

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفیی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرا تکمیل
810	11.4	دوہرا تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرا تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8	مستطیل جھلی
1006	13.9	قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10	دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11	مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024	13.12	کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ-ہنڈر
1030	13.13	لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14	مطلوبہ اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1	مخلوط اعداد
1047	14.2	مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3	مخلوط سطح میں منحنيات اور خطے
1059	14.4	مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5	کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6	ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7	قوت نمائی تفاعل
1089	14.8	تکوینیاتی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9	لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15	محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1	نقشہ کشی
1116	15.2	محافظ زاویہ نقشہ کشی
1125	15.3	خطی کسری تبادلہ
1129	15.4	منصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5	نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6	ریمان سطحیں
1157	16	مطلوبہ مکملات
1157	16.1	مطلوبہ مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2	مطلوبہ خطی مکمل کی خواص
1172	16.3	کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4	خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5	کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6	تحلیلی تفاعل کے تفرق
1201	17	ترتیب اور تسلسل
1201	17.1	ترتیب
1208	17.2	تسلسل
1213	17.3	کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220	17.4	یک سر حقیقی ترتیب۔ لیمنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل
1225	17.5	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں
1236	17.6	تسلسل پر اعمال

1243	18	18 طاقی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوغوں تسلسل
1243	18.1	طاقی تسلسل
1256	18.2	طاقی تسلسل کی روپ میں تفاعل
1263	18.3	ٹیلر تسلسل
1268	18.4	بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل
1274	18.5	طاقی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب
1281	18.6	یکساں استرار
1293	18.7	لوغوں تسلسل
1303	18.8	لامتناہی پرت تحلیل پذیری۔ صفر اور قدرت

1315	19	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ
1315	19.1	بقیہ
1322	19.2	مسئلہ بقیہ
1327	19.3	حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ
1335	19.4	حقیقی مکمل کے دیگر اقسام

1337	ا	اضافی ثبوت
1341	ب	منفید معلومات
1341	1.ب	ا.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 19

تکمل بذریعہ ترکیب بقیہ

چونکہ مساوات 18.57 کے تکمل استعمال کیے بغیر لوگوں تسلسل (مساوات 18.56) کے عددی سر حاصل کرنے کے کئی تراکیب پائے جاتے ہیں لہذا ہم c_1 کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے مخلوط تکمل کی قیمت کو با آسانی اور نفاست کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں۔ c_1 کو $z = a$ پر $f(z)$ کا بقیہ کہا جائے گا۔ جیسا ہم حصہ میں دیکھیں گے، اس طاقتور ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے کئی اہم حقیقی تکمل بھی حل کیے جاتے ہیں۔

19.1 بقیہ

تفاعل $f(z)$ جو نقطہ $z = 0$ کی پڑوس میں تحلیل ہو کے لئے کوشی مسئلہ تکمل سے اس پڑوس میں کسی بھی خط ارتفاع پر

$$(19.1) \quad \int_C f(z) dz = 0$$

ہو گا۔ البتہ اگر C کے اندر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا تنہا ندرت پایا جاتا ہو تب مساوات 19.1 میں دیا گیا تکمل عموماً غیر صفر ہو گا۔ ایسی صورت میں $f(z)$ کو لوگوں تسلسل

$$(19.2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots$$

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جو دائرہ کار $0 < |z - a| < R$ میں مرکب ہوگا جہاں a سے $f(z)$ کی قریب ترین ندرت کا فاصلہ R ہے۔ مساوات 18.57 سے ہم دیکھتے ہیں کہ عددی سر c_1 درج ذیل ہوگا

$$c_1 = \frac{1}{i2\pi} \int_C f(z) dz$$

لہذا

$$(19.3) \quad \int_C f(z) dz = i2\pi c_1$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مکمل کو گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ کار $0 < |z - a| < R$ میں سادہ بند راہ C پر حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 19.2 میں c_1 کو نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا بقیہ¹ کہتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھ کر ظاہر کرتے ہیں۔

$$(19.4) \quad c_1 = \text{Res}_{z=a} f(z)$$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ لوگوں تسلسل کے عددی سر کو، عددی سر کی مکمل کلیات کو استعمال کیے بغیر، مختلف ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ان میں سے کسی ایک ترکیب سے c_1 حاصل کرتے ہوئے ارتفاعی تکمیل² کی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔

مثال 19.1: تکمیل کی قیمت کا حصول بذریعہ بقیہ
تفاعل $f(z) = z^{-4} \sin z$ کا اکائی دائرے پر گھڑی کی رخ مکمل حاصل کریں۔
مساوات 18.38 سے ہم لوگوں تسلسل

