

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کشی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
70	1.6 عمودی خطوط کی تسلیں
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکسانیت
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
113	2.3 تفرقی عامل
117	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
132	2.5 پولر کوئی مساوات
141	2.6 حل کی وجودیت اور یکسانی؛ ورنسکی
150	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
162	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک
168	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک
172	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی
183	2.10 متعین متغیرات بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
191	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات
191	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
203	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

212 . . . . .	3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
215 . . . . .	3.4 متعین متغیرات بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 3

# بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات

دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے طریقے بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی صورت میں مساوات زیادہ پیچیدہ ہوں گے، امتیازی مساوات کے جذر بھی تعداد میں زیادہ اور حصول میں نسبتاً مشکل ہوں گے اور ورنہ کسی زیادہ اہم کردار ادا کرے گا۔

### 3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$n$  درجی سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم متغیرہ  $y(x)$  کا  $y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$  سب سے بلند درجی تفرق ہو۔ ایسی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں  $y$  اور کم درجی تفرق موجود یا غیر موجود ہو سکتے ہیں۔ ایسی مساوات کو خطی کہتے ہیں اگر اس کو

$$(3.1) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$



لکھنا ممکن ہو۔ صفحہ 82 پر دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کی بات کی گئی۔ موجودہ مساوات میں  $n = 2$  ،  
 $p_1 = p$  اور  $p_0 = q$  پر کرنے سے دو درجی مساوات حاصل ہوگی۔ عددی سر  $p_0(x)$  تا  $p_n(x)$  اور جبری  
تفاعل  $r(x)$  غیر تابع متغیرہ  $x$  کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں جبکہ  $y(x)$  نامعلوم متغیرہ ہے۔ خطی مساوات  
کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں  $y^{(n)}$  کا عددی سر اکائی 1 ہے۔ تفرقی مساوات میں  $p_n(x)y^{(n)}$   
موجود ہونے کی صورت میں پوری مساوات کو  $p_n(x)$  سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کریں۔ جو  
تفرقی مساوات درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر خطی کہلاتی ہے۔

کسی کھلے وقفے  $I$  پر  $r(x)$  مکمل صفر  $r \equiv 0$  ہونے کی صورت میں مساوات 3.1 سے متجانس مساوات  
(3.2) 
$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ کھلے وقفے پر  $r(x)$  کے مکمل صفر ہونے سے مراد یہ ہے کہ اس وقفے پر ہر  $x$  کے لئے  $r(x)$   
کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ دو درجی تفرقی مساوات کی طرح اگر  $r(x)$  مکمل صفر نہ ہو تب مساوات غیر متجانس  
کہلائے گی۔

کھلے وقفہ  $I$  پر  $n$  درجی خطی یا غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل  $y = h(x)$  سے مراد ایسا تفاعل ہے  
جو  $I$  پر معین ہو، کھلے وقفے پر اس کا  $n$  درجی تفرق موجود ہو اور تفرقی مساوات میں  $y$  اور اس کے تفرقات  
کی جگہ  $h$  اور اس کے تفرقات پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں حاصل ہوں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات: خطی میل اور عمومی حل

خطی میل یا اصول خطیت جس کا ذکر صفحہ 84 مسئلہ 2.1 میں کیا گیا بلند درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کے  
لئے بھی درست ہے۔

مسئلہ 3.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ بلند درجی تفرقی مساوات  
کھلے وقفہ  $I$  پر متجانس خطی بلند درجی تفرقی مساوات 3.2 کے حل کا خطی میل بھی  $I$  پر اس مساوات کا حل ہو  
گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔ (یہ اصول غیر  
خطی اور غیر متجانس مساوات پر لاگو نہیں ہوتا۔)

اس کا ثبوت گزشتہ باب میں دئے گئے ثبوت کی طرح ہے جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہماری بقایا گفتگو ہو بہو دو درجی تفرقی مساوات کی طرح ہوگی لہذا یہاں بلند درجی خطی متجانس مساوات کی عمومی حل کی بات کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر  $n$  عدد تفاعل کی خطی طور غیر تابع ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل  
کھلے وقفے  $I$  پر مساوات 3.2 کا عمومی حل

$$(3.3) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

ہے جہاں  $y_1(x)$  تا  $y_n(x)$  حل کی اساس اور  $c_1$  تا  $c_2$  اختیاری مستقل ہیں۔ یوں  $y_1$  تا  $y_n$  کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

عمومی حل کے مستقل کی قیمتیں مقرر کرنے سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔

تعریف: خطی طور تابع تفاعل اور خطی طور غیر تابع تفاعل  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر  $n$  عدد تفاعل  $y_1(x)$  تا  $y_n(x)$  معین ہیں۔

وقفہ  $I$  پر معین  $y_1$  تا  $y_n$ ، اس وقفے پر اس صورت خطی طور غیر تابع<sup>1</sup> کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$(3.4) \quad k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$$

سے مراد

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

ہو۔  $k_1$  تا  $k_n$  میں کم از کم ایک کی قیمت صفر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 3.4 پر پورا اترتے ہوئے حل  $y_1$  تا  $y_n$  خطی طور تابع<sup>2</sup> کہلاتے ہیں۔

<sup>1</sup> linearly independent  
<sup>2</sup> linearly dependent

$y_1$  تا  $y_n$  میں (کم از کم ایک) تفاعل کو اس صورت بقایا تفاعل کے خطی میل کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جب اس وقفے پر  $y_1$  تا  $y_n$  خطی طور تابع ہوں۔ یوں اگر  $k_1 \neq 0$  ہو تب ہم مساوات 3.4 کو  $k_1$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$y_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2y_2 + k_3y_3 + \cdots + k_ny_n)$$

لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ  $y_1$  کو بقایا تفاعل کے خطی میل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسی کو خطی طور تابع کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $n = 2$  کی صورت میں ہمیں حصہ 2.6 میں بیان کئے گئے تصورات ملتے ہیں۔

مثال 3.1: خطی طور تابع

ثابت کریں کہ تفاعل  $y_1 = 2 \sin x$  ،  $y_2 = 1.5x^2$  ،  $y_3 = 5 \cos x + \sin x$  اور  $y_4 = 4 \cos x$  کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور تابع ہیں۔

حل: ہم  $y_3 = \frac{1}{2}y_1 + 0y_2 + \frac{5}{4}y_4$  لکھ سکتے ہیں لہذا  $y_1$  تا  $y_4$  خطی طور تابع تفاعل ہیں۔

مثال 3.2: خطی طور غیر تابع

ثابت کریں کہ  $y_1 = x$  ،  $y_2 = x^3$  اور  $y = x^4$  کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: ہم مساوات  $k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 = 0$  میں مختلف  $x$  کی قیمتیں پر کرتے ہوئے  $k_1$  تا  $k_3$  دریافت کرتے ہیں۔ کھلے وقفے پر نقطہ  $x = 1$  ،  $x = -1$  اور  $x = 2$  چنتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 8k_2 + 16k_3 &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے  $k_1 = 0$  ،  $k_2 = 0$  اور  $k_3 = 0$  ملتا ہے جو خطی طور غیر تابع ہونے کا ثبوت ہے۔

مثال 3.3: اساس۔ عمومی حل  $y^{(3)} - y' = 0$  کا عمومی حل تلاش کریں۔  $y^{(3)}$  سے مراد  $\frac{d^3 y}{dx^3}$  ہے۔

