

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفیی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781 . . . . .	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
787 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
796 . . . . .	11.3	دوہرہ تکمیل
810 . . . . .	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820 . . . . .	11.5	سطحیں
825 . . . . .	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837 . . . . .	11.7	سطحی تکمیل
845 . . . . .	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850 . . . . .	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861 . . . . .	11.10	مسئلہ سٹوکس
866 . . . . .	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869 . . . . .	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883 . . . . .	12	فوریئر تسلسل
884 . . . . .	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889 . . . . .	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902 . . . . .	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907 . . . . .	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916 . . . . .	12.5	نصف حلقہ الساع
923 . . . . .	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931 . . . . .	12.7	جبری ارتعاش
936 . . . . .	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940 . . . . .	12.9	فوریئر تکمیل
953 . . . . .	13	جزوی تفرقی مساوات
953 . . . . .	13.1	بنیادی تصورات
958 . . . . .	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960 . . . . .	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973 . . . . .	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979 . . . . .	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987 . . . . .	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993 . . . . .	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996 . . . . .	13.8 مستطیل جھلی
1006 . . . . .	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010 . . . . .	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018 . . . . .	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024 . . . . .	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030 . . . . .	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037 . . . . .	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038 . . . . .	14.1 مخلوط اعداد
1047 . . . . .	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054 . . . . .	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059 . . . . .	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067 . . . . .	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078 . . . . .	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084 . . . . .	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089 . . . . .	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095 . . . . .	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103 . . . . .	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104 . . . . .	15.1 نقشہ کشی
1116 . . . . .	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125 . . . . .	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129 . . . . .	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138 . . . . .	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149 . . . . .	15.6 ریمان سطحیں
1157 . . . . .	16 مخلوط مکملات
1157 . . . . .	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168 . . . . .	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172 . . . . .	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184 . . . . .	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189 . . . . .	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194 . . . . .	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201 . . . . .	17 ترتیب اور تسلسل
1201 . . . . .	17.1 ترتیب
1208 . . . . .	17.2 تسلسل
1213 . . . . .	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220 . . . . .	17.4	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل
1225 . . . . .	17.5	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں
1236 . . . . .	17.6	تسلسل پر اعمال
1243 . . . . .	18	18 حاتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل
1243 . . . . .	18.1	حاتی تسلسل
1256 . . . . .	18.2	حاتی تسلسل کی روپ میں تفاعل
1263 . . . . .	18.3	ٹیلر تسلسل
1268 . . . . .	18.4	بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل
1274 . . . . .	18.5	حاتی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب
1281 . . . . .	18.6	یکساں استرار
1294 . . . . .	18.7	لوگوں تسلسل
1303 . . . . .	18.8	لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت
1317 . . . . .	19	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ
1317 . . . . .	19.1	بقیہ
1324 . . . . .	19.2	مسئلہ بقیہ
1329 . . . . .	19.3	حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ
1337 . . . . .	19.4	حقیقی مکمل کے دیگر اقسام
1345 . . . . .	20	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ
1346 . . . . .	20.1	ساکن برقی سکون
1352 . . . . .	20.2	دو بعدی بہاؤ سیال
1361 . . . . .	20.3	ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص
1366 . . . . .	20.4	پوسوں کلیہ مکمل
1373 . . . . .	21	21 اعدادی تجزیہ
1374 . . . . .	21.1	خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر
1376 . . . . .	21.2	دہرانے سے مساوات کا حل
1388 . . . . .	21.3	متناہی فرق
1394 . . . . .	21.4	باہمی تحریف
1403 . . . . .	21.5	لچکدار منحنیات
1410 . . . . .	21.6	اعدادی مکمل اور تفرق
1422 . . . . .	21.7	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1433 . . . . .	21.8	دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1440 . . . . .	21.9	اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1443 . . . . .	21.9.1	مسئلہ ڈرشنے
1446 . . . . .	21.9.2	بدلتی رخ خفی ترکیب
1453 . . . . .	21.10	مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ۔ غیر منظم سرحد



1460 . . . . . 21.11 اعدادی ترکیب برائے قطع مکانی مساوات

1469 . . . . . 21.12 اعدادی ترکیب برائے قطع زائد مساوات

1473 22 خطی الجبرا کے اعدادی ترکیب

1473 . . . . . 22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقطاء، معکوس قالب

1483 . . . . . 22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ

1491 . . . . . 22.3 خطی مساوات کا نظام: بدخوئی

1493 ا اضافی ثبوت

1497 ب مفید معلومات

1497 . . . . . 1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 22

### خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب

اس باب میں ہم خطی الجبرائی مساوات کے نظام کے حل، مناسب سیدھی لکیروں کا حصول اور قلبی امتیازی اقدار کے حصول کے اہم ترین تراکیب پر غور کریں گے۔ یہ تراکیب اور اس سے ملتے جلتے تراکیب عملاً انتہائی اہم ثابت ہوتے ہیں جو انجینئری یا دیگر شعبوں (مثلاً شاریات) کے مسائل حل کرنے میں کام آتے ہیں۔

#### 22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی اسقاط، معکوس قالب

$n$  نامعلوم متغیرات  $x_1, \dots, x_n$  کے  $m$  خطی مساوات کے نظام (یا  $m$  ہمزاد خطی مساوات) سے مراد درج ذیل روپ کی مساوات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (22.1)$$

کا سلسلہ ہے جہاں عددی سر  $a_{jk}$  اور  $b_j$  معلوم اعداد ہیں۔ تمام  $b_j$  صفر ہونے کی صورت میں یہ نظام متجانس<sup>1</sup> کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر متجانس<sup>2</sup> کہتے ہیں۔ اگر آپ قلابی ضرب (حصہ 8.2) سے آشنا ہوں تب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 22.1 کو ایک سمتی مساوات

$$(22.2) \quad Ax = b$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں عددی سر قلاب  $A = [a_{ik}]$  درج ذیل  $m \times n$  قلاب ہے

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

جبکہ  $x$  اور  $b$  سمتیہ قطار ہیں۔ نظام 22.1 کے حل سے مراد اعداد  $x_1, \dots, x_n$  کا سلسلہ ہے جو ان تمام  $m$  مساوات کو مطمئن کرتے ہیں اور نظام 22.1 کے حل سمتیہ سے مراد سمتیہ  $x$  ہے جس کے اجزاء نظام 22.1 کے حل ہیں۔

