

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارجون اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخلوط اعداد
1047	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوئی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1 نقشہ کشی
1116	15.2 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1125	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6 ریمان سطحیں
1157	16 مخلوط مکملات
1157	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201	17 ترتیب اور تسلسل
1201	17.1 ترتیب
1208	17.2 تسلسل
1213	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220	17.4	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل
1225	17.5	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں
1236	17.6	تسلسل پر اعمال
1243	18	18 حاتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل
1243	18.1	حاتی تسلسل
1256	18.2	حاتی تسلسل کی روپ میں تفاعل
1263	18.3	ٹیلر تسلسل
1268	18.4	بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل
1274	18.5	حاتی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب
1281	18.6	یکساں استرار
1294	18.7	لوگوں تسلسل
1303	18.8	لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت
1315	19	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ
1315	19.1	بقیہ
1322	19.2	مسئلہ بقیہ
1327	19.3	حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ
1335	19.4	حقیقی مکمل کے دیگر اقسام
1343	20	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ
1344	20.1	ساکن برقی سکون
1350	20.2	دو بعدی بہاؤ سیال
1359	20.3	ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص
1364	20.4	پوسوں کلیہ مکمل
1371	21	21 اعدادی تجزیہ
1372	21.1	خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر
1374	21.2	دہرانے سے مساوات کا حل
1386	21.3	متناہی فرق
1392	21.4	باہمی تحریف
1401	21.5	لچکدار منحنیات
1408	21.6	اعدادی مکمل اور تفرق
1420	21.7	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1431	21.8	دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1438	21.9	اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1441	21.9.1	مسئلہ ڈرشلے
1444	21.9.2	بدلتی رخ خفی ترکیب
1451	21.10	مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ۔ غیر منظم سرحد

1458 21.11 اعدادی ترکیب برائے قطع مکانی مساوات

1465 اضافی ثبوت ا

1469 منفرد معلومات ب

1469 1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 21

اعدادی تجزیہ

انجینئری حساب کا نتیجہ آخر کار اعدادی ہوتا ہے لہذا انجینئری طالب علم کے لئے بنیادی اعدادی تراکیب¹ جاننا ضروری ہیں جن کی مدد سے دیے گئے مواد سے اعدادی جوابات اخذ کرنا ممکن ہو۔

بعض اوقات نظریہ سے حاصل کردہ جوابات عملاً قابل استعمال نہیں ہوتے ہیں، مثلاً ایک درجی خطی تفرقی مساوات کے حل کا تکمیلی کلیہ (حصہ 1.5)، خطی الجبرائی مساوات کے نظام کا مقطع کی مدد سے حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7)۔ کئی بار نظریہ صرف حل کی وجودیت کی یقین دہانی کرتا ہے لیکن اصل حل حاصل کرنے کے بارے میں کوئی مدد فراہم نہیں کرتا ہے۔

اعدادی تراکیب کی اہمیت کمپیوٹر کی ایجاد کی نظر ہے۔ ہم ان تراکیب کے نظریہ اور عملی استعمال پر غور کریں گے۔ تجزیہ خلل² پر بھی غور کیا جائے گا جو اعدادی تراکیب میں زیادہ اہمیت کے حامل ہے۔

numerical methods¹
error analysis²

21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر

چونکہ اعدادی تراکیب میں متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے متناہی تعداد کے چال کے بعد جواب حاصل کیا جاتا ہے لہذا یہ تراکیب متناہی چال³ ہیں جو اصل (نا معلوم) بالکل درست حل کی تخمینہ⁴ پیش کرتے ہیں ماسوائے ان چند صورتوں میں جب اصل جواب کافی سادہ ناطق عدد ہو اور ہم کوئی ایسا اعدادی ترکیب استعمال کریں جو یہی بالکل درست جواب فراہم کرتا ہو۔

اگر کسی مقدار کی اندازاً قیمت a^* ہو اور اس کی اصل قیمت a ہو تب فرق $\epsilon = a^* - a$ کو a^* کا حتمی خلل یا مختصراً a^* کا خلل⁵ کہتے ہیں۔ یوں

$$a^* = a + \epsilon \quad \text{خلل} + \text{اصل قیمت} = \text{تخمین}$$

ہو گا۔ a^* کی اضافی خلل⁶ ϵ_r کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{r} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خلل}}{\text{اصل قیمت}} \quad (a \neq 0)$$

ظاہر ہے اگر $|\epsilon|$ کی قیمت $|a^*|$ کی قیمت سے بہت کم ہو تب $\epsilon_r \approx \frac{\epsilon}{a^*}$ ہو گا۔ ہم ایک نئی مقدار $\gamma = a - a^* = -\epsilon$ متعارف کرتے ہیں جس کو ہم درستگی⁷ کہیں گے۔ یوں

$$a = a^* + \gamma \quad \text{درستگی} + \text{تخمین} = \text{اصل قیمت}$$

ہو گا۔ آخر میں a^* کی حد خلل⁹ سے مراد عدد β ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$|a^* - a| \leq \beta \implies |\epsilon| \leq \beta$$

خلل کی تین قسمیں تجربی خلل، قطع چال خلل اور تعداد اعداد خلل ہیں۔ تجربی خلل¹⁰ سے مراد مواد میں خلل ہے (جو تجربی ناپ کی وجہ سے ہو سکتے ہیں)۔ بالکل درست جواب تک پہنچنے کی خاطر متناہی (یا لامتناہی) تعداد کے حسابی

finite processes³

approximation⁴

error⁵

relative error⁶

correction⁷

⁸ بعض اوقات خلل کی تعریف $\gamma = -\epsilon$ لی جاتی ہے۔ آپ کسی ایک تعریف کو تسلیم کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ ہم خلل کی تعریف ϵ لیں گے۔

error bound⁹

Experimental errors¹⁰

چال (قءم) ءركار هوں گء. حقيقت ميں كسى خاص ءءاء كى چال بعء حساب روك ءيا جاتا هى اور يوں قطع چال خنل¹¹ پيءا هو گا. هر قءم پر حساب كى ءوران كميوٹر ءنناى ءءاء كى اءءاء اسءءال كرتى هوئى كءر هءءسه سى كم قيمءوں كو رء كرتا هى جس سى ءءءاء هءءسه خنل¹² پيءا هو گا جس پر هم اب غور كرتى ميں.

اعءشارى نظام ميں هر عءء كو ءنناى يا لاءنناى ءءاء كى اعءشارى هءءسوں سى ظاهر كيا جاتا هى. كميوٹر لاءنناى ءءاء كى هءءسوں كو ذخيرى كر سكتا هى لءذا كميوٹر اسءءال كرتى هوئى كسى بهى عءء كو ءنناى ءءاء كى هءءسوں سى ظاهر كيا جاتا هى. ان اءءاء كو ءو طريقتوں سى كميوٹر ميں ذخيرى كيا جاتا هى. مقررء نقطى¹³ نظام ميں نقطى اعءشارى كى بعء مقررء ءءاء كى هءءس سى پائى جاتى هيں مثلاً 35.143 ، 5.000 ، 0.076 جبكى غير مقررء نقطى¹⁴ نظام ميں ملحوظ هءءسوں¹⁵ كى ءءاء ءءعين هوئى هيں مثلاً 0.6723×10^2 ، -0.2354×10^{-4} اور 0.1000×10^1 جهاں ملحوظ هءءسوں كى ءءاء چار هى. عءء c كى ملحوظ هءءسه سى مرءء c كا هر هءءسه هى ماسوائى پهلل غير صفر عءء كى بايں جانب صفر جو اعءشارى كا مقام ءعين كرتا هو. (يوں اس كى علاءه هر صفر بهى c كا ملحوظ هءءسه هو گا.) مثال كى طور پر 5420 ، 1.340 اور 0.001460 ميں سى هر ايك ميں چار ملحوظ هءءس¹⁶ هيں.

ءءاء هءءسه خنل كا قاعءه اب بيان كرتى هيں. (k ملحوظ هءءسوں اك قطع كرنى كى ءعريف بهى يهى هى پس اس ميں هءءسه كى جگى ملحوظ هءءسه پر كريں.)

$k + 1$ واں هءءسه اور اس كى بعء ءمام هءءسوں كو رء كريں. اگر رءءءه عءء مقام k كى اكائى كى نصف سى كم هو ءب مقام k پر هءءسه كو ءبءيل نه كريں ("گھٹانا"). اگر رءءءه عءء مقام k كى اكائى كى نصف سى زيءه هو ءب ءب مقام k كى هءءس كى ساءھ 1 جمع كريں ("بڑھانا"). اگر رءءءه عءء مقام k كى اكائى كا نصف هو ءب اگر مقام k كا هءءسه طاق هو ءب اس كو بڑھا كر جفت بنائىں. (مثال كى طور پر 3.45 اور 3.55 كو اشارى كى بعء ايك هءءسه اك قطع كرتى هوئى بالءريب 3.4 اور 3.6 حاصل هو گا.)

اس قاعءه كا آخرى حصى يقينى بناتا هى كى عءء كا كءر حصى رء كرتى هوئى اوسطاً برابر مرءبى عءء بڑھايا اور گھٹايا جاتا هى.

Truncation error¹¹rounding error¹²fixed point¹³floating point¹⁴significant digits¹⁵

¹⁶ ايسا ءءول جو k ملحوظ هءءس سى ءتا هو ميں، جب اك كہانا جائى كى ايسا نهيں هى، هم فرض كرتى هيں كى ءيا كيا عءء a^* ، بالكل ءر سء قيمء a سى آخرى هءءس كى ± 0.5 اك پايں مءلف هو سكتا هى. مثال كى طور پر اگر $a = 1.1996$ اور $a^* = 1.200$ ءى ءى گا.

اگر ہم 1.2535 کو 3، 2 اور 1 اشاریہ تک قطع کریں تب ہمیں بالترتیب 1.254، 1.25 اور 1.3 حاصل ہو گا لیکن، بغیر مزید معلومات کے، 1.25 کو ایک اشاریہ تک قطع کرنے سے ہمیں 1.2 ملتا ہے۔

تعداد ہندسہ خلل کی وجہ سے کوئی بھی حساب مکمل غلط ہو سکتا ہے۔ عموماً چال کی تعداد بڑھانے سے یہ خلل بڑھتا ہے۔ یوں حسابی پروگرام کو اس خلل کی نقطہ نظر سے دیکھنا ضروری ہو گا اور اس خلل کو کم سے کم کرنا لازم ہو گا۔

21.2 دہرانے سے مساوات کا حل

ہمیں عموماً مساوات

$$(21.1) \quad f(x) = 0$$

کے حل درکار ہوتے ہیں یعنی ایسے عدد X_0 کہ $f(X_0)$ صفر کے برابر ہو جہاں f دیا گیا تفاعل ہے۔ مثال کے طور پر $\cosh x = \sec x$ ، $\tan x = x$ ، $\sin x = 0.5x$ ، $x^3 + x = 1$ ، $x^2 - 3x + 2 = 0$ اور $\cosh x \cos x = -1$ کو مساوات 21.1 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں پہلے دو میں f کثیر رکنی ہے لہذا یہ دونوں الجبرائی مساوات¹⁷ ہیں جن کے حل کو جذر¹⁸ کہتے ہیں۔ باقی ماورائی مساوات¹⁹ ہیں جن میں ماورائی تفاعل استعمال ہوئے ہیں۔ حقیقتاً صرف انتہائی سادہ صورتوں میں مکمل درست حل نکالنے والے کلیات موجود ہوں گے۔ عموماً دہرانے کی ترکیب یا دیگر تراکیب سے اصل حل کا تخمینہ حاصل کریں گے۔

اعدادی دہرانے کے طریقہ میں ہم اختیاری x_0 منتخب کرتے ہوئے درج ذیل روپ کلیہ

$$(21.2) \quad x_{n+1} = g(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

سے، بار بار حل کرتے ہوئے، ترتیب x_0, x_1, x_2, \dots حاصل کرتے ہیں جہاں g کسی ایسے وقفہ پر معین ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہو اور g کا حلقہ اسی وقفہ پر ہے۔ یوں ہم یک بعد دیگرے $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $x_3 = g(x_2)$ ، ... حاصل کرتے ہیں۔

اس حصہ میں دائرہ کار اور حلقہ $g(x)$ دونوں حقیقی لکیر پر ہوں گے۔ زیادہ عمومی معامہ میں x یا g اور یا دونوں سمتیات ہو سکتے ہیں۔

¹⁷ algebraic equations

¹⁸ roots

¹⁹ transcendental equations

دہرانے کے تراکیب اعدادی تجزیہ کے لئے انتہائی اہم ہیں۔

مساوات 21.1 کو حل کرنے کے لئے دہرانے کے تراکیب کئی طریقوں سے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ ہم ان میں سے تین خصوصاً اہم طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

الجبرائی تبادل

ہم مساوات 21.1 کو الجبرائی طور پر تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل روپ حاصل کر سکتے ہیں

$$(21.3) \quad x = g(x)$$

جو مساوات 21.2 کی روپ میں ہے۔ مساوات 21.3 کے حل کو g کا مقررہ نقطہ²⁰ کہتے ہیں۔ دیے گئے مساوات 21.1 کے کئی مطابق مساوات 21.3 ہو سکتے ہیں جن کے ترتیب x_0, x_1, \dots مختلف (اور x_0 کے تابع) ہوں گے۔ انہیں ایک سادہ مثال دیکھتے ہیں جس میں یہ حقائق ابھر کر سامنے آتے ہیں۔

مثال 21.1: دہرانے کی ترکیب

مساوات $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ کے لئے دہرانے کی ترکیب عمل میں لائیں۔ چونکہ ہمیں اس مساوات کے حل

$$x = 1.5 \pm \sqrt{1.25}, \quad x_1 = 2.618034, \quad x_2 = 0.381966$$

معلوم ہیں، ہم دہرانے کے عمل کے دوران خلل کا رویہ دیکھ سکتے ہیں۔ ہم دیے گئے مساوات سے

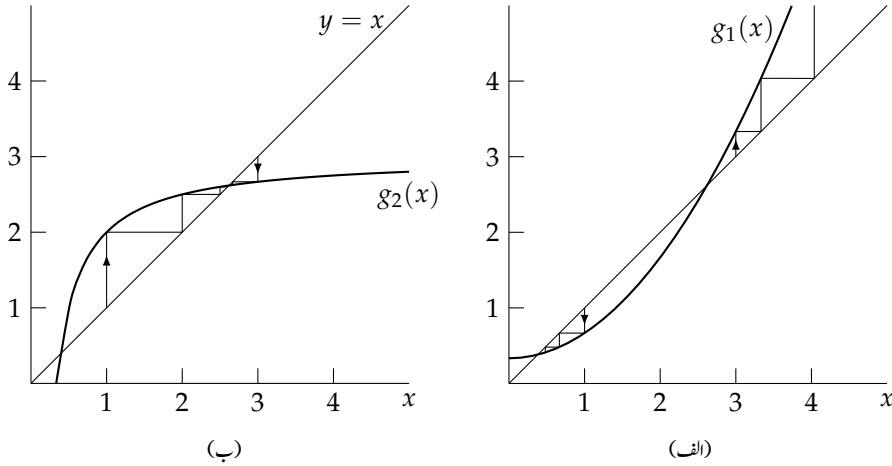
$$(21.4) \quad x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \implies x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ترتیب ملتی ہے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 0.667, \quad x_2 = 0.481, \quad x_3 = 0.411, \quad x_4 = 0.390, \dots$$

جو چھوٹے جذر کی طرف گامزن ہے (شکل 21.1-الف)۔ اگر ہم $x_0 = 3.000$ منتخب کریں تب درج ذیل ملتا ہے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.766, \quad x_4 = 11.414, \dots$$



شکل 21.1: اشکال برائے مثال 21.1

جو منفرد ترتیب ہے (شکل 21.1-الف)۔ دی گئی مساوات سے درج ذیل بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(21.5) \quad x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x} \implies x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$$

اب x_0 منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 2.000, \quad x_2 = 2.500, \quad x_3 = 2.600, \quad x_4 = 2.615, \dots$$

حاصل ہوتا ہے جو بڑے جذر کی طرف گامزن ترتیب ہے (شکل 21.1-ب)۔ اسی طرح $x_0 = 3$ منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 2.667, \quad x_2 = 2.625, \quad x_3 = 2.619, \quad x_4 = 2.618, \dots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 21.1-ب)۔ شکل کو دیکھ کر واضح ہوتا ہے کہ مرکوزیت اس صورت ہوگی جب حل کی پڑوس میں منحنی $g(x)$ کی ڈھلوان سیدھے خط $y = x$ کی ڈھلوان سے کم ہو۔ ہم اب دیکھتے ہیں کہ مرکوزیت کے لئے $|g'(x)| < 1$ کی شرط کافی ہے (جہاں خط $y = x$ کی ڈھلوان $y' = 1$ ہے)۔ □

اگر x_0 کا مطابقتی مساوات 21.2 سے حاصل کردہ ترتیب x_0, x_1, \dots مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب موثر ہے۔

ارتکاز کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کے کئی اہم عملی استعمال پائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 21.1: (ارتکاز)

فرض کریں کہ $x = g(x)$ کا حل $x = s$ ہے اور فرض کریں کہ کسی ایسے وقفہ J ، جس میں s پایا جاتا ہو، پر $g(x)$ کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر J میں $|g'(x)| \leq \alpha < 1$ ہو تب مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب J میں ہر x_0 کے لئے مرکب ہوگی۔

ثبوت: تفرقی علم الاحصاء کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت x اور s کے درمیان ایسا ζ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا،

$$g(x) - g(s) = g'(\zeta)(x - s)$$

جہاں x وقفہ J میں پایا جاتا ہے۔ چونکہ $g(s) = s$ اور $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، ... ہیں لہذا ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} |x_n - s| &= |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(\zeta)| |x_{n-1} - s| \leq \alpha |x_{n-1} - s| \\ &\leq \alpha^2 |x_{n-2} - s| \leq \dots \leq \alpha^n |x_0 - s| \end{aligned}$$

چونکہ $\alpha < 1$ ہے لہذا $n \rightarrow \infty$ کرنے سے $\alpha^n \rightarrow 0$ اور $|x_n - s| \rightarrow 0$ ہوں گے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

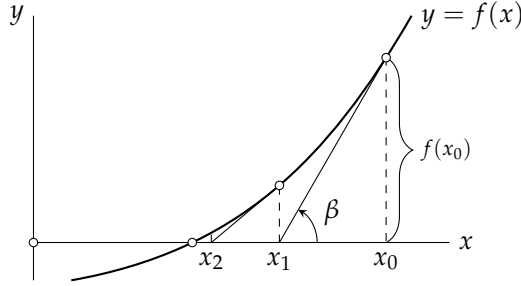
مثال 21.2: دہرانے کا طریقہ۔ مسئلہ 21.1

دہرانے کے طریقہ سے $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا حل تلاش کریں۔ اس مساوات کا جلدی سے خاکہ بنا کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ ہم اس مساوات سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n^2}$$

یوں کسی بھی x کے لئے $|g'_1(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} < 1$ ہو گا لہذا تمام x پر مرکونیت پائی جائے گی۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 21.2)

$$x_1 = 0.500, \quad x_2 = 0.800, \quad x_3 = 0.610, \quad x_4 = 0.729, \quad x_5 = 0.653, \quad x_6 = 0.701, \dots$$



شکل 21.3: ترکیب نیوٹن

ہو گا۔ اگلے قدم پر ہم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اسی طرح چلتے ہوئے جذر تک پہنچا جاتا ہے۔ یوں دہرانے کے طریقے کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(21.6) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

مثال 21.3: جذر المربع

کسی مثبت حقیقی عدد c کا جذر المربع حاصل کرنے کے لئے دہرانے کی ترکیب بنائیں۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کریں۔ ہمارے پاس \sqrt{c} یعنی $f(x) = x^2 - c = 0$ ہے لہذا $f'(x) = 2x$ ہو گا۔ یوں مساوات 21.6 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

اب اس ترکیب سے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کرتے ہیں۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = 1.500000, \quad x_2 = 1.416667, \quad x_3 = 1.414216, \quad x_4 = 1.414214, \dots$$

2 کا جذر المربع 1.414213562 ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب دیتا ہے۔ □

جدول 21.1: جدول برائے مثال 21.4

x_{n+1}	D_n	N_n	x_n	n
1.901	1.832	3.483	2.000	0
1.896	1.648	3.125	1.901	1
1.896	1.639	3.107	1.896	2

مثال 21.4: ماورائی مساوات کا دہرائے کی ترکیب سے حل
 مساوات $2 \sin x = x$ کا مثبت حل تلاش کریں۔ ہم $f(x) = x - 2 \sin x$ لکھتے ہوئے $f'(x) = 1 - 2 \cos x$ حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 21.6 کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2 \sin x_n}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n \cos x_n)}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}$$

f کی ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا حل $x_0 = 2$ کے قریب ہے۔ یوں ہم جدول 21.1 حاصل کرتے ہیں۔ چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 1.8955 ہے۔ □

مثال 21.5: ترکیب نیوٹن کا الجبرائی مساوات پر اطلاق مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔ مساوات 21.6 سے درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

$x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x_1 = 0.750\,000, \quad x_2 = 0.686\,047, \quad x_3 = 0.682\,340, \quad x_4 = 0.682\,328, \dots$$

x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔ مثال 21.2 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ مثال بہت تیزی کے ساتھ اصل حل پر مرکوز ہوتا ہے۔ اس سے دہرائے کی ترکیب کے درجہ کا تصور پیدا ہوتا ہے جس پر اب بات کی جائے گی۔ □

فرض کریں کہ مساوات $x = g(x)$ کا حل s ہے اور $x_{n+1} = g(x_n)$ ایک دہرائے کی ترکیب ہے جو اس حل کی تخمینہ x_n دیتی ہے۔ تب $x_n = s + \epsilon_n$ ہو گا جہاں x_n میں خلل ϵ_n ہے۔ فرض کریں کہ

g متعدد بار قابل تفرق ہے لہذا ٹیلر کے کلیہ سے

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \dots \\ &= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \dots \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ جزو $g(s)$ کے بعد پہلی غیر صفر جزو میں ϵ کے قوت نما کو دہرانے کی ترکیب (جس کو g تعین کرتا ہے) کا درجہ²¹ کہتے ہیں۔ چونکہ $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \epsilon_{n+1}$ یعنی x_{n+1} کا خلل ہے، اور ارتکاز کی صورت میں بڑی n کے لئے ϵ_n چھوٹا ہو گا لہذا ترکیب کا درجہ اس کی مرکزیت کی ناپ ہے۔

ترکیب نیوٹن دو درجی ہسے
ترکیب نیوٹن کے لئے درج ذیل ہے

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

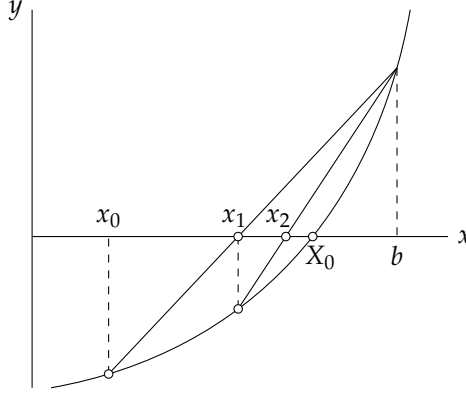
اور چونکہ $f(s) = 0$ ہے لہذا $g'(s) = 0$ ہو گا؛ یوں ترکیب نیوٹن کم از کم دو درجی ہے۔ ایک اور تفرق کے بعد $g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}$ ملتا ہے جو عموماً غیر صفر ہو گا۔ مثال 21.2 میں $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ اور $g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ہیں لہذا یہ یک درجی دہرانے کی ترکیب ہے۔

$f(x) = 0$ کے حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے لیکن حل کے قریب $f(x)$ کی ترمیم کو دیکھتے ہوئے، ترکیب نیوٹن کی جیومیٹریائی تصور کو مد نظر رکھتے ہوئے عموماً اس مشکل سے چھٹکارا حاصل کرنا ممکن ہو گا۔ اگر درکار حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہو تب x_{n+1} کی بہتر قیمت حاصل کرنے کی خاطر $f(x_n)$ اور $f'(x_n)$ کے زیادہ درست قیمتیں حاصل کرنا ضروری ہو گا۔ ایسی مساوات کو بد خو²² کہتے ہیں۔

$f(x) = 0$ کو حل کرنے کی تیسری ترکیب جس کو مقام غلط کی ترکیب²³ کہتے ہیں پر اب غور کرتے ہیں۔ اس ترکیب میں ہم منحنی $f(x)$ کو تخمیناً ایک وتر سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 21.4)۔ یہ وتر محور x کو

$$(21.7) \quad x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

order²¹
ill-conditioned²²
method of false position²³



شکل 21.4: منحنی کا تخمینہ وتر

پر قطع کرتا ہے جو $f(x) = 0$ کے حل X_0 کے قریب ہو گا۔ اگلے قدم پر اس سے بہتر حل

$$(21.8) \quad x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بتدریج بہتر حل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ b کو X_0 کے قریب کرنے سے ارتکاز کو بہتر بنایا جاسکتا ہے۔ عموماً قیاس کے ذریعہ ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

مثال 21.6: مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا وہ جذر تلاش کریں جو $x = 1$ کے قریب واقع ہے (مثال 21.2)۔ چونکہ $f(0.5) = -0.375$ اور $f(1) = 1$ ہیں لہذا ہم $x_0 = 0.5$ اور $b = 1$ منتخب کر سکتے ہیں۔ مساوات 21.7 سے

$$x_1 = \frac{0.5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

حاصل ہو گا جبکہ مساوات 21.8 سے $x_2 = 0.672$ ملتا ہے۔ ہم اسی طرح بتدریج بہتر حل تلاش کر سکتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 21.1: $x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 1$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.900\ 000$

سوال 21.2: $x^3 - 1.2x^2 + 2x - 2.4 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 2$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.478\ 261$

سوال 21.3: سوال 21.1 میں دیے گئے مساوات کے جذر 0.9، 1.1 اور 1.9 ہیں۔ اگرچہ $x_0 = 1$ جذر 0.9 اور 1.1 کے قریب ہے لیکن ترکیب نیوٹن ان کی جگہ جذر 1.9 تلاش کرتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟
 x_0 کی کوئی اور قیمت منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے جذر 1.1 حاصل کریں۔
جواب: تفاعل $f(x)$ کو $x_0 = 1$ پر مماس x محور کو عین $x = 1.9$ پر قطع کرتا ہے۔ آپ $x_0 = 1.2$ یا کوئی اور عدد منتخب کر سکتے ہیں۔

سوال 21.4 تا سوال 21.7 میں دیے مساوات کی ترکیب نیوٹن کی مدد سے تمام جذر تلاش کریں۔

