمل لیتے ہیں جو s کے ساتھ -1 تا 1 تکمل کے مترادف ہے۔چونکہ $\mathrm{d}x=h\,\mathrm{d}s$ ہے لٰہذا

$$\int_{x_0}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}x\approx\int_{x_0}^{x_2}p_2(x)\,\mathrm{d}x=h\Big(\frac{1}{3}f_0+\frac{4}{3}f_1+\frac{1}{3}f_2\Big)$$

ہو گا۔اگلے دو ٹکڑوں، x_2 تا x_4 ، اور باقی دو دو ٹکڑوں کے لئے بھی اسی طرح کے نتائج حاصل ہوں گے۔ان تمام n عدد نتائج کا مجموعہ **قاعدہ سمسن**[54]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\cdots+2f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}) \tag{21.44}$$

دے گا جہاں $h=\frac{b-a}{2n}$ اور $f_j=f(x_j)$ ہیں۔ تکمل کے وقفہ میں f کے چار درجی تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کرتے ہوئے مساوات 21.44 کی حد خلل ϵ_S کو ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) کے خلل کی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ نتیجہ درج ذیل ہے

$$CM_4^*\le\epsilon_S\le CM_4 \qquad [C=\tfrac{(b-a)^5}{180(2n)^4}] \tag{21.45}$$

جہاں تکمل کے وقفہ پر f کی چار درجہ تفرق کی زیادہ سے زیادہ قیمت M_4 اور کم سے کم قیمت M_4^* ہے۔

مثال 21.13: قاعدہ سمسن۔ تخمینہ حد خلل

$2n=10$ لیتے ہوئے تکمل $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔حد خلل کا تخمینہ بھی حاصل کریں۔چونکہ $h=0.1$ ہے، جدول 21.8 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J\approx\frac{0.1}{3}(1.367\,879+4\cdot 3.740\,266+2\cdot 3.037\,901)=0.746\,825$$

---

[54] Simpson's rule

جدول 21.8: جدول برائے مثال 21.44

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$		
0	0.0	0.00	1.000 000		
1	0.1	0.01		0.990 050	
2	0.2	0.04			0.960 789
3	0.3	0.09		0.913 931	
4	0.4	0.16			0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801	
6	0.6	0.36			0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626	
8	0.8	0.64			0.527 292
9	0.9	0.81		0.444 858	
10	1.0	1.00	0.367 879		
مجموعہ			1.367 879	3.740 266	3.037 901

تخمینہ حد خلل: چار درجی تفرق $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ ہے جس کی وقفہ تکمل میں کم سے کم قیمت $x = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ پر $M_4^* = f^{(4)}(x^*) = -7.359$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 0$ پر $M_4 = f^{(4)}(0) = 12$ حاصل ہوتی ہیں۔ چونکہ $2n = 10$ اور $b - a = 1$ ہیں لہٰذا $C = \frac{1}{800\,000} = 0.000\,000\,56$ ہو گا۔ یوں

$$-0.000\,004 \le \epsilon_S \le 0.000\,006 \quad \text{اور} \quad 0.746\,818 \le J \le 0.746\,830$$

ہوں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ تخمین سے کم از کم چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ حقیقت میں موجودہ جواب پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے چونکہ چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $J = 0.746\,824$ ہے۔

غور کریں کہ مثال 21.12 میں حاصل نتیجہ سے موجودہ نتیجہ بہت زیادہ بہتر ہے اگرچہ ہمیں دونوں مثالوں میں تقریباً ایک جتنا کام کرنا پڑا ہے۔ □

قاعدہ سمسن سے حاصل نتائج کی درستگی عموماً انجینئری مسئلوں کے لئے کافی ہوتی ہیں۔ اسی لئے کمپیوٹر سے اعدادی تکمل کے حصول میں زیادہ درستگی کے کلیوں کی بجائے ترکیب سمسن کو زیادہ ترجیح دی جاتی ہے۔ زیادہ طاقت کی کثیر رکنی استعمال کرتے ہوئے زیادہ درستگی کے کلیات حاصل کیے جاتے ہیں۔ ہم یہاں دو ایسی کلیات کا ذکر کرتے ہیں جو بعض

اوقات مفید ثابت ہوتی ہیں۔ نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی کعبی سے **قاعدہ آٹھ میں سے تین**

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \tag{21.46}$$

حاصل[55] ہوتا ہے جو کعبی کثیر رکنی کی صورت (مثلاً قاعدہ سمسن) میں بالکل درست ثابت ہوتا ہے۔مزید وقفہ کی طاق ٹکڑوں (جو 3 سے قابل تقسیم ہو) پر اس قاعدہ کو لاگو کیا جا سکتا ہے۔ چھ درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) تا (x_6, f_6) سے گزرتی ہو سے پیچیدہ عددی سر والا کلیہ حاصل ہوتا ہے البتہ اسی قسم کا ایک اور کلیہ جس کی درستگی نسبتاً کم ہے اور جس کو **قاعدہ ویڈل**[56] کہتے ہیں درج ذیل ہے۔

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,\mathrm{d}x =\approx \frac{3h}{10}(f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6) \tag{21.47}$$

تکمل کے جن اعدادی کلیات پر بحث کی گئی ان میں تکمل کے وقفہ کو برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا اور یہ تراکیب کسی مخصوص طاقت تک کثیر رکنی کی صورت میں بالکل درست جواب حاصل کرتے ہیں۔ خطی تبادل پیما استعمال کرتے ہوئے a اور b کو بالترتیب -1 اور 1 پر منتقل کرتے ہوئے زیادہ عمومی طور پر

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f_j \qquad [f_j = f(x_j)] \tag{21.48}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں ہم ایسے $2n$ مستقل A_1 تا A_n اور x_1 تا x_n حاصل کر سکتے ہیں کہ کثیر رکنی کا درجہ m جتنا چاہیں بڑا ہو، مساوات 21.48 بالکل درست جواب دے۔ چونکہ درجہ $2n-1$ کثیر رکنی کے عددی سروں کی تعداد $2n$ ہے لہٰذا $m \le 2n-1$ ہو گا۔گاؤس کے تحت اس صورت درجہ $2n-1$ کثیر رکنی کے لئے بالکل درست جواب حاصل ہو گا جب $x_1, \cdots, x_n$ درجہ n **لیژانڈر کثیر رکنی**[57] (حصہ 5.2)

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} x^{n-4} - + \cdots$$

---

[55] three-eight's rule
[56] Weddle's rule
[57] Legendre polynomial

یعنی

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \cdots$$

کے n صفر ہوں اور A_j کی موزوں قیمتیں منتخب کی جائیں۔ ایسی صورت میں مساوات 21.48 کو **گاوسی کلیہ تکمل**[58] کہتے ہیں۔ اگرچہ یہ کلیہ بہت درست نتائج دیتا ہے لیکن اس میں $x_1, \cdots, x_n$ کی غیر یکساں فاصلے دشواری کا سبب بنتے ہیں۔

