انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 7

خطی الجبرا۔ سمتیات

خطی الجبرا وسیع مضمون ہے جس میں قالب اور سمتیات، مقطع قالب، خطی مساوات کے نظام، سمتی فضا اور خطی تبادلہ، آئگنی قیمت مسائل، اور دیگر موضوعات شامل ہیں۔اس کا استعمال انجینئری، طبیعیات، جیو میٹری، کمپیوٹر سائنس، معاشیات اور دیگر میدانوں میں پایا جاتا ہے۔

متعدد اعداد و شمار یا متعدد تفاعل کو مربوط طریقے سے قالب[1] اور سمتیات[2] کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب اور سمتیات ہی خطی الجبرا کی زبان ہیں۔

[1] matrices
[2] vectors

7.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

مستطیلی ترتیب وار فہرست کو قالب کہتے ہیں۔درج ذیل قالب کی مثال ہیں۔قالب میں درج اعداد یا تفاعل کو قالب کے اندراجات یا قالب کے ارکان[3] کہتے ہیں۔

$$
\begin{bmatrix} 0.1 & -2 & 1.2 \\ -6 & 0 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ln x & -e^x \\ e^{3x} & 3.2x^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3.22 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \tag{7.1}
$$

بالائی بائیں ہاتھ قالب کے ارکان 0.1 ، -2 ، 1.2 ، -6 ، 0 اور 23 ہیں۔اس قالب کے دو صف[4] اور تین قطار[5] ہیں۔افقی اندراجات کی لکیر کو صف اور عمودی اندراجات کی لکیر کو قطار کہتے ہیں۔بالائی درمیانی قالب میں 3 صف اور 3 قطار پائے جاتے ہیں۔ایسا قالب جس میں صفوں کی تعداد، قطاروں کی تعداد کے برابر ہو مربع قالب[6] کہلاتا ہے۔یوں بالائی دائیں ہاتھ قالب بھی مربع قالب ہے۔بالائی درمیانی قالب میں ارکان کو a_{mn} سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں دو عدد اشاریہ m اور n بالترتیب اس صف اور قطار کو ظاہر کرتے ہیں جہاں یہ رکن پایا جاتا ہو۔قالب میں اندراجات کے مقام کی وضاحت اسی معیاری ترکیب سے کی جاتی ہے۔یوں a_{23} رکن دوسرے صف اور تیسرے قطار میں پایا جاتا ہے۔

ایسا قالب جو صرف ایک عدد صف یا صرف ایک عدد قطار پر مشتمل ہو، سمتیہ[7] کہلاتا ہے۔یوں نچلے دائیں ہاتھ دو ارکان پر مشتمل سمتیہ قطار[8] پایا جاتا ہے جبکہ نچلے بائیں ہاتھ سمتیہ صف[9] پایا جاتا ہے۔چونکہ سمتیہ قطار میں کوئی صف نہیں پایا جاتا لہٰذا اس میں ارکان کے مقام کو صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی طرح سمتیہ صف میں بھی ارکان کا مقام صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں سمتیہ قطار میں $a_1 = 3.22$ اور $a_2 = -\frac{4}{5}$ ہیں۔

عملی استعمال میں مواد کے ذخیرہ اور اس پر عمل کرنے میں قالب کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔درج ذیل مثال دیکھیں

[3] elements
[4] rows
[5] columns
[6] square matrix
[7] vector
[8] column vector
[9] row vector

مثال 7.1: خطی نظام

درج ذیل خطی نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 نا معلوم متغیرات ہیں۔

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0\\3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 15\\5x_1 \qquad + 3x_3 &= 11\end{aligned}$$

آئیں درج بالا نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 کے عددی سروں سے **عددی سر قالب**[10] $\boldsymbol{A}$ لکھیں۔ $\boldsymbol{A}$ قالب میں ہر رکن کا مقام عین خطی مساوات کے مطابق ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\3 & -2 & 3\\5 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

چونکہ تیسری مساوات میں x_2 نہیں پایا جاتا لہٰذا اس کا عددی سر صفر کے برابر ہو گا اور یوں $\boldsymbol{A}$ میں $a_{32} = 0$ درج کیا گیا ہے۔ عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ میں مساوات کے دائیں ہاتھ کی معلومات کا اضافہ کرنے سے **افزودہ قالب**[11] $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ملتا ہے۔

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 0\\3 & -2 & 3 & 15\\5 & 0 & 3 & 11\end{bmatrix}$$

چونکہ افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ سے تینوں مساوات لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا دیے گئے خطی نظام کو $\tilde{\boldsymbol{A}}$ مکمل طور ظاہر کرتا ہے۔ یوں ہم $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کو حل کرتے ہوئے نا معلوم متغیرات x_1 ، x_2 اور x_3 حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنا جلد سمجھایا جائے گا۔ فی الحال تسلی کر لیں کہ اس نظام کا حل $x_1 = 1$ ، $x_2 = -2$ اور $x_3 = 2$ ہے۔

نا معلوم متغیرات کو x_1 ، x_2 اور x_3 سے ظاہر کرنے کی بجائے دیگر علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے مثلاً x ، y اور z ۔

---

[10] coefficient matrix
[11] augmented matrix

مثال 7.2: فروخت کھاتا

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} \text{جمع} & \text{جمعرات} & \text{بدھ} & \text{منگل} & \text{پیر} & \text{اتوار} & \text{ہفتہ} \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 32 & 23 & 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 10 & 12 & 14 & 5 & 0 & 17 & 25 \\ 29 & 16 & 32 & 18 & 9 & 14 & 17 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{array}
\end{array}
$$

ایک دکان کی تین اشیاء کی ہفتہ وار فروخت درج بالا قالب میں دی گئی ہے۔ ہر ہفتے کی فروخت کو اسی طرح قالبوں میں لکھا جا سکتا ہے۔ مہینے کے آخر میں تمام قالبوں کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لینے سے ہر دن، تینوں اشیاء کی کل فروخت کی فہرست حاصل ہو گی۔

عمومی تصورات اور علامت نویسی

آئیں اب تک پیش کیے گئے تصورات کو با ضابطہ دستوری صورت دیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے بڑے حروف سے قالب کو ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{C}$ ، $\cdots$، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ وغیرہ۔ ایسا قالب جس میں m صف اور n قطار ہوں، $m \times n$ (اس کو m ضرب n پڑھیں) قالب کہلاتا ہے (پہلے صف اور بعد میں قطار آئے گا) اور $m \times n$ قالب کی **جسامت**[12] کہلاتی ہے۔ یوں $m \times n$ قالب درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$
\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{7.2}
$$

مساوات 7.1 میں بالائی بائیں قالب 3×2 جسامت کا ہے جبکہ نچلا بایاں قالب 3×1 جسامت کا ہے۔

---

[12] size

مساوات 7.2 میں ہر رکن کو دو عدد اشاریہ سے پہچانا جاتا ہے جہاں پہلا اشاریہ صف اور دوسرا اشاریہ قطار ہے۔یوں a_{23} دوسرے صف اور تیسرے قطار پر موجود اندراج ہے۔

ایسا قالب جس میں $m=n$ ہو $n \times n$ **چکور قالب** کہلاتا ہے۔ چکور قالب کا وہ وتر جس پر a_{11} ، a_{22} ، $\cdots$ ، a_{nn} پائے جاتے ہیں، قالب کا **مرکزی وتر**[13] کہلاتا ہے۔ مساوات 7.1 میں ایک چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان a_{11} ، a_{22} اور a_{33} ہیں جبکہ دوسرے چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان $\ln x$ اور $3.2x^2$ ہیں۔جیسا ہم دیکھیں گے، چکور قالب نہایت اہم ہیں۔

ایسا قالب جس میں $m \neq n$ ہو $m \times n$ **مستطیل**[14] قالب کہلاتا ہے۔مستطیل قالب کی ایک مخصوص قسم چکور قالب ہے۔

سمتیات

صرف ایک صف یا ایک قطار پر مبنی قالب کو سمتیہ کہتے ہیں۔سمتیہ کے اندراج کو سمتیہ کے اجزاء[15] کہتے ہیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے چھوٹے حروف سے سمتیہ کو ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ ، $\cdots$، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{a}=[a_j]$ وغیرہ۔ سمتیہ صف کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4.2 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

اسی طرح سمتیہ قطار کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

$m \times n$ جسامت کے قالب 7.2 کو n جسامت کا سمتیہ صف

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

---

[13] main diagonal
[14] rectangular matrix
[15] components

تصور کیا جا سکتا ہے جہاں b_1 تا b_n از خود m جسامت کے سمتیہ قطار

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

ہیں۔اسی طرح A کو m جسامت کا سمتیہ قطار

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \boldsymbol{c}_m \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

تصور کیا جا سکتا ہے جہاں c_1 تا c_m از خود n جسامت کے سمتیہ صف ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{c}_2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{c}_m &= \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.6}$$

مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

آئیں قالب مساوی ہونے کی تصور جانتے ہیں۔

تعریف : دو قالب A اور B اس صورت مساوی ہوں گے جب دونوں قالب کی جسامت برابر ہو اور ان کے نظیری ارکان آپس میں برابر ہوں یعنی $a_{11} = b_{11}$ ، $a_{12} = b_{12}$ ، $\cdots$ ہوں۔غیر مساوی قالب **مختلف**[16] کہلاتے ہیں۔یوں مختلف جسامت کے قالب ہر صورت مختلف ہوں گے۔مساوات کا تعلق $A = B$ لکھا جاتا ہے۔

different[16]

مثال 7.3: قالبوں کی مساوات
اگر درج ذیل قالب مساوی ہوں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

تب $a_{11} = 2$ ، $a_{12} = -3$ ، $a_{21} = 0$ اور $a_{22} = 3.2$ ہوں گے اور ہم $A = B$ لکھ سکتے ہیں۔درج ذیل تمام قالب آپس میں مختلف ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تعریف: قالبوں کا مجموعہ
دو یکساں جسامت کے قالب $A = [a_{jk}]$ اور $B = [b_{jk}]$ کا مجموعہ $A + B$ لکھا جائے گا جس کے اندراجات $a_{jk} + b_{jk}$ کو A اور B کے نظیری ارکان کے مجموعے سے حاصل کیا جائے گا۔دو مختلف جسامت کے قالبوں کا مجموعہ حاصل کرنا نا ممکن ہے۔

مثال 7.4: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہوں تب $A + B$ ، $a + b$ اور $0A + b$ حاصل کریں۔

حل: چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی یکساں جسامت ہے لہٰذا انہیں جمع کیا جا سکتا ہے۔ مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2+7 & -1+3 & 3+0\\ 1+1 & 0+2 & -2+1\\ 3+2 & 2-1 & 1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 2 & 2 & -1\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

اسی طرح چونکہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی جسامت یکساں ہے لہٰذا انہیں جمع کیا جا سکتا ہے۔ ان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1+0\\ 3+2\\ -2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ -1\end{bmatrix}$$

چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی جسامت یکساں نہیں ہے لہٰذا $0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}$ حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

تعریف: غیر سمتی ضرب
کسی بھی $m\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ اور کسی بھی غیر سمتی مقدار (عدد) c کا حاصل ضرب $c\boldsymbol{A}$ لکھا جاتا ہے جو ایسا $m\times n$ قالب $c\boldsymbol{A}=[ca_{jk}]$ ہے جس کا ہر رکن $\boldsymbol{A}$ کے نظیری رکن کو c سے ضرب دیتے حاصل کیا جاتا ہے۔

ہم $(-1)\boldsymbol{A}$ کو $-\boldsymbol{A}$ لکھتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{A}$ کا نفی کہتے ہیں۔ اسی طرح $(-k)\boldsymbol{A}$ کو $-k\boldsymbol{A}$ لکھا جاتا ہے۔ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ کو $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ لکھا جاتا ہے جو $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کا فرق[17] کہلاتا ہے (فرق صرف یکساں جسامت کے قالب کا حاصل کیا جا سکتا ہے)۔

مثال 7.5: غیر سمتی ضرب
اگر

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1.2 & 3.3\\ 0.6 & -1.5\\ 0 & 6.0\end{bmatrix}$$

[17] difference

ہو تب درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$-\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}-1.2 & -3.3\\ -0.6 & 1.5\\ 0 & -6.0\end{bmatrix}, \quad \frac{10}{3}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 11\\ 2 & -5\\ 0 & 20\end{bmatrix}, \quad 0\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

اگر قالب $\boldsymbol{B}$ میں مختلف اشیاء کی کلوگرام کمیت درج ہو تب $1000\boldsymbol{B}$ قالب انہیں اشیاء کی کمیت گرام میں دے گا۔

مجموعہ قالب اور غیر سمتی ضرب کے قواعد

مجموعہ اعداد کے قواعد سے یکساں جسامت $m \times n$ کے قالبوں کے مجموعے کے درج ذیل قاعدے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &(\text{الف}) \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\\ &(\text{ب}) \quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \quad (\text{یعنی } \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\\ &(\text{پ}) \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}\\ &(\text{ت}) \quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{7.7}$$

درج بالا موٹی لکھائی میں صفر $\boldsymbol{0}$ ایسے $m \times n$ **صفر قالب**[18] کو ظاہر کرتی ہے جس کے تمام ارکان صفر 0 کے برابر ہوں۔اگر $m=1$ یا $n=1$ ہو تب اس کو **صفر سمتیہ**[19] کہیں گے۔

یوں مجموعہ قالب **قانون تبادل** اور **قانون تلازم** پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح غیر سمتی ضرب درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned} &(\text{الف}) \quad c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}\\ &(\text{ب}) \quad (c+k)\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}\\ &(\text{پ}) \quad c(k\boldsymbol{A})=(ck)\boldsymbol{A} \qquad (\text{یعنی } ck\boldsymbol{A})\\ &(\text{ت}) \quad 1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{7.8}$$

---

[18] zero matrix
[19] zero vector

سوالات

سوال 7.1 تا سوال 7.3 عمومی سوالات ہیں۔ سوال 7.1: $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ لکھتے ہوئے مثال 7.2 میں $[a_{12}]$ اور $[a_{25}]$ کیا ہیں۔

جوابات: $[a_{12}] = 23$ اور $[a_{25}] = 0$

سوال 7.2: مثال 7.2 میں دیے گئے قالب کی جسامت لکھیں۔

جواب: 3×7

سوال 7.3: مثال 7.4 میں قالب $\boldsymbol{A}$ کی مرکزی وتر لکھیں۔

جواب: 2، 0 اور 1

سوال 7.4 تا سوال 7.10 میں قالبوں کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب حاصل کرنے ہوں گے۔ان سوالات میں درکار قالب درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.0 \\ 0.0, \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.4: $0.5\boldsymbol{A}$ ، $0.2\boldsymbol{B}$ ، $-2\boldsymbol{u}$

جوابات:

$$0.5\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1.0 \\ 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.2\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad -2\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سوال 7.5: $3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}, \quad 2\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}, \quad -3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 7 & 1 & 9 \\ 6 & 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9.5 \\ -5.7 \\ -6.4 \end{bmatrix}$$

سوال 7.6: $(3\cdot 6)\boldsymbol{B}, \quad 6(3)\boldsymbol{B}, \quad 5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}$
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 7.7: $3(2\boldsymbol{C}+5\boldsymbol{D}), \quad 0.2(0.1\boldsymbol{E}-0.3\boldsymbol{D})$
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 66 & 18 \\ 9 & 57 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.08 & -0.24 \\ 0.12 & -0.2 \\ 0.22 & -0.1 \end{bmatrix}$$

سوال 7.8: $\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}), \quad (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{E})+\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}, \quad 0\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$
جوابات: چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$ کی جسامت یکساں نہیں ہے لہٰذا انہیں جمع نہیں کیا جا سکتا ہے۔ غیر یکساں جسامت کی بنا $0\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$ بھی حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{E})+\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 20 & -4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

سوال 7.9: $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ کو خلاء میں قوت کے اجزاء تصور کرتے ہوئے ان کے مجموعے سے کل قوت دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{bmatrix} 5.3 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.10: **متوازن صورت**
تمام قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہونے کی صورت کو متوازن[20] حال کہتے ہیں۔

ایسا قوت $\boldsymbol{x}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ ، $\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{x}$ متوازن حال میں ہوں۔

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-5.3\\-3.1\\-3.2\end{bmatrix}$$

7.2 قالبی ضرب

قالبی ضرب سے مراد دو عدد قالبوں کا آپس میں ضرب ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ چند مثالیں حل کرتے ہوئے قالبی ضرب کو اچھی طرح سمجھیں۔ قالبی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: **قالبی ضرب**
$m \times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ اور $r \times p$ قالب $\boldsymbol{B}=[b_{jk}]$ کا (اسی ترتیب سے) حاصل ضرب $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ صرف $r=n$ کی صورت میں ممکن ہو گا اور یہ $m \times p$ قالب $\boldsymbol{C}=[c_{jk}]$ ہو گا جس کے اندراجات درج ذیل ہوں گے۔

$$c_{jk}=\sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lk}=a_{j1}b_{1k}+a_{j2}b_{2k}+\cdots+a_{jn}b_{nk}, \quad j=1,\cdots,m \quad k=1,\cdots,p \tag{7.9}$$

یوں پہلے جزو $\boldsymbol{A}$ میں قطاروں کی تعداد n دوسرے جزو $\boldsymbol{B}$ کی صفوں کی تعداد r کے برابر ہونا لازمی ہے۔مساوات 7.9 میں c_{jk} کو $\boldsymbol{A}$ کے j صف کے ہر رکن کو $\boldsymbol{B}$ کے k قطار کے نظیری رکن سے ضرب

[20] equilibrium

دیتے ہوئے تمام n حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں **صف ضرب قطار** سے قالبی ضرب حاصل کیا جاتا ہے۔ قالبی ضرب $n = 3$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

جہاں $\boldsymbol{A}$ کی پہلی صف کے ارکان کو $\boldsymbol{B}$ کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{11} حاصل ہو گا۔اسی طرح $\boldsymbol{A}$ کی پہلی صف کے ارکان کو $\boldsymbol{B}$ کی دوسری قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{12} حاصل ہو گا اور $\boldsymbol{A}$ کی دوسری صف کے ارکان کو $\boldsymbol{B}$ کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{21} حاصل ہو گا۔اس عمل کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{aligned}$$

چونکہ سمتیہ درحقیقت قالب کی مخصوص صورت ہے لہٰذا قالب اور سمتیہ کا ضرب بھی بالکل اسی طرح حاصل کیا جائے گا۔ قالبی ضرب کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال 7.6: قالبی ضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 10 \\ 4 \cdot 9 + 6 \cdot 8 & 4 \cdot 7 + 6 \cdot 10 \\ 5 \cdot 9 + 2 \cdot 8 & 5 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 37 \\ 84 & 88 \\ 61 & 55 \end{bmatrix}$$

مثال 7.7: قالب اور سمتیہ کا ضرب

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{جبکہ} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{نا ممکن}$$

درج بالا میں قالب اور سمتیہ کی جگہ تبدیل کرنے سے پہلے جزو کی قطاروں اور دوسرے جزو کی صفوں کی تعداد یکساں نہیں رہتی للٰذا ایسا ضرب نا ممکن ہے۔یوں ضروری نہیں ہے کہ $\boldsymbol{AB}$ اور $\boldsymbol{BA}$ برابر ہوں اور یہ کہ دونوں ضرب کا حصول ممکن ہو۔

سوال 7.11:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ سمتیات کی جگہ تبدیل کرنے سے حاصل ضرب تبدیل ہوتا ہے یعنی **قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا۔**

مثال 7.8: قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا للٰذا عموماً $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ ہو گا

