انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ vii

1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات 1
1.1 نمونہ کشی 2
1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔ 13
1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات 22
1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل 40
1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی 52
1.6 عمودی خطوط کی نسلیں 70
1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت 74

2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات 81
2.1 متجانس خطی دودرجی تفرقی مساوات 81
2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 98
2.3 تفرقی عامل 113
2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش 118
2.5 یولر کوشی مساوات 134
2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی 143
2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 152
2.8 جبری ارتعاش۔ گمک 164
2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک 170
2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی 174
2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 185

3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات 193
3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 193
3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 205

3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 214
3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 217

4 نظام تفرقی مساوات 225
4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 226
4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 235
4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی 250
4.3.1 خطی نظام 251
4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 254
4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام 272
4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 281
4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 290
4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام 298
4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب 299

5 طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل 309
5.1 ترکیب طاقتی تسلسل 310
5.2 لیژانڈر مساوات۔ لیژانڈر کثیر رکنی 325
5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس 343
5.3.1 عملی استعمال 348
5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل 362
5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل 377

6 لاپلاس تبادلہ 385
6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت 386
6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات 395
6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل 408
6.4 ڈیراک ڈیلٹا ئی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاو 429
6.5 الجھاو 447
6.6 لاپلاس بدل کی تکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 456
6.7 تفرقی مساوات کے نظام 465
6.8 لاپلاس بدل کے عمومی کلیے 473

7 خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام 477
7.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب 478
7.2 قالبی ضرب 488
7.2.1 تبدیلی محل 495

7.3 خطی مساوات کے نظام۔گاوسی اسقاط . . . 508
7.3.1 صف زینہ دار صورت . . . 521
7.4 خطی غیر تابعیت۔درجہ قالب۔سمتی فضا . . . 529
7.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی . . . 543
7.6 دو درجی اور تین درجی مقطع قالب . . . 548
7.7 مقطع۔ قاعدہ کریمر . . . 551
7.8 معکوس قالب۔گاوس جارڈن اسقاط . . . 568
7.9 سمتی فضا،اندرونی ضرب، خطی تبادلہ . . . 583

8 سمتیات عارضی باب 601
8.1 غیر سمتیات اور سمتیات . . . 601
8.2 سمتیہ کے اجزاء . . . 603
8.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب . . . 609
8.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت . . . 618
8.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) . . . 624
8.6 اندرونی ضرب فضا . . . 637
8.7 سمتی ضرب . . . 639
8.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب . . . 641

ا اضافی ثبوت 561

ب مفید معلومات 565
ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات . . . 565

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 8

سمتیات عارضی باب

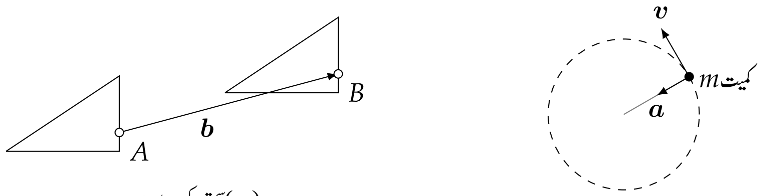
beginning very the at it palce shall i addition. latest the of 9.4 to 9.1 sec is this
issues. the all resolves chapter.this 7th my of

8.1 غیر سمتیات اور سمتیات

طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جنہیں ان کی مقدار سے مکمل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً کمیت، درجہ حرارت، برقی بار، وقت، رقبہ، حجم، فاصلہ، برقی دباو وغیرہ۔ ان میں سے ہر ایک کو (مقدار کی موزوں اکائی چن کر) ایک عدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ایسی تمام مقداروں کو غیر سمتیات[1] کہتے ہیں۔ غیر سمتی مقدار کی قیمت پر چننی گئی محدد کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اس کے برعکس طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں بھی پائی جاتی ہیں جن کی مکمل اظہار کے لئے ان کی قیمت کے علاوہ ان کی سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ ان کی ایک مثال میکانی قوت ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ قوت کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں تیر کی سمت، قوت کی سمت اور تیر کی لمبائی (کسی پیمائش کے تحت) قوت کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ شکل 8.1-الف میں ہلکے دھاگے سے بندھی ہوئی کمیت m کی دائری حرکت دکھائی گئی ہے۔ کمیت کی

[1] scalars



(الف) سمتی رفتار اور اسراع۔

(ب) سمتیہ کی دم اور سر۔

شکل 8.1: سمتیہ کی تفصیل۔

لحاتی سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کو تیر سے دکھایا گیا ہے۔اس تیر کی سمت، کمیت کی لحاتی سمتی رفتار دیتی ہے جبکہ تیر کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لحاتی سمتی رفتار کی قیمت دیتی ہے۔شکل میں کمیت کی اسراع $\boldsymbol{a}$ بھی دکھائی گئی ہے جہاں $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لحاتی اسراع کی قیمت دیتی ہے۔

سیدھی سطح میں تکون کی (بلا گھومے) منتقلی شکل 8.1-ب میں دکھائی گئی ہے۔اس حرکت کو (تکون کے ہر نقطے کی) طے فاصلے کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔تکون پر کسی نقطے کی ابتدائی مقام A سے اختتامی مقام B تک سمتی خط سے اس حرکت کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں سمتی خط $\boldsymbol{b}$ ، تکون کے ایک نقطہ کی A سے B منتقلی دکھاتی ہے۔تکون کے ہر نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک سمتی خطوط کھینچ کر ہمیں سمتی خطوط کی نسل ملتی ہے جس میں تمام سمتی خطوط کی لمبائی ایک جیسی اور سمت ایک جیسی ہو گی (یعنی یہ آپس میں متوازی ہوں گے)۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک سمتی خط، تکون کے ایک نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک منتقلی کو ظاہر کرتی ہے۔

اس سے سمتیہ کی درج ذیل تعریف بیان کی جا سکتی ہے۔ تعریف : سمتیہ

سمتی خط کو **سمتیہ**[2] کہتے ہیں۔اس کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی اور سمت کو سمتیہ کی سمت کہتے ہیں۔دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب ان کی لمبائی ایک جیسی ہو اور ان کی سمت ایک جیسی ہو۔

سمتیہ کی لمبائی کو سمتیہ کی **اقلیدسی معیار**[3] (یا معیار) اور سمتیہ کی **مقدار**[4] بھی کہتے ہیں۔

---

[2] vector
[3] Euclidean norm
[4] magnitude

سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو سمتیہ کی **دم**[5] اور اختتامی نقطے کو سمتیہ کا **سر**[6] کہتے ہیں۔ یوں شکل 8.1-ب میں نقطہ B سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کی دم ہے جبکہ نقطہ A اس کا سر ہے۔

ہم سمتیات کو موٹی لکھائی میں چھوٹی حروف تہجی مثلاً $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{v}$ ، وغیرہ، سے ظاہر کرتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں اسراع کو $\vec{a}$ یا $\overrightharpoon{a}$ لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی مقدار کو $|\boldsymbol{a}|$ لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ہم سمتیہ کو بغیر گھمائے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کر سکتے ہیں[7] یعنی ہم سمتیہ کی دم کہیں پر بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ سمتیہ کی دم کا مقام مقرر کرنے سے اس کے سر کا مقام بھی مقرر ہو گا۔

اگر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ایک دوسرے کے برابر ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{8.1}$$

اور اگر یہ آپس میں برابر نہ ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \tag{8.2}$$

کسی بھی سمتیہ کو ترسیمی طور پر موزوں لمبائی اور سمت کی سمتی خط سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

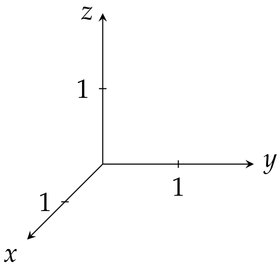
ایسا سمتیہ جس کی لمبائی اکائی (1) ہو **اکائی سمتیہ**[8] کہلاتا ہے۔

8.2 سمتیہ کے اجزاء

تین بُعدی فضا میں نقطہ ایک جیومیٹریائی چیز ہے جس کو محددی نظام میں تین مرتب اعداد (تصور کیا جا سکتا ہے یا) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی انداز میں پیش کی، جسے محددی نظام کی استعمال سے الجبرائی انداز میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

---

[5] tail
[6] head
[7] یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی صورتیں پائی جاتی ہیں جہاں سمتیہ کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ آپ میکانیات سے جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر لچکدار مادے پر قوت کا اطلاق، قوت کی سمت میں لکیر پر رہتے ہوئے، کسی بھی نقطے پر کیا جا سکتا ہے۔ اس سے **قابل منتقلی سمتیہ** کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ اس کے بر عکس، لچکدار مادے پر قوت کے اطلاق کا نقطہ تبدیل کرنے سے نتائج تبدیل ہوں گے جو نا قابل قبول بات ہے۔ یہ حقیقت **مقید سمتیہ** کی تصور کو جنم دیتی ہے۔ اس کتاب میں صرف قابل منتقلی سمتیات پر بات کی جائے گی۔
[8] unit vector



شکل 8.2: کارتیسی نظام محددی

نظام محدد کے **محور**[9]، آپس میں عمودی تین متقاطع سیدھے خطوط ہوں گے۔ان کے مقام انقطاع کو محددی نظام کا **مرکز**[10] کہتے ہیں۔ہم تینوں محور پر پیمائشی ناپ ایک جیسی چنتے ہیں لہٰذا محور پر مرکز سے اکائی فاصلے پر $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ نقطے پائے جائیں گے۔اس محددی نظام کو فضا میں **کارتیسی نظام محدد**[11] (شکل 8.2 سے رجوع کریں) کہتے ہیں۔

ہم اب ابتدائی نقطہ A سے اختتامی نقطہ B تک سمتیہ $\boldsymbol{a}$ پر غور کرتے ہیں (شکل 8.3-الف)۔اگر نقطہ A کے محور (x_1, y_1, z_1) اور نقطہ B کے محور (x_2, y_2, z_2) ہوں تب درج ذیل اعداد، اس کارتیسی محددی نظام کے لحاظ سے، سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے **اجزاء**[12] کہلاتے ہیں۔

$$a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1 \tag{8.3}$$

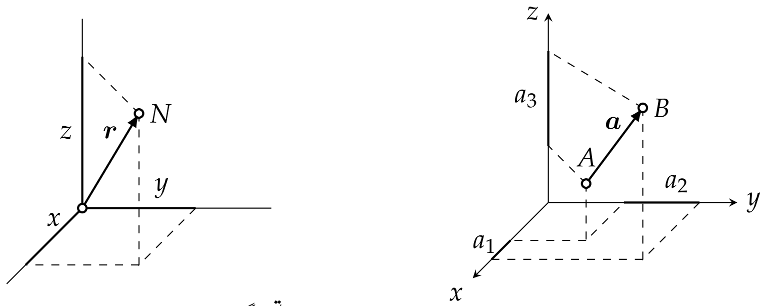
سمتیہ کی تعریف کے تحت $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی سے مراد A سے B تک کی لمبائی $\overline{AB}$ ہے جو مساوات 8.3 میں دیے گئے اجزاء کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{8.4}$$

