انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 4

نظامِ تفرقی مساوات

گزشتہ باب میں آپ نے بلند درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔اس باب میں سادہ تفرقی مساوات حل کرنے کا نیا طریقہ دکھایا جائے گا جس میں n درجی سادہ تفرقی مساوات سے n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جائے گا۔اس نظام کو حل کرنا بھی سکھایا جائے گا۔ تفرقی مساوات کے نظام کو قالب اور سمتیہ کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے لہٰذا حصہ 4.1 میں قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق پر غور کیا جائے گا۔

اسی باب میں تفرقی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بجائے تمام مساوات کی مجموعی طرز عمل پر غور کیا جائے گا جس سے نظام کے حل کی توازن[1] کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہے۔انجینئری میں متوازن نظام اہمیت رکھتے ہیں۔متوازن نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی، بعد کے لمحات پر معمولی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔اس ترکیب سے مساوات کا اصل حل دریافت نہیں ہوتا لہٰذا اس کو **کیفی ترکیب**[2] کہتے ہیں۔جس ترکیب سے نظام کا اصل حل حاصل ہوتا ہو اس کو **مقداری ترکیب**[3] کہتے ہیں۔

---

[1] stability
[2] qualitative method
[3] quantitative method

4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق

تفرقی مساوات کے نظام پر غور کے دوران قالب اور سمتیات استعمال کئے جائیں گے۔

دو عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 7y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

میں دو عدد نا معلوم تفاعل $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ پائے جاتے ہیں۔ان مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل $g_1(t)$ اور $g_2(t)$ بھی موجود ہو سکتے ہیں۔اسی طرح n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر مبنی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

میں $y_1(t)$ تا $y_n(t)$ نا معلوم تفاعل پائے جائیں گے۔درج بالا ہر مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل بھی پائے جا سکتے ہیں۔

تکنیکی اصطلاحات

قالب

نظام 4.1 کے عددی سر (جو مستقل یا متغیرات ممکن ہیں) کو 2×2 قالب[4] $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

[4] matrix

اسی طرح نظام 4.2 کے عددی سر کو $n \times n$ قالب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

قالب میں درج a_{11} ، a_{12} ، a_{21} وغیرہ کو ارکان[5] کہتے ہیں۔ افقی لکیروں کو صف[6] جبکہ عمودی لکیروں کو قطار[7] کہتے ہیں۔ قالب 4.3 میں پہلا صف $[a_{11} \; a_{12}]$ یا $[2 \; 3]$ جبکہ دوسرا صف $[a_{21} \; a_{22}]$ یا $[-1 \; \frac{2}{3}]$ ہے۔اسی طرح پہلا قطار درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ارکان کی علامتی اظہار میں دوگنا زیر نوشت کا پہلا عدد صف کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دوسرا عدد قطار کو ظاہر کرتا ہے۔یوں a_{21} دوسری صف اور پہلی قطار کا رکن ہے۔ قالب 4.3 کا مرکزی وتر[8] a_{11} اور a_{22} پر مبنی ہے جبکہ قالب 4.4 کا مرکزی وتر a_{11} ، a_{22} ، $\cdots$ ، a_{nn} پر مبنی ہے۔ہمیں یہاں صرف مربع قالب[9] درکار ہوں گے۔مربع قالب سے مراد ایسی قالب ہے جس میں صفوں کی تعداد قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ قالب 4.3 اور قالب 4.4 مربع قالب ہیں۔

سمتیہ۔ ایک قطار اور n ارکان کا سمتیہ قطار[10] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اسی طرح ایک صف اور n ارکان کا سمتیہ صف[11] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

entry[5]
row[6]
column[7]
main diagonal[8]
square matrix[9]
column vector[10]
row vector[11]

قالب اور سمتیات کا حساب

برابری مساوات

دو عدد $n \times n$ قالب صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے تمام نظیری[12] ارکان برابر ہوں۔ظاہر ہے کہ دو قالب کی برابری کے لئے لازم ہے کہ ان میں صفوں کی تعداد یکساں ہو اور ان میں قطاروں کی تعداد یکساں ہو۔یوں $n = 2$ کی صورت میں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