حل: حصہ 2.2 کی طرح ہم اس متجانس مساوات کا حل  $y = e^{\lambda x}$  تصور کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ اس کو  $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$  لکھتے ہوئے  $\lambda = 0$  اور  $\lambda = \pm 1$  ملتے ہیں جن سے اساس  $y_1 = c$  ،  $y_2 = e^x$  اور  $y_3 = e^{-x}$  ملتا ہے۔ جیسا مثال 3.5 میں ثابت کیا جائے گا، یہ اساس کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں لہذا کسی بھی کھلے وقفے پر عمومی حل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

ہو گا۔

ابتدائی قیمت مسئلہ۔ وجودیت اور یکتائی

مساوات 3.2 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.2 اور درج ذیل  $n$  ابتدائی شرائط پر مشتمل ہو گا

$$(3.5) \quad y(x_0) = K_0, y'(x_0) = K_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$$

جہاں  $x_0$  کھلے وقفے  $I$  پر ایک نقطہ اور  $K_0$  تا  $K_{n-1}$  اس نقطے پر دیے گئے مقدار ہیں۔

صفحہ 141 پر مسئلہ 2.2 کو وسعت دیتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

مسئلہ 3.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت بلند درجی تفرقی مساوات کھلے وقفہ  $I$  پر مساوات 3.2 کے عددی سر  $p_0$  تا  $p_{n-1}$  استمراری ہونے کی صورت میں اگر  $x_0$  کھلے وقفہ پر پایا جاتا ہو تب مساوات 3.2 اور مساوات 3.5 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا  $I$  پر یکتا حل  $y(x)$  موجود ہے۔

حل کی موجودگی کا ثبوت اس کتاب میں نہیں دیا جائے گا۔ کتاب کے آخر میں ضمیمہ امیں حل کی یکتائی کے ثبوت میں معمولی رد بدل سے یکتائی ثابت کی جاسکتی ہے۔

مثال 3.4: تین درجی پولر کوئی مساوات کا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$x^3 y''' - 5x^2 y'' + 12xy' - 12y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 0$$

حل: ہم تفرقی مساوات میں آزمائشی تفاعل  $y = x^m$  پر کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$m^3 - 8m^2 + 19m - 12 = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس کے جذر  $m = 1$ ،  $m = 3$  اور  $m = 4$  ہیں۔ جذر کو مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ یہاں جذر حاصل کرنے پر بحث نہیں کی جائے گی۔ یوں حل کی اساس  $y_1 = x$ ،  $y_2 = x^3$  اور  $y_3 = x^4$  ہیں جنہیں مثال 3.2 میں خطی طور غیر تابع ثابت کیا گیا۔ اس طرح عمومی حل

$$y = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^4$$

ہو گا۔ دپے گئے تفرقی مساوات کو  $x^3$  سے تقسیم کرتے ہوئے  $y'''$  کا عددی سر اکائی حاصل کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے۔ معیاری صورت میں مساوات کے دیگر عددی سر  $x = 0$  پر غیر استمراری ہیں۔ اس کے باوجود درج بالا عمومی حل تمام  $x$  بشمول  $x = 0$  کے لئے درست ہے۔

عمومی حل اور اس کے تفرقات  $y' = c_1 + 3c_2 x^2 + 4c_3 x^3$  اور  $y'' = 6c_2 x + 12c_3 x^2$  میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزا مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$c_1 + 3c_2 + 4c_3 = -1$$

$$6c_2 + 12c_3 = 0$$

جن کا حل  $c_1 = 3$  ،  $c_2 = -4$  اور  $c_3 = 2$  ہے۔ اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = 3x - 4x^3 + 2x^4$$

خطی طور غیر تابع حل۔ ورونسکی

عمومی حل کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ حل خطی طور غیر تابع ہوں۔ اگرچہ عموماً حل کو دیکھ کر ہی اندازہ ہو جاتا ہے کہ وہ خطی طور غیر تابع ہیں یا نہیں ہیں، البتہ ایسا معلوم کرنے کا منظم طریقہ زیادہ بہتر ہو گا۔ صفحہ 142 پر مسئلہ 2.3 دو درجی  $n = 2$  مساوات کے علاوہ بلند درجی مساوات کے لئے بھی درست ہے۔ بلند درجی مساوات کی صورت میں ورونسکی درج ذیل ہو گی۔

$$(3.6) \quad W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ورونسکی تفرقی مساوات کے حل  $y_1$  تا  $y_n$  پر مبنی ہے جو از خود  $x$  پر مبنی ہیں۔ ورونسکی غیر صفر ہونے کی صورت میں  $y_1$  تا  $y_n$  خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

مسئلہ 3.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل

کھلے وقفہ  $I$  پر استمراری  $p_0(x)$  تا  $p_{n-1}(x)$  عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات 3.2 کے  $I$  پر حل  $y_1$  تا  $y_n$  اس صورت خطی طور تابع ہوں گے جب ان کے ورونسکی<sup>3</sup> کی قیمت کسی  $x_0$  پر صفر کے برابر ہو، جہاں  $x_0$  کھلے وقفے  $I$  پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ  $x = x_0$  پر  $W = 0$  ہو تب پورے  $I$  پر  $W$  مکمل صفر<sup>4</sup> ہو گا۔ یوں اگر  $I$  پر کوئی ایسا  $x$  پایا جاتا ہو جس پر  $W$  صفر کے برابر نہ ہو تب  $I$  پر  $y_1$  تا  $y_n$  خطی طور غیر تابع ہوں گے اور یہ حل کی اساس ہوں گے۔

<sup>3</sup>Wronskian  
<sup>4</sup>identically zero

ثبوت :

(الف) تصور کریں کہ کھلے وقفہ  $I$  پر  $y_1$  تا  $y_n$  مساوات 3.2 کے حل ہیں۔ یوں خطی طور غیر تابع کی تعریف سے

$$(3.7) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔  $I$  پر اس مساوات کی  $n - 1$  تفرقات لیتے ہیں۔

$$k_1 y_1' + \cdots + k_n y_n' = 0$$

$$k_1 y_1'' + \cdots + k_n y_n'' = 0$$

(3.8)

⋮

$$k_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + k_n y_n^{(n-1)} = 0$$

مساوات 3.7 اور مساوات 3.8  $n$  عدد خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کا نظام ہے جس کا غیر صفر حل  $k_1^5$  تا  $k_n$  ہے لہذا  $I$  پر تمام  $x$  کے لئے، اس نظام کی عددی سر قالب کی حتمی قیمت، مسئلہ کویمو<sup>6</sup> [جسے باب-7 میں پیش کیا گیا ہے] کے تحت، صفر کے برابر ہوگی۔ اب قالب کی حتمی قیمت ہی وروئسکی ہے لہذا  $I$  پر تمام  $x$  کے لئے  $W$  صفر کے برابر ہے۔

(ب) مسئلہ کریمر کو استعمال کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ  $W = 0$  کی صورت میں مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کے نظام کا  $x = x_0$  پر غیر صفر حل  $k_1^*$  تا  $k_n^*$  پایا جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے،  $I$  پر مساوات 3.2 کا عمومی حل  $y^* = k_1^* y_1 + \cdots + k_n^* y_n$  لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 کے تحت  $y^*$  ابتدائی شرائط  $y^*(x_0) = 0$  تا  $y^{*(n-1)}(x_0) = 0$  پر پورا اترتا ہے۔ انہیں ابتدائی شرائط پر حل  $y \equiv 0$  بھی پورا اترتا ہے اور یوں مسئلہ 3.2 کے تحت، چونکہ مساوات 3.7 کے عددی سر  $I$  پر استمراری ہیں، لہذا  $y^* = y$  ہوگا۔ اس طرح  $y^* = k_1^* y_1 + \cdots + k_n^* y_n \equiv 0$  پورے  $I$  پر ہوگا جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $y_1$  تا  $y_n$  خطی طور تابع ہیں۔