مثال 8.1: سمتیہ کے اجزاء اور اس کی لمبائی

سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم $(-2,3,1)$ اور سر $(5,-2,7)$ ہیں۔اس سمتیہ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی دریافت کریں۔

[9] coordinates
[10] origin
[11] Cartesian coordinate system
[12] components



(ب) تعین گر سمتیہ کے سر کے محور اس سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔

(الف) اجزائے سمتیہ

شکل 8.3: سمتیہ کے اجزاء اور تعین گر سمتیہ۔

حل: اجزاء $a_1 = 5 - (-2) = 7, \quad a_2 = -2 - 3 = -5, \quad a_3 = 7 - 1 = 6$ اور لمبائی

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{110}$$

ہے۔ اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم کو نقطہ $(4, 1, 3)$ پر منتقل کریں تب اس کا سر $(11, -4, 9)$ پر ہو گا۔

مساوات 8.3 میں دیے گئے اجزاء کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\boldsymbol{a}$ کی دم کو کارتیسی محدد کی مرکز پر منتقل کیا جائے تب $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء اس کی سر کے محور ہوں گے۔ ایسا سمتیہ جس کو شکل 8.3-ب میں دکھایا گیا ہے **تعین گر سمتیہ**[13] کہلاتا ہے اور اس کو $\boldsymbol{r}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$\boldsymbol{a}$ کی دم کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے سمتیہ کا سر بھی اتنا ہی اپنی جگہ سے ہلتا ہے لہٰذا مساوات 8.3 سے ظاہر ہے کہ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 کی قیمت پر $\boldsymbol{a}$ کی ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں کسی بھی معین کارتیسی محددی نظام کے حوالے سے سمتیہ کو مکمل طور پر تین (محوری) اعداد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

وہ سمتیہ جس کے اجزاء 0 ، 0 ، 0 ہوں **معدوم سمتیہ**[14] یا **صفر سمتیہ**[15] $\boldsymbol{0}$ کہلاتا ہے۔ یوں کوئی بھی تین اعداد بہ شمول 0 ، 0 ، 0 سمتیہ کے اجزاء ہو سکتے ہیں۔

---

[13] position vector
[14] null vector
[15] zero vector

معین نظام محدد کی صورت میں ہر مرتب تین اعداد ایک منفرد سمتیہ کو ظاہر کریں گے۔یہ تین اعداد سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔اسی طرح معین نظام محدد میں ہر سمتیہ کے اجزاء سے سمتیہ کو تین مرتب اعداد کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی نقطہ نظر سے کی گئی۔ہم اب تین مرتب حقیقی اعداد (جو سمتیہ کے اجزاء کہلاتے ہیں) کو سمتیہ کی **تعریف** کہہ سکتے ہیں۔اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتیہ کی جیومیٹریائی صورت حاصل کر سکتے ہیں۔

یوں دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ صرف اور صرف اس صورت ایک جیسے ہوں گے جب ان کے تین مطابقتی اجزاء ایک جیسے ہوں۔ لہٰذا درج ذیل سمتی مساوات

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

سے مراد درج ذیل تین مساوات ہیں جہاں a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 ایک ہی کارتیسی نظام محدد میں بالترتیب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مطابقتی اجزاء ہیں۔

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

ظاہر ہے کہ اگر ایک سمتیہ کوئی حقیقی یا جیومیٹریائی چیز ہو تب اس کی لمبائی اور سمت پر چننی گئی نظام محدد کا کوئی اثر نہیں ہونا چاہیے۔ اجزائے سمتیہ کو ایک نظام محدد سے دوسری نظام محدد میں منتقل کرنے کے قواعد پر یہ حقیقت کچھ شرائط عائد کرتی ہے جن پر اگلے بابوں میں تبصرہ کیا جائے گا۔

اگلے باب میں سمتیہ کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہر مرتب n اعداد کو سمتیہ تصور کیا جائے گا، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے۔

سوالات

سوال 8.1 تا سوال 8.10 میں سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{u}|$ حاصل کریں۔ $\boldsymbol{u}$ کا خط کھینچیں۔

سوال 8.1: $A:(2,3,0), \quad B:(-4,6,0)$

جوابات: $u_3 = 0$ ، $u_2 = 3$ ، $u_1 = -6$ ، $|\boldsymbol{u}| = 3\sqrt{5}$

سوال 8.2: $A:(5,3,1), \quad B:(1,7,2)$

جوابات: $u_3=1$ ، $u_2=4$ ، $u_1=-4$ ، $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{33}$

سوال 8.3: $A:(1.2,-1,2.5), \quad B:(2.4,1.6,-3.2)$

جوابات: $u_3=-5.7$ ، $u_2=2.6$ ، $u_1=1.2$ ، $|\boldsymbol{u}|=6.38$

سوال 8.4: $A:(0,0,3), \quad B:(4,0,0)$

جوابات: $u_3=-3$ ، $u_2=0$ ، $u_1=4$ ، $|\boldsymbol{u}|=5$

سوال 8.5: $A:(3,3,3), \quad B:(1,1,1)$

جوابات: $u_3=-2$ ، $u_2=-2$ ، $u_1=-2$ ، $|\boldsymbol{u}|=2\sqrt{3}$

سوال 8.6: $A:(1,1,1), \quad B:(3,3,3)$

جوابات: $u_3=2$ ، $u_2=2$ ، $u_1=2$ ، $|\boldsymbol{u}|=2\sqrt{3}$

سوال 8.7: $A:(2,2,2), \quad B:(2,2,0)$

جوابات: $u_3=0$ ، $u_2=0$ ، $u_1=0$ ، $|\boldsymbol{u}|=0$ ؛ یہ صفر سمتیہ ہے۔

سوال 8.8: $A:(0,7,8), \quad B:(-3,1,8)$

جوابات: $u_3=0$ ، $u_2=6$ ، $u_1=-3$ ، $|\boldsymbol{u}|=3\sqrt{5}$

سوال 8.9: $A:(100,200,300), \quad B:(100,204,303)$

جوابات: $u_3=3$ ، $u_2=4$ ، $u_1=0$ ، $|\boldsymbol{u}|=5$

سوال 8.10: $A:(-5,-6,-2), \quad B:(-8,-6,-4)$

جوابات: $u_3=-2$ ، $u_2=0$ ، $u_1=-3$ ، $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{13}$

سوال 8.11 تا سوال 8.20 میں ابتدائی نقطہ A اور سمتیہ کے اجزاء دیے گئے ہیں۔ سمتیہ کا اختتامی نقطہ دریافت کریں۔

سوال 8.11: $3, 1, 4 \quad ; A : (-2, 3, 1)$
جواب: $1, 4, 5$

سوال 8.12: $5, 1, 7 \quad ; A : (0, 0, 0)$
جواب: $5, 1, 7$

سوال 8.13: $0, 0, 0 \quad ; A : (5, 2, -6)$
جواب: $5, 2, -6$

سوال 8.14: $-5, -7, 2 \quad ; A : (3, 6, 1)$
جواب: $-2, -1, 3$

سوال 8.15: $4, 4, 4 \quad ; A : (4, 4, 4)$
جواب: $8, 8, 8$

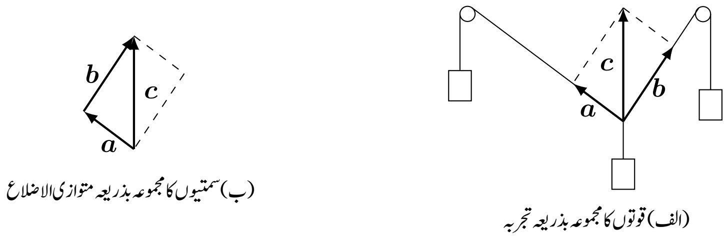
سوال 8.16: $-7, -7, -7 \quad ; A : (7, 7, 7)$
جواب: $0, 0, 0$

سوال 8.17: $3, 4, 5 \quad ; A : (-3, -4, -5)$
جواب: $0, 0, 0$

سوال 8.18: $-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 1 \quad ; A : (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
جواب: $-1, 1, \frac{4}{3}$

سوال 8.19: $1.1, -0.4, -0.3 \quad ; A : (0.2, -0.1, 0.5)$
جواب: $1.3, -0.5, 0.2$

سوال 8.20: $12.6, 9, -14 \quad ; A : (11.3, -10, -15.8)$
جواب: $23.9, -1, -29.8$



شکل 8.4: تجربہ سے قوتوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کے مجموعے کا حصول حاصل ہوتا ہے۔

8.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب

چونکہ ہم سمتیات کو حساب کتاب کے لئے استعمال کرنا چاہتے ہیں لہٰذا سمتیات کے دو عدد الجبرائی اعمال پیش کرتے ہیں جنہیں سمتیات کا مجموعہ اور سمتیات کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کہتے ہیں۔

تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ دو قوتوں کا حاصل، متوازی الاضلاع (شکل 8.4) سے ملتا ہے۔اس سے سمتیات کے مجموعے کی درج ذیل تعریف حاصل ہوتی ہے۔

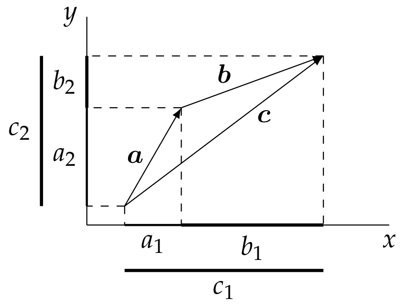
تعریف: سمتیات کا مجموعہ
دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کو لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}$ کے سر کے ساتھ $\boldsymbol{b}$ کی دم ملائیں۔اب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی مجموعے کی تعریف وہ سمتیہ $\boldsymbol{c}$ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کی دم سے $\boldsymbol{b}$ کے سر تک کھینچی جائے گی (شکل 8.5-الف)۔اس عمل کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{8.5}$$

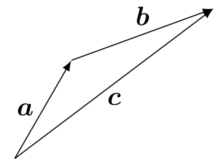
سمتیات کی مجموعے کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر کسی معین کارتیسی نظام محدد میں $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء b_1 ، b_2 اور b_3 ہوں تب حاصل جمع سمتیہ $\boldsymbol{c}$ کے اجزاء c_1 ، c_2 اور c_3 درج ذیل ہوں گے۔

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3 \tag{8.6}$$

شکل 8.5-ب میں اس عمل کو سطح پر دکھایا گیا ہے، اور فضا میں بھی بالکل ایسا ہی ہو گا۔



(ب) سمتیات کے مطابقتی اجزاء کو جمع کرتے ہوئے حاصل جمع سمتیہ کے اجزاء حاصل ہوتے ہیں۔



(الف) سر کے ساتھ دم ملا کر سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 8.5: مجموعہ سمتیات۔

