انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 8

سمتیات عارضی باب

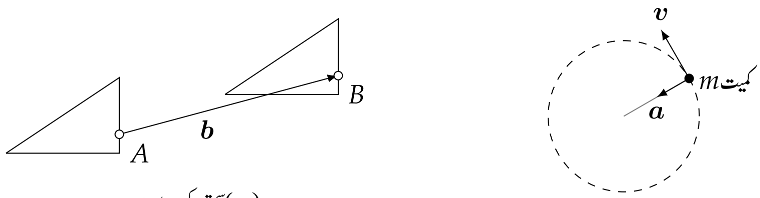
beginning very the at it palce shall i addition. latest the of 9.4 to 9.1 sec is this my 7th chapter.this resolves all the issues. of

8.1 غیر سمتیات اور سمتیات

طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جنہیں ان کی مقدار سے مکمل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔مثلاً کمیت، درجہ حرارت، برقی بار، وقت، رقبہ، حجم، فاصلہ، برقی دباو وغیرہ۔ان میں سے ہر ایک کو (مقدار کی موزوں اکائی چن کر) ایک عدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ایسی تمام مقداروں کو غیر سمتیات[1] کہتے ہیں۔غیر سمتی مقدار کی قیمت پر چننی گئی محدد کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اس کے برعکس طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں بھی پائی جاتی ہیں جن کی مکمل اظہار کے لئے ان کی قیمت کے علاوہ ان کی سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ان کی ایک مثال میکانی قوت ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ قوت کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں تیر کی سمت، قوت کی سمت اور تیر کی لمبائی (کسی پیمائش کے تحت) قوت کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ شکل 8.1-الف میں ہلکے دھاگے سے بندھی ہوئی کمیت m کی دائری حرکت دکھائی گئی ہے۔کمیت کی

[1] scalars



(الف) سمتی رفتار اور اسراع۔

(ب) سمتیہ کی دم اور سر۔

شکل 8.1: سمتیہ کی تفصیل۔

لمحاتی سمتی رفتار v کو تیر سے دکھایا گیا ہے۔اس تیر کی سمت، کمیت کی لمحاتی سمتی رفتار دیتی ہے جبکہ تیر کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی سمتی رفتار کی قیمت دیتی ہے۔شکل میں کمیت کی اسراع a بھی دکھائی گئی ہے جہاں a کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی اسراع کی قیمت دیتی ہے۔

سیدھی سطح میں تکون کی (بلا گھومے) منتقلی شکل 8.1-ب میں دکھائی گئی ہے۔اس حرکت کو (تکون کے ہر نقطے کی) طے فاصلے کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔تکون پر کسی نقطے کی ابتدائی مقام A سے اختتامی مقام B تک سمتی خط سے اس حرکت کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں سمتی خط b ، تکون کے ایک نقطہ کی A سے B منتقلی دکھاتی ہے۔تکون کے ہر نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک سمتی خطوط کھینچ کر ہمیں سمتی خطوط کی نسل ملتی ہے جس میں تمام سمتی خطوط کی لمبائی ایک جیسی اور سمت ایک جیسی ہو گی (یعنی یہ آپس میں متوازی ہوں گے)۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک سمتی خط، تکون کے ایک نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک منتقلی کو ظاہر کرتی ہے۔

اس سے سمتیہ کی درج ذیل تعریف بیان کی جا سکتی ہے۔ تعریف : سمتیہ
سمتی خط کو **سمتیہ**[2] کہتے ہیں۔اس کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی اور سمت کو سمتیہ کی سمت کہتے ہیں۔دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب ان کی لمبائی ایک جیسی ہو اور ان کی سمت ایک جیسی ہو۔

سمتیہ کی لمبائی کو سمتیہ کی **اقلیدسی معیار**[3] (یا معیار) اور سمتیہ کی **مقدار**[4] بھی کہتے ہیں۔

---

[2] vector
[3] Euclidean norm
[4] magnitude

سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو سمتیہ کی **دم**[5] اور اختتامی نقطے کو سمتیہ کا **سر**[6] کہتے ہیں۔ یوں شکل 8.1-ب میں نقطہ B سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کی دم ہے جبکہ نقطہ A اس کا سر ہے۔

ہم سمتیات کو موٹی لکھائی میں چھوٹی حروف تہجی مثلاً $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{v}$ ، وغیرہ، سے ظاہر کرتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں اسراع کو $\vec{a}$ یا $\overrightharpoon{a}$ لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی مقدار کو $|\boldsymbol{a}|$ لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ہم سمتیہ کو بغیر گھمائے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کر سکتے ہیں[7] یعنی ہم سمتیہ کی دم کہیں پر بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ سمتیہ کی دم کا مقام مقرر کرنے سے اس کے سر کا مقام بھی مقرر ہو گا۔

اگر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ایک دوسرے کے برابر ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{8.1}$$

اور اگر یہ آپس میں برابر نہ ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \tag{8.2}$$

کسی بھی سمتیہ کو ترسیمی طور پر موزوں لمبائی اور سمت کی سمتی خط سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

ایسا سمتیہ جس کی لمبائی اکائی (1) ہو **اکائی سمتیہ**[8] کہلاتا ہے۔

8.2 سمتیہ کے اجزاء

تین بُعدی فضا میں نقطہ ایک جیومیٹریائی چیز ہے جس کو محددی نظام میں تین مرتب اعداد (تصور کیا جا سکتا ہے یا) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی انداز میں پیش کی، جسے محددی نظام کی استعمال سے الجبرائی انداز میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

