انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

عموماً طبعی تعلقات کو تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح عموماً انجنیئر نگ مسائل تفرقی مساوات کی صورت میں پیش آتے ہیں۔اسی لئے اس کتاب کی ابتدا تفرقی مساوات اور ان کے حل سے کی جاتی ہے۔

سادہ تفرقی مساوات[1] سے مراد ایسی تفرقی مساوات ہے جس میں ایک عدد آزاد متغیرہ پایا جاتا ہو۔اس کے بر عکس **جزوی تفرقی مساوات**[2] ایک سے زائد آزاد متغیرات پر منحصر ہوتی ہے۔جزوی تفرقی مساوات کا حل نسبتاً مشکل ثابت ہوتا ہے۔

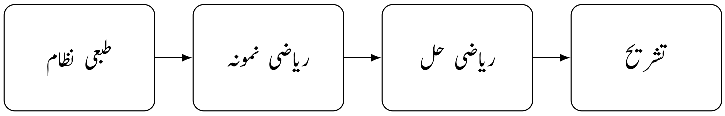
کسی بھی حقیقی صورت حال یا مشاہدے کی نقشہ کشی کرتے ہوئے اس کا **ریاضی نمونہ**[3] حاصل کیا جا سکتا ہے۔سائنس کے مختلف میدان مثلاً انجنیئر نگ، طبیعیات، علم کیمیا، حیاتیات، کمپیوٹر وغیرہ میں درپیش مسائل کی صحیح تفرقی مساوات کا حصول اور ان کے حل پر تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

سادہ تفرقی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر کو علیحدہ باب میں پیش کیا جائے گا۔یہ باب بقایا کتاب سے مکمل طور پر علیحدہ رکھا گیا ہے۔ یوں کتاب کے پہلے دو باب کے بعد اس باب کو پڑھا جا سکتا ہے۔

پہلے باب کا آغاز درجہ اول کے سادہ تفرقی مساوات کے حصول، مساوات کے حل اور حل کی تشریح سے کیا جاتا ہے۔پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات میں صرف ایک عدد نا معلوم تفاعل کا ایک درجی تفرق پایا جاتا ہے۔ایسی

---

[1] ordinary differential equation
[2] partial differential equation
[3] mathematical model



شکل 1.1: نمونہ کشی، حل اور تشریح۔

مساوات میں ایک سے زیادہ درجے کا تفرق نہیں پایا جاتا۔نا معلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیرہ t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔باب کے اختتام میں تفرقی مساوات کے حل کی **وجودیت**[4] اور **یکتائی**[5] پر غور کیا جائے گا۔

تفرقی مساوات سمجھنے کی خاطر ضروری ہے کہ انہیں کاغذ اور قلم سے حل کیا جائے البتہ کمپیوٹر کی مدد سے آپ حاصل جواب کی درستگی دیکھنا چاہیں تو اس میں کوئی حرج نہیں ہے۔

1.1 نمونہ کشی

شکل 1.1 کو دیکھیے۔ انجنیئرنگ مسئلے کا حل تلاش کرنے میں پہلا قدم مسئلے کو مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔مسئلے کو مختلف متغیرات اور تفاعل کے تعلقات کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔اس مساوات کو **ریاضی نمونہ**[6] کہا جاتا ہے۔ریاضی نمونے کا حصول، نمونے کا ریاضیاتی حل اور حل کی تشریح کے عمل کو **نمونہ کشی**[7] کہا جاتا ہے۔ نمونہ کشی کی صلاحیت تجربے سے حاصل ہوتی ہے۔کسی بھی نمونہ کی حل میں کمپیوٹر مدد کر سکتا ہے البتہ نمونہ کشی میں کمپیوٹر عموماً کوئی مدد فراہم نہیں کر پاتا۔

عموماً طبعی مقدار مثلاً اسراع اور رفتار درحقیقت میں تفرق کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا بیشتر ریاضی نمونے مختلف متغیرات اور تفاعل کے تفرق پر مشتمل ہوتے ہیں جنہیں **تفرقی مساوات**[8] کہا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو اس تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہو۔ تفرقی مساوات کا حل جانتے ہوئے مساوات میں موجود متغیرات اور تفاعل کے ترسیم کھینچے جا سکتا ہے اور ان پر غور کیا جا سکتا ہے۔ تفرقی مساوات پر غور سے پہلے چند بنیادی تصورات تشکیل دیتے ہیں جو اس باب میں استعمال کی جائیں گی۔

[4] existence
[5] uniqueness
[6] mathematical model
[7] modeling
[8] differential equation

سادہ تفرق مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم تفاعل کی ایک درجی یا بلند درجی تفرق پائے جاتے ہوں۔نا معلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔اس مساوات میں نا معلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیرہ x (یا t) کے تفاعل بھی پائے جا سکتے ہیں۔درج ذیل چند سادہ تفرقی مساوات ہیں

$$y' = \sin x \tag{1.1}$$

$$y' + \frac{6}{7}y = 4e^{-\frac{3}{2}x} \tag{1.2}$$

$$y''' + 2y' - 11y'^2 = 0 \tag{1.3}$$

جہاں $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ، $y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ ، وغیرہ ہیں۔

دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل کے تفرق پر مشتمل مساوات کو جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ان کا حل سادہ تفرقی مساوات سے زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔جزوی تفرقی مساوات پر بعد میں غور کیا جائے گا۔غیر تابع متغیرات x اور y پر منحصر تابع تفاعل $u(x,y)$ کی جزوی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \tag{1.4}$$

n درجی تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم تفاعل y کی بلند تر تفرق n درجے کی ہو۔یوں مساوات 1.1 اول درجے کی مساوات ہے، مساوات 1.2 دوسرے درجے جبکہ مساوات 1.3 تیسرے درجے کی مساوات ہے۔

اس باب میں پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ایسی مساوات میں اکائی درجہ تفرق y' کے علاوہ نا معلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیرہ کا کوئی بھی تفاعل پایا جا سکتا ہے۔ایک درجے کی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(y, y', x) = 0 \tag{1.5}$$

یا

$$y' = f(x, y) \tag{1.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 1.5 **خفی**[9] صورت کہلاتی ہے جبکہ مساوات 1.6 **صریح**[10] صورت کہلاتی ہے۔یوں خفی مساوات $x^2y' - 2y^3 = 0$ کی صریح صورت $y' = 2\frac{y^3}{x^2}$ ہے۔

[9] implicit
[10] explicit

حل کا تصور

ایک تفاعل

$$y = h(x) \tag{1.7}$$

جو کھلے وقفہ[11] $a \le x \le b$ پر معین[12] ہو اور پورے وقفے پر اس کا تفرق پایا جاتا ہو، اس صورت مساوات 1.5 کا حل ہو گا جب $h(x)$ اور $h'(x)$ کو مساوات 1.5 میں بالترتیب $y(x)$ اور $y'(x)$ کی جگہ پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر ہوں۔تفاعل $h(x)$ کا خط **منحنی حل**[13] کہلائے گا۔

یہاں کھلے وقفے سے مراد ایسا وقفہ ہے جس کے آخری سر a اور b وقفے کا حصہ نہ ہوں۔کھلا وقفہ لامتناہی ہو سکتا ہے مثلاً $-\infty \le x \le b$ یا $a \le x \le \infty$ اور یا $-\infty \le x \le \infty$ یعنی حقیقی محور۔

مثال 1.1: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty \le x \le \infty$ پر تفاعل $y = cx$ تفرقی مساوات $y = y'x$ کا حل ہے جہاں c **ایک اختیاری مستقل**[14] ہے۔

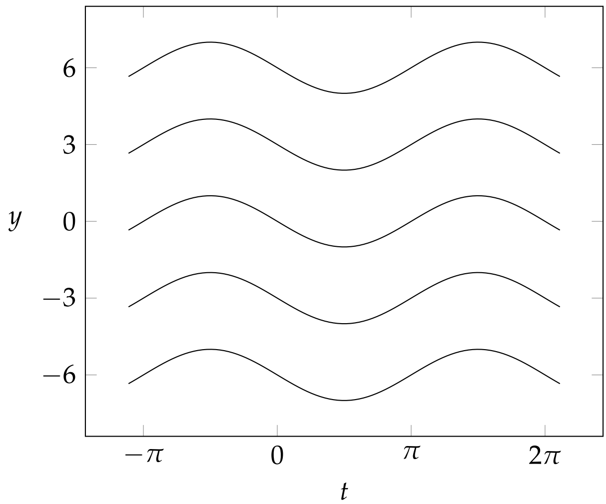
حل: پورے وقفے پر $y = cx$ معین ہے۔اسی طرح اس کا تفرق $y' = c$ بھی پورے وقفے پر پایا جاتا ہے۔ان بنیادی شرائط پر پورا اترنے کے بعد تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$y = cx \implies (cx) = (c)x$$

مساوات کے دونوں اطراف برابر ہیں لہٰذا $y = cx$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

مثال 1.2: حل بذریعہ تکمل: مساوات $y' = \cos t$ کا حل بذریعہ تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی $y = \int \cos t$ جس سے $y = c - \sin t$ حاصل ہوتا ہے جو **نسلِ حل**[15] ہے۔ حاصل حل میں c اختیاری مستقل

[11] open interval
[12] defined
[13] solution curve
[14] arbitrary constant
[15] solution family



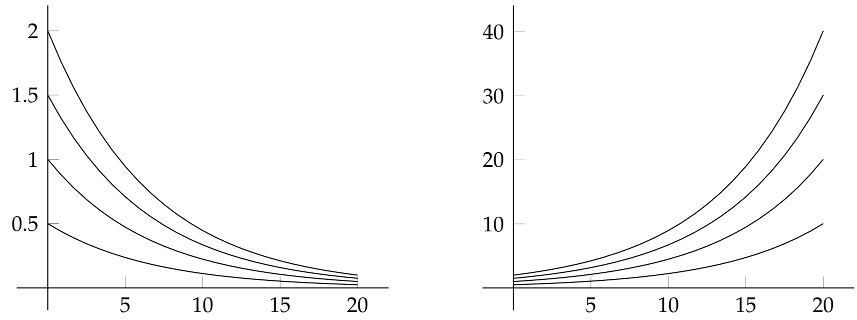
شکل 1.2: مثال 1.2 کے خط۔

ہے۔اختیاری مستقل کی ہر انفرادی قیمت تفرقی مساوات کا ایک منفرد حل دیتا ہے۔یوں $c = 3.24$ پر کرتے ہوئے $y = 3.24 - \sin t$ حل حاصل ہوتا ہے۔شکل 1.2 میں $c = -6, -3, 0, 3, 6$ سے حاصل حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 1.3: مساوات مالتھس
قوت نمائی تفاعل $y = ce^{kt}$ کے تفرق سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kce^{kt} = ky \tag{1.8}$$

یوں $y' = ky$ تفرقی مساوات کا حل $y = ce^{kt}$ ہے۔مثبت k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی اضافے کی نمونہ کشی کرتی ہے۔جرسوموں کی تعداد اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے۔وسیع رقبے کے ملک میں کم انسانی



(الف) قوت نمائی اضافہ۔ مساوات $y' = 0.15y$ کا حل۔

(الف) قوت نمائی گھٹاو۔ مساوات $y' = -0.15y$ کا حل۔

شکل 1.3: قوت نمائی تفرقی مساوات کی نسل حل۔

آبادی اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے جہاں اس کو **قانون مالتُھس**[16] کہا[17] جاتا ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = 0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

منفی k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی گھٹاو مثلاً **تابکاری تحلیل**[18] کو ظاہر کرتی ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = -0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 1.5 میں تابکاری تحلیل کے مسئلے پر مزید غور کیا گیا ہے۔

درج بالا مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے حل میں ایک عدد اختیاری مستقل c پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کا ایسا حل جس میں اختیاری مستقل c پایا جاتا ہو **عمومی حل**[19] کہلاتا ہے۔

(بعض اوقات c مکمل طور اختیاری مستقل نہیں ہوتا بلکہ اس کی قیمت کو کسی وقفے پر محدود کرنا لازم ہوتا ہے۔)

ہم یکتا[20] عمومی حل حاصل کرنے کی تراکیب سیکھیں گے۔

---

[16] Malthus' law

[17] یہ قانون انگلستانی ماہر معاشیات طامس روبرٹ مالتُھس (1766-1834) کے نام ہے۔

[18] radioactive decay

[19] general solution

[20] unique

جیومیٹریائی طور پر سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل لامتناہی حل کے خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جہاں c کی ہر انفرادی قیمت منفرد خط دیتی ہے۔ عمومی حل میں c کی کوئی مخصوص قیمت مثلاً $c = -3.501$ یا $c = 0$ پر کرنے سے ہمیں **مخصوص حل**[21] ملتا ہے۔ مخصوص حل میں کوئی اختیاری مستقل نہیں پایا جاتا۔

عام طور عمومی حل قابل حصول ہوتا ہے جس میں c کی مخصوص قیمت پر کرتے ہوئے درکار مخصوص حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بعض اوقات تفرقی مساوات ایسا حل بھی رکھتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ ایسے حل کو **نادر**[22] حل کہتے ہیں۔ صفحہ 12 پر سوال 1.16 میں نادر حل کی مثال دی گئی ہے۔

ابتدائی قیمت سوال

عام طور پر عمومی حل میں **ابتدائی قیمتیں**[23] x_0 اور y_0 پر کرنے سے مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جہاں $y(x_0) = y_0$ ہے۔ جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ خط حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہے۔ سادہ تفرقی مساوات اور مساوات کے ابتدائی قیمتوں کو **ابتدائی قیمت سوال**[24] کہا جاتا ہے۔ یوں صریح سادہ تفرقی مساوات کی صورت میں ابتدائی قیمت سوال درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.9}$$

مثال 1.4: ابتدائی قیمت سوال: درج ذیل ابتدائی قیمت سوال کو حل کریں۔

$$y' = 5y, \qquad y(0) = 3.2$$

حل: تفرقی مساوات کو $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 5\,\mathrm{d}x$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمل لینے سے $y = ce^{5x}$ عمومی حل حاصل ہوتا ہے جس میں $x = 0$ پر $y = 3.2$ پر کرنے سے $y(0) = ce^0 = 3.2$ لکھا جائے گا جس سے $c = 3.2$ ملتا ہے۔ یوں ابتدائی قیمت سوال کا مخصوص حل $y = 3.2e^{5x}$ ہے۔

---

[21] particular solution
[22] singular solution
[23] initial values
[24] initial value problem

نمونہ کشی پر مزید بحث

نمونہ کشی کو مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے پہلی قدم پر مسئلے کو تفرقی مساوات کا جامہ پہنایا جائے گا۔دوسری قدم پر تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کیا جائے گا۔تیسرے قدم پر ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل حاصل کیا جائے گا۔آخر میں چوتھا قدم حاصل جواب کی تشریح ہو گی۔

مثال 1.5: تابکار مادے کی موجودہ کمیت $2\,\mathrm{mg}$ ہے۔اس کی کمیت مستقبل میں دریافت کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ کسی بھی لمحے پر تابکاری تحلیل کی شرح اس لمحے پر موجود تابکار مادے کی کمیت کے راست تناسب ہے۔

(الف) پہلا قدم: نمونہ کشی: کمیت کو y سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں کسی بھی لمحے پر تابکاری کی شرح سے مراد $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہٰذا تجربے سے حاصل معلومات کو درج ذیل تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جائے گا جہاں تناسبی مستقل k مثبت قیمت ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \tag{1.10}$$

مثال 1.3 میں آپ نے دیکھا کہ تفرقی مساوات میں منفی کی علامت سے تفرقی مساوات کا قوت نمائی گھٹتا ہوا حل حاصل ہوتا ہے۔چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی گئی ہے۔تابکار اشیاء کے مستقل k کی قیمتیں تجربے سے حاصل کئے جاتے ہیں مثلاً ریڈیم[25] یعنی $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ کا $k = 1.4 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}$ ہے۔

ابتدائی کمیت $2\,\mathrm{mg}$ ہے۔ابتدائی وقت کو $t = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی معلومات $y(0) = 2\,\mathrm{mg}$ لکھی جائے گی۔(غیر تابع متغیر وقت t کی بجائے کچھ اور مثلاً x ہونے کی صورت میں بھی (x_0, y_0) یا $y(x_0) = y_0$ کو ابتدائی معلومات ہی کہا جاتا ہے۔اسی طرح تابع متغیرہ y کی قیمت $t \neq 0$ پر معلوم

[25] radium

ہو سکتی ہے مثلاً $y(x_n) = y_n$ اور ایسی صورت میں (x_n, y_n) ابتدائی معلومات کہلاتی ہے۔یوں دیے مسئلے سے درج ذیل ابتدائی قیمت سوال حاصل ہوتا ہے۔

$$y' = -ky, \qquad y(0) = 2\,\mathrm{mg} \tag{1.11}$$

(ب) دوسرا قدم: عمومی حل: ابتدائی قیمت سوال کا عمومی حل درج ذیل ہے جہاں c اختیاری مستقل جبکہ k کی قیمت تابکار مادے پر منحصر ہے۔

$$y = c^{-kt} \tag{1.12}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $t = 0$ پر $y = 2\,\mathrm{mg}$ ہے جس کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 2$ حاصل ہوتا ہے۔یوں درج ذیل مخصوص حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = 2e^{-kt} \qquad (k > 0) \tag{1.13}$$

مخصوص حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ حاصل حل درست ہے۔اسی طرح مخصوص حل سے ابتدائی معلومات حاصل کریں۔

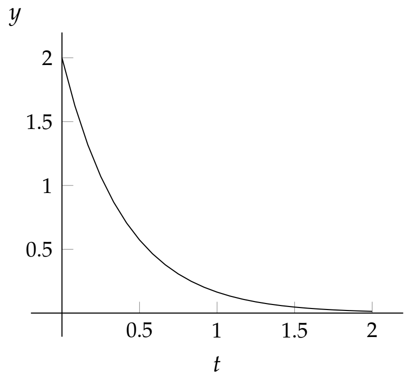
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -kce^{-kt} = -ky, \quad y(0) = 2e^{-0} = 2$$

(پ) حاصل مخصوص حل کی تشریح: مساوات 1.13 کو شکل 1.4 میں دکھایا گیا ہے جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔لمحہ $t = 0$ پر یہ مساوات تابکار مادے کی درست کمیت دیتا ہے۔لمحہ لامتناہی پر تابکار مادے کی کمیت $y(\infty) = 2e^{-k\infty} = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

سوالات

سوالات 1.1 تا 1.8 کے جوابات بذریعہ تکمل حاصل کریں یا کسی تفاعل کی تفرق سے جواب حاصل کریں۔

سوال 1.1: $y' + 3\sin 2\pi x = 0$



شکل 1.4: مثال 1.5 کی منحنی۔ تابکاری تحلیل $y = 2e^{-kt}$ جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔

جواب: $y = \frac{3}{2\pi}\cos 2\pi x + c$

سوال 1.2: $y' + xe^{-x^2} = 0$

جواب: $y = \frac{e^{-x^2}}{2} + c$

سوال 1.3: $y' = 4e^{-x}\cos x$

جواب: $y = 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + c$

سوال 1.4: $y' = y$

جواب: $y = ce^{x}$

سوال 1.5: $y' = -y$

جواب: $y = ce^{-x}$

سوال 1.6: $y' = 2.2y$

جواب: $y = ce^{2.2x}$

سوال 1.7: $y' = 1.5\sinh 3.2x$

جواب: $y=\frac{15}{32}\cosh 3.2x+c$

سوال 1.8: $y''=-y$

جواب: $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

سوال 1.9 تا سوال 1.15 ابتدائی قیمت سوالات ہیں جن کے عمومی حل دیے گئے ہیں۔انہیں تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہی عمومی جوابات ہیں۔عمومی جواب سے مخصوص جواب حاصل کریں۔مخصوص جواب کا خط کھینچیں۔

سوال 1.9: $y'+2y=0.8,\quad y=ce^{-2x}+0.4,\quad y(0)=1.2$

جواب: $y=0.8e^{-2x}+0.4$

سوال 1.10: $y'+x+y=0,\quad y=ce^{-x}-x+1,\quad y(0)=\pi$

جواب: $y=\pi e^{-x}-e^{-x}-x+1$

سوال 1.11: $y'=2x+e^x,\quad y=e^x+x^2+c,\quad y(0)=1$

جواب: $y=e^x+x^2$

سوال 1.12: $y'+4xy=0,\quad y=ce^{-2x^2},\quad y(0)=2$

جواب: $y=2e^{-2x^2}$

سوال 1.13: $yy'=2x,\quad y^2=2x^2+c,\quad y(1)=6$

جواب: $y^2=2x^2+34$

سوال 1.14: $y'=y+y^2,\quad y=\frac{c}{e^{-x}-c},\quad y(0)=0.1$

جواب: $y=\frac{1}{e^{(-x+23.98)}-1}$

سوال 1.15: $y'\tan x=y-4,\quad y=c\sin x+4,\quad y(\frac{\pi}{2})=0$

جواب: $y=4-4\sin x$

سوال 1.16: نادر حل: بعض اوقات سادہ تفرقی مساوات کا ایسا حل بھی پایا جاتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ایسے حل کو **نادر حل**[26] کہا جاتا ہے۔مساوات $y'^2-xy'+y=0$ کا عمومی حل $y=cx-c^2$ ہے جبکہ اس کا نادر حل $y=\frac{x^2}{4}$ ہے۔ ان حل کا تفرق لیتے ہوئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

سوال 1.17 تا سوال 1.21 نقشہ کشی کے سوالات ہیں۔

سوال 1.17: تابکار مادے کی نصف زندگی $t_{\frac{1}{2}}$ سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں تابکار مادے کی کمیت نصف ہو جاتی ہے۔مثال 1.5 میں ریڈیم $^{266}_{88}\mathrm{Ra}$ کی نصف زندگی دریافت کریں۔

جواب: تابکاری تحلیل کی مساوات $y=y_0e^{-kt}$ میں لمحہ $t=0$ پر (ابتدائی) کمیت y_0 ہے جبکہ مستقبل میں لمحہ t پر کمیت y ہے۔ہم وہ دورانیہ جاننا چاہتے ہیں جس میں کمیت نصف رہ جائے یعنی جب $y=\frac{y_0}{2}$ رہ جائے۔تابکاری مساوات میں $y=\frac{y_0}{2}$ پر کرتے ہوئے $\frac{y_0}{2}=y_0e^{-kt}$ لکھا جائے گا جس سے $t_{\frac{1}{2}}=4.95\times10^{10}\,\mathrm{s}$ یعنی 1569.6 سال حاصل ہوتا ہے۔یوں ریڈیم کی مقدار 1569.6 سالوں میں نصف رہ جائے گی۔

سوال 1.18: ریڈیم ہم جا[27] $^{224}_{88}\mathrm{Ra}$ کی نصف زندگی تقریباً 3.6 دن ہے۔دو گرام $(2\,\mathrm{g})$ ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک دن بعد کتنی رہ جائے گی۔دو گرام ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک سال بعد کتنی رہ جائے گی۔

جوابات: $1.65\,\mathrm{g}$ ، $6\times10^{-31}\,\mathrm{g}$

سوال 1.19: ایک جہاز کی رفتار مستقل اسراع a سے مسلسل بڑھ رہی ہے۔رفتار کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ کو اسراع کہتے ہیں۔ان معلومات سے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے لمحہ t پر رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔اگر $t=0$ پر ابتدائی رفتار u ہو تب v کی مساوات کیا ہو گی؟

جوابات: $v=at+c$ ، $v=u+at$

---
[26] singular solution
[27] isotope

سوال 1.20: رفتار سے مراد وقت کے ساتھ فاصلے کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ہے۔سوال 1.19 میں رفتار کی مساوات $v = u + at$ حاصل کی گئی جسے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے برابر پر کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی فاصلہ $x = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی قیمت سوال کو حل کرتے ہوئے x کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $x = ut + \frac{1}{2}at^2$

سوال 1.21: آواز سے کم رفتار پر پرواز کرنے والے جہاز کی کار گزاری ہوا کے دباو پر منحصر ہوتی ہے۔ان کی کار گزاری $10\,500\,\mathrm{m}$ تا $12\,000\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر بہترین حاصل ہوتی ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ $10\,500\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباو دریافت کریں۔طبعی معلومات:اونچائی کے ساتھ دباو میں تبدیلی کی شرح y' ہوا کے دباو y کے راست تناسب ہوتی ہے۔تقریباً $5500\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباو سمندر کی سطح پر ہوا کے دباو y_0 کی نصف ہوتا ہے۔

جواب: $0.27y_0$ یعنی تقریباً ایک چوتھائی

1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

$$y' = f(x, y) \tag{1.14}$$

سادہ معنی رکھتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ y' سے مراد y کی ڈھلوان ہے۔یوں مساوات 1.14 کا وہ حل جو نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہو کا اس نقطے پر ڈھلوان $y'(x_0)$ ہو گا کو درج بالا مساوات کے تحت اس نقطے پر f کی قیمت کے برابر ہو گا۔

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 1.14 کو حل کرنے کے **ترسیمی**[28] یا **اعدادی**[29] طریقے دریافت کر سکتے ہیں۔تفرقی مساوات کو حل کرنے کے ترسیمی اور اعدادی طریقے اس لئے بھی اہم ہیں کہ کئی تفرقی مساوات کا کوئی **تحلیلی**[30] حل نہیں پایا جاتا جبکہ ہر قسم کے تفرقی مساوات کا ترسیمی اور اعدادی حل حاصل کرنا ممکن ہے۔

graphical[28]
numerical[29]
analytic[30]

میدان کی سمت: ترسیمی طریقہ

ہم xy سطح پر جگہ جگہ مساوات 1.14 سے حاصل ڈھلوان کی چھوٹی لمبائی کی سیدھی لکیریں کھینچ سکتے ہیں۔ہر نقطے پر ایسی لکیر اس نقطے پر میدان کی سمت دیتی ہے۔اس **میدانِ سمت**[31] یا **میدانِ ڈھال**[32] میں تفرقی مساوات کا **منحنی حل**[33] کھینچا جا سکتا ہے۔

منحنی حل کو کھینچنے کی ترکیب کچھ یوں ہے۔کسی بھی نقطے پر ڈھلوان کی سمت میں چھوٹی لکیر کھینچیں۔اس لکیر کو آہستہ آہستہ یوں موڑیں کہ لکیر کے اختتامی نقطے پر لکیر کی ڈھلوان عین اس نقطے کی ڈھلوان برابر ہو۔اسی طرح آگے بڑھتے رہیں۔ڈھال میدان میں نقطے جتنے قریب قریب ہوں تفرقی مساوات کا منحنی حل اتنا درست ہو گا۔

شکل 1.5 میں

$$y' = x - y \tag{1.15}$$

کا ڈھال میدان دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ چند منحنی حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

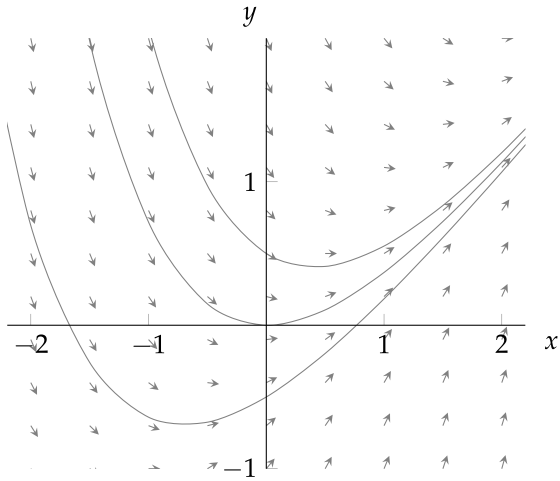
آئیں اب اعدادی طریقہ سیکھیں۔سادہ ترین اعدادی طریقہ ترکیب یولر کہلاتا ہے۔پہلے اسی پر بحث کرتے ہیں۔

یولر کی اعدادی ترکیب

درجہ اول تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو استعمال کرتے ہوئے **ترکیب یولر**[34] ہم فاصلہ نقطوں x_0 ، $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $\cdots$ پر تقریباً درست قیمتیں دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \end{aligned}$$

[31] direction field
[32] slope field
[33] solution curve
[34] Euler's method



شکل1.5:درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = x - y$ کا ڈھال میدان اور منحنی حل۔

یا

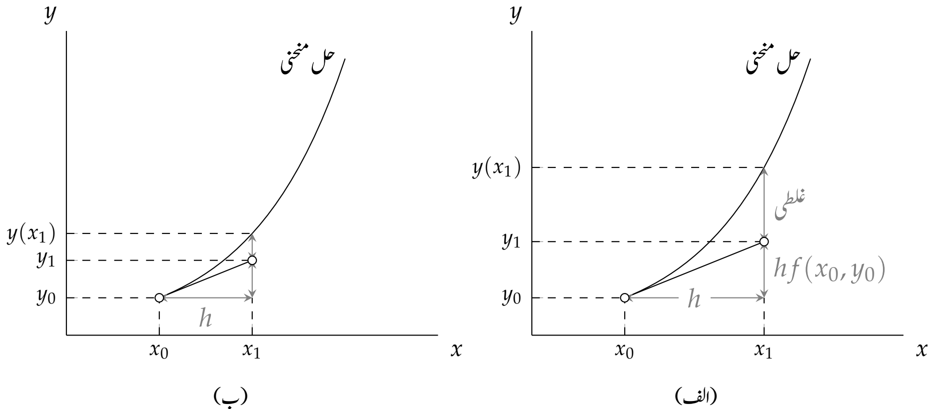
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \tag{1.16}$$

h کو قدم کہتے ہیں۔شکل 1.6-الف میں y_1 کا حصول دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی نقطہ y_0 اور ترکیب یولر سے حاصل کردہ y_1 کو چھوٹے دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں h کی قیمت کم کرنے کا اثر دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹا قدم لینے سے اصل حل $y(x_1)$ اور یولر سے حاصل y_1 میں فرق (غلطی) کم ہو جاتا ہے۔یوں قدم کو چھوٹا سے چھوٹا کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ درست حل دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.15 کا عمومی حل $y = ce^{-x} + x - 1$ ہے جس سے نقطہ $(0, 0)$ سے گزرتا حل $y = e^{-x} + x - 1$ ملتا ہے۔اس طرح کے حل ہم جلد حاصل کر پائیں گے۔اس وقت صرف اتنا ضروری ہے کہ آپ دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکیں کہ یہی درست حل ہے۔

جدول 1.1 میں قدم $h = 0.1$ لیتے ہوئے نقطہ $(0, 0)$ سے گزرتا ہوا مساوات 1.15 کا ترکیب یولر (مساوات 1.16) سے حل حاصل کیا گیا ہے۔آئیں اس جدول کو حاصل کریں۔

ابتدائی نقطہ $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ہے جس کا اندراج جدول 1.1 کے پہلے صف میں کیا گیا ہے۔ان قیمتوں کو



شکل 1.6: ترکیب یولر کا پہلا قدم۔

استعمال کرتے ہوئے (x_1, y_1) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 0 + 0.1(0 - 0) = 0$$

جدول 1.1 کے دوسرے صف میں ان قیمتوں کا اندراج کیا گیا ہے جن سے (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0 + 0.1(0.1 - 0) = 0.01$$

یہ قیمتیں بھی جدول میں درج ہیں۔اسی طرح (x_3, y_3) حاصل کرتے ہوئے جدول میں درج کئے گئے ہیں۔

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.01 + 0.1(0.2 - 0.01) = 0.029$$

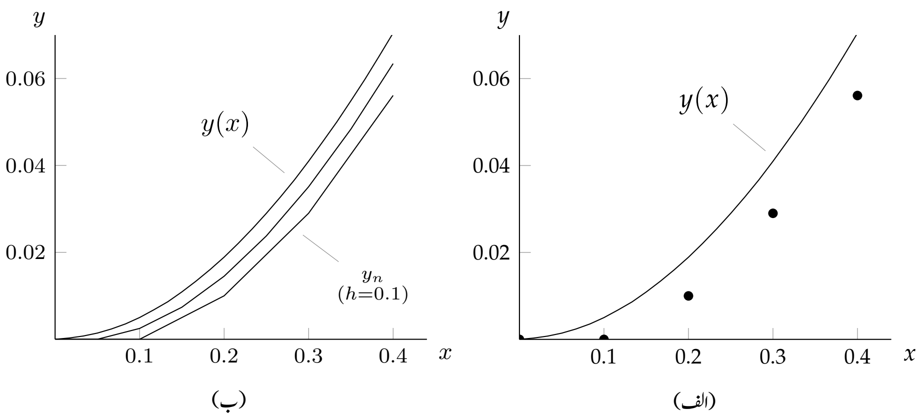
جدول کی آخری صف حاصل کرتے ہیں۔

$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.029 + 0.1(0.3 - 0.029) = 0.0561$$

شکل 1.7-الف میں ترکیب یولر سے حاصل حل اور ریاضیاتی حل $y(x)$ کا موازنہ کیا گیا ہے۔شکل-الف میں یولر حل سے حاصل نقطوں کو سیدھی لکیروں سے ملاتے ہوئے مسلسل حل حاصل کیا جا سکتا ہے جسے شکل-ب میں y_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔شکل-ب میں $y(x)$ بھی دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ $h = 0.05$ استعمال کرتے ہوئے

جدول 1.1: ترکیب یولر۔

غلطی	$y(x)$	y_n	x_n	n
0	0	0	0	0
0.00484	0.00484	0.0	0.1	1
0.00873	0.01873	0.01	0.2	2
0.01182	0.04082	0.029	0.3	3
0.01422	0.07032	0.0561	0.4	4



شکل 1.7: ترکیب یولر سے حاصل حل کا ریاضیاتی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

حاصل یولر حل کو بھی دکھایا گیا ہے جو $y(x)$ اور y_n کے بیچ میں پایا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ h کی قیمت کم کرنے سے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 1.22 تا سوال 1.28 کے میدان ڈھال کو قلم و کاغذ سے کھینچتے ہوئے دیے ابتدائی نقطوں سے گزرتے منحنی حل حاصل کریں۔چند ڈھال میدان شکل 1.8 اور شکل 1.9 میں دیے گئے ہیں۔

سوالات

سوال 1.22: $y' = 1 + y^2, \quad (\frac{\pi}{4}, 1)$

سوال 1.23: $y' = 1 - y^2, \quad (0, 0)$

سوال 1.24: $yy' + 8x = 0, \quad (1, 1)$

سوال 1.25: $y' = y - y^2, \quad (1, 0)$

سوال 1.26: $y' = x + \frac{1}{y}, \quad (0, 1)$

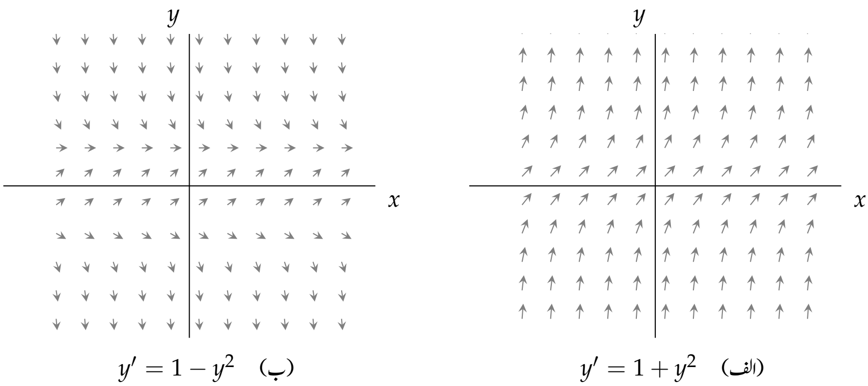
سوال 1.27: $y' = \sin^2 x, \quad (0, 1)$

سوال 1.28: $y' = \sin^2 y, \quad (0, 0)$

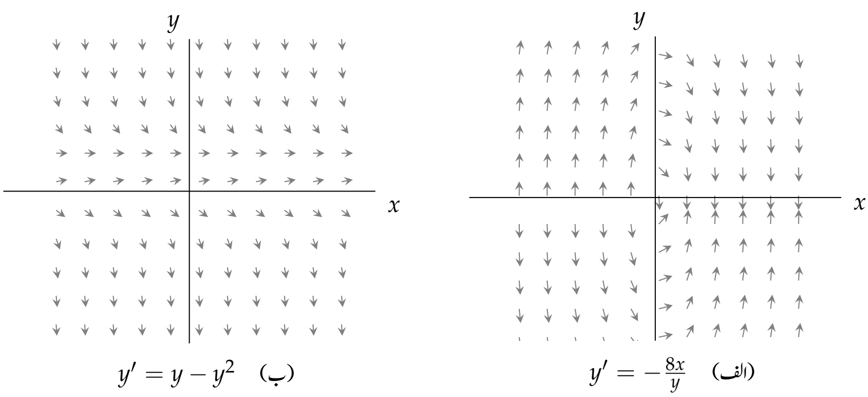
ڈھال میدان کے استعمال سے تفرقی مساوات کے تمام حل سامنے آ جاتے ہیں۔بعض اوقات تفرقی مساوات کا تحلیلی حل حاصل کرنا ممکن ہی نہیں ہوتا۔درج ذیل دو سوالات میں ڈھال میدان سے اخذ حل اور دیے گئے تحلیلی حل کا موازنہ کرتے ہوئے ڈھال میدان سے حاصل حل کی درستگی کا اندازہ لگایا جا سکتا ہے۔

سوال 1.29: $y' = \sin x, \quad (\frac{\pi}{2}, 0), \quad y = -\cos x$

سوال 1.30: $y' = 3x^2, \quad (0, 0), \quad y = x^3$



شکل 1.8: سوال 1.22 اور سوال 1.23 کے ڈھال میدان۔



شکل 1.9: سوال 1.24 اور سوال 1.25 کے ڈھال میدان۔

سوال 1.31: سوال 1.23، سوال 1.25 اور سوال 1.28 میں بے قابو متغیرہ x صریحاً ظاہر نہیں کیا گیا ہے۔ایسی مساوات جن میں بے قابو متغیرہ کو صریحاً ظاہر نہ کیا جائے **خود مختار**[35] سادہ تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ خود مختار سادہ تفرقی مساوات کے **ہم میلان**[36] حل $f(x, y) = c$ کی شکل و صورت کیا ہو گی؟

جواب: چونکہ y' کا دارومدار x پر نہیں ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے y کا میلان تبدیل نہیں ہو گا اور $f(x, y) = c$ افقی محور کے متوازی خط ہوں گے۔

ایک جسم y محدد پر حرکت کرتی ہے۔لمحہ t پر نقطہ $y = 0$ سے جسم کا فاصلہ $y(t)$ ہے۔سوالات 1.32 تا سوال 1.34 میں دئے شرائط کے مطابق جسم کی رفتار کی نمونہ کشی کریں۔ریاضی نمونے کی ڈھال میدان بناتے ہوئے دیے گئے ابتدائی معلومات پر پورا اترتا منحنی خط کھینچیں۔

سوال 1.32: جسم کی رفتار ضرب فاصلہ $y(t)$ مستقل ہے جو 4 کے برابر ہے جبکہ $y(0) = 4$ کے برابر ہے۔

جوابات: $yy' = 4$ ، $y = 8t + 16$

سوال 1.33: رفتار ضرب وقت فاصلے کے برابر ہے۔لمحہ $t = 1$ پر فاصلہ $y(1) = 2$ ہے۔

جوابات: $y = y't$ ، $y = 2t$

سوال 1.34: مربع رفتار منفی مربع فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔ابتدائی فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔

جوابات: $y' = \sqrt{1 + y^2}$ ، $\sinh^{-1} y = t + \sinh^{-1} 1$

سوال 1.35: ہوائی جہاز سے چھلانگ لگا کر زمین تک خیریت سے بذریعہ چھتری اترا جا سکتا ہے۔ گرتے ہوئے شخص پر آپس میں الٹ، دو عدد قوتیں عمل کرتی ہیں۔پہلی قوت زمینی کشش $F_1 = mg$ ہے جہاں m اس شخص کی کمیت اور $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع ہے۔یہ قوت انسان کو زمین کی طرف اسراع دیتی ہے۔دوسری قوت چھتری پر ہوا کے رگڑ سے پیدا قوت ہے جو اس شخص کی رفتار کو بڑھنے سے روکتی ہے۔چھتری پر ہوا کے رگڑ سے

[35] autonomous ordinary differential equations
[36] isoclines

رفتار کے مربع کے متناسب قوت $F_2 = cv^2$ پیدا ہوتی ہے۔نیوٹن کی مساوات حرکت کہتی ہے کہ کسی بھی جسم پر قوت، اس جسم کی کمیت ضرب اسراع کے برابر ہوتی ہے۔چھتری سے زمین پر اترتے شخص کی نمونہ کشی کرتے ہوئے رفتار v کی سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔کمیت کو $m = 1$ اور مستقل کو $c = 1$ لیتے ہوئے ڈھال میدان کھینچیں۔ تصور کریں کہ چھتری اس لمحہ کھلتی ہے جب شخص کی رفتار $v = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو۔ایسی صورت میں منحنی حل حاصل کریں۔اس شخص کی اختتامی رفتار کیا ہو گی؟ کیا چھتری پر قوت رفتار کے راست متناسب ہونے کی صورت میں بھی چھتری کے ذریعہ ہوائی جہاز سے زمین تک خیریت سے چھلانگ لگائی جا سکتی ہے؟

جوابات: $mg - cv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ؛ گرنے کی رفتار اس قیمت پر رہتی ہے جہاں نیچے جانب قوت mg اور چھتری کی رکاوٹی اوپر جانب قوت cv^2 برابر ہوں۔ایسی صورت میں گرتے شخص کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی یعنی $y' = 0$ ہوتا ہے۔تفرقی مساوات میں $y' = 0$ پر کرتے اور $m = c = 1$ لیتے ہوئے اختتامی رفتار $v(t = \infty) = 3.13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 1.36: گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ ہے۔رداس r کو مستقل تصور کرتے ہوئے دائرے کی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ڈھال میدان کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ڈھال میدان کھینچیں۔کیا آپ ڈھال میدان کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ منحنی حل گول دائرے ہیں؟ اسی طرح $x^2 + 9y^2 = c$ کا تفرق لیتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کی ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا ڈھال میدان کو دیکھ کر کہا جا سکتا ہے کہ منحنی حل بیضوی ہو گا؟

جوابات: $y' = -\frac{x}{y}$ ، $y' = -\frac{x}{9y}$

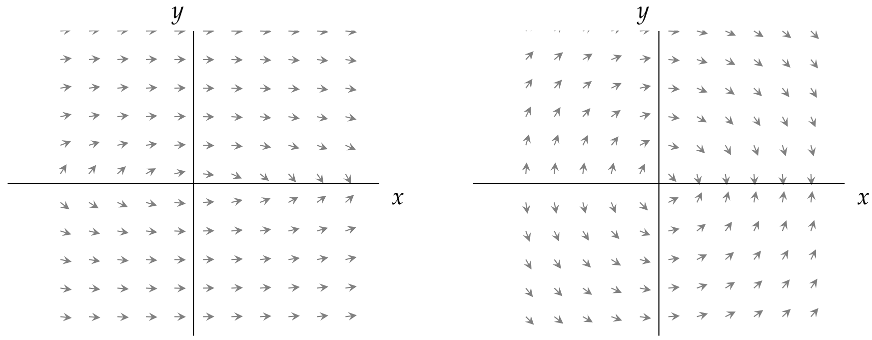
سوال 1.37 تا سوال 1.40 کو ترکیب یولر سے حل کریں۔کل پانچ ہم فاصلہ نقطوں پر حل حاصل کریں۔ایک ہی کارتیسی محدد پر حاصل y_1 تا y_5 اور سوال میں دئے گئے حل $y(x)$ کا خط کھینچیں۔ سوال 1.37:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1, \quad y(x) = e^{-x}$$

جوابات: $y_1 = 0.9$ ، $y_2 = 0.81$ ، $y_3 = 0.729$ ، $y_4 = 0.6561$ ، $y_5 = 0.59049$

سوال 1.38:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{-x}$$



(الف) تفرقی مساوات $y' = -\frac{x}{y}$ کی ڈھال میدان۔

(ب) تفرقی مساوات $y' = -\frac{x}{9y}$ کی ڈھال میدان۔

شکل 1.10: سوال 1.36 کی ڈھال میدان۔

جوابات: $y_1 = 0.99$ ، $y_2 = 0.9801$ ، $y_3 = 0.9703$ ، $y_4 = 0.9606$ ، $y_5 = 0.95099$

سوال 1.39:

$$y' = 1 + 3x^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1, \quad y(x) = x^3 + x$$

جوابات: $y_1 = 2.1$ ، $y_2 = 2.203$ ، $y_3 = 2.315$ ، $y_4 = 2.442$ ، $y_5 = 2.59$

سوال 1.40:

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{x^2-4}$$

جوابات: $y_1 = 1.04$ ، $y_2 = 1.0818$ ، $y_3 = 1.1255$ ، $y_4 = 1.1712$ ، $y_5 = 1.2190$

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات

متعدد اہم سادہ تفرقی مساوات کو الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$g(y)y' = f(x) \tag{1.17}$$

جس کو مزید یوں

$$g(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

یعنی

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کے بائیں جانب صرف y متغیرہ اور دائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے لہٰذا اس کا تکمل لیا جا سکتا ہے۔

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c \tag{1.18}$$

اگر $g(y)$ اور $f(x)$ قابل تکمل تفاعل ہوں تب مساوات 1.18 سے مساوات 1.17 کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب کو **ترکیب علیحدگی متغیرات**[37] کہتے ہیں۔ مساوات 1.17 کو **قابل علیحدگی مساوات**[38] کہتے ہیں۔

مثال 1.6: مساوات $y' = 1 + y^2$ قابل علیحدگی مساوات ہے چونکہ اس کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \mathrm{d}x$$

لکھا جا سکتا ہے جس کے دونوں اطراف کا تکمل لیتے ہوئے

$$\tan^{-1} y = x + c$$

یعنی

$$y = \tan(x+c)$$

حاصل ہوتا ہے جو تفرقی مساوات کا درکار حل ہے۔حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ یہی صحیح حل ہے۔

[37] variable separation technique
[38] separable equation

مثال 1.7: قابل علیحدگی تفرقی مساوات $y' = xe^{-x}y^3$ کو علیحدہ کرتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
y^{-3}\,\mathrm{d}y &= xe^{-x}\,\mathrm{d}x \\
\frac{y^{-2}}{-2} &= c-(x+1)e^{-x} && \text{تکمل لیا گیا ہے} \\
y^2 &= \frac{1}{2(x+1)e^{-x}-2c}
\end{aligned}
$$

مثال 1.8: درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1$$

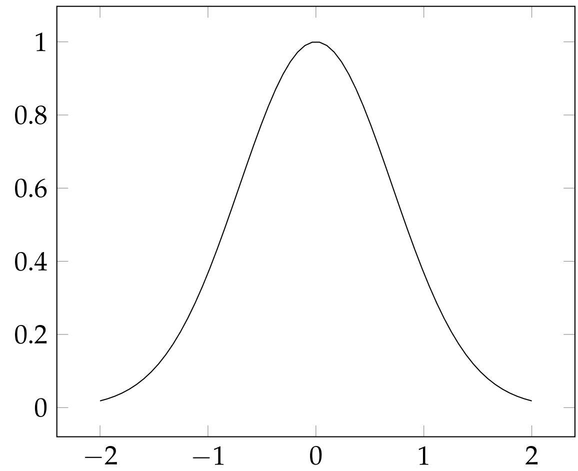
حل: مساوات کے متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 2x\,\mathrm{d}x + c \\
\ln y &= -x^2 + c_1 \\
y &= ce^{-x^2}
\end{aligned}
$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = 0$ یعنی $c = e^{c_1} = 1$ ملتا ہے لہٰذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y = e^{-x^2}$ ہے جسے شکل 1.11 میں دکھایا گیا ہے اور جو گھنٹی نما[39] ہے۔

---

[39] bell shaped



شکل 1.11: مثال 1.8 کا **گھنٹی نما** حل۔

مثال 1.9: کاربن سے عمر دریافت کرنے کا طریقہ

طبعی معلومات: کائناتی شعاعیں[40] فضا میں تابکار کاربن $^{14}_{6}\mathrm{C}$ بناتی ہیں۔یہ عمل زمین کی پیدائش سے اب تک ہوتا آ رہا ہے۔وقت کے ساتھ فضا میں $^{14}_{6}\mathrm{C}$ اور $^{12}_{6}\mathrm{C}$ **ہم جا**[41] کی تناسب ایک مخصوص قیمت حاصل کر چکی ہے۔کوئی بھی جاندار سانس لے کر یا خوراک کے ذریعہ فضا سے کاربن جذب کرتا ہے۔یوں جب تک جانور زندہ رہے اس کی جسم میں دونوں ہم جا کاربن کی تناسب وہی ہو گی جو فضا میں ان کی تناسب ہے۔البتہ مرنے کے بعد جسم میں تابکار کاربن کی مقدار تابکاری تحلیل کی بنا گھٹتی ہے جبکہ غیر تابکار کاربن کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔تابکار کاربن $^{14}_{6}\mathrm{C}$ کی نصف زندگی 5715 سال ہے۔

اہرام مصر میں دفن مومیائی ہوئی فرعون کی لاش میں $^{14}_{6}\mathrm{C}$ اور $^{12}_{6}\mathrm{C}$ کا تناسب فضا کے تناسب کا 56.95 % ہے۔لاش کی عمر دریافت کریں۔

---

[40] cosmic rays
[41] isotopes

حل: تابکار کاربن کی نصف زندگی سے تابکاری تحلیل کا مستقل k دریافت کرتے ہیں۔

$$y_0e^{-k(5715)} = \frac{y_0}{2}, \quad e^{-k(5715)} = \frac{1}{2}, \quad -k = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{5715}, \quad k = 0.0001213$$

لاش میں ہم جا کاربن کی تناسب سے لاش کی عمر حاصل کرتے ہیں۔

$$e^{-0.0001213t} = 0.5695, \quad -0.0001213t = \ln 0.5695, \quad t = 4641$$

یوں فرعون کی لاش 4641 سال پرانی ہے۔

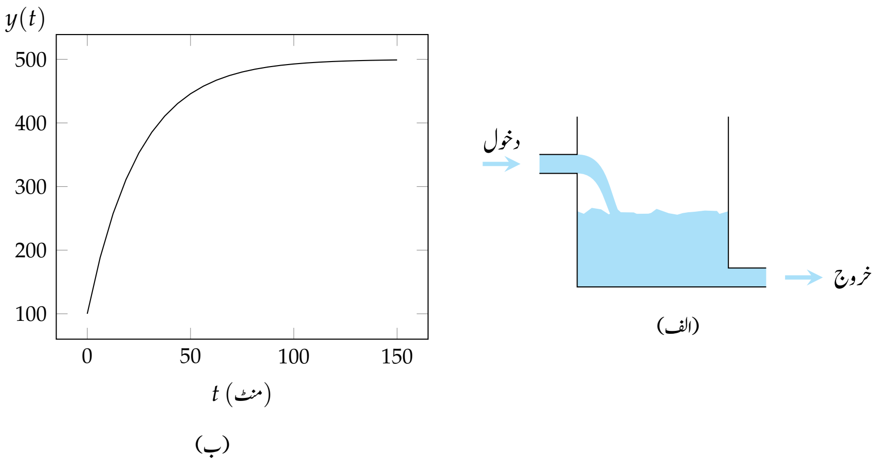
مثال 1.10: مرکب بنانے کا عمل
کیمیائی صنعت میں مرکب بنانے کا عمل عام ہے۔شکل 1.12-الف میں پانی کی ٹینکی دکھائی گئی ہے جس میں ابتدائی طور پر 1000 لٹر پانی پایا جاتا ہے۔اس پانی میں کل $100\,\mathrm{kg}$ نمک ملایا گیا ہے۔پانی کو مسلسل ہلانے سے ٹینکی میں کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ٹینکی میں 40 لٹر فی منٹ کی شرح سے نمکین پانی شامل کیا جاتا ہے۔اس پانی میں نمک کی مقدار $0.5\,\mathrm{kg\,l^{-1}}$ ہے۔ٹینکی سے نمکین پانی کا انخلا 40 لٹر فی منٹ ہے۔ٹینکی میں نمک کی کل مقدار بالمقابل وقت دریافت کریں۔

حل: چونکہ ٹینکی میں پانی شامل ہونے کی شرح اور پانی خارج ہونے کی شرح برابر ہے یں لہٰذا ٹینکی میں پانی کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ٹینکی میں داخل ہونے والا ایک لٹر کا نمکین پانی $0.5\,\mathrm{kg}$ نمک ٹینکی میں شامل کرتا ہے۔یوں 40 لٹر فی منٹ سے داخل ہوتا پانی $40 \times 0.5 = 20\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$ سے نمک شامل کرتا ہے۔کسی بھی لمحہ ٹینکی میں کل نمک کو y کلو گرام لکھتے ہوئے ٹینکی میں نمک کی کثافت کو $\frac{y}{1000}$ کلو گرام فی لٹر لکھا جا سکتا ہے۔یوں خارج ہوتا پانی $40 \times \frac{y}{1000}$ کلو گرام فی منٹ نمک خارج کرتا ہے۔اس طرح نمک میں اضافے کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کو

$$\begin{aligned} y' &= \text{نمک شامل ہونے کی شرح} - \text{نمک خارج ہونے کی شرح} \qquad (\text{متوازن مساوات}) \\ &= 20 - \frac{40y}{1000} \end{aligned}$$

یعنی

$$y' = 0.04(500 - y) \tag{1.19}$$



شکل 1.12: مثال 1.10 میں مرکب بنانے کا عمل۔

لکھا جا سکتا ہے جو قابل علیحدگی مساوات ہے لٰہذا اس میں متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{y-500} = -0.04\,\mathrm{d}t, \quad \ln\lvert y-500\rvert = -0.04t + c_1, \quad y = 500 + ce^{-0.04t}$$

ٹینکی میں ابتدائی نمک کی کل مقدار $100\,\mathrm{kg}$ ہے۔اس معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے مساوات کا مستقل c حاصل کرتے ہیں۔

$$100 = 500 + c^{-0.04(0)}, \quad c = -400$$

یوں کسی بھی لمحے ٹینکی میں کل نمک کی مقدار درج ذیل ہے جس کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$y(t) = 500 - 400e^{-0.04t}$$

شکل-ب کے مطابق ٹینکی میں آخر کار کل $500\,\mathrm{kg}$ نمک پایا جائے گا۔ یہی جواب بغیر کسی مساوات لکھے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر ٹینکی میں لگاتار نمکین پانی شامل کیا جائے اور اس سے پرانا پانی خارج کیا جائے تو آخر کار ٹینکی میں صرف نیا شامل کردہ پانی ہی پایا جائے گا۔چونکہ شامل کردہ پانی میں 0.5 کلوگرام فی لٹر نمک پایا جاتا ہے لٰہذا 1000 لٹر کی ٹینکی میں کل نمک $1000 \times 0.5 = 500\,\mathrm{kg}$ ہو گا۔

مثال 1.11: نیوٹن قانون ٹھنڈک گرمیوں میں ایک دفتر کا درجہ حرارت ایئر کنڈیشنر کی مدد سے $21\,^{\circ}\mathrm{C}$ پر رکھا جاتا ہے۔ صبح سات بجے ایئر کنڈیشنر چالو کیا جاتا ہے اور شام نو بجے اس کو بند کر دیا جاتا ہے۔ایک مخصوص دن کو شام نو بجے بیرونی درجہ حرارت $40\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہوتا ہے جبکہ صبح سات بجے بیرونی درجہ حرارت $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ تک گر چکا ہوتا ہے۔دفتر کے اندر رات دو بجے درجہ حرارت $26\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ صبح سات بجے دفتر کے اندر درجہ حرارت معلوم کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ حرارتی توانائی کو باآسانی منتقل کرتے جسم (مثلاً لوہا) کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح جسم اور اس کے گرد ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست تناسب ہوتا ہے۔اس کو **نیوٹن کا قانون ٹھنڈک**[42] کہا جاتا ہے۔

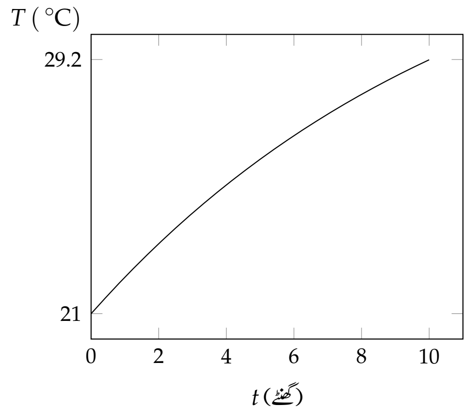
حل: پہلا قدم: نمونہ کشی
دفتر کے اندرونی حرارت کو T سے ظاہر کرتے ہیں جبکہ بیرونی حرارت کو T_b سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں نیوٹن کا قانون ٹھنڈک کی ریاضیاتی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-T_b) \tag{1.20}$$

دوسرا قدم: عمومی حل کی تلاش
اگرچہ دفتر کی دیواریں اور چھت حرارتی توانائی باآسانی منتقل نہیں کرتی ہم اسی کلیے کا سہارا لیتے ہوئے مسئلہ حل کریں گے۔ یہاں بیرونی درجہ حرارت مستقل قیمت نہیں ہے لہٰذا درج بالا مساوات کو حل کرنا مشکل ہو گا۔انجنیئرنگ کے شعبے میں عموماً ایسی ہی مشکلات کا سامنہ کرنا ہوتا ہے۔ہمیں مسئلے کی سادہ صورت حل کرنا ہو گی۔اگر ہم تصور کریں کہ T_b مستقل قیمت ہے تب درج بالا مساوات کے متغیرات علیحدہ کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ بیرونی درجہ حرارت $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ تا $40\,^{\circ}\mathrm{C}$ رہا ہے لہٰذا ہم اس کی اوسط قیمت یعنی $35\,^{\circ}\mathrm{C}$ کو بیرونی درجہ حرارت تصور کرتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔مساوات کے متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے تکمل لے کر اس کو حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}T}{T-35}=k\,\mathrm{d}t, \quad \ln\lvert T-35\rvert = kt+c_1, \quad T-35=ce^{kt}$$

[42] Newton's law of cooling



شکل 1.13: مثال 1.11: دفتر کا اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت۔

تیسرا قدم: مخصوص حل کا حصول
اگر شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا جائے اور وقت کو گھنٹوں میں ناپا جائے تب $T(0) = 21$ لکھا جائے گا جسے درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = -14$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل

$$T = 35 - 14e^{kt}$$

چوتھا قدم: مستقل k کا حصول
ہم جانتے ہیں کہ رات دو بجے اندرونی درجہ حرارت $26\ ^\circ\mathrm{C}$ ہے۔یاد رہے کہ شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا گیا لہٰذا رات دو بجے $t = 5$ ہو گا۔یوں $T(5) = 26$ لکھا جائے گا۔ان معلومات کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے k حاصل کرتے ہوئے مکمل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$26 = 35 - 14e^{5k}, \quad k = -0.088, \quad T = 35 - 14e^{-0.088t}$$

آخری قدم:
صبح سات بجے اندرونی درجہ حرارت کا تخمینہ لگاتے ہیں یعنی $t = 10$ پر درجہ حرارت درکار ہے۔

$$T = 35 - 14e^{-0.088(10)} = 29.2\ ^\circ\mathrm{C}$$

پوری رات میں اندرونی درجہ حرارت $8.2\ ^\circ\mathrm{C}$ بڑھ گیا ہے۔شکل 1.13 میں اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت دکھایا گیا ہے۔

مثال 1.12: پانی کا انخلا: پانی کی ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش $B = 2\,\mathrm{m}^2$ ہے۔ٹینکی کی تہہ میں $r = 0.5\,\mathrm{cm}$ رداس کا گول سوراخ ہے جس سے پانی نکل رہا ہے۔ٹینکی میں پانی کی ابتدائی گہرائی $h_1 = 1.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی۔

طبعی معلومات: پانی کی سطح پر m کمیت پانی کی مخفی توانائی mgh ہے جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع اور h پانی کی گہرائی ہے۔سوراخ سے خارج ہوتے وقت یہ مخفی توانائی حرکی توانائی $\frac{mv^2}{2}$ میں تبدیل ہو جاتی ہے جہاں v رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔مخفی توانائی اور حرکی توانائی کو برابر لکھتے ہوئے v کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad v = \sqrt{2gh}$$

شکل 1.14-الف میں پانی کی دھار دکھائی گئی ہے۔جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں دھار سوراخ کے قریب سکڑتا ہے۔اگر سوراخ کا رقبہ a ہو تب سکڑے ہوئے مقام پر دھار کا رقبہ عمودی تراش $0.6a$ ہوتا ہے۔یوں سوراخ سے نکلا تمام پانی رقبہ $0.6a$ سے گزرتا ہے اور یہی وہ مقام ہے جہاں پانی کا ہر ذرہ ایک ہی سمت میں رفتار v سے حرکت کرتا ہے۔

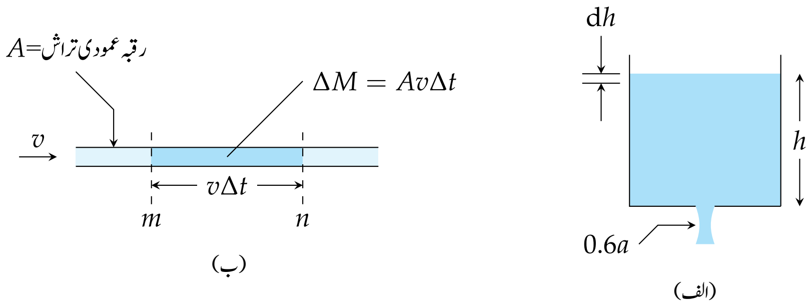
شکل 1.14-ب میں ایک نالی دکھائی گئی ہے جس میں پانی کی رفتار v ہے۔نالی کا رقبہ عمودی تراش A ہے۔لمحہ $t = 0$ پر مقام m پر موجود پانی کا ذرہ وقت Δt میں $v\Delta$ فاصلہ طے کرتے ہوئے مقام n تک پہنچ جائے گا۔یوں Δt کے دوران مقام m سے گزرا ہوا پانی نالی کو m تا n بھرے گا۔اس پانی کی مقدار $\Delta M = Av\Delta t$ ہو گی۔اسی کلیے کو استعمال کرتے ہوئے شکل 1.14-الف میں $\mathrm{d}t$ دورانیے میں کل $\mathrm{d}M = 0.6av\,\mathrm{d}t$ پانی خارج ہو گا۔یوں پانی کی شرح انخلا درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0.6a\sqrt{2gh} \tag{1.21}$$

اس مساوات کو قانون ٹاری سلی[43] کہتے ہیں۔

---

[43] Torricelli's law



شکل 1.14: مثال 1.12: پانی کا انخلا اور پانی کے دھار کا سکڑنا۔

حل: دورانیہ $\mathrm{d}t$ میں پانی کی انخلا کے بنا ٹینکی میں پانی کی گہرائی $\mathrm{d}h$ کم ہو گی جو $B\,\mathrm{d}h$ حجم کی کمی کو ظاہر کرتی ہے جہاں B ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ چونکہ پانی کے انخلا سے ٹینکی میں پانی کم ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو دیے گئے مسئلے کا تفرقی مساوات ہے۔

$$0.6a\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t = -B\,\mathrm{d}h \tag{1.22}$$

متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}\,\mathrm{d}t, \qquad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + c$$

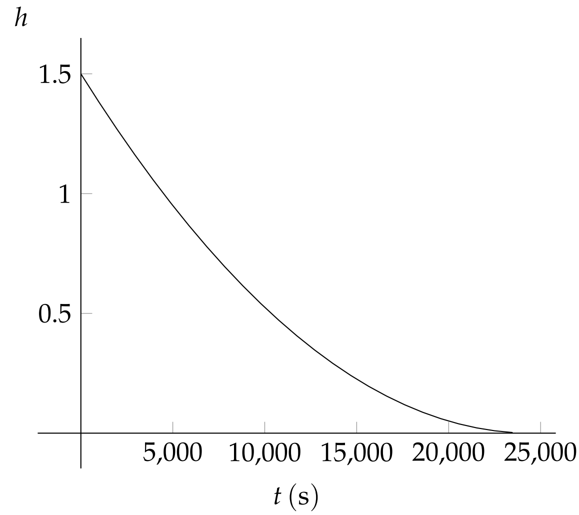
ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر پانی کی گہرائی h_1 ہے۔ ان معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = 2h_1$ ملتا ہے لہٰذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل درج ذیل ہے۔

$$2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + 2\sqrt{h_1} \tag{1.23}$$

خالی ٹینکی سے مراد $h = 0$ ہے۔ مخصوص حل میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے ٹینکی خالی کرنے کے لئے درکار وقت حاصل کرتے ہیں۔

$$2\sqrt{0} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + 2\sqrt{h_1}, \qquad t = \frac{2\sqrt{h_1}B}{0.6a\sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{1.5}\times 2}{0.6\pi 0.005^2\sqrt{2\times 9.8}} = 23\,482\,\mathrm{s} \approx 6.52\,\mathrm{h}$$



شکل 1.15: مثال 1.12: ٹینکی خالی ہونے کا عمل۔

مساوات 1.23 کو شکل 1.15 میں دکھایا گیا ہے۔یاد رہے کہ 23 482 s میں ٹینکی خالی ہو جاتی ہے لہٰذا ترسیم کو اتنے وقت کے لئے ہی کھینچا گیا ہے۔

علیحدگی متغیرات کی جامع ترکیب

بعض اوقات نا قابل علیحدگی تفرقی مساوات کے متغیرات کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات کو قابل علیحدگی بنایا جا سکتا ہے۔اس ترکیب کو درج ذیل عملاً اہم قسم کی مساوات کے لئے سیکھتے ہیں جہاں $f(\frac{y}{x})$ قابل تفرق تفاعل ہے مثلاً $\cos\frac{y}{x}$ ، $e^{(y/x)}$ وغیرہ۔

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.24}$$

مساوات کی صورت دیکھتے ہوئے $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y = ux, \quad y' = u + xu' \tag{1.25}$$

جنہیں $y' = f(\frac{y}{x})$ میں پر کرتے ہوئے $u + xu' = f(u)$ یعنی $xu' = f(u) - u$ ملتا ہے۔اگر $f(u) - u \neq 0$ ہو تب متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{1.26}$$

مثال 1.13: تفاعل $xy' - y = 2x$ کو حل کریں۔

حل:تفاعل کو $y' = \frac{y}{x} + 2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہوئے مساوات 1.25 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u + xu' = u + 2, \quad \mathrm{d}u = 2\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad u = 2\ln|x| + c$$

اس میں u کی جگہ واپس $\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے جواب حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y}{x} = 2\ln|x| + c, \quad y = 2x\ln|x| + cx$$

سوالات

سوال 1.41 تا سوال 1.49 کے عمومی حل حاصل کریں۔حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 1.41: $y^2y' + x^2 = 0$

جواب: $x^3 + y^3 = c$

سوال 1.42: $yy' + x = 0$

جواب: $x^2+y^2=c$

سوال 1.43: $y'=\sec^2 y$

جواب: $y=\tan x+c$

سوال 1.44: $y'\cos x=y\sin x$

جواب: $y=c\sec x$

سوال 1.45: $y'=ye^{x-1}$

جواب: $\ln\lvert y\rvert=e^{x-1}+c$

سوال 1.46: $u=\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy'=y+x^2\sin^2\frac{y}{x}$ کو حل کریں۔

جواب: $\frac{\cos\frac{y}{x}-1}{\cos\frac{y}{x}+1}=ce^{2x}$

سوال 1.47: $y'=(2x+y)^2$ کو حل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر $u=2x+y$ پر کرنا ہو گا۔

جواب: $y=-2x+\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x+c)$

سوال 1.48: $u=\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy'=y^2+y$ کو حل کریں۔

جواب: $y=-\frac{x}{x+c}$

سوال 1.49: $u=\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy'=x-y$ کو حل کریں۔

جواب: $xy-x^2=c$

ابتدائی قیمت سوال 1.50 تا سوال 1.56 کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.50:

$$xy' + y = 0, \quad y(2) = 8$$

جواب: $y = \frac{16}{x}$

سوال 1.51:

$$y' = 1 + 9y^2, \quad y(1) = 0$$

جواب: $y = \frac{1}{3}\tan[3(x-1)]$

سوال 1.52:

$$y' \cos^2 x = \sin^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

جواب: $\tan y = \frac{1}{1-\tan x}$

سوال 1.53:

$$y' = -4xy, \quad y(0) = 5$$

جواب: $y = 5e^{-2x^2}$

سوال 1.54:

$$y' = -\frac{2x}{y}, \quad y(1) = 2$$

جواب: $2x^2 + y^2 = 6$

سوال 1.55:

$$y' = (x + y - 4)^2, \quad y(0) = 5$$

جواب: $x+y-4=\tan(x+\frac{\pi}{4})$

سوال 1.56:

$$xy'=y+3x^4\cos^2\frac{y}{x},\quad y(1)=0$$

جواب:اس میں $u=\frac{y}{x}$ پر کرنے سے $\tan\frac{y}{x}=x^3-1$ ملتا ہے۔

سوال 1.57: کسی بھی لمحے پر جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح، اس لمحے موجود جرثوموں کی تعداد کے راست تناسب ہے۔اگر ان کی تعداد دو گھنٹوں میں دگنی ہو جائے تب چار گھنٹوں بعد ان کی تعداد کتنی ہو گی؟ چوبیس گھنٹوں بعد کتنی ہو گی؟

جوابات: $y=y_0e^{0.34657t}$ ، $4y_0$ ، $4095y_0$

سوال 1.58: جرثوموں کی شرح پیدائش موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ان کی شرح اموات بھی موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟ تعداد بالمقابل وقت کیا ہو گا؟ تعداد کہاں متوازن صورت اختیار کرے گی؟

جوابات: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha y-\beta y$ جہاں α اور β بالترتیب پیدائشی اور امواتی راست تناسب کے مستقل ہیں۔ تعداد بالمقابل وقت کی مساوات $y=y_0e^{(\alpha-\beta)t}$ ہے۔اگر $\alpha>\beta$ ہو تب تعداد بڑھتی رہے گی۔اس کے برعکس اگر $\alpha<\beta$ ہو تب تعداد گھٹتی رہے گی حتٰی کہ جراثیم فنا ہو جائیں اور $\alpha=\beta$ کی صورت میں تعداد وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو گی۔

سوال 1.59: عموماً جاندار مرنے کے بعد مکمل طور پر خاک میں مل جاتے ہیں اور ان کا نشان تک نہیں رہتا البتہ بعض اوقات حالات یوں ہوتے ہیں کہ ان کا جسم پتھر میں بدل جاتا ہے۔اس پتھریلی جسم میں موجود $^{14}_{6}\mathrm{C}$ اور $^{12}_{6}\mathrm{C}$ ہم جا کے تناسب سے اس کی عمر کا تخمینہ لگایا جا سکتا ہے۔ دو ہزار سال پرانی پتھریلی مچھلی میں کاربن کا تناسب، ابتدائی تناسب کے کتنا گنا ہو گا؟

جواب: $69.5\,\%$

سوال 1.60: **طبیعیات میں بار بردار**[44] ذروں کو **مسرع خطی**[45] کے ذریعہ اسراع دی جاتی ہے۔تصور کریں کہ مسرع خطی میں $^4_2\mathrm{He}^{2+}$ داخل ہوتا ہے جس کی رفتار مستقل اسراع کے ساتھ $1.2\,\mathrm{ms}$ دورانیے میں $10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے بڑھا کر $1.6\times10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کر دی جاتی ہے۔اسراع دریافت کریں۔اس دورانیے میں ذرہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

جوابات: $1.25\times10^7\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $10.2\,\mathrm{m}$

سوال 1.61: ایک ٹینکی میں 2000 لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں $150\,\mathrm{kg}$ نمک ملایا گیا ہے۔پانی کو مسلسل ہلانے سے کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ٹینکی میں 10 لٹر فی منٹ تازہ پانی شامل کیا جاتا ہے۔ٹینکی سے پانی کا اخراج بھی 10 لٹر فی منٹ ہے۔ایک گھنٹہ بعد ٹینکی میں کل کتنا نمک پایا جائے گا؟

جوابات: $y=150e^{-\frac{t}{200}}$ ، $y=111\,\mathrm{kg}$

سوال 1.62: مریض کے زبان کے نیچے تھرمامیٹر رکھ کر اس کا درجہ حرارت ناپا جاتا ہے۔کمرے اور مریض کے درجہ حرارت بالترتیب $25\,^\circ\mathrm{C}$ اور $40\,^\circ\mathrm{C}$ ہیں۔زبان کے نیچے رکھنے کے ایک منٹ بعد تھرمامیٹر کا پارہ $35\,^\circ\mathrm{C}$ تک پہنچتا ہے۔ تھرمامیٹر کتنی دیر میں اصل درجہ حرارت کے قریب (مثلاً $39.9\,^\circ\mathrm{C}$) پہنچ پائے گا؟

جواب: $T=40-15e^{-1.204t}$ ، $t=4.16\,\mathrm{min}$

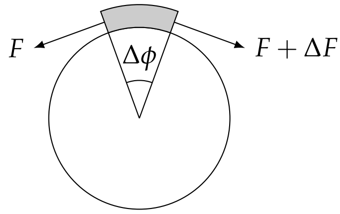
سوال 1.63: **سرطان**[46] کی مہلک بیماری میرے خاندان کے کئی افراد کی جان لے چکی ہے۔سن 1960 میں اینا کین لایرڈ[47] سرطان کی رسولی کی افزائش کو ٹھیک طرح **گامپرٹز تفاعل**[48] سے ظاہر کرنے میں کامیاب ہوئے۔

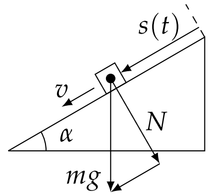
سرطانی رسولی میں جسم کا نظام تباہ ہو جاتا ہے۔یوں رسولی میں موجود خلیوں تک آکسیجن اور خوراک کا پہنچنا ممکن نہیں رہتا۔رسولی کے اندرونی خلیے آکسیجن اور خوراک کی کمی کی بنا مر جاتے ہیں۔ان حقائق کی نمونہ کشی درج ذیل گامپرٹز تفرقی مساوات کرتی ہے جہاں y رسولی کی کمیت ہے۔

$$y'=-Ay\ln y,\quad A>0 \tag{1.27}$$

---

charged[44]
linear accelerator[45]
cancer[46]
Anna Kane Laird[47]
Benjamin Gompertz[48]





شکل 1.16: سوال 1.65 اور سوال 1.66 کے اشکال۔

جواب: $\ln y = ce^{-At}$

سوال 1.64: دھوپ میں کپڑے کی نمی خشک ہونی کی شرح کپڑے میں موجود نمی کے راست تناسب ہوتی ہے۔اگر پہلے پندرہ منٹ میں نصف پانی خشک ہو جائے تب $99.9\,\%$ پانی کتنی دیر میں خشک ہو گا؟ ہم $99.9\,\%$ خشک کو مکمل خشک تصور کر سکتے ہیں۔

جواب: $y = y_0 e^{-0.0462t}$ ، $49.8\,\text{min}$

سوال 1.65: رگڑ
دو سطحوں کو آپس میں رگڑنے سے قوت رگڑ پیدا ہوتی ہے جو اس حرکت کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔خشک سطحوں پر پیدا قوت $|F| = \mu|N|$ سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں N دونوں سطحوں پر عمودی قوت، μ **حرکی رگڑ کا مستقل**[49] اور F رگڑ سے پیدا قوت ہے۔

شکل 1.16-الف میں α زاویہ کی سطح پر m کمیت کا جسم دکھایا گیا ہے۔اس پر ثقلی قوت (وزن) mg عمل کرتا ہے۔اس قوت کو دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلا حصہ N ہے جو سطح کے عمودی ہے۔دوسرا حصہ سطح کے متوازی ہے جو جسم کو اسراع دیتا ہے۔کمیت $10\,\text{kg}$ ، ثقلی اسراع $g = 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ ، رگڑ کا مستقل $\mu = 0.25$ اور زاویہ $\alpha = 30$ ہیں۔ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔یہ جسم کتنی دیر میں کل $15\,\text{m}$ فاصلہ طے کرے گا؟

جواب: $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ، $v = 3.93t\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ ، $2.76\,\text{s}$

[49] coefficient of kinetic friction

سوال 1.66: شکل 1.16-ب میں گول جسم کے گرد لپیٹی گئی رسی کا چھوٹا حصہ دکھایا گیا ہے۔ تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ رسی کے چھوٹے حصے کے سروں پر قوت میں فرق زاویہ $\Delta\phi$ اور قوت F کے راست متناسب ہوتا ہے۔رسی کو جسم کے گرد کتنی مرتبہ لپیٹنے سے ایک شخص 500 گنا زیادہ قوت کے گاڑی کو روک سکتا ہے؟

جوابات: $F = F_0 e^{\phi}$ ، $\phi = 6.21\,\mathrm{rad}$ یعنی 1.98 مرتبہ لپیٹنا ضروری ہے۔

سوال 1.67: کارتیسی محدد کے محور پر گول دائرے $x^2 + y^2 = r^2$ کا تفرقی مساوات y_1' حاصل کریں۔اسی طرح محور سے گزرتے ہوئے سیدھے خط کا تفرقی مساوات y_2' حاصل کریں۔دونوں تفرقی مساوات کا حاصل ضرب کیا ہو گا؟ اس حاصل ضرب سے آپ کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

جواب: $y_1' y_2' = -1$ ؛ آپس میں عمودی ہیں۔

سوال 1.68: آپ کو ایسے تفاعل سے ضرور واسطہ پڑیگا جس کا تحلیلی تکمل حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ایسا ایک تفاعل e^{x^2} ہے۔اس تفاعل کی **مکلارن تسلسل**[50] کے پہلے چار ارکان کا تکمل حاصل کریں۔

جواب: $\int e^{x^2} \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{36} + \cdots$

سوال 1.69: قانون ٹاری سلی
کروی ٹینکی کا رداس R ہے۔اس کی تہہ میں چھوٹا سوراخ ہے جس کا رداس r ہے۔پوری طرح بھری ہوئی ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی۔اگر $R = 1\,\mathrm{m}$ اور $r = 1\,\mathrm{cm}$ ہو تب ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی؟

جواب: $0.6\pi r^2 \sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t = -\pi[R^2 + (h-R)^2]\,\mathrm{d}h$ ،
$t + c = -\frac{\sqrt{2gh}}{9gr^2}(30R^2 - 10hR + 3h^2)$ ، $t_{\text{خالی}} = \frac{44R^2\sqrt{gR}}{9gr^2}$ ،
دیے رداس کی ٹینکی $4.34\,\mathrm{h}$ یعنی چار گھنٹے اور بیس منٹ میں خالی ہو گی۔

---

[50] Maclaurin's series

1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل

ایسا تفاعل $u(x,y)$ جس کے **استمراری**[51] (یعنی بلا جوڑ) جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کا (مکمل) تفرق درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{1.28}$$

یوں اگر $u(x,y) = c$ ہو تب $\mathrm{d}u = 0$ ہو گا۔

مثال کے طور پر $u = xy + 2(x-y) = 7$ کا تفرق

$$\mathrm{d}u = (y+2)\,\mathrm{d}x + (x-2)\,\mathrm{d}y = 0$$

ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y+2}{x-2}$$

الٹ چلتے ہوئے اس تفرقی مساوات کو ہم حل کر سکتے ہیں۔ اس مثال سے ایک ترکیب جنم دیتی ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ یعنی

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.29}$$

کو اس صورت **قطعی تفرقی مساوات**[52] کہتے ہیں جب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو جہاں $u(x,y)$ کوئی تفاعل ہے۔

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.30}$$

یوں مساوات 1.29 کو

$$\mathrm{d}u = 0 \tag{1.31}$$

---

[51] continuous partial differential
[52] exact differential equation

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے تفرقی مساوات کا **عمومی خفی حل**[53]

$$u(x,y)=c \tag{1.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.29 اور مساوات 1.30 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 1.29 تب **قطعی تفرقی مساوات** ہو گا جب ایسا $u(x,y)$ پایا جاتا ہو کہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو۔

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N \tag{1.34}$$

ان سے ہم تفرقی مساوات کے قطعی ہونے کا شرط اخذ کرتے ہیں۔

سطح xy پر ایسا خطہ جس کا سرحد بند منحنی ہو اور یہ منحنی اپنے آپ کو نہ کاٹتا ہو پر تصور کریں کہ M اور N ایسے **استمراری**[54] (یعنی بلا جوڑ) تفاعل ہیں جن کے درجہ اول تفرق بھی اس خطے پر بے جوڑ ہیں۔تب مساوات 1.33 کے تفرق درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

استمراری شرط کی بنا $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ برابر ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{شرط قطعیت} \tag{1.35}$$

مساوات 1.29 کا قطعی تفرقی مساوات ہونے کے لئے مساوات 1.35 پر پورا اترنا **لازمی**[55] اور **معقول**[56] شرط ہے۔

قطعی تفرقی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 1.33 کا x تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u=\int M \,\mathrm{d}x+k(y) \tag{1.36}$$

---

implicit solution[53]
continuous[54]
necessary condition[55]
sufficient condition[56]

جہاں تکمل کا مستقل از خود y کا تفاعل ہو سکتا ہے۔تکمل کا مستقل $k(y)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.36 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial y}$ لیتے ہوئے مساوات 1.34 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل کرتے ہیں جس کا y تکمل لینے سے k حاصل ہو گا۔(مثال 1.14 دیکھیں۔)

اسی طرح مساوات 1.34 کا y تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u = \int N \, \mathrm{d}y + m(x) \tag{1.37}$$

جہاں تکمل کا مستقل از خود x کا تفاعل ہو سکتا ہے۔تکمل کا مستقل $m(x)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.37 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial x}$ لیتے ہوئے مساوات 1.33 کی مدد سے $= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$ حاصل کرتے ہیں جس کا x تکمل لینے سے m حاصل ہو گا۔

مثال 1.14: قطعی تفرقی مساوات
درج ذیل کو حل کریں۔

$$(1 + 2xy^3) \, \mathrm{d}x + (2y + 3x^2y^2) \, \mathrm{d}y = 0 \tag{1.38}$$

حل: پہلے ثابت کرتے ہیں کہ یہ مساوات **قطعی** ہے۔یہ مساوات 1.29 کی طرح ہے جہاں

$$\begin{aligned} M &= 1 + 2xy^3 \\ N &= 2y + 3x^2y^2 \end{aligned}$$

ہیں۔ $\frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\frac{\partial N}{\partial y}$ لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 6xy^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 6xy^2 \end{aligned}$$

جو مساوات 1.35 پر پورا اترتے ہیں لہٰذا دی گئی مساوات قطعی تفرقی مساوات ہے۔آئیں اب اس کو حل کرتے ہیں۔

مساوات 1.36 کو استعمال کرتے ہیں۔

$$u = \int (1 + 2xy^3)\,\mathrm{d}x + k(y) = x + x^2y^3 + k(y) \tag{1.39}$$

اس کا y جزوی تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.34 کا استعمال کرتے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = N = 2y + 3x^2y^2$$

ہوئے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = 2y$$

اس کا y تکمل لیتے ہوئے k حاصل کرتے ہیں

$$k = \int 2y\,\mathrm{d}y = y^2 + c_1 \tag{1.40}$$

جہاں c_1 تکمل کا مستقل ہے۔چونکہ k صرف y پر منحصر ہے لہٰذا c_1 مستقل x پر منحصر نہیں ہو سکتا۔یوں مساوات 1.39 اور مساوات 1.40 سے قطعی تفرقی مساوات کا حاصل ہوتا ہے۔

$$u(x,y) = x + x^2y^3 + y^2 + c_1 = 0 \tag{1.41}$$

آخر میں مساوات 1.41 کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.38 حاصل کر کے حاصل حل کی درستگی ثابت کرتے ہیں۔

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = (1 + 2xy^3)\,\mathrm{d}x + (3x^2y^2 + 2y)\,\mathrm{d}y$$

مثال 1.15: مخصوص حل

$N = 2y + 3x^2y^2$ لیتے ہوئے مساوات 1.38 کو حل کریں جہاں $x = 1$ پر $y = 2$ ہے۔

حل: $\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2y + 3x^2y^2$ کا y تکمل

$$u = \int (2y + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y + m(x) = y^2 + x^2y^3 + m(x) \tag{1.42}$$

لے کر اس سے $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$$

جو M کے برابر ہو گا

$$2xy^3 + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = M = 1 + 2xy^3$$

جس سے

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = 1, \quad m = x + c_2$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو مساوات 1.42 میں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا حل ملتا ہے۔

$$u = y^2 + x^2y^3 + x + c_2 = 0$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$2^2 + (1^2)(2^3) + 1 + c_2 = 0, \quad c = -13$$

ملتا ہے جس سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y^2 + x^2y^3 + x - 13 = 0$$

مثال 1.16: غیر قطعی مساوات

مساوات $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ میں $M = -y$ اور $N = x$ ہیں لہٰذا $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$ لیکن $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$

ہے۔یوں دیا گیا مساوات **غیر قطعی**[57] ہے۔یوں قطعی مساوات کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے۔آئیں قطعی مساوات کی ترکیب استعمال کرنے کی کوشش کریں۔مساوات 1.36 سے

$$u = \int -y\,\mathrm{d}x + k(y) = -xy + k(y)$$

ملتا ہے جس کا y تفرق $\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ ہے جسے N یعنی x کے برابر پر کرنے سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = 2x$ ملتا ہے جس کا تکمل $k = 2xy + c$ ہے۔اب مستقل k صرف y پر منحصر ہو سکتا ہے جبکہ حاصل k اس شرط پر پورا نہیں اترتا لہٰذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔یوں قطعی تفرقی مساوات کی ترکیب اس مثال میں دیے تفرقی مساوات کے حل کے لئے نا قابل استعمال ہے۔آپ N سے شروع کرتے ہوئے حل کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔آپ اس راستے سے بھی حل حاصل نہیں کر پائیں گے۔

تخفیف بذریعہ جزو تکمل

مثال 1.16 میں تفاعل $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ غیر قطعی تھا البتہ اس کو $\frac{1}{x^2}$ سے ضرب دینے سے $-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = 0$ حاصل ہوتا ہے جو قطعی مساوات ہے۔آپ مساوات 1.35 استعمال کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ واقعی قطعی مساوات ہے۔حاصل قطعی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔

$$-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c \tag{1.43}$$

اس ترکیب کو عمومی بناتے ہوئے ہم کہتے ہیں کہ غیر قطعی مساوات مثلاً

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.44}$$

کو ایک مخصوص تفاعل F سے ضرب دینے سے قطعی مساوات

$$FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.45}$$

---

[57] non exact

حاصل کی جا سکتی ہے۔تفاعل F **جزو تکمل**[58] کہلاتا ہے اور یہ عموماً x اور y پر منحصر ہو گا۔حاصل قطعی مساوات کو حل کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

مثال 1.17: جزو تکمل

مساوات 1.43 میں جزو تکمل $\frac{1}{x^2}$ تھا لہٰذا اس کا حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \qquad \frac{y}{x} = c$$

مساوات $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ کے مزید جزو تکمل $\frac{1}{y^2}$ ، $\frac{1}{xy}$ اور $\frac{1}{x^2+y^2}$ ہیں جن سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{y^2} &= \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \qquad \frac{x}{y} = c\\
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{xy} &= -\,\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right), \qquad \ln\frac{x}{y} = c_1, \qquad \frac{x}{y} = x\\
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \mathrm{d}\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right), \qquad \tan^{-1}\frac{x}{y} = c_1, \qquad \frac{x}{y} = c
\end{aligned}$$

جزو تکمل کا حصول

مساوات $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0$ کی قطعیت کا شرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ مساوات 1.35 ہے۔مساوات $FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = 0$ کے لئے اس شرط کو درج ذیل لکھا جائے گا

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \tag{1.46}$$

[58] integrating factor

جس کو زنجیری طریقہ تفرق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت تفرق کو ظاہر کرتی ہے (یعنی $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$)۔

$$F_y P + F P_y = F_x Q + F Q_x \tag{1.47}$$

یہ مساوات عموماً پیچیدہ ہو گا لہٰذا ہم اس پر مزید وقت ضائع نہیں کرتے۔ہم ایسے جزو تکمل تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو صرف x یا صرف y پر منحصر ہو۔صرف x پر منحصر جزو تکمل کی صورت میں $F = F(x)$ لکھا جائے گا اور $F_y = 0$ ہو گا جبکہ $F_x == F' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ ہو گا۔یوں مساوات 1.46 درج ذیل صورت اختیار کر لیگا

$$F P_y = F' Q + F Q_x \tag{1.48}$$

جسے FQ سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] \tag{1.49}$$

اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 1.1: اگر مساوات 1.44 سے مساوات 1.49 میں حاصل کردہ R صرف x پر منحصر ہو تب مساوات 1.44 کا جزو تکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.49 کا تکمل لے کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$F(x) = e^{\int R(x)\,\mathrm{d}x} \tag{1.50}$$

اسی طرح $F = F(y)$ کی صورت میں مساوات 1.49 کی جگہ درج ذیل ملتا ہے

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \tag{1.51}$$

جس سے درج بالا مسئلے کی جوڑی ملتی ہے۔

مسئلہ 1.2: اگر مساوات 1.44 سے مساوات 1.51 میں حاصل کردہ R صرف y پر منحصر ہو تب مساوات 1.44 کا جزو تکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.51 کا تکمل لے کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$F(y) = e^{\int R(y)\,\mathrm{d}y} \tag{1.52}$$

مثال 1.18: جزو تکمل

دیے مساوات کا جزو تکمل حاصل کرتے ہوئے اس کا عمومی حل حاصل کریں۔ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ سے مخصوص حل حاصل کریں۔

$$(e^{x+y} + ye^y)\,\mathrm{d}x + (xe^y - 1)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.53}$$

حل: پہلا قدم: غیر قطعیت ثابت کرتے ہیں۔مساوات 1.35 پر درج ذیل پورا نہیں اترتا لہٰذا غیر قطعیت ثابت ہوتی ہے۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^y + ye^y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

دوسرا قدم: جزو تکمل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 1.49 سے حاصل R کی قیمت x اور y دونوں پر منحصر ہے

$$R = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = \frac{1}{xe^y - 1}(e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y)$$

