انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 18

طاقتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوغوں تسلسل

مخلوط تجزیہ میں طاقتی تسلسل (حصہ 18.1) اہم ترین ہے چونکہ یہ تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے (مسئلہ 18.8)۔اسی طرح ہر تحلیلی تفاعل کا طاقتی تسلسل پایا جاتا ہے جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں۔یہ ٹیلر تسلسل حقیقی علم الاحصاء کی ٹیلر تسلسل کی مخلوط مماثل ہیں۔بلکہ حقیقی ٹیلر تسلسل میں حقیقی متغیرہ کی جگہ مخلوط متغیرہ پر کرتے ہوئے ہم حقیقی تفاعل کو مخلوط دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں۔

باب کے آخری حصے میں تحلیلی تفاعل کی لوغوں تسلسل پر غور کیا جائے گا۔ لوغوں تسلسل میں غیر تابع متغیرہ کی مثبت اور منفی عدد صحیح طاقت پائے جاتے ہیں۔جیسا ہم اگلے باب میں دیکھیں گے، یہ تسلسل حقیقی اور مخلوط تکمل کی قیمت حاصل کرنے میں مدد گار ثابت ہوتی ہیں۔

18.1 طاقتی تسلسل

گزشتہ باب کے حصہ 17.2 میں مستقل اجزاء کی تسلسل کی تعریف پیش کی گئی۔اگر تسلسل کے اجزاء متغیر، مثلاً، متغیر z کے تفاعل ہوں تب کسی مقررہ z کے لئے یہ تمام اجزاء کوئی مستقل ہوں گے لہٰذا وہ تمام تعریف یہاں بھی قابل استعمال ہوں گے۔ظاہر ہے کہ ایسا تسلسل جس کے اجزاء متغیر z کے تفاعل ہوں کے جزوی مجموعے، باقی اور

مجموعہ بھی z کے تفاعل ہوں گے۔ عموماً ایسا تسلسل z کی کچھ قیمتوں، مثلاً، کسی خطے میں تمام z کے لئے مرتکز ہو گا، جبکہ z کی دیگر قیمتوں کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔

مخلوط تجزیہ میں متغیر اجزاء کی اہم ترین تسلسل طاقتی تسلسل ہے۔ متغیر $z-a$ کی **طاقتی تسلسل**[1] درج ذیل روپ کی لامتناہی تسلسل کو کہتے ہیں

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{18.1}$$

جہاں z کوئی متغیر ہے جبکہ $c_0, c_1, \cdots$، جنہیں **عددی سر**[2] کہتے ہیں، مستقل قیمتیں ہیں اور a، جس کو تسلسل کا **مرکز**[3] کہتے ہیں، مستقل ہے۔ طاقتی تسلسل میں طاقت m صرف غیر منفی ہو سکتا ہے[4]۔

$a=0$ کی صورت میں طاقتی تسلسل کی درج ذیل مخصوص روپ حاصل ہوتی ہے جو z کی طاقتی تسلسل ہے۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{18.2}$$

طاقتی تسلسل کی مرکوزیت کو سادہ طریقے سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ آئیں تین عمومی مثالوں سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 18.1: قرص میں مرکوزیت، ہندسی تسلسل
ہندسی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$|z|<1$ کی صورت میں حتمی مرتکز جبکہ $|z| \geq 1$ کی صورت میں منفرج ہے (مسئلہ 17.13)۔ □

مثال 18.2: پورے متناہی مستوی میں مرکوزیت
درج ذیل طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

---

[1] power series
[2] coefficients
[3] center
[4] منفی m والے تسلسل پر اسی باب میں بعد میں غور کیا جائے گا۔

تناسبی آزمائش کے تحت ہر (متناہی) z کے لئے حتمی مرتکز ہے۔در حقیقت کسی بھی مقررہ z کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

□

مثال 18.3: **صرف مرکز پر مرکوزیت**
درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \cdots$$

صرف مرکز $z = 0$ پر مرتکز ہے جبکہ ہر $z \neq 0$ کے لئے تسلسل منفرج ہے۔یہی نتیجہ تناسبی آزمائش سے مقررہ z کے لئے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$\left|\frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n}\right| = (n+1)|z| \to \infty \qquad (n \to \infty, \quad z \neq 0)$$

□

$z = a$ کے لئے طاقتی تسلسل مساوات 18.1 مرتکز ہے چونکہ تب $z - a = 0$ ہو گا اور تسلسل واحد ایک جزو c_0 پر مشتمل ہو گا۔ جیسا آپ نے مثال 18.3 میں دیکھا، بعض اوقات z کی یہ واحد قیمت ہو گی جس پر تسلسل مرتکز ہو گا۔البتہ اگر تسلسل 18.3 کسی $a \neq z_0$ کے لئے مرتکز ہو تب تسلسل z کی ہر اس قیمت کے لئے مرتکز ہو گا جس کا فاصلہ مرکز سے z_0 کے فاصلے سے کم ہو۔

مسئلہ 18.1: **طاقتی تسلسل کی مرکوزیت**
اگر مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقتی تسلسل نقطہ $z = a$ پر مرتکز ہو تب یہ ہر اس z پر حتمی مرتکز ہو گا جس کے لئے $|z - a| < |z_0 - a|$ ہو، یعنی ایسے دائرے کے اندر ہر z پر جو z_0 سے گزرتا ہو اور جس کا مرکز a ہو۔

ثبوت : چونکہ مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقتی تسلسل z_0 پر مرتکز ہے لہٰذا مسئلہ 17.5 کے تحت

$$c_n (z_0 - a)^n \to 0 \qquad n \to \infty$$

ہو گا یعنی $z = z_0$ پر اس تسلسل کے اجزاء محدود ہوں گے، مثلاً ہر $n = 0, 1, 2, \cdots$ کے لئے

$$\left|c_n(z_0 - a)^n\right| < M \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ہو گا۔اس سے درج ذیل ملتا ہے

$$\left|c_n(z_0 - a)^n\right| = \left|c_n(z_0 - a)^n \left(\frac{z - a}{z_0 - a}\right)^n\right| < M\left|\frac{z - a}{z_0 - a}\right|^n$$

لہٰذا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n(z_0 - a)^n\right| < \sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z - a}{z_0 - a}\right|^n = M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z - a}{z_0 - a}\right|^n \tag{18.3}$$

ہو گا۔چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ $|z - a| < |z_0 - a|$ لہٰذا

$$\left|\frac{z - a}{z_0 - a}\right| < 1$$

ہو گا اور یوں مساوات 18.3 کی دائیں ہاتھ (ہندسی) تسلسل مرتکز ہو گا۔یوں مساوات 18.3 کا بایاں ہاتھ بھی مرتکز ہو گا لہٰذا مساوات 18.1 میں دیا گیا تسلسل $|z - a| < |z_0 - a|$ کی صورت میں حتمی مرتکز ہو گا۔

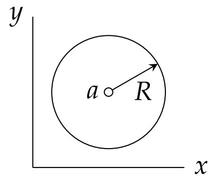
□

مثال 18.2 اور مثال 18.3 میں ہم نے دیکھا کہ طاقتی تسلسل تمام z یا صرف $z = a$ پر مرتکز ہو سکتا ہے۔آئیں ان دو صورتوں کو فی الحال نظر انداز کریں۔اب اگر کوئی طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) دیا گیا ہو تب ہم مخلوط مستوی میں ان تمام z پر غور کرتے ہیں جہاں تسلسل مرتکز ہو۔فرض کریں کہ R ایسا کم تر حقیقی عدد ہو کہ مرکز a سے ہر ایسے نقطے کا فاصلہ زیادہ سے زیادہ R ہو۔(مثال کے طور پر مثال 18.1 میں $R = 1$ ہے۔) تب مسئلہ 18.1 کے تحت رداس R کے دائرہ جس کا مرکز a ہو میں تمام z پر تسلسل مرتکز ہو گا یعنی ان تمام z پر جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

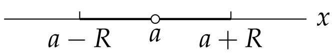
$$|z - a| < R \tag{18.4}$$

اور R کی تعریف کے تحت ان تمام z پر جو

$$|z - a| > R$$



(الف) دائرہ ارتکاز



(ب) حقیقی طاقتی تسلسل کا ارتکازی وقفہ

شکل 18.1: دائرہ ارتکاز اور وقفہ ارتکاز

کو مطمئن کرتے ہوں، تسلسل منفرج ہو گا۔ دائرہ

$$|z - a| = R$$

کو **دائرہ ارتکاز**[5] کہتے ہیں جبکہ R کو **رداس ارتکاز**[6] کہتے ہیں (شکل 18.1-الف)۔

دائرہ مرکوزیت کے نقطوں پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر مثال 18.1 میں $R = 1$ ہے اور دائرہ مرکوزیت $|z| = 1$ کے ہر نقطہ پر تسلسل منفرج ہے۔ طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$$

تناسبی آزمائش کے تحت $|z| < 1$ پر مرتکز اور $|z| > 1$ پر منفرج ہے۔ عین $z = 1$ پر یہ ہارمونی تسلسل کی صورت اختیار کرتا ہے جو منفرج ہے جبکہ $z = -1$ پر یہ $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \cdots$ صورت اختیار کرتا ہے جو مرتکز ہے (مثال 17.3)۔ آپ نے دیکھا کہ دائرہ مرکوزیت کے کچھ نقطوں پر تسلسل مرتکز اور کچھ نقطوں پر تسلسل منفرج ہو سکتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم حقیقی طاقتی تسلسل مساوات 18.1 کی بات کی جائے جس کے عددی سر اور مرکز حقیقی ہوں اور متغیرہ $z = x$ ہو تب x محور پر مساوات 18.4 **ارتکازی وقفہ**[7] کو ظاہر کرے گا جس کی لمبائی $2R$ اور درمیانہ نقطہ $x = a$ ہو گا (شکل 18.1-ب)۔

اگر طاقتی تسلسل مساوات 18.1 تمام z پر (مثال 18.2 کی طرح) مرتکز ہو تب ہم

$$R = \infty \qquad \text{اور} \qquad \frac{1}{R} = 0$$

---

[5] convergence circle
[6] convergence radius
[7] interval of convergence

لکھتے ہیں اور اگر تسلسل (مثال 18.3 کی طرح) صرف مرکز $z = a$ پر مرتکز ہو تب ہم

$$R = 0 \qquad \text{اور} \qquad \frac{1}{R} = \infty$$

لکھتے ہیں۔ان روایات کو استعمال کرتے ہوئے ارتکاز کے رداس R کو تسلسل کی عددی سروں سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

مسئلہ 18.2: ارتکاز کا رداس
اگر ترتیب $\sqrt[n]{|c_n|},\ n = 1, 2, \cdots$ مرتکز ہو اور اس کا حد L ہو، تب طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کا رداس ارتکاز R درج ذیل ہو گا

$$R = \frac{1}{L} \tag{18.5}$$

جو $L = 0$ کی صورت میں $R = \infty$ دے گا اور تسلسل (مساوات 18.1) تمام z کے لئے مرتکز ہو گا۔

اگر یہ ترتیب مرکوز نہ ہو لیکن محدود ہو، تب

$$R = \frac{1}{l} \tag{18.6}$$

ہو گا جہاں ترتیب کے تحدیدی نقطوں میں سب سے بڑا تحدیدی نقطہ l ہے۔

اگر یہ ترتیب غیر محدود ہو، تب $R = 0$ ہو گا اور تسلسل صرف $z = a$ پر مرتکز ہو گا۔

مساوات 18.6 [9][8] کلیہ کوشی اور ادامغ کہلاتا ہے۔

ثبوت: اگر

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0$$

ہو تب

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = |z-a| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |z-a|\, L$$

---

[8] فرانسیسی ریاضی دان آگستن لوئی کوشی [1789-1857] اور جیکو یس ادامغ [1865-1964]
[9] Cauchy-Hadamard formula

ہو گا۔چونکہ تسلسل (مساوات 18.1) کے اجزاء $w_n = c_n(z-a)^n$ ہیں لٰہذا جذری آزمائش (حصہ 17.5) کے تحت

$$|z-a| L < 1 \quad \text{یا} \quad |z-a| < \frac{1}{L} = R$$

کی صورت میں تسلسل حتمی مرتکز ہو گا جبکہ

$$|z-a| L > 1 \quad \text{یا} \quad |z-a| > \frac{1}{L} = R$$

کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔اگر

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L = 0$$

ہو تب حد کی تعریف کے تحت کسی بھی $\epsilon > 0$ مثلاً $\epsilon = \frac{1}{2|z_1-a|}$ کے لئے جہاں z_1 مستقل ہے، ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_1-a|} \qquad (\text{ہر } n > N)$$

اس سے ہمیں

$$|c_n| < \frac{1}{(2|z_1-a|)^n} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|c_n(z_1-a)^n\right| < \frac{1}{2^n}$$

ملتا ہے۔اب چونکہ $\sum 2^{-n}$ مرتکز ہے لٰہذا تقابلی آزمائش (حصہ 17.5) کے تحت $z = z_1$ کے لئے تسلسل (مساوات 18.1) حتمی مرتکز ہے۔چونکہ z_1 اختیاری ہے لٰہذا تسلسل ہر z کے لئے حتمی مرتکز ہے۔یوں مساوات 18.5 کا ذکر کرنے والے فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ہم اب اس فقرے کو ثابت کرتے ہیں جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتا ہے۔ مسئلہ بُلزانو وائنشٹراس 17.6 کے تحت l موجود ہو گا اور چونکہ $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$ ہے لٰہذا $l > 0$ ہو گا۔حد کی تعریف کے تحت کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے n کی لامتناہی تعداد کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{|c_n|} < l + \epsilon \qquad n \text{ کی لامتناہی تعداد}$$

اس کو مثبت مقدار $|z-a|$ سے ضرب دینے سے عدم مساوات

$$|z-a|\,(l-\epsilon) < \sqrt[n]{\left|c_n(z-a)^n\right|} \tag{18.7}$$

اور

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < |z-a|\,(l+\epsilon) \tag{18.8}$$

حاصل ہوتی ہیں۔چونکہ l سب سے بڑا تحدیدی نقطہ ہے لہٰذا عدم مساوات 18.8 کے دائیں ہاتھ سے بڑے اجزاء کی تعداد متناہی ہو گی اور یوں کافی بڑے تمام n ، مثلاً $n > N$ ، کے لئے بھی عدم مساوات 18.8 مطمئن ہو گی۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$|z-a| < \frac{1}{l} \tag{18.9}$$

کے لئے طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کا ارتکاز عدم مساوات 18.8 سے ثابت ہوتا ہے۔در حقیقت، اگر ہم درج ذیل منتخب کریں

$$\epsilon = \frac{1-l|z-a|}{2|z-a|}$$

تب مساوات 18.9 کے تحت $\epsilon > 0$ ہو گا اور عدم مساوات 18.8 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < \frac{1+l|z-a|}{2} \qquad (n > N)$$

مساوات 18.9 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں ہاتھ اکائی سے کم ہے لہٰذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل مرتکز ہو گا۔اس کے برعکس اگر

$$|z-a| > \frac{1}{l}$$

ہو تب

$$\epsilon = \frac{l|z-a|-1}{2|z-a|}$$

منتخب کرتے ہوئے $\epsilon > 0$ حاصل ہو گا اور عدم مساوات 18.7 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > \frac{|z-a|\,l+1}{2} > 1$$

یوں جذری آزمائش کے تحت ان z کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔یوں اس فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتی ہے۔

آخر میں اگر ترتیب $\sqrt[n]{|c_n|}$ غیر محدود ہو، تب، انفراج کی تعریف کے تحت، کسی بھی K کے لئے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > K \qquad \text{کی لامتناہی تعداد کے لئے } n$$

ہو گا۔ہم $K = \frac{1}{|z-a|}$ منتخب کرتے ہیں جہاں $z \neq a$ ہے اور یوں عدم مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z-a|} \quad \implies \quad \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1$$

لہٰذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔یوں اس مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب طاقتی تسلسل کے مجموعہ اور ان کی تفریق پر غور کرتے ہیں۔

دو طاقتی تسلسل کو جزو در جزو ان تمام z کے لئے جمع کیا جا سکتا ہے جن پر دونوں تسلسل مرتکز ہوں۔ یہ نتیجہ مسئلہ 17.18 سے اخذ ہوتا ہے۔

آئیں دو طاقتی تسلسل

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_1 + c_1 z + \cdots \tag{18.10}$$

کی جزو در جزو ضرب پر غور کرتے ہیں۔بائیں تسلسل کی ہر جزو کو دائیں تسلسل کی ہر جزو سے ضرب دے کر z کی ایک جیسی طاقتوں کو یکجا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} &a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)z + (a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0)z^2 + \cdots \\ &\qquad \sum_{n=0}^{\infty} (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \cdots + z_nc_0)z^n \end{aligned} \tag{18.11}$$

ملتا ہے۔اس کو مساوات 18.10 میں دی گئی تسلسلوں کا **کوشی حاصل ضرب**[10] کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.3: **طاقتی تسلسلوں کا کوشی حاصل ضرب**
مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کی دائرہ ارتکاز کے اندر ہر z کے لئے کوشی حاصل ضرب (مساوات 18.11)

[10] Cauchy product

حتمی مرتکز ہو گا۔اگر ان تسلسلوں کے مجموعے بالترتیب $g(z)$ اور $h(z)$ ہوں تب کوشی حاصل ضرب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$s(z) = g(z)h(z) \tag{18.12}$$

ثبوت : کوشی حاصل ضرب (مساوات 18.11) کا عمومی جزو

$$p_n = (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \cdots + z_nc_0)z^n$$

ہے۔اب عمومی تکونی عدم مساوات 14.26 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}|p_0| + |p_1| &= |a_0c_0| + |(a_0c_1 + a_1c_0)z| \leq (|a_0| + |a_1z|)(|c_0| + |c_1z|),\\ |p_0| + |p_1| + |p_2| &\leq (|a_0| + |a_1z| + \left|a_2z^2\right|)(|c_0| + |c_1z| + \left|c_2z^2\right|),\end{aligned}$$

جس کی تصدیق آپ دائیں ہاتھ ضرب حاصل کرتے ہوئے کر سکتے ہیں؛اسی طرح درج ذیل عمومی عدم مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}&|p_0| + |p_1| + \cdots + |p_n|\\ &\quad\leq (|a_0| + |a_1z| + \cdots + |a_nz^n|)(|c_0| + |c_1z| + \cdots + |c_nz^n|)\end{aligned} \tag{18.13}$$