سوال 21.4: $\cos x = x$
جواب: 0.739

سوال 21.5: $x + \ln x - 2$
جواب: 1.577

سوال 21.6: $2x + \ln x - 1$
جواب: 0.687

سوال 21.7: $x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82$
جواب: 1.4، -1.3

سوال 21.8: دکھائیں کہ مثال 21.2 میں $|g'_1(x)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\bar{x} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ پر حاصل ہوگی اور کہ یہ قیمت $|g'(\bar{x})| = \frac{\sqrt{3}}{8} = 0.65$ کے برابر ہے۔

سوال 21.9: ایسا کیوں ہے کہ مثال 21.1 میں یک سر ترتیب حاصل ہوتی ہے لیکن مثال 21.2 میں ایسا نہیں ہوتا ہے؟

سوال 21.10: مثال 21.2 کی آخر میں دہرانے کی ترکیب سے حاصل قیمتوں کو از خود حاصل کریں اور شکل 21.2 کی طرز کا شکل بنائیں۔

سوال 21.11: مساوات $x^5 = x + 0.2$ کو مساوات 21.2 کی صورت میں لکھ کر $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے اس کا جذر تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = -0.2$ ، $x_2 = -0.20032$ ، $x_3 = -0.200323$

سوال 21.12: سوال 21.11 میں دیے گئے مساوات کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ مساوات کو $x = \sqrt[5]{x + 0.2}$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے اس جذر کو تلاش کریں۔
جواب: 1.0447

سوال 21.13: سوال 21.12 میں اگر آپ $x = x^5 - 0.2$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کریں تو کیا حاصل ہو گا؟
جواب: -0.200322

سوال 21.14: دہرانے کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مساوات $x = \tan x$ کا کم تر جذر تقریباً 4.49 ہے۔ اشارہ۔ مساوات کی ترسیم سے اخذ کریں کہ جذر $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ کے قریب پایا جاتا ہے؛ مساوات کو $x = \pi + \tan^{-1} x$ (کیوں؟) لکھ کر آگے بڑھیں۔

سوال 21.15: $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے $\sqrt{5}$ کو مثال 21.3 کی ترکیب سے حاصل کرتے ہوئے x_1, x_2, x_3, x_4 تلاش کریں۔ اب $\sqrt{5} = 2.236068$ استعمال کرتے ہوئے خلل حاصل کریں۔
جواب: $\epsilon_1 = 0.236068$ ، $\epsilon_2 = 0.013932$ ، $\epsilon_3 = 0.000043$ ، $\epsilon_4 = 0.000000$

سوال 21.16: دکھائیں کہ مثال 21.3 میں ہمارے پاس

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{c}{x_n} \right)^2$$

ہے جو درستگی کی ناپ ہے۔ دکھائیں کہ تخمیناً

$$\left| x_n - \sqrt{c} \right| \approx \frac{1}{2} \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right|$$

ہو گا۔ اس کا اطلاق سوال 21.15 پر کریں۔

سوال 21.17: مثبت x محور پر ایسا وقفہ تلاش کریں کہ $c = 2$ لیتے ہوئے مسئلہ 21.1 کی شرط کو مثال 21.3 کے دہرانے کی ترکیب مطمئن کرتی ہو۔
جواب: $x \geq \sqrt{\frac{2}{1+2\alpha}}$, $\alpha < 1$

سوال 21.18: جذر الکعب کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $x_0 = 2$ سے شروع کر کے تین قدم چل کر $\sqrt[3]{7}$ تلاش کریں۔

سوال 21.19: مثبت عدد c کا k واں جذر حاصل کرنے کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔
جواب: $f(x) = x^k - c$, $x_{n+1} = (1 - \frac{1}{k})x_n + \frac{c}{kx_n^{k-1}}$

سوال 21.20: $x^4 = 2$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: 0, 1

سوال 21.21: $x^4 = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: 0, 1.260

سوال 21.22: $3 \sin x = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: 0, 1.49

سوال 21.23: سوال 21.20 میں حاصل کردہ مثبت جذر ہر صورت اصل جذر سے معمولی کم ہو گا۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال 21.24: ترکیب نیوٹن میں $f'(x)$ کا حساب کرنا ہوتا ہے۔ عملی استعمال میں کبھی کبھار یہ قدم کافی پیچیدہ ثابت ہو سکتا ہے۔ $f'(x)$ سے چھٹکارا حاصل کرنا کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کی جگہ $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ استعمال کیا جائے۔ یوں حاصل کردہ کلیہ کا کلیہ غیر حقیقی مقام کے ساتھ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 21.25: فرض کریں بند وقفہ I میں g استمراری ہے اور اس کا حلقہ بھی I میں پایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات $x = g(x)$ کا کم از کم ایک حل اس وقفہ میں پایا جائے گا۔ دکھائیں کہ اس وقفہ میں مساوات کے زیادہ جذر بھی ممکن ہیں۔

جدول 21.2: تقابل $f(x) = x^3$, $x = -3(1)3$ کا جدول فرق

x	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق	چوتھا فرق
-3	-27	19			
-2	-8	7	-12	6	
-1	-1	1	-6	6	0
0	0	1	0	6	0
1	1	7	6	6	0
2	8	19	12		
3	27				

21.3 متناہی فرق

متناہی فرق کا استعمال اعدادی تجزیہ کے کئی شاخوں میں پایا جاتا ہے مثلاً دو قیمتوں کے درمیان قیمت کا تخمینہ لگانے میں، جدول کی جانچ پڑتال میں، تخمینہ لگانے میں، تفرق میں، اور تفرقی مساوات کے حل میں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں تقابل f کی اعدادی قیمتوں $f_j = f(x_j)$ کا جدول دیا گیا ہے جہاں نقطے x_j ایک جیسے فاصلے پر ہیں۔

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \dots \quad (h > 0, \text{ مقررہ})$$

$f(x_j)$ کو عموماً کسی کلیہ یا تجربہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم جدول میں ہر $f(x)$ کو اگلی (بڑی) x کی مطابقتی قیمت سے تفریق کرتے ہوئے پہلا فرق²⁴ حاصل کرتے ہیں۔ جدول 21.2 میں اس کی مثال پیش کی گئی ہے جہاں $f(x) = x^3$, $x = -3(1)3$ ہیں۔²⁵ یہی طریقہ پہلی فرق پر لاگو کرتے ہوئے f کا دوسرا فرق²⁶ حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح باقی فرق بھی حاصل کیے جاتے ہیں۔ جدول فرق میں ہر فرق کو اپنی قطار میں گزشتہ قطار (جس سے فرق حاصل کیا گیا ہے) کی اندراج کی درمیان برابر مقام پر درج کیا جاتا ہے۔ نقطہ اعشاریہ اور فرق کی بائیں صفروں کو نظر انداز کیا جاتا ہے (جدول 21.3)۔

²⁴ first difference
²⁵ $x = a(h)b$ کا مطلب ہے کہ تقابل کی قیمتیں $x = a$, $x = x + h$, $x = a + 2h$, $x = b$, \dots پر دی گئی ہیں۔
²⁶ second difference

جدول 21.3: تقابل $x = 1(0.2)2$, $f(x) = \frac{1}{x}$ کا جدول فرق۔ ٹھوٹھندسوں کی تعداد چار ہے۔

x	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق
1.0	1.0000			
1.2	0.8333	-1667		
1.4	0.7143	-1190	477	-180
1.6	0.6250	-893	297	-98
1.8	0.5556	-694	199	-61
2.0	0.5000	-556	138	

جدول فرق میں فرق کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے رائج ہیں۔ ان میں سے جو بھی طریقہ استعمال کیا جائے، جدول میں نہ کوئی فرق تبدیل ہو گا اور نہ ہی اس کا مقام۔ پہلی (اور غالباً اہم ترین) اظہار جس کو وسطی فرق²⁷ کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & & & & \\
 & & \delta f_{-3/2} & & & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & & & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} & & \\
 x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & & & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{1/2} & & \\
 x_1 & f_0 & & \delta^2 f_1 & & & \\
 & & \delta f_{3/2} & & & & \\
 x_2 & f_2 & & & & &
 \end{array}$$

جہاں $\delta f_{-3/2} = f_{-1} - f_{-2}$ اور $\delta f_{-1/2} = f_0 - f_{-1}$ ہیں۔ وسطی فرق کا عمومی جزو

$$(21.9) \quad \delta f_{m+1/2} = f_{m+1} - f_m$$

ہے جہاں دائیں ہاتھ دوسرا فرق کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔ اسی طرح

$$\delta^2 f_m = \delta f_{m+1/2} - \delta f_{m-1/2}$$

ہو گا۔ دیگر فرق بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسی زیر نوشت والے اجزاء ایک ہی صف میں پائے جاتے ہیں۔ (دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ جدول میں x کی سب سے چھوٹی قیمت x_0 ہو۔ مثال کے طور

²⁷central difference

پر جدول 21.3 میں ہم $x_0 = 1.6$ لے سکتے ہیں؛ تب $f_0 = 0.6250$ ، $\delta f_{1/2} = -0.0694$ ، $\delta^2 f_0 = 0.0199$ (۔۔۔ ہوں گے)

دوسری اظہار جس کو آگے فرق²⁸ کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & \\
 & \Delta f_{-2} & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & \Delta^2 f_{-2} & \\
 & \Delta f_{-1} & \Delta^3 f_{-2} & \\
 x_0 & f_0 & \Delta^2 f_{-1} & \\
 & \Delta f_0 & \Delta^3 f_{-1} & \\
 x_1 & f_1 & \Delta^2 f_0 & \\
 & \Delta f_1 & & \\
 x_2 & f_2 & &
 \end{array}$$

جس میں $\Delta f_{-2} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$ اور $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ ہیں۔ اس کا عمومی جزو

$$\Delta f_m = f_{m+1} - f_m$$
(21.10)

ہے۔ اسی طرح

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m$$

ہوگا۔ مثال کے طور پر اگر جدول 21.3 میں $x_0 = 1.6$ لیا جائے تب $f_0 = 0.6250$ ، $\Delta f_0 = -0.0694$ ، $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ ہوں گے۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترجیحی لکیروں نیچے کی رخ یا جدول میں آگے رخ لکیروں پر پائے جائیں گے۔

تیسری اظہار جس کو پیچھے فرق²⁹ کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & \\
 & \nabla f_{-1} & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & \nabla^2 f_0 & \\
 & \nabla f_0 & \nabla^3 f_1 & \\
 x_0 & f_0 & \nabla^2 f_1 & \\
 & \nabla f_1 & \nabla^3 f_2 & \\
 x_1 & f_1 & \nabla^2 f_2 & \\
 & \nabla f_2 & & \\
 x_2 & f_2 & &
 \end{array}$$

forward difference²⁸
backward difference²⁹

جہاں $\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$ اور $\nabla f_1 = f_1 - f_0$ ہیں۔ عمومی جزو

$$(21.11) \quad \nabla f_m = f_m - f_{m-1}$$

ہو گا۔ اسی طرح

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1}$$

ہو گا۔ باقی اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترجمہ لکیروں پر اوپر رخ یا جدول میں پیچھے رخ لکیروں پر پائے جاتے ہیں۔ جدول کی آخر میں حساب کے دوران پیچھے فرق عموماً زیادہ مددگار ثابت ہوتا ہے۔

جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0 = 1.6$ لیں تب $\delta f_{-1/2} = \Delta f_{-1} = \nabla f_0 = -0.0893$ ہو گا۔ یوں عمومی طور پر

$$\delta^n f_m = \Delta^n f_{m-n/2} = \nabla^n f_{m+n/2}$$

ہو گا۔

جدول میں غلطیوں کی نشاندہی کرنے کے لئے فرق کا سہارا لیا جاتا ہے۔ جیسا جدول 21.4 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل میں خلل ϵ جلد تمام فرق میں پھیل جاتا ہے۔ یوں فرق میں بہت زیادہ اتار چڑھاؤ تفاعل کی قیمت میں غلطی کو ظاہر کرتی ہے۔ ظاہر ہے کہ کم تعداد کی ملحوظ ہندسوں کی بنا معمولی اتار چڑھاؤ ہر صورت پائی جائے گی۔

تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں بھی فرق اہم کردار ادا کرتا ہے۔ قدم h لیتے ہوئے n درجی کثیر رکنی $p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ کے جدول فرق میں تمام n ویں فرق مستقل ($n!h^n a_0$) کے برابر ہوں گے اور ان سے بلند فرق صفر ہوں گے۔ ایسا اس لئے ہو گا کہ پہلے فرق

$$p_n(x+h) - p_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] + \dots = a_0 n h x^{n-1} + \dots$$

کا درجہ $n-1$ ہے، دوسرے فرق کے کثیر رکنی کا درجہ $n-2$ ہو گا اور اس کے پہلے جزو کا عددی سر $a_0 n(n-1)h^2$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ یوں اگر تفاعل f کے جدول فرق میں n ویں فرق کسی حلقہ میں تقریباً مستقل ہوں تب جدول کی قیمتوں کو اس حلقہ میں n درجی کثیر رکنی p_n سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ انہیں دیے گئے f کی صورت میں کثیر رکنی p_n کے حصول کی ایک ترکیب دیکھیں۔

مثال 21.7: تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنا

جدول 21.4 میں دوسرا فرق تقریباً مستقل (-7 کے برابر) ہیں۔ یوں ہم دیے گئے تفاعل کی تخمینی دو درجی کثیر

جدول 21.4: غلطی تمام فرق میں پھیل جاتی ہے۔ یہاں تفاعل $2.6(0.1)2.0$ ، $x = \sqrt{x}$ ، $f(x)$ ہے اور ملحوظ ہندسے چار ہیں۔ غلطی $f(2.3)$ میں ہے۔

x	\sqrt{x}	فرق	\sqrt{x}	فرق	غلطی ϵ کا پھیلنا
2.0	1.4142		1.41412		
2.1	1.4491	349	1.4491	349	
2.2	1.4832	341	1.4832	341	ϵ
2.3	1.5166	334	1.5176	316	-3ϵ
2.4	1.5492	319	1.5492	319	-2ϵ
2.5	1.5811	314	1.5811	314	ϵ
2.6	1.6125		1.6125		-3ϵ

رکنی p_2 تلاش کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے جدول فرق بناتے ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام دوسرے فرق ٹھیک ٹھیک -7 کے برابر ہیں ہم حلقہ کے وسط میں تفاعل کی کوئی قیمت اور پہلا فرق منتخب کرتے ہیں مثلاً 1.5166 اور 334 جس سے جدول 21.5 حاصل ہوتا ہے۔ p_2 کے پہلے عددی سر کو

$$a_0 2!h^2 = a_0 \cdot 2 \cdot 0.1^2 = -0.0007 = \text{دوسرا فرق}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں $a_0 = -\frac{0.0007}{0.02} = -0.035$ ملتا ہے۔ اس طرح

$$p_1(x) = p_2(x) + 0.035x^2$$

درجہ اول ہو گا اور جدول 21.5 سے ہم حساب لگا کر دیکھتے ہیں کہ اس کے پہلے صفر تقریباً مستقل (0.04915) ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ یہ a_h کے برابر ہے۔ یوں $a_1 = \frac{0.04915}{0.1} = 0.4915$ حاصل ہوتا ہے۔ آخر میں $p_1(x) - 0.4915x = a_2 = 0.5713$ ہو گا لہذا

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.5713$$

ہو گا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ فرق کو استعمال کرتے ہوئے تخمینہ کثیر رکنی حاصل کرنے سے پہلے، تخمینہ کثیر رکنی کی درستگی کا معیار جانا جا سکتا ہے۔ تخمینہ کثیر رکنی کی حصول کے دیگر تراکیب پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

جدول 21.5: $f(x) = \sqrt{x}$ کو دودرجی کثیررکنی p_2 سے ظاہر کرنا

x	$p_2(x)$	فرق
2.0	1.4143	348
2.1	1.4491	-7
		341
2.2	1.4832	-7
		334
2.3	1.5166	-7
		327
2.4	1.5493	-7
		320
2.5	1.5813	-7
		313
2.6	1.6126	

□

سوالات

سوال 21.26: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.2 حاصل کریں۔

سوال 21.27: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.3 حاصل کریں۔

سوال 21.28: جدول 21.3 میں $x_0 = 1.2$ منتخب کرتے ہوئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.29: $x_0 = 2$ منتخب کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = x^3$ کا $x = 0(1)5$ کے لئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.30: درج ذیل دکھائیں۔

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$$

$$\delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}$$

سوال 21.31: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ کی قیمتیں $x = 0(0.2)1$ کے لئے (الف) دو ملوٹ ہندسوں، (ب) تین ملوٹ ہندسوں اور (پ) چار ملوٹ ہندسوں تک حاصل کریں۔ ان کے مطابقتی جدول فرق میں تعداد ہندسہ خلل کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 21.32: $x = 0(1)10$ کے لئے $f(x) = x^2$ کا جدول فرق مکمل کریں۔ ایک اور جدول میں $f(5) = 25$ کی جگہ 26 لکھتے ہوئے پہلا فرق، دوسرا فرق، تیسرا فرق اور چوتھا فرق تلاش کریں۔ جدول میں غلطی کا پھیلنا دیکھیں۔

سوال 21.33: فرق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل جدول کی جانچ پڑتال کریں۔

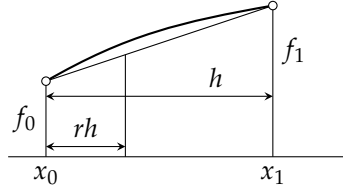
x	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	0.250	0.244	0.242	0.233	0.227	0.222

سوال 21.34: مثال 21.7 میں کی گئی تمام حساب خود کریں۔

21.4 باہمی تحریف

عموماً تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کا جدول دیا گیا ہو گا اور ہمیں ان x پر تفاعل کی قیمت درکار ہو گی جو جدول میں دیے گئے x کی قیمتوں کے درمیان پائے جاتے ہوں۔ ایسی قیمتوں کے حصول کی عمل کو ہم باہمی تحریف³⁰ کہیں گے۔ اس عمل میں $f(x)$ کی استعمال ہونے والی قیمتوں کو چول قیمتیں³¹ کہتے ہیں۔ باہمی تحریف کی ترکیب اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ نقطہ x کے قریب تفاعل $f(x)$ کو کثیر رکنی p سے ظاہر کرنا ممکن ہے لہذا x کے قریب کسی بھی نقطے پر p کی قیمت کو اس نقطے پر تفاعل کی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔

interpolation³⁰
pivotal values³¹



شکل 21.5: خطی باہمی تحریف

سادہ ترین طریقہ خطی باہمی تحریف³² ہے۔ اس ترکیب میں جدول میں درکار x کی دونوں جانب درج نقطوں x_0 اور x_1 کے مابین سیدھی قطع سے اس خطہ میں $f(x)$ کو ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 21.5)۔ یوں جیسا ہم چھوٹی جماعتوں کی حساب سے جانتے ہیں، نقطہ $x = x_0 + rh$ پر f کی قیمت تخمیناً

(21.12)

$$f(x) \approx p_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0 \quad \left(r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq 1\right)$$

ہوگی۔ یوں اگر $\ln 9.0 = 2.197$ اور $\ln 9.5 = 2.251$ ہوں تب $\ln 9.2$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $r = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$ حاصل کر کے

$$\ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4(\ln 9.5 - \ln 9.0) = 2.219$$

حاصل کرتے ہیں۔

خطی باہمی تحریف اس صورت تسلی بخش ہوگی جب جدول میں x کی قیمتیں اتنی قریب قریب ہوں کہ ان کے مابین منحنی سے سیدھی قطعات کی انحراف کم ہو، مثلاً ہر x_0 اور x_1 کے درمیان ہر x کے لئے انحراف جدول میں آخری ہندسہ کی اکائی کی نصف ($\frac{1}{2}$) سے کم ہو۔

دو درجی باہمی تحریف³³ میں ہم x_0 اور $x_2 = x_0 + 2h$ کے درمیان منحنی f کو ایسی دو درجی قطع مکانی سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) اور (x_2, f_2) سے گزرتی ہو۔ یوں بہتر کلیہ

(21.13)

$$f(x) \approx p_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 \quad \left(r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq 2\right)$$

linear interpolation³²
quadratic interpolation³³

اخذ ہوتا ہے جہاں $x = x_0 + rh$ ہے۔ یوں $x = x_0$ ($r = 0$) کے لئے دایاں ہاتھ f_0 کے برابر ہو گا؛
 $x = x_1$ ($r = 1$) کے لئے بایاں ہاتھ $f_0 + \Delta f_0 = f_1$ کے برابر ہو گا اور $x = x_2$ ($r = 2$) کے لئے اس کی قیمت

$$f_0 + 2(f_1 - f_0) + [(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)] = f_2$$

ہو گی۔

مثال 21.8: خطی اور دو درجی باہمی تحریف

اگر $\ln 9.0 = 2.1972$ اور $\ln 9.5 = 2.2513$ ہوں تب مساوات 21.12 سے $\ln 9.2 = 2.2188$ حاصل ہوتا ہے جو تین ملحوظ ہندسوں تک درست ہے جبکہ $\ln 10.0 = 2.3026$ لیتے ہوئے مساوات 21.13

$$\ln 9.2 = 2.1972 + 0.4 \cdot 0.0541 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2} (-0.0028) = 2.2192$$

□

دیتی ہے جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔

مزید بہتر جوابات حاصل کرنے کی خاطر زیادہ بلند درجی کثیر رکنی استعمال کرنی ہو گی۔ $n + 1$ مختلف نقطوں پر قیمتوں سے کیتا n درجی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ ہمیں یہاں ایسی کثیر رکنی p_n درکار ہے کہ

$$p_n(x_0) = f_0, \dots, p_n(x_n) = f_n$$

ہوں جہاں $f_0 = f(x_0), \dots, f_n = f(x_n)$ جدول میں f کی قیمتیں ہیں۔ یہ کثیر رکنی آگے فرق،
 باہمی تحریف کلیہ نیوٹن³⁴

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots \\ + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \end{aligned} \quad (21.14)$$

$$(x = x_0 + rh, r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq n)$$

دیتی ہے۔ اس کلیہ میں $n = 1$ پر کرنے سے مساوات 21.12 اور $n = 2$ پر کرنے سے مساوات 21.13 حاصل ہوتا ہے۔ ہمیں اب $p_n(x_k) = f_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) ثابت کرنا ہو گا۔ مساوات 21.14 کے دائیں ہاتھ سے

$$f_k = \binom{k}{0}f_0 + \binom{k}{1}\Delta f_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{k}\Delta^k f_0 \quad (21.15)$$

³⁴Newton's forward-difference interpolation formula

لکھا جاسکتا ہے جہاں ثنائی عددی³⁵ سر درج ذیل ہیں جہاں $s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s$ کے برابر ہے۔

$$(21.16) \quad \binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2) \cdots (k-s+1)}{s!} \quad (s \geq 0, \text{ صحیح عدد})$$

در حقیقت مساوات 21.14 میں $r = k$ پر کرنے سے مساوات 21.14 کا دایاں ہاتھ اور مساوات 21.15 بالکل ایک جیسے ہوں گے۔ مساوات 21.15 کو الگراجی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت: $k = 0$ کے لئے مساوات 21.15 درست ہے۔ فرض کریں کہ یہ $k = q$ کے لئے بھی درست ہے۔ تب مساوات 21.15 میں $k = q$ استعمال کر کے، Δ کی اطلاق سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} f_{q+1} &= f_q + \Delta f_q \\ &= \binom{q}{0} f_0 + \binom{q}{1} \Delta f_0 + \binom{q}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{q}{q} \Delta^q f_0 \\ &\quad + \binom{q}{0} \Delta f_0 + \binom{q}{1} \Delta^2 f_0 + \binom{q}{2} \Delta^3 f_0 + \cdots + \binom{q}{q} \Delta^{q+1} f_0 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں $\Delta^s f_0$ کا عددی سر (مساوات 21.16)

$$\binom{q}{s} + \binom{q}{s-1} = \binom{q+1}{s}$$

ہے جو $k = q + 1$ کے لئے مساوات 21.15 دیتا ہے۔ یوں الگراجی ماخوذ کے ذریعہ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مساوات 21.14 کی طرح ایسا کلیہ جو پیچھے فرق پر مبنی ہو، پیچھے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن³⁶

$$(21.17) \quad f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r \nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \cdots + \frac{r(r+1) \cdots (r+n-1)}{n!} \nabla^n f_0$$

ہے جہاں مساوات 21.14 کی طرح $x = x_0 + rh$, $r = \frac{x-x_0}{h}$, $0 \leq r \leq n$ ہیں۔

binomial coefficients³⁵
Newton's backward-difference interpolation formula³⁶

باہمی تحریف کے کلیات اور استعمال پر کثیر مواد پایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر صرف جفت درجہ فرق پر مبنی کلیات پائے جاتے ہیں۔ اس طرز کا ایک انتہائی اہم اور سادہ ترین کلیہ ایورٹ³⁷ درج ذیل ہے۔

$$(21.18) \quad f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!} \delta^2 f_0 + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!} \delta^2 f_1$$

جہاں $r = \frac{x-x_0}{h}$, $0 \leq r \leq 1$ ہیں۔

مثال 21.9: کلیہ ایورٹ کا استعمال
تفاعل $e^{1.24}$ کی قیمت مساوات 21.18 میں دیے گئے کلیہ ایورٹ اور درج ذیل جدول سے حاصل کریں۔

x	e^x	δ^2
1.2	3.3201	333
1.3	3.6693	367

اب $r = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$ ہے لہذا مساوات 21.18 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned} e^{1.24} &\approx 0.6 \cdot 3.3201 + 0.4 \cdot 3.6693 + \frac{1.6 \cdot 0.6 \cdot (-0.4)}{6} \cdot 0.0333 \\ &\quad + \frac{1.4 \cdot 0.4 \cdot (-0.6)}{6} \cdot 0.0367 \\ &= 3.4598 - 0.0021 - 0.0021 = 3.4556 \end{aligned}$$

جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ دھیان رہے کہ خطی باہمی تحریف 3.4598 دیتی ہے جو صرف دو ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ (آپ $e^{1.1} = 3.0042$ اور $e^{1.4} = 4.0552$ استعمال کرتے ہوئے دوسرے فرق کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں۔) □

عمومی کلیہ ایورٹ³⁸ درج ذیل ہے

$$(21.19) \quad f(x) = qf_0 + rf_1 + \binom{q+1}{3} \delta^2 f_0 + \binom{r+1}{3} \delta^2 f_1 + \binom{q+2}{5} \delta^4 f_0 + \binom{r+2}{5} \delta^4 f_1 + \dots$$

³⁷ Everett formula
³⁸ Everett formula

جہاں $r = \frac{x-x_0}{h}$, $0 \leq r \leq 1$ اور $q = 1 - r$ ہیں۔ اس کلیہ میں $\delta^4 f_0$ اور $\delta^2 f_0$ کے عددی سروں کی نسبت

$$\frac{\binom{q+2}{5}}{\binom{q+1}{3}} = \frac{q^2 - 4}{20}$$

ہے۔ اسی طرح $\delta^4 f_1$ اور $\delta^2 f_1$ کے عددی سروں کی نسبت $\frac{r^2-4}{20}$ ۔ یہ دونوں نسبت وقفہ 0 تا 1 میں بہت کم تبدیل ہوتے ہیں۔ یوں اگر ان کی جگہ ان کی کوئی موزوں اوسط قیمت μ منتخب کی جائے تب تبدیل شدہ دوسرے فرق³⁹

$$(21.20) \quad \delta_m^2 f = \delta^2 f + \mu \delta^4 f, \quad \mu = -0.18393$$

استعمال کرتے ہوئے چوتھی فرق کے اثر کو مساوات 21.18 میں سمویا جاسکتا ہے، جہاں μ کی دی گئی قیمت ایک موزوں قیمت ہے۔

ہم بغیر ثبوت پیش کیے بتانا چاہتے ہیں کہ اگر x_0, x_1, \dots, x_n کے آپس میں فاصلے اختیاری ہوں تب n درجی کثیر رکنی جو $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ سے گزرتا ہو، جہاں $f_j = f(x_j)$ ہے، منقسم فرق باہمی تحریف کلیہ نیوٹن⁴⁰

$$(21.21) \quad f(x) \approx f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

کا دایاں ہاتھ ہو گا جہاں منقسم فرق⁴¹ درج ذیل دہرانے کے تعلقات دیتے ہیں۔

$$(21.22) \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \dots \\ f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

اگر $x_k = x_0 + kh$ (یکساں فاصلے) ہو تب $f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$ ہو گا اور مساوات 21.21 سے مساوات 21.14 حاصل ہو گی۔

باہمی تحریف کی مختلف تراکیب فرق میں ہم فرق معلوم کرتے ہیں جس کو جدول کی درستگی کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ البتہ کس درجہ کی باہمی تحریف استعمال کی جائے، عموماً اس سوال کا جدول میں جواب نہیں دیا جاتا

modified second differences³⁹
Newton's divided difference interpolation formula⁴⁰
divided difference⁴¹

ہے۔ لیگریج باہمی تحریف⁴² کی ترکیب لیگریج باہمی تحریف کے کلیہ

$$(21.23) \quad f(x) \approx L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k$$

پر مبنی ہے جہاں ضروری نہیں ہے کہ x_0, \dots, x_n برابر فاصلوں پر ہوں اور

$$(21.24) \quad \begin{aligned} l_0(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ l_k(x) &= (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n), \quad 0 < k < n \\ l_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 21.23 کو $n + 1$ نقطوں کا کلیہ لیگریج کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 21.24 سے $j \neq k$ کی صورت میں $l_k(x_j) = 0$ اور $x = x_k$ کی صورت میں $\frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} = f_k$ حاصل ہوتے ہیں لہذا $L_n(x_k) = f_k$ ہو گا۔ اس ترکیب میں فرق حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور ہم مختلف f_k کے اثرات کو سیدھ و سیدھ دیکھ سکتے ہیں۔ ہاں اب حساب زیادہ مشکل ضرور ہو گا اور جدول میں غلطی کی جانچ پڑتال ممکن نہیں ہو گی۔ اس لئے ضروری ہے کہ یہ ترکیب صرف مستند جدول پر لاگو کیا جائے۔

مثال 21.10: لیگریج کلیہ باہمی تحریف کا استعمال
ln 9.2 کی قیمت مساوات 21.23 اور درج ذیل قیمتوں کی مدد سے تلاش کریں۔

x	9.0	9.5	10.0	11.0
$\ln x$	2.197 22	2.251 29	2.302 59	2.397 90

ہمارے پاس $l_1(x) = (x - 9)(x - 10)(x - 11)$ ، $l_0(x) = (x - 9.5)(x - 10)(x - 11)$ ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} \ln 9.2 &= \frac{-0.43200}{-1.00000} \cdot 2.19722 + \frac{0.28800}{0.37500} \cdot 2.25129 \\ &\quad + \frac{0.10800}{-0.50000} \cdot 2.30259 + \frac{0.04800}{3.00000} \cdot 2.39790 = 2.21920 \end{aligned}$$

□

ہو گا جو پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔

جدول 21.6: جدول برائے سوال 21.36 تا سوال 21.41

x	$\sin x$	پہلا فرق	دوسرا فرق
0.0	0.000 00	19 867	
0.2	0.198 67	19 075	-792
0.4	0.389 42	17 522	-1553
0.6	0.564 64	15 272	-2250
0.8	0.717 36	12 411	-2861
1.0	0.841 47		

سوالات

سوال 21.35: دکھائیں کہ مساوات 21.13 میں دیا گیا قطع مکانی نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتا ہے۔

جدول 21.6 کو سوال 21.41 تا سوال 21.36 میں استعمال کریں۔

سوال 21.36: $\sin 0.26$ کی قیمت خطی باہمی تحریف (مساوات 21.12) سے تلاش کریں۔ دکھائیں کہ اعشاریہ کے بعد پہلے دو ہندسے بالکل ٹھیک ٹھیک ہیں۔

سوال 21.37: $\sin 0.26$ کی قیمت دو درجی باہمی تحریف یعنی مساوات 21.13 کی مدد سے حاصل کریں۔ دکھائیں پہلے تین ملحوظ ہندسے بالکل درست ہیں۔
جواب: 0.257 53

سوال 21.38: جدول 21.6 میں تیسرے فرق اور چوتھے فرق شامل کرتے ہوئے $\sin 0.26$ کی قیمت مساوات 21.14 کی مدد سے (الف) $n = 3$ اور (ب) $n = 4$ لیتے ہوئے حاصل کریں۔ نتائج کا موازنہ پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $\sin 0.26 = 0.257 08$ کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $n = 3$ سے تین ملحوظ ہندسوں تک اور $n = 4$ سے پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہو گا۔

سوال 21.39: $\sin 0.26$ کو مساوات 21.17 کی مدد سے (الف) $n = 1$ لے کر اور (ب) $n = 2$ لے کر حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں پہلے دو ملحوظ ہندسے درست ہوں گے۔ یوں موجودہ نتیجہ سوال 21.36 کے نتیجہ سے کم درست ہے۔ کیوں؟
جوابات: (الف) 0.258 27، (ب) 0.258 27

سوال 21.40: جدول 21.6 کو وسیع کرتے ہوئے (الف) $n = 3$ لے کر، (ب) $n = 4$ لے کر اور (پ) $n = 5$ لے کر مساوات 21.17 کی مدد سے $\sin 0.26$ کی قیمت تلاش کریں۔ آپ کو $x = 0.2, 0.4, -0.2, -0.4, -0.6$ پر $\sin x$ کی قیمتیں درکار ہوں گی اور مطابقتی فرق درکار ہوں گے۔ سائن تقابل کی کون سی خاصیت اس وسعت کو آسان بناتی ہے۔ موجودہ نتائج سوال 21.38 کے نتائج سے کیوں کم ٹھیک ہیں؟
جوابات: (الف) 0.257 09، (ب) 0.257 05 اور (پ) 0.257 08؛ جواب (پ) پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔

سوال 21.41: دکھائیں کہ بہت کم محنت کے ساتھ کلیہ ایورٹ (مساوات 21.18) استعمال کرتے ہوئے $\sin 0.26 = 0.257 07$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.42: مثال 21.9 میں کی گئی حساب کی تصدیق کریں۔

سوال 21.43: $f(2.6) = 1.612 452$ اور $f(2.3) = 1.516 575$ ، $f(2.0) = 1.414 214$ استعمال کرتے ہوئے تقابل $f(x) = \sqrt{x}$ کی دو درجہ باہمی تحریف کریں۔ نتائج کا جدول 21.5 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جوابات: $f(x) \approx 0.566 106 + 0.496 098x - 0.036 022x^2$

سوال 21.44: درج ذیل دکھائیں۔

$$\Delta^k f_n = \binom{k}{0} f_{n+k} - \binom{k}{1} f_{n+k-1} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} f_n$$

سوال 21.45: $f(1) = 2$ ، $f(2) = 11$ اور $f(4) = 77$ استعمال کرتے ہوئے عمومی کلیہ لیگرنج (مساوات 21.23) سے $f(3)$ تلاش کریں۔
جواب: $8x^2 - 15x + 9$ ، 36

سوال 21.46: $\ln 8.5 = 2.140 07$ لیں جبکہ $\ln 9.0$ ، $\ln 9.5$ ، $\ln 10$ کی قیمتیں مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔ $\ln 9.2$ کو (الف) $n = 3$ اور $x_0 = 8.8$ لیتے ہوئے مساوات 21.14 سے حاصل کریں؛ (ب) $n = 3$ اور $x_0 = 10$ لیتے ہوئے مساوات 21.17 سے حاصل کریں۔

سوال 21.47: $\ln 8.5 = 2.14007$ لیں جبکہ $\ln 9$ ، $\ln 10$ اور $\ln 11$ مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔ اب $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 سے $\ln 9.2$ کی قیمت تلاش کریں۔ حاصل جواب کا مثال 21.10 کے نتیجہ سے موازنہ کریں۔

جواب: 2.21921 جو کم درست ہے چونکہ آخری ہندسہ میں 1 اکائی کا خلل ہے۔

سوال 21.48: سوال 21.46 میں دی گئی مواد استعمال کرتے ہوئے $\ln 9.2$ کی قیمت (الف) مساوات 21.18 استعمال کرتے ہوئے، (ب) $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 21.49: فرض کریں کہ $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $x_3 = x_0 + 3h$ ہیں اور $r = \frac{x - x_0}{h}$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $n = 3$ کے لئے ہم مساوات 21.23 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) \approx -\binom{r-1}{3}f_0 + \frac{r(r-2)(r-3)}{2}f_1 - \frac{r(r-1)(r-3)}{2}f_2 + \binom{r}{3}f_3$$

سوال 21.50: سوال 21.49 کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 21.48-ب کا نتیجہ دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 21.51: (فرق کی جانچ پڑتال) دکھائیں کہ قطار میں دیے گئے اندراجات کا مجموعہ گزشتہ قطر کی آخری اور پہلی اندراج کے فرق کے برابر ہو گا۔ اس جزوی پرکھ کی جدول 21.3 پر اطلاق کریں۔

21.5 لپکدار منحنیات

ٹکڑوں میں تخمینہ کثیر رکنی کو لپکدار منحنی کہتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر ہم دیے گئے تفاعل $f(x)$ کا تخمینہ تفاعل $g(x)$ حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ہم چاہیں گے کہ تخمینہ تفاعل اصل تفاعل کے قریب سے قریب تر نمائندگی کرے۔ ہم $g(x)$ کو حاصل کرنے کی خاطر وقفہ $a \leq x \leq b$ کو چھوٹے خانوں (ٹکڑوں) میں

$$(21.25) \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

میں تقسیم کرتے ہیں جہاں خانوں کے سروں کو جوڑ⁴³ کہا جاتا ہے۔ ہر خانے پر $g(x)$ کو ایک ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ خانے کی سروں پر $g(x)$ بار بار قابل تفرق ہو۔ یوں پورے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ کو تخمینی کثیر رکنی سے ظاہر کرنے کی بجائے ہم اس کو n عدد کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں حاصل تخمینی $g(x)$ باہمی تحریف میں بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر ایک خانے میں کثیر رکنی سے $g(x)$ کا ارتعاشی کم ہو گا۔ یوں حاصل تفاعل $g(x)$ کو چکدار منحنیات⁴⁴ کہتے ہیں۔

ہم ہر خانے کا تخمینی خطی تفاعل استعمال کر سکتے ہیں لیکن ایسا تفاعل خانے کی جوڑوں پر غیر استمراری ہو گا۔ ایسا تفاعل جو وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر نقطہ پر کئی بار قابل تفرق ہو بہتر ثابت ہوتا ہے۔

ہم کعبی چکدار منحنیات پر غور کرتے ہیں جو عملی استعمال کے نقطہ نظر سے غالباً اہم ترین ہیں۔ تعریف کی رو سے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر مساوات 21.25 میں دیے گئے خانوں کے لحاظ سے کعبی چکدار منحنی⁴⁵ $g(x)$ سے مراد استمراری تفاعل $g(x)$ ہے جس کے استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پورے وقفہ پر پائے جاتے ہوں اور جس کو ہر خانہ پر ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہو جس کا درجہ تین سے زیادہ نہ ہو۔ یوں ہر خانہ میں $g(x)$ کو ایک کعبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جائے گا۔

اگر وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہو اور اس وقفہ کے خانے (مساوات 21.25) منتخب کیے گئے ہوں تب، گزشتہ حصہ کی طرح، $f(x)$ کی تخمینی کعبی چکدار منحنی $g(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوئے حاصل ہو گی۔

$$(21.26) \quad g(x_0) = f(x_0), \quad g(x_1) = f(x_1), \dots, \quad g(x_n) = f(x_n)$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ ایسا کعبی چکدار منحنی $g(x)$ پایا جاتا ہے جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتا ہو۔ اب اگر $g(x)$ درج ذیل بھی شرائط

$$(21.27) \quad g'(x_0) = k_0, \quad g'(x_n) = k_n$$

(جہاں k_0 اور k_n دیے گئے عدد ہیں) پر بھی پورا اترتا ہو تب $g(x)$ یکتا ہو گا۔ درج ذیل مسئلہ چکدار منحنی کی موجودگی اور یکتائی کو بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 21.2: کعبی چکدار منحنیات

فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے اور اس وقفہ کے خانے مساوات 21.25 میں

⁴³ nodes
⁴⁴ splines or flexible curves
⁴⁵ cubic spline

دیے گئے ہوں اور فرض کریں کہ k_0 اور k_n کوئی دو عدد ہوں۔ تب مساوات 21.25 کے لحاظ سے ایسا صرف اور صرف ایک کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ موجود ہو گا جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.27 کو مطمئن کرتا ہو۔

ثبوت: تعریف کی رو سے ہر خانہ I_j میں، جس کو $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ ظاہر کرتا ہے، لچکدار منحنی $g(x)$ اور کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ ایک جیسے ہوں گے اور درج ذیل کو مطمئن کریں گے۔

$$(21.28) \quad p_j(x_j) = f(x_j), \quad p_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$$

$$\text{ہم } \frac{1}{x_{j+1} - x_j} = c_j \text{ اور}$$

$$(21.29) \quad p'_j(x_j) = k_j, \quad p'_j(x_{j+1}) = k_{j+1}$$

لکھتے ہیں جہاں a_0 اور a_n دیے گئے ہیں جبکہ k_1, \dots, k_{n-1} بعد میں حاصل کیے جائیں گے۔ $p_j(x)$ کو مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 میں دیے چار شرائط کو مطمئن کرنا ہو گا۔ سیدھے حساب سے ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ ایسا کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو درج ذیل ہے۔

$$(21.30) \quad \begin{aligned} p_j(x) = & f(x_j)c_j^2(x - x_{j+1})^2[1 + 2c_j(x - x_j)] \\ & + f(x_{j+1})c_j^2(x - x_j)^2[1 - 2c_j(x - x_{j+1})] \\ & + k_jc_j^2(x - x_j)(x - x_{j+1})^2 \\ & + k_{j+1}c_j^2(x - x_j)^2(x - x_{j+1}) \end{aligned}$$

اس کا دو درجی تفرق درج ذیل دیگا۔

$$(21.31) \quad p''_j = -6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) - 4c_jk_j - 2c_jk_{j+1}$$

$$(21.32) \quad p''_j(x_{j+1}) = -6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) + 2c_jk_j + 4c_jk_{j+1}$$

تعریف کی رو سے $g(x)$ کی استمراری دو درجی تفرق پائے جاتے ہیں۔ اس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$p''_{j-1}(x_j) = p''_j(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

مساوات 21.32 میں j کی جگہ $j-1$ اور مساوات 21.31 استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $n-1$ عدد مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$(21.33) \quad c_{j-1}k_{j-1} + 2(c_{j-1} + c_j)k_j + c_jk_{j+1} = 3[c_{j-1}^2 \nabla f_j + c_j^2 \nabla f_{j+1}]$$

جہاں $\nabla f_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$ اور $\nabla f_{j+1} = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ ہیں جبکہ $j = 1, \dots, n-1$ ہے۔ اس $n-1$ عدد مساوات کے نظام کا حل k_1, \dots, k_{n-1} یکتا ہو گا چونکہ اس نظام کے تمام عددی سر غیر منفی ہیں اور مرکزی وتر پر ہر جزو، مطابقتی صف کے باقی اجزاء کے مجموعہ سے زیادہ ہے لہذا عددی سر قالب صفر نہیں ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم جوڑ پر $g(x)$ کی یک درجی تفرق کے یکتا k_1, \dots, k_{n-1} حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اس مسئلے کو ایک مثال کی مدد سے دیکھیں۔

مثال 21.11: تخمینی چکدار منحنی

وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر $x_0 = -1$ اور $x_1 = 0$ اور $x_2 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^4$ کی ایسی تخمینی کعبی چکدار منحنی تلاش کریں جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتی ہو اور $g'(1) = f'(1)$ ، $g'(-1) = f'(-1)$ ہوں۔
حل: ہمیں درج ذیل کے عددی سر تلاش کرنے ہوں گے۔

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$p_1(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

سے $p_0(0) = p_1(0) = f(0) = 0$ سے $a_0 = b_0 = 0$ ملتے ہیں جبکہ $p'_0(0) = p'_1(0)$ سے $a_1 = b_1$ اور $p''_0(0) = p''_1(0)$ سے $a_2 = b_2$ حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

$$p_1(x) = b_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

ہو گا۔ باقی چار عددی سروں کو باقی شرائط سے حاصل کرتے ہیں۔

$$p_0(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 = f(-1) = 1$$

$$p_1(1) = b_3 + a_2 + a_1 = f(1) = 1$$

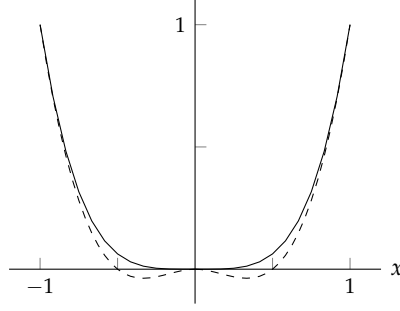
(21.34)

$$p'_0(-1) = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = f'(-1) = -4$$

$$p'_1(1) = 3b_3 + 2a_2 + a_1 = f'(1) = 4$$

اس نظام کا حل $a_1 = 0$ ، $a_2 = -1$ ، $a_3 = -2$ ، $b_3 = 2$ ہے۔ یوں درکار لچکدار منحنی

$$g(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x^3 - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (21.35)$$



شکل 21.6: تقابل $f(x)$ اور (نقطہ دار) کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ (مثال 21.11)

ہو گی (شکل 21.6 میں نقطہ دار منحنی)۔

□

لچکدار منحنیات کی ایک دلچسپ کمتر خوبی ہے جس کو اب اخذ کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ مسئلہ 21.2 میں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر $f(x)$ استمراری ہے اور اس وقفہ پر $f(x)$ کے یک درجی اور دو درجی استمراری تفرق پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ مساوات 21.27 کی صورت درج ذیل ہے (مثال 21.11 کی طرح)۔

$$(21.36) \quad g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b)$$

تب a اور b پر $f' - g'$ صفر ہو گا۔ مکمل بالخصوص سے

$$\int_a^b g''(x)[f''(x) - g''(x)] dx = - \int_a^b g'''(x)[f'(x) - g'(x)] dx$$

حاصل ہو گا۔ چونکہ وقفہ کے ہر چھوٹے حصے پر $g'''(x)$ مستقل ہے لہذا دائیں ہاتھ مکمل کو کسی ایک ٹکڑے پر حاصل کرتے ہوئے $c[f(x) - g(x)]$ ملتا ہے جہاں c مستقل ہے اور مکمل کی یہ قیمت ٹکڑے کے سروں پر حاصل کی جائے گی جو مساوات 21.26 کی بنا صفر حاصل ہو گی۔ چونکہ ہر ٹکڑے پر مکمل صفر ہے لہذا پورے وقفے پر مکمل صفر ہو گا۔ اس طرح درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f''(x)g''(x) dx = \int_a^b g''(x)^2 dx$$

نتیجہ

$$\begin{aligned}\int_a^b [f''(x) - g''(x)]^2 dx &= \int_a^b f''(x)^2 dx - 2 \int_a^b f''(x)g''(x) dx + \int_a^b g''(x)^2 dx \\ &= \int_a^b f''(x)^2 dx - \int_a^b g''(x)^2 dx\end{aligned}$$

ہو گا۔ بائیں ہاتھ منکمل غیر منفی ہے لہذا مکمل بھی غیر منفی ہو گا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(21.37) \quad \int_a^b f''(x)^2 dx \geq \int_a^b g''(x)^2 dx$$

اس نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 21.3: کعبی چلکدار منحنی کی کمتر خاصیت

فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $f(x)$ اور اس کے یک درجی اور دو درجی تفرق استمراری ہوں۔ فرض کریں کہ اس وقفہ کے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $g(x)$ مطابقتی کعبی چلکدار منحنی ہو جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.36 کو مطمئن کرتی ہو۔ تب $f(x)$ اور $g(x)$ مساوات 21.37 کو مطمئن کریں گے جس میں علامت مساوات (=) اس صورت کو ظاہر کرتی ہے جب $f(x)$ کعبی چلکدار منحنی $g(x)$ ہو۔

سوالات

سوال 21.52: تصدیق کریں کہ مساوات 21.30 میں دیا گیا $p_j(x)$ مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 21.53: مساوات 21.31 اور مساوات 21.32 کو مساوات 21.30 سے اخذ کریں۔

سوال 21.54: مثال 21.11 پر غور کریں۔ دکھائیں کہ مثال میں دی گئی شرائط کے تحت مساوات 21.30 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned}p_0(x) &= -2x^3 - x^2 + k_1x(x+1)^2 \\ p_1(x) &= 2x^3 - x^2 + k_1x(x-1)^2\end{aligned}$$

جیکہ مساوات 21.33 سے $k_1 = 0$ حاصل ہو گا اور یوں مساوات 21.35 حاصل ہو گی۔

سوال 21.55: مثال 21.11 میں کعبی لچکدار منحنی کا موازنہ پورے وقفہ پر دو درجی تخمینہ کثیر رکنی $p(x)$ کے ساتھ کریں۔ $f(x)$ سے $g(x)$ اور $p(x)$ کی زیادہ سے زیادہ انحراف کتنی ہیں۔

سوال 21.56: مساوات 21.34 میں دیے گئے نظام کا حل تلاش کریں۔

سوال 21.57: دکھائیں کہ وقفہ کے خانوں کے لحاظ سے کعبی لچکدار منحنیات سمتی فضا (حصہ 7.4) بناتے ہیں۔

سوال 21.58: دکھائیں کہ وقفہ کے دیے گئے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $n+1$ یکتا کعبی لچکدار منحنیات $g_0(x), \dots, g_n(x)$ موجود ہوں گی جو $g'_j(a) = g'_j(b) = 0$ اور

$$g_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

کو مطمئن کریں گی۔
جواب: مسئلہ 21.2 سے ایسا اخذ ہوتا ہے۔

سوال 21.59: دکھائیں کہ اگر ایک لچکدار منحنی تین بار قابل تفرق ہو تب یہ ضرور کثیر رکنی ہو گا۔

سوال 21.60: ایسا ممکن ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ کی دو قریبی خانوں کی لچکدار منحنیات ایک جیسی ہوں۔ اس طرز کی لچکدار منحنیات دیکھنے کی خاطر وقفہ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کی خانوں $x_1 = 0$ ، $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ ، $x_2 = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \sin x$ کی ایسی لچکدار منحنیات تلاش کریں جو $g'(-\frac{\pi}{2}) = f'(-\frac{\pi}{2})$ اور $g'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})$ کو مطمئن کرتی ہوں۔
جواب: $g(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x$

سوال 21.61: مساوات 21.37 کی جیومیٹریائی مطلب کچھ یوں ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ لچکدار منحنی، مربع اٹنا کے مکمل کی قیمت کو کم کرنے کی کوشش کرتی ہے۔ اس پر بحث کریں۔

21.6 اعدادی مکمل اور تفرق

اعدادی مکمل⁴⁶ سے مراد قطعی مکمل

$$(21.38) \quad J = \int_a^b f(x) dx$$

کی اعدادی قیمت کی تلاش ہے جہاں a اور b دیے گئے ہوں گے اور f دیا گیا تفاعل یا تفاعل کی قیمتوں کا جدول ہو گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم ایسا قابل تفرق تفاعل F تلاش کر سکیں جس کا تفرق f ہو تب J کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$J = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad [F'(x) = f(x)]$$

انجینئری میں عموماً ایسے مکمل پائے جاتے ہیں جن کا مکمل جدول کی صورت میں ہو گا یا مکمل کو متناہی تعداد کے بنیادی تفاعل کی صورت میں ظاہر کرنا ناممکن ہو گا اور یا F کی صریح صورت پیچیدہ اور غیر مفید ثابت ہو گی۔ ایسی صورتوں میں اعدادی مکمل کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

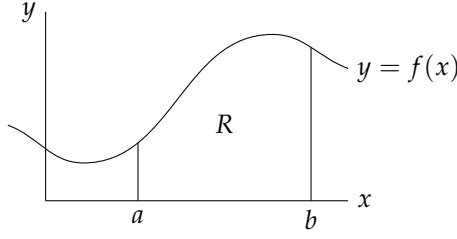
چونکہ وقفہ $a \leq x \leq b$ میں تفاعل $f(x)$ کے نیچے خطہ R کا رقبہ J ہے (شکل 21.7) لہذا ہم گتے R کی شکل کاٹ کر، گتے کی اس ٹکڑے کے وزن کو اکائی رقبہ گتے کی وزن سے تقسیم کرتے ہوئے R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم کاغذ ترسیم⁴⁷ پر R کی شکل بنا کر ڈبے گن کر بھی R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ رقبہ کی بہتر ناپ کے لئے سطح پیماس⁴⁸ کا استعمال ضروری ہو گا۔

مکمل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہوئے اعدادی تراکیب بنائے جا سکتے ہیں۔ سادہ ترین کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم مکمل کے وقفہ کو $h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n عدد برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ٹکڑے پر تفاعل کو مستقل تفاعل $f(x_j^*)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں x_j^* ٹکڑے کا وسطی نقطہ ہے (شکل 21.8-الف)۔ یوں f

