انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

4.5 نقطہ فاصل کے جانچ کا اصول۔استحکام

ہم مستقل عددی سر والے متجانس خطی نظام 4.61 پر گفتگو جاری رکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1' + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.61}$$

اب تک حصہ 4.4 میں ہم نے دیکھا کہ نسل حل $\boldsymbol{y} = [y_1(t) \quad y_2(t)]^T$ کے خطوط کو y_1y_2 **سطح حرکت** پر کھینچتے ہوئے عمومی جائزہ لیا جا سکتا ہے۔ اس سطح پر منحنی کو نظام 4.61 کا **خط حرکت** کہتے ہیں۔ تمام خط حرکت کو ملا کر **پیکر مرحلہ** حاصل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے کہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے مساوات 4.61 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{4.62}$$

ملتا ہے۔یوں λ قالب $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی قدر اور $\boldsymbol{x}$ نظیری آئگنی سمتیہ ہونے کی صورت میں $\boldsymbol{y}(t)$ مساوات 4.61 کا (غیر صفر) حل ہو گا۔

گزشتہ حصے کے مثالوں سے واضح ہے کہ پیکر مرحلہ کی صورت کا دارومدار بڑی حد تک نظام 4.61 کی **نقطہ فاصل** کی قسم پر منحصر ہے جہاں نقطہ فاصل سے مراد ایسا نقطہ ہے جہاں $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y_2}$ **نا قابل معلوم قیمت** $\frac{0}{0}$ ہو۔[مساوات 4.49 دیکھیں۔]

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{y_2'\,\mathrm{d}t}{y_1'\,\mathrm{d}t} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2} \tag{4.63}$$

حصہ 4.4 سے ہم یہ بھی جانتے ہیں نقطہ فاصل کے کئی اقسام پائے جاتے ہیں۔

موجودہ حصے میں ہم دیکھیں گے کہ نقطہ فاصل کی قسم کا تعلق آئگنی قدر سے ہے جو امتیازی مساوات

(4.64)

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

جدول 4.1: آئگنی قدر سے نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

نام	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	λ_1 اور λ_2 پر تبصرہ
(الف)جوڑ		$q > 0$	$\Delta \geq 0$	حقیقی۔یکساں علامتیں
(ب)نقطہ زین		$q < 0$		حقیقی۔آپس میں الٹ علامتیں
(پ)وسط	$p = 0$	$q > 0$		خالص خیالی عدد (حقیقی جزو صفر ہے)
(ت)نقطہ مرغولہ	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	مخلوط عدد (حقیقی اور خیالی اجزاء غیر صفر ہیں)

کے حل λ_1 اور λ_2 ہیں۔امتیازی مساوات دو درجی مساوات $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ ہے جس کے عددی سر p ، q اور **جدا کنندہ**[60] Δ درج ذیل ہیں۔

$$p = a_{11} + a_{22}, \quad q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta = p^2 - 4q \tag{4.65}$$

دو درجی مساوات کے حل الجبرا کی مدد سے $\lambda = \frac{1}{2}(p + \mp\sqrt{p^2 - 4q})$ یعنی

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(p + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(p - \sqrt{\Delta}) \tag{4.66}$$

لکھتے ہیں۔ان آئگنی قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے امتیازی مساوات کو اجزائے ضربی کی صورت

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ p آئگنی قیمتوں کا مجموعہ ہے جبکہ q ان کا حاصل ضرب ہے۔اسی طرح مساوات 4.66 کی مدد سے $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$p = \lambda_1 + \lambda_2, \quad q = \lambda_1\lambda_2, \quad \Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \tag{4.67}$$

