انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم ایک مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ واحد ایک بلا منصوبہ متغیر، مثلاً X ، وابستہ کرنا ہو گا۔حصہ 24.7 سے ہم جانتے ہیں کہ اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم $F(x)=P(X\le x)$ اس تقسیم کو مکمل طور پر تعین کرتا ہے، چونکہ ہر وقفہ $a<X\le b$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم دو مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ دو بلا منصوبہ متغیرات، مثلاً X اور Y ، وابستہ کرنا ہو گا۔مثال کے طور پر فولاد کی راک ویل سختی کو X اور اس میں کاربن کی مقدار کو Y ظاہر کر سکتے ہیں۔ہر ایک تجربہ اعداد کی جوڑی $X=x$ ، $Y=y$ دے گی جس کو مختصراً (x,y) لکھا اور XY مستوی پر بطور نقطہ دکھایا جا سکتا ہے۔ہم اب ایک مستطیل $a_1<X\le b_1$ ، $a_2<Y\le b_2$ پر غور کرتے ہیں (شکل 24.14)۔اگر ایسے ہر ایک مستطیل کے لئے ہمیں مطابقتی احتمال

$$P(a_1<X\le b_1,\ a_2<Y\le b_2)$$

معلوم ہو تب ہم کہتے ہیں کہ **دو بعدی بلا منصوبہ متغیر**[119] (X,Y) یا بلا منصوبہ متغیرات X اور Y کا **دو بعدی تفاعل احتمال**[120] ہمیں معلوم ہے۔تفاعل

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y) \tag{24.81}$$

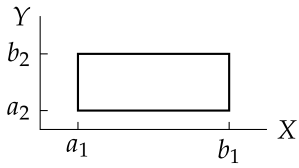
کو اس تقسیم یا (X,Y) کا **تقسیمی تفاعل**[121] کہتے ہیں۔چونکہ (سوال 24.145)

$$\begin{aligned}&P(a_1<X\le b_1,a_2<Y\le b_2)\\&\quad=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)\end{aligned} \tag{24.82}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 24.81 تقسیم کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

---

[119] two-dimensional random variable
[120] two-dimensional probability distribution
[121] distribution function



شکل 24.14: دو بعدی تقسیم کا تصور

غیر مسلسل دو بعدی تقسیمیں

اگر (X,Y) درج ذیل خواص رکھتا ہو تب متغیر (X,Y) اور اس کا مطابقتی تقسیم **غیر مسلسل** کہلائے گا۔

X,Y متناہی تعداد یا قابل شمار لامتناہی تعداد کی جوڑی قیمتیں (x,y) اختیار کر سکتا ہے جن کے مطابقتی احتمال مثبت ہوں گے۔ ہر ایسا دائرہ کار جس میں ایسی کوئی جوڑی نہ پائی جاتی ہو کا احتمال 0 ہو گا[122]۔

فرض کریں کہ x_i, y_j ایسی کوئی جوڑی ہے اور $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ ہے (جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ p_{ij} کسی مخصوص i,j کی جوڑیوں کے لئے صفر بھی ہو سکتا ہے)۔ تفاعل

$$f(x,y)=\begin{cases} p_{ij} & x=x_i, y=y_j \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases} \tag{24.83}$$

کو (X,Y) کا **تفاعل احتمال** کہتے ہیں؛ یہاں غیر تابع طور پر $i=1,2,\cdots$ اور $j=1,2,\cdots$ ہیں۔ مساوات 24.42 کا مماثل

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} f(x_i,y_j) \tag{24.84}$$

ہے اور مساوات 24.38 کی جگہ درج ذیل شرط ہو گا۔

$$\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)=1 \tag{24.85}$$

[122] دھیان رہے کہ پہلی خاصیت سے یہ نہیں کہا جا سکتا ہے

مثال کے طور پر اگر ہم ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے اچھال کر

$$\text{ایک روپیہ کی خط کی تعداد} = X$$
$$\text{پانچ روپیہ کی خط کی تعداد} = Y$$

پر غور کریں تب X اور Y کی قیمت 0 یا 1 ہو سکتی ہے اور تفاعل احتمال

$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = \dfrac{1}{4}$ ورنہ (ان کے علاوہ) $f(x,y) = 0$ ہو گا۔

استمراری دو بعدی تقسیمیں

(X,Y) اور اس کا تقسیم اس صورت استمراری کہلاتے ہیں جب مطابقتی تفاعل تقسیم کو دوہرا تکمل

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x^*,y^*)\,\mathrm{d}x^*\,\mathrm{d}y^* \tag{24.86}$$

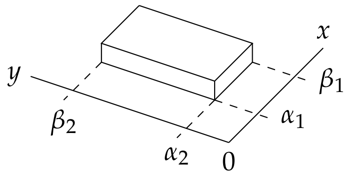
کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں $f(x,y)$ معین، غیر منفی اور پورے مستوی میں محدود ہے ماسوائے متناہی تعداد کے استمراری قابل تفرق منحنیات پر۔ $f(x,y)$ کو تقسیم کی **کثافت احتمال** کہتے ہیں۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{24.87}$$

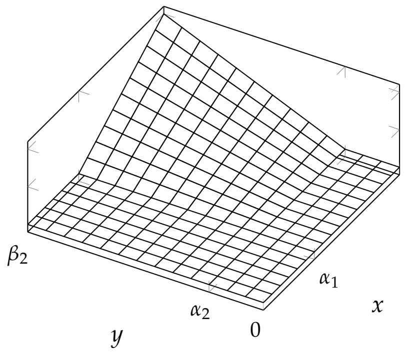
مثال کے طور پر (شکل 24.15)

$$\text{جب } (x,y) \text{ مستطیل } R \text{ میں ہو تب } f(x,y) = \frac{1}{k} \text{ ورنہ } f(x,y) = 0 \tag{24.88}$$

مستطیل R میں یکساں تقسیم کو ظاہر کرتا ہے؛ یہاں k مستطیل کا رقبہ یعنی $k = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)$ ہے۔اس تقسیم کو شکل 24.16 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 24.15: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل احتمال کثافت



شکل 24.16: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل تقسیم

دو بعدی غیر مسلسل تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

فرض کریں کہ بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر (X, Y) کا تفاعل احتمال $f(x, y)$ ہے۔ اگر $X = x$ ہو، جبکہ Y جس میں ہمیں دلچسپی نہیں ہے کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہو، تب تفاعل احتمال $P(X = x, Y\text{اختیاری})$ کو $f_1(x)$ لکھا جا سکتا ہے جو x کا تابع تفاعل ہے۔ یوں

$$f_1(x) = P(X = x, Y\,\text{اختیاری}) = \sum_y f(x, y) \tag{24.89}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اس x کے لئے ہم $f(x, y)$ کی تمام غیر صفر قیمتوں کا مجموعہ لیا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ $f_1(x)$ ایک بلا منصوبہ متغیر تقسیمی احتمال کا تفاعل احتمال ہے۔ اس تقسیم کو دیے گئے دو بعدی تقسیم کے لحاظ سے X کا **حاشیہ تقسیم**[123] کہا جاتا ہے۔ اس کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_1(x) = P(X \leq x, Y\,\text{اختیاری}) = \sum_{x^* \leq x} f_1(x^*) \tag{24.90}$$

اسی طرح تفاعل احتمال

$$f_2(y) = P(X\,\text{اختیاری}, Y = y) = \sum_x f(x, y)) \tag{24.91}$$

[123] marginal distribution

جدول 24.7: تاش سے ملکہ اور بادشاہ کا حصول

$x \backslash y$	0	1	2	3	$f_1(x)$
0	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
1	$\frac{300}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	0	$\frac{432}{2197}$
2	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	0	0	$\frac{36}{2197}$
3	$\frac{1}{2197}$	0	0	0	$\frac{1}{2197}$
$f_2(y)$	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{726}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	

دیے گئے دو بعدی تقسیم کا Y کے لحاظ سے **حاشیہ تقسیم** تعین کرتا ہے۔مساوات 24.91 میں ہم y کے مطابقتی غیر صفر $f(x,y)$ کا مجموعہ لیتے ہیں۔اس تقسیم کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y \le y) = \sum_{y^* \le y} f_2(y^*) \tag{24.92}$$

ظاہر ہے کہ بلا منصوبہ متغیر (X,Y) کے دونوں حاشیہ تقسیم غیر مسلسل ہیں۔

جدول 24.7 میں ان کی مثال دی گئی ہے جہاں تاش کے پتوں سے تین پتے نکال کر واپس رکھے جاتے ہیں۔ملکہ کے حصول کو X جبکہ بادشاہ کے حصول کو Y سے ظاہر کیا گیا ہے۔تاش کے کل 52 پتے ہوتے ہیں جن میں 4 ملکہ اور 4 بادشاہ کے پتے ہوتے ہیں۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ہو گا۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ یا بادشاہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{2}{13}$ ہو گا۔اس طرح اس بلا منصوبہ تجربہ کا مطابقتی تفاعل احتمال

$$f(x,y) = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!}\left(\frac{1}{13}\right)^x\left(\frac{2}{13}\right)^y\left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} \qquad (x+y \le 3)$$

ہو گا اور ان کے علاوہ $f(x,y) = 0$ ہو گا۔جدول 24.7 میں $f(x,y)$ ، $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ دیے گئے ہیں۔

دو بعدی استمراری تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

اسی طرح کثافت $f(x,y)$ والے استمراری متغیر X, Y کے لئے ہم

$$(X \le x, Y \text{ اختیاری}) \quad \text{یا} \quad (X \le x, -\infty < Y < \infty)$$

پر غور کر سکتے ہیں جس کا مطابقتی احتمال

$$F_1(x) = P(X \leq x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x^*$$

ہو گا جس میں

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{24.93}$$

لکھتے ہوئے

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x^*)\,\mathrm{d}x^* \tag{24.94}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $f_1(x)$ اور $F_1(x)$ کو بالترتیب دیے گئے استمراری تقسیم کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم X کی **کثافت** اور **تقسیمی تفاعل** کہتے ہیں۔دیے گئے دو بعدی استمراری تقسیم کے لحاظ سے تفاعل

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{24.95}$$

کو حاشیہ تقسیم Y کی کثافت اور

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y^*)\,\mathrm{d}y^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y^*)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^* \tag{24.96}$$

کو حاشیہ تقسیم Y کا تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ استمراری تقسیم کے دونوں حاشیہ تقسیم استمراری ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کی تابعیت اور غیر تابعیت

دو بعدی (X, Y) تقسیم جس کا تفاعل تقسیم $F(x, y)$ ہو کے بلا منصوبہ متغیرات X اور Y اس صورت **غیر تابع** کہلاتے ہیں جب تمام (x, y) کے لئے

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \tag{24.97}$$

ہو ورنہ انہیں تابع کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ X اور Y دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہوں۔تب X اور Y اس صورت غیر تابع ہوں گے جب ان کے مطابقتی تفاعل احتمال یا کثافتیں $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں (سوال 24.160)۔

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \tag{24.98}$$

مثال کے طور پر جدول 24.7 میں متغیرات تابع ہیں۔ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے ایک بار اچھال کر متغیرات

$X =$ پانچ روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد $\quad Y =$ ایک روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد,

0 یا 1 قیمت اختیار کر سکتے ہیں اور یہ متغیرات غیر تابع ہیں۔

تابعیت اور غیر تابعیت کی تصور کو n بعدی تقسیم $X_1, \cdots, X_n$ جس کا تفاعل احتمال

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_! \leq x_1, \cdots X_n \leq x_n)$$

ہو کے n بلا منصوبہ متغیرات تک وسعت دی جا سکتی ہے۔اگر تمام $x_1, \cdots, x_n$ کے لئے

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(n) \tag{24.99}$$

ہو جہاں X_j کے حاشیہ تقسیم کا تقسیمی تفاعل $F_j(x_j)$ ہو، یعنی

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j, X_k \text{ اختیاری}, k \neq j)$$

تب یہ بلا منصوبہ متغیرات غیر تابع کہلاتے ہیں ورنہ ان متغیرات کو تابع کہتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل

فرض کریں کہ بلا منصوبہ متغیر (X,Y) کا تفاعل احتمال یا کثافت $f(x,y)$ اور تقسیمی تفاعل $F(x,y)$ ہیں اور فرض کریں کہ $g(x,y)$ غیر مستقل استمراری تفاعل ہے جو تمام (x,y) پر معین ہے۔تب $Z = g(X,Y)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔مثال کے طور پر ہم دو پانسہ پھینکتے ہیں۔پہلے پانسہ عدد X اور دوسرا پانسہ عدد Y دیتا ہے۔ عدد $Z = X + Y$ ان دونوں کا مجموعہ ہے (شکل 24.8)۔

اگر n $(X_1, \cdots, X_n)$ بعدی متغیر ہوا ور تمام $(x_1, \cdots, x_n)$ پر $g(x_1, \cdots, x_n)$ معین غیر مستقل استمراری تفاعل ہو تب $Z = g(X_1, \cdots, X_n)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔

غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر (X, Y) کی صورت میں ان تمام $f(x, y)$ کا مجموعہ لیتے ہوئے جن کے لئے $g(x, y)$ کی قیمت زیر غور y کے برابر ہو، ہم $Z = g(X, Y)$ کا تفاعل احتمال $f(z)$ حاصل کر سکتے ہیں، یعنی:

$$f(z) = P(Z = z) = \sum_{g(x,y)=z}\sum f(x, y) \tag{24.100}$$

Z کا تقسیمی تفاعل

$$F(z) = P(Z \leq z) = \sum_{g(x,y)\leq z}\sum f(x, y) \tag{24.101}$$

ہے جہاں ہم ان $f(x, y)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے $g(x, y) \leq z$ ہو۔

بلا منصوبہ استمراری متغیر (X, Y) کے لئے اسی طرح

$$F(z) = P(Z \leq z) = \iint_{g(x,y)\leq z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{24.102}$$

ہو گا جہاں ہر z کے لئے ہم xy مستوی میں خطہ $g(x, y) \leq z$ پر تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$g(X, Y)$ کی حسابی توقع۔ مجموعہ اوسط اور تغیریت

درج ذیل عدد کو $g(X, Y)$ کی **حسابی توقع**[124] یا مختصراً **توقع** کہتے ہیں۔

$$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum\limits_{x}\sum\limits_{y} g(x, y) f(x, y) & [(X, Y) \text{ غیر مسلسل}] \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & [(X, Y) \text{ استمراری}] \end{cases} \tag{24.103}$$

یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ دوہرا مجموعہ حتمی مرتکز ہے اور xy مستوی پر $|g(x, y)|\, f(x, y)$ کا تکمل موجود ہے۔ درج ذیل کلیہ کو سوال 24.99 کی طرز پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$E(ag(X, Y) + bh(X, Y)) = aE(g(X, Y)) + bE(h(X, Y)) \tag{24.104}$$

[124] mathematical expectation

اس کے ایک مخصوص صورت $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ ہے اور الکراجی ماخوذ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.16: **(مجموعہ اوسط)**
بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعے کی اوسط (توقع) ان کے انفرادی اوسط کا مجموعہ ہو گا، یعنی:

$$E(X_1+X_2,\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) \tag{24.105}$$

مزید درج ذیل با آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 24.17: **اوسطوں کا حاصل ضرب**
غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے حاصل ضرب کی اوسط ان کے انفرادی اوسط کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا، یعنی:

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n) \tag{24.106}$$

ثبوت: فرض کریں کہ X اور Y بلا منصوبہ متغیرات ہیں (جہاں دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہیں)۔ تب $E(XY)=E(X)E(Y)$ ہو گا۔ غیر مسلسل صورت میں

$$E(XY)=\sum_x\sum_y xyf(x,y)=\sum_x xf_1(x)\sum_y yf_2(y)=E(X)E(Y)$$

لکھا جا سکتا ہے اور استمراری صورت میں بھی ثبوت اسی طرح کا ہے۔اس نتیجہ کو n غیر تابع متغیرات تک وسعت دینے سے مساوات 24.106 ثابت ہوتی ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب تغیریت کے مجموعہ پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ $Z=X+Y$ ہے اور Z کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔سوال 24.97 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma^2=E([Z-\mu]^2)=E(Z^2)-[E(Z)]^2$$

مساوات 24.104 سے دائیں ہاتھ پہلے جزو کو

$$E(Z^2)=E(X^2+2XY+Y^2)=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کو مسئلہ 24.17 کی مدد سے

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔انہیں σ^2 کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]\end{aligned}$$

سوال 24.97 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ پہلی لکیر پر دیا گیا تعلق X اور Y کی تغیریت کا مجموعہ ہے جنہیں ہم بالترتیب σ_1^2 اور σ_2^2 سے ظاہر کرتے ہیں۔دوسری لکیر پر مقدار

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{24.107}$$

کو X اور Y کی **باہمی تغیریت**[125] کہتے ہیں۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY} \tag{24.108}$$

اگر X اور Y غیر تابع ہوں تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ لہٰذا $\sigma_{XY} = 0$ اور

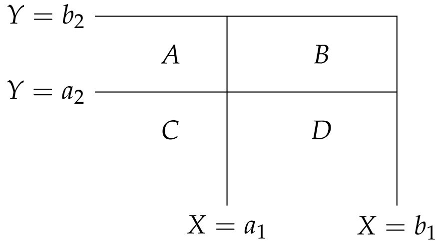
$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{24.109}$$

ہو گا۔دو سے زائد متغیرات تک وسعت دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.18: **(تغیرات کا مجموعہ)**
غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعہ کی تغیریت ان متغیرات کے انفرادی تغیریت کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 24.145: مساوات 24.82 کو ثابت کریں۔
جواب: شکل 24.17 میں (X, Y) احتمال $F(b_1, b_2)$ کے ساتھ A ، B ، C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, b_2)$ کے ساتھ A یا C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(b_1, a_2)$ کے



شکل 24.17: شکل برائے سوال 24.145

ساتھ C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, a_2)$ کے ساتھ C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے لہٰذا B سے قیمت حاصل کرنے کا احتمال مساوات 24.82 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

سوال 24.146: شکل 24.15 اور شکل 24.16 میں دیے تقسیم کے حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔

سوال 24.147: فرض کریں کہ $8 \le x \le 12$ اور $0 \le y \le 2$ میں $f(x,y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ۔ k ، $P(X \le 11, 1 \le Y \le 1.5)$ اور $P(9 \le X \le 12, Y \le 1)$ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{8}$

سوال 24.148: ایک کاغذ کی اوسط کمیت $10\,\mathrm{g}$ اور معیاری انحراف $0.05\,\mathrm{g}$ ہے۔ ایسی 10 000 کاغذوں کی ڈھیر کی اوسط کمیت اور تغیریت کیا ہو گی؟

سوال 24.149: فرض کریں کہ $x > 0$ ، $y > 0$ اور $x + y < 3$ میں $f(x,y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ $f(x,y)$ ترسیم کریں۔ $P(X + Y \le 1)$ اور $P(Y > X)$ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}$

سوال 24.150: ایک خالی ڈبے کی اوسط $2\,\mathrm{kg}$ اور معیاری انحراف $0.1\,\mathrm{kg}$ ہے۔اس ڈبے میں مال کی اوسط $75\,\mathrm{kg}$ اور تغیریت $0.8\,\mathrm{kg}$ ہے۔ بھرے ڈبے کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.151: خطہ $0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1$ میں بلا منصوبہ متغیرات کی کثافتیں $f(x,y) = x + y$ اور $g(x,y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$ ہیں۔دکھائیں کہ ان کی حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہیں۔

covariance[125]

سوال 24.152: ایسی دو مختلف غیر مسلسل تقسیم کی مثال دیں جن کے حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہوں۔

سوال 24.153: چار گراریوں کو یوں یکجا کیا جاتا ہے کہ ان کے بیچ فاصلہ رہے۔ گراریوں کے بیچ باریک چادر کی ٹکیا رکھ کر فاصل پیدا کیا جاتا ہے۔ گراری کی موٹائی کی اوسط 5.020 cm اور معیاری انحراف 0.003 cm ہے جبکہ ٹکیا کی موٹائی کی اوسط 0.040 cm اور معیاری انحراف 0.002 cm ہے۔ بلا منصوبہ 4 گراریوں اور 3 ٹکیوں سے بنائی گئی پوری گراری کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے۔
جواب: تقریباً 20.200, 0.007

سوال 24.154: لوہے کی چادروں اور کاغذ کو تہہ در تہہ رکھ کر ٹرانسفارمر کا قالب بنایا جاتا ہے۔ اگر لوہے کی چادر کی موٹائی کی اوسط 0.5 mm اور معیاری انحراف 0.05 mm ہو اور کاغذ کی موٹائی کی اوسط 0.05 mm اور معیاری انحراف 0.02 mm ہو تب 50 لوہے کی چادروں اور 49 کاغذوں سے بنائے گئے قالب کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.155: خطہ $x^2+y^2<1$ میں (X,Y) کی کثافت $f(x,y)=k$ ہے جبکہ اس خطہ کے باہر کثافت صفر ہے۔ k تلاش کریں۔ حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔ احتمال $P(X^2+Y^2<\frac{1}{2})$ تلاش کریں۔
جواب: $k=\frac{1}{\pi}; f_1(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, f_2(y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, 50\,\%$

سوال 24.156: ایک پنیا اور سوراخ کے قطر بالترتیب X سنٹی میٹر اور Y سنٹی میٹر ہیں۔ فرض کریں کہ (X,Y) کی کثافت

$$f(x,y)=2500 \quad \text{ہو تب} \quad 0.99<x<1.01, 1.00<y<1.02 \quad \text{اگر}$$

ہے ورنہ $f=0$ ہے۔ حاشیہ تقسیمیں حاصل کریں۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ منتخب کردہ پنیا 1.00 سنٹی میٹر کی سوراخ میں ٹھیک بیٹھے گا؟

سوال 24.157: خطہ $x\ge 0, y\ge 0$ میں (X,Y) کی کثافت $f(x,y)=e^{-(x+y)}$ ہے جبکہ باقی جگہوں پر $f=0$ ہے۔ $P(X>Y)$ تلاش کریں۔
جواب: $50\,\%$

سوال 24.158: سوال 24.157 میں حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔

سوال 24.159: ایک برقیاتی آلہ میں دو برقیاتی پرزے پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ پہلا پرزہ X مہینوں تک اور دوسرا پرزہ Y مہینوں تک کام کر سکتا ہے۔فرض کریں کہ (X,Y) کی احتمال کثافت

$$f(x,y)=0.01e^{-0.1(x+y)} \qquad x>0, y>0$$

جبکہ اس کے علاوہ $f=0$ ہے۔(الف) کیا X اور Y تابع ہیں؟ (ب) حاشیہ تقسیم کی کثافت تلاش کریں۔ (پ) پہلے پرزے کی زندگی 10 مہینے یا اس سے زیادہ ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟
جواب: غیر تابع، $f_1(x)=0.1e^{-0.1x}, x>0; f_2(y)=0.1e^{-0.1y}, y>0; 36.8\,\%$ ہے

سوال 24.160: مساوات 24.98 سے منسلک فقرہ ثابت کریں۔

سوال 24.161: فرض کریں کہ (X,Y) کا تفاعل احتمال $f(0,0)=f(1,1)=\frac{1}{8}$ ، $f(0,1)=f(1,0)=\frac{3}{8}$ ہے۔کیا X اور Y غیر تابع ہیں؟
جواب: جی نہیں

سوال 24.162: مسئلہ 24.16 کو استعمال کرتے ہوئے ثنائی تقسیم کی اوسط μ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 24.163: مسئلہ 24.18 کی مدد سے ثنائی تقسیم کی تغیریت σ^2 کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 24.164: مسئلہ 24.16 کی مدد سے بیش ہندسی تقسیم کی اوسط کا کلیہ حاصل کریں۔کیا مسئلہ 24.18 کی مدد سے اس تقسیم کی تغیریت کا کلیہ حاصل کیا جا سکتا ہے؟