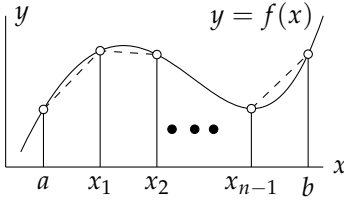
⁴⁶numerical integration

⁴⁷graph paper

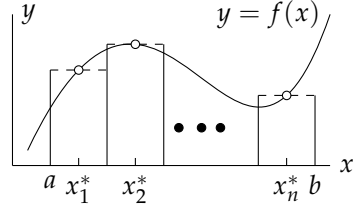
⁴⁸planimeter



شکل 21.7: قطعی مکمل کی جیو میٹریائی معنی



(ب) ذوزنقہ قاعدہ



(الف) مستطیل قاعدہ

شکل 21.8: اعدادی مکمل

کو سیڑھی تفاعل⁴⁹ (مکڑوں میں مستقل تفاعل) ظاہر کرے گی۔ شکل 21.8-الف کے n مستطیلوں کے انفرادی رقبے $hf(x_1^*), \dots, hf(x_n^*)$ ہیں جن کا مجموعہ اعدادی مکمل کا مستطیل قاعدہ⁵⁰

$$(21.39) \quad J = \int_a^b f(x) dx \approx h[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)], \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right)$$

دیتا ہے۔

⁴⁹ step function
⁵⁰ rectangular rule

تفاعل f کو ٹکڑوں میں خطی قطعات (شکل 21.8-ب) سے ظاہر کرنے سے اعدادی تکمیل کا ذوزنقہ قاعدہ⁵¹

(21.40)

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx h \left[\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

حاصل ہو گا جہاں $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n (= b)$ وہی نقطے ہیں جو مساوات 21.40 میں استعمال کیے گئے ہیں۔ یوں $x_j = x_0 + jh$ ہو گا۔ شکل 21.8-ب کے n ذوزنقہ کے انفرادی رقبے

$$\frac{1}{2}[f(a) + f(x_1)]h, \quad \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]h, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(b)]h$$

ہیں جن کا مجموعہ مساوات 21.40 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

J^* میں خلل (حصہ 21.1) ϵ درج ذیل ہو گا۔

$$\epsilon = J^* - J$$

اگر $f(x)$ خطی تفاعل ہو تب $\epsilon = 0$ ہو گا اور تمام x کے لئے f' مستقل اور f'' صفر ہو گا۔ عین ممکن ہے کہ کسی عمومی تفاعل f (جس کا استمراری دو درجی تفرق پایا جاتا ہو) کی صورت میں ہم حد خلل⁵² (یعنی خلل ϵ کی حد) تلاش کر سکیں جو f'' پر منحصر ہو۔ اس خاطر ہم b کی جگہ متغیر t لیتے ہوئے مساوات 21.40 کا اطلاق $n = 1$ کے لئے کرتے ہیں۔ تب مطابقتی خلل

$$\epsilon(t) = \frac{t-a}{2}[f(a) + f(t)] - \int_a^t f(x) dx$$

ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon(a) = 0$ ہے جو ایک غیر دلچسپ نتیجہ ہے۔ تفرق لینے سے

$$\epsilon'(t) = \frac{1}{2}[f(a) + f(t)] + \frac{t-a}{2}f'(t) - f(t)$$

حاصل ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon'(a) = 0$ ہے۔ مزید ایک بار تفرق لینے سے

$$\epsilon''(t) = \frac{1}{2}(t-a)f''(t)$$

trapezoidal rule⁵¹
error bound⁵²

حاصل ہو گا جس میں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 پر کرنے سے وقفہ پر تمام t کے لئے حد خلل

$$\frac{1}{2}(t-a)M_2^* \leq \epsilon''(t) \leq \frac{1}{2}(t-a)M_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ a تا t تک مکمل لینے سے

$$\frac{1}{4}(t-a)^2 M_2^* \leq \epsilon'(t) - \epsilon'(a) \leq \frac{1}{4}(t-a)^2 M_2$$

حاصل ہو گا جس میں $\epsilon'(a) = 0$ اور $\epsilon(a) = 0$ پر کرتے ہوئے دوبارہ مکمل لے کر $t = a + h$ لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{12}h^3 M_2^* \leq \epsilon(a+h) \leq \frac{1}{2}h^3 M_2$$

باقی $n-1$ ٹکڑوں کے خلل کے لئے اسی طرح کے $n-1$ عدد مطابقتی عدم مساوات حاصل ہوں گے۔ ان تمام n عدم مساوات کا مجموعہ a تا b تک مکمل کے لئے خلل ϵ کی عدم مساوات دے گا۔ چونکہ $h = \frac{b-a}{n}$ ہے لہذا ہمیں

$$(21.41) \quad KM_2^* \leq \epsilon \leq KM_2, \quad [K = \frac{(b-a)^3}{12n^2}]$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تک مکمل کے وقفہ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 ہے۔

مثال 21.12: ذوزنقہ قاعدہ۔ تخمینہ خلل

$n = 10$ لیتے ہوئے مکمل $J = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ کی قیمت مساوات 21.40 کی مدد سے حاصل کریں۔ جدول 21.7 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$J \approx 0.1(0.5 \cdot 1.367879 + 6.778167) = 0.746211$$

چونکہ $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ ہے لہذا

$$M_2^* = f''(0) = -2, \quad M_2 = f''(1) = 0.735759$$

ہوں گے۔ مزید $K = \frac{1}{1200}$ ہے لہذا مساوات 21.41 کے تحت

$$-0.001667 \leq \epsilon \leq 0.000614$$

جدول 21.7: جدول برائے مثال 21.12

J	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$
0	0	0	1.000 000
1	0.1	0.01	0.990 050
2	0.2	0.04	0.960 789
3	0.3	0.09	0.913 931
4	0.4	0.16	0.852 144
5	0.5	0.25	0.778 801
6	0.6	0.36	0.697 676
7	0.7	0.49	0.612 626
8	0.8	0.64	0.527 292
9	0.9	0.81	0.444 858
10	1.0	1.00	0.367 879
مجموعہ			1.367 879 6.778 167

ہو گا۔ یوں J کی درست قیمت

$$0.746\,211 - 0.000\,614 = 0.745\,597 \quad \text{اور} \quad 0.746\,211 + 0.001\,667 = 0.747\,878$$

□

کے درمیان ہو گی۔ (چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 0.746 824 ہے۔)

f کی ٹکڑوں میں مستقل تخمین سے مستطیل قاعدہ (مساوات 21.39) حاصل ہوا جبکہ f کی ٹکڑوں میں خطی تخمین سے ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) حاصل ہوا۔ ٹکڑوں میں دو درجہ تخمین سے قاعدہ سمسن⁵³ اخذ ہو گا جو، سادہ ہونے کے باوجود، عموماً مسئلوں کا کافی درست جواب دیتا ہے۔ قاعدہ سمسن اخذ کرنے کی خاطر ہم وقفہ $a \leq x \leq b$ کو ایک جیسی لمبائیوں کے جفت تعداد کی ٹکڑوں، مثلاً $2n$ ، میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $x_0(a), x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}(b)$ ہوں گے۔ ہم پہلی دو ٹکڑوں کو لیتے ہیں اور $f(x)$ کو وقفہ $x_0 \leq x \leq x_0 + 2h$ میں نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی لیگرینج کثیر رکنی

⁵³ برطانوی ریاضی دان ٹامس سمسن [1710-1761]

$p_2(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں f_j سے مراد $f(x_j)$ ہے۔ مساوات 21.23 سے

(21.42)

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

ہوگا جہاں نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ اور $2h^2$ کے برابر ہیں۔ $s = \frac{x-x_1}{h}$ لکھتے ہوئے $x-x_0 = (s+1)h$ اور $x-x_1 = sh$ ، $x-x_2 = (s-1)h$ ہوں گے۔ یوں

$$(21.43) \quad p_2(x) = \frac{1}{2}s(s-1)f_0 - (s+1)(s-1)f_1 + \frac{1}{2}(s+1)sf_2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب ہم x کے ساتھ x_0 تا x_2 تکمل لیتے ہیں جو s کے ساتھ -1 تا 1 تکمل کے مترادف ہے۔ چونکہ $dx = h ds$ ہے لہذا

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx = h \left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2 \right)$$

ہوگا۔ اگلے دو ٹکڑوں، x_2 تا x_4 ، اور باقی دو ٹکڑوں کے لئے بھی اسی طرح کے نتائج حاصل ہوں گے۔ ان تمام n عدد نتائج کا مجموعہ قاعدہ سمسن⁵⁴

$$(21.44) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n})$$

دے گا جہاں $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $f_j = f(x_j)$ ہیں۔ تکمل کے وقفہ میں f کے چار درجہ تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کرتے ہوئے مساوات 21.44 کی حد خلل ϵ_S کو ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) کے خلل کی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔ نتیجہ درج ذیل ہے

$$(21.45) \quad CM_4^* \leq \epsilon_S \leq CM_4 \quad [C = \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}]$$

جہاں تکمل کے وقفہ پر f کی چار درجہ تفرق کی زیادہ سے زیادہ قیمت M_4 اور کم سے کم قیمت M_4^* ہے۔

مثال 21.13: قاعدہ سمسن - تخمینہ حد خلل

$2n = 10$ لیتے ہوئے تکمل $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ کی قیمت قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ بھی حاصل کریں۔ چونکہ $h = 0.1$ ہے، جدول 21.8 سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$J \approx \frac{0.1}{3}(1.367879 + 4 \cdot 3.740266 + 2 \cdot 3.037901) = 0.746825$$

جدول 21.8: جدول برائے مثال 21.44

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$
0	0.0	0.00	1.000 000
1	0.1	0.01	0.990 050
2	0.2	0.04	0.960 789
3	0.3	0.09	0.913 931
4	0.4	0.16	0.852 144
5	0.5	0.25	0.778 801
6	0.6	0.36	0.697 676
7	0.7	0.49	0.612 626
8	0.8	0.64	0.527 292
9	0.9	0.81	0.444 858
10	1.0	1.00	0.367 879
مجموعہ			1.367 879 3.740 266 3.037 901

تخمینہ حد خلل: چار درجی تفرق $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ ہے جس کی وقفہ مکمل میں کم سے کم قیمت $x = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ پر $M_4^* = f^{(4)}(x^*) = -7.359$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 0$ پر $M_4 = f^{(4)}(0) = 12$ حاصل ہوتی ہیں۔ چونکہ $2n = 10$ اور $b - a = 1$ ہیں لہذا $C = \frac{1}{800\,000} = 0.000\,000\,56$ ہو گا۔ یوں

$$-0.000\,004 \leq \epsilon_S \leq 0.000\,006 \quad \text{اور} \quad 0.746\,818 \leq J \leq 0.746\,830$$

ہوں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ تخمین سے کم از کم چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ حقیقت میں موجودہ جواب پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے چونکہ چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $J = 0.746\,824$ ہے۔

غور کریں کہ مثال 21.12 میں حاصل نتیجہ سے موجودہ نتیجہ بہت زیادہ بہتر ہے اگرچہ ہمیں دونوں مثالوں میں تقریباً ایک جتنا کام کرنا پڑا ہے۔ □

قاعدہ سمسن سے حاصل نتائج کی درستگی عموماً انجینئری مسئلوں کے لئے کافی ہوتی ہیں۔ اسی لئے کمپیوٹر سے اعدادی مکمل کے حصول میں زیادہ درستگی کے کلیوں کی بجائے ترکیب سمسن کو زیادہ ترجیح دی جاتی ہے۔ زیادہ طاقت کی کثیر رکنی استعمال کرتے ہوئے زیادہ درستگی کے کلیات حاصل کیے جاتے ہیں۔ ہم یہاں دو ایسی کلیات کا ذکر کرتے ہیں جو بعض

اوقات مفید ثابت ہوتی ہیں۔ نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی کعبی سے قاعدہ آٹھ میں سے تین

$$(21.46) \quad \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

حاصل⁵⁵ ہوتا ہے جو کعبی کثیر رکنی کی صورت (مثلاً قاعدہ سمن) میں بالکل درست ثابت ہوتا ہے۔ مزید وقفہ کی طاق ٹکڑوں (جو 3 سے قابل تقسیم ہو) پر اس قاعدہ کو لاگو کیا جاسکتا ہے۔ چھ درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) تا (x_6, f_6) سے گزرتی ہو سے پیچیدہ عددی سروالا کلیہ حاصل ہوتا ہے البتہ اسی قسم کا ایک اور کلیہ جس کی درستگی نسبتاً کم ہے اور جس کو قاعدہ ویڈل⁵⁶ کہتے ہیں درج ذیل ہے۔

$$(21.47) \quad \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx \approx \frac{3h}{10} (f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6)$$

مکمل کے جن اعدادی کلیات پر بحث کی گئی ان میں مکمل کے وقفہ کو برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا اور یہ تراکیب کسی مخصوص طاقت تک کثیر رکنی کی صورت میں بالکل درست جواب حاصل کرتے ہیں۔ خطی متبادل پیم استعمال کرتے ہوئے a اور b کو بالترتیب -1 اور 1 پر منتقل کرتے ہوئے زیادہ عمومی طور پر

$$(21.48) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f_j \quad [f_j = f(x_j)]$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں ہم ایسے $2n$ مستقل A_1 تا A_n اور x_1 تا x_n حاصل کر سکتے ہیں کہ کثیر رکنی کا درجہ m جتنا چاہیں بڑا ہو، مساوات 21.48 بالکل درست جواب دے۔ چونکہ درجہ $2n - 1$ کثیر رکنی کے عددی سروں کی تعداد $2n$ ہے لہذا $m \leq 2n - 1$ ہو گا۔ گاوس کے تحت اس صورت درجہ $2n - 1$ کثیر رکنی کے لئے بالکل درست جواب حاصل ہو گا جب x_1, \dots, x_n درجہ n لیژانڈر کثیر رکنی⁵⁷ (حصہ 5.2)

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} x^{n-4} - + \dots$$

three-eight's rule⁵⁵Weddle's rule⁵⁶Legendre polynomial⁵⁷

یعنی

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

کے n صفر ہوں اور A_j کی موزوں قیمتیں منتخب کی جائیں۔ ایسی صورت میں مساوات 21.48 کو گاوسی کلیہ تکمیل⁵⁸ کہتے ہیں۔ اگرچہ یہ کلیہ بہت درست نتائج دیتا ہے لیکن اس میں x_1, \dots, x_n کی غیر یکساں فاصلے دشواری کا سبب بنتے ہیں۔

چونکہ مساوات 21.48 میں مستعمل آخری سر -1 اور 1 کثیر رکنی $P_n(x)$ کے صفر نہیں ہیں (یہ دونوں x_1, \dots, x_n میں شامل نہیں ہیں) لہذا گاوسی کلیہ مکمل کھلا کلیہ⁵⁹ کہلاتا ہے۔ یوں بند کلیہ⁶⁰ میں وقفہ مکمل کے سر بھی شامل ہوں گے (مثال کے طور پر مساوات 21.40، مساوات 21.44، مساوات 21.46 اور مساوات 21.47 بند کلیات ہیں)۔

باہمی تحریف کی طرح اعدادی مکمل کو بھی فرق سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایک انتہائی موثر کلیہ درج ذیل گاوسی وسطی فرق کلیہ⁶¹ ہے۔

$$(21.49) \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(f_0 + f_1 - \frac{\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1}{12} + \frac{11(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)}{720} \right)$$

اعدادی تفرق

جدول کی صورت میں دیے تفاعل کے تفرق کا تخمینہ اعدادی طریقہ سے حاصل کرنے کو اعدادی تفرق⁶² کہتے ہیں۔ جہاں ممکن ہو وہاں اعدادی تفرق سے گریز کریں چونکہ اعدادی تفرق کی درستگی جدول میں دیے قیمتوں کی درستگی سے کم ہو گی۔ درحقیقت تفرق کے حصول میں ہم دو بڑی قیمتوں کے فرق کو ایک چھوٹی قیمت سے تقسیم کرتے ہیں؛ مزید اگر تفاعل کثیر رکنی p کی صورت میں دیا گیا ہو تب تفاعل کی قیمتوں میں فرق کم ہو سکتا ہے جبکہ تفرق کی قیمت بہت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اعدادی تفرق ایک نازک عمل ہے۔ اس کے برعکس اعدادی مکمل ہمواری کا عمل ہے لہذا اعدادی مکمل پر تفاعل کی قیمتوں میں خلل کا بہت زیادہ اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

Gaussian integration formula⁵⁸open formula⁵⁹closed formula⁶⁰central-difference formula by Gauss⁶¹numerical differentiation⁶²

ہم $f'_j = f'(x_j)$ ، $f''_j = f''(x_j)$ ، ... لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ ہم تفرق کا تخمینہ درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اس کو دیکھ کر ہم ایک درجی تفرق کے لئے

$$(21.50) \quad f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

لکھتے ہیں۔ اسی طرح دو درجی تفرق کو

$$(21.51) \quad f''_1 \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ بلند درجی تفرق کے لئے اسی طرح کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

موزوں لیگرنج کثیر رکنی کی تفرق سے تفرق کا بہتر تخمینہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 21.42 کا تفرق لینے سے

$$f(x) \approx p'_2(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2$$

حاصل ہوتا ہے جہاں یاد رہے کہ مساوات 21.42 کے نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ ، $2h^2$ ہیں۔ اس کی قیمت x_0 ، x_1 اور x_2 پر حاصل کرتے ہوئے تین نقاطی کلیہ⁶³

$$(21.52) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad f'_0 &\approx \frac{1}{2h} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) \\ \text{(ب)} \quad f'_1 &\approx \frac{1}{2h} (-f_0 + f_2) \\ \text{(پ)} \quad f'_2 &\approx \frac{1}{2h} (f_0 - 4f_1 + 3f_2) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ پانچ نقاطی لیگرنج کثیر رکنی سے اسی طرح بالخصوص درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(21.53) \quad f'_2 \approx \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4)$$

سوالات

تکمل کے کلیات کی یاد دہانی کی خاطر سوال 21.62 تا سوال 21.70 حل کریں۔

سوال 21.62: $\int \sin^2 x \, dx$

سوال 21.63: $\int \cos^2 \omega x \, dx$

سوال 21.64: $\int e^{ax} \sin bx \, dx$

سوال 21.65: $\int e^{ax} \cos bx \, dx$

سوال 21.66: $\int \tan kx \, dx$

سوال 21.67: $\int \ln x \, dx$

سوال 21.68: $\int \frac{dx}{k^2 + x^2}$

سوال 21.69: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

سوال 21.70: $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$

سوال 21.71: $n = 5$ لیتے ہوئے مساوات 21.39 کی مدد سے مثال 21.12 حل کریں۔

سوال 21.72: $n = 5$ لیتے ہوئے مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 کی مدد سے $\int_0^1 x^3 \, dx$ حل کریں۔
خلل کتنا ہوگا؟
جواب: $\epsilon = -0.005$, 0.245

سوال 21.73: $n = 5$ لیتے ہوئے سوال 21.72 کو ذوزلقہ قاعدہ مساوات 21.40 سے حل کریں۔ مساوات 21.41 سے حد خلل کیا حاصل ہوں گے؟ نتائج کے حقیقی حد خلل کیا ہیں؟ ان میں فرق کیوں ہے؟

سوال 21.74: $2n = 4$ لیتے ہوئے سمن قاعدہ سے $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔
جواب:

$$\ln 2 \approx 0.69325, M_4^* = 0.75, M_4 = 0.24, 0.000016 < \epsilon_S < 0.00053, \\ 0.69272 < \ln 2 < 0.69324$$

سوال 21.75: $2n = 10$ لیتے ہوئے سمن قاعدہ سے $\int_0^1 x^5 dx$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔ نتیجے کی اصل حد خلل کیا ہے؟

سوال 21.76 تا سوال 21.79 میں $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ سائن تفاعل کی پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست قیمتیں استعمال کریں۔

سوال 21.76: مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 استعمال کریں اور $n = 5$ لیں۔
جواب: 0.9466

سوال 21.77: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n = 5$ لیں۔

سوال 21.78: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n = 10$ لیں۔
جواب: 0.9458

سوال 21.79: $2n = 2$ اور $2n = 10$ لیتے ہوئے قاعدہ سمن استعمال کریں۔

سوال 21.80: ایسے α اور β تلاش کریں کہ ایک درجی کثیر رکنی کے لئے

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx h[\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n+1})], \quad h = x_{n+1} - x_n$$

بالکل درست ہو۔ کونسا کلیہ اخذ ہوتا ہے؟

جواب: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ذوزنقہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.81: اگر $f(x)$ دو درجی کثیر رکنی ہو تب دکھائیں کہ مساوات 21.50 بالکل درست ہے۔ اس کا کیا جیومیٹریائی مطلب ہے؟

سوال 21.82: مساوات 21.52 حاصل کریں۔

سوال 21.83: مساوات 21.53 اخذ کریں۔

سوال 21.84: $x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.2$ ، $x_2 = 0.4$ ، $x_3 = 0.6$ ، $x_4 = 0.8$ کے لئے $f(x) = x^4$ پر غور کریں۔ مساوات 21.52-الف، ب اور پ سے f'_2 حاصل کریں۔ خلل تلاش کریں۔
جواب: 0.080, 0.320, 0.176, 0.256

سوال 21.85: تفرق کا چار نقطہ کلید درج ذیل ہے۔

$$f'_2 \approx \frac{1}{6h}(-2f_1 - 3f_2 + 6f_3 - f_4)$$

سوال 21.86: $f'(x)$ کو یک درجی اور مزید زیادہ بلند درجی فرق سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔
کو لاگو کریں۔ حد خلل تلاش کریں۔ مساوات 21.53 سے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \dots)$$

r کے ساتھ مساوات 21.14 کا تفرق لیتے ہوئے اس کلید کو حاصل کریں۔ مساوات 21.14 کا r کے ساتھ تفرق

$$hf'(x) \approx \Delta f_0 + \frac{2r-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3r^2-6r+2}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

ہے، جہاں $x = x_0 + rh$ ہے، اور آپ کو $r = 0$ پر کرنا ہو گا۔ (الف) یک درجی فرق تک، (ب) دو درجی فرق تک، (پ) تین درجی فرق تک، (ت) چار درجی فرق تک شامل کرتے ہوئے اس کلید سے سوال 21.84 کے $f'(0.4)$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: 0.52, 0.080, 0.304, 0.256

21.7 یک درجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

ہم باب 1 سے جانتے ہیں کہ $F(x, y, y') = 0$ جس کو عموماً $y' = f(x, y)$ لکھنا ممکن ہو گا، یک درجی تفرقی مساوات ہے۔ ابتدائی قیمت مسئلہ⁶⁴ سے مراد ایک تفرقی مساوات اور ایک ایسی شرط ہے جس کو (بلند درجی

⁶⁴initial value problem

تفرقی مسئلے کی صورت میں ایک ہی x پر ایسی کئی شرائط ہوں گے جنہیں (تفرقی مساوات کا حل مطمئن کرتا ہو۔ اس حصہ میں ہم درج ذیل روپ کی ابتدائی قیمت مسئلہ پر غور کرتے ہیں

$$(21.54) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی وقفہ جس پر x_0 پایا جاتا ہو میں f کا یکتا حل موجود ہے۔ ہم اس ابتدائی مسئلے کے حل کی اعدادی تراکیب تلاش کرتے ہیں۔

اگر ہم اس مسئلے کے حل کا کلیہ اخذ کر سکیں تب کلیہ سے اعدادی جوابات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ اگر حل کا کلیہ بہت پیچیدہ ہو یا ایسا کلیہ موجود ہی نہ ہو تب ہم اس حصے کے اعدادی تراکیب استعمال کر سکتے ہیں۔

یہ تراکیب قدم با قدم تراکیب⁶⁵ ہیں جن میں ہم $y_0 = y(x_0)$ سے شروع کرتے ہوئے قدم با قدم آگے بڑھتے ہیں۔ پہلی قدم پر ہم $x = x_1 = x_0 + h$ پر مساوات 21.54 کے حل y کا تخمینہ y_1 حاصل کرتے ہیں۔ دوسری قدم پر ہم $x = x_2 = x_0 + 2h$ پر اس حل کا تخمینہ y_2 حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یہاں h ایک مقررہ مستقل ہے مثلاً 0.2 یا 0.1 اور یا 0.01؛ مستقل h منتخب کرنے کی اصول پر اسی حصے میں غور کیا جائے گا۔

ہر قدم پر ایک ہی جیسی (کلیات) حساب دہرائی جاتی ہے۔ ان کلیات کو ٹیلر تسلسل

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots$$

سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 21.54 سے $y' = f$ حاصل ہوتا ہے جس کا تفرق

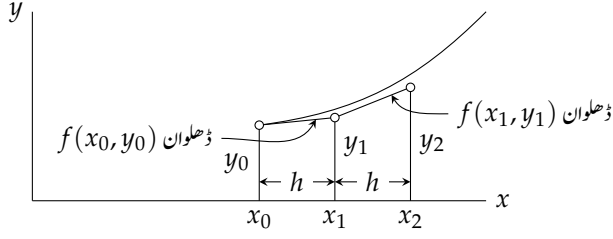
$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

دیتا ہے۔ اسی طرح بلند درجی تفرق کے کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔ یوں ٹیلر تسلسل کو

$$(21.55) \quad y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}f' + \frac{h^3}{6}f'' + \dots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں f ، f' ، f'' ، کی قیمتیں $(x, y(x))$ پر لی جائیں گی۔ h کی چھوٹی قیمتوں کے لئے h^2 ، h^3 ، قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں مساوات 21.55 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$y(x+h) \approx y(x) + hf$$



شکل 21.9: ترکیب یولر

پہلی قدم میں ہم

$$y_1 = y_0 + h(x_0, y_0)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_1) = y(x_0 + h)$ کا تخمینہ ہو گا۔ دوسری قدم میں ہم

$$y_2 = y_1 + h(x_1, y_1)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ کا تخمینہ ہو گا۔ اسی طرح قدم با قدم چلتے ہوئے تمام تخمینے قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ کسی بھی قدم کی عمومی مساوات

$$(21.56) \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ہو گی۔ اس قدم با قدم ترکیب کو ترکیب یولر⁶⁶ یا یولر کوشی ترکیب⁶⁷ کہتے ہیں۔ جیومیٹریکی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کی جگہ اس کی ایسی تخمینہ کثیر الاضلاع استعمال کی جاتی ہے جس کا پہلا بازو نقطہ x_0 پر منحنی کا مماس ہو (شکل 21.9)۔

مساوات 21.55 میں مستقل کے علاوہ اکائی طاقت کا h لے کر ترکیب یولر حاصل کی گئی لہذا ترکیب یولر کو درجہ اول ترکیب⁶⁸ کہتے ہیں۔ مساوات 21.55 کے باقی اجزاء کو رد کرنے کی وجہ سے حل میں خلل پیدا ہوتا ہے جس کو اس ترکیب کی قطع چال خلل کہتے ہیں۔ h کی چھوٹی قیمت کی صورت میں h^3 ، h^4 ، وغیرہ کی قیمت h^2 کی قیمت سے بہت کم ہوں گی لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ فی قدم قطع چال خلل کا درجہ h^2 ہے۔ اس کے علاوہ اس ترکیب میں اور دیگر تراکیب میں تعداد ہندسہ خلل بھی پائے جائیں گے جن کی بنا n بڑھانے سے y_1 ، y_2 ، ... کی قیمتوں میں خلل بتدریج بڑھتا جائے گا۔ اس حقیقت پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

