

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسکی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخلوط اعداد
1047	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1 نقشہ کشی
1116	15.2 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1125	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6 ریمان سطحیں
1157	16 مخلوط مکملات
1157	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201	17 ترتیب اور تسلسل
1201	17.1 ترتیب
1208	17.2 تسلسل
1213	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220	17.4	یک سر حقیقی ترتیب۔ لیسنز آزمائش برائے حقیقی تسلسل
1225	17.5	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں
1236	17.6	تسلسل پر اعمال

1243	18	18 طاقی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوغوں تسلسل
1243	18.1	طاقی تسلسل
1256	18.2	طاقی تسلسل کی روپ میں تفاعل
1263	18.3	ٹیلر تسلسل
1268	18.4	بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل
1274	18.5	طاقی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب
1281	18.6	یکساں استرار
1294	18.7	لوغوں تسلسل
1303	18.8	لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور قدرت

1315	19	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ
1315	19.1	بقیہ
1322	19.2	مسئلہ بقیہ
1327	19.3	حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ
1335	19.4	حقیقی مکمل کے دیگر اقسام

1343	20	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ
1344	20.1	ساکن برقی سکون
1350	20.2	دو بعدی بہا و سیال
1359	20.3	ہارمونئی تفاعل کے عمومی خواص
1364	20.4	پوسوں کلیہ مکمل

1371	21	21 اعدادی تجزیہ
1372	21.1	خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر
1374	21.2	دہرانے سے مساوات کا حل
1385	21.3	متناہی فرق
1392	21.4	باہمی تحریف
1401	21.5	لچکدار منحنیات
1408	21.6	اعدادی مکمل اور تفرق
1420	21.7	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

1431	ا	اضافی ثبوت
1435	ب	مفید معلومات
1435	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 21

اعدادی تجزیہ

انجینئری حساب کا نتیجہ آخر کار اعدادی ہوتا ہے لہذا انجینئری طالب علم کے لئے بنیادی اعدادی تراکیب¹ جاننا ضروری ہیں جن کی مدد سے دیے گئے مواد سے اعدادی جوابات اخذ کرنا ممکن ہو۔

بعض اوقات نظریہ سے حاصل کردہ جوابات عملاً قابل استعمال نہیں ہوتے ہیں، مثلاً ایک درجی خطی تفرقی مساوات کے حل کا تکمیلی کلیہ (حصہ 1.5)، خطی الجبرائی مساوات کے نظام کا مقطع کی مدد سے حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7)۔ کئی بار نظریہ صرف حل کی وجودیت کی یقین دہانی کرتا ہے لیکن اصل حل حاصل کرنے کے بارے میں کوئی مدد فراہم نہیں کرتا ہے۔

اعدادی تراکیب کی اہمیت کمپیوٹر کی ایجاد کی نظر ہے۔ ہم ان تراکیب کے نظریہ اور عملی استعمال پر غور کریں گے۔ تجزیہ خلل² پر بھی غور کیا جائے گا جو اعدادی تراکیب میں زیادہ اہمیت کے حامل ہے۔

numerical methods¹
error analysis²

21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر

چونکہ اعدادی تراکیب میں متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے متناہی تعداد کے چال کے بعد جواب حاصل کیا جاتا ہے لہذا یہ تراکیب متناہی چال³ ہیں جو اصل (نا معلوم) بالکل درست حل کی تخمین⁴ پیش کرتے ہیں ماسوائے ان چند صورتوں میں جب اصل جواب کافی سادہ ناطق عدد ہو اور ہم کوئی ایسا اعدادی ترکیب استعمال کریں جو یہی بالکل درست جواب فراہم کرتا ہو۔

اگر کسی مقدار کی اندازاً قیمت a^* ہو اور اس کی اصل قیمت a ہو تب فرق $\epsilon = a^* - a$ کو a^* کا حتمی خلل یا مختصراً a^* کا خلل⁵ کہتے ہیں۔ یوں

$$a^* = a + \epsilon \quad \text{خلل} + \text{اصل قیمت} = \text{تخمین}$$

ہو گا۔ a^* کی اضافی خلل⁶ ϵ_r کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{r} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خلل}}{\text{اصل قیمت}} \quad (a \neq 0)$$

ظاہر ہے اگر $|\epsilon|$ کی قیمت $|a^*|$ کی قیمت سے بہت کم ہو تب $\epsilon_r \approx \frac{\epsilon}{a^*}$ ہو گا۔ ہم ایک نئی مقدار $\gamma = a - a^* = -\epsilon$ متعارف کرتے ہیں جس کو ہم درستگی⁷ کہیں گے۔ یوں

$$a = a^* + \gamma \quad \text{درستگی} + \text{تخمین} = \text{اصل قیمت}$$

ہو گا۔ آخر میں a^* کی حد خلل⁹ سے مراد عدد β ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$|a^* - a| \leq \beta \implies |\epsilon| \leq \beta$$

خلل کی تین قسمیں تجربی خلل، قطع چال خلل اور تعداد اعداد خلل ہیں۔ تجربی خلل¹⁰ سے مراد مواد میں خلل ہے (جو تجربی ناپ کی وجہ سے ہو سکتے ہیں)۔ بالکل درست جواب تک پہنچنے کی خاطر متناہی (یا لامتناہی) تعداد کے حسابی

finite processes³

approximation⁴

error⁵

relative error⁶

correction⁷

⁸ بعض اوقات خلل کی تعریف $\gamma = -\epsilon$ لی جاتی ہے۔ آپ کسی ایک تعریف کو تسلیم کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ ہم خلل کی تعریف ϵ لیں گے۔

error bound⁹

Experimental errors¹⁰

چال (قءم) ءركار هوں گء. حقيقت ميں كسى خاص ءءاء كى چال بعء حساب روك ءيا جاتا هى اور يوں قطع چال خنل¹¹ پيءا هو گا. هر قءم پر حساب كى ءوران كميوٹر ءناهى ءءاء كى اءءاء اسءءال كرتى هوئى كءر هءءسه سى كم قيمءوں كو رء كرتا هى جس سى ءءءاء هءءسه خنل¹² پيءا هو گا جس پر هم اب غور كرتى ميں.

اعءشارى نظام ميں هر عءء كو ءناهى يا لاءناهى ءءاء كى اعءشارى هءءسوں سى ظاهر كيا جاتا هى. كميوٹر لاءناهى ءءاء كى هءءسوں كو ذخيرى كر سكتا هى لءذا كميوٹر اسءءال كرتى هوئى كسى بهى عءء كو ءناهى ءءاء كى هءءسوں سى ظاهر كيا جاتا هى. ان اءءاء كو ءو طريقتوں سى كميوٹر ميں ذخيرى كيا جاتا هى. مقررء نقطى¹³ نظام ميں نقطى اعءشارى كى بعء مقررء ءءاء كى هءءس سى پائى جاتى هيں مثلاً 35.143 ، 5.000 ، 0.076 جبكى غير مقررء نقطى¹⁴ نظام ميں ملحوظ هءءسوں¹⁵ كى ءءاء ءءعين هوئى هى مثلاً 0.6723×10^2 ، -0.2354×10^{-4} اور 0.1000×10^1 جهاں ملحوظ هءءسوں كى ءءاء چار هى. عءء c كى ملحوظ هءءسه سى مرءء c كا هر هءءسه هى ماسوائى پهلل غير صفر عءء كى بايں جانب صفر جو اعءشارى كا مقام ءعين كرتا هو. (يوں اس كى علاءه هر صفر بهى c كا ملحوظ هءءسه هو گا.) مثال كى طور پر 5420 ، 1.340 اور 0.001460 ميں سى هر ايك ميں چار ملحوظ هءءس¹⁶ هيں.

ءءاء هءءسه خنل كا قاعءه اب بيان كرتى هيں. (k ملحوظ هءءسوں اك قطع كرنى كى ءءريف بهى يهى هى پس اس ميں هءءسه كى جگى ملحوظ هءءسه پر كريں.)

$k + 1$ والى هءءسه اور اس كى بعء ءمام هءءسوں كو رء كريں. اگر رءءءه عءء مقام k كى اكائى كى نصف سى كم هو ءب مقام k پر هءءسه كو ءبءيل نه كريں ("گھٹانا"). اگر رءءءه عءء مقام k كى اكائى كى نصف سى زيءه هو ءب ءب مقام k كى هءءس كى ساءھ 1 جمع كريں ("بڑھانا"). اگر رءءءه عءء مقام k كى اكائى كا نصف هو ءب اگر مقام k كا هءءسه طاق هو ءب اس كو بڑھا كر جفت بنايں. (مثال كى طور پر 3.45 اور 3.55 كو اشءارى كى بعء ايك هءءسه اك قطع كرتى هوئى بالءريب 3.4 اور 3.6 حاصل هو گا.)

اس قاعءه كا آخرى حصى يقينى بناتا هى كى عءء كا كءر حصى رء كرتى هوئى اوسطاً برابر مرءبى عءء بڑھايا اور گھٹايا جاتا هى.

Truncation error¹¹rounding error¹²fixed point¹³floating point¹⁴significant digits¹⁵

¹⁶ ايسا ءءول جو k ملحوظ هءءس سى ءتا هو ميں، جب اك كها نا جائى كى ايسا نهيں هى، هم فرض كرتى هيں كى ءيا كيا عءء a^* ، بالكل ءر سء قيمء a سى آخرى هءءس كى ± 0.5 اكايں مءلف هو سكتا هى. مثال كى طور پر اگر $a = 1.1996$ اور $a^* = 1.200$ ءى ءى گا.

اگر ہم 1.2535 کو 3، 2 اور 1 اشاریہ تک قطع کریں تب ہمیں بالترتیب 1.254، 1.25 اور 1.3 حاصل ہو گا لیکن، بغیر مزید معلومات کے، 1.25 کو ایک اشاریہ تک قطع کرنے سے ہمیں 1.2 ملتا ہے۔

تعداد ہندسہ خلل کی وجہ سے کوئی بھی حساب مکمل غلط ہو سکتا ہے۔ عموماً چال کی تعداد بڑھانے سے یہ خلل بڑھتا ہے۔ یوں حسابی پروگرام کو اس خلل کی نقطہ نظر سے دیکھنا ضروری ہو گا اور اس خلل کو کم سے کم کرنا لازم ہو گا۔

21.2 دہرانے سے مساوات کا حل

ہمیں عموماً مساوات

$$(21.1) \quad f(x) = 0$$

کے حل درکار ہوتے ہیں یعنی ایسے عدد X_0 کہ $f(X_0)$ صفر کے برابر ہو جہاں f دیا گیا تفاعل ہے۔ مثال کے طور پر $\cosh x = \sec x$ ، $\tan x = x$ ، $\sin x = 0.5x$ ، $x^3 + x = 1$ ، $x^2 - 3x + 2 = 0$ اور $\cosh x \cos x = -1$ کو مساوات 21.1 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں پہلے دو میں f کثیر رکنی ہے لہذا یہ دونوں الجبرائی مساوات¹⁷ ہیں جن کے حل کو جذر¹⁸ کہتے ہیں۔ باقی ماوردائی مساوات¹⁹ ہیں جن میں ماوردائی تفاعل استعمال ہوئے ہیں۔ حقیقتاً صرف انتہائی سادہ صورتوں میں مکمل درست حل نکالنے والے کلیات موجود ہوں گے۔ عموماً دہرانے کی ترکیب یا دیگر تراکیب سے اصل حل کا تخمینہ حاصل کریں گے۔

اعدادی دہرانے کے طریقہ میں ہم اختیاری x_0 منتخب کرتے ہوئے درج ذیل روپ کلیہ

$$(21.2) \quad x_{n+1} = g(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

سے، بار بار حل کرتے ہوئے، ترتیب x_0, x_1, x_2, \dots حاصل کرتے ہیں جہاں g کسی ایسے وقفہ پر معین ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہو اور g کا حلقہ اسی وقفہ پر ہے۔ یوں ہم یک بعد دیگرے $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $x_3 = g(x_2)$ ، ... حاصل کرتے ہیں۔

اس حصہ میں دائرہ کار اور حلقہ $g(x)$ دونوں حقیقی لکیر پر ہوں گے۔ زیادہ عمومی معامہ میں x یا g اور یا دونوں سمتیات ہو سکتے ہیں۔

¹⁷ algebraic equations

¹⁸ roots

¹⁹ transcendental equations

دہرانے کے تراکیب اعدادی تجزیہ کے لئے انتہائی اہم ہیں۔

مساوات 21.1 کو حل کرنے کے لئے دہرانے کے تراکیب کئی طریقوں سے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ ہم ان میں سے تین خصوصاً اہم طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

الجبرائی تبادلہ۔ ہم مساوات 21.1 کو الجبرائی طور پر تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل روپ حاصل کر سکتے ہیں

$$(21.3) \quad x = g(x)$$

جو مساوات 21.2 کی روپ میں ہے۔ مساوات 21.3 کے حل کو g کا مقررہ نقطہ²⁰ کہتے ہیں۔ دیے گئے مساوات 21.1 کے کئی مطابقتی مساوات 21.3 ہو سکتے ہیں جن کے ترتیب x_0, x_1, \dots مختلف (اور x_0 کے تابع) ہوں گے۔ آئیں ایک سادہ مثال دیکھتے ہیں جس میں یہ حقائق ابھر کر سامنے آتے ہیں۔

مثال 21.1: دہرانے کی ترکیب

مساوات $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ کے لئے دہرانے کی ترکیب عمل میں لائیں۔ چونکہ ہمیں اس مساوات کے حل

$$x = 1.5 \pm \sqrt{1.25}, \quad x_1 = 2.618034, \quad x_2 = 0.381966$$

معلوم ہیں، ہم دہرانے کے عمل کے دوران خلل کا رویہ دیکھ سکتے ہیں۔ ہم دیے گئے مساوات سے

$$(21.4) \quad x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \implies x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ترتیب ملتی ہے

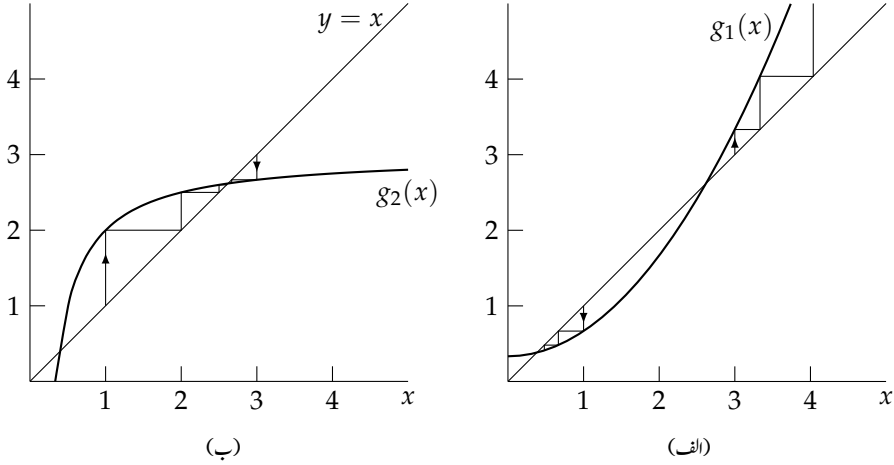
$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 0.667, \quad x_2 = 0.481, \quad x_3 = 0.411, \quad x_4 = 0.390, \dots$$

جو چھوٹے جذر کی طرف گامزن ہے (شکل 21.1-الف)۔ اگر ہم $x_0 = 3.000$ منتخب کریں تب درج ذیل ملتا ہے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.766, \quad x_4 = 11.414, \dots$$

جو منفرد ترتیب ہے (شکل 21.1-الف)۔ دی گئی مساوات سے درج ذیل بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(21.5) \quad x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x} \implies x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$$



شکل 21.1: اشکال برائے مثال 21.1

اب x_0 منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 2.000, \quad x_2 = 2.500, \quad x_3 = 2.600, \quad x_4 = 2.615, \dots$$

حاصل ہوتا ہے جو بڑے جذر کی طرف گامزن ترتیب ہے (شکل 21.1-ب)۔ اسی طرح $x_0 = 3$ منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 2.667, \quad x_2 = 2.625, \quad x_3 = 2.619, \quad x_4 = 2.618, \dots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 21.1-ب)۔ شکل کو دیکھ کر واضح ہوتا ہے کہ مرکوزیت اس صورت ہوگی جب حل کی پڑوس میں منحنی $g(x)$ کی ڈھلوان سیدھے خط $y = x$ کی ڈھلوان سے کم ہو۔ ہم اب دیکھتے ہیں کہ مرکوزیت کے لئے $|g'(x)| < 1$ کی شرط کافی ہے (جہاں خط $y = x$ کی ڈھلوان $y' = 1$ ہے)۔ □

