انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 21

اعدادی تجزیہ

انجینئری حساب کا نتیجہ آخرکار اعدادی ہوتا ہے لہٰذا انجینئری طالب علم کے لئے بنیادی **اعدادی تراکیب**[1] جاننا ضروری ہیں جن کی مدد سے دیے گئے مواد سے اعدادی جوابات اخذ کرنا ممکن ہو۔

بعض اوقات نظریہ سے حاصل کردہ جوابات عملاً قابل استعمال نہیں ہوتے ہیں، مثلاً یک درجی خطی تفرقی مساوات کے حل کا تکملی کلیہ (حصہ 1.5)، خطی الجبرائی مساوات کے نظام کا مقطع کی مدد سے حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7)۔ کئی بار نظریہ صرف حل کی وجودیت کی یقین دہانی کرتا ہے لیکن اصل حل حاصل کرنے کے بارے میں کوئی مدد فراہم نہیں کرتا ہے۔

اعدادی تراکیب کی اہمیت کمپیوٹر کی ایجاد کی نظر ہے۔ ہم ان تراکیب کے نظریہ اور عملی استعمال پر غور کریں گے۔ **تجزیہ خلل**[2] پر بھی غور کیا جائے گا جو اعدادی تراکیب میں زیادہ اہمیت کے حامل ہے۔

---

[1] numerical methods
[2] error analysis

21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر

چونکہ اعدادی تراکیب میں متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے متناہی تعداد کے چال کے بعد جواب حاصل کیا جاتا ہے لہذا یہ تراکیب متناہی چال[3] ہیں جو اصل (نا معلوم) بالکل درست حل کی تخمین[4] پیش کرتے ہیں ماسوائے ان چند صورتوں میں جب اصل جواب کافی سادہ ناطق عدد ہو اور ہم کوئی ایسا اعدادی ترکیب استعمال کریں جو یہی بالکل درست جواب فراہم کرتا ہو۔

اگر کسی مقدار کی اندازاً قیمت a^* ہو اور اس کی اصل قیمت a ہو تب فرق $\epsilon = a^* - a$ کو a^* کا حتمی خلل یا مختصراً a^* کا خلل[5] کہتے ہیں۔یوں

$$a^* = a + \epsilon \qquad \text{خلل} + \text{اصل قیمت} = \text{تخمین}$$

ہو گا۔ a^* کی اضافی خلل[6] ϵ_r کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{r} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خلل}}{\text{اصل قیمت}} \qquad (a \neq 0)$$

ظاہر ہے اگر $|\epsilon|$ کی قیمت $|a^*|$ کی قیمت سے بہت کم ہو تب $\epsilon_r \approx \frac{\epsilon}{a^*}$ ہو گا۔ہم ایک نئی مقدار $\gamma = a - a^* = -\epsilon$ متعارف کرتے ہیں جس کو ہم درستگی[7] [8] کہیں گے۔یوں

$$a = a^* + \gamma \qquad \text{درستگی} + \text{تخمین} = \text{اصل قیمت}$$

ہو گا۔آخر میں a^* کی حد خلل[9] سے مراد عدد β ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\left|a^* - a\right| \leq \beta \quad \implies \quad |\epsilon| \leq \beta$$

خلل کی تین قسمیں تجربی خلل، قطع چال خلل اور تعداد اعداد خلل ہیں۔تجربی خلل[10] سے مراد مواد میں خلل ہے (جو تجربی ناپ کی وجہ سے ہو سکتے ہیں)۔بالکل درست جواب تک پہنچنے کی خاطر متناہی (یا لامتناہی) تعداد کے حسابی

[3] finite processes
[4] approximation
[5] error
[6] relative error
[7] correction
[8] بعض اوقات خلل کی تعریف $\gamma = -\epsilon$ لی جاتی ہے۔آپ کسی ایک تعریف کو تسلیم کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ہم خلل کی تعریف ϵ لیں گے۔
[9] error bound
[10] Experimental errors

چال (قدم) درکار ہوں گے۔ حقیقت میں کسی خاص تعداد کے چال بعد حساب روک دیا جاتا ہے اور یوں **قطع چال خلل**[11] پیدا ہو گا۔ ہر قدم پر حساب کے دوران کمپیوٹر متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے کمتر ہندسہ سے کم قیمتوں کو رد کرتا ہے جس سے **تعداد ہندسہ خلل**[12] پیدا ہو گا جس پر ہم اب غور کرتے ہیں۔

اعشاری نظام میں ہر عدد کو متناہی یا لامتناہی تعداد کے اعشاری ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کمپیوٹر لامتناہی تعداد کے ہندسوں کو ذخیرہ نہیں کر سکتا ہے لہٰذا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی عدد کو متناہی تعداد کی ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ان اعداد کو دو طریقوں سے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ **مقررہ نقطہ**[13] نظام میں نقطہ اعشاریہ کے بعد مقررہ تعداد کے ہندسے پائے جاتے ہیں مثلاً 35.143 ، 5.000 ، 0.076 جبکہ **غیر مقررہ نقطہ**[14] نظام میں **ملحوظ ہندسوں**[15] کی تعداد متعین ہوتی ہے مثلاً 0.6723×10^2 ، -0.2354×10^{-4} اور -0.1000×10^1 جہاں ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔عدد c کے ملحوظ ہندسہ سے مراد c کا ہر ہندسہ ہے ماسوائے پہلا غیر صفر عدد کی بائیں جانب صفر جو اعشاریہ کا مقام تعین کرتا ہو۔ (یوں اس کے علاوہ ہر صفر بھی c کا ملحوظ ہندسہ ہو گا۔) مثال کے طور پر 5420 ، 1.340 اور 0.001460 میں سے ہر ایک میں چار ملحوظ ہندسے[16] ہیں۔

تعداد ہندسہ خلل کا قاعدہ اب بیان کرتے ہیں۔(k ملحوظ ہندسوں تک قطع کرنے کی تعریف بھی یہی ہے پس اس میں ہندسہ کی جگہ ملحوظ ہندسہ پر کریں۔)

$k+1$ واں ہندسہ اور اس کے بعد تمام ہندسوں کو رد کریں۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کی نصف سے کم ہو تب مقام k پر ہندسہ کو تبدیل نہ کریں ("گھٹانا")۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کی نصف سے زیادہ ہو تب تب مقام k کی ہندسے کے ساتھ 1 جمع کریں ("بڑھانا")۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کا نصف ہو تب اگر مقام k کا ہندسہ طاق ہو تب اس کو بڑھا کر جفت بنائیں۔(مثال کے طور پر 3.45 اور 3.55 کو اشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک قطع کرتے ہوئے بالترتیب 3.4 اور 3.6 حاصل ہو گا۔)

اس قاعدہ کا آخری حصہ یقینی بناتا ہے کہ عدد کا کمتر حصہ رد کرتے ہوئے اوسطاً برابر مرتبہ عدد بڑھایا اور گھٹایا جاتا ہے۔

---

[11] Truncation error
[12] rounding error
[13] fixed point
[14] floating point
[15] significant digits
[16] ایسا جدول جو k ملحوظ ہندسے دیتا ہو میں، جب تک کہا نہ جائے کہ ایسا نہیں ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ دیا گیا عدد a^* ، بالکل درست قیمت a سے آخری ہندسے کی ∓ 0.5 اکایاں مختلف ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $a = 1.1996$ ہو تب چار ملحوظ ہندسوں کا جدول $a^* = 1.200$ دے گا۔

اگر ہم 1.2535 کو 3 ، 2 اور 1 اشاریہ تک قطع کریں تب ہمیں بالترتیب 1.254 ، 1.25 اور 1.3 حاصل ہو گا لیکن، بغیر مزید معلومات کے، 1.25 کو ایک اشاریہ تک قطع کرنے سے ہمیں 1.2 ملتا ہے۔

تعداد ہندسہ خلل کی وجہ سے کوئی بھی حساب مکمل غلط ہو سکتا ہے۔ عموماً چال کی تعداد بڑھانے سے یہ خلل بڑھتا ہے۔ یوں حسابی پروگرام کو اس خلل کی نقطہ نظر سے دیکھنا ضروری ہو گا اور اس خلل کو کم سے کم کرنا لازم ہو گا۔

21.2 دہرانے سے مساوات کا حل

ہمیں عموماً مساوات

$$f(x)=0 \tag{21.1}$$

کے حل درکار ہوتے ہیں یعنی ایسے عدد X_0 کہ $f(X_0)$ صفر کے برابر ہو جہاں f دیا گیا تفاعل ہے۔ مثال کے طور پر $x^2-3x+2=0$ ، $x^3+x=1$ ، $\sin x=0.5x$ ، $\tan x=x$ ، $\cosh x=\sec x$ اور $\cosh x\cos x=-1$ کو مساوات 21.1 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں پہلے دو میں f کثیر رکنی ہے لہٰذا یہ دونوں الجبرائی مساوات[17] ہیں جن کے حل کو جذر[18] کہتے ہیں۔ باقی ماورائی مساوات[19] ہیں جن میں ماورائی تفاعل استعمال ہوئے ہیں۔ حقیقتاً صرف انتہائی سادہ صورتوں میں مکمل درست حل نکالنے والے کلیات موجود ہوں گے۔ عموماً ہم دہرانے کی ترکیب یا دیگر تراکیب سے اصل حل کا تخمینہ حاصل کریں گے۔

اعدادی دہرانے کے طریقہ میں ہم اختیاری x_0 منتخب کرتے ہوئے درج ذیل روپ کلیہ

$$x_{n+1}=g(x_n) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{21.2}$$

سے، بار بار حل کرتے ہوئے، ترتیب $x_0,x_1,x_2,\cdots$ حاصل کرتے ہیں جہاں g کسی ایسے وقفہ پر معین ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہو اور g کا حلقہ اسی وقفہ پر ہے۔ یوں ہم یک بعد دیگرے $x_1=g(x_0)$ ، $x_2=g(x_1)$ ، $x_3=g(x_2)$ ، $\cdots$ حاصل کرتے ہیں۔

اس حصہ میں دائرہ کار اور حلقہ $g(x)$ دونوں حقیقی لکیر پر ہوں گے۔ زیادہ عمومی معمہ میں x یا g اور یا دونوں سمتیات ہو سکتے ہیں۔

---

[17] algebraic equations
[18] roots
[19] transcendental equations

دہرانے کے تراکیب اعدادی تجزیہ کے لئے انتہائی اہم ہیں۔

مساوات 21.1 کو حل کرنے کے لئے دہرانے کے تراکیب کئی طریقوں سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ہم ان میں سے تین خصوصاً اہم طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

الجبرائی تبادل

ہم مساوات 21.1 کو الجبرائی طور پر تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل روپ حاصل کر سکتے ہیں

$$x = g(x) \tag{21.3}$$

جو مساوات 21.2 کی روپ میں ہے۔مساوات 21.3 کے حل کو g کا **مقررہ نقطہ**[20] کہتے ہیں۔دیے گئے مساوات 21.1 کے کئی مطابقتی مساوات 21.3 ہو سکتے ہیں جن کے ترتیب $x_0, x_1, \cdots$ مختلف (اور x_0 کے تابع) ہوں گے۔آئیں ایک سادہ مثال دیکھتے ہیں جس میں یہ حقائق ابھر کر سامنے آتے ہیں۔

مثال 21.1: دہرانے کی ترکیب
مساوات $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ کے لئے دہرانے کی ترکیب عمل میں لائیں۔چونکہ ہمیں اس مساوات کے حل

$$x = 1.5 \mp \sqrt{1.25}, \quad x_1 = 2.618\,034, \quad x_2 = 0.381\,966$$

معلوم ہیں، ہم دہرانے کے عمل کے دوران خلل کا رویہ دیکھ سکتے ہیں۔ہم دیے گئے مساوات سے

$$x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2+1) \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2+1) \tag{21.4}$$

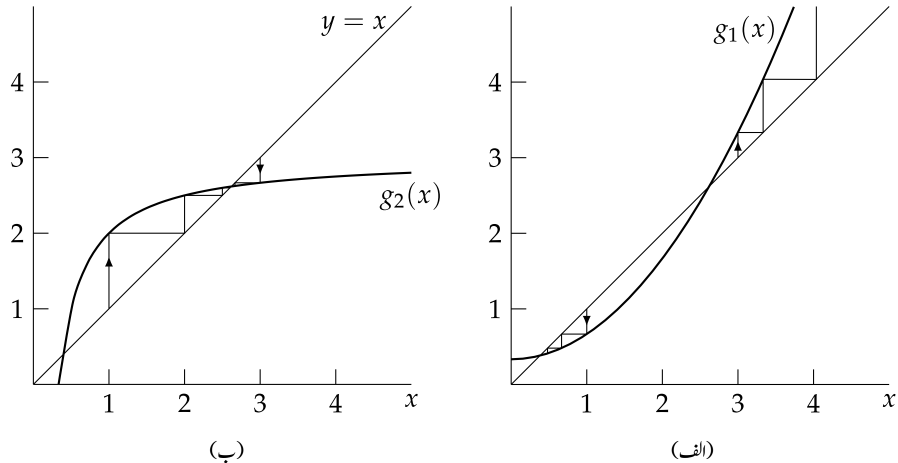
لکھ سکتے ہیں۔یوں $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ترتیب ملتی ہے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 0.667, \quad x_2 = 0.481, \quad x_3 = 0.411, \quad x_4 = 0.390, \cdots$$

جو چھوٹے جذر کی طرف گامزن ہے (شکل 21.1-الف)۔اگر ہم $x_0 = 3.000$ منتخب کریں تب درج ذیل ملتا ہے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.766, \quad x_4 = 11.414, \cdots$$

[20] fixed point



شکل 21.1: اشکال برائے مثال 21.1

جو منفرج ترتیب ہے (شکل 21.1-الف)۔ دی گئی مساوات سے درج ذیل بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x} \quad \implies \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \tag{21.5}$$

اب x_0 منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 2.000, \quad x_2 = 2.500, \quad x_3 = 2.600, \quad x_4 = 2.615, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے جو بڑے جذر کی طرف گامزن ترتیب ہے (شکل 21.1-ب)۔ اسی طرح $x_0 = 3$ منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 2.667, \quad x_2 = 2.625, \quad x_3 = 2.619, \quad x_4 = 2.618, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 21.1-ب)۔ شکل کو دیکھ کر واضح ہوتا ہے کہ مرکوزیت اس صورت ہو گی جب حل کی پڑوس میں منحنی $g(x)$ کی ڈھلوان سیدھے خط $y = x$ کی ڈھلوان سے کم ہو۔ ہم اب دیکھتے ہیں کہ مرکوزیت کے لئے $|g'(x) < 1|$ کی شرط کافی ہے (جہاں خط $y = x$ کی ڈھلوان $y' = 1$ ہے)۔ □

اگر x_0 کا مطابقتی مساوات 21.2 سے حاصل کردہ ترتیب $x_0, x_1, \cdots$ مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب مرتکز ہے۔

ارتکاز کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کے کئی اہم عملی استعمال پائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 21.1: (ارتکاز)
فرض کریں کہ $x = g(x)$ کا حل $x = s$ ہے اور فرض کریں کہ کسی ایسے وقفہ J ، جس میں s پایا جاتا ہو، پر $g(x)$ کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر J میں $\left|g'(x)\right| \le \alpha < 1$ ہو تب مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب J میں ہر x_0 کے لئے مرتکز ہو گی۔

ثبوت: تفرقی علم الاحصاء کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت x اور s کے درمیان ایسا ξ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا،

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s)$$

جہاں x وقفہ J میں پایا جاتا ہے۔ چونکہ $g(s) = s$ اور $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $\cdots$ ہیں لہٰذا ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}|x_n - s| &= \left|g(x_{n-1}) - g(s)\right| = \left|g'(\xi)\right||x_{n-1} - s| \le \alpha|x_{n-1} - s| \\ &\le \alpha^2|x_{n-2} - s| \le \cdots \le \alpha^n|x_0 - s|\end{aligned}$$

چونکہ $\alpha < 1$ ہے لہٰذا $n \to \infty$ کرنے سے $\alpha^n \to 0$ اور $|x_n - s| \to 0$ ہوں گے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

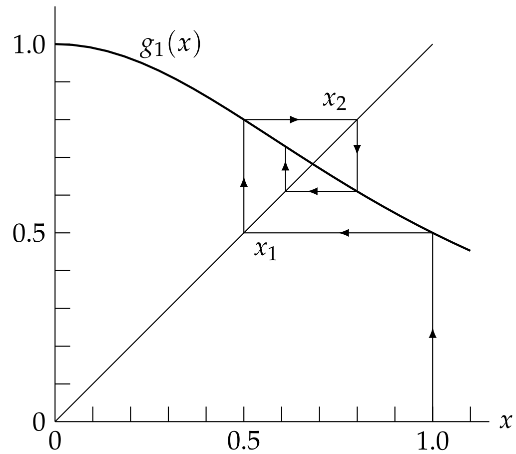
□

مثال 21.2: دہرانے کا طریقہ۔ مسئلہ 21.1
دہرانے کے طریقہ سے $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا حل تلاش کریں۔اس مساوات کا جلدی سے خاکہ بنا کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ ہم اس مساوات سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n^2}$$

یوں کسی بھی x کے لئے $\left|g_1'(x)\right| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} < 1$ ہو گا لہٰذا تمام x پر مرکوزیت پائی جائے گی۔ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 21.2)

$$x_1 = 0.500, \quad x_2 = 0.800, \quad x_3 = 0.610, \quad x_4 = 0.729, \quad x_5 = 0.653, \quad x_6 = 0.701, \cdots$$



شکل 21.2: شکل برائے مثال 21.2

جبکہ چھ ہندسوں تک درست اصل جذر $s = 0.682\,328$ ہے۔ ہم مساوات سے درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

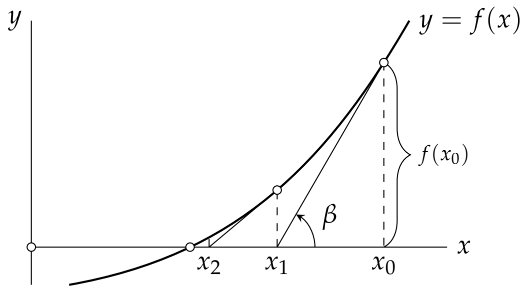
$$x = g_2(x) = 1 - x^3, \quad \left|g_2'(x)\right| = 3x^2$$

جذر کے قریب $\left|g_2'\right|$ کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے لہٰذا ہم ارتکاز کی توقع نہیں کر سکتے ہیں۔آپ $x_0 = 1$ ، $x_0 = 0.5$ ، $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے اپنی تسلی کر سکتے ہیں۔ □

ترکیب نیوٹن

مساوات $f(x) = 0$ ، جہاں f قابل تفرق ہے، کو ترکیب نیوٹن سے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب میں ہم $f(x)$ کا تخمینہ اس کے موزوں مماس سے حاصل کرتے ہیں۔اس ترکیب میں ہم f کی ترسیم سے حاصل x_0 پر f کا مماس بناتے ہیں۔یہ مماس x محور کو x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل 21.3)۔یوں

$$\tan\beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



شکل 21.3: ترکیب نیوٹن

ہو گا۔ اگلے قدم پر ہم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اسی طرح چلتے ہوئے جذر تک پہنچا جاتا ہے۔ یوں دہرانے کے طریقے کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{21.6}$$

مثال 21.3: جذر المربع

کسی مثبت حقیقی عدد c کا جذر المربع حاصل کرنے کے لئے دہرانے کی ترکیب بنائیں۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کریں۔ ہمارے پاس $\sqrt{c}$ یعنی $f(x) = x^2 - c = 0$ ہے لہٰذا $f'(x) = 2x$ ہو گا۔ یوں مساوات 21.6 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

اب اس ترکیب سے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کرتے ہیں۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = 1.500\,000, \quad x_2 = 1.416\,667, \quad x_3 = 1.414\,216, \quad x_4 = 1.414\,214, \cdots$$

2 کا جذر المربع $1.414\,213\,562$ ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب دیتا ہے۔ □

جدول 21.1: جدول برائے مثال 21.4

n	x_n	N_n	D_n	x_{n+1}
0	2.000	3.483	1.832	1.901
1	1.901	3.125	1.648	1.896
2	1.896	3.107	1.639	1.896

مثال 21.4: **ماورائی مساوات کا دہرانے کی ترکیب سے حل**
مساوات $2\sin x = x$ کا مثبت حل تلاش کریں۔ہم $f(x) = x - 2\sin x$ لکھتے ہوئے $f'(x) = 1 - 2\cos x$ حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 21.6 کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2\sin x_n}{1 - 2\cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n \cos x_n)}{1 - 2\cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}$$

f کی ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا حل $x_0 = 2$ کے قریب ہے۔یوں ہم جدول 21.1 حاصل کرتے ہیں۔چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 1.8955 ہے۔ □

مثال 21.5: **ترکیب نیوٹن کا الجبرائی مساوات پر اطلاق** مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔مساوات 21.6 سے درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

$x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x_1 = 0.750\,000, \quad x_2 = 0.686\,047, \quad x_3 = 0.682\,340, \quad x_4 = 0.682\,328, \cdots$$

x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔مثال 21.2 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ مثال بہت تیزی کے ساتھ اصل حل پر مرکوز ہوتا ہے۔اس سے دہرانے کی ترکیب کے درجہ کا تصور پیدا ہوتا ہے جس پر اب بات کی جائے گی۔ □

فرض کریں کہ مساوات $x = g(x)$ کا حل s ہے اور $x_{n+1} = g(x_n)$ ایک دہرانے کی ترکیب ہے جو اس حل کی تخمین x_n دیتی ہے۔تب $x_n = s + \epsilon_n$ ہو گا جہاں x_n میں خلل ϵ_n ہے۔فرض کریں کہ

g متعدد بار قابل تفرق ہے لہٰذا ٹیلر کے کلیہ سے

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \cdots \\ &= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \cdots \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ جزو $g(s)$ کے بعد پہلی غیر صفر جزو میں ϵ کے قوت نما کو دہرانے کی ترکیب (جس کو g تعین کرتا ہے) کا **درجہ**[21] کہتے ہیں۔ چونکہ $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \epsilon_{n+1}$ یعنی x_{n+1} کا خلل ہے، اور ارتکاز کی صورت میں بڑی n کے لئے ϵ_n چھوٹا ہو گا لہٰذا ترکیب کا درجہ اس کی مرکوزیت کی ناپ ہے۔

ترکیب نیوٹن دو درجی ہے
ترکیب نیوٹن کے لئے درج ذیل ہے

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

اور چونکہ $f(s) = 0$ ہے لہٰذا $g'(s) = 0$ ہو گا؛ یوں ترکیب نیوٹن کم از کم دو درجی ہے۔ ایک اور تفرق کے بعد $g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}$ ملتا ہے جو عموماً غیر صفر ہو گا۔ مثال 21.2 میں $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ اور $g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ہیں لہٰذا یہ یک درجی دہرانے کی ترکیب ہے۔

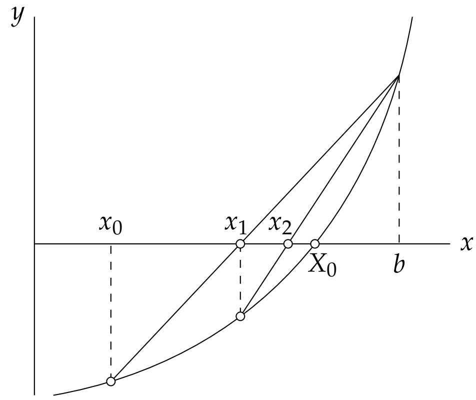
$f(x) = 0$ کے حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے لیکن حل کے قریب $f(x)$ کی ترسیم کو دیکھتے ہوئے، ترکیب نیوٹن کی جیومیٹریائی تصور کو مد نظر رکھتے ہوئے عموماً اس مشکل سے چھٹکارا حاصل کرنا ممکن ہو گا۔ اگر درکار حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہو تب x_{n+1} کی بہتر قیمت حاصل کرنے کی خاطر $f(x_n)$ اور $f'(x_n)$ کے زیادہ درست قیمتیں حاصل کرنا ضروری ہو گا۔ ایسی مساوات کو **بد خو**[22] کہتے ہیں۔

$f(x) = 0$ کو حل کرنے کی تیسری ترکیب جس کو **مقام غلط کی ترکیب**[23] کہتے ہیں پر اب غور کرتے ہیں۔ اس ترکیب میں ہم منحنی $f(x)$ کو تخمیناً ایک وتر سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 21.4)۔ یہ وتر محور x کو

$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)} \tag{21.7}$$

---

[21] order
[22] ill-conditioned
[23] method of false position



شکل 21.4: منحنی کا تخمینی وتر

پر قطع کرتا ہے جو $f(x) = 0$ کے حل X_0 کے قریب ہو گا۔ اگلے قدم پر اس سے بہتر حل

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} \tag{21.8}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بتدریج بہتر حل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ b کو X_0 کے قریب کرنے سے ارتکاز کو بہتر بنایا جا سکتا ہے۔ عموماً قیاس کے ذریعہ ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

مثال 21.6: مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا وہ جذر تلاش کریں جو $x = 1$ کے قریب واقع ہے (مثال 21.2)۔ چونکہ $f(0.5) = -0.375$ اور $f(1) = 1$ ہیں لہٰذا ہم $x_0 = 0.5$ اور $b = 1$ منتخب کر سکتے ہیں۔ مساوات 21.7 سے

$$x_1 = \frac{0.5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

حاصل ہو گا جبکہ مساوات 21.8 سے $x_2 = 0.672$ ملتا ہے۔ ہم اسی طرح بتدریج بہتر حل تلاش کر سکتے ہیں۔
□

سوالات

سوال 21.1: $x^3-3.9x^2+4.79x-1.881=0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0=1$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1=1.900\,000$

سوال 21.2: $x^3-1.2x^2+2x-2.4=0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0=2$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1=1.478\,261$

سوال 21.3: سوال 21.1 میں دیے گئے مساوات کے جذر 0.9 ، 1.1 اور 1.9 ہیں۔اگرچہ $x_0=1$ جذر 0.9 اور 1.1 کے قریب ہے لیکن ترکیب نیوٹن ان کی جگہ جذر 1.9 تلاش کرتا ہے۔ایسا کیوں ہے؟ x_0 کی کوئی اور قیمت منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے جذر 1.1 حاصل کریں۔
جواب: تفاعل $f(x)$ کو $x_0=1$ پر مماس x محور کو عین $x=1.9$ پر قطع کرتا ہے۔آپ $x_0=1.2$ یا کوئی اور عدد منتخب کر سکتے ہیں۔

سوال 21.4 تا سوال 21.7 میں دیے مساوات کی ترکیب نیوٹن کی مدد سے تمام جذر تلاش کریں۔

سوال 21.4: $\cos x=x$
جواب: 0.739

سوال 21.5: $x+\ln x-2$
جواب: 1.577

سوال 21.6: $2x+\ln x-1$
جواب: 0.687

سوال 21.7: $x^4-0.1x^3-0.82x^2-0.1x-1.82$
جواب: $-1.3,\quad 1.4$

سوال 21.8: دکھائیں کہ مثال 21.2 میں $\left|g_1'(x)\right|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\tilde{x}=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ پر حاصل ہو گی اور کہ یہ قیمت $\left|g'(\tilde{x})\right|=\frac{3\sqrt{3}}{8}=0.65$ کے برابر ہے۔

سوال 21.9: ایسا کیوں ہے کہ مثال 21.1 میں یک سر ترتیب حاصل ہوتی ہے لیکن مثال 21.2 میں ایسا نہیں ہوتا ہے؟

سوال 21.10: مثال 21.2 کی آخر میں دہرانے کی ترکیب سے حاصل قیمتوں کو از خود حاصل کریں اور شکل 21.2 کی طرز کا شکل بنائیں۔

سوال 21.11: مساوات $x^5 = x + 0.2$ کو مساوات 21.2 کی صورت میں لکھ کر $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے اس کا جذر تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = -0.2$ ، $x_2 = -0.200\,32$ ، $x_3 = -0.200\,323$

سوال 21.12: سوال 21.11 میں دیے گئے مساوات کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ مساوات کو $x = \sqrt[5]{x + 0.2}$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے اس جذر کو تلاش کریں۔
جواب: 1.0447

سوال 21.13: سوال 21.12 میں اگر آپ $x = x^5 - 0.2$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کریں تو کیا حاصل ہو گا؟
جواب: $-0.200\,322$

سوال 21.14: دہرانے کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کی مساوات $x = \tan x$ کا کم تر جذر تقریباً 4.49 ہے۔ اشارہ۔ مساوات کی ترسیم سے اخذ کریں کہ جذر $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ کے قریب پایا جاتا ہے؛ مساوات کو $x = \pi + \tan^{-1} x$ (کیوں؟) لکھ کر آگے بڑھیں۔

سوال 21.15: $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے $\sqrt{5}$ کو مثال 21.3 کی ترکیب سے حاصل کرتے ہوئے x_1, x_2, x_3, x_4 تلاش کریں۔ اب $\sqrt{5} = 2.236\,068$ استعمال کرتے ہوئے خلل حاصل کریں۔
جواب: $\epsilon_1 = 0.236\,068$ ، $\epsilon_2 = 0.013\,932$ ، $\epsilon_3 = 0.000\,043$ ، $\epsilon_4 = 0.000\,000$

