انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم ایک مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ واحد ایک بلا منصوبہ متغیر، مثلاً X ، وابستہ کرنا ہو گا۔ حصہ 24.7 سے ہم جانتے ہیں کہ اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم $F(x) = P(X \leq x)$ اس تقسیم کو مکمل طور پر تعین کرتا ہے، چونکہ ہر وقفہ $a < X \leq b$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم دو مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ دو بلا منصوبہ متغیرات، مثلاً X اور Y ، وابستہ کرنا ہو گا۔مثال کے طور پر فولاد کی راک ویل سختی کو X اور اس میں کاربن کی مقدار کو Y ظاہر کر سکتے ہیں۔ہر ایک تجربہ اعداد کی جوڑی $X = x$ ، $Y = y$ دے گی جس کو مختصراً (x, y) لکھا اور XY مستوی پر بطور نقطہ دکھایا جا سکتا ہے۔ہم اب ایک مستطیل $a_1 < X \leq b_1$ ، $a_2 < Y \leq b_2$ پر غور کرتے ہیں (شکل 24.14)۔اگر ایسے ہر ایک مستطیل کے لئے ہمیں مطابقتی احتمال

$$P(a_1 < X \leq b_1,\ a_2 < Y \leq b_2)$$

معلوم ہو تب ہم کہتے ہیں کہ **دو بعدی بلا منصوبہ متغیر**[117] (X, Y) یا بلا منصوبہ متغیرات X اور Y کا **دو بعدی تفاعل احتمال**[118] ہمیں معلوم ہے۔تفاعل

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \tag{24.81}$$

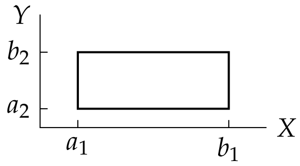
کو اس تقسیم یا (X, Y) کا **تقسیمی تفاعل**[119] کہتے ہیں۔چونکہ (سوال 24.145)

$$\begin{aligned} &P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) \\ &\quad = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \end{aligned} \tag{24.82}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 24.81 تقسیم کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

---

[117] two-dimensional random variable
[118] two-dimensional probability distribution
[119] distribution function



شکل 24.14: دو بعدی تقسیم کا تصور

غیر مسلسل دو بعدی تقسیمیں

اگر (X,Y) درج ذیل خواص رکھتا ہو تب متغیر (X,Y) اور اس کا مطابقتی تقسیم **غیر مسلسل** کہلائے گا۔

X,Y متناہی تعداد یا قابل شمار لا متناہی تعداد کی جوڑی قیمتیں (x,y) اختیار کر سکتا ہے جن کے مطابقتی احتمال مثبت ہوں گے۔ ہر ایسا دائرہ کار جس میں ایسی کوئی جوڑی نہ پائی جاتی ہو کا احتمال 0 ہو گا[120]۔

فرض کریں کہ x_i, y_j ایسی کوئی جوڑی ہے اور $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ ہے(جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ p_{ij} کسی مخصوص i,j کی جوڑیوں کے لئے صفر بھی ہو سکتا ہے)۔ تفاعل

$$f(x,y)=\begin{cases} p_{ij} & x=x_i, y=y_j \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases} \tag{24.83}$$

کو (X,Y) کا **تفاعل احتمال** کہتے ہیں؛ یہاں غیر تابع طور پر $i=1,2,\cdots$ اور $j=1,2,\cdots$ ہیں۔ مساوات 24.42 کا مماثل

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} f(x_i,y_j) \tag{24.84}$$

ہے اور مساوات 24.38 کی جگہ درج ذیل شرط ہو گا۔

$$\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)=1 \tag{24.85}$$

[120] دھیان رہے کہ پہلی خاصیت سے یہ نہیں کہا جا سکتا ہے

مثال کے طور پر اگر ہم ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے اچھال کر

$$X = \text{ایک روپیہ کی خط کی تعداد}$$
$$Y = \text{پانچ روپیہ کی خط کی تعداد}$$

پر غور کریں تب X اور Y کی قیمت 0 یا 1 ہو سکتی ہے اور تفاعل احتمال

$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = \frac{1}{4}$ ورنہ (ان کے علاوہ) $f(x,y) = 0$ ہو گا۔

استمراری دو بعدی تقسیمیں

(X,Y) اور اس کا تقسیم اس صورت استمراری کہلاتے ہیں جب مطابقتی تفاعل تقسیم کو دوہرا تکمل

