انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 11

سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے

تکمل سے آپ بخوبی واقف ہیں جس کو سمتی تکملی علم الاحصاء[1] وسعت دیتا ہے۔یوں منحنی پر تکمل، جسے خطی تکمل[2] کہتے ہیں، سطح پر تکمل جسے سطحی تکمل[3] کہتے ہیں اور حجم پر تکمل جسے حجمی تکمل[4] کہتے ہیں، حاصل کیا جا سکتا ہے۔مزید ایک قسم کی تکمل کا دوسری قسم کی تکمل میں تبادلہ کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے بعض اوقات نسبتاً آسان تکمل حاصل ہوتا ہے۔یوں سطح میں مسئلہ گرین[5] کی مدد سے خطی تکمل کو دو درجی تکمل میں یا دو درجی تکمل کو خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔گاوسی مسئلہ ارتکاز[6] کی مدد سے حجمی تکمل کو سطحی تکمل یا سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔مسئلہ سٹوکس[7] کی مدد سے تین درجی تکمل کو خطی تکمل یا خطی تکمل کو تین درجی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

سمتی تکملی الاحصاء کا انجینئری، طبیعیات، ٹھوس میکانیات، سیالی میکانیات اور دیگر میدان میں اہم کردار پایا جاتا ہے۔

---

vector calculus[1]
line integral[2]
surface integral[3]
volume integral[4]
Green's theorem[5]
Gauss's convergence theorem[6]
Stoke's theorem[7]

11.1 خطی تکمل

درج ذیل تفاعل f کی x محور پر $x = a$ تا $x = b$ قطعی تکمل ہے

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1}$$

جہاں وقفہ a اور b کے درمیان ہر نقطے پر f معین ہے۔ خطی تکمل میں f کا تکمل سطح میں (یا فضا میں) منحنی C پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں C کے ہر نقطے پر f معین ہے۔

خطی تکمل کی تعریف عین قطعی تکمل کی تعریف کی مانند ہے۔ خطی تکمل کچھ یوں ہے۔

ہم فضا میں منحنی C لیتے ہیں اور اس پر ایک رخ کو مثبت سمت کہتے ہیں۔یوں منحنی پر الٹ چلتے ہوئے منفی سمت حاصل ہو گی۔مثبت سمت میں چلتے ہوئے منحنی پر ابتدائی نقطے کو A اور اختتامی نقطے کو B کہتے ہیں۔ جیسا شکل 11.1-ب میں دکھایا گیا ہے ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ ہم مقام ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں C بند راہ کہلاتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ C سادہ منحنی (حصہ 10.3) ہے جس کو

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} \qquad (a \le s \le b) \tag{11.2}$$

ظاہر کرتی ہے [جہاں s منحنی کی لمبائی قوس ہے (حصہ 10.4)] اور پورے C پر $\boldsymbol{r}(s)$ استمراری ہے جس کا (پورے C پر) تفرق $\boldsymbol{r}'$ موجود ہے اور یہ تفرق غیر صفر سمتیہ ہے۔اس طرح C **ہموار منحنی**[8] کہلائے گی یعنی C کے ہر نقطے پر C کا منفرد مماس پایا جاتا ہے اور منحنی پر چلنے سے مماس کی سمت میں تبدیلی استمراری ہوتی ہے۔

فرض کریں کہ $f(x, y, z)$ متغیر s کا ایسا استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کے ہر نقطے پر معین ہے۔ہم C کو بے قاعدہ طریقے سے n عدد ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.2)۔یوں ہر ٹکڑے کی لمبائی مختلف ہو سکتی ہے۔ہم ابتدائی سر سے شروع کرتے ہوئے ان ٹکڑوں کے سروں کو $P_0\,(=A)$ ، P_1 ، P_2 ، $\cdots$ ، $P_n\,(=B)$ سے اور s کی مطابقتی قیمتوں کو

$$s_0\,(=a) < s_1 < s_2 < \cdots < s_n\,(=b)$$

[8] smooth curve

(ب) (الف)

شکل 11.1: سمت بند منحنی

سے ظاہر کرتے ہیں۔ہم ہر ٹکڑے پر بے قاعدگی سے کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً P_0 اور P_1 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_1 چنتے ہیں، P_1 اور P_2 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_2 چنتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔یوں ہر ٹکڑے پر نقطہ باقی ٹکڑوں پر نقطوں سے ضروری نہیں کہ کوئی مشابہت رکھتا ہو۔ان نقطوں پر f کی قیمتوں کو لیتے ہوئے ہم مجموعہ

$$J_n = \sum_{m=1}^{n} f(x_m, y_m, z_m)\Delta s_m \tag{11.3}$$

لیتے ہیں جہاں x_m ، y_m ، z_m نقطہ Q_m کے محدد ہیں اور Δs_m اس ٹکڑے کی لمبائی ہے جس پر Q_m واقع ہے۔

$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}$$

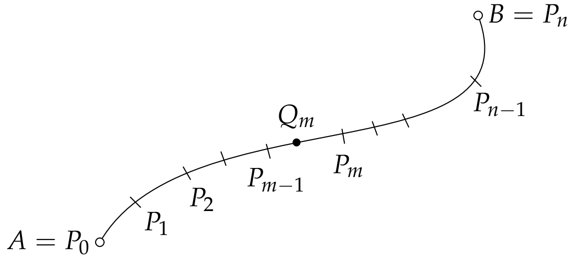
ہم اس طرح کے مجموعے مکمل بے قاعدگی سے $n = 2, 3, \cdots$ کے لئے یوں حاصل کرتے ہیں کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی تک پہنچے، Δs کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر تک پہنچتی ہو۔یوں ہمیں مجموعوں کا تسلسل $J_2, J_3, \cdots$ ملتا ہے۔اس تسلسل کی حد کو C پر A تا B تفاعل f کی **خطی تکمل**[9] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s$$

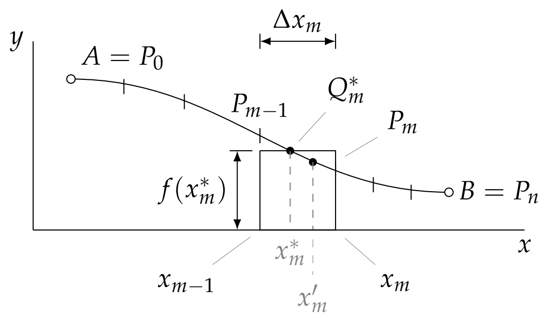
منحنی C کو **تکمل کی راہ** کہتے ہیں جبکہ $f(x, y, z)$ کو **متکمل**[10] کہتے ہیں۔

چونکہ f کو استمراری فرض کیا گیا اور C ہموار ہے لہٰذا یہ حد موجود ہو گا جس کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کی چناؤ کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ C پر کسی بھی نقطہ P کا تعین لمبائی قوس s سے کیا جاتا ہے۔یوں

line integral[9]
integrand[10]



شکل 11.2: C کی ٹکڑوں میں تقسیم



شکل 11.3: رقبہ اور تکمل (مثال 11.1)

A اور B کا تعین مطابقتی $s = a$ اور $s = b$ سے کیا جائے گا لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)]\,\mathrm{d}s \tag{11.4}$$

جو قطعی تکمل ہے۔ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمل بھی تسلسل $J_2, J_3, \cdots$ کی حد کو کہتے ہیں جس کی قیمت پر نا تو ٹکڑوں کی تقسیم اور نا ہی ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر پایا جاتا ہے۔مثال 11.1 میں مزید تفصیل دی گئی ہے۔

مثال 11.1: تکمل کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کے چناؤ کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے
آئیں دیکھتے ہیں کہ تکمل کی قیمت پر راہ کی ٹکڑوں میں تقسیم اور ان ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر کیوں نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 11.3 میں تفاعل $y = f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ ان نقطوں کے درمیان تفاعل کو بے قاعدہ ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ وقفہ P_m تا P_{m-1} کے مابین تفاعل