اگر x_0 کا مطابقتی مساوات 21.2 سے حاصل کردہ ترتیب x_0, x_1, \dots مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب موثر ہے۔

ارتکاز کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کے کئی اہم عملی استعمال پائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 21.1: (ارتکاز)

فرض کریں کہ $x = g(x)$ کا حل $x = s$ ہے اور فرض کریں کہ کسی ایسے وقفہ J ، جس میں s پایا جاتا

ہو، پر $g(x)$ کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر J میں $|g'(x)| \leq \alpha < 1$ ہو تب مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب J میں ہر x_0 کے لئے مرکب ہوگی۔

ثبوت: تفرقی علم الاحصاء کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت x اور s کے درمیان ایسا جی پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا،

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s)$$

جہاں x وقفہ J میں پایا جاتا ہے۔ چونکہ $g(s) = s$ اور $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، ... ہیں لہذا ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} |x_n - s| &= |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(\xi)| |x_{n-1} - s| \leq \alpha |x_{n-1} - s| \\ &\leq \alpha^2 |x_{n-2} - s| \leq \dots \leq \alpha^n |x_0 - s| \end{aligned}$$

چونکہ $\alpha < 1$ ہے لہذا $n \rightarrow \infty$ کرنے سے $\alpha^n \rightarrow 0$ اور $|x_n - s| \rightarrow 0$ ہوں گے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 21.2: دہرانے کا طریقہ۔ مسئلہ 21.1

دہرانے کے طریقہ سے $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا حل تلاش کریں۔ اس مساوات کا جلدی سے خاکہ بنا کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ ہم اس مساوات سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

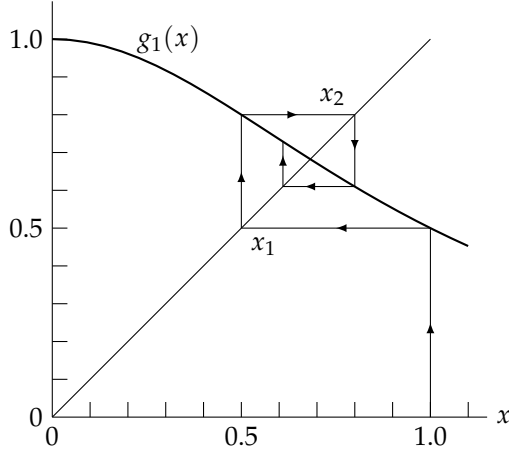
$$x = g_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n^2}$$

یوں کسی بھی x کے لئے $|g'_1(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} < 1$ ہو گا لہذا تمام x پر مرکزیت پائی جائے گی۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 21.2)

$$x_1 = 0.500, \quad x_2 = 0.800, \quad x_3 = 0.610, \quad x_4 = 0.729, \quad x_5 = 0.653, \quad x_6 = 0.701, \dots$$

جبکہ چھ ہندسوں تک درست اصل جذر $s = 0.682328$ ہے۔ ہم مساوات سے درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_2(x) = 1 - x^3, \quad |g'_2(x)| = 3x^2$$



شکل 21.2: مثال 21.2

جذر کے قریب $|g'_2|$ کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے لہذا ہم ارٹکاز کی توقع نہیں کر سکتے ہیں۔ آپ $x_0 = 1$ ،
 $x_0 = 0.5$ ، $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے اپنی تسلی کر سکتے ہیں۔ □

مساوات $f(x) = 0$ ، جہاں f قابل تفرق ہے، کو ترکیب نیوٹن سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب میں ہم $f(x)$ کا تخمینہ اس کے مماسوں سے حاصل کرتے ہیں۔ اس ترکیب میں ہم f کی ترسیم سے حاصل x_0 پر f کا مماس بناتے ہیں۔ یہ مماس x محور کو x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل 21.3)۔ یوں

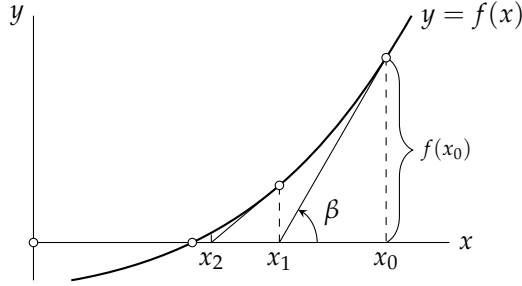
$$\tan \beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ہو گا۔ اگلے قدم پر ہم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اسی طرح چلتے ہوئے جذر تک پہنچا جاتا ہے۔ یوں دہرانے کے طریقے کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(21.6) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, \dots)$$



شکل 21.3: ترکیب نیوٹن

مثال 21.3: جذر المربع

کسی مثبت حقیقی عدد c کا جذر المربع حاصل کرنے کے لئے دہرانے کی ترکیب بنائیں۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کریں۔ ہمارے پاس \sqrt{c} یعنی $f(x) = x^2 - c = 0$ ہے لہذا $f'(x) = 2x$ ہو گا۔ یوں مساوات 21.6 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

اب اس ترکیب سے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کرتے ہیں۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = 1.500\,000, \quad x_2 = 1.416\,667, \quad x_3 = 1.414\,216, \quad x_4 = 1.414\,214, \dots$$

2 کا جذر المربع 1.414 213 562 ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x_4 چھ ملخوظ ہندسوں تک درست جواب دیتا ہے۔ □

مثال 21.4: ماورائی مساوات کا دہرانے کی ترکیب سے حل

مساوات $2 \sin x = x$ کا مثبت حل تلاش کریں۔ ہم $f(x) = x - 2 \sin x$ لکھتے ہوئے $f'(x) = 1 - 2 \cos x$ حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 21.6 کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2 \sin x_n}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n \cos x_n)}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}$$

جدول 21.1: جدول برائے مثال 21.4

x_{n+1}	D_n	N_n	x_n	n
1.901	1.832	3.483	2.000	0
1.896	1.648	3.125	1.901	1
1.896	1.639	3.107	1.896	2

f کی ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا حل $x_0 = 2$ کے قریب ہے۔ یوں ہم جدول 21.1 حاصل کرتے ہیں۔ چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 1.8955 ہے۔ □

مثال 21.5: ترکیب نیوٹن کا الجبرائی مساوات پر اطلاق مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔ مساوات 21.6 سے درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

$x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x_1 = 0.750000, \quad x_2 = 0.686047, \quad x_3 = 0.682340, \quad x_4 = 0.682328, \dots$$

x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔ مثال 21.2 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ مثال بہت تیزی کے ساتھ اصل حل پر مرکوز ہوتا ہے۔ اس سے دہرانے کی ترکیب کے درجہ کا تصور پیدا ہوتا ہے جس پر اب بات کی جائے گی۔ □

فرض کریں کہ مساوات $x = g(x)$ کا حل s ہے اور $x_{n+1} = g(x_n)$ ایک دہرانے کی ترکیب ہے جو اس حل کی تخمینہ x_n دیتی ہے۔ تب $x_n = s + \epsilon_n$ ہو گا جہاں x_n میں خلل ϵ_n ہے۔ فرض کریں کہ g متعدد بار قابل تفرق ہے لہذا ٹیلر کے کلیہ سے

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \dots \\ &= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \dots \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ جزو $g(s)$ کے بعد پہلی غیر صفر جزو میں ϵ کے قوت نما کو دہرانے کی ترکیب (جس کو g تعین کرتا ہے) کا درجہ ²¹ کہتے ہیں۔ چونکہ $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \epsilon_{n+1}$ یعنی x_{n+1} کا خلل

order²¹

ہے، اور ارتکاز کی صورت میں بڑی n کے لئے ϵ_n چھوٹا ہو گا لہذا ترکیب کا درجہ اس کی مرکزیت کی ناپ ہے۔

ترکیب نیوٹن دو درجی ہے
ترکیب نیوٹن کے لئے درج ذیل ہے

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

اور چونکہ $f(s) = 0$ ہے لہذا $g'(s) = 0$ ہو گا؛ یوں ترکیب نیوٹن کم از کم دو درجی ہے۔ ایک اور تفرق کے بعد $g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}$ ملتا ہے جو عموماً غیر صفر ہو گا۔ مثال 21.2 میں $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ اور $g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ہیں لہذا یہ یک درجی دہرانے کی ترکیب ہے۔

$f(x) = 0$ کے حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے لیکن حل کے قریب $f(x)$ کی ترمیم کو دیکھتے ہوئے، ترکیب نیوٹن کی جیومیٹریائی تصور کو مد نظر رکھتے ہوئے عموماً اس مشکل سے چھٹکارا حاصل کرنا ممکن ہو گا۔ اگر درکار حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہو تب x_{n+1} کی بہتر قیمت حاصل کرنے کی خاطر $f(x_n)$ اور $f'(x_n)$ کے زیادہ درست قیمتیں حاصل کرنا ضروری ہو گا۔ ایسی مساوات کو بد خو²² کہتے ہیں۔

$f(x) = 0$ کو حل کرنے کی تیسری ترکیب جس کو مقام غلط کی ترکیب²³ کہتے ہیں پر اب غور کرتے ہیں۔ اس ترکیب میں ہم منحنی $f(x)$ کو تخمیناً ایک وتر سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 21.4)۔ یہ وتر محور x کو

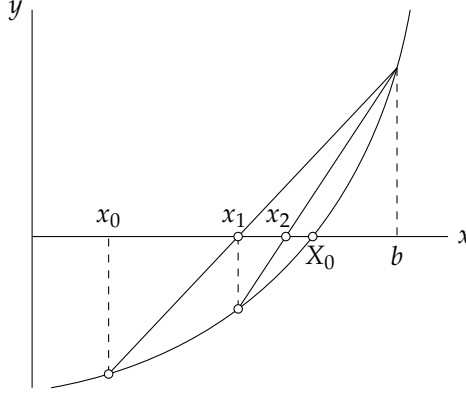
$$(21.7) \quad x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

پر قطع کرتا ہے جو $f(x) = 0$ کے حل X_0 کے قریب ہو گا۔ اگلے قدم پر اس سے بہتر حل

$$(21.8) \quad x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بتدریج بہتر حل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ b کو X_0 کے قریب کرنے سے ارتکاز کو بہتر بنایا جاسکتا ہے۔ عموماً قیاس کے ذریعہ ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

²²ill-conditioned
²³method of false position



شکل 21.4: منحنی کا تخمینی وتر

مثال 21.6: مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا وہ جذر تلاش کریں جو $x = 1$ کے قریب واقع ہے (مثال 21.2)۔ چونکہ $f(0.5) = -0.375$ اور $f(1) = 1$ ہیں لہذا ہم $x_0 = 0.5$ اور $b = 1$ منتخب کر سکتے ہیں۔ مساوات 21.7 سے

$$x_1 = \frac{0.5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

حاصل ہو گا جبکہ مساوات 21.8 سے $x_2 = 0.672$ ملتا ہے۔ ہم اسی طرح بتدریج بہتر حل تلاش کر سکتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 21.1: $x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 1$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.900\,000$

سوال 21.2: $x^3 - 1.2x^2 + 2x - 2.4 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 2$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.478\,261$

سوال 21.3: سوال 21.1 میں دیے گئے مساوات کے جذر 0.9 ، 1.1 اور 1.9 ہیں۔ اگرچہ $x_0 = 1$ جذر 0.9 اور 1.1 کے قریب ہے لیکن ترکیب نیوٹن ان کی جگہ جذر 1.9 تلاش کرتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ x_0 کی کوئی اور قیمت منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے جذر 1.1 حاصل کریں۔
جواب: تفاعل $f(x)$ کو $x_0 = 1$ پر مماس x محور کو عین $x = 1.9$ پر قطع کرتا ہے۔ آپ $x_0 = 1.2$ یا کوئی اور عدد منتخب کر سکتے ہیں۔

سوال 21.4 تا سوال 21.7 میں دیے مساوات کی ترکیب نیوٹن کی مدد سے تمام جذر تلاش کریں۔

سوال 21.4: $\cos x = x$
جواب: 0.739

سوال 21.5: $x + \ln x - 2$
جواب: 1.577

سوال 21.6: $2x + \ln x - 1$
جواب: 0.687

سوال 21.7: $x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82$
جواب: 1.4, -1.3,

سوال 21.8: دکھائیں کہ مثال 21.2 میں $|g'_1(x)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\tilde{x} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ پر حاصل ہوگی اور کہ یہ قیمت $|g'(\tilde{x})| = \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0.65$ کے برابر ہے۔

سوال 21.9: ایسا کیوں ہے کہ مثال 21.1 میں یک سر ترتیب حاصل ہوتی ہے لیکن مثال 21.2 میں ایسا نہیں ہوتا ہے؟

سوال 21.10: مثال 21.2 کی آخر میں دہرانے کی ترکیب سے حاصل قیمتوں کو از خود حاصل کریں اور شکل 21.2 کی طرز کا شکل بنائیں۔

سوال 21.11: مساوات $x^5 = x + 0.2$ کو مساوات 21.2 کی صورت میں لکھ کر $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے اس کا جذر تلاش کریں۔
جواب: $x_3 = -0.200323$ ، $x_2 = -0.20032$ ، $x_1 = -0.2$

سوال 21.12: سوال 21.11 میں دیے گئے مساوات کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ مساوات کو $x = \sqrt[5]{x+0.2}$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے اس جذر کو تلاش کریں۔
جواب: 1.0447

سوال 21.13: سوال 21.12 میں اگر آپ $x = x^5 - 0.2$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کریں تو کیا حاصل ہو گا؟
جواب: -0.200 322

سوال 21.14: دہرانے کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مساوات $x = \tan x$ کا کم تر جذر تقریباً 4.49 ہے۔ اشارہ۔ مساوات کی ترسیم سے اخذ کریں کہ جذر $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ کے قریب پایا جاتا ہے؛ مساوات کو $x = \pi + \tan^{-1} x$ (کیوں؟) لکھ کر آگے بڑھیں۔

سوال 21.15: $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے $\sqrt{5}$ کو مثال 21.3 کی ترکیب سے حاصل کرتے ہوئے x_1, x_2, x_3, x_4 تلاش کریں۔ اب $\sqrt{5} = 2.236 068$ استعمال کرتے ہوئے خلل حاصل کریں۔
جواب: $\epsilon_1 = 0.236 068$ ، $\epsilon_2 = 0.013 932$ ، $\epsilon_3 = 0.000 043$ ، $\epsilon_4 = 0.000 000$

سوال 21.16: دکھائیں کہ مثال 21.3 میں ہمارے پاس

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{c}{x_n} \right)^2$$

ہے جو درستگی کی ناپ ہے۔ دکھائیں کہ تخمیناً

$$\left| x_n - \sqrt{c} \right| \approx \frac{1}{2} \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right|$$

ہو گا۔ اس کا اطلاق سوال 21.15 پر کریں۔

سوال 21.17: مثبت x محور پر ایسا وقفہ تلاش کریں کہ $c = 2$ لیتے ہوئے مسئلہ 21.1 کی شرط کو مثال 21.3 کے دہرانے کی ترکیب مطمئن کرتی ہو۔
جواب: $x \geq \sqrt{\frac{2}{1+2\alpha}}$ ، $\alpha < 1$

سوال 21.18: جذر الکعب کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $x_0 = 2$ سے شروع کر کے تین قدم چل کر $\sqrt[3]{7}$ تلاش کریں۔

سوال 21.19: مثبت عدد c کا k واں جذر حاصل کرنے کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔
جواب: $f(x) = x^k - c, \quad x_{n+1} = (1 - \frac{1}{k})x_n + \frac{c}{kx_n^{k-1}}$

سوال 21.20: $x^4 = 2$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: 0, 1

سوال 21.21: $x^4 = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: 0, 1.260

سوال 21.22: $3 \sin x = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: 0, 1.49

