انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 21

اعدادی تجزیہ

انجینئری حساب کا نتیجہ آخرکار اعدادی ہوتا ہے لہٰذا انجینئری طالب علم کے لئے بنیادی **اعدادی تراکیب**[1] جاننا ضروری ہیں جن کی مدد سے دیے گئے مواد سے اعدادی جوابات اخذ کرنا ممکن ہو۔

بعض اوقات نظریہ سے حاصل کردہ جوابات عملاً قابل استعمال نہیں ہوتے ہیں، مثلاً یک درجی خطی تفرقی مساوات کے حل کا تکملی کلیہ (حصہ 1.5)، خطی الجبرائی مساوات کے نظام کا مقطع کی مدد سے حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7)۔ کئی بار نظریہ صرف حل کی وجودیت کی یقین دہانی کرتا ہے لیکن اصل حل حاصل کرنے کے بارے میں کوئی مدد فراہم نہیں کرتا ہے۔

اعدادی تراکیب کی اہمیت کمپیوٹر کی ایجاد کی نظر ہے۔ ہم ان تراکیب کے نظریہ اور عملی استعمال پر غور کریں گے۔ **تجزیہ خلل**[2] پر بھی غور کیا جائے گا جو اعدادی تراکیب میں زیادہ اہمیت کے حامل ہے۔

---

numerical methods[1]
error analysis[2]

21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر

چونکہ اعدادی تراکیب میں متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے متناہی تعداد کے چال کے بعد جواب حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا یہ تراکیب **متناہی چال**[3] ہیں جو اصل (نا معلوم) بالکل درست حل کا **تقریب**[4] پیش کرتے ہیں ماسوائے ان چند صورتوں میں جب اصل جواب کافی سادہ ناطق عدد ہو اور ہم کوئی ایسا اعدادی ترکیب استعمال کریں جو یہی بالکل درست جواب فراہم کرتا ہو۔

اگر کسی مقدار کی اندازاً قیمت a^* ہو اور اس کی اصل قیمت a ہو تب فرق $\xi = a^* - a$ کو a^* کا **حتمی خلل** یا مختصراً a^* کا **خلل**[5] کہتے ہیں۔یوں

$$a^* = a + \xi \qquad \text{تقریب} = \text{اصل قیمت} + \text{خلل}$$

ہو گا۔ a^* کی **اضافی خلل**[6] ξ_r کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\xi_r = \frac{\xi}{r} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خلل}}{\text{اصل قیمت}} \qquad (a \neq 0)$$

ظاہر ہے اگر $|\xi|$ کی قیمت $|a^*|$ کی قیمت سے بہت کم ہو تب $\xi_r \approx \frac{\xi}{a^*}$ ہو گا۔ہم ایک نئی مقدار $\gamma = a - a^* = -\xi$ متعارف کرتے ہیں جس کو ہم **درستگی**[7][8] کہیں گے۔یوں

$$a = a^* + \gamma \qquad \text{اصل قیمت} = \text{تقریب} + \text{درستگی}$$

ہو گا۔آخر میں a^* کی **حد خلل**[9] سے مراد عدد β ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\left|a^* - a\right| \leq \beta \quad \implies \quad |\xi| \leq \beta$$

خلل کی تین قسمیں تجربی خلل، قطع چال خلل اور تعداد اعداد خلل ہیں۔**تجربی خلل**[10] سے مراد مواد میں خلل ہے (جو تجربی ناپ کی وجہ سے ہو سکتے ہیں)۔بالکل درست جواب تک پہنچنے کی خاطر متناہی (یا لا متناہی) تعداد کے حسابی

---

[3] finite processes
[4] approximation
[5] error
[6] relative error
[7] correction
[8] بعض اوقات خلل کی تعریف $\gamma = -\xi$ لی جاتی ہے۔آپ کسی ایک تعریف کو تسلیم کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ہم خلل کی تعریف ξ لیں گے۔
[9] error bound
[10] Experimental errors

چال (قدم) درکار ہوں گے۔ حقیقت میں کسی خاص تعداد کے چال بعد حساب روک دیا جاتا ہے اور یوں **قطع چال خلل**[11] پیدا ہو گا۔ ہر قدم پر حساب کے دوران کمپیوٹر متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے کمتر ہندسہ سے کم قیمتوں کو رد کرتا ہے جس سے **تعداد ہندسہ خلل**[12] پیدا ہو گا جس پر ہم اب غور کرتے ہیں۔

اعشاری نظام میں ہر عدد کو متناہی یا لامتناہی تعداد کے اعشاری ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کمپیوٹر لامتناہی تعداد کے ہندسوں کو ذخیرہ نہیں کر سکتا ہے لہٰذا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی عدد کو متناہی تعداد کی ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ان اعداد کو دو طریقوں سے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ **مقررہ نقطہ**[13] نظام میں نقطہ اعشاریہ کے بعد مقررہ تعداد کے ہندسے پائے جاتے ہیں مثلاً 35.143 ، 5.000 ، 0.076 جبکہ **غیر مقررہ نقطہ**[14] نظام میں **ملحوظ ہندسوں**[15] کی تعداد متعین ہوتی ہے مثلاً 0.6723×10^2 ، -0.2354×10^{-4} اور -0.1000×10^1 جہاں ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔عدد c کے ملحوظ ہندسہ سے مراد c کا ہر ہندسہ ہے ماسوائے پہلا غیر صفر عدد کی بائیں جانب صفر جو اعشاریہ کا مقام تعین کرتا ہو۔ (یوں اس کے علاوہ ہر صفر بھی c کا ملحوظ ہندسہ ہو گا۔) مثال کے طور پر 5420 ، 1.340 اور 0.001460 میں سے ہر ایک میں چار ملحوظ ہندسے[16] ہیں۔

تعداد ہندسہ خلل کا قاعدہ اب بیان کرتے ہیں۔(k ملحوظ ہندسوں تک قطع کرنے کی تعریف بھی یہی ہے پس اس میں ہندسہ کی جگہ ملحوظ ہندسہ پر کریں۔)

$k+1$ واں ہندسہ اور اس کے بعد تمام ہندسوں کو رد کریں۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کی نصف سے کم ہو تب مقام k پر ہندسہ کو تبدیل نہ کریں ("گھٹانا")۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کی نصف سے زیادہ ہو تب تب مقام k کی ہندسے کے ساتھ 1 جمع کریں ("بڑھانا")۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کا نصف ہو تب اگر مقام k کا ہندسہ طاق ہو تب اس کو بڑھا کر جفت بنائیں۔(مثال کے طور پر 3.45 اور 3.55 کو اشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک قطع کرتے ہوئے بالترتیب 3.4 اور 3.6 حاصل ہو گا۔)

اس قاعدہ کا آخری حصہ یقینی بناتا ہے کہ عدد کا کمتر حصہ رد کرتے ہوئے اوسطاً برابر مرتبہ عدد بڑھایا اور گھٹایا جاتا ہے۔

---

[11] Truncation error
[12] rounding error
[13] fixed point
[14] floating point
[15] significant digits
[16] ایسا جدول جو k ملحوظ ہندسے دیتا ہو میں، جب تک کہا نا جائے کہ ایسا نہیں ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ دیا گیا عدد a^* ، بالکل درست قیمت a سے آخری ہندسے کی ∓ 0.5 اکایاں مختلف ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $a = 1.1996$ ہو تب چار ملحوظ ہندسوں کا جدول $a^* = 1.200$ دے گا۔

اگر ہم 1.2535 کو 3 ، 2 اور 1 اشاریہ تک قطع کریں تب ہمیں بالترتیب 1.254 ، 1.25 اور 1.3 حاصل ہو گا لیکن، بغیر مزید معلومات کے، 1.25 کو ایک اشاریہ تک قطع کرنے سے ہمیں 1.2 ملتا ہے۔