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 & 199 \\ -199 & -199 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ قالبی ضرب میں اجزاء کی جگہ تبدیل نہیں کی جا سکتی ہے۔اس کے علاوہ قالبی ضرب، عام اعدادی ضرب کے درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}) \quad (k\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \text{ یا } \boldsymbol{A}k\boldsymbol{B})\\
&\text{(ب)} \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \quad (\text{یعنی } \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\\
&\text{(پ)} \quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\\
&\text{(ت)} \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

درج بالا میں k کوئی عدد ہے اور یہ قواعد اس صورت درست ہوں گے کہ بائیں ہاتھ کے قالب، قالبی ضرب کی تعریف پر پورا اترتے ہوں۔درج بالا میں مساوات-ب **قانون تلازم**[21] کہلاتا ہے جبکہ مساوات-پ اور مساوات-ت **قانون تقسیم**[22] کہلاتا ہے۔

چونکہ قالبی ضرب صف ضرب قطار کو کہتے ہیں لہٰذا مساوات 7.9 کو زیادہ خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
c_{jk} = \boldsymbol{a}_j\boldsymbol{b}_k, \quad j = 1, \cdots, m \quad k = 1, \cdots, p \tag{7.11}
$$

جہاں $\boldsymbol{a}_j$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا صف j اور $\boldsymbol{b}_k$ قالب $\boldsymbol{B}$ کا قطار k ہے۔

$$
\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{b}_k = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} \end{bmatrix}
$$

مثال 7.9: صف اور قطار سمتیہ کی صورت میں ضرب ارکان

3×3 قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور 3×4 قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ کو ضرب دینے سے درج لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_4 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_4 \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_4 \end{bmatrix} \tag{7.12}
$$

---

[21] associative law
[22] distributive law

مثال 7.10: 3×3 قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور 3×4 قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ درج ذیل ہیں۔ مساوات 7.12 سے $\boldsymbol{AB}$ حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: یہاں $\boldsymbol{a}_1 = [1 \quad 0 \quad 2]$ ، $\boldsymbol{a}_2 = [2 \quad 1 \quad 1]$ اور $\boldsymbol{a}_3 = [3 \quad 2 \quad 1]$ ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 4 = 6$$

اسی طرح بقایا ارکان حاصل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 10 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

قالبی ضرب بذریعہ کمپیوٹر

مساوات 7.12 کو ذرہ مختلف طریقے سے لکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ کو جوں کا توں جبکہ $\boldsymbol{B}$ کو سمتیہ قطار کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Ab}_1 & \boldsymbol{Ab}_2 & \cdots & \boldsymbol{Ab}_p \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

متعدد متوازی جڑے کمپیوٹر کو علیحدہ علیحدہ $\boldsymbol{b}_1$ ، $\boldsymbol{b}_2$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{b}_p$ یا انہیں کئی کئی علیحدہ سمتیہ قطار فراہم کیے جاتے ہیں اور ساتھ ہی تمام کو $\boldsymbol{A}$ بھی فراہم کیا جاتا ہے۔ یوں قالبی ضرب کے اجزاء $\boldsymbol{Ab}_1$ ، $\boldsymbol{Ab}_2$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{Ab}_p$ بہ یک وقت (نسبتاً بہت کم وقت میں) حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 7.11: درج ذیل کو مساوات 7.13 کی مدد سے حل کریں۔

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 7.13 سے قالبی ضرب کے قطار حاصل کرتے ہیں جنہیں ایک ہی قالب میں یکجا کرتے ہوئے درج بالا جواب ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

خطی تبادل اور قالبی ضرب

دو متغیرات پر مبنی خطی تبادل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{7.14}$$

جس کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \tag{7.15}$$

اب اگر x_1x_2 نظام از خود w_1w_2 پر مبنی ہو یعنی

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned} \tag{7.16}$$

یا

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

تب y_1y_2 نظام بالواسطہ w_1w_2 پر مبنی ہو گا۔آئیں اس تعلق کو جانیں۔

مساوات 7.14 میں مساوات 7.16 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2 \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned} \tag{7.18}$$

ملتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, \quad & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, \quad & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned} \tag{7.19}$$

لیا گیا ہے۔اس تعلق کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

آئیں قالبی ضرب $\boldsymbol{AB}$ حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ہے۔

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C} \tag{7.21}$$

بڑے جسامت کے قالبوں کے لئے بھی $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ بالکل اسی طرح ثابت کیا جاتا ہے۔یوں y ، x اور w متغیرات کی تعداد بالترتیب m ، n اور p کی صورت میں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ قالبوں کی جسامت بالترتیب $m \times n$ ، $n \times p$ اور $m \times p$ ہو گی جہاں $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ہے۔ قالبی ضرب (مساوات 7.9) کی تعریف مساوات 7.21 کی بدولت ہے۔

7.2.1 تبدیلی محل

قالب کے صفوں کو بطور قطار (یعنی قطاروں کو بطور صف) لکھ کر **تبدیل محل قالب**[23] حاصل ہوتا ہے اور اس عمل کو [24] کہتے ہیں۔سمتیہ کی تبدیلی محل بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔اس طرح قالب کا صف، تبدیل محل قالب کا قطار ہو گا اور یونہی قالب کا قطار، تبدیل محل قالب کا صف ہو گا۔ چکور قالب کے ارکان کا مرکزی وتر میں "عکس" لینے سے بھی تبدیل محل قالب حاصل ہو گا۔مرکزی وتر کے دونوں اطراف یکساں مقامات پر ارکان کی آپس میں جگہ تبدیل کرنے سے ان کا "عکس" حاصل ہو گا۔یوں a_{12} اور a_{21} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، a_{13} اور a_{31} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، وغیرہ وغیرہ۔قالب $\boldsymbol{A}$ سے حاصل تبدیل محل قالب کو $\boldsymbol{A}^T$ سے ظاہر کیا جائے گا۔درج ذیل مثال دیکھیں۔

مثال 7.12: تبدیل محل قالب
قالب $\boldsymbol{A}$ کا تبدیل محل $\boldsymbol{A}^T$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

درج بالا کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

چکور قالب اور اس کا تبدیل محل درج ذیل ہیں۔چکور قالب اور اس کے تبدیل محل قالب میں مرکزی وتر کے ارکان جگہ تبدیل نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

---

transpose matrix[23]
transposition[24]

سمتیہ صف کا تبدیل محل، سمتیہ قطار ہو گا اور یونہی سمتیہ قطار کا تبدیل محل، سمتیہ صف ہو گا۔

$$\begin{bmatrix}3 & 7 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}4\\5\\2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}4 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

تبدیل محل کا تبدیل محل اصل قالب ہو گا۔

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

تعریف: قالب اور سمتیہ کا تبدیل محل
$m \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کا تبدیل محل $n \times m$ قالب A^T ہے جس کا پہلا صف، A کا پہلا قطار، اس کا دوسرا صف A کا دوسرا قطار، وغیرہ وغیرہ ہوں گے۔ یوں مساوات 7.2 میں دیے گئے A کا تبدیل محل A^T درج ذیل ہو گا۔

$$A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \tag{7.22}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل سمتیہ قطار ہو گا جبکہ سمتیہ قطار کا تبدیل محل سمتیہ صف ہو گا۔

بعض اوقات قالب اور بعض اوقات تبدیل محل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ **تبدیلی محل کے قواعد** درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} &(\text{الف}) && \left(A^T\right)^T = A\\ &(\text{ب}) && (A+B)^T = A^T + B^T\\ &(\text{پ}) && (cA)^T = cA^T\\ &(\text{ت}) && (AB)^T = B^T A^T \end{aligned} \tag{7.23}$$

دھیان رہے کہ مساوات 7.23-ت میں دائیں ہاتھ قالبوں کی ترتیب بائیں ہاتھ کی ترتیب کے الٹ ہے۔سوال 7.25 میں آپ کو درج بالا تعلقات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 7.13: درج ذیل قالب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.23-ت ثابت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

حل:پہلے مساوات 7.23-ت کا بایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔قالبی ضرب $\boldsymbol{AB}$ لینے کے بعد

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

اس کا تبدیل محل حاصل کرتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{AB})^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

آئیں اب مساوات 7.23-ت کا دایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{B}^T$ اور $\boldsymbol{A}^T$ حاصل کرنے کے بعد

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ان کا قالبی ضرب لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix} \tag{7.25}$$

چونکہ $a_{11}b_{11} = b_{11}a_{11}$ ، $a_{12}b_{21} = b_{21}a_{12}$ ، $\cdots$ ہیں لہٰذا مساوات 7.24 اور مساوات 7.25 کے دائیں ہاتھ آپس میں برابر ہیں لہٰذا ان کے بائیں ہاتھ بھی آپس میں برابر ہوں گے۔اس طرح مساوات 7.23-ت ثابت ہوا۔

مخصوص قالب

چند اقسام کے قالب عملی استعمال کے لحاظ سے زیادہ اہم ہیں۔ان پر غور کرتے ہیں۔

تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب

ایسا چکور قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے برابر $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ ہو **تشاکلی**[25] قالب کہلاتا ہے۔ایسا قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے نفی کے برابر $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$ ہو **منحرف تشاکلی**[26] قالب کہلاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\text{تشاکلی} \quad & \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T, \quad (a_{jk} = a_{kj}) \\
\text{منحرف تشاکلی} \quad & \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T, \quad (a_{jk} = -a_{kj} \text{ اور } a_{jj} = 0)
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

مثال 7.14: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب

$\boldsymbol{A}$ تشاکلی قالب ہے، $\boldsymbol{B}$ منحرف تشاکلی قالب ہے جبکہ $\boldsymbol{C}$ نہ تشاکلی اور نہ منحرف تشاکلی ہے۔

$$
\text{تشاکلی} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{منحرف تشاکلی} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}
$$

---

[25] symmetric
[26] skew-symmetric

تکونی قالب

بالائی تکونی قالب[27] اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور اس سے بالائی جانب پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر سے نیچے کی طرف تمام ارکان صفر ہوں۔اسی طرح **نچلا تکونی قالب**[28] اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے نیچے پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر کے بالائی جانب تمام ارکان صفر کے برابر ہوں۔

مثال 7.15: بالائی تکونی اور نچلا تکونی قالب

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{بالائی تکونی قالب}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{نچلا تکونی قالب}$$

وتری قالب

ایسا چکور قالب جس میں غیر صفر ارکان صرف مرکزی وتر پر پائے جاتے ہوں **وتری قالب**[29] کہلاتا ہے۔مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر ہوں گے۔

اگر وتری قالب $\boldsymbol{S}$ کے تمام ارکان یکساں، مثلاً c کے برابر ہوں، تب $\boldsymbol{S}$ **غیر سمتی قالب**[30] کہلائے گا۔ کسی بھی چکور قالب $\boldsymbol{A}$ جس کی جسامت $\boldsymbol{S}$ کی جسامت کے برابر ہو، کا $\boldsymbol{S}$ کے ساتھ قالبی ضرب کا حاصل، غیر سمتی مقدار c اور $\boldsymbol{A}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔

$$\boldsymbol{AS} = \boldsymbol{SA} = c\boldsymbol{A} \tag{7.27}$$

ایسا غیر سمتی قالب جس کے ارکان اکائی (1) کے برابر ہوں **اکائی قالب**[31] کہلاتا ہے جسے $\boldsymbol{I}_n$ یا $\boldsymbol{I}$ سے ظاہر کیا

---

[27] upper triangular matrix
[28] lower triangular matrix
[29] diagonal matrix
[30] scalar matrix
[31] unit matrix

جاتا ہے۔اکائی قالب کی صورت میں درج بالا مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A} \tag{7.28}$$

مثال 7.16: وتری قالب $\boldsymbol{D}$، غیر سمتی قالب $\boldsymbol{S}$ اور اکائی قالب $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 7.17: کارخانے کے اخراجات

ایک کارخانے میں تین اقسام کے کھلونے (الف، ب اور پ) تیار ہوتے ہیں۔ایک کھلونا تیار کرنے کے اخراجات قالب $\boldsymbol{A}$ میں دیے گئے ہیں۔ قالب $\boldsymbol{B}$ ایک ہفتے کی پیداوار دیتا ہے۔ جمع اور جمع رات کے دن تعطیل ہوتی ہے۔ایسا قالب $\boldsymbol{C}$ حاصل کریں جو اس ایک ہفتے میں پیدا کیے گئے کھلونوں پر خرچ اخراجات پیش کرے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{پ} & \text{ب} & \text{الف} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 100 & 50 \\ 15 & 12 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{array}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{بدھ} & \text{منگل} & \text{پیر} & \text{اتوار} & \text{ہفتہ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 2.0 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{array}$$

حل:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{بدھ} & \text{منگل} & \text{پیر} & \text{اتوار} & \text{ہفتہ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2840.0 & 3865.0 & 2480.0 & 4065.0 & 4265.0 \\ 227.0 & 305.4 & 202.6 & 321.2 & 335.4 \\ 74.6 & 100.6 & 66.2 & 105.6 & 110.6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{array}$$

مثال 7.18: امکانی شماریاتی قالب
ایک شہر کے رقبے کا استعمال 2018 میں درج ذیل ہے۔

$$R = 60\,\% \text{ رہائشی},\quad T = 25\,\% \text{ تجارتی},\quad S = 15\,\% \text{ صنعتی}$$

پانچ سالوں میں رقبے کا استعمال تبدیل ہو گا۔اس تبدیلی کو درج ذیل **امکانی شماریاتی قالب**[32] $\boldsymbol{A}$ دیتا ہے جو سالہا سال اس شہر کے لئے قابل استعمال ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{رہائشی سے} & \text{تجارتی سے} & \text{صنعتی سے} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{رہائشی کو منتقل} \\ \text{تجارتی کو منتقل} \\ \text{صنعتی کو منتقل} \end{array}$$

درج بالا امکانی شماریاتی قالب $\boldsymbol{A}$ کے تمام ارکان مثبت ہیں جبکہ ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی کے برابر ہے (چونکہ تمام ممکنہ امکانات کا مجموعہ اکائی کے برابر ہوتا ہے)۔پانچ سال بعد 2023 میں رقبے کی تقسیم درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 \\ 0.2 \cdot 60 + 0.7 \cdot 25 + 0.1 \cdot 15 \\ 0.6 \cdot 60 + 0.2 \cdot 25 + 0.9 \cdot 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.5 \\ 31.0 \\ 18.5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{رہائشی} \\ \text{تجارتی} \\ \text{صنعتی} \end{array}$$

اس عمل کو $\boldsymbol{A}$ کی مدد سے سمجھتے ہیں۔ پانچ سالوں میں 0.8 امکان ہے کہ رہائشی رقبہ، رہائشی ہی رہے گا جبکہ 0.1 امکان ہے کہ تجارتی رقبے پر رہائش ہو گی اور 0 امکان ہے کہ صنعتی رقبے پر رہائش ہو گی۔یوں 2023 میں رہائشی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 50.5\,\%$$

اس پورے عمل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 60 & 25 & 15 \end{bmatrix}^T$$

---

[32] stochastic matrix

جہاں $\boldsymbol{x}$ سمتیہ حال[33] ہے جو 2018 میں رقبے کی تقسیم بیان کرتا ہے۔ اسی طرح 2028 اور 2033 میں صورت حال بالترتیب درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 43.50 \\ 33.65 \\ 22.85 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 38.165 \\ 34.540 \\ 27.295 \end{bmatrix}$$

یوں 2033 میں 38.165 % علاقہ رہائشی، 34.54 % تجارتی اور 27.295 % صنعتی ہو گا۔ یاد رہے کہ رقبہ مستقل قیمت ہے۔

سوالات

سوال 7.12: چکور قالب
ایسا چکور قالب جو تشاکلی اور منحرف تشاکلی ہو، کی صورت کیا ہو گی۔

حل: صفر قالب

سوال 7.13 تا سوال 7.25 میں درج ذیل قالب استعمال کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

---

[33] state vector

سوال 7.13: $\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{B}^T, \boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{b}^T$

جوابات:
$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.14: $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}$

جوابات:
$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -17 & -14 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 20 \\ 12 & -9 & -18 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

سوال 7.15: $(\boldsymbol{AB})^T, \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$

جوابات:
$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -6 \\ -14 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 20 & -18 & 10 \end{bmatrix}$$

سوال 7.16: $\boldsymbol{AA}^T, \boldsymbol{A}^2$

جوابات:
$$\boldsymbol{AA}^T = \begin{bmatrix} 29 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 13 \\ 20 & 13 & 38 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 17 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 22 & 39 \end{bmatrix}$$

سوال 7.17: $\boldsymbol{BB}^T, \boldsymbol{B}^2$

جوابات:
$$\boldsymbol{BB}^T = \begin{bmatrix} 25 & -16 & 0 \\ -16 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ -8 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

سوال 7.18: $\boldsymbol{CC}^T, \boldsymbol{BC}$

جوابات:
$$\boldsymbol{CC}^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{BC} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -13 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.19: $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}, (2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B})^T, 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{B}^T$

جوابات:
$$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -15 & -8 & 8 \\ 12 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}, (2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B})^T = 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

سوال 7.20: $\boldsymbol{Ba}, \boldsymbol{Ba}^T, \boldsymbol{Bb}, \boldsymbol{Bb}^T$

جوابات: $\boldsymbol{Ba} = \boldsymbol{Ba}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Bb}^T = \boldsymbol{Bb} = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$

سوال 7.21: $\boldsymbol{Aa}, \boldsymbol{Aa}^T, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{Ab}^T$

جوابات: $\boldsymbol{Aa} = \boldsymbol{Aa}^T = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Ab} = \boldsymbol{Ab}^T = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

سوال 7.22: $(\boldsymbol{Ab})^T, \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^T$

جوابات: $(\boldsymbol{Ab})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

سوال 7.23: $\boldsymbol{ABC}, \boldsymbol{ABa}, \boldsymbol{ABb}$

جوابات: $\begin{bmatrix} -49 & -36 \\ -5 & -6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -75 \\ -15 \\ -11 \end{bmatrix}$

سوال 7.24: $\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{ba}, \boldsymbol{aB}, \boldsymbol{Bb}$

جوابات: $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$

سوال 7.25: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}^T+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^T$

جوابات: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ممکن نہیں ہے اور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}^T+\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

سوال 7.26: $\boldsymbol{AB}$ کو سوال 7.13 میں حاصل کیا گیا ہے۔اسی کو دوبارہ $\boldsymbol{A}$ کے قطار اور $\boldsymbol{B}$ کے صف استعمال کرتے ہوئے دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 7.27: مساوات 7.23 کو عمومی 2×2 قالب کے لئے ثابت کریں۔

سوال 7.28: قانون تبادل

ایسا 2×2 قالب $\boldsymbol{B}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ ہو جہاں $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہے۔

جواب: $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

سوال 7.29: ثابت کریں کہ کسی بھی چکور قالب $\boldsymbol{C}$ کے لئے $\frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^T)$ تشاکلی ہے جبکہ $\frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^T)$ منحرف تشاکلی ہیں۔

سوال 7.30: درج بالا سوال کے تحت $\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^T)$ اور $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^T)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{T}$ تشاکلی اور $\boldsymbol{M}$ منحرف تشاکلی قالب ہیں۔کسی بھی قالب کو تشاکل قالب اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں سوال 7.13 تا سوال 7.25 میں استعمال کیے گئے $\boldsymbol{A}$ کو تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ان قالبوں کو دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2.5 \\ 3 & 2.5 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

سوال 7.31: قابل تبادل

ثابت کریں کہ تشاکلی $\boldsymbol{A}$ اور تشاکلی $\boldsymbol{B}$ کا قالبی ضرب $\boldsymbol{AB}$ اس صورت تشاکلی ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ آپس میں (ضرب میں) **قابل تبادل**[34] ہوں یعنی جب $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ ہو۔