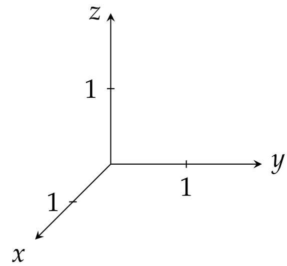
---

[5] tail

[6] head

[7] یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی صورتیں پائی جاتی ہیں جہاں سمتیہ کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ آپ میکانیات سے جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر لچکدار مادے پر قوت کا اطلاق، قوت کی سمت میں لکیر پر رہتے ہوئے، کسی بھی نقطے پر کیا جا سکتا ہے۔ اس سے **قابل منتقلی سمتیہ** کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ اس کے برعکس، لچکدار مادے پر قوت کے اطلاق کا نقطہ تبدیل کرنے سے نتائج تبدیل ہوں گے جو نا قابل قبول بات ہے۔ یہ حقیقت **مقید سمتیہ** کی تصور کو جنم دیتی ہے۔ اس کتاب میں صرف قابل منتقلی سمتیات پر بات کی جائے گی۔

[8] unit vector



شکل 8.2: کارتیسی نظام محددی

نظام محدد کے **محور**[9]، آپس میں عمودی تین متقاطع سیدھے خطوط ہوں گے۔ان کے مقام انقطاع کو محددی نظام کا **مرکز**[10] کہتے ہیں۔ہم تینوں محور پر پیمائشی ناپ ایک جیسی چنتے ہیں لہٰذا محور پر مرکز سے اکائی فاصلے پر $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ نقطے پائے جائیں گے۔اس محددی نظام کو فضا میں **کارتیسی نظام محدد**[11] (شکل 8.2 سے رجوع کریں) کہتے ہیں۔

ہم اب ابتدائی نقطہ A سے اختتامی نقطہ B تک سمتیہ $\boldsymbol{a}$ پر غور کرتے ہیں (شکل 8.3-الف)۔اگر نقطہ A کے محور (x_1, y_1, z_1) اور نقطہ B کے محور (x_2, y_2, z_2) ہوں تب درج ذیل اعداد، اس کارتیسی محددی نظام کے لحاظ سے، سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے **اجزاء**[12] کہلاتے ہیں۔

$$a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1 \tag{8.3}$$

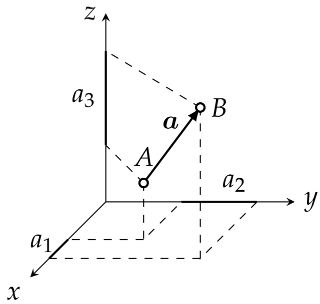
سمتیہ کی تعریف کے تحت $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی سے مراد A سے B تک کی لمبائی $\overline{AB}$ ہے جو مساوات 8.3 میں دیے گئے اجزاء کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{8.4}$$

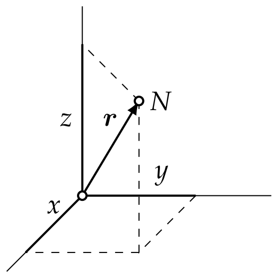
مثال 8.1: سمتیہ کے اجزاء اور اس کی لمبائی
سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم $(-2,3,1)$ اور سر $(5,-2,7)$ ہیں۔اس سمتیہ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی دریافت کریں۔

---

[9] coordinates
[10] origin
[11] Cartesian coordinate system
[12] components



(الف) اجزائے سمتیہ



(ب) تعین گر سمتیہ کے سر کے محور اس سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔

شکل 8.3: سمتیہ کے اجزاء اور تعین گر سمتیہ۔

حل: اجزاء $a_1 = 5 - (-2) = 7, \quad a_2 = -2 - 3 = -5, \quad a_3 = 7 - 1 = 6$ اور لمبائی

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{110}$$

ہے۔ اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم کو نقطہ $(4, 1, 3)$ پر منتقل کریں تب اس کا سر $(11, -4, 9)$ پر ہو گا۔

مساوات 8.3 میں دیے گئے اجزاء کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\boldsymbol{a}$ کی دم کو کارتیسی محدد کی مرکز پر منتقل کیا جائے تب $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء اس کی سر کے محور ہوں گے۔ ایسا سمتیہ جس کو شکل 8.3-ب میں دکھایا گیا ہے **تعین گر سمتیہ**[13] کہلاتا ہے اور اس کو $\boldsymbol{r}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$\boldsymbol{a}$ کی دم کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے سمتیہ کا سر بھی اتنا ہی اپنی جگہ سے ہلتا ہے لہٰذا مساوات 8.3 سے ظاہر ہے کہ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 کی قیمت پر $\boldsymbol{a}$ کی ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں کسی بھی معین کارتیسی محددی نظام کے حوالے سے سمتیہ کو مکمل طور پر تین (محوری) اعداد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

وہ سمتیہ جس کے اجزاء 0 ، 0 ، 0 ہوں **معدوم سمتیہ**[14] یا **صفر سمتیہ**[15] $\mathbf{0}$ کہلاتا ہے۔ یوں کوئی بھی تین اعداد بہ شمول 0 ، 0 ، 0 سمتیہ کے اجزاء ہو سکتے ہیں۔

---

[13] position vector
[14] null vector
[15] zero vector

معین نظام محدد کی صورت میں ہر مرتب تین اعداد ایک منفرد سمتیہ کو ظاہر کریں گے۔یہ تین اعداد سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔اسی طرح معین نظام محدد میں ہر سمتیہ کے اجزاء سے سمتیہ کو تین مرتب اعداد کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی نقطہ نظر سے کی گئی۔ہم اب تین مرتب حقیقی اعداد (جو سمتیہ کے اجزاء کہلاتے ہیں) کو سمتیہ کی **تعریف** کہہ سکتے ہیں۔اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتیہ کی جیومیٹریائی صورت حاصل کر سکتے ہیں۔

یوں دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ صرف اور صرف اس صورت ایک جیسے ہوں گے جب ان کے تین مطابقتی اجزاء ایک جیسے ہوں۔ لہٰذا درج ذیل سمتی مساوات

