

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخلوط اعداد
1047	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخلوط سطح میں منحنيات اور خطے
1059	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1 نقشہ کشی
1116	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6 ریمان سطحیں
1157	16 مخلوط مکملات
1157	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201	17 ترتیب اور تسلسل
1201	17.1 ترتیب
1208	17.2 تسلسل
1213	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220	17.4	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل
1225	17.5	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں
1236	17.6	تسلسل پر اعمال
1243	18	18 حاتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل
1243	18.1	حاتی تسلسل
1256	18.2	حاتی تسلسل کی روپ میں تفاعل
1263	18.3	ٹیلر تسلسل
1268	18.4	بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل
1274	18.5	حاتی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب
1281	18.6	یکساں استرار
1294	18.7	لوگوں تسلسل
1303	18.8	لا متناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت
1317	19	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ
1317	19.1	بقیہ
1324	19.2	مسئلہ بقیہ
1329	19.3	حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ
1337	19.4	حقیقی مکمل کے دیگر اقسام
1345	20	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ
1346	20.1	ساکن برقی سکون
1352	20.2	دو بعدی بہاؤ سیال
1361	20.3	ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص
1366	20.4	پوسوں کلیہ مکمل
1373	21	21 اعدادی تجزیہ
1374	21.1	خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر
1376	21.2	دہرانے سے مساوات کا حل
1388	21.3	متناہی فرق
1394	21.4	باہمی تحریف
1403	21.5	لچکدار منحنیات
1410	21.6	اعدادی مکمل اور تفرق
1422	21.7	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1433	21.8	دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1440	21.9	اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1443	21.9.1	مسئلہ ڈرشنے
1446	21.9.2	بدلتی رخ خفی ترکیب
1453	21.10	مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ۔ غیر منظم سرحد

1460 21.11 اعدادی ترکیب برائے قطع مکانی مساوات

1469 21.12 اعدادی ترکیب برائے قطع زائد مساوات

1473 22 خطی الجبرا کے اعدادی ترکیب

1473 22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقلاط، معکوس قالب

1481 ا اضافی ثبوت

1485 ب مفید معلومات

1485 1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 22

خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب

اس باب میں ہم خطی الجبرائی مساوات کے نظام کے حل، مناسب سیدھی لکیروں کا حصول اور قلبی امتیازی اقدار کے حصول کے اہم ترین تراکیب پر غور کریں گے۔ یہ تراکیب اور اس سے ملتے جلتے تراکیب عملاً انتہائی اہم ثابت ہوتے ہیں جو انجینئری یا دیگر شعبوں (مثلاً شاریات) کے مسائل حل کرنے میں کام آتے ہیں۔

22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی اسقاط، معکوس قالب

n نامعلوم متغیرات x_1, \dots, x_n کے m خطی مساوات کے نظام (یا m ہمزاد خطی مساوات) سے مراد درج ذیل روپ کی مساوات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (22.1)$$

کا سلسلہ ہے جہاں عددی سر a_{jk} اور b_j معلوم اعداد ہیں۔ تمام b_j صفر ہونے کی صورت میں یہ نظام متجانس¹ کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر متجانس² کہتے ہیں۔ اگر آپ قلابی ضرب (حصہ 8.2) سے آشنا ہوں تب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 22.1 کو ایک سمتی مساوات

$$(22.2) \quad Ax = b$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں عددی سر قلاب $A = [a_{ik}]$ درج ذیل $m \times n$ قلاب ہے

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

جبکہ x اور b سمتیہ قطار ہیں۔ نظام 22.1 کے حل سے مراد اعداد x_1, \dots, x_n کا سلسلہ ہے جو ان تمام m مساوات کو مطمئن کرتے ہیں اور نظام 22.1 کے حل سمتیہ سے مراد سمتیہ x ہے جس کے اجزاء نظام 22.1 کے حل ہیں۔

زیادہ تعداد کی مساوات کے نظام کا حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7) قابل عمل نہیں ہے۔ زیادہ بہتر ترکیب گاوسی اسقاط ہے جس کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال 22.1: گاوسی اسقاط
درج ذیل نظام کو حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2w + x + 2y + z &= 6 \\ 6w - 6x + 6y + 12z &= 36 \\ 4w + 3x + 3y - 3z &= -1 \\ 2w + 2x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

