

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	214
3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	217
4	نظام تفرقی مساوات	225
4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	226
4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	235
4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	250
4.3.1	خطی نظام	251
4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	254
4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام	272
4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام	281
4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ	290
4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	298
4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب	299
5	طابق تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	309
5.1	ترکیب طاقی تسلسل	310
5.2	لیمنڈر مساوات۔ لیمنڈر کثیر رکنی	325
5.3	مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس	343
5.3.1	عملی استعمال	348
5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل	362
5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	377
5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ	383
5.7	مسئلہ سیورم لیوویل	390
5.8	قائمیت لیمنڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل	397
6	لاپلاس تبادلہ	407
6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	408
6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	417
6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیزھی تفاعل	430
6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	451
6.5	الچھاو	469
6.6	لاپلاس بدل کی عمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	478
6.7	تفرقی مساوات کے نظام	487
6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے	495
7	خطی الجبرا: سمتیات	499

499	غیر سمتیات اور سمتیات	7.1
501	سمتیہ کے اجزاء	7.2
507	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب	7.3
516	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت	7.4
522	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)	7.5
535	اندرونی ضرب فضا	7.6
537	سمتی ضرب	7.7
539	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب	7.8
550	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب	7.9
559	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام	8
560	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب	8.1
570	قالبی ضرب	8.2
577	8.2.1 تبدیلی محل	
590	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط	8.3
603	8.3.1 صف زینہ دار صورت	
611	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا	8.4
625	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکسانی	8.5
630	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب	8.6
633	مقطع۔ قاعدہ کریمیر	8.7
650	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط	8.8
665	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ	8.9
683	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب	9
684	9.1 امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول	
695	9.2 امتیازی مسائل کے چند استعمال	
703	9.3 تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب	
710	9.4 امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت	
724	9.5 مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں	
735	10 سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل	
735	10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان	
738	10.2 سمتی علم الاحصاء	
744	10.3 منحنی	
751	10.4 لمبائی قوس	
757	10.5 مماس، انحناء اور مرؤ	
762	10.6 سمتی رفتار اور اسراع	
769	10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ	
776	10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان	
788	10.9 تبادلہ محدودی نظام اور تبادلہ ارکان سمتیات	

794 . . . . . 10.10 سستی میدان کی پھیلاؤ . . . . .

801 اضافی ثبوت ا

805 مفید معلومات ب

805 . . . . . 1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات . . . . .

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 10

# سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل

### 10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان

غیر سمتی تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو فضا میں کسی سلسلہ نقاط کے ہر نقطے پر معین ہو اور جہاں تفاعل کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں جن کا دار و مدار صرف فضا میں نقطوں پر ہو ناکہ چنی گئی محوری نظام پر۔ ان نقطوں کے سلسلے کو تفاعل کا دائرہ کار<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ عملی استعمال میں تفاعل  $f$  کا دائرہ کار  $D$  عموماً منحنی یا سطح یا فضا میں تین بعدی خطہ ہو گا۔ تفاعل  $f$  دائرہ کار  $D$  کے ہر نقطے کے ساتھ ایک غیر سمتی حقیقی عدد وابستہ کرتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ  $D$  میں غیر سمتی میدان<sup>2</sup> دیا گیا ہے۔

$x$ ،  $y$ ،  $z$  متعارف کرنے سے تفاعل  $f$  کو ان محدود کی مدد سے  $f(x, y, z)$  لکھا جاسکتا ہے، پس اتنا یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ  $P$  پر تفاعل  $f$  کی قیمت، چنی گئی محدودی نظام پر ہر گز منحصر نہیں ہوگی۔ اس حقیقت کو ظاہر کرنے کی خاطر  $f(x, y, z)$  کی جگہ عموماً  $f(P)$  لکھا جاتا ہے۔ تفاعل  $f$  وقت پر بھی منحصر ہو سکتا ہے۔

---

domain<sup>1</sup>  
scalar field<sup>2</sup>

مثال 10.1: غیر سمتی تفاعل

غیر تغیر پذیر نقطہ  $P_0$  سے کسی نقطہ  $P$  کا فضا میں فاصلہ غیر سمتی تفاعل ہے جس کا دائرہ کار  $D$  پوری فضا ہے۔  $f(P)$  فضا میں غیر سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر کارتیسی نظام محدود میں  $P_0$  کے محدود  $x_0$ ،  $y_0$ ،  $z_0$  اور  $P$  کے محدود  $x$ ،  $y$ ،  $z$  ہوں تب  $f$  درج ذیل ہوگا۔

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

نظام محدود تبدیل کرنے سے عموماً  $P_0$  اور  $P$  کے محدود تبدیل ہوں گے لیکن  $f(P)$  کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی لہذا  $f(P)$  غیر سمتی تفاعل ہے۔

مثال 10.2: غیر سمتی میدان

کسی جسم کے اندر درجہ حرارت  $T$  غیر سمتی تفاعل ہے جو غیر سمتی میدان (یعنی جسم میں درجہ حرارت) تعین کرتا ہے۔

اگر فضا میں سلسلہ نقاط کے ہر نقطے  $P$  کے ساتھ سمتیہ  $v(P)$  وابستہ کیا جائے تب ہم کہتے ہیں کہ ان نقاط پر سمتی میدان<sup>3</sup> دیا گیا ہے اور  $v(P)$  سمتی تفاعل<sup>4</sup> کہلاتا ہے۔ یہ سلسلہ نقاط کسی منحنی یا سطح یا حجم میں پایا جاسکتا ہے۔

کارتیسی نظام محدود میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(x, y, z) = v_1(x, y, z)i + v_2(x, y, z)j + v_3(x, y, z)k$$

یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر  $v$  کی قیمت اس نقطے پر منحصر ہے ناکہ نظام محدود پر۔

مثال 10.3: سمتی میدان (سمتی میدان رفتار)

گھومتے ہوئے جسم  $B$  کی سمتی رفتار  $v(P)$  کو سمتی میدان رفتار کہتے ہیں۔ گھومتے جسم کی محور پر کارتیسی محدود کا مبدارکتے ہوئے جسم پر کسی نقطہ  $N$  کی سمتی رفتار کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (صفحہ 544 پر مثال 7.13 دیکھیں)

$$(10.1) \quad v(x, y, z) = \omega \times (xi + yj + zk)$$

جہاں لمحہ غور پر نقطہ  $N$  کے محدود  $x$ ،  $y$ ،  $z$  ہیں۔ اگر کارتیسی  $z$  محور عین جسم کی محور پر واقع ہو اور  $\omega$  مثبت  $z$  محور کے رخ ہو تب  $\omega = \omega k$  لکھا جائے گا۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.2) \quad v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{bmatrix} = \omega(-yi + xj)$$

مثال 10.4: سمتی میدان (میدان قوت)

فرض کریں کہ کیت  $M$  مستقل طور پر فضا میں نقطہ  $N_0$  پر موجود ہے جبکہ کیت  $m$  فضا میں کسی بھی نقطہ  $N$  پر موجود ہو سکتا ہے۔ اب نیوٹن قانون تجاذب کے تحت  $m$  پر قوت کشش

$$(10.3) \quad |f| = \frac{GMm}{r^2}$$

عمل کرے گی جہاں  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$  تجاذبی مستقل ہے اور  $r$  ان جسموں کے مابین فاصلہ ہے۔ یہاں  $v$  فضا میں سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر ہم کارتیسی محدود کو یوں چنیں کہ  $N_0$  کے محدود  $x_0$ ،  $y_0$ ،  $z_0$  ہوں اور  $N$  کے محدود  $x$ ،  $y$ ،  $z$  ہوں تب مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (r \geq 0)$$

ہو گا۔ اب  $r > 0$  فرض کرتے ہوئے سمتیہ

$$(10.4) \quad r = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$$

متعارف کرتے ہوئے  $r = |r|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں  $f$  کی سمت میں اکائی سمتیہ  $-\frac{r}{r}$  ہو گا جہاں منفی کی علامت اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ قوت کشش  $N_0$  سے  $N$  کی رخ کو ہے۔ یوں درج ذیل لکھ جاسکتا ہے۔

$$(10.5) \quad f = |f| \left( -\frac{r}{r} \right) = -GMm \frac{r}{r^3} = -GMm \left[ \frac{x-x_0}{r^3} i + \frac{y-y_0}{r^3} j + \frac{z-z_0}{r^3} k \right]$$

یہ سمتی تفاعل  $m$  پر قوت کشش دیتا ہے۔

## 10.2 سمتی علم الاحصاء

علم الاحصاء کے بنیادی تصورات مثلاً ارتکاز، استمراریت اور تفرق پذیری کو بالکل فطری طور پر سمتی علم الاحصاء کے لئے بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔ انہیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

سمتیت  $a_{(n)}$ ، جہاں  $n = 1, 2, \dots$  ہے، کا لامتناہی تسلسل اس صورت مرکوز تصور کیا جاتا ہے جب ایسا سمتیہ  $a$  موجود ہو کہ درج ذیل درست ہو۔

$$(10.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{(n)} - a| = 0$$

$a$  کو اس تسلسل کا تحدیدی سمتیہ<sup>5</sup> کہتے ہیں جسے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(10.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{(n)} = a$$

کار تیبی نظام محدود استعمال کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ سمتیت کا تسلسل اس صورت سمتیہ  $a$  پر مرکوز ہو گا جب تسلسل کے تین کار تیبی ارکان کا تسلسل بالترتیب  $a$  کے تین کار تیبی ارکان پر مرکوز ہوں۔

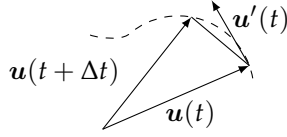
اسی طرح اگر حقیقی متغیر  $t$  پر مبنی سمتی تفاعل  $u(t)$  نقطہ  $t_0$  کے ہمسائیگی<sup>6</sup> میں معین ہو (جبکہ  $t_0$  پر یہ غیر معین ہو سکتا ہے) تب  $t$  کا  $t_0$  کے قریب تر ہونے سے تفاعل کی حد<sup>7</sup>  $l$  سے مراد درج ذیل ہے

$$(10.8) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} |u(t) - l| = 0$$

<sup>5</sup>limit vector

<sup>6</sup>ہمسائیگی سے مراد  $t$  محور پر ایسا نقطہ ہے جس کے اندر  $t_0$  پایا جاتا ہو۔

<sup>7</sup>limit



شکل 10.1: سمتی تفاعل کا تفرق

جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(10.9) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l$$

سمتی تفاعل  $u(t)$  اس صورت  $t = t_0$  پر استمراری تصور کیا جاتا ہے جب یہ  $t_0$  کے ہمسائیگی میں معین ہو اور درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$(10.10) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u(t_0)$$

کار تیزی نظام محدود میں تفاعل  $u(t)$  درج لکھا جائے گا

$$(10.11) \quad u(t) = u_1(t)i + u_2(t)j + u_3(t)k$$

اور  $t_0$  پر  $u(t)$  اس صورت استمراری ہو گا جب اس کے تینوں کار تیزی اجزاء  $t_0$  پر استمراری ہوں۔

تفاعل  $u(t)$  نقطہ  $t$  پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب درج ذیل حد موجود ہو۔

$$(10.12) \quad u'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

$u'(t)$  کو  $u(t)$  کا تفرق<sup>8</sup> کہتے ہیں (شکل 10.1)۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر سمتیہ  $u(t)$  کی نوک کو آزاد متغیر  $t$  کے لئے وقفہ  $t$  تا  $t + \Delta t$  ظاہر کرتی ہے۔

کار تیزی نظام محدود استعمال کرتے ہوئے نقطہ  $t$  پر  $u(t)$  اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس نقطے پر درج ذیل تینوں تفرق موجود ہوں۔

$$u'_m(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_m(t + \Delta t) - u_m(t)}{\Delta t} \quad (m = 1, 2, 3)$$

یوں سمتیہ تفاعل کا تفرق لینا اس کے تینوں ارکان کا علیحدہ علیحدہ تفرق لینے کے مترادف ہے یعنی:

$$(10.13) \quad \mathbf{u}'(t) = u'_1(t)\mathbf{i} + u'_2(t)\mathbf{j} + u'_3(t)\mathbf{k}$$

تفرق کے جانی پہچانی اصولوں کے مطابقتی اصول سمتیہ تفاعل کے تفرق کے لئے بھی حاصل کیے جاسکتے ہیں مثلاً

$$(10.14) \quad (cu)' = cu' \quad (c \text{ مستقل ہے}), \quad (u+v)' = u' + v'$$

اور

$$(10.15) \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$

$$(10.16) \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{v}$$

$$(10.17) \quad \left(\frac{\mathbf{u}}{v}\right)' = \frac{v\mathbf{u}' - \mathbf{u}v'}{v^2}$$

$$(10.18) \quad (uvw)' = (u'vw) + (uv'w) + (uvw')$$

چونکہ سمتی ضرب غیر قابل تبادل ہے لہذا مساوات 10.16 میں سمتیات کی ترتیب برقرار رکھنا لازم ہے۔

مثال 10.5: مستقل لمبائی کے تفاعل کا تفرق

اگر تفاعل  $\mathbf{u}(t)$  کی لمبائی مستقل ہو یعنی  $|\mathbf{u}(t)| = c$  تب  $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = c^2$  ہو گا اور مساوات 10.15 کی مدد سے  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})' = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$  حاصل ہو گا جس کے تحت مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل کا تفرق یا صفر سمتیہ ہو گا اور یا یہ  $\mathbf{u}(t)$  کے قائمہ الزاویہ ہو گا۔

درج بالا گفتگو سے سمتی تفاعل کی جزوی تفرق کے اصول حاصل کرتے ہیں۔ اگر کسی سمتی تفاعل  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

کے اجزاء  $n$  عدد متغیرات  $t_1, \dots, t_n$  کے ساتھ قابل تفرق ہوں تب  $t_1$  کے ساتھ  $\mathbf{u}$  کے جزوی تفرق کو  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_1}$  سے ظاہر کیا جائے گا جو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1}\mathbf{i} + \frac{\partial u_2}{\partial t_1}\mathbf{j} + \frac{\partial u_3}{\partial t_1}\mathbf{k}$$

اسی طرح دیگر جزوی تفرقات لکھے جاسکتے ہیں مثلاً:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_m \partial t_n} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_m \partial t_n} i + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_m \partial t_n} j + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t_m \partial t_n} k$$

مثال 10.6: جزوی تفرق

سمتی تفاعل  $r(t_1, t_2) = a \cos \omega t_1 i + a \sin \omega t_1 j + t_2 k$  کے جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\partial r}{\partial t_1} = a\omega(-\sin \omega t_1 i + \cos \omega t_1 j), \quad \frac{\partial r}{\partial t_2} = k$$

تفاعل  $r$  ایسی نکلی سطح کو ظاہر کرتا ہے جس کا رداس  $a$  ہے اور محور  $z$  محور ہے۔

### سوالات

سوال 10.1 تا سوال 10.5 میں برابر سطح  $f = c$  کیا ہو گا جہاں  $c$  مستقل ہے۔

سوال 10.1:  $f = x + y + z$

جواب: متوازی سطحیں

سوال 10.2:  $f = x^2 + y^2 + z^2$

جواب: ہم مرکز کرہ

سوال 10.3:  $f = x^2 + y^2$

جواب: کارٹیزی  $z$  کے ہم محوری نکلی سطحیں

سوال 10.4:  $f = 4x^2 + 5y^2$

جواب: کارٹیزی  $z$  کے ہم محوری نکلی ترخیم سطحیں

سوال 10.5:  $f = x^2 + y^2 - z$   
جواب: قطع مکانی نما سطحیں

$xy$  سطح پر سمتیہ  $v$  سوال 10.6 تا سوال 10.9 میں دیا گیا ہے۔ وہ سطح دریافت کریں جس پر  $v$  کی لمبائی مستقل ہو۔ وہ سطح دریافت کریں جس پر  $v$  کی یکساں سمت ہو۔

سوال 10.6:  $v = 2xi + 3yj$   
جوابات: مستقل،  $\frac{y}{x}$ ، مستقل  $4x^2 + 9y^2$

سوال 10.7:  $v = x^2i + \sqrt{y}j$   
جوابات: مستقل،  $\frac{\sqrt{y}}{x^2}$ ، مستقل  $x^4 + y$

