

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس تبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور نکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجرى ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکملى علم الاحصاء تکمل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمل
787	11.2	خطی تکمل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمل
810	11.4	دوہرہ تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمل
845	11.8	تہرہ تکمل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993 . . . . .	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996 . . . . .	13.8 مستطیل جھلی
1006 . . . . .	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010 . . . . .	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018 . . . . .	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024 . . . . .	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030 . . . . .	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات

1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038 . . . . .	14.1 مخلوط اعداد
1047 . . . . .	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054 . . . . .	14.3 مخلوط سطح میں منحنيات اور خطے
1059 . . . . .	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل

1065	ا اضافی ثبوت
1069	ب مفید معلومات
1069 . . . . .	1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔



کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 14

### مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیلی تفاعل

انجینئری کے کئی مسائل مخلوط تجزیہ سے با آسانی حل ہو پاتے ہیں۔ ان مسئلوں کو دو بڑے گروہوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ پہلی گروہ میں سادہ مسائل شامل ہیں جنہیں حل کرنے کے لئے کالج میں سیکھی گئی مخلوط اعداد کی الجبرا کافی ہے۔ برقی ادوار اور میکانیکی ارتعاش کے کئی مسائل اس نوعیت کے ہیں۔ دوسری گروہ کے لئے مخلوط تحلیلی تفاعل کا نظریہ اور اس میں استعمال کیے جانے والے انتہائی طاقتور اور شائستہ تراکیب تفصیلاً جاننا ضروری ہے۔ نظریہ حرارت، حرکیات سیال اور برقی سکون کے مسائل اس نوعیت کے ہیں۔

اس باب کے علاوہ اگلے کئی ابواب میں مخلوط تحلیلی تفاعل کے نظریہ کی بیشتر حصوں اور ان تفاعل کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں ان تفاعل کی اہمیت درج ذیل تین وجوہات کی بنا ہے۔

(الف) تحلیلی تفاعل کے حقیقی اور خیالی اجزاء، دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل ہوتے ہیں۔ یوں دو ابعادی مخفی قوہ مسائل پر تحلیلی تفاعل کے لئے بنائے گئے تراکیب کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مختلف مسائل میں درپیش کئی پیچیدہ حقیقی اور مخلوط کمالات کو مخلوط مکمل کی تراکیب سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

(پ) انجینئری حساب میں پائے جانے والے غیر بنیادی تفاعل کا بیشتر حصہ تحلیلی تفاعل پر مشتمل ہے۔ مخلوط غیر تابع متغیرات کے لئے ان تفاعل کے مشاہدہ سے تفاعل کی خواص کی مفصل اور گہری سمجھ پیدا ہوتی ہے۔

موجودہ باب میں ہم مخلوط اعداد اور تحلیلی تفاعل اور ان کے عمومی خواص پر غور کریں گے۔ باب کا دوسرا حصہ اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل کے لئے مختص ہے۔

## 14.1 مخلوط اعداد

تاریخی طور پر دیکھا گیا کہ کئی مساوات مثلاً

$$x^2 + 4 = 0, \quad x^2 + 2x + 5 = 0$$

کو کوئی بھی حقیقی عدد مطمئن نہیں کرتا ہے۔ مخلوط اعداد کا آغاز یہیں سے ہوا۔<sup>1</sup>

تعریف: حقیقی اعداد  $x$  اور  $y$  کی مرتب جوڑی  $(x, y)$  کو مخلوط عدد  $z$  کہتے ہیں جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$z = (x, y)$$

ہم  $x$  کو  $z$  کا حقیقی حصہ<sup>3</sup> اور  $y$  کو  $z$  کا خیالی حصہ<sup>4</sup> کہتے ہیں جنہیں ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$x = z \text{ حقیقی}, \quad y = z \text{ خیالی}$$

یوں حقیقی  $(-7, 2) = -7$  اور خیالی  $(-7, 2) = 2i$  ہوں گے۔ مزید دو مخلوط اعداد  $z_1 = (x_1, y_1)$  اور  $z_2 = (x_2, y_2)$  کی برابری کی تعریف ہم یوں کرتے ہیں کہ یہ مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں۔

مخلوط اعداد  $z_1 = (x_1, y_1)$  اور  $z_2 = (x_2, y_2)$  کا مجموعہ درج ذیل قاعدہ دیتا ہے

$$(14.1) \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

جبکہ ان کا حاصل ضرب درج ذیل قاعدہ دے گا۔

$$(14.2) \quad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ان اعمال ریاضی پر مزید بحث آگے کی جائے گی۔

<sup>1</sup> اس مقصد کے لئے مخلوط اعداد سب سے پہلے اطالوی ریاضی دان جرولامو کاردانو [1501-1576] نے استعمال کیے جنہوں نے کعبی مساوات کے حل کا کامیاب دریاخت کیا۔ مخلوط اعداد کی منظم اور عام استعمال کی بنیاد جرمنی کے ریاضی دان یوهان کارل فرڈریش گاوس نے ڈالی۔

<sup>2</sup> complex number

<sup>3</sup> real part

<sup>4</sup> imaginary part

روپ  $z = x + iy$  میں خیالی اعداد کا اظہار  
ایسا مخلوط عدد جس کا خیالی حصہ صفر کی روپ  $(x, 0)$  ہوگی۔ اس طرز کے مخلوط اعداد کے لئے حقیقی اعداد کی طرح

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا  $(x, 0)$  کو حقیقی عدد تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں حقیقی عددی نظام کی توسیعی حالت مخلوط عددی نظام ہے۔ مزید درج ذیل مخلوط عدد

$$i = (0, 1)$$

کو خیالی اکائی<sup>5</sup> کہتے ہیں۔ مساوات 14.2 کے تحت ہر حقیقی  $y$  کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$$

جبکہ مساوات 14.1 کے تحت

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

ہوگا۔ یوں  $(x, 0)$  کے لئے  $x$  اور  $(0, y) = iy$  استعمال کرتے ہوئے

$$z = x + iy$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مخلوط اعداد کو عموماً اسی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ خیالی اکائی  $i$  کی ایک اہم خاصیت

$$i^2 = -1 \quad (14.3)$$

کو مساوات 14.2 سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی:  $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

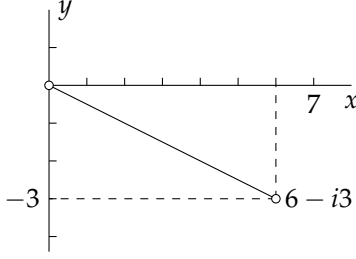
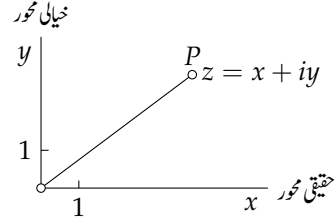
مخلوط سطح