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x^*,y^*)\,\mathrm{d}x^*\,\mathrm{d}y^* \tag{24.86}$$

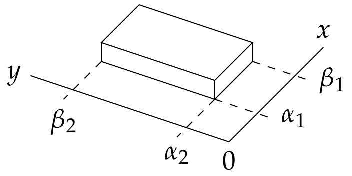
کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں $f(x,y)$ معین، غیر منفی اور پورے مستوی میں محدود ہے ماسوائے متناہی تعداد کے استمراری قابل تفرق منحنیات پر۔ $f(x,y)$ کو تقسیم کی **کثافت احتمال** کہتے ہیں۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{24.87}$$

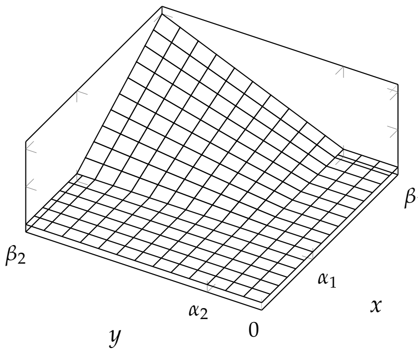
مثال کے طور پر (شکل 24.15)

$$\text{جب } (x,y) \text{ مستطیل } R \text{ میں ہو تب } f(x,y) = \frac{1}{k} \text{ ورنہ } f(x,y) = 0 \tag{24.88}$$

مستطیل R میں یکساں تقسیم کو ظاہر کرتا ہے؛ یہاں k مستطیل کا رقبہ یعنی $k = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)$ ہے۔اس تقسیم کو شکل 24.16 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 24.15: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل احتمال کثافت



شکل 24.16: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل تقسیم

دو بعدی غیر مسلسل تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

فرض کریں کہ بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر (X,Y) کا تفاعل احتمال $f(x,y)$ ہے۔اگر $X=x$ ہو، جبکہ Y جس میں ہمیں دلچسپی نہیں ہے کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہو، تب تفاعل احتمال $P(X=x, Y \text{اختیاری})$ کو $f_1(x)$ لکھا جا سکتا ہے جو x کا تابع تفاعل ہے۔یوں

$$f_1(x) = P(X=x, Y\,\text{اختیاری}) = \sum_y f(x,y) \tag{24.89}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اس x کے لئے ہم $f(x,y)$ کی تمام غیر صفر قیمتوں کا مجموعہ لیا گیا ہے۔ظاہر ہے کہ $f_1(x)$ ایک بلا منصوبہ متغیر تقسیمی احتمال کا تفاعل احتمال ہے۔اس تقسیم کو دیے گئے دو بعدی تقسیم کے لحاظ سے X کا **حاشیہ تقسیم**[121] کہا جاتا ہے۔اس کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_1(x) = P(X \le x, Y\,\text{اختیاری}) = \sum_{x^* \le x} f_1(x^*) \tag{24.90}$$

اسی طرح تفاعل احتمال

$$f_2(y) = P(X\,\text{اختیاری}, Y=y) = \sum_x f(x,y)) \tag{24.91}$$

---

[121] marginal distribution

جدول 24.7: تاش سے ملکہ اور بادشاہ کا حصول

$x \backslash y$	0	1	2	3	$f_1(x)$
0	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
1	$\frac{300}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	0	$\frac{432}{2197}$
2	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	0	0	$\frac{36}{2197}$
3	$\frac{1}{2197}$	0	0	0	$\frac{1}{2197}$
$f_2(y)$	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{726}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	

دیے گیے دو بعدی تقسیم کا Y کے لحاظ سے **حاشیہ تقسیم** تعین کرتا ہے۔مساوات 24.91 میں ہم y کے مطابقتی غیر صفر $f(x,y)$ کا مجموعہ لیتے ہیں۔اس تقسیم کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y \leq y) = \sum_{y^* \leq y} f_2(y^*) \tag{24.92}$$