زیادہ تعداد کی مساوات کے نظام کا حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7) قابل عمل نہیں ہے۔ زیادہ بہتر ترکیب گاوسی اسقاط ہے جس کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال 22.1: گاوسی اسقاط  
درج ذیل نظام کو حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2w + x + 2y + z &= 6 \\ 6w - 6x + 6y + 12z &= 36 \\ 4w + 3x + 3y - 3z &= -1 \\ 2w + 2x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

حل: پہلا قدم: ہم پہلی مساوات کے مضرب کو باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے  $w$  حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -9x \quad \quad + 9z &= 18 \\ x - y - 5z &= -13 \\ x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

homogeneous<sup>1</sup>  
nonhomogeneous<sup>2</sup>

دوسرا قدم: ان میں پہلی مساوات کے مضرب باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے  $x$  حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$-y - 4z = -11$$

$$-3y + z = 6$$

تیسرا قدم: ان میں پہلی مساوات کے مضرب کو باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے  $y$  حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$13z = 39$$

آخری قدم: ہم اب واپس پر کرتے ہوئے تمام نا معلوم متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

$$13z = 39 \quad z = 3$$

$$-y - 4 \cdot 3 = -11 \quad y = -1$$

(22.3)

$$-9x + 9 \cdot 3 = 18 \quad x = 1$$

$$2w + 1 + 2 \cdot (-1) + 3 = 6 \quad w = 2$$

□

مثال 22.1 میں  $a_{11} \neq 0$  تھا۔ اگر ایسا نہ ہوتا تب ہم باقی مساوات سے  $w$  حذف کرنے میں ناکام ہوتے۔ یوں  $a_{11} = 0$  کی صورت میں نظام میں مساوات کی ترتیب بدلی جائے گی تاکہ نظام میں پہلی مساوات کا پہلا عددی سر غیر صفر ہو (اور ہو سکتا ہے کہ نا معلوم متغیرات کی ترتیب بھی بدلی پڑے)۔ باقی قدم پر بھی ایسا ہی کرنا پڑ سکتا ہے۔ اس طرح درج ذیل ترکیب حاصل ہوتی ہے جس کی اطلاق کے بعد حاصل قیمتیں پر کرتے ہوئے تمام متغیرات حاصل کیے جاتے ہیں۔

الخوارزمی: گاوسی اسقاط<sup>3</sup>

مساوات 22.2 میں  $m = n$  کی صورت میں  $n \times n$  قالب  $A$  کے ساتھ بطور آخری صف  $b$  شامل کرتے ہوئے  $n \times (n + 1)$  قالب  $B = [b_{jk}]$  حاصل ہو گا جس کے لئے گاوسی اسقاط کی الگوریتم<sup>4</sup> درج ذیل ہے۔

$k = 1$  تا  $k = n - 1$  کے لئے کریں:

ایسا کم تر  $j \geq k$  تلاش کریں کہ  $b_{jk} \neq 0$  ہو۔

algorithm<sup>3</sup>  
algorithm<sup>4</sup>

اگر ایسا کوئی  $j$  نہیں پایا جاتا ہو تب بتائیں کہ  $A$  نادر ہے اور حساب روک دیں،  
ورنہ  $B$  کے صف  $j$  اور صف  $k$  کے اجزاء کا آپس میں تبادلہ کرتے ہوئے چلتے رہیں۔  
 $j = k + 1$  تا  $j = n$  کے لئے کریں:

$$q : \frac{b_{jk}}{b_{kk}}$$

$$p = k + 1 \text{ تا } p = n + 1 \text{ کے لئے کریں:}$$

$$b_{jp} : b_{jp} - qb_{kp}$$

اگر  $b_{nn} = 0$  ہو تب بتائیں کہ  $A$  نادر ہے اور حساب روک دیں۔

ہر قدم پر پہلی مساوات کے پہلی متغیر کے عددی سر کو چول عددی سر<sup>5</sup> کہتے ہیں جس کا غیر صفر ہونا ضروری ہے۔ اگر چول عددی سر کی قیمت کم ہو تب ہمیں مطابقتی مساوات کا بڑا مضرب باقی مساوات سے منفی کرنا ہو گا جس سے تعداد ہندسہ خلل بڑھتے ہوئے نتائج متاثر کرے گا۔ اس سے بچنے کی ترکیب سمجھنے سے پہلے آئیں ایک مثال سے ایسا ہوتے دیکھیں۔

مثال 22.2: کم چول عددی سر سے پیدا مشکلات  
درج ذیل نظام

$$0.0004x_1 + 1.402x_2 = 1.406$$

$$0.4003x_1 - 1.502x_2 = 2.501$$

کا حل  $x_1 = 10$  ،  $x_2 = 1$  ہے۔ ہم چار ہندسی غیر مقررہ نقطہ نظام استعمال کرتے ہوئے اس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہیں۔

(الف) پہلی مساوات کو مساوات چول لیتے ہوئے ہم اس کو  $q = \frac{0.4003}{0.0004} = 1001$  سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کر کے

$$-1405x_2 = -1404$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں  $x_2 = \frac{-1404}{-1405} = 0.9993$  ہو گا اور یوں پہلی مساوات سے  $x_1 = 10$  کی بجائے

$$x_1 = \frac{1}{0.0004}(1.406 - 1.402 \cdot 0.9993) = \frac{0.005}{0.0004} = 12.5$$

حاصل ہو گا۔ اس ناکامی کی وجہ  $|a_{12}|$  کے لحاظ سے  $|a_{11}|$  کی کم قیمت ہے جو  $x_2$  میں تعداد ہندسہ خلل کی قلیل قیمت سے  $x_1$  کی قیمت میں بہت زیادہ خلل پیدا کرتا ہے۔

(ب) آئیں اب دوسری مساوات کو چول مساوات لے کر اس کو  $0.0009993 = \frac{0.0004}{0.4003}$  سے ضرب دے کر پہلی مساوات سے منفی کرتے ہوئے

$$1.404x_2 = 1.404$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں  $x_2 = 1$  حاصل ہو گا جس کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے  $x_1 = 10$  ملتا ہے۔ یہاں  $|a_{22}|$  کے لحاظ سے  $|a_{21}|$  بہت کم نہیں ہے لہذا  $x_2$  میں معمولی تعداد ہندسہ خلل  $x_1$  کی قیمت میں بڑا خلل پیدا نہیں کرتا ہے۔ یہی ہماری کامیابی کی وجہ ہے۔ یقیناً  $x_2 = 1.002$  کی صورت میں بھی دوسری مساوات سے  $x_1 = \frac{2.501+1.505}{0.4003} = 10.01$  حاصل ہوتا جو بہت بہتر نتیجہ ہے۔ □