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $z = 0$ پر $f(z)$ کا تین درجی قطب پایا جاتا ہے جس کا مطابقتی بقیہ $c_1 = -\frac{1}{3!}$ ہے لہذا مساوات 19.3 سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\int_C \frac{\sin z}{z^4} dz = i2\pi c_1 = -\frac{i\pi}{3}$$

residue¹
contour integral²

□

آگے بڑھنے سے پہلے قطب کی صورت میں بقیہ دریافت کرنے کا ایک منظم طریقہ سیکھتے ہیں۔

اگر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا سادہ قطب پایا جاتا ہو تب تفاعل کا مطابقتی لوغوں تسلسل (مساوات 19.2)

$$f(z) = \frac{c_1}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots \quad (0 < |z-a| < R)$$

ہو گا جہاں $c_1 \neq 0$ ہے۔ دونوں اطراف کو $z-a$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$(19.5) \quad (z-a)f(z) = c_1 + (z-a)[b_0 + b_1(z-a) + \dots]$$

اب $z \rightarrow 0$ کرنے سے دایاں ہاتھ c_1 تک پہنچتا ہے لہذا ہمیں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(19.6) \quad \text{Res } f(z) = c_1 = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

یہ پہلا درکار نتیجہ ہے جو سادہ قطب کی صورت میں بقیہ دیتا ہے۔

سادہ قطب کی صورت میں بقیہ کا دوسرا کلیہ حاصل کرت ہیں۔ اگر $f(z)$ کا نقطہ $z = a$ پر سادہ قطب ہو تب ہم

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

لکھتے ہیں جہاں $p(z)$ اور $q(z)$ نقطہ $z = a$ پر تحلیل ہیں، $p(a) \neq 0$ ہے اور $q(z)$ کا نقطہ $z = a$ پر سادہ صفر پایا جائے گا۔ نتیجتاً $q(z)$ کو ٹیلر تسلسل

$$q(z) = (z-a)q'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}q''(a) + \dots$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 19.6 سے

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)p(z)}{(z-a)[q'(a) + \frac{1}{2}(z-a)q''(a) + \dots]}$$

یعنی

$$(19.7) \quad \text{Res } f(z) = \text{Res}_{z=a} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

حاصل ہو گا جو سادہ قطب کی صورت میں بقیہ حاصل کرنے کا دوسرا کلیہ ہے۔

مثال 19.2: سادہ قطب کی صورت میں بقیہ

تفاعل $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$ کا $z = 0$ اور $z = 1$ پر سادہ قطب پائے جاتے ہیں۔ مساوات 19.7 کی مدد سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{Res}f(z)_{z=0} = \left[\frac{4-3z}{2z-1} \right]_{z=0} = -4, \quad \text{Res}f(z)_{z=1} = \left[\frac{4-3z}{2z-1} \right]_{z=1} = 1$$

□

آئیں اب بلند درجہ قطبین کی بات کرتے ہیں۔ اگر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کے قطب کا درجہ $m > 1$ ہو تب تفاعل کا لوگوں تسلسل

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \frac{c_1}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + \cdots$$

ہو گا جہاں $c_m \neq 0$ ہے اور نقطہ $z = a$ کی پڑوس میں، مساوائے نقطہ $z = a$ پر، تسلسل مرکب ہو گا۔ دونوں اطراف کو $(z-a)^m$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$(z-a)^m f(z) = c_m + c_{m-1}(z-a) + \cdots + c_2(z-a)^{m-2} + c_1(z-a)^{m-1} + b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + \cdots$$

ماتا ہے۔ یوں نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا بقیہ c_1 اب تفاعل $g(z) = (z-a)^m f(z)$ کا $z = a$ کے گرد ٹیلر تسلسل میں $(z-a)^{m-1}$ کا عددی سر ہے۔ یوں مسئلہ ٹیلر (مسئلہ 18.9) کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$c_1 = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

یوں اگر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کے قطب کا درجہ m ہو تب بقیہ درج ذیل (تیسرا) کلیہ دے گا۔

$$(19.8) \quad \text{Res}f(z)_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \right\}$$

مثال 19.3: بلند درجہ قطب پر بقیہ تفاعل

$$f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}$$

کا $z = 1$ پر دو درجی قطب پایا جاتا ہے۔ یوں مساوات 19.8 درج ذیل بقیہ دے گا۔

$$\text{Res}f(z) = \lim_{z=1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z=1} \frac{d}{dz} \left(\frac{2z}{z+4} \right) = \frac{8}{25}$$

