

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کشی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
69	1.6 عمودی خطوط کی تسلیں
73	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
89	2.2 ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ
96	2.3 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
111	2.4 تفرقی عامل
115	2.5 اسپرنگ سے جڑی کیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.6 پولرکوشی مساوات
139	2.7 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی
148	2.8 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
160	2.9 جبری ارتعاش۔ گمک
81	اضافی ثبوت

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 2

درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔ چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔ اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

یک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔ اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش¹، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

¹oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$(2.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

صورت میں لکھا جاسکے خطی² کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر خطی³ کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں y ، y' اور y'' کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ دو درجی مساوات کا پہلا جزو $y''f(x)$ ہونے کی صورت میں مساوات کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی معیاری صورت⁴ میں لکھیں جہاں y'' پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔ یقیناً $r \equiv 0$ [جہاں زیر غور تمام x پر $r(x) = 0$ ہو؛ اس کو مکمل صفر⁵ پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$(2.2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جو متجانس ہے۔ اگر $r(x) \neq 0$ ہو تب مساوات 2.1 غیر متجانس⁶ کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔ آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$(y'')^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

linear²
nonlinear³
standard form⁴
identically zero⁵
nonhomogenous⁶

تفاعل p اور q مساوات 2.2 کے عددی سر⁷ کہلاتے ہیں۔

دودرجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل $y = h(x)$ کو کھلے وقفہ I پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دودرجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر y'' اور h' ، $h(x)$ ، h'' پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں y کی جگہ h ، y' کی جگہ h' اور y'' کی جگہ h'' پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔ چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

متجانس خطی تفرقی مساوات: خطی میل

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔ متجانس مساوات کے حل میں اصول خطیت⁸ یا اصول خطی میل⁹ کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 2.1: خطی میل

تمام x پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں۔

$$(2.3) \quad y'' + 4y = 0$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔ پہلے $y_1 = \cos 2x$ کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ $(\cos 2x)'' = -4 \cos 2x$ کے برابر ہے لہذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4 \cos 2x + 4 \cos 2x = 0$$

⁷coefficients
⁸linearity principle
⁹superposition principle

ملتا ہے۔ اسی طرح $y_2 = \sin 2x$ کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4 \sin 2x + 4 \sin 2x = 0$$

ملتا ہے۔ ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں ہم $\cos 2x$ کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور $\sin 2x$ کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔ آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x)'' + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 4(-2.73 \cos 2x + 1.25 \sin 2x) + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل y_1 اور y_2 سے نیا حل

$$(2.4) \quad y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (c_1 \text{ اور } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں})$$

حاصل کیا۔ اس کو y_1 اور y_2 کا خطی میل¹⁰ کہتے ہیں۔ اس مثال سے ہم مسئلہ خطی میل بیان کرتے ہیں جسے عموماً اصول خطیت یا اصول خطی میل کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ دو درجی تفرقی مساوات کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات کے دو عدد حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل y_1 اور y_2 پائے جاتے ہیں لہذا

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ خطی میل سے نیا حل $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حاصل کرتے ہیں۔ اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$y_3' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$y_3'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

y_3 ، y_3' اور y_3'' کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + p y_3' + q y_3 &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہذا ثابت ہوتا ہے کہ y_3 بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

انتباہ: یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔ غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل مقدار ہیں۔

حل: y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= r \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= r \end{aligned} \quad (2.6)$$

y_3 کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + p y_3' + q y_3 &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= (c_1 + c_2) r \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔ اس سے $(c_1 + c_2)r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ r کے برابر ہے لہذا y_3 متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔ یوں y_3 متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات

درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں $y = 2 - \cos x$ اور $y = 2 - \sin x$ کو پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔ اسی طرح ثابت کریں کہ $3(2 - \cos x)$ یا $-7(2 - \sin x)$ بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں $y = 1$ اور $y = x^3$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی $y = -x^3$ حل ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو -1 سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

ابتدائی قیمت مسائل۔ اساس۔ عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ درجہ اول سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل c حاصل کرتے ہوئے مخصوص یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی تصور کو دو درجی سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو درجی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$(2.7) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

K_0 اور K_1 کھلے وقفہ پر نقطہ x_0 پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$(2.8) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ یہاں y_1 اور y_2 مساوات 2.7 کے حل ہیں۔ یوں مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ (x_0, K_0) سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر K_1 ہوتی ہے۔

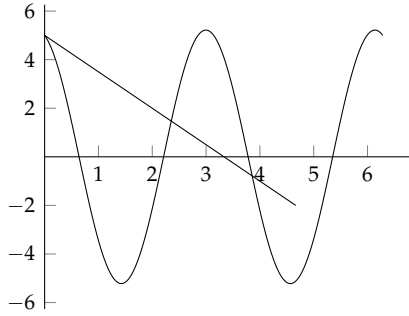
مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل: پہلا قدم: اس مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہذا اس کا موزوں عمومی حل

$$(2.9) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

ہو گا۔ (موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)



شکل 2.1: مثال 2.3 کا مخصوص حل۔

دوسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرتے ہیں۔ عمومی حل کا تفریق $y' = -2 \sin 2x + 2c_2 \cos x$ ہے۔ ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 5$$

$$y'(0) = -2 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5$$

حاصل ہوتے ہیں لہذا مخصوص حل

$$y = 5 \cos 2x - 1.5 \sin 2x$$

ہو گا۔ شکل 2.1 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $x = 0$ پر اس کی قیمت $y(0) = 5$ ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس) $y'(0) = 0.5$ ہے۔ مماس x محور کو $x = \frac{5}{3} = 3.33$ پر قطع کرتا ہے۔

درج بالا مثال میں y_1 اور y_2 ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔ آئیں اب دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = k \cos 2x$ لیتے ہوئے

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 k \cos 2x = (c_1 + c_2 k) \cos 2x = c_3 \cos 2x$$

عمومی حل لکھتے ہیں۔ اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل c_3 پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل y_1 اور y_2 انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔ یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل کے تعریف

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ فاصلہ I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کی اساس¹¹ حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا مخصوص حل مساوات 2.9 میں c_1 اور c_2 کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔ y_1 اور y_2 اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے I پر

$$(2.10) \quad (a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1$$

ہو، جہاں k اور l اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔ (یہاں توجہ رکھیں: a اس صورت b کے مترادف ہے جب $k \neq 0$ ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت خطی طور غیر تابع¹² کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$(2.11) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

سے مراد

$$(2.12) \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 خطی طور تابع¹³ کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.11 کو

¹¹ basis
¹² linearly independent
¹³ linearly dependent

k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جاسکتا ہے جو تناسبی رشتہ کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(2.13) \quad y_1 = ky_2, \quad y_2 = ly_1 \quad \text{پورے کھلے وقفے I پر}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابع صورت میں ہم مساوات 2.11 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا l (اور l صفر بھی ہو سکتے ہیں) اس طرح اساس کی (درج ذیل) قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: اساس کی قدر مختلف تعریف
کھلے وقفے I پر مساوات 2.11 کا خطی طور غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

اگر کسی کھلے وقفے I پر مساوات کے عددی سر p اور q استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کا عمومی حل موجود ہے۔ مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔ وقفہ I پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہذا ایسی صورت میں مساوات کا کوئی نادر¹⁴ حل موجود نہیں ہے (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور مخصوص حل
 $\cos 2x$ اور $\sin 2x$ تمام x پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات $y'' + 4y = 0$ کے حل کی اساس ہیں۔ ایسا اس لئے ہے کہ $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq c$ اور $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \neq 0$ ہیں جہاں c مستقل ہے۔ اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے مخصوص حل $y = 5 \cos 2x - 1.5 \sin 2x$ حاصل کیا گیا تھا۔

مثال 2.5: پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ سادہ تفرقی مساوات $y'' - 4y = 0$ کے حل ہیں۔ یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

حل: چونکہ $y_2'' - 4y_2 = (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} = 4e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0$ اور $y_1'' - 4y_1 = (e^{2x})'' - 4e^{2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ ہیں لہذا y_1 اور y_2 دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ چونکہ $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} \neq c$ ہے جہاں c مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں e^{2x} اور e^{-2x} پورے x پر حل کا اساس ہے۔ اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2, \quad y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}, \quad y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1$$

دو عدد بمزاد مساوات¹⁵ $c_1 + c_2 = 2$ اور $2c_1 - 2c_2 = 1$ کو آپس میں حل کرتے ہوئے $c_1 = \frac{3}{4}$ اور $c_2 = \frac{5}{4}$ ملتے ہیں جس سے مخصوص حل لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

2.2 ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

بعض اوقات ایک حل با آسانی حاصل ہو جاتا ہے۔ دوسرا خطی طور غیر تابع حل یک درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کو تخفیف درجہ¹⁶ کی ترکیب¹⁷ کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی مثال دیکھنے کے بعد اس کی عمومی اطلاق پر غور کرتے ہیں۔

¹⁵ simultaneous equations

¹⁶ reduction of order

¹⁷ یہ ترکیب یوسف لونی لگرینٹ (1736-1813) نے دریافت کی۔

مثال 2.6: ایک حل جانتے ہوئے تخفیف درجہ۔ اساس
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات کے اساس حل دریافت کریں۔

$$x^2 y'' - x y' + y = 0$$

کل: دیے گئے مساوات کے معائنے سے ایک حل $y_1 = x$ لکھا جاسکتا ہے چونکہ یوں $y_1'' = 0$ ہو گا لہذا
تفرقی مساوات کا پہلا جزو صفر ہو جاتا ہے اور $y_1' = 1$ ہو گا جس سے مساوات کے دوسرے اور تیسرے اجزاء کا
مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس ترکیب میں دوسرے حل کو $y_2 = u y_1$ لکھ کر دیے گئے تفرقی مساوات میں

$$y_2 = u y_1 = u x, \quad y_2' = u' x + u, \quad y_2'' = u'' x + 2u'$$

پر کرتے ہیں۔

$$x^2(u'' x + 2u') - x(u' x + u) + u x = 0$$

درج بالا کو ترتیب دیتے ہوئے xu اور $-xu$ آپس میں کٹ جاتے ہیں اور $x^3 u'' + x^2 u' = 0$ رہ جاتا
ہے جس کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$x u'' + u' = 0$$

ملتا ہے۔ اس میں $u' = v$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو علیحدگی متغیرات کے ترکیب
سے حل کرتے ہیں۔

$$x v' + v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}$$

اس میں واپس $v = u'$ پر کرتے ہوئے مکمل سے u حاصل کرتے ہیں۔

$$v = u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x|$$

یوں $y_2 = x \ln|x|$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ y_1 اور y_2 کا حاصل تقسیم مستقل نہیں ہے لہذا یہ حل
خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں اساس حل $y_1 = x$ ، $y_2 = x \ln|x|$ ہے۔ دونوں بار مکمل لیتے ہوئے مکمل کا
مستقل نہیں لکھا گیا چونکہ ہمیں اساس درکار ہے۔ عمومی مساوات لکھتے وقت مستقل لکھنا ضروری ہو گا۔

اس مثال میں ہم نے تخفیف درجہ کی ترکیب متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.14) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

پر استعمال کی۔ درج بالا مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں پہلا جزو y'' ہے جس کا عددی سراکائی کے برابر ہے۔ نیچے اخذ کلیات مساوات کی معیاری صورت کے لئے حاصل کئے گئے ہیں۔ تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر ہمیں مساوات 2.14 کا ایک عدد حل y_1 معلوم ہے اور ہم حل کا اساس جاننا چاہتے ہیں۔ اس کی خاطر ہمیں I پر خطی طور غیر تابع دوسرا حل y_2 درکار ہے۔ دوسرا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$y = y_2 = uy_1, \quad y' = y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

کو مساوات 2.14 میں پر کرتے ہوئے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0$$

u'' ، u' اور u کے عددی سراکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

چونکہ y_1 مساوات 2.14 کا حل ہے لہذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے لہذا

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $u' = v$ پر کرنے سے تخفیف شدہ¹⁸ ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p \right) v = 0$$

علیحدگی متغیرات کے بعد مکمل لینے سے

$$\frac{dv}{v} = - \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p \right) dx, \quad \ln|v| = -2 \ln|y_1| - \int p dx$$

یعنی

$$(2.15) \quad v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p \, dx}$$

ماتا ہے۔ چونکہ $v = u'$ کے برابر ہے لہذا دوسرا حل

$$(2.16) \quad y_2 = y_1 u = y_1 \int v \, dx$$

ہو گا۔ حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = u = \int p \, dx$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا چونکہ $v > 0$ ہے لہذا y_1 اور y_2 اساس حل ہیں۔

متجانس خطی دو درجی مساوات سے ایک درجی مساوات کا حصول ہم دیکھ چکے۔ انہیں تخفیف درجہ کے دو مثال دیکھیں جو خطی مساوات اور غیر خطی مساوات پر لاگو کی جاسکتی ہیں۔

مثال 2.7: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں y صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ y صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا اس کو $F(x, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں جس میں $z = y'$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(x, z, z')$ حاصل ہوتی ہے۔ ایک درجی مساوات کے حل کے مکمل سے y حاصل ہو گا۔

مثال 2.8: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں x صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ x صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا اس کو $F(y, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں۔ ہم $z = y' = \frac{dy}{dx}$ لیتے ہیں۔ یوں زنجیری تفریق¹⁹ سے

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z}$$

یعنی

$$y'' = z \frac{dz}{dy}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ z اور z_y کو دیے مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(y, z, z_y)$ ملتی ہے جس کا آزاد متغیر y ہے۔

سوالات

سوال 2.1 تا سوال 2.7 سے ایک درجی مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.1:

$$y'' - y' = 0$$

جواب: $y = c_1 e^x + c_2$

سوال 2.2:

$$xy'' + y' = 0$$

جواب: $y = c_1 \ln|x| + c_2$

سوال 2.3:

$$xy'' - 2y' = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2$

سوال 2.4:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

جواب: $y = c_2 e^{c_1 x}$

سوال 2.5:

$$y'' - (y')^3 \cos y = 0$$

جواب: $\cos y + c_1 y = x + c_2$

سوال 2.6:

$$y'' - (y')^2 \cos y = 1$$

جواب: $y = \ln \sec(x + c_1) + c_2$

سوال 2.7:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x^2$$

جواب: $y = c_1 x^2 + c_2 x$

قابل تخفیف سادہ تفرقی مساوات کے استعمال سوالات 2.8 تا سوال 2.11 دیتے ہیں۔

سوال 2.8: منحنی

کارٹیسائی محدّد کے محور سے گزرتی منحنی $y'' + y' = 0$ کی مرکز پر ڈھلوان اکائی کے برابر ہے۔ منحنی کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $y = 1 - e^{-x}$

سوال 2.9: لیزم

دو مقررہ نقاط سے لٹکی ہوئی زنجیری ڈوری سے بننے والا خم لیزم²⁰ کہلاتا ہے جسے مساوات $y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$ کے حل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مستقل k کی قیمت ڈوری کی تناؤ اور کمیت پر منحصر ہے۔ ڈوری نقطہ $(1, 0)$ اور $(-1, 0)$ سے لٹکی ہوئی ہے۔ $k = 1$ تصور کرتے ہوئے لیزم کی مساوات حاصل کریں۔

catenary²⁰

جواب: زنجیر کے وسط یعنی $x = 0$ پر ڈھلوان صفر کے برابر ہے۔ یوں $y = -1 + \cosh x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 2.10: حرکت

ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع اور رفتار میں فرق ایک مثبت مستقل k کے برابر رہتی ہے۔ فاصلہ $y(t)$ ابتدائی رفتار u اور ابتدائی فاصلہ y_0 پر کس طرح منحصر ہے؟

$$y = (k + u)e^t + (y_0 - u) - k(t + 1) \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.11: حرکت

ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع کی قیمت رفتار کی قیمت کے مربع کے برابر رہتی ہے۔ فاصلے کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

$$t = c_1 - \ln(t + c_2) \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.12 تا سوال 2.15 میں ثابت کریں کہ دیے گئے تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں یہ حل کی اساس ہیں۔ ان ابتدائی قیمت سوالات کے حل لکھیں۔

سوال 2.12:

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2; \quad \cos 3x \sin 3x$$

$$y = 5 \cos 3x - \frac{2}{3} \sin 3x \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.13:

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1; \quad e^x, xe^x$$

$$y = e^{x-1}(x - 1) \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.14:

$$x^2 y'' - x y' + y = 0, \quad y(1) = 3.2, \quad y'(1) = -1.5; \quad x, x \ln x$$

$$y = \frac{16}{5}x - \frac{47}{10}x \ln x \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.15:

$$y'' + 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3; \quad e^{-x} \cos \sqrt{2}x, e^{-x} \sin \sqrt{2}x$$

$$y = e^{-x}(2 \cos \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x) \quad \text{جواب:}$$

2.3 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب ایسے دو درجی متجانس تفرقی مساوات پر بات کرتے ہیں جن کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہیں۔

$$y'' + ay' + b = 0 \quad (2.17)$$

یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔ قوت نمائی تفاعل $y = e^{-kx}$ کے تفرق سے $y' + ky = 0$ یعنی $y' = -ke^{-kx} = -ky$ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔ یوں $y' + ky = 0$ کا حل $y = e^{-kx}$ ہے۔ اس کو دیکھتے ہوئے ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ آیا مساوات 2.17 کا حل

$$y = e^{\lambda x} \quad (2.18)$$

ممکن ہے یا نہیں۔ یہ جاننے کی خاطر $y = e^{\lambda x}$ اور اس کے تفرق

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

کو مساوات 2.17 میں پر کرتے ہیں۔

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

کسی بھی محدود قیمت کے λ اور x کے لئے $e^{\lambda x}$ صفر نہیں ہوگا لہذا اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب λ امتیازی مساوات²¹

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (2.19)$$

کا جذر ہو۔ اس دو درجی الجبرائی مساوات²² کو حل کرتے ہیں۔

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (2.20)$$

یوں مساوات 2.17 کے حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \quad (2.21)$$

ہوں گے۔ انہیں مساوات 2.17 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہی تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

دو درجی الجبرائی مساوات 2.19 کے جذر کی تین ممکنہ قیمتیں ہیں جو $a^2 - 4b$ کی علامت (±) پر منحصر ہیں۔

²¹characteristic equation
²²quadratic equation

2.3. مستقل عددی سروا لے متبائنس خطی سادہ تفرقی مساوات

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر $a^2 - 4c > 0$

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر $a^2 - 4c = 0$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر $a^2 - 4c < 0$

آئیں ان تین صورتوں پر باری باری غور کریں۔

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر

اس صورت میں، چونکہ y_1 اور y_2 کسی بھی وقفے I پر معین ہیں (اور حقیقی ہیں) اور ان کا حاصل تقسیم مستقل قیمت نہیں ہے لہذا کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$(2.22) \quad y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

ہو گا۔ یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.23) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

مثال 2.9: دو حقیقی منفرد جذر

مساوات $y'' - 4y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 - 4 = 0$ ہے جس کے جذر $\lambda_1 = +2$ اور $\lambda_2 = -2$ دو منفرد قیمتیں ہیں۔ یوں حل کا اساس $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ ہے جن سے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 2.10: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ دو حقیقی منفرد جذر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + y' - 6 = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$$

حل: امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

جس کے جذر

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24}}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 24}}{2} = -3,$$

ہیں۔ ان سے اساس حل $y_1 = e^{2x}$ ، $y_2 = e^{-3x}$ ملتا ہے جس سے عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$ ہے لہذا

$$y(0) = c_1 + c_2 = -4$$

$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 5$$

لکھا جائے گا۔ ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{7}{5}$ اور $c_2 = -\frac{13}{5}$ ملتا ہے جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = -\frac{7}{5} e^{2x} - \frac{13}{5} e^{-3x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے جو ابتدائی قیمتوں پر پورا اترتا ہے۔

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر

اگر $a^2 - 4c = 0$ ہو تب مساوات 2.20 سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ ملتا ہے جو واحد حل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$$



شکل 2.2: مثال 2.10 کا مخصوص حل۔

دیتا ہے۔ ہمیں اساس کے لئے دو حل درکار ہیں۔ دوسرا حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جائے گا۔ اس ترکیب پر بحث ہو چکی ہے۔ یوں ہم دوسرا حل $y_2 = uy_1$ تصور کرتے ہیں۔ مساوات 2.17 میں

$$y_2 = uy_1, \quad y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے عددی سراکٹھے کرتے ہیں۔

$$(2.24) \quad u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے۔ اب پہلی قوسین پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ لہذا $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$ ہو گا۔ ان قیمتوں کو پہلی قوسین میں پر کرتے

$$2y_1' + ay_1 = 2(-\frac{a}{2}y_1) + ay_1 = 0$$

ہوئے یہ قوسین بھی صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے۔ یوں مساوات 2.24 سے $u''y_1 = 0$ یعنی $u'' = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ دو مرتبہ مکمل لیتے ہوئے $u = c_1x + c_2$ ملتا ہے۔ دوسرا خطی طور غیر تابع حل $y_2 = uy_1$ حاصل کرتے ہوئے ہم $c_1 = 1$ اور $c_2 = 0$ چن سکتے ہیں جن سے $u = x$ اور $y_2 = xy_1$ حاصل ہوتے ہیں۔ چونکہ y_1 اور حاصل کردہ $y_2 = xy_1$ کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہذا یہ دونوں خطی

طور غیر تابع ہیں اور انہیں اساس لیا جا سکتا ہے۔ یوں دوہرے جذر کی صورت میں کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

اور عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.25) \quad y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

مثال 2.11: دوہرے جذر کی صورت میں عمومی حل
سادہ تفرقی مساوات $y'' + 10y' + 25 = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ ہے جس کو $(\lambda + 5)^2 = 0$ لکھ کر دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات کے حل کا اساس $y_1 = e^{-5x}$ ، $y_2 = xe^{-5x}$ اور اس کا عمومی حل $y = (c_1 + c_2x)e^{-5x}$ ہے۔

مثال 2.12: دوہرے جذر کی صورت میں مخصوص حل کا حصول
دیے گئے تفرقی مساوات کا مخصوص حل دریافت کریں۔

$$y'' + 0.2y' + 0.01y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = -4$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.01 = 0$ یعنی $(\lambda + 0.1)^2 = 0$ سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.1$ دوہرا جذر حاصل ہوتا ہے جس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل کا جذر لکھتے ہیں جو مخصوص حل کے حصول میں درکار ہے۔

$$y' = c_2e^{-0.1x} - 0.1(c_1 + c_2x)e^{-0.1x}$$



شکل 2.3: مثال 2.12 کا مخصوص حل۔

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 = 10$$

$$y'(0) = c_2 - 0.1c_1 = -4, \quad c_2 = -3$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (10 - 3x)e^{-0.1x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے۔

تیسری صورت: مخلوط جوڑی دار جذر

اتمازی مساوات 2.19 میں $a^2 - 4c$ کی قیمت منفی ہونے کی صورت میں مخلوط جوڑی دار جذر $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$ ملتے ہیں جہاں $\omega^2 = b - \frac{a^2}{4}$ کے برابر ہے۔ ان سے مخلوط اساس لکھتے ہیں۔

$$(2.26) \quad y_{m1} = e^{(-\frac{a}{2} + i\omega)x}, \quad y_{m2} = e^{(-\frac{a}{2} - i\omega)x}$$

اس مخلوط اساس سے حقیقی اساس حاصل کیا جائے گا۔ ایسا کرنے کی خاطر ریاضی کے چند کلیات پر غور کرتے ہیں۔ تفاعل e^z ، جہاں $z = x + iy$ مخلوط عدد ہے جبکہ x اور y حقیقی اعداد ہیں، کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

e^{iy} کی مکلازن تسلسل²³ لکھ کر حقیقی اجزاء اور خیالی اجزاء کو علیحدہ علیحدہ توسین میں اکٹھے کرتے ہیں۔ یہاں $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$ لئے گئے ہیں۔

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + \dots\right) + i \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \dots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

آخری قدم پر آپ تسلی کر لیں کہ پہلی توسین $\cos y$ کی مکلازن تسلسل دیتی ہے جبکہ دوسری توسین $\sin y$ کی مکلازن تسلسل دیتی ہے۔ آپ اس کتاب میں آگے پڑھیں گے کہ درج بالا تسلسل میں اجزاء کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔ یوں ہم یولر مساوات²⁴

$$(2.27) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$(2.28) \quad e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y$$

مساوات 2.27 اور مساوات 2.28 کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$(2.29) \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

ہو گا۔ یہ سب جاننے کے بعد آئیں مساوات 2.26 میں دیے مخلوط اساس پر دوبارہ غور کریں۔

$$y_{m1} = e^{(-\frac{a}{2} + i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x} (\cos \omega x + i \sin \omega x)$$

$$y_{m2} = e^{(-\frac{a}{2} - i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{-i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x} (\cos \omega x - i \sin \omega x)$$

چونکہ اساس کے اجزاء کو مستقل (حقیقی یا خیالی یا مخلوط) سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے نیا حل حاصل کیا جاسکتا ہے لہذا ہم درج بالا دونوں اجزاء کو مستقل $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے ایک نیا اور حقیقی حل y_1

دریافت کرتے ہیں۔

$$y_1 = \frac{1}{2}y_{m1} + \frac{1}{2}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x$$

اسی طرح مخلوط اساس کے پہلے جزو کو مستقل $\frac{1}{2i}$ اور دوسرے جزو کو مستقل $-\frac{1}{2i}$ سے ضرب دیتے ہوئے جمع کر کے نیا اور حقیقی حل y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y_2 = \frac{1}{2i}y_{m1} - \frac{1}{2i}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$$

درج بالا حاصل کردہ حقیقی تفاعل

$$(2.30) \quad y_1 = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x \quad y_2 = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$$

کو از خود حل کا اساس تصور کیا جاسکتا ہے۔ یہاں غور کریں کہ ہم نے مخلوط جذر $\lambda = (-\frac{a}{2} \pm i\omega)x$ سے حقیقی اساس (مساوات 2.30) حاصل کیا ہے۔ اس حقیقی اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.31) \quad y = e^{-\frac{a}{2}x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$$

مثال 2.13: مخلوط جذر، ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + 0.36y' + 9.0324y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.36\lambda + 9.0324 = 0$ کے مخلوط جذر $\lambda = -0.18 \pm i3$ ہیں لہذا عمومی حل

$$y = e^{-0.18x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

ہو گا۔ مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر c_1 اور c_2 درکار ہیں جنہیں عمومی مساوات میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ پہلے ابتدائی معلومات سے

$$y(0) = e^0 (c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 0, \quad c_1 = 0$$



شکل 2.4: مثال 2.13 کا مخصوص حل۔

ماتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق

$$y' = -0.5e^{-0.5x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-0.5x}(-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x)$$

میں دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$y' = -0.5e^0(0 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^0(0 \sin 0 + 3c_2 \cos 0) = 3, \quad c_2 = 1$$

ماتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-0.18x} \sin 3x$$

شکل 2.4 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ، نقطہ دار لکیروں سے، سائن نما منحنی کے مثبت چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف²⁵ $e^{-0.18x}$ اور منفی چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف²⁶ $-e^{-0.18x}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ مخصوص حل (x کو t لیتے ہوئے) قصری ارتعاش²⁶ کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر y فاصلے کو ظاہر کرتی ہو تب یہ میکانی قصری ارتعاش ہوگی اور اگر y برقی رویا برقی دباؤ ہو تب یہ برقی قصری ارتعاش ہوگی۔

²⁵envelope
²⁶damped oscillations

جدول 2.1: تین صورتوں کی تفصیل

صورت	مساوات 2.19 کے جذر	مساوات 2.17 کی اساس	مساوات 2.17 کا عمومی حل
پہلی	منفرد حقیقی λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
دوسری	دوہرہ جذر $\lambda = -\frac{a}{2}$	$x e^{-\frac{a}{2} x}, e^{-\frac{a}{2} x}$	$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{a}{2} x}$
تیسری	جوڑی دار مخلوط $\lambda = -\frac{a}{2} \pm i\omega$	$e^{-\frac{a}{2} x} \cos \omega x, e^{-\frac{a}{2} x} \sin \omega x$	$y = e^{-\frac{a}{2} x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$

مثال 2.14: مخلوط جذر

سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad (\omega \text{ غیر صفر مستقل ہے})$$

کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

جدول 2.1 میں درج بالا تین صورتوں کی تفصیل اکٹھی کی گئی ہے۔ یہ تین اقسام میکانیکی ارتعاش یا برقی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہیں۔ آپ تفرقی مساوات کی قوت یہاں سے جان سکتے ہیں۔ آپس میں بالکل مختلف میدانوں (مثلاً میکانیکی اور برقی) کے مسائل ایک طرز کی تفرقی مساوات سے ظاہر کئے جاسکتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.16 تا سوال 2.24 کے عمومی حل حاصل کریں۔ انہیں واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ان کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 2.16:

$$y'' + 4y = 0$$

جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

سوال 2.17:

$$4y'' - 9y = 0$$

$$y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.18:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.19:

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\pi x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.20:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{3x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.21:

$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3}{2}x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.22:

$$4y'' + 4y' - 3y = 0$$

$$y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.23:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \text{ :جواب}$$

2.3. مستقل عددی سرولے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

سوال 2.24:

$$9y'' - 30y' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{5}{3}x}$

سوال 2.25 تا سوال 2.29 میں اساس سے تفرقی مساوات $y'' + ay' + by = 0$ حاصل کریں۔

سوال 2.25:

$$e^{0.2x}, \quad e^{-0.5x}$$

جواب: $y'' + 0.3y' - 0.1y = 0$

سوال 2.26:

$$e^{-0.66x}, \quad e^{-0.32x}$$

جواب: $y'' + 0.98y' + 0.2112y = 0$

سوال 2.27:

$$\cos(4\pi x), \quad \sin(4\pi x)$$

جواب: $y'' + 16\pi^2y = 0$

سوال 2.28:

$$e^{(-2+i3)x}, \quad e^{(-2-i3)x}$$

جواب: $y'' + 4y'' + 13y = 0$

سوال 2.29:

$$e^{-1.7x} \cos 6.2x, \quad e^{-1.7x} \sin 6.2x$$

جواب: $y'' + 3.4y'' + 41.33y = 0$

سوال 2.30 تا سوال 2.37 ابتدائی قیمت سوالات ہیں۔ ان کے مخصوص حل دریافت کریں۔

سوال 2.30:

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$$

جواب: $y = 5 \cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x$

سوال 2.31:

$$y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

جواب: $y = 0.7e^{5x} + 1.3e^{-5x}$

سوال 2.32:

$$y'' - y'' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

جواب: $y = \frac{1}{5}(e^{3x} - e^{-2x})$

سوال 2.33:

$$4y'' + 4y'' + 37y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

جواب: $y = e^{-\frac{x}{2}} \sin 3x$

سوال 2.34:

$$9y'' + 12y'' + 49y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

جواب: $y = e^{-\frac{2}{3}x} (2 \cos \sqrt{5}x + \frac{1}{3\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}x)$

سوال 2.35:

$$y'' - 6y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$$

جواب: $y = \frac{1}{40}e^{3x} \sin 4x$

سوال 2.36:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

2.3. مستقل عددی سرواے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

جواب: $y = \cos x + \sin x$

سوال 2.37:

$$8y'' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = 2.2, \quad y'(0) = 3.4$$

جواب: $y = \frac{79}{15}e^{\frac{x}{2}} - \frac{46}{15}e^{-\frac{x}{4}}$

عمومی حل کے حصول میں خطی طور غیر تابع تفاعل نہایت اہم ہیں۔ صرف ایسے تفاعل سے اساس حاصل ہوتا ہے۔ دیے وقفے پر سوال 2.38 تا سوال 2.42 میں دیے تفاعل میں خطی طور تابع اور غیر تابع کی نشاندہی کریں۔

سوال 2.38:

$$\cos kx, \quad \sin kx, \quad -\infty < x < \infty$$

جواب: چونکہ $\frac{\sin kx}{\cos kx}$ کی قیمت x تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتی ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 2.39:

$$e^{kx}, \quad e^{-kx} \quad -\infty < x < \infty$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.40:

$$x, \quad x^2 \quad x > 1$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.41:

$$x \ln x, \quad x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور غیر تابع



شکل 2.5: سوال 2.43 کے منحنی حل۔

سوال 2.42:

$$x \ln x, \quad x \ln x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 2.43: غیر مستحکم صورت حال

ابتدائی قیمت مسئلہ $y'' - 4y = 0$ میں ابتدائی قیمتیں $y(0) = 1$ اور $y'(0) = -2$ لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔ مخصوص حل کو دوبارہ ابتدائی معلومات $y(0) = 1.001$ اور $y'(0) = -1.998$ کے لئے حاصل کریں۔