سوال 21.16: دکھائیں کہ مثال 21.3 میں ہمارے پاس

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{c}{x_n}\right)^2$$

ہے جو درستگی کی ناپ ہے۔ دکھائیں کہ تخمیناً

$$\left|x_n - \sqrt{c}\right| \approx \frac{1}{2}\left|x_n - \frac{c}{x_n}\right|$$

ہو گا۔ اس کا اطلاق سوال 21.15 پر کریں۔

سوال 21.17: مثبت x محور پر ایسا وقفہ تلاش کریں کہ $c = 2$ لیتے ہوئے مسئلہ 21.1 کی شرط کو مثال 21.3 کے دہرانے کی ترکیب مطمئن کرتی ہو۔
جواب: $x \geq \sqrt{\frac{2}{1+2\alpha}}, \quad \alpha < 1$

سوال 21.18: جذر الکعب کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $x_0 = 2$ سے شروع کر کے تین قدم چل کر $\sqrt[3]{7}$ تلاش کریں۔

سوال 21.19: مثبت عدد c کا k واں جذر حاصل کرنے کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔
جواب: $f(x) = x^k - c, \quad x_{n+1} = (1 - \frac{1}{k})x_n + \frac{c}{kx_n^{k-1}}$

سوال 21.20: $x^4 = 2$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1$

سوال 21.21: $x^4 = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1.260$

سوال 21.22: $3\sin x = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1.49$

سوال 21.23: سوال 21.20 میں حاصل کردہ مثبت جذر ہر صورت اصل جذر سے معمولی کم ہو گا۔ایسا کیوں ہے؟

سوال 21.24: ترکیب نیوٹن میں $f'(x)$ کا حساب کرنا ہوتا ہے۔عملی استعمال میں کبھی کبھار یہ قدم کافی پیچیدہ ثابت ہو سکتا ہے۔ $f'(x)$ سے چھٹکارا حاصل کرنا کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کی جگہ $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ استعمال کیا جائے۔یوں حاصل کردہ کلیہ کا کلیہ غیر حقیقی مقام کے ساتھ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 21.25: فرض کریں بند وقفہ I میں g استمراری ہے اور اس کا حلقہ بھی I میں پایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات $x = g(x)$ کا کم از کم ایک حل اس وقفہ میں پایا جائے گا۔دکھائیں کہ اس وقفہ میں مساوات کے زیادہ جذر بھی ممکن ہیں۔

جدول 21.2: تفاعل $f(x)=x^3,\ x=-3(1)3$ کا جدول فرق

x	$f(x)=x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق	چوتھا فرق
-3	-27				
		19			
-2	-8		-12		
		7		6	
-1	-1		-6		0
		1		6	
0	0		0		0
		1		6	
1	1		6		0
		7		6	
2	8		12		
		19			
3	27				

21.3 متناہی فرق

متناہی فرق کا استعمال اعدادی تجزیہ کے کئی شاخوں میں پایا جاتا ہے مثلاً دو قیمتوں کے درمیان قیمت کا تخمینہ لگانے میں، جدول کی جانچ پڑتال میں، تخمینہ لگانے میں، تفرق میں، اور تفرقی مساوات کے حل میں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں تفاعل f کی اعدادی قیمتوں $(f_j=f(x_j))$ کا جدول دیا گیا ہے جہاں نقطے x_j ایک جیسے فاصلے پر ہیں۔

$$x_0,\quad x_1=x_0+h,\quad x_2=x_0+2h,\quad x_3=x_0+3h,\cdots\quad (h>0,\text{مقررہ})$$

$f(x_j)$ کو عموماً کسی کلیہ یا تجربہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم جدول میں ہر $f(x)$ کو اگلی (بڑی) x کی مطابقتی قیمت سے تفریق کرتے ہوئے **پہلا فرق**[24] حاصل کرتے ہیں۔ جدول 21.2 میں اس کی مثال پیش کی گئی ہے جہاں $f(x)=x^3,\ x=-3(1)3$ ہیں[25]۔ یہی طریقہ پہلی فرق پر لاگو کرتے ہوئے f کا **دوسرا فرق**[26] حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح باقی فرق بھی حاصل کیے جاتے ہیں۔ جدول فرق میں ہر فرق کو اپنی قطار میں گزشتہ قطار (جس سے فرق حاصل کیا گیا ہے) کی اندراج کی درمیان برابر مقام پر درج کیا جاتا ہے۔ نقطہ اعشاریہ اور فرق کی بائیں صفروں کو نظر انداز کیا جاتا ہے (جدول 21.3)۔

---

[24] first difference

[25] $x=a(h)b$ کا مطلب ہے کہ تفاعل کی قیمتیں $x=a$، $x=x+h$، $x=a+2h$، $\cdots$، $x=b$ پر دی گئی ہیں۔

[26] second difference

جدول 21.3: تفاعل $f(x)=\frac{1}{x},\; x=1(0.2)2$ کا جدول فرق۔ ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔

x	$f(x)=x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق
1.0	1.0000			
		−1667		
1.2	0.8333		477	
		−1190		−180
1.4	0.7143		297	
		−893		−98
1.6	0.6250		199	
		−694		−61
1.8	0.5556		138	
		−556		
2.0	0.5000			

جدول فرق میں فرق کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے رائج ہیں۔ان میں سے جو بھی طریقہ استعمال کیا جائے، جدول میں نہ کوئی فرق تبدیل ہو گا اور نا ہی اس کا مقام۔ پہلی (اور غالباً اہم ترین) اظہار جس کو **وسطی فرق**[27] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{llllll}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \delta f_{-3/2} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} \\
x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{1/2} \\
x_1 & f_0 & & \delta^2 f_1 & \\
 & & \delta f_{3/2} & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

جہاں $\delta f_{-3/2}=f_{-1}-f_{-2}$ اور $\delta f_{-1/2}=f_0-f_{-1}$ ہیں۔ وسطی فرق کا عمومی جزو

$$\delta f_{m+1/2}=f_{m+1}-f_m \tag{21.9}$$

ہے جہاں دائیں ہاتھ دو زیر نوشت کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔اسی طرح

$$\delta^2 f_m=\delta f_{m+1/2}-\delta f_{m-1/2}$$

ہو گا۔دیگر فرق بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ایک جیسی زیر نوشت والے اجزاء ایک ہی صف میں پائے جاتے ہیں۔(دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ جدول میں x کی سب سے چھوٹی قیمت x_0 ہو۔مثال کے طور

[27] central difference

پر جدول 21.3 میں ہم $x_0 = 1.6$ لے سکتے ہیں؛ تب $f_0 = 0.6250$ ، $\delta f_{1/2} = -0.0694$ ، $\delta^2 f_0 = 0.0199$ ، . . . ہوں گے۔)

دوسری اظہار جس کو آگے فرق[28] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \Delta f_{-2} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \Delta^2 f_{-2} & \\
 & & \Delta f_{-1} & & \Delta^3 f_{-2} \\
x_0 & f_0 & & \Delta^2 f_{-1} & \\
 & & \Delta f_0 & & \Delta^3 f_{-1} \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & \\
 & & \Delta f_1 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

جس میں $\Delta f_{-2} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$ اور $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ ہیں۔اس کا عمومی جزو

$$\Delta f_m = f_{m+1} - f_m \tag{21.10}$$

ہے۔اسی طرح

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m$$

ہو گا۔مثال کے طور پر اگر جدول 21.3 میں $x_0 = 1.6$ لیا جائے تب $f_0 = 0.6250$ ، $\Delta f_0 = -0.0694$ ، $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ ، ہوں گے۔ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں نیچے کی رخ یا جدول میں آگے رخ لکیروں پر پائے جائیں گے۔

تیسری اظہار جس کو پیچھے فرق[29] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \nabla f_{-1} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \nabla^2 f_0 & \\
 & & \nabla f_0 & & \nabla^3 f_1 \\
x_0 & f_0 & & \nabla^2 f_1 & \\
 & & \nabla f_1 & & \nabla^3 f_2 \\
x_1 & f_1 & & \nabla^2 f_2 & \\
 & & \nabla f_2 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

[28] forward difference
[29] backward difference

جہاں $\nabla f_{-1}=f_{-1}-f_{-2}$ ، $\nabla f_0=f_0-f_{-1}$ اور $\nabla f_1=f_1-f_0$ ہیں۔ عمومی جزو

$$\nabla f_m=f_m-f_{m-1} \tag{21.11}$$

ہو گا۔اسی طرح

$$\nabla^2 f_m=\nabla f_m-\nabla f_{m-1}$$

ہو گا۔ باقی اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں پر اوپر رخ یا جدول میں پیچھے رخ لکیروں پر پائے جاتے ہیں۔ جدول کی آخر میں حساب کے دوران پیچھے فرق عموماً زیادہ مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0=1.6$ لیں تب $\nabla f_0=\Delta f_{-1}=\delta f_{-1/2}=-0.0893$ ہو گا۔یوں عمومی طور پر

$$\delta^n f_m=\Delta^n f_{m-n/2}=\nabla^n f_{m+n/2}$$

ہو گا۔

جدول میں غلطیوں کی نشاندہی کرنے کے لئے فرق کا سہارا لیا جاتا ہے۔جیسا جدول 21.4 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل میں خلل ϵ جلد تمام فرق میں پھیل جاتا ہے۔یوں فرق میں بہت زیادہ اتار چڑھاو تفاعل کی قیمت میں غلطی کو ظاہر کرتی ہے۔ظاہر ہے کہ کم تعداد کی ملحوظ ہندسوں کی بنا معمولی اتار چڑھاو ہر صورت پائی جائے گی۔

تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں بھی فرق اہم کردار ادا کرتا ہے۔قدم h لیتے ہوئے n درجی کثیر رکنی $p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ کے جدول فرق میں تمام n ویں فرق مستقل ($n!h^na_0$ کے برابر) ہوں گے اور ان سے بلند فرق صفر ہوں گے۔ایسا اس لئے ہو گا کہ پہلے فرق

$$p_n(x+h)-p_n(x)=a_0[(x+h)^n-x^n]+\cdots=a_0nhx^{n-1}+\cdots$$

کا درجہ $n-1$ ہے، دوسرے فرق کے کثیر رکنی کا درجہ $n-2$ ہو گا اور اس کے پہلے جزو کا عددی سر $a_0n(n-1)h^2$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔یوں اگر تفاعل f کے جدول فرق میں n ویں فرق کسی حلقہ میں تقریباً مستقل ہوں تب جدول کی قیمتوں کو اس حلقہ میں n درجی کثیر رکنی p_n سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔آئیں دیے گیے f کی صورت میں کثیر رکنی p_n کے حصول کی ایک ترکیب دیکھیں۔

مثال 21.7: تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنا

جدول 21.4 میں دوسرا فرق تقریباً مستقل (-7 کے برابر) ہیں۔یوں ہم دیے گئے تفاعل کی تخمینی دو درجی کثیر

جدول 21.4: غلطی تمام فرق میں پھیل جاتی ہے۔ یہاں تفاعل $2.0(0.1)2.6$ $f(x) = \sqrt{x}, \ x =$ ہے اور ملحوظ ہندسے چار ہیں۔ غلطی $f(2.3)$ میں ہے۔

x	$\sqrt{x}$	فرق			$\sqrt{x}$	فرق			غلطی ϵ کا پھیلنا			
2.0	1.4142				1.41412							
		349				349						
2.1	1.4491		-8		1.4491		8					
		341		1		341		$\underline{11}$				ϵ
2.2	1.4832		-7		1.4832		$\underline{3}$				ϵ	
		334		-1		$\underline{344}$		$-\underline{31}$		ϵ		-3ϵ
2.3	1.5166		-8		$\underline{1.5176}$		$-\underline{28}$		ϵ		-2ϵ	
		326		1		$\underline{316}$		$\underline{31}$		$-\epsilon$		3ϵ
2.4	1.5492		-7		1.5492		$\underline{3}$				ϵ	
		319		2		319		$-\underline{8}$				$-\epsilon$
2.5	1.5811		-5		1.5811		$-\underline{5}$					
		314				314						
2.6	1.6125				1.6125							

رکنی p_2 تلاش کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے جدول فرق بناتے ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام دوسرے فرق ٹھیک ٹھیک -7 کے برابر ہیں ہم حلقہ کے وسط میں تفاعل کی کوئی قیمت اور پہلا فرق منتخب کرتے ہیں مثلاً 1.5166 اور 334 جس سے جدول 21.5 حاصل ہوتا ہے۔ p_2 کے پہلے عددی سر کو

$$\text{دوسرا فرق} = a_0 2! h^2 = a_0 \cdot 2 \cdot 0.1^2 = -0.0007$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں $a_0 = -\frac{0.0007}{0.02} = -0.035$ ملتا ہے۔ اس طرح

$$p_1(x) = p_2(x) + 0.035x^2$$

درجہ اول ہو گا اور جدول 21.5 سے ہم حساب لگا کر دیکھتے ہیں کہ اس کے پہلے صفر تقریباً مستقل (0.04915) ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ یہ a_h کے برابر ہے۔ یوں $a_1 = \frac{0.04915}{0.1} = 0.4915$ حاصل ہوتا ہے۔ آخر میں $p_1(x) - 0.4915x = a_2 = 0.5713$ ہو گا لہٰذا

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.5713$$

ہو گا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ فرق کو استعمال کرتے ہوئے تخمینی کثیر رکنی حاصل کرنے سے پہلے، تخمینی کثیر رکنی کی درستگی کا معیار جانا جا سکتا ہے۔ تخمینی کثیر رکنی کی حصول کے دیگر تراکیب پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

جدول 21.5: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کو دو درجی کثیر رکنی p_2 سے ظاہر کرنا

x	$p_2(x)$	فرق	
2.0	1.4143		
		348	
2.1	1.4491		−7
		341	
2.2	1.4832		−7
		334	
2.3	1.5166		−7
		327	
2.4	1.5493		−7
		320	
2.5	1.5813		−7
		313	
2.6	1.6126		

□

سوالات

سوال 21.26: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.2 حاصل کریں۔

سوال 21.27: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.3 حاصل کریں۔

سوال 21.28: جدول 21.3 میں $x_0 = 1.2$ منتخب کرتے ہوئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.29: $x_0 = 2$ منتخب کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = x^3$ کا $x = 0(1)5$ کے لئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.30: درج ذیل دکھائیں۔

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$$
$$\delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}$$

سوال 21.31: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ کی قیمتیں $x = 0(0.2)1$ کے لئے (الف) دو ملحوظ ہندسوں، (ب) تین ملحوظ ہندسوں اور (پ) چار ملحوظ ہندسوں تک حاصل کریں۔ان کے مطابقتی جدول فرق میں تعداد ہندسہ خلل کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 21.32: $x = 0(1)10$ کے لئے $f(x) = x^2$ کا جدول فرق مکمل کریں۔ایک اور جدول میں $f(5) = 25$ کی جگہ 26 لکھتے ہوئے پہلا فرق، دوسرا فرق، تیسرا فرق اور چوتھا فرق تلاش کریں۔جدول میں غلطی کا پھیلنا دیکھیں۔

سوال 21.33: فرق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل جدول کی جانچ پڑتال کریں۔

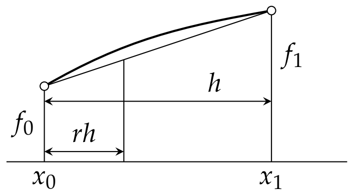
x	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	0.250	0.244	0.242	0.233	0.227	0.222

سوال 21.34: مثال 21.7 میں کی گئی تمام حساب خود کریں۔

21.4 باہمی تحریف

عموماً تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کا جدول دیا گیا ہو گا اور ہمیں ان x پر تفاعل کی قیمت درکار ہو گی جو جدول میں دیے گئے x کی قیمتوں کے درمیان پائے جاتے ہوں۔ایسی قیمتوں کے حصول کی عمل کو ہم **باہمی تحریف**[30] کہیں گے۔اس عمل میں $f(x)$ کی استعمال ہونے والی قیمتوں کو **چول قیمتیں**[31] کہتے ہیں۔باہمی تحریف کی ترکیب اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ نقطہ x کے قریب تفاعل $f(x)$ کو کثیر رکنی p سے ظاہر کرنا ممکن ہے لہٰذا x کے قریب کسی بھی نقطے پر p کی قیمت کو اس نقطے پر تفاعل کی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

[30] interpolation
[31] pivotal values



شکل 21.5: خطی باہمی تحریف

سادہ ترین طریقہ **خطی باہمی تحریف**[32] ہے۔اس ترکیب میں جدول میں درکار x کی دونوں جانب درج نقطوں x_0 اور x_1 کے مابین سیدھی قطع سے اس خطہ میں $f(x)$ کو ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 21.5)۔یوں جیسا ہم چھوٹی جماعتوں کی حساب سے جانتے ہیں، نقطہ $x = x_0 + rh$ پر f کی قیمت تخمیناً

$$f(x) \approx p_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0 \qquad (r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le 1) \tag{21.12}$$

ہو گی۔یوں اگر $\ln 9.0 = 2.197$ اور $\ln 9.5 = 2.251$ ہوں تب $\ln 9.2$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $r = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$ حاصل کر کے

$$\ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4(\ln 9.5 - \ln 9.0) = 2.219$$

حاصل کرتے ہیں۔

خطی باہمی تحریف اس صورت تسلی بخش ہو گی جب جدول میں x کی قیمتیں اتنی قریب قریب ہوں کہ ان کے مابین منحنی سے سیدھی قطعات کی انحراف کم ہو، مثلاً ہر x_0 اور x_1 کے درمیان ہر x کے لئے انحراف جدول میں آخری ہندسہ کی اکائی کی نصف ($\frac{1}{2}$) سے کم ہو۔

دو درجی باہمی تحریف[33] میں ہم x_0 اور $x_2 = x_0 + 2h$ کے درمیان منحنی f کو ایسی دو درجی قطع مکافی سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) اور (x_2, f_2) سے گزرتی ہو۔یوں بہتر کلیہ

$$f(x) \approx p_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 \qquad (r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le 2) \tag{21.13}$$

---

[32] linear interpolation
[33] quadratic interpolation

اخذ ہوتا ہے جہاں $x = x_0 + rh$ ہے۔یوں $x = x_0 \; (r = 0)$ کے لئے دایاں ہاتھ f_0 کے برابر ہو گا؛ $x = x_1 \; (r = 1)$ کے لئے بایاں ہاتھ $f_0 + \Delta f_0 = f_1$ کے برابر ہو گا اور $x = x_2 \; (r = 2)$ کے لئے اس کی قیمت

$$f_0 + 2(f_1 - f_0) + [(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)] = f_2$$

ہو گی۔

مثال 21.8: خطی اور دو درجی باہمی تحریف
اگر $\ln 9.0 = 2.1972$ اور $\ln 9.5 = 2.2513$ ہوں تب مساوات 21.12 سے $\ln 9.2 = 2.2188$ حاصل ہوتا ہے جو تین ملحوظ ہندسوں تک درست ہے جبکہ $\ln 10.0 = 2.3026$ لیتے ہوئے مساوات 21.13

$$\ln 9.2 = 2.1972 + 0.4 \cdot 0.0541 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2}(-0.0028) = 2.2192$$

دیتی ہے جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ $\square$

مزید بہتر جوابات حاصل کرنے کی خاطر زیادہ بلند درجی کثیر رکنی استعمال کرنی ہو گی۔ $n+1$ مختلف نقطوں پر قیمتوں سے یکتا n درجی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ہمیں یہاں ایسی کثیر رکنی p_n درکار ہے کہ

$$p_n(x_0) = f_0, \cdots, p_n(x_n) = f_n$$

ہوں جہاں $f_0 = f(x_0)$ ، $\cdots$ ، $f_n = f(x_n)$ جدول میں f کی قیمتیں ہیں۔یہ کثیر رکنی آگے فرق، **باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[34]

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) &= f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots \\ &\quad + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \end{aligned} \tag{21.14}$$

$$\left(x = x_0 + rh, \; r = \frac{x - x_0}{h}, \; 0 \le r \le n\right)$$

دیتی ہے۔اس کلیہ میں $n = 1$ پر کرنے سے مساوات 21.12 اور $n = 2$ پر کرنے سے مساوات 21.13 حاصل ہوتا ہے۔ہمیں اب $p_n(x_k) = f_k \; (k = 0, 1, \cdots, n)$ ثابت کرنا ہو گا۔ مساوات 21.14 کے دائیں ہاتھ سے

$$f_k = \binom{k}{0} f_0 + \binom{k}{1}\Delta f_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{k}{k}\Delta^k f_0 \tag{21.15}$$

[34] Newton's forward-difference interpolation formula

لکھا جا سکتا ہے جہاں **ثنائی عددی**[35] سر درج ذیل ہیں جہاں $s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s$ کے برابر ہے۔

$$\binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{s!} \quad (s \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{21.16}$$

در حقیقت مساوات 21.14 میں $r = k$ پر کرنے سے مساوات 21.14 کا دایاں ہاتھ اور مساوات 21.15 بالکل ایک جیسے ہوں گے۔مساوات 21.15 کو الکراجی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت : $k = 0$ کے لئے مساوات 21.15 درست ہے۔فرض کریں کہ یہ $k = q$ کے لئے بھی درست ہے۔تب مساوات 21.15 میں $k = q$ استعمال کر کے، Δ کی اطلاق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} f_{q+1} = f_q + \Delta f_q \\ &= \binom{q}{0} f_0 + \binom{q}{1} \Delta f_0 + \binom{q}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{q}{q} \Delta^q f_0 \\ &\quad + \binom{q}{0} \Delta f_0 + \binom{q}{1} \Delta^2 f_0 + \binom{q}{2} \Delta^3 f_0 + \cdots + \binom{q}{q} \Delta^{q+1} f_0 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں $\Delta^s f_0$ کا عددی سر (مساوات 21.16)

$$\binom{q}{s} + \binom{q}{s-1} = \binom{q+1}{s}$$

ہے جو $k = q + 1$ کے لئے مساوات 21.15 دیتا ہے۔یوں الکراجی ماخوذ کے ذریعہ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مساوات 21.14 کی طرح ایسا کلیہ جو پیچھے فرق پر مبنی ہو، **پیچھے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[36]

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \cdots \\ + \frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!}\nabla^n f_0 \end{aligned} \tag{21.17}$$

ہے جہاں مساوات 21.14 کی طرح $0 \leq r \leq n$, $r = \frac{x-x_0}{h}$, $x = x_0 + rh$ ہیں۔

---

[35] binomial coefficients

[36] Newton's backward-difference interpolation formula

باہمی تحریف کے کلیات اور استعمال پر کثیر مواد پایا جاتا ہے۔مثال کے طور پر صرف جفت درجہ فرق پر مبنی کلیات پائے جاتے ہیں۔اس طرز کا ایک انتہائی اہم اور سادہ ترین کلیہ ایورٹ[37] درج ذیل ہے۔

$$f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!}\delta^2 f_0 + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\delta^2 f_1 \tag{21.18}$$

جہاں $0 \le r \le 1$ $r = \frac{x-x_0}{h}$, ہیں۔

مثال 21.9: **کلیہ ایورٹ کا استعمال**

تفاعل $e^{1.24}$ کی قیمت مساوات 21.18 میں دیے گئے کلیہ ایورٹ اور درج ذیل جدول سے حاصل کریں۔

x	e^x	δ^2
1.2	3.3201	333
1.3	3.6693	367

اب $r = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$ ہے لہٰذا مساوات 21.18 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned} e^{1.24} &\approx 0.6 \cdot 3.3201 + 0.4 \cdot 3.6693 + \frac{1.6 \cdot 0.6 \cdot (-0.4)}{6} \cdot 0.0333 \\ &\quad + \frac{1.4 \cdot 0.4 \cdot (-0.6)}{6} \cdot 0.0367 \\ &= 3.4598 - 0.0021 - 0.0021 = 3.4556 \end{aligned}$$

جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔دھیان رہے کہ خطی باہمی تحریف 3.4598 دیتی ہے جو صرف دو ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔(آپ $e^{1.1} = 3.0042$ اور $e^{1.4} = 4.0552$ استعمال کرتے ہوئے دوسرے فرق کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں۔) □

عمومی کلیہ ایورٹ[38] درج ذیل ہے

$$\begin{aligned} f(x) &= qf_0 + rf_1 + \binom{q+1}{3}\delta^2 f_0 + \binom{r+1}{3}\delta^2 f_1 \\ &\quad + \binom{q+2}{5}\delta^4 f_0 + \binom{r+2}{5}\delta^4 f_1 + \cdots \end{aligned} \tag{21.19}$$

---

[37] Everett formula
[38] Everett formula

جہاں $0 \leq r \leq 1$ ، $r = \frac{x-x_0}{h}$ اور $q = 1-r$ ہیں۔اس کلیہ میں $\delta^4 f_0$ اور $\delta^2 f_0$ کے عددی سروں کی نسبت

$$\frac{\binom{q+2}{5}}{\binom{q+1}{3}} = \frac{q^2-4}{20}$$

ہے۔اسی طرح $\delta^4 f_1$ اور $\delta^2 f_1$ کے عددی سروں کی نسبت $\frac{r^2-4}{20}$ ۔یہ دونوں نسبت وقفہ 0 تا 1 میں بہت کم تبدیل ہوتے ہیں۔یوں اگر ان کی جگہ ان کی کوئی موزوں اوسط قیمت μ منتخب کی جائے تب **تبدیل شدہ دوسرے فرق**[39]

$$\delta_m^2 f = \delta^2 f + \mu \delta^4 f, \quad \mu = -0.18393 \tag{21.20}$$

استعمال کرتے ہوئے چوتھی فرق کے اثر کو مساوات 21.18 میں سمویا جا سکتا ہے، جہاں μ کی دی گئی قیمت ایک موزوں قیمت ہے۔

ہم بغیر ثبوت پیش کیے بتلانا چاہتے ہیں کہ اگر $x_0, x_1, \cdots, x_n$ کے آپس میں فاصلے اختیاری ہوں تب n درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) ، $\cdots$ ، (x_n, f_n) سے گزرتا ہو، جہاں $f_j = f(x_j)$ ہے، **منقسم فرق باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[40]

$$\begin{aligned} f(x) \approx f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \cdots \\ + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,\cdots,x_n] \end{aligned} \tag{21.21}$$

کا دایاں ہاتھ ہو گا جہاں **منقسم فرق**[41] درج ذیل دہرانے کے تعلقات دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}, \cdots \\ f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \end{aligned} \tag{21.22}$$

اگر $x_k = x_0 + kh$ (یکساں فاصلے) ہو تب $f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$ ہو گا اور مساوات 21.21 سے مساوات 21.14 حاصل ہو گی۔

باہمی تحریف کی مختلف تراکیب فرق میں ہم فرق معلوم کرتے ہیں جس کو جدول کی درستگی کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔البتہ کس درجہ کی باہمی تحریف استعمال کی جائے، عموماً اس سوال کا جدول میں جواب نہیں دیا جاتا

[39] modified second differences
[40] Newton's divided difference interpolation formula
[41] divided difference

ہے۔ لیگرینج باہمی تحریف[42] کی ترکیب لیگرینج باہمی تحریف کے کلیہ

$$f(x) \approx \mathrm{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k \tag{21.23}$$

پر مبنی ہے جہاں ضروری نہیں ہے کہ $x_0, \cdots, x_n$ برابر فاصلوں پر ہوں اور

$$\begin{aligned} l_0(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\ l_k(x) &= (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n), \quad 0<k<n \\ l_n(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{21.24}$$

ہیں۔ مساوات 21.23 کو $n+1$ **نقطوں کا کلیہ لیگرینج** کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 21.24 سے $j \neq k$ کی صورت میں $l_k(x_j) = 0$ اور $x = x_k$ کی صورت میں $\frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} = f_k$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $\mathrm{L}_n(x_k) = f_k$ ہو گا۔ اس ترکیب میں فرق حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور ہم مختلف f_k کے اثرات کو سیدھ و سیدھ دیکھ سکتے ہیں۔ ہاں اب حساب زیادہ مشکل ضرور ہو گا اور جدول میں غلطی کی جانچ پڑتال ممکن نہیں ہو گی۔ اس لئے ضروری ہے کہ یہ ترکیب صرف مستند جدول پر لاگو کیا جائے۔

مثال 21.10: لیگرینج کلیہ باہمی تحریف کا استعمال

$\ln 9.2$ کی قیمت مساوات 21.23 اور درج ذیل قیمتوں کی مدد سے تلاش کریں۔

x	9.0	9.5	10.0	11.0
$\ln x$	2.197 22	2.251 29	2.302 59	2.397 90

ہمارے پاس $l_0(x) = (x-9.5)(x-10)(x-11)$ ، $l_1(x) = (x-9)(x-10)(x-11)$ ، $\cdots$ ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} \ln 9.2 = \frac{-0.43200}{-1.00000} \cdot 2.19722 + \frac{0.28800}{0.37500} \cdot 2.25129 \\ + \frac{0.10800}{-0.50000} \cdot 2.30259 + \frac{0.04800}{3.00000} \cdot 2.39790 = 2.21920 \end{aligned}$$

