

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
117	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
132	2.5 پولر کوئی مساوات	
141	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
150	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
162	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
168	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
172	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
183	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
191	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
191	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
203	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

- 3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات . . . . . 212
- 3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل . . . . . 215

- 4 نظام تفرقی مساوات 223
- 4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق . . . . . 224
- 4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے . . . . . 233
- 4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور وروئسی . . . . . 248
- 4.3.1 خطی نظام . . . . . 249
- 4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب . . . . . 252
- 4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام . . . . . 270
- 4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام . . . . . 279
- 4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ . . . . . 288

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ

سطح حرکت کی دوسری ترکیب خود مختار [جس میں  $t$  صریحاً نہیں پایا جاتا] دو درجی سادہ تفرقی مساوات

$$F(y, y', y'') = 0$$

میں  $y = y_1$  کو آزاد متغیر اور  $y' = y_2$  لے کر  $y''$  کو زنجیری تفرق سے

$$y'' = y_2' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$$

لکھ کر ایک درجی مساوات

$$(4.81) \quad F\left(y_1, y_2, \frac{dy_2}{dy_1} y_2\right) = 0$$

میں تبدیل کرنے پر مبنی ہے۔ اس ایک درجی مساوات کو یا تو حل کرنا ممکن ہوتا ہے اور یا میدان ڈھال کی مدد سے اس پر غور ممکن ہوتا ہے۔ آئیں مثال 4.14 پر اس ترکیب کی مدد سے غور کریں۔

مثال 4.17: بلا تقصیر ارتعاشی نظام کی ایک درجی تفرقی مساوات۔

مساوات 4.71 میں  $\theta'' + k \sin \theta = 0$  ہے جس میں  $\theta = y_1$  اور  $\theta' = y_2$  (زاویائی رفتار) لیتے ہوئے

$$\theta'' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$$

لکھ کر  $\frac{dy_2}{dy_1} y_2 = -k \sin y_1$  ملتا ہے جس کو علیحدگی متغیرات سے  $y_2 dy_2 = -k \sin y_1 dy_1$  لکھا جا سکتا ہے۔ مکمل لیتے ہوئے

$$(4.82) \quad \frac{1}{2} y_2^2 = k \cos y_1 + C$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $C$  مکمل کا مستقل ہے۔ اس کو  $mL^2$  سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2} m (Ly_2)^2 - mL^2 k \cos y_1 = mL^2 C$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تینوں اجزاء توانائی<sup>76</sup> کو ظاہر کرتے ہیں۔ چونکہ  $y_2$  زاویائی رفتار ہے لہذا  $Ly_2$  لمحاتی رفتار اور  $\frac{1}{2}m(Ly_2)^2$  حرکی توانائی<sup>77</sup> ہے۔ درج بالا مساوات کا دوسرا جزو (جمع منفی علامت) مخفی توانائی<sup>78</sup> ہے جبکہ مساوات کا دایاں ہاتھ  $mL^2C$  کل توانائی ہے۔ بلا تفسیر نظام میں توانائی کا ضیاع نہیں پایا جاتا لہذا حزب توقع کل توانائی مستقل مقدار ہے۔ آئیں دیکھیں کہ حرکت کی نوعیت کل توانائی پر کیسے منحصر ہے۔

شکل 4.14-ب مختلف  $C$  کے لئے خط حرکت دیتی ہے۔ ان خطوط کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہے۔ ان میں ترخیمی بند دائرے اور لہر نما خطوط شامل ہیں جن کے مابین نقطہ زین  $(n\pi, 0)$  جہاں  $n = \pm 1, \pm 3, \dots$  ہے [ سے گزرتے ہوئے دو عدد خط حرکت پائے جاتے ہیں۔ مساوات 4.82 کے تحت  $C$  کی کم سے کم قیمت  $C = -k$  ہے جس پر  $y_2 = 0$  اور  $\cos y_1 = 1$  ہوں گے جو ساکن کمیت کو ظاہر کرتی ہے۔ جس نقطے پر  $y_2 = \theta' = 0$  ہو اس نقطے پر حرکت کی سمت تبدیل ہو کر الٹ ہو جائے گی لہذا مساوات 4.82 میں  $y_2 = 0$  پر کرتے ہوئے  $k \cos y_1 + C = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر  $y_1 = \pi$  ہو تب  $\cos y_1 = -1$  اور یوں  $C = k$  ہو گا۔ اس طرح اگر  $-k < C < k$  ہو تب  $|y_1| = |\theta| < \pi$  کی صورت میں کمیت کی حرکت کی سمت الٹ ہو گی اور  $C$  کی ان قیمتوں ( $|C| < k$ ) کے لئے کمیت ارتیاش پذیر ہو گا۔ ترخیمی بند دائرے اس ارتعاشی حرکت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس کے برعکس  $C > k$  کی صورت میں  $y_2 = 0$  ممکن نہیں ہے لہذا کمیت کی حرکت کی سمت الٹ نہیں ہو گی لہذا کمیت مرکز کے گرد گھومتا رہے گا جس کو لہری خط حرکت ظاہر کرتی ہیں۔ ان دو صورتوں کے مابین  $C = k$  پایا جاتا ہے جس کے خطوط نقطہ زین سے گزرتے ہیں۔ انہیں شکل 4.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔

<sup>76</sup> energy  
<sup>77</sup> kinetic energy  
<sup>78</sup> potential energy





- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