وہ مساوات جس کے  $x_1$  کا عددی سر باقی مساواتوں کے  $x_1$  کے عددی سر سے بڑا ہو کو پہلی مساوات منتخب کرتے ہوئے اور اسی طرح دوسری قدم پر  $x_2$  کے لحاظ سے مساوات منتخب کرتے ہوئے نظام میں پہلی، دوسری، تیسری، ... مساوات منتخب کی جاسکتی ہے۔ اس عمل کو جزوی چول<sup>6</sup> کہتے ہیں۔ مکمل چول<sup>7</sup> میں ہم پورے نظام میں سب سے بڑے حتمی عددی سر کو چول عددی سر لیتے ہوئے باقی مساوات میں سے اس کا مطابقتی متغیر حذف کرتے ہیں۔ اگلی قدم میں اسی ترکیب کو دہراتے ہیں اور اسی طرح آخر تک چلتے ہیں۔ عملاً مکمل چول کی ترکیب زیادہ مہنگی ثابت ہوتی ہے لہذا جزوی چول کی ترکیب ہی استعمال کی جاتی ہے۔

ہم پوری مساوات کو بڑی عدد سے ضرب دے کر کسی بھی عددی سر کی قیمت بڑھا سکتے ہیں لیکن ایسا کرنے سے نتائج پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے۔ مساوات کو جزو ضربی سے ضرب دینے کو تبدیلی پیماس<sup>8</sup> کہتے ہیں۔ عملاً ہم 10 (یا کمپیوٹر کی اساس  $\beta$ ) کی طاقت سے مساوات کو ضرب دے کر عددی سر کی سب سے بڑی حتمی قیمت کو 0.1 اور 1 (یعنی  $\beta^{-1}$  اور 1) کے بیچ لاتے ہیں۔

عملاً ہم تبدیل پیماس جزوی چول استعمال کرتے ہیں یعنی حذف کی  $k$  ویں قدم (جہاں  $k = 1, 2, \dots$  ہو گا) میں ہم باقی میسر  $n - k$  مساواتوں میں سے اس کو مساوات چول منتخب کرتے ہیں جس کے متغیر  $x_k$  کے عددی سر اور اس مساوات میں سب سے بڑی حتمی قیمت کے عددی سر کے حاصل تقسیم کی حتمی قیمت سب سے زیادہ ہو۔

گاوسی اسقاط میں پیدا ہونے والے خلل پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔

partial pivoting<sup>6</sup>  
total pivoting<sup>7</sup>  
scaling<sup>8</sup>



## ترکیب گاوس میں ترمیم

ترکیب گاوسی کے کئی ترامیم ممکن ہیں۔ ہم شولسکی<sup>9</sup> کے ایک قاعدہ پر مبنی ترمیم پیش کرتے ہیں۔ شولسکی<sup>10</sup> کا قاعدہ کہتا ہے کہ حتمی مثبت چکور قالب  $A$  کو

$$(22.4) \quad A = LU$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $L$  اور  $U$  بالترتیب نچلا تکنونی قالب اور بالائی تکنونی قالب ہیں۔  $L$  اور  $U$  عملاً یکتا ہوں گے۔ ہم مساوات کو حل کیے بغیر  $L$  اور  $U$  کو حاصل کر سکتے ہیں (نیچے مثال دیکھیں)۔  $n$  متغیرات کے  $n$  مساوات کا نظام  $Ax = b$  حل کرنے کے لئے ہم مساوات 22.4 کا سہارا لیتے ہوئے نظام کو

$$LUX = b$$

لکھتے ہیں۔ اس کو بائیں طرف  $L^{-1}$  سے ضرب دے کر

$$(22.5) \quad UX = z \quad z = L^{-1}b$$

حاصل ہو گا جو اس نظام کی تکنونی صورت ہے۔ ہم پہلے  $z$  کو درج ذیل تعلق

$$(22.6) \quad Lz = b$$

سے حاصل کر کے بعد میں

$$(22.7) \quad UX = z$$

سے  $x$  حاصل کریں گے۔ بہت سی اہم مسائل میں  $A$  تشاکل قالب ہو گا جس کی بنا  $U = L^T$  ہو گا (درج ذیل مثال دیکھیں)۔

مثال 22.3: ترکیب شولسکی

آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ نظام

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ 2x + 3y + 4z &= 20 \\ 3x + 4y + z &= 14 \end{aligned}$$

<sup>9</sup>فرانسیسی ریاضی دان اندر لوئی شولسکی [1875-1918]  
<sup>10</sup>Cholesky

کا حل  $x = 1$  ،  $y = 2$  ،  $z = 3$  ہے۔ ہم اس حل کو ترکیب شولسکی سے حاصل کرتے ہیں۔ عددی سر قالب تشکیلی ہے لہذا  $U = L^T$  ہو گا۔ ہم ضرب قالب کی تعریف استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

کے دونوں اطراف مطابقتی اجزاء کو برابر پر کرتے ہوئے  $U$  کے اجزاء حاصل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہمیں بالترتیب  $a_{11}^2 = 1$  مثلاً  $a_{11} = 1$  جس سے  $a_{11}a_{12} = a_{12} = 2$  ،  $a_{11}a_{13} = a_{13} = 3$  ،  $a_{12}a_{23} = a_{23} = 4$  اور اس سے  $a_{22}^2 + a_{23}^2 = 4 + a_{22}^2 = 3$  مثلاً  $a_{22} = i(\sqrt{-1})$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} = 6 + ia_{23} = 4, \quad a_{23} = i2$$

اور آخر میں

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 9 - 4 + a_{33}^2 = 1$$

سے مثلاً  $a_{33} = i2$  حاصل ہو گا۔ یوں مساوات 22.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 3 & i2 & i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ i8 \\ i6 \end{bmatrix}$$

دے گا۔ آخر میں ہم مساوات 22.7 حل کرتے ہیں یعنی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & i & i2 \\ 0 & 0 & i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ i8 \\ i6 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