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

سے مراد درج ذیل تین مساوات ہیں جہاں a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 ایک ہی کارتیسی نظام محدد میں بالترتیب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مطابقتی اجزاء ہیں۔

$$a_1=b_1, \quad a_2=b_2, \quad a_3=b_3$$

ظاہر ہے کہ اگر ایک سمتیہ کوئی حقیقی یا جیومیٹریائی چیز ہو تب اس کی لمبائی اور سمت پر چننی گئی نظام محدد کا کوئی اثر نہیں ہونا چاہیے۔ اجزائے سمتیہ کو ایک نظام محدد سے دوسری نظام محدد میں منتقل کرنے کے قواعد پر یہ حقیقت کچھ شرائط عائد کرتی ہے جن پر اگلے بابوں میں تبصرہ کیا جائے گا۔

اگلے باب میں سمتیہ کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہر مرتب n اعداد کو سمتیہ تصور کیا جائے گا، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے۔

سوالات

سوال 8.1 تا سوال 8.10 میں سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{u}|$ حاصل کریں۔ $\boldsymbol{u}$ کا خط کھینچیں۔

سوال 8.1: $A:(2,3,0), \quad B:(-4,6,0)$

جوابات: $u_3=0$ ، $u_2=3$ ، $u_1=-6$ ، $|\boldsymbol{u}|=3\sqrt{5}$

سوال 8.2: $A:(5,3,1), \quad B:(1,7,2)$

جوابات: $u_3 = 1$ ، $u_2 = 4$ ، $u_1 = -4$ ، $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{33}$

سوال 8.3: $A:(1.2,-1,2.5), \quad B:(2.4,1.6,-3.2)$

جوابات: $u_3 = -5.7$ ، $u_2 = 2.6$ ، $u_1 = 1.2$ ، $|\boldsymbol{u}| = 6.38$

سوال 8.4: $A:(0,0,3), \quad B:(4,0,0)$

جوابات: $u_3 = -3$ ، $u_2 = 0$ ، $u_1 = 4$ ، $|\boldsymbol{u}| = 5$

سوال 8.5: $A:(3,3,3), \quad B:(1,1,1)$

جوابات: $u_3 = -2$ ، $u_2 = -2$ ، $u_1 = -2$ ، $|\boldsymbol{u}| = 2\sqrt{3}$

سوال 8.6: $A:(1,1,1), \quad B:(3,3,3)$

جوابات: $u_3 = 2$ ، $u_2 = 2$ ، $u_1 = 2$ ، $|\boldsymbol{u}| = 2\sqrt{3}$

سوال 8.7: $A:(2,2,2), \quad B:(2,2,0)$

جوابات: $u_3 = 0$ ، $u_2 = 0$ ، $u_1 = 0$ ، $|\boldsymbol{u}| = 0$ ؛ یہ صفر سمتیہ ہے۔

سوال 8.8: $A:(0,7,8), \quad B:(-3,1,8)$

جوابات: $u_3 = 0$ ، $u_2 = 6$ ، $u_1 = -3$ ، $|\boldsymbol{u}| = 3\sqrt{5}$

سوال 8.9: $A:(100,200,300), \quad B:(100,204,303)$

جوابات: $u_3 = 3$ ، $u_2 = 4$ ، $u_1 = 0$ ، $|\boldsymbol{u}| = 5$

سوال 8.10: $A:(-5,-6,-2), \quad B:(-8,-6,-4)$

جوابات: $u_3 = -2$ ، $u_2 = 0$ ، $u_1 = -3$ ، $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{13}$

سوال 8.11 تا سوال 8.20 میں ابتدائی نقطہ A اور سمتیہ کے اجزاء دیے گئے ہیں۔ سمتیہ کا اختتامی نقطہ دریافت کریں۔

سوال 8.11: $3,1,4 \quad A:(-2,3,1);$
جواب: $1,4,5$

سوال 8.12: $5,1,7 \quad A:(0,0,0);$
جواب: $5,1,7$

سوال 8.13: $0,0,0 \quad A:(5,2,-6);$
جواب: $5,2,-6$

سوال 8.14: $-5,-7,2 \quad A:(3,6,1);$
جواب: $-2,-1,3$

سوال 8.15: $4,4,4 \quad A:(4,4,4);$
جواب: $8,8,8$

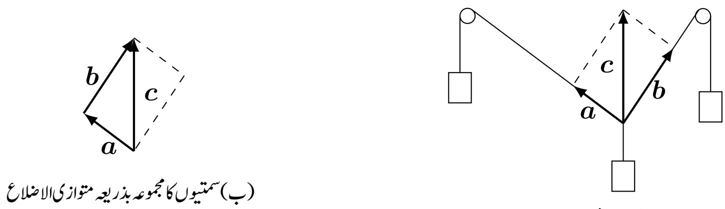
سوال 8.16: $-7,-7,-7 \quad A:(7,7,7);$
جواب: $0,0,0$

سوال 8.17: $3,4,5 \quad A:(-3,-4,-5);$
جواب: $0,0,0$

سوال 8.18: $-\frac{3}{2},\frac{1}{3},1 \quad A:(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3});$
جواب: $-1,1,\frac{4}{3}$

سوال 8.19: $1.1,-0.4,-0.3 \quad A:(0.2,-0.1,0.5);$
جواب: $1.3,-0.5,0.2$

سوال 8.20: $12.6,9,-14 \quad A:(11.3,-10,-15.8);$
جواب: $23.9,-1,-29.8$



(الف) قوتوں کا مجموعہ بذریعہ تجربہ

(ب) سمتیوں کا مجموعہ بذریعہ متوازی الاضلاع

شکل 8.4: تجربہ سے قوتوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کے مجموعے کا حصول حاصل ہوتا ہے۔