(پ) اگر  $W$  کی قیمت  $x_0$  پر صفر ہو جہاں  $x_0$  کھلے وقفہ  $I$  پر پایا جاتا ہو، تب ثبوت (ب) کے تحت خطی طور تابع ہونا ثابت ہوتا ہے اور یوں ثبوت (الف) کے تحت  $W \equiv 0$  ہوگا۔ اس طرح اگر  $I$  پر نقطہ  $x_1$  پر  $W$  صفر نہ ہو تب  $y_1$  تا  $y_n$  کھلے وقفہ  $I$  پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

non trivial solution<sup>5</sup>  
Cramer's theorem<sup>6</sup>

مثال 3.5: اساس۔ وروئسی

ثابت کریں کہ مثال 3.3 میں حاصل کردہ حل  $y_1 = c$ ،  $y_2 = e^x$  اور  $y_3 = e^{-x}$  خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: مساوات 3.6 کے طرز پر وروئسی لکھ کر

$$W = \begin{vmatrix} c & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^x \end{vmatrix} = ce^xe^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2c$$

حل کیا گیا ہے جہاں پہلی قطار سے  $c$ ، دوسری قطار سے  $e^x$  اور تیسری قطار سے  $e^{-x}$  باہر نکال کر قالب کی سادہ صورت حاصل کی گئی اور اس کے بعد پہلی قطار سے قالب کو پھیلا کر اس کی حتمی قیمت حاصل کی گئی ہے۔ چونکہ  $x$  کی کسی بھی قیمت کے لئے  $W \neq 0$  ہے لہذا کسی بھی کھلے وقفے پر  $y_1$  تا  $y_3$  خطی طور غیر تابع ہیں۔

مساوات 3.2 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

پہلے عمومی حل کی وجودیت پر بات کرتے ہیں۔ صفحہ 145 پر دیا گیا مسئلہ 2.4 بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی کارآمد ہے۔

مسئلہ 3.4: وجودیت عمومی حل

کھلے وقفہ  $I$  پر استمراری  $p_0(x)$  اور  $p_{n-1}(x)$  کی صورت میں مساوات 3.2 کا عمومی حل  $I$  پر موجود ہے۔



ثبوت: ہم  $I$  پر کوئی نقطہ  $x_0$  لیتے ہیں۔ مسئلہ 3.2 کے تحت مساوات 3.2 کے  $n$  عدد حل  $y_1$  تا  $y_n$  پائے جاتے ہیں جو مساوات 3.5 میں دیے گئے ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ ہم ابتدائی شرائط یوں چنتے ہیں کہ  $K_{j-1} = 1$  ہوں جبکہ بقایا  $K$  صفر کے برابر ہوں۔ اس طرح  $x_0$  پر حل کی وروئسی کی قیمت اکائی (1) ہو گی۔ مثلاً  $n = 3$  کی صورت میں  $y_1(x_0) = 1$ ،  $y_2'(x_0) = 1$  اور  $y_3''(x_0) = 1$  ہوں گے جبکہ بقایا تمام ابتدائی قیمتیں صفر کے برابر ہوں گی۔ اس طرح وروئسی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0), y_3(x_0)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

اکائی ہو گی۔ یوں کسی بھی  $n$  کے لئے حل  $y_1$  تا  $y_n$  مسئلہ 3.3 کے تحت  $I$  پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ یہ حل اساس ہیں لہذا  $I$  پر مساوات 3.2 کا عمومی حل  $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$  ہو گا۔

اب ہم اس قابل ہیں کہ ثابت کریں کہ مساوات 3.2 کے عمومی حل میں مساوات 3.2 کے تمام حل شامل ہیں۔ مساوات 3.2 کے عمومی حل کے اختیاری مستقل میں موزوں قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں  $n$  درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔ نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 3.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

کھلے وقفے  $I$  پر استمراری  $p_0(x)$  تا  $p_{n-1}(x)$  کی صورت میں  $I$  پر مساوات 3.2 کے ہر حل  $y = Y(x)$  کو

$$(3.9) \quad Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_nY_n(x)$$

لکھا جس سکتا ہے جہاں  $y_1$  تا  $y_n$  کھلے وقفے  $I$  پر مساوات 3.2 کے حل کی اساس ہیں جبکہ  $C_1$  تا  $C_n$  موزوں مستقل ہیں۔

ثبوت: فرض کریں کہ  $I$  پر مساوات 3.2 کا عمومی حل  $y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$  ہے جبکہ  $Y$  مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل ہے۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر کسی بھی نقطہ  $x_0$  پر ایسے  $c_1$  تا  $c_n$  دریافت کیے جا

سکتے ہیں کہ  $x_0$  پر  $y$  اور اس کے پہلے  $n-1$  درجی تفرقات اسی نقطے پر  $Y$  اور اس کے پہلے  $n-1$  درجہ تفرقات کے برابر ہوں۔ اس طرح  $x_0$  پر

$$\begin{aligned} c_1 y_1 + \dots + c_n y_n &= Y \\ c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' &= Y' \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} &= Y^{(n-1)} \end{aligned}$$

ہو گا جو الجبرائی مساوات کا خطی نظام ہے، جس کے نامعلوم متغیرات  $c_1$  تا  $c_n$  جبکہ اس کا عددی سر قالب،  $x_0$  پر حل  $y_1$  تا  $y_n$  کا، وروئسکی ہے۔ چونکہ  $y_1$  تا  $y_n$  اساس ہیں لہذا مسئلہ 3.3 کے تحت اس کی وروئسکی غیر صفر ہے۔ یوں باب-7 میں دیے گئے قاعدہ کرمبر<sup>7</sup> کے تحت مساوات 3.10 کا یکتا حل  $c_1 = C_1$  تا  $c_n = C_n$  پایا جاتا ہے۔ عمومی حل میں اختیاری مستقل کی جگہ ان قیمتوں کو پر کرتے ہوئے  $I$  پر مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

ملتا ہے۔ مساوات 3.10 کے تحت  $x_0$  پر  $y^*$  اور اس کے پہلے  $n-1$  تفرقات،  $x_0$  پر  $Y$  اور اس کے پہلے  $n-1$  تفرقات کے برابر ہیں یعنی  $x_0$  پر  $y^*$  اور  $Y$  یکساں ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ یوں مسئلہ 3.2 کے تحت  $I$  پر  $y^* \equiv Y$  ہو گا جو درکار ثبوت ہے۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر ہماری بحث یہاں اختتام پذیر ہوتی ہے۔ حزب توقع  $n = 2$  کے لئے یہ بحث ہو بہو حصہ 2.6 کی طرز اختیار کر لیتی ہے۔

### سوالات

سوال 3.1 تا سوال 3.6 میں دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ وروئسکی استعمال کرتے ہوئے، ثابت کریں کہ کسی بھی کھلے وقفے پر، دیے حل خطی طور غیر تابع ہیں لہذا یہ حل کی اساس ہیں۔ سوال 3.1:  $y''' = 0$ ,  $1, x, x^2$ : جواب:  $W = 2$

سوال 3.2:  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ ,  $e^x, e^{-x}, e^{2x}$   
جواب:  $W = -6e^{2x}$

سوال 3.3:  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ ,  $\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$   
جواب:  $W = 4$

سوال 3.4:  $y^{(4)} + 12y^{(3)} + 54y^{(2)} + 108y^{(1)} + 81y = 0$ ,  $e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}$   
جواب:  $W = 12e^{-12x}$

سوال 3.5:  $y''' + 4y'' + 13y' = 0$ ,  $1, e^{-2x} \cos 3x, e^{-2x} \sin 3x$   
جواب:  $W = 39e^{-4x}$