□

گاوسی اسقاط کی دوسری ترمیم کو گناوس جاردن اسقاط کہتے ہیں۔ اس ترکیب میں قالب کو "تکوئی صورت" کی بجائے مزید چال چلتے ہوئے "وتری صورت" میں تبدیل کرتے ہوئے قیمتوں کے واپس پر کرنے کے عمل سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ ان اضافی چال کی بنا مساوات کا نظام حل کرنے میں کوئی آسانی پیدا نہیں ہوتی ہے۔ البتہ معکوس قالب حاصل کرنے میں صورت حال مختلف ہے جہاں ترکیب گاوس جاردن دونوں میں  $n^3$  ضرب درکار ہیں۔

## معکوس قالب

غیر نادر چکور قالب  $A$  کا معکوس اب اصولی طور پر  $n$  عدد نظام

$$(22.8) \quad Ax = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

کے حل سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $n \times n$  اکائی قالب کا  $j$  واں قطار  $b_j$  ہے۔

البتہ اکائی قالب  $I$  پر ترکیب گاوس جارڈن کی طرح عمل کرتے ہوئے  $A$  کی تخفیف سے  $I$  حاصل کرتے ہوئے  $A^{-1}$  کے حصول کو ترجیح دی جاتی ہے۔

## سوالات

سوال 22.1 تا سوال 22.11 کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔ سوال 22.1:

$$2x + 3y = 7$$

$$x - y = 1$$

جوابات:  $x = 2, y = 1$

سوال 22.2:

$$-2x + y = 5$$

$$x + 2y = 0$$

جوابات:  $x = -2, y = 1$

سوال 22.3:

$$-3x - y = -3$$

$$5x + 2y = 6$$

جوابات:  $x = 0, y = 3$

سوال 22.4:

$$\begin{aligned}x - y + z &= 2 \\2x + y - 3z &= -3 \\3x + 2y + z &= 7\end{aligned}$$

جوابات:  $x = -1, y = 1, z = 2$ 

سوال 22.5:

$$\begin{aligned}x + y + z &= -2 \\-2x + y - 3z &= 13 \\-3x + 2y - z &= 10\end{aligned}$$

جوابات:  $x = -1, y = 2, z = -3$ 

سوال 22.6:

$$\begin{aligned}2x - y + 4z &= 2 \\x + y - 3z &= 11 \\-3x + y - z &= -3\end{aligned}$$

جوابات:  $x = 4, y = 10, z = 1$ 

سوال 22.7:

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 1 \\3x - 2y - z &= -1\end{aligned}$$

جوابات:  $x = y, z = y + 1$ 

سوال 22.8:

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 0 \\2x - 2z &= -4\end{aligned}$$

جوابات:  $x = y - 1, z = y + 1$ 

سوال 22.9:

$$\begin{aligned}4x - 3y + 3z &= 0 \\8x + 7y - 7z &= 0\end{aligned}$$

جوابات:  $x = 0, z = y$

سوال 22.10:

$$2w - 4x + 3y - z = 3$$

$$w - 2x + 5y - 3z = 0$$

$$3w - 6x - y - z = 0$$

جوابات:  $w = 2x + 1, y = 1, z = 2$

سوال 22.11:

$$3w - x + 8y - 2z = -2$$

$$-w + 2x - 13y + 3z = 3$$

$$4w + 3x - 9y + z = 1$$

جوابات:  $w = 0, x = 2y, z = 3y + 1$

سوال 22.12: (تعداد قدم) کسی بھی اعدادی ترکیب کی کارکردگی کی ناپ اس ترکیب سے حل نکالنے کے لئے درکار کل حسابی اعمال کی تعداد ہے۔ دکھائیں کہ  $m = n$  کی صورت میں، واپس پر کرنے کے عمل کے علاوہ، مساوات 22.1 کو گاوسی اسقاط سے حل کرنے کے لئے  $\frac{1}{2}n(n-1)$  تقسیم،  $\frac{1}{3}n(n^2-1)$  ضرب اور  $\frac{1}{3}n(n^2-1)$  جمع حاصل کرنے ہوں گے۔ یوں بڑی  $n$  کی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\frac{n^3}{3}$  ضرب اور جمع درکار ہوں گے۔ تقسیم کی تعداد کم ہونے کی بنا رد کی جاسکتی ہے۔

سوال 22.13: دکھائیں کہ  $m = n$  کی صورت میں گاوسی اسقاط سے مساوات 22.1 حل کرنے کے دوران واپس پر کرنے کے عمل میں  $\frac{1}{2}n(n-1)$  ضرب،  $\frac{1}{2}n(n-1)$  جمع اور  $n$  تقسیم درکار ہوں گے۔

سوال 22.14: قلم و کاغذ سے حل کرتے ہوئے ہم عموماً صرف عددی سر لکھ کر ان پر حسابی عمل کرتے ہیں۔ یوں مثال 22.1 میں پہلے قدم کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $S_1$  سے مراد پہلی صف ہے۔ یوں  $S_2 - 3S_1$  سے مراد دوسری صف سے پہلی صف کی تین گنا کی تفریق ہے۔

2	1	2	1	6	12	$S_1$
0	-9	0	9	18	18	$S_2 - 3S_1$
0	1	-1	-5	-13	-18	$S_3 - 2S_1$
0	1	-3	0	4	2	$S_4 - S_1$

سوال 22.4 میں اس طرح تمام قدم لکھیں۔

سوال 22.15: (گائوس جارڈن اسقاط) مثال 22.1 میں گائوسی اسقاط درج ذیل دیتا ہے۔

$$\begin{array}{rcl} \text{(الف)} & 2w + x + 2y + z = & 6 \\ \text{(ب)} & -9x & + 9z = 18 \\ \text{(پ)} & -y - 4z = & -11 \\ \text{(ت)} & 13z = & 39 \end{array}$$

5 گائوس جارڈن اسقاط میں ہم (ب) استعمال کرتے ہوئے (الف) سے  $x$  حذف کرتے ہیں۔ اس کے بعد (پ) کی مدد سے (الف) اور (ب) سے  $y$  حذف کرتے ہیں [(ب) سے حذف کی یہاں ضرورت نہیں ہے] اور آخر میں (ت) کی مدد سے (الف)، (ب)، (پ) سے  $z$  حذف کرتے ہیں۔ دکھائیں کہ ایسا کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{rcl} 2w & = & 4 \\ -9x & = & -9 \\ -y & = & 1 \\ 13z & = & 39 \end{array}$$