سوال 21.23: سوال 21.20 میں حاصل کردہ مثبت جذر ہر صورت اصل جذر سے معمولی کم ہو گا۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال 21.24: ترکیب نیوٹن میں $f'(x)$ کا حساب کرنا ہوتا ہے۔ عملی استعمال میں کبھی کبھار یہ قدم کافی پیچیدہ ثابت ہو سکتا ہے۔ $f'(x)$ سے چھٹکارا حاصل کرنا کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کی جگہ $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ استعمال کیا جائے۔ یوں حاصل کردہ کلیہ کا غلط مقام کلیہ کے ساتھ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 21.25: فرض کریں بند وقفہ I میں g استمراری ہے اور اس کا حلقہ بھی I میں پایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات $x = g(x)$ کا کم از کم ایک حل اس وقفہ میں پایا جائے گا۔ دکھائیں کہ اس وقفہ میں مساوات کے زیادہ جذر بھی ممکن ہیں۔

21.3 تنہائی فرق

تنہائی فرق کا استعمال اعدادی تجزیہ کے کئی شاخوں میں پایا جاتا ہے مثلاً دو قیمتوں کے درمیان قیمت کا تخمینہ لگانے میں، جدول کی جانچ پڑتال میں، تخمینہ لگانے میں، تفرق میں، اور تفرقی مساوات کے حل میں۔ ہم فرض کرتے ہیں

جدول 21.2: تقابل $f(x) = x^3$, $x = -3(1)3$ کا جدول فرق

x	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق	چوتھا فرق
-3	-27	19			
-2	-8	7	-12	6	
-1	-1	1	-6	6	0
0	0	1	0	6	0
1	1	7	6	6	0
2	8	19	12		
3	27				

کہ ہمیں تقابل f کی اعدادی قیمتوں $f_j = f(x_j)$ کا جدول دیا گیا ہے جہاں نقطے x_j ایک جیسے فاصلے پر ہیں۔

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \dots \quad (h > 0, \text{ مقررہ})$$

$f(x_j)$ کو عموماً کسی کلیہ یا تجربہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم جدول میں ہر $f(x)$ کو اگلی (بڑی) x کی مطابقتی قیمت سے تفریق کرتے ہوئے پہلا فرق²⁴ حاصل کرتے ہیں۔ جدول 21.2 میں اس کی مثال پیش کی گئی ہے جہاں $f(x) = x^3$, $x = -3(1)3$ ہیں۔²⁵ یہی طریقہ پہلی فرق پر لاگو کرتے ہوئے f کا دوسرا فرق²⁶ حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح باقی فرق بھی حاصل کیے جاتے ہیں۔ جدول فرق میں ہر فرق کو اپنی قطار میں گزشتہ قطار (جس سے فرق حاصل کیا گیا ہے) کی اندراج کی درمیان برابر مقام پر درج کیا جاتا ہے۔ نقطہ اعشاریہ اور فرق کی بائیں صفروں کو نظر انداز کیا جاتا ہے (جدول 21.3)۔

جدول فرق میں فرق کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے رائج ہیں۔ ان میں سے جو بھی طریقہ استعمال کیا جائے، جدول میں نہ کوئی فرق تبدیل ہو گا اور نہ ہی اس کا مقام۔ پہلی (اور غالباً اہم ترین) اظہار جس کو وسطی فرق²⁷ کہتے

first difference²⁴
 $x = a(h)b$ ²⁵ کا مطلب ہے کہ تقابل کی قیمتیں $x = a + h \cdot x = x + h \cdot x = a + 2h \cdot x = b \cdot \dots \cdot x = b$ پر دی گئی ہیں۔
 second difference²⁶
 central difference²⁷

جدول 21.3: تفاعل $2(0.2)$ ، $x = 1$ ، $f(x) = \frac{1}{x}$ کا جدول فرق۔ ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔

x	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق
1.0	1.0000			
1.2	0.8333	-1667		
1.4	0.7143	-1190	477	-180
1.6	0.6250	-893	297	-98
1.8	0.5556	-694	199	-61
2.0	0.5000	-556	138	

ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & & & & \\
 & \delta f_{-3/2} & & & & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & & & \\
 & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} & & & \\
 x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & & & \\
 & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{1/2} & & & \\
 x_1 & f_0 & & \delta^2 f_1 & & & \\
 & \delta f_{3/2} & & & & & \\
 x_2 & f_2 & & & & &
 \end{array}$$

جہاں $\delta f_{-3/2} = f_{-1} - f_{-2}$ اور $\delta f_{-1/2} = f_0 - f_{-1}$ ہیں۔ وسطی فرق کا عمومی جزو

$$(21.9) \quad \delta f_{m+1/2} = f_{m+1} - f_m$$

ہے جہاں دائیں ہاتھ دو زیر نوشت کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔ اسی طرح

$$\delta^2 f_m = \delta f_{m+1/2} - \delta f_{m-1/2}$$

ہو گا۔ دیگر فرق بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسی زیر نوشت والے اجزاء ایک ہی صف میں پائے جاتے ہیں۔ (دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ جدول میں x کی سب سے چھوٹی قیمت x_0 ہو۔ مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0 = 1.6$ لے سکتے ہیں؛ تب $f_0 = 0.6250$ ، $\delta f_{1/2} = -0.0694$ ، $\delta^2 f_0 = 0.0199$ (ہوں گے۔)

دوسری اظہار جس کو آگے فرق²⁸ کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & \\
 & \Delta f_{-2} & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & \Delta^2 f_{-2} & \\
 & \Delta f_{-1} & \Delta^3 f_{-2} & \\
 x_0 & f_0 & \Delta^2 f_{-1} & \\
 & \Delta f_0 & \Delta^3 f_{-1} & \\
 x_1 & f_1 & \Delta^2 f_0 & \\
 & \Delta f_1 & & \\
 x_2 & f_2 & &
 \end{array}$$

جس میں $\Delta f_{-2} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$ اور $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ ہیں۔ اس کا عمومی جزو

$$(21.10) \quad \Delta f_m = f_{m+1} - f_m$$

ہے۔ اسی طرح

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m$$

ہوگا۔ مثال کے طور پر اگر جدول 21.3 میں $x_0 = 1.6$ لیا جائے تب $f_0 = 0.6250$ ، $\Delta f_0 = -0.0694$ ، $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ ہوں گے۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں نیچے کی رخ یا جدول میں آگے رخ لکیروں پر پائے جائیں گے۔

تیسری اظہار جس کو پیچھے فرق²⁹ کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & \\
 & \nabla f_{-1} & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & \nabla^2 f_0 & \\
 & \nabla f_0 & \nabla^3 f_1 & \\
 x_0 & f_0 & \nabla^2 f_1 & \\
 & \nabla f_1 & \nabla^3 f_2 & \\
 x_1 & f_1 & \nabla^2 f_2 & \\
 & \nabla f_2 & & \\
 x_2 & f_2 & &
 \end{array}$$

جہاں $\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$ اور $\nabla f_1 = f_1 - f_0$ ہیں۔ عمومی جزو

$$(21.11) \quad \nabla f_m = f_m - f_{m-1}$$

forward difference²⁸
backward difference²⁹

جدول 21.4: غلطی تمام فرق میں پھیل جاتی ہے۔ یہاں تفاعل $2.6(0.1)2.0$ ، $x = \sqrt{x}$ ، $f(x)$ ہے اور ملحوظ ہندسے چار ہیں۔ غلطی $f(2.3)$ میں ہے۔

x	\sqrt{x}	فرق	\sqrt{x}	فرق	غلطی ϵ کا پھیلاؤ
2.0	1.4142		1.41412		
2.1	1.4491	349	1.4491	349	
2.2	1.4832	341	1.4832	341	ϵ
2.3	1.5166	334	1.5176	316	-3ϵ
2.4	1.5492	319	1.5492	319	-2ϵ
2.5	1.5811	314	1.5811	314	ϵ
2.6	1.6125		1.6125		3ϵ

ہو گا۔ اسی طرح

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1}$$

ہو گا۔ باقی اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترجیحی لکیروں پر اوپر رخ یا جدول میں پیچھے رخ لکیروں پر پائے جاتے ہیں۔ جدول کی آخر میں حساب کے دوران پیچھے فرق عموماً زیادہ مددگار ثابت ہوتا ہے۔

جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0 = 1.6$ لیں تب $\nabla f_0 = \Delta f_{-1} = \delta f_{-1/2} = -0.0893$ ہو گا۔ یوں عمومی طور پر

$$\delta^n f_m = \Delta^n f_{m-n/2} = \nabla^n f_{m+n/2}$$

ہو گا۔

جدول میں غلطیوں کی نشاندہی کرنے کے لئے فرق کا سہارا لیا جاتا ہے۔ جیسا جدول 21.4 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل میں خلل ϵ جلد تمام فرق میں پھیل جاتا ہے۔ یوں فرق میں بہت زیادہ اتار چڑھاؤ تفاعل کی قیمت میں غلطی کو ظاہر کرتی ہے۔ ظاہر ہے کہ کم تعداد کی ملحوظ ہندسوں کی بنا معمولی اتار چڑھاؤ ہر صورت پائی جائے گی۔

تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں بھی فرق اہم کردار ادا کرتا ہے۔ قدم h لیتے ہوئے n درجی کثیر رکنی $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ کے جدول فرق میں تمام n ویں فرق مستقل ($n!h^n a_0$) کے برابر ہوں گے اور ان سے بلند فرق صفر ہوں گے۔ ایسا اس لئے ہو گا کہ پہلے فرق

$$p_n(x+h) - p_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] + \dots = a_0nhx^{n-1} + \dots$$

کا درجہ $n-1$ ہے، دوسرے فرق کے کثیر رکنی کا درجہ $n-2$ ہو گا اور اس کے پہلے جزو کا عددی سر $a_0n(n-1)h^2$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ یوں اگر تفاعل f کے جدول فرق میں n ویں فرق کسی حلقہ میں تقریباً مستقل ہوں تب جدول کی قیمتوں کو اس حلقہ میں n درجی کثیر رکنی p_n سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ انہیں دیے گئے f کی صورت میں کثیر رکنی p_n کے حصول کی ایک ترکیب دیکھیں۔

مثال 21.7: تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنا

جدول 21.4 میں دوسرا فرق تقریباً مستقل (-7 کے برابر) ہیں۔ یوں ہم دیے گئے تفاعل کی تخمینی دو درجی کثیر رکنی p_2 تلاش کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے جدول فرق بناتے ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام دوسرے فرق ٹھیک -7 کے برابر ہیں ہم حلقہ کے وسط میں تفاعل کی کوئی قیمت اور پہلا فرق منتخب کرتے ہیں مثلاً 1.5166 اور 334 جس سے جدول 21.5 حاصل ہوتا ہے۔ p_2 کے پہلے عددی سر کو

$$a_0 2!h^2 = a_0 \cdot 2 \cdot 0.1^2 = -0.0007 = \text{دوسرا فرق}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں $a_0 = -\frac{0.0007}{0.02} = -0.035$ ملتا ہے۔ اس طرح

$$p_1(x) = p_2(x) + 0.035x^2$$

درجہ اول ہو گا اور جدول 21.5 سے ہم حساب لگا کر دیکھتے ہیں کہ اس کے پہلے صفر تقریباً مستقل (0.04915) ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ یہ a_h کے برابر ہے۔ یوں $a_1 = \frac{0.04915}{0.1} = 0.4915$ حاصل ہوتا ہے۔ آخر میں $p_1(x) - 0.4915x = a_2 = 0.5713$ ہو گا لہذا

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.5713$$

ہو گا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ فرق کو استعمال کرتے ہوئے تخمینی کثیر رکنی حاصل کرنے سے پہلے، تخمینی کثیر رکنی کی درستگی کا معیار جانا جاسکتا ہے۔ تخمینی کثیر رکنی کی حصول کے دیگر تراکیب پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

□

جدول 21.5: $f(x) = \sqrt{x}$ کا دو درجی کثیر رکنی p_2 سے ظاہر کرنا

x	$p_2(x)$	فرق
2.0	1.4143	348
2.1	1.4491	-7
2.2	1.4832	-7
2.3	1.5166	-7
2.4	1.5493	-7
2.5	1.5813	-7
2.6	1.6126	313

سوالات

سوال 21.26: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.2 حاصل کریں۔

سوال 21.27: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.3 حاصل کریں۔

سوال 21.28: جدول 21.3 میں $x_0 = 1.2$ منتخب کرتے ہوئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.29: $x_0 = 2$ منتخب کرتے ہوئے $f(x) = x^3$ کا $x = 0(1)5$ کے لئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.30: درج ذیل دکھائیں۔

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$$

$$\delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}$$

سوال 21.31: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ کی قیمتیں $x = 0(0.2)1$ کے لئے (الف) دو ملوٹ ہندسوں، (ب) تین ملوٹ ہندسوں اور (پ) چار ملوٹ ہندسوں تک حاصل کریں۔ ان کے مطابقتی جدول فرق میں تعداد ہندسہ خلل کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 21.32: $x = 0(1)10$ کے لئے $f(x) = x^2$ کا جدول فرق مکمل کریں۔ ایک اور جدول میں $f(5) = 25$ کی جگہ 26 لکھتے ہوئے پہلا فرق، دوسرا فرق، تیسرا فرق اور چوتھا فرق تلاش کریں۔ جدول میں غلطی کا پھیلنا دیکھیں۔

سوال 21.33: فرق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل جدول کی جانچ پڑتال کریں۔

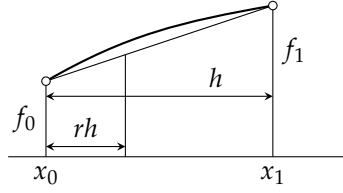
x	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	0.250	0.244	0.242	0.233	0.227	0.222

سوال 21.34: مثال 21.7 میں کی گئی تمام حساب خود کریں۔

21.4 باہمی تحریف

عموماً تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کا جدول دیا گیا ہو گا اور ہمیں ان x پر تفاعل کی قیمت درکار ہو گی جو جدول میں دیے گئے x کی قیمتوں کے درمیان پائے جاتے ہوں۔ ایسی قیمتوں کے حصول کی عمل کو ہم باہمی تحریف³⁰ کہیں گے۔ اس عمل میں $f(x)$ کی استعمال ہونے والی قیمتوں کو چول قیمتیں³¹ کہتے ہیں۔ باہمی تحریف کی ترکیب اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ نقطہ x کے قریب تفاعل $f(x)$ کو کثیر رکنی p سے ظاہر کرنا ممکن ہے لہذا x کے قریب کسی بھی نقطے پر p کی قیمت کو اس نقطے پر تفاعل کی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔

interpolation³⁰
pivotal values³¹



شکل 21.5: خطی باہمی تحریف

سادہ ترین طریقہ خطی باہمی تحریف³² ہے۔ اس ترکیب میں جدول میں درکار x کی دونوں جانب درج نقطوں x_0 اور x_1 کے مابین سیدھی قطع سے اس خطہ میں $f(x)$ کو ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 21.5)۔ یوں جیسا ہم چھوٹی جماعتوں کی حساب سے جانتے ہیں، نقطہ $x = x_0 + rh$ پر f کی قیمت تخمیناً

(21.12)

$$f(x) \approx p_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0 \quad \left(r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq 1\right)$$

ہوگی۔ یوں اگر $\ln 9.0 = 2.197$ اور $\ln 9.5 = 2.251$ ہوں تب $\ln 9.2$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $r = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$ حاصل کر کے

$$\ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4(\ln 9.5 - \ln 9.0) = 2.219$$

حاصل کرتے ہیں۔

خطی باہمی تحریف اس صورت تسلی بخش ہوگی جب جدول میں x کی قیمتیں اتنی قریب قریب ہوں کہ ان کے مابین منحنی سے سیدھی قطعات کی انحراف کم ہو، مثلاً ہر x_0 اور x_1 کے درمیان ہر x کے لئے انحراف جدول میں آخری ہندسہ کی اکائی کی نصف ($\frac{1}{2}$) سے کم ہو۔

دو درجی باہمی تحریف³³ میں ہم x_0 اور $x_2 = x_0 + 2h$ کے درمیان منحنی f کو ایسی دو درجی قطع مکانی سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) اور (x_2, f_2) سے گزرتی ہو۔ یوں بہتر کلیہ

(21.13)

$$f(x) \approx p_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 \quad \left(r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq 2\right)$$

linear interpolation³²
quadratic interpolation³³

اخذ ہوتا ہے جہاں $x = x_0 + rh$ ہے۔ یوں $x = x_0$ ($r = 0$) کے لئے دایاں ہاتھ f_0 کے برابر ہو گا؛
 $x = x_1$ ($r = 1$) کے لئے بایاں ہاتھ $f_0 + \Delta f_0 = f_1$ کے برابر ہو گا اور $x = x_2$ ($r = 2$) کے لئے اس کی قیمت

$$f_0 + 2(f_1 - f_0) + [(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)] = f_2$$