لہٰذا مسئلہ 1.1 قابل استعمال نہیں ہے۔آئیں مسئلہ 1.2 استعمال کر کے دیکھیں۔ R کو مساوات 1.51 سے حاصل کرتے ہیں۔

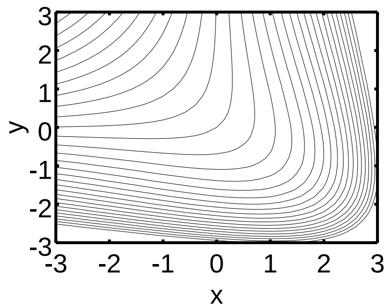
$$R = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] = \frac{1}{e^{x+y} + ye^y}(e^y - e^{x+y} - e^{-y} - ye^y) = -1$$

مساوات 1.52 سے جزو تکمل $F(y) = e^{-y}$ حاصل ہوتا ہے۔مساوات 1.53 کو F سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل قطعی مساوات ملتی ہے۔اس کو قطعیت کے لئے پرکھ کر دیکھیں۔آپ کو شرط قطعیت کے دونوں اطراف اکائی حاصل ہو گا۔

$$(e^x + y)\,\mathrm{d}x + (x - e^{-y})\,\mathrm{d}y = 0$$

مساوات 1.36 استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں۔

$$u = \int (e^x + y)\,\mathrm{d}x + k(y) = e^x + xy + k(y)$$



شکل 1.17: مثال 1.18

اس کا y تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.34 کے استعمال سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل کرتے ہیں جس کا تکمل k ہو گا۔

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}=x-e^{-y},\quad \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}=N=-e^{-y},\quad k=e^{-y}+c_1$$

یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.17 میں دکھایا گیا ہے۔

$$u(x,y)=e^x+xy+e^{-y}=c \tag{1.54}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: **ابتدائی معلومات** $y(0)=-2$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے مستقل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$e^0+(0)(-2)+e^{-(-2)}=c,\quad c=e^2$$

یوں مخصوص حل $e^x+xy+e^{-y}=e^2=7.389$ ہے۔

چھوتا قدم: عمومی حل اور مخصوص حل کو واپس دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

سوالات

سوال 1.70 تا سوال 1.81 کو قطعیت کے لئے پرکھیں اور حل کریں۔ غیر قطعی صورت میں دیا گیا جزو تکمل استعمال کریں یا اس کو بھی حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہو، وہاں مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.70:

$$2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $y = \frac{c}{x^2}$

سوال 1.71:

$$x^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $2x^3 + 3y^2 = c$

سوال 1.72:

$$[\sin x + (x + y^3)\cos x]\,\mathrm{d}x + 3y^2 \sin x\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $\sin x(x + y^3)$

سوال 1.73:

$$(y + 1)\,\mathrm{d}x + (x + 1)\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $x + xy + y = c$

سوال 1.74:

$$(e^y + ye^x + y)\,\mathrm{d}x + (xe^y + e^x + x)\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $xe^y + xy + ye^x$

سوال 1.75:

$$\frac{y^2+4x}{x}\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y=0$$

جواب: $F=x$ ، $u=(2x+y^2)x=c$

سوال 1.76:

$$ye^x(2x+1+2y^2)\,\mathrm{d}x+e^x(x+2y)\,\mathrm{d}y=0$$

جواب: $F=e^x$ ، $ye^{2x}(x+y)=c$

سوال 1.77:

$$(2y^2+2xy+y)\,\mathrm{d}x+(2y+x)\,\mathrm{d}y=0$$

جواب: $F=e^{2x}$ ، $e^{2x}(y^2+xy)=c$

سوال 1.78:

$$y\,\mathrm{d}x+(2xy-e^{-2y})\,\mathrm{d}x=0,\quad y(1)=1$$

جواب: $F=\frac{e^{2y}}{y}$ ، $xe^{2y}-\ln y=e^2$

سوال 1.79:

$$3(y+1)\,\mathrm{d}x=2x\,\mathrm{d}y,\quad y(1)=3,\quad F=\frac{y+1}{x^4}$$

جواب: $y+1=4x^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.80:

$$y\,\mathrm{d}x+[y+\tan(x+y)]\,\mathrm{d}y=0,\quad y(0)=\tfrac{\pi}{2},\quad F=\cos(x+y)$$

جواب: $y\sin(x+y)=\frac{\pi}{2}$

سوال 1.81:

$$(a+1)y\,\mathrm{d}x+(b+1)x\,\mathrm{d}y=0,\quad y(1)=1,\quad F=x^ay^b$$

جواب: $x^{a+1}y^{b+1}=0$

سوال 1.82: جزو تکمل کو مزید بہتر سمجھنے کی خاطر کسی بھی تفاعل مثلاً $u=e^{2x}(y^2+xy)=c$ کے مکمل تفرق کو $M\,\mathrm{d}+N\,\mathrm{d}y=0$ صورت میں لکھیں یعنی $e^{2x}(2y^2+2xy+y)\,\mathrm{d}x+e^{2x}(2y+x)\,\mathrm{d}y=0$ جو قطعی مساوات ہے۔ تفرقی مساوات کو e^{2x} سے تقسیم کرنے سے غیر قطعی مساوات $(2y^2+2xy+y)\,\mathrm{d}x+(2y+x)\,\mathrm{d}y=0$ ملتا ہے۔۔اس غیر قطعی مساوات کو e^{2x} سے ضرب دیتے ہوئے قطعی بنایا جا سکتا ہے لہٰذا e^{2x} اس غیر قطعی مساوات کا جزو تکمل ہے۔

1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی

ایسے سادہ درجہ اول تفرقی مساوات جنہیں درج ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہو خطی[59] کہلاتے ہیں

$$y'+p(x)y=r(x) \tag{1.55}$$

جبکہ ایسے مساوات جنہیں الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر خطی کہلاتے ہیں۔

خطی مساوات 1.55 کی بنیادی خاصیت یہ ہے کہ اس میں تابع متغیرہ y اور تابع متغیرہ کا تفرق y' دونوں خطی ہیں جبکہ $p(x)$ اور $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ اگر غیر تابع متغیرہ وقت ہو تب x کی جگہ t لکھا جاتا ہے۔

مساوات 1.55 خطی مساوات کی معیاری صورت ہے جس کے پہلے رکن y' کا جزو ضربی اکائی ہے۔ ایسی مساوات جس میں y' کی بجائے $f(x)y'$ پایا جاتا ہو کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے، اس کی معیاری صورت حاصل

[59] linear

کی جا سکتی ہے۔ یوں خطی مساوات $(x+\sqrt{x})y' + y\sec x = e^x$ کو $(x+\sqrt{x})$ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے معیاری صورت $y' + \frac{\sec x}{x+\sqrt{x}}y = \frac{e^x}{x+\sqrt{x}}$ میں لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ $r(x)$ **قوت**[60] کو ظاہر کر سکتی ہے جبکہ مساوات کا حل $y(x)$ **ہٹاو**[61] ہو سکتا ہے۔اسی طرح $r(x)$ **برقی دباو**[62] ہو سکتا ہے جبکہ $y(x)$ **برقی رو**[63] ہو سکتی ہے۔ انجینئری میں $r(x)$ کو عموماً **درآیدہ**[64] یا **جبری تفاعل**[65] کہتے ہیں جبکہ $y(x)$ کو **ماحصل**[66] یا **رد عمل**[67] کہتے ہیں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم مساوات 1.55 کو خطہ $a < x < b$ میں حل کرنا چاہتے ہیں۔اس خطے کو J کہا جائے گا۔پہلے اس مساوات کی سادہ صورت حل کرتے ہیں جس میں J پر تمام x کے لئے $r(x)$ صفر کے برابر ہو۔ (اس کو بعض اوقات $r(x) \equiv 0$ لکھا جاتا ہے۔) ایسی صورت میں مساوات 1.55 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$y' + p(x)y = 0 \tag{1.56}$$

جس کو **متجانس**[68] مساوات کہتے ہیں۔متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x, \quad \ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + c_1$$

دونوں اطراف کا قوت نمائی لیتے ہوئے متجانس خطی مساوات 1.56 کا حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y(x) = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \quad (c = \mp e^{c_1} \quad \text{جب} \quad y \lessgtr 0) \tag{1.57}$$

یہاں $c = 0$ بھی چنا جا سکتا ہے جو **غیر اہم حل**[69] (**یعنی صفر حل**) $y(x) = 0$ دیتا ہے۔

---

force[60]
displacement[61]
voltage[62]
current[63]
input[64]
forcing function[65]
output[66]
response[67]
homogeneous[68]
trivial solution[69]

غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب مساوات 1.55 کو اس صورت میں حل کرتے ہیں جب $r(x) \not\equiv 0$ ہو یعنی J پر کہیں کہیں یا پورے خطے پر $r(x)$ غیر صفر ہو۔ایسی صورت میں مساوات 1.55 **غیر متجانس**[70] کہلاتا ہے۔غیر متجانس مساوات کی خوشگوار خاصیت یہ ہے کہ اس کا جزو تکمل $F(x)$ صرف x پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس کو مسئلہ 1.1 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔جزو تکمل کو حاصل کرتے ہیں۔غیر قطعی مساوات 1.55 کو ترتیب دے کر F سے ضرب دیتے ہوئے قطعی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$(py - r)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0, \quad F(py - r)\,\mathrm{d}x + F\,\mathrm{d}y = 0$$

جس سے مساوات 1.35 کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(py - r)] = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{یعنی} \quad Fp = \frac{\partial F}{\partial x}$$

متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے تکمل لیتے ہوئے F حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = p\,\mathrm{d}x, \quad \ln|F| = h(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{لہٰذا} \quad F = e^h$$

مساوات 1.55 کو جزو تکمل F سے ضرب دیتے اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = p$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$e^h y' + e^h h' y = e^h r \quad \text{یعنی} \quad \left(e^h y\right)' = e^h r$$

جس کا تکمل لیتے ہیں۔

$$e^h y = \int e^h r\,\mathrm{d}x + c$$

دونوں اطراف کو e^h سے تقسیم کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات 1.55 کا حل ملتا ہے۔

$$y = e^{-h}\left(\int e^h r\,\mathrm{d}x + c\right), \quad h = \int p(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.58}$$

---

heterogeneous[70]

یوں مساوات 1.55 کا حل درج بالا تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو نسبتاً آسان ثابت ہوتا ہے۔اگر درج بالا تکمل بھی مشکل ثابت ہو تب تفرقی مساوات کا حل اعدادی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہاں بتلاتا چلوں (سوال 1.83 دیکھیں) کہ h کے حصول میں تکمل کا مستقل کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہٰذا اسے صفر تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.58 کا تکمل درآیدہ $r(x)$ پر منحصر ہے جبکہ ابتدائی معلومات تکمل کا مستقل c تعین کرتی ہیں۔اس مساوات کو درج ذیل لکھتے ہوئے

$$y = e^{-h}\int e^{h} r \,\mathrm{d}x + ce^{-h} \tag{1.59}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ابتدائی معلومات سے پیدا رد عمل} + \text{درآیدہ سے پیدا رد عمل} = \text{کل ماحصل} \tag{1.60}$$

مثال 1.19: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' + y\cot x = 2x\operatorname{cosec} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حل: یہاں $p = \cot x$ اور $r = \operatorname{cosec} x$ ہیں۔

$$h(x) = \int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert$$

یوں مساوات 1.58 میں

$$e^{h} = \sin x, \quad e^{-h} = \operatorname{cosec} x, \quad e^{h} r = (\sin x)(2x\operatorname{cosec} x) = 2x$$

ہیں لہٰذا عمومی حل

$$y = \operatorname{cosec} x\left(\int 2x\,\mathrm{d}x + c\right) = \operatorname{cosec} x(x^2 + c)$$

ہو گا۔ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c=-\frac{\pi^2}{4}$ ملتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہے

$$y=\operatorname{cosec} x\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)$$

جس میں $x^2\operatorname{cosec} x$ درآیدہ کا پیدا کردہ رد عمل ہے جبکہ $-\frac{\pi^2}{4}\operatorname{cosec} x$ ابتدائی معلومات کا پیدا کردہ رد عمل ہے۔

مثال 1.20: برقی دور

شکل 1.18 میں مزاحمت[71] R اور امالہ[72] L سلسلہ وار جڑے ہیں۔اس دور کو سلسلہ وار[73] RL دور کہتے ہیں۔لمحہ $t=0$ پر برقی دباو[74] E برقی دور پر لاگو کیا جاتا ہے جو دور میں برقی رو[75] $I(t)$ کو جنم دیتا ہے۔ابتدائی رو صفر $I(0)=0$ کے برابر ہے۔

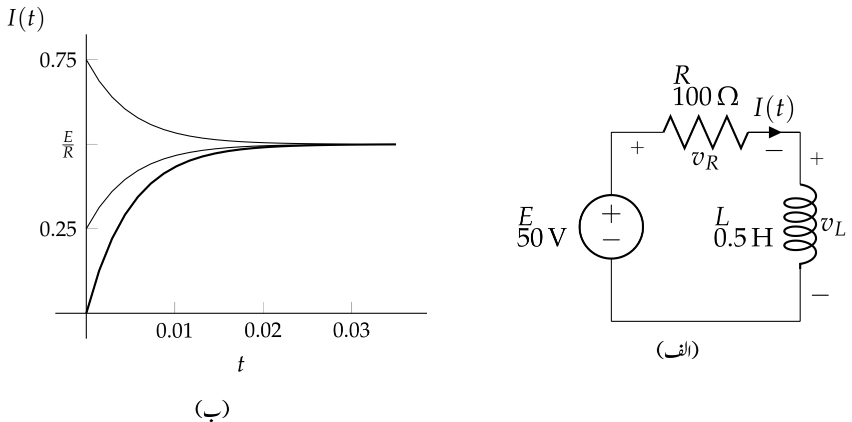
طبعی معلومات: مزاحمت کی اکائی اوہم[76] Ω اور امالہ کی اکائی ہینری[77] H ہے۔قانون اوہم[78] کے تحت مزاحمت R میں رو I اور دباو v_R کا تعلق $v_R=IR$ ہے۔اسی طرح امالہ میں رو اور دباو v_L کا تعلق $v_L=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ ہے۔کرخوف قانون دباو[79] کے تحت ان برقی دباو کا مجموعہ درآیدہ دباو E کے برابر ہو گا۔

حل: یہاں غیر تابع متغیرہ وقت t ہے جبکہ تابع متغیرہ رو $I(t)$ ہے۔کرخوف کے قانون کے تحت

$$v_L+v_R=E,\quad LI'+RI=E,\quad I'+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$$

---

resistance[71]
inductor[72]
series circuit[73]
electric voltage[74]
electric current[75]
Ohm[76]
Henry[77]
Ohm's law[78]
Kirchoff's voltage law[79]



شکل 1.18: مثال 1.20 کا سلسلہ وار برقی دور۔

لکھا جائے گا جہاں آخری قدم پر L سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے۔اس کو مساوات 1.58 کی مدد سے حل کرتے ہیں جہاں x کی جگہ t اور y کی جگہ I استعمال ہو گا۔یہاں $p=\frac{R}{L}$ اور $r=\frac{E}{L}$ ہیں لہٰذا $h=\frac{R}{L}t$ ہو گا اور عمومی حل

$$I=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{E}{L}\,\mathrm{d}x+c\right)$$

لکھا جائے گا۔تکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}}+c\right)=\frac{E}{R}+ce^{-\frac{R}{L}t} \tag{1.61}$$

شکل 1.18-الف میں پرزوں کی قیمتیں دی گئی ہیں جن سے $\frac{E}{R}=\frac{50}{100}=0.5$ اور $\frac{R}{L}=\frac{100}{0.5}=200$ ملتا ہے لہٰذا عمومی حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I=0.5+ce^{-200t} \tag{1.62}$$

مساوات 1.61 میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات میں $ce^{-\frac{R}{L}t}$ جزو $t\to\infty$ پر صفر کے برابر ہو گا لہٰذا کافی دیر بعد رو پہلے جزو $\frac{E}{R}$ کے برابر ہو گی جسے رو کی **برقرار حال**[80]

steady state[80]

قیمت کہتے ہیں۔یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کافی دیر بعد رو کی قیمت کا دارومدار ابتدائی معلومات پر منحصر نہیں ہے۔رو کتنی جلدی برقرار حال قیمت اختیار کرتی ہے، اس کا دارومدار $\frac{R}{L}$ کی قیمت پر ہے۔

مساوات 1.61 میں ابتدائی معلومات $I(0) = 0$ پر کرتے $0 = 0.5 + ce^0$ ہوئے $c = -0.5$ ملتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.18-ب میں موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔شکل میں ابتدائی قیمت $I(0) = 0.25$ اور $I(0) = 0.75$ سے حاصل مخصوص حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

$$I(t) = 0.5(1 - e^{-200t}) \tag{1.63}$$

مثال 1.21: جسم میں ہارمونز کی مقدار

جسم میں موجود **غدود**[81] یعنی گلٹی، خون میں مختلف مرکبات (**ہارمونز**)[82] خارج کرتے ہوئے مختلف نظام کو قابو کرتے ہیں۔تصور کریں کہ خون سے ایک مخصوص ہارمون مسلسل ہٹایا جاتا ہے۔ہٹانے کی شرح اس لمحے موجود ہارمون کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ساتھ ہی ساتھ تصور کریں کہ روزانہ غدود اس ہارمون کو خون میں ایک مخصوص انداز سے خارج کرتی ہے۔خون میں موجود ہارمون کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔صبح چھ بجے خون میں ہارمون کی مقدار y_0 لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔

حل: پہلا قدم: نمونہ کشی: چوبیس گھنٹوں میں خارج ہونے کے عمل کو $a + b\sin(\frac{2\pi t}{24})$ سے ظاہر کرتے ہیں۔چونکہ خون میں ہارمون خارج ہونے سے خون میں ہارمون کی مقدار بڑھتی ہے لہٰذا $a \geq b$ ہو گا۔یوں خارج کردہ ہارمون کی مقدار مثبت ہو گی۔کسی بھی لمحے خون میں ہارمون کی مقدار کی تبدیلی کی شرح، اس لمحے خون میں ہارمون کے داخل ہونے کی مقدار اور اس کی ہٹائی جانے والی مقدار میں فرق کے برابر ہو گا۔یوں مسئلے کا تفرقی مساوات درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = a + b\sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right) - ky(t) \quad \text{یعنی} \quad y' - ky = a + b\sin\omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{24} \tag{1.64}$$

---

[81] gland
[82] hormones

دوسرا قدم: عمومی حل: یہاں $p = k$ ہے لہٰذا $h = \int k\,\mathrm{d}t = kt$ ہو گا۔اسی طرح $r = a + b\sin\omega t$ ہے لہٰذا مساوات 1.58 سے عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو **تکمل بالحصص**[83] حل کیا گیا ہے

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-kt}\int e^{kt}(a + b\sin\omega t)\,\mathrm{d}t + ce^{-kt}\\
&= e{-}kte^{kt}\left[\frac{a}{k} + \frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t + \omega\sin\omega t)\right] + ce^{-kt}\\
&= \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + ce^{-kt}
\end{aligned}
$$

عمومی حل کا آخری جزو وقت بڑھنے سے آخر کار صفر ہو جاتا ہے۔یوں **برقرار حل**[84] بقایا اجزاء پر مشتمل ہے۔

آخر قدم: مخصوص حل: صبح چھ بجے کو لمحہ $t = 0$ تصور کرتے ہوئے ابتدائی معلومات کو $y(0) = y_0$ لکھا جا سکتا ہے۔ان قیمتوں کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$
y_0 = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos 0 + \omega\sin 0) + ce^0, \quad \text{یعنی} \quad c = y_0 - \frac{a}{k} - \frac{bk}{k^2+\omega^2}
$$

اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔مخصوص حل کو $a = 1$ ، $b = 1$ ، $k = 0.04$ اور $y_0 = 0$ لیتے ہوئے جیسے شکل 1.19 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y_0 = 50$ لیا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خون میں ہارمون کی مقدار بہت جلد ایک مخصوص اوسط قیمت پر پہنچ پاتی ہے۔

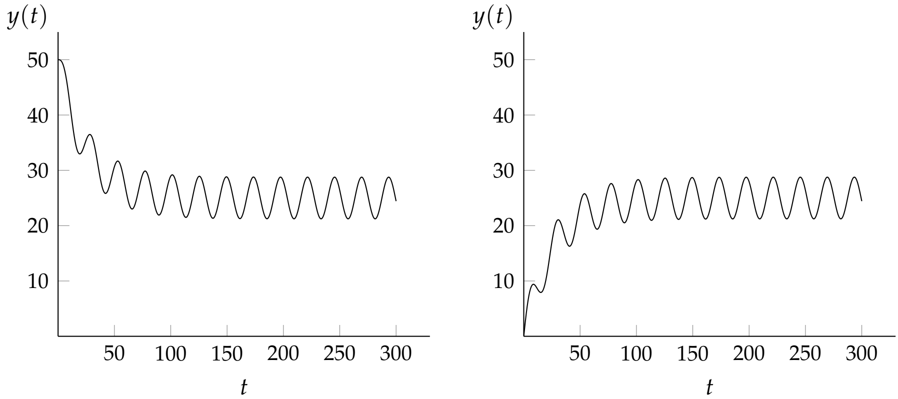
$$
y = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + (y_0 - \frac{a}{k} - \frac{bk}{k^2+\omega^2})e^{-kt}
$$

حصول خطی مساوات بذریعہ تخفیف۔برنولی مساوات

ایسے بہت سارے نظام ہیں جن کے غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کو خطی بنایا جا سکتا ہے۔ان میں **برنولی مساوات**[85]

$$
y' + p(x)y = g(x)y^a, \quad a \text{ حقیقی عدد ہے} \tag{1.65}
$$

integration by parts[83]
steady state response[84]
Bernoulli equation[85]



(الف) (ب)

شکل 1.19: مثال 1.21: خون میں ہارمون کی مقدار بالمقابل وقت۔

انتہائی اہم[86] ہے۔ برنولی مساوات $a = 0$ اور $a = 1$ کی صورت میں خطی ہے۔ اس کے علاوہ یہ غیر خطی ہے۔ آئیں اس کو تبدیل کرتے ہوئے خطی مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}$$

کا تفرق لیتے ہوئے اس میں مساوات 1.65 سے y' پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
u' &= (1-a)y^{-a}y' \\
&= (1-a)y^{-a}(gy^a - py) \\
&= (1-a)g - (1-a)py^{1-a} \\
&= (1-a)g - (1-a)pu
\end{aligned}$$

یوں خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u + (1-a)u' = (1-a)g \tag{1.66}$$

حاصل ہوتی ہے۔

[86] یعقوب برنولی (1654-1705): سوئزرلینڈ کے برنولی خاندان نے دنیا کو کئی اہم ریاضی داں دیے۔ یعقوب برنولی ان میں سر فہرست ہے۔ انہوں نے علم الامکانیات میں بہت کام کیا۔ قوت نمائی کا مستقل e بھی انہوں نے دریافت کیا۔

مثال 1.22: ورہلسٹ مساوات برائے نمو آبادی درج ذیل برنولی مساوات کو ورہلسٹ[87] مساوات کہتے ہیں جو نمو آبادی[88] کی تفرقی مساوات ہے۔اس کو حل کریں۔ (سوال 1.109 کو بھی دیکھیں۔)

$$y' = ay - by^2 \tag{1.67}$$

حل:اس کو مساوات 1.65 کی صورت $y' - ay = -by^2$ میں لکھ کر $a = 2$ ملتا ہے۔یوں ہم $u = y^{1-a} = y^{-1}$ کے تفرق میں مساوات 1.67 سے y' پر کرتے ہیں

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(ay - by^2) = -ay^{-1} + b = -ua + b$$

جس سے خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u' + au = b$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.58 سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$u = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

چونکہ $u = y^{-1}$ ہے لہٰذا اس سے درج ذیل ملتا ہے جس کو شکل 1.20 میں دکھایا گیا ہے۔

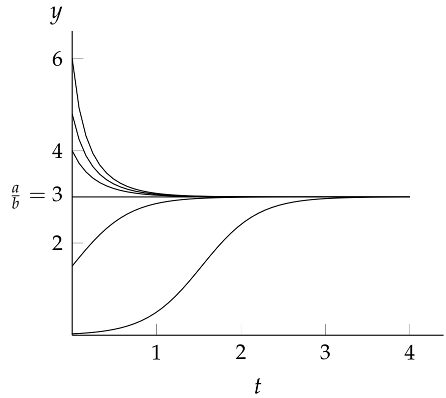
$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}} \tag{1.68}$$

مساوات 1.67 کو دیکھ کر $y(t) = 0$ حل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 1.23: مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ

مساوات 1.58 کو ایک دلچسپ ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے جسے مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ[89] کہتے ہیں۔متجانس

Pierre Francois Verhulst[87]
population growth[88]
variation of parameter[89]



شکل 1.20: مثال 1.22: نمو آبادی کا خط۔

مساوات $y'+p(x)y=0$ کا حل $y_1=ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ مساوات 1.57 دیتا ہے جس کو $y_1=ce^{-h}$ لکھتے ہیں۔ تصور کریں کہ غیر متجانس مساوات $y'+p(x)y=e(x)$ کا حل $y_2=uy_1$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $y_2'=u'y_1+uy_1'$ ہو گا۔ غیر متجانس مساوات میں y_2 اور y_2' پر کرتے ہیں۔

$$u'y_1+uy_1'+puy_1=r,\quad u'y_1+u(y_1'+py_1)=r,\quad u'y_1=r$$

چونکہ y_1 متجانس مساوات کا حل ہے لہٰذا آخری قدم پر $y'+py=0$ پر کرتے ہوئے $u'y_1=r$ حاصل کیا گیا ہے۔ اس سے u بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہوئے y_2 لکھتے ہیں جو مساوات 1.58 ہے۔

$$u=\int\frac{r}{y_1}\,\mathrm{d}x,\quad u=\int re^{h}\,\mathrm{d}x+c,\quad \text{لہٰذا}\quad y_2=uy_1=e^{-h}\left[\int re^{h}\,\mathrm{d}x+c\right]$$

نمو آبادی

ورہلسٹ مساوات پودوں، جانوروں اور انسانی آبادی کی نمو کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں $b=0$ پر کرنے سے مالتھس مساوات 1.8 ملتی ہے جو آبادی کی بے روک نمو دیتی ہے۔ ورہلسٹ مساوات میں جزو $-by^2$ آبادی بے قابو بڑھنے سے روکتی ہے۔ ورہلسٹ مساوات کو $y'=ay(1-\frac{b}{a}y)$ لکھ کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{b}{a}y<1$

کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل بڑھے گی جب تک بڑھے گی جبکہ $1 > \frac{b}{a}y$ ہو، $\frac{b}{a}y > 1$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل گھٹے گی جب تک $1 < \frac{b}{a}y$ ہو گا۔دونوں صورتوں میں عین $\frac{b}{a}y = 1$ یعنی $y = \frac{a}{b}$ پر آبادی میں تبدیلی رک جائے گی۔شکل 1.20 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

ورہلسٹ نمو آبادی کی مساوات میں غیر تابع متغیرہ t صریحاً نہیں پایا جاتا لہٰذا یہ **خود مختار مساوات** ہے۔خود مختار مساوات

$$y' = f(y) \tag{1.69}$$

کے مستقل حل پائے جاتے ہیں جنہیں **متوازن حل**[90] یا **متوازن نقطے**[91] کہا جاتا ہے۔خود مختار مساوات میں تفاعل $f(y)$ کے صفر (f(y)=0) پر $y' = 0$ ہو گا جس کا حل $y = c$ ہے جہاں c تکمل کا مستقل ہے۔تفاعل کے صفر کو مساوات 1.69 کے **فاصل نقطے**[92] کہتے ہیں۔مساوات 1.67 کے فاصل نقطے $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔یوں اس مساوات کے مستقل حل $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔متوازن حل کو دو گروہ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں **مستحکم**[93] اور **غیر مستحکم**[94] حل کہتے ہیں۔ ان کو شکل 1.20 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے جہاں $y = \frac{a}{b} = 3$ مستحکم حل ہے جبکہ $y = 0$ غیر مستحکم حل ہیں۔

سوالات

سوال 1.83: مساوات 1.58 میں h کے حصول میں تکمل کا مستقل صفر لیا جا سکتا ہے۔ایسا کیوں ممکن ہے؟

سوال 1.84: ثابت کریں:

$$e^{\ln x} = x, \quad e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, \quad e^{-\ln \sec x} = \cos x$$

سوال 1.85 تا سوال 1.95 کے عمومی حل تلاش کریں۔ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل حاصل کریں اور اس کا خط کھینچیں۔

[90] equilibrium solution
[91] equilibrium points
[92] critical points
[93] stable
[94] unstable

سوال 1.85:

$$y' - y = 2$$

جواب: $y = ce^{x} - 2$

سوال 1.86:

$$y' - 4y = 2x$$

جواب: $y = ce^{4x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}$

سوال 1.87:

$$y' + 5y = e^{5x}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $y = \frac{e^{5x}}{10} + \frac{19}{10}e^{-5x}$

سوال 1.88:

$$y' + 6y = 4\sin 4x, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 6$$

جواب: $y = \frac{9}{13}\sin 4x - \frac{6}{13}\cos 4x + \frac{69}{13}e^{\frac{3\pi}{4} - 6x}$

سوال 1.89:

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 3$$

جواب: $y = 1 + 2e^{-x^2}$

سوال 1.90:

$$xy' = 2y + x^3 e^{x}$$

جواب: $y=x^2e^x+cx^2$

سوال 1.91:

$$y'+y\tan x=\sin x$$

جواب: $y=c\cos x-\cos x\ln\cos x$

سوال 1.92:

$$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$$

جواب: $y=xe^{-\sin x}+ce^{-\sin x}$

سوال 1.93:

$$\cos xy'+(4y-2)\sec x=0$$

جواب: $y=\frac{1}{2}+ce^{-4\tan x}$

سوال 1.94:

$$y'=(y-4)\tan x,\quad y(0)=3$$

جواب: $y=4-\sec x$

سوال 1.95:

$$xy'+6y=5x^3,\quad y(1)=1$$

جواب: $y=\frac{5}{9}x^3+\frac{4}{9x^6}$

سوال 1.96 تا سوال 1.100 میں خطی سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات زیر بحث لائیں جائیں گے۔انہیں خصوصیات کی بنا انہیں غیر خطی سادہ تفرقی مساوات پر فوقیت حاصل ہے جو یہ خصوصیات نہیں رکھتے۔نمونہ کشی کرتے ہوئے

انہیں وجوہات کی وجہ سے خطی مساوات حاصل کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ان سوالات میں آپ کو متجانس اور غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

سوال 1.96: متجانس مساوات 1.56 کے حل y_1 اور y_2 کا عمومی مجموعہ $ay_1 + by_2$ بھی اس کا حل ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ثابت کریں کہ غیر متجانس مساوات 1.55 یہ خصوصیات نہیں رکھتا۔

سوال 1.97: مساوات 1.56 کا غیر اہم حل (یعنی صفر حل) $y \equiv 0$ [یعنی x کی ہر قیمت کے لئے $y(x) = 0$ ہے] پایا جاتا ہے جبکہ غیر متجانس مساوات 1.55 [جس میں $r(x) \neq 0$ ہو] کا ایسا حل نہیں پایا جاتا۔

سوال 1.98: مساوات 1.56 کے حل y_1 اور مساوات 1.55 کے حل y_2 کا مجموعہ $y_1 + y_2$ بھی مساوات 1.55 کا حل ہے۔

سوال 1.99: مساوات 1.55 کے دو عدد حل y_1 اور y_2 کا فرق $y_1 - y_2$ مساوات 1.56 کا حل ہے۔

سوال 1.100: اگر $y' + p(x)y = r_a(x)$ کا حل y_1 اور $y' + p(x)y = r_b(x)$ کا حل y_2 ہو جہاں دونوں مساوات کے $p(x)$ یکساں ہیں تو آپ $y_1 + y_2$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

اس حصے میں سیکھے گئے ترکیب یا علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہوئے سوال 1.101 تا سوال 1.106 کے عمومی حل حاصل کریں۔جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہوں وہاں مخصوص حل بھی حاصل کریں۔

سوال 1.101:

$$y' + y = y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

جواب: $\frac{y-1}{y} = e^x$

سوال 1.102:

$$y' + xy = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $(y-1)(y+1) = 3^{-x^2}$

سوال 1.103:

$$y' + y = \frac{x}{y}$$

جواب: $2y^2 + 1 - 2x = ce^{-2x}$

سوال 1.104:

$$y' = 5y - 15y^2$$

جواب: $\frac{3y-1}{y} = ce^{-5x}$

سوال 1.105:

$$y' = \frac{\cot y}{x+1}, \quad y(0) = 1$$

جواب: $(x+1)\cos y = 2$

سوال 1.106:

$$2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x, \quad (\text{پر کریں } y^2 = z)$$

جواب: $\frac{2e^x y^2 - xe^{2x}}{2x} = c$

سوال 1.107: پانی کو چولہے پر برتن میں گرم کیا جاتا ہے۔ برتن کو آگ سے اتارتے وقت پانی کا درجہ حرارت $99\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہے جبکہ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت $90\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہے۔ فضا کا درجہ حرارت $32\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہے۔ پانی کتنی دیر میں تقریباً فضا کے درجہ حرارت (مثلاً $33\,^{\circ}\mathrm{C}$) پر پہنچے گا؟

جواب: تقریباً چار گھنٹے اور پچاس منٹ۔

سوال 1.108: مریض کو قطرہ قطرہ نمکیات کا محلول بذریعہ شریان دیا جاتا ہے جس میں دوائی حل کی گئی ہے۔لمحہ $t = 0$ سے مریض کو مسلسل a گرام فی منٹ دوائی دی جاتی ہے جبکہ جسم کا نظام دوائی کو مسلسل خون سے نکال کر خارج کرتا ہے۔خون سے دوائی ہٹانے کی شرح خون میں کل دوائی کی مقدار کے راست تناسب ہے۔اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کریں اور مساوات کو حل کریں۔

جوابات: $y' = a - ky$ اور لمحہ $t = 0$ پر خون میں دوائی کی مقدار صفر ہے، $y = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt})$

سوال 1.109: وبائی بیماری کا پھیلاو

وبائی بیماری ایک شخص سے دوسرے شخص کو منتقل ہوتے ہوئے بڑھتی ہے۔تصور کریں کہ ایک مخصوص وبا کی پھیلاو سانس کے ذریعہ ہوتی ہے جو دو اشخاص کے قریب ہونے سے ممکن ہے۔یوں وبا میں اضافے کی شرح مریض اور صحت مند شخص کے قریب آنے کے راست تناسب ہے۔تصور کریں شہر میں کل آبادی a ہے جبکہ لمحہ t پر بیماروں کی تعداد $y(t)$ ہے۔تصور کریں کہ تمام لاگ مکمل آزادی کے ساتھ آپس میں ملتے جلتے ہیں۔اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے مسئلے کا تفرقی مساوات حاصل کریں۔مساوات کو حل کریں۔

حل: کسی بھی لمحے y لوگ بیمار اور بقایا یعنی $a - y$ لوگ صحت مند ہیں۔اگر dt دورانیے میں ایک بیمار شخص کسی ایک شخص سے ملے تو $\frac{a-y}{a}$ امکان ہے کہ وہ صحت مند شخص سے ملا ہو گا۔ اسی دورانیے میں بقایا بیمار بھی کسی سے ملے ہوں گے لہٰذا بیمار اور صحت مند کے ملنے کا امکان $y\left(\frac{a-y}{a}\right)$ ہو گا۔اس طرح بیماری میں اضافے کی شرح کو $y' = ky\left(\frac{a-y}{a}\right)$ لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 1.67 ہے۔لمحہ $t = 0$ پر ایک شخص بیمار تصور کرتے ہوئے اس کا حل $\frac{y}{y-a} = \frac{e^t}{1-a}$ ملتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \to \infty$ پر $y \to a$ ہو گا یعنی آخر کار وبا پورے شہر میں پھیل جائے گی۔

سوال 1.110: ایک جھیل میں $200 \times 10^6\,\mathrm{m}^3$ پانی پایا جاتا ہے جس میں ماہی گیروں کی غفلت سے گندگی کی مقدار $5\,\%$ تک بڑھ جاتی ہے جس سے ماہی گیری متاثر ہو رہی ہے۔ جھیل سے سالانہ $20 \times 10^6\,\mathrm{m}^3$ پانی خارج ہوتا ہے اور اتنا ہی تازہ پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔تازہ پانی میں $0.6\,\%$ گندگی پائی جاتی ہے۔ جھیل کو صاف کرنے کی غرض سے اس میں ماہی گیری ممنوع کر دی جاتی ہے۔ جھیل میں گندگی کی مقدار کتنی مدت میں $2\,\%$ رہ جائے گی؟

جوابات: جھیل میں کل گندگی کو $y(t)$ لکھتے ہوئے $y' = 120000 - 0.1y$ ملتا ہے جس کا عمومی حل $y = (1.2 + 8.8e^{-0.1t}) \times 10^6$ ہے۔ جھیل کو درکار حد تک صفائی کے لئے 11.45 سال درکار ہوں گے۔

سوال 1.111 سے سوال 1.114 میں ماہی گیری کو مثال بنایا گیا ہے۔یہی حقائق ملک میں پالتو مال مویشی پر بھی لاگو ہوتا ہے۔

سوال 1.111: ایسا جھیل جس میں ماہی گیری منع ہو میں مچھلی کی تعداد مساوات دیتی ہے۔ماہی گھیری کی اجازت کے بعد مساوات کیا ہو گی؟ تصور کریں کہ مچھلی پکڑنے کی شرح مچھلی کی لمحاتی تعداد کے راست تناسب ہے۔

حل: مچھلی پکڑنے کی شرح کو py لکھتے ہوئے نئی مساوات $y' = ay - by^2 - py$ ہو گی۔

سوال 1.112: سوال 1.111 میں مچھلی پکڑنے کی شرح اس قدر ہے کہ مچھلی کی تعداد تبدیل نہیں ہوتی۔مچھلی کی تعداد کیا ہو گی؟

حل: مچھلی کی تعداد تبدیل نہ ہونے سے مراد $y' = 0$ ہے لہٰذا $y' = ay - by^2 - py = 0$ لکھتے ہوئے $y = 0$ اور $y = \frac{a-p}{b}$ ملتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جھیل سے مسلسل $p\left(\frac{a-p}{b}\right)$ پیداوار لی جا سکتی ہے۔

سوال 1.113: سوال 1.111 میں $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔ اس شرح سے پیداوار لیتے ہوئے ماہی گیری کی مستقبل کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

جواب: $y = \frac{0.9}{1-e^{-0.9t-0.198}}$ ؛اس شرح سے $t \to \infty$ پر $y \to 0$ ہو گا اور ماہی گیری ممکن نہ رہ پائے گی۔

سوال 1.114: ماہی گیری کے شعبے کو برقرار رکھنے کی خاطر سوال 1.111 میں دو سال ماہی گیری کے بعد دو سال کا وقفہ دیا جاتا ہے جس میں ماہی گیری ممنوع ہوتی ہے اور جس دوران جھیل میں مچھلی کی آبادی دوبارہ بڑھتی ہے۔اس مسئلے کو آٹھ سال کے لئے حل کرتے ہوئے حل کا خط کھینچیں۔ $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیں۔

سوال 1.115: جنگل میں بھیڑیا کی آبادی میں شرح موت لمحاتی آبادی کے راست تناسب ہے جبکہ شرح پیدائش بھیڑیوں کی جوڑی کی اتفاقی ملاپ کے راست تناسب ہے۔اس مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔غیر تغیر آبادی دریافت کریں۔

حل: بھیڑیا کی کل آبادی y میں آدھے نر اور آدھے مادہ ہوں گے۔دورانیہ $\mathrm{d}t$ میں ایک جوڑی کے ملاپ کا امکان $\frac{y}{2}$ کے راست تناسب ہے۔یوں $\frac{y}{2}$ جوڑیوں کے ملاپ کا امکان $\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right)$ ہو گا۔ یوں شرح تبدیلی

$y' = ay^2 - by$ لکھی جائے گی جہاں $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔غیر تغیر آبادی سے مراد $y' = 0$ ہے جس سے $y = 0$ اور $y = \frac{b}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y > \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا جس کی بنا آبادی مسلسل بڑھے گی۔اس کے برعکس $y < \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی مسلسل گھٹے گی۔

سوال 1.116: شہروں کے بند مکانوں میں باہر فضا کی نسبت زیادہ آلودگی پائی جاتی ہے۔گھر کے اندر جانور یا پودوں سے یہ مسئلہ مزید سنگین صورت اختیار کر لیتا ہے۔ قابل رہائش ہونے کے لئے لازم ہے کہ مکان میں ہوا کا بہاو پایا جاتا ہو۔ایک عمارت کا حجم $1500\,\mathrm{m}^3$ ہے۔لمحہ $t = 0$ پر تمام کھڑکیاں کھول دی جاتی ہیں جس کے بعد $200\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$ تازہ ہوا مسلسل عمارت میں ایک رخ سے داخل ہوتی ہے اور اتنی ہی ہوا دوسری جانب خارج ہوتی ہے۔عمارت میں پنکھے ہوا کو مسلسل حرکت میں رکھتے ہیں۔ کتنی دیر بعد $90\,\%$ ہوا تازہ ہو گی؟

جواب: 17 گھنٹے اور 16 منٹ۔

1.6 عمودی خطوط کی نسلیں

ایک نسل کے خطوط کے عمودی مطقاطع خطوط معلوم کرنا طبیعیات کے اہم مسائل میں سے ایک ہے۔حاصل خطوط کو دیے گئے خطوط کے **عمودی مطقاطع خطوط**[95] کہتے ہیں اور اسی طرح دیے گئے خطوط کو حاصل کردہ خطوط کے عمودی مطقاطع خطوط کہتے ہیں۔

زاویہ تقاطع[96] سے مراد نقطہ تقاطع پر دو خطوط کے مماس کے مابین زاویہ ہے۔

عمودی خطوط کو عموماً تفرقی مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر $G(x, y, c) = 0$ ایک ہی نسل کے خطوط کو ظاہر کرتی ہو تب مستقل c کی ہر انفرادی قیمت نسل کے ایک منفرد خط کو ظاہر کرتی ہے۔چونکہ اس مساوات میں ایک عدد مستقل (c) پایا جاتا ہے لہٰذا ان خطوط کو ایک عدد **مقدار معلوم**[97] کے خطوط کی نسل کہا جاتا ہے۔

---
orthogonal trajectories[95]
angle of intersection[96]
parameter[97]

آئیں درج ذیل خطوط کو مثال بناتے ہوئے اس ترکیب کو سیکھیں۔

$$\frac{x^2}{4}+y^2=c \tag{1.70}$$

مماس کی ڈھلوان y' کو تفرق کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{2x}{4}+2yy'=0, \quad y'=-\frac{x}{4y} \tag{1.71}$$

تفرقی مساوات میں c نہیں پایا جا سکتا۔آپس میں عمودی خطوط کے ڈھلوان کا حاصل ضرب منفی اکائی (-1) کے برابر ہو گا۔یوں درکار خطوط کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y'=\frac{4y}{x} \tag{1.72}$$

علیحدگی متغیرات کرتے ہوئے تکمل سے عمودی خطوط حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=4\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad y=c_1x^4 \tag{1.73}$$

اس مساوات کے مستقل کو c_1 لکھا گیا ہے جس کا ہر انفرادی قیمت نسل کی منفرد خط دیتا ہے۔شکل 1.21 میں $c=1$ لیتے ہوئے مساوات 1.70 کو گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے۔اسی طرح ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیروں سے مختلف c سے حاصل نسل کے دیگر خطوط دکھائے گئے ہیں۔مساوات 1.73 کو شکل میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔مستقل c_1 کے مثبت اور منفی قیمتیں لے کر ان خطوط کو کھینچا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ٹھوس خطوط کی نسل اور نقطہ دار خطوط کی نسل ایک دونوں کو عمودی قطع کرتے ہیں۔

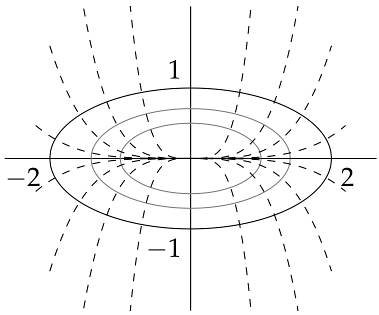
سوالات

سوال 1.117 تا سوال 1.122 کے عمودی تقاطع خطوط دریافت کریں۔

سوال 1.117:

$$y=2x+c$$

جواب: $y=-\frac{x}{2}+c_1$



شکل 1.21: عمودی خطوط کی نسلیں۔

سوال 1.118:

$$3y = -2x + c$$

جواب: $y = \frac{3x}{2} + c_1$

سوال 1.119:

$$y^2 = 3x + c$$

جواب: $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x}$

سوال 1.120:

$$y = x^2 + c$$

جواب: $y = \ln \frac{c_1}{\sqrt{|x|}}$

سوال 1.121:

$$G(x, y, c) = e^x \cos y = c$$

جواب: $\sin y = c_1 e^{-x}$

سوال 1.122:

$$2y = \frac{3}{x} + c$$

جواب: $y = \frac{2x^3}{9} + c_1$

سوال 1.123 تا سوال 1.125 عملی استعمال کے چند سوالات ہیں۔

سوال 1.123: ہم قوہ خطوط اور ثقلی قوت

ثقلی قوت کی سمت زمین کی محور کو ہے۔کارتیسی محدد پر اس قوت کی سمت کو $y = cx$ لکھا جا سکتا ہے۔ان کی عمودی خطوط حاصل کریں جو **ہم قوہ خطوط**[98] کہلاتے ہیں۔

جواب: ہم جانتے ہیں کہ y' کی مساوات c سے پاک ہونا لازمی ہے لہٰذا $y' = c$ میں دی گئی مساوات سے $c = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $y' = \frac{y}{x}$ حاصل کرتے ہیں۔اس طرح عمودی خطوط کی ڈھلوان $y' = -\frac{x}{y}$ ہو گی جس کا تکمل $x^2 + y^2 = c_1$ دیتا ہے۔

سوال 1.124: ہم محوری تار

حساس برقی اشارات کی ترسیل عموماً **ہم محوری تار**[99] کے ذریعہ کی جاتی ہے۔موصل نلکی کے محور پر موصل تار رکھنے سے ہم محوری تار حاصل ہوتی ہے۔ہم محوری تار کو کارتیسی z محور پر رکھتے ہوئے دونوں موصل تاروں کے درمیانی خطے میں ہم قوہ خطوط کی مساوات $u(x, y) = x^2 + y^2 = c$ حاصل ہوتی ہے جو z محور پر پڑی نلکی سطحوں کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم قوہ خطوط کے عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں جو **برقی میدان**[100] کو ظاہر کرتی ہیں۔

جواب: $y = c_1 x$

سوال 1.125: ہم حرارت خطوط

درجہ حرارت میں فرق، حرارتی توانائی کی منتقلی کا سبب ہے لہٰذا حرارتی توانائی کی منتقلی **ہم حرارت خطوط**[101] کے عمودی ہو گی۔کسی خطے میں ہم حرارتی خطوط کو $2x^2 + 5y^2 = c$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ان کی عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں۔

جواب: $y^2 = c_1 x^5$

---

[98] equipotential lines
[99] coaxial cable
[100] electric field
[101] isotherms

1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت

کسی بھی متغیرہ کی حتمی قیمت صفر یا مثبت $|k| \geq 0$ ہوتی ہے لٰہذا درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا کوئی حل نہیں پایا جاتا۔اس تفرقی مساوات کا واحد حل $y = 0$ ہے جو ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اترتا۔

$$2\left|y'\right| + 3|y| = 0, \quad y(0) = 2$$

اس کے برعکس درج ذیل مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل یعنی $y = x^3 + 2$ پایا جاتا ہے۔

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 2$$

درج ذیل تفرقی مساوات کے لامتناہی حل $y = -1 + cx$ پائے چونکہ $x = 0$ پر c کی کسی بھی قیمت کے لئے $y = -1$ ہی ہے۔

$$xy' = y + 1, \quad y(0) = -1$$

یوں ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.74}$$

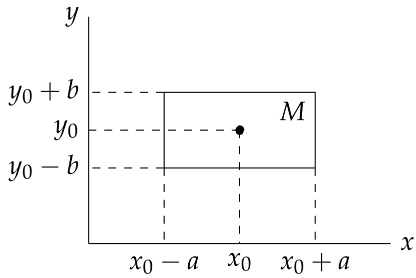
کے حل کے بارے میں درج ذیل دو اہم سوالات اٹھتے ہیں۔

وجودیت حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.74 کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہے۔

یکتائی حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.74 کا زیادہ سے زیادہ ایک حل ممکن ہے۔(یوں ایک سے زیادہ حل رد کئے جاتے ہیں۔)

قبل از حل یہ جاننا کہ آیا ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا حل پایا جاتا ہے اور آیا کہ اس کا حل یکتا ہے انتہائی اہم معلومات ہیں جنہیں مسئلہ وجودیت[102] اور مسئلہ یکتائی[103] سے جاننا ممکن ہے۔ ان مسئلوں پر غور کرتے ہیں۔

[102] existence theorem
[103] uniqueness theorem



شکل 1.22: وجودیت اور یکتائی کے مسئلوں کا مستطیل۔

مسئلہ 1.3: مسئلہ وجودیت
ابتدائی نقطہ (x_0, y_0) کو مرکز بناتے ہوئے شکل 1.22 میں **مستطیل** خطہ M دکھایا گیا ہے۔

$$M : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b \tag{1.75}$$

تصور کریں کہ اس مستطیل خطے کے تمام نقطوں (x, y) پر ابتدائی قیمت سادہ تفرقی مساوات

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.76}$$

کا دایاں ہاتھ $f(x, y)$ **استمراری تفاعل**[104] (یعنی بلا جوڑ تفاعل) ہے۔ مزید اس خطے میں تفاعل کی **قیمت محدود**[105] ہے یعنی

$$\left|f(x, y)\right| \le K \qquad \text{پر } (x,y) \text{ مستطیل کے تمام نقطوں} \tag{1.77}$$

جہاں K محدود قیمت کا مستقل ہے۔ ایسی صورت میں ابتدائی قیمت مساوات 1.76 کا کم از کم ایک حل موجود ہے۔ یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔ α کی قیمت a اور $\frac{b}{K}$ کی قیمتوں میں سے کم قیمت کے برابر ہے۔

---

[104] continuous function
[105] bounded

مثال 1.24: تفاعل $f(x,y)=2x+y^2$ خطہ $1<|x|$ ، $1<|y|$ میں محدود تفاعل ہے جس کی زیادہ سے زیادہ حتمی قیمت $K=3$ ہے۔اس کے برعکس تفاعل $\tan x$ خطہ $\frac{\pi}{5}<|x|$ میں غیر محدود ہے چونکہ نقطہ $x=\frac{\pi}{2}$ اسی خطے میں پایا جاتا ہے جہاں $\tan\frac{\pi}{2}\to\infty$ ہے۔

مسئلہ 1.4: مسئلہ یکتائی
تصور کریں کہ شکل 1.22 کے مستطیل میں تمام نقطوں (x,y) پر $f(x,y)$ اور $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ استمراری اور محدود تفاعل ہیں یعنی

$$\left|f(x,y)\right|<K_a \tag{1.78}$$

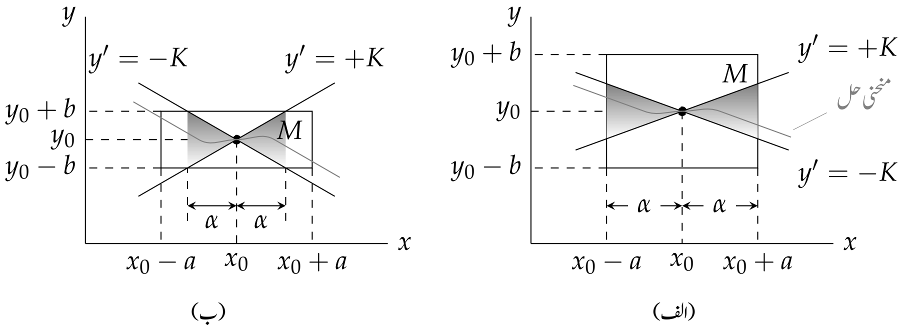
$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|<K_b \tag{1.79}$$

ایسی صورت میں مساوات 1.76 کا زیادہ سے زیادہ ایک عدد حل موجود ہے۔یوں مسئلہ 1.3 کے تحت تفرقی مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل موجود ہے اور یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x-x_0|<\alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔

درج بالا دو مسئلوں کے ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیے جائیں گے۔البتہ انہیں شکل 1.23 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے جہاں ابتدائی نقطہ (x_0,y_0) مستطیل M کا مرکز ہے۔مخصوص حل ابتدائی نقطے سے گزرتا ہے۔مساوات 1.77 کے تحت $f(x,y)$ یعنی y' کی قیمت کم سے کم $-K$ اور زیادہ سے زیادہ $+K$ ممکن ہے یعنی مساوات 1.77 کے منحنی حل کی ڈھلوان $-K$ تا $+K$ ممکن ہے۔شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا $y'=\mp K$ ڈھلوان کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔یوں (x_0,y_0) سے گزرتا ہوا منحنی حل کسی صورت **سایہ دار**[106] خطہ $y'=\mp K$ سے باہر نہیں نکل سکتا۔شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا منحنی حل ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.23-الف میں منحنی حل کو دیکھیے۔سائے دار خطے میں رہتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ حل $|x-x_0|<\alpha$ پر پایا جائے گا جہاں $\alpha=a$ کے برابر ہے۔شکل-ب میں منحنی حل مستطیل M سے باہر نکل جاتا ہے۔چونکہ مستطیل کے باہر $f(x,y)$ اور $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ کے بارے میں کچھ نہیں کہا جا سکتا ہے لہٰذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $|x-x_0|<\alpha$ پر حل پایا جاتا ہے جہاں $\alpha=\frac{b}{K}$ کے برابر ہے۔

---
[106] shaded



شکل 1.23: مساوات 1.77 میں دی گئی شرط اور α۔

مثال 1.25: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

اور خطہ $4 > |x|$ ، $5 > |y|$ لیتے ہیں۔یوں $a = 4$ ، $b = 5$ اور

$$\begin{aligned}
\left|f(x,y)\right| &= \left|1 + y^2\right| \le K_a = 26 \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2y \le K_b = 10 \\
\alpha &= \frac{b}{K_a} = \frac{5}{26} < a
\end{aligned}$$

ہوں گے۔ہم جانتے ہیں کہ اس تفرقی مساوات کا حل $y = \tan x$ ہے جس میں $x = \mp\frac{\pi}{2} > \alpha$ پر جوڑ پایا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستطیل کے پورے x پر مسلسل حل نہیں پایا جاتا۔

تفرقی مساوات کے حل کے لئے درج بالا دو مسئلوں میں معقول شرائط نا کہ **لازم شرائط** دیے گئے ہیں۔ ان شرائط

کو ہلکا بنایا جا سکتا ہے۔**احصاء تفرقیات**[107] کے **مسئلہ اوسط قیمت**[108] کے تحت

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1) \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y_i}$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 خطہ M میں پائے جاتے ہیں اور y_i ان کے درمیان کوئی موزوں قیمت ہے۔مساوات 1.79 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq (y_2 - y_1) K_b \tag{1.80}$$

مساوات 1.79 کی جگہ مساوات 1.80 استعمال کیا جا سکتا ہے جو نسبتاً ہلکا شرط ہے۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے یکتا حل کے لئے $f(x, y)$ کا مسلسل تفاعل ہونا **غیر معقول** (یعنی ناکافی) شرط ہے۔درج ذیل مثال اس حقیقت کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 1.26: غیر یکتائی
ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

کے دو حل پائے جاتے ہیں

$$y = 0 \quad \text{اور} \quad y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases}$$

اگرچہ $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ مسلسل تفاعل ہے۔مساوات 1.80 کی شرط لکیر $y = 0$ پر پوری نہیں ہوتی چونکہ $y_1 = 0$ اور y_2 کو مثبت لیتے ہوئے

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}, \quad (\sqrt{y_2} > 0)$$

---

differential calculus[107]
mean value theorem[108]

ملتا ہے جس کی قیمت y_2 کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے لامتناہی بڑھائی جا سکتی ہے جبکہ مساوات 1.80 کہتا ہے کہ یہ قیمت کسی مخصوص مستقل قیمت K_b سے کم ہونا لازمی ہے۔

مثال 1.27: تصور کریں کہ $|x - x_0| \leq a$ فاصلے پر مساوات $y' + p(x)y = r(x)$ میں $p(x)$ اور $r(x)$ استمراری ہیں۔ثابت کریں کہ یہ مساوات مسئلہ وجودیت اور مسئلہ یکتائی کے شرائط پر پورا اترتا ہے لہٰذا ابتدائی معلومات کی صورت میں اس تفرقی مساوات کا یکتا حل پایا جاتا ہے۔

جواب: $f(x, y) = r - py$ ہے لہٰذا $\frac{\partial f}{\partial y} = -p$ ہو گا۔چونکہ p استمراری ہے لہٰذا $\frac{\partial f}{\partial y}$ استمراری اور دیے فاصلے پر محدود ہو گا۔

باب 2

درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔ چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہٰذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔ اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

یک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔ اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش[1]، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

[1] oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.1}$$

صورت میں لکھا جا سکے **خطی**[2] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر خطی**[3] کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں y ، y' اور y'' کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔دو درجی مساوات کا پہلا جزو $f(x)y''$ ہونے کی صورت میں مساوات کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی **معیاری صورت**[4] میں لکھیں جہاں y'' پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔یقیناً $r \equiv 0$ [جہاں زیر غور تمام x پر $r(x) = 0$ ہو؛ اس کو **مکمل صفر**[5] پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.2}$$

جو **متجانس** ہے۔اگر $r(x) \not\equiv 0$ ہو تب مساوات 2.1 **غیر متجانس**[6] کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$\left(y''\right)^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

---

linear[2]
nonlinear[3]
standard form[4]
identically zero[5]
nonhomogenous[6]

تفاعل p اور q مساوات 2.2 کے **عددی سر**[7] کہلاتے ہیں۔

دو درجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل $y = h(x)$ کو کھلے وقفہ I پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دو درجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر $h(x)$، h' اور h'' پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں y کی جگہ h، y' کی جگہ h' اور y'' کی جگہ h'' پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔ چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

متجانس خطی تفرقی مساوات: خطی میل

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔ متجانس مساوات کے حل میں **اصول خطیت**[8] یا **اصول خطی میل**[9] کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.1: خطی میل

تمام x پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں۔

$$y'' + 4y = 0 \tag{2.3}$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔ پہلے $y_1 = \cos 2x$ کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ $(\cos 2x)'' = -4\cos 2x$ کے برابر ہے لہٰذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$$

[7] coefficients
[8] linearity principle
[9] superposition principle

ملتا ہے۔اسی طرح $y_2 = \sin 2x$ کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$$

ملتا ہے۔ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔یوں ہم $\cos 2x$ کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور $\sin 2x$ کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x)'' + 4(2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x) \\ &= 4(-2.73\cos 2x + 1.25\sin 2x) + 4(2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل y_1 اور y_2 سے نیا حل

$$y_3 = c_1y_1 + c_2y_2, \quad (\text{اور } c_1 \text{ } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں}) \tag{2.4}$$

حاصل کیا۔ اس کو y_1 اور y_2 کا **خطی میل**[10] کہتے ہیں۔اس مثال سے ہم **مسئلہ خطی میل** بیان کرتے ہیں جسے عموماً **اصول خطیت** یا **اصول خطی میل** کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ دو درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 2.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل y_1 اور y_2 پائے جاتے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= 0 \\ y_2'' + y_2' + qy_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

---

linear combination[10]

ہو گا۔ خطی میل سے نیا حل $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ حاصل کرتے ہیں۔اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
y_3' &= c_1y_1' + c_2y_2' \\
y_3'' &= c_1y_1'' + c_2y_2''
\end{aligned}
$$

y_3 ، y_3' اور y_3'' کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
y_3'' + py_3' + qy_3 &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔یوں مساوات کا بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہٰذا ثابت ہوتا ہے کہ y_3 بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

انتباہ: یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل مقدار ہیں۔

حل: y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہٰذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
y_1'' + py_1' + qy_1 &= r \\
y_2'' + py_2' + qy_2 &= r
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

y_3 کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
y_3'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= (c_1 + c_2)r
\end{aligned}
$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔اس سے $(c_1 + c_2)r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ r کے برابر ہے لہٰذا y_3 متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔یوں y_3 متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات

درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں $y = 2 - \cos x$ اور $y = 2 - \sin x$ کو پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔اسی طرح ثابت کریں کہ $3(2 - \cos x)$ یا $-7(2 - \sin x)$ بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں $y = 1$ اور $y = x^3$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی $y = -x^3$ حل ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو -1 سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

ابتدائی قیمت مسائل۔اساس۔عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔درجہ اول سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل c حاصل کرتے ہوئے مخصوص یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔اسی تصور کو دو درجی سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو درجی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{2.7}$$

K_0 اور K_1 کھلے وقفہ پر نقطہ x_0 پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{2.8}$$

کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔یہاں y_1 اور y_2 مساوات 2.7 کے حل ہیں۔یوں مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ (x_0, K_0) سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر K_1 ہوتی ہے۔

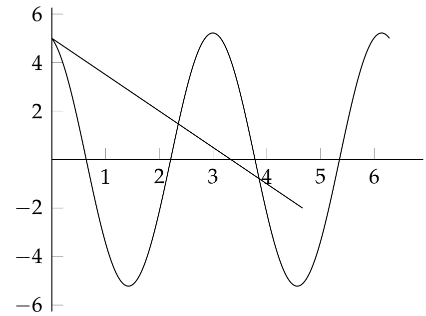
مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل:پہلا قدم: اس مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہٰذا اس کا موزوں عمومی حل

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \tag{2.9}$$

ہو گا۔ (موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)



شکل 2.1: مثال 2.3 کا مخصوص حل۔

دوسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرتے ہیں۔ عمومی حل کا تفرق $y' = -2\sin 2x + 2c_2 \cos x$ ہے۔ ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 5 \\ y'(0) &= -2\sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مخصوص حل

$$y = 5\cos 2x - 1.5\sin 2x$$

ہو گا۔ شکل 2.1 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $x = 0$ پر اس کی قیمت $y(0) = 5$ ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس) $y'(0) = 0.5$ ہے۔ مماس x محور کو $x = \frac{5}{3} = 3.33$ پر قطع کرتا ہے۔

درج بالا مثال میں y_1 اور y_2 ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔ آئیں اب دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = k\cos 2x$ لیتے ہوئے

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 k \cos 2x = (c_1 + c_2 k)\cos 2x = c_3 \cos 2x$$

عمومی حل لکھتے ہیں۔ اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل c_3 پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل y_1 اور y_2 انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

تعریف : عمومی حل، اساس اور مخصوص حل کے تعریف
کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔فاصلہ I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کی **اساس**[11] حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا مخصوص حل مساوات 2.9 میں c_1 اور c_2 کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔ y_1 اور y_2 اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے I پر

$$(a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1 \tag{2.10}$$

ہو، جہاں k اور l اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔(یہاں توجہ رکھیں: a اس صورت b کے مترادف ہے جب $k \neq 0$ ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت **خطی طور غیر تابع**[12] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.11}$$

سے مراد

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \tag{2.12}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 **خطی طور تابع**[13] کہلاتے ہیں۔اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.11 کو

---

[11] basis
[12] linearly independent
[13] linearly dependent

k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$y_1 = ky_2, \quad y_2 = ly_1 \qquad \text{پورے کھلے وقفے } I \text{ پر} \tag{2.13}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.11 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا (اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔)اس طرح اساس کی (درج ذیل) قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: اساس کی قدر مختلف تعریف
کھلے وقفے I پر مساوات 2.11 کا خطی طور غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

اگر کسی کھلے وقفے I پر مساوات کے عددی سر p اور q استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کا عمومی حل موجود ہے۔مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔ وقفہ I پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات کا کوئی نادر[14] حل موجود نہیں ہے (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور مخصوص حل
$\cos 2x$ اور $\sin 2x$ تمام x پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات $y'' + 4y = 0$ کے حل کی اساس ہیں۔ایسا اس لئے ہے کہ $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq c$ اور $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \neq 0$ ہیں جہاں c مستقل ہے۔اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے مخصوص حل $y = 5\cos 2x - 1.5\sin 2x$ حاصل کیا گیا تھا۔

---

[14] singular solution

مثال 2.5: پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ سادہ تفرقی مساوات $y'' - 4y = 0$ کے حل ہیں۔یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$$

حل: چونکہ $y_1'' - 4y_1 = (e^{2x})'' - 4e^{2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ اور $y_2'' - 4y_2 = (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ ہیں لہٰذا y_1 اور y_2 دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔چونکہ $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} \neq c$ ہے جہاں c مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں e^{2x} اور e^{-2x} پورے x پر حل کا اساس ہے۔اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2, \quad y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}, \quad y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1$$

دو عدد **ہمزاد مساوات**[15] $c_1 + c_2 = 2$ اور $2c_1 - 2c_2 = 1$ کو آپس میں حل کرتے ہوئے $c_1 = \frac{3}{4}$ اور $c_2 = \frac{5}{4}$ ملتے ہیں جس سے مخصوص حل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

بعض اوقات ایک حل با آسانی حاصل ہو جاتا ہے۔دوسرا خطی طور غیر تابع حل یک درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کو **تخفیف درجہ**[16] کی ترکیب[17] کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی مثال دیکھنے کے بعد اس کی عمومی اطلاق پر غور کرتے ہیں۔

[15] simultaneous equations
[16] reduction of order
[17] یہ ترکیب یوسف لوئی لیگرینج (1736-1813) نے دریافت کی۔

مثال 2.6: ایک حل جانتے ہوئے تخفیف درجہ۔اساس
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات کے اساس حل دریافت کریں۔

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

حل: دیے گئے مساوات کے معائنے سے ایک حل $y_1 = x$ لکھا جا سکتا ہے چونکہ یوں $y_1'' = 0$ ہو گا لہٰذا تفرقی مساوات کا پہلا جزو صفر ہو جاتا ہے اور $y_1' = 1$ ہو گا جس سے مساوات کے دوسرے اور تیسرے اجزاء کا مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس ترکیب میں دوسرے حل کو $y_2 = uy_1$ لکھ کر دیے گئے تفرقی مساوات میں

$$y_2 = uy_1 = ux, \quad y_2' = u'x + u, \quad y_2'' = u''x + 2u'$$

پر کرتے ہیں۔

$$x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$

درج بالا کو ترتیب دیتے ہوئے xu اور $-xu$ آپس میں کٹ جاتے ہیں اور $x^3u'' + x^2u' = 0$ رہ جاتا ہے جس کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xu'' + u' = 0$$

ملتا ہے۔اس میں $u' = v$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہیں۔

$$xv' + v = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad v = \frac{1}{x}$$

اس میں واپس $v = u'$ پر کرتے ہوئے تکمل سے u حاصل کرتے ہیں۔

$$v = u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x|$$

یوں $y_2 = x\ln|x|$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ y_1 اور y_2 کا **حاصل تقسیم** مستقل نہیں ہے لہٰذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں اساس حل $y_1 = x$ ، $y_2 = x\ln|x|$ ہے۔دونوں بار تکمل لیتے ہوئے تکمل کا مستقل نہیں لکھا گیا چونکہ ہمیں اساس درکار ہے۔عمومی مساوات لکھتے وقت مستقل لکھنا ضروری ہو گا۔

اس مثال میں ہم نے **تخفیف درجہ** کی ترکیب متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.14}$$

پر استعمال کی۔ درج بالا مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں پہلا جزو y'' ہے جس کا عددی سر اکائی کے برابر ہے۔ نیچے اخذ کلیات مساوات کی معیاری صورت کے لئے حاصل کئے گئے ہیں۔ تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر ہمیں مساوات 2.14 کا ایک عدد حل y_1 معلوم ہے اور ہم حل کا اساس جاننا چاہتے ہیں۔ اس کی خاطر ہمیں I پر خطی طور غیر تابع دوسرا حل y_2 درکار ہے۔ دوسرا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$y = y_2 = uy_1, \quad y' = y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

کو مساوات 2.14 میں پر کرتے ہوئے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0$$

u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

چونکہ y_1 مساوات 2.14 کا حل ہے لہٰذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $u' = v$ پر کرنے سے **تخفیف شدہ**[18] ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)v = 0$$

علیحدگی متغیرات کے بعد تکمل لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)\mathrm{d}x, \quad \ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p\,\mathrm{d}x$$

[18] reduced

یعنی

$$v=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,\mathrm{d}x} \tag{2.15}$$

ملتا ہے۔چونکہ $v=u'$ کے برابر ہے لہٰذا دوسرا حل

$$y_2=y_1u=y_1\int v\,\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

ہو گا۔حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1}=u=\int p\,\mathrm{d}x$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا چونکہ $v>0$ ہے لہٰذا y_1 اور y_2 اساس حل ہیں۔

متجانس خطی دو درجی مساوات سے ایک درجی مساوات کا حصول ہم دیکھ چکے۔ آئیں تخفیف درجہ کے دو مثال دیکھیں جو خطی مساوات اور غیر خطی مساوات پر لاگو کی جا سکتی ہیں۔

مثال 2.7: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x,y,y',y'')$ میں y صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ y صریحاً نہیں پایا جاتا لہٰذا اس کو $F(x,y',y'')$ لکھ سکتے ہیں جس میں $z=y'$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(x,z,z')$ حاصل ہوتی ہے۔ایک درجی مساوات کے حل کے تکمل سے y حاصل ہو گا۔

مثال 2.8: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x,y,y',y'')$ میں x صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ x صریحاً نہیں پایا جاتا لہٰذا اس کو $F(y,y',y'')$ لکھ سکتے ہیں۔ہم $z=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ لیتے ہیں۔یوں زنجیری تفرق[19] سے

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{y''}{z}$$

---

[19] chain rule of differentiation

یعنی

$$y'' = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ z اور z_y کو دیے مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(y, z, z_y)$ ملتی ہے جس کا آزاد متغیرہ y ہے۔

سوالات

سوال 2.1 تا سوال 2.7 سے ایک درجی مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.1:

$$y'' - y' = 0$$

جواب: $y = c_1 e^x + c_2$

سوال 2.2:

$$xy'' + y' = 0$$

جواب: $y = c_1 \ln|x| + c_2$

سوال 2.3:

$$xy'' - 2y' = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2$

سوال 2.4:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

جواب: $y=c_2e^{c_1x}$

سوال 2.5:

$$y''-(y')^3\cos y=0$$

جواب: $\cos y+c_1y=x+c_2$

سوال 2.6:

$$y''-(y')^2\cos y=1$$

جواب: $y=\ln\sec(x+c_1)+c_2$

سوال 2.7:

$$x^2y''-2xy'+2y=0,\quad y_1=x^2$$

جواب: $y=c_1x^2+c_2x$

قابل تخفیف سادہ تفرقی مساوات کے استعمال سوالات 2.8 تا سوال 2.11 دیتے ہیں۔

سوال 2.8: منحنی
کارتیسی محدد کے محور سے گزرتی منحنی $y''+y'=0$ کی مرکز پر ڈھلوان اکائی کے برابر ہے۔ منحنی کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $y=1-e^{-x}$

سوال 2.9: لیزم
دو مقررہ نقاط سے لٹکی ہوئی زنجیری ڈوری سے بننے والا خم لیزم[20] کہلاتا ہے جسے مساوات $y''=k\sqrt{1+y'^2}$ کے حل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مستقل k کی قیمت ڈوری کی تناو اور کمیت پر منحصر ہے۔ڈوری نقطہ $(1,0)$ اور $(-1,0)$ سے لٹکی ہوئی ہے۔ $k=1$ تصور کرتے ہوئے لیزم کی مساوات حاصل کریں۔

[20] catenary

جواب: زنجیر کے وسط یعنی $x=0$ پر ڈھلوان صفر کے برابر ہے۔یوں $y=-1+\cosh x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 2.10: حرکت
ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع اور رفتار میں فرق ایک مثبت مستقل k کے برابر رہتی ہے۔فاصلہ $y(t)$ ابتدائی رفتار u اور ابتدائی فاصلہ y_0 پر کس طرح منحصر ہے؟

جواب: $y=(k+u)e^t+(y_0-u)-k(t+1)$

سوال 2.11: حرکت
ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع کی قیمت رفتار کی قیمت کے مربع کے برابر رہتی ہے۔فاصلے کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $t=c_1-\ln(t+c_2)$

سوال 2.12 تا سوال 2.15 میں ثابت کریں کہ دیے گئے تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں یہ حل کی اساس ہیں۔ان ابتدائی قیمت سوالات کے حل لکھیں۔

سوال 2.12:

$$y''+9y=0, \quad y(0)=5, \quad y'(0)=-2; \quad \cos 3x \ \sin 3x$$

جواب: $y=5\cos 3x-\frac{2}{3}\sin 3x$

سوال 2.13:

$$y''-2y'+y=0, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=1; \quad e^x,\ xe^x$$

جواب: $y=e^{x-1}(x-1)$

سوال 2.14:

$$x^2y''-xy'+y=0, \quad y(1)=3.2, \quad y'(1)=-1.5; \quad x,\ x\ln x$$

جواب: $y=\frac{16}{5}x-\frac{47}{10}x\ln x$

سوال 2.15:

$$y''+2y'+3y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=-3; \quad e^{-x}\cos\sqrt{2}x,\ e^{-x}\sin\sqrt{2}x$$

جواب: $y=e^{-x}(2\cos\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x)$

2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب ایسے دو درجی متجانس تفرقی مساوات پر بات کرتے ہیں جن کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہیں۔

$$y'' + ay' + b = 0 \tag{2.17}$$

یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔قوت نمائی تفاعل $y = e^{-kx}$ کے تفرق سے $y' = -ke^{-kx} = -ky$ یعنی $y' + ky = 0$ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔یوں $y' + ky = 0$ کا حل $y = e^{-kx}$ ہے۔اس کو دیکھتے ہوئے ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ آیا مساوات 2.17 کا حل

$$y = e^{\lambda x} \tag{2.18}$$

ممکن ہے یا نہیں۔یہ جاننے کی خاطر $y = e^{\lambda x}$ اور اس کے تفرق

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

کو مساوات 2.17 میں پر کرتے ہیں۔

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

کسی بھی محدود قیمت کے λ اور x کے لئے $e^{\lambda x}$ صفر نہیں ہو گا لہٰذا اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب λ **امتیازی مساوات**[21]

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.19}$$

کا جذر ہو۔اس **دو درجی الجبرائی مساوات**[22] کو حل کرتے ہیں۔

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{2.20}$$

یوں مساوات 2.17 کے حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.21}$$

ہوں گے۔انہیں مساوات 2.17 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہی تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

دو درجی الجبرائی مساوات 2.19 کے جذر کی تین ممکنہ قیمتیں ہیں جو $a^2 - 4b$ کی علامت $(\mp)$ پر منحصر ہیں۔

[21] characteristic equation
[22] quadratic equation

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر $a^2 - 4c > 0$

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر $a^2 - 4c = 0$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر $a^2 - 4c < 0$

آئیں ان تین صورتوں پر باری باری غور کریں۔

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر

اس صورت میں، چونکہ y_1 اور y_2 کسی بھی وقفے I پر معین ہیں (اور حقیقی ہیں) اور ان کا حاصل تقسیم مستقل قیمت نہیں ہے لہٰذا کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.22}$$

ہو گا۔یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{2.23}$$

مثال 2.9: دو حقیقی منفرد جذر
مساوات $y'' - 4y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔اس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 - 4 = 0$ ہے جس کے جذر $\lambda_1 = +2$ اور $\lambda_2 = -2$ دو منفرد قیمتیں ہیں۔یوں حل کا اساس $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ ہے جن سے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 2.10: ابتدائی قیمت مسئلہ۔دو حقیقی منفرد جذر
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + y' - 6 = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$$

حل: امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

جس کے جذر

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+24}}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+24}}{2} = -3,$$

ہیں۔ان سے اساس حل $y_1 = e^{2x}$ ، $y_2 = e^{-3x}$ ملتا ہے جس سے عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$ ہے لہٰذا

$$y(0) = c_1 + c_2 = -4$$
$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 5$$

لکھا جائے گا۔ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{7}{5}$ اور $c_2 = -\frac{13}{5}$ ملتا ہے جن سے **مخصوص حل** لکھتے ہیں۔

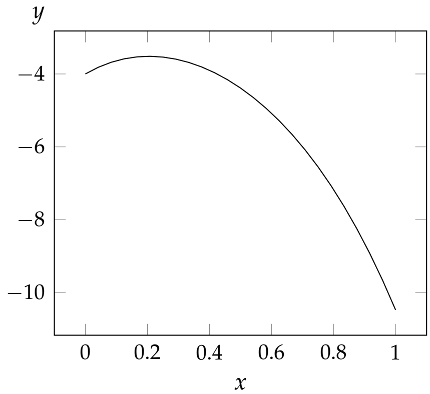
$$y = -\frac{7}{5} e^{2x} - \frac{13}{5} e^{-3x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے جو ابتدائی قیمتوں پر پورا اترتا ہے۔

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر

اگر $a^2 - 4c = 0$ ہو تب مساوات 2.20 سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ ملتا ہے جو واحد حل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$$



شکل 2.2: مثال 2.10 کا مخصوص حل۔

دیتا ہے۔ ہمیں اساس کے لئے دو حل درکار ہیں۔دوسرا حل **تخفیف درجہ** کی ترکیب سے حاصل کیا جائے گا۔اس ترکیب پر بحث ہو چکی ہے۔یوں ہم دوسرا حل $y_2 = uy_1$ تصور کرتے ہیں۔مساوات 2.17 میں

$$y_2 = uy_1, \quad y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \tag{2.24}$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے۔اب پہلی قوسین پر غور کرتے ہیں۔چونکہ $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ لہٰذا $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$ ہو گا۔ان قیمتوں کو پہلی قوسین میں پر کرتے

$$2y_1' + ay_1 = 2(-\frac{a}{2}y_1) + ay_1 = 0$$

ہوئے یہ قوسین بھی صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 2.24 سے $u''y_1 = 0$ یعنی $u'' = 0$ حاصل ہوتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لیتے ہوئے $u = c_1x + c_2$ ملتا ہے۔دوسرا خطی طور غیر تابع حل $y_2 = uy_1$ حاصل کرتے ہوئے ہم $c_1 = 1$ اور $c_2 = 0$ چن سکتے ہیں جن سے $u = x$ اور $y_2 = xy_1$ حاصل ہوتے ہیں۔چونکہ y_1 اور حاصل کردہ $y_2 = xy_1$ کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا یہ دونوں خطی

طور غیر تابع ہیں اور انہیں اساس لیا جا سکتا ہے۔یوں دوہرے جذر کی صورت میں کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

اور عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{a}{2}x} \tag{2.25}$$

مثال 2.11: دوہرے جذر کی صورت میں عمومی حل
سادہ تفرقی مساوات $y'' + 10y' + 25 = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ ہے جس کو $(\lambda + 5)^2 = 0$ لکھ کر دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ حاصل ہوتا ہے۔یوں تفرقی مساوات کے حل کا اساس $y_1 = e^{-5x}$ ، $y_2 = xe^{-5x}$ اور اس کا عمومی حل $y = (c_1 + c_2 x)e^{-5x}$ ہے۔

مثال 2.12: دوہرے جذر کی صورت میں مخصوص حل کا حصول
دیے گئے تفرقی مساوات کا مخصوص حل دریافت کریں۔

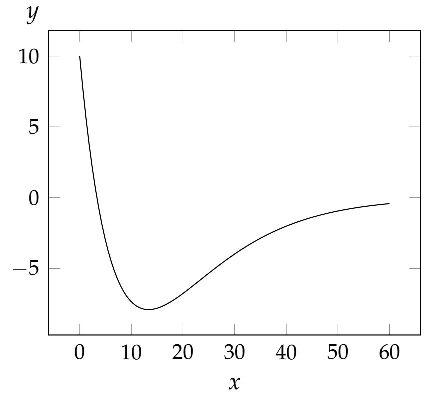
$$y'' + 0.2y' + 0.01y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = -4$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.01 = 0$ یعنی $(\lambda + 0.1)^2 = 0$ سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.1$ دوہرا جذر حاصل ہوتا ہے جس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل کا جذر لکھتے ہیں جو مخصوص حل کے حصول میں درکار ہے۔

$$y' = c_2 e^{-0.1x} - 0.1(c_1 + c_2 x)e^{-0.1x}$$



شکل 2.3: مثال 2.12 کا مخصوص حل۔

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 = 10\\
y'(0) &= c_2 - 0.1c_1 = -4, \quad c_2 = -3
\end{aligned}$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (10 - 3x)e^{-0.1x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے۔

تیسری صورت: مخلوط جوڑی دار جذر

امتیازی مساوات 2.19 میں $a^2 - 4c$ کی قیمت منفی ہونے کی صورت میں مخلوط جوڑی دار جذر $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$ ملتے ہیں جہاں $\omega^2 = b - \frac{a^2}{4}$ کے برابر ہے۔ان سے مخلوط اساس لکھتے ہیں۔

$$y_{m1} = e^{(-\frac{a}{2}+i\omega)x}, \quad y_{m2} = e^{(-\frac{a}{2}-i\omega)x} \tag{2.26}$$

اس مخلوط اساس سے حقیقی اساس حاصل کیا جائے گا۔ایسا کرنے کی خاطر ریاضی کے چند کلیات پر غور کرتے ہیں۔تفاعل e^z ، جہاں $z = x + iy$ مخلوط عدد ہے جبکہ x اور y حقیقی اعداد ہیں، کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

e^{iy} کی **مکلارن تسلسل**[23] لکھ کر حقیقی اجزاء اور خیالی اجزاء کو علیحدہ علیحدہ قوسین میں اکٹھے کرتے ہیں۔یہاں $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$ لئے گئے ہیں۔

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

آخری قدم پر آپ تسلی کر لیں کہ پہلی قوسین $\cos y$ کی مکلارن تسلسل دیتی ہے جبکہ دوسری قوسین $\sin y$ کی مکلارن تسلسل دیتی ہے۔ آپ اس کتاب میں آگے پڑھیں گے کہ درج بالا تسلسل میں اجزاء کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔یوں ہم **یولر مساوات**[24]

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{2.27}$$

حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y \tag{2.28}$$

مساوات 2.27 اور مساوات 2.28 کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{2.29}$$

ہو گا۔یہ سب جاننے کے بعد آئیں مساوات 2.26 میں دیے مخلوط اساس پر دوبارہ غور کریں۔

$$\begin{aligned} y_{m1} &= e^{(-\frac{a}{2}+i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos \omega x + i \sin \omega x) \\ y_{m2} &= e^{(-\frac{a}{2}-i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{-i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos \omega x - i \sin \omega x) \end{aligned}$$

چونکہ اساس کے اجزاء کو مستقل (حقیقی یا خیالی یا مخلوط) سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے نیا حل حاصل کیا جا سکتا ہے لہٰذا ہم درج بالا دونوں اجزاء کو مستقل $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے ایک نیا اور حقیقی حل y_1

---

[23] Maclaurin series
[24] Euler equation

دریافت کرتے ہیں۔

$$y_1 = \frac{1}{2}y_{m1} + \frac{1}{2}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x}\cos\omega x$$

اسی طرح مخلوط اساس کے پہلے جزو کو مستقل $\frac{1}{2i}$ اور دوسرے جزو کو مستقل $-\frac{1}{2i}$ سے ضرب دیتے ہوئے جمع کر کے نیا اور حقیقی حل y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y_2 = \frac{1}{2i}y_{m1} - \frac{1}{2i}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x}\sin\omega x$$

درج بالا حاصل کردہ حقیقی تفاعل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}\cos\omega x \quad y_2 = e^{-\frac{a}{2}x}\sin\omega x \tag{2.30}$$

کو از خود حل کا اساس تصور کیا جا سکتا ہے۔ یہاں غور کریں کہ ہم نے مخلوط جذر $\lambda = (-\frac{a}{2} \mp i\omega)x$ سے حقیقی اساس (مساوات 2.30) حاصل کیا ہے۔ اس حقیقی اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x) \tag{2.31}$$

مثال 2.13: مخلوط جذر، ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

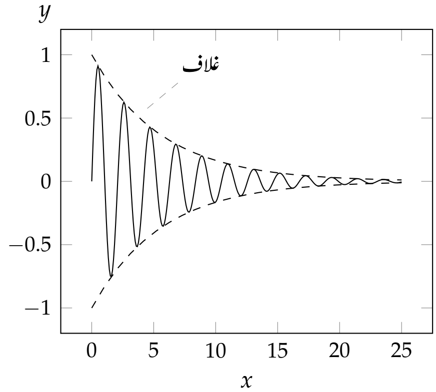
$$y'' + 0.36y' + 9.0324y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.36\lambda + 9.0324 = 0$ کے مخلوط جذر $\lambda = -0.18 + \mp i3$ ہیں لہٰذا عمومی حل

$$y = e^{-0.18x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$$

ہو گا۔ مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر c_1 اور c_2 درکار ہیں جنہیں عمومی مساوات میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ پہلے ابتدائی معلومات سے

$$y(0) = e^0(c_1\cos 0 + c_2\sin 0) = 0, \quad c_1 = 0$$



شکل 2.4: مثال 2.13 کا مخصوص حل۔

ملتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق

$$y' = -0.5e^{-0.5x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-0.5x}(-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x)$$

میں دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$y' = -0.5e^{0}(0 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^{0}(0 \sin 0 + 3c_2 \cos 0) = 3, \quad c_2 = 1$$

ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-0.18x} \sin 3x$$

شکل 2.4 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ، نقطہ دار لکیروں سے، سائن نما منحنی کے مثبت چوٹیوں کو چھوتا ہوا **غلاف**[25] $e^{-0.18x}$ اور منفی چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف $-e^{-0.18x}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ مخصوص حل (x کو t لیتے ہوئے) **قصری ارتعاش**[26] کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر y فاصلے کو ظاہر کرتی ہو تب یہ میکانی قصری ارتعاش ہو گی اور اگر y برقی رو یا برقی دباو ہو تب یہ برقی قصری ارتعاش ہو گی۔

---

[25] envelope
[26] damped oscillations

جدول 2.1: تین صورتوں کی تفصیل

صورت	مساوات 2.19 کے جذر	مساوات 2.17 کی اساس	مساوات 2.17 کا عمومی حل
پہلی	منفرد حقیقی λ_1 ، λ_2	$e^{\lambda_1 x}$ ، $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
دوسری	دوہرا جذر $\lambda = -\frac{a}{2}$	$e^{-\frac{a}{2}x}$ ، $xe^{-\frac{a}{2}x}$	$y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$
تیسری	جوڑی دار مخلوط $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$	$e^{-\frac{a}{2}x}\cos\omega x$ ، $e^{-\frac{a}{2}x}\sin\omega x$	$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$

مثال 2.14: **مخلوط جذر**
سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad (\text{غیر صفر مستقل ہے } \omega)$$

کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$$

جدول 2.1 میں درج بالا تین صورتوں کی تفصیل اکٹھی کی گئی ہے۔یہ تین اقسام میکانی ارتعاش یا برقی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہیں۔آپ تفرقی مساوات کی قوت یہاں سے جان سکتے ہیں۔آپس میں بالکل مختلف میدانوں (مثلاً میکانی اور برقی) کے مسائل ایک طرز کی تفرقی مساوات سے ظاہر کئے جا سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.16 تا سوال 2.24 کے عمومی حل حاصل کریں۔انہیں واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ان کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 2.16:

$$y'' + 4y = 0$$

جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

سوال 2.17:

$$4y'' - 9y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.18:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

سوال 2.19:

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{-\pi x}$

سوال 2.20:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$

سوال 2.21:

$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3}{2}x}$

سوال 2.22:

$$4y'' + 4y' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.23:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

سوال 2.24:

$$9y'' - 30y' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{5}{3}x}$

سوال 2.25 تا سوال 2.29 میں اساس سے تفرقی مساوات $y'' + ay' + by = 0$ حاصل کریں۔

سوال 2.25:

$$e^{0.2x}, \quad e^{-0.5x}$$

جواب: $y'' + 0.3y' - 0.1y = 0$

سوال 2.26:

$$e^{-0.66x}, \quad e^{-0.32x}$$

جواب: $y'' + 0.98y' + 0.2112y = 0$

سوال 2.27:

$$\cos(4\pi x), \quad \sin(4\pi x)$$

جواب: $y'' + 16\pi^2 y = 0$

سوال 2.28:

$$e^{(-2+i3)x}, \quad e^{(-2-i3)x}$$

جواب: $y'' + 4y'' + 13y = 0$

سوال 2.29:

$$e^{-1.7x}\cos 6.2x, \quad e^{-1.7x}\sin 6.2x$$

جواب: $y'' + 3.4y'' + 41.33y = 0$

سوال 2.30 تا سوال 2.37 ابتدائی قیمت سوالات ہیں۔ان کے مخصوص حل دریافت کریں۔

سوال 2.30:

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$$

جواب: $y = 5\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x$

سوال 2.31:

$$y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

جواب: $y = 0.7e^{5x} + 1.3e^{-5x}$

سوال 2.32:

$$y'' - y'' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

جواب: $y = \frac{1}{5}(e^{3x} - e^{-2x})$

سوال 2.33:

$$4y'' + 4y'' + 37y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

جواب: $y = e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x$

سوال 2.34:

$$9y'' + 12y'' + 49y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

جواب: $y = e^{-\frac{2}{3}x}(2\cos\sqrt{5}x + \frac{1}{3\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}x)$

سوال 2.35:

$$y'' - 6y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$$

جواب: $y = \frac{1}{40}e^{3x}\sin 4x$

سوال 2.36:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

جواب: $y=\cos x+\sin x$

سوال 2.37:

$$8y''-2y'-y=0, \quad y(0)=2.2, \quad y'(0)=3.4$$

جواب: $y=\frac{79}{15}e^{\frac{x}{2}}-\frac{46}{15}e^{-\frac{x}{4}}$

عمومی حل کے حصول میں خطی طور غیر تابع تفاعل نہایت اہم ہیں۔ صرف ایسے تفاعل سے اساس حاصل ہوتا ہے۔ دیے وقفے پر سوال 2.38 تا سوال 2.42 میں دیے تفاعل میں خطی طور تابع اور غیر تابع کی نشاندہی کریں۔