صرف اور صرف اس صورت برابر $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B})$ ہوں گے جب

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, \quad a_{12} = b_{12} \\ a_{21} &= b_{21}, \quad a_{22} = b_{22} \end{aligned}$$

ہوں۔دو عدد سمتیہ صف (یا دو عدد سمتیہ قطار) صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب دونوں میں ارکان کی تعداد n برابر ہو اور ان کے تمام نظیری ارکان برابر ہوں ۔یوں

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

کی صورت میں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ صرف اور صرف تب ہو گا جب

$$v_1 = x_1 \quad \text{اور} \quad v_2 = x_2$$

ہوں۔

مجموعہ

مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر دونوں قالب کے نظیری ارکان کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔دونوں قالب یکساں $m \times n$ ہونا لازم ہے۔اسی طرح دونوں سمتیہ صف (یا دونوں سمتیہ قطار) میں برابر ارکان ہونا لازم ہے۔یوں 2×2 قالب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{bb} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

[12] corresponding

غیر سمتی ضرب

غیر سمتی ضرب یعنی مستقل[13] c سے قالب کا ضرب حاصل کرنے کی خاطر قالب کے تمام ارکان کو c سے ضرب دیا جاتا ہے۔مثلاً

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{bmatrix},\quad -4\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-8 & 12\\ -20 & -4\end{bmatrix}$$

اور

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}9\\ -4\end{bmatrix},\quad 3\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}27\\ -12\end{bmatrix}$$

قالب ضرب قالب

دو عدد $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ اور $\boldsymbol{B}=[b_{jk}]$ کا حاصل ضرب $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ ،(اسی ترتیب میں) $n\times n$ قالب $\boldsymbol{C}=[c_{jk}]$ ہو گا جس کے ارکان

$$c_{jk}=\sum_{m=1}^{n}a_{jm}b_{mk}\qquad j=1,\cdots,n,\qquad k=1,\cdots,n \tag{4.6}$$

ہوں گے یعنی $\boldsymbol{A}$ قالب کے j صف کے ہر رکن کو $\boldsymbol{B}$ قالب کے j قطار کے نظیری رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے n حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔ہم کہتے ہیں کہ قالب کے ضرب سے مراد **صف ضرب قطار** ہے۔مثلاً

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot7+1\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot(-4)\\ (-3)\cdot7+0\cdot2 & (-3)\cdot1+0\cdot(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -2\\ -21 & -3\end{bmatrix}$$

یہاں دھیان رہے کہ ضرب قالب **غیر مستبدل**[14] ہے لہٰذا عموماً $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ ہو گا۔یوں دو قالب کو آپس میں ضرب دیتے ہوئے قالبوں کی ترتیب تبدیل نہیں کی جا سکتی۔اس حقیقت کی وضاحت کی خاطر درج بالا مثال میں قالبوں کی ترتیب بدلتے ہوئے ان کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\cdot2+1\cdot(-3) & 7\cdot1+1\cdot0\\ 2\cdot2+(-4)\cdot(-3) & 2\cdot1+(-4)\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 7\\ 16 & 2\end{bmatrix}$$

---

[13] scalar product
[14] non commutative

$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کو n ارکان کی سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ سے ضرب بھی اسی قاعدے کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کے n عدد ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$v_j = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} x_m \qquad j = 1, \cdots, n \tag{4.7}$$

یوں

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔

سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا اظہار بذریعہ سمتیات

تفرق

قالب یا سمتیہ کا تفرق، تمام ارکان کا تفرق حاصل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t^3 \\ 6\cos 2t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15t^2 \\ -12\sin 2t \end{bmatrix}$$

قالب کی تفرق اور ضرب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 4.1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

اسی طرح مساوات 4.2 کو درج ذیل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