ہو گا جو پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ □

[42] Lagrangian interpolation

جدول 21.6: جدول برائے سوال 21.36 تا سوال 21.41

x	$\sin x$	پہلا فرق	دوسرا فرق
0.0	0.000 00		
		19 867	
0.2	0.198 67		−792
		19 075	
0.4	0.389 42		−1553
		17 522	
0.6	0.564 64		−2250
		15 272	
0.8	0.717 36		−2861
		12 411	
1.0	0.841 47		

سوالات

سوال 21.35: دکھائیں کہ مساوات 21.13 میں دیا گیا قطع مکافی نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتا ہے۔

جدول 21.6 کو سوال 21.41 تا سوال 21.36 میں استعمال کریں۔

سوال 21.36: $\sin 0.26$ کی قیمت خطی باہمی تحریف (مساوات 21.12) سے تلاش کریں۔دکھائیں کہ اعشاریہ کے بعد پہلے دو ہندسے بالکل ٹھیک ہیں۔

سوال 21.37: $\sin 0.26$ کی قیمت دو درجی باہمی تحریف یعنی مساوات 21.13 کی مدد سے حاصل کریں۔دکھائیں پہلے تین ملحوظ ہندسے بالکل درست ہیں۔
جواب: 0.257 53

سوال 21.38: جدول 21.6 میں تیسرے فرق اور چوتھے فرق شامل کرتے ہوئے $\sin 0.26$ کی قیمت مساوات 21.14 کی مدد سے (الف) $n = 3$ اور (ب) $n = 4$ لیتے ہوئے حاصل کریں۔نتائج کا موازنہ پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $\sin 0.26 = 0.257\,08$ کے ساتھ کریں۔آپ دیکھیں گے کہ $n = 3$ سے تین ملحوظ ہندسوں تک اور $n = 4$ سے پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہو گا۔

سوال 21.39: $\sin 0.26$ کو مساوات 21.17 کی مدد سے (الف) $n = 1$ لے کر اور (ب) $n = 2$ لے کر حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں پہلے دو ملحوظ ہندسے درست ہوں گے۔یوں موجودہ نتیجہ سوال 21.36 کے نتیجہ سے کم درست ہے۔ کیوں؟
جوابات: (الف) $0.258\,27$ ، (ب) $0.258\,27$

سوال 21.40: جدول 21.6 کو وسیع کرتے ہوئے (الف) $n = 3$ لے کر، (ب) $n = 4$ لے کر اور (پ) $n = 5$ لے کر مساوات 21.17 کی مدد سے $\sin 0.26$ کی قیمت تلاش کریں۔آپ کو $x = -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2$ پر $\sin x$ کی قیمتیں درکار ہوں گی اور مطابقتی فرق درکار ہوں گے۔سائن تفاعل کی کون سی خاصیت اس وسعت کو آسان بناتی ہے۔موجودہ نتائج سوال 21.38 کے نتائج سے کیوں کم ٹھیک ہیں؟
جوابات: (الف) $0.257\,09$ ، (ب) $0.257\,05$ اور (پ) $0.257\,08$ ؛ جواب (پ) پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔

سوال 21.41: دکھائیں کہ بہت کم محنت کے ساتھ کلیہ ایورٹ (مساوات 21.18) استعمال کرتے ہوئے $\sin 0.26 = 0.257\,07$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.42: مثال 21.9 میں کی گئی حساب کی تصدیق کریں۔

سوال 21.43: $f(2.0) = 1.414\,214$ ، $f(2.3) = 1.516\,575$ اور $f(2.6) = 1.612\,452$ استعمال کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی دو درجی باہمی تحریف کریں۔نتائج کا جدول 21.5 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جوابات: $f(x) \approx 0.566\,106 + 0.496\,098x - 0.036\,022x^2$

سوال 21.44: درج ذیل دکھائیں۔

$$\Delta^k f_n = \binom{k}{0} f_{n+k} - \binom{k}{1} f_{n+k-1} + - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} f_n$$

سوال 21.45: $f(1) = 2$ ، $f(2) = 11$ اور $f(4) = 77$ استعمال کرتے ہوئے عمومی کلیہ لیگرینج (مساوات 21.23) سے $f(3)$ تلاش کریں۔
جواب: $8x^2 - 15x + 9, \quad 36$

سوال 21.46: $\ln 8.5 = 2.140\,07$ لیں جبکہ $\ln 9.0$ ، $\ln 9.5$ ، $\ln 10$ کی قیمتیں مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔ $\ln 9.2$ کو (الف) $n = 3$ اور $x_0 = 8.8$ لیتے ہوئے مساوات 21.14 سے حاصل کریں؛ (ب) $n = 3$ اور $x_0 = 10$ لیتے ہوئے مساوات 21.17 سے حاصل کریں۔

سوال 21.47: $\ln 8.5 = 2.140\,07$ لیں جبکہ $\ln 9$ ، $\ln 10$ اور $\ln 11$ مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔اب $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 سے $\ln 9.2$ کی قیمت تلاش کریں۔حاصل جواب کا مثال 21.10 کے نتیجہ سے موازنہ کریں۔
جواب: $2.219\,21$ جو کم درست ہے چونکہ آخری ہندسہ میں 1 اکائی کا خلل ہے۔

سوال 21.48: سوال 21.46 میں دی گئی مواد استعمال کرتے ہوئے $\ln 9.2$ کی قیمت (الف) مساوات 21.18 استعمال کرتے ہوئے، (ب) $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 21.49: فرض کریں کہ $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $x_3 = x_0 + 3h$ ہیں اور $r = \frac{x-x_0}{h}$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $n = 3$ کے لئے ہم مساوات 21.23 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) \approx -\binom{r-1}{3} f_0 + \frac{r(r-2)(r-3)}{2} f_1 - \frac{r(r-1)(r-3)}{2} f_2 + \binom{r}{3} f_3$$

سوال 21.50: سوال 21.49 کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 21.48-ب کا نتیجہ دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 21.51: **(فرق کی جانچ پڑتال)** دکھائیں کہ قطار میں دیے گئے اندراجات کا مجموعہ گزشتہ قطر کی آخری اور پہلی اندراج کے فرق کے برابر ہو گا۔اس جزوی پرکھ کی جدول 21.3 پر اطلاق کریں۔

21.5 لچکدار منحنیات

ٹکڑوں میں تخمینی کثیر رکنی کو لچکدار منحنی کہتے ہیں۔اس کا مطلب ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر ہم دیے گیے تفاعل $f(x)$ کا تخمینی تفاعل $g(x)$ حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ ہم چاہیں گے کہ تخمینی تفاعل اصل تفاعل کے قریب سے قریب تر نمائندگی کرے۔ہم $g(x)$ کو حاصل کرنے کی خاطر وقفہ $a \le x \le b$ کو چھوٹے خانوں (ٹکڑوں)

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{21.25}$$

میں تقسیم کرتے ہیں جہاں خانوں کے سروں کو جوڑ[43] کہا جاتا ہے۔ہر خانے پر $g(x)$ کو ایک ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ خانے کی سروں پر $g(x)$ بار بار قابل تفرق ہو۔یوں پورے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ کو تخمینی کثیر رکنی سے ظاہر کرنے کی بجائے ہم اس کو n عدد کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں حاصل تخمینی $g(x)$ باہمی تحریف میں بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر ایک خانے میں کثیر رکنی سے $g(x)$ کا ارتعاش کم ہو گا۔ یوں حاصل تفاعل $g(x)$ کو **لچکدار منحنیات**[44] کہتے ہیں۔

ہم ہر خانے کا تخمینی خطی تفاعل استعمال کر سکتے ہیں لیکن ایسا تفاعل خانہ کی جوڑوں پر غیر استمراری ہو گا۔ایسا تفاعل جو وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر نقطہ پر کئی بار قابل تفرق ہو بہتر ثابت ہوتا ہے۔

ہم کعبی لچکدار منحنیات پر غور کرتے ہیں جو عملی استعمال کے نقطہ نظر سے غالباً اہم ترین ہیں۔تعریف کی رو سے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر مساوات 21.25 میں دیے گئے خانوں کے لحاظ سے **کعبی لچکدار منحنی**[45] $g(x)$ سے مراد استمراری تفاعل $g(x)$ ہے جس کے استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پورے وقفہ پر پائے جاتے ہوں اور جس کو ہر خانہ پر ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہو جس کا درجہ تین سے زیادہ نہ ہو۔یوں ہر خانہ میں $g(x)$ کو ایک کعبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جائے گا۔

اگر وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہو اور اس وقفہ کے خانے (مساوات 21.25) منتخب کیے گئے ہوں تب، گزشتہ حصہ کی طرح، $f(x)$ کی تخمینی کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوئے حاصل ہو گی۔

$$g(x_0) = f(x_0), \quad g(x_1) = f(x_1), \cdots \quad , g(x_n) = f(x_n) \tag{21.26}$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ ایسا کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ پایا جاتا ہے جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتا ہو۔اب اگر $g(x)$ درج ذیل بھی شرائط

$$g'(x_0) = k_0, \quad g'(x_n) = k_n \tag{21.27}$$

(جہاں k_0 اور k_n دیے گئی عدد ہیں) پر بھی پورا اترتا ہو تب $g(x)$ یکتا ہو گا۔درج ذیل مسئلہ لچکدار منحنی کی موجودگی اور یکتائی کو بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 21.2: **کعبی لچکدار منحنیات**
فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے اور اس وقفہ کے خانے مساوات 21.25 میں

[43] nodes
[44] splines or flexible curves
[45] cubic spline

دیے گئے ہوں اور فرض کریں کہ k_0 اور k_n کوئی دو عدد ہوں۔تب مساوات 21.25 کے لحاظ سے ایسا صرف اور صرف ایک کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ موجود ہو گا جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.27 کو مطمئن کرتا ہو۔

ثبوت : تعریف کی رو سے ہر خانہ I_j میں، جس کو $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ ظاہر کرتا ہے، لچکدار منحنی $g(x)$ اور کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ ایک جیسے ہوں گے اور درج ذیل کو مطمئن کریں گے۔

$$p_j(x_j) = f(x_j), \quad p_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) \tag{21.28}$$

ہم $\frac{1}{x_{j+1}-x_j} = c_j$ اور

$$p_j'(x_j) = k_j, \quad p_j'(x_{j+1}) = k_{j+1} \tag{21.29}$$

لکھتے ہیں جہاں a_0 اور a_n دیے گئے ہیں جبکہ $k_1, \cdots, k_{n-1}$ بعد میں حاصل کیے جائیں گے۔ $p_j(x)$ کو مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 میں دیے چار شرائط کو مطمئن کرنا ہو گا۔سیدھے حساب سے ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ ایسا کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} p_j(x) =& f(x_j)c_j^2(x-x_{j+1})^2[1+2c_j(x-x_j)] \\ &+ f(x_{j+1})c_j^2(x-x_j)^2[1-2c_j(x-x_{j+1})] \\ &+ k_jc_j^2(x-x_j)(x-x_{j+1})^2 \\ &+ k_{j+1}c_j^2(x-x_j)^2(x-x_{j+1}) \end{aligned} \tag{21.30}$$

اس کا دو درجی تفرق درج ذیل دیگا۔

$$p_j'' = -6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) - 4c_jk_j - 2c_jk_{j+1} \tag{21.31}$$

$$p_j''(x_{j+1}) = -6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) + 2c_jk_j + 4c_jk_{j+1} \tag{21.32}$$

تعریف کی رو سے $g(x)$ کی استمراری دو درجی تفرق پائے جاتے ہیں۔اس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$p_{j-1}''(x_j) = p_j''(x_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1$$

مساوات 21.32 میں j کی جگہ $j-1$ اور مساوات 21.31 استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $n-1$ عدد مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$c_{j-1}k_{j-1} + 2(c_{j-1}+c_j)k_j + c_jk_{j+1} = 3[c_{j-1}^2\nabla f_j + c_j^2\nabla f_{j+1}] \tag{21.33}$$

جہاں $\nabla f_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$ اور $\nabla f_{j+1} = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ ہیں جبکہ $j = 1, \cdots, n-1$ ہے۔ اس $n-1$ عدد مساوات کے نظام کا حل $k_1, \cdots, k_{n-1}$ یکتا ہو گا چونکہ اس نظام کے تمام عددی سر غیر منفی ہیں اور مرکزی وتر پر ہر جزو، مطابقتی صف کے باقی اجزاء کے مجموعہ سے زیادہ ہے لہٰذا عددی سر قالب صفر نہیں ہو سکتا ہے۔اس طرح ہم جوڑ پر $g(x)$ کی یک درجی تفرق کے یکتا $k_1, \cdots, k_{n-1}$ حاصل کرتے ہیں۔اس طرح ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اس مسئلے کو ایک مثال کی مدد سے دیکھیں۔

مثال 21.11: تخمینی لچکدار منحنی

وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر $x_0 = -1$ ، $x_1 = 0$ اور $x_2 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^4$ کی ایسی تخمینی کعبی لچکدار منحنی تلاش کریں جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتی ہو اور $g'(-1) = f'(-1)$ ، $g'(1) = f'(1)$ ہوں۔

حل: ہمیں درج ذیل کے عددی سر تلاش کرنے ہوں گے۔

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$p_1(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$p_0(0) = p_1(0) = f(0) = 0$ سے $a_0 = b_0 = 0$ ملتے ہیں جبکہ $p_0'(0) = p_1'(0)$ سے $a_1 = b_1$ اور $p_0''(0) = p_1''(0)$ سے $a_2 = b_2$ حاصل ہوتے ہیں۔یوں

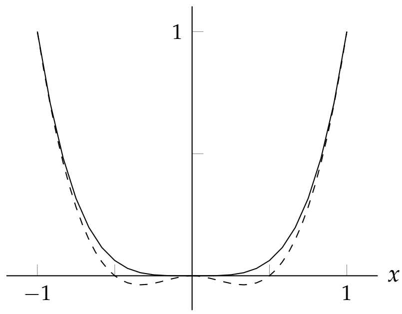
$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$
$$p_1(x) = b_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

ہو گا۔باقی چار عددی سروں کو باقی چار شرائط سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} p_0(-1) &= -a_3 + a_2 - a_1 = f(-1) = 1 \\ p_1(1) &= b_3 + a_2 + a_1 = f(1) = 1 \\ p_0'(-1) &= 3a_3 - 2a_2 + a_1 = f'(-1) = -4 \\ p_1'(1) &= 3b_3 + 2a_2 + a_1 = f'(1) = 4 \end{aligned} \tag{21.34}$$

اس نظام کا حل $a_1 = 0$ ، $a_2 = -1$ ، $a_3 = -2$ ، $b_3 = 2$ ہے۔یوں درکار لچکدار منحنی

$$g(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2 & -1 \le x \le 0 \\ 2x^3 - x^2 & 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{21.35}$$



شکل 21.6: تفاعل $f(x)$ اور (نقطہ دار) کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ (مثال 21.11)

ہو گی (شکل 21.6 میں نقطہ دار منحنی)۔ □

لچکدار منحنیات کی ایک دلچسپ کمتر خوبی ہے جس کو اب اخذ کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ مسئلہ 21.2 میں وقفہ $a \le x \le b$ پر $f(x)$ استمراری ہے اور اس وقفہ پر $f(x)$ کے یک درجی اور دو درجی استمراری تفرق پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ مساوات 21.27 کی صورت درج ذیل ہے (مثال 21.11 کی طرح)۔

$$g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b) \tag{21.36}$$

تب a اور b پر $f' - g'$ صفر ہو گا۔ تکمل بالحصص سے

$$\int_a^b g''(x)[f''(x) - g''(x)]\,\mathrm{d}x = -\int_a^b g'''(x)[f'(x) - g'(x)]\,\mathrm{d}x$$

حاصل ہو گا۔ چونکہ وقفہ کے ہر چھوٹے حصے پر $g'''(x)$ مستقل ہے لہٰذا دائیں ہاتھ تکمل کو کسی ایک ٹکڑے پر حاصل کرتے ہوئے $c[f(x) - g(x)]$ ملتا ہے جہاں c مستقل ہے اور تکمل کی یہ قیمت ٹکڑے کے سروں پر حاصل کی جائے گی جو مساوات 21.26 کی بنا صفر حاصل ہو گی۔ چونکہ ہر ٹکڑے پر تکمل صفر ہے لہٰذا پورے وقفے پر تکمل صفر ہو گا۔ اس طرح درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f''(x) g''(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g''(x)^2\,\mathrm{d}x$$

نتیجتاً

$$\begin{aligned}\int_a^b [f''(x) - g''(x)]^2 \,\mathrm{d}x &= \int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x - 2\int_a^b f''(x)g''(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b g''(x)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x - \int_a^b g''(x)^2 \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ہو گا۔ بائیں ہاتھ متکمل غیر منفی ہے لہٰذا تکمل بھی غیر منفی ہو گا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g''(x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{21.37}$$

اس نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 21.3: **کعبی لچکدار منحنی کی کمتر خاصیت**
فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ اور اس کے یک درجی اور دو درجی تفرق استمراری ہوں۔ فرض کریں کہ اس وقفہ کے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $g(x)$ مطابقتی کعبی لچکدار منحنی ہو جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.36 کو مطمئن کرتی ہو۔ تب $f(x)$ اور $g(x)$ مساوات 21.37 کو مطمئن کریں گے جس میں علامت مساوات $(=)$ اس صورت کو ظاہر کرتی ہے جب $f(x)$ کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ ہو۔

سوالات

سوال 21.52: تصدیق کریں کہ مساوات 21.30 میں دیا گیا $p_j(x)$ مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 21.53: مساوات 21.31 اور مساوات 21.32 کو مساوات 21.30 سے اخذ کریں۔

سوال 21.54: مثال 21.11 پر غور کریں۔ دکھائیں کہ مثال میں دی گئی شرائط کے تحت مساوات 21.30 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned}p_0(x) &= -2x^3 - x^2 + k_1 x(x+1)^2 \\ p_1(x) &= \quad 2x^3 - x^2 + k_1 x(x-1)^2\end{aligned}$$

جبکہ مساوات 21.33 سے $k_1 = 0$ حاصل ہو گا اور یوں مساوات 21.35 حاصل ہو گی۔

سوال 21.55: مثال 21.11 میں کعبی لچکدار منحنی کا موازنہ پورے وقفہ پر دو درجی تخمینی کثیر رکنی $p(x)$ کے ساتھ کریں۔ $f(x)$ سے $g(x)$ اور $p(x)$ کی زیادہ سے زیادہ انحراف کتنی ہیں۔

سوال 21.56: مساوات 21.34 میں دیے گئے نظام کا حل تلاش کریں۔

سوال 21.57: دکھائیں کہ وقفہ کے خانوں کے لحاظ سے کعبی لچکدار منحنیات سمتی فضا (حصہ 7.4) بناتے ہیں۔

سوال 21.58: دکھائیں کہ وقفہ کے دیے گئے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $n+1$ یکتا کعبی لچکدار منحنیات $g_0(x), \cdots, g_n(x)$ موجود ہوں گی جو $g_j'(a) = g_j'(b) = 0$ اور

$$g_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

کو مطمئن کریں گی۔
جواب: مسئلہ 21.2 سے ایسا اخذ ہوتا ہے۔

سوال 21.59: دکھائیں کہ اگر ایک لچکدار منحنی تین بار قابل تفرق ہو تب یہ ضرور کثیر رکنی ہو گا۔

سوال 21.60: ایسا ممکن ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ کی دو قریبی خانوں کی لچکدار منحنیات ایک جیسی ہوں۔اس طرز کی لچکدار منحنیات دیکھنے کی خاطر وقفہ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کی خانوں $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \sin x$ کی ایسی لچکدار منحنیات تلاش کریں جو $g'(-\frac{\pi}{2}) = f'(-\frac{\pi}{2})$ اور $g'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})$ کو مطمئن کرتی ہوں۔
جواب: $g(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x$

سوال 21.61: مساوات 21.37 کی جیومیٹریائی مطلب کچھ یوں ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ لچکدار منحنی، مربع انحنا کے تکمل کی قیمت کو کم کرنے کی کوشش کرتی ہے۔اس پر بحث کریں۔

21.6 اعدادی تکمل اور تفرق

اعدادی تکمل[46] سے مراد قطعی تکمل

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{21.38}$$

کی اعدادی قیمت کی تلاش ہے جہاں a اور b دیے گئے ہوں گے اور f دیا گیا تفاعل یا تفاعل کی قیمتوں کا جدول ہو گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم ایسا قابل تفرق تفاعل F تلاش کر سکیں جس کا تفرق f ہو تب J کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)]$$

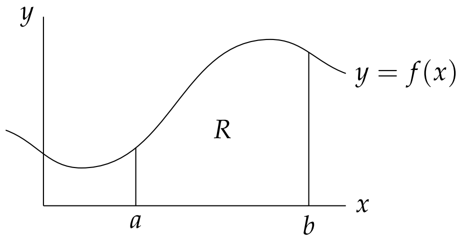
انجینئری میں عموماً ایسے تکمل پائے جاتے ہیں جن کا متکمل جدول کی صورت میں ہو گا یا تکمل کو متناہی تعداد کے بنیادی تفاعل کی صورت میں ظاہر کرنا نا ممکن ہو گا اور یا F کی صریح صورت پیچیدہ اور غیر مفید ثابت ہو گی۔ ایسی صورتوں میں اعدادی تکمل کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

چونکہ وقفہ $a \le x \le b$ میں تفاعل $f(x)$ کے نیچے خطہ R کا رقبہ J ہے (شکل 21.7) لہٰذا ہم گتے سے R کی شکل کاٹ کر، گتے کی اس ٹکڑے کے وزن کو اکائی رقبہ گتے کی وزن سے تقسیم کرتے ہوئے R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم **کاغذ ترسیم**[47] پر R کی شکل بنا کر ڈبے گن کر بھی R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ رقبہ کی بہتر ناپ کے لئے **سطح پیما**[48] کا استعمال ضروری ہو گا۔

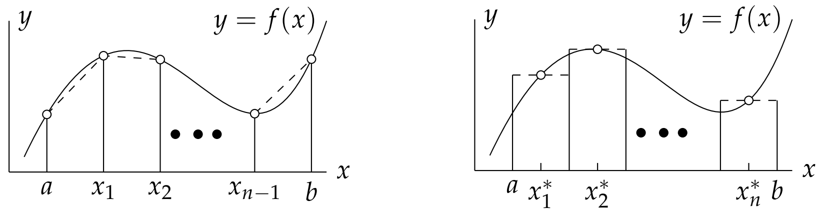
متکمل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہوئے اعدادی تراکیب بنائے جا سکتے ہیں۔ سادہ ترین کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم تکمل کے وقفہ کو $h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n عدد برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ٹکڑے پر تفاعل کو مستقل تفاعل $f(x_j^*)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں x_j^* ٹکڑے کا وسطی نقطہ ہے (شکل 21.8-الف)۔ یوں f

---

[46] numerical integration
[47] graph paper
[48] planimeter



شکل 21.7: قطعی تکمل کی جیومیٹریائی معنی



(ب) ذوزنقہ قاعدہ

(الف) مستطیل قاعدہ

شکل 21.8: اعدادی تکمل

کو **سیڑھی تفاعل**[49] (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ظاہر کرے گی۔ شکل 21.8-الف کے n مستطیلوں کے انفرادی رقبے $hf(x_1^*), \cdots, hf(x_n^*)$ ہیں جن کا مجموعہ اعدادی تکمل کا **مستطیل قاعدہ**[50]

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)], \qquad \left(h = \frac{b-a}{n}\right) \tag{21.39}$$

دیتی ہے۔

---

[49] step function
[50] rectangular rule

تفاعل f کو ٹکڑوں میں خطی قطعات (شکل 21.8-ب) سے ظاہر کرنے سے اعدادی تکمل کا **ذوزنقہ قاعدہ**[51]

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x+2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)] \tag{21.40}$$

حاصل ہو گا جہاں $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $x_0\,(=a), x_1, x_2, c\ldots, x_{n-1}, x_n\,(=b)$ وہی نقطے ہیں جو مساوات 21.40 میں استعمال کیے گئے ہیں۔یوں $x_j = x_0 + jh$ ہو گا۔شکل 21.8-ب کے n ذوزنقہ کے انفرادی رقبے

$$\tfrac{1}{2}[f(a) + f(x_1)]h, \quad \tfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]h, \quad \cdots, \tfrac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(b)]h$$

ہیں جن کا مجموعہ مساوات 21.40 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

J^* میں خلل (حصہ 21.1) ϵ درج ذیل ہو گا۔

$$\epsilon = J^* - J$$

اگر $f(x)$ خطی تفاعل ہو تب $\epsilon = 0$ ہو گا اور تمام x کے لئے f' مستقل اور f'' صفر ہو گا۔عین ممکن ہے کہ کسی عمومی تفاعل f (جس کا استمراری دو درجی تفرق پایا جاتا ہو) کی صورت میں ہم **حد خلل**[52] (یعنی خلل ϵ کی حد) تلاش کر سکیں جو f'' پر منحصر ہو۔اس خاطر ہم b کی جگہ متغیر t لیتے ہوئے مساوات 21.40 کا اطلاق $n = 1$ کے لئے کرتے ہیں۔تب مطابقتی خلل

$$\epsilon(t) = \frac{t-a}{2}[f(a) + f(t)] - \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon(a) = 0$ ہے جو ایک غیر دلچسپ نتیجہ ہے۔تفرق لینے سے

$$\epsilon'(t) = \frac{1}{2}[f(a) + f(t)] + \frac{t-a}{2}f'(t) - f(t)$$

حاصل ہو گا۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon'(a) = 0$ ہے۔مزید ایک بار تفرق لینے سے

$$e''(t) = \frac{1}{2}(t-a)f''(t)$$

---

[51] trapezoidal rule
[52] error bound

حاصل ہو گا جس میں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 پر کرنے سے وقفے پر تمام t کے لئے حد خلل

$$\frac{1}{2}(t-a)M_2^* \leq \epsilon''(t) \leq \frac{1}{2}(t-a)M_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ a تا t تکمل لینے سے

$$\frac{1}{4}(t-a)^2M_2^* \leq \epsilon'(t) - \epsilon'(a) \leq \frac{1}{4}(t-a)^2M_2$$

حاصل ہو گا جس میں $\epsilon'(a) = 0$ اور $\epsilon(a) = 0$ پر کرتے ہوئے دوبارہ تکمل لے کر $t = a + h$ لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{12}h^3M_2^* \leq \epsilon(a+h) \leq \frac{1}{2}h^3M_2$$

باقی $n-1$ ٹکڑوں کے خلل کے لئے اسی طرح کے $n-1$ عدد مطابقتی عدم مساوات حاصل ہوں گے۔ان تمام n عدم مساوات کا مجموعہ a تا b تکمل کے لئے خلل ϵ کی عدم مساوات دے گا۔چونکہ $h = \frac{b-a}{n}$ ہے لہٰذا ہمیں

$$KM_2^* \leq \epsilon \leq KM_2, \qquad \left[K = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\right] \tag{21.41}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے وقفہ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 ہے۔

مثال 21.12: ذوزنقہ قاعدہ۔ تخمینہ خلل

$n = 10$ لیتے ہوئے تکمل $J = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت مساوات 21.40 کی مدد سے حاصل کریں۔جدول 21.7 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$J \approx 0.1(0.5 \cdot 1.367\,879 + 6.778\,167) = 0.746\,211$$

چونکہ $f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$ ہے لہٰذا

$$M_2^* = f''(0) = -2, \quad M_2 = f''(1) = 0.735\,759$$

ہوں گے۔مزید $K = \frac{1}{1200}$ ہے لہٰذا مساوات 21.41 کے تحت

$$-0.001\,667 \leq \epsilon \leq 0.000\,614$$

جدول 21.7: جدول برائے مثال 21.12

J	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$	
0	0	0	1.000 000	
1	0.1	0.01		0.990 050
2	0.2	0.04		0.960 789
3	0.3	0.09		0.913 931
4	0.4	0.16		0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801
6	0.6	0.36		0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626
8	0.8	0.64		0.527 292
9	0.9	0.81		0.444 858
10	1.0	1.00	0.367 879	
		مجموعہ	1.367 879	6.778 167

ہو گا۔یوں J کی درست قیمت

$$0.746\,211 + 0.001\,667 = 0.747\,878 \quad \text{اور} \quad 0.746\,211 - 0.000\,614 = 0.745\,597$$

کے درمیان ہو گی۔ (چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 0.746 824 ہے۔) □

f کی ٹکڑوں میں مستقل تخمین سے مستطیل قاعدہ (مساوات 21.39) حاصل ہوا جبکہ f کی ٹکڑوں میں خطی تخمین سے ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) حاصل ہوا۔ ٹکڑوں میں دو درجی تخمین سے **قاعدہ سمسن**[53] اخذ ہو گا جو، سادہ ہونے کے باوجود، عموماً مسئلوں کا کافی درست جواب دیتا ہے۔ قاعدہ سمسن اخذ کرنے کی خاطر ہم وقفہ $a \le x \le b$ کو ایک جیسی لمبائیوں کے جفت تعداد کی ٹکڑوں، مثلاً $2n$، میں تقسیم کرتے ہیں۔اس طرح $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $x_0\,(a), x_1, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}\,(b)$ ہوں گے۔ہم پہلی دو ٹکڑوں کو لیتے ہیں اور $f(x)$ کو وقفہ $x_0 \le x \le x_0 + 2h$ میں نقطہ (x_0, f_0)، (x_1, f_1)، (x_2, f_2) سے گزرتی لیگرینج کثیر رکنی

