

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیض۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمیتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش

781	11	سمتی عملی علم الاحصاء۔ مکمل کے مسئلے
782	11.1	خطی مکمل
787	11.2	خطی مکمل کا حل
796	11.3	دوہرہ مکمل
810	11.4	دوہرہ مکمل کا خطی مکمل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی مکمل
845	11.8	تہرہ مکمل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سنوکس
866	11.11	مسئلہ سنوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی مکمل

883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، ہکونیاتی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ پولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ آساع
923	12.6	فوریئر عددی سر کا بغیر مکمل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکنونی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر مکمل

955	ا	اضافی ثبوت
959	ب	مفید معلومات
959	1.ب	اعلی تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 12

فوریہ تسلسل

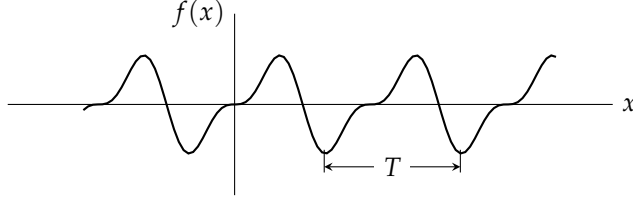
انجینیری مسائل میں دوری تفاعل عموماً پائے جاتے ہیں جن کو سادہ دوری تفاعل مثلاً \sin اور \cos کی روپ میں لکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اسی عمل سے فوریہ تسلسل¹ ابھر کر سامنے آتی ہے جو سادہ تفرقی مساوات اور جزوی تفرقی مساوات کے حل میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

فوریہ تسلسل کا نظریہ پیچیدہ ہے جبکہ اس کا استعمال نہایت آسان ہے۔ چونکہ بہت سارے غیر استمراری تفاعل کا فوریہ تسلسل حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ ان کا ٹیلر تسلسل نہیں پایا جاتا ہے لہذا فوریہ تسلسل کو ٹیلر تسلسل کی عالمگیر صورت تصور کیا جاسکتا ہے۔

اس باب میں فوریہ تسلسل سے وابستہ تصورات، حقائق اور تکنیکی تراکیب پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ ان کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں ان کا استعمال دکھایا جائے گا۔

اس باب کی آخری حصے میں فوریہ مکمل پر غور کیا جائے گا جنہیں اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں استعمال کیا جائے گا۔

¹ فرانسیسی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات جیمز پیٹسٹ پوسٹ فوریہ [1768-1830]



شکل 12.1: دوری تفاعل

12.1 دوری تفاعل، تکیونیاتی تسلسل

تفاعل $f(x)$ اس صورت دوری² کہلاتا ہے کہ جب پورے حقیقی x پر $f(x)$ معین ہو اور ایسا مثبت عدد T پایا جاتا ہو کہ تمام x پر درج ذیل درست ہو۔

$$(12.1) \quad f(x+T) = f(x) \quad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

عددی T کو $f(x)$ کا دوری عرصہ³ کہتے⁴ ہیں۔ T کے برابر $f(x)$ کے کسی بھی وقفے کا ترسیم دہراتے ہوئے ایسے تفاعل کا ترسیم حاصل کیا جاتا ہے (شکل 12.1)۔ عملی استعمال میں عموماً دوری اعمال اور تفاعل پائے جاتے ہیں۔

دوری تفاعل کی مثالیں $\sin x$ اور $\cos x$ ہیں۔ اس کے علاوہ مستقل $f = c$ بھی دوری تفاعل کی تعریف (مساوات 12.1 پر ہر مثبت T کے لئے) پورا اترنے کی بنا دوری تفاعل ہے۔

مساوات 12.1 سے ظاہر ہے کہ عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

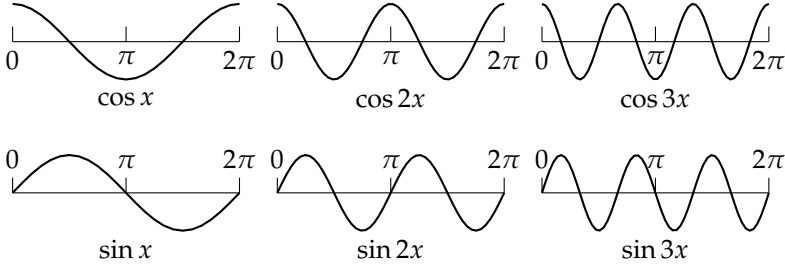
$$f(x+nT) = f(x) \quad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

یوں $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، ... بھی تفاعل $f(x)$ کے دوری عرصے ہیں۔ مزید اگر تفاعل $f(x)$ کا اور $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب درج ذیل تفاعل

$$h(x) = af(x) + bg(x) \quad \text{مستقل } a, b$$

periodic²
period³

⁴ تفاعل $f(x)$ کا کم تر دوری عرصہ $T (> 0)$ ، اگر موجود ہو، $f(x)$ کا اولی دوری عرصہ کہلاتا ہے۔ مثلاً $\sin x$ اور $\sin 2x$ کا بالترتیب اولی دوری عرصہ 2π اور π ہے جبکہ مستقل $f = c$ کا کوئی دوری عرصہ نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 12.2: سائن اور کوسائن تقابل جن کا دوری عرصہ 2π ہے

کا دوری عرصہ بھی T ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

اس باب کی شروع میں ہم ایسے مختلف تقابل جن کا دوری عرصہ 2π ہو کو درج ذیل سادہ تقابل کی روپ میں ظاہر کرنا سیکھیں گے

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

جن کا دوری عرصہ 2π ہے (شکل 12.2)۔ ہم دیکھیں گے کہ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل طرز کی تسلسل حاصل ہوگی

$$(12.2) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

جہاں $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ حقیقی مستقل ہوں گے۔ اس تسلسل کو تکنیاتی تسلسل⁵ کہتے ہیں جبکہ a_n اور b_n تسلسل کی عددی سر⁶ کہلاتے ہیں۔ چونکہ اس تسلسل کے ہر رکن کا دوری عرصہ 2π ہے لہذا اگر یہ تسلسل مرکوز ہو تب یہ ایسا تقابل ہو گا جس کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔

انجینئری میں واقع تقابل پیچیدہ ہوتے ہیں جنہیں سادہ دوری تقابل کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ عملی استعمال، مثلاً ارتعاش، میں پائے جانے والا تقریباً ہر دوری تقابل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو فوریر تسلسل کی روپ میں لکھنا ممکن ہو گا۔ ہم مساوات 12.2 کے عددی سر حاصل کرنے کے ایسے کلیات دریافت کریں گے جو $f(x)$ پر منحصر ہوں گے اور جنہیں استعمال کرتے ہوئے حاصل تسلسل مرکوز ہو گا جس کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا۔ اس کے بعد ہم حاصل کلیات کو عمومی شکل دیتے ہوئے ان کو کسی بھی دوری عرصہ کے تقابل کے لئے قابل استعمال بنائیں گے۔ ایسا کرنا نہایت آسان ثابت ہو گا۔

trigonometric series⁵
coefficients⁶

سوالات

سوال 12.1: دیے گئے تفاعل کا کم تر دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x$$

جوابات: $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$

سوال 12.2: اگر تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب ثابت کریں کہ nT جہاں $n = 2, 3, \dots$ ہے بھی اس تفاعل کا دوری عرصہ ہو گا۔

سوال 12.3: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کا اور تفاعل $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب تفاعل $h(x) = af(x) + bg(x)$ کا دوری عرصہ بھی T ہو گا، جہاں a اور b مستقل ہیں۔ یوں دوری عرصہ T رکھنے والے تمام تفاعل سمتی فضا پیدا کرتے ہیں۔

سوال 12.4: ثابت کریں کہ تفاعل مستقل $f(x) = \cos x$ ایسا دوری تفاعل ہے جس کا دوری عرصہ T کوئی بھی مثبت عدد ہو سکتا ہے۔

سوال 12.5: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہونے کی صورت میں x کے دوری تفاعل $f(ax), a \neq 0$ کا دوری عرصہ $\frac{T}{a}$ ہو گا جبکہ x کے دوری تفاعل $f(\frac{x}{b}), b \neq 0$ کا دوری عرصہ bT ہو گا۔ ان نتائج کی تصدیق $f(x) = \cos x, a = b = 2$ کے لئے کریں۔

سوال 12.6 تا سوال 12.12 میں دیے گئے تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

$$\sin x, \quad \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x, \quad \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \quad \text{سوال 12.6}$$

$$\text{سوال 12.7: } f(x + 2\pi) = f(x) \text{ اور}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

ہے۔ سوال 12.6 کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.8:

$$\sin 2\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x + \frac{1}{5} \sin 10\pi x$$

سوال 12.9:

$$\sin x, \quad \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.10:

$$-\cos x, \quad -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x, \quad -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x,$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{سوال 12.11}$$

$$f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{سوال 12.12}$$

سوال 12.13 تا سوال 12.16 میں دوری تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔ اس کی ترسیم کھینچیں۔ وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ کے لئے $f(x)$ دیا گیا ہے۔

سوال 12.13:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سوال 12.14:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سوال 12.15:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سوال 12.16:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سوال 12.17 تا سوال 12.25 میں دیے گئے مکمل ہمیں آگے درکار ہوں گے۔ ان مکمل میں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔ مکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 12.17: $\int_0^{\pi} \sin nx \, dx$

جواب: طاق n کے لئے $\frac{2}{n}$ اور جفت n کے لئے صفر۔

سوال 12.18: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos nx \, dx$

جواب: جفت n کے لئے صفر اور طاق n کے لئے $\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$

سوال 12.19: $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$

جواب: $(-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n}$

سوال 12.20: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx$

جواب: طاق n ، $\frac{2}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$ ، یعنی $(-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{2}{n^2}$ جبکہ جفت n ، $-\frac{\pi}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$ ، یعنی $(-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{\pi}{n}$

سوال 12.21: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx \, dx$

جواب: 0

سوال 12.22: $\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$
 جواب: $\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$

سوال 12.23: $\int_{-\pi}^0 e^x \sin nx \, dx$
 جواب: $\frac{n}{n^2+1} [(-1)^n e^{-\pi} - 1]$

سوال 12.24: $\int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx$
 جواب: $\frac{1}{n^2+1} [e^{\pi}(-1)^n - 1]$

سوال 12.25: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$
 جواب: $\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$

12.2 فوریر تسلسل۔ یولر کلیات

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کو درج ذیل ٹکونیاتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$(12.3) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ہم دیے گئے تفاعل $f(x)$ کی ٹکونیاتی تسلسل (مساوات 12.3) کے عددی سر a_n ، اور b_n جاننا چاہتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے a_0 دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 12.3 کے دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx$$

اگر تسلسل کے ارکان کا جزو با جزو مکمل لینا جائز ہو⁷، تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right)$$

دائیں ہاتھ پہلا رکن $2\pi a_0$ کے برابر ہے۔ بائیں ہاتھ باقی تمام ارکان صفر کے برابر ہیں، جیسا کہ مکمل لے کر ثابت کیا جاسکتا ہے۔ یوں پہلا کلیہ درج ذیل ملتا ہے۔

$$(12.4) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

ہم اب a_1 ، a_2 ، ... اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔ ہم مساوات 12.3 کو $\cos mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مقررہ مثبت عدد صحیح ہے، دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$(12.5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx dx$$

جزو در جزو مکمل لیتے ہوئے دائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔ ضمیمہ-ب میں دیا گیا مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x dx \end{aligned}$$

تکمل لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ بالائی دائیں جزو کے علاوہ تمام تکمل صفر کے برابر ہیں۔ بالائی دایاں جزو $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 12.5 میں اس جزو کو a_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا a_m لکھا جاسکتا ہے) لہذا مساوات 12.5 کا دایاں ہاتھ $a_m \pi$ کے برابر ہو گا۔ یوں دوسرا کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(12.6) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

⁷ ایسا جائز ہے، مثلاً، استمراری مرکز صورت میں۔

ہم آخر میں b_1 ، b_2 ، ... حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 12.3 کو $\sin mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مثبت مقررہ عدد صحیح ہے، $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$(12.7) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \, dx$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دایاں ہاتھ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \right]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔ دوسرے تکمل کی طرز کی تکمل پر ہم غور کر چکے ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ تمام $n = 1, 2, \dots$ کے لئے اس کی قیمت صفر ہے۔ آخری تکمل کو ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m) \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m) \, dx$$

آخری جزو صفر کے برابر ہے۔ دایاں ہاتھ پہلا جزو $n \neq m$ کی صورت میں صفر جبکہ $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 12.7 میں اس جزو کو b_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا b_m لکھا جاسکتا ہے) لہذا مساوات 12.7 کا دایاں ہاتھ $b_m \pi$ کے برابر ہو گا۔ یوں آخری کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(12.8) \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

اب m کی جگہ n لکھتے ہوئے ان کلیات کو، جنہیں یولر کلیات⁸ کہتے، ایک جگہ اکٹھا کرتے ہیں۔

$$(الف) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$(12.9) \quad (ب) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(پ) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

چونکہ مکمل دوری ہیں لہذا مساوات 12.9 میں وقفہ مکمل کو 2π کے برابر کسی بھی وقفہ، مثلاً $0 \leq x \leq 2\pi$ سے بدلا جاسکتا ہے۔

دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.9 کی مدد سے عددی سر a_n اور b_n حاصل کر کے ہم درج ذیل تکنیکی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(12.10) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

اس تسلسل کو $f(x)$ کی فوریر تسلسل⁹ کہتے ہیں جبکہ مساوات 12.9 سے حاصل عددی سر a_n ، b_n کو $f(x)$ کے فوریر عددی سر¹⁰ کہتے ہیں۔

قطعی نکل کی تعریف سے واضح ہے کہ اگر $f(x)$ استمراری یا ٹکڑوں میں استمراری (جہاں وقفہ نکل پر $f(x)$ میں محدود تعداد کے چھلانگ پائے جاتے ہوں) ہو تب مساوات 12.9 میں دیے گئے نکلمات موجود ہوں گے لہذا ہم $f(x)$ کے فوریر عددی سروں کو مساوات 12.9 کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا اس طرح حاصل کیا گیا فوریر تسلسل مرکوز ہو گا اور آیا تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا؟ ان سوالات پر اسی حصے میں آگے جا کر غور کیا جائے گا۔