8.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب

چونکہ ہم سمتیات کو حساب کتاب کے لئے استعمال کرنا چاہتے ہیں لہٰذا سمتیات کے دو عدد الجبرائی اعمال پیش کرتے ہیں جنہیں سمتیات کا مجموعہ اور سمتیات کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کہتے ہیں۔

تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ دو قوتوں کا حاصل، متوازی الاضلاع (شکل 8.4) سے ملتا ہے۔اس سے سمتیات کے مجموعے کی درج ذیل تعریف حاصل ہوتی ہے۔

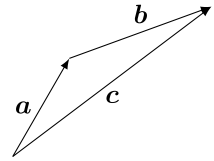
تعریف : سمتیات کا مجموعہ
دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کو لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}$ کے سر کے ساتھ $\boldsymbol{b}$ کی دم ملائیں۔اب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی مجموعے کی تعریف وہ سمتیہ $\boldsymbol{c}$ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کی دم سے $\boldsymbol{b}$ کے سر تک کھینچی جائے گی (شکل 8.5-الف)۔اس عمل کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \tag{8.5}$$

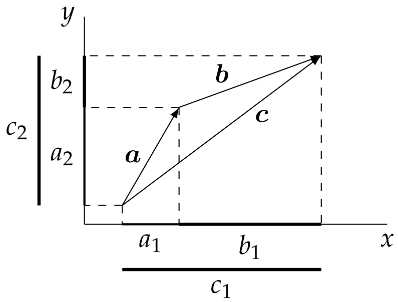
سمتیات کی مجموعے کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر کسی معین کارتیسی نظام محدد میں $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء b_1 ، b_2 اور b_3 ہوں تب حاصل جمع سمتیہ $\boldsymbol{c}$ کے اجزاء c_1 ، c_2 اور c_3 درج ذیل ہوں گے۔

$$c_1=a_1+b_1, \quad c_2=a_2+b_2, \quad c_3=a_3+b_3 \tag{8.6}$$

شکل 8.5-ب میں اس عمل کو سطح پر دکھایا گیا ہے، اور فضا میں بھی بالکل ایسا ہی ہو گا۔



(الف) سر کے ساتھ دم ملا کر سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔



(ب) سمتیات کے مطابقتی اجزاء کو جمع کرتے ہوئے حاصل جمع سمتیہ کے اجزاء حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 8.5: مجموعہ سمتیات۔

مجموعے کی تعریف یا مساوات 8.6 سے مجموعہ سمتیات کی درج ذیل خصوصیات ملتی ہیں جہاں $-\boldsymbol{a}$ سے مراد ایسا سمتیہ ہے جس کی لمبائی $|\boldsymbol{a}|$ اور سمت $\boldsymbol{a}$ کے الٹ ہو۔

$$
\begin{aligned}
&\text{قانون تبادل} \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \quad (\text{الف})\\
&\text{قانون تلازم} \quad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \quad (\text{ب})\\
&\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a} \quad (\text{پ})\\
&\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \quad (\text{ت})
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

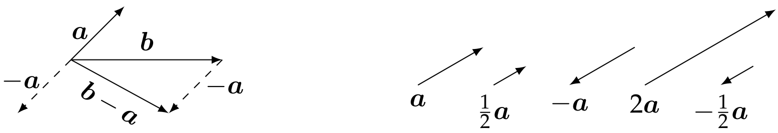
مساوات 8.7-ب میں ہم $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ لکھ سکتے ہیں اور یہی طریقہ زیادہ اعداد کے سمتیات کا مجموعہ لکھنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مجموعہ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ کی جگہ $2\boldsymbol{a}$ لکھا جاتا ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ ان سے (اور $-\boldsymbol{a}$ کے استعمال سے) ہم سمتیات کا دوسرا الجبرائی عمل بیان کرتے ہیں۔

سمتیات کا غیر سمتیات (اعداد) کے ساتھ ضرب

اگر $\boldsymbol{a}$ ایک سمتیہ اور q کوئی حقیقی عدد ہو تب سمتیہ $q\boldsymbol{a}$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$q\boldsymbol{a}$ کی لمبائی $|q||\boldsymbol{a}|$ ہے۔

اگر $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ہو اور $q>0$ ہو تب $q\boldsymbol{a}$ کی سمت وہی ہو گی جو $\boldsymbol{a}$ کی تھی۔



(ب) سمتیات کا فرق (الف) سمتیات کا غیر سمتیات کے ساتھ ضرب۔

شکل 8.6: سمتیات کا غیر سمتیہ کے ساتھ ضرب اور سمتیات کا فرق۔

اگر $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ ہو اور $q < 0$ ہو تب $q\boldsymbol{a}$ کی سمت $\boldsymbol{a}$ کی سمت کے الٹ ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ یا $q = 0$ ہو (اور یا دونوں صفر ہوں) تب $q\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ ہو گا۔

ان قواعد کی سادہ مثالیں شکل 8.6-الف میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں تب اسی نظام محدد میں $q\boldsymbol{a}$ کے اجزاء qa_1 ، qa_2 اور qa_3 ہوں گے۔اسی طرح سمتیہ کی تعریف سے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
q(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= q\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}\\
(c+k)\boldsymbol{a} &= c\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}\\
c(k\boldsymbol{a}) &= (ck)\boldsymbol{a} \qquad \text{جس کو } ck\boldsymbol{a} \text{ لکھا جاتا ہے}\\
1\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

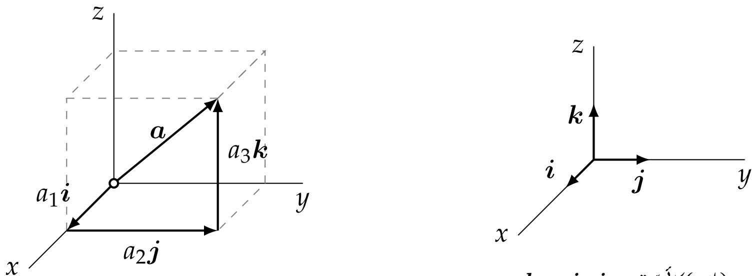
مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
0\boldsymbol{a} &= \mathbf{0}\\
(-1)\boldsymbol{a} &= -\boldsymbol{a}
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