ہو گی۔

مثال 21.8: خطی اور دو درجی باہمی تحریف

اگر $\ln 9.0 = 2.1972$ اور $\ln 9.5 = 2.2513$ ہوں تب مساوات 21.12 سے $\ln 9.2 = 2.2188$ حاصل ہوتا ہے جو تین ملحوظ ہندسوں تک درست ہے جبکہ $\ln 10.0 = 2.3026$ لیتے ہوئے مساوات 21.13

$$\ln 9.2 = 2.1972 + 0.4 \cdot 0.0541 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2} (-0.0028) = 2.2192$$

□

دیتی ہے جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔

مزید بہتر جوابات حاصل کرنے کی خاطر زیادہ بلند درجی کثیر رکنی استعمال کرنی ہو گی۔ $n + 1$ مختلف نقطوں پر قیمتوں سے کیتا n درجی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ ہمیں یہاں ایسی کثیر رکنی p_n درکار ہے کہ

$$p_n(x_0) = f_0, \dots, p_n(x_n) = f_n$$

ہوں جہاں $f_0 = f(x_0), \dots, f_n = f(x_n)$ جدول میں f کی قیمتیں ہیں۔ یہ کثیر رکنی آگے فرق،
 باہمی تحریف کلیہ نیوٹن³⁴

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots \\ + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \end{aligned} \quad (21.14)$$

$$(x = x_0 + rh, r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq n)$$

دیتی ہے۔ اس کلیہ میں $n = 1$ پر کرنے سے مساوات 21.12 اور $n = 2$ پر کرنے سے مساوات 21.13 حاصل ہوتا ہے۔ ہمیں اب $p_n(x_k) = f_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) ثابت کرنا ہو گا۔ مساوات 21.14 کے دائیں ہاتھ سے

$$f_k = \binom{k}{0}f_0 + \binom{k}{1}\Delta f_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{k}\Delta^k f_0 \quad (21.15)$$

³⁴Newton's forward-difference interpolation formula

لکھا جاسکتا ہے جہاں ثنائی عددی³⁵ سر درج ذیل ہیں جہاں $s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s$ کے برابر ہے۔

$$(21.16) \quad \binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2) \cdots (k-s+1)}{s!} \quad (s \geq 0, \text{ صحیح عدد})$$

در حقیقت مساوات 21.14 میں $r = k$ پر کرنے سے مساوات 21.14 کا دایاں ہاتھ اور مساوات 21.15 بالکل ایک جیسے ہوں گے۔ مساوات 21.15 کو الگراجی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت: $k = 0$ کے لئے مساوات 21.15 درست ہے۔ فرض کریں کہ یہ $k = q$ کے لئے بھی درست ہے۔ تب مساوات 21.15 میں $k = q$ استعمال کر کے، Δ کی اطلاق سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} f_{q+1} &= f_q + \Delta f_q \\ &= \binom{q}{0} f_0 + \binom{q}{1} \Delta f_0 + \binom{q}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{q}{q} \Delta^q f_0 \\ &\quad + \binom{q}{0} \Delta f_0 + \binom{q}{1} \Delta^2 f_0 + \binom{q}{2} \Delta^3 f_0 + \cdots + \binom{q}{q} \Delta^{q+1} f_0 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں $\Delta^s f_0$ کا عددی سر (مساوات 21.16)

$$\binom{q}{s} + \binom{q}{s-1} = \binom{q+1}{s}$$

ہے جو $k = q + 1$ کے لئے مساوات 21.15 دیتا ہے۔ یوں الگراجی ماخوذ کے ذریعہ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مساوات 21.14 کی طرح ایسا کلیہ جو پیچھے فرق پر مبنی ہو، پیچھے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن³⁶

$$(21.17) \quad f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r \nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \cdots + \frac{r(r+1) \cdots (r+n-1)}{n!} \nabla^n f_0$$

ہے جہاں مساوات 21.14 کی طرح $x = x_0 + rh$, $r = \frac{x-x_0}{h}$, $0 \leq r \leq n$ ہیں۔

binomial coefficients³⁵
Newton's backward-difference interpolation formula³⁶

باہمی تحریف کے کلیات اور استعمال پر کثیر مواد پایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر صرف جفت درجہ فرق پر مبنی کلیات پائے جاتے ہیں۔ اس طرز کا ایک انتہائی اہم اور سادہ ترین کلیہ ایورٹ³⁷ درج ذیل ہے۔

$$(21.18) \quad f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!} \delta^2 f_0 + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!} \delta^2 f_1$$

جہاں $r = \frac{x-x_0}{h}$, $0 \leq r \leq 1$ ہیں۔

مثال 21.9: کلیہ ایورٹ کا استعمال
تفاعل $e^{1.24}$ کی قیمت مساوات 21.18 میں دیے گئے کلیہ ایورٹ اور درج ذیل جدول سے حاصل کریں۔

x	e^x	δ^2
1.2	3.3201	333
1.3	3.6693	367

اب $r = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$ ہے لہذا مساوات 21.18 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned} e^{1.24} &\approx 0.6 \cdot 3.3201 + 0.4 \cdot 3.6693 + \frac{1.6 \cdot 0.6 \cdot (-0.4)}{6} \cdot 0.0333 \\ &\quad + \frac{1.4 \cdot 0.4 \cdot (-0.6)}{6} \cdot 0.0367 \\ &= 3.4598 - 0.0021 - 0.0021 = 3.4556 \end{aligned}$$

جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ دھیان رہے کہ خطی باہمی تحریف 3.4598 دیتی ہے جو صرف دو ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ (آپ $e^{1.1} = 3.0042$ اور $e^{1.4} = 4.0552$ استعمال کرتے ہوئے دوسرے فرق کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں۔) □

عمومی کلیہ ایورٹ³⁸ درج ذیل ہے

$$(21.19) \quad f(x) = qf_0 + rf_1 + \binom{q+1}{3} \delta^2 f_0 + \binom{r+1}{3} \delta^2 f_1 + \binom{q+2}{5} \delta^4 f_0 + \binom{r+2}{5} \delta^4 f_1 + \dots$$

³⁷ Everett formula
³⁸ Everett formula

جہاں $r = \frac{x-x_0}{h}$, $0 \leq r \leq 1$ اور $q = 1 - r$ ہیں۔ اس کلیہ میں $\delta^4 f_0$ اور $\delta^2 f_0$ کے عددی سروں کی نسبت

$$\frac{\binom{q+2}{5}}{\binom{q+1}{3}} = \frac{q^2 - 4}{20}$$

ہے۔ اسی طرح $\delta^4 f_1$ اور $\delta^2 f_1$ کے عددی سروں کی نسبت $\frac{r^2-4}{20}$ ۔ یہ دونوں نسبت وقفہ 0 تا 1 میں بہت کم تبدیل ہوتے ہیں۔ یوں اگر ان کی جگہ ان کی کوئی موزوں اوسط قیمت μ منتخب کی جائے تب تبدیل شدہ دوسرے فرق³⁹

$$(21.20) \quad \delta_m^2 f = \delta^2 f + \mu \delta^4 f, \quad \mu = -0.18393$$

استعمال کرتے ہوئے چوتھی فرق کے اثر کو مساوات 21.18 میں سمویا جاسکتا ہے، جہاں μ کی دی گئی قیمت ایک موزوں قیمت ہے۔

ہم بغیر ثبوت پیش کیے بتانا چاہتے ہیں کہ اگر x_0, x_1, \dots, x_n کے آپس میں فاصلے اختیاری ہوں تب n درجی کثیر رکنی جو $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ سے گزرتا ہو، جہاں $f_j = f(x_j)$ ہے، منقسم فرق باہمی تحریف کلیہ نیوٹن⁴⁰

$$(21.21) \quad f(x) \approx f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

کا دایاں ہاتھ ہو گا جہاں منقسم فرق⁴¹ درج ذیل دہرانے کے تعلقات دیتے ہیں۔

$$(21.22) \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \dots \\ f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

اگر $x_k = x_0 + kh$ (یکساں فاصلے) ہو تب $f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$ ہو گا اور مساوات 21.21 سے مساوات 21.14 حاصل ہو گی۔

باہمی تحریف کی مختلف تراکیب فرق میں ہم فرق معلوم کرتے ہیں جس کو جدول کی درستگی کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ البتہ کس درجہ کی باہمی تحریف استعمال کی جائے، عموماً اس سوال کا جدول میں جواب نہیں دیا جاتا

modified second differences³⁹
Newton's divided difference interpolation formula⁴⁰
divided difference⁴¹

ہے۔ لیگرینج باہمی تحریف⁴² کی ترکیب لیگرینج باہمی تحریف کے کلیہ

$$(21.23) \quad f(x) \approx L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k$$

پر مبنی ہے جہاں ضروری نہیں ہے کہ x_0, \dots, x_n برابر فاصلوں پر ہوں اور

$$(21.24) \quad \begin{aligned} l_0(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ l_k(x) &= (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n), \quad 0 < k < n \\ l_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 21.23 کو $n + 1$ نقطوں کا کلیہ لیگرینج کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 21.24 سے $j \neq k$ کی صورت میں $l_k(x_j) = 0$ اور $x = x_k$ کی صورت میں $\frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} = f_k$ حاصل ہوتے ہیں لہذا $L_n(x_k) = f_k$ ہو گا۔ اس ترکیب میں فرق حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور ہم مختلف f_k کے اثرات کو سیدھ و سیدھ دیکھ سکتے ہیں۔ ہاں اب حساب زیادہ مشکل ضرور ہو گا اور جدول میں غلطی کی جانچ پڑتال ممکن نہیں ہو گی۔ اس لئے ضروری ہے کہ یہ ترکیب صرف مستند جدول پر لاگو کیا جائے۔

مثال 21.10: لیگرینج کلیہ باہمی تحریف کا استعمال
ln 9.2 کی قیمت مساوات 21.23 اور درج ذیل قیمتوں کی مدد سے تلاش کریں۔

x	9.0	9.5	10.0	11.0
$\ln x$	2.197 22	2.251 29	2.302 59	2.397 90

ہمارے پاس $l_1(x) = (x - 9)(x - 10)(x - 11)$ ، $l_0(x) = (x - 9.5)(x - 10)(x - 11)$ ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} \ln 9.2 &= \frac{-0.43200}{-1.00000} \cdot 2.19722 + \frac{0.28800}{0.37500} \cdot 2.25129 \\ &\quad + \frac{0.10800}{-0.50000} \cdot 2.30259 + \frac{0.04800}{3.00000} \cdot 2.39790 = 2.21920 \end{aligned}$$

□

ہو گا جو پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔

جدول 21.6: جدول برائے سوال 21.36 تا سوال 21.41

x	$\sin x$	پہلا فرق	دوسرا فرق
0.0	0.000 00	19 867	
0.2	0.198 67	19 075	-792
0.4	0.389 42	17 522	-1553
0.6	0.564 64	15 272	-2250
0.8	0.717 36	12 411	-2861
1.0	0.841 47		

سوالات

سوال 21.35: دکھائیں کہ مساوات 21.13 میں دیا گیا قطع مکانی نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتا ہے۔

جدول 21.6 کو سوال 21.41 تا سوال 21.36 میں استعمال کریں۔

سوال 21.36: $\sin 0.26$ کی قیمت خطی باہمی تحریف (مساوات 21.12) سے تلاش کریں۔ دکھائیں کہ اعشاریہ کے بعد پہلے دو ہندسے بالکل ٹھیک ٹھیک ہیں۔

سوال 21.37: $\sin 0.26$ کی قیمت دو درجی باہمی تحریف یعنی مساوات 21.13 کی مدد سے حاصل کریں۔ دکھائیں پہلے تین ملحوظ ہندسے بالکل درست ہیں۔
جواب: 0.257 53

سوال 21.38: جدول 21.6 میں تیسرے فرق اور چوتھے فرق شامل کرتے ہوئے $\sin 0.26$ کی قیمت مساوات 21.14 کی مدد سے (الف) $n = 3$ اور (ب) $n = 4$ لیتے ہوئے حاصل کریں۔ نتائج کا موازنہ پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $\sin 0.26 = 0.257 08$ کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $n = 3$ سے تین ملحوظ ہندسوں تک اور $n = 4$ سے پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہو گا۔

سوال 21.39: $\sin 0.26$ کو مساوات 21.17 کی مدد سے (الف) $n = 1$ لے کر اور (ب) $n = 2$ لے کر حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں پہلے دو ملحوظ ہندسے درست ہوں گے۔ یوں موجودہ نتیجہ سوال 21.36 کے نتیجہ سے کم درست ہے۔ کیوں؟
جوابات: (الف) 0.258 27، (ب) 0.258 27

سوال 21.40: جدول 21.6 کو وسیع کرتے ہوئے (الف) $n = 3$ لے کر، (ب) $n = 4$ لے کر اور (پ) $n = 5$ لے کر مساوات 21.17 کی مدد سے $\sin 0.26$ کی قیمت تلاش کریں۔ آپ کو $x = 0.2, 0.4, -0.2, -0.4, -0.6$ پر $\sin x$ کی قیمتیں درکار ہوں گی اور مطابقتی فرق درکار ہوں گے۔ سائن تقابل کی کون سی خاصیت اس وسعت کو آسان بناتی ہے۔ موجودہ نتائج سوال 21.38 کے نتائج سے کیوں کم ٹھیک ہیں؟
جوابات: (الف) 0.257 09، (ب) 0.257 05 اور (پ) 0.257 08؛ جواب (پ) پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔

سوال 21.41: دکھائیں کہ بہت کم محنت کے ساتھ کلیہ ایورٹ (مساوات 21.18) استعمال کرتے ہوئے $\sin 0.26 = 0.257 07$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.42: مثال 21.9 میں کی گئی حساب کی تصدیق کریں۔

سوال 21.43: $f(2.6) = 1.612 452$ اور $f(2.3) = 1.516 575$ ، $f(2.0) = 1.414 214$ استعمال کرتے ہوئے تقابل $f(x) = \sqrt{x}$ کی دو درجہ باہمی تحریف کریں۔ نتائج کا جدول 21.5 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جوابات: $f(x) \approx 0.566 106 + 0.496 098x - 0.036 022x^2$

سوال 21.44: درج ذیل دکھائیں۔

$$\Delta^k f_n = \binom{k}{0} f_{n+k} - \binom{k}{1} f_{n+k-1} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} f_n$$

سوال 21.45: $f(1) = 2$ ، $f(2) = 11$ اور $f(4) = 77$ استعمال کرتے ہوئے عمومی کلیہ لیگرنج (مساوات 21.23) سے $f(3)$ تلاش کریں۔
جواب: $8x^2 - 15x + 9$ ، 36

سوال 21.46: $\ln 8.5 = 2.140 07$ لیں جبکہ $\ln 9.0$ ، $\ln 9.5$ ، $\ln 10$ کی قیمتیں مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔ $\ln 9.2$ کو (الف) $n = 3$ اور $x_0 = 8.8$ لیتے ہوئے مساوات 21.14 سے حاصل کریں؛ (ب) $n = 3$ اور $x_0 = 10$ لیتے ہوئے مساوات 21.17 سے حاصل کریں۔

سوال 21.47: $\ln 8.5 = 2.14007$ لیں جبکہ $\ln 9$ ، $\ln 10$ اور $\ln 11$ مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔ اب $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 سے $\ln 9.2$ کی قیمت تلاش کریں۔ حاصل جواب کا مثال 21.10 کے نتیجہ سے موازنہ کریں۔

جواب: 2.21921 جو کم درست ہے چونکہ آخری ہندسہ میں 1 اکائی کا خلل ہے۔

سوال 21.48: سوال 21.46 میں دی گئی مواد استعمال کرتے ہوئے $\ln 9.2$ کی قیمت (الف) مساوات 21.18 استعمال کرتے ہوئے، (ب) $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 21.49: فرض کریں کہ $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $x_3 = x_0 + 3h$ ہیں اور $r = \frac{x - x_0}{h}$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $n = 3$ کے لئے ہم مساوات 21.23 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) \approx -\binom{r-1}{3}f_0 + \frac{r(r-2)(r-3)}{2}f_1 - \frac{r(r-1)(r-3)}{2}f_2 + \binom{r}{3}f_3$$