جواب: $\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{BA}$

سوال 7.32: کن صورتوں میں منحرف تشاکلی قالبوں کا قالبی ضرب منحرف تشاکلی قالب دے گا؟

جواب: $\boldsymbol{AB} = -\boldsymbol{BA}$

سوال 7.33: امکانی شماریاتی عمل

ایک مشین اگر آج ٹھیک ہو تب 0.9 امکان ہے کہ وہ ایک دن بعد (کل) بھی ٹھیک ہو گا۔یوں 0.1 امکان ہے کہ وہ کل خراب ہو گا۔اسی طرح اگر مشین آج خراب ہو تب 0.4 امکان ہے کہ وہ کل بھی خراب ہو گا۔یوں 0.6 امکان ہے کہ وہ کل ٹھیک ہو گا۔آج ٹھیک اور خراب کو بالترتیب t اور k سے ظاہر کریں جبکہ ایک دن بعد انہیں T اور K سے ظاہر کریں۔اس پیش گوئی سے امکانی شماریاتی قالب $\boldsymbol{A}$ لکھیں۔اگر آج مشین ٹھیک ہو تب دو دن بعد (پرسوں) مشین ٹھیک ہونے کا کتنا فی صد امکان ہے۔

---

[34] commutative

جوابات: دو دن بعد %87 امکان ہے کہ مشین ٹھیک ہو گی۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{t} & \text{k} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{T} \\ \text{K} \end{array}$$

سوال 7.34: امکانی شماریاتی عمل

ایک شہر کی آبادی 20 000 ہے۔ایک بینک میں آج کھاتے دار کا %90 امکان ہے کہ وہ اگلے سال بھی اسی بینک کا کھاتے دار ہو گا جبکہ یہاں کھاتا نہ رکھنے والے کا %1 امکان ہے کہ وہ اگلے سال یہاں کا کھاتا دار ہو گا۔اگر آج 1000 افراد اس بینک کے کھاتے دار ہوں تب ایک سال، دو سال اور تین سال بعد کتنے افراد یہاں کے کھاتے دار ہوں گے؟

جوابات: 1090 ، 1170 ، 1241

سوال 7.35: ایک کارخانہ لاہور، پشاور اور کراچی میں تین اشیاء الف، ب اور پ فروخت کرتا ہے۔فی کلو گرام منافع بالترتیب 8 ، 10 اور 6 روپیہ ہے۔ ایک دن کی فروخت درج ذیل ہے۔

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{الف} & \text{ب} & \text{پ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 1800 \\ 2200 & 2800 & 1500 \\ 3200 & 4200 & 2700 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{لاہور} \\ \text{پشاور} \\ \text{کراچی} \end{array}$$

ایسا "سمتیہ منافع" $\boldsymbol{m}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}$ ہر شہر میں روزانہ کمائی دے۔

جواب: $\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix} 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}^T$

سوال 7.36: خطی تبادلہ۔ گھومنا

کارتیسی محدد کی xy سطح پر گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ گھومنے کو $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ظاہر کرتی ہے جہاں $\boldsymbol{y}$ ، $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{x}$ درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ثابت کریں کہ $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کسی بھی سطح پر x_1x_2 کارتیسی محدد کے نظام کو، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ، θ زاویہ گھما کر نیا کارتیسی محدد y_1y_2 دیتا ہے۔

سوال 7.37: خطی تبادلہ۔ گھومنا
درج بالا سوال میں زاویہ گھومنا دیکھا گیا۔ثابت کریں کہ درج ذیل قالب، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ، $n\theta$ زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

سوال 7.38: خطی تبادلہ۔ گھومنا
درج بالا دو سوالات کو دیکھیں۔درج ذیل قالب، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ، α اور β زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

یوں باری باری α اور β گھومنے کو $\boldsymbol{AB}$ ظاہر کرے گا۔یوں درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

سوال 7.39: خطی تبادلہ۔ گھومنا
خلا میں گھومنا $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ دیتا ہے جہاں $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ ، $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$ ہیں جبکہ $\boldsymbol{A}$ درج ذیل ہو سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

کیا آپ ذہن میں اس عمل کو دیکھ پاتے ہیں؟

7.3 خطی مساوات کے نظام۔گاوسی اسقاط

قالب کا ایک اہم استعمال، خطی تفرقی مساوات کے نظام کا حل ہے۔ ہم یہاں **گاوسی اسقاط**[35] کی ترکیب سیکھتے ہیں جو خطی الجبرا میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ اس ترکیب کو اچھی طرح سمجھیں۔

خطی تفرقی مساوات کے نظام کا نام چھوٹا کرتے ہوئے اس کو **خطی نظام**[36] بھی کہتے ہیں۔انجینئری، معاشیات، شماریات، اور دیگر شعبوں کے کئی مسائل کی نمونہ کشی خطی نظام کی مدد سے کی جاتی ہے مثلاً برقی ادوار اور گاڑیوں کی آمد و رفت کا نظام۔

خطی نظام، عددی سر قالب اور افزودہ قالب

n متغیرات پر مبنی n مساوات کا نظام درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{mn}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

چونکہ اس نظام میں تمام متغیرات کی طاقت اکائی (1) ہے لہٰذا یہ نظام **خطی** کہلاتا ہے (سیدھے خط کی طرح جس کی مساوات $y = mx + c$ میں x اور y کی طاقت 1 ہے)۔ان مساوات میں a_{11} تا a_{mn} مستقل قیمتیں ہیں جنہیں نظام کے **عددی سر**[37] کہتے ہیں۔ b_1 تا b_m بھی مستقل قیمتیں ہیں۔تمام b_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں 7.29 کا نظام **ہم جنسی**[38] نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ **غیر ہم جنسی**[39] نظام کہلاتا ہے۔

---

[35] Gauss elimination
[36] linear system
[37] coefficients
[38] homogeneous
[39] nonhomogeneous

نظام 7.29 کے حل سے مراد x_1 تا x_n کی وہ قیمتیں ہیں جو اس نظام کے تمام مساواتوں پر پورا اترتے ہوں۔ نظام کے حل **سمتیہ**[40] کے ارکان نظام 7.29 کے حل x_1 تا x_m ہیں۔ ہم جنسی نظام کا ہر صورت میں ایک حل $x_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا جو **غیر اہم صفر حل**[41] کہلاتا ہے۔

نظام 7.29 کی قالبی صورت

قالبی ضرب کے استعمال سے نظام 7.29 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{7.30}$$

جہاں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{b}$ درج ذیل ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ **عددی سر قالب**[42] کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{7.31}$$

$\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیہ قطار ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ a_{jk} تمام صفر نہیں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}$ صفر قالب نہیں ہو گا۔ دھیان رہے کہ $\boldsymbol{x}$ کے n ارکان جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے m ارکان ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{b}$ کو ایک ہی قالب میں لکھ کر **افزودہ قالب**[43] $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ملتا ہے۔

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{7.32}$$

افزودہ قالب میں عمودی لکیر کو ہٹایا جا سکتا ہے۔ہم بھی ایسا ہی کریں گے، بس یاد رہے کہ $\boldsymbol{A}$ کے ساتھ آخری قطار $\boldsymbol{b}$ کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ حاصل ہوتا ہے۔

---

[40] solution vector
[41] trivial solution
[42] coefficient matrix
[43] augmented matrix

چونکہ افزودہ قالب میں نظام 7.29 کے تمام معلومات شامل ہیں لہٰذا افزودہ قالب اس نظام کو مکمل طور پر ظاہر کرتا ہے۔

مثال 7.19: حل کی وجودیت اور یکتائی۔ جیومیٹریائی نقطہ نظر
$m = n = 2$ کی صورت میں نظام دو عدد متغیرات x_1 ، x_2 اور دو عدد مساوات پر مبنی ہو گا۔

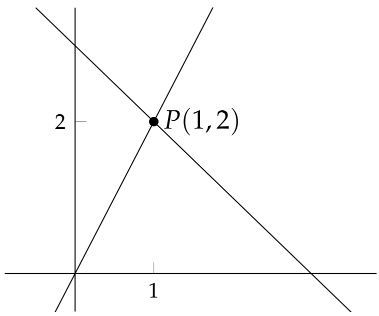
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

اگر ہم x_1 اور x_2 کو سطح x_1x_2 پر محور فرض کریں تب درج بالا مساوات اس سطح پر سیدھے خطوط کے مساوات ہوں گے۔ان مساوات کا صرف اس صورت حل (x_1, x_2) ہو گا جب نقطہ P جس کے محور x_1 اور x_2 ہوں، ان دونوں خطوط پر پایا جاتا ہو۔ یوں تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 7.1 دیکھیں۔

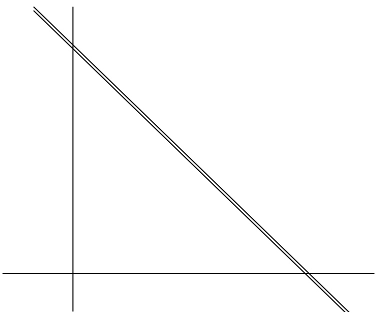
- اگر خطوط ایک دونوں کو قطع کرتے ہوں تب یکتا حل پایا جائے گا۔
- ہم مکان خطوط کی صورت میں لامتناہی تعداد کے حل ہوں گے۔
- متوازی اور ایک دونوں سے ہٹ کر خطوط کی صورت میں کوئی حل ممکن نہیں ہو گا۔

دو متغیرات اور دو مساوات کے نظام کو ہم نے دیکھا۔ تین متغیرات اور تین مساوات کے نظام کو بھی جیومیٹریائی نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔اب خطوط کی بجائے نظام کے تین مساوات تین سطحوں کو ظاہر کریں گی۔ شکل میں اس نظام کے حل دکھائے گئے ہیں۔

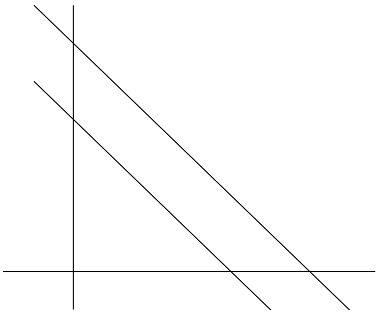
مثال 7.19 میں ہم نے دیکھا کہ عین ممکن ہے کہ نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو۔یوں کسی بھی نظام کے بارے میں ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا حل موجود ہے اور آیا ایسا حل یکتا ہے۔آئیں اب خطی نظام کو حل کرنے کا منظم طریقہ سیکھیں۔



(الف) نقطہ P جہاں دونوں خط ملتے ہیں، ان مساوات کا حل ہے۔



(ب) دونوں خطوط (جنہیں ایک دونوں سے ذرہ ہٹ کر دکھایا گیا ہے در حقیقت) ہم مکانی ہیں لہٰذا ان کے لا متناہی تعداد کے حل ممکن ہیں۔



(پ) متوازی خطوط ایک دونوں کو کہیں نہیں چھوتے ہیں لہٰذا ان کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 7.1: حل کی وجودیت اور یکتائی۔ مثال 7.19 کے اشکال۔

گاوسی اسقاط

ہم درج ذیل خطی نظام پر غور کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &= 7\\
4x_2 &= 12
\end{aligned}
$$

اس نظام کے عددی سر قالب میں غیر صفر قیمتیں، مرکزی وتر اور اس سے اوپر ہیں لہٰذا یہ **بالائی تکونی نظام** ہے۔اس نظام کی نچلی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = \frac{12}{4} = 3$ ملتا ہے جس کو پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_1 = \frac{7-x_2}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$ حاصل ہوتا ہے۔اس عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ تکونی نظام کو با آسانی حل کیا جا سکتا ہے۔یوں ہم کسی بھی نظام کو تکونی صورت میں لکھنا چاہیں گے۔

کسی بھی نظام کو تکونی صورت میں لانے کے عمل کو درج ذیل نظام کی مدد سے سیکھتے ہیں جس کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔افزودہ قالب کی پہلی صف کو S_1 اور دوسری صف کو S_2 کہا گیا ہے۔

$$
\begin{array}{c}S_1\\S_2\end{array}\begin{bmatrix}2 & 3 & 12\\4 & -2 & 8\end{bmatrix}
\qquad
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &= 12\\
4x_1 - 2x_2 &= 8
\end{aligned}
$$

اس کو تکونی صورت میں لکھنے کی خاطر نچلی مساوات سے x_1 حذف کرنا ہو گا۔ایسا کرنے کے لئے بالائی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر $4x_1 + 6x_2 = 24$ حاصل کرتے ہوئے اس کو نچلی مساوات سے منفی کرتے ہیں جس سے $-8x_2 = -16$ ملتا ہے۔یوں درج بالا نظام درج ذیل لکھا جائے گا جو بالائی تکونی صورت ہے۔افزودہ قالب پر بھی یہی عمل کیا گیا ہے جہاں نچلی صف کے ساتھ الجبرائی عمل $(S_2 - 2S_1)$ لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{bmatrix}2 & 3 & 12\\0 & -8 & -16\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\S_2 - 2S_1\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &= 12\\
-8x_2 &= -16
\end{aligned}
$$

تکونی صورت حاصل کرنے کی اس عمل کو **گاوسی اسقاط**[44] کہتے ہیں۔گاوسی اسقاط کی ترکیب وسیع تر نظام پر قابل استعمال ہے۔یوں نچلی مساوات سے $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہوئے پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_1 = 3$ ملتا ہے۔

---

[44] Gaussian elimination

مثال 7.20: گاوسی اسقاط
درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے بالائی تکونی صورت میں لائیں۔نظام کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

حل: بالائی تکونی صورت کے لئے درمیانی مساوات سے x_1 حذف کرنا ہو گا جبکہ نچلی مساوات سے x_1 اور x_2 حذف کرنے ہوں گے۔

پہلی قدم میں ہم بالائی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے نچلی دونوں مساواتوں سے x_1 حذف کرتے ہیں۔پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کرنے سے دوسری مساوات سے x_1 حذف ہو گا۔اسی طرح پہلی مساوات کو تیسری مساوات کے ساتھ جمع کرتے ہوئے تیسری مساوات سے x_1 حذف ہوتا ہے۔اس عمل کو افزودہ قالب کے لئے بیان کرتے ہیں۔ہم ہر قدم پر گزشتہ قالب کی پہلی صف کو S_1 ، دوسری کو S_2 اور تیسری کو S_3 کہیں گے۔ یوں درج ذیل میں S_1 سے مراد درج بالا قالب کی پہلی صف $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ہے۔

پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے دوسری صف سے منفی کریں یعنی $S_2 - 2S_1$
پہلی صف کو تیسری صف کے ساتھ جمع کریں یعنی $S_3 + S_1$

ان عمل صف (یعنی $S_2 - 2S_1$ اور $S_3 + S_1$) کو درج ذیل قالب کے دائیں جانب مطابقتی صف کے سامنے لکھا گیا ہے۔

$$\begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 + S_1 \end{array} \end{array} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -10 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

صف پر عمل کو الجبرائی صورت میں قالب کے دائیں جانب لکھا گیا ہے جہاں S_1 ، S_2 ، . . . گزشتہ قالب کے صف ہیں۔درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب ہے۔

دوسری قدم میں (درج بالا حاصل کردہ کی) نچلی مساوات سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

تبدیل شدہ افزودہ قالب کی دوسری صف کو $\frac{4}{7}$ سے ضرب دیتے ہوئے اسی قالب کی تیسری صف کے ساتھ جمع کریں۔ یہاں $(S_3 + \frac{4}{7}S_2)$ میں S_2 اور S_3 سے مراد درج بالا قالب کی دوسری اور تیسری صف ہے۔ یوں S_2 سے مراد $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 & -10 \end{bmatrix}$ ہے۔

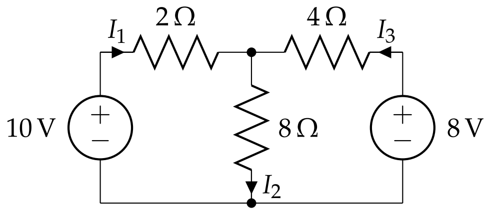
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\
-7x_2 + 3x_3 &= -10 \\
\frac{26}{7}x_3 &= -\frac{26}{7}
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -1 & 5 \\
0 & -7 & 3 & -10 \\
0 & 0 & \frac{26}{7} & -\frac{26}{7}
\end{bmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{4}{7}S_2 \end{matrix}
\tag{7.33}
$$

تکونی قالب کے حصول کے بعد حل حاصل کرتے ہیں۔ نظام 7.33 کی نچلی مساوات سے $x_3 = -1$ ملتا ہے جس کو نظام 7.33 کی درمیانی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_2 = 1$ ملتا ہے۔ ان دونوں جوابات کو پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 2$ ملتا ہے۔

اگر دوسری قدم پر آپ پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر تیسری مساوات سے منفی کریں تو حاصل مساوات میں x_1 دوبارہ حاضر ہو جائے گا جو پہلی قدم کی محنت کو ضائع کر دے گا۔ ہم ایسا نہیں چاہتے ہیں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی جسامت کی نظام کو حل کرتے ہوئے پہلی قدم پر، نظام کی پہلی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساوات سے x_1 حذف کیا جاتا ہے۔ دوسری قدم پر، پہلی قدم کی حاصل نظام کی دوسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے x_2 حذف کیا جاتا ہے۔ اسی طرح تیسری قدم پر، تیسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے x_3 حذف کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ آخر تک دہرایا جائے گا۔

اس نظام کو افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے حل کیا جا سکتا تھا۔ بار بار مکمل مساوات لکھنے کی کوئی ضرورت نہیں تھی۔ ہم عموماً ایسا ہی کرتے ہوئے، نظام کو افزودہ قالب کی صورت میں لکھ کر، اس کی تکونی صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کریں گے۔

مثال 7.21: برقی دور کو شکل 7.2 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔ حل: کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا



شکل7.2: برقی دور۔مثال7.21

جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}2I_1 + 8I_3 &= 10\\ 4I_3 + 8I_2 &= 8\end{aligned}$$

جبکہ کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I_1 + I_3 = I_2$$

ان تینوں مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے ایک ساتھ لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی بائیں جانب اس نظام کا افزودہ قالب بھی لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 8 & 10\\ 0 & 8 & 4 & 8\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}2I_1 + 8I_3 &= 10\\ 8I_2 + 4I_3 &= 8\\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0\end{aligned}$$

پہلا قدم: چونکہ دوسری صف کا پہلا رکن صفر ہے لہٰذا اس کو کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے البتہ تیسرے صف کے پہلے رکن I_1 کو حذف کرنا ہو گا۔

پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔درج ذیل میں S_3 سے مراد درج بالا قالب کی تیسری صف $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 8 & 10\\ 0 & 8 & 4 & 8\\ 0 & -1 & -3 & -5\end{bmatrix} \begin{matrix}\\ \\ S_3 - \frac{1}{2}S_1\end{matrix} \qquad \begin{aligned}2I_1 + 8I_3 &= 10\\ 8I_2 + 4I_3 &= 8\\ -I_2 - 3I_3 &= -5\end{aligned}$$

دوسرا قدم: درج بالا کے تیسرے صف سے I_2 حذف کرتے ہیں۔

دوسرے صف کو $\frac{1}{8}$ سے ضرب دے کر تیسرے صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

درج ذیل لکھتے ہوئے S_3 سے مراد گزشتہ (درج بالا) قالب کی تیسری صف $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{8}S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2I_1 + 8I_3 &= 10 \\ 8I_2 + 4I_3 &= 8 \\ -\frac{5}{2}I_3 &= -4 \end{aligned}$$

تیسرا قدم: آخری صف یا آخری مساوات سے $I_3 = \frac{8}{5}$ ملتا ہے۔اس قیمت کو درج بالا پہلی اور اور درمیانی مساوات میں پر کرتے ہوئے بقایا برقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2I_1 + 8\left(\frac{8}{5}\right) &= 10 \qquad \implies \qquad I_1 = -\frac{7}{5} \\ 8I_2 + 4\left(\frac{8}{5}\right) &= 8 \qquad \implies \qquad I_2 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

