انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 14

مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیلی تفاعل

انجینئری کے کئی مسائل مخلوط تجزیہ سے با آسانی حل ہو پاتے ہیں۔ان مسئلوں کو دو بڑے گروہوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلی گروہ میں سادہ مسائل شامل ہیں جنہیں حل کرنے کے لئے کالج میں سیکھی گئی مخلوط اعداد کی الجبرا کافی ہے۔ برقی ادوار اور میکانی ارتعاش کے کئی مسائل اس نوعیت کے ہیں۔ دوسری گروہ کے لئے مخلوط تحلیلی تفاعل کا نظریہ اور اس میں استعمال کیے جانے والے انتہائی طاقتور اور شائستہ تراکیب تفصیلاً جاننا ضروری ہے۔ نظریہ حرارت، حرکیات سیال اور برقی سکون کے مسائل اس نوعیت کے ہیں۔

اس باب کے علاوہ اگلے کئی ابواب میں مخلوط تحلیلی تفاعل کے نظریہ کی بیشتر حصوں اور ان تفاعل کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں ان تفاعل کی اہمیت درج ذیل تین وجوہات کی بنا ہے۔

(الف) تحلیلی تفاعل کے حقیقی اور خیالی اجزاء، دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل ہوتے ہیں۔ یوں دو ابعادی مخفی قوہ مسائل پر تحلیلی تفاعل کے لئے بنائے گئے تراکیب کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مختلف مسائل میں درپیش کئی پیچیدہ حقیقی اور مخلوط تکملات کو مخلوط تکمل کی تراکیب سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

(پ) انجینئری حساب میں پائے جانے والے غیر بنیادی تفاعل کا بیشتر حصہ تحلیلی تفاعل پر مشتمل ہے۔مخلوط غیر تابع متغیرات کے لئے ان تفاعل کے مشاہدہ سے تفاعل کی خواص کی مفصل اور گہری سمجھ پیدا ہوتی ہے۔

موجودہ باب میں ہم مخلوط اعداد اور تحلیلی تفاعل اور ان ان کے عمومی خواص پر غور کریں گے۔باب کا دوسرا حصہ اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل کے لئے مختص ہے۔

14.1 مخلوط اعداد

تاریخی طور پر دیکھا گیا کہ کئی مساوات مثلاً

$$x^2+4=0, \quad x^2+2x+5=0$$

کو کوئی بھی حقیقی عدد مطمئن نہیں کرتا ہے۔ مخلوط اعداد کا آغاز یہیں سے ہوا۔[1]

تعریف: حقیقی اعداد x اور y کی مرتب جوڑی (x,y) کو **مخلوط عدد**[2] z کہتے ہیں جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$z=(x,y)$$

ہم x کو z کا **حقیقی حصہ**[3] اور y کو z کا **خیالی حصہ**[4] کہتے ہیں جنہیں ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$x=z_{\text{حقیقی}}, \quad y=z_{\text{خیالی}}$$

یوں حقیقی $(-7,2)=-7$ اور خیالی $(-7,2)=2$ ہوں گے۔ مزید دو مخلوط اعداد $z_1=(x_1,y_1)$ اور $z_2=(x_2,y_2)$ کی برابری کی تعریف ہم یوں کرتے ہیں کہ یہ مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں۔

مخلوط اعداد $z_1=(x_1,y_1)$ اور $z_2=(x_2,y_2)$ کا **مجموعہ** درج ذیل قاعدہ دیتا ہے

$$z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \tag{14.1}$$

جبکہ ان کا حاصل ضرب درج ذیل قاعدہ دے گا۔

$$z_1z_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1) \tag{14.2}$$

ان اعمال ریاضی پر مزید بحث آگے کی جائے گی۔

---

[1] اس مقصد کے لئے مخلوط اعداد سب سے پہلے اطالوی ریاضی دان جرولامو کردانو [1501-1576] نے استعمال کیے جنہوں نے کعبی مساوات کے حل کا کلیہ دریافت کیا۔ مخلوط اعداد کی منظم اور عام استعمال کی بنیاد جرمنی کے ریاضی دان یوہان کارل فرڈرش گاوس نے ڈالی۔