□

ظاہر ہے کہ ناطق تفاعل $f(z)$ کی صورت میں بقیہ کو $f(z)$ کی جزوی کسری پھیلاؤ سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 19.4:

$$f(z) = \frac{7z^4 - 13z^3 + z^2 + 4z - 1}{(z^3 + z^2)(z-1)^2} = \frac{3}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل بقیہ حاصل ہوں گے۔

$$\text{Res}f(z) = 3, \quad \text{Res}f(z) = 4, \quad \text{Res}f(z) = 0$$

□

سوالات

سوال 19.1 تا سوال 19.13 میں دیے تفاعل کا ندرت پر بقیہ تلاش کریں۔

سوال 19.1: $\frac{1}{1-z}$ نقطہ $z = 1$ پر بقیہ -1 ہے۔

سوال 19.2: $\frac{z-3}{z+1}$ نقطہ $z = -1$ پر بقیہ -4 ہے۔

سوال 19.3: $\frac{1}{z^2}$ نقطہ $z = 0$ پر بقیہ 0 ہے۔

سوال 19.4: $\frac{z}{z^2-1}$: نقطہ $z = 1$ اور $z = -1$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں۔

سوال 19.5: $\frac{1}{z^2+1}$: نقطہ $z = -i$ اور $z = i$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{i}{2}$ اور $-\frac{i}{2}$ ہیں۔

سوال 19.6: $\frac{1}{(z^2+1)^2}$: نقطہ $z = -i$ اور $z = i$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{i}{4}$ اور $-\frac{i}{4}$ ہیں۔

سوال 19.7: $\frac{1}{(z^2-1)^2}$: نقطہ $z = -1$ اور $z = 1$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{1}{4}$ اور $-\frac{1}{4}$ ہیں۔

سوال 19.8: $\frac{z}{z^4-1}$: نقطہ $z = -1, 1, -i, i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ ہیں۔

سوال 19.9: $\frac{1}{z^4-1}$: نقطہ $z = -1, 1, -i, i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{i}{4}, \frac{i}{4}$ ہیں۔

سوال 19.10: $\frac{1}{1-e^z}$: نقطہ $z = \mp i2n\pi$ پر بقیہ -1 ہے۔

سوال 19.11: $\sec z$: نقطہ $z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ اور $z = -\frac{\pi}{2} - 2n\pi$ پر بقیہ بالترتیب -1 اور 1 ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔

سوال 19.12: $\tan z$: نقطہ $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ پر بقیہ -1 ہے جہاں $n = \mp 1, \mp 2, \dots$ ہے۔

سوال 19.13: $\cot z$: نقطہ $z = \mp n\pi$ پر بقیہ 1 ہے۔

سوال 19.14 تا سوال 19.18 میں دائرہ $|z| = 1.5$ کے اندر ندرت پر تفاعل کا بقیہ تلاش کریں۔

سوال 19.14: $\frac{3z^2}{1-z^4}$: نقطہ $z = -1, 1, -i, i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $\frac{3}{4}, i\frac{3}{4}$ ہیں۔

سوال 19.15: $\frac{z-\frac{3}{4}}{z^2-3z+2}$:
جواب: نقطہ $z = 1$ پر بقیہ $-\frac{1}{4}$ ہے۔

سوال 19.16: $\frac{6z+1}{z^2-3z}$:
جواب: نقطہ $z = 0$ پر بقیہ $-\frac{1}{3}$ ہے۔

سوال 19.17: $\frac{z-1}{(z+1)(z^2+16)}$:
جواب: نقطہ $z = -1$ پر بقیہ $-\frac{2}{17}$ ہے۔

سوال 19.18: $\frac{4+3z}{z^3-3z^2+2z}$:
جواب: نقطہ $z = 0, 1$ پر اسی ترتیب سے بقیہ $-7, 2$ ہیں۔

سوال 19.19 تا سوال 19.30 میں اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 19.19: $\int_C e^{\frac{1}{z}} dz$:
جواب: $i2\pi$

سوال 19.20: $\int_C z e^{\frac{1}{z}} dz$:

سوال 19.21: $\int_C \cot z dz$:
جواب: $i2\pi$

سوال 19.22: $\int_C \tan z dz$:

سوال 19.23: $\int_C \frac{dz}{\sin z}$:
جواب: $i2\pi$

سوال 19.24: $\int_C \frac{z}{2z+i} dz$:

سوال 19.25: $\int_C \frac{dz}{\cosh z}$:
جواب: 0

سوال 19.26: $\int_C \frac{z^2-4}{(z-2)^4} dz$:

سوال 19.27: $\int_C \frac{z^2+1}{z^2-2z} dz$
جواب: $-i\pi$

سوال 19.28: $-i\pi \int_C \frac{\sin \pi z}{z^4} dz$

سوال 19.29: $\int_C \frac{dz}{1-e^z} dz$
جواب: $-i2\pi$

سوال 19.30: $\int_C \frac{z^2+1}{e^z \sin z} dz$

19.2 مسئلہ بقیہ

گزشتہ حصے میں ہم نے ایسا ارتقاعی مکمل جس کے مکمل کا خط ارتقاع میں بند صرف ایک عدد ندرت پایا جاتا ہو کو حل کرنا سیکھا۔ ہم اب دیکھیں گے کہ اسی ترکیب کو وسعت دے کر ان مکمل کو بھی حل کیا جاسکتا ہے جن کے مکمل کا خط ارتقاع میں بند ایک سے زیادہ تنہا ندرت پائے جاتے ہوں۔

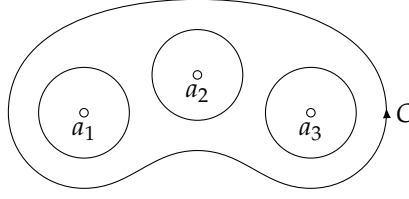
مسئلہ 19.1: مسئلہ بقیہ

فرض کریں کہ تقاعل $f(z)$ سادہ بند راہ C پر اور C کے اندر تجلیلی ہے ماسوائے محدود تعداد کے نقطوں a_1, a_2, \dots, a_m پر جہاں $f(z)$ کے ندرت پائے جاتے ہیں۔ تب درج ذیل ہو گا جہاں C پر مکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔

$$(19.9) \quad \int_C f(z) dz = i2\pi \sum_{j=1}^m \text{Res} f(z)$$

ثبوت: ہم ہر ندرت a_j کو انفرادی دائرہ C_j میں بند کرتے ہیں جس کا رداس اتنا چھوٹا رکھا جاتا ہے کہ تمام m عدد دائرے اور C ایک دوسرے کو نہ چھوئے (شکل 19.1)۔ تب مضرب تعلق دائرہ کار D جس کے حدود C اور C_1 تا C_m ہوں پر اور D کی تمام سرحد پر $f(z)$ تجلیلی ہو گا۔ کوشی مسئلہ مکمل سے

$$(19.10) \quad \int_C f(z) dz + \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_m} f(z) dz = 0$$



شکل 19.1: مسئلہ بقیہ

لکھا جاسکتا ہے جہاں تکمیل کو C پر گھڑی کی الٹ رخ اور C_1 تا C_m پر تکمیل کو گھڑی کی رخ حاصل کیا جاتا ہے (حصہ 16.3)۔ ہم اب C_1 تا C_m پر تکمیل کا رخ الٹ کرتے ہیں جس سے ان تکمیل کی قیمتوں کی علامت تبدیل ہو جائے گی لہذا مساوات 19.9 سے

$$(19.11) \quad \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \cdots + \int_{C_m} f(z) dz$$

حاصل ہو گا جہاں تمام تکمیل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیے جائیں گے۔ اب چونکہ مساوات 19.3 کے تحت

$$\int_{C_j} f(z) dz = i2\pi \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z)$$

ہو گا لہذا مساوات 19.11 سے مساوات 19.9 حاصل ہو گا۔ یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس اہم مسئلے کی مختلف مخلوط اور حقیقی تکرار میں ضرورت پیش آتی ہے۔ ہم چند مخلوط تکرار کی مثالیں پیش کرتے ہیں۔

مثال 19.5: تکمیل بذریعہ مسئلہ بقیہ

تفاعل $\frac{4-3z}{z^2-z}$ تجلیلی ہے ماسوائے نقطہ 0 اور 1 کے جہاں تفاعل کے سادہ قطب پائے جاتے ہیں جن کے بقیہ بالترتیب -4 اور 1 ہیں (مثال 19.2)۔ یوں ہر اس راہ C کے لئے جو نقطہ 0 اور 1 دونوں کو گھیرتی ہے

$$\int_C \frac{4-3z}{z^2-z} dz = i2\pi(-4+1) = -i6\pi$$

ہو گا جہاں مکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔ اسی طرح ہر اس راہ C پر جس کے اندر نقطہ $z = 0$ پایا جاتا ہو جبکہ نقطہ $z = 1$ اس کے باہر پایا جاتا ہو کے لئے

$$\int_C \frac{4-3z}{z^2-z} dz = i2\pi(-4) = -i8\pi$$

□

ہو گا جہاں مکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔

مثال 19.6: متکمل کمرے بلند درجی قطبین پائے جاتے ہیں
دائرہ $|z-a|=1$ پر گھڑی کی الٹ رخ تفاعل $\frac{1}{(z^3-1)^2}$ کا مکمل تلاش کریں۔ اس تفاعل کے نقطہ $z=1$ ،
اور $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ پر دو درجی قطب پائے جاتے ہیں۔ صرف نقطہ $z=1$ پر قطب دائرے کے اندر ہے۔ یوں

$$\int_C \frac{dz}{(z^3-1)^2} = i2\pi \operatorname{Res}_{z=1} \frac{1}{(z^3-1)^2} = i2\pi \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{i4\pi}{9}$$

□

ہو گا جہاں بقیہ کو مساوات 19.8 کی مدد سے حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 19.7: پہلے حاصل کردہ نتیجے کی تصدیق
ہم تفاعل $\frac{1}{(z-a)^m}$ جہاں m مثبت عدد صحیح ہے کا گھڑی کی الٹ رخ مکمل ایسی سادہ بند راہ C پر حاصل کرتے ہیں جو نقطہ $z=a$ کو گھیرتی ہو۔ پہلے بقیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{1}{z-a} = 1, \quad \operatorname{Res}_{z=a} \frac{1}{(z-a)^m} = 0 \quad (m=2,3,\dots)$$