مزید اعمال اور اصطلاحات

تبدیل محل

تبدیلی محل[15] کے عمل سے قالب کے قطاروں کو صفوں کی جگہ لکھا جاتا ہے۔یوں 2×2 قالب $\boldsymbol{A}$ سے **تبدیلی محل**[16] کے ذریعہ **تبدیلی محل قالب**[17] $\boldsymbol{A}^T$ حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف $\boldsymbol{x}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{x}^T$ سمتیہ قطار ہو گا۔اسی طرح سمتیہ قطار $\boldsymbol{v}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{v}^T$ سمتیہ صف ہو گا۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

قالب کا معکوس

ایسا $n \times n$ قالب جس کے مرکزی وتر کے تمام ارکان اکائی (1) اور بقایا ارکان صفر ہوں کو **اکائی قالب**[18] $\boldsymbol{I}$ کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

---

[15] transposition
[16] transposition
[17] transpose matrix
[18] unit matrix

ایسا $\boldsymbol{B}$ قالب، جس کا $\boldsymbol{A}$ قالب کے ساتھ حاصل ضرب اکائی قالب ہو $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ ، قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس قالب کہلاتا ہے جسے $\boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{A}$ **غیر نادر قالب**[19] کہلاتا ہے۔یہاں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں $n\times n$ قالب ہیں۔

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I} \tag{4.11}$$

قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس تب پایا جاتا ہے جب $\boldsymbol{A}$ کی حتمی قیمت غیر صفر $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ ہو۔اگر $\boldsymbol{A}$ کا معکوس نہ پایا جاتا ہو تب $\boldsymbol{A}$ **نادر**[20] قالب کہلاتا ہے۔ مربع 2×2 قالب کا معکوس

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ کی حتمی قیمت $|\boldsymbol{A}|$ درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{4.13}$$

خطی طور تابعیت

r عدد سمتیات $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ جہاں ہر سمتیہ n ارکان پر مشتمل ہو، اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[21] یا **خطی طور غیر تابع** کہلاتے ہیں جب

$$c_1\boldsymbol{v}^{(1)}+\cdots+c_r\boldsymbol{v}^{(r)}=\boldsymbol{0} \tag{4.14}$$

سے مراد c_1 تا c_r کی قیمتیں صفر ہو۔درج بالا مساوات میں $\boldsymbol{0}$ **صفر سمتیہ**[22] ہے جس کے تمام n ارکان صفر کے برابر ہیں۔اگر مساوات 4.14 میں c_1 تا c_r کوئی ایک یا ایک سے زائد مستقل غیر صفر ہوں تب $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ **خطی طور تابع سلسلہ**[23] یا **خطی طور تابع** کہلائیں گے چونکہ ایسی صورت میں کم از کم ایک سمتیہ کو

---

[19] non singular matrix
[20] singular
[21] linearly independent set
[22] zero vector
[23] linearly dependent vector

بقایا سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے، مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.14 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = -\frac{1}{c_1}\left[c_2\boldsymbol{v}^{(2)} + \cdots + c_r\boldsymbol{v}^{(r)}\right]$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات

آئگنی قدر[24] اور **آئگنی سمتیات**[25] انتہائی اہم ہیں جو **کوانٹم میکانیات**[26] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ مساوات

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{4.15}$$

میں $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ معلوم $n \times n$ قالب ہے جبکہ λ نا معلوم مستقل (جو حقیقی یا مخلوط مقدار ہو سکتا ہے) اور $\boldsymbol{x}$ نا معلوم سمتیہ ہے جنہیں حاصل کرنا درکار ہے۔ کسی بھی λ کے لئے مساوات 4.15 کا ایک حل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ممکن ہے۔ ایسی غیر سمتی[27] λ جو $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کی صورت میں مساوات 4.15 پر پورا اترتی ہو، $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی **قدر**[28] کہلاتی ہے جبکہ، اس λ کی نظیری، $\boldsymbol{x}$ کو $\boldsymbol{A}$ کی **آئگنی سمتیہ**[29] کہتے ہیں۔