[53] برطانوی ریاضی دان طامس سمسن [1710-1761]

$p_2(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں f_j سے مراد $f(x_j)$ ہے۔ مساوات 21.23 سے

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2 \tag{21.42}$$

ہو گا جہاں نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ اور $2h^2$ کے برابر ہیں۔ $s = \frac{x-x_1}{h}$ لکھتے ہوئے $x - x_0 = (s+1)h$ ، $x - x_1 = sh$ اور $x - x_2 = (s-1)h$ ہوں گے۔ یوں

$$p_2(x) = \frac{1}{2}s(s-1)f_0 - (s+1)(s-1)f_1 + \frac{1}{2}(s+1)sf_2 \tag{21.43}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب ہم x کے ساتھ x_0 تا x_2 تکمل لیتے ہیں جو s کے ساتھ -1 تا 1 تکمل کے مترادف ہے۔ چونکہ $\mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}s$ ہے لہٰذا

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,\mathrm{d}x = h\Big(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2\Big)$$

ہو گا۔ اگلے دو ٹکڑوں، x_2 تا x_4 ، اور باقی دو دو ٹکڑوں کے لئے بھی اسی طرح کے نتائج حاصل ہوں گے۔ ان تمام n عدد نتائج کا مجموعہ **قاعدہ سمسن**[54]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}) \tag{21.44}$$

دے گا جہاں $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $f_j = f(x_j)$ ہیں۔ تکمل کے وقفہ میں f کے چار درجی تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کرتے ہوئے مساوات 21.44 کی حد خلل ϵ_S کو ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) کے خلل کی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ نتیجہ درج ذیل ہے

$$CM_4^* \le \epsilon_S \le CM_4 \qquad [C = \tfrac{(b-a)^5}{180(2n)^4}] \tag{21.45}$$

جہاں تکمل کے وقفہ پر f کی چار درجہ تفرق کی زیادہ سے زیادہ قیمت M_4 اور کم سے کم قیمت M_4^* ہے۔

مثال 21.13: قاعدہ سمسن۔ تخمینہ حد خلل

$2n = 10$ لیتے ہوئے تکمل $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ بھی حاصل کریں۔ چونکہ $h = 0.1$ ہے، جدول 21.8 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J \approx \frac{0.1}{3}(1.367\,879 + 4 \cdot 3.740\,266 + 2 \cdot 3.037\,901) = 0.746\,825$$

---

[54] Simpson's rule

جدول 21.8: جدول برائے مثال 21.44

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$		
0	0.0	0.00	1.000 000		
1	0.1	0.01		0.990 050	
2	0.2	0.04			0.960 789
3	0.3	0.09		0.913 931	
4	0.4	0.16			0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801	
6	0.6	0.36			0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626	
8	0.8	0.64			0.527 292
9	0.9	0.81		0.444 858	
10	1.0	1.00	0.367 879		
مجموعہ			1.367 879	3.740 266	3.037 901

تخمینہ حد خلل: چار درجی تفرق $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ ہے جس کی وقفہ تکمل میں کم سے کم قیمت $x = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ پر $M_4^* = f^{(4)}(x^*) = -7.359$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 0$ پر $M_4 = f^{(4)}(0) = 12$ حاصل ہوتی ہیں۔چونکہ $2n = 10$ اور $b - a = 1$ ہیں لٰہذا $C = \frac{1}{800\,000} = 0.000\,000\,56$ ہو گا۔یوں

$$-0.000\,004 \le \epsilon_S \le 0.000\,006 \quad \text{اور} \quad 0.746\,818 \le J \le 0.746\,830$$

ہوں گے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ تخمین سے کم از کم چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوتا ہے۔حقیقت میں موجودہ جواب پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے چونکہ چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $J = 0.746\,824$ ہے۔

غور کریں کہ مثال 21.12 میں حاصل نتیجہ سے موجودہ نتیجہ بہت زیادہ بہتر ہے اگرچہ ہمیں دونوں مثالوں میں تقریباً ایک جتنا کام کرنا پڑا ہے۔ □

قاعدہ سمسن سے حاصل نتائج کی درستگی عموماً انجینئری مسئلوں کے لئے کافی ہوتی ہیں۔اسی لئے کمپیوٹر سے اعدادی تکمل کے حصول میں زیادہ درستگی کے کلیوں کی بجائے ترکیب سمسن کو زیادہ ترجیح دی جاتی ہے۔ زیادہ طاقت کی کثیر رکنی استعمال کرتے ہوئے زیادہ درستگی کے کلیات حاصل کیے جاتے ہیں۔ہم یہاں دو ایسی کلیات کا ذکر کرتے ہیں جو بعض

اوقات مفید ثابت ہوتی ہیں۔ نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی کعبی سے **قاعدہ آٹھ میں سے تین**

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \tag{21.46}$$

حاصل[55] ہوتا ہے جو کعبی کثیر رکنی کی صورت (مثلاً قاعدہ سمسن) میں بالکل درست ثابت ہوتا ہے۔مزید وقفہ کی طاق ٹکڑوں (جو 3 سے قابل تقسیم ہو) پر اس قاعدہ کو لاگو کیا جا سکتا ہے۔ چھ درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) تا (x_6, f_6) سے گزرتی ہو سے پیچیدہ عددی سر والا کلیہ حاصل ہوتا ہے البتہ اسی قسم کا ایک اور کلیہ جس کی درستگی نسبتاً کم ہے اور جس کو **قاعدہ ویڈل**[56] کہتے ہیں درج ذیل ہے۔

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,\mathrm{d}x =\approx \frac{3h}{10}(f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6) \tag{21.47}$$

تکمل کے جن اعدادی کلیات پر بحث کی گئی ان میں تکمل کے وقفہ کو برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا اور یہ تراکیب کسی مخصوص طاقت تک کثیر رکنی کی صورت میں بالکل درست جواب حاصل کرتے ہیں۔ خطی تبادل پیا استعمال کرتے ہوئے a اور b کو بالترتیب -1 اور 1 پر منتقل کرتے ہوئے زیادہ عمومی طور پر

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f_j \qquad [f_j = f(x_j)] \tag{21.48}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں ہم ایسے $2n$ مستقل A_1 تا A_n اور x_1 تا x_n حاصل کر سکتے ہیں کہ کثیر رکنی کا درجہ m جتنا چاہیں بڑا ہو، مساوات 21.48 بالکل درست جواب دے۔ چونکہ درجہ $2n-1$ کثیر رکنی کے عددی سروں کی تعداد $2n$ ہے لہٰذا $m \le 2n-1$ ہو گا۔گاوس کے تحت اس صورت درجہ $2n-1$ کثیر رکنی کے لئے بالکل درست جواب حاصل ہو گا جب $x_1, \cdots, x_n$ درجہ n **لیژانڈر کثیر رکنی**[57] (حصہ 5.2)

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} x^{n-4} - + \cdots$$

---

three-eight's rule[55]
Weddle's rule[56]
Legendre polynomial[57]

یعنی

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \cdots$$

کے n صفر ہوں اور A_j کی موزوں قیمتیں منتخب کی جائیں۔ ایسی صورت میں مساوات 21.48 کو **گاوسی کلیہ تکمل**[58] کہتے ہیں۔ اگرچہ یہ کلیہ بہت درست نتائج دیتا ہے لیکن اس میں $x_1, \cdots, x_n$ کی غیر یکساں فاصلے دشواری کا سبب بنتے ہیں۔

چونکہ مساوات 21.48 میں مستعمل آخری سر -1 اور 1 کثیر رکنی $P_n(x)$ کے صفر نہیں ہیں (یہ دونوں $x_1, \cdots, x_n$ میں شامل نہیں ہیں) لہٰذا گاوسی کلیہ تکمل **کھلا کلیہ**[59] کہلاتا ہے۔ یوں **بند کلیہ**[60] میں وقفہ تکمل کے سر بھی شامل ہوں گے (مثال کے طور پر مساوات 21.40، مساوات 21.44، مساوات 21.46 اور مساوات 21.47 بند کلیات ہیں)۔

باہمی تحریف کی طرح اعدادی تکمل کو بھی فرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ایک انتہائی موثر کلیہ درج ذیل **گاوسی وسطی فرق کلیہ**[61] ہے۔

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\Big(f_0 + f_1 - \frac{\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1}{12} + \frac{11(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)}{720}\Big) \tag{21.49}$$

اعدادی تفرق

جدول کی صورت میں دیے تفاعل کے تفرق کا تخمینہ اعدادی طریقہ سے حاصل کرنے کو **اعدادی تفرق**[62] کہتے ہیں۔ جہاں ممکن ہو وہاں اعدادی تفرق سے گریز کریں چونکہ اعدادی تفرق کی درستگی جدول میں دیے قیمتوں کی درستگی سے کم ہو گی۔ در حقیقت تفرق کے حصول میں ہم دو بڑی قیمتوں کے فرق کو ایک چھوٹی قیمت سے تقسیم کرتے ہیں۔؛ مزید اگر تفاعل کثیر رکنی p کی صورت میں دیا گیا ہو تب تفاعل کی قیمتوں میں فرق کم ہو سکتا ہے جبکہ تفرق کی قیمت بہت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اعدادی تفرق ایک نازک عمل ہے۔ اس کے برعکس اعدادی تکمل ہمواری کا عمل ہے لہٰذا اعدادی تکمل پر تفاعل کی قیمتوں میں خلل کا بہت زیادہ اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

---

[58] Gaussian integration formula
[59] open formula
[60] closed formula
[61] central-difference formula by Gauss
[62] numerical differentiation

ہم $f_j' = f'(x_j)$ ، $f_j'' = f''(x_j)$ ، ... لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ہم تفرق کا تخمینہ درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

اس کو دیکھ کر ہم یک درجی تفرق کے لئے

$$f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h} \tag{21.50}$$

لکھتے ہیں۔اسی طرح دو درجی تفرق کو

$$f_1'' \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} \tag{21.51}$$

لکھا جا سکتا ہے۔بلند درجی تفرق کے لئے اسی طرح کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

موزوں لیگرینج کثیر رکنی کی تفرق سے تفرق کا بہتر تخمینہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 21.42 کا تفرق لینے سے

$$f(x) \approx p_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2$$

حاصل ہوتا ہے جہاں یاد رہے کہ مساوات 21.42 کے نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ ، $2h^2$ ہیں۔اس کی قیمت x_0 ، x_1 اور x_2 پر حاصل کرتے ہوئے **تین نقاطی کلیہ**[63]

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad f_0' \approx \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) \\ &\text{(ب)} \quad f_1' \approx \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2) \\ &\text{(پ)} \quad f_2' \approx \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2) \end{aligned} \tag{21.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔پانچ نقاطی لیگرینج کثیر رکنی سے اسی طرح بالخصوص درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$f_2' \approx \frac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) \tag{21.53}$$

---

[63] three point formula

سوالات

تکمل کے کلیات کی یاد دہانی کی خاطر سوال 21.62 تا سوال 21.70 حل کریں۔

سوال 21.62: $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

سوال 21.63: $\int \cos^2 \omega x \,\mathrm{d}x$

سوال 21.64: $\int e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x$

سوال 21.65: $\int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x$

سوال 21.66: $\int \tan kx \,\mathrm{d}x$

سوال 21.67: $\int \ln x \,\mathrm{d}x$

سوال 21.68: $\int \frac{\mathrm{d}x}{k^2+x^2}$

سوال 21.69: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

سوال 21.70: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)^2}$

سوال 21.71: $n = 5$ لیتے ہوئے مساوات 21.39 کی مدد سے مثال 21.12 حل کریں۔

سوال 21.72: $n = 5$ لیتے ہوئے مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 کی مدد سے $\int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x$ حل کریں۔ خلل کتنا ہو گا؟
جواب: $0.245, \ \epsilon = -0.005$

سوال 21.73: $n = 5$ لیتے ہوئے سوال 21.72 کو ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 سے حل کریں۔ مساوات 21.41 سے حد خلل کیا حاصل ہوں گے؟ نتائج کے حقیقی حد خلل کیا ہیں؟ ان میں فرق کیوں ہے؟

سوال 21.74: $2n = 4$ لیتے ہوئے سمسن قاعدہ سے $\ln 2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ کا تخمینہ حاصل کریں۔حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔
جواب:

$$\ln 2 \approx 0.693\,25,\; M_4^* = 0.75, M_4 = 0.24,\; 0.000\,016 < \epsilon_S < 0.000\,53,\\ 0.692\,72 < \ln 2 < 0.693\,24$$

سوال 21.75: $2n = 10$ لیتے ہوئے سمسن قاعدہ سے $\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x$ کا تخمینہ حاصل کریں۔حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔نتیجے کی اصل حد خلل کیا ہے؟

سوال 21.76 تا سوال 21.79 میں $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ سائن تفاعل کی پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست قیمتیں استعمال کریں۔

سوال 21.76: مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 استعمال کریں اور $n = 5$ لیں۔
جواب: 0.9466

سوال 21.77: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n = 5$ لیں۔

سوال 21.78: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n = 10$ لیں۔
جواب: 0.9458

سوال 21.79: $2n = 2$ اور $2n = 10$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن استعمال کریں۔

سوال 21.80: ایسے α اور β تلاش کریں کہ ایک درجی کثیر رکنی کے لئے

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx h[\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n+1})], \qquad h = x_{n+1} - x_n$$

بالکل درست ہو۔کونسا کلیہ اخذ ہوتا ہے؟
جواب: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ذوزنقہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.81: اگر $f(x)$ دو درجی کثیر رکنی ہو تب دکھائیں کہ مساوات 21.50 بالکل درست ہے۔اس کا کیا جیومیٹریائی مطلب ہے؟

سوال 21.82: مساوات 21.52 حاصل کریں۔

سوال 21.83: مساوات 21.53 اخذ کریں۔

سوال 21.84: $x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.2$ ، $x_2 = 0.4$ ، $x_3 = 0.6$ ، $x_4 = 0.8$ کے لئے $f(x) = x^4$ پر غور کریں۔مساوات 21.52-الف، ب اور پ سے f_2' حاصل کریں۔خلل تلاش کریں۔
جواب: $0.080, 0.320, 0.176, 0.256$

سوال 21.85: تفرق کا چار نقطی کلیہ درج ذیل ہے۔

$$f_2' \approx \frac{1}{6h}(-2f_1 - 3f_2 + 6f_3 - f_4)$$

$x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.2$ ، $x_2 = 0.4$ ، $x_3 = 0.6$ ، $x_4 = 0.8$ کے لئے $f(x) = x^4$ پر اس کلیہ کو لاگو کریں۔حد خلل تلاش کریں۔مساوات 21.53 سے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 21.86: $f'(x)$ کو یک درجی اور مزید زیادہ بلند درجی فرق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + - \cdots)$$

r کے ساتھ مساوات 21.14 کا تفرق لیتے ہوئے اس کلیہ کو حاصل کریں۔ مساوات 21.14 کا r کے ساتھ تفرق

$$hf'(x) \approx \Delta f_0 + \frac{2r-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3r^2-6r+2}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots$$

ہے، جہاں $x = x_0 + rh$ ہے، اور آپ کو $r = 0$ پر کرنا ہو گا۔ (الف) یک درجی فرق تک، (ب) دو درجی فرق تک، (پ) تین درجی فرق تک، (ت) چار درجی فرق تک شامل کرتے ہوئے اس کلیہ سے سوال 21.84 کے $f'(0.4)$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $0.52, 0.080, 0.304, 0.256$

21.7 یک درجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

ہم باب 1 سے جانتے ہیں کہ $F(x, y, y') = 0$ جس کو عموماً $y' = f(x, y)$ لکھنا ممکن ہو گا، یک درجی تفرقی مساوات ہے۔ابتدائی قیمت مسئلہ[64] سے مراد ایک تفرقی مساوات اور ایک ایسی شرط ہے جس کو (بلند درجی

[64] initial value problem

تفرقی مسئلے کی صورت میں ایک ہی x پر ایسی کئی شرائط ہوں گے جنہیں) تفرقی مساوات کا حل مطمئن کرتا ہو۔اس حصہ میں ہم درج ذیل روپ کی ابتدائی قیمت مسئلہ پر غور کرتے ہیں

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{21.54}$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی وقفہ جس پر x_0 پایا جاتا ہو میں f کا یکتا حل موجود ہے۔ہم اس ابتدائی مسئلے کے حل کی اعدادی تراکیب تلاش کرتے ہیں۔

اگر ہم اس مسئلے کے حل کا کلیہ اخذ کر سکیں تب کلیہ سے اعدادی جوابات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔اگر حل کا کلیہ بہت پیچیدہ ہو یا ایسا کلیہ موجود ہی نہ ہو تب ہم اس حصے کے اعدادی تراکیب استعمال کر سکتے ہیں۔

یہ تراکیب **قدم با قدم تراکیب**[65] ہیں جن میں ہم $y_0 = y(x_0)$ سے شروع کرتے ہوئے قدم با قدم آگے بڑھتے ہیں۔پہلی قدم پر ہم $x = x_1 = x_0 + h$ پر مساوات 21.54 کے حل y کا تخمینہ y_1 حاصل کرتے ہیں۔دوسری قدم پر ہم $x = x_2 = x_0 + 2h$ پر اس حل کا تخمینہ y_2 حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔یہاں h ایک مقررہ مستقل ہے مثلاً 0.2 یا 0.1 اور یا 0.01 ؛ مستقل h منتخب کرنے کی اصول پر اسی حصے میں غور کیا جائے گا۔

ہر قدم پر ایک ہی جیسی (کلیات) حساب دہرائی جاتی ہے۔ان کلیات کو ٹیلر تسلسل

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \cdots$$

سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 21.54 سے $y' = f$ حاصل ہوتا ہے جس کا تفرق

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

دیتا ہے۔اسی طرح بلند درجی تفرق کے کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔یوں ٹیلر تسلسل کو

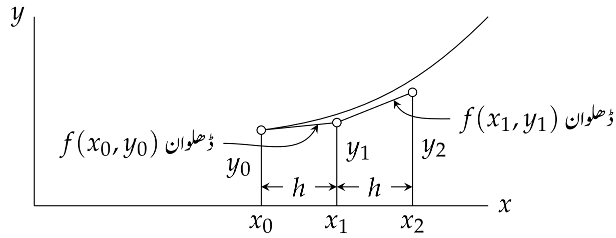
$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}f' + \frac{h^3}{6}f'' + \cdots \tag{21.55}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں f ، f' ، f'' ،... کی قیمتیں $(x, y(x))$ پر لی جائیں گی۔ h کی چھوٹی قیمتوں کے لئے h^2 ، h^3 ، ... قابل نظر انداز ہوں گے۔یوں مساوات 21.55 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$y(x+h) \approx y(x) + hf$$

---

[65] step by step method



شکل 21.9: ترکیب یولر

پہلی قدم میں ہم

$$y_1 = y_0 + h(x_0, y_0)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_1) = y(x_0 + h)$ کا تخمینہ ہو گا۔دوسری قدم میں ہم

$$y_2 = y_1 + h(x_1, y_1)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ کا تخمینہ ہو گا۔اسی طرح قدم با قدم چلتے ہوئے تمام تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔کسی بھی قدم کی عمومی مساوات

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{21.56}$$

ہو گی۔اس قدم با قدم ترکیب کو **ترکیب یولر**[66] یا **یولر کوشی ترکیب**[67] کہتے ہیں۔ جیومیٹریائی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کی جگہ اس کی ایسی تخمینی کثیر الاضلاع استعمال کی جاتی ہے جس کا پہلا بازو نقطہ x_0 پر منحنی کا مماس ہو (شکل 21.9)۔

مساوات 21.55 میں مستقل کے علاوہ اکائی طاقت کا h لے کر ترکیب یولر حاصل کی گئی لہٰذا ترکیب یولر کو **درجہ اول ترکیب**[68] کہتے ہیں۔مساوات 21.55 کے باقی اجزاء کو رد کرنے کی وجہ سے حل میں خلل پیدا ہوتا ہے جس کو اس ترکیب کی **قطع چال خلل** کہتے ہیں۔ h کی چھوتی قیمت کی صورت میں h^3 ، h^4 ، وغیرہ کی قیمت h^2 کی قیمت سے بہت کم ہوں گی لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ فی قدم **قطع چال خلل** کا درجہ h^2 ہے۔ اس کے علاوہ اس ترکیب میں اور دیگر تراکیب میں **تعداد ہندسہ خلل** بھی پائے جائیں گے جن کی بنا n بڑھانے سے y_1 ، y_2 ، . . . کی قیمتوں میں خلل بتدریج بڑھتا جائے گا۔اس حقیقت پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

---

[66] Euler method
[67] Euler-Cauchy method
[68] first order method

جدول 21.9: جدول برائے مثال 21.14

n	x_n	y_n	$0.2(x_n + y_n)$	درست حل	حتمی خلل
0	0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.1	0.000	0.040	0.021	0.021
2	0.2	0.040	0.088	0.092	0.052
3	0.3	0.128	0.146	0.222	0.094
4	0.4	0.274	0.215	0.426	0.152
5	0.5	0.489		0.718	0.229

مثال 21.14: ترکیب یولر
ترکیب یولر سے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

حل: ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہوئے y_1 تا y_5 حاصل کرتے ہیں۔یہاں $f(x, y) = x + y$ ہے لہٰذا مساوات 21.56 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n, y_n)$$

جدول 21.9 میں ترکیب یولر سے حاصل نتائج کے ساتھ ساتھ مساوات 1.59 سے حاصل بالکل درست حل

$$y(x) = e^x - x - 1$$

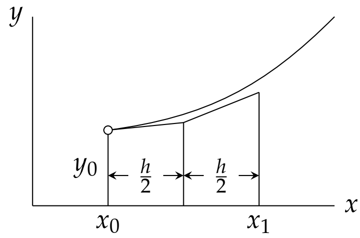
کی قیمتیں اور خلل بھی دی گئی ہیں۔موجودہ مثال میں ہمیں اصل حل بھی معلوم ہے لہٰذا ہم ترکیب یولر کی درستگی کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔ h کی مختلف قیمتیں لے کر آپ ترکیب یولر سے حاصل نتائج کا اصل حل کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں۔ □

مساوات 21.55 کے زیادہ اجزاء شامل کرتے ہوئے بہتر اعدادی تراکیب حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ایسے کلیات میں عموماً $f(x, y)$ کی تفرق سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر تفرق کو دیگر موزوں نقطوں پر $f(x, y)$ کی قیمتوں سے حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں ایسی دو تراکیب پر غور کرتے ہیں۔

ایسی پہلی ترکیب کو بہتر ترکیب یولر[69] یا یولر کوشی کی بہتر ترکیب کہتے ہیں۔اس ترکیب کی پہلی قدم میں ہم پہلے ذیلی قیمت

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{21.57}$$

[69] improved Euler method



شکل 21.10: بہتر ترکیب یولر

اور بعد میں نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})] \tag{21.58}$$

حاصل کرتے ہیں۔

یہ ترکیب ایک سادہ جیومیٹریائی مطلب رکھتی ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقفہ x_n تا $x_n + \frac{1}{2}h$ تک ہم حل کو تخمیناً ایسی قطع سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_n, y_n) سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $f(x_n, y_n)$ ہو جبکہ باقی وقفہ، یعنی $x_n + \frac{1}{2}h$ تا x_n تک، ہم قطع کی ڈھلوان $f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$ لیتے ہیں (شکل 21.10 جہاں $n = 0$ ہے)۔

بہتر ترکیب یولر کے ہر قدم پر پہلے مساوات 21.57 سے قیمت کی پیش گوئی کی جاتی ہے اور بعد میں مساوات 21.58 سے قیمت کی تصحیح کی جاتی ہے لہٰذا یہ **پیش گو، مصحح ترکیب**[70] کہلاتی ہے۔

مثال 21.15: **بہتر ترکیب یولر**
پہلے کی طرح $h = 0.2$ لیتے ہوئے بہتر ترکیب یولر کو مثال 21.14 کی ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ یہاں مساوات 21.57 اور مساوات 21.58 درج ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} y^*_{n+1} &= y_n + 0.2(x_n + y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + 0.1[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + y^*_{n+1})] \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک ہی قدم میں دو بار حساب کی بجائے ایک بار حساب کرنا ہو گا۔یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y_{n+1} = 0.12x_n + 0.1x_{n+1} + 1.22y_n$$

جدول 21.10: بہتر ترکیب یولر۔(مثال 21.15)

n	x_n	y_n	$0.12x_n$	$0.1x_{n+1}$	$1.22y_n$	y_{n+1}
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0200	0.0000	0.0200
1	0.2	0.0200	0.0240	0.0400	0.0244	0.0884
2	0.4	0.0884	0.0480	0.0600	0.1078	0.2158
3	0.6	0.2158	0.0720	0.0800	0.2633	0.4153
4	0.8	0.4153	0.0960	0.1000	0.5067	0.7027
5	1.0	0.7027				

ہم جدول 21.10 سے دیکھتے ہیں کہ موجودہ نتائج مثال 21.14 میں حاصل کردہ نتائج سے بہتر ہیں۔ □

بہتر ترکیب یولر میں فی قدم قطع چال خلل h^3 کے لحاظ سے بڑھتا ہے لہٰذا یہ ترکیب **درجہ دوم ترکیب**[71] ہے۔ بلکہ $\tilde{f}_n = f(x_n, y(x_n))$ لکھ کر مساوات 21.55 استعمال کرنے سے

$$y(x_n + h) - y_n = h\tilde{f}_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}'_n + \frac{1}{6}h^3\tilde{f}''_n + \cdots \tag{21.59}$$

ملتا ہے۔مساوات 21.58 میں قوسین میں بند حصہ کو $\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}$ لکھ کر دوبارہ ٹیلر تسلسل استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.58 سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$y_{n+1} - y_n \approx \frac{1}{2}h(\tilde{f}_n + \tilde{f}_n + h\tilde{f}'_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}''_n + \cdots) \tag{21.60}$$

جس سے مساوات 21.59 تفریق کرتے ہوئے فی قدم قطع چال خلل

$$\frac{h^3}{4}\tilde{f}''_n - \frac{h^3}{6}\tilde{f}''_n + \cdots = \frac{h^3}{12}\tilde{f}''_n + \cdots$$

حاصل ہو گا۔

ہم اب قدم h کی انتخاب پر غور کرتے ہیں جو قدم با قدم تراکیب استعمال کرنے میں اہم مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔ h کی قیمت بہت کم رکھنے سے قدموں کی تعداد اور تعداد ہندسہ خلل بہت بڑھ جاتے ہیں جبکہ h کی قیمت بہت زیادہ رکھنے سے فی قدم قطع چال خلل بڑھتی ہے اور ساتھ ہی ساتھ ایک اضافی خلل، جو f کی قیمت (x_n, y_n) کی بجائے $(x_n, y(x_n))$ پر حاصل کرنے کی بنا پیدا ہوتا ہے، بھی بڑھتی ہے۔اگر f متغیر y کے تابع نہ ہو

---

[70] predictor-corrector method
[71] second order method

تب ان میں دوسرا خلل صفر کے برابر ہو گا، دیگر حال y کی تبدیلی سے f جتنا زیادہ تبدیل ہو، یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا، یعنی $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ کی حتمی قیمت جتنی زیادہ ہو، یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا۔ بلکہ اس خلل کو φ_n سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلہ اوسط قیمت کی اطلاق سے

$$\varphi_n = f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n)) = f_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$$

حاصل ہو گا جہاں y_n کا خلل $\eta_n = y_n - y(x_n)$ ہے، اور $\tilde{y}$ کا مقام y_n اور $y(x_n)$ کے بیچ ہے۔ یوں y_{n+1} کے خلل میں φ_n کا حصہ تقریباً $h\varphi_n = hf_y(x_n, \tilde{y}_n)\eta_n$ ہو گا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ دلچسپی کے خطہ میں $\left|f_y\right|$ کی بالائی حد K کو کم رکھا جائے اور h یوں منتخب کیا جائے کہ

$$\kappa = hK$$

بہت زیادہ بڑی قیمت نہ ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $\left|f_y\right|$ کی قیمت زیادہ ہو (جو y پر f کی زیادہ تابعیت کو ظاہر کرتی ہے) تب K بڑا ہو گا لہٰذا ہمیں h چھوٹا رکھنا ہو گا۔ (مثال 21.14 اور مثال 21.15 میں $f_y = 1$ ، $K = 1$ ، $hK = 0.2$ ہیں۔) اگر f_y بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہو تب ہم K یعنی $\left|f_y(x_n, \tilde{y})\right|$ کی بالائی حد کو کم رکھتے ہوئے وقفہ کے مختلف حصوں پر مختلف h منتخب کر سکتے ہیں تا کہ

$$\kappa_n = hK_n$$

کو کسی مخصوص وقفہ (مثلاً $0.1 \leq \kappa_n \leq 0.2$)، جو درکار درستگی پر منحصر ہو گا، میں رکھا جا سکے۔ فی قدم قطع چال خلل کی بنا ہم h کو کسی ایک مقررہ قیمت سے زیادہ نہیں چن سکتے ہیں۔