جوابات: $y = e^{-2x}$ اور $y = \frac{1}{1000}e^{2x} + e^{-2x}$ ؛ شکل 2.5 میں دونوں حل دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ابتدائی قیمتوں میں انتہائی کم فرق حل پر بہت زیادہ اثر ڈالتی ہیں۔ یہ غیر مستحکم²⁷ صورت کو ظاہر کرتی ہے۔ زلزلے میں غیر مستحکم عمارتیں انہیں وجوہات پر ڈھیر ہوتی ہیں۔ فضا میں ہوا کا دباؤ، درجہ حرارت اور نمی کی تناسب بھی غیر مستحکم صورت پیدا کرتے ہوئے تباہ کن آندھیوں کا سبب بنتی ہیں۔

سوال 2.44: استمراری مساوات کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = 3$ ہیں۔ مساوات 2.17 حاصل کریں۔

$$y'' - y' - 6y = 0 \quad \text{جواب:}$$

instability²⁷

سوال 2.45: استمراری مساوات کے جذر λ_1 اور λ_2 ہیں۔ مساوات 2.17 میں a اور b حاصل کریں۔ یوں جذر جانتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$b = \lambda_1 \lambda_2, \quad a = -\lambda_1 - \lambda_2$$

سوال 2.46: تفرقی مساوات $y'' + ky' = 0$ کو موجودہ طریقے سے حل کریں۔ اسی کو تخفیف درجہ کی ترکیب سے بھی حل کریں۔ دونوں جواب کیوں یکساں ہونا ضروری ہے۔

$$y = c_1 + c_2 e^{-kx} \text{؛ یکتائیت۔}$$

سوال 2.47: دوہرا جذر کو منفرد λ_1 اور λ_2 کی وہ صورت تصور کی جاسکتی ہے جب $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ ہو۔ $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ لیتے اور ایک حل $e^{\lambda_1 x}$ = لیتے ہوئے اساس کا دوسرا رکن $x e^{\lambda_1 x}$ تلاش کریں۔

حل: دوسرا حل $e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1 + \Delta\lambda)x} = e^{\lambda_1 x} e^{\Delta\lambda x}$ ہے۔ $e^{\Delta\lambda x}$ کا مکلازن تسلسل لیتے ہوئے $\Delta\lambda \rightarrow 0$ کی بنا صرف پہلے دو ارکان لیتے ہیں۔ یوں $1 + \Delta\lambda x \approx 1 + \frac{\Delta\lambda x}{1!} + \frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!} + \dots$ ہو گا اور $e^{\Delta\lambda x} = 1 + \frac{\Delta\lambda x}{1!} + \frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!} + \dots$ پہلے سے اساس کا حصہ ہے لہذا اساس کا دوسرا رکن $x e^{\lambda_1 x}$ ہو گا جہاں $\Delta\lambda$ کو مستقل تصور کرتے ہوئے رد کیا جاتا ہے

2.4 تفرقی عامل

آپ $y = \sin x$ یا $y = \frac{df(x)}{dx}$ کے عمل سے بخوبی واقف ہیں۔ پہلی مثال میں کسی مقدار یا تفاعل x پر عامل \sin عمل کرتے ہوئے ایک نیا تفاعل دیتا ہے۔ یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ عامل \sin تفاعل x کے نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ سے مبدل تفاعل y کا نقطہ $y = 1$ دیتا ہے۔ اسی طرح عامل $\frac{d}{dx}$ تفاعل x^3 پر عمل کرتے ہوئے تفاعل $3x^2$ دیتا ہے۔

یہ بتلاتا چلوں کہ ریاضیات اور طبیعیات میں عامل کا استعمال نہایت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ یہاں بالخصوص کوانٹم میکانیٹ²⁹ کا ذکر کرنا لازم جہاں عامل کا استعمال کثرت سے کیا جاتا ہے۔

²⁸operator
²⁹quantum mechanics

اس کتاب میں ہم صرف تفرقی عامل D^{30} پر بحث کریں گے جہاں $D = \frac{d}{dx}$ ہے۔ یوں ایک درجی تفرقی

$$(2.32) \quad Dy = y' = \frac{dy}{dx}$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح دو درجی تفرقی $D^2y = D(Dy) = y''$ اور تین درجی تفرقی $D^3y = y'''$ لکھا جائے گا۔ اس طرح $D \sin x = \cos x$ اور $D^2 \sin x = -\sin x$ ہو گا۔

خطی متجانس مساوات $y'' + ay' + by = 0$ جہاں a اور b مستقل مقدار ہیں میں دو درجی تفرقی عامل

$$L = P(D) = D^2 + aD + bI$$

متعارف کرتے ہیں جہاں I مماثلی عامل³¹ ہے جس کی تعریف $Iy = y$ ہے۔ اس طرح دیے گئے تفرقی مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(2.33) \quad Ly = P(D)y = (D^2 + aD + bI)y = 0$$

L خطی عامل اور P کثیر رکنی³² ہے۔ یوں اگر Lw اور Ly پائے جاتے ہوں (یعنی w اور y دو مرتبہ قابل تفرق ہوں) تب $L(cy + kw)$ بھی پایا جاتا ہے جہاں c اور k کوئی مستقل ہیں۔ مزید درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(2.34) \quad L(cy + kw) = cLy + kLw$$

چونکہ $De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ اور $D^2e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ہیں لہذا

$$(2.35) \quad \begin{aligned} Le^{\lambda x} &= (D^2 + aD + bI)e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ حصہ 2.3 میں بھی ہم نے یہی نتیجہ اخذ کیا تھا کہ $e^{\lambda x}$ صرف اور صرف اس صورت اس تفرقی مساوات کا حل ہو گا اگر λ امتیازی مساوات $P(\lambda) = 0$ کا جذر ہو۔

یہاں دلچسپ بات یہ ہے کہ $P(\lambda)$ عام الجبرائی کثیر رکنی ہے جس کی تجزی³³ کی جاسکتی ہے۔ λ کی جگہ D پر کرنے سے کثیر رکنی عامل حاصل ہوتا ہے۔

³⁰differential operator
³¹identity operator
³²polynomial
³³factorization

مثال 2.15: تفرقی مساوات کا حل بذریعہ تجزی
کثیر رکنی $P(D) = D^2 + 4D - 21I$ کی تجزی سے $P(D) = 0$ کو حل کریں۔

حل: $I^2 = 1$ لیتے ہوئے $D^2 + 4D - 21I = (D - 3)(D + 7)$ لکھا جاسکتا ہے۔ اب $(D - 3)y = y' - 3y = 0$ کا حل $y_1 = e^{3x}$ اور $(D + 7)y = y' + 7y = 0$ کا حل $y_2 = e^{-7x}$ ہے۔ یہ جوابات کسی بھی وقفے پر حل کی اساس ہیں۔ انہیں تفرقی مساوات حاصل کریں۔
 $(D - 3)(D + 7)y = (D - 3)(y' + 7y) = y'' + 7y' - 3y' - 21y = y'' + 4y' - 21y = 0$

مساوات 2.33 میں کثیر رکنی کے عددی سر مستقل مقدار ہیں۔ ایسی صورت میں تفرقی عامل کے استعمال سے تفرقی مساوات حل کرنا نہایت آسان ثابت ہوتا ہے۔ عددی سر مستقل نہ ہونے کی صورت میں تفرقی عامل کا استعمال نہایت پیچیدہ ثابت ہوتا ہے جس پر اس کتاب میں تبصرہ نہیں کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 2.48 تا سوال 2.52 دیے تفاعل پر دیا تفرقی عامل لاگو کریں۔

سوال 2.48:

$$D + 2I; \quad x^3, \quad \cos 5x, \quad e^{-kx}, \quad \cosh x$$

جوابات: $3x^2 + 2x^3$ ، $-5 \sin 5x + 2 \cos 5x$ ، $(2 - k)e^{-kx}$ ، $\sinh x + 2 \cosh x$

سوال 2.49:

$$D^2 - 3D; \quad 2x^4 - x, \quad 2 \sinh 2x - \cos 5x$$

جوابات: $24x^2 - 24x^3 + 3$ ، $-15 \sin 5x - 12 \cosh 2x + 25 \cos 5x + \sinh 2x$

سوال 2.50:

$$(D + 2I)^2; \quad e^{3x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $25e^{3x}$ ، $(12x + 8)e^{2x}$

سوال 2.51:

$$(D - 3I)^2; \quad e^{2x}, \quad xe^{3x}$$

جوابات: e^{2x} ، 0

سوال 2.52:

$$(D + I)(D - 2I); \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $-2e^{2x}$ ، $2(1 - x)e^{2x}$

سوال 2.53 تا سوال 2.57 کی تجزی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.53:

$$(D^2 - 9I)y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

سوال 2.54:

$$(D^2 + 4D + 4I)y = 0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے لہذا دوسرا حل xe^{2x} لیتے ہوئے $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$ ملتا ہے۔

سوال 2.55:

$$(D^2 + 4D + 13I)y = 0$$

جواب: $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

سوال 2.56:

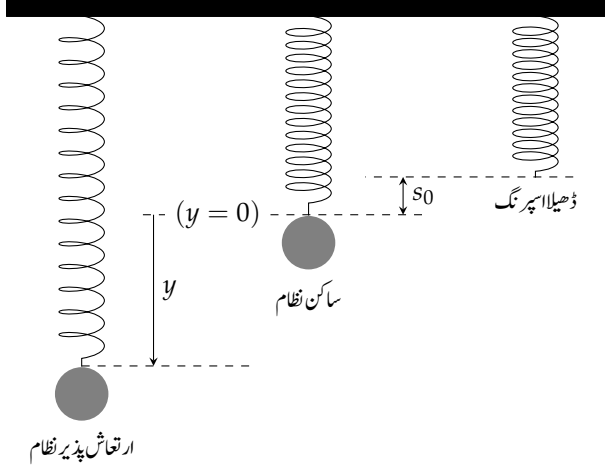
$$(4D^2 + 4D - 17I)y = 0$$

جواب: $y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

سوال 2.57:

$$(9D^2 + 12D + 4I)y = 0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے۔ $y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{2}{3}x}$



شکل 2.6: اسپرنگ اور کمیت کا غیر قصری نظام۔

2.5 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش

مستقل قیت کے عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات میکانی ارتعاش میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں اسپرنگ سے جڑی کمیت کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔ اس نظام کو اسپرنگ اور کمیت کا نظام کہا جائے گا جسے شکل 2.6 میں دکھایا گیا ہے۔

ایک عام اسپرنگ جو لمبائی میں اضافہ اور کمی کو روکتا ہو کو شکل 2.6 میں مستحکم سلاخ سے لٹکایا ہوا دکھایا گیا ہے۔ اس کی چلی سر سے کمیت m کی لوہے کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اس ساکن نظام میں اسپرنگ کے نچلے سر کو $y = 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ ہم نیچے رخ کو مثبت رخ تصور کرتے ہیں۔ یوں نیچے رخ قوت کو مثبت اور اوپر رخ قوت کو منفی تصور کیا جائے گا۔ اسی طرح مقام $y = 0$ سے نیچے رخ فاصلہ y مثبت ہو گا۔ مزید اسپرنگ کی کمیت کو گیند کی کمیت سے اتنا کم تصور کیا جاتا ہے کہ اسپرنگ کی کمیت کو درج ذیل تبصرے میں رد کیا جاسکتا ہے۔

ساکن حالت میں اسپرنگ پر نیچے رخ قوت mg عمل کرتا ہے جس سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ یہاں $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع اور mg گیند کا وزن ہے۔ اسپرنگ کی لمبائی میں اضافے کی وجہ

سے، قانون ہک³⁴ کے تحت³⁵، اسپرنگ اوپر رخ بحالی قوت³⁶ $F_0 = -ks_0$ پیدا کرتا ہے جہاں k اسپرنگ مستقلہ³⁷ ہے جس کو kg s^{-2} یعنی Nm^{-1} میں ناپا جاتا ہے۔ بحالی قوت اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتا ہے۔ قوت mg مثبت رخ ہے لہذا اس کو مثبت لکھا گیا ہے جبکہ قوت $-ks_0$ منفی رخ ہے لہذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔ ان قوتوں کا مجموعہ صفر $mg - ks_0 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔ اگر ان قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر نہ ہوتا تو گیند ساکن نہ ہوتا بلکہ نیوٹن کے قانون $F = my''$ کے تحت حرکت کرتا۔ طاقتور اسپرنگ کے مستقلہ k کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ ان دونوں قوتوں کی مقدار گیند کی حرکت سے تبدیل نہیں ہوتی لہذا ان کا مجموعہ ہر وقت صفر کے برابر ہو گا۔ یوں گیند کی حرکت میں ان دونوں قوتوں کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا ان پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

فرض کریں کہ گیند کو نیچے رخ کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ شکل 2.6 میں گیند کو ساکن مقام سے لحاقی طور y فاصلے پر دکھایا گیا ہے۔ اس لمحہ اسپرنگ اضافی بحالی قوت $F_1 = -ky$ پیدا کرتا ہے جس کے تحت گیند نیوٹن کے قانون

(2.36)

$$F_1 = ma = my''$$

کے تحت حرکت کرے گا جہاں $y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}$ ہے۔

بلا تقصیر حرکت کی سادہ تفرقی مساوات

ہر نظام تقصیری ہوتا ہے ورنہ حرکت کبھی بھی نہ رکتی۔ نہایت کم تقصیری نظام جس کے حرکت کا مطالعہ نسبتاً کم دورانیے کے لئے کیا جائے میں تقصیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں اس کو بلا تقصیر تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل 2.6 کا نظام بلا تقصیر نظام کی عمدہ مثال ہے۔ نیوٹن کے قانون کو بروئے کار لیتے ہوئے اس نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

(2.37)

$$my'' + ky = 0$$

یہ مستقل عددی سروالا خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ہے۔ امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$ ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

(2.38)

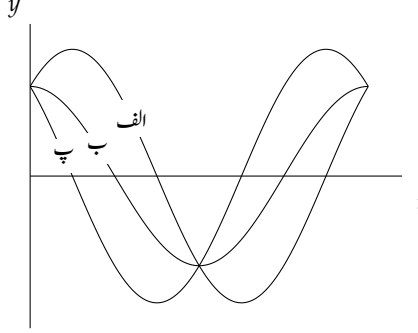
$$y = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Hooke's law³⁴

³⁵ روبرٹ ہک (1635-1703) انگلستان کے ماہر طبیعیات تھے۔

restoring force³⁶

spring constant³⁷



شکل 2.7: مساوات 2.38 کے عمومی اشکال۔

اس حرکت کو ہارمونی ارتعاش³⁸ کہتے ہیں جس کی تعدد $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ³⁹ ہرٹز⁴⁰ ہے۔⁴¹ تعدد f_0 کو نظام کی قدرتی تعدد⁴² کہتے ہیں۔ چونکہ ایک سیکنڈ میں f_0 چکر (پھیرے) پورے ہوتے ہیں لہذا ایک چکر $\frac{1}{f_0}$ عرصے میں پورا ہو گا۔ اس دورانیے کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو دوری عرصہ⁴³ کہتے ہیں۔

$$(2.39) \quad T = \frac{1}{f_0}$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{B}{A} \quad \text{اور} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$(2.40) \quad y = C \cos(\omega_0 t - \delta)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں C حیثہ⁴⁴ اور δ زاویائی فرق⁴⁵ کہلاتے ہیں۔

مساوات 2.38 (یعنی مساوات 2.40) کو شکل 2.7 میں دکھایا گیا ہے۔ دکھائے گئے تینوں منحنی میں ابتدائی فاصلہ $y(0) = A$ ہے جبکہ ابتدائی رفتار $y'(0) = \omega_0 B$ خط الف میں مثبت، ب میں صفر اور پ میں منفی ہے۔

³⁸ harmonic oscillation

³⁹ frequency

⁴⁰ Hertz

⁴¹ ہائز (1857-1894) جرمنی کے ماہر طبیعیات تھے جنہوں نے برقیاتی امواج دریافت کئے۔

⁴² natural frequency

⁴³ time period

⁴⁴ amplitude

⁴⁵ phase angle

مثال 2.16: ایک اسپرنگ سے 2 kg کمیت لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں 61.25 cm کا اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اس اسپرنگ سے کتنی کمیت لٹکانے سے ایک ہرٹز 1 Hz کا ارتعاش حاصل کیا جاسکتا ہے؟ ساکن حالت سے کمیت کو 10 cm نیچے کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قانون ہک کے تحت $mg = 0.6125k$ سے $k = \frac{2 \times 9.8}{0.6125} = 32 \text{ Nm}^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔ ایک ہرٹز کی تعدد کے لئے $2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ سے $m = \frac{k}{(2\pi f_0)^2} = \frac{32}{(2\pi \times 1)^2} = 0.811 \text{ kg}$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.38 میں $y(0) = 0.10 \text{ m}$ اور $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $A = 0.1$ اور $B = 0$ حاصل ہوتا ہے لہذا حرکت کی مساوات $y = 0.1 \cos 2\pi t$ ہوگی۔ y کی قیمت میٹر میں ہوگی۔

