

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781 . . . . .	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
787 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
796 . . . . .	11.3	دوہرہ تکمیل
810 . . . . .	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820 . . . . .	11.5	سطحیں
825 . . . . .	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837 . . . . .	11.7	سطحی تکمیل
845 . . . . .	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850 . . . . .	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861 . . . . .	11.10	مسئلہ سٹوکس
866 . . . . .	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869 . . . . .	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883 . . . . .	12	فوریئر تسلسل
884 . . . . .	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889 . . . . .	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902 . . . . .	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907 . . . . .	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916 . . . . .	12.5	نصف حلقہ الساع
923 . . . . .	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931 . . . . .	12.7	جبری ارتعاش
936 . . . . .	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940 . . . . .	12.9	فوریئر تکمیل
953 . . . . .	13	جزوی تفرقی مساوات
953 . . . . .	13.1	بنیادی تصورات
958 . . . . .	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960 . . . . .	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973 . . . . .	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979 . . . . .	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987 . . . . .	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993 . . . . .	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996 . . . . .	13.8 مستطیل جھلی
1006 . . . . .	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010 . . . . .	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018 . . . . .	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024 . . . . .	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030 . . . . .	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037 . . . . .	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038 . . . . .	14.1 مخلوط اعداد
1047 . . . . .	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054 . . . . .	14.3 مخلوط سطح میں مختصات اور خطے
1059 . . . . .	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067 . . . . .	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078 . . . . .	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084 . . . . .	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089 . . . . .	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095 . . . . .	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103 . . . . .	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104 . . . . .	15.1 نقشہ کشی
1116 . . . . .	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125 . . . . .	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129 . . . . .	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138 . . . . .	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149 . . . . .	15.6 ریمان سطحیں
1157 . . . . .	16 مخلوط کمالات
1157 . . . . .	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168 . . . . .	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172 . . . . .	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184 . . . . .	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189 . . . . .	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194 . . . . .	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201 . . . . .	17 ترتیب اور تسلسل
1201 . . . . .	17.1 ترتیب
1208 . . . . .	17.2 تسلسل
1213 . . . . .	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220 . . . . .	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل	17.4
1225 . . . . .	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں	17.5
1236 . . . . .	تسلسل پر اعمال	17.6
1243 . . . . .	18 حلقہ تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل	
1243 . . . . .	18.1 حلقہ تسلسل	
1256 . . . . .	18.2 حلقہ تسلسل کی روپ میں تفاعل	
1263 . . . . .	18.3 ٹیلر تسلسل	
1268 . . . . .	18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل	
1274 . . . . .	18.5 حلقہ تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب	
1281 . . . . .	18.6 یکساں استرار	
1294 . . . . .	18.7 لوگوں تسلسل	
1303 . . . . .	18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت	
1317 . . . . .	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ	
1317 . . . . .	19.1 بقیہ	
1324 . . . . .	19.2 مسئلہ بقیہ	
1329 . . . . .	19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ	
1337 . . . . .	19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام	
1345 . . . . .	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی تودہ	
1346 . . . . .	20.1 ساکن برقی سکون	
1352 . . . . .	20.2 دوبعدی بہا و سیال	
1361 . . . . .	20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص	
1366 . . . . .	20.4 پوسوں کلیہ مکمل	
1373 . . . . .	21 اعدادی تجزیہ	
1374 . . . . .	21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر	
1376 . . . . .	21.2 دہرانے سے مساوات کا حل	
1388 . . . . .	21.3 متناہی فرق	
1394 . . . . .	21.4 باہمی تحریف	
1403 . . . . .	21.5 لچکدار منحنیات	
1410 . . . . .	21.6 اعدادی مکمل اور تفرق	
1422 . . . . .	21.7 متقارب اتساع	
1435 . . . . .	22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب	
1435 . . . . .	22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقاط، معکوس قالب	
1445 . . . . .	22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ	



1453 . . . . .	22.3 خطی مساوات کا نظام: بدخوبی
1457 . . . . .	22.4 ترکیب کمتر مربع
1463 . . . . .	22.5 قالب کے امتیازی اقدار کی شمول
1472 . . . . .	22.6 امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ

1477	23 اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات
1477 . . . . .	23.1 یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1488 . . . . .	23.2 دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1495 . . . . .	23.3 اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1498 . . . . .	23.3.1 مسئلہ ڈرشلے
1501 . . . . .	23.3.2 بدلتی رخ خفی ترکیب
1508 . . . . .	23.4 مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ - غیر منظم سرحد
1515 . . . . .	23.5 اعدادی تراکیب برائے قطع مکانی مساوات
1524 . . . . .	23.6 اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات

1529	24 احتمال اور شماریات
1529 . . . . .	24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد
1531 . . . . .	24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم
1541 . . . . .	24.3 نمونی اوسط اور نمونی تغیریت
1546 . . . . .	24.4 بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات
1553 . . . . .	24.5 احتمال
1562 . . . . .	24.6 مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات
1568 . . . . .	24.7 بلا منصوبہ متغیرات - غیر مسلسل اور استمراری تقسیم
1576 . . . . .	24.8 تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت
1584 . . . . .	24.9 ثنائی، پوئسن، اور بیش ہندسی تقسیم
1592 . . . . .	24.10 عمومی تقسیم
1601 . . . . .	24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں
1614 . . . . .	24.12 بلا منصوبہ نمونہ بندی - بلا منصوبہ اعداد
1617 . . . . .	24.13 مقدار معلوم کا اندازہ لگانا
1621 . . . . .	24.14 وقفہ اعتماد
1635 . . . . .	24.15 قیاس کی پرکھ - فیصلے
1652 . . . . .	24.16 ضبط معیار

1659	ا اضافی ثبوت
------	--------------

1663	ب منفید معلومات
1663 . . . . .	1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

1673	ج جدول
------	--------

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

عمومی تقسیم کی صورت میں پرکھ

درج ذیل مثال عملاً اہم قیاس کے پرکھ کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 24.23: (معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ)  
فرض کریں کہ  $X$  بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی تغیریت  $\sigma^2 = 9$  ہے۔ نمونی جسامت  $n = 10$  لیتے ہوئے  
قیاس  $\mu = \mu_0 = 24$  کو درج ذیل تین متبادل کے بالمقابل پرکھیں۔

$$(الف) \mu > \mu_0 \quad (ب) \mu < \mu_0 \quad (پ) \mu \neq \mu_0$$

حل: ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 0.05$  منتخب کرتے ہیں۔ اوسط کی اندازاً قیمت درج ذیل سے حاصل ہو گی۔