رنج کوٹا ترکیب

اس سے بھی زیادہ درست ترکیب جو عملاً انتہائی اہم ہے ترکیب **رنج کوٹا**[72] کہلاتی[73] ہے جس کے ہر قدم پر ہم پہلے چار عدد ذیلی قیمتیں

$$\begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), & B_n &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}A_n), \\ C_n &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}B_n), & D_n &= hf(x_{n+1}, y_n + C_n) \end{aligned} \tag{21.61}$$

[72] Runge-Kutta method

[73] جرمنی کے ریاضی دان کارل رنج [1856-1927] اور ولہلم کوٹا [1867-1944]

تلاش کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n) \tag{21.62}$$

حاصل کی جاتی ہے۔یہاں ثبوت پیش کیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اس ترکیب کی قطع چال خلل درجہ h^5 ہے یعنی یہ درجہ چار ترکیب ہے۔دھیان رہے کہ اگر f صرف x کا تابع ہو تب ترکیب رنج کوٹا سے تکمل کی ترکیب سمسن (حصہ 21.6) حاصل ہوتی ہے۔

اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب رنج کوٹا قابل محنت طلب ہے، کمپیوٹر کی استعمال کے لئے یہ ترکیب موزوں ہے۔

مثال 21.16: **ترکیب رنج کوٹا**

ترکیب رنج کوٹا کو مثال 21.14 کے ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ہم پہلے کی طرح $h = 0.2$ منتخب کرتے ہیں۔یہاں $f(x,y) = x + y$ ہے لہٰذا مساوات 21.14 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} A_n &= 0.2(x_n + y_n), & B_n &= 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5A_n), \\ C_n &= 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5B_n), & D_n &= 0.2(x_n + 0.2 + y_n + C_n) \end{aligned} \tag{21.63}$$

چونکہ یہ تعلقات سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا ہم A_n کو B_n میں پر کر کے $B_n = 0.22(x_n + y_n) + 0.02$ حاصل کرتے ہیں جس کو C_n میں پر کر کے $C_n = 0.222(x_n + y_n) + 0.022$ حاصل کرتے ہیں جس کو D_n میں پر کر کے $D_n = 0.2444(x_n + y_n) + 0.0444$ حاصل کرتے ہیں۔ان حاصل کردہ تعلقات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.62 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2214(x_n + y_n) + 0.0214$$

جدول 21.11 میں حساب دیا گیا ہے۔جدول 21.12 میں ترکیب یولر، بہتر ترکیب یولر اور ترکیب رنج کوٹا کے نتائج کا موازنہ کیا گیا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثال 21.14 اور مثال 21.15 کے نتائج سے موجودہ مثال کے نتائج بہت بہتر ہیں۔ □

لمبائی قدم[74] h ایک مخصوص قیمت H ، جو درستگی پر منحصر ہے، سے زیادہ نہیں ہونی چاہیے اور اس کی قیمت یوں منتخب کرنی چاہیے کہ

$$\kappa = hK \qquad \left(\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \text{ کی بالائی حد } K \text{ ہے}\right)$$

[74] step length

جدول 21.11: ترکیب رنج کوٹا (مثال 21.16)

n	x_n	y_n	x_n+y_n	$0.2214(x_n+y_n)$	y_{n+1}
0	0.0	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.021 400
1	0.2	0.021 400	0.221 400	0.049 018	0.070 418
2	0.4	0.091 818	0.491 818	0.108 889	0.130 289
3	0.6	0.222 107	0.822 107	0.182 014	0.203 414
4	0.8	0.425 521	1.225 521	0.271 330	0.292 730
5	1.0	0.718 251			

جدول 21.12: جدول 21.9، جدول 21.10 اور جدول 21.11 میں خلل کا موازنہ

		خلل کی حتمی قیمت		
x	$y=e^x-x-1$	ترکیب یولر	بہتر ترکیب یولر	ترکیب رنج کوٹا
0.2	0.021 403	0.021	0.0014	0.000 003
0.4	0.091 825	0.052	0.0034	0.000 007
0.6	0.222 119	0.094	0.0063	0.000 011
0.8	0.425 541	0.152	0.0102	0.000 020
1.0	0.718 282	0.229	0.0156	0.000 031

کی قیمت 0.1 اور 0.2 کے بیچ ہو (جیسا بہتر ترکیب یولر میں تھا)۔ ترکیب رنج کوٹا میں ہم h کو A_n، B_n، C_n سے قابو کر سکتے ہیں چونکہ f_y کی تعریف کی رو سے

$$\kappa = hK \approx h\left|f_y\right| \approx h\left|\frac{f(x,y^*)-f(x,y^{**})}{y^*-y^{**}}\right|$$

ہو گا اور اگر ہم $x=x_n+\frac{1}{2}h$، $y^*=y_n+\frac{1}{2}B_n$، $y^{**}=y_n+\frac{1}{2}A_n$ منتخب کریں تب $y^*-y^{**}=\frac{B_n-A_n}{2}$ اور

$$\kappa \approx \kappa_n = 2\left|\frac{C_n-B_n}{B_n-A_n}\right| \tag{21.64}$$

ہو گا۔ ہم اب کوئی قاعدہ بنا سکتے ہیں مثلاً جب تک $0.05 \le \kappa_n \le 0.2$ ہو ہم h کو تبدیل نہیں کرتے جبکہ $\kappa_n > 0.2$ کی صورت میں ہم h کو 50 % کم کرتے ہیں اور $\kappa_n < 0.05$ کی صورت میں ہم h کو دگنا کرتے ہیں (اگر h دگنا کرنے سے اس کی قیمت منتخب H سے بڑھتی نہ ہو جہاں H از خود درکار درستگی پر منحصر ہے)۔

h کو قابو کرنے کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم حساب کرنے کے ساتھ ساتھ قدم $2h$ لیتے ہوئے بھی حساب

کرتے ہیں جس سے فی قدم قطع چال خلل $32 = 2^5$ گنا بڑھتا ہے لیکن قدموں کی تعداد گھٹنے کی بنا اصل خلل $16 = \frac{2^5}{2}$ گنا بڑھتا ہے۔یوں لمبائی قدم کو h رکھتے ہوئے خلل کی قیمت مطابقتی y کے فرق δ کے تقریباً $\frac{1}{15}$ گنا ہو گی۔ ہم اب عدد ϵ منتخب کرتے ہوئے (مثلاً آخری ہندسے کی اکائی کا نصف، جو بہت بڑی قیمت ہے) h کو اس وقت تک تبدیل نہیں کرتے جب تک $0.2\epsilon \le |\delta| \le 10\epsilon$ ہو، اگر $|\delta| > 10\epsilon$ ہو تب ہم h کو $50\,\%$ کم کرتے ہیں اور اگر $|\delta| < 0.2\epsilon$ ہو تب ہم h کو دگنا کرتے ہیں؛ ظاہر ہے کہ h کو اس صورت دگنا کرنا ممکن ہو گا جب تک (پہلے کی طرح) یہ H سے تجاوز نہ کرتا ہو۔

سوالات

سوال 21.87 تا سوال 21.90 میں ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے دس قدم تک چلیں۔

سوال 21.87: $y' = y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01$
جواب: $1, 1.01, 1.0201, 1.030301, 1.04060401, \cdots$

سوال 21.88: $y' = xy, \quad y(1) = 1, \quad h = 0.1$
جواب: $1, 1.1, 1.221, 1.36752, 1.5452976, \cdots$

سوال 21.89: $y' = xy - 1, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$
جواب: $0, -0.1, -0.201, -0.30502, \cdots$

سوال 21.90: $y' = xy, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1$
جواب: $1, 1, 1.01, 1.0302, 1.061106, \cdots$

سوال 21.91: $y' = 2x, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$ کو بہتر ترکیب یولر سے حل کریں۔خلل صفر کے برابر کیوں ہے؟
جواب: $0, 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, \cdots$

سوال 21.92: ایسی چند مثالیں پیش کریں جہاں بہتر ترکیب یولر بالکل درست جواب دیتی ہو۔

سوال 21.93: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 21.14 کو دوبارہ حل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ خلل مثال 21.14 کے خلل کا $50\,\%$ ہو گا۔
جواب: $0, 0, 0.01, 0.031, 0.0641, 0.11051, 0.171561, \cdots$

سوال 21.94: $h = 0.01$ (بیس قدم) لیتے ہوئے مثال 21.14 کو دوبارہ حل کریں۔ نقطہ $x = 2$ پر حتمی خلل کتنا ہے؟

جواب: $|\epsilon| = 0.000\,81$, $f(0.2) = 0.020\,190\,039\,947$

سوال 21.95: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 21.15 کو دوبارہ حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ خلل مثال 21.15 کے خلل کا $25\,\%$ ہو گا۔

جواب: $0, 0.005, 0.021\,025, 0.049\,232\,625, 0.147\,446\,7, \cdots$

سوال 21.96: ترکیب یولر سے $y' = \frac{y}{x},\ y(1) = 1,\ h = 0.1$ حل کریں۔

جواب: $1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, \cdots$

سوال 21.97: ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+x^2},\ y(0) = 1,\ h = 0.1$ حل کریں۔

جواب: $1, 1.1, 1.199099, 1.2951637, 1.3569068, \cdots$

سوال 21.98: ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+y^2},\ y(0) = 0,\ h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟(اصل حل $y = \tan x$ ہے۔)

جواب: $1.825\,\%$, $0, 0.1, 0.199099, 0.295200286, 0.387184487, 0.474147677, \cdots$

سوال 21.99: بہتر ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+y^2},\ y(0) = 0,\ h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟

جواب: $2.758\,\%$, $0, 0.09950495, 0.197118863, 0.29128, 0.3809659, 0.46563611, \cdots$

سوال 21.100: ترکیب رنج کوٹا سے $y' = \frac{1}{1+y^2},\ y(0) = 0,\ h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟

جواب: $2.602\,\%$, $0, 0.099669955, 0.19743461, 0.2917243, 0.38149278, 0.46622, \cdots$

سوال 21.101: ترکیب رنج کوٹا سے $y' = y,\ y(0) = 1,\ h = 0.1$ حل کرتے ہوئے $y = e^x$ کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ پانچ درجہ اعشاریہ تک نتائج درست ہیں۔

جواب: $1, 1.105170833, 1.22140257, 1.349858497, 1.49182424, \cdots$

سوال 21.102: $h = 0.1$ لیتے ہوئے ترکیب یولر سے $y' = -10y,\ y(0) = 1$ حل کریں۔ جواب پر تبصرہ کریں۔

جواب: $1, 0, 0, \cdots$؛ اصل حل $y = e^{-10x}$

سوال 21.103: مساوات 21.54 میں x_n تا x_{n+1} تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت کو نقطہ x_n پر $f(x,y)$ کی قیمت لے کر x_0 تا x_{n+1} تکمل لیتے ہوئے ترکیب یولر اخذ کریں۔

سوال 21.104: ترکیب یولر کوشی کی طرح ایک اور ترکیب درج ذیل ہے

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y^*_{n+1})$$

جہاں $y^*_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)$ ہے۔اس کی جیومیٹریائی وجہ پیش کریں۔اس ترکیب میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 21.14 حل کریں۔
جواب: $0, 0.02, 0.0884, 0.215848, 0.41533458, 0.702708, \cdots$

سوال 21.105: کوٹا کی تین درجی ترکیب درج ذیل ہے

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(A_n + 4B_n + M_n)$$

جہاں

$$\begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), \quad B_n = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}A_n), \\ M_n &= hf(x_{n+1}, y_n - A_n + 2B_n), \end{aligned} \tag{21.65}$$

ہیں۔اس ترکیب میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 21.14 حل کریں۔نتائج کا جدول 21.10 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $0, 0.0213333, 0.09165511, 0.2218081, 0.42503497, 0.717509377, \cdots$

21.8 دو درجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

دو درجی تفرقی مساوات اور ایک ہی نقطہ پر دو ابتدائی شرائط کو ابتدائی قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔اس حصے میں ہم درج ذیل صورت کے ابتدائی قیمت مسئلوں

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{21.66}$$

کا حل دو اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا سیکھیں گے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ f ایسا تفاعل ہے کہ اس مسئلے کا یکتا حل کسی ایسے وقفہ پر موجود ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہے۔ پہلی ترکیب سادہ لیکن کم درست ہے جس سے اعدادی ترکیب سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے جبکہ دوسری ترکیب بہت زیادہ درست اور عملاً انتہائی اہم ہے۔

دونوں تراکیب میں یکساں فاصلہ نقطوں $x_1 = x_0 + h$، $x_2 = x_0 + 2h$، $\cdots$ پر ہم مساوات 21.66 کے حل $y(x)$ کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں گے جنہیں بالترتیب y_1، y_2، $\cdots$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ اسی طرح ان نقطوں پر تفرق $y'(x)$ کی تخمینی قیمتوں کو بالترتیب y'_1، y'_2، $\cdots$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

گزشتہ حصے کی تراکیب ٹیلر تسلسل

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \cdots \tag{21.67}$$

سے اخذ کی گئیں۔ موجودہ حصے میں اس کے ساتھ تفرق کی ٹیلر تسلسل

$$y'(x+h) = y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2}y'''(x) + \cdots \tag{21.68}$$

بھی استعمال کی جائے گی۔

کم تر درستگی کی اعدادی ترکیب میں مساوات 21.67 اور مساوات 21.67 میں y''' اور مزید زیادہ درجے کے تفرق رد کیے جائیں گے۔ یوں مساوات 21.67 اور مساوات 21.67 سے

$$\begin{aligned} y(x+h) &\approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) \\ y'(x+h) &\approx y'(x) + hf''(x) \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ اس پہلی ترکیب کی پہلی قدم میں

$$y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0)$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.66 سے

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0$$

حاصل کیا جاتا ہے جو $y(x_1) = y(x_0 + h)$ کی تخمینی قیمت ہے۔ مزید

$$y'_1 = y'_0 + hy''_0$$

ہو گا جس کی ضرورت اگلی قدم میں پیش آئے گی۔دوسری قدم میں

$$y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.67 سے

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \tfrac{h^2}{2}y_1''$$

حاصل کیا جاتا ہے جو $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ کی تخمینی قیمت ہے۔مزید

$$y_2' = y_1' + hy_1''$$

ہو گا۔اسی طرح چلتے ہوئے $n + 1$ ویں قدم میں

$$y_n'' = f(x_n, y_n, y_n')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.67 سے

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \tfrac{h^2}{2}y_n'' \tag{21.69}$$

حاصل ہو گا جو $y(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے۔مزید

$$y_{n+1}' = y_n' + hy_n'' \tag{21.70}$$

ہو گا جو $y'(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے جو اگلی قدم میں درکار ہو گی۔

جیومیٹریائی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کو تخمینی طور پر قطع مکافی کے ٹکڑوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 21.17: **مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 میں دی گئی ترکیب کا استعمال**
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کا حل مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$y'' = \tfrac{1}{2}(x + y + y' + 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہیں۔یوں مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 0.2y_n' + 0.02y_n'' \\ y_{n+1}' &= y_n' + 0.2y_n'' \end{aligned}$$

[جہاں $y_n'' = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n + y_n' + 2)$ ہے۔]

جدول 21.13 میں حساب دکھایا گیا ہے۔اس مسئلے کا اصل حل $y = e^x - x - 1$ ہے۔آپ جدول میں دی گئی قیمتوں کا اصل حل سے موازنہ کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ خلل بہت زیادہ ہے۔عملی استعمال میں یہ ترکیب عموماً درست نتائج نہیں دے گی۔ □

جدول 21.13: جدول برائے مثال 21.17

n	x_n	y_n	y'_n	$0.2y'_n$	$x_n + y_n + y'_n + 2$	$0.2y''_n$	$0.02y''_n$	$0.2y'_n + 0.02y''_n$
0	0	0.0000	0.0000	0.0000	2.0000	0.2000	0.0200	0.0200
1	0.2	0.0200	0.2000	0.0400	2.4200	0.2420	0.0242	0.0642
2	0.4	0.0842	0.4420	0.0884	2.9262	0.2926	0.0293	0.1177
3	0.6	0.2019	0.7346	0.1469	3.5365	0.3537	0.0354	0.1823
4	0.8	0.3842	1.0883	0.2177	4.2725	0.4273	0.0427	0.2604
5	1.0	0.6446						

رنج کوٹا نیستروم ترکیب

آئیں اب ابتدائی قیمت دو درجی مسئلہ حل کرنے کی دوسری ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو رنج کوٹا نیستروم ترکیب[75] کہتے[76] ہیں۔ ہم ثبوت پیش کیے بغیر بتلاتا چاہتے ہیں کہ یہ ترکیب چار درجی ترکیب ہے جس کا مطلب ہے کہ y اور y' کے ٹیلر تسلسل میں ابتدائی وہ تمام اجزاء شامل ہیں جن میں h^4 یا اس سے کم طاقت پایا جاتا ہو۔

عمومی $n+1$ ویں قدم میں ہم پہلے ذیلی مساوات

$$\begin{aligned}
A_n &= \tfrac{1}{2}hf(x_n, y_n, y'_n) \\
B_n &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \beta_n, y'_n + A_n) \quad [\text{جہاں } \beta_n = \tfrac{1}{2}h(y'_n + \tfrac{1}{2}A_n) \text{ ہے}] \\
C_n &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \beta_n, y'_n + B_n) \\
D_n &= \tfrac{1}{2}hf(x_n + h, y_n + \delta_n, y'_n + 2C_n) \quad [\text{جہاں } \delta_n = h(y'_n + C_n) \text{ ہے}]
\end{aligned} \tag{21.71}$$

اور بعد میں نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + K_n) \qquad [\text{جہاں } K_n = \tfrac{1}{3}(A_n + B_n + C_n) \text{ ہے}] \tag{21.72}$$

حاصل کرتے ہیں جو $y(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہو گی۔ مزید ہم

$$y'_{n+1} = y'_n + K_n^* \quad [\text{جہاں } K_n^* = \tfrac{1}{3}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n) \text{ ہے}] \tag{21.73}$$

حاصل کرتے ہیں جو $y'(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے جو اگلے قدم میں درکار ہو گی۔

---

[75] Runge-Kutta-Nystrom method

[76] فن لینڈ کا ریاضی دان ایورٹ جوہانس نیستروم

h کو اب قابو کیا جا سکتا ہے (جیسا گزشتہ حصے کے آخر میں بتایا گیا)۔اب ہم δ^* اور δ^{**} میں زیادہ بڑی قیمت کے برابر δ منتخب کرتے ہیں جہاں y کی مطابقتی قیمتوں کے فرق کے $\frac{1}{15}$ گنا کو δ^* اور y' کی مطابقتی قیمتوں کے فرق کے $\frac{1}{15}$ گنا کو δ^{**} کہتے ہیں۔

مثال 21.18: رنج کوٹا نیسٹروم ترکیب

$h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 21.17 میں دیے گئے مسئلے کو رنج کوٹا نیسٹروم ترکیب سے حل کریں۔

حل: یہاں $f = 0.5(x + y + y' + 2)$ ہے لہٰذا مساوات 21.71 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
A_n &= 0.05(x_n + y_n + y'_n + 2),\\
B_n &= 0.05(x_n + 0.1 + y_n + \beta_n + y'_n + A_n + 2), \quad [\beta_n = 0.1(y'_n + \tfrac{1}{2}A_n)],\\
C_n &= 0.05(x_n + 0.1 + y_n + \beta_n + y'_n + B_n + 2),\\
D_n &= 0.05(x_n + 0.2 + y_n + \delta_n + y'_n + 2C_n + 2), \quad [\delta_n = 0.2(y'_n + C_n)]
\end{aligned}$$

دیا گیا مسئلہ سادہ ہے جس کے A_n ، B_n ، C_n اور D_n بھی سادہ ہیں لہٰذا ہم A_n کو B_n میں پر کرنے کے بعد B_n کو C_n میں پر کرتے ہیں اور آخر میں C_n کو D_n میں پر کرتے ہیں۔یوں درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
B_n &= 0.05[1.0525(x_n + y_n) + 1.1525y'_n + 2.205],\\
C_n &= 0.05[1.055\,125(x_n + y_n) + 1.160\,125y'_n + 2.215\,25],\\
D_n &= 0.05[1.116\,063\,75(x_n + y_n) + 1.327\,613\,75y'_n + 2.443\,677\,5]
\end{aligned}$$

ان سے ہم K_n اور K_n^* حاصل کر کے مساوات 21.72 اور مساوات 21.73 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + a(x_n + y_n) + by'_n + c\\
y'_{n+1} &= y'_n + a^*(x_n + y_n) + b^*y'_n + c^*
\end{aligned} \tag{21.74}$$

جہاں

$$\begin{aligned}
a &= 0.010\,358\,8 \qquad b = 0.211\,042\,1 \qquad c = 0.021\,400\,8\\
a^* &= 0.105\,521\,9 \qquad b^* = 0.115\,881\,1 \qquad c^* = 0.221\,403\,0
\end{aligned}$$

ہیں۔جدول 21.14 میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مطابقتی حساب کے پانچ قدم دکھائے گئے ہیں۔ $y(x)$ کی تخمینی قیمتوں میں خلل مثال 21.17 کی نسبت بہت کم ہے (جدول 21.15)۔ □

جدول 21.14: جدول برائے مثال 21.18

n	x_n	y_n	y'_n	$a(x_n + y_n) + by'_n + c$	$a^*(x_n + y_n) + b^*y'_n + c^*$
0	0.0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.021 400 8	0.221 403 0
1	0.2	0.021 400 8	0.221 403 0	0.070 419 6	0.270 422 0
2	0.4	0.091 820 4	0.491 825 0	0.130 291 3	0.330 294 0
3	0.6	0.222 111 7	0.822 119 0	0.203 418 6	0.403 421 9
4	0.8	0.425 530 3	1.225 540 9	0.292 736 5	0.492 740 3
5	1.0	0.718 266 8	1.718 281 2		

جدول 21.15: مثال 21.17 اور مثال 21.18 کے نتائج کا موازنہ

x	$e^x - x - 1$	خلل کی حتمی قیمت	
		مثال 21.17	جدول 21.14
0.2	0.021 402 8	0.0014	0.000 002 0
0.4	0.091 824 7	0.0076	0.000 004 3
0.6	0.222 118 8	0.0202	0.000 007 1
0.8	0.425 540 9	0.0413	0.000 010 6
1.0	0.718 281 8	0.0737	0.000 015 0

ہر اعدادی ترکیب میں قطع چال خلل کے علاوہ تعداد ہندسہ خلل بھی پایا جاتا ہے۔ہم آپ کو خبر دار کرنا چاہتے ہیں کہ تعداد ہندسہ خلل نتائج پر دور رس اثر ڈال سکتا ہے۔مثال کے طور پر مسئلہ $y'' = y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ کا حل $y = e^{-x}$ ہے لیکن تعداد ہندسہ خلل کی بنا نتیجہ میں درکار حل e^{-x} کا چھوٹا مضرب شامل ہو گا جو آخر کار (کافی زیادہ قدموں کے بعد) اصل حل سے بھی زیادہ ہو سکتا ہے۔اس کو اجتماع خلل[77] کہتے ہیں۔خلل کے جمع ہونے سے بچنے کے لئے کافی تجربہ درکار ہو گا۔

سوالات

مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 کی مدد سے سوال 21.106 تا سوال 21.110 کو پانچ قدم تک حل کریں۔

سوال 21.106: $y'' = y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad h = 0.1$

[77] building-up error

سوال 21.107: $y'' = y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad h = 0.1$

سوال 21.108: $y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad h = 0.1$

سوال 21.109: $y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad h = 0.05$

سوال 21.110: $y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad h = 0.1$

سوال 21.111: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 21.17 کو دوبارہ حل کریں۔خلل کا موازنہ مثال 21.17 کی خلل کے ساتھ کریں جو جدول 21.15 میں دی گئیں ہیں۔

سوال 21.112: $h = 0.05$ لیتے ہوئے سوال 21.111 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 21.113: $h = 0.2$ لیتے ہوئے رنج کوٹا نیستروم کی ترکیب سے سوال 21.110 کو چار قدم تک حل کریں۔نتائج کا درج ذیل نو ہندسوں تک درست جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔
0.099 833 417, 0.198 669 331, 0.295 520 207, 0.389 418 342

سوال 21.114: $h = 0.1$ لیتے ہوئے سوال 21.113 دوبارہ حل کریں۔

سوال 21.115: ابتدائی قیمت مسئلہ $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$ پر غور کریں۔دکھائیں کہ $h = 0.1$ لیتے ہوئے مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.1y'_n + 0.01\frac{x_n y'_n - y_n}{1 - x_n^2}, \quad y'_{n+1} = y'_n + 0.2\frac{x_n y'_n - y_n}{1 - x_n^2}$$

پانچ قدم تک حل کریں۔اس تفرقی مساوات کے اصل حل کو تلاش کریں جو $y = x$ ہے۔

$h = 0.1$ لیتے ہوئے سوال 21.116 تا سوال 21.118 کو مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 کی مدد سے پانچ قدم تک حل کریں۔دیے گئے اصل حل کی تصدیق کریں۔

سوال 21.116: $y'' = xy' - 3y, \; y(0) = 0, \; y'(0) = -3,$ اصل حل $y = x^3 - 3x$

سوال 21.117: $y'' = xy' - 4y, \; y(0) = 3, \; y'(0) = 0$ اصل حل $y = x^4 - 6x^2 + 3$

سوال 21.118: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0, \; y(0) = -\frac{1}{2}, \; y'(0) = 0,$
اصل حل $y = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

21.9 اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات

اس باب کے باقی حصہ میں جزوی تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ہم بالخصوص مساوات لاپلاس، مساوات پوئسن اور حراری مساوات پر غور کریں گے جو انجینئری میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں اور جو بیضوی، قطع مکافی اور قطع زائد جزوی تفرقی مساوات کے بہترین نمونے ہیں۔ان کی تعریف درج ذیل ہے۔

ایسی جزوی تفرقی مساوات جو بلند تر درجہ تفرق کے لحاظ سے خطی ہو کو **بظاہر خطی**[78] کہتے ہیں۔ یوں دو متغیرات x, y والی دو درجی بظاہر خطی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{21.75}$$

جہاں u نا معلوم متغیر ہے۔اس مساوات کے تین اقسام درج ذیل ہیں

بیضوی قسم	$AC - B^2 > 0$	(مثال: مساوات لاپلاس)
قطع مکافی قسم	$AC - B^2 = 0$	(مثال: حراری مساوات)
قطع زائد قسم	$AC - B^2 < 0$	(مثال: مساوات موج)

جہاں حراری مساوات اور مساوات موج میں y کی جگہ t ہو گا۔یہاں عددی سر A ، B ، C از خود x ، y کے تفاعل ہو سکتے ہیں لہٰذا xy مستوی کے مختلف خطوں میں مساوات 21.75 کی قسم مختلف ہو سکتی ہے۔درج بالا گروہ بندی محض دستوری نہیں ہے بلکہ عملاً انتہائی اہم ہے چونکہ مساوات کے حل کا رویہ اور اضافی (سرحدی اور ابتدائی) شرائط اس گروہ بندی پر منحصر ہوں گے۔

بیضوی مساوات عموماً کسی خطہ R میں سرحدی مسئلہ کو جنم دیتی ہے۔اگر u کی قیمت R کی سرحدی منحنی C پر دی گئی ہو تب اس کو **سرحدی مسئلے کی پہلی صورت یا مسئلہ ڈرشلے**[79] کہتے ہیں، اگر C پر $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ (عمودی تفرق) دیا گیا ہو تب اس کو **سرحدی مسئلے کی دوسری صورت یا مسئلہ نیومن**[80] کہتے ہیں اور اگر C کے کچھ حصے پر u اور باقی حصے پر u_n دیا گیا ہو تب اس کو **تیسری صورت یا مخلوط مسئلہ**[81] کہتے ہیں۔ C ایک بند منحنی یا ایک سے زیادہ بند منحنیات ہو سکتی ہیں۔

---

[78] quasilinear
[79] Dirichlet problem
[80] Neumann problem
[81] mixed problem

اس حصے میں ہم مساوات لاپلاس

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{21.76}$$

اور مساوات پوئسن

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \tag{21.77}$$

پر غور کرتے ہیں جو عملاً اہم ترین بیضوی مساوات ہیں۔ اعدادی ترکیب حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات میں جزوی تفرق کی جگہ مطابقتی فرق لکھتے ہیں۔ ٹیلر تسلسل

(21.78)

$$\text{(الف)} \quad u(x+h, y) = u(x, y) + hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x, y) + \frac{1}{6}h^3 u_{xxx}(x, y) + \cdots$$

$$\text{(ب)} \quad u(x-h, y) = u(x, y) - hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x, y) - \frac{1}{6}h^3 u_{xxx}(x, y) + \cdots$$