تعداد ہندسہ خلل کی وجہ سے کوئی بھی حساب مکمل غلط ہو سکتا ہے۔عموماً چال کی تعداد بڑھانے سے یہ خلل بڑھتا ہے۔یوں حسابی پروگرام کو اس خلل کی نقطہ نظر سے دیکھنا ضروری ہو گا اور اس خلل کو کم سے کم کرنا لازم ہو گا۔

21.2 دہرانے سے مساوات کا حل

ہمیں عموماً مساوات

$$f(x) = 0 \tag{21.1}$$

کے حل درکار ہوتے ہیں یعنی ایسے عدد X_0 کہ $f(X_0)$ صفر کے برابر ہو جہاں f دیا گیا تفاعل ہے۔مثال کے طور پر $x^2 - 3x + 2 = 0$ ، $x^3 + x = 1$ ، $\sin x = 0.5x$ ، $\tan x = x$ ، $\cosh x = \sec x$ اور $\cosh x \cos x = -1$ کو مساوات 21.1 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ان میں پہلے دو میں f کثیر رکنی ہے لہٰذا یہ دونوں الجبرائی مساوات[17] ہیں جن کے حل کو جذر[18] کہتے ہیں۔باقی ماورائی مساوات[19] ہیں جن میں ماورائی تفاعل استعمال ہوئے ہیں۔حقیقتاً صرف انتہائی سادہ صورتوں میں مکمل درست حل نکالنے والے کلیات موجود ہوں گے۔عموماً ہم دہرانے کی ترکیب یا دیگر تراکیب سے اصل حل کے قریب قریب حل حاصل کریں گے۔

اعدادی دہرانے کے طریقہ میں ہم اختیاری x_0 منتخب کرتے ہوئے درج ذیل روپ کلیہ

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{21.2}$$

سے، بار بار حل کرتے ہوئے، ترتیب $x_0, x_1, x_2, \cdots$ حاصل کرتے ہیں جہاں g کسی ایسے وقفہ پر معین ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہو اور g کا حلقہ اسی وقفہ پر ہے۔یوں ہم یک بعد دیگرے $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $x_3 = g(x_2)$ ، $\cdots$ حاصل کرتے ہیں۔

اس حصہ میں دائرہ کار اور حلقہ $g(x)$ دونوں حقیقی لکیر پر ہوں گے۔زیادہ عمومی معمہ میں x یا g اور یا دونوں سمتیات ہو سکتے ہیں۔

---

[17] algebraic equations
[18] roots
[19] transcendental equations

دہرانے کے تراکیب اعدادی تجزیہ کے لئے انتہائی اہم ہیں۔

مساوات 21.1 کو حل کرنے کے لئے دہرانے کے تراکیب کئی طریقوں سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ہم ان میں سے تین خصوصاً اہم طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

الجبرائی تبادل۔ ہم مساوات 21.1 کو الجبرائی طور پر تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل روپ حاصل کر سکتے ہیں

$$x = g(x) \tag{21.3}$$

جو مساوات 21.2 کی روپ میں ہے۔مساوات 21.3 کے حل کو g کا **مقررہ نقطہ**[20] کہتے ہیں۔دیے گئے مساوات 21.1 کے کئی مطابقتی مساوات 21.3 ہو سکتے ہیں جن کے ترتیب $x_0, x_1, \cdots$ مختلف (اور x_0 کے تابع) ہوں گے۔آئیں ایک سادہ مثال دیکھتے ہیں جس میں یہ حقائق ابھر کر سامنے آتے ہیں۔

مثال 21.1: **دہرانے کی ترکیب**
مساوات $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ کے لئے دہرانے کی ترکیب عمل میں لائیں۔چونکہ ہمیں اس مساوات کے حل

$$x = 1.5 \mp \sqrt{1.25}, \quad x_1 = 2.618\,034, \quad x_2 = 0.381\,966$$

معلوم ہیں، ہم دہرانے کے عمل کے دوران خلل کا رویہ دیکھ سکتے ہیں۔ہم دیے گئے مساوات سے

$$x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2+1) \implies x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2+1) \tag{21.4}$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ترتیب ملتی ہے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 0.667, \quad x_2 = 0.481, \quad x_3 = 0.411, \quad x_4 = 0.390, \cdots$$

جو چھوٹے جذر کی طرف گامزن ہے (شکل 21.1-الف)۔اگر ہم $x_0 = 3.000$ منتخب کریں تب درج ذیل ملتا ہے

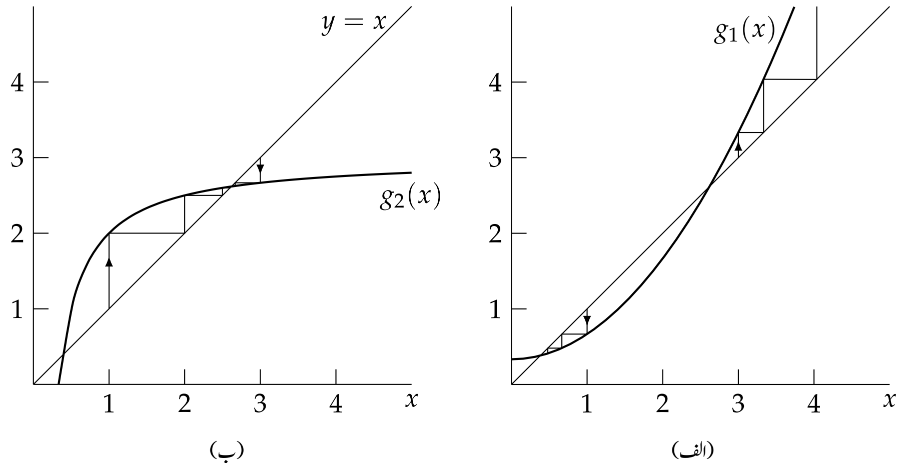
$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.766, \quad x_4 = 11.414, \cdots$$

جو منفرج ترتیب ہے (شکل 21.1-الف)۔دی گئی مساوات سے درج ذیل بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x} \implies x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \tag{21.5}$$

---

[20] fixed point



شکل 21.1: اشکال برائے مثال 21.1

اب x_0 منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 2.000, \quad x_2 = 2.500, \quad x_3 = 2.600, \quad x_4 = 2.615, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے جو بڑے جذر کی طرف گامزن ترتیب ہے (شکل 21.1-ب)۔اسی طرح $x_0 = 3$ منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 2.667, \quad x_2 = 2.625, \quad x_3 = 2.619, \quad x_4 = 2.618, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 21.1-ب)۔ شکل کو دیکھ کر واضح ہوتا ہے کہ مرکوزیت اس صورت ہو گی جب حل کی پڑوس میں منحنی $g(x)$ کی ڈھلوان سیدھے خط $y = x$ کی ڈھلوان سے کم ہو۔ہم اب دیکھتے ہیں کہ مرکوزیت کے لئے $|g'(x) < 1|$ کی شرط کافی ہے (جہاں خط $y = x$ کی ڈھلوان $y' = 1$ ہے)۔ □

اگر x_0 کا مطابقتی مساوات 21.2 سے حاصل کردہ ترتیب $x_0, x_1, \cdots$ مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب مرتکز ہے۔

ارتکاز کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کے کئی اہم عملی استعمال پائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 21.1: (ارتکاز)
فرض کریں کہ $x = g(x)$ کا حل $x = s$ ہے اور فرض کریں کہ کسی ایسے وقفہ J ، جس میں s پایا جاتا

ہو، پر $g(x)$ کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر J میں $\left|g'(x)\right| \le \alpha < 1$ ہو تب مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب J میں ہر x_0 کے لئے مرتکز ہو گی۔

ثبوت: تفرقی علم الاحصاء کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت x اور s کے درمیان ایسا ξ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا،

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s)$$

جہاں x وقفہ J میں پایا جاتا ہے۔ چونکہ $g(s) = s$ اور $x_1 = g(x_0)$، $x_2 = g(x_1)$، $\cdots$ ہیں لہٰذا ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}
|x_n - s| &= \left|g(x_{n-1}) - g(s)\right| = \left|g'(\xi)\right||x_{n-1} - s| \le \alpha|x_{n-1} - s| \\
&\le \alpha^2|x_{n-2} - s| \le \cdots \le \alpha^n|x_0 - s|
\end{aligned}$$