قصری نظام کا سادہ تفرقی مساوات

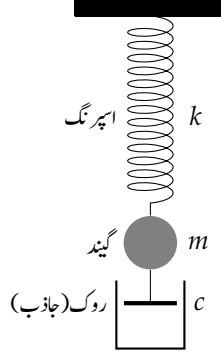
شکل 2.8 میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک $F_3 = -cy'$ کا اضافہ کیا گیا ہے جو ہر لمحہ حرکت کے الٹ رخ عمل کرتی ہے۔ یوں $my'' = -ky - cy'$ لکھا جائے گا جس سے قصری نظام کی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad (2.41)$$

حاصل ہوتی ہے۔ گیند کے ساتھ چادر منسلک کی گئی ہے جو ایک طرف سے بند نکی میں حرکت کرتے ہوئے توانائی کا ضیاع اور یوں قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ اس حصے کو (توانائی کا) جاذب⁴⁶ بھی کہا جاتا ہے۔ اس سے قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ تجربے سے دیکھا گیا ہے کہ کم رفتار پر ایسی قوت رفتار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ c قصری مستقل⁴⁷ کہلاتا ہے۔ قصری مستقل از خود مثبت مستقل ہے۔ یوں نیچے رخ رفتار، یعنی مثبت رفتار، کی صورت میں قصری قوت منفی، یعنی اوپر رخ، ہوگی۔

قصری نظام کی مساوات خطی متجانس ہے جس سے امتیازی مساوات (m سے تقسیم شدہ) لکھتے ہیں۔

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$



شکل 2.8: اسپرنگ اور کیفیت کا قسری نظام۔

اس دو درجی الجبرائی مساوات کے جذر لکھتے ہیں۔

$$(2.42) \quad \lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta \quad \text{جہاں} \quad \alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

تقصیر کی مقدار پر $c^2 - 4mk$ کی قیمت منحصر ہے جو تین مختلف صورتیں پیدا کرتی ہے۔

پہلی صورت: زیادہ تقصیر⁴⁸ دو منفرد حقیقی جذر $c^2 > 4mk$

دوسری صورت: فاصل تقصیر⁴⁹ دوہرا حقیقی جذر $c^2 = 4mk$

تیسری صورت: کم تقصیر⁵⁰ جوڑی دار مخلوط جذر $c^2 < 4mk$

اس قسم کی تین صورتیں ہم صفحہ 96 پر پہلے دیکھ چکے ہیں۔

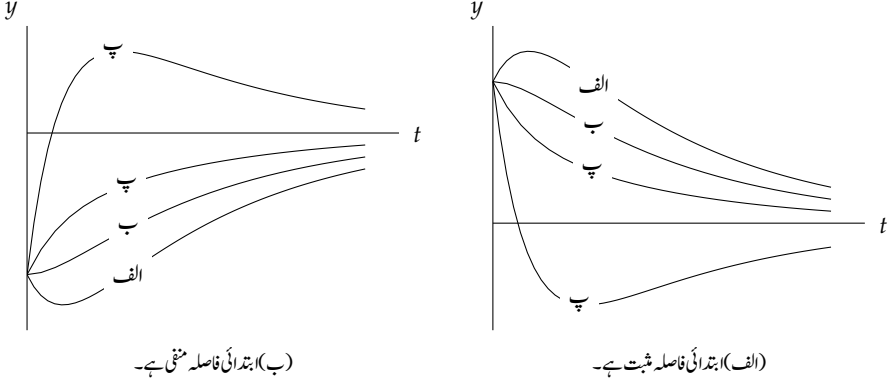
تین صورتوں کے حل

پہلی صورت

زیادہ تقصیر

پہلی صورت میں قسری قوت اتنا زیادہ ہے کہ $c^2 > 4mk$ ہے جس سے دو منفرد حقیقی جذر λ_1 اور λ_2

over damping⁴⁸
critical damping⁴⁹
under damping⁵⁰



شکل 2.9: تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

حاصل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

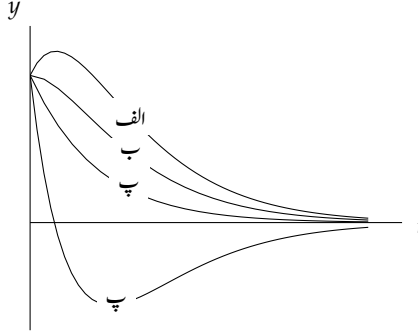
$$(2.43) \quad y = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$$

چونکہ $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ اور $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$ ہیں لہذا $\alpha - \beta$ اور $\alpha + \beta$ دونوں مثبت مقدار ہیں۔ یوں مساوات 2.43 میں دونوں قوت نمائی تفاعل کی طاقت منفی ہوگی اور دونوں تفاعل کی قیمتیں نہایت تیزی سے گھٹے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \rightarrow \infty$ پر $y(\infty) \rightarrow 0$ ہو گا یعنی گیند ساکن ہو گا۔ زیادہ قسری نظام میں قسری قوت اس تیزی سے نظام سے توانائی خارج کرتا ہے کہ نظام ارتعاش کرنے کے قابل نہیں رہتا۔

مساوات 2.43 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں ابتدائی فاصلہ مثبت ہے جبکہ شکل-ب میں ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔ شکل-الف میں خط الف مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔ شکل-ب میں خط الف منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تقصیری نظام میں ارتعاش ممکن نہیں ہے اور نظام میں حرکت بہت جلد ختم ہو جاتی ہے۔

دوسری صورت

فاصل تقصیر زیادہ تقصیر اور کم تقصیر کے درمیان فاصل تقصیر کی صورت پائی جاتی ہے جہاں $c^2 = 4mk$ ہوتا ہے۔ یوں $\beta = 0$



شکل 2.10: فاصل تقصیری نظام میں حرکت بالقابل وقت۔

اور امتیازی مساوات کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ پایا جاتا ہے۔ یوں مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.44) \quad y = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$$

یہ مساوات ساکن مقام $y = 0$ سے صرف ایک مرتبہ گزر سکتی ہے۔ اس کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ $e^{-\alpha t}$ کبھی صفر یا منفی نہیں ہو سکتا جبکہ $c_1 + c_2 t$ صرف ایک صفر دیتا ہے۔ اگر c_1 اور c_2 دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $c_1 + c_2 t$ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اور y صفر سے کبھی نہیں گزرے گا۔

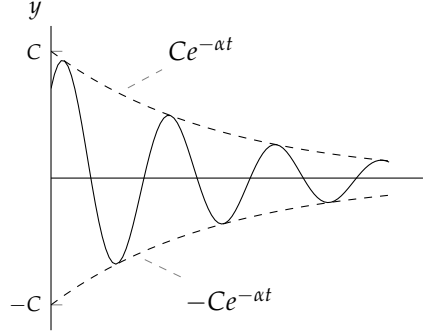
شکل 2.10 میں مساوات 2.44 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی فاصلہ مثبت لیا گیا ہے، خط الف میں ابتدائی رفتار مثبت، خط ب میں صفر اور دو عدد خط پ میں ابتدائی رفتار منفی لی گئی ہے۔ یہ خطوط شکل 2.9-الف سے مشابہت رکھتے ہیں۔ ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ موجودہ صورت منفرد حقیقی جذر کی وہ مخصوص صورت ہے جہاں دونوں جذر عین برابر ہوں۔

تیسری صورت

کم تقصیر

یہ سب سے زیادہ دلچسپ صورت ہے جہاں تقصیری مستقل کی قیمت اتنی کم ہے کہ $c^2 - 4mk < 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 2.42 میں β خیالی عدد ہو گا۔

$$(2.45) \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = i\omega \quad (\omega > 0)$$



شکل 2.11: قصری ارتعاش۔

امتیازی مساوات کے جذر جوڑی دار مخلوط اعداد ہوں گے

$$(2.46) \quad \lambda_1 = -\alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega$$

اور مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$(2.47) \quad y = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t - \delta)$$

جہاں $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$ ہیں۔

یہ قصری ارتعاش⁵¹ کو ظاہر کرتی ہے جس کو شکل 2.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اس منحنی کی چوٹیاں، نقطہ دار لکیر سے دکھائی گئیں، تقابل $y = Ce^{-\alpha t}$ اور $y = -Ce^{-\alpha t}$ کے منحنی کو چھوتی ہے۔ ارتعاش کی تعدد $\frac{\omega}{2\pi}$ ہے جو قصری مستقل c کم کرنے سے بڑھتی ہے۔ قصری مستقل کی قیمت صفر کرنے سے مساوات 2.40 کی ہارمونی ارتعاش حاصل ہوتی ہے جس کی قدرتی تعدد $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ہو گی۔

مثال 2.17: تقصیری حرکت کے تین صورتیں

ایک اسپرنگ جس کا مستقل $k = 32 \text{ N kg}^{-1}$ ہے سے $m = 2 \text{ kg}$ کا گیند لٹکایا گیا ہے۔ اس نظام میں باری باری $c = 20 \text{ kg s}^{-1}$ ، $c = 16 \text{ kg s}^{-1}$ اور $c = 5 \text{ kg s}^{-1}$ تقصیری اثر شامل کیا جاتا ہے۔ ابتدائی معلومات $y(0) = 4 \text{ cm}$ اور $y'(0) = 0$ ہیں۔ گیند کی حرکت دریافت کریں۔

⁵¹damped oscillations

حل: قوت روک نظام میں توانائی کے ضیاع کو ظاہر کرتی ہے جس سے مسلسل گھٹتی ارتعاش (پہلی صورت) یا غیر ارتعاشی حرکت (دوسری اور تیسری صورت) پیدا ہوتی ہے۔

پہلی صورت: $m = 2$ ، $k = 32$ اور $c = 20$ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے

$$2y'' + 20y' + 32y = 0, \quad y(0) = 0.04 \text{ m}, \quad y'(0) = 0$$

جس کا امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 20\lambda + 32 = 0$ ہے۔ امتیازی مساوات $2(\lambda + 8)(\lambda + 2) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = -8$ ہیں جن سے عمومی حل اور حل کا ایک درجی تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}, \quad y' = -2c_1 e^{-2t} - 8c_2 e^{-8t}$$

ان میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے $c_1 + c_2 = 0.04$ اور $-2c_1 - 8c_2 = 0$ ملتا ہے جنہیں حل کرنے سے $c_1 = \frac{4}{75}$ اور $c_2 = -\frac{1}{75}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح حرکت کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$y = \frac{4}{75} e^{-2t} - \frac{1}{75} e^{-8t}$$

یہ مسلسل گھٹتی ارتعاش ہے جو آخر کار $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow 0$ ہو گی یعنی بہت دیر بعد گیند ساکن ہو گا۔

دوسری صورت: $c = 16$ کی صورت میں امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 16\lambda + 32 = 0$ یعنی $2(\lambda + 4)^2 = 0$ ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ ہے۔ یوں حرکت کی عمومی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-4t}$$

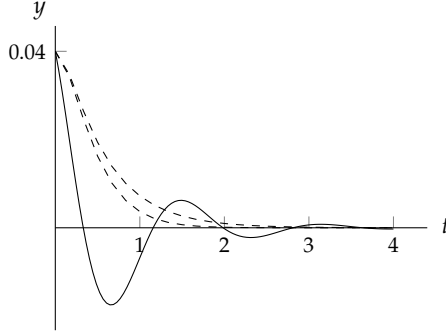
جس میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c_1 = 0.04$ اور $c_2 = 0.16$ حاصل ہوتے ہیں جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = (0.04 + 0.16t) e^{-4t}$$

تیسری صورت: تقصیری مستقل $c = 5 \text{ kg s}^{-1}$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات $2y'' + 5y' + 32y = 0$ ہو گا جس سے امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 5\lambda + 32 = 0$ حاصل ہوتی ہے۔ امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $-1.25 \pm 3.8i$ ہیں جن سے عمومی مساوات اور عمومی مساوات کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-1.25t} (A \cos 3.8t + B \sin 3.8t)$$

$$y' = -1.25e^{-1.25t} (A \cos 3.8t + B \sin 3.8t) + 3.8e^{-1.25t} (-A \sin 3.8t + B \cos 3.8t)$$



شکل 2.12: مثال 2.17 کی آزاد حرکت کی تین صورتیں۔

ابتدائی معلومات کو y کی مساوات میں پر کرنے سے $A = 0.04$ حاصل ہوتا ہے جبکہ انہیں y' کی مساوات میں پر کرنے سے $-1.25A + 3.8B = 0$ یعنی $B = -0.013$ حاصل ہوتا ہے لہذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-1.25t} (0.04 \cos 3.8t - 0.013 \sin 3.8t)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلا تقصیری نظام کی قدرتی ارتعاش $\omega_0 = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$ سے موجودہ تعدد $\omega = 3.8$ کم ہے۔ شکل 2.12 میں اس مثال کی تینوں صورتوں کو دکھایا گیا ہے۔

اس حصے میں بیرونی قوتوں سے پاک اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی آزاد حرکت⁵² پر غور کیا گیا۔ ایسے نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔ ہم اسی باب میں بیرونی جبری قوتوں کی موجودگی میں پائی جانے والی جبری حرکت⁵³ پر بھی غور کریں گے۔ ایسے نظام کو غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

سوالات

سوال 2.58 تا سوال 2.68 بلا تقصیر، ہارمونی ارتعاش کے سوالات ہیں۔

⁵² free motion
⁵³ forced motion

سوال 2.58: ابتدائی قیمت مسئلہ

بلا تقصیر ارتعاش کو مساوات 2.38 ظاہر کرتی ہے۔ ابتدائی فاصلہ $y(0) = y_0$ اور ابتدائی رفتار $y'(0) = v_0$ کی صورت میں مخصوص حل لکھیں۔

$$y = y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.59: تعدد

ایک اسپرنگ کی لمبائی 75 cm ہے۔ اس سے 0.25 kg کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی 85 cm ہو جاتی ہے۔ اس نظام کی تعدد f_0 اور دوری عرصہ T کیا ہوں گے؟

$$T = 0.63 \text{ s} , f_0 = 1.58 \text{ Hz} \quad \text{جوابات:}$$

سوال 2.60: تعدد

اسپرنگ اور کمیت کی نظام میں کمیت چارگٹا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔ مستقلہ اسپرنگ کی قیمت چارگٹا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔

جوابات: کمیت چارگٹا کرنے سے تعدد آدھی ہوتی ہے۔ مستقلہ اسپرنگ چارگٹا کرنے سے تعدد دگنی ہوتی ہے۔

سوال 2.61: ابتدائی رفتار

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں ابتدائی رفتار صفر نہ ہونے کی صورت میں نظام کے تعدد اور رفتار پر کیا اثر ہوگا؟

جواب: نظام کی تعدد پر کوئی اثر نہیں ہوگا البتہ اس سے رفتار بڑھے گی۔

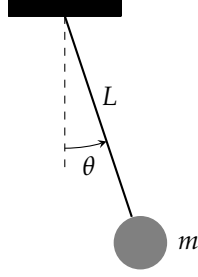
سوال 2.62: متوازی اسپرنگ

چار کلو گرام کی گیند کو $k_1 = 16 \text{ N m}^{-1}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جاتا ہے۔ نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ اگر اسی گیند کو $k_2 = 32 \text{ N m}^{-1}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جائے تب نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ دونوں کی لمبائی برابر ہے۔ ان دونوں اسپرنگ کو متوازی جوڑا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ شکل 2.13-الف کو دیکھیے۔

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = 0.55 \text{ Hz} , 0.45 \text{ Hz} , 0.32 \text{ Hz} \quad \text{جوابات:}$$

سوال 2.63: سلسلہ وار اسپرنگ

گزشتہ سوال کے دونوں اسپرنگ کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔ نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تعدد حاصل کریں۔



(ب) سوال 2.64 کا نظام۔



(الف) سوال 2.62 کا نظام۔

شکل 2.13: متوازی اسپرنگ اور جھولا کے سوالات۔

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = 0.26 \text{ Hz} \quad , \quad my'' + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y = 0 \quad \text{جوابات:}$$