یوں نتیجہ عین مثال 16.3 کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} i2\pi & (m=1) \\ 0 & (m=2,3,\dots) \end{cases}$$

□

سوالات

سوال 19.31 تا سوال 19.33 میں تفاعل $\frac{3z^2+2z-4}{z^3-4z}$ کا مکمل گھڑی کی الٹ رخ دی گئی راہ C پر تلاش کریں۔

سوال 19.31: $|z| = 1$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.32: $|z| = 3$
جواب: $i6\pi$

سوال 19.33: $|z - 4| = 1$
جواب: 0

سوال 19.34 تا سوال 19.36 میں تفاعل $\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}$ کا مکمل گھڑی کی الٹ رخ دی گئی راہ C پر تلاش کریں۔

سوال 19.34: $|z - 2| = \frac{1}{2}$
جواب: $-i3\pi$

سوال 19.35: $|z| = \frac{3}{2}$
جواب: $i3\pi$

سوال 19.36: $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$
جواب: 0

سوال 19.37 تا سوال 19.60 کا مکمل اکائی دائرہ C پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کریں۔

سوال 19.37: $\int_C \frac{3z}{3z-1} dz$
جواب: $\frac{i2\pi}{3}$

سوال 19.38: $\int_C \frac{z}{4z^2-1} dz$

سوال 19.39: $\int_C \frac{dz}{z^2-2z}$
جواب: $-i\pi$

$$\int_C \frac{dz}{z^2+4} \quad \text{سوال 19.40}$$

$$\int_C \frac{z+1}{4z^3-z} dz \quad \text{سوال 19.41}$$

جواب: 0

$$\int_C \frac{z^5-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)} dz \quad \text{سوال 19.42}$$

$$\int_C \frac{z}{1+9z^2} dz \quad \text{سوال 19.43}$$

جواب: $\frac{i2\pi}{9}$

$$\int_C \frac{z+1}{z^4-2z^3} dz \quad \text{سوال 19.44}$$

$$\int_C \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2} dz \quad \text{سوال 19.45}$$

جواب: $-\frac{i16\pi}{9}$

$$\int_C \tan z \, dz \quad \text{سوال 19.46}$$

$$\int_C \tan \pi z \, dz \quad \text{سوال 19.47}$$

جواب: $-i4$

$$\int_C \frac{6z^2-4z+1}{(z-2)(1+4z^2)} dz \quad \text{سوال 19.48}$$

$$\int_C \tan 2\pi z \, dz \quad \text{سوال 19.49}$$

جواب: $-i4$

$$\int_C \frac{\tan \pi z}{z^3} dz \quad \text{سوال 19.50}$$

$$\int_C \frac{e}{z^2-5z} dz \quad \text{سوال 19.51}$$

جواب: $-\frac{i2\pi}{5}$

$$\int_C \frac{e^z}{\sin z} dz \quad \text{سوال 19.52}$$

$$\int_C \frac{e^z}{\cos z} dz \quad \text{سوال 19.53}$$

جواب: 0

19.3. حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ

سوال 19.54: $\int_C \frac{e^z}{\cos \pi z} dz$

سوال 19.55: $\int_C \frac{\cosh z}{z^2 - i3z} dz$
جواب: $-\frac{i2\pi}{3}$

سوال 19.56: $\int_C \coth z dz$

سوال 19.57: $\int_C \frac{\sinh z}{2z - i} dz$
جواب: $-\pi \sin \frac{1}{2}$

سوال 19.58: $\int_C \cot z dz$

سوال 19.59: $\int_C \frac{\cot z}{z} dz$
جواب: 0

سوال 19.60: $\int_C \frac{e^{z^2}}{\cos \pi z} dz$

19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ

کئی پیچیدہ قسم کے حقیقی مکمل کو نہایت نفاست کے ساتھ مسئلہ بقیہ کی مدد سے حل کیا جاسکتا ہے۔

$\cos \theta$ اور $\sin \theta$ کے ناطق تفاعل کے مکمل

ہم سب سے پہلے درج ذیل قسم کے مکمل پر غور کرتے ہیں

$$(19.12) \quad I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

جہاں R وقفہ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ پر متناہی حقیقی ناطق تفاعل ہے جس کے متغیرات $\cos \theta$ اور $\sin \theta$ ہیں۔ ہم $e^{i\theta} = z$ لے کر

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

لکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ مکمل، z کا ناطق تفاعل مثلاً $f(z)$ بنتا ہے۔ θ کو 0 تا 2π کرنے سے z اکائی دائرہ $|z| = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر کاٹتا ہے۔ چونکہ $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}$ ہے لہذا $d\theta = \frac{dz}{iz}$ ہو گا اور یوں مکمل درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے

$$(19.13) \quad I = \int_C f(z) \frac{dz}{iz}$$

جہاں اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 19.8: حقیقی تکمل (قسم مساوات 19.13)