چونکہ مساوات 21.48 میں مستعمل آخری سر -1 اور 1 کثیر رکنی $P_n(x)$ کے صفر نہیں ہیں (یہ دونوں $x_1, \cdots, x_n$ میں شامل نہیں ہیں) لہٰذا گاوسی کلیہ تکمل **کھلا کلیہ**[59] کہلاتا ہے۔ یوں **بند کلیہ**[60] میں وقفہ تکمل کے سر بھی شامل ہوں گے (مثال کے طور پر مساوات 21.40، مساوات 21.44، مساوات 21.46 اور مساوات 21.47 بند کلیات ہیں)۔

باہمی تحریف کی طرح اعدادی تکمل کو بھی فرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ایک انتہائی موثر کلیہ درج ذیل **گاوسی وسطی فرق کلیہ**[61] ہے۔

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\Big(f_0 + f_1 - \frac{\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1}{12} + \frac{11(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)}{720}\Big) \tag{21.49}$$

اعدادی تفرق

جدول کی صورت میں دیے تفاعل کے تفرق کا تخمینہ اعدادی طریقہ سے حاصل کرنے کو **اعدادی تفرق**[62] کہتے ہیں۔ جہاں ممکن ہو وہاں اعدادی تفرق سے گریز کریں چونکہ اعدادی تفرق کی درستگی جدول میں دیے قیمتوں کی درستگی سے کم ہو گی۔ در حقیقت تفرق کے حصول میں ہم دو بڑی قیمتوں کے فرق کو ایک چھوٹی قیمت سے تقسیم کرتے ہیں۔؛ مزید اگر تفاعل کثیر رکنی p کی صورت میں دیا گیا ہو تب تفاعل کی قیمتوں میں فرق کم ہو سکتا ہے جبکہ تفرق کی قیمت بہت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اعدادی تفرق ایک نازک عمل ہے۔ اس کے برعکس اعدادی تکمل ہمواری کا عمل ہے لہٰذا اعدادی تکمل پر تفاعل کی قیمتوں میں خلل کا بہت زیادہ اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

---

[58] Gaussian integration formula
[59] open formula
[60] closed formula
[61] central-difference formula by Gauss
[62] numerical differentiation

ہم $f'_j = f'(x_j)$ ، $f''_j = f''(x_j)$ ، ... لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ہم تفرق کا تخمینہ درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اس کو دیکھ کر ہم یک درجی تفرق کے لئے

$$f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h} \tag{21.50}$$

لکھتے ہیں۔اسی طرح دو درجی تفرق کو

$$f''_1 \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} \tag{21.51}$$

لکھا جا سکتا ہے۔بلند درجی تفرق کے لئے اسی طرح کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

موزوں لیگرینج کثیر رکنی کی تفرق سے تفرق کا بہتر تخمینہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 21.42 کا تفرق لینے سے

$$f(x) \approx p'_2(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2$$

حاصل ہوتا ہے جہاں یاد رہے کہ مساوات 21.42 کے نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ ، $2h^2$ ہیں۔اس کی قیمت x_0 ، x_1 اور x_2 پر حاصل کرتے ہوئے **تین نقاطی کلیہ**[63]

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) \quad f'_0 \approx \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)\\
&(\text{ب}) \quad f'_1 \approx \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2)\\
&(\text{پ}) \quad f'_2 \approx \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2)
\end{aligned} \tag{21.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔پانچ نقاطی لیگرینج کثیر رکنی سے اسی طرح بالخصوص درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$f'_2 \approx \frac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) \tag{21.53}$$

---

[63] three point formula

سوالات

تکمل کے کلیات کی یاد دہانی کی خاطر سوال 21.62 تا سوال 21.70 حل کریں۔

سوال 21.62: $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

سوال 21.63: $\int \cos^2 \omega x \, \mathrm{d}x$

سوال 21.64: $\int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x$

سوال 21.65: $\int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x$

سوال 21.66: $\int \tan kx \, \mathrm{d}x$

سوال 21.67: $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

سوال 21.68: $\int \frac{\mathrm{d}x}{k^2+x^2}$

سوال 21.69: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

سوال 21.70: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)^2}$

سوال 21.71: $n = 5$ لیتے ہوئے مساوات 21.39 کی مدد سے مثال 21.12 حل کریں۔

سوال 21.72: $n = 5$ لیتے ہوئے مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 کی مدد سے $\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔ خلل کتنا ہو گا؟
جواب: $0.245, \; \epsilon = -0.005$

سوال 21.73: $n = 5$ لیتے ہوئے سوال 21.72 کو ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 سے حل کریں۔ مساوات 21.41 سے حد خلل کیا حاصل ہوں گے؟ نتائج کے حقیقی حد خلل کیا ہیں؟ ان میں فرق کیوں ہے؟

سوال 21.74: $2n=4$ لیتے ہوئے سمسن قاعدہ سے $\ln 2=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ کا تخمینہ حاصل کریں۔حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔
جواب:

$$\ln 2 \approx 0.693\,25,\ M_4^*=0.75, M_4=0.24,\ 0.000\,016<\epsilon_S<0.000\,53,\\ 0.692\,72<\ln 2<0.693\,24$$

سوال 21.75: $2n=10$ لیتے ہوئے سمسن قاعدہ سے $\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x$ کا تخمینہ حاصل کریں۔حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔نتیجے کی اصل حد خلل کیا ہے؟

سوال 21.76 تا سوال 21.79 میں $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ سائن تفاعل کی پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست قیمتیں استعمال کریں۔

سوال 21.76: مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 استعمال کریں اور $n=5$ لیں۔
جواب: 0.9466

سوال 21.77: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n=5$ لیں۔

سوال 21.78: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n=10$ لیں۔
جواب: 0.9458

سوال 21.79: $2n=2$ اور $2n=10$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن استعمال کریں۔

سوال 21.80: ایسے α اور β تلاش کریں کہ ایک درجی کثیر رکنی کے لئے

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx h[\alpha f(x_n)+\beta f(x_{n+1})], \qquad h=x_{n+1}-x_n$$

بالکل درست ہو۔کونسا کلیہ اخذ ہوتا ہے؟
جواب: $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ ذوزنقہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.81: اگر $f(x)$ دو درجی کثیر رکنی ہو تب دکھائیں کہ مساوات 21.50 بالکل درست ہے۔اس کا کیا جیومیٹریائی مطلب ہے؟

سوال 21.82: مساوات 21.52 حاصل کریں۔

سوال 21.83: مساوات 21.53 اخذ کریں۔

سوال 21.84: $x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.2$ ، $x_2 = 0.4$ ، $x_3 = 0.6$ ، $x_4 = 0.8$ کے لئے $f(x) = x^4$ پر غور کریں۔ مساوات 21.52-الف، ب اور پ سے f_2' حاصل کریں۔ خلل تلاش کریں۔
جواب: $0.080, 0.320, 0.176, 0.256$