لکھ کر مساوات 21.78-الف سے مساوات 21.78-ب تفریق کر کے $h^3, h^4, \cdots$ کو رد کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{(الف)} \quad u_x(x, y) \approx \frac{1}{2h}[u(x+h, y) - u(x-h, y)] \tag{21.79}$$

اسی طرح

$$\text{(ب)} \quad u_y(x, y) \approx \frac{1}{2k}[u(x, y+k) - u(x, y-k)] \tag{21.79}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ہم اب دو درجی تفرق کی طرف بڑھتے ہیں۔ مساوات 21.78-الف اور مساوات 21.78-ب کو جمع کر کے $h^4, h^5, \cdots$ کو رد کرتے ہوئے u_{xx} کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

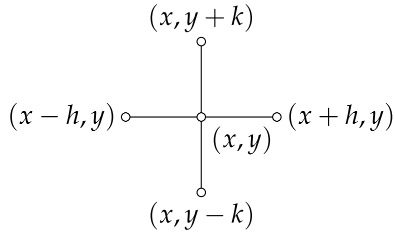
$$\text{(الف)} \quad u_{xx}(x, y) \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)] \tag{21.80}$$

اسی طرح

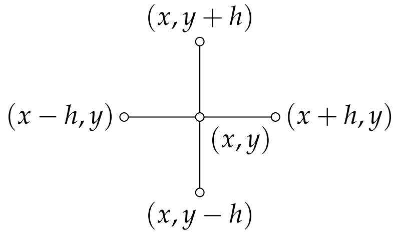
$$\text{(ب)} \quad u_{yy}(x, y) \approx \frac{1}{k^2}[u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)] \tag{21.80}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} \text{(پ)} \quad u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{4hk}[&u(x+h, y+k) - u(x-h, y+k) \\ &- u(x+h, y-k) + u(x-h, y-k)] \end{aligned} \tag{21.80}$$



شکل 21.11: (مساوات 21.79 اور مساوات 21.80 میں استعمال نقطے



شکل 21.12: (مساوات 21.81 اور مساوات 21.82 میں استعمال نقطے

ہو گا (سوال 21.121)۔ شکل 21.11 میں نقطہ $(x+h, y)$ ، $(x-h, y)$ ، ... دکھائے گئے ہیں جو مساوات 21.79 اور مساوات 21.80 میں استعمال ہوئے ہیں۔[مساوات 21.80-پ کی ضرورت موجودہ حصے میں پیش نہیں آئے گی۔]

ہم مساوات 21.80-الف اور مساوات 21.80-ب کو مساوات پوئسن (مساوات 21.77) میں پر کرتے ہوئے

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = h^2 f(x, y) \tag{21.81}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں سادہ کلیہ اخذ کرنے کی خاطر $k = h$ لیا گیا ہے۔ یوں **مساوات پوئسن** (مساوات 21.77) کی مطابقتی مساوات فرق درج بالا مساوات 21.81 ہے جہاں h کو **جسامت جال**[82] کہتے ہیں۔اسی طرح **مساوات لاپلاس** (مساوات 21.76) کی مطابقتی مساوات فرق

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0 \tag{21.82}$$

ہو گی۔ جیسا شکل 21.12 میں دکھایا گیا ہے، مساوات 21.82 نقطہ (x, y) پر u کی قیمت کو پڑوسی چار نقطوں پر u کی قیمت کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مساوات 21.81 اور مساوات 21.82 میں $h^2\nabla^2 u$ کی تخمینی قیمت پانچ نقاطی تخمین ہے جہاں عددی سر کا خاکہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} \tag{21.83}$$

---

[82] mesh size

مساوات 21.82 کہتی ہے کہ نقطہ (x,y) پر u کی قیمت پڑوسی چار نقطہ جال پر u کی قیمتوں کا اوسط ہو گا۔

اس طرح مساوات 21.81 کو نہایت خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\} u = h^2 f(x,y)$$

21.9.1 مسئلہ ڈرشلے

مسئلہ ڈرشلے کا خطہ R میں اعدادی حل تلاش کرنے کی خاطر ہم h منتخب کرتے ہوئے R میں یکساں h فاصلہ پر افقی اور عمودی سیدھی لکیروں کا جال بچھاتے ہیں (شکل 21.13)۔ جن نقطوں پر یہ لکیریں ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں ان کو **نقطہ جال** یا **جوڑ**[83] کہا جاتا ہے۔ اس کے بعد دی گئی جزوی تفرقی مساوات کو تخمیناً اس کی مطابقتی مساوات فرق سے ظاہر کیا جاتا ہے جو ہر جوڑ پر u کی نا معلوم قیمت کو R میں باقی جوڑ پر اور دیے گئے سرحدی معلومات کے ساتھ منسلک کرتی ہے۔ اس عمل سے خطی الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جس کے حل R میں جوڑوں پر u کی تخمینی قیمت دیں گی۔ ہم دیکھیں گے کہ مساواتوں کی تعداد نا معلوم متغیرات کی تعداد، یعنی R میں جوڑوں کی تعداد، کے برابر ہو گی۔ چونکہ ہر جوڑ پر u کی قیمت صرف پڑوسی چار جوڑ پر u کی قیمتوں پر منحصر ہے لہٰذا اس نظام کا عددی سر **غیر گنجان قالب**[84] ہو گا جس میں بہت کم اجزاء غیر صفر ہوں گے۔ حقیقت میں یہ قالب بہت بڑا ہو گا چونکہ درست نتائج حاصل کرنے کی خاطر زیادہ جوڑ درکار ہوں گے اور 500×500 قالب یا اس سے بھی بڑا قالب ذخیرہ کرنے میں دشواری پیش آ سکتی ہے[85]۔ یوں بلا واسطہ ترکیب کی بجائے بالواسطہ ترکیب کو ترجیح دی جاتی ہے۔ بالخصوص عمومی مسائل میں **ترکیب گاوس زائڈل**[86] جس[87] کو **ترکیب لیبمن**[88] بھی کہتے ہیں کار آمد ثابت ہوتی ہے۔ ہم اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے پیش کرتے ہیں جس میں اپنی آسانی کی خاطر جوڑوں کی تعداد کم رکھی گئی ہے۔ ہم جوڑ اور جوڑ پر تخمینی حل کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$N_{ij} = (ih, jh), \quad u_{ij} = u(ih, jh) \tag{21.84}$$

---

[83] mesh point, nodal point

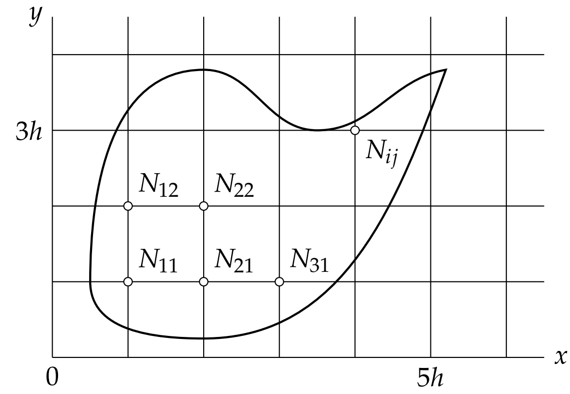
[84] sparse matrix

[85] موجودہ قالب سہ وتری (تعریف جلد پیش کی جائے گی) نہیں ہے۔ اگر ایسا ہوتا تب ذخیرہ کا مسئلہ پیدا کیے بغیر ہم گاوسی اسقاط استعمال کر سکتے تھے۔

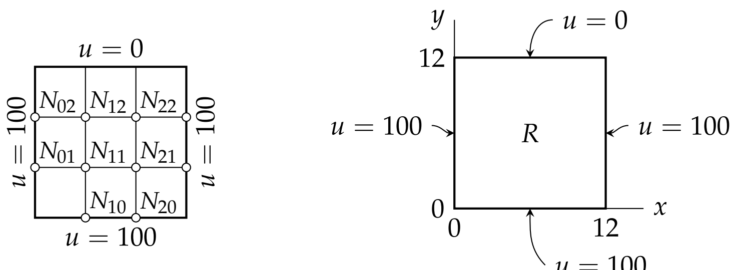
[86] Gauss-Seidel method

[87] جرمن ریاضی دان فلپ لڈوگ ون زائڈل [1821-1896]

[88] Liebmann's method



شکل 21.13: جسامت جال h ہے۔ جوڑ $N_{11}=(h,h)$ ، $\cdots$ ، $N_{ij}=(ih,jh)$ ہیں۔



(ب) جال اور جوڑ

(الف) دیا گیا مسئلہ

شکل 21.14: شکل برائے مثال 21.19

اس طرح مساوات 21.82 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{ij}=0 \tag{21.85}$$

مثال 21.19: مساوات لاپلاس۔ ترکیب لیبمن

یکساں موٹائی اور یکساں مادے کی چکور چادر کے اطراف کی لمبائی $12\,\mathrm{cm}$ ہے۔ اس چادر کے تین کناروں کو $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ پر اور ایک کنارے کو $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ پر رکھا گیا ہے (شکل 21.14)۔ جسامت جال کو $4\,\mathrm{cm}$ (چوڑے خانے) رکھتے ہوئے ترکیب لیبمن سے جوڑوں پر برقرار حال درجہ حرارت تلاش کریں۔

حل: برقرار حال نتائج میں وقت بطور متغیر نہیں پایا جائے گا لہٰذا حراری مساوات

$$u_t = k^2(u_{xx} + u_{yy})$$

سے مساوات لاپلاس حاصل ہو گی۔یوں ہمیں مسئلہ ڈرشلے حل کرنا ہو گا۔ہم شکل میں دکھائی گئی جال بچھاتے ہیں اور جوڑ N_{11} ، N_{21} ، N_{12} ، N_{22} پر اسی ترتیب میں غور کرتے ہیں۔مساوات 21.85 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad\quad &= -200 \\ u_{11} - 4u_{21} \qquad + u_{22} &= -200 \\ u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= -100 \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -100 \end{aligned} \tag{21.86}$$

عملاً اتنے کم مساوات کو آپ گاوسی اسقاط سے حل کرے ہوئے درج ذیل حاصل کریں گے۔

$$u_{11} = u_{21} = 87.5, \quad u_{12} = u_{22} = 62.5$$

ایک اعشاریہ تک (زیادہ درست) جوابات 88.1 اور 61.9 ہیں (جنہیں فوریئر تسلسل سے حاصل کیا گیا)۔یوں خلل 1 % کے لگ بھگ ہے جو اتنے چوڑے جال کے لئے حیرت کن بات ہے۔ زیادہ مساواتوں کی صورت میں نظام کو ترکیب لیبمن سے حل کیا جائے گا۔ایسا کرتے ہوئے مساوات 21.86 کو پہلے درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u_{11} &= \qquad 0.25u_{21} + 0.25u_{12} \qquad + 50 \\ u_{21} &= 0.25u_{11} \qquad\qquad + 0.25u_{22} + 50 \\ u_{12} &= 0.25u_{11} \qquad\qquad + 0.25u_{22} + 25 \\ u_{22} &= \qquad 0.25u_{21} + 0.25u_{12} \qquad + 25 \end{aligned} \tag{21.87}$$

انہیں اب ترکیب گاوس زائڈل میں استعمال کیا جاتا ہے۔ $u_{11} = w$ ، $u_{21} = x$ ، $u_{12} = y$ ، $u_{22} = z$ لیتے ہوئے یہ حصہ میں مساوات دیتی ہیں جہاں ابتدائی قیمتیں 100 ، 100 ، 100 لیتے ہوئے اس کو حل کیا گیا ہے۔جوڑ پر قیمتوں کا بہتر اندازہ لگانے سے نتائج زیادہ آسانی سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ اس نظام کا حل $u_{11} = u_{21} = 87.5$ اور $u_{12} = u_{22} = 62.5$ ہے۔

آسانی پیدا کرنے کی تراکیب جاننے کے لئے سوال 21.122 دیکھیں۔

رائے: اگر $h = \frac{l}{n}$ منتخب کیا جائے جہاں R کی ایک طرف کی لمبائی l ہو اور $(n-1)^2$ جوڑ کو صف در صف لیا جائے یعنی پہلے صف $N_{11}, N_{21}, \cdots, N_{n1}$ کے بعد دوسرا صف $N_{12}, N_{22}, \cdots, N_{n2}$ اور اس

کے بعد تیسرا صف، . . . لیا جائے تب نظام کا $(n-1)^2 \times (n-1)^2$ عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ درج ذیل ہو گا

$$\text{(الف)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} & & & \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} & & \\ \vdots & & & & \\ & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \\ & & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{21.88}$$

جہاں

$$\text{(ب)} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ & & 1 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 \end{bmatrix} \tag{21.88}$$

ہے جو $(n-1) \times (n-1)$ قالب ہے۔یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\boldsymbol{A}$ غیر نادر ہو گا۔ □

ایسا قالب جس کے تمام غیر صفر اجزاء مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے متوازی ترچھی لکیروں پر واقع ہوں (ان لکیروں اور مرکزی وتر کے بیچ ایسی ترچھی لکیریں ہو سکتی ہیں جن کے اجزاء صفر ہوں) کو پٹی قالب[89] کہتے ہیں۔مثال کے طور پر مساوات 21.88 میں $\boldsymbol{A}$ پٹی قالب ہے۔اگرچہ گاوسی اسقاط پٹی میں صفروں کو برقرار نہیں رکھتا ہے البتہ یہ پٹی کے باہر غیر صفر اجزاء بھی پیدا نہیں کرتا ہے۔یوں عددی سر قالب کی پٹی صورت سود مند ثابت ہوتی ہے۔مساوات 21.88 میں جوڑ کی ترتیب یوں منتخب کی گئی کہ پٹی قالب حاصل ہو۔

21.9.2 بدلتی رخ خفی ترکیب

ایسا قالب جس میں تمام غیر صفر اجزاء مرکزی وتر یا مرکزی وتر کے ساتھ ملے ہوئے خانوں میں پائے جاتے ہوں کو سہ وتری قالب[90] کہتے ہیں۔ایسی صورت میں گاوسی اسقاط کا استعمال خصوصی طور پر سادہ ثابت ہوتا ہے۔

اس سے سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا مساوات لاپلاس یا مساوات پوئسن کے مسئلہ ڈرشلے کا اعدادی حل تلاش کرنے کی خاطر ہم مساوات کا ایسا نظام حاصل کر سکتے ہیں جس کا عددی سر قالب سہ وتری ہو۔جی ہاں ایسا ممکن ہے اور سہ

band matrix[89]
tridiagonal matrix[90]

وتری قالب حاصل کرنے کی ایک مقبول ترکیب **بدلتی رخ خفی ترکیب**[91] کہلاتی ہے۔مساوات 21.83 کی نقش کو دیکھ کر معلوم ہوتا ہے کہ اگر صف میں صرف یہی تین نقطے ہوں (یا قطار میں یہی تین نقطے ہوں) تب سہ وتری قالب حاصل ہو گی۔ یوں ہم مساوات 21.85 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} - u_{i,j+1} \quad \text{(الف)} \tag{21.89}$$

تا کہ بایاں ہاتھ صف j کا حصہ ہو اور دایاں ہاتھ قطار i کا حصہ ہو۔ظاہر ہے کہ ہم مساوات 21.85 کو

$$u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} - u_{i+1,j} \quad \text{(ب)} \tag{21.89}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں بایاں ہاتھ قطار i کا حصہ ہو گا اور دایاں ہاتھ صف j کا حصہ ہو گا۔ہم بدلتی رخ خفی ترکیب کو بار بار دہرا کر آگے بڑھتے ہیں۔ہم ہر جوڑ پر ابتدائی قیمت $u_{ij}^{(0)}$ سے شروع کرتے ہیں۔ہر قدم پر ہم تمام جوڑوں پر نئی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔ایک قدم میں ہم مساوات 21.89-الف سے اخذ کلیہ توالی استعمال کرتے ہیں جبکہ اگلی قدم میں ہم مساوات 21.89-ب سے اخذ کلیہ توالی استعمال کرتے ہیں اور اسی طرح متواتر یہی کلیات استعمال کرتے ہوئے بڑھتے ہیں۔ یوں اگر ہم $u_{ij}^{(m)}$ حاصل کر چکے ہوں، تب مساوات 21.89-الف کے دائیں ہاتھ میں $u_{ij}^{(m)}$ پر کر کے ہم بائیں ہاتھ کو $u_{ij}^{(m+1)}$ کے لئے حل کریں گے یعنی:

$$u_{i-1,j}^{(m+1)} - 4u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)} \quad \text{(الف)} \tag{21.90}$$

ہم مقررہ j یعنی مقررہ صف j کے تمام جوڑوں کے لئے یہ کلیہ استعمال کرتے ہیں جس سے N عدد خطی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جس میں N نا معلوم متغیرات (یعنی جوڑوں پر u کی نئی تخمینی قیمتیں) ہوں گی، اور جہاں مقررہ صف میں اندرونی نقطوں کی تعداد N ہے۔مساوات 21.90-الف میں نا صرف گزشتہ قدم کی تخمینی قیمتیں بلکہ سرحدی قیمتیں بھی شامل ہیں۔ ہم (مقررہ j کے لئے) گاوسی اسقاط سے مساوات 21.90-الف حل کرتے ہیں۔اس کے بعد ہم اگلی صف کے لئے N عدد مساوات کا نظام حاصل کر کے اس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہیں۔اسی طرح چلتے ہوئے ہم آخری صف کے لئے بھی نتائج حاصل کرتے ہیں۔اگلے قدم میں ہم رخ تبدیل کرتے ہیں اور $u_{ij}^{(m+1)}$ کو مساوات 21.89-ب کے دائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ اخذ کرتے ہوئے

$$u_{i,j-1}^{(m+2)} - 4_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)} \quad \text{ب} \tag{21.90}$$

اس سے قطار در قطار نئی تخمینی قیمتیں $u_{ij}^{(m+2)}$ حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے گزشتہ تخمینی قیمتیں $u_{ij}^{(m+1)}$ اور سرحدی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ہر مقررہ j ، یعنی ہر قطار کے لئے M خطی مساوات کا نظام حاصل ہو

[91] alternating direction implicit method, ADI

گا (جہاں قطار میں اندرونی نقطوں کی تعداد M ہے) جس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے M نا معلوم متغیرات کی تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔اس کے بعد اگلی قطار کے لئے نظام حاصل کر کے حل کیا جاتا ہے۔اسی طرح آخری قطار تک کی تمام اندرونی جوڑوں پر تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔

بدلتی رخ خفی ترکیب کو سمجھنے کی خاطر ایک مثال پیش کرتے ہیں۔(حقیقت میں ایسی مثال کو گاوسی اسقاط سے حل کیا جائے گا۔) اس کے بعد ہم بدلتی رخ خفی ترکیب میں ارتکاز کی بہتری پر غور کریں گے۔

مثال 21.20: مسئلہ ڈرشلے۔ بدلتی رخ خفی ترکیب

بدلتی رخ خفی ترکیب میں ابتدائی قیمتیں 100 ، 100 ، 100 ، 100 لیتے ہوئے مثال 21.19 کو دوبارہ حل کریں۔جسامت جال وہی رکھیں۔

حل: شکل 21.14-ب جو سرحدی قیمتیں دیتی ہے پر نظر رکھیں۔مساوات 21.90-الف میں $m = 0$ لیتے ہوئے ہم پہلی تخمینی قیمتیں $u_{11}^{(1)}$ ، $u_{21}^{(1)}$ ، $u_{12}^{(1)}$ ، $u_{22}^{(1)}$ حاصل کرتے ہیں۔ہم سرحدی قیمتوں کو مساوات 21.90-الف میں بغیر بالائی اشاریہ لکھتے ہیں تا کہ ان پر نظر رکھنا آسان ہو اور یہ واضح کرنے کی خاطر کہ دہرانے کے دوران یہ قیمتیں تبدیل نہیں ہوتی ہیں۔۔مساوات 21.90-الف میں $m = 0$ لیتے ہوئے $j = 1$ (پہلی صف) کے لئے درج ذیل نظام حاصل ہو گا

$$\begin{aligned}
(i=1)\quad & u_{01} - 4u_{11}^{(1)} + u_{21}^{(1)} && = -u_{10} - u_{12}^{(0)}\\
(i=2)\quad & u_{11}^{(1)} - 4u_{21}^{(1)} + u_{31} && = -u_{20} - u_{22}^{(0)}
\end{aligned}$$

جس کا حل $u_{11}^{(1)} = u_{21}^{(1)} = 100$ ہے۔دوسری صف یعنی $j = 2$ کے لئے مساوات 21.90-الف سے

$$\begin{aligned}
(i=1)\quad & u_{02} - 4u_{12}^{(1)} + u_{22}^{(1)} && = -u_{11}^{(0)} - u_{13}\\
(i=2)\quad & u_{12}^{(1)} - 4u_{22}^{(1)} + u_{32} && = -u_{21}^{(0)} - u_{23}
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{12}^{(1)} = u_{22}^{(1)} = 66.667$ ہے۔

اب $m = 1$ لیتے ہوئے درج بالا حاصل کردہ تخمینی قیمتیں اور سرحدی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے دوسری تخمینی قیمتیں $u_{11}^{(2)}$ ، $u_{21}^{(2)}$ ، $u_{12}^{(2)}$ ، $u_{22}^{(2)}$ مساوات 21.90-ب سے حاصل کی جاتی ہیں۔یوں $i = 1$ (پہلی قطار) کے لئے مساوات 21.90-ب سے نظام

$$\begin{aligned}
(j=1)\quad & u_{10} - 4u_{11}^{(2)} + u_{12}^{(2)} && = -u_{01} - u_{21}^{(1)}\\
(j=2)\quad & u_{11}^{(2)} - 4u_{12}^{(2)} + u_{13} && = -u_{02} - u_{22}^{(1)}
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{11}^{(2)}=91.11$ ، $u_{12}^{(2)}=64.44$ ہے۔ دوسری قطار یعنی $i=2$ کے لئے مساوات 21.90-ب سے نظام

$$\begin{aligned}
(j=1)\quad & u_{20}-4u_{21}^{(2)}+u_{22}^{(2)} && =-u_{11}^{(1)}-u_{31}\\
(j=2)\quad & u_{21}^{(2)}-4u_{22}^{(2)}+u_{23} && =-u_{12}^{(1)}-u_{32}
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{21}^{(2)}=91.11$ ، $u_{22}^{(2)}=64.44$ ہے۔

اس مثال میں جو محض بدلتی رخ خفی ترکیب سمجھنے کی خاطر استعمال کی گئی، دوسری تخمینی قیمتوں کی درستگی تقریباً حصہ کے دو قدم گاوس زائڈل کے برابر ہے (جہاں $u_{11}=w$ ، $u_{21}=x$ ، $u_{12}=y$ ، $u_{22}=z$ ہیں)۔

	u_{11}	u_{21}	u_{12}	u_{22}
بدلتی رخ خفی ترکیب، دوسری تخمین	91.11	91.11	64.44	64.44
گاوس زائڈل، دوسری تخمین	93.75	90.62	65.62	64.06
مساوات 21.86 کا اصل حل	87.50	87.50	62.50	62.50

□

مقدار معلوم p متعارف کرتے ہوئے مساوات 21.85 کو

$$u_{i-1,j}-(2+p)u_{ij}+u_{i+1,j}=-u_{i,j-1}+(2-p)u_{ij}-u_{i,j+1} \tag{21.91 الف}$$

اور

$$u_{i,j-1}-(2+p)u_{ij}+u_{i,j+1}=-u_{i-1,j}+(2-p)u_{ij}-u_{i+1,j} \tag{21.91 ب}$$

روپ میں لکھ جا سکتا ہے جس سے بدلتی رخ خفی ترکیب کے زیادہ عمومی کلیات

$$u_{i-1,j}^{(m+1)}-(2+p)u_{ij}^{(m+1)}+u_{i+1,j}^{(m+1)}=-u_{i,j-1}^{(m)}+(2-p)u_{ij}^{(m)}-u_{i,j+1}^{(m)} \tag{21.92 الف}$$

اور

$$u_{i,j-1}^{(m+2)}-(2+p)u_{ij}^{(m+2)}+u_{i,j+1}^{(m+2)}=-u_{i-1,j}^{(m+1)}+(2-p)u_{ij}^{(m+1)}-u_{i+1,j}^{(m+1)} \tag{21.92 ب}$$

اخذ ہوتے ہیں۔ ان میں $p=2$ پر کرنے سے مساوات 21.90 حاصل ہوتے ہیں۔ مقدار معلوم p سے ارتکاز میں بہتری پیدا کی جا سکتی ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ بدلتی رخ خفی ترکیب مثبت p کے لئے مرتکز ہو گی اور ارتکاز کی شرح زیادہ سے زیادہ حاصل کرنے کے لئے p کی بہترین قیمت

$$p_o = 2\sin\frac{\pi}{C} \tag{21.93}$$

ہے جہاں C کی قیمت $M+1$ اور $N+1$ میں زیادہ بڑی قیمت کے برابر ہے۔ مزید بہتر نتائج حاصل کرنے کی خاطر p کی قیمت کو ہر ایک قدم کے دوران مختلف رکھا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 21.119: مساوات 21.79-ب اخذ کریں۔

سوال 21.120: مساوات 21.80-ب اخذ کریں۔

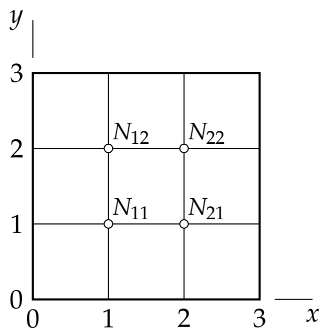
سوال 21.121: مساوات 21.80-پ اخذ کریں۔
جواب: $u_{xy}(x,y)\approx\frac{1}{2k}[u_x(x,y+k)-u_x(x,y-k)]$ میں درج ذیل پر کریں۔
$u_x(x,y\mp k)\approx\frac{1}{2h}[u(x+h,y\mp k)-u(x-h,y\mp k)]$

سوال 21.122: **تشاکل کا استعمال**
مثال 21.19 کی سرحدی قیمتوں کو دیکھ کر فیصلہ کریں کہ $u_{21}=u_{11}$ اور $u_{22}=u_{12}$ ہو گا۔ دکھائیں کہ اس سے دو مساوات کا نظام حاصل ہو گا۔ اس نظام کو حل کریں۔

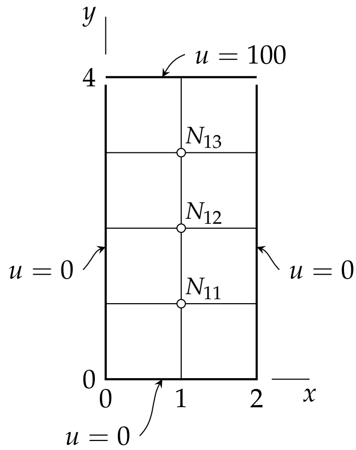
سوال 21.123: $h=6$ لیتے ہوئے مثال 21.19 میں u_{11} حاصل کریں۔ اس کا بالکل درست قیمت 75 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: 75

سوال 21.124: $h=3$ لیتے ہوئے مثال 21.19 حل کریں۔

سوال 21.125: شکل 21.15 میں N_{11} ، N_{12} ، N_{13} پر ساکن برقی مخفی قوہ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ یہ نقطے موصل چادروں کے درمیان پائے جاتے ہیں (جو شکل میں بطور مستطیل نظر آتے ہیں) اور جن پر برقی مخفی قوہ $0\,\mathrm{V}$ اور $100\,\mathrm{V}$ ہے۔ دکھایا گیا جال اور گاوسی اسقاط استعمال کریں۔



شکل 21.16: شکل برائے سوال 21.126، سوال 21.127 اور سوال 21.130



شکل 21.15: شکل برائے سوال 21.125

جواب: 1.96, 7.86, 29.46

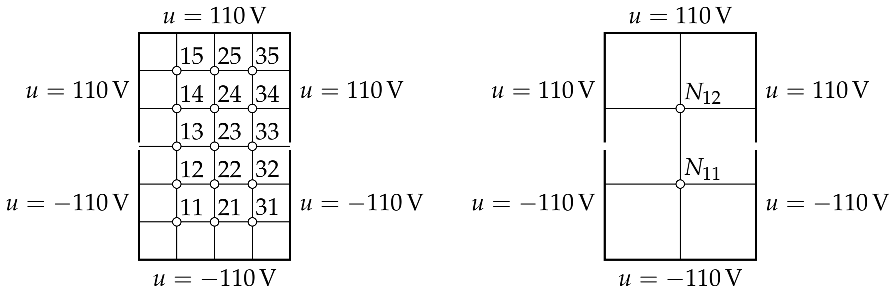
سوال 21.126: شکل 21.16 میں نچلی چادر پر $u = x^3$ ، دائیں چادر پر $u = 27 - 9y^2$ ، بالائی چادر پر $u = x^3 - 27x$ اور بائیں چادر پر $u = 0$ تصور کرتے ہوئے مخفی قوہ $u(x, y)$ کو گاوسی اسقاط سے تلاش کریں۔