سوال 10.8:  $v = (x^2 - y^2)i + 2xyj$   
جوابات: مستقل،  $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$ ، مستقل  $x^2 + y^2$

سوال 10.9:  $v = (x + y)i + (x - y)j$   
جوابات: مستقل،  $\frac{x - y}{x + y}$ ، مستقل  $x^2 + y^2$

سوال 10.10 تا سوال 10.18 میں  $u$  دیا گیا ہے۔ آپ سے التماس ہے کہ  $u'$  اور  $u''$  دریافت کریں۔

سوال 10.10:  $a + bt^2$   
جوابات:  $u' = 2bt$ ,  $u'' = 2b$

سوال 10.11:  $ti + (t^2 + 2)j$   
جوابات:  $u' = i + 2tj$ ,  $u'' = 2j$

سوال 10.12:  $4 \cos t i + 2 \sin t j$   
جوابات:  $u' = -4 \sin t i + 2 \cos t j$ ,  $u'' = -4 \cos t i - 2 \sin t j = -u$

سوال 10.13:  $4 \cos t i + 2 \sin t j - 3t k$   
جوابات:  $u' = -4 \sin t i + 2 \cos t j - 3k$ ,  $u'' = -4 \cos t i - 2 \sin t j$

سوال 10.14:  $t^2i + 2j + 4tk$   
جوابات:  $u' = 2ti + 4k$ ,  $u'' = 2i$



سوال 10.15:  $\cos 2t \mathbf{i} - 3 \sin 2t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$   
 جوابات:  $\mathbf{u}' = -2 \sin 2t \mathbf{i} - 6 \cos 2t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{u}'' = -4 \cos 2t \mathbf{i} + 12 \sin 2t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$

سوال 10.16:  $e^t \mathbf{i} - 2e^{-3t} \mathbf{j}$   
 جوابات:  $\mathbf{u}' = e^t \mathbf{i} + 6e^{-3t} \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{u}'' = e^t \mathbf{i} - 18e^{-3t} \mathbf{j}$

سوال 10.17:  $e^{-t}(\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j})$   
 جوابات:  $\mathbf{u}' = e^{-t}[-(\cos t + \sin t) \mathbf{i} - (\cos t - \sin t) \mathbf{j}]$ ,  $\mathbf{u}'' = e^{-t}(2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j})$

سوال 10.18:  $t^2(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$   
 جوابات:  $\mathbf{u}' = 2t(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$ ,  $\mathbf{u}'' = 2(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$

سوال 10.19 تا سوال 10.23 میں  $\mathbf{u} = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{k}$  ،  $\mathbf{v} = t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$  اور  $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$  لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 10.19:  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})'$   
 جواب:  $4t^3$

سوال 10.20:  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})'$   
 جواب:  $-t^4\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$

سوال 10.21:  $[\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]'$   
 جواب:  $-8t^3\mathbf{i} - (7t^6 + 5t^4 - 6t^2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

سوال 10.22:  $[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}]'$   
 جواب:  $(6t^2 - 7t^6)\mathbf{j} + (4t - 6t^5)\mathbf{k}$

سوال 10.23:  $[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}]'$   
 جواب:  $-15t^4 - 3t^2$

سوال 10.24 تا سوال 10.29 میں دیے گئے سمتی تفاعل  $\mathbf{u}$  کا  $x$  ،  $y$  اور  $z$  کے ساتھ جزوی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.24:  $x\mathbf{i} + 3y\mathbf{k}$   
 جوابات:  $\mathbf{i}$ ,  $3\mathbf{k}$ ,  $0$

سوال 10.25:  $(x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$   
 جوابات:  $2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ ,  $-2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ ,  $0$

سوال 10.26:  $x^2i - 3y^2j + 2z^2k$   
جوابات:  $2xi, -6yj, 4zk$

سوال 10.27:  $xyi + yzj + zxk$   
جوابات:  $yi + zk, xi + zj, yj + xk$

سوال 10.28:  $(x + y)i + (y + z)j + (z + x)k$   
جوابات:  $i + k, i + j, j + k$

سوال 10.29:  $x^2yi + y^2zj + z^2xk$   
جوابات:  $2xyi + z^2k, x^2i + 2yzj, y^2j + 2xz k$

سوال 10.30:  $(u \cdot v)''$  اور  $(u \times v)''$  کے لئے مساوات 10.15 اور مساوات 10.16 کی طرز کے کلیات دریافت کریں۔

جوابات:  $(u \cdot v)'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$   
 $(u \times v)'' = u'' \times v + 2u' \times v' + u \times v''$

سوال 10.31: ثابت کریں کہ  $\left(\frac{u}{|u|}\right)' = \frac{u'(u \cdot u) - u(u \cdot u')}{(u \cdot u)^{\frac{3}{2}}}$   
جواب:  $\left(\frac{u}{\sqrt{u \cdot u}}\right)' = \left(\frac{u}{|u|}\right)'$  لکھتے ہوئے مساوات 10.17 کا استعمال کریں۔

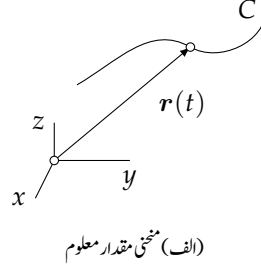
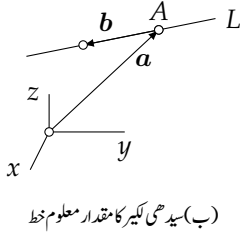
### 10.3 منحنی

کار تیزی نظام میں منحنی  $C$  کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے (شکل 10.2-الف)۔

$$(10.19) \quad r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

آزاد حقیقی متغیر  $t$  کی ہر قیمت  $t_0$  کا  $C$  پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کے محدد  $x(t_0)$ ،  $y(t_0)$  اور  $z(t_0)$  تعین کر سکتے ہیں۔ مساوات 10.19 کو  $C$  کی منحنی مقدار معلوم<sup>9</sup> کہتے ہیں جبکہ  $t$  کو مقدار معلوم کہتے ہیں۔ منحنی مقدار معلوم کی طرز پر منحنی کا اظہار نہایت عمدہ ثابت ہوتا ہے۔

<sup>9</sup>parametric representation



شکل 10.2: سیدھی لکیر اور منحنی کے مقدار معلوم خطوط۔

فضا میں منحنی ظاہر کرنے کے دیگر طریقے

$$(10.20) \quad y = f(x), \quad z = g(x)$$

اور

$$(10.21) \quad F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

ہیں۔ مساوات 10.20 میں  $x = t$  پر کرتے ہوئے اس کو مساوات 10.19 کی طرح لکھ سکتے ہیں یعنی:

$$\mathbf{r}(t) = ti + f(t)j + g(t)k$$

مساوات 10.21 میں دو سطحوں کے مساوات دیے گئے ہیں جن کا ملاپ منحنی دیتا ہے۔

مستوی منحنی<sup>10</sup> سے مراد ایسی منحنی ہے جو فضا میں کسی سطح مستوی پر پائی جاتی ہو۔ غیر مستوی منحنی کو خم دار منحنی<sup>11</sup> کہتے ہیں۔

مثال 10.7: سیدھا خط

کسی بھی سیدھی لکیر L کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں a اور b مستقل سمتیات ہیں (شکل 10.2-ب)۔

$$(10.22) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (a_1 + tb_1)\mathbf{i} + (a_2 + tb_2)\mathbf{j} + (a_3 + tb_3)\mathbf{k}$$

<sup>10</sup> plane curve  
<sup>11</sup> twisted curve

$L$  نقطہ  $A$  سے گزرتی ہے جس کا تعین گر سمتیہ  $a$  ہے جبکہ  $b$  کے رخ  $L$  ہو گا۔ اگر  $b$  اکائی سمتیہ ہو تب اس کے ارکان کو سائن رخ<sup>12</sup> ہوں گے اور  $L$  پر کسی بھی نقطے کا  $A$  سے فاصلہ  $|t|$  ہو گا۔

مثال 10.8: ترخیم، دائرہ

درج ذیل سمتی تفاعل  $xy$  سطح میں ترخیم کو ظاہر کرتا ہے جس کا مرکز کارتیسی نظام کے مبدا اور صدر محور  $x$  اور  $y$  محور پر ہیں۔

$$(10.23) \quad \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$$

لیتے ہوئے  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  کے استعمال سے  $x = a \cos t$  اور  $y = b \sin t$

$$(10.24) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

ملتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔ اگر  $a = b$  ہو تب مساوات 10.23  $a$  کی دائرے کی مساوات ہو گی۔

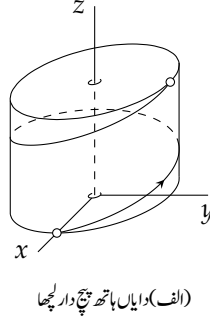
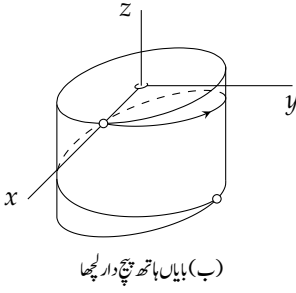
سوال 10.32: مبدا سے ہٹ کر دائرہ

$xy$  سطح میں رداس  $r$  کا ایسا دائرہ جس کا مرکز نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1$$

لیتے ہوئے  $\frac{y - y_0}{r} = \sin t$  اور  $\frac{x - x_0}{r} = \cos t$  لکھا  $y = y_0 + r \sin t$  اور  $x = x_0 + r \cos t$  کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$(10.25) \quad \mathbf{r}(t) = (x_0 + r \cos t) \mathbf{i} + (y_0 + r \sin t) \mathbf{j}$$



شکل 10.3: پیچ دار لچھے (مثال 10.33)۔

سوال 10.33: پیچ دار لچھا  
پیچ دار لچھے<sup>13</sup> کو

$$(10.26) \quad \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k} \quad (c \neq 0)$$

ظاہر کرتا ہے۔ اس خم دار منحنی کو  $c > 0$  (دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) اور  $c < 0$  (بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کے لئے شکل 10.3 میں دکھایا گیا ہے۔

منحنی کے کچھ حصے کو عموماً قوس<sup>14</sup> کہتے ہیں۔ اس کتاب میں ہم عموماً قوس کو بھی منحنی کہیں گے۔

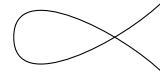
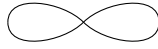
ہم قطع منحنی اپنی آپ کو قطع کرتی ہے۔ نقطہ قطع کو منحنی کا متعدد نقطہ<sup>15</sup> کہتے ہیں (شکل 10.4)۔ ایسی منحنی جس کے متعدد نقطے نہ پائے جاتے ہوں سادہ منحنی<sup>16</sup> کہلاتی ہے۔

circular helix<sup>13</sup>

arc<sup>14</sup>

multiple point<sup>15</sup>

simple curve<sup>16</sup>



شکل 10.4: دوہرا نقطوں والے منحنی

مثال 10.9: سادہ اور غیر سادہ منحنی  
ترخیم اور پیچ دار لچھے سادہ ترخیم کی مثالیں ہیں۔ درج ذیل  $t = 1$  اور  $t = -1$  پر مبداء سے دو مرتبہ گزرتی ہے لہذا یہ غیر سادہ منحنی کی مثال ہے۔

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^3 - 1)\mathbf{j}$$

آخر میں بتانا چلوں کہ کسی بھی منحنی  $C$  کو کئی سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے مثلاً اگر  $C$  کو مساوات 10.19 ظاہر کرے تب ہم  $t = h(t^*)$  لیتے ہوئے، جہاں مساوات 10.19 میں استعمال  $t$  کی تمام قیمتوں کے لئے  $h(t^*)$  بھی پائے جاتے ہوں،  $C$  کو نئی سمتی تفاعل  $\tilde{\mathbf{r}}(t^*) = \mathbf{r}[h(t^*)]$  سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثال 10.10: مقدار معلوم کی تبدیلی  
 $xy$  سطح میں قطع مکانی  $y = x^2$  کو درج ذیل سمتیہ تفاعل ظاہر کرتی ہے۔  
(10.27)  $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad (-\infty < t < \infty)$

ہم  $t = -2t^*$  لیتے ہوئے اس قطع مکانی کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\tilde{\mathbf{r}}(t^*) = \mathbf{r}(-2t^*) = -2t^*\mathbf{i} + 4t^{*2}\mathbf{j}$$

اگر ہم  $t = t^{*2}$  لیں تب ہمیں درج ذیل نیا سمتی تفاعل ملتا ہے

$$\tilde{\mathbf{r}}(t^*) = t^{*2}\mathbf{i} + t^{*4}\mathbf{j}$$

لیکن  $t^{*2} > 0$  کی بنا یہ تفاعل قطع مکانی کو صرف ربع اول میں ظاہر کرتا ہے۔

## سوالات

سوال 10.34 تا سوال 10.37 میں نقطہ  $A$  سے گزرتی ہوئی سمتیہ  $b$  کے رخ سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.34:  $A : (0, 0, 0), \quad b = i - j$   
جواب:  $r = ti - tj$

سوال 10.35:  $A : (2, -3, 1), \quad b = i + 2j$   
جواب:  $r = (t + 2)i + (2t - 3)j + k$

سوال 10.36:  $A : (2, 0, -3), \quad b = -j + 3k$   
جواب:  $r = 2i - tj + 3(t - 1)k$

سوال 10.37:  $A : (-3, 2, 6), \quad b = 5i + 3j - 7k$   
جواب:  $r = (5t - 3)i + (3t + 2)j + (6 - 7t)k$

سوال 10.38 تا سوال 10.41 میں نقطہ  $A$  اور نقطہ  $B$  سے گزرتی ہوئی سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.38:  $A : (0, 0, 0), \quad B : (1, 1, 1)$   
جواب:  $r = ti + tj + tk$

سوال 10.39:  $A : (-3, 7, -5), \quad B : (2, 0, 3)$   
جواب:  $r = (5t - 3)i + 7(1 - t)j + (8t - 5)k$

سوال 10.40:  $A : (1, 2, -3), \quad B : (7, 2, -3)$   
جواب:  $r = (6t + 1)i + 2j - 3k$

سوال 10.41:  $A : (3, 2, 0), \quad B : (0, 0, 0)$   
جواب:  $r = 3(1 - t)i + 2(1 - t)j$  جس میں  $t^* = 1 - t$  چنتے ہوئے  $j^* = 2t^*i + 3t^*j$  بھی لکھا جاسکتا ہے۔

سوال 10.42 تا سوال 10.46 میں دیے سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.42:  $y = x, \quad z = 0$   
جواب:  $r = ti + tj$

سوال 10.43:  $y = -3x, \quad z = 2x$   
جواب:  $r = ti - 3tj + 2tk$

سوال 10.44:  $2y = 5x, \quad z = x - 3y$   
جواب:  $r = ti + \frac{5}{2}j - \frac{13}{2}k$  یا  $r = 2ti + 5tj - 13tk$  جہاں  $t^*$  کی جگہ  $t$  ہی لکھا گیا ہے۔

سوال 10.45:  $4x - y + z = 3, \quad -3x + 2y + 3z = 19$   
جواب:  $y$  اور  $z$  حاصل کرتے ہوئے  $r = ti + (3t + 2)j + (5 - t)k$

سوال 10.46:  $x - y = 2, \quad 2x + z = 3$   
جواب:  $r = ti + (t - 2)j + (3 - 2t)k$

سوال 10.47 تا سوال 10.55 میں دیے خطوط کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.47:  $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$   
جواب:  $r = \cos ti + \sin tj$

سوال 10.48:  $y = x^3, \quad z = 0$   
جواب:  $r = ti + t^3j$

سوال 10.49:  $y = 2x^3, \quad z = -3x^2$   
جواب:  $r = ti + 2t^3j - 3t^2k$

سوال 10.50:  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -9, \quad z = 0$   
جواب: نقطہ  $(2, -3)$  پر رداس 2 کا دائرہ  $r = (2 + 2 \cos t)i + (-3 + 2 \sin t)j$

سوال 10.51:  $4(x + 1)^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$   
جواب:  $r = (-1 + 2 \cos t)i + 2 \sin tj$

سوال 10.52:  $x = -5y^2, \quad z = 2y^3$   
جواب:  $r = -5t^2i + tj + 2t^3k$



سوال 10.53:  $y = \sqrt{x}$ ,  $z = y - 2$ ,  
جواب:  $r = t^2 i + t j + (t - 2) k$

سوال 10.54:  $xy$  سطح میں درج ذیل ترخیم کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