سوال 21.85: تفرق کا چار نقطی کلیہ درج ذیل ہے۔

$$f_2' \approx \frac{1}{6h}(-2f_1 - 3f_2 + 6f_3 - f_4)$$

$x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.2$ ، $x_2 = 0.4$ ، $x_3 = 0.6$ ، $x_4 = 0.8$ کے لئے $f(x) = x^4$ پر اس کلیہ کو لاگو کریں۔ حد خلل تلاش کریں۔ مساوات 21.53 سے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 21.86: $f'(x)$ کو یک درجی اور مزید زیادہ بلند درجی فرق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + - \cdots)$$

r کے ساتھ مساوات 21.14 کا تفرق لیتے ہوئے اس کلیہ کو حاصل کریں۔ مساوات 21.14 کا r کے ساتھ تفرق

$$hf'(x) \approx \Delta f_0 + \frac{2r-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3r^2 - 6r + 2}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots$$

ہے، جہاں $x = x_0 + rh$ ہے، اور آپ کو $r = 0$ پر کرنا ہو گا۔ (الف) یک درجی فرق تک، (ب) دو درجی فرق تک، (پ) تین درجی فرق تک، (ت) چار درجی فرق تک شامل کرتے ہوئے اس کلیہ سے سوال 21.84 کے $f'(0.4)$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $0.52, 0.080, 0.304, 0.256$

21.7 یک درجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

ہم باب 1 سے جانتے ہیں کہ $F(x, y, y') = 0$ جس کو عموماً $y' = f(x, y)$ لکھنا ممکن ہو گا، یک درجی تفرقی مساوات ہے۔ ابتدائی قیمت مسئلہ[64] سے مراد ایک تفرقی مساوات اور ایک ایسی شرط ہے جس کو (بلند درجی

[64] initial value problem

تفرقی مسئلے کی صورت میں ایک ہی x پر ایسی کئی شرائط ہوں گے جنہیں) تفرقی مساوات کا حل مطمئن کرتا ہو۔اس حصہ میں ہم درج ذیل روپ کی ابتدائی قیمت مسئلہ پر غور کرتے ہیں

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{21.54}$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی وقفہ جس پر x_0 پایا جاتا ہو میں f کا یکتا حل موجود ہے۔ہم اس ابتدائی مسئلے کے حل کی اعدادی تراکیب تلاش کرتے ہیں۔

اگر ہم اس مسئلے کے حل کا کلیہ اخذ کر سکیں تب کلیہ سے اعدادی جوابات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔اگر حل کا کلیہ بہت پیچیدہ ہو یا ایسا کلیہ موجود ہی نہ ہو تب ہم اس حصے کے اعدادی تراکیب استعمال کر سکتے ہیں۔

یہ تراکیب **قدم با قدم تراکیب**[65] ہیں جن میں ہم $y_0 = y(x_0)$ سے شروع کرتے ہوئے قدم با قدم آگے بڑھتے ہیں۔پہلی قدم پر ہم $x = x_1 = x_0 + h$ پر مساوات 21.54 کے حل y کا تخمینہ y_1 حاصل کرتے ہیں۔دوسری قدم پر ہم $x = x_2 = x_0 + 2h$ پر اس حل کا تخمینہ y_2 حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔یہاں h ایک مقررہ مستقل ہے مثلاً 0.2 یا 0.1 اور یا 0.01 ؛ مستقل h منتخب کرنے کی اصول پر اسی حصے میں غور کیا جائے گا۔

ہر قدم پر ایک ہی جیسی (کلیات) حساب دہرائی جاتی ہے۔ان کلیات کو ٹیلر تسلسل

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \cdots$$

سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 21.54 سے $y' = f$ حاصل ہوتا ہے جس کا تفرق

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

دیتا ہے۔اسی طرح بلند درجی تفرق کے کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔یوں ٹیلر تسلسل کو

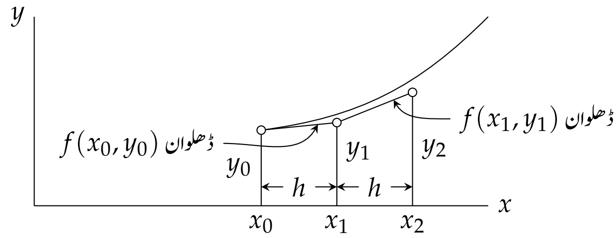
$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}f' + \frac{h^3}{6}f'' + \cdots \tag{21.55}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں f ، f' ، f'' ، . . . کی قیمتیں $(x, y(x))$ پر لی جائیں گی۔ h کی چھوٹی قیمتوں کے لئے h^2 ، h^3 ، . . . قابل نظر انداز ہوں گے۔یوں مساوات 21.55 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$y(x+h) \approx y(x) + hf$$

---

[65] step by step method



شکل 21.9: ترکیب یولر

پہلی قدم میں ہم

$$y_1 = y_0 + h(x_0, y_0)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_1) = y(x_0 + h)$ کا تخمینہ ہو گا۔دوسری قدم میں ہم

$$y_2 = y_1 + h(x_1, y_1)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ کا تخمینہ ہو گا۔اسی طرح قدم با قدم چلتے ہوئے تمام تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔کسی بھی قدم کی عمومی مساوات

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{21.56}$$

ہو گی۔اس قدم با قدم ترکیب کو **ترکیب یولر**[66] یا **یولر کوشی ترکیب**[67] کہتے ہیں۔ جیومیٹریائی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کی جگہ اس کی ایسی تخمینی کثیر الاضلاع استعمال کی جاتی ہے جس کا پہلا بازو نقطہ x_0 پر منحنی کا مماس ہو (شکل 21.9)۔

مساوات 21.55 میں مستقل کے علاوہ اکائی طاقت کا h لے کر ترکیب یولر حاصل کی گئی للہذا ترکیب یولر کو **درجہ اول ترکیب**[68] کہتے ہیں۔مساوات 21.55 کے باقی اجزاء کو رد کرنے کی وجہ سے حل میں خلل پیدا ہوتا ہے جس کو اس ترکیب کی **قطع چال خلل** کہتے ہیں۔ h کی چھوتی قیمت کی صورت میں h^3 ، h^4 ، وغیرہ کی قیمت h^2 کی قیمت سے بہت کم ہوں گی للہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ فی قدم قطع چال خلل کا درجہ h^2 ہے۔ اس کے علاوہ اس ترکیب میں اور دیگر تراکیب میں **تعداد ہندسہ خلل** بھی پائے جائیں گے جن کی بنا n بڑھانے سے y_1 ، y_2 ، . . . کی قیمتوں میں خلل بتدریج بڑھتا جائے گا۔اس حقیقت پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