سوال 2.64: جھولا

ایک ہلکے دھاگے سے m کمیت کا گیند لٹکایا شکل 2.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس نظام کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ نہایت چھوٹے زاویے کی صورت میں $\sin \theta \approx \theta$ لکھتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں جس کو حل کرتے ہوئے نظام کی تعدد حاصل کریں۔

حل: گیند کا وزن mg ہے جو نیچے رخ قوت ہے۔ اس کا مماس $mg \sin \theta$ ہے جو اسراع پیدا کرتا ہے۔

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad , \quad \theta = \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad , \quad L\theta'' = g\theta \quad , \quad L\theta' = g \sin \theta$$

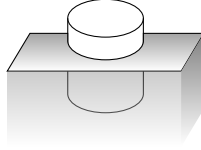
سوال 2.65: اصول آرشمیدس

اصول آرشمیدس⁵⁴ کے تحت جب کسی جسم کو مائع میں ڈبوایا جائے تو اس پر قوت اچھال عمل کرتی ہے جس کی مقدار، جسم کے ڈبوئے گئے حجم کے برابر، مائع کے وزن جتنی ہوتی ہے۔

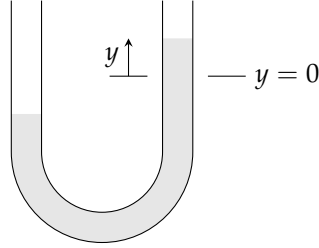
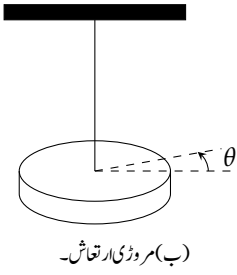
ایک بیلن کو سیدھا پانی میں کھڑا کرنے سے اس کا کچھ حصہ پانی میں ڈوب جاتا ہے۔ شکل 2.14 میں اس کو ساکن حالت میں دکھایا گیا ہے۔ بیلن کا رداس $r = 20 \text{ cm}$ ہے۔ اگر بیلن کو نیچے دھکیل کر چھوڑا جائے تو یہ دو سیکنڈ کے دوری عرصے سے اوپر نیچے ارتعاشی حرکت کرتا ہے۔ بیلن کی کمیت M دریافت کریں۔ پانی کی کثافت $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ہے۔

$$M = g\rho\pi r^2 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.8 \times 1000\pi 0.2^2 \left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 124.8 \text{ kg} \quad \text{جوابات:}$$

⁵⁴ Archimedian principle



شکل 2.14: آرمسید سی اصول؛ سوال 2.65



(الف) نالی میں پانی کا ارتعاش۔

شکل 2.15: سوال 2.67 اور سوال 2.68 کے اشکال۔

سوال 2.66: زنجیر کا میز سے پھسلنا
ایک پھسلنی میز پر زنجیر سیدھا پڑا ہوا ہے۔ ان کے مابین قوت رگڑ قابل نظر انداز ہے۔ اگر زنجیر کے ایک سر کو میز سے لٹکایا جائے تو پورا زنجیر پھسلنے پھسلنے نیچے گر پڑتا ہے۔ زنجیر کی کل لمبائی L اور کمیت m کلوگرام فی میٹر لیتے ہوئے اس مسئلے کا تفرقی مساوات لکھیں۔ اگر $y(0) = 0$ اور $y'(0) = v_0$ ہو تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

$$\text{جوابات: } mL y'' = mgy, \quad y = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}} t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} t} \right)$$

سوال 2.67: نالی میں پانی کی ارتعاش
شکل 2.15-الف میں $M = 9 \text{ kg}$ پانی زیر ثقلی قوت نالی میں ارتعاش کرتا ہے۔ نالی کا اندرونی رداس $r = 1.5 \text{ cm}$ ہے۔ ارتعاش کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\text{جوابات: } T = 5.06 \text{ s}, \quad M y'' = -2\pi r^2 \rho g y$$

سوال 2.68: باریک غیر لچکدار تار سے I_0 جمودی معیار اثر⁵⁵ کی مکی لٹکائی جاتی ہے جو مروڑی ارتعاش کرتی ہے۔ شکل 2.15-ب کو دیکھیے۔ اس نظام کو $I_0 \theta'' + k\theta = 0$ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے جہاں θ کو

moment of inertia⁵⁵

متوازن حال سے ناپا جاتا ہے۔ k مروڑی مستقل (یا اسپرنگ مستقل) ہے جس کو Nm rad^{-1} نیوٹن میٹر فی ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ ابتدائی زاویہ $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ریڈیئن یعنی 45° اور ابتدائی رفتار صفر ہے۔ اس مساوات کو $\frac{k}{I_0} = 9 \text{ s}^{-2}$ لیتے ہوئے حل کریں۔ تعدد کا کلیہ دریافت کریں۔ اس تجربے کو باریک تار کی مروڑی مستقل k حاصل کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مکی کا جمودی معیار اثر جانتے ہوئے اور قدرتی تعدد ناپ کر باریک تار کا مروڑی مستقل دریافت کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{جواب: } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I_0}}, \theta = \frac{\pi}{4} \cos 3t$$

سوالات 2.69 تا سوال 2.69 میں قسری حرکت پایا جاتا ہے۔

سوال 2.69: زیادہ تفصیر

زیادہ تفصیری صورت میں مساوات 2.43 حل دیتی ہے۔ ابتدائی معلومات $y(0) = y_0$ اور $y'(0) = v_0$ ہونے کی صورت میں c_1 اور c_2 دریافت کریں۔

$$\text{جوابات: } c_2 = \frac{1}{2}[(1 - \frac{\alpha}{\beta})y_0 - \frac{v_0}{\beta}], c_1 = \frac{1}{2}[(1 + \frac{\alpha}{\beta})y_0 + \frac{v_0}{\beta}]$$

سوال 2.70: زیادہ تفصیر

زیادہ تفصیری صورت میں ثابت کریں کہ y زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ $y = 0$ سے گزر سکتا ہے۔

سوال 2.71: دھچکا روک

گاڑیوں میں دھچکا روک⁵⁶ نسب ہوتے ہیں جو گاڑی کی حرکت کو یقینی طور پر غیر ارتعاشی رکھتے ہیں۔ صفحہ 119 پر شکل 2.8 دھچکا روک کو ظاہر کرتی ہے۔ سوار کو دھچکوں سے پاک سواری اسپرنگ مہیا کرتا ہے جبکہ جاذب ان دھچکوں کی توانائی کو جذب کرتا ہے۔ گاڑی بج سواری کی کمیت کو m ظاہر کرتی ہے۔

کمیت 1300 kg اور اسپرنگ مستقل 80000 kg s^{-2} ہونے کی صورت میں تفصیری مستقل کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر یقین طور غیر ارتعاشی سواری حاصل ہوگی۔

$$\text{جواب: } c \geq 20396 \text{ kg s}^{-1}$$

⁵⁶ shock absorber

سوال 2.72: تعدد

کم قسری صورت کی ارتعاش کا تعدد ω مساوات 2.45 دیتا ہے۔ اس مساوات پر مسئلہ ثنائی کا اطلاق کرتے ہوئے پہلے دو اجزاء لیں اور مثال 2.17 کی کم قسری حرکت ($c = 5 \text{ kg s}^{-1}$) کی تعدد ارتعاش حاصل کریں۔ موجودہ جواب اور مثال میں حاصل کردہ جوابات میں کتنے فی صد فرق پایا جاتا ہے۔

جوابت: $\omega = \omega_0(1 - \frac{c^2}{8mk})$ ، $\omega = 3.8046$ ، لہذا دونوں جوابات میں 0.13% فرق پایا جاتا ہے۔ (مثال 2.17 میں تعدد کی بالکل ٹھیک قیمت $\omega = 3.79967$ ہے جسے مثال میں $\omega = 3.8$ لکھا گیا ہے۔)

سوال 2.73: بلا تقصیر نظام کے قدرتی تعدد اور کم تقصیری نظام (5 kg s^{-1}) کے تعدد ارتعاش میں فرق مثال 2.17 کے لئے حاصل کریں۔

جواب: 4.88% ؛ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگرچہ قوت روک تعدد ارتعاش پر فرق ڈالتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔

سوال 2.74: کم قسری ارتعاش کی مثبت چوٹیاں یکساں وقفوں پر پائی جاتی ہیں۔ اس وقفے کو دریافت کریں۔

جواب: مساوات 2.47 کی مثبت چوٹیاں $\omega t - \delta = 2n\pi$ پر پائی جاتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔ یوں دو چوٹیوں کے درمیان وقفہ $\frac{2\pi}{\omega}$ یعنی $T = \frac{1}{f}$ ہو گا۔

سوال 2.75: لوگار تھمی گھٹاؤ

کم قسری نظام میں دو قریبی چوٹیوں کی قیمتوں کی شرح ایک مستقل قیمت ہوتی ہے جس کے لوگار تھم کو لوگار تھمی گھٹاؤ⁵⁷ کہتے ہیں۔ لوگار تھمی گھٹاؤ Δ حاصل کریں۔

جواب: $\Delta = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$

سوال 2.76: تقصیری مستقل

ایک کم تقصیری نظام میں $m = 0.25 \text{ kg}$ ہے اور ارتعاش کا دوری عرصہ 5 s ہے۔ بیس پکروں میں چوٹی گھٹ کر $\frac{1}{4}$ گنا رہ جاتی ہے۔ نظام کے تقصیری مستقل کا تخمینہ لگائیں۔

جواب: $\alpha = 0.01386$

2.6 یولر کوشی مساوات

سادہ تفرقی مساوات⁵⁸

$$(2.48) \quad x^2 y'' + axy' + by = 0$$

یولر کوشی مساوات⁵⁹ کہلاتا ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ اس میں

$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

پر کرنے سے

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

ملتا ہے جس کو مشترک جزو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے ذیلی مساوات⁶⁰ $m(m-1) + am + b = 0$ یعنی

$$(2.49) \quad m^2 + (a-1)m + b = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں $y = x^m$ مساوات 2.48 کا حل اس صورت ہو گا جب m مساوات 2.49 کا جذر ہو۔ مساوات 2.49 کے جذر

$$(2.50) \quad m_1 = \frac{1}{2}(1-a) + \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}, \quad m_2 = \frac{1}{2}(1-a) - \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}$$

ہیں۔

پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر کی صورت میں دو منفرد حل

$$y_1 = x^{m_1}, \quad y_2 = x^{m_2}$$

ملتے ہیں۔ چونکہ ان حل کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس طرح یہ حل کی اساس ہیں اور انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$(2.51) \quad y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

⁵⁸ لیون آرزپولر (1707-1783) سوزر لینڈ کا رہائشی اور ماہر حساب تھا۔ آگسٹن لوئی کوشی (1789-1857) فرانسیسی ماہر حساب تھا جنہوں نے جدید تجربے کی بنیاد ڈالی۔
⁵⁹ Euler-Cauchy equation
⁶⁰ auxiliary equation

لکھا جاسکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ یہ حل تمام x کے لئے درست ہے۔

مثال 2.18: یولر کوئی مساوات $x^2 y'' + 0.5xy' - 1.5y = 0$ سے $m^2 - 0.5m - 1.5 = 0$ ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $m_1 = 1.5$ اور $m_2 = -1$ ہیں۔ ان سے اساس $y_1 = x^{\frac{3}{2}}$ ، $y_2 = x^{-1}$ لکھی جاسکتی ہے۔ اساس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 x \sqrt{x} + \frac{c_2}{x}$$

دوسری صورت: حقیقی دوہرا جذر $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}(1-a)$ اس صورت پایا جاتا ہے جب $b = \frac{1}{4}(1-a)^2$ ہو۔ ایسی صورت میں مساوات 2.48 درج ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے

$$(2.52) \quad x^2 y'' + axy' + \frac{1}{4}(1-a)^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0$$

جس کا ایک حل $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے۔

دوسرا خطی طور غیر تابع حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب پر حصہ 2.2 میں غور کیا گیا ہے۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے پہلا حل y_1 اور دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لیتے ہیں۔ یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ اور $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ ہوں گے جنہیں معیاری تفرقی مساوات 2.52 میں پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + \frac{1}{x}(u'y_1 + uy_1') + \frac{(1-a)^2}{4x^2}(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے جزو ضرب اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) + u[y_1'' + \frac{a}{x}y_1' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y_1] = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہذا درج بالا مساوات میں دایاں قوسین صفر کے برابر ہو گا اور یوں

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$u'' + u' \left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{x} \right) = 0$$

اب چونکہ $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے لہذا $y_1' = \frac{1-a}{2}x^{\frac{1-a}{2}-1} = \frac{1-a}{2}\frac{y_1}{x}$ ہو گا جس کو درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$u'' + u' \left[2 \left(\frac{1-a}{2x} \right) + \frac{a}{x} \right] = 0 \implies u'' + \frac{u'}{x} = 0$$

اس میں $u' = v$ لیتے ہوئے $v' + \frac{v}{x} = 0$ ملتا ہے جس کا حل $v = \frac{1}{x}$ ہے۔ یوں $v = u' = \frac{1}{x}$ لکھتے ہوئے تکمیل لے کر $u = \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح خطی طور غیر تابع دوسرا حل $y_2 = uy_1 = y_1 \ln x$ ہو گا۔ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.53) \quad y = (c_1 + c_2 \ln x)x^m \quad m = \frac{1-a}{2}$$

مثال 2.19: دوہرا جذر

یولر کوشی مساوات $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ کا ذیلی مساوات $m^2 - 8m + 16 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $m_1 = m_2 = 4$ ہے۔ یوں تمام مثبت x کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^4$$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر کی صورت انجینئری نقطہ نظر سے زیادہ اہم نہیں ہے لہذا اس کی ایک عدد مثال ہی دیکھتے ہیں۔

مثال 2.20: یولر کوشی مساوات $x^2 y'' + 0.8xy' + 9.01y = 0$ کی $m^2 - 0.2m + 9.01 = 0$ ذیلی مساوات ہے جس کے جوڑی دار مخلوط جذر $m_1 = 0.1 + 3i$ اور $m_2 = 0.1 - 3i$ ہیں جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ یہاں ایک چال چلاتے ہیں جس کے ذریعہ خیالی عدد i سے چھٹکارا حاصل ہوگا کرتے ہیں یعنی ہم $x = e^{\ln x}$ لکھتے ہیں۔ یوں

$$x^{m_1} = x^{0.1+3i} = x^{0.1} (e^{\ln x})^{3i} = x^{0.1} e^{(3 \ln x)i}$$

$$x^{m_2} = x^{0.1-3i} = x^{0.1} (e^{\ln x})^{-3i} = x^{0.1} e^{-(3 \ln x)i}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اب صفحہ 102 پر یولر مساوات 2.27 استعمال کرتے ہیں۔

$$x^{m_1} = x^{0.1} e^{(3 \ln x)i} = x^{0.2} [\cos(3 \ln x) + i \sin(3 \ln x)]$$

$$x^{m_2} = x^{0.1} e^{-(3 \ln x)i} = x^{0.2} [\cos(3 \ln x) - i \sin(3 \ln x)]$$

اب دونوں کا مجموعہ لیتے ہوئے دو (2) سے تقسیم کرتے ہیں۔ اسی طرح پہلی سے دوسری مساوات منفی کرتے ہوئے $-2i$ سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$x^{0.1} \cos(3 \ln x), \quad x^{0.1} \sin(3 \ln x)$$

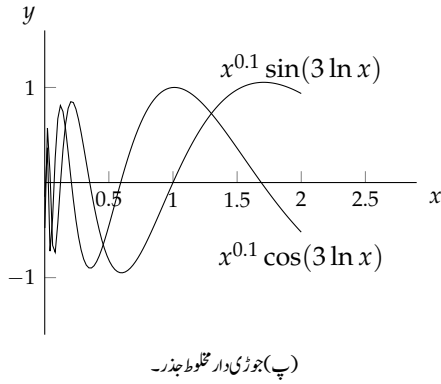
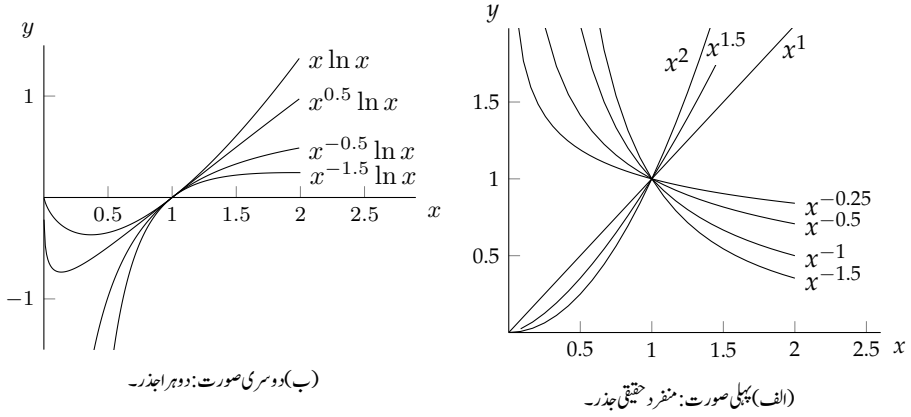
ان کا حاصل تقسیم $\tan(3 \ln x)$ ہے جو مستقل مقدار نہیں ہے لہذا درج بالا دونوں خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس طرح یہ حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = x^{0.1} [c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \sin(3 \ln x)]$$