جواب:  $r = (x_0 + a \cos t) i + (y_0 + b \sin t) j$

سوال 10.55:  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = e^{-x}$   
جواب:  $r = 2 \cos t i + 2 \sin t j + e^{-t} k$

سوال 10.56: پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کا  $xy$ ،  $xz$  اور  $yz$  سطحوں پر عمودی سایہ کیا ہو گا؟

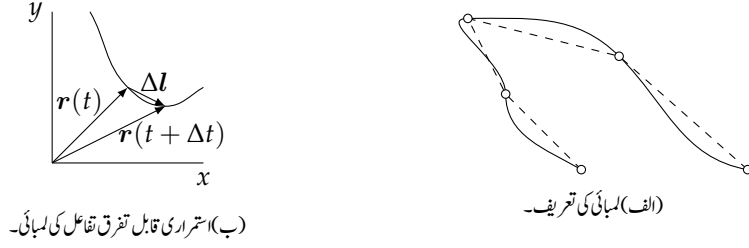
جوابات:  $xy$  میں دائرہ،  $xz$  میں کوسائن موج اور  $yz$  میں سائن موج

## 10.4 لمبائی قوس

سادہ منحنی  $C$  کی لمبائی کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ ہم  $C$  (شکل 10.5-الف) کے دونوں سروں کے مابین متواتر (اختیاری) نقطوں کو  $n$  عدد (نقطہ دار) خط مستقیم سے یوں جوڑتے ہیں کہ  $n \rightarrow \infty$  کی صورت میں لمبی ترین خط مستقیم کی لمبائی صفر کے قریب تر ہو گی۔ تمام خط مستقیم کی لمبائیوں (جنہیں مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کیا جاسکتا ہے) کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اگر  $n$  کی بتدریج بڑھتی تعداد  $n_1$ ،  $n_2$ ، ... لیتے ہوئے مطابقتی خط مستقیم کی لمبائیوں کے مجموعے کی ترتیب  $l_1$ ،  $l_2$ ، ... مرکوز ہو جس کی حد  $l$  ہو تب ہم کہتے ہیں کہ  $C$  قابل تصحیح<sup>17</sup> ہے اور  $l$  کو  $C$  کی لمبائی<sup>18</sup> کہتے ہیں۔

اگر  $C$  از خود سادہ منحنی نہ ہو لیکن یہ محدود تعداد کے قابل تصحیح سادہ منحنیات پر مشتمل ہو تب  $C$  کی لمبائی سے مراد ان تمام منحنیات کی لمبائیوں کا مجموعہ ہو گا۔

<sup>17</sup>rectifiable  
<sup>18</sup>length



شکل 10.5: لمبائی قوس

اگر  $C$  کو استمراری<sup>19</sup> قابل تفرق سمتی تفاعل

$$(10.28) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب  $\Delta l = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{r}$  ہو گا (شکل 10.5-ب) جس کو  $\Delta t$  سے تقسیم کرتے ہوئے  $\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں  $\Delta t \rightarrow 0$  کی صورت میں درج ہو گا۔

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

کسی بھی سمتیہ کی طرح  $\dot{\mathbf{r}}$  کی لمبائی  $\sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}$  ہو گی جس کو  $dt$  سے ضرب دیتے ہوئے مکمل لینے سے منحنی کی کل لمبائی حاصل ہو گی۔

$$(10.29) \quad l = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt \quad (\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt})$$

مساوات 10.29 سے حاصل لمبائی منحنی پر محدود نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اگر ہم مکمل کی بالائی حد کو مستقل  $b$  کی جگہ متغیر  $t$  رکھیں تب حاصل مکمل از خود  $t$  کا تابع تفاعل ہو گا مثلاً  $s(t)$ ۔ یوں مکمل کے متغیر کو  $t^*$  لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$(10.30) \quad s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt^* \quad (\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt^*})$$

تفاعل  $s(t)$  کو  $C$  کا لمبائی قوس تفاعل یا  $C$  کی لمبائی قوس<sup>20</sup> کہتے ہیں۔

<sup>19</sup> استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا تفرق موجود ہے اور یہ تفرق استمراری ہے۔ اسی طرح دوسرا استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا دوسرا تفرق موجود ہے اور یہ دوسرا تفرق استمراری ہے، وغیرہ وغیرہ

<sup>20</sup> arc length

اب تک کے بحث سے ظاہر ہے کہ جیومیٹریائی طور پر کسی مستقل  $t = t_0 \geq a$  کے لئے  $s(t_0)$  نقطہ  $t = a$  اور نقطہ  $t = t_0$  کے درمیان حصے کی لمبائی دیتا ہے۔ یوں  $t = t_0 < a$  کی صورت میں  $s(t_0) < 0$  ہو گا لہذا لمبائی  $-s(t_0)$  ہو گی۔

منحنی کی مقدار معلوم مساوات میں  $s$  بطور مقدار معلوم کردار ادا کر سکتا ہے اور جیسا ہم دیکھیں گے اس سے کئی کلیات سادہ صورت اختیار کرتے ہیں۔

مساوات 10.30 میں ابتدائی نقطہ  $a$  کی جگہ کوئی دوسرا مستقل لیا جا سکتا ہے یعنی نقطہ  $s = 0$  کو ہم خود مختاری کے ساتھ چن سکتے ہیں۔  $C$  پر جس طرف چلنے سے  $s$  بڑھتا ہے اس طرف کو  $C$  کی مثبت دائری سمت<sup>21</sup> کہتے ہیں۔ یوں منحنی کی سمت بندی<sup>22</sup> کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ کسی بھی  $C$  کی سمت بندی دو طریقوں سے کی جا سکتی ہے۔ مقدار معلوم کا اس طرح تبادلہ کہ اس کا تفرق منفی حاصل ہو سے دوسری سمت بندی حاصل ہو گی۔

مساوات 10.30 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(10.31) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

روایتی طور پر عموماً

$$dr = dx i + dy j + dz k$$

اور

$$(10.32) \quad ds^2 = dr \cdot dr = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

لکھا جاتا ہے جہاں  $ds$  کو  $C$  کا خطی جزو<sup>23</sup> کہتے ہیں۔

مثال 10.11: لمبائی قوس بطور مقدار معلوم دائرے کی صورت میں

$$r(t) = a \cos t i + a \sin t j, \quad \dot{r} = -a \sin t i + a \cos t j, \quad \dot{r} \cdot \dot{r} = a^2$$

positive sense<sup>21</sup>

orientation<sup>22</sup>

linear element<sup>23</sup>

ہو گا لہذا لمبائی قوس درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$s(t) = \int_0^t a \, dt^* = at$$

یوں  $t$  کو  $s$  کا تفاعل  $t(s) = \frac{s}{a}$  لکھتے ہوئے دائرے کی ایسی مساوات لکھتے ہیں جس میں  $s$  بطور مقدار معلوم ہے۔

$$\mathbf{r} \left( \frac{s}{a} \right) = a \cos \frac{s}{a} \mathbf{i} + a \sin \frac{s}{a} \mathbf{j}$$

اس دائرے کی سمت بندی گھڑی کی الٹ رخ ہے۔ یوں گھڑی کے الٹ رخ چلتے ہوئے  $s$  بڑھے گا۔ ہم  $s = -\tilde{s}$  پر کرتے ہوئے دائرے کی سمت بندی گھڑی کے رخ رکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \text{اور} \quad \sin(\alpha) = -\sin \alpha$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\mathbf{r} \left( -\frac{\tilde{s}}{a} \right) = a \cos \frac{\tilde{s}}{a} \mathbf{i} - a \sin \frac{\tilde{s}}{a} \mathbf{j}$$

چونکہ  $\frac{ds}{d\tilde{s}} = -1 < 0$  ہے لہذا درج بالا میں گھڑی کے رخ چلتے ہوئے بڑھتا  $\tilde{s}$  حاصل ہو گا۔

### سوالات

تمام سوالات میں لمبائی قوس دریافت کریں۔ دیے تفاعل کا خط کھینچیں۔

سوال 10.57: لیزم:  $x = 0$  سے  $x = 1$  تک  $z = 0$ ,  $y = \cosh x$   
جواب:  $\sinh 1$

سوال 10.58: تیج دار لچھا:  $(a, 0, 0)$  سے  $(a, 0, 2\pi c)$  تک  $y = a \cos ti + a \sin tj + ct\mathbf{k}$ ,  
جواب:  $2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$

سوال 10.59: قطع مکانی:  $(0,0,0)$  سے  $(2,4,0)$  تک  $y = x^2$ ,  $z = 0$ ,  
جواب:  $\frac{\operatorname{arcsinh}(8)}{4} + 2\sqrt{65}$

سوال 10.60: چار دندان تدویر: پوری لمبائی  $r = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}$ ,  
جواب: اس کو چار سادہ قابل تصحیح ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے  $6a$  حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.61:  $(1,0,0)$  سے  $(-1,\pi,0)$  تک  $r = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$ ,  
جواب:  $\frac{\pi^2}{2}$

سوال 10.62:  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$   $r = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j}$ ,  
جواب:  $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

سوال 10.63: ثابت کریں کہ  $x = a$  تا  $x = b$  منحنی  $y = f(x)$  کی لمبائی درج ذیل ہے۔ (مساوات 10.29 کی مدد لیں۔)

$$(10.33) \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (y' = \frac{df}{dx})$$

جواب:  $r = ti + f(t)j$  سے  $\dot{r} = i + f'(t)j$  اور  $\sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} = \sqrt{1 + y'^2}$  لکھ کر جواب حاصل کریں۔

سوال 10.64: درج بالا مساوات (سوال 10.63) کی مساوات استعمال کرتے ہوئے رداس  $r$  کے دائرے کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب:  $x$  محور کے بالائی جانب قوس کی مثبت دائری سمت بائیں سے دائیں ہے جبکہ محور کے نیچے جانب مثبت دائری سمت دائیں سے بائیں ہے۔ یوں ایک بار  $x = -1$  تا  $x = 1$  اور دوسری بار  $x = 1$  تا  $x = -1$  تکمیل لیں۔ کل لمبائی  $2\pi r$  حاصل ہوگی۔

سوال 10.65: اگر منحنی کو کردی محدود میں  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  اور  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$  سے ظاہر کیا جائے تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\phi^2$$

جواب:  $x = \rho \cos \phi$  اور  $y = \rho \sin \phi$  سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi \implies dx = \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi \implies dy = \sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi$$

جنہیں مساوات 10.32 میں پر کرنے سے درکار نتیجہ ملتا ہے۔

سوال 10.65 میں دیا گیا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 10.66 تا سوال 10.70 میں لمبائی قوس دریافت کریں۔

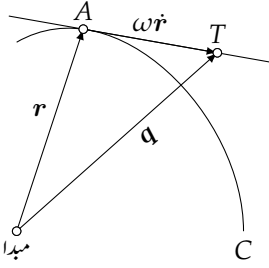
سوال 10.66: رداس  $r$  کے دائرے کی کل لمبائی۔  
جواب:  $2\pi r$

سوال 10.67:  $\rho = e^\phi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$   
جواب:  $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

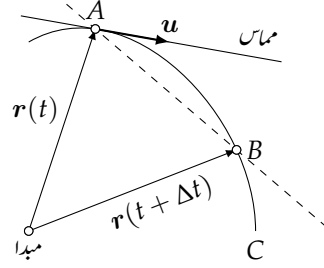
سوال 10.68:  $\rho = \phi^2$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$   
جواب:  $\frac{(\pi^2+16)^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{8}{3}$

سوال 10.69: قلب نما  $\rho = a(1 - \cos \theta)$  (اس کا خط جو قلب نما ہے کو کھینچیں)۔  
جواب:  $8a$

سوال 10.70:  $\rho = a(1 + \cos \theta)$   
جواب:  $8a$



(ب) مماس الجبرائی اظہار



(الف) منحنی کا مماس

شکل 10.6: مماس اور اس کا اظہار

## 10.5 مماس، انحناء اور مروڑ

نقطہ A پر منحنی C کے مماس سے مراد A اور منحنی پر دوسرا نقطہ B سے گزرتے ہوا وہ سیدھا خط ہے جو B کو A کے قریب تر کرنے سے حاصل ہو گا (شکل 10.6-الف)۔

فرض کریں کہ C کو استمراری قابل تفرق تفاعل  $r(t)$  سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں  $t$  کوئی بھی مقدار معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کریں کہ  $t$  اور  $t + \Delta t$  بالترتیب A اور B دیتے ہیں۔ ان نقطوں سے گزرتا ہوا سیدھا خط L درج ذیل سمتیہ کے رخ ہو گا۔

$$\frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

یوں اگر سمتیہ

$$(10.34) \quad \dot{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

صفر سمتیہ نہ ہو تب اس کی سمت ہی نقطہ A پر مماس کی سمت ہو گی۔ یہ سمتیہ بڑھتے  $t$  کے رخ ہے۔  $\dot{r}$  کو نقطہ A پر C کا مماس<sup>24</sup> کہتے ہیں جس کا مطابقتی اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا جس کو A پر C کا اکائی سمتیہ مماس<sup>25</sup> کہتے ہیں۔

$$(10.35) \quad u = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}$$

<sup>24</sup>tangent  
<sup>25</sup>unit tangent vector

اب اگر  $C$  کو  $r(s)$  سے ظاہر کیا جائے، جہاں  $s$  لمبائی قوس ہے، تب مساوات 10.31 کے تحت  $\frac{dr}{ds}$  اکائی سمتیہ ہو گا لہذا مساوات 10.35 درج ذیل دے گی۔

$$(10.36) \quad u = r' = \frac{dr}{ds}$$

شکل 10.6-ب سے ظاہر ہے کہ مماس پر کسی بھی نقطہ  $T$  کا تعین گر سمتیہ،  $A$  کے تعین گر سمتیہ اور  $A$  سے مماس کی سمت میں سمتیہ کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$(10.37) \quad q(\omega) = r + \omega r'$$

جہاں  $\omega$  حقیقی متغیر ہے۔

فرض کریں کہ منحنی  $C$  کو تین گنا استمراری قابل تفرق تفاعل<sup>26</sup>  $r(s)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں  $s$  لمبائی قوس ہے۔ تب درج ذیل کو  $C$  کی انحناء<sup>27</sup> کہتے ہیں۔

$$(10.38) \quad \kappa(s) = |u'(s)| = |r''(s)| \quad (\kappa \geq 0)$$

اگر  $\kappa \neq 0$  ہو تب  $u'(s)$  کی سمت میں اکائی سمتیہ  $p$  درج ذیل ہو گا جس کو  $C$  کا اکائی صدر عمودی سمتیہ<sup>28</sup> کہتے ہیں۔

$$(10.39) \quad p = \frac{u'}{\kappa} \quad (\kappa > 0)$$

صفحہ 740 پر مثال 10.5 کے نتیجے کے تحت  $p$  اور  $u$  قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ درج ذیل کو  $C$  کا دوہرا عمودی اکائی سمتیہ<sup>29</sup> کہتے ہیں۔

$$(10.40) \quad b = u \times p \quad (\kappa > 0)$$

سمتی ضرب کی تعریف کے تحت  $u$ ،  $p$  اور  $b$  دائیں ہاتھ تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات ہوں گے (حصہ 7.3 اور حصہ 7.7)۔ ان تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات کو نقطہ غور پر  $C$  کا سه سطحی مجسم<sup>30</sup> کہتے ہیں۔ اس نقطے سے گزرتے ہوئے تین سیدھے خطوط جو  $u$ ،  $p$  اور  $b$  کے رخ ہوں کو بالترتیب  $C$  کا مماس، صدر عمود اور دوہرا عمود کہتے ہیں۔

<sup>26</sup> صفحہ 752 کے آخر پر حاشیہ دیکھیں

<sup>27</sup> curvature

<sup>28</sup> unit principal normal vector

<sup>29</sup> unit binormal vector

<sup>30</sup> trihedron



اگر تفرق  $b'$  صفر نہ ہو تب مثال 10.5 کے تحت یہ  $b$  کے عمودی ہو گا۔ ساتھ ہی ساتھ یہ  $u$  کے بھی عمودی ہے۔ درحقیقت اگر ہم  $b \cdot u = 0$  کا تفرق لیں تو ہمیں  $b' \cdot u + b \cdot u' = 0$  ملتا ہے۔ اب چونکہ  $b \cdot u' = 0$  ہے لہذا  $b' \cdot u = 0$  ہو گا۔ یوں  $b'$  کی صورت  $b' = \alpha p$  ہو گی جہاں  $\alpha$  غیر سمتی ہے۔ روایتی طور پر  $\alpha = -\tau$  لیا جاتا ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.41) \quad b' = -\tau p \quad (\kappa > 0)$$

