

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کثی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
113	2.3 تفرقی عامل
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
134	2.5 پولر کوئی مساوات
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورونسکی
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کثی
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
193	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

- 3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 214
- 3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 217

- 4 نظام تفرقی مساوات 225
- 4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 226
- 4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 235
- 4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی 250
- 4.3.1 خطی نظام 251
- 4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 254
- 4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام 272
- 4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 281
- 4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 290
- 4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام 298
- 4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب 299

- 5 طاقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل 309
- 5.1 ترکیب طاقی تسلسل 310
- 5.2 لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کثیر رکنی 325
- 5.3 مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس 343
- 5.3.1 عملی استعمال 348
- 5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل 362
- 5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل 377

377 اضافی ثبوت ا

- ب منفید معلومات 381
- ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات 381

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 5

طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

گزشتہ بابوں میں مستقل عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو بنیادی تفاعل تھے۔ بنیاد تفاعل مثلاً $\sin 3t$ ، t^6 اور e^{2t} کو آپ علم الاحصاء¹ سے جانتے ہیں۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ لیڈانڈر، بیسل اور بیش ہندسی مساوات اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔ یہ مساوات اور ان کے حل لیڈانڈر تفاعل، بیسل تفاعل اور بیش ہندسی تفاعل انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف ترکیبوں پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل طاقتی تسلسل² $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہذا اس کو ترکیب طاقتی تسلسل³ کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو $\ln x$ یا کسری طاقت x^r سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو ترکیب فروبنیوس⁴ کہلاتی ہے۔ جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کارآمد ثابت ہوتا ہے لہذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلیٰ حل جنہیں آپ علم الاحصاء سے نہیں جانتے اعلیٰ تفاعل⁵ کہلاتے ہیں۔

¹calculus

²power series

³power series method

⁴Frobenius method

⁵higher functions or special functions

5.1 ترکیب طاقی تسلسل

متغیر عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً ترکیب طاقی تسلسل سے حل کرتے ہوئے طاقی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طاقی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے، حل کا خط کھینچا جاسکتا ہے، کلیات ثابت کیے جاسکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس حصے میں طاقی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ $x - x_0$ کا طاقی تسلسل درج ذیل ہے

$$(5.1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

جس میں x متغیر ہے جبکہ a_0, a_1, a_2, \dots تسلسل کے عددی سر⁶ کہلاتے ہیں اور x_0 مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا وسط⁷ کہلاتا ہے۔ جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً علامت مجموعہ⁸ (\sum) کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں اشاریہ⁹ مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔ درج بالا مساوات میں m بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔ علامت مجموعہ کے نیچے $m = 0$ اور اس کے اوپر ∞ مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔ تسلسل کا وسط صفر $(x_0 = 0)$ ہونے کی صورت میں x کا طاقی تسلسل

$$(5.2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کی تسلسل ہے جس میں $x - x_0$ (یا x) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

coefficients⁶
center⁷
summation⁸
index⁹

مثال 5.1: مکلازن تسلسل در حقیقت میں طاقی تسلسل ہیں

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1, \text{ ہندسی تسلسل})$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

ترکیب طاقی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقی تسلسل دیکھے۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقی تسلسل حل
تفرقی مساوات $y' + y = 0$ کو ترکیب طاقی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلی قدم میں حل کو طاقی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$(5.3) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

تسلسل کا جزو با جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$(5.4) \quad y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} ma_mx^{m-1}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) = 0$$

x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \dots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تفاعل e^{-x} کی مکملان تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots) = a_0e^{-x}$$

یہاں آپ $y'' + y = 0$ کو ترکیب طاقی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ حاصل کریں۔

اب اس ترکیب کی عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلے مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں ہم خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(5.5) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

میں $p(x)$ اور $q(x)$ کو x کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ از خود کثیر دکنی ہوں تب

پہلی قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسری قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح y' اور درج ذیل y'' لکھتے ہوئے

$$(5.6) \quad y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_mx^{m-2}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔ تیسری قدم میں x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری x^1 ، x^2 ، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔ یوں تمام عددی سر کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیٹرانڈر مساوات
درج ذیل مساوات کروی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حل: مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} (1 - x^2)(2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + 6 \cdot 5a_6x^4 \dots) \\ - 2x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots) \\ + 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} (2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + 6 \cdot 5a_6x^4 \dots) \\ + (-2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 3a_4x^4 - 5 \cdot 4a_5x^5 - \dots) \\ + (-2a_1x - 2 \cdot 2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 2a_4x^4 - \dots) \\ + (2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3 + 2a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (2a_2 + 2a_0) + (3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x \\ + (4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 2a_2)x^2 \\ + (5 \cdot 4a_5 - 3 \cdot 2a_3 - 3 \cdot 2a_3 + 2a_3)x^3 \\ + (6 \cdot 5a_6 - 4 \cdot 3a_4 - 4 \cdot 2a_4 + 2a_4)x^4 + \dots = 0 \end{aligned}$$

باب 5. مل متقی تسل سے سادہ تصرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تنفس

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری x ، x^2 ، x^3 ، ... کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے بالترتیب a_2 ، a_3 ، a_4 ، ... کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$a_2 = -a_0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{2} = 0 \quad (\text{چونکہ } a_3 = 0 \text{ ہے})$$

$$a_6 = \frac{3}{5}a_4 = -\frac{a_0}{5}$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \dots)$$

جس میں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔ یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل x اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \dots$ پر مشتمل ہے جو لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ ¹⁰ اور لیژانڈر تفاعل $Q_n(x)$ ¹¹ کے رکن ہیں۔ یہاں $x = P_1(x)$ اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \dots = -Q_1(x)$ ہیں جہاں منفی علامت روایتی ہے۔ n لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ ¹² کہلاتا ہے۔ یہاں $n = 1$ ہے لہذا لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔

نظریہ طاقتی تسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ $s_n(x)$ لکھتے ہیں جس کو n جزوی مجموعہ ¹³ کہتے ہیں۔

$$(5.7) \quad s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

Legendre polynomials¹⁰

Legendre function¹¹

order¹²

nth partial sum¹³

یہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ممکن ہے۔ مساوات 5.1 سے $s_n(x)$ منفی کرنے سے بقایا $R_n(x)$ حاصل ہوتا ہے جس کو $a_n(x - x_0)^n$ کے بعد مساوات 5.1 کا بقایا¹⁴ کہتے ہیں۔

$$(5.8) \quad R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \dots$$

یوں ہندسی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

کے جزوی مجموعے اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \dots \\ s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \dots \end{aligned}$$

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔ اگر کسی $x = x_1$ کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرکوز ہو مثلاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر تسلسل 5.1 مرکوز¹⁵ ہے جبکہ $s(x_1)$ کو تسلسل 5.1 کی قیمت¹⁶ یا مجموعہ کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_1 - x_0)^m$$

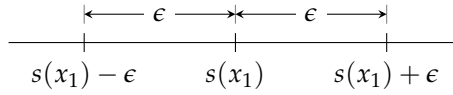
اس طرح کسی بھی n کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(5.9) \quad s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1)$$

اس کے برعکس اگر $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر مساوات 5.1 منفرج¹⁷ ہے۔

remainder¹⁴
converge¹⁵
value or sum¹⁶
divergent¹⁷

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تعریفی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تناسل



شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔

مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت ϵ کے لئے ایسا N (جس کی قیمت ϵ پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام $n > N$ کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(5.10) \quad |R_n(x_1)| = |s(x_1) - s_n(x_1)| < \epsilon \quad n > N \quad \text{تمام}$$

جیومیٹری طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ $s_n(x_1)$ جہاں $n > N$ ہے $s(x_1) - \epsilon$ اور $s(x_1) + \epsilon$ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں x_1 پر مساوات 5.1 کا مجموعہ $s(x_1)$ تقریباً $s_n(x_1)$ کے برابر ہو گا۔ مزید یہ کہ $s(x_1)$ اور $s_n(x_1)$ میں فرق کو ہم n بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

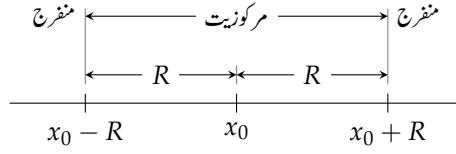
طافقی تسلسل کہاں مرکوز ہوتی ہے؟ تسلسل 5.1 میں $x = x_0$ پر a_0 کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہذا تسلسل کی قیمت a_0 ہو گی۔ یوں $x = x_0$ پر تسلسل a_0 پر مرکوز ہوتی ہے۔ کبھی کبھار x کی واحد اسی قیمت پر تسلسل مرکوز ہو گا۔ اگر x کے دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرکوز ہو تب x کی یہ قیمتیں ارتکازی وقفہ¹⁸ کہلاتا ہے۔ یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔ محدود وقفہ جس کا وسط x_0 ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں طافقی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام x پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے x پر تسلسل مرکوز ہو گا

$$(5.11) \quad |x - x_0| < R$$

جبکہ $|x - x_0| > R$ پر تسلسل منفرج ہو گا۔ ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طافقی تسلسل x کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں R رداس ارتکاز¹⁹ کہلاتا ہے۔ (مخلوط طافقی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول نکلیا ہوتا ہے جس کا رداس R ہو گا)۔ اگر تسلسل تمام x پر مرکوز ہو تب ہم $R = \infty$ یعنی $\frac{1}{R} = 0$ لکھتے ہیں۔

¹⁸convergence interval
¹⁹convergence radius



شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.1.1 جس کا وسط x_0 ہے۔

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جاسکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد (\lim) موجود اور غیر صفر ہو۔ اگر یہ حد لامتناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط x_0 پر مرکوز ہو گا۔

$$(5.12) \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}}$$

$$(5.13) \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|}$$

مثال 5.4: رداس ارتکاز ∞ ، 1 اور 0
تینوں تسلسل میں $m \rightarrow \infty$ لیتے ہوئے رداس ارتکاز R دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{1}{1} \right| = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! x^m = 1 + x + 2x^2 + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{(m+1)!}{m!} \right| = m+1 \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow 0$$

لامتناہی رداس ارتکاز $R \rightarrow \infty$ سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ $R = 0$ بے کار صورت ہے۔ عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔

باب 5. طاقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

درج بالا مثال میں $\frac{1}{1-x}$ کے طاقی تسلسل کا رداس ارتکاز $R = 1$ حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط $x_0 = 0$ ہے۔ مساوات 5.11 کے تحت $|x| < 1$ کے لئے طاقی تسلسل تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کو ظاہر کرتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔ نقطہ $x = 0.2$ پر تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-0.2} = 1.25$ ہے جبکہ اس کے تسلسل میں $x = 0.2$ پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1 &= 1 && \text{ایک رکن} \\ 1 + 0.2 &= 1.2 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 &= 1.24 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 &= 1.248 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 + 0.2^4 &= 1.2496 && \text{پانچ ارکان} \end{aligned}$$

طاقی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کے اصل قیمت کے $\frac{1.2496}{1.25} \times 100 = 99.968$ فی صد ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔ بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی x پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جاسکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرج ہے۔ آئیں رداس ارتکاز کے باہر $x = 1.2$ پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل کریں۔ تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-1.2} = -5$ حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 1.2 &= 2.2 \\ 1 + 1.2 + 1.2^2 &= 3.64 \\ 1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 &= 5.368 \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔ یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ x پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرج ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔ طاقی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہوگی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$(5.14) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

میں $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کے طاقی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ ایسا تفاعل $f(x)$ جس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا مثبت رداس ارتکاز پایا جاتا ہو، x_0 پر تخیلی²⁰ کہلاتا ہے ورنہ اس نقطے کو غیر تخیلی کہیں گے (مثال 5.5 دیکھیں)۔ اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 معیاری صورت میں ہے یعنی یہ y'' سے شروع ہوتا ہے۔ اگر دو درجی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پایا جاتا ہو، یعنی اس میں $h(x)y''$ پایا جاتا ہو تب مساوات کو $h(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

مسئلہ 5.1: طاقی تسلسل حل کی وجوہیت

اگر مساوات 5.14 میں p ، q اور r نقطہ $x = x_0$ پر تخیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل $x = x_0$ پر تخیلی ہو گا اور اس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رداس ارتکاز $R > 0$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت آپ کتاب کے آخر میں صفحہ 375 پر حوالہ [2] سے پڑھ سکتے ہیں۔ (دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ x محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رداس ارتکاز کی لمبائی x_0 سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں p ، q اور r میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تخیلی ہو۔

مثال 5.5: تفاعل غیر تخیلی ہونے کے کئی وجوہات ممکن ہیں۔ اس کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

• تفاعل غیر معین ہو سکتا ہے مثلاً $f(x) = \frac{1}{x-x_0}$ جس کی قیمت $x = x_0$ پر غیر معین ہے۔

• تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

• تفاعل استمراری ہونے کے باوجود غیر ہموار²¹ ہو سکتا ہے۔ ایسا تفاعل جس کے تمام تفرق $x = x_0$ پر پائے جاتے ہوں ہموار کہلاتا ہے۔ درج ذیل تفاعل کا دو درجی تفرق $x = x_0$ پر نہیں پایا جاتا۔

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 & x \geq x_0 \\ -(x - x_0)^2 & x < x_0 \end{cases}$$

تفاعل ہموار ہونے کے باوجود اس کی ٹیلر تسلسل نقطہ $x = x_0$ پر منفرد ہو سکتی مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

اس ہموار تفاعل کے تمام تفرق نقطہ $x = 0$ پر صفر کے برابر ہیں لہذا اس کی ٹیلر تسلسل صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے جو تفاعل کو ظاہر نہیں کر سکتی۔

طاقی تسلسل پر مختلف عمل

طاقی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقی تسلسلوں کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح) x کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔ یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جاسکتا ہے۔ اگر طاقی تسلسل

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

انہیں x پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان x پر تفرق y' کو ظاہر کرے گا۔
 ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \quad (|x - x_0| < R)$$

اسی طرح دو درجی، تین درجی اور بلند درجی تفرقات بھی حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقتی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر طاقتی تسلسل

$$(5.15) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) (x - x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ $f(x) + g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقتی تسلسل کو رکن باریکن ضرب دیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں۔ اب پہلی تسلسل کے ہر رکن کو دوسری تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے $x - x_0$ کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_m b_0)(x - x_0)^m \end{aligned}$$

مرکوز ہو گا اور $f(x)g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ار تکاڑ دریافت کریں۔

سوال 5.1: $\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)mx^m$
جواب: $R = 1$

سوال 5.2: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{k^m}$
جواب: $R = k$

سوال 5.3: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
جواب: $R = \infty$

سوال 5.4: $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m x^m$
جواب: $R = \frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقی تسلسل حل کریں۔

سوال 5.5: $y' = -2xy$
جواب: $y = a_0(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots) = a_0 e^{-x^2}$

سوال 5.6: $y'' + y = 0$
جواب: $y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{a_1}{6} x^3 + \dots = a_0 \cos x + a_1 \sin x$

سوال 5.7: $(1-x)y' = y$
جواب: $y = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = -\frac{a_0}{1-x}$

سوال 5.8: جہاں k مستقل مقدار ہے $xy' - 3y = k$
جواب: $y = cx^3 - \frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاقی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔ تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لا محدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں x کے صرف طاق یا صرف جفت طاقت پائیں جاتے ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9: $y'' - y' + xy = 0$

جواب: $y = a_0(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{240} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} - \dots)$

سوال 5.10: $y'' - y' - xy = 0$

جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{144} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} + \dots)$