ظاہر ہے کہ بلا منصوبہ متغیر (X,Y) کے دونوں حاشیہ تقسیم غیر مسلسل ہیں۔

جدول 24.7 میں ان کی مثال دی گئی ہے جہاں تاش کے پتوں سے تین پتے نکال کر واپس رکھے جاتے ہیں۔ملکہ کے حصول کو X جبکہ بادشاہ کے حصول کو Y سے ظاہر کیا گیا ہے۔تاش کے کل 52 پتے ہوتے ہیں جن میں 4 ملکہ اور 4 بادشاہ کے پتے ہوتے ہیں۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ہو گا۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ یا بادشاہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{2}{13}$ ہو گا۔اس طرح اس بلا منصوبہ تجربہ کا مطابقتی تفاعل احتمال

$$f(x,y) = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!}\left(\frac{1}{13}\right)^x\left(\frac{2}{13}\right)^y\left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} \qquad (x+y \leq 3)$$

ہو گا اور ان کے علاوہ $f(x,y) = 0$ ہو گا۔جدول 24.7 میں $f(x,y)$ ، $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ دیے گئے ہیں۔

دو بعدی استمراری تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

اسی طرح کثافت $f(x,y)$ والے استمراری متغیر X,Y کے لئے ہم

$$(X \leq x, -\infty < Y < \infty) \quad \text{یا} \quad (X \leq x, Y \text{ اختیاری})$$

پر غور کر سکتے ہیں جس کا مطابقتی احتمال

$$F_1(x) = P(X \leq x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x^*$$

ہو گا جس میں

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{24.93}$$

لکھتے ہوئے

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x^*)\,\mathrm{d}x^* \tag{24.94}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $f_1(x)$ اور $F_1(x)$ کو بالترتیب دیے گئے استمراری تقسیم کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم X کی **کثافت** اور **تقسیمی تفاعل** کہتے ہیں۔دیے گئے دو بعدی استمراری تقسیم کے لحاظ سے تفاعل

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{24.95}$$

کو حاشیہ تقسیم Y کی کثافت اور

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y^*)\,\mathrm{d}y^* = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y^*)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^* \tag{24.96}$$

کو حاشیہ تقسیم Y کا تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ استمراری تقسیم کے دونوں حاشیہ تقسیم استمراری ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کی تابعیت اور غیر تابعیت

دو بعدی (X,Y) تقسیم جس کا تفاعل تقسیم $F(x,y)$ ہو کے بلا منصوبہ متغیرات X اور Y اس صورت **غیر تابع** کہلاتے ہیں جب تمام (x,y) کے لئے

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y) \tag{24.97}$$

ہو ورنہ انہیں تابع کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ X اور Y دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہوں۔تب X اور Y اس صورت غیر تابع ہوں گے جب ان کے مطابقتی تفاعل احتمال یا کثافتیں $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں۔

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \tag{24.98}$$

مثال کے طور پر جدول 24.7 میں متغیرات تابع ہیں۔ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے ایک بار اچھال کر متغیرات

$$X = \text{پانچ روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد}, \quad Y = \text{ایک روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد}$$

0 یا 1 قیمت اختیار کر سکتے ہیں اور یہ متغیرات غیر تابع ہیں۔

تابعیت اور غیر تابعیت کی تصور کو n بعدی تقسیم $X_1, \cdots, X_n$ جس کا تفاعل احتمال

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_! \leq x_1, \cdots X_n \leq x_n)$$

ہو کے n بلا منصوبہ متغیرات تک وسعت دی جا سکتی ہے۔اگر تمام $x_1, \cdots, x_n$ کے لئے

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdots F_n(n) \tag{24.99}$$

ہو جہاں X_j کے حاشیہ تقسیم کا تقسیمی تفاعل $F_j(x_j)$ ہو، یعنی

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j, X_k \text{ اختیاری}, k \neq j)$$

تب یہ بلا منصوبہ متغیرات غیر تابع کہلاتے ہیں ورنہ ان متغیرات کو تابع کہتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل

فرض کریں کہ بلا منصوبہ متغیر (X,Y) کا تفاعل احتمال یا کثافت $f(x,y)$ اور تقسیمی تفاعل $F(x,y)$ ہیں اور فرض کریں کہ $g(x,y)$ غیر مستقل استمراری تفاعل ہے جو تمام (x,y) پر معین ہے۔تب $Z = g(X,Y)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔مثال کے طور پر ہم دو پانسہ پھینکتے ہیں۔پہلے پانسہ عدد X اور دوسرا پانسہ عدد Y دیتا ہے۔ عدد $Z = X + Y$ ان دونوں کا مجموعہ ہے (شکل 24.8)۔