---

[66] Euler method
[67] Euler-Cauchy method
[68] first order method

جدول 21.9: جدول برائے مثال 21.14

n	x_n	y_n	$0.2(x_n+y_n)$	درست حل	حتمی خلل
0	0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.1	0.000	0.040	0.021	0.021
2	0.2	0.040	0.088	0.092	0.052
3	0.3	0.128	0.146	0.222	0.094
4	0.4	0.274	0.215	0.426	0.152
5	0.5	0.489		0.718	0.229

مثال 21.14: ترکیب یولر
ترکیب یولر سے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

حل: ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہوئے y_1 تا y_5 حاصل کرتے ہیں۔یہاں $f(x, y) = x + y$ ہے لہٰذا مساوات 21.56 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n, y_n)$$

جدول 21.9 میں ترکیب یولر سے حاصل نتائج کے ساتھ ساتھ مساوات 1.59 سے حاصل بالکل درست حل

$$y(x) = e^x - x - 1$$

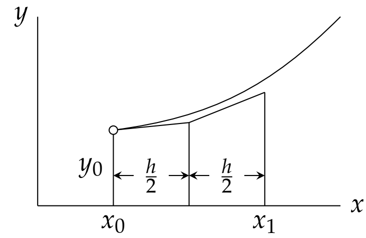
کی قیمتیں اور خلل بھی دی گئی ہیں۔موجودہ مثال میں ہمیں اصل حل بھی معلوم ہے لہٰذا ہم ترکیب یولر کی درستگی کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔ h کی مختلف قیمتیں لے کر آپ ترکیب یولر سے حاصل نتائج کا اصل حل کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں۔ □

مساوات 21.55 کے زیادہ اجزاء شامل کرتے ہوئے بہتر اعدادی تراکیب حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ایسے کلیات میں عموماً $f(x, y)$ کی تفرق سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر تفرق کو دیگر موزوں نقطوں پر $f(x, y)$ کی قیمتوں سے حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں ایسی دو تراکیب پر غور کرتے ہیں۔

ایسی پہلی ترکیب کو بہتر ترکیب یولر[69] یا یولر کوشی کی بہتر ترکیب کہتے ہیں۔اس ترکیب کی پہلی قدم میں ہم پہلے ذیلی قیمت

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{21.57}$$

[69] improved Euler method



شکل 21.10: بہتر ترکیب یولر

اور بعد میں نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})] \tag{21.58}$$

حاصل کرتے ہیں۔

یہ ترکیب ایک سادہ جیومیٹریائی مطلب رکھتی ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقفہ x_n تا $x_n + \frac{1}{2}h$ تک ہم حل کو تخمیناً ایسی قطع سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_n, y_n) سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $f(x_n, y_n)$ ہو جبکہ باقی وقفہ، یعنی $x_n + \frac{1}{2}h$ تا x_n تک، ہم قطع کی ڈھلوان $f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$ لیتے ہیں (شکل 21.10 جہاں $n = 0$ ہے)۔

بہتر ترکیب یولر کے ہر قدم پر پہلے مساوات 21.57 سے قیمت کی پیش گوئی کی جاتی ہے اور بعد میں مساوات 21.58 سے قیمت کی تصحیح کی جاتی ہے لہٰذا یہ **پیش گو، مصحح ترکیب**[70] کہلاتی ہے۔

مثال 21.15: **بہتر ترکیب یولر**
پہلے کی طرح $h = 0.2$ لیتے ہوئے بہتر ترکیب یولر کو مثال 21.14 کی ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ یہاں مساوات 21.57 اور مساوات 21.58 درج ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} y^*_{n+1} &= y_n + 0.2(x_n + y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + 0.1[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + y^*_{n+1})] \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک ہی قدم میں دو بار حساب کی بجائے ایک بار حساب کرنا ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y_{n+1} = 0.12x_n + 0.1x_{n+1} + 1.22y_n$$

جدول 21.10: بہتر ترکیب یولر۔(مثال 21.15)

n	x_n	y_n	$0.12x_n$	$0.1x_{n+1}$	$1.22y_n$	y_{n+1}
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0200	0.0000	0.0200
1	0.2	0.0200	0.0240	0.0400	0.0244	0.0884
2	0.4	0.0884	0.0480	0.0600	0.1078	0.2158
3	0.6	0.2158	0.0720	0.0800	0.2633	0.4153
4	0.8	0.4153	0.0960	0.1000	0.5067	0.7027
5	1.0	0.7027				

ہم جدول 21.10 سے دیکھتے ہیں کہ موجودہ نتائج مثال 21.14 میں حاصل کردہ نتائج سے بہتر ہیں۔ □

بہتر ترکیب یولر میں فی قدم قطع چال خلل h^3 کے لحاظ سے بڑھتا ہے لہٰذا یہ ترکیب **درجہ دوم ترکیب**[71] ہے۔ بلکہ $\tilde{f}_n = f(x_n, y(x_n))$ لکھ کر مساوات 21.55 استعمال کرنے سے

$$y(x_n + h) - y_n = h\tilde{f}_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}'_n + \frac{1}{6}h^3\tilde{f}''_n + \cdots \tag{21.59}$$

ملتا ہے۔مساوات 21.58 میں قوسین میں بند حصہ کو $\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}$ لکھ کر دوبارہ ٹیلر تسلسل استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.58 سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$y_{n+1} - y_n \approx \frac{1}{2}h(\tilde{f}_n + \tilde{f}_n + h\tilde{f}'_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}''_n + \cdots) \tag{21.60}$$

جس سے مساوات 21.59 تفریق کرتے ہوئے فی قدم قطع چال خلل

$$\frac{h^3}{4}\tilde{f}''_n - \frac{h^3}{6}\tilde{f}''_n + \cdots = \frac{h^3}{12}\tilde{f}''_n + \cdots$$

حاصل ہو گا۔

ہم اب قدم h کی انتخاب پر غور کرتے ہیں جو قدم با قدم تراکیب استعمال کرنے میں اہم مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔ h کی قیمت بہت کم رکھنے سے قدموں کی تعداد اور تعداد ہندسہ خلل بہت بڑھ جاتے ہیں جبکہ h کی قیمت بہت زیادہ رکھنے سے فی قدم قطع چال خلل بڑھتی ہے اور ساتھ ہی ساتھ ایک اضافی خلل، جو f کی قیمت (x_n, y_n) کی بجائے $(x_n, y(x_n))$ پر حاصل کرنے کی بنا پیدا ہوتا ہے، بھی بڑھتی ہے۔اگر f متغیر y کے تابع نہ ہو

---

[70] predictor-corrector method
[71] second order method

تب ان میں دوسرا خلل صفر کے برابر ہو گا، دیگر حال y کی تبدیلی سے f جتنا زیادہ تبدیل ہو، یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا، یعنی $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ کی حتمی قیمت جتنی زیادہ ہو، یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا۔ بلکہ اس خلل کو φ_n سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلہ اوسط قیمت کی اطلاق سے

$$\varphi_n = f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n)) = f_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$$