کے نیچے چھوٹا رقبہ ΔS_m ہے۔شکل 11.3 میں ایک مستطیل دکھایا گیا ہے جو نقطہ Q_m^* سے گزرتا ہے۔ Q_m^* یوں چنا گیا ہے کہ مستطیل کا رقبہ عین ΔS_m کے برابر ہو۔

$$\Delta S_m = f(x_m^*)\Delta x_m \qquad (\Delta x_m = x_m - x_{m-1})$$

اس وقفے پر بغیر کسی قاعدہ دوسرا نقطہ Q_m بھی چنا گیا ہے۔اس نقطے سے گزرتی مستطیل کا رقبہ $f(x_m')\Delta x_m$ ہو گا جہاں Q_m کا x محدد x_m' ہے۔

اب استمراری تفاعل سے مراد یہ ہے کہ ہم کسی بھی نقطہ پر Δx اتنی کم لے سکتے ہیں کہ Δx وقفے پر تفاعل میں کل تبدیلی زیادہ سے زیادہ ϵ ہو جہاں ϵ جتنی بھی چھوٹی قیمت کیوں نا ہو۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\left| f(x_m') - f(x_m^*) \right| \le \epsilon$$

جس کو

$$f(x_m') = f_m^* + t\epsilon \qquad (-1 \le t \le 1)$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں t ایسا متغیر ہے جس کی قیمت منفی اکائی سے مثبت اکائی تک ممکن ہے۔یوں Q_m' سے گزرتی مستطیل کا رقبہ

$$f(x_m')\Delta x_m = (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m$$

ہو گا۔یہ رقبہ اس صورت کم سے کم ہو گا جب $t = -1$ ہو اور اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $t = 1$ ہو۔ان دونوں صورتوں میں مستطیل کا رقبہ اصل تفاعل کے نیچے رقبے سے مختلف ہو گا۔تمام ٹکڑوں پر بے قاعدگی سے نقطے چنتے ہوئے تمام مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^{n} (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{m=1}^{n} f_m^*\Delta x_m + \epsilon \sum_{m=1}^{n} t\Delta x_m$$

اب چونکہ $|t| \le 1$ ہے لہٰذا دائیں جانب مجموعے کے اندر قیمت کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت $t = 1$ پر $\sum_{m=1}^{n} \Delta x_m = b - a$ حاصل ہو گی۔(حقیقت میں چونکہ ضروری نہیں ہے کہ t کی قیمت ہر مرتبہ اکائی ہی ہو لہٰذا اس مجموعے کی قیمت $b - a$ سے کم ہو گی۔) اب چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں لہٰذا ہم اسے اتنا کم رکھتے ہیں کہ $\epsilon(b - a)$ قابل نظر انداز ہو۔درج بالا میں پہلا مجموعہ اُن مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ ہے جن کا رقبہ عین تفاعل کے نیچے رقبے کے برابر رکھا گیا تھا لہٰذا Δx_m کی ہر قیمت پر یہ مجموعہ اصل رقبے کے برابر ہی ہو گا۔یوں درج بالا سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{m=1}^{n} (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{i=m}^{n} f_m^*\Delta x_m$$

جو $x = a$ تا $x = b$ تفاعل کے نیچے کل رقبہ ہے۔

یوں آپ نے دیکھا کہ ہر ٹکڑے پر Q_m بالکل بے قاعدگی سے چنتے ہوئے تفاعل کے نیچے اصل رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

□

عمومی مفروضہ

اس کتاب میں فرض کیا جائے گا کہ خطی تکمل کی ہر راہ ٹکڑوں میں ہموار[11] ہے، یعنی کہ راہ کو محدود تعداد کی ہموار ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

بدن راہ پر خطی تکمل کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\oint_C \qquad \left(\int_C \text{ کی جگہ}\right)$$

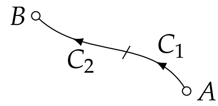
خطی تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے کہ قطعی تکمل کی درج ذیل جانی پہچانی خصوصیات خطی تکمل کے لئے بھی درست ہیں

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)} \qquad \int_C kf \,\mathrm{d}s = k\int_C f\,\mathrm{d}s \qquad (k \text{ مستقل}) \\
&\text{(ب)} \qquad \int_C (f+g)\,\mathrm{d}s = \int_C f\,\mathrm{d}s + \int_C g\,\mathrm{d}s \\
&\text{(پ)} \qquad \int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{11.5}$$

جہاں مساوات 11.5-پ میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ان ٹکڑوں کی سمت بندی عین C کی طرح ہے (شکل 11.4)۔ راہ پر تکمل لیتے ہوئے دائری سمت تبدیل کرنے سے حاصل قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔

---

[11] piecewise smooth



شکل 11.4: تکمل کی راہ کو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

11.2 خطی تکمل کا حل

خطی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے اس کو حل کیا جاتا ہے۔ایسا تکمل کی راہ C کی روپ کی مدد سے کیا جاتا ہے۔آئیں اس عمل کو دیکھتے ہیں۔

اگر C کی روپ

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} \qquad a \le s \le b$$

ہو (جہاں s راہ C کی لمبائی قوس ہے) تب ہم مساوات 11.4 کی مدد سے درج ذیل استعمال کرتے ہیں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(s),y(s),z(s)]\,\mathrm{d}s \tag{11.6}$$

اگر C کی روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

ہو (جہاں t کوئی مقدار معلوم ہے) تب ہم

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t),y(t),z(t)]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{11.7}$$

استعمال کرتے ہیں جہاں مساوات 10.31 سے

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

ہے اور گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی فرض کیا گیا ہے کہ $\boldsymbol{r}(t)$ اور $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ دونوں استمراری ہیں اور $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq \boldsymbol{0}$ ہے۔

آئیں مساوات 11.7 حاصل کرتے ہیں۔ہم $\boldsymbol{r}$ کی جگہ

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = \tilde{x}(t)\boldsymbol{i} + \tilde{y}(t)\boldsymbol{j} + \tilde{z}(t)\boldsymbol{k}$$

لکھ کر قوس لمبائی $s(t)$ حاصل کرتے ہیں۔اس کے بعد $\boldsymbol{r}(s(t)) = \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ یعنی $x(s(t)) = \tilde{x}(t)$، وغیرہ لکھ کر مساوات 11.6 کے دائیں ہاتھ میں قطعی تکمل کے قاعدے کے تحت

$$\int_a^b f[x(s), y(s), z(s)]\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)] \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

حاصل کرتے ہیں جو (استعمال کی گئی علامتوں میں تبدیل کے علاوہ) عین مساوات 11.7 ہے۔

چونکہ عموماً $\boldsymbol{r}(t)$ معلوم یا قابل معلوم ہو گا لہٰذا مساوات 11.7 عملی مسائل کی تقریباً تمام صورتوں کو حل کر پاتا ہے۔

مثال 11.2: برائے مساوات 11.6
تفاعل $f(x, y) = x^3 y$ کا شکل 11.5 میں دکھائی گئی گول قوس

$$\boldsymbol{r}(s) = \cos s\boldsymbol{i} + \sin s\boldsymbol{j} \qquad\qquad 0 \le s \le \frac{\pi}{2}$$

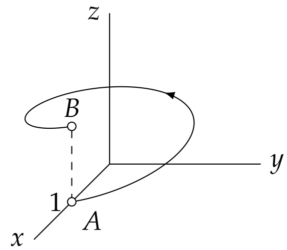
پر تکمل حاصل کریں۔

حل:چونکہ $x(s) = \cos s$ اور $y(s) = \sin s$ ہیں لہٰذا مساوات 11.5 سے درج ذیل ملتا ہے۔

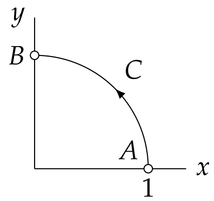
$$\begin{aligned}\int_C f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_C x^3 y\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 s \sin s\,\mathrm{d}s \\ &= \int_1^0 -u^3\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} \qquad\qquad (u = \sin s)\end{aligned}$$

□

مثال 11.3: برائے مساوات 11.7
xy مستوی میں نقطہ $A : (-1, 1, 0)$ سے نقطہ $B : (1, 5, 0)$ تک راہ $y = 2x + 3$ پر $\int_C x^2 y\,\mathrm{d}s$ کی قیمت دریافت کریں۔



(ب) فضا میں خطی تکمل کی راہ (مثال 11.4)



(الف) سطح میں تکمل کی راہ (مثال 11.2)

شکل 11.5: سطح میں راہ اور فضا میں راہ۔

حل: ہم C کو درج ذیل مقدار معلوم روپ[12] میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (2t+3)\boldsymbol{j} \qquad -1 \le t \le 1$$

یوں

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \implies \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{5}$$

ہو گا۔ راہ پر رہتے ہوئے $x^2y = t^2(2t+3) = 2t^3 + 3t^2$ ہو گا لہٰذا مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C x^2 y \,\mathrm{d}s = \sqrt{5}\int_{-1}^{1} (2t^3 + 3t^2)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{5}$$

□

مثال 11.4: فضا میں راہ پر خطی تکمل
پیچ دار راہ کو شکل 11.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر $\int_C (x^2+y^2+z^2)^2 \,\mathrm{d}s$ دریافت کریں۔

حل: پیچ دار راہ کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

[12] ظاہر ہے کہ ہم $t = x$ لیتے ہوئے راہ کو $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i} + (2x+3)\boldsymbol{j}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ہے لہٰذا

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\sin t\boldsymbol{i} + \cos \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{2}$$

ہو گا۔ اس راہ پر چلتے ہوئے

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^2 = (1 + t^2)^2$$

ہو گا اور یوں مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \,\mathrm{d}s &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}[\frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{2(2\pi)^3}{3} + 2\pi] \approx 3013\end{aligned}$$

□

ایسا خطی تکمل جس کا متکمل تجربی تفاعل ہو یا جو پیچیدہ قطعی تکمل دیتا ہو کو تکمل کے اعدادی طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔

کئی معاملوں میں خطی تکمل کے متکمل درج ذیل روپ رکھتے ہیں

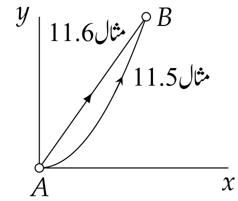
$$g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \quad g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{11.8}$$

جہاں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ تکمل کی راہ کی مقدار معلوم روپ میں موجود تفاعل کے تفرق ہیں۔ایسی صورت میں ہم

$$\int_C g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_C g(x,y,z)\,\mathrm{d}x \tag{11.9}$$

لکھتے ہیں۔ باقی دو صورتوں کے لئے بھی ایسا کیا جاتا ہے۔ایک ہی راہ C پر ان طرز کے تکمل کے مجموعے کو درج ذیل سادہ صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f\,\mathrm{d}x + \int_C g\,\mathrm{d}y + \int_C h\,\mathrm{d}z = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.10}$$



شکل 11.6: تکمل کے دو مختلف راہ (مثال 11.5 اور مثال 11.6)

راہ C کی روپ استعمال کرتے ہوئے تین میں سے دو آزاد متغیرات کو حذف کرتے ہوئے حاصل قطعی تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ تیسرا آزاد متغیر اس قطعی تکمل کا متغیر ہو گا۔

مثال 11.5: برائے مساوات 11.9 اور مساوات 11.10
خطی تکمل $\int_C [x^2y^2\,\mathrm{d}x + (x-y+z)\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z]$ کی قیمت دریافت کریں۔ تکمل کی راہ سطح $z = 5$ میں قوس مکافی $y = x^2$ میں نقطہ $A:(0,0,5)$ تا نقطہ $B:(1,1,5)$ ہے (شکل 11.6-الف)۔

حل: چونکہ $y = x^2$ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ یا $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔ چونکہ $z = 5$ غیر متغیر ہے لہٰذا متکمل کے آخری جزو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^1 [x^2x^4\,\mathrm{d}x + (x - x^2 + 5)2x\,\mathrm{d}x] = \int_0^1 (x^6 - 2x^3 + 2x^2 + 10x)\,\mathrm{d}x = \frac{223}{42} \approx 5.31$$

□

مثال 11.6: درج بالا مثال کے تکمل کو انہیں دو نقطوں کے درمیان سطح $z = 5$ میں راہ $y = x$ پر حاصل کریں (شکل 11.6-ب)۔

حل: اب $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 [x^2x^2\,\mathrm{d}x + (x - x + 5)x\,\mathrm{d}x] = \int_0^1 (x^4 + 5)\,\mathrm{d}x = \frac{26}{5} = 5.2$$

□

مثال 11.5 اور مثال 11.6 میں ایک جیسے متکمل، ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ پائے گئے البتہ ان مثالوں میں راہ مختلف تھی۔ تکمل کے جوابات بھی مختلف تھے۔اس نتیجے کے مطابق تکمل کی قیمت ابتدائی نقطہ، اختتامی نقطہ اور متکمل کے علاوہ راہ پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ اس بنیادی حقیقت پر مزید غور اسی باب میں کیا جائے گا۔

بعض اوقات مساوات 11.10 کے f ، g ، h سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 ہوں گے

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

لہٰذا

$$v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z = \left(v_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + v_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

ہو گا جہاں قوسین میں بند حصہ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ اور اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k} \qquad \text{(حصہ 10.5 دیکھیں)}$$

کا اندرونی ضرب ہے۔ $\boldsymbol{r}$ تکمل کی راہ C ہے۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\int_C (v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z) = \int -C\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \tag{11.11}$$

جس کو عموماً

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

لکھا جاتا ہے جہاں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{11.12}$$

ہے۔

مثال 11.7: قوت اور کام
ایک ذرہ پر متغیر قوت $\boldsymbol{f}$ عمل کرتی ہے جو ذرے کو راہ C پر ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک منتقل کرتی ہے۔اس قوت سے سر زد کام[13] درج ذیل خطی تکمل دیتی ہے

$$W = \int_C \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.13}$$

---

[13] work

جہاں تکمل کو راہ پر منتقلی کی سمت میں حاصل کیا جاتا ہے۔ مثال 7.7 میں کام کی تعریف اور تکمل کی تعریف بطور مجموعہ استعمال کرتے ہوئے درج بالا خطی تکمل لکھا گیا ہے۔

ہم وقت t کو تکمل کا متغیر چنتے ہیں۔ یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$$

ہو گا جہاں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار سمتیہ ہے۔ یوں مساوات 11.13 درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \tag{11.14}$$

جہاں ابتدائی لمحہ t_0 اور اختتامی لمحہ t_1 ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت

$$\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\dot{\boldsymbol{v}} \tag{11.15}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 11.14 سے درج ذیل ملتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2\right)\mathrm{d}t = \left.\frac{m}{2}\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2\right|_{t_0}^{t_1}$$

جس کے تحت ذرے کی میکانی توانائی میں اضافہ عین کام کے برابر ہے۔ یہ میکانیات کا بنیادی قاعدہ ہے۔

□

سوالات

راہ کی مثبت سمت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے کی رخ رکھتے ہوئے $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت سوال 11.1 تا سوال 11.8 میں دریافت کریں۔

سوال 11.1: سیدھے خط $y=-4x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1,-4)$ ۔

جواب: $\frac{17\sqrt{17}}{3}$

سوال 11.2: سیدھے خط $y=3x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(2,6)$ ۔

جواب: $\frac{80\sqrt{10}}{3}$

سوال 11.3: سیدھے خط پر نقطہ $(1,2)$ تا نقطہ $(3,0)$ ۔

جواب: $\frac{34\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.4: سیدھے خط پر نقطہ $(3,0)$ تا نقطہ $(1,2)$ ۔

جواب: $-\frac{34\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.5: گھڑی کی الٹ رخ دائرہ $x^2+y^2=9$ پر نقطہ $(3,0)$ تا نقطہ $(0,3)$ ۔

جواب: $\frac{27\pi}{2}$

سوال 11.6: x محور پر $(0,0)$ تا $(2,0)$ اور یہاں سے y محور کے متوازی $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{40}{3}$

سوال 11.7: y محور پر $(0,0)$ تا $(0,2)$ اور یہاں سے x محور کے متوازی $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{40}{3}$