اگر n $(X_1, \cdots, X_n)$ بعدی متغیر ہو اور تمام $(x_1, \cdots, x_n)$ پر $g(x_1, \cdots, x_n)$ معین غیر مستقل استمراری تفاعل ہو تب $Z = g(X_1, \cdots, X_n)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔

غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر (X, Y) کی صورت میں ان تمام $f(x, y)$ کا مجموعہ لیتے ہوئے جن کے لئے $g(x, y)$ کی قیمت زیر غور y کے برابر ہو، ہم $Z = g(X, Y)$ کا تفاعل احتمال $f(z)$ حاصل کر سکتے ہیں، یعنی:

$$f(z) = P(Z = z) = \sum_{g(x,y)=z}\sum f(x, y) \tag{24.100}$$

Z کا تقسیمی تفاعل

$$F(z) = P(Z \leq z) = \sum_{g(x,y)\leq z}\sum f(x, y) \tag{24.101}$$

ہے جہاں ہم ان $f(x, y)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے $g(x, y) \leq z$ ہو۔

بلا منصوبہ استمراری متغیر (X, Y) کے لئے اسی طرح

$$F(z) = P(Z \leq z) = \iint_{g(x,y)\leq z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{24.102}$$

ہو گا جہاں ہر z کے لئے ہم xy مستوی میں خطہ $g(x, y) \leq z$ پر تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$g(X, Y)$ کی حسابی توقع۔ مجموعہ اوسط اور تغیریت

درج ذیل عدد کو $g(X, Y)$ کی **حسابی توقع**[122] یا مختصراً **توقع** کہتے ہیں۔

$$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum\limits_{x}\sum\limits_{y} g(x, y) f(x, y) & [(X, Y) \text{ غیر مسلسل}] \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & [(X, Y) \text{ استمراری}] \end{cases} \tag{24.103}$$

یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ دوہرا مجموعہ حتمی مرتکز ہے اور xy مستوی پر $|g(x, y)| f(x, y)$ کا تکمل موجود ہے۔ درج ذیل کلیہ کو سوال 24.99 کی طرز پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$E(ag(X, Y) + bh(X, Y)) = aE(g(X, Y)) + bE(h(X, Y)) \tag{24.104}$$

---

[122] mathematical expectation

اس کے ایک مخصوص صورت $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ ہے اور الکراجی ماخوذ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.16: **(مجموعہ اوسط)**
بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعے کی اوسط (توقع) ان کے انفرادی اوسط کا مجموعہ ہو گا، یعنی:

$$E(X_1+X_2,\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) \tag{24.105}$$

مزید درج ذیل با آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 24.17: **اوسطوں کا حاصل ضرب**
غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے حاصل ضرب کی اوسط ان کے انفرادی اوسط کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا، یعنی:

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n) \tag{24.106}$$

ثبوت: فرض کریں کہ X اور Y بلا منصوبہ متغیرات ہیں (جہاں دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہیں)۔ تب $E(XY)=E(X)E(Y)$ ہو گا۔ غیر مسلسل صورت میں

$$E(XY)=\sum_x\sum_y xyf(x,y)=\sum_x xf_1(x)\sum_y yf_2(y)=E(X)E(Y)$$

لکھا جا سکتا ہے اور استمراری صورت میں بھی ثبوت اسی طرح کا ہے۔اس نتیجہ کو n غیر تابع متغیرات تک وسعت دینے سے مساوات 24.106 ثابت ہوتی ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب تغیریت کے مجموعہ پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ $Z=X+Y$ ہے اور Z کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔سوال 24.97 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma^2=E([Z-\mu]^2)=E(Z^2)-[E(Z)]^2$$

مساوات 24.104 سے دائیں ہاتھ پہلے جزو کو

$$E(Z^2)=E(X^2+2XY+Y^2)=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کو مسئلہ 24.17 کی مدد سے

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔انہیں σ^2 کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]\end{aligned}$$

سوال 24.97 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ پہلی لکیر پر دیا گیا تعلق X اور Y کی تغیریت کا مجموعہ ہے جنہیں ہم بالترتیب σ_1^2 اور σ_2^2 سے ظاہر کرتے ہیں۔دوسری لکیر پر مقدار