چونکہ $\alpha < 1$ ہے لہٰذا $n \to \infty$ کرنے سے $\alpha^n \to 0$ اور $|x_n - s| \to 0$ ہوں گے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 21.2: دہرانے کا طریقہ۔ مسئلہ 21.1

دہرانے کے طریقہ سے $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا حل تلاش کریں۔ اس مساوات کا جلدی سے خاکہ بنا کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ ہم اس مساوات سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

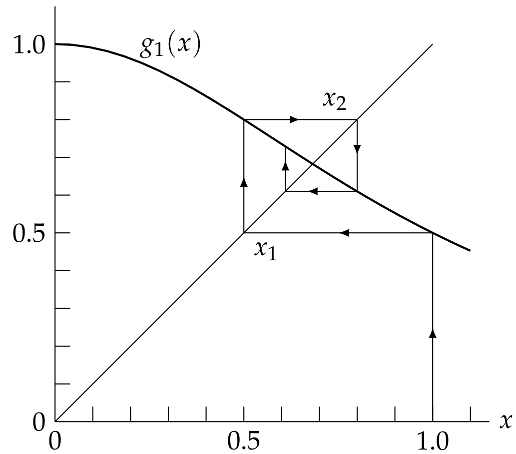
$$x = g_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n^2}$$

یوں کسی بھی x کے لئے $\left|g_1'(x)\right| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} < 1$ ہو گا لہٰذا تمام x پر مرکوزیت پائی جائے گی۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 21.2)

$$x_1 = 0.500, \quad x_2 = 0.800, \quad x_3 = 0.610, \quad x_4 = 0.729, \quad x_5 = 0.653, \quad x_6 = 0.701, \cdots$$

جبکہ چھ ہندسوں تک درست اصل جذر $s = 0.682\,328$ ہے۔ ہم مساوات سے درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_2(x) = 1 - x^3, \quad \left|g_2'(x)\right| = 3x^2$$



شکل 21.2: شکل برائے مثال 21.2

جذر کے قریب $|g_2'|$ کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے لہٰذا ہم ارتکاز کی توقع نہیں کر سکتے ہیں۔آپ $x_0 = 1$ ، $x_0 = 0.5$ ، $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے اپنی تسلی کر سکتے ہیں۔ □

مساوات $f(x) = 0$ ، جہاں f قابل تفرق ہے، کو ترکیب نیوٹن سے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب میں ہم $f(x)$ کا تخمینہ اس کے موزوں مماس سے حاصل کرتے ہیں۔اس ترکیب میں ہم f کی ترسیم سے حاصل x_0 پر f کا مماس بناتے ہیں۔یہ مماس x محور کو x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل 21.3)۔یوں

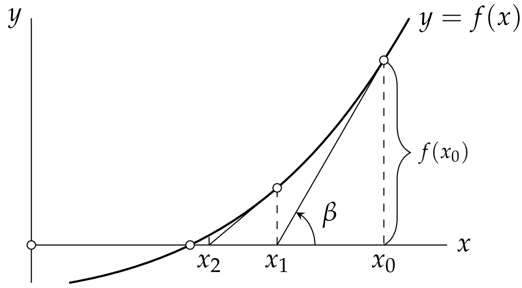
$$\tan\beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ہو گا۔اگلے قدم پر ہم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حاصل کرتے ہیں۔اسی طرح چلتے ہوئے جذر تک پہنچا جاتا ہے۔یوں دہرانے کے طریقے کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{21.6}$$



شکل 21.3: ترکیب نیوٹن

مثال 21.3: جذر المربع

کسی مثبت حقیقی عدد c کا جذر المربع حاصل کرنے کے لئے دہرانے کی ترکیب بنائیں۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کریں۔ہمارے پاس $\sqrt{c}$ یعنی $f(x) = x^2 - c = 0$ ہے لہٰذا $f'(x) = 2x$ ہو گا۔یوں مساوات 21.6 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

اب اس ترکیب سے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کرتے ہیں۔ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = 1.500\,000, \quad x_2 = 1.416\,667, \quad x_3 = 1.414\,216, \quad x_4 = 1.414\,214, \cdots$$

2 کا جذر المربع 1.414 213 562 ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب دیتا ہے۔ □

مثال 21.4: ماورائی مساوات کا دہرانے کی ترکیب سے حل

مساوات $x = 2\sin x$ کا مثبت حل تلاش کریں۔ہم $f(x) = x - 2\sin x$ لکھتے ہوئے $f'(x) = 1 - 2\cos x$ حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 21.6 کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2\sin x_n}{1 - 2\cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n\cos x_n)}{1 - 2\cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}$$

جدول 21.1: جدول برائے مثال 21.4

x_{n+1}	D_n	N_n	x_n	n
1.901	1.832	3.483	2.000	0
1.896	1.648	3.125	1.901	1
1.896	1.639	3.107	1.896	2

f کی ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا حل $x_0 = 2$ کے قریب ہے۔یوں ہم جدول 21.1 حاصل کرتے ہیں۔چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 1.8955 ہے۔ □

مثال 21.5: ترکیب نیوٹن کا الجبرائی مساوات پر اطلاق مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔مساوات 21.6 سے درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

$x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x_1 = 0.750\,000, \quad x_2 = 0.686\,047, \quad x_3 = 0.682\,340, \quad x_4 = 0.682\,328, \cdots$$

x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔مثال 21.2 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ مثال بہت تیزی کے ساتھ اصل حل پر مرکوز ہوتا ہے۔اس سے دہرانے کی ترکیب کے درجہ کا تصور پیدا ہوتا ہے جس پر اب بات کی جائے گی۔ □

فرض کریں کہ مساوات $x = g(x)$ کا حل s ہے اور $x_{n+1} = g(x_n)$ ایک دہرانے کی ترکیب ہے جو اس حل کے قریب قریب قیمت x_n دیتی ہے۔تب $x_n = s + \epsilon_n$ ہو گا جہاں x_n میں خلل ϵ_n ہے۔فرض کریں کہ g متعدد بار قابل تفرق ہے لہٰذا ٹیلر کے کلیہ سے

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \cdots \\ &= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \cdots \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔جزو $g(s)$ کے بعد پہلی غیر صفر جزو میں ϵ کے قوت نما کو دہرانے کی ترکیب (جس کو g تعین کرتا ہے) کا **درجہ**[21] کہتے ہیں۔چونکہ $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \epsilon_{n+1}$ یعنی x_{n+1} کا خلل

[21] order

ہے، اور ارتکاز کی صورت میں بڑی n کے لئے ϵ_n چھوٹا ہو گا لہٰذا ترکیب کا درجہ اس کی مرکوزیت کی ناپ ہے۔

ترکیب نیوٹن دو درجی ہے
ترکیب نیوٹن کے لئے درج ذیل ہے

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

اور چونکہ $f(s) = 0$ ہے لہٰذا $g'(s) = 0$ ہو گا؛ یوں ترکیب نیوٹن کم از کم دو درجی ہے۔ایک اور تفرق کے بعد $g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}$ ملتا ہے جو عموماً غیر صفر ہو گا۔ مثال 21.2 میں $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ اور $g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ہیں لہٰذا یہ یک درجی دہرانے کی ترکیب ہے۔

$f(x) = 0$ کے حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے لیکن حل کے قریب $f(x)$ کی ترسیم کو دیکھتے ہوئے، ترکیب نیوٹن کی جیومیٹریائی تصور کو مد نظر رکھتے ہوئے عموماً اس مشکل سے چھٹکارا حاصل کرنا ممکن ہو گا۔ اگر درکار حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہو تب x_{n+1} کی بہتر قیمت حاصل کرنے کی خاطر $f(x_n)$ اور $f'(x_n)$ کے زیادہ درست قیمتیں حاصل کرنا ضروری ہو گا۔ ایسی مساوات کو بد خو[22] کہتے ہیں۔