آئیں مساوات 12.9 کی استعمال کو ایک سادہ مثال کی مدد سے سمجھیں۔

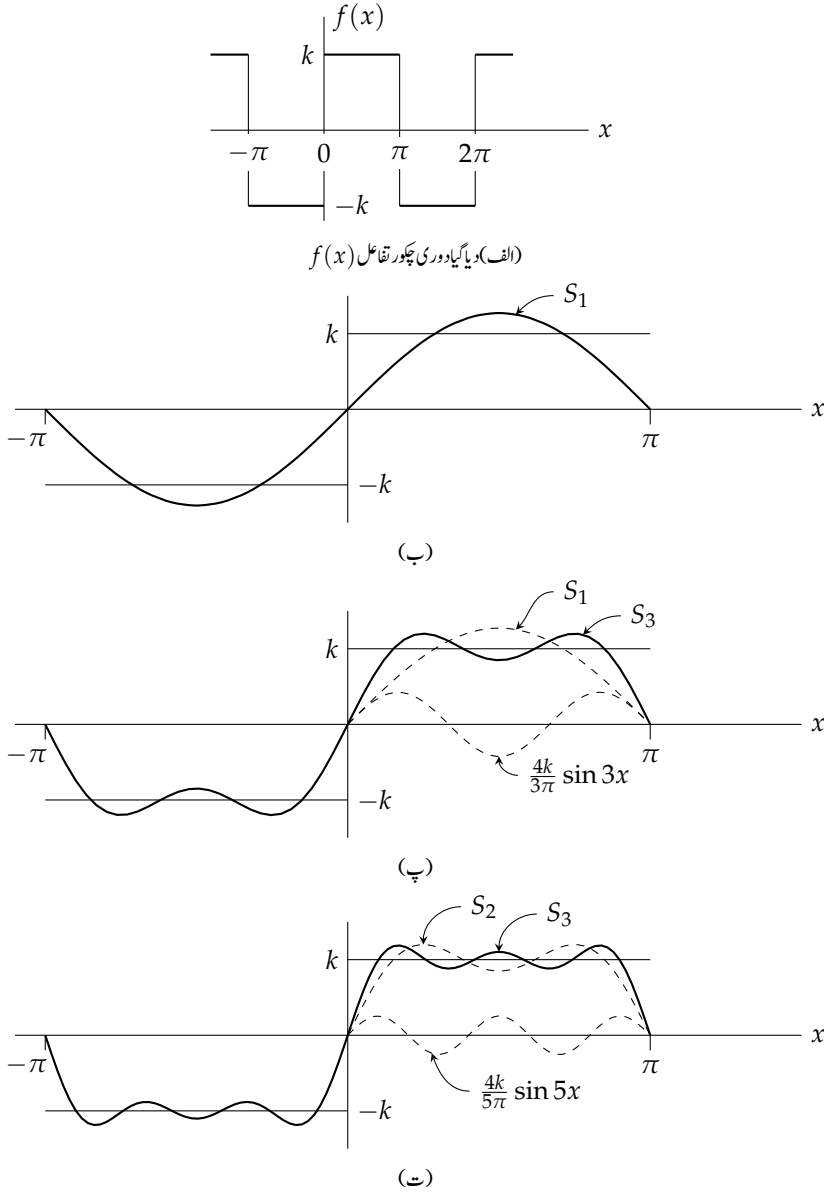
مثال 12.1: چکور موج
چکور موج کے فوریر عددی سر کو مساوات 12.9 سے حاصل کریں۔ چکور موج کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔ چکور موج کی تجلیی روپ درج ذیل ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{جہاں} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

اس طرز کے تفاعل میکانی نظام میں بطور بیرونی قوت یا برقی ادوار میں بطور داخلی دباؤ پائے جاسکتے ہیں، وغیرہ۔

حل: مساوات 12.9-الف سے $a_0 = 0$ ملتا ہے۔ یہ نتیجہ بغیر نکل کے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے کہ چکور موج کا رقبہ $-\pi$ تا π صفر ہے۔ مساوات 12.9-ب سے

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} k \cos nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$



شکل 12.3: چکور موج اور فوریر تسلسل سے حاصل امواج (مثال 12.1)

میتا ہے جہاں تمام $n = 1, 2, \dots$ کے لئے $-\pi$ ، 0 اور π پر $\sin nx = 0$ پر کیا گیا ہے۔ اسی طرح مساوات 12.9-پ سے

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] \end{aligned}$$

میتا ہے۔ چونکہ $\cos 0 = 1$ اور $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ہوتا ہے لہذا اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_n = \frac{k}{n\pi} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

اب $\cos \pi = -1$ ، $\cos 2\pi = 1$ ، $\cos 3\pi = -1$ ، وغیرہ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & n \text{ طاق} \\ 1 & n \text{ جفت} \end{cases} \implies 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases}$$

یوں b_n درج ذیل ہوں گے۔

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \dots$$

چونکہ $a_n = 0$ ہیں لہذا دی گئی چکور تفاعل کی فوریئر تسلسل

$$(12.11) \quad \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

ہوگی جس کے جزوی مجموعے درج ذیل ہیں۔

$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right), \dots$$

شکل 12.3 میں جزوی مجموعہ میں ارکان کی تعداد بتدریج بڑھاتے ہوئے تسلسل کا ترسیم کھینچا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ تسلسل کے زیادہ ارکان استعمال کرنے سے ترسیم کی شکل اصل تفاعل (چکور موج) کی زیادہ قریب ہوتی ہے۔ چکور موج $-\pi$ ، 0 ، π ، وغیرہ پر غیر استمراری ہے یعنی یہاں تفاعل میں چھلانگ پائی جاتی ہے۔ یوں ہم نہیں کہہ سکتے کہ آیا $x = 0$ پر چکور تفاعل کی قیمت $-k$ ہے یا k ہے یا کہ ان دونوں قیمتوں کے مابین ہے۔ اس کے برعکس فوریئر تسلسل کے تمام جزوی مجموعے ان نقطوں پر صفر کے برابر ہیں جو $-k$ اور k کی اوسط قیمت ہے۔

مزید فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہے۔ شکل 12.3-الف سے ظاہر ہے کہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر چکور تفاعل کی قیمت k کے برابر ہے۔ یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots\right)$$

یعنی

$$(12.12) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots = \frac{\pi}{4}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مشہور نتیجہ لیبنٹز نے 1673 کے لگ بھگ جیومیٹریائی اصولوں سے حاصل کیا۔ اس سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل ارکان کی کئی تسلسل کی قیمت کو مختلف نقطوں پر فوریر تسلسل کی قیمت سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

ایسے تفاعل جنہیں فوریر تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کی تعداد غیر یقینی طور پر زیادہ ہے۔ انجینئری میں استعمال ہونے والی تقریباً ہر ممکن تفاعل کو فوریر تسلسل کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے درکار (کافی) شرائط درج ذیل مسئلہ 12.1 میں بیان کیے گئے ہیں۔ اس مسئلہ میں چند تصورات کی ضرورت ہے جن پر پہلے بات کرتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد¹¹ سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو x_0 تک بائیں ہاتھ سے پہنچتے ہوئے حاصل ہوگی۔ یوں بائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0 - 1)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے درج ذیل ہوگی

$$f(x_0 - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$$

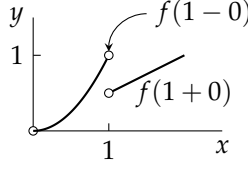
جہاں h مثبت قیمت ہے۔ اسی طرح x_0 پر $f(x)$ کی دائیں ہاتھ حد¹² سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو دائیں ہاتھ سے آکر x_0 تک پہنچتے ہوئے حاصل ہوگی۔ یوں دائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0 + 0)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$f(x_0 + 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$$

ہوگی جہاں h مثبت قیمت ہے۔ شکل 12.4 میں غیر استمراری تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ \frac{x}{2} & x > 1 \end{cases}$$

¹¹ left hand limit
¹² right hand limit



شکل 12.4: بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد، بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق

دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $x_0 = 1$ پر اس تفاعل کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد درج ذیل ہیں

$$f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = \frac{1}{2}$$

جن میں فرق $(1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2})$ کو چھلانگ¹³ کہتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر بائیں ہاتھ تفرق¹⁴ سے مراد

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}$$

اور دائیں ہاتھ تفرق¹⁵ سے مراد

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

ہے جہاں h مثبت قیمت ہے۔ ظاہر ہے کہ اگر نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ استمراری ہو تب $f(x_0 - 0)$ اور $f(x_0 + 0)$ دونوں $f(x_0)$ ہی کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 12.1: (تفاعل کا فوریرس تسلسل کی روپ میں اظہار)

اگر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو، وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ میں ٹکڑوں میں استمراری¹⁶ ہو اور اس وقفے کے ہر نقطے پر تفاعل کا دایاں ہاتھ تفرق اور پایاں ہاتھ تفرق موجود ہو تب تفاعل کی فوریرس تسلسل، مساوات 12.10، جس کی عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل کیے گئے ہوں، مرکب ہوگی۔ تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا ماسوائے نقطہ x_0 پر جہاں تفاعل غیر استمراری ہو۔ نقطہ x_0 پر تسلسل کی قیمت، نقطہ x_0 پر $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کی اوسط ہوگی۔

¹³ jump

¹⁴ left hand differential

¹⁵ right hand differential

¹⁶ ٹکڑوں میں استمراری کی تعریف حصہ 6.1 میں دی گئی ہے۔

دائے ذی: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریرس تسلسل مرکب ہو اور اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو (جیسا مسئلہ 12.1 میں بیان کیا گیا ہے) تب اس تسلسل کو $f(x)$ کی فوریرس تسلسل کہتے ہیں جس کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

اور ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کو یہ فوریرس تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ اب چونکہ کسی بھی مرکب تسلسل میں قوسین لگانے سے ایک نئی مرکب تسلسل ملتی ہے جس کا مجموعہ اصل تسلسل کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے لہذا ہم درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ثبوت: استمراری تفاعل $f(x)$ جس کا استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پایا جاتا ہو کی مرکزیت (مسئلہ 12.1) کا ثبوت۔

مساوات 12.9-ب کا مکمل بالخصوص لیتے ہوئے

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

ملتا ہے۔ دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے برابر ہے۔ دوبارہ مکمل بالخصوص لینے سے

$$a_n = \frac{f'(x) \cos nx}{n^2 \pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx$$

ملتا ہے۔ چونکہ $f'(x)$ دوری اور استمراری ہے لہذا دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر ہو گا۔ وقفہ مکمل میں $f''(x)$ استمراری ہے لہذا

$$|f''(x)| < M$$

ہو گا جہاں M ایک موزوں مستقل ہے۔ مزید $|\cos nx| < 1$ ہے۔ یوں

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx \right| < \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = \frac{2M}{n^2}$$

ہو گا۔ اسی طرح تمام n کے لئے $|b_n| < \frac{2M}{n^2}$ ہو گا۔ اس طرح فوریر سلسل کی ہر رکن کی زیادہ سے زیادہ قیمت درج ذیل سلسل کی مطابقتی رکن کی قیمت کے برابر ہو سکتی ہے جو مرکب سلسل ہے۔

$$|a_0| + 2M \left(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

یوں فوریر سلسل بھی مرکب ہو گی۔

نکڑوں میں استمراری تفاعل $f(x)$ کی صورت میں فوریر سلسل کی مرکزیت اور مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

□

سوالات

سوال 12.26 تا سوال 12.42 میں دیے گئے دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کا فوریر سلسل دریافت کریں۔ پہلے تین جزوی مجموعوں¹⁷ کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.26: تفاعل کو شکل 12.5-الف میں دیا گیا ہے۔

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - + \dots)$

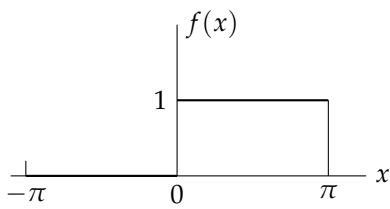
سوال 12.27: تفاعل کو شکل 12.5-ب میں دیا گیا ہے۔

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \dots)$

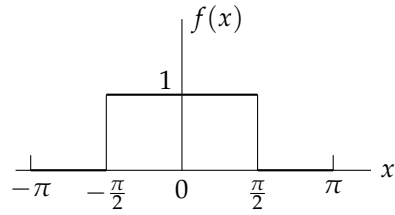
سوال 12.28: تفاعل کو شکل 12.5-پ میں دیا گیا ہے۔

جواب: $\frac{4}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$

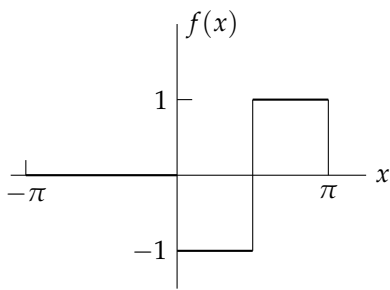
¹⁷ یعنی $N = 1, 2, 3$ جہاں $a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ہے۔



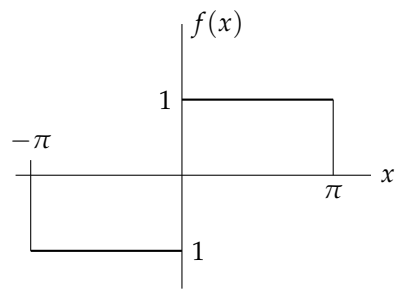
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

شکل 12.5: تفاعل برائے سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.29: تفاعل کو شکل 12.5-ت میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{2}{\pi}(-\cos x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x \dots)$

سوال 12.30:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \dots)$

سوال 12.31:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos x - \sin x - \sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x \dots)$

سوال 12.32:

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \frac{2}{1}\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x \dots$

سوال 12.33:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(-\cos x + \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x \dots)$

سوال 12.34:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x \dots$

سوال 12.35:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x \dots)$$

سوال 12.36:

$$f(x) = \begin{cases} \pi & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos x - \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{2}{9\pi} \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x \dots$$

سوال 12.37:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } 2 \sin x + \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{2}{5} \sin 5x \dots$$

سوال 12.38:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}(-\cos x + 3 \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \sin 3x \dots)$$

$$\text{سوال 12.39: } f(x) = x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi}{16} + \frac{1}{\pi}[(\frac{\pi}{2} - 1) \cos x + \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \dots]$$

$$\text{سوال 12.40: } f(x) = \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\sin x$

سوال 12.41: نصف لہر سمت کار

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{35} \cos 6x + \dots)$$

$$\text{سوال 12.42: } f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi \text{ مکمل لہر سمت کار}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{35} \cos 6x \dots)$$

سوال 12.43: مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کی سوال 12.26 کے لئے تصدیق کریں۔

سوال 12.44: سوال 12.26 کی حاصل تسلسل سے سوال 12.27 کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.45: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریر عددی سر a_n اور b_n ہوں تب ثابت کریں کہ تفاعل $kf(x)$ جہاں k مستقل ہے کے عددی سر ka_n اور kb_n ہوں گے۔

سوال 12.46: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کے عددی سر a_n ، b_n اور تفاعل $g(x)$ کے عددی سر a_n^* ، b_n^* ہوں تب تفاعل $f(x) + g(x)$ کے عددی سر $a_n + a_n^*$ ، $b_n + b_n^*$ ہوں گے۔

سوال 12.47: سوال 12.33 میں دیے گئے تفاعل کی فوریر تسلسل سوال 12.46 کو استعمال کرتے ہوئے شکل 12.5 کی نتائج سے حاصل کریں۔