سوال 2.38:

$$\cos kx, \quad \sin kx, \quad -\infty<x<\infty$$

جواب: چونکہ $\frac{\sin kx}{\cos kx}$ کی قیمت x تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتی ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 2.39:

$$e^{kx}, \quad e^{-kx} \quad -\infty<x<\infty$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.40:

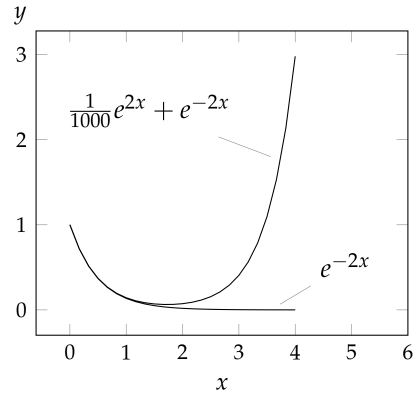
$$x, \quad x^2 \quad x>1$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.41:

$$x\ln x, \quad x^2\ln x \quad x>1$$

جواب: خطی طور غیر تابع



شکل 2.5: سوال 2.43 کے منحنی حل۔

سوال 2.42:

$$x\ln x, \quad x\ln x^2 \ln x \quad x>1$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 2.43: غیر مستحکم صورت حال
ابتدائی قیمت مسئلہ $y''-4y=0$ میں ابتدائی قیمتیں $y(0)=1$ اور $y'(0)=-2$ لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔ مخصوص حل کو دوبارہ ابتدائی معلومات $y(0)=1.001$ اور $y'(0)=-1.998$ کے لئے حاصل کریں۔

جوابات: $y=e^{-2x}$ اور $y=\frac{1}{1000}e^{2x}+e^{-2x}$ ؛ شکل 2.5 میں دونوں حل دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ابتدائی قیمتوں میں انتہائی کم فرق حل پر بہت زیادہ اثر ڈالتی ہیں۔ یہ **غیر مستحکم**[27] صورت کو ظاہر کرتی ہے۔ زلزلے میں غیر مستحکم عمارتیں انہیں وجوہات پر ڈھیر ہوتی ہیں۔ فضا میں ہوا کا دباو، درجہ حرارت اور نمی کی تناسب بھی غیر مستحکم صورت پیدا کرتے ہوئے تباہ کن آندھیوں کا سبب بنتی ہیں۔

سوال 2.44: استمراری مساوات کے جذر $\lambda_1=-2$ اور $\lambda_2=3$ ہیں۔ مساوات 2.17 حاصل کریں۔

جواب: $y''-y'-6y=0$

---
[27] instability

سوال 2.45: استمراری مساوات کے جذر λ_1 اور λ_2 ہیں۔مساوات 2.17 میں a اور b حاصل کریں۔ یوں جذر جانتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔

جواب: $a = -\lambda_1 - \lambda_2$ ، $b = \lambda_1\lambda_2$

سوال 2.46: تفرقی مساوات $y'' + ky' = 0$ کو موجودہ طریقے سے حل کریں۔ اسی کو تخفیف درجہ کی ترکیب سے بھی حل کریں۔دونوں جواب کیوں یکساں ہونا ضروری ہے۔

جواب: $y = c_1 + c_2 e^{-kx}$ ؛ یکتائیت۔

سوال 2.47: دوہرا جذر کو منفرد λ_1 اور λ_2 کی وہ صورت تصور کی جا سکتی ہے جب $\lambda_2 \to \lambda_1$ ہو۔ $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ لیتے اور ایک حل $= e^{\lambda_1 x}$ لیتے ہوئے اساس کا دوسرا رکن $xe^{\lambda_1 x}$ تلاش کریں۔

حل:دوسرا حل $e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1+\Delta\lambda)x} = e^{\lambda_1 x}e^{\Delta\lambda x}$ ہے۔ $e^{\Delta\lambda x}$ کا مکلارن تسلسل لیتے ہوئے $\Delta\lambda \to 0$ کی بنا صرف پہلے دو ارکان لیتے ہیں۔ یوں $e^{\Delta\lambda x} = 1 + \frac{\Delta\lambda x}{1!} + \frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!} + \cdots \approx 1 + \Delta\lambda x$ ہو گا اور $e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} + \Delta\lambda x e^{\lambda_1 x}$ لکھا جا سکتا ہے۔اب چونکہ $e^{\lambda_1 x}$ پہلے سے اساس کا حصہ ہے لہٰذا اساس کا دوسرا رکن $xe^{\lambda_1 x}$ ہو گا جہاں $\Delta\lambda$ کو مستقل تصور کرتے ہوئے رد کیا جاتا ہے

2.3 تفرقی عامل

آپ $y = \sin x$ یا $y = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ کے عمل سے بخوبی واقف ہیں۔پہلی مثال میں کسی مقدار یا تفاعل x پر عامل $\sin$ عمل کرتے ہوئے ایک نیا تفاعل دیتا ہے۔یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ **عامل**[28] $\sin$ تفاعل x کے نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ سے مبدل تفاعل y کا نقطہ $y = 1$ دیتا ہے۔اسی طرح عامل $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ تفاعل x^3 پر عمل کرتے ہوئے تفاعل $3x^2$ دیتا ہے۔

یہ بتلاتا چلوں کہ ریاضیات اور طبیعیات میں عامل کا استعمال نہایت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ یہاں بالخصوص **کوانٹم میکانیات**[29] کا ذکر کرنا لازم جہاں عامل کا استعمال کثرت سے کیا جاتا ہے۔

operator[28]
quantum mechanics[29]

اس کتاب میں ہم صرف **تفرقی عامل**[30] D پر بحث کریں گے جہاں $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ہے۔ یوں ایک درجی تفرق

$$Dy=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2.32}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح دو درجی تفرق $D^2y=D(Dy)=y''$ اور تین درجی تفرق $D^3y=y'''$ لکھا جائے گا۔اس طرح $D\sin x=\cos x$ اور $D^2\sin x=-\sin x$ ہو گا۔

خطی متجانس مساوات $y''+ay'+by=0$ جہاں a اور b مستقل مقدار ہیں میں **دو درجی تفرق عامل**

$$L=P(D)=D^2+aD+bI$$

متعارف کرتے ہیں جہاں I **مماثلی عامل**[31] ہے جس کی تعریف $Iy=y$ ہے۔اس طرح دیے گئے تفرقی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Ly=P(D)y=(D^2+aD+bI)y=0 \tag{2.33}$$

L خطی عامل اور P کثیر رکنی[32] ہے۔یوں اگر Lw اور Ly پائے جاتے ہوں (یعنی w اور y دو مرتبہ قابل تفرق ہوں) تب $L(cy+kw)$ بھی پایا جاتا ہے جہاں c اور k کوئی مستقل ہیں۔مزید درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L(cy+kw)=cLy+kLw \tag{2.34}$$

چونکہ $De^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x}$ اور $D^2e^{\lambda x}=\lambda^2e^{\lambda x}$ ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}Le^{\lambda x}&=(D^2+aD+bI)e^{\lambda x}\\&=(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda x}=P(\lambda)e^{\lambda x}=0\end{aligned} \tag{2.35}$$

ہو گا۔حصہ 2.2 میں بھی ہم نے یہی نتیجہ اخذ کیا تھا کہ $e^{\lambda x}$ صرف اور صرف اس صورت اس تفرقی مساوات کا حل ہو گا اگر λ امتیازی مساوات $P(\lambda)=0$ کا جذر ہو۔

یہاں دلچسپ بات یہ ہے کہ $P(\lambda)$ عام الجبرائی کثیر رکنی ہے جس کی تجزی[33] کی جا سکتی ہے۔ λ کی جگہ D پر کرنے سے **کثیر رکنی عامل** حاصل ہوتا ہے۔

---

[30] differential operator
[31] identity operator
[32] polynomial
[33] factorization

مثال 2.15: تفرقی مساوات کا حل بذریعہ تجزی
کثیر رکنی $P(D) = D^2 + 4D - 21I$ کی تجزی سے $P(D) = 0$ کو حل کریں۔

حل: $I^2 = 1$ لیتے ہوئے $D^2 + 4D - 21I = (D-3)(D+7)$ لکھا جا سکتا ہے۔اب $(D-3)y = y' - 3y = 0$ کا حل $y_1 = e^{3x}$ اور $()y = y' + 7y = 0$ کا حل $y_2 = e^{-7x}$ ہے۔یہ جوابات کسی بھی وقفے پر حل کی اساس ہیں۔آئیں تفرقی مساوات حاصل کریں۔

$$(D-3)(D+7)y = (D-3)(y' + 7y) = y'' + 7y' - 3y' - 21y = y'' + 4y' - 21y = 0$$

مساوات 2.33 میں کثیر رکنی کے عددی سر مستقل مقدار ہیں۔ایسی صورت میں تفرقی عامل کے استعمال سے تفرقی مساوات حل کرنا نہایت آسان ثابت ہوتا ہے۔عددی سر مستقل نہ ہونے کی صورت میں تفرقی عامل کا استعمال نہایت پیچیدہ ثابت ہوتا ہے جس پر اس کتاب میں تبصرہ نہیں کیا جائے گا۔

اب تین اہم کلیات

$$\begin{aligned} D^s(xf) &= xD^s f + sD^{s-1} f \\ D^s(x^2 f) &= x^2 D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f \\ D^s[(x^2-1)f] &= (x^2-1)D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f \end{aligned} \tag{2.36}$$

حاصل کرتے ہیں جن کی ضرورت باب 5 میں پیش آئے گی۔

درج ذیل کو دیکھ کر

(2.37)

$$\begin{aligned} &D^1(xf) = xD^1 f + f \\ &D^2(xf) = D^1[D^1(xf)] = D^1[xD^1 f + f] = xD^2 f + D^1 f + D^1 f = xD^2 f + 2D^1 f \\ &D^3(xf) = D^1[D^2(xf)] = D^1[xD^2 f + 2D^1 f] = xD^3 f + D^2 f + 2D^2 f = xD^3 + 3D^2 f \end{aligned}$$

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ درج ذیل درست ہو گا۔

$$D^s(xf) = xD^s f + sD^{s-1} f \tag{2.38}$$

اس کلیے کو الکراجی ماخوذ[34] کے ذریعہ ثابت کرتے ہیں۔ہم نے مساوات 2.37 میں دیکھا کہ $s = 1$ اور $s = 2$ کے لئے یہ کلیہ درست ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ کلیہ $s-1$ کے لئے بھی درست ہے لہٰذا

$$D^{s-1}(xf) = xD^{s-1} f + (s-1)D^{s-2} f \tag{2.39}$$

لکھنا درست ہو گا۔اس پر D^1 کا اطلاق کرنے سے $D^s(xf)$ لکھتے ہوئے مساوات 2.36 میں دیے پہلے کلیے کو ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D^s(xf) = D^1[D^{s-1}(xf)] &= D^1[xD^{s-1} f + (s-1)D^{s-2} f] \\ &= xD^s f + D^{s-1} f + (s-1)D^{s-1} f \\ &= xD^s f + sD^{s-1} f \end{aligned}$$

اب مساوات 2.36 میں دیا ہوا دوسرا کلیہ ثابت کرتے ہیں۔مساوات 2.36 کے پہلی کلیہ سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$D^s(xg) = xD^s g + sD^{s-1} g$$

جس میں $g = xf$ پر کرتے ہوئے کلیے کو ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D^s(x \cdot xf) &= xD^s[xf] + sD^{s-1}[xf] \\ &= x[xD^s f + sD^{s-1} f] + sD^{s-1}[xf] \\ &= x[xD^s f + sD^{s-1} f] + s[D^{s-1} f + (s-1)D^{s-2} f] \\ &= x^2 D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f \end{aligned}$$

آخر میں مساوات 2.36 کا تیسرا کلیہ ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D^s[(x^2-1)f] &= D^s[x^2 f] - D^s[f] \\ &= x^2 D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f - D^s f \\ &= (x^2-1)D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f \end{aligned}$$

---

[34] induction

سوالات

سوال 2.48 تا سوال 2.52 دیے تفاعل پر دیا تفرقی عامل لاگو کریں۔

سوال 2.48:

$$D+2I; \quad x^3, \quad \cos 5x, \quad e^{-kx}, \quad \cosh x$$

جوابات: $3x^2+2x^3$ ، $-5\sin 5x+2\cos 5x$ ، $(2-k)e^{-kx}$ ، $\sinh x+2\cosh x$

سوال 2.49:

$$D^2-3D; \quad 2x^4-x, \quad 2\sinh 2x-\cos 5x$$

جوابات: $24x^2-24x^3+3$ ، $-15\sin 5x-12\cosh 2x+25\cos 5x+\sinh 2x$

سوال 2.50:

$$(D+2I)^2; \quad e^{3x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $25e^{3x}$ ، $(12x+8)e^{2x}$

سوال 2.51:

$$(D-3I)^2; \quad e^{2x}, \quad xe^{3x}$$

جوابات: e^{2x} ، 0

سوال 2.52:

$$(D+I)(D-2I); \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $-2e^{2x}$ ، $2(1-x)e^{2x}$

سوال 2.53 تا سوال 2.57 کی تجزی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.53:

$$(D^2-9I)y=0$$

جواب: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$

سوال 2.54:

$$(D^2+4D+4I)y=0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے لہٰذا دوسرا حل xe^{2x} لیتے ہوئے $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$ ملتا ہے۔

سوال 2.55:

$$(D^2+4D+13I)y=0$$

جواب: $y=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$

سوال 2.56:

$$(4D^2+4D-17I)y=0$$

جواب: $y=e^{\frac{x}{2}}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

سوال 2.57:

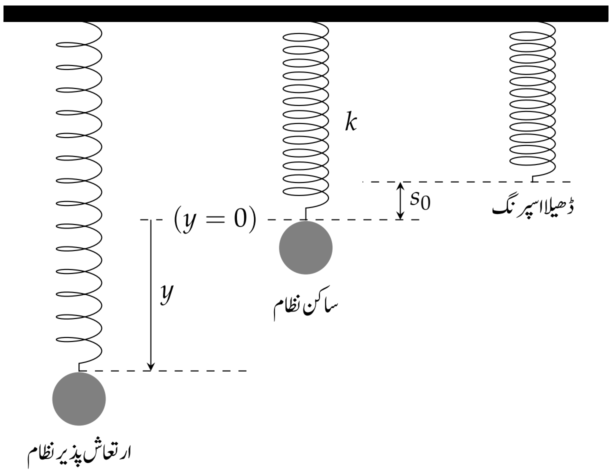
$$(9D^2+12D+4I)y=0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے۔ $y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{2}{3}x}$

2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش

مستقل قیمت کے عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات میکانی ارتعاش میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔اس حصے میں اسپرنگ سے جڑی کمیت کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔اس نظام کو اسپرنگ اور کمیت کا نظام کہا جائے گا جسے شکل 2.6 میں دکھایا گیا ہے۔

ایک عام اسپرنگ جو لمبائی میں اضافہ اور کمی کو روکتا ہو کو شکل 2.6 میں مستحکم سلاخ سے لٹکایا ہوا دکھایا گیا ہے۔اس کی نچلی سر سے کمیت m کی لوہے کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اس ساکن



شکل 2.6: اسپرنگ اور کمیت کا غیر قصری نظام۔

نظام میں اسپرنگ کے نچلے سر کو $y=0$ تصور کیا جاتا ہے۔ہم نیچے رخ کو مثبت رخ تصور کرتے ہیں۔یوں نیچے رخ قوت کو مثبت اور اوپر رخ قوت کو منفی تصور کیا جائے گا۔اسی طرح مقام $y=0$ سے نیچے رخ فاصلہ y مثبت ہو گا۔مزید اسپرنگ کی کمیت کو گیند کی کمیت سے اتنا کم تصور کیا جاتا ہے کہ اسپرنگ کی کمیت کو درج ذیل تبصرے میں رد کیا جا سکتا ہے۔

ساکن حالت میں اسپرنگ پر نیچے رخ قوت mg عمل کرتا ہے جس سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ یہاں $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع اور mg گیند کا وزن ہے۔اسپرنگ کی لمبائی میں اضافے کی وجہ سے، **قانون ہک**[35] کے تحت[36]، اسپرنگ اوپر رخ **بحالی قوت**[37] $F_0=-ks_0$ پیدا کرتا ہے جہاں k **اسپرنگ مستقلہ**[38] ہے جس کو $\mathrm{kg\,s^{-2}}$ یعنی $\mathrm{N\,m^{-1}}$ میں ناپا جاتا ہے۔بحالی قوت اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتا ہے۔قوت mg مثبت رخ ہے لہٰذا اس کو مثبت لکھا گیا ہے جبکہ قوت $-ks_0$ منفی رخ ہے لہٰذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔ان قوتوں کا مجموعہ صفر $mg-ks_0=0$ کے برابر ہوتا ہے۔اگر ان قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر نہ ہوتا تو گیند ساکن نہ ہوتا بلکہ نیوٹن کے قانون $F=my''$ کے تحت حرکت کرتا۔طاقتور اسپرنگ کے مستقلہ k کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ان دونوں قوتوں کی مقدار گیند کی حرکت سے تبدیل نہیں ہوتی

[35] Hooke's law
[36] روبرٹ ہک (1635-1703) انگلستان کے ماہر طبیعیات تھے۔
[37] restoring force
[38] spring constant

لہٰذا ان کا مجموعہ ہر وقت صفر کے برابر ہو گا۔یوں گیند کی حرکت میں ان دونوں قوتوں کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا ان پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

فرض کریں کہ گیند کو نیچے رخ کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔شکل 2.6 میں گیند کو ساکن مقام سے لحاتی طور y فاصلے پر دکھایا گیا ہے۔اس لمحہ اسپرنگ اضافی بحالی قوت $F_1 = -ky$ پیدا کرتا ہے جس کے تحت گیند نیوٹن کے قانون

$$F_1 = ma = my'' \tag{2.40}$$

کے تحت حرکت کرے گا جہاں $y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$ ہے۔

بلا تقصیر حرکت کی سادہ تفرقی مساوات

ہر نظام تقصیری ہوتا ہے ورنہ حرکت کبھی بھی نہ رکتی۔ نہایت کم تقصیری نظام جس کے حرکت کا مطالعہ نسبتاً کم دورانیے کے لئے کیا جائے میں تقصیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں اس کو بلا تقصیر تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 2.6 کا نظام بلا تقصیر نظام کی عمدہ مثال ہے۔نیوٹن کے قانون کو بروئے کار لیتے ہوئے اس نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$my'' + ky = 0 \tag{2.41}$$

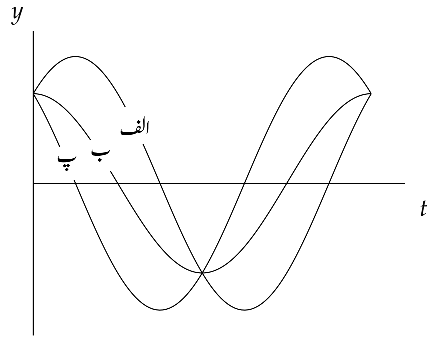
یہ مستقل عددی سر والا خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ہے۔امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $\lambda = \mp i\sqrt{\frac{k}{m}} = \mp i\omega_0$ ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.42}$$

اس حرکت کو **ہارمونی ارتعاش**[39] کہتے ہیں جس کی **تعدد**[40] $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ہرٹز[41] ہے[42]۔تعدد f_0 کو نظام کی **قدرتی تعدد**[43] کہتے ہیں۔چونکہ ایک سیکنڈ میں f_0 چکر (پھیرے) پورے ہوتے ہیں لہٰذا ایک چکر $\frac{1}{f_0}$ عرصے

---

[39] harmonic oscillation
[40] frequency
[41] Hertz
[42] ہائنرک ہرٹز(1857-1894) جرمنی کے ماہر طبیعیات تھے جنہوں نے برقناطیسی امواج دریافت کئے۔
[43] natural frequency



شکل 2.7: مساوات 2.42 کے عمومی اشکال۔

میں پورا ہو گا۔اس دورانیے کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو **دوری عرصہ**[44] کہتے ہیں۔

$$T = \frac{1}{f_0} \tag{2.43}$$

$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$ لیتے ہوئے مساوات 2.42 کو

$$y = C\cos(\omega_0 t - \delta) \tag{2.44}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں C **حیطہ**[45] اور δ **زاویائی فرق**[46] کہلاتے ہیں۔

مساوات 2.42 (یعنی مساوات 2.44) کو شکل 2.7 میں دکھایا گیا ہے۔دکھائے گئے تینوں منحنی میں ابتدائی فاصلہ $y(0) = A$ ہے جبکہ ابتدائی رفتار $y'(0) = \omega_0 B$ خط الف میں مثبت، ب میں صفر اور پ میں منفی ہے۔

مثال 2.16: ایک اسپرنگ سے 2 kg کمیت لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں 61.25 cm کا اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اس اسپرنگ سے کتنی کمیت لٹکانے سے ایک ہرٹز 1 Hz کا ارتعاش حاصل کیا جا سکتا ہے؟ ساکن حالت سے کمیت کو 10 cm نیچے کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

time period[44]
amplitude[45]
phase angle[46]

حل: قانون ہک کے تحت $mg = 0.6125k$ سے $k = \frac{2\times 9.8}{0.6125} = 32\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے۔ایک ہرٹز کی تعدد کے لئے $2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ سے $m = \frac{k}{(2\pi f_0)^2} = \frac{32}{(2\pi\times 1)^2} = 0.811\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.42 میں $y(0) = 0.10\,\mathrm{m}$ اور $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $A = 0.1$ اور $B = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا حرکت کی مساوات $y = 0.1\cos 2\pi t$ ہو گی۔ y کی قیمت میٹر میں ہو گی۔

قصری نظام کا سادہ تفرقی مساوات

شکل 2.8 میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک $F_3 = -cy'$ کا اضافہ کیا گیا ہے جو ہر لمحہ حرکت کے الٹ رخ عمل کرتی ہے۔یوں $my'' = -ky - cy'$ لکھا جائے گا جس سے قصری نظام کی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{2.45}$$

حاصل ہوتی ہے۔گیند کے ساتھ چادر منسلک کی گئی ہے جو ایک طرف سے بند نلکی میں حرکت کرتے ہوئے توانائی کا ضیاع اور یوں قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ اس حصے کو (توانائی کا) جاذب[47] بھی کہا جاتا ہے۔اس سے قوت روک پیدا ہوتا ہے۔تجربے سے دیکھا گیا ہے کہ کم رفتار پر ایسی قوت رفتار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ c **قصری مستقل**[48] کہلاتا ہے۔قصری مستقل از خود مثبت مستقل ہے۔یوں نیچے رخ رفتار، یعنی مثبت رفتار، کی صورت میں قصری قوت منفی، یعنی اوپر رخ، ہو گی۔

قصری نظام کی مساوات خطی متجانس ہے جس سے امتیازی مساوات (m سے تقسیم شدہ) لکھتے ہیں۔

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

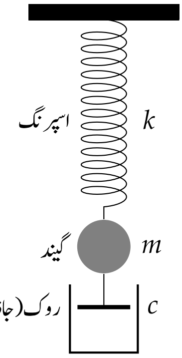
اس دو درجی الجبرائی مساوات کے جذر لکھتے ہیں۔

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta \quad \text{جہاں} \quad \alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{2.46}$$

تقصیر کی مقدار پر $c^2 - 4mk$ کی قیمت منحصر ہے جو تین مختلف صورتیں پیدا کرتی ہے۔

---

absorber[47]
damping constant[48]



شکل 2.8: اسپرنگ اور کمیت کا قصری نظام۔

پہلی صورت: **زیادہ تقصیر**[49] دو منفرد حقیقی جذر $\quad c^2 > 4mk$

دوسری صورت: **فاصل تقصیر**[50] دوہرا حقیقی جذر $\quad c^2 = 4mk$

تیسری صورت: **کم تقصیر**[51] جوڑی دار مخلوط جذر $\quad c^2 < 4mk$

اس قسم کی تین صورتیں ہم صفحہ 98 پر پہلے دیکھ چکے ہیں۔

تین صورتوں کے حل

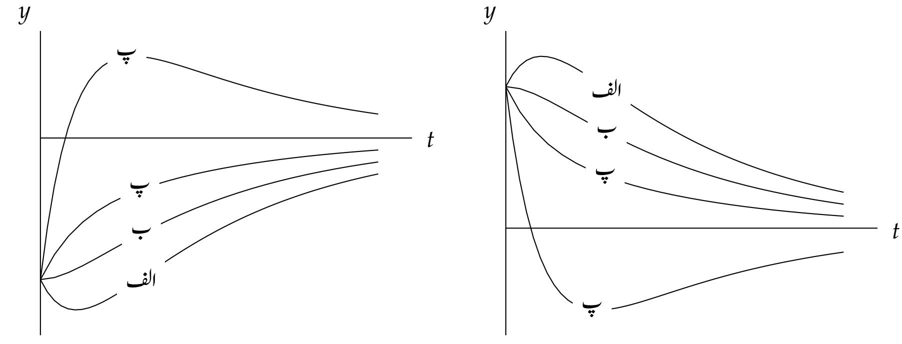
پہلی صورت

زیادہ تقصیر

پہلی صورت میں قصری قوت اتنا زیادہ ہے کہ $c^2 > 4mk$ ہے جس سے دو منفرد حقیقی جذر λ_1 اور λ_2 حاصل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \tag{2.47}$$

[49] over damping
[50] critical damping
[51] under damping



شکل 2.9: تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

چونکہ $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ اور $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$ ہیں لہٰذا $\alpha - \beta$ اور $\alpha + \beta$ دونوں مثبت مقدار ہیں۔یوں مساوات 2.47 میں دونوں قوت نمائی تفاعل کی طاقت منفی ہو گی اور دونوں تفاعل کی قیمتیں نہایت تیزی سے گھٹے گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \to \infty$ پر $y(\infty) \to 0$ ہو گا یعنی گیند ساکن ہو گا۔زیادہ قصری نظام میں قصری قوت اس تیزی سے نظام سے توانائی خارج کرتا ہے کہ نظام ارتعاش کرنے کے قابل نہیں رہتا۔

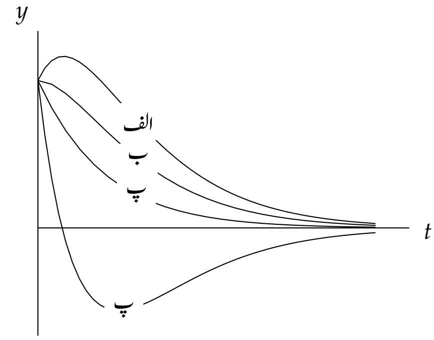
مساوات 2.47 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں ابتدائی فاصلہ مثبت ہے جبکہ شکل-ب میں ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔شکل-الف میں خط الف مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔شکل-ب میں خط الف منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تقصیری نظام میں ارتعاش ممکن نہیں ہے اور نظام میں حرکت بہت جلد ختم ہو جاتی ہے۔

دوسری صورت

فاصل تقصیر

زیادہ تقصیر اور کم تقصیر کے درمیان فاصل تقصیر کی صورت پائی جاتی ہے جہاں $c^2 = 4mk$ ہوتا ہے۔یوں $\beta = 0$ اور امتیازی مساوات کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ پایا جاتا ہے۔یوں مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t} \tag{2.48}$$



شکل 2.10: فاصل تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

یہ مساوات ساکن مقام $y = 0$ سے صرف ایک مرتبہ گزر سکتی ہے۔اس کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ $e^{-\alpha t}$ کبھی صفر یا منفی نہیں ہو سکتا جبکہ $c_1 + c_2 t$ صرف ایک صفر دیتا ہے۔اگر c_1 اور c_2 دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $c_1 + c_2 t$ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اور y صفر سے کبھی نہیں گزرے گا۔

شکل 2.10 میں مساوات 2.48 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ابتدائی فاصلہ مثبت لیا گیا ہے، خط الف میں ابتدائی رفتار مثبت، خط ب میں صفر اور دو عدد خط پ میں ابتدائی رفتار منفی لی گئی ہے۔یہ خطوط شکل 2.9-الف سے مشابہت رکھتے ہیں۔ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ موجودہ صورت منفرد حقیقی جذر کی وہ مخصوص صورت ہے جہاں دونوں جذر عین برابر ہوں۔

تیسری صورت

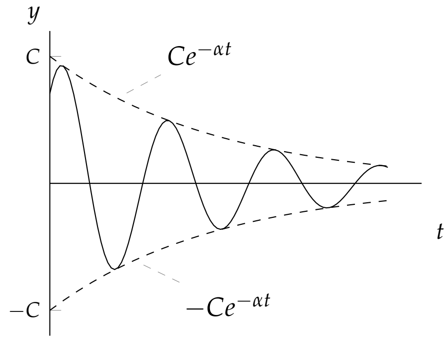
کم تقصیر

یہ سب سے زیادہ دلچسپ صورت ہے جہاں تقصیری مستقل کی قیمت اتنی کم ہے کہ $c^2 - 4mk < 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 2.46 میں β خیالی عدد ہو گا۔

$$\beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = i\omega \qquad (\omega > 0) \tag{2.49}$$

امتیازی مساوات کے جذر جوڑی دار مخلوط اعداد ہوں گے

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega \tag{2.50}$$



شکل 2.11: قصری ارتعاش۔

اور مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$y = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta) \tag{2.51}$$

جہاں $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$ ہیں۔

یہ **قصری ارتعاش**[52] کو ظاہر کرتی ہے جس کو شکل 2.11 میں دکھایا گیا ہے۔اس منحنی کی چوٹیاں، نقطہ دار لکیر سے دکھائی گئیں، تفاعل $y = Ce^{-\alpha t}$ اور $y = -Ce^{-\alpha t}$ کے منحنی کو چھوتی ہے۔ارتعاش کی تعدد $\frac{\omega}{2\pi}$ ہے جو قصری مستقل c کم کرنے سے بڑھتی ہے۔قصری مستقل کی قیمت صفر کرنے سے مساوات 2.44 کی ہارمونی ارتعاش حاصل ہوتی ہے جس کی قدرتی تعدد $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ہو گی۔

مثال 2.17: تقصیری حرکت کے تین صورتیں
ایک اسپرنگ جس کا مستقل $k = 32\,\mathrm{N\,kg^{-1}}$ ہے سے $m = 2\,\mathrm{kg}$ کا گیند لٹکایا گیا ہے۔اس نظام میں باری باری $c = 20\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ، $c = 16\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ اور $c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ تقصیری اثر شامل کیا جاتا ہے۔ابتدائی معلومات $y(0) = 4\,\mathrm{cm}$ اور $y'(0) = 0$ ہیں۔گیند کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قوت روک نظام میں توانائی کے ضیاع کو ظاہر کرتی ہے جس سے مسلسل گھٹتی ارتعاش (پہلی صورت) یا غیر ارتعاشی حرکت (دوسری اور تیسری صورت) پیدا ہوتی ہے۔

[52] damped oscillations

پہلی صورت: $m = 2$ ، $k = 32$ اور $c = 20$ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے

$$2y'' + 20y' + 32y = 0, \quad y(0) = 0.04\,\mathrm{m}, \quad y'(0) = 0$$

جس کا امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 20\lambda + 32 = 0$ ہے۔ امتیازی مساوات $2(\lambda+8)(\lambda+2) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = -8$ ہیں جن سے عمومی حل اور حل کا یک درجی تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}, \quad y' = -2c_1 e^{-2t} - 8e^{-8t}$$

ان میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے $c_1 + c_2 = 0.04$ اور $-2c_1 - 8c_2 = 0$ ملتا ہے جنہیں حل کرنے سے $c_1 = \frac{4}{75}$ اور $c_2 = -\frac{1}{75}$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح حرکت کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$y = \frac{4}{75}e^{-2t} - \frac{1}{75}e^{-8t}$$

یہ مسلسل گھٹتی ارتعاش ہے جو آخر کار $t \to \infty$ پر $y \to 0$ ہو گی یعنی بہت دیر بعد گیند ساکن ہو گا۔

دوسری صورت: $c = 16$ کی صورت میں امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 16\lambda + 32 = 0$ یعنی $2(\lambda+4)^2 = 0$ ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ ہے۔یوں حرکت کی عمومی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-4t}$$

جس میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c_1 = 0.04$ اور $c_2 = 0.16$ حاصل ہوتے ہیں جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

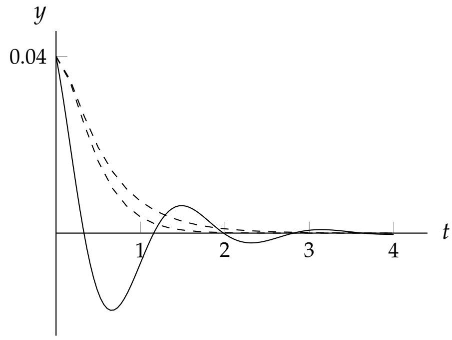
$$y = (0.04 + 0.16t)e^{-4t}$$

تیسری صورت: تقصیری مستقل $c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات $2y'' + 5y' + 32y = 0$ ہو گا جس سے امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 5\lambda + 32 = 0$ حاصل ہوتی ہے۔امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $-1.25 \mp 3.8i$ ہیں جن سے عمومی مساوات اور عمومی مساوات کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-1.25t}\left(A\cos 3.8t + B\sin 3.8t\right)$$
$$y' = -1.25e^{-1.25t}\left(A\cos 3.8t + B\sin 3.8t\right) + 3.8e^{-1.25t}\left(-A\sin 3.8t + B\cos 3.8t\right)$$

ابتدائی معلومات کو y کی مساوات میں پر کرنے سے $A = 0.04$ حاصل ہوتا ہے جبکہ انہیں y' کی مساوات میں پر کرنے سے $-1.25A + 3.8B = 0$ یعنی $B = -0.013$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-1.25t}\left(0.04\cos 3.8t - 0.013\sin 3.8t\right)$$



شکل 2.12: مثال 2.17 کی آزاد حرکت کی تین صورتیں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلا تقصیری نظام کی قدرتی ارتعاش $4 = \sqrt{\frac{32}{2}} = \omega_0$ سے موجودہ تعدد $\omega = 3.8$ کم ہے۔ شکل 2.12 میں اس مثال کی تینوں صورتوں کو دکھایا گیا ہے۔

اس حصے میں بیرونی قوتوں سے پاک اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی **آزاد حرکت**[53] پر غور کیا گیا۔ ایسے نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔ ہم اسی باب میں بیرونی جبری قوتوں کی موجودگی میں پائی جانے والی **جبری حرکت**[54] پر بھی غور کریں گے۔ ایسے نظام کو غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

سوالات

سوال 2.58 تا سوال 2.68 بلا تقصیر، ہارمونی ارتعاش کے سوالات ہیں۔

سوال 2.58: ابتدائی قیمت مسئلہ
بلا تقصیر ارتعاش کو مساوات 2.42 ظاہر کرتی ہے۔ ابتدائی فاصلہ $y(0) = y_0$ اور ابتدائی رفتار $y'(0) = v_0$ کی صورت میں مخصوص حل لکھیں۔

---

[53] free motion
[54] forced motion

جواب: $y = y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$

سوال 2.59: تعدد
ایک اسپرنگ کی لمبائی $75\,\mathrm{cm}$ ہے۔اس سے $0.25\,\mathrm{kg}$ کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی $85\,\mathrm{cm}$ ہو جاتی ہے۔اس نظام کی تعدد f_0 اور دوری عرصہ T کیا ہوں گے؟

جوابات: $f_0 = 1.58\,\mathrm{Hz}$ ، $T = 0.63\,\mathrm{s}$

سوال 2.60: تعدد
اسپرنگ اور کمیت کی نظام میں کمیت چار گنّا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔مستقلہ اسپرنگ کی قیمت چار گنّا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔

جوابات: کمیت چار گنّا کرنے سے تعدد آدھی ہوتی ہے۔مستقلہ اسپرنگ چار گنّا کرنے سے تعدد دگنی ہوتی ہے۔

سوال 2.61: ابتدائی رفتار
اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں ابتدائی رفتار صفر نہ ہونے کی صورت میں نظام کے تعدد اور رفتار پر کیا اثر ہو گا؟

جواب: نظام کی تعدد پر کوئی اثر نہیں ہو گا البتہ اس سے رفتار بڑھے گی۔

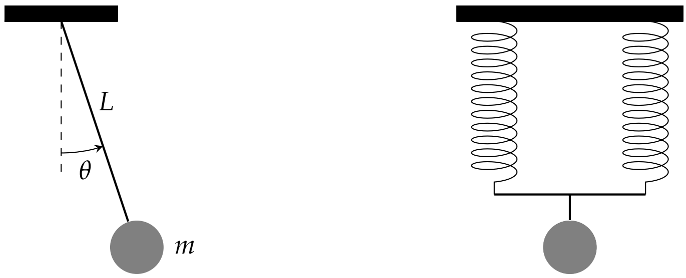
سوال 2.62: متوازی اسپرنگ
چار کلو گرام کی گیند کو $k_1 = 16\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جاتا ہے۔نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ اگر اسی گیند کو $k_2 = 32\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جائے تب نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ دونوں کی لمبائی برابر ہے۔ ان دونوں اسپرنگ کو متوازی جوڑا جاتا ہے۔ایسی صورت میں نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ شکل 2.13-الف کو دیکھیے۔

جوابات: $0.32\,\mathrm{Hz}$ ، $0.45\,\mathrm{Hz}$ ، $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = 0.55\,\mathrm{Hz}$

سوال 2.63: سلسلہ وار اسپرنگ
گزشتہ سوال کے دونوں اسپرنگ کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تعدد حاصل کریں۔

جوابات: $my'' + \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} y = 0$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}} = 0.26\,\mathrm{Hz}$

سوال 2.64: جھولا
ایک ہلکے دھاگے سے m کمیت کا گیند لٹکایا شکل 2.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس نظام کی تفرقی مساوات حاصل



(الف) سوال 2.62 کا نظام۔

(ب) سوال 2.64 کا نظام۔

شکل 2.13: متوازی اسپرنگ اور جھولا کے سوالات۔

کریں۔نہایت چھوٹے زاویے کی صورت میں $\sin\theta \approx \theta$ لکھتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں جس کو حل کرتے ہوئے نظام کی تعدد حاصل کریں۔

حل: گیند کا وزن mg ہے جو نیچے رخ قوت ہے۔اس کا مماس $mg\sin\theta$ ہے جو اسراع پیدا کرتا ہے۔
$L\theta'' = g\sin\theta$ ، $L\theta'' = g\theta$ ، $\theta = \cos\sqrt{\frac{g}{L}}t$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

سوال 2.65: اصول آرشمیدس

اصول آرشمیدس[55] کے تحت جب کسی جسم کو مائع میں ڈبویا جائے تو اس پر قوت اچھال عمل کرتی ہے جس کی مقدار، جسم کے ڈبویے گئے حجم کے برابر، مائع کے وزن جتنی ہوتی ہے۔

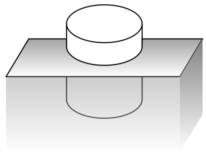
ایک بیلن کو سیدھا پانی میں کھڑا کرنے سے اس کا کچھ حصہ پانی میں ڈوب جاتا ہے۔شکل 2.14 میں اس کو ساکن حالت میں دکھایا گیا ہے۔بیلن کا رداس $r = 20\,\text{cm}$ ہے۔اگر بیلن کو نیچے دھکیل کر چھوڑا جائے تو یہ دو سیکنڈ کے دوری عرصے سے اوپر نیچے ارتعاشی حرکت کرتا ہے۔بیلن کی کمیت M دریافت کریں۔ پانی کی کثافت $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$ ہے۔

جوابات: $M = g\rho\pi r^2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.8\times 1000\pi 0.2^2\left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 124.8\,\text{kg}$

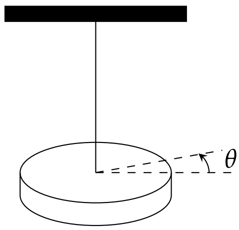
سوال 2.66: زنجیر کا میز سے پھسلنا

ایک پھسلنی میز پر زنجیر سیدھا پڑا ہوا ہے۔ ان کے مابین قوت رگڑ قابل نظر انداز ہے۔اگر زنجیر کے ایک سر کو میز

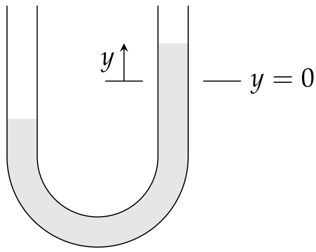
[55] Archimedian principle



شکل 2.14: آرشمیدسی اصول؛ سوال 2.65



(ب) مروڑی ارتعاش۔



(الف) نالی میں پانی کا ارتعاش۔

شکل 2.15: سوال 2.67 اور سوال 2.68 کے اشکال۔

سے لٹکایا جائے تو پورا زنجیر پھسلتے پھسلتے نیچے گر پڑتا ہے۔زنجیر کی کل لمبائی L اور کمیت m کلو گرام فی میٹر لیتے ہوئے اس مسئلے کا تفرقی مساوات لکھیں۔اگر $y(0) = 0$ اور $y'(0) = v_0$ ہو تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جوابات: $mLy'' = mgy$ ، $y = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right)$

سوال 2.67: نالی میں پانی کی ارتعاش
شکل 2.15-الف میں $M = 9\,\mathrm{kg}$ پانی زیر ثقلی قوت نالی میں ارتعاش کرتا ہے۔نالی کا اندرونی رداس $r = 1.5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ ارتعاش کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

جوابات: $My'' = -2\pi r^2 \rho g y$ ، $T = 5.06\,\mathrm{s}$

سوال 2.68: باریک غیر لچکدار تار سے I_0 **جمودی معیار اثر**[56] کی ٹکی لٹکائی جاتی ہے جو مروڑی ارتعاش کرتی ہے۔شکل 2.15-ب کو دیکھیے۔اس نظام کو $I_0\theta'' + k\theta = 0$ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے جہاں θ کو

[56] moment of inertia

متوازن حال سے ناپا جاتا ہے۔ k مروڑی مستقل (یا اسپرنگ مستقلہ) ہے جس کو $\mathrm{N\,m\,rad^{-1}}$ نیوٹن میٹر فی ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ ابتدائی زاویہ $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ریڈیئن یعنی $45°$ اور ابتدائی رفتار صفر ہے۔اس مساوات کو $\frac{k}{I_0} = 9\,\mathrm{s^{-2}}$ لیتے ہوئے حل کریں۔تعدد کا کلیہ دریافت کریں۔اس تجربے کو باریک تار کی مروڑی مستقل k حاصل کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ٹکی کا جمودی معیار اثر جانتے ہوئے اور قدرتی تعدد ناپ کر باریک تار کا مروڑی مستقل دریافت کیا جا سکتا ہے۔

جواب: $\theta = \frac{\pi}{4}\cos 3t$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I_0}}$

سوالات 2.69 تا سوال 2.69 میں قصری حرکت پایا جاتا ہے۔

سوال 2.69: زیادہ تقصیر

زیادہ تقصیری صورت میں مساوات 2.47 حل دیتی ہے۔ابتدائی معلومات $y(0) = y_0$ اور $y'(0) = v_0$ ہونے کی صورت میں c_1 اور c_2 دریافت کریں۔

جوابات: $c_1 = \frac{1}{2}[(1+\frac{\alpha}{\beta})y_0 + \frac{v_0}{\beta}]$ ، $c_2 = \frac{1}{2}[(1-\frac{\alpha}{\beta})y_0 - \frac{v_0}{\beta}]$

سوال 2.70: زیادہ تقصیر

زیادہ تقصیری صورت میں ثابت کریں کہ y زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ $y = 0$ سے گزر سکتا ہے۔

سوال 2.71: دھچکا روک

گاڑیوں میں **دھچکا روک**[57] نسب ہوتے ہیں جو گاڑی کی حرکت کو یقینی طور پر غیر ارتعاشی رکھتے ہیں۔صفحہ 123 پر شکل 2.8 دھچکا روک کو ظاہر کرتی ہے۔سوار کو دھچکوں سے پاک سواری اسپرنگ مہیا کرتا ہے جبکہ جاذب ان دھچکوں کی توانائی کو جذب کرتا ہے۔گاڑی بمع سواری کی کمیت کو m ظاہر کرتی ہے۔

کمیت $1300\,\mathrm{kg}$ اور اسپرنگ مستقل $80\,000\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$ ہونے کی صورت میں تقصیری مستقل کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر یقین طور غیر ارتعاشی سواری حاصل ہو گی۔

جواب: $c \geq 20\,396\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

---

[57] shock absorber

سوال 2.72: تعدد
کم قصری صورت کی ارتعاش کا تعدد ω مساوات 2.49 دیتا ہے۔اس مساوات پر مسئلہ ثنائی کا اطلاق کرتے ہوئے پہلے دو اجزاء لیں اور مثال 2.17 کی کم قصری حرکت ($c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$) کی تعدد ارتعاش حاصل کریں۔موجودہ جواب اور مثال میں حاصل کردہ جوابات میں کتنے فی صد فرق پایا جاتا ہے۔

جوابات: $\omega = \omega_0(1 - \frac{c^2}{8mk})$ ، $\omega = 3.8046$ لہٰذا دونوں جوابات میں $0.13\,\%$ فرق پایا جاتا ہے۔(مثال 2.17 میں تعدد کی بالکل ٹھیک قیمت $\omega = 3.79967$ ہے جسے مثال میں $\omega = 3.8$ لکھا گیا ہے۔)

سوال 2.73: بلا تقصیر نظام کے قدرتی تعدد اور کم تقصیری نظام ($5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$) کے تعدد ارتعاش میں فرق مثال 2.17 کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $4.88\,\%$ ؛ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگرچہ قوت روک تعدد ارتعاش پر فرق ڈالتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔

سوال 2.74: کم قصری ارتعاش کی مثبت چوٹیاں یکساں وقفوں پر پائی جاتی ہیں۔اس وقفے کو دریافت کریں۔

جواب: مساوات 2.51 کی مثبت چوٹیاں $\omega t - \delta = 2n\pi$ پر پائی جاتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2 \cdots$ ہے۔یوں دو چوٹیوں کے درمیان وقفہ $\frac{2\pi}{\omega}$ یعنی $T = \frac{1}{f}$ ہو گا۔

سوال 2.75: لوگارتھمی گھٹاو
کم قصری نظام میں دو قریبی چوٹیوں کی قیمتوں کی شرح ایک مستقل قیمت ہوتی ہے جس کے لوگارتھم کو **لوگارتھمی گھٹاو**[58] کہتے ہیں۔لوگارتھمی گھٹاو Δ حاصل کریں۔

جواب: $\Delta = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$

سوال 2.76: تقصیری مستقل
ایک کم تقصیری نظام میں $m = 0.25\,\mathrm{kg}$ ہے اور ارتعاش کا دوری عرصہ $5\,\mathrm{s}$ ہے۔بیس چکروں میں چوٹی گھٹ کر $\frac{1}{4}$ گنّا رہ جاتی ہے۔نظام کے تقصیری مستقل کا تخمینہ لگائیں۔

جواب: $\alpha = 0.01386$

---

[58] logarithmic decrement

2.5 یولر کوشی مساوات

سادہ تفرقی مساوات[59]

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{2.52}$$

یولر کوشی مساوات[60] کہلاتا ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔اس میں

$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

پر کرنے سے

$$x^2m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

ملتا ہے جس کو مشترک جزو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے **ذیلی مساوات**[61] $m(m-1) + am + b = 0$ یعنی

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \tag{2.53}$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں $y = x^m$ مساوات 2.52 کا حل اس صورت ہو گا جب m مساوات 2.53 کا جذر ہو۔مساوات 2.53 کے جذر

$$m_1 = \frac{1}{2}(1-a) + \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}, \quad m_2 = \frac{1}{2}(1-a) - \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b} \tag{2.54}$$

ہیں۔

پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر کی صورت میں دو منفرد حل

$$y_1 = x^{m_1}, \quad y_2 = x^{m_2}$$

ملتے ہیں۔چونکہ ان حل کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں۔اس طرح یہ حل کی اساس ہیں اور انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2} \tag{2.55}$$

[59] لیون آرڈ یولر (1707-1783) سوئزر لینڈ کا رہائشی اور ماہر حساب تھا۔آگستن لوئی کوشی (1789-1857) فرانسیسی ماہر حساب تھا جنہوں نے جدید تجزیے کی بنیاد ڈالی۔
[60] Euler-Cauchy equation
[61] auxiliary equation

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔یہ حل تمام x کے لئے درست ہے۔

مثال 2.18: یولر کوشی مساوات $x^2y'' + 0.5xy' - 1.5y = 0$ سے $m^2 - 0.5m - 1.5m = 0$ ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $m_1 = 1.5$ اور $m_2 = -1$ ہیں۔ان سے اساس $y_1 = x^{\frac{3}{2}}$ ، $y_2 = x^{-1}$ لکھی جا سکتی ہے۔اساس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 x\sqrt{x} + \frac{c_2}{x}$$

دوسری صورت: حقیقی دوہرا جذر $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}(1-a)$ اس صورت پایا جاتا ہے جب $b = \frac{1}{4}(1-a)^2$ ہو۔ایسی صورت میں مساوات 2.52 درج ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے

$$x^2y'' + axy' + \frac{1}{4}(1-a)^2 y = 0 \quad \implies \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0 \tag{2.56}$$

جس کا ایک حل $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے۔

دوسرا خطی طور غیر تابع حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب پر حصہ 2.1 میں غور کیا گیا ہے۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے پہلا حل y_1 اور دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لیتے ہیں۔یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ اور $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ ہوں گے جنہیں معیاری تفرقی مساوات 2.56 میں پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + \frac{1}{x}(u'y_1 + uy_1') + \frac{(1-a)^2}{4x^2}(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے جزو ضرب اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) + u[y_1'' + \frac{a}{x}y_1' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y_1] = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں دایاں قوسین صفر کے برابر ہو گا اور یوں

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$u'' + u'\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{x}\right) = 0$$

اب چونکہ $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے لہٰذا $y_1' = \frac{1-a}{2}x^{(\frac{1-a}{2}-1)} = \frac{1-a}{2}\frac{y_1}{x}$ اور $\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1-a}{2x}$ ہو گا جس کو درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$u'' + u'\left[2\left(\frac{1-a}{2x}\right) + \frac{a}{x}\right] = 0 \quad \implies \quad u'' + \frac{u'}{x} = 0$$

اس میں $u' = v$ لیتے ہوئے $v' + \frac{v}{x} = 0$ ملتا ہے جس کا حل $v = \frac{1}{x}$ ہے۔یوں $v = u' = \frac{1}{x}$ لکھتے ہوئے تکمل لے کر $u = \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح خطی طور غیر تابع دوسرا حل $y_2 = uy_1 = y_1 \ln x$ ہو گا۔ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^m \qquad m = \frac{1-a}{2} \tag{2.57}$$

مثال 2.19: دوہرا جذر

یولر کوشی مساوات $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ کا ذیلی مساوات $m^2 - 8m + 16 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $m_1 = m_2 = 4$ ہے۔یوں تمام مثبت x کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^4$$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر کی صورت انجینئری نقطہ نظر سے زیادہ اہم نہیں ہے لہٰذا اس کی ایک عدد مثال ہی دیکھتے ہیں۔

مثال 2.20: یولر کوشی مساوات $x^2y'' + 0.8xy' + 9.01y = 0$ کی $m^2 - 0.2m + 9.01 = 0$ ذیلی مساوات ہے جس کے جوڑی دار مخلوط جذر $m_1 = 0.1 + 3i$ اور $m_2 = 0.1 - 3i$ ہیں جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ یہاں ایک چال چلاتے ہیں جس کے ذریعہ خیالی عدد i سے چھٹکارا حاصل ہو گا کرتے ہیں یعنی ہم $x = e^{\ln x}$ لکھتے ہیں۔ یوں

$$x^{m_1} = x^{0.1+3i} = x^{0.1}\left(e^{\ln x}\right)^{3i} = x^{0.1}e^{(3\ln x)i}$$
$$x^{m_2} = x^{0.1-3i} = x^{0.1}\left(e^{\ln x}\right)^{-3i} = x^{0.1}e^{-(3\ln x)i}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ اب صفحہ 104 پر یولر مساوات 2.27 استعمال کرتے ہیں۔

$$x^{m_1} = x^{0.1}e^{(3\ln x)i} = x^{0.2}[\cos(3\ln x) + i\sin(3\ln x)]$$
$$x^{m_2} = x^{0.1}e^{-(3\ln x)i} = x^{0.2}[\cos(3\ln x) - i\sin(3\ln x)]$$

اب دونوں کا مجموعہ لیتے ہوئے دو (2) سے تقسیم کرتے ہیں۔ اسی طرح پہلی سے دوسری مساوات منفی کرتے ہوئے $-2i$ سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$x^{0.1}\cos(3\ln x), \qquad x^{0.1}\sin(3\ln x)$$

ان کا حاصل تقسیم $\tan(3\ln x)$ ہے جو مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا درج بالا دونوں خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس طرح یہ حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

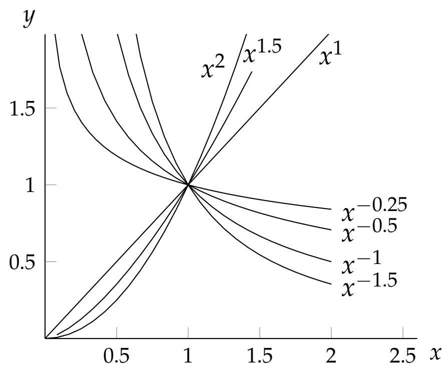
$$y = x^{0.1}[c_1\cos(3\ln x) + c_2\sin(3\ln x)]$$

شکل 2.16 میں یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کی تینوں صورتوں کے حل دکھائے گئے ہیں۔

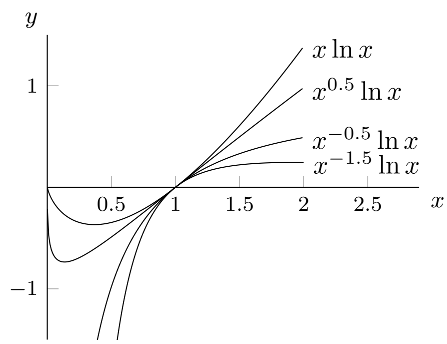
مثال 2.21: دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں ساکن برقی میدان؛ سرحدی قیمت مسئلہ

دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں برقی دباو تفرقی مساوات $\rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} = 0$ دیتی ہے۔ نلکی کے رداس $\rho_1 = 2\,\mathrm{cm}$ اور $\rho_2 = 5\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ ان پر **برقی دباو**[62] $v_1 = 50\,\mathrm{V}$ اور $v_2 = 0\,\mathrm{V}$ ہے۔ درمیانی خطے کی

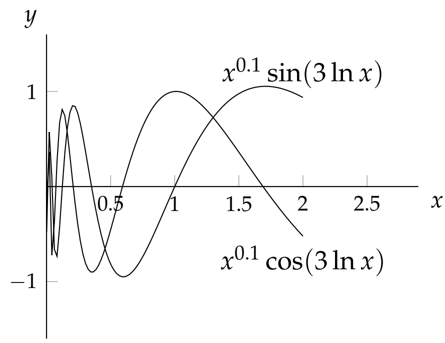
electric voltage[62]



(الف) پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر۔

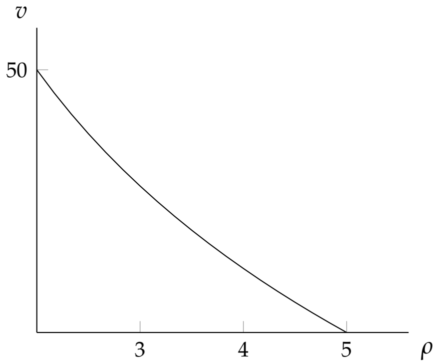


(ب) دوسری صورت: دوہرا جذر۔



(پ) جوڑی دار مخلوط جذر۔

شکل 2.16: یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل۔



شکل 2.17: مثال 2.21 کا حل۔

برقی دباو حاصل کریں۔

حل: یولر کوشی مساوات میں $a = 1$ اور $b = 0$ موجودہ تفرقی مساوات دیتا ہے۔ دیے مساوات میں $v = \rho^m$ پر کرتے ہوئے ذیلی مساوات $m^2 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کا دوہرا جذر $m = 0$ ہے۔ یوں عمومی حل $v = c_1 + c_2 \ln x$ ہو گا۔ دیے گئے سرحدی شرائط حل میں پر کرتے

$$50 = c_1 + c_2 \ln 0.02, \quad 0 = c_1 + c_2 \ln 0.05$$

ہوئے $c_1 = -163.471$ اور $c_2 = -54.568$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مخصوص حل $y = -163.471 - 54.568 \ln \rho$ ہو گا جسے شکل 2.17 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.22: یولر کوشی مساوات 2.52 میں $x = e^t$ پر کرتے ہوئے اس کو مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات میں تبدیل کریں۔

حل: ہم $y(x)$ کو $y[x(t)]$ یعنی $y(t)$ تصور کرتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{x^2}$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

انہیں مساوات 2.52 میں پر کرتے

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+ax\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+by=0$$

ہوئے مستقل عددی سر والا سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں $\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\ddot{y}=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$ ہیں۔

$$\ddot{y}+(a-1)\dot{y}+by=0 \tag{2.58}$$

سوالات

سوال 2.77 تا سوال 2.85 حل کریں۔

سوال 2.77:

$$x^2y''-2xy'+2y=0$$

جواب: $y=c_1x+c_2x^2$

سوال 2.78:

$$x^2y''-6y=0$$

جواب: $y=c_1x^3+c_2x^{-2}$

سوال 2.79:

$$x^2y''+6xy'+4y=0$$

جواب: $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^4}$

سوال 2.80:

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^3$

سوال 2.81:

$$x^2y'' + 11xy' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-5}$

سوال 2.82:

$$10x^2y'' + 11xy' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^{-\frac{3}{5}}$

سوال 2.83:

$$x^2y'' + 0.44xy' + 0.0748y = 0$$

جواب: $y = c_1x^{0.22} + c_2x^{0.34}$

سوال 2.84:

$$x^2y'' + 0.4xy' + 0.73y = 0$$

جواب: $y = x^{0.3}[c_1\cos(0.8\ln x) + c_2\sin(0.8\ln x)]$

سوال 2.85:

$$x^2y'' + 2xy' + 4.25y = 0$$

جواب: $y = x^{-0.5}[c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)]$

سوال 2.86 تا سوال 2.91 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 2.86:

$$x^2y'' - 0.4xy' + 0.45y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$$

جواب: $y=7\sqrt{x}-5x^{0.9}$

سوال 2.87:

$$x^2y''+1.08xy'-0.01713y=0,\quad y(1)=-1,\quad y'(1)=1$$

جواب: $y=\frac{23}{18}x^{0.23}-\frac{41}{18}x^{-0.31}$

سوال 2.88:

$$35x^2y''+57xy'+3y=0,\quad y(1)=3,\quad y'(1)=-5$$

جواب: $y=\frac{77}{4}x^{-\frac{3}{7}}-\frac{65}{4}x^{-\frac{1}{5}}$

سوال 2.89:

$$6x^2y''+19xy'+6y=0,\quad y(1)=-3,\quad y'(1)=1$$

جواب: $y=\frac{6}{5}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{21}{5}x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 2.90:

$$25x^2y''-15xy'+16y=0,\quad y(2)=0,\quad y'(2)=1$$

جواب: $y=2^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}(\ln x-\ln 2)$

سوال 2.91:

$$49x^2y''+77xy'+4y=0,\quad y(2)=3,\quad y'(2)=0$$

جواب: $y=x^{-\frac{2}{7}}(2.93+1.04\ln x)$

2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ورونسکی

اس حصے میں متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات،

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.59}$$

جس کے عددی سر $p(x)$ اور $q(x)$ کوئی بھی **استمراری تفاعل** ہو سکتے ہیں، کے عمومی حل کی **وجودیت**[63] پر غور کیا جائے گا۔ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.59 اور ابتدائی معلومات

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{2.60}$$

کے ابتدائی قیمت مسئلہ کی مخصوص حل کی **یکتائی**[64] پر بحث کی جائے گی۔

مسئلہ 2.2 کہتا ہے کہ اس ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل پایا جاتا ہے جو یکتا ہو گا اور مساوات 2.59 کے عمومی حل

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad \text{اختیاری } c_1, c_2 \tag{2.61}$$

میں تمام حل شامل ہیں۔یوں استمراری عددی سر والے متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا۔نادر حل اس حل کو کہتے ہیں جسے عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

ہمیں مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات یا یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت اور یکتائی جاننے کی ضرورت پیش نہیں آئی چونکہ ان کے حل کے دوران ہی ایسی تمام معلومات سامنے آ جاتی ہیں۔

مسئلہ 2.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت تفرقی مساوات
اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کسی کھلے وقفے I پر استمراری ہوں اور x_0 اس وقفے پر پایا جاتا ہو، تب مساوات 2.59 اور مساوات 2.60 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا مخصوص حل $y(x)$ موجود ہے۔

وجودیت حل کی ثبوت کے لئے وہی بنیادی شرائط درکار ہیں جو صفحہ 75 پر مسئلہ 1.3 کے لئے درکار تھے۔اس کتاب میں ان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ اگرچہ یکتائی کا ثبوت عموماً آسان ہوتا ہے لیکن موجودہ مسئلہ 2.2 کے یکتائی حل کا ثبوت اتنا آسان نہیں ہے لہٰذا اس کو کتاب کے آخر میں بطور ضمیمہ ا شامل کیا گیا ہے۔

---

[63] existence
[64] uniqueness

خطی طور غیر تابع حل

آپ کو حصہ 2.4 سے یاد ہو گا کہ کھلے وقفہ I پر **عمومی حل اساس** y_1، y_2 پر **مشتمل** ہوتا ہے جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفے I پر خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ وقفہ I پر **معین** y_1 اور y_2، وقفہ I پر، اس صورت **خطی طور غیر تابع**[65] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.62}$$

سے مراد

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \tag{2.63}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.62 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 **خطی طور تابع**[66] کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.62 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\text{(الف)} \quad y_1 = ky_2, \quad \text{(ب)} \quad y_2 = ly_1 \qquad \text{پورے } I \text{ پر} \tag{2.64}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.62 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا (اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔) خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع حل کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 2.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 2.62 کے I پر دو حل y_1 اور y_2 اس صورت **خطی طور تابع** ہوں گے جب ان کے **ورونسکی**[67]

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' \tag{2.65}$$

کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W **مکمل صفر**[68] ہو گا۔ یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب y_1 اور y_2 **خطی طور غیر تابع** ہوں گے۔

---

[65] linearly independent
[66] linearly dependent
[67] Wronskian
[68] identically zero

ثبوت :

(الف) y_1 اور y_2 کو I پر خطی طور غیر تابع تصور کریں۔یوں مساوات 2.64-الف یا ب میں سے ایک درست ہو گا۔اگر مساوات 2.64-الف درست ہو تب

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = ky_2y_2' - y_2ky_2' = 0$$

ہو گا۔اسی طرح مساوات 2.64-ب کی صورت میں بھی $W = 0$ ملتا ہے۔

(ب) اس کے الٹ چلتے ہوئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی x_0 پر $W(y_1, y_2) = 0$ سے مراد y_1 اور y_2 کا I پر خطی طور تابع ہونا ہے۔درج ذیل مساوات پر غور کریں جہاں k_1 اور k_2 کو نا معلوم متغیرات تصور کریں۔

$$\begin{aligned} k_1y_1(x_0) + k_2y_2(x_0) &= 0 \\ k_1y_1'(x_0) + k_2y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

k_2 حذف کرنے کی نیت سے پہلی مساوات کو $y_2'(x_0)$ اور دوسری کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_1y_1(x_0)y_2'(x_0) - k_1y_1'(x_0)y_2(x_0) = k_1W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0 \tag{2.67}$$

اسی طرح k_1 حذف کرنے کے لئے پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں مساوات کا مجموعہ

$$k_2y_1(x_0)y_2'(x_0) - k_2y_2(x_0)y_1'(x_0) = k_2W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0 \tag{2.68}$$

لیتے ہیں۔اب اگر x_0 پر W صفر نہ ہوتا تب ہم مساوات 2.67 اور مساوات 2.68 کو W سے تقسیم کرتے ہوئے $k_1 = k_2 = 0$ حاصل کرتے البتہ x_0 پر $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ ہے لہٰذا ہم ان مساوات کو W سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔یوں ہمزاد مساوات 2.66 کا حل k_1 اور k_2 پایا جاتا ہے جہاں k_1 اور k_2 دونوں غیر صفر ہو سکتے ہیں۔اب ان اعداد k_1 اور k_2 کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل

$$y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x) \tag{2.69}$$

لیتے ہیں۔چونکہ مساوات 2.59 متجانس خطی ہے لہٰذا مسئلہ 2.1 (مسئلہ خطی میل) کے تحت یہ تفاعل بھی مساوات 2.59 کا حل ہو گا۔مساوات 2.66 سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل ابتدائی معلومات $y(x_0) = 0$ اور

$y'(x_0)=0$ پر پورا اترتا ہے۔اب تصور کریں کہ مساوات 2.59 کا دوسرا حل جو انہیں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہو $y^*(x)=0$ ہے۔اب چونکہ مساوات 2.59 میں $p(x)$ اور $q(x)$ استمراری ہیں لہٰذا مسئلہ 2.2 کے تحت اس کا مخصوص حل یکتا ہو گا۔یوں $y(x)$ اور $y^*(x)$ مختلف نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا $y^*(x)=y(x)=0$ یعنی

$$k_1y_1+k_2y_2\equiv 0 \qquad \text{پورے } I \text{ پر} \tag{2.70}$$

ہو گا۔چونکہ k_1 اور k_2 میں کم از کم ایک صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا مساوات 2.70 کہتا ہے کہ I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں۔

(پ) ہم مسئلے کا آخری نقطہ ثابت کرتے ہیں۔اگر کھلے وقفے I پر نقطہ x_0 پر $W(x_0)=0$ ہو تب ثبوت (ب) کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں لہٰذا ثبوت (الف) کے تحت $W\equiv 0$ ہو گا۔یوں خطی طور تابعیت کی صورت میں ایسا نہیں ہو سکتا ہے کہ $W(x_1)\neq 0$ ہو جہاں x_1 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔اگر ایسا ممکن ہو تب اس سے مراد خطی طور غیر تابعیت ہو گی جیسا کہ دعویٰ کیا گیا ہے۔

حساب کی نقطہ نظر سے مساوات 2.65 سے درج ذیل زیادہ آسان مساوات ہے۔

$$W(y_1,y_2)=\begin{cases}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 & (y_1\neq 0)\\ -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' y_2^2 & (y_2\neq 0)\end{cases} \tag{2.71}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ورونسکی کو قالب کی مقطع کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جس کو **ورونسکی مقطع**[69] یا y_1 اور y_2 کی **ورونسکی** کہتے ہیں۔

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1' \tag{2.72}$$

---

[69] Wronskian determinant

مثال 2.23: مسئلہ 2.3 کا اطلاق
تفرقی مساوات $y'' + \omega^2 y = 0$ کے حل $y_1 = \cos \omega x$ اور $y_2 = \sin \omega x$ ہیں۔ان کی ورونسکی

$$W(\cos \omega x, \sin \omega x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & -\omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega \cos^2 \omega x + \omega \sin^2 \omega x = \omega$$

ہے۔مسئلہ 2.3 کے تحت یہ حل صرف اس صورت میں خطی طور غیر تابع ہوں گے جب $\omega \neq 0$ ہو۔یہی دونوں حل کے حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = \tan \omega x$ سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے جہاں $\omega = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور تابع صورت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 2.24: دوہرا جذر کی صورت میں مسئلہ 2.3 کا اطلاق
تفرقی مساوات $y'' - 6y' + 9y = 0$ کا (ثابت کریں کہ) عمومی حل $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$ ہے جس کا ورونسکی صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا e^{3x} اور xe^{3x} تمام x پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3xe^{6x} = e^{6x} \neq 0$$

مساوات 2.59 کے عمومی حل میں تمام حل کی شمولیت

اس حصے کو مساوات 2.59 کے عمومی حل کی وجودیت سے شروع کرتے ہیں۔

مسئلہ 2.4: **وجودیت عمومی حل**
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں مساوات 2.59 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: مسئلہ 2.2 کے تحت I پر مساوات 2.59 کا، ابتدائی معلومات

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_1(x)$ موجود ہے۔اسی طرح ابتدائی معلومات

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_2(x)$ بھی موجود ہے۔نقطہ x_0 پر ان کا ورونسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 1$$

ہے۔مسئلہ 2.3 کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ مساوات 2.59 کے حل کی اساس ہیں۔اس طرح ثابت ہوا کہ I پر مساوات 2.59 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ عمومی حل اتنا عمومی ہے جتنا کوئی حل عمومی ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 2.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلا وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.59 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$Y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{2.73}$$

لکھا جا سکتا ہے، جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.59 کی کوئی بھی اساس اور C_1 ، C_2 مناسب مستقل ہیں۔

یوں مساوات 2.59 کا کوئی نادر حل موجود نہیں ہے۔(نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔)

ثبوت: تصور کریں کہ I پر مساوات 2.59 کا $y = Y(x)$ کوئی حل ہے۔اب مسئلہ 2.4 کے تحت I پر تفرقی مساوات 2.59 کا عمومی حل

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{2.74}$$

موجود ہے۔ہم c_1 اور c_2 کی وہ قیمتیں دریافت کرنا چاہتے ہیں جن سے I پر $y(x)=Y(x)$ حاصل ہوتا ہو۔ہم I پر کوئی بھی x_0 چنتے ہوئے پہلے ثابت کرتے ہیں کہ c_1 اور c_2 کی ایسی قیمتیں دریافت کی جا سکتی ہیں کہ x_0 پر $y(x_0)=Y(x_0)$ اور $y'(x_0)=Y'(x_0)$ ہوں۔اس کو مساوات 2.74 کے استعمال سے

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=Y(x_0) \tag{2.75}$$
$$c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=Y'(x_0) \tag{2.76}$$

لکھ سکتے ہیں۔ان ہمزاد مساوات سے c_1 اور c_2 معلوم کرتے ہیں۔مساوات 2.75 کو $y_2'(x_0)$ اور مساوات 2.76 کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لینے سے c_1 حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے مساوات 2.77 ملتی ہے۔اسی طرح c_2 حاصل کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لیتے ہوئے مساوات 2.78 حاصل ہوتی ہے۔ان مساوات میں y_1 ، y_1' ، y_2 ، y_2' ، Y اور Y' کی قیمتیں نقطہ x_0 پر لی گئی ہیں۔

$$c_1y_1y_2'-c_1y_2y_1'=c_1W(y_1,y_2)=Yy_2'-y_2Y \tag{2.77}$$
$$c_2y_1y_2'-c_2y_2y_1'=c_2W(y_1,y_2)=y_1Y-Yy_1' \tag{2.78}$$

اب چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہٰذا ورونسکی کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا ان مساوات سے c_1 اور c_2 حاصل کیے جا سکتے ہیں

$$c_1=\frac{Yy_2'-y_2Y}{W}=C_1, \quad c_2=\frac{y_1Y-Yy_1'}{W}=C_2$$

جہاں ان منفرد قیمتوں کو C_1 اور C_2 لکھا گیا ہے۔انہیں مساوات 2.74 میں پر کرتے ہوئے مخصوص حل

$$y^*(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ C_1 اور C_2 مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل ہیں لہٰذا ہم ان مساوات سے دیکھتے ہیں کہ

$$y^*(x_0)=Y(x_0), \quad y^{*\prime}(x_0)=Y'(x_0)$$

مسئلہ 2.2 میں جس یکتائی کا ذکر کیا گیا ہے اس کے تحت y^* اور Y تمام I پر ہر جگہ برابر ہوں گے۔

سوالات

سوال 2.92: مساوات 2.71 سے مساوات 2.65 حاصل کریں۔

سوال 2.93 تا سوال 2.99 کی ورونسکی حاصل کریں۔حاصل تقسیم سے ثابت کریں کہ یہ خطی طور غیر تابع ہیں اور مسئلہ 2.3 سے بھی اس بات کی تصدیق کریں

سوال 2.93: $e^{2x}, e^{-1.2x}$
جوابات: $\frac{e^{2x}}{e^{-1.2x}} = e^{3.2x} \neq c$ ، $W = -3.2e^{0.8x} \neq 0$

سوال 2.94: $e^{2.4x}, e^{1.1x}$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = e^{1.3x} \neq c$ ، $W = -1.3e^{3.5x} \neq 0$

سوال 2.95: $x, \frac{1}{x}$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = x^2 \neq c$ ، $W = -2x^{-2} \neq 0$

سوال 2.96: x, x^3
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = x^{-2} \neq c$ ، $W = 2x^3 \neq 0$

سوال 2.97: $e^{-0.2x} \sin 3x, e^{-0.2x} \cos 3x$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tan 3x \neq c$ ، $W = 3e^{-0.4x} \neq 0$

سوال 2.98: $e^{-ax} \sinh kx, e^{-ax} \cosh kx$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tanh kx \neq c$ ، $W = -ke^{-2ax} \neq 0$

سوال 2.99: $x^a \sin(k \ln x), x^a \cos(k \ln x)$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tan(k \ln x) \neq c$ ، $W = -kx^{2a-1} \neq 0$

سوال 2.100 تا سوال 2.106 میں تفرقی مساوات کے حل دیے گئے ہیں۔تفرقی مساوات حاصل کریں۔ورونسکی کی مدد سے ثابت کریں کہ دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں اور ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.100: $\sin 3x, \cos 3x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$
جوابات: $y'' + 9y = 0$ ، $W = -3 \neq 0$ ، $y = 2\cos 3x - \sin 3x$

سوال 2.101: $x^3,\ x^{-4}, \quad y(1)=-1, \quad y'(1)=2$
جوابات: $x^2y''+2xy'-12y=0$ ، $W=-\frac{7}{x^2}\neq 0$ ، $y=-\frac{2x^3}{7}-\frac{5x^{-4}}{7}$

سوال 2.102: $e^{-1.2x}\sin 0.8x,\ e^{-1.2x}\cos 0.8x, \quad y(0)=5, \quad y'(0)=7$
جوابات: $y''+2.4y'+2.08y=0$ ، $W=-0.8e^{-2.4x}\neq 0$ ،
$y=e^{-\frac{6}{5}x}(\frac{65}{4}\sin\frac{4x}{5}+5\cos\frac{4x}{5})$

سوال 2.103: $x^3,\ x^3\ln x, \quad y(1)=2, \quad y'(1)=8$
جوابات: $x^2y''-5xy'+9y=0$ ، $W=x^5\neq 0$ ، $y=2x^3(1+\ln x)$

سوال 2.104: $1,\ e^{3x}, \quad y(0)=1.5, \quad y'(0)=-2.5$
جوابات: $y''-3y'=0$ ، $W=3e^{3x}\neq 0$ ، $y=\frac{8}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}$

سوال 2.105: $e^{-kx}\sin\pi x,\ e^{-kx}\cos\pi x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-k-\pi$
جوابات: $y''+2ky'+(k^2+\pi^2)y=0$ ، $W=-\pi e^{-2kx}\neq 0$ ،
$y=e^{-kx}(\sin\pi x-\cos\pi x)$

سوال 2.106: $\sinh 1.8x,\ \cosh 1.8x, \quad y(0)=14.2, \quad y'(0)=16.38$
جوابات: $y''-3.24y=0$ ، $W=-1.8\neq 0$ ،
$y=9.1\sinh 1.8x+14.2\cosh 1.8x$

سوال 2.107: تفرقی مساوات $y''-y=0$ کا عمومی حل قوت نمائی تفاعل اور بذلولی[70] تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ دونوں صورتوں کے مستقل کا تعلق کیا ہے؟

جوابات: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ ، $y=c_a\sinh x+c_b\cosh x$ ، $c_a=c_1-c_2$ ، $c_b=c_1+c_2$

[70] hyperbolic

2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات

اس باب میں اب تک متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ یہاں سے باب کے اختتام تک غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ درج ذیل غیر متجانس خطی تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جہاں $r \not\equiv 0$ ہے۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.79}$$

ہم دیکھیں گے کہ مساوات 2.79 کا عمومی حل، مطابقتی متجانس مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.80}$$

کے عمومی حل اور مساوات 2.80 کے ایک مخصوص حل کا مجموعہ ہو گا۔ مساوات 2.79 کے عمومی حل اور مخصوص حل کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: عمومی حل اور مخصوص حل
کھلے وقفہ I پر غیر متجانس مساوات 2.79 کا عمومی حل

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{2.81}$$

ہو گا جہاں I پر $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ متجانس مساوات 2.80 کا عمومی حل ہے اور I پر y_p مساوات 2.79 کا کوئی بھی حل ہے جس میں مستقل نہیں پایا جاتا۔

مساوات 2.79 کا مخصوص حل، مساوات 2.81 کے c_1 اور c_2 میں خصوصی قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔

اب ہمیں حل کی ان تعریف کا جواز پیش کرنا ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.79 کا حل y_p حاصل کرنا ہو گا۔ پس ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 2.81 کا عمومی حل مساوات 2.79 پر پورا اترتا ہے اور یہ کہ مساوات 2.79 اور مساوات 2.80 کے حل کا آپس میں سادہ تعلق ہے۔

مسئلہ 2.6: مساوات 2.79 اور مساوات 2.80 کے حل کا آپس میں تعلق

(الف) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے حل y اور اسی وقفے پر مساوات 2.80 کے حل $\tilde{y}$ کا مجموعہ I پر مساوات 2.79 کا حل ہے۔ بالخصوص مساوات 2.81 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کا حل ہو گا۔

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے دو حل کا فرق I پر مساوات 2.80 کا حل ہے۔

ثبوت:

(الف) مساوات 2.79 کے بائیں ہاتھ کو $L[y]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں I پر مساوات 2.79 کے کسی بھی حل y اور مساوات 2.80 کے کسی بھی حل $\tilde{y}$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L[y+\tilde{y}] = L[y] + L[\tilde{y}] = r + 0 = r$$

(ب) کھلے وقفے I پر مساوات 2.79 کے کسی بھی حل y اور y^* کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L[y-y^*] = L[y] - L[y^*] = r - r = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ متجانس مساوات 2.80 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہوتے ہیں۔اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متجانس مساوات 2.79 کے عمومی حل میں اس کے تمام حل شامل ہیں۔

مسئلہ 2.7: غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.79 کا ہر حل، مساوات 2.81 میں دیے گئے عمومی حل کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر y^* ، مساوات 2.79 کا کوئی حل ہے جبکہ x_0 اس وقفے پر کوئی x ہے۔اسی طرح مساوات 2.81 کھلے وقفے پر مساوات 2.79 کا کوئی عمومی حل ہے۔یہ حل موجود ہے۔یقیناً

$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ مسئلہ 2.4 کے تحت موجود ہے جبکہ y_p کی وجودیت حصہ 2.10 میں دکھائی جائے گی۔اب مسئلہ 2.6-ب کے تحت $Y = y^* - y_p$ کھلے وقفے پر مساوات 2.80 کا حل ہے۔نقطہ x_0 پر

$$Y(x_0) = y^*(x_0) - y_p(x_0), \quad Y'(x_0) = y^{*'}(x_0) - y'_p(x_0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔کھلے وقفے I پر، مسئلہ 2.2 کے مطابق، کسی بھی ابتدائی معلومات کی طرح، ان معلومات پر پورا اترتا ہوا، مساوات 2.80 کا مخصوص حل موجود ہے جسے y_h میں c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے $y^* = Y + y_p$ سے مسئلہ کا دعویٰ ثابت ہوتا ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

آپ نے دیکھا کہ مساوات 2.79 یا اس پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 2.80 کو حل کرنا ہو گا اور مساوات 2.79 کا کوئی بھی حل y_p تلاش کرنا ہو گا۔اس طرح عمومی حل 2.81 حاصل ہو گا۔

مساوات 2.79 کا حل y_p حاصل کرنے کی ایک ترکیب کو **نا معلوم عددی سر کی ترکیب**[71] کہتے ہیں۔یہ ترکیب نہایت آسان ہے۔ اس ترکیب سے ارتعاشی نظام عمدگی سے حل ہوتے ہیں لہٰذا اسے انجینئری شعبے میں مقبولیت حاصل ہے۔اس باب کے آخری حصے میں عمومی ترکیب پر غور کیا جائے گا جو نسبتاً مشکل ترکیب ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب ان خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{2.82}$$

کے حل کے لئے موزوں ہے جس کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہوں اور $r(x)$ قوت نمائی تفاعل ہو یا x کی طاقت ہو یا سائن نما تفاعل ہو اور یا ان تفاعل کا مجموعہ یا حاصل ضرب ہو۔ایسی تفاعل کی تفرقات بھی یہی تفاعل ہوتی ہیں۔مثلاً x^3 کے تفرقات $3x^2$ ، $6x$ اور 6 ہیں جو از خود x کی طاقت ہیں۔اسی طرح $\sin \omega x$ کا ایک درجی تفرق $\omega \cos \omega x$ جبکہ دو درجی تفرق $-\omega^2 \sin \omega x$ ہے۔یہ دونوں تفرقات از خود سائن نما تفاعل ہیں۔

[71] method of undetermined coefficients

جدول 2.2: نامعلوم عددی سر کی ترکیب

$r(x)$ کے ارکان	$y_p(x)$ کے ارکان
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \quad (n=0,1,\cdots)$	$k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1x+k_0$
$k\cos\omega x$	$K\cos\omega x+M\sin\omega x$
$k\sin\omega x$	$K\cos\omega x+M\sin\omega x$
$ke^{\alpha x}\cos\omega x$	$e^{\alpha x}(K\cos\omega x+M\sin\omega x)$
$ke^{\alpha x}\sin\omega x$	$e^{\alpha x}(K\cos\omega x+M\sin\omega x)$

اس ترکیب میں y_p کو $r(x)$ اور اس کے تمام تفرقات کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ مجموعہ لکھتے ہوئے ہر رکن کو نا معلوم مستقل سے ضرب دیا جاتا ہے۔ y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.82 میں پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کے یکساں اجزاء کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے نا معلوم مستقل دریافت کئے جاتے ہیں۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p جدول 2.2 کے تحت لکھی جاتی ہے۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p درج ذیل قواعد کے تحت لکھی جاتی ہے۔

بنیادی قاعدہ: اگر مساوات 2.82 کا $r(x)$ جدول 2.2 کے دائیں قطار میں دیا گیا ہو تب اس تفاعل کے صف سے $y_p(x)$ حاصل کریں۔ حاصل y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.2 میں پر کرتے ہوئے نا معلوم عددی سر کی قیمت دریافت کریں۔

ترمیمی قاعدہ: اگر y_p کا کوئی رکن تفاعل مساوات 2.82 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل ہو تب اس رکن کو x سے ضرب دے کر y_p میں شامل کریں۔ (اگر یہ حل مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل کیا گیا ہو تب اس رکن کو x^2 سے ضرب دیں۔)

مجموعے کا قاعدہ: اگر $r(x)$ جدول 2.2 کے دوسرے قالب کے اجزاء کا مجموعہ ہو تب $y_p(x)$ کو جدول کے تیسرے قالب سے ان اجزاء کے مطابقتی تفاعل کے مجموعے کی صورت میں لکھا جائے گا۔

$r(x)$ صرف ایک رکن پر مشتمل ہونے کی صورت میں بنیادی قاعدہ استعمال ہو گا۔ ترمیمی قاعدہ استعمال کرنے سے پہلے متجانس مساوات حل کرنا ہو گا۔ اگر $r=r_1$ کی صورت میں مساوات 2.82 کا حل y_{p1} ہو اور $r=r_2$ کی صورت میں اس کا حل y_{p2} ہو تب $r=r_1+r_2$ کی صورت میں اس کا حل $y_{p1}+y_{p2}$ ہو گا۔ یہ حقیقت مجموعے کا قاعدہ دیتی ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب خود اصلاحی ہے۔ یوں y_p چنتے ہوئے کم اجزاء لینے سے تضاد پیدا ہو گا اور عددی سر حاصل کرنا ممکن نہ ہو گا۔ زیادہ اجزاء لینے سے زائد ارکان کے عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوں گے۔

آئیں مثال 2.25 تا مثال 2.27 کی مدد سے اس ترکیب کو مزید سمجھیں۔

مثال 2.25: بنیادی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تلاش کریں۔

$$y'' + 9y = 0.2x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 9y = 0$ کا حل y_h درج ذیل ہے۔

$$y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$$

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: اگر ہم $y_p = Kx^2$ چننے تب $y_p' = 2Kx$ اور $y'' = 2K$ ہو گے جنہیں دیے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے $2K + 9Kx^2 = 0.2x^2$ ملتا ہے۔یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت تمام x کے لئے درست ہو سکتی ہے کہ دونوں جانب x^2 کے عددی سر برابر ہوں۔اسی طرح x^1 یا x^0 کے عددی سر بھی دونوں اطراف برابر ہونا ضروری ہے۔اس کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہوئے $2K = 0$ اور $9K = 0.2$ لکھا جائے گا جس سے $K = 0$ اور $K = \frac{0.2}{9}$ حاصل ہوتا ہے جو تضاد کی صورت حال ہے۔یوں اس y_p کو رد کیا جاتا ہے۔

آئیں اب دیے گئے قواعد کے تحت جدول 2.2 سے y_p لکھیں۔جدول کی دوسری صف کے تحت درج ذیل لکھا جائے گا

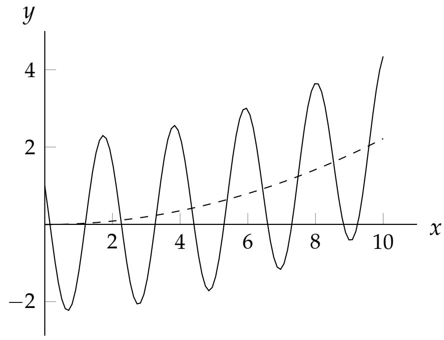
$$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$$

جس کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(2K_2) + 9(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 0.2x^2 \implies 9K_2x^2 + 9K_1x + 2K_2 + 9K_0 = 0.2x^2$$

اس مساوات کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔یوں بائیں جانب x^2 کا عددی سر $9K_2$ ہے جبکہ دائیں جانب یہ 0.2 کے برابر ہے۔انہیں آپس میں برابر پر کیا جاتا ہے۔اسی طرح بائیں جانب x^1 کا عددی سر $9K_1$ ہے جبکہ دائیں جانب ایسا کوئی رکن نہیں پایا جاتا لہٰذا دائیں جانب x^1 کا عددی سر صفر کے برابر ہے۔اسی طرح x^0 کا عددی سر بائیں جانب $2K_2 + 9K_0$ اور دائیں جانب صفر ہے۔

$$9K_2 = 0.2, \quad 9K_1 = 0, \quad 2K_2 + 9K_0 = 0$$



شکل 2.18: مثال 2.25 کا مخصوص حل۔

ان تین ہمزاد مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے $K_2 = \frac{1}{45}$ ، $K_1 = 0$ اور $K_0 = -\frac{2}{405}$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $y_p = \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = y_h + y_p = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

ہو گا۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ پر $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $1 = A - \frac{2}{405}$ لکھا جائے گا جس سے $A = \frac{407}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $y'(0) = -5$ کو استعمال کرتے ہوئے $3B = -6$ لکھا جائے گا جس سے $B = -2$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = \frac{407}{405}\cos 3x - 2\sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

مخصوص حل کو شکل 2.18 میں دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر y_p کو ظاہر کرتی ہے۔مخصوص حل y_p کے دونوں اطراف ارتعاش کر رہی ہے۔

مثال 2.26: ترمیمی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 2.4y' + 1.44y = -5e^{-1.2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2.4\lambda + 1.44 = 0$ یعنی $(\lambda + 1.2)^2 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1.2$ ہے جس سے $y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: تفرقی مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل $e^{-1.2x}$ سے عام طور جدول 2.2 کو دیکھ کر $y_p = Ce^{-1.2x}$ لکھا جاتا البتہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تفاعل متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل حل ہے۔یوں ترمیمی قاعدے کے تحت منتخب تفاعل کو x^2 سے ضرب دینا ہو گا۔یوں درج ذیل چننا جائے گا

$$y_p = Cx^2e^{-1.2x}$$

جس کے تفرقات $y_p' = (2x - 1.2x^2)Ce^{-1.2x}$ اور $y_p'' = (1.44x^2 - 4.8x + 2)Ce^{-1.2x}$ ہیں۔ان تمام کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں جہاں دونوں اطراف $e^{-1.2x}$ کو حذف کیا گیا ہے۔

$$(1.44x^2 - 4.8x + 2)C + 2.4(2x - 1.2x^2)C + 1.44Cx^2 = -5$$

دونوں اطراف x^2 ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھے ہوئے $0 = 0$ ، $0 = 0$ اور $2C = -5$ لکھا جاتا ہے جس سے $C = -2.5$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $y_p = -2.5x^2e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

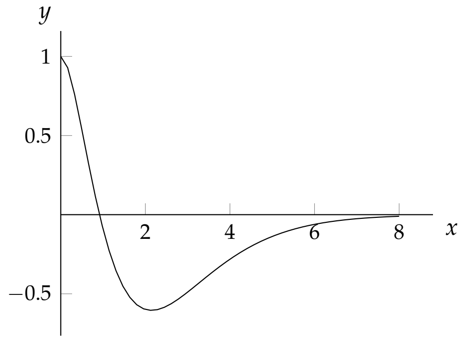
$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x)e^{-1.2x} - 2.5x^2e^{-1.2x}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ ، $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $c_1 = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ y کے تفرق

$$y' = [3x^2 - (1.2c_2 + 5)x + c_2 - 1.2c_1]e^{-1.2x}$$

میں $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $0 = 2c_2 - 1.2c_1$ یعنی $c_2 = 1.2$ ملتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y = (1 + 1.2x - 2.5x^2)e^{-1.2x}$$