ہم مساوات 4.15 کو $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = 0$ یا

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{4.16}$$

لکھ سکتے ہیں جو n عدد خطی الجبرائی مساوات کو ظاہر کرتی ہے جس کے نا معلوم متغیرات x_1 تا x_n، سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کے ارکان ہیں۔ اس مساوات کے غیر صفر حل $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کے لئے ضروری ہے کہ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ کے عددی سر قالب کی حتمی قیمت صفر ہو۔ (یہ خطی الجبرا کی بنیادی حقیقت ہے)۔ اس باب میں ہمیں $n = 2$ سے دلچسپی ہے لہٰذا مساوات 4.16 کو

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Eigenvalues[24]
Eigenvectors[25]
quantum mechanics[26]
scalar[27]
Eigenvalue[28]
Eigenvector[29]

لکھتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0\\
a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

اب نادر قالب کی حتمی قیمت صفر ہوتی ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ اس صورت نادر قالب ہو گا جب اس قالب کی حتمی قیمت (جسے A کی **امتیازی حتمی قیمت**[30] کہتے ہیں) صفر ہو۔

$$
\begin{aligned}
\lvert\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\rvert &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}\\
&= (a_{12}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}\\
&= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

اس دو درجی مساوات کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مساوات**[31] کہتے ہیں۔اس کے حل λ_1 اور λ_2 ، قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر یا آئگنی قیمتیں ہیں۔پہلے آئگنی قدر حاصل کریں۔اس کے بعد λ_1 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_1 کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ دریافت کریں۔اسی طرح λ_2 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_2 کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)}$ دریافت کریں۔یاد رہے کہ اگر $\boldsymbol{x}$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ ہو تب $k\boldsymbol{x}$ بھی $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ ہو گا جہاں $k \neq 0$ ہے۔

مثال 4.1: درج ذیل قالب کی آئگنی قیمتیں اور آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3\\ -0.8 & 0.4\end{bmatrix}
$$

حل:امتیازی مساوات

$$
\begin{vmatrix} -3-\lambda & 3\\ -0.8 & 0.4-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.6\lambda + 1.2 = 0
$$

---

[30] characteristic determinant
[31] characteristic equation

سے $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر $\lambda_1 = -0.6$ اور $\lambda_2 = -2$ ملتے ہیں۔آئگنی قیمت $\lambda = \lambda_1 = -0.6$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(-3+0.6)x_1 + 3x_2 &= 0\\ -0.8x_1 + (0.4+0.6)x_2 &= 0\end{aligned}$$

پہلی مساوات کو $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔دوسری مساوات کو بھی $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_1 = 1$ چنا جائے تو $x_2 = 0.8$ ہو گا لہٰذا، $\lambda_1 = -0.6$ کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\0.8\end{bmatrix}$$

ہو گا۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -2$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(-3+2)x_1 + 3x_2 &= 0\\ -0.8x_1 + (0.4+2)x_2 &= 0\end{aligned}$$

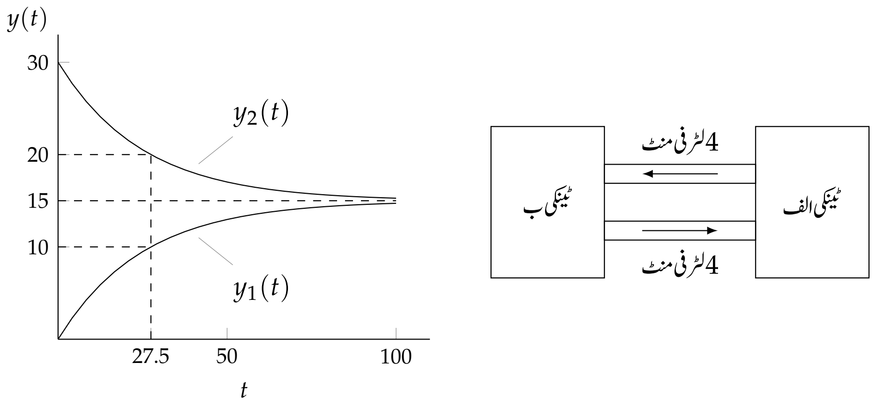
ان دونوں مساوات کو $x_1 = 3x_2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_2 = 1$ چنا جائے تو $x_1 = 3$ حاصل ہو گا لہٰذا، $\lambda_2 = -2$ کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