غیر سمتی تفاعل  $\tau$  کو  $C$  کی مروڑ<sup>31</sup> کہتے ہیں۔ مساوات 10.41 کے دونوں اطراف کو  $p$  سے ضرب دینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.42) \quad \tau(s) = -p(s) \cdot b'(s)$$

درج بالا تصورات منحنیات کے استعمال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

مثال 10.12: پیچ دار لچھا

پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کی لمبائی  $s = t\sqrt{a^2 + c^2}$  حاصل ہوتی ہے لہذا پیچ دار لچھے کو

$$r(s) = a \cos \frac{s}{K} i + a \sin \frac{s}{K} j + c \frac{s}{K} k, \quad K = \sqrt{a^2 + c^2}$$

لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$u(s) = r'(s) = -\frac{a}{K} \sin \frac{s}{K} i + \frac{a}{K} \cos \frac{s}{K} j + \frac{c}{K} k$$

$$r''(s) = -\frac{a}{K^2} \cos \frac{s}{K} i - \frac{a}{K^2} \sin \frac{s}{K} j$$

$$\kappa = |r''| = \sqrt{r'' \cdot r''} = \frac{a}{K^2} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

$$p(s) = \frac{r''(s)}{\kappa(s)} = -\cos \frac{s}{K} i - \sin \frac{s}{K} j$$

$$b(s) = u(s) \times p(s) = \frac{c}{K} \sin \frac{s}{K} i - \frac{c}{K} \cos \frac{s}{K} j + \frac{a}{K} k$$

$$b'(s) = \frac{c}{K^2} \cos \frac{s}{K} i + \frac{c}{K^2} \sin \frac{s}{K} j$$

$$\tau(s) = -p(s) \cdot b'(s) = \frac{c}{K^2} = \frac{c}{a^2 + c^2}$$

اس طرح پچ دار لچھے میں مستقل انخا اور مستقل مروڑ پایا جائے گا۔ اگر  $c > 0$  (شکل 10.3-الف دایاں ہاتھ پچ دار لچھا) ہو تب  $\tau > 0$  ہو گا جبکہ  $c < 0$  (شکل 10.3-ب بایاں ہاتھ پچ دار لچھا) کی صورت میں  $\tau < 0$  ہو گا۔ یوں

چونکہ  $u$ ،  $p$  اور  $b$  غیر تابع سمتیات ہیں لہذا فضا میں کسی بھی سمتیہ کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اگر  $u'$ ،  $p'$  اور  $b'$  موجود ہوں تب انہیں بھی ان غیر تابع سمتیات کی مدد سے (درج ذیل) لکھا جا سکتا ہے۔

$$(10.43) \quad \begin{array}{ll} \text{(الف)} & u = \kappa p \\ \text{(ب)} & p' = -\kappa u + \tau b \\ \text{(پ)} & b' = -\tau p \end{array}$$

مساوات 10.43-الف کو مساوات 10.39 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جبکہ مساوات 10.43-پ درحقیقت مساوات 10.41 ہے۔ سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$p = b \times u, \quad p \times u = -b, \quad b \times p = -u$$

ان میں دایاں کلیہ کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 10.43-الف اور مساوات 10.43-پ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو مساوات 10.43-ب ہے۔

$$p' = b' \times u + b \times u' = -\tau p \times u + b \times \kappa p = -\tau(-b) + \kappa(-u)$$

### سوالات

سوال 10.71 تا سوال 10.74 میں نقطہ  $N$  پر دیے گئے تفاعل کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

$$\text{سوال 10.71: } N : \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad r(t) = \cos t i + \sin t j, \quad \text{جواب: } q(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \omega)i + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \omega)j$$

$$\text{سوال 10.72: } N : (1, -1, 1) \quad r(t) = ti - t^3 j + t^2 k, \quad \text{جواب: } q(\omega) = (1 + \omega)i - (1 + 3\omega)j + (1 + 2\omega)k$$

سوال 10.73:  $N : (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\pi)$   $r(t) = \cos t i + \sin t j + 3t k,$

جواب:  $q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \omega)i + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \omega)j + (\frac{3}{4}\pi + 3\omega)k$

سوال 10.74:  $N : (\sqrt{3}, -1)$   $r(t) = 2 \cos t i - 2 \sin t j,$

جواب:  $q(\omega) = (\sqrt{3} - \omega)i - (1 + \sqrt{3}\omega)j$

سوال 10.75: ثابت کریں کہ مثال 10.12 میں دیے گئے پیچ دار لچھے کی  $u$  اور  $z$  محور کے مابین زاویہ مستقل مقدار ہے۔

جواب: مستقل  $\cos \alpha = u \cdot k = \frac{c}{a^2 + c^2}$

سوال 10.76: ثابت کریں کہ صرف سیدھے خطوط واحد منحنی ہیں جن کے اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہیں۔

جواب: اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہونے کی صورت میں  $r' = ai + cj + ek$  ہو گا جہاں  $a$ ،  $c$  اور  $e$  مستقل قیمتیں ہیں۔ مکمل لینے سے منحنی کی عمومی مساوات  $r = (at + b)i + (ct + d)j + (et + f)k$  حاصل ہوتی ہے جو سیدھے خط کی عمومی مساوات ہے اور جہاں  $b$ ،  $d$  اور  $f$  مکمل کے مستقل ہیں۔

سوال 10.77: ثابت کریں کہ سیدھے خطوط کی انخنا مکمل صفر ہو گی۔

جواب: سیدھے خطوط کی عمومی مساوات کو سوال 10.76 کی جواب میں پیش کیا گیا ہے جس کا دو درجی تفرق صفر کے برابر ہے۔

سوال 10.78: ثابت کریں کہ منحنی  $r(t)$  کی انخنا درج ذیل ہے، جہاں  $t$  مقدار معلوم ہے۔

$$(10.44) \quad \kappa = \frac{\sqrt{(\dot{r} \cdot \dot{r})(\ddot{r} \cdot \ddot{r}) - (\dot{r} \cdot \ddot{r})^2}}{(\dot{r} \cdot \dot{r})^{\frac{3}{2}}}$$

سوال 10.79: ثابت کریں کہ رداس  $a$  کے دائرے کی انخنا  $\frac{1}{a}$  کے برابر ہے۔

جواب: ایسے دائرے کی مساوات  $r(s) = a \cos \frac{s}{a} i + a \sin \frac{s}{a} j$  ہے جہاں لمبائی قوس کو بطور مقدار معلوم استعمال کیا گیا ہے۔ اس سے  $|r''| = \frac{1}{a}$  حاصل ہوتا ہے۔

باب 10. سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاسل

سوال 10.80: ثابت کریں کہ  $xy$  سطح میں منحنی  $y = y(x)$  کی انحناء  $\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$  ہوگی۔ مساوات 10.44 استعمال کریں۔

سوال 10.81: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل (غیر سمتی سہ ضرب) ثابت کریں۔

$$(10.45) \quad \tau = (u p p')$$

جواب: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\tau = -p \cdot (u \times p)' = -p \cdot (u' \times p + u \times p') = -(p u' p) - (p u p')$$

صفحہ 550 پر مساوات 7.58 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $p \times p = |p||p| \sin 0^\circ = 0$  کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$(p u' p) = (u' p p) = u \cdot (p \times p) = 0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = -(p u p') = -(u p' p) = (u p p')$$

سوال 10.82: ثابت کریں کہ مساوات 10.39 کی مدد سے مساوات 10.45 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.46) \quad \tau = \frac{(r' r'' r''')}{\kappa^2}$$

## 10.6 سمتی رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ فضا میں متحرک جسم  $J$  کا تعین گر سمتیہ  $r(t)$  ہے جہاں  $t$  وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں  $r(t)$  جسم  $J$  کا راستہ  $C$  دے گا۔ گزشتہ حصے سے ظاہر ہے کہ سمتیہ

$$(10.47) \quad v = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

راستہ  $C$  کا مماس ہو گا لہذا یہ  $J$  کی لمبائی حرکت کے رخ ہو گا۔ مساوات 10.31 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں  $s$  لمبائی قوس ہے۔  $C$  پر کسی مقررہ نقطے ( $s = 0$ ) سے لمبائی قوس  $s$  کو ناپا جاتا ہے۔

$$|v| = \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} = \frac{ds}{dt} \quad (10.48)$$

یوں  $\frac{ds}{dt}$  جسم  $J$  کی رفتار<sup>32</sup> ہو گی اور سمتیہ  $v$  جسم  $J$  کی سمتی رفتار<sup>33</sup> ہو گا جس کو عموماً سمتی رفتار<sup>34</sup> کہتے ہیں۔

سمتی رفتار کی تفرق کو سمتیہ اسراع<sup>35</sup> یا اسراع<sup>36</sup> کہتے ہیں اور اس کو  $a$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t) \quad (10.49)$$

مثال 10.13: مرکز مائل اسراع اور مرکز مائل قوت  
 $xy$  سطح میں مبدا پر واقع، رداس  $R$  کے دائرے  $C$  پر گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ کمیت  $m$  کی حرکت (شکل 10.7-الف) کو درج ذیل سمتیہ ظاہر کرتا ہے

$$r(t) = R \cos \omega t \, i + R \sin \omega t \, j \quad (\omega > 0)$$

جس کا تفرق سمتی رفتار دے گا جو  $C$  کا مماس ہو گا۔

$$v = \dot{r} = -\omega R \sin \omega t \, i + \omega R \cos \omega t \, j$$

اس سے رفتار حاصل کرتے ہیں

$$|v| = \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} = \omega R$$

جو مستقل مقدار ہے۔ رفتار کو (دائرے کے مرکز سے فاصلہ)  $R$  سے تقسیم کرنے سے زاویائی رفتار<sup>37</sup>  $\omega$  حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ اسراع درج ذیل ہو گا

$$a = \dot{v} = \ddot{r} = -\omega^2 R \cos \omega t \, i - \omega^2 R \sin \omega t \, j = -\omega^2 r \quad (10.50)$$

speed<sup>32</sup>

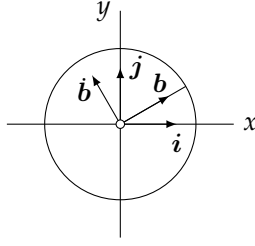
velocity vector<sup>33</sup>

velocity<sup>34</sup>

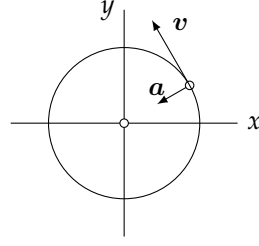
acceleration vector<sup>35</sup>

acceleration<sup>36</sup>

angular speed<sup>37</sup>



(ب) قرص پر حرکت (مثال 10.14)۔



(الف) مرکز نائل اسراع (مثال 10.13)

شکل 10.7: مرکز نائل اسراع

جو دائرے کی مرکز کے رخ ہے لہذا اس کو مرکز مائل اسراع<sup>38</sup> کہتے ہیں۔ اسراع کی قیمت  $|a| = \omega^2 R$  ہے۔ کیت  $m$  پر مرکز مائل قوت<sup>39</sup>  $ma$  عمل کرے گا۔ اس کا مخالف قوت  $-ma$  ہو گا جس کو مرکز گریز قوت<sup>40</sup> کہتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ  $v$  کے وقتی تفرق کو  $a$  کہتے ہیں۔ مثال 10.13 میں  $|v|$  مستقل مقدار ہے لیکن  $a \neq 0$  ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ  $a$  کی مقدار عموماً  $|v|$  کے تفرق کے برابر نہیں ہوتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ  $a$  عموماً راہ  $C$  کا مماس نہیں ہوتا ہے۔ آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔ زنجیری تفرق سے

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = r' \frac{ds}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.51) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( r' \frac{ds}{dt} \right) = r'' \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + r' \frac{d^2 s}{dt^2}$$

چونکہ  $r'$  راہ  $C$  کا اکائی مماس سمتیہ  $u$  ہے (مساوات 10.36) جس کا تفرق  $u' = r''$  سمتیہ  $u$  کے عمودی ہے (حصہ 10.5) لہذا مساوات 10.51 اسراع کو مماسی اسراع  $r' \ddot{s}$  اور عمودی اسراع  $r'' \dot{s}^2$  کے مجموعے کے طور پر پیش کرتی ہے۔ اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ رفتار کا تفرق صفر ہونے کی صورت  $\frac{d^2 s}{dt^2}$  میں بھی اسراع ہو گی۔

<sup>38</sup> centripetal acceleration<sup>39</sup> centripetal force<sup>40</sup> centrifugal force

مثال 10.14: کوریولس اسراع  
ایک قرص (شکل 10.7-ب) جو اپنی مرکز کے گرد مستقل زاویائی رفتار  $\omega$  سے، گھڑی کی سوئیوں کے مخالف رخ، گھوم رہا ہے پر جسم  $J$  رداس کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔ اس حرکت کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $b$  ایسا اکائی سمتیہ ہے جو قرص کے ساتھ ساتھ گھومتا ہے۔

$$r(t) = tb \quad (10.52)$$

$J$  کی اسراع دریافت کریں۔

حل:  $b$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$b(t) = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j} \quad (10.53)$$

مساوات 10.52 کا تفرق سمتی رفتار

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{b} + t\dot{\mathbf{b}} \quad (10.54)$$

دیتا ہے۔ ظاہر ہے کہ قرص کے لحاظ سے  $J$  کی رفتار  $b$  ہے جبکہ کے گھومنے کی وجہ سے اضافی رفتار  $t\dot{b}$  پایا جاتا ہے۔ دوبارہ تفرق سے اسراع

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = 2\dot{\mathbf{b}} + t\ddot{\mathbf{b}} \quad (10.55)$$

حاصل ہوگی۔ مساوات 10.55 کے آخری جزو میں (مساوات 10.53 کے دو درجی تفرق سے)  $\ddot{\mathbf{b}} = -\omega^2 \mathbf{b}$  ہو گا لہذا  $t\ddot{\mathbf{b}}$  مرکز مائل اسراع ہوگی۔

مساوات 10.55 میں زیادہ دلچسپ جزو  $2\dot{\mathbf{b}}$  ہے جس کو کوریولس اسراع<sup>41</sup> کہتے ہیں جو قرص کی گردش اور قرص پر  $J$  کی حرکت کے باہمی عمل سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کا رخ  $\dot{\mathbf{b}}$  دیتا ہے جو قرص کے کنارے کا مماس ہے اور جو مقررہ  $xy$  کارٹیسین نظام میں گھومنے کی رخ ہو گا۔ یوں اگر کمیت  $m$  کا شخص قرص پر رداسی سمت میں چل رہا ہو تب اس پر قوت  $-2m\dot{\mathbf{b}}$  عمل کرے گا جو گھومنے کی مخالف رخ ہو گا۔

<sup>41</sup> Coriolis acceleration

مثال 10.15: دو گردش کی خطی میل کرہ کے نصف النہار<sup>42</sup>  $N$  پر جسم  $J$  (کرہ کے لحاظ سے) مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہے جبکہ کرہ از خود مستقل زاویائی رفتار  $\omega (> 0)$  سے گردش کر رہا ہے (شکل 10.8)۔  $J$  کی اسراع دریافت کریں۔

حل:  $N$  پر  $J$  کی حرکت کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں کرہ کی رداس  $R$  ہے،  $N$  پر  $J$  کی زاویائی رفتار  $\gamma (> 0)$  ہے،  $N$  کی سطح میں  $b$  افقی اکائی سمتیہ ہے اور  $k$  فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیہ ہے۔

$$(10.56) \quad r(t) = R \cos \gamma t \, b + R \sin \gamma t \, k$$

چونکہ  $b$  کرہ کے ساتھ گردش کرتا ہے لہذا اس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $i$  اور  $j$  فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیات ہیں۔

$$(10.57) \quad b = \cos \omega t \, i + \sin \omega t \, j$$

مساوات 10.56 کا تفرق لے کر سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$(10.58) \quad v = \dot{r} = R \cos \gamma t \, \dot{b} - \gamma R \sin \gamma t \, b + \gamma R \cos \gamma t \, k$$