شکل 2.19: مثال 2.26 کا مخصوص حل۔

مخصوص حل کو شکل 2.19 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.27: مجموعے کا قاعدہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y''3y' + 2y = 0.2\cos x + 0.1x - 0.4, \quad y(0) = -2.1, \quad y'(0) = 3.2$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 3y' + 2y = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ یعنی $(\lambda+2)(\lambda+1) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -2$ ہیں جن سے $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: غیر متجانس مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل کے تحت جدول 2.2 سے $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ لکھتے ہیں جہاں

$$y_{p1} = K\cos x + M\sin x, \quad y_{p2} = K_1 x + K_0$$

کے برابر ہیں۔یوں $y_p = K\cos x + M\sin x + K_1 x + K_0$ اور اس کے تفرقات

$$y_p' = -K\sin x + M\cos x + K_1, \quad y_p'' = -K\cos x - M\sin x$$

کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(-K\cos x - M\sin x) &+ 3(-K\sin x + M\cos x + K_1) \\ &+ 2(K\cos x + M\sin x + K_1 x + K_0) = 0.2\cos x + 0.1x - 0.4\end{aligned}$$

دونوں اطراف $\cos x$ ، $\sin x$ ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھتے

$$-K + 3M + 2K = 0.2, \quad -M - 3K + 2M = 0, \quad 2K_1 = 0.1, \quad 3K_1 + 2K_0 = -0.4$$

ہوئے حل کرنے سے $K_0 = -\frac{11}{40}$ ، $K_1 = \frac{1}{20}$ ، $M = \frac{3}{50}$ اور $K = \frac{1}{50}$ ملتے ہیں لہٰذا

$$y_p = \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

لکھا جائے گا جس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

حاصل ہوتا ہے۔

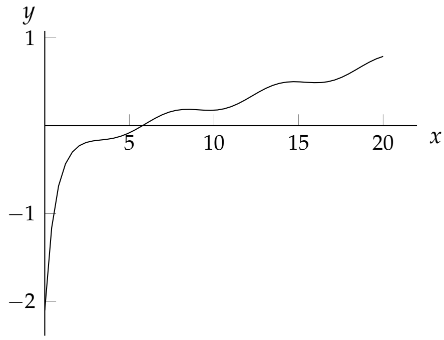
تیسرا قدم: مخصوص حل: y اور y' میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{50} - \frac{11}{40} = -2.1, \quad -c_1 - 2c_2 + \frac{3}{50} + \frac{1}{20} = 3.2$$

جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{3}{5}$ اور $c_2 = -\frac{249}{200}$ ملتے ہیں۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = -\frac{3}{5}e^{-x} - \frac{249}{200}e^{-2x} + \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

مخصوص حل کو شکل 2.20 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.20: مثال 2.27 کا مخصوص حل۔

استحکام

کسی بھی انجینئری نظام کا مستحکم ہونا نہایت اہم ہوتا ہے۔مساوات 2.82 کے مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دونوں جذر منفی یا دونوں جذر کے حقیقی حصے منفی ہونے کی صورت میں نظام اور تفرقی مساوات کو **مستحکم**[72] کہتے ہیں۔ایسی صورت میں $t \to \infty$ پر $y_h \to 0$ ہو گا لہٰذا عارضی حل $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حل y_p کے قریب قریب ہو گا۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں نظام **غیر مستحکم**[73] کہلاتا ہے۔چونکہ مثال 2.25 میں امتیازی مساوات کے جذر کے حقیقی حصے منفی مقدار نہیں ہیں لہٰذا یہ غیر مستحکم نظام کو ظاہر کرتا ہے۔

اگلے دو حصوں میں ان مساوات کا استعمال ہو گا۔

سوالات

سوال 2.108 تا سوال 2.117 میں دیے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کے حقیقی عمومی حل دریافت کریں۔

سوال 2.108: $y'' - y' - 6y = e^{-1.5x}$
جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{4}{9} e^{-1.5x}$

---

[72] stable
[73] unstable

سوال 2.109: $y''+5y'+6y=e^{-3x}$
جواب: $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}-(1+x)e^{-3x}$

سوال 2.110: $4y''+12y'+9y=4^{-1.5x}$
جواب: $y=(c_1+c_2x)e^{-1.5x}+\frac{x^2}{2}e^{-1.5x}$

سوال 2.111: $4y''+2y'+3y=4\cos 3x$
جواب: $y=c_1e^{-0.5x}+c_2e^{-1.5x}+\frac{32}{555}\sin 3x-\frac{44}{555}\cos 3x$

سوال 2.112: $y''+4y=\sin 2x$
جواب: $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x-0.5x\cos 2x$

سوال 2.113: $9y''+4y=e^{-2x}\sin\frac{2x}{3}$
جواب: $y=c_1\cos\frac{2x}{3}+c_2\sin\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2x}}{156}(2\cos\frac{2x}{3}+3\sin\frac{2x}{3})$

سوال 2.114: $y''+3y'+2y=x^2$
جواب: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{2x^2-6x+7}{4}$

سوال 2.115: $y''+9y=3\sin x+\sin 3x$
جواب: $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{3}{8}\sin x-\frac{x}{6}\cos 3x$

سوال 2.116: $y''+8y'+15y=0.5x$
جواب: $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-5x}+\frac{15x-8}{450}$

سوال 2.117: $y''+2y'+y=x\cos x$
جواب: $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+0.5\cos x+0.5(x-1)\sin x$

سوال 2.118 تا سوال 2.130 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلوں کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.118: $y''+5y'+6y=0.2e^{-1.5x},\quad y(0)=1.2,\quad y'(0)=-0.5$
جواب: $y=-\frac{4}{15}e^{-1.5x}+\frac{27}{10}e^{-2x}-\frac{53}{30}e^{-3x}$

سوال 2.119: $y''+2.7y'+1.8y=3.4e^{-1.2x},\quad y(0)=-2,\quad y'(0)=-3$
جواب: $y=(\frac{102x-340}{9})e^{-1.2x}-20e^{-1.2x}+\frac{302}{9}e^{-1.5x}$

سوال 2.120: $y'' + 6y' + 9y = 1.1e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
جواب: $y = 1.1e^{-2x} + (0.9x - 0.1)e^{-3x}$

سوال 2.121: $y'' + 8y' + 16y = 0.7e^{-4x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = \frac{7}{20}x^2e^{-4x} + (6x + 2)e^{-4x}$

سوال 2.122: $4y'' + 8y' + 3y = 24x^2, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = -101e^{-0.5x} + \frac{59}{9}e^{-1.5x} + \frac{72x^2 - 384x + 832}{9}$

سوال 2.123: $4y'' + 8y' + 3y = 2.4e^{-0.5x} + 8x^2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = (\frac{3x}{5} - \frac{301}{10})e^{-0.5x} + \frac{617}{270}e^{-1.5x} + \frac{8x^2}{3} - \frac{128x}{9} + \frac{832}{27}$

سوال 2.124: $6y'' + 29y' + 35y = 6\cos x, \quad y(0) = 0.5, \quad y'(0) = -0.2$
جواب: $y = \frac{3}{29}\cos x + \frac{3}{29}\sin x + \frac{1197}{290}e^{-\frac{7}{3}x} - \frac{541}{145}e^{-\frac{5}{2}x}$

سوال 2.125: $y'' + 9y = \cos 3x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.3$
جواب: $y = \frac{1}{5}\cos 3x + (\frac{x}{6} + \frac{1}{10})\sin 3x$

سوال 2.126: $8y'' - 6y' + y = 6\sinh x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.1$
جواب: $y = e^x - \frac{19}{5}e^{0.5x} + \frac{16}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.127: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 3\ln x - 4, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y_p = \ln x$
جواب: $y = \frac{1}{3}\ln x + \frac{4}{9} + \frac{5x^3}{9} - x$

سوال 2.128: $y'' + 2y' + 10y = 17\sin x - 37\sin 3x, \quad y(0) = 6.6, \quad y'(0) = -2.2$
جواب: $y = e^{-x}\cos 3x - \sin 3x + 6\cos 3x + \frac{9}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$

سوال 2.129: $8y'' - 6y' + y = 6\sinh x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.05$
جواب: $y = e^x - 4e^{0.5x} + \frac{17}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.130: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.5$
جواب: $y = (1 + x - 0.25\sin 2x)e^{-2x}$

2.8 جبری ارتعاش۔ گمک

ہم اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر حصہ 2.4 میں غور کر چکے ہیں جہاں اس نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{2.83}$$

سے ظاہر کیا گیا جہاں، ساکن حالت میں گیند کے مقام سے، حرکت کی صورت میں گیند کا فاصلہ $y(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حصہ 2.4 میں نظام پر کوئی بیرونی قوت لاگو نہیں کیا گیا۔نظام کی حرکت صرف اور صرف نظام کی اندرونی قوتوں کی بنا تھی۔قوت جمود my'' ، قوت بحالی ky اور قوت روک cy' نظام کی اندرونی قوتیں تھیں۔

آگے بڑھتے ہوئے اس نظام میں بیرونی قوت $r(t)$ کا اضافہ کرتے ہیں۔شکل 2.21 میں ایسا نظام دکھایا گیا ہے۔بیرونی قوت $r(t)$ انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔اس نظام کی نمونہ کشی درج ذیل تفرقی مساوات کرتی ہے۔

$$my'' + cy' + ky = r(t) \tag{2.84}$$

میکانی طور پر اس مساوات کا مطلب ہے کہ ہر لمحہ t پر اندرونی قوتوں کا مجموعہ بیرونی قوت $r(t)$ کے برابر ہے۔اس نظام میں گیند کی حرکت کو جبری حرکت[74] کہتے ہیں جبکہ بیرونی قوت کو جبری قوت[75] یا **داخلی قوت**[76] کہتے ہیں۔گیند کی حرکت کو نظام کا **رد عمل**[77] یا نظام کا **ماحصل**[78] بھی کہا جاتا ہے۔

ہمیں **دوری**[79] بیرونی قوتوں میں زیادہ دلچسپی ہے لہٰذا ہم

$$r(t) = F_0 \cos\omega t \qquad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

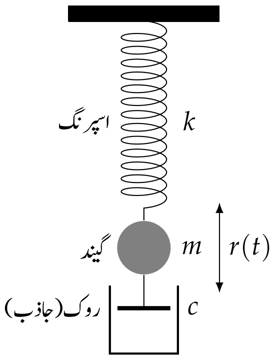
طرز کے قوتوں پر توجہ دیں گے۔یوں غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos\omega t \tag{2.85}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے حل سے بنیادی اہمیت کے حقائق حاصل ہوں گے جن سے **گمک**[80] کی نمونہ کشی ممکن ہو گی۔

---

[74] forced motion
[75] forcing function
[76] input force
[77] response
[78] output
[79] periodic
[80] resonance



شکل 2.21: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

غیر متجانس مساوات کا حل

ہم نے حصہ 2.7 میں دیکھا کہ غیر متجانس مساوات 2.85 کا عمومی حل متجانس مساوات 2.83 کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.85 کے کوئی بھی حل y_p کا مجموعہ ہے۔ہم y_p کو حصہ 2.7 کے نا معلوم عدد سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔یوں

$$y_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{2.86}$$

اور اس کے تفرقات

$$y_p'(t) = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t, \quad y_p''(t) = -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t$$

کو مساوات 2.85 میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} m(-\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t) + c(-\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t)& \\ + k(a\cos\omega t + b\sin\omega t) &= F_0\cos\omega t \end{aligned}$$

دونوں اطراف کے $\cos\omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے اور دونوں اطراف $\sin\omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے ہمزاد مساوات

$$(k - m\omega^2)a + c\omega b = F_0, \quad -c\omega a + (k - m\omega^2)b = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان ہمزاد مساوات کو a اور b کے لئے حل کرتے ہیں۔ b حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $-c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(k - m\omega^2)^2 a + c^2\omega^2 a = F_0(k - m\omega^2)$$

اسی طرح a حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$c^2\omega^2 b + (k - m\omega^2)^2 b = F_0 c\omega$$

ان مساوات میں جزو $c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2$ صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا دونوں مساوات کو اس جزو سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے a اور b حاصل کرتے ہیں۔

$$a = F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

اگر حصہ 2.4 کی طرح $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ لکھا جائے تب $k = m\omega_0^2$ ہو گا اور

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2} \tag{2.87}$$

ہوں گے۔

اس طرح غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 2.85 کا عمومی حل

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{2.88}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y_h(t)$ متجانس مساوات 2.83 کا عمومی حل ہے اور $y_p(t)$ مساوات 2.86 میں دیا گیا ہے جس میں a اور b کی قیمتیں مساوات 2.87 سے پر کی گئی ہیں۔

آئیں اب اس میکانی نظام کی دو بالکل مختلف صورتوں پر غور کریں۔پہلی صورت $c = 0$ غیر قصری ہے جبکہ دوسری صورت $c > 0$ تقصیری ہے۔

پہلی صورت: بلا تقصیر جبری ارتعاش۔گمک

اگر نظام میں قوت روک اتنا کم ہو کہ دورانیہ غور کے دوران اس کا اثر قابل نظر انداز ہو تب $c = 0$ لیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 2.87 سے $a = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ اور $b = 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مساوات 2.86

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos\omega t = \frac{F_0}{k[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]} \cos\omega t \tag{2.89}$$

لکھا جائے گا جہاں $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یہاں ضروری ہے کہ $\omega \neq \omega_0$ فرض کیا جائے جس کا مطلب ہے کہ جبری قوت کی تعدد $f = \frac{\omega}{2\pi}$ بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ سے مختلف فرض کی گئی ہے۔(بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد کے لئے مساوات 2.42 دیکھیں۔) یوں مساوات 2.89 اور مساوات 2.44 کی مدد سے بلا تقصیر نظام کی عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t \tag{2.90}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ نظام کا رد عمل دو مختلف تعدد کے ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

گمک

مساوات 2.89 کا حیطہ

$$a = \frac{F_0}{k}\rho, \quad \rho = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{2.91}$$

ω اور ω_0 پر منحصر ہے۔ $\omega \to \omega_0$ کرنے سے $\rho \to \infty$ اور $a \to \infty$ ہو گا۔ داخلی جبری قوت کی تعدد کو نظام کی قدرتی تعدد کے برابر $(\omega = \omega_0)$ کرنے سے انتہائی زیادہ حیطے کی پیدا ارتعاش کو گمک[81] کہتے ہیں۔ ρ کو گمکی جزو[82] کہتے ہیں جسے شکل 2.22 میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 2.91 سے $\frac{\rho}{k} = \frac{a_0}{F_0}$ لکھا جا سکتا ہے جو مخصوص حل y_p اور داخلی جبری قوت کے حیطوں کا تناسب ہے۔ہم جلد دیکھیں گے کہ ارتعاشی نظام میں گمک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ گمک کی صورت میں غیر متجانس مساوات 2.85 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

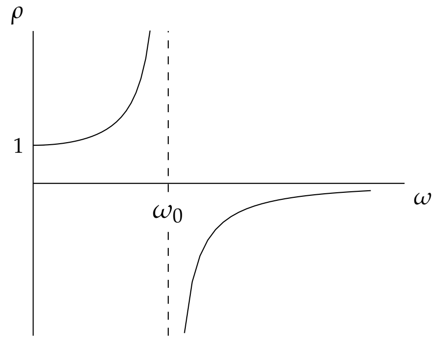
$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{2.92}$$

جس کا حل مساوات 2.89 نہیں دیتی۔مساوات 2.92 کا مخصوص حل y_p ، صفحہ 155 پر دیے گئے ترمیمی قاعدہ کے تحت

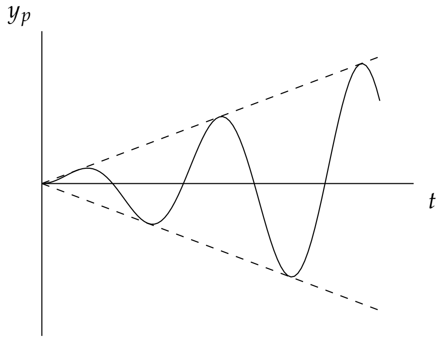
$$y_p(t) = t(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t)$$

---

[81] resonance
[82] resonance factor



شکل 2.22: گمکی جزو $\rho(\omega)$



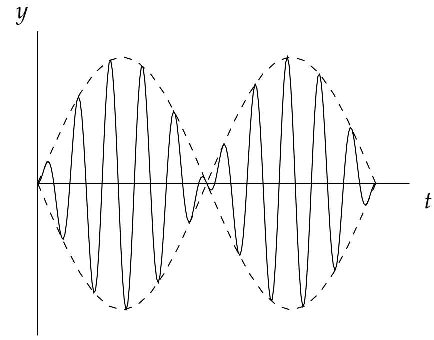
شکل 2.23: گمک کی صورت میں مخصوص حل۔

ہو گا جس کو مساوات 2.92 میں پر کرتے ہوئے $a=0$ اور $b=\frac{F_0}{2m\omega_0}$ ملتے ہیں لہٰذا مخصوص حل

$$y_p(t)=\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \tag{2.93}$$

ہو گا جسے شکل 2.23 میں دکھایا گیا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ جزو t کی وجہ سے ارتعاش کا حیطہ مسلسل بڑھتا ہے۔عملاً اس کا مطلب ہے کہ کم قصری نظام زیادہ جھولے گا۔ نہایت کم تقصیر کی صورت میں نظام جھولنے سے تباہ ہو سکتا ہے۔

تھاپ



شکل 2.24: قریبی سر تھاپ پیدا کرتے ہیں۔

ω اور ω_0 قریب قریب ہونے کی صورت میں ایک دلچسپ صورت پیدا ہوتی ہے۔اسے سمجھنے کی خاطر مساوات 2.90 میں $C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ اور $\delta = 0$ لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos\omega_0 t + \cos\omega t) \qquad (\omega \neq \omega_0) \tag{2.94}$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \tag{2.95}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ ω_0 اور ω نہایت قریب ہیں لہٰذا $\frac{\omega_0-\omega}{2}$ چھوٹی مقدار ہو گی اور یوں دائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ زیادہ ہو گا۔اس کے برعکس $\frac{\omega_0+\omega}{2}$ بڑی مقدار ہو گی لہٰذا بائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ کم ہو گا۔ شکل 2.24 میں اس مساوات کو دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر دائیں سائن تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔اس شکل کے تفاعل کی آواز میں بلند تعدد کے ساتھ ساتھ کم تعدد بھی سنائی دیتی ہے جنہیں تھاپ[83] کہتے ہیں۔موسیقار تھاپ پر دھیان دیتے ہوئے موسیقی آلے کی تعدد درست کرتا ہے۔

دوسری صورت: قصری جبری ارتعاش

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک قابل نظر انداز نہ ہونے کی صورت میں $c > 0$ ہو گا اور (جیسا ہم حصہ 2.4 میں دیکھ چکے ہیں) متجانس مساوات 2.83 کا حل y_h وقت گزرتے گھٹے گا حتیٰ کہ $t \to \infty$ پر

[83] beats

$y_h \to 0$ ہو گا۔عملاً کافی دیر بعد y_h صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مساوات 2.85 کا **عارضی حل**[84] مساوات 2.88 یعنی $y = y_h + y_p$ آخر کار **برقرار حال حل**[85] y_p کے برابر ہو گا۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 2.8: برقرار حال حل
سائن نما جبری قوت کی موجودگی میں قصری ارتعاشی نظام کافی دیر کے بعد عملاً ہارمونی ارتعاش کرے گا جس کی تعدد داخلی تعدد کے برابر ہو گی۔

2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔عملی گمک

بلا تقصیر نظام میں $\omega \to \omega_0$ کرنے سے y_p کا حیطہ لامتناہی ہو گا۔قصری نظام میں ایسا نہیں ہوتا اور y_p کا حیطہ محدود رہتا ہے۔ہاں کسی مخصوص ω پر حیطہ زیادہ سے زیادہ ہو سکتا ہے جس کا دارومدار c کی قیمت پر ہو گا۔ایسی صورت کو **عملی گمک** کہہ سکتے ہیں۔ عملی گمک اس لئے اہم ہے کہ اگر c کی قیمت زیادہ نہ ہو تب عین ممکن ہے کہ داخلی جبری قوت نظام میں نقصان دہ یا تباہ کن حیطے کی ارتعاش پیدا کر سکے۔جس زمانے میں انسان کو گمک کی سمجھ نہ تھی اس زمانے میں اس کو ایسے نقصان اٹھانے پڑتے تھے۔مشین، جہاز ، گاڑی، پل اور بلند عمارتیں وہ میکانی نظام ہیں جن میں ارتعاش پایا جاتا ہے۔زلزلہ یا آندھی بطور جبری قوت بلند عمارت میں تباہ کن گمک پیدا کرتے ہوئے اسے ملبے کا ڈھیر بنا سکتی ہے۔بعض اوقات گمک سے پاک نظام کی تخلیق نا ممکن ہوتی ہے۔

y_p کا حیطہ بالمقابل ω پر غور کی خاطر مساوات 2.86 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta) \tag{2.96}$$

جہاں

$$\begin{aligned} C^*(\omega) &= \sqrt{a^2+b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \\ \eta(\omega) &= \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{c\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \end{aligned} \tag{2.97}$$

[84] transient solution
[85] steady state solution

ہیں۔انہیں شکل 2.25 میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ C^* رد عمل y_p کا **حیطہ**[86] اور η اس کا **زاویائی فاصلہ**[87] ہے۔داخلی جبری تفاعل اور y_p میں زاویائی فرق η کے برابر ہو گا۔مثبت η کی صورت میں مساوات 2.96 کے تحت داخلی قوت سے y_p **پیچھے**[88] ہے۔

حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کرنے کی خاطر C^* کے تفرق کو صفر کے برابر $(\frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}\omega}=0)$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}\omega}=-\frac{F_0[2m^2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+2c^2\omega]}{2[m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+c^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}}=0$$

کسر کا شمار کنندہ صفر ہونے کی صورت میں درج بالا صفر کے برابر ہو گا جس سے

$$c^2=2m^2(\omega_0^2-\omega^2) \qquad (\omega_0^2=\frac{k}{m}) \tag{2.98}$$

یعنی

$$2m^2\omega^2=2m^2\omega_0^2-c^2=2mk-c^2 \tag{2.99}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے $c^2>2mk$ کی صورت میں خیالی تعدد $\omega=\mp i\sqrt{\frac{c^2-2mk}{2m^2}}$ حاصل ہوتا ہے۔خیالی تعدد حساب کے نقطہ نظر سے درست جواب ہے لیکن عملی دنیا میں تعدد کی قیمت صرف حقیقی قیمت ممکن ہے۔ایسی صورت میں ω کی قیمت بڑھانے سے C^* کی قیمت گھٹتی ہے۔اس کے برعکس $c^2<2mk$ کی صورت میں مساوات 2.99 سے حقیقی تعدد $\omega_{\text{بلند تر}}$

$$\omega^2_{\text{بلند تر}}=\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2} \tag{2.100}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 2.100 سے ظاہر ہے کہ c کی قیمت کم کرنے سے $\omega_{\text{بلند تر}}$ کی قیمت ω_0 بڑھتی ہے حتیٰ کہ $c\to 0$ کی صورت میں $\omega_{\text{بلند تر}}\to 0$ حاصل ہوتا ہے۔

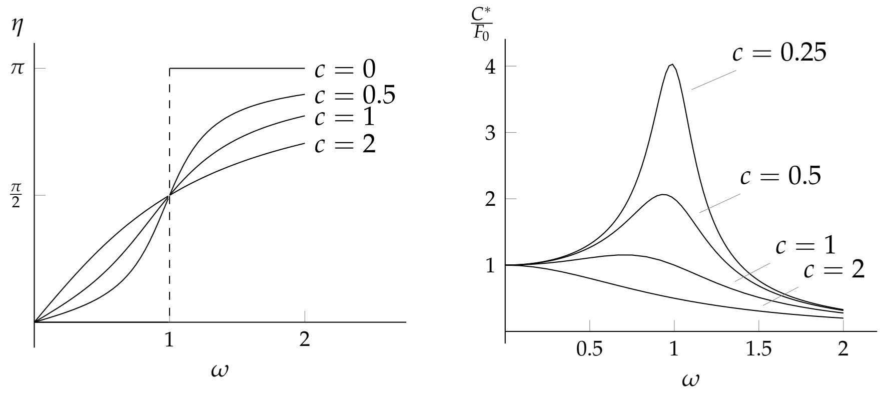
$\omega_{\text{بلند تر}}$ کو مساوات 2.97 میں پر کرنے سے $C^*(\omega_{\text{بلند تر}})$ حاصل کرتے ہیں۔

$$C^*(\omega_{\text{بلند تر}})=\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2})^2+c^2(\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2})}}=\frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2-c^2}} \tag{2.101}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $c\to 0$ کرنے سے $C^*\to\infty$ حاصل ہو گا یعنی بلا تقصیر صورت میں لامتناہی حیطہ پایا جائے گا۔

---

[86] amplitude
[87] phase angle
[88] lagging



(الف) $k = 1$ ، $m = 1$ ، $\omega_0 = 1$ رکھتے ہوئے مختلف c کے لئے $\frac{C^*}{F_0}$ بالمقابل ω

(ب) $k = 1$ ، $m = 1$ ، $\omega_0 = 1$ رکھتے ہوئے مختلف c کے لئے η بالمقابل ω

شکل 2.25: مساوات 2.97 کا حیطہ اور زاویائی فاصلہ۔

سوالات

سوال 2.131 تا سوال 2.134 اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی تفرقی مساوات ہیں۔ان کے برقرار حال حل دریافت کریں۔

سوال 2.131: $y'' + 7y' + 10y = 4\cos 3t$

جواب: $y = \frac{2}{221}\cos 3t + \frac{42}{221}\sin 3t$

سوال 2.132: $y'' + 4y' + 3y = 2\sin 6t$

جواب: $y = \frac{16}{555}\cos 6t - \frac{22}{555}\sin 6t$

سوال 2.133: $10y'' + 11y' + 3y = 20 + 15\cos 3t - 5\sin 2t$

جواب: $y = 6.67 + 0.057\sin 3t - 0.151\cos 3t + 0.0998\sin 2t + 0.059\cos 2t$

سوال 2.134: $2y'' + 3y' + y = 0.8 + \sin 2t$

جواب: $y = 0.8 - 0.08\sin 2t - 0.07\cos 2t$

سوال 2.135 تا سوال 2.143 کے عارضی حل دریافت کریں۔

سوال 2.135: $6y'' + 7y' + 2y = 3\sin(3.5t)$
جواب: $y = Ae^{-\frac{1}{2}t} = k - 2e^{-\frac{2}{3}t} - 0.037\sin(3.5t) - 0.013\cos(3.5t)$

سوال 2.136: $y'' + 2y' + 2y = 2\sin 2t$
جواب: $y = e^{-t}(A\cos t + B\sin 2t) - 0.4\cos 2t - 0.2\sin 2t$

سوال 2.137: $y'' + 9y = 4\cos 3t$
جواب: $y = A\cos 3t + B\sin 3t + \frac{2}{3}t\sin 3t + \frac{2}{9}\cos 3t$

سوال 2.138: $y'' + 3y = \cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t$
جواب: $y = A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t + \frac{t}{2\sqrt{3}}(\cos\sqrt{3}t + \sin\sqrt{3}t) + \frac{1}{6}\cos\sqrt{3}t$

سوال 2.139: $y'' + 2y' + 5y = 3\cos 2t + 2\sin 2t$
جواب: $y = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) - \frac{10}{17}\cos 2t + \frac{11}{17}\sin 2t$

سوال 2.140: $y'' + y = 5\sin\omega t \qquad (\omega^2 \neq 1)$
جواب: $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{5}{\omega^2 - 1}\sin\omega t$

سوال 2.141: $y'' + 4y = 3\cos 2t$
جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{3}{4}t\sin 2t + \frac{3}{8}\cos 2t$

سوال 2.142: $y'' + 4y = e^{-2t}\cos 2t$
جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{e^{-2t}}{20}(\cos 2t - 2\sin 2t)$

سوال 2.143: $y'' + 4y' + 5y = 2\cos t + 3\sin t$
جواب: $y = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) - \frac{1}{8}\cos t + \frac{5}{8}\sin t$

سوال 2.144 تا سوال 2.149 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 2.144: $y'' + 4y = 5\cos t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$
جواب: $y = \frac{5}{3}\cos t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{2}{3}\cos 2t$

سوال 2.145: $y'' + 9y = \sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{5}$
جواب: $y = \frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{10}\sin 2t + \frac{1}{168}\sin 3t - \frac{1}{28}\sin 4t$

سوال 2.146: $y'' + 4y' + 8y = 4\cos(0.5t), \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = 0.125\sin(0.5t) + 0.484\cos(0.5t) + e^{-2t}[3.516\cos 2t + 2.485\sin 2t]$

سوال 2.147: $y'' + 4y' + 5y = e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
جواب: $y = \frac{e^{-2t}}{15}(8\sin t - 4\cos t) + \frac{e^{-0.5t}}{15}[4\cos(0.5t) + 2\sin(0.5t)]$

سوال 2.148: $y'' + 36y = \cos\pi t - \sin\pi t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
جواب: $y = \frac{1}{\pi^2-36}(\sin\pi t - \cos\pi t + \cos 6t + \frac{\pi^2-\pi-36}{6}\sin 6t)$

سوال 2.149: تھاپ $y'' + 36y = \cos(5.9t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
جواب: $y = \frac{19}{119}\cos 6t + \frac{100}{119}\cos(5.9t)$

سوال 2.150: خود کار بندوق
خود کار بندوق[89] کے چلنے سے گولی پر نہایت کم دورانیے کے لئے قوت عمل کرتا ہے اور اتنا ہی قوت بندوق کی نالی پر الٹ سمت میں عمل کرتا ہے۔نالی کا جھٹکا اسپرنگ برداشت کرتا ہے۔اس قوت کو تفاعل $1 - \frac{t^2}{\pi^2}$ سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل تفرقی مساوات حل کریں جس میں $y(0) = 0$ اور $y'(0) = 0$ ہوں گے۔لمحہ $t = \pi$ پر y اور y' دونوں استمراری ہیں۔

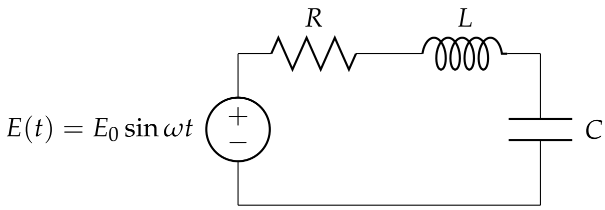
$$y'' + y = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{\pi^2} & 0 \le t \le \pi \\ 0 & t < 0,\, t > \pi \end{cases}$$

جواب: $y = (1 + \frac{2}{\pi^2})(1 - \cos t) - \frac{t^2}{\pi^2}$

2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی

شکل 2.26 میں مزاحمت R، امالہ L اور برق گیر[90] C کو منبع دباو کے ساتھ سلسلہ وار جوڑا گیا ہے۔اس دور کو سلسلہ وار RLC دور کہتے ہیں۔ہم صفحہ 56 پر مثال 1.20 میں مزاحمت اور امالہ کا سلسلہ وار RL دور دیکھ چکے ہیں جہاں مزاحمت پر دباو $v_R = IR$ اور امالہ پر دباو $v_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ کے مجموعے کو کرخوف کے قانون برائے

[89] automatic gun
[90] capacitor



شکل 2.26: مزاحمت، امالہ اور برق گیر سلسلہ وار منبع دباو کے ساتھ جڑے ہیں۔

دباو کے تحت درآیدہ دباو E کے برابر پر کیا گیا۔ موجودہ RLC میں v_R اور v_L کے ساتھ برق گیر کا دباو v_C بھی جمع کیا جائے گا۔ برق گیر پر دباو v_C اور اس میں ذخیرہ بار[91] Q کا تعلق $Q = Cv_C$ ہے۔ برق گیر کی اکائی فیراڈ[92] F جبکہ بار کی اکائی کولمب[93] C ہے۔ برقی بار اور برقی رو کا تعلق $Q = \int I \,\mathrm{d}t$ استعمال کرتے ہوئے برق گیر کے رو اور دباو کا تعلق

$$v_C = \frac{1}{C}\int I(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.102}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یوں کرخوف مساوات دباو

$$LI' + RI + \frac{1}{C}\int I\,\mathrm{d}t = E_0 \sin \omega t \,\mathrm{d}t \tag{2.103}$$

ہو گی جو تکمل و تفرقی مساوات ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے تکمل سے پاک تفرقی مساوات

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t \tag{2.104}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مستقل عددی سر والی غیر متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا حل $I(t)$ دے گا۔ مساوات 2.103 میں تکمل Q کے برابر ہے جبکہ $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ لکھا جا سکتا ہے جن سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے جس کا حل $Q(t)$ دے گا۔

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t) = E_0 \sin \omega t \tag{2.105}$$

charge[91]
Farad[92]
Coulomb[93]

سلسلہ وار دور میں رو کا حصول

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.104 کا حل $I = I_h + I_p$ ہو گا جہاں I_h مطابقتی متجانس مساوات کا عمومی حل اور I_p غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل ہے۔ہم I_p کو نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 2.104 میں

$$\begin{aligned} I_p &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ I_p' &= -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t \\ I_p'' &= -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t \end{aligned} \tag{2.106}$$

پر کرتے ہوئے دونوں اطراف $\cos\omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں اور اسی طرح دونوں اطراف $\sin\omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)a + \omega R b &= \omega E_0 \\ -\omega R a + \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)b &= 0 \end{aligned}$$

ان مساوات کو ω سے تقسیم کرتے ہوئے

$$S = \omega L - \tfrac{1}{\omega C} \tag{2.107}$$

لکھتے ہیں جہاں S کو **متعاملیت**[94] کہتے ہیں۔یوں درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -Sa + Rb &= E_0 \\ -Ra - Sb &= 0 \end{aligned}$$

b حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو S اور دوسری کو R سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔
a حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو R اور دوسری کو $-S$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$-(S^2 + R^2)a = E_0 S, \quad (R^2 + S^2)b = E_0 R \tag{2.108}$$

ان سے درج ذیل عددی سر حاصل ہوتے ہیں

$$a = -\frac{E_0 S}{S^2 + R^2}, \quad b = \frac{E_0 R}{S^2 + R^2} \tag{2.109}$$

---

[94] reactance

جنہیں استعمال کرتے ہوئے I_p لکھتے ہیں۔

$$I_p(t) = -\frac{E_0 S}{S^2+R^2}\cos\omega t + \frac{E_0 R}{S^2+R^2}\sin\omega t \tag{2.110}$$

اس کو

$$I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \theta) \tag{2.111}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$I_0 = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{E_0}{\sqrt{S^2+R^2}}, \quad \tan\theta = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R} \tag{2.112}$$

ہیں۔ I_0 کو رو کا حیطہ اور θ کو رو کا زاویہ کہتے ہیں۔داخلی دباو سے رو θ زاویے کے فاصلے پر ہے۔درج بالا مساوات میں $\frac{E_0}{I_0} = \sqrt{S^2+R^2}$ لکھا جا سکتا ہے جو قانون اوہم سے مشابہت رکھتا ہے لہٰذا $\sqrt{S^2+R^2}$ کو برقی رکاوٹ[95] کہا جاتا ہے۔

مساوات 2.104 کے مطابقتی متجانس مساوات کی امتیازی مساوات

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

کے جذر

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ہیں جن میں $\alpha = \frac{R}{2L}$ اور $\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ لکھتے ہوئے

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں I_h درج ذیل ہو گا۔

$$I_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

کسی بھی حقیقی دور میں R کبھی بھی صفر کے برابر نہیں ہوتا۔یوں $R > 0$ اور $\alpha > 0$ ہوں گے۔اس طرح $t \to \infty$ پر $I_h \to 0$ ہو گا لہٰذا RLC دور کا عمومی حل آخر کار I_p کے برابر ہو گا جو داخلی دباو کے تعدد ω پر ہارمونی ارتعاش کرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔

[95] impedance

مثال 2.28: سلسلہ وار RLC دور میں سو اوہم کی مزاحمت $R = 100\,\Omega$ ، آدھا ہینری امالہ $L = 0.5\,\mathrm{H}$ ، بیس ملی فیراڈ برق گیر $C = 20\,\mathrm{mF}$ اور داخلی دباو $E(t) = 310\sin(2\pi 50t)$ وولٹ ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر رو اور برق گیر میں ذخیرہ بار صفر کے برابر ہیں۔ دور میں رو $I(t)$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.104 میں دی گئی معلومات پر کرتے ہوئے

$$0.5I'' + 100I' + 50I = (100\pi)(310)\cos(100\pi t)$$

ملتا ہے جس سے متجانس مساوات $0.5I'' + 100I' + 50I = 0$ لکھ کر امتیازی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$0.5\lambda^2 + 100\lambda + 50 = 0$$

امتیازی مساوات کے جذر $\lambda_1 = -199.5$ اور $\lambda_2 = -0.5$ ہیں لہٰذا

$$I_h(t) = c_1 e^{-199.5t} + c_2 e^{-0.5t}$$

ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو گا۔

دور کی متعاملیت $S = 100\pi 0.5 - \frac{1}{100\pi 0.02} = 156.92$ لیتے ہوئے

$$I_p(t) = a\cos(100\pi t) + b\sin(100\pi t)$$

کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$a = -\frac{310 \times 156.92}{156.92^2 + 100^2} = -1.4049, \quad b = \frac{310 \times 100}{156.92^2 + 100^2} = 0.8953$$

یوں

$$I_p(t) = -1.4049\cos(100\pi t) + 0.8953\sin(100\pi t) = 1.422\sin(100\pi t - 1.003) \tag{2.113}$$

ہو گا لہٰذا عمومی حل

$$I(t) = I_h + I_p = c_1 e^{-199.5t} + c_2 e^{-0.5t} + 1.422\sin(100\pi t - 1.003)$$

ہو گا۔ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے c_1 اور c_2 دریافت کرتے ہیں۔عمومی حل میں $t = 0$ پر $I(0) = 0$ پر کرنے سے

$$c_1 + c_2 - 1.4049 = 0, \implies c_1 = 1.4049 - c_2 \tag{2.114}$$

ملتا ہے۔مساوات 2.103 میں تکمل کی قیمت بار کے برابر ہے یعنی $\int I \,\mathrm{d}t = Q$ لہٰذا $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $Q(0) = 0$ اور $I(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.103 سے

$$LI'(0) + RI(0) = E_0 \sin 0 \qquad \implies I' = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔عمومی حل کے تفرق میں $I'(0) = 0$ پر کرنے سے

$$I'(0) = -199.5c_1 - 0.5c_2 + 0.8953(2\pi 50) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 2.114 کی مدد سے حل کرتے ہوئے $c_1 = 1.4099$ اور $c_2 = -0.00497$ ملتے ہیں۔یوں مخصوص حل یعنی دور میں رو درج ذیل ہو گی۔

$$I(t) = 1.4099e^{-199.5t} - 0.00497e^{-0.5t} + 1.422 \sin(100\pi t - 1.003)$$

شکل 2.27-الف میں $I(t)$ کو نقطہ دار لکیر جبکہ I_p کو ٹھوس لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔چونکہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو جاتا ہے لہٰذا I اور I_p میں صرف شروع میں فرق پایا جاتا ہے۔شکل-ب میں $E(t)$ اور $I_p(t)$ کو دکھایا گیا ہے۔ان دونوں میں زاویائی فاصلہ 1.003 ریڈیئن یعنی 57.5° ہے جو شکل میں صاف واضح ہے۔ہم کہتے ہیں کہ دباو سے رو 57.5° پیچھے[96] ہے۔آپ یہاں خود تسلی کر سکتے ہیں کہ $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو سے رو پیچھے ہو گی جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو سے رو آگے ہو گی۔ $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو اور رو ہم زاویہ[97] ہوں گے یعنی ان میں زاویائی فاصلہ نہیں پایا جاتا۔

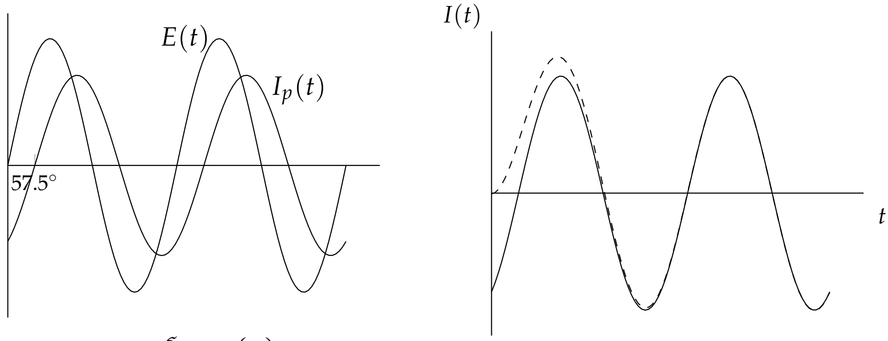
برقی اور میکانی مقدار کی مماثلت

دو بالکل مختلف نظام کی ایک ہی تفرقی مساوات ہو سکتی ہے۔اسپرنگ اور کمیت کی تفرقی مساوات 2.85 اور سلسلہ وار RLC کی مساوات 2.104 کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t, \qquad LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t$$

---

[96] lagging
[97] in-phase



(ب) دباو سے رو پیچھے ہے۔

(الف) قصری دور میں عمومی حل آخر کار I_p کے برابر ہو گا۔

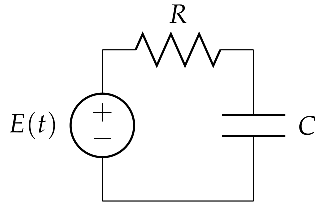
شکل 2.27: مثال 2.28 کی رو کے خطوط۔

جدول 2.3: میکانی اور برقی نظام میں یکساں عناصر۔

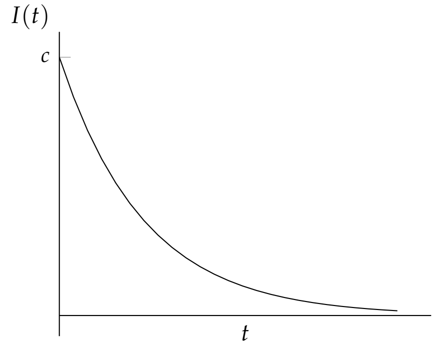
برقی نظام	میکانی نظام
اماله L	کمیت m
مزاحمت R	قصری مستقل c
برق گیر کا بالعکس $\frac{1}{C}$	اسپرنگ مستقلہ k
داخلی دباو کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$	جبری قوت $F_0 \cos \omega t$
برقی رو $I(t)$	ہٹاو $y(t)$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میکانی نظام میں کمیت اور برقی نظام میں اماله تفرقی مساوات میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔کمیت کی جمود کی طرح اماله برقی دور کی رو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔اسی طرح c اور R تفرقی مساوات میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں اور نظام میں توانائی کی ضیاع کا باعث بنتے ہیں۔ اسپرنگ کا مستقل k اور برق گیر کا بالعکس متناسب $\frac{1}{C}$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔میکانی جبری قوت $F_0 \cos \omega t$ اور برقی داخلی دباو کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔میکانی اور برقی نظام کی یکسانیت کو جدول 2.3 میں پیش کیا گیا ہے۔

میکانی اور برقی نظام میں یکسانیت صحیح معنوں میں صرف مقداری نوعیت کی ہے۔یوں ہم میکانی نظام کے مطابق ایسا برقی دور تخلیق دے سکتے ہیں جس میں رو بالمقابل وقت میکانی نظام میں ہٹاو بالمقابل وقت کے بالکل برابر ہو گی۔یہ ایک انتہائی اہم نتیجہ ہے کیونکہ میکانی نظام مثلاً پل یا بلند عمارت کا برقی نمونہ انتہائی آسانی اور سستے دام بناتے ہوئے اس کی کارکردگی پر تفصیلاً غور کیا جا سکتا ہے۔ مزید، برقی متغیرات مثلاً رو یا دباو انتہائی آسانی سے ٹھیک ٹھیک ناپے جا سکتے ہیں جبکہ میکانی متغیرات اتنے آسانی سے اور ٹھیک ٹھیک ناپنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔



(الف) سلسلہ وار RC دور۔



(ب) سلسلہ وار RC کی رو بالمقابل وقت۔

شکل 2.28: سلسلہ وار RC دور اور اس کی رو۔

میکانی متغیرات کو برقی متغیرات میں تبدیل کرنے والے کئی **مبدل**[98] اسی مشابہت پر کام کرتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.151 تا سوال 2.157 خصوصی سلسلہ وار RLC ادوار ہیں۔

سوال 2.151: سلسلہ وار RC دور شکل 2.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں داخلی دباو مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: $RI' + \frac{I}{C} = 0$ ، رو $I = ce^{-\frac{t}{RC}}$ کو شکل 2.28-ب میں دکھایا گیا ہے۔

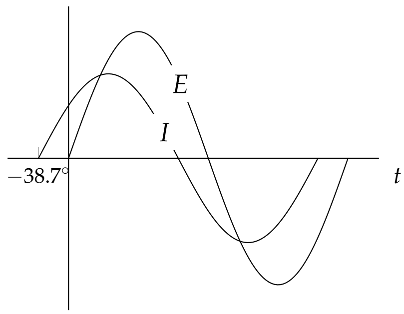
سوال 2.152: شکل 2.28-الف کو سائن نما برقی دباو $E(t) = E_0 \sin \omega t$ کے لئے حل کریں۔

جواب: $RI' + \frac{I}{C} = \omega E_0 \cos \omega t$ ، $I = ce^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega C E_0}{1+\omega^2 R^2 C^2}(\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t)$

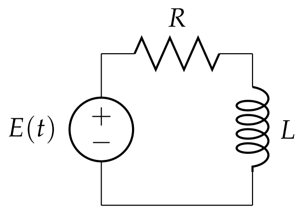
سوال 2.153: شکل 2.28-الف میں $R = 50\,\Omega$ ، $C = 0.25\,\mathrm{mF}$ اور $E(t) = 20 \sin 100t$ لیتے ہوئے برقرار حال رو دریافت کریں۔دباو کو حوالہ لیتے ہوئے برقرار حل رو کا زاویہ کتنا ہے؟ $E(t)$ اور $I(t)$ کے خط اکٹھے کھینچیں۔

---

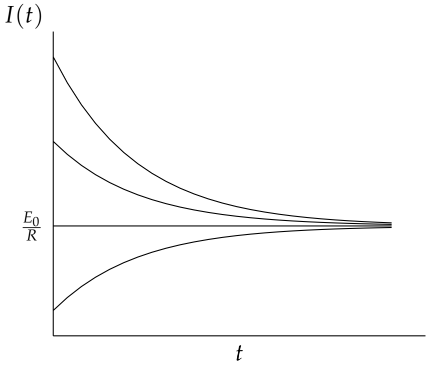
[98] transducer



شکل 2.29: RC دور میں دباو سے برقرار رو آگے رہتی ہے۔



(الف) سلسلہ وار RL دور۔



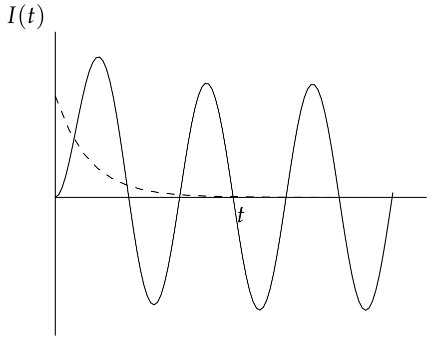
سلسلہ وار RL کی رو بالمقابل وقت۔ داخلی دباو مستقل مقدار ہے۔

شکل 2.30: سلسلہ وار RL دور اور اس کی رو۔

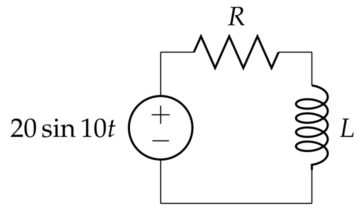
جواب: $I_p = \frac{2}{\sqrt{41}} \sin(100t + 0.6747)$ ؛ دباو سے رو $38.7°$ زاویہ آگے ہے۔ RC دور میں داخلی دباو سے رو $0°$ تا $90°$ آگے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.29 میں دباو اور رو کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کے حیطے ٹھیک تناسب سے نہیں دکھائے گئے ہیں۔

سوال 2.154: سلسلہ وار RL دور شکل 2.30-الف میں دکھایا گیا ہے۔ داخلی دباو مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔ دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: $LI' + RI = E_0$ ، $I = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}$ کو شکل 2.30-ب میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔

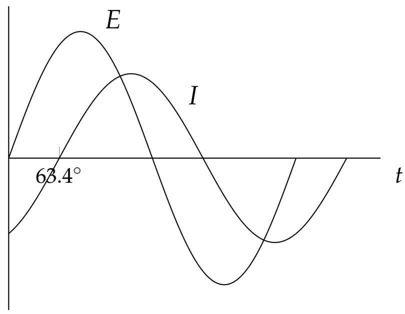


سلسلہ وار RL کی رو بالمقابل وقت۔ داخلی دباو مستقل مقدار ہے۔



(الف) سلسلہ وار RL دور۔

شکل 2.31: سوال 2.155 کا دور۔



شکل 2.32: RL دور میں دباو سے برقرار رو پیچھے رہتی ہے۔

سوال 2.155: شکل 2.31-الف میں $R = 5\,\Omega$ اور $L = 1\,\mathrm{H}$ لیں۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $I(0) = 0$ لیتے ہوئے $I(t)$ حاصل کریں۔ رو کا خط کھینچیں۔

جواب: $LI' + RI = E_0 \sin \omega t$ ، $I = \frac{8}{5}e^{-5t} + \frac{4}{5}\sin 10t - \frac{8}{5}\cos 10t$

سوال 2.156: شکل 2.31-الف میں $R = 10\,\Omega$ اور $L = 2\,\mathrm{H}$ لیں۔ برقرار حل رو دریافت کریں۔ دباو کے حوالے سے رو کا زاویہ کتنا ہے۔ داخلی دباو اور برقرار رو کے خط کھینچیں۔

جواب: $I = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(10t - 1.107)$ ؛ داخلی دباو سے رو $63.4°$ زاویہ پیچھے ہے۔ RL دور میں داخلی دباو سے رو $0°$ تا $90°$ پیچھے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.32 میں دونوں خطوط دکھائے گئے ہیں۔

سوال 2.157: سلسلہ وار LC دور میں $L = 2\,\mathrm{H}$ اور $C = 0.02\,\mathrm{F}$ ہیں۔ $R = 0$ ہونے کی ناطے LC دور بلا تقصیر ہو گا۔یوں LC نظام بلا تقصیر اسپرنگ اور کمیت کی نظام کی طرح ہے۔ اس دور کا داخلی دباو $E(t) = \sin 5t$ ہے۔ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر رو اور برق گیر میں ذخیرہ بار دونوں صفر کے برابر ہیں۔رو کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $I(t) = \cos 5t - \cos 100t$

سوال 2.158 تا سوال 2.165 شکل 2.26 کے سلسلہ وار RLC دور پر مبنی ہیں۔ان کی برقرار حال رو دریافت کریں۔

سوال 2.158: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\mathrm{H}, \quad C = 0.1\,\mathrm{F}, \quad E = 100 \sin 2t\,\mathrm{V}$
جواب: $I = 13.65 \sin(2t + 0.611)\,\mathrm{A}$

سوال 2.159: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\mathrm{H}, \quad C = 0.1\,\mathrm{F}, \quad E = 100\,\mathrm{V}$
جواب: $I = 0\,\mathrm{A}$

سوال 2.160: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\mathrm{H}, \quad C = 0.1\,\mathrm{F}, \quad E = 100 \sin 5t\,\mathrm{V}$
جواب: $I = \frac{50}{3} \sin 5t\,\mathrm{A}$

سوال 2.161: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\mathrm{H}, \quad C = 0.1\,\mathrm{F}, \quad E = 100 \sin 7t\,\mathrm{V}$
جواب: $I = 16.25 \sin(7t - 0.225)\,\mathrm{A}$

سوال 2.162: $R = 2\,\Omega, \quad L = 0.8\,\mathrm{H}, \quad C = 1.2\,\mathrm{F}, \quad E = 50 \cos 10t\,\mathrm{V}$
جواب: $I = 5.9 \sin 10t + 1.5 \cos 10t\,\mathrm{A}$

سوال 2.163: $R = 1\,\Omega, \quad L = 0.5\,\mathrm{H}, \quad C = 1.5\,\mathrm{F}, \quad E = 10 \cos t\,\mathrm{V}$
جواب: $I = -1.6 \sin t + 9.7 \cos t\,\mathrm{A}$

سوال 2.164: $R = 0.1\,\Omega,\ L = 0.2\,\mathrm{H},\ C = 0.01\,\mathrm{F}, \quad E = 20 \sin 10t + 10 \sin 100t\,\mathrm{V}$
جواب: $I = 0.003 \sin 100t - 0.526 \cos 100t + 0.031 \sin 10t + 2.5 \cos 10t\,\mathrm{A}$

سوال 2.165: اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں کم قصری، فاصل قصری اور زیادہ قصری صورت پائے گئے۔سلسلہ وار RLC دور میں کم قصری، فاصل قصری اور زیادہ قصری صورت کے شرائط معلوم کریں۔

جوابات: کم قصری صورت $R^2 < \frac{4L}{C}$ دیتی ہے، جبکہ فاصل قصری صورت میں $R^2 = \frac{4L}{C}$ اور زیادہ قصری صورت میں $R^2 > \frac{4L}{C}$ ہو گا۔

سوال 2.166 تا سوال 2.168 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں جن میں ابتدائی رو اور برق گیر میں ذخیرہ ابتدائی بار صفر ہیں۔ ان کی مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.166: $R = 0.1\,\Omega,\ L = 0.22\,\text{H},\ C = 0.1\,\text{F},\quad E = 36\sin 15t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.52\sin 15t - 13.65\cos 15t + e^{-\frac{5}{22}t}(-0.69\sin 6.74t + 13.65\cos 6.74t)\,\text{A}$

سوال 2.167: $R = 2\,\Omega,\ L = 0.1\,\text{H},\ C = 0.1\,\text{F},\quad E = 10\sin 100t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.196\sin 100t - 0.97\cos 100t + e^{-10t}(0.97 - 9.9t)\,\text{A}$

سوال 2.168: $R = 4\,\Omega,\ L = 0.4\,\text{H},\ C = 0.2\,\text{F},\quad E = 5\sin 25t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.179\sin 25t - 0.437\cos 25t - 0.103e^{-1.46t} + 0.541e^{-8.54t}\,\text{A}$

2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

پہلے باب میں صفحہ 61 پر مثال 1.23 میں ہم نے مقدار معلوم بدلنے کے طریقے[99] سے تفرقی مساوات کا حل نکالا۔ اس ترکیب[100] سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.115}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں کھلے وقفے I پر $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ استمراری تفاعل ہیں۔ اس مساوات کو معیاری صورت میں لکھنا ضروری ہے جہاں y'' کا عددی سر اکائی (1) کے برابر ہے۔ حصہ 2.6 میں ہم نے دیکھا کہ مساوات 2.115 کے مطابقتی متجانس مساوات کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.115 کے کسی بھی مخصوص حل y_p کا مجموعہ اس غیر متجانس مساوات کا عمومی حل دیتا ہے۔ سادہ $r(x)$ کی صورت میں نا معلوم

[99] variation of parameter
[100] یہ ترکیب یوسف لوئی لیگرینج سے منسوب ہے۔

عددی سر کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے y_p حاصل کی جا سکتی ہے۔اس ترکیب پر حصہ 2.7 میں غور کیا گیا جبکہ حصہ 2.8 اور حصہ 2.9 میں اس کا استعمال کیا گیا۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب ان $r(x)$ کے لئے قابل استعمال ہے جن کے تفرق، اصل تفاعل کی صورت رکھتے ہوں مثلاً سائن نما تفاعل، قوت نمائی تفاعل اور x^n تفاعل۔اس کے برعکس مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ زیادہ مشکل تفاعل کے لئے کار آمد ہے۔اس ترکیب کے تحت مساوات 2.115 کا مخصوص حل

$$y_p(t) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x \tag{2.116}$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 ،مطابقتی متجانس مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.117}$$

کے حل کی اساس ہیں اور W ان کی ورونسکی [حصہ 2.6 دیکھیں] ہے۔

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \tag{2.118}$$

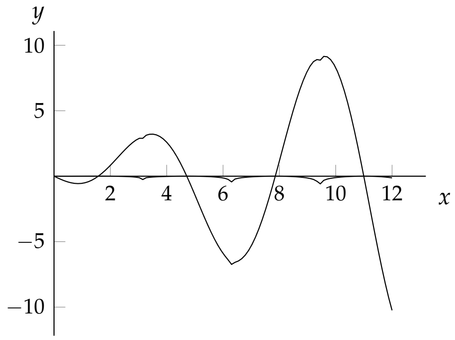
مساوات 2.115 میں متغیر عددی سر کی صورت میں مساوات 2.116 کے تکملات عموماً مشکلات پیش کرتے ہیں لہٰذا جہاں ممکن ہو وہاں نا معلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کریں۔مساوات 2.116 کے حصول سے پہلے ایک مثال دیکھتے ہیں جہاں نا معلوم عددی سر کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے لہٰذا موجودہ ترکیب ہی استعمال کی جائے گی۔

مثال 2.29: درج ذیل غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل دریافت کریں۔

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x$$

حل: کسی بھی کھلے وقفے پر متجانس سادہ تفرقی مساوات کی اساس $y_1 = \cos x$ اور $y_2 = \sin x$ ہیں جن سے ورونسکی لکھتے ہیں۔

$$W = \cos^2 x - \sin x(\sin x) = 1$$



شکل 2.33: مثال 2.29 کے خطوط۔

مساوات 2.116 سے y_p حاصل کرتے ہیں

$$y_p(t) = -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x \\ = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x| \tag{2.119}$$

جہاں تکمل کے مستقل صفر چننے گئے ہیں۔

شکل 2.33 میں y_p اور اس کا دوسرا جزو دکھائے گئے ہیں۔ y_p کا دوسرا جزو اتنا کم ہے کہ حقیقتاً پہلا جزو $-x\cos x$ ہی y_p کی قیمت تعین کرتا ہے۔ غیر متجانس تفرقی مساوات کا عمومی حل $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ اور y_p کا مجموعہ ہو گا۔

$$y = y_h + y_p = (c_1 - x)\cos x + (c_2 + \ln|\sin x|)\sin x \tag{2.120}$$

مساوات 2.119 میں تکمل لیتے ہوئے تکمل کے مستقل a اور b بھی شامل کرتے ہوئے

$$y_p(t) = -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x \\ = -\cos x(x+a) + \sin x(\ln|\sin x| + b)$$

ملتا ہے۔ مساوات 2.120 کے ساتھ موازنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ از خود عمومی حل ہے۔

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.115 کا عمومی حل مساوات 2.116 میں تکملات کے مستقل شامل کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مقدار معلوم بدلنے کے طریقے کا حصول

اس ترکیب میں متجانس تفرقی مساوات کے حل

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

میں مستقل (یعنی مقدار معلوم) c_1 اور c_2 کی جگہ نا معلوم تفاعل $u(x)$ اور $v(x)$ پر کئے جاتے ہیں۔اسی لئے اس کو مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ کہتے ہیں۔ $u(x)$ اور $v(x)$ کی ایسی قیمتیں چنی جاتی ہیں کہ

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \tag{2.121}$$

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.115 کا مخصوص حل ہو۔حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.4 کے تحت کھلے وقفہ I پر استمراری p اور q کی صورت میں اس وقفے پر y_h موجود ہو گا۔جبری تفاعل r کے استمراری ہونے کی ضرورت جلد پیش آئے گی۔

مساوات 2.121 اور اس کے تفرق کو مساوات 2.115 میں پر کرتے ہوئے u اور v دریافت کرتے ہیں۔مساوات 2.121 کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y_p' = u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'$$

ہم ایسی u اور v دریافت کر سکتے ہیں کہ y_p غیر متجانس تفرق مساوات پر پورا اترتا ہو جبکہ u اور v درج ذیل مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{2.122}$$

یوں y_p' نسبتاً آسان صورت اختیار کرتی ہے

$$y_p' = uy_1' + vy_2' \tag{2.123}$$

جس کا تفرق لیتے ہوئے y_p'' کی مسوات ملتی ہے۔

$$y_p'' = u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'' \tag{2.124}$$

مساوات 2.121، مساوات 2.123 اور مساوات 2.124 کو مساوات 2.115 میں پر کرتے ہوئے

$$(u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'') + p(uy_1' + vy_2') + q(uy_1 + vy_2) = r$$

u ، اور v کے عددی سر اکھٹے کرتے ہیں۔

$$u(y_1'' + py_1' + qy_1) + v(y_2'' + py_2' + qy_2) + u'y_1' + v'y_2' = r$$

چونکہ y_1 اور y_2 متجانس مساوات 2.117 کے حل ہیں لہٰذا دونوں قوسین صفر کے برابر ہیں اور درج بالا مساوات نسبتاً سادہ صورت اختیار کر لیتی ہے۔

$$u'y_1' + v'y_2' = r \tag{2.125}$$

یہاں مساوات 2.122 کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{2.126}$$

مساوات 2.125 اور مساوات 2.126 دو ہمزاد مساوات ہیں جنہیں حل کرتے ہوئے u اور v حاصل کرتے ہیں۔ v' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_2$ سے اور دوسری مساوات کو y_2' سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں

$$u'(y_1y_2' - y_2y_1') = -y_2r \quad\implies\quad u'W = -y_2r$$

جہاں W مساوات 2.118 ہے۔اسی طرح u' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو y_1 اور دوسری کو $-y_1'$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$v'(y_1y_2' - y_2y_1') = y_1r \quad\implies\quad v'W = y_1r$$

چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہٰذا حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.3 کے تحت $W \neq 0$ ہو گا۔اس طرح درج بالا مساوات کو W سے تقسیم کیا جا سکتا ہے جس سے

$$u' = -\frac{y_2r}{W}, \quad v' = \frac{y_1r}{W}$$

ملتے ہیں۔تکمل لیتے ہوئے u اور v حاصل ہوتے ہیں۔

$$u = -\int \frac{y_2r}{W}\,\mathrm{d}x, \quad v = \int \frac{y_1r}{W}\,\mathrm{d}x$$

چونکہ کھلے وقفہ I پر r استمراری تفاعل ہے لہٰذا درج بالا تکملات موجود ہیں۔ حاصل u اور v کو مساوات 2.121 میں پر کرتے ہوئے مساوات 2.116 حاصل ہوتا ہے۔

$$y_p(x) = -y_1\int \frac{y_2r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2\int \frac{y_1r}{W}\,\mathrm{d}x$$

سوالات

مساوات 2.169 تا مساوات 2.169 کو مقدار معلوم بدلنے کے طریقے یا نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حل کریں۔

سوال 2.169: $y'' + 4y = \sec 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x|$

سوال 2.170: $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sin 2x|$

سوال 2.171: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3\cos x$
جواب: $y_p = c_1x^2 + c_2x - x\cos x$

سوال 2.172: $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{cosec} x$
جواب: $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x) - xe^x\cos x + e^x\sin x\ln|\sin x|$

سوال 2.173: $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}(1-2x)\cos 2x$

سوال 2.174: $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-3x} - e^{-3x}(1+\ln x)$

سوال 2.175: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} - xe^{-x}(1-\ln x)$

سوال 2.176: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} - e^{-x}(1+\ln x)$

سوال 2.177: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^3}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} + \frac{e^{-x}}{2x}$

سوال 2.178: $y'' + 4y = \sinh 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{8}\sinh 2x$

سوال 2.179: $y'' - 2y' + y = 28x^{\frac{1}{3}}e^x$
جواب: $y_p = (ax+b)e^x + 9x^{\frac{7}{3}}e^x$

سوال 2.180: $y'' + 2y' + y = e^{-x} \operatorname{cosec}^3 x$
جواب: $y_p = \frac{1}{2}e^{-x} \operatorname{cosec} x[(A + B\sin 2x) + (1 - A)\cos 2x]$

سوال 2.181: $x^2y'' + 6xy' + 6y = x$
جواب: $y_p = \frac{x}{12} + c_1x^{-2} + c_2x^{-3}$

سوال 2.182: $x^2y'' + 7xy' + 9y = 25x^2$
جواب: $y_p = x^2 + c_1x^{-3} + c_2x^{-2}\ln|x|$

باب 3

بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات

دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے طریقے بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی صورت میں مساوات زیادہ پیچیدہ ہوں گے، امتیازی مساوات کے جذر بھی تعداد میں زیادہ اور حصول میں نسبتاً مشکل ہوں گے اور ورونسکی زیادہ اہم کردار ادا کرے گا۔

3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم متغیرہ $y(x)$ کا $y^n = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ سب سے بلند درجی تفرق ہو۔ایسی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں y اور کم درجی تفرق موجود یا غیر موجود ہو سکتے ہیں۔ایسی مساوات کو خطی کہتے ہیں اگر اس کو

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \tag{3.1}$$

لکھنا ممکن ہو۔صفحہ 82 پر دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کی بات کی گئی۔موجودہ مساوات میں $n = 2$ ، $p_1 = p$ اور $p_0 = q$ پر کرنے سے دو درجی مساوات حاصل ہو گی۔عددی سر $p_0(x)$ تا $p_n(x)$ اور جبری تفاعل $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں جبکہ $y(x)$ نا معلوم متغیرہ ہے۔خطی مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں $y^{(n)}$ کا عددی سر اکائی 1 ہے۔ تفرقی مساوات میں $p_n(x)y^{(n)}$ موجود ہونے کی صورت میں پوری مساوات کو $p_n(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کریں۔جو تفرقی مساوات درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو **غیر خطی** کہلاتی ہے۔

کسی کھلے وقفے I پر $r(x)$ **مکمل صفر** $r \equiv 0$ ہونے کی صورت میں مساوات 3.1 سے **متجانس مساوات**

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{3.2}$$

حاصل ہوتی ہے۔کھلے وقفے پر $r(x)$ کے مکمل صفر ہونے سے مراد یہ ہے کہ اس وقفے پر ہر x کے لئے $r(x)$ کی قیمت صفر کے برابر ہے۔دو درجی تفرقی مساوات کی طرح اگر $r(x)$ مکمل صفر نہ ہو تب مساوات **غیر متجانس** کہلائے گی۔

کھلے وقفہ I پر n درجی خطی یا غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل $y = h(x)$ سے مراد ایسا تفاعل ہے جو I پر معین ہو، کھلے وقفے پر اس کا n درجی تفرق موجود ہو اور تفرقی مساوات میں y اور اس کے تفرقات کی جگہ h اور اس کے تفرقات پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں حاصل ہوں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات: خطی میل اور عمومی حل

خطی میل یا اصول خطیت جس کا ذکر صفحہ 84 مسئلہ 2.1 میں کیا گیا بلند درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی درست ہے۔

مسئلہ 3.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ بلند درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی بلند درجی تفرقی مساوات 3.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔(یہ اصول غیر خطی اور غیر متجانس مساوات پر لاگو نہیں ہوتا۔)

اس کا ثبوت گزشتہ باب میں دئے گئے ثبوت کی طرح ہے جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہماری بقایا گفتگو ہو بہو دو درجی تفرقی مساوات کی طرح ہو گی لہٰذا یہاں بلند درجی خطی متجانس مساوات کی عمومی حل کی بات کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر n عدد تفاعل کی **خطی طور غیر تابع** ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل
کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کا **عمومی حل**

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x) \tag{3.3}$$

ہے جہاں $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ حل کی اساس اور c_1 تا c_2 اختیاری مستقل ہیں۔یوں y_1 تا y_n کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

عمومی حل کے مستقل کی قیمتیں مقرر کرنے سے **مخصوص حل** حاصل ہو گا۔

تعریف: خطی طور تابع تفاعل اور خطی طور غیر تابع تفاعل
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر n عدد تفاعل $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ معین ہیں۔

وقفہ I پر معین y_1 تا y_n ، اس وقفے پر اس صورت **خطی طور غیر تابع**[1] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0 \tag{3.4}$$

سے مراد

$$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

ہو۔ k_1 تا k_n میں کم از کم ایک کی قیمت صفر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 3.4 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 تا y_n **خطی طور تابع**[2] کہلاتے ہیں۔

---

[1] linearly independent
[2] linearly dependent

y_1 تا y_n میں (کم از کم ایک) تفاعل کو اس صورت بقایا تفاعل کے **خطی میل** کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جب اس وقفے پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہوں۔ یوں اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 3.4 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$y_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2y_2 + k_3y_3 + \cdots + k_ny_n)$$

لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ y_1 کو بقایا تفاعل کے خطی میل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی کو خطی طور تابع کہتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 2$ کی صورت میں ہمیں حصہ 2.6 میں بیان کئے گئے تصورات ملتے ہیں۔

مثال 3.1: خطی طور تابع

ثابت کریں کہ تفاعل $y_1 = 2\sin x$ ، $y_2 = 1.5x^2$ ، $y_3 = 5\cos x + \sin x$ اور $y_4 = 4\cos x$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور تابع ہیں۔

حل:ہم $y_3 = \frac{1}{2}y_1 + 0y_2 + \frac{5}{4}y_4$ لکھ سکتے ہیں لہٰذا y_1 تا y_4 خطی طور تابع تفاعل ہیں۔

مثال 3.2: خطی طور غیر تابع

ثابت کریں کہ $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ اور $y = x^4$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل:ہم مساوات $k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 = 0$ میں مختلف x کی قیمتیں پر کرتے ہوئے k_1 تا k_3 دریافت کرتے ہیں۔کھلے وقفے پر نقطہ $x = 1$ ، $x = -1$ اور $x = 2$ چنتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 8k_2 + 16k_3 &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $k_1 = 0$ ، $k_2 = 0$ اور $k_3 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور غیر تابع ہونے کا ثبوت ہے۔

مثال 3.3: اساس۔عمومی حل
تین درجی سادہ تفرقی مساوات $y^{(3)} - y' = 0$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ $y^{(3)}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ ہے۔

حل: حصہ 2.2 کی طرح ہم اس متجانس مساوات کا حل $y = e^{\lambda x}$ تصور کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔اس کو $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ لکھتے ہوئے $\lambda = 0$ اور $\lambda = \mp 1$ ملتے ہیں جن سے اساس $y_1 = c$ ، $y_2 = e^x$ اور $y_3 = e^{-x}$ ملتا ہے۔جیسا مثال 3.5 میں ثابت کیا جائے گا، یہ اساس کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا کسی بھی کھلے وقفے پر عمومی حل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

ہو گا۔

ابتدائی قیمت مسئلہ۔وجودیت اور یکتائی

مساوات 3.2 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.2 اور درج ذیل n ابتدائی شرائط پر مشتمل ہو گا

$$y(x_0) = K_0, y'(x_0) = K_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} \tag{3.5}$$

جہاں x_0 کھلے وقفے I پر ایک نقطہ اور K_0 تا K_{n-1} اس نقطے پر دیے گئے مقدار ہیں۔

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 کو وسعت دیتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

مسئلہ 3.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت بلند درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر مساوات 3.2 کے عددی سر p_0 تا p_{n-1} استمراری ہونے کی صورت میں اگر x_0 کھلے وقفے پر پایا جاتا ہو تب مساوات 3.2 اور مساوات 3.5 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا حل $y(x)$ موجود ہے۔

حل کی موجودگی کا ثبوت اس کتاب میں نہیں دیا جائے گا۔کتاب کے آخر میں ضمیمہ ا میں حل کی یکتائی کے ثبوت میں معمولی رد بدل سے یکتائی ثابت کی جا سکتی ہے۔

مثال 3.4: تین درجی یولر کوشی مساوات کا ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$x^3y''' - 5x^2y'' + 12xy' - 12y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 0$$

حل:ہم تفرقی مساوات میں آزمائشی تفاعل $y = x^m$ پر کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$m^3 - 8m^2 + 19m - 12 = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس کے جذر $m = 1$ ، $m = 3$ اور $m = 4$ ہیں۔جذر کو مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ یہاں جذر حاصل کرنے پر بحث نہیں کی جائے گی۔ یوں حل کی اساس $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ اور $y_3 = x^4$ ہیں جنہیں مثال 3.2 میں خطی طور غیر تابع ثابت کیا گیا۔اس طرح عمومی حل

$$y = c_1x + c_2x^3 + c_3x^4$$

ہو گا۔دیے گئے تفرقی مساوات کو x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے y''' کا عددی سر اکائی حاصل کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے۔معیاری صورت میں مساوات کے دیگر عددی سر $x = 0$ پر غیر استمراری ہیں۔اس کے باوجود درج بالا عمومی حل تمام x بشمول $x = 0$ کے لئے درست ہے۔

عمومی حل اور اس کے تفرقات $y' = c_1 + 3c_2x^2 + 4c_3x^3$ اور $y'' = 6c_2x + 12c_3x^2$ میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ c_1 + 3c_2 + 4c_3 &= -1 \\ 6c_2 + 12c_3 &= 0 \end{aligned}$$

جن کا حل $c_1 = 3$ ، $c_2 = -4$ اور $c_3 = 2$ ہے۔اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = 3x - 4x^3 + 2x^4$$

خطی طور غیر تابع حل۔ورونسکی

عمومی حل کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ حل خطی طور غیر تابع ہوں۔اگرچہ عموماً حل کو دیکھ کر ہی اندازہ ہو جاتا ہے کہ وہ خطی طور غیر تابع ہیں یا نہیں ہیں، البتہ ایسا معلوم کرنے کا منظم طریقہ زیادہ بہتر ہو گا۔صفحہ 144 پر مسئلہ 2.3 دو درجی $n = 2$ مساوات کے علاوہ بلند درجی مساوات کے لئے بھی درست ہے۔ بلند درجی مساوات کی صورت میں ورونسکی درج ذیل ہو گی۔

$$W(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

ورونسکی تفرقی مساوات کے حل y_1 تا y_n پر مبنی ہے جو از خود x پر مبنی ہیں۔ورونسکی غیر صفر ہونے کی صورت میں y_1 تا y_n خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

مسئلہ 3.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل

کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 3.2 کے I پر حل y_1 تا y_n اس صورت **خطی طور تابع** ہوں گے جب ان کے **ورونسکی**[3] کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W **مکمل صفر**[4] ہو گا۔یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب I پر y_1 تا y_n **خطی طور غیر تابع** ہوں گے اور یہ حل کی اساس ہوں گے۔

---

[3] Wronskian
[4] identically zero

ثبوت:

(الف) تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر y_1 تا y_n مساوات 3.2 کے حل ہیں۔ یوں خطی طور غیر تابع کی تعریف سے

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n = 0 \tag{3.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ I پر اس مساوات کی $n-1$ تفرقات لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} k_1y_1' + \cdots + k_ny_n' &= 0 \\ k_1y_1'' + \cdots + k_ny_n'' &= 0 \\ &\vdots \\ k_1y_1^{(n-1)} + \cdots + k_ny_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 n عدد خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کا نظام ہے جس کا **غیر صفر حل**[5] k_1 تا k_n ہے لٰہذا I پر تمام x کے لئے، اس نظام کی عددی سر قالب کا **مقطع**[6]، **مسئلہ کریمر**[7] [جسے باب-7 میں پیش کیا گیا ہے] کے تحت، صفر کے برابر ہو گی۔ اب قالب کا مقطع ہی ورونسکی ہے لٰہذا I پر تمام x کے لئے W صفر کے برابر ہے۔

(ب) مسئلہ کریمر کو استعمال کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ $W=0$ کی صورت میں مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کے نظام کا $x = x_0$ پر غیر صفر حل k_1^* تا k_n^* پایا جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے، I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y^* = k_1^*y_1 + \cdots + k_n^*y_n$ لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 کے تحت y^* ابتدائی شرائط $y^*(x_0) = 0$ تا $y^{*(n-1)}(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ انہیں ابتدائی شرائط پر حل $y \equiv 0$ بھی پورا اترتا ہے اور یوں مسئلہ 3.2 کے تحت، چونکہ مساوات 3.7 کے عددی سر I پر استمراری ہیں، لٰہذا $y^* = y$ ہو گا۔ اس طرح $y^* = k_1^*y_1 + \cdots + k_n^*y_n \equiv 0$ پورے I پر ہو گا جس کا مطلب ہے کہ I پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہیں۔

(پ) اگر W کی قیمت x_0 پر صفر ہو جہاں x_0 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہو، تب ثبوت (ب) کے تحت خطی طور تابع ہونا ثابت ہوتا ہے اور یوں ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہو گا۔ اس طرح اگر I پر نقطہ x_1 پر W صفر نہ ہو تب y_1 تا y_n کھلے وقفہ I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

---

non trivial solution[5]
determinant[6]
Cramer's theorem[7]

مثال 3.5: اساس۔ ورونسکی
ثابت کریں کہ مثال 3.3 میں حاصل کردہ حل $y_1 = c$ ، $y_2 = e^x$ اور $y_3 = e^{-x}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: مساوات 3.6 کے طرز پر ورونسکی لکھ کر

$$W = \begin{vmatrix} c & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^x \end{vmatrix} = ce^xe^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2c$$

حل کیا گیا ہے جہاں پہلی قطار سے c ، دوسری قطار سے e^x اور تیسری قطار سے e^{-x} باہر نکال کر قالب کی سادہ صورت حاصل کی گئی اور اس کے بعد پہلی قطار سے قالب کو پھیلا کر اس کا **مقطع** حاصل کی گئی ہے۔چونکہ x کی کسی بھی قیمت کے لئے $W \neq 0$ ہے لہٰذا کسی بھی کھلے وقفے پر y_1 تا y_3 خطی طور غیر تابع ہیں۔

مساوات 3.2 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

پہلے عمومی حل کی وجودیت پر بات کرتے ہیں۔ صفحہ 147 پر دیا گیا مسئلہ 2.4 بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی کار آمد ہے۔

مسئلہ 3.4: **وجودیت عمومی حل**
کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ اور $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں مساوات 3.2 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت : ہم I پر کوئی نقطہ x_0 لیتے ہیں۔مسئلہ 3.2 کے تحت مساوات 3.2 کے n عدد حل y_1 تا y_n پائے جاتے ہیں جو مساوات 3.5 میں دیے گئے ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ہم ابتدائی شرائط یوں چنتے ہیں کہ $K_{j-1} = 1$ (1) ہوں جبکہ بقایا K صفر کے برابر ہوں۔اس طرح x_0 پر حل کی ورونسکی کی قیمت اکائی (1) ہو گی۔مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $y_1(x_0) = 1$ ، $y_2'(x_0) = 1$ اور $y_3''(x_0) = 1$ ہوں گے جبکہ بقایا تمام ابتدائی قیمتیں صفر کے برابر ہوں گی۔اس طرح ورونسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0), y_3(x_3)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

اکائی ہو گی۔یوں کسی بھی n کے لئے حل y_1 تا y_n مسئلہ 3.3 کے تحت I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔یہ حل اساس ہیں لہٰذا I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ ہو گا۔

اب ہم اس قابل ہیں کہ ثابت کریں کہ مساوات 3.2 کے عمومی حل میں مساوات 3.2 کے تمام حل شامل ہیں۔مساوات 3.2 کے عمومی حل کے اختیاری مستقل میں موزوں قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں n درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

کھلے وقفے I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 3.2 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_nY_n(x) \tag{3.9}$$

لکھا جس سکتا ہے جہاں y_1 تا y_n کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کے حل کی اساس ہیں جبکہ C_1 تا C_n موزوں مستقل ہیں۔

ثبوت : فرض کریں کہ I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ ہے جبکہ Y مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل ہے۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر کسی بھی نقطہ x_0 پر ایسے c_1 تا c_n دریافت کیے جا

سکتے ہیں کہ x_0 پر y اور اس کے پہلے $n-1$ درجی تفرقات اسی نقطے پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ درجہ تفرقات کے برابر ہوں۔ اس طرح x_0 پر

$$
\begin{aligned}
c_1y_1 \cdots + c_ny_n &= Y \\
c_1y_1' + \cdots + c_ny_n' &= Y' \\
&\vdots \\
c_1y_1^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} &= Y^{(n-1)}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

ہو گا جو الجبرائی مساوات کا خطی نظام ہے، جس کے نا معلوم متغیرات c_1 تا c_n جبکہ اس کا عددی سر قالب، x_0 پر حل y_1 تا y_n کا، ورونسکی ہے۔ چونکہ y_1 تا y_n اساس ہیں لہٰذا مسئلہ 3.3 کے تحت اس کی ورونسکی غیر صفر ہے۔ یوں باب-7 میں دیے گئے **قاعدہ کریمر**[8] کے تحت مساوات 3.10 کا یکتا حل $c_1 = C_1$ تا $c_n = C_n$ پایا جاتا ہے۔ عمومی حل میں اختیاری مستقل کی جگہ ان قیمتوں کو پر کرتے ہوئے I پر مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

ملتا ہے۔ مساوات 3.10 کے تحت x_0 پر y^* اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات، x_0 پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات کے برابر ہیں یعنی x_0 پر y^* اور Y یکساں ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ یوں مسئلہ 3.2 کے تحت I پر $y^* \equiv Y$ ہو گا جو درکار ثبوت ہے۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر ہماری بحث یہاں اختتام پذیر ہوتی ہے۔ حزب توقع $n = 2$ کے لئے یہ بحث ہو بہو حصہ 2.6 کی طرز اختیار کر لیتی ہے۔

سوالات

سوال 3.1 تا سوال 3.6 میں دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ ورونسکی استعمال کرتے ہوئے، ثابت کریں کہ کسی بھی کھلے وقفے پر، دیے حل خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ حل کی اساس ہیں۔

سوال 3.1: $y''' = 0, \quad 1, x, x^2$

جواب: $W = 2$

---

[8] Cramer's rule

سوال 3.2: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, \quad e^{x}, e^{-x}, e^{2x}$
جواب: $W = -6e^{2x}$

سوال 3.3: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad \cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x$
جواب: $W = 4$

سوال 3.4: $y^{(4)} + 12y^{(3)} + 54y^{(2)} + 108y^{(1)} + 81y = 0, \quad e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}$
جواب: $W = 12e^{-12x}$

سوال 3.5: $y''' + 4y'' + 13y' = 0, \quad 1, e^{-2x}\cos 3x, e^{-2x}\sin 3x$
جواب: $W = 39e^{-4x}$

سوال 3.6: $x^2y'' - 3xy'' + 3y' = 0, \quad 1, x^2, x^4$
میں کھلا وقفہ $0 < x$ ہے۔ثابت کریں کہ دیے گئے حل درست اور اساس ہیں۔

جواب: $W = 16x^3$ صرف $x = 0$ پر صفر کے برابر ہے لیکن یہ نقطہ کھلے وقفے میں شامل نہیں ہے لہٰذا کھلے وقفے پر $W \neq 0$ ہے۔

سوال 3.7 تا سوال 3.10: کیا دیے گئے تفاعل کھلے وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 3.7: $\sin x, \cos x, 1$
جواب: $W = -1$ ہے لہٰذا یہ خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.8: $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$
جواب: $W = 2e^{-3x}$ ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.9: $\sinh x, \cosh x, e^{x}$
جواب: $W = 0$ ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور تابع ہیں۔

سوال 3.10: $\sin x, \cos x, e^{x}$
جواب: $W = -2e^{x}$ ہے لہٰذا تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم حصہ 2.2 کے طرز پر چلتے ہوئے، **مستقل عددی سر والے متجانس خطی** n درجی سادہ تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{3.11}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ اور a_0 تا a_{n-1} **مستقل مقدار** ہیں۔حصہ 2.2 کی طرح ہم اس مساوات میں $y = e^{\lambda}$ پر کرتے ہوئے اس کی **امتیازی مساوات**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.12}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اگر λ مساوات 3.12 کا جذر ہو تب $y = e^{\lambda}$ مساوات 3.11 کا حل ہو گا۔ مساوات 3.12 کے جذر کو **اعدادی طریقوں**[9] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔بلند درجی $(n > 2)$ تفرقی مساوات کے حل میں زیادہ ممکنات پائے جاتے ہیں۔آئیں انہیں چند مثالوں کی مدد سے دیکھیں۔

منفرد جذر

اگر مساوات 3.12 کے n جذر λ_1 تا λ_n منفرد اور حقیقی ہوں تب حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x} \tag{3.13}$$

کسی بھی x کے لئے حل کی اساس ہوں گے جن سے مساوات 3.11 کا عمومی حل

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_ne^{\lambda_n x} \tag{3.14}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم درج ذیل مثال کے بعد دیکھیں گے کہ مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔

مثال 3.6: تفرقی مساوات $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ کا حل تلاش کریں۔

[9] numerical methods

حل: اس کا امتیازی مساوات $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ہے جس کے جذر -1 ، 1 اور -2 ہیں۔ اگر آپ کسی طرح امتیازی مساوات کا ایک جذر حاصل کر لیں تو بقایا دو جذر با آسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ یوں اگر $\lambda = -1$ دریافت کر لیا جائے تو امتیازی مساوات کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ حاصل کر کے اس کے جذر 1 اور -2 نسبتاً آسانی سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ یوں دیے گئے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x}$ ہو گا۔

مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں

ہم مساوات 3.13 میں دیے گئے حل کی ورونسکی لکھ کر، قالب کی پہلی قطار سے $e^{\lambda_1 x}$ ، دوسری قطار سے $e^{\lambda_2 x}$ اور اسی طرح چلتے ہوئے n قطار سے $e^{\lambda_n x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $E = e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}$ باہر نکال کر نسبتاً آسان قالب حاصل کرتے ہیں۔

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

اب قوت نمائی تفاعل E کسی بھی صورت صفر کے برابر نہیں ہو سکتا لہٰذا $W = 0$ صرف اس صورت ہو گا جب دائیں قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو۔ دائیں قالب کے مقطع کو **کوشی مقطع**[10] کہتے ہیں جس کی قیمت

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V \tag{3.16}$$

کے برابر ثابت کی جا سکتی ہے۔ V تمام $(\lambda_j - \lambda_k)$ کا حاصل ضرب ہے جہاں $j < k (\leq n)$ ہے مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $V = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو جذر یکساں ہونے کی صورت میں $V = 0$ اور یوں $W = 0$ ہو گا۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ ورونسکی

[10] Cauchy determinant

صرف اس صورت میں صفر کے برابر نہیں ہو گا جب مساوات 3.12 کے تمام جذر ایک دونوں سے مختلف ہوں۔اس سے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 3.6: اساس
مساوات 3.11 کے حل $e^{\lambda_1 x}$ تا $e^{\lambda_n x}$ ، جہاں λ حقیقی یا مخلوط ہو سکتا ہے، صرف اس صورت کھلے وقفے پر مساوات 3.11 کے حل کی اساس ہو سکتے ہیں جب مساوات 3.12 کے تمام n جذر منفرد (یعنی ایک دونوں سے مختلف) ہوں۔

حقیقت میں مسئلہ 3.6، مساوات 3.15 اور مساوات 3.16 سے حاصل عمومی نتیجہ (مسئلہ 3.7) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

مسئلہ 3.7: خطی طور غیر تابعیت
مساوات 3.11 کے $e^{\lambda x}$ طرز کے حل، جن کی تعداد کچھ بھی ہو سکتی ہے، I پر اس صورت خطی طور غیر تابع ہوں گے جب ان حل کے λ منفرد ہوں۔

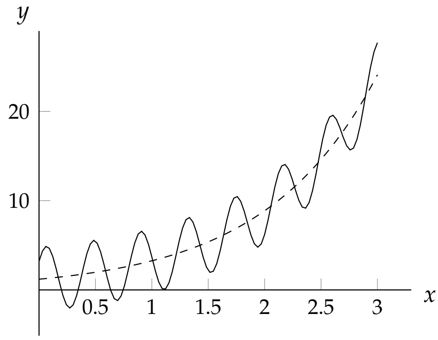
سادہ مخلوط جذر

چونکہ مساوات 3.11 کے عددی سر حقیقی مقدار ہیں لہٰذا مخلوط جذر صرف اور صرف جوڑی دار مخلوط ممکن ہیں۔یوں اگر مساوات 3.12 کا ایک ایک سادہ جذر $\lambda = \gamma + i\omega$ ہو تب $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ بھی اس کا جذر ہو گا اور یوں تفرقی مساوات کے دو عدد خطی طور غیر تابع حل [حصہ 2.2 دیکھیں] درج ذیل ہوں گے۔

$$y_1 = e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad y_2 = e^{\gamma x} \sin \omega x$$

مثال 3.7: سادہ مخلوط جذر۔ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - y'' + 225y' - 225y = 0, \quad y(0) = 3.2, \quad y'(0) = 46.2, \quad y''(0) = -448.8$$



شکل 3.1: مثال 3.7 کا مخصوص حل۔

حل: امتیازی مساوات $\lambda^3 - \lambda^2 + 225\lambda - 225 = 0$ کا ایک جذر $\lambda_1 = 1$ ہے۔ امتیازی مساوات کو $\lambda - 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے بقایا جذر $\lambda_2 = 15i$ اور $\lambda_3 = -15i$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان سے عمومی حل اور عمومی حل کے تفرقات لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
y &= ce^x + A\cos 15x + B\sin 15x \\
y' &= ce^x - 15A\sin 15x + 15B\cos 15x \\
y'' &= ce^x - 225A\cos 15x - 225B\sin 15x
\end{aligned}
$$

ان مساوات میں $x = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$3.2 = c + A, \quad 46.2 = c + 15B, \quad -448.8 = c - 225A$$

ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔ پہلی مساوات کو تیسری مساوات سے منفی کرنے سے $-452 = -226A$ یعنی $A = 2$ حاصل ہوتا ہے جسے پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 1.2$ ملتا ہے۔ دوسری مساوات میں $c = 1.2$ پر کرتے ہوئے $B = 3$ ملتا ہے۔ اس طرح مخصوص حل

$$y = 1.2e^x + 2\cos 15x + 3\sin 15x$$

حاصل ہوتا ہے جسے شکل 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔ مخصوص حل نقطہ دار لکیر سے دکھائے گئے $y = 1.2e^x$ کے گرد ارتعاش کرتا ہے۔

متعدد حقیقی جذر

امتیازی مساوات کا دوہرا منفرد جذر $\lambda_1 = \lambda_2$ ہونے کی صورت میں، صفحہ 107 پر جدول 2.1 کے تحت، تفرقی مساوات کے خطی طور غیر تابع حل $y = y_1$ اور $y_2 = xy_1$ ہوں گے۔

اسی حقیقت کے تحت اگر امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ پایا جائے تب تفرقی مساوات کے m عدد خطی طور غیر تابع حل

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\cdots,x^{m-1}e^{\lambda x} \tag{3.17}$$