سوال 21.50: سوال 21.49 کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 21.48-ب کا نتیجہ دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 21.51: (فرق کی جانچ پڑتال) دکھائیں کہ قطار میں دیے گئے اندراجات کا مجموعہ گزشتہ قطر کی آخری اور پہلی اندراج کے فرق کے برابر ہو گا۔ اس جزوی پرکھ کی جدول 21.3 پر اطلاق کریں۔

21.5 لپکدار منحنیات

ٹکڑوں میں تخمینہ کثیر رکنی کو لپکدار منحنی کہتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر ہم دیے گئے تفاعل $f(x)$ کا تخمینہ تفاعل $g(x)$ حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ہم چاہیں گے کہ تخمینہ تفاعل اصل تفاعل کے قریب سے قریب تر نمائندگی کرے۔ ہم $g(x)$ کو حاصل کرنے کی خاطر وقفہ $a \leq x \leq b$ کو چھوٹے خانوں (ٹکڑوں) میں

$$(21.25) \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

میں تقسیم کرتے ہیں جہاں خانوں کے سروں کو جوڑ⁴³ کہا جاتا ہے۔ ہر خانے پر $g(x)$ کو ایک ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ خانے کی سروں پر $g(x)$ بار بار قابل تفرق ہو۔ یوں پورے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ کو تخمینی کثیر رکنی سے ظاہر کرنے کی بجائے ہم اس کو n عدد کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں حاصل تخمینی $g(x)$ باہمی تحریف میں بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر ایک خانے میں کثیر رکنی سے $g(x)$ کا ارتعاشی کم ہو گا۔ یوں حاصل تفاعل $g(x)$ کو چکدار منحنیات⁴⁴ کہتے ہیں۔

ہم ہر خانے کا تخمینی خطی تفاعل استعمال کر سکتے ہیں لیکن ایسا تفاعل خانے کی جوڑوں پر غیر استمراری ہو گا۔ ایسا تفاعل جو وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر نقطہ پر کئی بار قابل تفرق ہو بہتر ثابت ہوتا ہے۔

ہم کعبی چکدار منحنیات پر غور کرتے ہیں جو عملی استعمال کے نقطہ نظر سے غالباً اہم ترین ہیں۔ تعریف کی رو سے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر مساوات 21.25 میں دیے گئے خانوں کے لحاظ سے کعبی چکدار منحنی⁴⁵ $g(x)$ سے مراد استمراری تفاعل $g(x)$ ہے جس کے استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پورے وقفہ پر پائے جاتے ہوں اور جس کو ہر خانہ پر ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہو جس کا درجہ تین سے زیادہ نہ ہو۔ یوں ہر خانہ میں $g(x)$ کو ایک کعبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جائے گا۔

اگر وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہو اور اس وقفہ کے خانے (مساوات 21.25) منتخب کیے گئے ہوں تب، گزشتہ حصہ کی طرح، $f(x)$ کی تخمینی کعبی چکدار منحنی $g(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوئے حاصل ہو گی۔

$$(21.26) \quad g(x_0) = f(x_0), \quad g(x_1) = f(x_1), \dots, \quad g(x_n) = f(x_n)$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ ایسا کعبی چکدار منحنی $g(x)$ پایا جاتا ہے جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتا ہو۔ اب اگر $g(x)$ درج ذیل بھی شرائط

$$(21.27) \quad g'(x_0) = k_0, \quad g'(x_n) = k_n$$

(جہاں k_0 اور k_n دیے گئے عدد ہیں) پر بھی پورا اترتا ہو تب $g(x)$ یکتا ہو گا۔ درج ذیل مسئلہ چکدار منحنی کی موجودگی اور یکتائی کو بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 21.2: کعبی چکدار منحنیات

فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے اور اس وقفہ کے خانے مساوات 21.25 میں

⁴³ nodes
⁴⁴ splines or flexible curves
⁴⁵ cubic spline

دیے گئے ہوں اور فرض کریں کہ k_0 اور k_n کوئی دو عدد ہوں۔ تب مساوات 21.25 کے لحاظ سے ایسا صرف اور صرف ایک کعبی لپکدار منحنی $g(x)$ موجود ہو گا جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.27 کو مطمئن کرتا ہو۔

ثبوت: تعریف کی رو سے ہر خانہ I_j میں، جس کو $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ ظاہر کرتا ہے، لپکدار منحنی $g(x)$ اور کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ ایک جیسے ہوں گے اور درج ذیل کو مطمئن کریں گے۔

$$(21.28) \quad p_j(x_j) = f(x_j), \quad p_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$$

$$\text{ہم } \frac{1}{x_{j+1} - x_j} = c_j \text{ اور}$$

$$(21.29) \quad p'_j(x_j) = k_j, \quad p'_j(x_{j+1}) = k_{j+1}$$

لکھتے ہیں جہاں a_0 اور a_n دیے گئے ہیں جبکہ k_1, \dots, k_{n-1} بعد میں حاصل کیے جائیں گے۔ $p_j(x)$ کو مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 میں دیے چار شرائط کو مطمئن کرنا ہو گا۔ سیدھے حساب سے ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ ایسا کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو درج ذیل ہے۔

$$(21.30) \quad \begin{aligned} p_j(x) = & f(x_j)c_j^2(x - x_{j+1})^2[1 + 2c_j(x - x_j)] \\ & + f(x_{j+1})c_j^2(x - x_j)^2[1 - 2c_j(x - x_{j+1})] \\ & + k_jc_j^2(x - x_j)(x - x_{j+1})^2 \\ & + k_{j+1}c_j^2(x - x_j)^2(x - x_{j+1}) \end{aligned}$$

اس کا دو درجی تفرق درج ذیل دیگا۔

$$(21.31) \quad p''_j = -6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) - 4c_jk_j - 2c_jk_{j+1}$$

$$(21.32) \quad p''_j(x_{j+1}) = -6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) + 2c_jk_j + 4c_jk_{j+1}$$

تعریف کی رو سے $g(x)$ کی استمراری دو درجی تفرق پائے جاتے ہیں۔ اس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$p''_{j-1}(x_j) = p''_j(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

مساوات 21.32 میں j کی جگہ $j-1$ اور مساوات 21.31 استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $n-1$ عدد مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$(21.33) \quad c_{j-1}k_{j-1} + 2(c_{j-1} + c_j)k_j + c_jk_{j+1} = 3[c_{j-1}^2 \nabla f_j + c_j^2 \nabla f_{j+1}]$$

جہاں $\nabla f_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$ اور $\nabla f_{j+1} = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ ہیں جبکہ $j = 1, \dots, n-1$ ہے۔ اس $n-1$ عدد مساوات کے نظام کا حل k_1, \dots, k_{n-1} یکتا ہو گا چونکہ اس نظام کے تمام عددی سر غیر منفی ہیں اور مرکزی وتر پر ہر جزو، مطابقتی صف کے باقی اجزاء کے مجموعہ سے زیادہ ہے لہذا عددی سر قالب صفر نہیں ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم جوڑ پر $g(x)$ کی یک درجی تفرق کے یکتا k_1, \dots, k_{n-1} حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اس مسئلے کو ایک مثال کی مدد سے دیکھیں۔

مثال 21.11: تخمینی چکدار منحنی

وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر $x_0 = -1$ اور $x_1 = 0$ اور $x_2 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^4$ کی ایسی تخمینی کعبی چکدار منحنی تلاش کریں جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتی ہو اور $g'(1) = f'(1)$ ، $g'(-1) = f'(-1)$ ہوں۔
حل: ہمیں درج ذیل کے عددی سر تلاش کرنے ہوں گے۔

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$p_1(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

سے $p_0(0) = p_1(0) = f(0) = 0$ اور $a_0 = b_0 = 0$ ملتے ہیں جبکہ $p'_0(0) = p'_1(0)$ سے $a_1 = b_1$ اور $p''_0(0) = p''_1(0)$ سے $a_2 = b_2$ حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

$$p_1(x) = b_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

ہو گا۔ باقی چار عددی سروں کو باقی شرائط سے حاصل کرتے ہیں۔

$$p_0(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 = f(-1) = 1$$

$$p_1(1) = b_3 + a_2 + a_1 = f(1) = 1$$

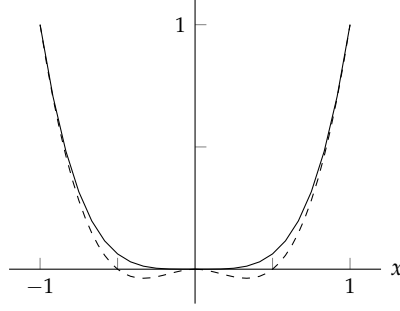
(21.34)

$$p'_0(-1) = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = f'(-1) = -4$$

$$p'_1(1) = 3b_3 + 2a_2 + a_1 = f'(1) = 4$$

اس نظام کا حل $a_1 = 0$ ، $a_2 = -1$ ، $a_3 = -2$ ، $b_3 = 2$ ہے۔ یوں درکار لچکدار منحنی

$$g(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x^3 - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (21.35)$$



شکل 21.6: تقابل $f(x)$ اور (نقطہ دار) کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ (مثال 21.11)

ہو گی (شکل 21.6 میں نقطہ دار منحنی)۔

□

لچکدار منحنیات کی ایک دلچسپ کمتر خوبی ہے جس کو اب اخذ کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ مسئلہ 21.2 میں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر $f(x)$ استمراری ہے اور اس وقفہ پر $f(x)$ کے یک درجی اور دو درجی استمراری تفرق پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ مساوات 21.27 کی صورت درج ذیل ہے (مثال 21.11 کی طرح)۔

$$(21.36) \quad g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b)$$

تب a اور b پر $f' - g'$ صفر ہو گا۔ مکمل بالخصوص سے

$$\int_a^b g''(x)[f''(x) - g''(x)] dx = - \int_a^b g'''(x)[f'(x) - g'(x)] dx$$

حاصل ہو گا۔ چونکہ وقفہ کے ہر چھوٹے حصے پر $g'''(x)$ مستقل ہے لہذا دائیں ہاتھ مکمل کو کسی ایک ٹکڑے پر حاصل کرتے ہوئے $c[f(x) - g(x)]$ ملتا ہے جہاں c مستقل ہے اور مکمل کی یہ قیمت ٹکڑے کے سروں پر حاصل کی جائے گی جو مساوات 21.26 کی بنا صفر حاصل ہو گی۔ چونکہ ہر ٹکڑے پر مکمل صفر ہے لہذا پورے وقفے پر مکمل صفر ہو گا۔ اس طرح درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f''(x)g''(x) dx = \int_a^b g''(x)^2 dx$$

نتیجہ

$$\begin{aligned}\int_a^b [f''(x) - g''(x)]^2 dx &= \int_a^b f''(x)^2 dx - 2 \int_a^b f''(x)g''(x) dx + \int_a^b g''(x)^2 dx \\ &= \int_a^b f''(x)^2 dx - \int_a^b g''(x)^2 dx\end{aligned}$$

ہو گا۔ بائیں ہاتھ منکمل غیر منفی ہے لہذا مکمل بھی غیر منفی ہو گا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(21.37) \quad \int_a^b f''(x)^2 dx \geq \int_a^b g''(x)^2 dx$$

اس نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 21.3: کعبی چلکدار منحنی کی کمتر خاصیت

فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ اور اس کے یک درجی اور دو درجی تفرق استمراری ہوں۔ فرض کریں کہ اس وقفہ کے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $g(x)$ مطابقتی کعبی چلکدار منحنی ہو جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.36 کو مطمئن کرتی ہو۔ تب $f(x)$ اور $g(x)$ مساوات 21.37 کو مطمئن کریں گے جس میں علامت مساوات (=) اس صورت کو ظاہر کرتی ہے جب $f(x)$ کعبی چلکدار منحنی $g(x)$ ہو۔

سوالات

سوال 21.52: تصدیق کریں کہ مساوات 21.30 میں دیا گیا $p_j(x)$ مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 21.53: مساوات 21.31 اور مساوات 21.32 کو مساوات 21.30 سے اخذ کریں۔

سوال 21.54: مثال 21.11 پر غور کریں۔ دکھائیں کہ مثال میں دی گئی شرائط کے تحت مساوات 21.30 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned}p_0(x) &= -2x^3 - x^2 + k_1x(x+1)^2 \\ p_1(x) &= 2x^3 - x^2 + k_1x(x-1)^2\end{aligned}$$

جیکہ مساوات 21.33 سے $k_1 = 0$ حاصل ہو گا اور یوں مساوات 21.35 حاصل ہو گی۔

سوال 21.55: مثال 21.11 میں کعبی لچکدار منحنی کا موازنہ پورے وقفہ پر دو درجی تخمینہ کثیر رکنی $p(x)$ کے ساتھ کریں۔ $f(x)$ سے $g(x)$ اور $p(x)$ کی زیادہ سے زیادہ انحراف کتنی ہیں۔

سوال 21.56: مساوات 21.34 میں دیے گئے نظام کا حل تلاش کریں۔

سوال 21.57: دکھائیں کہ وقفہ کے خانوں کے لحاظ سے کعبی لچکدار منحنیات سمتی فضا (حصہ 7.4) بناتے ہیں۔

سوال 21.58: دکھائیں کہ وقفہ کے دیے گئے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $n+1$ یکتا کعبی لچکدار منحنیات $g_0(x), \dots, g_n(x)$ موجود ہوں گی جو $g'_j(a) = g'_j(b) = 0$ اور

$$g_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

کو مطمئن کریں گی۔
جواب: مسئلہ 21.2 سے ایسا اخذ ہوتا ہے۔

سوال 21.59: دکھائیں کہ اگر ایک لچکدار منحنی تین بار قابل تفرق ہو تب یہ ضرور کثیر رکنی ہو گا۔

سوال 21.60: ایسا ممکن ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ کی دو قریبی خانوں کی لچکدار منحنیات ایک جیسی ہوں۔ اس طرز کی لچکدار منحنیات دیکھنے کی خاطر وقفہ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کی خانوں $x_1 = 0$ ، $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ ، $x_2 = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \sin x$ کی ایسی لچکدار منحنیات تلاش کریں جو $g'(-\frac{\pi}{2}) = f'(-\frac{\pi}{2})$ اور $g'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})$ کو مطمئن کرتی ہوں۔
جواب: $g(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x$

سوال 21.61: مساوات 21.37 کی جیومیٹریائی مطلب کچھ یوں ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ لچکدار منحنی، مربع اٹنا کے مکمل کی قیمت کو کم کرنے کی کوشش کرتی ہے۔ اس پر بحث کریں۔

21.6 اعدادی مکمل اور تفرق

اعدادی مکمل⁴⁶ سے مراد قطعی مکمل

$$(21.38) \quad J = \int_a^b f(x) dx$$

کی اعدادی قیمت کی تلاش ہے جہاں a اور b دیے گئے ہوں گے اور f دیا گیا تفاعل یا تفاعل کی قیمتوں کا جدول ہو گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم ایسا قابل تفرق تفاعل F تلاش کر سکیں جس کا تفرق f ہو تب J کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$J = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad [F'(x) = f(x)]$$

انجینئری میں عموماً ایسے مکمل پائے جاتے ہیں جن کا مکمل جدول کی صورت میں ہو گا یا مکمل کو متناہی تعداد کے بنیادی تفاعل کی صورت میں ظاہر کرنا ناممکن ہو گا اور یا F کی صریح صورت پیچیدہ اور غیر مفید ثابت ہو گی۔ ایسی صورتوں میں اعدادی مکمل کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

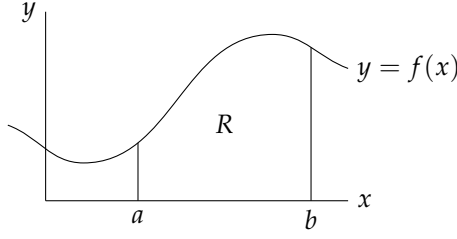
چونکہ وقفہ $a \leq x \leq b$ میں تفاعل $f(x)$ کے نیچے خطہ R کا رقبہ J ہے (شکل 21.7) لہذا ہم گتے R کی شکل کاٹ کر، گتے کی اس ٹکڑے کے وزن کو اکائی رقبہ گتے کی وزن سے تقسیم کرتے ہوئے R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم کاغذ ترسیم⁴⁷ پر R کی شکل بنا کر ڈبے گن کر بھی R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ رقبہ کی بہتر ناپ کے لئے سطح پیماس⁴⁸ کا استعمال ضروری ہو گا۔