Euler method⁶⁶
Euler-Cauchy method⁶⁷
first order method⁶⁸

جدول 21.9: جدول برائے مثال 21.14

n	x_n	y_n	$0.2(x_n + y_n)$	درست حل	حتمی خلل
0	0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.1	0.000	0.040	0.021	0.021
2	0.2	0.040	0.088	0.092	0.052
3	0.3	0.128	0.146	0.222	0.094
4	0.4	0.274	0.215	0.426	0.152
5	0.5	0.489		0.718	0.229

مثال 21.14: ترکیب یولر
ترکیب یولر سے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

حل: ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہوئے y_1 تا y_5 حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $f(x, y) = x + y$ ہے لہذا مساوات 21.56 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n, y_n)$$

جدول 21.9 میں ترکیب یولر سے حاصل نتائج کے ساتھ ساتھ مساوات 1.59 سے حاصل بالکل درست حل

$$y(x) = e^x - x - 1$$

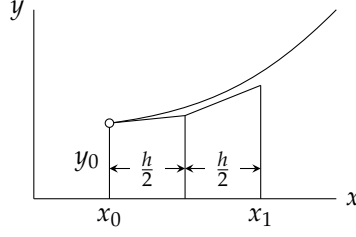
کی قیمتیں اور خلل بھی دی گئی ہیں۔ موجودہ مثال میں ہمیں اصل حل بھی معلوم ہے لہذا ہم ترکیب یولر کی درستگی کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔ h کی مختلف قیمتیں لے کر آپ ترکیب یولر سے حاصل نتائج کا اصل حل کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں۔ □

مساوات 21.55 کے زیادہ اجزاء شامل کرتے ہوئے بہتر اعدادی تراکیب حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ ایسے کلیات میں عموماً $f(x, y)$ کی تفرق سے چھکارا حاصل کرنے کی خاطر تفرق کو دیگر موزوں نقطوں پر $f(x, y)$ کی قیمتوں سے حاصل کیا جاتا ہے۔ انہیں ایسی دو تراکیب پر غور کرتے ہیں۔

ایسی پہلی ترکیب کو بہتر ترکیب یولر⁶⁹ یا یولر کوشی کی بہتر ترکیب کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی پہلی قدم میں ہم پہلے ذیلی قیمت

$$(21.57) \quad y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$$

improved Euler method⁶⁹



شکل 21.10: بہتر ترکیب یولر

اور بعد میں نئی قیمت

$$(21.58) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)]$$

حاصل کرتے ہیں۔

یہ ترکیب ایک سادہ جیومیٹریائی مطلب رکھتی ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقفہ x_n تا $x_n + \frac{1}{2}h$ تک ہم حل کو تخمیناً ایسی قطع سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_n, y_n) سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $f(x_n, y_n)$ ہو جبکہ باقی وقفہ، یعنی $x_n + \frac{1}{2}h$ تا x_n تک، ہم قطع کی ڈھلوان $f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)$ لیتے ہیں (شکل 21.10 جہاں $n = 0$ ہے)۔

بہتر ترکیب یولر کے ہر قدم پر پہلے مساوات 21.57 سے قیمت کی پیش گوئی کی جاتی ہے اور بعد میں مساوات 21.58 سے قیمت کی تصحیح کی جاتی ہے لہذا یہ پیش گو، مصحح ترکیب⁷⁰ کہلاتی ہے۔

مثال 21.15: بہتر ترکیب یولر

پہلے کی طرح $h = 0.2$ لیتے ہوئے بہتر ترکیب یولر کو مثال 21.14 کی ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ یہاں مساوات 21.57 اور مساوات 21.58 درج ذیل ہوں گی۔

$$y_{n+1}^* = y_n + 0.2(x_n + y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.1[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + y_{n+1}^*)]$$

پہلی مساوات کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک ہی قدم میں دو بار حساب کی بجائے ایک بار حساب کرنا ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y_{n+1} = 0.12x_n + 0.1x_{n+1} + 1.22y_n$$

جدول 21.10: بہتر ترکیب یولر۔ (مثال 21.15)

n	x_n	y_n	$0.12x_n$	$0.1x_{n+1}$	$1.22y_n$	y_{n+1}
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0200	0.0000	0.0200
1	0.2	0.0200	0.0240	0.0400	0.0244	0.0884
2	0.4	0.0884	0.0480	0.0600	0.1078	0.2158
3	0.6	0.2158	0.0720	0.0800	0.2633	0.4153
4	0.8	0.4153	0.0960	0.1000	0.5067	0.7027
5	1.0	0.7027				

□ ہم جدول 21.10 سے دیکھتے ہیں کہ موجودہ نتائج مثال 21.14 میں حاصل کردہ نتائج سے بہتر ہیں۔

بہتر ترکیب یولر میں فی قدم قطع چال خلل h^3 کے لحاظ سے بڑھتا ہے لہذا یہ ترکیب درجہ دوم ترکیب⁷¹ ہے۔ بلکہ $\tilde{f}_n = f(x_n, y(x_n))$ لکھ کر مساوات 21.55 استعمال کرنے سے

$$(21.59) \quad y(x_n + h) - y_n = h\tilde{f}_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}_n' + \frac{1}{6}h^3\tilde{f}_n'' + \dots$$

ماتا ہے۔ مساوات 21.58 میں قوسین میں بند حصہ کو $\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}$ لکھ کر دوبارہ ٹیلر تسلسل استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.58 سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$(21.60) \quad y_{n+1} - y_n \approx \frac{1}{2}h(\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1} + h\tilde{f}_n' + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}_n'' + \dots)$$

جس سے مساوات 21.59 تفریق کرتے ہوئے فی قدم قطع چال خلل

$$\frac{h^3}{4}\tilde{f}_n'' - \frac{h^3}{6}\tilde{f}_n'' + \dots = \frac{h^3}{12}\tilde{f}_n'' + \dots$$

حاصل ہو گا۔

ہم اب قدم h کی انتخاب پر غور کرتے ہیں جو قدم با قدم تراکیب استعمال کرنے میں اہم مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔ h کی قیمت بہت کم رکھنے سے قدموں کی تعداد اور تعداد ہندسہ خلل بہت بڑھ جاتے ہیں جبکہ h کی قیمت بہت زیادہ رکھنے سے فی قدم قطع چال خلل بڑھتی ہے اور ساتھ ہی ساتھ ایک اضافی خلل، جو f کی قیمت (x_n, y_n) کی بجائے $(x_n, y(x_n))$ پر حاصل کرنے کی بنا پیدا ہوتا ہے، بھی بڑھتی ہے۔ اگر f متغیر y کے تابع نہ ہو

predictor-corrector method⁷⁰
second order method⁷¹

تب ان میں دوسرا خلل صفر کے برابر ہو گا، دیگر حال y کی تبدیلی سے f جتنا زیادہ تبدیل ہو، یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا، یعنی $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ کی حتمی قیمت جتنی زیادہ ہو، یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا۔ بلکہ اس خلل کو φ_n سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلہ اوسط قیمت کی اطلاق سے

$$\varphi_n = f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n)) = f_y(x_n, \bar{y})\eta_n$$

حاصل ہو گا جہاں y_n کا خلل $\eta_n = y_n - y(x_n)$ ہے، اور \bar{y} کا مقام y_n اور $y(x_n)$ کے بیچ ہے۔ یوں y_{n+1} کے خلل میں φ_n کا حصہ تقریباً $h\varphi_n = hf_y(x_n, \bar{y})\eta_n$ ہو گا۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ دلچسپی کے خطہ میں $|f_y|$ کی بالائی حد K کو کم رکھا جائے اور h یوں منتخب کیا جائے کہ

$$\kappa = hK$$

بہت زیادہ بڑی قیمت نہ ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $|f_y|$ کی قیمت زیادہ ہو (جو y پر f کی زیادہ تابعت کو ظاہر کرتی ہے) تب K بڑا ہو گا لہذا ہمیں h چھوٹا رکھنا ہو گا۔ (مثال 21.14 اور مثال 21.15 میں $f_y = 1$ ، $K = 1$ ، $hK = 0.2$ ہیں۔) اگر f_y بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہو تب ہم K یعنی $|f_y(x_n, \bar{y})|$ کی بالائی حد کو کم رکھتے ہوئے وقفہ کے مختلف حصوں پر مختلف h منتخب کر سکتے ہیں تاکہ

$$\kappa_n = hK_n$$

کو کسی مخصوص وقفہ (مثلاً $0.1 \leq \kappa_n \leq 0.2$)، جو درکار درستگی پر منحصر ہو گا، میں رکھا جاسکے۔ فی قدم قطع چال خلل کی بنا ہم h کو کسی ایک مقررہ قیمت سے زیادہ نہیں چن سکتے ہیں۔

رنج کو نا ترکیب

اس سے بھی زیادہ درست ترکیب جو عملاً انتہائی اہم ہے ترکیب رنج کوٹا⁷² کہلاتی⁷³ ہے جس کے ہر قدم پر ہم پہلے چار عدد ذیلی قیمتیں

$$(21.61) \quad \begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), & B_n &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}A_n), \\ C_n &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}B_n), & D_n &= hf(x_{n+1}, y_n + C_n) \end{aligned}$$

⁷²Runge-Kutta method

⁷³جرمنی کے ریاضی دان کارل رنج [1856-1927] اور لسل کوٹا [1867-1944]

تلاش کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے نئی قیمت

$$(21.62) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n)$$

حاصل کی جاتی ہے۔ یہاں ثبوت پیش کیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اس ترکیب کی قطع چال خلل درجہ h^5 ہے یعنی یہ درجہ چار ترکیب ہے۔ دھیان رہے کہ اگر f صرف x کا تابع ہو تب ترکیب رنج کوٹا سے مکمل کی ترکیب سمن (حصہ 21.6) حاصل ہوتی ہے۔

اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب رنج کوٹا قابل محنت طلب ہے، کمپیوٹر کی استعمال کے لئے یہ ترکیب موزوں ہے۔

مثال 21.16: ترکیب رنج کوٹا

ترکیب رنج کوٹا کو مثال 21.14 کے ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ ہم پہلے کی طرح $h = 0.2$ منتخب کرتے ہیں۔ یہاں $f(x, y) = x + y$ ہے لہذا مساوات 21.14 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(21.63) \quad \begin{aligned} A_n &= 0.2(x_n + y_n), & B_n &= 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5A_n), \\ C_n &= 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5B_n), & D_n &= 0.2(x_n + 0.2 + y_n + C_n) \end{aligned}$$

چونکہ یہ تعلقات سادہ صورت رکھتے ہیں لہذا ہم A_n کو B_n میں پر کر کے $B_n = 0.22(x_n + y_n) + 0.02$ حاصل کرتے ہیں جس کو $C_n = 0.222(x_n + y_n) + 0.022$ میں پر کر کے C_n حاصل کرتے ہیں۔ ان حاصل کردہ تعلقات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.62 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2214(x_n + y_n) + 0.0214$$

جدول 21.11 میں حساب دیا گیا ہے۔ جدول 21.12 میں ترکیب یولر، بہتر ترکیب یولر اور ترکیب رنج کوٹا کے نتائج کا موازنہ کیا گیا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثال 21.14 اور مثال 21.15 کے نتائج سے موجودہ مثال کے نتائج بہت بہتر ہیں۔ □

لمبائی قدم h^{74} ایک مخصوص قیمت H ، جو درستی پر منحصر ہے، سے زیادہ نہیں ہونی چاہیے اور اس کی قیمت یوں منتخب کرنی چاہیے کہ

$$\kappa = hK \quad \left(\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \text{ کی بالائی حد } K \text{ ہے} \right)$$

جدول 21.11: ترکیب رنج کوٹا (مثال 21.16)

n	x_n	y_n	$x_n + y_n$	$0.2214(x_n + y_n)$	y_{n+1}
0	0.0	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.021 400
1	0.2	0.021 400	0.221 400	0.049 018	0.070 418
2	0.4	0.091 818	0.491 818	0.108 889	0.130 289
3	0.6	0.222 107	0.822 107	0.182 014	0.203 414
4	0.8	0.425 521	1.225 521	0.271 330	0.292 730
5	1.0	0.718 251			

جدول 21.12: جدول 21.9، جدول 21.10 اور جدول 21.11 میں خلل کا موازنہ

x	$y = e^x - x - 1$	خلل کی حتمی قیمت		
		ترکیب پولر	بہتر ترکیب پولر	ترکیب رنج کوٹا
0.2	0.021 403	0.021	0.0014	0.000 003
0.4	0.091 825	0.052	0.0034	0.000 007
0.6	0.222 119	0.094	0.0063	0.000 011
0.8	0.425 541	0.152	0.0102	0.000 020
1.0	0.718 282	0.229	0.0156	0.000 031

کی قیمت 0.1 اور 0.2 کے بیچ ہو (جیسا بہتر ترکیب پولر میں تھا)۔ ترکیب رنج کوٹا میں ہم h کو A_n ، B_n ، C_n سے قابو کر سکتے ہیں چونکہ f_y کی تعریف کی رو سے

$$\kappa = hK \approx h \left| f_y \right| \approx h \left| \frac{f(x, y^*) - f(x, y^{**})}{y^* - y^{**}} \right|$$

ہو گا اور اگر ہم $x = x_n + \frac{1}{2}h$ ، $y^* = y_n + \frac{1}{2}B_n$ ، $y^{**} = y_n + \frac{1}{2}A_n$ منتخب کریں تب
اور $y^* - y^{**} = \frac{B_n - A_n}{2}$

$$(21.64) \quad \kappa \approx \kappa_n = 2 \left| \frac{C_n - B_n}{B_n - A_n} \right|$$

ہو گا۔ ہم اب کوئی قاعدہ بنا سکتے ہیں مثلاً جب تک $0.05 \leq \kappa_n \leq 0.2$ ہو ہم h کو تبدیل نہیں کرتے جبکہ $\kappa_n > 0.2$ کی صورت میں ہم h کو 50% کم کرتے ہیں اور $\kappa_n < 0.05$ کی صورت میں ہم h کو دگنا کرتے ہیں (اگر h دگنا کرنے سے اس کی قیمت منتخب H سے بڑھتی نہ ہو جہاں H از خود درکار درستگی پر منحصر ہے)۔

h کو قابو کرنے کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم حساب کرنے کے ساتھ ساتھ قدم $2h$ لیتے ہوئے بھی حساب

کرتے ہیں جس سے فی قدم قطع چال خلل $2^5 = 32$ گنا بڑھتا ہے لیکن قدموں کی تعداد گٹھنے کی بنا اصل خلل $\frac{2^5}{2} = 16$ گنا بڑھتا ہے۔ یوں لمبائی قدم کو h رکھتے ہوئے خلل کی قیمت مطابقتی y کے فرق δ کے تقریباً $\frac{1}{15}$ گنا ہو گی۔ ہم اب عدد ϵ منتخب کرتے ہوئے (مثلاً آخری ہندسے کی اکائی کا نصف، جو بہت بڑی قیمت ہے) h کو اس وقت تک تبدیل نہیں کرتے جب تک $0.2\epsilon \leq |\delta| \leq 10\epsilon$ ہو، اگر $|\delta| > 10\epsilon$ ہو تب ہم h کو 50% کم کرتے ہیں اور اگر $|\delta| < 0.2\epsilon$ ہو تب ہم h کو دگنا کرتے ہیں؛ ظاہر ہے کہ h کو اس صورت دگنا کرنا ممکن ہو گا جب تک (پہلے کی طرح) یہ H سے تجاوز نہ کرتا ہو۔

سوالات

سوال 21.87 تا سوال 21.90 میں ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے دس قدم تک چلیں۔

سوال 21.87: $y' = y$, $y(0) = 1$, $h = 0.01$
جواب: $1, 1.01, 1.0201, 1.030301, 1.04060401, \dots$

سوال 21.88: $y' = xy$, $y(1) = 1$, $h = 0.1$
جواب: $1, 1.1, 1.221, 1.36752, 1.5452976, \dots$

سوال 21.89: $y' = xy - 1$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$
جواب: $0, -0.1, -0.201, -0.30502, \dots$

سوال 21.90: $y' = xy$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$
جواب: $1, 1, 1.01, 1.0302, 1.061106, \dots$

سوال 21.91: $y' = 2x$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$ کو بہتر ترکیب یولر سے حل کریں۔ خلل صفر کے برابر کیوں ہے؟
جواب: $0, 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, \dots$

سوال 21.92: ایسی چند مثالیں پیش کریں جہاں بہتر ترکیب یولر بالکل درست جواب دیتی ہو۔

سوال 21.93: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 21.14 کو دوبارہ حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ خلل مثال 21.14 کے خلل کا 50% ہو گا۔
جواب: $0, 0, 0.01, 0.031, 0.0641, 0.11051, 0.171561, \dots$

سوال 21.94: $h = 0.01$ (بیس قدم) لیتے ہوئے مثال 21.14 کو دوبارہ حل کریں۔ نقطہ $x = 2$ پر حتمی خلل کتنا ہے؟
جواب: $f(0.2) = 0.02019039947$, $|e| = 0.00081$

سوال 21.95: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 21.15 کو دوبارہ حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ خلل مثال 21.15 کے خلل کا 25% ہو گا۔
جواب: $0, 0.005, 0.021025, 0.049232625, 0.1474467, \dots$

سوال 21.96: ترکیب یولر سے $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$, $h = 0.1$ حل کریں۔
جواب: $1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, \dots$

سوال 21.97: ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ حل کریں۔
جواب: $1, 1.1, 1.199099, 1.2951637, 1.3569068, \dots$

سوال 21.98: ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟ (اصل حل $y = \tan x$ ہے۔)
جواب: $0, 0.1, 0.199099, 0.295200286, 0.387184487, 0.474147677, \dots$, 1.825 %

سوال 21.99: بہتر ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟
جواب: $0, 0.09950495, 0.197118863, 0.29128, 0.3809659, 0.46563611, \dots$, 2.758 %

سوال 21.100: ترکیب رنج کوٹا سے $y' = \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$ حل کریں۔ دوسری قدم پر حتمی خلل کتنا فی صد ہے؟
جواب: $0, 0.099669955, 0.19743461, 0.2917243, 0.38149278, 0.46622, \dots$, 2.602 %

سوال 21.101: ترکیب رنج کوٹا سے $y' = y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$ حل کرتے ہوئے $y = e^x$ کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ پانچ درجہ اعشاریہ تک نتائج درست ہیں۔
جواب: $1, 1.105170833, 1.22140257, 1.349858497, 1.49182424, \dots$

سوال 21.102: $h = 0.1$ لیتے ہوئے ترکیب یولر سے $y' = -10y$, $y(0) = 1$ حل کریں۔ جواب پر تبصرہ کریں۔
جواب: $y = e^{-10x}$ اصل حل $1, 0, 0, \dots$

سوال 21.103: مساوات 21.54 میں x_n تا x_{n+1} تفاعل $f(x, y)$ کی قیمت کو نقطہ x_n پر $f(x, y)$ کی قیمت لے کر x_0 تا x_{n+1} تکمل لیتے ہوئے ترکیب یولر اخذ کریں۔

سوال 21.104: ترکیب یولر کوشی کی طرح ایک اور ترکیب درج ذیل ہے

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_{n+1}^*)$$

جہاں $y_{n+1}^* = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)$ ہے۔ اس کی جیومیٹریائی وجہ پیش کریں۔ اس ترکیب میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 21.14 حل کریں۔
جواب: $0, 0.02, 0.0884, 0.215848, 0.41533458, 0.702708, \dots$

سوال 21.105: کونٹا کی تین درجی ترکیب درج ذیل ہے

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(A_n + 4B_n + M_n)$$

جہاں

$$(21.65) \quad \begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), & B_n &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}A_n), \\ M_n &= hf(x_{n+1}, y_n - A_n + 2B_n), \end{aligned}$$

ہیں۔ اس ترکیب میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 21.14 حل کریں۔ نتائج کا جدول 21.10 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $0, 0.0213333, 0.09165511, 0.2218081, 0.42503497, 0.717509377, \dots$

21.8 دو درجی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

دو درجی تفرقی مساوات اور ایک ہی نقطہ پر دو ابتدائی شرائط کو ابتدائی قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔ اس حصے میں ہم درج ذیل صورت کے ابتدائی قیمت مسئلوں

$$(21.66) \quad y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

کا حل دو اعدادی ترکیب سے حاصل کرنا سیکھیں گے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ f ایسا تفاعل ہے کہ اس مسئلے کا یکتا حل کسی ایسے وقفہ پر موجود ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہے۔ پہلی ترکیب سادہ لیکن کم درست ہے جس سے اعدادی ترکیب سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے جبکہ دوسری ترکیب بہت زیادہ درست اور عملاً انتہائی اہم ہے۔

دونوں ترکیب میں یکساں فاصلہ نقطوں $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، پر ہم مساوات 21.66 کے حل $y(x)$ کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں گے جنہیں بالترتیب y_1 ، y_2 ، سے ظاہر کیا جائے گا۔ اسی طرح ان نقطوں پر تفرق $y'(x)$ کی تخمینی قیمتوں کو بالترتیب y'_1 ، y'_2 ، سے ظاہر کیا جائے گا۔

گزشتہ حصے کی ترکیب ٹیلر تسلسل

$$(21.67) \quad y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \dots$$

سے اخذ کی گئیں۔ موجودہ حصے میں اس کے ساتھ تفرق کی ٹیلر تسلسل

$$(21.68) \quad y'(x+h) = y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2}y'''(x) + \dots$$

بھی استعمال کی جائے گی۔

کم تر درستگی کی اعدادی ترکیب میں مساوات 21.67 اور مساوات 21.67 میں y''' اور مزید زیادہ درجے کے تفرق رد کیے جائیں گے۔ یوں مساوات 21.67 اور مساوات 21.67 سے

$$\begin{aligned} y(x+h) &\approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) \\ y'(x+h) &\approx y'(x) + hf''(x) \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ اس پہلی ترکیب کی پہلی قدم میں

$$y'_0 = f(x_0, y_0, y'_0)$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.66 سے

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0$$

حاصل کیا جاتا ہے جو $y(x_1) = y(x_0 + h)$ کی تخمینی قیمت ہے۔ مزید

$$y'_1 = y'_0 + hy''_0$$

ہو گا جس کی ضرورت اگلی قدم میں پیش آئے گی۔ دوسری قدم میں

$$y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.67 سے

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2}y_1''$$

حاصل کیا جاتا ہے جو $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ کی تخمینی قیمت ہے۔ مزید

$$y_2' = y_1' + hy_1''$$

ہو گا۔ اسی طرح چلتے ہوئے $n + 1$ ویں قدم میں

$$y_n'' = f(x_n, y_n, y_n')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 21.67 سے

$$(21.69) \quad y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2}y_n''$$

حاصل ہو گا جو $y(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے۔ مزید

$$(21.70) \quad y_{n+1}' = y_n' + hy_n''$$

ہو گا جو $y'(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے جو اگلی قدم میں درکار ہو گی۔

جیومیٹریائی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کو تخمینی طور پر قطع مکانی کے ٹکڑوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 21.17: مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 میں دی گئی ترکیب کا استعمال درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کا حل مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$y'' = \frac{1}{2}(x + y + y' + 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہیں۔ یوں مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 0.2y_n' + 0.02y_n'' \\ y_{n+1}' &= y_n' + 0.2y_n'' \end{aligned} \quad \text{جہاں } y_n'' = \frac{1}{2}(x_n + y_n + y_n' + 2) \text{ ہے۔}$$

جدول 21.13 میں حساب دکھایا گیا ہے۔ اس مسئلے کا اصل حل $y = e^x - x - 1$ ہے۔ آپ جدول میں دی گئی قیمتوں کا اصل حل سے موازنہ کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ خلل بہت زیادہ ہے۔ عملی استعمال میں یہ ترکیب عموماً درست نتائج نہیں دے گی۔

□

جدول 21.13: جدول برائے مثال 21.17

n	x_n	y_n	y'_n	$0.2y'_n$	$x_n + y_n + y'_n + 2$	$0.2y''_n$	$0.02y''_n$	$0.2y'_n + 0.02y''_n$
0	0	0.0000	0.0000	0.0000	2.0000	0.2000	0.0200	0.0200
1	0.2	0.0200	0.2000	0.0400	2.4200	0.2420	0.0242	0.0642
2	0.4	0.0842	0.4420	0.0884	2.9262	0.2926	0.0293	0.1177
3	0.6	0.2019	0.7346	0.1469	3.5365	0.3537	0.0354	0.1823
4	0.8	0.3842	1.0883	0.2177	4.2725	0.4273	0.0427	0.2604
5	1.0	0.6446						

رج کوٹا نیسٹروم ترکیب

آئیں اب ابتدائی قیمت دو درجی مسئلہ حل کرنے کی دوسری ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو رنج کوٹا نیسٹروم ترکیب⁷⁵ کہتے⁷⁶ ہیں۔ ہم ثبوت پیش کیے بغیر بتلاتا چاہتے ہیں کہ یہ ترکیب چار درجی ترکیب ہے جس کا مطلب ہے کہ y اور y' کے ٹیلر تسلسل میں ابتدائی وہ تمام اجزاء شامل ہیں جن میں h^4 یا اس سے کم طاقت پایا جاتا ہو۔

عمومی $n + 1$ ویں قدم میں ہم پہلے ذیلی مساوات

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{2}hf(x_n, y_n, y'_n) \\
 B_n &= \frac{1}{2}hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \beta_n, y'_n + A_n) \quad [\text{جہاں } \beta_n = \frac{1}{2}h(y'_n + \frac{1}{2}A_n)] \\
 C_n &= \frac{1}{2}hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \beta_n, y'_n + B_n) \\
 D_n &= \frac{1}{2}hf(x_n + h, y_n + \delta_n, y'_n + 2C_n) \quad [\text{جہاں } \delta_n = h(y'_n + C_n)]
 \end{aligned}
 \tag{21.71}$$

اور بعد میں نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + K_n) \quad [\text{جہاں } K_n = \frac{1}{3}(A_n + B_n + C_n)]
 \tag{21.72}$$

حاصل کرتے ہیں جو $y(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہوگی۔ مزید ہم

$$y'_{n+1} = y'_n + K_n^* \quad [\text{جہاں } K_n^* = \frac{1}{3}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n)]
 \tag{21.73}$$

حاصل کرتے ہیں جو $y'(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے جو اگلے قدم میں درکار ہوگی۔