12.3 اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل

عملی استعمال میں پائے جانے والے دوری تفاعل کا دوری عرصہ شاذ و نادر 2π ہوتا ہے۔ 2π دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے حاصل کی گئی کلیات کی x ناپ تبدیل کرتے ہوئے کسی بھی دوری عرصہ T کے تفاعل کی کلیات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔ ہم نیا متغیر x متعارف کرتے ہیں جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(12.13) \quad (الف) \quad t = \frac{T}{2\pi}x \quad (ب) \quad x = \frac{2\pi}{T}t$$

لہذا $x = \mp\pi$ کے مطابقتی قیمتیں $t = \mp\frac{T}{2}$ ہوں گی۔ اس طرح x کے تفاعل f کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ یوں اگر f کی فوریر تسلسل موجود ہو، اس کی صورت درج ذیل ہوگی

$$(12.14) \quad f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

جہاں یولر عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل ہوں گے یعنی:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \sin nx \, dx$$

ہم ان کلیات کو استعمال کر سکتے ہیں لیکن متغیر کو t میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوتی ہے۔ یوں

$$x = \frac{2\pi}{T}t, \quad dx = \frac{2\pi}{T} dt$$

استعمال کرتے ہوئے اور x محور پر $-\pi$ تا π تکمل کو t محور پر $-\frac{T}{2}$ تا $\frac{T}{2}$ تکمل لکھتے ہوئے یولر مساوات درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$(الف) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$(12.15) \quad (ب) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

$$(پ) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt$$

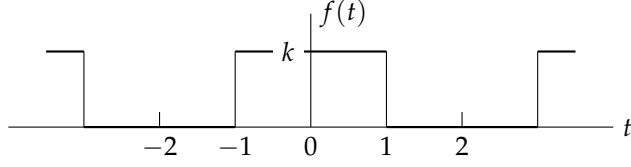
مزید مساوات 12.14 میں دی گئی فوریر تسلسل میں x متغیر کی جگہ t متغیر پر کرنے سے

$$(12.16) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t \right)$$

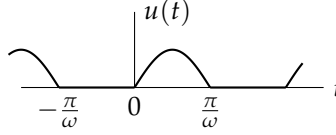
فوریر تسلسل حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ تقاعل $f(t)$ دوری ہے لہذا مساوات 12.15 میں تکمل کو $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ کی بجائے T کے برابر کسی بھی وقفہ مثلاً $0 \leq t \leq T$ پر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 12.2: درج ذیل چکور تقاعل (شکل 12.6)، جس کا دوری عرصہ $T = 4$ ہے، کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ k & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$



شکل 12.6: مثال 12.2



شکل 12.7: نصف لہر سمت کار (مثال 12.3)

حل: مساوات 12.15 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k dt = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \cos \frac{2n\pi}{4} t dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \cos \frac{n\pi}{2} t dt = \frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \sin \frac{2n\pi}{4} t dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \sin \frac{n\pi}{2} t dt = 0$$

یوں جفت n کے لئے $a_n = 0$ جبکہ $n = 1, 5, 9, \dots$ کے لئے $a_n = \frac{2k}{n\pi}$ اور $n = 3, 7, 11, \dots$ کے لئے $a_n = -\frac{2k}{n\pi}$ ہو گا جن سے درج ذیل فوریر سلسل ملتی ہے۔

$$f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} t + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} t - + \dots \right)$$

□

مثال 12.3: سائن نما برقی دباؤ $v = E \sin \omega t$ کو نصف لہر سمت کار سے گزارا جاتا ہے۔ نصف لہر سمت کار کی خارجی برقی دباؤ $u(t)$ (شکل 12.7) درج ذیل ہے۔

$$u(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ E \sin \omega t & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

حل: یہاں $T = \frac{2\pi}{\omega}$ کے برابر ہے۔ یوں مساوات 12.15-الف سے

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \, dt = \frac{E}{\pi}$$

ملتا ہے جبکہ مساوات 12.15-ب میں ضمیمہ ب کی مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \cos n\omega t \, dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t] \, dt$$

سے $n = 1$ کے لئے صفر جبکہ $n = 2, 3, \dots$ کے لئے

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega E}{2\pi} \left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= \frac{E}{2\pi} \left(\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n} \right) \end{aligned}$$

ملتی ہے جو طاق n کے لئے صفر اور جفت n کے لئے

$$a_n = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \quad (n = 2, 4, \dots)$$

دیتی ہے۔ اسی طرح مساوات 12.15-پ سے $b_1 = \frac{E}{2}$ جبکہ $n = 2, 3, \dots$ کے لئے $b_n = 0$ ملتے ہیں۔ اس طرح فوریر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \dots \right)$$

□

سوالات

سوال 12.48: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.16 میں تمام ارکان کا دوری عرصہ T ہے۔

سوال 12.49: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.15 میں T کے برابر کسی بھی وقفے پر مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سوال 12.50: مثال 12.3 کی چکور تفاعل کی تسلسل کو سوال 12.26 کی تسلسل سے سیدھ و سیدھ بذریعہ تبدیلی متغیر حاصل کریں۔

سوال 12.51: نصف لہر سمت کار کو $v = E \cos t$ داخلی دباؤ مہیا کی جاتی ہے۔ خارجی دباؤ کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t - + \dots \right)$$

سوال 12.52 تا سوال 12.62 میں تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔ اس کی فوریر تسلسل دریافت کریں۔ تفاعل $f(t)$ اور اس کی تسلسل کے اولین تین جزوی مجموعوں کے خط کھینچیں۔ آپ دیکھیں گے کہ تسلسل کی زیادہ ارکان استعمال کرنے سے اصل تفاعل سے زیادہ قریبی مشابہت رکھنے والا خط حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{سوال 12.52: } f(t) = -1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = 1 \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } \frac{4}{\pi} (\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots)$$

$$\text{سوال 12.53: } f(t) = 1 \quad (-1 < t < 2), \quad f(t) = 0 \quad (2 < t < 3), \quad T = 4$$

$$\text{جواب: } \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} (\cos \frac{\pi t}{2} + \sin \frac{\pi t}{2} - \sin \pi t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{2} \dots)$$

$$\text{سوال 12.54: } f(t) = 1 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 4$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} \dots)$$

$$\text{سوال 12.55: } f(t) = t \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{\pi} (2 \sin \pi t - \sin 2\pi t + \frac{2}{3} \sin 3\pi t - \frac{1}{2} \sin 4\pi t \dots)$$

$$\text{سوال 12.56: } f(t) = t^2 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} (-4 \cos \pi t + \cos 2\pi t - \frac{1}{9} \cos 3\pi t + \frac{1}{4} \cos 4\pi t \dots)$$

$$\text{سوال 12.57: } f(t) = -t \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = t \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} (\cos \pi t + \frac{1}{9} \cos 3\pi t + \frac{1}{25} \cos 5\pi t \dots)$$

$$\text{سوال 12.58: مکمل لہر سمت کار } f(t) = \sin \pi t \quad (0 < t < 1), \quad T = 1$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} (\frac{1}{3} \cos 2\pi t + \frac{1}{15} \cos 4\pi t + \frac{1}{35} \cos 6\pi t \dots)$$

$$\text{سوال 12.59: } f(t) = -1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = t \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } -\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{3}{\pi} \sin \pi t = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t - \frac{2}{9\pi^2} \cos 3\pi t \dots$$

سوال 12.60: $f(t) = 1 \quad (0 < t < 1), \quad f(t) = 2 \quad (1 < t < 2) \quad T = 3$
 جواب: $1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{3} + \frac{3}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{3} \dots$

سوال 12.61: $f(t) = -t \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = 2t \quad (0 < t < 1) \quad T = 2$
 جواب: $\frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{1}{\pi} \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t - \frac{2}{3\pi^2} \cos 3\pi t \dots$

سوال 12.62: $f(t) = \cos(\pi t) \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
 جواب: $\cos \pi t$

سوال 12.63: مکمل لہر سمت کار کی فوریئر تسلسل سوال 12.58 میں حاصل کی گئی۔ سوال 12.42 میں حاصل کی گئی تسلسل میں متغیر تبدیل کرتے ہوئے یہی جواب دوبارہ حاصل کریں۔

12.4 جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل کی صورت میں $b_n = 0$ جبکہ طاق تفاعل کی صورت میں $a_n = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں یہ جاننے سے کہ آیا تفاعل جفت یا طاق ہے، عددی سر دریافت کرنے کا کام نسبتاً کم ہو گا۔

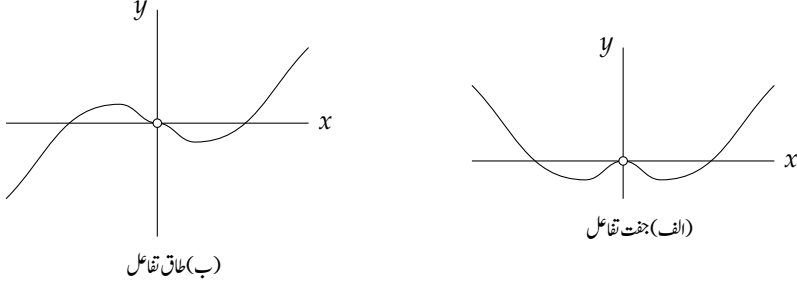
تمام x کے لئے درج ذیل خاصیت والے تفاعل $y = g(x)$ کو جفت¹⁸ تفاعل کہتے ہیں۔

$$(12.17) \quad g(-x) = g(x)$$

ایسا تفاعل y محور کی دونوں اطراف تشابہ (شکل 12.8-الف) ہو گا۔ اس کے برعکس تفاعل $y = h(x)$ جس کی خاصیت درج ذیل ہو طاق¹⁹ تفاعل کہلاتا ہے (شکل 12.8-ب)۔

$$(12.18) \quad h(-x) = -h(x)$$

even¹⁸
odd¹⁹



شکل 12.8: جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل $g(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہے (شکل 12.8-الف) لہذا $g(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

(12.19)

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^0 g(x) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} g(x) dx = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} g(x) dx \quad (g \text{ جفت})$$

طاق تفاعل $h(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ ضرب منفی اکائی کے برابر ہے (شکل 12.8-ب) لہذا $h(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.20) \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^0 h(x) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} h(x) dx = 0 \quad (h \text{ طاق})$$

جفت تفاعل $g(x)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کی حاصل ضرب $q = gh$ کے لئے

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -g(x)h(x) = -q(x)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا $q = gh$ طاق تفاعل ہو گا۔ یوں اگر $f(t)$ جفت تفاعل ہو تب مساوات 12.15-پ میں متکمل $f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہذا $b_n = 0$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $f(t)$ طاق ہو تب مساوات 12.15-ب میں $f \cos \frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہذا $a_n = 0$ ہو گا۔ ان نتائج سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.2: جفت اور طاق تفاعل کی فوریر سلسل
دوری عرصہ T کی جفت تفاعل $f(t)$ کی فوریر سلسل، فوریر کوسائن تسلسل²⁰

$$(12.21) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \quad (f \text{ جفت})$$

ہوگی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$(12.22) \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

دوری عرصہ T کی طاق تقاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل، فوریئر سائن تسلسل²¹

$$(12.23) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \quad (\text{طاق } f)$$

ہوگی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$(12.24) \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

اس مسئلہ کے تحت دوری عرصہ 2π کی جفت تقاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل درج ذیل فوریئر کوسائن تسلسل

$$(12.25) \quad f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \quad (\text{جفت } f)$$

ہوگی جس کے فوریئر عددی سر

$$(12.26) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

ہوں گے۔ اسی طرح دوری عرصہ 2π والی تقاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل

$$(12.27) \quad f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots \quad (\text{طاق } f)$$

پائی جائے گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$(12.28) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

مثال 12.2 میں دی گئی چکور تقاعل جفت ہے لہذا اس کی فوریئر کوسائن تسلسل پائی گئی۔

مزید آسانی درج ذیل مسئلہ سے حاصل ہوتی ہے۔

مسئلہ 12.3: (تفاعل کا مجموعہ) مجموعہ تفاعل $f_1 + f_2$ کی فوریر عددی سر، تفاعل f_1 اور تفاعل f_2 کی مطابقتی فوریر عددی سر کا مجموعہ ہو گا۔

کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(12.29) \quad f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = g(x) + h(x)$$

جہاں

$$(12.30) \quad \begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) &= \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{aligned}$$

ہیں۔ درج ذیل سے ثابت ہوتا ہے کہ $g(x)$ جفت اور $h(x)$ طاق ہیں (مساوات 12.17 اور مساوات 12.18)۔

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = g(x) \\ h(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -h(x) \end{aligned}$$

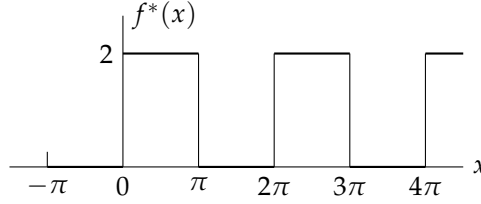
یوں کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو جفت تفاعل $g(h)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے جنہیں مساوات 12.30 سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 12.4: مستطیل دھڑکن

مستطیل دھڑکن²² $f^*(x)$ کو شکل 12.9 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوال 12.28 میں دکھائی گئی تفاعل $f(x)$ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے موجودہ تفاعل $f^*(x)$ حاصل ہو گی۔ یوں سوال 12.28 میں حاصل کیے گئے فوریر سلسل سے $f^*(x)$ کی فوریر سلسل سیدھ و سیدھ لکھتے ہیں۔

$$1 + \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$$

□



شکل 12.9: مستطیل دھڑکن (مثال 12.4)

مثال 12.5: دندان موج
دندان موج²³

$$f(x) = x + \pi, \quad (-\pi < x < \pi); \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

کو شکل 12.10-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس کی فوریر تسلسل دریافت کریں۔ حل: دندان موج کی تقاعل کو

$$f = f_1 + f_2; \quad f_1 = x, \quad f_2 = \pi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ f_2 کی فوریر عددی سر صفر کے برابر ہیں ماسوائے a_0 کے جو π کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ 12.3 کے تحت دندان موج کے عددی سر a_n ، b_n تقاعل f_1 کے عددی سر ہوں گے جبکہ اس کا $a_0 = \pi$ ہو گا (f_1 طاق ہے لہذا اس کا اپنا $a_0 = 0$ ہے)۔ یوں

