

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	214
3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	217
4	نظام تفرقی مساوات	225
4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	226
4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	235
4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	250
4.3.1	خطی نظام	251
4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	254
4.5	نقطہ حاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام	272
4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام	281
4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ	290
4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	298
4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب	299
5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	309
5.1	ترکیب طافقی تسلسل	310
5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کشیر رکنی	325
5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرومیوس	343
5.3.1	عملی استعمال	348
5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل	362
5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	377
5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ	383
5.7	مسئلہ سیورم لیوویل	390
5.8	قائمیت لیونڈر کشیر رکنی اور بیسل تفاعل	397
6	لاپلاس تبادلہ	407
6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	408
6.2	تفرقات اور نکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	417
6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل	430
6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	451
6.5	الچھاؤ	469
6.6	لاپلاس بدل کی نکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	478
6.7	تفرقی مساوات کے نظام	487
6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے	495
7	سمتیات عارضی باب	499

499	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
501	7.2	سمتیہ کے اجزاء
507	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
516	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
522	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
535	7.6	اندرونی ضرب فضا
537	7.7	سمتی ضرب
539	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
550	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب

559	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
560	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
570	8.2	قالبی ضرب
577	8.2.1	تبدیلی محل
590	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
603	8.3.1	صف زینہ دار صورت
611	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
625	8.5	خطی نظام کے حل: وجوہیت، یکنائی
630	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
633	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریمر
650	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
665	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی متبادلہ

683	9	خطی الجبرا: آگنی قدر مسائل قالب
684	9.1	آگنی قدر مسائل قالب۔ آگنی اقدار اور آگنی سمتیات کا حصول

693	ا	اضافی ثبوت
-----	---	------------

697	ب	مفید معلومات
697	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 9

خطی الجبرا: آگنی قدر مسائل قالب

آگنی قدر مسائل درج ذیل سمتی مساوات پر مبنی ہیں جہاں A چکور قالب، x نامعلوم سمتیہ اور λ نامعلوم غیر سمتیہ ہے۔

$$(9.1) \quad Ax = \lambda x$$

آگنی قدر مسائل میں ہمیں وہ λ اور x درکار ہیں جو درج بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔ λ کی ہر قیمت کے لئے $x = 0$ مساوات 9.1 کا غیر اہم صفر حل ہے۔ ہم اس غیر اہم صفر حل میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہذا ہم غیر صفر حل $x \neq 0$ جاننا چاہیں گے۔

λ کی وہ قیمتیں جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں A کے آگنی اقدار¹ کہلاتے ہیں اور وہ x جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں A کے آگنی سمتیات² کہلاتے ہیں۔

اس معصوم نظر آنے والا سمتی مساوات کے اندر حیران کن تفصیل چھپی ہے۔ آگنی قدر مسائل انجینئری، طبیعیات، ریاضی، حیاتیات، ماحولیاتی سائنس، شہری منصوبہ بندی، معاشیات، نفسیات اور دیگر شعبوں میں عموماً درپیش آتے ہیں۔ آپ کو یقیناً ان سے زندگی میں واسطہ پڑے گا۔

¹eigenvalues
²eigenfunctions

9.1 آنگنی قدر مسائل قالب۔ آنگنی اقدار اور آنگنی سمتیات کا حصول

درج ذیل پر غور کریں جہاں غیر صفر سمتیہ اور چکور قالب کے ضرب دکھائے گئے ہیں۔

$$(9.2) \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

بائیں ہاتھ کی ضرب میں ہمیں مکمل طور پر نیا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جس کی لمبائی اور سمت ابتدائی سمتیہ کی لمبائی اور سمت سے مختلف ہیں۔ عموماً سمتیہ کو چکور قالب سے ضرب دینے سے مکمل طور پر مختلف سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کی ضرب میں حاصل سمتیہ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

یعنی حاصل سمتیہ اور ابتدائی سمتیہ کی سمتیں ایک جیسی ہیں جبکہ حاصل سمتیہ کی لمبائی ابتدائی سمتیہ کی لمبائی کے دس گنا ہے جس کو $\lambda = 10$ لکھا جائے گا۔ چکور قالب A کے لحاظ سے ایسے λ اور غیر صفر سمتیات کا حصول اس باب کا مرکزی مضمون ہے۔