حاصل ہو گا جہاں y_n کا خلل $\eta_n = y_n - y(x_n)$ ہے، اور $\tilde{y}$ کا مقام y_n اور $y(x_n)$ کے بیچ ہے۔ یوں y_{n+1} کے خلل میں φ_n کا حصہ تقریباً $h\varphi_n = hf_y(x_n, \tilde{y}_n)\eta_n$ ہو گا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ دلچسپی کے خطہ میں $\left|f_y\right|$ کی بالائی حد K کو کم رکھا جائے اور h یوں منتخب کیا جائے کہ

$$\kappa = hK$$

بہت زیادہ بڑی قیمت نہ ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $\left|f_y\right|$ کی قیمت زیادہ ہو (جو y پر f کی زیادہ تابعیت کو ظاہر کرتی ہے) تب K بڑا ہو گا لہٰذا ہمیں h چھوٹا رکھنا ہو گا۔ (مثال 21.14 اور مثال 21.15 میں $f_y = 1$ ، $K = 1$ ، $hK = 0.2$ ہیں۔) اگر f_y بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہو تب ہم K یعنی $\left|f_y(x_n, \tilde{y})\right|$ کی بالائی حد کو کم رکھتے ہوئے وقفہ کے مختلف حصوں پر مختلف h منتخب کر سکتے ہیں تا کہ

$$\kappa_n = hK_n$$

کو کسی مخصوص وقفہ (مثلاً $0.1 \leq \kappa_n \leq 0.2$)، جو درکار درستگی پر منحصر ہو گا، میں رکھا جا سکے۔ فی قدم قطع چال خلل کی بنا ہم h کو کسی ایک مقررہ قیمت سے زیادہ نہیں چن سکتے ہیں۔

اس سے بھی زیادہ درست ترکیب جو عملاً انتہائی اہم ہے ترکیب رنج کوٹا[72] کہلاتی[73] ہے جس کے ہر قدم پر ہم پہلے چار عدد ذیلی قیمتیں

$$\begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), & B_n &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}A_n), \\ C_n &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}B_n), & D_n &= hf(x_{n+1}, y_n + C_n) \end{aligned} \tag{21.61}$$

تلاش کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n) \tag{21.62}$$

---

[72] Runge-Kutta method

[73] جرمنی کے ریاضی دان کارل رنج [1856-1927] اور ولہلم کوٹا [1867-1944]

جدول 21.11: ترکیب رنج کوٹا (مثال 21.16)

n	x_n	y_n	x_n+y_n	$0.2214(x_n+y_n)$	y_{n+1}
0	0.0	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.021 400
1	0.2	0.021 400	0.221 400	0.049 018	0.070 418
2	0.4	0.091 818	0.491 818	0.108 889	0.130 289
3	0.6	0.222 107	0.822 107	0.182 014	0.203 414
4	0.8	0.425 521	1.225 521	0.271 330	0.292 730
5	1.0	0.718 251			

حاصل کی جاتی ہے۔یہاں ثبوت پیش کیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اس ترکیب کی قطع چال خلل درجہ h^5 ہے یعنی یہ درجہ چار ترکیب ہے۔دھیان رہے کہ اگر f صرف x کا تابع ہو تب ترکیب رنج کوٹا سے تکمل کی ترکیب سمسن (حصہ 21.6) حاصل ہوتی ہے۔

اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب رنج کوٹا قابل محنت طلب ہے، کمپیوٹر کی استعمال کے لئے یہ ترکیب موزوں ہے۔

مثال 21.16: ترکیب رنج کوٹا
ترکیب رنج کوٹا کو مثال 21.14 کے ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ہم پہلے کی طرح $h=0.2$ منتخب کرتے ہیں۔یہاں $f(x,y)=x+y$ ہے لہٰذا مساوات 21.14 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} A_n &= 0.2(x_n+y_n), & B_n &= 0.2(x_n+0.1+y_n+0.5A_n), \\ C_n &= 0.2(x_n+0.1+y_n+0.5B_n), & D_n &= 0.2(x_n+0.2+y_n+C_n) \end{aligned} \tag{21.63}$$

چونکہ یہ تعلقات سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا ہم A_n کو B_n میں پر کر کے $B_n=0.22(x_n+y_n)+0.02$ حاصل کرتے ہیں جس کو C_n میں پر کر کے $C_n=0.222(x_n+y_n)+0.022$ حاصل کرتے ہیں جس کو D_n میں پر کر کے $D_n=0.2444(x_n+y_n)+0.0444$ حاصل کرتے ہیں۔ان حاصل کردہ تعلقات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.62 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y_{n+1}=y_n+0.2214(x_n+y_n)+0.0214$$

جدول 21.11 میں حساب دیا گیا ہے۔جدول 21.12 میں ترکیب یولر، بہتر ترکیب یولر اور ترکیب رنج کوٹا کے نتائج کا موازنہ کیا گیا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثال 21.14 اور مثال 21.15 کے نتائج سے موجودہ مثال کے نتائج بہت بہتر ہیں۔ □

جدول 21.12: جدول 21.9، جدول 21.10 اور جدول 21.11 میں خلل کا موازنہ

		خلل کی حتمی قیمت		
x	$y = e^x - x - 1$	ترکیب یولر	بہتر ترکیب یولر	ترکیب رنج کوٹا
0.2	0.021 403	0.021	0.0014	0.000 003
0.4	0.091 825	0.052	0.0034	0.000 007
0.6	0.222 119	0.094	0.0063	0.000 011
0.8	0.425 541	0.152	0.0102	0.000 020
1.0	0.718 282	0.229	0.0156	0.000 031

لمبائی قدم[74] h ایک مخصوص قیمت H، جو درستگی پر منحصر ہے، سے زیادہ نہیں ہونی چاہیے اور اس کی قیمت یوں منتخب کرنی چاہیے کہ

$$\kappa = hK \qquad (\left|\tfrac{\partial f}{\partial y}\right| \text{ کی بالائی حد } K \text{ ہے})$$

کی قیمت 0.1 اور 0.2 کے بیچ ہو (جیسا بہتر ترکیب یولر میں تھا)۔ ترکیب رنج کوٹا میں ہم h کو A_n، B_n، C_n سے قابو کر سکتے ہیں چونکہ f_y کی تعریف کی رو سے

$$\kappa = hK \approx h\left|f_y\right| \approx h\left|\frac{f(x,y^*) - f(x,y^{**})}{y^* - y^{**}}\right|$$

ہو گا اور اگر ہم $x = x_n + \frac{1}{2}h$، $y^* = y_n + \frac{1}{2}B_n$، $y^{**} = y_n + \frac{1}{2}A_n$ منتخب کریں تب $y^* - y^{**} = \frac{B_n - A_n}{2}$ اور

$$\kappa \approx \kappa_n = 2\left|\frac{C_n - B_n}{B_n - A_n}\right| \tag{21.64}$$