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots, X_n)$$

اگر قیاس درست ہو تب  $X$  عمومی ہو گا جس کی اوسط  $\mu = 24$  اور تغیریت  $\frac{\sigma^2}{n} = 0.9$  ہو گی (مسئلہ  
24.20)۔ لہذا ہم فاصل قیمت  $c$  کو ضمیمہ ج کی جدول 4 ج سے حاصل کر سکتے ہیں۔  
صورت الف: ہم  $P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$  سے  $c$  تعین کرتے ہیں۔

$$P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4 ج سے  $\frac{c-24}{\sqrt{0.9}} = 1.645$  یعنی  $c = 25.56$  حاصل ہوتا ہے جو  $\mu_0$  سے بڑی قیمت  
ہے (اور جو شکل 24.20 میں سب سے اوپر دکھائی گئی صورت ہے)۔ اگر  $\bar{x} \leq 25.56$  ہو تب قیاس کو منظور کیا  
جائے گا۔ اگر  $\bar{x} > 25.56$  ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جائے گا۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\bar{X} > 25.56)_{\mu} = 1 - P(\bar{X} \leq 25.56)_{\mu} \\ (24.139) \quad &= 1 - \Phi\left(\frac{25.56 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu) \end{aligned}$$

صورت ب: فاصل قیمت  $c$  کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\right) = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 4. ج سے  $c = 24 - 1.56 = 22.24$  ملتا ہے۔ اگر  $\bar{x} \geq 22.44$  ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔ اگر  $\bar{x} < 22.44$  ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$(24.140) \quad \eta(\mu) = P(\bar{X} \leq 22.44)_\mu = \Phi\left(\frac{22.44 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) = \Phi(23.65 - 1.05\mu)$$

صورت پ: چونکہ عمومی تقسیم تشاکلی ہے، ہم  $\mu = 24$  سے  $c_1$  اور  $c_2$  کو ایک جیسے فاصلے پر چن کر، مثلاً  $c_1 = 24 - k$  اور  $c_2 = 24 + k$ ، مستقل  $k$  کو درج ذیل سے تعین کرتے ہیں۔

$$P(24 - k \leq \bar{X} \leq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4. ج سے  $\frac{k}{\sqrt{0.9}} = 1.960$  یعنی  $k = 1.86$  حاصل ہو گا۔ یوں  $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$  اور  $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$  ہوں گے۔ اگر  $\bar{x}$  کی قیمت  $c_1$  سے چھوٹی نہ ہو اور  $c_2$  سے بڑی نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\bar{X} < 22.14)_\mu + P(\bar{X} > 25.86)_\mu \\ &= P(\bar{X} < 22.14)_\mu + 1 - P(\bar{X} \leq 25.86)_\mu \\ (24.141) \quad &= 1 + \Phi\left(\frac{22.14 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{25.86 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) \\ &= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu) \end{aligned}$$

نتیجتاً خاصیت کارکردگی  $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$  درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= \Phi\left(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) \\ &= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu) \end{aligned}$$

شکل سے ظاہر ہے کہ  $n = 10$  کی خاصیت کارکردگی کی مطابقتی منحنی کی ڈھلوان زیادہ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $n$  بڑھانے سے بہتر پرکھ حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی عملی استعمال میں  $n$  کو کم سے کم لیکن اتنا زیادہ رکھا جاتا ہے کہ پرکھ  $\mu$  اور  $\mu_0$  میں انحراف، جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں، کو واضح کرے۔ مثال کے طور پر اگر انحراف ہماری دلچسپی  $\pm 2$  اکائی ہو، ہم شکل سے دیکھتے ہیں کہ  $n = 10$  بہت کم ہو گا چونکہ جب  $\mu = 24 - 2 = 22$  یا  $\mu = 24 + 2 = 26$  ہو تب  $\beta$  تقریباً 50% ہو گا۔ اس کے برعکس،  $n = 100$  اس صورت کافی ہو گا۔ □

مثال 24.24: نا معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ  
 رسی کی تنشی مضبوطی  $n = 16$  کا نمونہ لے کر ناپی گئی۔ نمونی اوسط  $\bar{x} = 4482 \text{ kg}$  اور نمونی معیاری  
 انحراف  $s = 115 \text{ kg}$  حاصل ہوئے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تنشی مضبوطی عمومی بلا منصوبہ متغیر ہے۔ قیاس  
 $\mu_0 = 4500 \text{ kg}$  کو متبادل  $\mu_1 = 4400 \text{ kg}$  کے مقابلے میں پرکھیں۔ یہاں  $\mu_0$  وہ قیمت ہو سکتی ہے جو  
 بنانے والے نے فراہم کی ہو جبکہ  $\mu_1$  سابقہ تجربات کا نتیجہ ہو سکتا ہے۔  
 حل: ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو تب مسئلہ 24.21 کے تحت یاس بلا  
 منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} = 4 \frac{\bar{X} - 4500}{S}$$

کا  $t$  تقسیم  $n - 1 = 15$  درجہ آزادی کا ہو گا۔ فاصل قیمت  $c$  کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے  
 گا۔

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے  $c = -1.75$  حاصل ہو گا۔ نمونہ سے  $T$  کی مشاہدہ سے حاصل قیمت  $t =$   
 $\frac{4(4482 - 4500)}{115} = -0.626$  ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $t > c$  ہے لہذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ پرکھ  
 کی طاقت کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہمیں مزید جدول بند قیمتیں درکار ہوں گی جن پر اس کتاب میں  
 غور نہیں کیا جائے گا۔ □

مثال 24.25: (عمومی تقسیم کی تغیریت کی پرکھ)  
 عمومی آبادی کے  $n = 15$  جسامت اور نمونی تغیریت  $s^2 = 13$  کے نمونہ سے قیاس  $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$  کو  
 متبادل  $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$  میں مقابلے میں پرکھیں۔  
 حل: ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو تب

$$Y = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} = 14 \frac{S^2}{10} = 1.4S^2$$

کا مربع خا تقسیم  $n - 1 = 14$  درجہ آزادی کا ہو گا (مسئلہ 24.22)۔ ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل سے  
 14 درجہ آزادی کے لئے  $c = 23.68$  حاصل ہو گا

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05 \implies P(Y \leq c) = 0.95$$

جو  $Y$  کی فاصل قیمت ہے۔ یوں  $S^2 = \frac{\sigma_0^2 Y}{n-1} = 0.714Y$  کا مطابقتی فاصل قیمت  $c^* = 0.714 \cdot 23.68 = 16.91$  ہو گا۔ چونکہ  $s^2 < c^*$  ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں،

اگر متبادل درست ہو تب متغیر

$$Y_1 = 14 \frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7S^2$$

کے مربع خا تقسیم کا درجہ آزادی 14 ہو گا۔ یوں ہمارے پرکھ کی طاقت

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \leq 11.84)_{\sigma^2=20} \approx 62\%$$

