انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 10

سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل

10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان

غیر سمتی تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو فضا میں کسی سلسلہ نقاط کے ہر نقطے پر معین ہو اور جہاں تفاعل کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں جن کا دارومدار صرف فضا میں نقطوں پر ہو نا کہ چنی گئی محوری نظام پر۔ان نقطوں کے سلسلے کو تفاعل کا **دائرہ کار**[1] کہتے ہیں۔ عملی استعمال میں تفاعل f کا دائرہ کار D عموماً منحنی یا سطح یا فضا میں تین بُعدی خطہ ہو گا۔تفاعل f دائرہ کار D کے ہر نقطے کے ساتھ ایک غیر سمتی حقیقی عدد وابستہ کرتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ D میں **غیر سمتی میدان**[2] دیا گیا ہے۔

x ، y ، x متعارف کرنے سے تفاعل f کو ان محدد کی مدد سے $f(x,y,z)$ لکھا جا سکتا ہے، پس اتنا یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ P پر تفاعل f کی قیمت، چنی گئی محددی نظام پر ہر گز منحصر نہیں ہو گی۔اس حقیقت کو ظاہر کرنے کی خاطر $f(x,y,z)$ کی جگہ عموماً $f(P)$ لکھا جاتا ہے۔تفاعل f وقت پر بھی منحصر ہو سکتا ہے۔

domain[1]
scalar field[2]

مثال 10.1: غیر سمتی تفاعل
غیر تغیر پذیر نقطہ P_0 سے کسی نقطہ P کا فضا میں فاصلہ غیر سمتی تفاعل ہے جس کا دائرہ کار D پوری فضا ہے۔ $f(P)$ فضا میں غیر سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر کارتیسی نظام محدد میں P_0 کے محدد x_0 ، y_0 ، z_0 اور P کے محدد x ، y ، z ہوں تب f درج ذیل ہو گا۔

$$f(P) = f(x,y,z) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

نظام محدد تبدیل کرنے سے عموماً P_0 اور P کے محدد تبدیل ہوں گے لیکن $f(P)$ کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی لہٰذا $f(P)$ غیر سمتی تفاعل ہے۔

مثال 10.2: غیر سمتی میدان
کسی جسم کے اندر درجہ حرارت T غیر سمتی تفاعل ہے جو غیر سمتی میدان (یعنی جسم میں درجہ حرارت) تعین کرتا ہے۔

اگر فضا میں سلسلہ نقاط کے ہر نقطے P کے ساتھ سمتیہ $\boldsymbol{v}(P)$ وابستہ کیا جائے تب ہم کہتے ہیں کہ ان نقاط پر **سمتی میدان**[3] دیا گیا ہے اور $\boldsymbol{v}(P)$ **سمتی تفاعل**[4] کہلاتا ہے۔ یہ سلسلہ نقاط کسی منحنی یا سطح یا حجم میں پایا جا سکتا ہے۔

کارتیسی نظام محدد میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + v_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + v_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{v}$ کی قیمت اس نقطے پر منحصر ہے نا کہ نظام محدد پر۔

---

[3] vector field
[4] vector function

مثال 10.3: سمتی میدان (سمتی میدان رفتار)
گھومتے ہوئے جسم B کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v}(P)$ کو سمتی میدان رفتار کہتے ہیں۔ گھومتے جسم کی محور پر کارتیسی محدد کا مبدا رکھتے ہوئے جسم پر کسی نقطہ N کی سمتی رفتار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (صفحہ 544 پر مثال 7.13 دیکھیں)

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \boldsymbol{\omega} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \tag{10.1}$$

جہاں لمحہ غور پر نقطہ N کے محدد x ، y ، z ہیں۔اگر کارتیسی z محور عین جسم کی محور پر واقع ہو اور $\boldsymbol{\omega}$ مثبت z محور کے رخ ہو تب $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ لکھا جائے گا۔یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{bmatrix} = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}) \tag{10.2}$$

مثال 10.4: سمتی میدان (میدان قوت)
فرض کریں کہ کمیت M مستقل طور پر فضا میں نقطہ N_0 پر موجود ہے جبکہ کمیت m فضا میں کسی بھی نقطہ N پر موجود ہو سکتا ہے۔ اب نیوٹن قانون تجاذب کے تحت m پر قوت کشش

$$|\boldsymbol{f}| = \frac{GMm}{r^2} \tag{10.3}$$

عمل کرے گی جہاں $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kgs^2}$ تجاذبی مستقل ہے اور r ان جسموں کے مابین فاصلہ ہے۔یہاں $\boldsymbol{v}$ فضا میں سمتی میدان دیتا ہے۔اگر ہم کارتیسی محدد کو یوں چنیں کہ N_0 کے محدد x_0 ، y_0 ، z_0 ہوں اور N کے محدد x ، y ، z ہوں تب مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \qquad (r \geq 0)$$

ہو گا۔ اب $r > 0$ فرض کرتے ہوئے سمتیہ

$$\boldsymbol{r} = (x-x_0)\boldsymbol{i} + (y-y_0)\boldsymbol{j} + (z-z_0)\boldsymbol{k} \tag{10.4}$$

متعارف کرتے ہوئے $r = |\boldsymbol{r}|$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{f}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ ہو گا جہاں منفی کی علامت اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ قوت کشش N_0 سے N کی رخ کو ہے۔یوں درج ذیل لکھ جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{f}|\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -GMm\left[\frac{x-x_0}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\boldsymbol{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\boldsymbol{k}\right] \tag{10.5}$$

یہ سمتی تفاعل m پر قوت کشش دیتا ہے۔

10.2 سمتی علم الاحصاء

علم الاحصاء کے بنیادی تصورات مثلاً ارتکاز، استمراریت اور تفرق پذیری کو بالکل فطری طور پر سمتی علم الاحصاء کے لئے بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

سمتیات $\boldsymbol{a}_{(n)}$ ، جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے، کا لامتناہی تسلسل اس صورت مرکوز تصور کیا جاتا ہے جب ایسا سمتیہ $\boldsymbol{a}$ موجود ہو کہ درج ذیل درست ہو۔

$$\lim_{n\to\infty}\left|\boldsymbol{a}_{(n)} - \boldsymbol{a}\right| = 0 \tag{10.6}$$

$\boldsymbol{a}$ کو اس تسلسل کا **تحدیدی سمتیہ**[5] کہتے ہیں جسے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_{(n)} = \boldsymbol{a} \tag{10.7}$$

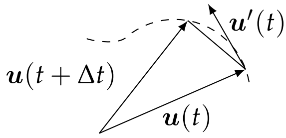
کارتیسی نظام محدد استعمال کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ سمتیات کا تسلسل اس صورت سمتیہ $\boldsymbol{a}$ پر مرتکز ہو گا جب تسلسل کے تین کارتیسی ارکان کا تسلسل بالترتیب $\boldsymbol{a}$ کے تین کارتیسی ارکان پر مرتکز ہوں۔

اسی طرح اگر حقیقی متغیر t پر مبنی سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ نقطہ t_0 کے ہمسائیگی[6] میں معین ہو (جبکہ t_0 پر یہ غیر معین ہو سکتا ہے) تب t کا t_0 کے قریب تر ہونے سے تفاعل کی حد[7] $\boldsymbol{l}$ سے مراد درج ذیل ہے

$$\lim_{t\to t_0}\left|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{l}\right| = 0 \tag{10.8}$$

---

[5] limit vector
[6] ہمسائیگی سے مراد t محور پر ایسا وقفہ ہے جس کے اندر t_0 پایا جاتا ہو۔
[7] limit



شکل 10.1: سمتی تفاعل کا تفرق

جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{l} \tag{10.9}$$

سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت $t = t_0$ پر **استمراری** تصور کیا جاتا ہے جب یہ t_0 کے ہمسائیگی میں معین ہو اور درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t_0) \tag{10.10}$$

کارتیسی نظام محدد میں تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ درج لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{u}(t) = u_1(t)\boldsymbol{i} + u_2(t)\boldsymbol{j} + u_3(t)\boldsymbol{k} \tag{10.11}$$

اور t_0 پر $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت استمراری ہو گا جب اس کے تینوں کارتیسی اجزاء t_0 پر استمراری ہوں۔

تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ نقطہ t پر اس صورت **قابل تفرق** ہو گا جب درج ذیل حد موجود ہو۔

$$\boldsymbol{u}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t)}{\Delta t} \tag{10.12}$$

$\boldsymbol{u}'(t)$ کو $\boldsymbol{u}(t)$ کا **تفرق**[8] کہتے ہیں (شکل 10.1)۔اس شکل میں نقطہ دار لکیر سمتیہ $\boldsymbol{u}(t)$ کی نوک کو آزاد متغیرہ t کے لئے وقفہ t تا $t+\Delta t$ ظاہر کرتی ہے۔

کارتیسی نظام محدد استعمال کرتے ہوئے نقطہ t پر $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس نقطے پر درج ذیل تینوں تفرق موجود ہوں۔

$$u'_m(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{u_m(t+\Delta t) - u_m(t)}{\Delta t} \qquad (m = 1,2,3)$$

[8]derivative

یوں سمتیہ تفاعل کا تفرق لینا اس کے تینوں ارکان کا علیحدہ علیحدہ تفرق لینے کے مترادف ہے یعنی:

$$\boldsymbol{u}'(t) = u_1'(t)\boldsymbol{i} + u_2'(t)\boldsymbol{j} + u_3'(t)\boldsymbol{k} \tag{10.13}$$

تفرق کے جانی پہچانی اصولوں کے مطابقتی اصول سمتیہ تفاعل کے تفرق کے لئے بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں مثلاً

$$(c\boldsymbol{u})' = c\boldsymbol{u}' \ (\text{مستقل ہے } c), \qquad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}' \tag{10.14}$$

اور

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' \tag{10.15}$$

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}' \tag{10.16}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2} \tag{10.17}$$

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w})' = (\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}') \tag{10.18}$$

چونکہ سمتی ضرب غیر قابل تبادل ہے لہٰذا مساوات 10.16 میں سمتیات کی ترتیب برقرار رکھنا لازم ہے۔

مثال 10.5: مستقل لمبائی کے تفاعل کا تفرق
اگر تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ کی لمبائی مستقل ہو یعنی $\left|\boldsymbol{u}(t)\right| = c$ تب $|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = c^2$ ہو گا اور مساوات 10.15 کی مدد سے $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})' = 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' = 0$ حاصل ہو گا جس کے تحت مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل کا تفرق یا صفر سمتیہ ہو گا اور یا یہ $\boldsymbol{u}(t)$ کے قائمہ الزاویہ ہو گا۔

درج بالا گفتگو سے سمتی تفاعل کی جزوی تفرق کے اصول حاصل کرتے ہیں۔اگر کسی سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

کے اجزاء n عدد متغیرات t_1 ، $\cdots$ ، t_n کے ساتھ قابل تفرق ہوں تب t_1 کے ساتھ $\boldsymbol{u}$ کے جزوی تفرق کو $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t_1}$ سے ظاہر کیا جائے گا جو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u_2}{\partial t_1}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u_3}{\partial t_1}\boldsymbol{k}$$

اسی طرح دیگر جزوی تفرقات لکھے جا سکتے ہیں مثلاً:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t_m \partial t_n} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t_m \partial t_n}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t_m \partial t_n}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_3}{\partial t_m \partial t_n}\boldsymbol{k}$$

مثال 10.6: جزوی تفرق

سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t_1, t_2) = a\cos\omega t_1\boldsymbol{i} + a\sin\omega t_1\boldsymbol{j} + t_2\boldsymbol{k}$ کے جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_1} = a\omega(-\sin\omega t_1\boldsymbol{i} + \cos\omega t_1\boldsymbol{j}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_2} = \boldsymbol{k}$$

تفاعل $\boldsymbol{r}$ ایسی نلکی سطح کو ظاہر کرتا ہے جس کا رداس a ہے اور محور z محور ہے۔

سوالات

سوال 10.1 تا سوال 10.5 میں برابر سطح $f = c$ کیا ہو گا جہاں c مستقل ہے۔

سوال 10.1: $f = x + y + z$
جواب: متوازی سطحیں

سوال 10.2: $f = x^2 + y^2 + z^2$
جواب: ہم مرکز کرہ

سوال 10.3: $f = x^2 + y^2$
جواب: کارتیسی z کے ہم محوری نلکی سطحیں

سوال 10.4: $f = 4x^2 + 5y^2$
جواب: کارتیسی z کے ہم محوری نلکی ترخیم سطحیں

سوال 10.5: $f = x^2 + y^2 - z$

جواب: قطع مکافی نما سطحیں

xy سطح پر سمتیہ $\boldsymbol{v}$ سوال 10.6 تا سوال 10.9 میں دیا گیا ہے۔وہ سطح دریافت کریں جس پر $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی مستقل ہو۔وہ سطح دریافت کریں جس پر $\boldsymbol{v}$ کی یکساں سمت ہو۔

سوال 10.6: $\boldsymbol{v} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j}$

جوابات: $\frac{y}{x} =$ مستقل, $4x^2 + 9y^2 =$ مستقل

سوال 10.7: $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + \sqrt{y}\boldsymbol{j}$

جوابات: $\frac{\sqrt{y}}{x^2} =$ مستقل, $x^4 + y =$ مستقل

سوال 10.8: $\boldsymbol{v} = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$