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx$$

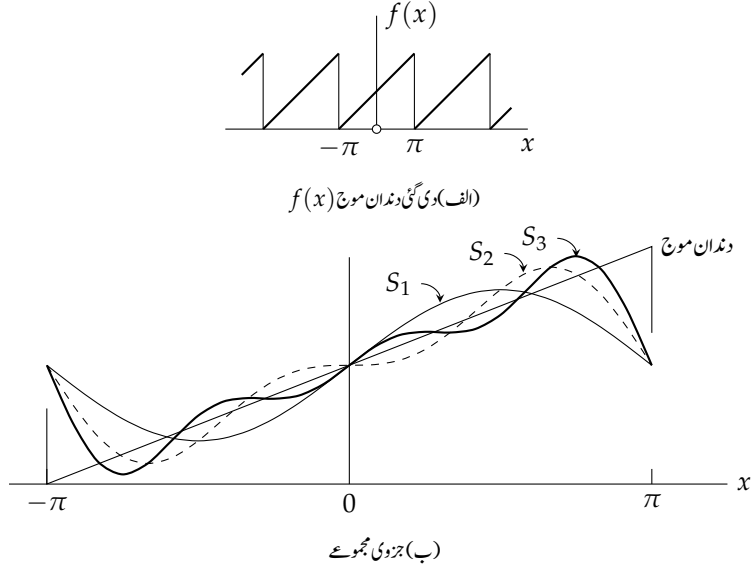
کا مکمل بالخصوص لینے سے

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{n} \cos n\pi$$

ملتا ہے جس سے $b_1 = 2$ ، $b_2 = -1$ ، $b_3 = \frac{2}{3}$ ، $b_4 = -\frac{1}{2}$ ، ... حاصل ہوتے ہیں لہذا دندان موج کی فوریر تسلسل درج ذیل ہو گی (شکل 12.10-ب)۔

$$f(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - + \dots \right)$$

□



شکل 12.10: دندان موج اور اس کا فوریر سلسل (مثال 12.5)

سوالات

سوال 12.64: کیا درج ذیل تفاعل جفت، طاق یا ان میں سے دونوں نہیں (نہ طاق اور نہ ہی جفت) ہیں؟

$$e^x, e^{x^2}, \sin nx, x \sin nx, \frac{\cos x}{x}, \ln x, \sin x^2, \sin^2 x$$

جوابات: بائیں سے 4، 6 طاق، 3، 9 دونوں نہیں اور باقی تمام جفت ہیں۔

سوال 12.65 تا سوال 12.72 میں دوری تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ 2π ہے۔ کیا تفاعل جفت، طاق یا دونوں نہیں ہیں۔

سوال 12.65: $f(x) = |x|$, $(-\pi < x < \pi)$ جواب: جفت

سوال 12.66: $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$ جواب: طاق

سوال 12.67: $f(x) = x^2, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.68: $f(x) = x^3, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: طاق

سوال 12.69: $f(x) = e^x, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: نہ طاق اور نہ ہی جفت

سوال 12.70: $f(x) = e^{|x|}, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.71:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: طاق

سوال 12.72: $f(x) = 1, \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ جفت

سوال 12.73: ایسا تفاعل دریافت کریں جو جفت بھی ہو اور طاق بھی۔
جواب: $f(x) = 0$

سوال 12.74: مساوات 12.19 اور مساوات 12.20 ثابت کریں۔

سوال 12.75: مسئلہ 12.3 کو ثابت کریں۔

سوال 12.76 تا سوال 12.79 میں دیے گئے تفاعل کو ایک عدد جفت تفاعل اور ایک عدد طاق تفاعل کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 12.76: $\frac{1}{1-x}$
جواب: $\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}$

سوال 12.77: $\frac{1}{1-x^2}$
جواب: $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

سوال 12.78: e^x
جواب: $\cosh x + \sinh x$

سوال 12.79: $\cos x$
جواب: جفت تفاعل یا طاق تفاعل جوں کا توں لکھا جائے گا۔ $\cos x$

سوال 12.80: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا مجموعہ جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.81: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.82: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا مجموعہ طاق تفاعل ہو گا۔

سوال 12.83: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.84: ثابت کریں کہ جفت $f(x)$ کی صورت میں $|f(x)| + f^2(x)$ جفت ہو گا۔

سوال 12.85: ثابت کریں کہ طاق $f(x)$ کی صورت میں $|f(x)| + f^2(x)$ اور $f^3(x)$ جفت ہوں گے۔

سوال 12.86 تا سوال 12.91 میں دیے گئے تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔ ان تفاعل کی فوریہ تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.86:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x \dots)$

سوال 12.87:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ \pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

جواب: $-\frac{4}{\pi} \cos x + 2 \sin x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{4}{25} \cos 5x + \frac{2}{5} \sin 5x \dots$

سوال 12.88:

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ -x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x \dots)$$

سوال 12.89:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x \dots)$$

$$\text{سوال 12.90: } f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 4x - + \dots$$

سوال 12.91:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}(\pi + 1) \cos x + \frac{1}{\pi}(-\pi^2 + \pi + 4) \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \dots$$

سوال 12.92 تا سوال 12.95 میں دی گئی تعلق کو ثابت کریں (مساوات 12.12 دیکھیں)۔

$$\text{سوال 12.92: } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (\text{سوال 12.86 یا سوال 12.90 استعمال کریں})$$

$$\text{سوال 12.93: } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{سوال 12.90 استعمال کریں})$$

$$\text{سوال 12.94: } 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad (\text{سوال 12.90 استعمال کریں})$$

$$\text{سوال 12.95: } 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{سوال 12.93 اور سوال 12.94 استعمال کریں})$$

12.5 نصف حلقہ اتساع

کئی انجینیری اور طبیعیاتی مسائل میں ایسے تفاعل $f(t)$ کی فوریر تسلسل درکار ہوگی جو کسی محدود وقفہ $0 \leq t \leq l$ پر معین ہو۔ ہم وقفہ $0 \leq t \leq l$ کو مکمل کا وقفہ $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ لیتے ہوئے مسئلہ 12.2 استعمال کرتے ہیں۔ یوں $l = \frac{T}{2}$ یعنی $T = 2l$ چنا گیا ہے۔ مساوات 12.22 استعمال کرتے ہوئے فوریر کوسائن تسلسل حاصل ہوتی ہے جو $T = 2l$ عددی عرصہ کی جفت تفاعل $f_1(t)$ کو ظاہر کرتی ہے۔ وقفہ $0 \leq t \leq l$ پر $f_1(t) = f(t)$ ہو گا۔ اسی لئے $f_1(t)$ کو $f(t)$ کی جفت دوری توسیع²⁴ کہتے ہیں۔ شکل 12.11-ب میں جفت دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔ مساوات 12.21 اور مساوات 12.22 میں $T = 2l$ لیتے ہوئے

$$(12.31) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t \quad (0 \leq t \leq l)$$

جفت فوریر تسلسل حاصل ہوگی جس کی عددی سر

$$(12.32) \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

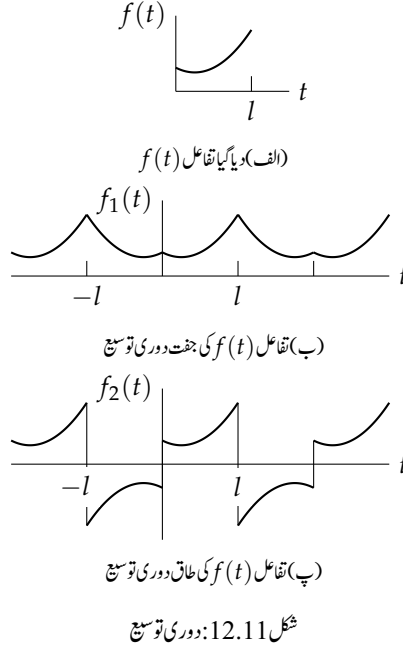
ہوں گے۔

ہم مسئلہ 12.2 کی مساوات 12.22 کی جگہ، پہلی کی طرح $T = 2l$ لیتے ہوئے، مساوات 12.24 استعمال کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے فوریر سائن تسلسل حاصل ہوگی جو دوری عرصہ $T = 2l$ کی دوری تفاعل $f_2(t)$ کو ظاہر کرے گی۔ وقفہ $0 \leq t \leq l$ پر $f_2(t) = f(t)$ ہو گا۔ $f_2(t)$ کو $f(t)$ کی طاق دوری توسیع²⁵ کہتے ہیں۔ شکل 12.11-پ میں طاق دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔ مساوات 12.23 اور مساوات 12.24 میں $T = 2l$ لیتے ہوئے

$$(12.33) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \quad (0 \leq t \leq l)$$

طاق فوریر تسلسل حاصل ہوگی جس کی عددی سر

$$(12.34) \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$



ہوں گے۔ مساوات 12.32 اور مساوات 12.34 میں دی گئی عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.31 اور مساوات 12.33 کو دی گئی تقابل $f(t)$ کی نصف حلقہ اتساع²⁶ کہتے ہیں۔

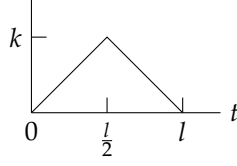
مثال 12.6: تکیونی دھڑکن
درج ذیل تکیونی دھڑکن کی نصف حلقہ اتساع کریں (شکل 12.12)۔

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l}t & 0 < t < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-t) & \frac{l}{2} < t < l \end{cases}$$

even periodic extension²⁴

odd periodic extension²⁵

half range expansion²⁶



شکل 12.12: ٹکونی دھڑکن (مثال 12.6)

حل: مساوات 12.32 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{l} \left[\frac{2k}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} t \, dt + \frac{2k}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-t) \, dt \right] = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \left[\frac{2k}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} t \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt + \frac{2k}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-t) \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt \right]$$

مکمل بالخصوص لیتے سے

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{l}{2}} t \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt &= \frac{lt}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} t \Big|_0^{\frac{l}{2}} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{l}{2}} \sin \frac{n\pi}{l} t \, dt \\ &= \frac{l^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} (\cos \frac{n\pi}{2} - 1) \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ اسی طرح مکمل بالخصوص سے

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-t) \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt = -\frac{l^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2})$$

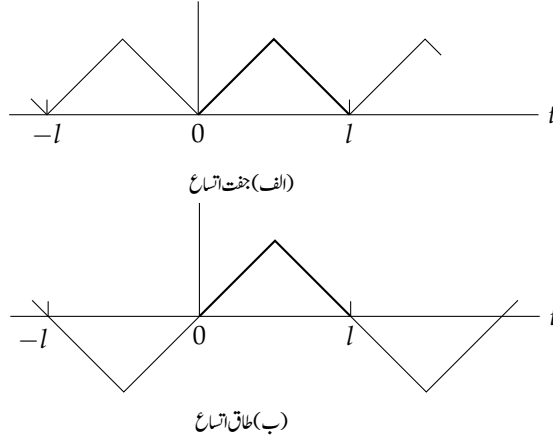
ملتا ہے۔ ان نتائج سے

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2} (2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1)$$

یعنی

$$a_2 = -\frac{16k}{2^2\pi^2}, \quad a_6 = -\frac{16k}{6^2\pi^2}, \quad a_{10} = -\frac{16k}{10^2\pi^2}, \dots$$

$$a_n = 0, \quad n \neq 2, 6, 10, 14, \dots$$

شکل 12.13: تقابل $f(t)$ کی دوری اتساع (مثال 12.6)

حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکنونی دھڑکن $f(t)$ کی پہلی نصف حلقہ اتساع درج ذیل ہوگی جو $f(t)$ کی دوری جفت توسیع ہے (شکل 12.13-الف)۔

$$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi}{l} t + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi}{l} t + \dots \right)$$

اسی طرح مساوات 12.34 سے

$$b_n = \frac{8k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

حاصل ہوگا جس سے $f(t)$ کی دوسری نصف حلقہ اتساع درج ذیل حاصل ہوگی جو $f(t)$ کی دوری طاق توسیع ہے (شکل 12.13-ب)۔

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{l} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} t + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{l} t - \dots \right)$$

□

سوالات

سوال 12.96 تا سوال 12.103 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریر سائن تسلسل حاصل کریں اور مطابقتی دوری طاق تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.96: $f(t) = t, \quad (0 < t < \pi)$
 جواب: $2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t - \frac{1}{2} \sin 4t \dots$

سوال 12.97: $f(t) = k, \quad (0 < t < l)$
 جواب: $\frac{4k}{\pi} (\sin \frac{\pi t}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{l} \dots)$

سوال 12.98: $f(t) = 1 - t, \quad (0 < t < 1)$
 جواب: $\frac{1}{\pi} (2 \sin \pi t + \sin 2\pi t + \frac{2}{3} \sin 3\pi t \dots)$

سوال 12.99: $f(t) = \cos t, \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$
 جواب: $\frac{8}{\pi} (\frac{1}{3} \sin 2t + \frac{2}{15} \sin 4t + \frac{3}{35} \sin 6t \dots)$

سوال 12.100:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

جواب: $(1 + \frac{2}{\pi}) \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + (\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi}) \sin 3t \dots$

سوال 12.101:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi} [(1 + \frac{2}{\pi}) \sin \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi t + (\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi}) \sin \frac{3\pi}{2} t \dots]$

سوال 12.102:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} [3 \sin \frac{\pi t}{2} - \sin \pi t + \sin \frac{3\pi t}{2} \dots]$$

سوال 12.103:

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } (\frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}) \sin \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi t + (\frac{4}{3\pi} + \frac{4}{9\pi^2}) \sin \frac{3\pi t}{2} \dots$$

سوال 12.104 تا سوال 12.109 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریز کو سائن تسلسل دریافت کریں اور مطابقتی دوری جفت تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

$$\text{سوال 12.104: } f(t) = k, \quad (0 < t < l)$$

$$\text{جواب: } f(t) = k$$

$$\text{سوال 12.105: } f(t) = t, \quad (0 < t < l)$$

$$\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} (\cos \frac{\pi t}{l} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi t}{l} \dots)$$

$$\text{سوال 12.106: } f(t) = t^2, \quad (0 < t < l)$$

$$\frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{\pi^2} (4 \cos \frac{\pi t}{l} - \cos \frac{2\pi t}{l} + \frac{4}{9} \cos \frac{3\pi t}{l} \dots)$$

$$\text{سوال 12.107: } f(t) = \sin t, \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} (\frac{1}{3} \cos 2t + \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t \dots)$$

$$\text{سوال 12.108: } f(t) = \cos t, \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} (\frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t - + \dots)$$

$$\text{سوال 12.109: } f(t) = e^t, \quad (0 < t < 1)$$

$$e - 1 - \frac{2}{\pi^2+1} (e+1) \cos \pi t + \frac{2}{4\pi^2+1} (e-1) \cos 2\pi t \dots$$

سوال 12.110: (فوریز تسلسل کی مخلوط صورت، مخلوط فوریز عددی سر)
 کلیہ یولر $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے فوریر تسلسل

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

کو

$$(12.35) \quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

لکھیں جہاں $c_0 = a_0$ ، $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ، $k_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ ، $n = 1, 2, \dots$ ہے۔ مساوات 12.9 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad k_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

علامت k_n کی جگہ علامت c_{-n} لکھتے ہوئے مساوات 12.35 کو درج ذیل صورت میں لکھیں۔

$$(12.36) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

اس کو مخلوط فوریر تسلسل²⁷ کہتے ہیں جہاں c_n کو $f(x)$ کی مخلوط فوریر عددی سر²⁸ کہتے ہیں۔

سوال 12.111: ثابت کریں کہ جفت تفاعل کی مخلوط فوریر عددی سر حقیقی ہوں گے جبکہ طاق تفاعل کی فوریر عددی سر خالص خیالی ہوں گے۔