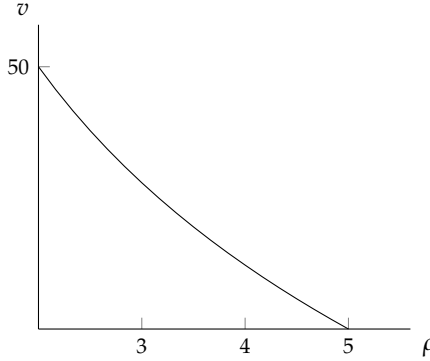
شکل 2.16 میں یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کی تینوں صورتوں کے حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 2.21: دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں ساکن برقی میدان؛ سرحدی قیمت مسئلہ
دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں برقی دباؤ تفرقی مساوات $\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{dv}{d\rho} = 0$ دیتی ہے۔ نلکی کے رداس $\rho_1 = 2 \text{ cm}$ اور $\rho_2 = 5 \text{ cm}$ ہیں جبکہ ان پر برقی دباؤ $v_1 = 50 \text{ V}$ اور $v_2 = 0 \text{ V}$ ہے۔ درمیانی خطے کی

electric voltage⁶¹



شکل 2.16: پیرکوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل۔



شکل 2.17: مثال 2.21 کا حل۔

برقی دباؤ حاصل کریں۔

حل: یولر کوئی مساوات میں $a = 1$ اور $b = 0$ موجودہ تفرقی مساوات دیتا ہے۔ دیے مساوات میں $v = \rho^m$ پر کرتے ہوئے ذیلی مساوات $m^2 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کا دوہرا جذر $m = 0$ ہے۔ یوں عمومی حل $v = c_1 + c_2 \ln x$ ہو گا۔ دیے گئے سرحدی شرائط حل میں پر کرتے

$$50 = c_1 + c_2 \ln 0.02, \quad 0 = c_1 + c_2 \ln 0.05$$

ہوئے $c_1 = -163.471$ اور $c_2 = -54.568$ حاصل ہوتے ہیں لہذا مخصوص حل $y = -163.471 - 54.568 \ln \rho$ ہو گا جسے شکل 2.17 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.22: یولر کوئی مساوات 2.48 میں $x = e^t$ پر کرتے ہوئے اس کو مستقل عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات میں تبدیل کریں۔

حل: ہم $y(x)$ کو $y[x(t)]$ یعنی $y(t)$ تصور کرتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق سے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 t}{dx^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ اور $\frac{d^2 t}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

انہیں مساوات 2.48 میں پر کرتے

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} \right) + ax \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + by = 0$$

ہوئے مستقل عددی سر والا سادہ تفریقی مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں $y = \frac{dy}{dt}$ اور $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}$ ہیں۔

$$\ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0 \quad (2.54)$$

سوالات

سوال 2.77 تا سوال 2.85 حل کریں۔

سوال 2.77:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

جواب: $y = c_1 x + c_2 x^2$

سوال 2.78:

$$x^2 y'' - 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-2}$

سوال 2.79:

$$x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$$

جواب: $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4}$

سوال 2.80:

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^3$

سوال 2.81:

$$x^2 y'' + 11xy' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-5}$

سوال 2.82:

$$10x^2 y'' + 11xy' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^{-\frac{3}{5}}$

سوال 2.83:

$$x^2 y'' + 0.44xy' + 0.0748y = 0$$

جواب: $y = c_1 x^{0.22} + c_2 x^{0.34}$

سوال 2.84:

$$x^2 y'' + 0.4xy' + 0.73y = 0$$

جواب: $y = x^{0.3}[c_1 \cos(0.8 \ln x) + c_2 \sin(0.8 \ln x)]$

سوال 2.85:

$$x^2 y'' + 2xy' + 4.25y = 0$$

جواب: $y = x^{-0.5}[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)]$

سوال 2.86 تا سوال 2.91 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 2.86:

$$x^2 y'' - 0.4xy' + 0.45y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$$

جواب: $y = 7\sqrt{x} - 5x^{0.9}$

سوال 2.87:

$$x^2 y'' + 1.08xy' - 0.01713y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{23}{18}x^{0.23} - \frac{41}{18}x^{-0.31}$

سوال 2.88:

$$35x^2 y'' + 57xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -5$$

جواب: $y = \frac{77}{4}x^{-\frac{3}{7}} - \frac{65}{4}x^{-\frac{1}{5}}$

سوال 2.89:

$$6x^2 y'' + 19xy' + 6y = 0, \quad y(1) = -3, \quad y'(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{6}{5}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{21}{5}x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 2.90:

$$25x^2 y'' - 15xy' + 16y = 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 1$$

جواب: $y = 2^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} (\ln x - \ln 2)$

سوال 2.91:

$$49x^2 y'' + 77xy' + 4y = 0, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 0$$

جواب: $y = x^{-\frac{2}{7}} (2.93 + 1.04 \ln x)$

2.7 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ور و نسی

اس حصے میں متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات،

$$(2.55) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جس کے عددی سر $p(x)$ اور $q(x)$ کوئی بھی استمراری تفاعل ہو سکتے ہیں، کے عمومی حل کی وجودیت⁶² پر غور کیا جائے گا۔ ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.55 اور ابتدائی معلومات

$$(2.56) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے ابتدائی قیمت مسئلہ کی مخصوص حل کی یکتائی⁶³ پر بحث کی جائے گی۔

مسئلہ 2.2 کہتا ہے کہ اس ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل پایا جاتا ہے جو یکتا ہو گا اور مساوات 2.55 کے عمومی حل

$$(2.57) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{اختیاری } c_1, c_2$$

میں تمام حل شامل ہیں۔ یوں استمراری عددی سروالے متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا۔ نادر حل اس حل کو کہتے ہیں جسے عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

ہمیں مستقل عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات یا یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت اور یکتائی جاننے کی ضرورت پیش نہیں آئی چونکہ ان کے حل کے دوران ہی ایسی تمام معلومات سامنے آ جاتی ہیں۔

مسئلہ 2.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کسی کھلے وقفے I پر استمراری ہوں اور x_0 اس وقفے پر پایا جاتا ہو، تب مساوات 2.55 اور مساوات 2.56 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا مخصوص حل $y(x)$ موجود ہے۔

وجودیت حل کی ثبوت کے لئے وہی بنیادی شرائط درکار ہیں جو صفحہ 74 پر مسئلہ 1.3 کے لئے درکار تھے۔ اس کتاب میں ان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ اگرچہ یکتائی کا ثبوت عموماً آسان ہوتا ہے لیکن موجودہ مسئلہ 2.2 کے یکتائی حل کا ثبوت اتنا آسان نہیں ہے لہذا اس کو کتاب کے آخر میں بطور ضمیمہ شامل کیا گیا ہے۔

existence⁶²
uniqueness⁶³

خطی طور غیر تابع حل

آپ کو حصہ 2.5 سے یاد ہو گا کہ کھلے وقفہ I پر عمومی حل اساس y_1 ، y_2 پر مشتمل ہوتا ہے جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت خطی طور غیر تابع⁶⁴ کہلاتے ہیں جب پورے وقفہ پر

$$(2.58) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

سے مراد

$$(2.59) \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.58 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 خطی طور تابع⁶⁵ کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.58 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1$ لکھا جاسکتا ہے جو تناسبی رشتہ کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(2.60) \quad \text{پورے } I \text{ پر} \quad (ب) \quad y_2 = l y_1, \quad (الف) \quad y_1 = k y_2,$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابع صورت میں ہم مساوات 2.58 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا (اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔) خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع حل کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 2.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل

کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 2.58 کے I پر دو حل y_1 اور y_2 اس صورت خطی طور غیر تابع ہوں گے جب ان کے ورونسکی⁶⁶

$$(2.61) \quad W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو جہاں x_0 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر $W = 0$ ہو گا۔ یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

ثبوت:

linearly independent⁶⁴

linearly dependent⁶⁵

Wronskian⁶⁶

(الف) y_1 اور y_2 کو I پر خطی طور غیر تابع تصور کریں۔ یوں مساوات 2.60-الف یا b میں سے ایک درست ہو گا۔ اگر مساوات 2.60-الف درست ہو تب

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = k y_2 y_2' - y_2 k y_2' = 0$$

ہو گا۔ اسی طرح مساوات 2.60-ب کی صورت میں بھی $W = 0$ ملتا ہے۔

(ب) اس کے الٹ چلتے ہوئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی x_0 پر $W(y_1, y_2) = 0$ سے مراد y_1 اور y_2 کا I پر خطی طور تابع ہونا ہے۔ درج ذیل مساوات پر غور کریں جہاں k_1 اور k_2 کو نامعلوم متغیرات تصور کریں۔

$$(2.62) \quad \begin{aligned} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) &= 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

k_2 حذف کرنے کی نیت سے پہلی مساوات کو $y_2'(x_0)$ اور دوسری کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(2.63) \quad k_1 y_1(x_0) y_2'(x_0) - k_1 y_1'(x_0) y_2(x_0) = k_1 W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$$

اسی طرح k_1 حذف کرنے کے لئے پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں مساوات کا مجموعہ

$$(2.64) \quad k_2 y_1(x_0) y_2'(x_0) - k_2 y_2(x_0) y_1'(x_0) = k_2 W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$$

لیتے ہیں۔ اب اگر x_0 پر W صفر نہ ہوتا تب ہم مساوات 2.63 اور مساوات 2.64 کو W سے تقسیم کرتے ہوئے $k_1 = k_2 = 0$ حاصل کرتے البتہ x_0 پر $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ ہے لہذا ہم ان مساوات کو W سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔ یوں ہمزا مساوات 2.62 کا حل k_1 اور k_2 پایا جاتا ہے جہاں k_1 اور k_2 دونوں غیر صفر ہو سکتے ہیں۔ اب ان اعداد k_1 اور k_2 کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل

$$(2.65) \quad y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

لیتے ہیں۔ چونکہ مساوات 2.55 متجانس خطی ہے لہذا مسئلہ 2.1 (مسئلہ خطی میل) کے تحت یہ تفاعل بھی مساوات 2.55 کا حل ہو گا۔ مساوات 2.62 سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل ابتدائی معلومات $y(x_0) = 0$ اور $y'(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ اب تصور کریں کہ مساوات 2.55 کا دوسرا حل جو انہیں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہو $y^*(x) = 0$ ہے۔ اب چونکہ مساوات 2.55 میں $p(x)$ اور $q(x)$ استمراری ہیں

لہذا مسئلہ 2.2 کے تحت اس کا مخصوص حل یکتا ہو گا۔ یوں $y(x)$ اور $y^*(x)$ مختلف نہیں ہو سکتے ہیں لہذا $y^*(x) = y(x) = 0$ یعنی

$$(2.66) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 \equiv 0 \quad \text{پورے } I \text{ پر}$$

ہو گا۔ چونکہ k_1 اور k_2 میں کم از کم ایک صفر کے برابر نہیں ہے لہذا مساوات 2.66 کہتا ہے کہ I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں۔

(پ) ہم مسئلے کا آخری نقطہ ثابت کرتے ہیں۔ اگر کھلے وقفے I پر نقطہ x_0 پر $W(x_0) = 0$ ہو تب ثبوت (ب) کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں لہذا ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہو گا۔ یوں خطی طور تابع صورت میں ایسا نہیں ہو سکتا ہے کہ $W(x_1) \neq 0$ ہو جہاں x_1 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب اس سے مراد خطی طور غیر تابع صورت ہو گی جیسا کہ دعویٰ کیا گیا ہے۔

حساب کی نقطہ نظر سے مساوات 2.61 سے درج ذیل زیادہ آسان مساوات ہے۔

$$(2.67) \quad W(y_1, y_2) = \begin{cases} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 & (y_1 \neq 0) \\ -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' y_2^2 & (y_2 \neq 0) \end{cases}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ورونسکی کو قالب کی مقطع کے طرز پر لکھا جاسکتا ہے جس کو ورونسکی مقطع⁶⁷ یا حل y_1 اور y_2 کی ورونسکی کہتے ہیں۔

$$(2.68) \quad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

مثال 2.23: مسئلہ 2.3 کا اطلاق

تفرقی مساوات $y'' + \omega^2 y = 0$ کے حل $y_1 = \cos \omega x$ اور $y_2 = \sin \omega x$ ہیں۔ ان کی ورونسکی

$$W(\cos \omega x, \sin \omega x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & -\omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega \cos^2 \omega x + \omega \sin^2 \omega x = \omega$$

ہے۔ مسئلہ 2.3 کے تحت یہ حل صرف اس صورت میں خطی طور غیر تابع ہوں گے جب $\omega \neq 0$ ہو۔ یہی دونوں حل کے حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = \tan \omega x$ سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے جہاں $\omega = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور تابع صورت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 2.24: دوہرا جذر کی صورت میں مسئلہ 2.3 کا اطلاق
تفرقی مساوات $y'' - 6y' + 9y = 0$ کا (ثابت کریں کہ) عمومی حل $y = (c_1 + c_2x)e^{3x}$ ہے جس کا ورنسکی صفر کے برابر نہیں ہے لہذا e^{3x} اور xe^{3x} تمام x پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3xe^{6x} = e^{6x} \neq 0$$

مساوات 2.55 کے عمومی حل میں تمام حل کی شمولیت

اس حصے کو مساوات 2.55 کے عمومی حل کی وجودیت سے شروع کرتے ہیں۔

مسئلہ 2.4: وجودیت عمومی حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں مساوات 2.55 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: مسئلہ 2.2 کے تحت I پر مساوات 2.55 کا، ابتدائی معلومات

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_1(x)$ موجود ہے۔ اسی طرح ابتدائی معلومات

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_2(x)$ بھی موجود ہے۔ نقطہ x_0 پر ان کا ورنسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 1$$

ہے۔ مسئلہ 2.3 کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور پر غیر تابع ہیں لہذا یہ مساوات 2.55 کے حل کی اساس ہیں۔ اس طرح ثابت ہوا کہ I پر مساوات 2.55 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ عمومی حل اتنا عمومی ہے جتنا کوئی حل عمومی ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 2.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

کھلا وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.55 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$(2.69) \quad Y(x) = C_1y_1 + C_2y_2$$

لکھا جاسکتا ہے، جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.55 کی کوئی بھی اساس اور C_1 ، C_2 مناسب مستقل ہیں۔

یوں مساوات 2.55 کا کوئی نادر حل موجود نہیں ہے۔ (نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔)

ثبوت: تصور کریں کہ I پر مساوات 2.55 کا $y = Y(x)$ کوئی حل ہے۔ اب مسئلہ 2.4 کے تحت I پر تفرقی مساوات 2.55 کا عمومی حل

$$(2.70) \quad y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

موجود ہے۔ ہم c_1 اور c_2 کی وہ قیمتیں دریافت کرنا چاہتے ہیں جن سے I پر $y(x) = Y(x)$ حاصل ہوتا ہو۔ ہم I پر کوئی بھی x_0 چنتے ہوئے پہلے ثابت کرتے ہیں کہ c_1 اور c_2 کی ایسی قیمتیں دریافت کی جاسکتی ہیں کہ x_0 پر $y(x_0) = Y(x_0)$ اور $y'(x_0) = Y'(x_0)$ ہوں۔ اس کو مساوات 2.70 کے استعمال سے

$$(2.71) \quad c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0)$$

$$(2.72) \quad c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0)$$

لکھ سکتے ہیں۔ ان ہمزاد مساوات سے c_1 اور c_2 معلوم کرتے ہیں۔ مساوات 2.71 کو $y_2'(x_0)$ اور مساوات 2.72 کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لینے سے c_1 حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے مساوات 2.73 ملتی ہے۔ اسی طرح c_2 حاصل کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لیتے ہوئے مساوات 2.74 حاصل ہوتی ہے۔ ان مساوات میں y_1 ، y_1' ، y_2 ، y_2' ، Y اور Y' کی قیمتیں نقطہ x_0 پر لی گئی ہیں۔

$$(2.73) \quad c_1 y_1 y_2' - c_1 y_2 y_1' = c_1 W(y_1, y_2) = Y y_2' - y_2 Y$$

$$(2.74) \quad c_2 y_1 y_2' - c_2 y_2 y_1' = c_2 W(y_1, y_2) = y_1 Y - Y y_1'$$

اب چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہذا ورنسکی کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہے لہذا ان مساوات سے c_1 اور c_2 حاصل کیے جاسکتے ہیں

$$c_1 = \frac{Y y_2' - y_2 Y}{W} = C_1, \quad c_2 = \frac{y_1 Y - Y y_1'}{W} = C_2$$