مخلوط اعداد کو سطح پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنا نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ ہم دو عدد آپس میں عمودی محور چنتے ہیں۔ افقی  $x$  محور کو حقیقی محور<sup>6</sup> جبکہ انتضابی  $y$  محور کو خیالی محور<sup>7</sup> تصور کیا جاتا ہے۔ دونوں محوروں پر

imaginary unit<sup>5</sup>

real axis<sup>6</sup>

imaginary axis<sup>7</sup>

(ب) مخلوط سطح پر  $6 - i3$  کا اظہار

(الف) مخلوط سطح

شکل 14.1: مخلوط سطح اور مخلوط سطح پر مخلوط عدد کا اظہار

یکساں اکائی لمبائی استعمال کی جاتی ہے (شکل 14.1-الف)۔ اس کو کارتیسی محدودی نظام کہتے ہیں۔ ہم اب مخلوط عدد  $z = (x, y) = x + iy$  کو اس سطح پر بطور نقطہ P ظاہر کرتے ہیں جس کے محدود  $x$  اور  $y$  ہوں گے۔ ایسی سطح جس پر اس طرح مخلوط اعداد ظاہر کیے جاتے ہیں مخلوط سطح<sup>8</sup> یا نقشہ اغگن<sup>9</sup> کہلاتی<sup>10</sup> ہے۔

"مخلوط سطح میں مخلوط عدد  $z$ " کہنے کی بجائے ہم "مخلوط سطح میں نقطہ  $z$ " کہیں گے۔ اس سے کوئی غلط فہمی پیدا نہیں ہوتی ہے۔

### ریاضی اعمال

ہم اب مخلوط عدد کی روپ  $z = x + iy$  اور مخلوط سطح کو استعمال کرتے ہیں۔

جمع۔ مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ  $z_1 + z_2$  اب

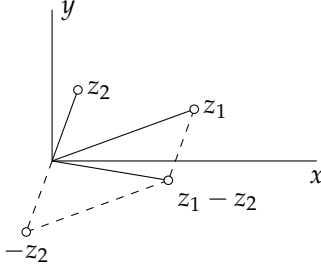
$$(14.4) \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط اعداد کی جمع، میکانیات میں قوتوں کا مجموعہ حاصل کرنے کے متوازی الاضلاع قاعدہ کے مطابق ہے (شکل 14.2-الف)۔

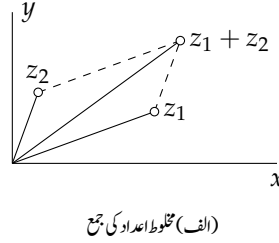
<sup>8</sup> complex plane

<sup>9</sup> Argand diagram

<sup>10</sup> فرانسیسی ریاضی دان ژان فرانسوا غولگنگن [1768-1822]



(ب) مخلوط اعداد کی تفریق



(الف) مخلوط اعداد کی جمع

شکل 14.2: مخلوط اعداد کی جمع اور تفریق

تفریق۔ یہ جمع کا الٹ عمل ہے۔ فرق  $z_1 - z_2$  ایسے مخلوط عدد  $z$  کے برابر ہو گا کہ  $z_1 = z + z_2$  ہو۔ یوں (شکل 14.2-ب) درج ذیل ہو گا۔

$$(14.5) \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

ضرب۔ مساوات 14.2 میں دی گئی ضرب  $z_1 z_2$  کو اب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.6) \quad z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

چونکہ یہ نتیجہ حقیقی اعداد کی حساب کے قوانین اور مساوات 14.3 یعنی  $i^2 = ii = -1$  کی استعمال سے حاصل ہوتا ہے لہذا اس کو یاد رکھنا آسان ہے۔

تقسیم۔ یہ ضرب کا الٹ عمل ہے۔ یوں حاصل تقسیم  $z = \frac{z_1}{z_2}$  ایسا مخلوط عدد  $z = x + iy$  ہو گا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(14.7) \quad z_1 = z z_2 = (x + iy)(x_2 + iy_2) \quad (z_2 \neq 0)$$

ہم  $z_2 \neq 0$  کی صورت میں حاصل تقسیم  $z = x + iy = \frac{z_1}{z_2}$  کی درج ذیل صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(14.8) \quad x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

عملاً مساوات 14.8 کو حاصل کرنے کے لئے ہم  $\frac{z_1}{z_2}$  کی شمار کنندہ اور نسب نما کو  $x_2 - iy_2$  سے ضرب دے کر سادہ صورت حاصل کرتے ہیں یعنی:

$$(14.9) \quad z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال کے طور پر اگر  $z_1 = 3 - i2$  اور  $z_2 = -4 + i$  ہوں تب

$$\frac{3 - i2}{-4 + i} = \frac{(3 - i2)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-12 - i3 + i8 - 2}{16 + 1} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$$

ہو گا جس کی درستگی آپ درج ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$zz_2 = \left(-\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}\right)(-4 + i) = \frac{56}{17} - i\frac{14}{17} - i\frac{20}{17} - \frac{5}{17} = 3 - i2$$

مساوات 14.8 کا ثبوت کچھ یوں ہے۔ مساوات 14.6 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 14.7 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

مخلوط اعداد کی برابری کی تعریف کے مطابق دونوں مخلوط اعداد کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں گے اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$x_1 = x_2x - y_2y$$

$$y_1 = y_2x + x_2y$$

یہ دو دو خطی مساوات کا نظام ہے جس کے نامعلوم متغیرات  $x$  اور  $y$  ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ  $x_2$  اور  $y_2$  بیک وقت صفر نہیں ہیں (جس کو مختصراً  $z \neq 0$  لکھا جاتا ہے) ہمیں مساوات 14.8 میں دیا گیا یکتا حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.1: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم

فرض کریں کہ  $z_1 = 3 - i2$  اور  $z_2 = -4 + i$  ہیں۔ تب

$$z_1 + z_2 = -1 - i, z_1 - z_2 = 7 - i3, z_1z_2 = -10 + i11$$

□

اور جیسے ہم حاصل کر سکے ہیں  $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$  ہو گا۔

ریاضی اعمال کے خواص

حقیقی اعداد کے قواعد سے مخلوط اعداد  $z_1$  اور  $z_2$  کے لئے درج ذیل قواعد حاصل ہوتے ہیں

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \end{aligned} \right\} \text{ (قانون تبادل)} \\
 & \left. \begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \end{aligned} \right\} \text{ قانون تلازم} \\
 & z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \text{ (قانون جزئیتی تقسیم)} \\
 & 0 + z = z + 0 = z \\
 & z + (-z) = (-z) + z = 0 \\
 & z \cdot 1 = z
 \end{aligned}
 \tag{14.10}$$

جہاں  $0 = (0, 0)$  اور  $-z = -x - iy$  ہیں۔

جوڑی دار مخلوط اعداد

فرض کریں کہ  $z = x + iy$  کوئی مخلوط عدد ہے۔ تب  $x - iy$  کو  $z$  کا جوڑی دار مخلوط کہا جائے گا اور  $z$  کے جوڑی دار مخلوط کو  $\bar{z}$  سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

ہوں گا۔ مثلاً  $z = 5 + i2$  کا جوڑی دار مخلوط  $\bar{z} = 5 - i2$  ہے (شکل 14.3)۔ مزید جمع اور تفریق سے