سوال 11.8: نقطہ $(0,0)$ سے سیدھے خط پر نقطہ $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.9: **تکمل** $\int_C (x+z)y\,\mathrm{d}s$ کی قیمت کو دائرہ $x^2+y^2=1$ ، $z=2$ پر نقطہ $(0,0,2)$ تا نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2)$ دریافت کریں (گھڑی کی الٹ رخ)۔

جواب: $\frac{9}{4}-\sqrt{2}$

تکمل $\int_C (3y^2 \,\mathrm{d}x - x^2 \,\mathrm{d}y)$ کی قیمت کو سوال 11.10 تا سوال 11.12 میں دیے راہ پر دریافت کریں۔

سوال 11.10: سیدھے خط پر نقطہ $(0,1)$ تا نقطہ $(1,0)$۔

جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 11.11: قوس مکافی $y = x^2$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1,1)$۔

جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 11.12: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ نقطہ $(1,0)$ تا نقطہ $(1,1)$۔

جواب: $-\frac{8}{3}$

سوال 11.13 تا سوال 11.18 میں دی گئی راہ پر قوت $\boldsymbol{f} = 2x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$ کا کام دریافت کریں۔

سوال 11.13: x محور پر $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$۔

جواب: 1

سوال 11.14: $z = 2$ سطح میں y محور پر $(0,0,2)$ تا $(0,1,2)$۔

جواب: 2

سوال 11.15: سطح مکافی $y = x^2$ ، $z = 1$ پر $(0,0,1)$ تا $(1,1,1)$۔

جواب: 2

سوال 11.16: سطح مکافی $y = z^4$ ، $x = 2$ پر $(0,2,0)$ تا $(1,2,1)$۔

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.17: سیدھے خط $y = x$ ، $z = 2x$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$۔

جواب: 1

سوال 11.18: سیدھے خط $y=x^2$ ، $z=2x^3$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ ۔

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.19: مان لیں کہ قوس C کے تمام نقطوں پر $\boldsymbol{p}$ معین ہے اور کہ $\lvert\boldsymbol{p}\rvert$ محدود ہے یعنی C پر $\lvert\boldsymbol{p}\rvert < M$ ہے جہاں M کوئی مثبت عدد ہے۔ ثابت کریں کہ

$$\left|\int_C \boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| < Ml \tag{11.16}$$

ہو گا جہاں C کی لمبائی l ہے۔

جواب: اندرونی ضرب کے تحت $\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\lvert\boldsymbol{p}\rvert\lvert\mathrm{d}\boldsymbol{r}\rvert\cos\theta$ ہو گا۔ چونکہ $\lvert\boldsymbol{p}\rvert<M$ ہے اور $\cos\theta\le 1$ ہے لہٰذا $\lvert\boldsymbol{p}\rvert\cos\theta<M$ ہو گا۔ خطی تکمل کی تعریف مساوات 11.3 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\lvert\mathrm{d}\boldsymbol{r}\rvert=\Delta s$ لکھی گئی ہے۔

$$J_n=\sum_{m=1}^{n}\lvert\boldsymbol{p}\rvert\cos\theta\Delta s_m<\sum_{m=1}^{n}M\Delta s_m=M\sum_{m=1}^{n}\Delta s_m=Ml$$

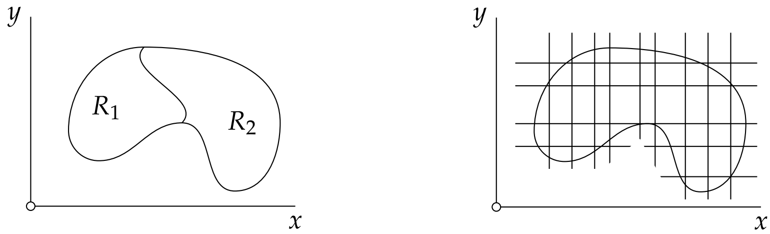
11.3 دوہرا تکمل

وقفہ $a\le x\le b$ کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x)$ کا x محور پر a تا b قطعی تکمل

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھا جاتا ہے۔ دوہرا تکمل کی صورت میں xy سطح میں بند محدود[14] خطہ R کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x,y)$ متکمل ہو گا۔

[14] "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو معقول وسعت کے دائرے میں گھیرا جا سکتا ہے۔



(الف) R کے متعدد ٹکڑے

(ب) خطے کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

شکل 11.7: دوہرا تکمل کی تعریف اور خواص

دوہرا تکمل کی تعریف قطعی تکمل کی تعریف سے مشابہت رکھتی ہے۔ہم x اور y محور کے متوازی خطوط کھینچ کر خطہ R کو ٹکڑے کرتے ہیں (شکل 11.7-الف)۔ R کے اندر ٹکڑوں کو 1 تا n کہتے ہیں۔ہر ٹکڑے میں کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً k مستطیلی ٹکڑے میں نقطہ (x_k, y_k) ہو گا۔ تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k \tag{11.17}$$

لیتے ہیں جہاں k مستطیلی ٹکڑے کا رقبہ A_k ہے۔ہم مثبت عدد n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . . کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ R میں $f(x,y)$ استمراری ہے اور R کو لامتناہی تعداد کی ہموار منحنیات گھیرتی ہیں۔ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . . کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x, y_k) کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا۔ اس حد کو خطہ R پر $f(x,y)$ کا **دوہرا تکمل**[15] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

دوہرا تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے یہ قطعی تکمل کی طرح کئی خواص رکھتا ہے۔فرض کریں کہ خطہ R میں متعین

[15] double integral

اور استمراری f اور g تفاعل کے متغیرات x اور y ہیں۔ تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\iint_R kf \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (k \text{ مستقل ہے})$$

$$\iint_R (f+g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_R g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.18}$$

$$\iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R_1} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{R_2} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (\text{شکل 11.7-ب})$$

مزید R میں کم از کم ایک ایسا نقطہ (x_0, y_0) ضرور پایا جاتا ہے کہ درج ذیل تعلق درست ثابت ہو

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(x_0,y_0)A \tag{11.19}$$

جہاں خطہ R کا رقبہ A ہے۔یہ تعلق دوہرا تکملات کا **اوسط قیمت مسئلہ**[16] کہلاتا ہے۔

خطہ R پر دوہرا تکملات کو یکے بعد دیگرے دو عدد تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔آئیں اس ترکیب کو سمجھیں۔

فرض کریں کہ R کو درج ذیل غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے (شکل 11.8-الف)

$$a \le x \le b, \quad g(x) \le y \le h(x)$$

تب $y = g(x)$ اور $y = h(x)$ خطہ R کی سرحد کو ظاہر کریں گے اور

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{11.20}$$

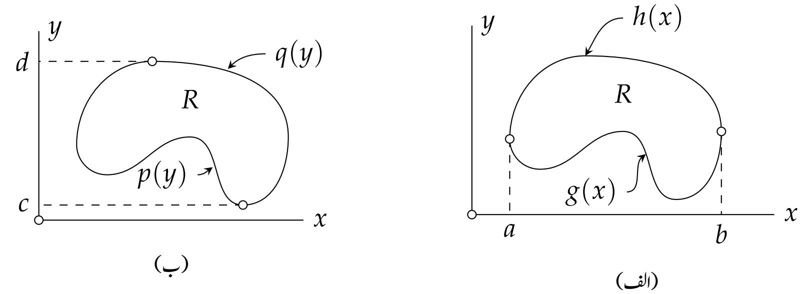
ہو گا۔ہم پہلے (چکور قوسین میں بند) اندرونی تکمل

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

کی قیمت حاصل کرتے ہیں جہاں x بطور مقدار معلوم کردار ادا کرتا ہے لہٰذا اس تکمل کا حاصل x کا تفاعل $F(x)$ ہو گا۔اس کے بعد x محور پر $F(x)$ کا تکمل a تا b حاصل کرتے ہوئے دوہرا تکمل (مساوات 11.20) کی قیمت حاصل ہو گی۔

---

[16] mean value theorem



شکل 11.8: تخمینہ دوہرا تکمل

اسی طرح اگر R کو درج ذیل غیر مساوات (شکل 11.8-ب)

$$c \le y \le d, \quad p(y) \le x \le q(y)$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب درج ذیل ہو گا