سوال 3.6:  $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ ,  $1, x^2, x^4$   
میں کھلا وقفہ  $x > 0$  ہے۔ ثابت کریں کہ دیے گئے حل درست اور اساس ہیں۔

جواب:  $W = 16x^3$  صرف  $x = 0$  پر صفر کے برابر ہے لیکن یہ نقطہ کھلے وقفے میں شامل نہیں ہے لہذا کھلے وقفے پر  $W \neq 0$  ہے۔

سوال 3.7 تا سوال 3.10: کیا دیے گئے تفاعل کھلے وقفہ  $-\infty < x < \infty$  پر خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 3.7:  $\sin x, \cos x, 1$   
جواب:  $W = -1$  ہے لہذا یہ خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.8:  $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$   
جواب:  $W = 2e^{-3x}$  ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.9:  $\sinh x, \cosh x, e^x$   
جواب:  $W = 0$  ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور تابع ہیں۔

سوال 3.10:  $\sin x, \cos x, e^x$   
جواب:  $W = -2e^x$  ہے لہذا تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

## 3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم حصہ 2.2 کے طرز پر چلتے ہوئے، مستقل عددی سروالے متجانس خطی  $n$  درجی سادہ تفرقی مساوات

$$(3.11) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں  $y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}$  اور  $a_0$  تا  $a_{n-1}$  مستقل مقدار ہیں۔ حصہ 2.2 کی طرح ہم اس مساوات میں  $y = e^\lambda$  پر کرتے ہوئے اس کی امتیازی مساوات

$$(3.12) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ اگر  $\lambda$  مساوات 3.12 کا جذر ہو تب  $y = e^\lambda$  مساوات 3.11 کا حل ہو گا۔ مساوات 3.12 کے جذر کو اعدادی طریقوں<sup>8</sup> سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بلند درجی ( $n > 2$ ) تفرقی مساوات کے حل میں زیادہ ممکنات پائے جاتے ہیں۔ آئیں انہیں چند مثالوں کی مدد سے دیکھیں۔

منفرد جذر

اگر مساوات 3.12 کے  $n$  جذر  $\lambda_1$  تا  $\lambda_n$  منفرد اور حقیقی ہوں تب حل

$$(3.13) \quad y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

کسی بھی  $x$  کے لئے حل کی اساس ہوں گے جن سے مساوات 3.11 کا عمومی حل

$$(3.14) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم درج ذیل مثال کے بعد دیکھیں گے کہ مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔

مثال 3.6: تفرقی مساوات  $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$  کا حل تلاش کریں۔

حل: اس کا امتیازی مساوات  $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$  ہے جس کے جذر  $-1$ ،  $1$  اور  $-2$  ہیں۔ اگر آپ کسی طرح امتیازی مساوات کا ایک جذر حاصل کر لیں تو بقیہ دو جذر با آسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں اگر  $\lambda = -1$  دریافت کر لیا جائے تو امتیازی مساوات کو  $\lambda + 1$  سے تقسیم کرتے ہوئے  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  حاصل کر کے اس کے جذر  $1$  اور  $-2$  نسبتاً آسانی سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں دیے گئے تفرقی مساوات کا عمومی حل  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$  ہو گا۔

مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں

ہم مساوات 3.13 میں دیے گئے حل کی وروئسی لکھ کر، قالب کی پہلی قطار سے  $e^{\lambda_1 x}$ ، دوسری قطار سے  $e^{\lambda_2 x}$  اور اسی طرح چلتے ہوئے  $n$  قطار سے  $e^{\lambda_n x}$  باہر نکالتے ہوئے کل  $E = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}$  باہر نکال کر نسبتاً آسان قالب حاصل کرتے ہیں۔

(3.15)

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

اب قوت نمائی تفاعل  $E$  کسی بھی صورت صفر کے برابر نہیں ہو سکتا لہذا  $W = 0$  صرف اس صورت ہو گا جب دائیں قالب کی حتمی قیمت صفر کے برابر ہو۔ دائیں قالب کی حتمی قیمت کو کوشی قالبی حتمی قیمت<sup>9</sup> کہتے ہیں جس کی قیمت

$$(3.16) \quad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V$$

کے برابر ثابت کی جاسکتی ہے۔ تمام  $V$  تمام  $(\lambda_j - \lambda_k)$  کا حاصل ضرب ہے جہاں  $j < k (\leq n)$  ہے مثلاً  $n = 3$  کی صورت میں  $V = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$  ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو جذر یکساں ہونے کی صورت میں  $V = 0$  اور یوں  $W = 0$  ہو گا۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ وروئسی

صرف اس صورت میں صفر کے برابر نہیں ہو گا جب مساوات 3.12 کے تمام جذر ایک دونوں سے مختلف ہوں۔ اس سے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 3.6: اساس  
مساوات 3.11 کے حل  $e^{\lambda_1 x}$  تا  $e^{\lambda_n x}$ ، جہاں  $\lambda$  حقیقی یا مخلوط ہو سکتا ہے، صرف اس صورت کھلے وقفے پر مساوات 3.11 کے حل کی اساس ہو سکتے ہیں جب مساوات 3.12 کے تمام  $n$  جذر منفرد (یعنی ایک دونوں سے مختلف) ہوں۔

حقیقت میں مسئلہ 3.6، مساوات 3.15 اور مساوات 3.16 سے حاصل عمومی نتیجہ (مسئلہ 3.7) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

مسئلہ 3.7: خطی طور غیر تابعیت  
مساوات 3.11 کے  $e^{\lambda x}$  طرز کے حل، جن کی تعداد کچھ بھی ہو سکتی ہے،  $I$  پر اس صورت خطی طور غیر تابع ہوں گے جب ان حل کے  $\lambda$  منفرد ہوں۔

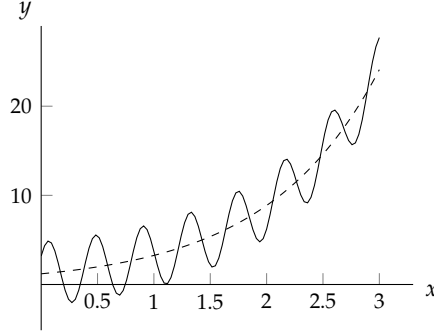
سادہ مخلوط جذر

چونکہ مساوات 3.11 کے عددی سر حقیقی مقدار ہیں لہذا مخلوط جذر صرف اور صرف جوڑی دار مخلوط ممکن ہیں۔ یوں اگر مساوات 3.12 کا ایک ایک سادہ جذر  $\lambda = \gamma + i\omega$  ہو تب  $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$  بھی اس کا جذر ہو گا اور یوں تفرقی مساوات کے دو عدد خطی طور غیر تابع حل [حصہ 2.2 دیکھیں] درج ذیل ہوں گے۔

$$y_1 = e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad y_2 = e^{\gamma x} \sin \omega x$$

مثال 3.7: سادہ مخلوط جذر۔ ابتدائی قیمت مسئلہ  
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - y'' + 225y' - 225y = 0, \quad y(0) = 3.2, \quad y'(0) = 46.2, \quad y''(0) = -448.8$$



شکل 3.1: مثال 3.7 کا مخصوص حل۔

حل: امتیازی مساوات  $\lambda^3 - \lambda^2 + 225\lambda - 225 = 0$  کا ایک جذر  $\lambda_1 = 1$  ہے۔ امتیازی مساوات کو  $\lambda - 1$  سے تقسیم کرتے ہوئے بقایا جذر  $\lambda_2 = 15i$  اور  $\lambda_3 = -15i$  حاصل ہوتے ہیں۔ ان سے عمومی حل اور عمومی حل کے تفرقات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= ce^x + A \cos 15x + B \sin 15x \\ y' &= ce^x - 15A \sin 15x + 15B \cos 15x \\ y'' &= ce^x - 225A \cos 15x - 225B \sin 15x \end{aligned}$$