$f(x) = 0$ کو حل کرنے کی تیسری ترکیب جس کو **مقام غلط کی ترکیب**[23] کہتے ہیں پر اب غور کرتے ہیں۔اس ترکیب میں منحنی $f(x)$ کا مشابہ وتر تصور کیا جاتا ہے (شکل 21.4)۔یہ وتر محور x کو

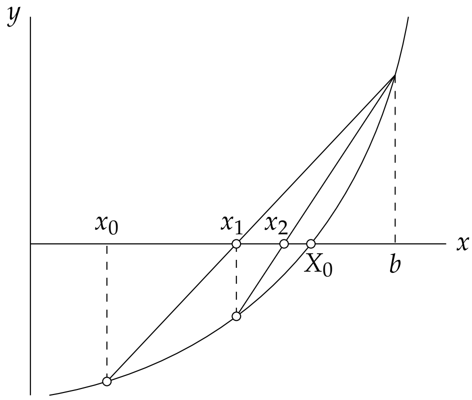
$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)} \tag{21.7}$$

پر قطع کرتا ہے جو $f(x) = 0$ کے حل X_0 کے قریب ہو گا۔اگلے قدم پر اس سے بہتر حل

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} \tag{21.8}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح بتدریج بہتر حل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ b کو X_0 کے قریب کرنے سے ارتکاز کو بہتر بنایا جا سکتا ہے۔ عموماً قیاس کے ذریعہ ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

---
ill-conditioned[22]
method of false position[23]



شکل 21.4: منحنی کا مشابہ وتر سے کیا گیا ہے

مثال 21.6: مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا وہ جذر تلاش کریں جو $x = 1$ کے قریب واقع ہے (مثال 21.2)۔ چونکہ $f(0.5) = -0.375$ اور $f(1) = 1$ ہیں لہٰذا ہم $x_0 = 0.5$ اور $b = 1$ منتخب کر سکتے ہیں۔ مساوات 21.7 سے

$$x_1 = \frac{0.5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

حاصل ہو گا جبکہ مساوات 21.8 سے $x_2 = 0.672$ ملتا ہے۔ ہم اسی طرح بتدریج بہتر حل تلاش کر سکتے ہیں۔
□

سوالات

سوال 21.1: $x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 1$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.900\,000$

سوال 21.2: $x^3 - 1.2x^2 + 2x - 2.4 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 2$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.478\,261$

سوال 21.3: سوال 21.1 میں دیے گئے مساوات کے جذر 0.9 ، 1.1 اور 1.9 ہیں۔اگرچہ $x_0 = 1$ جذر 0.9 اور 1.1 کے قریب ہے لیکن ترکیب نیوٹن ان کی جگہ جذر 1.9 تلاش کرتا ہے۔ایسا کیوں ہے؟ x_0 کی کوئی اور قیمت منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے جذر 1.1 حاصل کریں۔
جواب: تفاعل $f(x)$ کو $x_0 = 1$ پر مماس x محور کو عین $x = 1.9$ پر قطع کرتا ہے۔آپ $x_0 = 1.2$ یا کوئی اور عدد منتخب کر سکتے ہیں۔

سوال 21.4 تا سوال 21.7 میں دیے مساوات کی ترکیب نیوٹن کی مدد سے تمام جذر تلاش کریں۔

سوال 21.4: $\cos x = x$
جواب: 0.739

سوال 21.5: $x + \ln x - 2$
جواب: 1.577

سوال 21.6: $2x + \ln x - 1$
جواب: 0.687

سوال 21.7: $x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82$
جواب: $-1.3, \quad 1.4$

سوال 21.8: دکھائیں کہ مثال 21.2 میں $\left|g_1'(x)\right|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\tilde{x} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ پر حاصل ہو گی اور کہ یہ قیمت $\left|g'(\tilde{x})\right| = \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0.65$ کے برابر ہے۔

سوال 21.9: ایسا کیوں ہے کہ مثال 21.1 میں یک سر ترتیب حاصل ہوتی ہے لیکن مثال 21.2 میں ایسا نہیں ہوتا ہے؟

سوال 21.10: مثال 21.2 کی آخر میں دہرانے کی ترکیب سے حاصل قیمتوں کو از خود حاصل کریں اور شکل 21.2 کی طرز کا شکل بنائیں۔

سوال 21.11: مساوات $x^5 = x + 0.2$ کو مساوات 21.2 کی صورت میں لکھ کر $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے اس کا جذر تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = -0.2$ ، $x_2 = -0.200\,32$ ، $x_3 = -0.200\,323$

سوال 21.12: سوال 21.11 میں دیے گئے مساوات کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔مساوات کو $x = \sqrt[5]{x + 0.2}$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے اس جذر کو تلاش کریں۔
جواب: 1.0447

سوال 21.13: سوال 21.12 میں اگر آپ $x = x^5 - 0.2$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کریں تو کیا حاصل ہو گا؟
جواب: $-0.200\,322$

سوال 21.14: دہرانے کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کی مساوات $x = \tan x$ کا کم تر جذر تقریباً 4.49 ہے۔اشارہ۔ مساوات کی ترسیم سے اخذ کریں کہ جذر $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ کے قریب پایا جاتا ہے؛ مساوات کو $x = \pi + \tan^{-1} x$ (کیوں؟) لکھ کر آگے بڑھیں۔

سوال 21.15: $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے $\sqrt{5}$ کو مثال 21.3 کی ترکیب سے حاصل کرتے ہوئے x_1, x_2, x_3, x_4 تلاش کریں۔اب $\sqrt{5} = 2.236\,068$ استعمال کرتے ہوئے خلل حاصل کریں۔
جواب: $\epsilon_1 = 0.236\,068$ ، $\epsilon_2 = 0.013\,932$ ، $\epsilon_3 = 0.000\,043$ ، $\epsilon_4 = 0.000\,000$

سوال 21.16: دکھائیں کہ مثال 21.3 میں ہمارے پاس

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{c}{x_n}\right)^2$$

ہے جو درستگی کی ناپ ہے۔دکھائیں کہ تقریباً

$$\left|x_n - \sqrt{c}\right| \approx \frac{1}{2}\left|x_n - \frac{c}{x_n}\right|$$

ہو گا۔ اس کا اطلاق سوال 21.15 پر کریں۔

سوال 21.17: مثبت x محور پر ایسا وقفہ تلاش کریں کہ $c = 2$ لیتے ہوئے مسئلہ 21.1 کی شرط کو مثال 21.3 کے دہرانے کی ترکیب مطمئن کرتی ہو۔
جواب: $\alpha < 1$ ، $x \geq \sqrt{\frac{2}{1+2\alpha}}$

سوال 21.18: جذر الکعب کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $x_0 = 2$ سے شروع کر کے تین قدم چل کر $\sqrt[3]{7}$ تلاش کریں۔

سوال 21.19: مثبت عدد c کا k واں جذر حاصل کرنے کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔
جواب: $f(x)=x^k-c, \quad x_{n+1}=(1-\frac{1}{k})x_n+\frac{c}{kx_n^{k-1}}$

سوال 21.20: $x^4=2$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1$

سوال 21.21: $x^4=2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1.260$

سوال 21.22: $3\sin x=2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ غلط مقام دہرانے کی ترکیب حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1.49$

سوال 21.23: سوال 21.20 میں حاصل کردہ مثبت جذر ہر صورت اصل جذر سے معمولی کم ہو گا۔ایسا کیوں ہے؟

سوال 21.24: ترکیب نیوٹن میں $f'(x)$ کا حساب کرنا ہوتا ہے۔ عملی استعمال میں کبھی کبھار یہ قدم کافی پیچیدہ ثابت ہو سکتا ہے۔ $f'(x)$ سے چھٹکارا حاصل کرنا کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کی جگہ $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ استعمال کیا جائے۔یوں حاصل کردہ کلیہ کا غلط مقام کلیہ کے ساتھ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 21.25: فرض کریں بند وقفہ I میں g استمراری ہے اور اس کا حلقہ بھی I میں پایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات $x=g(x)$ کا کم از کم ایک حل اس وقفہ میں پایا جائے گا۔دکھائیں کہ اس وقفہ میں مساوات کے زیادہ جذر بھی ممکن ہیں۔