ہوں گے۔ایک مثال دیکھنے کے بعد درج بالا حل کو ثابت کرتے ہیں۔

مثال 3.8: حقیقی دہرا اور سہ گنا جذر
درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 25y''' - 38y'' + 28y' - 8y = 0$$

حل:امتیازی مساوات $\lambda^5 - 8\lambda^4 + 25\lambda^3 - 38\lambda^2 + 28\lambda - 8 = 0$ کے جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ اور $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2$ ہیں۔یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^{2x}$$

ہو گا۔

آئیں اب مساوات 3.17 کو ثابت کریں۔مساوات 3.11 کے بائیں ہاتھ کو

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y$$

لکھ کر اس میں $y = e^{\lambda x}$ پر کرتے ہوئے تفرق لیتے ہیں۔

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)e^{\lambda x}$$

اب تصور کریں کہ امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ_1 پایا جاتا ہے (جہاں $m<n$ ہے) جبکہ بقایا، λ_1 سے مختلف، جذر λ_{m+1} تا λ_n ہیں۔یوں کثیر رکنی کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$L[e^{\lambda x}]=(\lambda-\lambda_1)^m(\lambda-\lambda_{m+1})(\lambda-\lambda_{m+2})\cdots(\lambda-\lambda_n)e^{\lambda x}=(\lambda-\lambda_1)^m h(\lambda)e^{\lambda x} \tag{3.18}$$

جہاں $m=n$ کی صورت میں $h(\lambda)=1$ ہو گا۔دونوں ہاتھ λ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L[e^{\lambda x}]=m(\lambda-\lambda_1)^{m-1}h(\lambda)e^{\lambda x}+(\lambda-\lambda_1)^m\frac{\partial}{\partial\lambda}[h(\lambda)e^{\lambda x}] \tag{3.19}$$

اب چونکہ x تفرق اور λ تفرق غیر تابع اور حاصل تفرق استمراری ہیں لہٰذا بائیں ہاتھ ان کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L[e^{\lambda x}]=L\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda x}\right]=L[xe^{\lambda x}] \tag{3.20}$$

چونکہ λ_1 جذر m گنا ہے، جہاں $m\geq 2$ ہے، لہٰذا $\lambda=\lambda_1$ پر مساوات 3.19 کے دائیں ہاتھ کی قیمت جزو $(\lambda-\lambda_1)$ کی بنا صفر ہو گی۔اس طرح مساوات 3.19 اور مساوات 3.20 کو ملا کر $L[xe^{\lambda x}]=0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ثابت ہوا کہ $xe^{\lambda x}$ مساوات 3.11 کا حل ہے۔

اسی ترتیب کو دہراتے ہوئے مساوات 3.18 کا دو درجی تفرق لیتے ہوئے $L[x^2e^{\lambda x}]=0$ لکھا جا سکتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^2e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔اس ترکیب کو بار بار دہراتے ہوئے آخر کار $m-1$ درجی تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}L[e^{\lambda x}]=L[x^{m-1}e^{\lambda x}]&=m(m-1)(m-2)\cdots(3)(2)(\lambda-\lambda_1)^1h(\lambda)e^{\lambda x}\\&+(\lambda-\lambda_1)^m\frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}[h(\lambda)e^{\lambda x}]\end{aligned} \tag{3.21}$$

مساوات کا دایاں ہاتھ $\lambda-\lambda_1$ کی بنا $\lambda=\lambda_1$ پر صفر کے برابر ہے لہٰذا اس سے $L[x^{m-1}e^{\lambda x}]=0$ حاصل ہوتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^{m-1}e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔

مساوات 3.18 کا m درجی تفرق لینے کے لئے مساوات 3.21 کا تفرق لے سکتے ہیں جس سے

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m}}{\partial\lambda^{m}}L[e^{\lambda x}]=L[x^{m}e^{\lambda x}]&=m(m-1)(m-2)\cdots(3)(2)(1)h(\lambda)e^{\lambda x}\\&+(\lambda-\lambda_1)^m\frac{\partial^{m}}{\partial\lambda^{m}}[h(\lambda)e^{\lambda x}]\end{aligned}$$

ملتا ہے۔ مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو میں $\lambda_1 - \lambda$ کا جزو نہیں پایا جاتا لہٰذا $\lambda = \lambda_1$ پر اس کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہو گی۔یوں $L[x^m e^{\lambda x}] \neq 0$ ہو گا لہٰذا $x^m e^{\lambda x}$ تفرقی مساوات 3.11 کا حل نہیں ہو گا۔یوں مساوات 3.17 ثابت ہوتی ہے۔

آئیں اب ثابت کریں کہ مساوات 3.17 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔مخصوص m کے لئے ان حل کا ورونسکی غیر صفر حاصل ہوتا ہے جس سے حل کی خطی طور غیر تابع ہونا ثابت ہوتا ہے۔کسی بھی m کی صورت میں ورونسکی کی m عدد قالب سے $e^{\lambda x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $e^{m\lambda x}$ باہر نکالا جائے گا۔بقایا قالب میں مختلف صف آپس میں جمع اور منفی کرتے ہوئے قالب کا مقطع 1 ، x ، $\dots$ ، x^{m-1} کی ورونسکی کے برابر ثابت کیا جا سکتا ہے جو غیر صفر مقدار ہے۔یہ تفاعل تفرقی مساوات $y^{(m)} = 0$ کے حل ہیں لہٰذا مسئلہ 3.3 کے تحت یہ حل خطی طور غیر تابع ثابت ہوتے ہیں۔

متعدد مخلوط جذر

مخلوط جذر کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔یوں دوہرے مخلوط جذر کی صورت میں $\lambda = \gamma + i\omega$ اور $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ دو مرتبہ پائے جائیں گے جن سے

$$e^{\gamma x + i\omega x}, \quad x e^{\gamma x + i\omega x}, \quad e^{\gamma x - i\omega x}, \quad x e^{\gamma x - i\omega x}$$

حل لکھے جا سکتے ہیں۔ان سے حقیقی حل لکھتے ہیں۔

$$e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad e^{\gamma x} \sin \omega x, \quad x e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad x e^{\gamma x} \sin \omega x \tag{3.22}$$

بائیں جانب کے دو عدد حل $e^{\gamma x + i\omega x}$ اور $e^{\gamma x - i\omega x}$ جبکہ بقایا دو حل $x e^{\gamma x + i\omega x}$ اور $x e^{\gamma x - i\omega x}$ سے حاصل کیے گئے ہیں۔ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = e^{\gamma x}[(A_1 + A_2 x) \cos \omega x + (B_1 + B_2 x) \sin \omega x] \tag{3.23}$$

مخلوط سہ گنا جذر (جو حقیقی مسائل میں شاذ و نادر پایا جاتا ہے) کی صورت میں درج ذیل حقیقی حل حاصل ہوں گے۔

$$e^{\gamma x} \cos \omega x, \; e^{\gamma x} \sin \omega x, \; x e^{\gamma x} \cos \omega x, \; x e^{\gamma x} \sin \omega x, \; x^2 e^{\gamma x} \cos \omega x, \; x^2 e^{\gamma x} \sin \omega x$$

اسی طرح آپ زیادہ تعداد میں پائے جانے والے مخلوط جذر سے بھی حل لکھ سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 3.11 تا سوال 3.17 کے عمومی حل لکھیں۔

سوال 3.11: $y''' + 4y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$

سوال 3.12: $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x$

سوال 3.13: $y^{(4)} - y = 0$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

سوال 3.14: $y^{(4)} + 9y'' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$

سوال 3.15: $y^{(5)} + y''' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x$

سوال 3.16: $y^{(5)} - y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 11y' + 3y = 0$
جواب: $y = c_0 e^{-3x} + c_1 e^x + c_2 x e^x + c3x^2 e^x + c_4 x^3 e^x$

سوال 3.17: $y^{(5)} - 2y^{(4)} - y' + 2y = 0$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x$

سوال 3.18 تا سوال 3.23 ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل دریافت کریں۔جذر حاصل کرنے کی خاطر کمپیوٹر استعمال کیا جا سکتا ہے۔

سوال 3.18: $y''' - 2.7y'' - 4.6y' + 9.6y = 0, \quad y(0) = 1.5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -3$
جواب: $y = 2.521e^{1.5x} - 0.286e^{-2x} - 0.735e^{3.2x}$

سوال 3.19:

$$
\begin{gathered}
y''' + 10.06y'' - 94.82y' - 670.8766y = 0, \\
y(0) = -1.2,\ y'(0) = 5.2,\ y''(0) = -2.8
\end{gathered}
$$

جواب: $y=0.229e^{-13.4x}-1.447e^{-5.6x}+0.018e^{8.94x}$

سوال 3.20: $y'''+5y''+49y'+245y=0, \quad y(0)=10,\, y'(0)=-5,\, y''(0)=1$
جواب: $y=6.635e^{-5x}+3.365\cos 7x+4.025\sin 7x$

سوال 3.21: $y'''+8y''+21y'+18y=0, \quad y(0)=2,\, y'(0)=1,\, y''(0)=-0.5$
جواب: $y=23.5e^{-2x}-21.5e^{-3x}-16.5xe^{-3x}$

سوال 3.22:

$$y^{(4)}+8y''+16y=0$$
$$y(0)=1,\, y'(0)=0.5,\, y''(0)=-0.5,\, y'''(0)=-1$$

جواب: $y=\cos 2x+0.3125\sin 2x-0.125x\cos 2x+0.875x\sin 2x$

سوال 3.23:

$$y^{(5)}-4y^{(4)}+8y'''-8y''+4y'=0$$
$$y(0)=1,\, y'(0)=0.5,\, y''(0)=-0.5,\, y'''(0)=-1,\, y^{(4)}=2$$

جواب: $y=0.5+0.5e^{x}\cos x+0.75e^{x}\sin x-0.75xe^{x}\cos x-0.25xe^{x}\sin x$

سوال 3.24: تخفیف درجہ
آپ تخفیف درجہ کے ذریعہ مثال 2.6 میں دو درجی مساوات سے کم درجی تفرقی مساوات حاصل کر چکے ہیں۔ مستقل عددی سر والے خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا ایک حل λ_1 جانتے ہوئے کم درجی مساوات کیسے حاصل کی جا سکتی ہے؟

جوابات: امتیازی مساوات کو $\lambda-\lambda_1$ سے تقسیم کرتے ہوئے کم درجی تفرقی مساوات کی امتیازی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جس سے کم درجی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

سوال 3.25: تخفیف درجہ
متغیر عددی سر والے خطی متجانس مساوات

$$y'''+p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$$

کا ایک حل y_1 جانتے ہوئے دوسرے حل کو $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ لکھ کر، جہاں $u(x) = \int z(x)\,\mathrm{d}x$ ہے، درج بالا میں پر کرتے ہوئے کم درجی مساوات

$$y_1 z'' + (3y_1' + p_2 y_1)z' + (3y_1'' + 2p_2 y_1' + p_1 y_1)z = 0$$

حاصل کریں ہے۔

سوال 3.26: تخفیف درجہ
تفرقی مساوات

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + (6x - x^3)y' - (6 - x^2)y = 0$$

کا ایک حل $y_1 = x$ ہے۔ تخفیف درجہ سے دو درجی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $z'' - z = 0$

3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

آئیں اب معیاری صورت میں لکھی گئی، n درجی غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \tag{3.24}$$

پر غور کریں جہاں $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ اور $r(x) \not\equiv 0$ ہیں۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کا عمومی حل

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{3.25}$$

ہو گا جہاں $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots c_n y_n(x)$ مطابقتی متجانس خطی تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{3.26}$$

کا I پر عمومی حل ہے۔ $y_p(x)$ مساوات 3.24 کا I پر ایسا کوئی بھی حل ہے جس میں اختیاری مستقل نہ پایا جاتا ہو۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کے استمراری عددی سر اور استمراری $r(x)$ کی صورت میں I پر

مساوات 3.24 کا عمومی حل موجود ہے جس میں مساوات 3.24 کے تمام حل موجود ہیں۔یوں مساوات 3.24 کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 3.24 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.24 اور درج ذیل $n-1$ ابتدائی شرائط پر مبنی ہو گا جہاں x_0 کھلے وقفے x_0 پر پایا جاتا ہے۔تفرقی مساوات کے عددی سر اور r کھلے وقفے پر استمراری ہونے کی صورت میں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل یکتا ہو گا۔ حل کے یکتائی کو حصہ 2.7 میں دو درجی تفرقی مساوات کے یکتا حل کے ثبوت کے نمونے پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$y(x_0)=K_0,\quad y'(x_0)=K_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=K_{n-1} \tag{3.27}$$

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

غیر متجانس تفرقی مساوات 3.24 کے عمومی حل کے لئے مساوات 3.24 کا مخصوص حل درکار ہو گا۔مستقل عددی سر والی تفرقی مساوات،

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=r(x) \tag{3.28}$$

جہاں a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار اور $r(x)$ ، حصہ 2.7 کی طرح، خاص نوعیت کا تفاعل ہو، کا مخصوص حل حصہ 2.7 کی طرح، بذریعہ **نا معلوم عددی سر کی ترکیب** حاصل کیا جا سکتا ہے۔مخصوص حل y_p کو جبری تفاعل r سے درج ذیل قواعد کے تحت لکھا جاتا ہے۔

بنیادی قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

ترمیمی قاعدہ: اگر r کو دیکھ کر چنے گئے y_p کا کوئی رکن مساوات 3.28 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_k ہو تب اس رکن کی جگہ x^ky_k کو y_p میں شامل کریں، جہاں k ایسا کم سے کم قیمت کا مثبت عدد ہے کہ تفاعل x^ky_k مطابقتی متجانس مساوات کا حل نہ ہو۔

مجموعے کا قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

موجودہ ترکیب میں $k=1$ یا $k=2$ سے حصہ 2.7 کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔آئیں مثال کی مدد سے موجودہ ترکیب کا ترمیمی قاعدہ استعمال کرنا سیکھیں۔

مثال 3.9: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ ترمیمی قاعدہ۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'''-3y''+3y'-y=e^{x},\quad y(0)=8,\quad y'(0)=-2,\quad y''(0)=-5$$

حل:پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ ہے جس کو $(\lambda-1)^3=0$ لکھا جا سکتا ہے جس سے سہ گنا جذر $\lambda=1$ ملتا ہے۔یوں متجانس مساوات کو عمومی حل

$$y_h=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم: اب اگر ہم دیے گئے غیر متجانس مساوات کے جبری تفاعل کو دیکھ کر $y_p=Ce^{x}$ چنتے ہوئے y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے مساوات میں پر کریں تو $C-3C+3C-C=1$ ملتا ہے جس سے C کی قیمت حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔اس کا مطلب ہے کہ چنا گیا y_p دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتا لہٰذا اس y_p کو رد کرنا ہو گا۔آپ $y_p=Cxe^{x}$ یا $y_p=Cx^2e^{x}$ چن کر دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل بھی دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتے۔یوں ہم اوپر دیے گئے ترمیمی قاعدے کے تحت $y_p=Cx^3e^{x}$ چنتے ہیں جس کے تفرقات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
y'&=Ce^{x}(x^3+3x^2)\\
y''&=Ce^{x}(x^3+6x^2+6x)\\
y'''&=Ce^{x}(x^3+9x^2+18x+6)
\end{aligned}$$

y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے

$$Ce^{x}(x^3+9x^2+18x+6)-3Ce^{x}(x^3+6x^2+6x)+3Ce^{x}(x^3+3x^2)-Cx^3e^{x}=e^{x}$$

ہوئے $C=\frac{1}{6}$ ملتا ہے۔یوں دیے گئے غیر متجانس تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y_p=\frac{1}{6}x^3e^x$ ہے لہٰذا اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+\frac{1}{6}x^3e^x$$

تیسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر عمومی حل کے مستقل حاصل کرنے ہوں گے۔عمومی حل میں پہلی ابتدائی معلومات $y(0)=8$ پر کرتے ہوئے $c_1=8$ ملتا ہے۔اس قیمت کو y میں پر کرتے ہوئے y' لے کر دوسری ابتدائی معلومات $y'(0)=-2$ سے c_2 حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح y''' لیتے ہوئے اس میں $y'''(0)=-5$ پر کرتے ہوئے c_3 کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2+\frac{1}{6}x^3)e^x,\quad y(0)=8,\quad y(0)=8=c_1$$
$$y'=(c_1+c_2+c_2x+c_3x^2+2c_3x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2})e^x,\quad y'(0)=-2,\quad c_2=-10$$
$$y''=(c_1+2c_2+2c_3+c_2x+4c_3x+c_3x^2+\frac{x^3}{6}+\frac{5}{6}x^2+x)e^x,\, y''(0)=-5,\, c_3=\frac{7}{2}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y=\left(8-10x+\frac{7}{2}x^2+\frac{x^3}{6}\right)e^x$$

3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ (حصہ 2.10 دیکھیں) بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔یوں معیاری صورت میں لکھے گئے خطی غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 3.24، جس کے عددی سر اور $r(x)$ کھلے وقفہ I پر استمراری ہوں، کا I پر مخصوص حل y_p درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} y_p(x)&=\sum_{k=1}^{n}y_k(x)\int\frac{W_k(x)}{W(x)}r(x)\,\mathrm{d}x\\ &=y_1(x)\int\frac{W_1(x)}{W(x)}r(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+y_n(x)\int\frac{W_n(x)}{W(x)}r(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}\tag{3.29}$$

مساوات 3.29 میں y_1 تا y_n مطابقتی متجانس مساوات 3.26 کے حل کی اساس ہیں جبکہ ورونسکی W کے k قطار میں $[0\;0\;\cdots\;0\;1]^T$ پر کرتے ہوئے W_k حاصل کی جاتی ہے۔یوں $n=2$ کی صورت میں W ، W_1 اور W_2 درج ذیل ہوں گے۔

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix}=-y_2, \quad W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix}=y_1$$

مساوات 3.29 کو صفحہ 186 پر دیے گئے مساوات 2.116 کی ثبوت کی طرز پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.10: مقدار معلوم کی تبدیلی۔یولر کوشی غیر متجانس مساوات
درج ذیل غیر متجانس یولر کوشی مساوات کو حل کریں۔

$$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=x^4\ln x, \quad (x>0)$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات میں $y=x^m$ اور اس کے تفرقات پر کرتے ہوئے

$$[m(m-1)(m-1)-3m(m-1)+6m-6]x^m=0$$

ملتا ہے جس کو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے جذر 1 ، 2 اور 3 حاصل ہوتے ہیں۔ان جذر سے اساس

$$y_1=x, \quad y_2=x^2, \quad y_3=x^3$$

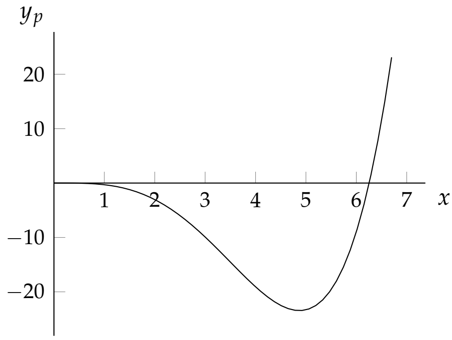
لکھتے ہیں۔یوں متجانس یولر کوشی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$$

دوسرا قدم: مساوات 3.29 میں درکار قالب کا مقطع حاصل کرتے ہیں۔

$$W=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}=2x^3, \quad W_1=\begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix}=x^4$$

$$W_2=\begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix}=-2x^3, \quad W_3=\begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=x^2$$



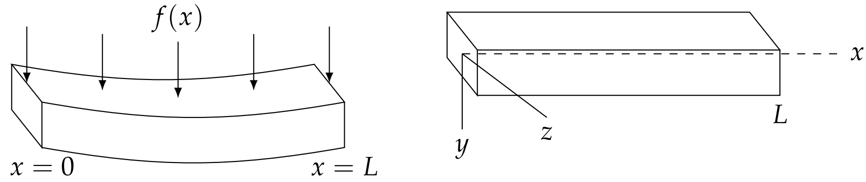
شکل 3.2: مثال 3.10 کا y_p

تیسرا قدم: مساوات 3.29 کے تکمل میں $r(x)$ بھی درکار ہے جو دیے گئے یولر کوشی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے سے ملتا ہے۔دیے گئے مساوات کو y''' کے عددی سر x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $r = x \ln x$ ملتا ہے۔مساوات 3.29 میں $\frac{W_1}{W} = \frac{x}{2}$ ، $\frac{W_2}{W} = -1$ اور $\frac{W_3}{W} = \frac{1}{2x}$ ہیں لہٰذا

$$
\begin{aligned}
y_p &= x \int \frac{x}{2} x \ln x \, dx - x^2 \int x \ln x \, dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x \, dx \\
&= \frac{x}{2}\left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right) - x^2 \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^3}{2}\left(x \ln x - x\right) \\
&= \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6}\right)
\end{aligned}
$$

ہو گا۔یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا۔ y_p کو شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔

$$
y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6}\right)
$$



(ب) بوجھ شہتیر کو جھکا دیتی ہے۔

(الف) مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر جس کی لمبائی L ہے۔

شکل 3.3: مثال 3.11 کا شہتیر۔

عملی استعمال۔لچکدار شہتیر

دو درجی تفرقی مساوات کا عملی انجینئری میں بہت زیادہ استعمال پایا جاتا ہے البتہ بلند درجی تفرقی مساوات عملی انجینئری کے بہت کم مسائل میں کام آتے ہیں۔ انجینئری کا ایک انتہائی اہم مسئلہ لچکدار شہتیر کا جھکا و ہے جس کی نمونہ کشی چہارم درجی تفرقی مساوات کرتی ہے۔کسی بھی عمارت یا پل میں شہتیر کلیدی کردار ادا کرتے ہیں جو لکڑی یا لوہے کے ہو سکتے ہیں۔

مثال 3.11: شکل 3.3-الف میں، یکساں لچک کے مادے سے بنا ہوا، **مستطیل** رقبہ عمودی تراش کا شہتیر دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L ہے۔شہتیر کی اپنی وزن سے شہتیر کے جھکاو کو رد کیا جا سکتا ہے۔شکل-ب میں شہتیر کے x محور پر عمودی بیرونی بوجھ $f(x)$ ڈالا گیا ہے جس کی وجہ سے شہتیر میں جھکاو پیدا ہوا ہے۔بیرونی بوجھ اور شہتیر کی جھکاو کا تعلق، علم لچک کے تحت، درج ذیل ہے جہاں E **ینگ کا مقیاس لچک**[11] کہلاتا ہے جبکہ I مستطیل کا z محور پر **جمودی معیار اثر**[12] ہے۔شہتیر کی فی اکائی لمبائی پر بیرونی قوت کو بوجھ $f(x)$ لکھا گیا ہے۔

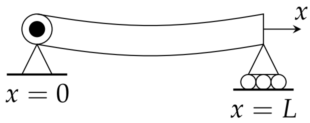
$$EIy^{(4)} = f(x) \tag{3.30}$$

شہتیر کو عموماً شکل 3.4 میں دکھائے گئے تین طریقوں سے نصب کیا جاتا ہے جو درج ذیل سرحدی شرائط کو جنم دیتے ہیں۔

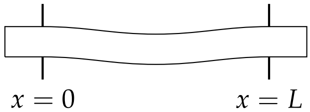
(الف) سادہ سہارا $\quad y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0$

---

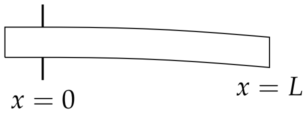
[11] Young's modulus of elasticity
[12] moment of inertia



(الف) سادہ سہارا دیا گیا ہے۔



(ب) دونوں اطراف سے جکڑا ہوا۔



(پ) ایک طرف سے جکڑا گیا ہے۔

شکل 3.4: شہتیر جکڑنے کے عمومی طریقے۔

(ب) دونوں اطراف جکڑے گئے ہیں $y(0)=y(L)=y'(0)=y'(L)=0$

(پ) ایک طرف جکڑا گیا ہے $y(0)=y'(0)=y''(L)=y'''(L)=0$

سرحدی شرط $y=0$ سے مراد صفر ہٹاو ہے، $y'=0$ سے مراد افقی مماس ہے، $y''=0$ سے مراد صفر **خماو کا معیار اثر**[13] ہے جبکہ $y'''=0$ سے مراد صفر **جزی قوت**[14] ہے۔

آئیں سادہ سہارے والی شہتیر کے مسئلے کو حل کریں جسے شکل 3.4-الف میں دکھایا گیا ہے۔یکساں بیرونی بوجھ کی صورت میں $f(x)=f_0$ ہو گا اور مساوات 3.30 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$y^{(4)}=k, \quad k=\frac{f_0}{EI} \tag{3.31}$$

جس کو تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔دو مرتبہ تکمل لیتے ہیں۔

$$y''=\frac{k}{2}x^2+c_1x+c_2$$

---

[13] bending moment
[14] shearing force

$y''(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $c_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے بعد $y''(L) = 0$ پر کرنے سے $c_1 - \frac{kL}{2}$ ملتا ہے۔یوں

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 - \frac{kL}{2}x$$

ہو گا جس کا دو مرتبہ تکمل لینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{L}{6}x^3 + c_3x + c_4\right)$$

$y(0) = 0$ پر کرنے سے $c_4 = 0$ ملتا ہے جس کے بعد $y(L) = 0$ پر کرتے ہوئے c_3 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(L) = \frac{kL}{2}\left(\frac{L^3}{12} - \frac{L^3}{6} + c_3\right) = 0, \quad c_3 = \frac{L^3}{12}$$

یوں $k = \frac{f_0}{EI}$ لکھتے ہوئے شہتیر کی لچک بالمقابل لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$y(x) = \frac{f_0}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

ہم توقع رکھتے ہیں کہ شہتیر کے درمیان سے دونوں اطراف یکساں جھکاو پایا جائے گا یعنی $y(x) = y(L-x)$ ہو گا۔زیادہ سے زیادہ جھکاو $y(\frac{L}{2}) = \frac{5f_0L^4}{16\times 24EI}$ ہے جو $x = \frac{L}{2}$ پر پایا جاتا ہے۔یاد رہے کہ شکل 3.3 میں مثبت y نیچے کی طرف کو ہے۔

سوالات

سوال 3.27 تا سوال 3.34 کو حل کریں۔

سوال 3.27: $y^{(4)} + 3y''' - 4y = 0$
جواب: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$

سوال 3.28: $y''' + 16y'' + 13y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 e^{-3x}\cos 2x + c_3 e^{-3x}\sin 2x$

سوال 3.29: $y''' + 3y'' - y' - 3y = 5e^{2x}$
جواب: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

سوال 3.30: $y^{(4)} + 8y'' - 9y = \cosh 2x$
جواب: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x + \frac{5}{39}\cosh 2x$

سوال 3.31: $x^2 y''' + 3xy'' - 2y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 x^{\sqrt{3}} + c_3 x^{-\sqrt{3}}$

سوال 3.32: $y''' + 2.25y'' + 1.6875y' + 0.421875y = 0$
جواب: $y = c_1 e^{-0.75x} + c_2 x e^{-0.75x} + c_3 x^2 e^{-0.75x}$

سوال 3.33: $y''' - y' = \frac{3}{40}\sinh\frac{x}{2}$
جواب: $y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} - 2\cosh\frac{x}{2}$

سوال 3.34: $y''' + 9y'' + 27y' + 27 = 2x^2$
جواب: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + c_3 x^2 e^{-3x} + \frac{2}{27}x^2 - \frac{4}{27}x + \frac{8}{81}$

سوال 3.35 تا سوال 3.39 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 3.35:

$$y^{(4)} - 10y'' + 9y = 4e^{-2x}$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -0.5, \quad y'''(0) = 0.2$$

جواب: $y = -\frac{2}{15}e^{-2x} + \frac{1}{1440}(127e^{x} + 1383e^{-x} - 119e^{3x} - 271e^{-3x})$

سوال 3.36:

$$y^{(4)} + y'' - 2y = 0.5\sin 2x$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$$

جواب: $y = 0.05\sin 2x + 3\cos x - 0.358\sin x - \cos\sqrt{2}x - 0.424\sin\sqrt{2}x$

سوال 3.37: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W، W_1، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔(یاد رہے تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھتے ہوئے $r = x$ حاصل ہو گا)

$$x^3y''' - 5x^2y'' + 12xy' - 12y = x^4, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1, y''(1) = 2$$

جوابات: $y_h = c_1x + c_2x^3 + c_3x^4$، $W = 6x^5$، $W_1 = x^6$، $W_2 = -3x^4$، $W_3 = 2x^3$
$y = \frac{59}{18}x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{x^4}{3}\ln x - \frac{4}{9}x^4$

سوال 3.38: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W، W_1، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔

$$x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = -1$$

جوابات: $y_h = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x^{-2}$، $W = 6x^{-5}$، $W_1 = -3x^{-2}$، $W_2 = x^{-4}$، $W_3 = 2x^{-1}$، $y = \frac{5}{3x} + x - \frac{3}{4x^2} + \frac{x^2}{12}$

سوال 3.39:

$$y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 27x^2, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1, y''(0) = -1$$

جواب: $y = \frac{2}{3}e^{-3x} + 3xe^{-3x} + \frac{9}{2}x^2e^{-3x} + x^2 - 2x + \frac{4}{3}$

باب 4

نظامِ تفرقی مساوات

گزشتہ باب میں آپ نے بلند درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔اس باب میں سادہ تفرقی مساوات حل کرنے کا نیا طریقہ دکھایا جائے گا جس میں n درجی سادہ تفرقی مساوات سے n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جائے گا۔اس نظام کو حل کرنا بھی سکھایا جائے گا۔تفرقی مساوات کے نظام کو قالب اور سمتیہ کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے لہٰذا حصہ 4.1 میں قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق پر غور کیا جائے گا۔

اسی باب میں تفرقی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بجائے تمام مساوات کی مجموعی طرز عمل پر غور کیا جائے گا جس سے نظام کے حل کی **استحکام**[1] کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہے۔انجینئری میں مستحکم نظام اہمیت رکھتے ہیں۔مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی، مستقبل کے لمحات پر معمولی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔اس ترکیب سے مساوات کا اصل حل دریافت نہیں ہوتا لہٰذا اس کو **کیفی ترکیب**[2] کہتے ہیں۔جس ترکیب سے نظام کا اصل حل حاصل ہوتا ہو اس کو **مقداری ترکیب**[3] کہتے ہیں۔

---

stability[1]
qualitative method[2]
quantitative method[3]

4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق

تفرقی مساوات کے نظام پر غور کے دوران قالب اور سمتیات استعمال کئے جائیں گے۔

دو عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2
\end{aligned}
\quad \text{یا} \quad
\begin{aligned}
y_1' &= 2y_1 - 7y_2 \\
y_2' &= 5y_1 + y_2
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

میں دو عدد نا معلوم تفاعل $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ پائے جاتے ہیں۔ان مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل $g_1(t)$ اور $g_2(t)$ بھی موجود ہو سکتے ہیں۔اسی طرح n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر مبنی نظام

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{2n}y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

میں $y_1(t)$ تا $y_n(t)$ نا معلوم تفاعل پائے جائیں گے۔درج بالا ہر مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل بھی پائے جا سکتے ہیں۔

تکنیکی اصطلاحات

قالب

نظام 4.1 کے عددی سر (جو مستقل یا متغیرات ممکن ہیں) کو 2×2 قالب[4] $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}
\tag{4.3}
$$

[4] matrix

اسی طرح نظام 4.2 کے عددی سر کو $n \times n$ قالب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

قالب میں درج a_{11} ، a_{12} ، a_{21} وغیرہ کو ارکان[5] کہتے ہیں۔ افقی لکیروں کو صف[6] جبکہ عمودی لکیروں کو قطار[7] کہتے ہیں۔ قالب 4.3 میں پہلا صف $[a_{11} \;\; a_{12}]$ یا $[2 \;\; 3]$ جبکہ دوسرا صف $[a_{21} \;\; a_{22}]$ یا $[-1 \;\; \frac{2}{3}]$ ہے۔اسی طرح پہلا قطار درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ارکان کی علامتی اظہار میں دوگنا زیر نوشت کا پہلا عدد صف کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دوسرا عدد قطار کو ظاہر کرتا ہے۔یوں a_{21} دوسری صف اور پہلی قطار کا رکن ہے۔ قالب 4.3 کا **مرکزی وتر**[8] a_{11} اور a_{22} پر مبنی ہے جبکہ قالب 4.4 کا مرکزی وتر a_{11} ، a_{22} ، $\cdots$ ، a_{nn} پر مبنی ہے۔ہمیں یہاں صرف **مربع قالب**[9] درکار ہوں گے۔مربع قالب سے مراد ایسی قالب ہے جس میں صفوں کی تعداد قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ قالب 4.3 اور قالب 4.4 مربع قالب ہیں۔

سمتیہ۔ ایک قطار اور n ارکان کا **سمتیہ قطار**[10] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اسی طرح ایک صف اور n ارکان کا **سمتیہ صف**[11] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

entry[5]
row[6]
column[7]
main diagonal[8]
square matrix[9]
column vector[10]
row vector[11]

قالب اور سمتیات کا حساب

برابری مساوات

دو عدد $n \times n$ قالب صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے تمام نظیری[12] ارکان برابر ہوں۔ظاہر ہے کہ دو قالب کی برابری کے لئے لازم ہے کہ ان میں صفوں کی تعداد یکساں ہو اور ان میں قطاروں کی تعداد یکساں ہو۔یوں $n = 2$ کی صورت میں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

صرف اور صرف اس صورت برابر $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B})$ ہوں گے جب

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, \quad a_{12} = b_{12} \\ a_{21} &= b_{21}, \quad a_{22} = b_{22} \end{aligned}$$

ہوں۔دو عدد سمتیہ صف (یا دو عدد سمتیہ قطار) صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب دونوں میں ارکان کی تعداد n برابر ہو اور ان کے تمام نظیری ارکان برابر ہوں ۔یوں

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

کی صورت میں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ صرف اور صرف تب ہو گا جب

$$v_1 = x_1 \quad \text{اور} \quad v_2 = x_2$$

ہوں۔

مجموعہ

مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر دونوں قالب کے نظیری ارکان کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔دونوں قالب یکساں $m \times n$ ہونا لازم ہے۔اسی طرح دونوں سمتیہ صف (یا دونوں سمتیہ قطار) میں برابر ارکان ہونا لازم ہے۔یوں 2×2 قالب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{bb} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

[12] corresponding

غیر سمتی ضرب

غیر سمتی ضرب[13] یعنی مستقل c سے قالب کا ضرب حاصل کرنے کی خاطر قالب کے تمام ارکان کو c سے ضرب دیا جاتا ہے۔مثلاً

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{bmatrix}, \quad -4\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-8 & 12\\ -20 & -4\end{bmatrix}$$

اور

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}9\\ -4\end{bmatrix}, \quad 3\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}27\\ -12\end{bmatrix}$$

قالب ضرب قالب

دو عدد $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ اور $\boldsymbol{B}=[b_{jk}]$ کا حاصل ضرب $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ ،(اسی ترتیب میں) $n\times n$ قالب $\boldsymbol{C}=[c_{jk}]$ ہو گا جس کے ارکان

$$c_{jk}=\sum_{m=1}^{n} a_{jm}b_{mk} \qquad j=1,\cdots,n, \qquad k=1,\cdots,n \tag{4.6}$$

ہوں گے یعنی $\boldsymbol{A}$ قالب کے j صف کے ہر رکن کو $\boldsymbol{B}$ قالب کے j قطار کے نظیری رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے n حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔ہم کہتے ہیں کہ قالب کے ضرب سے مراد **صف ضرب قطار** ہے۔مثلاً

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 7+1\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot(-4)\\ (-3)\cdot 7+0\cdot 2 & (-3)\cdot 1+0\cdot(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -2\\ -21 & -3\end{bmatrix}$$

یہاں دھیان رہے کہ ضرب قالب **غیر مستبدل**[14] ہے لہٰذا عموماً $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ ہو گا۔ یوں دو قالب کو آپس میں ضرب دیتے ہوئے قالبوں کی ترتیب تبدیل نہیں کی جا سکتی۔اس حقیقت کی وضاحت کی خاطر درج بالا مثال میں قالبوں کی ترتیب بدلتے ہوئے ان کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\cdot 2+1\cdot(-3) & 7\cdot 1+1\cdot 0\\ 2\cdot 2+(-4)\cdot(-3) & 2\cdot 1+(-4)\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 7\\ 16 & 2\end{bmatrix}$$

---

[13] scalar product
[14] non commutative

$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کو n ارکان کی سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ سے ضرب بھی اسی قاعدے کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کے n عدد ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$v_j = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} x_m \qquad j = 1, \cdots, n \tag{4.7}$$

یوں

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔

سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا اظہار بذریعہ سمتیات

تفرق

قالب یا سمتیہ کا تفرق، تمام ارکان کا تفرق حاصل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t^3 \\ 6\cos 2t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15t^2 \\ -12\sin 2t \end{bmatrix}$$

قالب کی تفرق اور ضرب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 4.1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

اسی طرح مساوات 4.2 کو درج ذیل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

مزید اعمال اور اصطلاحات

تبدیل محل

تبدیلی محل[15] کے عمل سے قالب کے قطاروں کو صفوں کی جگہ لکھا جاتا ہے۔یوں 2×2 قالب $\boldsymbol{A}$ سے **تبدیلی محل**[16] کے ذریعہ **تبدیلی محل قالب**[17] $\boldsymbol{A}^T$ حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف $\boldsymbol{x}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{x}^T$ سمتیہ قطار ہو گا۔اسی طرح سمتیہ قطار $\boldsymbol{v}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{v}^T$ سمتیہ صف ہو گا۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

قالب کا معکوس

ایسا $n \times n$ قالب جس کے مرکزی وتر کے تمام ارکان اکائی (1) اور بقایا ارکان صفر ہوں کو **اکائی قالب**[18] $\boldsymbol{I}$ کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

---

[15] transposition
[16] transposition
[17] transpose matrix
[18] unit matrix

ایسا $\boldsymbol{B}$ قالب، جس کا $\boldsymbol{A}$ قالب کے ساتھ حاصل ضرب اکائی قالب ہو $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ ، قالب $\boldsymbol{A}$ کا **معکوس قالب**[19] کہلاتا ہے جسے $\boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{A}$ **غیر نادر قالب**[20] کہلاتا ہے۔یہاں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں $n \times n$ قالب ہیں۔

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{4.11}$$

قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس تب پایا جاتا ہے جب $\boldsymbol{A}$ کا **مقطع** غیر صفر $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ہو۔اگر $\boldsymbol{A}$ کا معکوس نہ پایا جاتا ہو تب $\boldsymbol{A}$ **نادر**[21] قالب کہلاتا ہے۔ مربع 2×2 قالب کا معکوس

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ کا مقطع $|\boldsymbol{A}|$ درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{4.13}$$

خطی طور تابعیت

r عدد سمتیات $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ جہاں ہر سمتیہ n ارکان پر مشتمل ہو، اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[22] یا **خطی طور غیر تابع** کہلاتے ہیں جب

$$c_1\boldsymbol{v}^{(1)} + \cdots + c_r\boldsymbol{v}^{(r)} = \boldsymbol{0} \tag{4.14}$$

سے مراد c_1 تا c_r کی قیمتیں صفر ہو۔درج بالا مساوات میں $\boldsymbol{0}$ **صفر سمتیہ**[23] ہے جس کے تمام n ارکان صفر کے برابر ہیں۔اگر مساوات 4.14 میں c_1 تا c_r کوئی ایک یا ایک سے زائد مستقل غیر صفر ہوں تب $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ **خطی طور تابع سلسلہ**[24] یا **خطی طور تابع** کہلائیں گے چونکہ ایسی صورت میں کم از کم ایک سمتیہ کو

---

[19] inverse matrix
[20] non singular matrix
[21] singular
[22] linearly independent set
[23] zero vector
[24] linearly dependent vector

بقایا سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے، مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.14 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = -\frac{1}{c_1}\left[c_2\boldsymbol{v}^{(2)} + \cdots + c_r\boldsymbol{v}^{(r)}\right]$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات

آئگنی قدر[25] اور **آئگنی سمتیات**[26] انتہائی اہم ہیں جو **کوانٹم میکانیات**[27] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ مساوات

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{4.15}$$

میں $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ معلوم $n \times n$ قالب ہے جبکہ λ نا معلوم مستقل (جو حقیقی یا مخلوط مقدار ہو سکتا ہے) اور $\boldsymbol{x}$ نا معلوم سمتیہ ہے جنہیں حاصل کرنا درکار ہے۔ کسی بھی λ کے لئے مساوات 4.15 کا ایک حل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ممکن ہے۔ ایسی غیر سمتی[28] λ جو $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کی صورت میں مساوات 4.15 پر پورا اترتی ہو، $\boldsymbol{A}$ کی **آئگنی قدر**[29] کہلاتی ہے جبکہ، اس λ کی نظیری، $\boldsymbol{x}$ کو $\boldsymbol{A}$ کی **آئگنی سمتیہ**[30] کہتے ہیں۔

ہم مساوات 4.15 کو $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = 0$ یا

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{4.16}$$

لکھ سکتے ہیں جو n عدد خطی الجبرائی مساوات کو ظاہر کرتی ہے جس کے نا معلوم متغیرات x_1 تا x_n، سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کے ارکان ہیں۔ اس مساوات کے غیر صفر حل $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کے لئے ضروری ہے کہ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ کے عددی سر قالب کا مقطع صفر ہو۔ (یہ خطی الجبرا کی بنیادی حقیقت ہے)۔ اس باب میں ہمیں $n = 2$ سے دلچسپی ہے لہٰذا مساوات 4.16 کو

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Eigenvalues[25]
Eigenvectors[26]
quantum mechanics[27]
scalar[28]
Eigenvalue[29]
Eigenvector[30]

لکھتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

اب نادر قالب کا مقطع صفر ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ اس صورت نادر قالب ہو گا جب اس قالب کا مقطع (جسے $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مقطع**[31] کہتے ہیں) صفر ہو۔

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (a_{12}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

اس دو درجی مساوات کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مساوات**[32] کہتے ہیں۔اس کے حل λ_1 اور λ_2 ، قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر یا آئگنی قیمتیں ہیں۔پہلے آئگنی قدر حاصل کریں۔اس کے بعد λ_1 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_1 کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ دریافت کریں۔اسی طرح λ_2 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_2 کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)}$ دریافت کریں۔یاد رہے کہ اگر $\boldsymbol{x}$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ ہو تب $k\boldsymbol{x}$ بھی $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ ہو گا جہاں $k \neq 0$ ہے۔

مثال 4.1: درج ذیل قالب کی آئگنی قیمتیں اور آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}
$$

حل:امتیازی مساوات

$$
\begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ -0.8 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.6\lambda + 1.2 = 0
$$

---

[31] characteristic determinant
[32] characteristic equation

سے $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر $\lambda_1 = -0.6$ اور $\lambda_2 = -2$ ملتے ہیں۔آئگنی قیمت $\lambda = \lambda_1 = -0.6$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(-3+0.6)x_1 + 3x_2 &= 0\\
-0.8x_1 + (0.4+0.6)x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

پہلی مساوات کو $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔دوسری مساوات کو بھی $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_1 = 1$ چننا جائے تو $x_2 = 0.8$ ہو گا لہٰذا، $\lambda_1 = -0.6$ کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ

$$
\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1\\ 0.8 \end{bmatrix}
$$

ہو گا۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -2$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(-3+2)x_1 + 3x_2 &= 0\\
-0.8x_1 + (0.4+2)x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

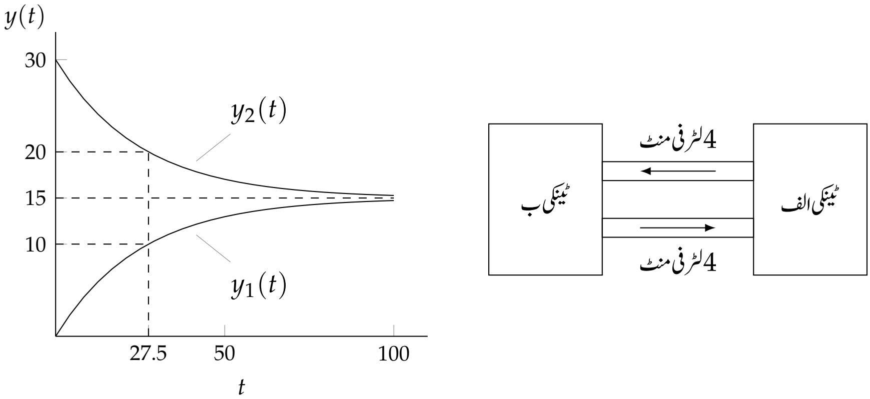
ان دونوں مساوات کو $x_1 = 3x_2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_2 = 1$ چننا جائے تو $x_1 = 3$ حاصل ہو گا لہٰذا، $\lambda_2 = -2$ کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ

$$
\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3\\ 1 \end{bmatrix}
$$

ہو گا۔جیسا پہلے ذکر کیا گیا، آئگنی سمتیات کو کسی بھی غیر صفر عدد سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔

4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

اس حصے میں ہم تفرقی مساوات کے نظام کی عملاً اہمیت دیکھیں گے۔ ہم پہلے دیکھتے ہیں کہ ایسے نظام مختلف عملی مسائل میں کیسے کردار ادا کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی تفرقی مساوات کو کیسے تفرقی مساوات کے نظام میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 4.1: ٹینکیوں کا نظام۔

مثال 4.2: دو ٹینکیوں کا نظام
ایک ٹینکی کو استعمال کرتے ہوئے مرکب بنانے کے عمل پر صفحہ 26 مثال 1.10 میں غور کیا گیا جہاں مسئلے کو ایک عدد تفرقی مساوات سے ظاہر کیا گیا۔اس مثال کو ایک مرتبہ دیکھ لیں چونکہ وہی معلومات یہاں بھی استعمال کی جائیں گی۔

شکل 4.1 میں دو ٹینکیاں دکھائی گئی ہیں جن میں یک برابر دو سو (200) لٹر پانی موجود ہے۔ٹینکی الف میں خالص پانی ہے جبکہ ٹینکی ب کی پانی میں تیس (30) کلو گرام کا نمک ملایا گیا ہے۔ ٹینکیوں میں پانی کو مسلسل ہلایا جاتا ہے تا کہ ان میں ہر جگہ محلول یکساں رہے۔ٹینکیوں میں پانی کو چار (4) لٹر فی منٹ سے گردش دینے سے ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار $y_2(t)$ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔کتنی دیر کے بعد ٹینکی الف میں نمک کی مقدار، ٹینکی ب میں نمک کی مقدار کا نصف ہو گا؟

حل: پہلا قدم: نظام کی نمونہ کشی کرتے ہیں۔ ایک ٹینکی کی طرح، ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ میں تبدیلی کی شرح $y_1'(t)$ نمک کی در آمدی اور بر آمدی شرح میں فرق کے برابر ہو گی۔ یہی کچھ $y_2'(t)$ کے لئے

بھی کہا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} y_1' &= 4\frac{y_2}{200} - 4\frac{y_1}{200} \\ y_2' &= 4\frac{y_1}{200} - 4\frac{y_2}{200} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.02y_1 + 0.02y_2 \\ y_2' &= 0.02y_1 - 0.02y_2 \end{aligned}$$

ہو گا۔اس نظام کو

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.20}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

ہیں۔

دوسرا قدم: عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح یہاں بھی حل کو قوت نمائی تفاعل

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t} \tag{4.21}$$

فرض کرتے ہیں۔مساوات 4.20 میں اس فرضی تفاعل اور اس کے تفرق کو پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$$

دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے دونوں اطراف کو بدل کر لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

ہمیں اس مساوات کے غیر صفر اہم حل درکار ہیں لہٰذا ہمیں $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات حاصل کرنے ہوں گے۔آئگنی قدر امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -0.02 - \lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.02 - \lambda) - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0$$

کے حل $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ ہوں گے۔(یہاں دھیان رہے کہ ہمیں غیر صفر آئگنی سمتیات درکار ہیں۔آئگنی قدر صفر ہو سکتے ہیں۔) آئگنی سمتیات مساوات 4.18 کے پہلے یا دوسرے مساوات سے حاصل ہوں گے۔مساوات 4.18 کی پہلے مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے لئے

$$-0.02x_1 + 0.02x_2 = 0, \quad (-0.02 + 0.04)x_1 + 0.02x_2 = 0$$

لکھے جائیں گے جن سے $x_1 = x_2$ اور $x_1 = -x_2$ ملتے ہیں۔ہم $x_1 = x_2 = 1$ اور $x_1 = -x_2 = 1$ چنتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے نظیری آئگنی سمتیات

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 4.21 اور مسئلہ خطی میل (جو خطی متجانس تفرقی مساوات کے نظام پر بھی لاگو ہوتا ہے) کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t} \tag{4.22}$$

تیسرا قدم: ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ (یعنی ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر کوئی نمک نہیں پایا جاتا) اور $y_2(0) = 30$ (یعنی ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر تیس کلو گرام نمک پایا جاتا ہے) ہیں۔مساوات 4.22 میں $t = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہیں۔

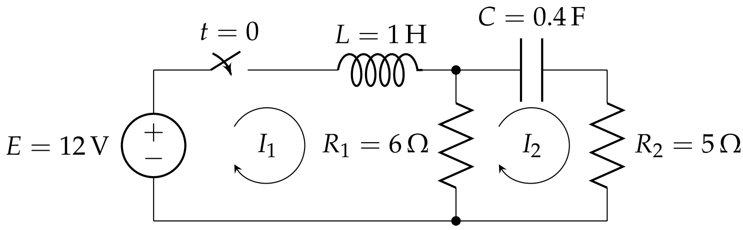
$$\boldsymbol{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

درج بالا مساوات کی جزوی صورت $c_1 + c_2 = 0$ اور $c_1 - c_2 = 30$ ہے جس کا حل $c_1 = 15$ اور $c_2 = -15$ ہے۔یوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہوا حل

$$\boldsymbol{y} = 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 15 - 15e^{-0.04t} \\ y_2(t) &= 15 + 15e^{-0.04t} \end{aligned}$$



شکل 4.2: مثال 4.3 کا برقی جال۔

ہو گا۔اس حل کو شکل 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

چوتھا قدم: ٹینکی الف میں اس وقت ٹینکی ب کا آدھا نمک ہو گا جب اس میں $10 = \frac{30}{3}$ کلو گرام نمک ہو۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t} = 10, \quad t = -\frac{1}{0.04}\ln\frac{1}{3} = 27.5\,\mathrm{min}$$

مثال 4.3: برقی جال

شکل 4.2 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو ہوتا ہے۔برقی رو $I_1(t)$ اور $I_2(t)$ دریافت کریں۔ابتدائی رو اور ابتدائی برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر ہیں۔

حل: **پہلا قدم** نظام کی نمونہ کشی ہے۔امالہ میں رو I_1 ہے لہٰذا اس پر برقی دباو $v_L = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔برق گیر میں رو I_2 ہے لہٰذا اس پر دباو $v_C = \frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔مزاحمت R_2 پر دباو $v_{R2} = I_2R_2$ ہو گا جبکہ مزاحمت R_1 میں کل رو $I_1 - I_2$ ہے لہٰذا اس پر دباو $v_{R1} = (I_1 - I_2)R_1$ ہو گا۔کرخوف قانون دباو کے تحت کسی بھی بند دائرے میں کل دباو کا اضافہ اس دائرے میں کل دباو کے گھٹاو کے برابر ہو گا۔یوں بائیں دائرے کے لئے

$$E = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + (I_1 - I_2)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E = 12$ ، $L = 1$ اور $R_1 = 6$ پر کرتے ہوئے

$$I_1' = -6I_1 + 6I_2 + 12 \tag{4.23}$$

ملتا ہے۔اسی طرح دائیں دائرے کے لئے

$$0 = \frac{1}{C}\int I_2 \,\mathrm{d}t + I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $C = 0.4$ اور $R_2 = 5$ پر کرتے ہوئے تفرق لینے سے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4I_1' = 0$$

ملتا ہے۔اس میں مساوات 4.23 سے I_1' کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4(-6I_1 + 6I_2 + 12) = 0$$

یعنی

$$I_2' = -\frac{36}{11}I_1 + \frac{67}{22}I_2 + \frac{72}{11} \tag{4.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.23 اور مساوات 4.24 کو

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{g} \tag{4.25}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 12 \\ \frac{72}{11} \end{bmatrix}$$

ہیں۔ I_1' اور I_2' کے سمتیہ قطار کو $\boldsymbol{J}$ اس لئے لکھا گیا ہے کہ اس باب میں $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

دوسرا قدم نظام کا حل تلاش کرنا ہے۔ $\boldsymbol{g}$ **کی موجودگی غیر متجانس سادہ تفرقی نظام کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہم ایک** عدد تفرقی مساوات کی طرح پہلے متجانس مطابقتی نظام $\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ہم $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے متجانس نظام میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{J}' = \lambda \boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t} \quad \implies \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

غیر صفر اہم حل کے حصول کے لئے $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات درکار ہوں گے۔آئگنی قدر امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\frac{65}{22}\lambda-\frac{15}{11}=0$$

سے $\lambda_1=-2.38209$ اور $\lambda_2=-0.57245$ حاصل ہوتے ہیں۔ان آئگنی قدر کی نظیری آئگنی سمتیات مساوات 4.18 سے حاصل ہوں گے۔مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_1 پر کرتے ہوئے

$$(-6+2.38209)x_1+6x_2=0, \quad \implies x_1=1.658416x_2$$

ملتا ہے۔یوں $x_2=1$ چنتے ہوئے $x_1=1.658416$ ملتا ہے جس سے $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1.658416\\1\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_2 پر کرتے ہوئے

$$(-6+0.57245)x_1+6x_2=0, \quad \implies x_1=1.105471x_2$$

ملتا ہے۔یوں $x_2=1$ چنتے ہوئے $x_1=1.105471$ ملتا ہے جس سے $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1.105471\\1\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں متجانس نظام کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{J}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} \tag{4.26}$$

مساوات 4.25 کے غیر متجانس نظام کا جبری تفاعل $\boldsymbol{g}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اس نظام کا مخصوص حل مستقل سمتیہ قطار $\boldsymbol{J}_p=\boldsymbol{a}$ فرض کرتے ہیں جس کے ارکان a_1 اور a_2 ہیں۔یوں $\boldsymbol{J}'=0$ ہو گا۔ مساوات 4.25 میں فرض کردہ مخصوص حل پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{g}=0$ ملتا ہے جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

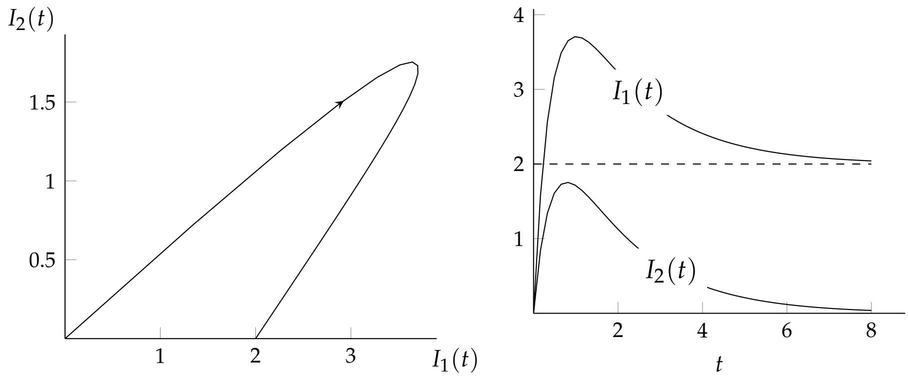
$$\begin{gathered}-6a_1+6a_2+12=0\\ -\frac{36}{11}a_1+\frac{67}{22}a_2+\frac{72}{11}=0\end{gathered}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے $a_1=2$ اور $a_2=0$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ ہو گا۔یوں عمومی حل

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_h+\boldsymbol{J}_p=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t}+\boldsymbol{a}$$

ہو گا جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}I_1&=1.658416c_1e^{-2.38209t}+1.105471c_2e^{-0.57245t}+2\\ I_2&=c_1e^{-2.38209t}+c_2e^{-0.57245t}\end{aligned}$$



(الف) مثال 4.3 کے دور کا مخصوص حل۔

(ب) $I_1(t)$ بالمقابل $I_2(t)$

شکل 4.3: مثال 4.3 کے منحنی۔

ابتدائی معلومات کے تحت $I_1(0) = 0$ اور $I_2(0) = 0$ ہے۔انہیں درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} 1.658416c_1 + 1.105471c_2 + 2 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -3.61699$ اور $c_2 = 3.61699$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل

$$\boldsymbol{J} = -3.617\boldsymbol{x}^{(1)}e^{-2.38t} + 3.617\boldsymbol{x}^{(2)}e^{-0.57t} + \boldsymbol{a}$$

یعنی

$$\begin{aligned} I_1 &= -5.998e^{-2.38t} + 3.998e^{-0.57t} + 2 \\ I_2 &= -3.617e^{-2.38t} + 3.617e^{-0.57t} \end{aligned}$$

ہو گا جسے شکل 4.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.3-ب میں $I_1(t)$ بالمقابل $I_2(t)$ کو I_1I_2 سطح پر دکھایا گیا ہے جس میں t مقدار معلوم ہے۔مقدار معلوم کے بڑھنے کی سمت کو منحنی پر تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے۔ سطح I_1I_2 کو نظام کی **سطح مرحلہ**[33] کہتے ہیں جبکہ شکل 4.3-ب کی منحنی کو **خط حرکت**[34] کہتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ **سطح مرحلہ اشکال**، سادہ شکل

[33] phase plane
[34] trajectory

4.3-الف طرز کے اشکال سے زیادہ اہم ثابت ہوتے ہیں۔یہ خطوط کی نسل کے بارے میں بہتر کیفی معلومات فراہم کرتے ہیں۔

صفحہ 26 مثال 1.10 میں ایک عدد ٹینکی کی مثال پر غور کیا گیا جس کی نمونہ کشی ایک عدد سادہ تفرقی مساوات سے کی گئی۔ مثال 4.2 میں دو ٹینکیوں پر مبنی نظام کی نمونہ کشی دو عدد تفرقی مساوات سے کی گئی۔ اسی طرح مثال 4.3 میں دو عدد نا معلوم رو کی بنا دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ بڑے نظام کی نمونہ کشی زیادہ تعداد کی تفرقی مساوات سے کی جائے گی۔

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے تفرقی مساوات کے نظام کا حصول

درج ذیل مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے کہ n درجی سادہ تفرقی مساوات 4.27 سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 4.1: تفرقی مساوات کا مبادلہ
سادہ n درجی تفرقی مساوات

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{4.27}$$

میں

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \tag{4.28}$$

لے کر اس کو n عدد سادہ ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned} \tag{4.29}$$

میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

ثبوت : مساوات 4.28 کے تفرق سے نظام کے پہلے $n-1$ عدد تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 4.28 سے $y_n' = y^{(n)}$ بھی حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 4.27 سے مساوات 4.29 کی آخری مساوات بھی حاصل ہوتی ہے۔

مثال 4.4: ہم اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ ارتعاش کے مسئلے پر غور کر چکے ہیں جس کی تفرقی مساوات صفحہ 122 پر مساوات 2.45

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \implies \quad y'' = -\frac{k}{m}y - \frac{c}{m}y' \tag{4.30}$$

دیتی ہے جس کے لئے مساوات 4.29 کا نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{aligned}$$

متجانس اور خطی ہے۔ قالب کا استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ لکھتے ہوئے اس نظام کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

جس سے امتیازی مساوات لکھتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

با مثلاً $m = 1$ ، $c = 1.4$ اور $k = 0.24$ ہوں تب

$$\lambda^2 + 1.4\lambda + 0.24 = (\lambda + 0.2)(\lambda + 1.2) = 0$$

ہو گا جس سے آئگنی قدر $\lambda_1=-0.2$ اور $\lambda_2=-1.2$ حاصل ہوتے ہیں۔آئگنی سمتیات $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ کی پہلی مساوات $-\lambda x_1+x_2$ سے حاصل کرتے ہیں۔آئگنی قدر $\lambda_1=-0.2$ پر کرتے ہوئے $0.2x_1+x_2=0$ سے $x_2=-0.2x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1=1$ چنتے ہوئے $x_2=-0.2$ ہو گا۔اسی طرح $\lambda_2=-1.2$ پر کرتے ہوئے $1.2x_1+x_2=0$ سے $x_2=-1.2x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1=1$ چنتے ہوئے $x_2=-1.2$ ہو گا۔یوں درج ذیل آئگنی سمتیات حاصل ہوتی ہیں

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\-0.2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\-1.2\end{bmatrix}$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\-0.2\end{bmatrix}e^{-0.2t}+c_2\begin{bmatrix}1\\-1.2\end{bmatrix}e^{-1.2t}$$

سمتیہ حل لکھا جائے گا۔اس نظام کی پہلی مساوات

$$y=y_1=c_1e^{-0.2t}+c_2e^{-1.2t}$$

درکار حل ہے جبکہ نظام کی دوسری مساوات حل کی تفرق ہے۔

$$y_2=y_1'=y'=-0.2c_1e^{-0.2t}-1.2c_2e^{-1.2t}$$

سوالات

سوال 4.1 تا سوال 4.5 میں دیے گئے قالب کے آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات حاصل کریں۔

سوال 4.1: الیکٹران کی ایک خاصیت **چکر**[35] کہلاتی ہے جس کی مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ یا $\frac{\hbar}{2}$ ہو سکتی ہے جہاں $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ ہے اور $h=6.626\times10^{-34}\,\mathrm{m^2kg/s}$ **مستقل پلانک**[36] ہے۔چکر سمتیہ مقدار ہے۔مقناطیسی میدان

[35] spin
[36] Plank's constant

میں الیکٹران کا چکر یا ہمہ میدان (مقناطیسی میدان کی سمت میں) رہتا ہے اور یا مخالف میدان (میدان کی الٹ سمت میں) رہتا ہے۔ہمہ میدان صورت میں الیکٹران کو اوپر چکر[37] الیکٹران کہتے ہیں جبکہ میدان مخالف چکر کی صورت میں الیکٹران کو نیچے چکر[38] الیکٹران کہتے ہیں۔ z سمت میں مقناطیسی میدان میں موجود الیکٹران کی خاصیت S_z قالب چکر[39] سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ z میدان میں اوپر چکر الیکٹران کو آئگنی سمتیہ χ_+^z اور نیچے چکر الیکٹران کو آئگنی سمتیہ χ_-^z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل S_z قالب کے آئگنی قدر (یعنی الیکٹران کا چکر) حاصل کرتے ہوئے آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{S}_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda_- = -\frac{\hbar}{2}$ ، $\lambda_+ = \frac{\hbar}{2}$ ، $\chi_-^z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\chi_+^z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.2: مقناطیسی میدان میں الیکٹران کی زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع $\boldsymbol{S}^2$ قالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس قالب کی آئگنی قدر زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع ہو گا۔ قالب کی آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{S}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3\hbar}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3\hbar}{4} \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3\hbar^2}{4}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.3: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.4: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$

---

[37] spin up
[38] spin down
[39] spin matrix

سوال 4.5: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.6\\ -0.4 & 1.2\end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1=\frac{3}{5}$ ، $\lambda_2=\frac{4}{5}$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

سوال 4.6 اور سوال 4.7 ٹینکیوں کے سوالات ہیں۔

سوال 4.6: اگر مثال 4.2 میں ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر چار سو (400) لٹر پانی موجود ہو تب جوابات کیا ہوں گے؟

جوابات: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.01 & 0.02\\ 0.01 & -0.02\end{bmatrix}$ ، $\lambda_1=-0.03$ ، $\lambda_2=0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\end{bmatrix}$ ، $c_1=-20$ ، $c_2=20$ ، $23.1\,\text{min}$

سوال 4.7: مثال 4.2 میں ٹینکی الف کے ساتھ دو سو (200) لٹر کی ٹینکی پ دو نالیوں کے ذریعہ جوڑی جاتی ہے۔ان کے مابین بھی چار لٹر فی منٹ کی شرح سے پانی کا تبادلہ ہوتا ہے۔ٹینکی پ میں ابتدائی طور پر دو سو لٹر کا خالص پانی پایا جاتا ہے۔اس نظام کے تفرقی مساوات لکھ کر $\boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔نظام کی آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات دریافت کرتے ہوئے مخصوص حل دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.04 & 0.02 & 0.02\\ 0.02 & -0.02 & 0\\ 0.02 & 0 & -0.02\end{bmatrix}$ ، $\lambda_1=-0.06$ ، $\lambda_2=-0.02$ ، $\lambda_3=0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ -0.5\\ -0.5\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ ،

$$\boldsymbol{y}=-10\boldsymbol{x}^{(1)}e^{-0.06t}+15\boldsymbol{x}^{(-0.02t)}+10\boldsymbol{x}^{(3)}$$

سوال 4.8 تا سوال 4.10 برقی جال پر مبنی ہیں۔

سوال 4.8: اگر مثال 4.3 میں ابتدائی برقی رو $I_1(0)=0$ اور $I_2=2\,\text{A}$ ہوں تب حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 10.63e^{-0.57t} - 12.63e^{-2.38t} + 2$ ، $I_2 = 9.62e^{-0.57t} - 7.62e^{-2.38t}$

سوال 4.9: اگر مثال 4.3 میں $L = 0.5\,\mathrm{H}$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 2.96e^{-0.529t} - 4.96e^{-5.153t} + 2$ ، $I_2 = 2.83e^{-0.529t} - 2.83e^{-5.153t}$

سوال 4.10: اگر مثال 4.3 میں $L = 2\,\mathrm{H}$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 2 + e^{-\frac{35}{44}t}[19.9\cos(0.22t) - 2\sin(0.22t)]$ ، $I_2 = 14.77e^{-\frac{35}{44}t}\sin(0.22t)$

سوال 4.11 تا سوال 4.11 میں تفرقی مساوات کو نظام میں تبدیل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ قالب حاصل کریں۔اس قالب کی آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات دریافت کریں۔مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کو جوں کا توں بھی حل کریں۔

سوال 4.11: $y'' + 5y' + 6y = 0$

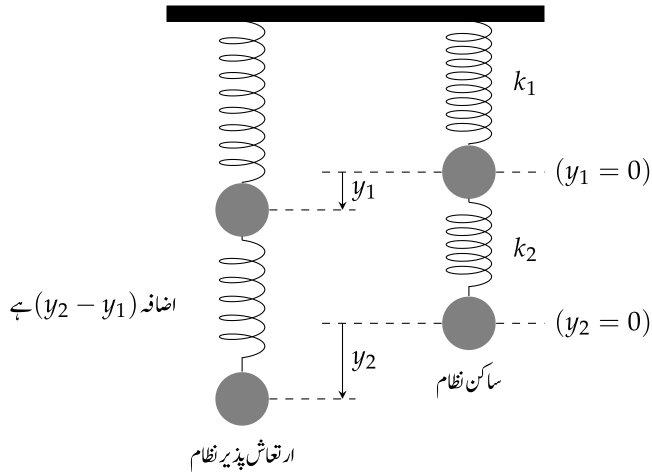
جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -3$ ، $\lambda_2 = -2$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

سوال 4.12: $12y'' - y' - 6y = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ ، $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} e^{\frac{3}{4}t}$

سوال 4.13: $y''' - y' = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = 1$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



شکل 4.4: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام۔

سوال 4.14: $y''+9y'+14y=0$

جوابات: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -14 & -9\end{bmatrix}$ ، $\lambda_1=-2$ ، $\lambda_2=-7$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\ -7\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -7\end{bmatrix}e^{-7t}$

سوال 4.15: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام شکل 4.4 میں دکھایا گیا ہے جس میں $m_1=m_2=1$ ، $k_1=3$ اور $k_2=4$ ہیں۔اس نظام کے تفرقی مساوات لکھیں۔ $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}e^{\omega t}$ تصور کرتے ہوئے، جہاں $\omega^2=\lambda$ ہے، ان کا حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1=A\cos(1.109t)+B\sin(1.109t)+C\cos(3.126t)+D\sin(3.126t)$ ، $y_2=A*\cos(1.109t)+B*\sin(1.109t)+C*\cos(3.126t)+D*\sin(3.126t)$

4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی

گزشتہ حصے کے ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام، درج ذیل عمومی نظام کی مخصوص صورت ہے۔

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\ y_2 &= f_2(t, y_1, \cdots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(t, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned} \quad \implies \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \tag{4.32}$$

نظام کو سمتیہ کی صورت میں سمتیہ قطار $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ اور سمتیہ قطار $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \cdots, f_n]^T$ (یہاں T سے مراد تبدیلی محل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے سمتیہ قطار کو افقی لکھ کر جگہ بچائی گئی ہے) کی استعمال سے لکھا گیا ہے۔درج بالا نظام عملی استعمال کے تقریباً تمام صورتوں کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $n = 1$ کی صورت میں یہ $y_1' = f_1(t, y_1)$ یعنی $y' = f(t, y)$ کو ظاہر کرے گی جسے ہم باب 1 سے جانتے ہیں۔

کسی کھلے وقفہ $a < t < b$ پر مساوات 4.32 کا حل، وقفہ $a < t < b$ پر قابل تفرق، n عدد تفاعل کا سلسلہ

$$y_1 = h_1(t), \quad y_2 = h_2(t), \quad \cdots, \quad y_n = h_n(t)$$

ہو گا جو پورے وقفے پر مساوات 4.32 پر پورا اترتا ہو۔حل سمتیہ[40] کو قطار سمتیہ $\boldsymbol{h} = [h_1(t), \cdots, h_n(t)]^T$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t)$$

اس نظام پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 4.32 اور n عدد ابتدائی شرائط

$$y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \cdots, \quad y_n(t_0) = K_n \tag{4.33}$$

پر مبنی ہو گا۔ان ابتدائی شرائط کو سمتیہ کی صورت میں $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں t_0 دیے گئے وقفے پر پایا جاتا ہے اور سمتیہ قطار $\boldsymbol{K} = [K_1, \cdots, K_n]^T$ کے ارکان دیے گئے مستقل مقدار ہیں۔مساوات 4.32 اور مساوات 4.33 کے ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کی **وجودیت اور یکتائی کے لئے معقول شرائط** درج ذیل مسئلہ بیان کرتی ہے جو حصہ 1.7 میں دیے گئے مسئلے کو وسعت دیتی ہے۔اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

---

[40] solution vector

مسئلہ 4.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ $ty_1y_2\cdots y_n$ **میدان عمل**[41] پر تفاعل f_1 تا f_n اور ان کے تفرق $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ تا $\frac{\partial f_1}{\partial y_n}$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ استمراری ہیں اور اس میدان عمل پر نقطہ $(t_0, K_1, \cdots, K_n)$ پایا جاتا ہو تب کچھ وقفہ $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ پر مساوات 4.32 کا ایسا حل موجود ہے جو مساوات 4.33 کے ابتدائی شرائط پر پورا اترتا ہو اور یہ حل یکتا ہے۔

4.3.1 خطی نظام

سادہ تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہم مساوات 4.32 کو اس صورت **خطی نظام**[42] کہیں گے جب اس کو

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t)\\
y_2' &= a_{21}(t)y_1 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t)\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t)
\end{aligned}
\qquad \implies \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \tag{4.34}
$$

لکھنا ممکن ہو جہاں

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_n \end{bmatrix}
$$

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 4.34 میں y_1' تا y_n' کا y_1 تا y_n کے ساتھ **خطی** تعلق ہے۔اگر $\boldsymbol{g} = 0$ ہو تب نظام 4.34

$$
\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.35}
$$

صورت اختیار کرتا ہے جو **متجانس** نظام ہے جبکہ $\boldsymbol{g} \neq 0$ کی صورت میں نظام 4.34 کو **غیر متجانس** کہلاتا ہے۔یوں مثال 4.2 اور مثال 4.4 متجانس نظام ہیں جبکہ مثال 4.3 غیر متجانس نظام ہے۔

---

[41] domain
[42] linear system

خطی نظام میں $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = a_{11}(t)$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n} = a_{nn}(t)$ ہیں لہٰذا مسئلہ 4.2 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.3: خطی نظام کا مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ کھلے وقفہ $\alpha < t < \beta$ جس پر نقطہ t_0 پایا جاتا ہو، پر نظام 4.34 کے تمام a_{jk} اور g_j استمراری ہیں۔ایسی صورت میں نظام 4.34 کا ایسا حل $\boldsymbol{y}$ موجود ہے جو ابتدائی شرائط مساوات 4.33 پر پورا اترتا ہے اور یہ حل یکتا ہے۔

ایک عدد متجانس سادہ تفرقی مساوات کی طرح مسئلہ خطی میل متجانس نظام کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ خطی میل
اگر $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ کسی کھلے وقفے پر متجانس خطی نظام 4.35 کے حل ہوں تب ان کا کوئی بھی خطی میل $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}$ بھی اس نظام کا حل ہو گا۔

ثبوت: خطی میل کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 4.35 کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}' &= [c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}]' \\
&= c_1\boldsymbol{y}^{(1)'} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)'} \\
&= c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)} \\
&= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا نظریہ، ایک عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظریے سے بہت مشابہت رکھتا ہے جس پر حصہ 2.6 اور حصہ 2.7 میں غور کیا گیا ہے۔یہ دیکھنے کی خاطر ہم بالکل بنیادی تصورات اور حقائق پر غور کرتے ہیں۔

اساس، عمومی حل اور ورونسکی

متجانس نظام 4.35 کا کھلے وقفہ J پر حل کی اساس **یعنی بنیادی نظام**[43] سے مراد n عدد، J پر خطی طور غیر تابع حل، $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ کا سلسلہ ہے۔(یہاں کھلے وقفے کو J کہا گیا ہے چونکہ I اکائی قالب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔) ان حل کے خطی میل

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + \cdots + c_n\boldsymbol{y}^{(n)} \tag{4.36}$$

کو J پر مساوات 4.35 کا عمومی حل کہا جاتا ہے جہاں c_1 تا c_n **اختیاری مستقل** ہیں۔یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر مساوات 4.35 میں تمام a_{jk} کھلے وقفے پر استمراری ہوں تب اس وقفے پر مساوات 4.35 کے حل کی اساس موجود ہے لہٰذا اس کا **عمومی حل** موجود ہے جس میں، کھلے وقفے پر، تمام حل شامل ہیں۔

ہم کھلے وقفے پر n عدد حل کو $n \times n$ قالب کی قطاروں کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{y}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}^{(n)}] \tag{4.37}$$

$\boldsymbol{Y}$ کے مقطع کو $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ کا **ورونسکی** کہتے ہیں۔

$$W(\boldsymbol{y}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)} \\ & \vdots & & \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{4.38}$$

درج بالا ورونسکی میں قطار $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ حل کی اساس ہیں جنہیں اجزاء کی صورت میں لکھا گیا ہے۔یہ حل صرف اور صرف اس صورت حل کی اساس ہوں گے جب ان کا ورونسکی کھلے وقفہ J پر کسی بھی نقطہ t_1 پر صفر کے برابر نہ ہو۔کھلے وقفے پر W یا تو کہیں بھی صفر کے برابر نہیں ہو گا اور یا یہ کھلے وقفے پر **مکمل صفر** کے برابر ہو گا۔(یہ بالکل مسئلہ 2.3 اور مسئلہ 3.3 کی طرح ہے۔)

اگر مساوات 4.36 میں دیے حل اساس یعنی بنیادی نظام ہوں تب قالب 4.37 **بنیادی قالب**[44] کہلاتا ہے۔سمتیہ قطار $\boldsymbol{c} = [c_1 \ c_2 \cdots c_n]^T$ کی مدد سے مساوات 4.36 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{c} \tag{4.39}$$

---

[43] fundamental system
[44] fundamental matrix

آئیں مساوات 4.38 کا حصہ 2.6 کے ساتھ تعلق جوڑیں۔فرض کریں کہ متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل y اور z ہیں۔یوں ورونسکی

$$W(y,z)=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

ہو گا۔اس سادہ دو درجی مساوات کو تفرقی مساوات کی نظام کی صورت میں لکھنے کی خاطر، حصہ 4.1 کے تحت، $y=y_1$ ، $y'=y_1'=y_2$ ، $z=z_1$ اور $z'=z_1'=z_2$ لکھنا ہو گا۔ایسا کرتے ہوئے **ورونسکی** درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے

$$W(y_1,z_1)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

جو، علامتوں میں فرق کے علاوہ، ہو بہو مساوات 4.38 ہے۔

4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب

فرض کریں کہ متجانس خطی نظام

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.40}$$

کے عددی سر **مستقل مقدار** ہیں لہٰذا $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ کے ارکان t پر منحصر نہیں ہوں گے۔ہم مساوات 4.40 کو حل کرنا چاہتے ہیں۔اب ہم جانتے ہیں کہ ایک عدد سادہ تفرقی مساوات $y'=ky$ کا حل $y=Ce^{kt}$ ہے لہٰذا ہم مساوات 4.40 کا حل

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}e^{\lambda t} \tag{4.41}$$

تصور کرتے ہیں۔تصوراتی حل اور اس کے تفرق $\boldsymbol{y}'=\lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو مساوات 4.40 میں پر کرتے ہوئے ہمیں $\boldsymbol{y}'=\lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ ملتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے آئگنی قیمت مسئلہ

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \tag{4.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 4.40 کے غیر صفر اہم حل مساوات 4.41 کی صورت رکھتے ہیں جہاں λ قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر اور $\boldsymbol{x}$ اس کے نظیری آئگنی سمتیات ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{A}$ کا n عدد خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہے۔ عموماً مسائل میں ایسا ہی ہوتا ہے بالخصوص اگر $\boldsymbol{A}$ **تشاکل**[45] ہو $(a_{kj} = a_{jk})$ یا **منحرف تشاکل**[46] $(a_{kj} = -a_{jk})$ ہو اور یا اگر اس کے n عدد **منفرد** آئگنی قدر پائے جاتے ہوں۔

ان خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیات کے سلسلے کو $\boldsymbol{x}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{x}^{(n)}$ لکھتے ہیں جو آئگنی قدر λ_1 تا λ_n کے نظیری سمتیات ہیں (جو منفرد ہو سکتے ہیں یا ان میں سے چند یا تمام یکساں ہو سکتے ہیں)۔ یوں مساوات 4.41 طرز کے نظیری حل درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n)}e^{\lambda_n t} \tag{4.43}$$

مساوات 4.38 کی مدد سے ان کی ورونسکی $W(\boldsymbol{y}^{(1)}), \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{y}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}) &= \begin{vmatrix} x_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_1^{(2)}e^{\lambda_t} & \cdots & x_1^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ x_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_2^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ & & \vdots & \\ x_n^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_n^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_n^{(n)}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ & & \vdots & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.44}$$

اب نا قوت نمائی تفاعل کبھی بھی صفر نہیں ہوتا اور درج بالا مساوات میں آخری مقطع کے قطار، خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیات ہیں، لہٰذا یہ مقطع بھی غیر صفر ہے۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: عمومی حل

اگر مساوات 4.40 میں دیے نظام کے مستقل قیمت قالب $\boldsymbol{A}$ کے n عدد منفرد آئگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہو تب مساوات 4.43 میں دیے گئے حل $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ مساوات 4.40 کے حل کی اساس ہوں گے جن سے درج ذیل عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^{(n)}e^{\lambda_n t} \tag{4.45}$$

---

[45] symmetric
[46] skew-symmetric

تشاکل یا منحرف تشاکل $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں اور یا اگر $\boldsymbol{A}$ کے n عدد منفرد آئگنی سمتیات پائے جاتے ہوں تب $\boldsymbol{A}$ کے منفرد آئگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جائے گا اور درج بالا مسئلے کا فرض کردہ شرط پورا ہو گا۔

سطح مرحلہ پر حل منحنی کا اظہار

ہم اب دو عدد مستقل عددی سر والے متجانس سادہ تفرقی مساوات کے نظام کی صورت میں مساوات 4.40 پر غور کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \qquad \implies \qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

ہم عموماً مساوات 4.46 کے دونوں حل بالمقابل t کو علیحدہ علیحدہ (شکل 4.3-الف کی طرح) کھینچتے ہیں۔ ہم انہیں حل

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

کو ایک ہی خط کی صورت میں (شکل 4.3-ب کی طرح) سطح مرحلہ پر بھی کھینچ سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے t کو بطور **مقدار معلوم** تصور کیا جاتا ہے لہٰذا ایسے خط کو **منحنی مقدار معلوم**[47] بھی کہتے ہیں۔ایسے منحنی کو مساوات 4.46 کا **خط حرکت** کہا جاتا ہے جبکہ $y_2 1 - y$ سطح کو **سطح مرحلہ** کہتے ہیں۔ سطح مرحلہ کو مساوات 4.46 کے خطوط حرکت سے بھرنے سے مساوات 4.46 کا **پیکر مرحلہ**[48] حاصل ہوتا ہے۔

کمپیوٹر کے استعمال نے سطح مرحلہ پر حل کے خط حرکت کو اہمیت بخشی ہے۔پیکر مرحلہ تمام حل کی خفی تجزیہ میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔آئیں پیکر مرحلہ کی ایک مثال دیکھیں۔

---

[47] parametric curve
[48] phase portrait

مثال 4.5: سطح مرحلہ پر خط حرکت
درج ذیل نظام کے حل کی منحنی کھینچیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

حل: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ اور $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ پر کر کے قوت نمائی تفاعل سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ملتا ہے۔امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

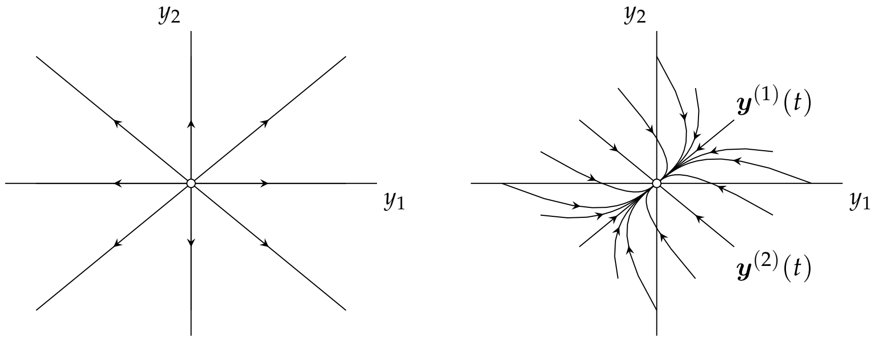
ہے۔یوں آئگنی قدر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -3$ حاصل ہوتے ہیں۔آئگنی سمتیات $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ کے پہلے صف $(-2-\lambda)x_1 + x_2 = 0$ سے حاصل کرتے ہیں جس میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے $x_2 = x_1$ ملتا ہے۔یوں x_1 چنتے ہوئے $x_2 = 1$ حاصل ہو گا جس سے آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -3$ پر کرتے ہوئے $x_2 = -x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ حاصل ہو گا اور یوں $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -1]^T$ ہو گا۔ان سے عمومی حل لکھتے ہیں جس کے مختلف خط حرکت (یعنی پیکر حرکت) شکل 4.5-الف میں دکھائے گئے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

نظام کا نقطہ فاصل

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ نظام 4.46 کے تمام خط حرکت نقطہ $\boldsymbol{y} = 0$ سے گزرتے ہیں۔آئیں دیکھیں کہ ایسا کیوں ہے۔علم الاحصاء سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{y_2'\,\mathrm{d}t}{y_1'\,\mathrm{d}t} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2} \tag{4.49}$$



(ب) نظام 4.50 کے خط حرکت۔(مناسب جوڑ) (الف) نظام 4.48 کے خط حرکت۔(غیر مناسب جوڑ)

شکل 4.5: غیر مناسب جوڑ اور مناسب جوڑ۔

یوں ماسوائے نقطہ $P_0 : (0,0)$ کے، ہر نقطہ $P : (y_1, y_2)$ کے ساتھ خط حرکت کا مماس $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}$ منسلک کیا جا سکتا ہے۔نقطہ P_0 پر مساوات 4.49 کا دایاں ہاتھ **نا قابل معلوم قیمت** $\frac{0}{0}$ ہو گا۔ایسا نقطہ P_0 جس پر $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}$ کی قیمت **نا قابل معلوم** ہو کو نظام 4.46 کا **نقطہ فاصل**[49] کہتے ہیں۔

نقطہ فاصل کے پانچ اقسام

نقطہ فاصل کے قریب، خط حرکت کی جیومیٹریائی صورت کو دیکھ کر نقطہ فاصل کی پانچ اقسام بیان کیے جا سکتے ہیں جنہیں **غیر مناسب جوڑ**[50] ، **مناسب جوڑ**[51] ، **نقطہ زین**[52] ، **وسط**[53] اور **نقطہ مرغولہ**[54] کہتے ہیں۔ان کی وضاحت درج ذیل پانچ مثالوں میں کی گئی ہے جہاں ان کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔

مثال 4.6: غیر مناسب جوڑ

ایسا **نقطہ فاصل** P_0 جس پر، دو **خط حرکت** کے علاوہ، تمام خط حرکت کی مماس کی ایک جیسی تحدیدی سمت پائی جاتی

critical point[49]
improper node[50]
proper node[51]
saddle point[52]
center[53]
spiral point[54]

ہو غیر مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔دو مختلف خط حرکت کا بھی نقطہ P_0 پر تحدیدی سمت پایا جاتا ہے البتہ یہ تحدیدی سمت مختلف ہو گا۔

نظام 4.48 کا $\mathbf{0}$ پر غیر مناسب جوڑ پایا جاتا ہے۔چونکہ e^{-t} کی نسبت سے e^{-3t} زیادہ تیزی سے گھٹتی ہے لہٰذا غیر مناسب جوڑ پر مشترکہ تحدیدی سمت، $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 1]^T$ کی سمت ہے۔ دو غیر معمولی خط حرکت کی سمت $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -1]^T$ اور $-\boldsymbol{x}^{(2)} = [-1 \quad 1]^T$ کی سمتیں ہیں۔

مثال 4.7: مناسب جوڑ
ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر ہر خط حرکت کی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔مناسب جوڑ پر ایسا خط حرکت ضرور ہو گا جس کی تحدیدی سمت $\boldsymbol{d}$ ہو جہاں $\boldsymbol{d}$ کوئی بھی سمت ہو سکتی ہے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned} \tag{4.50}$$

کا مناسب جوڑ مرکز پر پایا جاتا ہے۔اس میں فرضی حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ اور اس کا تفرق $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t}$ پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ یعنی $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی آئگنی قدر، $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ کی صورت میں، امتیازی مساوات $(1-\lambda)^2 = 0$ سے $\lambda = 1$ حاصل ہوتی ہے۔مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ کے اجزاء $(1-\lambda)x_1 = 0$ اور $(1-\lambda)x_2 = 0$ میں حاصل آئگنی قدر پر کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ کے علاوہ آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی کوئی بھی قیمت چنی جا سکتی ہے۔ یوں $[1 \quad 0]^T$ اور $[0 \quad 1]^T$ چنتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^t \end{aligned} \quad \implies \quad c_1 y_2 = c_2 y_1$$

شکل 4.5-ب میں سطح حرکت پر پیکر مرحلہ اور مناسب جوڑ دکھائے گئے ہیں۔

مثال 4.8: نقطہ زین

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر دو عدد آمدی اور دو عدد رخصتی خط حرکت پائے جاتے ہوں **نقطہ زین**[55] کہلاتا ہے۔نقطہ فاصل کے قریب بقایا تمام خط حرکت اس نقطے کو نہیں چھوتے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= -y_2 \end{aligned} \tag{4.51}$$

کا نقطہ زین مرکز پر پایا جاتا ہے۔اس نظام کے امتیازی مساوات $(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = 1$ اور $\lambda_2 = -1$ ہیں۔جذر λ_1 کے لئے $(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے دوسرے صف $0x_1(1-1)x_2 = 0$ میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 0$ ملتا ہے جس سے آئگنی سمتیہ $[1 \quad 0]^T$ حاصل ہوتا ہے۔جذر λ_2 کے لئے پہلے صف سے آئگنی سمتیہ $[0 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^{-t} \end{aligned} \quad \implies \quad y_1 y_2 = c \tag{4.52}$$

عمومی حل ہذلولی[56] ہے جس کو شکل 4.6-الف میں دکھایا گیا ہے۔

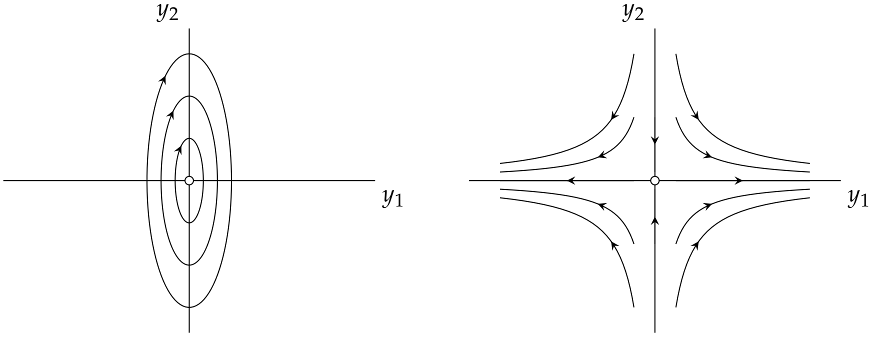
مثال 4.9: وسط

ایسا نقطہ فاصل جسے لامتناہی بند خط حرکت گھیرتے ہوں **وسط** کہلاتا ہے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \quad &(\text{الف}) \\ y_2' &= -9y_1 \quad &(\text{ب}) \end{aligned} \tag{4.53}$$

[55] نقطہ زین کے خط کی شکل عموماً گھوڑے کی زین سے مشابہت رکھتی ہے۔اسی سے اس نقطے کو نقطہ زین کہتے ہیں۔
[56] hyperbolic



(ب) نظام 4.53 کے خط حرکت۔(وسط)

(الف) نظام 4.51 کے خط حرکت۔(نقطہ زین)