ہم $\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a})$ کی جگہ $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ لکھ سکتے ہیں (شکل 8.6-ب)۔

کسی بھی ایک کارتیسی نظام محدد کو استعمال کرتے ہوئے، ہم سمتیہ $\boldsymbol{a}$ جس کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں کو تین ایسی سمتیات کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں جو اس کارتیسی نظام کے تین محور کے متوازی ہوں۔ہم اس کارتیسی نظام کے ساتھ تین ایسے اکائی سمتیات، جنہیں ہم $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کہیں گے، وابستہ کرتے ہیں جن کی مثبت سمت اس کارتیسی نظام کے محور کی مثبت سمت ہو۔ یوں $\boldsymbol{a}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل 8.7)۔

$$
\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}
\tag{8.10}
$$



(الف) اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$

(ب) سمتیہ کا تین اکائی سمتیات کی مدد سے اظہار

شکل 8.7: اکائی سمتیات اور ان کا استعمال۔

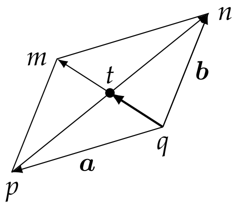
شکل 8.7-الف میں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کی دم کو کارتیسی نظام کے مرکز پر رکھا گیا ہے۔یہ اکائی سمتیات آپس میں **عمودی یا قائمہ**[16] ہیں۔ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ اس نظام محدد کی **ثلاثہ اکائی قائمہ سمتیات** ہیں۔

مثال 8.2: کسی کارتیسی نظام میں اگر $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ ہوں، تب درج ذیل ہوں گے۔

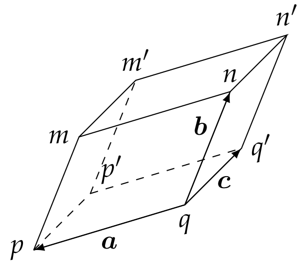
$$3\boldsymbol{a} = 9\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k}, \quad -\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad 1.2\boldsymbol{a} - 0.5\boldsymbol{b} = 6.1\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3.4\boldsymbol{k}$$

مثال 8.3: کسی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم A پر ہے جبکہ اس کا سر B پر ہے۔اسی سمت میں کسی بھی سمتیہ کو $l\boldsymbol{a}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں l غیر سمتی مستقل ہے۔اب اگر $l\boldsymbol{a}$ سمتیہ کی دم A پر ہو تب $l = 0$ کی صورت میں اس

[16] orthogonal



(ب) وتر نقطہ t پر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔



(الف) چپٹا ڈبا۔

شکل 8.8: سمتیات کا استعمال۔مثال 8.4

سمتیہ کا سر نقطہ A پر ہو گا جبکہ $l = 1$ کی صورت میں اس کا سر نقطہ B پر ہو گا۔اسی طرح $l = \frac{1}{2}$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر $\boldsymbol{a}$ کے عین وسط پر ہو گا۔

مثال 8.4: $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ شکل 8.8-الف میں دکھائے گئے چپٹا ڈبے کے تین قریبی کنارے ہیں۔ڈبے کی سامنے سطح $mnqp$ کا وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ اور $\boldsymbol{v}_{np}$ دریافت کریں جہاں وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ کی دم q اور سر m ہیں۔جیسا شکل 8.8-ب میں دکھایا گیا ہے، وتری سمتیات $\boldsymbol{v}_{mq}$ اور $\boldsymbol{v}_{np}$ ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔نقطہ t دریافت کرتے ہوئے ثابت کریں کہ دونوں وتر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

حل: شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}_{mq} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{r}_{np} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$$

شکل 8.8-ب سے ظاہر ہے کہ q کو ابتدائی نقطہ تصور کرتے ہوئے t تک کئی راستوں سے پہنچا جا سکتا ہے۔ چونکہ t وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا q سے t تک سمتیہ کو $\boldsymbol{v}_{tq} = l_1 \boldsymbol{v}_{mq}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_1 < 1$ ممکن ہے۔اسی طرح q سے پہلے p اور یہاں سے $\boldsymbol{v}_{np}$ کی سمت میں چلتے ہوئے بھی نقطہ t تک پہنچنا ممکن ہے۔ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{tq} = \boldsymbol{a} + l_2 \boldsymbol{v}_{np}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_2 < 1$ ممکن ہے۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{v}_{tq} = l_1 \boldsymbol{v}_{mq} = \boldsymbol{a} + l_2 \boldsymbol{v}_{np} \quad \implies l_1(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + l_2(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \tag{8.11}$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}(l_1 - 1 + l_2) + \boldsymbol{c}(l_1 - l_2) = 0$$

ملتا ہے۔اب چونکہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ غیر صفر ہیں اور ان کی سمتیں بھی مختلف ہیں لہٰذا درج بالا مساوات صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب دونوں قوسین صفر ہوں یعنی:

$$\begin{aligned} l_1 - 1 + l_2 &= 0 \\ l_1 - l_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔اب $l_1 = \frac{1}{2}$ کی صورت میں مساوات 8.11 سے $\boldsymbol{v}_{tq} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_{mq}$ ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ نقطہ t عین mq کے وسط میں پایا جاتا ہے۔ مساوات 8.11 کے اگلے حصے سے اسی طرح ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ t عین np کے وسط میں پایا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 8.21 تا سوال 8.30 میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{k}$ لیں۔