جوابات: $\frac{2xy}{x^2-y^2} =$ مستقل, $x^2 + y^2 =$ مستقل

سوال 10.9: $\boldsymbol{v} = (x+y)\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j}$

جوابات: $\frac{x-y}{x+y} =$ مستقل, $x^2 + y^2 =$ مستقل

سوال 10.10 تا سوال 10.18 میں $\boldsymbol{u}$ دیا گیا ہے۔آپ سے التماس ہے کہ $\boldsymbol{u}'$ اور $\boldsymbol{u}''$ دریافت کریں۔

سوال 10.10: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t^2$

جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2\boldsymbol{b}t,\ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{b}$

سوال 10.11: $t\boldsymbol{i} + (t^2+2)\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{j}$

سوال 10.12: $4\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{u}' = -4\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}'' = -4\cos t\,\boldsymbol{i} - 2\sin t\,\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}$

سوال 10.13: $4\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} - 3t\,\boldsymbol{k}$

جوابات: $\boldsymbol{u}' = -4\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j} - 3\,\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{u}'' = -4\cos t\,\boldsymbol{i} - 2\sin t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.14: $t^2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2t\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{i}$

سوال 10.15: $\cos 2t\,\boldsymbol{i} - 3\sin 2t\,\boldsymbol{j} + t^2\,\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = -2\sin 2t\,\boldsymbol{i} - 6\cos 2t\,\boldsymbol{j} + 2t\,\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{u}'' = -4\cos 2t\,\boldsymbol{i} + 12\sin 2t\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}$

سوال 10.16: $e^t\,\boldsymbol{i} - 2e^{-3t}\,\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = e^t\,\boldsymbol{i} + 6e^{-3t}\,\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}'' = e^t\,\boldsymbol{i} - 18e^{-3t}\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.17: $e^{-t}(\cos t\,\boldsymbol{i} - \sin t\,\boldsymbol{j})$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = e^{-t}[-(\cos t + \sin t)\,\boldsymbol{i} - (\cos t - \sin t)\,\boldsymbol{j}],\ \boldsymbol{u}'' = e^{-t}(2\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j})$

سوال 10.18: $t^2(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2t(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}),\ \boldsymbol{u}'' = 2(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})$

سوال 10.19 تا سوال 10.23 میں $\boldsymbol{u} = t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{v} = t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 10.19: $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})'$
جواب: $4t^3$

سوال 10.20: $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})'$
جواب: $-t^4\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.21: $[\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})]'$
جواب: $-8t^3\boldsymbol{i} - (7t^6 + 5t^4 - 6t^2)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

سوال 10.22: $[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}]'$
جواب: $(6t^2 - 7t^6)\boldsymbol{j} + (4t - 6t^5)\boldsymbol{k}$

سوال 10.23: $[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]'$
جواب: $-15t^4 - 3t^2$

سوال 10.24 تا سوال 10.29 میں دیے گئے سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ کا x ، y اور z کے ساتھ جزوی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.24: $x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{i},\ 3\boldsymbol{k},\ 0$

سوال 10.25: $(x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$
جوابات: $2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j},\ -2y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j},\ 0$

سوال 10.26: $x^2\boldsymbol{i} - 3y^2\boldsymbol{j} + 2z^2\boldsymbol{k}$
جوابات: $2x\boldsymbol{i},\ -6y\boldsymbol{j},\ 4z\boldsymbol{k}$

سوال 10.27: $xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$
جوابات: $y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k},\ x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j},\ y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$

سوال 10.28: $(x+y)\boldsymbol{i} + (y+z)\boldsymbol{j} + (z+x)\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 10.29: $x^2y\boldsymbol{i} + y^2z\boldsymbol{j} + z^2x\boldsymbol{k}$
جوابات: $2xy\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{k},\ x^2\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j},\ y^2\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$

سوال 10.30: $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})''$ اور $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})''$ کے لئے مساوات 10.15 اور مساوات 10.16 کی طرز کے کلیات دریافت کریں۔

جوابات: $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})'' = \boldsymbol{u}'' \cdot \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}''$،
$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})'' = \boldsymbol{u}'' \times \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}''$

سوال 10.31: ثابت کریں کہ $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}')}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{\frac{3}{2}}}$
جواب: $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)' = \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}}\right)'$ لکھتے ہوئے مساوات 10.17 کا استعمال کریں۔

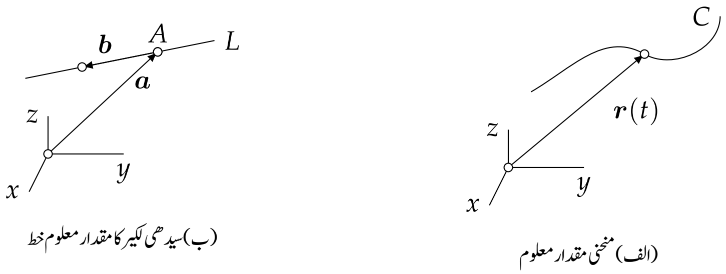
10.3 منحنی

کارتیسی نظام میں منحنی C کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (شکل 10.2-الف)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{10.19}$$

آزاد حقیقی متغیرہ t کی ہر قیمت t_0 کا C پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کے محدد $x(t_0)$ ، $y(t_0)$ اور $z(t_0)$ تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ دیتا ہے۔ مساوات 10.19 کو C کی **منحنی مقدار معلوم**[9] کہتے ہیں جبکہ t کو **مقدار معلوم** کہتے ہیں۔ منحنی مقدار معلوم کی طرز پر منحنی کا اظہار نہایت عمدہ ثابت ہوتا ہے۔

[9] parametric representation



شکل 10.2: سیدھی لکیر اور منحنی کے مقدار معلوم خطوط۔

فضا میں منحنی ظاہر کرنے کے دیگر طریقے

$$y = f(x), \quad z = g(x) \tag{10.20}$$

اور

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \tag{10.21}$$

ہیں۔ مساوات 10.20 میں $x = t$ پر کرتے ہوئے اس کو مساوات 10.19 کی طرح لکھ سکتے ہیں یعنی:

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j} + g(t)\boldsymbol{k}$$

مساوات 10.21 میں دو سطحوں کے مساوات دیے گئے ہیں جن کا ملاپ منحنی دیتا ہے۔

مستوی منحنی[10] سے مراد ایسی منحنی ہے جو فضا میں کسی سطح مستوی پر پائی جاتی ہو۔ غیر مستوی منحنی کو **خم دار منحنی**[11] کہتے ہیں۔

مثال 10.7: سیدھا خط

کسی بھی سیدھی لکیر L کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ مستقل سمتیات ہیں (شکل 10.2-ب)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = (a_1 + tb_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + tb_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + tb_3)\boldsymbol{k} \tag{10.22}$$

[10] plane curve
[11] twisted curve

L نقطہ A سے گزرتی ہے جس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ ہے جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے رخ L ہو گا۔اگر $\boldsymbol{b}$ اکائی سمتیہ ہو تب اس کے ارکان کوسائن رخ[12] ہوں گے اور L پر کسی بھی نقطے کا A سے فاصلہ $|t|$ ہو گا۔

مثال 10.8: ترخیم، دائرہ

درج ذیل سمتی تفاعل xy سطح میں ترخیم کو ظاہر کرتا ہے جس کا مرکز کارتیسی نظام کے مبدا اور صدر محور x اور y محور پر ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + b\sin t\boldsymbol{j} \tag{10.23}$$

$x = a\cos t$ اور $y = b\sin t$ لیتے ہوئے $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ کے استعمال سے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0 \tag{10.24}$$

ملتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔اگر $a = b$ ہو تب مساوات 10.23 رداس a کی دائرے کی مساوات ہو گی۔

سوال 10.32: مبدا سے ہٹ کر دائرہ

xy سطح میں رداس r کا ایسا دائرہ جس کا مرکز نقطہ (x_0, y_0) پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

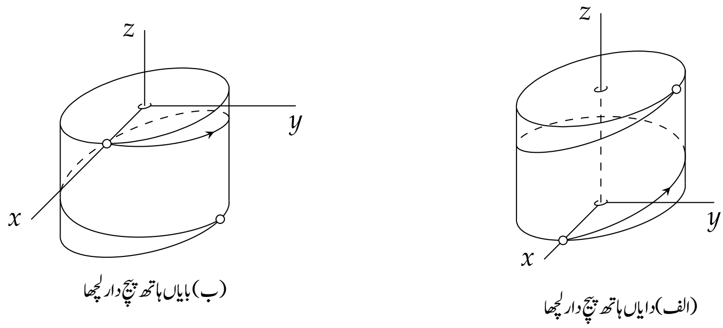
$$\frac{(x-x_0)^2}{r^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r^2} = 1$$

$\frac{x-x_0}{r} = \cos t$ اور $\frac{y-y_0}{r} = \sin t$ لیتے ہوئے $x = x_0 + r\cos t$ اور $y = y_0 + r\sin t$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا اس دائرے کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + r\cos t)\boldsymbol{i} + (y_0 + r\sin t)\boldsymbol{j} \tag{10.25}$$

---

[12] direction cosines



شکل 10.3: پیچ دار لچھے (مثال 10.33)۔

سوال 10.33: پیچ دار لچھا
پیچ دار لچھے[13] کو

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k} \qquad (c \neq 0) \tag{10.26}$$

ظاہر کرتا ہے۔اس **خم دار منحنی** کو $c > 0$ (دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) اور $c < 0$ (بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کے لئے شکل 10.3 میں دکھایا گیا ہے۔

منحنی کے کچھ حصے کو عموماً **قوس**[14] کہتے ہیں۔اس کتاب میں ہم عموماً قوس کو بھی منحنی کہیں گے۔

ہم قطع منحنی اپنی آپ کو قطع کرتی ہے۔ نقطہ قطع کو منحنی کا **متعدد نقطہ**[15] کہتے ہیں (شکل 10.4)۔ ایسی منحنی جس کے متعدد نقطے نہ پائے جاتے ہوں **سادہ منحنی**[16] کہلاتی ہے۔

---

[13] circular helix
[14] arc
[15] multiple point
[16] simple curve

شکل 10.4: دوہرا نقطوں والے منحنی

مثال 10.9: سادہ اور غیر سادہ منحنی
ترخیم اور پیچ دار لچھے سادہ ترخیم کی مثالیں ہیں۔درج ذیل $t = 1$ اور $t = -1$ پر مبدا سے دو مرتبہ گزرتی ہے لہٰذا یہ غیر سادہ منحنی کی مثال ہے۔
$$\boldsymbol{r}(t) = (t^2 - 1)\boldsymbol{i} + (t^3 - 1)\boldsymbol{j}$$

آخر میں بتاتا چلوں کہ کسی بھی منحنی C کو کئی سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے مثلاً اگر C کو مساوات 10.19 ظاہر کرے تب ہم $t = h(t^*)$ لیتے ہوئے، جہاں مساوات 10.19 میں استعمال t کی تمام قیمتوں کے لئے $h(t^*)$ بھی پائے جاتے ہوں، C کو نئی سمتی تفاعل $\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*) = \boldsymbol{r}[h(t^*)]$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثال 10.10: مقدار معلوم کی تبدیلی
xy سطح میں قطع مکافی $y = x^2$ کو درج ذیل سمتیہ تفاعل ظاہر کرتی ہے۔
$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{10.27}$$
ہم $t = -2t^*$ لیتے ہوئے اس قطع مکافی کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کر سکتے ہیں۔
$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*) = \boldsymbol{r}(-2t^*) = -2t^*\boldsymbol{i} + 4t^{*2}\boldsymbol{j}$$
اگر ہم $t = t^{*2}$ لیں تب ہمیں درج ذیل نیا سمتی تفاعل ملتا ہے
$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*) = t^{*2}\boldsymbol{i} + t^{*4}\boldsymbol{j}$$
لیکن $t^{*2} > 0$ کی بنا یہ تفاعل قطع مکافی کو صرف ربع اول میں ظاہر کرتا ہے۔

سوالات

سوال 10.34 تا سوال 10.37 میں نقطہ A سے گزرتی ہوئی سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کے رخ سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.34: $A:(0,0,0), \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}$

سوال 10.35: $A:(2,-3,1), \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$
جواب: $\boldsymbol{r}=(t+2)\boldsymbol{i}+(2t-3)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 10.36: $A:(2,0,-3), \quad \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}+3(t-1)\boldsymbol{k}$

سوال 10.37: $A:(-3,2,6), \quad \boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{r}=(5t-3)\boldsymbol{i}+(3t+2)\boldsymbol{j}+(6-7t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.38 تا سوال 10.41 میں نقطہ A اور نقطہ B سے گزرتی ہوئی سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.38: $A:(0,0,0), \quad B:(1,1,1)$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$

سوال 10.39: $A:(-3,7,-5), \quad B:(2,0,3)$
جواب: $\boldsymbol{r}=(5t-3)\boldsymbol{i}+7(1-t)\boldsymbol{j}+(8t-5)\boldsymbol{k}$

سوال 10.40: $A:(1,2,-3), \quad B:(7,2,-3)$
جواب: $\boldsymbol{r}=(6t+1)\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