ہو گا۔جیسا پہلے ذکر کیا گیا، آئگنی سمتیات کو کسی بھی غیر صفر عدد سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔

4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

اس حصے میں ہم تفرقی مساوات کے نظام کی عملاً اہمیت دیکھیں گے۔ ہم پہلے دیکھتے ہیں کہ ایسے نظام مختلف عملی مسائل میں کیسے کردار ادا کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی تفرقی مساوات کو کیسے تفرقی مساوات کے نظام میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 4.1: ٹینکیوں کا نظام۔

مثال 4.2: دو ٹینکیوں کا نظام
ایک ٹینکی کو استعمال کرتے ہوئے مرکب بنانے کے عمل پر صفحہ 26 مثال 1.10 میں غور کیا گیا جہاں مسئلے کو ایک عدد تفرقی مساوات سے ظاہر کیا گیا۔اس مثال کو ایک مرتبہ دیکھ لیں چونکہ وہی معلومات یہاں بھی استعمال کی جائیں گی۔

شکل 4.1 میں دو ٹینکیاں دکھائی گئی ہیں جن میں یک برابر دو سو (200) لٹر پانی موجود ہے۔ٹینکی الف میں خالص پانی ہے جبکہ ٹینکی ب کی پانی میں تیس (30) کلو گرام کا نمک ملایا گیا ہے۔ ٹینکیوں میں پانی کو مسلسل ہلایا جاتا ہے تا کہ ان میں ہر جگہ محلول یکساں رہے۔ٹینکیوں میں پانی کو چار (4) لٹر فی منٹ سے گردش دینے سے ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار $y_2(t)$ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔کتنی دیر کے بعد ٹینکی الف میں نمک کی مقدار، ٹینکی ب میں نمک کی مقدار کا نصف ہو گا؟

حل:پہلا قدم: نظام کی نمونہ کشی کرتے ہیں۔ ایک ٹینکی کی طرح، ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ میں تبدیلی کی شرح $y_1'(t)$ نمک کی در آمدی اور بر آمدی شرح میں فرق کے برابر ہو گی۔ یہی کچھ $y_2'(t)$ کے لئے

بھی کہا جا سکتا ہے لہٰذا

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4\frac{y_2}{200} - 4\frac{y_1}{200} \\
y_2' &= 4\frac{y_1}{200} - 4\frac{y_2}{200}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -0.02y_1 + 0.02y_2 \\
y_2' &= \quad 0.02y_1 - 0.02y_2
\end{aligned}
$$

ہو گا۔اس نظام کو

$$
\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.20}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}
$$

ہیں۔

دوسرا قدم: عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح یہاں بھی حل کو قوت نمائی تفاعل

$$
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t} \tag{4.21}
$$

فرض کرتے ہیں۔مساوات 4.20 میں اس فرضی تفاعل اور اس کے تفرق کو پر کرتے ہیں۔

$$
\boldsymbol{y}' = \lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}
$$

دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے دونوں اطراف کو بدل کر لکھتے ہیں۔

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}
$$

ہمیں اس مساوات کے غیر صفر اہم حل درکار ہیں لہٰذا ہمیں $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات حاصل کرنے ہوں گے۔آئگنی قدر امتیازی مساوات

$$
|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -0.02-\lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02-\lambda \end{vmatrix} = (-0.02-\lambda) - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0
$$