ہو گی اور ہم دیکھتے ہیں قسم دوم غلطی کا امکان (جو 38% ہے) بہت زیادہ ہے جس کو کم کرنے کے لئے نمونی جسامت بڑھانی ضروری ہے۔

□

مثال 24.26: دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا آپس میں موازنہ

نا معلوم اوسط  $\mu_1$  کی عمومی تقسیم کا نمونہ  $x_1, \dots, x_{n1}$  اور دوسری عمومی تقسیم جس کی اوسط  $\mu_2$  نا معلوم ہو کا نمونہ  $y_1, \dots, y_{n2}$  استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس  $\mu_1 = \mu_2$  کو متبادل مثلاً  $\mu_1 > \mu_2$  کے مقابلے میں پرکھنا چاہتے ہیں۔ تغیرات جاننا ضروری نہیں ہے لیکن انہیں ایک جیسا<sup>163</sup> تصور کیا جاتا ہے۔ دو صورتیں عملاً اہم ہیں۔

پہلی صورت: نمونوں کی جسامت ایک جیسی ہے۔ مزید پہلے نمونہ کی ہر قیمت کا دوسرے نمونہ میں مطابقتی ٹھیک ایک قیمت پایا جاتا ہے، چونکہ مطابقتی قیمتیں ایک ہی انسان یا چیز کی بدولت پائی جاتی ہیں (جوڑی دار موازنہ<sup>164</sup>)؛ مثال کے طور پر ایک ہی چیز کی دو مختلف طریقوں سے ناپ، یا ایک ہی جانور کی دو آنکھوں کی ناپ، یا زیادہ عمومی طور پر جہاں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نمونوں کی جوڑی قیمتیں ایک جیسے انسانوں یا چیزوں (مثلاً جڑواں بھائی، گاڑھی کے اگلے ٹائر، وغیرہ) سے حاصل کی گئی ہوں۔ تب ہم مطابقتی قیمتوں کا فرق لے کر، مثال 24.24 میں دی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، اس قیاس کو پرکھیں گے کہ ان فرق کی مطابقتی آبادی کی اوسط 0 ہے۔ اگر ممکن ہو تب ہم اسی ترکیب کو استعمال کریں گے ورنہ ہمیں درج ذیل ترکیب استعمال کرنی ہو گی۔

دوسری صورت: دونوں نمونے غیر تابع ہیں اور ان کی جسامت مختلف ہو سکتی ہے۔ تب ہم درج ذیل طریقے سے بڑھتے ہیں۔ فرض کریں کہ متبادل  $\mu_1 > \mu_2$  ہے۔ ہم معنی خیز سطح  $\alpha$  منتخب کرتے ہیں۔ ہم نمونی اوسط  $\bar{x}$  ،

<sup>163</sup> اگر اگلے مثال کا پرکھ واضح کرے کہ تغیرات میں واضح فرق پایا جاتا ہے تب ایک جیسے  $n_1 = n_2 = n > 30$  منتخب کرتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ مساوات تجزیہ عمومی بلا مضبوط متغیر، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے، کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے، اور مثال 24.23 کی طرز پر حل کریں۔  
<sup>164</sup> paired comparison

$\bar{y}$  اور  $s_1^2$ ،  $(n-1)s_2^2$  کا حساب کرتے ہیں جہاں  $s_1^2$  اور  $s_2^2$  نمونی تغیریت ہیں۔ ضمیمہ ۶ کی جدول 6.6 میں  $n_1 + n_2 - 2$  درجہ آزادی لیتے ہوئے ہم  $c$  کو

$$(24.142) \quad P(T \leq c) = 1 - \alpha$$

سے تعین کرتے ہیں۔ آخر میں ہم درج ذیل کا حساب کرتے ہیں۔

$$(24.143) \quad t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}}$$

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اگر قیاس درست ہو تب یہ  $t$  تقسیم کے  $n_1 + n_2 - 2$  درجہ آزادی کے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے۔ اگر  $t_0 \leq c$  ہو تب قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔ اگر  $t_0 > c$  ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے۔

اگر متبادل  $\mu_1 \neq \mu_2$  ہو تب مساوات 24.142 کی جگہ درج ذیل استعمال کیا جائے گا۔

$$(24.142^*) \quad P(T \leq c_1) = 0.5\alpha, \quad P(T \leq c_2) = 1 - 0.5\alpha$$

دھیان رہے کہ ایک جیسی نمونی جسامت  $n_1 = n_2 = n$  کے لئے مساوات 24.143 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(24.144) \quad t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 - s_2^2}}$$

اس کی وضاحت کے لئے انہیں درج ذیل دو نمونوں پر غور کرتے ہیں جو ایک ہی کام میں دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی ہے۔

105	108	86	103	103	107	124	105
89	92	84	97	103	107	111	97

فرض کریں کہ مطابقتی آبادی عمومی ہے اور ان کی تغیریت ایک جیسی ہے۔ انہیں قیاس  $\mu_1 = \mu_2$  کو متبادل  $\mu_1 \neq \mu_2$  کے مقابلے میں پرکھیں۔ (تغیریت کی ایک جیسا ہونے کو انگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔) حل: ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = 105.125, \quad \bar{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000$$



ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہیں۔ مساوات  $24.142^*$  میں  $0.5\alpha = 2.5\%$  ،  $1 - 0.5\alpha =$  97.5% اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں 14 درجہ آزادی سے  $c_1 = -2.15$  اور  $c_2 = 2.15$  حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 24.144 میں  $n = 8$  استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$t_0 = \frac{\sqrt{8} \cdot 7.625}{\sqrt{190.125}} = 1.56$$

چونکہ  $c_1 \leq t_0 \leq c_2$  ہے ہم دونوں صورتوں میں ایک جیسی اوسط کے قیاس  $\mu_1 = \mu_2$  کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

پہلی صورت اس مثال پر لاگو ہوتی ہے چونکہ پہلی دونوں نمونوں کی پہلی نمونی قیمت ایک قسم کے کام کے لئے حاصل کی گئی۔ اسی طرح دونوں نمونوں کی دوسری نمونی قیمت کسی دوسرے کام کے لئے حاصل کی گئی، وغیرہ۔ یوں ہم ان نمونی قیمتوں کا مطابقتی فرق

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

اور مثال 24.24 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے قیاس  $\mu = 0$  پرکھ سکتے ہیں جہاں  $\mu$  اس فرق کی اوسط ہے۔ ہم اس کا منطقی متبادل  $\mu \neq 0$  لیتے ہیں۔ نمونی اوسط  $\bar{d} = 7.625$  اور نمونی تغیریت  $s^2 = 45.696$  ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$t = \frac{\sqrt{8}(7.625 - 0)}{\sqrt{45.696}} = 3.19$$

