انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 24

احتمال اور شماریات

بڑے پیمانے پر مصنوعات کی پیداوار اور تجرباتی مواد کے تجزیہ کے لئے حسابی شماریات بہت اہم ہے۔ اس باب کی شروع میں مواد کا جدول اور ترسیم سے اظہار پر غور کیا جائے گا۔چونکہ شماریات کی بنیاد حسابی احتمال ہے لہٰذا اس کے بعد حسابی احتمال کے بنیادی تصورات اور اصولوں پر غور کیا جائے گا۔باب کا باقی حصہ شماریات کے اہم ترین تراکیب پر مشتمل ہے۔

24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد

انجینئری شماریات میں ہمیں ایسے تجربات کی بناوٹ اور تشخیص سے غرض ہو گا جو عملی مسائل کے بارے میں معلومات فراہم کر سکے، مثلاً، خام مال یا تیار کردہ مصنوعات کے معیار کی جانچ پڑتال، مشین اور آلات یا مصنوعات کی تیاری میں استعمال تراکیب کا آپس میں موازنہ، مزدور کی پیداوار، صارفین کا نئی مصنوعات کے لئے رد عمل، مختلف حالات میں کیمیائی عمل سے حاصل پیداوار، خام لوہا کی کثافت اور اس میں لوہے کی مقدار کا تعلق، مختلف درجہ حرارت پر ایئر کنڈیشنر نظام کی کارکردگی، فولاد میں کاربن کی مقدار اور فولاد کی راک ویل[1] سختی کا تعلق، وغیرہ وغیرہ۔

مثال کے طور پر، بڑے پیمانے پر (پیچ، بلب، موبائل فون وغیرہ کی) پیداوار کے عمل میں عموماً بے عیب[2] اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا اترے ہیں، اور عیب دار[3] اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا نہیں اترتے ہیں،

Rockwell[1]
nondefective[2]
defective[3]

پائے جائیں گے۔ درکار خواص میں دھرا کا قطر، بلب کی کم سے کم عرصہ زندگی[4]، برقیاتی مصنوعات میں استعمال برقی مزاحمت کی قیمت کے حدود، کتاب میں استعمال کاغذ کی موٹائی، خود کار بھری گئی بوتل میں مشروب کی کم سے کم مقدار، برقی سوئچ کا زیادہ سے زیادہ دورانیہ رد عمل، اور کپڑے کی کم سے کم مضبوطی شامل ہیں۔

مصنوعات کی معیار میں فرق متعدد وجوہات (مثلاً خام مال، خود کار مشین کی کارکردگی، کاریگر کی کاریگری) کی بنا ممکن ہے جن کو قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہے لہٰذا انہیں بے ترتیب تبدیلیاں[5] تصور کیا جات ہے۔پیداوار کے تراکیب کی کارکردگی اور متذکرہ بالا دیگر مثالوں میں بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔

ہر ایک پیدا کردہ رکن کو پرکھنے کے لئے عموماً بہت وقت درکار ہو گا اور ایسا کرنا خاصہ مہنگا ہو گا۔اگر پرکھنے کے دوران رکن ضائع ہوتا ہو تب ہر رکن کو پرکھنا ممکن نہیں ہو گا۔اسی لئے تمام ارکان کو پرکھنے کی بجائے چند ارکان کو بطور نمونہ[6] پرکھا جاتا ہے اور اس نمونہ کے نتائج سے کل تعداد (آبادی[7]) کے بارے میں رائے بنائی جاتی ہے۔ اگر 10 000 پیچوں کی کھیپ سے 100 پیچوں کے نمونہ کو پرکھا جائے اور اس میں 5 پیچ عیب دار نکلیں تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس کھیپ میں 5 % پیچ عیب دار ہوں گے، پس اتنا ضروری ہے کہ نمونہ کو بلا منصوبہ[8] چننا جائے یعنی کھیپ میں موجود ہر پیچ کا بطور نمونہ منتخب ہونے کا امکان[9] ایک جیسا ہو۔ظاہر ہے کہ ایسی رائے مکمل طور پر درست نہیں ہو سکتی ہے اور یہ کہنا کہ ٹھیک 5 % پیچ عیب دار ہوں گے عموماً درست نہیں ہو گا لیکن عام طور عملی زندگی میں اتنی درست رائے (یا نتیجہ) کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔جتنے زیادہ ارکان کو پرکھا جائے ہمیں نتائج پر اتنا زیادہ اعتماد ہوتا ہے۔حسابی احتمال کا نظریہ ان خیالات کو ٹھوس شکل دیتا ہے اور نتائج پر کتنا اعتبار کیا جائے، اس کی ناپ بھی پیش کرتا ہے۔یوں شماریات کی بنیاد نظریہ احتمال ہے۔