مجموعے کی تعریف یا مساوات 8.6 سے مجموعہ سمتیات کی درج ذیل خصوصیات ملتی ہیں جہاں $-\boldsymbol{a}$ سے مراد ایسا سمتیہ ہے جس کی لمبائی $|\boldsymbol{a}|$ اور سمت $\boldsymbol{a}$ کے الٹ ہو۔

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)} \qquad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \qquad \text{قانون تبادل}\\
&\text{(ب)} \qquad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \qquad \text{قانون تلازم}\\
&\text{(پ)} \qquad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\\
&\text{(ت)} \qquad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{8.7}$$

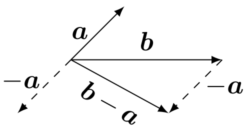
مساوات 8.7-ب میں ہم $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ لکھ سکتے ہیں اور یہی طریقہ زیادہ اعداد کے سمتیات کا مجموعہ لکھنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مجموعہ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ کی جگہ $2\boldsymbol{a}$ لکھا جاتا ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ ان سے (اور $-\boldsymbol{a}$ کے استعمال سے) ہم سمتیات کا دوسرا الجبرائی عمل بیان کرتے ہیں۔

سمتیات کا غیر سمتیات (اعداد) کے ساتھ ضرب

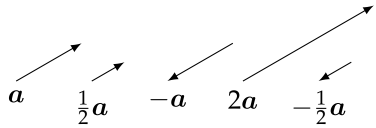
اگر $\boldsymbol{a}$ ایک سمتیہ اور q کوئی حقیقی عدد ہو تب سمتیہ $q\boldsymbol{a}$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$q\boldsymbol{a}$ کی لمبائی $|q||\boldsymbol{a}|$ ہے۔

اگر $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ہو اور $q>0$ ہو تب $q\boldsymbol{a}$ کی سمت وہی ہو گی جو $\boldsymbol{a}$ کی تھی۔



(ب) سمتیات کا فرق



(الف) سمتیات کا غیر سمتیات کے ساتھ ضرب۔

شکل 8.6: سمتیات کا غیر سمتیہ کے ساتھ ضرب اور سمتیات کا فرق۔

اگر $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو اور $q < 0$ ہو تب $q\boldsymbol{a}$ کی سمت $\boldsymbol{a}$ کی سمت کے الٹ ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ یا $q = 0$ ہو (اور یا دونوں صفر ہوں) تب $q\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

ان قواعد کی سادہ مثالیں شکل 8.6-الف میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں تب اسی نظام محدد میں $q\boldsymbol{a}$ کے اجزاء qa_1 ، qa_2 اور qa_3 ہوں گے۔اسی طرح سمتیہ کی تعریف سے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
q(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= q\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b} \\
(c+k)\boldsymbol{a} &= c\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a} \\
c(k\boldsymbol{a}) &= (ck)\boldsymbol{a} \qquad \text{جس کو } ck\boldsymbol{a} \text{ لکھا جاتا ہے} \\
1\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

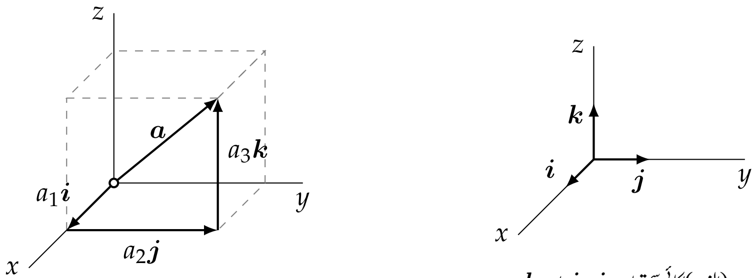
مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
0\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{0} \\
(-1)\boldsymbol{a} &= -\boldsymbol{a}
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

ہم $\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a})$ کی جگہ $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ لکھ سکتے ہیں (شکل 8.6-ب)۔

کسی بھی ایک کارتیسی نظام محدد کو استعمال کرتے ہوئے، ہم سمتیہ $\boldsymbol{a}$ جس کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں کو تین ایسی سمتیات کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں جو اس کارتیسی نظام کے تین محور کے متوازی ہوں۔ہم اس کارتیسی نظام کے ساتھ تین ایسے اکائی سمتیات، جنہیں ہم $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کہیں گے، وابستہ کرتے ہیں جن کی مثبت سمت اس کارتیسی نظام کے محور کی مثبت سمت ہو۔ یوں $\boldsymbol{a}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل 8.7)۔

$$
\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}
\tag{8.10}
$$



(الف) اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$

(ب) سمتیہ کا تین اکائی سمتیات کی مدد سے اظہار

شکل 8.7: اکائی سمتیات اور ان کا استعمال۔

شکل 8.7-الف میں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کی دم کو کارتیسی نظام کے مرکز پر رکھا گیا ہے۔ یہ اکائی سمتیات آپس میں **عمودی یا قائمہ**[16] ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ اس نظام محدد کی **ثلاثہ اکائی قائمہ سمتیات** ہیں۔

کسی بھی سمتیہ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کرتے ہوئے اسی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اکائی سمتیہ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{8.11}$$

مثال 8.2: کسی کارتیسی نظام میں اگر $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ ہوں، تب درج ذیل ہوں گے۔

$$3\boldsymbol{a} = 9\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k}, \quad -\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad 1.2\boldsymbol{a} - 0.5\boldsymbol{b} = 6.1\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3.4\boldsymbol{k}$$

---

[16] orthogonal

مثال 8.3: کسی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم A پر ہے جبکہ اس کا سر B پر ہے۔اسی سمت میں کسی بھی سمتیہ کو $l\boldsymbol{a}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں l غیر سمتی مستقل ہے۔اب اگر $l\boldsymbol{a}$ سمتیہ کی دم A پر ہو تب $l = 0$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر نقطہ A پر ہو گا جبکہ $l = 1$ کی صورت میں اس کا سر نقطہ B پر ہو گا۔اسی طرح $l = \frac{1}{2}$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر $\boldsymbol{a}$ کے عین وسط پر ہو گا۔

مثال 8.4: اکائی سمتیہ

سمتیہ $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔اسی سمت میں ایسا سمتیہ حاصل کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔

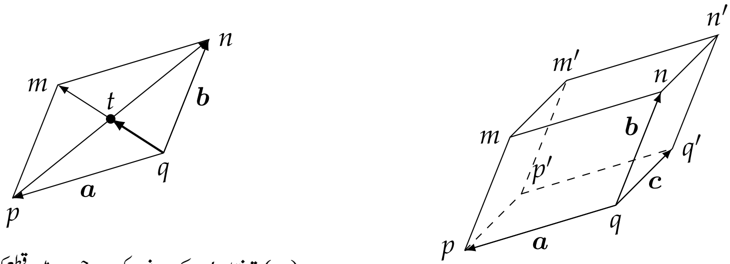
حل: $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38}$ ہے۔یوں مساوات 8.11 کے تحت $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{38}}$$

ہو گا۔کسی بھی اکائی سمتیہ کو غیر سمتی l سے ضرب دینے سے اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درکار سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$7\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{14\boldsymbol{i} - 35\boldsymbol{j} + 21\boldsymbol{k}}{\sqrt{38}} = 2.27\boldsymbol{i} - 6.68\boldsymbol{j} + 3.41\boldsymbol{k}$$

مثال 8.5: $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ شکل 8.8-الف میں دکھائے گئے چپٹا ڈبے کے تین قریبی کنارے ہیں۔ڈبے کی سامنے سطح $mnqp$ کا وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ اور $\boldsymbol{v}_{np}$ دریافت کریں جہاں وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ کی دم q اور سر m ہیں۔جیسا



(ب) وتر نقطہ t پر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

(الف) چپٹا ڈبا۔

شکل 8.8: سمتیات کا استعمال۔مثال 8.5

شکل 8.8 -ب میں دکھایا گیا ہے، وتری سمتیات $\boldsymbol{v}_{mq}$ اور $\boldsymbol{v}_{np}$ ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔نقطہ t دریافت کرتے ہوئے ثابت کریں کہ دونوں وتر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

حل: شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}_{mq} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{r}_{np} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$$

شکل 8.8-ب سے ظاہر ہے کہ q کو ابتدائی نقطہ تصور کرتے ہوئے t تک کئی راستوں سے پہنچا جا سکتا ہے۔ چونکہ t وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا q سے t تک سمتیہ کو $\boldsymbol{v}_{tq} = l_1\boldsymbol{v}_{mq}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_1 < 1$ ممکن ہے۔اسی طرح q سے پہلے p اور یہاں سے $\boldsymbol{v}_{np}$ کی سمت میں چلتے ہوئے بھی نقطہ t تک پہنچنا ممکن ہے۔ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{tq} = \boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{v}_{np}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_2 < 1$ ممکن ہے۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{v}_{tq} = l_1\boldsymbol{v}_{mq} = \boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{v}_{np} \quad \implies l_1(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + l_2(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \tag{8.12}$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}(l_1 - 1 + l_2) + \boldsymbol{c}(l_1 - l_2) = 0$$

ملتا ہے۔اب چونکہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ غیر صفر ہیں اور ان کی سمتیں بھی مختلف ہیں لہٰذا درج بالا مساوات صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب دونوں قوسین صفر ہوں یعنی:

$$\begin{aligned} l_1 - 1 + l_2 &= 0 \\ l_1 - l_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔اب $l_1 = \frac{1}{2}$ کی صورت میں مساوات 8.12 سے $v_{tq} = \frac{1}{2} v_{mq}$ ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ نقطہ t عین mq کے وسط میں پایا جاتا ہے۔ مساوات 8.12 کے اگلے حصے سے اسی طرح ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ t عین np کے وسط میں پایا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 8.21 تا سوال 8.30 میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{k}$ لیں۔

سوال 8.21: $-4\boldsymbol{a}, \frac{1}{4}\boldsymbol{a}, 4\boldsymbol{a}$
جوابات: $-4\boldsymbol{a} = -8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k},\ \frac{1}{4}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{j} + \frac{1}{4}\boldsymbol{k}, 4\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

سوال 8.22: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
جوابات: $-\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$

سوال 8.23: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$
جوابات: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = -5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 8.24: $\left|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right|, \left|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\right|, \left|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\right|$
جوابات: $\sqrt{35}, \sqrt{35}, 3^{\frac{3}{2}}$

سوال 8.25: $\left|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\right|, \left|\boldsymbol{a}\right| + \left|\boldsymbol{b}\right|$
جوابات: $5.916, 7.835$

سوال 8.26: $\left|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right|, \left|\boldsymbol{a}\right| - \left|\boldsymbol{b}\right|$
جوابات: $5.916, -2.936$

سوال 8.27: $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}, \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$
جوابات: $0.82\boldsymbol{i} - 0.41\boldsymbol{j} + 0.41\boldsymbol{k},\ -0.56\boldsymbol{i} - 0.31\boldsymbol{j} + 0.74\boldsymbol{k},\ -\boldsymbol{k}$