سوال 10.41: $A:(3,2,0), \quad B:(0,0,0)$
جواب: $\boldsymbol{r}=3(1-t)\boldsymbol{i}+2(1-t)\boldsymbol{j}$ جس میں $t^*=1-t$ چنتے ہوئے $\tilde{\boldsymbol{r}}=3t^*\boldsymbol{i}+2t^*\boldsymbol{j}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 10.42 تا سوال 10.46 میں دیے سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.42: $y=x, \quad z=0$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}$

سوال 10.43: $y=-3x, \quad z=2x$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}-3t\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$

سوال 10.44: $2y=5x, \quad z=x-3y$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+\frac{5}{2}\boldsymbol{j}-\frac{13}{2}\boldsymbol{k}$ یا $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+5t\boldsymbol{j}-13t\boldsymbol{k}$ جہاں t^* کی جگہ t ہی لکھا گیا ہے۔

سوال 10.45: $4x-y+z=3, \quad -3x+2y+3z=19$
جواب: y اور z حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+(3t+2)\boldsymbol{j}+(5-t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.46: $x-y=2, \quad 2x+z=3$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+(t-2)\boldsymbol{j}+(3-2t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.47 تا سوال 10.55 میں دیے خطوط کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.47: $x^2+y^2=1, \quad z=0$
جواب: $\boldsymbol{r}=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}$

سوال 10.48: $y=x^3, \quad z=0$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^3\boldsymbol{j}$

سوال 10.49: $y=2x^3, \quad z=-3x^2$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j}-3t^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.50: $x^2+y^2-4x+6y=-9, \quad z=0$
جواب: نقطہ $(2,-3)$ پر رداس 2 کا دائرہ $\boldsymbol{r}=(2+2\cos t)\boldsymbol{i}+(-3+2\sin t)\boldsymbol{j}$

سوال 10.51: $4(x+1)^2+y^2=4, \quad z=0$
جواب: $\boldsymbol{r}=(-1+2\cos t)\boldsymbol{i}+2\sin t\boldsymbol{j}$

سوال 10.52: $x=-5y^2, \quad z=2y^3$
جواب: $\boldsymbol{r}=-5t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+2t^3\boldsymbol{k}$

سوال 10.53: $y=\sqrt{x}, \quad z=y-2,$
جواب: $\boldsymbol{r}=t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+(t-2)\boldsymbol{k}$

سوال 10.54: xy سطح میں درج ذیل ترخیم کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

جواب: $\boldsymbol{r}=(x_0+a\cos t)\boldsymbol{i}+(y_0+b\sin t)\boldsymbol{j}$

سوال 10.55: $x^2+y^2=4, \quad z=e^{-x}$
جواب: $\boldsymbol{r}=2\cos t\boldsymbol{i}+2\sin t\boldsymbol{j}+e^{-t}\boldsymbol{k}$

سوال 10.56: پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کا xy ، xz اور yz سطحوں پر عمودی سایہ کیا ہو گا؟

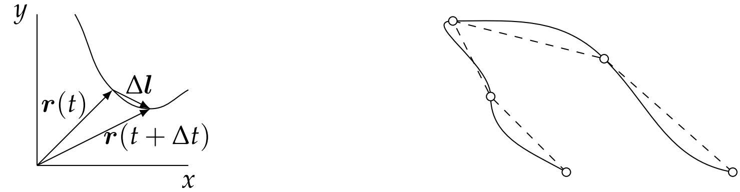
جوابات: xy میں دائرہ، xz میں کوسائن موج اور yz میں سائن موج

10.4 لمبائی قوس

سادہ منحنی C کی لمبائی کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ہم C (شکل 10.5-الف) کے دونوں سروں کے مابین متواتر (اختیاری) نقطوں کو n عدد (نقطہ دار) خط مستقیم سے یوں جوڑتے ہیں کہ $n\to\infty$ کی صورت میں لمبی ترین خط مستقیم کی لمبائی صفر کے قریب تر ہو گی۔تمام خط مستقیم کی لمبائیوں (جنہیں مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کیا جا سکتا ہے) کا مجموعہ لیتے ہیں۔اگر n کی بتدریج بڑھتی تعداد n_1 ، n_2 ، ... لیتے ہوئے مطابقتی خط مستقیم کی لمبائیوں کے مجموعے کی ترتیب l_1 ، l_2 ، ... مرکوز ہو جس کی حد l ہو تب ہم کہتے ہیں کہ C **قابل تصحیح**[17] ہے اور l کو C کی **لمبائی**[18] کہتے ہیں۔

اگر C از خود سادہ منحنی نہ ہو لیکن یہ محدود تعداد کے قابل تصحیح سادہ منحنیات پر مشتمل ہو تب C کی لمبائی سے مراد ان تمام منحنیات کی لمبائیوں کا مجموعہ ہو گا۔

[17] rectifiable
[18] length



(الف) لمبائی کی تعریف۔

(ب) استمراری قابل تفرق تفاعل کی لمبائی۔

شکل 10.5: لمبائی قوس

اگر C کو استمراری[19] قابل تفرق سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \qquad (a\le t\le b) \tag{10.28}$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب $\Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\Delta\boldsymbol{r}$ ہو گا (شکل 10.5-ب) جس کو Δt سے تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $\Delta t\to 0$ کی صورت میں درج ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

کسی بھی سمتیہ کی طرح $\dot{\boldsymbol{r}}$ کی لمبائی $\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}$ ہو گی جس کو $\mathrm{d}t$ سے ضرب دیتے ہوئے تکمل لینے سے منحنی کی کل لمبائی حاصل ہو گی۔

$$l=\int_a^b \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}t \qquad \left(\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{10.29}$$

مساوات 10.29 سے حاصل لمبائی منحنی پر محددی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اگر ہم تکمل کی بالائی حد کو مستقل b کی جگہ متغیر t رکھیں تب حاصل تکمل از خود t کا تابع تفاعل ہو گا مثلاً $s(t)$۔ یوں تکمل کے متغیرہ کو t^* لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$s(t)=\int_a^t \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}t^* \qquad \left(\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^*}\right) \tag{10.30}$$

تفاعل $s(t)$ کو C کا **لمبائی قوس تفاعل** یا C کی **لمبائی قوس**[20] کہتے ہیں۔

[19] استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا تفرق موجود ہے اور یہ تفرق استمراری ہے۔ اسی طرح دوہرا استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا دوہرا تفرق موجود ہے اور یہ دوہرا تفرق استمراری ہے، وغیرہ وغیرہ

[20] arc length

اب تک کے بحث سے ظاہر ہے کہ جیومیٹریائی طور پر کسی مستقل $t = t_0 \geq a$ کے لئے $s(t_0)$ نقطہ $t = a$ اور نقطہ $t = t_0$ کے درمیان حصے کی لمبائی دیتا ہے۔یوں $t = t_0 < a$ کی صورت میں $s(t_0) < 0$ ہو گا لہٰذا لمبائی $-s(t_0)$ ہو گی۔

منحنی کی مقدار معلوم مساوات میں s بطور مقدار معلوم کردار ادا کر سکتا ہے اور جیسا ہم دیکھیں گے اس سے کئی کلیات سادہ صورت اختیار کرتے ہیں۔

مساوات 10.30 میں ابتدائی نقطہ a کی جگہ کوئی دوسرا مستقل لیا جا سکتا ہے یعنی نقطہ $s = 0$ کو ہم خود مختاری کے ساتھ چن سکتے ہیں۔ C پر جس طرف چلنے سے s بڑھتا ہے اس طرف کو C کی **مثبت دائری سمت**[21] کہتے ہیں۔یوں منحنی کی **سمت بندی**[22] کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ کسی بھی C کی سمت بندی دو طریقوں سے کی جا سکتی ہے۔مقدار معلوم کا اس طرح تبادلہ کہ اس کا تفرق منفی حاصل ہو سے دوسری سمت بندی حاصل ہو گی۔

مساوات 10.30 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{10.31}$$

روایتی طور پر عموماً

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

اور

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{10.32}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $\mathrm{d}s$ کو C کا **خطی جزو**[23] کہتے ہیں۔

مثال 10.11: لمبائی قوس بطور مقدار معلوم

دائرے کی صورت میں

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = -a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = a^2$$

positive sense[21]
orientation[22]
linear element[23]

ہو گا لہٰذا لمبائی قوس درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$s(t)=\int_0^t a\,\mathrm{d}t^*=at$$

یوں t کو s کا تفاعل $t(s)=\frac{s}{a}$ لکھتے ہوئے دائرے کی ایسی مساوات لکھتے ہیں جس میں s بطور مقدار معلوم ہے۔

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{s}{a}\right)=a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i}+a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}$$

اس دائرے کی سمت بندی گھڑی کی الٹ رخ ہے۔یوں گھڑی کے الٹ رخ چلتے ہوئے s بڑھے گا۔ہم $s=-\tilde{s}$ پر کرتے ہوئے دائرے کی سمت بندی گھڑی کے رخ رکھ سکتے ہیں۔یوں

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha \quad \text{اور} \quad \sin(\alpha)=-\sin\alpha$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\boldsymbol{r}\left(-\frac{\tilde{s}}{a}\right)=a\cos\frac{\tilde{s}}{a}\boldsymbol{i}-a\sin\frac{\tilde{s}}{a}\boldsymbol{j}$$

چونکہ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}}=-1<0$ ہے لہٰذا درج بالا میں گھڑی کے رخ چلتے ہوئے بڑھتا $\tilde{s}$ حاصل ہو گا۔

سوالات

تمام سوالات میں لمبائی قوس دریافت کریں۔دیے تفاعل کا خط کھینچیں۔

سوال 10.57: لیزم: $x=0$ سے $x=1$ تک $y=\cosh x,\quad z=0,$
جواب: $\sinh 1$

سوال 10.58: پیچ دار لچھا: $(a,0,0)$ سے $(a,0,2\pi c)$ تک $y=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+ct\boldsymbol{k},$
جواب: $2\pi\sqrt{a^2+c^2}$

سوال 10.59: قطع مکافی: $y = x^2, \quad z = 0,$ $(0,0,0)$ سے $(2,4,0)$ تک
جواب: $\frac{\operatorname{arcsinh}(8)}{4} + 2\sqrt{65}$

سوال 10.60: چار دندان تدویر: پوری لمبائی $\boldsymbol{r} = a\cos^3 t\boldsymbol{i} + a\sin^3 t\boldsymbol{j},$
جواب: اس کو چار سادہ قابل تصحیح ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے $6a$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.61: : $(1,0,0)$ سے $(-1,\pi,0)$ تک $\boldsymbol{r} = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j},$
جواب: $\frac{\pi^2}{2}$

سوال 10.62: $\boldsymbol{r} = e^t\cos t\,\boldsymbol{i} + e^t\sin t\,\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
جواب: $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

سوال 10.63: ثابت کریں کہ $x = a$ تا $x = b$ منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔(مساوات 10.29 کی مدد لیں۔)

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad (y' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}) \tag{10.33}$$

جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j}$ سے $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i} + \dot{f}\boldsymbol{j}$ اور $\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ لکھ کر جواب حاصل کریں۔

سوال 10.64: درج بالا مساوات (سوال 10.63) کی مساوات استعمال کرتے ہوئے رداس r کے دائرے کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب: x محور کے بالائی جانب قوس کی مثبت دائری سمت بائیں سے دائیں ہے جبکہ محور کے نچلی جانب مثبت دائری سمت دائیں سے بائیں ہے۔یوں ایک بار $-1 = x$ تا $x = 1$ اور دوسری بار $x = 1$ تا $x = -1$ تکمل لیں۔ کل لمبائی $2\pi r$ حاصل ہو گی۔

سوال 10.65: اگر منحنی کو کروی محدد میں $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ سے ظاہر کیا جائے تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\phi^2$$

جواب: $x=\rho\cos\phi$ اور $y=\rho\sin\phi$ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial\rho}\,\mathrm{d}\rho+\frac{\partial x}{\partial\phi}\,\mathrm{d}\phi \implies \mathrm{d}x=\cos\phi\,\mathrm{d}\rho-\rho\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial\rho}\,\mathrm{d}\rho+\frac{\partial y}{\partial\phi}\,\mathrm{d}\phi \implies \mathrm{d}y=\sin\phi\,\mathrm{d}\rho+\rho\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$$

جنہیں مساوات 10.32 میں پر کرنے سے درکار نتیجہ ملتا ہے۔

سوال 10.65 میں دیا گیا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 10.66 تا سوال 10.70 میں لمبائی قوس دریافت کریں۔

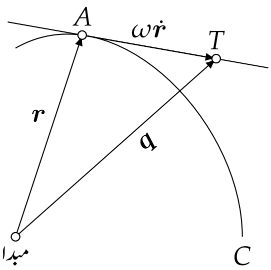
سوال 10.66: رداس r کے دائرے کی کل لمبائی۔
جواب: $2\pi r$

سوال 10.67: $\rho=e^{\phi},\quad 0\le\phi\le\pi$
جواب: $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

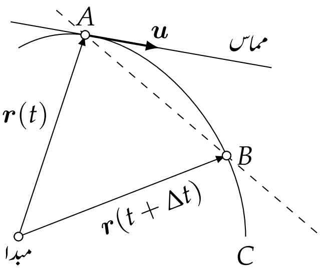
سوال 10.68: $\rho=\phi^2,\quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{(\pi^2+16)^{\frac{3}{2}}}{24}-\frac{8}{3}$