فرض کریں کہ p وقفہ $0 < p < 1$ میں کوئی مقررہ عدد ہے۔ ہم درج ذیل پر غور کرتے ہیں۔

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} = \int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{1 - 2p \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + p^2} = \int_C \frac{dz}{i(1 - pz)(z - p)}$$

مکمل کے $z = \frac{1}{p} > 1$ اور $z = p < 1$ پر سادہ قطبین پائے جاتے ہیں۔ صرف $z = p$ پر قطب اکائی دائرہ C کے اندر پایا جاتا ہے جس کا بقیہ

$$\text{Res}_{z=p} \frac{1}{i(1 - pz)(z - p)} = \left[\frac{1}{i(1 - pz)} \right]_{z=p} = \frac{1}{i(1 - p^2)}$$

ہے۔ یوں مسئلہ بقیہ کے تحت تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} = i2\pi \frac{1}{i(1 - p^2)} = \frac{2\pi}{1 - p^2} \quad (0 < p < 1)$$

□

ناطق تفاعل کے غیر مناسب تکمل

ہم اب درج ذیل قسم کے حقیقی تکمل پر غور کرتے ہیں۔

$$(19.14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

اس قسم کا تکمل جس میں تکمل کے حدود غیر متناہی ہوں کو غیر مناسب تکمل³ کہتے ہیں اور اس سے مراد درج ذیل ہے۔

$$(19.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

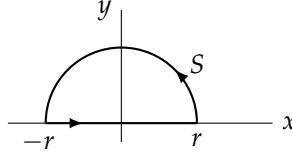
اگر دونوں حد موجود ہوں تب دونوں راہ کو ایک ساتھ ملا کر ہم درج ذیل لکھتے ہیں⁴۔

$$(19.16) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

improper integral³

⁴ مساوات 19.16 کا دایاں ہاتھ تکمل کی کوشی صدر قیمت کہلاتی ہے؛ جو مساوات 19.15 کے حد کی غیر موجودگی میں بھی موجود ہو سکتی ہے۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx = \infty \quad \text{لیکن} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r x dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) = 0$$



شکل 19.2: ارتقائی مکمل (مساوات 19.17) کی راہ

ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 19.14 میں تفاعل $f(x)$ حقیقی ناطق تفاعل ہے جس کا نسب نما تمام حقیقی x کے لئے غیر صفر ہے اور جس کا درجہ شمار کنندہ سے کم از کم 2 زیادہ ہے۔ تب مساوات 19.15 کے حد موجود ہوں گے لہذا ہم مساوات 19.16 استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم مطابقتی ارتقائی مکمل

$$(19.17) \quad \int_C f(z) dz$$

پر غور کرتے ہیں جس کی راہ C کو شکل 19.2 میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ $f(x)$ ناطق ہے، بالائی نصف مستوی میں $f(z)$ کے قطبین کی تعداد متناہی ہے اور اگر ہم r کو کافی بڑا منتخب کریں تب C ان تمام قطبین کو گھیرے گی۔ تب مسئلہ بقیہ کے تحت

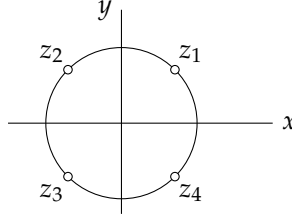
$$\int_C f(z) dz = \int_S f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = i2\pi \sum \text{Res } f(z)$$

ہو گا جہاں مجموعہ، بالائی نصف مستوی میں ان تمام نقطوں پر $f(z)$ کے بقیہ پر مشتمل ہے جہاں $f(z)$ کا قطب پایا جاتا ہو۔ اس سے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(19.18) \quad \int_{-r}^r f(x) dx = i2\pi \sum \text{Res } f(z) - \int_S f(z) dz$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ $r \rightarrow \infty$ کرنے سے نصف دائرہ S پر مکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے۔ اگر ہم $z = re^{i\theta}$ لیں تب ہم S کو مستقل r سے ظاہر کریں گے اور جیسے جیسے z نصف دائرہ S پر چلتا ہے ویسے ویسے متغیر θ کی قیمت 0 سے 2π تک پہنچتی ہے۔ چونکہ نسب نما کا درجہ شمار کنندہ کے درجہ سے کم از کم 2 زیادہ ہے لہذا کافی بڑے مستقل k اور r_0 کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$|f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \quad (|z| = r > r_0)$$



شکل 19.3: شکل برائے مثال 19.9

مساوات 16.16 کی اطلاق سے

$$\left| \int_S f(z) dz \right| < \frac{k}{r^2} \pi r = \frac{k\pi}{r} \quad (r > r_0)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں جیسے جیسے r لامتناہی تک پہنچتا ہے ویسے ویسے S پر مکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے لہذا مساوات 19.16 اور مساوات 19.18 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(19.19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = i2\pi \sum \text{Res } f(z)$$