سوال 8.28: $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|}, \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}, \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|}$
جوابات: $-0.17\boldsymbol{i} - 0.51\boldsymbol{j} + 0.85\boldsymbol{k},\ -0.43\boldsymbol{i} - 0.29\boldsymbol{j} + 0.86\boldsymbol{k},\ -0.23\boldsymbol{i} - 0.69\boldsymbol{j} + 0.69\boldsymbol{k}$

سوال 8.29: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
جوابات: $-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

سوال 8.30: $4(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}), 4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$
جوابات: $20\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$

سوال 8.31: قوت $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{p}=-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ ہیں۔ایسی قوت $\boldsymbol{m}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{m}$ ، $\boldsymbol{n}$ اور $\boldsymbol{p}$ توازن میں ہوں۔

جواب: $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$

سوال 8.32: ثابت کریں کہ شکل 8.8 میں وتر $m'q$ اور $n'p$ ایک دونوں کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

جواب: $\boldsymbol{v}_{m'q}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ اور $\boldsymbol{v}_{n'p}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ ہیں۔اب $\boldsymbol{v}_{tq}=l_1\boldsymbol{v}_{m'q}$ اور اسی طرح $\boldsymbol{v}_{tq}=\boldsymbol{a}+l_2\boldsymbol{v}_{n'p}$ لکھا جا سکتا ہے۔انہیں برابر پر کرتے ہوئے

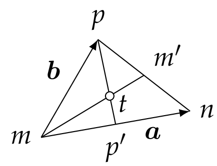
$$l_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+l_2(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

یعنی $\boldsymbol{a}(l_1-1+l_2)+\boldsymbol{b}(l_1-l_2)+\boldsymbol{c}(l_1-l_2)=0$ ملتا ہے۔چونکہ سمتیات صفر نہیں ہیں لہٰذا قوسین صفر ہوں گے۔یوں حاصل ہمزاد مساوات $l_1-1+l_2=0$ اور $l_1-l_2=0$ حل کرتے ہوئے $l_1=l_2=\frac{1}{2}$ ملتا ہے۔

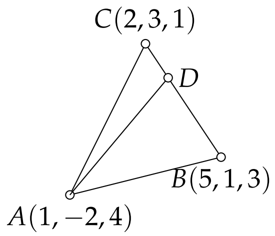
سوال 8.33: تکون کی تین کونوں سے سامنے اطراف کی وسط کو ملانے والے خط ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔ t کے دونوں اطراف، خط کی لمبائی کا نسبت دریافت کریں۔

جواب: تکون کو شکل 8.9-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں mn کی وسط پر نقطہ p' اور pn کی وسط پر نقطہ m' دکھائے گئے ہیں۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{v}_{m'n}$ جس کی دم نقطہ n پر ہے کو $\boldsymbol{v}_{m'n}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ لکھا جا سکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{m'm}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}_{m'n}$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{v}_{p'p}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ لکھا جا سکتا ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{tm}=\boldsymbol{b}+l_1\boldsymbol{v}_{p'p}$ اور $\boldsymbol{v}_{tm}=l_2\boldsymbol{v}_{m'm}$ لکھے جا سکتے ہیں۔انہیں حل کرتے ہوئے $l_1=l_2=\frac{2}{3}$ ملتا ہے۔یوں $m'm$ خط کے دو حصوں کا تناسب $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ یعنی $2:1$ ہو گا۔

سوال 8.34: تکون کے کونے $A(1,-2,4)$ ، $B(5,1,3)$ اور $C(2,3,1)$ ہیں۔ BC پر D پایا جاتا ہے جہاں $\overline{BD}=2\overline{CD}$ ہے۔اس کو شکل 8.34-ب میں دکھایا گیا ہے۔خط AD کی لمبائی دریافت کریں۔



(الف)سوال 8.33 کی شکل۔



(ب)سوال 8.34 کی شکل۔

شکل 8.9: سمتیات کا استعمال۔

جواب: $\boldsymbol{v}_{BA} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{v}_{CB} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ ہیں۔اب دی گئی معلومات کے تحت $\boldsymbol{v}_{DB} = \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_{CB}$ ہے۔یوں $\boldsymbol{v}_{DA} = \boldsymbol{v}_{BA} + \boldsymbol{v}_{DB}$ یعنی $\boldsymbol{v}_{AD} = 2\boldsymbol{i} + \frac{13}{3}\boldsymbol{j} - \frac{7}{3}\boldsymbol{k}$ ہو گا جس کی لمبائی $\frac{\sqrt{254}}{3}$ ہے۔

سوال 8.35: ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے ایک کونے سے سامنے والی طرف کی وسط تک لکیر، وتر کو $2:1$ تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

سوال 8.36 تا سوال 8.38 میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل کریں۔ظاہر ہے کہ اکائی سمتیہ کو -1 سے ضرب دے کر الٹ سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔

سوال 8.36: $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{j},\ l = 5$

جوابات: $\boldsymbol{j}$ ، $5\boldsymbol{j}$

سوال 8.37: $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ l = 2$

جوابات: $-0.535\boldsymbol{i} + 0.267\boldsymbol{j} + 0.802\boldsymbol{k},\ -3.74\boldsymbol{i} + 1.87\boldsymbol{j} + 5.61\boldsymbol{k}$

سوال 8.38: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ l = 10$

جوابات: $0.96\boldsymbol{i} - 0.27\boldsymbol{j},\ 9.61\boldsymbol{i} - 2.74\boldsymbol{j}$

8.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے تمام سمتیات کا سلسلہ V جو سمتی مجموعہ (مساوات 8.7) اور سمتی ضرب (مساوات 8.8) کے الجبرائی قواعد پر پورا اترتا ہو کو **سمتی فضا**[17] یا **خطی فضا**[18] کہتے ہیں۔ سمتی فضا کا تصور اس لئے اہم ہے کہ عملی دلچسپی کے دیگر سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادل وغیرہ پر مبنی ہوں پائے جاتے ہیں جن کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب کی بالکل ایسی ہی فطری تعریف کی جا سکتی ہے۔

مسئلہ 8.1: حقیقی سمتی فضا
اگر سلسلہ V کے ارکان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، ... درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے ہیں) پر پورا اترتے ہوں تب V **حقیقی سمتی فضا**[19] یا **حقیقی خطی فضا** کہلاتا ہے اور یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) **سمتیات** کہلاتے ہیں۔

(الف) **سمتی جمع** V کے ہر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا مجموعہ کہلاتا اور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) **قانون تبادل۔** V کے ہر دو ارکان $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{8.13}$$

(الف-2) **قانون تلازم۔** V کے ہر تین ارکان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \qquad (\text{جو } \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \text{ لکھا جاتا ہے}) \tag{8.14}$$

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو **صفر سمتیہ** کہلاتا اور $\mathbf{0}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a} \tag{8.15}$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-\boldsymbol{a}$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0} \tag{8.16}$$

[17] vector space
[18] linear space
[19] real vector space

(ب) **غیر سمتی ضرب۔** حقیقی اعداد غیر سمتی کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور c کا **حاصل ضرب** کہلاتا اور $c\boldsymbol{a}$ (یا $\boldsymbol{a}c$) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(ب-1) **قانون جزئیتی تقسیم۔** ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b} \tag{8.17}$$

(ب-2) **قانون جزئیتی تقسیم۔** ہر غیر سمتی c، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(c+k)\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a} \tag{8.18}$$

(ب-3) **قانون وابستگی۔** ہر غیر سمتی c، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(k\boldsymbol{a}) = (ck)\boldsymbol{a} \qquad (\text{جو } ck\boldsymbol{a} \text{ لکھا جاتا ہے}) \tag{8.19}$$

(ب-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{8.20}$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے **مخلوط سمتی فضا** کی مسلمی تعریف حاصل ہو گی۔

سمتی فضا پر مزید بحث حصہ 7.9 میں کی جائے گی۔آئیں اب سمتی فضا کی چند اہم خصوصیات پر غور کریں۔

فرض کریں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سلسلہ V کے ارکان ہیں۔ان کے **خطی مجموعے**[20] سے مراد درج ذیل ہے جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)}+c_2\boldsymbol{a}_{(2)}+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

[20] linear combination

سمتی فضا کی تعریف کے تحت درج بالا ازخود V کا رکن سمتیہ ہو گا۔اس طرز کی تمام مجموعوں کا سلسلہ S ، ان سمتیات کا **احاطہ**[21] کہلاتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ یہ سمتیات S کے **پیدا کار**[22] ہیں۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔

خطی مجموعے کو استعمال کرتے ہوئے ہم خطی تابعیت اور خطی غیر تابعیت متعارف کرتے ہیں۔

سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ** پیدا کرتے ہیں جب درج ذیل

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)}+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_{(m)}=\boldsymbol{0} \tag{8.21}$$

سے مراد $c_1=0$ ، $\cdots$ ، $c_m=0$ ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سمتیات **خطی طور غیر تابع** ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 7.84 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ **خطی طور تابع**[23] کہلاتے ہیں۔

$m=1$ کی صورت میں مساوات 7.84 سے $c\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ $\boldsymbol{a}$ اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ہو۔

مثال 8.6: خطی طور تابع اور خطی طور غیر تابع سمتیات کے سلسلے

سمتیات $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ خطی طور تابع ہیں چونکہ $6\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ لکھ کر $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔

اگر V میں غیر تابع سمتیات کی تعداد n ہو جبکہ V میں موجود n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا **بُعد** n ہو گا اور V کو n **بُعدی** کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو

span[21]
generator[22]
linearly dependent[23]

V کی **اساس**[24] کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ **منفرد** ہو گا۔

اس کی مثال فضا کے تمام سمتیات (حصہ 8.1) کی سمتی فضا ہے۔اس سمتی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عدد سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ (حصہ 8.3) کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ فضا سہ بُعدی ہے۔

اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)}+c_2\boldsymbol{a}_{(2)}+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_{(m)}=\boldsymbol{0} \tag{8.22}$$

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 8.22 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ حاصل ہوتا ہے۔اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 8.22 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور غیر تابع**[25] کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات کا **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[26] ہے۔اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.22 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور تابع**[27] کہلاتے ہیں۔خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے مثلاً $c_1\neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 8.22 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{a}_{(1)}=k_2\boldsymbol{a}_{(2)}+\cdots-k_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (k_j=-\frac{c_j}{c_1})$$

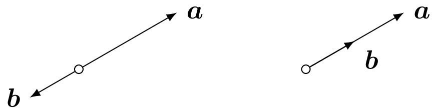
جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($\boldsymbol{a}_{(1)}=\boldsymbol{0}$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔اگر $m=1$ ہو تب مساوات 8.22 کو ہم $c_1\boldsymbol{a}_{(1)}=\boldsymbol{0}$ لکھیں گے جس میں $k_1\neq 0$ اس صورت ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{a}_{(1)}=\boldsymbol{0}$ ہو جو خطی تابعیت کی تعریف کے تحت خطی طور تابع ہے۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

