

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	214
3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	217
4	نظام تفرقی مساوات	225
4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	226
4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	235
4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	250
4.3.1	خطی نظام	251
4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	254
4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام	272
4.6	کافی ترکیب برائے غیر خطی نظام	281
4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ	290
4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	298
4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب	299
5	طابق تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	309
5.1	ترکیب طاقی تسلسل	310
5.2	لیمنڈر مساوات۔ لیمنڈر کثیر رکنی	325
5.3	مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس	343
5.3.1	عملی استعمال	348
5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل	362
5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	377
5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ	383
5.7	مسئلہ سیورم لیوویل	390
5.8	قائمیت لیمنڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل	397
6	لاپلاس تبادلہ	407
6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	408
6.2	تفرقات اور کمالات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	417
6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیزھی تفاعل	430
6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	451
6.5	الچھاو	469
6.6	لاپلاس بدل کی عمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	478
6.7	تفرقی مساوات کے نظام	487
6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے	495
7	خطی الجبرا: سمتیات	499

499 . . . . .	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
501 . . . . .	7.2	سمتیہ کے اجزاء . . . . .
507 . . . . .	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
516 . . . . .	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
522 . . . . .	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) . . . . .
535 . . . . .	7.6	اندرونی ضرب فضا . . . . .
537 . . . . .	7.7	سمتی ضرب . . . . .
539 . . . . .	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
550 . . . . .	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب

559	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
560 . . . . .	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
570 . . . . .	8.2	قالبی ضرب . . . . .
577 . . . . .	8.2.1	تبدیلی محل . . . . .
590 . . . . .	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
603 . . . . .	8.3.1	صف زینہ دار صورت . . . . .
611 . . . . .	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
625 . . . . .	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکنائی . . . . .
630 . . . . .	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب . . . . .
633 . . . . .	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریمر . . . . .
650 . . . . .	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
665 . . . . .	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ

683	9	خطی الجبرا: آگنی قدر مسائل قالب
684 . . . . .	9.1	آگنی قدر مسائل قالب۔ آگنی اقدار اور آگنی سمتیات کا حصول
695 . . . . .	9.2	آگنی مسائل کے چند استعمال . . . . .
703 . . . . .	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب

707	ا	اضافی ثبوت
-----	---	------------

711	ب	مفید معلومات
711 . . . . .	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات . . . . .



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 9

### خطی الجبرا: آگنی قدر مسائل قالب

آگنی قدر مسائل درج ذیل سمتی مساوات پر مبنی ہیں جہاں  $A$  چکور قالب،  $x$  نامعلوم سمتیہ اور  $\lambda$  نامعلوم غیر سمتیہ ہے۔

$$(9.1) \quad Ax = \lambda x$$

آگنی قدر مسائل میں ہمیں وہ  $\lambda$  اور  $x$  درکار ہیں جو درج بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔  $\lambda$  کی ہر قیمت کے لئے  $x = 0$  مساوات 9.1 کا غیر اہم صفر حل ہے۔ ہم اس غیر اہم صفر حل میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہذا ہم غیر صفر حل  $x \neq 0$  جاننا چاہیں گے۔

$\lambda$  کی وہ قیمتیں جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں  $A$  کے آگنی اقدار<sup>1</sup> کہلاتے ہیں اور وہ  $x$  جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں  $A$  کے آگنی سمتیات<sup>2</sup> کہلاتے ہیں۔

اس معصوم نظر آنے والا سمتی مساوات کے اندر حیران کن تفصیل چھپی ہے۔ آگنی قدر مسائل انجینئری، طبیعیات، ریاضی، حیاتیات، ماحولیاتی سائنس، شہری منصوبہ بندی، معاشیات، نفسیات اور دیگر شعبوں میں عموماً درپیش آتے ہیں۔ آپ کو یقیناً ان سے زندگی میں واسطہ پڑے گا۔

<sup>1</sup>eigenvalues  
<sup>2</sup>eigenfunctions

### 9.1 آنگنی قدر مسائل قالب۔ آنگنی اقدار اور آنگنی سمتیات کا حصول

درج ذیل پر غور کریں جہاں غیر صفر سمتیہ اور چکور قالب کے ضرب دکھائے گئے ہیں۔

$$(9.2) \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

بائیں ہاتھ کی ضرب میں ہمیں مکمل طور پر نیا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جس کی لمبائی اور سمت ابتدائی سمتیہ کی لمبائی اور سمت سے مختلف ہیں۔ عموماً سمتیہ کو چکور قالب سے ضرب دینے سے مکمل طور پر مختلف سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کی ضرب میں حاصل سمتیہ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

یعنی حاصل سمتیہ اور ابتدائی سمتیہ کی سمتیں ایک جیسی ہیں جبکہ حاصل سمتیہ کی لمبائی ابتدائی سمتیہ کی لمبائی کے دس گنا ہے جس کو  $\lambda = 10$  لکھا جائے گا۔ چکور قالب  $A$  کے لحاظ سے ایسے  $\lambda$  اور غیر صفر سمتیات کا حصول اس باب کا مرکزی مضمون ہے۔

آئیں درج بالا مشاہدے کو دستوری شکل دیں۔ فرض کریں کہ  $A = [a_{jk}]$  غیر صفر  $n \times n$  جسامت کا چکور قالب ہے۔ اب درج ذیل سمتی مساوات پر غور کریں۔

$$(9.3) \quad Ax = \lambda x$$

ان  $\lambda$  اور غیر صفر  $x$  کے حصول کے مسئلے کو، جو مساوات 9.3 پر پورا اترے ہوں، آنگنی قدر مسئلہ کہتے ہیں۔