مثال 7.22: درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

حل: پہلی قدم میں دوسری، تیسری اور چوتھی صف سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_3 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_4 - \frac{1}{2}S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

دوسری قدم میں تیسری اور چوتھی مساوات سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - \frac{5}{3}S_2 \\ S_4 + \frac{1}{3}S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{3}x_3 &= -\frac{14}{3} \\ -\frac{4}{3}x_3 &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

ہم تیسرے قدم پر تیسری یا چوتھی مساوات سے $x_3 = 2$ حاصل کرتے ہیں جس کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے۔انہیں پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 1$ ملتا ہے۔

بنیادی اعمال صف

قالب کی صفوں پر درج ذیل تین عمل سے نظام تبدیل نہیں ہوتا ہے۔گاوسی اسقاط پہلی دو اعمال سے حاصل ہوتا ہے۔

- دو صفوں کا آپس میں تبادلہ
- صف کو کسی مستقل قیمت سے ضرب دے کر کسی دوسرے (یا اسی) صف کے ساتھ جمع کرنا
- کسی صف کو غیر صفر مستقل قیمت c کے ساتھ ضرب دینا

دھیان رہے کہ یہ اعمال افزودہ قالب کے صفوں پر قابل اطلاق ہیں نہ کہ قطاروں پر۔یہ اعمال، نظام کی مساوات پر درج ذیل کے مترادف ہیں۔

- دو مساواتوں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنا۔
- ایک مساوات کو کسی مستقل سے ضرب دے کر دوسری (یا اسی) مساوات کے ساتھ جمع کرنا۔

• نظام کی مساوات کو **غیر صفر مستقل** c سے ضرب دینا۔

اب ظاہر ہے کہ ہمزاد مساواتوں کو آگے پیچھے لکھنے سے ان کا حاصل حل تبدیل نہیں ہوتا۔اسی طرح کسی مساوات کو مستقل قیمت سے ضرب دے کر دوسری مساوات کے ساتھ جمع کرنے سے بھی حل تبدیل نہیں ہوتا اور نہ ہی کسی مساوات کو **غیر صفر** مستقل سے ضرب دینے سے حل تبدیل ہوتا ہے۔(کسی مساوات کو صفر سے ضرب دینے سے مساواتوں کی تعداد کم ہو گی جس سے عین ممکن ہے کہ ان کا حل ممکن نہ رہے۔)

دو عدد خطی نظام N_1 اور N_2 اس صورت **صف برابر**[45] کہلاتے ہیں جب N_1 پر محدود عمل صف کے ذریعہ N_2 حاصل کرنا ممکن ہو۔ یہ حقیقت جسے درج ذیل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے، گاوسی اسقاط کی جواز ہے۔

مسئلہ 7.1: صف برابر نظام
صف برابر خطی نظام کے **سلسلہ حل**[46] یکساں ہوں گے۔

اس مسئلے کی بنا اگر ایک نظام کا سلسلہ حل دوسرے نظام کے سلسلہ حل کے عین مطابق ہو، تب انہیں **صف برابر نظام** کہتے ہیں۔یاد رہے کہ یہاں **عمل صف** کی بات کی جا رہی ہے۔افزودہ قالب کے قطار تبدیل کرنے سے نظام تبدیل ہو گا اور اس کا حل بھی تبدیل ہو گا لٰہذا افزودہ قالب پر کسی بھی عمل قطار کی اجازت نہیں ہے۔

ایسا نظام جس کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد زیادہ ہو **زائد معلوم**[47] کہلاتا ہے۔ نظام کی نا معلوم متغیرات اور مساواتوں کی تعداد برابر ہونے کی صورت میں اس کو **معلوم**[48] کہتے ہیں جبکہ نظام کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد کم ہونے کی صورت میں اس کو **کم معلوم**[49] کہتے ہیں۔

ایسا نظام جس کا کوئی حل نہ ہو **متضاد**[50] نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نظام جس کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہوں **بلا تضاد**[51] نظام کہلاتا ہے۔

---

[45] row equivalent
[46] solution set
[47] overdetermined
[48] determined
[49] underdetermined
[50] inconsistent
[51] consistent

گاوسی اسقاط۔نظام کی تین ممکنہ صورتیں

یکتا حل کا نظام مثال 7.20 میں دیکھا گیا۔آئیں اب لامتناہی تعداد کے حل والے نظام (مثال 7.23) کو اور بغیر کسی حل والے نظام (مثال 7.24) کو گاوسی اسقاط سے حل کرنے کی کوشش کریں۔

مثال 7.23: لامتناہی تعداد کے حل والا نظام

درج ذیل نظام جو تین مساوات پر مبنی ہے میں چار متغیرات پائے جاتے ہیں۔ اس کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3-x_4&=6\\ 4x_1-2x_2+x_3+2x_4&=2\\ 8x_1-4x_2+2x_3+4x_4&=4 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6\\ 4 & -2 & 1 & 2 & 2\\ 8 & -4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: پہلی قدم میں نچلی دو مساواتوں سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

پہلی صف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے دوسری صف سے منفی (S_2-2S_1) کریں۔
پہلی صف کو 4 سے ضرب کرتے ہوئے تیسری صف سے منفی (S_3-4S_1) کریں۔

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3-x_4&=6\\ -4x_2-3x_3+4x_4&=-10\\ -8x_2-6x_3+8x_4&=-20 \end{aligned} \qquad \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6\\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10\\ 0 & -8 & -6 & 8 & -20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ S_2-2S_1\\ S_3-4S_1 \end{array}$$

دوسری قدم میں درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے، دوسرے صف کی مدد سے تیسری صف سے x_2 حذف کرتے ہیں۔دوسری صف کو دو سے ضرب دیتے ہوئے تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3-x_4&=6\\ -4x_2-3x_3+4x_4&=-10\\ 0&=0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6\\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ S_3-2S_2 \end{array}$$

دوسری مساوات سے $x_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x_3+x_4$ اور یوں پہلی مساوات سے $x_1=\frac{7}{4}-\frac{5}{8}x_3$ ملتا ہے۔اب x_3 اور x_4 کی لامحدود مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے x_1 اور x_2 حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

عموماً اختیاری مستقل کو t_1 ، t_2 ، . . . لکھا جاتا ہے۔یوں x_3 اور x_4 کو بالترتیب t_1 اور t_2 لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$x_1 = \tfrac{7}{4} - \tfrac{5}{8}t_1$$
$$x_2 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{4}t_1 + t_2$$

مثال 7.24: گاوسی اسقاط۔بلا حل نظام

ایسا نظام جس کا حل ممکن نہ ہو کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے **تضاد** کی صورت حاصل ہو گی۔آئیں درج ذیل نظام حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -2 & 16 & -10 & 14 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 16x_2 - 10x_3 &= 14 \end{aligned}$$

دوسری اور تیسری مساوات سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر دوسری صف سے منفی کرتے ہیں۔
پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 15 & -9 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_3 + \frac{1}{2}S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 15x_2 - 9x_3 &= 17 \end{aligned}$$

آخری صف سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - 3S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 0 &= 8 \end{aligned}$$

آخری مساوات کے تحت $0 = 8$ ہے جو **تضاد** کی صورت ہے۔بلا حل نظام کی گاوسی اسقاط **تضاد** کی صورت دے گی۔

7.3.1 صف زینہ دار صورت

گاوسی اسقاط کے بعد حاصل عددی سر قالب، افزودہ قالب اور نظام **صف زینہ دار**[52] کہلاتے ہیں جن میں صفر کے صف، اگر موجود ہوں تو یہ، آخر پر پائے جاتے ہیں اور صف میں بائیں جانب پہلی غیر صفر اندراج، ہر اگلے صف میں، مزید دور ہو گی۔ مثال 7.24 میں عددی سر قالب اور افزودہ قالب کی زینہ دار صورت درج ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ ہم بائیں ترین اندراج کو اکائی (1) کی صورت میں لانے کی کوشش نہیں کرتے ہیں چونکہ اس سے کوئی فائدہ حاصل نہیں ہو گا۔ (**سادہ زینہ دار صورت**[53] جس میں بائیں ترین اندراج اکائی ہو گی پر بعد میں بحث کی جائے گی۔)

m مساوات اور n متغیرات کے نظام کا افزودہ قالب $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ ہے جس سے زینہ دار صورت $\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{f} \end{bmatrix}$ حاصل کی جاتی ہے۔ نظام $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{f}$ ایک ہی نظام کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔اگر ان میں کسی ایک نظام کا حل موجود ہو، تب یہی حل دوسرے نظام کا بھی حل ہو گا۔

گاوسی اسقاط سے زینہ دار افزودہ قالب کی درج ذیل عمومی صورت حاصل ہو گی۔

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & \cdots & r_{1n} & f_1 \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & \cdots & r_{2n} & f_2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & r_{rr} & \cdots & r_{rn} & f_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_m \end{bmatrix}$$

درج بالا زینہ دار افزودہ قالب میں $r \le m$ ، $r_{rr} \neq 0$ جبکہ f_{r+1} تا f_m اندراج والے صف میں تمام $r_{ij} = 0$ ہوں گے۔

---

[52] echelon form
[53] reduced echelon form

زینہ دار عددی سر قالب $\boldsymbol{R}$ میں غیر صفر صفوں کی تعداد r کو $\boldsymbol{A}$ **کا درجہ**[54] کہتے ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کا بھی درجہ ہو گا۔ یہ جاننا کہ نظام $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ کا حل موجود ہے یا نہیں اور اس حل کو حاصل کرنا درج ذیل طریقے سے ممکن ہے۔

- (الف) بلا حل: اگر $r < m$ ہو (جس کا مطلب ہے کہ $\boldsymbol{R}$ میں کم از کم ایک صف ایسا ہے جس کے تمام اندراجات صفر (0) ہیں) اور f_{r+1} تا f_m میں سے کم از کم ایک مقدار غیر صفر ہو تب $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{f}$ **متضاد** نظام ہو گا جس کا کوئی حل ممکن نہیں ہے۔ یوں $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ بھی **متضاد** نظام ہو گا جس کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

بلا تضاد نظام (جس میں یا $r = m$ ہو اور یا $r < m$ کے ساتھ ساتھ f_{r+1} تا f_m صفر کے برابر ہوں) تب نظام کا حل درج ذیل ہو گا۔

- (ب) یکتا حل: اگر $r = n$ ہو تب نظام کا حل یکتا ہو گا جس کو گاوسی اسقاط سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (مثال 7.20 کی طرح۔)

- (پ) بے انتہا تعداد کے حل: ایسی صورت میں x_{r+1} تا x_n کی قیمتیں چن کر x_1 تا x_{r-1} حاصل کریں۔ (مثال 7.23 کی طرح۔)

سوالات

سوال 7.40 تا سوال 7.53 کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

سوال 7.40:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -4 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 1, \; y = 2$

---

[54] rank of matrix

سوال 7.41:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

سوال 7.42:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -1 \\ y - z &= -1 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

جوابات: $x = -1,\ y = 1,\ z = 2$

سوال 7.43:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

سوال 7.44:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = 2,\ x_2 = 1$

سوال 7.45:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & -5 & -21 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_3 = 4,\ x_2 = t,\ x_1 = 2t + 1$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 7.46:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_3 = t,\ x_2 = \frac{t}{2},\ x_1 = -\frac{3}{2}t$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 7.47:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y + z &= -1 \\ 2x - y &= 6 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 2,\ y = -2,\ z = 1$

سوال 7.48:

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= -1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

جوابات: $z = t, y = 3 - 5t, x = 4t - 2$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 7.49:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x = \frac{1}{3}(7 - t),\ y = -\frac{1}{3}(4t + 2),\ z = t$ جہاں t اختیاری ہے۔

سوال 7.50:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_4 = t,\ x_3 = -\frac{4}{7}t,\ x_2 = \frac{5}{7}t,\ x_1 = -\frac{8}{7}t$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 7.51:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = -\frac{10}{7}(t+1),\ x_2 = \frac{1}{7}(5t+12),\ x_3 = -\frac{1}{7}(8t+15)$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔بالائی صف کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے حل کریں اور یا نچلی تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 7.52:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 2,\ x_4 = -2$

سوال 7.53:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & -4 & 6 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$

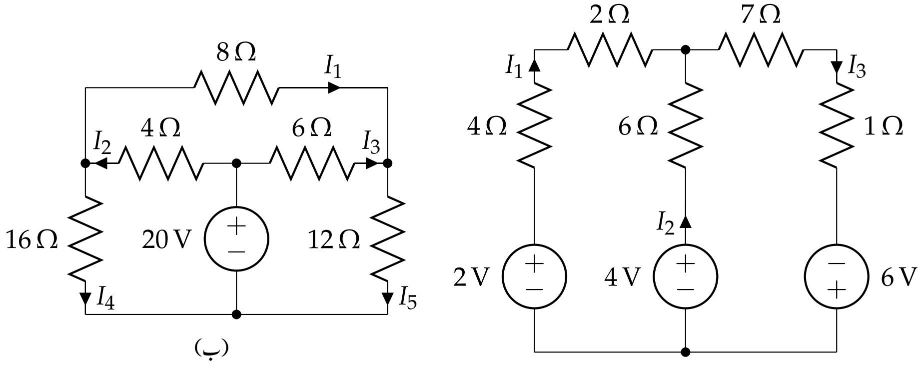
سوال 7.54 تا سوال 7.58 برقی ادوار کے نظام ہیں۔

سوال 7.54: شکل 7.3-الف میں برقی دور دکھایا گیا ہے۔اس کو حل کریں۔

جوابات: $I_1 = \frac{8}{33}\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = \frac{19}{33}\,\mathrm{A}$ ، $I_3 = \frac{9}{11}\,\mathrm{A}$

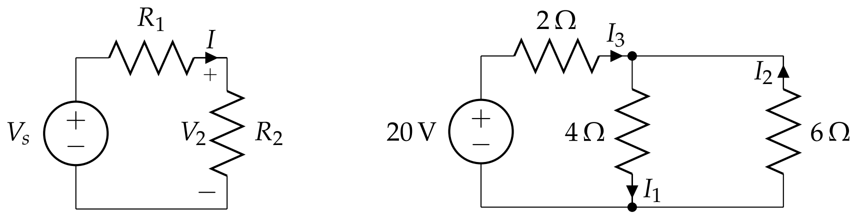
سوال 7.55: شکل 7.3-ب میں دکھائے گئے دور کو حل کریں۔

جوابات: $I_1 = \frac{10}{57}\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = \frac{65}{57}\,\mathrm{A}$ ، $I_3 = \frac{170}{171}\,\mathrm{A}$ ، $I_4 = \frac{55}{57}\,\mathrm{A}$ ، $I_5 = \frac{200}{171}\,\mathrm{A}$



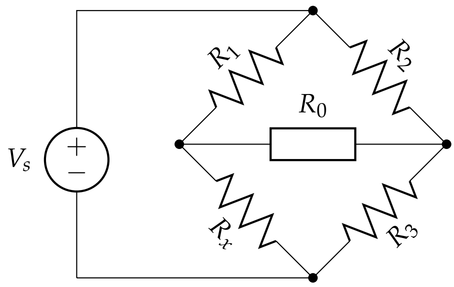
(ب) (الف)

شکل 7.3: برقی دور۔ سوال 7.54 اور سوال 7.55



(ب) تقسیم دباو کا دور۔ (الف)

شکل 7.4: ادوار برائے سوال 7.56 اور سوال 7.57



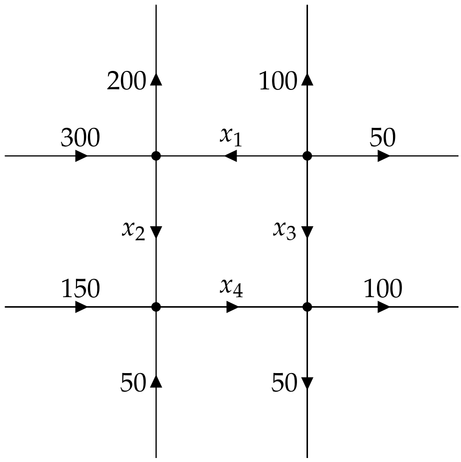
شکل 7.5: ویٹ سٹون پل۔ سوال 7.58

سوال 7.56: شکل 7.4-الف میں تینوں برقی رو دریافت کریں۔ برقی رو I_2 کی قیمت منفی ہے۔اس کا کیا مطلب ہے؟ جوابات: $I_1 = \frac{30}{11}\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = -\frac{20}{11}\,\mathrm{A}$ ، $I_3 = \frac{50}{11}\,\mathrm{A}$ منفی برقی رو کا مطلب ہے کہ رو کی سمت دکھائی گئی سمت کے الٹ ہے۔

سوال 7.57: تقسیم دباو کا دور شکل 7.4-ب میں دکھایا گیا ہے۔ کرخوف قانون دباو سے V_s ، I ، R_1 اور R_2 کا تعلق لکھیں۔اسی طرح V_2 اور I کا تعلق لکھیں۔اس نظام کو حل کرتے ہوئے V_2 حاصل کریں۔حاصل کلیہ **تقسیم دباو**[55] کا کلیہ کہلاتا ہے۔ جواب: $V_2 = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) V_s$

سوال 7.58: ویٹ سٹون پل
مزاحمتوں کی پیمائش کے لئے استعمال ہونے والا[56] **ویٹ سٹون پل**[57] شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ایک ہاتھ R_1 اور R_x نسب ہیں اور دوسرے ہاتھ R_2 اور R_3 نسب ہیں۔ دونوں ہاتھ آپس میں متوازی جڑے ہیں۔ایک ہاتھ کے درمیانے نقطے سے دوسرے ہاتھ کے درمیانے نقطے تک **ایمپیئر پیما**[58] بطور **پُل**[59] نسب کیا گیا ہے جس کی مزاحمت R_0 ہے۔ویٹ سٹون پل سے نا معلوم مزاحمت R_x ناپی جاتی ہے۔ متغیر مزاحمت R_3 کو تبدیل کیا جاتا ہے حتٰی کہ ایمپیئر پیما $I_0 = 0$ ناپے۔اس حالت میں ثابت کریں کہ $R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$ ہو گا۔ جواب: ایمپیئر پیما اس صورت صفر برقی رو ناپے گی جب R_0 کے دونوں اطراف برقی دباو کی قیمت عین برابر ہو۔اگر R_0 میں برقی رو صفر کے برابر ہو تب R_0 کو دور سے ہٹانے سے دور پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ہم ایسا ہی کرتے ہوئے R_0 کو ہٹاتے ہوئے حل کرتے ہیں۔سوال 7.57 کے تحت R_x پر دباو $V_x = \left(\frac{R_x}{R_1+R_x}\right) V_s$ اور R_3 پر دباو

[55] voltage division formula
[56] برطانوی سائنسدان چارلس ویٹ سٹون [1802-1875] سے اس دور کا نام منسوب ہے۔
[57] wheatstone bridge
[58] ammeter
[59] bridge



شکل 7.6: آمد و رفت۔ سوال 7.59

$V_3 = \left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right) V_s$ ہو گا۔ چونکہ یہ دونوں دباو برابر ہیں لہٰذا $\left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right) V_s = \left(\frac{R_x}{R_1+R_x}\right) V_s$ ہو گا جس سے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 7.59: آمد و رفت
برقی ادوار حل کرنے کے طریقے دیگر شعبوں میں بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں۔ شکل 7.6 میں شہر کی سڑکوں پر فی گھنٹہ گاڑیوں کی آمد و رفت دکھائی گئی ہے۔ کرخوف قانون رو کی مماثل استعمال کرتے ہوئے فی گھنٹہ نا معلوم آمد و رفت x_1 تا x_4 حاصل کریں۔ کیا حل یکتا حل ہے؟ جوابات: $x_2 = x_1 + 100$ ، $x_3 = -x_1 - 150$ اور $x_4 = x_1 + 300$ ؛ حل یکتا نہیں ہے۔