ان مساوات کو حل کرتے ہوئے  $w = 2$ ،  $x = 1$ ،  $y = -1$  اور  $z = 3$  حاصل کریں۔

سوال 22.16: گائوس جارڈن اسقاط سے سوال 22.5 حل کریں۔

سوال 22.17: درج ذیل نظام پر مثال 22.2 کی طرح بحث کریں۔

$$\begin{array}{l} 0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001 \\ 1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000 \end{array}$$

## 22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ

گزشتہ حصہ میں گائوسی اسقاط پر غور کیا گیا جو خطی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بلا واسطہ ترقیب میں سے ایک ہے۔ ان ترقیب میں ہم پہلے سے بتا سکتے ہیں کہ حل حاصل کرنے کی خاطر کتنی حساب درکار ہو گی۔ اس کے

برعکس بالواسطہ ترکیب یا اعادہ<sup>11</sup> میں ہم تخمینی قیمت سے شروع کر کے، بار بار حساب دہراتے ہوئے، حل کی بہتر سے بہتر تخمین کی طرف بڑھتے ہیں۔ یوں جتنی زیادہ درستگی درکار ہو اتنا زیادہ حساب درکار ہو گا۔

اعادہ کی تراکیب ہم اس صورت استعمال کرتے ہیں جب ارتکاز کی شرح زیادہ ہو اور یوں بلا واسطہ تراکیب سے زیادہ جلدی حل حاصل ہو۔ عملی استعمال کی ایک اہم ترکیب اعادہ کو گائوس زائڈل اعادہ<sup>12</sup> کہتے ہیں۔ جس کو ہم ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔ درج ذیل نظام پر غور کریں۔

$$\begin{aligned} w - 0.25x - 0.25y &= 50 \\ -0.25w + x - 0.25z &= 50 \\ -0.25w + y - 0.25z &= 25 \\ -0.25x - 0.25y + z &= 25 \end{aligned} \quad (22.9)$$

(اس قسم کے نظام جزوی تفرقی مساوات کے حل اور لچکدار منحنی کی باہمی تحریف کے دوران پیش آتے ہیں۔) اس نظام کو درج ذیل صورت میں

$$\begin{aligned} w &= 0.25x + 0.25y + 50 \\ x &= 0.25w + 0.25z + 50 \\ y &= 0.25w + 0.25z + 25 \\ z &= 0.25x + 0.25y + 25 \end{aligned} \quad (22.10)$$

لکھ کر انہیں اعادہ میں استعمال کرتے ہیں یعنی ہم تمام متغیرات کی تخمینی قیمتوں مثلاً  $w_0 = 100$  ،  $x_0 = 100$  ،  $y_0 = 100$  ،  $z_0 = 100$  سے ابتدا کرتے ہوئے بہتر تخمین

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.25x_0 + 0.25y_0 + 50 = 100.00 \\ x_1 &= 0.25w_1 + 0.25z_0 + 50 = 100.00 \\ y_1 &= 0.25w_1 + 0.25z_0 + 25 = 75.00 \\ z_1 &= 0.25x_1 + 0.25y_1 + 25 = 68.75 \end{aligned} \quad (22.11)$$

حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 22.10 کے دائیں ہاتھ تازہ ترین قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 22.11 حاصل کی گئی ہیں۔ ہر مرتبہ متغیر کی تازہ ترین قیمت استعمال کی جاتی ہے۔ یوں دوسری مساوات میں  $w_0$  کی بجائے  $w_1$  کی تازہ ترین قیمت استعمال کی جائے گی۔ اسی طرح آخری مساوات میں  $x_1$  اور  $y_1$  استعمال کیے گئے

iterative method<sup>11</sup>  
Gauss-Seidel iteration<sup>12</sup>

ہیں۔ اگلے قدم میں مزید بہتر نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} w_2 &= 0.25x_1 + 0.25y_1 + 50 = 93.75 \\ x_2 &= 0.25w_2 + 0.25z_1 + 50 = 90.62 \\ y_2 &= 0.25w_2 + 0.25z_1 + 25 = 65.62 \\ z_2 &= 0.25x_2 + 0.25y_2 + 25 = 64.06 \end{aligned}$$

آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ درست حل  $w = x = 87.5$  ،  $y = z = 62.5$  ہے۔

ہم ثبوت پیش کیے بغیر بتانا چاہتے ہیں کہ ترکیب گاوس زائڈل ہر ابتدائی تخمینہ قیمتوں کے لئے صرف اور صرف اس صورت میں مرکب ہو گا جب قالب اعادہ  $C^{13}$  (مساوات 22.13 دیکھیں) کے ہر امتیازی قدر کی حتمی قیمت 1 سے کم ہو اور ارتکاز کی شرح رداس طیف (یعنی ان حتمی قیمتوں میں سب سے زیادہ قیمت) پر منحصر ہے۔ قالب  $C$  کو اب حاصل کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ درج ذیل  $n$  خطی مساوات کا نظام ہے

$$Ax = b$$

جہاں سمتیہ قطار  $x$  کے اجزاء نامعلوم متغیرات  $x_1, \dots, x_n$  ہیں۔ فرض کریں کہ ابتدائی تخمینہ  $x_{(0)}$  کے لحاظ سے  $x_{(0)}, x_{(1)}, \dots$  گاوس زائڈل اعادہ سے یک بعد دیگرے حاصل تخمینہ نتائج کی ترتیب ہے۔ اگر یہ ترتیب نظام کے حل کو مرکب ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ ترکیب  $x_{(0)}$  کے لحاظ سے موثر ہے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ  $j = 1, \dots, n$  کے لئے  $a_{jj} = 1$  ہے (نظام کی ایسی صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم مساواتوں کو یوں ترتیب دیتے ہیں کہ تمام وتری جزو غیر صفر ہوں اور وتری جزو سے مطابقتی مساوات تقسیم کرتے ہیں)۔ ہم اب  $A = I + \bar{L} + \bar{U}$  لکھ سکتے ہیں جہاں  $\bar{L}$  اور  $\bar{U}$  بالترتیب بالائی ٹکونی قالب اور نچلا ٹکونی قالب ہیں جن کے مرکزی وتر کے اجزاء صفر ہیں جبکہ  $I$  اکائی قالب ہے جو  $n$  صف پر مشتمل ہے۔  $A$  کی اس صورت کو  $Ax = b$  میں پر کرتے ہوئے  $(I + \bar{L} + \bar{U})x = b$  حاصل ہو گا۔ روایتی طور پر  $\bar{U} = U$  اور  $\bar{L} = L$  لکھا جاتا ہے۔ یوں