ان مساوات میں  $x = 0$  اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$3.2 = c + A, \quad 46.2 = c + 15B, \quad -448.8 = c - 225A$$

ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔ پہلی مساوات کو تیسری مساوات سے منفی کرنے سے  $-452 = -226A$  یعنی  $A = 2$  حاصل ہوتا ہے جسے پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے  $c = 1.2$  ملتا ہے۔ دوسری مساوات میں  $c = 1.2$  پر کرتے ہوئے  $B = 3$  ملتا ہے۔ اس طرح مخصوص حل

$$y = 1.2e^x + 2 \cos 15x + 3 \sin 15x$$

حاصل ہوتا ہے جسے شکل 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔ مخصوص حل نقطہ دار لکیر سے دکھائے گئے  $y = 1.2e^x$  کے گرد ارتعاش کرتا ہے۔

متعدد حقیقی جذر

امتیازی مساوات کا دوہرا منفرد جذر  $\lambda_1 = \lambda_2$  ہونے کی صورت میں، صفحہ 107 پر جدول 2.1 کے تحت، تفرقی مساوات کے خطی طور غیر تابع حل  $y = y_1$  اور  $y_2 = xy_1$  ہوں گے۔

اسی حقیقت کے تحت اگر امتیازی مساوات کا  $m$  گنا جذر  $\lambda$  پایا جائے تب تفرقی مساوات کے  $m$  عدد خطی طور غیر تابع حل

$$(3.17) \quad e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda x}$$

ہوں گے۔ ایک مثال دیکھنے کے بعد درج بالا حل کو ثابت کرتے ہیں۔

مثال 3.8: حقیقی دہرا اور سہ گنا جذر  
درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 25y''' - 38y'' + 28y' - 8y = 0$$

حل: امتیازی مساوات  $\lambda^5 - 8\lambda^4 + 25\lambda^3 - 38\lambda^2 + 28\lambda - 8 = 0$  کے جذر  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  اور  $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2$  ہیں۔ یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^{2x}$$

ہو گا۔

آئیں اب مساوات 3.17 کو ثابت کریں۔ مساوات 3.11 کے بائیں ہاتھ کو

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y$$

لکھ کر اس میں  $y = e^{\lambda x}$  پر کرتے ہوئے تفرق لیتے ہیں۔

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^{\lambda x}$$



اب تصور کریں کہ امتیازی مساوات کا  $m$  گنا جذر  $\lambda_1$  پایا جاتا ہے (جہاں  $m < n$  ہے) جبکہ بقیہ  $\lambda_1$  سے مختلف، جذر  $\lambda_{m+1}$  تا  $\lambda_n$  ہیں۔ یوں کثیر رکنی کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

(3.18)

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda - \lambda_1)^m (\lambda - \lambda_{m+1}) (\lambda - \lambda_{m+2}) \cdots (\lambda - \lambda_n) e^{\lambda x} = (\lambda - \lambda_1)^m h(\lambda) e^{\lambda x}$$

جہاں  $m = n$  کی صورت میں  $h(\lambda) = 1$  ہو گا۔ دونوں ہاتھ  $\lambda$  تفرق لیتے ہیں۔

$$(3.19) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} L[e^{\lambda x}] = m(\lambda - \lambda_1)^{m-1} h(\lambda) e^{\lambda x} + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial}{\partial \lambda} [h(\lambda) e^{\lambda x}]$$

اب چونکہ  $x$  تفرق اور  $\lambda$  تفرق غیر تابع اور حاصل تفرق استمراری ہیں لہذا بائیں ہاتھ ان کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔

$$(3.20) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} L[e^{\lambda x}] = L \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} \right] = L[x e^{\lambda x}]$$

چونکہ  $\lambda_1$  جذر  $m$  گنا ہے، جہاں  $m \geq 2$  ہے، لہذا  $\lambda = \lambda_1$  پر مساوات 3.19 کے دائیں ہاتھ کی قیمت جزو  $(\lambda - \lambda_1)$  کی بنا صفر ہوگی۔ اس طرح مساوات 3.19 اور مساوات 3.20 کو ملا کر  $L[x e^{\lambda x}] = 0$  حاصل ہوتا ہے لہذا ثابت ہوا کہ  $x e^{\lambda x}$  مساوات 3.11 کا حل ہے۔

اسی ترتیب کو دہراتے ہوئے مساوات 3.18 کا دو درجی تفرق لیتے ہوئے  $L[x^2 e^{\lambda x}] = 0$  لکھا جاسکتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ  $x^2 e^{\lambda x}$  بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔ اس ترکیب کو بار بار دہراتے ہوئے آخر کار  $m-1$  درجی تفرق لیتے ہیں۔

(3.21)

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} L[e^{\lambda x}] = L[x^{m-1} e^{\lambda x}] = m(m-1)(m-2) \cdots (3)(2)(\lambda - \lambda_1)^1 h(\lambda) e^{\lambda x} + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} [h(\lambda) e^{\lambda x}]$$

مساوات کا دایاں ہاتھ  $\lambda - \lambda_1$  کی بنا  $\lambda = \lambda_1$  پر صفر کے برابر ہے لہذا اس سے  $L[x^{m-1} e^{\lambda x}] = 0$  حاصل ہوتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ  $x^{m-1} e^{\lambda x}$  بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔

مساوات 3.18 کا  $m$  درجی تفرق لینے کے لئے مساوات 3.21 کا تفرق لے سکتے ہیں جس سے

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L[e^{\lambda x}] = L[x^m e^{\lambda x}] = m(m-1)(m-2) \cdots (3)(2)(1) h(\lambda) e^{\lambda x} + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [h(\lambda) e^{\lambda x}]$$

ملتا ہے۔ مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو میں  $\lambda - \lambda_1$  کا جزو نہیں پایا جاتا لہذا  $\lambda = \lambda_1$  پر اس کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہوگی۔ یوں  $L[x^m e^{\lambda x}] \neq 0$  ہو گا لہذا  $x^m e^{\lambda x}$  تفرقی مساوات 3.11 کا حل نہیں ہوگا۔ یوں مساوات 3.17 ثابت ہوتی ہے۔

آئیں اب ثابت کریں کہ مساوات 3.17 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔ مخصوص  $m$  کے لئے ان حل کا وروئسکی غیر صفر حاصل ہوتا ہے جس سے حل کی خطی طور غیر تابع ہونا ثابت ہوتا ہے۔ کسی بھی  $m$  کی صورت میں وروئسکی کی  $m$  عدد قالب سے  $e^{\lambda x}$  باہر نکالتے ہوئے کل  $e^{m\lambda x}$  باہر نکالا جائے گا۔ بقایا قالب میں مختلف صف آپس میں جمع اور منفی کرتے ہوئے قالب کی حتمی قیمت 1،  $x$ ،  $\dots$ ،  $x^{m-1}$  کی وروئسکی کے برابر ثابت کی جاسکتی ہے جو غیر صفر مقدار ہے۔ یہ تفاعل تفرقی مساوات  $y^{(m)} = 0$  کے حل ہیں لہذا مسئلہ 3.3 کے تحت یہ حل خطی طور غیر تابع ثابت ہوتے ہیں۔

متعدد مخلوط جذر

مخلوط جذر کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ یوں دوہرے مخلوط جذر کی صورت میں  $\lambda = \gamma + i\omega$  اور  $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$  دو مرتبہ پائے جائیں گے جن سے

$$e^{\gamma x + i\omega x}, \quad x e^{\gamma x + i\omega x}, \quad e^{\gamma x - i\omega x}, \quad x e^{\gamma x - i\omega x}$$