24.12 بلا منصوبہ نمونہ بندی۔بلا منصوبہ اعداد

حصہ 24.3 تا حصہ 24.11 میں نظریہ احتمال پر غور کیا گیا۔اس باب کے باقی حصوں میں شماریات پر غور کیا جائے گا۔آبادی کے حسابی نمونے بنانے میں نظریہ شماریات مدد دیتا ہے۔شماریاتی تراکیب، جن پر غور کیا جائے گا، نظریہ اور حقیقی مشاہدوں کے مابین تعلقات پیش کرتے ہیں۔یوں نمونہ بندی کے ذریعہ آبادی کے بارے میں نتائج حاصل کیے جا سکتے ہیں (شماریاتی رائے زنی؛ حصہ 24.1)۔

اب تک اتنا جاننا کافی تھا کہ آبادی کے نمونہ سے مراد آبادی سے اشیاء کا انتخاب ہے (حصہ 24.1 میں مثالیں) لیکن اب ہمیں اس تصور کی تعریف باریک بینی سے دینی ہو گی۔حقیقتاً کسی بھی آبادی سے نمونہ بندی کے ذریعہ معنی خیز نتائج حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ نمونہ **بلا منصوبہ انتخاب**[126] ہو، یعنی آبادی میں ہر چیز کا منتخب ہو کر نمونے میں شامل ہونے کے احتمال کی قیمت معلوم ہو۔یہ شرط ہر صورت (کم از کم تخمینی طور پر) پوری کرنا لازم ہے ورنہ حاصل نتائج مکمل طور پر بے معنی اور غلط ہو سکتے ہیں۔

لا متناہی نمونی فضا کی صورت میں نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی، یعنی، کسی بلا منصوبہ تجربہ کو n مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے حاصل n بلا منصوبہ نمونی قیمتیں ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوں گی۔ عمومی آبادی سے حاصل نمونوں کے لئے یہ یقینی طور پر درست ہے۔متناہی نمونی فضا کی صورت میں اگر ہم واپس رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی؛ اگر ہم واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب، آبادی کی جسامت کے لحاظ سے نمونے کی جسامت چھوٹی رکھتے ہوئے (مثلاً 1000 کی آبادی سے 5 یا 10 کا نمونہ لیتے ہوئے)، حاصل نمونی قیمتیں عملاً غیر تابع ہوں گی۔اس کے برعکس اگر ہم بغیر واپس رکھتے ہوئے متناہی آبادی سے بڑے نمونے لیں تب تابعیت کا بہت زیادہ اثر پایا جائے گا۔

بلا منصوبہ انتخاب کی شرط پر پورا اترنا آسان نہیں ہے۔ کئی وجوہات نمونہ بندی کے عمل پر اثر انداز ہو سکتی ہیں۔مثال کے طور پر اگر ایک خریدار نے 80 کی ڈھیر سے 10 کا انتخاب کر کے ڈھیر خریدنے یا نہ خریدنے کا فیصلہ کرنا ہو تب وہ طبعی طور پر ان 10 چیزوں کا انتخاب کس طرح کرے گا کہ $\binom{80}{10}$ ممکنات میں سے ہر ایک کے منتخب ہونے کا احتمال ایک جیسا ہو؟

اس مسئلے کی حل کے لئے مختلف تراکیب تشکیل دی گئی ہیں۔ہم اب ایک ایسے طریقہ کار پر غور کرتے ہیں جس کو عموماً استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم اس ڈھیر کے اجزاء کو 1 تا 80 کے شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔اس کے بعد ہم ضمیمہ ج میں بلا منصوبہ اعداد کی جدول استعمال کرتے ہوئے 10 اجزاء چنتے ہیں۔بلا منصوبہ اعداد کے جدول کو ہم یوں استعمال کرتے ہیں کہ ہم پہلے 0 سے 99 کوئی صف بلا منصوبہ منتخب کرتے ہیں۔بلا منصوبہ صف منتخب کرنے کی خاطر ہم ایک سکہ کو 7 مرتبہ اچھال کر 7 ثنائی ہندسوں پر مبنی عدد حاصل کرتے ہیں جس میں خط کو 1 اور شیر کو 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یہ ثنائی عدد 0 تا 127 کو ظاہر کر سکتا ہے۔ 99 سے بڑا عدد حاصل ہونے کی صورت میں عدد کو رد کرتے ہوئے سکہ دوبارہ 7 مرتبہ اچھالا جاتا ہے حتیٰ کہ ہمیں 0 تا 99 کوئی عدد حاصل ہو جو صف دے گا۔اس کے بعد اسی طرح ہم بلا منصوبہ 0 تا 9 قطار منتخب کرتے ہیں۔بلا منصوبہ قطار منتخب کرنے کی خاطر سکہ 4 مرتبہ اچھال کر

---

[126] random selection

4 ثنائی ہندسوں کا عدد حاصل کیا جاتا ہے۔فرض کریں کہ صف کے لئے $(= 26)$ 0011010 اور قطار کے لئے $(= 7)$ 0111 حاصل ہو تب جدول کے 26 ویں صف اور 7 ویں قطار سے 44973 حاصل کرتے ہوئے اس کے پہلے دو ہندسوں پر مبنی عدد 44 لیا جاتا ہے جبکہ باقی ہندسوں کو رد کیا جاتا ہے۔اسی قطر میں نیچے چلتے ہوئے اعداد کے پہلے دو ہندسے لیتے ہوئے درج ذیل اعداد حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$44 \quad 44 \quad 83 \quad 91 \quad 55 \quad \cdots$$

ہم 80 سے بڑے اعداد رد کرتے ہیں اور کسی بھی عدد کو ایک سے زیادہ مرتبہ شامل نہیں کرتے ہیں۔یوں درکار بلا منصوبہ اعداد کا درج ذیل سلسلہ حاصل ہوتا ہے جس کے تحت اجزاء کو منتخب کیا جائے گا۔

$$44 \quad 55 \quad 53 \quad 03 \quad 52 \quad 61 \quad 67 \quad 78 \quad 39 \quad 54$$

زیادہ اجزاء کے نمونہ کے لئے یہ طریقہ کار موزوں نہیں ہے۔ اسی لئے ایسے اعداد جن کی خاصیت بلا منصوبہ اعداد کی طرح ہو، پیدا کرنے کے کئی طریقے بنائے گئے ہیں جنہیں کمپیوٹر کی زبان میں **پیدا کار بلا منصوبہ اعداد**[127] کہتے ہیں۔

سوالات

سوال 24.165: فرض کریں کہ مذکورہ بالا مثال میں ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول کے صف 83 اور قطار 2 سے شروع کرتے ہوئے اوپر رخ چلیں۔تب کون سے اجزاء نمونہ میں شامل کیے جائیں گے؟
جواب: $38, 69, 02, 49, 23, 52, 73, 29, 09, 05$

سوال 24.166: ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول استعمال کرتے ہوئے 250 کی ڈھیر سے 20 اجزاء بلا منصوبہ منتخب کریں۔

سوال 24.167: منصفانہ پانسہ کو بلا منصوبہ انتخاب کے لئے کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے؟

سوال 24.168: ایک بلا منصوبہ متغیر Y پر غور کریں جس کی خطہ $0 < y < 1$ میں کثافت یکساں $f(y) = 1$ جبکہ خطہ سے باہر $f = 0$ ہے۔ہم بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے با آسانی Y (یعنی Y کی قیمتوں)

[127] random number generator

کا نقل اتار[128] سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر 2 اعشاریہ تک کے 20 قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کے جدول کے کسی بھی (بلا منصوبہ) قطار اور صف سے شروع کرتے ہوئے نیچے چلتے ہوئے، پانچ ہندسوں پر مشتمل دیے اعداد کے صرف پہلے دو ہندسوں کو لیتے ہوئے ان کے بائیں جانب اعشاریہ پر کرتے ہوئے اعداد حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم ایک سے زیادہ مرتبہ آنے والے اعداد کو بھی شامل کرتے ہیں۔ فرض کریں ہم صف 36 اور قطار 3 سے شروع کرتے ہیں۔ دکھائیں کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔ ان کا تعددی نقطہ ترسیم کھینچیں۔

0.89	0.40	0.67	0.86	0.87	0.86	0.06	0.20	0.38	0.12
0.68	0.50	0.53	0.10	0.08	0.90	0.19	0.85	0.53	0.98

سوال 24.169: بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے کسی بھی بلا منصوبہ استمراری متغیر X کی نقل اتاری جا سکتی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم X کی تفاعل تقسیم کو ترسیم کرتے ہیں۔ سوال 24.168 کی طرز پر بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے متغیر Y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے انہیں y محدد پر ترسیم کریں اور ان کے مطابقتی X قیمتیں پڑھیں۔ سوال 24.168 کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے عمومی بلا منصوبہ متغیر X، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو، کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کریں۔ جماعتی نشان -2، -1، 0، 1 اور 2 لیتے ہوئے x کی ان 20 نمونی قیمتوں کا مستطیلی ترسیم کھینچیں۔
جواب: جماعتی تعدد 1، 5، 7، 6، 1 ہیں۔

سوال 24.170: سوال 24.169 کا طریقہ کار غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔ اگر دو منصفانہ پانسہ پھینک کر حاصل اعداد کا مجموعہ X ہو تب اس طریقہ کو کس طرح استعمال کیا جائے گا؟

24.13 مقدار معلوم کا اندازہ لگانا

تقسیمات میں پائی جانے والے مقدار مثلاً ثنائی تقسیم میں p، عمومی تقسیم میں μ اور σ، کو **مقدار معلوم**[129] کہتے ہیں۔

simulation[128]
parameters[129]

ایک نقطہ پر مقدار معلوم کی اندازاً قیمت (**نقطی اندازہ**[130]) ایک عدد (حقیقی محور پر نقطہ) ہو گا جس کو دیے گئے نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے جو مقدار معلوم کی اصل قیمت کی تخمین ہو گی۔ **وقفہ اندازہ**[131] (یعنی **وقفہ اعتماد**[132])، جس پر اگلے حصے میں بحث کی جائے گی، کو نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔مقدار معلوم کی قیمت کا اندازہ لگانا ایک اہم مسئلہ ہے۔

آبادی کی اوسط μ کا اندازہ لگانے کی خاطر ہم نمونے کی اوسط $\overline{x}$ لے سکتے ہیں جس سے ہمیں μ کا اندازہ $\widehat{\mu}=\overline{x}$ حاصل ہوتا ہے، یعنی

$$\widehat{\mu}=\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n) \tag{24.110}$$

جہاں نمونہ کی جسامت n ہے۔اسی طرح آبادی کی تغیریت کا اندازہ $\widehat{\sigma^2}$ در حقیقت مطابقتی نمونے کی تغیریت s^2 ہو گی، یعنی:

$$\widehat{\sigma^2}=s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2 \tag{24.111}$$

ظاہر ہے کہ مساوات 24.110 اور مساوات 24.111 ان تقسیمات کی مقدار معلوم کی اندازاً قیمت دیتے ہیں جن میں μ اور σ^2 صریحاً پائے جاتے ہیں؛ عمومی تقسیم اور پوئسن تقسیم ایسی تقسیمات ہیں۔ثنائی تقسیم میں $p=\frac{\mu}{n}$ (مساوات 24.60) ہے۔ اس صورت میں اگر j ویں کوشش میں وقوعہ A جس کا احتمال p ہے واقع ہو تب مساوات 24.110 میں $x_j=1$ ہو گا اور اگر اس کوشش میں A واقع نہ ہو تب $x_j=0$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 24.110 سے p کا اندازہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\widehat{p}=\frac{\overline{x}}{n} \tag{24.112}$$

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 24.110 **ترکیب معیار اثر**[133] کی ایک مخصوص صورت ہے۔اس ترکیب میں جس مقدار معلوم کی اندازاً قیمت درکار ہو، اس کو تقسیم کی معیار اثر کی صورت میں لکھا جاتا ہے (حصہ 24.8)۔حاصل کلیات میں ان معیار اثر کی جگہ نمونہ سے حاصل مطابقتی معیار اثر پر کرتے ہوئے درکار اندازے حاصل کیے جاتے ہیں۔یہاں نمونہ $x_1,\cdots,x_n$ کا k واں معیار اثر درج ذیل ہے۔

$$m_k=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^k$$

---

point estimate[130]
interval estimate[131]
confidence interval[132]
method of moments[133]

اندازے حاصل کرنے کی دوسری ترکیب کو **زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب**[134] کہتے ہیں۔اس ترکیب کو سمجھنے کی خاطر ہم غیر مسلسل (یا استمراری) بلا منصوبہ متغیر X پر غور کرتے ہیں جس کا تفاعل احتمال واحد متغیر θ پر منحصر ہے۔ ہم n غیر تابع قیمتوں $x_1, \cdots, x_n$ کا نمونہ لیتے ہیں۔تب غیر مسلسل صورت میں n جسامت کے نمونہ میں بالکل یہی قیمتیں حاصل ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$l = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \tag{24.113}$$

استمراری صورت میں، چھوٹے چھوٹے وقفوں $x_i \leq x \leq x_i + \Delta x \; (i = 1, 2, \cdots, n)$ میں قیمتیں حاصل کرنے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$f(x_1)\Delta x f(x_2)\Delta x \cdots f(x_n)\Delta x = l(\Delta x)^n \tag{24.114}$$

چونکہ $f(x_i)$ متغیر θ کا تابع ہے لہٰذا تفاعل l متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ اور θ کا تابع ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں $x_1, \cdots, 2.0_n$ دیے گئے ہیں اور یہ مقررہ قیمتیں ہیں۔تب l متغیر θ کا تابع ہو گا جس کو **تفاعل امکان**[135] کہتے ہیں۔ زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب کا بنیادی تصور بہت سادہ ہے۔ہم نا معلوم قیمت θ کے لئے وہ تخمین چنتے ہیں جس سے l کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہو۔اگر تفاعل l متغیر θ کا قابل تفرق تفاعل ہو تب (سرحد سے ہٹ کر) l کی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے درج ذیل لازمی شرط ہے۔

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \tag{24.115}$$

(ہم یہاں جزوی تفرق لکھتے ہیں چونکہ l متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ کا بھی تابع ہے۔) مساوات 24.115 کا حل جو $x_1, \cdots, x_n$ کا تابع ہے θ کے **زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ** کہلاتا ہے۔چونکہ $f(x) \geq 0$ اور $f(x)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت عموماً مثبت ہوتی ہے اور $\ln l$ یک سر بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا مساوات 24.115 کی جگہ درج ذیل بھی استعمال کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0 \tag{24.116}$$

جس سے عموماً حساب میں آسانی پیدا ہوتی ہے۔

اگر X کی تقسیم میں r مقدار معلوم $\theta_1, \cdots, \theta_r$ پائے جاتے ہوں تب مساوات 24.115 کی جگہ r لازمی شرائط $\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0, \cdots, \frac{\partial l}{\partial \theta_r} = 0$ ہوں گے اور مساوات 24.116 کی جگہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0 \tag{24.117}$$

---

[134] maximum likelihood method
[135] likelihood function

مثال 24.17: **عمومی تقسیم**

عمومی تقسیم کی صورت میں μ اور σ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

حل: مساوات 24.68 اور مساوات 24.113 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-h} \qquad h = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

دونوں ہاتھ لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$\ln l = -n\ln\sqrt{2\pi} - n\ln\sigma - h$$

مساوات 24.117 میں پہلی شرط $\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = 0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = -\frac{\partial h}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \qquad \implies \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

جس کا حل μ کا درکار اندازہ $\widehat{\mu}$ ہے، یعنی:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

مساوات 24.117 میں دوسری شرط $\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = 0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

μ کی جگہ $\widehat{\mu}$ پر کرتے ہوئے σ^2 کے لئے حل کر کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\widetilde{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\overline{x})^2$$

دھیان رہے کہ یہ نتیجہ مساوات 24.111 سے مختلف ہے۔ہم اندازوں کی عمدگی کی قواعد پر بحث نہیں کر سکتے ہیں لیکن اتنا جاننا ضروری ہے کہ چھوٹی n کے لئے مساوات 24.111 بہتر نتائج دیتی ہے۔ □

سوالات

سوال 24.171: $x \geq 0$ کے لئے کثافت $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ اور $x < 0$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ θ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{\theta} = \frac{n}{\sum x_j} = \frac{1}{\overline{x}}$

سوال 24.172: سوال 24.171 میں اوسط μ تلاش کر کے $f(x)$ میں پر کریں۔ μ کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ وہی ہے جو سوال 24.171 کے θ کے اندازے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.173: معلوم تغیریت $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کی عمومی تقسیم کے μ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{\mu} = \overline{x}$

سوال 24.174: $\mu = 0$ کی صورت میں عمومی تقسیم پر زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازے کی ترکیب لاگو کریں۔

سوال 24.175: **(پوئسن تقسیم)** زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازہ کی ترکیب کا اطلاق تقسیم پوئسن پر کریں۔
جواب: $\widehat{\mu} = \overline{x}$

سوال 24.176: **(یکساں تقسیم)** حصہ 24.8 میں دیے گئے یکساں تقسیم کی صورت میں دکھائیں کہ مقدار معلوم a اور b کو زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے پہلی جزوی تفرق کو صفر کے برابر پر نہیں کیا جا سکتا ہے۔اس صورت میں زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کس طرح لگایا جا سکتا ہے؟

سوال 24.177: **(ثنائی تقسیم)** p کے لئے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: n کوششوں میں کامیابی کی تعداد $= k$, $\widehat{p} = \frac{k}{n}$, $l = p^k(1-p)^{n-k}$

سوال 24.178: وقوعہ A واقع ہونے تک کوششوں کی تعداد X ہے۔دکھائیں کہ X کا تفاعل احتمال $f(x) = pq^{x-1},\ x = 1, 2, \cdots$ ہے جہاں واحد کوشش میں A واقع ہونے کا احتمال p ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ X کی واحد قیمت x کے مشاہدے میں p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

سوال 24.179: سوال 24.178 میں نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$

سوال 24.180: سوال 24.177 کو وسعت دیتے ہیں۔فرض کریں کہ n کوششوں کو m مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔پہلی n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_1 ہے، دوسری n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_2 ہے، $\cdots$، m ویں n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_m ہے۔ان معلومات سے p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

24.14 وقفہ اعتماد

گزشتہ حصہ میں مقدار معلوم کی نقطی اندازہ پر غور کیا گیا۔اب ہم **وقفی اندازہ**[136] پر غور کریں گے۔

حسابی تخمینی کلیات استعمال کرتے ہوئے ضروری ہے کہ ہم جاننے کی کوشش کریں کہ تخمینی قیمت اور اصل درست قیمت میں کتنا فرق ہے۔مثال کے طور پر اعدادی تکملی تراکیب میں زیادہ سے زیادہ خلل کے کلیات پائے جاتے ہیں جس سے ہم جان سکتے ہیں کہ تخمینی قیمت اور اصل قیمت میں کتنا فرق پایا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ ہم کسی تکمل کا اعدادی تخمینی قیمت 2.47 اور اصل قیمت سے زیادہ سے زیادہ ممکنہ خلل ∓ 0.02 حاصل کریں۔تب ہم پوری یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تکمل کی اصل قیمت $2.45 = 0.02 - 2.47$ تا $2.47 + 0.02 = 2.49$ قیمتوں میں شامل ہے، یعنی اصل قیمت $2.45 = 0.02 - 2.47$ یا اس سے زیادہ اور $2.47 + 0.02 = 2.49$ یا اس سے کم ہو گی۔

مقدار معلوم θ کا اندازہ لگاتے ہوئے ہم نمونی قیمتوں پر منحصر ایسے دو مقدار جاننا چاہیں گے جن میں یقینی طور پر اصل قیمت شامل ہو۔البتہ ہم جانتے ہیں کہ نمونی قیمتوں سے 100 % درست نتائج حاصل کرنا ممکن نہیں ہے۔یوں حقیقت پسندی سے کام لیتے ہوئے ہم اس مسئلے کو درج ذیل بیان کرتے ہیں۔

---
[136] interval estimate

احتمال γ کی قیمت کو 1 کے قریب منتخب کریں (مثلاً، $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ ، وغیرہ)۔ اس کے بعد ایسے دو مقدار Θ_1 اور Θ_2 منتخب کریں جن میں مقدار معلوم θ کی اصل قیمت کے شامل ہونے کا احتمال γ ہو۔

ہم سو فی صد یقین کے ساتھ جاننے کی "ناممکن شرط" کی بجائے تقریباً 1 احتمال کی "ممکن شرط" پیش کرتے ہیں۔

دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے ان دو مقداروں کی قیمتوں کا حساب لگایا جائے گا۔ ان n قیمتوں کو مشاہدے سے حاصل n بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ کی قیمتیں تصور کریں۔ تب Θ_1 اور Θ_2 ان بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل ہوں گے اور یوں خود بھی بلا منصوبہ متغیرات ہوں گے۔ اس طرح ہماری شرط درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$P(\Theta_1 \le \theta \le \Theta_2) = \gamma$$

اگر ہمیں تفاعل Θ_1 اور Θ_2 معلوم ہوں، تب دیے گئے نمونہ سے ہم Θ_1 کی اعدادی قیمت θ_1 اور Θ_2 کی اعدادی قیمت θ_2 کا حساب لگا سکتے ہیں۔ وہ وقفہ جس کے سر θ_1 اور θ_2 ہوں، نا معلوم مقدار معلوم θ کا **وقفہ اعتماد**[137] یا **وقفی اندازہ**[138] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\text{اعتماد}\{\theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

θ_1 کو θ کی **نچلی حد اعتماد**[139] اور θ_2 کو اس کی **بالائی حد اعتماد**[140] کہتے ہیں۔ عدد γ کو **سطح اعتماد**[141] کہتے ہیں۔ ہم عموماً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ اور کبھی کبھار $\gamma = 99.9\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک نمونہ حاصل کر کے مطابقتی وقفہ اعتماد تعین کرنا چاہیں، تب مقدار معلوم کی اصل قیمت شامل کرنے والے وقفہ کے حصول کا احتمال γ ہو گا۔

مثال کے طور پر اگر ہم $\gamma = 95\,\%$ منتخب کریں، تب ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $95\,\%$ نمونے جو ہم حاصل کریں ایسے اعتمادی وقفے دیں گے جن میں θ کی قیمت شامل ہو گی اور باقی $5\,\%$ میں ایسا نہیں ہو گا۔ یوں 20 میں سے تقریباً 19 صورتوں میں یہ فقرہ کہ "اعتمادی وقفہ میں θ شامل ہے" درست ہو گا جبکہ باقی صورتوں میں یہ فقرہ غلط ہو گا۔

---

[137] confidence interval
[138] interval estimate
[139] lower confidence limit
[140] upper confidence limit
[141] confidence level

جدول 24.8: معلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کے اوسط μ کے وقفہ اعتماد کا تعین

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔
دوسرا قدم: مطابقتی c تلاش کریں۔

γ	0.90	0.95	0.99	0.999
c	1.645	1.960	2.576	3.291

تیسرا قدم: نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے اوسط $\overline{x}$ حاصل کریں۔
چوتھا قدم: $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ μ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{\overline{x} - k \le \mu \le \overline{x} + k\} \tag{24.118}$$

$\gamma = 95\,\%$ کی بجائے $\gamma = 99\,\%$ منتخب کرنے سے ہم توقع کریں گے کہ 100 میں سے 99 صورتوں میں یہ فقرہ درست ہو گا۔البتہ ہم دیکھیں گے کہ $\gamma = 99\,\%$ کے مطابقتی وقفے $\gamma = 95\,\%$ کے مطابقتی وقفوں سے لمبے ہوں گے۔ γ بڑھانے کا یہ ایک نقصان ہے۔