کے حل $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ ہوں گے۔(یہاں دھیان رہے کہ ہمیں غیر صفر آئگنی سمتیات درکار ہیں۔آئگنی قدر صفر ہو سکتے ہیں۔) آئگنی سمتیات مساوات 4.18 کے پہلے یا دوسرے مساوات سے حاصل ہوں گے۔مساوات 4.18 کی پہلے مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے لئے

$$-0.02x_1 + 0.02x_2 = 0, \quad (-0.02 + 0.04)x_1 + 0.02x_2 = 0$$

لکھے جائیں گے جن سے $x_1 = x_2$ اور $x_1 = -x_2$ ملتے ہیں۔ہم $x_1 = x_2 = 1$ اور $x_1 = -x_2 = 1$ چنتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے نظیری آئگنی سمتیات

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 4.21 اور مسئلہ خطی میل (جو خطی متجانس تفرقی مساوات کے نظام پر بھی لاگو ہوتا ہے) کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t} \tag{4.22}$$

تیسرا قدم: ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ (یعنی ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر کوئی نمک نہیں پایا جاتا) اور $y_2(0) = 30$ (یعنی ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر تیس کلو گرام نمک پایا جاتا ہے) ہیں۔مساوات 4.22 میں $t = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہیں۔

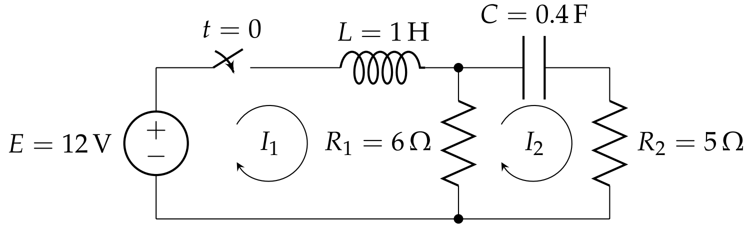
$$\boldsymbol{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

درج بالا مساوات کی جزوی صورت $c_1 + c_2 = 0$ اور $c_1 - c_2 = 30$ ہے جس کا حل $c_1 = 15$ اور $c_2 = -15$ ہے۔یوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہوا حل

$$\boldsymbol{y} = 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 15 - 15e^{-0.04t} \\ y_2(t) &= 15 + 15e^{-0.04t} \end{aligned}$$



شکل 4.2: مثال 4.3 کا برقی جال۔

ہو گا۔اس حل کو شکل 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

چوتھا قدم: ٹینکی الف میں اس وقت ٹینکی ب کا آدھا نمک ہو گا جب اس میں $10 = \frac{30}{3}$ کلو گرام نمک ہو۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t} = 10, \quad t = -\frac{1}{0.04}\ln\frac{1}{3} = 27.5\,\mathrm{min}$$

مثال 4.3: برقی جال

شکل 4.2 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو ہوتا ہے۔برقی رو $I_1(t)$ اور $I_2(t)$ دریافت کریں۔ابتدائی رو اور ابتدائی برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر ہیں۔

حل:پہلا قدم نظام کی نمونہ کشی ہے۔امالہ میں رو I_1 ہے لہٰذا اس پر برقی دباو $v_L = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔برق گیر میں رو I_2 ہے لہٰذا اس پر دباو $v_C = \frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔مزاحمت R_2 پر دباو $v_{R2} = I_2R_2$ ہو گا جبکہ مزاحمت R_1 میں کل رو $I_1 - I_2$ ہے لہٰذا اس پر دباو $v_{R1} = (I_1 - I_2)R_1$ ہو گا۔کرخوف قانون دباو کے تحت کسی بھی بند دائرے میں کل دباو کا اضافہ اس دائرے میں کل دباو کے گھٹاو کے برابر ہو گا۔یوں بائیں دائرے کے لئے

$$E = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + (I_1 - I_2)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E = 12$ ، $L = 1$ اور $R_1 = 6$ پر کرتے ہوئے

$$I_1' = -6I_1 + 6I_2 + 12 \tag{4.23}$$

ملتا ہے۔اسی طرح دائیں دائرے کے لئے

$$0 = \frac{1}{C}\int I_2 \,\mathrm{d}t + I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $C = 0.4$ اور $R_2 = 5$ پر کرتے ہوئے تفرق لینے سے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4I_1' = 0$$