سوال 12.112 تا سوال 12.115 میں دوری عرصہ 2π کی دی گئی تفاعل $f(x)$ کی مخلوط فوریر تسلسل دریافت کریں۔ مخلوط فوریر تسلسل سے حقیقی فوریر تسلسل حاصل کرتے ہوئے گزشتہ حاصل کردہ تسلسل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.112: (سوال 12.65) $f(x) = |x|$ ($-\pi < x < \pi$)

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{-2e^{inx}}{\pi n^2} \quad \text{جواب:}$$

سوال 12.113: (سوال 12.66) $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$
 جواب: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n e^{inx}}{n}$

سوال 12.114: (سوال 12.67) $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$
 جواب: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n e^{inx}}{n^2}$

سوال 12.115: (سوال 12.69) $f(x) = e^x \quad (-\pi < x < \pi)$
 جواب: $\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$

12.6 فوریر عددی سر کا بغیر مکمل حصول

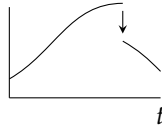
آپ نے دیکھا کہ بعض اوقات پیچیدہ تکریمات حل کرنے کے بعد نسبتاً سادہ فوریر عددی سر a_n اور b_n حاصل ہوتے ہیں۔ اس سے سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا عددی سر حاصل کرنے کا کوئی آسان طریقہ بھی ہے؟ جس کا جواب ہے، "جی ہاں"۔ ہم یہاں ثابت کرتے ہیں کہ دوری کثیر رکنی تفاعل کی فوریر عددی سر تفاعل کی اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگ سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔ یوں بغیر کوئی مکمل حل کرتے ہوئے a_n اور b_n حاصل کیے جائیں گے (ماسوائے a_0 ، جس کو اب بھی مکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $g(x)$ کی چھلانگ j^{29} سے مراد x_0 پر $g(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد میں فرق ہے (حصہ 12.2) یعنی:

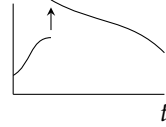
$$(12.37) \quad j = g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0)$$

یوں اوپر کو چھلانگ مثبت چھلانگ ہوگی جبکہ نیچے کو چھلانگ منفی چھلانگ ہوگی (شکل 12.14)۔

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا عددی عرصہ 2π ہے کو وقفہ $-\pi < x < \pi$ میں کثیر رکنی $p-1, \dots, p_m$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے (مثلاً شکل 12.15)۔

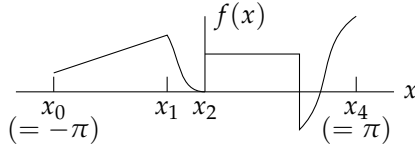


(ب) منفی چھلانگ



(الف) مثبت چھلانگ

شکل 12.14: تفاعل کی چھلانگ

شکل 12.15: کثیر رکنی روپ کی مثال (مساوات 12.38) جہاں $m = 4$ ہے

$$(12.38) \quad f(x) = \begin{cases} p_1(x) & x_0 < x < x_1, \quad (x_0 = -\pi) \\ p_2(x) & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \\ p_3(x) & x_{m-1} < x < x_m \quad (x_m = \pi) \end{cases}$$

یوں x_0, \dots, x_m پر تفاعل f کی چھلانگ اور اس کی تفرق f' ، f'' ، ... کی چھلانگ ہو سکتی ہیں جنہیں ہم درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

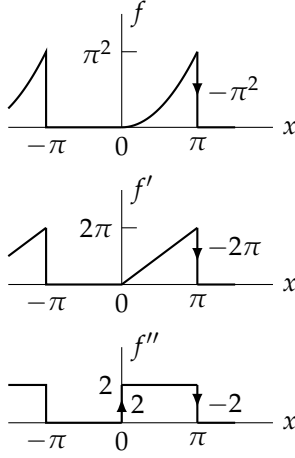
$$(12.39) \quad \begin{aligned} j_s &= f \text{ کی چھلانگ پر } x_s \\ j'_s &= f' \text{ کی چھلانگ پر } x_s \\ j''_s &= f'' \text{ کی چھلانگ پر } x_s \quad (s = 1, 2, \dots, m) \\ &\vdots \\ j_s^{(n)} &= f^{(n)} \text{ کی چھلانگ پر } x_s \end{aligned}$$

ظاہر ہے کہ اگر x_s پر f استمراری ہو تب x_s پر $j_s = 0$ ہو گا۔ ایسا ہی f' ، f'' ، ... کے لئے بھی کہا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 12.39 میں کئی j_s ، j'_s ، ... صفر قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

مثال 12.7: تفاعل کی چھلانگ اور اس کی تفرق کی چھلانگیں

جدول 12.1: مثال 12.7 کی چھلانگیں

$x_2 = \pi$ پر چھلانگ	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	
$j_2 = -\pi^2$	$j_1 = 0$	f
$j_2' = -2\pi$	$j_1' = 0$	f'
$j_2'' = -2$	$j_1'' = 2$	f''



شکل 12.16: تفاعل اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگیں (مثال 12.7)

تفاعل $f(x)$

$$f = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

اور اس کی تفرقات f' ، f'' ، ...

$$f' = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 2x & 0 < x < \pi \end{cases} \quad f'' = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad f''' = 0$$

کی ترسیم شکل 12.16 میں کھینچی گئی ہیں اور ان کی چھلانگیں جدول 12.1 میں دی گئی ہیں۔

یاد رہے کہ وقفہ کی ابتدا $x = -\pi$ پر چھلانگیں شمار نہیں کیے جاتے ہیں۔ انہیں دوری وقفہ کی اختتام $x = \pi$ پر شمار کیا جاتا ہے۔ ایک ہی وقفہ پر انہیں دو مرتبہ نہیں کیا جائے گا۔

□

مساوات 12.38 میں دی گئی تفاعل f کی فوریر عددی سر a_1 ، a_2 ، ... حاصل کرنے کی خاطر ہم پوکر مساوات 12.9- ب استعمال کرتے ہیں۔

$$(12.40) \quad \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx \, dx$$

چونکہ f کو مساوات 12.38 ظاہر کرتی ہے لہذا ہمیں m عدد تکمیل کا مجموعہ

$$(12.41) \quad \pi a_n = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} = \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, dx$$

لکھنا ہو گا جہاں $x_0 = -\pi$ اور $x_m = \pi$ ہیں۔ تکمیل بالخصوص لیتے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(12.42) \quad \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, dx = \left. \frac{f}{n} \sin nx \right|_{x_{s-1}}^{x_s} - \frac{1}{n} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx$$

اب بائیں ہاتھ پہلی جزو میں نقطہ x_s پر تفاعل $f(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ ایسا ہونے کی صورت میں x_s پر تفاعل کی بائیں ہاتھ حد $f(x_s - 0)$ لینی ہوگی۔ اسی طرح x_{s-1} پر غیر استمراری $f(x)$ کی صورت میں تفاعل کی دائیں ہاتھ حد $f(x_{s-1} + 0)$ لینی ہوگی۔ یوں مساوات 12.42 کا دائیں ہاتھ پہل جزو درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{n} [f(x_s - 0) \sin nx_s - f(x_{s-1} + 0) \sin nx_{s-1}]$$

اب مساوات 12.42 کو مساوات 12.41 میں پر کرتے ہوئے اور چھوٹی علامتیں $S_0 = \sin nx_0$ ، $S_1 = \sin nx_1$ ، ... استعمال کرتے ہوئے

$$(12.43) \quad \pi a_n = \frac{1}{n} [f(x_1 - 0)S_1 - f(x_0 + 0)S_0 + f(x_2 - 0)S_2 - f(x_1 + 0)S_1 \\ + \dots + f(x_m - 0)S_m - f(x_{m-1} + 0)S_{m-1}] \\ - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx$$

ملتا ہے۔ تو سین میں بند یکساں S کے ارکان اکٹھا کرتے ہوئے

$$(12.44) \quad -f(x_0 + 0)S_0 + [f(x_1 - 0) - f(x_1 + 0)]S_1 \\ + [f(x_2 - 0) - f(x_2 + 0)]S_2 + \dots + f(x_m - 0)S_m$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 12.44 میں ہر چکور توسین میں بند قیمت f کی چھلانگ ضرب -1 کے برابر ہے۔ مزید چونکہ f دوری ہے لہذا $S_0 = S_m$ اور $f(x_0) = f(x_m)$ ہوں گے لہذا مساوات 12.44 کے پہلے اور آخری رکن کو ملا کر $[f(x_m - 0) - f(x_m + 0)]S_m$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 12.44 درج ذیل ہو گا

$$-j_1 S_1 - j_2 S_2 - \cdots - j_m S_m$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.43 کو

$$(12.45) \quad \pi a_n = -\frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j_s \sin nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہی ترکیب دائیں ہاتھ کی مکمل پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(12.46) \quad \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j'_s \cos nx_s + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f'' \cos nx \, dx$$

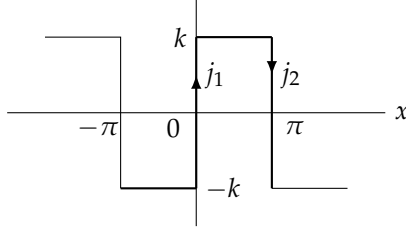
ایسا بار بار کرتے ہوئے ہمیں مکمل کے اندر f کا بتدریج زیادہ درجے کا تفرق حاصل ہو گا۔ اب چونکہ f کو کثیر رکنی ظاہر کرتی ہیں اور درجہ r کثیر رکنی کا درجہ $r+1$ تفرق صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا آخر کار کوئی مکمل باقی نہ رہے گا۔ مکمل پر محدود مرتبہ یہ عمل کرنے سے ایسا ہو گا۔ مساوات 12.46 اور اس عمل کے دہرانے سے حاصل نتائج کو مساوات 12.45 میں پر کرتے ہوئے درکار کلیہ

$$(12.47) \quad a_n = \frac{1}{n\pi} \left[-\sum_{s=1}^m j_s \sin nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j'_s \cos nx_s \right. \\ \left. + \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^m j''_s \sin nx_s + \frac{1}{n^3} \sum_{s=1}^m j'''_s \cos nx_s - - + + \cdots \right]$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہے (اور a_0 کو پہلی کی طرح مکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔ بالکل اسی طرح پولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے b_n کا کلیہ

$$(12.48) \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \left[\sum_{s=1}^m j_s \cos nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j'_s \sin nx_s \right. \\ \left. - \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^m j''_s \cos nx_s + \frac{1}{n^3} \sum_{s=1}^m j'''_s \sin nx_s - - + + \cdots \right]$$

حاصل ہو گا۔



شکل 12.17: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

غلطیوں سے بچنے کی خاطر $f(x)$ اور اس کی تفرقات کی ترسیم کھینچ کر چھلانگوں کو (مثال 12.7 کی طرح) جدول میں لکھنا سودمند ثابت ہوتا ہے۔

مثال 12.8: دوری چکور موج

دوری چکور موج $f(x)$ کی فوریر عددی سر دریافت کریں (شکل 12.17)۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل: چونکہ $f' = 0$ ہے لہذا صرف f کی چھلانگیں پائی جاتی ہیں۔ یہ چھلانگیں جدول 12.2 میں دی گئی ہیں۔

جدول 12.2: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

$x_2 = \pi$ پر چھلانگ	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	
$j_2 = -2k$	$j_1 = 2k$	f

f طاق ہے لہذا مساوات 12.48 سے فوریر عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} [j_1 \cos nx_1 + j_2 \cos nx_2] = \frac{1}{n\pi} [2k \cos 0 - 2k \cos n\pi] \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases} \quad (\text{مثال 12.1 دیکھیں}) \end{aligned}$$

□

مثال 12.9: مثال 12.7 میں دی گئی تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔
حل: مکمل سے a_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

مساوات 12.47 سے

$$a_n = \frac{1}{n\pi} [\pi^2 \sin n\pi + \frac{2\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} (2 \sin 0 - 2 \sin n\pi)] = \frac{2}{n^2} \cos n\pi$$

یعنی $a_1 = -\frac{2}{1^2}$ ، $a_2 = \frac{2}{2^2}$ ، $a_3 = -\frac{2}{3^2}$ ، ... ملتے ہیں۔ مساوات 12.48 سے

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} [-\pi^2 \cos n\pi + \frac{2\pi}{n} \sin n\pi - \frac{1}{n^2} (2 \cos 0 - 2 \cos n\pi)] \\ &= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

یعنی

$$b_1 = \pi - \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad b_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3^2\pi}, \quad b_4 = -\frac{\pi}{4}, \dots$$

ملتے ہیں۔ یوں فوریئر تسلسل در ذیل ہو گی۔

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \cos x + (\pi - \frac{4}{\pi}) \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \dots$$

□

سوالات

سوال 12.116: مثال 12.9 کو عمومی طریقہ سے حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ عمومی طریقہ بہت لمبا ہو گا۔

سوال 12.117: یولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.48 حاصل کریں۔

سوال 12.118: ثابت کریں کہ T دوری عرصہ کی تفاعل کے لئے مساوات 12.47 اور مساوات 12.48 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$(12.49) \quad a_n = \frac{1}{n\pi} \left[- \sum_{s=1}^m j_s \sin K_n t_s - \frac{1}{K_n} \sum_{s=1}^m j'_s \cos K_n t_s \right. \\ \left. + \frac{1}{K_n^2} \sum_{s=1}^m j''_s \sin K_n t_s + \frac{1}{K_n^3} \sum_{s=1}^m j'''_s \cos K_n t_s - - + \dots \right] \quad (K_n = \frac{2n\pi}{T})$$

$$(12.50) \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \left[\sum_{s=1}^m j_s \cos K_n t_s - \frac{1}{K_n} \sum_{s=1}^m j'_s \sin K_n t_s \right. \\ \left. - \frac{1}{K_n^2} \sum_{s=1}^m j''_s \cos K_n t_s + \frac{1}{K_n^3} \sum_{s=1}^m j'''_s \sin K_n t_s + - - + \dots \right]$$

سوال 12.119 تا سوال 12.122 میں فوریرس تسلسل کو مساوات 12.47 تا مساوات 12.50 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.119: سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.120: سوال 12.32 تا سوال 12.35

سوال 12.121: سوال 12.54 تا سوال 12.57

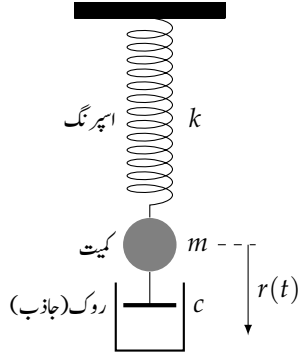
سوال 12.122: سوال 12.59 تا سوال 12.61

سوال 12.123 تا سوال 12.126 کی فوریرس سائن تسلسل کو مساوات 12.47 تا مساوات 12.50 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\text{سوال 12.123: } f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad (0 < x < \pi) \\ \text{جواب: } (2\pi - \frac{4}{\pi} + 4) \sin x - (2 + \pi) \sin 2x + (\frac{2}{3} + \frac{28}{27\pi} + \frac{4}{3}) \sin 3x \dots$$

$$\text{سوال 12.124: } f(x) = x^3 \quad (0 < x < 1) \\ \text{جواب: } \frac{2}{\pi^3} (\pi^2 - 6) \sin \pi x - \frac{(4\pi^2 - 6)}{4\pi^3} \sin 2\pi x + \frac{2(9\pi^2 - 6)}{27\pi^3} \sin 3\pi x \dots$$

$$\text{سوال 12.125: } f(x) = x(1 - x) \quad (0 < x < 1) \\ \text{جواب: } \frac{8}{\pi^3} (\sin \pi t + \frac{1}{3^3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5^3} \sin 5\pi t + \dots)$$