سوال 8.21: $-4\boldsymbol{a}, \frac{1}{4}\boldsymbol{a}, 4\boldsymbol{a}$

جوابات: $-4\boldsymbol{a} = -8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k},\ \frac{1}{4}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{j} + \frac{1}{4}\boldsymbol{k}, 4\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

سوال 8.22: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

جوابات: $-\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$

سوال 8.23: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$

جوابات: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = -5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 8.24: $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}|$

جوابات: $\sqrt{35}, \sqrt{35}, 3^{\frac{3}{2}}$

سوال 8.25: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

جوابات: $5.916, 7.835$

سوال 8.26: $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$
جوابات: $5.916, -2.936$

سوال 8.27: $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}, \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$
جوابات: $0.82\boldsymbol{i}-0.41\boldsymbol{j}+0.41\boldsymbol{k},\ -0.56\boldsymbol{i}-0.31\boldsymbol{j}+0.74\boldsymbol{k},\ -\boldsymbol{k}$

سوال 8.28: $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|}, \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}, \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|}$
جوابات: $-0.17\boldsymbol{i}-0.51\boldsymbol{j}+0.85\boldsymbol{k},\ -0.43\boldsymbol{i}-0.29\boldsymbol{j}+0.86\boldsymbol{k},\ -0.23\boldsymbol{i}-0.69\boldsymbol{j}+0.69\boldsymbol{k}$

سوال 8.29: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
جوابات: $-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

سوال 8.30: $4(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}), 4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$
جوابات: $20\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$

سوال 8.31: قوت $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{p}=-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ ہیں۔ایسی قوت $\boldsymbol{m}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{m}$ ، $\boldsymbol{n}$ اور $\boldsymbol{p}$ توازن میں ہوں۔

جواب: $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$

سوال 8.32: ثابت کریں کہ شکل 8.8 میں وتر $m'q$ اور $n'p$ ایک دونوں کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

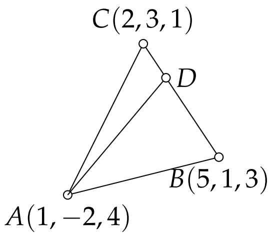
جواب: $\boldsymbol{v}_{m'q}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ اور $\boldsymbol{v}_{n'p}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ ہیں۔اب $\boldsymbol{v}_{tq}=l_1\boldsymbol{v}_{m'q}$ اور اسی طرح $\boldsymbol{v}_{tq}=\boldsymbol{a}+l_2\boldsymbol{v}_{n'p}$ لکھا جا سکتا ہے۔انہیں برابر پر کرتے ہوئے

$$l_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+l_2(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

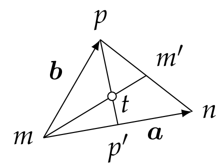
یعنی $\boldsymbol{a}(l_1-1+l_2)+\boldsymbol{b}(l_1-l_2)+\boldsymbol{c}(l_1-l_2)=0$ ملتا ہے۔چونکہ سمتیات صفر نہیں ہیں لہٰذا قوسین صفر ہوں گے۔یوں حاصل ہمزاد مساوات $l_1-1+l_2=0$ اور $l_1-l_2=0$ حل کرتے ہوئے $l_1=l_2=\frac{1}{2}$ ملتا ہے۔

سوال 8.33: تکون کی تین کونوں سے سامنے اطراف کی وسط کو ملانے والے خط ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔ t کے دونوں اطراف، خط کی لمبائی کا نسبت دریافت کریں۔

جواب: تکون کو شکل 8.9-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں mn کی وسط پر نقطہ p' اور pn کی وسط پر نقطہ m' دکھائے گئے ہیں۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{v}_{m'n}$ جس کی دم نقطہ n پر ہے کو $\boldsymbol{v}_{m'n}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ لکھا جا سکتا ہے جس



(ب) سوال 8.34 کی شکل۔



(الف) سوال 8.33 کی شکل۔

شکل 8.9: سمتیات کا استعمال۔

کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{m'm} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}_{m'n}$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{v}_{p'p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ لکھا جا سکتا ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{tm} = \boldsymbol{b} + l_1 \boldsymbol{v}_{p'p}$ اور $\boldsymbol{v}_{tm} = l_2 \boldsymbol{v}_{m'm}$ لکھے جا سکتے ہیں۔انہیں حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{2}{3}$ ملتا ہے۔یوں $m'm$ خط کے دو حصوں کا تناسب $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ یعنی $1:2$ ہو گا۔

سوال 8.34: تکون کے کونے $A(1,-2,4)$ ، $B(5,1,3)$ اور $C(2,3,1)$ ہیں۔ BC پر D پایا جاتا ہے جہاں $\overline{BD} = 2\overline{CD}$ ہے۔اس کو شکل 8.34-ب میں دکھایا گیا ہے۔خط AD کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{v}_{BA} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{v}_{CB} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ ہیں۔اب دی گئی معلومات کے تحت $\boldsymbol{v}_{DB} = \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_{CB}$ ہے۔یوں $\boldsymbol{v}_{DA} = \boldsymbol{v}_{BA} + \boldsymbol{v}_{DB}$ یعنی $\boldsymbol{v}_{AD} = 2\boldsymbol{i} + \frac{13}{3}\boldsymbol{j} - \frac{7}{3}\boldsymbol{k}$ ہو گا جس کی لمبائی $\frac{\sqrt{254}}{3}$ ہے۔

سوال 8.35: ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے ایک کونے سے سامنے والی طرف کی وسط تک لکیر، وتر کو $2:1$ تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

8.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے تمام سمتیات کا سلسلہ V جو سمتی مجموعہ (مساوات 8.7) اور سمتی ضرب (مساوات 8.8) کے الجبرائی قواعد پر پورا اترتا ہو کو **سمتی فضا**[17] یا **خطی فضا**[18] کہتے ہیں۔سمتی فضا کا تصور اس لئے اہم ہے کہ عملی دلچسپی کے دیگر