⁷⁵Runge-Kutta-Nystrom method
⁷⁶فن لینڈ کا ریاضی دان ایورٹ جو ہانس نیسٹروم

h کو اب قابو کیا جاسکتا ہے (جیسا گزشتہ حصے کے آخر میں بتایا گیا)۔ اب ہم δ^* اور δ^{**} میں زیادہ بڑی قیمت کے برابر δ منتخب کرتے ہیں جہاں y کی مطابقتی قیمتوں کے فرق کے $\frac{1}{15}$ گنا کو δ^* اور y' کی مطابقتی قیمتوں کے فرق کے $\frac{1}{15}$ گنا کو δ^{**} کہتے ہیں۔

مثال 21.18: رنج کوٹا نیستروم ترکیب

$h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 21.17 میں دیے گئے مسئلے کو رنج کوٹا نیستروم ترکیب سے حل کریں۔
حل: یہاں $f = 0.5(x + y + y' + 2)$ ہے لہذا مساوات 21.71 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$A_n = 0.05(x_n + y_n + y'_n + 2),$$

$$B_n = 0.05(x_n + 0.1 + y_n + \beta_n + y'_n + A_n + 2), \quad [\beta_n = 0.1(y'_n + \frac{1}{2}A_n)],$$

$$C_n = 0.05(x_n + 0.1 + y_n + \beta_n + y'_n + B_n + 2),$$

$$D_n = 0.05(x_n + 0.2 + y_n + \delta_n + y'_n + 2C_n + 2), \quad [\delta_n = 0.2(y'_n + C_n)]$$

دیا گیا مسئلہ سادہ ہے جس کے A_n ، B_n ، C_n اور D_n بھی سادہ ہیں لہذا ہم A_n کو B_n میں پر کرنے کے بعد B_n کو C_n میں پر کرتے ہیں اور آخر میں C_n کو D_n میں پر کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$B_n = 0.05[1.0525(x_n + y_n) + 1.1525y'_n + 2.205],$$

$$C_n = 0.05[1.055125(x_n + y_n) + 1.160125y'_n + 2.21525],$$

$$D_n = 0.05[1.11606375(x_n + y_n) + 1.32761375y'_n + 2.4436775]$$

ان سے ہم K_n اور K_n^* حاصل کر کے مساوات 21.72 اور مساوات 21.73 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$(21.74) \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + a(x_n + y_n) + by'_n + c \\ y'_{n+1} &= y'_n + a^*(x_n + y_n) + b^*y'_n + c^* \end{aligned}$$

جہاں

$$\begin{aligned} a &= 0.0103588 & b &= 0.2110421 & c &= 0.0214008 \\ a^* &= 0.1055219 & b^* &= 0.1158811 & c^* &= 0.2214030 \end{aligned}$$

ہیں۔ جدول 21.14 میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مطابقتی حساب کے پانچ قدم دکھائے گئے ہیں۔ $y(x)$ کی تخمینی قیمتوں میں خلل مثال 21.17 کی نسبت بہت کم ہے (جدول 21.15)۔
□

جدول 21.14: جدول برائے مثال 21.18

n	x_n	y_n	y'_n	$a(x_n + y_n) + by'_n + c$	$a^*(x_n + y_n) + b^*y'_n + c^*$
0	0.0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.021 400 8	0.221 403 0
1	0.2	0.021 400 8	0.221 403 0	0.070 419 6	0.270 422 0
2	0.4	0.091 820 4	0.491 825 0	0.130 291 3	0.330 294 0
3	0.6	0.222 111 7	0.822 119 0	0.203 418 6	0.403 421 9
4	0.8	0.425 530 3	1.225 540 9	0.292 736 5	0.492 740 3
5	1.0	0.718 266 8	1.718 281 2		

جدول 21.15: مثال 21.17 اور مثال 21.18 کے نتائج کا موازنہ

x	$e^x - x - 1$	خلل کی حتمی قیمت	
		مثال 21.17	جدول 21.14
0.2	0.021 402 8	0.0014	0.000 002 0
0.4	0.091 824 7	0.0076	0.000 004 3
0.6	0.222 118 8	0.0202	0.000 007 1
0.8	0.425 540 9	0.0413	0.000 010 6
1.0	0.718 281 8	0.0737	0.000 015 0

ہر اعدادی ترکیب میں قطع چال خلل کے علاوہ تعداد ہندسہ خلل بھی پایا جاتا ہے۔ ہم آپ کو خبردار کرنا چاہتے ہیں کہ تعداد ہندسہ خلل نتائج پر دور رس اثر ڈال سکتا ہے۔ مثال کے طور پر مسئلہ $y'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ کا چھوٹا مضرب شامل ہو گا جو آخر کار $y = e^{-x}$ ہے لیکن تعداد ہندسہ خلل کی بنا نتیجہ میں درکار حل e^{-x} کا چھوٹا مضرب شامل ہو گا جو آخر کار (کافی زیادہ قدموں کے بعد) اصل حل سے بھی زیادہ ہو سکتا ہے۔ اس کو اجتماع خلل⁷⁷ کہتے ہیں۔ خلل کے جمع ہونے سے بچنے کے لئے کافی تجربہ درکار ہو گا۔

سوالات

مسادات 21.69 اور مسادات 21.70 کی مدد سے سوال 21.106 تا سوال 21.110 کو پانچ قدم تک حل کریں۔

سوال 21.106: $y'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $h = 0.1$

سوال 21.107: $y'' = y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad h = 0.1$

سوال 21.108: $y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad h = 0.1$

سوال 21.109: $y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad h = 0.05$

سوال 21.110: $y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad h = 0.1$

سوال 21.111: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 21.17 کو دوبارہ حل کریں۔ خلل کا موازنہ مثال 21.17 کی خلل کے ساتھ کریں جو جدول 21.15 میں دی گئیں ہیں۔

سوال 21.112: $h = 0.05$ لیتے ہوئے سوال 21.111 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 21.113: $h = 0.2$ لیتے ہوئے رنج کوٹا نیمیتروم کی ترکیب سے سوال 21.110 کو چار قدم تک حل کریں۔ نتائج کا درج ذیل نو ہندسوں تک درست جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$0.099\ 833\ 417, \quad 0.198\ 669\ 331, \quad 0.295\ 520\ 207, \quad 0.389\ 418\ 342$$

سوال 21.114: $h = 0.1$ لیتے ہوئے سوال 21.113 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 21.115: ابتدائی قیمت مسئلہ $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ پر غور کریں۔ دکھائیں کہ $h = 0.1$ لیتے ہوئے مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.1y'_n + 0.01 \frac{x_n y'_n - y_n}{1 - x_n^2}, \quad y'_{n+1} = y'_n + 0.2 \frac{x_n y'_n - y_n}{1 - x_n^2}$$

پانچ قدم تک حل کریں۔ اس تفرقی مساوات کے اصل حل کو تلاش کریں جو $y = x$ ہے۔

$h = 0.1$ لیتے ہوئے سوال 21.116 تا سوال 21.118 کو مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 کی مدد سے پانچ قدم تک حل کریں۔ دیے گئے اصل حل کی تصدیق کریں۔

سوال 21.116: اصل حل $y = x^3 - 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3, \quad y'' = xy' - 3y$

سوال 21.117: اصل حل $y = x^4 - 6x^2 + 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0, \quad y'' = xy' - 4y$

سوال 21.118: $y(0) = -\frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0, \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ اصل حل $y = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

21.9 اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات

اس باب کے باقی حصہ میں جزوی تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ ہم بالخصوص مساوات لاپلاس، مساوات پوئسن اور حراری مساوات پر غور کریں گے جو انجینئری میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں اور جو بیضوی، قطع مکانی اور قطع زائد جزوی تفرقی مساوات کے بہترین نمونے ہیں۔ ان کی تعریف درج ذیل ہے۔

ایسی جزوی تفرقی مساوات جو بلند تر درجہ تفرق کے لحاظ سے خطی ہو کو بظاہر خطی⁷⁸ کہتے ہیں۔ یوں دو متغیرات x, y والی دو درجی بظاہر خطی مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(21.75) \quad Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

جہاں u نامعلوم متغیر ہے۔ اس مساوات کے تین اقسام درج ذیل ہیں

$$\begin{aligned} \text{بیضوی قسم} \quad AC - B^2 &> 0 & (\text{مثال: مساوات لاپلاس}) \\ \text{قطع مکانی قسم} \quad AC - B^2 &= 0 & (\text{مثال: حراری مساوات}) \\ \text{قطع زائد قسم} \quad AC - B^2 &< 0 & (\text{مثال: مساوات موج}) \end{aligned}$$

جہاں حراری مساوات اور مساوات موج میں y کی جگہ t ہو گا۔ یہاں عددی سر A ، B ، C از خود x ، y کے تقابل ہو سکتے ہیں لہذا xy مستوی کے مختلف خطوں میں مساوات 21.75 کی قسم مختلف ہو سکتی ہے۔ درج بالا گروہ بندی محض دستوری نہیں ہے بلکہ عملاً انتہائی اہم ہے چونکہ مساوات کے حل کا رویہ اور اضافی (سرحدی اور ابتدائی) شرائط اس گروہ بندی پر منحصر ہوں گے۔

بیضوی مساوات عموماً کسی خطہ R میں سرحدی مسئلہ کو جنم دیتی ہے۔ اگر u کی قیمت R کی سرحدی منحنی C پر دی گئی ہو تب اس کو سرحدی مسئلے کی پہلی صورت یا مسئلہ ڈرشلے⁷⁹ کہتے ہیں، اگر C پر $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ (عمودی تفرق) دیا گیا ہو تب اس کو سرحدی مسئلے کی دوسری صورت یا مسئلہ نیومن⁸⁰ کہتے ہیں اور اگر C کے کچھ حصے پر u اور باقی حصے پر u_n دیا گیا ہو تب اس کو تیسری صورت یا مخلوط مسئلہ⁸¹ کہتے ہیں۔ C ایک بند منحنی یا ایک سے زیادہ بند منحنیات ہو سکتی ہیں۔

⁷⁸quasilinear
⁷⁹Dirichlet problem
⁸⁰Neumann problem
⁸¹mixed problem

اس حصے میں ہم مساوات لاپلاس

$$(21.76) \quad \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

اور مساوات پوئسن

$$(21.77) \quad \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

پر غور کرتے ہیں جو عملاً اہم ترین بیضوی مساوات ہیں۔ اعدادی ترکیب حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات میں جزوی تفرق کی جگہ مطابقتی فرق لکھتے ہیں۔ ٹیلر تسلسل

$$(21.78)$$

$$(الف) \quad u(x+h, y) = u(x, y) + hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x, y) + \frac{1}{6}h^3 u_{xxx}(x, y) + \dots$$

$$(ب) \quad u(x-h, y) = u(x, y) - hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x, y) - \frac{1}{6}h^3 u_{xxx}(x, y) + \dots$$

لکھ کر مساوات 21.78-الف سے مساوات 21.78-ب تفریق کر کے h^3, h^4, \dots کو رد کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(21.79) \quad (الف) \quad u_x(x, y) \approx \frac{1}{2h} [u(x+h, y) - u(x-h, y)]$$

اسی طرح

$$(21.79) \quad (ب) \quad u_y(x, y) \approx \frac{1}{2k} [u(x, y+k) - u(x, y-k)]$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہم اب دو درجی تفرق کی طرف بڑھتے ہیں۔ مساوات 21.78-الف اور مساوات 21.78-ب کو جمع کر کے h^4, h^5, \dots کو رد کرتے ہوئے u_{xx} کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

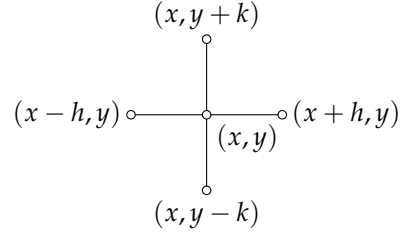
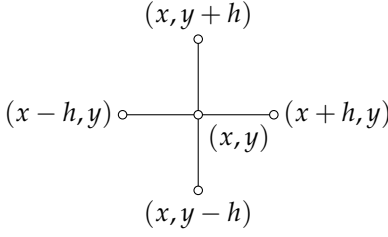
$$(21.80) \quad (الف) \quad u_{xx}(x, y) \approx \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)]$$

اسی طرح

$$(21.80) \quad (ب) \quad u_{yy}(x, y) \approx \frac{1}{k^2} [u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)]$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح

$$(21.80) \quad (پ) \quad u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{4hk} [u(x+h, y+k) - u(x-h, y+k) - u(x+h, y-k) + u(x-h, y-k)]$$



شکل 21.12: (مساوات 21.81 اور مساوات 21.82 میں استعمال نقطے)

شکل 21.11: (مساوات 21.79 اور مساوات 21.80 میں استعمال نقطے)

ہوگا (سوال 21.121)۔ شکل 21.11 میں نقطہ $(x+h, y)$ ، $(x-h, y)$ ، ... دکھائے گئے ہیں جو مساوات 21.79 اور مساوات 21.80 میں استعمال ہوئے ہیں۔ [مساوات 21.80-پ کی ضرورت موجودہ حصے میں پیش نہیں آئے گی۔]

ہم مساوات 21.80-الف اور مساوات 21.80-ب کو مساوات پوائنٹن (مساوات 21.77) میں پر کرتے ہوئے

(21.81)

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = h^2 f(x, y)$$

حاصل کرتے ہیں جہاں سادہ کلیہ اخذ کرنے کی خاطر $k = h$ لیا گیا ہے۔ یوں مساوات پوائنٹن (مساوات 21.77) کی مطابقتی مساوات فرق درج بالا مساوات 21.81 ہے جہاں h کو جسامت جال⁸² کہتے ہیں۔ اسی طرح مساوات لاپلاس (مساوات 21.76) کی مطابقتی مساوات فرق

$$(21.82) \quad u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0$$

ہوگی۔ جیسا شکل 21.12 میں دکھایا گیا ہے، مساوات 21.82 نقطہ (x, y) پر u کی قیمت کو پڑوسی چار نقطوں پر u کی قیمت کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مساوات 21.81 اور مساوات 21.82 میں $h^2 \nabla^2 u$ کی تخمینہ قیمت پانچ نقاطی تخمینہ ہے جہاں عددی سر کا خاکہ درج ذیل ہے۔

$$(21.83) \quad \begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix}$$

مساوات 21.82 کہتی ہے کہ نقطہ (x, y) پر u کی قیمت پڑوسی چار نقطہ جال پر u کی قیمتوں کا اوسط ہو گا۔

اس طرح مساوات 21.81 کو نہایت خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -4 & 1 \\ 1 & & 1 \end{array} \right\} u = h^2 f(x, y)$$

21.9.1 مسئلہ ڈرشلے

مسئلہ ڈرشلے کا خطہ R میں اعدادی حل تلاش کرنے کی خاطر ہم h منتخب کرتے ہوئے R میں یکساں h فاصلہ پر افقی اور عمودی سیدھی لکیروں کا جال بچھاتے ہیں (شکل 21.13)۔ جن نقطوں پر یہ لکیریں ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں ان کو نقطہ جال یا جوڑ⁸³ کہا جاتا ہے۔ اس کے بعد دی گئی جزوی تفرقی مساوات کو تخمیناً اس کی مطابقتی مساوات فرق سے ظاہر کیا جاتا ہے جو ہر جوڑ پر u کی نامعلوم قیمت کو R میں باقی جوڑ پر اور دیے گئے سرحدی معلومات کے ساتھ منسلک کرتی ہے۔ اس عمل سے خطی الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جس کے حل R میں جوڑوں پر u کی تخمینی قیمت دیں گی۔ ہم دیکھیں گے کہ مساواتوں کی تعداد نامعلوم متغیرات کی تعداد، یعنی R میں جوڑوں کی تعداد، کے برابر ہوگی۔ چونکہ ہر جوڑ پر u کی قیمت صرف پڑوسی چار جوڑ پر u کی قیمتوں پر منحصر ہے لہذا اس نظام کا عددی سرغیر گنجان قالب⁸⁴ ہو گا جس میں بہت کم اجزاء غیر صفر ہوں گے۔ حقیقت میں یہ قالب بہت بڑا ہو گا چونکہ درست نتائج حاصل کرنے کی خاطر زیادہ جوڑ درکار ہوں گے اور 500×500 قالب یا اس سے بھی بڑا قالب ذخیرہ کرنے میں دشواری پیش آسکتی ہے⁸⁵۔ یوں بلا واسطہ ترکیب کی بجائے بالواسطہ ترکیب کو ترجیح دی جاتی ہے۔ بالخصوص عمومی مسائل میں ترکیب گائوس زائڈل⁸⁶ جس⁸⁷ کو ترکیب لیمن⁸⁸ بھی کہتے ہیں کارآمد ثابت ہوتی ہے۔ ہم اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے پیش کرتے ہیں جس میں اپنی آسانی کی خاطر جوڑوں کی تعداد کم رکھی گئی ہے۔ ہم جوڑ اور جوڑ پر تخمینی حل کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$N_{ij} = (ih, jh), \quad u_{ij} = u(ih, jh) \quad (21.84)$$

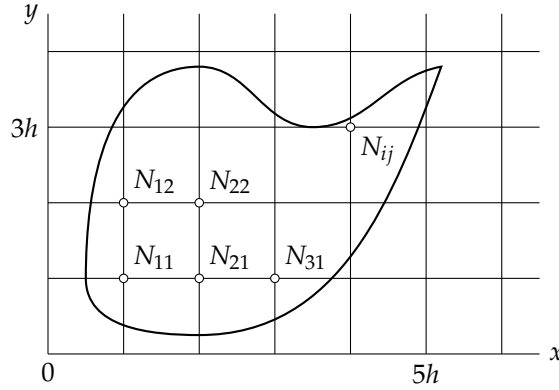
⁸³ mesh point, nodal point
⁸⁴ sparse matrix

⁸⁵ موجودہ قالب سروتزی (تعریف جلد پیش کی جائے گی) نہیں ہے۔ اگر ایسا ہوتا تب ذخیرہ کا مسئلہ پیدا کیے بغیر ہم گاوسی اسقاط استعمال کر سکتے تھے۔

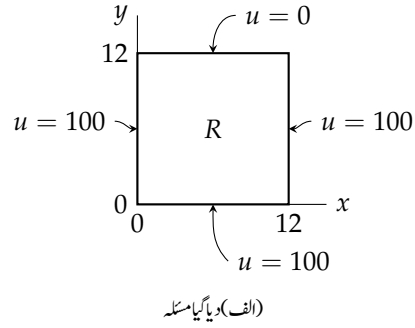
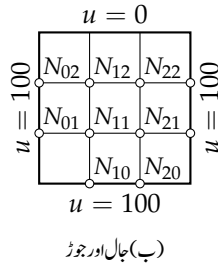
⁸⁶ Gauss-Seidel method

⁸⁷ جرمس ریاضی دان قالب لڈوگ دن زائڈل [1821-1896]

⁸⁸ Liebmann's method



شکل 21.13: جسامت جال h ہے۔ جو $N_{ij} = (ih, jh), \dots, N_{11} = (h, h)$ ہیں۔



شکل 21.14: شکل برائے مثال 21.19

اس طرح مساوات 21.82 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(21.85) \quad u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0$$

مثال 21.19: مساوات لاپلاس۔ ترکیب لیمن
کیساں موٹائی اور کیساں مادے کی چکور چادر کے اطراف کی لمبائی 12 cm ہے۔ اس چادر کے تین کناروں کو 100°C پر اور ایک کنارے کو 0°C پر رکھا گیا ہے (شکل 21.14)۔ جسامت جال کو 4 cm (چوڑے خانے) رکھتے ہوئے ترکیب لیمن سے جوڑوں پر برقرار حال درجہ حرارت تلاش کریں۔

حل: برقرار حال نتائج میں وقت بطور متغیر نہیں پایا جائے گا لہذا حراری مساوات

$$u_t = k^2(u_{xx} + u_{yy})$$

سے مساوات لاپلاس حاصل ہوگی۔ یوں ہمیں مسئلہ ڈرشلے حل کرنا ہوگا۔ ہم شکل میں دکھائی گئی جال بچھاتے ہیں اور جوڑ N_{11} ، N_{21} ، N_{12} ، N_{22} پر اسی ترتیب میں غور کرتے ہیں۔ مساوات 21.85 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -200 \\ u_{11} - 4u_{21} + u_{22} &= -200 \\ u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= -100 \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -100 \end{aligned} \quad (21.86)$$

عملاً اتنے کم مساوات کو آپ گاوسی اسقاط سے حل کرے ہوئے درج ذیل حاصل کریں گے۔

$$u_{11} = u_{21} = 87.5, \quad u_{12} = u_{22} = 62.5$$

ایک اعشاریہ تک (زیادہ درست) جوابات 88.1 اور 61.9 ہیں (جنہیں فوریر تسلسل سے حاصل کیا گیا)۔ یوں خلل 1% کے لگ بھگ ہے جو اتنے چوڑے جال کے لئے حیرت کن بات ہے۔ زیادہ مساواتوں کی صورت میں نظام کو ترکیب لیمین سے حل کیا جائے گا۔ ایسا کرتے ہوئے مساوات 21.86 کو پہلے درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0.25u_{21} + 0.25u_{12} + 50 \\ u_{21} &= 0.25u_{11} + 0.25u_{22} + 50 \\ u_{12} &= 0.25u_{11} + 0.25u_{22} + 25 \\ u_{22} &= 0.25u_{21} + 0.25u_{12} + 25 \end{aligned} \quad (21.87)$$

انہیں اب ترکیب گاوس زائڈل میں استعمال کیا جاتا ہے۔ $u_{11} = w$ ، $u_{21} = x$ ، $u_{12} = y$ ، $u_{22} = z$ لیتے ہوئے یہ حصہ میں مساوات دیتی ہیں جہاں ابتدائی قیمتیں 100 ، 100 ، 100 لیتے ہوئے اس کو حل کیا گیا ہے۔ جوڑ پر قیمتوں کا بہتر اندازہ لگانے سے نتائج زیادہ آسانی سے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ اس نظام کا حل $u_{11} = u_{21} = 87.5$ اور $u_{12} = u_{22} = 62.5$ ہے۔

آسانی پیدا کرنے کی تراکیب جاننے کے لئے سوال 21.122 دیکھیں۔

دائے: اگر $h = \frac{1}{n}$ منتخب کیا جائے جہاں R کی ایک طرف کی لمبائی l ہو اور $(n-1)^2$ جوڑ کو صف در صف لیا جائے یعنی پہلے صف $N_{11}, N_{21}, \dots, N_{n1}$ کے بعد دوسرا صف $N_{12}, N_{22}, \dots, N_{n2}$ اور اس

کے بعد تیسرا صف، ... لیا جائے تب نظام کا $(n-1)^2 \times (n-1)^2$ عددی سر قالب A درج ذیل ہو گا

$$(21.88) \quad (الف) \quad A = \begin{bmatrix} B & I & & \\ I & B & I & \\ \vdots & & & \\ & & I & B & I \\ & & & I & B \end{bmatrix}$$

جہاں

$$(21.88) \quad (ب) \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ \vdots & & & \\ & & 1 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ہے جو $(n-1) \times (n-1)$ قالب ہے۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ A غیر نادر ہو گا۔ □

ایسا قالب جس کے تمام غیر صفر اجزاء مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے متوازی ترچھی لکیروں پر واقع ہوں (ان لکیروں اور مرکزی وتر کے بیچ ایسی ترچھی لکیں ہو سکتی ہیں جن کے اجزاء صفر ہوں) کو پٹی قالب⁸⁹ کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر مساوات 21.88 میں A پٹی قالب ہے۔ اگرچہ گاوسی اسقاط پٹی میں صفروں کو برقرار نہیں رکھتا ہے البتہ یہ پٹی کے باہر غیر صفر اجزاء بھی پیدا نہیں کرتا ہے۔ یوں عددی سر قالب کی پٹی صورت سود مند ثابت ہوتی ہے۔ مساوات 21.88 میں جوڑ کی ترتیب یوں منتخب کی گئی کہ پٹی قالب حاصل ہو۔

21.9.2 بدلتی رخ خفی ترکیب

ایسا قالب جس میں تمام غیر صفر اجزاء مرکزی وتر یا مرکزی وتر کے ساتھ ملے ہوئے خانوں میں پائے جاتے ہوں کو سہ وتری قالب⁹⁰ کہتے ہیں۔ ایسی صورت میں گاوسی اسقاط کا استعمال خصوصی طور پر سادہ ثابت ہوتا ہے۔

اس سے سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا مساوات لاپلاس یا مساوات پونسن کے مسئلہ ڈرشلے کا اعدادی حل تلاش کرنے کی خاطر ہم مساوات کا ایسا نظام حاصل کر سکتے ہیں جس کا عددی سر قالب سہ وتری ہو۔ جی ہاں ایسا ممکن ہے اور سہ

⁸⁹band matrix
⁹⁰tridiagonal matrix

وتری قالب حاصل کرنے کی ایک مقبول ترکیب بدلتی رخ خفی ترکیب⁹¹ کہلاتی ہے۔ مساوات 21.83 کی نقش کو دیکھ کر معلوم ہوتا ہے کہ اگر صف میں صرف یہی تین نقطے ہوں (یا قطار میں یہی تین نقطے ہوں) تب سہ وتری قالب حاصل ہوگی۔ یوں ہم مساوات 21.85 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$(21.89) \quad (الف) \quad u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} - u_{i,j+1}$$

تاکہ بائیں ہاتھ صف j کا حصہ ہو اور دایاں ہاتھ قطار i کا حصہ ہو۔ ظاہر ہے کہ ہم مساوات 21.85 کو

$$(21.89) \quad (ب) \quad u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} - u_{i+1,j}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں بائیں ہاتھ قطار i کا حصہ ہو گا اور دایاں ہاتھ صف j کا حصہ ہو گا۔ ہم بدلتی رخ خفی ترکیب کو بار بار دہرا کر آگے بڑھتے ہیں۔ ہم ہر جوڑ پر ابتدائی قیمت $u_{ij}^{(0)}$ سے شروع کرتے ہیں۔ ہر قدم پر ہم تمام جوڑوں پر نئی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔ ایک قدم میں ہم مساوات 21.89-الف سے اخذ کلیہ تواری استعمال کرتے ہیں جبکہ اگلی قدم میں ہم مساوات 21.89-ب سے اخذ کلیہ تواری استعمال کرتے ہیں اور اسی طرح متواتر یہی کلیات استعمال کرتے ہوئے بڑھتے ہیں۔ یوں اگر ہم $u_{ij}^{(m)}$ حاصل کر چکے ہوں، تب مساوات 21.89-الف کے دائیں ہاتھ میں $u_{ij}^{(m)}$ پر کر کے ہم بائیں ہاتھ کو $u_{ij}^{(m+1)}$ کے لئے حل کریں گے یعنی:

$$(21.90) \quad (الف) \quad u_{i-1,j}^{(m+1)} - 4u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)}$$