[2] complex number

[3] real part

[4] imaginary part

روپ $z = x + iy$ میں خیالی اعداد کا اظہار
ایسا مخلوط عدد جس کا خیالی حصہ صفر کی روپ $(x, 0)$ ہو گی۔ اس طرز کے مخلوط اعداد کے لئے حقیقی اعداد کی طرح

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $(x, 0)$ کو حقیقی عدد تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں حقیقی عددی نظام کی توسیعی حالت مخلوط عددی نظام ہے۔ مزید درج ذیل مخلوط عدد

$$i = (0, 1)$$

کو خیالی اکائی[5] کہتے ہیں۔ مساوات 14.2 کے تحت ہر حقیقی y کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$$

جبکہ مساوات 14.1 کے تحت

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

ہو گا۔ یوں $(x, 0)$ کے لئے x اور $(0, y) = iy$ استعمال کرتے ہوئے

$$z = x + iy$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مخلوط اعداد کو عموماً اسی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ خیالی اکائی i کی ایک اہم خاصیت

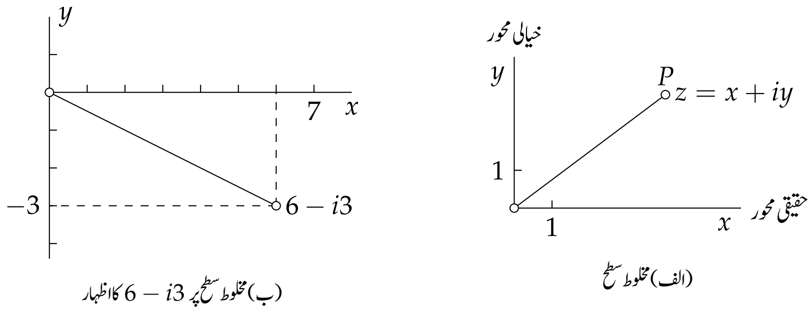
$$i^2 = -1 \tag{14.3}$$

کو مساوات 14.2 سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی: $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

مخلوط سطح

مخلوط اعداد کو سطح پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنا نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ ہم دو عدد آپس میں عمودی محور چنتے ہیں۔ افقی x محور کو **حقیقی محور**[6] جبکہ انتصابی y محور کو **خیالی محور**[7] تصور کیا جاتا ہے۔ دونوں محوروں پر

[5] imaginary unit
[6] real axis
[7] imaginary axis



شکل 14.1: مخلوط سطح اور مخلوط سطح پر مخلوط عدد کا اظہار

یکساں اکائی لمبائی استعمال کی جاتی ہے (شکل 14.1-الف)۔اس کو کارتیسی محددی نظام کہتے ہیں۔ہم اب مخلوط عدد $z = (x, y) = x + iy$ کو اس سطح پر بطور نقطہ P ظاہر کرتے ہیں جس کے محدد x اور y ہوں گے۔ایسی xy سطح جس پر اس طرح مخلوط اعداد ظاہر کیے جاتے ہیں **مخلوط سطح**[8] یا **نقشہ اغگن**[9] کہلاتی[10] ہے۔

"مخلوط سطح میں مخلوط عدد z " کہنے کی بجائے ہم "مخلوط سطح میں نقطہ z " کہیں گے۔ اس سے کوئی غلط فہمی پیدا نہیں ہوتی ہے۔

ریاضی اعمال

ہم اب مخلوط عدد کی روپ $z = x + iy$ اور مخلوط سطح کو استعمال کرتے ہیں۔

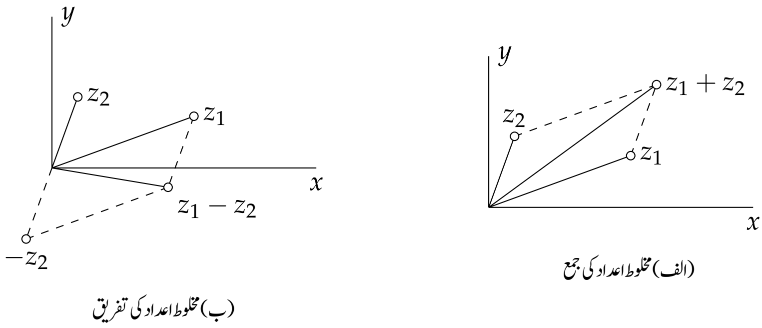
جمع۔ مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ $z_1 + z_2$ اب