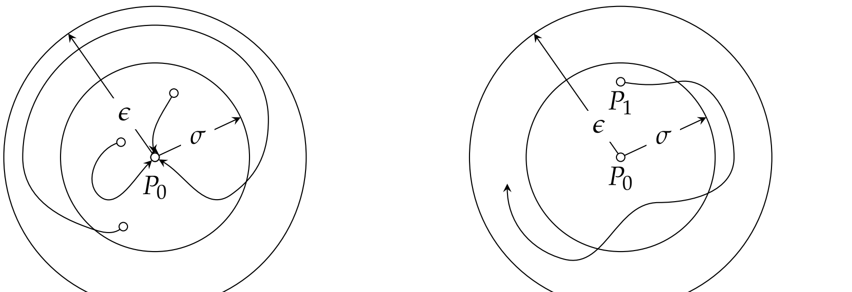
ان نتائج سے نقطہ فاصل کی جانچ کے اصول طے کئے جا سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ان اصولوں کو اسی حصے میں اخذ کیا جائے گا۔

استحکام

نقطہ فاصل کی درجہ بندی ان کی **استحکام**[61] کی بنیاد پر بھی کی جا سکتی ہے۔انجینئری کے علاوہ دیگر شعبوں میں بھی استحکام نہایت اہم تصور ہے۔مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی یا خلل سے بعد کے تمام لمحات پر معمولی خلل ہی پایا جاتا ہے۔نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل تصورات اہم ہیں۔

---

[60] discriminant
[61] stability



(الف) مستحکم نقطہ فاصل P_0 کی صورت میں خط حرکت D_ϵ میں رہتی ہے۔

(ب) مستحکم اور جاذب نقطہ فاصل P_0 ۔

شکل 4.11: نظام 4.61 کے نقطہ فاصل۔

تعریف: مستحکم، غیر مستحکم، مستحکم اور جاذب

اگر نظام 4.61 کے نقطہ فاصل P_0 کے قریب تمام خط حرکت مستقبل میں بھی P_0 کے قریب رہیں تب P_0 **مستحکم**[62] کہلائے گا۔ یوں اگر کسی بھی رداس ϵ کی ٹکیا D_ϵ کے لئے رداس σ کی ایسی ٹکیا D_σ موجود ہو، جہاں دونوں ٹکیوں کا مرکز P_0 ہے، کہ ٹکیا D_σ میں (لمحہ $t = t_1$ کا نظیری) نقطہ P_1 پر پائے جانے والا، نظام 4.61 کا ہر خط حرکت، مستقبل میں ٹکیا D_ϵ میں رہتا ہو، تب P_0 کا **نقطہ فاصل مستحکم**[63][64] کہلائے گا۔[شکل 4.11-الف دیکھیں]

اگر P_0 مستحکم نہ ہو تب یہ **غیر مستحکم**[65] کہلاتا ہے۔

ایسا مستحکم P_0 جہاں وہ تمام خط حرکت جن کا کوئی بھی نقطہ، D_σ پر پایا جاتا ہو، آخر کار $(t \to \infty)$ P_0 کے قریب تر پہنچے **مستحکم اور جاذب**[66] کہلاتا ہے۔[شکل 4.11-ب دیکھیں۔]

استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی جدول 4.2 میں دی گئی ہے۔

---

[62] stable

[63] stable

[64] روسی ریاضی دان سکندر میکائل لیاپونو[1857-1918] کا مستحکم تفرقی مساوات پر کام بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ استحکام کی یہ تعریف انہوں نے ہی پیش کی۔

[65] unstable

[66] stable and attractive

جدول 4.2: استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

استحکام کی قسم	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$
(الف) مستحکم اور جاذب	$p < 0$	$q > 0$
(ب) مستحکم	$p \le 0$	$q > 0$
(پ) غیر مستحکم	$p > 0$ یا	$q < 0$

آئیں جدول 4.1 اور جدول 4.2 کو حاصل کریں۔ اگر $q = \lambda_1\lambda_2 > 0$ ہو تب دونوں آئگنی قدر مثبت ہوں گے یا دونوں آئگنی قدر منفی ہوں گے اور یا آئگنی قدر جوڑی دار مخلوط ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ہو تب دونوں آئگنی قیمتیں منفی ہوں گے یا (مخلوط جوڑی دار صورت میں) ان کا حقیقی جزو منفی ہو گا لہٰذا P_0 مستحکم اور جاذب ہو گا۔ جدول 4.2 کے بقایا دو نتائج کو آپ خود اسی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