اسی طرح خام لوہا میں لوہے کی فی صد مقدار μ جاننے کی خاطر ہم بلا منصوبہ n تعداد کے نمونے لیتے ہوئے ان میں لوہے کی فی صد مقدار تجرباتی طور دریافت کریں گے۔ ان n نمونوں کے تجرباتی نتائج $x_1, \cdots, x_n$ کی اوسط $\bar{x} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ لوہے کی فی صد مقدار μ کی تخمین ہو گی۔

مختلف نوعیت کے مسائل کے لئے مختلف تراکیب اور تکنیک درکار ہوں گے البتہ مسئلے کی تشکیل سے حل تک کے قدم عموماً ایک جیسے ہوتے ہیں۔انہیں یہاں پیش کرتے ہیں۔

---

[4] lifetime
[5] random variation
[6] sample
[7] population
[8] at random
[9] chance

- مسئلے کی تشکیل۔ مسئلے کو ٹھیک ٹھیک بیان کرنا اور تفتیشی عمل کے حدود تعین کرنا ضروری ہے تا کہ شماریاتی تفتیش کی لاگت، تفتیش کار کی مہارت اور دستیاب سہولیات کو مد نظر رکھتے ہوئے مخصوص وقت میں قابل استعمال نتائج حاصل ہوں۔اسی قدم میں واضح تصورات سے **حسابی نمونہ**[10] کی تخلیق[11] بھی شامل ہے۔ (مثال کے طور پر ہم نے تعین کرنا ہو گا کہ عیب دار رکن سے کیا مراد ہے۔)

- تجربہ کی تخلیق۔ آخری مرحلے میں استعمال ہونے والی شماریاتی ترکیب کا انتخاب، نمونہ کی جسامت (جتنے ارکان کا تجزیہ یا ان پر تجربہ کیا جائے گا، وغیرہ) اور طبعی تراکیب اور تکنیک جو بروئے کار لائے جائیں گے کا انتخاب اس قدم میں کیا جائے گا۔کم سے کم وقت اور لاگت کے ساتھ زیادہ سے زیادہ معلومات حاصل کرنا مقصد ہے۔

- تجربہ یا مواد جمع کرنے کا عمل۔ اس قدم میں قواعد پر سختی سے عمل کرنا ضروری ہے۔

- جدول بندی۔ اس قدم میں تجرباتی نتائج کو واضح اور سادہ جدول کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور ساتھ ہی انہیں ترسیم کیا جا سکتا ہے یا انہیں **ڈبہ ترسیم**[12] کی صورت میں دکھایا جا سکتا ہے۔ اس قدم میں نمونہ کی اوسط اور قیمتوں میں پھیل کے تخمین کا حساب بھی کیا جاتا ہے۔

- شماریاتی رائے زنی۔ اس قدم میں کوئی مخصوص شماریاتی ترکیب کو نمونہ سے حاصل نتائج پر لاگو کرتے ہوئے نا معلوم خواص کے بارے میں رائے قائم کی جاتی ہے تا کہ ہم مطلوبہ جواب حاصل کر سکیں۔