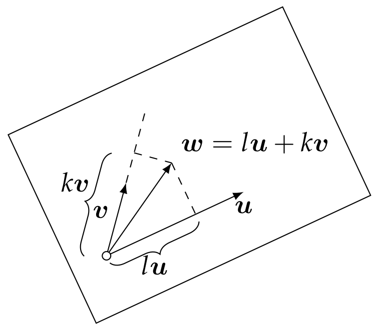
مسئلہ 8.2: خطی طور تابعیت
اگر مساوات 8.22 صرف اور صرف اس صورت درست ہو جب تمام c_1 تا c_m صفر ہوں تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ خطی طور تابع ہوں گے۔

---

[24] basis
[25] linear independent
[26] linearly independent set
[27] linearly dependent



شکل 8.10: ہم خطی سمتیات۔



شکل 8.11: ہم سطحی سمتیات۔

درج بالا لازم اور معقول (کافی) شرط کو ہی عموماً تابعیت کی تعریف تصور کی جاتی ہے۔

اگر ان میں کوئی ایک سمتیہ بھی صفر سمتیہ ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ خطی طور غیر تابع ہوں گے، مثلاً $\boldsymbol{a}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ کی صورت میں مساوات 8.22 میں $k_1 \neq 0$ اور $k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0$ ہو سکتا ہے۔

سہ بُعدی فضا میں دو عدد خطی طور تابع سمتیات **ہم خطی**[28] ہوں گے (شکل 8.10) یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ ایک ہی سیدھی خط پر واقع ہوں گے۔ایسے تین سمتیات $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ جو خطی طور تابع سلسلہ پیدا کرتے ہوں **ہم سطحی**[29] کہلاتے ہیں، یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ سمتیات ایک ہی سیدھی سطح پر واقع ہوں گے (شکل 8.11)۔ درحقیقت خطی تابعیت کا مطلب یہ ہے کہ ایک سمتیہ کو بقایا سمتیات کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ سہ بُعدی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عددی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سہ بُعدی فضا میں چار یا چار سے زیادہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

collinear[28]
coplanar[29]

سوالات

ثابت کریں کہ سوال 8.39 تا سوال 8.42 میں دیے گئے سمتیات کا سلسلہ سمتی فضا پیدا کرتا ہے۔اس فضا کی بُعد اور اساس دریافت کریں۔

سوال 8.39: سہ بُعدی فضا وہ تمام سمتیات جن کا پہلا جزو صفر ہے۔

جوابات: 2 ؛ $\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{k}$

سوال 8.40: ایسے تمام سمتیات جنہیں $b\boldsymbol{i} + k(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ لکھا جا سکتا ہے جہاں b اور k کوئی بھی غیر سمتی ہو سکتے ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

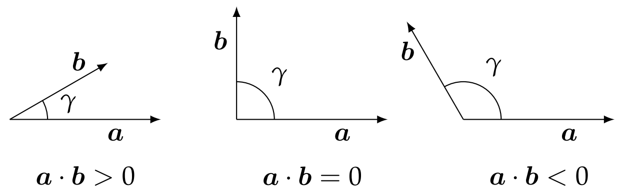
سوال 8.41: ایسے تمام n مرتب اعداد $(a_1, \cdots, a_n)$ کا سلسلہ جن کے مجموعے کی تعریف اور غیر سمتی کے ساتھ ضرب کی تعریف درج ذیل ہو۔

$$
\begin{aligned}
(a_n, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) &= (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n) \\
c(a_n, \cdots, a_n) &= (ca_n, \cdots, ca_n)
\end{aligned}
$$

جوابات: n ؛ $(1, 0, \cdots, 0)$ ، $(0, 1, \cdots, 0)$ ، $\cdots$ ، $(0, 0, \cdots, 1)$

سوال 8.42: ایسے تمام تفاعل جنہیں $y(x) = a\cos x + b\sin x$ لکھا جا سکتا ہے جہاں a اور b اختیاری مستقل ہیں۔ان تفاعل کے مجموعے اور غیر سمتیات کے ساتھ ضرب عمومی قواعد کے تحت ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\cos x$ ، $\sin x$



شکل 8.12: سمتیات کے مابین زاویہ۔

8.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)

سہ بُعدی فضا میں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی اندرونی ضرب[30] جس کو $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ لکھا جاتا ہے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\gamma (0 \le \gamma \le \pi)$ سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مابین زاویہ ہے (جو دونوں سمتیات کی دم ایک ہی نقطے پر رکھ کر ناپا جاتا ہے)۔ (شکل 8.12)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\gamma && (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}) \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= 0 && (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \text{ یا } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \text{ یا } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0})
\end{aligned}
\tag{8.23}
$$

اندرونی ضرب کو ضرب نقطہ[31] بھی کہتے ہیں۔اندرونی ضرب کا حاصل غیر سمتی (حقیقی عدد) ہوتا ہے اور یوں اندرونی ضرب کو غیر سمتی ضرب[32] بھی کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 8.23 میں $\cos\gamma$ کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 8.12) لہٰذا اندرونی ضرب کی قیمت بھی مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے۔ زاویہ 0 تا π کے درمیان صرف $\gamma = \frac{\pi}{2}$ پر $\cos\gamma = 0$ ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.3: قائمیت[33]
دو عدد غیر صفر سمتیات آپس میں صرف اور صرف اس صورت قائم الزاویہ (عمودی) ہوں گے جب ان کا اندرونی ضرب صرف کے برابر ہو۔

---

[30] inner product
[31] dot product
[32] scalar product
[33] orthogonality

مساوات 8.23 میں $b = a$ پر کرنے سے $a \cdot a = |a|^2$ حاصل ہوتا ہے اور یوں سمتیہ کی لمبائی (اقلیدسی معیار) کو اندرونی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} \qquad (\geq 0) \tag{8.24}$$

درج بالا اور مساوات 8.23 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos \gamma = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}} \tag{8.25}$$

اندرونی ضرب کی تعریف سے درج ذیل خصوصیات اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) \quad [q_1\boldsymbol{a} + q_2\boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} = q_1\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + q_2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \quad (\text{خطیت})\\
&(\text{ب}) \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \quad (\text{تشاکل})\\
&(\text{پ}) \quad \left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0 \\ &\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \text{ اگر } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \end{aligned}\right\} \text{یقینی مثبت}
\end{aligned} \tag{8.26}$$

یوں ضرب نقطہ استبدالی اور سمتیات کی جمع کے لئے جزئیتی تقسیمی ہے۔ مساوات 8.26 میں $q_1 = 1$ اور $q_2 = 1$ لینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \quad (\text{جزئیتی تقسیم}) \tag{8.27}$$

مساوات 8.23 اور $\cos \gamma \leq 1$ سے درج ذیل **شوارز عدم مساوات**[34] [35] ملتی ہے۔

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \qquad (\text{شوارز عدم مساوات}) \tag{8.28}$$

درج بالا اور مساوات 8.24 استعمال کرتے ہوئے آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \qquad (\text{تکونی عدم مساوات}) \tag{8.29}$$

مساوات 8.24 کی مدد سے

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}\\
|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

[34] Schwarz inequality

[35] جرمن ریاضی دان ہرمن امندس شوارز [1843-1921]

لکھ کر دونوں مساوات جمع کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2) \qquad \text{(متوازی الاضلاع مساوات)} \tag{8.30}$$

سمتیات کو اجزاء کی صورت میں لکھ کر

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

ان کا غیر سمتی ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\qquad+a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں لہٰذا مساوات 8.23 میں $\gamma=\frac{\pi}{2}$ ہو گا اور یوں $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$ ہو گا۔اسی طرح چونکہ $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{i}$ ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا مساوات 8.23 میں $\gamma=0$ ہو گا اور یوں $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$ ہو گا۔اسی عمل سے آپ درج ذیل غیر سمتی ضرب کے تعلقات لکھ سکتے ہیں جنہیں درج بالا میں

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1 \tag{8.31}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0 \tag{8.32}$$

پر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{8.33}$$

اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}\,(\neq\boldsymbol{0})$ سمتیات کے مابین زاویہ γ ہو تب درج ذیل حقیقی عدد

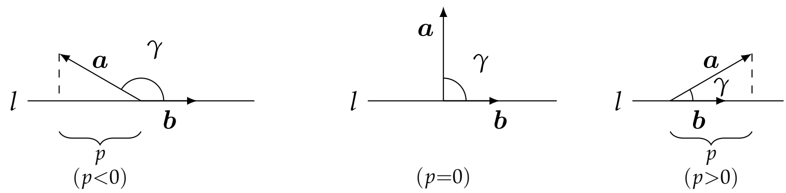
$$p=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

$\boldsymbol{b}$ کی سمت میں $\boldsymbol{a}$ کا **جزو یا عمودی سایہ**[36] ہو گا۔اگر $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ہو تب γ غیر معین (بے معنی) ہو گا اور ہم $p=0$ لیں گے۔

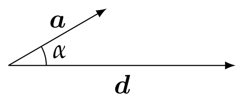
یوں $\boldsymbol{b}$ کی سمت میں خط l پر $\boldsymbol{a}$ کے عمودی سائے کی لمبائی $|p|$ ہو گی۔ p کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 8.13)۔

---

[36] projection



شکل 8.13: $\boldsymbol{b}$ کی سمتی میں $\boldsymbol{a}$ کا جزو۔



شکل 8.14: قوت اور کام (مثال 8.7)

یوں کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کی سمت میں سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں گے۔

مساوات 8.25 کی مدد سے درج ذیل ہو گا

$$p = \boldsymbol{a}\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} \qquad (\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}) \tag{8.34}$$

اور اگر $\boldsymbol{b}$ اکائی سمتیہ ہو تب اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

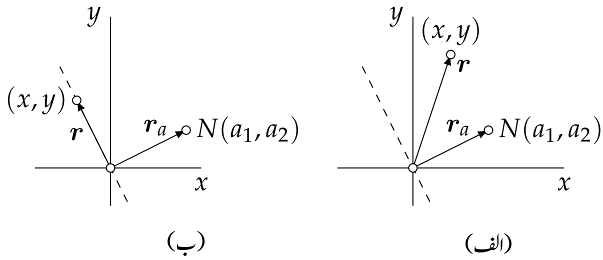
$$p = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{8.35}$$

مثال 8.7: قوت اور کام
فرض کریں کہ قوت $\boldsymbol{a}$ کسی چیز کو اپنی جگہ سے ہٹا کر سمتی فاصلہ $\boldsymbol{d}$ منتقل کرتا ہے۔ $\boldsymbol{d}$ کی سمت میں قوت کا جزو ضرب $|\boldsymbol{d}|$ کام W کی تعریف ہے یعنی

$$W = |a||d|\cos\alpha = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{8.36}$$

جہاں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{d}$ کے درمیان زاویہ α ہے۔ (شکل 8.14)

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{d}$ کا جزو ضرب $|\boldsymbol{a}|$ بھی کام کی تعریف ہے۔