سوال 10.69: قلب نما $\rho=a(1-\cos\theta)$ (اس کا خط جو قلب نما ہے کو کھینچیں۔)
جواب: $8a$

سوال 10.70: $\rho=a(1+\cos\theta)$
جواب: $8a$



(ب) مماس الجبرائی اظہار



(الف) منحنی کا مماس

شکل 10.6: مماس اور اس کا اظہار

10.5 مماس، انحنا اور مروڑ

نقطہ A پر منحنی C کے مماس سے مراد A اور منحنی پر دوسرا نقطہ B سے گزرتے ہوا وہ سیدھا خط ہے جو B کو A کے قریب تر کرنے سے حاصل ہو گا (شکل 10.6-الف)۔

فرض کریں کہ C کو استمراری قابل تفرق تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں t کوئی بھی مقدار معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کریں کہ t اور $t+\Delta t$ بالترتیب A اور B دیتے ہیں۔ ان نقطوں سے گزرتا ہوا سیدھا خط L درج ذیل سمتیہ کے رخ ہو گا۔

$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

یوں اگر سمتیہ

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{10.34}$$

صفر سمتیہ نہ ہو تب اس کی سمت ہی نقطہ A پر مماس کی سمت ہو گی۔ یہ سمتیہ بڑھتے t کے رخ ہے۔ $\dot{\boldsymbol{r}}$ کو نقطہ A پر C کا **مماس**[24] کہتے ہیں جس کا مطابقتی اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا جس کو A پر C کا **اکائی سمتیہ مماس**[25] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} \tag{10.35}$$

---

tangent[24]
unit tangent vector[25]

اب اگر C کو $\boldsymbol{r}(s)$ سے ظاہر کیا جائے، جہاں s لمبائی قوس ہے، تب مساوات 10.31 کے تحت $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ اکائی سمتیہ ہو گا لہٰذا مساوات 10.35 درج ذیل دے گی۔

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{10.36}$$

شکل 10.6-ب سے ظاہر ہے کہ مماس پر کسی بھی نقطہ T کا تعین گر سمتیہ، A کے تعین گر سمتیہ اور A سے مماس کی سمت میں سمتیہ کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$\boldsymbol{q}(\omega) = \boldsymbol{r} + \omega\dot{\boldsymbol{r}} \tag{10.37}$$

جہاں ω حقیقی متغیرہ ہے۔

فرض کریں کہ منحنی C کو تین گنا استمراری قابل تفرق تفاعل[26] $\boldsymbol{r}(s)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں s لمبائی قوس ہے۔تب درج ذیل کو C کی **انحنا**[27] کہتے ہیں۔

$$\kappa(s) = \left|\boldsymbol{u}'(s)\right| = \left|\boldsymbol{r}''(s)\right| \qquad (\kappa \geq 0) \tag{10.38}$$

اگر $\kappa \neq 0$ ہو تب $\boldsymbol{u}'(s)$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p}$ درج ذیل ہو گا جس کو C کا **اکائی صدر عمودی سمتیہ**[28] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{u}'}{\kappa} \qquad (\kappa > 0) \tag{10.39}$$

صفحہ 740 پر مثال 10.5 کے نتیجے کے تحت $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{u}$ قائمہ الزاویہ ہوں گے۔درج ذیل کو C کا **دوہرا عمودی اکائی سمتیہ**[29] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{p} \qquad (\kappa > 0) \tag{10.40}$$

سمتی ضرب کی تعریف کے تحت $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ دائیں ہاتھ تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات ہوں گے (حصہ 7.3 اور حصہ 7.7)۔ ان تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات کو نقطہ غور پر C کا **سہ سطحی مجسم**[30] کہتے ہیں۔اس نقطے سے گزرتے ہوئے تین سیدھے خطوط جو $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے رخ ہوں کو بالترتیب C کا **مماس**، **صدر عمود** اور **دوہرا عمود** کہتے ہیں۔

[26] صفحہ 752 کے آخر پر حاشیہ دیکھیں
[27] curvature
[28] unit principal normal vector
[29] unit binormal vector
[30] trihedron

اگر تفرق $\boldsymbol{b}'$ صفر نہ ہو تب مثال 10.5 کے تحت یہ $\boldsymbol{b}$ کے عمودی ہو گا۔ساتھ ہی ساتھ یہ $\boldsymbol{u}$ کے بھی عمودی ہے۔درحقیقت اگر ہم $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}=0$ کا تفرق لیں تو ہمیں $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}'=0$ ملتا ہے۔اب چونکہ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}'=0$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{u}=0$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{b}'$ کی صورت $\boldsymbol{b}'=\alpha\boldsymbol{p}$ ہو گی جہاں α غیر سمتی ہے۔روایتی طور پر $\alpha=-\tau$ لیا جاتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{b}'=-\tau\boldsymbol{p}\qquad(\kappa>0)\tag{10.41}$$

غیر سمتی تفاعل τ کو C کی مروڑ[31] کہتے ہیں۔مساوات 10.41 کے دونوں اطراف کو $\boldsymbol{p}$ سے ضرب دینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\tau(s)=-\boldsymbol{p}(s)\cdot\boldsymbol{b}'(s)\tag{10.42}$$

درج بالا تصورات منحنیات کے استعمال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

مثال 10.12: پیچ دار لچھا

پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کی لمبائی $s=t\sqrt{a^2+c^2}$ حاصل ہوتی ہے لہٰذا پیچ دار لچھے کو

$$\boldsymbol{r}(s)=a\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i}+a\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j}+c\frac{s}{K}\boldsymbol{k},\qquad K=\sqrt{a^2+c^2}$$

لکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(s)=\boldsymbol{r}'(s)&=-\frac{a}{K}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{i}+\frac{a}{K}\cos\frac{s}{K}j+\frac{c}{K}\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{r}''(s)&=-\frac{a}{K^2}\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i}-\frac{a}{K^2}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j}\\
\kappa=\left|\boldsymbol{r}''\right|&=\sqrt{\boldsymbol{r}''\cdot\boldsymbol{r}''}=\frac{a}{K^2}=\frac{a}{a^2+c^2}\\
\boldsymbol{p}(s)&=\frac{\boldsymbol{r}''(s)}{\kappa(s)}=-\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i}-\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j}\\
\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{u}(s)\times\boldsymbol{p}(s)&=\frac{c}{K}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{i}-\frac{c}{K}\cos\frac{c}{K}\boldsymbol{j}+\frac{a}{K}\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{b}'(s)&=\frac{c}{K^2}\cos\frac{c}{K}\boldsymbol{i}+\frac{c}{K^2}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j}\\
\tau(s)=-\boldsymbol{p}(s)\cdot\boldsymbol{b}'(s)&=\frac{c}{K^2}=\frac{c}{a^2+c^2}
\end{aligned}$$

---

[31] torsion

اس طرح پیچ دار لچھے میں مستقل انحنا اور مستقل مروڑ پایا جائے گا۔ اگر $c > 0$ (شکل 10.3-الف دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) ہو تب $\tau > 0$ ہو گا جبکہ $c < 0$ (شکل 10.3-ب بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کی صورت میں $\tau < 0$ ہو گا۔ یوں

چونکہ $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ غیر تابع سمتیات ہیں لہٰذا فضا میں کسی بھی سمتیہ کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{u}'$ ، $\boldsymbol{p}'$ اور $\boldsymbol{b}'$ موجود ہوں تب انہیں بھی ان غیر تابع سمتیات کی مدد سے (درج ذیل) لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad \boldsymbol{u}' = && \kappa \boldsymbol{p} && \\
&\text{(ب)} \quad \boldsymbol{p}' = -\kappa \boldsymbol{u} && && +\tau \boldsymbol{b} \\
&\text{(پ)} \quad \boldsymbol{b}' = && -\tau \boldsymbol{p} &&
\end{aligned}
\tag{10.43}
$$

مساوات 10.43-الف کو مساوات 10.39 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جبکہ مساوات 10.43-پ در حقیقت مساوات 10.41 ہے۔ سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{u}$$

ان میں دایاں کلیہ کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 10.43-الف اور مساوات 10.43-پ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو مساوات 10.43-ب ہے۔

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{u}' = -\tau \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \times \kappa \boldsymbol{p} = -\tau(-\boldsymbol{b}) + \kappa(-\boldsymbol{u})$$

سوالات

سوال 10.71 تا سوال 10.74 میں نقطہ N پر دیے گئے تفاعل کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.71: $\boldsymbol{r}(t) = \cos t \boldsymbol{i} + \sin t \boldsymbol{j}, \quad N: (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\omega)\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\omega)\boldsymbol{j}$

سوال 10.72: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} - t^3\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad N: (1, -1, 1)$

جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = (1+\omega)\boldsymbol{i} - (1+3\omega)\boldsymbol{j} + (1+2\omega)\boldsymbol{k}$

سوال 10.73: $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+3t\boldsymbol{k},\quad N:(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{4}\pi)$

جواب: $\boldsymbol{q}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\omega)\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\omega)\boldsymbol{j}+(\frac{3}{4}\pi+3\omega)\boldsymbol{k}$

سوال 10.74: $\boldsymbol{r}(t)=2\cos t\boldsymbol{i}-2\sin t\boldsymbol{j},\quad N:(\sqrt{3},-1)$

جواب: $\boldsymbol{q}(\omega)=(\sqrt{3}-\omega)\boldsymbol{i}-(1+\sqrt{3}\omega)\boldsymbol{j}$

سوال 10.75: ثابت کریں کہ مثال 10.12 میں دیے گئے پیچ دار لچھے کی $\boldsymbol{u}$ اور z محور کے مابین زاویہ مستقل مقدار ہے۔

جواب: $\cos\alpha=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}=\frac{c}{a^2+c^2}=$ مستقل

سوال 10.76: ثابت کریں کہ صرف سیدھے خطوط واحد منحنی ہیں جن کے اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہیں۔

جواب: اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہونے کی صورت میں $r'=a\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+e\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں a ، c اور e مستقل قیمتیں ہیں۔ تکمل لینے سے منحنی کی عمومی مساوات $r=(at+b)\boldsymbol{i}+(ct+d)\boldsymbol{j}+(et+f)\boldsymbol{k}$ حاصل ہوتی ہے جو سیدھے خط کی عمومی مساوات ہے اور جہاں b ، d اور f تکمل کے مستقل ہیں۔

سوال 10.77: ثابت کریں کہ سیدھے خطوط کی انحنا مکمل صفر ہو گی۔

جواب: سیدھے خطوط کی عمومی مساوات کو سوال 10.76 کی جواب میں پیش کیا گیا ہے جس کا دو درجی تفرق صفر کے برابر ہے۔

سوال 10.78: ثابت کریں کہ منحنی $\boldsymbol{r}(t)$ کی انحنا درج ذیل ہے، جہاں t مقدار معلوم ہے۔

$$\kappa=\frac{\sqrt{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})(\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})-(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})^2}}{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^{\frac{3}{2}}} \tag{10.44}$$

سوال 10.79: ثابت کریں کہ رداس a کے دائرے کی انحنا $\frac{1}{a}$ کے برابر ہے۔

جواب: ایسے دائرے کی مساوات $\boldsymbol{r}(s)=a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i}+a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}$ ہے جہاں لمبائی قوس کو بطور مقدار معلوم استعمال کیا گیا ہے۔ اس سے $\left|\boldsymbol{r}''\right|=\frac{1}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.80: ثابت کریں کہ xy سطح میں منحنی $y = y(x)$ کی انحنا $\kappa = \frac{\lvert y'' \rvert}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ہو گی۔ مساوات 10.44 استعمال کریں۔

سوال 10.81: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل (غیر سمتی سہ ضرب) ثابت کریں۔

$$\tau = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}') \tag{10.45}$$

جواب: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\tau = -\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p})' = -\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p}') = -(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}')$$

صفحہ 550 پر مساوات 7.58 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p} = \lvert\boldsymbol{p}\rvert\lvert\boldsymbol{p}\rvert\sin 0^\circ = 0$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}) = 0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = -(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}') = -(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}'\,\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}')$$

سوال 10.82: ثابت کریں کہ مساوات 10.39 کی مدد سے مساوات 10.45 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{r}''\,\boldsymbol{r}''')}{\kappa^2} \tag{10.46}$$

10.6 سمتی رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ فضا میں متحرک جسم J کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{r}(t)$ جسم J کا راستہ C دے گا۔ گزشتہ حصے سے ظاہر ہے کہ سمتیہ

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{10.47}$$

راستہ C کا مماس ہو گا لہٰذا یہ J کی لمحاتی حرکت کے رخ ہو گا۔ مساوات 10.31 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں s لمبائی قوس ہے۔ C پر کسی مقررہ نقطے ($s = 0$) سے لمبائی قوس s کو ناپا جاتا ہے۔

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{10.48}$$

یوں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ جسم J کی رفتار[32] ہو گی اور سمتیہ $\boldsymbol{v}$ جسم J کی سمتی رفتار سمتیہ[33] ہو گا جس کو عموماً سمتی رفتار[34] کہتے ہیں۔

سمتی رفتار کی تفرق کو سمتیہ اسراع[35] یا اسراع[36] کہتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{10.49}$$