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{11.21}$$

جہاں اندرونی تکمل کا حاصل y کا تفاعل ہو گا جس کو y محور پر c تا d تکمل کرتے ہوئے دوہرا تکمل کی قیمت حاصل ہو گی۔

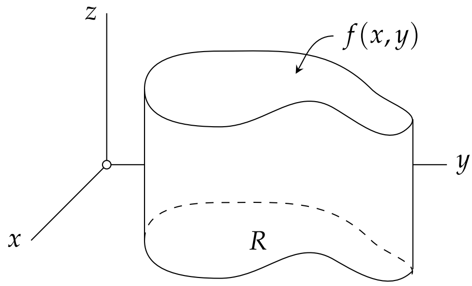
اگر R کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن نہ ہو لیکن R کو ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب علیحدہ علیحدہ ہر ٹکڑے پر $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل حاصل کرتے ہوئے تمام کا مجموعہ لیتے ہوئے R پر $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت حاصل ہو گی۔

دوہرا تکمل کے عملی استعمال

دوہرا تکمل کے کئی عملی جیومیٹریائی اور طبعی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مثلاً R کا رقبہ[17] A درج ذیل ہے۔

$$A = \iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

[17] area



شکل 11.9: دوہرا تکمل بطور حجم

چونکہ مساوات 11.17 میں جزو $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ سے مراد اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم ہے جس کے بنیاد کا رقبہ A_k اور قد $f(x_k, y_k)$ ہے (شکل 11.9) لہٰذا خطہ R کے اوپر سطح $z = f(x,y)\,(>0)$ کے نیچے حجم H درج ذیل ہے۔

$$H = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

فرض کریں کہ مستوی xy میں پھیلے کمیت کی کثافت (کمیت فی اکائی رقبہ) کو $f(x,y)$ ظاہر کرتی ہے۔تب R میں کل کمیت M درج ذیل ہو گی۔

$$M = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

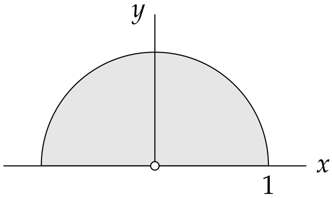
R میں موجود کمیت کی **مرکز ثقل**[18] کے محدد

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_R xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_R yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ہوں گے۔خطہ R میں موجود کمیت کے x اور y محور کے گرد **جمودی معیار اثر**[19] بالترتیب I_x اور I_y ہوں گے

$$I_x = \iint\limits_R y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad I_y = \iint\limits_R x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

[18] center of gravity
[19] moment of inertia



شکل 11.10: کثافت کمیت (مثال 11.8)

جبکہ مبدا کے گرد اس کی قطبی جمودی معیار اثر[20] I_0 ہو گی۔

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_R (x^2 + y^2) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

مثال 11.8: عملی دوہرا تکمل
خطہ $R: 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2},\ -1 \le x \le 1$ میں کثافت کمیت $f(x, y) = 1$ ہے (شکل 11.10)۔ مرکز ثقل اور جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_0 دریافت کریں۔

حل: R میں کل کمیت M درج ذیل ہے (جہاں آخری قدم پر تکمل میں $x = \sin\theta$ پر کیا گیا ہے)۔

$$M = \iint\limits_R 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

چونکہ $f(x, y) = 1$ ہے لہٰذا کل کمیت عین نصف دائرے کے رقبے کے برابر ہے۔ مرکز ثقل کے محدد

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2}{\pi}\iint\limits_R x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^0 z^2\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (\sqrt{1 - x^2} = z)\end{aligned}$$

اور

$$\bar{y} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_R y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1 - x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3}$$

---

[20] polar moment of inertia

ہیں۔ مزید

$$I_x = \iint\limits_R y^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \, dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 d\theta = \frac{\pi}{8}$$

اور

$$I_y = \iint\limits_R x^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 \, dy \right] dx = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{8}$$

سے قطبی جمودی معیار اثر I_0 درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{4}$$

مثال 11.9 میں I_x کو نسبتاً آسان ترکیب سے حاصل کیا گیا ہے۔

□

ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمل

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

میں

$$x = x(u)$$

پر کرتے ہوئے نیا متغیر u متعارف کیا جاتا ہے، جہاں کسی وقفہ $\alpha \le u \le \beta$ پر تفاعل $x(u)$ اور اس کا تفرق استمراری اور $x(\alpha) = a$ ، $x(\beta) = b$ [یا $x(\alpha) = b$ ، $x(\beta) = a$] ہیں اور جیسے جیسے $x(u)$ وقفہ a تا b پر تبدیل ہوتا ہو ویسے ویسے وقفہ α تا β پر u تبدیل ہوتا ہو۔ یوں

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f[x(u)] \frac{dx}{du} \, du \tag{11.22}$$

لکھا جاتا ہے۔مثال کے طور پر $f(x)=\sqrt{1-x^2}, a=0, b=1$ کی صورت میں $x=\sin u$ پر کرتے ہوئے

$$f[x(u)]=\sqrt{1-\sin^2 u}=\cos u, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\cos u, \quad \alpha=0, \quad \beta=\frac{\pi}{2}$$

ہوں گے جن سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}$$

دوہرا تکمل

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

کی صورت میں ہم نئے متغیرات u ، v متعارف کرنے کی خاطر

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v)$$

لکھتے ہیں، جہاں uv سطح میں کسی خطہ R^* پر تفاعل $x(u,v)$ ، $y(u,v)$ اور ان کے ایک درجی جزوی تفرق استمراری ہوں تا کہ R^* میں ہر نقطہ (u_0,v_0) کا خطہ R میں مطابقتی نقطہ $[x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)]$ پایا جائے اور مزید پورے R^* پر یعقوبی[21] J

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثبت اور یا پورے R^* پر یعقوبی[22] J منفی ہو۔تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{R^*} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{11.23}$$

یوں متکمل کو u ، v کی صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ضرب یعقوبی J کی حتمی قیمت لکھی جاتی ہے۔

---

[21] Jacobian

[22] جرمن ریاضی دان [1804-1851] کارل گستاف یعقوب یعقوبی

مثال کے طور پر **قطبی محدد**[23] r اور θ متعارف کرنے کی خاطر ہم

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

لکھتے ہیں لٰہذا

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

ہو گا اور یوں

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{R^*} f[r\cos\theta, r\sin\theta]r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

لکھا جائے گا جہاں xy سطح میں خطہ R کا سطح $r\theta$ میں مطابقتی خطہ R^* ہے۔

مثال 11.9: مساوات 11.23 استعمال کرتے ہوئے مثال 11.8 کی I_x دوبارہ دریافت کریں۔

حل:

$$I_x = \iint\limits_R y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\sin^2\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

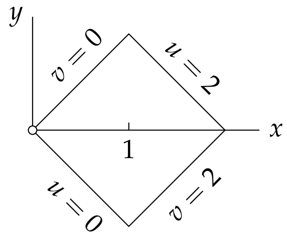
□

مثال 11.10: درج ذیل دوہرا تکمل حل کریں

$$\iint\limits_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

جہاں R کو شکل 11.11 میں دکھایا گیا ہے۔

[23] polar coordinates



شکل 11.11: مثال 11.10 میں تکمل کا خطہ

حل: R کی شکل کو دیکھ کر ہم $x+y=u$ اور $x-y=v$ تبادل چنتے ہیں۔ یوں $x=\frac{1}{2}(u+v)$ اور $y=\frac{1}{2}(u-v)$ ہو گے اور یعقوبی درج ذیل ہو گا۔

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

R کا مطابقتی چکور $0\le u\le 2$ ، $0\le v\le 2$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{2}(u^2+v^2)\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{8}{3}$$

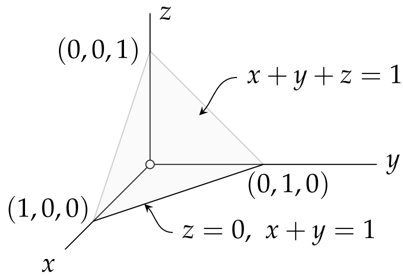
□

سوالات

سوال 11.20 تا سوال 11.26 حل کریں۔ تکمل کا خطہ بیان کریں۔

سوال 11.20: $\int_0^1\int_0^2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
جواب: $\frac{10}{3}$