ملتا ہے۔اس میں مساوات 4.23 سے I_1' کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4(-6I_1 + 6I_2 + 12) = 0$$

یعنی

$$I_2' = -\frac{36}{11}I_1 + \frac{67}{22}I_2 + \frac{72}{11} \tag{4.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.23 اور مساوات 4.24 کو

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{g} \tag{4.25}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 12 \\ \frac{72}{11} \end{bmatrix}$$

ہیں۔ I_1' اور I_2' کے سمتیہ قطار کو $\boldsymbol{J}$ اس لئے لکھا گیا ہے کہ اس باب میں $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

دوسرا قدم نظام کا حل تلاش کرنا ہے۔ $\boldsymbol{g}$ کی موجودگی **غیر متجانس سادہ تفرقی نظام** کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہم ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح پہلے متجانس مطابقتی نظام $\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ہم $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے متجانس نظام میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{J}' = \lambda \boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t} \quad \implies \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

غیر صفر اہم حل کے حصول کے لئے $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات درکار ہوں گے۔آئگنی قدر امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\frac{65}{22}\lambda-\frac{15}{11}=0$$

سے $\lambda_1=-2.38209$ اور $\lambda_2=-0.57245$ حاصل ہوتے ہیں۔ان آئگنی قدر کی نظیری آئگنی سمتیات مساوات 4.18 سے حاصل ہوں گے۔مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_1 پر کرتے ہوئے

$$(-6+2.38209)x_1+6x_2=0, \quad \implies x_1=1.658416x_2$$

ملتا ہے۔یوں $x_2=1$ چنتے ہوئے $x_1=1.658416$ ملتا ہے جس سے $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1.658416\\1\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_2 پر کرتے ہوئے

$$(-6+0.57245)x_1+6x_2=0, \quad \implies x_1=1.105471x_2$$

ملتا ہے۔یوں $x_2=1$ چنتے ہوئے $x_1=1.105471$ ملتا ہے جس سے $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1.105471\\1\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں متجانس نظام کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{J}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} \tag{4.26}$$

مساوات 4.25 کے غیر متجانس نظام کا جبری تفاعل $\boldsymbol{g}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اس نظام کا مخصوص حل مستقل سمتیہ قطار $\boldsymbol{J}_p=\boldsymbol{a}$ فرض کرتے ہیں جس کے ارکان a_1 اور a_2 ہیں۔یوں $\boldsymbol{J}'=0$ ہو گا۔ مساوات 4.25 میں فرض کردہ مخصوص حل پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{g}=0$ ملتا ہے جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} -6a_1+6a_2+12&=0\\ -\frac{36}{11}a_1+\frac{67}{22}a_2+\frac{72}{11}&=0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے $a_1=2$ اور $a_2=0$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ ہو گا۔یوں عمومی حل

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_h+\boldsymbol{J}_p=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t}+\boldsymbol{a}$$

ہو گا جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} I_1&=1.658416c_1e^{-2.38209t}+1.105471c_2e^{-0.57245t}+2\\ I_2&=c_1e^{-2.38209t}+c_2e^{-0.57245t} \end{aligned}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $I_1(0)=0$ اور $I_2(0)=0$ ہے۔انہیں درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}1.658416c_1+1.105471c_2+2&=0\\ c_1+c_2&=0\end{aligned}$$

ملتا ہے جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1=-3.61699$ اور $c_2=3.61699$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل

$$\begin{aligned}I_1&=-5.998e^{-2.38t}+3.998c_2e^{-0.57t}+2\\ I_2&=-3.617e^{-2.38t}+3.617e^{-0.57t}\end{aligned}$$

یعنی

$$\boldsymbol{J}=-3.617\boldsymbol{x}^{(1)}e^{-2.38t}+3.617\boldsymbol{x}^{(2)}e^{-0.57t}+\boldsymbol{a}$$

ہو گا۔