سوال 21.127: شکل 21.16 میں نچلی چادر پر $u = x^4$ ، دائیں چادر پر $u = 81 - 54y^2 + y^4$ ، بالائی چادر پر $u = x^4 - 54x^2 + 81$ اور بائیں چادر پر $u = y^4$ تصور کرتے ہوئے مخفی قوہ $u(x, y)$ کو گاوسی اسقاط سے تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اس مسئلے کا حل $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ہے اور خلل تلاش کریں۔

جواب: $-2, -5, -5, -62$

سوال 21.128: شکل 21.17 میں مخفی قوہ کو (الف) چوڑی جال پر، (ب) باریک جال پر، گاوسی اسقاط کی مدد سے تلاش کریں۔ اشارہ۔ باریک جال میں تشاکل استعمال کریں اور ان دو نقطوں پر جہاں سرحدی مخفی قوہ میں چھلانگ پائی جاتی ہے وہاں مخفی قوہ کو $0\,\mathrm{V}$ (یعنی $-110\,\mathrm{V}$ اور $110\,\mathrm{V}$ کی اوسط) فرض کریں۔

سوال 21.129: ترکیب گاوس زائڈل میں $0, 0$ سے ابتدا کرتے ہوئے کتنے قدم بعد سوال 21.128 میں چوڑی جال کے نتائج پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہوں گے؟ باریک جال کی صورت میں ارتکاز کی شرح بہت کم



شکل 21.17: شکل برائے سوال 21.128

ہو گی۔ کیا مساوات کی نظام کو دیکھ کر آپ اس کی وجہ بتا سکتے ہیں۔
جواب: پانچ قدم

سوال 21.130: شکل 21.16 میں بالائی چادر پر $u = \sin \frac{1}{3}\pi x$ جبکہ باقی چادروں پر $u = 0$ ہے۔ تصدیق کریں کہ اس کا بالکل درست حل $u(x,y) = \dfrac{\sin \frac{1}{3}\pi x \sinh \frac{1}{3}\pi y}{\sinh \pi}$ ہے۔ اعدادی حل حاصل کرتے ہوئے خلل کا تخمینہ لگائیں۔

سوال 21.131: مساوات 21.87 میں دیے گئے نظام کے لئے مساوات 21.88 کی تصدیق کریں۔ دکھائیں کہ مساوات 21.87 میں $\boldsymbol{A}$ غیر نادر ہے۔

سوال 21.132: شکل 21.16 کی جال استعمال کرتے ہوئے سوال 21.130 کے مسئلہ ڈرشلے کو بدلتی رخ مخفی ترکیب سے دو قدم تک حل کریں۔ ابتدائی قیمتیں صفر لیں۔

سوال 21.133: مقدار معلوم p (مساوات 21.93) کی موزوں قیمت سوال 21.132 کے لئے تلاش کریں۔ $p_0 = 1.7$ لیتے ہوئے مساوات 21.92 میں دیے گئے بدلتی رخ مخفی کلیات سے سوال 21.132 کو ایک قدم تک حل کریں۔ ایک قدم کے بعد سوال 21.132 کی پہلی قدم کی قیمتوں 0.077 اور 0.308 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ارتکاز میں بہتری کی تصدیق کریں۔ ابتدائی قیمتیں صفر لیں۔
جواب: $\sqrt{3}u_{11} = u_{21} = 0.0859,\ u_{12} = u_{22} = 0.3180$ (چار اعشاریہ درست نتائج 0.1083, 0.3248 ہیں۔)

سوال 21.134: $p = 0$ لینے سے مساوات 21.92 کے کلیات کارآمد نہیں رہتے ہیں۔یہ دیکھنے کی خاطر انہیں استعمال کرتے ہوئے مثال 21.20 کو دو قدم تک حل کریں۔مثال میں دیا گیا جال اور ابتدائی قیمتیں استعمال کریں۔نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے؟

21.10 مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ۔غیر منظم سرحد

ہم xy مستوی کے خطہ R میں بیضوی مساوات کی سرحدی قیمت مسئلہ کے اعدادی حل پر بحث جاری رکھتے ہیں۔مسئلہ ڈرشلے پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا ہے۔نیومن اور مخلوط مسئلوں میں ہمیں نئی صورت حال کا سامنا ہوتا ہے چونکہ سرحد کے کچھ مقامات پر ہمیں u کی بجائے $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ دیا گیا ہو گا لہٰذا سرحد کی ان مقامات پر ہمیں u معلوم نہیں ہو گا۔اس نقطوں پر صورت حال سے نپٹنے کی خاطر ہمیں نئی تدبیر درکار ہو گی۔یہ تدبیر نیومن اور مخلوط مسائل کے لئے یکساں ہے لہٰذا ہم ان میں سے کسی ایک کو مثال بنا کر ترکیب کو سمجھ سکتے ہیں۔

مثال 21.21: مساوات پوئسن کا مخلوط قیمت سرحدی مسئلہ
مساوات پوئسن

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 12xy$$

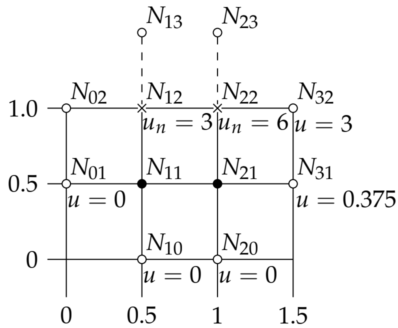
کا مخلوط قیمت سرحدی مسئلہ شکل 21.18-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس کو حل کریں۔

حل: ہم شکل 21.21-ب میں دکھایا گیا جال استعمال کرتے ہیں جہاں $h = 0.5$ ہے۔کلیات $u = 3y^3$ اور $u_n = 6x$ سے سرحد پر

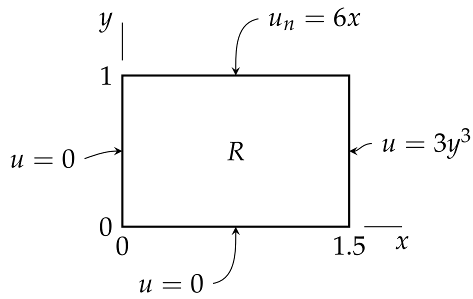
$$u_{31} = 0.375, \quad u_{32} = 3, \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial n} = \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial n} = \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = 6 \tag{21.94}$$

حاصل ہو گا۔ N_{11} اور N_{21} خطہ R کے اندرونی نقطے ہیں لہٰذا ان سے گزشتہ حصہ کی طرح برتا جا سکتا ہے۔یقیناً $h^2 = 0.25$ ، $f(x,y) = 12xy$ اور سرحدی معلومات استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.81 سے N_{11} اور N_{21} کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{(الف)} \quad \begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad &= 0.75 \\ u_{11} - 4u_{21} \qquad + u_{22} &= 1.5 - 0.375 = 1.125 \end{aligned} \tag{21.95}$$



(ب) جال



(الف) خطہ R اور سرحدی قیمتیں

شکل 21.18: اشکال برائے مثال 21.21

ان مساوات میں سرحد کے نقطہ N_{12} اور N_{22} پر u کی قیمتیں u_{12} اور u_{22} درکار ہیں جبکہ ہمیں ان نقطوں پر عمودی تفرق $u_n = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}$ کی قیمتیں دی گئی ہیں۔ ہم اس مشکل سے جلد نجات حاصل کر پائیں گے۔

ہم نقطہ N_{13} اور N_{23} پر غور کرتے ہیں۔ ہم تصور میں R کو وسعت دے کر بالائی جانب پہلی بیرونی صف (یعنی $y = 1.5$ کے مطابقتی نقطوں) کو R میں شامل کرتے ہیں اور ساتھ ہی فرض کرتے ہیں کہ تفرقی مساوات توسیع کردہ خطہ میں بھی کارآمد ہے۔ تب ہم پہلے کی طرح مزید دو مساوات

$$
\begin{aligned}
u_{11} \quad & - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} && = 1.5 \\
u_{21} + u_{12} - 4u_{22} & \qquad + u_{23} && = 3 - 3 = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(ب)} \qquad (21.95)
$$

لکھ سکتے ہیں (شکل 21.18-ب)۔ دھیان رہے کہ R کی بالائی سرحد پر دی گئی معلومات کو اب تک ہم نے استعمال نہیں کیا ہے، اور مساوات 21.95-ب میں ہم نے دو اضافی متغیرات u_{13} اور u_{23} بھی متعارف کیے ہیں۔ اب ہم بالائی سرحد پر دی گئی معلومات اور u_y کی مساوات فرق استعمال کرتے ہوئے u_{13} اور u_{23} سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 21.94 سے

$$
\begin{aligned}
3 &= \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = \frac{u_{13} - u_{11}}{2h} = u_{13} - u_{11} \quad \implies \quad u_{13} = u_{11} + 3 \\
6 &= \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = \frac{u_{23} - u_{21}}{2h} = u_{23} - u_{21} \quad \implies \quad u_{23} = u_{21} + 6
\end{aligned}
$$

حاصل ہو گا جنہیں مساوات 21.95-ب میں پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} 2u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= 1.5 - 3 = -1.5 \\ 2u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= 0 - 6 = -6 \end{aligned}$$

انہیں مساوات 21.95-الف کے ساتھ ملا کر قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.750 \\ 1.125 \\ -1.500 \\ -6.000 \end{bmatrix} \tag{21.96}$$

اس کا حل درج ذیل ہے جہاں بالکل درست حل کو ساتھ قوسین میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} u_{12} &= 0.866 \ (1.000) \qquad & u_{22} &= 1.812 \ (2.000) \\ u_{11} &= 0.077 \ (0.125) \qquad & u_{21} &= 0.191 \ (0.250) \end{aligned}$$

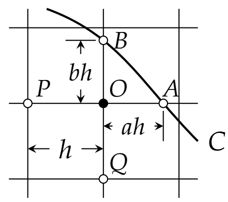
□

غیر منظم سرحد

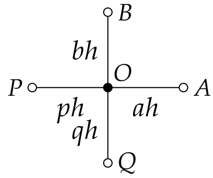
ہم xy مستوی میں خطہ R پر بیضوی مساوات کے سرحدی مسئلے کے اعدادی حل پر غور جاری رکھتے ہیں۔اگر R کی سادہ جیومیٹریائی شکل ہو تب عموماً ہم جال کو یوں بچھا سکتے ہیں کہ R کی سرحد C پر جال کے کئی جوڑ پائے جاتے ہوں۔یوں ہم جزوی تفرق کو گزشتہ حصہ کی طرح تخمینی طور پر لکھ سکتے ہیں۔البتہ اگر سرحد C جال کو جوڑ سے ہٹ کر قطع کرتا ہو تب سرحد کے قریب نقطوں پر ہمیں کچھ مختلف طرز عمل اختیار کرنا ہو گا۔آئیں ایسی صورت کو دیکھیں۔

شکل 21.19 میں جوڑ O اس قسم کا نقطہ ہے۔ O اور اس کے پڑوسی نقطے A اور P کے لئے ٹیلر تسلسل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad u_A = u_O + ah\frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2}(ah)^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \cdots \\ &\text{(ب)} \quad u_P = u_O - h\frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \cdots \end{aligned} \tag{21.97}$$



شکل 21.19: غیر منظم سرحد



شکل 21.20: جوڑ O کے پڑوسی نقطے A، B، P اور Q

ہم ٹیلر تسلسل کی پہلی تین اجزاء لیتے ہوئے باقی اجزاء کو رد کرتے ہیں اور ساتھ ہی $\frac{\partial u_O}{\partial x}$ کو حذف کرنے کی غرض سے مساوات 21.97-ب کو a سے ضرب دے کر مساوات 21.97-الف کے ساتھ جمع کرتے ہوئے

$$u_A + au_P \approx (1+a)u_O + \frac{1}{2}a(1+a)h^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}$$

حاصل کرتے ہیں جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{a(1+a)}u_A + \frac{1}{1+a}u_P - \frac{1}{a}u_O\right]$$

اسی طرح نقطہ O ، B اور Q کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial y^2} \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{b(1+b)}u_B + \frac{1}{1+b}u_Q - \frac{1}{b}u_O\right]$$

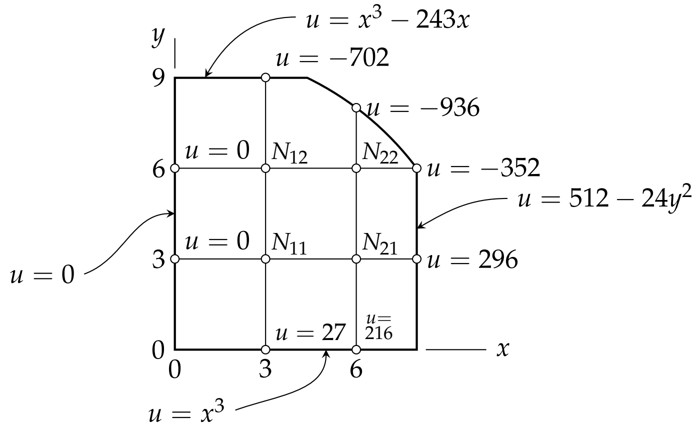
درج بالا دونوں مساوات کا مجموعہ

$$\nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{u_A}{a(1+a)} + \frac{u_B}{b(1+b)} + \frac{u_P}{1+a} + \frac{u_Q}{1+b} - \frac{(a+b)u_O}{ab}\right] \tag{21.98}$$

ہو گا۔مثال کے طور پر اگر $a=\frac{1}{2}$ ، $b=\frac{1}{2}$ ہوں تب مساوات 21.83 کی نقش کی بجائے درج ذیل نقش

$$\begin{Bmatrix} & \frac{4}{3} & \\ \frac{2}{3} & -4 & \frac{4}{3} \\ & \frac{2}{3} & \end{Bmatrix}$$

حاصل ہو گا۔اس نقش کے پانچ اعداد کا مجموعہ اب بھی صفر کے برابر ہے (جو درستگی کو پرکھنے کی ایک اچھی ترکیب ہے)۔



شکل 21.21: شکل برائے مثال 21.22

اسی طرح آپ شکل 21.20 کے لئے

$$\nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{u_A}{a(a+p)}+\frac{u_B}{b(b+q)}+\frac{u_P}{p(p+a)}+\frac{u_Q}{q(q+b)}-\frac{ap+bq}{abpq}u_O\right] \tag{21.99}$$

حاصل کر سکتے ہیں جو ہر ممکنہ صورت حاصل کو نپٹا سکتی ہے۔

مثال 21.22: مساوات لاپلاس کا مسئلہ ڈرشلے۔ قوسی سرحد

شکل 21.21 میں دکھائے گئے خطہ میں مخفی قوہ u تلاش کریں۔ یہاں سرحد کو قوسی حصہ ایک دائرے کا حصے ہے جس کا رداس 10 اور مرکز $(0,0)$ ہے۔ سرحدی معلومات شکل میں دی گئیں ہیں۔ شکل میں دیا گیا جال استعمال کریں۔

حل: مساوات لاپلاس کا حل u ہو گا۔ سرحد پر کلیات $u = x^3$ ، $u = 512 - 24y^2$ ، وغیرہ سے ہم درکار نقطوں پر قیمتیں حاصل کرتے ہیں جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ N_{11} اور N_{12} کے لئے عمومی منظم نقش حاصل ہوتا ہے، اور N_{21} اور N_{22} کے لئے ہم مساوات 21.99 سے

$$N_{11},\,N_{12}:\left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\},\quad N_{21}:\left\{\begin{matrix} & 0.5 & \\ 0.6 & -2.5 & 0.9 \\ & 0.5 & \end{matrix}\right\},\quad N_{22}:\left\{\begin{matrix} & 0.9 & \\ 0.6 & -3.0 & 0.9 \\ & 0.6 & \end{matrix}\right\} \tag{21.100}$$

حاصل کرتے ہیں۔ہم انہیں اور سرحدی قیمتیں کو استعمال کرتے ہیں اور جوڑوں کو N_{11} ، N_{21} ، N_{12} ، N_{22} ترتیب میں لیتے ہیں۔یوں درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad\qquad &= 0 - 27 &&= -27 \\
0.6u_{11} - 2.5u_{21} \qquad + 0.5u_{22} &= -0.9(296) - 0.5(216) &&= -374.4 \\
u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= 702 + 0 &&= \quad 702 \\
0.6u_{21} + 0.6u_{12} - 3u_{22} &= 0.9(352) + 0.9(936) &&= \quad 1159.2
\end{aligned}$$

اس کو قالبی صورت میں لکھ کر

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0.6 & -2.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0.6 & 0.6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -374.4 \\ 702 \\ 1159.2 \end{bmatrix} \tag{21.101}$$

گاوسی اسقاط کی مدد سے درج ذیل نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$u_{11} = -55.6, \quad u_{21} = 49.2, \quad u_{12} = -298.5, \quad u_{22} = -436.3$$

ظاہر ہے کہ اتنے کم خانوں کی جال سے ہمیں زیادہ درست نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔بالکل درست نتائج درج ذیل ہیں۔

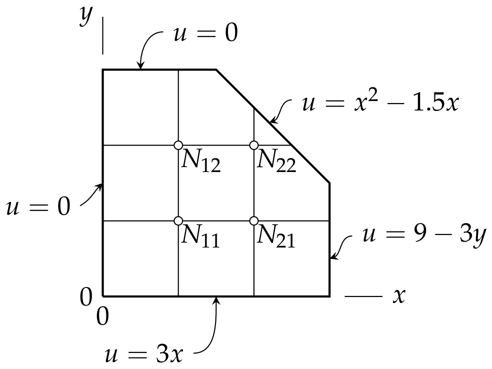
$$u_{11} = -54, \quad u_{21} = 54, \quad u_{12} = -297, \quad u_{22} = -432$$

عملاً بہت باریک جال استعمال کرتے ہوئے بڑا نظام حاصل کیا جائے گا جس کو بالواسطہ ترکیب سے حل کیا جائے گا۔ □

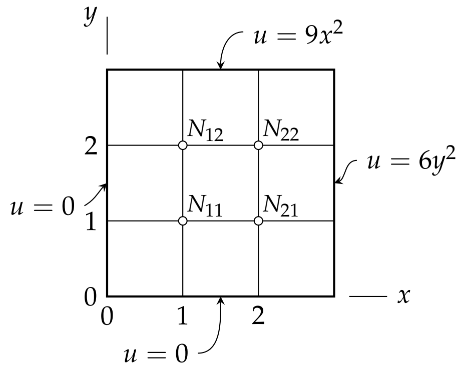
سوالات

سوال 21.135: مساوات 21.96 کے نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے مثال 21.21 کی آخر میں دی گئی قیمتوں کو پرکھیں۔

سوال 21.136: شکل 21.18-الف کی مستطیل میں (اور شکل-ب کا جال استعمال کرتے ہوئے) مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ کا ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں بائیں چادر پر $u_x = 0$ ، دائیں چادر پر $u_x = 3$ ، نچلی چادر پر $u = x^2$ اور بالائی چادر پر $u = x^2 - 1$ ہیں۔



شکل 21.23: شکل برائے سوال 21.143



شکل 21.22: شکل برائے سوال 21.137

سوال 21.137: مساوات پوئسن $\nabla^2 u = 2(x^2 + y^2)$ کے مخلوط قیمت مسئلے کا حل شکل 21.22 کے لئے (شکل میں دیے گئے جال کے لئے) حاصل کریں۔ سرحدی معلومات شکل میں دی گئی ہیں۔

جواب: $u_{11} = 1,\ u_{21} = u_{12} = 4,\ u_{22} = 16$

سوال 21.138: مساوات 21.97 میں سے $\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}$ حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\frac{\partial u_O}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(1+a)}u_A - \frac{1-a}{a}u_O - \frac{a}{1+a}u_P\right]$$

سوال 21.139: ٹھیک مساوات 21.98 کے بعد دی گئی نمونہ حساب کی تصدیق کریں۔

سوال 21.140: مساوات 21.99 حاصل کرنے کی تفصیل پیش کریں۔

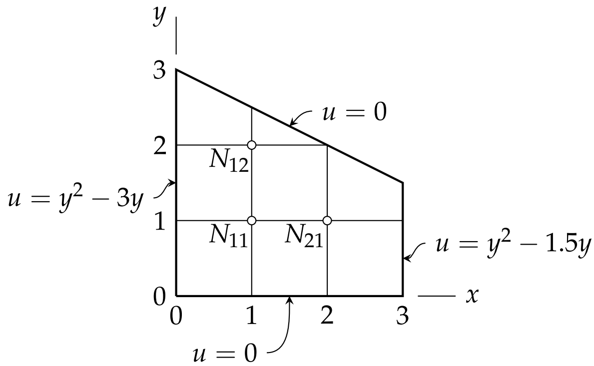
سوال 21.141: مساوات 21.100 کی تصدیق کریں۔

سوال 21.142: قالبی مساوات 21.101 کو گاوسی اسقاط کی مدد سے حل کریں۔

سوال 21.143: مساوات لاپلاس کا حل شکل 21.23 میں دیے گئے مسئلہ کے لئے (شکل میں دیے گئے جال پر) حاصل کریں۔ سرحدی معلومات شکل میں دی گئی ہیں۔ (سرحد کا ترچھا حصہ $y = 4.5 - x$ ہے۔)

جواب: $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = -3,\ u_{11} - 4u_{21} + u_{22} = -12,\ u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = 0,$
$2u_{21} + 2u_{12} - 12u_{22} = -14,\ u_{11} = u_{22} = 2,\ u_{21} = 4,\ u_{12} = 1$

سوال 21.144: مساوات پوئسن $\nabla^2 u = 2$ کو شکل 21.24 کے خطہ کے لئے حل کریں۔



شکل 21.24: شکل برائے سوال 21.144

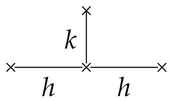
21.11 اعدادی تراکیب برائے قطع مکافی مساوات

جیسا کہ ہم نے حصہ 21.9 میں ذکر کیا، مختلف اقسام کی مساوات مثلاً بیضوی، قطع مکافی اور قطع زائد کے حل کا رویہ مختلف ہو گا۔اسی طرح ان کے اعدادی تراکیب بھی کچھ مختلف ہوں گے۔تینوں اقسام میں ہم مساوات کی جگہ مطابقتی مساوات فرق لکھتے ہیں لیکن قطع مکافی اور قطع زائد مساوات کی صورت میں ضروری نہیں ہے کہ تخمینی اعدادی حل، $h \to 0$ کرنے سے، اصل حل کو مرتکز ہو، بلکہ اس سے کسی صورت بھی ارتکاز یقینی نہیں ہو گا۔ان دو صورتوں میں مرتکز (اور **مستحکم**) حل کے لئے اضافی شرائط (عدم مساوات) کا ہونا لازمی ہے۔حل کی استحکام سے مراد یہ ہے کہ ابتدائی معلومات میں معمولی اضطراب (یا کسی بھی لمحہ پر معمولی اضطراب) بعد میں بھی معمولی ہی رہے گی۔

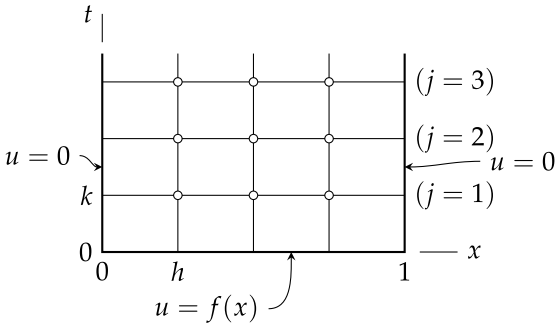
اس حصہ میں ہم حراری مساوات کو مثال بناتے ہوئے قطع مکافی مساوات کے اعدادی حل پر غور کرتے ہیں۔ہم مذکورہ بالا اور دیگر صورتوں پر یک بعدی حراری مساوات

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad (\text{مستقل } c)$$

کی مدد سے غور کرتے ہیں۔ اس مساوات پر عموماً کسی وقفہ $0 \le x \le l$ میں وقت $t \ge 0$ کے لئے غور کیا جاتا ہے جہاں ابتدائی درجہ حرارت $u(x,0) = f(x)$ (جہاں f دیا گیا ہو گا) اور تمام $t \ge 0$ کے لئے $x = 0$ اور $x = l$ پر سرحدی معلومات، مثلاً $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$ ، دی گئی ہوں گی۔ ہم اپنی آسانی



شکل 21.26: مساوات 21.105 اور مساوات21.106 کے چار نقطے



شکل21.25: جال اور جوڑ برائے مساوات21.105 اور مساوات21.106

کی خاطر $c = 1$ اور $l = 1$ لیتے ہیں جو x اور t کی خطی تبادل سے ممکن ہو گا (سوال 21.145)۔تب حراری مساوات اور دی گئی معلومات درج ذیل ہوں گی۔

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 \leq x \leq l,\ t \geq 0 \tag{21.102}$$

$$u(x,0) = f \qquad (\text{ابتدائی شرائط}) \tag{21.103}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (\text{سرحدی شرائط}) \tag{21.104}$$

مساوات 21.102 کا مطابقتی تخمینی مساوات فرق درج ذیل ہے۔

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \tag{21.105}$$

شکل 21.25 میں مطابقتی جال اور جوڑ دکھائے گئے ہیں۔ x رخ میں جسامت جال h ہے جبکہ t رخ جسامت جال k ہے۔مساوات 21.105 میں استعمال ہونے والے چار نقطوں کو شکل 21.26 میں دکھایا گیا ہے۔چونکہ منفی t کے لئے ہمارے پاس کوئی معلومات نہیں ہے لہٰذا بائیں ہاتھ آگے فرق کا حاصل تقسیم استعمال کیا گیا ہے۔مساوات 21.105 سے ہم وقت t کی صف $j+1$ کے لئے $u_{i,j+1}$ کو وقت j کے مطابقتی u کی صورت میں حاصل کرتے ہیں؛ مساوات 21.105 کو $u_{i,j+1}$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u_{i,j+1} = (1-2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \qquad r = \frac{k}{h^2} \tag{21.106}$$

اس کلیہ سے با آسانی نتائج حاصل ہوں گے البتہ ارتکاز کے لئے ضروری ہے کہ درج ذیل شرط

$$r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \tag{21.107}$$

مطمئن ہو جس سے مساوات 21.106 میں u_{ij} کا عددی سر غیر منفی ہو گا۔مساوات 21.107 کہتی ہے کہ t رخ میں زیادہ تیزی سے نہ چلا جائے۔نیچے ایک مثال دی گئی ہے۔

ترکیب کرینک نکلسن[92]

عملی استعمال میں مساوات 21.107 کی شرط مسائل پیدا کرتی ہے۔یقیناً زیادہ درست نتائج کے لئے h کی قیمت کم رکھنا ضروری ہے جس کی بنا مساوات 21.107 کے تحت k بہت کم ہو گا۔مثلاً $h = 0.1$ کی صورت میں $k \leq 0.005$ ہو گا۔اب h کی قیمت آدھی کرنے سے، کسی بھی t تک پہنچنے کی خاطر، قدموں کی تعداد چار گنا بڑھتی ہے لہٰذا ہمیں بہتر ترکیب کی ضرورت ہے۔

$r = \frac{k}{h^2}$ کی قیمت پر ترکیب کرینک نکلسن[93] کوئی پابندی عائد نہیں کرتی ہے۔یہ ترکیب شکل 21.27 کے چھ نقطوں کو استعمال کرتی ہے۔اس ترکیب میں مساوات 21.105 کے دائیں ہاتھ فرق کے حاصل تقسیم کی جگہ شکل 21.27 کے دو عدد صف وقت کے مجموعہ کا $\frac{1}{2}$ گنا پر کیا جاتا ہے۔یوں مساوات 21.105 کی بجائے

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \tag{21.108}$$

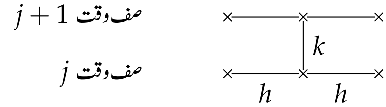
حاصل ہو گا۔دونوں اطراف کو $2k$ سے ضرب دے کر $r = \frac{k}{h^2}$ لکھتے ہوئے بائیں ہاتھ صف وقت $j+1$ کے مطابقتی تین اجزاء اور دائیں ہاتھ صف وقت j کے تین مطابقتی اجزاء منتقل کرتے ہوئے

$$(2+2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2-2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \tag{21.109}$$

حاصل ہو گا۔عموماً مساوات 21.109 میں بائیں ہاتھ تینوں اجزاء نا معلوم ہوں گے جبکہ دائیں ہاتھ تینوں اجزاء معلوم ہوں گے۔مساوات 21.102 کے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ کو n عدد برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے فی صف وقت ہمیں $n-1$ اندرونی جوڑ حاصل ہوں گے (شکل 21.25 دیکھیں جہاں $n = 4$ ہے)۔تب $j = 0$ اور $i = 1, \cdots, n-1$ کے لئے مساوات 21.109 سے $n-1$ عدد خطی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جو پہلی صف وقت کے $n-1$ عدد نا معلوم متغیرات $u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{n-1,1}$ کو ابتدائی قیمتوں $u_{00}, u_{10}, \cdots, u_{n0}$

[92] فرانسیسی ماہر طبیعیات جان کرینک [1916-2006] اور برطانوی ریاضی دان فلس نکلسن [1917-1968]