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{14.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط اعداد کی جمع، میکانیات میں قوتوں کا مجموعہ حاصل کرنے کے **متوازی الاضلاع قاعدہ** کے مطابق ہے (شکل 14.2-الف)۔

---

[8] complex plane
[9] Argand diagram
[10] فرانسیسی ریاضی دان ژاں غوبغ اگن [1822-1768]



شکل 14.2: مخلوط اعداد کی جمع اور تفرق

تفریق۔ یہ جمع کا الٹ عمل ہے۔ فرق $z_1 - z_2$ ایسے مخلوط عدد z کے برابر ہو گا کہ $z_1 = z + z_2$ ہو۔ یوں (شکل 14.2-ب) درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{14.5}$$

ضرب۔ مساوات 14.2 میں دی گئی ضرب $z_1 z_2$ کو اب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{14.6}$$

چونکہ یہ نتیجہ حقیقی اعداد کی حساب کے قوانین اور مساوات 14.3 یعنی $i^2 = ii = -1$ کی استعمال سے حاصل ہوتا ہے لہٰذا اس کو یاد رکھنا آسان ہے۔

تقسیم۔ یہ ضرب کا الٹ عمل ہے۔ یوں حاصل تقسیم $z = \frac{z_1}{z_2}$ ایسا مخلوط عدد $z = x + iy$ ہو گا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$z_1 = z z_2 = (x + iy)(x_2 + iy_2) \qquad (z_2 \neq 0) \tag{14.7}$$

ہم $z_2 \neq 0$ کی صورت میں حاصل تقسیم $z = x + iy = \frac{z_1}{z_2}$ کی درج ذیل صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{14.8}$$

عملاً مساوات 14.8 کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{z_1}{z_2}$ کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $x_2 - iy_2$ سے ضرب دے کر سادہ صورت حاصل کرتے ہیں یعنی:

$$z = \frac{x_1 + y_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{14.9}$$

مثال کے طور پر اگر $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہوں تب

$$\frac{3-i2}{-4+i} = \frac{(3-i2)(-4-i)}{(-4+i)(-4-i)} = \frac{-12-i3+i8-2}{16+1} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$$

ہو گا جس کی درستگی آپ درج ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$zz_2 = \Big(-\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}\Big)(-4+i) = \frac{56}{17} - i\frac{14}{17} - i\frac{20}{17} - \frac{5}{17} = 3 - i2$$

مساوات 14.8 کا ثبوت کچھ یوں ہے۔ مساوات 14.6 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 14.7 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

مخلوط اعداد کی برابری کی تعریف کے مطابق دونوں مخلوط اعداد کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں گے اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x - y_2y \\ y_1 &= y_2x + x_2y \end{aligned}$$

یہ دو دو خطی مساوات کا نظام ہے جس کے نا معلوم متغیرات x اور y ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ x_2 اور y_2 بیک وقت صفر نہیں ہیں (جس کو مختصراً $z \neq 0$ لکھا جاتا ہے) ہمیں مساوات 14.8 میں دیا گیا یکتا حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.1: **جمع، تفریق، ضرب، تقسیم**

فرض کریں کہ $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہیں۔ تب

$$z_1 + z_2 = -1 - i, z_1 - z_2 = 7 - i3, z_1z_2 = -10 + i11$$

اور جیسے ہم حاصل کر سکے ہیں $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$ ہو گا۔ □

ریاضی اعمال کے خواص

حقیقی اعداد کے قواعد سے مخلوط اعداد z_1 اور z_2 کے لئے درج ذیل قواعد حاصل ہوتے ہیں

$$\left.\begin{aligned} z_1+z_2&=z_2+z_1\\ z_1z_2&=z_2z_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(قانون تبادل)}$$

$$\left.\begin{aligned} (z_1+z_2)+z_3&=z_1+(z_2+z_3)\\ (z_1z_2)z_3&=z_1(z_2z_3) \end{aligned}\right\} \quad \text{قانون تلازم} \tag{14.10}$$

$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3)&=z_1z_2+z_1z_3 \quad \text{(قانون جزئیتی تقسیم)}\\ 0+z&=z+0=z\\ z+(-z)&=(-z)+z=0\\ z\cdot 1&=z \end{aligned}$$