سمتی رفتار کا تفرق لے کر اسراع حاصل کرتے ہیں۔

$$(10.59) \quad a = \dot{v} = R \cos \gamma t \, \ddot{b} - 2\gamma R \sin \gamma t \, \dot{b} - \gamma^2 R \cos \gamma t \, b - \gamma^2 R \sin \gamma t \, k$$

اب مساوات 10.57 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\dot{b} = -\omega \sin \omega t \, i + \omega \cos \omega t \, j$$

$$\ddot{b} = -\omega^2 \cos \omega t \, i - \omega^2 \sin \omega t \, j = -\omega^2 b$$

مساوات 10.56 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 10.59 کے آخری دو ارکان کا مجموعہ  $-\gamma^2 r$  کے برابر ہے لہذا مساوات 10.59 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.60) \quad a = -\omega^2 R \cos \gamma t \, b - 2\gamma R \sin \gamma t \, \dot{b} - \gamma^2 r$$





## سوالات

سوال 10.83 تا سوال 10.90 میں حرکت کرتی جسم کا تعین گر سمتیہ  $r(t)$  ہے جہاں  $t(>0)$  وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس راہ کی شکل بیان کریں۔ سمتیہ رفتار، رفتار اور اسراع دریافت کریں۔

سوال 10.83:  $r = tj$   
جوابات:  $v = j, \quad |v| = 1, \quad a = 0$

سوال 10.84:  $r = t^3j$   
جوابات:  $v = 3t^2j, \quad |v| = 3t^2, \quad a = 6tj$

سوال 10.85:  $r = (t^2 - 3t)j$   
جوابات:  $v = (2t - 3)j, \quad |v| = |2t - 3|, \quad a = 2j$

سوال 10.86:  $r = t^2i - tj$   
جوابات:  $v = 2ti - j, \quad |v| = \sqrt{4t^2 + 1}, \quad a = 2i$

سوال 10.87:  $r = \cos t i$   
جوابات:  $v = -\sin t j, \quad |v| = |\sin t|, \quad a = -\cos t j$

سوال 10.88:  $r = 2 \cos 5t i - 4 \sin 3t j$   
جوابات:  $v = -10 \sin 5t i - 12 \cos 3t j, \quad |v| = \sqrt{100 \sin^2 5t + 144 \cos^2 3t}$   
 $a = -50 \cos 5t i + 36 \sin 3t j$

سوال 10.89:  $r = 3 \cos t^2 i + 2 \sin t^2 j$   
جوابات:  $v = -6t \sin t^2 i + 4t \cos t^2 j, \quad |v| = \sqrt{36t^2 \sin^2 t^2 + 16t^2 \cos^2 t^2}$   
 $a = (-6 \sin t^2 - 12t^2 \cos t^2) i + (4 \cos t^2 - 8t^2 \sin t^2) j$

سوال 10.90:  $r = 5t^2 i + 3t j + t^3 k$   
جوابات:  $v = 10t i + 3 j + 3t^2 k, \quad |v| = \sqrt{9t^4 + 100t^2 + 9}$   
 $a = 10 i + 6t k$

سوال 10.91: زمین سے چاند تک کا فاصلہ  $3.85 \times 10^8 \text{ m}$  ہے اور زمین کے گرد چاند 27.322 دن یعنی  $2.36 \times 10^6 \text{ s}$  میں ایک چکر پورا کرتا ہے۔ زمین کے رخ چاند کی مرکز مائل اسراع دریافت کریں۔

جواب:  $|a| = 0.0027 \text{ m s}^{-2}$  جو سطح زمین پر اسراع  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  سے 3593 گنا کم ہے۔

سوال 10.92: وہ حرکت دریافت کریں جس کی اسراع مستقل قیمت ہو۔

جواب:  $r(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$  جہاں  $a_0$ ،  $v_0$  اور  $x_0$  مستقل قیمتیں ہیں۔

سوال 10.93:  $\omega = \omega k$  اور  $r = R \cos \omega t i + R \sin \omega t j$  لیتے ہوئے مساوات 7.55 کے تفرق سے مساوات 10.50 حاصل کریں۔

سوال 10.94: اگر ایک جسم کی حرکت  $r(t)$  سے ظاہر کی جائے جہاں  $t$  وقت ہے تب  $t = \phi \tilde{t}$  تبادلاً سے کیا مراد ہو گا؟

جواب: راہ تبدیل نہیں ہوگی البتہ راہ پر حرکت کی نوعیت تبدیل ہوگی۔

## 10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ

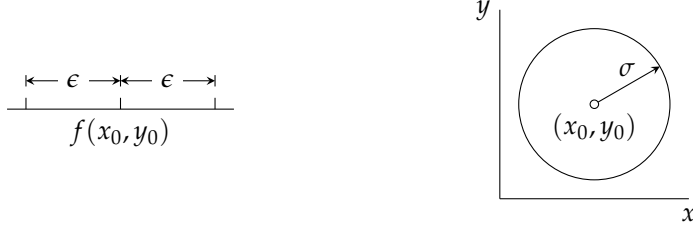
ہم متعدد متغیرات پر مبنی تفاعل کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔ ہم دو متغیرات کے تفاعل کو استعمال کرتے ہوئے نتائج حاصل کریں گے جو زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی درست ہوں گے۔

نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر تفاعل  $f(x, y)$  اس صورت استمراری<sup>46</sup> ہو گا جب اس نقطے کے ہمسائیگی<sup>47</sup> میں  $f$  معین ہو اور کسی بھی مثبت عدد  $\epsilon$  (جو غیر صفر اور کتنا ہی چھوٹا کیوں نا ہو) کے لئے ہم ایسا مثبت عدد  $\sigma$  تلاش کر سکتے ہیں کہ اس کے نقطے کے ہمسائیگی قرص

$$(10.62) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \sigma^2$$

میں تمام  $(x, y)$  پر درج ذیل ہو۔

$$(10.63) \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$



شکل 10.9: دو متغیرات کے تفاعل کی استمرار

جیومیٹریائی طور پر  $(x_0, y_0)$  پر  $f(x, y)$  کے استمراری ہونے سے مراد یہ ہے کہ  $f(x_0, y_0)$  کو قطع  $2\epsilon$  کا وسط لیتے ہوئے ہم غیر صفر رداس  $\sigma$  کا ایسا قرص تلاش کر سکتے ہیں جس کا مرکز  $(x_0, y_0)$  ہو اور اس قرص پر تمام  $(x, y)$  کا مطابقتی  $f(x, y)$  اس قطع پر پایا جاتا ہو (شکل 10.9)۔

ہم ابتدائی علم الاحصاء سے جانتے ہیں کہ اگر  $w$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو اور  $x$  از خود  $t$  کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جس کو تفرق کا زنجیری قاعدہ کہتے ہیں۔

$$(10.64) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}$$

درج ذیل مسئلہ تفرق کی زنجیری قاعدے کو عمومی بناتا ہے۔

مسئلہ 10.1: (زنجیری قاعدہ)

فرض کریں کہ  $xy$  سطح میں دائرہ کار  $D$  <sup>48</sup> میں تفاعل  $w = f(x, y)$  استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی  $D$  میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ کسی وقفہ  $T$  میں  $x = x(t)$  اور  $y = y(t)$  قابل تفرق تفاعل ہیں جہاں  $T$  میں ہر  $t$  کا مطابقتی نقطہ  $[x(t), y(t)]$ ، دائرہ کار  $D$  میں پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں  $T$  میں تمام  $t$  کے لئے  $w = f[x(t), y(t)]$  قابل تفرق ہو گا یعنی:

$$(10.65) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

<sup>46</sup>continuous

<sup>47</sup>ہمائیگی سے مراد  $xy$  سطح میں قرص  $r^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  ہے جہاں  $r > 0$ ۔

<sup>48</sup>domain

<sup>49</sup>دائرہ کار  $D$  جڑی ہوئے نقطوں کا کھلا سلسلہ ہے، جہاں جڑا ہونے سے مراد یہ ہے کہ  $D$  کے کسی بھی دو نقطوں کو متناہی تعداد کے ایسے سیدھے قطعات سے ملایا جاسکتا ہے جن کے تمام نقطے  $D$  کا حصہ ہوں، اور کھلا سے مراد یہ ہے کہ  $D$  میں ہر نقطے کی ہمسائیگی کے تمام نقطے بھی  $D$  کا حصہ ہیں۔ مثلاً کسی مستطیل یا دائرے کا اندرونی حصہ دائرہ کار ہو گا۔

ثبوت: ہم  $T$  میں  $t$  پر  $\Delta t$  اتنا چھوٹا چنتے ہیں کہ  $t + \Delta t$  بھی  $T$  کا حصہ ہو۔ مزید ہم

$$(10.66) \quad \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

اور

$$(10.67) \quad \Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

لیتے ہیں۔ مساوات 10.67 میں  $f(x, y + \Delta y)$  جمع اور منفی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Delta w = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

درج بالا مساوات کے قوسین پر باری باری ایک متغیر کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ لاگو کرتے ہوئے

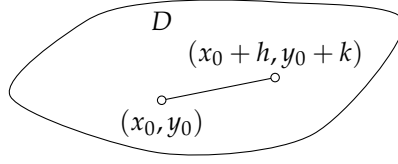
$$(10.68) \quad \Delta w = \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_1, y + \Delta y} + \Delta y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x, y_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $x$  اور  $x + \Delta x$  کے درمیان کہیں  $x_1$  پایا جاتا ہے،  $y$  اور  $y + \Delta y$  کے درمیان کہیں  $y_1$  پایا جاتا ہے۔ مساوات 10.68 کے دونوں اطراف کو  $\Delta t$  سے تقسیم کرتے اور  $\Delta t \rightarrow 0$  لیتے ہوئے، اور چونکہ  $\frac{\partial f}{\partial x}$  اور  $\frac{\partial f}{\partial y}$  کو استمراری تصور کیا گیا ہے، مساوات 10.66 حاصل ہوتا ہے۔

درج بالا مسئلے کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 10.2: فرض کریں کہ  $xy$  سطح میں دائرہ کار  $D$  پر تفاعل  $w = f(x, y)$  استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی  $D$  میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ  $uv$  سطح میں کسی وقفہ  $B$  میں  $x = x(u, v)$  اور  $y = y(u, v)$  قابل جزوی تفرق تفاعل ہیں جہاں  $B$  میں ہر  $(u, v)$  کا مطابقتی نقطہ  $[x(u, v), y(u, v)]$ ، دائرہ کار  $D$  میں پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں  $B$  میں تفاعل  $w = f[x(u, v), y(u, v)]$  معین ہوگا اور  $B$  میں تمام  $u$  اور  $v$  کے لئے اس تفاعل کے جزوی تفرقات درج ذیل ہوں گے۔

$$(10.69) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$



شکل 10.10: مسئلہ اوسط قیمت

$u$  یا  $v$  کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ 10.1 کے اطلاق سے درج بالا مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

ابتدائی علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل  $f(x)$  کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $x_0$  اور  $x_0 + h$  کے درمیان موزوں نقطے پر تفرق لیا جاتا ہے۔

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \frac{df}{dx}$$

اس کو احصاء تفرقیات کا مسئلہ اوسط قیمت کہتے ہیں جس کو وسعت دے کر دو متغیرات کے تفاعل پر لاگو کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 10.3: (مسئلہ اوسط قیمت)

فرض کریں کہ دائرہ کار  $D$  میں تفاعل  $f(x, y)$  استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی  $D$  میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ  $(x_0, y_0)$  اور  $(x_0 + h, y_0 + k)$  دائرہ کار  $D$  میں پائے جانے والے ایسے نقطے ہیں کہ انہیں جوڑنے والا سیدھا قطع بھی  $D$  میں پائی جاتی ہو (شکل 10.10)۔ ایسی صورت میں

$$(10.70) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں جزوی تفرقات کو اس قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: درج ذیل

$$x = x_0 + th, \quad y = y_0 + tk \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

سے

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = F(1), \quad f(x_0, y_0) = F(0)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ایک متغیر تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت 0 اور 1 کے درمیان ایسی قیمت  $t_1$  پائی جاتی ہے جس کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.71) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) = F'(t_1)$$

اب چونکہ  $\frac{dx}{dt} = h$  اور  $\frac{dy}{dt} = k$  ہیں لہذا مسئلہ 10.1 کے تحت

$$(10.72) \quad F' = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k$$

ہو گا جہاں دائیں ہاتھ تفرقات کو نقطہ  $(x_0 + t_1h, y_0 + t_1k)$  پر حاصل کیا جائے گا جو اس قطع پر واقع ہے جس کے سر  $(x_0, y_0)$  اور  $(x_0 + h, y_0 + k)$  ہیں۔ مساوات 10.72 کو مساوات 10.71 میں پر کرنے سے مساوات 10.70 حاصل ہوتا ہے۔

تین متغیرات کے تفاعل  $f(x, y, z)$  جو مسئلہ 10.3 میں دیے گئے شرائط کے مماثل شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے بالکل اسی مسئلے کی طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.73) \quad f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + l \frac{\partial f}{\partial z}$$

جہاں جزوی تفرقات کو  $(x_0, y_0, z_0)$  تا  $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$  قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جائے گا۔

### سوالات

سوال 10.95 تا سوال 10.98 میں مساوات 10.65 کی مدد سے  $\frac{dw}{dt}$  دریافت کریں۔

$$w = x - y, \quad x = t, \quad y = \ln t \quad : 10.95 \text{ سوال}$$

جواب:  $1 - \frac{1}{t}$

سوال 10.96:  $w = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{-t}, \quad y = e^t$   
 جواب:  $\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$

سوال 10.97:  $w = \frac{x}{y}, \quad x = g(t), \quad y = ht$   
 جواب:  $\frac{g'h - gh'}{h^2}$

سوال 10.98:  $w = \frac{x}{y}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$   
 جواب:  $-\operatorname{cosec}^2 t$

سوال 10.99: فرض کریں کہ  $w = f(x, y, z)$  ہے جہاں  $x, y$  اور  $z$  از خود  $t$  کے تفاعل ہیں۔ ثابت کریں کہ مسئلہ 10.1 کی طرز کے شرائط کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

(10.74) 
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

سوال 10.100 اور سوال 10.101 میں مساوات 10.74 کی مدد سے  $\frac{dw}{dt}$  دریافت کریں۔

سوال 10.100:  $w = x^2 + y^2 + z^2, \quad x = t^2, \quad y = \ln t, \quad z = e^t$   
 جواب:  $\frac{2}{t} \ln t + 2e^{2t} + 4t^3$

سوال 10.101:  $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$   
 جواب:  $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

سوال 10.102: مسئلہ 10.2 کو ثابت کریں۔

سوال 10.103 تا سوال 10.105 میں  $\frac{\partial w}{\partial u}$  اور  $\frac{\partial w}{\partial v}$  دریافت کریں۔

سوال 10.103:  $w = \ln(x^2 + y^2), \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v$   
 جواب:  $2, 0$

سوال 10.104:  $w = xy, \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v$   
 جواب:  $e^{2u} \sin 2v, e^{2u} \cos 2v$

سوال 10.105:  $w = x^2 - y^2, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$   
 جواب:  $4u(u^2 - 3v^2), 4v(v^2 - 3u^2)$



سوال 10.106: مساوات 10.73 حاصل کریں۔

سوال 10.107: فرض کریں کہ  $w = f(x, y)$  ہے جہاں  $x = r \cos \theta$  اور  $y = r \sin \theta$  ہیں۔ درج ذیل ثابت کریں۔

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

جواب: درج ذیل استعمال کرتے ہوئے با آسانی ثابت ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial y} r \cos \theta \end{aligned}$$

سوال 10.108: فرض کریں کہ  $w = f(v, z)$  ہے جہاں  $v = x + ct$  اور  $z = x - ct$  ہیں جبکہ  $c$  مستقل قیمت ہے۔ درج ذیل ثابت کریں جہاں تمام تفرقات کو ممکن تصور کریں۔  $w_{xx}$  سے مراد  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  ہے۔

$$c^2 w_{xx} - w_{tt} = 4c^2 w_{vz}$$

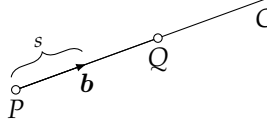
سوال 10.109: فرض کریں کہ  $w = f(x, y)$  ہے جہاں  $x = r \cos \theta$  اور  $y = r \sin \theta$  ہیں۔ درج ذیل ثابت کریں۔

$$w_{xx} + w_{yy} = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta}$$

جواب:  $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  اور  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  سے درج ذیل حاصل کرتے ہوئے ثابت ہو گا۔