سوال 7.60: منڈی کی رسد و طلب
اشیاء کی مانگ، قیمت اور دستیابی کو بالترتیب M ، Q اور D سے ظاہر کرتے ہیں۔ دو شہروں میں رسد و طلبی کی متوازن مساوات $(M_1 = D_1, M_2 = D_2)$ کا حل درج ذیل خطی تعلقات سے حاصل کریں، جہاں زیر نوشت میں 1 پہلے شہر اور 2 دوسرے شہر کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 30 - 3Q_1 - 2Q_2, \quad & D_1 &= 5Q_1 - 2Q_2 + 6\\
M_2 &= 4Q_1 - Q_2 + 10, \quad & D_2 &= 3Q_2 - 6
\end{aligned}
$$

جوابات: $M_1 = D_1 = 7$ ، $M_2 = D_2 = 15$ ، $Q_1 = 3$ ، $Q_2 = 7$

سوال 7.61: ضیائی تالیف
روشنی کی توانائی استعمال کرتے ہوئے پودے، پانی H_2O اور کاربن ڈائی آکسائڈ CO_2 سے آکسیجن O_2 اور گلوکوز $C_6H_{12}O_6$ حاصل کرتے ہیں۔ یہ عمل، جسے درج ذیل کیمیائی مساوات میں پیش کیا گیا ہے، **ضیائی تالیف**[60] کہلاتی ہے۔

$$x_1CO_2 + x_2H_2O \xrightarrow{\text{شعاع}} x_3C_6H_{12}O_6 + x_4O_2$$

کیمیائی مساوات متوازن کرنے سے مراد x_1 ، x_2 ، ... کی ایسی کمتر قیمتیں دریافت کرنا ہے کہ مساوات کے بائیں ہاتھ ہر قسم کی ایٹم کی تعداد دائیں ہاتھ اسی ایٹم کی تعداد کے برابر ہو۔ضیائی تالیف کی مساوات کو متوازن کریں۔

جوابات: $x_1 = 6$ ، $x_2 = 6$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 6$

7.4 خطی غیر تابعیت۔درجہ قالب۔سمتی فضا

ہم خطی نظام کے خصوصیات کو مکمل طور پر حل کی موجودگی اور یکتائی کی نقطہ نظر سے دیکھنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم خطی الجبرا کے نئے اور بنیادی تصورات متعارف کرتے ہیں۔ ان میں **خطی غیر تابعیت** اور **درجہ قالب** زیادہ اہم ہیں۔ یاد رہے کہ گاوسی اسقاط انہیں پر منحصر ہے۔

سمتیات کی خطی تابعیت اور غیر تابعیت

m عدد سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، ... ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ (جن میں ارکان کی تعداد یکساں ہے) کی **خطی مجموعہ**[61] درج ذیل مساوات دیتی ہے،

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

---

[60] photosynthesis
[61] linear combination

جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{7.34}$$

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 7.34 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 7.34 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور غیر تابع**[62] کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات کا **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[63] ہے۔اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 7.34 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور تابع**[64] کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 7.34 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{a}_{(1)} = k_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots - k_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($\boldsymbol{a}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ خطی طور غیر تابع سمتیات کا سلسلہ وہ کمتر تعداد کے سمتیات ہیں جن کے ساتھ ہم کام کر سکتے ہیں۔

مثال 7.25: خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع سمتیات
درج ذیل سمتیات

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{a}_{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

---

[62] linear independent
[63] linearly independent set
[64] linearly dependent

خطی طور تابع ہیں چونکہ انہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.34 کی طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$2\boldsymbol{a}_{(1)} - \boldsymbol{a}_{(2)} + 2\boldsymbol{a}_{(3)} = \boldsymbol{0}$$

درج بالا کو با آسانی الجبرا سے ثابت کیا جا سکتا ہے البتہ اس تعلق کو حاصل کرنے اتنا آسان نہیں ہے۔ تابعیت ثابت کرنے کا منظم طریقہ نیچے دیا گیا ہے۔

اس مثال کے پہلے دو عدد سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔

قالب کا درجہ

تعریف: قالب $\boldsymbol{A}$ میں خطی طور غیر تابع صفوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کو $\boldsymbol{A}$ کا **درجہ**[65] کہتے ہیں۔

قالبوں اور خطی مساوات کے نظاموں کی عمومی خصوصیات سمجھنے میں درجہ قالب کا تصور کار آمد ثابت ہو گا۔

مثال 7.26: درجہ قالب

جیسا گزشتہ مثال میں دیکھا گیا، درج ذیل قالب میں دو عدد صف خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا اس قالب کا درجہ 2 ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ درج $\boldsymbol{A}$ اس صورت 0 ہو گا جب $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ہو۔ یہ حقیقت درجہ قالب کی تعریف سے اخذ ہوتی ہے۔

---

[65] rank

دو عدد قالب $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ اس صورت **صف برابر**[66] کہلاتے ہیں جب $\boldsymbol{A}_1$ پر محدود عمل صف کے ذریعہ $\boldsymbol{A}_2$ حاصل کرنا ممکن ہو۔

اب قالب میں خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد، صفوں کی جگہ تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتی اور نا ہی کسی صف کو غیر صفر قیمت c سے ضرب دینے اور نہ ہی صفوں کے خطی ملاپ سے ہوتی ہے۔یوں اعمال صف کی صورت میں کسی بھی قالب کا درجہ مستقل قیمت ہو گا۔

مسئلہ 7.2: صف برابر قالب
صف برابر قالبوں کا درجہ ایک جیسا ہو گا۔

یوں گاوسی اسقاط (حصہ 7.3) سے تکونی قالب حاصل کرتے ہوئے درجہ قالب حاصل کیا جا سکتا ہے۔ تکونی قالب میں غیر صفر صفوں کی تعداد درجہ قالب ہو گی۔

مثال 7.27: مثال 7.26 میں دیے گئے قالب کا درجہ، اس کی تکونی قالب کی مدد سے دریافت کرتے ہیں۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 ، . . . گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری، . . . صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 - S_1 \end{array} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ S_3 - \frac{1}{2}S_2 \end{array}
\end{aligned}$$

آخری قالب تکونی ہے جس کے آخری صف کے تمام اندراجات صفر کے برابر ہیں لہٰذا یہ صفر صف ہے۔ غیر صفر صفوں کی تعداد 2 ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کا درجہ بھی 2 ہے۔

[66] row equivalent

مثال 7.25 تا مثال 7.27 میں $n = 3$ ، $p = 3$ اور درجی قالب 2 لیتے ہوئے درج ذیل مسئلے کو پڑھیں۔

مسئلہ 7.3: سمتیات کی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے p عدد سمتیات جن میں ہر سمتیہ کے n عدد ارکان ہوں کو بطور قالب کے صف لکھیں۔ اگر حاصل قالب کا درجہ p ہو تب یہ سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں گے۔اس کے برعکس اگر اس قالب کا درجہ p سے کم ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

دیگر اہم خصوصیات درج ذیل مسئلے سے حاصل ہوں گے۔

مسئلہ 7.4: سمتیات قطار کی صورت میں درجہ قالب

قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ r ، اس قالب میں غیر تابع سمتیہ قطار کی تعداد کے برابر ہو گا۔

یوں قالب $\boldsymbol{A}$ اور تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کا درجہ ایک دونوں کے برابر ہو گا۔

ثبوت : فرض کریں کہ $m \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ r ہے۔درجہ قالب کی تعریف سے یوں $\boldsymbol{A}$ کے r عدد خطی طور غیر تابع صف ہوں گے جنہیں ہم $\boldsymbol{v}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{v}_{(r)}$ کہتے ہیں اور $\boldsymbol{A}$ کے تمام صف $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ کو ان خطی طور غیر تابع کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= c_{11}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{12}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{1r}\boldsymbol{v}_{(r)} \\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= c_{21}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{22}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{2r}\boldsymbol{v}_{(r)} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a}_{(m)} &= c_{m1}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{m2}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{mr}\boldsymbol{v}_{(r)}
\end{aligned}
$$

یہ مساوات سمتیات ہیں جن میں سے ہر n عدد مساوات پر مشتمل ہے۔ $\boldsymbol{v}_{(1)}$ کے ارکان کو v_{11} ، $\cdots$ ، v_{1n} لکھتے ہوئے اور اسی طرح بائیں ہاتھ کے سمتیات کے ارکان کو بھی لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں $k = 1, \cdots, n$ ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_{1k} &= c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \cdots + c_{1r}v_{rk} \\
a_{2k} &= c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \cdots + c_{2r}v_{rk} \\
&\vdots \\
a_{mk} &= c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \cdots + c_{mr}v_{rk}
\end{aligned}
$$

اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = v_{1k} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + v_{2k} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + v_{rk} \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix}$$

بائیں ہاتھ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ قالب کا k شمار پر قطار ہے۔یوں درج بالا مساوات کے تحت $\boldsymbol{A}$ کا ہر قطار، دائیں ہاتھ کے r عدد سمتیات کا خطی مجموعہ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد r سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے جو خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد ہے۔

اب یہی کچھ تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{A}^T$ کے سمتیات صف $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار، اور $\boldsymbol{A}^T$ کے سمتیات قطار $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف ہیں، لہٰذا (درج بالا نتیجے کے تحت) $\boldsymbol{A}$ کی خطی طور غیر تابع صف سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد (جو r کے برابر ہے)، $\boldsymbol{A}$ کی خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے۔اس طرح یہ تعداد r ہی ممکن ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مثال 7.27 میں قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ 2 ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے دو قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔بائیں جانب سے پہلی اور دوسری قطار کو خطی طور غیر تابع لیتے ہوئے تیسرے اور چوتھے قطار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

مسئلہ 7.3 اور مسئلہ 7.4 کی مدد سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔ **مسئلہ 7.5: سمتیات کی خطی طور تابعیت**

فرض کریں کہ p سمتیات کا ہر رکن n ارکان پر مشتمل ہے۔اگر $n < p$ ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

ثبوت: ایسا قالب $\boldsymbol{A}$ جس کے صف یہی p سمتیات ہوں اور جس کی قطاروں کی تعداد n (جہاں $n < p$ ہے۔) ہو کا مسئلہ 7.4 کے تحت

$$\text{درجہ } \boldsymbol{A} \le n < p$$

ہو گا جو مسئلہ 7.3 کے تحت خطی تابعیت کو ظاہر کرتی ہے۔

سمتی فضا

فرض کریں کہ V سمتیات کا ایسا غیر خالی **سلسلہ**[67] ہے جس کے تمام سمتیات میں ارکان کی تعداد یکساں ہے۔اگر V میں موجود کسی بھی دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے تمام ممکنہ مجموعے $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ (جہاں α اور β حقیقی اعداد ہیں۔) بھی V کے ارکان ہوں، اور مزید یہ کہ، $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ مساوات 7.7-الف، پ، ت اور مساوات 7.8 پر پورا اترتے ہوں، اور V میں کوئی بھی سمتیات $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ مساوات 7.7-ب پر پورا اترتے ہوں، تب V **سمتی فضا**[68] کہلائے گا۔

V میں خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد کو V کی **بُعد**[69] کہتے ہیں۔یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ V کی بُعد محدود ہے۔ لامتناہی بُعد کے سلسلے پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

V میں موجود خطی طور غیر تابع سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد پر مبنی سلسلے کو V کا **اساس**[70] کہتے ہیں۔ اس (اساسی) سلسلے میں کسی بھی ایک یا ایک سے زیادہ سمتیات کو شامل کرنے سے یہ سلسلہ خطی طور تابع ہو جائے گا۔یوں V کی اساس میں سمتیات کی تعداد، V کی بُعد کے برابر ہو گی۔

کسی بھی دیے گئے، یکساں تعداد کے ارکان والے سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(p)}$ کے تمام ممکنہ مجموعوں کا سلسلہ، ان سمتیات کا **احاطہ**[71] کہلاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔اگر $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(p)}$ خطی طور غیر تابع ہوں تب اس سمتی فضا کی اساس یہی سمتیات ہوں گے۔

اس سے اساس کی نئی تعریف ملتی ہے۔سمتیات کا سلسلہ اس صورت سمتی فضا V کا اساس ہو گا (الف) اگر اس سلسلے میں سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں اور (ب) اگر V میں کسی بھی سمتیہ کو سلسلے کے سمتیات کا خطی مجموعے لکھنا ممکن ہو۔

سمتی فضا کی **ذیلی فضا**[72] سے مراد V کا وہ غیر خالی **ذیلی سلسلہ**[73] ہے (جو پورے V پر بھی مشتمل ہو سکتا ہے۔) جو V کی سمتیات پر لاگو جمع اور غیر سمتی ضرب کے قواعد پر پورا اترتا ہوا سمتی فضا ہو۔

---

[67] nonempty set
[68] vector space
[69] dimension
[70] basis
[71] span
[72] subspace
[73] subset

مثال 7.28: سمتی فضا، بُعد، اساس
مثال 7.25 کے تین سمتیات کے احاطے کی بُعد 2 ہے۔ اس سمتی فضا کی اساس ان میں سے کسی بھی دو سمتیات پر مشتمل ہو گا مثلاً $\boldsymbol{a}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(2)}$ یا $\boldsymbol{a}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(3)}$ اور یا $\boldsymbol{a}_{(2)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(3)}$ ۔

مسئلہ 7.6: سمتی فضا R^n
n سمتیات (حقیقی اعداد) پر مشتمل سمتی فضا R^n کی بُعد n ہو گی۔

ثبوت: n سمتیات کی اساس درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a}_{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

قالب $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف کے احاطے کو $\boldsymbol{A}$ کا **صف فضا**[74] کہتے ہیں۔ اسی طرح قالب $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار کے احاطے کو $\boldsymbol{A}$ کا **قطار فضا**[75] کہتے ہیں۔

اب مسئلہ 7.4 کے تحت قالب کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد اس کے خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد کے برابر ہوتی ہے۔ بُعد کی تعریف کے تحت، یہ عدد صف فضا یا قطار فضا کی بُعد ہو گا۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 7.7: صف فضا اور قطار فضا
قالب $\boldsymbol{A}$ کی قطار فضا کی بُعد، اس کی صف فضا کی بُعد اور درجہ $\boldsymbol{A}$ عین برابر ہوں گے۔

---

[74] row space
[75] column space

آخر میں کسی بھی قالب A کی غیر متجانس مساوات $Ax = 0$ کا سلسلہ حل، سمتی فضا ہو گا جس کو A کی **معدوم فضا**[76] کہتے ہیں، اور جس کی بُعد کو A کی **معدومیت**[77] کہتے ہیں۔ اگلے حصے میں درج ذیل بنیادی تعلق کو ثابت کیا جائے گا۔

$$\text{درجہ } A + \text{معدومیت } A = A \text{ کی تعداد قطار} \tag{7.35}$$

سوالات

سوال 7.62 تا سوال 7.71 کی تکونی صورت گاوسی اسقاط سے حاصل کرتے ہوئے درجہ قالب حاصل کریں۔ صف فضا اور قطار فضا کی اساس بھی حاصل کریں۔

سوال 7.62:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

جوابات: درجہ $= 1$ ؛ $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ ؛ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ ۔آخری سمتیہ کو $\begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix}^T$ کی جگہ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ لکھا گیا ہے۔بقایا سوالات کے جوابات میں بھی بعض اوقات سمتیہ کی سادہ ترین صورت دی گئی ہے۔

سوال 7.63:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

سوال 7.64:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

---

[76] null set
[77] nullity

جوابات: 2 ؛ $[8\ 0\ 4\ 0]$، $[0\ 1\ 0\ 2]$؛ $[8\ 0\ 4]^T$، $[0\ 1\ 0]^T$

سوال 7.65:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $[2\ 0\ 4\ 0]$، $[0\ 1\ -1\ 1]$، $[0\ 0\ 1\ 0]$؛ $[2\ 0\ 1\ 1]^T$، $[0\ 2\ -1\ 3]^T$، $[0\ 0\ 1\ -1]^T$

سوال 7.66:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $[3\ 0\ 2]$، $[0\ 9\ -1]$، $[0\ 0\ 1]$؛ $[1\ 2\ 0]^T$، $[0\ 9\ 2]$، $[0\ 0\ 1]$

سوال 7.67:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

جوابات: 2 ؛ $[a\ b]$، $[0\ a^2-b^2]$؛ $[a\ b]^T$، $[0\ a^2-b^2]^T$

سوال 7.68:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & -1 & 16 & -4 \\ 8 & 1 & 32 & 4 \end{bmatrix}$$

جوابات: 2 ؛ $[1\ 2\ 4\ 8]$، $[0\ 1\ 0\ 4]$؛ $[1\ 2\ 4\ 8]^T$، $[0\ 1\ 3\ 5]^T$

سوال 7.69:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 8 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix}8 & 4 & 8 & 2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 56 & 48 & 28\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}8 & 16 & 8 & 2\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & -1\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

سوال 7.70:

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\3 & 4 & 5 & 6\\4 & 5 & 6 & 7\\5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix} \qquad (a_{jk} = j + k)$$

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$

سوال 7.71:

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\3 & 4 & 5 & 6\\4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix} \qquad (a_{jk} = j + k - 1)$$

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$

سوال 7.72: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = j + k - 1$ کے برابر ہے، کا درجہ n کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 5$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔سوال 7.71 میں $n = 4$ کے لئے اس حقیقت کو ثابت کیا گیا ہے۔

سوال 7.73: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = j + k + c$ کے برابر ہے (c مثبت عدد ہے)، کا درجہ n کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 4$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔

سوال 7.74: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = 2^{j+k-2}$ کے برابر ہے، کا درجہ 1 کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 3$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔

سوال 7.75 تا سوال 7.79 میں قالبوں کی عمومی خصوصیات پر غور کیا گیا ہے۔دیے گئے تعلق ثابت کریں۔

سوال 7.75:

$$\text{درجہ } \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \text{درجہ } \boldsymbol{AB}$$

سوال 7.76: اگر درجہ $\boldsymbol{A}$ = درجہ $\boldsymbol{B}$ ہو تب ضروری نہیں ہے کہ درجہ $\boldsymbol{A}^2$ = درجہ $\boldsymbol{B}^2$ ہو گا۔

سوال 7.77: غیر چکور قالب A کے یا تو صف خطی طور غیر تابع ہوں گے اور یا اس کے قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

سوال 7.78: اگر چکور قالب کے صف خطی طور غیر تابع ہوں، تب اس کے قطار بھی خطی طور غیر تابع ہوں گے۔اسی طرح اگر اس قالب کے قطر خطی طور غیر تابع ہوں، تب اس کے صف بھی خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

سوال 7.79: مثال دے کر ثابت کریں درجہ AB کسی صورت درجہ A یا درجہ B سے زیادہ نہیں ہو گا۔

سوال 7.80 تا سوال 7.88 میں ثابت کریں کہ آیا دیے گئے سمتیات خطی طور تابع ہیں یا خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 7.80:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2 & 0 & -3 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 4 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 7.81:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع۔ سمتیات کو بطور قالب کے صف سمتیہ لکھتے ہوئے گاوسی اسقاط سے قالب کا درجہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کی تابعیت یا غیر تابعیت دریافت کی جا سکتی ہے۔

سوال 7.82:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 7.83:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 7.84:

$$\begin{bmatrix}0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 7.85:

$$\begin{bmatrix}0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 7.86:

$$\begin{bmatrix}0.2 & -0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.4 & 0.0 & 0.1 & -0.2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 7.87:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{9}{5} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{17}{6}\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 7.88:

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 7.89: خطی طور غیر تابع ذیلی سلسلہ
درج ذیل سمتیات کے دائیں ترین سمتیہ $[10 \; -1 \; 4 \; 10]$ سے شروع کرتے ہوئے باری باری ایک ایک سمتیہ کم کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع ذیلی سلسلہ دریافت کریں۔

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5 & -4 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}10 & -1 & 4 & 10\end{bmatrix}$$

جوابات: $[4 \; 1 \; 2 \; 6]$ اور $[1 \; 2 \; 1 \; 4]$

سوال 7.90 تا سوال 7.90: کیا دیے گئے سمتیات، سمتی فضا ہیں۔ سمتی فضا ہونے کی صورت میں اس کی بُعد اور اساس ($\boldsymbol{v}_1$ ، $\boldsymbol{v}_2$ ، $\dots$) دریافت کریں ۔

سوال 7.90:
R^3 کے تمام سمتیات جہاں $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 = 0$ ہے۔

جوابات: 2 ؛ $[-2 \; 0 \; 1]$ ، $[0 \; 2 \; 1]$

سوال 7.91: R^2 کے تمام سمتیات جہاں $\boldsymbol{v}_1 \geq \boldsymbol{v}_2$ ہے۔

جواب: سمتی فضا نہیں ہے۔

سوال 7.92: R^5 کے تمام مثبت ارکان۔

جواب: سمتی فضا نہیں ہے۔

سوال 7.93: R^3 کے تمام ارکان جہاں $3\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3 = 0$ اور $2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - 4\boldsymbol{v}_3 = 0$ ہے۔

جوابات: 1 ؛ حل $c[1 \; \frac{10}{3} \; 3]$ اور اساس $[1 \; \frac{10}{3} \; 3]$

سوال 7.94: R^4 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 = 2v_2 = 3v_3 = 4v_4$ ہے۔

جوابات: 1 ؛ $[4 \; 2 \; \frac{4}{3} \; 1]$

7.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی

خطی نظام کے حل کی وجودیت، یکتائی اور عمومی ساخت کی مکمل معلومات اس کی درجہ سے حاصل ہوتی ہے۔ اس پر غور کرتے ہیں۔

اگر n متغیرات پر مبنی مساوات کے خطی نظام کی عددی سر قالب اور افزودہ قالب کا درجہ یکساں n کے برابر ہو تب اس نظام کا حل یکتا ہو گا۔البتہ اگر ان کا یکساں درجہ n سے کم ہو تب نظام کے لا متناہی تعداد میں حل ممکن ہوں گے۔ اگر ان قالبوں کے درجہ آپس میں مختلف ہوں تب نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو گا۔

اس حقیقت کو ثابت کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم $\boldsymbol{A}$ کا **ذیلی قالب**[78] بروئے کار لائیں گے۔ $\boldsymbol{A}$ سے چند صف یا چند قطار (یا دونوں) خارج کرتے ہوئے اس کا ذیلی قالب حاصل ہوتا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ سے صفر صف اور صفر قطار خارج کرتے ہوئے بھی اس کا ذیلی قالب حاصل کیا جا سکتا ہے جو ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{A}$ ہی ہو گا۔

مسئلہ 7.8: خطی نظام کا بنیادی مسئلہ
(الف) **وجودیت**[79]۔ ایسا خطی نظام جو n متغیرات x_1، $\cdots$، x_n کے درج ذیل m مساوات پر مبنی ہو،

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{7.36}$$

صرف اور صرف اس صورت **بلا تضاد** ہو گا، یعنی اس کے حل ممکن ہوں گے، جب نظام کے عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ اس نظام کے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے درجے کے برابر ہو۔ عددی سر قالب اور افزودہ قالب درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}$$

---

[78] submatrix
[79] existence

(ب) **یکتائی**[80]۔ نظام 7.36 کا حل اس صورت یکتا ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ اور $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کا درجہ، n کے برابر ہو۔

(پ) **لا متناہی تعداد کے حل**۔ اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کا یکساں درجہ r، نا معلوم متغیرات کی تعداد n سے کم ہو تب نظام 7.36 کے لا متناہی تعداد میں حل ممکن ہوں گے۔ ایسے تمام حل، r موزوں متغیرات (جس کے ذیلی عددی سر قالب کا درجہ لازمی طور پر r ہو۔) کو بقایا $n-r$ اختیاری متغیرات کی صورت میں معلوم کرتے ہوئے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ اختیاری متغیرات کی قیمتیں چنتے ہوئے مختلف حل حاصل ہوں گے۔ (مثال 7.23 دیکھیں۔)

(ت) **گاوسی اسقاط** (حصہ 7.3)۔ گاوسی اسقاط سے تمام حل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ (جیسا حصہ 7.3 میں بتلایا گیا ہے، گاوسی اسقاط سے خود بخود حل کی موجودگی کا پتہ لگے گا۔)

ثبوت:

(الف) نظام 7.36 کو سمتی مساوات $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ یا $\boldsymbol{A}$ کی سمتیات قطار $\boldsymbol{c}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{c}_{(n)}$ کی مدد سے

$$\boldsymbol{c}_{(1)}x_1+\boldsymbol{c}_{(2)}x_2+\cdots+\boldsymbol{c}_{(n)}x_n=\boldsymbol{b} \tag{7.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ کے ساتھ $\boldsymbol{b}$ کی قطار شامل کرتے ہوئے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ حاصل ہوتا ہے۔ مسئلہ 7.4 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\text{درجہ}\, \boldsymbol{A}+1=\text{درجہ}\, \tilde{\boldsymbol{A}} \qquad \text{یا} \qquad \text{درجہ}\, \boldsymbol{A}=\text{درجہ}\, \tilde{\boldsymbol{A}}$$

اب اگر نظام 7.36 کا حل $\boldsymbol{x}$ ہو تب مساوات 7.37 کے تحت $\boldsymbol{b}$ کو قطار $\boldsymbol{c}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{c}_{(n)}$ کی صورت میں بطور خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے (یعنی $\boldsymbol{b}$ خطی طور غیر تابع نہیں ہو گا) لہٰذا $\tilde{\boldsymbol{A}}$ اور $\boldsymbol{A}$ میں خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد ایک جیسی ہو گی اور یوں ان قالبوں کا درجہ بھی ایک جیسا ہو گا۔

ساتھ ہی ساتھ اگر درجہ $\boldsymbol{A}$ = درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ہو تب $\boldsymbol{b}$ لازماً $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار کا خطی مجموعہ ہو گا یعنی

$$\boldsymbol{b}=\alpha_1\boldsymbol{c}_{(1)}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{c}_{(n)} \tag{7.38}$$

ورنہ

$$\text{درجہ}\, \boldsymbol{A}+1=\text{درجہ}\, \tilde{\boldsymbol{A}}$$

ہو گا۔ اب مساوات 7.38 کا مطلب ہے کہ نظام 7.36 کا حل موجود ہے یعنی $x_1=\alpha_1$، $\cdots$، $x_n=\alpha_n$ جو مساوات 7.37 اور مساوات 7.38 کو دیکھ کر لکھا جا سکتا ہے۔

[80] uniqueness

(ب) اگر درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب مسئلہ 7.4 کے تحت مساوات 7.37 کے n عدد سمتیات قطار، خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ مساوات 7.37 میں $\boldsymbol{b}$ کا دیا گیا تعلق یکتا ہے ورنہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا

$$\boldsymbol{c}_{(1)}x_1 + \boldsymbol{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}x_n = \boldsymbol{c}_{(1)}\tilde{x}_1 + \boldsymbol{c}_{(2)}\tilde{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}\tilde{x}_n$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$(x_1 - \tilde{x}_1)\boldsymbol{c}_{(1)} + (x_2 - \tilde{x}_2)\boldsymbol{c}_{(2)} + \cdots + (x_n - \tilde{x}_n)\boldsymbol{c}_{(n)} = \boldsymbol{0}$$

لکھا جا سکتا ہے اور خطی طور غیر تابعیت کی بنا اس سے مراد $x_1 - \tilde{x}_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n - \tilde{x}_n = 0$ ہے۔ لیکن اس کا مطلب ہے کہ مساوات 7.37 میں x_1 تا x_n غیر سمتی مقدار یکتا ہیں اور یوں نظام 7.36 کا حل یکتا ہو گا۔

(پ) اگر درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}} =$ درجہ $\boldsymbol{A} = r < n$ ہو تب مسئلہ 7.4 کے تحت $\boldsymbol{A}$ کے ایسے r عدد قطاروں پر مشتمل سلسلہ K پایا جاتا ہے جن کی خطی مجموعے کی صورت میں $\boldsymbol{A}$ کے بقایا $n-r$ قطاروں کو لکھا جا سکتا ہے۔ ہم قطاروں اور متغیرات کو نئی علامتوں سے ظاہر کرتے ہیں جہاں نئی علامتوں پر ^ کا نشان ہو گا۔ یوں سلسلہ K کی خطی طور غیر تابع قطاروں کو اب $\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}$ لکھا جائے گا۔ مساوات 7.37 اب درج ذیل لکھی جائے گی

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}\hat{x}_1 + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}x_r + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1} + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n = \boldsymbol{b}$$

جہاں $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}$ کو K کے قطاروں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے اور اسی طرح $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n$ کو بھی K کے قطاروں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے انہیں K کی قطاروں کے مجموعے لکھتے ہوئے اجزاء اکٹھے کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}\hat{y}_1 + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}y_r = \boldsymbol{b} \tag{7.39}$$

جہاں $y_j = x_j + \beta_j$ ہو گا اور β_j از خود $n-r$ اجزاء $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n$ سے حاصل ہوں گے۔ یہاں $j = 1, \cdots, r$ ہے۔ چونکہ اس نظام کا حل موجود ہے لہٰذا ایسے y_1 تا y_r موجود ہیں جو مساوات 7.39 پر پورا اترتے ہیں۔ چونکہ K خطی طور غیر تابع ہے لہٰذا غیر سمتی مقدار y_1 تا y_r یکتا ہیں۔ $\hat{x}_{r+1}$ تا $\hat{x}_n$ کی قیمتیں چننے سے β_j اور مطابقتی $\hat{x}_j = y_j - \beta_j$ کی قیمتیں قطعی طور تعین ہوتی ہیں، جہاں $j = 1, \cdots, r$ ہے۔

(ت) حصہ 7.3 میں اس پر بحث کی گئی ہے لہٰذا اس پر دوبارہ بات نہیں کی جائے گی۔

درج بالا مسئلے کا استعمال حصہ 7.3 میں کیا گیا ہے جہاں مثال 7.22 کے آخر میں $S_4'' - \frac{4}{7}S_3''$ کے عمل سے آخری صف، صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں درجہ قالب 3 حاصل ہوتا ہے جو نظام میں متغیرات کی تعداد کے برابر ہے ($\tilde{\boldsymbol{A}}$ درجہ $= \boldsymbol{A}$ درجہ $= n = 3$) للٰذا نظام کا یکتا حل پایا گیا۔

مثال 7.23 میں ($\tilde{\boldsymbol{A}}$ درجہ $= \boldsymbol{A}$ درجہ $= 2 < n = 4$) ہے للٰذا اس مثال کی نظام کے یوں لامتناہی تعداد میں حل ممکن ہیں۔ x_3 اور x_4 اختیاری متغیرات کی قیمتیں چنتے ہوئے x_1 اور x_2 حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 7.24 میں ($\boldsymbol{A}$ درجہ $= 2 < \tilde{\boldsymbol{A}}$ درجہ $= 3$) ہے للٰذا اس نظام کا کوئی بھی حل ممکن نہیں ہے۔

متجانس خطی نظام

جیسا حصہ 7.3 میں بتلایا گیا ہے، نظام 7.36 میں تمام b_j صفر ہونے کی صورت میں یہ **متجانس** کہلائے گا۔ اگر ایک یا ایک سے زیادہ b_j غیر صفر ہوں تب یہ **غیر متجانس** نظام کہلائے گا۔ مسئلہ 7.8 سے متجانس نظام کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 7.9: متجانس خطی نظام
متجانس نظام

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
\tag{7.40}
$$

کا ہر صورت ایک عدد **غیر اہم صفر حل** $x_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا۔ **غیر صفر اہم حل** صرف اور صرف اس صورت موجود ہوں گے جب درجہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو۔ اگر درجہ $\boldsymbol{A} = r < n$ ہو تب، یہ حل اور غیر اہم حل مل کر $n - r$ بُعد کی سمتی فضا (حصہ 7.4 دیکھیں۔) بناتے ہیں جو نظام 7.40 کی **حل فضا**[81] کہلاتا ہے۔

---

[81] solution space

خاص کر اگر $\boldsymbol{x}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{x}_{(2)}$ نظام 7.40 کے حل سمتیات ہوں تب $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_{(1)} + c_2\boldsymbol{x}_{(2)}$ ، جہاں c_1 اور c_2 کوئی بھی غیر سمتی مقدار ہیں، بھی نظام 7.40 کا حل سمتیہ ہو گا۔ (دھیان رہے کہ یہ غیر متجانس نظام کے لئے درست نہیں ہے۔مزید یہ کہ حل فضا کی اصطلاح صرف متجانس نظام کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔)

ثبوت : پہلا دعویٰ نظام کو دیکھ کر سمجھا جا سکتا ہے۔یہ اس حقیقت کے عین مطابق ہے کہ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ سے مراد درجہ $\boldsymbol{A} =$ درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ہے لٰہذا متجانس نظام ہر صورت **بلا تضاد** ہو گا۔اگر درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب مسئلہ 7.8-ب کے تحت **غیر اہم صفر حل** اس نظام کا یکتا حل ہو گا۔ اگر درجہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو تب مسئلہ 7.8-پ کے تحت **غیر صفر اہم حل** موجود ہوں گے۔یہ حل مل کر **حل فضا** بناتے ہیں چونکہ اگر $\boldsymbol{x}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{x}_{(2)}$ ان میں سے کوئی دو عدد حل ہوں تب $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ اور $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{0}$ ہو گا جس سے مراد

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{x}_{(2)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{0} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x}_{(1)}) = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{0}$$

ہے جہاں c اختیاری مستقل ہے۔اگر درجہ $\boldsymbol{A} = r < n$ ہو تب مسئلہ 7.8-پ کے تحت ہم کسی بھی ترتیب سے $n - r$ موزوں متغیرات، جنہیں ہم x_{r+1} ، $\cdots$ ، x_n کہتے ہیں، چن کر ان کی قیمتیں مقرر کرتے ہوئے ہر حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں نظام 7.40 کے حل فضا کی اساس، جس کو ہم مختصراً **اساس حل** کہیں گے، $\boldsymbol{y}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{y}_{(n-r)}$ ہوں گے جہاں $x_{r+j} = 1$ اور x_{r+1} تا x_n میں بقایا کو صفر چنتے ہوئے اساسی سمتیہ $\boldsymbol{y}_{(j)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں اس حل سمتیہ کے پہلے r مطابقتی ارکان حاصل ہوتے ہیں۔ یوں نظام 7.40 کے اساس حل کی بُعد $n - r$ ہو گی جس سے مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

چونکہ نظام 7.40 کی حل فضا میں ہر $\boldsymbol{x}$ کے لئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ہے لٰہذا نظام 7.40 کے حل فضا کو **معدوم فضا**[82] بھی کہتے ہیں اور اس کی بُعد کو $\boldsymbol{A}$ کی **معدومیت**[83] کہتے ہیں۔ یوں مسئلہ 7.9 درج ذیل کہتا ہے

$$\text{درجہ}\ \boldsymbol{A} + \text{معدومیت}\ \boldsymbol{A} = n \tag{7.41}$$

جہاں نا معلوم متغیرات کی تعداد ($\boldsymbol{A}$ میں قطاروں کی تعداد) n ہے۔

مزید تعریف درجہ کے تحت نظام 7.40 کا درجہ $\boldsymbol{A} \leq m$ ہو گا۔یوں $m < n$ کی صورت میں درجہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو گا۔اس طرح مسئلہ 7.9 سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

---

[82] null space
[83] nullity

مسئلہ 7.10: متغیرات کی تعداد سے کم مساوات کا متجانس نظام
ایسا متجانس نظام جس میں مساوات کی تعداد، متغیرات کی تعداد سے کم ہو کے ہر صورت غیر صفر اہم حل موجود ہوں گے۔

غیر متجانس خطی نظام

نظام 7.36 کے تمام حل درج ذیل ہوں گے۔

مسئلہ 7.11: غیر متجانس خطی نظام
اگر غیر متجانس نظام 7.36 **بلا تضاد** ہو تب اس کے تمام حل درج ذیل ہوں گے

$$x = x_0 + x_h \tag{7.42}$$

جہاں x_0 نظام 7.36 کا کوئی بھی (معین) حل ہے جبکہ x_h ، مطابقتی متجانس نظام 7.40 کا، باری باری ہر حل ہو گا۔

ثبوت: چونکہ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا نظام 7.36 کے کسی بھی دو عدد حل کا فرق $\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ مطابقتی نظام 7.40 کا بھی حل ہو گا۔ چونکہ $\boldsymbol{x}$ نظام 7.36 کا کوئی بھی حل ہو سکتا ہے لہٰذا ہم مساوات 7.5 میں نظام 7.36 کا کوئی بھی حل $\boldsymbol{x}_0$ اور نظام 7.40 کے تمام حل باری باری لیتے ہوئے نظام 7.36 کے تمام حل حاصل کر سکتے ہیں۔

7.6 دو درجی اور تین درجی مقطع قالب

دو درجی **مقطع قالب**[84] درج ذیل ہے۔

$$D = \text{مقطع}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{7.43}$$

دھیان رہے کہ قالب چکور قوسین میں لکھا جاتا ہے جبکہ مقطع کو سیدھی عمودی لکیروں میں لپیٹ کر لکھا جاتا ہے۔ مقطع $\boldsymbol{A}$ کو $|\boldsymbol{A}|$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

[84] determinant

قاعدہ کریمر برائے دو مساوات کا خطی نظام

دو عدد متجانس مساوات

$$
\begin{aligned}
&(\text{الف}) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
&(\text{ب}) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2
\end{aligned}
\tag{7.44}
$$

کا حل

$$D \neq 0$$

کی صورت میں بذریعہ **قاعدہ کریمر**[85] درج ذیل ہے

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}, \\
x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D}
\end{aligned}
\tag{7.45}
$$

جہاں مساوات 7.43 مقطع D دیتی ہے۔غیر صفر اہم حل والے متجانس نظام کی صورت میں $D = 0$ پایا جاتا ہے۔

ثبوت : ہم مساوات 7.45 کو ثابت کرتے ہیں۔ x_2 حذف کرنے کی خاطر مساوات 7.44-الف کو a_{22} اور مساوات 7.44-ب کو $-a_{12}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

اسی طرح x_1 حذف کرنے کی خاطر مساوات 7.44-الف کو $-a_{21}$ اور مساوات 7.44-ب کو a_{11} سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

اب $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D \neq 0$ کی صورت میں درج بالا دونوں مساوات کو $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ سے تقسیم کرتے ہوئے، دائیں اطراف کو قالبوں کی صورت میں لکھ کر، مساوات 7.45 حاصل ہوتے ہیں۔

[85] Cramer's rule

مثال 7.29: درج ذیل کو قاعدہ کریمر کی مدد سے حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 5 \end{aligned}$$

حل: قاعدہ کریمر سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-5}{-2-1} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{10-1}{-2-1} = -3$$

تین درجی مقطع

تین درجی **مقطع** قالب کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{7.46}$$