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{24.107}$$

کو X اور Y کی **باہمی تغیریت**[123] کہتے ہیں۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY} \tag{24.108}$$

اگر X اور Y غیر تابع ہوں تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ لہٰذا $\sigma_{XY} = 0$ اور

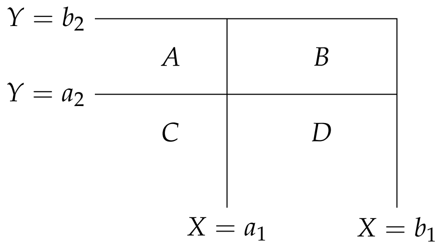
$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{24.109}$$

ہو گا۔دو سے زائد متغیرات تک وسعت دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.18: (تغیرات کا مجموعہ)
غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعہ کی تغیریت ان متغیرات کے انفرادی تغیریت کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 24.145: مساوات 24.82 کو ثابت کریں۔
جواب: شکل 24.17 میں (X, Y) احتمال $F(b_1, b_2)$ کے ساتھ A ، B ، C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, b_2)$ کے ساتھ A یا C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(b_1, a_2)$ کے



شکل 24.17: شکل برائے سوال 24.145

ساتھ C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, a_2)$ کے ساتھ C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے لہٰذا B سے قیمت حاصل کرنے کا احتمال مساوات 24.82 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

سوال 24.146: شکل 24.15 اور شکل 24.16 میں دیے تقسیم کے حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔

سوال 24.147: فرض کریں کہ $8 \leq x \leq 12$ اور $0 \leq y \leq 2$ میں $f(x, y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ۔ k ، $P(X \leq 11, 1 \leq Y \leq 1.5)$ اور $P(9 \leq X \leq 12, Y \leq 1)$ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{8}$

سوال 24.148: ایک کاغذ کی اوسط کمیت $10\,\mathrm{g}$ اور معیاری انحراف $0.05\,\mathrm{g}$ ہے۔ ایسی $10\,000$ کاغذوں کی ڈھیر کی اوسط کمیت اور تغیریت کیا ہو گی؟

سوال 24.149: فرض کریں کہ $x > 0$ ، $y > 0$ اور $x + y < 3$ میں $f(x, y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ $f(x, y)$ ترسیم کریں۔ $P(X + Y \leq 1)$ اور $P(Y > X)$ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}$

سوال 24.150: ایک خالی ڈبے کی اوسط $2\,\mathrm{kg}$ اور معیاری انحراف $0.1\,\mathrm{kg}$ ہے۔ اس ڈبے میں مال کی اوسط $75\,\mathrm{kg}$ اور تغیریت $0.8\,\mathrm{kg}$ ہے۔ بھرے ڈبے کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.151: خطہ $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ میں بلا منصوبہ متغیرات کی کثافتیں $f(x, y) = x + y$ اور $g(x, y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$ ہیں۔ دکھائیں کہ ان کی حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہیں۔

[123] covariance

سوال 24.152: ایسی دو مختلف غیر مسلسل تقسیم کی مثال دیں جن کے حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہوں۔

سوال 24.153: چار گراریوں کو یوں مرتب کیا جاتا ہے کہ ان کے بیچ فاصلہ رہے۔ گراریوں کے بیچ باریک چادر کی ٹکیا رکھ کر فاصل پیدا کیا جاتا ہے۔ گراری کی موٹائی کی اوسط $5.020\,\mathrm{cm}$ اور معیاری انحراف $0.003\,\mathrm{cm}$ ہے جبکہ ٹکیا کی موٹائی کی اوسط $0.040\,\mathrm{cm}$ اور معیاری انحراف $0.002\,\mathrm{cm}$ ہے۔ بلا منصوبہ 4 گراریوں اور 3 ٹکیوں سے مرتب پوری گراری کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے۔
جواب: تقریباً $20.200, 0.007$