ہو گا۔ ہم اب کوئی قاعدہ بنا سکتے ہیں مثلاً جب تک $0.05 \leq \kappa_n \leq 0.2$ ہو ہم h کو تبدیل نہیں کرتے جبکہ $\kappa_n > 0.2$ کی صورت میں ہم h کو 50 % کم کرتے ہیں اور $\kappa_n < 0.05$ کی صورت میں ہم h کو دگنا کرتے ہیں (اگر h دگنا کرنے سے اس کی قیمت منتخب H سے بڑھتی نہ ہو جہاں H از خود درکار درستگی پر منحصر ہے)۔

h کو قابو کرنے کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم حساب کرنے کے ساتھ ساتھ قدم $2h$ لیتے ہوئے بھی حساب کرتے ہیں جس سے فی قدم قطع چال خلل $2^5 = 32$ گنا بڑھتا ہے لیکن قدموں کی تعداد گھٹنے کی بنا اصل خلل

[74] step length

$2^5 = 16$ گنا بڑھتا ہے۔یوں لمبائی قدم کو h رکھتے ہوئے خلل کی قیمت مطابقتی y کے فرق δ کے تقریباً $\frac{1}{15}$ گنا ہو گی۔ ہم اب عدد ϵ منتخب کرتے ہوئے (مثلاً آخری ہندسے کی اکائی کا نصف، جو بہت بڑی قیمت ہے) h کو اس وقت تک تبدیل نہیں کرتے جب تک $0.2\epsilon \leq |\delta| \leq 10\epsilon$ ہو، اگر $|\delta| > 10\epsilon$ ہو تب ہم h کو $50\,\%$ کم کرتے ہیں اور اگر $|\delta| < 0.2\epsilon$ ہو تب ہم h کو دگنا کرتے ہیں؛ ظاہر ہے کہ h کو اس صورت دگنا کرنا ممکن ہو گا جب تک (پہلے کی طرح) یہ H سے تجاوز نہ کرتا ہو۔

سوالات

سوال 21.87 تا سوال 21.90 میں ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے دس قدم تک چلیں۔

سوال 21.87: $y' = y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01$
جواب: $1, 1.01, 1.0201, 1.030301, 1.04060401, \cdots$

سوال 21.88: $y' = xy, \quad y(1) = 1, \quad h = 0.1$
جواب: $1, 1.1, 1.221, 1.36752, 1.5452976, \cdots$

سوال 21.89: $y' = xy - 1, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$
جواب: $0, -0.1, -0.201, -0.30502, \cdots$

سوال 21.90: $y' = xy, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1$
جواب: $1, 1, 1.01, 1.0302, 1.061106, \cdots$

سوال 21.91: $y' = 2x, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$ کو بہتر ترکیب یولر سے حل کریں۔خلل صفر کے برابر کیوں ہے؟
جواب: $0, 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, \cdots$

سوال 21.92: ایسی چند مثالیں پیش کریں جہاں بہتر ترکیب یولر بالکل درست جواب دیتی ہو۔

سوال 21.93: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 21.14 کو دوبارہ حل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ خلل مثال 21.14 کے خلل کا $50\,\%$ ہو گا۔
جواب: $0, 0, 0.01, 0.031, 0.0641, 0.11051, 0.171561, \cdots$

سوال 21.94: $h = 0.01$ (بیس قدم) لیتے ہوئے مثال 21.14 کو دوبارہ حل کریں۔ نقطہ $x = 2$ پر حتمی خلل کتنا ہے؟

جواب: $|\epsilon| = 0.000\,81$ ، $f(0.2) = 0.020\,190\,039\,947$

سوال 21.95: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 21.15 کو دوبارہ حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ خلل مثال 21.15 کے خلل کا 25 % ہو گا۔

جواب: $0, 0.005, 0.021\,025, 0.049\,232\,625, 0.147\,446\,7, \cdots$

سوال 21.96: ترکیب یولر سے $y' = \frac{y}{x},\; y(1) = 1,\; h = 0.1$ حل کریں۔

جواب: $1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, \cdots$

سوال 21.97: ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+x^2},\; y(0) = 1,\; h = 0.1$ حل کریں۔

جواب: $1, 1.1, 1.199099, 1.2951637, 1.3569068, \cdots$

سوال 21.98: ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+y^2},\; y(0) = 0,\; h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟ (اصل حل $y = \tan x$ ہے۔)

جواب: $1.825\,\%$ ، $0, 0.1, 0.199099, 0.295200286, 0.387184487, 0.474147677, \cdots,$

سوال 21.99: بہتر ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+y^2},\; y(0) = 0,\; h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟

جواب: $2.758\,\%$ ، $0, 0.09950495, 0.197118863, 0.29128, 0.3809659, 0.46563611, \cdots,$

سوال 21.100: ترکیب رنج کوٹا سے $y' = \frac{1}{1+y^2},\; y(0) = 0,\; h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟

جواب: $2.602\,\%$ ، $0, 0.099669955, 0.19743461, 0.2917243, 0.38149278, 0.46622, \cdots,$

سوال 21.101: ترکیب رنج کوٹا سے $y' = y,\; y(0) = 1,\; h = 0.1$ حل کرتے ہوئے $y = e^x$ کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ پانچ درجہ اعشاریہ تک نتائج درست ہیں۔

جواب: $1, 1.105170833, 1.22140257, 1.349858497, 1.49182424, \cdots$

سوال 21.102: $h = 0.1$ لیتے ہوئے ترکیب یولر سے $y' = -10y,\; y(0) = 1$ حل کریں۔ جواب پر تبصرہ کریں۔

جواب: $1, 0, 0, \cdots$ اصل حل $y = e^{-10x}$

سوال 21.103: مساوات 21.54 میں x_n تا x_{n+1} تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت کو نقطہ x_n پر $f(x,y)$ کی قیمت لے کر x_0 تا x_{n+1} تکمل لیتے ہوئے ترکیب یولر اخذ کریں۔

سوال 21.104: ترکیب یولر کوشی کی طرح ایک اور ترکیب درج ذیل ہے

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y^*_{n+1})$$

جہاں $y^*_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)$ ہے۔اس کی جیومیٹریائی وجہ پیش کریں۔اس ترکیب میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 21.14 حل کریں۔

جواب: $0, 0.02, 0.0884, 0.215848, 0.41533458, 0.702708, \cdots$

سوال 21.105: کوٹا کی تین درجی ترکیب درج ذیل ہے

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(A_n + 4B_n + M_n)$$

جہاں

$$\begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), \quad B_n = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}A_n), \\ M_n &= hf(x_{n+1}, y_n - A_n + 2B_n), \end{aligned} \tag{21.65}$$

ہیں۔اس ترکیب میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 21.14 حل کریں۔نتائج کا جدول 21.10 کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: $0, 0.0213333, 0.09165511, 0.2218081, 0.42503497, 0.717509377, \cdots$