درج بالا میں دائیں ہاتھ علامتوں کی ترتیب $+ - +$ ہے۔دائیں ہاتھ مقطع کے عددی سر بالترتیب بائیں ہاتھ مقطع کی پہلی قطار کے ارکان (ضرب $+ - +$) ہیں۔ بائیں ہاتھ مقطع سے پہلی صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے دائیں ہاتھ کا پہلا مقطع ملتا ہے۔اسی طرح دوسری صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے دوسرا مقطع ملتا ہے اور تیسری صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے تیسرا مقطع ملتا ہے۔دائیں ہاتھ کے تین مقطع بالترتیب D میں a_{11} ، a_{21} اور a_{31} کے **اصغر**[86] کہلاتے ہیں۔اصغر کو M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مساوات 7.46 میں دائیں ہاتھ اصغر کو پھیلا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} \tag{7.47}$$

[86] minor

قاعدہ کریمر برائے تین مساوات کا خطی نظام

تین مساوات کے خطی نظام

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
\tag{7.48}
$$

کا حل بذریعہ قاعدہ کریمر درج ذیل ہے

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \qquad (D \neq 0)
\tag{7.49}
$$

جہاں مساوات 7.46 اور مساوات 7.47 نظام کا مقطع D دیتے ہیں جبکہ

$$
D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}
$$

ہیں۔دھیان رہے کہ D کی پہلی، دوسری اور تیسری قطار کی جگہ مساوات 7.48 کا دایاں ہاتھ پر کرنے سے بالترتیب D_1 ، D_2 اور D_3 ملتے ہیں۔

درج بالا قاعدہ کریمر کو بھی اسقاط کی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مسئلہ 7.15 سے بھی اس کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔

7.7 مقطع۔ قاعدہ کریمر

ابتدائی طور پر مقطع قالب، خطی نظام کے حل کے لئے استعمال کیا جاتا رہا۔ اب یہ انجینئری کے دیگر مسائل، مثلاً آئگنی مسائل، تفرقی مساوات اور سمتی الجبرا، میں بھی اہم کردار ادا کرتا ہے۔اس کو کئی طریقوں سے متعارف کرایا جا سکتا ہے۔ہم اس کو خطی نظام کے نقطہ نظر سے متعارف کرتے ہیں۔

درجہ n مقطع قالب سے مراد ایسی غیر سمتی مقدار ہے جو $n \times n$ (چکور) قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ سے منسوب ہے اور جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$D = \boldsymbol{A}\,\text{مقطع} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7.50}$$

$n = 1$ کے لئے مقطع قالب کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$D = a_{11} \tag{7.51}$$

$n \geq 2$ کے لئے مقطع کی تعریف

$$\begin{aligned} &(\text{الف}) \quad D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \qquad (j = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n) \\ &\qquad\text{یا} \\ &(\text{ب}) \quad D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \qquad (k = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n) \end{aligned} \tag{7.52}$$

ہے جہاں

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk} \tag{7.53}$$

ہے اور M_{jk} از خود درجہ $n-1$ مقطع قالب ہے، جو $\boldsymbol{A}$ سے a_{jk} رکن کا صف اور قطار، یعنی j صف اور k قطار، حذف کرتے ہوئے حاصل ذیلی قالب کا مقطع ہے۔

یوں D کی تعریف n عدد، درجہ $n-1$ مقطع کے ذریعہ کی جاتی ہے، جہاں ہر درجہ $n-1$ مقطع کی تعریف از خود $n-1$ عدد درجہ $n-2$ مقطع کے ذریعہ کی جاتی ہے، اور یہی سلسلہ چلتا رہتا ہے حتیٰ کہ آخر کار درجہ 1 ذیلی قالب آن پہنچے جس کا مقطع، قالب کا واحد رکن ہو گا۔

مقطع کی تعریف کے تحت ہم D کو کسی بھی صف یا قطار سے پھیلا سکتے ہیں۔یوں D کو پہلی قطار سے پھیلانے کی خاطر مساوات 7.52-الف میں $j = 1$ لیا جائے گا۔اسی طرح تیسری قطار سے D کو پھیلانے کی خاطر مساوات 7.52-ب میں $k = 3$ لیا جائے گا۔ہر C_{jk} کو بھی بالکل اسی طرح کسی صف یا قطار سے پھیلایا جا سکتا ہے۔

مقطع کی یہ تعریف غیر مبہم ہے (ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ ا میں پیش کیا گیا ہے)۔ کسی بھی صف یا قطار سے D کو پھیلا کر ایک جیسا جواب حاصل ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ بڑے جسامت کے مقطع کو صف یا قطار سے پھیلا کر حاصل کرنا عملًا نا قابل استعمال ہے۔یہ سمجھنے کی خاطر سوال 7.101 دیکھیں۔

مقطع کی بات کرتے ہوئے، قالب کی اصطلاحات ہی استعمال کی جاتی ہیں۔یوں ہم کہیں گے کہ D میں n^2 **ارکان** a_{jk} پائے جاتے ہیں، اس کے j **صف** اور k **قطار** ہیں اور اس کی **مرکزی وتر** پر a_{11} ، $\cdots$ ، a_{nn} ارکان ہیں۔دو نئے اصطلاحات درج ذیل ہیں۔

M_{jk} کو D میں a_{jk} کا **اصغر**[87] کہتے ہیں اور C_{jk} کو D میں a_{jk} کا **ہم ضربی**[88] کہتے ہیں۔

مساوات 7.52 کو اصغر کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (j = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n)\\
&\text{(ب)} \quad D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (k = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n)
\end{aligned} \tag{7.54}$$

مثال 7.30: تین درجی مقطع کے اصغر اور ہم ضربی
مساوات 7.46 میں مقطع کو پہلی قطار سے پھیلایا گیا ہے۔ہم یہاں دوسری صف کے ارکان کے اصغر اور ہم ضربی لکھتے ہیں۔ اصغر درج ذیل ہیں

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

جبکہ ہم ضربی $C_{21} = -M_{21}$ ، $C_{22} = M_{22}$ اور $C_{23} = -M_{23}$ ہیں۔بقایا تمام ارکان کے اصغر اور ہم ضربی حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ درج ذیل خانہ دار نقش پیدا ہوتا ہے۔

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

---

[87] minor
[88] cofactor

مثال 7.31: تین درجی مقطع
ایک ہی تین درجی مقطع کو پہلی صف اور دوسری صف سے حاصل کرتے ہیں۔

$$D=\begin{vmatrix}2&0&-3\\1&2&5\\3&4&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&5\\4&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}1&5\\3&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$$
$$=2(2-20)-0(1-15)-3(4-6)=-30$$

$$D=\begin{vmatrix}2&0&-3\\1&2&5\\3&4&1\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&-3\\4&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&-3\\3&1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&0\\3&4\end{vmatrix}$$
$$=-1(0+12)+2(2+9)-5(8-0)=-30$$

مثال 7.32: تکونی قالب کا مقطع

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\0&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33} \tag{7.55}$$

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ تکونی قالب کا مقطع، مرکزی وتر کے تمام اجزاء کا حاصل ضرب ہے۔

مقطع کی عمومی خصوصیات

مقطع کی تعریف (مساوات 7.52) استعمال کرتے ہوئے مقطع حاصل کرنا نہایت لمبا کام ہے۔اعمال صف سے نہایت عمدگی کے ساتھ مقطع حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اعمال صف سے بالائی تکونی مقطع کی صورت حاصل کی جاتی ہے، جس کے مرکزی وتر کے اندراجات کا حاصل ضرب درکار مقطع ہو گا۔یہ ترکیب قالب پر لاگو اعمال صف کی طرح ضرور ہے لیکن بالکل اس کی طرح ہرگز نہیں ہے۔بالخصوص، مقطع کے دو صف کی جگہ آپس میں تبدیل کرنے سے مقطع کی قیمت منفی اکائی (-1) سے ضرب ہو گی۔ تفصیل درج ذیل ہے۔

مسئلہ 7.12: بنیادی اعمال صف اور مقطع کی خصوصیات

- (الف) دو صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔
- (ب) ایک صف کے مضرب کو دوسرے صف کے ساتھ جمع کرنے سے مقطع کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔
- (پ) کسی صف کو غیر صفر مستقل c سے ضرب دینے سے مقطع کی قیمت c سے ضرب ہو گی۔(یہ $c=0$ کے لئے بھی درست ہے لیکن ایسا کرنا بنیادی عمل صف نہ ہو گا۔)

ثبوت:
(الف) ہم اس حقیقت کو **الکراجی ماخوذ** سے ثابت کرتے ہیں۔دو درجی $(n=2)$ مقطع کے لئے (الف) درست ہے یعنی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

ہم اب الکراجی ماخوذ کا قیاس کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ درجہ $n-1 \geq 2$ مقطع کے لئے بھی (الف) درست ہے اور اس کو درجہ n مقطع کے لئے ثابت کرتے ہیں۔فرض کریں کہ D درجہ n مقطع ہے اور اس کے دو صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے E مقطع حاصل ہوتا ہے۔ D اور E کو کسی ایسی صف سے پھیلائیں جس کی جگہ تبدیل نہ کی گئی ہو۔اس کو ہم j صف کہتے ہیں۔ مساوات 7.54-الف سے درج ذیل لکھا جائے گا

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk}, \quad E = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} N_{jk} \tag{7.56}$$

جہاں E میں a_{jk} کے اصغر کو N_{jk} لکھا گیا ہے۔اب چونکہ M_{jk} اور N_{jk} درجہ $n-1$ کے اصغر ہیں لہٰذا ہمارے قیاس کے تحت درجہ $n-1$ کے مقطع کے لئے (الف) درست ہے لہٰذا $N_{jk}=-M_{jk}$ ہو گا اور یوں مساوات 7.56 کے تحت $E=-D$ ہو گا۔

(ب) صف i کو c سے ضرب کرتے ہوئے صف j کے ساتھ جمع کرنے سے نیا مقطع حاصل کرتے ہیں جس کو ہم $\tilde{D}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\tilde{D}$ کے صف j کے اندراجات $a_{jk}+ca_{ik}$ ہوں گے۔ $\tilde{D}$ کو j صف سے پھیلا کر $\tilde{D}=D_1+cD_2$ ملتا ہے جہاں $D_1=D$ کے صف j میں a_{jk} اندراجات ہیں جبکہ D_2 کے صف j میں D کے صف i والے اندراجات a_{ik} ہیں جبکہ اس کے صف i میں بھی یہی a_{ik} اندراجات ہیں۔یوں D_2 کے i اور j صفوں میں ایک جیسے اندراجات ہیں۔ D_2 کے i اور j صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے دوبارہ D_2 ہی ملتا ہے جبکہ (الف) کے تحت ایسا کرنے سے مقطع -1 سے ضرب ہو گا۔ یوں $D_2=-D_2$ ہو گا جس سے $D_2=0$ ملتا ہے۔اس طرح $\tilde{D}=D_1=D$ ہو گا۔

(پ) مقطع اس صف سے پھیلا کر حاصل کریں جس کو c سے ضرب دیا گیا ہے۔

خبردار! $n\times n$ قالب کو c سے ضرب دینے سے مقطع c^n سے ضرب ہو گا۔

مثال 7.33: تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے مقطع کا حصول
تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 ، S_3 اور

S_4 گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری، تیسری اور چوتھی صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 2S_1 \\ \\ S_4 - S_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{10}S_2 \\ S_4 - \frac{1}{5}S_2 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{57}{16} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ S_4 + \frac{1}{8}S_3 \end{matrix}
\end{aligned}
$$

اب مثال 7.32 کی طرح، مرکزی وتر کے اندراجات کا حاصل ضرب، مقطع ہو گا۔

$$D = (2)(-10)\left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{57}{16}\right) = -114$$

مسئلہ 7.13: n درجی مقطع کے دیگر خصوصیات

- (الف، ب ،پ) مسئلہ 7.12 کے شق-الف، ب اور پ قطاروں کے لئے بھی درست ہے۔
- (ت) تبدیلی محل سے مقطع تبدیل نہیں ہو گا۔
- (ٹ) صفر صف یا قطار کی صورت میں مقطع صفر ہو گا۔

- (ث) راست تناسب صف یا قطار کی صورت میں مقطع صفر کے برابر ہو گا۔ بالخصوص دو ایک جیسے صف یا قطار کی صورت میں مقطع کی قیمت صفر ہو گی۔

ثبوت: (الف تا ٹ) یہ تمام شق اس حقیقت سے اخذ کیے جا سکتے ہیں کہ مقطع کو کسی بھی صف یا کسی بھی قطار سے پھیلا کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مقطع کی تبدیلی محل بالکل قالب کی تبدیلی محل کی طرح ہو گی۔ یوں مقطع کا j صف تبدیل محل کا j قطار ہو گا۔

(ث) اگر صف i ضرب c برابر ہو صف j کے تب $D = cD_1$ ہو گا جہاں D_1 کے صف i اور j ایک جیسے ہوں گے۔ یوں D_1 کے صف i اور j کا آپس میں تبادلہ کرنے سے دوبارہ D_1 حاصل ہوتا ہے جبکہ مسئلہ 7.12-الف کے تحت اس کی قیمت $-D_1$ ہو گی۔ یوں $D_1 = 0$ یا $D = cD_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرز کا ثبوت راست تناسب قطاروں کے لئے بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

یہ قابل توجہ ہے کہ درجہ قالب، جو قالب میں زیادہ سے زیادہ خطی طور غیر تابع صفوں یا قطاروں کی تعداد ہے (حصہ 7.4 دیکھیں)، اور مقطع کے مابین تعلق پایا جاتا ہے۔ چونکہ صرف صفر قالب کا درجہ صفر کے برابر ہوتا ہے (حصہ 7.4 دیکھیں) لہٰذا ہم یہاں فرض کر سکتے ہیں کہ درجہ $\boldsymbol{A} > 0$ ہے۔

مسئلہ 7.14: درجہ قالب بذریعہ مقطع
$m \times n$ جسامت کے قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کا صرف اور صرف اس صورت (غیر صفر) درجہ، r کے برابر ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا ایسا ذیلی $r \times r$ قالب پایا جاتا ہو جس کا مقطع غیر صفر ہو، جبکہ ایسے ہر ذیلی قالب جس میں $r + 1$ یا اس سے زیادہ صف ہوں کا مقطع صفر ہو۔

بالخصوص $n \times n$ چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ صرف اور صرف اس صورت n ہو گا جب مقطع $\boldsymbol{A} \neq 0$ ہو۔

ثبوت: بنیادی اعمال صف (حصہ 7.3) درجہ قالب پر اثر انداز نہیں ہوتے (مسئلہ 7.2) اور نا ہی مقطع قالب کے غیر صفر ہونے پر اثر انداز ہوتے ہیں (مسئلہ 7.13)۔ $\boldsymbol{A}$ کی زینہ دار صورت (حصہ 7.3) کو $\tilde{\boldsymbol{A}}$ سے ظاہر کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے (پہلے) r صف، صرف اور صرف اس صورت غیر صفر ہوں گے جب درجہ $\boldsymbol{A} = r$ ہو۔ فرض کریں کہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے بالائی بائیں کونے کا $r \times r$ ذیلی قالب $\tilde{R}$ ہے (یوں $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے پہلے r صف اور پہلے r قطار پر $\tilde{R}$ مشتمل ہو گا)۔ چونکہ $\tilde{R}$ تکونی ہے اور اس کے مرکزی وتر پر تمام اندراجات غیر صفر ہیں لہٰذا

مقطع $\tilde{R} \neq 0$ ہو گا۔چونکہ $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کردہ، مطابقتی $r \times r$ ذیلی قالب R سے بنیادی اعمال صف کے ذریعہ $\tilde{R}$ حاصل کیا گیا ہے لہٰذا مقطع $R \neq 0$ ہو گا۔اسی طرح چونکہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے بالائی بائیں $r+1$ (یا اس سے زیادہ ممکنہ) صف اور قالب کے چکور ذیلی قالب $\tilde{S}$ میں کم از کم ایک عدد صفر صف ہو گا (ورنہ درجہ $\boldsymbol{A} \leq r+1$ ہوتا) لہٰذا مقطع $\tilde{S} = 0$ ہو گا (مسئلہ 7.13) اور چونکہ $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کردہ مطابقتی S ذیلی قالب سے بذریعہ بنیادی اعمال صف، $\tilde{S}$ کو حاصل کیا گیا ہے لہٰذا مقطع $S = 0$ ہو گا۔ یوں مسئلے میں $m \times n$ قالب کی شق کا ثابت مکمل ہوا۔

اگر $\boldsymbol{A}$ چکور $n \times n$ قالب ہو تب درج بالا ثبوت کے تحت درجہ $\boldsymbol{A} = n$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا ایسا $n \times n$ ذیلی قالب پایا جاتا ہو جس کا درجہ غیر صفر ہو یعنی جب مقطع $\boldsymbol{A} \neq 0$ ہو (چونکہ $\boldsymbol{A}$ کا $n \times n$ ذیلی قالب $\boldsymbol{A}$ ہی ہو گا)۔

قاعدہ کریمر

اس مسئلے کو استعمال کرتے ہوئے ہم **قاعدہ کریمر**[89] حاصل کرتے ہیں جو خطی نظام کے حل کو مقطع کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ اگرچہ عملاً قاعدہ کریمر[90] زیادہ مقبول نہیں ہے، اس کی اہمیت تفرقی مساوات کی نظام اور انجینئری کے دیگر مسائل میں پائی جاتی ہے۔

مسئلہ 7.15: مسئلہ کریمر (خطی نظام کا حل بذریعہ مقطع)
(الف) اگر n عدد مساوات اور n متغیرات x_1 ، $\cdots$ ، x_n کے نظام

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{7.57}$$

[89] Cramer's rule
[90] سوئزرلینڈ کا ریاضی دان، جبرائیل کریمر [1704-1752]

کے عددی سر قالب کا غیر صفر مقطع $D = \boldsymbol{A}$ ہو تب اس نظام کا واحد ایک حل ہو گا۔ یہ حل درج ذیل مساوات دیتے ہیں

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D} \qquad \text{قاعدہ کریمر} \tag{7.58}$$

جہاں D_k وہ مقطع ہے جو D میں قطار k کی جگہ b_1 ، $\cdots$ ، b_n پر کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔

(ب) یوں اگر نظام 7.57 متجانس ہو اور $D \neq 0$ ہو تب اس نظام کا صرف غیر اہم صفر حل $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا۔ البتہ $D = 0$ کی صورت میں نظام کے غیر صفر اہم حل بھی پائے جائیں گے۔

ثبوت: افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کی جسامت $n \times (n+1)$ ہے لہٰذا اس کا درجہ زیادہ سے زیادہ n ممکن ہے۔ اب اگر

$$D = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.59}$$

ہو تب مسئلہ 7.14 کے تحت درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو گا۔ یوں درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}} =$ درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو گا۔ اس طرح مسئلہ 7.8 کے تحت نظام 7.57 کا حل یکتا ہو گا۔

آئیں اب مساوات 7.58 کو ثابت کریں۔ D کو قطار k سے پھیلاتے ہیں

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \tag{7.60}$$

جہاں D میں a_{ik} کا ہم ضربی C_{ik} ہے۔ اگر D میں قطار k کی جگہ کوئی اور اعداد بھر دیے جائیں تو ہمیں نیا مقطع ملے گا جس کو ہم $\hat{D}$ کہہ سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ $\hat{D}$ کو اس k قطار سے پھیلانے سے مساوات 7.60 کی طرز کی مساوات ملے گی جس میں a_{1k} ، $\cdots$ ، a_{nk} کی جگہ یہی نئے اعداد ہوں گے جبکہ C_{ik} پہلے والے ہی ہوں گے۔ بالخصوص اگر ہم D کے قطار l (جہاں $l \neq k$ ہے) کے اندراجات a_{1l} ، $\cdots$ ، a_{nl} کو ہی بطور نئے اعداد منتخب کریں تب نئے مقطع $\hat{D}$ میں قطار $[a_{1l} \quad \cdots \quad a_{nl}]^T$ دو مرتبہ پایا جائے گا، پہلی بار بطور قطار l اور دوسری مرتبہ بطور قطار k جس کی جگہ یہ اعداد پر کیے گئے۔ یوں مسئلہ 7.13-ث کے تحت