شکل 4.6: نقطہ زین اور وسط۔

میں $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ حل تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{y}$ اور $\boldsymbol{y}'$ کو درج بالا میں پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ملتا ہے۔اس سے $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ کی صورت میں امتیازی مساوات $\lambda^2+9=0$ حاصل ہو گا جس کے آئگنی قدر $\lambda_1=3i$ اور $\lambda_2=-3i$ ہیں۔ مساوات $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ کے پہلے صف میں λ_1 پر کرتے ہوئے $x_2=3ix_1$ ملتا ہے۔یوں $x_1=1$ چنتے ہوئے $x_2=3i$ حاصل ہو گا جس سے آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)}=[1 \quad 3i]^T$ ملتا ہے۔اسی طرح λ_2 کی مطابقتی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)}=[1 \quad -3i]^T$ حاصل ہو گا۔یوں مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\3i\end{bmatrix}e^{3it}+c_2\begin{bmatrix}1\\-3i\end{bmatrix}e^{-3it} \implies \begin{aligned}y_1&=c_1e^{3it}+c_2e^{-3it}\\y_2&=3ic_1e^{3it}-3ic_2e^{-3it}\end{aligned} \tag{4.54}$$

حقیقی حل یولر مساوات[57] سے

$$\begin{aligned}y_1&=A\cos 3t+B\sin 3t\\y_2&=3B\cos 3t-3A\sin 3t\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $A=c_1+c_2$ اور $B=i(c_1-c_2)$ ہیں۔

حقیقی حل کو مساوات 4.53 سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں اگر مساوات 4.53-الف کے بائیں ہاتھ اور مساوات-ب کے دائیں ہاتھ کو ضرب دیا جائے تو $-9y_1y_1'$ حاصل ہو گا جو مساوات-ب کے بائیں ہاتھ اور مساوات-الف

[57] $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

کے دائیں ہاتھ کے حاصل ضرب y_2y_2' کے برابر $-9y_1y_1' = y_2y_2'$ ہو گا۔اس کا تکمل

$$\frac{9}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = c \tag{4.55}$$

ہے جو t سے پاک حقیقی حل ہے۔یہ ترخیم[58] کی نسل کی مساوات ہے جس کو شکل 4.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.10: نقطہ مرغولہ
ایسا نقطہ فاصل جس کے گرد خط حرکت گھومتے ہوئے نقطہ فاصل تک آن پہنچنے کی کوشش کرے یا نقطہ فاصل سے نکل کر اس نقطے کے گرد گھومتے ہوئے دور ہٹتا جائے [59] کہلاتا ہے۔پہلی صورت میں لمحہ $t \to \infty$ پر خط حرکت نقطہ مرغولہ تک آن پہنچے گا۔

نظام

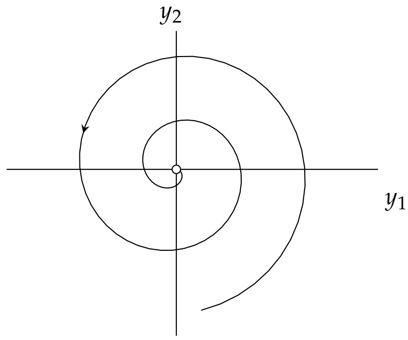
$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \quad \text{(الف)} \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \quad \text{(ب)} \end{aligned} \tag{4.56}$$

کا نقطہ مرغولہ مرکز پر پایا جاتا ہے۔امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ سے آئگنی قدر $\lambda_1 = -1 + i$ اور $\lambda_2 = -1 - i$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات $(-1-\lambda)x_1 + x_2 = 0$ میں آئگنی قدر λ_1 پر کرتے ہوئے $-ix_1 + x_2 = 0$ ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = i$ حاصل ہوتا ہے اور یوں λ_1 کا نظیری آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad i]^T$ ہو گا۔اسی طرح λ_2 کا نظیری آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -i]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$$

---

[58] ellipse
[59] spiral point



شکل 4.7: نظام 4.56 کے خط حرکت۔(نقطہ مرغولہ)

مخلوط عمومی حل سے حقیقی حل حاصل کو یولر مساوات کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔ہم گزشتہ مثال کی طرح نسبتاً آسان طریقہ استعمال کرتے ہوئے حقیقی حل حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 4.56-الف کو y_1 اور مساوات 4.56-ب کو y_2 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_1y_1' + y_2y_2' = -(y_1^2 + y_2^2)$$

اب ہم نلکی محدد r اور t زیر استعمال لاتے ہیں جہاں $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ ہے۔ r کا t کے ساتھ تفرق $2rr' = 2y_1y_1' + 2y_2y_2'$ ہو گا لہٰذا درج بالا مساوات سے

$$rr' = -r^2, \implies \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\,\mathrm{d}t, \implies r = ce^{-t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ c کی کسی بھی قیمت کے لئے یہ مرغولی خط کی مساوات ہے جس کو شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.11: انحطاطی جوڑ

بعض اوقات نظام کی آئگنی حل کی اساس نہیں پائی جاتی۔ایسے صورت میں **انحطاطی جوڑ**[60] پایا جاتا ہے۔انحطاطی جوڑ، مثال 4.6 تا مثال 4.8 کی طرح تشاکلی A (جس میں $a_{kj} = a_{jk}$ ہوتا ہے) کی صورت میں نہیں پایا جائے

[60] degenerate node

گا اور نا ہی یہ منحرف تشاکلی (جس میں $a_{kj} = -a_{jk}$ اور $a_{jj} = 0$ ہوتا ہے)صورت میں پایا جائے گا۔ان کے علاوہ، مثال 4.9 اور مثال 4.10 کی طرح، کئی دیگر صورتوں میں بھی انحطاطی جوڑ نہیں پایا جاتا ہے۔انحطاطی جوڑ کی صورت میں جو ترکیب استعمال کی جاتی ہے اس کو درج ذیل نظام کی عمومی حل کے حصول کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.57}$$

حل: $\boldsymbol{A}$ منحرف تشاکلی نہیں ہے۔ہم اس کا حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{y}$ اور $\boldsymbol{y}'$ کو درج بالا میں پر کر کے e^{λ} سے تقسیم کرتے ہوئے $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ ملتا ہے۔ اس کی امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

سے دوہرا آئگنی قدر $\lambda = 3$ حاصل ہوتا ہے۔مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے پہلے صف میں $\lambda = 3$ پر کرتے ہوئے

$$(4-\lambda)x_1 + x_2 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 + x_2 = 0$$

ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چننے سے $x_2 = -1$ اور یوں آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا حل

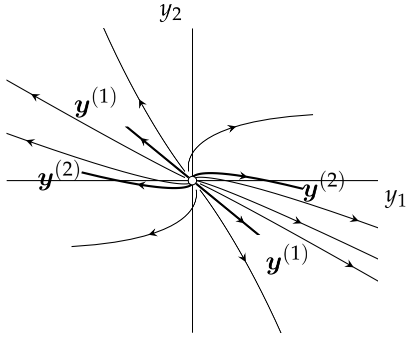
$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{x}te^{\lambda t} + \boldsymbol{u}e^{\lambda t}$$

فرض کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)}$ ، $\lambda = -3$ جبکہ $\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2]^T$ مستقل ہے۔(اگر یہاں حصہ 2.2 کی طرح دوسرا حل صرف $\boldsymbol{x}te^{\lambda t}$ پر کیا جائے تو بات نہیں بنتی۔آپ ایسا کر کے تسلی کر لیں۔) فرض کردہ حل اور اس کے تفرق کو مساوات 4.57 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(2)\prime} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t} + \lambda \boldsymbol{x}te^{\lambda t} + \lambda \boldsymbol{u}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}te^{\lambda t} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}e^{\lambda t}$$

دائیں ہاتھ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ ہے لہٰذا دونوں اطراف $\lambda \boldsymbol{x}te^{\lambda t}$ کٹ جائے گا۔بقایا مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \qquad \Longrightarrow \qquad (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$$



شکل 4.8: نظام 4.57 کے خط حرکت۔(انحطاطی جوڑ)

ملتا ہے۔اس میں $x = x^{(1)}$ اور $\lambda = -3$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{matrix} u_1 + u_2 = 1 \\ -u_1 - u_2 = -1 \end{matrix}$$

انہیں حل کرتے ہوئے یکتا $\boldsymbol{u}$ حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔یوں $u_1 = 0$ چننے سے $u_2 = 1$ لہٰذا $\boldsymbol{u} = [0 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح دوسرا حل جو $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ سے خطی طور غیر تابع ہو حاصل ہوتا ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t} \tag{4.58}$$

ان حل کو شکل 4.8 میں دکھایا گیا ہے جہاں $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ کو موٹی لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔یہاں مرکز پر واقع نقطہ فاصل کو عموماً **انحطاطی جوڑ**[61] کہا جاتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ، تین یا تین سے زائد تفرقی مساوات کے نظام جس کے سہ گنّا آئگنی قدر اور ایک عدد خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیہ پایا جاتا ہو کا دوسرا خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیہ مثال 4.11 کی طرح حاصل کیا جائے گا جبکہ

[61] degenerate node

اس کا تیسرا خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیہ درج ذیل فرض کرتے ہوئے حاصل ہو گا

$$\boldsymbol{y}^{(3)}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}t^2e^{\lambda t}+\boldsymbol{u}te^{\lambda t}+\boldsymbol{v}e^{\lambda t} \tag{4.59}$$

جہاں $\boldsymbol{v}$ کو

$$\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \tag{4.60}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔یہاں $\boldsymbol{u}$ دوسرے خطی طور آئگنی سمتیہ سے لیا جائے گا۔

سوالات

سوال 4.16 تا سوال 4.25 کے حل دریافت کریں۔

سوال 4.16:

$$\begin{aligned}y_1'&=-y_1+y_2\\y_2'&=3y_1+y_2\end{aligned}$$

جوابات: $y_1=c_1e^{-2t}+c_2e^{2t}$ ، $y_2=-c_1e^{-2t}+3c_2e^{2t}$

سوال 4.17:

$$\begin{aligned}y_1'&=6y_1+y_2\\y_2'&=-6y_1+y_2\end{aligned}$$

جوابات: $y_1=c_1e^{3t}+c_2e^{4t}$ ، $y_2=-3c_1e^{3t}-2c_2e^{4t}$

سوال 4.18:

$$\begin{aligned}y_1'&=y_1+y_2\\y_2'&=2y_1+2y_2\end{aligned}$$

جوابات: $y_1=c_1+c_2e^{3t}$ ، $y_2=-c_1+2c_2e^{3t}$

سوال 4.19:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\
y_2' &= -2y_1 + 3y_2
\end{aligned}
$$

جواب: $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} e^t$ جہاں $u_1 = 1$ چنا گیا ہے۔

سوال 4.20:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 3y_1 + 3y_2 \\
y_2' &= -\frac{4}{3}y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$ ، $y_2 = -\frac{1}{3}c_1e^{2t} - \frac{4}{3}c_2e^{-t}$

سوال 4.21:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -12y_1 - 5y_2 \\
y_2' &= \frac{56}{3}y_1 + 3y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{-5t} + c_2e^{-4t}$ ، $y_2 = -\frac{7}{5}c_1e^{-5t} - \frac{8}{5}c_2e^{-4t}$

سوال 4.22:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\
y_2' &= -9y_1 + 5y_2
\end{aligned}
$$

جوابات:

$$
\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1-i) \end{bmatrix} e^{(2-i3)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1+i) \end{bmatrix} e^{(2+i3)t}
$$

جس سے یولر مساوات کی مدد سے درج ذیل حقیقی حل لکھا جا سکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = -i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

$$
\begin{aligned}
y_1 &= e^{2t}(A\cos 3t + B\sin 3t) \\
y_2 &= \tfrac{3}{2}e^{2t}[(B+A)\cos 3t + (B-A)\sin 3t]
\end{aligned}
$$

سوال 4.23:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 3y_3 \\ y_3' &= -y_2 \end{aligned}$$

جوابات:

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-i\sqrt{5}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{i\sqrt{5}t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

سوال 4.24:

$$\begin{aligned} y_1' &= 11y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -4y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{9t} + c_2 e^{7t}$ ، $y_2 = -c_1 e^{9t} - 2c_2 e^{7t}$

سوال 4.25:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 10y_2 - 14y_3 \\ y_2' &= -10y_1 + 10y_2 - 4y_3 \\ y_3 &= -14y_1 - 4y_2 - 2y_3 \end{aligned}$$

جوابات:

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{18t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{9t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-18t}$$

سوال 4.26 تا سوال 4.31 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 4.26:

$$\begin{aligned} y_1' &= -6y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -12y_1 + 5y_2 \\ y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1=\frac{14}{5}e^{-3t}-\frac{4}{5}e^{2t}$ ، $y_2=\frac{21}{5}e^{-3t}-\frac{16}{5}e^{2t}$

سوال 4.27:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -\frac{11}{3}y_1+y_2\\
y_2' &= -\frac{32}{3}y_1+3y_2\\
y_1(0) &= -10, \quad y_2(0)=2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1=\frac{43}{2}e^{\frac{t}{3}}-\frac{63}{2}e^{-t}$ ، $y_2=86e^{\frac{t}{3}}-84e^{-t}$

سوال 4.28:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1-3y_2\\
y_2' &= \frac{5}{3}y_1+5y_2\\
y_1(0) &= 2, \quad y_2(0)=-1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1=\frac{1}{4}e^{4t}+\frac{7}{4}$ ، $y_2=-\frac{5}{12}e^{4t}-\frac{7}{12}$

سوال 4.29:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2\\
y_2' &= y_1\\
y_1(0) &= -1, \quad y_2(0)=2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{3}{2}e^{-t}$ ، $y_2=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}e^{-t}$

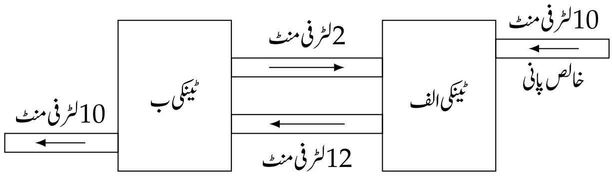
سوال 4.30:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_2\\
y_2' &= y_1\\
y_1(0) &= 0, \quad y_2(0)=-1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1=\sin t$ ، $y_2=-\cos t$

سوال 4.31:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1+y_2\\
y_2' &= y_1-y_2\\
y_1(0) &= -2, \quad y_2(0)=1
\end{aligned}
$$



شکل 4.9: سوال 4.34 میں ٹینکیوں کا نظام۔

جوابات: $y_1=-\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}$ ، $y_2=\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}$

سوال 4.32 تا سوال 4.33 میں تفرقی مساوات تبدیل کرنے کو کہا گیا ہے۔ان میں y_1 کی عمومی مساوات دریافت کریں۔

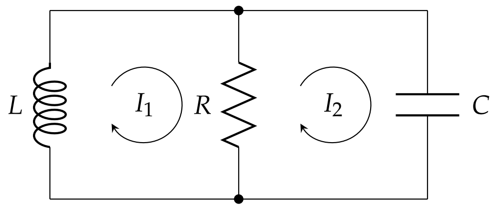
سوال 4.32: آپ نے گزارش ہے کہ سوال 4.16 کے نظام سے دو درجی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔حاصل دو درجی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: پہلی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے $y_1''=-y_1'+y_2'$ ملتا ہے جس میں y_2' کی جگہ دوسری مساوات پر کرتے ہوئے $y_1''=-y_1'+(3y_1+y_2)$ حاصل ہوتا ہے۔اب پہلی مساوات سے y_2 اس میں پر کریں۔یوں $y_1''=-y_1'+3y_1+(y_1'+y_1)$ یعنی $y_1''=4y_1$ ملتا ہے۔اس کا عمومی حل $y_1=c_1e^{-2t}+c_2e^{2t}$ ہے۔

سوال 4.33: یہاں سوال 4.31 کے نظام سے دو درجی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔حاصل دو درجی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1''+2y_1'=0$ ، $y_1=c_1+c_2e^{-2t}$

سوال 4.34: ٹینکیوں میں محلول کی تیاری
دو عدد ٹینکیاں شکل 4.9 میں دکھائی گئی ہیں۔ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں پچاس (50) کلو گرام نمک حل کی گئی ہے۔ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر خالص پانی پایا جاتا ہے۔پانی کے نظام کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ٹینکی الف میں نمک کی مقدار y_1 اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار y_2 کے لئے تفرقی مساوات کا نظام لکھیں۔اس نظام کو حل کریں۔



شکل 4.10: سوال 4.35 کا دور۔

جوابات: $y_1' = -\frac{12}{200}y_1 + \frac{2}{200}y_2$ ، $y_2' = \frac{12}{200}y_1 - \frac{12}{200}y_2$ ، $y_1 = 50e^{-\frac{3}{50}t}\cosh\frac{\sqrt{6}t}{100}$ ، $y_2 = 50\sqrt{6}e^{-\frac{3}{50}t}\sinh\frac{\sqrt{6}t}{100}$

سوال 4.35: مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو شکل 4.10 میں متوازی جڑا دکھایا گیا ہے۔اس کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کریں۔ $L = 2\,\mathrm{H}$ ، $R = 1\,\Omega$ اور $C = 0.5\,\mathrm{F}$ کی صورت میں I_1 اور I_2 کا عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
LI_1' + (I_1 - I_2)R &= 0\\
\frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t + (I_2 - I_1)R &= 0
\end{aligned}
$$

پہلی مساوات سے نظام کی ایک مساوات $I_1' = -\frac{R}{L}I_1 + \frac{R}{L}I_2$ ملتی ہے۔دوسری مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ترتیب دے کر آخر میں پہلی مساوات سے I_1' پر کرتے ہیں

$$
\frac{I_2}{C} + (I_2' - I_1')R = 0 \implies I_2' = I_1' - \frac{I_2}{RC} \implies I_2' = \frac{R}{L}(-I_1 + I_2) - \frac{I_2}{RC}
$$

جس سے تفرقی مساوات کے نظام کی دوسری مساوات $I_2' = -\frac{R}{L}I_1 + (\frac{R}{L} - \frac{1}{RC})I_2$ حاصل ہوتی ہے۔دی گئی قیمتیں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام

$$
\begin{aligned}
I_1' &= -0.5I_1 + 0.5I_2\\
I_2' &= -0.5I_1 - 1.5I_2
\end{aligned}
$$

ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1$ اور نظیری آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ ہے۔یوں مثال 4.11 کی

طرز پر حل کرتے ہوئے $u_1 = 1$ چننے سے $u_2 = 1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل اساس حاصل کرتے ہیں

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$
$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

جس سے عمومی حل $\boldsymbol{I} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}$ لکھا جائے گا۔

4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔استحکام

ہم مستقل عددی سر والے متجانس خطی نظام 4.61 پر گفتگو جاری رکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \implies \qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1' + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.61}$$

اب تک حصہ 4.4 میں ہم نے دیکھا کہ نسل حل $\boldsymbol{y} = [y_1(t) \quad y_2(t)]^T$ کے خطوط کو y_1y_2 **سطح حرکت** پر کھینچتے ہوئے عمومی جائزہ لیا جا سکتا ہے۔ اس سطح پر منحنی کو نظام 4.61 کا **خط حرکت** کہتے ہیں۔تمام خط حرکت کو ملا کر **پیکر مرحلہ** حاصل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے کہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے مساوات 4.61 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{y}' = \lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{4.62}$$

ملتا ہے۔یوں λ قالب $\boldsymbol{A}$ کا آگنی قدر اور $\boldsymbol{x}$ نظیری آگنی سمتیہ ہونے کی صورت میں $\boldsymbol{y}(t)$ مساوات 4.61 کا (غیر صفر) حل ہو گا۔

گزشتہ حصے کے مثالوں سے واضح ہے کہ پیکر مرحلہ کی صورت کا دارومدار بڑی حد تک نظام 4.61 کی **نقطہ فاصل** کی قسم پر منحصر ہے جہاں نقطہ فاصل سے مراد ایسا نقطہ ہے جہاں $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y_2}$ **نا قابل معلوم قیمت** $\frac{0}{0}$ ہو۔[مساوات 4.49 دیکھیں۔]

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}=\frac{y_2'\,\mathrm{d}t}{y_1'\,\mathrm{d}t}=\frac{y_2'}{y_1'}=\frac{a_{21}y_1+a_{22}y_2}{a_{11}y_1+a_{12}y_2} \tag{4.63}$$

حصہ 4.4 سے ہم یہ بھی جانتے ہیں نقطہ فاصل کے کئی اقسام پائے جاتے ہیں۔

موجودہ حصے میں ہم دیکھیں گے کہ نقطہ فاصل کی قسم کا تعلق آئگنی قدر سے ہے جو امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \tag{4.64}$$

کے حل λ_1 اور λ_2 ہیں۔امتیازی مساوات دو درجی مساوات $\lambda^2-p\lambda+q=0$ ہے جس کے عددی سر p ، q اور **جداکنندہ**[62] Δ درج ذیل ہیں۔

$$p=a_{11}+a_{22},\quad q=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\quad \Delta=p^2-4q \tag{4.65}$$

دو درجی مساوات کے حل الجبرا کی مدد سے $\lambda=\frac{1}{2}(p+\mp\sqrt{p^2-4q})$ یعنی

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(p+\sqrt{\Delta}),\quad \lambda_2=\frac{1}{2}(p-\sqrt{\Delta}) \tag{4.66}$$

لکھتے ہیں۔ان آئگنی قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے امتیازی مساوات کو اجزائے ضربی کی صورت

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2=0$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ p آئگنی قیمتوں کا مجموعہ ہے جبکہ q ان کا حاصل ضرب ہے۔اسی طرح مساوات 4.66 کی مدد سے $\lambda_1-\lambda_2=\sqrt{\Delta}$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$p=\lambda_1+\lambda_2,\quad q=\lambda_1\lambda_2,\quad \Delta=(\lambda_1-\lambda_2)^2 \tag{4.67}$$

ان نتائج سے نقطہ فاصل کی جانچ کے اصول طے کئے جا سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ان اصولوں کو اسی حصے میں اخذ کیا جائے گا۔

---
[62] discriminant

جدول 4.1: آئگنی قدر سے نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

نام	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1\lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	λ_1 اور λ_2 پر تبصرہ
(الف) جوڑ		$q > 0$	$\Delta \geq 0$	حقیقی۔ یکساں علامتیں
(ب) نقطہ زین		$q < 0$		حقیقی۔ آپس میں الٹ علامتیں
(پ) وسط	$p = 0$	$q > 0$		خالص خیالی عدد (حقیقی جزو صفر ہے)
(ت) نقطہ مرغولہ	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	مخلوط عدد (حقیقی اور خیالی اجزاء غیر صفر ہیں)

استحکام

نقطہ فاصل کی درجہ بندی ان کی **استحکام**[63] کی بنیاد پر بھی کی جا سکتی ہے۔ انجینئری کے علاوہ دیگر شعبوں میں بھی استحکام نہایت اہم تصور ہے۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی یا خلل سے بعد کے تمام لمحات پر معمولی خلل ہی پایا جاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل تصورات اہم ہیں۔

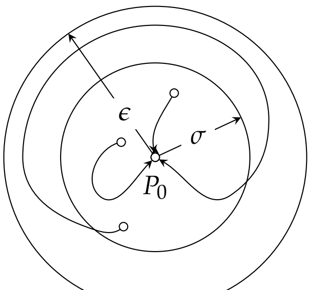
تعریف : مستحکم، غیر مستحکم، مستحکم اور جاذب
اگر نظام 4.61 کے نقطہ فاصل P_0 کے قریب تمام خط حرکت مستقبل میں بھی P_0 کے قریب رہیں تب P_0 **مستحکم**[64] کہلائے گا۔ یوں اگر کسی بھی رداس ϵ کی ٹکیا D_ϵ کے لئے رداس σ کی ایسی ٹکیا D_σ موجود ہو، جہاں دونوں ٹکیوں کا مرکز P_0 ہے، کہ ٹکیا D_σ میں (لمحہ $t = t_1$ کا نظیری) نقطہ P_1 پر پائے جانے والا، نظام 4.61 کا ہر خط حرکت، مستقبل میں ٹکیا D_ϵ میں رہتا ہو، تب P_0 کا نقطہ فاصل **مستحکم**[65] [66] کہلائے گا۔[شکل 4.11-الف دیکھیں]

اگر P_0 مستحکم نہ ہو تب یہ **غیر مستحکم**[67] کہلاتا ہے۔

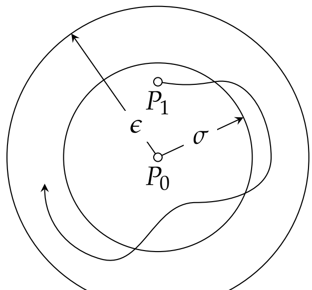
ایسا مستحکم P_0 جہاں وہ تمام خط حرکت جن کا کوئی بھی نقطہ، D_σ پر پایا جاتا ہو، آخر کار $(t \to \infty)$ P_0 کے قریب تر پہنچے **مستحکم اور جاذب**[68] کہلاتا ہے۔[شکل 4.11-ب دیکھیں۔]

استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی جدول 4.2 میں دی گئی ہے۔

[63] stability
[64] stable
[65] stable
[66] روسی ریاضی دان سکندر میکائل لیاپونو [1857-1918] کا مستحکم تفرقی مساوات پر کام بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ استحکام کی یہ تعریف انہوں نے ہی پیش کی۔
[67] unstable
[68] stable and attractive



(ب) مستحکم اور جاذب نقطہ فاصل P_0۔



(الف) مستحکم نقطہ فاصل P_0 کی صورت میں خط حرکت D_ϵ میں رہتی ہے۔

شکل 4.11: نظام 4.61 کے نقطہ فاصل۔

جدول 4.2: استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

استحکام کی قسم	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$
(الف) مستحکم اور جاذب	$p < 0$	$q > 0$
(ب) مستحکم	$p \le 0$	$q > 0$
(پ) غیر مستحکم	$p > 0$ یا	$q < 0$

آئیں جدول 4.1 اور جدول 4.2 کو حاصل کریں۔اگر $q = \lambda_1\lambda_2 > 0$ ہو تب دونوں آئگنی قدر مثبت ہوں گے یا دونوں آئگنی قدر منفی ہوں گے اور یا آئگنی قدر جوڑی دار مخلوط ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ہو تب دونوں آئگنی قیمتیں منفی ہوں گے یا (مخلوط جوڑی دار صورت میں) ان کا حقیقی جزو منفی ہو گا لہٰذا P_0 مستحکم اور جاذب ہو گا۔ جدول 4.2 کے بقایا دو نتائج کو آپ خود اسی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

$\Delta < 0$ کی صورت میں آئگنی قدر جوڑی دار مخلوط $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ اور $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha < 0$ ہو تب مستحکم، جاذب نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔اس کے برعکس $p = 2\alpha > 0$ کی صورت میں غیر مستحکم نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔

$p = 0$ کی صورت میں $\lambda_2 = -\lambda_1$ ہو گا اور یوں $q = \lambda_1\lambda_2 = -\lambda_1^2$ ہو گا۔اب اگر $q > 0$ ہو تب $\lambda_1^2 = -q < 0$ ہو گا لہٰذا λ_1 اور λ_2 خالص خیالی ہوں گے جن سے **دوری حل**[69] حاصل ہو گا۔دوری حل کا خط حرکت ایسا بند دائرہ ہے جس کا مرکز P_0 ہے۔

[69] periodic solutions

مثال 4.12: جدول 4.1 اور جدول 4.2 کا عملی استعمال
گزشتہ حصے کے مثال 4.6 میں نظام 4.48 یعنی $\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$ کی بات کی گئی جہاں $p = -4$، $q = 3$ اور $\Delta = 4$ ہیں۔یوں جدول 4.1-الف کے تحت نقطہ فاصل ایک جوڑ ہو گا۔جدول 4.2-الف کے تحت یہ جوڑ مستحکم اور جاذب ہے۔

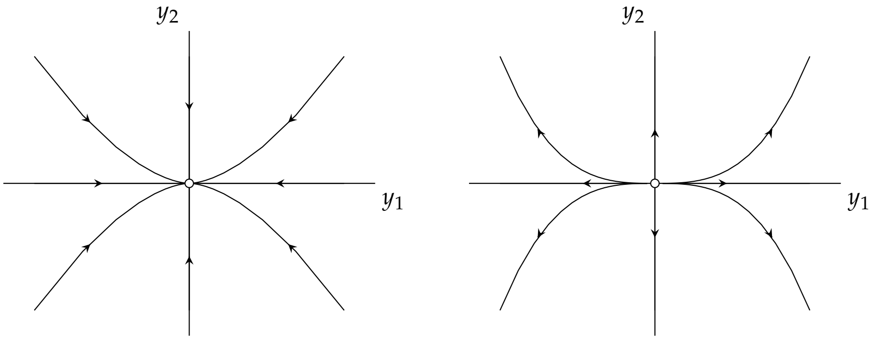
مثال 4.13: اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ حرکت
اسپرنگ اور کمیت [حصہ 2.4 دیکھیں] کے نظام $my'' + cy' + ky = 0$ کا نقطہ فاصل دریافت کریں۔

حل: تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے کی خاطر m سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$ لکھتے ہیں۔دو درجی مساوات سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر [حصہ 4.1 دیکھیں] ہم $y_1 = y$ اور $y_2 = y'$ لیتے ہیں۔یوں $y_2' = y'' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$ ہو گا۔اس طرح

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے $p = -\frac{c}{m}$، $q = \frac{k}{m}$ اور $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$ ملتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے جدول 4.1 اور جدول 4.2 سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جہاں Δ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

- [بلا تقصیر] $c = 0$، $p = 0$ اور $q > 0$ وسط دیتا ہے۔
- [کم مقصور] $c^2 < 4mk$، $p < 0$، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ مستحکم جاذب نقطہ مرغولہ دیتا ہے۔
- [فاصل تقصیر] $c^2 = 4mk$، $p < 0$، $q > 0$ اور $\Delta = 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔
- [زیادہ مقصور] $c^2 > 4mk$، $p < 0$، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔



(الف) سوال 4.36 غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔

(ب) سوال 4.37 مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔

شکل 4.12: سوال 4.36 اور سوال 4.37 کے اشکال۔

سوالات

سوال 4.36 تا سوال 4.45 کے نقطہ فاصل کی قسم جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔ان کے حقیقی عمومی حل حاصل کریں اور ان کے خط حرکت کمپیوٹر کی مدد سے کھینچیں۔[پہلے چار جوابات کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔]

سوال 4.36:

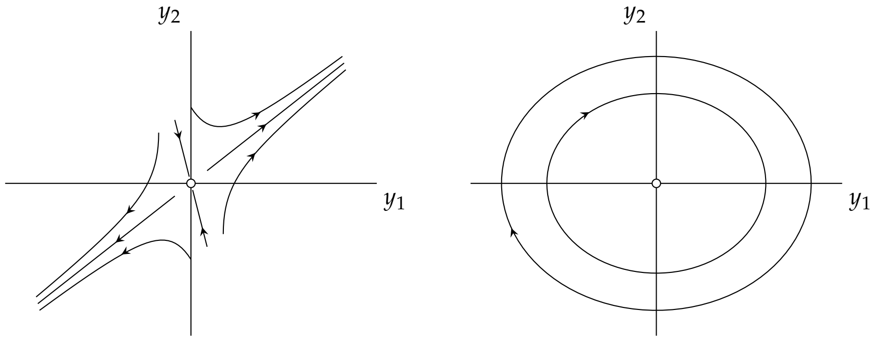
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 3y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔ $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ **یعنی** $y_1 = c_1 e^{t}$ ، $y_2 = c_2 e^{3t}$ ؛ **شکل 4.12-الف۔**

سوال 4.37:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 \\ y_2' &= -5y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔ $y_1 = c_1 e^{-3t}$ ،$y_2 = c_2 e^{-5t}$ ؛ **شکل 4.12-ب۔**



(الف) سوال 4.38 مستحکم وسط۔ (ب) سوال 4.39 غیر مستحکم، نقطہ زین۔

شکل 4.13: سوال 4.38 اور سوال 4.39 کے اشکال۔

سوال 4.38:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -16y_1 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم وسط۔ $y_1 = A\cos 4t + B\sin 4t$ ، $y_2 = 4B\cos 4t - 4A\sin 4t$ ؛ شکل 4.13-الف۔

سوال 4.39:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2y_1 + y_2 \\ y_2 &= 5y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$ ، $y_2 = -5c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$ ؛ شکل 4.13-ب۔

سوال 4.40:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2y_1 - 2y_2 \\ y_2 &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-2t}(-B\cos 2t + A\sin 2t)$

سوال 4.41:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -10y_1 + 2y_2 \\
y_2 &= -15y_1 + y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم اور جاذب جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-4t}$ ، $y_2 = \frac{5}{2} c_1 e^{-5t} + 3c_2 e^{-4t}$

سوال 4.42:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -y_1 + y_2 \\
y_2 &= 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ ، $y_2 = 3c_2 e^{2t}$

سوال 4.43:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -y_1 + 2y_2 \\
y_2 &= 6y_1 + 3y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{5t}$ ، $y_2 = -c_1 e^{-3t} + 3c_2 e^{5t}$

سوال 4.44:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 13y_1 - 3y_2 \\
y_2 &= 18y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{7t} + c_2 e^{4t}$ ، $y_2 = 2c_1 e^{7t} + 3c_2 e^{4t}$

سوال 4.45:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_2 \\
y_2 &= -5y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ ،
$y_2 = e^{-t}[-(A+2B)\cos 2t - (2A+B)\sin 2t]$

سوال 4.46 تا سوال 4.46 خط حرکت، دو درجی سادہ تفرقی مساوات اور نقطہ فاصل کے بارے میں ہیں۔

سوال 4.46: قصری ارتعاش
$y'' + 4y' + 5y = 0$ کو حل کریں۔امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$ ؛ مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ۔

سوال 4.47: ہارمونی ارتعاش
$y'' + 4y = 0 = 0$ کو حل کریں۔امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t$ ؛ مستحکم وسط۔

سوال 4.48: مقدار معلوم کا تبادلہ
مثال 4.12 میں متغیرہ $\tau = -t$ متعارف کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پڑے گا؟

جواب: اب $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو گا لہٰذا غیر مستحکم جوڑ پایا جائے گا۔

سوال 4.49: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں $\boldsymbol{A}$ کو تبدیل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A} - 0.12\boldsymbol{I}$ کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب ہے۔

جواب: اب $p = -0.2 =\neq 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ہیں لہٰذا غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے گا۔

سوال 4.50: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں تمام a_{jk} کی جگہ $a_{jk} + b$ پر کریں۔ (الف) b کی ایسی قیمت دریافت کریں کہ نقطہ زین حاصل ہو۔اسی طرح b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں جن پر (ب) مستحکم اور جاذب جوڑ، (پ) مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ اور (ت) غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے۔

جواب: مثلاً (الف) $b = -2$ ، (ب) $b = -1$ ، (پ) $b = -0.2$ ، (ت) $b = 15$

4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

کیفی تراکیب[70] سے مسئلے کو حل کئے بغیر حل کے بارے میں کیفی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ایسے مسائل جن کا **تحلیلی حل** مشکل یا نا قابل حصول ہو، کے لئے یہ ترکیب خاص طور پر کار آمد ہے۔عملاً اہم کئی غیر خطی نظام

$$
\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{4.68}
$$

کے لئے یہ درست ہے۔

گزشتہ حصے میں **سطح مرحلہ کی ترکیب** خطی نظام کے لئے استعمال کیا گیا۔اس حصے میں اس ترکیب کو وسعت دے کر غیر خطی نظام کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 4.68 **خود مختار**[71] ہے یعنی اس میں غیر تابع متغیرہ t صریحاً نہیں پایا جاتا۔(اس حصے میں تمام مثال خود مختار ہیں۔) ہم یہاں بھی حل کی نسل پیش کریں گے۔اعدادی ترکیب سے ایک وقت میں صرف ایک (تقریباً درست) حل حاصل ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے سطح مرحلہ کی ترکیب زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

گزشتہ حصے کے چند تصورات اس حصے میں بھی درکار ہیں۔ان میں **سطح حرکت** (y_1y_2 سطح)، **خط حرکت** (مساوات 4.68 کا y_1y_2 سطح پر حل)، مساوات 4.68 کا **پیکر مرحلہ** (تمام خط حرکت کا مجموعہ)، اور مساوات 4.68 کا **نقطہ فاصل** (ایسا نقطہ (y_1, y_2) جہاں $f_1(y_1, y_2)$ اور $f_2(y_1, y_2)$ دونوں صفر کے برابر ہوں۔) کے تصورات شامل ہیں۔

مساوات 4.68 کے کئی نقطہ فاصل ہو سکتے ہیں۔ ان پر باری باری بات کی جائے گی۔مرکز سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل پر غور کرنے سے پہلے، تکنیکی آسانی کی خاطر، ایسے نقطہ فاصل کو گھمائے بغیر مرکز پر منتقل کیا جائے گا۔مرکز $(0,0)$ سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل $P_0 : (a, b)$ کو گھمائے بغیر مرکز $(0,0)$ پر درج ذیل عمل سے منتقل کیا جاتا ہے۔

$$
\tilde{y}_1 = y_1 - a, \quad \tilde{y}_2 = y_2 - b
$$

اس عمل کے بعد نقطہ فاصل P_0 مرکز $(0,0)$ پر پایا جائے گا۔یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہاں دیے گئے تمام مثالوں میں نقطہ فاصل کو مرکز پر منتقل کیا گیا ہے اور $\tilde{y}_1$ ، $\tilde{y}_2$ کی جگہ ہم y_1 اور y_2 ہی لکھیں گے۔ہم

[70] qualitative methods
[71] autonomous

یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ نقطہ فاصل تنہا[72] ہے یعنی ایسے کسی بھی معقول حد تک چھوٹی ٹکیا جس کا وسط مرکز پر پایا جاتا ہو میں مساوات 4.68 کا صرف ایک عدد نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ اگر مساوات 4.68 کے محدود تعداد میں نقطہ فاصل پائے جاتے ہوں تب ایسے تمام نقطہ فاصل خود بخود تنہا ہوں گے۔

غیر خطی نظام کو خطی بنانا

عموماً نظام 4.68 کو نقطہ فاصل $P_0 : (0,0)$ کے قریب خطی تصور کرتے ہوئے نظام کی **استحکام** کی نوعیت دریافت کی جا سکتی ہے۔نظام 4.68 کو $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ لکھ کر $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ رد کرنے سے خطی نظام حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو تفصیلاً دیکھتے ہیں۔

ہم اگلے باب میں دیکھیں گے کہ عموماً تفاعل کو تسلسل $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح ایک سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل کے تسلسل بھی لکھے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسے ہی چند تفاعل مثلاً

$$f_a(x) = 2x^2 + 5x, \quad f_b(x,y) = 2x^3 - y^2 + xy, \quad f_c(x,y) = 2x^2 - 3y + 5$$

میں آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کریں۔ ایسا کرنے سے $f_a(0) = 0$ ، $f_b(0,0) = 0$ اور $f_c(0,0) = 5$ ملتا ہے۔آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کرنے سے صرف اس تفاعل کی قیمت غیر صفر حاصل ہو گی جس میں c_0 طرز کا بالکل علیحدہ مستقل پایا جاتا ہو جو متغیرات کے ساتھ ضرب نہ ہو۔

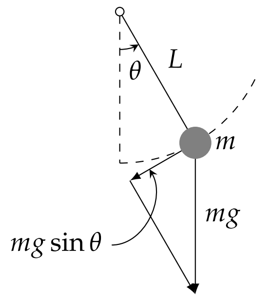
اب چونکہ P_0 نقطہ فاصل ہے لہٰذا $f_1(0,0) = 0$ اور $f_2(0,0) = 0$ ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ ان تفاعل میں c_0 طرز کا علیحدہ مستقل نہیں پایا جاتا لہٰذا ان کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں h_1 اور h_2 غیر خطی تفاعل ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h_1(y_1,y_2) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + h_2(y_1,y_2) \end{aligned} \tag{4.69}$$

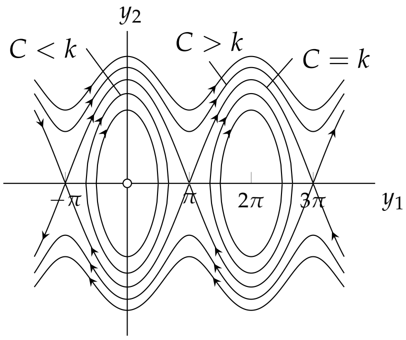
چونکہ نظام 4.68 **خود مختار** [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] تفاعل ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ مستقل مقدار ہو گا۔ اب **خطی بنانے کا مسئلہ**[73] پیش کرتے ہیں (جس کا ثبوت کتاب کے آخر میں صفحہ 375 پر حوالہ [1] کے صفحات 375 تا 388 پر پیش کیا گیا ہے)۔

---

isolated[72]
linearization theorem[73]



(الف) ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔



(ب) پیکر مرحلہ۔

شکل 4.14: مثال 4.14 کے اشکال۔ [C کی تفصیل مثال 4.17 میں دی جائے گی۔]

مسئلہ 4.6: خطی بنانا

اگر نظام 4.68 کے نقطہ فاصل $P_0:(0,0)$ کے ہمسائیگی میں f_1 ، f_2 اور ان کے جزوی تفرق استمراری ہوں، اور مساوات 4.69 میں مقطع $\boldsymbol{A}$ غیر صفر $(|\boldsymbol{A}| \neq 0)$ ہو تب نظام 4.68 کے نقطہ فاصل کی قسم اور استحکام وہی ہو گی جو درج ذیل **خطی کردہ** نظام کی ہو گی

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.70}$$

البتہ $\boldsymbol{A}$ کے خالص خیالی یا برابر آئگنی قدر ہونے کی صورت میں نظام 4.68 کا نقطہ فاصل نظام 4.70 کے نقطہ فاصل کی قسم کا ہو سکتا ہے یا وہ نقطہ مرغولہ ہو سکتا ہے۔

مثال 4.14: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔ خطی بنانا

ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کو شکل 4.14-الف میں دکھایا گیا ہے۔ ڈنڈے کی کمیت اور ہوا کی رکاوٹی قوت کو نظر انداز کرتے ہوئے نقطہ فاصل کا مقام اور اس کی نوعیت دریافت کریں۔ حل: پہلا قدم نمونہ کشی ہے۔ متوازن مقام سے گھڑی کے الٹ رخ زاویائی فاصلہ θ ناپتے ہیں۔ قوت ثقل mg کمیت پر نیچے رخ عمل کرتا ہے جس کی وجہ

سے حرکت کی مماسی، بحالی قوت $mg\sin\theta$ پیدا ہوتی ہے جہاں $g = 0.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع ہے۔نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت بحالی قوت اور اسراعی قوت $mL\theta''$ جہاں $L\theta''$ اسراع ہے، ہر لمحہ برابر ہوں گے۔یوں ان دونوں قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔

$$mL\theta'' + mg\sin\theta = 0$$

دونوں اطراف کو mL سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\theta'' + k\sin\theta = 0, \qquad \left(k = \frac{g}{L}\right) \tag{4.71}$$

حاصل ہوتا ہے۔نہایت کم θ کی صورت میں $\sin\theta \approx \theta$ ہوتا ہے لہٰذا ایسی صورت میں درج بالا مساوات کو $\theta'' + k\theta = 0$ لکھ کر حل $\theta = A\cos\sqrt{k}t + B\sin\sqrt{k}t$ حاصل ہوتا ہے۔یہ کم θ کی صورت میں تقریباً درست جواب ہے البتہ بالکل درست جواب بنیادی تفاعل[74] کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $(\mp 2\pi, 0)$ ، $(\mp 4\pi, 0)$ ، $\cdots$ کا حصول اور **مسئلے کو خطی بنانا** ہے۔تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر ہم $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہیں۔یوں مساوات 4.71 سے درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے جو نظام 4.68 کے طرز کا ہے۔

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = -k\sin y_1 \end{aligned} \tag{4.72}$$

جہاں دونوں دائیں اطراف بیک وقت صفر کے برابر ہوں $y_2 = 0$ اور $\sin y_1 = 0$ وہاں نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔یوں لامحدود تعداد میں نقطہ فاصل $(n\pi, 0)$ پائے جاتے ہیں جہاں $n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$ ہے۔آئیں نقطہ فاصل $(0,0)$ پر غور کریں جہاں مکلارن تسلسل[75] سے

$$\sin y_1 = y_1 - \frac{y_1^3}{6} + - \cdots \approx y_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ فاصل کے ہمسائیگی میں $h = -\frac{y_1^3}{6} + - \cdots$ کو رد کرتے ہوئے نظام 4.72 کی خطی صورت

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2 &= -ky_1 \end{aligned} \quad \implies \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.73}$$

---

[74] elementary function
[75] Maclaurin series

حاصل ہوتی ہے۔ $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = |\boldsymbol{A}| = k = \frac{g}{L}(> 0)$ اور $\Delta = p^2 - 4q = -4k$ لکھتے ہوئے نقطہ فاصل کی قسم اور اس کا استحکام جانتے ہیں۔یوں جدول 4.1-پ کے تحت $(0, 0)$ **وسط** ہے اور جدول 4.2 کے تحت یہ **مستحکم** ہے۔چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہٰذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \mp 2, \mp 4, \cdots$ ہے، بھی مستحکم وسط ہیں۔

تیسرا قدم نقطہ فاصل $(\mp\pi, 0)$ ، $(\mp 3\pi, 0)$ ، $(\mp 5\pi, 0)$ $\cdots$ کا حصول اور **مسئلے کو خطی بنانا** ہے۔ہم نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کرتے ہیں۔یوں $y_1 = \theta - \pi$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ لیتے اور مکلارن تسلسل

$$\sin(\theta) = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 = -y_1 + \frac{y_1^3}{6} + - \cdots \approx -y_1$$

کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(\pi, 0)$ پر نظام 4.72 کی خطی کردہ صورت

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= k y_1 \end{aligned} \quad \implies \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.74}$$

حاصل ہوتی ہے۔اب $p = 0$ ، $q = -k$ اور $\Delta = -4q = 4k$ ہیں جو **غیر مستحکم نقطہ زین** کو ظاہر کرتی ہے۔چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہٰذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \mp 1, \mp 3, \cdots$ ہے، غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔یہ نتائج شکل 4.14-ب کے عین مطابق ہیں۔

مثال 4.15: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی تقصیری ارتعاش۔ خطی بنانا
نقطہ فاصل پر غور کی ترکیب کو مزید بہتر جاننے کی خاطر مثال 4.14 میں زاویائی رفتار کے راست متناسب قوت روک $c\theta'$ کا اثر شامل کرتے ہیں۔یوں مساوات 4.71 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جس میں $c = 0$ سے مساوات 4.71 ہی ملتا ہے۔

$$\theta'' + c\theta' + k\sin\theta = 0, \qquad (k > 0), \quad (c \geq 0) \tag{4.75}$$

پہلے کی طرح $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہوئے غیر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -k\sin\theta - cy_2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\theta'' = y_2'$ لکھا گیا ہے۔اب بھی نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $(\mp\pi, 0)$ ، $\mp 2\pi, 0$ ، $\cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔آئیں نقطہ $(0,0)$ پر غور کریں۔یہاں بھی $\sin y_1 \approx y_1$ لکھ کر $(0,0)$ پر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1 - cy_2 \end{aligned} \qquad \implies \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.76}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ بالکل مثال 4.13 کی طرح ہے ماسوائے (مثبت) m کی موجودگی کے (اور ماسوائے y_1 کے مطلب میں فرق کے)۔ اس طرح بلا تقصیر $(c = 0)$ صورت میں وسط حاصل ہوتا ہے جسے شکل 4.14 میں دکھایا گیا ہے جبکہ کم تقصیری صورت میں نقطہ مرغولہ حاصل ہوتا ہے ، اور اسی طرح آپ تمام صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں اب نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کریں۔یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ کے علاوہ

$$\sin\theta = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 \approx -y_1$$

لکھ کر $(\pi, 0)$ پر خطی نظام

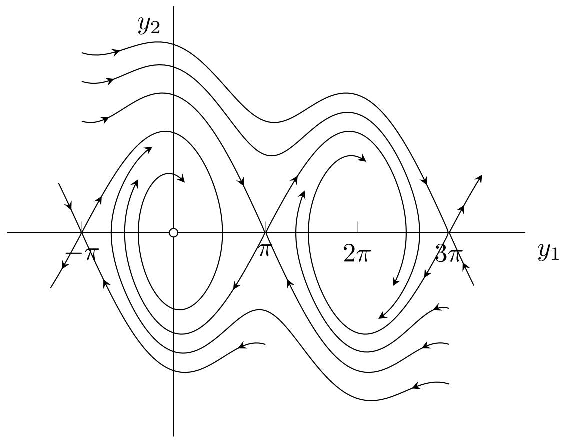
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1 - cy_2 \end{aligned} \qquad \implies \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -c \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.77}$$

حاصل کرتے ہیں۔ گزشتہ حصے میں نقطہ فاصل کے جانچ کے مسلمہ معیار دیے گئے جن کے لئے

$$p = a_{11} + a_{22} = -c, \qquad q = |\boldsymbol{A}| = -k, \qquad \Delta = p^4 - 4q = c^2 + 4k$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $(\pi, 0)$ پر پائے جانے والے نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

- بلا تقصیر $c = 0$ ، $p = 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ نقطہ زین دیگا۔[شکل 4.14-ب دیکھیں۔]
- تقصیری $c > 0$ ، $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ نقطہ زین دیگا۔



شکل 4.15: تقصیری ارتعاش۔ مثال 4.15

چونکہ $\sin y_1$ دوری عرصہ 2π کا دوری تفاعل ہے لہٰذا $(\mp 2\pi, 0)$ ، $(\mp 4\pi, 0)$ ، $\cdots$ پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(0, 0)$ پر پایا جاتا ہے اور اسی طرح $(-\pi, 0)$ ، $(\mp 3\pi, 0)$ ، $\cdots$ پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(\pi, 0)$ پر پایا جاتا ہے۔

شکل 4.15 میں نظام 4.75 کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔ چونکہ قصری نظام میں توانائی کا ضیاع پایا جاتا ہے لہٰذا شکل 4.14 کے بند دائروں کی بجائے شکل 4.15 کے مرغولی خطوط حاصل ہوتے ہیں جو ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید یہ کہ دوری لہری خطوط بھی کسی نہ کسی مقام پر نقطہ فاصل کے گرد گھومنا شروع کر دیتے ہیں۔ اس کے علاوہ اب قصری نظام میں نقطہ زین کو ملانے والے خط نہیں پائے جاتے۔

مثال 4.16: آبادی شکار اور شکاری۔ [مسئلہ لوٹکا-ولٹیرا]
یہاں لومڑی (شکاری) اور خرگوش (شکار) کی آبادی کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: ہم فرض کرتے ہیں کہ خرگوش کو جتنی خوراک چاہیے دستیاب ہے۔ یوں لومڑی کی غیر موجودگی میں ان کی تعداد $y_1' = a y_1$ کے تحت قوت نمائی طور پر بڑھے گی۔ لومڑی کی موجودگی میں (اتفاقی آمنے سامنے سے)

خرگوش کی تعداد میں y_1y_2 کے راست متناسب کمی پیدا ہو گی۔یوں خرگوش کی تعداد $y_1' = ay_1 - by_1y_2$ سے حاصل ہو گی جہاں مستقل $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔اسی طرح خرگوش کی غیر موجودگی میں لومڑی کی تعداد $y_2' = -ly_2$ کے تحت قوت نمائی طور پر گھٹے گی۔خرگوش کی موجودگی میں (اتفاقی آمنے سامنے سے) لومڑی کی تعداد y_1y_2 کے راست متناسب بڑھے گی۔یوں خرگوش کی موجودگی میں $y_2' = -ly_2 + ky_1y_2$ لومڑی کی تعداد دے گا جہاں مستقل $l > 0$ اور $k > 0$ ہیں۔

یوں غیر خطی مسئلہ لوٹکا۔ولٹیرا[76]

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(y_1, y_2) = ay_1 - by_1y_2\\
y_2' &= f_2(y_1, y_2) = ky_1y_2 - ly_2
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(0, 0)$ کا حصول ہے۔مساوات 4.78 کو دیکھ کر نقطہ فاصل مساوات

$$
f_1(y_1, y_2) = y_1(a - by_2) = 0, \quad f_2(y_1, y_2) = y_2(ky_1 - l) = 0 \tag{4.79}
$$

کے حل سے $(y_1, y_2) = (0, 0)$ اور $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ حاصل ہوتے ہیں۔آئیں $(0, 0)$ پر غور کریں۔نقطہ $(0, 0)$ کے ہمسائیگی میں مساوات 4.78 میں $-by_1y_2$ اور ky_1y_2 کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$
\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & -l \end{bmatrix} \boldsymbol{y}
$$

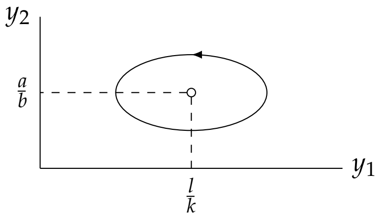
حاصل ہوتا ہے جس کی آئگنی قدر $\lambda_1 = a > 0$ اور $\lambda_2 = -l < 0$ کی علامتیں آپس میں الٹ ہیں لہٰذا $(0, 0)$ پر نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

تیسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ کا حصول ہے۔دوسرا نقطہ فاصل $(y_1, y_2) = (\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر پایا جاتا ہے۔اس نقطے کو $(0, 0)$ منتقل کرنے کی خاطر ہم $y_1 = \tilde{y}_1 + \frac{l}{k}$ اور $y_2 = \tilde{y}_2 + \frac{a}{b}$ چنتے ہیں۔یوں نقطہ فاصل $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0, 0)$ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $y_1 = \tilde{y}_1'$ اور $y_2' = \tilde{y}_2'$ ہیں لہٰذا نظام 4.78 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_1' &= \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right)\left[a - b\left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)\right] = \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right)(-b\tilde{y}_2)\\
\tilde{y}_2' &= \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)\left[k\left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right) - l\right] = \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)k\tilde{y}_1
\end{aligned}
$$

---

[76] امریکی ماہر حیاتی طبیعیات الفرڈ جیمز لوٹکا [1880-1949] اور اطالوی ریاضی دان ویٹو ولٹیرا [1860-1940] نے شکار اور شکاری کے مسئلے کو پیش کیا۔



شکل 4.16: شکار اور شکاری کی آبادی: ماحولیاتی توازن۔

نقطہ $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0, 0)$ کے ہمسائیگی میں $-b\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ اور $k\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$\tilde{y}_1' = -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2 \qquad \text{(الف)}$$
$$\tilde{y}_2' = \frac{ak}{b}\tilde{y}_1 \qquad \text{(ب)} \tag{4.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 4.80-الف کا بایاں ہاتھ ضرب مساوات-ب کا دایاں ہاتھ برابر ہو گا الف کا دایاں ضرب ب کا بایاں،

$$\frac{ak}{b}\tilde{y}_1'\tilde{y}_1 = -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2'\tilde{y}_2 \implies \frac{ak}{b}\tilde{y}_1^2 + \frac{bl}{k}\tilde{y}_2^2 = C$$

جس کا تکمل لیتے ہوئے $\tilde{y}_1$ بالمقابل $\tilde{y}_2$ کا **ترخیمی**[77] تعلق حاصل کیا گیا ہے۔یوں $\left(\frac{l}{k}, \frac{a}{b}\right)$ پر شکل 4.16 میں دکھایا گیا **وسط** پایا جاتا ہے۔

نسبتاً مشکل تجزیے سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ غیر خطی نظام 4.78 کا $\left(\frac{l}{k}, \frac{a}{b}\right)$ پر وسط پایا جاتا ہے البتہ خط حرکت اس نقطے کے گرد غیر ترخیمی بند دائرہ بناتا ہے۔

شکل 4.16 کے دائیں کنارے پر خرگوش کی تعداد y_1 زیادہ سے زیادہ ہے جس کی وجہ سے لومڑی کی تعداد y_2 میں اضافے کی شرح بھی زیادہ سے زیادہ ہے۔اس خط پر گھڑی کی الٹی سمت چلتے ہوئے لومڑی کی زیادہ سے زیادہ آبادی حاصل ہوتی ہے۔اس مقام پر خرگوش کی تعداد اتنی کم ہو چکی ہوتی ہے کہ لومڑی کی بڑھتی تعداد کو خوراک پورا نہیں ہو پایا لہٰذا لومڑی کی آبادی گھٹنے شروع ہو جاتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں جانوروں کی دوری تعداد حالات کے مطابق مسلسل تبدیل ہوتی ہے۔

[77] elliptic

شکار اور شکاری کی دیگر مثالیں ملخ اور گھاس، ببر شیر اور زیبرا ہیں۔

4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ

سطح حرکت کی دوسری ترکیب خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] دو درجی سادہ تفرقی مساوات

$$F(y, y', y'') = 0$$

میں $y = y_1$ کو آزاد متغیرہ اور $y' = y_2$ لے کر y'' کو زنجیری تفرق سے

$$y'' = y_2' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$$

لکھ کر ایک درجی مساوات

$$F\left(y_1, y_2, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2\right) = 0 \tag{4.81}$$

میں تبدیل کرنے پر مبنی ہے۔اس ایک درجی مساوات کو یا تو حل کرنا ممکن ہوتا ہے اور یا **میدان ڈھال** کی مدد سے اس پر غور ممکن ہوتا ہے۔ آئیں مثال 4.14 پر اس ترکیب کی مدد سے غور کریں۔

مثال 4.17: بلا تقصیر ارتعاشی نظام کی ایک درجی تفرقی مساوات۔

مساوات 4.71 میں $\theta'' + k\sin\theta = 0$ ہے جس میں $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ (زاویائی رفتار) لیتے ہوئے

$$\theta'' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$$

$\frac{dy_2}{dy_1} y_2 = -k \sin y_1$ لکھ کر ملتا ہے جس کو علیحدگی متغیرات سے $y_2 \, dy_2 = -k \sin y_1 \, dy_1$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\frac{1}{2} y_2^2 = k \cos y_1 + C \tag{4.82}$$

دیتا ہے جہاں C تکمل کا مستقل ہے۔اس کو mL^2 سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2} m (L y_2)^2 - mL^2 k \cos y_1 = mL^2 C$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تینوں اجزاء توانائی[78] کو ظاہر کرتے ہیں۔چونکہ y_2 زاویائی رفتار ہے لہٰذا Ly_2 لمحاتی رفتار اور $\frac{1}{2} m (Ly_2)^2$ **حرکی توانائی**[79] ہے۔درج بالا مساوات کا دوسرا جزو (بمع منفی علامت) **مخفی توانائی**[80] ہے جبکہ مساوات کا دایاں ہاتھ $mL^2 C$ کل توانائی ہے۔بلا تقصیر نظام میں توانائی کا ضیاع نہیں پایا جاتا لہٰذا حسب توقع کل توانائی مستقل مقدار ہے۔آئیں دیکھیں کہ حرکت کی نوعیت کل توانائی پر کیسے منحصر ہے۔

شکل 4.14-ب مختلف C کے لئے خط حرکت دیتی ہے۔ان خطوط کا دوری عرصہ 2π ہے۔ان میں ترخیمی بند دائرے اور لہر نما خطوط شامل ہیں جن کے مابین نقطہ زین [$(n\pi, 0)$ جہاں $n = \mp 1, \mp 3, \cdots$ ہے] سے گزرتے ہوئے دو عدد خط حرکت پائے جاتے ہیں۔مساوات 4.82 کے تحت C کی کم سے کم قیمت $C = -k$ ہے جس پر $y_2 = 0$ اور $\cos y_1 = 1$ ہوں گے جو ساکن کمیت کو ظاہر کرتی ہے۔جس نقطے پر $y_2 = \theta' = 0$ ہو اس نقطے پر حرت کی سمت تبدیل ہو کر الٹ ہو جائے گی لہٰذا مساوات 4.82 میں $y_2 = 0$ پر کرتے ہوئے $k \cos y_1 + C = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اب اگر $y_1 = \pi$ ہو تب $\cos y_1 = -1$ اور یوں $C = k$ ہو گا۔اس طرح اگر $-k < C < k$ ہو تب $|y_1| = |\theta| < \pi$ کی صورت میں کمیت کی حرکت کی سمت الٹ ہو گی اور C کی ان قیمتوں $(|C| < k)$ کے لئے کمیت ارتعاش پذیر ہو گا۔ترخیمی بند دائرے اس ارتعاشی حرکت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کے برعکس $C > k$ کی صورت میں $y_2 = 0$ ممکن نہیں ہے لہٰذا کمیت کی حرکت کی سمت الٹ نہیں ہو گی لہٰذا کمیت مرکز کے گرد گھومتا رہے گا جس کو لہری خط حرکت ظاہر کرتی ہیں۔ان دو صورتوں کے مابین $C = k$ پایا جاتا ہے جس کے خطوط نقطہ زین سے گزرتے ہیں۔انہیں شکل 4.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔

---

[78] energy
[79] kinetic energy
[80] potential energy

دو درجی مساوات کے تبادلے سے سطح حرکت پر (مثال 4.17 کی طرح) قابل حل ایک درجی مساوات کے علاوہ نا قابل حل مساوات بھی اہمیت کے حامل ہے۔ایسی صورت میں میدان ڈھال [حصہ 1.2 دیکھیں۔] کے ذریعہ نظام کے بارے میں معلومات حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔اس عمل کو ایک مشہور مثال کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 4.18: مخصر بہ خود ارتعاش۔ مساوات ون در پول

ایسی طبعی نظام پائے جاتے ہیں جن میں معمولی ارتعاش کی صورت میں نظام کو توانائی فراہم ہوتی ہے جبکہ وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام سے توانائی کا اخراج ہوتا ہے۔یوں وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام قصری صورت اختیار کرتا ہے جبکہ کم ارتعاش کی صورت میں نظام میں **منفی تقصیر** (نظام کو توانائی کی فراہمی) پائی جاتی ہے۔ ہم طبعی وجوہات کی بنا توقع کرتے ہیں کہ ایسا نظام دوری طرز عمل رکھے گا، جو سطح حرکت پر بند دائرے کی صورت اختیار کرے گا جسے **تحدیدی دائرہ**[81] کہتے ہیں۔ایسی ارتعاش کو **مساوات ون در پول**[82]

$$y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0 \qquad (\mu > 0) \tag{4.83}$$

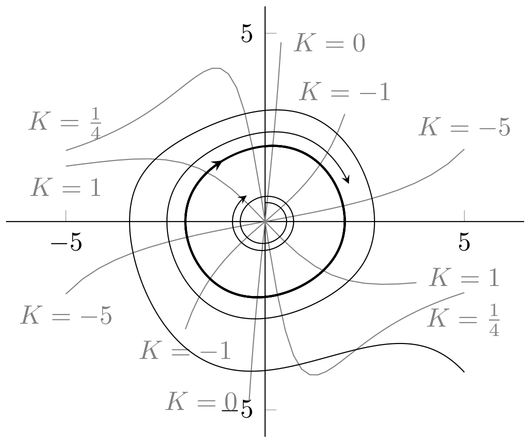
ظاہر کرتی ہے جہاں μ مثبت مستقل ہے۔یہ مساوات پہلی مرتبہ **خلا نلکی**[83] والے برقی ادوار پر غور کے دوران رو پذیر ہوئی۔یہ مساوات $\mu = 0$ کی صورت میں ہارمونی ارتعاش کی تفرقی مساوات $y'' + y = 0$ ہے۔ون در پول مساوات میں قصری جزو $-\mu(1-y^2)$ ہے جہاں $\mu > 0$ ہے۔ یوں $y^2 < 1$ کی صورت میں منفی تقصیری، $y^2 = 1$ کی صورت میں بلا تقصیر جبکہ $y^2 > 1$ کی صورت میں مثبت تقصیری (جس میں توانائی کا ضیاع ہو گا) نظام پایا جائے گا۔ نہایت کم μ کی صورت میں مساوات ون در پول اور $y'' + y = 0$ میں بہت کم فرق پایا جائے گا لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ سطح حرکت پر تحدیدی دائرہ تقریباً گول دائرہ ہو گا۔اگر μ کی قیمت زیادہ ہو تب تحدیدی دائرہ کی شکل غالباً مختلف ہو گی۔

اس مساوات کو ایک درجی مساوات میں تبدیل کرنے کی خاطر $y = y_1$ ، $y' = y_2$ اور $y'' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} y_2$ لکھتے ہوئے ون در پول مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} y_2 - \mu(1-y_1^2)y_2 + y_1 = 0 \tag{4.84}$$

---

[81] limit cycle
[82] van del Pol equation
[83] vacuum tube



شکل 4.17: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu = 0.1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

سطح حرکت (y_1y_2 سطح) پر **ہم میلان**[84] خط $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = K$ ہیں جہاں K **مستقل مقدار** ہے۔یوں ہم میلان خطوط درج ذیل ہوں گے

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \mu(1 - y_1^2) - \frac{y_1}{y_2} = K$$

جن سے

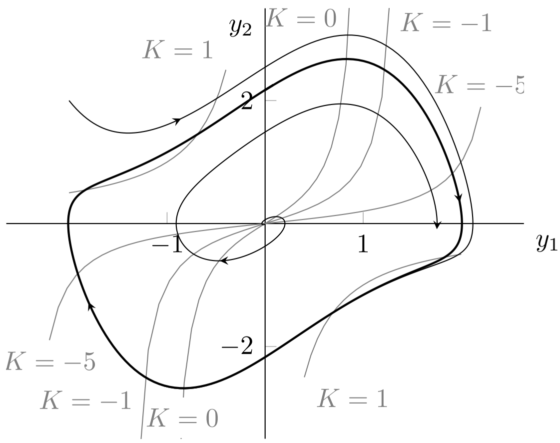
$$y_2 = \frac{y_1}{\mu(1 - y_1^2) - K} \qquad \text{(شکل 4.17 اور شکل 4.18 دیکھیں۔)} \tag{4.85}$$

حاصل ہوتا ہے۔

شکل 4.17 میں μ کی کم قیمت ($\mu = 0.1$) کے لئے چند ہم میلان خطوط کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔اس کے علاوہ تحدیدی دائرے کو موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔تحدیدی دائرہ تقریباً گول ہے۔ ایک خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے باہر ہے، اور دوسرا خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے اندر ہے، کو تحدیدی دائرے تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔تحدیدی دائرہ اور نقطہ فاصل کے گرد بند دائرہ (وسط) میں فرق یہ ہے کہ تحدیدی دائرے تک خط حرکت پہنچتی ہے جبکہ وسط کا خط اسی دائرے پر پایا جاتا ہے۔ μ کی زیادہ قیمت پر تحدیدی دائرہ گول صورت نہیں رکھتا۔ شکل 4.18 میں μ کی زیادہ قیمت ($\mu = 1$) کے لئے تمام صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں تحدیدی دائرہ گول نہیں ہے۔

---

[84] isoclines



شکل 4.18: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu = 1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.19: تفرقی مساوات $y'' + y - y^3 = 0$ سے نظام حاصل کریں۔اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

حل: $y = y_1$ اور $y' = y_1' = y_2$ لیتے ہوئے اور $y'' = y_2'$ لکھتے ہوئے دیے گئے دو درجی مساوات سے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1 = y_2 \\ y_2' &= f_2 = -y_1 + y_1^3 \end{aligned} \tag{4.86}$$

حاصل ہوتا ہے۔نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے حاصل ہوں گے۔ $f_1 = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جبکہ $f_2 = y_1(-1 + y_1^2) = 0$ سے $y_1 = 0$ اور $y_1 = \mp 1$ ملتے ہیں۔یوں نقطہ فاصل $(0, 0)$ ، $-1, 0$ اور $1, 0$ ہیں۔نقطہ فاصل $(0, 0)$ مرکز پر پایا جاتا ہے لہٰذا اس پر پہلے غور کرتے ہیں۔نقطہ فاصل کی نوعیت جاننے کی خاطر نظام کو خطی بناتے ہیں۔ایسا کوئی بھی جزو جو y^m یا $y_1^n y_2^q$ کی صورت میں لکھا گیا ہو،

جہاں $m \neq 1$ جبکہ n اور q کوئی بھی مستقل ہو سکتے ہیں، غیر خطی ہو گا۔ان غیر خطی اجزاء کو رد کرنے سے خطی نظام حاصل ہوتا ہے۔یوں y_2' کی مساوات میں y_1^3 کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned} \implies \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

حاصل ہو گا جس سے $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = 1 > 0$ اور $\Delta = -4 < 0$ ملتے ہیں لٰہذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔

آئیں اب نقطہ $(-1,0)$ پر غور کریں۔اس کو مرکز منتقل کرنے کی خاطر نظام 4.86 میں $\tilde{y}_1 = y_1 + 1$ یعنی $y_1 = \tilde{y}_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= -(\tilde{y}_1 - 1) + (\tilde{y}_1 - 1)^3 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ غیر خطی اجزاء $\tilde{y}_1^2$ اور $\tilde{y}_1^3$ کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\boldsymbol{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}$$

ملتا ہے۔اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لٰہذا نقطہ $(-1,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

نقطہ $(1,0)$ پر غور کرنے کی خاطر اس کو مرکز منتقل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ چنتے ہیں۔یوں نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ملتا ہے جس میں غیر خطی اجزاء $\tilde{y}_1^2$ اور $\tilde{y}_1^3$ رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\boldsymbol{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}$$

ملتا ہے۔اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لٰہذا نقطہ $(1,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوالات

سوال 4.51 تا سوال 4.55 کو خطی بناتے ہوئے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 4.51: $y_1' = 4y_1 - y_1^2, \quad y_2' = y_2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0,0)$ اور $(4,0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ مسئلے کو $(0,0)$ پر خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لکھا جاتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہٰذا نقطہ $(0,0)$ غیر مستحکم جوڑ ہے۔ نقطہ $(4,0)$ کو مرکز پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 4$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو ($-\tilde{y}_1^2$ رد کرتے ہوئے) خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جو $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ دیتا ہے جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 4.52: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1 + \frac{2}{3}y_1^2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0,0)$ اور $(\frac{3}{2},0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ $(0,0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p = 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ملتے ہیں لہٰذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔ نقطہ $(\frac{3}{2},0)$ کو مرکز پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - \frac{3}{2}$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو ($\frac{2}{3}\tilde{y}_1^2$ رد کرتے ہوئے) خطی بنانے سے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $(\frac{2}{3},0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.53: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -2y_1 - y_1^2$

جوابات: مستحکم وسط $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.54: $y_1' = -y_1 + y_2 + y_1^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$

جوابات: $(0,0)$ پر مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.55: $y_1' = -y_1 + y_2 - y_2^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$

جوابات: $(0,0)$ پر جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.56 تا سوال 4.60 میں تفرقی مساوات سے نظام حاصل کریں۔اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نظام کو خطی بناتے ہوئے نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

سوال 4.56: $y'' - 4y + y^3 = 0$
جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین، $(-2,0)$ مستحکم وسط اور $(2,0)$ مستحکم وسط ہیں۔

سوال 4.57: $y'' + 4y - y^3 = 0$
جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ مستحکم وسط، $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین اور $(2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔

سوال 4.58: $y'' + 4y + y^2 = 0$
جوابات: $(0,0)$ مستحکم وسط اور $(-4,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.59: $y'' + \sin y = 0$
جوابات: $(0,0)$ اور $(\mp n2\pi,0)$ مستحکم وسط ہیں جہاں $n = 1,2,3,\cdots$ ہو سکتا ہے۔نقطہ $(\mp m\pi,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے جہاں $m = 1,3,5,\cdots$ ہو سکتا ہے۔

سوال 4.60: $y'' + \cos y = 0$
جوابات: نقطہ $(\frac{\pi}{2} \mp n2\pi,0)$ غیر مستحکم نقطہ نیز جبکہ $(-\frac{\pi}{2} \mp n2\pi,0)$ وسط ہیں جہاں $n = 1,2,3,\cdots$ ہو سکتا ہے۔آپ کو $-\cos(\mp\frac{\pi}{2} + \tilde{y}_1) = \sin(\mp\tilde{y}_1) \approx \mp\tilde{y}_1$ کی مدد لے سکتے ہیں۔

سوال 4.61: ریلے مساوات
$Y'' - \mu(1 - \frac{1}{3}Y'^2)Y' + Y = 0$ جہاں $\mu > 0$ ہے، **ریلے مساوات**[85] کہلاتی[86] ہے۔اس میں $y = Y'$ پر کرتے ہوئے تفرق لے کر **ون در پول مساوات** حاصل کریں۔

سوال 4.62: ڈفنگ مساوات
اسپرنگ اور کمیت کی مساوات $y'' + \omega_0^2 = 0$ میں غیر خطی قوت بحالی کی صورت میں **ڈفنگ مساوات**[87]

[85] Rayleigh equation
[86] لارڈ ریلے، جن کا اصل نام جان ولیم سٹرٹ ہے انگلستان کے ماہر طبیعیات اور ریاضی دان تھے۔
[87] Duffing equation

$y'' + \omega_0^2 y + \beta y^3 = 0$ حاصل ہوتی ہے جہاں $|\beta|$ عموماً چھوٹی مقدار ہوتی ہے۔ $\beta > 0$ کو **سخت اسپرنگ** اور $\beta < 0$ کو **نرم اسپرنگ** کی صورت پکارا جاتا ہے۔ سطح حرکت پر خط حرکت کی مساوات دریافت کریں۔

جواب: $2y_2^2 + 2\omega_0^2 y_1^2 + \beta y_1^4 = K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

سوال 4.63: خط حرکت
سادہ تفرقی مساوات $y'' - 9y + y^3 = 0$ کو نظام کی صورت میں لکھیں جس کو حل کرتے ہوئے y_2 بالمقابل y_1 کی مساوات حاصل کریں۔حاصل مساوات سے سطح حرکت پر چند خط حرکت کھینچیں۔

جواب: $2y_2^2 = 18y_1^2 - y_1^4 + K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام

اس حصے میں غیر متجانس نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \qquad \text{(حصہ 4.3 دیکھیں)} \tag{4.87}$$

جہاں $\boldsymbol{g}$ غیر صفر سمتیہ ہے، کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{g}(t)$ اور $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}(t)$ کے ارکان، محور t کے کھلے وقفہ J پر استمراری ہیں۔وقفہ J پر متجانس مساوات $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ کے عمومی حل $\boldsymbol{y}^{(h)}(t)$ اور J پر مساوات 4.87 کے کسی بھی **مخصوص حل** $\boldsymbol{y}^{(p)}(t)$ [جس میں کوئی مستقل نہیں پایا جاتا] سے مساوات 4.87 کا J پر **عمومی حل**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} \tag{4.88}$$

حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ 4.3 کے تحت عمومی حل $\boldsymbol{y}$ میں J پر مساوات 4.87 کے تمام ممکنہ حل شامل ہیں۔

متجانس مساوات کے حل پر ہم گزشتہ حصوں میں غور کر چکے ہیں۔اس حصے میں غیر متجانس مساوات کے مخصوص حل کے حصول پر غور کرتے ہیں۔نا معلوم عددی سر کی ترکیب اور مقدار معلوم بدلنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں جنہیں ہم حصہ 2.7 اور حصہ 2.10 سے جانتے ہیں۔

4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب

ایک عدد سادہ تفرقی مساوات کے حل میں استعمال ہونے کی طرح اب بھی یہ ترکیب اس صورت قابل استعمال ہو گی جب $\boldsymbol{A}$ کے ارکان مستقل مقدار ہوں جبکہ مستقل مقدار، t^m (جہاں m مثبت اعداد ہیں)، قوت نمائی، سائن اور کوسائن تفاعل کا کوئی بھی مجموعہ $\boldsymbol{g}$ ہو۔ایسی صورت میں مخصوص حل کو $\boldsymbol{g}$ کی طرح تصور کیا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{g}=t^2$ ہونے کی صورت میں $\boldsymbol{y}^{(p)}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w}t^2$ فرض کیا جائے گا۔ مساوات 4.87 میں $\boldsymbol{y}^{(p)}$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ حاصل کیے جاتے ہیں۔یہ حصہ 2.7 کی طرح ہے البتہ یہاں ترمیمی قاعدہ قدر مختلف ہے۔ آئیں ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کا استعمال دیکھیں۔

مثال 4.20: نا معلوم عددی سر کی ترکیب۔ترمیمی قاعدہ
درج ذیل مساوات کی عمومی حل حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{y}+\begin{bmatrix}-4\\ 3\end{bmatrix}e^{-3t} \tag{4.89}$$

حل:ہم صفحہ 257 پر مثال 4.5 میں نظیری متجانس مساوات کا حل

$$\boldsymbol{y}^{(h)}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-3t} \tag{4.90}$$

حاصل کر چکے ہیں۔چونکہ $\lambda=-3$ کا $\boldsymbol{A}$ آئگنی قدر ہے اور مساوات 4.89 میں دائیں جانب e^{-3t} پایا جاتا ہے لہٰذا اس جزو کو t سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{y}^{(p)}$ میں شامل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)}=\boldsymbol{u}te^{-3t}+\boldsymbol{v}e^{-3t} \tag{4.91}$$

$\boldsymbol{y}^{(p)}$ میں بائیں ہاتھ کا پہلا جزو حصہ 2.7 کا مماسی ترمیمی قاعدہ ہے، جو یہاں ناکافی ہے۔[آپ کوشش کر کے دیکھ سکتے ہیں]۔ مساوات 4.91 کو مساوات 4.89 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)\prime}=\boldsymbol{u}e^{-3t}-3\boldsymbol{u}te^{-3t}-3\boldsymbol{v}e^{-3t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}te^{-3t}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}e^{-3t}+\boldsymbol{g}$$

دونوں جانب te^{-3t} والے اجزاء کے عددی سر برابر ہوں گے لہٰذا $-3\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{A}$ قالب کے آئگنی قدر $\lambda = -3$ کا نظیری آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ ہو گا۔اس طرح $\boldsymbol{u} = a\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ لکھا جا سکتا ہے جہاں a کوئی بھی غیر صفر مستقل ہو سکتا ہے۔بقایا اجزاء کے عددی سر برابر لکھ کر

$$\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} \implies \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 \\ v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= a + 4 \\ v_1 + v_2 &= -a - 3 \end{aligned}$$

دوسری مساوات کو پہلی سے منفی کرتے ہوئے $2a + 7 = 0$ یعنی $a = -\frac{7}{2}$ ملتا ہے۔یوں درج بالا میں پہلی مساوات $v_1 + v_2 = -\frac{7}{2} + 4 = \frac{1}{2}$ ہو گی جس میں $v_1 = k$ لیتے ہوئے $v_2 = \frac{1}{2} - k$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}k & \frac{1}{2} - k\end{bmatrix}^T$ ہو گا۔ہم $k = 0$ چن سکتے ہیں۔ایسا ہی کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.92}$$

k کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے دیگر حل لکھے جا سکتے ہیں مثلاً $k = 1$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$ حاصل ہو گا جس سے درج ذیل عمومی حل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.93}$$

مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب

اس ترکیب سے غیر متجانس نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{g}(t) \tag{4.94}$$

کو حل کیا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{A}(t)$ متغیر مقدار ہیں اور $\boldsymbol{g}(t)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے۔اگر t محور کے کسی کھلے وقفے J پر نظیری متجانس نظام کا عمومی حل $\boldsymbol{y}^{(h)}$ معلوم ہو تب اس ترکیب کی مدد سے اس وقفے پر نظام 4.94 کا مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں مثال 4.20 کو اس ترکیب سے حل کریں۔

مثال 4.21: مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے حل
گزشتہ مثال کے نظام 4.89 کو مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب سے حل کریں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.95}$$

حل: متجانس مساوات کی آئگنی قدر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -3$ ہیں جن کے بالترتیب نظیری آئگنی سمتیات $[1 \quad 1]^T$ اور $[1 \quad -1]^T$ ہیں لہٰذا اساس $[e^{-t} \quad e^{-t}]^T$ ، $[e^{-3t} \quad -e^{-3t}]^T$ ہے جس سے متجانس مساوات کا حل $\boldsymbol{y}^{(h)}$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c} \tag{4.96}$$

یہاں $\boldsymbol{Y}(t) = [\boldsymbol{y}^{(1)} \quad \boldsymbol{y}^{(2)}]^T$ بنیادی قالب [حصہ 4.3 دیکھیں] ہے۔ حصہ 2.10 کی طرح ہم مستقل سمتیہ $\boldsymbol{c}$ کی جگہ متغیر سمتیہ $\boldsymbol{u}$ پر کرتے ہوئے مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{4.97}$$

نظام 4.89 میں $\boldsymbol{y}^{(p)}$ پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} \tag{4.98}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ متجانس نظام کا حل ہے لہٰذا $\boldsymbol{y}^{(1)'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)}$ یعنی $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}$ لکھ کر مساوات 4.98 سے $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{g}$ حاصل ہوتا ہے (اور چونکہ $\boldsymbol{Y}$ کا امتیازی مقطع دراصل ورونسکی [حصہ 4.1 دیکھیں] W ہے جو اساس کی صورت میں غیر صفر ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{Y}^{-1}$ حاصل کیا جا سکتا ہے) لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{g} \tag{4.99}$$

معکوس قالب کو مساوات 4.12 کی مدد سے حاصل کر کے

$$\boldsymbol{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-4t}} \begin{bmatrix} -e^{-3t} & -e^{-3t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{g}$ سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{u}'$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{g} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}$ حاصل کرنے کی خاطر تکمل لیتے ہیں۔ تفرق کی طرح ہر جزو کا علیحدہ تکمل لیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix}$$

یوں مساوات 4.96 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{u} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{7}{2}te^{-3t} \\ \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{2}te^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{7}{2}t \\ \frac{1}{4} + \frac{7}{2}t \end{bmatrix} e^{-3t} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

گزشتہ مثال کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں مختلف مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ حاصل ہوا ہے۔ یوں عمومی حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

ہم $c_1 - \frac{1}{4} = c^*$ لیتے ہوئے آخری جزو کو $\boldsymbol{y}^{(h)}$ میں ضم کر سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} \tag{4.100}$$

سوالات

سوال 4.64: ثابت کریں کہ مساوات 4.87 کے تمام حل مساوات 4.88 دیتا ہے۔

سوال 4.65 تا سوال 4.70 میں عمومی حل دریافت کریں۔جواب کو دیے گئے نظام میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔

سوال 4.65:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 + 2e^{-t}\\
y_2' &= 3y_1 - y_2 + 5e^{-t}
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{11}{12}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-t}$ ، $y_2 = c_1e^{2t} - 3c_2e^{-2t} + \frac{11}{12}e^{2t} - \frac{9}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t}$

سوال 4.66:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 + e^{-2t}\\
y_2' &= 3y_1 - y_2 + 3e^{-2t}
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-2t}$ ، $y_2 = c_1e^{2t} + 3c_2e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{3}{2}te^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-2t}$

سوال 4.67:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 + \sin(t)\\
y_2 &= -5y_1 - 6y_2 + \cos(t)
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{26}e^{-5t} + \frac{9}{13}\sin t - \frac{7}{13}\cos t$
$y_2 = -c_1e^{-t} - 5c_2e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{26}e^{-5t} - \frac{6}{13}\sin t + \frac{9}{13}\cos t$

سوال 4.68:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + y_2 + 2t \\
y_2' &= -1y_1 + 2y_2 + t
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1(t+1)e^{3t} + c_2te^{3t} + \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{t}{3}$
$y_2 = -c_1te^{3t} + c_2(1-t)e^{3t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}$

سوال 4.69:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + y_2 + 2t^2 + 3 \\
y_2' &= 3y_1 + y_2 + t - 1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{7}{16}e^{2t} - \frac{27}{16}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{5}{4}$
$y_2 = 3c_1e^{2t} - c_2e^{-2t} + \frac{21}{16}e^{2t} + \frac{27}{16}e^{-2t} - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - 3$

سوال 4.70:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 11t + 15 \\
y_2' &= 5y_1 + 6y_2 + 3e^{-t} - 15t - 20
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{t} + 10e^{2t} - 4e^{t} - 2e^{-t} - 3t - 4$
$y_2 = -\frac{5}{4}c_1e^{2t} - c_2e^{t} - \frac{25}{2}e^{2t} + 4e^{t} + e^{-t} + 5t + \frac{15}{2}$

سوال 4.71 تا سوال 4.76 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 4.71:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 + \sin t \\
y_2' &= 3y_1 - 3y_2 \\
y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = e^{-t}(\frac{32}{53\sqrt{7}}\sinh\sqrt{7}t + \frac{13}{53}\cosh\sqrt{7}t) - \frac{19}{53}\sin t - \frac{13}{53}\cos t$
$y_2 = e^{-t}(\frac{27}{53\sqrt{7}}\sinh\sqrt{7}t + \frac{6}{53}\cosh\sqrt{7}t) - \frac{21}{53}\sin t - \frac{6}{53}\cos t$

سوال 4.72:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -y_1 + y_2 + e^{-t} \\
y_2 &= 3y_1 + y_2 + t \\
y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = \frac{19}{48}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{17}{16}e^{-2t} - \frac{t}{4}$ ، $y_2 = \frac{19}{16}e^{2t} - e^{-t} + \frac{17}{16}e^{-2t} - \frac{t}{4} - \frac{1}{4}$

سوال 4.73:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 2t^2 - t + 1 \\
y_2' &= 5y_1 + 6y_2 - t^2 + 2t \\
y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = -1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = -4e^{2t} + 21e^{t} - 4t^2 - 11t - 16$ ، $y_2 = 5e^{2t} - 21e^{t} + \frac{7}{2}t^2 + 10t + 15$

سوال 4.74:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 + 6e^{3t} \\
y_2' &= -y_1 - e^{3t} \\
y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = 3
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = 1.7e^{3t} + 0.3\cos t + 3.9\sin t$ ، $y_2 = -0.9e^{3t} + 3.9\cos t - 0.3\sin t$

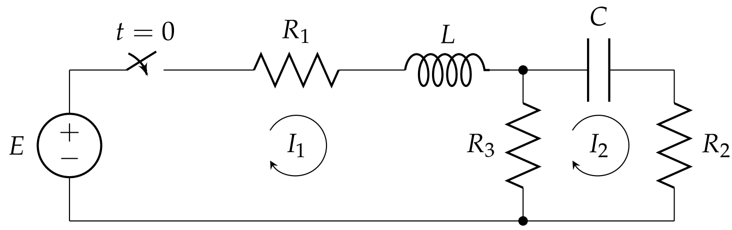
سوال 4.75:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -3y_2 - 4\cos 5t \\
y_2' &= 3y_1 + 3\sin 5t \\
y_1(0) &= -2, \quad y_2(0) = 1
\end{aligned}
$$

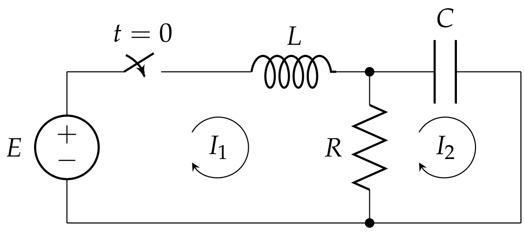
جوابات: $y_1 = -\frac{11}{16}\sin 5t - \frac{19}{16}\sin 3t - 2\cos 3t$ ،
$y_2 = -\frac{3}{16}\cos 5t - 2\sin 3t + \frac{19}{16}\cos 3t$

سوال 4.76:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -9y_2 + e^{t} \\
y_2 &= y_1 + e^{-t} \\
y_1(0) &= -1, \quad y_2(0) = 0
\end{aligned}
$$



شکل 4.19: مثال 4.77 اور مثال 4.78 کا برقی دور۔



شکل 4.20: مثال 4.79 اور مثال 4.80 کا برقی دور۔

جوابات: $y_1=-\frac{1}{5}\cos 3t+\frac{1}{10}e^{t}-\frac{9}{10}e^{-t}$ ، $y_2=-\frac{1}{15}\sin 3t+\frac{1}{10}e^{t}-\frac{1}{10}e^{-t}$

سوال 4.77: امالہ، برق گیر اور مزاحمتوں پر مبنی دور شکل 4.19 میں دکھایا گیا ہے۔اگر $E=10\,\mathrm{V}$ ، $R_1=2\,\Omega$ ، $R_2=4\,\Omega$ ، $R_3=6\,\Omega$ ، $L=2\,\mathrm{H}$ اور $C=0.25\,\mathrm{F}$ ہوں اور لمحہ $t=0$ پر منقطع سوئچ کو چالو کیا جائے تب I_1 اور I_2 کیا ہوں گے؟ ابتدائی رو اور ابتدائی ذخیرہ برقی بار صفر ہیں۔

جوابات: $I_1(t)=5e^{-t}-\frac{25}{4}e^{-\frac{8}{5}t}+\frac{5}{4}$ ، $I_2(t)=5e^{-t}-5e^{-\frac{8}{5}t}$

سوال 4.78: اگر سوال 4.77 میں $E=10\sin 5t$ وولٹ ہو تب I_1 اور I_2 کیا ہوں گے؟

جوابات: $I_1(t)=0.388\sin 5t-0.853\cos 5t-0.962e^{-t}+1.814e^{-\frac{8}{5}t}$ ، $I_2(t)=0.272\sin 5t-0.49\cos 5t-0.962e^{-t}+1.451e^{-\frac{8}{5}t}$

سوال 4.79: شکل 4.20 میں $E=20\,\mathrm{V}$ ، $R=1\,\Omega$ ، $L=4\,\mathrm{H}$ اور $C=0.2\,\mathrm{F}$ ہیں۔ابتدائی رو اور ابتدائی ذخیرہ برقی بار صفر ہیں۔لمحہ $t=0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ رو دریافت کریں۔

جوابات: $I_1(t) = \frac{1}{4}e^{-\frac{5}{2}t}(-36\sqrt{5}\sinh\sqrt{5}t - 80\cosh\sqrt{5}t) + 20$ ، $I_2(t) = \sqrt{5}e^{-\frac{5}{2}t}\sinh\sqrt{5}t$

سوال 4.80: اگر سوال 4.79 میں $E = 20\sin 2t$ ہو تب رو کیا ہوں گے؟

جوابات: $I_1(t) = e^{-\frac{5}{2}t}(2.625\sinh 2.236t + 2.58\cosh 2.236t) + 0.291\sin 2t - 2.58\cos 2t$ ، $I_2(t) = e^{-\frac{5}{2}t}(-0.546\sinh 2.236t + 0.256\cosh 2.236t) + 0.93\sin 2t - 0.256\cos 2t$