اگر z مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کے دائرہ ارتکاز کے اندر پایا جاتا ہو، تب عدم مساوات 18.13 کا دایاں ہاتھ محدود ہو گا لہٰذا جزوی مجموعوں کی ترتیب کا مجموعہ $|p_0| + |p_1| + \cdots$ بھی محدود ہو گا۔چونکہ $|p_n| \geq 0$ ہے لہٰذا یہ ترتیب یک سر بڑھتی ترتیب ہو گی اور مسئلہ 17.10 کے تحت مرتکز ہو گا۔یوں یہ تسلسل مرتکز ہے اور حاصل ضرب تسلسل (مساوات 18.11) حتمی مرتکز ہو گا۔

ہم اب مساوات 18.12 کو ثابت کرتے ہیں۔ ہم اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہیں کہ مساوات 18.11 کی ہر ردوبدل ان z کے لئے حتمی مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ مساوات 18.12 دیتی ہے (مسئلہ 17.20)۔ہم ان میں سے ایک مخصوص ردوبدل $p_0^* + p_1^* + \cdots$ پر غور کرتے ہیں جہاں p_n^* درج ذیل ہے (شکل 18.2)۔

$$(a_nc_0 + a_0c_n)z^n + (a_nc_1 + a_1c_n)z^{n+1} + \cdots + (a_nc_{n-1} + a_{n-1}c_n)z^{2n-1} + a_nc_nz^{2n}$$

ظاہر ہے کہ

$$a_0c_0 = p_0^*, \quad (a_0 + a_1z)(c_0 + c_1z) = p_0^* + p_1^*$$

$$\begin{tikzcd}
p_0^* & p_1^* & p_2^* & \cdots \\
a_0c_0 \arrow[u, squiggly] & a_0c_1z \arrow[u, squiggly] & a_0c_2z^2 \arrow[u, squiggly] & \cdots \\
a_1c_0z \arrow[r, squiggly, no head] & a_1c_1z^2 \arrow[u, squiggly, no head] & a_1c_2z^3 \arrow[u, squiggly, no head] & \cdots \\
a_2c_0z^2 \arrow[r, squiggly, no head] & a_2c_1z^3 \arrow[r, squiggly, no head] & a_2c_2z^4 \arrow[u, squiggly, no head] & \cdots
\end{tikzcd}$$

شکل 18.2: ثبوت مسئلہ 18.3

اور عمومی جزو

$$(a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n)(c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n) = p_0^* + p_1^* + \cdots p_n^*$$

ہیں۔اب n کو لامتناہی تک پہنچانے سے مساوات 18.12 حاصل ہوتی ہے۔یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 18.4: کوشی حاصل ضرب

ہندسی تسلسل $1 + z + z^2 + \cdots$ کا $|z| < 1$ کی صورت میں مجموعہ $\frac{1}{1-z}$ ہے (حصہ 17.5)۔مسئلہ 18.3 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^m = (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z + z^2 + \cdots) \\
&= 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \qquad (|z| < 1)
\end{aligned}$$

□

سوالات

سوال 18.1: اگر ترتیب $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ ، جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے، مرتکز ہو اور اس کا حد L ہو تب دکھائیں کہ طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کی ارتکاز کے دائرے کا رداس، $L > 0$ کی صورت میں $R = \frac{1}{L}$ ہو گا جبکہ $L = 0$ کی صورت میں $R = \infty$ ہو گا۔

سوال 18.2: اگر مساوات 18.2 میں دی گئی تسلسل کی ارتکاز کا رداس (جو متناہی تصور کیا گیا ہو) R ہے، تب دکھائیں کہ $\sum c_m z^{2m}$ کی ارتکاز کا رداس $\sqrt{R}$ ہو گا۔

سوال 18.3 تا سوال 18.18 میں ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

سوال 18.3: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-i2)^n$

جواب: 1

سوال 18.4: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^n}$

سوال 18.5: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(\frac{z}{3})^n$

جواب: 3

سوال 18.6: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!}$

سوال 18.7: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$

جواب: ∞

سوال 18.8: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

سوال 18.9: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$

جواب: ∞

سوال 18.10: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}z^n$

سوال 18.11: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$

جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 18.12: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$

سوال 18.13: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

جواب: ∞

سوال 18.14: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

سوال 18.15: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 6^n (z-i)^n$

جواب: $\frac{1}{6}$

سوال 18.16: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!)^2 z^n$

سوال 18.17: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{2n} z^n$

جواب: $\frac{1}{9}$

سوال 18.18: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{2^n} z^n$

سوال 18.19: اگر $\sum c_n z^n$ تمام متناہی z کے لئے مرتکز ہو تب دکھائیں کہ $n \to \infty$ کے لئے $\sqrt[n]{|c_n|} \to 0$ ہو گا۔کوئی مثال پیش کریں۔

سوال 18.20: ارتکاز کے دائرے پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔ہندسی تسلسل کے لئے اس حقیقت کو دکھائیں۔

18.2 طاقتی تسلسل کی روپ میں تفاعل

اس حصے میں ہم دکھائیں گے کہ طاقتی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں (مسئلہ 18.8)۔اس کا الٹ یعنی ہر تحلیلی تفاعل کو طاقتی تسلسل (جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے کو اگلے حصے میں ثابت کیا جائے گا۔ان دو وجوہات کی بنا طاقتی تسلسل مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ اختیاری طاقتی تسلسل ہے جس کی ارتکاز کا رداس R غیر صفر ہے۔تب اس تسلسل کا مجموعہ z کا تفاعل ہو گا مثلاً $f(z)$ جس کو ہم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{18.14}$$

لکھتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $f(z)$ کو طاقتی تسلسل ظاہر کرتی ہے۔مثال کے طور پر اکائی دائرہ $|z| = 1$ کے اندر ہندسی تسلسل تفاعل $f(z) = \frac{1}{1-z}$ کو ظاہر کرتی ہے (مسئلہ 17.13)۔

مسئلہ 18.4: استمرار
$R > 0$ کی صورت میں $z = 0$ پر مساوات 18.14 میں تفاعل $f(z)$ استمراری ہے۔

ثبوت: ہم درج ذیل دکھانا چاہتے ہیں۔

$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = c_0 \tag{18.15}$$

ہم اختیاری مثبت عدد $r < R$ منتخب کرتے ہیں۔چونکہ مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل قرص $|z| < R$ میں حتمی مرتکز ہے لہٰذا درج ذیل تسلسل مرتکز ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, r^n \qquad (0 < r < R)$$

فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ K ہے۔تب ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\left|f(z) - c_0\right| = \left|z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}\right| \le |z| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |z|^{n-1} \le |z|\, K \qquad (0 < |z| \le r)$$

اب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے، ان تمام z پر جو $|z| < \sigma$ کو مطمئن کرتے ہوں جہاں σ ایسا حقیقی مثبت عدد ہے جو r اور $\frac{\epsilon}{K}$ دونوں سے چھوٹا ہو، $\left|f(z) - c_0\right| < \epsilon$ ہو گا۔یوں حد کی تعریف کے تحت مساوات 18.15 مطمئن ہو گا لہٰذا مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب یکتائی پر غور کرتے ہیں۔ہم دکھائیں گے کہ ایک ہی تفاعل $f(z)$ کو ایک ہی مرکز والے دو مختلف طاقتی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہو گا۔اگر $f(z)$ کو مرکز a کی طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جائے تب ایسا تسلسل یکتا ہو گا۔اس اہم حقیقت کی حقیقی اور مخلوط تجزیہ میں عموماً ضرورت پیش آتی ہے۔ہم اس کو درج ذیل مسئلہ میں پیش کرتے ہیں (جہاں عمومیت کھوئے بغیر $a = 0$ تصور کیا گیا ہے)۔

مسئلہ 18.5: **طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثلت**
فرض کریں کہ مثبت R کے لئے تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{اور} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$|z| < R$ پر مرتکز ہیں اور ان تمام z پر ان کا مجموعہ ایک جیسا ہے۔تب دونوں تسلسل مماثل ہوں گے یعنی تمام n کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$a_n = b_n \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{18.16}$$

ثبوت: ہم الکراجی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{18.17}$$

z کو صفر تک پہنچانے سے مسئلہ 18.4 کے تحت $a_0 = b_0$ ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $n = 0, 1, \cdots, m$ کے لئے $a_n = b_n$ ہیں۔تب مساوات 18.17 میں دونوں ہاتھ ابتدائی $m+1$ اجزاء حذف کرنے کے بعد $z^{m+1}\ (\neq 0)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$a_{m+1} + a_{m+2} z + a_{m+3} z^2 + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \cdots$$

ملتا ہے۔ مسئلہ 18.4 کے تحت دونوں میں سے ہر ایک تسلسل $z = 0$ پر استمراری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $a_{m+1} = b_{m+1}$ ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اب طاقتی تسلسل کی جزو در جزو تفرق اور تکمل لینے پر غور کرتے ہیں۔ تسلسل $c_1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ کا تفرق لینے سے درج ذیل تسلسل حاصل ہوتی ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots \tag{18.18}$$

اس کو طاقتی تسلسل کی **تفرقی تسلسل**[11] کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.6: **جزو در جزو تفرق**
تفرقی تسلسل کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ $nc_n = c_n^*$ ہے۔ تب $\sqrt[n]{|c_n^*|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|c_n|}$ ہو گا۔ چونکہ $n \to \infty$ کرنے سے $\sqrt[n]{n} \to 0$ ہو گا لہٰذا یا دونوں ترتیب $\sqrt[n]{|c_n^*|}$ اور $\sqrt[n]{|c_n|}$ مرتکز ہوں گے اور ان کا ایک ہی حد ہو گا اور یا دونوں ترتیب منفرج ہوں گے۔ اگر دونوں ترتیب منفرج ہوں، تب دونوں یا غیر محدود ہوں گے یا دونوں محدود ہوں گے۔ اگر دونوں محدود ہوں تب ان کے سب سے بڑے تحدیدی نقطے ایک جیسے ہوں گے۔ یوں اس سے اور مسئلہ 18.2 سے موجودہ مسئلے کا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔

□

مثال 18.5: طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n$$

کی ارتکاز کا رداس $R = 1$ ہے۔ ہندسی تسلسل کا تفرق لے کر مسئلہ 18.6 کی اطلاق سے ایسا حاصل ہوتا ہے۔ □

مسئلہ 18.7: **جزو در جزو تکمل**
تسلسل $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ کا جزو در جزو تکمل لینے سے حاصل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} = c_0 z + \frac{c_1}{2} z^2 + \frac{c_2}{3} z^3 + \cdots$$

---

[11] derived series

کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

اس مسئلہ کا ثبوت مسئلہ 18.6 کی ثبوت کی طرح ہے۔

طاقتی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں اور تفرقی تسلسل (جو تسلسل کا جزو در جزو تفرق لے کر حاصل کیا جاتا ہے) ان تفاعل کی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں۔

مسئلہ 18.8: تحلیلی تفاعل۔ ان کے تفرق
غیر صفر رداس ارتکاز R والی طاقتی تسلسل دائرہ ارتکاز کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ان تفاعل کے بلند درجی تفرق حاصل کرنے کی خاطر اصل طاقتی تسلسل کے جزو در جزو تفرق لیے جاتے ہیں؛یوں حاصل تمام تسلسلوں کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس جیسا ہو گا۔

ثبوت: ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ کسی بھی عددی صحیح $n \geq 2$ کے لئے

$$\text{(18.19)}\qquad \begin{aligned} &\text{(الف)}\quad \frac{b^n-a^n}{b-a}-na^{n-1}=(b-a)A_n\\ &\text{(ب)}\quad A_n=b^{n-2}+2ab^{n-3}+3a^2b^{n-4}+\cdots+(n-1)a^{n-2} \end{aligned}$$

ہو گا جہاں

ہے۔ہم الکراجی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔سادہ حساب سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n=2$ کے لئے مساوات 18.19 مطمئن ہوتی ہیں۔فرض کریں کہ $n=k$ کے لئے مساوات 18.19 مطمئن ہوتی ہیں۔ہم دکھاتے ہیں کہ یہ $n=k+1$ کے لئے بھی یہ مساوات مطمئن ہوں گی۔ ہم $n=k+1$ کے لئے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}=\frac{b^{k+1}-ba^k+ba^k-a^{k+1}}{b-a}=b\frac{b^k-a^k}{b-a}+a^k$$

مساوات 18.19-الف کے تحت دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا

$$b[(b-a)A_k+ka^{k-1}]+a^k$$

جس کو

$$(b-a)[bA_k+ka^{k-1}]+ka^k+a^k$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $n = k$ لیتے ہوئے چکور قوسین میں بند حصے کو مساوات 18.19-ب سے

$$b^{k-1} + 2ab^{k-2} + \cdots + (k-1)b^{k-2} + ka^{k-1} = A_{k+1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ہمیں

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a} = (b-a)A_{k+1} + (k+1)a^k$$

ملتا ہوتا ہے جو $n = k+1$ لیتے ہوئے مساوات 18.19 ہے۔اس طرح کسی بھی $n \geq 2$ کے لئے مساوات 18.19 ثابت ہوتا ہے۔

ہم اب مسئلہ 18.8 کے فقروں کو ثابت کرتے ہیں۔درج ذیل روپ پر غور کریں۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

فرض کریں کہ اس کی ارتکاز کا رداس R غیر صفر ہے۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی بھی مقررہ z جہاں $|z| < R$ ہے کے لئے $\Delta z \to 0$ کرنے سے $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ کی قیمت تفرقی تسلسل مساوات 18.18 تک پہنچتی ہے جس کو ہم $f_1(z)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔جزو در جزو مجموعہ لے کر

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \Big[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1}\Big]$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 18.19 میں $b = z + \Delta z$ ، $a = z$ اور $b - a = \Delta z$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا تسلسل

$$\Delta z \sum_{n=2}^{\infty} c_n[(z+\Delta z)^{n-2} + 2z(z+\Delta z)^{n-3} + \cdots + (n-1)z^{n-2}]$$

لکھا جا سکتا ہے اور $|z| \leq R_0$ اور $|z+\Delta z| \leq R_0$ جہاں $R_0 < R$ ہے کے لئے اس کی حتمی قیمت درج ذیل سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے

$$|\Delta z| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n|\, n(n-1)R_0^{n-2} \tag{18.20}$$

جہاں عددی سر $1, 2, \cdots, n-1$ میں سب سے بڑا عددی سر $n-1$ ہے اور اجزاء کی تعداد n ہے۔ مساوات 18.20 میں دیا گیا تسلسل دوسری تفرقی تسلسل کے ساتھ R_0 پر قریبی تعلق رکھتا ہے۔بلکہ اس تفرقی

مساوات کے عددی سر c_n ہیں (جبکہ مساوات 18.20 کے تسلسل کے عددی سر $|c_n|$ ہیں) اور مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.1 کے تحت $R_0\,(< R)$ پر حتمی مرتکز ہے۔ اس سے مراد مساوات 18.20 کے تسلسل کی R_0 پر مرکوزیت ہے؛ فرض کریں کہ اس کی قیمت $K(R_0)$ ہے، تب ہمارا نتیجہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f_1(z)\right| \le |\Delta z|\,K(R_0)$$

$\Delta \to 0$ لیتے ہوئے اور جانتے ہوئے کہ $R_0\,(< R)$ اختیاری ہے، ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دائرہ ارتکاز کے اندر کسی بھی نقطہ پر $f(z)$ تحلیلی ہو گا اور اس کے تفرق کو تفرقی تسلسل ظاہر کرے گا۔اس سے بلند درجی تفرق کا فقرہ الکراجی ماخوذ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔یوں مسئلہ 18.8 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 18.8 سے ہم دیکھتے ہیں کہ $f(z)$ (مساوات 18.14) کا m واں تفرق $f^{(m)}(z)$ درج ذیل ہو گا۔

$$f^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)c_n z^{n-m} \qquad (|z|<R) \tag{18.21}$$

اگلے حصے میں ہم دیکھیں گے کہ ہر تحلیلی تفاعل کو طاقتی تسلسل ظاہر کر سکتا ہے۔

سوالات

سوال 18.21: اگر مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل جفت ہو تب ثابت کریں کہ طاق n کے c_n صفر ہوں گے۔ (مسئلہ 18.5 استعمال کریں۔)

سوال 18.22: اگر مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل طاق ہو تب ثابت کریں کہ جفت n کے c_n صفر ہوں گے۔ مثال پیش کریں۔

سوال 18.23: مسئلہ 18.5 کا اطلاق $(1+z)^p(1+z)^q = (1+z)^{p+q}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں جہاں p اور q مثبت عدد صحیح ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}\binom{q}{r-n}=\binom{p+q}{r}$$

سوال 18.24: ہندسی تسلسل کے لئے مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.7 کی تصدیق کریں۔

ہندسی تسلسل پر مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.7 کے اطلاق سے سوال 18.25 تا سوال 18.30 میں دیے تسلسل کی ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

سوال 18.25: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}(z-i)^n$

جواب: 5

سوال 18.26: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n}$

سوال 18.27: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n}(z+i2)^n$

جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 18.28:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

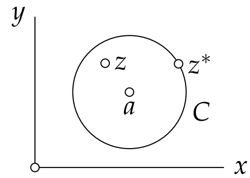
سوال 18.29:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1} z^{n+k}$$

جواب: 1

سوال 18.30:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$



شکل 18.3: شکل برائے مساوات 18.22

18.3 ٹیلر تسلسل

حقیقی علم الاحصاء میں ٹیلر تسلسل انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے۔ہم اب دیکھیں گے کہ مخلوط تجزیہ میں اس کی عمومی صورت پائی جاتی ہے جو اس سے بھی زیادہ اہم ہے۔

آئیں نقطہ $z=a$ کی پڑوس میں تحلیلی تفاعل $f(z)$ پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ اس پڑوس میں دائرہ C پایا جاتا ہے جس کا مرکز a ہے۔ہم z_0 اور z کی جگہ بالترتیب z اور z^* لکھتے ہوئے کوشی کا کلیہ تکمل (مساوات 16.31) استعمال کرتے ہیں

$$f(z)=\frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,\mathrm{d}z^* \tag{18.22}$$

جہاں C کے اندر z اختیاری مقررہ نقطہ ہے اور z^* مخلوط تکمل کا متغیرہ ہے (شکل 18.3)۔ہم اب مساوات 18.22 میں $\frac{1}{z^*-z}$ کی طاقتی تسلسل $z-a$ کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔ہم پہلے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{z^*-z}=\frac{1}{z^*-a-(z-a)}=\frac{1}{(z^*-a)\left(1-\frac{z-a}{z^*-a}\right)} \tag{18.23}$$