$n - 1 = 7$  میں  $P(T \leq c_2) = 97.5\%$  ،  $P(T \leq c_1) = 2.5\%$  اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں  $c_1 = -2.37$  اور  $c_2 = 2.37$  حاصل ہوتے ہیں لہذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں چونکہ  $t = 3.19$  معلوم شدہ  $c_1$  اور  $c_2$  کے بیچ نہیں پایا جاتا ہے۔ اس طرح ہمارا موجودہ پرکھ، جو اسی نمونوں پر مبنی ہے لیکن زیادہ معلومات کو استعمال کرتا ہے، دکھاتا ہے کہ نتائج میں فرق کافی ہے۔ □

مثال 24.27: (دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا موازنہ)

گزشتہ مثال کے دو نمونے استعمال کرتے ہوئے قیاس  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  کو پرکھیں۔ فرض کریں کہ مطابقتی آبادیاں عمومی ہیں اور تجربہ کی نوعیت سے متبادل  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$  ہو گا۔

حل: ہم  $s_1^2 = 106.125$  اور  $s_2^2 = 84.000$  حاصل کرتے ہیں۔ ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہیں۔  $P(V \leq c) = 1 - \alpha = 95\%$  اور ضمیمہ ج کی جدول 8.ج میں  $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$

درجہ آزادی سے  $c = 3.79$  تعین ہوتا ہے۔ ہم آخر میں  $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.26$  حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ  $v_0 \leq c$  ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ اگر  $v_0 > c$  ہوتا ہم اس کو نا منظور کرتے۔

قیاس درست ہونے کی صورت میں  $v_0$  ایسے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے جس کی تقسیم درجہ آزادی  $(n_1 - 1, n_2 - 1)$  کی  $F$  تقسیم<sup>165</sup> ہے۔  $(m, n)$  درجہ آزادی کے  $F$  تقسیم<sup>166</sup> کا تفاعل تقسیم درجہ ذیل ہے

$$(24.145) \quad F(z) = \begin{cases} K_{mn} \int_0^z t^{\frac{m-2}{2}} (mt+n)^{-\frac{m+n}{2}} dt & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

□

جہاں  $K_{mn} = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$  ہے۔

### سوالات

سوال 24.201: صفحہ 1554 پر جدول 24.6 میں امجد کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ سکے منصفانہ ہے، یعنی خط اور شیر کا احتمال ایک جیسا ہے۔  $\alpha = 5\%$  منتخب کریں۔  
جواب: اگر قیاس  $p = 0.5$  درست ہو تب 4040 کوششوں میں خط کی تعداد  $X$  تقریباً عمومی ہو گا جس کی اوسط  $\mu = 2020$  اور تغیریت  $\sigma^2 = 1010$  ہو گی (حصہ 24.10)۔  
 $P(X \leq c) = \Phi(\frac{c-2020}{\sqrt{1010}}) = 0.95$ ,  $c = 2072 > 2048$  ہے لہذا قیاس نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.202: مشرف کا مواد استعمال کرتے ہوئے سوال 24.201 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.203: عمومیت تصور کرتے ہوئے اور  $\sigma^2 = 4$  لیتے ہوئے قیاس  $\mu = 15.0$  کو متبادل (الف)  $\mu = 12.0$  اور (ب)  $\mu = 15.8$  کے بالمقابل پرکھیں۔ نمونی جسامت 10 اور نمونی اوسط  $\bar{x} = 14$  لیں جبکہ  $\alpha = 5\%$  منتخب کریں۔  
جواب: (الف)  $c = 13.96 > 12.00$  ہے۔ قیاس کو نا منظور کریں۔  
(ب)  $c = 16.04 > 15.80$  ہے۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

<sup>165</sup>F-distribution

<sup>166</sup>تکستنی ماہر جنیات رندلڈیلر فشر [1890-1962]

سوال 24.204: اگر بڑی نمونی جسامت، مثلاً 100، استعمال کی جائے تب سوال 24.203 میں باقی مواد (  $\bar{x} = 14$ ،  $\alpha = 5\%$ ، وغیرہ) تبدیل کیے بغیر نتیجے میں کیا تبدیلی پیدا ہوگی؟

سوال 24.205: دو طرفہ پرکھ،  $5\%$  سطح پر استعمال کرتے ہوئے سوال 24.203 میں خطہ نا منظوری تلاش کریں؟  
جواب:  $\mu < 13.76$  یا  $\mu > 16.24$

سوال 24.206: سوال 24.203-الف میں پرکھ کی طاقت تلاش کریں۔

سوال 24.207: مثال 24.23-الف اور ب کی خاصیت کارکردگی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.208: دکھائیں کہ عمومی تقسیم میں قیاس  $H_0: \mu = \mu_0$  اور متبادل  $H_1: \mu = \mu_1$  کی پرکھ میں دو اقسام کی غلطیوں کو نمونی جسامت کافی بڑھا کر جتنا چاہیں کم (ما سوائے صفر کرنے کے) کیا جاسکتا ہے۔

سوال 24.209:  $\mu = 0$  کو  $\mu > 0$  کے بالمقابل سطح  $\alpha = 5\%$  پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونہ  $1, -1, 1, 3, -8, 6, 0$  لیں جو مصنوعی سیارہ ٹلسٹار کی 143 ویں گردش میں مدار سے مضرب 0.01 ریڈیئن انحراف ہے۔

جواب:  $c = 1.94 > t = \sqrt{7} \frac{0.286-0}{4.31} = 0.18$  ہے لہذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.210: مثال 24.1 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے قیاس  $\mu = 0.80 \text{ cm}$  (ڈبے پر درج لمبائی) کو متبادل  $\mu \neq 0.80 \text{ cm}$  کے مقابل پرکھیں۔ (عمومیت تصور کرتے ہوئے  $\alpha = 5\%$  لیں۔)

سوال 24.211: ایک مشین ڈبوں میں فی ڈبہ 1000 g تیل بھرتی ہے۔ آپ جاننا چاہتے ہیں کہ آیا  $\alpha = 5\%$  سطح پر اوسط کی درکار کمیت 1000 g سے تجاوز زیادہ ہے۔ اگر ایسا ہو تب مشین میں مطابقت پیدا کرنی ہوگی۔ ایک قیاس اور متبادل بنائیں اور انہیں پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونی جسامت 20 جس کی اوسط 996 g اور معیاری انحراف 5 g ہو استعمال کریں۔