جہاں بالائی نصف مستوی میں $f(z)$ کی تمام قطبین کے مطابق بقیہ کو مجموعہ میں شامل کیا جائے گا۔

مثال 19.9: 0 تا ∞ ایک غیر مناسب تکمل

مساوات 19.19 استعمال کرتے ہوئے ہم درج ذیل دکھانا چاہتے ہیں۔

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

تفاعل $\frac{1}{1+z^4}$ کے چار عدد قطبین درج ذیل نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ان میں سے z_1 اور z_2 پر قطبین بالائی نصف مستوی میں پائے جاتے ہیں (شکل 19.3)۔ مساوات 19.7 کی درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_1} = \left[\frac{1}{(1+z^4)'} \right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_1} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Res } f(z) \Big|_{z=z_2} = \left[\frac{1}{(1+z^4)'} \right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_2} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

یوں مساوات 14.74 اور مساوات 19.19 سے

$$(19.20) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{i2\pi}{4} (-e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ $\frac{1}{1+x^4}$ جفت تفاعل ہے لہذا

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

□

ہو گا۔ اس سے اور مساوات 19.20 سے درکار نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 19.61 تا سوال 19.72 میں مکمل حل کریں۔ یہ مکمل $\cos \theta$ اور $\sin \theta$ پر مبنی ہیں۔

$$\text{سوال 19.61: } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos \theta} \quad \text{جواب: } \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\text{سوال 19.62: } \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{1}{3}\cos \theta}$$

$$\text{سوال 19.63: } \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k+\cos \theta} \quad (k > 1) \quad \text{جواب: } \frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}}$$

$$\text{سوال 19.64: } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25-24\cos \theta}$$

$$\text{سوال 19.65: } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\cos \theta} \quad \text{جواب: } \frac{\pi}{2}$$

19.3. حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ

سوال 19.66 : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{17-8 \cos \theta} d\theta$

سوال 19.67 : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3+\sin \theta} d\theta$
جواب: 0

سوال 19.68 : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{13-12 \cos \theta} d\theta$

سوال 19.69 : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4}-\sin \theta}$
جواب: $\frac{8\pi}{3}$

سوال 19.70 : $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5-4 \cos \theta} d\theta$

سوال 19.71 : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{26-10 \cos 2\theta} d\theta$
جواب:

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{26-10 \cos 2\theta} d\theta = -\frac{1}{i20} \int_C \frac{(z^2+1)^2}{z(z^2-\frac{1}{5})(z^5-5)} dz = \frac{\pi}{20}$$

سوال 19.72 : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4 \cos 2\theta} d\theta$

سوال 19.73 تا سوال 19.84 کے غیر مناسب مکمل حاصل کریں۔

سوال 19.73 : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
جواب: π

سوال 19.74: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

سوال 19.75: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$
جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 19.76: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+16}$

سوال 19.77: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$
جواب: $\frac{3\pi}{8}$

سوال 19.78: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(4+x^2)^2} dx$

سوال 19.79: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{1+x^8} dx$
جواب: 0

سوال 19.80: $\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$

سوال 19.81: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$
جواب: $\frac{\pi}{12}$

سوال 19.82: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$

سوال 19.83: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2} dx$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 19.84: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

سوال 19.85: سوال 19.84، سوال 19.78 اور سوال 19.79 کو بنیادی طریقہ سے حل کریں۔

19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

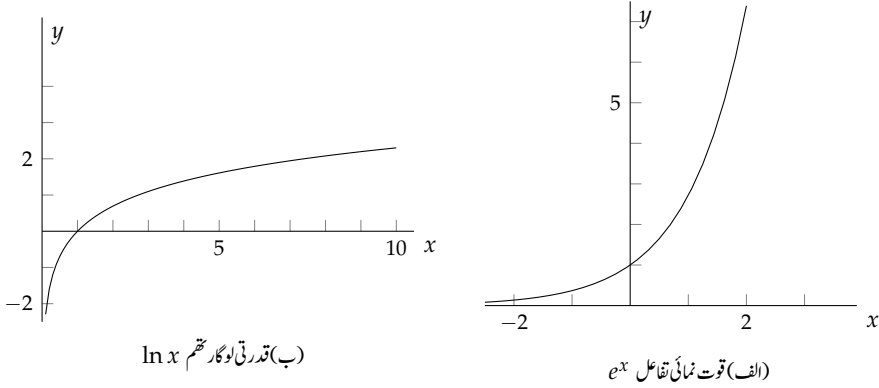
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