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = -\frac{y}{r^2}, \quad r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \text{وغیرہ}$$

$$w_{xx} = x^2 r^{-2} w_{rr} - 2xy r^{-3} w_{r\theta} + y^2 r^{-4} w_{\theta\theta} + y^2 r^{-3} w_r + 2xy r^{-4} w_\theta, \quad \text{وغیرہ}$$



شکل 10.11: سمتی تفرق

## 10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان

ہم فضا میں غیر سمتی میدان  $f(P) = f(x, y, z)$  پر غور کرتے ہیں (حصہ 10.1)۔ ہم جانتے ہیں کہ  $x$ ،  $y$  اور  $z$  رخ میں تفاعل کی تبدیلی کی شرح بالترتیب  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ،  $\frac{\partial f}{\partial y}$  اور  $\frac{\partial f}{\partial z}$  ہے۔ ہمیں کسی بھی رخ اس تفاعل کی تبدیلی کی شرح یعنی سمتی تفرق حاصل کریں۔

ہم فضا میں کوئی نقطہ  $P$  اور اس نقطے پر کوئی رخ چنتے ہیں۔ اس رخ کو اکائی سمتیہ  $b$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ  $P$  سے  $s$  فاصلے پر  $b$  کی رخ سیدھے خط  $C$  پر نقطہ  $Q$  پایا جاتا ہے (شکل 10.11)۔ اگر درج ذیل حد

$$(10.75) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

موجود ہو تب اس کو  $P$  پر  $b$  کی رخ  $f$  کی سمتی تفرق<sup>50</sup> کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ  $\frac{\partial f}{\partial s}$  در حقیقت  $P$  پر  $b$  کی رخ  $f$  کی شرح تبدیلی ہے۔

یوں  $P$  پر  $f$  کے لامتناہی تعداد میں سمتی تفرقات پائے جاتے ہیں۔ اگر  $P$  کا تعین گر سمتیہ  $a$  ہو تب  $C$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.76) \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} = \mathbf{a} + s\mathbf{b} \quad (s \geq 0)$$

اور  $\frac{\partial f}{\partial s}$  سے مراد  $C$  پر  $f[x(s), y(s), z(s)]$  کا لمبائی  $s$  کے ساتھ تفرق ہے۔ اب اگر  $f$  کے استمراری جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں تب زنجیری قاعدے (مسئلہ 10.1) کے تحت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.77) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'$$

---

directional derivative<sup>50</sup>

جہاں  $x' = \frac{dx}{ds}$  کو  $s = 0$  پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اب مساوات 10.76 سے

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i} + y' \mathbf{j} + z' \mathbf{k} = \mathbf{b}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو دیکھ کر خیال آتا ہے کہ سمتیہ

$$(10.78) \quad f_{\text{ڈھلوان}} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

متعارف کرنے سے مساوات 10.77 کو اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.79) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot f_{\text{ڈھلوان}} \quad (|\mathbf{b}| = 1)$$

سمتیہ ڈھلوان  $f$  کو غیر سمتی تفاعل  $f$  کی ڈھلوان<sup>51</sup> کہتے ہیں۔

تفرقی عامل  $\nabla$ <sup>52</sup>

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

متعارف کرتے ہوئے مساوات 10.78 کو

$$(10.80) \quad f_{\text{ڈھلوان}} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

اور مساوات 10.79 کو

$$(10.81) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot \nabla f \quad (|\mathbf{b}| = 1)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اگر  $\mathbf{b}$  کارٹیزی  $x$  محور کی رخ ہو تب  $\mathbf{b} = \mathbf{i}$  ہو گا اور  $f$  کا سمتی تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

اسی طرح مثبت  $y$  اور مثبت  $z$  محور کی رخ سمتی تفرق بالترتیب  $\frac{\partial f}{\partial y}$  اور  $\frac{\partial f}{\partial z}$  ہوں گے۔

<sup>51</sup> gradient  
<sup>52</sup>  $\nabla$  یونانی حرف تھی ہے جو نیچلا کہلاتا ہے۔

مثال 10.16: سمتی تفرق

غیر سمتی تفاعل  $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^3$  کا نقطہ  $P : (-2, 1, 3)$  پر  $a = 3i - 4j$  کی رخ سمتی تفرق دریافت کریں۔

حل: چونکہ  $|a| = 5$  ہے لہذا  $a$  کی رخ اکائی سمتیہ  $b = \frac{a}{|a|} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$  ہو گا۔  $f$  کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\nabla f = 2xi + 2j - 3z^2k \implies \nabla f(P) = -4i + 2j - 27k$$

یوں نقطہ  $P$  پر  $a$  کی رخ سمتی تفرق درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = b \cdot \nabla f = \frac{1}{5}(3i - 4j) \cdot (-4i + 2j - 27k) = -4$$

حاصل جواب منفی ہے جس کا مطلب ہے کہ  $a$  کی رخ  $f$  گھٹتا ہے۔

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ  $\nabla f$  کی قیمت اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 10.78 سمتی تفرق دیتا ہے جو کسی دوسرے کارتیسی نظام میں درج ذیل لکھا جائے گا

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \frac{\partial f}{\partial x^*} i^* + \frac{\partial f}{\partial y^*} j^* + \frac{\partial f}{\partial z^*} k^*$$

جہاں  $x^*$ ،  $y^*$  اور  $z^*$  دوسرے نظام کے محور جبکہ  $i^*$ ،  $j^*$  اور  $k^*$  اس کے مطابقتی اکائی سمتیت ہیں۔ ان مساوات میں جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں اور یہ کہنا مشکل ہو گا کہ دونوں مساوات سے یکساں ڈھلوان حاصل ہو گا۔

اب غیر سمتی تفاعل کی تعریف کے تحت نقطہ  $P$  پر  $f$  کی قیمت کا دارومدار  $P$  پر ہے ناکہ چنے گئے کارتیسی نظام پر۔ اسی طرح  $C$  پر لمبائی  $s$  پر بھی چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں  $\frac{\partial f}{\partial s}$  پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ اب مساوات 10.81 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial s} = |b| |\nabla f| \cos \gamma = |\nabla f| \cos \gamma$$

جہاں  $b$  اور  $\nabla f$  کے مابین زاویہ  $\gamma$  ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $\cos \gamma = 1$  یعنی  $\gamma = 0$  پر  $\frac{\partial f}{\partial s}$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت  $\frac{\partial f}{\partial s} = |\nabla f|$  پائی جاتی ہے۔ اب چونکہ  $\frac{\partial f}{\partial s}$  غیر متغیر ہے لہذا  $\nabla f$  کی قیمت اور سمت پر کار تیمی نظام کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔ اس سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.4: ڈھلوان

ایسا غیر سمتی تفاعل  $f(P) = f(x, y, z)$  جس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں کی ڈھلوان موجود ہے جس کی لمبائی اور رخ پر چنے گئے کار تیمی نظام محدود کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ اگر نقطہ  $P$  پر  $f$  کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب  $P$  پر  $f$  کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی ڈھلوان کی رخ ہوگی۔

ڈھلوان کی دوسری جیومیٹریائی خصلت جانتے ہیں۔ فضا میں قابل تفرق غیر سمتی تفاعل  $f(x, y, z)$  پر غور کرتے ہیں۔ ہر مستقل  $c$  کے لئے مساوات

$$(10.82) \quad f(x, y, z) = c = \text{مستقل}$$

سطح  $S$  کو ظاہر کرتا ہے۔  $c$  کے تمام قیمتیں لیتے ہوئے ہمیں نسل سطح ملتا ہے جنہیں  $f$  کی ہموار سطحیں<sup>53</sup> کہتے ہیں۔ تفاعل کی تعریف کے تحت، فضا میں کسی بھی نقطے پر  $f$  کی قیمت منفرد ہوگی لہذا فضا میں ہر نقطے سے  $f$  کی صرف اور صرف ایک ہموار سطح گزرے گی۔ ہم جانتے ہیں کہ فضا میں کسی بھی منحنی  $C$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (حصہ 10.4)۔

$$(10.83) \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

اب اگر  $C$  کو  $S$  پر رہنے کا پابند بنایا جائے تب مساوات 10.83 میں تفاعل  $x(t)$ ،  $y(t)$  اور  $z(t)$  کو مساوات 10.82 پر پورا اترنا ہوگا یعنی:

$$(10.84) \quad f[x(t), y(t), z(t)] = c$$

زنجیری تفرق (مسئلہ 10.1) استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.84 کا  $t$  کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

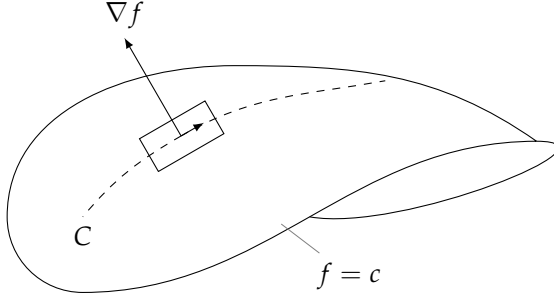
$$(10.85) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = (\nabla f) \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

جہاں سمتیہ

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

منحنی  $C$  کا مماس ہے (حصہ 10.5)۔  $S$  پر مختلف سمتوں میں نقطہ  $P$  سے گزرتی منحنی کے مماس،  $P$  پر  $S$  کو چھوتی سیدھی سطح سے گزریں گے۔ اس سیدھی سطح کو  $P$  پر  $S$  کی مماسی سطح<sup>54</sup> کہتے ہیں۔ مماسی سطح کے

level surfaces<sup>53</sup>  
tangent plane<sup>54</sup>



شکل 10.12: ہموار سطح اور ڈھلوان

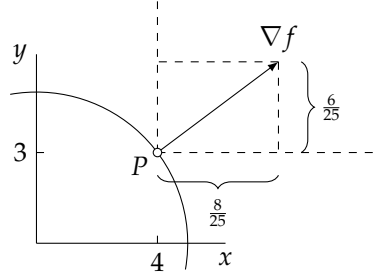
عمودی، نقطہ  $P$  سے گزرتا خط،  $P$  پر  $S$  کا عمود<sup>55</sup> کہلاتا ہے (شکل 10.12)۔ صفحہ 522 پر مسئلہ 7.3 کی مدد سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.5: ڈھلوان اور سطح کی عمود  
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار  $D$  پر غیر سستی تقابل  $f$  معین اور قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ دائرہ کار  $D$  میں  $P$  کوئی نقطہ ہے جو  $f$  کی ہموار سطح  $S$  پر پایا جاتا ہے۔ اب اگر  $P$  پر  $f$  کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب یہ ڈھلوان نقطہ  $P$  پر  $S$  کے عمودی ہو گا۔

مثال 10.17: ہموار منحنی کا عمود  
تقابل  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  کے ہموار سطحیں  $f = c$  مبداء پر ہم مرکز دائرے ہیں۔ ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

کی سمت ان دائروں کے عمودی ہے جو  $f$  کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کی سمت ہے۔ مثلاً نقطہ  $P : (4, 3)$  پر  $\nabla f = \frac{8}{25} \mathbf{i} + \frac{6}{25} \mathbf{j}$  ہے (شکل 10.13)۔



شکل 10.13: دائرے کا عمود

مثال 10.18: سطح کا عمود  
مخروط  $z^2 = 2(x^2 + y^2)$  کا نقطہ  $P : (1, 0, 3)$  پر اکائی عمودی سمتیہ دریافت کریں۔ ہم مخروط کو ہموار سطح  $f = 0$  تصور کر سکتے ہیں جہاں  $f(x, y, z) = 2(x^2 + y^2) - z^2$  ہو گا۔ یوں

$$\nabla f = 4xi + 4yj - 2zk \implies \nabla f(P) = 4i - 6k$$

ہو گا۔ مسئلہ 10.5 سے اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ملتا ہے۔ دوسرا اکائی عمودی سمتیہ  $-n$  ہو گا۔

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{4}{\sqrt{52}}i - \frac{6}{\sqrt{52}}k$$

طبیعیات کے میدان میں کئی ایسے سمتی تفاعل پائے جاتے ہیں جو کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سے حاصل ہوتے ہیں۔ ایسے غیر سمتی تفاعل کو مخفی تفاعل<sup>56</sup> کہتے ہیں۔ مخفی تفاعل کے استعمال سے سمتی تفاعل کا تجزیہ نہایت آسان ہو جاتا ہے۔ آئیں مخفی تفاعل کے استعمال کی مثال دیکھیں۔

مثال 10.19: ثقلی میدان۔ لاپلاس مساوات  
ثقلی میدان پر مثال 10.4 میں غور کیا گیا جہاں درج ذیل مساوات حاصل کی گئی

(10.86)

$$\mathbf{f} = |\mathbf{f}| \left( -\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -GMm \left[ \frac{x-x_0}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y-y_0}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z-z_0}{r^3} \mathbf{k} \right]$$

جہاں

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

کمیت  $M$  اور  $m$  کے درمیان فاصلہ ہے۔ یہاں غور کرنے سے

$$(10.87) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{2(x-x_0)}{2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x-x_0}{r^3}$$

$$(10.88) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{2(y-y_0)}{2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y-y_0}{r^3}$$

$$(10.89) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{2(z-z_0)}{2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{z-z_0}{r^3}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں  $\mathbf{f}$  کو درج ذیل غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان لکھا جاسکتا ہے

$$(10.90) \quad h(x, y, z) = \frac{GMm}{r} \quad (r > 0)$$

لہذا سمتی تفاعل  $\mathbf{f}$  کا مخفی تفاعل  $h$  ہے۔

تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}$$

حاصل ہوتا ہے جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہے لہذا تفاعل  $h = \frac{GMm}{r}$  درج ذیل پر پورا اترتا ہے۔

$$(10.91) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$



مساوات 10.91 انتہائی اہم جزوی تفرقی مساوات ہے جس کو لاپلاس مساوات<sup>57</sup> کہتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ کو  $f$  کا لاپلاسی<sup>58</sup> کہتے ہیں اور اس کو  $\nabla^2 h$  یا  $\Delta h$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تفرقی عامل

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(جو مربع نیلا پڑھا جاتا ہے) کو لاپلاسی عامل<sup>59</sup> کہتے ہیں۔ لاپلاسی عامل استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.91 کو نہایت عمدگی سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\nabla^2 h = 0 \quad (10.92)$$

یہ ثابت کرنا ممکن ہے کہ کمیت کی کسی بھی طرز کی تقسیم سے حاصل قوت کو ایسے سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جو کسی غیر سمتی تفاعل  $h$  کا ڈھلوان ہو گا جہاں  $h$  مساوات 10.91 پر ہر اس مقام پر پورا اترتا ہے جہاں کمیت موجود نہ ہو۔

طبیعیات میں کئی قاعدے نیوٹن کے کشش ثقل کے قانون کی طرز رکھتے ہیں مثلاً فضا میں  $Q_1$  اور  $Q_2$  بار کی باہمی قوت درج ذیل ہے

$$f = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{r}{r^3} \quad \text{کولمب کا قانون}$$

جہاں  $\epsilon$  برقی مستقل ہے۔ یوں  $f$  کو مخفی تفاعل  $h = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r}$  کا ڈھلوان لکھا جاسکتا ہے جہاں  $r > 0$  کی صورت میں  $h$  مساوات 10.91 پر پورا اترتا ہے۔

اگر غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سمتی تفاعل دیتا ہو تب ایسی میدان کو بقائی میدان<sup>60</sup> کہتے ہیں۔ جیسا کہ ہم اگلے باب میں دیکھیں گے، بقائی میدان میں کسی بھی ذرہ کو نقطہ  $N_1$  سے نقطہ  $N_2$  منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی صرف  $N_1$  اور  $N_2$  پر منحصر ہے ناکہ اس راستے پر جو ذرہ منتقل کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہو۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر میدان بقائی نہیں ہوتا۔

<sup>57</sup> Laplace equation

<sup>58</sup> Laplacian

<sup>59</sup> Laplacian operator

<sup>60</sup> conservative field

## سوالات

سوال 10.110 تا سوال 10.121 میں ڈھلوان  $\nabla f$  دریافت کریں۔

سوال 10.110:  $f = 3x + 2y + 4$   
جواب:  $\nabla f = 3i + 2j$

سوال 10.111:  $f = e^y \sin x$   
جواب:  $\nabla f = e^y (\cos x i + \sin x j)$

سوال 10.112:  $f = \ln(x^2 + y^2)$   
جواب:  $\nabla f = \frac{2x}{x^2 + y^2} i + \frac{2y}{x^2 + y^2} j$