آئیں درج بالا مشاہدے کو دستوری شکل دیں۔ فرض کریں کہ $A = [a_{jk}]$ غیر صفر $n \times n$ جسامت کا چکور قالب ہے۔ اب درج ذیل سمتی مساوات پر غور کریں۔

$$(9.3) \quad Ax = \lambda x$$

ان λ اور غیر صفر x کے حصول کے مسئلے کو، جو مساوات 9.3 پر پورا اترے ہوں، آنگنی قدر مسئلہ کہتے ہیں۔

یہاں توجہ دیں کہ A دیا گیا چکور قالب ہے جبکہ λ نامعلوم غیر سمتیہ اور x نامعلوم سمتیہ ہے۔ ہم وہ λ اور x حاصل کرنا چاہتے ہیں جو مساوات 9.3 پر پورا اترتے ہوں۔ جیومیٹریکی طور پر ہم وہ سمتیات x حاصل کرنا چاہتے ہیں جنہیں A سے ضرب دینا ایسا ہی ہے جیسے ان سمتیوں کو غیر سمتی λ سے ضرب دیا جائے یعنی کہ Ax اور x راست تناسب ہوں۔ یوں مثبت λ کی صورت میں ابتدائی اور حاصل سمتیات کی سمتیں ایک جیسی ہوں گی جبکہ منفی λ کی صورت میں ان کی سمتیں آپس میں الٹ ہوں گی۔ (باب کی شروع میں سادہ مثال سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔)

λ کی وہ مخصوص قیمت جس کے لئے مساوات 9.3 کے غیر صفر $x \neq 0$ حل موجود ہوں A کی آگنی قدر³ کہلاتی ہے اور مطابقتی سمتیات x ، اس λ کے لحاظ سے قالب A کے آگنی سمتیات⁴ یا امتیازی سمتیات⁵ کہلاتے ہیں۔ A کے تمام آگنی اقدار کو A کا طیف⁶ کہتے ہیں۔ طیف میں کم سے کم ایک عدد آگنی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف آگنی اقدار ہو سکتے ہیں۔ آگنی اقدار کی سب سے زیادہ حتمی قیمت کو A کا رداس طیف⁷ کہتے ہیں۔

آگنی قدر مسئلے کا حل چند مثالوں کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 9.1: آگنی اقدار اور آگنی سمتیات کا حصول
درج ذیل قالب کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات قدم بہ قدم دریافت کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

پہلے آگنی اقدار دریافت کیے جاتے ہیں۔ مساوات 9.3 درج ذیل ہو گا۔

$$Ax = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

تمام اجزاء کو ایک طرف منتقل کرتے ہوئے

$$(9.4) \quad \begin{aligned} (-5 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

قابلی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(A - \lambda I)x = 0$$

eigenvalue³
eigenvectors⁴
characteristic vectors⁵
spectrum⁶
spectral radius⁷

مسئلہ 8.15 کے تحت اس متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل $x \neq 0$ (قابل A کا آگنی سمتیہ جس کی ہمیں تلاش ہے) اس صورت ممکن ہو گا جب عددی سر قابل کا مقطع صفر کے برابر ہو گا۔

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

ہم $D(\lambda) = 0$ کو A کی امتیازی مقطع جبکہ اس کی پھیلی ہوئی صورت کو امتیازی کثیر رکھی اور $D(\lambda) = 0$ کو امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ اس دو درجی الجبرائی مساوات کے حل $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -6$ ہیں جو A کے آگنی اقدار ہیں۔

$\lambda_1 = -1$ کا مطابقتی آگنی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5 - (-1)]x_1 + 2x_2 &= 0 & \implies & -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + [-2 - (-1)]x_2 &= 0 & \implies & 2x_2 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = 2x_1$ ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے متعدد متوازی آگنی سمتیات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یوں x_1 (یا x_2) کی کوئی بھی قیمت چن کر x_2 (x_1) حاصل کرتے ہوئے آگنی سمتیہ حاصل ہو گا۔ ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہیں اور یوں $x_1 = [1 \ 2]^T$ ہو گا۔ اس جواب کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)x_1 = \lambda_1 x_1$$