مثال 10.13: مرکز مائل اسراع اور مرکز مائل قوت
xy سطح میں مبدا پر واقع، رداس R کے دائرے C پر گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ کمیت m کی حرکت (شکل 10.7-الف) کو درج ذیل سمتیہ ظاہر کرتا ہے

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\,\boldsymbol{j} \qquad (\omega > 0)$$

جس کا تفرق سمتی رفتار دے گا جو C کا مماس ہو گا۔

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = -\omega R\sin\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega R\cos\omega t\,\boldsymbol{j}$$

اس سے رفتار حاصل کرتے ہیں

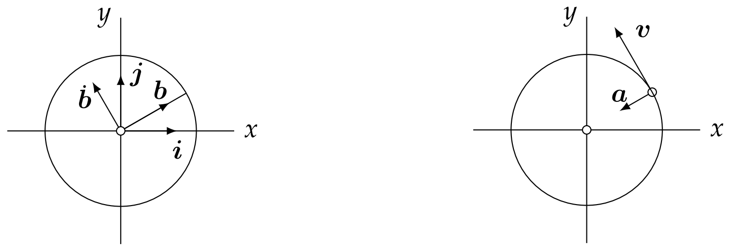
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \omega R$$

جو مستقل مقدار ہے۔ رفتار کو (دائرے کے مرکز سے فاصلہ) R سے تقسیم کرنے سے زاویائی رفتار[37] ω حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ اسراع درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = -\omega^2 R\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \omega^2 R\sin\omega t\,\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{r} \tag{10.50}$$

---

speed[32]
velocity vector[33]
velocity[34]
acceleration vector[35]
accleration[36]
angular speed[37]



(ب) قرص پر حرکت (مثال 10.14)۔ (الف) مرکز مائل اسراع (مثال 10.13)

شکل 10.7: مرکز مائل اسراع

جو دائرے کی مرکز کے رخ ہے لہٰذا اس کو **مرکز مائل اسراع**[38] کہتے ہیں۔اسراع کی قیمت $|\boldsymbol{a}| = \omega^2 R$ ہے۔کمیت m پر **مرکز مائل قوت**[39] $m\boldsymbol{a}$ عمل کرے گا۔اس کا **مخالف قوت** $-m\boldsymbol{a}$ ہو گا جس کو **مرکز گریز قوت**[40] کہتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{v}$ کے وقتی تفرق کو $\boldsymbol{a}$ کہتے ہیں۔مثال 10.13 میں $|\boldsymbol{v}|$ مستقل مقدار ہے لیکن $\boldsymbol{a} \neq 0$ ہے۔اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $\boldsymbol{a}$ کی مقدار عموماً $|\boldsymbol{v}|$ کے تفرق کے برابر نہیں ہوتی ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ $\boldsymbol{a}$ عموماً راہ C کا مماس نہیں ہوتا ہے۔آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔زنجیری تفرق سے

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \boldsymbol{r}''\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \tag{10.51}$$

چونکہ $\boldsymbol{r}'$ راہ C کا اکائی مماس سمتیہ $\boldsymbol{u}$ ہے (مساوات 10.36) جس کا تفرق $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{r}''$ سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے عمودی ہے (حصہ 10.5) لہٰذا مساوات 10.51 اسراع کو مماسی اسراع $\boldsymbol{r}'\ddot{s}$ اور عمودی اسراع $\boldsymbol{r}''\dot{s}^2$ کے مجموعے کے طور پر پیش کرتی ہے۔اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ رفتار کا تفرق صفر ہونے کی صورت $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ میں بھی اسراع ہو گی۔

---

[38] centripetal acceleration
[39] centripetal force
[40] centrifugal force

مثال 10.14: کوریولس اسراع
ایک قرص (شکل 10.7-ب) جو اپنی مرکز کے گرد مستقل زاویائی رفتار ω سے، گھڑی کی سوئیوں کے مخالف رخ، گھوم رہا ہے پر جسم J رداس کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔اس حرکت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{b}$ ایسا اکائی سمتیہ ہے جو قرص کے ساتھ ساتھ گھومتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{b} \tag{10.52}$$

J کی اسراع دریافت کریں۔

حل: $\boldsymbol{b}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{b}(t) = \cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{10.53}$$

مساوات 10.52 کا تفرق سمتی رفتار

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{b} + t\dot{\boldsymbol{b}} \tag{10.54}$$

دیتا ہے۔ظاہر ہے کہ قرص کے لحاظ سے J کی رفتار $\boldsymbol{b}$ ہے جبکہ کے گھومنے کی وجہ سے اضافی رفتار $t\dot{\boldsymbol{b}}$ پایا جاتا ہے۔دوبارہ تفرق سے اسراع

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = 2\dot{\boldsymbol{b}} + t\ddot{\boldsymbol{b}} \tag{10.55}$$

حاصل ہو گی۔ مساوات 10.55 کے آخری جزو میں (مساوات 10.53 کے دو درجی تفرق سے) $\ddot{\boldsymbol{b}} = -\omega^2\boldsymbol{b}$ ہو گا لہٰذا $t\ddot{\boldsymbol{b}}$ مرکز مائل اسراع ہو گی۔

مساوات 10.55 میں زیادہ دلچسپ جزو $2\dot{\boldsymbol{b}}$ ہے جس کو **کوریولس اسراع**[41] کہتے ہیں جو قرص کی گردش اور قرص پر J کی حرکت کے باہمی عمل سے پیدا ہوتا ہے۔اس کا رخ $\dot{\boldsymbol{b}}$ دیتا ہے جو قرص کے کنارے کا مماس ہے اور جو مقررہ xy کارتیسی نظام میں گھومنے کی رخ ہو گا۔یوں اگر کمیت m کا شخص قرص پر رداسی سمت میں چل رہا ہو تب اس پر قوت $-2m\dot{\boldsymbol{b}}$ عمل کرے گا جو گھومنے کی مخالف رخ ہو گا۔

[41] Coriolis acceleration

مثال 10.15: دو گردش کی خطی میل
کرہ کے **نصف النہار**[42] N پر جسم J (کرہ کے لحاظ سے) مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہے جبکہ کرہ از خود مستقل زاویائی رفتار $\omega(>0)$ سے گردش کر رہا ہے (شکل 10.8)۔ J کی اسراع دریافت کریں۔

حل: N پر J کی حرکت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں کرہ کی رداس R ہے، N پر J کی زاویائی رفتار $\gamma(>0)$ ہے، N کی سطح میں $\boldsymbol{b}$ افقی اکائی سمتیہ ہے اور $\boldsymbol{k}$ فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیہ ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t)=R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b}+R\sin\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.56}$$

چونکہ $\boldsymbol{b}$ کرہ کے ساتھ گردش کرتا ہے لہٰذا اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیات ہیں۔

$$\boldsymbol{b}=\cos\omega t\,\boldsymbol{i}+\sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{10.57}$$

مساوات 10.56 کا تفرق لے کر سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=R\cos\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}}-\gamma R\sin\gamma t\,\boldsymbol{b}+\gamma R\cos\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.58}$$

سمتی رفتار کا تفرق لے کر اسراع حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=R\cos\gamma t\,\ddot{\boldsymbol{b}}-2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}}-\gamma^2R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b}-\gamma^2R\sin\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.59}$$

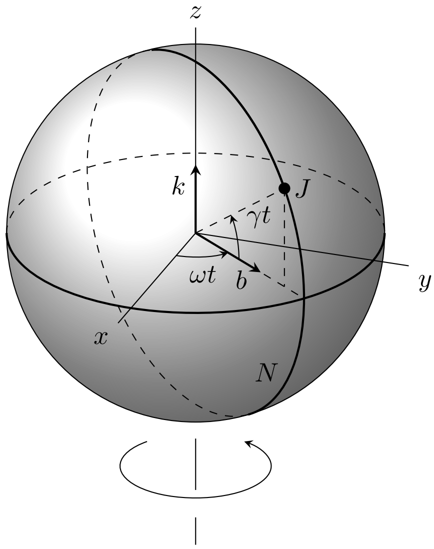
اب مساوات 10.57 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{b}}&=-\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{i}+\omega\cos\omega t\,\boldsymbol{j}\\ \ddot{\boldsymbol{b}}&=-\omega^2\cos\omega t\,\boldsymbol{i}-\omega^2\sin\omega t\,\boldsymbol{j}=-\omega^2\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

مساوات 10.56 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 10.59 کے آخری دو ارکان کا مجموعہ $-\gamma^2\boldsymbol{r}$ کے برابر ہے لہٰذا مساوات 10.59 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}=-\omega^2R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b}-2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}}-\gamma^2\boldsymbol{r} \tag{10.60}$$

meridian[42]



شکل 10.8: دو گردش کی خطی میل (مثال 10.15)

مساوات 10.60 کے دائیں ہاتھ پہلا جزو کرہ کی گردش سے پیدا مرکز مائل اسراع ہے جبکہ مساوات کا آخری جزو N پر J کی گردش سے پیدا مرکز مائل اسراع ہے۔ مساوات کا درمیانہ جزو **کوریولس اسراع**[43] $\boldsymbol{a}_c$ ہے۔

$$\boldsymbol{a}_c = -2\gamma R \sin\gamma t\, \dot{\boldsymbol{b}} \tag{10.61}$$

شمالی نیم کرہ پر $\sin\gamma t > 0$ ہے لہٰذا مساوات 10.61 میں منفی کی علامت کی بنا کوریولس اسراع $\dot{\boldsymbol{b}}$ کی مخالف رخ ہو گا یعنی کرہ کی سطح کی مماسی، N کے عمودی اور کرہ کی گردش کی مخالف رخ۔ اس کی حتمی مقدار $2\gamma R|\sin\gamma t|\,\omega$ کی قیمت شمالی قطب پر زیادہ سے زیادہ ہو گی اور **ارضی خط استوا**[44] پر اس کی قیمت صفر ہو گی۔ یوں شمال کی رخ اڑنے والا ایسا پرندہ جس کی کمیت m ہو پر قوت $m\boldsymbol{a} - c$ کے مخالف رخ قوت $m\boldsymbol{a}_c$ عمل کرے گا جو مثال 10.14 میں محسوس کی گئی قوت کی طرح ہے۔ اس قوت کی وجہ سے پرندہ N کے دائیں جانب بھٹک جائے گا۔ اس کے برعکس ارضی خط استوا سے جنوب کی رخ اڑنے والا پرندہ، N کے بائیں جانب بھٹک جائے گا۔ یہی اثرات جہاز اور مزائل[45] کے اڑنے پر بھی اثر انداز ہوتے ہیں۔ کرہ ارض پر ہوا کی حرکت پر بھی ان قوتوں کا اثر پایا جاتا ہے۔

---

[43] Coriolis acceleration
[44] equator
[45] missile

سوالات

سوال 10.83 تا سوال 10.90 میں حرکت کرتی جسم کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے جہاں $t(>0)$ وقت کو ظاہر کرتی ہے۔اس راہ کی شکل بیان کریں۔ سمتیہ رفتار، رفتار اور اسراع دریافت کریں۔

سوال 10.83: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=1,\quad \boldsymbol{a}=0$

سوال 10.84: $\boldsymbol{r}=t^3\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{v}=3t^2\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=3t^2,\quad \boldsymbol{a}=6t\boldsymbol{j}$

سوال 10.85: $\boldsymbol{r}=(t^2-3t)\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{v}=(2t-3)\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=\left|2t-3\right|,\quad \boldsymbol{a}=2\boldsymbol{j}$

سوال 10.86: $\boldsymbol{r}=t^2\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{v}=2t\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=\left|\sqrt{4t^2+1}\right|,\quad \boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}$

سوال 10.87: $\boldsymbol{r}=\cos t\,\boldsymbol{i}$
جوابات: $\boldsymbol{v}=-\sin t\,\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=\left|\sin t\right|,\quad \boldsymbol{a}=-\cos t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.88: $\boldsymbol{r}=2\cos 5t\,\boldsymbol{i}-4\sin 3t\,\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{v}=-10\sin 5t\,\boldsymbol{i}-12\cos 3t\,\boldsymbol{j},\ |\boldsymbol{v}|=\left|\sqrt{100\sin^2 5t+144\cos^2 3t}\right|$
$\boldsymbol{a}=-50\cos 5t\,\boldsymbol{i}+36\sin 3t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.89: $\boldsymbol{r}=3\cos t^2\,\boldsymbol{i}+2\sin t^2\,\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{v}=-6t\sin t^2\,\boldsymbol{i}+4t\cos t^2\,\boldsymbol{j},\ |\boldsymbol{v}|=\left|\sqrt{36t^2\sin^2 t^2+16t^2\cos^2 t^2}\right|$
$\boldsymbol{a}=(-6\sin t^2-12t^2\cos t^2)\,\boldsymbol{i}+(4\cos t^2-8t^2\sin t^2)\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.90: $\boldsymbol{r}=5t^2\,\boldsymbol{i}+3t\,\boldsymbol{j}+t^3\,\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{v}=10t\,\boldsymbol{i}+3\,\boldsymbol{j}+3t^2\,\boldsymbol{k},\ |\boldsymbol{v}|=\left|\sqrt{9t^4+100t^2+9}\right|$
$\boldsymbol{a}=10\,\boldsymbol{i}+6t\,\boldsymbol{k}$