$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = i2y$$

حاصل ہوتے ہیں جو درج ذیل اہم کلیات کا سبب بنتے ہیں۔

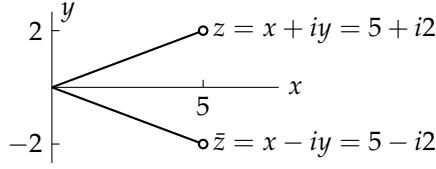
$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = z \text{ حقیقی}, \quad \frac{1}{i2}(z - \bar{z}) = z \text{ خیالی}
 \tag{14.11}$$

حقیقی عدد  $z = x$  کا مخلوط جوڑی دار عدد  $\bar{z} = z$  ہو گا جبکہ  $z = 0 + iy = iy$  کا جوڑی دار مخلوط عدد  $\bar{z} = -z$  ہو گا۔ اس طرح کا عدد جس کا حقیقی حصہ صفر ہو خالص خیالی عدد<sup>11</sup> کہلاتا ہے جو خیالی محور پر کسی نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔

---

pure imaginary number<sup>11</sup>





شکل 14.3: جوڑی دار مختلط اعداد

اس کے علاوہ درج ذیل تعلق بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

$$(14.12) \quad \begin{aligned} \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{(z_1 - z_2)} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{aligned}$$

### سوالات

سوال 14.1: خیالی اکائی کے طاقت درج ذیل ثابت کریں۔

$$(14.13) \quad \begin{aligned} i^2 &= -1, & i^3 &= -i, & i^4 &= 1, & i^5 &= i, \dots \\ \frac{1}{i} &= -i, & \frac{1}{i^2} &= -1, & \frac{1}{i^3} &= i, \dots \end{aligned}$$

فرض کریں کہ  $z_1 = 4 + i3$  اور  $z_2 = 2 - i5$  ہیں۔ سوال 14.2 تا سوال 14.5 کو حل کرتے ہوئے  $x + iy$  روپ میں لکھیں۔

سوال 14.2:  $(z_1 - z_2)^2$   
جواب:  $-60 + i32$

سوال 14.3:  $\frac{z_1}{z_2}$   
جواب:  $-\frac{7}{29} + i\frac{26}{29}$

سوال 14.4:  $\frac{1}{z_1^2}$   
جواب:  $\frac{7}{625} - i\frac{24}{625}$

سوال 14.5:  $\frac{2z_1}{3z_2}$   
 جواب:  $-\frac{14}{87} + i\frac{52}{87}$

سوال 14.6 تا سوال 14.15 کو حل کریں جہاں  $z = x + iy$  ہے۔

سوال 14.6: خیالی  $\frac{1}{1+i}$   
 جواب:  $-\frac{1}{2}$

سوال 14.7: حقیقی  $\frac{1-i}{1+i}$   
 جواب: 0

سوال 14.8: خیالی  $z^2$   
 جواب:  $2xy$

سوال 14.9: حقیقی  $z^3$   
 جواب:  $x^3 - 3xy^2$

سوال 14.10: خیالی  $z^4$   
 جواب:  $4xy(x^2 - y^2)$

سوال 14.11: حقیقی  $\frac{(-1+i)^2}{-5+i4}$   
 جواب:  $-\frac{8}{41}$

سوال 14.12: خیالی  $\frac{3-i7}{-5+i2}$   
 جواب: 1

سوال 14.13: حقیقی  $\frac{3-i7}{-5+i2}$   
 جواب: -1

سوال 14.14: خیالی  $\frac{z}{\bar{z}}$   
 جواب:  $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

سوال 14.15: حقیقی  $\frac{z}{\bar{z}}$   
 جواب:  $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

سوال 14.16: قانون تبادل ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.17: قانون تلازم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.18: قانون جزئیت تقسیم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.19: اگر دو مخلوط اعداد کا حاصل ضرب صفر کے برابر ہو تب ثابت کریں کہ ان میں سے کم از کم ایک مخلوط عدد صفر ہو گا۔

سوال 14.20 تا سوال 14.27 میں ثبوت پیش درکار ہیں۔

سوال 14.20: کسی بھی عدد کے جوڑی دار مخلوط کا جوڑی دار مخلوط اس عدد کے برابر ہو گا۔

$$\overline{iz} = -i\bar{z} \quad \text{سوال 14.21}$$

سوال 14.22:  $z$  صرف اور صرف اس صورت حقیقی ہو گا جب  $\bar{z} = z$  ہو۔

سوال 14.23:  $z$  صرف اور صرف اس صورت خالص خیالی ہو گا جب  $\bar{z} = -z$  ہو۔

سوال 14.24:  $z$  صرف اور صرف اس صورت حقیقی یا خالص خیالی ہو گا جب  $(\bar{z})^2 = z^2$  ہو۔

سوال 14.25: مساوات 14.12 ثابت کریں۔

سوال 14.26: حقیقی  $z = iz$  خیالی، خیالی  $-z = iz$  حقیقی

سوال 14.27: حقیقی  $-z = i\bar{z}$  خیالی، خیالی  $-z = i\bar{z}$  حقیقی

## 14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات

ہم مخلوط سطح میں درج ذیل قطبی محدود  $r$ ،  $\theta$  متعارف کرتے ہیں۔

$$(14.14) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

یوں کسی بھی مخلوط عدد  $z = x + iy \neq 0$  کو

$$(14.15) \quad z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

لکھا جاسکتا ہے جو مخلوط عدد کی قطبی روپ<sup>12</sup> یا تکونیاتی روپ<sup>13</sup> کہلاتی ہے۔  $r$  کو مخلوط عدد  $z$  کی حتمی قیمت<sup>14</sup> یا معیار<sup>15</sup> کہتے ہیں جسے  $|z|$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا (شکل 14.4-الف)۔

$$(14.16) \quad |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\geq 0)$$

مثبت  $x$  محور سے لکیر  $MN$  تک زاویہ کو  $z$  کی دلیل<sup>16</sup> کہتے ہیں جس کو  $\angle$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ چلتے ہوئے زاویہ بڑھتا ہے۔  $z$  کا زاویہ درج ذیل ہوگا۔

$$(14.17) \quad \angle z = \theta = \sin^{-1} \frac{y}{r} = \cos^{-1} \frac{x}{r} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

دھیان رہے کہ  $z = 0$  کے لئے زاویہ  $\theta$  غیر معین ہے۔ اسی لئے اوپر شرط  $z \neq 0$  لاگو کی گئی ہے۔

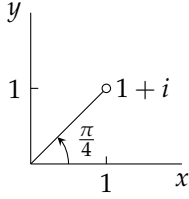
جیومیٹریائی طور پر مبدا  $M$  سے نقطہ  $z$  تک فاصلہ  $|z|$  ہے (شکل 14.4-الف)۔ یوں

$$|z_1| > |z_2|$$

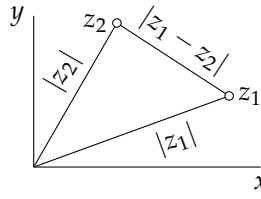
کا مطلب ہے کہ مبدا سے  $z_1$  کا فاصلہ، مبدا سے  $z_2$  کے فاصلے سے زیادہ ہے اور  $|z_1 - z_2|$  سے مراد  $z_1$  اور  $z_2$  کے درمیان فاصلہ ہے (شکل 14.4-ب)۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی محور سے ہٹ کر مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات  $z_1 < z_2$  یا  $z_1 \geq z_2$  کوئی معنی نہیں رکھتی ہیں۔