مکمل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہوئے اعدادی تراکیب بنائے جا سکتے ہیں۔ سادہ ترین کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم مکمل کے وقفہ کو $h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n عدد برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ٹکڑے پر تفاعل کو مستقل تفاعل $f(x_j^*)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں x_j^* ٹکڑے کا وسطی نقطہ ہے (شکل 21.8-الف)۔ یوں f

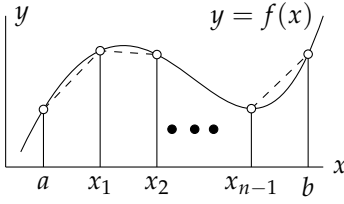
⁴⁶numerical integration

⁴⁷graph paper

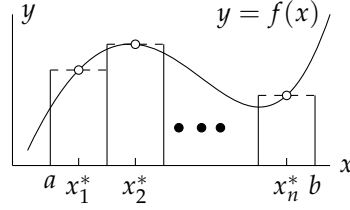
⁴⁸planimeter



شکل 21.7: قطعی مکمل کی جیو میٹریائی معنی



(ب) ذوزنقہ قاعدہ



(الف) مستطیل قاعدہ

شکل 21.8: اعدادی مکمل

کو سیڑھی تفاعل⁴⁹ (مکڑوں میں مستقل تفاعل) ظاہر کرے گی۔ شکل 21.8-الف کے n مستطیلوں کے انفرادی رقبے $hf(x_1^*), \dots, hf(x_n^*)$ ہیں جن کا مجموعہ اعدادی مکمل کا مستطیل قاعدہ⁵⁰

$$(21.39) \quad J = \int_a^b f(x) dx \approx h[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)], \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right)$$

دیتا ہے۔

⁴⁹ step function
⁵⁰ rectangular rule

تفاعل f کو ٹکڑوں میں خطی قطعات (شکل 21.8-ب) سے ظاہر کرنے سے اعدادی تکمیل کا ذوزنقہ قاعدہ⁵¹

(21.40)

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx h \left[\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

حاصل ہو گا جہاں $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n (= b)$ وہی نقطے ہیں جو مساوات 21.40 میں استعمال کیے گئے ہیں۔ یوں $x_j = x_0 + jh$ ہو گا۔ شکل 21.8-ب کے n ذوزنقہ کے انفرادی رقبے

$$\frac{1}{2}[f(a) + f(x_1)]h, \quad \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]h, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(b)]h$$

ہیں جن کا مجموعہ مساوات 21.40 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

J^* میں خلل (حصہ 21.1) ϵ درج ذیل ہو گا۔

$$\epsilon = J^* - J$$

اگر $f(x)$ خطی تفاعل ہو تب $\epsilon = 0$ ہو گا اور تمام x کے لئے f' مستقل اور f'' صفر ہو گا۔ عین ممکن ہے کہ کسی عمومی تفاعل f (جس کا استمراری دو درجی تفرق پایا جاتا ہو) کی صورت میں ہم حد خلل⁵² (یعنی خلل ϵ کی حد) تلاش کر سکیں جو f'' پر منحصر ہو۔ اس خاطر ہم b کی جگہ متغیر t لیتے ہوئے مساوات 21.40 کا اطلاق $n = 1$ کے لئے کرتے ہیں۔ تب مطابقتی خلل

$$\epsilon(t) = \frac{t-a}{2}[f(a) + f(t)] - \int_a^t f(x) dx$$

ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon(a) = 0$ ہے جو ایک غیر دلچسپ نتیجہ ہے۔ تفرق لینے سے

$$\epsilon'(t) = \frac{1}{2}[f(a) + f(t)] + \frac{t-a}{2}f'(t) - f(t)$$

حاصل ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon'(a) = 0$ ہے۔ مزید ایک بار تفرق لینے سے

$$\epsilon''(t) = \frac{1}{2}(t-a)f''(t)$$

trapezoidal rule⁵¹
error bound⁵²

حاصل ہو گا جس میں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 پر کرنے سے وقفہ پر تمام t کے لئے حد خلل

$$\frac{1}{2}(t-a)M_2^* \leq \epsilon''(t) \leq \frac{1}{2}(t-a)M_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ a تا t تکمیل لینے سے

$$\frac{1}{4}(t-a)^2M_2^* \leq \epsilon'(t) - \epsilon'(a) \leq \frac{1}{4}(t-a)^2M_2$$

حاصل ہو گا جس میں $\epsilon'(a) = 0$ اور $\epsilon(a) = 0$ پر کرتے ہوئے دوبارہ تکمیل لے کر $t = a + h$ لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{12}h^3M_2^* \leq \epsilon(a+h) \leq \frac{1}{2}h^3M_2$$

باقی $n-1$ ٹکڑوں کی خلل کے لئے اسی طرح کے $n-1$ عدد مطابقتی عدم مساوات حاصل ہوں گے۔ ان تمام n عدم مساوات کا مجموعہ a تا b تکمیل کے لئے خلل ϵ کی عدم مساوات دے گا۔ چونکہ $h = \frac{b-a}{n}$ ہے لہذا ہمیں

$$(21.41) \quad KM_2^* \leq \epsilon \leq KM_2, \quad [K = \frac{(b-a)^3}{12n^2}]$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمیل کے وقفہ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 ہے۔

مثال 21.12: ذوزنقہ قاعدہ۔ تخمینہ خلل

$n = 10$ لیتے ہوئے تکمیل $J = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ کی قیمت مساوات 21.40 کی مدد سے حاصل کریں۔ جدول 21.7 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$J \approx 0.1(0.5 \cdot 1.367879 + 6.778167) = 0.746211$$

چونکہ $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ ہے لہذا

$$M_2^* = f''(0) = -2, \quad M_2 = f''(1) = 0.735759$$

ہوں گے۔ مزید $K = \frac{1}{1200}$ ہے لہذا مساوات 21.41 کے تحت

$$-0.001667 \leq \epsilon \leq 0.000614$$

جدول 21.7: جدول برائے مثال 21.12

J	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$
0	0	0	1.000 000
1	0.1	0.01	0.990 050
2	0.2	0.04	0.960 789
3	0.3	0.09	0.913 931
4	0.4	0.16	0.852 144
5	0.5	0.25	0.778 801
6	0.6	0.36	0.697 676
7	0.7	0.49	0.612 626
8	0.8	0.64	0.527 292
9	0.9	0.81	0.444 858
10	1.0	1.00	0.367 879
مجموعہ			1.367 879 6.778 167

ہو گا۔ یوں J کی درست قیمت

$$0.746\,211 - 0.000\,614 = 0.745\,597 \quad \text{اور} \quad 0.746\,211 + 0.001\,667 = 0.747\,878$$

□

کے درمیان ہو گی۔ (چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 0.746 824 ہے۔)

f کی ٹکڑوں میں مستقل تخمین سے مستطیل قاعدہ (مساوات 21.39) حاصل ہوا جبکہ f کی ٹکڑوں میں خطی تخمین سے ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) حاصل ہوا۔ ٹکڑوں میں دو درجہ تخمین سے قاعدہ سمسن⁵³ اخذ ہو گا جو، سادہ ہونے کے باوجود، عموماً مسئلوں کا کافی درست جواب دیتا ہے۔ قاعدہ سمسن اخذ کرنے کی خاطر ہم وقفہ $a \leq x \leq b$ کو ایک جیسی لمبائیوں کے جفت تعداد کی ٹکڑوں، مثلاً $2n$ ، میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $x_0(a), x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}(b)$ ہوں گے۔ ہم پہلی دو ٹکڑوں کو لیتے ہیں اور $f(x)$ کو وقفہ $x_0 \leq x \leq x_0 + 2h$ میں نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی لیگرینج کثیر رکنی

⁵³ برطانوی ریاضی دان ٹامس سمسن [1710-1761]

$p_2(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں f_j سے مراد $f(x_j)$ ہے۔ مساوات 21.23 سے

(21.42)

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

ہوگا جہاں نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ اور $2h^2$ کے برابر ہیں۔ $s = \frac{x-x_1}{h}$ لکھتے ہوئے $x-x_0 = (s+1)h$ اور $x-x_1 = sh$ ، $x-x_2 = (s-1)h$ ہوں گے۔ یوں

$$(21.43) \quad p_2(x) = \frac{1}{2}s(s-1)f_0 - (s+1)(s-1)f_1 + \frac{1}{2}(s+1)sf_2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب ہم x کے ساتھ x_0 تا x_2 تکمل لیتے ہیں جو s کے ساتھ -1 تا 1 تکمل کے مترادف ہے۔ چونکہ $dx = h ds$ ہے لہذا

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx = h \left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2 \right)$$

ہوگا۔ اگلے دو ٹکڑوں، x_2 تا x_4 ، اور باقی دو ٹکڑوں کے لئے بھی اسی طرح کے نتائج حاصل ہوں گے۔ ان تمام n عدد نتائج کا مجموعہ قاعدہ سمسن⁵⁴

$$(21.44) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n})$$

دے گا جہاں $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $f_j = f(x_j)$ ہیں۔ تکمل کے وقفہ میں f کے چار درجہ تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کرتے ہوئے مساوات 21.44 کی حد خلل ϵ_S کو ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) کی خلل کی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔ نتیجہ درج ذیل ہے

$$(21.45) \quad CM_4^* \leq \epsilon_S \leq CM_4 \quad [C = \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}]$$

جہاں تکمل کے وقفہ پر f کی چار درجہ تفرق کی زیادہ سے زیادہ قیمت M_4 اور کم سے کم قیمت M_4^* ہے۔

مثال 21.13: قاعدہ سمسن - تخمینہ حد خلل

$2n = 10$ لیتے ہوئے تکمل $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ کی قیمت قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ بھی حاصل کریں۔ چونکہ $h = 0.1$ ہے، جدول 21.8 سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$J \approx \frac{0.1}{3}(1.367879 + 4 \cdot 3.740266 + 2 \cdot 3.037901) = 0.746825$$

جدول 21.8: جدول برائے مثال 21.44

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$
0	0.0	0.00	1.000 000
1	0.1	0.01	0.990 050
2	0.2	0.04	0.960 789
3	0.3	0.09	0.913 931
4	0.4	0.16	0.852 144
5	0.5	0.25	0.778 801
6	0.6	0.36	0.697 676
7	0.7	0.49	0.612 626
8	0.8	0.64	0.527 292
9	0.9	0.81	0.444 858
10	1.0	1.00	0.367 879
مجموعہ			1.367 879 3.740 266 3.037 901

تخمینہ حد خلل: چار درجی تفرق $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ ہے جس کی وقفہ مکمل میں کم سے کم قیمت $x = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ پر $M_4^* = f^{(4)}(x^*) = -7.359$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 0$ پر $M_4 = f^{(4)}(0) = 12$ حاصل ہوتی ہیں۔ چونکہ $2n = 10$ اور $b - a = 1$ ہیں لہذا $C = \frac{1}{800\,000} = 0.000\,000\,56$ ہو گا۔ یوں

$$-0.000\,004 \leq \epsilon_S \leq 0.000\,006 \quad \text{اور} \quad 0.746\,818 \leq J \leq 0.746\,830$$

ہوں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ تخمین سے کم از کم چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ حقیقت میں موجودہ جواب پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے چونکہ چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $J = 0.746\,824$ ہے۔

غور کریں کہ مثال 21.12 میں حاصل نتیجہ سے موجودہ نتیجہ بہت زیادہ بہتر ہے اگرچہ ہمیں دونوں مثالوں میں تقریباً ایک جتنا کام کرنا پڑا ہے۔ □

قاعدہ سمسن سے حاصل نتائج کی درستگی عموماً انجینئری مسئلوں کے لئے کافی ہوتی ہیں۔ اسی لئے کمپیوٹر سے اعدادی مکمل کے حصول میں زیادہ درستگی کے کلیوں کی بجائے ترکیب سمسن کو زیادہ ترجیح دی جاتی ہے۔ زیادہ طاقت کی کثیر رکنی استعمال کرتے ہوئے زیادہ درستگی کے کلیات حاصل کیے جاتے ہیں۔ ہم یہاں دو ایسی کلیات کا ذکر کرتے ہیں جو بعض

اوقات مفید ثابت ہوتی ہیں۔ نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی کعبی سے قاعدہ آٹھ میں سے تین

$$(21.46) \quad \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

حاصل⁵⁵ ہوتا ہے جو کعبی کثیر رکنی کی صورت (مثلاً قاعدہ سمن) میں بالکل درست ثابت ہوتا ہے۔ مزید وقفہ کی طاق ٹکڑوں (جو 3 سے قابل تقسیم ہو) پر اس قاعدہ کو لاگو کیا جاسکتا ہے۔ چھ درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) تا (x_6, f_6) سے گزرتی ہو سے پیچیدہ عددی سروالا کلیہ حاصل ہوتا ہے البتہ اسی قسم کا ایک اور کلیہ جس کی درستگی نسبتاً کم ہے اور جس کو قاعدہ ویڈل⁵⁶ کہتے ہیں درج ذیل ہے۔

$$(21.47) \quad \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx \approx \frac{3h}{10} (f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6)$$

مکمل کے جن اعدادی کلیات پر بحث کی گئی ان میں مکمل کے وقفہ کو برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا اور یہ تراکیب کسی مخصوص طاقت تک کثیر رکنی کی صورت میں بالکل درست جواب حاصل کرتے ہیں۔ خطی متبادل پیم استعمال کرتے ہوئے a اور b کو بالترتیب -1 اور 1 پر منتقل کرتے ہوئے زیادہ عمومی طور پر

$$(21.48) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f_j \quad [f_j = f(x_j)]$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں ہم ایسے $2n$ مستقل A_1 تا A_n اور x_1 تا x_n حاصل کر سکتے ہیں کہ کثیر رکنی کا درجہ m جتنا چاہیں بڑا ہو، مساوات 21.48 بالکل درست جواب دے۔ چونکہ درجہ $2n - 1$ کثیر رکنی کے عددی سروں کی تعداد $2n$ ہے لہذا $m \leq 2n - 1$ ہو گا۔ گاوس کے تحت اس صورت درجہ $2n - 1$ کثیر رکنی کے لئے بالکل درست جواب حاصل ہو گا جب x_1, \dots, x_n درجہ n لیژانڈر کثیر رکنی⁵⁷ (حصہ 5.2)

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} x^{n-4} - + \dots$$

three-eight's rule⁵⁵Weddle's rule⁵⁶Legendre polynomial⁵⁷

یعنی

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

کے n صفر ہوں اور A_j کی موزوں قیمتیں منتخب کی جائیں۔ ایسی صورت میں مساوات 21.48 کو گاوسی کلیہ تکمیل⁵⁸ کہتے ہیں۔ اگرچہ یہ کلیہ بہت درست نتائج دیتا ہے لیکن اس میں x_1, \dots, x_n کی غیر یکساں فاصلے دشواری کا سبب بنتے ہیں۔

چونکہ مساوات 21.48 میں مستعمل آخری سر -1 اور 1 کثیر رکنی $P_n(x)$ کے صفر نہیں ہیں (یہ دونوں x_1, \dots, x_n میں شامل نہیں ہیں) لہذا گاوسی کلیہ مکمل کھلا کلیہ⁵⁹ کہلاتا ہے۔ یوں بند کلیہ⁶⁰ میں وقفہ مکمل کے سر بھی شامل ہوں گے (مثال کے طور پر مساوات 21.40، مساوات 21.44، مساوات 21.46 اور مساوات 21.47 بند کلیات ہیں)۔

باہمی تحریف کی طرح اعدادی مکمل کو بھی فرق سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایک انتہائی موثر کلیہ درج ذیل گاوسی وسطی فرق کلیہ⁶¹ ہے۔

$$(21.49) \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(f_0 + f_1 - \frac{\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1}{12} + \frac{11(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)}{720} \right)$$

اعدادی تفرق

جدول کی صورت میں دیے تفاعل کے تفرق کا تخمینہ اعدادی طریقہ سے حاصل کرنے کو اعدادی تفرق⁶² کہتے ہیں۔ جہاں ممکن ہو وہاں اعدادی تفرق سے گریز کریں چونکہ اعدادی تفرق کی درستگی جدول میں دیے قیمتوں کی درستگی سے کم ہو گی۔ درحقیقت تفرق کے حصول میں ہم دو بڑی قیمتوں کے فرق کو ایک چھوٹی قیمت سے تقسیم کرتے ہیں؛ مزید اگر تفاعل کثیر رکنی p کی صورت میں دیا گیا ہو تب تفاعل کی قیمتوں میں فرق کم ہو سکتا ہے جبکہ تفرق کی قیمت بہت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اعدادی تفرق ایک نازک عمل ہے۔ اس کے برعکس اعدادی مکمل ہمواری کا عمل ہے لہذا اعدادی مکمل پر تفاعل کی قیمتوں میں خلل کا بہت زیادہ اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