سوال 10.91: زمین سے چاند تک کا فاصلہ $3.85\times10^8\,\mathrm{m}$ ہے اور زمین کے گرد چاند 27.322 دن یعنی $2.36\times10^6\,\mathrm{s}$ میں ایک چکر پورا کرتا ہے۔زمین کے رخ چاند کی مرکز مائل اسراع دریافت کریں۔

جواب: $|\boldsymbol{a}| = 0.0027\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ جو سطح زمین پر اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سے 3593 گنا کم ہے۔

سوال 10.92: وہ حرکت دریافت کریں جس کی اسراع مستقل قیمت ہو۔

جواب: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}_0 \frac{t^2}{2} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{x}_0$ جہاں $\boldsymbol{a}_0$ ، $\boldsymbol{v}_0$ اور $\boldsymbol{x}_0$ مستقل قیمتیں ہیں۔

سوال 10.93: $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{r} = R\cos\omega t \boldsymbol{i} + R\sin\omega t \boldsymbol{j}$ لیتے ہوئے مساوات 7.55 کے تفرق سے مساوات 10.50 حاصل کریں۔

سوال 10.94: اگر ایک جسم کی حرکت $\boldsymbol{r}(t)$ سے ظاہر کی جائے جہاں t وقت ہے تب $t = \phi\bar{t}$ تبادلے سے کیا مراد ہو گا؟

جواب: راہ تبدیل نہیں ہو گی البتہ راہ پر حرکت کی نوعیت تبدیل ہو گی۔

10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ

ہم متعدد متغیرات پر مبنی تفاعل کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔ہم دو متغیرات کے تفاعل کو استعمال کرتے ہوئے نتائج حاصل کریں گے جو زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی درست ہوں گے۔

نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل $f(x, y)$ اس صورت **استمراری**[46] ہو گا جب اس نقطے کے **ہمسائیگی**[47] میں f معین ہو اور کسی بھی مثبت عدد ϵ (جو غیر صفر اور کتنا ہی چھوٹا کیوں نا ہو) کے لئے ہم ایسا مثبت عدد σ تلاش کر سکتے ہیں کہ اس کے نقطے کے ہمسائیگی قرص

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \sigma^2 \tag{10.62}$$

میں تمام (x, y) پر درج ذیل ہو۔

$$\left| f(x, y) - f(x_0, y_0) \right| < \epsilon \tag{10.63}$$

شکل 10.9: دو متغیرات کے تفاعل کی استمرار

جیو میٹریائی طور پر (x_0, y_0) پر $f(x, y)$ کے استمراری ہونے سے مراد یہ ہے کہ $f(x_0, y_0)$ کو قطع 2ϵ کا وسط لیتے ہوئے ہم غیر صفر رداس σ کا ایسا قرص تلاش کر سکتے ہیں جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو اور اس قرص پر تمام (x, y) کا مطابقتی $f(x, y)$ اس قطع پر پایا جاتا ہو (شکل 10.9)۔

ہم ابتدائی علم الاحصاء سے جانتے ہیں کہ اگر w متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور x از خود t کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس کو تفرق کا زنجیری قاعدہ کہتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{10.64}$$

درج ذیل مسئلہ تفرق کی زنجیری قاعدے کو عمومی بناتا ہے۔

مسئلہ 10.1: (زنجیری قاعدہ)
فرض کریں کہ xy سطح میں **دائرہ کار**[48] D [49] میں تفاعل $w = f(x, y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔مزید فرض کریں کہ کسی وقفہ T میں $x = x(t)$ اور $y = y(t)$ قابل تفرق تفاعل ہیں جہاں T میں ہر t کا مطابقتی نقطہ $[x(t), y(t)]$ ، دائرہ کار D میں پایا جاتا ہے۔ایسی صورت میں T میں تمام t کے لئے $w = f[x(t), y(t)]$ قابل تفرق ہو گا یعنی:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{10.65}$$

---

[46] continuous
[47] ہمسائیگی سے مراد xy سطح میں قرص $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ ہے جہاں $r > 0$ ہے۔
[48] domain
[49] دائرہ کار D **جڑی** ہوئے نقطوں کا **کھلا** سلسلہ ہے، جہاں **جڑا** ہونے سے مراد یہ ہے کہ D کے کسی بھی دو نقطوں کو متناہی تعداد کے ایسے سیدھے قطعات سے ملایا جا سکتا ہے جن کے تمام نقطے D کا حصہ ہوں، اور **کھلا** سے مراد یہ ہے کہ D میں ہر نقطے کی ہمسائیگی کے تمام نقطے بھی D کا حصہ ہیں۔ مثلاً کسی مستطیل یا دائرے کا اندرونی حصہ دائرہ کار ہو گا۔

ثبوت: ہم T میں t پر Δt اتنا چھوٹا چنتے ہیں کہ $t+\Delta t$ بھی T کا حصہ ہو۔ مزید ہم

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t) \tag{10.66}$$

اور

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \tag{10.67}$$

لیتے ہیں۔ مساوات 10.67 میں $f(x, y+\Delta y)$ جمع اور منفی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Delta w = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

درج بالا مساوات کے قوسین پر باری باری ایک متغیر کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ لاگو کرتے ہوئے

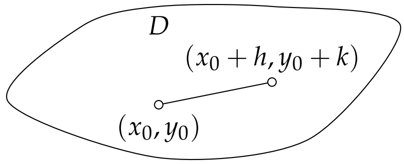
$$\Delta w = \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_1, y+\Delta y} + \Delta y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x, y_1} \tag{10.68}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں x اور $x+\Delta x$ کے درمیان کہیں x_1 پایا جاتا ہے، y اور $y+\Delta y$ کے درمیان کہیں y_1 پایا جاتا ہے۔ مساوات 10.68 کے دونوں اطراف کو Δt سے تقسیم کرتے اور $\Delta t \to 0$ لیتے ہوئے، اور چونکہ $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ کو استمراری تصور کیا گیا ہے، مساوات 10.66 حاصل ہوتا ہے۔

درج بالا مسئلے کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 10.2: فرض کریں کہ xy سطح میں **دائرہ کار** D پر تفاعل $w = f(x,y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ uv سطح میں کسی وقفہ B میں $x = x(u,v)$ اور $y = y(u,v)$ قابل جزوی تفرق تفاعل ہیں جہاں B میں ہر (u,v) کا مطابقتی نقطہ $[x(u,v), y(u,v)]$، دائرہ کار D میں پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں B میں تفاعل $w = f[x(u,v), y(u,v)]$ معین ہو گا اور B میں تمام u اور v کے لئے اس تفاعل کے جزوی تفرقات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned} \tag{10.69}$$



شکل 10.10: مسئلہ اوسط قیمت

u یا v کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ 10.1 کے اطلاق سے درج بالا مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

ابتدائی علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں x_0 اور x_0+h کے درمیان موزوں نقطے پر تفرق لیا جاتا ہے۔

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

اس کو احصاء تفرقیات کا مسئلہ اوسط قیمت کہتے ہیں جس کو وسعت دے کر دو متغیرات کے تفاعل پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 10.3: (مسئلہ اوسط قیمت)
فرض کریں کہ دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ (x_0, y_0) اور (x_0+h, y_0+k) دائرہ کار D میں پائے جانے والے ایسے نقطے ہیں کہ انہیں جوڑنے والا سیدھا قطع بھی D میں پائی جاتی ہو (شکل 10.10)۔ایسی صورت میں

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y} \tag{10.70}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں جزوی تفرقات کو اس قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: درج ذیل

$$\begin{aligned}x&=x_0+th, \quad y=y_0+tk \quad (0\le t\le 1)\\F(t)&=f(x_0+th, y_0+tk)\end{aligned}$$

سے

$$f(x_0+h, y_0+k) = F(1), \quad f(x_0, y_0) = F(0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ایک متغیر تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت 0 اور 1 کے درمیان ایسی قیمت t_1 پائی جاتی ہے جس کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) = F'(t_1) \tag{10.71}$$

اب چونکہ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = h$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k$ ہیں لہٰذا مسئلہ 10.1 کے تحت

$$F' = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k \tag{10.72}$$

ہو گا جہاں دائیں ہاتھ تفرقات کو نقطہ (x_0+t_1h, y_0+t_1k) پر حاصل کیا جائے گا جو اس قطع پر واقع ہے جس کے سر (x_0, y_0) اور (x_0+h, y_0+k) ہیں۔مساوات 10.72 کو مساوات 10.71 میں پر کرنے سے مساوات 10.70 حاصل ہوتا ہے۔

تین متغیرات کے تفاعل $f(x, y, z)$ جو مسئلہ 10.3 میں دیے گئے شرائط کے مماثل شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے بالکل اسی مسئلے کی طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) - f(x_0, y_0, z_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z} \tag{10.73}$$

جہاں جزوی تفرقات کو (x_0, y_0, z_0) تا (x_0+h, y_0+k, z_0+l) قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 10.95 تا سوال 10.98 میں مساوات 10.65 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ دریافت کریں۔

سوال 10.95: $w = x - y, \quad x = t, \quad y = \ln t$

جواب: $1 - \frac{1}{t}$

سوال 10.96: $w=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x=e^{-t}, \quad y=e^t$
جواب: $\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}$

سوال 10.97: $w=\frac{x}{y}, \quad x=g(t), \quad y=ht$
جواب: $\frac{g'h-gh'}{h^2}$

سوال 10.98: $w=\frac{x}{y}, \quad x=\cos t, \quad y=\sin t$
جواب: $-\operatorname{cosec}^2 t$

سوال 10.99: فرض کریں کہ $w=f(x,y,z)$ ہے جہاں x ، y اور z از خود t کے تفاعل ہیں۔ثابت کریں کہ مسئلہ 10.1 کی طرز کے شرائط کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{10.74}$$

سوال 10.100 اور سوال 10.101 میں مساوات 10.74 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ دریافت کریں۔

سوال 10.100: $w=x^2+y^2+z^2, \quad x=t^2, \quad y=\ln t, \quad z=e^t$
جواب: $\frac{2}{t}\ln t+2e^{2t}+4t^3$

سوال 10.101: $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=t$
جواب: $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

سوال 10.102: مسئلہ 10.2 کو ثابت کریں۔

سوال 10.103 تا سوال 10.105 میں $\frac{\partial w}{\partial u}$ اور $\frac{\partial w}{\partial v}$ دریافت کریں۔

سوال 10.103: $w=\ln(x^2+y^2), \quad x=e^u\cos v, \quad y=e^u\sin v$
جواب: $2, \ 0$

سوال 10.104: $w=xy, \quad x=e^u\cos v, \quad y=e^u\sin v$
جواب: $e^{2u}\sin 2v, \ e^{2u}\cos 2v$

سوال 10.105: $w=x^2-y^2, \quad x=u^2-v^2, \quad y=2uv$
جواب: $4u(u^2-3v^2), \ 4v(v^2-3u^2)$

سوال 10.106: مساوات 10.73 حاصل کریں۔

سوال 10.107: فرض کریں کہ $w = f(x, y)$ ہے جہاں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ ہیں۔درج ذیل ثابت کریں۔

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

جواب: درج ذیل استعمال کرتے ہوئے با آسانی ثابت ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta \\
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta
\end{aligned}$$

سوال 10.108: فرض کریں کہ $w = f(v, z)$ ہے جہاں $v = x + ct$ اور $z = x - ct$ ہیں جبکہ c مستقل قیمت ہے۔درج ذیل ثابت کریں جہاں تمام تفرقات کو ممکن تصور کریں۔ w_{xx} سے مراد $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ہے۔

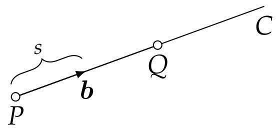
$$c^2 w_{xx} - w_{tt} = 4c^2 w_{vz}$$

سوال 10.109: فرض کریں کہ $w = f(x, y)$ ہے جہاں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ ہیں۔درج ذیل ثابت کریں۔

$$w_{xx} + w_{yy} = w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta}$$

جواب: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ سے درج ذیل حاصل کرتے ہوئے ثابت ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&r_x = \frac{x}{r},\ \theta_x = -\frac{y}{r^2},\ r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \text{وغیرہ} \\
&w_{xx} = x^2 r^{-2} w_{rr} - 2xyr^{-3} w_{r\theta} + y^2 r^{-4} w_{\theta\theta} + y^2 r^{-3} w_r + 2xyr^{-4} w_\theta, \quad \text{وغیرہ}
\end{aligned}$$



شکل 10.11: سمتی تفرق

10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان

ہم فضا میں غیر سمتی میدان $f(P) = f(x, y, z)$ پر غور کرتے ہیں (حصہ 10.1)۔ہم جانتے ہیں کہ x ، y اور z رخ میں تفاعل کی تبدیلی کی شرح بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہے۔ آئیں کسی بھی رخ اس تفاعل کی تبدیلی کی شرح یعنی **سمتی تفرق** حاصل کریں۔

ہم فضا میں کوئی نقطہ P اور اس نقطے پر کوئی رخ چنتے ہیں۔اس رخ کو اکائی سمتیہ $\boldsymbol{b}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔نقطہ P سے s فاصلے پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ سیدھے خط C پر نقطہ Q پایا جاتا ہے (شکل 10.11)۔اگر درج ذیل حد