21.3 متناہی فرق

متناہی فرق کا استعمال اعدادی تجزیہ کے کئی شاخوں میں پایا جاتا ہے مثلاً دو قیمتوں کے درمیان قیمت کا تخمینہ لگانے میں، جدول کی جانچ پڑتال میں، تخمینہ لگانے میں، تفرق میں، اور تفرقی مساوات کے حل میں۔ ہم فرض کرتے ہیں

جدول 21.2: تفاعل $f(x)=x^3,\ x=-3(1)3$ کا جدول فرق

x	$f(x)=x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق	چوتھا فرق
-3	-27				
		19			
-2	-8		-12		
		7		6	
-1	-1		-6		0
		1		6	
0	0		0		0
		1		6	
1	1		6		0
		7		6	
2	8		12		
		19			
3	27				

کہ ہمیں تفاعل f کی اعدادی قیمتوں $f_j=f(x_j)$ کا جدول دیا گیا ہے جہاں نقطے x_j ایک جیسے فاصلے پر ہیں۔

$$x_0,\quad x_1=x_0+h,\quad x_2=x_0+2h,\quad x_3=x_0+3h,\cdots\quad (h>0,\ \text{مقررہ})$$

$f(x_j)$ کو عموماً کسی کلیہ یا تجربہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم جدول میں ہر $f(x)$ کو اگلی (بڑی) x کی مطابقتی قیمت سے تفریق کرتے ہوئے **پہلا فرق**[24] حاصل کرتے ہیں۔ جدول 21.2 میں اس کی مثال پیش کی گئی ہے جہاں $f(x)=x^3,\ x=-3(1)3$ ہیں[25]۔ یہی طریقہ پہلی فرق پر لاگو کرتے ہوئے f کا **دوسرا فرق**[26] حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح باقی فرق بھی حاصل کیے جاتے ہیں۔ جدول فرق میں ہر فرق کو اپنی قطار میں گزشتہ قطار (جس سے فرق حاصل کیا گیا ہے) کی اندراج کی درمیان برابر مقام پر درج کیا جاتا ہے۔ نقطہ اعشاریہ اور فرق کی بائیں صفروں کو نظر انداز کیا جاتا ہے (جدول 21.3)۔

جدول فرق میں فرق کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے رائج ہیں۔ ان میں سے جو بھی طریقہ استعمال کیا جائے، جدول میں نہ کوئی فرق تبدیل ہو گا اور نا ہی اس کا مقام۔ پہلی (اور غالباً اہم ترین) اظہار جس کو **وسطی فرق**[27] کہتے

---

[24] first difference
[25] $x=a(h)b$ کا مطلب ہے کہ تفاعل کی قیمتیں $x=a$ ، $x=x+h$ ، $x=a+2h$ ، $\cdots$ ، $x=b$ پر دی گئی ہیں۔
[26] second difference
[27] central difference

جدول 21.3: تفاعل $f(x)=\frac{1}{x},\ x=1(0.2)2$ کا جدول فرق۔ ملحوظ ہندسوں کی تعداد چار ہے۔

x	$f(x)=x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق
1.0	1.0000			
		-1667		
1.2	0.8333		477	
		-1190		-180
1.4	0.7143		297	
		-893		-98
1.6	0.6250		199	
		-694		-61
1.8	0.5556		138	
		-556		
2.0	0.5000			

ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{ccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \delta f_{-3/2} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} \\
x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{1/2} \\
x_1 & f_0 & & \delta^2 f_1 & \\
 & & \delta f_{3/2} & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

جہاں $\delta f_{-3/2}=f_{-1}-f_{-2}$ اور $\delta f_{-1/2}=f_0-f_{-1}$ ہیں۔ وسطی فرق کا عمومی جزو

$$\delta f_{m+1/2}=f_{m+1}-f_m \tag{21.9}$$

ہے جہاں دائیں ہاتھ دو زیر نوشت کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔اسی طرح

$$\delta^2 f_m=\delta f_{m+1/2}-\delta f_{m-1/2}$$

ہو گا۔ دیگر فرق بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ایک جیسی زیر نوشت والے اجزاء ایک ہی صف میں پائے جاتے ہیں۔(دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ جدول میں x کی سب سے چھوٹی قیمت x_0 ہو۔مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0=1.6$ لے سکتے ہیں؛ تب $f_0=0.6250$ ، $\delta f_{1/2}=-0.0694$ ، $\delta^2 f_0=0.0199$ ، ... ہوں گے۔)

دوسری اظہار جس کو آگے فرق[28] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
& & \Delta f_{-2} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \Delta^2 f_{-2} & \\
& & \Delta f_{-1} & & \Delta^3 f_{-2} \\
x_0 & f_0 & & \Delta^2 f_{-1} & \\
& & \Delta f_0 & & \Delta^3 f_{-1} \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & \\
& & \Delta f_1 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

جس میں $\Delta f_{-2} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$ اور $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ ہیں۔اس کا عمومی جزو

$$\Delta f_m = f_{m+1} - f_m \tag{21.10}$$

ہے۔اسی طرح

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m$$

ہو گا۔مثال کے طور پر اگر جدول 21.3 میں $x_0 = 1.6$ لیا جائے تب $f_0 = 0.6250$ ، $\Delta f_0 = -0.0694$ ، $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ ہوں گے۔ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں نیچے کی رخ یا جدول میں آگے رخ لکیروں پر پائے جائیں گے۔

تیسری اظہار جس کو پیچھے فرق[29] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
& & \nabla f_{-1} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \nabla^2 f_0 & \\
& & \nabla f_0 & & \nabla^3 f_1 \\
x_0 & f_0 & & \nabla^2 f_1 & \\
& & \nabla f_1 & & \nabla^3 f_2 \\
x_1 & f_1 & & \nabla^2 f_2 & \\
& & \nabla f_2 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

جہاں $\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$ اور $\nabla f_1 = f_1 - f_0$ ہیں۔عمومی جزو

$$\nabla f_m = f_m - f_{m-1} \tag{21.11}$$

[28] forward difference
[29] backward difference

جدول 21.4: غلطی تمام فرق میں پھیل جاتی ہے۔ یہاں تفاعل $x = 2.0(0.1)2.6$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ ہے اور ملحوظ ہندسے چار ہیں۔ غلطی $f(2.3)$ میں ہے۔

x	$\sqrt{x}$	فرق			$\sqrt{x}$	فرق			غلطی ϵ کا پھیلنا			
2.0	1.4142				1.41412							
		349				349						
2.1	1.4491		-8		1.4491		8					
		341		1		341		$\underline{11}$				ϵ
2.2	1.4832		-7		1.4832		$\underline{3}$				ϵ	
		334		-1		$\underline{344}$		$-\underline{31}$		ϵ		-3ϵ
2.3	1.5166		-8		$\underline{1.5176}$		$-\underline{28}$		ϵ		-2ϵ	
		326		1		$\underline{316}$		$\underline{31}$		$-\epsilon$		3ϵ
2.4	1.5492		-7		1.5492		$\underline{3}$				ϵ	
		319		2		319		$-\underline{8}$				$-\epsilon$
2.5	1.5811		-5		1.5811		$-\underline{5}$					
		314				314						
2.6	1.6125				1.6125							