شکل 8.15: سیدھے خط کی مساوات۔

کارتیسی نظام کی xy سطح پر کسی بھی نقطے کا ہٹاو سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ لکھا جاتا ہے۔ $x = a_1$ اور $y = a_2$ کی صورت میں یہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_a = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ صورت اختیار کرتا ہے جو کارتیسی نظام کی مرکز سے نقطہ $N(a_1, a_2)$ کی ہٹاو ظاہر کرے گا (شکل 8.15-الف)۔

شکل 8.15-الف میں نقطہ دار لکیر دکھائی گئی ہے جو $\boldsymbol{r}_a$ کے عمودی ہے۔اگر x اور y کو اس نقطہ دار لکیر پر رہنے پر پابند کیا جائے تب $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{r}_a$ آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گے۔شکل 8.15-ب میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔یوں شکل-ب میں مسئلہ 8.3 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

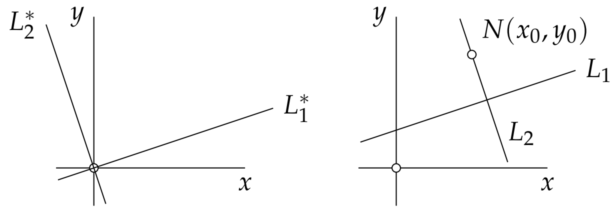
$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = 0 \quad \implies \quad (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \cdot (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) = a_1x + a_2y = 0 \tag{8.37}$$

درج بالا مساوات ($a_1x + a_2y = 0$) میں x اور y نقطہ دار خط پر رہتے ہیں لہٰذا یہ نقطہ دار خط کی مساوات ہے۔

آپ نے دیکھا کہ سیدھے خط کی مساوات دو سمتیات کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = 0$ کی صورت میں لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{r}_a$ ایسا ہٹاو سمتیہ ہے جو اس سیدھے خط کے ساتھ قائمہ الزاویہ ہو۔

ہم شکل 8.16-الف میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے ایسے خط L_2 کی مساوات جاننا چاہتے ہیں جو L_1 کے قائمہ الزاویہ ہو۔ L_1 کی مساوات ہمیں معلوم ہے۔

کارتیسی نظام میں xy سطح پر کسی بھی سیدھے خط کو $y = mx + c$ لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں ڈھلوان m کو $\frac{a_2}{a_1}$ لکھتے ہوئے $a_1x + a_2y = ca_1 = c'$ حاصل ہوتا ہے۔ایسا ایک خط L_1 ، شکل 8.16-الف میں



(ب)	(الف)

شکل 8.16: قائمہ الزاویہ خطوط۔

دکھایا گیا ہے۔اس مساوات میں $c = 0$ پر کرنے سے خط L_1^* حاصل ہو گا جو کارتیسی نظام کے مرکز $(0, 0)$ سے گزرتا ہے جس کو شکل 8.16-ب میں دکھایا گیا ہے۔خط L_1 اور L_1^* کی ایک جیسی ڈھلوان ہے یعنی یہ آپس میں متوازی ہیں۔ہم L_2 کو بھی اسی طرح مرکز پر منتقل کرتے ہوئے L_2^* حاصل کرتے ہیں۔اب اگر L_1 اور L_2 قائمہ الزاویہ ہوں تب L_1^* اور L_2^* بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔آئیں پہلے L_1^* کی مساوات سے L_2^* کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔بعد میں حاصل L_2^* کی مساوات سے L_2 کی مساوات حاصل کریں گے۔

L_1^* کی مساوات $a_1x + a_2y = 0$ کو مساوات 8.37 کی طرح سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{r}_a = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = a_1x + a_2y = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔ L_2^* کی مساوات کو بھی اسی طرح $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{r}_b = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_b = b_1x + b_2y = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔

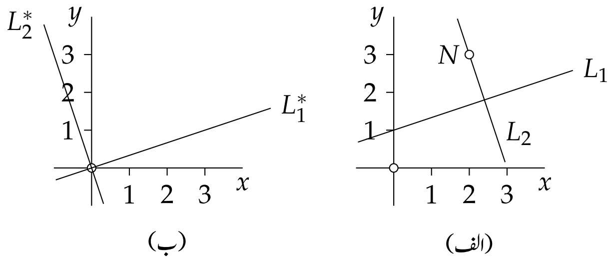
اب $\boldsymbol{r}_a$ خط L_1 کے عمودی ہے جبکہ $\boldsymbol{r}_b$ خط L_2 کے عمودی ہے۔یوں اگر L_1^* اور L_2^* قائمہ الزاویہ ہوں تب $\boldsymbol{r}_a$ اور $\boldsymbol{r}_b$ بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے اور یوں مسئلہ 8.3 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{r}_b = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) = a_1b_1 + a_2b_2 = 0, \qquad \implies \qquad b_2 = -\frac{a_1}{a_2}b_1$$

یوں L_2^* کی مساوات $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_b = b_1(x - \frac{a_1}{a_2}y) = 0$ ہو گی جس کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_2x - a_1y = 0 \qquad (L_2^*) \tag{8.38}$$

L_2^* کی مساوات کا L_1^* کی مساوات $(a_1x + a_2y = 0)$ کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 8.17: قائمہ الزاویہ خطوط (مثال 8.8)۔

L_2^* لکھی جا سکتی ہے۔ چونکہ L_2 کی مساوات $a_2x - a_1y = c'$ کی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے L_2 نقطہ N سے گزرتی ہے لٰہذا (x_0, y_0) کو L_2 کی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c' = a_2x_0 - a_1y_0$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں L_2 کی مساوات مکمل ہوتی ہے۔

مثال 8.8: سیدھی سطح میں واقع قائمہ الزاویہ سیدھے خطوط

کارتیسی نظام کی xy سطح پر ایک خط L_1 کی مساوات $x - 3y - 3 = 0$ ہے۔ نقطہ $N(2, 3)$ سے گزرتا ایسے خط (L_2) کی مساوات دریافت کریں جو L_1 کے عمودی ہو۔

حل: شکل 8.17-الف میں ان خطوط کو دکھایا گیا ہے۔ L_1 کو مرکز پر منتقل کرتے ہوئے L_1^* حاصل ہو گا جس کی مساوات $x - 3y = 0$ ہو گی جس کو سمتیات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ کا اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \cdot (\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}) = x - 3y$ لکھا جا سکتا ہے۔ مرکز سے گزرتی کسی بھی سیدھے خط کی مساوات کی طرح L_2^* کے خط کی مساوات $b_1x + b_2y = 0$ لکھی جا سکتی ہے جس کو سمتیات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{r}_b = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ کا اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_b = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) = b_1x + b_2y$ لکھا جا سکتا ہے۔

چونکہ L_1 اور L_2 آپس میں عمودی ہیں لٰہذا $\boldsymbol{r}_a$ اور $\boldsymbol{r}_b$ بھی آپس میں عمودی ہوں گے۔ یوں مسئلہ 8.3 کے تحت $(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) = b_1 - 3b_2 = 0$ ہو گا جس سے $b_1 = 3b_2$ ملتا ہے۔ اس طرح L_2^* کی مساوات $3b_2x + b_2y = 0$ یا $3x + y = 0$ ہو گی جس سے L_2 کی مساوات

$3x + y = c'$ لکھی جا سکتی ہے۔ L_2 نقطہ $N(2,3)$ سے گزرتا ہے لہٰذا حاصل مساوات میں یہ نقطہ پر کرتے ہوئے $c' = 3(2) + 3 = 9$ ملتا ہے جس سے L_2 کی مساوات $3x + y = 9$ ملتی ہے۔

مثال 8.9: سطح کے ساتھ قائمہ الزاویہ سمتیہ

ایک سطح کی مساوات $2x - 4y + 6z = 3$ ہے۔ایسا اکائی سمتیہ دریافت کریں جو اس سطح کے ساتھ قائمہ الزاویہ ہو۔

حل: شکل 8.18 سے رجوع کریں۔سیدھی سطح کی عمومی مساوات درج ذیل ہے۔

$$a_1x + a_2y + a_3z = c \tag{8.39}$$

اس سطح پر کسی بھی نقطے کا ہٹاو سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو گا۔یہاں ہم سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ متعارف کرتے ہوئے مساوات 8.39 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = c \tag{8.40}$$

$\boldsymbol{a}$ غیر صفر ($\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$) ہے اور اس کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ درج ذیل ہو گا۔

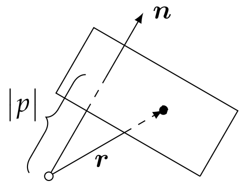
$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

مساوات 8.40 کو $|\boldsymbol{a}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

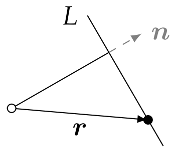
$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = p, \qquad p = \frac{c}{|\boldsymbol{a}|} \tag{8.41}$$

مساوات 8.35 کی مدد سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}$ کا سایہ p ہے۔

اب $|p|$ غیر متغیر مقدار ہے جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ سطح پر کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔شکل کو دیکھ کر ظاہر ہے کہ p صرف اور صرف اس صورت غیر متغیر ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{n}$ سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو۔یوں $\boldsymbol{a}$ بھی سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔شکل یہ یہ بھی ظاہر ہے کہ مرکز سے سطح کے قریب ترین نقطے کا فاصلہ $|p|$ ہو گا۔



شکل 8.18: سیدھی سطح کا عمودی سمتیہ۔



شکل 8.19: سیدھے خط کا مرکز سے فاصلہ مثال 8.10۔

یوں سطح $2x - 4y + 6z = 3$ کا قائمہ الزاویہ سمتیہ $2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ ہو گا اور سطح کا مرکز سے فاصلہ $\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ ہو گا۔ سطح کا اکائی قائمہ الزاویہ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{\sqrt{56}}$$

چونکہ کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں لہٰذا $-\boldsymbol{n}$ بھی اس سطح کا اکائی قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔

مثال 8.10: کارتیسی نظام کے xy سطح پر کسی بھی سیدھے خط L کو $a_1x + a_2y = c$ لکھا جا سکتا ہے۔ مرکز سے اس خط کا فاصلہ دریافت کریں۔ خط کا قائمہ الزاویہ اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

حل: شکل 8.19 سے رجوع کریں۔ کارتیسی نظام کی xy سطح پر کسی بھی نقطے کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ متعارف کرتے ہوئے دیے گئے سیدھے خط کی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = c$$

اس مساوات کو $|\boldsymbol{a}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=p,\qquad \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\ p=\frac{c}{|\boldsymbol{a}|}$$

اب $|p|$ غیر متغیر مقدار ہے جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ خط پر کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔شکل کو دیکھ کر ظاہر ہے کہ p صرف اور صرف اس صورت غیر متغیر ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{n}$ سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو۔یوں $\boldsymbol{a}$ بھی سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔شکل یہ یہ بھی ظاہر ہے کہ مرکز سے سطح کے قریب ترین نقطے کا فاصلہ $|p|$ ہو گا۔