$\Delta < 0$ کی صورت میں آئگنی قدر جوڑی دار مخلوط $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ اور $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha < 0$ ہو تب مستحکم، جاذب نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔اس کے برعکس $p = 2\alpha > 0$ کی صورت میں غیر مستحکم نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔

$p = 0$ کی صورت میں $\lambda_2 = -\lambda_1$ ہو گا اور یوں $q = \lambda_1\lambda_2 = -\lambda_1^2$ ہو گا۔اب اگر $q > 0$ ہو تب $\lambda_1^2 = -q < 0$ ہو گا لہٰذا λ_1 اور λ_2 خالص خیالی ہوں گے جن سے **دوری حل**[67] حاصل ہو گا۔دوری حل کا خط حرکت ایسا بند دائرہ ہے جس کا مرکز P_0 ہے۔

مثال 4.12: جدول 4.1 اور جدول 4.2 کا عملی استعمال

گزشتہ حصے کے مثال 4.6 میں نظام 4.48 یعنی $\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$ کی بات کی گئی جہاں $p = -4$ ، $q = 3$ اور $\Delta = 4$ ہیں۔یوں جدول 4.1-الف کے تحت نقطہ فاصل ایک جوڑ ہو گا۔جدول 4.2-الف کے تحت یہ جوڑ مستحکم اور جاذب ہے۔

---

[67] periodic solutions

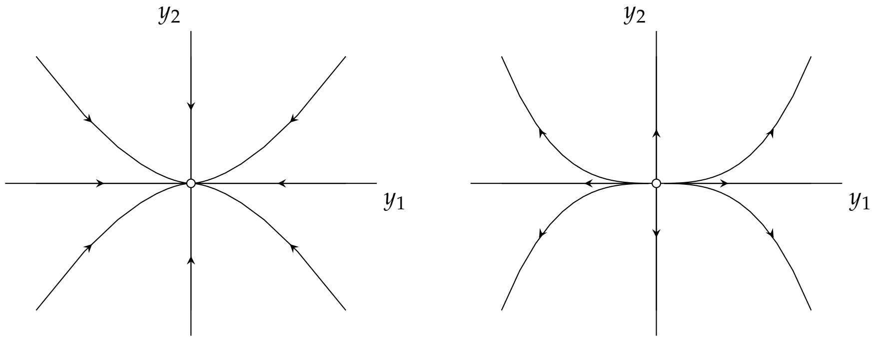
مثال 4.13: اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ حرکت
اسپرنگ اور کمیت [حصہ 2.4 دیکھیں] کے نظام $my'' + cy' + ky = 0$ کا نقطہ فاصل دریافت کریں۔

حل: تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے کی خاطر m سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$ لکھتے ہیں۔دو درجی مساوات سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر [حصہ 4.1 دیکھیں] ہم $y_1 = y$ اور $y_2 = y'$ لیتے ہیں۔یوں $y_2' = y'' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$ ہو گا۔اس طرح

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے $p = -\frac{c}{m}$ ، $q = \frac{k}{m}$ اور $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$ ملتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے جدول 4.1 اور جدول 4.2 سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جہاں Δ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

- [بلا تقصیر] $c = 0$ ، $p = 0$ اور $q > 0$ وسط دیتا ہے۔
- [کم مقصور] $c^2 < 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ مستحکم جاذب نقطہ مرغولہ دیتا ہے۔
- [فاصل تقصیر] $c^2 = 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta = 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔
- [زیادہ مقصور] $c^2 > 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔



(الف) سوال 4.36 غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔

(ب) سوال 4.37 مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔

شکل 4.12: سوال 4.36 اور سوال 4.37 کے اشکال۔

سوالات

سوال 4.36 تا سوال 4.45 کے نقطہ فاصل کی قسم جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔ان کے حقیقی عمومی حل حاصل کریں اور ان کے خط حرکت کمپیوٹر کی مدد سے کھینچیں۔[پہلے چار جوابات کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔]

سوال 4.36:

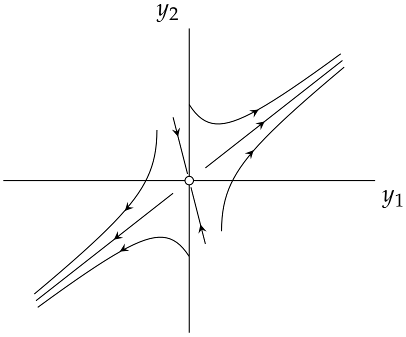
$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1\\
y_2' &= 3y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔ $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ **یعنی** $y_1 = c_1 e^t$ ، $y_2 = c_2 e^{3t}$ ؛ شکل 4.12-الف۔

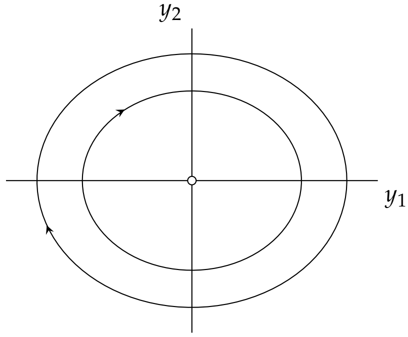
سوال 4.37:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -3y_1\\
y_2' &= -5y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔ $y_1 = c_1 e^{-3t}$ ، $y_2 = c_2 e^{-5t}$ ؛ شکل 4.12-ب۔



(ب) سوال 4.39 غیر مستحکم، نقطہ زین۔



(الف) سوال 4.38 مستحکم وسط۔

شکل 4.13: سوال 4.38 اور سوال 4.39 کے اشکال۔

سوال 4.38:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= -16y_1
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم وسط۔ $y_1 = A\cos 4t + B\sin 4t$ ، $y_2 = 4B\cos 4t - 4A\sin 4t$ ؛ شکل 4.13-الف۔

سوال 4.39:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2y_1 + y_2 \\
y_2 &= 5y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$ ، $y_2 = -5c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$ ؛ شکل 4.13-ب۔

سوال 4.40:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -2y_1 - 2y_2 \\
y_2 &= 2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-2t}(-B\cos 2t + A\sin 2t)$

سوال 4.41:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -10y_1 + 2y_2 \\
y_2 &= -15y_1 + y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم اور جاذب جوڑ؛ $y_1 = c_1e^{-5t} + c_2e^{-4t}$ ، $y_2 = \frac{5}{2}c_1e^{-5t} + 3c_2e^{-4t}$

سوال 4.42:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -y_1 + y_2 \\
y_2 &= 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$ ، $y_2 = 3c_2e^{2t}$

سوال 4.43:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -y_1 + 2y_2 \\
y_2 &= 6y_1 + 3y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-3t} + c_2e^{5t}$ ، $y_2 = -c_1e^{-3t} + 3c_2e^{5t}$

سوال 4.44:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 13y_1 - 3y_2 \\
y_2 &= 18y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم جوڑ؛ $y_1 = c_1e^{7t} + c_2e^{4t}$ ، $y_2 = 2c_1e^{7t} + 3c_2e^{4t}$

سوال 4.45:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_2 \\
y_2 &= -5y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ ،
$y_2 = e^{-t}[-(A+2B)\cos 2t - (2A+B)\sin 2t]$

سوال 4.46 تا سوال 4.46 خط حرکت، دو درجی سادہ تفرقی مساوات اور نقطہ فاصل کے بارے میں ہیں۔

سوال 4.46: قصری ارتعاش
$y'' + 4y' + 5y = 0$ کو حل کریں۔امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$ ؛ مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ۔

سوال 4.47: ہارمونی ارتعاش
$y'' + 4y = 0 = 0$ کو حل کریں۔امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t$ ؛ مستحکم وسط۔

سوال 4.48: مقدار معلوم کا تبادلہ
مثال 4.12 میں متغیرہ $\tau = -t$ متعارف کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پڑے گا؟

جواب: اب $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو گا لہٰذا غیر مستحکم جوڑ پایا جائے گا۔

سوال 4.49: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں $\boldsymbol{A}$ کو تبدیل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A} - 0.12\boldsymbol{I}$ کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب ہے۔

جواب: اب $p = -0.2 \neq 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ہیں لہٰذا غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے گا۔

سوال 4.50: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں تمام a_{jk} کی جگہ $a_{jk} + b$ پر کریں۔ (الف) b کی ایسی قیمت دریافت کریں کہ نقطہ زین حاصل ہو۔اسی طرح b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں جن پر (ب) مستحکم اور جاذب جوڑ، (پ) مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ اور (ت) غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے۔

جواب: مثلاً (الف) $b = -2$ ، (ب) $b = -1$ ، (پ) $b = -0.2$ ، (ت) $b = 15$

4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

کیفی تراکیب[68] سے مسئلے کو حل کئے بغیر حل کے بارے میں کیفی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ایسے مسائل جن کا **تحلیلی حل** مشکل یا نا قابل حصول ہو، کے لئے یہ ترکیب خاص طور پر کار آمد ہے۔عملاً اہم کئی غیر خطی نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{4.68}$$

کے لئے یہ درست ہے۔

گزشتہ حصے میں **سطح مرحلہ کی ترکیب** خطی نظام کے لئے استعمال کیا گیا۔اس حصے میں اس ترکیب کو وسعت دے کر غیر خطی نظام کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 4.68 **خود مختار**[69] ہے یعنی اس میں غیر تابع متغیرہ t صریحاً نہیں پایا جاتا۔(اس حصے میں تمام مثال خود مختار ہیں۔) ہم یہاں بھی حل کی نسل پیش کریں گے۔اعدادی ترکیب سے ایک وقت میں صرف ایک (تقریباً درست) حل حاصل ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے سطح مرحلہ کی ترکیب زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

گزشتہ حصے کے چند تصورات اس حصے میں بھی درکار ہیں۔ان میں **سطح حرکت** (y_1y_2 سطح)، **خط حرکت** (مساوات 4.68 کا y_1y_2 سطح پر حل)، مساوات 4.68 کا **پیکر مرحلہ** (تمام خط حرکت کا مجموعہ)، اور مساوات 4.68 کا **نقطہ فاصل** (ایسا نقطہ (y_1, y_2) جہاں $f_1(y_1, y_2)$ اور $f_2(y_1, y_2)$ دونوں صفر کے برابر ہوں۔) کے تصورات شامل ہیں۔

مساوات 4.68 کے کئی نقطہ فاصل ہو سکتے ہیں۔ ان پر باری باری بات کی جائے گی۔مرکز سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل پر غور کرنے سے پہلے، تکنیکی آسانی کی خاطر، ایسے نقطہ فاصل کو گھمائے بغیر مرکز پر منتقل کیا جائے گا۔مرکز $(0,0)$ سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل $P_0 : (a, b)$ کو گھمائے بغیر مرکز $(0,0)$ پر درج ذیل عمل سے منتقل کیا جاتا ہے۔

$$\tilde{y}_1 = y_1 - a, \quad \tilde{y}_2 = y_2 - b$$

اس عمل کے بعد نقطہ فاصل P_0 مرکز $(0,0)$ پر پایا جائے گا۔یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہاں دیے گئے تمام مثالوں میں نقطہ فاصل کو مرکز پر منتقل کیا گیا ہے اور $\tilde{y}_1$ ، $\tilde{y}_2$ کی جگہ ہم y_1 اور y_2 ہی لکھیں گے۔ہم

[68] qualitative methods
[69] autonomous

یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ نقطہ فاصل تنہا[70] ہے یعنی ایسے کسی بھی معقول حد تک چھوٹی ٹکیا جس کا وسط مرکز پر پایا جاتا ہو میں مساوات 4.68 کا صرف ایک عدد نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ اگر مساوات 4.68 کے محدود تعداد میں نقطہ فاصل پائے جاتے ہوں تب ایسے تمام نقطہ فاصل خود بخود تنہا ہوں گے۔