$$(I - L - U)x = b \implies (I - L)x = b + Ux$$

ہو گا جس سے کلیہ گاوس زائڈل

$$(22.12) \quad (I - L)x_{(m+1)} = b + Ux_{(m)} \quad (m = 0, 1, \dots)$$



اخذ ہوتا ہے۔ درحقیقت  $U$  بالائی ٹکونی قالب ہے جس کے غیر صفر اجزاء ان مقامات کے مطابقتی ہیں جن کی تازہ ترین تخمینی قیمتیں ابھی حاصل نہیں کی گئی ہیں۔ اس کے برعکس  $L$  نچلا ٹکونی قالب ہے جس کے غیر صفر اجزاء ان مقامات کے مطابقتی ہیں جن کی تازہ ترین تخمینی قیمتیں  $x_{(m+1)}$  ہم حاصل کر چکے ہیں۔ مساوات 22.12 کو  $x_{(m+1)}$  کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(22.13) \quad x_{(m+1)} = (I - L)^{-1}b + Cx_{(m)}, \quad C = (I - L)^{-1}U$$

حاصل ہو گا۔ اعادہ گاوس زائڈل کی ارتکاز، قالب اعادہ  $C$  کی امتیازی اقدار کی مشروط ہے۔

ہم  $x_{(m)} = [x_j^{(m)}]$  لکھ کر اعادہ گاوسی زائڈل کو درج ذیل بیان کر سکتے ہیں۔

الخوارزمی: اعادہ گاوس زائڈل

نظام  $Ax = b$  جہاں  $n \times n$  قالب  $A = [a_{jk}]$  میں  $j = 1, \dots, n$  کے لئے  $a_{jj} \neq 0$  ہے، دیا گیا ہے۔

منتخب کریں کوئی  $x_{(0)}$

حاصل کریں  $v_{jk} = -\frac{a_{jk}}{a_{jj}}$  جب  $j \neq k$  ہو؛  $j, k = 1, \dots, n$

حاصل کریں  $\tilde{b}_j = \frac{b_j}{a_{jj}}$

$m$  کے لئے 0 تا اختتام کریں:  $j = 1, \dots, n$  کے لئے کریں

$$x_j^{(m+1)} := \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk} x_k^{(m+1)} + \sum_{k=j+1}^n v_{jk} x_k^{(m)} + \tilde{b}_j$$

اختتام کی تصدیق کریں۔

یہاں اختتام کی تصدیق سے مراد ایسی صورت ہے جہاں مطلوبہ درستگی حاصل ہو جائے، یا قدموں کی درکار تعداد پوری ہو جائے یا مزید لاگو شرائط مطمئن ہوں۔

اعادہ یعقوبی

اعادہ گاوس زائڈل مسلسل اصلاح کی ترکیب ہے جس میں تازہ ترین نئی تخمینی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ اگر نئی قیمتوں کو صرف اس وقت حساب کے لئے استعمال کیا جائے جب تمام متغیرات کی نئی قیمتیں حاصل کر لی جائیں

تب بیک وقت اصلاح کی ترکیب حاصل ہوگی۔ اعادہ یعقوبی اس قسم کی ایک ترکیب ہے۔ یہ ترکیب اعادہ گاوس زائڈل کی طرح ہے پس اس میں نئی قیمتیں صرف اس صورت پر کی جاتی ہیں جب تمام متغیرات کی قیمتیں حاصل کر لی جائیں۔ یوں  $Ax = b$  کو  $x = b + (I - A)x$  صورت میں لکھ کر اعادہ یعقوبی کی قالبی اظہار

$$(22.14) \quad x_{(m+1)} = b + (I - A)x_{(m)}$$

ہوگی۔ یہ ترکیب زیادہ تر نظریاتی اہمیت رکھتی ہے۔ یہ  $x_{(0)}$  کی ہر منتخب قیمت کے لئے صرف اور صرف اس صورت میں مرکب ہوگی جب  $I - A$  کا رداس طیف 1 سے کم ہو؛ یہاں بھی  $j = 1, \dots, n$  کے لئے  $a_{jj} = 1$  فرض کیا جاتا ہے۔

نظام  $Ax = b$  کی صورت میں ہم بقیہ<sup>14</sup>  $r$  متعارف کر سکتے ہیں جس کی تعریف

$$r = Ax - b$$

ہے۔ ظاہر ہے کہ  $r = 0$  صرف اور صرف اس صورت میں ہوگا جب  $x$  نظام کا حل ہو۔ یوں تخمینہ حل کی صورت میں  $r \neq 0$  ہوگا۔ اعادہ گاوس زائڈل میں ہم ہر منزل پر تخمینہ حل کے ایک جزو میں ترمیم یا نرمی کرتے ہوئے  $r$  کے ایک جزو گھٹا کر صفر کرتے ہیں۔ یوں اعادہ گاوس زائڈل ان تراکیب میں سے ایک ہے جنہیں تراکیب آرام<sup>15</sup> کہتے ہیں۔

غیر نادر چکور قالب کا معکوس بھی اعادہ کے ذریعہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔ عدد  $a$  کے معکوس  $x$  سے مراد ایسا عددی ہے جو  $ax = 1$  کو مطمئن کرتا ہو۔ ترکیب نیوٹن کو تفاعل  $f(x) = x^{-1} - a$  پر لاگو کرتے ہوئے تقسیم کے عمل کے بغیر  $x$  حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  ہے لہذا اعادہ نیوٹن

$$x_{m+1} = x_m - (x_m^{-1} - a)(-x_m^2) = x_m(2 - ax_m)$$

ہوگا۔ اس کو دیکھ کر ہم  $A$  کے معکوس  $X = A^{-1}$  کے لئے درج ذیل کلیہ لکھتے ہیں۔

$$(22.15) \quad X_{(m+1)} = X_{(m)}(2I - AX_{(m)})$$

یہ عمل صرف اور صرف اس صورت میں مرکب ہوگا (یعنی  $m \rightarrow \infty$  کرنے سے  $A^{-1}$  دے گا) جب  $X_{(0)}$  کی ایسی قیمت منتخب کی جائے کہ  $I - AX_{(0)}$  کے ہر امتیازی قدر کی حتمی قیمت 1 سے کم ہو۔ یہ ترکیب اس صورت میں موزوں ثابت ہوتی ہے جب پیش آنے والے ضرب آسان ہوں (مثلاً جب  $A$  میں بہت سارے صفر ہوں)۔ عملاً  $X_{(0)}$  کی موزوں قیمت منتخب کرنا اگر ناممکن نہیں تو مشکل ضرور ثابت ہوتا ہے۔ اسی لئے کسی دوسرے ترکیب سے حاصل معکوس کو اس ترکیب سے صرف زیادہ درست بنایا جاتا ہے۔