24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم

شماریاتی تجربہ کے دوران عموماً مشاہدوں (زیادہ تر صورتوں میں اعداد) کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جنہیں ہم اسی ترتیب سے لکھتے ہیں جس میں انہیں حاصل کیا گیا ہو۔ایک مثال جدول 24.1 میں دی گئی ہے۔سیمنٹ اور بجری (کنکریٹ) سے معیاری ٹھوس بیلن (قطر 15.24 cm اور لمبائی 30.48 cm) بنا کر 28 دن[13] بعد انہیں چیرا گیا۔یوں ہمیں ایک **نمونہ** حاصل ہوا جو 100 **نمونہ اعداد** پر مشتمل ہے۔یوں نمونہ کی **جسامت**[14] $n = 100$ ہے۔

---

[10] mathematical model

[11] لفظ "نمونہ" اور لفظ "حسابی نمونہ" علیحدہ معنی رکھتے ہیں۔اسی لئے حسابی نمونہ کو بطور اصطلاح لیتے ہوئے پورا لکھا جائے گا یعنی "حسابی نمونہ"۔

[12] bar graph

[13] سیمنٹ کو مکمل مضبوط ہونے کے لئے اتنے دن درکار ہوتے ہیں۔

[14] size

جدول 24.1: کنکریٹ بیلن چیرنے کے لئے درکار فی مربع سنٹی میٹر قوت ($\mathrm{N\,cm^{-2}}$)

320	380	340	410	380	340	360	350	320	370
350	340	350	360	370	350	380	370	300	420
370	390	390	440	330	390	330	360	400	370
320	350	360	340	340	350	350	390	380	340
400	360	350	390	400	350	360	340	370	420
420	400	350	370	330	320	390	380	400	370
390	330	360	380	350	330	360	300	360	360
360	390	350	370	370	350	390	370	370	340
370	400	360	350	380	380	360	340	330	370
340	360	390	400	370	410	360	400	340	360

اس حصے میں ہم نمونہ کو جدول اور ترسیم کی صورت میں ظاہر کرنا سیکھتے ہیں۔ہم ان تراکیب کو جدول 24.1 کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

جدول 24.1 میں دی گئی معلومات جاننے کی خاطر ہم مواد کو ترتیب دیتے ہیں۔ہم (کم سے کم قیمت) 310 ، 320 ، . . . ، 440 (زیادہ سے زیادہ قیمت) کو ایک قطار میں لکھتے ہیں۔اس کے بعد جدول 24.1 کے ہر صف سے گزرتے ہوئے ہر عدد کے لئے اس قطار میں مطابقتی مقام کی صف میں **نشان شمار**[15] کھینچتے ہیں۔اس طرح ہمیں جدول 24.2 کی پہلی دو قطاروں کا جدول حاصل ہو گا۔ نشان شمار کی گنتی کو جدول کی تیسری قطار میں درج کیا جاتا ہے۔یہ گنتی نمونہ میں کسی عدد x کی تعداد دیتی ہے جس کو نمونہ میں x کی **حتمی تعدد**[16] یا مختصراً **تعدد**[17] کہتے ہیں۔اس کو نمونہ میں ارکان کی تعداد n سے تقسیم کرنے سے ہمیں **اضافی تعدد**[18] حاصل ہوتی ہے جس کو جدول 24.2 کی چوتھی قطار میں درج کیا جاتا ہے۔یہاں $n = 100$ ہے لہٰذا $x = 330$ کی تعدد 6 اور اضافی تعدد 0.06 یا 6 % ہے۔

کسی مخصوص x کے لئے نمونہ میں x اور x سے کم قیمتوں کی تمام تعدد کا مجموعہ لیتے ہوئے **مجموعی تعدد**[19] حاصل ہوتی ہے جس کو پانچویں قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $x = 350$ کا مطابقتی مجموعی تعدد 37 ہے جس کے تحت 350 اور اس سے کم قیمتوں کی تعداد 37 ہے۔اس کو جسامت n سے تقسیم کرنے

tally mark[15]
absolute frequency[16]
frequency[17]
relative frequency[18]
cumulative frequency[19]