چونکہ z^* دائرہ C پر پایا جاتا ہے جبکہ z دائرے کے اندر پایا جاتا ہے لٰہذا

$$\left|\frac{z-a}{z^*-a}\right|<1 \tag{18.24}$$

ہو گا۔

ہندسی تسلسل سے

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (q\neq 1)$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{1-q}=1+q+\cdots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $q=\frac{z-a}{z^*-a}$ پر کرنے سے

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{z^*-a}}=1+\frac{z-a}{z^*-a}+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^n+\frac{\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^{n+1}}{\frac{z-a}{z^*-a}}$$

ملتا ہے۔ہم اس کو مساوات 18.23 میں پر کرنے کے بعد مساوات 18.23 کو مساوات 18.22 میں پر کرتے ہیں۔ چونکہ z اور a مستقل ہیں لہٰذا ہم $z-a$ کی طاقتوں کو تکمل کی علامت سے باہر نکال سکتے ہیں۔یوں مساوات 18.22 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$f(z)=\frac{1}{i2\pi}\int_C\frac{f(z^*)}{z^*-a}\,\mathrm{d}z^*+\frac{z-a}{i2\pi}\int_C\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^2}\,\mathrm{d}z^*+\cdots+\frac{(z-a)^n}{i2\pi}\int_C\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z^*+R_n(z)\tag{18.25}$$

جہاں آخری جزو درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$R_n(z)=\frac{(z-a)^{n+1}}{i2\pi}\int_C\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}\,\mathrm{d}z^*\tag{18.26}$$

مساوات 16.36 استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 18.25 کو

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(z)\tag{18.27}$$

لکھ سکتے ہیں جو کلیہ ٹیلر[12] کہلاتا[13] ہے جبکہ $R_n(z)$ کو باقی کہتے ہیں۔چونکہ تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا ہر درجے کا تفرق پایا جاتا ہے لہٰذا ہم مساوات 18.27 میں n جتنا چاہیں بڑا لے سکتے ہیں۔مساوات 18.27 میں $n\to\infty$ کرنے سے

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m\tag{18.28}$$

[12] Taylor's formula

[13] انگلستانی ریاضی دان بروک ٹیلر [1685-1731]

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 18.28 کو $f(z)$ کا **ٹیلر تسلسل**[14] کہتے ہیں جس کا مرکز a ہے۔اس کی وہ مخصوص صورت جس میں $a = 0$ ہو $f(z)$ کا **مکلارن تسلسل**[15] کہلاتا[16] ہے۔

ظاہر ہے کہ مساوات 18.28 میں دیا گیا تسلسل اس صورت مرتکز ہو گا اور $f(z)$ کو ظاہر کرے گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0 \tag{18.29}$$

مساوات 18.29 کو ثابت کرنے کی خاطر ہم مساوات 18.26 پر غور کرتے ہیں۔چونکہ z^* دائرہ C پر ہے جبکہ z اس دائرے کے اندر ہے لہٰذا $|z^* - z| > 0$ ہو گا۔چونکہ $f(z)$ دائرہ C پر اور اس دائرے کے اندر تحلیلی ہے لہٰذا $\frac{f(z^*)}{z^*-z}$ کی حتمی قیمت محدود ہو گی، مثلاً C پر تمام z^* کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\frac{f(z^*)}{z^*-z}\right| < \tilde{M}$$

فرض کریں کہ C کا رداس r ہے۔تب C پر تمام z^* کے لئے $|z^* - a| = r$ ہو گا جبکہ C کی لمبائی $2\pi r$ ہو گی۔یوں مساوات 18.26 پر مساوات 16.16 کا اطلاق کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
|R_n| &= \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}\,\mathrm{d}z^*\right| \\
&< \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\tilde{M}\frac{1}{r^{n+1}}2\pi r = \tilde{M}r\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1}
\end{aligned}$$

ملتا ہے۔اب n کی قیمت لامتناہی تک پہنچانے سے دایاں ہاتھ، مساوات 18.24 کے تحت، صفر تک پہنچے گا۔یوں C کے اندر تمام z کے لئے مساوات 18.29 ثابت ہوتا ہے۔چونکہ مسئلہ 18.5 کے تحت $f(z)$ کا مساوات 18.28 کی روپ میں اظہار یکتا ہے، یعنی مساوات 18.28 وہ واحد طاقتی تسلسل ہے جس کا مرکز a ہے اور جو $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا ہم حاصل نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ کو صورت میں بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 18.9: **مسئلہ ٹیلر**
فرض کریں کہ دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے اور D میں $z = a$ کوئی نقطہ ہے۔تب ایسا واحد ایک

[14] Taylor series
[15] Maclaurin series
[16] اسکاچی ریاضی دان کولن مکلارن [1698-1746]

طاقتی تسلسل موجود ہو گا جس کا مرکز a ہو اور جو $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہو؛ اس تسلسل کی روپ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \tag{18.30}$$

ہے جہاں

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \qquad n = 0, 1, \cdots$$

ہے؛ D میں اس بڑے سے بڑے کھلے قرص جس کا مرکز a ہو میں یہ تسلسل کارآمد ہو گا۔ مساوات 18.30 کے باقی $R_n(z)$ کو مساوات 18.26 ظاہر کرتی ہے۔ تسلسل کے عددی سر عدم مساوات

$$|b_n| \le \frac{M}{r^n} \tag{18.31}$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں دائرہ $|z-a| = r$ پر $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت M ہے۔

کوشی عدم مساوات 16.39 سے عدم مساوات 18.31 حاصل ہوتی ہے۔

عملاً مساوات 18.29 کہتی ہے کہ ان تمام z کے لئے جن پر مساوات 18.30 منفرج ہو، مساوات 18.30 کے n ویں جزوی مجموعہ کی قیمت $f(z)$ کی قیمت کے اتنی قریب ہو گی جتنا درکار ہو، پس ہمیں n اتنا بڑا لینا ہو گا۔

ہم مسئلہ ٹیلر سے دیکھتے ہیں کہ مساوات 18.30 کی ارتکاز کا رداس کم از کم a سے D کی سرحد تک کم سے کم فاصلہ جتنا ہو گا۔ اگرچہ رداس ارتکاز اس سے بڑا ہو سکتا ہے لیکن تب D کی ان تمام نقطوں پر جو ارتکاز کے دائرے کے اندر پائے جاتے ہوں پر ضروری نہیں ہے کہ تسلسل $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہو۔

مخلوط تحلیلی تفاعل کی ایک انوکھی خاصیت یہ ہے کہ ان کی ہر درجے کے تفرق پائے جاتے ہیں اور اب ہم نے ان کی دوسری انوکھی خاصیت دریافت کی ہے کہ ان کو ہر صورت مساوات 18.30 میں دی گئی طاقتی تسلسل کی روپ میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ حقیقی تفاعل کے لئے عموماً ایسا درست نہ ہو گا۔ ایسے حقیقی تفاعل پائے جاتے ہیں جن کے ہر درجے کے تفرق پائے جاتے ہیں لیکن انہیں طاقتی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہے؛ مثلاً $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ جب $x \neq 0$ ہو اور $f(z) = 0$ جب $x = 0$ ہو۔

ہماری موجودہ اور گزشتہ حصے کے طاقتی تسلسل کے تبصروں کے مابین درج ذیل مسئلہ تعلق پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 18.10: غیر صفر ارتکاز کے رداس والا ہر وہ طاقتی تسلسل جو تفاعل کو ظاہر کرتا ہے، اس تفاعل کا ٹیلر تسلسل ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ درج ذیل طاقتی تسلسل کا غیر صفر رداس ارتکاز R ہو۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

تب یہ قرص $|z-a|<R$ میں کسی تفاعل $f(z)$ کو ظاہر کرے گا یعنی:

$$f(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots$$

مسئلہ 18.8 کے تحت

$$f'(z)=b_1+2b_2(z-a)+\cdots$$

اور

$$f^{(n)}(z)=n!b_n+(n+1)n\cdots 3\cdot 2\cdot b_{n+1}(z-a)+\cdots$$

ہو گا اور یہ تمام تسلسل قرص $|z-a|<R$ میں مرتکز ہوں گے اور تحلیلی تفاعل کو ظاہر کریں گے۔یوں یہ تفاعل $z=a$ پر استمراری ہوں گے۔یوں $z=a$ لیتے ہوئے

$$f(a)=b_0, \quad f'(a)=b_1, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(a)=n!b_n, \cdots$$

ملتے ہیں۔ چونکہ یہ کلیات مسئلہ ٹیلر کے کلیات کے عین مطابق ہیں لہٰذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

وہ نقطہ جس پر تفاعل $f(z)$ غیر تحلیلی صورت اختیار کرتا ہو $f(z)$ کا **نادر نقطہ**[17] کہلاتا ہے؛ ہم کہتے ہیں کہ اس نقطہ پر $f(z)$ کی **ندرت**[18] پائی جاتی ہے۔یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ وہ نقطہ $z=z_0$ جس پر $f(z)$ قابل تفرق نہ ہو لیکن z_0 کے ہر پڑوس میں $f(z)$ قابل تفرق ہو تب z_0 کو $f(z)$ کا **نادر نقطہ** کہیں گے۔

[17] singular point
[18] singularity

اس تصور کے تحت دائرہ ارتکاز[19] پر $f(z)$ (کی طاقتی تسلسل مساوات 18.30) کا کم از کم ایک نادر نقطہ پایا جائے گا۔

ٹیلر تسلسل کی عملی استعمال سے پہلے مختلف مرکزی نقطوں کے گرد تسلسل کی تصور اور تحلیلی استمرار کی تصور پر بھی بات کرتے ہیں۔فرض کریں غیر صفر رداس ارتکاز R کے تفاعل $f(z)$ کا $z-a$ طاقتوں کا طاقتی تسلسل دیا گیا ہے جس کے مجموعہ کو ہم $f(z)$ سے ظاہر کرتے ہیں یعنی؛

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \tag{18.32}$$

مسئلہ 18.8 سے ہم جانتے ہیں کہ قرص $|z-a|<R$ میں $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔مسئلہ 18.10 کے تحت مساوات 18.32 تفاعل $f(z)$ کا ایسا ٹیلر تسلسل ہو گا جس کا مرکز a ہے۔ہم اس قرص میں کوئی نقطہ b منتخب کرتے ہوئے مسئلہ ٹیلر کی مدد سے $f(z)$ کے لئے

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \tag{18.33}$$

حاصل کرتے ہیں جس کے عددی سر مساوات 18.32 کے تفرق میں $z=b$ پر کرنے سے حاصل ہوں گے:

$$b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(b)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{n}{k}a_k(b-a)^{k-n}$$

یہ نئی تسلسل کم از کم قرص $|z-b|<R-|b|$ میں کارآمد ہو گی (شکل 18.4-الف)۔البتہ کئی بار مساوات 18.33 کی ارتکاز کا رداس $R-|b|$ سے بڑا ہو گا (شکل 18.4-ب) لٰہذا مساوات 18.33 تفاعل $f(z)$ کو قرص $|z-a|<R$ کے باہر وسعت دے گی (شکل 18.4-ب میں سیاہ خطہ)۔کسی ارتکازی خطے میں ایک تحلیلی تفاعل کی دی گئی طاقتی تسلسل کو اس خطے سے باہر وسعت دینے کو **تحلیلی استمرار**[20] کہتے ہیں۔

18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل

مثال 18.6: ہندسی تسلسل

فرض کریں کہ $f(z)=\frac{1}{1-z}$ ہے۔تب $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ اور $f^{(n)}(0)=n!$ ہوں گے۔یوں

[19] مساوات 18.30 کا رداس ارتکاز عموماً a سے $f(z)$ کے قریب ترین نادر نقطے تک فاصلے کے برابر ہو گا، لیکن اس سے زیادہ بھی ہو سکتا ہے؛ مثال کے طور پر $\operatorname{Ln} z$ منفی حقیقی محور پر نادر ہے اور $a=-1+i$ سے اس منفی محور تک فاصلہ 1 ہے لیکن $\operatorname{Ln} z$ کا ٹیلر تسلسل جس کا مرکز $a=-1+i$ ہو کی ارتکاز کا رداس $\sqrt{2}$ ہے۔

[20] analytic continuation

شکل 18.4: مختلف مرکز کے گرد طاقتی تسلسل کا حصول اور تحلیلی استمرار

$\frac{1}{1-z}$ کا مکلارن تسلسل درج ذیل ہندسی تسلسل ہو گا۔

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.34}$$

$f(z)$ نقطہ $z = 1$ پر نادر ہے؛ یہ نقطہ ارتکاز کے دائرے پر واقع ہے۔ □

مثال 18.7: قوت نمائی تفاعل

ہم جانتے ہیں کہ قوت نمائی تفاعل e^z (حصہ 14.7) تمام z پر تحلیلی ہے اور $(e^z)' = e^z$ ہے لہٰذا $a = 0$ لیتے ہوئے مساوات 18.30 سے درج ذیل مکلارن تسلسل حاصل ہوتا ہے۔

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \tag{18.35}$$

یہی تسلسل e^x کے مکلارن تسلسل میں x کی جگہ z پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

آئیں اب مساوات 18.35 کی مدد سے قوت نمائی تفاعل کے حاصل ضرب کا کلیہ

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{18.36}$$

دریافت کریں۔ ہم

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

سے شروع کرتے ہیں۔چونکہ دونوں تسلسل مرتکز ہیں لہٰذا ہم انہیں جزو در جزو ضرب کر سکتے ہیں؛حاصل ضرب میں ان اجزاء کا مجموعہ جن کے لئے $k+m=n$ ہے درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!}+\cdots+\frac{z_1}{1!}\frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{z_2^n}{n!}\\ =\frac{1}{n!}[z_1^n+\binom{n}{1}z_1^{n-1}z_2+\binom{n}{2}z_1^{n-2}z_2^2+\cdots+z_2^n]=\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\end{aligned}$$

یوں دونوں تسلسل کے حاصل ضرب کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2}$$

یوں مساوات 18.36 ثابت ہوتی ہے۔

مزید مساوات 18.35 میں $z=iy$ پر کرنے کے بعد مسئلہ 17.18 کی اطلاق سے

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ دائیں ہاتھ تسلسل حقیقی تفاعل $\cos y$ اور $\sin y$ کے مکلارن تسلسل ہیں لہٰذا ان سے **کلیہ یولر**

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{18.37}$$

حاصل ہوتا ہے (مساوات 14.64)۔ مساوات 18.37 کو e^x سے ضرب دے کر مساوات 18.36 کا استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.60 حاصل ہو گا۔ مساوات 18.35 کو قوت نمائی تفاعل کی تعریف لیتے ہوئے ہم اس سے حصہ 14.7 کے تمام کلیات حاصل کر سکتے ہیں۔ $\square$

مثال 18.8: تکونیاتی اور ہذلولی تفاعل

مساوات 18.35 کو مساوات 14.74 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\cos z&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\cdots\\ \sin z&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\cdots\end{aligned}\tag{18.38}$$

$z = x$ کی صورت میں ان سے بالترتیب حقیقی تفاعل $\cos x$ اور $\sin x$ کی جانی پہچانی مکلارن تسلسل حاصل ہوتی ہیں۔اسی طرح مساوات 18.35 کو مساوات 14.84 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \end{aligned} \tag{18.39}$$

□

مثال 18.9: لوگارتھم

مساوات 18.30 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.40}$$

z کی جگہ $-z$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کو -1 سے ضرب دے کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$-\operatorname{Ln}(1-z) = \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.41}$$

ان دونوں تسلسل کو جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \qquad (|z| < 1) \tag{18.42}$$

□

سوالات

سوال 18.31: مساوات 18.35 کی استعمال سے $(e^z)' = e^z$ ثابت کریں۔

سوال 18.32: مساوات 18.38 اور مساوات 18.39 کو مساوات 18.35 سے حاصل کریں۔

سوال 18.33: مساوات 18.38 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\cos z$ جفت تفاعل ہے جبکہ $\sin z$ طاق تفاعل ہے۔

سوال 18.34: مساوات 18.39 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ تمام حقیقی $z = x$ کے لئے $\cosh z \neq 0$ ہو گا۔

سوال 18.35 تا سوال 18.46 میں دیے گئے تفاعل کا نقطہ $z = a$ کے گرد ٹیلر تسلسل حاصل کریں اور اس کا رداس ارتکاز R تلاش کریں۔

سوال 18.35: $\cos 2z,\ a = 0$
جواب: $1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - + \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.36: $\sin z^2,\ a = 0$
جواب: $z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - + \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.37: $e^{-z},\ a = 0$
جواب: $1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + - \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.38: $e^z,\ a = 1$
جواب: $e[1 + (z-1) + \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \cdots]\ R = \infty$

سوال 18.39: $e^z,\ a = i\pi$
جواب: $-1 - (z - i\pi) - \frac{(z-i\pi)^2}{2!} - \frac{(z-i\pi)^3}{3!} - \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.40: $\sin z,\ a = \frac{\pi}{2}$
جواب: $1 - \frac{1}{2}(z - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{24}(z - \frac{\pi}{2})^4 - \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.41: $\cos z,\ a = -\frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}[1 + (z + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(z + \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(z + \frac{\pi}{4})^3 + \cdots],\ R = \infty$

سوال 18.42: $\frac{1}{1-z},\ a = -1$
جواب: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z+1) + \frac{1}{8}(z+1)^2 + \frac{1}{16}(z+1)^3 + \cdots],\ R = 2$

سوال 18.43: $\frac{1}{z},\ a = -1$
جواب: $-1 - (z+1) - (z+1)^2 - (z+1)^3 - (z+1)^4 + \cdots],\ R = 1$

نقطہ $z=0$ پر تفاعل $\frac{1}{z}$ نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز $a=-1$ سے نقطہ نادر تک فاصلہ، ارتکاز کا رداس $R=1$ ہے۔

سوال 18.44: $\frac{1}{1-z},\; a=i$

جواب: $\frac{1}{1-i}[1+\frac{z-i}{1-i}+\frac{(z-i)^2}{(1-i)^2}+\frac{(z-i)^3}{(1-i)^3}]+\cdots],\; R=\sqrt{2}$

نقطہ $z=1$ پر تفاعل $\frac{1}{1-z}$ نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز $a=i$ سے نقطہ نادر تک فاصلہ، ارتکاز کا رداس $R=\sqrt{2}$ ہے۔

سوال 18.45: $\cos^2 z,\; a=i$

جواب: $\cos^2 z=\frac{1}{2}(1+\cos 2z)=\frac{1}{2}(2-\frac{2^2}{2!}z^2+\frac{2^4}{4!}z^4-+\cdots),\; R=\infty$

سوال 18.46: $\sin^2 z,\; a=i$

جواب: $z^2-\frac{z^4}{3}+\frac{2z^6}{45}\cdots,\; R=\infty$

سوال 18.47 تا سوال 18.49 میں دیے گئے تفاعل کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی تین اجزاء اور اس کی رداس ارتکاز تلاش کریں۔

سوال 18.47: $\tan z$

جواب: $z+\frac{z^2}{3}+\frac{2z^5}{15}\cdots,\; R=\frac{\pi}{2}$

تفاعل $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ نقطہ $z=\pm\frac{\pi}{2}$ پر نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز $a=0$ سے نقطہ نادر کا فاصلہ $R=\frac{\pi}{2}$ ہے۔

سوال 18.48: $e^z\sin z$

جواب: $z+z^2+\frac{z^3}{3}\cdots$

سوال 18.49: $z\cot z$

جواب: $1-\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{45}\cdots,\; R=\pi$

سوال 18.50 تا سوال 18.55 میں متکمل کے مکلارن تسلسل کا جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے تسلسل دریافت کریں۔

سوال 18.50: $\int_0^z \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$

جواب:

$$\frac{e^t-1}{t}=\frac{1}{t}(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots)=1+\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{3!}+\frac{t^3}{4!}+\cdots$$
$$\int_0^z(1+\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{3!}+\frac{t^3}{4!}+\cdots)\,\mathrm{d}t=z+\frac{z^2}{2\cdot 2!}+\frac{z^3}{3\cdot 3!}+\frac{z^4}{4\cdot 4!}+\cdots$$

سوال 18.51: $\int_0^z \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{z}{2!} - \frac{z^3}{3\cdot 4!} + \frac{z^5}{5\cdot 6!} \cdots, \quad R = \infty$

سوال 18.52: $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\operatorname{erf} z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(2z - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{21} \cdots)$

سوال 18.53: $\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\operatorname{Si}(z) = z - \frac{z^3}{3\cdot 3!} + \frac{z^5}{5\cdot 5!} - \frac{z^7}{7\cdot 7!} \cdots, \quad R = \infty$

سوال 18.54: $\mathrm{S}(z) = \int_0^z \sin t^2\,\mathrm{d}t$
جواب: $\mathrm{S}(z) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^7}{42} + \frac{z^{11}}{1320} \cdots$

سوال 18.55: $\mathrm{C}(z) = \int_0^z \cos t^2\,\mathrm{d}t$
جواب: $\mathrm{C}(z) = z - \frac{z^5}{10} + \frac{z^9}{216} \cdots, \quad R = \infty$

18.5 طاقتی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب

عموماً عملی صورتوں میں مسئلہ ٹیلر میں دیے کلیہ کی مدد سے ٹیلر تسلسل کے عددی سر حاصل کرنا پیچیدہ ثابت ہو گا۔ایسے کئی دیگر نسبتاً سادہ تراکیب ہیں جن کی مدد سے ان عددی سروں کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مسئلہ 18.5 کے تحت تفاعل کا طاقتی تسلسل یکتا ہو گا لہٰذا ہم بغیر فکر کیے جیسے چاہیں اس کو حاصل کر سکتے ہیں۔آئیں اس عمل کو چند مثالوں کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 18.10: **متغیرہ کی تبدیلی**
ہمیں تفاعل $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ کا مکلارن تسلسل تلاش کرنا ہے۔مساوات 18.34 میں $-z^2$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \quad (|z| < 1) \tag{18.43}$$

□

مثال 18.11: تکمل
فرض کریں کہ $f(z)=\tan^{-1}z$ ہے۔اب $f'(z)=\frac{1}{1+z^2}$ ہے۔مساوات 18.43 کے تسلسل کا جزو در جزو تکمل لے کر اور $f(0)=0$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\tan^{-1}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\cdots\qquad(|z|<1)$$

یہ تسلسل $w=u+iv=\tan^{-1}z$ کی صدر قیمت دیتا ہے جس کے لئے $|u|<\frac{\pi}{2}$ ہو گا۔ □

مثال 18.12: ہندسی تسلسل کا استعمال
ہمیں تفاعل $\frac{1}{c-bz}$ کا تسلسل $z-a$ کی طاقتوں میں تلاش کرنا ہے جہاں $c-ab\neq 0$ اور $b\neq 0$ ہیں۔ہم اس تفاعل کو

$$\frac{1}{c-bz}=\frac{1}{c-ab-b(z-a)}=\frac{1}{(c-ab)[1-\frac{b(z-a)}{c-ab}]}$$

لکھتے ہیں۔اب $z=\frac{b(z-a)}{c-ab}$ لیتے ہوئے مساوات 18.34 سے نتیجہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{1}{c-bz}&=\frac{1}{c-ab}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{b(z-a)}{c-ab}]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{(c-ab)^{n+1}}(z-a)^n\\&=\frac{1}{c-ab}+\frac{b}{(c-ab)^2}(z-a)+\frac{b^2}{(c-ab)^3}(z-a)^2+\cdots\end{aligned}$$

یہ تسلسل درج ذیل صورت میں مرتکز ہو گا۔

$$\left|\frac{b(z-a)}{c-ab}\right|<1\qquad\equiv|z-a|<\left|\frac{c-ab}{b}\right|=\left|\frac{c}{b}-a\right|$$

□

مثال 18.13: ثنائی تسلسل، جزوی کسری پھیلاو
درج ذیل تفاعل کا ٹیلر تسلسل دریافت کریں۔تسلسل کا مرکز $z=1$ پر رکھیں۔

$$f(z)=\frac{2z^2+9z+5}{z^3+z^2-8z-12}$$

کسی بھی ناطق تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو حاصل کر کے ثنائی تسلسل

$$\frac{1}{(1+z)^m} = (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n = 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!}z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^3 + \cdots \tag{18.44}$$

کی مدد سے تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے۔چونکہ ہاتھ تفاعل $z = -1$ پر نادر ہے لہٰذا تسلسل قرص $|z| < 1$ میں مرتکز ہو گا۔موجودہ تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} = \frac{1}{[3-(z-1)]^2} - \frac{2}{2-(z-1)} = \frac{\frac{1}{9}}{[1+\frac{1}{3}(z-1)]^2} - \frac{1}{\frac{1}{2}(z-1)}$$

ہے۔یوں ثنائی تسلسل کی مدد سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f(z) = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{z-1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

ہم ان دونوں تسلسل کو جزو در جزو جمع کر سکتے ہیں۔چونکہ پہلے تسلسل کا ثنائی عددی سر

$$\tfrac{(-2)(-3)\cdots(-[n+1])}{n!} = (-1)^n(n+1)$$

ہے لہٰذا دیے گئے تفاعل کا تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right](z-1)^n = -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z-1) - \frac{23}{108}(z-1)^2 \cdots$$

چونکہ $f(z)$ کا مرکز $z = 1$ کے قریب ترین نادر نقطہ $z = 3$ ہے لہٰذا تسلسل قرص $|z-1| < 2$ میں مرتکز ہو گا۔ $\square$

مثال 18.14: تفرق مساوات کا استعمال

ہمیں تفاعل $f(z) = \tan z$ کا مکلارن تسلسل تلاش کرنا ہے۔ چونکہ $f'(z) = \sec^2 z$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f'(z) = 1 + f^2(z), \quad f'(0) = 1$$

چونکہ $f(0)=0$ ہے لہٰذا لگاتار تفرق لے کر ابتدائی چند عددی سر درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
f'' &= 2ff', & f''(0) &= 0, \\
f''' &= 2f'^2 + 2ff'', & f'''(0) &= 2, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3}, \\
f^{(4)} &= 6f'f'' + 2ff''', & f^{(4)}(0) &= 0, \\
f^{(5)} &= 6f''^2 + 8f'f''' + 2ff^{(4)}, & f^{(5)}(0) &= 16, \quad \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{2}{15},
\end{aligned}$$

یوں مکلارن تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots \qquad (|z| < \frac{\pi}{2}) \tag{18.45}$$

□

مثال 18.15: نا معلوم عددی سر

$\cos z$ اور $\sin z$ کے تسلسل (حصہ 18.4) استعمال کرتے ہوئے $\tan z$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔چونکہ $\tan z$ طاق تفاعل ہے لہٰذا اس کا تسلسل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$\tan z = b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots$$

ہم $\sin z = \tan z \cos z$ سے

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots = (b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots)$$

لکھ سکتے ہیں۔چونکہ $\tan z$ ماسوائے $z = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \cdots$ پر تحلیلی ہے لہٰذا اس کا تسلسل قرص $\frac{\pi}{2}$ میں تحلیلی ہو گا اور قرص کے اندر z کے لئے ہم درج بالا کو جزو در جزو ضرب دے سکتے ہیں (حصہ 18.3) جس کو ہم z کی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھتے ہیں۔ مسئلہ 18.5 کے تحت دونوں اطراف z کی ایک جیسے طاقتوں کے عددی سر یکساں ہوں گے۔اس طرح

$$1 = b_1, \quad -\frac{1}{3!} = -\frac{b_1}{2!} + b_3, \quad \frac{1}{5!} = \frac{b_1}{4!} - \frac{b_3}{2!} + b_5, \quad \cdots$$

ملتے ہیں جن سے عددی سر $b_1 = 1$ ، $b_3 = \frac{1}{3}$ ، $b_5 = \frac{2}{15}$ حاصل ہوتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 18.56 تا سوال 18.56 میں دیے گئے تفاعل کا مکلارن تسلسل تلاش کریں۔

سوال 18.56: $\frac{1}{1+z^4}$
جواب: $1 - z^4 + z^8 - z^12 + - \cdots, \quad |z| < 1$

سوال 18.57: $\frac{1}{1-z^3}$
جواب: $1 + z^3 + z^6 + z^9 + \cdots, \quad |z| < 1$

سوال 18.58: $\frac{1}{1+z^3}$
جواب: $1 - z^3 + z^6 - z^9 + - \cdots, \quad |z| < 1$

سوال 18.59: $\frac{1}{1-z^6}$
جواب: $1 + z^6 + z^{12} + z^{18} + \cdots, \quad |z| < 1$
$1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + 5z^8 - + \cdots, \quad |z| < 1$

سوال 18.60: $\frac{4z^2+30z+68}{(z+4)^2(z-2)}$
جواب: $-\frac{17}{8} - \frac{15}{16}z - \frac{67}{128}z^2 - \frac{31}{128}z^3 - \cdots, \quad |z| < 2$
دیے گئے تفاعل کے نادر نقطے $z = -4$ اور $z = 2$ ہیں۔ تسلسل کے مرکز $a = 0$ سے قریب ترین نادر نقطہ کا فاصلہ $R = 2$ ہے لہٰذا تسلسل $|z| < 2$ کی صورت میں تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔

سوال 18.61: $\cos z^2$
جواب: $1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + - \cdots, \quad |z| < 1$

سوال 18.62: e^{z^2-z}
جواب: $1 - z + \frac{3}{2}z^2 - \frac{7}{6}z^3 + \frac{25}{24}z^4 - + \cdots$

سوال 18.63: e^{z^4}
جواب: $1 + z^4 + \frac{z^8}{2} + \cdots$

سوال 18.64 تا سوال 18.69 میں دیے گئے تفاعل کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء تلاش کریں۔

سوال 18.64: $\frac{\cos z}{1-z^2}$
جواب: $1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{13}{24}z^4 + \frac{389}{720}z^6 + \cdots \quad |z| < 1$

سوال 18.65: $e^{z^2}\sin z^2$
جواب: $z^2+z^4+\frac{z^6}{3}-\frac{z^{10}}{30}\cdots$

سوال 18.66: $\frac{e^{z^2}}{\cos z}$
جواب: $1+\frac{3}{2}z^2+\frac{29}{24}z^4+\frac{511}{720}z^6\cdots,\quad |z|<\frac{\pi}{2}$

سوال 18.67: $e^{\frac{1}{1-z}}$
جواب: $e(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\cdots),\quad |z|<1$

سوال 18.68: $\cos(\frac{z}{1-z})$
جواب: $1-\frac{1}{2}z^2-z^3-\frac{35}{24}z^4\cdots$

سوال 18.69: $e^{(e^z)}$
جواب: $e(1+z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\cdots)$

سوال 18.70 تا سوال 18.75 میں دیے تفاعل کا ٹیلر تسلسل $z=a$ کے گرد دریافت کریں۔

سوال 18.70: $\frac{1}{2z-i},\quad a=-1$
جواب: $-\frac{1}{2+i}-\frac{2(z+1)}{(2+i)^2}-\frac{4(z+1)^3}{(2+i)^3}-\cdots,\quad |z+1|<\frac{\sqrt{5}}{2}$
تفاعل $\frac{1}{2z-i}$ نقطہ $z=\frac{i}{2}$ پر نادر ہے۔یہ نقطہ ٹیلر تسلسل کے مرکز $a=-1$ سے $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ فاصلہ پر ہے۔

سوال 18.71: $\frac{1}{4-3z},\quad a=1+i$
جواب: $\frac{1}{1-i3}+\frac{3(z-1-i)}{(1-i3)^2}+\frac{9(z-1-i)}{(1-i3)^3}+\cdots,\quad |z-1-i|<\frac{\sqrt{10}}{3}$
تفاعل $\frac{1}{4-i3}$ نقطہ $z=\frac{4}{3}$ پر نادر ہے۔نقطہ نادر کا تسلسل کی مرکز $a=1+i$ سے فاصلہ $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$ ہے۔

سوال 18.72: $\frac{2-3z}{2z^2-3z+1},\quad a=-1$
جواب: $\frac{5}{6}+\frac{17}{36}(z+1)+\frac{59}{216}(z+1)^2+\cdots,\quad |z+1|<\frac{3}{2}$
دیا گیا تفاعل $z=1$ اور $z=\frac{1}{2}$ پر نادر ہے۔تسلسل کے مرکز سے قریب ترین نقطہ نادر کا فاصلہ $R=\frac{3}{2}$ ہے۔

سوال 18.73: $\frac{1}{(1+z)^2},\quad a=-i$
جواب: $\frac{1}{(1-i)^2}-\frac{2(z+i)}{(1-i)^3}+\frac{3(z+i)^2}{(1-i)^4}-+\cdots,\quad |z+i|<\sqrt{2}$

سوال 18.74: $\frac{1}{(2+3z^3)^2}, \quad a=0$
جواب: $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}z^3+\frac{27}{16}z^6-\frac{27}{8}z^9\cdots \quad |z|<\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

سوال 18.75: $\tan z, \quad a=\frac{\pi}{4}$
جواب: $3+(z-\frac{\pi}{4})+2(z-\frac{\pi}{4})^2+\frac{8}{3}(z-\frac{\pi}{4})^3\cdots, \quad \left|z-\frac{\pi}{4}\right|<\frac{\pi}{4}$

سوال 18.76: تفاعل $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ کی مکلارن تسلسل کا جزو در جزو تکمل لے کر درج ذیل ثابت کریں۔

$$\sin^{-1} z = z+\left(\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{z^3}{3}+\left(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)\tfrac{z^5}{5}+\left(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)\tfrac{z^7}{7}+\cdots, \quad |z|<1$$

دکھائیں کہ یہ تسلسل $\sin^{-1} z$ کی صدر قیمت دیتا ہے (صفحہ 1102 پر سوال 14.255 میں تعریف بیان کی گئی ہے)۔

سوال 18.77: **یولر اعداد**
درج ذیل مکلارن تسلسل

$$\sec z = E_0-\frac{E_2}{2!}z^2+\frac{E_4}{4!}z^4-+\cdots \tag{18.46}$$

یولر اعداد[21] E_{2n} کی تعریف ہے۔ دکھائیں کہ $E_0=1$ ، $E_2=-1$ ، $E_4=5$ ، $E_6=-61$ ہیں۔

سوال 18.78: **برنولی اعداد**
درج ذیل مکلارن تسلسل **برنولی اعداد**[22] B_n کی تعریف ہے۔

$$\frac{z}{e^z-1} 1+B_1z+\frac{B_2}{2!}z^2+\frac{B_3}{3!}z^3+\cdots \tag{18.47}$$

نا معلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$B_1=-\tfrac{1}{2}, \quad B_2=\tfrac{1}{6}, \quad B_3=0, \quad B_4=-\tfrac{1}{30}, \quad B_5=0, \quad B_6=\tfrac{1}{42},\cdots \tag{18.48}$$

سوال 18.79: مساوات 14.74، مساوات 14.75 اور مساوات 18.47 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\tan z=\frac{i2}{e^{i2z}-1}-\frac{i4}{e^{i4z}-1}-i=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{2n}\,z^{2n-1} \tag{18.49}$$

---

[21] Euler numbers
[22] Bernoulli numbers

18.6 یکساں استمرار

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ کسی خطہ R میں دیا گیا تسلسل استمراری ہے۔اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا پورے خطے میں استمرار کافی تیز ہے یا کہ خطے میں ایسے نقطے بھی پائے جاتے ہیں جہاں استمرار بہت کم ہے۔کمپیوٹر کی استعمال سے حساب کرنے کے نقطہ نظر سے یہ سوال اہم ہے، لیکن جیسا ہم دیکھیں گے خالصتاً نظریاتی نقطہ نظر سے یہ سوال مزید زیادہ اہم ہے۔اس حقیقت کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال 18.16: فرض کریں کہ ہم وقفہ $0 \le x \le 1$ میں مثلاً $x = 0, 0.1, 0.2, \cdots$ پر حقیقی x کے تفاعل e^x کی قیمتوں کا ایسا جدول بنانا چاہتے ہیں جس میں حتمی قیمت کا خلل کسی مقررہ عدد ϵ ، مثلاً 0.5×10^{-6} سے کم ہو۔ہم مکلارن تسلسل کا موزوں جزوی مجموعہ

$$s_n = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

لیتے ہیں۔یوں قیمت کی حتمی قیمت میں خلل $|R_n| = |s - s_n|$ ہو گا جہاں $s = e^x$ تسلسل کا مجموعہ ہے اور ہم نے ایسا n منتخب کرنا ہے کہ درج ذیل ہو۔

$$\left|s(x) - s_n(x)\right| < \epsilon \, (= 0.5 \times 10^{-6})$$

اب سوال 17.75 سے ہم جانتے ہیں کہ $x = 1$ کی صورت میں $n = 10$ یا کوئی بھی $n > N = 9$ ہمیں درکار درستگی کا جواب مہیا کرے گا۔اب $x \, (\ge 0)$ کے گھٹنے سے باقی کی حتمی قیمت گھٹتی ہے لہٰذا $n > N(\epsilon)(= 9)$ منتخب کرتے ہوئے اس خطے میں کسی بھی x کے لئے

$$\left|s(x) - s_n(x)\right| < \epsilon$$

ہو گا۔دھیان رہے کہ N کی قیمت ϵ پر منحصر ہے۔یوں اگر ہمیں زیادہ درست قیمتیں درکار ہوں تب ϵ مزید کم اور N مزید بڑا ہو گا۔ □

مثال 18.17: ہندسی تسلسل $1 + z + z^2 + \cdots$ کا باقی

$$R_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{m=n+1}^{\infty} z^m = \frac{z^{n+1}}{1 - z}$$

ہے جو 1 کے کافی قریب کسی بھی حقیقی $x = z$ کے لئے بے قابو بڑا ہو گا۔یوں کسی بھی مقررہ ϵ کے لئے ہم صرف ϵ کا تابع ایسا N تلاش نہیں کر سکتے ہیں کہ وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر کسی بھی x کے لئے $n > N$ منتخب کر کے $\left|R_n(x)\right| = \left|s(x) - s_n(x)\right| < \epsilon$ حاصل ہو (سوال 17.74 دیکھیں)۔ یہ متوقع نتیجہ ہے چونکہ $z = 1$ پر تسلسل منفرج ہے۔آپ اگلے مثال میں حقیقتاً حیران کن صورت حال دیکھیں گے۔ $\square$

مثال 18.18:
درج ذیل تسلسل پر غور کریں۔

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \cdots$$

ہندسی تسلسل کے مجموعے کی مساوات استعمال کرتے ہوئے آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ اس تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ

$$s_n(x) = 1 = x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

ہو گا۔ان میں چند مجموعوں کو شکل 18.5 میں دکھایا گیا ہے۔یوں $x \neq 0$ کی صورت میں تسلسل کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = 1 + x^2$$

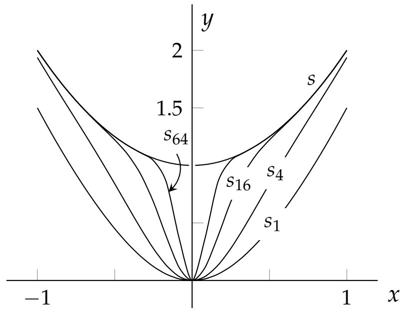
$x = 0$ کی صورت میں تمام n کے لئے $s_n = 0$ ہوں گے لہٰذا

$$s(0) = \lim_{n \to \infty} s_n(0) = 0$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ تمام x کے لئے تسلسل منفرج (بلکہ حتمی منفرج) ہے لیکن ہمیں اس حیران کن نتیجہ کا سامنا ہے کہ اگرچہ تسلسل کے اجزاء استمراری تفاعل ہیں، $x = 0$ پر مجموعہ غیر استمراری ہے۔مزید جب $x \neq 0$ ہو تب باقی کی حتمی قیمت

$$\left|R_n(x)\right| = \left|s(x) - s_n(x)\right| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی مقررہ ϵ کے لئے ایسا N جو صرف ϵ پر منحصر ہو معلوم نہیں کیا جا سکتا ہے کہ $0 \leq x \leq 1$ پر تمام x کے لئے اور تمام $n > N(\epsilon)$ کے لئے، $|R_n| < \epsilon$ مطمئن ہو۔ $\square$



شکل 18.5: مثال 18.18 کے چند جزوی مجموعے

اس مثال میں تسلسل کی صورت درج ذیل ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots \tag{18.50}$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ خطہ G میں تمام z کے لئے مساوات 18.50 مرتکز ہے۔فرض کریں کہ مساوات 18.50 کا مجموعہ $s(z)$ اور اس کا n واں جزوی مجموعہ $s_n(z)$ ہے۔ہم جانتے ہیں کہ نقطہ z پر مرکوزیت کا مطلب ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $N = N(\epsilon)$ تلاش کر سکتے ہیں کہ درج ذیل مساوات تمام $n > N(\epsilon, z)$ کے لئے مطمئن ہو گا۔

$$\left|s(z) - s_n(z)\right| < \epsilon \qquad n > N(\epsilon, z)$$

N کی قیمت ϵ پر اور عموماً زیر بحث منتخب نقطہ z پر منحصر ہو گی۔اب کسی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ہم z کا غیر تابع ایسا $N(\epsilon)$ تلاش کر سکیں کہ G میں تمام z کے لئے اور $n > N(\epsilon)$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\left|s(z) - s_n(z)\right| < \epsilon \qquad n > N(\epsilon), \quad \text{تمام } z$$

تب ہم کہتے ہیں کہ G میں تسلسل **یکساں مرتکز**[23] ہے۔

یوں یکساں ارتکاز ایسی خاصیت ہے جو z کے لامتناہی سلسلہ سے وابستہ ہے جبکہ تسلسل کی ارتکاز z کی مختلف مخصوص قیمتوں کے ساتھ وابستہ ہے جس کا z کی دیگر قیمتوں کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہو گا۔

---
uniform convergent[23]

مثال 18.16 میں وقفہ $0 \leq x \leq 1$ (بلکہ کسی بھی محدود وقفہ) پر تسلسل یکساں مرتکز ہے۔مثال 18.18 میں تسلسل ایسے کسی بھی وقفہ میں یکساں مرتکز نہیں ہے جس میں نقطہ 0 شامل ہو۔اس سے ظاہر ہے کہ حتمی مرتکز تسلسل بھی غیر یکساں مرتکز ہو سکتا ہے۔اسی طرح ضروری نہیں ہے کہ ایک یکساں مرتکز تسلسل، حتمی مرتکز بھی ہو۔درج ذیل مثال میں ایسی صورت پیش کی گئی ہے۔

مثال 18.19: **یکساں لیکن غیر حتمی مرتکز تسلسل**
درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} - + \cdots \qquad (\text{حقیقی } x)$$

تمام حقیقی x کے لئے یکساں مرتکز ہے لیکن یہ تسلسل حتمی مرتکز نہیں ہے۔ $\square$

عموماً طاقتی تسلسل مثال 18.17 کی طرز کے ہوں گے جن کی صورت حال بہت سادہ ہو گا (درج ذیل مسئلہ دیکھیں)۔

مسئلہ 18.11: **طاقتی تسلسل**
غیر صفر رداس ارتکاز R والا طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{18.51}$$

رداس $r < R$ کے ہر دائری قرص $|z-a| \leq r$ میں یکساں مرتکز ہو گا۔

ثبوت: $|z-a| \leq r$ کے لئے

$$\left|c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots + c_{n+p}z^{n+p}\right| \leq |c_{n+1}|\, r^{n+1} + \cdots + \left|c_{n+p}\right| r^{n+p} \tag{18.52}$$

ہو گا۔چونکہ $|z-a| = r < R$ کے لئے مساوات 18.51 حتمی مرتکز ہے لہٰذا کوشی اصول مرکوزیت (حصہ 17.3) کے تحت دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $N(\epsilon)$ تلاش کر سکتے ہیں کہ $p = 1, 2, \cdots$ اور $n > N(\epsilon)$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$|c_{n+1}|\, r^{n+1} + \cdots + \left|c_{n+p}\right| r^{n+p} < \epsilon$$

اس سے اور مساوات 18.52 سے ہر $p = 1, 2, \cdots$ ، ہر $n > N(\epsilon)$ اور قرص $|z-a| \leq r$ میں ہر z کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\left|c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots + c_{n+p}(z-a)^{n+p}\right| < \epsilon$$

$N(\epsilon)$ کی قیمت z کے غیر تابع ہے جو یکساں مرکوزیت کی نشانی ہے اور یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگرچہ متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کا مجموعہ استمراری ہو گا البتہ جیسا ہم نے مثال 18.18 میں دیکھا، اگر لا متناہی تعداد کی استمراری تفاعل کا مجموعہ حتمی مرتکز ہو تب بھی اس کا مجموعہ غیر استمراری ہو سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر ایک تسلسل یکساں مرتکز ہو تب ایسا نہیں ہو گا۔درج ذیل مسئلہ اسی حقیقت کو بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 18.12: **استمرار**
فرض کریں کہ تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

خطہ G میں یکساں مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ $F(z)$ ہے۔تب اگر G میں نقطہ z_0 پر ہر جزو $f_m(z)$ استمراری ہو تب z_0 پر تفاعل $F(z)$ استمراری ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ $s_n(z)$ اور مطابقتی باقی $R_n(z)$ ہے:

$$s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots$$

چونکہ تسلسل یکساں مرتکز ہے، دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $n = n(\epsilon)$ تلاش کر سکتے ہیں کہ G میں تمام z کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\left|R_N(z)\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (G \text{ میں تمام } z)$$

چونکہ $s_N(z)$ نقطہ z_0 پر استمراری تفاعل کی متناہی تعداد کا مجموعہ ہے لہٰذا z_0 پر یہ استمراری ہو گا۔یوں ہم ایسا σ تلاش کر سکتے ہیں کہ G میں ان تمام z کے لئے جن کے لئے $|z - z_0| < \sigma$ ہو درج ذیل مطمئن ہو گا۔

$$\left|s_N(z) - s_N(z_0)\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (|z - z_0| < \sigma, \quad G \text{ میں تمام } z)$$

تکونی عدم مساوات (حصہ 14.2) کی مدد سے ان z کے لئے

$$\begin{aligned}\left|F(z)-F(z_0)\right| &= \left|s_N(z)+R_N(z)-[s_N(z_0)+R_N(z_0)]\right| \\ &\le \left|s_N(z)-s_N(z_0)\right|+\left|R_N(z)\right|+\left|R_N(z_0)\right| < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے مراد z_0 پر $F(z)$ کی استمرار ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلے میں یکساں مرکوزیت کی شرط کافی ہے نا کہ لازمی۔درج ذیل مثال اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے۔

مثال 18.20: فرض کریں کہ

$$u_m(x)=\frac{mx}{1+m^2x^2}, \qquad f_m(x)=u_m(x)-u_{m-1}(x)$$

ہے۔ہم تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

پر غور کرتے ہیں۔اس تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ

$$s_n=u_1-u_0+u_2-u_1+\cdots+u_n-u_{n-1}=u_n-u_0=u_n$$

ہو گا۔یوں اس کا مجموعہ

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x)=0$$

ہو گا جو استمراری تفاعل ہے۔البتہ یہ تسلسل وقفہ $0 \le x \le a$ میں یکساں مرتکز نہیں ہے جہاں $a>0$ ہے۔در حقیقت

$$\left|F(x)-s_n(x)\right|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\epsilon$$

سے ہمیں

$$\frac{nx}{\epsilon}<1+n^2x^2 \quad\implies\quad n^2x^2-\frac{nx}{\epsilon}+1>0$$

ملتا ہے جس سے

$$n > \frac{1}{2x\epsilon}(1 + \sqrt{1 - 4\epsilon^2})$$

حاصل ہوتا ہے۔مقررہ ϵ کے لئے $x \to 0$ کرنے سے دایاں ہاتھ لامتناہی تک پہنچتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ اس وقفہ میں تسلسل یکساں مرتکز نہیں ہے۔ □

ہم کس صورت میں تسلسل کا جزو در جزو تکمل لے سکتے ہیں؟

ہم ایک ایسی مثال پیش کرتے ہیں جس کا جزو در جزو تکمل لینا ممکن نہیں ہے۔

مثال 18.21: ایسا تسلسل جس کا جزو در جزو تکمل ممکن نہیں ہے

تفاعل

$$u_m(x) = mxe^{-mx^2}, \quad f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x)$$

پر مبنی تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

پر وقفہ $0 \le x \le 1$ میں غور کرتے ہیں۔اس تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$s_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n$$

اس طرح اس تسلسل کا مجموعہ

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \qquad (0 \le x \le 1)$$

ہو گا جس سے

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کے برعکس تسلسل کا جزو در جزو تکمل لینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 f_m(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\int_0^1 f_m(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)\,\mathrm{d}x$$

اب $s_n = u_n$ ہے لہٰذا دایاں ہاتھ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n}) = \frac{1}{2}$$

دیتا ہے نا کہ صفر۔اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اس تسلسل کا $x = 0$ تا $x = 1$ جزو در جزو تکمل حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ □

مثال 18.21 میں تسلسل دیے گئے وقفہ پر یکساں مرتکز نہیں ہے۔ہم اب دیکھیں گے کہ استمراری تفاعل پر مبنی یکساں مرتکز تسلسل کا جزو در جزو تکمل حاصل کرنا ممکن ہو گا۔

مسئلہ 18.13: جزو در جزو تکمل
فرض کریں کہ

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

خطہ G میں استمراری تفاعل کا یکساں مرتکز تسلسل ہے۔فرض کریں کہ G میں C کوئی راہ ہے۔تب تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f_0(z)\,\mathrm{d}z + \int_C f_1(z)\,\mathrm{d}z + \cdots \tag{18.53}$$

مرتکز ہو گا اور اس کا مجموعہ $\int_C F(z)\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔

ثبوت: مسئلہ 18.12 کے تحت $F(z)$ استمراری ہے۔فرض کریں کہ اس تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ $s_n(z)$ اور مطابقتی باقی $R_n(z)$ ہے۔تب $F = s_n + R_n$ لہٰذا

$$\int_C F(z)\,\mathrm{d}z = \int_C s_n(z)\,\mathrm{d}z + \int_C R_n(z)\,\mathrm{d}z$$

ہو گا۔فرض کریں کہ C کی لمبائی l ہے۔چونکہ دیا گیا تسلسل یکساں مرتکز ہے، ہر دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ تمام $n > N$ اور G میں تمام z کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\left|R_n(z)\right| < \frac{\epsilon}{l} \qquad (n > N,\ z \text{ میں تمام } G)$$

مساوات 16.16 کی اطلاق سے تمام $n > N$ کے لئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left|\int_C R_n(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\epsilon}{l} l = \epsilon \qquad (n > N)$$

چونکہ $R_n = F - s_n$ ہے لہٰذا تمام $n > N$ کے لئے اس سے مراد

$$\left|\int_C F(z)\,\mathrm{d}z - \int_C s_n(z)\,\mathrm{d}z\right| < \epsilon \qquad (n > N)$$

ہے۔یوں مساوات 18.53 میں دیا گیا تسلسل مرتکز ہو گا اور اس کا مجموعہ وہی ہو گا جو مسئلہ میں دیا گیا ہے۔

□

مسئلہ 18.12 اور مسئلہ 18.13 یکساں مرتکز تسلسل کے دو اہم ترین خواص پیش کرتے ہیں۔

چونکہ تکمل اور تفرق آپس میں الٹ اعمال ہیں ہم مسئلہ 18.13 سے اخذ کر سکتے ہیں کہ مرتکز تسلسل کا جزو در جزو تفرق لینا ممکن ہو گا پس دیے گئے تسلسل کے اجزاء کی تفرق استمراری ہوں اور حاصل تسلسل یکساں مرتکز ہو۔درج ذیل مسئلہ اس کو بہتر بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 18.14: جزو در جزو تفرق
فرض کریں کہ تسلسل $f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots$ خطہ G میں مرتکز ہے اور اس تسلسل کا مجموعہ $F(z)$ ہے۔فرض کریں کہ تسلسل $f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots$ خطہ G میں یکساں مرتکز ہے اور اس کے اجزاء $f_0'(z)$ ، $f_1'(z)$ ، ... خطہ G میں استمراری ہیں تب G میں تمام z کے لئے

$$F'(z) = f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots \qquad (G \text{ میں تمام } z)$$

ہو گا۔

اس مسئلہ کا سادہ ثبوت آپ سے سوال 18.89 میں مانگا گیا ہے۔

عموماً یکساں ارتکاز کو تقابلی آزمائش کے ذریعہ پرکھا جاتا ہے جس کو وائنشٹراس کی آزمائش M کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.15: **وائشسٹراس آزمائش M**
اگر خطہ G میں تمام z کے لئے مساوات 18.50 کی طرز کے تسلسل کی اجزاء کی حتمی قیمتیں بالترتیب مستقل اجزاء کی مرتکز تسلسل

$$M_0 + M_1 + M_2 + \cdots \tag{18.54}$$

کے اجزاء کے برابر یا ان سے کم ہو تب یہ تسلسل (مساوات 18.50) خطہ G میں یکساں مرتکز ہو گا۔

اس مسئلے کا سادہ ثبوت آپ سے سوال 18.90 میں مانگا گیا ہے۔

مثال 18.22: **وائشسٹراس آزمائش M**
تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m^2} \qquad (\text{حقیقی } x) \tag{18.55}$$

پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\left|\frac{\sin mx}{m^2}\right| \le \frac{1}{m^2}$$

اور $\sum \frac{1}{m^2}$ مرتکز (مساوات 17.20) ہے لہٰذا وائشسٹراس آزمائش M کے تحت ہر وقفہ پر مساوات 18.55 میں دیا گیا تسلسل یکساں مرتکز ہو گا۔ □

سوالات

سوال 18.80 تا سوال 18.87 میں ثابت کریں کہ دیا گیا تسلسل دیے گئے خطے میں یکساں مرتکز ہے۔

سوال 18.80: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| \le 0.99$
جواب: مسئلہ 18.11 سے اخذ ہوتا ہے۔

سوال 18.81: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| \le 10^{30}$

سوال 18.82: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \quad |z| \le 3.9$

جواب: چونکہ رداس ارتکاز 4 ہے لہٰذا مسئلہ 18.11 سے اخذ ہوتا ہے۔

سوال 18.83: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad |z| \le 1$

سوال 18.84: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|z|}{2^n}$، تمام z

جواب: $\left|\sin n|z|\right| \le 1$ ہے اور $\sum \frac{1}{2^n}$ مرتکز ہے۔یوں مسئلہ 18.15 سے اخذ ہو گا۔

سوال 18.85: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n x}{n(n+1)}$، تمام حقیقی x

سوال 18.86: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n|z|}{n^2}$، تمام z

جواب: $\left|\cos^n|z|\right| \le 1$ ہے اور $\sum \frac{1}{2^n}$ مرتکز ہے۔

سوال 18.87: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z|+n^2}$، تمام z

سوال 18.88: اگر مساوات 18.50 میں دیا گیا تسلسل خطہ G میں یکساں مرتکز ہو تب دکھائیں کہ یہ G کے کسی بھی حصے میں یکساں مرتکز ہو گا۔

سوال 18.89: مسئلہ 18.14 کا مسئلہ 18.13 سے اخذ کریں۔

سوال 18.90: مسئلہ 18.15 کا ثبوت پیش کریں۔

سوال 18.91: ایسا چھوٹے سے چھوٹا عدد صحیح n تلاش کریں کہ $z = x = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ کے لئے مثال 18.17 میں $|R_n| < 0.01$ ہو۔ہندسی تسلسل کا مجموعہ $\frac{1}{1-x}$ جس میں خلل 0.01 سے کم ہو حاصل کرنے کی نقطہ نظر سے اس نتیجے کا کیا مطلب ہے۔

سوال 18.92: ایسا تسلسل تلاش کریں جس کا n واں جزوی مجموعہ $s_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ ہو۔ s_1 ، s_2 ، s_3 ، s_4 اور تمام $x \ge 0$ کے لئے $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ترسیم کریں۔

جواب: $f_n = s_n - s_{n-1} = \frac{x}{nx+1}[(n-1)x+1]$

سوال 18.93: ثابت کریں کہ ایسے کسی بھی وقفہ میں جس میں نقطہ $x = 0$ شامل ہو، مثال 18.18 کا تسلسل یکساں مرتکز نہیں ہو گا۔

سوال 18.94: دکھائیں کہ $x \neq 0$ کے لئے $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1$ ہے جبکہ $x = 0$ کے لئے یہ 0 کے برابر ہے۔ شکل 18.5 کی طرح چند جزوی مجموعوں کو ترسیم کریں۔

سوال 18.95: مثال 18.18 میں دیے تسلسل میں x کی جگہ z پر کرتے ہوئے اس کی ارتکاز کا خطہ ٹھیک ٹھیک تلاش کریں۔

سوال 18.96: دکھائیں کہ وقفہ $0 \le x \le 1$ میں $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ یکساں استمراری نہیں ہے۔ جزوی مجموعہ s_1 ، s_2 ، s_3 اور s_4 ترسیم کریں۔

سوال 18.97: مثال 18.21 میں دیا گیا فقرہ ثابت کریں۔

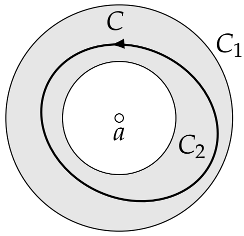
حراری مساوات: دکھائیں کہ مساوات 13.47 جس کے عددی سر مساوات 13.48 دیتی ہے، حراری مساوات کا $t > 0$ کے لئے حل ہے جہاں وقفہ $0 \le x \le l$ پر $f(x)$ استمراری فرض کیا گیا ہے اور اس وقفہ کے اندر اس کے تمام یک طرفہ تفرق پائے جاتے ہیں۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔

سوال 18.98: دکھائیں کہ $|B_n|$ محدود ہے مثلاً تمام n کے لئے $|B_n| < K$ ہے۔اس سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$|u_n| < Ke^{-\lambda_n^2 t_0} \qquad (t \ge t_0 > 0)$$

یوں وائنشٹراس آزمائش M کے تحت x اور t کے لحاظ سے $t \ge t_0$ اور $0 \le x \le l$ کی صورت میں مساوات 13.47 کا تسلسل یکساں مرتکز ہو گا۔مسئلہ 18.12 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $t \ge t_0$ کی صورت میں $u(x,t)$ استمراری ہو گا لہٰذا $t \ge t_0$ کے لئے یہ مساوات 13.39 کی سرحدی شرائط مطمئن کرے گا۔

سوال 18.99: دکھائیں کہ $t \ge t_0$ کے لئے $\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < \lambda_n^2 Ke^{-\lambda_n^2 t_0}$ ہو گا اور تناسبی آزمائش کے تحت دایاں ہاتھ مرتکز ہو گا۔اس سے، آزمائش وائنشٹراس سے اور مسئلہ 18.14 سے اخذ کریں کہ مساوات 13.47 میں



شکل 18.6: مسئلہ لوغوں

دیا گیا تسلسل t کے لحاظ سے جزو در جزو قابل تفرق ہے جس سے حاصل تسلسل کا مجموعہ $\frac{\partial u}{\partial t}$ ہو گا۔ دکھائیں کہ x کے لحاظ سے مساوات 13.47 دو مرتبہ قابل تفرق ہے جس سے حاصل تسلسل کا مجموعہ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ہو گا۔اس سے اور سوال 18.98 سے اخذ کریں کہ تمام $t \geq t_0$ کے لئے مساوات 13.47 حراری مساوات کا حل ہے۔(ہم یہاں بغیر ثبوت پیش کئے بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 13.47 ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتا ہے۔)

18.7 لوغوں تسلسل

کئی مسائل میں تفاعل $f(z)$ کا تسلسل ایسا نقطوں کے گرد درکار ہو گا جہاں تفاعل نادر ہو گا۔ایسی صورت میں ٹیلر تسلسل قابل استعمال نہیں ہو گی۔ ایک نئی قسم کی تسلسل جسے **لوغوں تسلسل** کہتے ہیں کا استعمال یہاں ضروری ہو گا۔ایسا چھلا جو ہم مرکز دائرہ C_1 اور C_2 کے درمیان پایا جاتا ہو اور $f(z)$ اس چھلا میں اور C_1 اور C_2 کے ہر نقطہ پر تحلیلی ہو میں لوغوں تسلسل کارآمد ہو گا (شکل 18.6)۔ٹیلر تسلسل کی طرح، یہاں بھی $f(z)$ دائرہ C_1 کے باہر چند نقطوں پر نادر ہو سکتا ہے، اور اب لازمی نیا پہلو کے طور پر C_2 کے اندر بھی $f(z)$ چند نقطوں پر نادر ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 18.16: مسئلہ لوغوں

اگر دو ہم مرکز دائروں C_1 اور C_2 جن کا مرکز a ہو پر $f(z)$ تحلیلی ہو اور ان دائروں کے درمیان چھلا

میں بھی $f(z)$ تحلیلی ہو تب $f(z)$ کو **لوغوں تسلسل**[24]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} \tag{18.56}$$
$$= b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots$$

ظاہر[25] کر سکتا ہے جہاں عددی سر[26]

$$b_n = \frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z^*, \quad c_n = \frac{1}{i2\pi}\int_C (z^*-a)^{n-1} f(z^*)\,\mathrm{d}z^* \tag{18.57}$$

ہیں جہاں تکمل کو، چھلا کے اندر اور اندرونی دائرے کو گھیرتے ہوئے کسی بھی سادہ بند راہ C پر گھڑی کی الٹ رخ، حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 18.6)۔

یہ تسلسل مرتکز ہے اور $f(z)$ کو اس کھلے چھلا میں ظاہر کرتا ہے جو موجودہ چھلا کے دائرہ C_1 کو مسلسل اتنا بڑھا کر کہ $f(z)$ کا نادر نقطہ آن پہنچے اور C_2 کو مسلسل اتنا گھٹا کر کہ $f(z)$ کا نادر نقطہ آن پہنچے سے حاصل ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ مساوات 18.56 اور مساوات 18.56 کی جگہ

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n \tag{18.58}$$

جہاں

$$A_n = \frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z^* \tag{18.59}$$

ہے لکھا جا سکتا ہے۔

ثبوت: فرض کریں کہ دیے گئے چھلا میں z کوئی نقطہ ہے۔تب کوشی کلیہ تکمل (مساوات 16.33) کے تحت

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi}\int_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,\mathrm{d}z^* - \frac{1}{i2\pi}\int_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,\mathrm{d}z^* \tag{18.60}$$

---

[24] Laurent series

[25] فرانسیسی ریاضی دان پیئر الفنس لوغوں [1813-1854]

[26] چونکہ z کو $f(z)$ میں استعمال کیا گیا ہے لہٰذا ہم تکمل کے متغیرہ کو z^* لکھتے ہیں۔

ہو گا جہاں گھڑی کی الٹ رخ تکمل لیا جائے گا۔ہم حصہ 18.3 کی طرح ان تکملات کو تبدیل کرتے ہیں۔چونکہ z دائرہ C_1 کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا پہلا تکمل عین حصہ 18.3 کے تکمل کی طرح ہے۔حصہ 18.3 کی طرح اس کو پھیلا کر باقی کا تخمینہ لگاتے ہوئے

$$\frac{1}{i2\pi}\int\limits_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,\mathrm{d}z^* = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \tag{18.61}$$

ملتا ہے جہاں عددی سر درج ذیل کلیہ دیتا ہے جہاں گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

$$b_n = \frac{1}{i2\pi}\int\limits_{C_1} \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z^* \tag{18.62}$$

چونکہ a چھلے کا حصہ نہیں ہے لہٰذا چھلا میں تفاعل $\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}$ تحلیلی ہو گا۔یوں b_n کی قیمت تبدیل کیے بغیر ہم C_1 کی جگہ راہ C پر تکمل حاصل کر سکتے ہیں۔یوں تمام $n \geq 0$ کے لئے مساوات 18.57 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مساوات 18.60 کے دایاں تکمل میں صورت حال مختلف ہے۔چونکہ z دائرہ C_2 کے باہر پایا جاتا ہے لہٰذا مساوات 18.24 کی جگہ اب

$$\left|\frac{z^*-a}{z-a}\right| < 1 \tag{18.63}$$

ہو گا اور ہمیں $\frac{1}{z^*-z}$ کو $\frac{z^*-a}{z-a}$ کی طاقتوں میں پھیلانا ہو گا تاکہ حاصل تسلسل مرتکز ہو۔یوں

$$\frac{1}{z^*-z} = \frac{1}{z^*-a-(z-a)} = \frac{-1}{(z-a)\left(1-\frac{z^*-a}{z-a}\right)}$$

لکھ کر متناہی ہندسی تسلسل کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^*-z} = -\frac{1}{z-a}\Big\{1+\frac{z^*-a}{z-a}+\Big(\frac{z^*-a}{z-a}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{z^*-a}{z-a}\Big)^n\Big\}\\ -\frac{1}{z-z^*}\Big(\frac{z^*-a}{z-a}\Big)^{n+1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو $-\frac{f(z^*)}{i2\pi}$ سے ضرب دے کر C_2 پر تکمل لینے سے مساوات 18.60 کا دایاں تکمل حاصل ہو گا یعنی:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{i2\pi}\int_{C_2}\frac{f(z^*)}{z^*-z}\,\mathrm{d}z^* \\
&= \frac{1}{i2\pi}\Big\{\frac{1}{z-a}\int_{C_2} f(z^*)\,\mathrm{d}z^* + \frac{1}{(z-a)^2}\int_{C_2}(z^*-a)f(z^*)\,\mathrm{d}z^* + \cdots \\
&\qquad + \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int_{C_2}(z^*-a)^n f(z^*)\,\mathrm{d}z^*\Big\} + R_n^*(z)
\end{aligned}
$$

اس روپ میں آخری جزو درج ذیل ہو گا۔

$$
R_n^*(z) = \frac{1}{i2\pi(z-a)^{n+1}}\int_{C_2}\frac{(z^*-a)^{n+1}}{z-z^*}f(z^*)\,\mathrm{d}z^* \tag{18.64}
$$

کنگنی قوسین کے اندر تکملوں میں C_2 کی جگہ راہ C استعمال کی جا سکتی ہے جس سے تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔یوں اگر

$$
\lim_{n\to\infty} R_n^*(z) = 0 \tag{18.65}
$$

ہو تب مسئلہ لوغوں ثابت ہوتا ہے۔

ہم مساوات 18.65 کو ثابت رکھتے ہیں۔چونکہ $z - z^* \neq 0$ ہے اس لئے C_2 پر اور چھلا میں $f(z)$ تحلیلی ہو گا اور C_2 پر تمام z کے لئے $\frac{f(z^*)}{z-z^*}$ کی حتمی قیمت محدود ہو گی مثلاً:

$$
\left|\frac{f(z^*)}{z-z^*}\right| < \tilde{M} \qquad C_2 \text{ پر تمام } z
$$

راہ C_2 کی لمبائی کو l لیتے ہوئے مساوات 18.64 پر مساوات 16.16 کے اطلاق سے

$$
\left|R_n^*(z)\right| < \frac{1}{2\pi\left|z-a\right|^{n+1}}\left|z^*-a\right|^{n+1}\tilde{M}l = \frac{\tilde{M}l}{2\pi}\left|\frac{z^*-a}{z-a}\right|^{n+1}
$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 18.63 کی مدد سے ہم دیکھتے ہیں کہ n کی قیمت لامتناہی تک پہنچانے سے درج بالا میں دایاں جزو صفر تک پہنچتا ہے۔یوں مساوات 18.65 ثابت ہوتی ہے لہٰذا دیے گئے چھلا میں مساوات 18.56 ثابت ہوتی ہے جس کے عددی سر مساوات 18.57 دیتی ہے۔

آخر میں ہم کھلے چھلا میں مساوات 18.56 کی ارتکاز ثابت کرتے ہیں۔

ہم مساوات 18.57 میں اجزاء کے مجموعوں کو $g(z)$ اور $h(z)$ لکھتے ہیں، اور C_1 اور C_2 کے رداس کو بالترتیب r_1 اور r_2 لکھتے ہیں۔تب $f = g + h$ ہو گا۔ پہلا تسلسل طاقتی تسلسل ہے جو چھلا میں مرتکز ہے لہٰذا یہ تسلسل دائرہ C_1 کے اندر پورے قرص پر مرتکز ہو گا اور g اس قرص میں تحلیلی ہو گا۔

آخری تسلسل میں $Z = \frac{1}{z-a}$ لکھ کر Z کا طاقتی تسلسل حاصل ہوتا ہے اور چھلا $r_2 < |z-a| < r_1$ کا مطابقتی چھلا اب $\frac{1}{r_2} > |Z| > \frac{1}{r_1}$ ہو گا۔یہ طاقتی تسلسل اس چھلا میں مرتکز ہے لہٰذا یہ پورے قرص $|Z| < \frac{1}{r_2}$ میں مرتکز ہو گا۔چونکہ اس قرص کا مطابقتی خطہ $|z-a| > r_2$ یعنی C_2 کی بیرون ہے لہٰذا C_2 کے باہر تمام z کے لئے دیا گیا تسلسل مرتکز ہو گا اور h ان تمام z کے لئے مرتکز ہو گا۔

چونکہ $f = g + h$ ہے لہٰذا C_1 کے باہر ان تمام نقطوں پر g نادر ہو گا جن پر f نادر ہے اور C_2 کے اندر ان تمام نقطوں پر h نادر ہو گا جن پر f نادر ہے۔نتیجتاً پہلا تسلسل a کے گرد ان تمام z پر مرتکز ہو گا جو اس دائرے میں پائے جاتے ہوں جس کا مرکز a ہو اور جس کا رداس C_1 کے باہر f کے اس نقطہ نادر جو a کے قریب ترین ہو کا a تک فاصلہ کے برابر ہو۔اسی طرح دوسرا تسلسل a کے گرد ان تمام z پر مرتکز ہو گا جو اس دائرے کے باہر پائے جاتے ہوں جس کا مرکز a ہو اور جس کا رداس C_2 کے اندر f کے اس نقطہ نادر جو a سے دور ترین ہو کا a تک فاصلہ کے برابر ہو۔ان دونوں ارتکاز کے دائرہ کار کا مشترکہ دائرہ کار وہ کھلا چھلا ہو گا جس کا مسئلے کے آخر میں ذکر کیا گیا ہے۔یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

یوں اگر C_2 کے اندر $f(z)$ تحلیلی ہو تب لوغوں تسلسل گھٹ کر $f(z)$ کے ٹیلر تسلسل کی صورت اختیار کرے گا جس کا مرکز a ہو گا۔بلکہ ایسی صورت میں آپ مساوات 18.57 پر کوشی کلیہ تکمل کے اطلاق سے دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 18.56 میں $z-a$ کی منفی طاقتوں کے تمام عددی سر صفر ہوں گے۔

مزید اگر C_2 میں $f(z)$ کا واحد نقطہ نادر $z = a$ ہو تب ماسوائے نقطہ $z = a$ کے C_1 کے اندر تمام z پر لوغوں تسلسل (مساوات 18.56) مرتکز ہو گا۔ایسی صورت حال عموماً پائی جاتی ہے لہٰذا یہ خصوصاً اہم ہے۔اس پر ہم جلد مزید غور کریں گے۔

چھلا ارتکاز کے اندر تفاعل $f(z)$ کا لوغوں تسلسل یکتا ہو گا (سوال 18.109)۔البتہ دو مختلف چھلوں جن کا مرکز ایک ہی ہو میں $f(z)$ کے لوغوں تسلسل مختلف ہو سکتے ہیں (مثال 18.24)۔

چونکہ لوغوں تسلسل کے عددی سروں کو عموماً مساوات 18.57 سے حاصل نہیں کیا جاتا ہے لہٰذا لوغوں تسلسل کی یکتائی اہم ہے۔لوغوں تسلسل کے حصول کے مختلف طریقے درج ذیل مثالوں میں پیش کیے گئے ہیں۔اگر کسی بھی طریقے سے کوئی لوغوں تسلسل حاصل کیا جائے تب یقیناً چھلا کے اندر یہی تفاعل کا لوغوں تسلسل ہو گا۔

مثال 18.23: مساوات 18.35 میں z کی جگہ $\frac{1}{z}$ پر کرتے ہوئے تفاعل $z^2e^{\frac{1}{z}}$ کا لوغوں تسلسل جس کا مرکز 0 ہو حاصل کیا جا سکتا ہے؛

$$z^2e^{\frac{1}{z}} = z^2\Big(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\Big) = z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots \qquad (|z|>0)$$

□

مثال 18.24: مختلف چھلا میں لوغوں تسلسل کا حصول

ہم تفاعل $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ کا لوغوں تسلسل تلاش کرتے ہیں جس کا مرکز $z=1$ ہو۔
اب $1-z^2=-(z-1)(z+1)$ لکھا جا سکتا ہے۔ہندسی تسلسل