کسی حقیقی صورت میں γ کی کیا قیمت منتخب کرنی چاہیے؟ یہ محض حسابی دلچسپی کی بات نہیں ہے بلکہ عملی استعمال میں، غلط قیمت منتخب کرنے کی صورت میں نقصان کو مد نظر رکھتے ہوئے، اس کا جواب ہمیں ہر صورت دینا ہو گا۔

صاف ظاہر ہے کہ موجودہ ترکیب اور آنے والے دیگر تراکیب میں غیر یقینی صورت حال کی وجہ نمونہ بندی کا طریقہ کار ہے۔یوں ماہر شماریات کو اپنی غلطیوں کے بارے میں جواب دینے کے لئے تیار ہونا چاہیے۔تاہم کسی بھی روزگار میں ایسا ہی ہو گا مثلاً قاضی اور ساہو کار بھی امکان کے قواعد سے نہیں بچ پاتے۔ ماہر شماریات غلطی کرنے کا احتمال تو جانتا ہے جبکہ قاضی اور ساہو کار کو یہ سہولت میسر نہیں ہے۔

اعتمادی وقفے برائے عمومی تقسیم کے μ اور σ^2

ہم اب عمومی تقسیم کی اوسط μ (جدول 24.8، جدول 24.9) اور تغیریت σ^2 (جدول 24.10) کے اعتمادی وقفے حاصل کرنا سیکھتے ہیں جس کا مطابقتی نظریہ اس حصے کے آخر میں پیش کیا جائے گا۔

مثال 24.18: معلوم تغیریت کی صورت میں عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد
$n = 100$ کا نمونہ جس کی اوسط $\overline{x} = 5$ ہو استعمال کرتے ہوئے تغیریت $\sigma^2 = 9$ والی عمومی تقسیم کے لئے $95\,\%$ وقفہ اعتماد تعین کریں۔
حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔
دوسرا قدم: اس کا مطابقتی $c = 1.960$ ہے۔
تیسرا قدم: $\overline{x} = 5$ دیا گیا ہے۔
چوتھا قدم: ہمیں $k = \frac{1.960 \cdot 3}{\sqrt{100}} = 0.588$ درکار ہے لہٰذا $\overline{x} - k = 4.412$ ، $\overline{x} + k = 5.588$ ہو گا جن سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{4.412 \leq \mu \leq 5.588\}$$

□

مثال 24.19: مخصوص لمبائی کا اعتمادی وقفہ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت
گزشتہ مثال میں $95\,\%$ اعتمادی وقفہ جس کی لمبائی $L = 0.4$ ہو حاصل کرنے کے لئے n کتنا ہو گا؟
حل: وقفے کی لمبائی مساوات 24.118 کے تحت $L = 2k = \frac{2c\sigma}{\sqrt{n}}$ ہے جس کو n کے لئے حل کرتے ہوئے

$$n = \left(\frac{2c\sigma}{L}\right)^2$$

حاصل ہوتا ہے۔یہاں $n = (\frac{2 \cdot 1.960 \cdot 3}{0.4})^2 \approx 870$ ہے۔

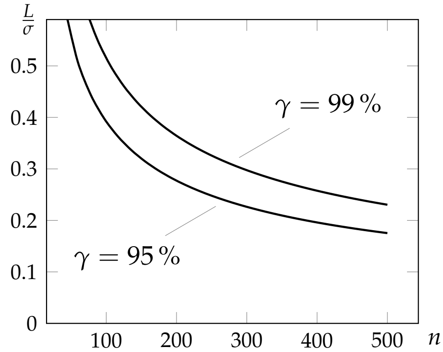
شکل 24.18 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ اعتماد کی لمبائی L جتنی کم ہو، نمونے کی جسامت n اتنی زیادہ منتخب کرنی ہو گی۔ □

نا معلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد تعین کرنا جدول 24.9 میں دکھایا گیا ہے۔یہ تقریباً جدول 24.8 کی طرح ہے ماسوائے k کی قیمتوں کے۔مزید c کی قیمت n پر منحصر ہے اور اس اس کو ضمیمہ ج میں t تقسیم کے تفاعل کی جدول 6.ج سے حاصل کرنا لازمی ہے جہاں t تقسیم[142] کے تفاعل

$$F(z) = K_m \int_{-\infty}^{z} \left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} \mathrm{d}u$$

---

[142] t تقسیم کو انگلستانی ماہر شماریات ولیم سیلی گوسٹ [1876-1937] نے دریافت کیا۔



شکل 24.18: وقفہ اعتماد کی لمبائی بالمقابل نمونی جسامت n

جدول 24.9: نامعلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کے اوسط μ کے وقفہ اعتماد کا تعین

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔
دوسرا قدم: درج ذیل مساوات کا حل c،

$$F(c) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.119}$$

$n-1$ درجہ آزادی کے t تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول 6.ج میں نمونی جسامت n لیتے ہوئے) سے حاصل کریں۔
تیسرا قدم: نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے اوسط $\overline{x}$ اور تغیریت s^2 حاصل کریں۔
چوتھا قدم: $k = \frac{sc}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ μ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{\overline{x} - k \le \mu \le \overline{x} + k\} \tag{24.120}$$

کی قیمتوں کے مطابقتی z قیمتیں دی گئی ہیں۔ یہاں $K_m = \Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2})/[\sqrt{m\pi}\Gamma(\frac{1}{2}m)]$ ایک مستقل ہے اور $\Gamma(\alpha)$ گیما تفاعل (ضمیمہ ب مساوات 22.ب) ہے۔ $m\ (1, 2, \cdots)$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی **درجہ آزادی کی تعداد**[143] کہتے ہیں۔

مثال 24.20: نا معلوم تغیریت والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد

جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے لئے اوسط μ کا $99\,\%$ وقفہ اعتماد تعین کریں۔ فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے۔ (اس مفروضے کا جواز بعد میں دیا جائے گا۔)
حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.99$ درکار ہے۔

[143] number of degrees of freedom

دوسرا قدم: چونکہ $n = 100$ ہے لہٰذا $c = 2.63$ حاصل ہوتا ہے۔
تیسرا قدم: حساب سے $\bar{x} = 364.70$ اور $s = \sqrt{720.1} = 26.83$ ملتے ہیں۔
چوتھا قدم: ہم $k = \frac{26.83 \cdot 2.63}{10} = 7.06$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{357.64 \le \mu \le 371.76\}$$

موازنے کی خاطر فرض کریں کہ ہمیں $\sigma = 26.83$ معلوم ہے۔تب جدول 24.8 سے $k = \frac{2.576 \cdot 26.83}{\sqrt{100}} = 6.91$ حاصل ہوتا جس کے تحت $\{357.79 \le \mu \le 371.61\}$ اعتماد حاصل ہوتا ہے۔دونوں نتائج میں معمولی فرق پایا جاتا ہے۔بڑی n کی صورت میں نتائج میں فرق بہت کم ہوتا ہے لیکن کم n کی صورت میں دونوں نتائج میں واضح فرق پایا جائے گا۔ □

جدول 24.10 میں عمومی تقسیم کی تغیریت کا وقفہ اعتماد تعین کرنے کے قدم دیے گئے ہیں۔ جو جدول 24.8 اور جدول 24.9 کی طرح ہیں، پس، یہاں دو مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرنے ہوں گے۔دونوں مستقل کو ضمیمہ ج میں جدول ج.7 سے حاصل کیا جاتا ہے جس میں تفاعل تقسیم

$$F(z) = \begin{cases} C_m \int_0^z e^{-u^2/2} u^{(m-2)/2} \, \mathrm{d}u & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

کی قیمتوں کے لئے z کے مطابقتی قیمتیں دی گئی ہیں۔اس تقسیم کو χ^2 تقسیم (مربع خا تقسیم) کہتے ہیں۔یہاں $C_m = \frac{1}{[2^{m/2}\Gamma(m/2)]}$ اور $m = 1, 2, \cdots$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی درجہ آزادی کی تعداد کہتے ہیں۔

مثال 24.21: عمومی تقسیم کے تغیریت کا وقفہ اعتماد
جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے تغیریت کا وقفہ اعتماد تلاش کریں۔
حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔
دوسرا قدم: چونکہ $n = 100$ ہے لہٰذا ہم $c_1 = 73.4$ اور $c_2 = 128$ حاصل کرتے ہیں۔
تیسرا قدم: جدول 24.2 سے $99s^2 = 71291$ حاصل ہوتا ہے۔
چوتھا قدم: وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{556 \le \sigma^2 \le 972\}$$

□

جدول 24.10: عمومی تقسیم کی تغیریت σ^2 کے وقفہ اعتماد کا تعین جہاں اوسط جاننا ضروری نہیں ہے

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔
دوسرا قدم: درج ذیل مساوات کے حل c_1 اور c_2

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.121}$$

کو مربع خا تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول 7.ج، جسامت نمونہ $= n$) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کریں۔**تیسرا قدم:** نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کی تغیریت s^2 سے $(n-1)s^2$ حاصل کریں۔
چوتھا قدم: $k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_1}$ اور $k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_2}$ کا حساب لگائیں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{k_2 \le \sigma^2 \le k_1\} \tag{24.122}$$

دیگر تقسیمات

کافی بڑے نمونے لیتے ہوئے دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد گزشتہ تراکیب سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ عملاً، اگر نا معلوم تقسیم کا ترچھاپن کم ہو تب μ کا وقفہ اعتماد حاصل کرنے کے لئے نمونی جسامت کم سے کم $n = 20$ لینی چاہیے اور σ^2 کا وقفہ اعتماد کے لئے کم سے کم $n = 50$ لینا چاہیے۔ اس کی تفصیل اس حصے کے آخر میں پیش کی جائے گی۔

جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 میں دیے گئے تراکیب کا نظریہ

ہم اب درج ذیل سادہ تصور استعمال کرتے ہوئے اس نظریہ پر غور کرتے ہیں جو وقفہ اعتماد حاصل کرنے کی ان تراکیب کو ممکن بناتی ہے۔

اب تک ہم نمونی قیمتوں $x_1, \cdots, x_n$ کو واحد بلا منصوبہ متغیر X کی مشاہدے سے حاصل n قیمتیں تصور کرتے رہے ہیں۔ ہم ان n قیمتوں کو n بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$، جن کی تقسیم ایک جیسی ہے (جو X کی تقسیم ہے)، کی ایک مشاہدے کی قیمتیں بھی تصور کر سکتے ہیں جنہیں غیر تابع اس لئے تصور کیا جا سکتا ہے کہ نمونی قیمتیں کو غیر تابع تصور کیا گیا ہے۔

جدول 24.8 میں مساوات 24.118 اخذ کرنے کے لئے درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.19: (بلا منصوبہ عمومی متغیرات کا مجموعہ)
فرض کریں کہ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ بلا منصوبہ غیر تابع عمومی متغیرات ہیں جن کے اوسط بالترتیب $\mu_1, \cdots, \mu_n$ اور تغیریت بالترتیب $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2$ ہیں۔ تب بلا منصوبہ متغیر

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$

ہو گی۔ μ اور σ^2 کے فقرے مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18 دیتے ہیں جبکہ X عمومی ہونے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

اس مسئلے سے اور مسئلہ 24.14 اور مسئلہ 24.13 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.20: اگر $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن میں سے ہر ایک کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو، تب بلا منصوبہ متغیر

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \tag{24.123}$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط μ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n}$ ہو گی، اور بلا منصوبہ متغیر

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \tag{24.124}$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی۔

آئیں مساوات 24.118 اخذ کرتے ہیں۔اس حصے کی شروع میں ہم نے چاہا کہ ہم ایسے دو بلا منصوبہ متغیرات Θ_1 اور Θ_2 حاصل کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

$$P(\Theta_1 \le \mu \le \Theta_2) = \gamma \tag{24.125}$$

جہاں γ منتخب کردہ ہے، اور نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ Θ_1 کی قیمت θ_1 اور Θ_2 کی قیمت θ_2 حاصل کرتے ہوئے درج ذیل وقفہ اعتماد حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\text{اعتماد}\{\theta_1 \le \mu \le \theta_2\}$$