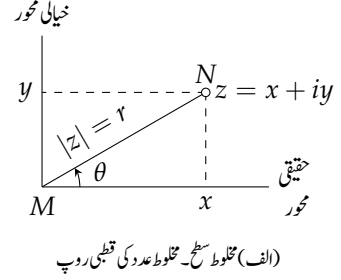
polar form<sup>12</sup>  
trigonometric form<sup>13</sup>  
absolute value<sup>14</sup>  
modulus<sup>15</sup>  
argument<sup>16</sup>



(پ) صدر زاویہ (مثال 14.2)



(ب) دو نقطوں کے مابین فاصلہ



(الف) مخلوط سطح۔ مخلوط عدد کی قطبی روپ

شکل 14.4: مخلوط سطح اور اس پر مخلوط نقطے۔

مخلوط عدد کے زاویہ  $\theta$  کی وہ قیمت جو وقفہ

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

میں پائی جاتی ہو کہ  $z$  کے زاویے کی صدر قیمت<sup>17</sup> کہتے ہیں جس کے ساتھ  $\mp n\pi$  جمع کرنے سے  $z$  کے زاویے کی دیگر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جہاں  $n = 0, 1, 2, \dots$  ہے۔

مثال 14.2: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت  
فرض کریں کہ  $z = 1 + i$  ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \angle z = \frac{\pi}{4} \mp 2n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

□

$z$  کے زاویہ کی صدر قیمت  $\frac{\pi}{4}$  ہے (شکل 14.4-پ)۔

مثال 14.3: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت

فرض کریں کہ  $z = -2 + i2\sqrt{3}$  ہے تب  $z = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$  ہو گا۔  $z$  کی حتمی قیمت  
□  $|z| = 4$  اور اس کا صدر زاویہ  $\frac{2\pi}{3}$  ہو گا۔

مخلوط اعداد کی ضرب یا تقسیم میں مخلوط اعداد کی قطبی روپ نہایت مفید ثابت ہوتی ہے۔ فرض کریں کہ

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{اور} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

ہیں۔ مساوات 14.6 کے تحت

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)_i (\sin \theta_1 \cos \theta_2) + \cos \theta_1 \sin \theta_2]$$

یعنی

$$(14.18) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتائج

$$(14.19) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

اور

$$(14.20) \quad \angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2 \quad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح تقسیم کی تعریف سے

$$(14.21) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

اور

$$(14.22) \quad \angle \frac{z_1}{z_2} = \angle z_1 - \angle z_2 \quad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 14.4: کلیات ڈی مویرے ور  
مساوات 14.19 اور مساوات 14.20 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$(14.23) \quad z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

جس سے کلیہ ڈی مویرے ور<sup>18</sup>

$$(14.24) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

□

حاصل ہوتا ہے۔

## عدم مساوات

کسی بھی مخلوط عدد کے لئے درج ذیل تکنیکی عدم مساوات<sup>19</sup> (شکل 14.5) درست ہوگی

$$(14.25) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔ نقطہ 0،  $z_1$  اور  $z_2$  شکل 14.5 میں تینوں کے کونے ہیں جس کے اطراف کی لمبائی  $|z_1|$ ،  $|z_2|$  اور  $|z_1 + z_2|$  ہے۔ اب تینوں کا کوئی ایک طرف باقی دو کی مجموعی لمبائی سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے لہذا درج بالا عدم مساوات ثابت ہوتا ہے جس کا باضابطہ ثبوت آپ پر چھوڑا جاتا ہے (سوال 14.48)۔

مساوات 14.25 سے ہم زیادہ تعداد کی مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات

$$(14.26) \quad |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

اخذ کر سکتے ہیں، یعنی مجموعے کی حتمی قیمت تمام ارکان کی علیحدہ علیحدہ حتمی قیمتوں کے مجموعہ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے۔

کسی بھی  $z = x + iy$  کے لئے

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم عدم مساوات

$$(14.27) \quad \left| \operatorname{Re}(z) \right| \leq |z|, \quad \left| \operatorname{Im}(z) \right| \leq |z|$$

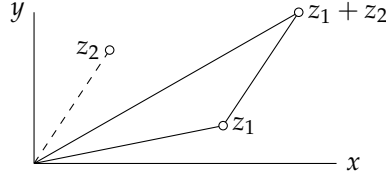
حاصل ہوتی ہیں۔

## سوالات

سوال 14.28 تا سوال 14.34 کو حل کریں جہاں  $z = x + iy$  ہے۔

<sup>19</sup> triangle inequality

14.2. مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات



شکل 14.5: تکونی عدم مساوات

سوال 14.28:  $|1 - i|^2$   
جواب: 2

سوال 14.29:  $|-i7|$   
جواب: 7

سوال 14.30:  $|\cos \theta + i \sin \theta|$   
جواب: 1

سوال 14.31:  $\left| \frac{2+i5}{5-i2} \right|$   
جواب: 1

سوال 14.32:  $\left| \frac{z+1}{z-1} \right|$   
جواب:  $\sqrt{\frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}}$

سوال 14.33:  $\left| \frac{(-2+i3)^2}{(3+i2)^2} \right|$   
جواب: 1

سوال 14.34:  $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right|$   
جواب: 1

سوال 14.35 تا سوال 14.40 میں دلیل کی صدر قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.35: -9  
جواب:  $\pi$



سوال 14.36: 9  
جواب: 0

سوال 14.37:  $i5$   
جواب:  $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.38:  $5 - i5$   
جواب:  $-\frac{\pi}{4}$

سوال 14.39:  $-5 - i5$   
جواب:  $-\frac{3\pi}{4}$

سوال 14.40:  $-i3$   
جواب:  $-\frac{\pi}{2}$

سوال 14.41 تا سوال 14.44 میں دیے گئے مخلوط عدد کو قطبی روپ میں لکھیں۔

سوال 14.41:  $2 + i2$   
جواب:  $2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

سوال 14.42:  $-6$   
جواب:  $6 \cos \pi$

سوال 14.43:  $-i8$   
جواب:  $8 \sin(-\frac{\pi}{2})$

سوال 14.44:  $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$   
جواب:  $\frac{1}{2}[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]$

سوال 14.45: تکنونی عدم مساوات کی تصدیق  $z_1 = -1 - i2$  اور  $z_2 = 3 - i2$  کے لئے کریں۔  
جواب:  $|z_1| = \sqrt{5} \approx 2.236$ ,  $|z_2| = \sqrt{13} \approx 3.606$ ,  $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \approx 4.472$   
لہذا  $4.472 < 2.236 + 3.606$  ہے۔

سوال 14.46: تکنونی عدم مساوات کی تصدیق  $z_1 = 1 + i$  اور  $z_2 = i4$  کے لئے کریں۔

سوال 14.47: تکونی عدم مساوات میں برابر کی علامت کس صورت استعمال ہوگی۔  
جواب: جب مبدا اور دیے گئے دو مخلوط اعداد تکون کی بجائے سیدھی لکیر بناتے ہوں۔

سوال 14.48: تکونی عدم مساوات کا ریاضی ثبوت پیش کریں۔

سوال 14.49: تکونی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے  $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$  ثابت کریں۔