ہو گا۔اسی طرح

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1}$$

ہو گا۔ باقی اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں پر اوپر رخ یا جدول میں پیچھے رخ لکیروں پر پائے جاتے ہیں۔ جدول کی آخر میں حساب کے دوران پیچھے فرق عموماً زیادہ مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0 = 1.6$ لیں تب $\nabla f_0 = \Delta f_{-1} = \delta f_{-1/2} = -0.0893$ ہو گا۔یوں عمومی طور پر

$$\delta^n f_m = \Delta^n f_{m-n/2} = \nabla^n f_{m+n/2}$$

ہو گا۔

جدول میں غلطیوں کی نشاندہی کرنے کے لئے فرق کا سہارا لیا جاتا ہے۔جیسا جدول 21.4 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل میں خلل ϵ جلد تمام فرق میں پھیل جاتا ہے۔یوں فرق میں بہت زیادہ اتار چڑھاو تفاعل کی قیمت میں غلطی کو ظاہر کرتی ہے۔ظاہر ہے کہ کم تعداد کی ملحوظ ہندسوں کی بنا معمولی اتار چڑھاو ہر صورت پائی جائے گی۔

تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں بھی فرق اہم کردار ادا کرتا ہے۔قدم h لیتے ہوئے n درجی کثیر رکنی $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ کے جدول فرق میں تمام n ویں فرق مستقل ($n!h^na_0$ کے برابر) ہوں گے اور ان سے بلند فرق صفر ہوں گے۔ایسا اس لئے ہو گا کہ پہلے فرق

$$p_n(x+h) - p_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] + \cdots = a_0nhx^{n-1} + \cdots$$

کا درجہ $n-1$ ہے، دوسرے فرق کے کثیر رکنی کا درجہ $n-2$ ہو گا اور اس کے پہلے جزو کا عددی سر $a_0n(n-1)h^2$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔یوں اگر تفاعل f کے جدول فرق میں n ویں فرق کسی حلقہ میں تقریباً مستقل ہوں تب جدول کی قیمتوں کو اس حلقہ میں n درجی کثیر رکنی p_n سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔آئیں دیے گیے f کی صورت میں کثیر رکنی p_n کے حصول کی ایک ترکیب دیکھیں۔

مثال 21.7: تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنا

جدول 21.4 میں دوسرا فرق تقریباً مستقل (-7 کے برابر) ہیں۔یوں ہم دو درجی کثیر رکنی p_2 تلاش کر سکتے ہیں جو دیے گیے تفاعل کے مشابہ ہو گا۔ہم پہلے جدول فرق بناتے ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام دوسرے فرق ٹھیک -7 کے برابر ہیں ہم حلقہ کے وسط میں تفاعل کی کوئی قیمت اور پہلا فرق منتخب کرتے ہیں مثلاً 1.5166 اور 334 جس سے جدول 21.5 حاصل ہوتا ہے۔ p_2 کے پہلے عددی سر کو

$$a_0 2!h^2 = a_0 \cdot 2 \cdot 0.1^2 = -0.0007 = \text{دوسرا فرق}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔یوں $a_0 = -\frac{0.0007}{0.02} = -0.035$ ملتا ہے۔اس طرح

$$p_1(x) = p_2(x) + 0.035x^2$$

درجہ اول ہو گا اور جدول 21.5 سے ہم حساب لگا کر دیکھتے ہیں کہ اس کے پہلے صفر تقریباً مستقل (0.04915) ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ یہ a_h کے برابر ہے۔یوں $a_1 = \frac{0.04915}{0.1} = 0.4915$ حاصل ہوتا ہے۔آخر میں $p_1(x) - 0.4915x = a_2 = 0.5713$ ہو گا لہٰذا

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.5713$$

ہو گا۔اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ فرق کو استعمال کرتے ہوئے کثیر رکنی حاصل کرنے سے پہلے، مشابہ کثیر رکنی کی درستگی کا معیار جانا جا سکتا ہے۔مشابہ کثیر رکنی کی حصول کے دیگر تراکیب پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

□

جدول 21.5: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کو دو درجی کثیر رکنی p_2 سے ظاہر کرنا

x	$p_2(x)$	فرق	
2.0	1.4143		
		348	
2.1	1.4491		−7
		341	
2.2	1.4832		−7
		$\underline{334}$	
2.3	$\underline{1.5166}$		−7
		327	
2.4	1.5493		−7
		320	
2.5	1.5813		−7
		313	
2.6	1.6126		

سوالات

سوال 21.26: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.2 حاصل کریں۔

سوال 21.27: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.3 حاصل کریں۔

سوال 21.28: جدول 21.3 میں $x_0 = 1.2$ منتخب کرتے ہوئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.29: $x_0 = 2$ منتخب کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = x^3$ کا $x = 0(1)5$ کے لئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 21.30: درج ذیل دکھائیں۔

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$$
$$\delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}$$

سوال 21.31: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ کی قیمتیں $x = 0(0.2)1$ کے لئے (الف) دو ملحوظ ہندسوں، (ب) تین ملحوظ ہندسوں اور (پ) چار ملحوظ ہندسوں تک حاصل کریں۔ان کے مطابقتی جدول فرق میں تعداد ہندسہ خلل کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 21.32: $x = 0(1)10$ کے لئے $f(x) = x^2$ کا جدول فرق مکمل کریں۔ایک اور جدول میں $f(5) = 25$ کی جگہ 26 لکھتے ہوئے پہلا فرق، دوسرا فرق، تیسرا فرق اور چوتھا فرق تلاش کریں۔جدول میں غلطی کا پھیلنا دیکھیں۔

سوال 21.33: فرق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل جدول کی جانچ پڑتال کریں۔

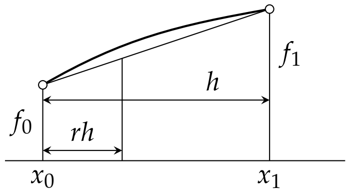
x	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	0.250	0.244	0.242	0.233	0.227	0.222

سوال 21.34: مثال 21.7 میں کی گئی تمام حساب خود کریں۔

21.4 باہمی تحریف

عموماً تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کا جدول دیا گیا ہو گا اور ہمیں ان x پر تفاعل کی قیمت درکار ہو گی جو جدول میں دیے گئے x کی قیمتوں کے درمیان پائے جاتے ہوں۔ایسی قیمتوں کے حصول کی عمل کو ہم **باہمی تحریف**[30] کہیں گے۔اس عمل میں $f(x)$ کی استعمال ہونے والی قیمتوں کو **چول قیمتیں**[31] کہتے ہیں۔باہمی تحریف کی ترکیب اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ نقطہ x کے قریب تفاعل $f(x)$ کو کثیر رکنی p سے ظاہر کرنا ممکن ہے لہٰذا x کے قریب کسی بھی نقطے پر p کی قیمت کو اس نقطے پر تفاعل کی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

[30] interpolation
[31] pivotal values



شکل 21.5: خطی باہمی تحریف

سادہ ترین طریقہ **خطی باہمی تحریف**[32] ہے۔اس ترکیب میں جدول میں درکار x کی دونوں جانب درج نقطوں x_0 اور x_1 کے مابین سیدھی قطع سے اس خطہ میں $f(x)$ کو ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 21.5)۔یوں جیسا ہم چھوٹی جماعتوں کی حساب سے جانتے ہیں، نقطہ $x = x_0 + rh$ پر f کی قیمت تقریباً

$$f(x) \approx p_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0 \qquad (r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le 1) \tag{21.12}$$

ہو گی۔یوں اگر $\ln 9.0 = 2.197$ اور $\ln 9.5 = 2.251$ ہوں تب $\ln 9.2$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $r = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$ حاصل کر کے

$$\ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4(\ln 9.5 - \ln 9.0) = 2.219$$

حاصل کرتے ہیں۔

خطی باہمی تحریف اس صورت تسلی بخش ہو گی جب جدول میں x کی قیمتیں اتنی قریب قریب ہوں کہ ان کے مابین منحنی سے سیدھی قطعات کی انحراف کم ہو، مثلاً ہر x_0 اور x_1 کے درمیان ہر x کے لئے انحراف جدول میں آخری ہندسہ کی اکائی کی نصف ($\frac{1}{2}$) سے کم ہو۔

دو درجی باہمی تحریف[33] میں ہم x_0 اور $x_2 = x_0 + 2h$ کے درمیان منحنی f کو ایسی دو درجی قطع مکافی سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) اور (x_2, f_2) سے گزرتی ہو۔یوں بہتر کلیہ

$$f(x) \approx p_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 \qquad (r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le 2) \tag{21.13}$$