جہاں ان منفرد قیمتوں کو C_1 اور C_2 لکھا گیا ہے۔ انہیں مساوات 2.70 میں پر کرتے ہوئے مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ C_1 اور C_2 مساوات 2.71 اور مساوات 2.72 کے حل ہیں لہذا ہم ان مساوات سے دیکھتے ہیں کہ

$$y^*(x_0) = Y(x_0), \quad y^{*'}(x_0) = Y'(x_0)$$

مسئلہ 2.2 میں جس یکسانی کا ذکر کیا گیا ہے اس کے تحت y^* اور Y تمام I پر ہر جگہ برابر ہوں گے۔

سوالات

سوال 2.92: مساوات 2.67 سے مساوات 2.61 حاصل کریں۔

سوال 2.93 تا سوال 2.99 کی ورنسکی حاصل کریں۔ حاصل تقسیم سے ثابت کریں کہ یہ خطی طور غیر تابع ہیں اور مسئلہ 2.3 سے بھی اس بات کی تصدیق کریں

سوال 2.93: $e^{2x}, e^{-1.2x}$
جوابات: $c \neq e^{3.2x} = \frac{e^{2x}}{e^{-1.2x}}$ ، $W = -3.2e^{0.8x} \neq 0$

سوال 2.94: $e^{2.4x}, e^{1.1x}$
جوابات: $c \neq e^{1.3x} = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = -1.3e^{3.5x} \neq 0$

سوال 2.95: $x, \frac{1}{x}$
جوابات: $c \neq x^2 = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = -2x^{-2} \neq 0$

سوال 2.96: x, x^3
جوابات: $c \neq x^{-2} = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = 2x^3 \neq 0$

سوال 2.97: $e^{-0.2x} \sin 3x, e^{-0.2x} \cos 3x$
جوابات: $c \neq \tan 3x = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = 3e^{-0.4x} \neq 0$

سوال 2.98: $e^{-ax} \sinh kx, e^{-ax} \cosh kx$
جوابات: $c \neq \tanh kx = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = -ke^{-2ax} \neq 0$

سوال 2.99: $x^a \sin(k \ln x), x^a \cos(k \ln x)$
جوابات: $c \neq \tan(k \ln x) = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = -kx^{2a-1} \neq 0$

سوال 2.100 تا سوال 2.106 میں تفرقی مساوات کے حل دیے گئے ہیں۔ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ ورنسکی کی مدد سے ثابت کریں کہ دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں اور ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.100: $\sin 3x, \cos 3x, y(0) = 2, y'(0) = -3$
جوابات: $W = -3 \neq 0$ ، $y'' + 9y = 0$ ، $y = 2 \cos 3x - \sin 3x$

سوال 2.101: $x^3, x^{-4}, y(1) = -1, y'(1) = 2$
 جوابات: $y = -\frac{2x^3}{7} - \frac{5x^{-4}}{7}, W = -\frac{7}{x^2} \neq 0, x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$

سوال 2.102: $e^{-1.2x} \sin 0.8x, e^{-1.2x} \cos 0.8x, y(0) = 5, y'(0) = 7$
 جوابات: $W = -0.8e^{-2.4x} \neq 0, y'' + 2.4y' + 2.08y = 0$
 $y = e^{-\frac{6}{5}x} (\frac{65}{4} \sin \frac{4x}{5} + 5 \cos \frac{4x}{5})$

سوال 2.103: $x^3, x^3 \ln x, y(1) = 2, y'(1) = 8$
 جوابات: $y = 2x^3(1 + \ln x), W = x^5 \neq 0, x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$

سوال 2.104: $1, e^{3x}, y(0) = 1.5, y'(0) = -2.5$
 جوابات: $y = \frac{8}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}, W = 3e^{3x} \neq 0, y'' - 3y' = 0$

سوال 2.105: $e^{-kx} \sin \pi x, e^{-kx} \cos \pi x, y(0) = 1, y'(0) = -k - \pi$
 جوابات: $W = -\pi e^{-2kx} \neq 0, y'' + 2ky' + (k^2 + \pi^2)y = 0$
 $y = e^{-kx}(\sin \pi x - \cos \pi x)$

سوال 2.106: $\sinh 1.8x, \cosh 1.8x, y(0) = 14.2, y'(0) = 16.38$
 جوابات: $W = -1.8 \neq 0, y'' - 3.24y = 0$
 $y = 9.1 \sinh 1.8x + 14.2 \cosh 1.8x$

سوال 2.107: تفرقی مساوات $y'' - y = 0$ کا عمومی حل قوت نمائی تفاعل اور بذلولی⁶⁸ تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ دونوں صورتوں کے مستقل کا تعلق کیا ہے؟

جوابات: $c_b = c_1 + c_2, c_a = c_1 - c_2, y = c_a \sinh x + c_b \cosh x, y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

2.8 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات

اس باب میں اب تک متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ یہاں سے باب کے اختتام تک غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ درج ذیل غیر متجانس خطی تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جہاں $r \neq 0$ ہے۔

$$(2.75) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

ہم دیکھیں گے کہ مساوات 2.75 کا عمومی حل، مطابقتی متجانس مساوات

$$(2.76) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

کے عمومی حل اور مساوات 2.76 کے ایک مخصوص حل کا مجموعہ ہو گا۔ مساوات 2.75 کے عمومی حل اور مخصوص حل کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: عمومی حل اور مخصوص حل
کھلے وقفہ I پر غیر متجانس مساوات 2.75 کا عمومی حل

$$(2.77) \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ہو گا جہاں I پر $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ متجانس مساوات 2.76 کا عمومی حل ہے اور I پر y_p مساوات 2.75 کا کوئی بھی حل ہے جس میں مستقل نہیں پایا جاتا۔

مساوات 2.75 کا مخصوص حل، مساوات 2.77 کے c_1 اور c_2 میں خصوصی قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔

اب ہمیں حل کی ان تعریف کا جواز پیش کرنا ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.75 کا حل y_p حاصل کرنا ہو گا۔ پس ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 2.77 کا عمومی حل مساوات 2.75 پر پورا اترتا ہے اور یہ کہ مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل کا آپس میں سادہ تعلق ہے۔

مسئلہ 2.6: مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل کا آپس میں تعلق

(الف) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کے حل y اور اسی وقفے پر مساوات 2.76 کے حل \tilde{y} کا مجموعہ I پر مساوات 2.75 کا حل ہے۔ بالخصوص مساوات 2.77 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کا حل ہو گا۔

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کے دو حل کا فرق I پر مساوات 2.76 کا حل ہے۔

ثبوت :

(الف) مساوات 2.75 کے بائیں ہاتھ کو $L[y]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں I پر مساوات 2.75 کے کسی بھی حل y اور مساوات 2.76 کے کسی بھی حل \tilde{y} کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L[y + \tilde{y}] = L[y] + L[\tilde{y}] = r + 0 = r$$

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کے کسی بھی حل y اور y^* کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L[y - y^*] = L[y] - L[y^*] = r - r = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ متجانس مساوات 2.76 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہوتے ہیں۔ اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متجانس مساوات 2.75 کے عمومی حل میں اس کے تمام حل شامل ہیں۔

مسئلہ 2.7: غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.75 کا ہر حل، مساوات 2.77 میں دیے گئے عمومی حل کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: کھلے وقفہ I پر y^* مساوات 2.75 کا کوئی حل ہے جبکہ x_0 اس وقفے پر کوئی x ہے۔ اسی طرح مساوات 2.77 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کا کوئی عمومی حل ہے۔ یہ حل موجود ہے۔ یقیناً $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

مسئلہ 2.4 کے تحت موجود ہے جبکہ y_p کی وجوہیت اس باب میں آگے جا کر دکھائی جائے گی۔ اب مسئلہ 2.6-ب کے تحت $Y = y^* - y_p$ کھلے وقفے پر مساوات 2.76 کا حل ہے۔ نقطہ x_0 پر

$$Y(x_0) = y^*(x_0) - y_p(x_0), \quad Y'(x_0) = y^{*'}(x_0) - y_p'(x_0)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کھلے وقفے I پر، مسئلہ 2.2 کے مطابق، کسی بھی ابتدائی معلومات کی طرح، ان معلومات پر پورا اترتا ہوا، مساوات 2.76 کا مخصوص حل موجود ہے جسے y_h میں c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے $y^* = Y + y_p$ سے مسئلہ کا دعویٰ ثابت ہوتا ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

آپ نے دیکھا کہ مساوات 2.75 یا اس پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 2.76 کو حل کرنا ہو گا اور مساوات 2.75 کا کوئی بھی حل y_p تلاش کرنا ہو گا۔ اس طرح عمومی حل 2.77 حاصل ہو گا۔

مساوات 2.75 کا حل y_p حاصل کرنے کی ایک ترکیب کو نامعلوم عددی سر کی ترکیب⁶⁹ کہتے ہیں۔ یہ ترکیب نہایت آسان ہے۔ اس ترکیب سے ارتعاشی نظام عمدگی سے حل ہوتے ہیں لہذا اسے انجینئری شعبے میں مقبولیت حاصل ہے۔ اس باب کے آخری حصے میں عمومی ترکیب پر غور کیا جائے گا جو نسبتاً مشکل ترکیب ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب ان خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.78) \quad y'' + ay' + by = r(x)$$

کے حل کے لئے موزوں ہے جس کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہوں اور $r(x)$ قوت نمائی تفاعل ہو یا x کی طاقت ہو یا سائن نما تفاعل ہو اور یا ان تفاعل کا مجموعہ یا حاصل ضرب ہو۔ ایسی تفاعل کی تفرقات بھی یہی تفاعل ہوتی ہیں۔ مثلاً x^3 کے تفرقات $3x^2$ ، $6x$ اور 6 ہیں جو از خود x کی طاقت ہیں۔ اسی طرح $\sin \omega x$ کا ایک درجی تفرق $\omega \cos \omega x$ جبکہ دو درجی تفرق $-\omega^2 \sin \omega x$ ہے۔ یہ دونوں تفرقات از خود سائن نما تفاعل ہیں۔

method of undetermined coefficients⁶⁹

جدول 2.2: نامعلوم عددی سر کی ترکیب

$y_p(x)$ کے ارکان	$r(x)$ کے ارکان
$Ce^{\gamma x}$	$ke^{\gamma x}$
$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0$	$kx^n \quad (n = 0, 1, \dots)$
$K \cos \omega x + M \sin \omega x$	$k \cos \omega x$
$K \cos \omega x + M \sin \omega x$	$k \sin \omega x$
$e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$	$ke^{\alpha x} \cos \omega x$
$e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$	$ke^{\alpha x} \sin \omega x$

اس ترکیب میں y_p کو $r(x)$ اور اس کے تمام تفرقات کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ مجموعہ لکھتے ہوئے ہر رکن کو نامعلوم مستقل سے ضرب دیا جاتا ہے۔ y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.78 میں پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کے یکساں اجزاء کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے نامعلوم مستقل دریافت کئے جاتے ہیں۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p جدول 2.2 کے تحت لکھی جاتی ہے۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p درج ذیل قواعد کے تحت لکھی جاتی ہے۔

بنیادی قاعدہ: اگر مساوات 2.78 کا $r(x)$ جدول 2.2 کے دائیں قطار میں دیا گیا ہو تب اس تفاعل کے صف سے $y_p(x)$ حاصل کریں۔ حاصل y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.2 میں پر کرتے ہوئے نامعلوم عددی سر کی قیمت دریافت کریں۔

تریمی قاعدہ: اگر y_p کا کوئی رکن تفاعل مساوات 2.78 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل ہو تب اس رکن کو x سے ضرب دے کر y_p میں شامل کریں۔ (اگر یہ حل مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل کیا گیا ہو تب اس رکن کو x^2 سے ضرب دیں۔)

مجموعے کا قاعدہ: اگر $r(x)$ جدول 2.2 کے دائیں قطار میں پائے جانے والے تفاعل کا مجموعہ ہو تب y_p کو ان تفاعل کے صف میں بائیں قطار کے تفاعل کا مجموعہ لکھیں۔

$r(x)$ صرف ایک رکن پر مشتمل ہونے کی صورت میں بنیادی قاعدہ استعمال ہو گا۔ تریمی قاعدہ استعمال کرنے سے پہلے متجانس مساوات حل کرنا ہو گا۔ اگر $r = r_1$ کی صورت میں مساوات 2.78 کا حل y_{p1} ہو اور $r = r_2$ کی صورت میں اس کا حل y_{p2} ہو تب $r = r_1 + r_2$ کی صورت میں اس کا حل $y_{p1} + y_{p2}$ ہو گا۔ یہ حقیقت مجموعے کا قاعدہ دیتی ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب خود اصلاحی ہے۔ یوں y_p چنتے ہوئے کم اجزاء لینے سے تضاد پیدا ہو گا اور عددی سر حاصل کرنا ممکن نہ ہو گا۔ زیادہ اجزاء لینے سے زائد ارکان کے عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوں گے۔

آئیں مثال 2.25 تا مثال 2.27 کی مدد سے اس ترکیب کو مزید سمجھیں۔

مثال 2.25: بنیادی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تلاش کریں۔

$$y'' + 9y = 0.2x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 9y = 0$ کا حل y_h درج ذیل ہے۔

$$y_h = A \cos 3x + B \sin 3x$$

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: اگر ہم $y_p = Kx^2$ چنتے تب $y'_p = 2Kx$ اور $y'' = 2K$ ہو گے جنہیں دیے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے $2K + 9Kx^2 = 0.2x^2$ ملتا ہے۔ یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت تمام x کے لئے درست ہو سکتی ہے کہ دونوں جانب x^2 کے عددی سر برابر ہوں۔ اسی طرح x^1 یا x^0 کے عددی سر بھی دونوں اطراف برابر ہونا ضروری ہے۔ اس کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہوئے $2K = 0$ اور $9K = 0.2$ لکھا جائے گا جس سے $K = 0$ اور $K = \frac{0.2}{9}$ حاصل ہوتا ہے جو تضاد کی صورت حال ہے۔ یوں اس y_p کو رد کیا جاتا ہے۔

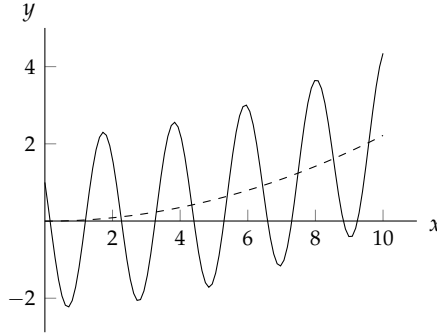
آئیں اب دیے گئے قواعد کے تحت جدول 2.2 سے y_p لکھیں۔ جدول کی دوسری صف کے تحت درج ذیل لکھا جائے گا

$$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$$

جس کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(2K_2) + 9(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 0.2x^2 \implies 9K_2x^2 + 9K_1x + 2K_2 + 9K_0 = 0.2x^2$$

اس مساوات کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔ یوں بائیں جانب x^2 کا عددی سر $9K_2$ ہے جبکہ دائیں جانب یہ 0.2 کے برابر ہے۔ انہیں آپس میں برابر پر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بائیں



شکل 2.18: مثال 2.25 کا مخصوص حل۔

جانب x^1 کا عددی سر $9K_1$ ہے جبکہ دائیں جانب ایسا کوئی رکن نہیں پایا جاتا لہذا دائیں جانب x^1 کا عددی سر صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح x^0 کا عددی سر بائیں جانب $2K_2 + 9K_0$ اور دائیں جانب صفر ہے۔

$$9K_2 = 0.2, \quad 9K_1 = 0, \quad 2K_2 + 9K_0 = 0$$

ان تین ہمزاد مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے $K_2 = \frac{1}{45}$ ، $K_1 = 0$ اور $K_0 = -\frac{2}{405}$ حاصل ہوتے ہیں لہذا $y_p = \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = y_h + y_p = A \cos 3x + B \sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