حل: پہلا قدم: ہم پہلی مساوات کے مضرب کو باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے w حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -9x \quad \quad + 9z &= 18 \\ x - y - 5z &= -13 \\ x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

homogeneous¹
nonhomogeneous²

دوسرا قدم: ان میں پہلی مساوات کے مضرب باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے x حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$-y - 4z = -11$$

$$-3y + z = 6$$

تیسرا قدم: ان میں پہلی مساوات کے مضرب کو باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے y حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$13z = 39$$

آخری قدم: ہم اب واپس پر کرتے ہوئے تمام نا معلوم متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

$$13z = 39 \quad z = 3$$

$$-y - 4 \cdot 3 = -11 \quad y = -1$$

(22.3)

$$-9x + 9 \cdot 3 = 18 \quad x = 1$$

$$2w + 1 + 2 \cdot (-1) + 3 = 6 \quad w = 2$$

□

مثال 22.1 میں $a_{11} \neq 0$ تھا۔ اگر ایسا نہ ہوتا تب ہم باقی مساوات سے w حذف کرنے میں ناکام ہوتے۔ یوں $a_{11} = 0$ کی صورت میں نظام میں مساوات کی ترتیب بدلی جائے گی تاکہ نظام میں پہلی مساوات کا پہلا عددی سر غیر صفر ہو (اور ہو سکتا ہے کہ نا معلوم متغیرات کی ترتیب بھی بدلی پڑے)۔ باقی قدم پر بھی ایسا ہی کرنا پڑ سکتا ہے۔ اس طرح درج ذیل ترکیب حاصل ہوتی ہے جس کی اطلاق کے بعد حاصل قیمتیں پر کرتے ہوئے تمام متغیرات حاصل کیے جاتے ہیں۔

الخوارزمی: گاوسی اسقاط³

مساوات 22.2 میں $m = n$ کی صورت میں $n \times n$ قالب A کے ساتھ بطور آخری صف b شامل کرتے ہوئے $n \times (n+1)$ قالب $B = [b_{jk}]$ حاصل ہو گا جس کے لئے گاوسی اسقاط کی الگوجی⁴ درج ذیل ہے۔

$k = 1$ تا $k = n - 1$ کے لئے کریں:

ایسا کم تر $j \geq k$ تلاش کریں کہ $b_{jk} \neq 0$ ہو۔

algorithm³
algorithm⁴

اگر ایسا کوئی j نہیں پایا جاتا ہو تب بتائیں کہ A نادر ہے اور حساب روک دیں،
ورنہ B کے صف j اور صف k کے اجزاء کا آپس میں تبادلہ کرتے ہوئے چلتے رہیں۔
 $j = k + 1$ تا $j = n$ کے لئے کریں:

$$q : \frac{b_{jk}}{b_{kk}}$$

$$p = k + 1 \text{ تا } p = n + 1 \text{ کے لئے کریں:}$$

$$b_{jp} : b_{jp} - qb_{kp}$$

اگر $b_{nn} = 0$ ہو تب بتائیں کہ A نادر ہے اور حساب روک دیں۔

ہر قدم پر پہلی مساوات کے پہلی متغیر کے عددی سر کو چول عددی سر⁵ کہتے ہیں جس کا غیر صفر ہونا ضروری ہے۔ اگر چول عددی سر کی قیمت کم ہو تب ہمیں مطابقتی مساوات کا بڑا مضرب باقی مساوات سے منفی کرنا ہو گا جس سے تعداد ہندسہ خلل بڑھتے ہوئے نتائج متاثر کرے گا۔ اس سے بچنے کی ترکیب سمجھنے سے پہلے آئیں ایک مثال سے ایسا ہوتے دیکھیں۔

مثال 22.2: کم چول عددی سر سے پیدا مشکلات
درج ذیل نظام

$$0.0004x_1 + 1.402x_2 = 1.406$$

$$0.4003x_1 - 1.502x_2 = 2.501$$

کا حل $x_1 = 10$ ، $x_2 = 1$ ہے۔ ہم چار ہندسی غیر مقررہ نقطہ نظام استعمال کرتے ہوئے اس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہیں۔

(الف) پہلی مساوات کو مساوات چول لیتے ہوئے ہم اس کو $q = \frac{0.4003}{0.0004} = 1001$ سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کر کے

$$-1405x_2 = -1404$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $x_2 = \frac{-1404}{-1405} = 0.9993$ ہو گا اور یوں پہلی مساوات سے $x_1 = 10$ کی بجائے

$$x_1 = \frac{1}{0.0004}(1.406 - 1.402 \cdot 0.9993) = \frac{0.005}{0.0004} = 12.5$$