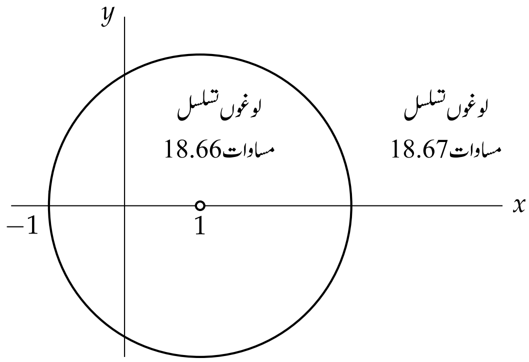
$$\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad (|q|<1)$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\text{(الف)} \quad \frac{1}{z+1}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{[1-(-\frac{z-1}{2})]} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-1}{2}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$$

حاصل ہوتا ہے جو قرص $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$ یعنی $|z-1|<2$ میں مرتکز ہے (شکل 18.7)۔اسی طرح تسلسل

$$\text{(ب)} \quad \frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{\Big(1+\frac{2}{z-1}\Big)} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{z-1}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$$



شکل 18.7: شکل برائے مثال 18.24

خطہ $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$ یعنی $2 < |z-1|$ میں مرتکز ہو گا (شکل 18.7)۔ یوں (الف) سے تسلسل

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{(z-1)(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 - + \cdots \end{aligned} \tag{18.66}$$

حاصل ہو گا جو دائرہ کار $0 < |z-1| < 2$ میں مرتکز ہے۔ اسی طرح (ب) سے تسلسل

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}} = -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{4}{(z-1)^4} + - \cdots \tag{18.67}$$

حاصل ہو گا جو دائرہ کار $|z-1| > 2$ میں مرتکز ہے۔ □

مثال 18.25: سوال 18.49 کے نتیجہ سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots \qquad (0 < |z| < \pi)$$

□

اگر C_2 میں $f(z)$ کا واحد ایک نقطہ نادر $z = a$ ہو (شکل 18.6) تب خطہ

$$0 < |z-a| < R \tag{18.68}$$

میں لوغوں تسلسل (مساوات 18.56) مرتکز ہو گا اور $z=a$ پر $f(z)$ کے نقطہ نادر کو **قطب**[27] **یا لازمی ندرت**[28] کہتے ہیں۔ اگر لوغوں تسلسل (وہ تسلسل جو $z=a$ کی پڑوس میں مرتکز لیکن عین $z=a$ پر منفرج ہو) میں منفی طاقت کے متناہی تعداد کے اجزاء ہوں تب اس نقطہ کو کہتے ہیں اور اگر ان اجزاء کی تعداد لا متناہی ہو تب اس کو لازمی ندرت کہتے ہیں۔اگر متناہی سطح میں تحلیلی تفاعل کے ندرت صرف قطبین ہوں تب اس کو **جزوی شکلہ تفاعل**[29] کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر نقطہ $z=1$ پر تفاعل $\frac{1}{1-z^2}$ (مثال 18.24) کی ندرت جاننے کی خاطر ہم لازمی طور پر مساوات 18.66 استعمال کریں گے نا کہ مساوات 18.67 چونکہ $a=1$ لیتے ہوئے مساوات 18.68 طرز کے خطہ میں مساوات 18.66 مرتکز ہے۔چونکہ مساوات 18.68 کا ایک منفی طاقت ہے لہٰذا اس نقطہ نادر کو قطب کہیں گے نا کہ لازمی ندرت (جو ہم مساوات 18.67 سے غلطی سے اخذ کرتے)۔ اگلے حصے میں اس پر تفصیلاً بحث کی جائے گی۔

سوالات

سوال 18.100 تا سوال 18.108 میں دیے تفاعل کا ایسا لوغوں تسلسل تلاش کریں جو خطہ $0<|z|<R$ میں مرتکز ہو۔ارتکاز کا خطہ ٹھیک ٹھیک معلوم کریں۔

سوال 18.100: $\frac{e^{-z}}{z^3}$
جواب: $\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6}+\frac{z}{24}-\frac{z^2}{10}-+\cdots, \quad R=\infty$

سوال 18.101: $\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^6}$
جواب: $\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^8}+\frac{1}{2z^{10}}+\frac{1}{6z^{12}}+\cdots, \quad R=\infty$

سوال 18.102: $\frac{\cos 2z}{z^2}$
جواب: $\frac{1}{z^2}-2+\frac{2}{3}z^2-\frac{4}{45}z^4+\frac{2}{315}z^6-+\cdots, \quad R=\infty$

سوال 18.103: $\frac{1}{z^4(1+z)}$
جواب: $\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-z+z^2-z^3+-\cdots, \quad R=1$

---

[27] pole
[28] essential singularity
[29] meromorphic function

سوال 18.104: $\frac{1}{z^2(1-z)}$
جواب: $\frac{1}{z^2}+1+z^2+z^4+\cdots, \quad R=1$

سوال 18.105: $\frac{1}{z^2(z-4)}$
جواب: $-\frac{1}{4z^2}-\frac{1}{16z}-\frac{1}{64}-\frac{z}{256}-\frac{z^2}{1024}-\cdots, \quad R=4$

سوال 18.106: $\frac{\sinh 3z}{z^3}$
جواب: $\frac{3}{z^2}+\frac{9}{2}+\frac{81}{40}z^2+\frac{243}{560}z^4+\cdots, \quad R=\infty$

سوال 18.107: $\frac{1}{z^8+z^4}$
جواب: $\frac{1}{z^4}-1+z^4\cdots, \quad R=1$

سوال 18.108: $\frac{1}{z^2(1+z)^2}$
جواب: $\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+3-4z+5z^2-6z^3+-\cdots, \quad R=1$

سوال 18.109: ثابت کریں کہ کسی مخصوص چھلا میں دیے گئے تحلیلی تفاعل کا لوغوں تسلسل یکتا ہو گا۔

سوال 18.110: کیا $\tan\frac{1}{z}$ کا خطہ $0<|z|<R$ میں مرتکز لوغوں تسلسل ہو گا؟
جواب: $\tan\frac{1}{z}=\frac{\sin\frac{1}{z}}{\cos\frac{1}{z}}$ کے نقطہ نادر وہ ہیں جن پر $\cos\frac{1}{z}=0$ ہو گا یعنی جب $\frac{1}{z}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ہو۔ان نقطوں $z_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ کا حد $z_n=0$ جس پر دیا گیا تفاعل نادر (نقطہ a) ہے لہٰذا $R=0$ ہے۔یوں ایسا کوئی خطہ $0<|z|<R$ نہیں پایا جاتا ہے جس پر لوغوں تسلسل مرتکز ہو۔

سوال 18.111 تا سوال 18.119 میں مرکز $z=a$ کے گرد تمام ٹیلر تسلسل اور تمام لوغوں تسلسل تلاش کریں اور ارتکاز کا خطہ ٹھیک دریافت کریں۔

سوال 18.111: $a=-i, \quad \frac{1}{z^2+1},$

سوال 18.112: $a=1, \quad \frac{1}{z^4},$
جواب:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}(z-1)^n,\ |z-1|<1; \quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}\frac{1}{(z-1)^{n+4}},\ |z-1|>1$$

سوال 18.113: $\frac{1}{z^3}, \quad a=i$

سوال 18.114: $\frac{1}{z^2+1}, \quad a=i$
جواب:

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1},\ 0<\lvert z-i\rvert<2; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i2)^n}{(z-i)^{n+2}},\ \lvert z-i\rvert>2$$

سوال 18.115: $\frac{1}{1-z^4}, \quad a=-1$

سوال 18.116: $\frac{4z-1}{z^4-1}, \quad a=0$
جواب:

$$(1-4z)\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n},\ \lvert z\rvert<1; \quad \left(\frac{4}{z^3}-\frac{1}{z^4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{4n}},\ \lvert z\rvert>1$$

سوال 18.117: $\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{4})^3}, \quad a=\frac{\pi}{4}$

سوال 18.118: $\frac{e^z}{(z-1)^2}, \quad a=1$
جواب:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^{n-2},\ \lvert z-1\rvert>0;$$

سوال 18.119: $\frac{4z^2+2z-4}{z^3-4z}, \quad a=2$

18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔صفر اور ندرت

اس حصہ میں ہم تحلیلی تفاعل کے صفر اور ندرت پر غور کریں گے۔ہم دیکھیں گے کہ ندرت کی مختلف قسمیں پائی جاتی ہیں جنہیں لوغوں تسلسل کی مدد سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ ہم $z \to \infty$ پر بھی $f(z)$ کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں لہٰذا غور کے دوران مبسوط مخلوط سطح استعمال کی جائے گی۔جیسا حصہ 15.3 میں بتلایا گیا، مخلوط سطح کے ساتھ غیر مناسب نقطہ ∞ ("لامتناہی پر نقطہ") جوڑ کر **مبسوط مخلوط سطح**[30] حاصل ہوتی ہے۔ایسی صورت میں، پہچان کی خاطر، ہم مخلوط سطح کو **متناہی مخلوط سطح** کہیں گے۔حصہ 15.3 میں ہم نے دیکھا کہ نقطہ $z = \infty$ کا تبادل $w = \frac{1}{z}$ میں عکس $w = 0$ ہے (اور $w = \infty$ کا الٹ عکس $z = 0$ ہے) جس سے مبسوط مخلوط سطح کا تصور پیدا ہوا۔

اب بڑی $|z|$ کے لئے $f(z)$ پر غور کرنے کی خاطر ہم $w = \frac{1}{z}$ لیتے ہوئے $f(z) = f(\frac{1}{w}) \equiv g(w)$ پر $w = 0$ کی پڑوس میں غور کرتے ہیں۔ہم $g(0)$ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$g(0) = \lim_{w \to 0} g(w) \tag{18.69}$$

$w = 0$ پر $g(w)$ تحلیلی یا نادر ہونے کی صورت میں $z = \infty$ پر $f(z)$ کو بالترتیب **تحلیلی**[31] یا **نادر**[32] تصور کیا جاتا ہے۔(ندرت کی تصور کے لئے حصہ 18.3 دیکھیں۔)

مثال 18.26: لامتناہی پر تحلیلی یا نادر تفاعل

تفاعل $f(z) = \frac{1}{z^2}$ لامتناہی پر تحلیلی ہے چونکہ $g(w) = f(\frac{1}{w}) = w^2$ نقطہ $w = 0$ پر تحلیلی ہے۔تفاعل $f(z) = z^3$ لامتناہی پر نادر ہے چونکہ $g(w) = f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}$ نقطہ $w = 0$ پر نادر ہے۔قوت نمائی تفاعل $f(z) = e^z$ لامتناہی پر نادر ہے چونکہ $g(w) = f(\frac{1}{w}) = e^{\frac{1}{w}}$ نقطہ $w = 0$ پر نادر ہے۔اسی طرح تکونیاتی تفاعل $\sin z$ اور $\cos z$ لامتناہی پر نادر ہیں۔ $\square$

اگر تفاعل $f(z)$ لامتناہی پر تحلیلی ہو تب، جیسا آگے درج ہے، ہم اس کا لوغوں تسلسل نہایت آسانی کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں۔فرض کریں کہ $f(z)$ دائرہ کار $|z - a| > R$ (رداس R کا دائرہ جس کا مرکز a

extended complex plane[30]
analytic[31]
singular[32]

ہے) میں اور لامتناہی پر تحلیلی ہے۔ ہم

$$z = \frac{1}{w} + a \qquad \implies \qquad z - a = \frac{1}{w}$$

لیتے ہیں اور یوں درج ذیل تفاعل $h(w)$ قرص $|z-a| = \left|\frac{1}{w}\right| > R$ یعنی $|w| < \frac{1}{R}$ میں تحلیلی ہو گا۔

$$h(w) = f\Big(\frac{1}{w} + a\Big) = f(z)$$

یوں $h(w)$ کا مکلارن تسلسل

$$h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots \qquad (|w| < \frac{1}{R}) \tag{18.70}$$

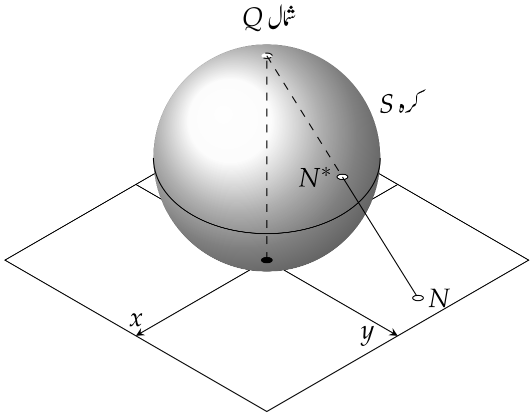
ہو گا۔ اس میں $w = \frac{1}{z-a}$ پر کرتے ہوئے تفاعل کا درج ذیل لوغوں تسلسل حاصل ہو گا۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} = c_0 + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots \qquad (|z-a| > R) \tag{18.71}$$

ریمان کرہ عدد

مخلوط اعداد کا مخلوط سطح پر اظہار اس وقت تک موزوں ثابت ہوتا ہے جب تک مخلوط عدد کی حتمی قیمت زیادہ بڑی نہ ہو۔ بڑی $|z|$ کی صورت میں ایسا کرنے سے مشکلات پیدا ہوتی ہیں اور ہم مخلوط اعداد کو کرہ پر ظاہر کرنے کو ترجیح دیتے ہیں۔ یہ تجویز ریمان کی ہے جس کو یوں حاصل کیا جاتا ہے (شکل 18.8)۔

فرض کریں S ایک کرہ ہے جس کا قطر 1 ہے اور جو مخلوط سطح کو مبدا پر چھوتا ہے (شکل 18.8)۔ فرض کریں کہ S کا شمالی قطب Q ہے (یوں جنوبی قطب عین مبدا پر ہو گا)۔ فرض کریں کہ متناہی مخلوط سطح میں N کوئی نقطہ ہے۔ یوں N سے Q تک سیدھی قطع S کو N^* پر قطع کرے گی۔ ہم N اور N^* کو ایک دوسرے کے مطابقتی نقطے تصور کرتے ہیں۔ یوں متناہی مخلوط سطح پر نقطوں اور S پر نقطوں کے مابین مطابقت پیدا ہوتی ہے۔ اس نقش میں N کا عکس N^* ہو گا۔ مخلوط اعداد جنہیں پہلے مخلوط سطح پر ظاہر کیا گیا تھا اب کرہ پر ظاہر کیے گئے ہیں۔ ہر z کا S پر ایک مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح، ماسوائے نقطہ Q کے، S پر ہر نقطے کا متناہی مخلوط سطح پر ایک مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے۔ متناہی مخلوط سطح میں Q کا کوئی مطابقتی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے۔ البتہ



شکل 18.8: ریمان کرہ

غیر مناسب نقطہ $z = \infty$ متعارف کرتے اور اس کو Q کا مطابقتی نقطہ تصور کرتے ہوئے مبسوط مخلوط سطح اور S کے مابین ایک ایک مطابقتی نقش پیدا ہوتا ہے۔ کرہ S کو **ریمان کرہ اعداد**[33] کہتے ہیں۔ یہ مخصوص نقش جو ہم نے استعمال کی **مجسم نگارانہ تظلیل**[34] کہلاتی ہے۔

ظاہر ہے کہ اکائی دائرہ S کا نقش "خط استوا" ہو گا۔ اکائی دائرے کی اندرون "جنوبی نیم کرہ" کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کی بیرون "شمالی نیم کرہ" کو ظاہر کرتا ہے۔ وہ اعداد جن کی حتمی قیمت بڑی ہو شمالی قطب Q کے قریب پائے جاتے ہیں۔ x اور y محور (بلکہ مبدا سے گزرتے تمام سیدھے خطوط) "خط طول بلد" پر نقش ہوں گے جبکہ وہ دائرے جن کا مرکز مبدا ہو "خط عرض بلد" پر نقش ہوں گے۔ ایسا ثابت کیا جا سکتا ہے کہ z سطح میں کوئی بھی دائرہ یا سیدھا خط S میں دائرے پر نقش ہو گا اور مزید کہ مجسم نگارانہ تظلیل محافظ زاویہ نقش ہے۔

صفر

اگر دائرہ کار D میں تفاعل $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں نقطہ $z = a$ پر تفاعل صفر ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $z = a$ پر $f(z)$ کا **صفر**[35] پایا جاتا ہے۔ اگر $z = a$ پر $f(z)$ کے ساتھ ساتھ تفرقات $f', \cdots f^{(n-1)}$ بھی صفر ہوں لیکن $f^{(n)} \neq 0$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $z = a$ پر $f(z)$ کے **صفر کا درجہ**[36] n ہے۔

[33] Riemann number sphere
[34] stereographic projection
[35] zero
[36] order

اگر $z=a$ پر $f(\frac{1}{z})$ کا ایسا صفر ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(z)$ کا لامتناہی پر n واں صفر ہے۔

مثال کے طور پر اگر $f(a)=0$ اور $f'(a)\neq 0$ ہوں تب $z=a$ پر f کا صفر ایک درجی یا سادہ صفر ہے۔اگر $f(a)=0$ ، $f'(a)=0$ ، $f''(a)\neq 0$ ہوں تب $z=a$ پر f کا صفر دو درجی ہے۔

مثال 18.27: **صفر**
تفاعل $\sin z$ کے سادہ صفر $z=0,\mp\pi,\mp2\pi,\cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔ تفاعل $(z-a)^3$ کا $z=a$ پر تین درجی صفر پایا جاتا ہے۔ تفاعل $1-\cos z$ کے دو درجی صفر $z=0,\mp2\pi,\mp4\pi,\cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔تفاعل $\frac{1}{1-z}$ کا سادہ صفر لامتناہی پر پایا جاتا ہے۔ □

اگر $f(z)$ نقطہ $z=a$ کی پڑوس میں تحلیلی ہو اور اس کا $z=a$ پر n درجی صفر پایا جاتا ہو تب حصہ 18.3 میں مسئلہ ٹیلر کے تحت اس تفاعل کے ٹیلر تسلسل کے عددی سر b_0 تا b_{n-1} صفر ہوں گے۔ یوں اس کا ٹیلر تسلسل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
f(z)&=b_n(z-a)^n+b_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots \\
&=(z-a)^n[b_n+b_{n+1}(z-a)+b_{n+2}(z-a)^2+\cdots]
\end{aligned}
\qquad (b_n\neq 0) \tag{18.72}
$$

نقطوں کے سلسلہ S میں اس نقطہ کو S کا **تنہا نقطہ**[37] کہتے ہیں جس کی پڑوس میں S کے دیگر نقطے شامل نہ ہوں۔نقطہ b کو S کا **نقطہ اجتماع**[38] (یا S کا **تحدیدی نقطہ**[39]) اس صورت کہیں گے جب b کے ہر پڑوس (جو چاہے جتنا چھوٹا کیوں نہ ہو) میں S کا کم از کم ایک نقطہ $\neq b$ پایا جاتا ہو (اور یوں S کے لامتناہی نقطے پائے جاتے ہوں)۔دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ b از خود S کا حصہ ہو۔