ہو گا۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ پر $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $1 = A - \frac{2}{405}$ لکھا جائے گا جس سے $A = \frac{407}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $y'(0) = -5$ کو استعمال کرتے ہوئے $-6 = 3B$ لکھا جائے گا جس سے $B = -2$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = \frac{407}{405} \cos 3x - 2 \sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

مخصوص حل کو شکل 2.18 میں دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر y_p کو ظاہر کرتی ہے۔ مخصوص حل y_p کے دونوں اطراف ارتعاش کر رہی ہے۔

مثال 2.26: ترمیمی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 2.4y' + 1.44y = -5e^{-1.2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2.4\lambda + 1.44 = 0$ یعنی $(\lambda + 1.2)^2 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1.2$ ہے جس سے $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: تفرقی مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل $e^{-1.2x}$ سے عام طور جدول 2.2 کو دیکھ کر $y_p = Ce^{-1.2x}$ لکھا جاتا البتہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تفاعل متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل حل ہے۔ یوں ترمیمی قاعدے کے تحت منتخب تفاعل کو x^2 سے ضرب دینا ہو گا۔ یوں درج ذیل چننا جائے گا

$$y_p = Cx^2e^{-1.2x}$$

جس کے تفرقات $y_p' = (2x - 1.2x^2)Ce^{-1.2x}$ اور $y_p'' = (1.44x^2 - 4.8x + 2)Ce^{-1.2x}$ ہیں۔ ان تمام کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں جہاں دونوں اطراف $e^{-1.2x}$ کو حذف کیا گیا ہے۔

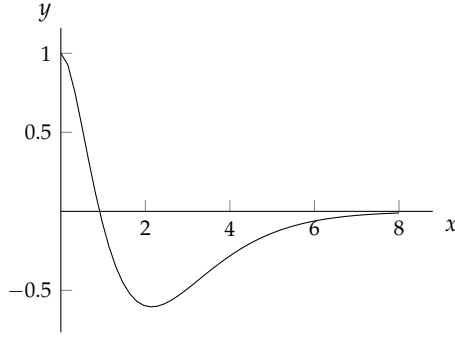
$$(1.44x^2 - 4.8x + 2)C + 2.4(2x - 1.2x^2)C + 1.44Cx^2 = -5$$

دونوں اطراف x^2 ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھے ہوئے $0 = 0$ ، $0 = 0$ اور $2C = -5$ لکھا جاتا ہے جس سے $C = -2.5$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں $y_p = -2.5x^2e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے لہذا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x} - 2.5x^2e^{-1.2x}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $y(0) = 1$ ، $x = 0$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $c_1 = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ y کے تفرق

$$y' = [3x^2 - (1.2c_2 + 5)x + c_2 - 1.2c_1]e^{-1.2x}$$



شکل 2.19: مثال 2.26 کا مخصوص حل۔

میں $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $0 = 2c_2 - 1.2c_1$ یعنی $c_2 = 1.2$ ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y = (1 + 1.2x - 2.5x^2)e^{-1.2x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.19 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.27: مجموعے کا قاعدہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y''3y' + 2y = 0.2 \cos x + 0.1x - 0.4, \quad y(0) = -2.1, \quad y'(0) = 3.2$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 3y' + 2y = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ یعنی $3\lambda + 2 = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -2$ ہیں جن سے حاصل ہوتا ہے۔ $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: غیر متجانس مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل کے تحت جدول 2.2 سے لکھتے ہیں جہاں $y_p = y_{p1} + y_{p2}$

$$y_{p1} = K \cos x + M \sin x, \quad y_{p2} = K_1 x + K_0$$

کے برابر ہیں۔ یوں $y_p = K \cos x + M \sin x + K_1 x + K_0$ اور اس کے تفرقات

$$y_p' = -K \sin x + M \cos x + K_1, \quad y_p'' = -K \cos x - M \sin x$$

کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(-K \cos x - M \sin x) + 3(-K \sin x + M \cos x + K_1) + 2(K \cos x + M \sin x + K_1 x + K_0) = 0.2 \cos x + 0.1x - 0.4$$

دونوں اطراف $\cos x$ ، $\sin x$ ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھتے

$$-K + 3M + 2K = 0.2, \quad -M - 3K + 2M = 0, \quad 2K_1 = 0.1, \quad 3K_1 + 2K_0 = -0.4$$

ہوئے حل کرنے سے $K = \frac{1}{50}$ اور $M = \frac{3}{50}$ ، $K_1 = \frac{1}{20}$ ، $K_0 = -\frac{11}{40}$ ملتے ہیں لہذا

$$y_p = \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

لکھا جائے گا جس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

حاصل ہوتا ہے۔

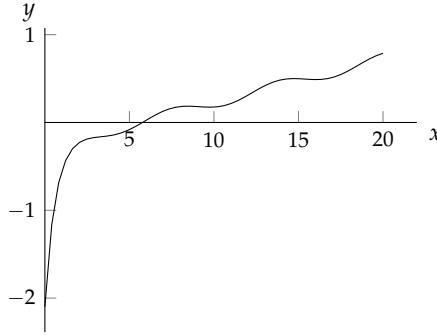
تیسرا قدم: مخصوص حل: y اور y' میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{50} - \frac{11}{40} = -2.1, \quad -c_1 - 2c_2 + \frac{3}{50} + \frac{1}{20} = 3.2$$

جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{3}{5}$ اور $c_2 = -\frac{249}{200}$ ملتے ہیں۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = -\frac{3}{5} e^{-x} - \frac{249}{200} e^{-2x} + \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

مخصوص حل کو شکل 2.20 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.20: مثال 2.27 کا مخصوص حل۔

توازن

کسی بھی انجینئری نظام کا متوازن ہونا نہایت اہم ہوتا ہے۔ مساوات 2.78 کے مطابق متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دونوں جذر منفی یا دونوں جذر کے حقیقی حصے منفی ہونے کی صورت میں نظام اور تفرقی مساوات کو متوازن⁷⁰ کہتے ہیں۔ ایسی صورت میں $t \rightarrow \infty$ پر $y_h \rightarrow 0$ ہو گا لہذا عارضی حل $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حل y_p کے قریب قریب ہو گا۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں نظام غیر متوازن⁷¹ کہلاتا ہے۔ چونکہ مثال 2.25 میں امتیازی مساوات کے جذر کے حقیقی حصے منفی مقدار نہیں ہیں لہذا یہ غیر متوازن نظام کو ظاہر کرتا ہے۔

اگلے دو حصوں میں ان مساوات کا استعمال ہو گا۔

سوالات

سوال 2.108 تا سوال 2.117 میں دیے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کے حقیقی عمومی حل دریافت کریں۔

سوال 2.108: $y'' - y' - 6y = e^{-1.5x}$
 جواب: $y = k_1 e^{3x} + k_2 e^{-2x} - \frac{4}{9} e^{-1.5x}$

stable⁷⁰
 unstable⁷¹

سوال 2.109: $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$
 جواب: $y = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{-3x} - (1+x)e^{-3x}$

سوال 2.110: $4y'' + 12y' + 9y = 4e^{-1.5x}$
 جواب: $y = (k_1 + k_2 x)e^{-1.5x} + \frac{x^2}{2}e^{-1.5x}$

سوال 2.111: $4y'' + 2y' + 3y = 4 \cos 3x$
 جواب: $y = k_1 e^{-0.5x} + k_2 e^{-1.5x} + \frac{32}{555} \sin 3x - \frac{44}{555} \cos 3x$

سوال 2.112: $y'' + 4y = \sin 2x$
 جواب: $y = k_1 \sin 2x + k_2 \cos 2x - 0.5x \cos 2x$

سوال 2.113: $9y'' + 4y = e^{-2x} \sin \frac{2x}{3}$
 جواب: $y = k_1 \cos \frac{2x}{3} + k_2 \sin \frac{2x}{3} + \frac{e^{-2x}}{156} (2 \cos \frac{2x}{3} + 3 \sin \frac{2x}{3})$

سوال 2.114: $y'' + 3y' + 2y = x^2$
 جواب: $y = k_1 e^{-x} + k_2 e^{-2x} + \frac{2x^2 - 6x + 7}{4}$

سوال 2.115: $y'' + 9y = 3 \sin x + \sin 3x$
 جواب: $y = k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x + \frac{3}{8} \sin x - \frac{x}{6} \cos 3x$

سوال 2.116: $y'' + 8y' + 15y = 0.5x$
 جواب: $y = k_1 e^{-3x} + k_2 e^{-5x} + \frac{15x-8}{450}$

سوال 2.117: $y'' + 2y' + y = x \cos x$
 جواب: $y = (k_1 + k_2 x)e^{-x} + 0.5 \cos x + 0.5(x-1) \sin x$

سوال 2.118 تا سوال 2.130 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسلوں کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.118: $y'' + 5y' + 6y = 0.2e^{-1.5x}$, $y(0) = 1.2$, $y'(0) = -0.5$
 جواب: $y = -\frac{4}{15}e^{-1.5x} + \frac{27}{10}e^{-2x} - \frac{53}{30}e^{-3x}$

سوال 2.119: $y'' + 2.7y' + 1.8y = 3.4e^{-1.2x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -3$
 جواب: $y = (\frac{102x-340}{9})e^{-1.2x} - 20e^{-1.2x} + \frac{302}{9}e^{-1.5x}$

سوال 2.120: $y'' + 6y' + 9y = 1.1e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
 جواب: $y = 1.1e^{-2x} + (0.9x - 0.1)e^{-3x}$

سوال 2.121: $y'' + 8y' + 16y = 0.7e^{-4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = \frac{7}{20}x^2e^{-4x} + (6x + 2)e^{-4x}$

سوال 2.122: $4y'' + 8y' + 3y = 24x^2$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = -101e^{-0.5x} + \frac{59}{9}e^{-1.5x} + \frac{72x^2 - 384x + 832}{9}$

سوال 2.123: $4y'' + 8y' + 3y = 2.4e^{-0.5x} + 8x^2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = (\frac{3x}{5} - \frac{301}{10})e^{-0.5x} + \frac{617}{270}e^{-1.5x} + \frac{8x^2}{3} - \frac{128x}{9} + \frac{832}{27}$

سوال 2.124: $6y'' + 29y' + 35y = 6 \cos x$, $y(0) = 0.5$, $y'(0) = -0.2$
 جواب: $y = \frac{3}{29} \cos x + \frac{3}{29} \sin x + \frac{1197}{290}e^{-\frac{7}{3}x} - \frac{541}{145}e^{-\frac{5}{2}x}$

سوال 2.125: $y'' + 9y = \cos 3x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.3$
 جواب: $y = \frac{1}{5} \cos 3x + (\frac{x}{6} + \frac{1}{10}) \sin 3x$

سوال 2.126: $8y'' - 6y' + y = 6 \sinh x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.1$
 جواب: $y = e^x - \frac{19}{5}e^{0.5x} + \frac{16}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.127: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 3 \ln x - 4$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y_p = \ln x$
 جواب: $y = \frac{1}{3} \ln x + \frac{4}{9} + \frac{5x^3}{9} - x$

سوال 2.128: $y'' + 2y' + 10y = 17 \sin x - 37 \sin 3x$, $y(0) = 6.6$, $y'(0) = -2.2$
 جواب: $y = e^{-x} \cos 3x - \sin 3x + 6 \cos 3x + \frac{9}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x$

سوال 2.129: $8y'' - 6y' + y = 6 \sinh x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.05$
 جواب: $y = e^x - 4e^{0.5x} + \frac{17}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.130: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1.5$
 جواب: $y = (1 + x - 0.25 \sin 2x)e^{-2x}$

2.9 جبری ارتعاش۔ گمک

ہم اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر حصہ 2.5 میں غور کر چکے ہیں جہاں اس نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.79) \quad my'' + cy' + ky = 0$$

سے ظاہر کیا گیا جہاں، ساکن حالت میں گیند کے مقام سے، حرکت کی صورت میں گیند کا فاصلہ $y(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حصہ 2.5 میں نظام پر کوئی بیرونی قوت لاگو نہیں کیا گیا۔ نظام کی حرکت صرف اور صرف نظام کی اندرونی قوتوں کی بنا تھی۔ قوت جمود my'' ، قوت بحالی ky اور قوت روک cy' نظام کی اندرونی قوتیں تھیں۔

آگے بڑھتے ہوئے اس نظام میں بیرونی قوت $r(t)$ کا اضافہ کرتے ہیں۔ شکل 2.21 میں ایسا نظام دکھایا گیا ہے۔ بیرونی قوت $r(t)$ انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔ اس نظام کی نمونہ کشی درج ذیل تفرقی مساوات کرتی ہے۔

$$(2.80) \quad my'' + cy' + ky = r(t)$$

میکانی طور پر اس مساوات کا مطلب ہے کہ ہر لمحہ t پر اندرونی قوتوں کا مجموعہ بیرونی قوت $r(t)$ کے برابر ہے۔ اس نظام میں گیند کی حرکت کو جبری حرکت⁷² کہتے ہیں جبکہ بیرونی قوت کو جبری قوت⁷³ یا داخلی قوت⁷⁴ کہتے ہیں۔ گیند کی حرکت کو نظام کا رد عمل⁷⁵ یا نظام کا ماحصل⁷⁶ بھی کہا جاتا ہے۔

ہمیں دوری⁷⁷ بیرونی قوتوں میں زیادہ دلچسپی ہے لہذا ہم

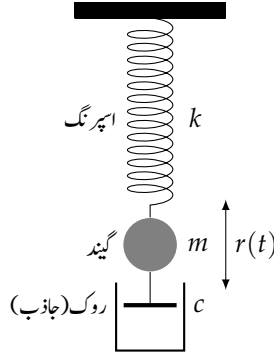
$$r(t) = F_0 \cos \omega t \quad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

طرز کے قوتوں پر توجہ دیں گے۔ یوں غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.81) \quad my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$$

حاصل ہوتی ہے جس کے حل سے بنیادی اہمیت کے حقائق حاصل ہوں گے جن سے گمک⁷⁸ کی نمونہ کشی ممکن ہو گی۔

forced motion⁷²
forcing function⁷³
input force⁷⁴
response⁷⁵
output⁷⁶
periodic⁷⁷
resonance⁷⁸



شکل 2.21: اسپرنگ اور کیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

غیر متجانس مساوات کا حل

ہم نے حصہ 2.8 میں دیکھا کہ غیر متجانس مساوات 2.81 کا عمومی حل متجانس مساوات 2.79 کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.81 کے کوئی بھی حل y_p کا مجموعہ ہے۔ ہم y_p کو حصہ 2.8 کے نامعلوم عدد سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$(2.82) \quad y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

اور اس کے تفرقات

$$y_p'(t) = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t, \quad y_p''(t) = -\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t$$

کو مساوات 2.81 میں پر کرتے ہوئے

$$m(-\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t) + c(-\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t) + k(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = F_0 \cos \omega t$$

دونوں اطراف کے $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے اور دونوں اطراف $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے ہمزا مساوات

$$(k - m\omega^2)a + c\omega b = F_0, \quad -c\omega a + (k - m\omega^2)b = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان ہمزا مساوات کو a اور b کے لئے حل کرتے ہیں۔ b حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $-c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(k - m\omega^2)^2 a + c^2 \omega^2 a = F_0(k - m\omega^2)$$

اسی طرح a حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$c^2\omega^2b + (k - m\omega^2)^2b = F_0c\omega$$

ان مساوات میں جزو $c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2$ صفر کے برابر نہیں ہے لہذا دونوں مساوات کو اس جزو سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے a اور b حاصل کرتے ہیں۔

$$a = F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

اگر حصہ 2.5 کی طرح $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ لکھا جائے تب $k = m\omega_0^2$ ہو گا اور

$$(2.83) \quad a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

ہوں گے۔

اس طرح غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 2.81 کا عمومی حل

$$(2.84) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y_h(t)$ متجانس مساوات 2.79 کا عمومی حل ہے اور $y_p(t)$ مساوات 2.82 میں دیا گیا ہے جس میں a اور b کی قیمتیں مساوات 2.83 سے پر کی گئی ہیں۔

آئیں اب اس میکانی نظام کی دو بالکل مختلف صورتوں پر غور کریں۔ پہلی صورت $c = 0$ غیر قسری ہے جبکہ دوسری صورت $c > 0$ تقصیری ہے۔

پہلی صورت: غیر قسری جبری ارتعاش۔ گمک