حاصل ہو گا۔ اس ناکامی کی وجہ $|a_{12}|$ کے لحاظ سے $|a_{11}|$ کی کم قیمت ہے جو x_2 میں تعداد ہندسہ خلل کی قلیل قیمت سے x_1 کی قیمت میں بہت زیادہ خلل پیدا کرتا ہے۔

(ب) آئیں اب دوسری مساوات کو چول مساوات لے کر اس کو $0.0009993 = \frac{0.0004}{0.4003}$ سے ضرب دے کر پہلی مساوات سے منفی کرتے ہوئے

$$1.404x_2 = 1.404$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $x_2 = 1$ حاصل ہو گا جس کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 10$ ملتا ہے۔ یہاں $|a_{22}|$ کے لحاظ سے $|a_{21}|$ بہت کم نہیں ہے لہذا x_2 میں معمولی تعداد ہندسہ خلل x_1 کی قیمت میں بڑا خلل پیدا نہیں کرتا ہے۔ یہی ہماری کامیابی کی وجہ ہے۔ یقیناً $x_2 = 1.002$ کی صورت میں بھی دوسری مساوات سے $x_1 = \frac{2.501+1.505}{0.4003} = 10.01$ حاصل ہوتا جو بہت بہتر نتیجہ ہے۔ □

وہ مساوات جس کے x_1 کا عددی سر باقی مساواتوں کے x_1 کے عددی سر سے بڑا ہو کو پہلی مساوات منتخب کرتے ہوئے اور اسی طرح دوسری قدم پر x_2 کے لحاظ سے مساوات منتخب کرتے ہوئے نظام میں پہلی، دوسری، تیسری، ... مساوات منتخب کی جاسکتی ہے۔ اس عمل کو جزوی چول⁶ کہتے ہیں۔ مکمل چول⁷ میں ہم پورے نظام میں سب سے بڑے حتمی عددی سر کو چول عددی سر لیتے ہوئے باقی مساوات میں سے اس کا مطابقتی متغیر حذف کرتے ہیں۔ اگلی قدم میں اسی ترکیب کو دہراتے ہیں اور اسی طرح آخر تک چلتے ہیں۔ عملاً مکمل چول کی ترکیب زیادہ مہنگی ثابت ہوتی ہے لہذا جزوی چول کی ترکیب ہی استعمال کی جاتی ہے۔

ہم پوری مساوات کو بڑی عدد سے ضرب دے کر کسی بھی عددی سر کی قیمت بڑھا سکتے ہیں لیکن ایسا کرنے سے نتائج پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے۔ مساوات کو جزو ضربی سے ضرب دینے کو تبدیلی پیماس⁸ کہتے ہیں۔ عملاً ہم 10 (یا کمپیوٹر کی اساس β) کی طاقت سے مساوات کو ضرب دے کر عددی سر کی سب سے بڑی حتمی قیمت کو 0.1 اور 1 (یعنی β^{-1} اور 1) کے بیچ لاتے ہیں۔

عملاً ہم تبدیل پیماس جزوی چول استعمال کرتے ہیں یعنی حذف کی k ویں قدم (جہاں $k = 1, 2, \dots$ ہو گا) میں ہم باقی میسر $n - k$ مساواتوں میں سے اس کو مساوات چول منتخب کرتے ہیں جس کے متغیر x_k کے عددی سر اور اس مساوات میں سب سے بڑی حتمی قیمت کے عددی سر کے حاصل تقسیم کی حتمی قیمت سب سے زیادہ ہو۔

گاوسی اسقاط میں پیدا ہونے والے خلل پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔

partial pivoting⁶
total pivoting⁷
scaling⁸

ترکیب گاوس میں ترمیم

ترکیب گاوسی کے کئی ترامیم ممکن ہیں۔ ہم شولسکی⁹ کے ایک قاعدہ پر مبنی ترمیم پیش کرتے ہیں۔ شولسکی¹⁰ کا قاعدہ کہتا ہے کہ حتمی مثبت چکور قالب A کو

$$(22.4) \quad A = LU$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں L اور U بالترتیب نچلا تکنونی قالب اور بالائی تکنونی قالب ہیں۔ L اور U عملاً یکتا ہوں گے۔ ہم مساوات کو حل کیے بغیر L اور U کو حاصل کر سکتے ہیں (نیچے مثال دیکھیں)۔ n متغیرات کے n مساوات کا نظام $Ax = b$ حل کرنے کے لئے ہم مساوات 22.4 کا سہارا لیتے ہوئے نظام کو

$$LUX = b$$

لکھتے ہیں۔ اس کو بائیں طرف L^{-1} سے ضرب دے کر

$$(22.5) \quad UX = z \quad z = L^{-1}b$$

حاصل ہو گا جو اس نظام کی تکنونی صورت ہے۔ ہم پہلے z کو درج ذیل تعلق

$$(22.6) \quad Lz = b$$

سے حاصل کر کے بعد میں

$$(22.7) \quad UX = z$$

سے x حاصل کریں گے۔ بہت سی اہم مسائل میں A تشاکل قالب ہو گا جس کی بنا $U = L^T$ ہو گا (درج ذیل مثال دیکھیں)۔