حل لکھے جاسکتے ہیں۔ ان سے حتمی حل لکھتے ہیں۔

$$(3.22) \quad e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad e^{\gamma x} \sin \omega x, \quad x e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad x e^{\gamma x} \sin \omega x$$

بائیں جانب کے دو عدد حل  $e^{\gamma x + i\omega x}$  اور  $e^{\gamma x - i\omega x}$  جبکہ بقایا دو حل  $x e^{\gamma x + i\omega x}$  اور  $x e^{\gamma x - i\omega x}$  سے حاصل کیے گئے ہیں۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(3.23) \quad y = e^{\gamma x} [(A_1 + A_2 x) \cos \omega x + (B_1 + B_2 x) \sin \omega x]$$

مخلوط سہ گنا جذر (جو حتمی مسائل میں شاذ و نادر پایا جاتا ہے) کی صورت میں درج ذیل حتمی حل حاصل ہوں گے۔

$$e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad e^{\gamma x} \sin \omega x, \quad x e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad x e^{\gamma x} \sin \omega x, \quad x^2 e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad x^2 e^{\gamma x} \sin \omega x$$

اسی طرح آپ زیادہ تعداد میں پائے جانے والے مخلوط جذر سے بھی حل لکھ سکتے ہیں۔

## سوالات

سوال 3.11 تا سوال 3.17 کے عمومی حل لکھیں۔

سوال 3.11:  $y''' + 4y' = 0$   
جواب:  $y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$

سوال 3.12:  $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$   
جواب:  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 \cos 2x + c_4 x \sin 2x$

سوال 3.13:  $y^{(4)} - y = 0$   
جواب:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

سوال 3.14:  $y^{(4)} + 9y'' = 0$   
جواب:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$

سوال 3.15:  $y^{(5)} + y''' = 0$   
جواب:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x$

سوال 3.16:  $y^{(5)} - y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 11y' + 3y = 0$   
جواب:  $y = c_0 e^{-3x} + c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x$

سوال 3.17:  $y^{(5)} - 2y^{(4)} - y' + 2y = 0$   
جواب:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x$

سوال 3.18 تا سوال 3.23 ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل دریافت کریں۔ جذر حاصل کرنے کی خاطر کمپیوٹر استعمال کیا جاسکتا ہے۔

سوال 3.18:  $y''' - 2.7y'' - 4.6y' + 9.6y = 0, \quad y(0) = 1.5, y'(0) = 2, y''(0) = -3$   
جواب:  $y = 2.521e^{1.5x} - 0.286e^{-2x} - 0.735e^{3.2x}$

سوال 3.19:

$$y''' + 10.06y'' - 94.82y' - 670.8766y = 0,$$

$$y(0) = -1.2, y'(0) = 5.2, y''(0) = -2.8$$

3.2. مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

جواب:  $y = 0.229e^{-13.4x} - 1.447e^{-5.6x} + 0.018e^{8.94x}$

سوال 3.20:  $y''' + 5y'' + 49y' + 245y = 0, \quad y(0) = 10, y'(0) = -5, y''(0) = 1$   
جواب:  $y = 6.635e^{-5x} + 3.365 \cos 7x + 4.025 \sin 7x$

سوال 3.21:  $y''' + 8y'' + 21y' + 18y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = -0.5$   
جواب:  $y = 23.5e^{-2x} - 21.5e^{-3x} - 16.5xe^{-3x}$

سوال 3.22:

$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$   
 $y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1$   
جواب:  $y = \cos 2x + 0.3125 \sin 2x - 0.125x \cos 2x + 0.875x \sin 2x$

سوال 3.23:

$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 4y' = 0$   
 $y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1, y^{(4)}(0) = 2$   
جواب:  $y = 0.5 + 0.5e^x \cos x + 0.75e^x \sin x - 0.75xe^x \cos x - 0.25xe^x \sin x$

سوال 3.24: تخفیف درجہ  
آپ تخفیف درجہ کے ذریعہ مثال 2.6 میں دو درجی مساوات سے کم درجی تفرقی مساوات حاصل کر چکے ہیں۔ مستقل عددی سروالے خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا ایک حل  $\lambda_1$  جانتے ہوئے کم درجی مساوات کیسے حاصل کی جا سکتی ہے؟

جوابات: امتیازی مساوات کو  $\lambda - \lambda_1$  سے تقسیم کرتے ہوئے کم درجی تفرقی مساوات کی امتیازی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جس سے کم درجی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

سوال 3.25: تخفیف درجہ  
متغیر عددی سروالے خطی متجانس مساوات

$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$

کا ایک حل  $y_1$  جانتے ہوئے دوسرے حل کو  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  لکھ کر، جہاں  $u(x) = \int z(x) dx$  ہے، درج بالا میں پر کرتے ہوئے کم درجی مساوات

$$y_1 z'' + (3y_1' + p_2 y_1) z' + (3y_1'' + 2p_2 y_1' + p_1 y_1) z = 0$$

حاصل کریں ہے۔ سے تخفیف درجہ کی مدد سے کم درجی تفرقی مساوات حاصل کریں۔

سوال 3.26: تخفیف درجہ  
تفرقی مساوات

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + (6x - x^3) y' - (6 - x^2) y = 0$$

کا ایک حل  $y_1 = x$  ہے۔ تخفیف درجہ سے دو درجی مساوات حاصل کریں۔

$$xz'' - xz = 0 \quad \text{جواب:}$$

### 3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

آئیں اب معیاری صورت میں لکھی گئی،  $n$  درجی غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(3.24) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

پر غور کریں جہاں  $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$  اور  $r(x) \not\equiv 0$  ہیں۔ کھلے وقفہ  $I$  پر مساوات 3.24 کا عمومی حل

$$(3.25) \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ہو گا جہاں  $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$  مطابقتی متجانس خطی تفرقی مساوات

$$(3.26) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

کا  $I$  پر عمومی حل ہے۔  $y_p(x)$  مساوات 3.24 کا  $I$  پر ایسا کوئی بھی حل ہے جس میں اختیاری مستقل نہ پائے جاتے ہوں۔ کھلے وقفہ  $I$  پر مساوات 3.24 کے استمراری عددی سر اور استمراری  $r(xz)$  کی صورت میں

پر مساوات 3.24 کا عمومی حل موجود ہے جس میں اس مساوات 3.24 کے تمام حل موجود ہیں۔ یوں مساوات 3.24 کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 3.24 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.24 اور درج ذیل  $n-1$  ابتدائی شرائط پر مبنی ہوگا جہاں  $x_0$  کھلے وقفے  $x_0$  پر پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے عددی سر اور  $r$  کھلے وقفے پر استمراری ہونے کی صورت میں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا یکتا حل ہوگا۔ حل کے یکتائی کو حصہ 2.7 میں دو درجی تفرقی مساوات کے یکتا حل کے ثبوت کے نمونے پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$(3.27) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$$

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

غیر متجانس تفرقی مساوات 3.24 کے عمومی حل کے لئے مساوات 3.24 کا مخصوص حل درکار ہوگا۔ مستقل عددی سروالی تفرقی مساوات،

$$(3.28) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x)$$

جہاں  $a_0$  تا  $a_{n-1}$  مستقل مقدار اور  $r(x)$ ، حصہ 2.7 کی طرح، خاص نوعیت کا تفاعل ہو کا مخصوص حل، حصہ 2.7 کی طرح، بذریعہ نامعلوم عددی سر کی ترکیب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مخصوص حل  $y_p$  کو جبری تفاعل  $r$  سے درج ذیل قواعد کے تحت لکھا جاتا ہے۔