جدول 24.2: جدول تقسیم برائے جدول 24.1 کا نمونہ

1	2	3	4	5	6
مضبوطی	حتمی تعدد		اضافی تعدد	مجموعی تعدد	مجموعی اضافی تعدد
	نشان شمار				
300	||	2	0.02	2	0.02
310		0	0.00	2	0.02
320	~~||||~~	4	0.04	6	0.06
330	|||| |	6	0.06	12	0.12
340		11	0.11	23	0.23
350		14	0.14	37	0.37
360		16	0.16	53	0.53
370		15	0.15	68	0.68
380		8	0.08	76	0.76
390		10	0.10	86	0.86
400		8	0.08	94	0.94
410		2	0.02	96	0.96
420		3	0.03	99	0.99
430		0	0.00	99	0.99
440		1	0.01	100	1.00

سے چھٹی قطار میں درج **مجموعی اضافی تعدد**[20] حاصل ہوتی ہے۔مثال کے طور پر چھٹی قطار سے ہم دیکھتے ہیں کہ نمونہ میں $76\,\%$ قیمتیں 380 کے برابر یا اس سے کم ہیں۔

اگر نمونہ میں کوئی قیمت نہ پائی جاتی ہو تب اس قیمت کی تعدد 0 ہو گی۔اگر نمونہ میں تمام قیمتیں ایک جیسی ہوں تب اس قیمت کی تعدد n اور اضافی تعدد $\frac{n}{n}=1$ ہو گی۔چونکہ یہی تعدد کی دو انتہائی قیمتیں ہیں لہٰذا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.1: **(اضافی تعدد)**
اضافی تعدد کی کم سے کم قیمت 0 اور زیادہ سے زیادہ قیمت 1 ہے۔

فرض کریں کہ جسامت n کے نمونہ میں درج ذیل m مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں

$$x_1, x_2, \cdots, x_m \qquad (m \le n)$$

جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_m$$

ہیں۔تب ہم درج ذیل تفاعل[21] متعارف کر سکتے ہیں

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} \tilde{f}_j & \text{جب } x=x_j \text{ ہو} \qquad (j=1,2,\cdots,m) \\ 0 & \text{کسی بھی قیمت } x \text{ کے لئے جو نمونہ میں نہ پایا جاتا ہو} \end{cases} \tag{24.1}$$

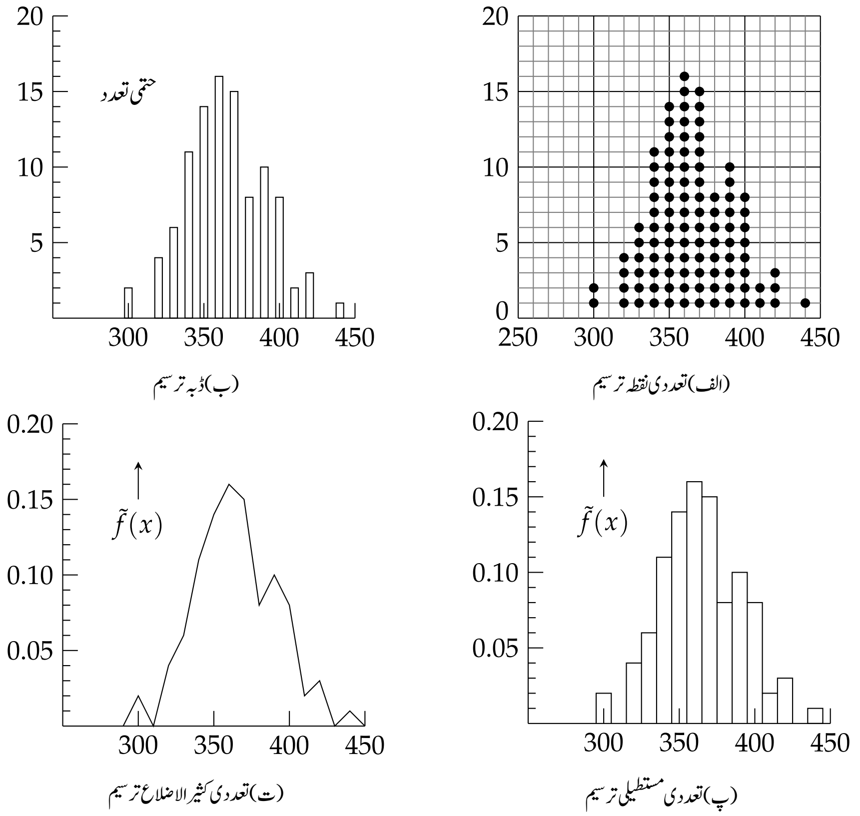
جس کو **نمونہ کا تعددی تفاعل**[22] کہتے ہیں۔یہ نمونہ میں قیمتوں کی تقسیم (پھیل) دیتا ہے۔اسی لئے ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل نمونہ کی **تعددی تقسیم**[23] دیتا ہے۔