Gaussian integration formula⁵⁸open formula⁵⁹closed formula⁶⁰central-difference formula by Gauss⁶¹numerical differentiation⁶²

ہم $f'_j = f'(x_j)$ ، $f''_j = f''(x_j)$ ، ... لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ ہم تفرق کا تخمینہ درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اس کو دیکھ کر ہم یک درجی تفرق کے لئے

$$(21.50) \quad f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

لکھتے ہیں۔ اسی طرح دو درجی تفرق کو

$$(21.51) \quad f''_1 \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ بلند درجی تفرق کے لئے اسی طرح کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

موزوں لیگرنج کثیر رکنی کی تفرق سے تفرق کا بہتر تخمینہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 21.42 کا تفرق لینے سے

$$f(x) \approx p'_2(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2$$

حاصل ہوتا ہے جہاں یاد رہے کہ مساوات 21.42 کے نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ ، $2h^2$ ہیں۔ اس کی قیمت x_0 ، x_1 اور x_2 پر حاصل کرتے ہوئے تین نقاطی کلیہ⁶³

$$(21.52) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad f'_0 &\approx \frac{1}{2h} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) \\ \text{(ب)} \quad f'_1 &\approx \frac{1}{2h} (-f_0 + f_2) \\ \text{(پ)} \quad f'_2 &\approx \frac{1}{2h} (f_0 - 4f_1 + 3f_2) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ پانچ نقاطی لیگرنج کثیر رکنی سے اسی طرح بالخصوص درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(21.53) \quad f'_2 \approx \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4)$$

سوالات

تکمل کے کلیات کی یاد دہانی کی خاطر سوال 21.62 تا سوال 21.70 حل کریں۔

سوال 21.62: $\int \sin^2 x \, dx$

سوال 21.63: $\int \cos^2 \omega x \, dx$

سوال 21.64: $\int e^{ax} \sin bx \, dx$

سوال 21.65: $\int e^{ax} \cos bx \, dx$

سوال 21.66: $\int \tan kx \, dx$

سوال 21.67: $\int \ln x \, dx$

سوال 21.68: $\int \frac{dx}{k^2 + x^2}$

سوال 21.69: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

سوال 21.70: $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$

سوال 21.71: $n = 5$ لیتے ہوئے مساوات 21.39 کی مدد سے مثال 21.12 حل کریں۔

سوال 21.72: $n = 5$ لیتے ہوئے مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 کی مدد سے $\int_0^1 x^3 \, dx$ حل کریں۔
خلل کتنا ہو گا؟
جواب: $\epsilon = -0.005$, 0.245

سوال 21.73: $n = 5$ لیتے ہوئے سوال 21.72 کو ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 سے حل کریں۔ مساوات 21.41 سے حد خلل کیا حاصل ہوں گے؟ نتائج کے حقیقی حد خلل کیا ہیں؟ ان میں فرق کیوں ہے؟

سوال 21.74: $2n = 4$ لیتے ہوئے سمن قاعدہ سے $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔
جواب:

$$\ln 2 \approx 0.69325, M_4^* = 0.75, M_4 = 0.24, 0.000016 < \epsilon_S < 0.00053, \\ 0.69272 < \ln 2 < 0.69324$$

سوال 21.75: $2n = 10$ لیتے ہوئے سمن قاعدہ سے $\int_0^1 x^5 dx$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔ نتیجے کی اصل حد خلل کیا ہے؟

سوال 21.76 تا سوال 21.79 میں $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ سائن تفاعل کی پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست قیمتیں استعمال کریں۔

سوال 21.76: مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 استعمال کریں اور $n = 5$ لیں۔
جواب: 0.9466

سوال 21.77: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n = 5$ لیں۔

سوال 21.78: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n = 10$ لیں۔
جواب: 0.9458

سوال 21.79: $2n = 10$ اور $2n = 2$ لیتے ہوئے قاعدہ سمن استعمال کریں۔

سوال 21.80: ایسے α اور β تلاش کریں کہ

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx h[\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n+1})], \quad h = x_{n+1} - x_n$$

ایک درجی کثیر رکنی کے لئے بالکل درست ہو۔ کونسا کلیہ اخذ ہوتا ہے؟
جواب: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

سوال 21.81: اگر $f(x)$ دو درجی پشیر رکنی ہو تب دکھائیں کہ مساوات 21.50 بالکل درست ہے۔ اس کا کیا جیومیٹریائی مطلب ہے؟

سوال 21.82: مساوات 21.52 حاصل کریں۔

سوال 21.83: مساوات 21.53 اخذ کریں۔

سوال 21.84: $f(x) = x^4$ پر غور کریں۔ مساوات 21.52-الف، ب اور پ سے f'_2 حاصل کریں۔ خلل تلاش کریں۔
جواب: 0.080, 0.320, 0.176, 0.256

سوال 21.85: تفرق کا چار نقطہ کلید درج ذیل ہے۔

$$f'_2 \approx \frac{1}{6h}(-2f_1 - 3f_2 + 6f_3 - f_4)$$

سوال 21.86: $f'(x)$ کو یک درجی اور مزید زیادہ بلند درجی فرق سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔
کو لاگو کریں۔ حد خلل تلاش کریں۔ مساوات 21.53 سے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \dots)$$

اس کلیہ کو مساوات 21.14 کا r کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے حاصل کریں۔ مساوات 21.14 کا r کے ساتھ تفرق

$$hf'(x) \approx \Delta f_0 + \frac{2r-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3r^2-6r+2}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

ہوگا جہاں $x = x_0 + rh$ جس میں آپ کو $r = 0$ پر کرنا ہوگا۔ (الف) یک درجی فرق تک، (ب) دو درجی فرق تک، (پ) تین درجی فرق تک، (ت) چار درجی فرق تک شامل کرتے ہوئے اس کلیہ سے سوال 21.84 کے $f'(0.4)$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: 0.52, 0.080, 0.304, 0.256

21.7 یک درجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

ہم باب 1 سے جانتے ہیں کہ یک درجی تفرقی مساوات کی صورت $F(x, y, y') = 0$ ہوگی جو کو عموماً $y' = f(x, y)$ صورت میں لکھنا ممکن ہوگا۔ ابتدائی قیمت مسئلہ⁶⁴ سے مراد ایک تفرقی مساوات اور ایک ایسی شرط

⁶⁴initial value problem

ہے جس کو (بلند درجی تفرقی مسئلے کی صورت میں ایک ہی x پر ایسی کئی شرائط ہوں گے جنہیں) تفرقی مساوات کا حل مطمئن کرتا ہو۔ اس حصہ میں ہم درج ذیل روپ کی ابتدائی قیمت مسئلہ پر غور کرتے ہیں

$$(21.54) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی وقفہ جس پر x_0 پایا جاتا ہو میں f کا یکتا حل موجود ہے۔ ہم اس ابتدائی مسئلے کی حل کے اعدادی تراکیب تلاش کرتے ہیں۔

اگر ہم اس مسئلے کے حل کا کلیہ اخذ کر سکیں تب کلیہ سے اعدادی جوابات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ اگر حل کا کلیہ بہت پیچیدہ ہو یا ایسا کوئی کلیہ موجود نہ ہو تب ہم اس حصے کے اعدادی تراکیب استعمال کر سکتے ہیں۔

یہ تراکیب قدم با قدم تراکیب⁶⁵ ہیں جن میں ہم $y_0 = y(x_0)$ سے شروع کرتے ہوئے قدم با قدم آگے بڑھتے ہیں۔ پہلی قدم پر ہم $x = x_1 = x_0 + h$ پر مساوات 21.54 کے حل y کا تخمینہ y_1 حاصل کرتے ہیں۔ دوسری قدم پر ہم $x = x_2 = x_0 + 2h$ پر اس حل کا تخمینہ y_2 حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یہاں h ایک مقررہ مستقل ہے مثلاً 0.2 یا 0.1 اور یا 0.01؛ مستقل h منتخب کرنے کی اصول پر اس حصے میں غور کیا جائے گا۔

ہر قدم پر ایک ہی جیسی (کلیات) حساب دہرائی جاتی ہے۔ ان کلیات کو ٹیلر تسلسل

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots$$

سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 21.54 سے $y' = f$ حاصل ہوتا ہے جس کا تفرق

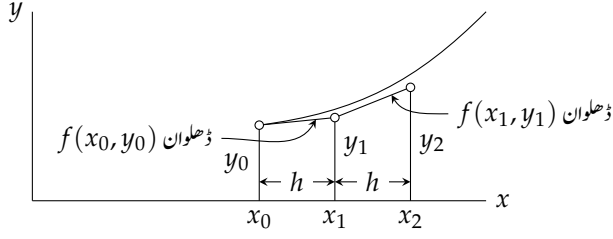
$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

دیتا ہے۔ اسی طرح بلند درجی تفرق کے کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں۔ یوں ٹیلر تسلسل کو

$$(21.55) \quad y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}f' + \frac{h^3}{6}f'' + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں f ، f' ، f'' ، کی قیمتیں $(x, y(x))$ پر لی جائیں گی۔ h کی چھوٹی قیمتوں کے لئے h^2 ، h^3 ، قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں مساوات 21.55 سے درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$y(x+h) \approx y(x) + hf$$



شکل 21.9: ترکیب یولر

پہلی قدم میں ہم

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_1) = y(x_0 + h)$ کا تخمینہ ہو گا۔ دوسری قدم میں ہم

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ کا تخمینہ ہو گا۔ اسی طرح قدم با قدم چلتے ہوئے تمام قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ کسی بھی قدم کی عمومی مساوات

$$(21.56) \quad y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ہو گی۔ اس قدم با قدم ترکیب کو ترکیب یولر⁶⁶ یا یولر کوشی ترکیب⁶⁷ کہتے ہیں۔ جیومیٹریائی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کی جگہ اس کی ایسی تخمینہ کثیر الاضلاع استعمال کی جاتی ہے جس کا پہلا بازو نقطہ x_0 پر منحنی کا مماس ہو (شکل 21.9)۔

مساوات 21.55 میں مستقل کے علاوہ اکائی طاقت کا h لے کر ترکیب یولر حاصل کی گئی لہذا ترکیب یولر کو درجہ اول ترکیب⁶⁸ کہتے ہیں۔ مساوات 21.55 کے باقی اجزاء کو رد کرنے کی وجہ سے حل میں خلل پیدا ہوتا ہے جس کو اس ترکیب کی قطع چال خلل کہتے ہیں۔ h کی چھوٹی قیمت کی صورت میں h^3 ، h^4 ، وغیرہ کی قیمت h^2 کی قیمت سے بہت کم ہوں گی لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ فی قدم قطع چال خلل کا درجہ h^2 ہے۔ اس کے علاوہ اس ترکیب میں اور دیگر تراکیب میں تعداد ہندسہ خلل بھی پائے جائیں گے جن کی بنا n بڑھانے سے y_1 ، y_2 ، ... کی قیمتوں میں خلل بتدریج بڑھتا جائے گا۔ اس حقیقت پر اگلے حصے میں غور کی جائے گی۔

Euler method⁶⁶
Euler-Cauchy method⁶⁷
first order method⁶⁸

جدول 21.9: جدول برائے مثال 21.14

n	x_n	y_n	$0.2(x_n + y_n)$	درست حل	حتمی خلل
0	0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.1	0.000	0.040	0.021	0.021
2	0.2	0.040	0.088	0.092	0.052
3	0.3	0.128	0.146	0.222	0.094
4	0.4	0.274	0.215	0.426	0.152
5	0.5	0.489		0.718	0.229

مثال 21.14: ترکیب یولر
ترکیب یولر سے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

حل: ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہوئے y_1 تا y_5 حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $f(x, y) = x + y$ ہے لہذا مساوات 21.56 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n, y_n)$$

جدول 21.9 میں ترکیب یولر سے حاصل نتائج کے ساتھ ساتھ مساوات 1.59 سے حاصل بالکل درست حل

$$y(x) = e^x - x - 1$$

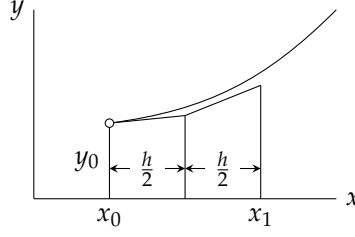
کی قیمتیں اور خلل بھی دی گئی ہیں۔ موجودہ مثال میں ہمیں اصل حل بھی معلوم ہے لہذا ہم ترکیب یولر کی درستگی کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔ h کی مختلف قیمتیں لے کر آپ ترکیب یولر سے حاصل نتائج کا اصل حل کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں۔ □

مساوات 21.55 کے زیادہ اجزاء شامل کرتے ہوئے بہتر اعدادی تراکیب حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ ان کلیات میں $f(x, y)$ کی تفرق کو دیگر موزوں نقطوں پر $f(x, y)$ کی قیمتوں سے حاصل کیا جاتا ہے۔ انہیں ایسی دو تراکیب پر غور کرتے ہیں۔

ایسی پہلی ترکیب کو بہتر ترکیب یولر⁶⁹ یا یولر کوشی کی بہتر ترکیب کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی پہلی قدم میں ہم پہلے ذیلی قیمت

$$(21.57) \quad y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$$

improved Euler method⁶⁹



شکل 21.10: بہتر ترکیب یولر

اور بعد میں نئی قیمت

$$(21.58) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)]$$

حاصل کرتے ہیں۔

اس ترکیب کی سادہ جیومیٹریائی مطلب ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقفہ x_n تا $x_n + \frac{1}{2}h$ ہم حل کو تخمیناً ایسی قطع سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ x_n, y_n سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $f(x_n, y_n)$ ہو جبکہ باقی وقفہ $x_n + \frac{1}{2}h$ تا x_{n+1} پر ہم قطع کی ڈھلوان $f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)$ لیتے ہیں (شکل 21.10 جہاں $n = 0$ ہے)۔

بہتر ترکیب یولر کے ہر قدم پر پہلے مساوات 21.57 سے قیمت کی پیش گوئی کی جاتی ہے اور بعد میں مساوات 21.58 سے قیمت کی تصحیح کی جاتی ہے لہذا یہ ترکیب پیش گو، مصحح ترکیب⁷⁰ ہے۔

مثال 21.15: بہتر ترکیب یولر

پہلے کی طرح $h = 0.2$ لیتے ہوئے بہتر ترکیب یولر کو مثال 21.14 کی ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ یہاں مساوات 21.57 اور مساوات 21.58 درج ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} y_{n+1}^* &= y_n + 0.2(x_n + y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + 0.1[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + y_{n+1}^*)] \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک ہی قدم میں دو بار حساب کی بجائے ایک بار حساب کرنا ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y_{n+1} = 0.12x_n + 0.1x_{n+1} + 1.22y_n$$

جدول 21.10: بہتر ترکیب یولر۔ (مثال 21.15)

n	x_n	y_n	$0.12x_n$	$0.1x_{n+1}$	$1.22y_n$	y_{n+1}
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0200	0.0000	0.0200
1	0.2	0.0200	0.0240	0.0400	0.0244	0.0884
2	0.4	0.0884	0.0480	0.0600	0.1078	0.2158
3	0.6	0.2158	0.0720	0.0800	0.2633	0.4153
4	0.8	0.4153	0.0960	0.1000	0.5067	0.7027
5	1.0	0.7027				

□ ہم جدول 21.10 سے دیکھتے ہیں کہ موجودہ نتائج مثال 21.14 میں حاصل کردہ نتائج سے بہتر ہیں۔

بہتر ترکیب یولر میں فی قدم قطع چال خلل h^3 کے لحاظ سے بڑھتا ہے لہذا یہ ترکیب درجہ دوم ترکیب⁷¹ ہے۔ بلکہ $\tilde{f}_n = f(x_n, y(x_n))$ لکھ کر مساوات 21.55 استعمال کرنے سے

$$(21.59) \quad y(x_n + h) - y_n = h\tilde{f}_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}_n' + \frac{1}{6}h^3\tilde{f}_n'' + \dots$$

ماتا ہے۔ مساوات 21.58 میں قوسین میں بند حصہ کو $\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}$ لکھ کر دوبارہ ٹیلر تسلسل استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.58 سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$(21.60) \quad y_{n+1} - y_n \approx \frac{1}{2}h(\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1} + h\tilde{f}_n' + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}_n'' + \dots)$$