سوال 14.50: ثابت کریں کہ  $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$  ہو گا۔ اعدادی مثال پیش کریں۔

سوال 14.51: ثابت کریں کہ  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$  ہو گا۔

سوال 14.52:  $z = (5 + i4)^2$  کے لئے مساوات 14.27 کی تصدیق کریں۔

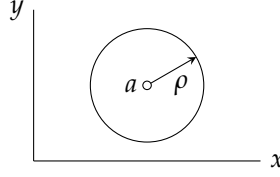
سوال 14.53:  $i$  کے ساتھ ضرب

عمومی مخلوط عدد  $z = x + iy$  کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔  $z$  کو  $i$  سے ضرب دینے سے  $z_1 = -y + ix$  حاصل ہوتا ہے۔ اس کو بھی اسی مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔  $z$  سے  $z_1$  تک زاویہ کیا ہو گا؟ جواب:  $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.54:  $i$  کے ساتھ ضرب

ثابت کریں کہ کسی بھی مخلوط عدد کو  $i$  سے ضرب دینا مخلوط سطح پر اس نقطے کو گھڑی کی الٹ رخ  $\frac{\pi}{2}$  زاویے سے گمانے کے مترادف ہے۔

سوال 14.55: قطبی روپ استعمال کرتے ہوئے دو مخلوط اعداد کے حاصل ضرب مثلاً  $(1 + i)(1 + 2i)$  کا جیومیٹریائی طریقہ دریافت کریں۔



شکل 14.6: مخلوط سطح میں دائرہ

### 14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے

مخلوط سطح میں منحنیات اور خطوں کی ضرورت ہمیں بار بار ہو گی۔ اس لئے چند اہم منحنیات اور خطوں اور ان کی مساواتوں اور عدم مساواتوں پر غور کرتے ہیں۔

چونکہ دو اعداد  $z$  اور  $a$  کے درمیان فاصلہ  $|z - a|$  ہے لہذا اس  $\rho$  کا ایسا دائرہ  $C$  جس کا مرکز نقطہ  $a$  پر ہو (شکل 14.6) کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.28) \quad |z - a| = \rho$$

نتیجتاً عدم مساوات

$$(14.29) \quad |z - a| < \rho$$

دائرہ  $C$  کے اندر کسی بھی نقطہ کے لئے درست ہے۔ یوں مساوات 14.29 دائرے کی اندرون کو ظاہر کرتی ہے۔ ایسے دائری قرص<sup>20</sup> کو کھلا قرص<sup>21</sup> کہتے ہیں جبکہ خطہ

$$(14.30) \quad |z - a| \leq \rho$$

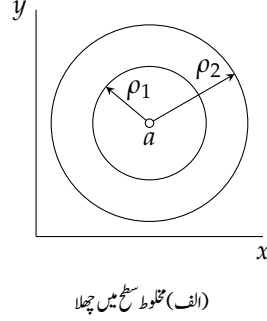
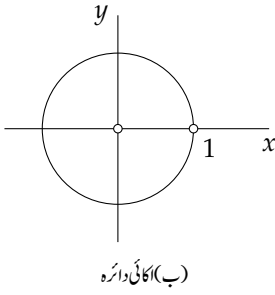
کو بند قرص<sup>22</sup> کہتے ہیں جس میں دائرے کی اندرون کے ساتھ دائرہ بھی شامل ہے۔ کھلا قرص (مساوات 14.29) کو نقطہ  $a$  کی پڑوس<sup>23</sup> بھی کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ  $a$  کی ایسی لامحدود تعداد کے پڑوس پائے جاتے ہیں جن کا  $\rho (> 0)$  آپس میں مختلف ہو گا۔

circular disk<sup>20</sup>

open disk<sup>21</sup>

closed disk<sup>22</sup>

neighbourhood<sup>23</sup>



شکل 14.7: مخلوط سطح میں چھلا اور اکائی دائرہ

اسی طرح عدم مساوات

$$(14.31) \quad |z - a| > \rho$$

دائرے کی بیرون کو ظاہر کرتی ہے۔ مزید رداں  $\rho_1$  اور  $\rho_2$  کے دو ہم مرکز دائروں (شکل 14.7-الف) کے درمیان خطے کو

$$(14.32) \quad \rho_1 < |z - a| < \rho_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں نقطہ  $a$  دائروں کا مرکز ہے۔ ایسا خطہ کھلا چھلا<sup>24</sup> کہلاتا ہے۔

درج ذیل مساوات اکائی دائرہ<sup>25</sup> (شکل 14.7-ب) کو ظاہر کرتی ہے۔ اکائی دائرے کا رداں اکائی اور مبدا اس کا مرکز ہو گا۔ اکائی دائرہ مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 14.5: دائری قرص

مخلوط سطح میں  $|z - 2 + i4| \leq 9$  کی خطہ کو ظاہر کرتی ہے۔

حل: یہ عدم مساوات ان تمام  $z$  کو ظاہر کرتی ہے جن کا نقطہ  $2 - i4$  سے فاصلہ، 9 سے زیادہ نہیں ہے۔ یوں یہ اس بند قرص کو ظاہر کرتی ہے جس کا مرکز  $2 - i4$  ہے۔

□

مثال 14.6: اکائی دائرہ اور اکائی قرص

درج ذیل کن خطوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

open annulus<sup>24</sup>  
unit circle<sup>25</sup>

$$(الف) \quad |z| < 1 \quad (ب) \quad |z| \leq 1 \quad (پ) \quad |z| > 1$$

حل: (الف) اکائی دائرے کی اندرون یعنی اکائی کھلا دائرہ۔  
 (ب) اکائی دائرے کی اندرون اور دائرہ یعنی اکائی بند دائرہ۔  
 (پ) اکائی دائرے کی بیرون۔

□

یہ ضروری ہے کہ طلبہ و طالبات مخلوط سطح پر منحنیات اور خطوں کی اظہار کو اچھی طرح سمجھیں۔ اس لئے موجودہ حصے کی سوالات کو زیادہ غور سے حل کریں تاکہ آگے آپ کی مشکل کچھ آسان ہو سکے۔

ہم اب چند اصطلاحات کی تعریف بیان کرتے ہیں جو آگے استعمال کی جائیں گی۔

مخلوط سطح میں نقطوں کے سلسلہ<sup>26</sup> سے مراد محدود یا لامحدود تعداد کی نقطے ہیں۔ مثال کے طور پر دو درجی الجبرائی مساوات کے حل، کسی لکیر پر نقطوں کا سلسلہ، اور کسی دائرے کے اندر نقطوں کا سلسلہ۔

اگر سلسلہ  $S$  کے ہر نقطے کا ایسا پڑوس ہو جس کا ہر نقطہ بھی  $S$  کا حصہ ہو تب  $S$  کھلا<sup>27</sup> سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی دائرے یا کعب کے اندرون تمام نقطے مل کر کھلا سلسلہ بناتے ہیں۔ اسی طرح دایاں آدھی سطح  $x > 0$  کے تمام نقطے کھلا سلسلہ ہیں۔ کسی دائرے کے اندر اور دائرے پر نقطے کھلا سلسلہ نہیں بناتے ہیں چونکہ دائرہ پر نقطوں کا ایسا کوئی پڑوس نہیں پایا جاتا ہے جس کے تمام نقطے اس سلسلے کا حصہ ہوں۔