سوال 11.21: $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
جواب: $\frac{\pi}{8}$



شکل 11.12: سطح $x+y+z=1$ کے نیچے ربع اول میں چو سطحہ

سوال 11.22: $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.23: $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

جواب: $\frac{1}{24}$

سوال 11.24: $\int_0^2\int_0^{4-2x}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

جواب: 8

سوال 11.25: $\int_0^2\int_{1+x}^{5-x}(1+xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

جواب: 12

سوال 11.26: $\int_0^1\int_{1+x}^{5-x}(1-xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

جواب: -1

سوال 11.27 تا سوال 11.30 میں فضا میں خطہ دیا گیا ہے۔اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 11.27: کارتیسی نظام کے ربع اول میں سطح $x+y+z=1$ کے نیچے چو سطحہ۔

جواب: شکل 11.12 میں سطح $x+y+z=1$ کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے جو x ، y اور z محور کو بالترتیب $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ پر چھوتی ہے۔ربع اول میں چو سطحی کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ ہیں۔مستوی xy پر $z=0$ ہو گا لہٰذا دی گئی سطح xy مستوی

کو خط $x+y=1$ یعنی $x=1-y$ پر قطع کرتی ہے۔ یوں ربع اول میں $x=0$ اور $x=1-y$ کے مابین خطہ R ہو گا۔ R کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ اور $(0,1,0)$ ہیں۔ اس طرح ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$H=\int_0^1\int_0^{1-y} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{1-y}(1-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_0^{1-y}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}(y^2-2y+1)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

سوال 11.28: وہ چو سطح جس کو سطح $2x+6y+z=12$ ربع اول سے کاٹتی ہے۔
جواب: 216

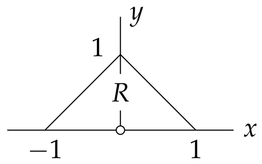
سوال 11.29: وہ حجم جس کو نلکی $x^2+y^2=1$ اور نلکی $y^2+z^2=1$ گھیرتی ہیں۔
جواب: نلکی $y^2+z^2=1$ سے حجم کی بالائی سطح $z=\sqrt{1-y^2}$ اور نچلی سطح $z=-\sqrt{1-y^2}$ ملتے ہیں۔ مشابہت سے ہم تکمل کو بالائی سطح اور xy مستوی کے درمیان حاصل کرتے ہوئے حاصل جواب کو 2 سے ضرب دے سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا جہاں $x^2+y^2=1$ سے x کے حدود $-\sqrt{1-y^2}$ اور $\sqrt{1-y^2}$ لکھے گئے ہیں۔

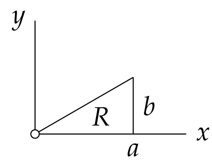
$$H=2\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{16}{3}$$

سوال 11.30: سطح $z=x^2$ اور سطح $x=z^2$ کے درمیان $y=0$ تا $y=2$
جواب: یہ سطحیں $x=0$ اور $x=1$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ بالائی سطح $z=\sqrt{x}$ ہے (تسلی کر لیں)۔ یوں xy مستوی اور بالائی سطح کے مابین حجم معلوم کرتے ہوئے اس سے xy مستوی اور نچلی سطح کے مابین حجم منفی کرتے ہیں۔

$$H=\int_2^0\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\tfrac{2}{3}$$

سوال 11.31 تا سوال 11.34 میں کمیت کے مرکز ثقل کے محدد $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ معلوم کریں۔ خطہ R اور اس میں کمیت کی کثافت $f(x,y)$ دی گئی ہے۔





شکل 11.13: خطہ کثافت (سوال 11.35)

سوال 11.31: $f(x,y)=1, \quad R: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$
جوابات: $\bar{x}=1,\ \bar{y}=\frac{3}{2}$

سوال 11.32: $f(x,y)=1, \quad R: x^2+y^2 \le 1,$ ربع اول
جوابات: $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4\pi}{3}$

سوال 11.33: $f(x,y)=x+y, \quad R: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4$
جوابات: $\bar{x}=\frac{12}{7},\ \bar{y}=\frac{50}{21}$

سوال 11.34: $f(x,y)=xy, \quad R: y \le 4-3x$ ربع اول
جوابات: $\bar{x}=\frac{8}{15},\ \bar{y}=\frac{8}{5}$

سوال 11.35: شکل 11.13 میں دکھائے گئے خطہ R میں کمیتی کثافت $f(x,y)=1$ پایا جاتا ہے۔ جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_z دریافت کریں۔

جوابات:

(الف) $I_x=\frac{ab^3}{12},\ I_y=\frac{a^3b}{4},\ I_0=I_x+I_y$
(ب) $I_x=I_y=\frac{1}{6},\ I_0=\frac{1}{3}$

قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے سوال 11.36 تا سوال 11.39 میں $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.36: $f=x+y,\ R: x^2+y^2<4,\ \ y \ge 0$
جواب: $\frac{11}{3}$

سوال 11.37: $f=\sqrt{x^2+y^2},\ R: x^2+y^2\le a,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0$
جواب: $\frac{a^3\pi}{6}$

سوال 11.38: $f=x^2+y^2,\ R: x^2+y^2\le a$
جواب: $\frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.39: $f=e^{-x^2-y^2},\quad R:$ $x^2+y^2=16$ اور $x^2+y^2=9$ کے درمیان چھلا
جواب: $\pi(e^{-9}-e^{-16})$

سوال 11.40 تا سوال 11.41 میں یعقوبی دریافت کریں۔حاصل جواب کی جیومیٹریائی وجہ بیان کریں۔

سوال 11.40: مستقیم حرکت $x=u+a,\quad y=v+b$
جواب: 1

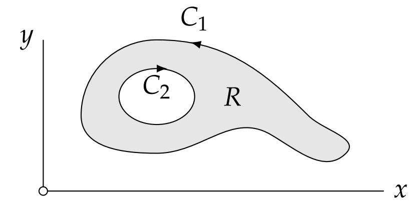
سوال 11.41: مرکز کے گرد گھومنا $x=u\cos\phi-v\sin\phi,\quad y=u\sin\phi+v\cos\phi$
جواب: 1

11.4 دوہرا تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ

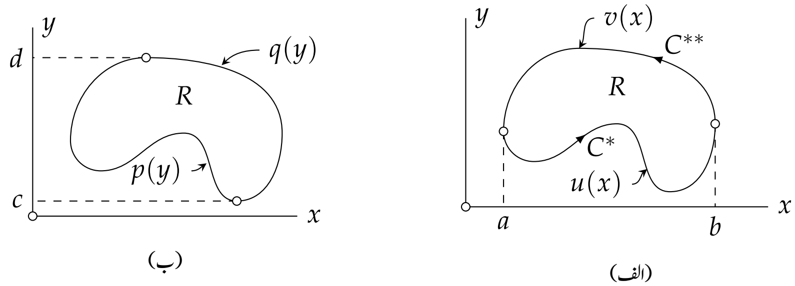
سطح میں کسی خطے پر دوہرا تکمل کو اس خطے کے سرحد پر خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔بعض اوقات ایسا کرنے سے آسانی سے حل ہونے والا تکمل حاصل ہوتا ہے۔تکمل پر نظریاتی غور و فکر کے دوران یہ تبادل سود مند ثابت ہوتا ہے۔یہ تبادل درج ذیل مسئلے کے تحت ممکن ہے۔

مسئلہ 11.1: سطح میں مسئلہ گرین[24] (دوہرا تکمل سے خطی تکمل اور خطی تکمل سے دوہرا تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ مستوی xy میں R ایک ایسا بند اور محدود خطہ ہے کہ جس کی سرحد C، محدود تعداد کی ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہے۔مزید فرض کریں کہ کسی ایسے پورے خطے میں، جس کا R حصہ ہو، تفاعل $f(x,y)$ اور $g(x,y)$ اور ان کے جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ استمراری ہوں۔تب درج ذیل ہو گا

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_C (f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y) \tag{11.24}$$