## سوالات

سوال 22.18 تا سوال 22.21 کو اعادہ گاوس زائڈل سے حل کریں۔ ابتدائی قیمتیں 1, 1, 1 لیں۔ تین قدم تک چلیں۔

سوال 22.18:

$$\begin{aligned} 10x + y + z &= 6 \\ x + 10y + z &= 6 \\ x + y + 10z &= 6 \end{aligned}$$

جواب: درست حل 0.5, 0.5, 0.5 ہے۔

سوال 22.19:

$$\begin{aligned} 4x + y &= -8 \\ 4y + z &= 2 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

سوال 22.20:

$$\begin{aligned} 10x - y - z &= 13 \\ x + 10y + z &= 36 \\ -x - y + 10z &= 35 \end{aligned}$$

جواب: درست حل 2, 3, 4 ہے۔

سوال 22.21:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + z &= 14 \\ x + 5y - z &= 10 \\ x + y + 8z &= 20 \end{aligned}$$

سوال 22.22: (الف) 0, 0, 0 اور (ب) 10, 10, 10 سے ابتدا کرتے ہوئے سوال 22.18 کے نظام کو اعادہ گاوس زائڈل سے حل کریں۔ تین قدم تک چلیں۔

سوال 22.23:  $1, 1, 1$  سے ابتدا کرتے ہوئے سوال 22.18 کے نظام کو تین قدم تک اعادہ گاوس زائڈل اور اعادہ یقوبی سے حل کریں۔ نتائج کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 22.24: مساوات 22.9 میں دی گئی نظام کا حل کتاب میں دیا گیا ہے۔ اس حل کی تمام قدموں کی تصدیق کریں۔ اس نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

سوال 22.25: کتاب میں مساوات 22.9 کے اعادہ گاوس زائڈل کے مزید دو قدم چلیں۔

سوال 22.26: مساوات 22.9 کے نظام کے لئے مساوات 22.13 کی مدد سے  $C$  تلاش کریں۔  
جواب:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0.0625 & 0.25 \\ 0 & 0.0625 & 0.0625 & 0.25 \\ 0 & 0.03125 & 0.03125 & 0.125 \end{bmatrix}$$

سوال 22.27:  $z_0 = 100$  ،  $y_0 = 100$  ،  $x_0 = 100$  ،  $w_0 = 100$  سے ابتدا کرتے ہوئے اعادہ یقوبی سے مساوات 22.9 کے نظام کا حل دو قدم تک حاصل کریں۔ کتاب میں دیے گئے حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 22.28:  $0, 0, 0$  سے ابتدا کرتے ہوئے دکھائیں کہ درج ذیل نظام کے لئے اعادہ گاوس زائڈل مرتکز ہے جبکہ اعادہ یقوبی منفرج ہے۔

$$2x + y + z = 4$$

$$x + 2y + z = 4$$

$$x + y + 2z = 4$$

جواب: اعادہ یقوبی  $0, 0, 0$  کے بعد  $2, 2, 2$  اور اس کے بعد  $0, 0, 0$  ، دیتا ہے۔ اعادہ گاوس زائڈل کی اعادہ قالب  $C$  کے تمام جزو کی حتمی قیمت 1 سے کم ہے لہذا یہ اعادہ مرتکز ہو گا۔ یہاں  $C$  درج ذیل ہے۔

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0 & 0.125 & 0.375 \end{bmatrix}$$

سوال 22.29: عین ممکن ہے کہ ہم سوچیں کہ اعادہ یقوبی سے اعادہ گاوس زائڈل بہتر ہے۔ حقیقت میں ان اعادہ کا آپس میں موازنہ کرنا ممکن نہیں ہے۔ اس حیران کن حقیقت کو دیکھنے کی خاطر درج ذیل نظام کو دونوں اعادہ سے حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ اعادہ یقوبی مرتکز ہو گا جبکہ اعادہ گاوس زائڈل منفرج ہو گا۔ (اشارہ۔ امتیازی اقدار کا سہارا لیں)

$$\begin{aligned}x + z &= 2 \\ -x + y &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 0\end{aligned}$$

سوال 22.30: قالب  $A$  کے تخمینی معکوس  $X_{(0)}$  پر غور کریں جہاں

$$X_{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.4 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ہیں۔ مساوت 22.15 کی مدد سے  $X_{(1)}$  حاصل کریں۔  $A^{-1}$  تلاش کرتے ہوئے دکھائیں کہ  $X_{(0)}$  کا ہر جزو  $A^{-1}$  کے مطابقتی جزو سے زیادہ سے زیادہ 0.1 انحراف کرتا ہے جبکہ  $X_{(1)}$  کا مطابقتی جزو 0.03 انحراف کرتا ہے۔  
جواب:

$$X_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.49 & -0.1 & 0.51 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.51 & 0.3 & -1.47 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.5 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix}$$

سوال 22.31: درج ذیل  $X_{(0)}$  اور  $A$  کے لئے مساوت 22.15 کے ارتکاز کی تصدیق کرتے ہوئے دو قدم چل کر درست حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$X_{(0)} = \begin{bmatrix} 2.9 & -0.9 \\ -4.9 & 1.9 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

سوال 22.32:  $X_{(m)} = A^{-1}$  سے مساوت 22.15 کے ذریعہ  $X_{(m+1)} = A^{-1}$  حاصل کریں۔

سوال 22.33: دکھائیں کہ مساوت 22.9 میں  $w$  اور  $x$  آپس میں بدلنے اور  $y$  اور  $z$  کو آپس میں بدلنے سے نظام میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے اس نظام کو گھٹا کر دو نا معلوم متغیرات کی دو مساوات کا نظام حاصل کریں۔

## 22.3 خطی مساوات کا نظام: بدخونی



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$



اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z \leq |2yy'|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