ہم مقررہ j یعنی مقررہ صف j کے تمام جوڑوں کے لئے یہ کلیہ استعمال کرتے ہیں جس سے N عدد خطی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جس میں N نامعلوم متغیرات (یعنی جوڑوں پر u کی نئی تخمینہ قیمتیں) ہوں گی، اور جہاں مقررہ صف میں اندرونی نقطوں کی تعداد N ہے۔ مساوات 21.90-الف میں نا صرف گزشتہ قدم کی تخمینہ قیمتیں بلکہ سرحدی قیمتیں بھی شامل ہیں۔ ہم (مقررہ j کے لئے) گاوسی اسقاط سے مساوات 21.90-الف حل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم اگلی صف کے لئے N عدد مساوات کا نظام حاصل کر کے اس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہیں۔ اسی طرح چلتے ہوئے ہم آخری صف کے لئے بھی نتائج حاصل کرتے ہیں۔ اگلے قدم میں ہم رخ تبدیل کرتے ہیں اور $u_{ij}^{(m+1)}$ کو مساوات 21.89-ب کے دائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ اخذ کرتے ہوئے

$$(21.90) \quad (ب) \quad u_{i,j-1}^{(m+2)} - 4u_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)}$$

اس سے قطار در قطار نئی تخمینہ قیمتیں $u_{ij}^{(m+2)}$ حاصل کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے گزشتہ تخمینہ قیمتیں $u_{ij}^{(m+1)}$ اور سرحدی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ ہر مقررہ j ، یعنی ہر قطار کے لئے M خطی مساوات کا نظام حاصل ہو

گا (جہاں قطار میں اندرونی نقطوں کی تعداد M ہے) جس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے M نا معلوم متغیرات کی تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ اس کے بعد اگلی قطار کے لئے نظام حاصل کر کے حل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح آخری قطار تک کی تمام اندرونی جوڑوں پر تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔

بدلتی رخ خفی ترکیب کو سمجھنے کی خاطر ایک مثال پیش کرتے ہیں۔ (حقیقت میں ایسی مثال کو گاوسی اسقاط سے حل کیا جائے گا) اس کے بعد ہم بدلتی رخ خفی ترکیب میں ارتکاز کی بہتری پر غور کریں گے۔

مثال 21.20: مسئلہ ڈرشلے۔ بدلتی رخ خفی ترکیب

بدلتی رخ خفی ترکیب میں ابتدائی قیمتیں 100 ، 100 ، 100 ، 100 لیتے ہوئے مثال 21.19 کو دوبارہ حل کریں۔ جسامت جال وہی رکھیں۔

حل: شکل 21.14-ب جو سرحدی قیمتیں دیتی ہے پر نظر رکھیں۔ مساوات 21.90-الف میں $m = 0$ لیتے ہوئے ہم پہلی تخمینی قیمتیں $u_{11}^{(1)}$ ، $u_{21}^{(1)}$ ، $u_{12}^{(1)}$ ، $u_{22}^{(1)}$ حاصل کرتے ہیں۔ ہم سرحدی قیمتوں کو مساوات 21.90-الف میں بغیر بالائی اشاریہ لکھتے ہیں تاکہ ان پر نظر رکھنا آسان ہو اور یہ واضح کرنے کی خاطر کہ دہرانے کے دوران یہ قیمتیں تبدیل نہیں ہوتی ہیں۔ مساوات 21.90-الف میں $m = 0$ لیتے ہوئے $j = 1$ (پہلی صف) کے لئے درج ذیل نظام حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} (i = 1) \quad u_{01} - 4u_{11}^{(1)} + u_{21}^{(1)} &= -u_{10} - u_{12}^{(0)} \\ (i = 2) \quad u_{11}^{(1)} - 4u_{21}^{(1)} + u_{31} &= -u_{20} - u_{22}^{(0)} \end{aligned}$$

جس کا حل $u_{11}^{(1)} = u_{21}^{(1)} = 100$ ہے۔ دوسری صف یعنی $j = 2$ کے لئے مساوات 21.90-الف سے

$$\begin{aligned} (i = 1) \quad u_{02} - 4u_{12}^{(1)} + u_{22}^{(1)} &= -u_{11}^{(0)} - u_{13} \\ (i = 2) \quad u_{12}^{(1)} - 4u_{22}^{(1)} + u_{32} &= -u_{21}^{(0)} - u_{23} \end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{12}^{(1)} = u_{22}^{(1)} = 66.667$ ہے۔

اب $m = 1$ لیتے ہوئے درج بالا حاصل کردہ تخمینی قیمتیں اور سرحدی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے دوسری تخمینی قیمتیں $u_{11}^{(2)}$ ، $u_{21}^{(2)}$ ، $u_{12}^{(2)}$ ، $u_{22}^{(2)}$ مساوات 21.90-ب سے حاصل کی جاتی ہیں۔ یوں $i = 1$ (پہلی قطار) کے لئے مساوات 21.90-ب سے نظام

$$\begin{aligned} (j = 1) \quad u_{10} - 4u_{11}^{(2)} + u_{12}^{(2)} &= -u_{01} - u_{21}^{(1)} \\ (j = 2) \quad u_{11}^{(2)} - 4u_{12}^{(2)} + u_{13} &= -u_{02} - u_{22}^{(1)} \end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{11}^{(2)} = 91.11$ ، $u_{12}^{(2)} = 64.44$ ہے۔ دوسری قطار یعنی $i = 2$ کے لئے مساوات 21.90-ب سے نظام

$$(j = 1) \quad u_{20} - 4u_{21}^{(2)} + u_{22}^{(2)} = -u_{11}^{(1)} - u_{31}$$

$$(j = 2) \quad u_{21}^{(2)} - 4u_{22}^{(2)} + u_{23} = -u_{12}^{(1)} - u_{32}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{21}^{(2)} = 91.11$ ، $u_{22}^{(2)} = 64.44$ ہے۔

اس مثال میں جو محض بدلتی رخ خفی ترکیب سمجھنے کی خاطر استعمال کی گئی، دوسری تخمینہ قیمتوں کی درستگی تقریباً حصہ کے دو قدم گاوس زائڈل کے برابر ہے (جہاں $u_{11} = w$ ، $u_{21} = x$ ، $u_{12} = y$ ، $u_{22} = z$ ہیں)۔

	u_{11}	u_{21}	u_{12}	u_{22}
بدلتی رخ خفی ترکیب، دوسری تخمینہ	91.11	91.11	64.44	64.44
گاوس زائڈل، دوسری تخمینہ	93.75	90.62	65.62	64.06
مساوات 21.86 کا اصل حل	87.50	87.50	62.50	62.50

□

مقدار معلوم p متعارف کرتے ہوئے مساوات 21.85 کو

$$(21.91) \quad (\text{الف}) \quad u_{i-1,j} - (2+p)u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} + (2-p)u_{ij} - u_{i,j+1}$$

اور

$$(21.91) \quad (\text{ب}) \quad u_{i,j-1} - (2+p)u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} + (2-p)u_{ij} - u_{i+1,j}$$

روپ میں لکھ جاسکتا ہے جس سے بدلتی رخ خفی ترکیب کے زیادہ عمومی کلیات

$$(21.92)$$

$$(\text{الف}) \quad u_{i-1,j}^{(m+1)} - (2+p)u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} + (2-p)u_{ij}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)}$$

اور

$$(21.92)$$

$$(\text{ب}) \quad u_{i,j-1}^{(m+2)} - (2+p)u_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} + (2-p)u_{ij}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)}$$

اخذ ہوتے ہیں۔ ان میں $p = 2$ پر کرنے سے مساوات 21.90 حاصل ہوتے ہیں۔ مقدار معلوم p سے ارتکاز میں بہتری پیدا کی جاسکتی ہے۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ بدلتی رخ خفی ترکیب مثبت p کے لئے مرتکز ہوگی اور ارتکاز کی شرح زیادہ سے زیادہ حاصل کرنے کے لئے p کی بہترین قیمت

$$p_o = 2 \sin \frac{\pi}{C} \quad (21.93)$$

ہے جہاں C کی قیمت $M + 1$ اور $N + 1$ میں زیادہ بڑی قیمت کے برابر ہے۔ مزید بہتر نتائج حاصل کرنے کی خاطر p کی قیمت کو ہر ایک قدم کے دوران مختلف رکھا جاسکتا ہے۔

سوالات

سوال 21.119: مساوات 21.79-ب اخذ کریں۔

سوال 21.120: مساوات 21.80-ب اخذ کریں۔

سوال 21.121: مساوات 21.80-پ اخذ کریں۔

جواب: $u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{2k} [u_x(x, y + k) - u_x(x, y - k)]$ میں درج ذیل پر کریں۔
 $u_x(x, y \mp k) \approx \frac{1}{2h} [u(x + h, y \mp k) - u(x - h, y \mp k)]$

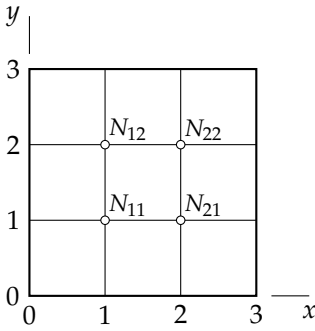
سوال 21.122: تشاکی کا استعمال

مثال 21.19 کی سرحدی قیمتوں کو دیکھ کر فیصلہ کریں کہ $u_{21} = u_{11}$ اور $u_{22} = u_{12}$ ہو گا۔ دکھائیں کہ اس سے دو مساوات کا نظام حاصل ہو گا۔ اس نظام کو حل کریں۔

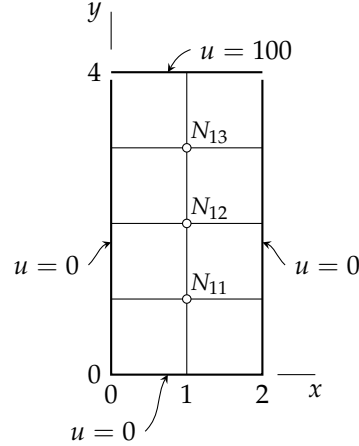
سوال 21.123: $h = 6$ لیتے ہوئے مثال 21.19 میں u_{11} حاصل کریں۔ اس کا بالکل درست قیمت 75 کے ساتھ موازنہ کریں۔
 جواب: 75

سوال 21.124: $h = 3$ لیتے ہوئے مثال 21.19 حل کریں۔

سوال 21.125: شکل 21.15 میں N_{11} ، N_{12} ، N_{13} پر ساکن برقی مخفی قوہ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ یہ نقطے موصل چادروں کے درمیان پائے جاتے ہیں (جو شکل میں بطور مستطیل نظر آتے ہیں) اور جن پر برقی مخفی قوہ 0V اور 100V ہے۔ دکھایا گیا جال اور گاوسی استقاط استعمال کریں۔



شکل 21.16: شکل برائے سوال 21.126، سوال 21.127 اور سوال 21.130



شکل 21.15: شکل برائے سوال 21.125

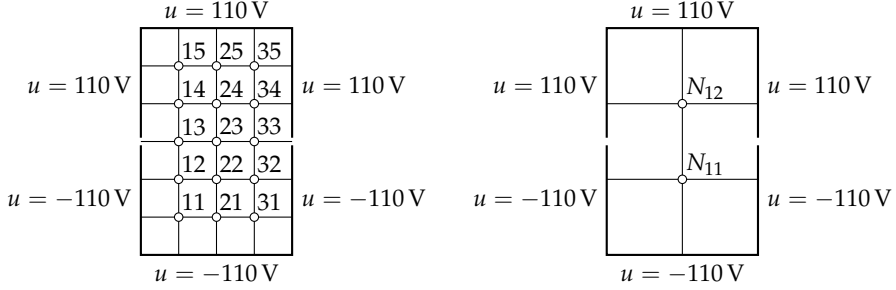
جواب: 1.96, 7.86, 29.46

سوال 21.126: شکل 21.16 میں نیچے چادر پر $u = x^3$ ، دائیں چادر پر $u = 27 - 9y^2$ ، بالائی چادر پر $u = x^3 - 27x$ اور بائیں چادر پر $u = 0$ تصور کرتے ہوئے مخفی قوہ $u(x, y)$ کو گاوسی اسقاط سے تلاش کریں۔

سوال 21.127: شکل 21.16 میں نیچے چادر پر $u = x^4$ ، دائیں چادر پر $u = 81 - 54y^2 + y^4$ ، بالائی چادر پر $u = x^4 - 54x^2 + 81$ اور بائیں چادر پر $u = y^4$ تصور کرتے ہوئے مخفی قوہ $u(x, y)$ کو گاوسی اسقاط سے تلاش کریں۔ تصدیق کریں کہ اس مسئلے کا حل $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ہے اور خلل تلاش کریں۔
جواب: -2, -5, -5, -62

سوال 21.128: شکل 21.17 میں مخفی قوہ کو (الف) چوڑی جال پر، (ب) باریک جال پر، گاوسی اسقاط کی مدد سے تلاش کریں۔ اشارہ۔ باریک جال میں تشاکل استعمال کریں اور ان دو نقطوں پر جہاں سرحدی مخفی قوہ میں چھلانگ پائی جاتی ہے وہاں مخفی قوہ کو 0V (یعنی -110V اور 110V کی اوسط) فرض کریں۔

سوال 21.129: ترکیب گاوس زائڈل میں 0,0 سے ابتدا کرتے ہوئے کتنے قدم بعد سوال 21.128 میں چوڑی جال کے نتائج پانچ طحوظ ہندسوں تک درست ہوں گے؟ باریک جال کی صورت میں ارتکاز کی شرح بہت کم



شکل 21.17: شکل برائے سوال 21.128

ہوگی۔ کیا مساوات کی نظام کو دیکھ کر آپ اس کی وجہ بتا سکتے ہیں۔
جواب: پانچ قدم

سوال 21.130: شکل 21.16 میں بالائی چادر پر $u = \sin \frac{1}{3} \pi x$ جبکہ باقی چادروں پر $u = 0$ ہے۔ تصدیق کریں کہ اس کا بالکل درست حل $u(x, y) = \frac{\sin \frac{1}{3} \pi x \sinh \frac{1}{3} \pi y}{\sinh \pi}$ ہے۔ اعدادی حل حاصل کرتے ہوئے خلل کا تخمینہ لگائیں۔

سوال 21.131: مساوات 21.87 میں دیے گئے نظام کے لئے مساوات 21.88 کی تصدیق کریں۔ دکھائیں کہ مساوات 21.87 میں A غیر نادر ہے۔

سوال 21.132: شکل 21.16 کی جال استعمال کرتے ہوئے سوال 21.130 کے مسئلہ ڈرشلے کو بدلتی رخ مخفی ترکیب سے دو قدم تک حل کریں۔ ابتدائی قیمتیں صفر لیں۔

سوال 21.133: مقدار معلوم p (مساوات 21.93) کی موزوں قیمت سوال 21.132 کے لئے تلاش کریں۔ $p_0 = 1.7$ لیتے ہوئے مساوات 21.92 میں دیے گئے بدلتی رخ مخفی کلیات سے سوال 21.132 کو ایک قدم تک حل کریں۔ ایک قدم کے بعد سوال 21.132 کی پہلی قدم کی قیمتوں 0.077 اور 0.308 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ارتکاز میں بہتری کی تصدیق کریں۔ ابتدائی قیمتیں صفر لیں۔

جواب: $\sqrt{3}u_{11} = u_{21} = 0.0859, u_{12} = u_{22} = 0.3180$ (چار اعشاریہ درست نتائج 0.1083, 0.3248 ہیں۔)

سوال 21.134: $p = 0$ لینے سے مساوات 21.92 کے کلیات کارآمد نہیں رہتے ہیں۔ یہ دیکھنے کی خاطر انہیں استعمال کرتے ہوئے مثال 21.20 کو دو قدم تک حل کریں۔ مثال میں دیا گیا جال اور ابتدائی قیمتیں استعمال کریں۔ نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے؟

21.10 مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ۔ غیر منظم سرحد

ہم xy مستوی کے خطہ R میں بیضوی مساوات کی سرحدی قیمت مسئلہ کے اعدادی حل پر بحث جاری رکھتے ہیں۔ مسئلہ ڈرشلے پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا ہے۔ نیومن اور مخلوط مسئلوں میں ہمیں نئی صورت حال کا سامنا ہوتا ہے چونکہ سرحد کے کچھ مقامات پر ہمیں u کی بجائے $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ دیا گیا ہو گا لہذا سرحد کی ان مقامات پر ہمیں u معلوم نہیں ہو گا۔ اس نقطوں پر صورت حال سے نپٹنے کی خاطر ہمیں نئی تدبیر درکار ہو گی۔ یہ تدبیر نیومن اور مخلوط مسائل کے لئے یکساں ہے لہذا ہم ان میں سے کسی ایک کو مثال بنا کر ترکیب کو سمجھ سکتے ہیں۔

مثال 21.21: مساوات پوئسن کا مخلوط قیمت سرحدی مسئلہ
مساوت پوئسن

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 12xy$$

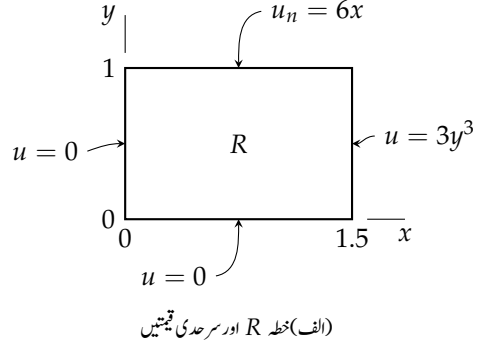
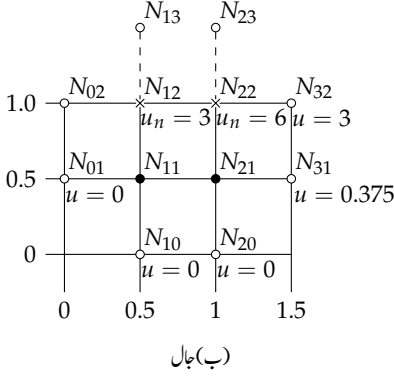
کا مخلوط قیمت سرحدی مسئلہ شکل 21.18-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔

حل: ہم شکل 21.21-ب میں دکھایا گیا جال استعمال کرتے ہیں جہاں $h = 0.5$ ہے۔ کلیات $u = 3y^3$ اور $u_n = 6x$ سے سرحد پر

$$(21.94) \quad u_{31} = 0.375, \quad u_{32} = 3, \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial n} = \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial n} = \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = 6$$

حاصل ہو گا۔ N_{11} اور N_{21} خطہ R کے اندرونی نقطے ہیں لہذا ان سے گزشتہ حصہ کی طرح برتا جا سکتا ہے۔ یقیناً $h^2 = 0.25$ ، $f(x, y) = 12xy$ اور سرحدی معلومات استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.81 سے N_{21} اور N_{11} کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(21.95) \quad \begin{aligned} & -4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0.75 \\ & u_{11} - 4u_{21} + u_{22} = 1.5 - 0.375 = 1.125 \end{aligned} \quad (\text{الف})$$



شکل 21.18: اشکال برائے مثال 21.21

ان مساوات میں سرحد کے نقطہ N_{12} اور N_{22} پر u کی قیمتیں u_{12} اور u_{22} درکار ہیں جبکہ ہمیں ان نقطوں پر عمودی تفرق $u_n = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}$ کی قیمتیں دی گئی ہیں۔ ہم اس مشکل سے جلد نجات حاصل کر پائیں گے۔

ہم نقطہ N_{13} اور N_{23} پر غور کرتے ہیں۔ ہم تصور میں R کو وسعت دے کر بالائی جانب پہلی بیرونی صف (یعنی $y = 1.5$ کے مطابقتی نقطوں) کو R میں شامل کرتے ہیں اور ساتھ ہی فرض کرتے ہیں کہ تفرقی مساوات توسیع کردہ خطہ میں بھی کارآمد ہے۔ تب ہم پہلے کی طرح مزید دو مساوات

$$(21.95) \quad \begin{aligned} (ب) \quad & u_{11} - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} = 1.5 \\ & u_{21} + u_{12} - 4u_{22} + u_{23} = 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں (شکل 21.18-ب)۔ دھیان رہے کہ R کی بالائی سرحد پر دی گئی معلومات کو اب تک ہم نے استعمال نہیں کیا ہے، اور مساوات 21.95-ب میں ہم نے دو اضافی متغیرات u_{13} اور u_{23} بھی متعارف کیے ہیں۔ اب ہم بالائی سرحد پر دی گئی معلومات اور u_y کی مساوات فرق استعمال کرتے ہوئے u_{13} اور u_{23} سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 21.94 سے

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = \frac{u_{13} - u_{11}}{2h} = u_{13} - u_{11} \implies u_{13} = u_{11} + 3 \\ 6 &= \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = \frac{u_{23} - u_{21}}{2h} = u_{23} - u_{21} \implies u_{23} = u_{21} + 6 \end{aligned}$$

حاصل ہو گا جنہیں مساوات 21.95-ب میں پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} 2u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= 1.5 - 3 = -1.5 \\ 2u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= 0 - 6 = -6 \end{aligned}$$

انہیں مساوات 21.95-الف کے ساتھ ملا کر قابلی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(21.96) \quad \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.750 \\ 1.125 \\ -1.500 \\ -6.000 \end{bmatrix}$$

اس کا حل درج ذیل ہے جہاں بالکل درست حل کو ساتھ توسیع میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} u_{12} &= 0.866 \quad (1.000) & u_{22} &= 1.812 \quad (2.000) \\ u_{11} &= 0.077 \quad (0.125) & u_{21} &= 0.191 \quad (0.250) \end{aligned}$$

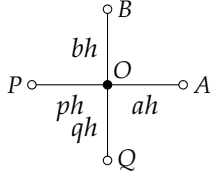
□

غیر منظم سرحد

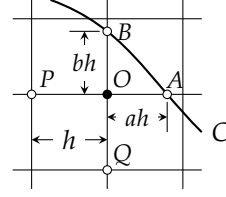
ہم xy مستوی میں خطہ R پر بیضوی مساوات کے سرحدی مسئلے کے اعدادی حل پر غور جاری رکھتے ہیں۔ اگر R کی سادہ جیومیٹریائی شکل ہو تب عموماً ہم جال کو یوں بچھا سکتے ہیں کہ R کی سرحد C پر جال کے کئی جوڑ پائے جاتے ہوں۔ یوں ہم جزوی تفرق کو گزشتہ حصہ کی طرح تخمینی طور پر لکھ سکتے ہیں۔ البتہ اگر سرحد C جال کو جوڑ سے ہٹ کر قطع کرتا ہو تب سرحد کے قریب نقطوں پر ہمیں کچھ مختلف طرز عمل اختیار کرنا ہو گا۔ آئیں ایسی صورت کو دیکھیں۔

شکل 21.19 میں جوڑ O اس قسم کا نقطہ ہے۔ O اور اس کے پڑوسی نقطے A اور P کے لئے ٹیلر تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(21.97) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad u_A &= u_O + ah \frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2} (ah)^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \dots \\ \text{(ب)} \quad u_P &= u_O - h \frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \dots \end{aligned}$$



شکل 21.19: جوڑ O کے پڑوسی نقطے A، B، P اور Q



شکل 21.20: غیر منظم سرحد

ہم ٹیلر تسلسل کی پہلی تین اجزاء لیتے ہوئے باقی اجزاء کو رد کرتے ہیں اور ساتھ ہی $\frac{\partial u_O}{\partial x}$ کو حذف کرنے کی غرض سے مساوات 21.97-ب کو a سے ضرب دے کر مساوات 21.97-الف کے ساتھ جمع کرتے ہوئے

$$u_A + au_P \approx (1+a)u_O + \frac{1}{2}a(1+a)h^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}$$

حاصل کرتے ہیں جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{a(1+a)} u_A + \frac{1}{1+a} u_P - \frac{1}{a} u_O \right]$$

اسی طرح نقطہ O، B اور Q کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial y^2} \approx \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{b(1+b)} u_B + \frac{1}{1+b} u_Q - \frac{1}{b} u_O \right]$$

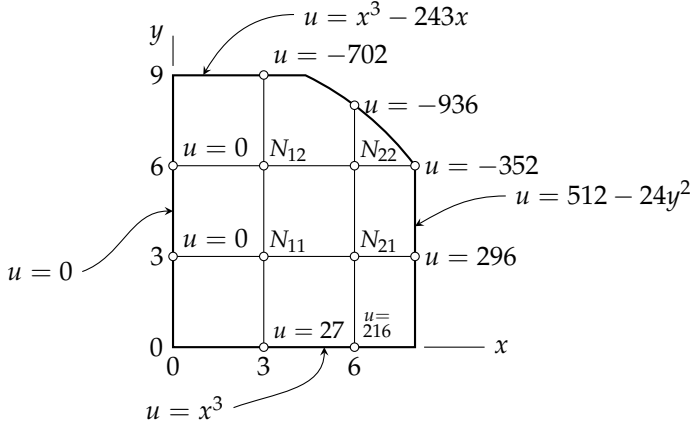
درج بالا دونوں مساوات کا مجموعہ

$$(21.98) \quad \nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2} \left[\frac{u_A}{a(1+a)} + \frac{u_B}{b(1+b)} + \frac{u_P}{1+a} + \frac{u_Q}{1+b} - \frac{(a+b)u_O}{ab} \right]$$

ہوگا۔ مثال کے طور پر اگر $a = \frac{1}{2}$ ، $b = \frac{1}{2}$ ہوں تب مساوات 21.83 کی نقش کی بجائے درج ذیل نقش

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{4}{3} & & \\ \frac{2}{3} & -4 & \frac{4}{3} \\ & \frac{2}{3} & \end{array} \right\}$$

حاصل ہوگا۔ اس نقش کے پانچ اعداد کا مجموعہ اب بھی صفر کے برابر ہے (جو درستگی کو پرکھنے کی ایک اچھی ترکیب ہے)۔



شکل 21.21: شکل برائے مثال 21.22

اسی طرح آپ شکل 21.20 کے لئے

(21.99)

$$\nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2} \left[\frac{u_A}{a(a+p)} + \frac{u_B}{b(b+q)} + \frac{u_P}{p(p+a)} + \frac{u_Q}{q(q+b)} - \frac{ap+bq}{abpq} u_O \right]$$

حاصل کر سکتے ہیں جو ہر ممکنہ صورت حاصل کو پنپا سکتی ہے۔

مثال 21.22: مساوات لاپلاس کا مسئلہ ڈرشلے۔ قوسی سرحد
شکل 21.21 میں دکھائے گئے خطہ میں مخفی قوتہ u تلاش کریں۔ یہاں سرحد کو قوسی حصہ ایک دائرے کا حصہ ہے جس کا رداس 10 اور مرکز $(0,0)$ ہے۔ سرحدی معلومات شکل میں دی گئیں ہیں۔ شکل میں دیا گیا جال استعمال کریں۔

حل: مساوات لاپلاس کا حل u ہو گا۔ سرحد پر کلیات $u = x^3$ ، $u = 512 - 24y^2$ ، وغیرہ سے ہم درکار نقطوں پر قیمتیں حاصل کرتے ہیں جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ N_{11} اور N_{12} کے لئے عمومی منظم نقش حاصل ہوتا ہے، اور N_{21} اور N_{22} کے لئے ہم مساوات 21.99 سے

