برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 2

درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہٰذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں جبری حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

یک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش[1]، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

[1] oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.1}$$

صورت میں لکھا جا سکے **خطی**[2] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر خطی**[3] کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں y ، y' اور y'' کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔دو درجی مساوات کا پہلا جزو $f(x)y''$ ہونے کی صورت میں مساوات کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی **معیاری صورت**[4] میں لکھیں جہاں y'' پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔یقیناً $r \equiv 0$ [جہاں زیر غور تمام x پر $r(x) = 0$ ہو؛ اس کو **مکمل صفر**[5] پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.2}$$

جو **متجانس** ہے۔اگر $r(x) \not\equiv 0$ ہو تب مساوات 2.1 **غیر متجانس**[6] کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$\left(y''\right)^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

---

[2] linear
[3] nonlinear
[4] standard form
[5] identically zero
[6] nonhomogenous

تفاعل p اور q مساوات 2.2 کے **عددی سر**[7] کہلاتے ہیں۔

دو درجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل $y = h(x)$ کو کھلے وقفہ I پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دو درجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر $h(x)$ ، h' اور h'' پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں y کی جگہ h ، y' کی جگہ h' اور y'' کی جگہ h'' پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

متجانس خطی تفرقی مساوات

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔متجانس مساوات کے حل میں **اصول خطیت**[8] یا **اصول نفاذ**[9] کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.1: اصول نفاذ
تمام x پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں۔

$$y'' + 4y = 0 \tag{2.3}$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔پہلے $y_1 = \cos 2x$ کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔چونکہ $(\cos 2x)'' = -4\cos 2x$ کے برابر ہے لہٰذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$$

---

coefficients[7]
linearity principle[8]
superposition principle[9]

ملتا ہے۔اسی طرح $y_2 = \sin 2x$ کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$$

ملتا ہے۔ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔یوں ہم $\cos 2x$ کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور $\sin 2x$ کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= (2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x)'' + 4(2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x)\\
&= 4(-2.73\cos 2x + 1.25\sin 2x) + 4(2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل y_1 اور y_2 سے نیا حل

$$y_3 = c_1y_1 + c_2y_2, \quad (c_1 \text{ اور } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں}) \tag{2.4}$$

حاصل کیا۔ اس کو y_1 اور y_2 کا **خطی میل**[10] کہتے ہیں۔اس مثال سے ہم مسئلہ خطی میل بیان کرتے ہیں جسے عموماً **اصول خطیت** یا **اصول نفاذ** کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: مسئلہ خطی میل
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات کے دو عدد حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل y_1 اور y_2 پائے جاتے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}
y_1'' + py_1' + qy_1 &= 0\\
y_2'' + y_2' + qy_2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

---

[10] linear combination

ہو گا۔ خطی میل سے نیا حل $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ حاصل کرتے ہیں۔اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} y_3' &= c_1y_1' + c_2y_2' \\ y_3'' &= c_1y_1'' + c_2y_2'' \end{aligned}$$

y_3 ، y_3' اور y_3'' کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + py_3' + qy_3 &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔یوں مساوات کا بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہٰذا ثابت ہوتا ہے کہ y_3 بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل مقدار ہیں۔

حل: y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہٰذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= r \\ y_2'' + py_2' + qy_2 &= r \end{aligned} \tag{2.6}$$

y_3 کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= (c_1 + c_2)r \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔اس سے $(c_1 + c_2)r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ r کے برابر ہے لہٰذا y_3 متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔یوں y_3 متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات
درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں $y = 2 - \cos x$ اور $y = 2 - \sin x$ کو پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔اسی طرح ثابت کریں کہ $3(2 - \cos x)$ یا $-7(2 - \sin x)$ بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں $y = 1$ اور $y = x^3$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی $y = -x^3$ حل ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو -1 سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

ابتدائی قیمت مسائل۔اساس۔عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔درجہ اول سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل c حاصل کرتے ہوئے جبری یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔اسی تصور کو دو درجی سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو درجی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{2.7}$$

K_0 اور K_1 کھلے وقفہ پر نقطہ x_0 پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{2.8}$$

کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔یہاں y_1 اور y_2 مساوات 2.7 کے حل ہیں۔یوں جبری حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ (x_0, K_0) سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر K_1 ہوتی ہے۔

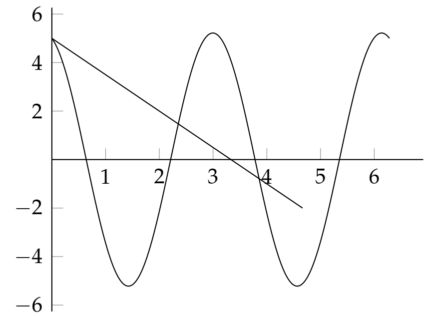
مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل:پہلا قدم: اس مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہٰذا اس کا موزوں عمومی حل