جہاں $0=(0,0)$ اور $-z=-x-iy$ ہیں۔

جوڑی دار مخلوط اعداد

فرض کریں کہ $z=x+iy$ کوئی مخلوط عدد ہے۔تب $x-iy$ کو z کا جوڑی دار مخلوط کہا جائے گا اور z کے جوڑی دار مخلوط کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں

$$z=x+iy, \quad \bar{z}=x-iy$$

ہوں گا۔مثلاً $z=5+i2$ کا جوڑی دار مخلوط $\bar{z}=5-i2$ ہے (شکل 14.3)۔مزید جمع اور تفریق سے

$$z+\bar{z}=2x, \quad z-\bar{z}=i2y$$

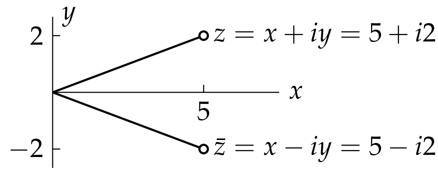
حاصل ہوتے ہیں جو درج ذیل اہم کلیات کا سبب بنتے ہیں۔

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z})=z\,\text{حقیقی}, \quad \frac{1}{i2}(z-\bar{z})=z\,\text{خیالی} \tag{14.11}$$

حقیقی عدد $z=x$ کا مخلوط جوڑی دار عدد $\bar{z}=z$ ہو گا جبکہ $z=0+iy=iy$ کا جوڑی دار مخلوط عدد $\bar{z}=-z$ ہو گا۔اس طرح کا عدد جس کا حقیقی حصہ صفر ہو **خالص خیالی عدد**[11] کہلاتا ہے جو خیالی محدد پر کسی نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[11] pure imaginary number



شکل 14.3: جوڑی دار مخلوط اعداد

اس کے علاوہ درج ذیل تعلق بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \tag{14.12}$$

سوالات

سوال 14.1: **خیالی اکائی کے طاقت**
درج ذیل ثابت کریں۔

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \cdots$$
$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{i^2} = -1, \quad \frac{1}{i^3} = i, \cdots \tag{14.13}$$

فرض کریں کہ $z_1 = 4 + i3$ اور $z_2 = 2 - i5$ ہیں۔ سوال 14.2 تا سوال 14.5 کو حل کرتے ہوئے $x + iy$ روپ میں لکھیں۔

سوال 14.2: $(z_1 - z_2)^2$
جواب: $-60 + i32$

سوال 14.3: $\frac{z_1}{z_2}$
جواب: $-\frac{7}{29} + i\frac{26}{29}$

سوال 14.4: $\frac{1}{z_1^2}$
جواب: $\frac{7}{625} - i\frac{24}{625}$

سوال 14.5: $\frac{2z_1}{3z_2}$
جواب: $-\frac{14}{87}+i\frac{52}{87}$

سوال 14.6 تا سوال 14.15 کو حل کریں جہاں $z=x+iy$ ہے۔

سوال 14.6: خیالی $\frac{1}{1+i}$
جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 14.7: حقیقی $\frac{1-i}{1+i}$
جواب: 0

سوال 14.8: خیالی z^2
جواب: $2xy$

سوال 14.9: حقیقی z^3
جواب: x^3-3xy^2

سوال 14.10: خیالی z^4
جواب: $4xy(x^2-y^2)$

سوال 14.11: حقیقی $\frac{(-1+i)^2}{-5+i4}$
جواب: $-\frac{8}{41}$

سوال 14.12: خیالی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
جواب: 1

سوال 14.13: حقیقی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
جواب: -1

سوال 14.14: خیالی $\frac{z}{\bar{z}}$
جواب: $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

سوال 14.15: حقیقی $\frac{z}{\bar{z}}$
جواب: $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

سوال 14.16: قانون تبادل ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.17: قانون تلازم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.18: قانون جزئیتی تقسیم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.19: اگر دو مخلوط اعداد کا حاصل ضرب صفر کے برابر ہو تب ثابت کریں کہ ان میں سے کم از کم ایک مخلوط عدد صفر ہو گا۔

سوال 14.20 تا سوال 14.27 میں ثبوت پیش درکار ہیں۔

سوال 14.20: کسی بھی عدد کے جوڑی دار مخلوط کا جوڑی دار مخلوط اس عدد کے برابر ہو گا۔