یوں مرکز سے خط تک قائمہ الزاویہ خط $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}$ اور مرکز سے خط تک کم سے کم فاصلہ $|p|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ ہو گا۔یوں خط کے اکائی قائمہ الزاویہ سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{n}=\mp\left(\frac{a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)$$

سوالات

سوال 8.43 تا سوال 8.49 میں $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ ہیں۔

سوال 8.43: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

جوابات: 5 ، 5

سوال 8.44: $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|$

جوابات: $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{21}$ ، $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$ ، $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{21}$

سوال 8.45: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$

جوابات: -1

سوال 8.46: $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a},\ (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$

جوابات: $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-1$ ، $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=1$

سوال 8.47: $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert,\lvert\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rvert$

جوابات: $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert=\sqrt{41}$ ، $\sqrt{21}$

سوال 8.48: $2\boldsymbol{a}\cdot 4\boldsymbol{c},\ 5\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

جوابات: $2\boldsymbol{a}\cdot 4\boldsymbol{c}=40$ ، 25

سوال 8.49: $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\rvert,\lvert\boldsymbol{a}\rvert+\lvert\boldsymbol{c}\rvert$

جوابات: $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\rvert=3\sqrt{6}$ ، $2\sqrt{21}$

سوال 8.50 تا سوال 8.54 میں ایک چیز کو قوت $\boldsymbol{f}$ نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتی ہے۔ قوت کتنا کام کرتا ہے؟ کام کی تعریف $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}_{BA}$ ہے۔

سوال 8.50: $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ A(0,0,0),\ B(5,0,0)$
جواب: $5\,\mathrm{J}$

سوال 8.51: $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ A(2,5,0),\ B(0,0,0)$
جواب: $11\,\mathrm{J}$

سوال 8.52: $\boldsymbol{f}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\ A(-5,2,1),\ B(2,-3,-6)$
جواب: $30\,\mathrm{J}$

سوال 8.53: $\boldsymbol{f}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ A(5,5,6),\ B(7,6,2)$
جواب: $0\,\mathrm{J}$

سوال 8.54: $\boldsymbol{f} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ A(3,4,2),\ B(4,2,1)$
جواب: $-3\,\mathrm{J}$

سوال 8.55: سوال 8.53 میں کام صفر کیوں ہے؟

جواب: چونکہ قوت اور ہٹاو سمتیہ قائمہ الزاویہ ہیں۔

سوال 8.56: سوال 8.53 میں کام منفی کیوں ہے؟

جواب: چونکہ قوت اور ہٹاو سمتیہ آپس میں الٹ رخ ہیں۔

سوال 8.57: سمتیہ $4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ میں c کی قیمت کیا ہونے سے یہ سمتیہ $2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ کے عمودی ہو گا۔

جواب: 2

سوال 8.58: xy سطح میں $4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ کا عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\frac{\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}}{\sqrt{5}}$ اور $\frac{-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}}{\sqrt{5}}$

سوال 8.59: ایک چیز کو قوت $\boldsymbol{f}_1$ اور قوت $\boldsymbol{f}_2$ مل کر نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتی ہے۔ثابت کریں کہ کل کام دونوں قوتوں کے کاموں کا مجموعہ ہو گا۔

سوال 8.60: سمتیات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ اگر مستطیل کے وتر آپس میں عمودی ہوں تب یہ مستطیل دراصل میں چکور ہو گا۔

سوال 8.61: سمتیات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مکعب کے بالکل الٹ کونوں کو ملاتے ہوئے وتر آپس میں عمودی ہوں گے۔

سوال 8.62: ثابت کریں کہ سطح $7x + y + 3z = 22$ اور سطح $x - y - 2z = -5$ قائمہ الزاویہ ہیں۔

جواب:ان کے عمودی سمتیات $7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ کا اندرونی ضرب صفر ہے لہٰذا یہ آپس میں عمودی ہیں اور یوں سطحیں بھی عمودی ہوں گی۔

سوال 8.63: سطح $3x-2y+z=-2$ اور $x-4y-2z=3$ کے مابین زاویہ دریافت کریں۔

جواب: 1.0182 ریڈیئن یعنی 58.33°

سوال 8.64: تکون کے تین کونے $A(2,-4,6)$ ، $B(5,2,4)$ اور $C(-2,-1,-4)$ ہیں۔ اس تکون کے زاویے دریافت کریں۔

جوابات: 74.61° ، 42.98° ، 62.4°

سوال 8.65 تا سوال 8.67 میں $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ ہیں۔ دی گئی جوڑی سمتیات کے مابین زاویہ دریافت کریں۔

سوال 8.65: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$
جواب: 107.98°

سوال 8.66: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$
جواب: 116.68°

سوال 8.67: $\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$
جواب: 44.54°

درج ذیل چار سوالات میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کا جزو دریافت کریں۔

سوال 8.68: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کی لمبائی $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$ ہے۔اب چونکہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$ ہے لہذا $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کا جزو $\frac{-4}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ ہو گا۔

سوال 8.69: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$
جواب: $-1.22\boldsymbol{i}+1.22\boldsymbol{j}-2.45\boldsymbol{k}$

سوال 8.70: $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$
جواب: $7.2\boldsymbol{j}+9.6\boldsymbol{k}$

سوال 8.71: $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$
جواب: $-2.23\boldsymbol{i}+3.34\boldsymbol{j}-4.46\boldsymbol{k}$

سوال 8.72: ثابت کریں کہ $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ تینوں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ یکساں زاویہ بناتا ہے۔

جواب: 54.73°

8.6 اندرونی ضرب فضا

تین بعدی فضا میں، مجموعہ سمتیات اور سمتیہ کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کے بنیادی قواعد استعمال کرتے ہوئے حصہ 8.4 میں سمتی فضا کا تصور متعارف کرایا گیا۔ ہم اسی طرح اندرونی ضرب (حصہ 8.5) کو استعمال کرتے ہوئے **حقیقی اندرونی ضرب فضا**[37] کا تصور حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا حقیقی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب مساوات 8.26 کے شرائط پر پورا اترتا ہو **حقیقی اندرونی ضرب فضا** کہلاتا ہے۔ تعریف: اندرونی ضرب فضا
ایسی حقیقی سمتی فضا V جو درج ذیل خصوصیت رکھتی ہو **حقیقی اندرونی ضرب فضا** کہلاتی ہے۔

V میں ہر دو عدد سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے ساتھ ایک ایسا حقیقی عدد وابستہ ہے، جس کو $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا اندرونی ضرب کہلاتا ہے، کہ درج ذیل مسلمات پورا ہوتے ہوں۔

- (الف) کسی بھی غیر سمتیات q_1 اور q_2 اور V میں تمام سمتیات $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(q_1\boldsymbol{a}+q_2\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=q_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+q_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \qquad \text{(خطیت)} \qquad \text{(الف)}$$

- (ب) V میں تمام سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \qquad \text{(تشاکل)}$$

- (پ) V میں ہر $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0\\&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0 \quad \text{اگر} \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}\text{یقینی مثبت}$$

تعریف: قائمیت
اگر اندرونی ضرب فضا V میں دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو تب یہ سمتیات آپس میں قائم الزاویہ ہوں گے۔

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \qquad \text{(قائم الزاویہ)}$$

---

[37] real inner product space

اندرونی ضرب کو استعمال کرتے ہوئے ہم اندرونی ضرب فضا V میں ہر $\boldsymbol{a}$ کے ساتھ عدد $\|\boldsymbol{a}\|$ وابستہ کرتے ہیں جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \quad (\geq 0)$$

اور جو $\boldsymbol{a}$ کی **معیار**[38] کہلاتا ہے۔مساوات 8.24 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ **معیار** درحقیقت لمبائی کی عمومی تعریف ہے۔حقیقت میں ضرب نقطہ اور موجودہ اندرونی ضرب یکساں ہیں یعنی

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

اور ہماری موجودہ تعریف کے تحت مساوات 8.24 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

مسلمات اندرونی ضرب اور معیار کی تعریف سے مساوات 8.28 تا مساوات 8.30 اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{((شوارز عدم مساوات))}$$

درج بالا سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{تکونی عدم مساوات}$$

اور سادہ الجبرائی حساب سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2) \qquad \text{(متوازی الاضلاع مساوات)}$$

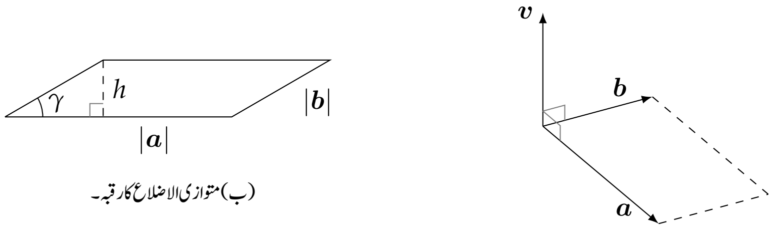
اندرونی ضرب فضا کا تصور عمومی ہے جس کی دو مثالیں (بغیر ثبوت) پیش کرتے ہیں۔پہلی مثال n اجزاء پر مشتمل سمتیات $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ اور $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, n)$ کا اندرونی ضرب ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{8.42}$$

اندرونی ضرب فضا کی دوسری مثال، وقفہ $\alpha \leq x \leq \beta$ پر استمراری تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی اندرونی ضرب ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \tag{8.43}$$

[38] norm



(الف) سمتی ضرب

(ب) متوازی الاضلاع کا رقبہ۔

شکل 8.20: سمتی ضرب کی تعریف

8.7 سمتی ضرب

کئی عملی مسائل سے سمتیات کی ایسی ضرب کی ضرورت پیش ہوتی ہے جس کا حاصل ضرب $\boldsymbol{v}$ بھی سمتیہ ہو۔ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیات کا ایسا ضرب جو **سمتی ضرب**[39] کہلاتا اور $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ لکھا جاتا ہے

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

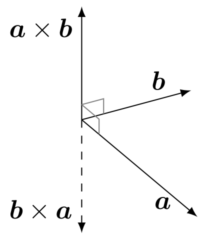
کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف : سمتی ضرب
اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے رخ ایک جیسے یا آپس میں الٹ ہوں اور یا ان سمتیات میں سے ایک (یا دونوں) صفر سمتیہ ہوں تب $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

اس کے علاوہ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ایسا سمتیہ ہو گا جس کی لمبائی اس متوازی الاضلاع کے رقبے کے برابر ہو گی جس کے قریبی اطراف $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ہوں اور جس کی سمت $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ دونوں کے عمودی ہو گی۔ مزید $\boldsymbol{v}$ کی سمت یوں ہو گی کہ $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{v}$ (اسی ترتیب سے) دائیں ہاتھ کی ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں (شکل 8.20-الف)۔