یہاں توجہ دیں کہ  $A$  دیا گیا چکور قالب ہے جبکہ  $\lambda$  نامعلوم غیر سمتیہ اور  $x$  نامعلوم سمتیہ ہے۔ ہم وہ  $\lambda$  اور  $x$  حاصل کرنا چاہتے ہیں جو مساوات 9.3 پر پورا اترتے ہوں۔ جیومیٹریکی طور پر ہم وہ سمتیات  $x$  حاصل کرنا چاہتے ہیں جنہیں  $A$  سے ضرب دینا ایسا ہی ہے جیسے ان سمتیوں کو غیر سمتی  $\lambda$  سے ضرب دیا جائے یعنی کہ  $Ax$  اور  $x$  راست تناسب ہوں۔ یوں مثبت  $\lambda$  کی صورت میں ابتدائی اور حاصل سمتیات کی سمتیں ایک جیسی ہوں گی جبکہ منفی  $\lambda$  کی صورت میں ان کی سمتیں آپس میں الٹ ہوں گی۔ (باب کی شروع میں سادہ مثال سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔)

$\lambda$  کی وہ مخصوص قیمت جس کے لئے مساوات 9.3 کے غیر صفر  $x \neq 0$  حل موجود ہوں  $A$  کی آگنی قدر<sup>3</sup> کہلاتی ہے اور مطابقتی سمتیات  $x$ ، اس  $\lambda$  کے لحاظ سے قالب  $A$  کے آگنی سمتیات<sup>4</sup> یا امتیازی سمتیات<sup>5</sup> کہلاتے ہیں۔  $A$  کے تمام آگنی اقدار کو  $A$  کا طیف<sup>6</sup> کہتے ہیں۔ طیف میں کم سے کم ایک عدد آگنی قدر اور زیادہ سے زیادہ  $n$  مختلف آگنی اقدار ہو سکتے ہیں۔ آگنی اقدار کی سب سے زیادہ حتمی قیمت کو  $A$  کا رداس طیف<sup>7</sup> کہتے ہیں۔

آگنی قدر مسئلے کا حل چند مثالوں کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 9.1: آگنی اقدار اور آگنی سمتیات کا حصول  
درج ذیل قالب کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات قدم بہ قدم دریافت کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

پہلے آگنی اقدار دریافت کیے جاتے ہیں۔ مساوات 9.3 درج ذیل ہو گا۔

$$Ax = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

تمام اجزاء کو ایک طرف منتقل کرتے ہوئے

$$(9.4) \quad \begin{aligned} (-5 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

قابلی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(A - \lambda I)x = 0$$

eigenvalue<sup>3</sup>  
eigenvectors<sup>4</sup>  
characteristic vectors<sup>5</sup>  
spectrum<sup>6</sup>  
spectral radius<sup>7</sup>

مسئلہ 8.15 کے تحت اس متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل  $x \neq 0$  (قابل  $A$  کا آگنی سمتیہ جس کی ہمیں تلاش ہے) اس صورت ممکن ہو گا جب عددی سر قابل کا مقطع صفر کے برابر ہو گا۔

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

ہم  $D(\lambda) = 0$  کو  $A$  کی امتیازی مقطع جبکہ اس کی پھیلی ہوئی صورت کو امتیازی کثیر رکھی اور  $D(\lambda) = 0$  کو امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ اس دو درجی الجبرائی مساوات کے حل  $\lambda_1 = -1$  اور  $\lambda_2 = -6$  ہیں جو  $A$  کے آگنی اقدار ہیں۔

$\lambda_1 = -1$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ مساوات 9.4 میں  $\lambda = \lambda_1 = -1$  پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5 - (-1)]x_1 + 2x_2 &= 0 & \implies & -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + [-2 - (-1)]x_2 &= 0 & \implies & 2x_2 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے  $x_2 = 2x_1$  ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے متعدد متوازی آگنی سمتیات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یوں  $x_1$  (یا  $x_2$ ) کی کوئی بھی قیمت چن کر  $x_2$  ( $x_1$ ) حاصل کرتے ہوئے آگنی سمتیہ حاصل ہو گا۔ ہم  $x_1 = 1$  چن کر  $x_2 = 2$  حاصل کرتے ہیں اور یوں  $x_1 = [1 \ 2]^T$  ہو گا۔ اس جواب کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)x_1 = \lambda_1 x_1$$

$\lambda_2 = -6$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ مساوات 9.4 میں  $\lambda = \lambda_1 = -6$  پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5 - (-6)]x_1 + 2x_2 &= 0 & \implies & x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + [-2 - (-6)]x_2 &= 0 & \implies & 2x_2 + 4x_2 = 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے  $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$  ملتا ہے۔ یوں  $x_1 = 2$  چنتے ہوئے  $x_2 = -1$  ملتا ہے لہذا  $\lambda_2 = -6$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ  $x_2 = [2 \ -1]^T$  ہو گا۔ اس کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = (-6)x_2 = \lambda_2 x_2$$

آپ حصہ 9.1 کے آغاز میں مساوات 9.2 میں دیے گئے مثال کو حل کرتے ہوئے آگنی اقدار 10 ، 3 اور مطابقتی آگنی سمتیات  $[3 \ 4]^T$  ،  $[-1 \ 1]^T$  حاصل کریں۔

درج بالا مثال میں استعمال کی گئی ترکیب کی عمومی صورت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 9.3 کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \quad (9.5)$$

تمام اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

اس کو قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (9.7)$$

مسئلہ کریبر (مسئلہ 8.15) کے تحت درج بالا متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9.8)$$

$A - \lambda I$  کو  $A$  کا امتیازی قالب جبکہ  $D(\lambda)$  کو  $A$  کا امتیازی مقطع کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو  $A$  کی امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو پھیلا کر  $A$  کی امتیازی کثیر رکنی حاصل ہوگی۔