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s} \tag{10.75}$$

موجود ہو تب اس کو P پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ f کی **سمتی تفرق**[50] کہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ $\frac{\partial f}{\partial s}$ در حقیقت P پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

یوں P پر f کے لا متناہی تعداد میں سمتی تفرقات پائے جاتے ہیں۔اگر P کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ ہو تب C کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{r}(s) = x(x)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \qquad (s \geq 0) \tag{10.76}$$

اور $\frac{\partial f}{\partial s}$ سے مراد C پر $f[x(s), y(s), z(s)]$ کا لمبائی s کے ساتھ تفرق ہے۔اب اگر f کے استمراری جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں تب زنجیری قاعدے (مسئلہ 10.1) کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' \tag{10.77}$$

---

[50] directional derivative

جہاں $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ کو $s = 0$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔اب مساوات 10.76 سے

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو دیکھ کر خیال آتا ہے کہ سمتیہ

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{10.78}$$

متعارف کرنے سے مساوات 10.77 کو اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot f_{\text{ڈھلوان}} \qquad (|\boldsymbol{b}| = 1) \tag{10.79}$$

سمتیہ $f_{\text{ڈھلوان}}$ کو غیر سمتی تفاعل f کی **ڈھلوان**[51] کہتے ہیں۔

تفرقی عامل ∇ [52]

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

متعارف کرتے ہوئے مساوات 10.78 کو

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{10.80}$$

اور مساوات 10.79 کو

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla f \qquad (|\boldsymbol{b}| = 1) \tag{10.81}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اگر $\boldsymbol{b}$ کارتیسی x محور کی رخ ہو تب $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}$ ہو گا اور f کا سمتی تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

اسی طرح مثبت y اور مثبت z محور کی رخ سمتی تفرق بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہوں گے۔

---

[51] gradient

[52] ∇ یونانی حرف تہجی ہے جو نیبلا کہلاتا ہے۔

مثال 10.16: سمتی تفرق
غیر سمتی تفاعل $f(x,y,z)=x^2+2y-z^3$ کا نقطہ $P:(-2,1,3)$ پر $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ کی رخ سمتی تفرق دریافت کریں۔

حل: چونکہ $|\boldsymbol{a}|=5$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}$ کی رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$ ہو گا۔ f کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\nabla f=2x\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3z^2\boldsymbol{k} \implies \nabla f(P)=-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-27\boldsymbol{k}$$

یوں نقطہ P پر $\boldsymbol{a}$ کی رخ سمتی تفرق درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\boldsymbol{b}\cdot\nabla f=\frac{1}{5}(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})\cdot(-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-27\boldsymbol{k})=-4$$

حاصل جواب منفی ہے جس کا مطلب ہے کہ $\boldsymbol{a}$ کی رخ f گھٹتا ہے۔

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ ∇f کی قیمت اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 10.78 سمتی تفرق دیتا ہے جو کسی دوسرے کارتیسی نظام میں درج ذیل لکھا جائے گا

$$f_{\text{ڈھلوان}}=\frac{\partial f}{\partial x^*}\boldsymbol{i}^*+\frac{\partial f}{\partial y^*}\boldsymbol{j}^*+\frac{\partial f}{\partial z^*}\boldsymbol{k}^*$$

جہاں x^* ، y^* اور z^* دوسرے نظام کے محور جبکہ $\boldsymbol{i}^*$ ، $\boldsymbol{j}^*$ اور $\boldsymbol{k}^*$ اس کے مطابقتی اکائی سمتیات ہیں۔ان مساوات میں جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں اور یہ کہنا مشکل ہو گا کہ دونوں مساوات سے یکساں ڈھلوان حاصل ہو گا۔

اب غیر سمتی تفاعل کی تعریف کے تحت نقطہ P پر f کی قیمت کا دارومدار P پر ہے نا کہ چنے گئے کارتیسی نظام پر۔اسی طرح C پر لمبائی s پر بھی چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔یوں $\frac{\partial f}{\partial s}$ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ اب مساوات 10.81 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial s}=|\boldsymbol{b}|\left|\nabla f\right|\cos\gamma=\left|\nabla f\right|\cos\gamma$$

جہاں $\boldsymbol{b}$ اور ∇f کے مابین زاویہ γ ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\cos\gamma = 1$ یعنی $\gamma = 0$ پر $\frac{\partial f}{\partial s}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\lvert \nabla f \rvert = \frac{\partial f}{\partial s}$ پائی جاتی ہے۔اب چونکہ $\frac{\partial f}{\partial s}$ غیر متغیر ہے لہٰذا ∇f کی قیمت اور سمت پر کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔اس سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.4: ڈھلوان
ایسا غیر سمتی تفاعل $f(P) = f(x, y, z)$ جس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں کی ڈھلوان موجود ہے جس کی لمبائی اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام محدد کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔اگر نقطہ P پر f کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب P پر f کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی ڈھلوان کی رخ ہو گی۔

ڈھلوان کی دوسری جیومیٹریائی خصلت جانتے ہیں۔فضا میں قابل تفرق غیر سمتی تفاعل $f(x, y, z)$ پر غور کرتے ہیں۔ہر مستقل c کے لئے مساوات

$$f(x, y, z) = c = \text{مستقل} \tag{10.82}$$

سطح S کو ظاہر کرتا ہے۔ c کے تمام قیمتیں لیتے ہوئے ہمیں نسل سطح ملتا ہے جنہیں f کی **ہموار سطحیں**[53] کہتے ہیں۔ تفاعل کی تعریف کے تحت، فضا میں کسی بھی نقطے پر f کی قیمت منفرد ہو گی لہٰذا فضا میں ہر نقطے سے f کی صرف اور صرف ایک ہموار سطح گزرے گی۔ہم جانتے ہیں کہ فضا میں کسی بھی منحنی C کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (حصہ 10.4)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{10.83}$$

اب اگر C کو S پر رہنے کا پابند بنایا جائے تب مساوات 10.83 میں تفاعل $x(t)$ ، $y(t)$ اور $z(t)$ کو مساوات 10.82 پر پورا اترنا ہو گا یعنی:

$$f[x(t), y(t), z(t)] = c \tag{10.84}$$

زنجیری تفرق (مسئلہ 10.1) استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.84 کا t کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

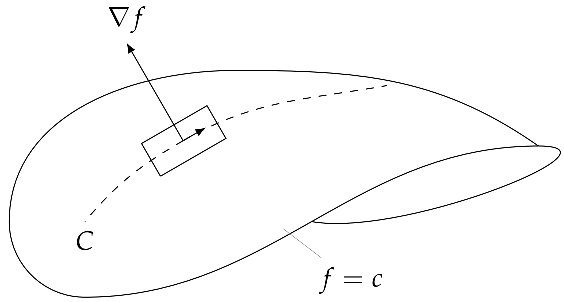
$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = (\nabla f)\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{10.85}$$

جہاں سمتیہ

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$

منحنی C کا مماس ہے (حصہ 10.5)۔ S پر مختلف سمتوں میں نقطہ P سے گزرتی منحنی کے مماس، P پر S کو چھوتی سیدھی سطح سے گزریں گے۔اس سیدھی سطح کو P پر S کی **مماسی سطح**[54] کہتے ہیں۔ مماسی سطح کے

[53] level surfaces
[54] tangent plane



شکل 10.12: ہموار سطح اور ڈھلوان

عمودی، نقطہ P سے گزرتا خط، P پر S کا **عمود**[55] کہلاتا ہے (شکل 10.12)۔ صفحہ 522 پر مسئلہ 7.3 کی مدد سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.5: ڈھلوان اور سطح کی عمود
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D پر غیر سمتی تفاعل f معین اور قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ دائرہ کار D میں P کوئی نقطہ ہے جو f کی ہموار سطح S پر پایا جاتا ہے۔ اب اگر P پر f کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب یہ ڈھلوان نقطہ P پر S کے عمودی ہو گا۔

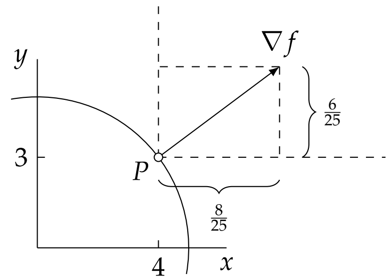
مثال 10.17: ہموار منحنی کا عمود
تفاعل $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ کے ہموار سطحیں $f = c$ مبدا پر ہم مرکز دائرے ہیں۔ ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = \frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$$

کی سمت ان دائروں کے عمودی ہے جو f کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کی سمت ہے۔ مثلاً نقطہ $P : (4, 3)$ پر $\nabla f = \frac{8}{25}\boldsymbol{i} + \frac{6}{25}\boldsymbol{j}$ ہے (شکل 10.13)۔

---

[55] normal



شکل 10.13: دائرے کا عمود

مثال 10.18: سطح کا عمود
مخروط $z^2 = 2(x^2 + y^2)$ کا نقطہ $P : (1, 0, 3)$ پر اکائی عمودی سمتیہ دریافت کریں۔ہم مخروط کو ہموار سطح $f = 0$ تصور کر سکتے ہیں جہاں $f(x, y, z) = 2(x^2 + y^2) - z^2$ ہو گا۔یوں

$$\nabla f = 4x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k} \implies \nabla f(P) = 4\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k}$$

ہو گا۔ مسئلہ 10.5 سے اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ملتا ہے۔دوسرا اکائی عمودی سمتیہ $-\boldsymbol{n}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{4}{\sqrt{52}}\boldsymbol{i} - \frac{6}{\sqrt{52}}\boldsymbol{k}$$

طبیعیات کے میدان میں کئی ایسے سمتی تفاعل پائے جاتے ہیں جو کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سے حاصل ہوتے ہیں۔ایسے غیر سمتی تفاعل کو **مخفی تفاعل**[56] کہتے ہیں۔ مخفی تفاعل کے استعمال سے سمتی تفاعل کا تجزیہ نہایت آسان ہو جاتا ہے۔آئیں مخفی تفاعل کے استعمال کی مثال دیکھیں۔

---

[56] potential function

مثال 10.19: ثقلی میدان۔ لاپلاس مساوات
ثقلی میدان پر مثال 10.4 میں غور کیا گیا جہاں درج ذیل مساوات حاصل کی گئی

$$\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{f}|\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -GMm\left[\frac{x-x_0}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\boldsymbol{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\boldsymbol{k}\right] \tag{10.86}$$

جہاں

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

کمیت M اور m کے درمیان فاصلہ ہے۔ یہاں غور کرنے سے

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2(x-x_0)}{2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x-x_0}{r^3} \tag{10.87}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2(y-y_0)}{2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y-y_0}{r^3} \tag{10.88}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2(z-z_0)}{2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{z-z_0}{r^3} \tag{10.89}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{f}$ کو درج ذیل غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان لکھا جا سکتا ہے

$$h(x,y,z) = \frac{GMm}{r} \qquad (r > 0) \tag{10.90}$$

لہٰذا سمتی تفاعل $\boldsymbol{f}$ کا مخفی تفاعل h ہے۔

تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}$$

حاصل ہوتا ہے جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہے لہٰذا تفاعل $h = \frac{GMm}{r}$ درج ذیل پر پورا اترتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \tag{10.91}$$

مساوات 10.91 انتہائی اہم جزوی تفرقی مساوات ہے جس کو **لاپلاس مساوات**[57] کہتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ کو f کا **لاپلاسی**[58] کہتے ہیں اور اس کو $\nabla^2 h$ یا Δh سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تفرقی عامل

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(جو **مربع نیبلا** پڑھا جاتا ہے) کو **لاپلاسی عامل**[59] کہتے ہیں۔ لاپلاسی عامل استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.91 کو نہایت عمدگی سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla^2 h = 0 \tag{10.92}$$

یہ ثابت کرنا ممکن ہے کہ کمیت کی کسی بھی طرز کی تقسیم سے حاصل قوت کو ایسے سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو کسی غیر سمتی تفاعل h کا ڈھلوان ہو گا جہاں h مساوات 10.91 پر ہر اس مقام پر پورا اترتا ہے جہاں کمیت موجود نہ ہو۔

طبیعیات میں کئی قاعدے نیوٹن کے کشش ثقل کے قانون کی طرز رکھتے ہیں مثلاً فضا میں Q_1 اور Q_2 بار کی باہمی قوت درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{f} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{کولمب کا قانون}$$

جہاں ϵ برقی مستقل ہے۔ یوں $\boldsymbol{f}$ کو مخفی تفاعل $h = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r}$ کا ڈھلوان لکھا جا سکتا ہے جہاں $r > 0$ کی صورت میں h مساوات 10.91 پر پورا اترتا ہے۔

اگر غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سمتی تفاعل دیتا ہو تب ایسی میدان کو **بقائی میدان**[60] کہتے ہیں۔ جیسا کہ ہم اگلے باب میں دیکھیں گے، بقائی میدان میں کسی بھی ذرہ کو نقطہ N_1 سے نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی صرف اور صرف N_1 اور N_2 پر منحصر ہے نا کہ اس راستے پر جو ذرہ منتقل کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہو۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر میدان بقائی نہیں ہوتا۔

Laplace equation[57]
Laplacian[58]
Laplacian operator[59]
conservative field[60]

سوالات

سوال 10.110 تا سوال 10.121 میں ڈھلوان ∇f دریافت کریں۔

سوال 10.110: $f = 3x + 2y + 4$
جواب: $\nabla f = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