شکل 11.14: خطہ R کی سرحد کے دو حصے C_1 اور C_2 ہیں۔ C_1 پر گھڑی کی الٹ رخ جبکہ C_2 پر گھڑی کی رخ چلتے ہوئے خطی تکمل حاصل کیا جائے گا۔



شکل 11.15: مخصوص قسم کا خطہ (مسئلہ گرین)

جہاں خطی تکمل R کی پوری سرحد C پر یوں حاصل کیا جاتا ہے کہ تکمل لینے کی رخ C پر چلتے ہوئے R بائیں ہاتھ کو ہو (شکل 11.14)۔

ثبوت: ہم مسئلہ گرین[25] کو پہلے ایسے خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل دونوں صورتوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو (شکل 11.15)۔

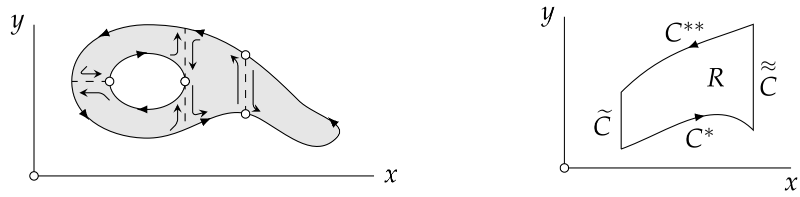
$$\text{(الف)} \quad a \le x \le b, \quad u(x) \le y \le v(x),$$
$$\text{(ب)} \quad c \le y \le d, \quad p(y) \le x \le q(y)$$

مساوات 11.20 استعمال کرتے ہوئے

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{11.25}$$

---

[24] Green's theorem
[25] برطانوی ریاضی دان جارج گرین [1793-1841]



(ب) (الف)

شکل 11.16: مسئلہ گرین کا ثبوت

لکھ کر (جہاں متکمل $\frac{\partial f}{\partial y}$ ہے) اندرونی تکمل

$$\int\limits_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = f(x,y)\Big|_{u(x)}^{v(x)} = f[x,v(x)] - f[x,u(x)]$$

حاصل کر کے مساوات 11.25 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\iint\limits_R \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b f[x,v(x)]\,\mathrm{d}x - \int_a^b f[x,u(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^b f[x,u(x)]\,\mathrm{d}x - \int_b^a f[x,v(x)]\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

چونکہ $y=u(x)$ شکل 11.15-الف میں سمت بند منحنی C^* کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $y=v(x)$ منحنی C^{**} کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا بائیں ہاتھ کے تکملات کو C^* اور C^{**} پر خطی تکملات

$$\iint\limits_R \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\int_{C^*} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{C^{**}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = -\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{11.26}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آخری قدم پر سرحد C^* اور سرحد C^{**} پر حاصل تکملات کو پوری سرحد C پر حاصل تکمل لکھا گیا ہے۔

اگر C کے کچھ حصے y محور کے متوازی ہوں (جیسے شکل 11.16-الف میں $\widetilde{C}$ اور $\widetilde{\widetilde{C}}$ ہیں) تب بھی مساوات 11.26 درست ہو گا۔ ایسا اس لئے ہو گا کہ y محور کے متوازی حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہٰذا سرحد کی ان حصوں (یعنی $\widetilde{C}$ اور $\widetilde{\widetilde{C}}$) پر تکمل کو بھی مساوات 11.26 میں شامل کرتے ہوئے R کی پوری سرحد پر تکمل لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح مساوات 11.21 استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d g[q(y), y]\,\mathrm{d}y + \int_d^c g[p(y), y]\,\mathrm{d}y \\
&= \int_C g(x, y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{11.27}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 11.26 اور مساوات 11.27 ملا کر مخصوص خطے کے لئے مساوات 11.24 ثابت ہوتی ہے۔

اب ہم مسئلے کو ایسی خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جو از خود مخصوص خطہ نہیں ہے لیکن اس کو محدود تعداد کی مخصوص خطوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے (شکل 11.16-ب)۔ایسی صورت میں ہم تمام ضمنی مخصوص خطوں پر مسئلہ لاگو کرتے ہوئے جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں۔بائیں ہاتھ کے ارکان کا مجموعہ R پر تکمل دیگا جبکہ دائیں ہاتھ کے ارکان سرحد C پر خطی تکمل جمع اضافی پیدا کردہ سرحدوں پر تکمل دیگا۔ہر اضافی سرحد پر خطی تکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ سمتوں میں حاصل کیا جائے گا۔آپس میں الٹ سمتوں میں خطی تکمل کا مجموعہ صفر ہوتا ہے لہٰذا تمام اضافی سرحدوں پر حاصل خطی تکملوں کا مجموعہ صفر ہو گا۔اس طرح دائیں ہاتھ ارکان کا مجموعہ R کی سرحد C پر خطی تکمل کے برابر ہو گا۔

□

مسئلہ گرین انتہائی اہم مسئلہ ہے جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔آئیں اس کی استعمال کی چند مثالیں دیکھیں۔

مثال 11.11: مستوی کا رقبہ بطور سرحد پر خطی تکمل
مسئلہ گرین یعنی مساوات 11.24 میں $f = 0$ اور $g = x$ پر کرنے سے

$$A = \iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C x\,\mathrm{d}y$$

ملتا ہے جس کا بایاں ہاتھ R کا رقبہ A دیتا ہے۔اسی طرح اگر ہم مساوات 11.24 میں $f = -y$ اور $g = 0$ پر کریں تب

$$A = \iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_C y\,\mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔ان دونوں جوابات سے

$$A = \frac{1}{2}\int_C (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \tag{11.28}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خطی تکمل کو مسئلہ گرین میں دیے گئے رخ حاصل کیا جائے گا۔یہ تکمل مستوی xy پر رقبے کو بطور اسی رقبے کی سرحد پر خطی تکمل پیش کرتا ہے۔ کئی **سطح پیما**[26] اسی کلیے پر مبنی ہیں۔

□

مثال 11.12: قطبی محدد میں مستوی سطح کا رقبہ
قطبی محدد r اور θ ہیں جہاں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

ہو گا جنہیں مساوات 11.28 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$A = \frac{1}{2}\int_C r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = \frac{1}{2}\int_C r^2\,\mathrm{d}\theta \tag{11.29}$$

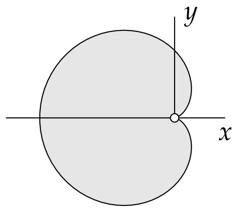
□

مساوات 11.29 کی مدد سے قلب نما منحنی $r = a(1-\cos\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$ کا رقبہ دریافت کرتے ہیں (شکل 11.17)۔

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$

مثال 11.13: لاپلاسی تفاعل کے دوہرا تکمل سے تفاعل کی عمودی مماس کے خطی تکمل کا تبادل
فرض کریں کہ xy مستوی میں مسئلہ گرین میں بیان کردہ خطے میں تفاعل $w(x,y)$ اور اس کا ایک درجی اور

planimeter[26]



شکل 11.17: منحنی قلب نما

دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ہم $f = -\frac{\partial w}{\partial y}$ اور $g = \frac{\partial w}{\partial x}$ لیتے ہیں۔یوں $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ خطہ میں استمراری ہوں گے۔یوں درج ذیل ہو گا جو w کا **لاپلاسی** ہے (حصہ 10.8)۔

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w \tag{11.30}$$

دی گئی f اور g استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\int_C (f \,\mathrm{d}x + g \,\mathrm{d}y) = \int_C \left(f \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + g \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s = \int_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s \tag{11.31}$$

جہاں s سرحد C کی لمبائی ہے۔دائیں ہاتھ آخری متکمل کو درج ذیل دو سمتیات

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \boldsymbol{j}$$

کا اندرونی ضرب

$$-\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = (\nabla w) \cdot \boldsymbol{n} \tag{11.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔درج ذیل سمتیہ $\boldsymbol{u}$ سرحد C کا مماس ہے (حصہ 10.5)

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \boldsymbol{j}$$

اور چونکہ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{n}$ سرحد C کا قائمہ سمتیہ ہے۔مزید $\boldsymbol{n}$ کا رخ خطہ R کی باہر کو ہے۔اس نتیجے اور مساوات 10.79 سے ظاہر ہے کہ مساوات 11.32 کا دایاں ہاتھ C کی بیرونی رخ قائمہ سمتیہ