سوال 24.154: لوہے کی چادروں اور کاغذ کو تہہ در تہہ رکھ کر ٹرانسفارمر کا قالب بنایا جاتا ہے۔ اگر لوہے کی چادر کی موٹائی کی اوسط $0.5\,\mathrm{mm}$ اور معیاری انحراف $0.05\,\mathrm{mm}$ ہو اور کاغذ کی موٹائی کی اوسط $0.05\,\mathrm{mm}$ اور معیاری انحراف $0.02\,\mathrm{mm}$ ہو تب 50 لوہے کی چادروں اور 49 کاغذوں سے بنائے گئے قالب کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.155: خطہ $x^2+y^2<1$ میں (X, Y) کی کثافت $f(x, y)=k$ ہے جبکہ اس خطہ کے باہر کثافت صفر ہے۔ k تلاش کریں۔ حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔ احتمال $P(X^2+Y^2<\frac{1}{2})$ تلاش کریں۔
جواب: $k=\frac{1}{\pi}; f_1(x)=0.1e^{-0.1x}, x>0; f_2(y)=0.1e^{-0.1y}, y>0; 36.8\,\%$

سوال 24.156: ایک پنیا اور سوراخ کے قطر بالترتیب X سنٹی میٹر اور Y سنٹی میٹر ہیں۔ فرض کریں کہ (X, Y) کی کثافت

اگر $0.99<x<1.01, 1.00<y<1.02$ ہو تب $f(x, y)=2500$

ہے ورنہ $f=0$ ہے۔ حاشیہ تقسیمیں حاصل کریں۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ منتخب کردہ پنیا 1.00 سنٹی میٹر کی سوراخ میں ٹھیک بیٹھے گا؟

سوال 24.157: خطہ $x \geq 0, y \geq 0$ میں (X, Y) کی کثافت $f(x, y)=e^{-(x+y)}$ ہے جبکہ باقی جگہوں پر $f=0$ ہے۔ $P(X>Y)$ تلاش کریں۔
جواب: $50\,\%$

سوال 24.158: سوال 24.157 میں حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرق مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\,z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\,y'^2 + |q|\,z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\,z + |q|\,z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

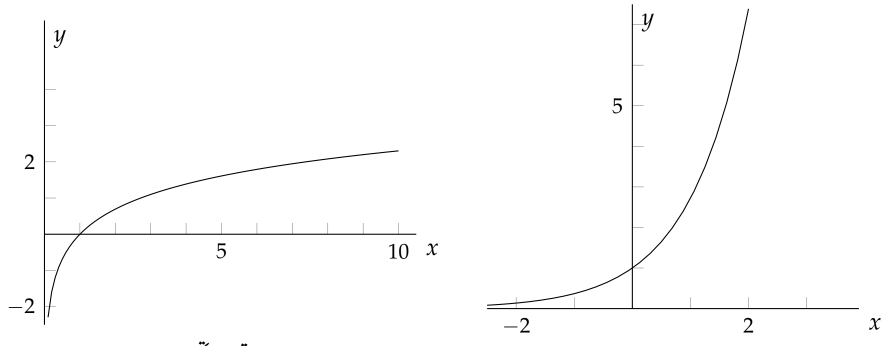
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

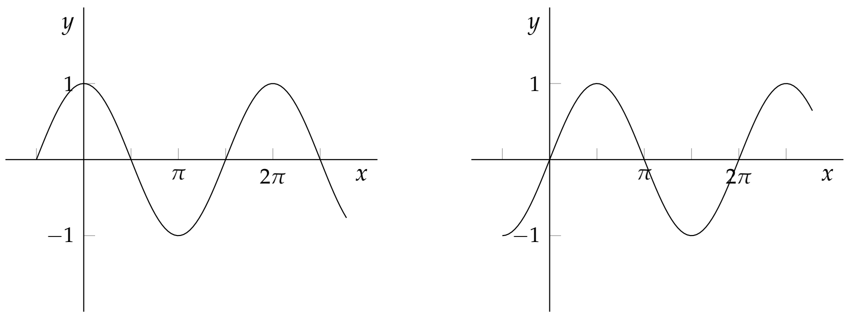
$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x (ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$ (ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (\text{ب}.5)$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

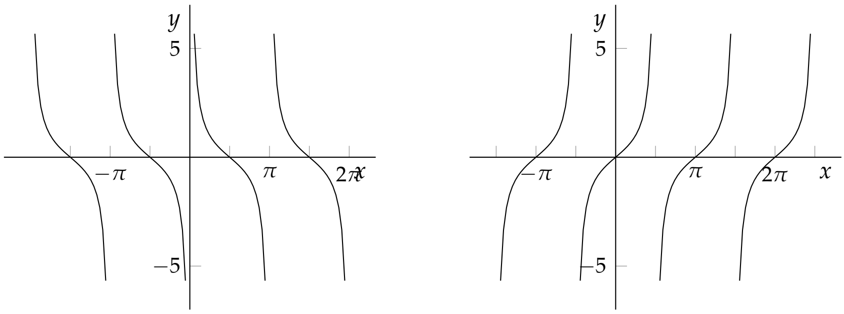
(ب.13)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