جواب: متبادل  $\mu \neq 1000$ ،  $c = -2.09 < t = \sqrt{20} \frac{996-1000}{5} = -3.58$  (ضمیمہ ج جدول 6.6) درجہ آزادی 19)۔ قیاس  $\mu = 1000 \text{ g}$  کو نا منظور کریں۔

سوال 24.212: ایک مخصوص ٹائر کی اوسط زندگی 32 000 km اور معیاری انحراف 4000 km ہے۔ کیا ٹائر بنانے والا یہ دعویٰ کر سکتا ہے کہ اس کے بنائے ہوئے ٹائروں کی اوسط زندگی 30 000 km سے زیادہ ہے۔ متبادل قیاس بناتے ہوئے اس کو  $5\%$  سطح پرکھیں۔

سوال 24.213: برقی دباؤ کو بیک وقت دو عدد وولٹ پیا سے ناپا جاتا ہے۔ ان کے نتائج میں فرق

$$0.8, 0.2, -0.3, 0.1, 0.0, 0.5, 0.2$$

وولٹ ہے۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے کیا ہم 5% سطح کے لحاظ سے کہہ سکتے ہیں کہ دونوں وولٹ پیا کی پیمانہ بندی<sup>167</sup> میں کوئی معنی خیز فرق نہیں پایا جاتا ہے۔

جواب:  $\mu = 0$  کو متبادل  $\mu \neq 0$  کے مقابلے میں پرکھیں۔  $c = 2.37 < t = 2.11$  (درجہ آزادی 7)۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.214: ایک معیاری دوائی ایک مخصوص مرض میں مبتلا 70% مریضوں کو صحتیاب کرتی ہے اور ایک نئی دوائی پہلے 200 مریضوں میں سے 148 کو صحتیاب کرتی ہے۔ کیا  $\alpha = 5\%$  لیتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نئی دوائی زیادہ بہتر ہے؟

سوال 24.215: ماضی میں ایک مشین جو فی ڈبہ 25 kg چینی بھرتی تھی کا معیاری انحراف 0.4 kg تھا۔ قیاس  $H_0: \sigma = 0.4$  کو متبادل  $H_1: \sigma > 0.4$  کے بالمقابل پرکھیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے نمونی جسامت 10 جس کی معیاری انحراف  $\sigma = 0.4$  ہو لیں اور  $\alpha = 5\%$  منتخب کریں۔  
جواب:  $\frac{9-0.5^2}{0.4^2} = 14.06 < c = 16.92$ ،  $\alpha = 5\%$  ہے۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.216: فرض کریں کہ معیاری انحراف کسی مخصوص حد سے کم، مثلاً، 5 گھنٹوں سے کم، ہونے کی صورت میں بیڑی سے چلنے والی مشینوں میں تمام بیڑیوں کو مخصوص مدت کے بعد بیک وقت تبدیل کرنا کم مہنگا پڑتا ہے بہ نسبت ہر بیڑی کو اس وقت تبدیل کرنے کے جب وہ خراب ہو جائے۔ ایک موزوں پرکھ بنا کر اس قیاس کو پرکھیں۔ عرصہ زندگی کے 28 قیمتیں جن کا معیاری انحراف  $s = 3.5$  گھنٹے ہو استعمال کرتے ہوئے  $\alpha = 5\%$  لیں۔ عمومیت تصور کریں۔

سوال 24.217: تیل کی قسم A کو 9 ایک جیسی گاڑیوں میں ایک جیسے حالات میں استعمال کیا گیا جنہوں نے اوسط 20.2 کلو میٹر فی لٹر اور معیاری انحراف 0.5 دیا۔ انہیں حالات میں تیل کی بہتر قسم B کو اس جیسی 10 گاڑیوں میں استعمال کیا گیا جن سے اوسط 21.8 اور معیاری انحراف 0.6 حاصل ہوا۔ کیا B بہتر نتائج دیتا ہے؟ اس قیاس کو  $\alpha = 5\%$  پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کریں۔

جواب:  $t_0 = \frac{21.8 - 20.2}{\sqrt{\frac{9 \cdot 0.6^2 + 8 \cdot 0.5^2}{19}}} = 6.3 > c = 1.74$  (درجہ آزادی 17 ہے)۔

سوال 24.218: ماسوائے عرصہ زندگی، بلب A اور B ایک جیسے ہیں۔ ایک خریدار دونوں قسم کے 100 بلب کو پرکھتا ہے۔ قسم A کی اوسط عرصہ زندگی 1120h اور معیاری انحراف 75h جبکہ B کی اوسط 1064h اور معیاری انحراف 82h حاصل ہوتے ہیں۔ کیا عرصہ زندگی میں معنی خیز فرق پایا جاتا ہے؟ (عمومیت فرض کرتے ہوئے  $\alpha = 5\%$  سطح پر پرکھیں۔)

سوال 24.219: نمونی جسامت 10 اور 16 اور تغیریت  $s_1^2 = 50$  اور  $s_2^2 = 30$  لیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے  $\alpha = 5\%$  سطح پر قیاس  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  کو متبادل  $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$  کے بالمقابل پرکھیں۔ جواب:  $c = 2.59$   $v_0 = \frac{50}{30} = 1.67 < c$  [درجہ آزادی (9, 15) ہے۔] قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.220: دو نمونے 110, 110, 120, 110, 130, 110, 120 اور 50, 90, 100, 90, 110, 80 لوہے کی ڈھلائی کے دوران دو مختلف بالٹیوں میں دو مختلف وقتوں پر درجہ حرارت ( $^{\circ}\text{C}$ ) میں فرق دیتی ہیں۔ کیا پہلے نمونہ کی تغیریت دوسرے سے زیادہ ہے؟ عمومیت فرض کریں اور  $\alpha = 5\%$  لیں۔

## 24.16 ضبط معیار

پیداوار کا کوئی بھی عمل اتنا ٹھیک نہیں ہوتا ہے کہ تمام پیداوار مکمل طور پر ایک جیسی ہو۔ بہت ساری معمولی، غیر قابو وجوہات کی بنا ان میں ہر صورت معمولی فرق پایا جاتا ہے جس کو امکانی فرق تصور کیا جاسکتا ہے۔ یہ ضروری ہے کہ پیداوار کی درکار خاصیت کی قیمت درست ہو (مثلاً لمبائی، مضبوطی، یا جو بھی خاصیت کسی مخصوص صورت میں درکار ہو)۔ اس مقصد کے لئے اس قیاس کو پرکھا جاتا ہے کہ پیداوار درکار خاصیت، مثلاً  $\mu = \mu_0$ ، رکھتے ہیں جہاں  $\mu_0$  درکار قیمت ہے۔ اگر ایسا پوری کھپ کی پیداوار (مثلاً، 100000 پیچوں کی کھپ) کے بعد کیا جائے تب پرکھ ہمیں بتائے گا کہ پیداوار کتنی اچھی یا کتنی خراب ہے لیکن ظاہر ہے کہ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کوئی بہتری نہیں لاسکتے ہیں۔ بہتری لانے کے لئے ضروری ہے کہ پرکھ دوران پیداوار کیا جائے۔ ایسا عموماً مقررہ دورانیہ (مثلاً ہر 30 منٹ یا ہر گھنٹہ) بعد جاتا ہے اور اس کو ضبط معیار<sup>168</sup> کہتے ہیں۔ ہر مرتبہ ایک جیسی جسامت (مثلاً 3 یا 10 اجزاء) کا نمونہ لیا جاتا ہے۔ قیاس نا منظور ہونے کی صورت میں عمل پیداوار روک کر اس وجہ کو تلاش کیا جاتا ہے جس کی بنا انحراف پیدا ہوا ہے۔