کی سمت میں w کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}n}$ لکھتے ہوئے اور مساوات 11.30، مساوات 11.31 اور مساوات 11.32 کو مد نظر رکھتے ہوئے مسئلہ گرین سے درج ذیل کلیہ ثابت ہوتا ہے۔

$$\iint\limits_R \nabla^2 w \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C \frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s \tag{11.33}$$

اسی باب میں مسئلہ گرین کی استعمال اور اس سے حاصل مزید نتائج پر غور کیا جائے گا۔ □

سوالات

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 142 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8ا اور مساوات 1.9ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لٰہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لٰہذا انہیں مساوات 1.10ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لٰہذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

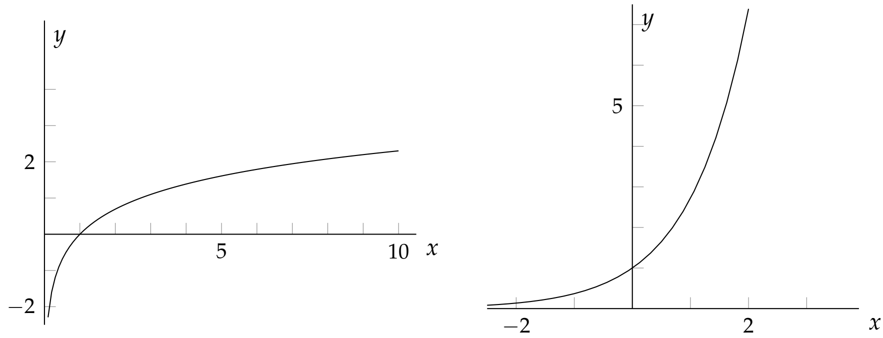
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $\frac{1}{x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = e^{-\ln x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

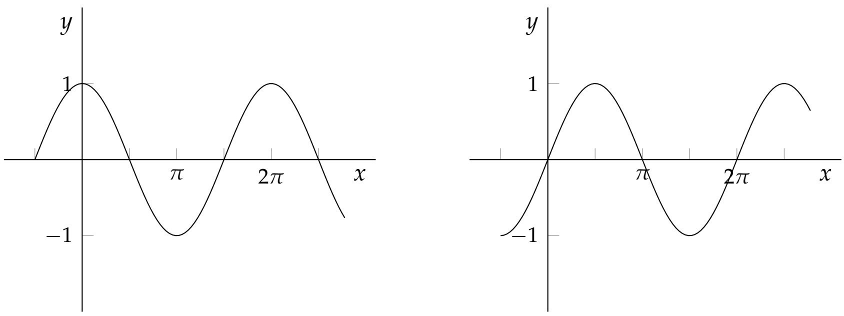
$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x — (ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$ — (ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{-\log x}=10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \tag{ب.6}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{ب.7}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned} \tag{ب.8}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \tag{ب.9}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{ب.10}$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned} \tag{ب.11}$$

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \\ \cos v - \cos u &= 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} \end{aligned} \tag{ب.12}$$

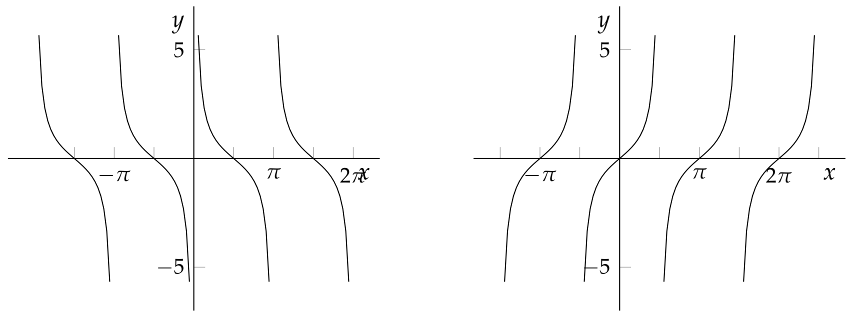
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A} \tag{ب.13}$$

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B} \tag{ب.14}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x} \tag{ب.15}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \tag{ب.16}$$



$\cot x$ (ب)　　$\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$ (ب.17)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$ (ب.18)

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$ (ب.19)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$ (ب.20)

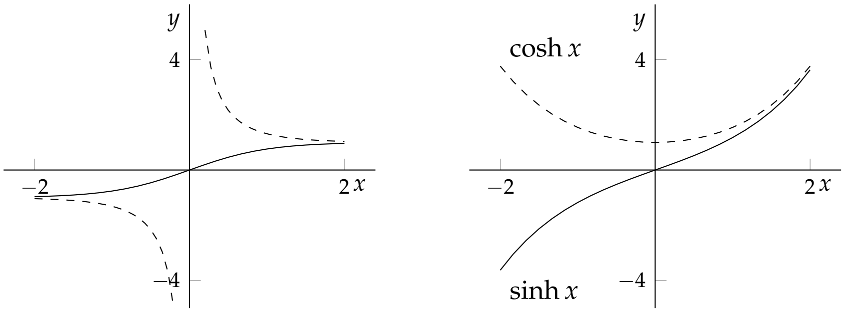
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$ (ب.21)

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$ (ب.22)

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$ (ب.23)

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$ (ب.24)



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔ (الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

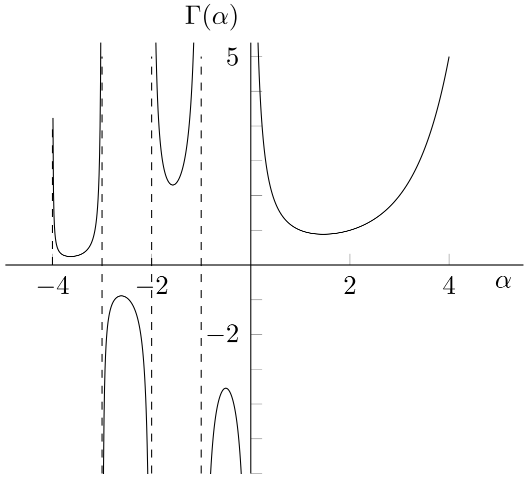
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\qquad(\alpha\neq 0,-1,\cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha=0,-1,-2,\cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)\approx\sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

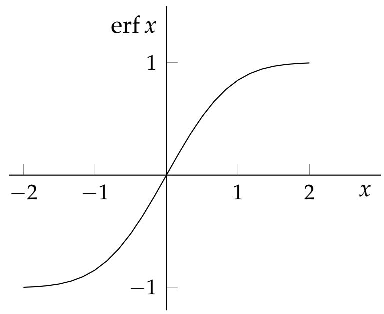
$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

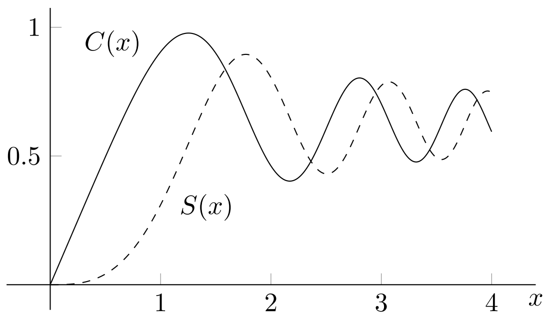
$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔**مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{ب.39}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{ب.40}$$

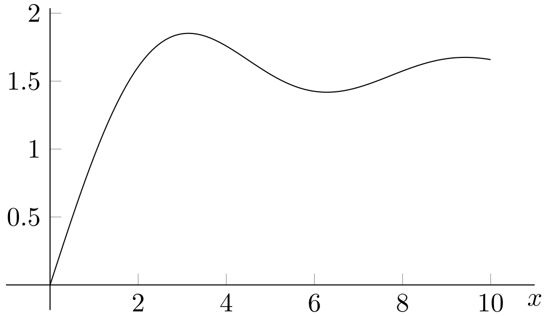
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.41}$$

$\operatorname{Si}\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔تکملہ تفاعل

$$\operatorname{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\mathrm{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$