[17] vector space
[18] linear space

سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادل وغیرہ پر مبنی ہوں پائے جاتے ہیں جن کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب کی بالکل ایسی ہی فطری تعریف کی جا سکتی ہے۔

مسئلہ 8.1: حقیقی سمتی فضا
اگر سلسلہ V کے ارکان a ، b ، . . . درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے ہیں) پر پورا اترتے ہوں تب V **حقیقی سمتی فضا**[19] یا **حقیقی خطی فضا** کہلاتا ہے اور یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) **سمتیات** کہلاتے ہیں۔

(الف) **سمتی جمع** V کے ہر دو سمتیات a اور b کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو a اور b کا مجموعہ کہلاتا اور $a+b$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) **قانون تبادل۔** V کے ہر دو ارکان a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{8.12}$$

(الف-2) **قانون تلازم۔** V کے ہر تین ارکان a ، b اور c کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \qquad (\text{جو } \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \text{ لکھا جاتا ہے}) \tag{8.13}$$

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو **صفر سمتیہ** کہلاتا اور $\mathbf{0}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a} \tag{8.14}$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ a کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-a$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0} \tag{8.15}$$

(ب) **غیر سمتی ضرب۔** حقیقی اعداد **غیر سمتی** کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ a کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو a اور c کا **حاصل ضرب** کہلاتا اور ca (یا ac) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

[19] real vector space

(ب-1) **قانون جزئیتی تقسیم۔** ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b} \tag{8.16}$$

(ب-2) **قانون جزئیتی تقسیم۔** ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(c+k)\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{a} \tag{8.17}$$

(ب-3) **قانون وابستگی۔** ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(k\boldsymbol{a}) = (ck)\boldsymbol{a} \qquad (\text{جو } ck\boldsymbol{a} \text{ لکھا جاتا ہے}) \tag{8.18}$$

(ب-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{8.19}$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے **مخلوط سمتی فضا** کی مسلمی تعریف حاصل ہو گی۔

سمتی فضا پر مزید بحث حصہ 7.9 میں کی جائے گی۔آئیں اب سمتی فضا کی چند اہم خصوصیات پر غور کریں۔

فرض کریں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سلسلہ V کے ارکان ہیں۔ان کے **خطی مجموعے**[20] سے مراد درج ذیل ہے جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

سمتی فضا کی تعریف کے تحت درج بالا ازخود V کا رکن سمتیہ ہو گا۔اس طرز کی تمام مجموعوں کا سلسلہ S ، ان سمتیات کا **احاطہ**[21] کہلاتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ یہ سمتیات S کے **پیدا کار**[22] ہیں۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔

[20] linear combination
[21] span
[22] generator

خطی مجموعے کو استعمال کرتے ہوئے ہم خطی تابعیت اور خطی غیر تابعیت متعارف کرتے ہیں۔

سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ** پیدا کرتے ہیں جب درج ذیل

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{8.20}$$

سے مراد $c_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $c_m = 0$ ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سمتیات **خطی طور غیر تابع ہیں**۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 7.84 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ **خطی طور تابع**[23] کہلاتے ہیں۔

$m = 1$ کی صورت میں مساوات 7.84 سے $c\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ $\boldsymbol{a}$ اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو۔

مثال 8.5: خطی طور تابع اور خطی طور غیر تابع سمتیات کے سلسلے

سمتیات $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ خطی طور تابع ہیں چونکہ $6\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ لکھ کر $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔

اگر V میں غیر تابع سمتیات کی تعداد n ہو جبکہ V میں موجود n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا بُعد n ہو گا اور V کو n **بُعدی** کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو V کی **اساس**[24] کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ **منفرد** ہو گا۔

اس کی مثال فضا کے تمام سمتیات (حصہ 8.1) کی سمتی فضا ہے۔اس سمتی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عدد سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ (حصہ 8.3) کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ فضا سہ بُعدی ہے۔

[23] linearly dependent
[24] basis

اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{8.21}$$

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 8.21 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 8.21 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور غیر تابع**[25] کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات کا **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[26] ہے۔اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.21 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور تابع**[27] کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 8.21 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{a}_{(1)} = k_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots - k_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($\boldsymbol{a}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔اگر $m = 1$ ہو تب مساوات 8.21 کو ہم $c_1\boldsymbol{a}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ لکھیں گے جس میں $k_1 \neq 0$ اس صورت ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{a}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ ہو جو خطی تابعیت کی تعریف کے تحت خطی طور تابع ہے۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

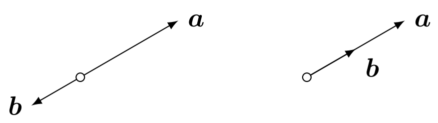
مسئلہ 8.2: خطی طور تابعیت
اگر مساوات 8.21 صرف اور صرف اس صورت درست ہو جب تمام c_1 تا c_m صفر ہوں تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ خطی طور تابع ہوں گے۔

درج بالا لازم اور معقول (کافی) شرط کو ہی عموماً تابعیت کی تعریف تصور کی جاتی ہے۔

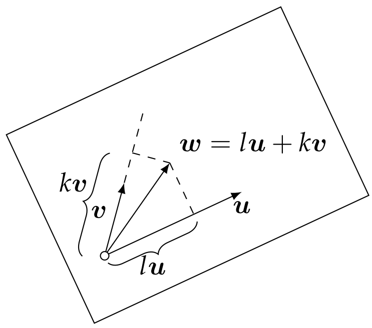
اگر ان میں کوئی ایک سمتیہ بھی صفر سمتیہ ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ خطی طور غیر تابع ہوں گے، مثلاً $\boldsymbol{a}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ کی صورت میں مساوات 8.21 میں $k_1 \neq 0$ اور $k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0$ ہو سکتا ہے۔