مثال 18.28: **تنہا اور غیر تنہا نقطے۔ تحدیدی نقطہ**
نقطوں کے سلسلہ $z=n\,(n=1,2,\cdots)$ میں صرف تنہا نقطے پائے جاتے ہیں اور متناہی سطح میں اس کا کوئی تحدیدی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے۔

خیالی محور پر نقطوں کے سلسلہ $z=\frac{i}{n}\,(n=1,2,\cdots)$ میں صرف تنہا نقطے پائے جاتے ہیں اور اس کا واحد ایک تحدیدی نقطہ $z=0$ ہے۔یہ نقطہ سلسلے کا حصہ نہیں ہے۔

---

[37] isolated point
[38] accumulation point
[39] limit point

مخلوط نقطوں z کا سلسلہ جو $|z| > 1$ کو مطمئن کرتے ہوں میں کوئی تنہا نقطہ نہیں پایا جاتا ہے۔اس سلسلہ کے تمام نقطے اور اکائی دائرے پر تمام نقطے (جو اس سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں)، اس سلسلہ کے تحدیدی نقطے (نقطہ اجتماع) ہیں۔
□

مسئلہ 18.17: **صفر**
تحلیلی تفاعل $f(z)\ (\not\equiv 0)$ کے صفر تنہا نقطے ہوں گے۔

ثبوت: ہم مساوات 18.72 پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ چکور قوسین میں بند تسلسل $[\cdots]$ تحلیلی تفاعل $g(z)$ ہے۔چونکہ $b_n \neq 0$ ہے لہٰذا $g(a) \neq 0$ ہو گا۔نتیجتاً، چونکہ $g(z)$ استمراری ہے لہٰذا $z = a$ کی پڑوس میں $g(z)$ صفر نہیں ہو گا۔یوں ماسوائے نقطہ $z = a$ کے، $f(z)$ اس پڑوس میں صفر نہیں ہو گا لہٰذا اس پڑوس میں $f(z)$ کا واحد صفر $z = a$ ہے لہٰذا یہ تنہا نقطہ ہو گا۔

□

ندرت

تحلیلی تفاعل کے نادر نقطوں کی نوعیت مختلف ہو سکتی ہیں[40]۔ ہم پہلے یادداشت تازہ کرتے ہیں۔ تحلیلی تفاعل $f(z)$ کے **نادر نقطہ** سے مراد وہ نقطہ ہے جس پر $f(z)$ تحلیلی نہ ہو (حصہ 18.3) اور ہم کہتے ہیں کہ اس نقطہ پر $f(z)$ **نادر** ہے یا کہ اس نقطہ پر $f(z)$ کی **ندرت** پائی جاتی ہے۔ اگر تفاعل $f(\frac{1}{z})$ نقطہ $z = 0$ پر نادر ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(z)$ لامتناہی پر نادر ہے۔

اگر $z = a$ پر $f(z)$ کا تنہا نقطہ نادر پایا جاتا ہو تب ہم اس تفاعل کو $z = a$ کی پڑوس میں (ماسوائے $z = a$ پر) لوغوں تسلسل

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} \tag{18.73}$$

سے ظاہر کر سکتے ہیں (حصہ 18.7)۔ مساوات 18.73 میں دایاں تسلسل کو $z = a$ کے قریب $f(z)$ کا **صدر حصہ**[41] کہتے ہیں۔

[40] یاد رہے کہ تعریفی طور پر واحد قیمت تعلق کو تفاعل کہتے ہیں۔(حصہ 14.4)۔
[41] principal part

بعض اوقات کسی n سے آگے تمام عددی سر c_n صفر ہوں گے، مثلاً، $c_m \neq 0$ ہو گا اور تمام $n > m$ کے لئے $c_n = 0$ ہوں گے۔ایسی صورت میں مساوات 18.73 گھٹ کر درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \cdots + \frac{c_m}{(z-a)^m} \qquad (c_m \neq 0) \tag{18.74}$$

ایسی صورت میں جہاں صدر حصہ متناہی تعداد کے اجزاء پر مبنی ہو، $z = a$ پر f کی ندرت کو **قطب**[42] کہتے ہیں اور m کو اس قطب کا **درجہ**[43] کہتے ہیں۔یک درجی قطب کو **سادہ قطب**[44] بھی کہتے ہیں۔

اگر تحلیلی تفاعل f (مخلوط سطح میں واحد قیمت تعلق) کا قطب کے علاوہ کوئی ندرت پایا جاتا ہو تب اس کو **لازمی ندرت**[45] کہتے ہیں۔

تعریفی طور پر قطبین سے مراد تنہا ندرت ہیں۔یوں وہ تمام ندرت جو تنہا نہ ہوں (مثلاً $z = 0$ پر $\tan \frac{1}{z}$ کی ندرت) لازمی ندرت ہوں گے۔لازمی ندرت تنہا یا غیر تنہا ہو سکتا ہے۔اگر مساوات 18.73 میں لامتناہی تعداد کے c_n غیر صفر ہوں، تب $z = a$ پر $f(z)$ کا ندرت، قطب نہیں بلکہ تنہا ندرت ہو گا۔

مثال 18.29: **قطبین۔لازمی ندرت**

تفاعل

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

کا $z = 0$ پر سادہ قطب پایا جاتا ہے جبکہ $z = 2$ پر اس کا پانچ درجی قطب پایا جاتا ہے۔تفاعل

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \cdots \tag{18.75}$$

اور

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - + \cdots \tag{18.76}$$

کا $z = 0$ پر لازمی ندرت پایا جاتا ہے۔

---

[42] pole
[43] order
[44] simple pole
[45] essential singularity

تفاعل $\tan \frac{1}{z}$ کے قطبین

$$\frac{1}{z} = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \cdots \qquad \implies \qquad z = \mp\frac{2}{\pi}, \mp\frac{2}{3\pi}, \cdots$$

پر پائے جاتے ہیں۔ان نقطوں کا تحدیدی نقطہ $z = 0$ ، یوں $\tan \frac{1}{z}$ کا غیر تنہا لازمی ندرت ہو گا۔ □

مثال 18.30: لامتناہی پر ندرت

کثیر رکنی $f(z) = 2z + 6z^3$ کا تین درجی قطب لامتناہی پر پایا جاتا ہے، چونکہ

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{2}{z} + \frac{6}{z^3}$$

کا ایسا قطب $z = 0$ پر پایا جاتا ہے۔عمومی طور پر n درجی کثیر رکنی کا لامتناہی پر n درجی قطب ہو گا۔

تفاعل e^z ، $\sin z$ اور $\cos z$ کا لامتناہی پر تنہا لازمی ندرت پایا جاتا ہے، چونکہ تفاعل $e^{\frac{1}{z}}$ ، $\sin \frac{1}{z}$ اور $\cos \frac{1}{z}$ کا $z = 0$ پر تنہا لازمی ندرت پایا جاتا ہے۔ □

اگر تفاعل $f(z)$ جو نقطہ $z = a$ پر غیر تحلیلی ہو لیکن $z = a$ پر $f(z)$ کو کوئی قیمت مختص کرنے سے تحلیلی بنایا جا سکتا ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ اس کی ندرت ہٹائی جا سکتی ہے۔ چونکہ انہیں ہٹایا جا سکتا ہے لہٰذا ایسی ندرت میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے ہیں۔

ایسا تفاعل جو پورے متناہی سطح میں تحلیلی ہو **سالم تفاعل**[46] کہلاتا ہے۔

اگر ایسا تفاعل لامتناہی پر بھی تحلیلی ہو تب یہ تمام z کے لئے محدود ہو گا اور مسئلہ 16.6 کے تحت ایسا تفاعل مستقل ہو گا۔یوں ایسا سالم تفاعل جو غیر مستقل ہو لامتناہی پر یقیناً نادر ہو گا۔مثال کے طور پر (کم از کم ایک درجہ) کثیر رکنی، e^z ، $\sin z$ اور $\cos z$ سالم تفاعل ہیں اور لامتناہی پر نادر ہیں۔

ایسا تحلیلی تفاعل جس کے متناہی سطح پر ندرت قطبین ہوں کو **جزوی شکلہ تفاعل**[47] کہتے ہیں۔

---

[46]entire function
[47]meromorphic function

مثال 18.31: **جزوی شکلہ تفاعل**

ایسے ناطق تفاعل جن کے نسب نما غیر مستقل ہوں جزوی شکلہ تفاعل ہوں گے۔ مثلاً $\tan z$ ، $\cot z$ ، $\sec z$ اور $\operatorname{cosec} z$ $\square$

ندرت کی قطبین اور لازمی ندرت میں درجہ بندی محض با ضابطہ عمل نہیں ہے بلکہ لازمی ندرت کی پڑوس میں تفاعل کا رویہ قطب کی پڑوس میں تفاعل کے رویہ سے بالکل مختلف ہو گا۔

مثال 18.32: **قطب کے قریب رویہ**

تفاعل $f(z)=\frac{1}{z^2}$ کا $z=0$ پر قطب پایا جاتا ہے اور $z\to 0$ کرنے سے $\left|f(z)\right|\to\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ $\square$

یہ مثال درج ذیل مسئلہ دکھاتا ہے۔

مسئلہ 18.18: **(قطبین)**

اگر تفاعل $f(z)$ تحلیلی ہو اور $z=a$ پر اس کا قطب پایا جاتا ہو، تب جس طریقے سے بھی $z\to a$ کیا جائے، $\left|f(z)\right|\to\infty$ حاصل ہو گا۔

مثال 18.33: **لازمی ندرت کے قریب رویہ**

تفاعل $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ کا $z=0$ پر لازمی ندرت پایا جاتا ہے۔ خیالی محور پر پہنچتے ہوئے اس کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔ حقیقی مثبت قیمتوں سے $z\to 0$ کرنے سے تفاعل لامتناہی ہو گا جبکہ حقیقی منفی قیمتوں سے $z\to 0$ کرنے سے تفاعل صفر دیتا ہے۔ $z=0$ کی اختیاری چھوٹی پڑوس میں اس کی کوئی بھی قیمت $c=c_0e^{i\alpha}\neq 0$ ممکن ہے۔ بلکہ $z=re^{i\theta}$ لکھتے ہوئے ہم درج ذیل مساوات کو r اور θ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{r}}=c_0e^{i\alpha}$$

حتمی قیمت اور دلیل (زاویہ) کو علیحدہ علیحدہ کرتے ہوئے $e^{\frac{\cos\theta}{r}}=c_0$ یعنی

$$\cos\theta=r\ln c_0 \quad \text{اور} \quad \sin\theta=-\alpha r$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان سے $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ لکھ کر

$$r^2=\frac{1}{(\ln c_0)^2+\alpha^2} \quad \text{اور} \quad \tan\theta=-\frac{\alpha}{\ln c_0}$$

حاصل ہو گا۔ یہاں c کو تبدیل کیے بغیر α کے ساتھ 2π کے مضرب جمع کرتے ہوئے r کو جتنا چاہیں چھوٹا بنایا جا سکتا ہے۔ $\square$

یہ مثال درج ذیل مشہور مسئلہ پکاغ[48] دکھاتی ہے۔

مسئلہ 18.19: **مسئلہ پکاغ**[49]
اگر تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا نقطہ a پر تنہا لازمی ندرت ہو، تب a کی انتہائی چھوٹی پڑوس میں، ماسوائے زیادہ سے زیادہ ایک خصوصی قیمت کے، یہ ہر قیمت دے گا۔

مثال 18.33 میں مخصوص قیمت $z = 0$ ہے۔اس مسئلے کا ثبوت پیچیدہ ہے جس کو اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

سوالات

[48] فرانسیسی ریاضی دان امیل پکاغ [1856-1941]
[49] Picard's theorem

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں للہذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q| \left|2yy'\right| \leq |q| z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p| y'^2 + |q| z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے للہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p| z + |q| z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

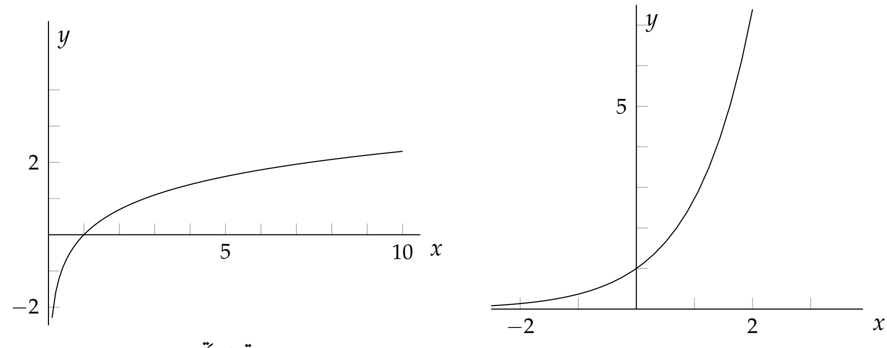
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

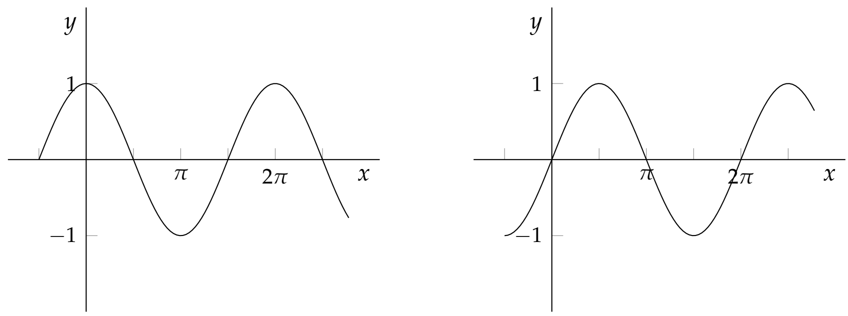
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$

(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $\frac{1}{x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = 10^{-\log x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (ب.5)$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

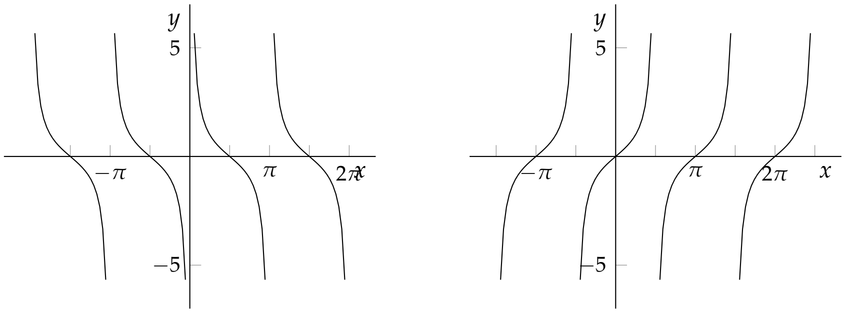
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



$\cot x$ (ب) $\qquad$ $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

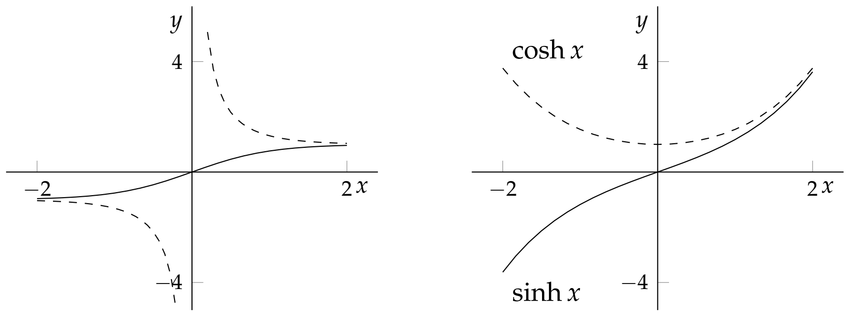
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{gathered}\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{gathered} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

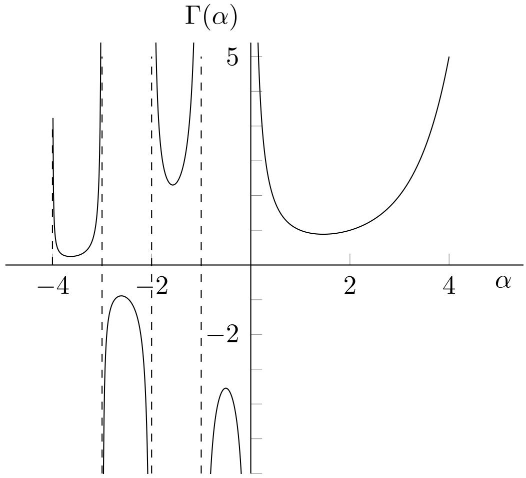
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

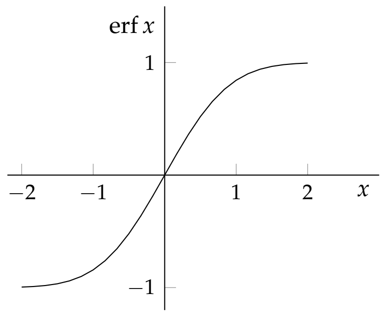
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

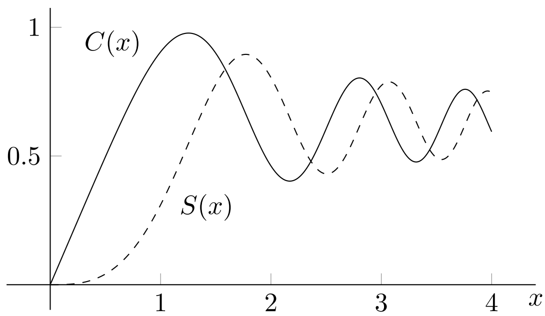
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

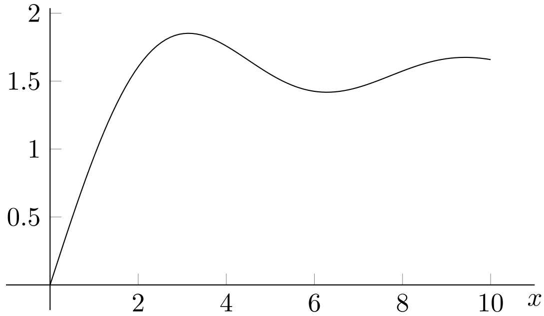
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1]complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$