سوال 14.21: $\overline{iz} = -i\bar{z}$

سوال 14.22: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی ہو گا جب $\bar{z} = z$ ہو۔

سوال 14.23: z صرف اور صرف اس صورت خالص خیالی ہو گا جب $\bar{z} = -z$ ہو۔

سوال 14.24: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی یا خالص خیالی ہو گا جب $(\bar{z})^2 = z^2$ ہو۔

سوال 14.25: مساوات 14.12 ثابت کریں۔

سوال 14.26: $\text{حقیقی}\, (iz) = -\text{خیالی}\, z, \quad \text{خیالی}\, (iz) = \text{حقیقی}\, z$

سوال 14.27: $\text{حقیقی}\, (\overline{iz}) = -\text{خیالی}\, z, \quad \text{خیالی}\, (\overline{iz}) = -\text{حقیقی}\, z$

14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات

ہم مخلوط سطح میں درج ذیل قطبی محدد r ، θ متعارف کرتے ہیں۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{14.14}$$

یوں کسی بھی مخلوط عدد $z = x + iy \neq 0$ کو

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{14.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مخلوط عدد کی **قطبی روپ**[12] یا **تکونیاتی روپ**[13] کہلاتی ہے۔ r کو مخلوط عدد z کی **حتمی قیمت**[14] یا **معیار**[15] کہتے ہیں جسے $|z|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا (شکل 14.4-الف)۔

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\geq 0) \tag{14.16}$$

مثبت x محور سے لکیر MN تک زاویہ کو z کی **دلیل**[16] کہتے ہیں جس کو $\underline{/z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ چلتے ہوئے زاویہ بڑھتا ہے۔ z کا زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\underline{/z} = \theta = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \cos^{-1}\frac{x}{r} = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{14.17}$$

دھیان رہے کہ $z = 0$ کے لئے زاویہ θ غیر معین ہے۔ اسی لئے اوپر شرط $z \neq 0$ لاگو کی گئی ہے۔

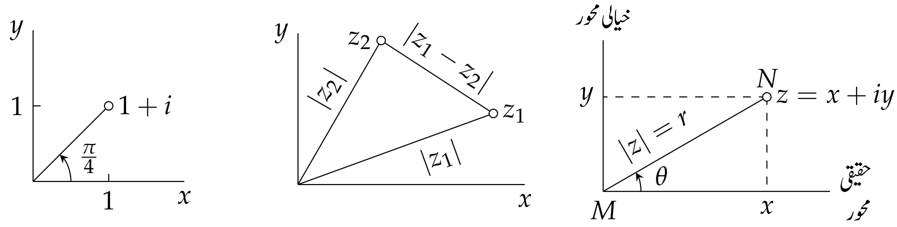
جیومیٹریائی طور پر مبدا M سے نقطہ z تک فاصلہ $|z|$ ہے (شکل 14.4-الف)۔ یوں

$$|z_1| > |z_2|$$

کا مطلب ہے کہ مبدا سے z_1 کا فاصلہ، مبدا سے z_2 کے فاصلے سے زیادہ ہے اور $|z_1 - z_2|$ سے مراد z_1 اور z_2 کے درمیان فاصلہ ہے (شکل 14.4-ب)۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی محور سے ہٹ کر مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات $z_1 < z_2$ یا $z_1 \geq z_2$ کوئی معنی نہیں رکھتی ہیں۔

[12] polar form
[13] trigonometric form
[14] absolute value
[15] modulus
[16] argument



(پ)صدر زاویہ (مثال 14.2)

(ب)دو نقطوں کے مابین فاصلہ

(الف) مخلوط سطح۔ مخلوط عدد کی قطبی روپ

شکل 14.4: مخلوط سطح اور اس پر مخلوط نقطے۔

مخلوط عدد کے زاویہ θ کی وہ قیمت جو وقفہ

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

میں پائی جاتی ہو کو z کے زاویے کی **صدر قیمت**[17] کہتے ہیں جس کے ساتھ $\mp n\pi$ جمع کرنے سے z کے زاویے کی دیگر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے۔