شکل 12.18: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

سوال 12.126: $f(x) = x(x^2 - 1)$ ($0 < x < 1$)
 جواب: $\frac{1}{\pi^3} (-12 \sin \pi t + \frac{3}{2} \sin 2\pi t - \frac{4}{9} \sin 3\pi t + \frac{3}{16} \sin 4\pi t \dots)$

سوال 12.127: تقابل $f(x) = x^3$, ($0 < x < l$) کی فوریر کوسائن تسلسل کو مساوات 12.49 کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب: $\frac{l^3}{4} + l^3 (\frac{24}{\pi^4} - \frac{6}{\pi^2}) \cos \frac{\pi t}{l} + \frac{3l^3}{2\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{l} \dots$

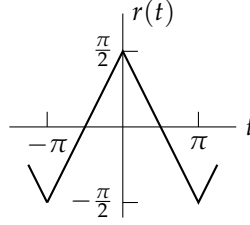
12.7 جبری ارتعاش

تفرقی مساوات میں فوریر تسلسل اہم ثابت ہوتے ہیں۔ آئیں ایک اہم عملی مسئلہ پر غور کریں جس کی سادہ تفرقی مساوات پائی جاتی ہے۔ (جزوی تفرقی مساوات والے مسائل پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔)

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ اسپرنگ کے ساتھ جڑی ہوئی کمیت m (شکل 12.18) کی جبری ارتعاش کی سادہ تفرقی مساوات

$$(12.51) \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t)$$

ہے جہاں c تقصیری مستقل اور k مقیاس پلک ہے۔ بیرونی قوت سائن یا کوسائن تقابل ہونے اور غیر صفر تقصیری مستقل کی صورت میں برقرار حالت ہارمونی ارتعاش پیدا ہوگی جس کی تعدد بیرونی قوت کی تعدد ہوگی۔



شکل 12.19: ٹکونی قوت (مثال 12.10)

ایسی قوت $r(t)$ جو نہ خالص سائن تقابل ہو اور نہ ہی خالص کوسائن تقابل ہو بلکہ کسی اور شکل کی دوری تقابل ہونے کی صورت میں ہم دیکھیں گے کہ برقرار حالت حل کئی ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہو گا جس میں $r(t)$ کی تعدد اور اس کی مضرب تعدد پائی جائیں گی۔ اگر ان تمام تعدد میں سے کوئی تعدد، نظام کی قدرتی تعدد کے قریب ہو تب عین ممکن ہے کہ، بیرونی قوت کی رد عمل میں، نظام کی حرکت میں اسی تعدد کا حصہ غالب ہو گا۔ ہارمونی ارتعاش اور گمک کے بارے میں نہ جانتے ہوئے یہ عمل حیرت انگیز ثابت ہو گا۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

مثال 12.10: غیر سائن نما جبری قوت سے پیدا ارتعاش
مساوات 12.51 میں $m = 1 \text{ kg}$ ، $k = 25 \text{ kg s}^{-2}$ ، $c = 0.02 \text{ kg s}^{-1}$ لینے سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $r(t)$ کی اکائی kg m s^{-2} ہو گی۔

$$(12.52) \quad \ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = r(t)$$

اب فرض کریں کہ جبری قوت $r(t)$ درج ذیل ہے جس کو شکل 12.19 میں دکھایا گیا ہے۔ برقرار حالت حل دریافت کریں۔

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases} \quad r(t + 2\pi) = r(t)$$

حل: ہم $r(t)$ کو فوریر کوسائن تسلسل

$$(12.53) \quad r(t) = \frac{4}{n^2\pi} \cos nt = \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right)$$

سے ظاہر کرتے ہیں۔ اب ہم درج ذیل تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جس کا دایاں ہاتھ فوریر تسلسل (مساوات 12.53) کا ایک رکن ہے۔

$$(12.54) \quad \ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = \frac{4}{n^2\pi} \cos nt \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ درج بالا تفرقی مساوات کا برقرار حالت حل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$(12.55) \quad y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

مساوات 12.55 کو مساوات 12.54 میں پر کرتے ہوئے

$$(12.56) \quad A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2 \pi D}, \quad B_n = \frac{0.08}{n \pi D}, \quad D = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2$$

ملتا ہے۔ چونکہ تفرقی مساوات 12.52 خطی ہے لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس کا برقرار حالت حل

$$(12.57) \quad y = y_1 + y_3 + y_5 + \dots$$

ہو گا جہاں مساوات 12.55 y_n دیتی ہے۔ درحقیقت آپ حاصل مساوات 12.57 کو مساوات 12.54 میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ تفرقی مساوات کا درست حل ہے۔

مساوات 12.56 سے مساوات 12.55 کا حیظ

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{A}{n^2 \pi \sqrt{D}}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی چند اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$C_1 = 0.0530$$

$$C_3 = 0.0088$$

$$C_5 = 0.5100$$

$$C_7 = 0.0011$$

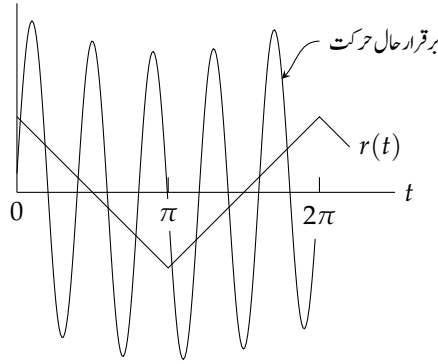
$$C_9 = 0.0003$$

$n = 5$ پر D کی قیمت نہایت کم ملتی ہے جس سے C_5 کی قیمت اتنی زیادہ حاصل ہوتی ہے کہ مساوات 12.57 میں y_5 غالب جزو ہے۔ یوں برقرار حالت حرکت تقریباً ہارمونی ہو گا جس کی تعدد جبری قوت کی تعدد کی پانچ گنا ہے (شکل 12.20)۔

□

سوالات

سوال 12.128 تا سوال 12.135 میں تفرقی مساوات $\ddot{y} + \omega^2 y = r(t)$ کی عمومی حل دریافت کریں۔



شکل 12.20: داخلی قوت اور برقرار حالت رد عمل (مثال 12.10)

سوال 12.128: $r(t) = \sin t$, $\omega = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10$
 جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A(\omega) \sin t$, $A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 1}$
 $A(0.5) = -1.33, A(0.7) = -0.2, A(0.9) = -5.3, A(1.1) = 4.8, A(1.5) = 0.8,$
 $A(2) = 0.33, A(10) = 0.01$

سوال 12.129: $r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t$, $(\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2)$
 جواب: $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{(\omega^2 - \alpha^2) \cos \beta t + (\omega^2 - \beta^2) \cos \alpha t}{\omega^4 - (\alpha^2 + \beta^2) \omega^2 + \alpha^2 \beta^2}$

سوال 12.130: $r(t) = \sin t + \sin 3t$, $\omega = 0.9, 2.9$
 جواب:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\sin t}{\omega^2 - 1^2} + \frac{\sin 3t}{\omega^2 - 3^2}$$

$$y_{(\omega=0.9)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - 5.26 \sin t - 0.122 \sin 3t$$

$$y_{(\omega=2.9)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + 0.135 \sin t - 0.164 \sin 3t$$

سوال 12.131: $r(t) = \sum_{s=1}^N a_n \cos nt$, $|\omega| \neq 1, 2, \dots, N$

جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt$

سوال 12.132: $r(t) = \sum_{s=1}^N b_n \sin nt$, $|\omega| \neq 1, 2, \dots, N$

جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{\omega^2 - n^2} \sin nt$

سوال 12.133:

$$r(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases} \quad r(t+2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 1, 3, 5, \dots$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{4 \sin t}{1\pi(\omega^2-1^2)} + \frac{4 \sin 3t}{3\pi(\omega^2-3^2)} + \frac{4 \sin 5t}{5\pi(\omega^2-5^2)} \dots \quad \text{جواب:}$$

$$r(t) = t, \quad (-\pi < t < \pi), r(t+2\pi) = r(t), |\omega| \neq 1, 2, 3, \dots \quad \text{سوال 12.134:}$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n(\omega^2-n^2)} \sin nt \quad \text{جواب:}$$

$$r(t) = t^2, \quad (-\pi < t < \pi), r(t+2\pi) = r(t), |\omega| \neq 0, 1, 2, \dots \quad \text{سوال 12.135:}$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2(\omega^2-n^2)} \cos nx \quad \text{جواب:}$$

سوال 12.136 تا سوال 12.140 میں $\ddot{y} + c\dot{y} + y = r(t)$ جہاں $c > 0$ ہے کی برقرار حالت حل دریافت کریں۔

$$r(t) = \cos t \quad \text{سوال 12.136:}$$

$$y = \frac{\sin t}{c} \quad \text{جواب:}$$

$$r(t) = \sin 3t \quad \text{سوال 12.137:}$$

$$y = -\frac{8}{9c^2+8^2} \sin 3t - \frac{3}{9c^2+8^2} \cos 3t \quad \text{جواب:}$$

$$r(t) = \cos nt \quad \text{سوال 12.138:}$$

$$y = \frac{nc \sin nt - (n^2-1) \cos nt}{(n^2-1)^2 + n^2 c^2} \quad \text{جواب:}$$

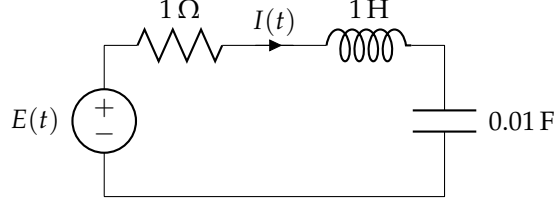
$$r(t) = \sin nt \quad \text{سوال 12.139:}$$

$$y = \frac{-nc \cos nt - (n^2-1) \sin nt}{(n^2-1)^2 + n^2 c^2} \quad \text{جواب:}$$

سوال 12.140:

$$r(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi < t < 0 \\ \pi - t & 0 < t < \pi \end{cases} \quad r(t+2\pi) = r(t)$$

$$y = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi [(n^2-1)^2 + n^2 c^2]} [nc \sin nt - (n^2-1) \cos nt] \quad \text{جواب:}$$



سوال 12.141: سلسلہ وار RLC دور کو $E(t)$ داخلی دباؤ مہیا کی جاتی ہے۔ اس دور میں برقی رو $I(t)$ دریافت کریں۔

$$E(t) = \begin{cases} -10 & -\pi < t < 0 \\ 10 & 0 < t < \pi \end{cases} \quad E(t + 2\pi) = E(t)$$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{\pi[n^4 - 199n^2 + 10^4]} [n \sin nt - (n^2 - 10^2) \cos nt] \quad \text{جواب:}$$

12.8 تقریب بذریعہ تکونی کثیر رکنی۔ مکعب خلل

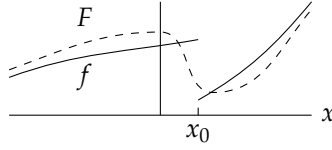
فرض کریں کہ 2π دوری عرصہ کی تفاعل $f(x)$ کو فوریر سلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہے۔ اس سلسل کی پہلی N ارکان کا جزوی مجموعہ، $f(x)$ کی تقریب ہوگی۔

$$(12.58) \quad f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

تکونی کثیر رکنی کی عددی سریوں منتخب کی جاسکتے ہیں کہ یہ تفاعل پر ٹھیک بیٹھے۔ یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا $f(x)$ کو تکونی کثیر رکنی

$$(12.59) \quad F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

سے ظاہر کرنے کی "بہترین" تقریب مساوات 12.58 دیتی ہے جہاں دونوں تقریب میں N یکساں ہے۔ بہترین تقریب میں کم سے کم "خلل" پایا جاتا ہے۔



شکل 12.21: تقریب کی خلل

ظاہر ہے کہ ہمیں پہلے فیصلہ کرنا ہو گا کہ، تقریب میں خلل، سے ہمارا کیا مراد ہے۔ ہم خلل کی ایسی تعریف منتخب کرتے ہیں جو پورے وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر f اور F کی ایک سا ہونے کی ناپ ہو۔ شکل 12.21 میں f کو F سے ظاہر کیا گیا ہے جو بہتر تقریب ہے لیکن نقطہ x_0 پر $|f - F|$ کی قیمت بہت زیادہ ہے۔ یوں ظاہر ہے کہ $|f - F|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کو خلل کہنا موزوں نہ ہو گا۔ ہم خلل کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں

$$(12.60) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx$$

جس وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر تفاعل F کی، تفاعل f کے لحاظ سے، کل مکعب خلل³⁰ کہلاتا ہے۔ چونکہ مکعب کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہذا $E \geq 0$ ہو گا۔

ہم مقررہ N کے لئے مساوات 12.59 کے ایسے عددی سر دریافت کرنا چاہتے ہیں کہ حاصل E کمترین ہو۔ ہم مساوات 12.60 کو درج ذیل صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(12.61) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} fF dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx$$

درج بالا کی آخری مکمل میں مساوات 12.59 پر کرتے ہوئے حاصل نکلات کو حصہ 12.2 کی طرح حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx = \pi(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_N^2)$$

مساوات 12.59 کو مساوات 12.61 کی دائیں ہاتھ دوسری مکمل میں پر کرنے سے یولر کلیات (مساوات 12.9) کے مکمل حاصل ہوتے ہیں جن سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF dx = \pi(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_N b_N)$$

total square error³⁰

یوں مساوات 12.61 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(12.62) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi \left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right] \\ + \pi \left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right]$$

مساوات 12.59 میں $\alpha_n = a_n$ اور $\beta_n = b_n$ لینے سے مساوات 12.62 سے حاصل کل مکعب خلل درج ذیل ملتا ہے۔

$$(12.63) \quad E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

مساوات 12.63 کو مساوات 12.62 سے منفی کرتے ہوئے

$$E - E^* = \pi \left\{ 2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] \right\}$$

ملتا ہے۔ چونکہ بائیں ہاتھ تمام قیمتیں مکعب ہیں جو کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتے ہیں لہذا

$$E - E^* \geq 0 \quad \implies \quad E \geq E^*$$

ہو گا اور $E = E^*$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\alpha_0 = a_0$ ، \dots ، $\beta_N = b_N$ ہوں۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.4: (کمترین مکعب خلل)

وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر تفاعل f کے لحاظ سے F [مساوات 12.59، مقررہ N] کی کل مکعب خلل صرف اور صرف اس صورت کم سے کم ہو گی جب مساوات 12.59 میں F کے عددی سر، f کی مطابقتی فوریر عددی سر ہوں۔ کل مکعب خلل کی کم سے کم قیمت مساوات 12.63 دے گی۔