مخلوط سطح میں ایسا سلسلہ جس کا متمم کھلا سلسلہ ہو، بند سلسلہ<sup>28</sup> ہو گا۔ مخلوط سطح میں سلسلہ  $S$  کا متمم<sup>29</sup>، مخلوط سطح میں ان تمام نقطوں کا سلسلہ ہو گا جو  $S$  کا حصہ نہ ہوں۔ مثال کے طور پر اکائی دائرے کے اندر اور اکائی دائرے پر نقطوں کا سلسلہ بند سلسلہ ہے۔

ایک سلسلہ جس کے تمام نقطے حسب ضرورت بڑے رداس کی دائرے میں پائے جاتے ہوں محدود<sup>30</sup> سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی کعب کے اندر نقطے محدود سلسلہ ہیں جبکہ کسی لکیر پر نقطے محدود سلسلہ نہیں ہیں۔

set of points<sup>26</sup>  
 open<sup>27</sup>  
 closed<sup>28</sup>  
 complement<sup>29</sup>  
 bounded<sup>30</sup>

ایک سلسلہ  $S$  جس کے ہر دو نقطوں کو محدود تعداد کے ایسے قطعات سے آپس میں ملایا جاسکتا ہو جن کا ہر نقطہ  $S$  کا حصہ ہو، جڑا ہوا<sup>31</sup> سلسلہ کہلاتا ہے۔ کھلا جڑا ہوا سلسلہ کو دائرہ کار<sup>32</sup> کہتے ہیں۔ یوں دائرے کی اندرون ایک دائرہ کار ہے۔

سلسلہ  $S$  کی سرحدی نقطہ<sup>33</sup> سے مراد ایسا نقطہ ہے جس کی پڑوس میں کچھ ایسے نقطے جو  $S$  کا حصہ ہوں اور کچھ ایسے نقطے جو  $S$  کا حصہ نہ ہوں دونوں شامل ہوں۔ مثلاً چھلا کی سرحدی نقاط میں چھلا کے دونوں اطراف کے دائروں کے نقطے شامل ہیں۔ ظاہر ہے کہ کھلا سلسلہ کا کوئی سرحدی نقطہ بھی کھلا سلسلہ کا حصہ نہیں ہوگا جبکہ بند سلسلہ کا ہر سرحدی نقطہ بند سلسلہ کا حصہ ہوگا۔

خطہ<sup>34</sup> سے مراد ایسا سلسلہ ہے جس میں دائرہ کار اور دائرہ کار کے چند یا تمام سرحدی نقطے شامل ہوں۔

### سوالات

سوال 14.56 تا سوال 14.68 میں منحنی یا خطہ دریافت کرتے ہوئے انہیں ترسیم کر دکھائیں۔

سوال 14.56:  $z \geq -1$  خیالی  
جواب:  $y \geq -1$

سوال 14.57:  $z^2 \leq 7$  خیالی  
جواب:  $2xy \leq 7$

سوال 14.58:  $z^2 \geq 1$  حقیقی  
جواب: قطع زائد  $x^2 - y^2 = 1$  کے بائیں بازو کی بائیں طرف اور اس کے دائیں بازو کی دائیں طرف کے خطے۔

سوال 14.59:  $z < \frac{\pi}{4}$  دلیل  
جواب:  $y < 0$  کا پورا خطہ ماسوائے منفی  $y$  محور اور مبدا سے  $\frac{\pi}{4}$  زاویہ پر لکیر کے نیچے خطے۔

connected<sup>31</sup>  
domain<sup>32</sup>  
boundary point<sup>33</sup>  
region<sup>34</sup>

سوال 14.60:  $\left| \frac{z}{4} \right| < \frac{\pi}{4}$  دلیل

جواب:  $y = x$  اور  $y = -x$  کے درمیان وہ پٹی جس کا مثبت  $x$  محور حصہ ہے۔

سوال 14.61:  $-\pi < z < \pi$  حقیقی کے درمیان انتصابی پٹی۔  
جواب:  $y = \pi$  اور  $y = -\pi$  کے درمیان انتصابی پٹی۔

سوال 14.62:  $\left| \frac{1}{z} \right| > 1$

جواب: کھلا اکائی دائرہ۔

سوال 14.63:  $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 2$   
جواب:  $(x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

سوال 14.64:  $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 1$   
جواب:  $y = 0$

سوال 14.65:  $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$   
جواب:  $x = 0$

سوال 14.66:  $\frac{z+1}{z-1} < 2$  خیالی  
جواب: ایسے اکائی دائرے کی بیرون جس کا مرکز نقطہ  $(1, -1)$  پر ہو۔

سوال 14.67:  $\frac{1}{z} > 1$  حقیقی  
جواب: نقطہ  $(\frac{1}{2}, 0)$  پر رداس  $\frac{1}{2}$  کے دائرے کی اندرون۔

سوال 14.68:  $\frac{2z+1}{4z-4} \leq 1$  خیالی  
جواب: نقطہ  $(1, -\frac{3}{8})$  پر رداس  $\frac{3}{8}$  کے دائرے کی بیرون بشمول دائرہ۔

سوال 14.69:  $z_1$  اور  $z_2$  مخلوط سطح میں دو نقطے ہیں جبکہ  $\alpha$  اور  $\beta$  حقیقی غیر منفی اعداد ہیں جہاں  $\alpha + \beta = 1$  ہے۔ ایسی صورت میں  $\alpha z_1 + \beta z_2$  کی ترسیم کھینچیں۔  
جواب:  $z_1$  اور  $z_2$  کو ملانے والا سیدھا قطع۔

سوال 14.70: قطع زائد  $x^2 - y^2 = 1$  کو  $z^2 + \bar{z}^2 = 2$  لکھیں۔

سوال 14.71: مساوات  $|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$  ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔ اس حقیقت کی جیومیٹریائی دلیل دیں۔ اس حقیقت کو الجبرا کی مدد سے حاصل کریں۔

## 14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیلی تفاعل

مخلوط تجزیہ کی چند بنیادی تصورات، مثلاً مخلوط متغیرات کے تفاعل اور ایسے تفاعل کے حد اور تفرقات، کو اب پیش کرتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ تصورات علم الاحصاء کی تصورات کی طرح ہیں۔ اس کے بعد ہم مخلوط تحلیلی تفاعل کی تعریف پیش کریں گے۔ یہ تصورات مخلوط تجزیہ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے مخلوط متغیرہ کے تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ  $S$  مخلوط اعداد کا کوئی سلسلہ ہے۔  $S$  پر معین تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو  $S$  میں ہر  $z$  کا مطابقتی یکتا<sup>35</sup> مخلوط عدد  $w$  دیتا ہو۔ تب ہم

$$w = f(z)$$

یا  $w = g(z)$ ، وغیرہ، یا صرف  $w(z)$  لکھتے ہیں۔ یہاں  $z$  مخلوط متغیر<sup>36</sup> کہلاتا ہے جس کی قیمت  $S$  کا کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ سلسلہ  $S$  کو  $f(z)$  کی تعریف کا دائرہ کار<sup>37</sup> کہتے ہیں۔ ان مخلوط اعداد کا سلسلہ جو  $S$  میں  $z$  کی تبدیلی سے  $w = f(z)$  اختیار کرتا ہو کو تفاعل  $w = f(z)$  کی قیمتوں کا حلقہ کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ  $u$  اور  $v$  تفاعل  $w$  کے بالترتیب حقیقی اور خیالی جزو ہیں۔ اب چونکہ  $w$  متغیر  $z = x + iy$  کے تابع ہے لہذا  $u$  اور  $v$  بھی  $x$  اور  $y$  کے تابع ہوں گے۔ یوں ہم