جس سے مساوات 21.59 تفریق کرتے ہوئے فی قدم قطع چال خلل

$$\frac{h^3}{4}\tilde{f}_n'' - \frac{h^3}{6}\tilde{f}_n'' + \dots = \frac{h^3}{12}\tilde{f}_n'' + \dots$$

حاصل ہو گا۔

ہم اب قدم h کی انتخاب پر غور کرتے ہیں جو قدم با قدم تراکیب استعمال کرنے میں اہم مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔ h کی قیمت بہت کم رکھنے سے قدموں کی تعداد اور تعداد ہندسہ خلل بہت بڑھ جاتے ہیں جبکہ h کی قیمت بہت زیادہ رکھنے سے فی قدم قطع چال خلل بڑھتی ہے اور ساتھ ہی ساتھ ایک اضافی خلل، جو f کی قیمت (x_n, y_n) کی بجائے $(x_n, y(x_n))$ پر حاصل کرنے کی بنا پیدا ہوتا ہے، بھی بڑھتی ہے۔ اگر f متغیر y کے تابع نہ ہوتا

⁷⁰ predictor-corrector method
⁷¹ second order method

تب ان میں دوسرا خلل صفر کے برابر ہوتا اور یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا جتنا y کی تبدیلی سے f زیادہ تبدیل ہو، یعنی جتنا $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ کی حتمی قیمت زیادہ ہو۔ بلکہ اس خلل کو φ_n سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلہ اوسط قیمت کی اطلاق سے

$$\varphi_n = f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n)) = f_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$$

حاصل ہو گا جہاں y_n کا خلل $\eta_n = y_n - y(x_n)$ ہے، اور \tilde{y} کا مقام y_n اور $y(x_n)$ کے بیچ ہے۔ یوں y_{n+1} کے خلل میں φ_n کا حصہ تقریباً $h\varphi_n = hf_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$ ہو گا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ دلچسپی کے خطہ میں $|f_y|$ کی بالائی حد K کو کم رکھا جائے اور h یوں منتخب کی جائے کہ

$$\kappa = hK$$

بہت زیادہ بڑی قیمت نہ ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $|f_y|$ کی قیمت زیادہ ہو (جو y پر f کی زیادہ تابعیت کو ظاہر کرتی ہے) تب K بڑا ہو گا لہذا ہمیں h چھوٹا رکھنا ہو گا۔ (مثال 21.14 اور مثال 21.15 میں $f_y = 1$ ، $K = 1$ ، $hK = 0.2$ ہیں۔) اگر f_y بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہو تب ہم K یعنی $|f_y(x_n, \tilde{y})|$ کی بالائی حد کو کم رکھتے ہوئے وقفہ کے مختلف حصوں پر مختلف h منتخب کر سکتے ہیں تاکہ

$$\kappa_n = hK_n$$

کو کسی مخصوص وقفہ (مثلاً $0.1 \leq \kappa_n \leq 0.2$)، جو درکار درستگی پر منحصر ہو گی، میں رکھا جاسکے۔ فی قدم قطع چال خلل کی بنا ہم h کو کسی ایک قیمت سے زیادہ نہیں چن سکتے ہیں۔

اس سے بھی زیادہ درست ترکیب جو عملاً انتہائی اہم ہے ترکیب رنج کوٹا⁷² کہلاتی⁷³ ہے۔ ہر قدم پر ہم پہلے چار عدد ذیلی قیمتیں

$$(21.61) \quad \begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), & B_n &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}A_n), \\ C_n &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}B_n), & D_n &= hf(x_{n+1}, y_n + C_n) \end{aligned}$$

تلاش کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے نئی قیمت

$$(21.62) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n)$$

⁷²Runge-Kutta method

⁷³جرمنی کے ریاضی دان کارل رنج [1856-1927] اور سلم کوٹا [1867-1944]

جدول 21.11: ترکیب رنج کوٹا (مثال 21.16)

n	x_n	y_n	$x_n + y_n$	$0.2214(x_n + y_n)$	y_{n+1}
0	0.0	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.021 400
1	0.2	0.021 400	0.221 400	0.049 018	0.070 418
2	0.4	0.091 818	0.491 818	0.108 889	0.130 289
3	0.6	0.222 107	0.822 107	0.182 014	0.203 414
4	0.8	0.425 521	1.225 521	0.271 330	0.292 730
5	1.0	0.718 251			

حاصل کی جاتی ہے۔ یہاں ثبوت پیش کیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اس ترکیب کی قطع چال خلل درجہ h^5 یعنی یہ درجہ چار ترکیب ہے۔ دھیان رہے کہ اگر f صرف x کا تابع ہو تب یہ ترکیب رنج کوٹا سے مکمل کی ترکیب سمسن (حصہ 21.6) حاصل ہوتی ہے۔

اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب رنج کوٹا قابل محنت طلب ہے، کمپیوٹر کی استعمال کے لئے یہ ترکیب موزوں ہے۔

مثال 21.16: ترکیب رنج کوٹا

ترکیب رنج کوٹا کو مثال 21.14 کے ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ ہم پہلے کی طرح $h = 0.2$ منتخب کرتے ہیں۔ یہاں $f(x, y) = x + y$ ہے لہذا مساوات 21.14 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(21.63) \quad \begin{aligned} A_n &= 0.2(x_n + y_n), & B_n &= 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5A_n), \\ C_n &= 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5B_n), & D_n &= 0.2(x_n + 0.2 + y_n + C_n) \end{aligned}$$

چونکہ یہ تعلقات سادہ صورت رکھتے ہیں لہذا ہم A_n کو B_n میں پر کر کے $B_n = 0.22(x_n + y_n) + 0.02$ حاصل کرتے ہیں جس کو C_n میں پر کر کے $C_n = 0.222(x_n + y_n) + 0.022$ حاصل کرتے ہیں جس کو D_n میں پر کر کے $D_n = 0.2444(x_n + y_n) + 0.0444$ حاصل کرتے ہیں۔ ان حاصل کردہ تعلقات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.62 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2214(x_n + y_n) + 0.0214$$

جدول 21.11 میں حساب دیا گیا ہے۔ جدول 21.12 میں ترکیب یولر، بہتر ترکیب یولر اور ترکیب رنج کوٹا کے نتائج کا موازنہ کیا گیا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثال 21.14 اور مثال 21.15 کے نتائج سے موجودہ مثال کے نتائج بہت بہتر ہیں۔

□

جدول 21.12: جدول 21.9، جدول 21.10 اور جدول 21.11 میں خلل کا موازنہ

x	$y = e^x - x - 1$	خلل کی حتمی قیمت		
		ترکیب یولر	بہتر ترکیب یولر	ترکیب رنج کوٹا
0.2	0.021 403	0.021	0.0014	0.000 003
0.4	0.091 825	0.052	0.0034	0.000 007
0.6	0.222 119	0.094	0.0063	0.000 011
0.8	0.425 541	0.152	0.0102	0.000 020
1.0	0.718 282	0.229	0.0156	0.000 031

لمبائی قدم h ایک مخصوص قیمت H ، جو درستگی پر منحصر ہے، سے زیادہ نہیں ہونی چاہیے اور اس کی قیمت یوں منتخب کرنی چاہیے کہ

$$\kappa = hK \quad \left(\text{کی بالائی حد } K \text{ ہے} \right) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

کی قیمت 0.1 اور 0.2 کے بیچ ہو (جیسا بہتر ترکیب یولر میں تھا)۔ ترکیب رنج کوٹا میں ہم h کو A_n ، B_n ، C_n سے قابو کر سکتے ہیں چونکہ f_y کی تعریف کی رو سے

$$\kappa = hK \approx h \left| f_y \right| \approx h \left| \frac{f(x, y^*) - f(x, y^{**})}{y^* - y^{**}} \right|$$

ہو گا اور اگر ہم $x = x_n + \frac{1}{2}h$ ، $y^* = y_n + \frac{1}{2}B_n$ ، $y^{**} = y_n + \frac{1}{2}A_n$ منتخب کریں تب
اور $y^* - y^{**} = \frac{B_n - A_n}{2}$

$$(21.64) \quad \kappa \approx \kappa_n = 2 \left| \frac{C_n - B_n}{B_n - A_n} \right|$$

ہو گا۔ ہم اب کوئی قاعدہ بنا سکتے ہیں مثلاً ہم h کو اس وقت تک تبدیل نہیں کرتے جب تک فرض کریں $0.05 \leq \kappa_n \leq 0.2$ ہو جبکہ $\kappa_n > 0.2$ کی صورت میں h کو 50% کم کرتے ہیں اور $\kappa_n < 0.05$ کی صورت میں h کو دگنا کرتے ہیں (اگر h دگنا کرنے سے اس کی قیمت منتخب H سے بڑھتی نہ ہو جہاں H از خود درکار درستگی پر منحصر ہے)۔

h کو قابو کرنے کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم حساب کرنے کے ساتھ ساتھ قدم $2h$ لیتے ہوئے بھی حساب کرتے ہیں جس سے فی قدم قطع چال خلل $2^5 = 32$ گنا بڑھتا ہے لیکن قدموں کی تعداد گھٹنے کی بنا اصل خلل

$\frac{2^5}{2} = 16$ گنا بڑھتا ہے۔ یوں لمبائی قدم کو h رکھتے ہوئے خلل مطابقتی y کے فرق δ کا تقریباً $\frac{1}{15}$ گنا ہو گا۔ ہم اب عدد ϵ منتخب کرتے ہوئے (مثلاً آخری ہندسے کی اکائی کا نصف، جو بہت بڑی قیمت ہے) h کو اس وقت تک تبدیل نہیں کرتے جب تک $0.2\epsilon \leq |\delta| \leq 10\epsilon$ ہو، اگر $|\delta| > 10\epsilon$ ہو تب ہم h کو 50% کم کرتے ہیں اور اگر $|\delta| < 0.2\epsilon$ ہو تب ہم h کو دگنا کرتے ہیں؛ (پہلے کی طرح) ظاہر ہے کہ h کو اس صورت دگنا کرنا ممکن ہو گا جب تک یہ H سے تجاوز نہ کرتا ہو۔

سوالات

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو $z \leq |2yy'|$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

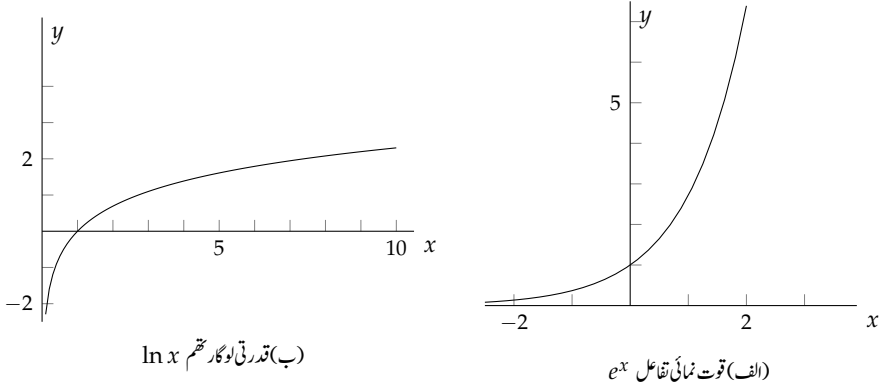
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

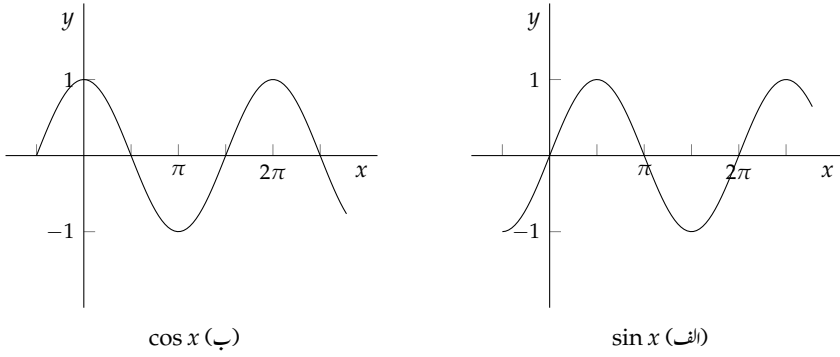
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

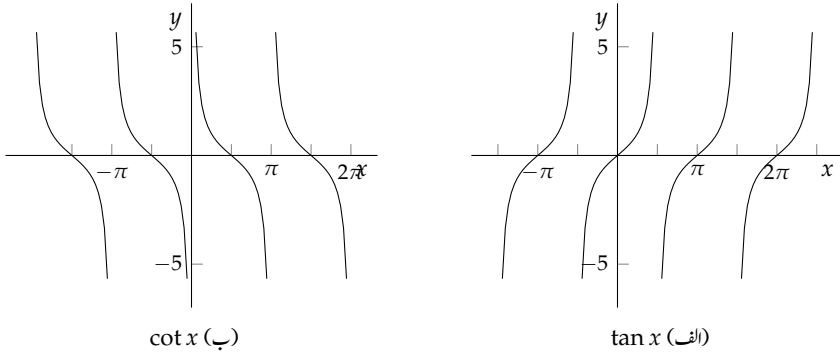
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

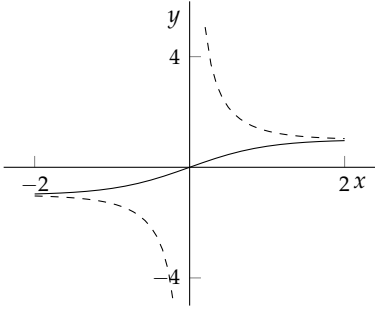
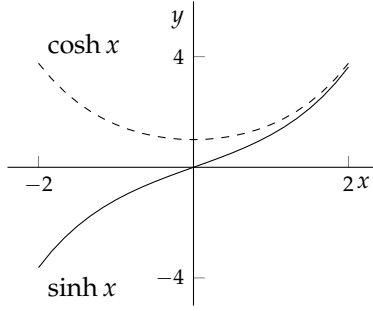
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

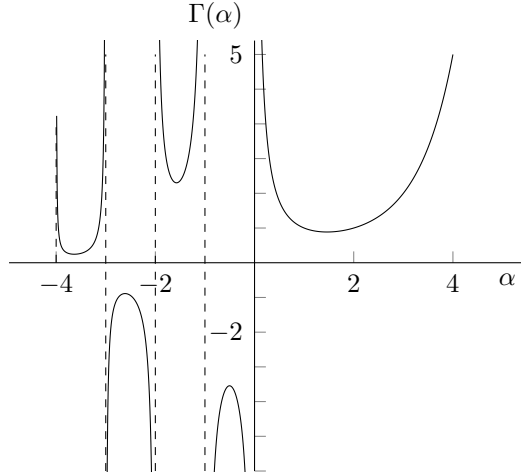
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

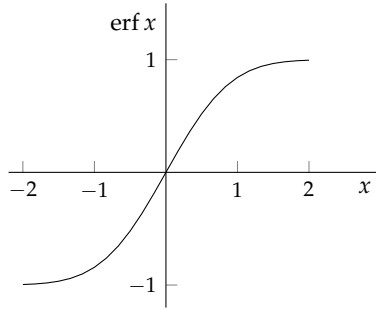
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

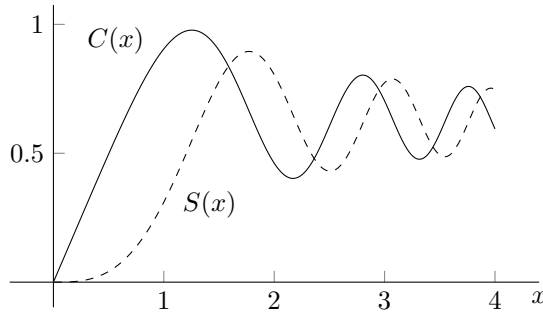
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

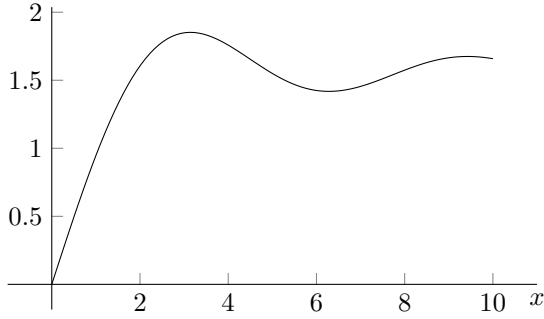
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