$\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی آگنی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -6$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5 - (-6)]x_1 + 2x_2 &= 0 & \implies & x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + [-2 - (-6)]x_2 &= 0 & \implies & 2x_2 + 4x_2 = 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$ ملتا ہے۔ یوں $x_1 = 2$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے لہذا $\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی آگنی سمتیہ $x_2 = [2 \ -1]^T$ ہو گا۔ اس کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = (-6)x_2 = \lambda_2 x_2$$

آپ حصہ 9.1 کے آغاز میں مساوات 9.2 میں دیے گئے مثال کو حل کرتے ہوئے آگنی اقدار 10 ، 3 اور مطابقتی آگنی سمتیات $[3 \ 4]^T$ ، $[-1 \ 1]^T$ حاصل کریں۔

درج بالا مثال میں استعمال کی گئی ترکیب کی عمومی صورت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 9.3 کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \quad (9.5)$$

تمام اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

اس کو قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (9.7)$$

مسئلہ کریبر (مسئلہ 8.15) کے تحت درج بالا متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9.8)$$

$A - \lambda I$ کو A کا امتیازی قالب جبکہ $D(\lambda)$ کو A کا امتیازی مقطع کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو A کی امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو پھیلا کر A کی امتیازی کثیر رکنی حاصل ہوگی۔

مسوات 9.8 کو پھیلا کر حاصل کثیر رکنی میں λ^n بلند تر طاقت ہے لہذا اس سے زیادہ سے زیادہ n مختلف آگنی اقدار حاصل ہو سکتے ہیں۔

مسئلہ 9.1: آگنی اقدار

چکور قالب A کے آگنی اقدار A کے امتیازی مساوات 9.8 سے حاصل ہوں گے۔
یوں $n \times n$ قالب کی کم سے کم ایک عدد آگنی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف آگنی اقدار ہو سکتے ہیں۔

n کی بڑی قیمت کی صورت میں آگنی اقدار عموماً ترکیب نیوٹن یا کسی اور اعدادی ترکیب سے حاصل کئے جائیں گے۔

آگنی اقدار پہلے حاصل کیے جاتے ہیں۔ باری باری ان آگنی قدر کو مساوات 9.6 کے نظام میں پر کرتے ہوئے مطابقتی آگنی سمتیہ (گاوسی اسقاط کی مدد سے) حاصل کیا جاتا ہے۔

آگنی سمتیات درج ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

مسئلہ 9.2: آگنی سمتیات اور آگنی فضا

اگر قالب A کے کسی ایک آگنی قدر λ کے مطابقتی آگنی سمتیات w اور x ہوں تب $w + x$ (بشرطیکہ $w \neq -x$) اور kx جہاں $k \neq 0$ ہے بھی اس λ کے مطابقتی بھی آگنی سمتیات ہوں گے۔

یوں کسی ایک آگنی قدر کے مطابقتی آگنی سمتیات اور 0 سمتیہ مل کر فضا بناتے ہیں جس کو اس λ کے لئے A کی مطابقتی آگنی فضا کہتے ہیں۔

ثبوت: $Aw = \lambda w$ اور $Ax = \lambda x$ سے مراد درج ذیل ہے

$$A(w + x) = Aw + Ax = \lambda w + \lambda x = \lambda(w + x)$$

اور $A(kw + lx) = \lambda(kw + lx)$ ہے لہذا $A(kw) = k(Aw) = k(\lambda w) = \lambda(kw)$ گا۔

آگنی سمتیہ کو معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری آگنی سمتیہ یعنی اکائی آگنی سمتیہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً مثال 9.1 میں $x_1 = [1 \ 2]^T$ کی لمبائی $\|x_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ہے جس سے معیاری آگنی سمتیہ (اکائی آگنی سمتیہ) $[\frac{1}{\sqrt{5}} \ \frac{2}{\sqrt{5}}]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: متعدد آگنی سمتیات
درج ذیل قالب کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: اس قالب کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