سوال 10.113:  $f = x^2 + y^2$   
جواب:  $\nabla f = 2xi + 2yj$

سوال 10.114:  $f = \sin^{-1} \frac{y}{x}$   
جواب:  $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} (-\frac{y}{x} i + j)$

سوال 10.115:  $f = \tan^{-1} \frac{y}{x}$   
جواب:  $\nabla f = \frac{1}{x^2 + y^2} (-yi + xj)$

سوال 10.116:  $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   
جواب:  $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (xi + yj + zk)$

سوال 10.117:  $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$   
جواب:  $\nabla f = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (xi + yj + zk)$

سوال 10.118:  $f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$   
جواب:  $\nabla f = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (xi + yj + zk)$

سوال 10.119:  $f = x^2 y z^3$   
جواب:  $\nabla f = 2xyz^3 i + x^2 z^3 j + 3x^2 y z^2 k$

سوال 10.120:  $f = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$   
 جواب:  $\nabla f = 2 \cos(x^2 + y^2 + z^2)(xi + yj + zk)$

سوال 10.121:  $f = e^{xyz}$   
 جواب:  $\nabla f = e^{xyz}(yz i + xz j + xy k)$

سوال 10.122 تا سوال 10.127 میں  $\nabla f$  دریافت کریں۔ کئی مقامات پر ہموار سطح  $f = c$  کی ڈھلوان  $\nabla f$  کو تیر سے ظاہر کریں۔

سوال 10.122:  $f = x - 2y$   
 جواب:  $i - 2j$

سوال 10.123:  $f = \frac{y}{x}$   
 جواب:  $\frac{1}{x^2}(-yi + xj)$

سوال 10.124:  $f = \frac{x}{y}$   
 جواب:  $\frac{1}{y^2}(yi - xj)$

سوال 10.125:  $f = xy$   
 جواب:  $yi + xj$

سوال 10.126:  $f = x^3y^2$   
 جواب:  $3x^2y^2i + 2x^3yj$

سوال 10.127:  $f = 4x^2 + 3y^2$   
 جواب:  $8xi + 6yj$

سوال 10.128 تا سوال 10.134 میں نقطہ  $N : (x, y)$  پر مستوی منحنی کا عمودی سمتیہ کھینچیں۔

سوال 10.128:  $y = x, \quad N : (2, 2)$   
 جواب:  $i - j$

سوال 10.129:  $y = x^2, \quad N : (3, 9)$   
 جواب:  $6i - j$

سوال 10.130:  $y = 2x + 7, \quad N : (-1, 5)$   
 جواب:  $2i - j$

سوال 10.131:  $N : (2, 3)$   $y^2 = 3x + 3$ ,  
جواب:  $3i - 6j$

سوال 10.132:  $N : (4, 3)$   $x^2 + y^2 = 36$ ,  
جواب:  $8i + 6j$

سوال 10.133:  $N : (4, 8)$   $y^3 = x^2$ ,  
جواب:  $16i - 48j$

سوال 10.134:  $N : (1, 0)$   $x^2 - y^2 = 1$ ,  
جواب:  $2i$

سوال 10.135 تا سوال 10.140 میں نقطہ  $N : (x, y, z)$  پر سطح کا عمودی سمتیہ دریافت کریں۔

سوال 10.135:  $N : (1, 1, -2)$   $x + y + z = 0$ ,  
جواب:  $i + j + k$

سوال 10.136:  $N : (1, -4, 1)$   $3x - y + 2z = 1$ ,  
جواب:  $3i - j + 2k$

سوال 10.137:  $N : (2, 3, 13)$   $z = x^2 + y^2$ ,  
جواب:  $4i + 6j - k$

سوال 10.138:  $N : (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$   $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  
جواب:  $2\sqrt{3}(i + j + k)$

سوال 10.139:  $N : (1, -1, 1)$   $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ ,  
جواب:  $4i - 6j + 2k$

سوال 10.140:  $N : (2, 1, 2)$   $z = xy^2$ ,  
جواب:  $i + 4j - k$

سوال 10.141 تا سوال 10.146 ایسا  $f$  دریافت کریں کہ  $v = \nabla f$  ہو۔

سوال 10.141:  $v = i + j - k$

جواب:  $v$  کو دیکھ کر  $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ ،  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$  اور  $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$  لکھا جاسکتا ہے۔  $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$  کا مکمل  
 $f = x + c$  ہوگا جہاں  $c$  از خود  $y$  اور  $z$  پر منحصر ہو سکتا ہے۔ اسی طرح  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$  سے  $f = y + c'$

جبکہ  $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$  سے  $f = -z + c''$  ملتا ہے۔ تینوں جوابات کو اکٹھے کرتے ہوئے  $f = x + y - z$  لکھا جاسکتا ہے۔

سوال 10.142:  $v = xi + j + zk$   
جواب:  $\frac{x^2}{2} + y + \frac{z^2}{2}$

سوال 10.143:  $v = 2xi + 3y^2j + k$   
جواب:  $x^2 + y^3 + z$

سوال 10.144:  $v = yzi + xzj + xyk$   
جواب:  $xyz$

سوال 10.145:  $v = \frac{2x}{x^2+y^2}i + \frac{2y}{x^2+y^2}j$   
جواب:  $\ln(x^2 + y^2)$

سوال 10.146:  $v = e^x \cos y i - e^x \sin y j$   
جواب:  $e^x \cos y$

سوال 10.147:  $f = x^2 + y^2$  تقابل کا نقطہ  $N : (3, 3)$  پر  $i$ ،  $j + i$ ،  $j$  اور  $-i + j$  کی سمت میں سمتی تفرق دریافت کریں۔

جوابات:  $6, 6\sqrt{2}, 6, 0$

سوال 10.148 تا سوال 10.153 میں  $a$  کی سمت میں  $N$  پر  $f$  کی سمتی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.148:  $f = 3x - 2y$ ،  $N : (1, 1)$ ،  $a = i + j$   
جواب:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

سوال 10.149:  $f = 2x^2 - 3y^2$ ،  $N : (2, 3)$ ،  $a = 3i + 2j$   
جواب:  $-\frac{12}{\sqrt{13}}$

سوال 10.150:  $f = x^2 - y^2$ ،  $N : (-1, 1)$ ،  $a = -i + j$   
جواب:  $0$

سوال 10.151:  $f = \frac{y}{x}$ ،  $N : (3, 2)$ ،  $a = -2i - j$   
جواب:  $\frac{1}{9\sqrt{5}}$

سوال 10.152:  $f = 3x - 2y + 4z$ ,  $N : (3, 2, 1)$ ,  $a = i - j - k$  جواب:  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

سوال 10.153:  $f = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $N : (4, 0, 5)$ ,  $a = -i + j - k$  جواب:  $-6\sqrt{3}$

سوال 10.154: مستقل نقطہ  $N : (x_0, y_0, z_0)$  سے متغیر نقطہ  $Q : (x, y, z)$  تک فاصلہ  $r$  ہے۔ ثابت کریں کہ  $N$  سے  $Q$  کے رخ اکائی سمتیہ  $\nabla r$  ہے۔

سوال 10.155: ثابت کریں کہ سوال 10.110 تا سوال 10.112 کے تفاعل لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

سوال 10.156 تا سوال 10.159 میں دیے گئے تمام تفرقات ممکن تصور کرتے ہوئے دیے گیا تعلق ثابت کریں۔

سوال 10.156:  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

سوال 10.157:  $\nabla(f^n) = n f^{n-1} \nabla f$

سوال 10.158:  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

سوال 10.159:  $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$

## 10.9 متبادل محدودی نظام اور متبادل ارکان سمتیات

اس حصے میں ایسے متبادلے پر غور کیا جائے گا جو ایک کار تیزی محدودی نظام کو دوسرے کار تیزی محدودی نظام پر منتقل کرتا ہے۔ ہم سمتیات کے ارکان پر ایسے متبادلے کے اثرات پر بھی غور کریں گے۔ یہ مسئلہ نظریاتی اور عملی استعمال کے اعتبار سے بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

فرض کریں کہ  $x$ ،  $y$ ،  $z$  اور  $x^*$ ،  $y^*$ ،  $z^*$  کوئی دو کار تہی محدودی نظام ہیں۔ مزید فرض کریں کہ کسی سمتیہ  $v$  کو ان محدودی نظام میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.93) \quad v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$$(10.94) \quad v = v_1^* i^* + v_2^* j^* + v_3^* k^*$$

جہاں  $i$ ،  $j$ ،  $k$  اور  $i^*$ ،  $j^*$ ،  $k^*$  بالترتیب مثبت  $x$ ،  $y$ ،  $z$  اور  $x^*$ ،  $y^*$ ،  $z^*$  رخ اکائی سمتیات ہیں۔ ہم  $v_1^*$ ،  $v_2^*$  اور  $v_3^*$  ارکان کو  $v_1$ ،  $v_2$  اور  $v_3$  کی صورت میں لکھنا چاہتے ہیں۔ اسی طرح ہم  $v_1$ ،  $v_2$  اور  $v_3$  ارکان کو  $v_1^*$ ،  $v_2^*$  اور  $v_3^*$  کی صورت میں لکھنا چاہتے ہیں۔

مساوات 10.93 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.95) \quad i^* \cdot v = v_1 i^* \cdot i + v_2 i^* \cdot j + v_3 i^* \cdot k$$

اسی طرح مساوات 10.94 کا  $i^*$  کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.96) \quad i^* \cdot v = v_1^* i^* \cdot i^* + v_2^* i^* \cdot j^* + v_3^* i^* \cdot k^*$$

اب چونکہ دائیں ہاتھ پہلا غیر سمتی ضرب اکائی کے برابر ہے جبکہ باقی دو غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہیں لہذا درج بالا کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.97) \quad i^* \cdot v = v_1^*$$

مساوات 10.97 اور مساوات 10.95 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_1^* = i^* \cdot i v_1 + i^* \cdot j v_2 + i^* \cdot k v_3$$

$$v_2^* = j^* \cdot i v_1 + j^* \cdot j v_2 + j^* \cdot k v_3 \quad \text{بالکل اسی طرح}$$

$$v_3^* = k^* \cdot i v_1 + k^* \cdot j v_2 + k^* \cdot k v_3$$

یوں سمتیہ  $v$  کے کسی ایک کار تہی نظام میں لکھے گئے ارکان کو کسی دوسرے کار تہی نظام میں لکھے گئے ارکان کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

اس تبادل کو سادہ صورت میں لکھنے کی خاطر ہم

$$(10.98) \quad \begin{array}{lll} i^* \cdot i = c_{11} & i^* \cdot j = c_{12} & i^* \cdot k = c_{13} \\ j^* \cdot i = c_{21} & j^* \cdot j = c_{22} & j^* \cdot k = c_{23} \\ k^* \cdot i = c_{31} & k^* \cdot j = c_{32} & k^* \cdot k = c_{33} \end{array}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_1^* &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 \\ v_2^* &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\ v_3^* &= c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3 \end{aligned} \quad (10.99)$$

علامت جمع استعمال کرتے ہوئے اس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{kl}v_l \quad k = 1, 2, 3 \quad (10.100)$$

اسی طرح الٹ تبادُل کا کلیہ

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}v_1^* + c_{21}v_2^* + c_{31}v_3^* \\ v_2 &= c_{12}v_1^* + c_{22}v_2^* + c_{32}v_3^* \\ v_3 &= c_{13}v_1^* + c_{23}v_2^* + c_{33}v_3^* \end{aligned} \quad (10.101)$$

بھی حاصل کیا جاسکتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v_l = \sum_{m=1}^3 c_{ml}v_m^* \quad l = 1, 2, 3 \quad (10.102)$$

یہاں غور کریں کہ مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 میں یکساں عددی سر  $c_{kl}$  استعمال ہوتے ہیں البتہ  $c_{11}$  ،  $c_{22}$  اور  $c_{33}$  کے علاوہ تمام عددی سر کے مقامات دونوں تبادُل میں مختلف ہیں۔

عددی سروں  $c_{kl}$  سادہ جیومیٹریائی مطلب رکھتے ہیں۔ چونکہ  $i$  اور  $i^*$  اکائی سمتیات ہیں لہذا صفحہ 522 پر مساوات 7.23 کے تحت  $c_{11} = i^* \cdot i$  درحقیقت مثبت  $x$  اور مثبت  $x^*$  محور کے مابین زاویے کا کوسائن  $\cos$  ہے۔ اسی طرح  $c_{12} = i^* \cdot j$  مثبت  $x^*$  اور مثبت  $y$  محور کے مابین زاویے کا کوسائن ہے۔ یہی کچھ باقی عددی سروں کے لئے بھی درست ہے۔

عددی سر  $c_{kl}$  چند اہم تعلقات پر پورا اترے ہیں جنہیں اب حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 10.102 کو مساوات 10.100 میں پر کرنے سے

$$v_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{kl}v_l = \sum_{l=1}^3 c_{kl} \sum_{m=1}^3 c_{ml}v_m^* = \sum_{m=1}^3 v_m^* \left( \sum_{l=1}^3 c_{kl}c_{ml} \right) \quad (10.103)$$



ماتا ہے جہاں  $k = 1, 2, 3$  ہے۔ مثلاً  $k = 1$  کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$v_1^* = v_1^* \left( \sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{1l} \right) + v_2^* \left( \sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{2l} \right) + v_3^* \left( \sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{3l} \right)$$

ہر سمتیہ  $v = v_1^* i^* + v_2^* j^* + v_3^* k^*$  پر پورا اترنے کی خاطر درج بالا میں پہلا مجموعہ اکائی کے برابر ہونا ہو گا جبکہ باقی دو مجموعوں کو صفر کے برابر ہونا ہو گا۔ اسی طرح  $k = 2$  اور  $k = 3$  کے لئے بھی شرائط حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ یوں مساوات 10.103 صرف اور صرف اس صورت ہر سمتیہ کے لئے درست ہو گا جب یہ درج ذیل شرط پر پورا اترتا ہو۔

$$(10.104) \quad \sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases}$$

اس شرط کو کرونیکر ضرب<sup>61</sup> (کرونیکر ڈیلٹا)<sup>62</sup>

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(10.105) \quad \sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} = \delta_{km} \quad (k, m = 1, 2, 3)$$

ایسے تین عدد سمتیات جن کے اجزاء درج ذیل ہوں

$$c_{11}, c_{12}, c_{13} \quad c_{21}, c_{22}, c_{23} \quad c_{31}, c_{32}, c_{33}$$

میں دو عدد سمتیات کا غیر سمتی ضرب مساوات 10.105 کا بائیں ہاتھ دیتا ہے۔ مزید مساوات 10.105 سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ یہ سمتیات اکائی قائمہ الزاویہ سمتیات ہیں۔ یوں ان کے غیر سمتی ضرب کی قیمت  $+1$  یا  $-1$  ہو گی یعنی:

$$(10.106) \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \mp 1$$

<sup>61</sup>Kronecker delta

<sup>62</sup>جرمنی کے ریاضی دان لیوپولڈ کرونیکر [1823-1891]

یہاں ثبوت دیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اگر دونوں محدودی نظام دائیں ہاتھ کے نظام ہوں (یا دونوں محدودی نظام بائیں ہاتھ کے نظام ہوں) تب درج بالا مقطع کی قیمت +1 ہوگی۔ اس کے برعکس اگر ایک محدودی نظام دائیں ہاتھ کا نظام ہو اور دوسرا بائیں ہاتھ کا نظام ہو تب درج بالا مقطع کی قیمت -1 ہوگی۔ ہم اپنے نتیجے کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 10.6: (سمتیات کے ارکان کے تبادلے کا قاعدہ)

دو عدد کارتیسی محدودی نظام میں کسی بھی سمتیہ  $v$  کے ارکان  $v_1, v_2, v_3$  اور  $v_1^*, v_2^*, v_3^*$  کو ایک دوسرے سے مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں مساوات 10.98 عددی سر  $c_{kl}$  دیتا ہے جو مساوات 10.104 اور مساوات 10.106 پر پورا اترتے ہیں۔