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

لکھ سکتے ہیں جس کے تحت مخلوط تفاعل  $f(z)$  درحقیقت دو حقیقی تفاعل  $u$  اور  $v$  کے مترادف ہے جو از خود دو حقیقی متغیرات  $x$  اور  $y$  کے تابع ہیں۔

مثال 14.7: مخلوط متغیر کا تفاعل  
فرض کریں کہ

$$w = f(z) = z^2 + 3z$$

<sup>35</sup> یوں عام تفاعل کی طرح مخلوط تفاعل  $f(z)$  بھی ہر  $z$  کا صرف اور صرف ایک مطابقتی قیمت دے گا۔

<sup>36</sup> complex variable

<sup>37</sup> اگرچہ  $S$  بعض اوقات حصہ 14.3 میں دائرہ کار کی تعریف (یعنی کھلا اور جڑا ہوا سلسلہ) پر پورا نہیں اترتا، اس کے باوجود یہ دائرہ کار کہلاتا ہے۔



ہے۔ تب

$$u(x, y) = f(z) \text{ حقیقی} = x^2 - y^2 + 3x \quad \text{اور} \quad v(x, y) = f(z) \text{ خیالی} = 2xy + 3y$$

ہوں گے۔ یوں نقطہ  $z = x + iy = 1 + i3$  پر اس تفاعل کی قیمت

$$(1 + i3)^2 + 3(1 + i3) = -5 + i15$$

ہو گی لہذا ہم

$$f(1 + i3) = -5 + i15, \quad u(1, 3) = -5, \quad v(1, 3) = 15$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح  $f(1 + i) = 3 + i5$  ہو گا، وغیرہ۔ ظاہر ہے کہ یہ تفاعل تمام  $z$  کے لئے معین ہے۔ □

مثال 14.8: مخلوط متغیر کا تفاعل

تفاعل  $f(z) = 3\bar{z} = 3x - i3y$  کا نقطہ  $z = 2 + i4$  پر قیمت دریافت کریں۔

حل: چونکہ  $x = 2$  اور  $y = 4$  ہیں لہذا  $f(2 + i4) = 6 - i12$  ہو گا۔ □

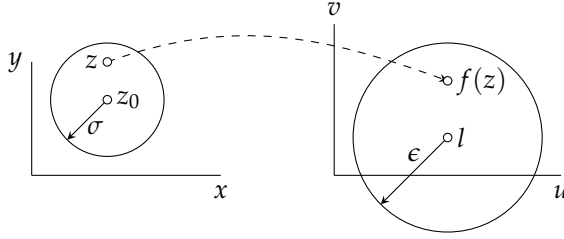
اگر تفاعل  $f(z)$  نقطہ  $z_0$  کی پڑوس میں معین ہو [جبکہ عین  $z_0$  پر  $f(z)$  غیر معین ہو سکتا ہے] اور ہم ایسا مثبت حقیقی عدد  $\sigma$  دریافت کر سکتے ہیں کہ ہر مثبت حقیقی عدد  $\epsilon$  کے لئے، جہاں  $\epsilon$  جتنا بھی چھوٹا (لیکن غیر صفر) کیوں نہ ہو، تمام  $z \neq z_0$  کے لئے قرص  $|z - z_0| < \sigma$  میں

$$|f(z) - l| < \epsilon \quad (14.33)$$

ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ  $z$  کا نقطہ  $z_0$  کے قریب تر ہونے سے  $f(z)$  کا حد  $l$  ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ  $z$  کو  $z_0$  کے قریب کرتے ہوئے ہم  $f(z)$  کی قیمت جتنی چاہیں  $l$  کے قریب کر سکتے ہیں (شکل 14.8)۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \quad (14.34)$$

یہاں دھیان رہے کہ حد کی اس تعریف کے تحت ہم مخلوط سطح میں  $z_0$  تک کسی بھی سمت سے پہنچ سکتے ہیں۔ حقیقی علم الاحصاء میں حد کی تعریف سے موجودہ حد کی تعریف زیادہ شرائط پر پورا اترتا ہے۔



شکل 14.8: حد

اگر حد موجود ہو، تب یہ حد کیسا ہو گا۔

نقطہ  $z = z_0$  پر تفاعل  $f(z)$  اس صورت استمراری<sup>39</sup> ہو گا اگر  $f(z_0)$  معین ہو اور

$$(14.35) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ہو۔ یاد رہے کہ تفاعل کی حد کی تعریف سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ تفاعل  $f(z)$  نقطہ  $z_0$  کے کسی پڑوس میں معین ہو گا۔

تفاعل  $f(z)$  اس صورت کسی دائرہ کار میں استمراری ہو گا جب اس دائرہ کار کے ہر نقطہ پر  $f(z)$  استمراری ہو۔

تفاعل  $f(z)$  نقطہ  $z = z_0$  پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب حد

$$(14.36) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

موجود ہو۔ تب اس حد کو نقطہ  $z = z_0$  پر تفاعل  $f(z)$  کا تفرق<sup>40</sup> کہتے ہیں۔

مساوات 14.36 میں  $z_0 + \Delta z = z$  پر کرتے ہوئے  $\Delta z = z - z_0$  ہو گا لہذا ہم درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$(14.37) \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

continuous<sup>39</sup>  
derivative<sup>40</sup>

یاد رہے کہ حد کی تعریف سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ کم از کم نقطہ  $z_0$  کی پڑوس میں تفاعل  $f(z)$  معین ہے۔ ساتھ ہی ساتھ  $z_0$  تک کسی بھی سمت سے پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔ یوں  $z_0$  پر قابل تفرق ہونے کا مطلب ہے کہ  $z_0$  تک جس رخ سے بھی پہنچنے کی کوشش کی جائے مساوات 14.37 میں دی گئی حاصل تقسیم کسی ایک ہی قیمت تک پہنچنے کی کوشش کرے گی۔ یہ حقیقت بعد میں نہایت اہم ثابت ہو گا۔

حد کی تعریف کے تحت مساوات 14.37 کہتی ہے کہ ایسا مخلوط تفاعل  $f'(z)$  پایا جاتا ہے جس کے لئے، کسی بھی  $\epsilon > 0$  کے لئے ہم ایسا  $\sigma > 0$  دریافت کر سکتے ہیں کہ،  $f'(z)$  درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(14.38) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{جب} \quad |z - z_0| < \sigma$$

اگر  $z_0$  پر  $f(z)$  قابل تفرق ہو تب  $z_0$  پر  $f(z)$  استمراری ہو گا۔

مثال 14.9: قابل تفرق۔ تفرق

تفاعل  $f(z) = z^2$  تمام  $z$  کے لئے قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق  $f'(z) = 2z$  ہے جس کو یوں