موجودہ صورت میں ایسا کرنے کی خاطر ہم γ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہیں اور ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے ایسا c حاصل کرتے ہیں جو $P(-c \le Z \le z) = \gamma$ کو مطمئن کرتا ہو۔ (جدول 24.8 میں γ کی مختلف قیمتوں کے لئے c کی قیمتیں اسی طرح حاصل کی گئی ہیں۔) مساوات 24.123 میں دیا گیا Z استعمال کرتے ہوئے عدم مساوات $-c \le Z \le c$ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$-c \le \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \le c$$

جس کو μ کی عدم مساوات میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔اس کو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ سے ضرب کر $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ لکھتے ہوئے $-k \le \overline{X} - \mu \le k$ ملتا ہے۔اس کو -1 سے ضرب دے کر $\overline{X}$ جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\overline{X} + k \ge \mu \ge \overline{X} - k \tag{24.126}$$

یوں $P(-c \le Z \le c) = \gamma$ سے مراد $P(\overline{X} - k \le \mu \le \overline{X} + k) = \gamma$ ہے جو مساوات 24.125 کی طرز کا ہے جہاں $\Theta_1 = \overline{X} - k$ اور $\Theta_2 = \overline{X} + k$ ہوں گے۔یوں ہمارے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیرات $\overline{X} - k$ اور $\overline{X} + k$ وہ قیمتیں اختیار کریں گے جن میں نا معلوم اوسط μ شامل ہو گا۔ جہاں تک n غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ کی مشاہدہ سے حاصل، جدول 24.8 میں دی گئی، نمونی قیمتیں $x_1, \cdots, x_n$ ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ نمونی اوسط $\bar{x}$ مساوات 24.123 کی مشاہدہ سے حاصل قیمت ہے جس کو مساوات 24.126 میں پر کرتے ہوئے مساوات 24.118 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 24.120 اخذ کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.21: فرض کریں کہ $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن میں ہر ایک کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔تب بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S} \tag{24.127}$$

کی تقسیم $n-1$ درجہ آزادی کی t تقسیم (صفحہ 1625) ہو گی؛ یہاں $\overline{X}$ کو مساوات 24.123 اور

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\overline{X}\right)^2 \tag{24.128}$$

دیتے ہیں۔ اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 24.120 کا ثبوت مساوات 24.118 کی ثبوت کی طرح کا ہے۔ہم γ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہوئے ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے $n-1$ درجہ آزادی کا ایسا c حاصل کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$P(-c\leq T\leq c)=F(c)-F(-c)=\gamma \tag{24.129}$$

چونکہ t تقسیم تشاکلی ہے لہٰذا $F(-c)=1-F(c)$ ہو گا اور یوں مساوات 24.129 سے مساوات 24.119 حاصل ہو گا۔مساوات 24.129 میں پہلے کی طرح $-c\leq T\leq c$ کے تبادلہ سے

$$\overline{X}-K\leq\mu\leq\overline{X}+K\qquad K=\frac{cS}{\sqrt{n}} \tag{24.130}$$

حاصل ہو گا اور یوں مساوات 24.129 سے $P(\overline{X}-K\leq\mu\leq\overline{X}+K)=\gamma$ حاصل ہو گا۔مساوات 24.130 میں مشاہدے سے حاصل $\overline{X}$ کی قیمت $\overline{x}$ اور S^2 کی قیمت s^2 پر کرتے ہوئے مساوات 24.120 حاصل ہو گا۔

مساوات 24.122 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل کی ضرورت ہو گی۔

مسئلہ 24.22: مسئلہ 24.21 کے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$Y=(n-1)\,\frac{S^2}{\sigma^2} \tag{24.131}$$

کا تقسیم $n-1$ درجہ آزادی کا مربع خا تقسیم (صفحہ 1627) ہو گا؛ یہاں S^2 کو مساوات 24.128 میں پیش کیا گیا ہے۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 24.122 کا ثبوت مساوات 24.118 اور مساوات 24.120 کی ثبوتوں کی طرح ہے۔ہم 0 اور 1 کے بیچ عدد γ منتخب کرتے ہیں۔ضمیمہ ج میں جدول سے ایسے c_1 اور c_2 کی حاصل کریں جو درج ذیل (مساوات 24.121) کو مطمئن کرتے ہوں۔

$$P(Y \leq c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad P(Y \leq c_2) = F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma)$$

تفریق سے

$$P(c_1 \leq Y \leq c_2) = P(Y \leq c_2) - P(Y \leq c_1) = \gamma$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 24.131 میں دیے Y سے $c_1 \leq Y \leq c_2$ کے تبادلہ سے σ^2 کی عدم مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم

$$\frac{n-1}{c_2}S^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{n-1}{c_1}S^2$$

حاصل کرتے ہیں۔مشاہدے سے حاصل S^2 کی قیمت s^2 کرتے ہوئے مساوات 24.122 حاصل ہو گا۔

دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد

دیگر تقسیمات کے لئے بھی ہم وقفہ اعتماد کو جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 سے حاصل کر سکتے ہیں، پس نمونوں کی جسامت بڑی رکھنی ہو گی۔یہ درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 24.23: **(مسئلہ وسطی حد)**
فرض کریں کہ $X_1, \cdots, X_m, \cdots$ غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن کی تقسیم ایک جیسی ہے لہٰذا ان کی اوسط μ ایک جیسی ہو گی اور ان کی تغیریت σ^2 ایک جیسی ہو گی۔فرض کریں کہ $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ ہے تب بلا منصوبہ متغیر

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \tag{24.132}$$

متقاربی عمومی[144] ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی، یعنی، Z_n کا تفاعل تقسیم $F_n(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

---

[144] asymptotically normal

جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی ایک جیسی اوسط μ اور ایک جیسی تغیریت σ^2 ہو، تب ان کے مجموعہ $X = X_1 + \cdots + X_n$ کے درج ذیل خواص ہوں گے۔

- (الف) X کی اوسط $n\mu$ اور تغیریت $n\sigma^2$ ہو گی (مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18)۔
- (ب) اگر یہ متغیرات عمومی ہوں تب X بھی عمومی ہو گا (مسئلہ 24.19)۔

اگر یہ متغیرات عمومی نہ ہوں تب مذکورہ بالا شق-ب درست نہیں ہو گا، البتہ بڑی n کی صورت میں X تخمیناً عمومی (مسئلہ 24.23) ہو گا اور یہی وجہ ہے کہ n کی قیمت بڑی لیتے ہوئے ان تراکیب کو دیگر تقسیمات کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 24.181: عمومی صورتوں میں نقطی اندازہ سے وقفی اندازہ کیوں زیادہ کار آمد ہوتے ہیں؟

سوال 24.182: 100 جسامت کا نمونہ جس کی اوسط 38.25 ہو استعمال کرتے ہوئے عمومی آبادی جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے کی اوسط μ کے لئے 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.183: نمونی جسامت کو گھٹا کر 25 کرنے سے سوال 24.182 میں وقفہ اعتماد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: وقفہ اعتماد دگنا ہو جائے گا۔

سوال 24.184: نمونہ $28, 24, 31, 27, 22$ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف $\sigma = 2.2$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقفی اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.185: اوسط 16.30 اور جسامت 290 والا نمونہ استعمال کرتے ہوئے شکل 24.18 کی مدد سے تغیریت $\sigma^2 = 0.36$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقفی اعتماد تعین کریں۔
جواب: اعتماد$\{16.21 \le \mu \le 16.39\}$

سوال 24.186: مساوات 24.118 میں %95 وقفہ اعتماد کی لمبائی (الف) 2σ (ب) σ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت n تلاش کریں۔

سوال 24.187 تا سوال 24.191 میں فرض کریں کہ دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے حاصل کیا گیا ہے۔آبادی کی اوسط μ کے لئے %99 وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.187: $325, 320, 325, 335$
جواب: $\{307 \le \mu \le 345\}$اعتماد

سوال 24.188: 20 قابلوں کا نمونہ جس کی اوسط $10.20\,\mathrm{cm}$ اور تغیریت $\sigma^2 = 0.04\,\mathrm{cm}^2$ ہو۔

سوال 24.189: سلاخ کی ملی میٹروں میں لمبائی $124, 127, 126, 122, 124$
جواب: $\{120.6 \le \mu \le 128.6\}$اعتماد

سوال 24.190: پشاور تا لاہور موٹروے پر بلا منصوبہ 500 گاڑیوں کو روک کر ان کے بریک پرکھے جاتے ہیں جن میں سے 87 گاڑیوں کے بریک کمزور ثابت ہوتے ہیں۔اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے موٹروے پر کمزور بریک والی گاڑیوں کی فی صد کے لئے %95 وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.191: ثنائی تقسیم کی مقدار معلوم p کے لئے %99 وقفہ اعتماد تعین کریں۔صفحہ 1554 پر جدول 24.6 کی آخری صف میں مشرف کے نتائج استعمال کریں۔
جواب: $\{0.492 \le p \le 0.509\}$اعتماد

سوال 24.192 تا سوال 24.192 میں عمومی آبادی سے نمونے حاصل کیے گیے ہیں۔آبادی کی تغیریت σ^2 کی %95 وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.192: $145.3, 145.1, 145.4, 146.2$

سوال 24.193: نمونی جسامت 30 اور تغیریت 0.0007 ہے۔
جواب: $\{0.00044 \le \sigma^2 \le 0.00127\}$اعتماد

سوال 24.194: درجہ حرارت کمرہ پر ایک مخصوص قسم کی دھات کی حتمی تنشی مضبوطی ($\mathrm{kg\,cm^{-2}}$): $17.6, 19.7, 18.1, 17.8, 17.8, 17.7, 17.6, 17.7, 17.9, 18$

سوال 24.195: یورینیم U^{35} کی انشقاق سے پیدا تاخیری نیوٹران گروہ (تیسرا گروہ جس کی نصف زندگی 6.2 سیکنڈ ہے) کی اوسط توانائی (keV): $435, 451, 430, 444, 438$
جواب: $\{23 \le \sigma^2 \le 553\}$اعتماد

سوال 24.196: $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے سفر کرتے ہوئے ایک گاڑی کی فی کلومیٹر خارج کردہ CO (گرام): $10.8, 11.1, 11.2, 11, 11.3, 10.8, 10.9, 11.2$

سوال 24.197: اگر X عمومی ہو جس کی اوسط 27 اور تغیریت 16 ہو تب $-X$ ، $3X$ اور $5X - 2$ کے تقسیم، اوسط اور تغیریت کیا ہوں گے؟
جواب: تینوں عمومی، اوسط $-27, 81, 133$ اور تغیریت $16, 144, 400$ ہوں گے۔

سوال 24.198: اگر X_1 اور X_2 غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی اوسط بالترتیب 23 ، 4 اور تغیریت بالترتیب 3 ، 1 ہوں تب $4X_1 - X_2$ کی تقسیم، اوسط اور تغیریت کیا ہوں گے؟

سوال 24.199: ایک مشین Y کلو گرام کمیت کے ڈبوں میں X کلو گرام نمک بھرتی ہے جہاں X اور Y کی اوسط بالترتیب 100 کلو گرام، 5 کلو گرام اور تغیریت بالترتیب 1 کلو گرام، 0.5 کلو گرام ہیں۔کتنے فی صد بھرے گیے ڈبوں کی کمیت 104 کلو گرام اور 106 کلو گرام کے بیچ ہو گی؟
جواب: $P(104 \le Z \le 106) = 63\,\%$

سوال 24.200: اگر سیمنٹ کی بوری کی کمیت X عمومی متغیر ہو جس کی اوسط $40\,\mathrm{kg}$ اور تغیریت $2\,\mathrm{kg}$ ہو تب ایک ٹرک میں کتنی بوریاں رکھی جا سکتی ہیں تا کہ بوریوں کی کل کمیت کا $2000\,\mathrm{kg}$ سے تجاوز کرنے کا احتمال $5\,\%$ ہو۔