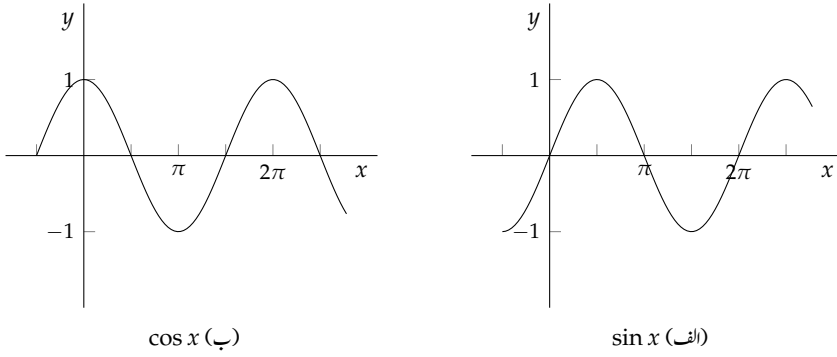
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

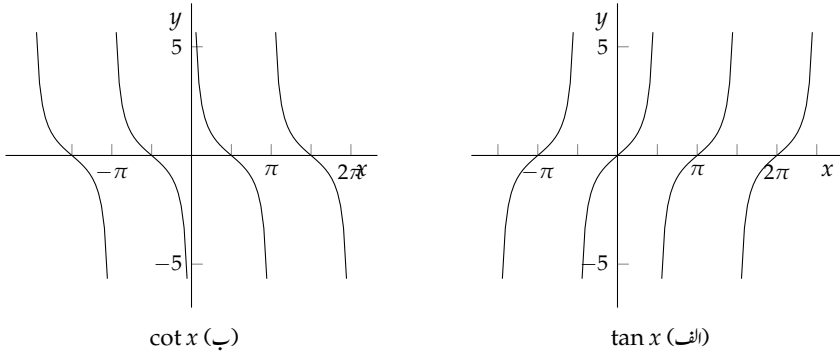
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

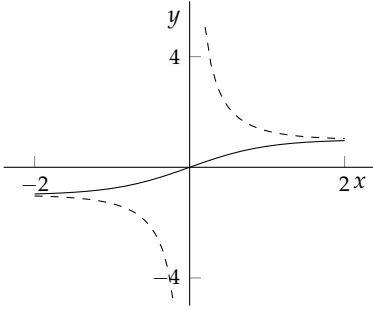
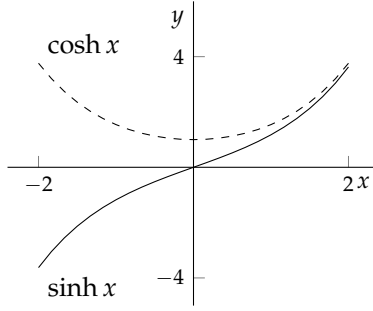
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تقاضا۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (\text{ب.23})$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{ب.24})$$

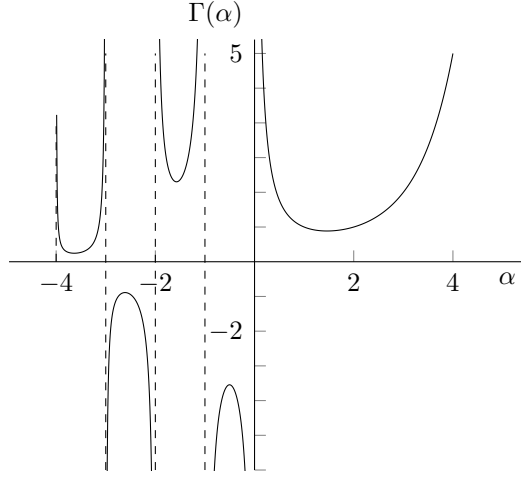
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (\text{ب.25})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

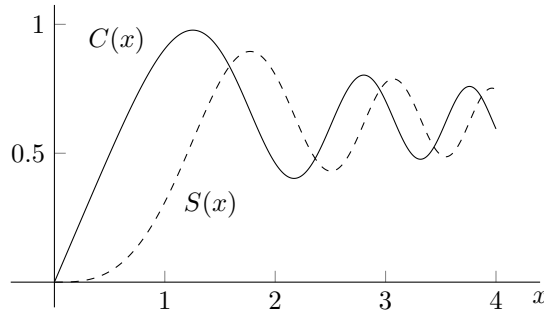
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

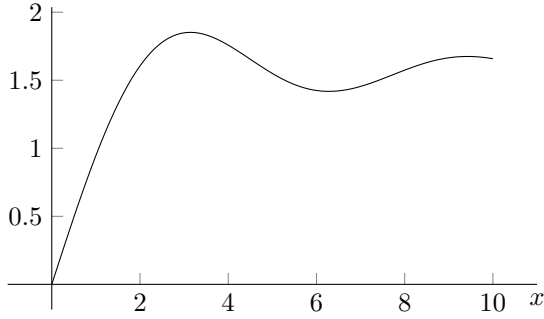
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