ہم مساوات 12.63 سے دیکھتے ہیں کہ N بڑھانے سے E^* بڑھتا نہیں بلکہ گھٹ سکتا ہے۔ یوں زیادہ N لینے سے f کی فوریر تسلسل سے حاصل جزوی مجموعہ کا کل مکعب خلل کم ہو گا اور بہتر تقریب حاصل ہو گی۔

چونکہ $E^* \geq 0$ ہے اور مساوات 12.63 ہر N کے لئے درست ہے لہذا مساوات 12.63 سے

$$(12.64) \quad 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

لکھا جاسکتا ہے جو بیسل غیر مساوات³¹ کہلاتی³² ہے۔ مساوات 12.64 کسی بھی تفاعل f ، جس کے لئے درج بالا مکمل معین ہو، کی فوری عددی سر کے لئے درست ہوگا۔

سوالات

سوال 12.142: تفاعل $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$, $f(x + \pi) = f(x)$ کے لئے ایسا $F(x)$ (مساوات 12.59) دریافت کریں کہ کل مکعب خلل (مساوات 12.60) کمترین ہو۔

$$F(x) = \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - + \dots + \frac{2(-1)^{N+1}}{N} \sin Nx \quad \text{جواب:}$$

سوال 12.143: $N = 1, 2, 3, 4$ کے لئے سوال 12.142 میں کمتر مکعب خلل دریافت کریں۔ ایسا N دریافت کریں کہ $E^* \leq 0.42$ ہو۔

$$\text{جواب: } N = 30, E(1) = 8.104, E(2) = 4.96, E(3) = 3.57, E(4) = 2.78,$$

سوال 12.144: ثابت کریں کہ N کو بتدریج بڑھانے سے کل کمتر مکعب خلل (مساوات 12.63) بتدریج گھٹتی ہے۔

سوال 12.145: تفاعل $f(x) = x^2$, $(-\pi < x < \pi)$, $f(x + \pi) = f(x)$ کے لئے ایسا $F(x)$ (مساوات 12.59) دریافت کریں کہ کل مکعب خلل کمترین ہو۔ کمتر مکعب خلل کو $N = 1, 2, 3, 4$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب:

$$F = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{1}{1^2} \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N^2} \cos Nx \right]$$

$$E^* = \frac{2\pi^5}{5} - \pi \left(\frac{2\pi^4}{9} + 16 + 1 + \frac{16}{81} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

³¹Bessel inequality

³²یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ایسا تفاعل f کے لئے مساوات 12.64 میں برابری کی علامت لکھنا بھی درست ہوگا۔ مساوات 12.64 میں برابری کی علامت استعمال کرنے سے پارسیوال مماثل حاصل ہوگی۔

12.9 فوریر تکمیل

دوری تفاعل پر مبنی مسئلوں کو نمٹنے کے لئے فوریر تسلسل بہترین اوزار ہے۔ ہم چاہیں گے کہ اس کو عمومی شکل دیں تاکہ یہ غیر دوری تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہو۔

ہم ابتدا دو سادہ دوری تفاعل f_T سے کرتے ہیں۔ ہم $T \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے۔ اس کے بعد ہم دوری عرصہ T کی کسی بھی دوری تفاعل f_T پر غور کرتے ہوئے $T \rightarrow \infty$ کریں گے۔ ان کو جواز بناتے ہوئے ہم مسئلہ فوریر تکمیل پیش کریں گے۔

مثال 12.11: درج ذیل تفاعل پر غور کریں جس کا دوری عرصہ $T > 2$ ہے (شکل 12.22)۔

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

دوری عرصہ $T \rightarrow \infty$ کرنے سے درج ذیل تفاعل $f(x)$

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

□

حاصل ہوتا ہے جو غیر دوری ہے۔

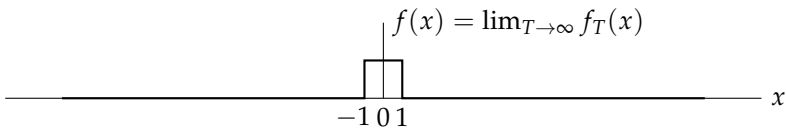
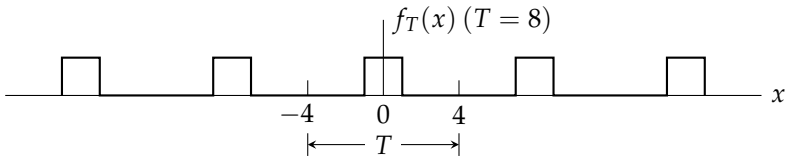
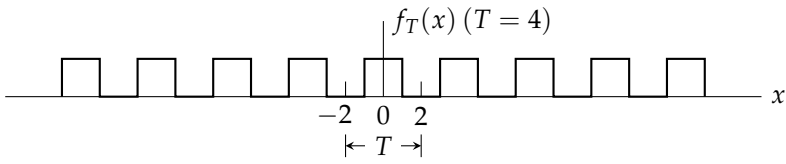
مثال 12.12: درج ذیل تفاعل کا دوری عرصہ T ہے (شکل 12.23)۔

$$f_T(x) = e^{-|x|} \quad \left(-\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2} \right), \quad f_T(x+T) = f_T(x)$$

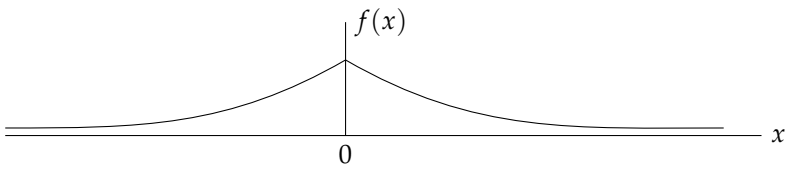
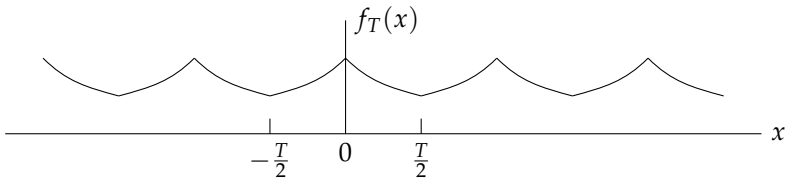
$T \rightarrow \infty$ کرنے سے تفاعل $f(x)$ حاصل ہوتا ہے جو غیر دوری ہے۔

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = e^{-|x|}$$

□



شکل 12.22: برائے مثال 12.11



شکل 12.23: برائے مثال 12.12

ہم اب فوریئر تسلسل سے قابل ظاہر کسی بھی تفاعل $f_T(x)$ جس کا دوری عرصہ T ہو لیتے ہیں۔ مختصر علامت

$$w_n = \frac{2n\pi}{T}$$

استعمال کرتے ہوئے $f_T(x)$ کی فوریئر تسلسل کو

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x)$$

لکھتے ہیں۔ ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ $T \rightarrow \infty$ کرنے سے کیا ہو گا۔

ہم یولر مساوات 12.9 میں دیے گئے a_n اور b_n استعمال کرتے ہیں اور تکمیل کی متغیر کو v لکھتے ہیں۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) dv + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \cos w_n v dv \right. \\ \left. + \sin w_n x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \sin w_n v dv \right]$$

اب

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

ہے جس کو ہم

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

لکھتے ہیں۔ یوں $\frac{2}{T} = \frac{\Delta w}{\pi}$ ہو گا لہذا یہ فوریئر تسلسل درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$(12.65) \quad f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(w_n x) \Delta x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \cos w_n v dv \right. \\ \left. + \sin(w_n x) \Delta w \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \sin w_n v dv \right]$$

یہ صورت کسی بھی مقررہ T کے لئے درست ہے جہاں T اختیاری وسیع لیکن محدود ہے۔

ہم اب $T \rightarrow \infty$ کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ حاصل غیر دوری تقابل

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x)$$

x محور پر قابل حتمی تکمل³³ ہے یعنی درج ذیل تکمل معین ہے۔

$$(12.66) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

اس طرح $\frac{1}{T} \rightarrow 0$ ہو گا لہذا مساوات 12.65 کی دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے قریب تر ہو گا۔ اس کے علاوہ $\Delta w = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ ہو گا لہذا بظاہر یوں معلوم ہوتا ہے کہ لامتناہی تسلسل مساوات 12.65 وقفہ 0 تا ∞ پر مکمل کی صورت اختیار کرے گی جو $f(x)$ کو ظاہر کرتی ہے، یعنی:

(12.67)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \right] dw$$

درج ذیل مختصر علامت متعارف کرتے ہوئے

$$(12.68) \quad A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv$$

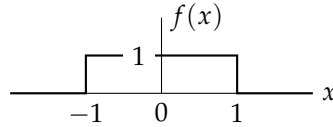
مساوات 12.67 کو

$$(12.69) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو $f(x)$ کا فوریرس تکمل³⁴ کہتے ہیں۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 12.65 سے مساوات 12.67 لکھنے کے لئے جو جواز پیش کیا گیا وہ نا کافی ہے۔ درحقیقت فوریرس تسلسل میں $\Delta w \rightarrow 0$ لینا تکمل کی تعریف نہیں ہے لہذا ایسا کرنے سے مساوات 12.65 ہرگز حاصل نہیں ہو گا۔ البتہ اس پورے عمل سے گزرنے کے بعد فوریرس تکمل بظاہر معقول معلوم ہوتا ہے۔ فوریرس تکمل کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔ مساوات 12.69 درست ہونے کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتی ہے۔

absolutely integrable³³
Fourier integral³⁴



شکل 12.24: واحد دھڑکن (مثال 12.13)

مسئلہ 12.5: (فوریئر مکمل)
اگر $f(x)$ تمام محدود قطعات پر ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہو اور اس کا ہر نقطے پر دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق (حصہ 12.2) پائے جاتے ہوں اور مساوات 12.66 میں دیا گیا مکمل معین ہو تب $f(x)$ کو فوریئر مکمل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جس نقطے پر $f(x)$ غیر استمراری ہو وہاں فوریئر مکمل کی قیمت اس نقطے پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد (حصہ 6.1) کی اوسط کے برابر ہوگی۔

مثال 12.13: واحد دھڑکن، سائن مکمل
درج ذیل تفاعل کی فوریئر مکمل حاصل کریں (شکل 12.24)۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \end{cases}$$

حل: مساوات 12.68 سے

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv = \int_{-1}^1 \cos wv \, dv = \left. \frac{\sin wv}{w} \right|_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{w}$$

$$B(w) = \int_{-1}^1 \sin wv \, dv = 0$$

ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.69 سے درکار فوریئر مکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$(12.70) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw$$

نقطہ $x = 1$ پر $f(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد کا اوسط $\frac{(1+0)}{2} = \frac{1}{2}$ ہے۔ یوں مساوات 12.70

اور مسئلہ 12.5 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.71) \quad \int_0^\infty \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

اس نکمل کو ڈرشلے غیر استمراری جزو³⁵ کہتے ہیں۔³⁶ انہیں $x = 0$ کی صورت پر غور کرتے ہیں جو خاص طور پر زیادہ اہم ہے۔ مساوات 12.71 میں $x = 0$ پر کرنے سے

$$(12.72) \quad \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}$$

ملتا ہے جو درج ذیل نکمل جس کو سائن نکمل³⁷ کہتے ہیں

$$(12.73) \quad \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w} dw$$

کی $z \rightarrow \infty$ پر حد ہے جہاں z حقیقی ہے۔ تفاعل $\text{Si}(z)$ کو شکل 12.25 میں دکھایا گیا ہے۔

فوریر تسلسل کی صورت میں جزوی مجموعوں کی ترسیم اس دوری تفاعل کی تقریب ہوتی ہے جس کو یہ تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ فوریر نکمل (مساوات 12.70) کی صورت میں نکمل کی بالائی حد ∞ کی جگہ عدد a لیتے ہوئے تفاعل کی تقریب حاصل کی جاتی ہیں۔ یوں درج ذیل نکمل

$$(12.74) \quad \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$$

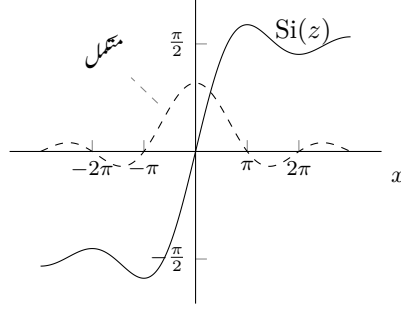
مساوات 12.70 اور تفاعل $f(x)$ کی تقریب ہے۔ تفاعل $f(x)$ میں غیر استمراری نقطہ کے قریب ارتعاش پایا جاتا ہے جس کو شکل 12.26 میں دکھایا گیا ہے۔

اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ a کی قیمت لامتناہی کرنے سے یہ ارتعاش ختم ہوگی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے بلکہ a کی قیمت بڑھانے سے ارتعاش نقطہ $x = \pm 1$ کے مزید قریب ہوتی ہیں۔ اس غیر متوقع کردار جو فوریر

³⁵ Dirichlet's discontinuous factor

³⁶ جرمین ریاضی دان یوہان ہیئرگسٹاف لیون ڈرشلے [1805-1859]

³⁷ sine integral



شکل 12.25: سائن تکمل

تسلسل میں بھی پایا جاتا ہے کو مظہر گبس³⁸ کہتے ہیں۔ مظہر گبس³⁹ کو سمجھنے کی خاطر ضمیمہ ب میں مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.74 کو

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w + wx)}{w} dw + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w - wx)}{w} dw$$

لکھتے ہیں۔ دائیں ہاتھ پہلی تکمل میں $w + wx = t$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{dw}{w} = \frac{dt}{t}$ اور $0 \leq w \leq a$ کا مطابقتی وقفہ $0 \leq t \leq (x+1)a$ ہو گا۔ آخری تکمل میں $w - wx = t$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{dw}{w} = \frac{dt}{t}$ اور $0 \leq w \leq a$ کا مطابقتی وقفہ $0 \leq t \leq (x-1)a$ ہو گا۔ چونکہ $\sin(-t) = -\sin t$ ہوتا ہے لہذا