مثال کے طور پر جدول 24.2 میں تعددی تفاعل کی قیمتیں قطار 4 میں دکھائی گئی ہیں جہاں $\tilde{f}(300)=0.02$، $\tilde{f}(310)=0$، $\tilde{f}(320)=0.04$، وغیرہ، ہیں۔

جسامت n کے نمونہ میں تمام تعدد کا مجموعہ n کے برابر ہو گا۔ (کیوں؟) اس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

---

[20] cumulative relative frequency
[21] ہم $\tilde{f}$ استعمال کرتے ہیں چونکہ f کو تعددی تفاعل کے لئے استعمال کیا جائے گا جس کا استعمال کثرت سے ہو گا۔
[22] frequency function of the sample
[23] frequency distribution



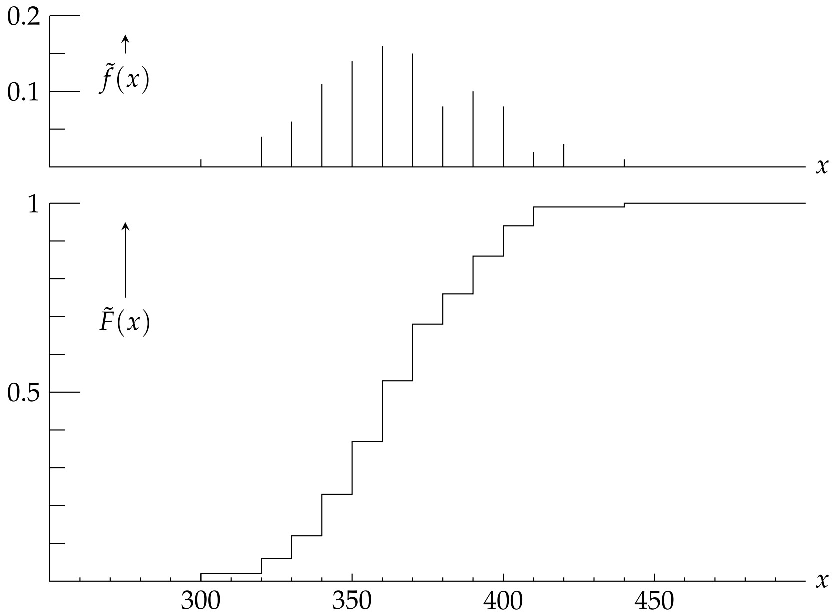
شکل 24.1: ترسیم برائے جدول 24.2

مسئلہ 24.2: **اضافی تعدد کا مجموعہ**

کسی بھی نمونہ میں تمام اضافی تعدد کا مجموعہ 1 کے برابر ہو گا، یعنی:

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \cdots + \tilde{f}(x_m) = 1$$

نمونہ کا ترسیمی اظہار شکل 24.1-الف تا شکل 24.1-ت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 24.1-پ میں ہر مستطیل کا رقبہ مطابقتی اضافی تعدد کے برابر ہو گا لہٰذا عمودی محدد پر اضافی تعدد فی اکائی رقبہ ہو گا۔ چونکہ شکل 24.1-پ میں تمام



شکل 24.2: تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ اور مجموعی تعددی تفاعل $\tilde{F}(x)$ برائے جدول 24.2