مثال 14.2: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت
فرض کریں کہ $z = 1 + i$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$z = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big), \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \angle z = \frac{\pi}{4} \mp 2n\pi \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

z کے زاویہ کی صدر قیمت $\frac{\pi}{4}$ ہے (شکل 14.4-پ)۔ □

مثال 14.3: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت
فرض کریں کہ $z = -2 + i2\sqrt{3}$ ہے تب $z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ ہو گا۔ z کی حتمی قیمت $|z| = 4$ اور اس کا صدر زاویہ $\frac{2\pi}{3}$ ہو گا۔ □

مخلوط اعداد کی ضرب یا تقسیم میں مخلوط اعداد کی قطبی روپ نہایت مفید ثابت ہوتی ہے۔ فرض کریں کہ

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{اور} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

[17] principal value

ہیں۔مساوات 14.6 کے تحت

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)_i(\sin\theta_1\cos\theta_2) + \cos\theta_1\sin\theta_2]$$

یعنی

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{14.18}$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتائج

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \tag{14.19}$$

اور

$$\underline{/z_1z_2} = \underline{/z_1} + \underline{/z_2} \qquad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots) \tag{14.20}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح تقسیم کی تعریف سے

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{14.21}$$

اور

$$\underline{/\tfrac{z_1}{z_2}} = \underline{/z_1} - \underline{/z_2} \qquad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots) \tag{14.22}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 14.4: کلیات ڈی موے ور
مساوات 14.19 اور مساوات 14.20 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{14.23}$$

جس سے کلیہ ڈی موے ور[18]

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{14.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ □

---

[18] De Moivre formula

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں للہذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے للہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

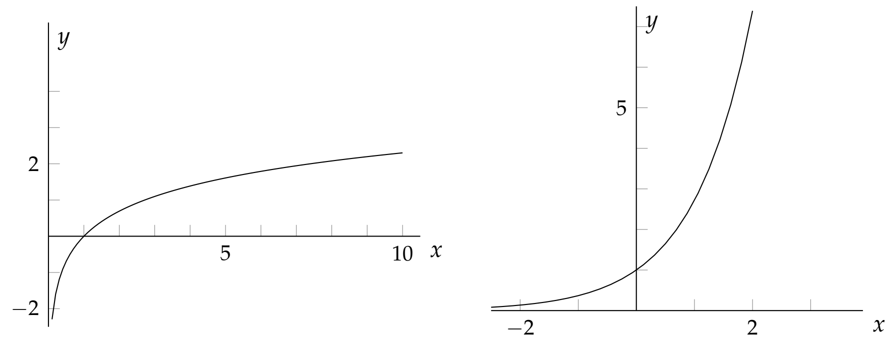
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $\frac{1}{x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = e^{-\ln x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

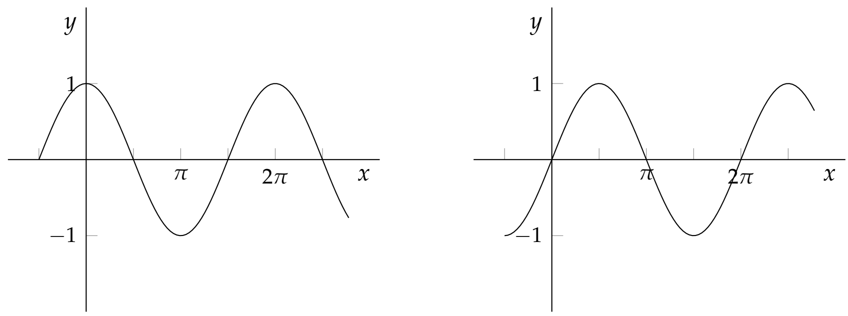
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب)قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف)قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943 \text{ rad}$$
$$1 \text{ radian} = 57^\circ\, 17'\, 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (\text{ب}.5)$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

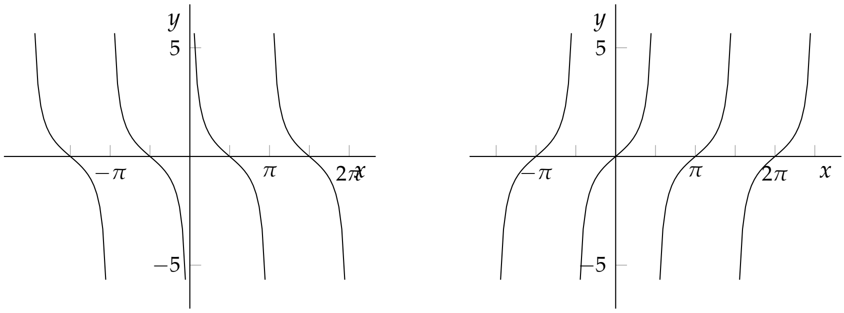
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