غیر خطی نظام کو خطی بنانا

عموماً نظام 4.68 کو نقطہ فاصل $P_0\,:\,(0,0)$ کے قریب خطی تصور کرتے ہوئے نظام کی استحکام کی نوعیت دریافت کی جا سکتی ہے۔نظام 4.68 کو $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ لکھ کر $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ رد کرنے سے خطی نظام حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو تفصیلاً دیکھتے ہیں۔

ہم اگلے باب میں دیکھیں گے کہ عموماً تفاعل کو تسلسل $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح ایک سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل کے تسلسل بھی لکھے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسے ہی چند تفاعل مثلاً

$$f_a(x)=2x^2+5x,\quad f_b(x,y)=2x^3-y^2+xy,\quad f_c(x,y)=2x^2-3y+5$$

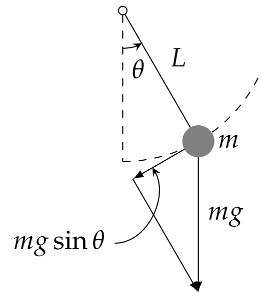
میں آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کریں۔ایسا کرنے سے $f_a(0)=0$ ، $f_b(0,0)=0$ اور $f_c(0,0)=5$ ملتا ہے۔آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کرنے سے صرف اس تفاعل کی قیمت غیر صفر حاصل ہو گی جس میں c_0 طرز کا بالکل علیحدہ مستقل پایا جاتا ہو جو متغیرات کے ساتھ ضرب نہ ہو۔

اب چونکہ P_0 نقطہ فاصل ہے لہٰذا $f_1(0,0)=0$ اور $f_2(0,0)=0$ ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ ان تفاعل میں c_0 طرز کا علیحدہ مستقل نہیں پایا جاتا لہٰذا ان کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں h_1 اور h_2 غیر خطی تفاعل ہیں۔

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\quad\implies\quad\begin{aligned}y_1'&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+h_1(y_1,y_2)\\y_2'&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+h_2(y_1,y_2)\end{aligned}\tag{4.69}$$

چونکہ نظام 4.68 **خود مختار** [t سے آزاد] تفاعل ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ مستقل مقدار ہو گا۔ اب **خطی بنانے کا مسئلہ**[71] پیش کرتے ہیں (جس کا ثبوت کتاب کے آخر میں صفحہ 285 پر حوالہ [1] کے صفحات 375 تا 388 پر پیش کیا گیا ہے)۔

isolated[70]
linearization theorem[71]



شکل 4.14: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔

مسئلہ 4.6: خطی بنانا
اگر نظام 4.68 کے نقطہ فاصل $(0,0)$: P_0 کے ہمسائیگی میں f_1 ، f_2 اور ان کے جزوی تفرق استمراری ہوں، اور مساوات 4.69 میں مقطع $\boldsymbol{A}$ غیر صفر $(|\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0})$ ہو تب نظام 4.68 کے نقطہ فاصل کی قسم اور استحکام وہی ہو گی جو درج ذیل **خطی کردہ** نظام کی ہو گی

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.70}$$

البتہ $\boldsymbol{A}$ کے خالص خیالی یا برابر آئگنی قدر ہونے کی صورت میں نظام 4.68 کا نقطہ فاصل نظام 4.70 کے نقطہ فاصل کی قسم کا ہو سکتا ہے یا وہ نقطہ مرغولہ ہو سکتا ہے۔

مثال 4.14: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔ خطی بنانا
ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کو شکل 4.14 میں دکھایا گیا ہے۔ڈنڈے کی کمیت اور ہوا کی رکاوٹی قوت کو نظر انداز کرتے ہوئے نقطہ فاصل کا مقام اور اس کی نوعیت دریافت کریں۔