جس سے A کے جذر $\lambda_1 = 5$ اور $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ ملتے ہیں۔ (بلند درجی مساوات کا خط کھینچ کر اس کے جذر با آسانی حاصل کیے جاتے ہیں)۔ نظام $(A - \lambda I)x = 0$ میں $\lambda = \lambda_1 = 5$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مطابقتی امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے

$$A - \lambda I = A - 5I = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جس کا درجہ دو (2) ہے۔ یوں $-\frac{24}{7}x_2 - \frac{48}{7}x_3 = 0$ میں $x_3 = -1$ چنتے ہوئے $x_2 = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو $-7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 1$ ملتا ہے۔ یوں $x_1 = [1 \ 2 \ -1]^T$ قالب A کا آگنی قدر $\lambda = 5$ کا مطابقتی آگنی سمتیہ ہے۔

$\lambda = -3$ سے درج ذیل امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے۔

$$A - \lambda I = A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ سے $x_1 = -2x_2 + 3x_3$ لکھا جاسکتا ہے۔ $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_3 = 0$ ملتا ہے جبکہ $x_2 = 0$ چنتے ہوئے $x_3 = 1$ ملتا ہے۔ اس طرح $\lambda = -3$ کے مطابقتی درج ذیل دو مختلف آگنی سمتیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(1.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(1.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(1.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارتم (شکل 1.1-ب-ب)

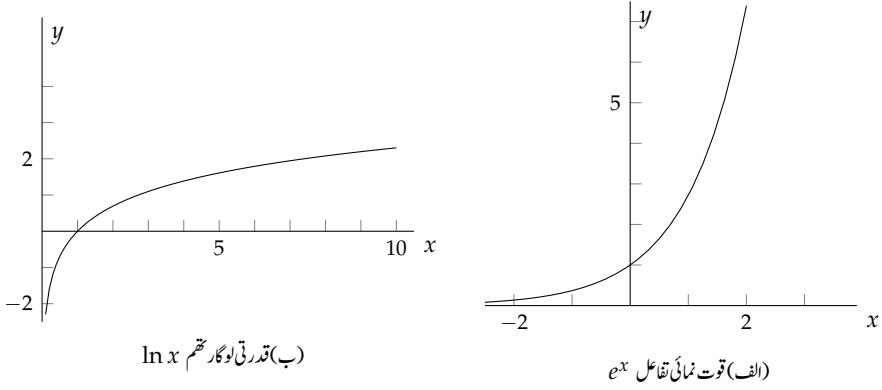
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

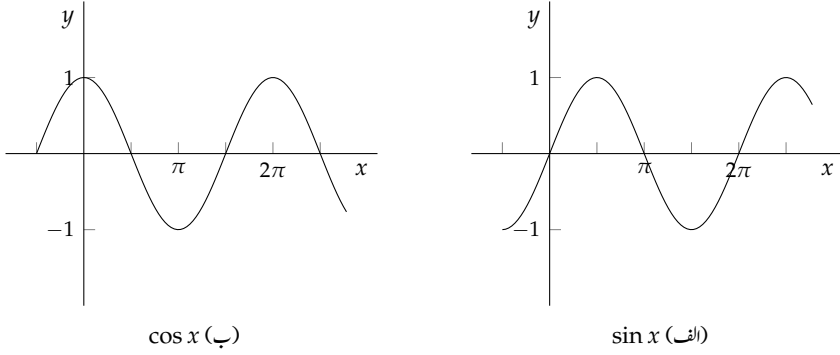
اساس دس کا لوگارتم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}
 \end{aligned}$$