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t} dt$$

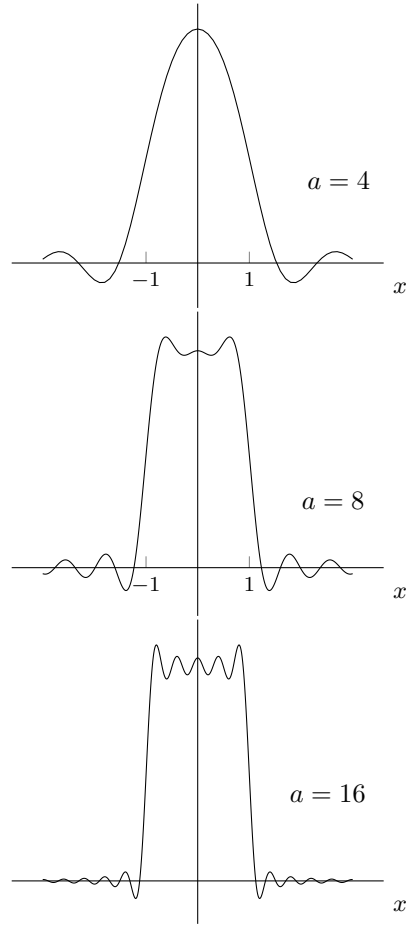
لکھا جائے گا۔ یوں مساوات 12.73 کی مدد سے

$$\frac{1}{\pi} \text{Si } a[x+1] - \frac{1}{\pi} \text{Si}(a[x-1])$$

حاصل ہو گا لہذا شکل 12.26 میں ارتعاش شکل 12.25 کی وجہ سے پائی جاتی ہیں۔ حد a بڑھانا، محور کی ناپ تبدیل کرنے کی مترادف ہے جس سے ارتعاش محور غیر استمراری نقطہ کے زیادہ قریب منتقل ہوتی ہیں۔ □

³⁸Gibbs phenomenon

³⁹جرمن ریاضی دان جو شیاو لارڈ گبس [1839-1903]



شکل 12.26: مساوات 12.74 کی شکل میں $a = 4, 8, 16$ لیا گیا ہے

جفت اور طاق تفاعل کی فوریر مکمل

یہ جاننا سود مند ثابت ہوتا ہے کہ ایسا جفت یا طاق تفاعل جس کو فوریر مکمل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کا فوریر مکمل عمومی تفاعل کی فوریر مکمل سے نسبتاً آسان ہو گا۔ یہ حقیقت گزشتہ کلیات سے اخذ ہوتا ہے۔

جفت تفاعل $f(x)$ کی صورت میں مساوات 12.68 کے تحت $B(w) = 0$ اور

$$(12.75) \quad A(w) = 2 \int_0^\infty f(v) \cos wv \, dv$$

ہو گا لہذا مساوات 12.69 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرے گی۔

$$(12.76) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(w) \cos wx \, dw \quad (\text{جفت } f)$$

اسی طرح طاق تفاعل $f(x)$ کی صورت میں مساوات 12.68 کے تحت $A(w) = 0$ اور

$$(12.77) \quad B(w) = 2 \int_0^\infty f(v) \sin wv \, dv$$

ہو گا لہذا مساوات 12.69 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرے گی۔

$$(12.78) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(w) \sin wx \, dw \quad (\text{طاق } f)$$

یہ تسہیل جفت اور طاق تفاعل کی فوریر تسلسل کی تسہیل کی طرح ہے۔

تخمینہ مکمل

فوریر مکمل کی مدد سے کئی مکمل کی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ ہم اس ترکیب کو درج ذیل مثال سے سمجھاتے ہیں۔

مثال 12.14: لاپلاس مکمل

درج ذیل تفاعل کی فوریر مکمل وقفہ $x > 0$ پر حاصل کریں۔ (شکل 12.23 دیکھیں جہاں $k = 1$ ہے۔)

$$f(x) = e^{-kx}, \quad f(-x) = f(x)$$

حل: چونکہ f جفت ہے لہذا مساوات 12.75 سے

$$A(w) = 2 \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos wv \, dv$$

حاصل ہو گا۔ نکل بالخصص لیتے ہیں۔

$$\int e^{-kv} \cos wv \, dv = -\frac{k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right)$$

جب $v = 0$ ہو تب دایاں ہاتھ $-\frac{k}{k^2 + w^2}$ کے برابر ہو گا جبکہ $v \rightarrow \infty$ پر e^{-kv} جزو کی بنائے صفر کے قریب تر ہو گا۔ یوں

$$A(w) = \frac{2k}{k^2 + w^2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 12.76 میں پر کرتے ہوئے دیے تفاعل کی فوریر نکل لکھتے ہیں۔

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw \quad (x > 0, k > 0)$$

اس سے

$$(12.79) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 12.78 استعمال کرتے ہوئے وقفہ $x > 0$ پر طاق تفاعل

$$f(x) = e^{-kx}, \quad f(-x) = -f(x), \quad (k > 0)$$

کی فوریر نکل سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(12.80) \quad \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

□

مساوات 12.79 اور مساوات 12.80 لاپلاس تکملات⁴⁰ کہلاتے ہیں۔

سوالات

سوال 12.146 تا سوال 12.152 میں دیے تعلق کو فوریر سیرسز تکمیل کی مدد سے ثابت کریں۔

سوال 12.146:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx + w \sin wx}{1 + w^2} dw = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

سوال 12.147:

$$\int_0^\infty \frac{w^3 \sin wx}{w^4 + 4} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \quad (x > 0)$$

سوال 12.148:

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \pi \sin wx}{1 - w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

سوال 12.149:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos w \pi}{w} \sin wx dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

سوال 12.150:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad (x > 0)$$

سوال 12.151:

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

سوال 12.152:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \frac{w\pi}{2} \cos wx}{1-w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

سوال 12.153 تا سوال 12.158 میں $f(x)$ کو مساوات 12.76 کی روپ میں لکھیں۔

سوال 12.153:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} \cos wx \, dw$$

سوال 12.154:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sin w}{w} - \frac{2 \sin w}{w^3} + \frac{2 \cos w}{w^2} \right] \cos wx \, dw$$

سوال 12.155:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sin w}{w} - \frac{2 \sin 2w}{w} + \frac{2 \sin 3w}{w} \right] \cos wx \, dw$$

سوال 12.156:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2} \cos wx \, dw$$

سوال 12.157:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos 2w-w \sin 2w}{w^2} \cos wx \, dw$$

سوال 12.158:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1+\cos w\pi}{1-w^2} \cos wx \, dw$$

سوال 12.159 تا سوال 12.160 میں دیے گئے تعلق کو ثابت کریں جہاں $f(x)$ کی روپ مساوات 12.76 ہے۔

$$\text{سوال 12.159: } f(ax) = \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right) \cos wx \, dw, \quad (a > 0)$$

جواب: مساوات 12.75 سے $A\left(\frac{w}{a}\right) = 2 \int_0^\infty f(v) \cos \frac{wv}{a} \, dv$ لکھا جاتا ہے جبکہ $f(ax)$ کے لئے

$$A^* = 2 \int_0^\infty f(\tau) \cos \frac{w\tau}{a} \frac{1}{a} \, d\tau \quad \text{لیتے ہوئے } \tau = at \text{ جس میں } A^* = 2 \int_0^\infty f(at) \cos wt \, dt$$

ملتا ہے جن سے $A^* = \frac{1}{a} A\left(\frac{w}{a}\right)$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ثابت ہوا کہ $f(ax) = \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right) \cos wx \, dw$

$$\text{سوال 12.160: } x^2 f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A^*(w) \cos wx \, dw, \quad A^* = -\frac{d^2 A}{dw^2}$$

جواب: مساوات 12.75 کا دو درجی تفرق لے کر $f^*(v) = -2 \int_0^\infty f^*(v) \cos wv \, dv$ $\frac{d^2 A}{dw^2} = -2 \int_0^\infty f^*(v) \cos wv \, dv$ سے ثبوت حاصل ہو گا۔

سوال 12.161: درج بالا کلیہ (سوال 12.160) استعمال کرتے ہوئے سوال 12.153 کے نتیجے سے سوال 12.154 حل کریں۔

سوال 12.162: ثابت کریں $x f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B^*(w) \sin wx \, dw$ جہاں $B^* = -\frac{dA}{dw}$ ہے اور A کو مساوات 12.75 ظاہر کرتی ہے۔

سوال 12.163: تقابل $f(x) = 1 \quad (0 < x < a)$ کے لئے سوال 12.162 کے کلیہ کی تصدیق کریں۔

سوال 12.164: تصدیق کریں کہ $f(x) = 1 \quad (0 < x < \infty)$ کو فوریر مکمل سے ظاہر نہیں کیا جاسکتا ہے۔

سوال 12.165: (فوریرس تکمل کی مخلوط صورت، فوریر بدل) ضمیمہ ب کی مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.69 کو

$$(12.81) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ثابت کریں کہ مساوات 12.81 میں $-\infty$ تا ∞ تکمل متغیرہ w کا جفت تفاعل ہے لہذا مساوات 12.81 کو

$$(12.82) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $\sin(wx - wv)$ متغیرہ w کا طاق تفاعل ہے لہذا درج ذیل ثابت کرتے ہوئے

$$(12.83) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \sin(wx - wv) dv \right] dw = 0$$

مساوات 12.82 اور مساوات 12.83 کا مجموعہ لے کر فوریرس تکمل کی مخلوط صورت

$$(12.84) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) e^{iwx - wv} dv \right] dw$$

حاصل کریں۔ مساوات 12.84 سے

$$(12.85) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty C(w) e^{iwx} dw$$

حاصل کریں جہاں

$$(12.86) \quad C(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(v) e^{-i w v} dv$$

ہے۔ مساوات 12.85 تفاعل $C(w)$ کا الٹ فوریر بدل⁴¹ دیتی ہے جبکہ مساوات 12.86 تفاعل $f(x)$ کا فوریر بدل⁴² دیتی ہے۔

inverse Fourier transform⁴¹
Fourier transform⁴²

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو $z \leq |2yy'|$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

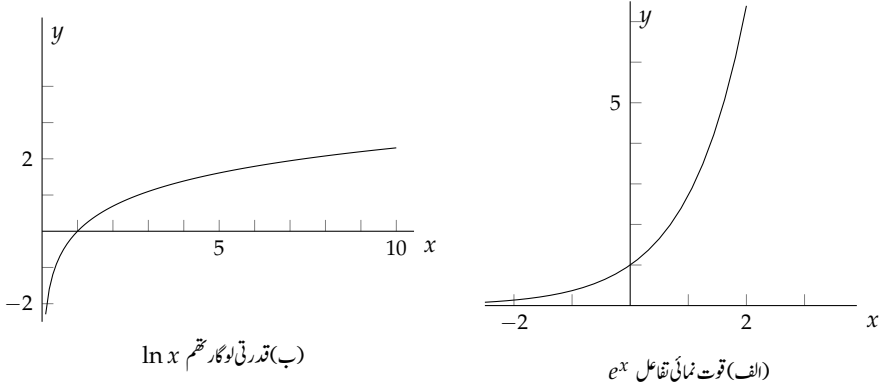
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

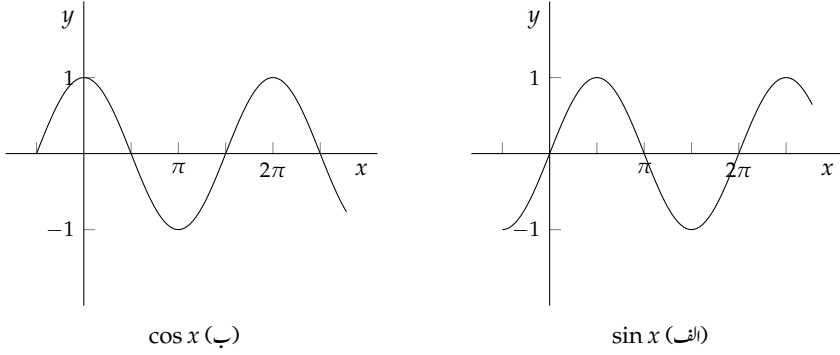
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

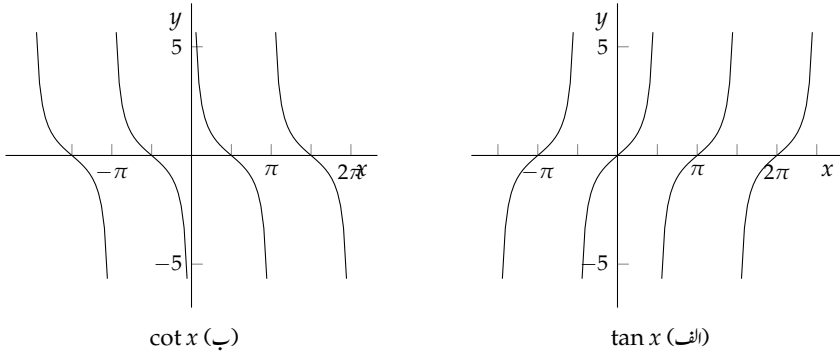
(ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ) (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

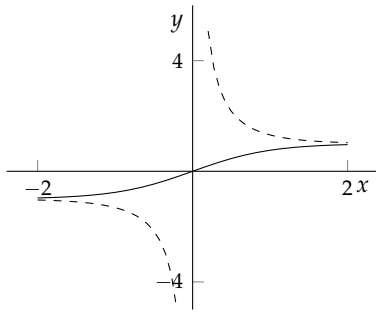
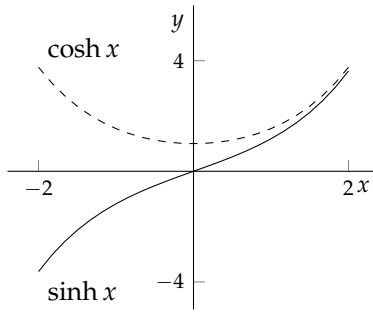
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

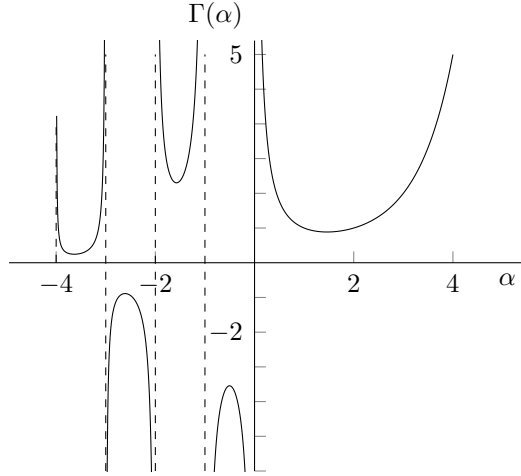
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

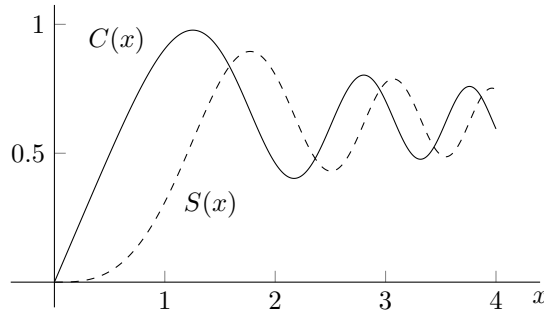
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

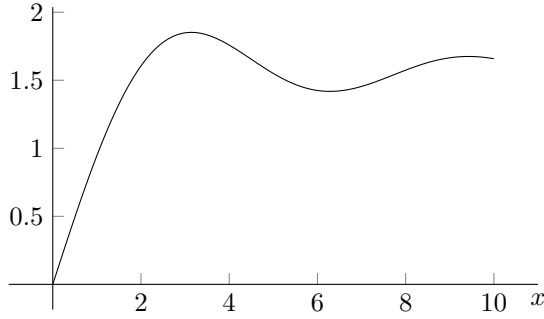
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

 $\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