حل: پہلا قدم نمونہ کشی ہے۔متوازن مقام سے گھڑی کے الٹ رخ زاویائی فاصلہ θ ناپتے ہیں۔قوت ثقل mg کمیت پر نیچے رخ عمل کرتا ہے جس کی وجہ سے حرکت کی مماسی، بحالی قوت $mg\sin\theta$ پیدا ہوتی ہے جہاں

$g = 0.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع ہے۔نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت بحالی قوت اور اسراعی قوت $mL\theta''$ جہاں $L\theta''$ اسراع ہے، ہر لمحہ برابر ہوں گے۔یوں ان دونوں قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔

$$mL\theta'' + mg\sin\theta = 0$$

دونوں اطراف کو mL سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\theta'' + k\sin\theta = 0, \qquad \left(k = \frac{g}{L}\right) \tag{4.71}$$

حاصل ہوتا ہے۔نہایت کم θ کی صورت میں $\sin\theta \approx \theta$ ہوتا ہے لہٰذا ایسی صورت میں درج بالا مساوات کو $\theta'' + k\theta = 0$ لکھ کر حل $\theta = A\cos\sqrt{k}t + B\sin\sqrt{k}t$ حاصل ہوتا ہے۔یہ کم θ کی صورت میں تقریباً درست جواب ہے البتہ بالکل درست جواب **بنیادی تفاعل**[72] کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $(\mp 2\pi, 0)$ ، $(\mp 4\pi, 0)$ ، $\cdots$ کا حصول اور **مسئلے کو خطی بنانا** ہے۔تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر ہم $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہیں۔یوں مساوات 4.71 سے درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے جو نظام 4.68 کے طرز کا ہے۔

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = -k\sin y_1 \end{aligned} \tag{4.72}$$

جہاں دونوں دائیں اطراف بیک وقت صفر کے برابر ہوں $y_2 = 0$ اور $\sin y_1 = 0$ وہاں نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔یوں لامحدود تعداد میں نقطہ فاصل $(n\pi, 0)$ پائے جاتے ہیں جہاں $n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$ ہے۔آئیں نقطہ فاصل $(0,0)$ پر غور کریں جہاں **مکلارن تسلسل**[73] سے

$$\sin y_1 = y_1 - \frac{y_1^3}{6} + - \cdots \approx y_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ فاصل کے ہمسائیگی میں $h = -\frac{y_1^3}{6} + - \cdots$ کو رد کرتے ہوئے نظام 4.72 کی خطی صورت

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2 &= -ky_1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.73}$$

حاصل ہوتی ہے۔ $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = |\boldsymbol{A}| = k = \frac{g}{L}(> 0)$ اور $\Delta = p^2 - 4q = -4k$ لکھتے ہوئے نقطہ فاصل کی قسم اور اس کا استحکام جانتے ہیں۔یوں جدول 4.1-پ کے تحت $(0,0)$ **وسط**

---
[72] elementary function
[73] Maclaurin series

ہے اور جدول 4.2 کے تحت یہ **مستحکم** ہے۔چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہٰذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \mp 2, \mp 4, \cdots$ ہے، بھی مستحکم وسط ہیں۔

تیسرا قدم نقطہ فاصل $(\mp\pi, 0)$ ، $(\mp 3\pi, 0)$ ، $(\mp 5\pi, 0)$ $\cdots$ **کا حصول اور مسئلے کو خطی بنانا** ہے۔ہم نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کرتے ہیں۔یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ لیتے اور مکلارن تسلسل

$$\sin(\theta) = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 = -y_1 + \frac{y_1^3}{6} + - \cdots \approx -y_1$$

کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(\pi, 0)$ پر نظام 4.72 کی **خطی کردہ صورت**

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= k y_1 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.74}$$

حاصل ہوتی ہے۔اب $p = 0$ ، $q = -k$ اور $\Delta = -4q = 4k$ ہیں جو **غیر مستحکم نقطہ زین** کو ظاہر کرتی ہے۔چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہٰذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \mp 1, \mp 3, \cdots$ ہے، غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.