24.15 قیاس کی پرکھ۔فیصلے

بلا منصوبہ متغیر کی تقسیم کے بارے میں کچھ فرض کرنے کو شماریاتی **قیاس**[145] کہتے ہیں۔مثال کے طور پر کسی تقسیم کے بارے میں یہ فرض کرنا کہ اس کی اوسط 20.3 ہے شماریات قیاس ہو گا۔ایسا عمل جس سے ہم معلوم کر سکیں کہ آیا ہمارا قیاس ٹھیک ہے اور ہم اس کو **منظور**[146] کریں یا کہ یہ غلط ہے اور ہم اس کو **نا منظور**[147] کریں شماریاتی **پرکھ**[148] کہلاتا ہے۔

یہ پرکھ عموماً استعمال کیے جاتے ہیں اور ہم جاننا چاہیں گے کہ یہ کیوں اہم ہیں۔ہمیں عموماً ایسی صورتوں میں فیصلہ کرنا ہوتا ہے جہاں امکانی تبدیلیاں عمل پیرا ہوتی ہیں۔مثال کے طور پر اگر ہمیں دو ممکنات میں سے ایک کو چننا ہو، ہمارا فیصلہ کسی شماریاتی پرکھ پر منحصر ہو سکتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر ہمیں ایک خراد پر قابلے بنانا ہو جن کی قطر مخصوص حدود میں رہنا ضروری ہو اور ہم چاہتے ہیں کہ زیادہ سے زیادہ $2\,\%$ قابلے عیب دار ہوں تب ہم اس خراد پر بنائے گئے قابلوں سے 100 قابلوں کا نمونہ حاصل کرتے ہوئے قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کو پرکھ کر دیکھیں گے کہ آیا مطابقتی آبادی کی تغیریت σ^2 کسی مخصوص قیمت σ_0^2 کے برابر ہے۔ σ_0^2 کو یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ $2\,\%$ قابلے عیب دار حاصل ہوں۔اس کا **متبادل پرکھ** $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ہے۔ہم پرکھ کے نتیجہ کو دیکھ کر قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کو **منظور** کرتے ہوئے اسی خراد کو استعمال کرتے ہیں یا ہم اس کو **نا منظور** کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ہے اور اس سے بہتر خراد استعمال کرتے ہیں۔نا منظوری کی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ σ_0^2 سے σ^2 کا **معنی خیز انحراف**[149] پایا جاتا ہے، یعنی انحراف نا گزیر امکانی وجوہات کی بنا نہیں ہے بلکہ خراد کی ناقص پن کی وجہ سے ہے۔

ہو سکتا ہے کہ کسی دوسری جگہ پر ہمیں دو چیزوں کا آپس میں موازنہ کرنا ہو، مثلاً، دو ادویات، ایک کام سرانجام دینے کے دو تراکیب، ناپنے کے دو طریقے، دو مشینوں پر بنائے گئے چیزوں کی معیار، وغیرہ وغیرہ۔ موزوں پرکھ کے نتیجہ کے تحت ہم ایک دوائی کو منتخب کریں گے، کام کرنے کی بہتر ترکیب منتخب کریں گے، وغیرہ۔

قیاس عمومی درج ذیل سے حاصل ہو گا۔

---

[145] hypothesis
[146] accept, not reject
[147] reject
[148] test
[149] significant deviation

- ضرورت معیاری پیداوار سے قیاس پیش کیا جا سکتا ہے۔(سخت نگرانی اور احتیاط کے ساتھ زیادہ تعداد کی چیزیں پیدا کرنے سے قابل حصول معیار کے بارے میں تجربہ حاصل ہوتا ہے۔)

- گزشتہ تجربہ سے حاصل معلوم قیمتوں پر قیاس منحصر ہو سکتا ہے۔

- قیاس ایک نظریہ پر مبنی ہو سکتا ہے جس کو آپ پرکھنا چاہتے ہیں۔

- بعض اوقات اتفاقی مشاہدے پر قیاس مبنی ہو سکتا ہے۔

آئیں ایک تعارفی مثال سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 24.22: **قیاس کا پرکھ**
ایک بچہ پیدا ہونے کو بلا منصوبہ تجربہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کے دو ممکنہ انجام ہیں، یعنی لڑکا B اور لڑکی G ۔ وجدانی طور پر ہم قیاس کر سکتے ہیں کہ دونوں کا احتمال ایک جیسا ہو گا البتہ کچھ لوگوں کا **متبادل قیاس** ہے کہ نو زائدہ بچوں میں لڑکوں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے۔ہم قیاس کو پرکھنا چاہتے ہیں۔اگر ہم انجام B کے احتمال کو p سے ظاہر کریں تب ہم قیاس $p = 50\,\% = 0.5$ کو پرکھا جا سکتا ہے۔متبادل قیاس $p > 0.5$ کو بھی پرکھا جا سکتا ہے۔ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔

اس پرکھ کے لئے ایک شہر میں ایک سال میں پیدا بچوں سے ہم $n = 3000$ نمونہ منتخب کرتے ہیں جن میں سے 1578 لڑکے ہیں۔

اگر قیاس درست ہو تب $n = 3000$ کی نمونہ میں اوسطاً تقریباً 1500 نو زائدہ لڑکے متوقع ہوں گے۔اگر متبادل درست ہو تب 1500 سے اوسطاً زائد لڑکے متوقع ہوں گے۔یوں اگر حقیقتاً نو زائدہ لڑکوں کی تعداد 1500 سے بہت زیادہ ہو تب ہم اس کو قیاس غلط ہونے کی نشانی تصور کرتے ہوئے قیاس کو نا منظور کریں گے۔

ہم سب سے پہلے ایک فاصل قیمت c متعین کرتے ہیں۔ متبادل کی بنا c کی قیمت 1500 سے زیادہ ہو گی۔(c تعین کرنے کا ایک طریقہ نیچے پیش کیا گیا ہے۔) تب نو زائد لڑکوں کی تعداد c سے زیادہ ہونے کی صورت میں ہم قیاس کو نا منظور کریں گے اور اگر نو زائد لڑکوں کی تعداد c سے زیادہ نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کریں گے۔

اب ہمیں c کی ایسی قیمت منتخب کرنی ہو گی جو معمولی بلا منصوبہ انحراف اور زیادہ معنی خیز انحراف میں تمیز کرے۔ہر شخص کی اپنی ایک منفرد رائے ہو سکتی ہے لیکن ہمیں حسابی دلائل کے تحت چلنا ہو گا جو موجودہ صورت میں بہت سادہ ہیں (جیسے آپ اب دیکھیں گے)۔

ہم c یوں تعین کرتے ہیں کہ قیاس درست ہونے کی صورت میں c سے زیادہ لڑکوں کا احتمال بہت کم ہو مثلاً α ۔ روایتی طور پر $\alpha = 1\,\%$ یا $\alpha = 5\,\%$ منتخب کیا جاتا ہے۔ $\alpha = 1\,\%$ (یا $\alpha = 5\,\%$) منتخب کرتے ہوئے ہم 100 میں (یا 20 میں) 1 زیادہ لڑکوں کی صورت میں بھی قیاس کو نا منظور کرتے ہیں اگرچہ قیاس درست ہے۔اس نقطے پر ہم بعد میں غور کریں گے۔آئیں ہم $\alpha = 1\,\%$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل بلا منصوبہ متغیر پر غور کرتے ہیں۔

$$X = \text{بچوں کی 3000 پیدائشوں میں لڑکوں کی تعداد}$$

یہ فرض کرتے ہوئے قیاس درست ہے ہم c کی فاصل قیمت کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کرتے ہیں

$$P(X > c)_{p=0.5} = \alpha = 0.01 \tag{24.133}$$

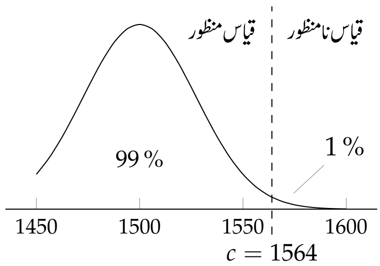
جہاں مفروضے کو زیر نوشت میں $p = 0.5$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔اگر لڑکوں کی حقیقی تعداد 1578 منتخب c سے زیادہ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کریں گے۔اگر $c \leq 1578$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کریں گے۔

مساوات 24.133 سے c حاصل کرنے کی خاطر ہمیں X کی تقسیم معلوم ہونی چاہیے۔موجودہ مثال کے لئے ثنائی تقسیم کافی درست ہے۔یوں اگر قیاس درست ہو تب ثنائی تقسیم میں X کی $p = 0.5$ اور $n = 300$ ہوں گے۔اس تقسیم کو تخمینی طور پر ایسی عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کی اوسط $\mu = np$ اور تغیریت $\sigma^2 = npq = 750$ ہو (حصہ 24.10)۔ (ہم اپنی آسانی کی خاطر مساوات 24.78 میں جزو 0.5 کو رد کرتے ہیں۔) تقسیم کی منحنی کو شکل 24.19 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 24.133 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \approx 1 - \Theta\Big(\frac{c - 1500}{\sqrt{750}}\Big) = 0.01$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{c-1500}{\sqrt{750}} = 2.326$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $c = 1564$ ہو گا۔چونکہ $c < 1578$ ہے لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہوئے فیصلہ کرتے ہیں کہ $p > 0.5$ ہے۔یوں پرکھ مکمل ہوتا ہے۔

300 کے نمونہ کے لئے مساوات 24.133 میں X کو 300 پیدائشوں میں لڑکوں کی تعداد لیتے ہوئے فاصل قیمت $c = 170$ حاصل ہو گی اور نمونہ میں 158 (جو وہی فی صد ہے جو بڑی جسامت کے نمونہ میں تھی)



شکل 24.19: مثال 24.22 میں X کی تخمینی تقسیم۔فاصل قیمت $c = 1564$ ہے

لڑکے ہونے کی صورت میں $c > 158$ حاصل ہو گا اور ہم قیاس کو منظور کریں گے۔یہ ایک دلچسپ صورت حال ہے جس سے یہ حقیقت اجاگر ہوتی ہے کہ پرکھ کی افادیت نمونی جسامت n بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ہمیں n اتنا بڑا لینا ہو گا کہ عملی صورت میں زیر غور متغیر کے بارے میں درست نتائج حاصل ہوں۔ساتھ ہی ساتھ n زیادہ بڑا بھی نہیں ہونا چاہیے تاکہ وقت اور سرمایہ کا ضیاع نہ ہو۔عموماً صورتوں میں پہلے چھوٹا تجربہ کرتے ہوئے بہتر n کو تعین کرنا ممکن ہو گا۔ □

متبادل کا تصور۔متبادل کی قسمیں

جس قیاس کو پرکھا جا رہا ہو اس کو **پسندیدہ قیاس**[150] کہتے ہیں اور اس کا مخالفانہ قیاس (مثلاً مثال 24.22 میں $p > 0.5$) کو **متبادل قیاس**[151] یا مختصراً **متبادل** کہتے ہیں۔ عدد α (یا $100\alpha\%$) کو پرکھ کی **معنی خیز سطح**[152] کہتے ہیں جبکہ c **فاصل قیمت**[153] کہلاتا ہے۔ جس خطے میں وہ قیمتیں پائی جاتی ہوں جن کے لئے قیاس کو نامنظور کیا جاتا ہے، اس خطے کو **خطہ نا منظوری**[154] یا **خطہ فاصل**[155] کہتے ہیں۔وہ خطہ جس میں پائے جانے والی قیمتوں کے لئے قیاس کو منظور کیا جاتا ہے **خطہ منظوری**[156] کہلاتا ہے۔ α کو عموماً $\alpha = 5\,\%$ منتخب کیا جاتا ہے۔

default hypothesis[150]
alternative hypothesis[151]
significant level[152]
critical value[153]
rejection region[154]
critical region[155]
acceptance region[156]