---

[32] linear interpolation
[33] quadratic interpolation

اخذ ہوتا ہے جہاں $x = x_0 + rh$ ہے۔یوں $x = x_0\ (r = 0)$ کے لئے دایاں ہاتھ f_0 کے برابر ہو گا؛ $x = x_1\ (r = 1)$ کے لئے بایاں ہاتھ $f_0 + \Delta f_0 = f_1$ کے برابر ہو گا اور $x = x_2\ (r = 2)$ کے لئے اس کی قیمت

$$f_0 + 2(f_1 - f_0) + [(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)] = f_2$$

ہو گی۔

مثال 21.8: **خطی اور دو درجی باہمی تحریف**

اگر $\ln 9.0 = 2.1972$ اور $\ln 9.5 = 2.2513$ ہوں تب مساوات 21.12 سے $\ln 9.2 = 2.2188$ حاصل ہوتا ہے جو تین ملحوظ ہندسوں تک درست ہے جبکہ $\ln 10.0 = 2.3026$ لیتے ہوئے مساوات 21.13

$$\ln 9.2 = 2.1972 + 0.4 \cdot 0.0541 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2}(-0.0028) = 2.2192$$

دیتی ہے جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ □

مزید بہتر جوابات حاصل کرنے کی خاطر زیادہ بلند درجی کثیر رکنی استعمال کرنی ہو گی۔ $n + 1$ مختلف نقطوں پر قیمتوں سے یکتا n درجی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ہمیں یہاں ایسی کثیر رکنی p_n درکار ہے کہ

$$p_n(x_0) = f_0, \cdots, p_n(x_n) = f_n$$

ہوں جہاں $f_0 = f(x_0)$ ، $\cdots$ ، $f_n = f(x_n)$ جدول میں f کی قیمتیں ہیں۔یہ کثیر رکنی آگے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن[34]

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots \\ + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \end{aligned} \tag{21.14}$$

$$\left(x = x_0 + rh,\ r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le n\right)$$

دیتی ہے۔اس کلیہ میں $n = 1$ پر کرنے سے مساوات 21.12 اور $n = 2$ پر کرنے سے مساوات 21.13 حاصل ہوتا ہے۔ہمیں اب $p_n(x_k) = f_k\ (k = 0, 1, \cdots, n)$ ثابت کرنا ہو گا۔ مساوات 21.14 کے دائیں ہاتھ سے

$$f_k = \binom{k}{0} f_0 + \binom{k}{1} \Delta f_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{k}{k} \Delta^k f_0 \tag{21.15}$$

[34] Newton's forward-difference interpolation formula

لکھا جا سکتا ہے جہاں **ثنائی عددی**[35] سر درج ذیل ہیں جہاں $s! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots s$ کے برابر ہے۔

$$\binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{s!} \quad (s \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{21.16}$$

در حقیقت مساوات 21.14 میں $r = k$ پر کرنے سے مساوات 21.14 کا دایاں ہاتھ اور مساوات 21.15 بالکل ایک جیسے ہوں گے۔مساوات 21.15 کو الکراجی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت : $k = 0$ کے لئے مساوات 21.15 درست ہے۔فرض کریں کہ یہ $k = q$ کے لئے بھی درست ہے۔تب مساوات 21.15 میں $k = q$ استعمال کر کے، Δ کی اطلاق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
f_{q+1} = f_q + \Delta f_q \\
&= \binom{q}{0} f_0 + \binom{q}{1}\Delta f_0 + \binom{q}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{q}{q}\Delta^q f_0 \\
&\quad + \binom{q}{0}\Delta f_0 + \binom{q}{1}\Delta^2 f_0 + \binom{q}{2}\Delta^3 f_0 + \cdots + \binom{q}{q}\Delta^{q+1} f_0
\end{aligned}$$

اس کلیہ میں $\Delta^s f_0$ کا عددی سر (مساوات 21.16)

$$\binom{q}{s} + \binom{q}{s-1} = \binom{q+1}{s}$$

ہے جو $k = q+1$ کے لئے مساوات 21.15 دیتا ہے۔یوں الکراجی ماخوذ کے ذریعہ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مساوات 21.14 کی طرح ایسا کلیہ جو پیچھے فرق پر مبنی ہو، **پیچھے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[36]

$$\begin{aligned}
f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \cdots \\
+ \frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!}\nabla^n f_0
\end{aligned} \tag{21.17}$$

---

[35] binomial coefficients
[36] Newton's backward-difference interpolation formula

ہے جہاں مساوات 21.14 کی طرح $x = x_0 + rh,\ r = \frac{x-x_0}{h},\ 0 \le r \le n$ ہیں۔

باہمی تحریف کے کلیات اور استعمال پر کثیر مواد پایا جاتا ہے۔مثال کے طور پر صرف جفت درجہ فرق پر مبنی کلیات پائے جاتے ہیں۔اس طرز کا ایک انتہائی اہم اور سادہ ترین کلیہ ایورٹ[37] درج ذیل ہے۔

$$f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!}\delta^2 f_0 + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\delta^2 f_1 \tag{21.18}$$

جہاں $r = \frac{x-x_0}{h},\ 0 \le r \le 1$ ہیں۔

مثال 21.9: کلیہ ایورٹ کا استعمال
تفاعل $e^{1.24}$ کی قیمت مساوات 21.18 میں دیے گئے کلیہ ایورٹ اور درج ذیل جدول سے حاصل کریں۔

x	e^x	δ^2
1.2	3.3201	333
1.3	3.6693	367

اب $r = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$ ہے لہٰذا مساوات 21.18 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned}
e^{1.24} &\approx 0.6 \cdot 3.3201 + 0.4 \cdot 3.6693 + \frac{1.6 \cdot 0.6 \cdot (-0.4)}{6} \cdot 0.0333 \\
&\quad + \frac{1.4 \cdot 0.4 \cdot (-0.6)}{6} \cdot 0.0367 \\
&= 3.4598 - 0.0021 - 0.0021 = 3.4556
\end{aligned}$$

جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔دھیان رہے کہ خطی باہمی تحریف 3.4598 دیتی ہے جو صرف دو ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ (آپ $e^{1.1} = 3.0042$ اور $e^{1.4} = 4.0552$ استعمال کرتے ہوئے دوسرے فرق کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں۔) □

عمومی کلیہ ایورٹ[38] درج ذیل ہے

$$\begin{aligned}
f(x) &= qf_0 + rf_1 + \binom{q+1}{3}\delta^2 f_0 + \binom{r+1}{3}\delta^2 f_1 \\
&\quad + \binom{q+2}{5}\delta^4 f_0 + \binom{r+2}{5}\delta^4 f_1 + \cdots
\end{aligned} \tag{21.19}$$

---
[37] Everett formula
[38] Everett formula

جہاں $0 \le r \le 1$, $r = \frac{x-x_0}{h}$ اور $q = 1 - r$ ہیں۔اس کلیہ میں $\delta^4 f_0$ اور $\delta^2 f_0$ کے عددی سروں کی نسبت

$$\frac{\binom{q+2}{5}}{\binom{q+1}{3}} = \frac{q^2-4}{20}$$

ہے۔اسی طرح $\delta^4 f_1$ اور $\delta^2 f_1$ کے عددی سروں کی نسبت $\frac{r^2-4}{20}$ ۔یہ دونوں نسبت وقفہ 0 تا 1 میں بہت کم تبدیل ہوتے ہیں۔یوں اگر ان کی جگہ ان کی کوئی موزوں اوسط قیمت μ منتخب کی جائے تب **تبدیل شدہ دوسرے فرق**[39]

$$\delta_m^2 f = \delta^2 f + \mu \delta^4 f, \quad \mu = -0.18393 \tag{21.20}$$

استعمال کرتے ہوئے چوتھی فرق کے اثر کو مساوات 21.18 میں سمویا جا سکتا ہے، جہاں μ کی دی گئی قیمت ایک موزوں قیمت ہے۔