باب 5

طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔اعلٰی تفاعل

گزشتہ بابوں میں **مستقل عددی سر** والے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو **بنیادی تفاعل** تھے۔بنیاد تفاعل مثلاً $\sin 3t$ ، t^6 اور e^{2t} کو آپ **علم الاحصاء**[1] سے جانتے ہیں۔**متغیر عددی سر** والے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ **لیژانڈر**، **بیسل** اور **بیش ہندسی** مساوات اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔یہ مساوات اور ان کے حل **لیژانڈر تفاعل**، **بیسل تفاعل** اور **بیش ہندسی تفاعل** انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہٰذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف ترکیبوں پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل **طاقتی تسلسل**[2] $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا اس کو **ترکیب طاقتی تسلسل**[3] کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو $\ln x$ یا کسری طاقت x^r سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو **ترکیب فروبنیوس**[4] کہلاتی ہے۔جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کار آمد ثابت ہوتا ہے لہٰذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلٰی حل جنہیں آپ علم الاحصاء سے نہیں جانتے **اعلٰی تفاعل**[5] کہلاتے ہیں۔

[1] calculus
[2] power series
[3] power series method
[4] Frobenius method
[5] higher functions or special functions

5.1 ترکیب طاقتی تسلسل

متغیر عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً **ترکیب طاقتی تسلسل** سے حل کرتے ہوئے طاقتی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔اس طاقتی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے، حل کا خط کھینچا جا سکتا ہے، کلیات ثابت کیے جا سکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جا سکتی ہے۔اس حصے میں طاقتی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ $x-x_0$ کا طاقتی تسلسل درج ذیل ہے

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots \tag{5.1}$$

جس میں x متغیر ہے جبکہ a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\cdots$ تسلسل کے **عددی سر**[6] کہلاتے ہیں اور x_0 مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا **وسط**[7] کہلاتا ہے۔جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً **علامت مجموعہ**[8] ($\sum$) کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں اشاریہ[9] مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔درج بالا مساوات میں m بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔علامت مجموعہ کے نیچے $m=0$ اور اس کے اوپر ∞ مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔ تسلسل کا وسط صفر $(x_0=0)$ ہونے کی صورت میں x کا طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \tag{5.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقتی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کی تسلسل ہے جس میں $x-x_0$ (یا x) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

---

[6] coefficients
[7] center
[8] summation
[9] index

مثال 5.1: مکلارن تسلسل در حقیقت میں طاقتی تسلسل ہیں

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1, \text{ہندسی تسلسل}) \\
e^x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \\
\cos x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots
\end{aligned}
$$

ترکیب طاقتی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقتی تسلسل دیکھے۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقتی تسلسل حل
تفرقی مساوات $y' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلی قدم میں حل کو طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$
y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.3}
$$

تسلسل کا جزو با جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m x^{m-1} \tag{5.4}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots) = 0$$

x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لٰہذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تفاعل e^{-x} کی مکلارن تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots) = a_0e^{-x}$$

یہاں آپ $y'' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ حاصل کریں۔

اب اس ترکیب کی عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلے مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔پہلی قدم میں ہم خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.5}$$

میں $p(x)$ اور $q(x)$ کو x کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ از خود کثیر رکنی ہوں تب

پہلی قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسری قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح y' اور درج ذیل y'' لکھتے ہوئے

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} \tag{5.6}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔ تیسری قدم میں x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری x^1، x^2، ... کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔ یوں تمام عددی سر کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیژانڈر مساوات

درج ذیل مساوات کروی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حل: مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}(1-x^2)(2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + 6 \cdot 5a_6 x^4 \cdots)\\ - 2x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots)\\ + 2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots) = 0\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}(2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + 6 \cdot 5a_6 x^4 \cdots)\\ + (-2a_2 x^2 - 3 \cdot 2a_3 x^3 - 4 \cdot 3a_4 x^4 - 5 \cdot 4a_5 x^5 - \cdots)\\ + (-2a_1 x - 2 \cdot 2a_2 x^2 - 3 \cdot 2a_3 x^3 - 4 \cdot 2a_4 x^4 - \cdots)\\ + (2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + 2a_4 x^4 + \cdots) = 0\end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(2a_2 + 2a_0) + (3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x\\ + (4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 2a_2)x^2\\ + (5 \cdot 4a_5 - 3 \cdot 2a_3 - 3 \cdot 2a_3 + 2a_3)x^3\\ + (6 \cdot 5a_6 - 4 \cdot 3a_4 - 4 \cdot 2a_4 + 2a_4)x^4 + \cdots = 0\end{aligned}$$

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری x ، x^2 ، x^3 ، $\cdots$ کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے بالترتیب a_2 ، a_3 ، a_4 ، $\cdots$ کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3} \\
a_5 &= \frac{a_3}{2} = 0 \quad (\text{چونکہ } a_3 = 0 \text{ ہے}) \\
a_6 &= \frac{3}{5}a_4 = -\frac{a_0}{5}
\end{aligned}
$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1 x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots)$$

جس میں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل x اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \cdots$ پر مشتمل ہے جو **لیژانڈر کثیر رکنی**[10] $P_n(x)$ اور **لیژانڈر تفاعل**[11] $Q_n(x)$ کے رکن ہیں۔یہاں $x = P_1(x)$ اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots = -Q_1(x)$ ہیں جہاں منفی علامت روایتی ہے۔ n لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا **درجہ**[12] کہلاتا ہے۔یہاں $n = 1$ ہے لہٰذا لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔

نظریہ طاقتی تسلسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ $s_n(x)$ لکھتے ہیں جس کو n **جزوی مجموعہ**[13] کہتے ہیں۔

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{5.7}$$

---

[10] Legendre polynomials
[11] Legendre function
[12] order
[13] nth partial sum

یہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔ مساوات 5.1 سے $s_n(x)$ منفی کرنے سے بقایا $R_n(x)$ حاصل ہوتا ہے جس کو $a_n(x-x_0)^n$ کے بعد مساوات 5.1 کا **بقایا**[14] کہتے ہیں۔

$$R_n(x) = a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x-x_0)^{n+2} + \cdots \tag{5.8}$$

یوں ہندسی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

کے جزوی مجموعے اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \cdots \\
s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\
s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ ، $\cdots$ کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔ اگر کسی $x = x_1$ کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرتکز ہو مثلاً

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر تسلسل 5.1 **مرکوز**[15] ہے جبکہ $s(x_1)$ کو تسلسل 5.1 کی **قیمت**[16] یا **مجموعہ** کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_1 - x_0)^m$$

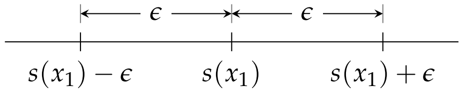
اس طرح کسی بھی n کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1) \tag{5.9}$$

اس کے برعکس اگر $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ ، $\cdots$ کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر مساوات 5.1 **منفرج**[17] ہے۔

---

[14] remainder
[15] converge
[16] value or sum
[17] divergent



شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔

مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت ϵ کے لئے ایسا N (جس کی قیمت ϵ پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام $n>N$ کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\left|R_n(x_1)\right| = \left|s(x_1)-s_n(x_1)\right| < \epsilon \qquad \text{تمام } n>N \tag{5.10}$$

جیومیٹریائی طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ $s_n(x_1)$ جہاں $n>N$ ہے $s(x_1)-\epsilon$ اور $s(x_1)+\epsilon$ کے درمیان پایا جاتا ہے۔عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں x_1 پر مساوات 5.1 کا مجموعہ $s(x_1)$ تقریباً $s_n(x_1)$ کے برابر ہو گا۔مزید یہ کہ $s(x_1)$ اور $s_n(x_1)$ میں فرق کو ہم n بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کہاں مرکوز ہوتی ہے؟ تسلسل 5.1 میں $x=x_0$ پر a_0 کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا تسلسل کی قیمت a_0 ہو گی۔یوں $x=x_0$ پر تسلسل a_0 پر مرکوز ہوتی ہے۔ کبھی کبھار x کی واحد اسی قیمت پر تسلسل مرتکز ہو گا۔ اگر x کے دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرتکز ہو تب x کی یہ قیمتیں ارتکازی وقفہ[18] کہلاتا ہے۔ یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔ محدود وقفہ جس کا وسط x_0 ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔یوں طاقتی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام x پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے x پر تسلسل مرکوز ہو گا

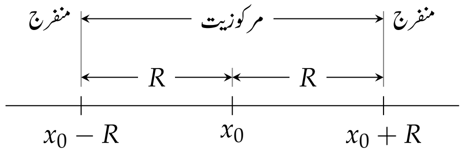
$$|x-x_0| < R \tag{5.11}$$

جبکہ $|x-x_0|>R$ پر تسلسل منفرج ہو گا۔ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طاقتی تسلسل x کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں R رداس ارتکاز[19] کہلاتا ہے۔(مخلوط طاقتی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول ٹکیا ہوتا ہے جس کا رداس R ہو گا)۔ اگر تسلسل تمام x پر مرکوز ہو تب ہم $R=\infty$ یعنی $\frac{1}{R}=0$ لکھتے ہیں۔

---

[18] convergence interval
[19] convergence radius



شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.11 جس کا وسط x_0 ہے۔

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جا سکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد ($\lim$) موجود اور غیر صفر ہو۔ اگر یہ حد لامتناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط x_0 پر مرکوز ہو گا۔

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}} \tag{5.12}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|} \tag{5.13}$$

مثال 5.4: رداس ارتکاز ∞ ، 1 اور 0

تینوں تسلسل میں $m \to \infty$ لیتے ہوئے رداس ارتکاز R دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \to 0, \quad R \to \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!x^m = 1 + x + 2x^2 + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{(m+1)!}{m!}\right| = m + 1 \to \infty, \quad R \to 0$$

لامتناہی رداس ارتکاس $R \to \infty$ سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ $R = 0$ بے کار صورت ہے۔ عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔

درج بالا مثال میں $\frac{1}{1-x}$ کے طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز $R = 1$ حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط $x_0 = 0$ ہے۔مساوات 5.11 کے تحت $|x| < 1$ کے لئے طاقتی تسلسل تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کو ظاہر کرتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔نقطہ $x = 0.2$ پر تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-0.2} = 1.25$ ہے جبکہ اس کے تسلسل میں $x = 0.2$ پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 && \text{ایک رکن}\\
1+0.2 &= 1.2\\
1+0.2+0.2^2 &= 1.24\\
1+0.2+0.2^2+0.2^3 &= 1.248\\
1+0.2+0.2^2+0.2^3+0.2^4 &= 1.2496 && \text{پانچ ارکان}
\end{aligned}
$$

طاقتی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کے اصل قیمت کے $\frac{1.2496}{1.25} \times 100 = 99.968$ فی صد ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی x پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جا سکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرج ہے۔آئیں رداس ارتکاز کے باہر $x = 1.2$ پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل کریں۔تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-1.2} = -5$ حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+1.2 &= 2.2\\
1+1.2+1.2^2 &= 3.64\\
1+1.2+1.2^2+1.2^3 &= 5.368
\end{aligned}
$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ x پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرج ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔طاقتی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہو گی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{5.14}$$

میں $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کے طاقتی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقتی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ایسا تفاعل $f(x)$ جس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا مثبت رداس ارتکاز پایا جاتا ہو، x_0 پر **تحلیلی**[20] کہلاتا ہے ورنہ اس نقطے کو غیر تحلیلی کہیں گے (مثال 5.5 دیکھیں)۔اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 **معیاری صورت** میں ہے یعنی یہ y'' سے شروع ہوتا ہے۔اگر دو درجی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پایا جاتا ہو، یعنی اس میں $h(x)y''$ پایا جاتا ہو تب مساوات کو $h(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

مسئلہ 5.1: طاقتی تسلسل حل کی وجودیت

اگر مساوات 5.14 میں p ، q اور r نقطہ $x = x_0$ پر تحلیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل $x = x_0$ پر تحلیلی ہو گا اور اس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رداس ارتکاز $R > 0$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت آپ کتاب کے آخر میں صفحہ 375 پر حوالہ [2] سے پڑھ سکتے ہیں۔(دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ x محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رداس ارتکاز کی لمبائی x_0 سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں p ، q اور r میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تحلیلی ہو۔

مثال 5.5: تفاعل غیر تحلیلی ہونے کے کئی وجوہات ممکن ہیں۔اس کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

- تفاعل **غیر معین** ہو سکتا ہے مثلاً $f(x) = \frac{1}{x - x_0}$ جس کی قیمت $x = x_0$ پر غیر معین ہے۔

[20] analytic

- تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

- تفاعل استمراری ہونے کے باوجود غیر ہموار[21] ہو سکتا ہے۔ایسا تفاعل جس کے تمام تفرق $x = x_0$ پر پائے جاتے ہوں ہموار کہلاتا ہے۔درج ذیل تفاعل کا دو درجی تفرق $x = x_0$ پر نہیں پایا جاتا۔

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 & x \geq x_0 \\ -(x - x_0)^2 & x < x_0 \end{cases}$$

تفاعل ہموار ہونے کے باوجود اس کی ٹیلر تسلسل نقطہ $x = x_0$ پر منفرج ہو سکتی مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

اس ہموار تفاعل کے تمام تفرق نقطہ $x = 0$ پر صفر کے برابر ہیں لہٰذا اس کی ٹیلر تسلسل صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے جو تفاعل کو ظاہر نہیں کر سکتی۔

طاقتی تسلسل پر مختلف عمل

طاقتی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقتی تسلسلوں کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح) x کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقتی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقتی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

---

[21] not smooth

$|x - x_0| < R$ پر مرکوز ہو، جہاں $R > 0$ ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی انہیں x پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان x پر تفرق y' کو ظاہر کرے گا۔

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m(x - x_0)^{m-1} \qquad (|x - x_0| < R)$$

اسی طرح دو درجی، تین درجی اور بلند درجی تفرقات بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقتی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x - x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x - x_0)^m \tag{5.15}$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m)(x - x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ $f(x) + g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقتی تسلسل کو رکن با رکن ضرب دیا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں۔اب پہلی تسلسل کے ہر رکن کو دوسری تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے $x - x_0$ کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$\begin{aligned} a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x - x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x - x_0)^2 + \cdots \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_mb_0)(x - x_0)^m \end{aligned}$$

مرکوز ہو گا اور $f(x)g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ارتکاز دریافت کریں۔

سوال 5.1: $\sum_{\infty}^{m=0}(m+1)mx^m$
جواب: $R=1$

سوال 5.2: $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{k^m}$
جواب: $R=k$

سوال 5.3: $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
جواب: $R=\infty$

سوال 5.4: $\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^m x^m$
جواب: $R=\frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقتی تسلسل حل کریں۔

سوال 5.5: $y'=-2xy$
جواب: $y=a_0(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+-\cdots)=a_0e^{-x^2}$

سوال 5.6: $y''+y=0$
جواب: $y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2}x^2-\frac{a_1}{6}x^3+-\cdots=a_0\cos x+a_1\sin x$

سوال 5.7: $(1-x)y'=y$
جواب: $y=a_0(1+x+x^2+x^3+\cdots)=-\frac{a_0}{1-x}$

سوال 5.8: $xy'-3y=k$ جہاں k مستقل مقدار ہے
جواب: $y=cx^3-\frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاقتی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔ تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لا محدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں x کے صرف طاق یا صرف جفت طاقت پائیں جاتے ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9: $y''-y'+xy=0$
جواب: $y=a_0(1-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{240}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{24}-\cdots)$

سوال 5.10: $y''-y'-xy=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{144}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^5}{20}+\cdots)$

سوال 5.11: $y''-y'-x^2y=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{60}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots)$

سوال 5.12: $y''-xy'-x^2y=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{90}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots)$

سوال 5.13: $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$
جواب: $y=a_0(1-3x^2)+a_1(x-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\cdots)$ ؛ جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
$\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{s}{s+1}x^{s+1}$ کے پہلے جزو کی نشاندہی $s=0$ کرتا ہے۔اس مجموعے میں $k=s+1$ پر کرتے ہوئے نیا مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر x^m پایا جاتا ہو۔اس عمل کو منتقلی اشاریہ[22] کہتے ہیں۔حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k}x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی $k=1$ کرتا ہے۔

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
مجموعہ $\sum\limits_{p=2}^{\infty}\frac{p+2}{(p+1)!}x^{p+3}$ میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر x^m ہو۔

جواب: $\sum\limits_{m=5}^{\infty}\frac{m-1}{(m-2)!}x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.19 کو ترکیب طاقتی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں x^3 تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل a_0 (اور a_1) دریافت

[22] shifting index

کریں۔دیے گئے نقطہ x_1 پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں تک جواب لکھیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

جوابات: $y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \cdots$ ، $a_0 = 6$ ، $y(1) = -514$

سوال 5.17:

$$y'' + 4xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad x_1 = 0.1$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{6} + \cdots)$ ، $a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$ ، $y(0.1) = 1.094$

سوال 5.18:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = 0.5$$

جوابات: $y = a_0(1 - 6x^2 + 3x^4 + \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{3})$ ، $a_0 = 0$ ، $a_1 = -\frac{3}{2}$ ، $y(0.5) = -0.437$

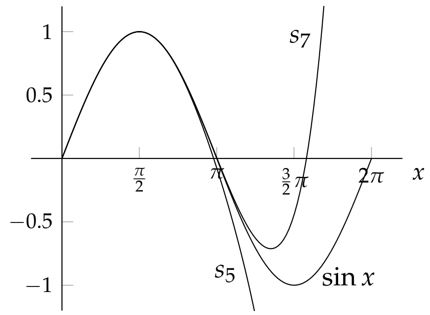
سوال 5.19:

$$(x - 4)y' = xy, \quad y(1) = 5, \quad x_1 = 2$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{256} + \cdots)$ ، $a_0 = 5.827$ ، $y(2) = 2.307$

سوال 5.20: کمپیوٹر کا استعمال
طاقتی تسلسل سے تفاعل کی قیمت جزوی تسلسل سے حاصل کی جاتی ہے۔تفاعل $\sin x$ کی تسلسل سے بذریعہ کمپیوٹر، تسلسل میں اجزاء کی تعداد مختلف لیتے ہوئے سائن کا خط کھینچیں۔آپ دیکھیں گے کے کم اجزاء لینے سے اصل تفاعل (یعنی $\sin x$)اور تسلسل میں فرق بہت جلد واضح ہوتا ہے جبکہ زیادہ تعداد میں اجزاء لینے سے یہ فرق دیر بعد نمودار ہوتا ہے۔

جوابات: شکل 5.3 میں $\sin x$ کا جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔



شکل 5.3: سوال 5.20 کا خط۔ $\sin x$ کے علاوہ جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 دکھائے گئے ہیں۔

5.2 لیژانڈر مساوات۔ لیژانڈر کثیر رکنی

لیژانڈر تفرقی مساوات[23][24]

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (n \text{ مستقل ہے}) \tag{5.16}$$

طبیعیات کے اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک ہے جو متعدد مسائل، بالخصوص کرہ کے سرحدی قیمت مسئلوں، میں سامنے آتی ہے۔

مساوات میں مقدار معلوم n کی قیمت اصل مسئلے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے لہٰذا مساوات 5.16 در حقیقت سادہ تفرقی مساوات کی نسل کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم نے لیژانڈر مساوات، جس میں $n=1$ تھا، کو مثال 5.3 میں حل کیا (جس کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ مساوات 5.16 کے کسی بھی حل کو **لیژانڈر تفاعل**[25] کہتے ہیں۔ لیژانڈر تفاعل اور ایسے دیگر اعلٰی تفاعل، جو علم الاحصاء میں نہیں پائے جاتے، کے مطالعہ کو **نظریہ اعلٰی تفاعل**[26] کہتے ہیں۔ دیگر اعلٰی تفاعل اگلے حصوں میں سامنے آئیں گے۔

مساوات 5.16 کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ نقطہ $x=0$ پر **تحلیلی تفاعل** ہیں [مثال 5.6 دیکھیں] لہٰذا لیژانڈر مساوات

[23] فرانسیسی ریاضی دان اڈریان مری لیژانڈر [1752-1833] نے اعلٰی تفاعل، بیضوی تکمل اور اعدادی نظریہ پر کام کیا۔
[24] Legendre's equation
[25] Legendre function
[26] special functions theory

پر مسئلہ 5.1 کا اطلاق ہوتا ہے اور اس کا حل طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔طاقتی تسلسل

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m \tag{5.17}$$

اور اس کے تفرقات کو مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے مستقل $n(n+1)$ کو k لکھتے ہوئے

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-2}-2x\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}+k\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0$$

یعنی

$$\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-2}-\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m x^m-\sum_{m=1}^{\infty}2ma_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty}ka_m x^m=0$$

حاصل ہوتا ہے۔یہاں آپ مثال 5.3 کی طرح مجموعوں کے چند ابتدائی ارکان لکھ کر آگے بڑھ سکتے ہیں یا پھر درج ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ تمام مجموعوں کو x کی یکساں طاقت کی صورت (x^s) میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $s=m-2$ یعنی $m=s+2$ پر کرتے ہیں جبکہ بقایا تین مجموعوں میں m کی جگہ s پر کرتے ہیں۔یوں پہلے مجموعے کا پہلا رکن $m=2$ اب $s=0$ ہو گا اور a_m کی جگہ a_{s+2} لکھا جائے گا۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s-\sum_{s=2}^{\infty}s(s-1)a_s x^s-\sum_{s=1}^{\infty}2sa_s x^s+\sum_{s=0}^{\infty}ka_s x^s=0 \tag{5.18}$$

درج بالا مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا مساوات کا بایاں ہاتھ بھی صفر کے برابر ہو گا اور یوں x کے ہر طاقت کے عددی سروں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔یوں x^0 کے عددی سر سے شروع کرتے ہوئے باری باری x^1 ، x^2 ، . . . کے عددی سر صفر کے برابر لکھتے ہیں۔مساوات 5.18 کا دوسرا مجموعہ x^2 اور تیسرا مجموعہ x^1 سے شروع ہوتا ہے لہٰذا ان میں x^0 نہیں پایا جاتا ہے۔یوں پہلے اور چوتھے مجموعوں سے x^0 کے عددی سر جمع کرتے ہوئے صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$$2\cdot 1a_2+n(n+1)a_0=0 \tag{5.19}$$

جہاں k کی جگہ واپس $n(n+1)$ لکھا گیا ہے۔اسی طرح x^1 پہلے، تیسرے اور چوتھے مجموعوں میں پایا جاتا ہے جن سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$3\cdot 2a_3+[-2+n(n+1)]a_1=0 \tag{5.20}$$

بلند طاقتی اجزاء x^2 ، x^3 ، . . . تمام مجموعوں میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے لئے x^s کے عددی سروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$(s+2)(s+1)a_{s+2}+[-s(s-1)-2s+n(n+1)]a_s=0 \tag{5.21}$$

چکور قوسین $[\cdots]$ کے اندر قوسین کو کھول کر ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}-s(s-1)-2s+n(n+1)&=-s^2+s-2s+n^2+n=n^2-s^2+n-s\\&=(n-s)(n+s)+n-s\\&=(n-s)(n+s+1)\end{aligned}$$

لہٰذا مساوات 5.21 سے

$$a_{s+2}=-\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s\qquad(s=0,1,\cdots)\tag{5.22}$$

حاصل ہوتا ہے جو کلیہ توالی[27] کہلاتا ہے۔کلیہ توالی کی مدد سے، a_0 اور a_1 کے علاوہ، بقایا تمام عددی سر، دو قدم پچھلی عددی سر استعمال کرتے ہوئے دریافت کیے جاتے ہیں۔ یوں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔ کلیہ توالی کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}a_2&=-\frac{n(n+1)}{2!}a_0 & a_3&=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1\\a_4&=-\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot3}a_2 & a_5&=-\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot4}a_3\\&=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 & &=\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1\\&\vdots & &\vdots\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 5.17 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)\tag{5.23}$$

جہاں

$$y_1(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-+\cdots\tag{5.24}$$

اور

$$y_2(x)=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-+\cdots\tag{5.25}$$

ہیں۔یہ تسلسل $|x|<1$ کے لئے مرکوز ہیں۔بعض اوقات تسلسل کا کوئی عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں کلیہ توالی کے تحت اگلے تمام عددی سر بھی صفر ہوں گے اور یوں تسلسل محدود ارکان پر مشتمل ہوتا

[27] recurrence relation, recursion formula

ہے۔چونکہ مساوات 5.24 میں x کے جفت طاقت پائے جاتے ہیں جبکہ مساوات 5.25 میں x کے طاق طاقت پائے جاتے ہیں لہٰذا $\frac{y_1}{y_2}$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا ہے اور یوں y_1 اور y_2 آپس میں خطی تعلق نہیں رکھتے لہٰذا یہ خطی طور غیر تابع حل ہیں۔یوں مساوات 5.23 کھلے وقفہ $-1 < x < 1$ پر عمومی حل ہے۔

دھیان رہے کہ $x = \mp 1$ پر $1 - x^2 = 0$ ہو گا لہٰذا سادہ تفرقی مساوات کی معیاری صورت میں عددی سر غیر تحلیلی ہوں گے۔یوں حیرانی کی بات نہیں ہے کہ تسلسل 5.24 اور تسلسل 5.24 کا ارتکازی وقفہ وسیع نہیں ہے ماسوائے اس صورت میں جب اجزاء کی تعداد محدود ہونے کی بنا تسلسل کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے۔

کثیر رکنی حل۔لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$

طاقتی تسلسل کے تخفیف سے کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے جس کا حل، ارتکازی شرط کے قید سے آزاد، تمام x کے لئے پایا جاتا ہے۔ایسے اعلیٰ تفاعل جو سادہ تفرقی مساوات کے حل ہوتے ہیں میں یہ صورت عموماً پائی جاتی ہے جن سے مختلف نسل کے اہم کثیر رکنی حاصل ہوتے ہیں۔لیژانڈر مساوات میں n کی قیمت غیر منفی عدد صحیح ہونے کی صورت میں $s = n$ پر مساوات 5.22 صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا $a_{n+2} = 0$ ہو گا اور یوں $a_{n+4} = 0$ ، $a_{n+6} = 0$ ، $\cdots$ ہوں گے۔جفت n کی صورت میں y_1 کثیر رکنی ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں y_2 کثیر رکنی ہو گا۔ان کثیر رکنی کو مستقل مقدار سے ضرب دیتے ہوئے **لیژانڈر کثیر رکنی**[28] حاصل ہوتی ہیں جنہیں $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔روایتی طور پر اس مستقل مقدار کو درج ذیل طریقے سے چنا جاتا ہے۔

تسلسل میں x^n کے عددی سر a_n کو

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \qquad n \text{ مثبت عدد ہے} \tag{5.26}$$

چنا [مثال 5.7 دیکھیں] جاتا ہے (جبکہ $n = 0$ کی صورت میں $a_n = 1$ چنا جاتا ہے)۔ مساوات 5.22 کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے دیگر عددی سر حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \qquad (s \le n-2) \tag{5.27}$$

[28] Legendre polynomial

کثیر رکنی میں x کی بلند تر طاقت کے عددی سر a_n کو مساوات 5.26 کے تحت چننے سے $x = 1$ پر تمام P_n کی قیمت اکائی $[P_n(1) = 1]$ حاصل ہوتی ہے [شکل 5.4 دیکھیں]۔یہی a_n یوں چننے کی وجہ ہے۔مساوات 5.27 میں $s + 2 = n$ یعنی $s = n - 2$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.26 سے a_n پر کرتے ہیں۔

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

شمار کنندہ میں $(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)!$ اور نسب نما میں $(n!)^2$ کو $n!n!$ لکھ کر اس میں $n! = n(n-1)!$ اور $n! = n(n-1)(n-2)!$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2^n n(n-1)! n(n-1)(n-2)!}\\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}\end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں $n(n-1)2n(2n-1)$ کٹ جاتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned}a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2}\\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}\end{aligned}$$

اور دیگر عددی سر حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں درج ذیل عمومی کلیہ لکھا جا سکتا ہے۔

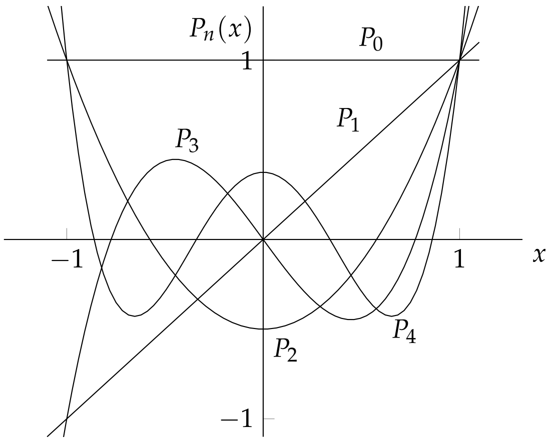
$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \qquad (n - 2m \geq 0) \tag{5.28}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفرقی مساوات 5.16 کا کثیر رکنی حل

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \sum_{m=0}^{M}(-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}\\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!}x^{n-2} + - \cdots\end{aligned} \tag{5.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ عدد صحیح ہو گا اور M اس عدد صحیح کے برابر ہو گا [مثال 5.8 دیکھیں]۔درج بالا n درجی لیژانڈر کثیر رکنی[29] کہلاتا ہے اور اس کو $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔چند پہلے لیژانڈر کثیر رکنی

Legendre polynomial[29]



شکل 5.4: لیژانڈر کثیر رکنی۔

جنہیں شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) \end{aligned} \tag{5.30}$$

لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر آپس میں **عمودی**[30] ہیں۔یہ خصوصیت **فوریئر لیژانڈر** تسلسل کے لئے ضروری ہے جن پر فوریئر تسلسل کے باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال 5.6: لیژانڈر مساوات 5.16 کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت میں لکھتے ہوئے ثابت کریں کی اس کے عددی سر $x=0$ پر تحلیلی ہیں۔

حل: لیژانڈر مساوات کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}=0$ حاصل ہوتا ہے

orthogonal[30]

جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ ہیں جن کی مکلارن تسلسل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{1-x^2} &= n(n+1)(1+x^2+x^4+\cdots) \\
\frac{-2x}{1-x^2} &= -2(x+x^3+x^5+\cdots)
\end{aligned}$$

پہلی تسلسل کا $1 = \frac{a_{m+1}}{a_m}$ ہیں لہٰذا اس کا رداس ارتکاز $R = 1$ ہے۔ دوسری تسلسل کا بھی $1 = \frac{a_{m+1}}{a_m}$ اور $R = 1$ ہیں۔ یوں دونوں تسلسل تحلیلی ہیں۔

مثال 5.7: درج ذیل مساوات کے بائیں ہاتھ سے اس کا دایاں ہاتھ حاصل کریں۔

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}$$

حل: پہلے $n = 3$ کے لئے حل کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں شمار کنندہ میں طاق اعداد (جو طاق مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو ایک طرف اور جفت اعداد (جو جفت مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو دوسری طرف منتقل کرتے ہوئے ہر جفت عدد سے 2 کا ہندسہ نکالا گیا ہے۔

$$\frac{(2\cdot3)!}{2^3(3!)^2} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2^3(3\cdot2\cdot1)^2} = \frac{6\cdot4\cdot2\cdot5\cdot3\cdot1}{2^3(3!)^2} = \frac{2^3(3\cdot2\cdot1)\cdot5\cdot3\cdot1}{2^3(3!)^2} = \frac{5\cdot3\cdot1}{3!}$$

شمار کنندہ میں اعداد کو ترتیب دیتے ہوئے اور اس میں سب سے بڑے عدد 5 کو $2\cdot3-1$ لکھتے ہوئے $\frac{1\cdot3\cdot(2\cdot3-1)}{3!}$ لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں یہی سب کچھ عمومی عددی صحیح n کے لئے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2^n(n!)^2} \\
&= \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots8\cdot6\cdot4\cdot2\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots7\cdot5\cdot3\cdot1}{2^n(n!)^2} \\
&= \frac{2^n n(n-1)(n-2)\cdots4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots7\cdot5\cdot3\cdot1}{2^n(n!)^2} \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots7\cdot5\cdot3\cdot1}{n!} \\
&= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}
\end{aligned}$$

مثال 5.8: لیژانڈر کثیر رکنی مجموعہ [مساوات 5.29] کی بالائی حد M ہے۔ M کی قیمت دریافت کریں۔

حل: مساوات 5.22 لیژانڈر کثیر رکنی کے عددی سر دیتی ہے جس کے تحت $s = n$ پر عددی سر صفر ($a_{n+2} = 0$) کے برابر ہو گا اور یوں بقایا عددی سر a_{n+4} ، a_{n+6} ، . . . بھی صفر کے برابر ہوں گے۔یوں کثیر رکنی میں x کی زیادہ سے زیادہ طاقت n ہو گی۔اس طرح $n = 5$ کی صورت میں a_5x^5 ، a_3x^3 اور a_1x^1 پایا جائے گا جبکہ $n = 8$ کی صورت میں a_8x^8 ، a_6x^6 ، a_4x^4 ، a_2x^2 اور a_0 پائے جائیں گے۔ آپ نے دیکھا کہ طاق n کی صورت میں کثیر رکنی میں کل $\frac{n-1}{2}$ پائے گئے جبکہ جفت n کی صورت میں ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ تھی۔یوں طاق n کی صورت میں $M = \frac{n-1}{2}$ اور جفت n کی صورت میں $M = \frac{n}{2}$ ہو گا جہاں M عدد صحیح ہے۔

مثال 5.9: (کلیہ روڈریگیس)

تفاعل $(x^2 - 1)^n$ کو الکراجی کے مسئلہ ثنائی[31] سے پھیلا کر اس کا n درجی تفرق لیں۔حاصل جواب کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل کریں جس کو کلیہ روڈریگیس[32] کہتے ہیں۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \tag{5.31}$$

حل: $(x^2 - 1)^n$ کو مسئلہ الکراجی سے پھیلاتے ہوئے $n + 1$ ارکان ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y = (x^2-1)^n = (x^2)^n &+ \frac{n}{1!}(x^2)^{n-1}(-1)^1 + \frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^{n-2}(-1)^2 + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^2(-1)^{n-2} + \frac{n}{1!}(x^2)(-1)^{n-1} + (-1)^n \end{aligned} \tag{5.32}$$

---

[31] binomial theorem ابو بکر ابن محمد ابن الحسین الکراجی [953-1029] ایرانی ریاضی دان۔

[32] Rodrigues' formula فرانسیسی ریاضی دان بنجامن اولانڈے روڈریگیس [1794-1851]

اس مساوات کا آخری رکن مستقل مقدار $(-1)^n$ ہے جبکہ اس رکن سے ایک پہلے رکن میں x^2 پایا جاتا ہے۔یوں y' لینے سے آخری رکن صفر ہو جائے گا لہٰذا y' میں n ارکان رہ جائیں گے۔ y' کے آخری رکن میں x^1 پایا جائے گا۔ y'' لینے سے یہ رکن مستقل مقدار ہو جائے گا جبکہ ارکان کی تعداد میں مزید کمی رو نما نہیں ہو گی۔اسی طرح y''' لینے سے ایک اور رکن کم ہو جائے گا اور $n-1$ ارکان رہ جائیں گے۔ y'''' لینے سے ارکان کی تعداد میں کمی پیدا نہیں ہو گی۔یوں ہر دو مرتبہ تفرق لینے سے تعداد اکائی کی پیدا ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ n درجی تفرق $y^{(n)}$ لینے کے بعد ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ ہو گی جس کو ہم M سے ظاہر کرتے ہیں اور جو صحیح عدد ہو گا۔

مساوات 5.32 کو مجموعے کی صورت میں لکھتے ہیں جس میں $m=0$ تا $m=n$ ارکان یعنی $n+1$ ارکان ہیں۔

$$y=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(x^2)^{n-m}(-1)^m}{(n-m)!m!}=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!}x^{2n-2m} \tag{5.33}$$

اب $z=x^{2n-2m}$ پر نظر رکھیں۔اس کے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
z'&=(2n-2m)x^{2n-2m-1}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-1)!}x^{2n-2m-1}\\
z''&=(2n-2m)(2n-2m-1)x^{2n-2m-2}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-2)!}x^{2n-2m-2}\\
z'''&=(2n-2m)(2n-2m-1)(2n-2m-2)x^{2n-2m-3}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-3)!}x^{2n-2m-3}\\
&\vdots\\
z^{(k)}&=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-k)!}x^{2n-2m-k}\\
z^{(n)}&=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-n)!}x^{2n-2m-n}=\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}
\end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.33 کا n درجی تفرق لکھتے ہیں

$$y^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]=\sum_{m=0}^{M}\frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!}\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}$$

جس کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

مثال 5.10: روڈریگیس مساوات 5.31 استعمال کرتے ہوئے n مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

حل: فرض کریں کہ $y = (x-1)^3$ ہے۔یوں $y' = 3(x-1)^2$ ، $y'' = 3\cdot 2(x-1)$ ، $y''' = 3\cdot 2\cdot 1$ اور $y^{(4)} = 0$ ہوں گے جن سے $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ ، $y''(1) = 0$ ، $y'''(1) = 3!$ اور $y(1)^{(4)} = 0$ حاصل ہوتے ہیں۔اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $y_1 = (x-1)^n$ کی صورت میں

$$y_1 = (x-1)^n, \quad y_1^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x-1)^{n-m}, \quad y_1^{(m)}(1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.34}$$

اور $y_2 = (x+1)^n$ کی صورت میں

$$y_2 = (x-1)^n, \quad y_2^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x+1)^{n-m}, \quad y_2^{(m)}(-1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.35}$$

ہو گا جہاں $\delta_{n,m}$ کی تعریف درج ذیل ہے (یعنی $m = n$ کی صورت میں $\delta = 1$ جبکہ $m \neq n$ کی صورت میں $\delta = 0$ ہے)۔

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{5.36}$$

مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $y_1 = (x-1)^n$ کے تمام تفرقات کی قیمت $x = 1$ پر صفر ہو گی ماسوائے n درجی تفرق، جس کی قیمت $n!$ ہو گی۔ مساوات 5.35 یہی کچھ $y_2 = (x+1)^n$ کے بارے میں $x = -1$ پر کہتی ہے۔

اب اگر $X = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n = y_1 y_2$ ہو تب **کلیہ لیبنٹز**[33] سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \overbrace{\frac{\mathrm{d}^{m-s} y_1}{\mathrm{d}x^{m-s}}}^{M} \cdot \overbrace{\frac{\mathrm{d}^s y_2}{\mathrm{d}x^s}}^{N}$$

اگر $m \neq n$ ہو، اور بالخصوص اگر $m < n$ ہو، تب مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $M(x=1) = 0$ ہو گا جبکہ مساوات 5.35 کہتی ہے کہ تب $N(x=-1) = 0$ ہو گا۔ان نتائج کی بنا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = 0 \tag{5.37}$$

مساوات 5.31 کو استعمال کرتے ہوئے $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n[(x^2-1)^n]}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\left.\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

ہو گا جہاں تکمل بالحصص استعمال کیا گیا ہے۔مساوات 5.37 کے تحت $\left.\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{1} = \left.\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{-1} = 0$ ہے لہٰذا آخری قدم پر تکمل کے باہر تمام حصہ صفر کے برابر ہے اور یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\left.\frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-2} X}{\mathrm{d}x^{n-2}}\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+2} X}{\mathrm{d}x^{n+2}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-2} X}{\mathrm{d}x^{n-2}}\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

جہاں دوبارہ تکمل بالحصص لیا گیا ہے۔پہلی کی طرح اب بھی تکمل کا باہر والا حصہ صفر کے برابر ہے۔اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر بار بیرونی حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔یوں s مرتبہ تکمل لیتے اور بیرونی حصے کو صفر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^s}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+s} X}{\mathrm{d}x^{n+s}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-s} X}{\mathrm{d}x^{n-s}}\,\mathrm{d}x$$

---

[33] Leibnitz formula

آخر کار $s=n$ ہو گا اور یوں درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $X = \frac{\mathrm{d}^0 X}{\mathrm{d}x^0}$ لکھا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+n} X}{\mathrm{d}x^{n+n}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-n} X}{\mathrm{d}x^{n-n}} \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{2n} X}{\mathrm{d}x^{2n}} \cdot X \,\mathrm{d}x$$

$X = (x^2-1)^n$ کا الکراجی ثنائی تسلسل مساوات 5.32 دیتی ہے جس کا $2n$ درجی تفرق لینے سے، پہلے رکن کے علاوہ، تمام ارکان صفر کے برابر ہو جاتے ہیں۔یوں اس کا $2n$ درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}^{2n} X}{\mathrm{d}x^{2n}} = (2n)!$ ہو گا جس سے درج بالا تکمل یوں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x \tag{5.38}$$

لکھا جاتا ہے۔آئیں $\int X \,\mathrm{d}x$ کو تکمل بالحصص کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n \,\mathrm{d}x \\
&= (x-1)^n \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n(x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر ہے۔اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر مرتبہ تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ s مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے اور تکمل کے باہر حصے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= (-1)^s \int_{-1}^{1} [n(n-2)\cdots(n-s+1)](x-1)^{n-s} \frac{(x+1)^{n+s}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+s)} \,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^s \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{n!(x+1)^{n+s}}{(n+s)!}
\end{aligned}$$

آخر کار $s = n$ ہو گا جس پر درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-n}}{(n-n)!} \frac{n!(x+1)^{n+n}}{(n+n)!} \\
&= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} \\
&= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

جہاں $0! = 1$ (مساوات 5.94) پر کیا گیا ہے۔درج بالا نتیجے کو مساوات 5.38 میں پر کرتے ہیں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \tag{5.39}$$

جہاں منفی ایک کا جفت طاقت اکائی کے برابر $[(-1)^{2n} = 1]$ ہے۔

مثال 5.11: درج ذیل ثابت کریں جہاں $n \neq m$ ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \neq m) \tag{5.40}$$

حل: فرض کریں کہ $X = (x^2-1)^n$ اور $Y = (x^2-1)^m$ ہیں۔ یوں مساوات 5.31 کے تحت $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ اور $P_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m}$ ہوں گے لہٰذا

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n} \cdot \frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m} \,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔چونکہ n اور m برابر نہیں ہیں لہٰذا ان میں ایک کی قیمت دوسرے سے کم ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $n < m$ ہے۔گزشتہ مثال کی طرح، درج بالا کو بار بار تکمل بالحصص سے حل کرتے ہوئے، ہر بار تکمل کے باہر

حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور آخر کار درج ذیل ملتا ہے۔ مساوات 5.36 کے تحت Y کا صرف اور صرف m درجی تفرق غیر صفر ہے درج ذیل صفر کے برابر ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{\mathrm{d}^{m-n} Y}{\mathrm{d}x^{m-n}} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{\mathrm{d}^{m-n+1} Y}{\mathrm{d}x^{m-n+1}} \bigg|_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

مثال 5.12: پیداکار تفاعل

الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ کا تسلسل لکھ کر اس میں $v = 2xu - u^2$ پر کریں۔ ان میں u^0 ارکان کا مجموعہ حاصل کریں۔اسی طرح u^1 ارکان کا مجموعہ،اور u^2 ارکان کا مجموعہ، . . . حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ ان مجموعوں کا عددی سر بالترتیب P_0 ، P_1 ، P_2 ، . . . ہو گا یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n \tag{5.41}$$

حل: آئیں P_0 ، P_1 اور P_2 کے لئے حل کریں۔ دیے تفاعل کا الکراجی ثنائی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 v^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 v^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 v^4}{2^4 \cdot 4!} + \cdots$$

چونکہ u^2 کا عدد سر P_2 ہو گا اور درج بالا تسلسل کے پہلے تین ارکان میں کے بعد u کے زیادہ بلند طاقت پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم تسلسل کے پہلے تین ارکان پر نظر رکھتے ہیں۔اس تسلسل میں $v = 2xu - u^2$ پر کرتے ہوئے درکار نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(1-v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(2xu-u^2)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3(2xu-u^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \cdots \\ &= 1 + (xu - \frac{u^2}{2}) + \frac{3}{8}(4x^2u^2 + u^4 - 4xu^3) + \cdots \\ &= \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{(x)}_{P_1} u + \underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)}_{P_2} u^2 + \cdots\end{aligned}$$

سوالات

سوال 5.21 تا سوال 5.26 لیژانڈر کثیر رکنی اور تفاعل پر مبنی ہیں۔

سوال 5.21: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n=0$ لیتے ہوئے $P_0(x)=1$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقت کے x پائے جاتے ہیں لہٰذا $n=0$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n=0$ پر کرتے اور $0!=1$ لیتے ہوئے $P_0(x)=1$ ملتا ہے۔[$0!=1$ کا ثبوت **گیما تفاعل**[34] کی مدد سے اسی باب میں دیا جائے گا۔]

سوال 5.22: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n=1$ لیتے ہوئے $P_1(x)$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقتی x پائے جاتے ہیں لہٰذا $n=1$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n=1$ پر کرتے ہوئے $P_1(x)=x$ ملتا ہے۔

سوال 5.23: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 سے $P_3(x)$ تا $P_5(x)$ حاصل کریں جنہیں مساوات 5.30 میں پیش کیا گیا ہے۔

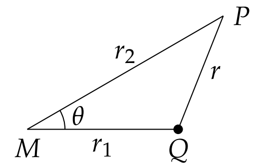
سوال 5.24: $P_0(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n=0$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1-x^2)y''-2xy'=0$ ہو گی اور $y=P_0=1$ ، $y'=P_0'=0$ اور $y''=P_0''=0$ ہوں گے۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1-x^2)(0)-2x(0)$ یعنی 0 حاصل ہوتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.25: $P_1(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n=1$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ ہو گی جبکہ $y=P_1=x$ ، $y'=P_1'=1$ اور $y''=P_1''=0$ ہیں۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے

[34] Gamma function



شکل 5.5: نقطہ برقی بار کا برقی میدان [سوال 5.27]۔

بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1-x^2)(0)-2x(1)+2(x)$ یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.26: $P_3(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کے حل ہیں۔

جوابات: $n=3$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی صورت $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ ہو گی جبکہ $y=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ ، $y'=\frac{1}{2}(15x^2-3)$ اور $y''=15x$ ہیں جنہیں مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)(15x)-2x[\tfrac{1}{2}(15x^2-3)]+12[\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)]$$

یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.27: **نظریہ مخفی توانائی**
آپ نقطہ برقی بار کے برقی میدان سے بخوبی واقف ہیں۔شکل 5.5 میں محدد کے مرکز M سے ہٹ کر نقطہ بار Q پایا جاتا ہے جس کا عمومی مقام P پر برقی دباو $V=\frac{Q}{4\pi\epsilon r}=\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}$ ہے۔ $\frac{Q}{4\pi\epsilon}$ کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.41 کی استعمال سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}=\frac{1}{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m \tag{5.42}$$

جواب: $r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=r_2^2[1-2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cos\theta+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2]$ لکھتے ہوئے $u=\frac{r_1}{r_2}$ اور $x=\cos\theta$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 5.28: درج ذیل ثابت کریں۔مساوات 5.41 کو استعمال کریں۔

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n,\quad P_{2n+1}(0)=0$$

سوال 5.29: بونٹ کلیہ توالی

مساوات 5.41 کا u تفرق لے کر دوبارہ مساوات 5.41 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل **بونٹ کلیہ توالی**[35] حاصل کریں۔

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{5.43}$$

جواب: مساوات 5.41 کا ایک درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$ لیتے ہوئے دوبارہ مساوات 5.41 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\frac{-\frac{1}{2}(-2x+2u)}{(1-2xu+u^2)\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum nP_n u^{n-1} \\
\implies &\frac{x-u}{1-2xu+u^2}\sum P_n u^n = \sum nP_n u^{n-1} \\
\implies &x\sum P_n u^n - \sum P_n u^{n+1} = \sum nP_n u^{n-1} - 2x\sum nP_n u^n + \sum nP_n u^{n+1}
\end{aligned}$$

اب دونوں جانب u^n کے عددی سر برابر لیتے ہیں۔

$$xP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1}$$

اس کو ترتیب دے کر درکار نتیجہ $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.30: شریک لیژانڈر تفاعل

درج ذیل مساوات

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \tag{5.44}$$

میں $y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0 \tag{5.45}$$

صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ درج بالا مساوات کا حل

$$u = \frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$$

ہے جس کے شریک $y(x)$ کو $P_n^m(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو **شریک لیژانڈر تفاعل**[36] کہتے ہیں۔

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} \tag{5.46}$$

شریک لیژانڈر تفاعل کوانٹم میکانیات[37] میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

[35] Bonnet's recursion
[36] associated Legendre's functions
[37] quantum mechanics

جواب: مساوات 5.44 میں $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}u$ پر کرنے سے مساوات 5.45 حاصل ہوتا ہے۔بقایا حصے کو اب حل کرتے ہیں۔ لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں $D^m[y] = D^{m-1}[y'] = D^m[y]$ ، $D^m[y''] = D^{m+2}[y]$ ، ...ہو گا۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ کو

$$D^m[(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] = -D^m[(x^2-1)y''] - 2D^m[xy'] + n(n+1)D^m[y]$$

لکھتے ہیں جس میں

$$\begin{aligned}
D^m[(x^2-1)y''] &= (x^2-1)D^m[y''] + 2mxD^{m-1}[y''] + m(m-1)D^{m-2}[y''] \\
&= (x^2-1)D^{m+2}[y] + 2mxD^{m+1}[y] + m(m-1)D^m[y] \\
D^m[xy'] &= xD^m[y'] + mD^{m-1}[y'] = xD^{m+1}[y] + mD^m[y] \\
D^m[y] &= D^m[y]
\end{aligned}$$

پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)D^{m+2}[y] - 2(m+1)xD^{m+1}[y] + [n(n+1) - m(m+1)]D^m[y]$$

ملتا ہے جس میں $D^m[y] = y^m = u$ ، $D^{m+1} = y^{m+1} = u'$ اور $D^{m+2} = y^{m+2} = u''$ لیتے ہوئے

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ابتدائی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر تھا۔ اس مساوات کا حل $u = y^m$ ہے جہاں y ازخود لیژانڈر مساوات کا حل ہے یعنی $u = \frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ ہے۔

سوال 5.31: گزشتہ سوال میں شریک لیژانڈر تفاعل کا حل P_n^m حاصل کیا گیا۔مساوات 5.31 کی مدد سے اس کو لکھیں۔

جواب: $P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n]$

5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس

کئی نہایت اہم دو درجی سادہ تفرقی مساوات، مثلاً **بیسل تفاعل** (جس پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا)، کے عددی سر تحلیلی [حصہ 5.1 میں تعریف دی گئی ہے] نہیں ہیں۔اس کے باوجود انہیں تسلسل (طاقتی تسلسل ضرب لوگارتھم یا طاقتی تسلسل ضرب x کی کسری طاقت، . . .) سے حل کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو **ترکیب فروبنیوس**[38] کہتے ہیں[39]۔ درج ذیل مسئلہ طاقتی ترکیب کو وسعت دیتے ہوئے ترکیب فروبنیوس کا استعمال ممکن بناتا ہے۔

مسئلہ 5.2: ترکیب فروبنیوس

$x = 0$ پر تحلیلی $b(x)$ اور $c(x)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0 \tag{5.47}$$

کا کم از کم ایک عدد حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5.48}$$

جہاں r حقیقی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے اور $a_0 \neq 0$ ہے۔

مساوات 5.47 کا (خطی طور غیر تابع) دوسرا حل بھی پایا جاتا ہے جو مساوات 5.48 کی طرز کا ہو سکتا ہے (جس میں r مختلف ہو گا اور تسلسل کے عددی سر بھی مختلف ہوں گے) اور یا اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔

اس مسئلے میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں x_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔مسئلے میں $a \neq 0$ کا مطلب ہے کہ بذریعہ تجزی قوسین سے x کی بلند تر ممکنہ طاقت بذریعہ تجزی باہر نکالی جاتی ہے۔

بیسل تفاعل کو مساوات 5.47 کی طرز پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2}y = 0 \qquad (\text{مقدار معلوم ہے } v)$$

[38] Frobenius method

[39] جرمن ریاضی دان فرڈیناند گیوگ فروبنیوس [1849-1917]

جس میں $b(x)=1$ اور $c(x)=x^2-v^2$ دونوں $x=0$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا اس پر درج بالا مسئلہ لاگو ہو گا۔سادہ طاقتی تسلسل سے بیسل تفاعل کا حل ممکن نہیں ہے۔

مساوات 5.48 میں طاقتی تسلسل کو x کی ایسی طاقت سے ضرب دیا گیا ہے جو منفی یا کسری ہو سکتا ہے۔یاد رہے کہ غیر منفی طاقت کے x پر مبنی تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔

مسئلہ فروبنیوس کے ثبوت([جو کتاب کے آخر میں صفحہ 375 پر حوالہ [2] میں دیا گیا ہے) کے لئے اعلیٰ درجہ مخلوط تجزیہ[40] درکار ہے لہٰذا اسے پیش نہیں کیا جائے گا۔

اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے p اور q تحلیلی ہوں تب x_0 **غیر نادر نقطہ**[41] کہلائے گا۔

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

اگر $x=x_0$ درج بالا مساوات کا نادر نقطہ ہو اور $(x-x_0)p$ اور $(x-x_0)^2q$ نقطہ $x=x_0$ پر تحلیلی ہوں تب x_0 **منظم نادر نقطہ**[42] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر منظم نادر نقطہ**[43] کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے h ، p اور q تحلیلی ہوں اور $h\neq 0$ ہو (تاکہ ہم تفرقی مساوات کو h سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کر سکیں) تب x_0 **منظم نقطہ**[44] کہلائے گا ورنہ اسے **نادر نقطہ**[45] کہیں گے۔

$$\tilde{h}(x)y''+\tilde{p}(x)y'+\tilde{q}(x)y=0$$

مثال 5.13: مساوات $(x+1)y''+2xy'-3y=0$ کو $x+1$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $p=\frac{2x}{x+1}$ اور $q=-\frac{3}{x+1}$ ملتے ہیں جو $x=-1$ پر غیر تحلیلی ہیں۔یوں $x=-1$ مساوات کا نادر نقطہ ہے۔اب $(x+1)p=2x$ اور $(x+1)^2q=-3(x+1)$ دونوں $x=-1$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا $x=-1$ منظم نادر نقطہ ہے۔

---

[40] advanced complex analysis
[41] regular point
[42] regular singular point
[43] irregular singular point
[44] regular point
[45] singular point

اشاری مساوات حل ظاہر کرتی ہے

آئیں مساوات 5.47 کو ترکیب فروبنیوس سے حل کریں۔ مساوات 5.47 کو x^2 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0 \tag{5.49}$$

چونکہ $b(x)$ اور $c(x)$ تحلیلی ہیں للہذا انہیں طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \quad c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

اور اگر b یا (اور) c کثیر رکنی ہوں تب b یا (اور) c کو جوں کا توں رہنے دیا جاتا ہے۔ مساوات 5.48 کا جزو در جزو تفرق لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y &= a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots \\ y' &= ra_0x^{r-1} + (r+1)a_1x^r + (r+2)a_2x^{r+1} + \cdots \\ y'' &= r(r-1)a_0x^{r-2} + (r+1)(r)a_1x^{r-1} + (r+2)(r+1)a_2x^r + \cdots \end{aligned} \tag{5.50}$$

مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کا مساوات 5.50 سے موازنہ کریں۔ طاقتی تسلسل $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے تفرق $y' = \sum_{m=1}^{\infty} mc_m x^{m-1}$ کا پہلا رکن $m = 1$ اور اس کے دو درجی تفرق کا پہلا رکن $m = 2$ ہے جبکہ موجودہ دونوں تفرقی تسلسل کا پہلا رکن $m = 0$ ہے۔

درج بالا تفرقات کو نہایت خوش اسلوبی کے ساتھ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r-1} = x^{r-1}[ra_0 + (r+1)a_1x + \cdots] \\ y'' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} = x^{r-2}[r(r-1)a_0 + (r+1)ra_1x + \cdots] \end{aligned} \tag{5.51}$$

ان تمام کو مساوات 5.49 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x^r[r(r-1)a_0 + \cdots] + (b_0 + b_1x + \cdots)x^r(ra_0 + \cdots) \\ + (c_0 + c_1x + \cdots)x^r(a_0 + a_1x + \cdots) = 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

اب ہم x^r ، x^{r+1} ، x^{r+2} ، . . . کے عددی مجموعوں کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔سب سے کم طاقت x^r ہے جس کا عددی سر درج ذیل ہے۔

$$[r(r-1) + b_0 r + c_0]a_0 = 0$$

چونکہ مسئلہ فروبنیوس کے تحت $a_0 \neq 0$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0 \qquad \text{(اشاری مساوات)} \tag{5.53}$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کو سادہ تفرقی مساوات 5.47 کی **اشاری مساوات**[46] کہتے ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے تفرقی مساوات کے حل کی اساس حاصل ہوتی ہے جن میں ایک حل مساوات 5.48 کی طرز کا ہو گا جس میں r کی قیمت درج بالا اشاری مساوات کا جذر ہو گا۔دوسرے حل کی تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں جنہیں اشاری مساوات سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

- پہلی صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر نہیں ہے۔
- دوسری صورت:اشاری مساوات کے دو یکساں جذر پائے جاتے ہیں۔
- تیسری صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر ہے۔

پہلی صورت میں جوڑی دار مخلوط جذر $r_1 = a + ib$ اور $r_2 = \bar{r_1} = a - ib$ شامل ہیں چونکہ ان کا فرق $r_1 - r_2 = i2b$ خیالی عدد ہے جو حقیقی عدد صحیح نہیں ہے۔ مسئلہ 5.3 (جسے ضمیمے میں ثابت کیا گیا ہے) اساس کی صورت دیتی ہے جہاں ارتکاز کا عمومی ثبوت نہیں دیا گیا ہے۔ہاں انفرادی تسلسل کی مرکوزیت عام طریقے سے ثابت کی جا سکتی ہے۔ دوسری صورت میں لوگارتھمی جزو کا ہونا لازم ہے جبکہ تیسری صورت میں ہو سکتا ہے کہ لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہو یا نہ پایا جاتا ہو۔

مسئلہ 5.3: ترکیب فروبنیوس۔ حل کی اساس۔ تین صورتیں۔
فرض کریں کہ سادہ تفرقی مساوات 5.47 مسئلہ 5.2 پر پورا اترتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 کے جذر r_1 اور r_2 ہیں تب تین صورتیں پائی جاتی ہیں۔

---
[46] indicial equation

پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ،...) کے برابر نہیں ہے۔ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \tag{5.54}$$

اور

$$y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots) \tag{5.55}$$

ہو گی جہاں عددی سر مساوات 5.52 میں $r = r_1$ اور $r = r_2$ پر کرتے ہوئے حاصل کیے جائیں گے۔

دوسری صورت: یکساں جذر $r_1 = r_2 = r$ کی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.56}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^r(A_1x + A_2x^2 + \cdots) \qquad (x > 0) \tag{5.57}$$

ہو گی۔

تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ،...) کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \tag{5.58}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = Ky_1(x) \ln x = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.59}$$

ہے جہاں جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو (یعنی زیادہ قیمت کے جذر کو r_1 کہتے ہیں) اور K کی قیمت صفر بھی ہو سکتی ہے۔اگر $K = 0$ ہو تب دوسرا حل بھی پہلی حل کی طرح لکھنا ممکن ہو گا (مثال 5.17 دیکھیں)۔ بعض اوقات r_2 استعمال کرتے ہوئے حل y_2^* کے دو حصے پائے جائیں گے۔اس کا ایک حصہ در حقیقت r_1 میں سے حاصل حل y_1 ہی ہو گا جبکہ دوسرا حصہ نیا حل ہو گا یعنی $y_2^* = y_2 + ky_1$ لہٰذا اساس لکھتے ہوئے y_1 اور y_2 لیا جائے گا (سوال 5.36 کا جواب دیکھیں)۔

5.3.1 عملی استعمال

اشاری مساوات 5.53 کے جذر دریافت کرنے کے بعد ترکیب فروبنیوس بالکل طاقتی ترکیب کی طرح ہے۔ مساوات 5.54 تا مساوات 5.59 محض حل کی صورت دیتے ہیں جبکہ دوسرا حل عموماً **تخفیف درجہ** (حصہ 2.1) کی ترکیب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔

اشاری مساوات کے جذر حاصل کرنے کے بعد (زیادہ قیمت کی جذر) r_1 سے پہلا حل $y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کریں۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \cdots$) کے برابر نہ ہونے کی صورت میں دوسرا حل (کم قیمت کی جذر) r_2 کو استعمال کرتے ہوئے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا۔

$r_1 = r_2$ کی صورت میں دوسرے حل میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔ایسی صورت میں دوسرا حل $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل نہیں ہو گا لہٰذا دوسرا حل تخفیف درجہ کی مدد سے حاصل کیا جائے گا۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \cdots$) کے برابر ہونے کی صورت میں کبھی کبھار $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا ورنہ اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا اور اس حل کو بذریعہ تخفیف درجہ حاصل کیا جائے گا۔آپ پہلے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ ہی استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔

$y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کرتے ہوئے تین ممکنہ صورتیں پیدا ہوتی ہیں (اس حصے کے سوالات کے جوابات دیکھیں)۔پہلی صورت میں ایسی تسلسل y_2 حاصل ہوتی ہے جس میں صرف ایک عدد اختیاری مستقل پایا جاتا ہو لہٰذا عمومی حل y_1 اور y_2 کا مجموعہ ہو گا۔دوسری صورت میں تسلسل کو $ay_1 + by_2^*$ لکھنا ممکن ہو گا جہاں a اور b اختیاری مستقل ہوں گے لہٰذا اس حل میں y_1 بھی شامل ہے۔اس طرح عمومی حل $ay_1 + by_2^*$ ہو گا۔تیسری صورت میں $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے عددی سر حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ دوسرے حل میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے لہٰذا تخفیف درجہ سے حل حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.14: یولر کوشی مساوات۔پہلی، دوسری اور تیسری صورتیں۔ بلا لوگارتھمی جزو
مساوات یولر کوشی (حصہ 2.5)

$$x^2y'' + b_0xy' + c_0y = 0 \qquad (\text{مستقل ہیں } c_0 \text{ اور } b_0)$$

میں $y = x^r$ پر کرنے سے درج ذیل ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$r(r-1) + b_0r + c_0 = 0$$

جو اشاری مساوات ہے [اور $y = x^r$ مساوات 5.48 کی ایک صورت ہے]۔ دو منفرد جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^{r_1}$ ، $y_2 = x^{r_2}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ دوہری جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^r$ ، $y_2 = x^r \ln x$ حاصل ہوتی ہے۔مساوات یولر کوشی کی صورت میں تیسری صورت نہیں پائی جاتی۔

مثال 5.15: دوسری صورت۔ (دوہرا جذر)
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0 \tag{5.60}$$

(یہ بیش ہندسی[47] مساوات کی ایک مخصوص صورت ہے۔)

حل دیے گئے مساوات کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 کے شرائط پر پورا اترتی ہے۔یوں مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.60 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-1}\\ + 3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r} = 0\end{aligned} \tag{5.61}$$

---

[47] hypergeometric equation

x کی کمتر طاقت x^{r-1} ، جو دوسرے اور چوتھے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$[-r(r-1)-r]a_0 = 0 \quad \implies \quad r^2 = 0$$

اشاری مساوات کا دوہرا جذر $r = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.61 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے x^s کی عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$s(s-1)a_s - (s+1)sa_{s+1} + 3sa_s - (s+1)a_{s+1} + a_s = 0$$

$a_{s+1} = a_s$ ملتا ہے۔یوں $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots$ ہو گا لہٰذا $a_0 = 1$ چنتے ہوئے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$$

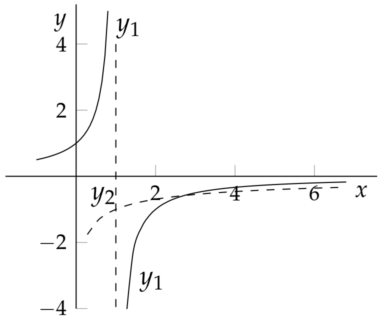
دوسرا حل: دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ (حصہ 2.1) حاصل کرتے ہیں۔یوں $y_2 = uy_1$ اور اس کے تفرقات کو مساوات میں پر کرتے ہوئے (صفحہ 94 پر) مساوات 2.15 ملتا ہے جس کو یہاں استعمال کرتے ہیں۔یہاں $p = \frac{3x-1}{x(x-1)}$ ہے لہٰذا

$$\int p \,\mathrm{d}x = \int \frac{3x-1}{x(x-1)} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = 2\ln(x-1) + \ln x$$

ہو گا اور یوں مساوات 2.15 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u' = v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p \,\mathrm{d}x} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 x} = \frac{1}{x}, \quad u = \ln x, \quad y_2 = uy_1 = \frac{\ln x}{1-x}$$

y_1 اور y_2 جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے وقفہ $0 < x < 1$ اور $1 < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا اس وقفے پر یہ حل کی اساس ہیں۔



شکل 5.6: مثال 5.15 کے حل۔

مثال 5.16: لوگارتھمی جزو والا دوسرا حل
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(x^2-x)y''-xy'+y=0 \tag{5.62}$$

حل: مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.62 میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2-x)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-2}-x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}=0$$

x^2 اور x کو مجموعوں کے اندر لے جاتے ہوئے اور x کی یکساں طاقتوں کا اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2a_mx^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-1}=0 \tag{5.63}$$

x کی کم تر طاقت x^{r-1}، جو $m=0$ پر کرنے سے دوسرے مجموعے سے ملتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرنے سے

$$r(r-1)=1$$

یعنی $r_1=1$ اور $r_2=0$ ملتے ہیں (جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1-r_2>0$ ہو۔) جن میں فرق عدد صحیح کے برابر ہے لہٰذا یہ تیسری صورت ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.63 کو یکساں طاقت کی صورت میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $m = s$ اور دوسرے مجموعے میں $s = m - 1$ یعنی $m = s + 1$ پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+r-1)^2 a_s x^{s+r} - \sum_{s=-1}^{\infty}(s+r+1)(s+r)a_{s+1}x^{s+r} = 0 \tag{5.64}$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1} = \frac{(s+r-1)^2}{(s+r+1)(s+r)}a_s$$

ملتا ہے جس میں $r = 1$ پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1} = \frac{s^2}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots) \tag{5.65}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $a_1 = 0$ ، $a_2 = 0$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔یوں $a_0 = 1$ چنتے ہوئے پہلا حل $y_1 = a_0 x^{r_1} = x$ ملتا ہے۔

دوسرا حل: ترکیب تخفیف درجہ (حصہ 2.1) استعمال کرتے ہوئے $y_2 = uy_1 = xu$ لیتے ہیں۔اس طرح $y_2' = u + u'x$ اور $y_2'' = xu'' + 2u'$ ہوں گے۔انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x)(xu'' + 2u') - x(xu' + u) + xu = 0$$

اس میں xu کٹ جاتا ہے۔بقایا مساوات کو x سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0$$

اس کو جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنا گیا ہے۔)

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x-2}{x^2-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad \ln u' = \ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right|$$

اس کو قوت نمائی طور پر لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنتے ہیں۔)

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad u = \ln x + \frac{1}{x}, \quad y_2 = uy_1 = x\ln x + 1$$

y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں اور y_2 میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے۔یوں مثبت x پر یہ حل کی اساس ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے بیش ہندسی مساوات حل ہوتا ہے جس کے حل میں کئی اہم تفاعل شامل ہیں۔بعض اوقات دیے گئے مساوات کو مساوات 5.47 کی صورت میں لانے میں دشواری پیش آتی ہے۔یوں

$$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$$

کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y''+\frac{3x-1}{x(x-1)}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$ ملتا ہے جس کے آخری جزو کو $\frac{x}{x}$ سے ضرب دیتے ہوئے $y''+\frac{3x-1}{x(x-1)}y'+\frac{x}{x^2(x-1)}y=0$ ملتا ہے جو درکار صورت ہے جس میں $p=\frac{3x-1}{x-1}$ اور $q=\frac{x}{x-1}$ ہیں۔

ترکیب فروبنیوس کو استعمال کرتے ہوئے عموماً اتنا کافی ہوتا ہے کہ مساوات کو $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$ شکل میں لایا جائے۔ درج ذیل سوالات حل کرتے ہوئے ایسا ہی کریں۔

مسئلہ 5.2 میں x کی جگہ $x-x_0$ بھی ممکن ہے جہاں x_0 مساوات کا نادر نقطہ ہے۔یوں عمومی تفرقی مساوات

$$(x-x_0)^2\alpha(x)y''+(x-x_0)\beta(x)y'+\gamma(x)y=0 \tag{5.66}$$

جس میں $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ اور $\gamma(x)$ تحلیلی ہوں (لہٰذا انہیں درج لکھا جا سکتا ہے)

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots,\quad \beta=\beta_0+\beta_1x+\cdots,\quad \gamma=\gamma_0+\gamma_1x+\cdots$$

کو ترکیب فروبنیوس سے حل کرتے ہوئے اشاری مساوات

$$\alpha_0r^2+(\beta_0-\alpha_0)r+\gamma_0=0 \tag{5.67}$$

حاصل ہو گی۔مساوات 5.66 کو $\alpha(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.47 طرز کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.66 میں $x_0=0$ پر کرنے سے مساوات 5.47 حاصل ہوتی ہے۔مساوات 5.66 کا حل

$$y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x-x_0)^m \tag{5.68}$$

لکھ کر حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.17: تیسری صورت میں بعض اوقات r_2 سے حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔
اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں کبھی کبھار دوسرا حل $y_2 = x^{r_2}\sum c_m x^m$ نہیں لکھا جا سکتا ہے۔اس مثال میں اس بات کی وضاحت ہو گی۔آئیں درج ذیل مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$2xy'' - 4y' - y = 0$$

اس مساوات میں $y = x^r\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ اور اس کے تفرقات

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}, \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

پر کرتے ہوئے

$$2x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2} - 4\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

ملتا ہے۔تینوں مجموعوں سے x^{r-1} باہر نکالتے ہوئے کاٹتے ہیں۔

$$x^{r-1}\sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1)c_m x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r)c_m x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} = 0$$

پہلے اور دوسرے مجموعے میں $s = m$ اور تیسرے مجموعے میں $s = m+1$ پر کرتے ہیں تا کہ x کے تمام طاقت یکساں لکھیں جائیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2(s+r)(s+r-1)c_s x^s - \sum_{s=0}^{\infty} 4(s+r)c_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^s = 0$$

آپ نے دیکھا کہ تیسرے مجموعے کا پہلا رکن اب $s = 1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔پہلے دو مجموعوں کا پہلا پہلا رکن مجموعے کے باہر لکھتے ہیں تا کہ تمام مجموعوں کا پہلا رکن ایک ہی جگہ سے شروع ہو۔

$$\begin{aligned} 2(0+r)(0+r-1)c_0x^0 &+ \sum_{s=1}^{\infty} 2(s+r)(s+r-1)c_s x^s \\ &- 4(0+r)c_0x^0 - \sum_{s=1}^{\infty} 4(s+r)c_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1}x^s = 0 \end{aligned}$$

یوں تمام مجموعوں کا پہلا رکن $s=1$ ظاہر کرے گا۔تینوں مجموعوں کو اکٹھا لکھتے ہیں

$$\underbrace{[2r(r-1)-4r]}_{2r(r-3)}c_0+\sum_{s=1}^{\infty}[2(s+r)(s+r-1)c_s-4(s+r)c_s-c_{s-1}]x^s=0 \tag{5.69}$$

جہاں پہلا رکن اشاری مساوات $2r(r-3)=0$ دیتا ہے جس کے جذر $r_1=3$ اور $r_2=0$ ہیں۔(یاد رہے کہ بڑی مقدار کے جذر کو r_1 لکھا جاتا ہے اور اسی کی مدد سے پہلا حل حاصل کیا جاتا ہے۔)

مساوات 5.69 میں $r=r_1=3$ پر کرتے ہوئے

$$[2\cdot 3(3-1)-4\cdot 3]c_0+\sum_{s=1}^{\infty}[2(s+3)(s+3-1)c_s-4(s+3)c_s-c_{s-1}]x^s=0$$

یعنی

$$\sum_{s=1}^{\infty}[2s(s+3)c_s-c_{s-1}]x^s=0$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل کلیہ توالی لکھی جا سکتا ہے۔

$$c_s=\frac{1}{2s(s+3)}c_{s-1} \qquad (s\geq 1)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_1&=\frac{1}{2\cdot 1(1+3)}c_0=\frac{1}{2\cdot 1(4)}c_0\\
c_2&=\frac{1}{2\cdot 2(2+3)}c_1=\frac{1}{2\cdot 2(2+3)}\cdot\frac{1}{2\cdot 1(4)}c_0=\frac{1}{2^2(2\cdot 1)(5\cdot 4)}c_0\\
&=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2^2(2\cdot 1)(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}c_0=\frac{6}{2^2(2\cdot 1)(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}c_0\\
c_3&=\frac{1}{2\cdot 3(3+3)}c_2=\frac{1}{2\cdot 3(6)}\cdot\frac{6}{2^2(2\cdot 1)(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}c_0\\
&=\frac{6}{2^3(3\cdot 2\cdot 1)(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}c_0\\
&\vdots\\
c_s&=\frac{6}{2^s s!(s+3)!}c_0
\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ آخری کلیہ $s=0$ اور $s=1$ کے لئے بھی کار آمد ہے لہٰذا ہم عمومی کلیہ توالی

$$c_s = \frac{6}{2^s s!(s+3)!}c_0 \qquad (s=0,1,2,\cdots)$$

اور پہلا حل

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{6}{2^m m!(m+3)!}c_0 x^m = c_0 x^3 \sum_{m=0}^{\infty}\frac{6}{2^m m!(m+3)!}x^m$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $r=r_2=0$ کو استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 5.69 میں $r=0$ پر کرتے ہوئے

$$[2\cdot 0(0-1)-4\cdot 0]c_0 + \sum_{s=1}^{\infty}[2(s+0)(s+0-1)c_s - 4(s+0)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

ملتا ہے جس میں c_0 کا عددی سر صفر کے برابر ہے جبکہ x_s کے عددی سر سے درج ذیل کلیہ توالی لکھا جا سکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2s(s-3)}c_{s-1}$$

اس کلیہ توالی کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0\\
c_2 &= \frac{1}{2\cdot 2(2-3)}c_1 = \frac{1}{2\cdot 2(2-3)}\frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0\\
c_3 &= \frac{1}{2\cdot 3\underbrace{(3-3)}_{=0}}c_2 = \frac{1}{2\cdot 3(3-3)}\frac{1}{2\cdot 2(2-3)}\frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0 = \frac{c_0}{0}
\end{aligned}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $c_0 \neq 0$ کی صورت میں $c_3=\infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ c_0 صفر نہیں ہو سکتا۔ایسا ہونے سے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جو $y_2=0$ دیگا۔اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں ہر بار ایک عددی سر $\frac{c_0}{0}$ حاصل ہو گا جس کی بنا چھوٹا جذر استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 5.32 تا سوال 5.44 کی اساس کو ترکیب فروبنیوس سے حاصل کریں۔ حاصل تسلسل کو بطور تفاعل پہچاننے کی کوشش کریں۔

سوال 5.32: $x^2y'' + 4xy' + (x^2+2)y = 0$
جواب: $y_1 = x^{-1}(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \cdots)$ ، $y_2 = x^{-1}(x - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{360} - + \cdots)$

سوال 5.33: $xy'' + 2y' + xy = 0$
جواب: $y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \cdots = \frac{\sin x}{x}$ ، $y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \cdots = \frac{\cos x}{x}$

سوال 5.34: $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$
جواب:اس طرز کے مساوات میں بہتر ہوتا ہے کہ $X = x - x_0 = x - 1$ اور $Y(X)$ استعمال کیا جائے جس سے درج بالا مساوات $X^2Y'' - 2XY' + 2Y = 0$ لکھی جاتی ہے۔حل کرنے کے بعد واپس x کا استعمال کریں۔ $r_1 = 2$ ، $r_2 = 1$ ہیں۔ $r = r_1 = 2$ استعمال کرتے ہوئے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جبکہ $r = r_2 = 1$ استعمال کرتے ہوئے حل $y = (x-1)^1[c_0 + c_1(x-1)]$ ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل ہیں لہٰذا یہ عمومی حل ہے۔یوں اساس $y_1 = x - 1$ اور $y_2 = (x-1)^2$ ہے۔

سوال 5.35: $y'' + xy' + (1 - \frac{2}{x^2})y = 0$
جواب: $r_1 = 0$ $r_2 = -3$ ہیں جن میں عددی صحیح فرق پایا جاتا ہے جو تیسری صورت ہے۔یوں r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = c_2(x^2 - \frac{3}{10}x^4 + \frac{3}{56}x^6 - \frac{1}{144}x^8 + \cdots)$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 استعمال کرتے ہوئے $y_2 = c_2x^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.36: $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$
جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -2$ ہیں۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_1 = x^0(1 - \tfrac{1}{6}x^4 + \tfrac{1}{120}x^8 + \cdots) = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

ملتا ہے جبکہ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_2^* = c_0(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{24} + \cdots) + c_2(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{120} - \cdots)$$

ملتا ہے جہاں آخری قوسین در حقیقت y_1 ہی ہے لٰہذا اساس لکھتے ہوئے اس حصے کو رد کیا جاتا ہے۔اس طرح اساس درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \tfrac{1}{6}x^4 + \tfrac{1}{120}x^8 + \cdots = \tfrac{\sin x^2}{x^2} \\ y_2 &= \frac{1}{x^2} - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^6 + \cdots = \tfrac{\cos x^2}{x^2} \end{aligned}$$

سوال 5.37: $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 3$ ہے جو دوسری صورت ہے۔یوں پہلا حل $y_1 = x^3$ ملتا ہے جبکہ دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ ($y_2 = x^3u$ پر کرتے ہوئے) $y_2 = x^3 \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.38: $xy'' + y' - xy = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ملتا ہے۔ $y_1 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \cdots$ ، $y_2 = y_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{8\cdot 16} - \cdots$

سوال 5.39: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
جواب: $r_1 = 2$ ، $r_2 = -2$ میں فرق عدد صحیح ہے۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے $y_1 = x^2$ ملتا ہے۔اگر آپ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے y_1 کی طرز کا حل حاصل کرنا چاہیں تو آپ کو $y_2 = x^{-2}(c_0 + c_4x^4) = c_0x^{-2} + c_4x^2$ ملتا ہے جس میں x^2 در حقیقت y_1 ہے جسے رد کرتے ہوئے اساس میں $y_2 = \frac{1}{x^2}$ لکھا جائے گا۔

سوال 5.40: $x^2y'' + 6xy' + (6 - 4x^2)y = 0$
جواب: $r_1 = -2$ ، $r_2 = -3$ ہیں۔ r_1 سے $y_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{15}x^2 + \cdots = \frac{\sinh 2x}{2x^3}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 سے $y = c_0(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \cdots) + c_1y_1$ ملتا ہے لٰہذا $y_2 = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \cdots$ لکھا جائے گا یعنی $y_2 = \frac{\cosh 2x}{x^3}$ ہے۔

سوال 5.41: $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ہے جو دوسری صورت ہے۔اساس $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x$ اور $y_2 = e^x \ln x$ ہیں۔

سوال 5.42: $xy'' + (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 0$ جبکہ $y_1 = e^{-x}$ اور $y_2 = e^{-x} \ln x$ ہیں۔

سوال 5.43: $y'' + (x - 1)y = 0$
جواب: $r_1 =$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 سے ایسا تسلسل ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل پائے جاتے

ہیں لہٰذا اس تسلسل کو دو عدد تفاعل میں لکھتے ہوئے اساس $\cdots + \frac{x^5}{30} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + y_1 = 1$ اور $y_2 = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} - \cdots$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 5.44: $xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = 0$

جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = e^x$ ملتا ہے۔دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لکھ کر تخفیف درجی کے استعمال سے $y_2 = \frac{e^x}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.45: **گاوس بیش ہندسی مساوات**

درج ذیل تفرقی مساوات

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{5.70}$$

جہاں a ، b اور c مستقل ہیں **گاوس بیش ہندسی مساوات**[48] کہلاتی ہے۔ثابت کریں کہ اس کی اشاری مساوات کے جذر $r_1 = 0$ اور $r_2 = 1-c$ ہیں۔ثابت کریں کہ $r = r_1 = 0$ کے لئے ترکیب فروبنیوس کے استعمال سے درج ذیل حل ملتا ہے جہاں $c \neq 0, -1, -2, \cdots$ ہے۔

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots \tag{5.71}$$

یہ تسلسل **بیش ہندسی تسلسل**[49] کہلاتی ہے جس کا مجموعہ عموماً $F(a,b,c;x)$ لکھا اور **بیش ہندسی تفاعل**[50] پکارا جاتا ہے۔

سوال 5.46: ثابت کریں کہ $|x| < 1$ کے لئے تسلسل 5.71 مرتکز ہے۔

جواب: $\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(a+m)(b+m)}{(m+1)!(c+m)}\frac{m!(c+m-1)}{(1+m-1)(b+m-1)}\right| = 1$ ہے لہٰذا $R < 1$ ہو گا۔

سوال 5.47: بیش ہندسی تفرقی مساوات کا حل مساوات 5.71 مستقل a اور b کی کن قیمتوں پر کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے گا۔

جواب: $a = 0, -1, -2, -\cdots$ اور $b = 0, -1, -2, -\cdots$

---

[48] Gauss' hypergeometric equation
[49] hypergeometric series
[50] hypergeomitric function

سوال 5.48: $a=b=c=1$ کی صورت میں تسلسل 5.71 سے ہندسی تسلسل[51] حاصل کریں۔

جواب: $F(1,1,1;x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$

سوال 5.49: ثابت کریں کہ $F(1,1,1;x)=F(1,b,b;x)=F(a,1,a;x)$ یعنی ہندسی تسلسل ہے۔اسی سے تفاعل $F(a,b,c;x)$ کا نام بیش ہندسی تفاعل نکلا ہے۔

سوال 5.50: ثابت کریں کہ سوال 5.45 میں $r_2=1-c$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.70 کا دوسرا حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے جہاں $c\neq 2,3,4,7\cdots$ ہے۔

$$y_2(x)=x^{1-c}\left(1+\frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)}x\right.$$
$$\left.+\frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)}x^2+\cdots\right) \tag{5.72}$$

سوال 5.51: ثابت کریں کہ مساوات 5.72 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y_2(x)=x^{1-c}F(a-c+a,b-c+1,2-c;x) \tag{5.73}$$

سوال 5.52: ثابت کریں کہ $c\neq 0,\mp1,\mp2,\mp3\mp\cdots$ کی صورت میں مساوات 5.70 کے حل کی اساس مساوات 5.71 اور مساوات 5.72 ہیں۔

سوال 5.53: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
(1+x)^n&=F(-n,b,b;-x)\\
(1-x^n)&=1-nxF(1-n,1,2;x)\\
\tan^{-1}x&=xF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2};-x^2)\\
\sin^{-1}x&=xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};x^2)\\
\ln(1+x)&=xF(1,1,2;-x)\\
\ln\frac{1+x}{1-x}&=2xF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2};x^2)
\end{aligned}$$

[51] geometric series

سوال 5.54: درج ذیل مساوات میں A ، B ، C ، D اور K مستقل ہیں، $\dot{y}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ہے اور t^2+At+B کے منفرد جذر t_1 اور t_2 ہیں۔

$$(t^2+At+B)\ddot{y}+(Ct+D)\dot{y}+Ky=0 \tag{5.74}$$

اس مساوات میں نیا متغیر $x=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ پر کرتے ہوئے بیش ہندسی مساوات حاصل کریں جس میں

$$Ct_1+D=-c(t_2-t_1), \quad C=a+b+1, \quad K=ab$$

ہوں گے۔

جواب: چونکہ t^2+At+B کے منفرد ($t_2 \neq t_1$) جذر t_1 اور t_2 ہیں لہٰذا $t^2+At+B=(t-t_1)(t-t_2)$ لکھا جا سکتا ہے۔اب نیا متغیرہ $x=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ لیتے ہوئے $t=(t_2-t_1)x+t_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$t-t_1=(t_2-t_1)x, \quad t-t_2=(t_2-t_1)(x-1),$$
$$(t-t_1)(t-t_2)=(t_2-t_1)^2x(x-1), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t_2-t_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{(t_2-t_1)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

ہوں گے جنہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$x(1-x)y''-\left(\frac{Ct_1+D}{t_2-t_1}+Cx\right)y'-Ky=0 \tag{5.75}$$

ملتا ہے۔

سوال 5.55 تا سوال 5.57 کے عمومی حل بیش ہندسی تفاعل کی صورت میں دریافت کریں۔

سوال 5.55: $2x(1-x)y''-(1+5x)y'-y=0$

جواب: $y=c_1F(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2};x)+c_2x^{\frac{3}{2}}F(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2};x)$

سوال 5.56: $4(t^2-3t+2)\ddot{y}-2\dot{y}+y=0$

جواب: $y=c_1F(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2};t-1)+c_2(t-1)^{\frac{1}{2}}$

سوال 5.57: $2(t^2-5t+6)\ddot{y}+(2t-3)\dot{y}-8y=0$

جواب: $y=c_1F(2,-2,-\frac{1}{2};t-2)+c_2(t-2)^{\frac{3}{2}}F(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2};t-2)$

5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل

اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک **بیسل مساوات**[52]

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5.76}$$

ہے جہاں ν[53] حقیقی مستقل ہے جس کی قیمت صفر یا مثبت ہو گی۔یہ مساوات عموماً نلکی تشاکلی مسائل میں سامنے آتی ہے۔بیسل مساوات کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (\frac{x^2-\nu^2}{x^2})y = 0$ حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 پر پورا اترتی ہے۔یوں بیسل مساوات کے حل کو ترکیب فروبنیوس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5.77}$$

مساوات 5.77 اور اس کے ایک درجی اور دو درجی تفرقات کو مساوات 5.76 میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} \\ - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہوئے $c_0, c_1, \cdots$ حاصل کرتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x^{s+r} پہلے، دوسرے اور تیسرے مجموعوں میں $m = s$ پر کرنے اور تیسرے مجموعے میں $m = s - 2$ پر کرنے سے ملتے ہیں۔یوں $s = 0$ اور $s = 1$ کی صورت میں تیسرا مجموعہ کوئی حصہ نہیں ڈالے گا جبکہ $s = 2$ کی صورت میں چاروں مجموعے حصہ ڈالیں گے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0 + ra_0 - \nu^2 a_0 &= 0 \qquad (s=0) \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \nu^2 a_1 &= 0 \qquad (s=1) \\ (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - \nu^2 a_s &= 0 \qquad (s = 2, 3, \cdots) \end{aligned} \tag{5.78}$$

چونکہ $a_0 \neq 0$ ہے لہٰذا مساوات 5.78 کی پہلی مساوات سے **اشاری مساوات**

$$(r+\nu)(r+\nu) = 0 \tag{5.79}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $r_1 = \nu(\geq 0)$ اور $r_2 = -\nu$ ہیں۔

---

[52] Bessel's equation

[53] ν یونانی حرف تہجی نیو ہے۔

توالی عددی سر؛ $r = r_1 = \nu$

دوسری مساوات 5.78 میں $r = \nu$ پر کرتے ہوئے $(2\nu + 1)a_1 = 0$ ملتا ہے۔اب چونکہ ν غیر منفی ہے لہٰذا $2\nu + 1$ صفر کے برابر نہیں ہو سکتا اور یوں $a_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔تیسری مساوات 5.78 میں $r = \nu$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(s + 2\nu)sa_s + a_{s-2} = 0 \tag{5.80}$$

چونکہ $a_1 = 0$ اور $\nu \geq 0$ ہے لہٰذا مساوات 5.80 سے $s_3 = 0$ ، $s_5 = 0$ ، $\cdots$حاصل ہوتے ہیں۔ یوں تمام طاق عددی سر صفر کے برابر ہیں۔جفت عددی سر حاصل کرنے کی خاطر مساوات 5.80 میں $s = 2m$ پر کرتے ہوئے

$$(2m + 2\nu)2ma_{2m} + a_{2m-2} = 0$$

یعنی

$$a_{2m} - \frac{1}{2^2 m(\nu + m)} a_{2m-2}, \qquad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.81}$$

ملتا ہے۔مساوات 5.81 سے c_2 ، c_4 ، $\cdots$لکھتے ہیں

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)}$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(\nu + 2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(\nu + 1)(\nu + 2)}$$

اور یوں عمومی کلیہ

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + m)}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔

عددی صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل تفاعل $J_n(x)$

ν کی عدد صحیح قیمت کو روایتی طور پر n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.82 درج ذیل لکھی جائے گی

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.83}$$

جس میں a_0 اختیاری مستقل ہے۔مساوات 5.83 پر مبنی تسلسل میں بھی اختیاری مستقل a_0 پایا جائے گا۔ہم اختیاری مستقل کی قیمت $a_0 = 1$ چن سکتے ہیں البتہ اس سے بہتر قیمت

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \tag{5.84}$$

ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! n!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

یعنی

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!(n+m)!}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.85}$$

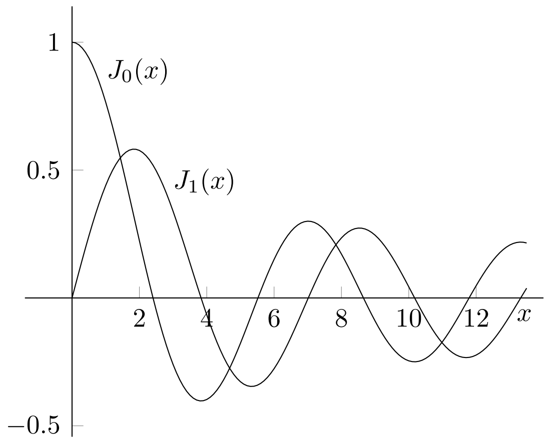
لکھا جا سکتا ہے۔آپ نے دیکھا کہ $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چننے سے بڑھتی ضربیہ $(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$ کو نہایت عمدگی کے ساتھ **عدد ضربیہ**[54] $(n+m)!$ میں ضم کیا گیا ہے۔درج بالا عددی سر کو تسلسل 5.77 میں پر کرتے ہوئے، اور یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $c_1 = 0$ ، $c_3 = 0$ ، $\cdots$ ہیں، بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل $J_n(x)$

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \qquad (n \geq 0) \tag{5.86}$$

ملتا ہے جو درجہ n **بیسل تفاعل کی پہلی قسم**[55] کہلاتی ہے۔بیسل تفاعل 5.86 تمام x کے لئے مرتکز ہے یعنی (جیسا آپ عددی سر کی شرح $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ سے ثابت کر سکتے ہیں) اس کا رداس ارتکاز لامتناہی $R = \infty$ ہے۔یوں $J_n(x)$ تمام x کے لئے معین ہے۔عددی سر کے نسب نما میں عدد ضربیہ $(n+m)!$ کی بنا تسلسل بہت تیزی سے مرکوز ہوتی ہے۔

---

[54] factorial
[55] Bessel function of the first kind of order n



شکل 5.7: بیسل تفاعل کی پہلی قسم۔ J_0 ، J_1

مثال 5.18: بیسل تفاعل $J_0(x)$ اور $J_1(x)$

مساوات 5.86 میں $n = 0$ پر کرتے ہوئے **درجہ 0 کا بیسل تفاعل $J_0(x)$**

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + - \cdots \tag{5.87}$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو کوسائن تفاعل کی مانند ہے۔اسی طرح مساوات 5.86 میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے **درجہ 1 کا بیسل تفاعل $J_1(x)$**

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!} = x - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + - \cdots \tag{5.88}$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو سائن تفاعل کی مانند ہے لیکن جیسا آپ دیکھیں گے بیسل تفاعل کے صفر یکساں فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں اور x بڑھانے سے تفاعل کا حیطہ کم ہوتا جاتا ہے۔ مساوات 5.76 کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$ ملتی ہے جس پر توجہ دیں۔ x کی زیادہ قیمت پر $\frac{1}{x}$ اور $\frac{\nu^2}{x^2}$ کو رد کرتے ہوئے بیسل مساوات سے $y'' + y = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے حل $\cos x$ اور $\sin x$ ہیں۔آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{y'}{x}$ بطور تقصیری مستقل کردار ادا کرتے ہوئے بیسل

تفاعل کا حیطہ گھٹانے میں مدد دے گی۔ زیادہ x کی صورت میں درج ذیل ثابت کیا جا سکتا ہے

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \tag{5.89}$$

جہاں $\sim$ کو **متقاربی برابر**[56] پڑھیں اور جس کا مطلب ہے کہ کسی بھی قطعی n پر دونوں اطراف کی شرح، $x \to \infty$ پر اکائی کے برابر ہو گی۔

مساوات 5.89 کم $x(>0)$ کی صورت میں بھی بہترین ثابت ہوتی ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے $J_0(x)$ کے ابتدائی تین صفر 2.356 ، 5.498 اور 8.639 حاصل ہوتے ہیں جبکہ ان کی حقیقی قیمتیں بالترتیب 2.405 ، 5.520 اور 8.654 ہیں۔دونوں جوابات میں فرق 0.049 ، 0.022 اور 0.015 ہے۔

بیسل تفاعل جہاں $\nu \geq 0$ کوئی بھی قیمت ہو سکتی ہے۔گیما تفاعل

گزشتہ حصے میں ہم نے عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل مساوات کا ایک حل دریافت کیا۔آئیں اب کسی بھی قیمت کے $\nu > 0$ کے لئے بیسل تفاعل کا عمومی حل تلاش کریں۔مساوات 5.84 میں ہم نے $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چنا جبکہ موجودہ صورت میں ہم

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{5.90}$$

چنتے ہیں جہاں **گیما تفاعل**[57] Γ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu \, \mathrm{d}t \qquad (\nu > -1) \tag{5.91}$$

دھیان رہے کہ بائیں ہاتھ $\nu + 1$ جبکہ دائیں ہاتھ تکمل کے اندر ν لکھا گیا ہے۔تکمل بالحصص سے

$$\Gamma(\nu+1) = -e^{-t} t^\nu \Big|_0^\infty + \nu \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} \, \mathrm{d}t = 0 + \nu \Gamma(\nu)$$

---

[56] asymptotically equal
[57] gamma function

یعنی گیما تفاعل کا بنیادی تعلق

$$\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu) \tag{5.92}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.91 میں $\nu=0$ پر کرنے سے

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t=\left.-e^{-t}\right|_0^\infty=0-(-1)=1$$

ملتا ہے۔اس طرح مساوات 5.92 سے $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1!$ ، $\Gamma(3)=3\Gamma(2)=2!$ اور یوں

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{5.93}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ عدد ضربی در حقیقت گیما تفاعل کی ایک مخصوص صورت ہے۔یوں عدد صحیح $\nu=n$ کی صورت میں مساوات 5.90 سے مساوات 5.84 ہی حاصل ہوتی ہے۔

گیما تفاعل سے $0!$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $\Gamma(n+1)=n!$ ہے لہٰذا

$$0!=\Gamma(1)=1 \tag{5.94}$$

کے برابر ہے۔

مساوات 5.90 استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو لکھتے ہیں۔

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)2^\nu\Gamma(\nu+1)}$$

اب مساوات 5.92 کے تحت $(\nu+1)\Gamma(\nu+1)=\Gamma(\nu+2)$ ، $(\nu+2)\Gamma(\nu+2)=\Gamma(\nu+3)$ وغیرہ لکھے جا سکتے ہیں اور یوں

$$(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)\Gamma(\nu+1)=\Gamma(\nu+m+1)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.95}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $r=r_1=\nu$ کی صورت میں بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$J_\nu(x)=x^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.96}$$

$J_\nu(x)$ کو درجہ ν **بیسل تفاعل کی پہلی قسم**[58] کہتے ہیں۔

جیسا آپ شرح عدد سر کی ترکیب سے ثابت کر سکتے ہیں، مساوات 5.96 تمام x پر مرتکز ہے۔

مثال 5.19: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{5.97}$$

حل: مساوات 5.91 میں $\nu = -\frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t$$

ملتا ہے جس میں متغیرہ تبدیل کرتے ہوئے $t = u^2$ استعمال کرتے ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u$$

اب ہم ایک ترکیب استعمال کرتے ہیں (جس کو ذہن نشین کرنا سود مند ثابت ہو گا)۔ درج بالا میں u کی جگہ w بھی لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-w^2} \, \mathrm{d}w$$

ملتا ہے۔درج بالا دو مساوات کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = 4 \int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \int_0^\infty e^{-w^2} \, \mathrm{d}w = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+w^2)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}w$$

یہ تکمل کارتیسی محور کے ربع اول پر حاصل کیا گیا ہے۔اس تکمل کو نلکی محور r اور θ استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں $u = r\cos\theta$ اور $w = r\sin\theta$ لیتے ہیں۔ چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}u \, \mathrm{d}w = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$ لکھا جائے گا۔ربع اول میں r کے حدود 0 تا ∞ اور θ کے حدود 0 تا $\frac{\pi}{2}$ ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^\infty \mathrm{d}\theta = 4 \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \pi$$

ملتا ہے۔دونوں اطراف کا جذر لینے سے $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ملتا ہے۔

---

[58] Bessel function of order ν

خواص بیسل تفاعل

بیسل تفاعل انتہائی زیادہ تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔آئیں درج ذیل تعلقات کو بیسل تسلسل سے اخذ کریں۔

$$[x^{\nu} J_{\nu}(x)]' = x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \tag{5.98}$$

$$[x^{-\nu} J_{\nu}(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{5.99}$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) \tag{5.100}$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x) \tag{5.101}$$

مساوات 5.98 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 5.96 کو x^{ν} سے ضرب دیتے ہوئے

$$x^{\nu} J_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

تفرق لے کر مساوات 5.92 سے $\Gamma(\nu + m + 1) = (\nu + m)\Gamma(\nu + m)$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
[x^{\nu} J_{\nu}(x)]' &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m + 2\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(m + \nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m!(\nu + m)\Gamma(\nu + m)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu + m)} = x^{\nu} x^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu + m)} = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)
\end{aligned}$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu - 1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

آئیں اب مساوات 5.99 ثابت کریں۔مساوات 5.96 کو $x^{-\nu}$ سے ضرب دینے سے x^{ν} کٹ جاتا ہے۔

$$x^{-\nu} J_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

تفرق لے کر $m! = m(m-1)!$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
[x^{-\nu} J_{\nu}(x)]' &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu} m(m-1)! \Gamma(\nu + m + 1)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu-1} (m-1)! \Gamma(\nu + m + 1)}
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ تفرق کے بعد تسلسل کا پہلا رکن $m = 1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔(آپ $x^{-\nu}J_\nu$ کے تسلسل کو پھیلا کر لکھ کر تفرق لیتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ پہلا رکن $m = 1$ ہے)۔ درج بالا تسلسل میں $s = m - 1$ یعنی $m = s + 1$ پر کرتے ہیں۔

$$[x^{-\nu}J_\nu(x)]' = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}x^{2s+1}}{2^{2s+\nu+1}s!\Gamma(\nu+s+2)} = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu + 1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

اب مساوات 5.100 اور مساوات 5.100 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\nu x^{\nu-1}J_\nu + x^\nu J_\nu' &= x^\nu J_{\nu-1}\\ -\nu x^{-\nu-1}J_\nu + x^{-\nu}J_\nu' &= -x^{-\nu}J_{\nu+1}\end{aligned}$$

پہلی مساوات کو x^ν اور دوسری مساوات کو $x^{-\nu}$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nu x^{-1}J_\nu + J_\nu' &= J_{\nu-1}\\ -\nu x^{-1}J_\nu + J_\nu' &= -J_{\nu+1}\end{aligned}$$

ان کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل (درکار) مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}2J_\nu' &= J_{\nu-1} - J_{\nu+1}\\ \frac{2\nu}{x}J_\nu &= J_{\nu-1} + J_{\nu+1}\end{aligned}$$

مثال 5.20: مساوات 5.98 تا مساوات 5.101 کا استعمال
درج ذیل کو J_0 اور J_1 کی صورت میں حاصل کریں۔

$$\int_1^2 x^{-3}J_4(x)\,\mathrm{d}x$$

حل: مساوات 5.99 میں $\nu = 3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I = \int_1^2 x^{-3}J_4(x)\,\mathrm{d}x = -x^{-3}J_3(x)\Big|_1^2$$

مساوات 5.100 میں $\nu = 2$ پر کرتے ہوئے $J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1$ اور $\nu = 1$ پر کرتے ہوئے $J_2 = \frac{2}{x}J_1 - J_0$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $J_3 = \frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1 - J_0) - J_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں تکمل کی قیمت

$$I = -x^{-3}[4x^{-1}(2x^{-1}J_1 - J_0) - J_0]\Big|_1^2 = -\frac{1}{8}J_1(2) + \frac{1}{4}J_0(2) + 7J_1(1) - 4J_0(1)$$

ہو گی۔

مثال 5.21: درج ذیل (شکل 5.8) ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \end{aligned} \tag{5.102}$$

حل:بیسل تسلسل 5.96 میں $\nu = \frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے ہیں۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\frac{1}{2}}m!\Gamma(\frac{1}{2}+m+1)} = \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!\Gamma(m+\frac{3}{2})}$$

نسب نما میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 5.97 استعمال کیا گیا ہے۔

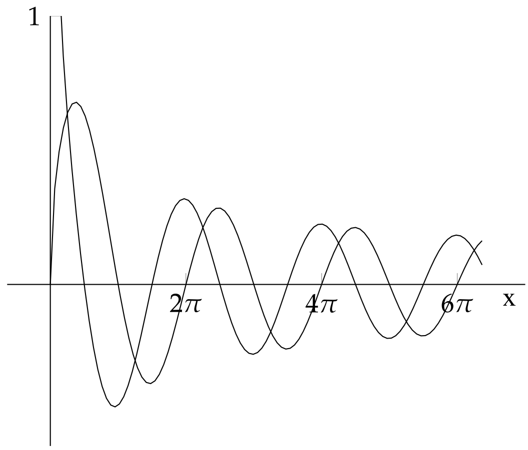
$$\begin{aligned} 2^m m! &= 2m(2m-2)(2m-4)\cdots 4\cdot 2 \\ 2^{m+1}\Gamma(m+\tfrac{3}{2}) &= 2^{m+1}(m+\tfrac{1}{2})(m-\tfrac{1}{2})\cdots\tfrac{3}{2}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\ &= (2m+1)(2m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے نسب نما میں

$$2^{2m+1}m!\Gamma(m+\tfrac{3}{2}) = (2m+1)2m(2m-1)(2m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\sqrt{\pi} = (2m+1)!\sqrt{\pi}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$



شکل 5.8: بیسل تفاعل $J_{\frac{1}{2}}(x)$ اور $J_{-\frac{1}{2}}(x)$

مساوت 5.98 استعمال کرتے ہوئے

$$[\sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(x)]' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x = \sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں دائیں ہاتھ کے مساوات کو لیتے ہوئے $\sqrt{x}$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.102 کی دوسری مساوات ملتی ہے۔

عمومی حل۔ خطی طور تابعیت

بیسل مساوات 5.76 کے عمومی حل کے لئے $J_\upsilon(x)$ کے علاوہ خطی طور غیر تابع دوسرا حل بھی درکار ہے۔ غیر عدد صحیح ν کی صورت میں دوسرا حل $r_2 = -\nu$ (اشاری مساوات 5.79) استعمال کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔ یوں دوسرا خطی طور غیر تابع حل مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $-\nu$ پر کرنے سے حاصل ہو گا۔

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu}m!\Gamma(m-\nu+1)} \tag{5.103}$$

ν غیر عدد صحیح ہونے کی صورت میں J_ν اور $J_{-\nu}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔یوں غیر عدد صحیح ν کی صورت میں $x \neq 0$ پر مساوات بیسل کا عمومی حل

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \tag{5.104}$$

ہو گا۔

ν عدد صحیح ہونے کی صورت میں $J_n(x)$ اور $J_{-n}(x)$ کا تعلق

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{5.105}$$

ہے لہٰذا یہ خطی طور تابع ہیں اور ان سے عمومی حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔آئیں مساوات 5.105 کو ثابت کریں۔

ثبوت : مساوات 5.103 میں ν کی قیمت کو عدد صحیح کے قریب تر لانے سے گیما تفاعل کی قیمت (صفحہ 382 پر شکل 1.ب) لامتناہی کی طرف بڑھتی ہے۔یوں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.103 کے ابتدائی n ارکان کے عددی سر، گیما تفاعل کی قیمت لامتناہی ہونے کی بنا، صفر ہوں گے اور یوں تسلسل $m = n$ سے شروع ہو گا۔مساوات 5.93 کے تحت $\Gamma(m - n + 1) = (m - n)!$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m!(m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{2s+n}(n+s)!s!} \qquad (m = n + s)$$

جو $(-1)^n J_n(x)$ ہے۔

اگلے حصے میں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات بیسل کا عمومی حل، بیسل تفاعل کی دوسری قسم Y_ν کی مدد سے، حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 5.58: ثابت کریں کہ $J_n(x)$ تمام x کے لئے مرتکز ہے۔

جواب: $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{2^{2m+n} m!(n+m)!}{2^{2m+2+n}(m+1)!(n+m+1)!} = \frac{1}{2^2(m+1)(n+m+1)}$ ہے لہٰذا $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|_{m\to\infty} = 0$ اور یوں $R \to \infty$ ہو گا۔

سوال 5.59 تا سوال 5.68 کے عمومی حل، جہاں ممکن ہو، J_ν اور $J_{-\nu}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔ جہاں اضافی معلومات دی گئی ہوں، وہاں اس کو استعمال کرتے ہوئے بیسل مساوات کی صورت حاصل کریں۔

سوال 5.59: $x^2y'' + xy'(x^2 - \frac{4}{9})y = 0$
جواب: چونکہ $\nu = \frac{2}{3}$ ہے جو غیر عدد صحیح ہے لہٰذا عمومی حل $y = c_1 J_{\frac{2}{3}} + c_2 J_{-\frac{2}{3}}$ ہے۔

سوال 5.60: $(z = \sqrt{x})$ $\quad xy'' + y' + \frac{1}{4}y$
جواب: $y = c_1 J_0(\sqrt{x})$

سوال 5.61: $(z = \frac{x}{2})$ $\quad xy'' + y' + \frac{x}{4}y = 0$
جواب: $y = c_1 J_0(\frac{x}{2})$

سوال 5.62: $(z = \frac{x}{3})$ $\quad x^2y'' + xy'(\frac{x^2}{9} - \frac{1}{9})y = 0$
جواب: $y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{3}) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(\frac{x}{3})$

سوال 5.63: $(z = e^x)$ $\quad y'' + (e^{2x} - 16)y = 0,$
جواب: $y = c_1 J_4(e^x)$

سوال 5.64: $(z = \lambda x)$ $\quad x^2y'' + xy'(\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0,$
جواب: $y = c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 J_{-\nu}(\lambda x)$ جہاں $\nu \neq 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$

سوال 5.65: $(z = 3x)$ $\quad x^2y'' + xy' + (9x^2 - 1)y = 0,$
جواب: $y = c_1 J_1(3x)$

سوال 5.66: $(z = 2x - 1)$ $\quad (x - \frac{1}{2})^2y'' + (x - \frac{1}{2})y' + 4x(x - 1)y = 0$
جواب: $y = c_1 J_1(2x - 1)$

سوال 5.67: $y = x^{-\nu}u$ $\quad xy'' + (2\nu + 1)y' + xy = 0,$
جواب: $y = x^{-\nu}(c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x))$ جہاں $\nu \neq 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$

سوال 5.68: $z = \sqrt{x}$ $\quad y = u\sqrt{x},$ $\quad x^2y'' + \frac{1}{4}(x + \frac{3}{4})y = 0,$
جواب: $y = c_1\sqrt{x} J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) + c_2\sqrt{x} J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$

سوال 5.69: مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \quad J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right) \tag{5.106}$$

سوال 5.70: کیا آپ مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے اخذ کر سکتے ہیں کہ $\nu = \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{3}{2}, \mp\frac{5}{2}, \cdots$ کی صورت میں $J_\nu(x)$ بنیادی تفاعل ہیں۔

جواب: جی ہاں۔

سوال 5.71: باہم پیچاں صفر
مساوات 5.98، مساوات 5.99 اور مسئلہ رول[59] استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $J_n(x)$ کے کسی بھی دو متواتر صفروں کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

جواب: مسئلہ رول کہتا ہے کہ کسی بھی حقیقی قابل تفرق تفاعل کے دو متواتر برابر قیمت نقطوں کے مابین کم از کم ایک ایسا نقطہ (نقطہ فاصل) پایا جاتا ہے جس پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔ اگر $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 پر پائے جاتے ہوں تب ہم $x_1^{-n}J_n(x_1) = x_2^{-n}J_n(x_2) = 0$ لکھ سکتے ہیں۔ یوں مسئلہ رول کے تحت x_1 اور x_2 کے مابین کسی نقطے پر تفاعل $x^{-n}J_n(x)$ کا تفرق صفر $[x^{-n}J_n(x)]' = 0$ ہو گا جو مساوات 5.99 کے استعمال سے ایسے نقطے پر $x^{-n}J_{n+1}(x) = 0$ یعنی $J_{n+1}(x) = 0$ دیتا ہے۔ اسی طرح اگر $J_{n+1}(x)$ کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 پر پائے جاتے ہوں تب $J_{n+1}(x_3) = J_{n+1}(x_4) = 0$ اور $x_3^{n+1}J_{n+1}(x_3) = x_4^{n+1}J_{n+1}(x_4) = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مسئلہ رول کے تحت x_3 اور x_4 کے مابین کسی نقطے پر $[x^{n+1}J_{n+1}(x)]' = 0$ ہو گا جس سے مساوات 5.98 کے تحت ایسے نقطے پر $x^{n+1}J_n(x) = 0$ یعنی $J_n(x) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ثابت ہوا کہ J_{n+1} کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 کے مابین $J_n(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 5.72: تفرقی مساوات سے ایک درجی تفرق کا اخراج
درج ذیل تفرقی مساوات میں $y(x) = u(x)v(x)$ پر کرتے ہوئے ایسا $v(x)$ دریافت کریں کہ حاصل تفرقی مساوات میں پہلے درجے کا تفرق نہ پایا جاتا ہو۔ حاصل تفرقی مساوات بھی حاصل کریں۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جوابات: $v = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ اور مساوات $u'' + [q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p']u = 0$ میں u' نہیں پایا جاتا ہے۔

---

[59] Rolle's theorem

سوال 5.73: گزشتہ سوال میں تفرقی مساوات سے ایک درجی تفرق کا اخراج کیا گیا۔ثابت کریں کہ مساوات بیسل 5.76 سے ایک درجی تفرق کا اخراج $y=\frac{u}{\sqrt{x}}$ پر کرتے ہوئے ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہو گی۔

$$x^2u''+(x^2+\tfrac{1}{4}-\nu^2)u=0 \tag{5.107}$$

سوال 5.74: مساوات 5.107 کا عمومی حل $\nu=\frac{1}{2}$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $u=A\cos x+B\sin x$ ہے لہٰذا $y=\frac{u}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}(A\cos x+B\sin x)$ ہو گا۔

سوال 5.75 تا سوال 5.80 مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کی مدد سے حل ہوں گے۔

سوال 5.75: ثابت کریں $J_0'(x)=-J_1(x),\quad J_1'(x)=J_0(x)-\frac{J_1(x)}{x},\quad J_2'(x)=\frac{1}{2}[J_1(x)-J_3(x)]$

سوال 5.76: بیسل مساوات 5.76 کو مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 سے حاصل کریں۔

سوال 5.77: درج ذیل ثابت کریں

$$\begin{aligned}
\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,\mathrm{d}x &= x^{\nu}J_{\nu}(x)+c\\
\int x^{-\nu}J_{\nu+1}\,\mathrm{d}x &= -x^{-\nu}J_{\nu}(x)+c\\
\int J_{\nu+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \int J_{\nu-1}(x)\,\mathrm{d}x-2J_{\nu}(x)
\end{aligned}$$

سوال 5.78: $\int J_3(x)\,\mathrm{d}x$

جواب: مساوات 5.101 میں $\nu=2$ پر کر کے تکمل $\int J_3\,\mathrm{d}x=\int J_1\,\mathrm{d}x-2J_2$ ہو گا اور مساوات 5.99 میں $\nu=0$ پر کرتے ہوئے تکمل $\int J_1\,\mathrm{d}x=-J_0$ دیتا ہے لہٰذا $\int J_3\,\mathrm{d}x=-J_0-2J_2+c$

سوال 5.79: تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے حل کریں۔ $\int x^3J_0(x)\,\mathrm{d}x$

جواب: $\int x^3J_0\,\mathrm{d}x=\int x^2(xJ_0)\,\mathrm{d}x=x^2(xJ_1)-2\int x^2J_1\,\mathrm{d}x=x^3J_1-2x^2J_2+c$

سوال 5.80: تکمل بالحصص سے حل کریں۔ $\int x^2J_0\,\mathrm{d}x$

جواب: $\int x^2J_0\,\mathrm{d}x=x^2J_1+xJ_0-\int J_0\,\mathrm{d}x$ ، جہاں $\int J_0\,\mathrm{d}x$ کسی بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے بلکہ اس کی قیمت جدول کی مدد سے لکھی جاتی ہے۔

5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل

بیسل مساوات 5.76 کا کسی بھی ν کے لئے عمومی حل حاصل کرنے کی خاطر **بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[60] $Y_\nu(x)$ حاصل کرتے ہیں۔شروع $\nu = n = 0$ سے کرتے ہیں۔

$n = 0$ کی صورت میں مساوات بیسل کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{5.108}$$

لکھا جا سکتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 سے دوہرا جذر $r = 0$ ملتا ہے جو صفحہ 346 پر مسئلہ فروبنیوس میں بتلائی گئی دوسری صورت کو ظاہر کرتی ہے۔یوں مساوات 5.108 کا ایک حل $J_0(x)$ ہو گا جبکہ اس کا دوسرا حل مساوات 5.57 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m \tag{5.109}$$

لکھا جائے گا۔مساوات 5.109 اور اس کے تفرقات

$$\begin{aligned}
y_2' &= J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1}\\
y_2'' &= J_0'' \ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-2}
\end{aligned}$$

کو مساوات 5.108 میں پر کرتے ہیں (اگرچہ آخری مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ لکھنا چاہیے، البتہ $m = 1$ پر دیا گیا مجموعہ صفر دیتا ہے لہٰذا مجموعے کا پہلا رکن $m = 1$ لکھنا ممکن ہے)۔اب چونکہ J_0 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا تین لوگارتھمی ارکان کا مجموعہ $(xJ_0'' + J_0' + xJ_0)\ln x$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں بقایا درج ذیل ہو گا۔

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$$

اس میں پہلے اور دوسرے مجموعوں کو جمع کرتے ہوئے $\sum m^2 A_m x^{m-1}$ لکھ کر جبکہ J_0' کی طاقتی تسلسل کو مساوات 5.87 کا جزو در جزو تفرق لیتے اور $\frac{m!}{m} = (m-1)!$ استعمال کرتے ہوئے

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!(m-1)!}$$

[60] Bessel function of the second kind

لکھ کر درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m!(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0 \tag{5.110}$$

اس مساوات میں x^0 کمتر طاقت، جو صرف دوسرے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $A_1 = 0$ ملتا ہے۔اب x^{2s} کے عددی سروں، جو پہلے تسلسل میں نہیں پایا جاتا، کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہیں۔

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0, \qquad (s = 1, 2, \cdots)$$

اب چونکہ $A_1 = 0$ ہے لہٰذا $A_3 = 0$ ، $A_5 = 0$ ، $\cdots$ہوں گے۔

x^{2s+1} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $s = 0$ کے لئے

$$-1 + 4A_2 = 0, \quad \implies \quad A_2 = \frac{1}{4}$$

جبکہ بقایا s پر

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0, \quad (s = 1, 2, \cdots)$$

لکھا جائے گا۔اس سے $s = 1$ کے لئے

$$\frac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \quad \implies \quad A_4 = -\frac{3}{128}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ عمومی طور پر

$$A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right), \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.111}$$

ملتا ہے۔قوسین میں بند قیمت کو h_m لکھ کر،

$$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \tag{5.112}$$

مساوات 5.111 اور $A_1 = A_3 = \cdots = 0$ کو مساوات 5.109 میں پر کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m} = J_0(x)\ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + \frac{11}{13\,824}x^6 - + \cdots \tag{5.113}$$

چونکہ J_0 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ مساوات بیسل 5.76 کی حل کی اساس ہیں۔ہم J_0 اور y_2 سے کوئی بھی مخصوص حل، $a(y_2 + bJ_0)$ جہاں $a(\neq 0)$ اور b مستقل ہیں، لکھتے ہوئے اساس کی مختلف صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔روایتی طور پر $a = \frac{2}{\pi}$ اور $b = \gamma - \ln 2$ چنے جاتے ہیں جہاں $\gamma = 0.577\,215\,664\,90\cdots$ **مستقل یولر**[61] کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے جہاں s کی قیمت لامتناہی کو چھونے کی کوشش کرتی ہے۔

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s} - \ln s \tag{5.114}$$

اس طرح لکھا گیا دوسرا حل **درجہ صفر بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[62] (شکل 5.9) یا **درجہ صفر نیومن تفاعل**[63] کہلاتا[64] اور $Y_0(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right] \tag{5.115}$$

لکھا جائے گا جہاں h_m کی قیمت مساوات 5.112 دیتی ہے۔جیسا شکل 5.9 میں دکھایا گیا ہے کم قیمت کی مثبت x پر Y_0 کی صورت $\ln x$ کی طرح ہے اور $x \to \infty$ پر $Y_0(x) \to \infty$ ہو گا۔

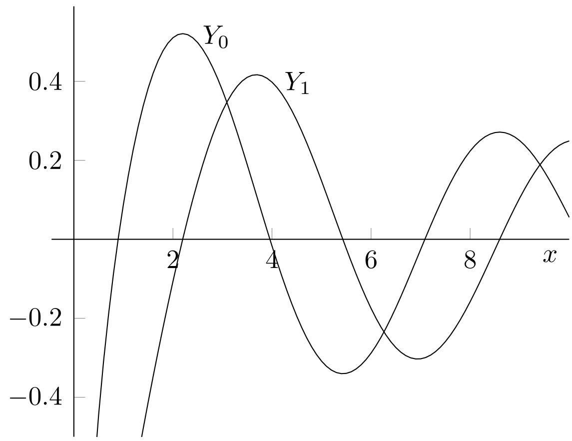
$\nu = n = 1, 2, \cdots$ کے لئے بھی بالکل اسی طرح، مساوات 5.59 سے شروع کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کیا جاتا ہے۔ان میں بھی لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے۔

دوسرے حل کا دارومدار اس حقیقت پر ہے کہ آیا ν کا درجہ عدد صحیح ہے یا نہیں۔اس پیچیدگی سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر دوسرے حل کو درج ذیل بیان کیا جاتا ہے جو تمام ν کے لئے قابل استعمال ہے۔

$$\begin{aligned} &Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin\nu\pi}[J_\nu(x)\cos\nu x - J_{-\nu}(x)] && \text{(الف)} \\ &Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) && \text{(ب)} \end{aligned} \tag{5.116}$$

---

[61] Euler constant
[62] Bessel function of the second kind of order zero
[63] Neumann's function of order zero
[64] کارل نیومن [1832-1925] جرمنی کے ریاضی دان اور ماہر طبیعیات۔



شکل 5.9: بیسل تفاعل کے دوسرے اقسام۔

درج بالا تفاعل کو درجہ ν **بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[65] یا درجہ ν **نیومن تفاعل** کہتے ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ J_ν اور Y_ν تمام ν اور تمام $x(>0)$ کے لئے خطی طور غیر تابع ہیں۔

غیر عددی صحیح درجہ ν کے لئے چونکہ $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ بیسل مساوات کے حل ہیں لہٰذا $Y_\nu(x)$ بھی بیسل مساوات کا حل ہے۔اب چونکہ ایسی ν کے لئے $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ خطی طور غیر تابع ہیں اور $Y_\nu(x)$ میں $J_{-\nu}(x)$ پایا جاتا ہے لہٰذا $J_\nu(x)$ اور $Y_\nu(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔مزید یہ کہ مساوات 5.116-ب کو ثابت (صفحہ 375 پر حوالہ [3] میں ثبوت پیش کیا گیا ہے۔) کیا جا سکتا ہے لہٰذا عدد صحیح درجہ کے لئے $Y_n(x)$ بیسل مساوات کا حل ہے۔آپ دیکھیں گے کہ $Y_n(x)$ کی تسلسل میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے لہٰذا $J_n(x)$ اور $Y_n(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ $Y_n(x)$ کی تسلسل لکھنے کی خاطر $J_\nu(x)$ کی تسلسل 5.96 اور $J_{-\nu}(x)$ کی تسلسل 5.103 کو مساوات 5.116-الف میں پر کرتے ہوئے $\nu \to n$ کرتے ہیں (تفصیل صفحہ 375 پر [3] سے دیکھی جا سکتی ہے۔)

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right) + \frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(h_m+h_{m+n})}{2^{2m+n}m!(m+n)!}x^{2m} - \frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m} \tag{5.117}$$

[65] Bessel function of the second kind of order ν

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x > 0$ اور $n = 0, 1, \cdots$ جبکہ

$$h_0 = 0, \quad h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s} \qquad (s = 1, 2, \cdots)$$

ہیں اور $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.117 میں آخری مجموعے کی جگہ صفر لکھا جاتا ہے۔ درجہ صفر $n = 0$ پر مساوات 5.117 عین مساوات 5.115 کی صورت اختیار کرتی ہے۔اس کے علاوہ درج ذیل ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \tag{5.118}$$

ان نتائج کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 5.4: مساوات بیسل کا عمومی حل
تمام ν کے لئے مساوات بیسل کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x) \tag{5.119}$$

بعض اوقات حقیقی x کے لئے مساوات بیسل کے مخلوط حل درکار ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں درج ذیل خطی طور غیر تابع مخلوط حل استعمال کیے جاتے ہیں جنہیں درجہ ν **بیسل تفاعل کی تیسری قسم**[66] یا درجہ ν پہلی اور دوسری **ہینکل تفاعل**[67] کہا[68] جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} H_\nu^1(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x) \\ H_\nu^2(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x) \end{aligned} \tag{5.120}$$

سوالات

سوال 5.81 تا سوال 5.89 کا عمومی حل J_ν اور Y_ν کی صورت میں حاصل کریں۔بتلائیں کہ کن سوالات میں Y_ν کی جگہ $J_{-\nu}$ استعمال کرنا ممکن ہے۔دی گئی اضافی معلومات استعمال کریں۔

[66] Bessel function of the third kind of order ν
[67] Hankel functions
[68] ہرمن ہینکل [1839-1873] جرمنی کے ریاضی دان۔

سوال 5.81: $x^2y'' + xy' + (x^2 - 25)y = 0$
جواب: $y = c_1 J_5(x) + c_2 Y_5(x)$ ؛ چونکہ ν عدد صحیح ہے لہٰذا $J_{-5}(x)$ قابل استعمال نہیں ہے۔

سوال 5.82: $x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)$
جواب: $y = c_1 J_{\sqrt{3}} + c_2 Y_{\sqrt{3}}(x)$ ؛ چونکہ ν عدد صحیح نہیں ہے لہٰذا $J_{-\sqrt{3}}(x)$ قابل استعمال ہے۔

سوال 5.83: $9x^2y'' + 9xy' + (z^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{4})y = 0, \qquad x = z^3$
جواب: $y = c_1 J_{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{3}}) + c_2 Y_{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{3}})$

سوال 5.84: $x^2y'' + xy' + (4x^4 - \frac{16}{9})y = 0, \qquad z = x^2$
جواب: $y = c_1 J_{\frac{2}{3}}(x^2) + c_2 Y_{\frac{2}{3}}(x^2)$

سوال 5.85: $9x^2y'' + 9xy' + (4x^{\frac{4}{3}} - 25)y = 0, \qquad z = x^{\frac{2}{3}}$
جواب: $y = c_1 J_{\frac{5}{2}}(x^{\frac{2}{3}}) + c_2 Y_{\frac{5}{2}}(x^{\frac{2}{3}})$

سوال 5.86: $y'' + k^2x^2y = 0, \qquad (y = u\sqrt{x}, \quad z = \frac{kx^2}{2})$
جواب: $y = \sqrt{x}[c_1 J_{\frac{1}{4}}(\frac{kx^2}{2}) + c_2 Y_{\frac{1}{4}}(\frac{kx^2}{2})]$

سوال 5.87: $xy'' - 5y' + xy = 0, \qquad y = x^3 u$
جواب: $y = x^3[c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)]$

سوال 5.88: $xy'' - y' + xy = 0, \qquad y = xu$
جواب: $y = x[c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)]$

سوال 5.89: $xy'' + 5y' + xy = 0, \qquad y = \frac{u}{x^2}$
جواب: $y = \frac{1}{x^2}[c_1 J_2(x) + c_2 Y_2(x)]$

سوال 5.90: ترمیم شدہ درجہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم
ترمیم شدہ درجہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم کی تعریف $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ ہے جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ثابت کریں کہ $I_\nu(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہے۔

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \tag{5.121}$$

جواب: $I_\nu(x)$ کو دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ حاصل کریں۔یہی ثبوت ہے۔

سوال 5.91: ترمیم شدہ بیسل تفاعل
$I_\nu(x)$ کی درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m+\nu+1)} \tag{5.122}$$

سوال 5.92: $I_\nu(x)$ حقیقی ہے
ثابت کریں کہ حقیقی x اور حقیقی ν کے لئے $I_\nu(x)$ حقیقی ہے۔ثابت کریں کہ $x \neq 0$ ہوتے ہوئے $I_\nu(x) \neq 0$ ہو گا۔ ثابت کریں کہ $I_{-n}(x) = I_n(x)$ کے برابر ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 5.93: ترمیم شدہ بیسل تفاعل
ثابت کریں کہ تفاعل $K_\nu(x)$ ، جسے ترمیم شدہ بیسل تفاعل کی تیسری (بعض اوقات دوسری) قسم کہتے ہیں،

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)] \tag{5.123}$$

تفرقی مساوات 5.121 کا حل ہے۔

سوال 5.94: ہینکل تفاعل
ثابت کریں کہ ہینکل تفاعل 5.120 مساوات بیسل کے حل کی اساس ہیں۔

باب 6

لاپلاس تبادلہ

لاپلاس بدل کی ترکیب سے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات حل کیے جاتے ہیں۔یہ ترکیب تین قدم پر مشتمل ہے۔

- پہلا قدم: ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے سادہ ضمنی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔
- دوسرا قدم: ضمنی مساوات کو خالصتاً الجبرائی طور پر حل کیا جاتا ہے۔
- تیسرا قدم: ضمنی مساوات کے حل کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے اصل حل حاصل کیا جاتا ہے۔

یوں لاپلاس بدل تفرقی مساوات کے مسئلے کو سادہ الجبرائی مسئلہ میں تبدیل کرتا ہے۔تیسرے قدم پر الٹ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے عموماً ایسی جدول کا سہارا لیا جاتا ہے جس میں تفاعل اور تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل درج ہوں۔

انجینئری میں لاپلاس بدل کی ترکیب اہم کردار ادا کرتی ہے، بالخصوص ان مسائل میں جہاں جبری تفاعل غیر استمراری ہو، مثلاً جب جبری تفاعل کچھ وقفے کے لئے کار آمد ہو یا جبری تفاعل غیر سائن نما دہراتا تفاعل ہو۔

اب تک غیر متجانس مساوات کا عمومی حل حاصل کرتے ہوئے پہلے مطابقتی متجانس مساوات کا حل اور پھر غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل حاصل کیا جاتا رہا۔لاپلاس بدل کی ترکیب میں عمومی حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) مسائل کے حل میں عمومی حل حاصل کرنے کے بعد ابتدائی (سرحدی) شرائط پر کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی چونکہ حل یہ شرائط شامل ہوتے ہیں۔

6.1 لاپلاس بدل۔الٹ لاپلاس بدل۔خطیت

فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر معین ہے۔ ہم $f(t)$ کو e^{-st} سے ضرب دیتے ہوئے، t کے ساتھ، 0 تا ∞ ، تکمل لیتے ہیں۔ اگر ایسا تکمل موجود ہو تو یہ s پر منحصر ہو گا لہٰذا اس کو $F(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

تفاعل $F(s)$ کو تفاعل $f(t)$ کا **لاپلاس بدل**[1] کہا جاتا ہے اور اس کو $\mathcal{L}(f)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

$f(t)$ سے $F(s)$ کے حصول کو **لاپلاس تبادلہ**[2] کہتے ہیں۔

اسی طرح $f(t)$ کو $F(s)$ کا **الٹ لاپلاس بدل**[3] کہتے ہیں جسے $\mathcal{L}^{-1}(F)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) \tag{6.3}$$

علامت نویسی

اصل تفاعل کو چھوٹے لاطینی حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ لاپلاس بدل کو اسی حرف تہجی کی بڑی صورت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $f(t)$ کا بدل $F(s)$ ہو گا اور $g(t)$ کا لاپلاس بدل $G(s)$ ہو گا۔

مثال 6.1: تفاعل $f(t) = 1$ ، جہاں $t \geq 0$ ہے، کا لاپلاس بدل مساوات 6.2 سے بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_0^{\infty}$$

---

[1] Laplace transform
[2] Laplace transformation
[3] inverse Laplace transform

ہو گا جو $s > 0$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

تکمل 6.2 کی علامت پر آسائش ضرور ہے لیکن اس پر مزید غور کی ضرورت ہے۔اس تکمل کا وقفہ لا متناہی ہے۔ایسے تکمل کو **غیر مناسب تکمل**[4] کہتے ہیں اور حزب تعریف، اس کی قیمت درج ذیل اصول کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

یوں اس مثال میں اس آسائش علامت کا مطلب درج ذیل ہے۔

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}e^{0}\right] = \frac{1}{s}, \quad (s > 0)$$

اس پورے باب میں تکمل کی یہی علامت استعمال کی جائے گی۔

مثال 6.2: تفاعل $f(t) = e^{at}$ جہاں $t \geq 0$ اور a مستقل ہے کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دریافت کریں۔

حل: مساوات 6.2 سے

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t}\Big|_0^{\infty}$$

ملتا ہے۔اب اگر $s - a > 0$ ہو (یعنی s کی قیمت a سے زیادہ چنی گئی ہو۔) تب درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

---

[4] improper integral

اگرچہ ہم بالکل اسی طرز پر دیگر تفاعل کے لاپلاس بدل بذریعہ تکمل حاصل کر سکتے ہیں، حقیقت میں لاپلاس تبادلہ کے ایسی کئی خواص ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے دیگر لاپلاس بدل نہایت عمدگی کے ساتھ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔لاپلاس تبادلہ کی ایک خاصیت خطیت ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

مسئلہ 6.1: لاپلاس تبادلہ کی خطیت
لاپلاس تبادلہ خطی عمل ہے۔یوں ایسے تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$ ، جن کے لاپلاس بدل موجود ہوں، کے عمومی مجموعے کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

ثبوت : لاپلاس تبدلہ کی تعریف سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]
\end{aligned}$$

مثال 6.3: آئیں تفاعل $f(t) = \cosh at$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.1 اور مثال 6.2 کی مدد سے لکھیں۔ چونکہ $\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at}+e^{-at})$ ہے لہٰذا

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

ہو گا جہاں $s > a \geq 0$ چنا گیا ہے۔

مثال 6.4: آئیں تفاعل $\sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔چونکہ $\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$ ہے لہٰذا مسئلہ خطیت سے تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

مثال 6.5: $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: انہیں $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ اور $\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) - \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

جدول 6.1 میں چند اہم بنیادی تفاعل اور ان کے لاپلاس بدل دیے گئے ہیں۔اس جدول میں دیے لاپلاس بدل جاننے کے بعد ہم تقریباً ان تمام تفاعل کے بدل، لاپلاسی خواص سے حاصل کر پائیں گے، جو ہمیں درکار ہوں گے۔

جدول 6.1 میں پہلا، دوسرا اور تیسرا کلیہ چوتھے کلیے سے اخذ کیے جا سکتے ہیں جبکہ چوتھا کلیہ از خود پانچویں کلیہ میں مساوات 5.93 استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(n+1) = n!$ لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے، جہاں n غیر منفی $n \geq 0$ عدد صحیح ہے۔ پانچواں کلیہ، لاپلاس بدل کی تعریف مساوات 6.2

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-st} t^a \,\mathrm{d}t$$

میں $st = x$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.91 کے استعمال سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{\mathrm{d}x}{s} = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^a \,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a+1)}{s+1}, \qquad (s > 0)$$

جدول 6.1: چند بنیادی تفاعل $f(t)$ اور ان کے لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$

$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$	شمار	$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$	شمار
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	7	$\frac{1}{s}$	1	1
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	8	$\frac{1}{s^2}$	t	2
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	9	$\frac{2!}{s^3}$	t^2	3
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	10	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n $(n=1,2,\cdots)$	4
$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$	11	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	t^a $(a>0)$	5
$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\sin\omega t$	12	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	6

s منتقلی

تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل جانتے ہوئے تفاعل $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل درج ذیل مسئلہ کی مدد سے فوراً لکھا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 6.2: منتقلی کا پہلا مسئلہ، s منتقلی
اگر تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو (جہاں کسی k کے لئے $s>k$ ہے) تب تفاعل $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s-a)$ ہو گا (جہاں $s-a>k$ ہے)۔

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

اس مساوات کو الٹ لاپلاس بدل کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]$$

ثبوت: لاپلاس بدل کے تکمل مساوات 6.2 میں s کی جگہ $s-a$ پر کرتے ہوئے

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[e^{at}f(t)] \tag{6.4}$$

ملتا ہے۔اگر کسی $s > k$ کے لئے $F(s)$ موجود ہو یعنی اس کی قیمت محدود ہو تب $s - a > k$ کے لئے پہلا تکمل بھی موجود ہو گا (یعنی محدود قیمت کا ہو گا)۔ اس کلیے کے دونوں اطراف کا الٹ لاپلاس بدل لینے سے مسئلے کی دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال 6.6: قصری ارتعاش

جدول 6.1 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے بدل کو استعمال کرتے ہوئے جدول میں گیارہ اور بارہ شمار پر دیے گئے لاپلاس بدل کو مسئلہ 6.2 کی مدد سے فوراً لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{4s + 24}{s^2 + 2s + 101}$$

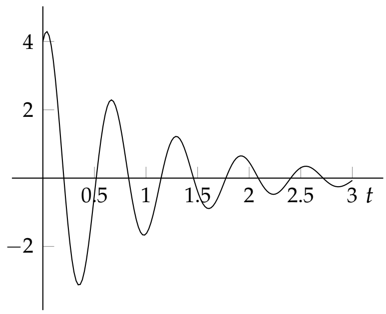
حل:اس کو درکار صورت

$$f = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s+1) + 2(10)}{(s+1)^2 + 10^2}\right] = 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 10^2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)^2 + 10^2}\right]$$

میں لاتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f = e^{-t}(4 \cos 10t + 2 \sin 10t)$$

جسے شکل 6.1 میں دکھایا گیا ہے۔یہ قصری ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل 6.1: قصری ارتعاش (مثال 6.6)

لاپلاس بدل کی وجودیت اور یکتائی

اگر تمام $t \geq 0$ کے لئے، کسی مستقل k اور M پر تفاعل f **بڑھنے کی پابندی**

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{kt} \tag{6.5}$$

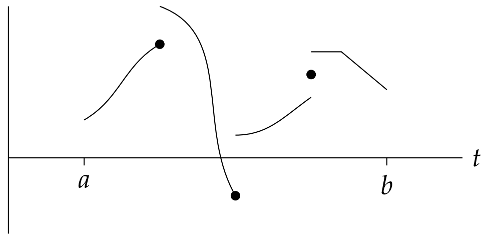
پر پورا اترتا ہو، تب اس کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔ہم کہتے ہیں کہ نہایت تیزی سے نہ بڑھنے والے تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔

$f(t)$ کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے البتہ اس کا ٹکڑوں میں **استمراری**[5] ہونا لازم ہے۔ اگر محدود وقفہ $a \leq t \leq b$ جس پر $f(t)$ معین ہو، کو کئی ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے پر $f(t)$ استمراری ہو اور t کا اندرون ٹکڑے سے ٹکڑے کے (دونوں) سروں تک پہنچنے پر $f(t)$ کی قیمت کا **حد**[6] محدود حاصل ہو تب $f(t)$ **ٹکڑوں میں استمراری** کہلائے گا۔ ایسی صورت میں، جیسا شکل 6.2 میں دکھایا گیا ہے، **محدود چھلانگ**[7] پائے جائیں گے جو غیر استمراری صورت کی واحد وجہ ہو گی۔ عموماً عملی مسائل اسی نوعیت کے ہوتے ہیں۔درج ذیل مسئلہ بھی اسی نوعیت کا ہے۔

مسئلہ 6.3: مسئلہ وجودیت لاپلاس بدل
اگر نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر تفاعل $f(t)$ معین اور ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.5

---

[5] piecewise continuous
[6] limit
[7] jumps



شکل 6.2: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$۔ غیر استمراری مقام پر تفاعل کی قیمت کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

پر، تمام $t \geq 0$ اور کسی مستقل M اور k کے لئے، پورا اترتا ہو تب لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ تمام $s > k$ کے لئے موجود ہو گا۔

ثبوت: چونکہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے لہٰذا t محور کے کسی بھی محدود وقفے پر $e^{-st}f(t)$ قابل تکمل ہے۔ مساوات 6.5 کو دیکھ کر، $s > k$ تصور کرتے ہوئے (جو درج ذیل آخری تکمل میں درکار ہے)، لاپلاس بدل کی وجودیت کا ثبوت حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|\mathcal{L}(f)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\infty \left|f(t)\right| e^{-st}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty M e^{kt} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s-k}$$

کسی بھی تفاعل کا مساوات 6.5 میں دیے گئے شرط پر پورا اترنے کو با آسانی دیکھا جا سکتا ہے، مثلاً $\cosh t < e^t$ یا $t^n < n!e^t$ (چونکہ $\frac{t^n}{n!}$ مکلارن تسلسل کا ایک رکن ہے)۔ ایسا تفاعل جو مساوات 6.5 پر پورا نہ اترتا ہو کی مثال e^{t^2} ہے۔آپ سوال 6.15 میں دیکھیں گے کہ مسئلہ 6.3 میں دیے گئے شرائط لاپلاس بدل کی وجودیت کے لئے کافی ہیں نا کہ لازمی ہیں۔

یکتائی

اگر کسی تفاعل کا لاپلاس بدل موجود ہو تو یہ بدل یکتا ہو گا۔اسی طرح اگر (حقیقی مثبت محور پر معین) دو تفاعل کے لاپلاس بدل یکساں ہوں تب یہ تفاعل، کسی بھی مثبت لمبائی کے وقفے پر، آپس میں مختلف نہیں ہو سکتے ہیں، البتہ تنہا نقطوں پر ان کی قیمت غیر یکساں ہو سکتی ہے۔یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ الٹ لاپلاس بدل یکتا ہے۔ بالخصوص دو ایسے استمراری تفاعل جن کا لاپلاس بدل یکساں ہو، آپس میں مکمل طور پر یکساں ہوں گے۔

سوالات

سوال 6.1 تا سوال 6.8 میں لاپلاس بدل حاصل کریں۔ a اور b کو مستقل تصور کریں۔

سوال 6.1: $2t-3$
جواب: $\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}$

سوال 6.2: $(at+b)^2$
جواب: $a(\frac{b}{s^2}+\frac{2a}{s^3})+b(\frac{b}{s}+\frac{a}{s^2})$

سوال 6.3: $\sin 2\pi t$
جواب: $\frac{2\pi}{s^2+4\pi^2}$

سوال 6.4: $\sin^2 2\pi t$
جواب: $\frac{8\pi^2}{s(s^2+16\pi^2)}$

سوال 6.5: $e^{-3t}\sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

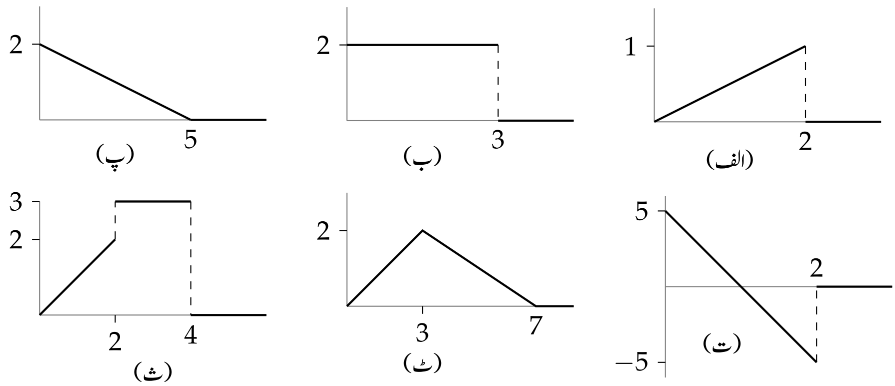
سوال 6.6: $e^{2t}\cos 3t$
جواب: $\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

سوال 6.7: $\cos(2t-\frac{\pi}{3})$
جواب: $\frac{\frac{s}{2}+\sqrt{3}}{s^2+4}$

سوال 6.8: $2\sin(5t+\pi)$
جواب: $\frac{-10}{s^2+25}$

سوال 6.9: شکل 6.3-الف میں ٹکڑوں میں استمراری تفاعل دکھایا گیا ہے۔تمام ٹکڑوں کی ریاضی مساوات حاصل کریں۔ تکمل 6.2 کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1-e^{-2s}(2s+1)}{2s^2}$



شکل 6.3: سوال 6.9 تا سوال 6.9 کے اشکال۔

سوال 6.10: شکل 6.3-ب میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2}{s}\left(1-e^{-3s}\right)$

سوال 6.11: شکل 6.3-پ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2e^{-5s}+10s-2}{5s^2}$

سوال 6.12: شکل 6.3-ت میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{5(s+1)e^{-2s}+5(s-1)}{s^2}$

سوال 6.13: شکل 6.3-ٹ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{4-7e^{-3s}+3e^{-7s}}{6s^2}$

سوال 6.14: شکل 6.3-ث میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1+(s-1)e^{-2s}-3se^{-4s}}{s^2}$

سوال 6.15: وجودیت
تفاعل $\frac{1}{\sqrt{t}}$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ایسا کرتے ہوئے $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (مساوات 5.97) کا استعمال کریں۔
اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ مسئلہ 6.3 میں دیے شرائط کافی ہیں نا کہ لازمی۔

جواب: $\frac{\sqrt{\pi}}{s}$

سوال 6.16: e^{at} کا لاپلاس بدل $\cosh at$ اور $\sinh at$ کے لاپلاس بدل سے حاصل کریں۔

جواب: $e^{at} = \sinh at + \cosh at$ لکھ کر جواب $\frac{1}{s-a}$ ملتا ہے۔

سوال 6.17: پیمائشی فیتہ میں ردوبدل
ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{F(\frac{s}{c})}{c}$ ہو گا جہاں c مستقل ہے۔اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے $\mathcal{L}(\cos t)$ سے $\mathcal{L}(\cos \omega t)$ حاصل کریں۔

جواب: مساوات 6.2 استعمال کرتے ہوئے کلیہ ثابت ہو گا۔

سوال 6.18: الٹ لاپلاس بدل کی خطیت
$\mathcal{L}$ کی خطیت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\mathcal{L}^{-1}$ خطی ہے۔

سوال 6.19 تا سوال 6.26 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.19: $\frac{0.5s+1.3}{s^2+1.69}$
جواب: $\sin(1.3t) + 0.5\cos(1.3t)$

سوال 6.20: $\frac{4s+1}{s^2-16}$
جواب: $\frac{1}{8}(17e^{4t} + 15e^{-4t})$

سوال 6.21: $\frac{s}{m^2s^2+n^2}$
جواب: $\frac{\cos\frac{nt}{m}}{m^2}$

سوال 6.22: $\frac{1}{(s+3)(s-2)}$
جواب: $\frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})$

سوال 6.23: $\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^5}$
جواب: $t^2+\frac{t^4}{8}$

سوال 6.24: $\frac{3s+8}{s^2-9}$
جواب: $\frac{1}{6}(17e^{3t}+e^{-3t})$

سوال 6.25: $\frac{s-1}{s^2-s-6}$
جواب: $\frac{1}{5}(2e^{3t}+3e^{-2t})$

سوال 6.26: $\frac{1}{(s-a)(s+b)}$
جواب: $\frac{1}{a+b}(e^{at}-e^{-bt})$

سوال 6.27 تا سوال 6.38 منتقلی s پر مبنی ہیں۔ سوال 6.27 تا سوال 6.30 میں لاپلاس بدل جبکہ سوال 6.31 تا سوال 6.38 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.27: te^{2t}
جواب: $\frac{1}{(s-2)^2}$

سوال 6.28: $e^{-3t}\sin 5t$
جواب: $\frac{5}{(s+3)^2+5^2}$

سوال 6.29: $0.25e^{-1.5t}\cos(3\pi t)$
جواب: $\frac{0.25(s+1.5)}{(s+1.5)^2+(3\pi)^2}$

سوال 6.30: $\sinh t\sin\omega t$
جواب: $\frac{1}{2}[\frac{\omega}{(s-1)^2+\omega^2}-\frac{\omega}{(s+1)^2+\omega^2}]$

سوال 6.31: $\frac{m}{(s+n)^2}$
جواب: mte^{-nt}

سوال 6.32: $\frac{3}{(s+5)^4}$
جواب: $\frac{t^3e^{-5t}}{2}$

سوال 6.33: $\frac{3}{(s+\sqrt{5})^3}$
جواب: $\frac{3t^2e^{-\sqrt{5}t}}{2}$

سوال 6.34: $\frac{4}{s^2+2s+5}$
جواب: $2e^{-t}\sin 2t$

سوال 6.35: $\frac{\pi}{s^2+8\pi s+17\pi^2}$
جواب: $e^{-4\pi t}\sin \pi t$

سوال 6.36: $\frac{3s+22}{s^2+8s+41}$
جواب: $e^{-4t}(2\sin 5t+3\cos 5t)$

سوال 6.37: $\frac{s+a+b}{(s+a)^2+b^2}$
جواب: $e^{-at}(\cos bt+\sin bt)$

سوال 6.38: $\frac{a}{s+c}+\frac{b}{(s+c)^2}$
جواب: $(a+bt)e^{-ct}$

6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔سادہ تفرقی مساوات

لاپلاس بدل کو استعمال کرتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل حل کیے جاتے ہیں۔لاپلاس بدل کے استعمال سے احصائی اعمال کی جگہ الجبرائی اعمال استعمال کیے جاتے ہیں۔یوں $f(t)$ کا تفرق، $F(s)$ کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہو گا جبکہ $f(t)$ کا تکمل، $F(s)$ کو s سے تقسیم کرنے کے مترادف ہو گا۔

مسئلہ 6.4: $f(t)$ کی تفرق کا لاپلاس بدل
اگر $f(t)$ تمام $t\ge 0$ پر استمراری ہو، مساوات 6.5 پر پورا اترتا ہو اور $f'(t)$ نصف محور $t\ge 0$ کے ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو تب، $s>k$ کی صورت میں، $f'(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f')=s\mathcal{L}(f)-f(0)\qquad (s>k) \tag{6.6}$$

ثبوت : ہم یہ فرض کرتے ہوئے کہ f' بھی استمراری ہے مساوات 6.6 ثابت کرتے ہیں۔یوں لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) اور تکمل بالحصص سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) \, \mathrm{d}t = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t = f(0) + sF(s)$$

چونکہ $f(t)$ مساوات 6.5 پر پورا اترتی ہے لہٰذا $s > k$ کی صورت میں $t = \infty$ پر $e^{-st} f(t)$ صفر دیگا جبکہ $t = 0$ پر یہ $f(0)$ دیگا۔آخری تکمل $\mathcal{L}(f) = F(s)$ کے برابر ہے جس کا حل، $s > k$ کی صورت میں، مسئلہ 6.3 کے تحت موجود ہے۔یوں $\mathcal{L}(f')$ کا حل موجود ہے۔

اگر f' ٹکڑوں میں استمراری ہو تب درج بالا ثبوت میں تکمل کو ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے (وقفے) پر f' استمراری ہو۔ سوال 6.52 میں اس پر غور کیا گیا ہے۔

f'' پر مساوات 6.6 لاگو کر کے حاصل جواب میں مساوات 6.6 پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \tag{6.7}$$

اسی ترکیب کو f''' پر لاگو کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \tag{6.8}$$

ملتا ہے۔اس ترکیب کو بار بار استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 6.5: بلند درجی تفرق f^n

اگر $f(t)$ اور اس کے تفرقات $f'(t)$ ، $f''(t)$ ، $\cdots$ ، $f^{(n-1)}(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہوں، مساوات 6.5 پر پورا اترتے ہوں اور $f^{(n)}(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر **ٹکڑوں میں استمراری** ہو تب، $s > k$ کی صورت میں، $f^{(n)}(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{6.9}$$

مثال 6.7: تفاعل $f(t)=t^2$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f'=2t$ اور $f''=2$ ہیں۔یوں $f(0)=0$ ، $f'(0)=0$ اور $f''(0)=2$ ملتے ہیں۔اب $\mathcal{L}(2)=\frac{2}{s}$ ہے لہٰذا مساوات 6.7 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو جدول 6.1 کے عین مطابق ہے۔

$$\mathcal{L}(f'')=\mathcal{L}(2)=\frac{2}{s}=s^2\mathcal{L}(f), \quad\implies\quad \mathcal{L}(t^2)=\frac{2}{s^3}$$

عموماً کسی بھی تفاعل کا لاپلاس بدل کئی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔

مثال 6.8: تفاعل $f(t)=\sin^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0)=0$ ہے جبکہ $f'=2\sin t\cos t=\sin 2t$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(\sin 2t)=\frac{2}{s^2+4}=s\mathcal{L}(f) \quad\implies\quad \mathcal{L}(f)=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

مثال 6.9: تفاعل $f(t)=t\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0)=0$ ہے جبکہ

$$f'(t) = \sin\omega t - \omega t\cos\omega t, \quad f'(0) = 0,$$
$$f''(t) = 2\omega\cos\omega t - \omega^2 t\sin\omega t = 2\omega\cos\omega t - \omega^2 f(t)$$

ہیں۔یوں مساوات 6.7 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(f'') = 2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t) - \omega^2\mathcal{L}(f) = s^2\mathcal{L}(f)$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل پر کرتے

$$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}(f) = 2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}$$

ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

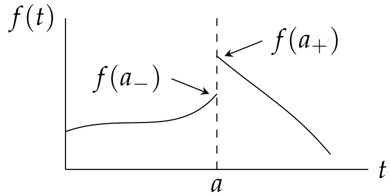
مثال 6.10: تفاعل $f(t) = t\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل:ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(t) = t\cos\omega t, \quad f(0) = 0$$
$$f'(t) = \cos\omega t - \omega t\sin\omega t, \quad f'(0) = 1$$
$$f''(t) = -2\omega\sin\omega t - \omega^2 f(t)$$

یوں مساوات 6.7 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - sf'(0)$$
$$= s^2F(s) - 1$$



شکل 6.4: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$ (مثال 6.11)

ساتھ ہی ساتھ f'' کی مساوات کا لاپلاس بدل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= \mathcal{L}[-2\omega\sin\omega t - \omega^2 f(t)]\\ &= -\frac{2\omega^2}{s^2+\omega^2} - \omega^2 F(s)\end{aligned}$$

ان دونوں جوابات کو برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$F(s) = \mathcal{L}[t\cos\omega t] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{6.10}$$

مثال 6.11: استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.4 دیتی ہے۔آئیں ٹکڑوں میں استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔شکل 6.4 کے تفاعل میں $t = a(>0)$ پر تفاعل غیر استمراری ہے جبکہ بقایا تمام شرائط وہی ہیں جو مسئلہ 6.4 میں تھے۔اس تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

شکل 6.4 میں دکھایا گیا تفاعل $t = a$ غیر استمراری ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $t = a$ پر تفاعل چھلانگ[8] لگاتا ہے یا کہ تفاعل میں $t = 0$ پر چھلانگ پائی جاتی ہے۔نقطہ چھلانگ تک بائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد[9] کو $f(a_-)$ لکھا جاتا ہے جبکہ نقطہ چھلانگ تک دائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد کو $f(a_+)$ لکھا جاتا ہے۔یوں $t = a$ پر تفاعل کی چھلانگ $f(a_+) - f(a_-)$ ہو گی۔

jump[8]
limit[9]

لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو ایسے ٹکڑوں (وقفوں) میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ہر وقفے پر $f(t)$ استمراری ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_{a_+}^{\infty} e^{-st} f' \, \mathrm{d}t + \int_0^{a_-} e^{-st} f' \, \mathrm{d}t$$

پہلے تکمل کا ابتدائی حد a_+ ہے جو $t = a$ کے دائیں طرف کو ظاہر کرتی ہے جہاں تفاعل کی قیمت $f(a_+)$ ہے۔اسی طرح دوسری تکمل کا اختتامی حد a_- ہے جس پر تفاعل کی قیمت $f(a_-)$ ہے۔انہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ تکمل بالحصص سے

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f') &= e^{-st} f(t)\Big|_{a_+}^{\infty} + s\int_{a_+}^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t + e^{-st} f(t)\Big|_0^{a_-} + s\int_0^{a_-} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \\
&= -e^{-sa} f(a_+) + s\int_{a_+}^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t + e^{-sa} f(a_-) - f(0) + s\int_0^{a_-} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \\
&= s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t - f(0) - e^{-sa}[f(a_+) - f(a_-)] \\
&= sF(s) - f(0) - e^{-sa}[f(a_+) - f(a_-)]
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں e^{-st} استمراری ہونے کی بدولت $e^{-sa_+} = s^{-sa_-} = s^{-sa}$ ہے۔

مثال 6.12: تفرقی مساوات
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

حل: پہلا قدم ضمنی مساوات کا حصول ہے۔نا معلوم تفاعل $y(t)$ کا لاپلاس بدل $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ لکھ کر مساوات 6.6 اور مساوات 6.7 میں دیے گئے ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y') &= sY - y(0) = sY - 2 \\
\mathcal{L}(y'') &= s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - 2s + 1
\end{aligned}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔ Y کی مساوات کو **ضمنی مساوات**[10] کہتے ہیں۔

$$s^2Y + 3sY + 2Y = 2s + 5$$

دوسرا قدم ضمنی مساوات کا الجبرائی حل ہے۔موجودہ ضمنی مساوات کو

$$(s+1)(s+2)Y = 2s + 5$$

لکھ کر جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Y = \frac{2s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

تیسرا قدم الٹ لاپلاس بدل حاصل کرنا ہے۔جدول 6.1 سے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] = 3e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں خطیت (مسئلہ 6.1) استعمال کرتے ہوئے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے کا حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = 3e^{-t} - e^{-2t}$$

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ لاپلاس بدل سے تفرقی مساوات کے حل میں شروع سے ابتدائی قیمتیں مسئلے کا حصہ بنتی ہیں۔

تفاعل کے تکمل کا لاپلاس بدل

ہم نے دیکھا کہ تفاعل کے تفرق کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہے۔چونکہ تکمل اور تفرق آپس میں الٹ اعمال ہیں لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تفاعل کے تکمل کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل تقسیم s ہو گا۔

[10] subsidiary equation

مسئلہ 6.6: $f(t)$ کی تکمل کا لاپلاس بدل
اگر $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.5 پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \qquad (s > 0,\, s > k) \tag{6.11}$$

ثبوت: فرض کریں کہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے اور مساوات 6.5 پر پورا اترتی ہے۔اب گر منفی k کے لئے مساوات 6.5 کی شرط پوری ہوتی ہو تب مثبت k کے لئے بھی یہ شرط پوری ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ k مثبت ہے لہٰذا تکمل

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.12}$$

استمراری ہو گا اور مساوات 6.5 کے استعمال سے

$$\left|g(t)\right| \le \int_0^t \left|f(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \le M\int_0^t e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{M}{k}(e^{kt}-1) \qquad (k>0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔مزید ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f(t)$ غیر استمراری ہو، $g'(t) = f(t)$ ہو گا۔اس طرح $g'(t)$ ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو گا لہٰذا مسئلہ 6.4 کے تحت

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \qquad (s>k)$$

ہو گا۔اب مساوات 6.12 سے $g(0) = 0$ ملتا ہے لہٰذا $\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(g)$ ہو گا جو مساوات 6.11 ہی ہے۔

مساوات 6.11 میں $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ لکھ کر اور اطراف بدل کر، الٹ لاپلاس بدل لینے سے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.13}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 6.11 کی جڑواں مساوات ہے۔

مثال 6.13: $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے تفاعل $f(t)$ حاصل کریں۔

حل: جدول 6.1

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

دیتی ہے۔ یوں مسئلہ 6.6 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]=\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

حاصل ہو گا۔ مسئلہ 6.6 ایک مرتبہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]=\frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

سوالات

سوال 6.39: $\sin^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.8 میں حاصل کیا گیا۔ یہاں $\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$ لکھ کر لاپلاس بدل دوبارہ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{2}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}]=\frac{2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.40: $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.8 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.41: $\cos^2 t=1-\sin^2 t$ لکھ کر $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.42: ہم نے مثال 6.13 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کیا۔اسی کو درج ذیل لکھ کر دوبارہ الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)$$

سوال 6.43: مسئلہ 6.4 استعمال کرتے ہوئے $\sin\omega t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.44: تفاعل $f(t)=\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.7 حاصل کریں۔

جواب: $f(0)=0$ ہے جبکہ $f'=\omega\cos\omega t$ اور $f''=-\omega^2\sin\omega t=-\omega^2 f$ ہیں۔یوں $f'(0)=\omega$ ملتا ہے۔مساوات 6.7 سے $\mathcal{L}(f'')=-\omega^2\mathcal{L}(f)=s^2\mathcal{L}(f)-s(0)-\omega$ لکھا جائے گا جس سے جدول 6.1 میں دیا گیا جواب $\mathcal{L}(f)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ملتا ہے۔

سوال 6.45: تفاعل $f(t)=\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.7 حاصل کریں۔جدول سے جواب دیکھیں۔

سوال 6.46: مسئلہ 6.5 استعمال کرتے ہوئے $f(t)=t^n$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں جہاں t عدد صحیح ہے۔

جواب: چونکہ $f(0)=0$ ، $f'(0)=0$ ، $\cdots$ ، $f^{(n-1)}(0)=0$ ہیں جبکہ $f^n=n!$ ہے لہٰذا مسئلہ 6.5 سے $\mathcal{L}(f^n)=s^nF(s)$ لکھا جائے گا جبکہ $\mathcal{L}(f^{(n)})=\mathcal{L}(n!)=\frac{n!}{s}$ ہے۔یوں $\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.47: ہم نے مثال 6.10 میں $t\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا۔اسی طرز پر $t\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

سوال 6.48: $t\sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$

سوال 6.49: $t\cosh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

سوال 6.50: مثال 6.10 اور سوال 6.47 میں بالترتیب $t\cos\omega t$ اور $t\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا گیا۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t) \tag{6.14}$$

جواب: $t\sin\omega t$ کے بدل سے $\mathcal{L}^{-1}\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}=t\sin\omega t$ لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 6.6 سے $\mathcal{L}^{-1}\frac{2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}=\int_0^t\tau\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$ ملتا ہے۔ دائیں ہاتھ تکمل بالحصص سے $\frac{\sin\omega t}{\omega^3}-\frac{t\cos\omega t}{\omega^2}$ ملتا ہے۔ ان نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.51: درج ذیل ثابت کریں۔ سوال 6.50 کی طرز پر حل کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t) \tag{6.15}$$

سوال 6.52: $f'(t)$ میں محدود چھلانگ نقطہ t_1 ، t_2 ، $\cdots$ ، t_n پر پائے جاتے ہیں جبکہ $f(t)$ استمراری ہے۔ $t_1<t_2<\cdots<t_n$ لیتے ہوئے مسئلہ 6.4 ثابت کریں۔

جواب:

$$\mathcal{L}(f')=\int_0^{t_{1-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\int_{t_{1+}}^{t_{2-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\int_{t_{2+}}^{t_{3-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\cdots+\int_{t_{n+}}^{\infty}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t$$

لکھ کر تکمل بالحصص حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')=\;&e^{-st}f(t)\Big|_0^{t_{1-}}+s\int_0^{t_{1-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{1+}}^{t_{2-}}+s\int_{t_{1+}}^{t_{2-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\\&+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{2+}}^{t_{3-}}+s\int_{t_{2+}}^{t_{3-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\cdots+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{n+}}^{\infty}+s\int_{t_{n+}}^{\infty}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.16}$$

اب $f(t)$ استمراری ہے لہٰذا مساوات 6.16 میں متعدد تکملات کو یکجا کیا جا سکتا ہے

$$s\int_0^{t_{1-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + s\int_{t_{1+}}^{t_{2-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + s\int_{t_{n+}}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

جبکہ بقایا اجزاء سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} e^{(-st_{1-})} f(t_{1-}) - f(0) + e^{(-st_{2-})} f(t_{2-}) - e^{(-st_{1+})} f(t_{1+}) + e^{(-st_{3-})} f(t_{3-}) \\ - e^{(-st_{2+})} f(t_{2+}) + \cdots + e^{(-\infty)} f(\infty) - e^{(-st_{n+})} f(t_{n+}) \end{aligned}$$

چونکہ $f(t)$ استمراری ہے لہٰذا $e^{(-st_{m-})} f(t_{m-}) = e^{(-st_{m+})} f(t_{m+}) = e^{(-st_m)} f(t_m)$ ہو گا۔یوں $e^{(-st_{1-})} f(t_{1-})$ اور $-e^{(-st_{1+})} f(t_{1+})$ آپس میں کٹ جائیں گے۔اسی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔پہلے دو اجزاء میں سے $f(0)$ بچتا ہے جبکہ $f(t)$ محدود تفاعل ہونے کی بنا $e^{-\infty} f(\infty) = 0$ ہو گا۔اس طرح مسئلہ 6.4 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوال 6.53 تا سوال 6.63 کو مسئلہ 6.6 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 6.53: $\frac{1}{s^2+s}$
جواب: $1-e^{-t}$

سوال 6.54: $\frac{6}{s^2+4s}$
جواب: $\frac{3}{2}(1-e^{-4t})$

سوال 6.55: $\frac{3}{s^2-9s}$
جواب: $\frac{1}{3}(e^{9t}-1)$

سوال 6.56: $\frac{9}{s^3+9s}$
جواب: $1-\cos 3t$

سوال 6.57: $\frac{4}{s^2(s+2)}$
جواب: $e^{-2t}+2t-1$

سوال 6.58: $\frac{4}{s^3(s+2)}$
جواب: $-\frac{e^{-2t}}{2}+t^2-t+\frac{1}{2}$

سوال 6.59: $\frac{12}{s(s^2+4)}$
جواب: $3 - 3\cos 2t$

سوال 6.60: $\frac{12}{s^2(s^2+4)}$
جواب: $3t - \frac{3}{2}\sin 2t$

سوال 6.61: $\frac{32}{s(s^2-16)}$
جواب: $2\cosh 4t - 2$

سوال 6.62: $\frac{32}{s^2(s^2-16)}$
جواب: $\frac{1}{2}\sinh 4t - 2t$

سوال 6.63: $\frac{6}{s^4(s^2+1)}$
جواب: $6\sin t + t^3 - 6t$

لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت سوالات 6.64 تا 6.70 حل کریں۔

سوال 6.64: $y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
جواب: $y = \cos \pi t$

سوال 6.65: $y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A,\ y'(0) = B$
جواب: $y = A\cos \omega t + \frac{B}{\omega}\sin \omega t$

سوال 6.66: $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$
جواب: $y = 4e^{2t} - 3e^{3t}$

سوال 6.67: $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
جواب: $y = e^{2t} + e^{-t}$

سوال 6.68: $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
جواب: $y = (2 - t)e^t$

سوال 6.69: $y'' - ky' = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = k,\ k > 0$
جواب: $y = 1 + e^{kt}$

سوال 6.70: $y'' + ky' - 2k^2y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 2k$
جواب: $y = 2e^{kt}$

سوال 6.71: جبری، بلا تقصیر ارتعاش
ثابت کریں کہ درج ذیل

$$y'' + \omega^2 y = r(t)$$

کے ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے جہاں $r(t)$ کا لاپلاس بدل $R(s)$ ہے۔ ω مستقل ہے اور $r(t)$ جبری تفاعل ہے۔

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

دھیان رہے کہ جواب کا پہلا جزو صرف اور صرف ابتدائی معلومات پر منحصر ہے جبکہ جواب کے دوسرے جزو پر ابتدائی معلومات کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی،اکائی سیڑھی تفاعل

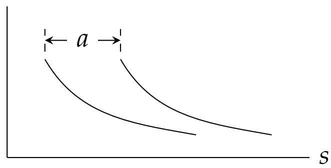
اب تک ہم لاپلاس بدل کے کئی خواص جان چکے ہیں۔ اس حصے میں دو مزید خصوصیات پیش کیے جائیں گے جنہیں s محور پر منتقلی (مسئلہ 6.7) اور t محور پر منتقلی (مسئلہ 6.8) کہتے ہیں۔

مسئلہ 6.7: s محور پر منتقلی؛ منتقلی کا پہلا مسئلہ
اگر $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو جہاں $s > k$ ہے، تب $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s-a)$ ہو گا جہاں $s - a > k$ ہے۔یوں اگر

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

ہو تب

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$



شکل 6.5: منتقلی کا پہلا مسئلہ، s محور پر منتقلی

ہو گا۔ یوں اصل تفاعل کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ پر کرنے کے مترادف ہے یعنی لاپلاس بدل s محور پر اپنی جگہ سے سرک کر نئی جگہ منتقل ہو جاتا ہے (شکل 6.5 دیکھیں)۔

ثبوت: لاپلاس بدل کی تعریف

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$$

استعمال کرتے ہوئے s کی جگہ $s-a$ پر کرتے ہیں۔

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-st}[e^{at}f(t)]\,\mathrm{d}t=\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$$

مثال 6.14: منتقلی کا پہلا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے جدول 6.1 میں درج تفاعل t^n ، $\sin\omega t$ اور $\cos\omega t$ کو e^{at} سے ضرب دے کر لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$
$$\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

مثال 6.15: قصری آزاد ارتعاش
چھت سے لٹکی لچکدار اسپرنگ کے نچلے سرے سے کمیت $m=3$ لٹکائی گئی ہے۔اسپرنگ کا ینگ مقیاس لچک $k=6$ ہے۔کمیت کے ساکن مقام سے فاصلہ $y(t)$ ہے۔کمیت کو ابتدائی طور پر $y(0)=4$ پر رکھ کر اس کو ابتدائی رفتار $y'(0)=-3$ دی جاتی ہے۔فرض کریں کہ کمیت کی رفتار کے راست متناسب قصری قوت عمل کرتی ہے جہاں قصری مستقل $c=12$ کے برابر ہے۔کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل:کمیت کی حرکت کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ بیان کرتا ہے

$$y''+2y'+4y=0, \qquad y(0)=4,\, y'(0)=-3$$

جس کا ضمنی مساوات

$$s^2Y-4s+3+2(sY-4)+4Y=0$$

ہے۔ضمنی مساوات کا حل لکھتے ہیں۔

$$Y=\frac{4s+5}{s^2+2s+4}=\frac{4(s+1)}{(s+1)^2+3}+\frac{1}{(s+1)^2+3}$$

اب ہم جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3}\right)=\cos\sqrt{3}t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right)=\sin\sqrt{3}t$$

ہیں لہٰذا مسئلہ 6.7 کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=e^{-t}(4\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t)$$

t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل

منتقلی کے پہلے مسئلے میں ہم نے دیکھا کہ تفاعل $f(t)$ کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ لکھنے کے مترادف ہے۔اب ہم منتقلی کا دوسرا مسئلہ (مسئلہ 6.8) پیش کرتے ہیں جس کے تحت تفاعل $f(t)$ میں t کی جگہ $t-a$ پر کرنا، لاپلاس بدل $F(s)$ کو (تقریباً) e^{-as} سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔

مسئلہ 6.8: t محور پر منتقلی؛ منتقلی کا دوسرا مسئلہ
اگر تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو تب $e^{-as}F(s)$ ، جہاں $a>0$ ہے، درج ذیل تفاعل کا لاپلاس بدل ہو گا۔

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ f(t-a) & t>a\end{cases}$$

اکائی سیڑھی تفاعل (الیور ہیوی سائیڈ تفاعل)[11] ، جسے شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے، کی تعریف[12] درج ذیل ہے۔

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases} \tag{6.17}$$

$t<a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل کی قیمت صفر ہے جبکہ $t>a$ پر اس کی قیمت اکائی ہے۔عین $t=a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل غیر معین[13] ہے اور یہاں اس میں اکائی کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔

اکائی سیڑھی تفاعل کو زیر استعمال لاتے ہوئے ہم $\tilde{f}(t)$ کو $f(t-a)u(t-a)$ لکھ سکتے ہیں جس کی مثال شکل 6.7 میں دکھائی گئی ہے۔اس طرح مسئلہ 6.8 کہتا ہے کہ

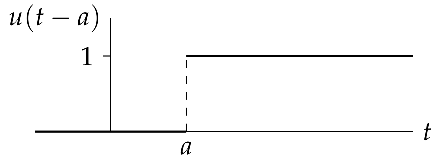
$$e^{-as}F(s)=\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] \tag{6.18}$$

جسے الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

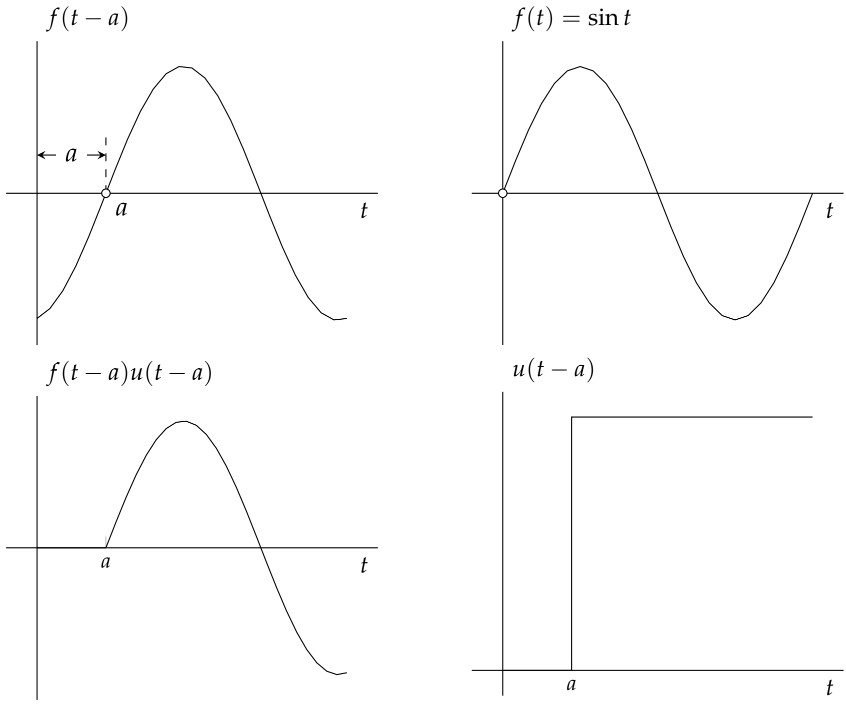
$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)u(t-a) \tag{6.19}$$

---

[11] Heaviside function
[12] الیور ہیوی سائیڈ [1850-1925] خود لکھ پڑھ کر برقی مہندس، ماہر ریاضی اور ماہر طبیعیات بنے۔ یہ انگلستانی تھے۔
[13] undefined



شکل6.6:اکائی سیڑھی تفاعل $u(t-a)$



شکل6.7: $f(t-a)u(t-a)$ جہاں $f(t)=\sin t$ ہے۔

ثبوت : مسئلہ 6.8 کا ثبوت
لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $\tau + a = t$ پر کرتے ہوئے

$$e^{-as}F(s) = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر اندرون تکمل مقدار کی قیمت وقفہ $t=0$ تا $t=a$ کے درمیان صفر کے برابر ہو تب اس تکمل کے حدود کو 0 تا ∞ لکھا جا سکتا ہے۔یہی کچھ اندرونِ تکمل کو $u(t-a)$ سے ضرب دیتے ہوئے کرنا ممکن ہے لہٰذا درج بالا کو

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

اکائی سیڑھی تفاعل نہایت اہم تفاعل ہے۔آئیں اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_0^a e^{-st} 0\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty e^{-st} 1\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_a^\infty$$

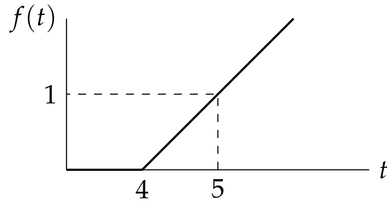
لکھتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے جہاں $s > 0$ ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \qquad (s>0) \tag{6.20}$$

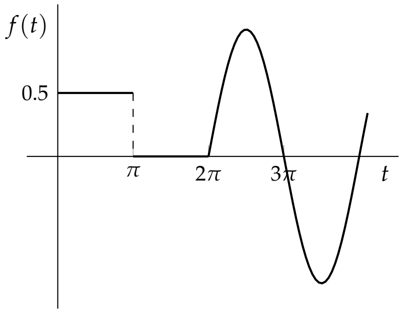
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $a = 0$ کی صورت میں $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ ملتا ہے۔

لاپلاس بدل کی عملی استعمال

لاپلاس بدل کے بارے میں اب ہم اتنا جانتے ہیں کہ اس کو استعمال کرتے ہوئے ایسے مشکل مسائل (مثلاً مثال 6.18، مثال 6.19 اور مثال 6.20) حل کریں جنہیں دیگر طریقوں سے حل کرنا نسبتاً زیادہ دشوار ہو گا۔



(الف) مثال 6.16 کا تفاعل۔



(ب) مثال 6.17 کا تفاعل۔

شکل 6.8: مثال 6.16 اور مثال 6.17 کے تفاعل۔

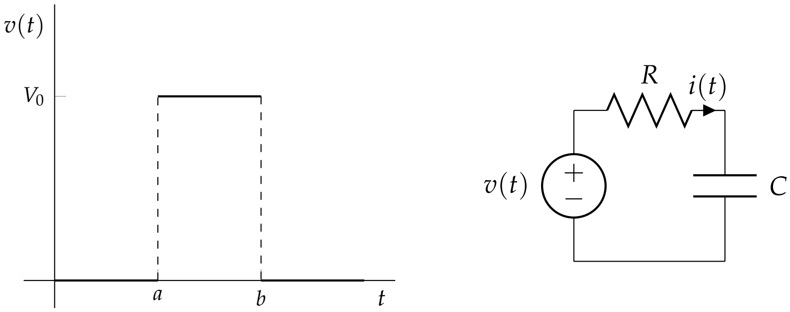
مثال 6.16: تفاعل $\frac{e^{-4s}}{s^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل دریافت کریں۔

حل: چونکہ $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t$ ہے لہٰذا مسئلہ 6.8 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔ شکل 6.8-الف دیکھیں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^2}\right) = (t-4)u(t-4)$$

مثال 6.17: شکل 6.8-ب میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0.5 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$



شکل 6.9: مثال 6.18 کا دور اور داخلی دباو۔

حل: اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے دیے گئے تفاعل کو لکھتے ہیں

$$f(t) = 0.5u(t) - 0.5u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t$$

جہاں $\sin(t-2\pi) = \sin t$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 6.20، مساوات 6.18 اور جدول 6.1 کی مدد سے لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

مثال 6.18: ایک عدد چکور موج پر RC دور کا رد عمل

مزاحمت اور برق گیر کا سلسلہ وار دور شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو ایک عدد چکور موج $v(t)$ مہیا کی جاتی ہے۔ دور میں برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ شکل 6.9 سے رجوع کریں۔

حل: کرخوف مساوات دباو سے

$$i(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v(t)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں داخلی دباو کو دو عدد اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے

$$v(t) = V_0(u(t-a) - u(t-b))$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 6.20 اور مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$I(s)R + \frac{I(s)}{sC} = \frac{V_0}{s}[e^{-as} - e^{-bs}]$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$I(s) = \left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s+\frac{1}{RC}}\right)[e^{-as} - e^{-bs}]$$

اب ہم جدول 6.1 سے جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s+\frac{1}{RC}}\right) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

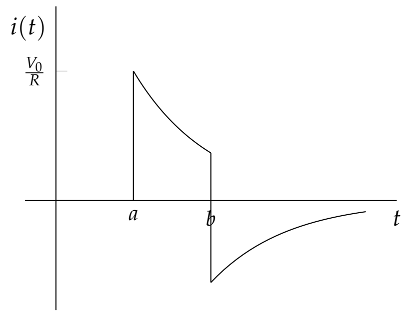
کے برابر ہے لہٰذا اصل حل مسئلہ 6.8 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}(I) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-bs}F(s)] \\ &= \frac{V_0}{R}[e^{-\frac{(t-a)}{RC}}u(t-a) - e^{-\frac{(t-b)}{RC}}u(t-b)] \end{aligned}$$

جس کو یوں

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ K_1 e^{-\frac{t}{RC}} & a < t < b \\ (K_1 - K_2)e^{-\frac{t}{RC}} & t > b \end{cases}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $K_1 = \frac{V_0}{R}e^{\frac{a}{RC}}$ اور $K_2 = \frac{V_0}{R}e^{\frac{b}{RC}}$ ہیں۔ برقی رو $i(t)$ کو شکل 6.10 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 6.10: مثال 6.18 کی رو $i(t)$

مثال 6.19: بلا تقصیر نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور داخلی موج
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y'' + 4y = r(t), \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

حل: داخلی جبری قوت کو $r(t) = 2[u(t) - u(t-1)]$ لکھا جا سکتا ہے۔ دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$s^2 Y + 4Y = \frac{2}{s}(1 - e^{-s})$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

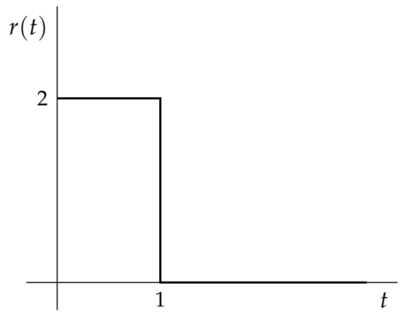
$$Y = \frac{2}{s(s^2+4)}(1 - e^{-s})$$

اب جدول 6.1 کے تحت $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4}) = \sin 2t$ ہے لٰہذا مساوات 6.13 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+4)}\right] = \int_0^t \sin 2\tau \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

اب مسئلہ 6.8 زیر استعمال لاتے ہوئے اصل جواب لکھتے ہیں

$$y(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] - \frac{1}{2}[1 - \cos 2(t-1)]u(t-1)$$



شکل 6.11: مثال 6.19 اور مثال 6.20 کا داخلی تفاعل۔

جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ رد عمل دو مختلف ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1-\cos 2t] & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}[\cos 2(t-1) - \cos 2t] & t > 1 \end{cases}$$

مثال 6.20: قصری نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور موج
درج ذیل قصری ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.11 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y'' + 4y' + 3y = r(t) \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

حل: ضمنی مساوات لکھ کر

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{2}{s}(1 - e^{-s})$$

حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$Y = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}(1 - e^{-s})$$

$F(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}$ کا جزوی کسری پھیلاو

$$F(s) = \frac{2}{3s} + \frac{1}{3(s+3)} - \frac{1}{s+1}$$

ہے لہٰذا

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t}$$

ہو گا۔یوں مسئلہ 6.8 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s}) = f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{e^{-3(t-1)}}{3} - e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے اصل حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = f(t) - f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t} & 0 < t < 1 \\ (1-e^3)\frac{e^{-3t}}{3} - (1-e)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

سوالات

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

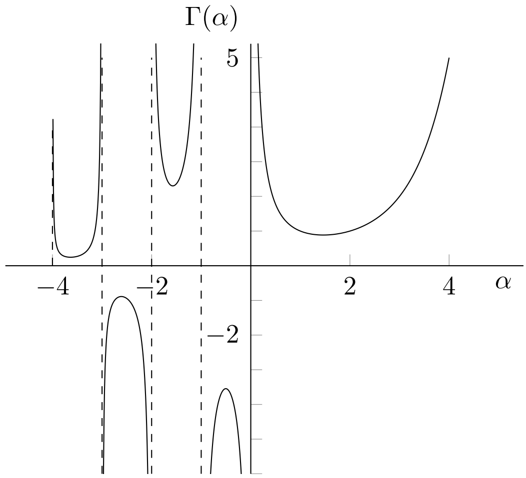
ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

گیما تفاعل



شکل 1.ب: گیما تفاعل