(ب) $\cot x$ (الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

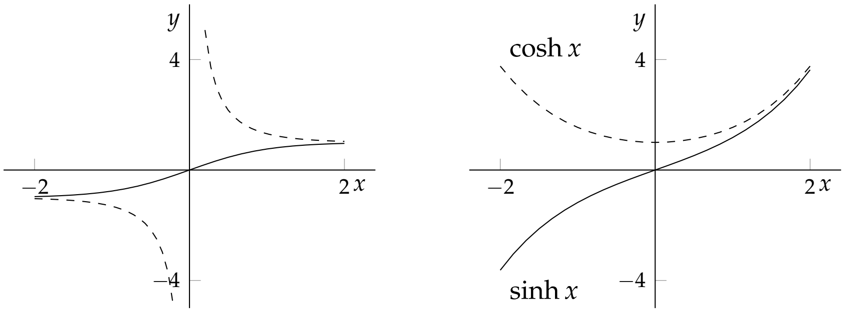
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

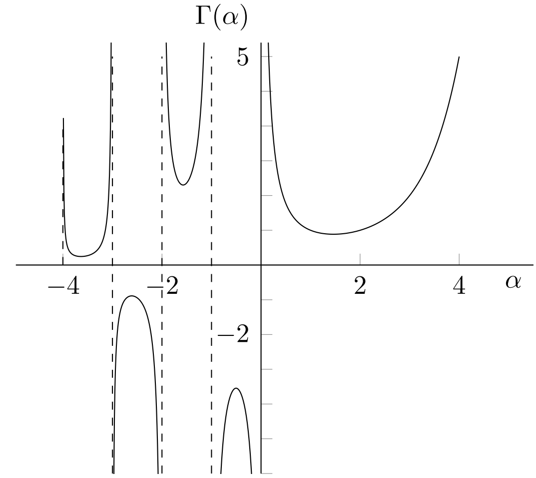
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\qquad(\alpha\neq 0,-1,\cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha=0,-1,-2,\cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)\approx\sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, \mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

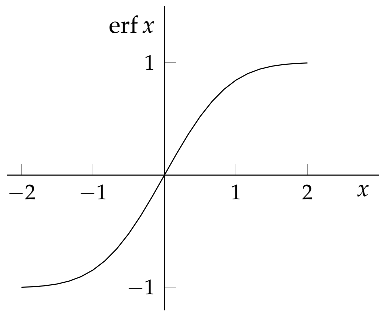
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.36}$$

$erf \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

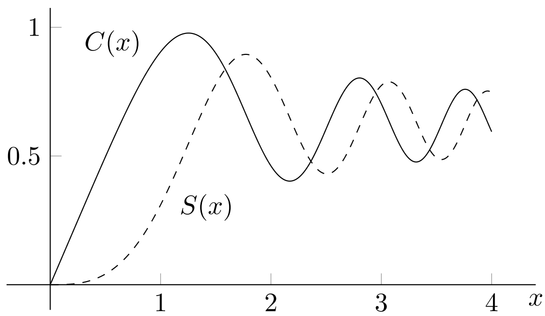
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, \mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{C}(x)=\int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$$\mathrm{s}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{S}(x)=\int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

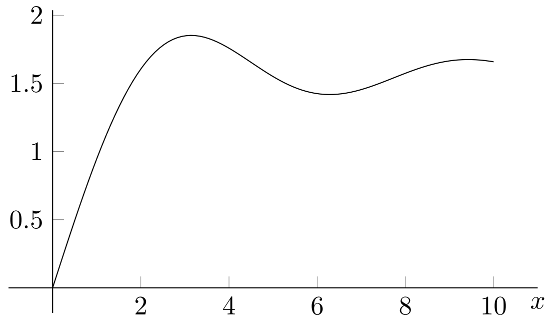
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.41}$$

$\mathrm{Si}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$