<sup>168</sup> quality control

اگر ہم عمل پیداوار کو روک دیں اگرچہ سب ٹھیک چل رہا ہو تب ہم غلطی قسم اول کر رہے ہوں گے۔ اگر خرابی کے باوجود ہم عمل پیداوار کو ناروکیں تب ہم غلطی قسم دوم کر رہے ہوں گے (حصہ 24.15)۔

ہر پرکھ کا نتیجہ کو ترسیبی صورت میں نقشہ ضبط<sup>169</sup> پر ظاہر<sup>170</sup> کیا جاتا ہے۔

اوسط کا نقشہ ضبط

شکل 24.22 میں نقشہ ضبط کی مثال دکھائی گئی ہے۔ اوسط کے نقشہ ضبط پر نچلی حد ضبط<sup>171</sup> LCL ، وسطی خط ضبط<sup>172</sup> CL اور بالائی حد ضبط<sup>173</sup> UCL دکھائے گئے ہیں۔ یہ حدود مثال 24.23-پ میں فاصل قیمتوں  $c_1$  اور  $c_2$  کے مطابقتی ہیں۔ جیسے ہم نمونی اوسط نچلی حد ضبط یا بالائی حد ضبط سے تجاوز کر جائے ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ عمل پیداوار "بے قابو" ہے، یعنی، ہم کہتے ہیں کہ عمل پیداوار میں تبدیلی رونما ہوئی ہے۔ جب بھی کوئی نقطہ حدود ضبط سے تجاوز کرے عمل پیداوار میں مداخلت کی ضرورت ہوگی۔

اگر ہم حدود ضبط ڈھیلے رکھیں تب ہم عمل پیداوار میں تبدیلی کو پکڑ نہیں پائیں گے۔ اس کے برعکس حدود ضبط بہت سخت رکھنے سے ہم بار بار عمل پیداوار کو روک کر تبدیلی کی غیر موجود وجہ تلاش کرتے رہیں گے جس سے پیداوار بری طرح متاثر ہوگی۔ عموماً معنی خیز سطح  $\alpha = 1\%$  منتخب کی جاتی ہے۔ صفحہ 1628 پر مسئلہ 24.20 اور ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کی صورت میں اوسط کے مطابقتی حد ضبط

$$(24.146) \quad LCL = \mu_0 - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{اور} \quad UCL = \mu_0 + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ہوں گے۔ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ ہمیں  $\sigma$  معلوم ہے۔ اگر  $\sigma$  نا معلوم ہو تب پہلی 20 یا 30 نمونوں کی معیاری انحراف حاصل کر کے ان کی اوسط کو  $\sigma$  کی تخمینی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل 24.22 میں اوسط کو لکیر سے جوڑا جاتا ہے جو محض نتائج کو واضح کرنے میں مدد دیتی ہے۔

control chart<sup>169</sup>

<sup>170</sup> امریکی ماہر شماریات والٹر انڈرو شوہارت [1891-1967] نے یہ نقشہ 1924 میں تجویز کیا جو معیار کو قابو کرنے میں انتہائی موثر ثابت ہوا ہے۔

lower control limit (LCL)<sup>171</sup>

central control line (CL)<sup>172</sup>

upper control limit (UCL)<sup>173</sup>

## تغیریت کا نقشہ ضبط

اوسط کے ساتھ ساتھ عموماً تغیریت، معیاری انحراف یا سعت کو بھی قابو رکھا جاتا ہے۔ عمومی تقسیم کی صورت میں معیاری انحراف کا نقشہ ضبط بناتے ہوئے مثال 24.25 میں استعمال ترکیب بروئے کار لاتے ہوئے حدود ضبط تعین کیے جا سکتے ہیں۔ روایتی طور پر صرف بالائی حد ضبط استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال 24.25 سے یہ حد

$$(24.147) \quad UCL = \frac{\sigma^2 c}{n-1}$$

ہو گا جہاں  $c$  کو مساوات

$$P(Y > c) = \alpha \implies P(Y \leq c) = 1 - \alpha$$

اور ضمیمہ ج کی جدول 7.ج (مرج خا تقسیم) سے  $n-1$  درجہ آزادی کے لئے حاصل کیا جاتا ہے؛ یہاں نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ  $S^2$  کی حاصل قیمت  $s^2$  کا بالائی حد ضبط سے تجاوز کا احتمال  $\alpha$  (5% یا 1%) ہے۔

اگر ہم تغیریت کے نقشہ ضبط میں چلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط استعمال کرنا چاہیں تب یہ حدود

$$(24.148) \quad LCL = \frac{\sigma^2 c_1}{n-1}, \quad UCL = \frac{\sigma^2 c_2}{n-1}$$

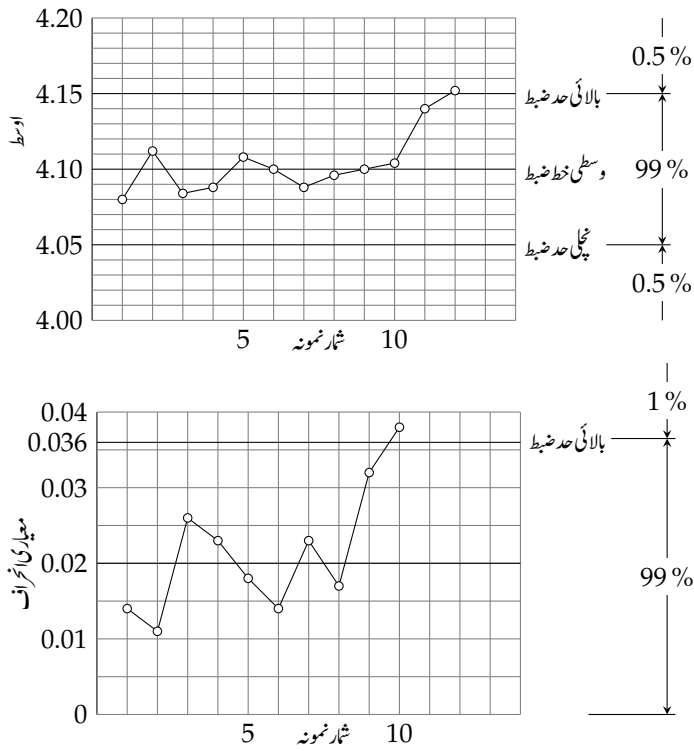
ہوں گے جہاں  $c_1$  اور  $c_2$  کو  $n-1$  درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$(24.149) \quad P(Y \leq c_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(Y \leq c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط

تغیریت کے نقشہ ضبط کی طرح ہمیں بالائی حد ضبط

$$(24.150) \quad UCL = \frac{\sigma \sqrt{c}}{\sqrt{n-1}}$$



شکل 24.22: اوسط اور معیاری انحراف کے نقشہ ضبط برائے جدول 24.12



جدول 24.12: بارہ نمونے جہاں ہر نمونہ 5 قیمتوں (چھوٹی ٹنکیوں کے ملی میٹروں میں قطر) پر مشتمل ہے

نمونہ شمار	نمونہ قیمتیں					$\bar{x}$	$s$	$R$
1	4.06	4.08	4.08	4.08	4.10	4.080	0.014	0.04
2	4.10	4.10	4.12	4.12	4.12	4.112	0.011	0.02
3	4.06	4.06	4.08	4.10	4.12	4.084	0.026	0.06
4	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
5	4.08	4.10	4.12	4.12	4.12	4.108	0.018	0.04
6	4.08	4.10	4.10	4.10	4.12	4.100	0.014	0.04
7	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
8	4.08	4.08	4.10	4.10	4.12	4.096	0.017	0.04
9	4.06	4.08	4.10	4.12	4.14	4.100	0.032	0.08
10	4.06	4.08	4.10	4.12	4.16	4.104	0.038	0.10
11	4.12	4.14	4.14	4.14	4.16	4.140	0.014	0.04
12	4.14	4.14	4.16	4.16	4.16	4.152	0.011	0.02

درکار ہو گا جس کو مساوات 24.147 سے حاصل کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر جدول 24.12 میں  $n = 5$  ہے۔ مطابقتی آبادی کو عمومی تصور کرتے ہوئے جس کی معیاری انحراف  $\sigma = 0.02$  ہو،  $\alpha = 1\%$  منتخب کرتے ہوئے 4 درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور مساوات

$$P(Y \leq c) = 1 - \alpha = 99\%$$

سے فاصل قیمت  $c = 13.28$  حاصل ہوتی ہے۔ یوں مساوات 24.150 سے

$$UCL = \frac{0.02\sqrt{13.28}}{\sqrt{4}} = 0.0365$$

حاصل ہو گا جس کو شکل 24.22 کے نچلے حصے میں دکھایا گیا ہے۔

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط جس میں بالائی حد ضبط اور نچلا حد ضبط پائے جاتے ہوں کو مساوات 24.148 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سعت کا نقشہ ضبط

اگر ہم  $\sigma^2$  یا  $\sigma$  کو قابو رکھتے ہوں تب ہمیں بالترتیب  $s^2$  یا  $s$  کا حساب کرنا ہو گا۔ ایسا کرنا غیر تربیت یافتہ شخص کے لئے مشکل ہوتا ہے لہذا ہم تغیریت یا معیاری انحراف کی حد ضبط کی جگہ سعت  $R =$  (نمونہ کی زیادہ

سے زیادہ قیمت منفی نمونہ کی کم سے کم قیمت استعمال کرنا چاہیں گے۔ عمومی تقسیم کی صورت میں یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ معیاری انحراف  $\sigma$  کی قیمت بلا منصوبہ متغیر  $R^*$  کی توقع کے راست متناسب ہے جس کی مشاہدے سے حاصل قیمت  $R$  ہو، یعنی  $\sigma = \lambda_n E(R^*)$ ، جہاں جزو  $\lambda_n$  کی قیمت نمونی جسامت پر منحصر ہے اور اس کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.89	0.59	0.49	0.43	0.40	0.37	0.35	0.34	0.32
$n$	12	14	16	18	20	30	40	50	
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.31	0.29	0.28	0.28	0.27	0.25	0.23	0.22	

چونکہ  $R$  صرف دو نمونی قیمتوں پر منحصر ہے لہذا یہ نمونے کے بارے میں  $s$  کے لحاظ سے کم معلومات فراہم کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ نمونی جسامت  $n$  جتنی بڑی ہوگی،  $s$  کی جگہ  $R$  استعمال کرنے سے، اتنی زیادہ معلومات ہم ضائع کریں گے۔ عملاً اگر  $n$  کی قیمت 10 سے زائد ہو تب  $s$  استعمال کیا جاتا ہے۔

دھیان رہے کہ سعت سے معیاری انحراف کا جلدی سے اندازہ لگانا عملی استعمال میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

### سوالات

سوال 24.221: ایک مشین چکانا تیل کو ٹین کی بوتل میں یوں بھرتی ہے کہ عمومی آبادی حاصل ہو جس کی اوسط 1 لٹر اور معیاری انحراف 0.03 لٹر ہو۔ اوسط کے لئے شکل 24.22 کی طرح نقشہ درکار ہے۔ نمونی جسامت 6 فرض کرتے ہوئے نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط تلاش کریں۔

جواب: نچلی حد ضبط  $UCL = 1.032$  جبکہ بالائی حد ضبط  $LCL = 1 - \frac{2.58 \cdot 0.03}{\sqrt{6}} = 0.968$

سوال 24.222: سوال 24.221 میں دکھائیں کہ  $\alpha = 0.3\%$  سطح سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔ ان کی اعدادی قیمتیں تلاش کریں۔

$$LCL = \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}, \quad UCL = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

سوال 24.223: معنی خیز سطح تبدیل کیے بغیر ہمیں سوال 24.221 میں نمونی جسامت کتنی رکھنی ہوگی تاکہ بالائی

اور نچلی حد ضبط قریب قریب ہوں، مثلاً  $UCL - LCL = 0.05$   
جواب:  $n = 10$

سوال 24.224: اگر ہم غیر عمومی آبادی کے لئے مساوات 24.146 کے حدود ضبط والا نقشہ ضبط استعمال کریں تب ان حدود کا کیا مطلب ہو گا؟

سوال 24.225: عمومی آبادی کی اوسط قابو کرتے ہوئے  $UCL - LCL$  کو نصف کرنے کی خاطر نمونی جسامت کو کس طرح تبدیل کرنا ہو گا؟  
جواب: نمونی جسامت کو 4 گنا بڑھانا ہو گا۔