ہم بغیر ثبوت پیش کیے بتلانا چاہتے ہیں کہ اگر $x_0, x_1, \cdots, x_n$ کے آپس میں فاصلے اختیاری ہوں تب n درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) ، $\cdots$ ، (x_n, f_n) سے گزرتا ہو، جہاں $f_j = f(x_j)$ ہے، **منقسم فرق باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[40]

$$\begin{aligned} f(x) \approx f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \cdots \\ + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,\cdots,x_n] \end{aligned} \tag{21.21}$$

کا دایاں ہاتھ ہو گا جہاں **منقسم فرق**[41] درج ذیل دہرانے کے تعلقات دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}, \cdots \\ f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \end{aligned} \tag{21.22}$$

اگر $x_k = x_0 + kh$ (یکساں فاصلے) ہو تب $f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k}$ ہو گا اور مساوات 21.21 سے مساوات 21.14 حاصل ہو گی۔

---

[39] modified second differences
[40] Newton's divided difference interpolation formula
[41] divided difference

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں للہذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\,z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\,y'^2 + |q|\,z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے للہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\,z + |q|\,z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 8.ا اور مساوات 9.ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 10.ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 2.ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

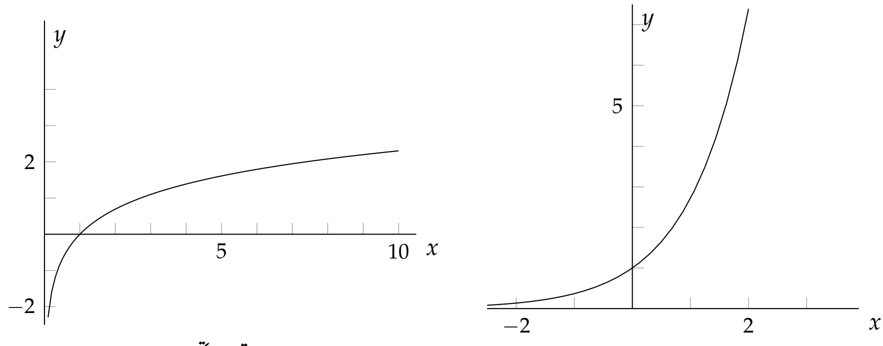
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

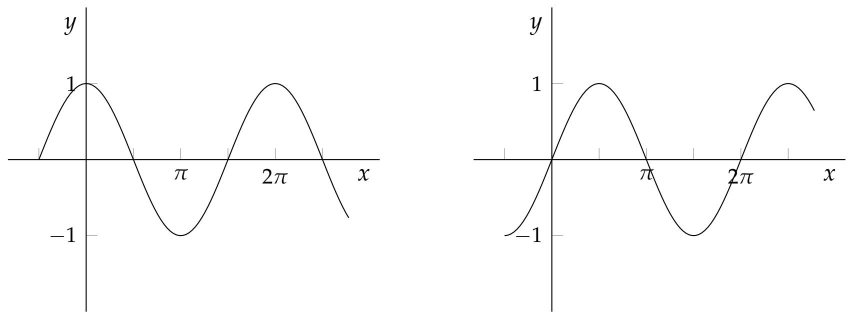
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



$\cos x$ (ب)

$\sin x$ (الف)

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y\sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7) $$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9) $$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10) $$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

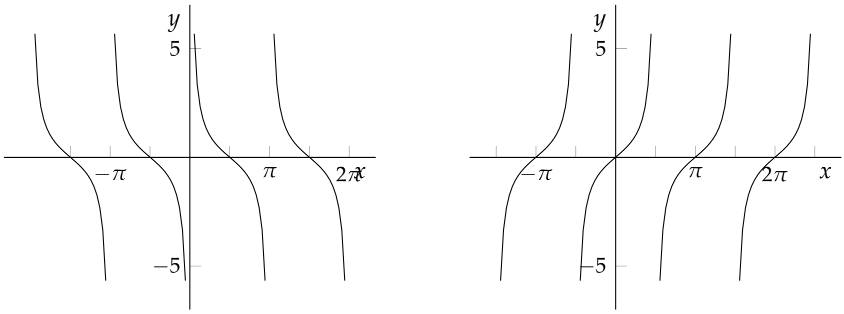
(ب.13) $$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14) $$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15) $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16) $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



(ب) $\cot x$ (الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered}$$ (ب.17)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$ (ب.18)

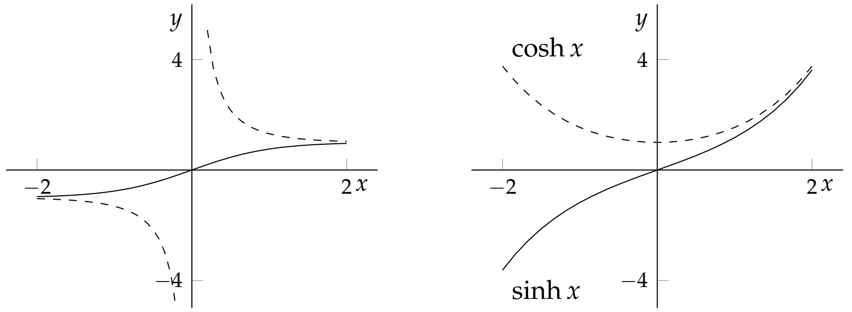
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$ (ب.19)

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned}$$ (ب.20)

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$ (ب.21)

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$ (ب.22)



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔ (ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

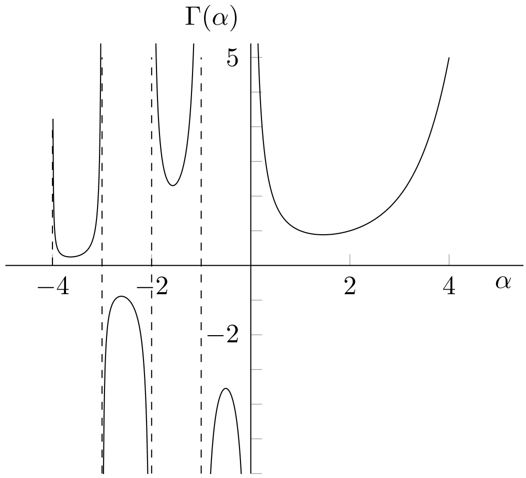
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

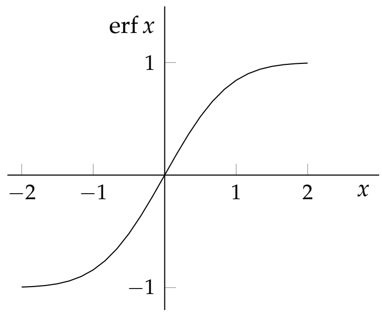
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

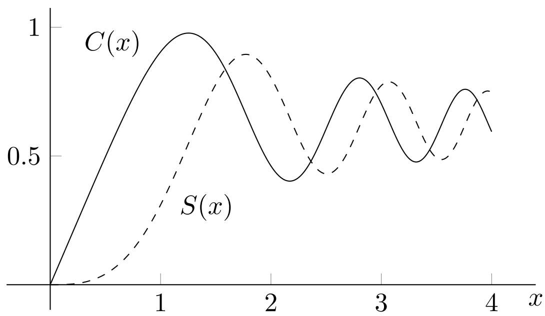
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{37.ب}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{38.ب}$$

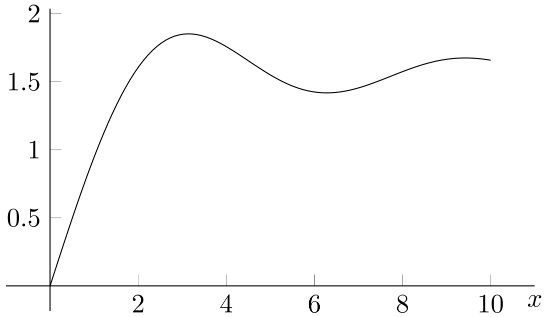
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{39.ب}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{40.ب}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x)=\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$