$\hat{D} = 0$ ہو گا۔ یوں $\hat{D}$ کو قطار k (جس میں a_{1l} ، $\cdots$ ، a_{nl} پر کیے گئے ہیں) سے پھیلا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \cdots + a_{nl}C_{nk} = 0 \qquad (l \neq k) \tag{7.61}$$

اب ہم نظام 7.57 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف کو C_{1k} ، دوسری مساوات کے دونوں اطراف کو C_{2k} ، اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری مساوات کے دونوں اطراف کو C_{nk} سے ضرب دیتے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} C_{1k}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + C_{nk}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n) \\ = b_1C_{1k} + \cdots + b_nC_{nk} \end{aligned} \tag{7.62}$$

ایک جیسے x_j کے عددی سر اکٹھے کرتے ہوئے اس کے بائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$x_1(a_{11}C_{1k} + a_{21}C_{2k} + \cdots + a_{n1}C_{nk}) + \cdots + x_n(a_{1n}C_{1k} + a_{2n}C_{2k} + \cdots + a_{nn}C_{nk})$$

مساوات 7.60 کے تحت درج بالا میں a_k کا جزو ضربی D کے برابر ہے جبکہ x_l (جہاں $l \neq k$ ہے) کا جزو ضربی صفر کے برابر ہے لہٰذا مساوات 7.62 کا بایاں ہاتھ x_kD کے برابر ہے اور یوں اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x_lD = b_1C_{1k} + \cdots + b_nC_{nk}$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ، قطار k سے پھیلایا گیا D_k ہے (D_k کی تعریف اس مسئلے میں دی گئی ہے)۔یوں درج بالا کے دونوں اطراف کو D سے تقسیم کرتے ہوئے قاعدہ کریمر حاصل ہوتا ہے۔

اگر نظام 7.57 متجانس ہو اور $D \neq 0$ ہو تب ہر D_k میں (b_1 ، $\cdots$ ، b_n پر مبنی) قطار صفر کے برابر ہو گا لہٰذا (مسئلہ 7.13-ٹ کے تحت) تمام D_k صفر ہوں گے اور مساوات 7.58 غیر اہم صفر حل دے گا۔

آخر میں اگر نظام 7.57 متجانس ہو اور $D = 0$ ہو تب مسئلہ 7.14 کے تحت درجہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو گا لہٰذا مسئلہ 7.9 کے تحت اس کا غیر صفر اہم حل پایا جائے گا۔

مثال 7.34: قاعدہ کریمر (مسئلہ 7.15) درج ذیل خطی نظام کو قاعدہ کریمر سے حل کریں۔

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

حل:

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-4} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-4} = -1
$$

$$
x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-4} = 1
$$

سوالات

سوال 7.95 تا سوال 7.102 عمومی نوعیت کے ہیں۔

سوال 7.95: مسئلہ 7.12

$\boldsymbol{A}$ کے دو قطاروں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنے سے قالب $\boldsymbol{B}$ حاصل کیا گیا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{B}$ میں دو قالب کا آپس میں تبادلہ کرتے ہوئے $\boldsymbol{C}$ حاصل کیا گیا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ میں دو مرتبہ تبادلہ سے بھی $\boldsymbol{C}$ حاصل ہو گا۔مسئلہ 7.12 استعمال کیے بغیر ان کا مقطع حاصل کریں۔

$$
\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}
$$

جوابات: $|\boldsymbol{A}| = 6$ ، $\boldsymbol{B} = -6$ ، $\boldsymbol{C} = (-1)(-1)6 = 6$

سوال 7.96: مسئلہ 7.12
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔ پہلی صف کے ساتھ دوسری صف جمع کرتے ہوئے نیا قالب حاصل کریں۔ مسئلہ 7.12 استعمال کیے بغیر, اس نئے قالب کا مقطع حاصل کریں۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

جوابات: -7 ، -7

سوال 7.97: مسئلہ 7.12
$\boldsymbol{A}$ کی پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{B}$ حاصل ہوتا ہے جس کے تیسری قطار کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{C}$ حاصل ہوتا ہے۔ان کے مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

جوابات: -23 ، -46 ، -138

سوال 7.98: مسئلہ 7.13
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

جوابات: -50 ، -50

سوال 7.99: مسئلہ 7.13
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

جوابات: 0 ، 0 ، 0

سوال 7.100: درج ذیل قالب کا مقطع، باری باری، پہلی صف، دوسری صف، پہلی قطار اور دوسری قطار سے پھیلا کر حاصل کریں۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب: -10

سوال 7.101: پھیلا کر مقطع حاصل کرنا عملاً نا قابل استعمال ہے
ثابت کریں کہ درجہ n مقطع کے لئے $n!$ ضرب درکار ہوں گے۔یوں اگر ایک ضرب حاصل کرنے کے لئے 10^{-9} سیکنڈ درکار ہوں تب درج ذیل وقت درکار ہوں گے۔

n	10	15	20	25
وقت	0.004 سیکنڈ	22 منٹ	77 سال	0.5×10^9 سال

سوال 7.102: قالب ضرب غیر سمتی مقدار
ثابت کریں کہ درجہ $(k\boldsymbol{A}) = $ درجہ $k^n \times \boldsymbol{A}$ ہو گا (نہ کہ درجہ $k \times \boldsymbol{A}$)۔یہاں k غیر سمتی مقدار ہے۔

سوال 7.103 تا سوال 7.110 میں مقطع دریافت کریں۔

سوال 7.103:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$$

جواب: $\cos(\alpha+\beta)$

سوال 7.104:

$$\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$$

جواب: 1

سوال 7.105:

$$\begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix}$$

جواب: 1

سوال 7.106:

$$A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

جوابات: -1 ، 2 ، -3

سوال 7.107:

$$A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

جوابات: 1 ، 1 ، 1

سوال 7.108:

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$$

جواب: $a^3+b^3+c^3-3abc$

سوال 7.109:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

جواب: -1

سوال 7.110:

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 4 & -5\\ 5 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

جواب: 15

سوال 7.111 تا سوال 7.114 متجانس مساوات کی غیر صفر اہم حل کے سوالات ہیں۔

سوال 7.111: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔ سیدھا خط
متجانس نظام کا $D = 0$ کی صورت میں غیر صفر اہم حل پایا جائے گا۔ سیدھے خط کی عمومی مساوات $ax + by = c$ ہے۔ آئیں نقطہ $(1, -2)$ اور $(4, 3)$ سے گزرتے خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس مسئلے کو بطور درج ذیل نظام لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} xa + yb - c \cdot 1 &= 0 \\ a - 2b - c \cdot 1 &= 0 \\ 4a + 3b - c \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

a ، b اور c کا عددی سر مقطع صفر کے برابر ٹھہرا کر اس سیدھے خط کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $5x - 3y = 11$

سوال 7.112: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔ سیدھی سطح
سیدھی سطح کی عمومی مساوات $ax + by + cz = p$ ہے۔ نقطہ $(1, 1, 1)$ ، $(3, 0, 2)$ اور $(0, 5, 4)$ سے گزرتی سطح کا نظام لکھیں۔ a ، b ، c اور p کا عددی سر مقطع D لکھیں۔ یوں $D = 0$ سے سطح کی مساوات دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{aligned} xa + yb + zc - p &= 0 \\ a + b + c - p &= 0 \\ 3a \qquad + 2c - p &= 0' \\ 5b + 4c - p &= 0 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} x & y & z & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \qquad x + y - z = -1$$

سوال 7.113: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔ دائرہ
ثابت کریں کہ xy سطح پر دائرے کی عمومی مساوات $x^2 + y^2 + ax + by = c$ ہے۔ نقطہ $(1, 2)$ ،

$(3,2)$ اور $(5,-1)$ سے گزرتے ہوئے دائرے کا نظام لکھیں۔ اس نظام کے عددی سر مقطع سے دائری کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: دائرے کی عمومی مساوات $(y-y_0)^2+(x-x_0)^2=r^2$ کو پھیلا کر $x^2+y^2+2x+by=c$ ملتا ہے۔ نظام، عددی سر قالب اور دائرے کی مساوات درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+xa+yb-c&=0\\
5+a+2b-c&=0\\
13+3a+2b-c&=0\\
26+5a-b-c&=0
\end{aligned}
$$

$$
D=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & -1\\ 5 & 1 & 2 & -1\\ 13 & 3 & 2 & -1\\ 26 & 5 & -1 & -1\end{vmatrix},\quad 6x^2+6y^2-24x+10y=26
$$

سوال 7.114: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔کروی سطح
کروی سطح کی عمومی مساوات $(z-z_0)^2+(y-y_0)^2+(x-x_0)^2=r^2$ ہے۔ نقطہ $(0,0,-2)$ ، $(0,0,7)$ ، $(2,0,5)$ اور $(0,2,5)$ سے گزرتی کروی سطح کی مساوات دریافت کریں۔

جواب: $x^2+y^2+z^2-10z=-21$

سوال 7.115 تا سوال 7.119 کو قاعدہ کریمر سے حل کریں۔

سوال 7.115:

$$
\begin{aligned}
3x_1-2x_2&=8\\
2x_1+x_2&=3
\end{aligned}
$$

جوابات: $x_1=2$ ، $x_2=-1$

سوال 7.116:

$$
\begin{aligned}
0.8x_1-1.2x_2&=1.76\\
0.6x_1+0.2x_2&=0.88
\end{aligned}
$$

جوابات: $x_1 = 1.6$ ، $x_2 = -0.4$

سوال 7.117:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= -4 \\
x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -7
\end{aligned}
$$

جوابات: $x_1 = -2$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = -1$

سوال 7.118:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\
2x_2 + x_3 &= -7 \\
x_1 \qquad + 3x_3 &= -8
\end{aligned}
$$

جوابات: $x_1 = 1$ ، $x_2 = -2$ ، $x_3 = -3$

سوال 7.119:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad &= 5 \\
x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\
x_1 \qquad + 3x_3 \qquad &= -6 \\
x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

جوابات: $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = -2$ ، $x_4 = 2$

7.8 معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط

اس حصے میں صرف چکور قالبوں پر غور کیا جائے گا۔

$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کے **معکوس**[91] جس کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے سے مراد ایسا $n \times n$ قالب ہے جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو

$$
\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{7.63}
$$

[91] inverse

جہاں $\boldsymbol{I}$ اکائی $n \times n$ قالب ہے (حصہ 7.2 دیکھیں)۔

ایسا $\boldsymbol{A}$ جس کا معکوس پایا جاتا ہو **غیر نادر قالب**[92] کہلاتا ہے جبکہ ایسا $\boldsymbol{A}$ جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو **نادر قالب**[93] کہلاتا ہے۔

اگر $\boldsymbol{A}$ کا معکوس اگر پایا جاتا ہو، یہ معکوس یکتا ہو گا۔

یقیناً اگر $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ دونوں $\boldsymbol{A}$ کے معکوس ہوں تب $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ اور $\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}$ ہوں گے جن سے یکتائی کا درج ذیل ثبوت ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = (\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{CI} = \boldsymbol{C}$$

اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{A}$ کا معکوس< صرف اور صرف< اس صورت میں پایا جائے گا جب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ n ہو، جو زیادہ سے زیادہ ممکنہ درجہ ہے۔ اسی ثبوت سے ظاہر ہو گا کہ اگر $\boldsymbol{A}^{-1}$ موجود ہو تب $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ سے مراد $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ ہے۔ یہ ہمیں معکوس کی افادیت اور اس کا خطی نظام سے تعلق دکھلائے گا۔ (البتہ جیسا سوال 7.101 سے صاف ظاہر ہوتا ہے، اس سے ہمیں خطی نظام حل کرنے کا بہتر طریقہ میسر نہیں ہو گا۔)

مسئلہ 7.16: معکوس کی موجودگی
$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ صرف اور صرف اس صورت میں موجود ہو گا جب درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو، یعنی (مسئلہ 7.14 کے تحت) صرف اور صرف اس صورت جب مقطع $\boldsymbol{A} \neq 0$ ہو۔ یوں درجہ $\boldsymbol{A} = n$ کی صورت میں $\boldsymbol{A}$ غیر نادر ہو گا جبکہ درجہ $\boldsymbol{A} < n$ کی صورت میں $\boldsymbol{A}$ نادر ہو گا۔

ثبوت: $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ اور درج ذیل نظام

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{7.64}$$

پر غور کریں۔ اگر معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ موجود ہو تب درج بالا کے بائیں جانب کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ضرب دیتے ہوئے، مساوات 7.63 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{7.65}$$

---

[92] nonsingular matrix
[93] singular matrix

جو نظام 7.64 کا حل $\boldsymbol{x}$ دیتا ہے۔ اگر دوسرا حل $\boldsymbol{u}$ ہو تب $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$ ہو گا جس سے $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{x}$ یکتا حل ہے۔ یوں مسئلہ 7.8 کے تحت درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو گا۔

الٹ چلتے ہوئے، اگر درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب مسئلہ 7.8 کے تحت کسی بھی $\boldsymbol{b}$ کے لئے نظام 7.64 کا حل یکتا ہو گا۔ گاوسی اسقاط کے بعد قیمتیں واپس پر کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{x}$ کے ارکان x_j از خود $\boldsymbol{b}$ کے ارکان کے خطی مجموعے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Bb} \tag{7.66}$$

جہاں $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنا باقی ہے۔ مساوات 7.64 میں پر کرنے سے، کسی بھی $\boldsymbol{b}$ کے لئے، درج ذیل ملتا ہے

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bb}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cb} \qquad (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB})$$

لہٰذا $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ یعنی اکائی قالب ہو گا۔ اسی طرح مساوات 7.64 کو مساوات 7.66 میں پر کرنے سے، کسی بھی $\boldsymbol{x}$ کے لئے،

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Bb} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x}$$

ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{BAI}$ ہو گا۔ ان نتائج کو ملا کر ثابت ہوتا ہے کہ معکوس $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ موجود ہے۔

گاوس جارڈن اسقاط سے معکوس کا حصول

غیر نادر $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ حاصل کرنے کی خاطر تبدیل شدہ گاوسی اسقاط کی ترکیب استعمال کی جا سکتی ہے جس کو **گاوس جارڈن اسقاط**[94] کہتے[95] ہیں۔ اس ترکیب کی تفصیل درج ذیل ہے۔

$\boldsymbol{A}$ استعمال کرتے ہوئے ہم n عدد خطی مساوات

$$\boldsymbol{Ax}_{(1)} = \boldsymbol{e}_{(1)}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{Ax}_{(n)} = \boldsymbol{e}_{(n)}$$

---

[94] Gauss-Jordan elimination

[95] ولہلم جارڈن [1842-1899] جرمنی کے ریاضی دان۔

لکھتے ہیں جہاں $e_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $e_{(n)}$ اکائی $n \times n$ قالب I کے قطار ہیں یعنی:

$$e_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, e_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \cdots, e_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$$

ان n عدد سمتی مساوات کے نا معلوم سمتیات $x_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $x_{(n)}$ ہیں۔ان تمام مساوات کو ایک ہی قالبی مساوات $AX = I$ میں لکھا جاتا ہے جہاں نا معلوم قالب X کے قطار $x_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $x_{(n)}$ ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ n عدد افزودہ قالب $\begin{bmatrix} A & e_{(1)} \end{bmatrix}$ ، $\cdots$ ، $\begin{bmatrix} A & e_{(n)} \end{bmatrix}$ کو ملا کر ایک ہی $n \times 2n$ بڑے "افزودہ قالب" $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ میں لکھا جاتا ہے۔ اب $AX = I$ کے بائیں جانب کو A^{-1} سے ضرب دے کر $X = A^{-1}I = A^{-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $AX = I$ کو X کے لئے حل کرنے کی خاطر ہم $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ پر گاوسی اسقاط لاگو کر سکتے ہیں۔اس سے $\begin{bmatrix} U & H \end{bmatrix}$ حاصل ہو گا جہاں گاوسی اسقاط کی بنا U بالائی تکونی ہو گا۔ مزید اعمال کے ذریعہ گاوس جارڈن ترکیب U کو ایسی وتری صورت میں لے آتی ہے جس کے تمام وتری ارکان اکائی (1) ہوں۔ U کے وتر کے بالائی جانب ارکان کو حذف کر کے وتری صورت حاصل ہو گی جبکہ وتری ارکان کو موزوں قیمتوں سے ضرب (یا تقسیم) کرتے ہوئے وتر پر اکائی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں (مثال 7.35 سے رجوع کریں)۔ چونکہ یہ ترکیب پورے $\begin{bmatrix} U & H \end{bmatrix}$ پر لاگو ہو گی لہٰذا H سے K حاصل ہو گا اور یوں $\begin{bmatrix} U & H \end{bmatrix}$ سے $\begin{bmatrix} I & K \end{bmatrix}$ حاصل ہو گا جو $IX = K$ کا "افزودہ قالب" ہو گا۔اب جیسا پہلے بتلایا گیا، $IX = X = A^{-1}$ ہے لہٰذا موازنہ کرتے ہوئے $K = A^{-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں A^{-1} کو $\begin{bmatrix} I & K \end{bmatrix}$ سے پڑھا جا سکتا ہے۔

درج ذیل مثال میں گاوس جارڈن کی ترکیب استعمال کی گئی ہے۔

مثال 7.35: گاوس جارڈن کی ترکیب سے قالب کے معکوس کا حصول
درج ذیل قالب A کا معکوس A^{-1} دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: درج ذیل "افزودہ قالب" پر گاوسی اسقاط کی ترکیب لاگو کرتے ہوئے $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$ حاصل کرتے ہیں۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1، S_2 اور S_3 گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری اور تیسری صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 + S_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{7}S_2 \end{matrix}$$

حاصل $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$ پر گاوس جارڈن اسقاط لاگو کرتے ہیں۔ پہلے $\boldsymbol{U}$ کے وتر پر اکائی حاصل کی گئی ہے اور بعد میں اس وتر کے بالائی جانب $\boldsymbol{U}$ کے ارکان کو صفر کیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{14}S_2 \\ \frac{7}{37}S_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -\frac{43}{37} & \frac{2}{37} & \frac{14}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 + 2S_3 \\ S_2 + \frac{9}{14}S_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 - 4S_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

آخری تین قطار معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ ہو گا یعنی:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix}$$

آپ اس کو درج ذیل سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یوں $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہے اور اسی طرح $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔

معکوس کے کلیات

چونکہ معکوس کا حصول در حقیقت میں خطی مساوات کے نظام کا حل معلوم کرنا ہے لہٰذا قاعدہ کریمر (مسئلہ 7.15) یہاں قابل استعمال ہو گا۔ یہاں بھی قاعدہ کریمر نظریاتی مطالعہ کے لئے مفید ثابت ہوتا ہے مگر اس سے (مسئلہ 7.17 کی مدد سے) 2×2 سے زیادہ جسامت کے قالب کی معکوس حاصل کرنا زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتا۔

مسئلہ 7.17: معکوس بذریعہ مقطع
$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کا معکوس درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}}[C_{jk}]^T = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.67}$$

جہاں مقطع $\boldsymbol{A}$ میں a_{jk} کا ہم ضربی C_{jk} ہے (حصہ 7.7 سے رجوع کریں)۔ (یہاں دھیان رہے کہ $\boldsymbol{A}^{-1}$ میں، C_{jk} کی جگہ وہ ہے جو $\boldsymbol{A}$ میں a_{kj} (نہ کہ a_{jk}) کی جگہ ہے۔) بالخصوص 2×2 قالب اور اس کے معکوس درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{7.68}$$

ثبوت :

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.