سوال 24.226: قابلوں کی پیداوار میں سے 2 جسامت کے 10 نمونے لئے گئے۔ ان کی لمبائی ملی میٹروں میں درج ذیل ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لمبائی	27.4	27.4	27.5	27.3	27.9	27.6	27.6	27.8	27.5	27.3
	27.6	27.4	27.7	27.4	27.5	27.5	27.4	27.3	27.4	27.7

فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 27.5 اور تغیریت 0.024 ہے۔ مساوات 24.146 استعمال کرتے ہوئے اوسط کے لئے نقش ضبط بنائیں اور نمونی اوسط اس پر ترسیم کریں۔

جواب:  $\frac{2.58\sqrt{0.024}}{\sqrt{2}} = 0.283, UCL = 27.783, LCL = 27.217$

## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z \leq |2yy'|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### 1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

$$(2. ب) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

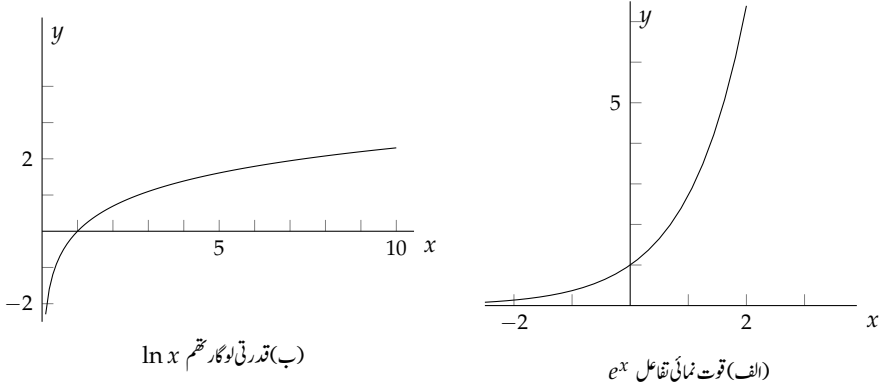
$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

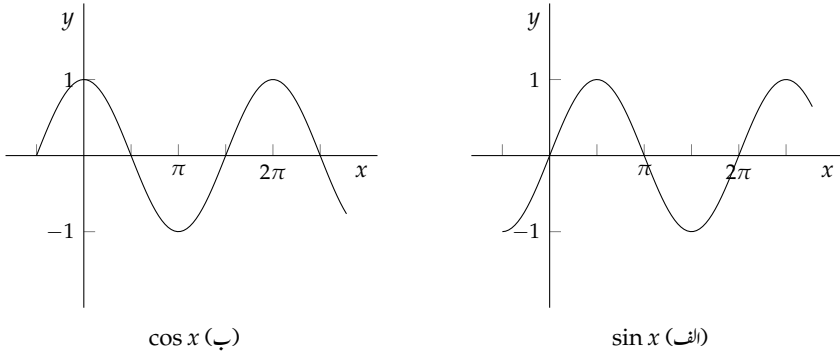
$$(3. ب) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$





شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

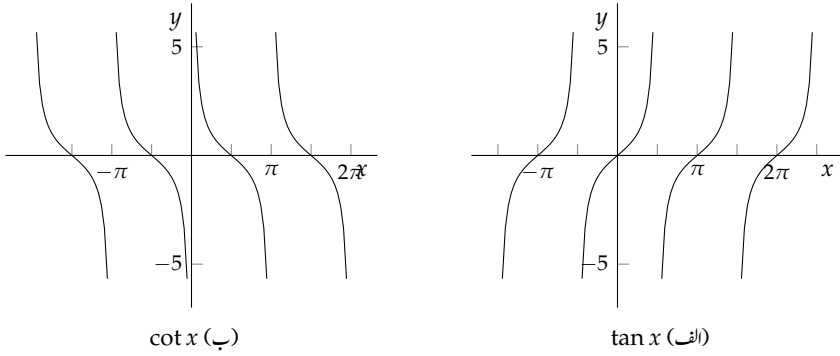
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

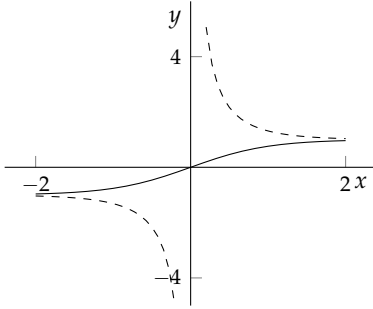
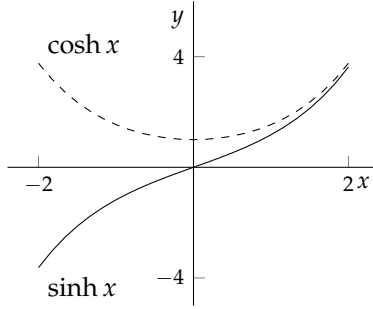
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

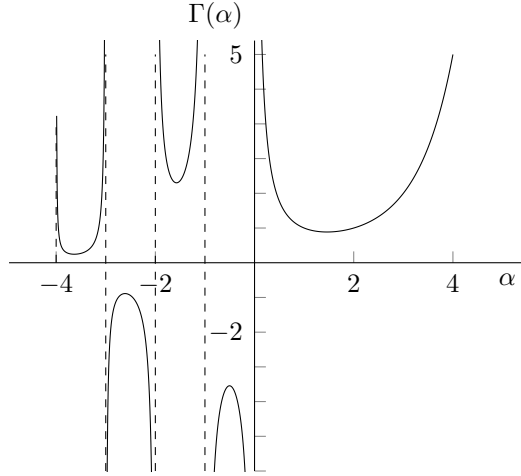
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

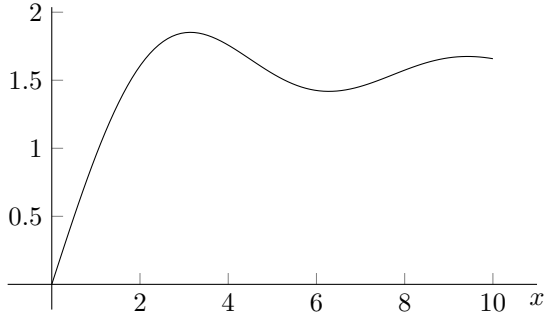
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$





ضمیمہ ج

جدول

جدول 1. ج: شنائی تقسیم

جدول 2. ج: پوسن تقسیم

جدول 3. ج: عمومی تقسیم

جدول 4. ج: عمومی تقسیم

جدول 5. ج: شبلا منصوبہ اعداد

جدول 6. ج: تقسیم

جدول 7. ج: مربع خا تقسیم

جدول 8. ج: مربع ایف تقسیم