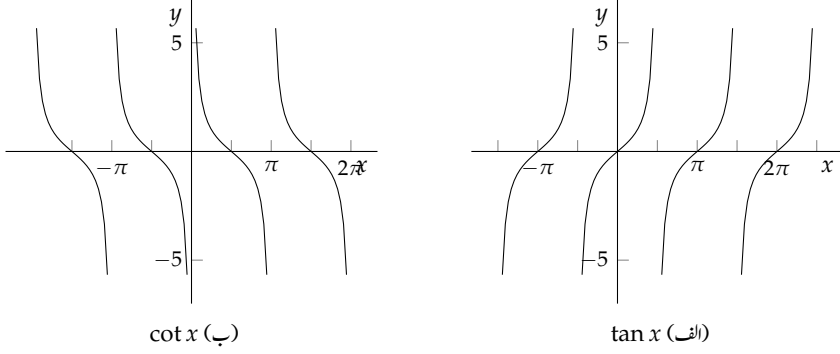
$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

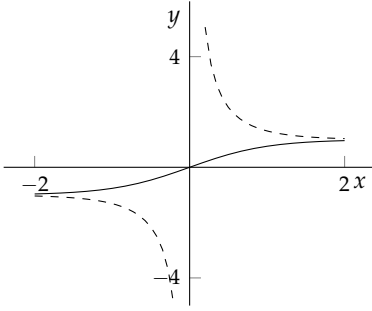
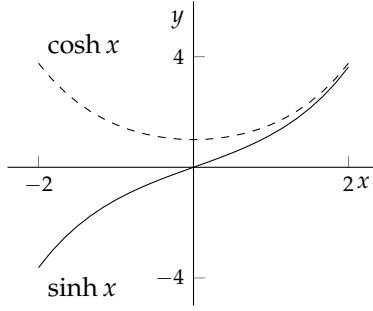
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

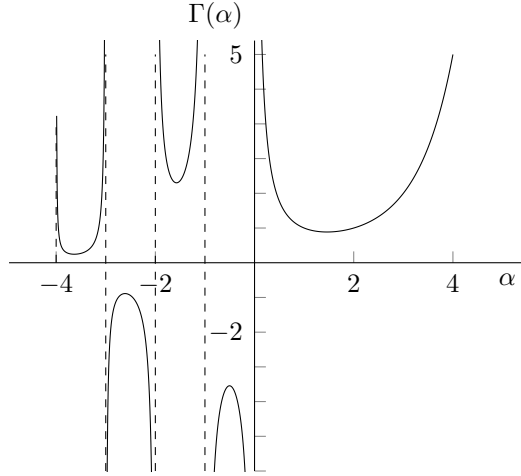
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

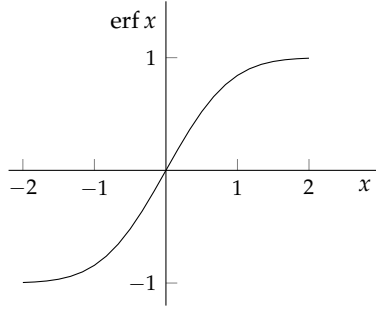
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

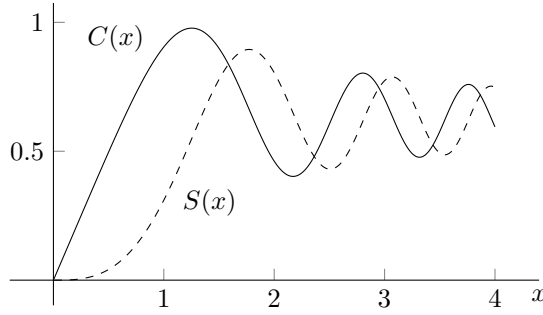
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

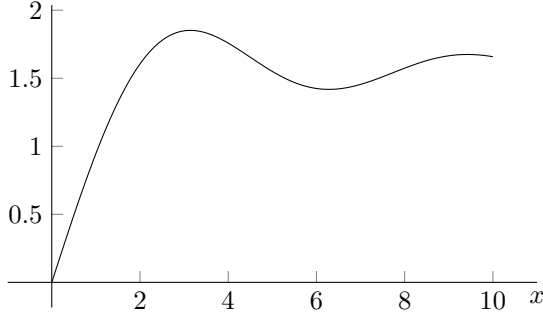
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