سمتی ضرب کی تعریف میں ثلاثہ قائمہ سمتیات کی بات کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کا ذکر کیا گیا جس کا مطلب ہے کہ اگر دائیں ہاتھ کا انگوٹھا سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اور انگلی شہادت سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کی سمت میں رکھتے ہوئے درمیانی انگلی کو ان انگلیوں کے عمودی رکھا جائے تب درمیانی انگلی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی مقام کو ظاہر کرے گی۔

[39] vector product



شکل 8.21: سمتی ضرب مخالف تبادل ہے

ایسا متوازی الاضلاع (شکل 8.20-ب) جس کے قریبی اطراف a اور b ہوں کا رقبہ $h|a| = |a||b|\sin\gamma$ ہو گا جہاں a اور b کے مابین زاویہ γ ہے۔

$$|v| = |a||b|\sin\gamma \tag{8.44}$$

اگر $v = a \times b$ اور $w = b \times a$ ہوں تب سمتی ضرب کی تعریف کے تحت $|v| = |w|$ ہو گا۔اب a ، b اور w اس صورت دائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں گے جب $w = -v$ (شکل 8.21) ہو لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$b \times a = -a \times b \tag{8.45}$$

جس کے تحت سمتی ضرب مخالف تبادل ہے۔یوں سمتی ضرب میں اجزاء کی ترتیب نہایت اہم ہے جس کو تبدیل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

کسی بھی غیر سمتیہ k کے لئے سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

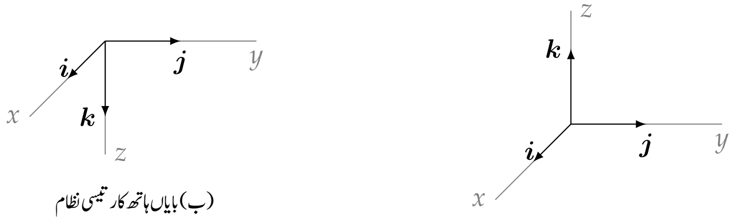
$$(ka) \times b = k(a \times b) = a \times (kb) \tag{8.46}$$

سمتی جمع کی نقطہ نظر سے سمتی ضرب جزئیتی تقسیمی ہے یعنی:

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\ (a + b) \times c &= (a \times c) + (b \times c) \end{aligned} \tag{8.47}$$

درج بالا کا ثبوت اگلے حصے میں پیش کیا جائے گا۔ہم یہاں بتلانا چاہتے ہیں کہ سمتی ضرب قانون تلازم پر عموماً پورا نہیں اترتا یعنی:

$$a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$$



(الف) دایاں ہاتھ کارتیسی نظام

(ب) بایاں ہاتھ کارتیسی نظام

شکل 8.22: کارتیسی نظام کے دو اقسام

مساوات 8.23 اور مساوات 8.44 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\gamma = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\left(1-\cos^2\gamma\right) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے حاصل سمتی ضرب کی لمبائی کا درج ذیل قلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \tag{8.48}$$

8.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب

اس حصے میں ہم سمتی ضرب کے اجزاء کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ دو قسم کے کارتیسی نظام ممکن ہیں۔پہلا قسم دائیں ہاتھ[40] کا نظام کہلاتا ہے۔ دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں محور کی مثبت سمت میں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ دائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں گے (شکل 8.22-الف)۔ اگر نظام کے اکائی سمتیات بائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں تب اس کو بایاں ہاتھ کارتیسی نظام کہا جائے گا۔اس کتاب میں دایاں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا گیا ہے۔عام استعمال میں بھی دایاں نظام استعمال کیا جاتا ہے۔

اب دائیں یا بائیں ہاتھ کے نظام میں اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 ہوں تب سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

[40] right handed

کے اجزاء کو انہیں کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ہمیں صرف اس صورت پر غور کرنا ہے جب $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ ہو۔ چونکہ $\boldsymbol{v}$ دونوں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے عمودی ہے لہٰذا مسئلہ 8.3 کے تحت $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ اور $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ہوں گے لہٰذا مساوات 8.33 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0 \\
b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 &= 0
\end{aligned} \tag{8.49}
$$

پہلی مساوات کو b_3 اور دوسری کو a_3 سے ضرب دے کر ان کا فرق حاصل کرتے ہیں۔

$$(a_3b_1 - a_1b_3)v_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)v_2$$

اسی طرح مساوات 8.49 کی پہلی مساوات کو b_1 اور دوسری کو a_1 سے ضرب دے کر ان کا فرق لکھتے ہیں۔

$$(a_1b_2 - a_2b_1)v_2 = (a_3b_1 - a_1b_3)v_3$$

آپ با آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا دو مساوات پر درج ذیل پورا اترتے ہیں جہاں c مستقل ہے۔

$$v_1 = c(a_2b_3 - a_3b_2), \quad v_2 = c(a_3b_1 - a_1b_3), \quad v_3 = c(a_1b_2 - a_2b_1) \tag{8.50}$$

مساوات 8.50 کو مساوات 8.49 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا مساوات 8.49 پر بھی پورا اترتا ہے۔ اب مساوات 8.49 میں بالائی مساوات $v_1v_2v_3$ فضا کی مرکز سے گزرتی ایک سیدھی سطح کو ظاہر کرتی ہے جبکہ نچلی مساوات مرکز سے گزرتی دوسری سیدھی سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ان سطحوں کے عمودی سمتیات ہیں (مثال 8.9)۔ اب چونکہ $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ ہے لہٰذا یہ سمتیات متوازی نہیں ہیں اور یہ سطحیں، ہم سطحی نہیں ہیں۔ یوں یہ سطحیں ایک دونوں کو مرکز سے گزرتی سیدھے خط L پر قطع کرتی ہیں۔ چونکہ مساوات 8.50 میں c کی قیمت تبدیل کرنے سے سیدھا خط حاصل ہوتا ہے لہٰذا یہ خط مساوات 8.49 پر بھی پورا اترتا ہے اور یوں مساوات 8.50، L کی مساوات دیتا ہے اور مساوات 8.49 کا ہر حل مساوات 8.50 کی صورت کا ہو گا۔ بالخصوص $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء بھی اسی صورت کے ہوں گے جن میں c کی قیمت دریافت کرنا باقی ہے۔ مساوات 8.50 سے درج ذیل ملتا ہے

$$|\boldsymbol{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = c^2[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2]$$

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{v}|^2 = c^2[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2]$$

مساوات 8.33 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل ملتا ہے

$$|\boldsymbol{v}|^2 = c^2[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2]$$

جس کا مساوات 8.48 سے موازنہ کرنے سے $c = \mp 1$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں سے آگے یہ جاننا ضروری ہو گا کہ دایاں یا بایاں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا جا رہا ہے۔آئیں دائیں ہاتھ کا نظام استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ اس نظام میں $c = +1$ ہو گا۔

اگر ہم اور کی لمبائیاں یوں مسلسل تبدیل کریں کہ آخر کار $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$ ہو (شکل 8.22) تب $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی یوں تبدیل ہو گی کہ آخر کار $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ ہو گا۔ظاہر ہے کہ ہم یہ تبدیلی یوں پیدا کر سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کبھی بھی صفر نہ ہوں اور نا ہی یہ کبھی متوازی ہوں۔یوں $\boldsymbol{v}$ کبھی بھی صفر نہیں ہو گا اور چونکہ یہ تبدیلی مسلسل ہے اور c کی قیمت صرف $+1$ یا -1 ہو سکتی ہے لہٰذا اختتامی c کی قیمت وہی ہو گی جو ابتدائی c کی تھی۔اب چونکہ آخر پر $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}$ ہیں لہٰذا $a_1 = 1$ ، $b_2 = 1$ اور $v_3 = 1$ ہیں جبکہ باقی اجزاء صفر ہیں۔یوں مساوات 8.50 سے $v_3 = c = +1$ ملتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 8.50 میں قوسین میں دیے گئے مقدار کو دو درجی مقطع لکھا جا سکتا ہے لہٰذا اس نتیجے کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو مقطع کی صورت میں

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{8.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 بالترتیب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء ہیں۔یاد رکھنے کی خاطر درج بالا کو درج ذیل مقطع تصور کیا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{(دائیں ہاتھ کا نظام)} \tag{8.52}$$

جہاں مقطع کو پہلی صف سے پھیلا کر حاصل کیا جائے گا۔یہ مقطع خصوصی مقطع ہے جس کی پہلی صف کا ارکان سمتیات ہیں۔

بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں بالکل درج بالا بحث کے تحت $c = -1$ حاصل ہو گا اور یوں اس نظام میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{بائیں ہاتھ کا نظام}) \tag{8.53}$$

مثال 8.11: دائیں ہاتھ کے کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ ہیں۔ان کا سمتی ضرب $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ دریافت کریں۔

حل:

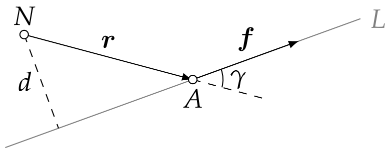
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -16\boldsymbol{i} - 26\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

آئیں اب مساوات 8.47 کو ثابت کریں۔مساوات 8.51 کے تحت $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ کا پہلا

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} &= a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ہو گا۔درج بالا کا دایاں ہاتھ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ کا پہلا جزو ہے۔باقی دو اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 8.47 میں بالائی تعلق ثابت ہوتا ہے۔بالکل اسی طرح اس میں دیا گیا نچلا تعلق بھی ثابت ہو گا۔

آپ درج ذیل مسئلہ خود ثابت کر سکتے ہیں۔ مسئلہ 8.4: دو سمتیات اس صورت خطی طور تابع سلسلہ بنائیں گے جب ان کا سمتی ضرب صفر سمتیہ کے برابر ہو۔



شکل 8.23: قوت کا معیار اثر (مثال 8.12)۔

سمتی ضرب کئی عملی مسائل میں پیش آتا ہے۔درج ذیل دو مثال ایسے عملی مسئلے ہیں۔

مثال 8.12: قوت کا معیار اثر
میکانیات میں قوت $\boldsymbol{f}$ کا نقطہ N پر معیار اثر m سے مراد $m = |\boldsymbol{f}|\,d$ ہے جہاں N سے قوت کی سمت میں خط تک عمودی فاصلہ d ہے (شکل 8.23)۔

اگر N سے L پر کسی بھی نقطہ A تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب $d = |\boldsymbol{r}|\sin\gamma$ ہو گا (شکل 8.23) لہٰذا

$$m = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{f}|\sin\gamma$$

ہو گا۔ چونکہ $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{f}$ کے مابین زاویہ γ ہے لہٰذا اس کو مساوات 8.44 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$m = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}|$$

اور سمتیہ $\boldsymbol{m}$ یعنی

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} \tag{8.54}$$

قوت $\boldsymbol{f}$ کا معیار اثر سمتیہ[41] کہلاتا ہے جس کی مقدار m اور سمت N سے گزرتی اس محور کی سمت ہے جس کے گرد $\boldsymbol{f}$ گھمانے کی کوشش کرتا ہے۔

---

[41] moment vector

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.