مسوات 9.8 کو پھیلا کر حاصل کثیر رکنی میں  $\lambda^n$  بلند تر طاقت ہے لہذا اس سے زیادہ سے زیادہ  $n$  مختلف آگنی اقدار حاصل ہو سکتے ہیں۔

مسئلہ 9.1: آگنی اقدار

چکور قالب  $A$  کے آگنی اقدار  $A$  کے امتیازی مساوات 9.8 سے حاصل ہوں گے۔  
یوں  $n \times n$  قالب کی کم سے کم ایک عدد آگنی قدر اور زیادہ سے زیادہ  $n$  مختلف آگنی اقدار ہو سکتے ہیں۔

$n$  کی بڑی قیمت کی صورت میں آگنی اقدار عموماً ترکیب نیوٹن یا کسی اور اعدادی ترکیب سے حاصل کئے جائیں گے۔

آگنی اقدار پہلے حاصل کیے جاتے ہیں۔ باری باری ان آگنی قدر کو مساوات 9.6 کے نظام میں پر کرتے ہوئے مطابقتی آگنی سمتیہ (گاوسی اسقاط کی مدد سے) حاصل کیا جاتا ہے۔

آگنی سمتیات درج ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

مسئلہ 9.2: آگنی سمتیات اور آگنی فضا

اگر قالب  $A$  کے کسی ایک آگنی قدر  $\lambda$  کے مطابقتی آگنی سمتیات  $w$  اور  $x$  ہوں تب  $w + x$  (بشرطیکہ  $w \neq -x$  ہو) اور  $kx$  جہاں  $k \neq 0$  ہے بھی اس  $\lambda$  کے مطابقتی بھی آگنی سمتیات ہوں گے۔

یوں کسی ایک آگنی قدر کے مطابقتی آگنی سمتیات اور  $0$  سمتیہ مل کر فضا بناتے ہیں جس کو اس  $\lambda$  کے لئے  $A$  کی مطابقتی آگنی فضا کہتے ہیں۔

ثبوت:  $Aw = \lambda w$  اور  $Ax = \lambda x$  سے مراد درج ذیل ہے

$$A(w + x) = Aw + Ax = \lambda w + \lambda x = \lambda(w + x)$$

اور  $A(kw + lx) = \lambda(kw + lx)$  ہے لہذا  $A(kw) = k(Aw) = k(\lambda w) = \lambda(kw)$  گا۔

آگنی سمتیہ کو معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری آگنی سمتیہ یعنی اکائی آگنی سمتیہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً مثال 9.1 میں  $x_1 = [1 \ 2]^T$  کی لمبائی  $\|x_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$  ہے جس سے معیاری آگنی سمتیہ (اکائی آگنی سمتیہ)  $[\frac{1}{\sqrt{5}} \ \frac{2}{\sqrt{5}}]^T$  حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: متعدد آگنی سمتیات  
درج ذیل قالب کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: اس قالب کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

جس سے  $A$  کے جذر  $\lambda_1 = 5$  اور  $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$  ملتے ہیں۔ (بلند درجی مساوات کا خط کھینچ کر اس کے جذر با آسانی حاصل کیے جاتے ہیں)۔ نظام  $(A - \lambda I)x = 0$  میں  $\lambda = \lambda_1 = 5$  پر کرتے ہوئے درج ذیل مطابقتی امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے

$$A - \lambda I = A - 5I = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جس کا درجہ دو (2) ہے۔ یوں  $-\frac{24}{7}x_2 - \frac{48}{7}x_3 = 0$  میں  $x_3 = -1$  چنتے ہوئے  $x_2 = 2$  حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو  $-7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$  میں پر کرتے ہوئے  $x_1 = 1$  ملتا ہے۔ یوں  $x_1 = [1 \ 2 \ -1]^T$  قالب  $A$  کا آگنی قدر  $\lambda = 5$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ ہے۔



$\lambda = -3$  سے درج ذیل امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے۔

$$A - \lambda I = A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$  سے  $x_1 = -2x_2 + 3x_3$  لکھا جاسکتا ہے۔  $x_2 = 1$  چنتے ہوئے  $x_3 = 0$  ملتا ہے جبکہ  $x_2 = 0$  چنتے ہوئے  $x_3 = 1$  ملتا ہے۔ اس طرح  $\lambda = -3$  کے مطابقتی درج ذیل دو مختلف آگنی سمتیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

امتیازی کثیر رکنی کے جذر  $\lambda$  کے درجے کو  $\lambda$  کی الجبرائی کثرت<sup>8</sup> کہا اور  $M_\lambda$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کسی  $\lambda$  کے مطابقتی خطی طور غیر تابع آگنی سمتیات کی تعداد کو جیومیٹریائی کثرت<sup>9</sup> کہا اور  $m_\lambda$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں  $\lambda$  کے مطابقتی آگنی فضا کی بُعد  $m_\lambda$  ہوگی۔

چونکہ آگنی کثیر رکنی کا درجہ  $n$  ہے لہذا تمام الجبرائی کثرت کا مجموعہ  $n$  ہوگا۔ مثال 9.2 میں  $\lambda = -3$  کے لئے  $m_\lambda = M_\lambda = 2$  ہے۔ عموماً  $m_\lambda \leq M_\lambda$  ہوگا۔  $M_\lambda$  اور  $m_\lambda$  کے فرق  $\Delta_\lambda = M_\lambda - m_\lambda$  کو  $\lambda$  کی خامی<sup>10</sup> کہتے ہیں۔ یوں مثال 9.2 میں  $\Delta_{-3} = 0$  ہے۔ مثبت خامی کا پایا جانا عمومی بات ہے۔

مثال 9.3: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی  
قالب  $A$  کے آگنی قدر اور آگنی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت

algebraic multiplicity<sup>8</sup>  
geometric multiplicity<sup>9</sup>  
defect<sup>10</sup>

کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

یوں  $\lambda = 0$  آگنی قدر ہے جس کی الجبرائی کثرت  $M_0 = 2$  ہے۔  $0x_1 + 2x_2 = 0$  سے  $x_2 = 0$  حاصل کرتے ہوئے  $\lambda = 0$  کے مطابق آگنی سمتیہ کی صورت  $[x_1 \ 0]^T$  ملتی ہے لہذا  $\lambda$  کی جیومیٹریائی کثرت  $m_0 = 1$  ہے۔ یوں  $\lambda = 0$  کی خامی  $\Delta_0 = 2 - 1 = 1$  ہے۔

---



---

مثال 9.4: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی قالب  $A$  کے آگنی قدر اور آگنی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 = 0$$

یوں  $\lambda = 3$  کی الجبرائی کثرت  $M_3 = 2$  ہے۔  $0x_1 + 2x_2 = 0$  سے  $x_2 = 0$  حاصل کرتے ہوئے مطابق آگنی سمتیہ کی صورت  $[x_1 \ 0]^T$  ملتی ہے لہذا  $\lambda_3$  کی جیومیٹریائی کثرت  $3 = 1$  ہے خامی  $\Delta_3 = 2 - 1 = 1$  ہے۔

---



---

مثال 9.5: حقیقی قالب کے مخلوط آگنی اقدار اور مخلوط آگنی سمتیات چونکہ حقیقی کثیر رکنی کے مخلوط جذر ممکن ہیں (جو جوڑیوں کی صورت میں پائے جاتے ہیں) لہذا حقیقی قالب کے

مخلوط آگنی اقدار اور آگنی سمتیات ممکن ہیں۔ درج ذیل منحرف تشاکلی قالب  $A$  کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

یوں  $\lambda_1 = i = (\sqrt{-1})$  اور  $\lambda_2 = -i$  ملتے ہیں جن کے مطابقتی آگنی سمتیات بالترتیب  $-ix_1 + x_2 = 0$  اور  $ix_1 + x_2 = 0$  سے حاصل ہوں گے۔ ہم  $x_1 = 1$  چنتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

اگلے حصے میں درج ذیل مسئلے کی ضرورت پیش آئے گی۔

مسئلہ 9.3: تبدیل محل قالب کے آگنی سمتیات  
چکور قالب  $A$  کے تبدیل محل قالب  $A^T$  کے آگنی سمتیات وہی ہوں گے جو  $A$  کے ہیں۔

ثبوت: صفحہ 639 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت تبدیلی محل سے امتیازی قالب کا مقطع تبدیل نہیں ہوتا ہے۔

### سوالات

سوال 9.1 تا سوال 9.15 میں دیے قالب کے آگنی اقدار اور ان کے مطابقتی آگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$\text{سوال 9.1: } \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{جوابات: } 2, [0 \quad 1]^T; \quad 4, [1 \quad 0]^T$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.2:}$$

$$0, 0, [1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.3:}$$

$$3, [1 \ 1]^T; \quad 1, [1 \ -1]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.4:}$$

$$2 - \sqrt{3}, [1 \ -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2 + \sqrt{3}, [1 \ \frac{1}{\sqrt{3}}]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.5:}$$

$$2 - i\sqrt{3}, [1 \ -\frac{i}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2 + i\sqrt{3}, [1 \ \frac{i}{\sqrt{3}}]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.6:}$$

$$-4, [1 \ -1]^T; \quad 4, [1 \ 1]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.7:}$$

$$-4i, [1 \ i]^T; \quad 4i, [1 \ -i]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.8:}$$

$$a - ib, [1 \ -i]^T; \quad a + ib, [1 \ i]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.9:}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{5}}, [1 \ -\frac{i\sqrt{5}+2}{3}]^T; \quad \frac{i}{\sqrt{5}}, [1 \ \frac{i\sqrt{5}-2}{3}]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.10:}$$

$$\cos \theta - i \sin \theta, [1 \ i]^T; \quad \cos \theta + i \sin \theta, [1 \ -i]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.11:}$$

$$\text{جوابات: } 0]^T, 1, [1 \quad 1 \quad 0]^T; \quad 0, [0 \quad 1 \quad 0]^T; \quad -1, [1 \quad -3 \quad 2]^T;$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.12:}$$

$$\text{جوابات: } 0]^T, 4, [1 \quad \frac{2}{5} \quad 0]^T; \quad 2, [1 \quad 0 \quad 0]^T; \quad 1, [1 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}]^T;$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.13:}$$

$$\text{جوابات: } \frac{1}{2}]^T, 9, [1 \quad -1 \quad 0]^T;$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.14: } \lambda = -1 \text{ کا مطابقتی آگنی سمتیہ دریافت کریں۔}$$

$$\text{جوابات: } [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.15: } \lambda = 3 \text{ کا مطابقتی آگنی سمتیہ دریافت کریں۔}$$

$$\text{جوابات: } [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

سوال 9.16 تا سوال 9.17 میں درکار تبدل  $y = Ax$  کے لئے  $A$  حاصل کریں جہاں  $x = [x_1 \quad x_2]^T$  ہے۔ آگنی اقدار اور آگنی سمتیات دریافت کریں اور ان کی جیومیٹریائی اہمیت بیان کریں۔

سوال 9.16:  $R^2$  میں گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ، کارٹیزی محدود کی مہدا کے گرد  $\frac{\pi}{2}$  زاویہ گھومنا۔

جوابات:  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  آنگنی اقدار  $i$  اور  $-i$  ہیں۔ ان کے مطابقتی آنگنی سمتیات مخلوط ہیں لہذا گردش تبادلی میں کوئی سمت برقرار نہیں رہتی ہے۔

سوال 9.17:  $R^2$  کا  $x_2$  محور پر تطیل قائمہ۔

جوابات:  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $0, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  اپنے آپ پر ہی گرتی ہے جبکہ  $x_1$  مبداء پر گرتی ہے۔