سہ بُعدی فضا میں دو عدد خطی طور تابع سمتیات **ہم خطی**[28] ہوں گے (شکل 8.10) یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے

[25] linear independent
[26] linearly independent set
[27] linearly dependent
[28] collinear



شکل 8.10: ہم خطی سمتیات۔



شکل 8.11: ہم سطحی سمتیات۔

پر ہو تب یہ ایک ہی سیدھی خط پر واقع ہوں گے۔ایسے تین سمتیات u ، v اور w جو خطی طور تابع سلسلہ پیدا کرتے ہوں ہم **سطحی**[29] کہلاتے ہیں، یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ سمتیات ایک ہی سیدھی سطح پر واقع ہوں گے (شکل 8.11)۔ درحقیقت خطی تابعیت کا مطلب یہ ہے کہ ایک سمتیہ کو بقایا سمتیات کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ سہ بُعدی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عددی سمتیات i ، j اور k کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سہ بُعدی فضا میں چار یا چار سے زیادہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

سوالات

ثابت کریں کہ سوال 8.36 تا سوال 8.39 میں دیے گئے سمتیات کا سلسلہ سمتی فضا پیدا کرتا ہے۔اس فضا کی بُعد اور اساس دریافت کریں۔

سوال 8.36: سہ بُعدی فضا وہ تمام سمتیات جن کا پہلا جزو صفر ہے۔

[29] coplanar

جوابات: 2 ؛ $\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{k}$

سوال 8.37: ایسے تمام سمتیات جنہیں $b\boldsymbol{i}+k(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ لکھا جا سکتا ہے جہاں b اور k کوئی بھی غیر سمتی ہو سکتے ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 8.38: ایسے تمام n مرتب اعداد $(a_1,\cdots,a_n)$ کا سلسلہ جن کے مجموعے کی تعریف اور غیر سمتی کے ساتھ ضرب کی تعریف درج ذیل ہو۔

$$
\begin{gathered}
(a_n,\cdots,a_n)+(b_1,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)\\
c(a_n,\cdots,a_n)=(ca_n,\cdots,ca_n)
\end{gathered}
$$

جوابات: n ؛ $(1,0,\cdots,0)$ ، $(0,1,\cdots,0)$ ، $\cdots$ ، $(0,0,\cdots,1)$

سوال 8.39: ایسے تمام تفاعل جنہیں $y(x)=a\cos x+b\sin x$ لکھا جا سکتا ہے جہاں a اور b اختیاری مستقل ہیں۔ان تفاعل کے مجموعے اور غیر سمتیات کے ساتھ ضرب عمومی قواعد کے تحت ہیں۔

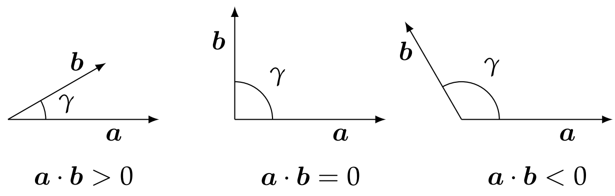
جوابات: 2 ؛ $\cos x$ ، $\sin x$

8.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)

سہ بُعدی فضا میں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی اندرونی ضرب[30] جس کو $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ لکھا جاتا ہے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\gamma(0\le\gamma\le\pi)$ سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مابین زاویہ ہے (جو دونوں سمتیات کی دم ایک ہی نقطے پر رکھ کر ناپا جاتا ہے)۔ (شکل 8.12)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\gamma &&(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=0 &&(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ \text{(اور)یا}\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{0})
\end{aligned}
\tag{8.22}
$$

[30] inner product



شکل 8.12: سمتیات کے مابین زاویہ۔

اندرونی ضرب کو **ضرب نقطہ**[31] بھی کہتے ہیں۔اندرونی ضرب کا حاصل غیر سمتی (حقیقی عدد) ہوتا ہے اور یوں اندرونی ضرب کو **غیر سمتی ضرب**[32] بھی کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 8.22 میں $\cos\gamma$ کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 8.12) لہٰذا اندرونی ضرب کی قیمت بھی مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے۔ زاویہ 0 تا π کے درمیان صرف $\gamma=\frac{\pi}{2}$ پر $\cos\gamma=0$ ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.3: **قائمیت**[33]
دو عدد غیر صفر سمتیات آپس میں صرف اور صرف اس صورت قائم الزاویہ (عمودی) ہوں گے جب ان کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو۔

مساوات 8.22 میں $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ پر کرنے سے $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ حاصل ہوتا ہے اور یوں سمتیہ کی لمبائی (اقلیدسی معیار) کو اندرونی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\qquad(\geq 0) \tag{8.23}$$

درج بالا اور مساوات 8.22 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}} \tag{8.24}$$

اندرونی ضرب کی تعریف سے درج ذیل خصوصیات اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) \quad [q_1\boldsymbol{a}+q_2\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=q_1\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+q_2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{خطیت}\\
&(\text{ب}) \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \quad \text{تشاکل}\\
&(\text{پ}) \quad \left.\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0\\ &\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0 \ \text{اگر}\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \text{مثبت ہونا}
\end{aligned} \tag{8.25}$$

---

dot product[31]
scalar product[32]
orthogonality[33]

یوں ضرب نقطہ استبدالی اور سمتیات کی جمع کے لئے جزئیتی تقسیمی ہے۔ مساوات 8.25 میں $q_1 = 1$ اور $q_2 = 1$ لینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{(جزئیتی تقسیم)} \tag{8.26}$$

مساوات 8.22 اور $\cos\gamma \le 1$ سے درج ذیل **شوارز عدم مساوات**[34] [35] ملتی ہے۔

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \qquad \text{شوارز عدم مساوات} \tag{8.27}$$

---

[34] Schwarz inequality
[35] جرمن ریاضی دان ہرمن امندس شوارز [1843-1921]

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.