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \tag{2.9}$$

ہو گا۔(موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)



شکل 2.1: مثال 2.3 کا جبری حل۔

دوسرا قدم: جبری حل حاصل کرتے ہیں۔ عمومی حل کا تفرق $y' = -2\sin 2x + 2c_2\cos x$ ہے۔ ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

$$y(0) = c_1\cos 0 + c_2\sin 0 = c_1 = 5$$
$$y'(0) = -2\sin 0 + 2c_2\cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5$$

حاصل ہوتے ہیں للہذا جبری حل

$$y = 5\cos 2x - 1.5\sin 2x$$

ہو گا۔ شکل 2.1 میں جبری حل دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $x = 0$ پر اس کی قیمت $y(0) = 5$ ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس) $y'(0) = 0.5$ ہے۔ مماس x محور کو $x = \frac{5}{3} = 3.33$ پر قطع کرتا ہے۔

درج بالا مثال میں y_1 اور y_2 ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔ آئیں اب دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = k\cos 2x$ لیتے ہوئے

$$y = c_1\cos 2x + c_2k\cos 2x = (c_1 + c_2k)\cos 2x = c_3\cos 2x$$

عمومی حل لکھتے ہیں۔ اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل c_3 پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل y_1 اور y_2 انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

عمومی حل، اساس اور جبری حل کے تعریف
کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔فاصلہ I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کی **اساس**[11] حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا جبری حل مساوات 2.9 میں c_1 اور c_2 کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔ y_1 اور y_2 اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے I پر

$$(a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1 \tag{2.10}$$

ہو، جہاں k اور l اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔(یہاں توجہ رکھیں: a اس صورت b کے مترادف ہے جب $k \neq 0$ ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 اس وقفے پر اس صورت **خطی طور غیر تابع**[12] کہلاتے ہیں جب پورے I پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.11}$$

سے مراد

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے y_1 اور y_2 **خطی طور تابع**[13] کہلاتے ہیں۔اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.11 کو k_1

[11] basis
[12] linearly independent
[13] linearly dependent

سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1=\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔اسی طرح $k_2\neq 0$ کی صورت میں $y_2=\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔اس کے برعکس خطی طور غیر تابع صورت میں ہم مساوات 2.11 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ اس طرح اساس کی قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

اساس کی قدر مختلف تعریف
کھلے وقفے I پر مساوات 2.11 کا خطی طور غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

اگر کسی کھلے وقفے I پر مساوات کے عددی سر p اور q استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کے کا عمومی حل پایا جاتا ہے۔مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے جبری حل حاصل ہو گا۔ وقفہ I پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات کا کوئی نادر[14] حل نہیں پایا جاتا (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور جبری حل
$\cos 2x$ اور $\sin 2x$ تمام x پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات $y''+4y=0$ کے حل کی اساس ہیں۔ایسا اس لئے ہے کہ $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\neq c$ اور $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\neq 0$ ہیں جہاں c مستقل ہے۔اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے جبری حل $y=5\cos 2x-1.5\sin 2x$ حاصل کیا گیا تھا۔

مثال 2.5: پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $y_1=e^{2x}$ اور $y_2=e^{-2x}$ سادہ تفرقی مساوات $y''-4y=0$ کے حل ہیں۔یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y''-4y=0,\quad y(0)=2,\, y'(0)=1$$

[14] singular solution

حل: چونکہ $y_1''-4y_1=(e^{2x})''-4e^{2x}=4e^{2x}-4e^{2x}=0$ اور $y_2''-4y_2=(e^{-2x})''-4e^{-2x}=4e^{2x}-4e^{2x}=0$ ہیں لہٰذا y_1 اور y_2 دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ چونکہ $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}}\neq c$ ہے جہاں c مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں e^{2x} اور e^{-2x} پورے x پر حل کا اساس ہے۔ اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0)=c_1e^0+c_2e^0=c_1+c_2=2,\quad y'=2c_1e^{2x}-2c_2e^{-2x},\quad y'(0)=2c_1-2c_2=1$$

دو عدد ہمزاد مساوات $c_1+c_2=2$ اور $2c_1-2c_2=1$ کو آپس میں حل کرتے ہوئے $c_1=\frac{3}{4}$ اور $c_2=\frac{5}{4}$ ملتے ہیں جس سے جبری حل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y=\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{5}{4}e^{-2x}$$

2.2 ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔درجہ کم کرنا