

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کثی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 یولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کثی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

214	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
217	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

225	4	نظام تفرقی مساوات
226	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
235	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
250	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
251	4.3.1	خطی نظام
254	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
272	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام
281	4.6	کافی ترکیب برائے غیر خطی نظام
290	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ
298	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
299	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب

309	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
310	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
325	5.2	لیمنڈر مساوات۔ لیمنڈر کثیر رکنی
343	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس
348	5.3.1	عملی استعمال
362	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
377	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل

385	6	لاپلاس تبادلہ
386	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت

377	ا	اضافی ثبوت
-----	---	------------

381	ب	مفید معلومات
381	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 6

لاپلاس تبادلہ

لاپلاس بدل کی ترکیب سے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات حل کیے جاتے ہیں۔ یہ ترکیب تین قدم پر مشتمل ہے۔

- پہلا قدم: ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے سادہ ضمنی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔

- دوسرا قدم: ضمنی مساوات کو خالصتاً الجبرائی طور پر حل کیا جاتا ہے۔

- تیسرا قدم: ضمنی مساوات کے حل کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے اصل حل حاصل کیا جاتا ہے۔

یوں لاپلاس بدل تفرقی مساوات کے مسئلے کو سادہ الجبرائی مسئلہ میں تبدیل کرتا ہے۔ تیسرے قدم پر الٹ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے عموماً ایسی جدول کا سہارا لیا جاتا ہے جس میں تفاعل اور تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل درج ہوں۔

انجینئری میں لاپلاس بدل کی ترکیب اہم کردار ادا کرتی ہے، بالخصوص ان مسائل میں جہاں جبری تفاعل غیر استمراری ہو، مثلاً جب جبری تفاعل کچھ وقفے کے لئے کارآمد ہو یا جبری تفاعل غیر سائن نمادہر تفاعل ہو۔

اب تک غیر متجانس مساوات کا عمومی حل حاصل کرتے ہوئے پہلے مطابقتی متجانس مساوات کا حل اور پھر غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل حاصل کیا جاتا رہا۔ لاپلاس بدل کی ترکیب میں عمومی حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) مسائل کے حل میں عمومی حل حاصل کرنے کے بعد ابتدائی (سرحدی) شرائط پر کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی چونکہ حل یہ شرائط شامل ہوتے ہیں۔

6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت

فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر معین ہے۔ ہم $f(t)$ کو e^{-st} سے ضرب دیتے ہوئے، t کے ساتھ، 0 تا ∞ تکمل لیتے ہیں۔ اگر ایسا تکمل موجود ہو تو یہ s پر منحصر ہو گا لہذا اس کو $F(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$(6.1) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

تفاعل $F(s)$ کو تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل¹ کہا جاتا ہے اور اس کو $\mathcal{L}(f)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(6.2) \quad F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$f(t)$ سے $F(s)$ کے حصول کو لاپلاس تبدل² کہتے ہیں۔

اسی طرح $f(t)$ کو $F(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل³ کہتے ہیں جسے $\mathcal{L}^{-1}(F)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(6.3) \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$$

علامت نویسی

اصل تفاعل کو چھوٹے لاطینی حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ لاپلاس بدل کو اسی حرف تہجی کی بڑی صورت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $f(t)$ کا بدل $F(s)$ ہو گا اور $g(t)$ کا لاپلاس بدل $G(s)$ ہو گا۔

مثال 6.1: تفاعل $f(t) = 1$ ، جہاں $t \geq 0$ ہے، کا لاپلاس بدل مساوات 6.2 سے بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

Laplace transform¹
Laplace transformation²
inverse Laplace transform³

ہو گا جو $s > 0$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

نکمل 6.2 کی علامت پر آسائش ضرور ہے لیکن اس پر مزید غور کی ضرورت ہے۔ اس نکمل کا وقفہ لاتناہی ہے۔ ایسے نکمل کو غیر مناسب نکمل⁴ کہتے ہیں اور حزب تعریف، اس کی قیمت درج ذیل اصول کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

یوں اس مثال میں اس آسائش علامت کا مطلب درج ذیل ہے۔

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^0 \right] = \frac{1}{s}, \quad (s > 0)$$

اس پورے باب میں نکمل کی یہی علامت استعمال کی جائے گی۔

مثال 6.2: تفاعل $f(t) = e^{at}$ جہاں $t \geq 0$ اور a مستقل ہے کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دریافت کریں۔

حل: مساوات 6.2 سے

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty}$$

ملتا ہے۔ اب اگر $s - a > 0$ ہو (یعنی s کی قیمت a سے زیادہ چھنی گئی ہو) تب درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

اگرچہ ہم بالکل اسی طرز پر دیگر تفاعل کے لاپلاس بدل بذریعہ مکمل حاصل کر سکتے ہیں، حقیقت میں لاپلاس تبدلہ کے ایسی کئی خواص ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے دیگر لاپلاس بدل نہایت عمدگی کے ساتھ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ لاپلاس تبدلہ کی ایک خاصیت خطیت ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

مسئلہ 6.1: لاپلاس تبدلہ کی خطیت

لاپلاس تبدلہ خطی عمل ہے۔ یوں ایسے تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$ ، جن کے لاپلاس بدل موجود ہوں، کے عمومی مجموعے کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

ثبوت: لاپلاس تبدلہ کی تعریف سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} [af(t) + bg(t)] dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]\end{aligned}$$

مثال 6.3: آئیں تفاعل $f(t) = \cosh at$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.1 اور مثال 6.2 کی مدد سے لکھیں۔ چونکہ $\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$ ہے لہذا

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

ہو گا جہاں $s > a \geq 0$ چنا گیا ہے۔

مثال 6.4: آئیں تقابل $\sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ چونکہ $\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$ ہے لہذا مسئلہ خطیت سے تقابل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

مثال 6.5: $\sin \omega t$ اور $\cos \omega t$ کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: انہیں $\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ اور $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) - \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

جدول 6.1 میں چند اہم بنیادی تقابل اور ان کے لاپلاس بدل دیے گئے ہیں۔ اس جدول میں دیے لاپلاس بدل جاننے کے بعد ہم تقریباً ان تمام تقابل کے بدل، لاپلاسی خواص سے حاصل کر پائیں گے، جو ہمیں درکار ہوں گے۔

جدول 6.1 میں پہلا، دوسرا اور تیسرا کلیہ چوتھے کلیے سے اخذ کیے جاسکتے ہیں جبکہ چوتھا کلیہ از خود پانچویں کلیہ میں مساوات 5.93 استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(n+1) = n!$ لکھ کر حاصل کیا جاسکتا ہے، جہاں n غیر منفی عدد صحیح ہے۔ پانچواں کلیہ، لاپلاس بدل کی تعریف مساوات 6.2

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt$$

میں $st = x$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.91 کے استعمال سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^a dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad (s > 0)$$

جدول 6.1: چند بنیادی تفاعل $f(t)$ اور ان کے لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$

شمار	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$	شمار	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$\frac{1}{s}$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
4	t^n ($n = 1, 2, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
5	t^a ($a > 0$)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

s منتقلی

تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل جانتے ہوئے تفاعل $e^{at} f(t)$ کا لاپلاس بدل درج ذیل مسئلہ کی مدد سے فوراً لکھا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 6.2: منتقلی کا پہلا مسئلہ، s منتقلی
اگر تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو (جہاں کسی k کے لئے $s > k$ ہے) تب تفاعل $e^{at} f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s-a)$ ہوگا (جہاں $s-a > k$ ہے)۔

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

اس مساوات کو الٹ لاپلاس بدل کی صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$e^{at} f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]$$

ثبوت: لاپلاس بدل کے مکمل مساوات 6.2 میں s کی جگہ $s-a$ پر کرتے ہوئے

$$(6.4) \quad F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \mathcal{L}[e^{at} f(t)]$$

ماتا ہے۔ اگر کسی $s > k$ کے لئے $F(s)$ موجود ہو یعنی اس کی قیمت محدود ہو تب $s - a > k$ کے لئے پہلا مکمل بھی موجود ہو گا (یعنی محدود قیمت کا ہو گا)۔ اس کیلئے کے دونوں اطراف کا الٹ لاپلاس بدل لینے سے مسئلے کی دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال 6.6: قسری ارتعاش

جدول 6.1 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے بدل کو استعمال کرتے ہوئے جدول میں گیارہ اور بارہ شمار پر دیے گئے لاپلاس بدل کو مسئلہ 6.2 کی مدد سے فوراً لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{4s + 24}{s^2 + 4s + 104}$$

حل: اس کو درکار صورت

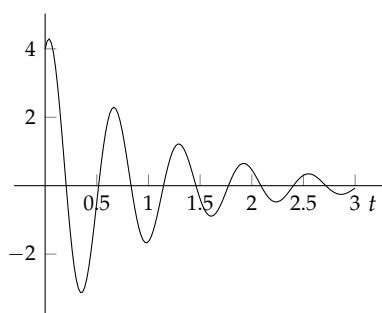
$$f = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4(s + 1) + 2(10)}{(s + 1)^2 + 10^2} \right] = 4\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 10^2} \right] + 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10}{(s + 1)^2 + 10^2} \right]$$

میں لاتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f = e^{-t}(4 \cos 10t + 2 \sin 10t)$$

جسے شکل 6.1 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ قسری ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔

لاپلاس بدل کی وجودیت اور یکتا



شکل 6.1: قسری ارتعاش (مثال 6.6)

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.