ہم اب کسی ایک کارتیسی محدودی نظام کا کسی دوسرے کارتیسی نظام میں تبادلہ کے لئے درکار کلیات حاصل کرتے ہیں۔ اگر  $xyz$  اور  $x^*y^*z^*$  کارتیسی محدودی نظام کے مبدا ایک ہی نقطے پر پائے جاتے ہوں تب  $v$  کی دم کو مبدا پر رکھتے ہوئے  $v$  کو نقطہ  $Q$  کا تعین کر سمتیہ تصور کیا جاسکتا ہے جہاں  $v$  کا اختتامی نقطہ  $Q$  ہے۔ اگر ان کارتیسی محدودی نظام میں  $Q$  کے محدود  $(x, y, z)$  اور  $(x^*, y^*, z^*)$  ہوں تب مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 میں درج ذیل ہوگا۔

$$v_1 = x, v_2 = y, v_3 = z \quad v_1^* = x^*, v_2^* = y^*, v_3^* = z^*$$

یوں مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 کو  $v_1, v_2, v_3$  اور  $v_1^*, v_2^*, v_3^*$  کی بجائے  $x, y, z$  اور  $x^*, y^*, z^*$  استعمال کرتے ہوئے ہم مبدا محدودی نظام کے تبادلے کے باہمی تعلقات حاصل ہوتے ہیں۔

اگر محدودی نظام ہم مبدا نہ ہوں تب ان کے مابین تبادلے کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ پہلے حصے میں درج بالا تبادلہ کیا جائے گا جبکہ دوسرے حصے میں مستقیم حرکت کی جائے گی۔ مستقیم حرکت میں دونوں کارتیسی نظام کے ارکان میں صرف مستقل قیمت کا فرق ہوتا ہے۔ یوں عمومی تبادلے کا درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 10.7: (کارتیسی محدودی نظاموں کے تبادلے کا قاعدہ) کسی ایک کارتیسی محدودی نظام  $xyz$  سے کوئی دوسرا کارتیسی محدودی نظام  $x^*y^*z^*$  درج ذیل یکے کی مدد سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} x^* &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + b_1 \\ y^* &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + b_2 \\ z^* &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + b_3 \end{aligned} \quad (10.107)$$

جبکہ  $x^*y^*z^*$  سے  $xyz$  درج ذیل کلیات کی مدد سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x^* + c_{21}y^* + c_{31}z^* + \tilde{b}_1 \\ y &= c_{12}x^* + c_{22}y^* + c_{32}z^* + \tilde{b}_2 \\ z &= c_{13}x^* + c_{23}y^* + c_{33}z^* + \tilde{b}_3 \end{aligned} \quad (10.108)$$

جہاں عددی سر  $c_{kl}$  ، مساوات 10.98 سے حاصل ہوں گے جو مساوات 10.104 اور مساوات 10.106 پر پورا اترتے ہیں جبکہ  $b_1$  ،  $b_2$  ،  $b_3$  ،  $\tilde{b}_1$  ،  $\tilde{b}_2$  ،  $\tilde{b}_3$  مستقل قیمتیں ہیں۔

### سوالات

سوال 10.160: مساوات 10.102 میں دیے گئے تمام عددی سر کی جیومیٹریائی معنی پر غور کریں۔

سوال 10.161 تا سوال 10.166 میں  $c_{kl}$  اور  $b_k$  دریافت کریں۔

سوال 10.161: ایسا مستقیم حرکت جو مبدا کو  $(5, 1, -4)$  پر منتقل کرے۔

جواب:  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$  ،  $b_1 = 5$  ،  $b_2 = 1$  ،  $b_3 = -4$  جبکہ بقایا تمام عددی سر صفر ہیں۔

سوال 10.162: ایسا مستقیم حرکت جو  $(1, 0, 3)$  کو  $(3, 2, 1)$  پر منتقل کرے۔

جواب:  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$  ،  $b_1 = 2$  ،  $b_2 = 2$  ،  $b_3 = -2$  جبکہ بقایا تمام عددی سر صفر ہیں۔

سوال 10.163: سطح  $xz$  میں عکس۔

جواب:  $c_{11} = 1$  ،  $c_{22} = -1$  ،  $c_{33} = 1$  جبکہ بقایا تمام مستقل سر صفر ہیں۔

سوال 10.164: سطح  $y = x$  میں عکس۔

جواب:  $c_{12} = 1$  ،  $c_{21} = 1$  ،  $c_{33} = 1$  جبکہ بقایا تمام مستقل سر صفر ہیں۔

سوال 10.165:  $z$  محور کے گرد  $\theta$  زاویے کی گردش۔

جواب:

سوال 10.166: ایسا مستوی حرکت جو مثبت  $x$ ،  $y$ ،  $z$  کو بالترتیب مثبت  $x^*$ ،  $y^*$ ،  $z^*$  پر منتقل کرے۔

جواب:  $c_{13} = c_{21} = c_{32} = 1$  جبکہ باقی تمام مستقل صفر ہیں۔

سوال 10.167: مساوات 10.106 کا مقطع سوال 10.161 تا سوال 10.164 میں کیا ہو گا۔

جواب: سوال 10.161 کا مقطع  $+1$  ہے۔ باقی مقطع بالترتیب  $-1$ ،  $0$  اور  $0$  ہیں۔

سوال 10.168: مساوات 10.101 حاصل کریں۔

## 10.10 سمتی میدان کی پھیلاؤ

فرض کریں کہ  $v(x, y, z)$  قابل تفرق سمتی تفاعل ہے جس کے ارکان  $v_1$ ،  $v_2$ ،  $v_3$  ہیں جہاں  $x$ ،  $y$ ،  $z$  فضا میں کارتیسی محدود ہیں۔ ایسی صورت میں درج ذیل تفاعل  $v$  کی پھیلاؤ<sup>63</sup> کہلاتا ہے۔

$$(10.109) \quad v_{\text{پھیلاؤ}} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$v$  کی پھیلاؤ کو عموماً  $\nabla \cdot v$  سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}$$

جہاں غیر سمتی ضرب  $(\frac{\partial}{\partial x})v_1$  سے مراد جزوی تفرق  $\frac{\partial v_1}{\partial x}$  لیا جاتا ہے (جو محض بہتر علامت نویسی کے علاوہ کوئی معنی نہیں رکھتی)۔ یاد رہے کہ  $\nabla v$  سے مراد غیر سمتی پھیلاؤ  $v$  ہے جبکہ  $\nabla f$  سے مراد حصہ 10.8 میں بیان کی گئی سمتی ڈھلوان  $f$  ہے۔

مثال کے طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$v = 2xyi - 5yzj + 2x^2yk \implies \nabla \cdot v = 2y - 5z$$

ہم جلد دیکھیں گے کہ پھیلاؤ اہم طبعی معنی رکھتا ہے۔ اب ظاہر ہے کہ ایسے تفاعل کی قیمت جو طبعی یا جیومیٹریائی معنی رکھتی ہو پرچنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے، یعنی ایسی قیمت محدودی نظام بدلنے سے تبدیل نہیں ہوتی۔

مسئلہ 10.8: (محدودی نظام کے لحاظ سے پھیلاؤ کی عدم تغیر)  
 پھیلاؤ  $\nabla \cdot v$  کی قیمت صرف فضا میں نقطے (اور  $v$ ) پر منحصر ہے جبکہ چنے گئے محدودی نظام کا مساوات 10.109 میں دی گئی پھیلاؤ کی قیمت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں کسی دوسرے کارتیسی محدود  $x^*$ ،  $y^*$ ،  $z^*$  اور  $v$  کے مطابقتی ارکان  $v_1^*$ ،  $v_2^*$ ،  $v_3^*$  کی صورت میں  $\nabla \cdot v$  درج ذیل ہو گا۔

$$(10.110) \quad \nabla \cdot v = \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial z^*}$$

ثبوت: ہم مساوات 10.110 کو مساوات 10.109 سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل استعمال کرتے ہوئے

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad \text{اور} \quad x_1^* = x^*, \quad x_2^* = y^*, \quad x_3^* = z^*$$

مساوات 10.107 کو مجموعے کی علامت کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$(10.111) \quad x_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{kl} x_l + b_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

حصہ 10.7 میں دی گئی متعدد متغیرات پر مبنی، تفاعل کے زنجیری قاعدے کے تحت

$$(10.112) \quad \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} \frac{\partial x_k^*}{\partial x_l}$$

باب 10. سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل

ہو گا۔ اس مجموعے میں مساوات 10.111 کے تحت  $\frac{\partial x_k^*}{\partial x_l} = c_{kl}$  ہو گا۔ مساوات 10.102 کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$v_l = \sum_{m=1}^3 c_{ml} v_m^*$$

جس کے تفرق

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = \sum_{m=1}^3 c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}$$

کو مساوات 10.112 میں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} c_{kl} \quad (l = 1, 2, 3)$$

درج بالا میں باری باری  $l = 1, 2, 3$  پر کرتے ہوئے حاصل تین تفاعل کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\nabla \cdot v = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}$$

جو مساوات 10.105 کی بنا گھٹ کر درج ذیل دیگا۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

$$(10.113) \quad \nabla \cdot v = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \delta_{km} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*}$$

اگر  $f(x, y, z)$  دو مرتبہ قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

$$f_{\text{دھوان}} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

ہو گا لہذا مساوات 10.109 کے تحت

$$(f_{\text{دھوان}})_{\text{پھیلاؤ}} = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ہو گا جس کا دایاں ہاتھ، حصہ 10.8 میں دیا گیا،  $f$  کا لاپلاس ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.114) \quad \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \quad (\text{ڈھلوان } f)$$

مثال 10.20: کشش ثقل

ثقلی میدان پر مثال 10.19 میں غور کیا گیا۔ ثقلی قوت  $f$  غیر سستی تفاعل  $h(x, y, z) = \frac{GMm}{r}$  کی ڈھلوان ہے جو لاپلاس کی مساوات  $\nabla^2 h = 0$  پر پورا اترتا ہے۔ یوں مساوات 10.114 کے تحت  $\nabla \cdot f = 0$  ہو گا (جہاں  $r > 0$  ہے)۔

درج ذیل مثال ماقوا حرکیات<sup>64</sup> سے لی گئی ہے۔ یہ مثال پھیلاؤ کی طبعی اہمیت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 10.21: داب پذیر سیال کی حرکت





- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(1.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(1.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(1.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $1 + |q| + |p| = h$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

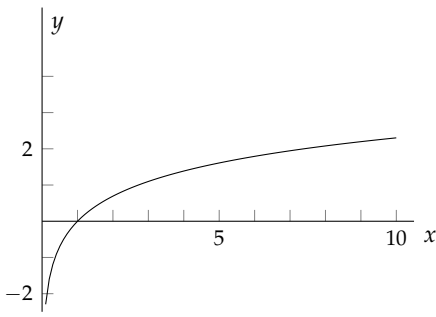
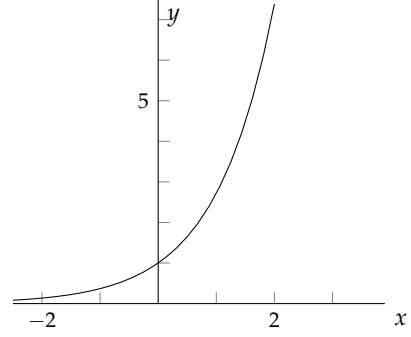
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

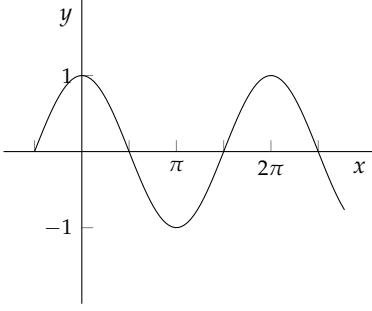
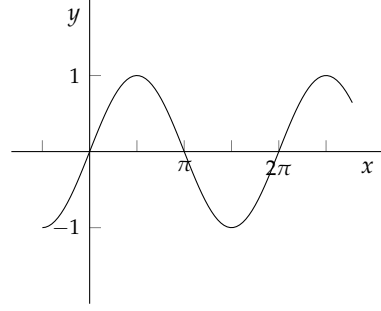
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$

(ب) قدرتی لوگار تھم  $\ln x$ (الف) قوت نمائی تفاعل  $e^x$ 

شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل

(ب)  $\cos x$ (الف)  $\sin x$ 

شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}
 \end{aligned}$$

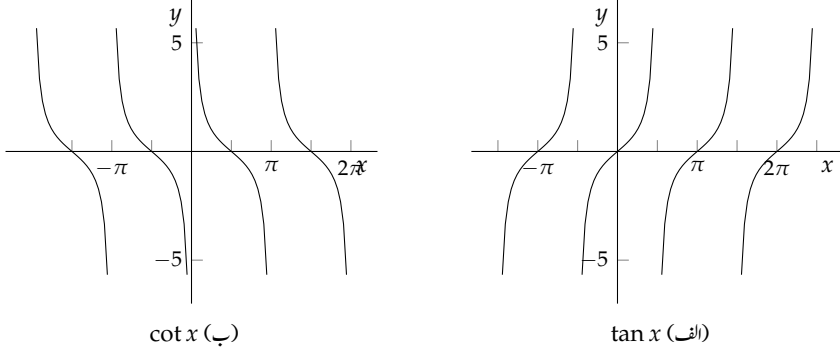
$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

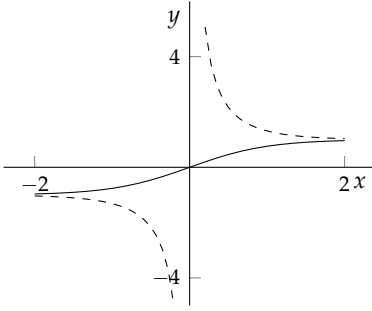
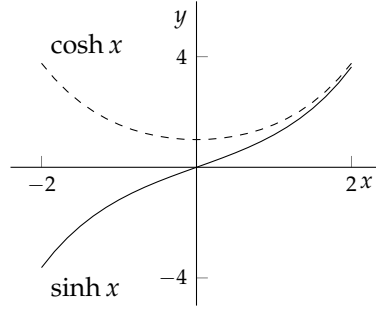
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. ب)$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. ب)$$

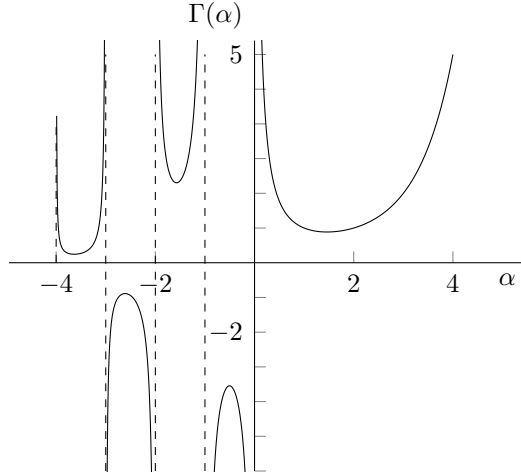
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. ب)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35.ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

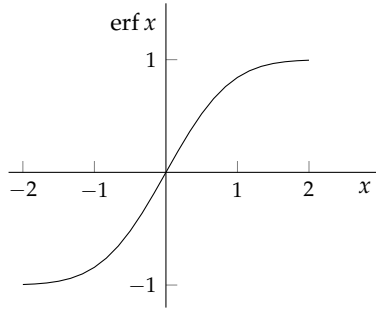
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

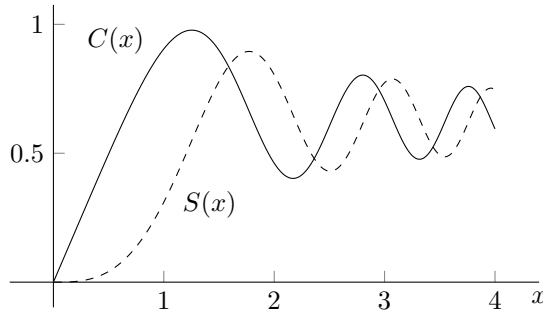
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

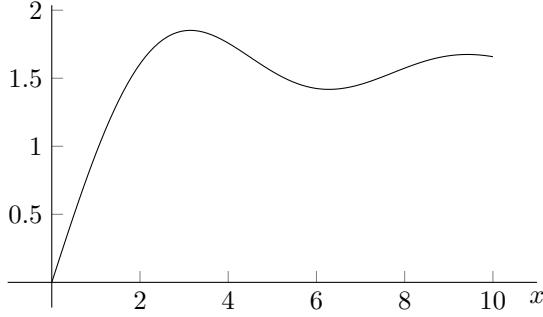
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