مثال 22.3: ترکیب شولسکی

آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ نظام

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ 2x + 3y + 4z &= 20 \\ 3x + 4y + z &= 14 \end{aligned}$$

⁹فرانسیسی ریاضی دان اندر لوئی شولسکی [1875-1918]
¹⁰Cholesky

کا حل $x = 1$ ، $y = 2$ ، $z = 3$ ہے۔ ہم اس حل کو ترکیب شولسکی سے حاصل کرتے ہیں۔ عددی سر قالب تشکیلی ہے لہذا $U = L^T$ ہو گا۔ ہم ضرب قالب کی تعریف استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

کے دونوں اطراف مطابقتی اجزاء کو برابر پر کرتے ہوئے U کے اجزاء حاصل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہمیں بالترتیب $a_{11}^2 = 1$ مثلاً $a_{11} = 1$ جس سے $a_{11}a_{12} = a_{12} = 2$ ، $a_{11}a_{13} = a_{13} = 3$ ، $a_{12}a_{23} = a_{23} = 4$ ، $a_{22}^2 + a_{23}^2 = 4 + a_{22}^2 = 3$ مثلاً $a_{22} = i(\sqrt{-1})$ اور اس سے

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} = 6 + ia_{23} = 4, \quad a_{23} = i2$$

اور آخر میں

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 9 - 4 + a_{33}^2 = 1$$

سے مثلاً $a_{33} = i2$ حاصل ہو گا۔ یوں مساوات 22.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 3 & i2 & i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ i8 \\ i6 \end{bmatrix}$$

دے گا۔ آخر میں ہم مساوات 22.7 حل کرتے ہیں یعنی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & i & i2 \\ 0 & 0 & i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ i8 \\ i6 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

□

گاوسی اسقاط کی دوسری ترمیم کو گناوس جاردن اسقاط کہتے ہیں۔ اس ترکیب میں قالب کو "تکوئی صورت" کی بجائے مزید چال چلتے ہوئے "وتری صورت" میں تبدیل کرتے ہوئے قیمتوں کے واپس پر کرنے کے عمل سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ ان اضافی چال کی بنا مساوات کا نظام حل کرنے میں کوئی آسانی پیدا نہیں ہوتی ہے۔ البتہ معکوس قالب حاصل کرنے میں صورت حال مختلف ہے جہاں ترکیب گاوس جاردن دونوں میں n^3 ضرب درکار ہیں۔

معلوس قالب

غیر نادر چکور قالب A کا معلوس اب اصولی طور پر n عدد نظام

$$(22.8) \quad Ax = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

کے حل سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں $n \times n$ اکائی قالب کا j واں قطار b_j ہے۔

البتہ اکائی قالب I پر ترکیب گاوس جارڈن کی طرح عمل کرتے ہوئے A کی تخفیف سے I حاصل کرتے ہوئے A^{-1} کے حصول کو ترجیح دی جاتی ہے۔

سوالات

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو مکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا مکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

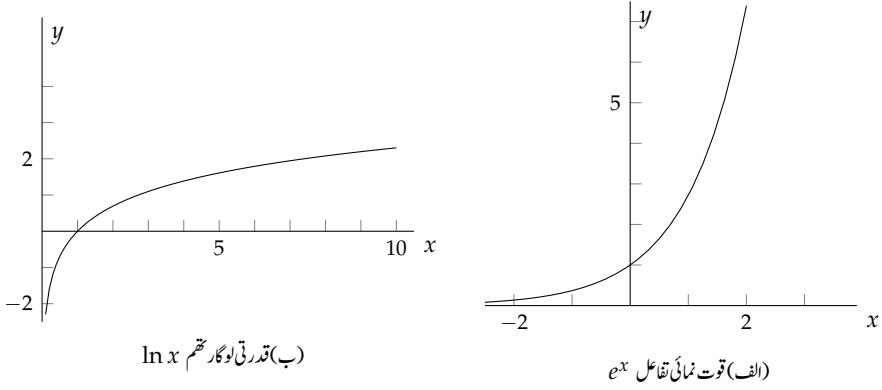
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