$\cot x$ (ب) $\qquad$ $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$
\begin{gathered}
\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\
\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}
\end{gathered} \tag{ب.17}
$$

$$
\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}
$$

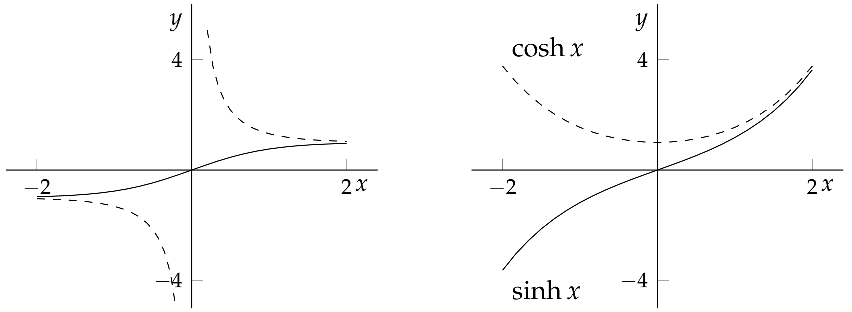
$$
\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y
\end{aligned} \tag{ب.20}
$$

$$
\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}
$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$
\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}
$$



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔ (الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

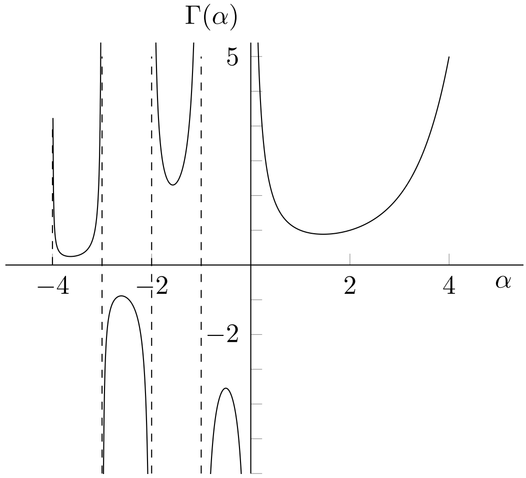
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0, \, y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل(شکل ب.6)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات ب.33 کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

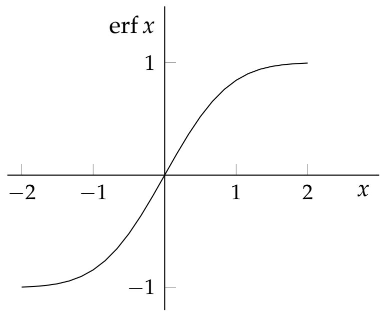
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

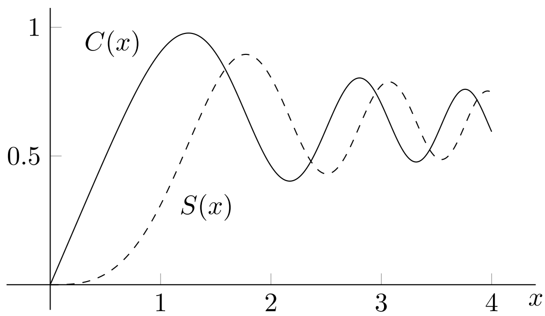
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل ب.7)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2) \, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2) \, \mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔**مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{C}(x)=\int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{S}(x)=\int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

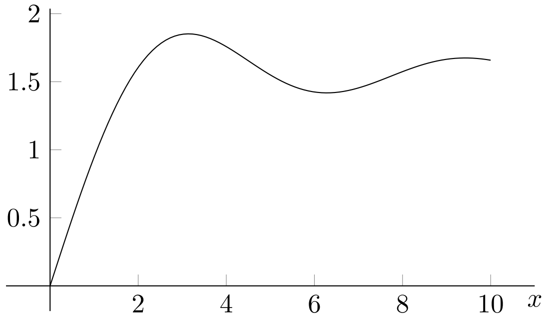
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

ضمیمہ ج

جدول