بنیادی قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

تریمی قاعدہ: اگر  $r$  کو دیکھ کر چنے گئے  $y_p$  کا کوئی رکن مساوات 3.28 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل  $y_k$  ہو تب اس رکن کی جگہ  $x^k y_k$  کو  $y_p$  میں شامل کریں، جہاں  $k$  ایسا کم سے کم قیمت کا مثبت عدد ہے کہ تفاعل  $x^k y_k$  مطابقتی متجانس مساوات کا حل نہ ہو۔

مجموعے کا قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

موجودہ ترکیب میں  $k = 1$  یا  $k = 2$  سے حصہ 2.7 کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔ انہیں مثال کی مدد سے موجودہ ترکیب کا ترمیمی قاعدہ استعمال کرنا سیکھیں۔

مثال 3.9: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ ترمیمی قاعدہ۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = -5$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات کا امتیازی مساوات  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$  ہے جس کو  $(\lambda - 1)^3 = 0$  لکھا جاسکتا ہے جس سے سہ گنا جذر  $\lambda = 1$  ملتا ہے۔ یوں متجانس مساوات کو عمومی حل

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

لکھا جاسکتا ہے۔

دوسرا قدم: اب اگر ہم دیے گئے غیر متجانس مساوات کے جبری تفاعل کو دیکھ کر  $y_p = C e^x$  چنتے ہوئے  $y_p$  اور اس کے تفرقات کو دیے گئے مساوات میں پر کریں تو  $C - 3C + 3C - C = 1$  ملتا ہے جس سے  $C$  کی قیمت حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ چنا گیا  $y_p$  دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتا لہذا اس  $y_p$  کو رد کرنا ہوگا۔ آپ  $y_p = C x e^x$  یا  $y_p = C x^2 e^x$  چن کر دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل بھی دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتے۔ یوں ہم اوپر دیے گئے ترمیمی قاعدے کے تحت  $y_p = C x^3 e^x$  چنتے ہیں جس کے تفرقات درج ذیل ہیں۔

$$y' = C e^x (x^3 + 3x^2)$$

$$y'' = C e^x (x^3 + 6x^2 + 6x)$$

$$y''' = C e^x (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$$

$y_p$  اور اس کے تفرقات کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے

$$C e^x (x^3 + 9x^2 + 18x + 6) - 3 C e^x (x^3 + 6x^2 + 6x) + 3 C e^x (x^3 + 3x^2) - C x^3 e^x = e^x$$

ہوئے  $C = \frac{1}{6}$  ملتا ہے۔ یوں دیے گئے غیر متجانس تفرقی مساوات کا مخصوص حل  $y_p = \frac{1}{6}x^3e^x$  ہے لہذا اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

تیسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر عمومی حل کے مستقل حاصل کرنے ہوں گے۔ عمومی حل میں پہلی ابتدائی معلومات  $y(0) = 8$  پر کرتے ہوئے  $c_1 = 8$  ملتا ہے۔ اس قیمت کو  $y$  میں پر کرتے ہوئے  $y'$  لے کر دوسری ابتدائی معلومات  $y'(0) = -2$  سے  $c_2$  حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح  $y'''$  لیتے ہوئے اس میں  $y'''(0) = -5$  پر کرتے ہوئے  $c_3$  کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^x, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 8 = c_1$$

$$y' = (c_1 + c_2 + c_2x + c_3x^2 + 2c_3x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^x, \quad y'(0) = -2, \quad c_2 = -10$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_2x + 4c_3x + c_3x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{5}{6}x^2 + x)e^x, \quad y''(0) = -5, \quad c_3 = \frac{7}{2}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = \left(8 - 10x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}\right)e^x$$

### 3.4 متعین متغیرات بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

متعین متغیرات بدلنے کا طریقہ (حصہ 2.10 دیکھیں) بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔ یوں معیاری صورت میں لکھے گئے خطی غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 3.24، جس کے عددی سر اور  $r(x)$  کھلے وقفہ  $I$  پر استمراری ہوں، کا  $I$  پر مخصوص حل  $y_p$  درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \sum_{k=1}^n y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)} r(x) dx \\ (3.29) \quad &= y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x) dx + \cdots + y_n(x) \int \frac{W_n(x)}{W(x)} r(x) dx \end{aligned}$$



مساوات 3.29 میں  $y_1$  تا  $y_n$  مطابقتی متجانس مساوات 3.26 کے حل کی اساس ہیں جبکہ وروئسکی  $W$  کے  $k$  قطار میں  $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$  پر کرتے ہوئے  $W_k$  حاصل کی جاتی ہے۔ یوں  $n = 2$  کی صورت میں  $W$ ،  $W_1$  اور  $W_2$  درج ذیل ہوں گے۔

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = -y_2, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} = y_1$$

مساوات 3.29 کو صفحہ 184 پر دیے گئے مساوات 2.112 کی ثبوت کی طرز پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.10: متعین متغیرات کی تبدیلی۔ پولر کوئی غیر متجانس مساوات درج ذیل غیر متجانس پولر کوئی مساوات کو حل کریں۔

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x, \quad (x > 0)$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات میں  $y = x^m$  اور اس کے تفرقات پر کرتے ہوئے

$$[m(m-1)(m-1) - 3m(m-1) + 6m - 6]x^m = 0$$

ملتا ہے جس کو  $x^m$  سے تقسیم کرتے ہوئے جذر 1، 2 اور 3 حاصل ہوتے ہیں۔ ان جذر سے اساس

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3$$

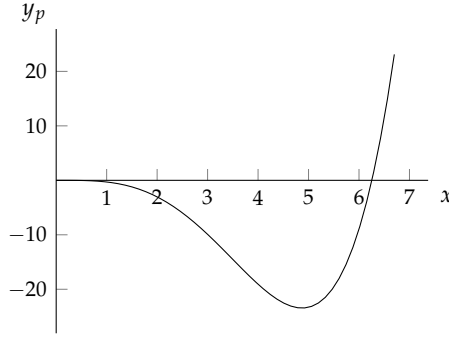
لکھتے ہیں۔ یوں متجانس پولر کوئی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

دوسرا قدم: مساوات 3.29 میں درکار قالب کی حتمی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

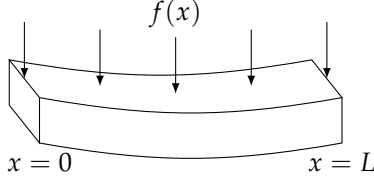
شکل 3.2: مثال 3.10 کا  $y_p$ 

تیسرا قدم: مساوات 3.29 کے مکمل میں  $r(x)$  بھی درکار ہے جو دیے گئے پولر کوشی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے سے ملتا ہے۔ دیے گئے مساوات کو  $y'''$  کے عددی سر  $x^3$  سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے  $r = x \ln x$  ملتا ہے۔ مساوات 3.29 میں  $\frac{W_1}{W} = \frac{x}{2}$  ،  $\frac{W_2}{W} = -1$  اور  $\frac{W_3}{W} = \frac{1}{2x}$  ہیں لہذا

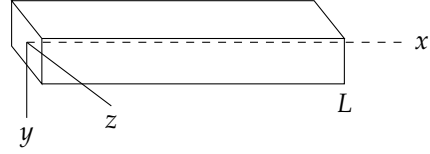
$$\begin{aligned} y_p &= x \int \frac{x}{2} x \ln x \, dx - x^2 \int x \ln x \, dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x \, dx \\ &= \frac{x}{2} \left( \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right) - x^2 \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) + \frac{x^3}{2} (x \ln x - x) \\ &= \frac{1}{6} x^4 \left( \ln x - \frac{11}{6} \right) \end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا۔  $y_p$  کو شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{6} x^4 \left( \ln x - \frac{11}{6} \right)$$