21.8 دودرجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

دو درجی تفرقی مساوات اور ایک ہی نقطہ پر دو ابتدائی شرائط کو ابتدائی قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔اس حصے میں ہم درج ذیل صورت کے ابتدائی قیمت مسئلوں

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{21.66}$$

کا حل دو اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا سیکھیں گے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ f ایسا تفاعل ہے کہ اس مسئلے کا یکتا حل کسی ایسے وقفہ پر موجود ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہے۔ پہلی ترکیب سادہ لیکن کم درست ہے جس سے اعدادی ترکیب سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے جبکہ دوسری ترکیب بہت زیادہ درست اور عملاً انتہائی اہم ہے۔

دونوں تراکیب میں یکساں فاصلہ نقطوں $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $\cdots$ پر ہم مساوات 21.66 کے حل $y(x)$ کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں گے جنہیں بالترتیب y_1 ، y_2 ، $\cdots$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ اسی طرح ان نقطوں پر تفرق $y'(x)$ کی تخمینی قیمتوں کو بالترتیب y'_1 ، y'_2 ، $\cdots$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

گزشتہ حصے کی تراکیب ٹیلر تسلسل

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \cdots \tag{21.67}$$

سے اخذ کی گئیں۔ موجودہ حصے میں اس کے ساتھ تفرق کی ٹیلر تسلسل

$$y'(x+h) = y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2}y'''(x) + \cdots \tag{21.68}$$

بھی استعمال کی جائے گی۔

کم تر درستگی کی اعدادی ترکیب میں مساوات 21.67 اور مساوات 21.67 میں y''' اور مزید زیادہ درجے کے تفرق رد کیے جائیں گے۔ یوں مساوات 21.67 اور مساوات 21.67 سے

$$\begin{aligned} y(x+h) &\approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) \\ y'(x+h) &\approx y'(x) + hf''(x) \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ اس پہلی ترکیب کی پہلی قدم میں

$$y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0)$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.66 سے

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0$$

حاصل کیا جاتا ہے جو $y(x_1) = y(x_0 + h)$ کی تخمینی قیمت ہے۔ مزید

$$y'_1 = y'_0 + hy''_0$$

ہو گا جس کی ضرورت اگلی قدم میں پیش آئے گی۔دوسری قدم میں

$$y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.67 سے

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2}y_1''$$

حاصل کیا جاتا ہے جو $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ کی تخمینی قیمت ہے۔مزید

$$y_2' = y_1' + hy_1''$$

ہو گا۔اسی طرح چلتے ہوئے $n+1$ ویں قدم میں

$$y_n'' = f(x_n, y_n, y_n')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.67 سے

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2}y_n'' \tag{21.69}$$

حاصل ہو گا جو $y(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے۔مزید

$$y_{n+1}' = y_n' + hy_n'' \tag{21.70}$$

ہو گا جو $y'(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے جو اگلی قدم میں درکار ہو گی۔

جیومیٹریائی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کو تخمینی طور پر قطع مکافی کے ٹکڑوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 21.17: مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 میں دی گئی ترکیب کا استعمال
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کا حل مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$y'' = \frac{1}{2}(x + y + y' + 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہیں۔یوں مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 0.2y_n' + 0.02y_n'' \\ y_{n+1}' &= y_n' + 0.2y_n'' \end{aligned}$$

[جہاں $y_n'' = \frac{1}{2}(x_n + y_n + y_n' + 2)$ ہے۔]

جدول 21.13: جدول برائے مثال 21.17

n	x_n	y_n	y'_n	$0.2y'_n$	$x_n + y_n + y'_n + 2$	$0.2y''_n$	$0.02y''_n$	$0.2y'_n + 0.02y''_n$
0	0	0.0000	0.0000	0.0000	2.0000	0.2000	0.0200	0.0200
1	0.2	0.0200	0.2000	0.0400	2.4200	0.2420	0.0242	0.0642
2	0.4	0.0842	0.4420	0.0884	2.9262	0.2926	0.0293	0.1177
3	0.6	0.2019	0.7346	0.1469	3.5365	0.3537	0.0354	0.1823
4	0.8	0.3842	1.0883	0.2177	4.2725	0.4273	0.0427	0.2604
5	1.0	0.6446						

جدول 21.13 میں حساب دکھایا گیا ہے۔اس مسئلے کا اصل حل $y = e^x - x - 1$ ہے۔آپ جدول میں دی گئی قیمتوں کا اصل حل سے موازنہ کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ خلل بہت زیادہ ہے۔ عملی استعمال میں یہ ترکیب عموماً درست نتائج نہیں دے گی۔ □

آئیں اب ابتدائی قیمت دو درجی مسئلہ حل کرنے کی دوسری ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو رنج کوٹا نیستروم ترکیب[75] کہتے[76] ہیں۔ ہم ثبوت پیش کیے بغیر بتلانا چاہتے ہیں کہ یہ ترکیب چار درجی ترکیب ہے جس کا مطلب ہے کہ y اور y' کے ٹیلر تسلسل میں ابتدائی وہ تمام اجزاء شامل ہیں جن میں h^4 یا اس سے کم طاقت پایا جاتا ہو۔

عمومی $n+1$ ویں قدم میں ہم پہلے ذیلی مساوات

$$
\begin{aligned}
A_n &= \tfrac{1}{2}hf(x_n, y_n, y'_n) \\
B_n &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \beta_n, y'_n + A_n) \quad [\text{جہاں } \beta_n = \tfrac{1}{2}h(y'_n + \tfrac{1}{2}A_n) \text{ ہے}] \\
C_n &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \beta_n, y'_n + B_n) \\
D_n &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + h, y_n + \delta_n, y'_n + 2C_n) \quad [\text{جہاں } \delta_n = h(y'_n + C_n) \text{ ہے}]
\end{aligned}
\tag{21.71}
$$

اور بعد میں نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + K_n) \qquad [\text{جہاں } K_n = \tfrac{1}{3}(A_n + B_n + C_n) \text{ ہے}] \tag{21.72}$$

حاصل کرتے ہیں جو $y(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہو گی۔مزید ہم

$$y'_{n+1} = y'_n + K^*_n \quad [\text{جہاں } K^*_n = \tfrac{1}{3}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n) \text{ ہے}] \tag{21.73}$$

[75] Runge-Kutta-Nystrom method
[76] فن لینڈ کا ریاضی دان ایورٹ جوہانس نیستروم

حاصل کرتے ہیں جو $y'(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے جو اگلے قدم میں درکار ہو گی۔

h کو اب قابو کیا جا سکتا ہے (جیسا گزشتہ حصے کے آخر میں بتایا گیا)۔اب ہم δ^* اور δ^{**} میں زیادہ بڑی قیمت کے برابر δ منتخب کرتے ہیں جہاں y کی مطابقتی قیمت کے $\frac{1}{15}$ گنا کو δ^* اور y' کی مطابقتی قیمت کے $\frac{1}{15}$ گنا کو δ^{**} کہتے ہیں۔