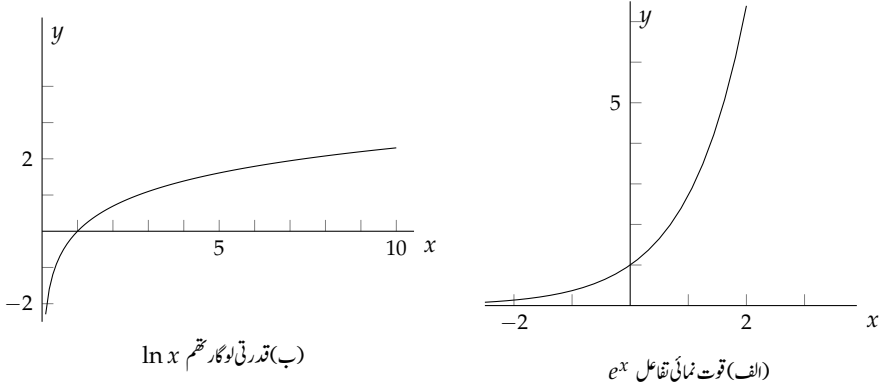
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

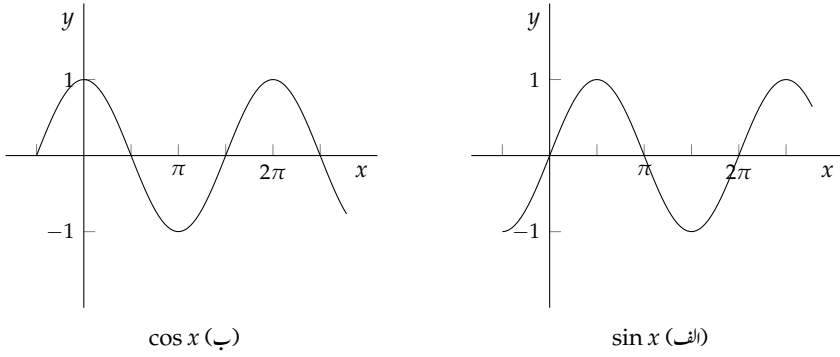
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

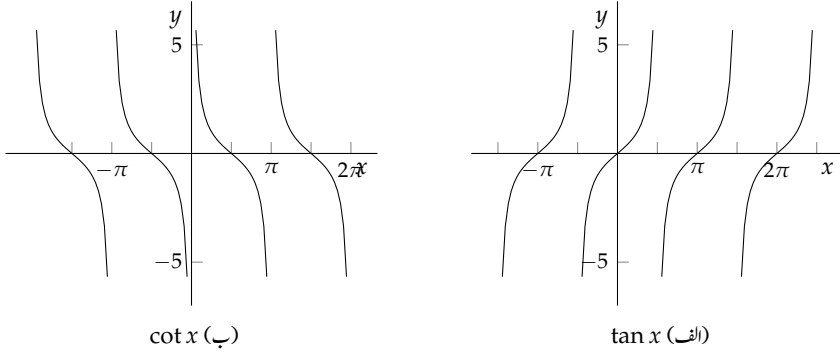
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

(ب.17)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

(ب.18)

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

(ب.19)

$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

(ب.20)

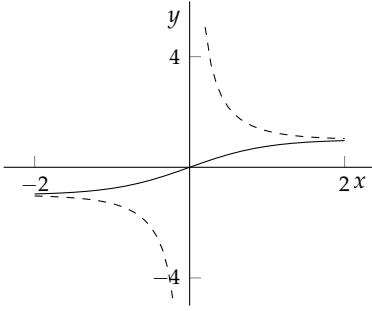
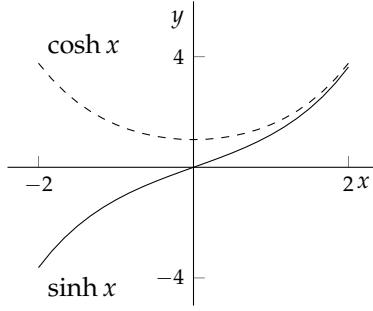
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

(ب.21)

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب.22)

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

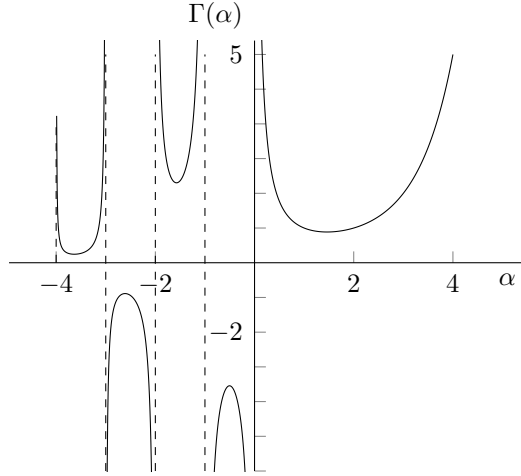
$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔





شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

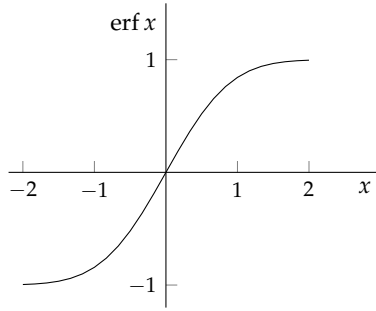
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

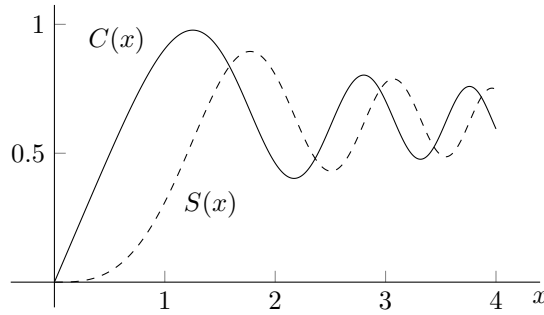
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکمالات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

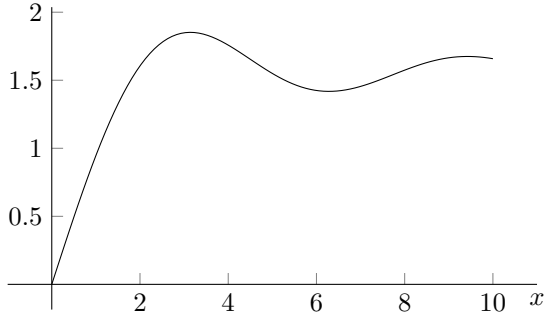
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