## 9.2 آنگنی مسائل کے چند استعمال

مثال 9.6: پکدار جھلی کا تاننا

$x_1x_2$  سطح میں دائری سرحد  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  کی پکدار جھلی (شکل 9.6) کو یوں کھینچ کر پھیلا یا جاتا ہے کہ نقطہ  $N(x_1, x_2)$  اپنی جگہ سے نقطہ  $Q(y_1, y_2)$  کو منتقل ہوتا ہے جہاں اس نقطے کی ابتدائی اور اختتامی مقام کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = Ax = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

وہ صدر محور<sup>11</sup> دریافت کریں جن پر  $N$  کی تعین کر سمتیہ اور  $Q$  کی تعین کر سمتیہ ایک ہی رخ یا الٹ رخ ہوں۔ تبدیلی کے بعد جھلی کا سرحد کس صورت کا ہوگا؟

حل: ہمیں سمتیہ  $x$  اور سمتیہ  $y = \lambda x$  درکار ہیں۔ اب چونکہ  $y = Ax$  ہے لہذا  $Ax = \lambda x$  ہوگا جو آنگنی مسئلہ بیان کرتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$Ax = \lambda x \implies \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 & (4 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2 & 2x_1 + (4 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

اس کی امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

جس کے جذر  $\lambda_1 = 6$  اور  $\lambda_2 = 2$  ہمارے مسئلے کے آگنی اقدار ہیں۔ آگنی قدر  $\lambda_1 = 6$  کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

جس سے  $x_2 = x_1$  ملتا ہے جہاں  $x_1$  اختیاری مستقل ہے۔ ہم  $x_1 = 1$  چن کر  $x_2 = 1$  حاصل کرتے ہیں جس سے  $\lambda_1 = 6$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ  $[1 \ 1]^T$  ملتا ہے۔ آگنی قدر  $\lambda_2 = 2$  کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

جس سے  $x_2 = -x_1$  ملتا ہے جہاں  $x_1$  اختیاری مستقل ہے۔ ہم  $x_1 = 1$  چن کر  $x_2 = -1$  حاصل کرتے ہیں جس سے  $\lambda_2 = 2$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ  $[1 \ -1]^T$  ملتا ہے۔

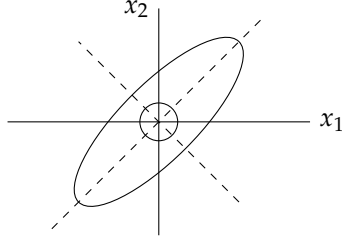
یہ آگنی سمتیات مثبت  $x_1$  محور کے ساتھ  $45^\circ$  اور  $-45^\circ$  زاویہ بناتے ہیں۔ صدر محور کے رخ اور ان آگنی سمتیات کے رخ ایک جیسے ہیں۔ آگنی اقدار کے تحت ان صدر محور کی سمت میں جھلی بالترتیب 6 اور 2 گنا پھیل گئی ہے۔ شکل 9.6 میں صدر محور کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اب اگر ہم صدر محور کو نئی کارتیسی نظام  $u_1 u_2$  کے محور یوں چنیں کہ  $x_1 x_2$  نظام کی پہلی ربع میں مثبت  $u_1$  اور اس کی دوسری ربع میں مثبت  $u_2$  پایا جاتا ہو تب جھلی پر کسی بھی نقطے کو  $u_1 = r \cos \phi$  ،  $u_2 = r \sin \phi$  لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح جھلی کی سرحد ابتدائی طور پر  $(\cos \phi, \sin \phi)$  ہو گا۔ کھینچنے کے بعد درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 = 6 \cos \phi, \quad z_2 = 2 \sin \phi$$

اب چونکہ  $\cos \phi + \sin \phi = 1$  کے برابر ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔ یوں کھینچی گئی جھلی کا سرحد ترخیمی ہو گا۔

$$\frac{z_1^2}{6^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$



شکل 9.1: صدر محور کو نقطہ دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ (مثال 9.6)

مثال 9.7: امکانی شماراتی عمل

صفحہ 583 پر مثال 8.18 میں شہری رقبے کی استعمال کی تقسیم پر غور کیا گیا۔ یہ عمل آخر کار تحدیدی حال<sup>12</sup> تک پہنچ جائے گا جس کے بعد اس میں مزید تبدیلی رونما نہیں ہوگی۔ یوں امکانی شماراتی قالب  $Ax = x$  پر پورا اترے گا۔ اس مساوات کی آگنی قدر اکائی ہے جبکہ آگنی سمتیہ  $x$  درکار رقبے کی حتمی تقسیم ہے۔ یوں ہم  $A$  سے رو نما ہونے والے عمل کی طویل مدتی اثرات جان سکتے ہیں۔

اس مثال میں

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

ہے جس کے آگنی اقدار  $\frac{7+\sqrt{2}}{10}$ ،  $\frac{7-\sqrt{2}}{10}$  اور 1 ہیں۔ ہمیں اکائی آگنی قدر  $\lambda = 1$  سے غرض ہے جو  $[1 \ 2 \ 4]^T$  ہے۔ یوں شہر میں آخر کار رہائشی، تجارتی اور صنعتی تقسیم رقبہ بالترتیب 1، 2 اور 4 تناسب سے ہوگی۔



مثال 9.8: نمو آبادی کا لزی غونہ  
لزی غونہ<sup>13</sup> جو عمر کے لحاظ سے آبادی میں اضافہ بتاتا ہے پر غور کرتے ہیں۔ لزی نمونے میں عمر کے لحاظ سے آبادی کی گروہ بندی کی جاتی ہے اور نظر عموماً صرف مادہ جانور پر رکھی جاتی ہے۔ فرض کریں کہ کسی جانور کی آبادی میں مادہ جانور کی زیادہ سے زیادہ عمر 12 سال ہے۔ ہم مادہ آبادی کو چار سال کے برابر وقفے سے تین گروہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ لزی قالب درج ذیل ہے۔

$$L = [l_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

لزی قالب میں  $l_{1k}$  سے مراد  $k$  گروہ میں رہتے ہوئے ایک مادہ سے پیدا ہونے والی بیٹیوں کی اوسط تعداد ہے جبکہ گروہ  $j - 1$  سے گروہ  $j$  تک زندہ پہنچنے والی مادہ کی تناسب کو  $l_{j,j-1}$  ( $j = 2, 3$ ) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پہلی چار سال کی عمر میں کم عمری کی بنا مادہ بچہ نہیں دیتی لہذا  $l_{11} = 0$  ہے۔ اسی طرح پانچ تا آٹھ سال کی عمر میں جوان مادہ زیادہ سے زیادہ (اوسطاً 2.3) بچے دیتی ہے جبکہ ضعیفی میں مادہ اوسطاً 0.4 بچے دیتی ہے۔ اسی طرح بچوں کا 0.6 حصہ یعنی 60% جوانی تک پہنچ پاتا ہے جبکہ جوان جانوروں کا 0.3 حصہ یعنی 30% بڑھاپے تک پہنچتا ہے۔

(الف) اگر ہر گروہ کی ابتدائی مادہ آبادی 2600 ہو تب 4، 8 اور 12 سال بعد ان گروہوں کی مادہ آبادی کیا ہو گی؟ (ب) ان گروہوں کی ابتدائی آبادی کیا ہونے سے تمام گروہوں میں تبدیلی کی تناسب برابر ہو گی؟ یہ تناسب کیا ہو گی؟

حل: (الف) ابتدائی طور پر  $x_0 = [2600, 2600, 2600]^T$  ہے۔ چار سال بعد گروہ بندی درج ذیل ہو گی۔

$$x_4 = Lx_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2600 \\ 2600 \\ 2600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7020 \\ 1560 \\ 780 \end{bmatrix}$$

اسی طرح آٹھ سال بعد آبادی  $x_8 = Lx_4 = L^2x_0 = [3900, 4212, 468]^T$  اور بارہ سال بعد آبادی  $x_{12} = Lx_8 = L^3x_0 = [9875, 2340, 1264]^T$  ہو گی۔

(ب) تناسب تبدیلی آبادی دریافت کرنے کی خاطر ہمیں ایسا آگنی سمتیہ  $x$  درکار ہے جو  $Lx = \lambda x$  پر پورا اترتا ہو جہاں  $\lambda > 0$  آبادی میں اضافے کے تناسب اور  $\lambda < 0$  آبادی میں کمی کے تناسب کو ظاہر کرے گا۔ امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.38\lambda + 0.072 = 0$$

جس کے آگنی اقدار  $\frac{6}{5}$ ،  $-\frac{\sqrt{30}+6}{10}$  اور  $\frac{\sqrt{30}-6}{10}$  ہیں جنہیں کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثبت آگنی قدر  $\lambda = \frac{6}{5} = 1.2$  آبادی میں اضافے کو ظاہر کرتی ہے اور اس کا مطابقتی آگنی سمتیہ درج ذیل ہے

$$Lx - \lambda x = \begin{bmatrix} -1.2 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies x = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جہاں  $x_3 = 1$  چنتے ہوئے  $x_2 = 4$  اور  $x_1 = 8$  حاصل کیا گیا ہے۔ ابتدائی کل آبادی  $3 \times 2600 = 7800$  حاصل کرنے کی خاطر ہم اس آگنی سمتیہ کو  $\frac{7800}{8+4+1} = 600$  سے ضرب دیتے ہوئے ابتدائی آبادی درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$600[8 \ 4 \ 1]^T = [4800 \ 2400 \ 600]^T$$

آبادی میں تبدیلی کا تناسب 1.2 فی چار سال ہو گا۔

### سوالات

سوال 9.18 تا سوال 9.23 میں تبدیلی شکل  $y = Ax$  کا قالب  $A$  دیا گیا ہے۔ صدر سمتیں اور ان کی مطابقتی سکڑاو یا پھیلاؤ کا تناسب دریافت کریں۔

$$\text{سوال 9.18: } \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \text{ جوابات: } 3, [1 \ -1]^T, -45^\circ; 7, [1 \ 1]^T, 45^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.19:}$$

$$\text{جوابات: } -3.23, [1 \ -1.529]^T, -56.8^\circ; \quad 14.23, [1 \ 0.654]^T, 33.2^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.20:}$$

$$\text{جوابات: } 1 - 2\sqrt{2}, [1 \ -\sqrt{2}]^T, -54.7^\circ; \quad 1 + 2\sqrt{2}, [1 \ \sqrt{2}]^T, 54.7^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 43 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.21:}$$

$$\text{جوابات: } 7 - \sqrt{34}, [1 \ \frac{5-\sqrt{34}}{3}]^T, -15.5^\circ; \quad 7 + \sqrt{34}, [1 \ \frac{5+\sqrt{34}}{3}]^T, 74.5^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.22:}$$

$$\text{جوابات: } 2, [1 \ -1]^T, -45^\circ; \quad 8, [1 \ 5]^T, 78.7^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 1.25 & 0.45 \\ 0.75 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.23:}$$

$$\text{جوابات: } 1.02, [1 \ -0.507]^T, -26.9^\circ; \quad 2.73, [1 \ 3.285]^T, 73.1^\circ$$

سوال 9.24 تا سوال 9.26 میں دیے گئے امکانی شماریاتی عمل کا تحدیدی حال دریافت کریں۔

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.24:}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 5 & 8 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.25:}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.26:}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 29 & 27 & 49 \end{bmatrix}^T$$

سوال 9.27 اور سوال 9.28 میں لزلی نمونے کا قالب  $L$  دیا گیا ہے (مثال 9.8)۔ نمو آبادی کا تناسب دریافت کریں۔

$$\begin{bmatrix} 0 & 3.45 & 0.6 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 \end{bmatrix}$$
 سوال 9.27:

جواب:  $\frac{9}{5}$

سوال 9.28:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

جواب: 2

سوال 9.29 تا سوال 9.31 لیونٹف نمونہ<sup>14</sup> برائے اخراجات و پیداوار پر مبنی ہیں۔

سوال 9.29: لیونف نمونہ<sup>15</sup> صنعت کی پیداوار اور اس کے اخراجات کا تعلق بیان کرتا ہے۔ فرض کریں کہ تین صنعتوں کی پیداوار یہی صنعت استعمال کرتے ہیں اور اس تعلق کو درج ذیل  $3 \times 3$  قالب صرف<sup>16</sup> پیش کرتا ہے

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

جہاں  $a_{jk}$  صنعت  $k$  کی پیداوار کی وہ تناسب ہے جو صنعت  $j$  خرید کر استعمال کرتی ہے۔ فرض کریں کہ صنعت  $j$  کی کل پیداوار کی آمدن  $p_j$  ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ ہر صنعت کی اخراجات اس صنعت کی آمدی کے برابر ہو۔ اس کو بطور مسئلہ  $Ap = p$  لکھا جاسکتا ہے جہاں  $p = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T$  ہے۔ ایسا  $p$  دریافت کریں کہ  $p_1$ ،  $p_2$  اور  $p_3$  غیر منفی ہوں۔

جواب:  $[25 \ 18 \ 10]^T$  جہاں  $c$  مستقل ہے۔

سوال 9.30: ثابت کریں کہ سوال 9.29 کے قالب صرف کے ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی (1) ہو گا اور اس قالب صرف کا آگنی قدر بھی اکائی ہو گا۔

Leontief model<sup>14</sup>

<sup>15</sup> روس کے ویسکی وچ لیونف [1906-1999] نے یہ نمونہ پیش کر کے نوبل انعام حاصل کیا۔  
consumption matrix<sup>16</sup>

سوال 9.31: آزاد لیونٹ نمونے میں پیداوار کا کچھ حصہ یہی صنعت استعمال کرتے ہیں جبکہ باقی حصہ فروخت کیا جاتا ہے۔ یوں  $Ax = x$  (سوال 9.29) کی بجائے،  $x - Ax = y$  ہو گا جہاں  $x$  پیداوار ہے جبکہ  $Ax$  وہ حصہ ہے جو یہی صنعتیں خود استعمال کرتی ہیں لہذا  $y$  وہ حصہ ہے جس کو فروخت کیا جاسکتا ہے۔

قالب مانگ  $y = [0.1 \ 0.3 \ 0.1]^T$  کو پورا کرنے کے لئے قالب پیداوار  $x$  دریافت کریں جہاں قالب صرف درج ذیل ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$x = (I - A)^{-1}y = [0.6747 \ 0.7128 \ 0.7543]^T \text{ جواب:}$$

سوال 9.32 تا سوال 9.35 آگنی قدر مسائل کے عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں جنہیں آپ نے ثابت کرنا ہے۔ ان مسائل میں فرض کریں کہ  $n \times n$  قالب  $A$  کے آگنی اقدار  $\lambda_1$  تا  $\lambda_n$  ہیں جو غیر منفرد ہو سکتے ہیں۔ سوال 9.32: مرکزی وتر کے ارکان کا مجموعہ اور آگنی اقدار کا مجموعہ برابر ہیں۔

سوال 9.33: طیفی منتقلی  $A - kI$  کے آگنی اقدار  $\lambda_1 - k$  تا  $\lambda_n - k$  ہیں جبکہ اس کے آگنی سمتیات وہی ہیں جو  $A$  کے آگنی سمتیات ہیں۔

سوال 9.34: غیر سمتی مضرب، طاقت  $kA$  کے آگنی اقدار  $k\lambda_1$  تا  $k\lambda_n$  ہیں جبکہ  $A^m$  جہاں  $m = 1, 2, \dots$  ہے کے آگنی اقدار  $\lambda_1^m$  تا  $\lambda_n^m$  ہیں۔ دونوں صورتوں میں آگنی سمتیات وہی ہیں جو  $A$  کے آگنی سمتیات ہیں۔

سوال 9.35: کثیر رکنی  $p(A) = k_m A^m + k_{m-1} A^{m-1} + \dots + k_1 A + k_0 I$  کے آگنی اقدار درج ذیل ہیں

$$p(\lambda_j) = k_j \lambda_j^m + k_{m-1} \lambda_j^{m-1} + \dots + k_1 \lambda_j + k_0$$

جہاں  $j = 1, 2, \dots$  ہے جبکہ اس کثیر رکنی کے آگنی سمتیات وہی ہیں جو  $A$  کے آگنی سمتیات ہیں۔ (سوال 9.34 کے نتائج استعمال کریں۔)

## 9.3 تشاکی، منحرف تشاکی اور قائمہ الزاویہ قالب



- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.





## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(1.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(1.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(1.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $1 + |q| + |p| = h$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

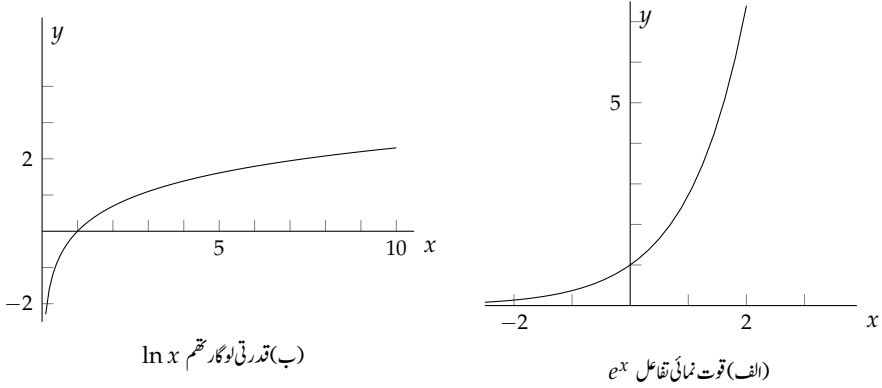
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

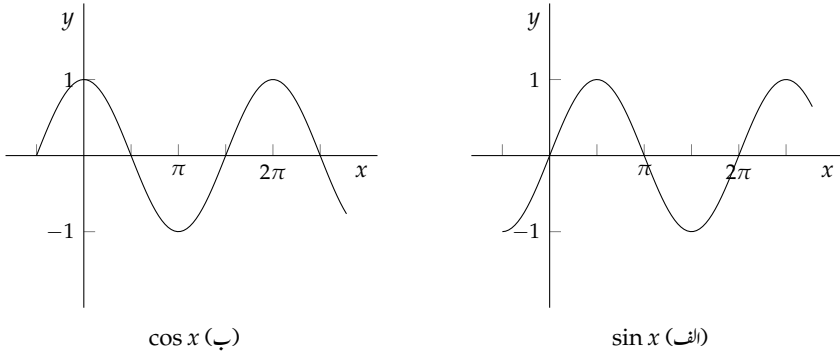
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}
 \end{aligned}$$

$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

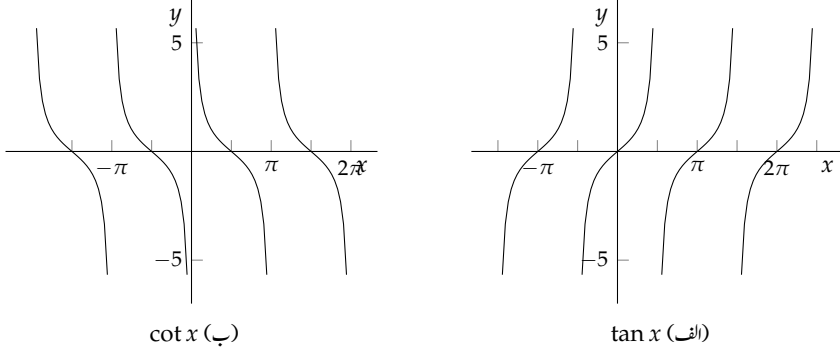
$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$





شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

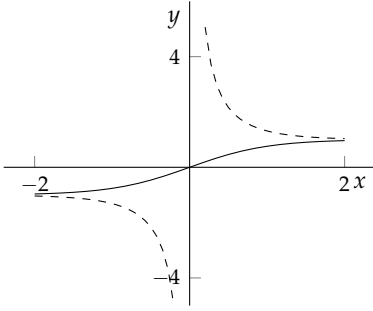
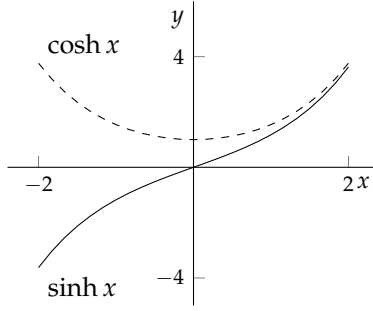
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. ب)$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. ب)$$

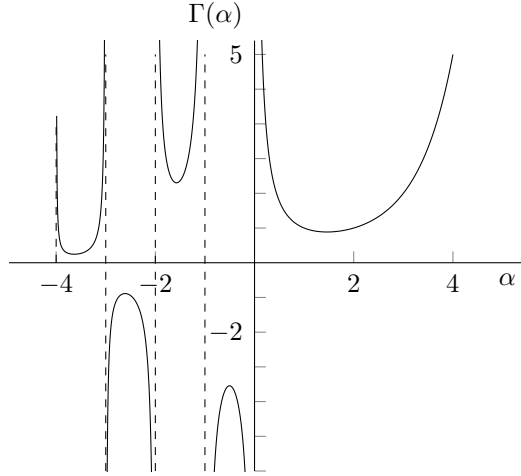
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. ب)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

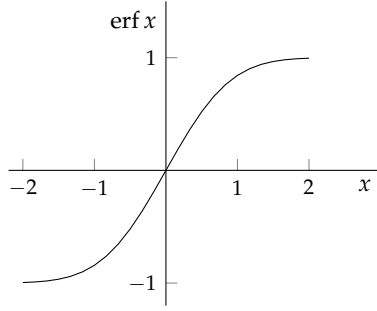
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

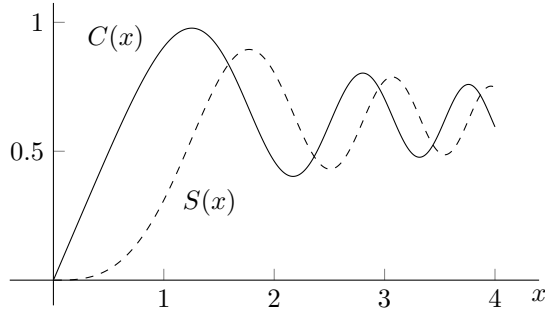
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

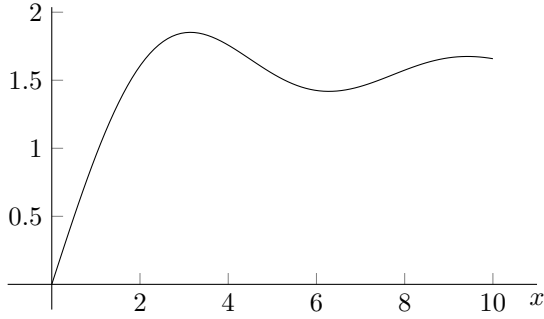
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