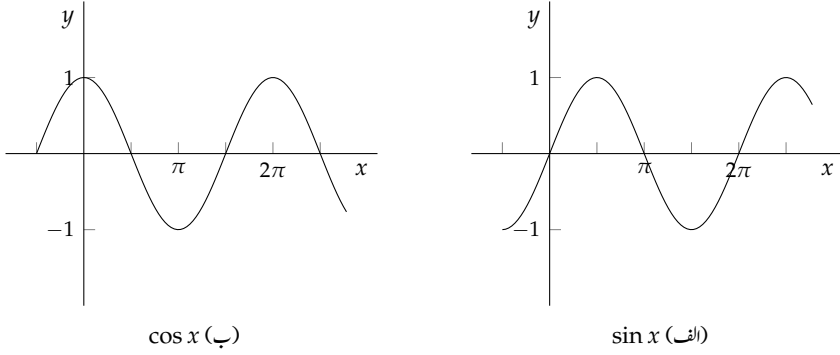
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

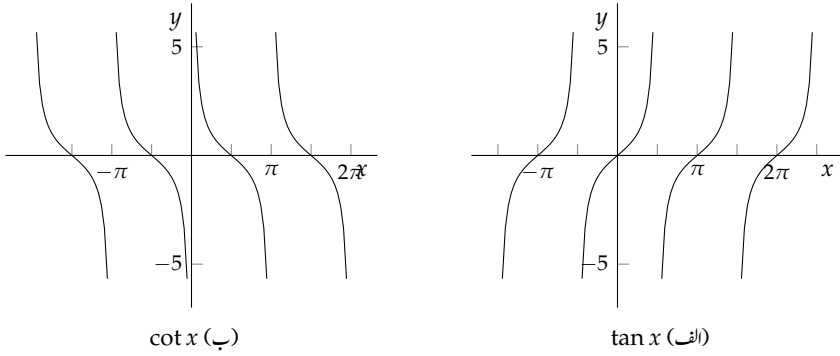
(ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

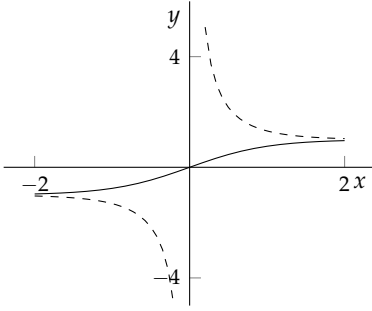
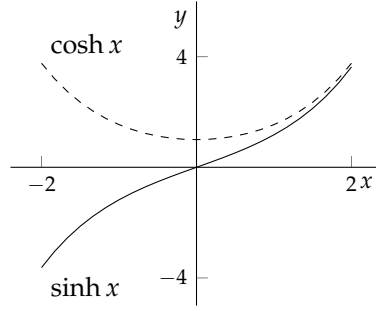
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

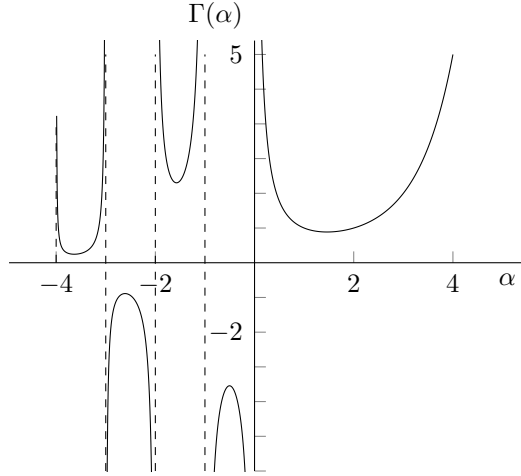
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

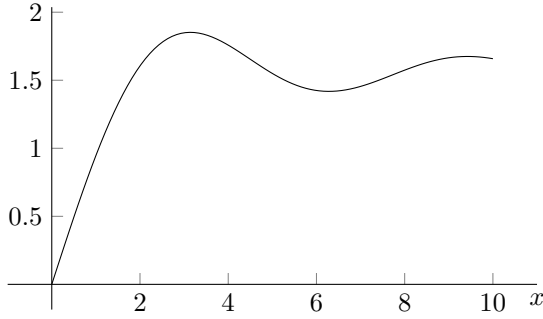
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