(21.100)

$$N_{11}, N_{12} : \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}, N_{21} : \begin{Bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ -2.5 & 0.5 \end{Bmatrix}, N_{22} : \begin{Bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ -3.0 & 0.6 \end{Bmatrix}$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم انہیں اور سرحدی قیمتیں کو استعمال کرتے ہیں اور جوڑوں کو N_{11} ، N_{21} ، N_{12} ، N_{22} ترتیب میں لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= 0 - 27 &= -27 \\ 0.6u_{11} - 2.5u_{21} + 0.5u_{22} &= -0.9(296) - 0.5(216) = -374.4 \\ u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= 702 + 0 &= 702 \\ 0.6u_{21} + 0.6u_{12} - 3u_{22} &= 0.9(352) + 0.9(936) = 1159.2 \end{aligned}$$

اس کو قلابی صورت میں لکھ کر

$$(21.101) \quad \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0.6 & -2.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0.6 & 0.6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -374.4 \\ 702 \\ 1159.2 \end{bmatrix}$$

گاوسی اسقاط کی مدد سے درج ذیل نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$u_{11} = -55.6, \quad u_{21} = 49.2, \quad u_{12} = -298.5, \quad u_{22} = -436.3$$

ظاہر ہے کہ اتنے کم خانوں کی جال سے ہمیں زیادہ درست نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔ بالکل درست نتائج درج ذیل ہیں۔

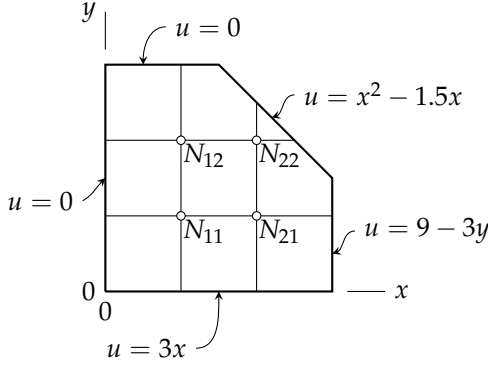
$$u_{11} = -54, \quad u_{21} = 54, \quad u_{12} = -297, \quad u_{22} = -432$$

عملاً بہت باریک جال استعمال کرتے ہوئے بڑا نظام حاصل کیا جائے گا جس کو بالواسطہ ترکیب سے حل کیا جائے گا۔ □

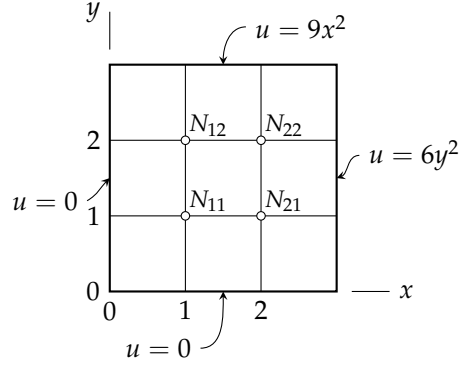
سوالات

سوال 21.135: مساوات 21.96 کے نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے مثال 21.21 کی آخر میں دی گئی قیمتوں کو پرکھیں۔

سوال 21.136: شکل 21.18-الف کی مستطیل میں (اور شکل-ب کا جال استعمال کرتے ہوئے) مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ کا ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں بائیں چادر پر $u_x = 0$ ، دائیں چادر پر $u_x = 3$ ، چلی چادر پر $u = x^2$ اور بالائی چادر پر $u = x^2 - 1$ ہیں۔



شکل 21.23: شکل برائے سوال 21.143



شکل 21.22: شکل برائے سوال 21.137

سوال 21.137: مساوات پوئسن $\nabla^2 u = 2(x^2 + y^2)$ کے مخلوط قیمت مسئلے کا حل شکل 21.22 کے لئے (شکل میں دیے گئے جال کے لئے) حاصل کریں۔ سرحدی معلومات شکل میں دی گئی ہیں۔

جواب: $u_{11} = 1, u_{21} = u_{12} = 4, u_{22} = 16$

سوال 21.138: مساوات 21.97 میں سے $\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}$ حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\frac{\partial u_O}{\partial x} \approx \frac{1}{h} \left[\frac{1}{a(1+a)} u_A - \frac{1-a}{a} u_O - \frac{a}{1+a} u_P \right]$$

سوال 21.139: ٹھیک مساوات 21.98 کے بعد دی گئی نمونہ حساب کی تصدیق کریں۔

سوال 21.140: مساوات 21.99 حاصل کرنے کی تفصیل پیش کریں۔

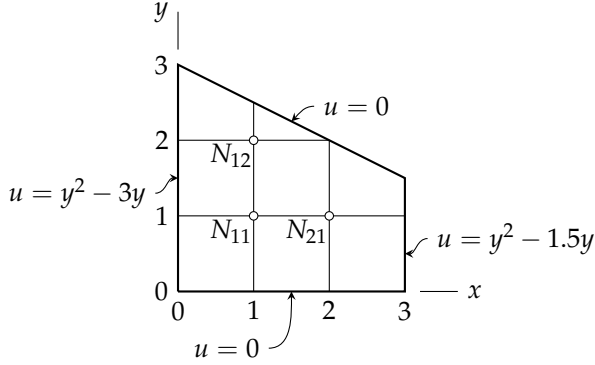
سوال 21.141: مساوات 21.100 کی تصدیق کریں۔

سوال 21.142: قلابی مساوات 21.101 کو گاوسی اسقاط کی مدد سے حل کریں۔

سوال 21.143: مساوات لاپلاس کا حل شکل 21.23 میں دیے گئے مسئلہ کے لئے (شکل میں دیے گئے جال پر)

حاصل کریں۔ سرحدی معلومات شکل میں دی گئی ہیں۔ (سرحد کا ترچھا حصہ $y = 4.5 - x$ ہے۔)
جواب: $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = -3, u_{11} - 4u_{21} + u_{22} = -12, u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = 0,$
 $2u_{21} + 2u_{12} - 12u_{22} = -14, u_{11} = u_{22} = 2, u_{21} = 4, u_{12} = 1$

سوال 21.144: مساوات پوئسن $\nabla^2 u = 2$ کو شکل 21.24 کے خطہ کے لئے حل کریں۔



شکل 21.24: شکل برائے سوال 21.144

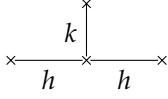
21.11 اعدادی تراکیب برائے قطع مکانی مساوات

جیسا کہ ہم نے حصہ 21.9 میں ذکر کیا، مختلف اقسام کی مساوات مثلاً بیضوی، قطع مکانی اور قطع زائد کے حل کا رویہ مختلف ہو گا۔ اسی طرح ان کے اعدادی تراکیب بھی کچھ مختلف ہوں گے۔ تینوں اقسام میں ہم مساوات کی جگہ مطابقتی مساوات فرق لکھتے ہیں لیکن قطع مکانی اور قطع زائد مساوات کی صورت میں ضروری نہیں ہے کہ تخمینی اعدادی حل $h \rightarrow 0$ کرنے سے اصل حل کو مرتکز ہو، بلکہ اس سے کسی صورت بھی ارتکاز یقینی نہیں ہو گی۔ ان دو صورتوں میں مرتکز (اور مستحکم) حل کے لئے اضافی شرائط (عدم مساوات) کا ہونا لازمی ہے۔ حل کی استحکام سے مراد ہے کہ ابتدائی معلومات میں معمولی اضطراب (یا کسی بھی لمحہ پر معمولی اضطراب) بعد میں بھی معمولی ہی رہے گی۔

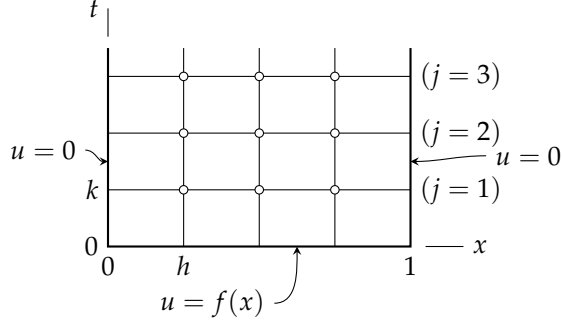
اس حصہ میں ہم حراری مساوات کو مثال بناتے ہوئے قطع مکانی مساوات کے اعدادی حل پر غور کرتے ہیں۔ ہم مذکورہ بالا اور دیگر صورتوں پر یک بعدی حراری مساوات

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad (c \text{ مستقل})$$

کی مدد سے غور کرتے ہیں۔ اس مساوات پر عموماً کسی وقفہ $0 \leq x \leq l$ میں وقت $t \geq 0$ کے لئے غور کیا جاتا ہے جہاں ابتدائی درجہ حرارت $u(x, 0) = f(x)$ (جہاں f دیا گیا ہو گا) اور تمام $t \geq 0$ کے لئے $x = 0$ اور $x = l$ پر سرحدی معلومات، مثلاً $u(0, t) = 0$ ، $u(l, t) = 0$ ، دی گئی ہوں گی۔ ہم اپنی



شکل 21.26: مساوات 21.105 اور
مساوات 21.106 کے چار نقطے



شکل 21.25: جال اور جوڑ برائے مساوات 21.105 اور مساوات 21.106

آسانی کی خاطر $c = 1$ اور $l = 1$ لیتے ہیں جو x اور t کی خطی تبادل سے ممکن ہو گا۔ تب حراری مساوات اور دی گئی معلومات درج ذیل ہوں گی۔

$$(21.102) \quad u_t = u_{xx} \quad 0 \leq x \leq l, t \geq 0$$

$$(21.103) \quad u(x, 0) = f \quad (\text{ابتدائی شرائط})$$

$$(21.104) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (\text{سرحدی شرائط})$$

مساوات 21.102 کا مطابقتی تخمینہ مساوات فرق درج ذیل ہے۔

$$(21.105) \quad \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j})$$

شکل 21.25 میں مطابقتی جال اور جوڑ دکھائے گئے ہیں۔ x رخ میں جسامت جال h ہے جبکہ t رخ جسامت جال k ہے۔ مساوات 21.105 میں استعمال ہونے والے چار نقطوں کو شکل 21.26 میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ منفی t پر ہمارے پاس کوئی معلومات نہیں ہیں لہذا بائیں ہاتھ آگے فرق کا حاصل تقسیم استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 21.105 سے ہم وقت t کی صف $j+1$ کے لئے $u_{i,j+1}$ کو وقت j کے مطابقتی u کی صورت میں حاصل کرتے ہیں؛ مساوات 21.105 کو $u_{i,j+1}$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(21.106) \quad u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad r = \frac{k}{h^2}$$

اس کلیہ سے با آسانی نتائج حاصل ہوں گے البتہ ارتکاز کے لئے ضروری ہے کہ درج ذیل شرط

$$(21.107) \quad r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

کو مطمئن کیا جائے جس سے مساوات 21.106 میں u_{ij} کا عددی سر غیر منفی ہو گا۔ مساوات 21.107 کہتی ہے کہ t رخ میں زیادہ تیزی سے نہ چلا جائے۔ نیچے ایک مثال دی گئی ہے۔

ترکیب کریک نکلسن⁹²

عملی استعمال میں مساوات 21.107 کی شرط مسائل پیدا کرتی ہے۔ یقیناً زیادہ درست نتائج کے لئے h کی قیمت کم رکھنا ضروری ہے لہذا مساوات 21.107 کے تحت k بہت کم ہو گا۔ مثلاً $h = 0.1$ کی صورت میں $k \leq 0.005$ ہو گا۔ اب $\frac{h}{2}$ کی استعمال سے، کسی بھی t تک پہنچنے کی خاطر، قدموں کی تعداد چار گنا بڑھتی ہے۔ ہمیں بہتر ترکیب کی ضرورت ہے۔

کی قیمت پر ترکیب کریک نکلسن⁹³ کوئی پابندی عائد نہیں کرتی ہے۔ یہ ترکیب شکل 21.27 کے چھ نقطوں کو استعمال کرتی ہے۔ اس ترکیب میں مساوات 21.105 کے دائیں ہاتھ فرق کے حاصل تقسیم کی جگہ شکل 21.27 کے دو عدد صف وقت کے مجموعہ کا $\frac{1}{2}$ گنا پر کیا جاتا ہے۔ یوں مساوات 21.105 کی بجائے

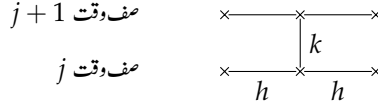
$$(21.108) \quad \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1})$$

حاصل ہو گا۔ دونوں اطراف کو $2k$ سے ضرب دے کر $r = \frac{k}{h^2}$ لکھتے ہوئے بائیں ہاتھ صف وقت $j+1$ کے مطابق تین اجزاء اور دائیں ہاتھ صف وقت j کے تین مطابق تین اجزاء منتقل کرتے ہوئے

$$(21.109) \quad (2 + 2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

حاصل ہو گا۔ عموماً مساوات 21.109 میں بائیں ہاتھ تینوں اجزاء نا معلوم ہوں گے جبکہ دائیں ہاتھ تینوں اجزاء معلوم ہوں گے۔ مساوات 21.102 کے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ کو n عدد برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے فی صف وقت ہمیں $n-1$ اندرونی جوڑ حاصل ہوں گے (شکل 21.25 دیکھیں جہاں $n=4$ ہے)۔ تب $j=0$ اور $i=1, \dots, n-1$ کے لئے مساوات 21.109 سے $n-1$ عدد خطی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جو پہلی صف وقت کے $n-1$ عدد نا معلوم متغیرات $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n-1,1}$ کو ابتدائی قیمتوں $u_{00}, u_{10}, \dots, u_{n0}$

⁹² فرانسس ماہر طبیعیات جان کریک [1916-2006] اور برطانوی ریاضی دان فلکس نکلسن [1917-1968]
Crank-Nicolson method⁹³



شکل 21.27: ترکیب کریک نکلسن میں استعمال ہونے والے چھ نقطے

اور سرحدی قیمتوں $u_{01}, u_{n1} (= 0)$ کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ اسی طرح ہر صف وقت، مثلاً $j = 1$ ، $j = 2$ وغیرہ، کے لئے بھی مساوات 21.109 سے $n - 1$ عدد خطی مساوات کا نظام حاصل کر کے حل کیا جائے گا۔

اگرچہ $r = \frac{k}{h^2}$ پر اب کوئی پابندی عائد نہیں ہے البتہ h کی چھوٹی قیمت اب بھی زیادہ درست نتائج دے گی۔ عملاً k کی قیمت یوں منتخب کی جاتی ہے کہ، r کی قیمت بہت زیادہ بڑھائے بغیر، کام میں نمایاں کمی واقع ہو۔ مثال کے طور پر عموماً $r = 1$ منتخب کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے (جو گزشتہ بلا واسطہ ترکیب میں ناممکن ہو گا)۔ تب مساوات 21.109 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

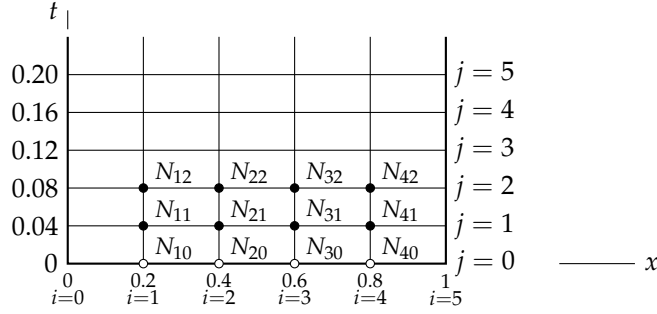
$$(21.110) \quad 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j}$$

مثال 21.23: سلاخ کی درجہ حرارت۔ ترکیب کریک نکلسن، بلا واسطہ ترکیب
ایک سلاخ جس کی لمبائی 1 ہے کے اطراف عاجز شدہ ہیں جبکہ اس کے سر 0°C پر رکھے گئے ہیں اور کسی لمحہ، جس کو ہم $t = 0$ لیتے ہیں، پر سلاخ میں حرارت $f(x) = \sin \pi x$ ہے۔ حراری مساوات میں $c^2 = 1$ لیں۔ ترکیب کریک نکلسن استعمال کرتے ہوئے $h = 0.2$ اور $r = 1$ لیتے ہوئے $0 \leq t \leq 0.2$ کے لئے سلاخ میں درجہ حرارت $u(x, t)$ تلاش کریں۔ حاصل نتائج کا اصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ ساتھ ہی اس صورت مساوات 21.106 استعمال کریں جب r مساوات 21.107 کو مطمئن کرتا ہو، مثلاً $r = 0.25$ ، اور جب r مساوات 21.107 کو مطمئن نہ کرتا ہو، مثلاً $r = 1$ اور $r = 2.5$ ۔

حل: ترکیب کریک نکلسن

چونکہ $r = 1$ ہے لہذا مساوات 21.110 استعمال ہو گی۔ چونکہ $r = 1$ اور $h = 0.2$ ہیں لہذا $r = \frac{k}{h^2}$ سے $k = h^2 = 0.04$ ہو گا۔ یوں ہمیں چار قدم چلنا ہو گا۔ شکل 21.28 میں جال دکھائی گئی ہے۔ ہمیں درج ذیل ابتدائی قیمتیں درکار ہوں گی۔

$$u_{10} = \sin 0.2\pi = 0.587785, \quad u_{20} = \sin 0.4\pi = 0.951057$$



شکل 21.28: جال (مثال 21.23)

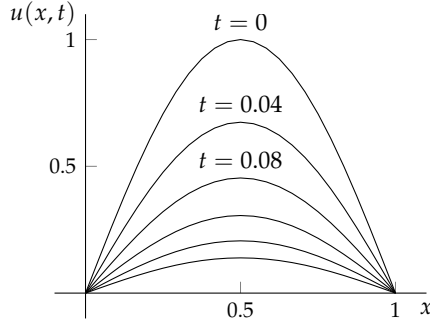
مزید $u_{30} = u_{20}$ اور $u_{40} = u_{10}$ ہوں گے۔ یاد رہے کہ u_{10} سے مراد شکل 21.28 میں نقطہ N_{10} پر u کی قیمت ہے۔ شکل کے ہر صف وقت میں چار عدد اندرونی جوڑ پائے جاتے ہیں۔ یوں وقت کے ہر ایک قدم پر ہم 4 عدد خطی مساوات حل کرتے ہوئے 4 نا معلوم متغیرات حاصل کریں گے۔ چونکہ ابتدائی درجہ حرارت، نقطہ $x = 0.5$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور سلاخ کے دونوں سر 0°C پر ہیں لہذا پہلی صف وقت میں $u_{31} = u_{21}$ اور $u_{41} = u_{11}$ ہوں گے اور اسی طرح باقی صفوں میں بھی ہو گا۔ اس کی بنا مساوات کا نظام کم ہو کر دو مساوات پر مبنی ہو گا جن میں دو نا معلوم متغیرات ہوں گے۔ چونکہ $j = 1$ کے لئے $u_{31} = u_{21}$ ہے لہذا مساوات 21.110 درج ذیل دے گی۔

$$\begin{aligned} 4u_{11} - u_{21} &= u_{00} + u_{20} = 0.951057 \\ -u_{11} + 4u_{21} - u_{21} &= u_{10} + u_{20} = 1.538842 \end{aligned}$$

اس کا حل $u_{11} = 0.399274$ اور $u_{21} = 0.646039$ ہے۔ اسی طرح صف وقت $j = 2$ کے لئے

$$\begin{aligned} 4u_{12} - u_{22} &= u_{01} + u_{21} = 0.646039 \\ -u_{12} + 3u_{22} &= u_{11} + u_{21} = 1.045313 \end{aligned}$$

ہو گا جس کا حل $u_{12} = 0.271221$ اور $u_{22} = 0.438845$ ہے۔ اسی طرح باقی (درج ذیل) قیمتیں



شکل 21.29: سلاخ میں حرارت (مثال 21.23)

حاصل کی جائیں گی جنہیں شکل 21.29 میں دکھایا گیا ہے۔

t	x=0	x=0.2	x=0.4	x=0.6	x=0.8	x=1
0.00	0	0.588	0.951	0.951	0.588	0
0.04	0	0.399	0.646	0.646	0.399	0
0.08	0	0.271	0.439	0.439	0.271	0
0.12	0	0.184	0.298	0.298	0.184	0
0.16	0	0.125	0.202	0.202	0.125	0
0.20	0	0.085	0.138	0.138	0.085	0

موجودہ مسئلے کا درست حل درج ذیل ہے (حصہ 13.5)۔

$$u(x, t) = \sin \pi x e^{-\pi^2 t}$$

□

اعدادی قیمتوں کا موازنہ اب پیش کرتے ہیں۔

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

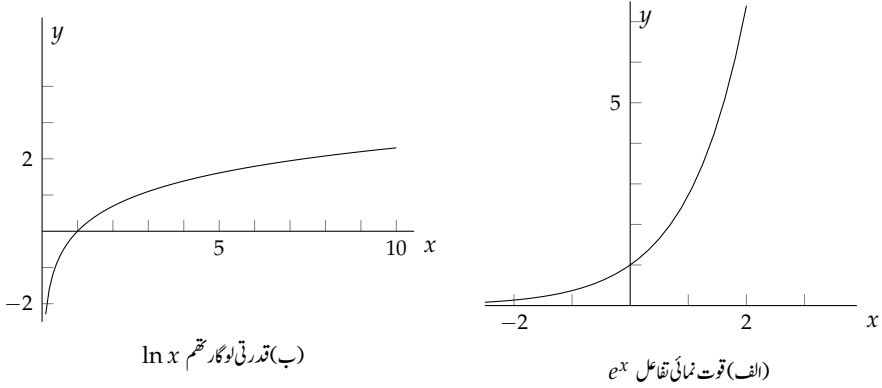
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

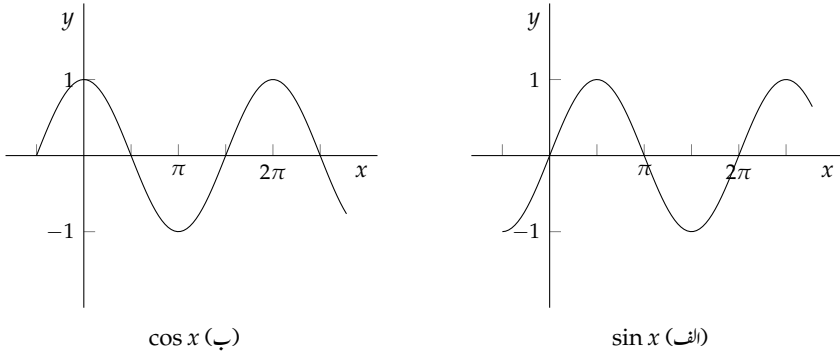
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

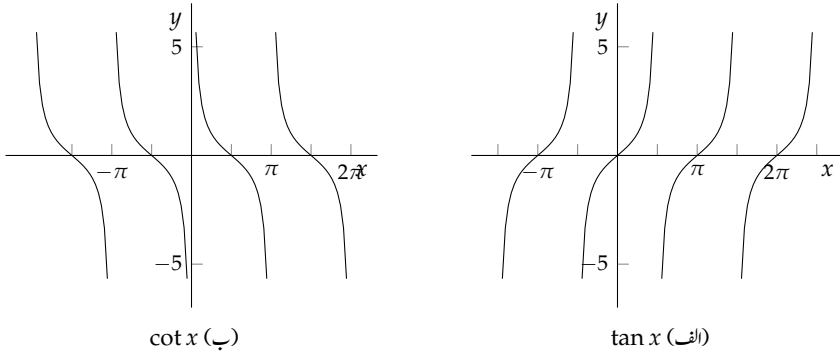
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

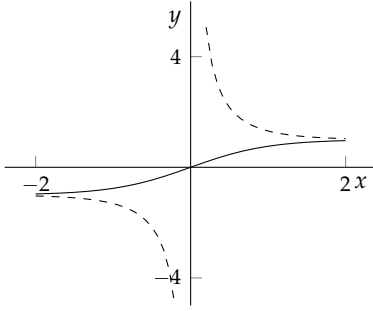
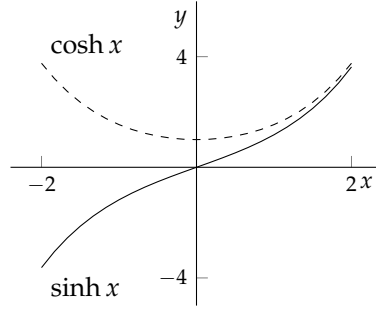
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

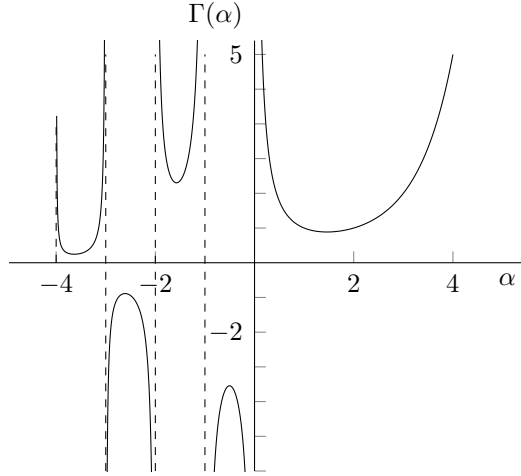
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

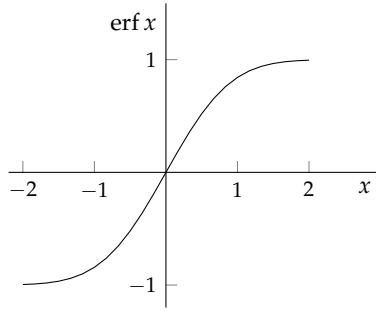
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

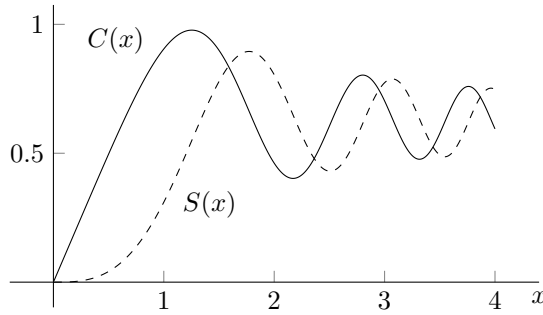
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

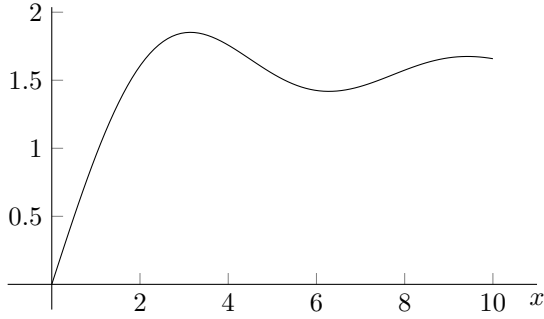
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

 $\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