مثال 21.18: رنج کوٹا نیستروم

□

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{1.ب}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

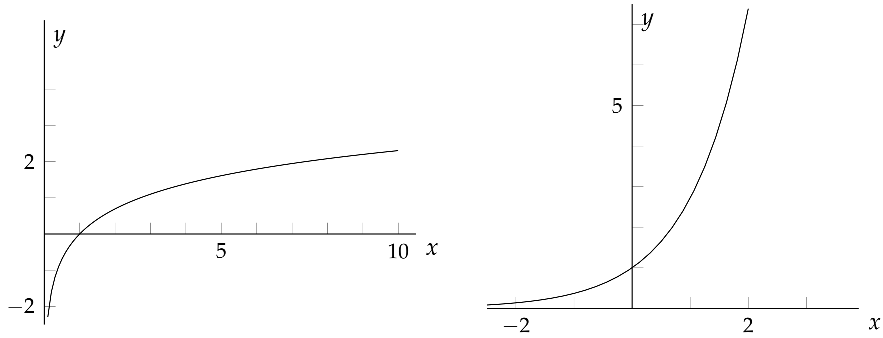
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x \tag{2.ب}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

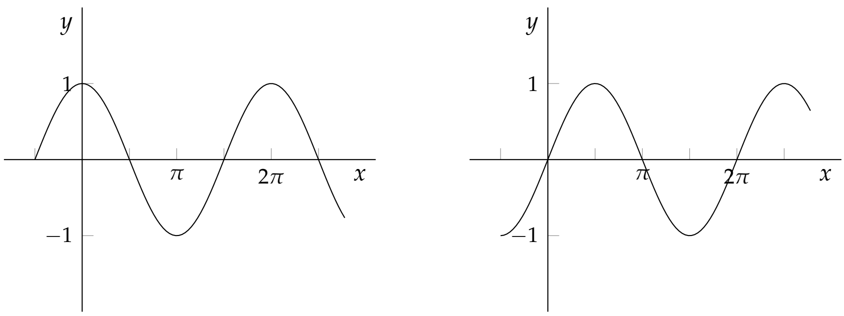
$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{3.ب}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{4.ب}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x (ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$ (ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\, 17'\, 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

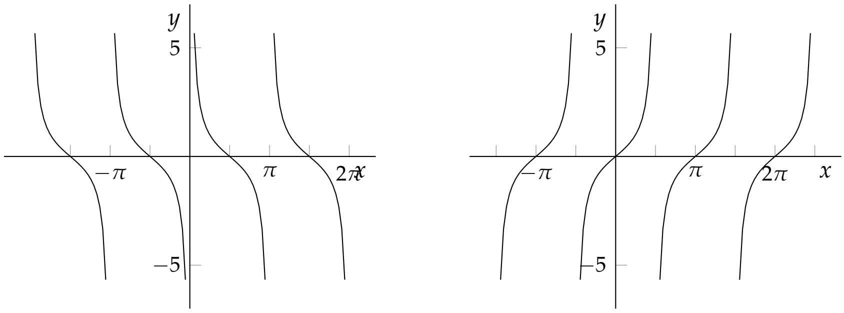
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered}$$ (ب.17)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$ (ب.18)

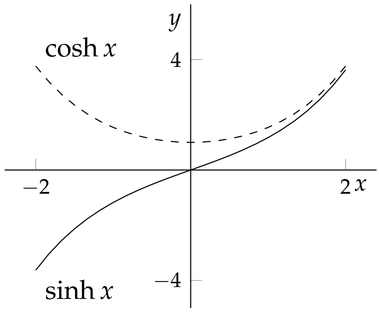
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$ (ب.19)

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned}$$ (ب.20)

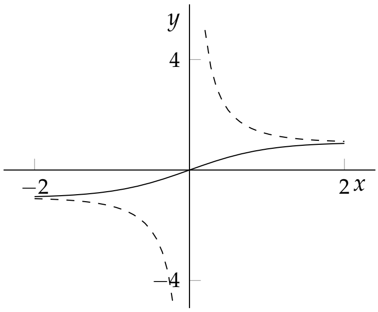
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$ (ب.21)

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$ (ب.22)



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{ب.24}$$

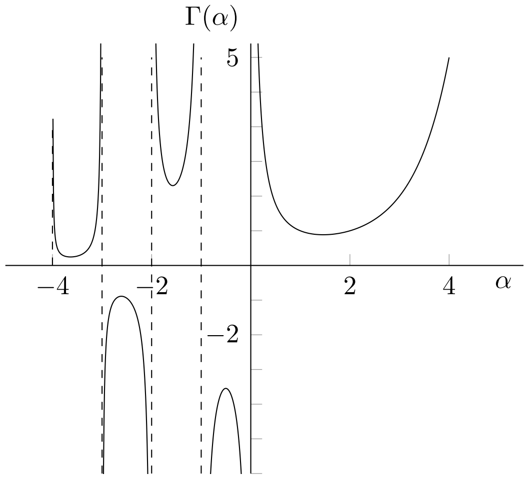
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

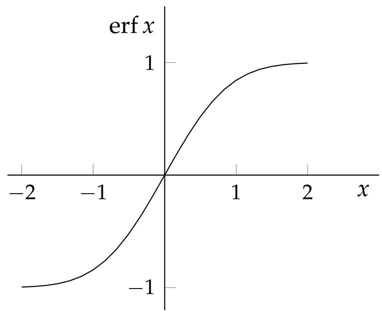
$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

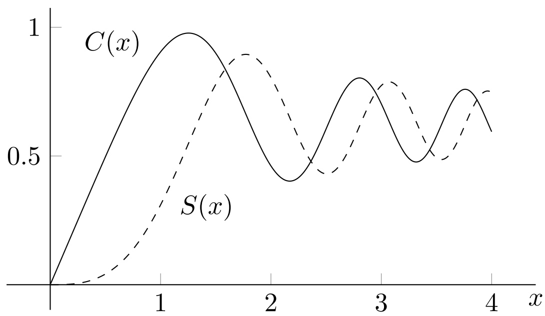
$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔**مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

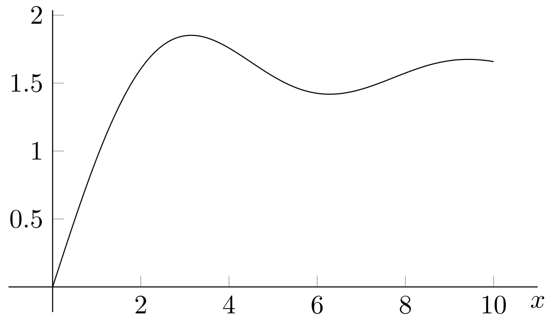
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔**تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$