سوال 10.111: $f = e^y \sin x$
جواب: $\nabla f = e^y(\cos x\,\boldsymbol{i} + \sin x\,\boldsymbol{j})$

سوال 10.112: $f = \ln(x^2 + y^2)$
جواب: $\nabla f = \frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$

سوال 10.113: $f = x^2 + y^2$
جواب: $\nabla f = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$

سوال 10.114: $f = \sin^{-1}\frac{y}{x}$
جواب: $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}(-\frac{y}{x}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$

سوال 10.115: $f = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
جواب: $\nabla f = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$

سوال 10.116: $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
جواب: $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

سوال 10.117: $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$
جواب: $\nabla f = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

سوال 10.118: $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
جواب: $\nabla f = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

سوال 10.119: $f = x^2yz^3$
جواب: $\nabla f = 2xyz^3\boldsymbol{i} + x^2z^3\boldsymbol{j} + 3x^2yz^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.120: $f = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$
جواب: $\nabla f = 2\cos(x^2 + y^2 + z^2)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

سوال 10.121: $f = e^{xyz}$
جواب: $\nabla f = e^{xyz}(yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k})$

سوال 10.122 تا سوال 10.127 میں ∇f دریافت کریں۔ کئی مقامات پر ہموار سطح $f = c$ کی ڈھلوان ∇f کو تیر سے ظاہر کریں۔

سوال 10.122: $f = x - 2y$
جواب: $\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$

سوال 10.123: $f = \frac{y}{x}$
جواب: $\frac{1}{x^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$

سوال 10.124: $f = \frac{x}{y}$
جواب: $\frac{1}{y^2}(y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j})$

سوال 10.125: $f = xy$
جواب: $y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال 10.126: $f = x^3y^2$
جواب: $3x^2y^2\boldsymbol{i} + 2x^3y\boldsymbol{j}$

سوال 10.127: $f = 4x^2 + 3y^2$
جواب: $8x\boldsymbol{i} + 6y\boldsymbol{j}$

سوال 10.128 تا سوال 10.134 میں نقطہ $N : (x, y)$ پر مستوی منحنی کا عمودی سمتیہ کھینچیں۔

سوال 10.128: $y = x, \quad N : (2, 2)$
جواب: $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.129: $y = x^2, \quad N : (3, 9)$
جواب: $6\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.130: $y = 2x + 7, \quad N : (-1, 5)$
جواب: $2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.131: $y^2 = 3x + 3, \quad N : (2, 3)$
جواب: $3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$

سوال 10.132: $x^2 + y^2 = 36, \quad N : (4, 3)$
جواب: $8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$

سوال 10.133: $y^3 = x^2, \quad N : (4, 8)$
جواب: $16\boldsymbol{i} - 48\boldsymbol{j}$

سوال 10.134: $x^2 - y^2 = 1, \quad N : (1, 0)$
جواب: $2\boldsymbol{i}$

سوال 10.135 تا سوال 10.140 میں نقطہ $N : (x, y, z)$ پر سطح کا عمودی سمتیہ دریافت کریں۔

سوال 10.135: $x + y + z = 0, \quad N : (1, 1, -2)$
جواب: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 10.136: $3x - y + 2z = 1, \quad N : (1, -4, 1)$
جواب: $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

سوال 10.137: $z = x^2 + y^2, \quad N : (2, 3, 13)$
جواب: $4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 10.138: $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad N : (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$
جواب: $2\sqrt{3}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$

سوال 10.139: $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6, \quad N : (1, -1, 1)$
جواب: $4\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

سوال 10.140: $z = xy^2, \quad N : (2, 1, 2)$
جواب: $\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 10.141 تا سوال 10.146 ایسا f دریافت کریں کہ $\boldsymbol{v} = \nabla f$ ہو۔

سوال 10.141: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{v}$ کو دیکھ کر $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ اور $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$ لکھا جا سکتا ہے۔ $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ کا تکمل $f = x + c$ ہو گا جہاں c از خود y اور z پر منحصر ہو سکتا ہے۔اسی طرح $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ سے $f = y + c'$

جبکہ $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$ سے $f = -z + c''$ ملتا ہے۔ تینوں جوابات کو اکٹھے کرتے ہوئے $f = x + y - z$ لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 10.142: $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{2} + y + \frac{z^2}{2}$

سوال 10.143: $\boldsymbol{v} = 2x\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
جواب: $x^2 + y^3 + z$

سوال 10.144: $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$
جواب: xyz

سوال 10.145: $\boldsymbol{v} = \frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$
جواب: $\ln(x^2 + y^2)$

سوال 10.146: $\boldsymbol{v} = e^x \cos y\, \boldsymbol{i} - e^x \sin y\, \boldsymbol{j}$
جواب: $e^x \cos y$

سوال 10.147: تفاعل $f = x^2 + y^2$ کا نقطہ $N : (3,3)$ پر $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کی سمت میں سمتی تفرق دریافت کریں۔

جوابات: $6, 6\sqrt{2}, 6, 0$

سوال 10.148 تا سوال 10.153 میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں N پر f کی سمتی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.148: $f = 3x - 2y, \quad N : (1,1), \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

سوال 10.149: $f = 2x^2 - 3y^2, \quad N : (2,3), \quad \boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$
جواب: $-\frac{12}{\sqrt{13}}$

سوال 10.150: $f = x^2 - y^2, \quad N : (-1,1), \quad \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
جواب: 0

سوال 10.151: $f = \frac{y}{x}, \quad N : (3,2), \quad \boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
جواب: $\frac{1}{9\sqrt{5}}$

سوال 10.152: $f = 3x - 2y + 4z, \quad N:(3,2,1), \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

سوال 10.153: $f = x^2 + y^2 + z^2, \quad N:(4,0,5), \quad \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: $-6\sqrt{3}$

سوال 10.154: مستقل نقطہ $N:(x_0,y_0,z_0)$ سے متغیر نقطہ $Q:(x,y,z)$ تک فاصلہ r ہے۔ثابت کریں کہ N سے Q کے رخ اکائی سمتیہ ∇r ہے۔

سوال 10.155: ثابت کریں کہ سوال 10.110 تا سوال 10.112 کے تفاعل لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

سوال 10.156 تا سوال 10.159 میں دیے گئے تمام تفرقات ممکن تصور کرتے ہوئے دیے گیا تعلق ثابت کریں۔

سوال 10.156: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

سوال 10.157: $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$

سوال 10.158: $\nabla(\frac{f}{g}) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

سوال 10.159: $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g$

10.9

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لٰہذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لٰہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 8.ا اور مساوات 9.ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 10.ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 2.ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

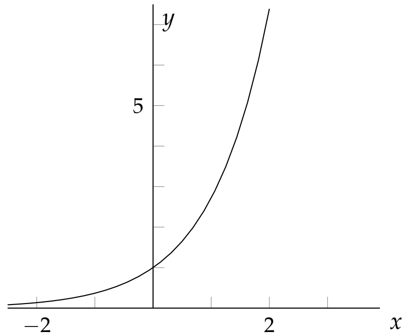
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

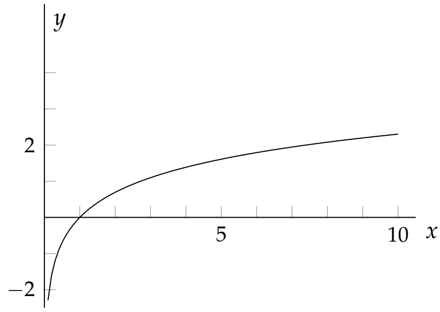
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

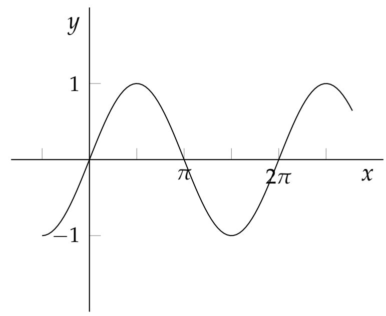


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

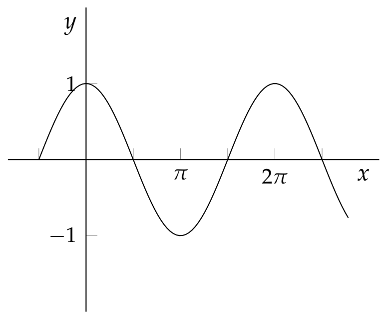


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$



(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}=10^{-\log x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \tag{ب.6}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{ب.7}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned} \tag{ب.8}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \tag{ب.9}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{ب.10}$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned} \tag{ب.11}$$

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \end{aligned} \tag{ب.12}$$

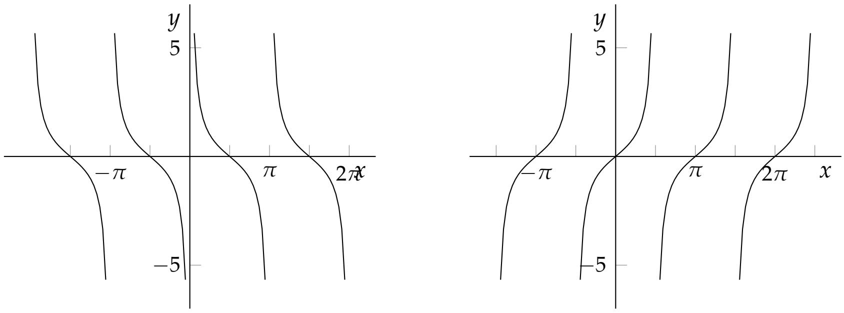
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A} \tag{ب.13}$$

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B} \tag{ب.14}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x} \tag{ب.15}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \tag{ب.16}$$



(الف) $\tan x$ (ب) $\cot x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

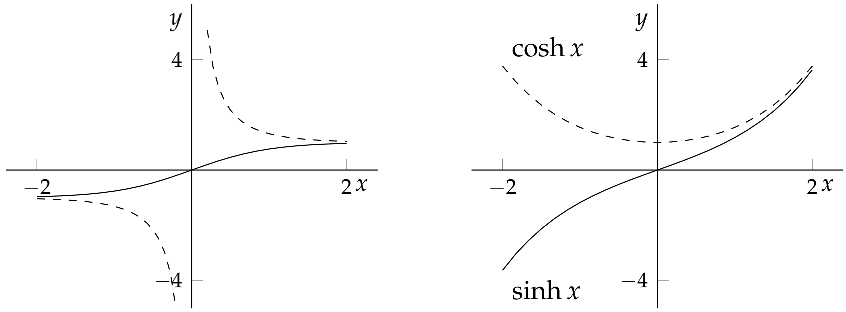
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

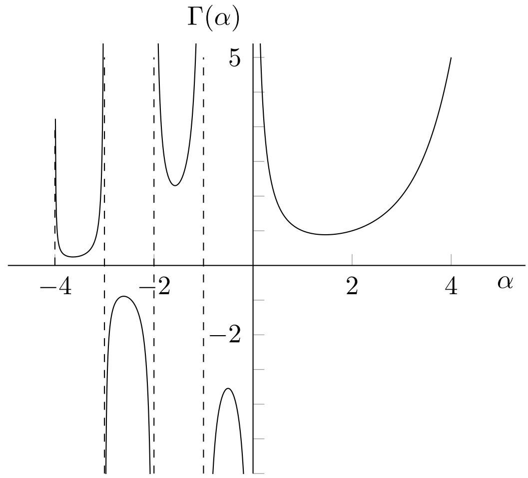
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\qquad(\alpha\neq 0,-1,\cdots)\tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha=0,-1,-2,\cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)\approx\sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}\tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\qquad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

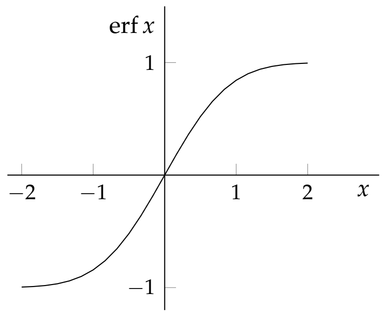
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

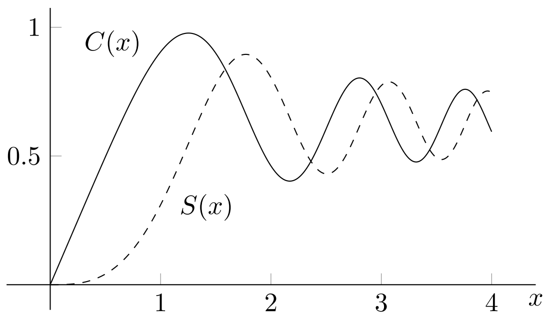
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{ب.39}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{ب.40}$$

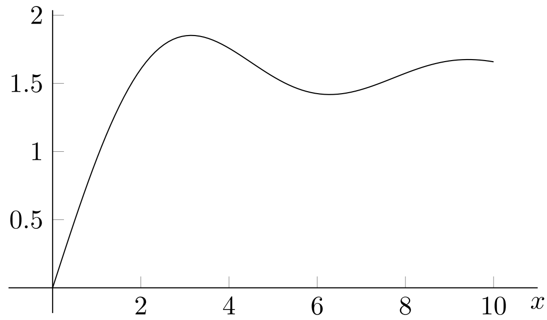
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.41}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$