[93] Crank-Nicolson method



شکل 21.27: ترکیب کرینک نکلسن میں استعمال ہونے والے چھ نقطے

اور سرحدی قیمتوں $u_{01}, u_{n1}\,(=0)$ کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ اسی طرح ہر صف وقت، مثلاً $j=1$ ، $j=2$ وغیرہ، کے لئے بھی مساوات 21.109 سے $n-1$ عدد خطی مساوات کا نظام حاصل کر کے حل کیا جائے گا۔

اگرچہ $r=\frac{k}{h^2}$ پر اب کوئی پابندی عائد نہیں ہے البتہ h کی چھوٹی قیمت اب بھی زیادہ درست نتائج دے گی۔ عملاً k کی قیمت یوں منتخب کی جاتی ہے کہ، r کی قیمت بہت زیادہ بڑھائے بغیر، کام میں نمایاں کمی واقع ہو۔ مثال کے طور پر عموماً $r=1$ منتخب کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے (جو گزشتہ بلا واسطہ ترکیب میں نا ممکن ہو گا)۔ تب مساوات 21.109 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$4u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j} \tag{21.110}$$

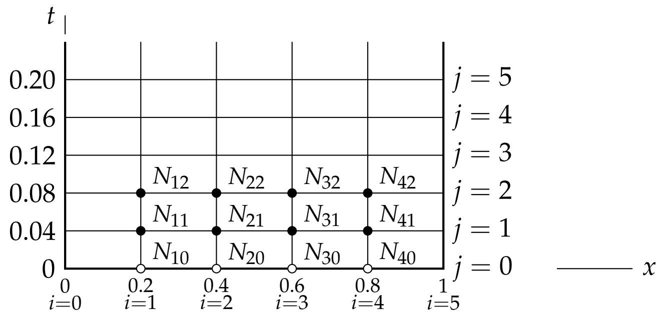
مثال 21.23: سلاخ کی درجہ حرارت۔ ترکیب کرینک نکلسن، بلا واسطہ ترکیب

ایک سلاخ جس کی لمبائی 1 ہے کے اطراف حاجز شدہ ہیں جبکہ اس کے سر $0\,°\mathrm{C}$ پر رکھے گئے ہیں اور کسی لمحہ، جس کو ہم $t=0$ کہتے ہیں، پر سلاخ میں حرارت $f(x)=\sin\pi x$ ہے۔ حراری مساوات میں $c^2=1$ لیں۔ ترکیب کرینک نکلسن استعمال کرتے ہوئے $h=0.2$ اور $r=1$ لیتے ہوئے $0\le t\le 0.2$ کے لئے سلاخ میں درجہ حرارت $u(x,t)$ تلاش کریں۔ حاصل نتائج کا اصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ ساتھ ہی اس صورت مساوات 21.106 استعمال کریں جب r مساوات 21.107 کو مطمئن کرتا ہو، مثلاً $r=0.25$ ، اور جب r مساوات 21.107 کو مطمئن نہ کرتا ہو، مثلاً $r=1$ اور $r=2.5$ ۔

حل: ترکیب کرینک نکلسن

چونکہ $r=1$ ہے لہٰذا مساوات 21.110 استعمال ہو گی۔ چونکہ $r=1$ اور $h=0.2$ ہیں لہٰذا $r=\frac{k}{h^2}$ سے $k=h^2=0.04$ ہو گا۔ یوں ہمیں چار قدم چلنا ہو گا۔ شکل 21.28 میں جال دکھائی گئی ہے۔ ہم درج ذیل ابتدائی قیمتیں استعمال کریں گے۔

$$u_{10}=\sin 0.2\pi=0.587\,785,\quad u_{20}=\sin 0.4\pi=0.951\,057$$



شکل 21.28: جال (مثال 21.23)

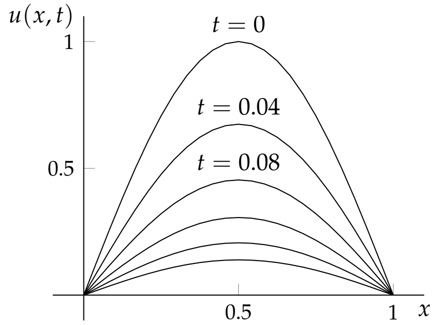
مزید $u_{30} = u_{20}$ اور $u_{40} = u_{10}$ ہوں گے۔ یاد رہے کہ u_{10} سے مراد شکل 21.28 میں نقطہ N_{10} پر u کی قیمت ہے۔ شکل کے ہر صف وقت میں چار عدد اندرونی جوڑ پائے جاتے ہیں۔ یوں وقت کے ہر ایک قدم پر ہم 4 عدد خطی مساوات حل کرتے ہوئے 4 نا معلوم متغیرات حاصل کریں گے۔ چونکہ ابتدائی درجہ حرارت، نقطہ $x = 0.5$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور سلاخ کے دونوں سر $0\,°\mathrm{C}$ پر ہیں لہٰذا پہلی صف وقت میں $u_{31} = u_{21}$ اور $u_{41} = u_{11}$ ہوں گے اور اسی طرح باقی صفوں میں بھی ہو گا۔ اس کی بنا مساوات کا نظام کم ہو کر دو مساوات پر مبنی ہو گا جن میں دو نا معلوم متغیرات ہوں گے۔ چونکہ $j = 1$ کے لئے $u_{31} = u_{21}$ ہے لہٰذا مساوات 21.110 درج ذیل دے گی۔

$$\begin{aligned} 4u_{11} - u_{21} \qquad &= u_{00} + u_{20} = 0.951\,057 \\ -u_{11} + 4u_{21} - u_{21} &= u_{10} + u_{20} = 1.538\,842 \end{aligned}$$

اس کا حل $u_{11} = 0.399\,274$ اور $u_{21} = 0.646\,039$ ہے۔ اسی طرح صف وقت $j = 2$ کے لئے

$$\begin{aligned} 4u_{12} - u_{22} &= u_{01} + u_{21} = 0.646\,039 \\ -u_{12} + 3u_{22} &= u_{11} + u_{21} = 1.045\,313 \end{aligned}$$

ہو گا جس کا حل $u_{12} = 0.271\,221$ اور $u_{22} = 0.438\,845$ ہے۔ اسی طرح باقی (درج ذیل) قیمتیں



شکل 21.29: سلاخ میں حرارت (مثال 21.23)

حاصل کی جائیں گی جنہیں شکل 21.29 میں دکھایا گیا ہے۔

t	x=0	x=0.2	x=0.4	x=0.6	x=0.8	x=1
0.00	0	0.588	0.951	0.951	0.588	0
0.04	0	0.399	0.646	0.646	0.399	0
0.08	0	0.271	0.439	0.439	0.271	0
0.12	0	0.184	0.298	0.298	0.184	0
0.16	0	0.125	0.202	0.202	0.125	0
0.20	0	0.085	0.138	0.138	0.085	0

درست نتائج کے ساتھ موازنہ: موجودہ مسئلے کا درست حل درج ذیل ہے (حصہ 13.5)۔

$$u(x,t)=\sin \pi x e^{-\pi^2 t}$$

اعدادی نتائج کا موازنہ اب پیش کرتے ہیں۔

حل برائے بلا واسطہ ترکیب، مساوات 21.106 جہاں $r=0.25$ ہے۔ $r=\frac{k}{h^2}=0.25$ اور $h=0.2$ سے $k=rh^2=0.25\cdot 0.04=0.01$ ملتا ہے لہٰذا ہمیں ترکیب کرینک نکلسن سے چار گنا زیادہ قدم چلنا ہو گا۔ $r=0.25$ لیتے ہوئے مساوات 21.106 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$u_{i,j+1}=0.25(u_{i-1,j}+2u_{ij}+u_{i+1,j}) \tag{21.111}$$

ہم پہلے کی طرح یہاں بھی تشاکل کو استعمال کریں گے۔ قدم وقت $j=1$ میں ہم

$$u_{00}=0,\quad u_{10}=0.587\,785,\quad u_{20}=u_{30}=0.951\,057$$

کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$u_{11} = 0.25(u_{00} + 2u_{10} + u_{20}) = 0.531\,657$$
$$u_{21} = 0.25(u_{10} + 2u_{20} + u_{30}) = 0.25(u_{10} + 3u_{20}) = 0.860\,239$$

ظاہر ہے کہ ہم سرحدی اجزاء $u_{01} = 0$ اور $u_{02} = 0$ کو کلیات سے حذف کر سکتے ہیں۔دوسری قدم وقت ($j = 2$) میں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u_{12} = 0.25(2u_{11} + u_{21}) = 0.480\,888$$
$$u_{22} = 0.25(u_{11} + 3u_{21}) = 0.778\,094$$

اسی طرح باقی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ہمیں 20 قدم لینے ہوں گے لیکن درج ذیل اعدادی نتائج کے تحت درستگی تقریباً وہی ہے جو کرینک نکلسن ترکیب سے حاصل ہوئی ہے (تین اعشاریہ تک بالکل درست قیمتیں بھی دی گئی ہیں)۔

	x=0.2			x=0.4		
t	کرینک نکلسن	مساوات 21.111	درست	کرینک نکلسن	مساوات 21.111	درست
0.04	0.399	0.393	0.396	0.646	0.637	0.641
0.08	0.271	0.263	0.267	0.439	0.426	0.432
0.12	0.184	0.176	0.180	0.298	0.285	0.291
0.16	0.125	0.118	0.121	0.202	0.191	0.196
0.20	0.085	0.079	0.082	0.138	0.128	0.132

مساوات 21.107 مطمئن نہ ہونے کی صورت میں مساوات 21.106 کی ناکامی: $h = 0.2$ اور $r = 1$ لینے سے مساوات 21.107 مطمئن نہیں ہو گا جبکہ مساوات 21.106 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} - uij + u_{i+1,j}$$

جو درج ذیل نتائج دیتی ہے جو زیادہ درست نہیں ہیں۔

t	x=0.2	درست	x=0.4	درست
0.04	0.363	0.396	0.588	0.641
0.12	0.139	0.180	0.225	0.291
0.20	0.053	0.082	0.086	0.132

$h = 0.2$ رکھتے ہوئے r کی مزید بڑی قیمت $r = 2.5$ لینے سے مساوات 21.106 بے معنی نتائج دیتی ہے۔چند نتائج درج ذیل ہیں۔

t	x=0.2	درست	x=0.4	درست
0.1	0.0265	0.2191	0.0429	0.3545
0.3	0.0001	0.0304	0.0001	0.0492
0.5	0.0018	0.0042	-0.0011	0.0068

□

سوالات

سوال 21.145: (غیر بعدی صورت) $x = \frac{\tilde{x}}{l}$ ، $t = \frac{c^2\tilde{t}}{l^2}$ اور $u = \frac{\tilde{u}}{u_0}$ لیتے ہوئے حراری مساوات $\tilde{u}_{\tilde{t}} = c^2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}, 0 \le \tilde{x} \le l$ کا تبادل غیر بعدی معیاری صورت $u_t = u_{xx}, 0 \le x \le 1$ میں کریں جہاں u_0 کوئی مستقل درجہ حرارت ہے۔

سوال 21.146: حراری مساوات 21.102 کو مساوات 21.104 کی سرحدی شرائط اور درج ذیل ابتدائی شرائط کے لئے ترکیب کرینک نکلسن (مساوات 21.110) کی مدد سے $h = 0.2$ لیتے ہوئے $0 \le t \le 0.20$ کے لئے حل کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

سوال 21.147: $h = 0.2$ اور $r = 0.25$ لیتے ہوئے 8 قدموں تک سوال 21.146 کو بلا واسطہ ترکیب سے حل کریں۔حاصل نتائج کا تین اعشاریہ درست کرینک نکلسن جوابات 0.107 ، 0.175 ، اور تین اعشاریہ بالکل درست جوابات 0.108 ، 0.175 کے ساتھ کریں۔
جواب: $t = 0.04$ کے لئے 0.105, 0.170 ہیں، $t = 0.08$ کے لئے 0.156, 0.254 ہیں، $\cdots$

سوال 21.148: $x = 0.2, 0.4$ اور $t = 0.04, 0.08, \cdots, 0.20$ لیتے ہوئے مثال 13.3 کی تسلسل سے سوال 21.146 کے نتائج حاصل کریں۔

سوال 21.149: بلا واسطہ ترکیب کی درستگی $r\ (\le \frac{1}{2})$ پر منحصر ہے۔ سوال 21.147 میں پہلے کی طرح $h = 0.2$ رکھتے ہوئے $r = \frac{1}{2}$ لے کر چار قدم تک حل کریں۔ $t = 0.04$ اور $t = 0.08$ پر حاصل نتائج کا سوال 21.147 کے نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $x = 0.2, 0.4$ کے لئے $t = 0.04$ پر $0.150, 0.250$ اور $t = 0.0.08$ کے لئے $0.100, 0.162$ ہیں۔

سوال 21.150: اطراف سے حاجز شدہ متجانس سلاخ کے سر $x = 0$ اور $x = 1$ پر ہیں۔ بائیں سر کو $0\,^\circ\mathrm{C}$ پر رکھا گیا ہے جبکہ دائیں سر پر درجہ حرارت $u(t,1) = g(t) = \sin \frac{25}{3}\pi t$ ہے۔ سلاخ میں درجہ حرارت کو بلا واسطہ ترکیب سے ایک دوری عرصہ $0 \le t \le 0.24$ کے لئے حاصل کریں۔ $h = 0.2$ اور $r = 0.5$ لیں۔ (مساوات 21.102 کا حل درکار ہے۔)

سوال 21.151: سلاخ کا بایاں سر $0\,^\circ\mathrm{C}$ کی بجائے $-g(t)$ پر رکھتے ہوئے سوال 21.150 میں $u(x, 0.12)$ اور $u(x, 0.24)$ تلاش کریں۔ باقی تمام مواد وہی رکھیں۔
جواب: $t = 0.12$ پر $0, -0.352, -0.153, 0.153, 0.352, 0$ ہیں جبکہ $t = 0.24$ پر $0, 0.344, 0.166, -0.166, -0.344, 0$ ہیں۔

سوال 21.152: سوال 21.150 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے سوال 21.151 کے نتائج کس طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں؟ سوال 21.150 کے نتائج

$t = 0.12, x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے $0.054, 0.172, 0.325, 0.406$ ہیں
اور $t = 0.24$ کے لئے $-0.009, -0.086, -0.252, -0.353$ ہیں۔

انہیں استعمال کرتے ہوئے سوال 21.151 کے نتائج پرکھیں۔

سوال 21.153: اگر اطراف سے حاجز شدہ $x = 0$ تا $x = 1$ لمبی سلاخ کا بایاں سر حاجز شدہ ہو تب $x = 0$ پر سرحدی شرط $u_n(0,t) = u_x(0,t) = 0$ ہو گا۔ دکھائیں کہ مساوات 21.106 میں دی گئی بلا واسطہ ترکیب کی استعمال سے ہم $u_{0,j+1}$ کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$u_{0,j+1} = (1 - 2r)u_{0j} + 2ru_{1j}$$

سوال 21.154: ایک سلاخ جو $x = 0$ تا $x = 1$ ہے اطراف سے حاجز شدہ ہے۔ اس کا بایاں سر حاجز شدہ ہے، دائیں سر پر درجہ حرارت $g(t) = \sin \frac{50}{3}\pi t$ ہے جبکہ $u(x,0) = 0$ ہے۔ بلا واسطہ ترکیب میں $h = 0.2$ اور $r = 0.25$ لیتے ہوئے درجہ حرارت $u(x,t),\ 0 \le t \le 0.12$ تلاش کریں۔ اشارہ۔ سوال 21.153 کو دیکھیں۔

21.12 اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات

اس حصہ میں ہم مساوات موج اور مطلوبہ شرائط

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 \le x \le 1,\ t > 0 \tag{21.112}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{(ابتدائی ہٹاو)} \tag{21.113}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad \text{(ابتدائی سمتی رفتار)} \tag{21.114}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \text{(سرحدی شرائط)} \tag{21.115}$$

کو مثال بناتے ہوئے قطع زائد مساوات کے اعدادی حل پر غور کریں گے۔یاد رہے کہ x کے کسی بھی وقفہ اور مساوات $u_{tt} = c^2u_{xx}$ کو x اور t کے موزوں خطی تبادل سے (سوال 21.145 کے تبادل کی طرح) مساوات 21.112 میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

ایک لچکدار ارتعاش پذیر دھاگہ جس کے سر $x = 0$ اور $x = 1$ پر باندھے گئے ہوں کا $t > 0$ پر حرکت کے مسئلہ کو مساوات 21.112 تا مساوات 21.115 پیش کرتے ہیں۔اس مسئلے کا حل مساوات 13.35 میں دیا گیا ہے۔

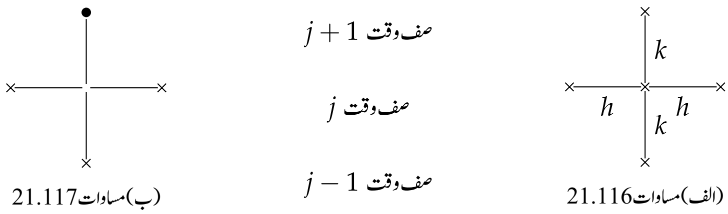
مساوات میں پہلے کی طرح تفرق کی جگہ فرق کے حاصل تقسیم پر کرتے ہیں۔یوں مساوات 21.112 سے

$$\frac{1}{k^2}[u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}] = \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}] \tag{21.116}$$

حاصل ہو گا جہاں x رخ جسامت جال h اور t رخ جسامت جال k ہے۔درج بالا مساوات فرق شکل 21.30-الف میں دکھائے گئے پانچ نقطوں کا آپس میں تعلق بیان کرتی ہے۔اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ، گزشتہ حصے کی قطع مکافی مساوات کی طرح، ہمیں یہاں بھی مستطیل جال درکار ہو گا۔ہم $r^* = \frac{k^2}{h^2} = 1$ لیتے ہیں جس سے u_{ij} حذف ہو گا (شکل 21.30-ب) اور مساوات 21.116 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \tag{21.117}$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $0 < r^* \le 1$ کے لئے موجودہ ترکیب مستحکم ہے لہٰذا موجودہ ابتدائی قیمتیں جن میں عدم استمرار نہیں پایا جاتا ہے کہ لئے ہم مساوات 21.117 سے قابل توقع نتائج کی توقع رکھتے ہیں۔ (ابتدائی معلومات میں عدم استمرار کی صورت میں قطع زائد مساوات کو موجودہ طریقہ سے حل کرنے میں دشواری پیش آئے گی۔)



شکل 21.30: مساوات 21.116 اور مساوات 21.117 میں استعمال ہونے والے جوڑ

مساوات 21.117 میں اب بھی تین قدم وقت $j-1$ ، j ، $j+1$ پائے جاتے ہیں جبکہ قطع مکافی کی صورت میں دو قدم وقت پائے جاتے تھے۔ مزید اب دو عدد ابتدائی شرائط ہیں۔ اس لئے ہم جاننا چاہیں گے کہ ہم قدم لینا کس طرح شروع کریں گے اور مساوات 21.114 میں دی گئی ابتدائی معلومات کو کس طرح استعمال کریں گے۔ ان معاملات پر اب غور کرتے ہیں۔ $u_t(x,0)=g(x)$ سے ہم مساوات فرق

$$\frac{1}{2k}(u_{i1}-u_{i,-1})=g_i \qquad \Longrightarrow \qquad u_{i,-1}=u_{i1}-2kg_i \tag{21.118}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں $g_i=g(ih)$ ہے۔ اب $t=0$ یعنی $j=0$ کے لئے مساوات 21.117 درج ذیل دے گی

$$u_{i1}=u_{i-1,0}+u_{i+1,0}-u_{i,-1}$$

جس میں ہم مساوات 21.118 پر کرتے ہوئے u_{i1} کے لئے حل کر کے

$$u_{i1}=\frac{1}{2}(u_{i-1,0}+u_{i+1,0}+kg_i) \tag{21.119}$$

حاصل کرتے ہیں جو u_{i1} کو ابتدائی معلومات کی صورت میں پیش کرتی ہے۔

مثال 21.24: ارتعاش پذیر دھاگہ

$h=k=0.2$ لیتے ہوئے موجودہ ترکیب کی مدد سے مساوات 21.112 تا مساوات 21.115 میں دیا گیا مسئلہ حل کریں جہاں $f(x)=\sin \pi x$ اور $g(x)=0$ ہیں۔

حل: ہم شکل 21.28 کی جال استعمال کرتے ہیں پس t کی قیمتیں $0.04, 0.08, \cdots$ کی بجائے اب $0.2, 0.4, \cdots$ ہوں گی۔ ابتدائی قیمتیں $u_{00}, u_{10}, \cdots$ وہی ہوں گی جو مثال 21.23 میں تھیں۔ مساوات 21.119 اور $g(x)=0$ سے

$$u_{i1}=\frac{1}{2}(u_{i-1,0}+u_{i+1,0})$$

حاصل ہو گا جس سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$u_{11} = \frac{1}{2}(u_{00} + u_{20}) = \tfrac{1}{2} \cdot 0.951\,057 = 0.475\,528$$
$$u_{21} = \frac{1}{2}(u_{10} + u_{30}) = \tfrac{1}{2} \cdot 1.538\,842 = 0.769\,421$$

یہاں بھی تشاکل کی بنا $u_{31} = u_{21}$ اور $u_{41} = u_{11}$ ہوں گے۔ $u_{01} = u_{02} = \cdots = 0$ استعمال کرتے ہوئے $j = 1$ کے لئے مساوات 21.118 سے

$$u_{12} = u_{01} + u_{21} - u_{10} = 0.769\,421 - 0.587\,785 = 0.181\,636$$
$$u_{22} = u_{11} + u_{31} - u_{20} = 0.475\,528 - 0.769\,421 - 0.951\,057 = 0.293\,892$$

حاصل ہوں گے اور تشاکل کی بنا $u_{32} = u_{22}$ اور $u_{42} = u_{12}$ ہوں گے۔اسی طرح باقی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔یوں دھاگے کی پہلی نصف ارتعاش کے لئے ہٹاو $u(x,t)$ کی درج ذیل قیمتیں حاصل ہوں گی۔

t	x=0	x=0.2	x=0.4	x=0.6	x=0.8	x=1
0.0	0	0.588	0.951	0.951	0.588	0
0.2	0	0.476	0.769	0.769	0.476	0
0.4	0	0.182	0.294	0.294	0.182	0
0.6	0	-0.182	-0.294	-0.294	-0.182	0
0.8	0	-0.476	-0.769	-0.769	-0.476	0
1.0	0	-0.588	-0.951	-0.951	-0.588	0

یہ قیمتیں بالکل درست ہیں۔اس مسئلے کا درست حل درج ذیل ہے (حصہ 13.3)۔

$$u(x,t) = \sin \pi x \cos \pi t$$

حصہ 13.4 میں مسئلہ دالومبیغ کے حل کی بنا یہاں بالکل درست نتائج حاصل ہوئے ہیں۔ □

سوالات

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 8.ا اور مساوات 9.ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 10.ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 2.ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

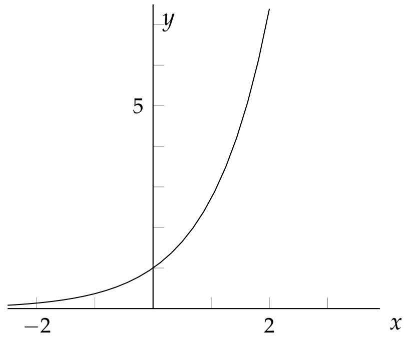
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

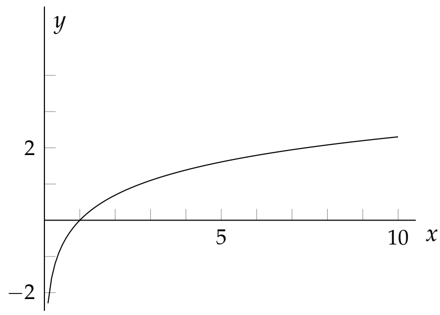
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

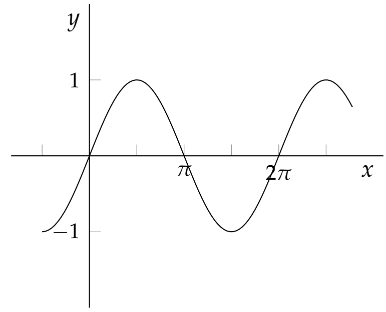


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

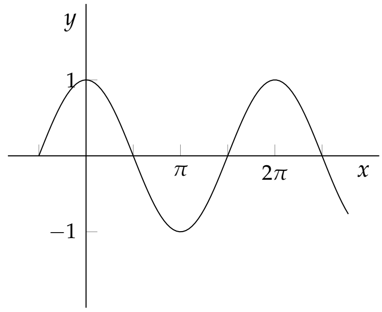


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$



(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

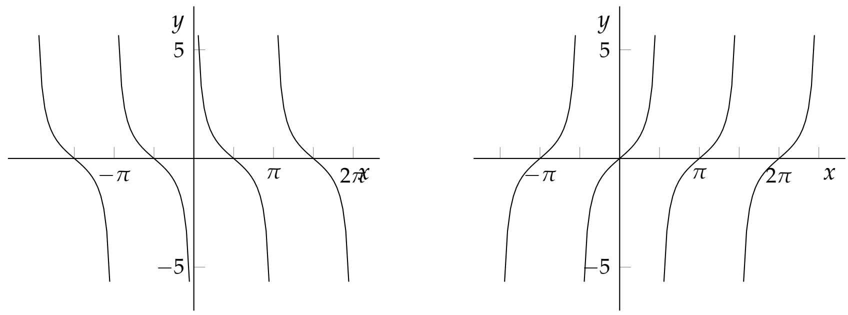
(ب.13)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\
\cosh x + \sinh x &= e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}
\end{aligned} \tag{ب.17}
$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

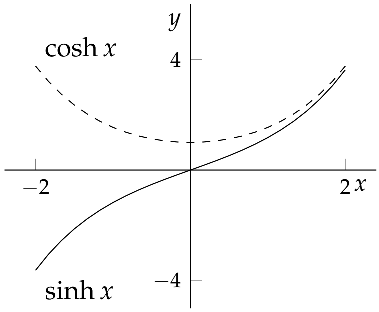
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$
\begin{aligned}
\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y
\end{aligned} \tag{ب.20}
$$

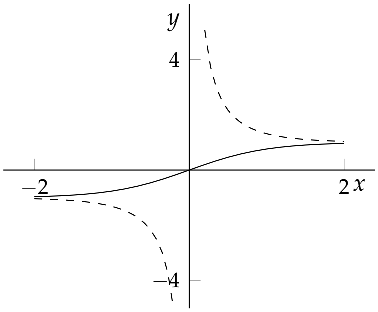
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

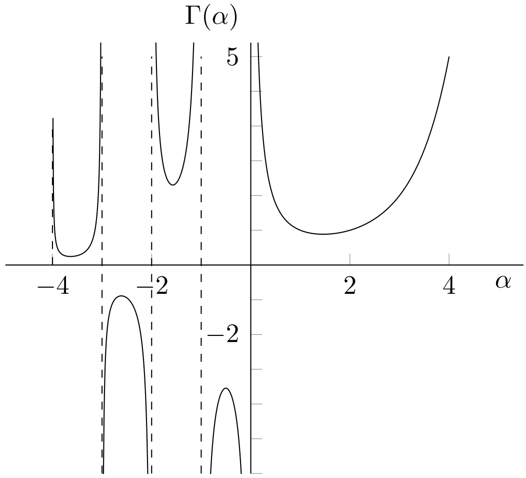
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

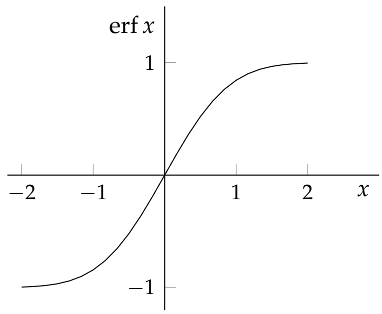
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

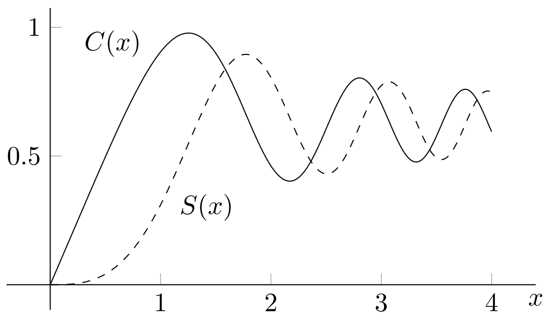
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔**مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

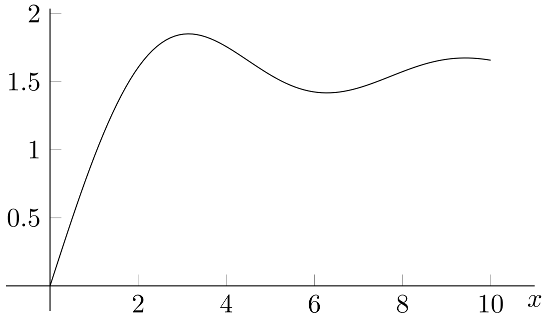
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$