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z + \Delta z = 2z$$

□

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

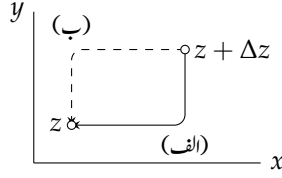
حقیقی تفرقات کے تمام اصول مثلاً مستقل کی تفرق،  $z^n$  کی تفرق جہاں  $n$  عددی صحیح ہے، قابل تفرق تفاعل کا مجموعہ، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور تفاعل کے تفاعل کی تفرق کا زنجیری اصول مخلوط تفرقات کے لئے بھی درست ہیں۔

ان کے ثبوت تقریباً ہو بہو اسی طرح ہیں۔

مثال 14.10:  $\bar{z}$  قابل تفرق نہیں ہے

آپ دیکھیں گے کہ کئی انتہائی سادہ تفاعل کا کسی بھی نقطے پر تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ تفاعل  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  ایسا ہی ایک تفاعل ہے۔ یقیناً  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  لیتے ہوئے ہم اس تفاعل کی تفرق کو

$$(14.39) \quad \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{[(x + \Delta x) - i(y + \Delta y)] - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$



شکل 14.9: راہ (مثال 14.10)

لکھ سکتے ہیں جو  $\Delta y = 0$  کی صورت میں  $+1$  جبکہ  $\Delta x = 0$  کی صورت میں  $-1$  دیتا ہے۔ یوں راہ-الف پر چلتے ہوئے مساوات 14.39 کی قیمت  $+1$  تک پہنچتی ہے جبکہ راہ-ب پر چلتے ہوئے اس کی قیمت  $-1$  تک پہنچتی ہے (شکل 14.9)۔ تعریف کے تحت  $\Delta z \rightarrow 0$  کرتے ہوئے مساوات 14.39 کا کوئی حد موجود نہیں ہے۔ یہ مثال حیرت کن ہے جو اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ مخلوط تفاضل کی تفرق پیچیدہ عمل ہے۔ □

اب ہم اپنے اصل مضمون پر آتے ہیں یعنی:

تعریف: (تحلیلیت)

دائرہ کار  $D$  میں تفاضل  $f(z)$  اس صورت تحلیلی ہو گا جب پوری  $D$  میں ہر نقطے پر  $f$  معین اور قابل تفرق ہو۔ تفاضل  $f(z)$  دائرہ کار  $D$  میں نقطہ  $z = z_0$  پر تحلیلی ہو گا اگر  $z_0$  کی پڑوس (حصہ 14.3) میں  $f(z)$  تحلیلی ہو۔



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□





## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### 1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

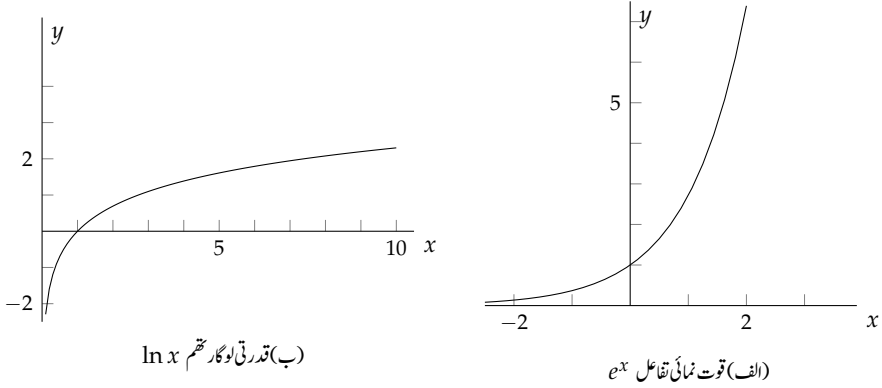
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

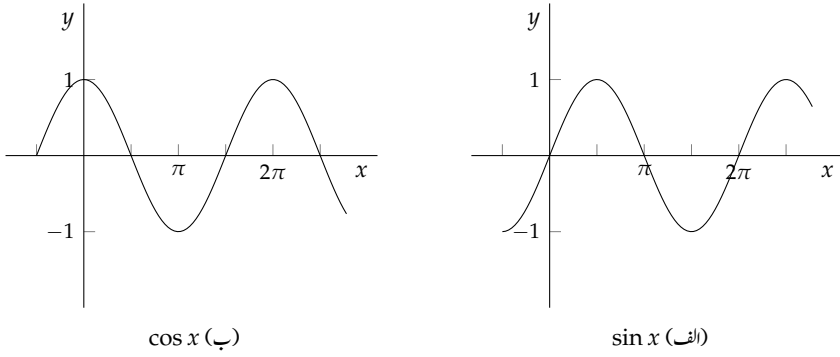
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

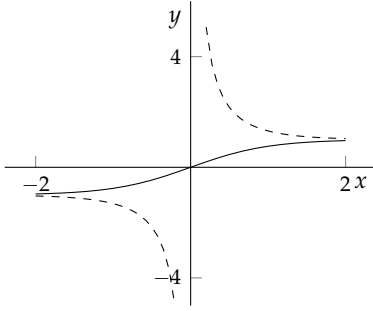
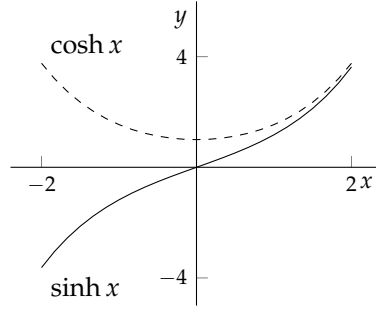
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

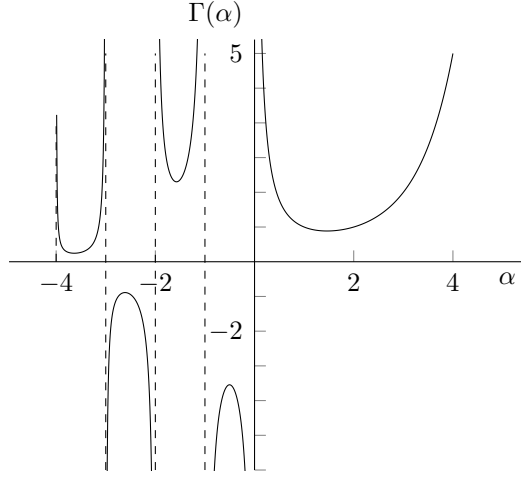
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$





شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

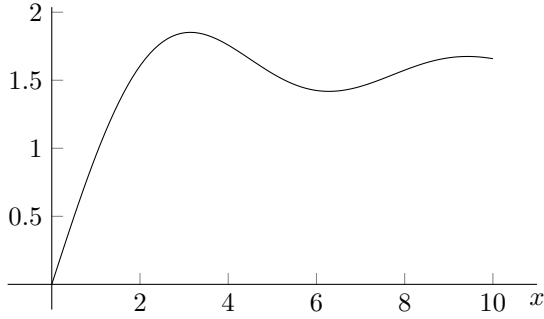
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