سوال 5.11: $y'' - y' - x^2y = 0$

جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots)$

سوال 5.12: $y'' - xy' - x^2y = 0$

جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \dots) + a_1(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots)$

سوال 5.13: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$

جواب: $y = a_0(1 - 3x^2) + a_1(x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \dots)$ ؛ جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
 کے پہلے جزو کی نشاندہی $s = 0$ کرتا ہے۔ اس مجموعے میں $k = s + 1$ پر کرتے ہوئے نیا مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر x^m پایا جاتا ہو۔ اس عمل کو منتقلی اشاریہ²² کہتے ہیں۔ حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی $k = 1$ کرتا ہے۔

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی

مجموعہ $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{p+2}{(p+1)!} x^{p+3}$ میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر x^m ہو۔

جواب: $\sum_{m=5}^{\infty} \frac{m-1}{(m-2)!} x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.19 کو ترکیب طاقی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں x^3 تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل a_0 (اور a_1) دریافت

باب 5. طاقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

کریں۔ دیے گئے نقطہ x_1 پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔ جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں تک جواب لکھیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

$$\text{جوابات: } y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \dots$$

$$y(1) = -514, \quad a_0 = 6$$

سوال 5.17:

$$y'' + 4xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad x_1 = 0.1$$

$$\text{جوابات: } y = a_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \dots) + a_1(x - \frac{5x^3}{6} + \dots)$$

$$y(0.1) = 1.094, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 1$$

سوال 5.18:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = 0.5$$

$$\text{جوابات: } y = a_0(1 - 6x^2 + 3x^4 + \dots) + a_1(x - \frac{5x^3}{3})$$

$$y(0.5) = -0.437, \quad a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_0 = 0$$

سوال 5.19:

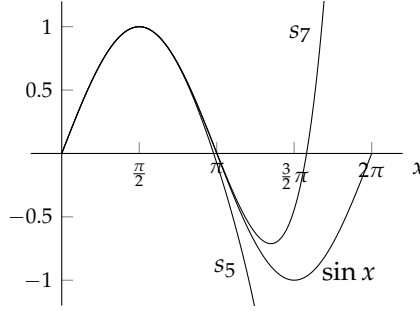
$$(x - 4)y' = xy, \quad y(1) = 5, \quad x_1 = 2$$

$$\text{جوابات: } y(2) = 2.307, \quad a_0 = 5.827, \quad y = a_0(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{256} + \dots)$$

سوال 5.20: کمپیوٹر کا استعمال

طاقی تسلسل سے تفاعل کی قیمت جزوی تسلسل سے حاصل کی جاتی ہے۔ تفاعل $\sin x$ کی تسلسل سے بذریعہ کمپیوٹر، تسلسل میں اجزاء کی تعداد مختلف لیتے ہوئے سائن کا خط کھینچیں۔ آپ دیکھیں گے کہ کم اجزاء لینے سے اصل تفاعل (یعنی $\sin x$) اور تسلسل میں فرق بہت جلد واضح ہوتا ہے جبکہ زیادہ تعداد میں اجزاء لینے سے یہ فرق دیر بعد نمودار ہوتا ہے۔

جوابات: شکل 5.3 میں $\sin x$ کا جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔



شکل 5.3: سوال 5.20 کا خط۔ $\sin x$ کے علاوہ جزوی مجموعہ S_5 اور S_7 دکھائے گئے ہیں۔

5.2 لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کشیرر کنی

لیٹنڈر تفرقی مساوات²⁴²³

$$(5.16) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (n \text{ مستقل ہے})$$

طبیعیات کے اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک ہے جو متعدد مسائل، بالخصوص کرہ کے سرحدی قیمت مسئلوں، میں سامنے آتی ہے۔

مساوات میں مقدار معلوم n کی قیمت اصل مسئلے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے لہذا مساوات 5.16 درحقیقت سادہ تفرقی مساوات کی نسل کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم نے لیٹنڈر مساوات، جس میں $n = 1$ تھا، کو مثال 5.3 میں حل کیا (جس کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ مساوات 5.16 کے کسی بھی حل کو لیٹنڈر تفاعل²⁵ کہتے ہیں۔ لیٹنڈر تفاعل اور ایسے دیگر اعلیٰ تفاعل، جو علم الاحصاء میں نہیں پائے جاتے، کے مطالعہ کو نظریہ اعلیٰ تفاعل²⁶ کہتے ہیں۔ دیگر اعلیٰ تفاعل اگلے حصوں میں سامنے آئیں گے۔

مساوات 5.16 کو $1 - x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ نقطہ $x = 0$ پر تحلیلی تفاعل ہیں [مثال 5.6 دیکھیں] لہذا لیٹنڈر مساوات

²³فرائسی ریاضی دان اڈریان مری لیٹنڈر [1752-1833] نے اعلیٰ تفاعل، بیضوی شکل اور اعدادی نظریہ پر کام کیا۔

²⁴Legendre's equation

²⁵Legendre function

²⁶special functions theory

پر مسئلہ 5.1 کا اطلاق ہوتا ہے اور اس کا حل طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ طاقتی تسلسل

$$(5.17) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

اور اس کے تفرقات کو مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے مستقل $n(n+1)$ کو k لکھتے ہوئے

$$(1-x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں آپ مثال 5.3 کی طرح مجموعوں کے چند ابتدائی ارکان لکھ کر آگے بڑھ سکتے ہیں یا پھر درج ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ تمام مجموعوں کو x کی یکساں طاقت کی صورت (x^s) میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $s = m - 2$ یعنی $m = s + 2$ پر کرتے ہیں جبکہ بقایا تین مجموعوں میں m کی جگہ s پر کرتے ہیں۔ یوں پہلے مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ اب $s = 0$ ہوگا اور a_m کی جگہ a_{s+2} لکھا جائے گا۔

$$(5.18) \quad \sum_{s=0}^{\infty} (s+2)(s+1)a_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} 2s a_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} k a_s x^s = 0$$

درج بالا مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہذا مساوات کا بایاں ہاتھ بھی صفر کے برابر ہوگا اور یوں x کے ہر طاقت کے عددی سروں کا مجموعہ صفر کے برابر ہوگا۔ یوں x^0 کے عددی سر سے شروع کرتے ہوئے ہاری ہاری x^1 ، x^2 ، ... کے عددی سر صفر کے برابر لکھتے ہیں۔ مساوات 5.18 کا دوسرا مجموعہ x^2 اور تیسرا مجموعہ x^1 سے شروع ہوتا ہے لہذا ان میں x^0 نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں پہلے اور چوتھے مجموعوں سے x^0 کے عددی سر جمع کرتے ہوئے صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$$(5.19) \quad 2 \cdot 1 a_2 + n(n+1)a_0 = 0$$

جہاں k کی جگہ واپس $n(n+1)$ لکھا گیا ہے۔ اسی طرح x^1 پہلے، تیسرے اور چوتھے مجموعوں میں پایا جاتا ہے جن سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(5.20) \quad 3 \cdot 2 a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0$$

بلند طاقتی اجزاء x^2 ، x^3 ، ... تمام مجموعوں میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کے لئے x^s کے عددی سروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$(5.21) \quad (s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0$$

چکور قوسین $[\dots]$ کے اندر قوسین کو کھول کر ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} -s(s-1) - 2s + n(n+1) &= -s^2 + s - 2s + n^2 + n = n^2 - s^2 + n - s \\ &= (n-s)(n+s) + n - s \\ &= (n-s)(n+s+1) \end{aligned}$$

لہذا مساوات 5.21 سے

$$(5.22) \quad a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)} a_s \quad (s = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتا ہے جو کلیہ توانی²⁷ کہلاتا ہے۔ کلیہ توانی کی مدد سے، a_0 اور a_1 کے علاوہ، بقایا تمام عددی سر، دو قدم پچھلی عددی سر استعمال کرتے ہوئے دریافت کیے جاتے ہیں۔ یوں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔ کلیہ توانی کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!} a_0 & a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1 \\ a_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3} a_2 & a_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4} a_3 \\ &= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0 & &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں مساوات 5.17 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$(5.23) \quad y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

جہاں

$$(5.24) \quad y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - + \dots$$

اور

$$(5.25) \quad y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - + \dots$$

یہ تسلسل $|x| < 1$ کے لئے مرکوز ہیں۔ بعض اوقات تسلسل کا کوئی عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں کلیہ توانی کے تحت اگلے تمام عددی سر بھی صفر ہوں گے اور یوں تسلسل محدود ارکان پر مشتمل ہوتا

²⁷recurrence relation, recursion formula

ہے۔ چونکہ مساوات 5.24 میں x کے جفت طاقت پائے جاتے ہیں جبکہ مساوات 5.25 میں x کے طاق طاقت پائے جاتے ہیں لہذا $\frac{y_1}{y_2}$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا ہے اور یوں y_1 اور y_2 آپس میں خطی تعلق نہیں رکھتے لہذا یہ خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ یوں مساوات 5.23 کھلے وقفہ $-1 < x < 1$ پر عمومی حل ہے۔

دھیان رہے کہ $x = \pm 1$ پر $1 - x^2 = 0$ ہو گا لہذا سادہ تفرقی مساوات کی معیاری صورت میں عددی سر غیر تحلیلی ہوں گے۔ یوں حیرانی کی بات نہیں ہے کہ تسلسل 5.24 اور تسلسل 5.24 کا ارتکازی وقفہ وسیع نہیں ہے ماسوائے اس صورت میں جب اجزاء کی تعداد محدود ہونے کی بنا تسلسل کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے۔

کثیر رکنی حل۔ لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$

طاقتی تسلسل کے تخفیف سے کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے جس کا حل، ارتکازی شرط کے قید سے آزاد، تمام x کے لئے پایا جاتا ہے۔ ایسے اعلیٰ تفاعل جو سادہ تفرقی مساوات کے حل ہوتے ہیں میں یہ صورت عموماً پائی جاتی ہے جن سے مختلف نسل کے اہم کثیر رکنی حاصل ہوتے ہیں۔ لیژانڈر مساوات میں n کی قیمت غیر منفی عدد صحیح ہونے کی صورت میں $s = n$ پر مساوات 5.22 صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا $a_{n+2} = 0$ ہو گا اور یوں $a_{n+4} = 0$ ، $a_{n+6} = 0$ ، ہوں گے۔ جفت n کی صورت میں y_1 کثیر رکنی ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں y_2 کثیر رکنی ہو گا۔ ان کثیر رکنی کو مستقل مقدار سے ضرب دیتے ہوئے لیژانڈر کثیر رکنی²⁸ حاصل ہوتی ہیں جنہیں $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ روایتی طور پر اس مستقل مقدار کو درج ذیل طریقے سے چنا جاتا ہے۔

تسلسل میں x^n کے عددی سر a_n کو

$$(5.26) \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \quad n \text{ مثبت عدد ہے}$$

چنا [مثال 5.7 دیکھیں] جاتا ہے (جبکہ $n = 0$ کی صورت میں $a_n = 1$ چنا جاتا ہے)۔ مساوات 5.22 کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے دیگر عددی سر حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(5.27) \quad a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \quad (s \leq n-2)$$

کشیر رکنی میں x کی بلند تر طاقت کے عددی سر a_n کو مساوات 5.26 کے تحت چننے سے $x = 1$ پر تمام P_n کی قیمت اکائی $[P_n(1) = 1]$ حاصل ہوتی ہے [شکل 5.4 دیکھیں]۔ یہی a_n یوں چننے کی وجہ ہے۔ مساوات 5.27 میں $s + 2 = n$ یعنی $s = n - 2$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.26 سے a_n پر کرتے ہیں۔

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

شمار کنندہ میں $(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)!$ اور نسب نما میں $(n!)^2$ کو $n!n!$ لکھ کر اس میں $n! = n(n-1)!$ اور $n! = n(n-1)(n-2)!$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں $n(n-1)2n(2n-1)$ کٹ جاتے ہیں۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} \end{aligned}$$

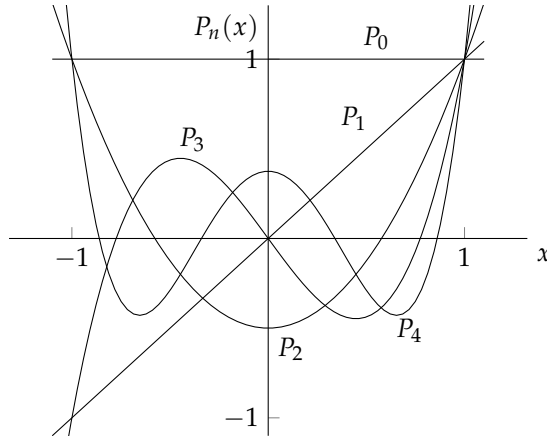
اور دیگر عددی سر حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یوں درج ذیل عمومی کلیہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.28) \quad a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \quad (n-2m \geq 0)$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے لیژنڈر تفرقی مساوات 5.16 کا کشیر رکنی حل

$$\begin{aligned} (5.29) \quad P_n(x) &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ عدد صحیح ہو گا اور M اس عدد صحیح کے برابر ہو گا [مثال 5.8 دیکھیں]۔ درج بالا n درجی لیژنڈر کشیر رکنی²⁹ کہلاتا ہے اور اس کو $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند پہلے لیژنڈر کشیر رکنی



شکل 5.4: لیژنڈر کثیر رکنی۔

جنہیں شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

لیژنڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر آپس میں عمودی³⁰ ہیں۔ یہ خصوصیت فوریر لیژنڈر تسلسل کے لئے ضروری ہے جن پر فوریر تسلسل کے باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال 5.6: لیژنڈر مساوات 5.16 $1 - x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت میں لکھتے ہوئے ثابت کریں کی اس کے عددی سر $x = 0$ پر تحلیل ہیں۔

حل: لیژنڈر مساوات کو $1 - x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$ حاصل ہوتا ہے

جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ ہیں جن کی مکمل درج ذیل ہیں۔

$$\frac{n(n+1)}{1-x^2} = n(n+1)(1+x^2+x^4+\dots)$$

$$\frac{-2x}{1-x^2} = -2(x+x^3+x^5+\dots)$$

پہلی تسلسل کا $\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$ ہیں لہذا اس کا رداس ارتکاز $R = 1$ ہے۔ دوسری تسلسل کا بھی $\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$ اور $R = 1$ ہیں۔ یوں دونوں تسلسل تحلیل ہیں۔

مثال 5.7: درج ذیل مساوات کے بائیں ہاتھ سے اس کا دایاں ہاتھ حاصل کریں۔

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$$

حل: پہلے $n = 3$ کے لئے حل کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں شمار کنندہ میں طاق اعداد (جو طاق مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو ایک طرف اور جفت اعداد (جو جفت مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو دوسری طرف منتقل کرتے ہوئے ہر جفت عدد سے 2 کا ہندسہ نکالا گیا ہے۔

$$\frac{(2 \cdot 3)!}{2^3(3!)^2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3(3 \cdot 2 \cdot 1)^2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3(3!)^2} = \frac{2^3(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3(3!)^2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{3!}$$

شمار کنندہ میں اعداد کو ترتیب دیتے ہوئے اور اس میں سب سے بڑے عدد 5 کو $2 \cdot 3 - 1$ لکھتے ہوئے $\frac{1 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3 - 1)}{3!}$ لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں یہی سب کچھ عمومی عددی صحیح n کے لئے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5) \cdots 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\ &= \frac{2n(2n-2)(2n-4) \cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\ &= \frac{2^n n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{n!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \end{aligned}$$

مثال 5.8: لیٹرنڈر کثیر رکنی مجموعہ [5.29] کی بالائی حد M ہے۔ M کی قیمت دریافت کریں۔

حل: مساوات 5.22 لیٹرنڈر کثیر رکنی کے عددی سر دیتی ہے جس کے تحت $s = n$ پر عددی سر صفر $(a_{n+2} = 0)$ کے برابر ہو گا اور یوں بقایا عددی سر a_{n+4}, a_{n+6}, \dots بھی صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں کثیر رکنی میں x کی زیادہ سے زیادہ طاقت n ہو گی۔ اس طرح $n = 5$ کی صورت میں a_5x^5, a_3x^3, a_1x^1 پایا جائے گا جبکہ $n = 8$ کی صورت میں $a_8x^8, a_6x^6, a_4x^4, a_2x^2, a_0$ پائے جائیں گے۔ آپ نے دیکھا کہ طاق n کی صورت میں کثیر رکنی میں کل $\frac{n-1}{2}$ پائے گئے جبکہ جفت n کی صورت میں ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ تھی۔ یوں طاق n کی صورت میں $M = \frac{n-1}{2}$ اور جفت n کی صورت میں $M = \frac{n}{2}$ ہو گا جہاں M عدد صحیح ہے۔

مثال 5.9: (کلیہ روڈریگیس)

تفاعل $(x^2 - 1)^n$ کو الکرانجی کے مسئلہ ثنائی³¹ سے پھیلا کر اس کا n درجی تفرق لیں۔ حاصل جواب کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل کریں جس کو کلیہ روڈریگیس³² کہتے ہیں۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (5.31)$$

حل: $(x^2 - 1)^n$ کو مسئلہ الکرانجی سے پھیلاتے ہوئے $n + 1$ ارکان ملتے ہیں۔

$$(5.32) \quad y = (x^2 - 1)^n = (x^2)^n + \frac{n}{1!} (x^2)^{n-1} (-1)^1 + \frac{n(n-1)}{2!} (x^2)^{n-2} (-1)^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1)}{2!} (x^2)^2 (-1)^{n-2} + \frac{n}{1!} (x^2) (-1)^{n-1} + (-1)^n$$

³¹ binomial theorem ابو بکر ابن محمد ابن الحسن الکرانجی [953-1029] ایرانی ریاضی دان۔

³² Rodrigues' formula فرانسسی ریاضی دان بنجامن اولانڈے روڈریگیس [1794-1851]

اس مساوات کا آخری رکن مستقل مقدار $(-1)^n$ ہے جبکہ اس رکن سے ایک پہلے رکن میں x^2 پایا جاتا ہے۔ یوں y' لینے سے آخری رکن صفر ہو جائے گا لہذا y' میں n ارکان رہ جائیں گے۔ y' کے آخری رکن میں x^1 پایا جائے گا۔ y'' لینے سے یہ رکن مستقل مقدار ہو جائے گا جبکہ ارکان کی تعداد میں مزید کمی رونما نہیں ہوگی۔ اسی طرح y''' لینے سے ایک اور رکن کم ہو جائے گا اور $n-1$ ارکان رہ جائیں گے۔ y'''' لینے سے ارکان کی تعداد میں کمی پیدا نہیں ہوگی۔ یوں ہر دو مرتبہ تفرق لینے سے تعداد اکائی کی پیدا ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ n درجی تفرق $y^{(n)}$ لینے کے بعد ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ ہوگی جس کو ہم M سے ظاہر کرتے ہیں اور جو صحیح عدد ہو گا۔

مساوات 5.32 کو مجموعے کی صورت میں لکھتے ہیں جس میں $m=0$ تا $m=n$ ارکان یعنی $n+1$ ارکان ہیں۔

$$(5.33) \quad y = \sum_{m=0}^n \frac{n!(x^2)^{n-m}(-1)^m}{(n-m)!m!} = \sum_{m=0}^n \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!} x^{2n-2m}$$

اب $z = x^{2n-2m}$ پر نظر رکھیں۔ اس کے تفرق لیتے ہیں۔

$$z' = (2n-2m)x^{2n-2m-1} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-1)!} x^{2n-2m-1}$$

$$z'' = (2n-2m)(2n-2m-1)x^{2n-2m-2} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-2)!} x^{2n-2m-2}$$

$$z''' = (2n-2m)(2n-2m-1)(2n-2m-2)x^{2n-2m-3} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-3)!} x^{2n-2m-3}$$

⋮

$$z^{(k)} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-k)!} x^{2n-2m-k}$$

$$z^{(n)} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-n)!} x^{2n-2m-n} = \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!} x^{n-2m}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.33 کا n درجی تفرق لکھتے ہیں

$$y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] = \sum_{m=0}^M \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!} \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!} x^{n-2m}$$

باب 5. مل متق تسلسل س ساءه تفرفق مساواط كا حل۔ اعلیٰ تفاف اس

بس كا مساواط 5.29 ك ساءه موازنه كرفف هوفف ذفل لكها با سكتا هف۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

مثال 5.10: روڈرففكفس مساواط 5.31 اسعمال كرفف هوفف n مرتبف اكمل بالحص لففف هوفف ذفل ثابت كرفف۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

حل: فرض كرفف كف $y = (x-1)^3$ هف۔ فوف $y' = 3(x-1)^2$ ، $y'' = 3 \cdot 2(x-1)$ ، $y''' = 3 \cdot 2 \cdot 1$ اور $y^{(4)} = 0$ هوفف كف بس س $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ ، $y''(1) = 0$ ، $y'''(1) = 3!$ اور $y^{(4)}(1) = 0$ حاصل هوفف هف۔ اس س هم اخذ كرفف هف كف $y_1 = (x-1)^n$ كف صورت فف

$$(5.34) \quad y_1 = (x-1)^n, \quad y_1^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!} (x-1)^{n-m}, \quad y_1^{(m)}(1) = n! \delta_{n,m}$$

اور $y_2 = (x+1)^n$ كف صورت فف

$$(5.35) \quad y_2 = (x+1)^n, \quad y_2^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!} (x+1)^{n-m}, \quad y_2^{(m)}(-1) = n! \delta_{n,m}$$

هوا كا جها $\delta_{n,m}$ كف تفرفق ذفل هف (فففف $m = n$ كف صورت فف $\delta = 1$ جبكه $m \neq n$ كف صورت فف $\delta = 0$ هف)۔

$$(5.36) \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

مساواط 5.34 كففف هف كف $y_1 = (x-1)^n$ كف تمام تفرفقات كف قفم $x = 1$ فر صفر هوكا مساوائف n ذرفف تفرفق، بس كف قفم $n!$ هوكا۔ مساواط 5.35 ففف كفف $y_2 = (x+1)^n$ كف بارف فف $x = -1$ فر كففف هف۔

اب اگر $X = (x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n = y_1 y_2$ ہو تب کلیہ لیٹنڈر³³ سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{d^m X}{dx^m} = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \overbrace{\frac{d^{m-s} y_1}{dx^{m-s}}}^M \cdot \overbrace{\frac{d^s y_2}{dx^s}}^N$$

اگر $m \neq n$ ہو، اور بالخصوص اگر $m < n$ ہو، تب مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $M(x = 1) = 0$ ہو گا جبکہ مساوات 5.35 کہتی ہے کہ تب $N(x = -1) = 0$ ہو گا۔ ان نتائج کی بنا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.37) \quad \frac{d^m X}{dx^m} = 0$$

مساوات 5.31 کو استعمال کرتے ہوئے $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n X}{dx^n}$ لکھا جا سکتا ہے لہذا

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2 dx &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^n X}{dx^n} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \left[\frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} dx \right] \end{aligned}$$

ہو گا جہاں تکمل بالخصص استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 5.37 کے تحت $\frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \Big|_1 = \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \Big|_{-1} = 0$ ہے لہذا آخری قدم پر تکمل کے باہر تمام حصہ صفر کے برابر ہے اور یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2 dx &= \frac{-1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} dx \\ &= \frac{-1}{2^{2n} (n!)^2} \left[\frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-2} X}{dx^{n-2}} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} \cdot \frac{d^{n-2} X}{dx^{n-2}} dx \right] \end{aligned}$$

جہاں دوبارہ تکمل بالخصص لیا گیا ہے۔ پہلی کی طرح اب بھی تکمل کا باہر والا حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار تکمل بالخصص لیتے ہوئے ہر بار بیرونی حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ یوں s مرتبہ تکمل لیتے اور بیرونی حصے کو صفر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^s}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+s} X}{dx^{n+s}} \cdot \frac{d^{n-s} X}{dx^{n-s}} dx$$

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرق

آخر کار $s = n$ ہو گا اور یوں درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $\frac{d^0 X}{dx^0} = X$ لکھا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+n} X}{dx^{n+n}} \cdot \frac{d^{n-n} X}{dx^{n-n}} dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{2n} X}{dx^{2n}} \cdot X dx$$

$X = (x^2 - 1)^n$ کا الگراجی ثنائی تسلسل مساوات 5.32 دیتی ہے جس کا $2n$ درجی تفرق لینے سے، پہلے رکن کے علاوہ، تمام ارکان صفر کے برابر ہو جاتے ہیں۔ یوں اس کا $2n$ درجی تفرق $\frac{d^{2n} X}{dx^{2n}} = (2n)!$ ہو گا جس سے درج بالا مکمل یوں

$$(5.38) \quad \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 X dx$$

لکھا جاتا ہے۔ آئیں $\int X dx$ کو مکمل بالخصص کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 X dx &= \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx \\ &= (x-1)^n \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 n(x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} dx \end{aligned}$$

مکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار مکمل بالخصص لیتے ہوئے ہر مرتبہ مکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ s مرتبہ مکمل بالخصص لیتے ہوئے اور مکمل کے باہر حصے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 X dx &= (-1)^s \int_{-1}^1 [n(n-2) \cdots (n-s+1)] (x-1)^{n-s} \frac{(x+1)^{n+s}}{(n+1)(n+2) \cdots (n+s)} dx \\ &= (-1)^s \int_{-1}^1 \frac{n!(x-1)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{n!(x+1)^{n+s}}{(n+s)!} \end{aligned}$$

آخر کار $s = n$ ہوگا جس پر درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 X dx &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{n!(x-1)^{n-n}}{(n-n)!} \frac{n!(x+1)^{n+n}}{(n+n)!} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

جہاں $0! = 1$ (مساوات 5.94) پر کیا گیا ہے۔ درج بالا نتیجے کو مساوات 5.38 میں پر کرتے ہیں

$$(5.39) \quad \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

جہاں منفی ایک کا جفت طاقت اکائی کے برابر $[(-1)^{2n} = 1]$ ہے۔

مثال 5.11: درج ذیل ثابت کریں جہاں $n \neq m$ ہے۔

$$(5.40) \quad \int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0 \quad (n \neq m)$$

حل: فرض کریں کہ $X = (x^2 - 1)^n$ اور $Y = (x^2 - 1)^m$ ہیں۔ یوں مساوات 5.31 کے تحت
 $P_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m Y}{dx^m}$ اور $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n X}{dx^n}$ ہوں گے لہذا

$$\int_{-1}^1 P_n P_m dx = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 \frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^m Y}{dx^m} dx$$

ہوگا۔ چونکہ n اور m برابر نہیں ہیں لہذا ان میں ایک کی قیمت دوسرے سے کم ہوگی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $n < m$ ہے۔ گزشتہ مثال کی طرح، درج بالا کو بار بار مکمل بالخصوص سے حل کرتے ہوئے، ہر بار مکمل کے باہر

باب 5. مل متقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور آخر کار درج ذیل ملتا ہے۔ مساوات 5.36 کے تحت γ کا صرف اور صرف m درجی تفرق غیر صفر ہے درج ذیل صفر کے برابر ہے۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n P_m dx &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{d^{m-n} Y}{dx^{m-n}} dx \\ &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{d^{m-n+1} Y}{dx^{m-n+1}} \Big|_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

مثال 5.12: پیدا کار تفاعل

الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ کا تسلسل لکھ کر اس میں $v = 2xu - u^2$ پر کریں۔ ان میں u^0 ارکان کا مجموعہ حاصل کریں۔ اسی طرح u^1 ارکان کا مجموعہ، اور u^2 ارکان کا مجموعہ، ... حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان مجموعوں کا عددی سر بالترتیب P_0 ، P_1 ، P_2 ، ... ہو گا یعنی

$$(5.41) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n$$

حل: آئیں P_0 ، P_1 اور P_2 کے لئے حل کریں۔ دیے تفاعل کا الکراجی ثنائی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 v^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 v^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 v^4}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

چونکہ u^2 کا عدد سر P_2 ہو گا اور درج بالا تسلسل کے پہلے تین ارکان میں کے بعد u کے زیادہ بلند طاقت پائے جاتے ہیں لہذا ہم تسلسل کے پہلے تین ارکان پر نظر رکھتے ہیں۔ اس تسلسل میں $v = 2xu - u^2$ پر کرتے ہوئے درکار نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (1-v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(2xu - u^2)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 (2xu - u^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots \\ &= 1 + \left(xu - \frac{u^2}{2}\right) + \frac{3}{8} (4x^2 u^2 + u^4 - 4xu^3) + \dots \\ &= \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{(x)}_{P_1} u + \underbrace{\left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}\right)}_{P_2} u^2 + \dots \end{aligned}$$

سوالات

سوال 5.21 تا سوال 5.26 لیٹنڈر کثیر رکنی اور تفاعل پر مبنی ہیں۔

سوال 5.21: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 0$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیٹنڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقت کے x پائے جاتے ہیں لہذا $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 0$ پر کرتے اور $0! = 1$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ ملتا ہے۔ $0! = 1$ کا ثبوت گیمما تفاعل³⁴ کی مدد سے اسی باب میں دیا جائے گا۔

سوال 5.22: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 1$ لیتے ہوئے $P_1(x)$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیٹنڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقتی x پائے جاتے ہیں لہذا $n = 1$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے $P_1(x) = x$ ملتا ہے۔

سوال 5.23: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 سے $P_3(x)$ تا $P_5(x)$ حاصل کریں جنہیں مساوات 5.30 میں پیش کیا گیا ہے۔

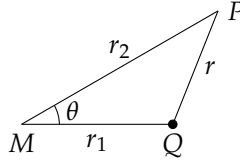
سوال 5.24: $P_0(x)$ کو لیٹنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیٹنڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n = 0$ کی صورت میں لیٹنڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$ ہوگی اور $y = P_0 = 1$ ، $y' = P_0' = 0$ اور $y'' = P_0'' = 0$ ہوں گے۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1 - x^2)(0) - 2x(0) = 0$ حاصل ہوتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.25: $P_1(x)$ کو لیٹنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیٹنڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n = 1$ کی صورت میں لیٹنڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ہوگی جبکہ $y = P_1 = x$ ، $y' = P_1' = 1$ اور $y'' = P_1'' = 0$ ہیں۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے

³⁴Gamma function



شکل 5.5: نقطہ برقی بار کا برقی میدان [سوال 5.27]۔

بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1 - x^2)(0) - 2x(1) + 2(x)$ یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.26: $P_3(x)$ کو لیژنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژنڈر مساوات کے حل ہیں۔

جوابات: $n = 3$ کی صورت میں لیژنڈر مساوات 5.16 کی صورت $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ ہوگی جبکہ $y = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ، $y' = \frac{1}{2}(15x^2 - 3)$ اور $y'' = 15x$ ہیں جنہیں مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے

$$(1 - x^2)(15x) - 2x[\frac{1}{2}(15x^2 - 3)] + 12[\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)]$$

یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.27: نظریہ مخفی توانائی

آپ نقطہ برقی بار کے برقی میدان سے بخوبی واقف ہیں۔ شکل 5.5 میں محدود کے مرکز M سے ہٹ کر نقطہ بار Q پایا جاتا ہے جس کا عمومی مقام P پر برقی دباؤ $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}}$ ہے۔ $\frac{Q}{4\pi\epsilon}$ کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.41 کی استعمال سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$(5.42) \quad \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}} = \frac{1}{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos \theta) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m$$

جواب: $u = \frac{r_1}{r_2}$ لکھتے ہوئے $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta = r_2^2[1 - 2\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cos \theta + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2]$ اور $x = \cos \theta$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 5.28: درج ذیل ثابت کریں۔ مساوات 5.41 کو استعمال کریں۔

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

سوال 5.29: بونٹ کلیہ توالی

مساوات 5.41 کا u تفرق لے کر دوبارہ مساوات 5.41 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل بونے کلیہ توالی³⁵ حاصل کریں۔

$$(5.43) \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

جواب: مساوات 5.41 کا ایک درجی تفرق $\frac{d}{du}$ لیتے ہوئے دوبارہ مساوات 5.41 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} & \frac{-\frac{1}{2}(-2x+2u)}{(1-2xu+u^2)\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum nP_n u^{n-1} \\ \Rightarrow & \frac{x-u}{1-2xu+u^2} \sum P_n u^n = \sum nP_n u^{n-1} \\ \Rightarrow & x \sum P_n u^n - \sum P_n u^{n+1} = \sum nP_n u^{n-1} - 2x \sum nP_n u^n + \sum nP_n u^{n+1} \\ & \text{اب دونوں جانب } u^n \text{ کے عددی سر برابر لیتے ہیں۔} \end{aligned}$$

$$xP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1}$$

اس کو ترتیب دے کر درکار نتیجہ $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.30: شریک لیژانڈر تفاعل

درج ذیل مساوات

$$(5.44) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

میں $y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u(x)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔

$$(5.45) \quad (1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق $\frac{d^m P_n}{dx^m}$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ درج بالا مساوات کا حل

$$u = \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

ہے جس کے شریک $y(x)$ کو $P_n^m(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو شریک لیژانڈر تفاعل³⁶ کہتے ہیں۔

$$(5.46) \quad P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

شریک لیژانڈر تفاعل کوانٹم میکانیات³⁷ میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

³⁵ Bonnet's recursion
associated Legendre's functions
³⁷ quantum mechanics

جواب: مساوات 5.44 میں $y = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} u$ پر کرنے سے مساوات 5.45 حاصل ہوتا ہے۔ بقایا حصے کو اب حل کرتے ہیں۔ لیٹنڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفریق صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں $D^m[y'] = D^{m+2}[y]$ ، $D^{m-1}[y'] = D^m[y]$ ، ہو گا۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ کو

$$D^m[(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] = -D^m[(x^2 - 1)y''] - 2D^m[xy'] + n(n+1)D^m[y]$$

لکھتے ہیں جس میں

$$\begin{aligned} D^m[(x^2 - 1)y''] &= (x^2 - 1)D^m[y''] + 2mx D^{m-1}[y''] + m(m-1)D^{m-2}[y''] \\ &= (x^2 - 1)D^{m+2}[y] + 2mx D^{m+1}[y] + m(m-1)D^m[y] \\ D^m[xy'] &= x D^m[y'] + m D^{m-1}[y'] = x D^{m+1}[y] + m D^m[y] \\ D^m[y] &= D^m[y] \end{aligned}$$

پر کرتے ہوئے

$$(1 - x^2)D^{m+2}[y] - 2(m+1)x D^{m+1}[y] + [n(n+1) - m(m+1)]D^m[y]$$

ملتا ہے جس میں $D^{m+2} = y^{m+2} = u''$ اور $D^{m+1} = y^{m+1} = u'$ ، $D^m[y] = y^m = u$ لیتے ہوئے

$$(1 - x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ابتدائی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر تھا۔ اس مساوات کا حل $u = y^m$ ہے جہاں y از خود لیٹنڈر مساوات کا حل ہے یعنی $u = \frac{d^m P_n}{dx^m}$ ہے۔

سوال 5.31: گزشتہ سوال میں شریک لیٹنڈر تفاعل کا حل P_n^m حاصل کیا گیا۔ مساوات 5.31 کی مدد سے اس کو لکھیں۔

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x^2 - 1)^n]$$

5.3 مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس

کئی نہایت اہم دو درجی سادہ تفرقی مساوات، مثلاً بیسل تفاعل (جس پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا)، کے عددی سر تحلیلی [حصہ 5.1 میں تعریف دی گئی ہے] نہیں ہیں۔ اس کے باوجود انہیں تسلسل (طاقی تسلسل ضرب لوگار تھم یا طاقی تسلسل ضرب x کی کسری طاقت، \dots) سے حل کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو ترکیب فروبنیوس³⁸ کہتے ہیں۔ درج ذیل مسئلہ طاقی ترکیب کو وسعت دیتے ہوئے ترکیب فروبنیوس کا استعمال ممکن بناتا ہے۔

مسئلہ 5.2: ترکیب فروبنیوس

$x = 0$ پر تحلیلی $b(x)$ اور $c(x)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں سادہ تفرقی مساوات

$$(5.47) \quad y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0$$

کا کم از کم ایک عدد حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(5.48) \quad y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad (a_0 \neq 0)$$

جہاں r حقیقی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے اور $a_0 \neq 0$ ہے۔

مساوات 5.47 کا (خطی طور غیر متابع) دوسرا حل بھی پایا جاتا ہے جو مساوات 5.48 کی طرز کا ہو سکتا ہے (جس میں r مختلف ہو گا اور تسلسل کے عددی سر بھی مختلف ہوں گے) اور یا اس میں لوگار تھمی جزو پایا جائے گا۔

اس مسئلے میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں x_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ مسئلے میں $a \neq 0$ کا مطلب ہے کہ بذریعہ تجزی قوسین سے x کی بلند تر ممکنہ طاقت بذریعہ تجزی باہر نکالی جاتی ہے۔

بیسل تفاعل کو مساوات 5.47 کی طرز پر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2}y = 0 \quad (v \text{ مقدار معلوم ہے})$$

Frobenius method³⁸

³⁹جرمن ریاضی دان فرڈینانڈ گیوگ فروبنیوس [1917-1849]

باب 5. طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرق

جس میں $b(x) = 1$ اور $c(x) = x^2 - v^2$ دونوں $x = 0$ پر تحلیل ہیں لہذا اس پر درج بالا مسئلہ لاگو ہو گا۔ سادہ طاقتی تسلسل سے بیسل تفاعل کا حل ممکن نہیں ہے۔

مساوات 5.48 میں طاقتی تسلسل کو x کی ایسی طاقت سے ضرب دیا گیا ہے جو منفی یا کسری ہو سکتا ہے۔ یاد رہے کہ غیر منفی طاقت کے x پر مبنی تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔

مسئلہ فروبنیوس کے ثبوت ([جو کتاب کے آخر میں صفحہ 375 پر حوالہ [2] میں دیا گیا ہے) کے لئے اعلیٰ درجہ مخلوط تجزیہ⁴⁰ درکار ہے لہذا اسے پیش نہیں کیا جائے گا۔

اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے p اور q تحلیل ہوں تب x_0 غیر نادر نقطہ⁴¹ کہلائے گا۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

اگر $x = x_0$ درج بالا مساوات کا نادر نقطہ ہو اور $(x - x_0)p$ اور $(x - x_0)^2q$ نقطہ $x = x_0$ پر تحلیل ہوں تب x_0 منظم نادر نقطہ⁴² کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر منظم نادر نقطہ⁴³ کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے h ، p اور q تحلیل ہوں اور $h \neq 0$ ہو (تاکہ ہم تفرقی مساوات کو h سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کر سکیں) تب x_0 منظم نقطہ⁴⁴ کہلائے گا ورنہ اسے نادر نقطہ⁴⁵ کہیں گے۔

$$\tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = 0$$

مثال 5.13: مساوات $(x+1)y'' + 2xy' - 3y = 0$ کو $x+1$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $p = \frac{2x}{x+1}$ اور $q = -\frac{3}{x+1}$ ملتے ہیں جو $x = -1$ پر غیر تحلیل ہیں۔ یوں $x = -1$ مساوات کا نادر نقطہ ہے۔ اب $(x+1)p = 2x$ اور $(x+1)^2q = -3(x+1)$ دونوں $x = -1$ پر تحلیل ہیں لہذا $x = -1$ منظم نادر نقطہ ہے۔

advanced complex analysis⁴⁰

regular point⁴¹

regular singular point⁴²

irregular singular point⁴³

regular point⁴⁴

singular point⁴⁵

اشاری مساوات حل ظاہر کرتی ہے

آئیں مساوات 5.47 کو ترکیب فرونیوس سے حل کریں۔ مساوات 5.47 کو x^2 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(5.49) \quad x^2 y'' + x b(x) y' + c(x) y = 0$$

چونکہ $b(x)$ اور $c(x)$ تحلیلی ہیں لہذا انہیں طاقی تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \quad c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

اور اگر b یا c (اور) c کثیر رکنی ہوں تب b یا c کو جوں کا توں رہنے دیا جاتا ہے۔ مساوات 5.48 کا جزو در جزو تفرق لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.50) \quad \begin{aligned} y &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \dots \\ y' &= r a_0 x^{r-1} + (r+1) a_1 x^r + (r+2) a_2 x^{r+1} + \dots \\ y'' &= r(r-1) a_0 x^{r-2} + (r+1)(r) a_1 x^{r-1} + (r+2)(r+1) a_2 x^r + \dots \end{aligned}$$

مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کا مساوات 5.50 سے موازنہ کریں۔ طاقی تسلسل $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے تفرق $y' = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}$ کا پہلا رکن $m=1$ اور اس کے دو درجی تفرق کا پہلا رکن $m=2$ ہے جبکہ موجودہ دونوں تفرقی تسلسل کا پہلا رکن $m=0$ ہے۔

درج بالا تفرقات کو نہایت خوش اسلوبی کے ساتھ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

(5.51)

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} = x^{r-1} [r a_0 + (r+1) a_1 x + \dots] \\ y'' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2} = x^{r-2} [r(r-1) a_0 + (r+1) r a_1 x + \dots] \end{aligned}$$

ان تمام کو مساوات 5.49 میں پر کرتے ہیں۔

$$(5.52) \quad x^r [r(r-1) a_0 + \dots] + (b_0 + b_1 x + \dots) x^r (r a_0 + \dots) + (c_0 + c_1 x + \dots) x^r (a_0 + a_1 x + \dots) = 0$$

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تناسل

اب ہم x^r ، x^{r+1} ، x^{r+2} ، ... کے عددی مجموعوں کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔ سب سے کم طاقت x^r ہے جس کا عددی سر درج ذیل ہے۔

$$[r(r-1) + b_0r + c_0]a_0 = 0$$

چونکہ مسئلہ فروبنیوس کے تحت $a_0 \neq 0$ ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$r(r-1) + b_0r + c_0 = 0 \quad (\text{اشاری مساوات}) \quad (5.53)$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کو سادہ تفرقی مساوات 5.47 کی اشاری مساوات⁴⁶ کہتے ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے تفرقی مساوات کے حل کی اساس حاصل ہوتی ہے جن میں ایک حل مساوات 5.48 کی طرز کا ہو گا جس میں r کی قیمت درج بالا اشاری مساوات کا جذر ہو گا۔ دوسرے حل کی تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں جنہیں اشاری مساوات سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

• پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر نہیں ہے۔

• دوسری صورت: اشاری مساوات کے دو یکساں جذر پائے جاتے ہیں۔

• تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر ہے۔

پہلی صورت میں جوڑی دار مخلوط جذر $r_1 = a + ib$ اور $r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$ شامل ہیں چونکہ ان کا فرق $r_1 - r_2 = i2b$ خیالی عدد ہے جو حقیقی عدد صحیح نہیں ہے۔ مسئلہ 5.3 (جسے ضمیمے میں ثابت کیا گیا ہے) اساس کی صورت دیتی ہے جہاں ارتکاز کا عمومی ثبوت نہیں دیا گیا ہے۔ ہاں انفرادی تسلسل کی مرکزیت عام طریقے سے ثابت کی جاسکتی ہے۔ دوسری صورت میں لوگار تھمی جزو کا ہونا لازم ہے جبکہ تیسری صورت میں ہو سکتا ہے کہ لوگار تھمی جزو پایا جاتا ہو یا نہ پایا جاتا ہو۔

مسئلہ 5.3: ترکیب فروبنیوس۔ حل کی اساس۔ تین صورتیں۔

فرض کریں کہ سادہ تفرقی مساوات 5.47 مسئلہ 5.2 پر پورا اترتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 کے جذر r_1 اور r_2 ہیں تب تین صورتیں پائی جاتی ہیں۔

پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر نہیں ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$(5.54) \quad y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

اور

$$(5.55) \quad y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots)$$

ہو گی جہاں عددی سر مساوات 5.52 میں $r = r_1$ اور $r = r_2$ پر کرتے ہوئے حاصل کیے جائیں گے۔

دوسری صورت: یکساں جذر $r_1 = r_2 = r$ کی صورت میں حل کی اساس

$$(5.56) \quad y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \quad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)]$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$(5.57) \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^r(A_1x + A_2x^2 + \dots) \quad (x > 0)$$

ہو گی۔

تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$(5.58) \quad y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$(5.59) \quad y_2(x) = Ky_1(x) \ln x = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots) \quad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)]$$

ہے جہاں جذریوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو (یعنی زیادہ قیمت کے جذر کو r_1 کہتے ہیں) اور K کی قیمت صفر بھی ہو سکتی ہے۔ اگر $K = 0$ ہو تب دوسرا حل بھی پہلی حل کی طرح لکھنا ممکن ہو گا (مثال 5.17 دیکھیں)۔ بعض اوقات r_2 استعمال کرتے ہوئے حل y_2^* کے دو حصے پائے جائیں گے۔ اس کا ایک حصہ در حقیقت میں r_1 سے حاصل حل y_1 ہی ہو گا جبکہ دوسرا حصہ نیا حل ہو گا یعنی $y_2^* = y_2 + ky_1$ لہذا اساس لکھتے ہوئے y_1 اور y_2 لیا جائے گا (سوال 5.36 کا جواب دیکھیں)۔

5.3.1 عملی استعمال

اشاری مساوات 5.53 کے جذر دریافت کرنے کے بعد ترکیب فروبنیوس بالکل طاقی ترکیب کی طرح ہے۔ مساوات 5.54 تا مساوات 5.59 محض حل کی صورت دیتے ہیں جبکہ دوسرا حل عموماً تخفیف درجہ (حصہ 2.1) کی ترکیب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔

اشاری مساوات کے جذر حاصل کرنے کے بعد (زیادہ قیمت کی جذر) r_1 سے پہلا حل $y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کریں۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \dots$) کے برابر نہ ہونے کی صورت میں دوسرا حل (کم قیمت کی جذر) r_2 کو استعمال کرتے ہوئے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا۔

$r_1 = r_2$ کی صورت میں دوسرے حل میں لوگار تھی جزو پایا جائے گا۔ ایسی صورت میں دوسرا حل $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل نہیں ہو گا لہذا دوسرا حل تخفیف درجہ کی مدد سے حاصل کیا جائے گا۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \dots$) کے برابر ہونے کی صورت میں کبھی کبھار $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا ورنہ اس میں لوگار تھی جزو پایا جائے گا اور اس حل کو بذریعہ تخفیف درجہ حاصل کیا جائے گا۔ آپ پہلے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ ہی استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔

$y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کرتے ہوئے تین ممکنہ صورتیں پیدا ہوتی ہیں (اس حصے کے سوالات کے جوابات دیکھیں)۔ پہلی صورت میں ایسی تسلسل y_2 حاصل ہوتی ہے جس میں صرف ایک عدد اختیاری مستقل پایا جاتا ہو لہذا عمومی حل y_1 اور y_2 کا مجموعہ ہو گا۔ دوسری صورت میں تسلسل کو $ay_1 + by_2^*$ لکھنا ممکن ہو گا جہاں a اور b اختیاری مستقل ہوں گے لہذا اس حل میں y_1 بھی شامل ہے۔ اس طرح عمومی حل $ay_1 + by_2^*$ ہو گا۔ تیسری صورت میں $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے عددی سر حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دوسرے حل میں لوگار تھی جزو پایا جاتا ہے لہذا تخفیف درجہ سے حل حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.14: یولر کوشی مساوات۔ پہلی، دوسری اور تیسری صورتیں۔ بلا لوگار تھی جزو مساوات یولر کوشی (حصہ 2.5)

$$x^2 y'' + b_0 x y' + c_0 y = 0 \quad (b_0 \text{ اور } c_0 \text{ مستقل ہیں})$$

میں $y = x^r$ پر کرنے سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0$$

جو اشاری مساوات ہے [اور $y = x^r$ مساوات 5.48 کی ایک صورت ہے]۔ دو منفرد جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^{r_1}$ ، $y_2 = x^{r_2}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ دوہری جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^r$ ، $y_2 = x^r \ln x$ حاصل ہوتی ہے۔ مساوات یولر کوشی کی صورت میں تیسری صورت نہیں پائی جاتی۔

مثال 5.15: دوسری صورت۔ (دوہرا جذر)
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(5.60) \quad x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

(یہ بیش ہندسی⁴⁷ مساوات کی ایک مخصوص صورت ہے۔)

حل دیے گئے مساوات کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 کے شرائط پر پورا اترتی ہے۔ یوں مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.60 میں پر کرتے ہیں۔

$$(5.61) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} \\ + 3 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

باب 5. ط. متقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تناسل

x کی کمتر طاقت x^{r-1} ، جو دوسرے اور چوتھے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$[-r(r-1) - r]a_0 = 0 \implies r^2 = 0$$

اشاری مساوات کا دوہرا جذر $r = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.61 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے x^s کی عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$s(s-1)a_s - (s+1)sa_{s+1} + 3sa_s - (s+1)a_{s+1} + a_s = 0$$

ملتا ہے۔ یوں $a_0 = a_1 = a_2 = \dots$ ہو گا لہذا $a_0 = 1$ چنتے ہوئے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

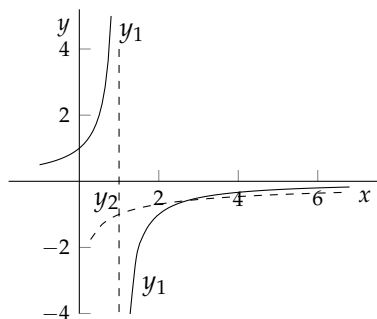
دوسرا حل: دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ (حصہ 2.1) حاصل کرتے ہیں۔ یوں $y_2 = uy_1$ اور اس کے تفرقات کو مساوات میں پر کرتے ہوئے (صفحہ 94 پر) مساوات 2.15 ملتا ہے جس کو یہاں استعمال کرتے ہیں۔ یہاں $p = \frac{3x-1}{x(x-1)}$ ہے لہذا

$$\int p dx = \int \frac{3x-1}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} \right) dx = 2\ln(x-1) + \ln x$$

ہو گا اور یوں مساوات 2.15 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u' = v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 x} = \frac{1}{x}, \quad u = \ln x, \quad y_2 = uy_1 = \frac{\ln x}{1-x}$$

y_1 اور y_2 جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے وقفہ $0 < x < 1$ اور $1 < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں لہذا اس وقفے پر یہ حل کی اساس ہیں۔



شکل 5.6: مثال 5.15 کے حل۔

مثال 5.16: لوگار تھی جزو والا دوسرا حل
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(5.62) \quad (x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$$

حل: مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.62 میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} - x \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

x^2 اور x کو مجموعوں کے اندر لے جاتے ہوئے اور x کی یکساں طاقتوں کا اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(5.63) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)^2 a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} = 0$$

x کی کم تر طاقت x^{r-1} ، جو $m=0$ پر کرنے سے دوسرے مجموعے سے ملتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرنے سے

$$r(r-1) = 1$$

یعنی $r_1 = 1$ اور $r_2 = 0$ ملتے ہیں (جذریوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو۔) جن میں فرق عدد صحیح کے برابر ہے لہذا یہ تیسری صورت ہے۔

باب 5. ط. متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تناسل

پہلا حل: مساوات 5.63 کو یکساں طاقت کی صورت میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $m = s$ اور دوسرے مجموعے میں $s = m - 1$ یعنی $m = s + 1$ پر کرتے ہیں۔

$$(5.64) \quad \sum_{s=0}^{\infty} (s+r-1)^2 a_s x^{s+r} - \sum_{s=-1}^{\infty} (s+r+1)(s+r) a_{s+1} x^{s+r} = 0$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1} = \frac{(s+r-1)^2}{(s+r+1)(s+r)} a_s$$

ملتا ہے جس میں $r = 1$ پر کرتے ہوئے

$$(5.65) \quad a_{s+1} = \frac{s^2}{(s+2)(s+1)} a_s \quad (s = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $a_1 = 0$ ، $a_2 = 0$ ، ... حاصل ہوتے ہیں۔ یوں $a_0 = 1$ چنتے ہوئے پہلا حل $y_1 = a_0 x^{r_1} = x$ ملتا ہے۔

دوسرا حل: ترکیب تخفیف درجہ (حصہ 2.1) استعمال کرتے ہوئے $y_2 = u y_1 = x u$ لیتے ہیں۔ اس طرح $y_2' = u + u' x$ اور $y_2'' = x u'' + 2u'$ ہوں گے۔ انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x)(x u'' + 2u') - x(x u' + u) + x u = 0$$

اس میں $x u$ کٹ جاتا ہے۔ بقایا مساوات کو x سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0$$

اس کو جزوی کسری پھیلاؤ کی مدد سے لکھتے ہوئے مکمل لیتے ہیں۔ (مکمل کا مستقل صفر چننا گیا ہے۔)

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x-2}{x^2-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad \ln u' = \ln \left| \frac{x-1}{x^2} \right|$$

اس کو قوت نمائی طور پر لکھتے ہوئے مکمل لیتے ہیں۔ (مکمل کا مستقل صفر چنتے ہیں۔)

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad u = \ln x + \frac{1}{x}, \quad y_2 = u y_1 = x \ln x + 1$$

y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں اور y_2 میں لوگار تھی جزو پایا جاتا ہے۔ یوں مثبت x پر یہ حل کی اساس ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے بیش ہندسی مساوات حل ہوتا ہے جس کے حل میں کئی اہم تفاعل شامل ہیں۔ بعض اوقات دیے گئے مساوات کو مساوات 5.47 کی صورت میں لانے میں دشواری پیش آتی ہے۔ یوں

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جس کے آخری جزو کو $\frac{x}{x}$ سے ضرب دیتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{x}{x^2(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جو درکار صورت ہے جس میں $p = \frac{3x-1}{x-1}$ اور $q = \frac{x}{x-1}$ ہیں۔

ترکیب فروبنیوس کو استعمال کرتے ہوئے عموماً اتنا کافی ہوتا ہے کہ مساوات کو $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ شکل میں لایا جائے۔ درج ذیل سوالات حل کرتے ہوئے ایسا ہی کریں۔

مسئلہ 5.2 میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی ممکن ہے جہاں x_0 مساوات کا نادر نقطہ ہے۔ یوں عمومی تفرقی مساوات

$$(5.66) \quad (x - x_0)^2 \alpha(x)y'' + (x - x_0)\beta(x)y' + \gamma(x)y = 0$$

جس میں $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ اور $\gamma(x)$ تحلیلی ہوں (لہذا انہیں درج لکھا جاسکتا ہے)

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 x + \dots, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots$$

کو ترکیب فروبنیوس سے حل کرتے ہوئے اشاری مساوات

$$(5.67) \quad \alpha_0 r^2 + (\beta_0 - \alpha_0)r + \gamma_0 = 0$$

حاصل ہوگی۔ مساوات 5.66 کو $\alpha(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.47 طرز کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.66 میں $x_0 = 0$ پر کرنے سے مساوات 5.47 حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 5.66 کا حل

$$(5.68) \quad y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m$$

لکھ کر حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.17: تیسری صورت میں بعض اوقات r_2 سے حل نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں کبھی کبھار دوسرا حل $y_2 = x^{r_2} \sum c_m x^m$ نہیں لکھا جاسکتا ہے۔ اس مثال میں اس بات کی وضاحت ہوگی۔ آئیں درج ذیل مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$2xy'' - 4y' - y = 0$$

اس مساوات میں $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ اور اس کے تفرقات

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}, \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2}$$

پر کرتے ہوئے

$$2x \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2} - 4 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

ملتا ہے۔ تینوں مجموعوں سے x^{r-1} باہر نکالتے ہوئے کاٹتے ہیں۔

$$x^{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1) c_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r) c_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} = 0$$

پہلے اور دوسرے مجموعے میں $s = m$ اور تیسرے مجموعے میں $s = m+1$ پر کرتے ہیں تاکہ x کے تمام طاقت یکساں لکھیں جائیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2(s+r)(s+r-1) c_s x^s - \sum_{s=0}^{\infty} 4(s+r) c_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^s = 0$$

آپ نے دیکھا کہ تیسرے مجموعے کا پہلا رکن اب $s = 1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ پہلے دو مجموعوں کا پہلا پہلا رکن مجموعے کے باہر لکھتے ہیں تاکہ تمام مجموعوں کا پہلا رکن ایک ہی جگہ سے شروع ہو۔

$$2(0+r)(0+r-1) c_0 x^0 + \sum_{s=1}^{\infty} 2(s+r)(s+r-1) c_s x^s - 4(0+r) c_0 x^0 - \sum_{s=1}^{\infty} 4(s+r) c_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^s = 0$$

یوں تمام مجموعوں کا پہلا رکن $s = 1$ ظاہر کرے گا۔ تینوں مجموعوں کو اکٹھا لکھتے ہیں

$$(5.69) \quad \underbrace{[2r(r-1) - 4r]}_{2r(r-3)} c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [2(s+r)(s+r-1)c_s - 4(s+r)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

جہاں پہلا رکن اشاری مساوات $2r(r-3) = 0$ دیتا ہے جس کے جذر $r_1 = 3$ اور $r_2 = 0$ ہیں۔ (یاد رہے کہ بڑی مقدار کے جذر کو r_1 لکھا جاتا ہے اور اسی کی مدد سے پہلا حل حاصل کیا جاتا ہے۔)

مساوات 5.69 میں $r = r_1 = 3$ پر کرتے ہوئے

$$[2 \cdot 3(3-1) - 4 \cdot 3]c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [2(s+3)(s+3-1)c_s - 4(s+3)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

یعنی

$$\sum_{s=1}^{\infty} [2s(s+3)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل کلیہ تولی لکھی جاسکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2s(s+3)} c_{s-1} \quad (s \geq 1)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2 \cdot 1(1+3)} c_0 = \frac{1}{2 \cdot 1(4)} c_0 \\ c_2 &= \frac{1}{2 \cdot 2(2+3)} c_1 = \frac{1}{2 \cdot 2(2+3)} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1(4)} c_0 = \frac{1}{2^2(2 \cdot 1)(5 \cdot 4)} c_0 \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2(2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} c_0 = \frac{6}{2^2(2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} c_0 \\ c_3 &= \frac{1}{2 \cdot 3(3+3)} c_2 = \frac{1}{2 \cdot 3(6)} \cdot \frac{6}{2^2(2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} c_0 \\ &= \frac{6}{2^3(3 \cdot 2 \cdot 1)(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} c_0 \\ &\vdots \\ c_s &= \frac{6}{2^s s! (s+3)!} c_0 \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ آخری کلیہ $s = 0$ اور $s = 1$ کے لئے بھی کارآمد ہے لہذا ہم عمومی کلیہ توانی

$$c_s = \frac{6}{2^s s! (s+3)!} c_0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

اور پہلا حل

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{6}{2^m m! (m+3)!} c_0 x^m = c_0 x^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{6}{2^m m! (m+3)!} x^m$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $r = r_2 = 0$ کو استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 5.69 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے

$$[2 \cdot 0(0-1) - 4 \cdot 0]c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [2(s+0)(s+0-1)c_s - 4(s+0)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

ملتا ہے جس میں c_0 کا عددی سر صفر کے برابر ہے جبکہ x_s کے عددی سر سے درج ذیل کلیہ توانی لکھا جاسکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2^s (s-3)!} c_{s-1}$$

اس کلیہ توانی کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$c_1 = \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0$$

$$c_2 = \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} c_1 = \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0$$

$$c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3 \underbrace{(3-3)}_{=0}} c_2 = \frac{1}{2 \cdot 3(3-3)} \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0 = \frac{c_0}{0}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $c_0 \neq 0$ کی صورت میں $c_3 = \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ c_0 صفر نہیں ہو سکتا۔ ایسا ہونے سے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جو $y_2 = 0$ دیگا۔ اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں ہر بار ایک عددی سر $\frac{c_0}{0}$ حاصل ہو گا جس کی بنا چھوٹا جذر استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

سوالات

سوال 5.32 تا سوال 5.44 کی اساس کو ترکیب فروبنیوس سے حاصل کریں۔ حاصل تسلسل کو بطور تفاعل پہچاننے کی کوشش کریں۔

سوال 5.32: $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$
 جواب: $y_1 = x^{-1}(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots)$ ، $y_2 = x^{-1}(x - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{360} - + \dots)$

سوال 5.33: $xy'' + 2y' + xy = 0$
 جواب: $y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots = \frac{\sin x}{x}$ ، $y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \dots = \frac{\cos x}{x}$

سوال 5.34: $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$
 جواب: اس طرز کے مساوات میں بہتر ہوتا ہے کہ $X = x - x_0 = x - 1$ اور $Y(X)$ استعمال کیا جائے جس سے درج بالا مساوات $X^2Y'' - 2XY' + 2Y = 0$ لکھی جاتی ہے۔ حل کرنے کے بعد واپس x کا استعمال کریں۔ $r_1 = 2$ ، $r_2 = 1$ ہیں۔ $r = r_1 = 2$ استعمال کرتے ہوئے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جبکہ $r = r_2 = 1$ استعمال کرتے ہوئے حل $y = (x-1)^1[c_0 + c_1(x-1)]$ ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل ہیں لہذا یہ عمومی حل ہے۔ یوں اساس $y_1 = x - 1$ اور $y_2 = (x-1)^2$ ہے۔

سوال 5.35: $y'' + xy' + (1 - \frac{2}{x^2})y = 0$
 جواب: $r_1 = 0$ ، $r_2 = -3$ ہیں جن میں عددی صحیح فرق پایا جاتا ہے جو تیسری صورت ہے۔ یوں r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = c_2(x^2 - \frac{3}{10}x^4 + \frac{3}{56}x^6 - \frac{1}{144}x^8 + \dots)$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 استعمال کرتے ہوئے $y_2 = c_2x^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.36: $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$
 جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -2$ ہیں۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_1 = x^0(1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^8 + \dots) = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

ملتا ہے جبکہ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_2^* = c_0(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{24} + \dots) + c_2(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{120} - \dots)$$

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تفریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفریق

ملتا ہے جہاں آخری توسین در حقیقت y_1 ہی ہے لہذا اساس لکھتے ہوئے اس حصے کو رد کیا جاتا ہے۔ اس طرح اساس درج ذیل ہو گا۔

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^8 + \dots = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^6 + \dots = \frac{\cos x^2}{x^2}$$

سوال 5.37: $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ جواب: $r_1 = r_2 = 3$ ہے جو دوسری صورت ہے۔ یوں پہلا حل $y_1 = x^3$ ملتا ہے جبکہ دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ ($y_2 = x^3u$ پر کرتے ہوئے) $y_2 = x^3 \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.38: $xy'' + y' - xy = 0$ جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ملتا ہے۔ $y_1 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \dots$ ،

$$y_2 = y_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{8 \cdot 16} - \dots$$

سوال 5.39: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ جواب: $r_1 = 2$ ، $r_2 = -2$ میں فرق عدد صحیح ہے۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے $y_1 = x^2$ ملتا ہے۔ اگر آپ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے y_1 کی طرز کا حل حاصل کرنا چاہیں تو آپ کو $y_2 = x^{-2}(c_0 + c_4x^4) = c_0x^{-2} + c_4x^2$ ملتا ہے جس میں x^2 در حقیقت y_1 ہے جسے رد کرتے ہوئے اساس میں $y_2 = \frac{1}{x^2}$ لکھا جائے گا۔

سوال 5.40: $x^2y'' + 6xy' + (6 - 4x^2)y = 0$ جواب: $r_1 = -2$ ، $r_2 = -3$ ہیں۔ r_1 سے $\frac{\sinh 2x}{2x^3}$ $y_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{15}x^2 + \dots$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 سے $y_2 = c_0(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \dots) + c_1y_1$ ملتا ہے لہذا $y = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \dots$ لکھا جائے گا یعنی $y_2 = \frac{\cosh 2x}{x^3}$ ہے۔

سوال 5.41: $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$ جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ہے جو دوسری صورت ہے۔ اساس $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x$ اور $y_2 = e^x \ln x$ ہیں۔

سوال 5.42: $xy'' + (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$ جواب: $r_1 = r_2 = 0$ جبکہ $y_1 = e^{-x}$ اور $y_2 = e^{-x} \ln x$ ہیں۔

سوال 5.43: $y'' + (x - 1)y = 0$ جواب: $r_1 = -1$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 سے ایسا تسلسل ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل پائے جاتے

ہیں لہذا اس تسلسل کو دو عدد تفاعل میں لکھتے ہوئے اساس $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{30} + \dots$ اور $y_2 = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} - \dots$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 5.44: $xy'' + (2 - 2x)y' + (x - 2)y = 0$ جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ استعمال کرتے ہوئے $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = e^x$ ملتا ہے۔ دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لکھ کر تخفیف درجی کے استعمال سے $y_2 = \frac{e^x}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.45: گاوس بیش ہندسی مساوات درج ذیل تفرقی مساوات

$$(5.70) \quad x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

جہاں a ، b اور c مستقل ہیں گاوس بیش ہندسی مساوات⁴⁸ کہلاتی ہے۔ ثابت کریں کہ اس کی اشاری مساوات کے جذر $r_1 = 0$ اور $r_2 = 1 - c$ ہیں۔ ثابت کریں کہ $r = r_1 = 0$ کے لئے ترکیب فرونیوس کے استعمال سے درج ذیل حل ملتا ہے جہاں $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ہے۔

$$(5.71) \quad y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

یہ تسلسل بیش ہندسی تسلسل⁴⁹ کہلاتی ہے جس کا مجموعہ عموماً $F(a, b, c; x)$ لکھا اور بیش ہندسی تفاعل⁵⁰ پکارا جاتا ہے۔

سوال 5.46: ثابت کریں کہ $|x| < 1$ کے لئے تسلسل 5.71 مرتکز ہے۔

جواب: $1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+m)(b+m)}{(m+1)!(c+m)} \frac{m!(c+m-1)}{(1+m-1)(b+m-1)} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|$ ہے لہذا $R < 1$ ہو گا۔

سوال 5.47: بیش ہندسی تفرقی مساوات کا حل مساوات 5.71 مستقل a اور b کی کن قیمتوں پر کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے گا۔

جواب: $a = 0, -1, -2, -\dots$ اور $b = 0, -1, -2, -\dots$

⁴⁸Gauss' hypergeometric equation
⁴⁹hypergeometric series
⁵⁰hypergeometric function

باب 5. مل متق تسلسل سے سادہ تفصیاتی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفصیل

سوال 5.48: $a = b = c = 1$ کی صورت میں تسلسل 5.71 سے ہندسی تسلسل⁵¹ حاصل کریں۔

$$F(1, 1, 1; x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \text{ جواب:}$$

سوال 5.49: ثابت کریں کہ $F(1, 1, 1; x) = F(1, b, b; x) = F(a, 1, a; x)$ یعنی ہندسی تسلسل ہے۔ اسی سے تفاعل $F(a, b, c; x)$ کا نام بیش ہندسی تفاعل نکلا ہے۔

سوال 5.50: ثابت کریں کہ سوال 5.45 میں $r_2 = 1 - c$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.70 کا دوسرا حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے جہاں $c \neq 2, 3, 4, 7, \dots$ ہے۔

$$(5.72) \quad y_2(x) = x^{1-c} \left(1 + \frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)}x + \frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)}x^2 + \dots \right)$$

سوال 5.51: ثابت کریں کہ مساوات 5.72 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.73) \quad y_2(x) = x^{1-c} F(a-c+a, b-c+1, 2-c; x)$$

سوال 5.52: ثابت کریں کہ $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ کی صورت میں مساوات 5.70 کے حل کی اساس مساوات 5.71 اور مساوات 5.72 ہیں۔

سوال 5.53: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= F(-n, b, b; -x) \\ (1-x^n) &= 1 - nx F(1-n, 1, 2; x) \\ \tan^{-1} x &= x F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right) \\ \sin^{-1} x &= x F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right) \\ \ln(1+x) &= x F(1, 1, 2; -x) \\ \ln \frac{1+x}{1-x} &= 2x F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right) \end{aligned}$$

سوال 5.54: درج ذیل مساوات میں A ، B ، C ، D اور K مستقل ہیں، y سے مراد $\frac{dy}{dt}$ ہے اور $t^2 + At + B$ کے منفرد جذر t_1 اور t_2 ہیں۔

$$(5.74) \quad (t^2 + At + B)\ddot{y} + (Ct + D)\dot{y} + Ky = 0$$

اس مساوات میں نیا متغیر $x = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ پر کرتے ہوئے بیش ہندی مساوات حاصل کریں جس میں

$$Ct_1 + D = -c(t_2 - t_1), \quad C = a + b + 1, \quad K = ab$$

ہوں گے۔

جواب: چونکہ $t^2 + At + B$ کے منفرد ($t_2 \neq t_1$) جذر t_1 اور t_2 ہیں لہذا $t^2 + At + B = (t - t_1)(t - t_2)$ لکھا جاسکتا ہے۔ اب نیا متغیر $x = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ لیتے ہوئے $t = (t_2 - t_1)x + t_1$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} t - t_1 &= (t_2 - t_1)x, & t - t_2 &= (t_2 - t_1)(x - 1), \\ (t - t_1)(t - t_2) &= (t_2 - t_1)^2 x(x - 1), & \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{dy}{dx}, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}$$

ہوں گے جنہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(5.75) \quad x(1-x)y'' - \left(\frac{Ct_1 + D}{t_2 - t_1} + Cx \right) y' - Ky = 0$$

ملتا ہے۔

سوال 5.55 تا سوال 5.57 کے عمومی حل بیش ہندی تفاعل کی صورت میں دریافت کریں۔

$$\text{سوال 5.55: } 2x(1-x)y'' - (1+5x)y' - y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; x\right) + c_2 x^{\frac{3}{2}} F\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}; x\right)$$

$$\text{سوال 5.56: } 4(t^2 - 3t + 2)\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t-1\right) + c_2 (t-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{سوال 5.57: } 2(t^2 - 5t + 6)\ddot{y} + (2t - 3)\dot{y} - 8y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 F\left(2, -2, -\frac{1}{2}; t-2\right) + c_2 (t-2)^{\frac{3}{2}} F\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; t-2\right)$$

5.4 مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل

اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک بیسل مساوات⁵²

$$(5.76) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

ہے جہاں v^{53} حقیقی مستقل ہے جس کی قیمت صفر یا مثبت ہوگی۔ یہ مساوات عموماً نلکی تشاکلی مسائل میں سامنے آتی ہے۔ بیسل مساوات کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (\frac{x^2 - v^2}{x^2})y = 0$ حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 پر پورا اترتی ہے۔ یوں بیسل مساوات کے حل کو ترکیب فروبنیوس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.77) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \quad (a_0 \neq 0)$$

مساوات 5.77 اور اس کے ایک درجی اور دو درجی تفرقات کو مساوات 5.76 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m+r)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} \\ - v^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \end{aligned}$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہوئے c_0, c_1, \dots حاصل کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x^{s+r} پہلے، دوسرے اور تیسرے مجموعوں میں $m = s$ پر کرنے اور تیسرے مجموعے میں $m = s-2$ پر کرنے سے ملتے ہیں۔ یوں $s = 0$ اور $s = 1$ کی صورت میں تیسرا مجموعہ کوئی حصہ نہیں ڈالے گا جبکہ $s = 2$ کی صورت میں چاروں مجموعے حصہ ڈالیں گے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0 + ra_0 - v^2 a_0 &= 0 \quad (s=0) \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - v^2 a_1 &= 0 \quad (s=1) \\ (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - v^2 a_s &= 0 \quad (s=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (5.78)$$

چونکہ $a_0 \neq 0$ ہے لہذا مساوات 5.78 کی پہلی مساوات سے اشاری مساوات

$$(5.79) \quad (r+v)(r+v) = 0$$

حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $r_1 = v (\geq 0)$ اور $r_2 = -v$ ہیں۔

⁵² Bessel's equation

⁵³ v یونانی حرف تھی ہے۔

$$r = r_1 = v \text{؛ تواری عددی سر؛}$$

دوسری مساوات 5.78 میں $r = v$ پر کرتے ہوئے $(2v+1)a_1 = 0$ ملتا ہے۔ اب چونکہ v غیر منفی ہے لہذا $2v+1$ صفر کے برابر نہیں ہو سکتا اور یوں $a_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ تیسری مساوات 5.78 میں $r = v$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(5.80) \quad (s+2v)sa_s + a_{s-2} = 0$$

چونکہ $a_1 = 0$ اور $v \geq 0$ ہے لہذا مساوات 5.80 سے $s_3 = 0$ ، $s_5 = 0$ ، ... حاصل ہوتے ہیں۔ یوں تمام طاق عددی سر صفر کے برابر ہیں۔ جفت عددی سر حاصل کرنے کی خاطر مساوات 5.80 میں $s = 2m$ پر کرتے ہوئے

$$(2m+2v)2ma_{2m} + a_{2m-2} = 0$$

یعنی

$$(5.81) \quad a_{2m} - \frac{1}{2^2 m(v+m)} a_{2m-2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

ملتا ہے۔ مساوات 5.81 سے c_2 ، c_4 ، ... لکھتے ہیں

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(v+2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(v+1)(v+2)}$$

اور یوں عمومی کلیہ

$$(5.82) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(v+1)(v+2) \cdots (v+m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔

عدد صحیح $v = n$ کی صورت میں بیسل تفاعل $J_n(x)$

باب 5. مل متق تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرق

v کی عدد صحیح قیمت کو روایتی طور پر n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $v = n$ کی صورت میں مساوات 5.82 درج ذیل لکھی جائے گی

$$(5.83) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! (n+1)(n+2) \cdots (n+m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

جس میں a_0 اختیاری مستقل ہے۔ مساوات 5.83 پر مبنی تسلسل میں بھی اختیاری مستقل a_0 پایا جائے گا۔ ہم اختیاری مستقل کی قیمت $a_0 = 1$ چن سکتے ہیں البتہ اس سے بہتر قیمت

$$(5.84) \quad a_0 = \frac{1}{2^n n!}$$

ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! n! (n+1)(n+2) \cdots (n+m)}$$

یعنی

$$(5.85) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! (n+m)!}, \quad m = 1, 2, \dots$$

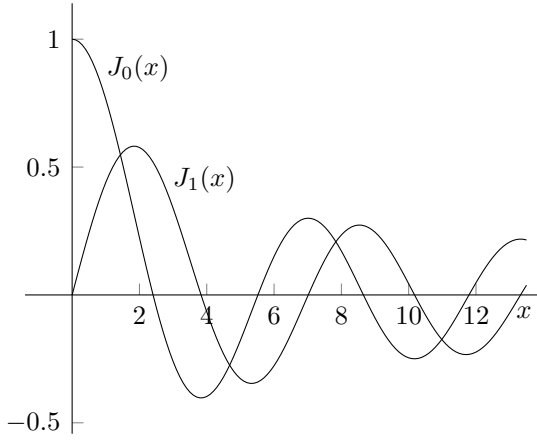
لکھا جاسکتا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چننے سے بڑھتی ضربیہ $(n+1)(n+2) \cdots (n+m)$ کو نہایت عمدگی کے ساتھ عدد ضربیہ 54 $(n+m)!$ میں ضم کیا گیا ہے۔ درج بالا عددی سر کو تسلسل 5.77 میں پر کرتے ہوئے، اور یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $c_1 = 0$ ، $c_3 = 0$ ، \dots ، بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل $J_n(x)$

$$(5.86) \quad J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n+m)!} \quad (n \geq 0)$$

ماتا ہے جو درجہ n بیسل تفاعل کی پہلی قسم 55 کہلاتی ہے۔ بیسل تفاعل 5.86 تمام x کے لئے مرکب ہے یعنی (جیسا آپ عددی سر کی شرح $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ سے ثابت کر سکتے ہیں) اس کا رداس ارتکاز لامتناہی $R = \infty$ ہے۔ یوں $J_n(x)$ تمام x کے لئے معین ہے۔ عددی سر کے نسب نما میں عدد ضربیہ $(n+m)!$ کی بنا تسلسل بہت تیزی سے مرکب ہوتی ہے۔

factorial⁵⁴

Bessel function of the first kind of order n ⁵⁵



شکل 5.7: بیسل تفاعل کی پہلی قسم - J_0 ، J_1

مثال 5.18: بیسل تفاعل $J_0(x)$ اور $J_1(x)$ مساوات 5.86 میں $n = 0$ پر کرتے ہوئے درجہ 0 کا بیسل تفاعل $J_0(x)$

$$(5.87) \quad J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \dots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو کوسائن تفاعل کی مانند ہے۔ اسی طرح مساوات 5.86 میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے درجہ 1 کا بیسل تفاعل $J_1(x)$

$$(5.88) \quad J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)!} = x - \frac{x^3}{2^3 1! 2!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} - \frac{x^7}{2^7 3! 4!} + \dots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو سائن تفاعل کی مانند ہے لیکن جیسا آپ دیکھیں گے بیسل تفاعل کے صفر یکساں فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں اور x بڑھانے سے تفاعل کا حیث کم ہوتا جاتا ہے۔ مساوات 5.76 کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{v^2}{x^2})y = 0$ ملتی ہے جس پر توجہ دیں۔ x کی زیادہ قیمت پر $\frac{1}{x}$ اور $\frac{v^2}{x^2}$ کو رد کرتے ہوئے بیسل مساوات سے $y'' + y = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے حل $\sin x$ اور $\cos x$ ہیں۔ آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{v'}{x}$ بطور تقصیری مستقل کردار ادا کرتے ہوئے بیسل

باب 5. طاقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

تفاعل کا حیثہ گھٹانے میں مدد دے گی۔ زیادہ x کی صورت میں درج ذیل ثابت کیا جاسکتا ہے

$$(5.89) \quad J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

جہاں \sim کو متقاربی برابری⁵⁶ پڑھیں اور جس کا مطلب ہے کہ کسی بھی قطعی n پر دونوں اطراف کی شرح، $x \rightarrow \infty$ پر اکائی کے برابر ہوگی۔

مساوات 5.89 کم $x (> 0)$ کی صورت میں بھی بہترین ثابت ہوتی ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے $J_0(x)$ کے ابتدائی تین صفر 2.356 ، 5.498 اور 8.639 حاصل ہوتے ہیں جبکہ ان کی حقیقی قیمتیں بالترتیب 2.405 ، 5.520 اور 8.654 ہیں۔ دونوں جوابات میں فرق 0.049 ، 0.022 اور 0.015 ہے۔

بیسل تفاعل جہاں $\nu \geq 0$ کوئی بھی قیمت ہو سکتی ہے۔ گیماتفاعل

گزشتہ حصے میں ہم نے عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل مساوات کا ایک حل دریافت کیا۔ آئیں اب کسی بھی قیمت کے $\nu > 0$ کے لئے بیسل تفاعل کا عمومی حل تلاش کریں۔ مساوات 5.84 میں ہم نے $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چنا جبکہ موجودہ صورت میں ہم

$$(5.90) \quad a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$$

چنتے ہیں جہاں گیماتفاعل⁵⁷ Γ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(5.91) \quad \Gamma(\nu + 1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu dt \quad (\nu > -1)$$

دھیان رہے کہ بائیں ہاتھ $\nu + 1$ جبکہ دائیں ہاتھ مکمل کے اندر ν لکھا گیا ہے۔ مکمل بالخصوص سے

$$\Gamma(\nu + 1) = -e^{-t} t^\nu \Big|_0^\infty + \nu \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt = 0 + \nu \Gamma(\nu)$$

asymptotically equal⁵⁶
gamma function⁵⁷

یعنی گیمیا تفاعل کا بنیادی تعلق

$$(5.92) \quad \Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.91 میں $v = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

ماتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.92 سے $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$ ، $\Gamma(3) = 3\Gamma(2) = 2!$ اور یوں

$$(5.93) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ عدد ضربی درحقیقت گیمیا تفاعل کی ایک مخصوص صورت ہے۔ یوں عدد صحیح $v = n$ کی صورت میں مساوات 5.90 سے مساوات 5.84 ہی حاصل ہوتی ہے۔

گیمیا تفاعل سے $0!$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $\Gamma(n+1) = n!$ ہے لہذا

$$(5.94) \quad 0! = \Gamma(1) = 1$$

کے برابر ہے۔

مساوات 5.90 استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو لکھتے ہیں۔

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (n+1)(n+2) \cdots (n+m) 2^v \Gamma(v+1)}$$

اب مساوات 5.92 کے تحت $(v+1)\Gamma(v+1) = \Gamma(v+2)$ ، $(v+2)\Gamma(v+2) = \Gamma(v+3)$ وغیرہ لکھے جاسکتے ہیں اور یوں

$$(v+1)(v+2) \cdots (v+m)\Gamma(v+1) = \Gamma(v+m+1)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$(5.95) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+v} m! \Gamma(v+m+1)}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $r = r_1 = v$ کی صورت میں بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.96) \quad J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} m! \Gamma(v+m+1)}$$

$J_\nu(x)$ کو درجہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم⁵⁸ کہتے ہیں۔

جیسا آپ شرح عدد سر کی ترکیب سے ثابت کر سکتے ہیں، مساوات 5.96 تمام x پر مرتکز ہے۔

مثال 5.19: درج ذیل ثابت کریں۔

$$(5.97) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

حل: مساوات 5.91 میں $\nu = -\frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

ملتا ہے جس میں متغیر تبدیل کرتے ہوئے $t = u^2$ استعمال کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

اب ہم ایک ترکیب استعمال کرتے ہیں (جس کو ذہن نشین کرنا سودمند ثابت ہو گا)۔ درج بالا میں u کی جگہ w بھی لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-w^2} dw$$

ملتا ہے۔ درج بالا دو مساوات کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_0^\infty e^{-w^2} dw = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+w^2)} du dw$$

یہ مکمل کارتیسی محور کے ربع اول پر حاصل کیا گیا ہے۔ اس مکمل کو نکلی محور r اور θ استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں $u = r \cos \theta$ اور $w = r \sin \theta$ لیتے ہیں۔ چھوٹا رقبہ $du dw = r dr d\theta$ لکھا جائے گا۔ ربع اول میں r کے حدود 0 تا ∞ اور θ کے حدود 0 تا $\frac{\pi}{2}$ ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty d\theta = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \pi$$

ملتا ہے۔ دونوں اطراف کا جذر لینے سے $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ملتا ہے۔

خواص: بیسل تفاعل

بیسل تفاعل انتہائی زیادہ تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔ آئیں درج ذیل تعلقات کو بیسل تسلسل سے اخذ کریں۔

$$(5.98) \quad [x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$(5.99) \quad [x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$(5.100) \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$(5.101) \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

مساوات 5.98 ثابت کرتے ہیں۔ مساوات 5.96 کو x^ν سے ضرب دیتے ہوئے

$$x^\nu J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

تفرق لے کر مساوات 5.92 سے $\Gamma(\nu+m+1) = (\nu+m)\Gamma(\nu+m)$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [x^\nu J_\nu(x)]' &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+2\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(m+\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m! (\nu+m)\Gamma(\nu+m)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu+m)} = x^\nu x^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu+m)} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \end{aligned}$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu-1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

آئیں اب مساوات 5.99 ثابت کریں۔ مساوات 5.96 کو $x^{-\nu}$ سے ضرب دینے سے $x^{-\nu}$ کٹ جاتا ہے۔

$$x^{-\nu} J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

تفرق لے کر $m! = m(m-1)!$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [x^{-\nu} J_\nu(x)]' &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu} m(m-1)! \Gamma(\nu+m+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu-1} (m-1)! \Gamma(\nu+m+1)} \end{aligned}$$

باب 5. مل متق تسلسل س ساد تفرق مساوات كحل۔ اعلیٰ تفرق

دھيان رھس ك تفرق ك بعل تسلسل كا پھلا ركن $m = 1$ س ظاھر كيا جائس گا۔ (آپ $x^{-\nu} J_\nu$ ك تسلسل كو پھيلا كر لكھ كر تفرق ليتس ھوس ديكھ سكتس ھيں ك پھلا ركن $m = 1$ ھس)۔ درج بالا تسلسل ميں $s = m - 1$ يعني $m = s + 1$ پر كرتس ھيں۔

$$[x^{-\nu} J_\nu(x)]' = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} x^{2s+1}}{2^{2s+\nu+1} s! \Gamma(\nu + s + 2)} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

آخري قلم مساوات 5.96 ميں ν ك جگھ $\nu + 1$ پر كر ك موازنه كرتس ھوس لكھا گيا ھس۔

اب مساوات 5.100 اور مساوات 5.100 ثابت كرتس ھيں۔ مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 كو درج ذيل لكھا جا سكتا ھس۔

$$\begin{aligned} \nu x^{\nu-1} J_\nu + x^\nu J_\nu' &= x^\nu J_{\nu-1} \\ -\nu x^{-\nu-1} J_\nu + x^{-\nu} J_\nu' &= -x^{-\nu} J_{\nu+1} \end{aligned}$$

پھلي مساوات كو x^ν اور دوسري مساوات كو $x^{-\nu}$ س تقسيم كرتس ھيں۔

$$\begin{aligned} \nu x^{-1} J_\nu + J_\nu' &= J_{\nu-1} \\ -\nu x^{-1} J_\nu + J_\nu' &= -J_{\nu+1} \end{aligned}$$

ان كو جمع اور تفریق كرتس ھوس درج ذيل (دركار) مساوات ملتس ھيں۔

$$\begin{aligned} 2J_\nu' &= J_{\nu-1} - J_{\nu+1} \\ \frac{2\nu}{x} J_\nu &= J_{\nu-1} + J_{\nu+1} \end{aligned}$$

مثال 5.20: مساوات 5.98 تا مساوات 5.101 كا استعمال
درج ذيل كو J_0 اور J_1 ك صورت ميں حاصل كريں۔

$$\int_1^2 x^{-3} J_4(x) dx$$

حل: مساوات 5.99 ميں $\nu = 3$ ليتس ھوس درج ذيل ملتا ھس۔

$$I = \int_1^2 x^{-3} J_4(x) dx = -x^{-3} J_3(x) \Big|_1^2$$

مساوات 5.100 میں $\nu = 2$ پر کرتے ہوئے $J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1$ اور $\nu = 1$ پر کرتے ہوئے $J_2 = \frac{2}{x}J_1 - J_0$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مکمل کی قیمت

$$I = -x^{-3}[4x^{-1}(2x^{-1}J_1 - J_0) - J_0]_1^2 = -\frac{1}{8}J_1(2) + \frac{1}{4}J_0(2) + 7J_1(1) - 4J_0(1)$$

ہوگی۔

مثال 5.21: درج ذیل (شکل 5.8) ثابت کریں۔

$$(5.102) \quad \begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \end{aligned}$$

حل: بیسل تسلسل 5.96 میں $\nu = \frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے ہیں۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\frac{1}{2}} m! \Gamma(\frac{1}{2} + m + 1)} = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m! \Gamma(m + \frac{3}{2})}$$

نسب نما میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 5.97 استعمال کیا گیا ہے۔

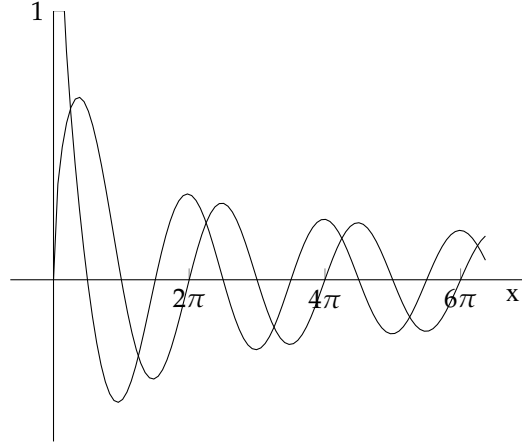
$$\begin{aligned} 2^m m! &= 2m(2m-2)(2m-4) \cdots 4 \cdot 2 \\ 2^{m+1} \Gamma(m + \frac{3}{2}) &= 2^{m+1} (m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= (2m+1)(2m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے نسب نما میں

$$2^{2m+1} m! \Gamma(m + \frac{3}{2}) = (2m+1)2m(2m-1)(2m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi} = (2m+1)! \sqrt{\pi}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$



شکل 5.8: بیسل تفاعل $J_{\frac{1}{2}}(x)$ اور $J_{-\frac{1}{2}}(x)$

مساوات 5.98 استعمال کرتے ہوئے

$$[\sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(x)]' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x = \sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں دائیں ہاتھ کے مساوات کو لیتے ہوئے \sqrt{x} سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.102 کی دوسری مساوات ملتی ہے۔

عمومی حل۔ خطی طور تا بیعت

بیسل مساوات 5.76 کے عمومی حل کے لئے $J_\nu(x)$ کے علاوہ خطی طور غیر تابع دوسرا حل بھی درکار ہے۔ غیر عدد صحیح ν کی صورت میں دوسرا حل $r_2 = -\nu$ (اشاری مساوات 5.79) استعمال کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔ یوں دوسرا خطی طور غیر تابع حل مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $-\nu$ پر کرنے سے حاصل ہو گا۔

$$(5.103) \quad J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m - \nu + 1)}$$

v غیر عدد صحیح ہونے کی صورت میں J_v اور J_{-v} خطی طور غیر تابع ہیں۔ یوں غیر عدد صحیح v کی صورت میں $x \neq 0$ پر مساوات بیسل کا عمومی حل

$$(5.104) \quad y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x)$$

ہو گا۔

v عدد صحیح ہونے کی صورت میں $J_n(x)$ اور $J_{-n}(x)$ کا تعلق

$$(5.105) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ہے لہذا یہ خطی طور تابع ہیں اور ان سے عمومی حل نہیں لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں مساوات 5.105 کو ثابت کریں۔

ثبوت: مساوات 5.103 میں v کی قیمت کو عدد صحیح کے قریب تر لانے سے گیمما تفاعل کی قیمت (صفحہ 382 پر شکل 1.ب) لامتناہی کی طرف بڑھتی ہے۔ یوں $v = n$ کی صورت میں مساوات 5.103 کے ابتدائی n ارکان کے عددی سر، گیمما تفاعل کی قیمت لامتناہی ہونے کی بنا، صفر ہوں گے اور یوں تسلسل $m = n$ سے شروع ہو گا۔ مساوات 5.93 کے تحت $\Gamma(m - n + 1) = (m - n)!$ ہے لہذا درج ذیل لکھا جائے گا

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! (m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{2s+n} (n+s)! s!} \quad (m = n + s)$$

جو $(-1)^n J_n(x)$ ہے۔

اگلے حصے میں $v = n$ کی صورت میں مساوات بیسل کا عمومی حل، بیسل تفاعل کی دوسری قسم Y_v کی مدد سے، حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 5.58: ثابت کریں کہ $J_n(x)$ تمام x کے لئے مرکب ہے۔

جواب: $\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|_{m \rightarrow \infty} = 0$ ہے لہذا $\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{2^{2m+n} m! (n+m)!}{2^{2m+2+n} (m+1)! (n+m+1)!} = \frac{1}{2^2 (m+1) (n+m+1)}$ اور یوں $R \rightarrow \infty$ ہو گا۔

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تفریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسیر

سوال 5.59 تا سوال 5.68 کے عمومی حل، جہاں ممکن ہو، J_ν اور $J_{-\nu}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔ جہاں اضافی معلومات دی گئی ہوں، وہاں اس کو استعمال کرتے ہوئے بیسل مساوات کی صورت حاصل کریں۔

سوال 5.59: $x^2 y'' + xy'(x^2 - \frac{4}{9})y = 0$ جواب: چونکہ $\nu = \frac{2}{3}$ ہے جو غیر عدد صحیح ہے لہذا عمومی حل $y = c_1 J_{\frac{2}{3}} + c_2 J_{-\frac{2}{3}}$ ہے۔

سوال 5.60: $xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$ ($z = \sqrt{x}$) جواب: $y = c_1 J_0(\sqrt{x})$

سوال 5.61: $xy'' + y' + \frac{x}{4}y = 0$ ($z = \frac{x}{2}$) جواب: $y = c_1 I_0(\frac{x}{2})$

سوال 5.62: $x^2 y'' + xy'(\frac{x^2}{9} - \frac{1}{9})y = 0$ ($z = \frac{x}{3}$) جواب: $y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{3}) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(\frac{x}{3})$

سوال 5.63: $y'' + (e^{2x} - 16)y = 0$, ($z = e^x$) جواب: $y = c_1 J_4(e^x)$

سوال 5.64: $x^2 y'' + xy'(\lambda^2 x^2 - \nu^2)y = 0$, ($z = \lambda x$) جواب: $y = c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 J_{-\nu}(\lambda x)$ جہاں $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

سوال 5.65: $x^2 y'' + xy' + (9x^2 - 1)y = 0$, ($z = 3x$) جواب: $y = c_1 J_1(3x)$

سوال 5.66: $(x - \frac{1}{2})^2 y'' + (x - \frac{1}{2})y' + 4x(x - 1)y = 0$ ($z = 2x - 1$) جواب: $y = c_1 J_1(2x - 1)$

سوال 5.67: $xy'' + (2\nu + 1)y' + xy = 0$, ($y = x^{-\nu}u$) جواب: $y = x^{-\nu}(c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x))$ جہاں $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

سوال 5.68: $x^2 y'' + \frac{1}{4}(x + \frac{3}{4})y = 0$, ($y = u\sqrt{x}$, $z = \sqrt{x}$) جواب: $y = c_1 \sqrt{x} J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) + c_2 \sqrt{x} J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$

سوال 5.69: مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$(5.106) \quad J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right)$$

سوال 5.70: کیا آپ مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے اخذ کر سکتے ہیں کہ $v = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots$ کی صورت میں $J_\nu(x)$ بنیادی تفاعل ہیں۔

جواب: جی ہاں۔

سوال 5.71: باہم پیچاں صفر

مساوات 5.98، مساوات 5.99 اور مسئلہ رول⁵⁹ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $J_n(x)$ کے کسی بھی دو متواتر صفروں کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

جواب: مسئلہ رول کہتا ہے کہ کسی بھی حقیقی قابل تفرق تفاعل کے دو متواتر برابر قیمت نقطوں کے مابین کم از کم ایک ایسا نقطہ (نقطہ فاصل) پایا جاتا ہے جس پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔ اگر $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 پر پائے جاتے ہوں تب ہم $x_1^{-n} J_n(x_1) = x_2^{-n} J_n(x_2) = 0$ لکھ سکتے ہیں۔ یوں مسئلہ رول کے تحت x_1 اور x_2 کے مابین کسی نقطہ پر تفاعل $x^{-n} J_n(x)$ کا تفرق صفر $[x^{-n} J_n(x)]' = 0$ ہو گا جو مساوات 5.99 کے استعمال سے ایسے نقطہ پر $x^{-n} J_{n+1}(x) = 0$ یعنی $J_{n+1}(x) = 0$ دیتا ہے۔ اسی طرح اگر $J_{n+1}(x)$ کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 پر پائے جاتے ہوں تب $J_{n+1}(x_3) = J_{n+1}(x_4) = 0$ اور $x_3^{n+1} J_{n+1}(x_3) = x_4^{n+1} J_{n+1}(x_4) = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مسئلہ رول کے تحت x_3 اور x_4 کے مابین کسی نقطہ پر $[x^{n+1} J_{n+1}(x)]' = 0$ ہو گا جس سے مساوات 5.98 کے تحت ایسے نقطہ پر $x^{n+1} J_n(x) = 0$ یعنی $J_n(x) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ثابت ہوا کہ J_{n+1} کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 کے مابین $J_n(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 5.72: تفرقی مساوات سے ایک درجی تفرق کا اخراج

درج ذیل تفرقی مساوات میں $y(x) = u(x)v(x)$ پر کرتے ہوئے ایسا $v(x)$ دریافت کریں کہ حاصل تفرقی مساوات میں پہلے درجے کا تفرق نہ پایا جاتا ہو۔ حاصل تفرقی مساوات بھی حاصل کریں۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جوابات: $v = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$ اور مساوات $u'' + [q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p']u = 0$ میں u' نہیں پایا جاتا ہے۔

باب 5. ط. متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تناسل

سوال 5.73: گزشتہ سوال میں تفرقی مساوات سے ایک درجی تفرق کا اخراج کیا گیا۔ ثابت کریں کہ مساوات بمیل 5.76 سے ایک درجی تفرق کا اخراج $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ پر کرتے ہوئے ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہو گی۔

$$(5.107) \quad x^2 u'' + (x^2 + \frac{1}{4} - v^2)u = 0$$

سوال 5.74: مساوات 5.107 کا عمومی حل $v = \frac{1}{2}$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $u = A \cos x + B \sin x$ ہے لہذا $y = \frac{u}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(A \cos x + B \sin x)$ ہو گا۔

سوال 5.75 تا سوال 5.80 مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کی مدد سے حل ہوں گے۔

$$\text{سوال 5.75: ثابت کریں} \quad J_0'(x) = -J_1(x), \quad J_1'(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad J_2'(x) = \frac{1}{2}[J_1(x) - J_3(x)]$$

سوال 5.76: بمیل مساوات 5.76 کو مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 سے حاصل کریں۔

سوال 5.77: درج ذیل ثابت کریں

$$\begin{aligned} \int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx &= x^\nu J_\nu(x) + c \\ \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx &= -x^{-\nu} J_\nu(x) + c \\ \int J_{\nu+1}(x) dx &= \int J_{\nu-1}(x) dx - 2J_\nu(x) \end{aligned}$$

سوال 5.78: $\int J_3(x) dx$

جواب: مساوات 5.101 میں $v = 2$ پر کر کے مکمل $\int J_3 dx = \int J_1 dx - 2J_2$ ہو گا اور مساوات 5.99

میں $v = 0$ پر کرتے ہوئے مکمل $\int J_1 dx = -J_0$ دیتا ہے لہذا $\int J_3 dx = -J_0 - 2J_2 + c$

سوال 5.79: مکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے حل کریں۔ $\int x^3 J_0(x) dx$
جواب: $\int x^3 J_0 dx = \int x^2(x J_0) dx = x^2(x J_1) - 2 \int x^2 J_1 dx = x^3 J_1 - 2x^2 J_2 + c$

سوال 5.80: مکمل بالخصوص سے حل کریں۔ $\int x^2 J_0 dx$

جواب: $\int x^2 J_0 dx = x^2 J_1 + x J_0 - \int J_0 dx$ جہاں $\int J_0 dx$ کسی بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے بلکہ اس کی قیمت جدول کی مدد سے لکھی جاتی ہے۔

5.5. بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل

بیسل مساوات 5.76 کا کسی بھی ν کے لئے عمومی حل حاصل کرنے کی خاطر بیسل تفاعل کی دوسری قسم⁶⁰ $Y_\nu(x)$ حاصل کرتے ہیں۔ شروع $\nu = n = 0$ سے کرتے ہیں۔

$n = 0$ کی صورت میں مساوات بیسل کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(5.108) \quad xy'' + y' + xy = 0$$

لکھا جاسکتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 سے دہرا جذر $r = 0$ ملتا ہے جو صفحہ 346 پر مسئلہ فروبنیوس میں بتلائی گئی دوسری صورت کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں مساوات 5.108 کا ایک حل $J_0(x)$ ہو گا جبکہ اس کا دوسرا حل مساوات 5.57 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے

$$(5.109) \quad y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m$$

لکھا جائے گا۔ مساوات 5.109 اور اس کے تفرقات

$$y_2' = J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = J_0'' \ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-2}$$

کو مساوات 5.108 میں پر کرتے ہیں (اگرچہ آخری مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ لکھنا چاہیے، البتہ $m = 1$ پر دیا گیا مجموعہ صفر دیتا ہے لہذا مجموعے کا پہلا رکن $m = 1$ لکھنا ممکن ہے)۔ اب چونکہ J_0 تفرقی مساوات کا حل ہے لہذا تین لوگار تھی ارکان کا مجموعہ $(xJ_0'' + J_0' + xJ_0) \ln x$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں بقایا درج ذیل ہو گا۔

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$$

اس میں پہلے اور دوسرے مجموعوں کو جمع کرتے ہوئے $\sum m^2 A_m x^{m-1}$ لکھا کر جبکہ J_0' کی طاقی تسلسل کو مساوات 5.87 کا جزو در جزو تفرق لیتے اور $(m-1)! = \frac{m!}{m}$ استعمال کرتے ہوئے

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m} (m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m! (m-1)!}$$

لکھ کر درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.110) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m! (m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$$

اس مساوات میں x^0 کمتر طاقت، جو صرف دوسرے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $A_1 = 0$ ملتا ہے۔ اب x^{2s} کے عددی سروں، جو پہلے تسلسل میں نہیں پایا جاتا، کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہیں۔

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots)$$

اب چونکہ $A_1 = 0$ ہے لہذا $A_3 = 0$ ، $A_5 = 0$ ، ... ہوں گے۔

x^{2s+1} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $s = 0$ کے لئے

$$-1 + 4A_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{1}{4}$$

جبکہ بقایا s پر

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots)$$

لکھا جائے گا۔ اس سے $s = 1$ کے لئے

$$\frac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 = -\frac{3}{128}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ عمومی طور پر

$$(5.111) \quad A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right), \quad (m = 1, 2, \dots)$$

ملتا ہے۔ قوسین میں بند قیمت کو h_m لکھ کر،

$$(5.112) \quad h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

مساوات 5.111 اور $A_1 = A_3 = \dots = 0$ کو مساوات 5.109 میں پر کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$(5.113) \quad \begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \\ &= J_0(x) \ln x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{128} x^4 + \frac{11}{13824} x^6 - + \dots \end{aligned}$$

چونکہ J_0 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہذا یہ مساوات بیسل 5.76 کی حل کی اساس ہیں۔ ہم J_0 اور y_2 سے کوئی بھی مخصوص حل، $a(y_2 + bJ_0)$ جہاں $a(\neq 0)$ اور b مستقل ہیں، لکھتے ہوئے اساس کی مختلف صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ روایتی طور پر $a = \frac{2}{\pi}$ اور $b = \gamma - \ln 2$ چنے جاتے ہیں جہاں $\gamma = 0.57721566490\dots$ مستقل یولر⁶¹ کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے جہاں s کی قیمت لامتناہی کو چھونے کی کوشش کرتی ہے۔

$$(5.114) \quad \gamma = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} - \ln s$$

اس طرح لکھا گیا دوسرا حل درجہ صفر بیسل تفاعل کی دوسری قسم⁶² (شکل 5.9) یا درجہ صفر نیومن تفاعل⁶³ کہلاتا⁶⁴ اور $Y_0(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$(5.115) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right]$$

لکھا جائے گا جہاں h_m کی قیمت مساوات 5.112 دیتی ہے۔ جیسا شکل 5.9 میں دکھایا گیا ہے کم قیمت کی مثبت x پر Y_0 کی صورت $\ln x$ کی طرح ہے اور $x \rightarrow \infty$ پر $Y_0(x) \rightarrow \infty$ ہو گا۔

$v = n = 1, 2, \dots$ کے لئے بھی بالکل اسی طرح، مساوات 5.59 سے شروع کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کیا جاتا ہے۔ ان میں بھی لوگار تھمی جزو پایا جاتا ہے۔

دوسرے حل کا دارومدار اس حقیقت پر ہے کہ آیا v کا درجہ عدد صحیح ہے یا نہیں۔ اس پیچیدگی سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر دوسرے حل کو درج ذیل بیان کیا جاتا ہے جو تمام v کے لئے قابل استعمال ہے۔

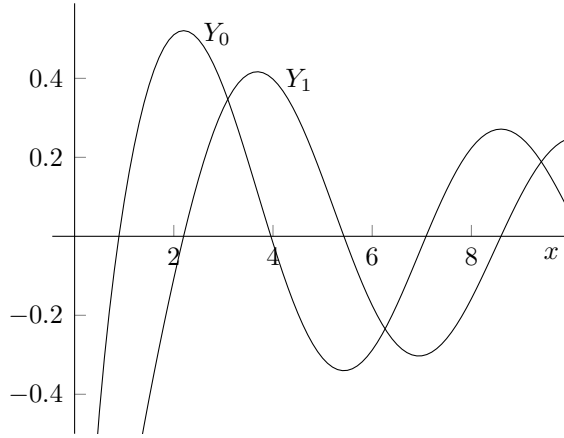
$$(5.116) \quad \begin{aligned} Y_v(x) &= \frac{1}{\sin v\pi} [J_v(x) \cos v\pi - J_{-v}(x)] \quad (\text{الف}) \\ Y_n(x) &= \lim_{v \rightarrow n} Y_v(x) \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

⁶¹Euler constant

⁶²Bessel function of the second kind of order zero

⁶³Neumann's function of order zero

⁶⁴کارل نیومن [1832-1925] جرمنی کے ریاضی دان اور ماہر طبیعیات۔



شکل 5.9: بیسل تفاعل کے دوسرے اقسام۔

درج بالا تفاعل کو درجہ ν بیسل تفاعل کی دوسری قسم⁶⁵ یا درجہ ν نیومن تفاعل کہتے ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ J_ν اور Y_ν تمام ν اور تمام $x (> 0)$ کے لئے خطی طور غیر تابع ہیں۔

غیر عددی صحیح درجہ ν کے لئے چونکہ $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ بیسل مساوات کے حل ہیں لہذا $Y_\nu(x)$ بھی بیسل مساوات کا حل ہے۔ اب چونکہ ایسی ν کے لئے $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ خطی طور غیر تابع ہیں اور $Y_\nu(x)$ میں $J_{-\nu}(x)$ پایا جاتا ہے لہذا $J_\nu(x)$ اور $Y_\nu(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ مزید یہ کہ مساوات 5.116-ب کو ثابت (صفحہ 375 پر حوالہ [3] میں ثبوت پیش کیا گیا ہے) کیا جاسکتا ہے لہذا عدد صحیح درجہ کے لئے $Y_n(x)$ بیسل مساوات کا حل ہے۔ آپ دیکھیں گے کہ $Y_n(x)$ کی تسلسل میں لوگار تھی جزو پایا جاتا ہے لہذا $J_n(x)$ اور $Y_n(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ $Y_n(x)$ کی تسلسل لکھنے کی خاطر $J_\nu(x)$ کی تسلسل 5.96 اور $J_{-\nu}(x)$ کی تسلسل 5.103 کو مساوات 5.116-الف میں پر کرتے ہوئے $\nu \rightarrow n$ کرتے ہیں (تفصیل صفحہ 375 پر [3] سے دیکھی جاسکتی ہے)۔

$$(5.117) \quad Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{x^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n} m! (m+n)!} x^{2m} \\ - \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n} m!} x^{2m}$$

⁶⁵ Bessel function of the second kind of order ν

لکھا جاسکتا ہے جہاں $x > 0$ اور $n = 0, 1, \dots$ جبکہ

$$h_0 = 0, \quad h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s} \quad (s = 1, 2, \dots)$$

ہیں اور $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.117 میں آخری مجموعے کی جگہ صفر لکھا جاتا ہے۔ درجہ صفر $n = 0$ پر مساوات 5.117 عین مساوات 5.115 کی صورت اختیار کرتی ہے۔ اس کے علاوہ درج ذیل ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$(5.118) \quad Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$$

ان نتائج کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 5.4: مساوات بیسل کا عمومی حل تمام v کے لئے مساوات بیسل کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$(5.119) \quad y(x) = C_1 J_v(x) + C_2 Y_v(x)$$

بعض اوقات حقیقی x کے لئے مساوات بیسل کے مخلوط حل درکار ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں درج ذیل خطی طور غیر تابع مخلوط حل استعمال کیے جاتے ہیں جنہیں درجہ v بیسل تفاعل کی تیسری قسم⁶⁶ یا درجہ v پہلی اور دوسری ہینکل تفاعل⁶⁷ کہا جاتا ہے۔

$$(5.120) \quad \begin{aligned} H_v^1(x) &= J_v(x) + iY_v(x) \\ H_v^2(x) &= J_v(x) - iY_v(x) \end{aligned}$$

سوالات

Bessel function of the third kind of order ν ⁶⁶
Hankel functions⁶⁷

⁶⁸ ہرمن ہینکل [1839-1873] جرمنی کے ریاضی دان۔

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.