(ب) بوجھ شہتیر کو چھکا دیتی ہے۔



(الف) مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر جس کی لمبائی L ہے۔

شکل 3.3: مثال 3.11 کا شہتیر۔

### عملی استعمال۔ لکچرار شہتیر

دو درجی تفرقی مساوات کا عملی انجینئری میں بہت زیادہ استعمال پایا جاتا ہے البتہ بلند درجی تفرقی مساوات عملی انجینئری کے بہت کم مسائل میں کام آتے ہیں۔ انجینئری کا ایک انتہائی اہم مسئلہ لکچرار شہتیر کا جھکاؤ ہے جس کی نمونہ کشی چہارم درجی تفرقی مساوات کرتی ہے۔ کسی بھی عمارت یا پل میں شہتیر کلیدی کردار ادا کرتے ہیں جو لکڑی یا لوہے کے ہو سکتے ہیں۔

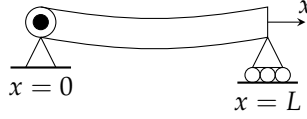
مثال 3.11: شکل 3.3-الف میں، یکساں پلک کے مادے سے بنا ہوا، مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L ہے۔ شہتیر کی اپنی وزن سے شہتیر کے جھکاؤ کو رد کیا جاسکتا ہے۔ شکل-ب میں شہتیر کے x محور پر عمودی بیرونی بوجھ f(x) ڈالا گیا ہے جس کی وجہ سے شہتیر میں جھکاؤ پیدا ہوا ہے۔ بیرونی بوجھ اور شہتیر کی جھکاؤ کا تعلق، علم پلک کے تحت، درج ذیل ہے جہاں E ینگ کا مقیاس پلک<sup>10</sup> کہلاتا ہے جبکہ I مستطیل کا محور z پر جمودی معیار اثر<sup>11</sup> ہے۔ شہتیر کی فی اکائی لمبائی پر بیرونی قوت کو بوجھ f(x) لکھا گیا ہے۔

$$EIy^{(4)} = f(x) \quad (3.30)$$

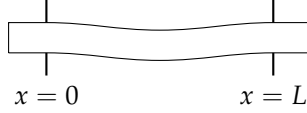
شہتیر کو عموماً شکل 3.4 میں دکھائے گئے تین طریقوں سے نصب کیا جاتا ہے جو درج ذیل سرحدی شرائط کو جنم دیتے ہیں۔

$$(الف) \quad y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0 \quad \text{سادہ سہارا}$$

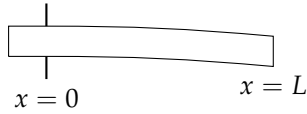
<sup>10</sup> Young's modulus of elasticity  
<sup>11</sup> moment of inertia



(الف) سادہ سہارا دیا گیا ہے۔



(ب) دونوں اطراف سے جکڑا ہوا۔



(پ) ایک طرف سے جکڑا گیا ہے۔

شکل 3.4: شبہ جکڑنے کے عمومی طریقے۔

(ب) دونوں اطراف جکڑے گئے ہیں  $y(0) = y(L) = y'(0) = y'(L) = 0$

(پ) ایک طرف جکڑا گیا ہے  $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$

سرحدی شرط  $y = 0$  سے مراد صفر ہٹاؤ ہے،  $y' = 0$  سے مراد افقی مماس ہے،  $y'' = 0$  سے مراد صفر خمناؤ کا معیار اثر<sup>12</sup> ہے جبکہ  $y''' = 0$  سے مراد صفر جزئی قوت<sup>13</sup> ہے۔

آئیں سادہ سہارے والی شبہ جکڑنے کے مسئلے کو حل کریں جسے شکل 3.4-الف میں دکھایا گیا ہے۔ یکساں بیرونی بوجھ کی صورت میں  $f(x) = f_0$  ہو گا اور مساوات 3.30 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$(3.31) \quad y^{(4)} = k, \quad k = \frac{f_0}{EI}$$

جس کو مکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔ دو مرتبہ مکمل لیتے ہیں۔

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

<sup>12</sup> bending moment  
<sup>13</sup> shearing force

$y''(0) = 0$  پر کرتے ہوئے  $c_2 = 0$  حاصل ہوتا ہے جس کے بعد  $y''(L) = 0$  پر کرنے سے ملتا ہے۔ یوں

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 - \frac{kL}{2}x$$

ہو گا جس کا دو مرتبہ تکمیل لینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{12}x^4 - \frac{L}{6}x^3 + c_3x + c_4 \right)$$

$y(0) = 0$  پر کرنے سے  $c_4 = 0$  ملتا ہے جس کے بعد  $y(L) = 0$  پر کرتے ہوئے  $c_3$  حاصل کرتے ہیں۔

$$y(L) = \frac{kL}{2} \left( \frac{L^3}{12} - \frac{L^3}{6} + c_3 \right) = 0, \quad c_3 = \frac{L^3}{12}$$

یوں  $k = \frac{f_0}{EI}$  لکھتے ہوئے شہتیر کی لچک بالمقابل لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$y(x) = \frac{f_0}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

ہم توقع رکھتے ہیں کہ شہتیر کے درمیان سے دونوں اطراف یکساں جھکاؤ پایا جائے گا یعنی  $y(x) = y(L - x)$  ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ جھکاؤ  $y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5f_0L^4}{16 \times 24EI}$  ہے جو  $x = \frac{L}{2}$  پر پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ شکل 3.3 میں مثبت  $y$  نیچے کی طرف کو ہے۔

### سوالات

سوال 3.27 تا سوال 3.34 کو حل کریں۔

سوال 3.27:  $y^{(4)} + 3y''' - 4y = 0$   
جواب:  $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

3.4. متعین متغیرات بدلنے کے طریقے غیر متجانس خطی سادہ تفریق مساوات کا حل

سوال 3.28:  $y''' + 16y'' + 13y' = 0$   
جواب:  $y = c_1 + c_2 e^{-3x} \cos 2x + c_3 e^{-3x} \sin 2x$

سوال 3.29:  $y''' + 3y'' - y' - 3y = 5e^{2x}$   
جواب:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{2x}$

سوال 3.30:  $y^{(4)} + 8y'' - 9y = \cosh 2x$   
جواب:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x + \frac{5}{39} \cosh 2x$

سوال 3.31:  $x^2 y''' + 3x y'' - 2y' = 0$   
جواب:  $y = c_1 + c_2 x^{\sqrt{3}} + c_3 x^{-\sqrt{3}}$

سوال 3.32:  $y''' + 2.25y'' + 1.6875y' + 0.421875y = 0$   
جواب:  $y = c_1 e^{-0.75x} + c_2 x e^{-0.75x} + c_3 x^2 e^{-0.75x}$

سوال 3.33:  $y''' - y' = \frac{3}{40} \sinh \frac{x}{2}$   
جواب:  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 2 \cosh \frac{x}{2}$

سوال 3.34:  $y''' + 9y'' + 27y' + 27 = 2x^2$   
جواب:  $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + c_3 x^2 e^{-3x} + \frac{2}{27} x^2 - \frac{4}{27} x + \frac{8}{81}$

سوال 3.35 تا سوال 3.35 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 3.35:

$y^{(4)} - 10y'' + 9y = 4e^{-2x}$   
 $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -0.5, \quad y'''(0) = 0.2$   
جواب:  $y = -\frac{2}{15} e^{-2x} + \frac{1}{1440} (127e^x + 1383e^{-x} - 119e^{3x} - 271e^{-3x})$

سوال 3.36:

$y^{(4)} + y'' - 2y = 0.5 \sin 2x$   
 $y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$   
جواب:  $y = 0.05 \sin 2x + 3 \cos x - 0.358 \sin x - \cos \sqrt{2}x - 0.424 \sin \sqrt{2}x$