فرض کریں کہ ایک تقسیم میں مقدار معلوم θ کی قیمت نا معلوم ہے۔فرض کریں کہ ہم قیاس $\theta = \theta_0$ کو پرکھنا چاہتے ہیں۔اس کے درج ذیل تین متبادل قیاس پائے جاتے ہیں۔

$$\theta > \theta_0 \tag{24.134}$$
$$\theta < \theta_0 \tag{24.135}$$
$$\theta \neq \theta_0 \tag{24.136}$$

مساوات 24.134 اور مساوات 24.135 کو **یک طرفہ متبادل**[157] جبکہ مساوات 24.136 کو **دو طرفہ متبادل**[158] کہتے ہیں۔مثال 24.22 میں دو طرفہ متبادل پر غور کیا گیا (جہاں $\theta_0 = p = 0.5$ اور $\theta_0 = p > 0.5$ تھے)؛ θ_0 کی دائیں جانب c پایا جاتا ہے اور خطہ نا منظور c سے لے کر ∞ ہو گا اور اس پرکھ کو **دایاں طرفہ پرکھ**[159] کہتے ہیں۔مساوات 24.135 میں θ_0 کی بائیں جانب c پایا جاتا ہے، اور خطہ نا منظوری c سے $-\infty$ تک ہو گا اور اس پرکھ کو **بایاں طرفہ پرکھ** کہیں گے۔ان دونوں قسم کے پرکھ کو **یک طرفہ پرکھ** کہتے ہیں۔مساوات 24.136 کی صورت میں ہمارے پاس دو فاصل قیمتیں c_1 اور $c_2\,(> c_1)$ ہوں گی اور خطہ نا منظوری c_1 تا $-\infty$ اور c_2 تا ∞ ہو گا، اور پرکھ کو **دو طرفہ پرکھ** کہیں گے۔

تینوں اقسام کے متبادل عملاً اہم ہیں۔ مثال کے طور پر مساوات 24.135 مادہ کی مضبوطی کی پرکھ میں ہمیں پیش آ سکتا ہے جہاں θ_0 درکار مضبوطی ہو سکتی ہے جبکہ متبادل غیر پسندیدہ کمزوری کو ظاہر کرے گا۔درکار قیمت سے زیادہ مضبوطی کی صورت میں مادہ منظور کیا جائے گا لہٰذا اس کو علیحدہ سے پرکھنے کی ضرورت نہیں ہو گی۔ مساوات 24.136 ایسی صورت میں اہم ہو گا جیسے دھرا کی قطر جہاں θ_0 درکار قطر کو ظاہر کرے گا جبکہ اس سے کم یا زیادہ موٹائی دونوں برابر مسئلہ خیز ہوں گے لہٰذا درکار موٹائی کے دونوں جانب انحراف پر نظر رکھنا ضروری ہو گا۔

پرکھ میں خلل کے اقسام

ہم اب متبادل، جس کو ہم اپنی آسانی کی خاطر واحد عدد θ_1 تصور کرتے ہیں، کے لحاظ سے قیاس $\theta = \theta_0$ کے پرکھ سے غلط فاصلوں کے خطرات پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں $\theta_1 > \theta_0$ ہے لہٰذا ہمارے پاس دایاں طرفہ پرکھ ہو گا۔ (بایاں طرفہ یا دو طرفہ پرکھ کے لئے بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔) دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$

one-sided alternatives[157]
two-sided alternative[158]
right-sided test[159]

جدول 24.11: متبادل $\theta = \theta_1$ کے لحاظ سے قیاس $\theta = \theta_0$ کی پرکھ میں پہلی اور دوسری قسم کا خلل

		نا معلوم حقیقت	
		$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_1$
فیصلہ	$\theta = \theta_0$	ٹھیک فیصلہ $P = 1 - \alpha$	دوسری قسم کا خلل $P = \beta$
	$\theta = \theta_1$	پہلی قسم کا خلل $P = \alpha$	ٹھیک فیصلہ $P = a - \beta$

سے ہم قیمت $\widehat{\theta} = g(x_1, \cdots, x_n)$ کا حساب لگاتے ہیں۔اگر $\widehat{\theta} > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے (جیسا مثال 24.22 میں کیا گیا)۔ اگر $\widehat{\theta} \leq c$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جاتا ہے۔ $\widehat{\theta}$ کی قیمت کو بلا منصوبہ متغیر

$$\widehat{\Theta} = g(X_1, \cdots, X_n)$$

کی مشاہدے سے حاصل قیمت تصور کیا جا سکتا ہے چونکہ x_j کو X_j کی مشاہدے سے حاصل قیمت تصور کیا جا سکتا ہے، جہاں $j = 1, \cdots, n$ ہے۔ان پرکھ میں غلطی کرنے کے درج ذیل دو امکانات پائے جاتے ہیں۔

خلل کی قسم اول

جدول 24.11 میں پرکھ درست ہے لیکن Θ قیمت $\widehat{\theta} > c$ اختیار کرتا ہے جس کی بنا اس پرکھ کو نا منظور کیا جاتا ہے (لہٰذا متبادل کو منظور کیا جاتا ہے)

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

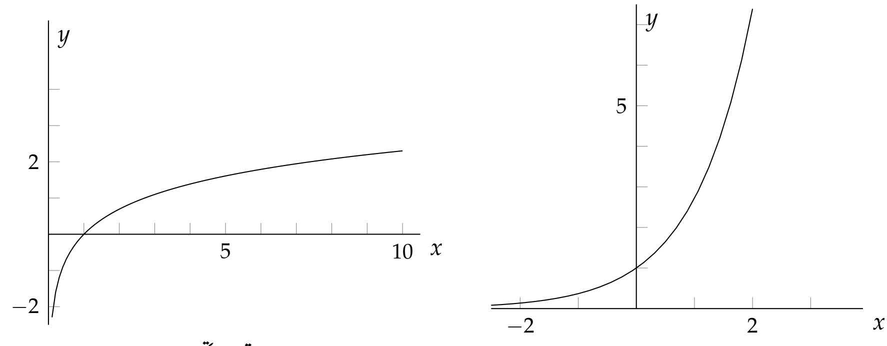
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $\frac{1}{x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = e^{-\ln x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

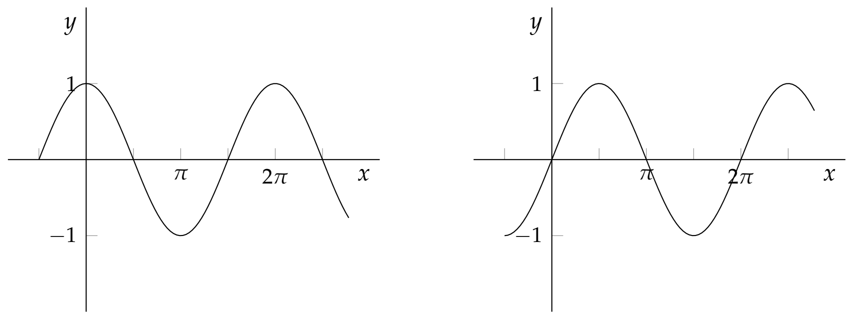
$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x (ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$ (ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{-\log x}=10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

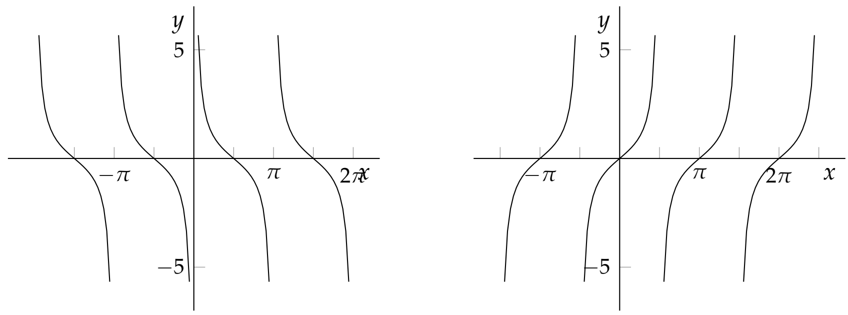
(ب.13)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



cot x (ب) tan x (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.17}$$
$$\cosh x + \sinh x = e^{x}, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

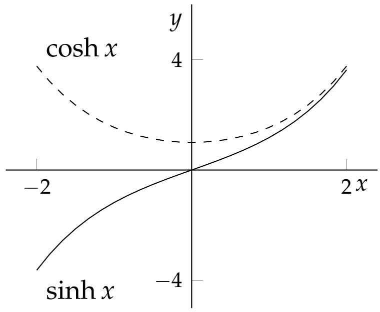
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.20}$$

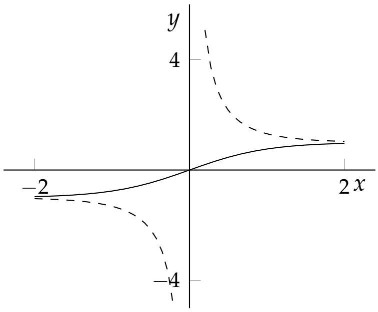
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

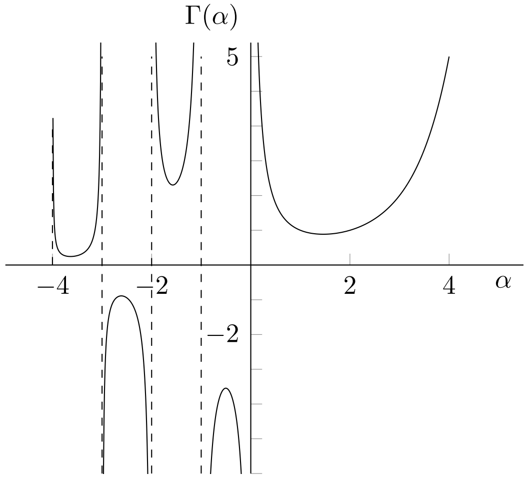
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\qquad(\alpha>0)\tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x)\tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\qquad(x>0,\ y>0)\tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

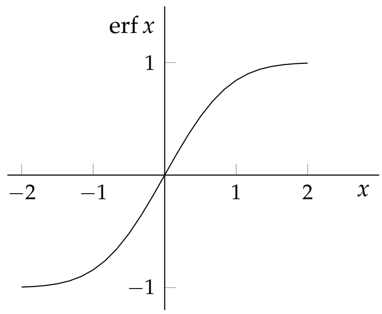
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)\tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

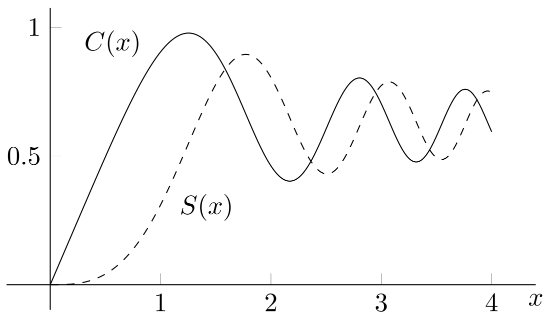
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{C}(x)=\int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{S}(x)=\int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

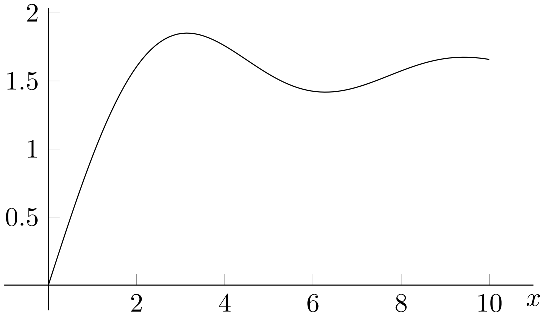
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1]complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

ضمیمہ ج

جدول

جدول 1.ج: ثنائی تقسیم

جدول 2.ج: پوئسن تقسیم

جدول 3.ج: عمومی تقسیم

جدول 4.ج: عمومی تقسیم

جدول 5.ج: شبلا منصوبہ اعداد

جدول 6.ج: t تقسیم

جدول 7.ج: مربع خا تقسیم