مستطیل کی چوڑائی ایک جیسی ہے لہٰذا عمودی محدد پر قیمتیں $\tilde{f}(x)$ کے راست متناسب ہوں گی۔ البتہ مستطیل کو چوڑائیاں مختلف ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہو گا۔ شکل 24.1-ت میں بھی یہی صورت حال ہو گی۔

ہم اب درج ذیل تفاعل متعارف کرتے ہیں

$$\tilde{F}(x) = \text{x اور x سے کم تمام قیمتوں کے اضافی تعدد کا مجموعہ}$$

جس کو **نمونے کا مجموعی تعددی تفاعل**[24] یا مختصراً **تقسیمی تفاعل نمونہ**[25] کہتے ہیں۔ شکل 24.2 میں مثال دی گئی ہے۔

$\tilde{F}(x)$ **سیڑھی تفاعل** (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہے جس میں ٹھیک ان x پر جہاں $\tilde{f}(x) \neq 0$ ہو $\tilde{f}(x)$ کے برابر چلانگ پائے جاتے ہیں۔ پہلی چھلانگ نمونہ کی کم سے کم قیمت اور آخری چھلانگ نمونہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پر پائی جائے گی۔ آخری چھلانگ کے بعد $\tilde{F}(x) = 1$ رہے گا۔

[24] cumulative frequency function of the sample
[25] sample distribution function

جدول 24.3: کپاس کے سوتی دھاگے کو توڑنے کے لئے درکار قوت (نیوٹن میں)

114	118	86	107	87	94	82	81	98	84
120	126	98	89	114	83	94	106	96	111
123	110	83	118	83	96	96	74	91	81
102	107	103	80	109	71	96	91	86	129
130	104	86	121	96	96	127	94	102	87

$\tilde{f}(x)$ اور $\tilde{F}(x)$ کا تعلق درج ذیل ہے

$$\tilde{F}(x) = \sum_{t \le x} \tilde{f}(t) \tag{24.2}$$

جہاں $t \le x$ کا مطلب ہے کہ کسی بھی x کے لئے ان تمام $\tilde{f}(x)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے t کی قیمت x کے برابر یا x سے کم ہو۔

اگر کسی نمونہ میں مختلف اعداد کی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس کا جدولی اور ترسیمی اظہار غیر ضروری طور پر مشکل ہو گا جس کو **گروہ بندی**[26] سے آسان بنانا ممکن ہے۔آئیں گروہ بندی کے عمل کو سمجھیں۔

دیے گئے نمونہ کے لحاظ سے ہم ایسا وقفہ I منتخب کرتے ہیں جس میں تمام نمونی قیمتیں شامل ہوں۔ہم I کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں **جماعتی وقفہ**[27] کہتے ہیں۔ان جماعتی وقفوں کے وسطی نقطوں کو **جماعتی وسطی نقطے**[28] یا **جماعتی نشان**[29] کہتے ہیں۔ہر جماعتی وقفہ میں پائے جانے والے نمونی قیمتیں کو **طبقہ**[30] کہتے ہیں۔ طبقہ میں نمونی قیمتوں کی تعداد کو **جماعتی تعدد**[31] کہتے ہیں جس کو جسامت نمونہ n سے تقسیم کرنے سے **اضافی جماعتی تعدد**[32] حاصل ہو گا۔ اس تعدد $\tilde{f}(x)$ کو جو جماعتی نشان کے تابع ہے **گروہ بند نمونہ کا تعددی تفاعل**[33] کہتے ہیں۔اسی طرح مجموعی اضافی جماعتی تعدد $\tilde{F}(x)$ جو جماعتی نشان کے تابع ہے **گروہ بند نمونہ کا تقسیمی تفاعل**[34] کہلاتا ہے۔جدول 24.3 اور جدول 24.4 میں مثال دیا گیا ہے۔

---

grouping[26]
class intervals[27]
class midpoints[28]
class marks[29]
class[30]
class frequency[31]
relative class frequency[32]
frequency function of the grouped sample[33]
distribution!function of the grouped sample[34]

جدول 24.4: تعددی جدول برائے جدول 24.3 (گروہ بند)

جماعتی وقفہ	جماعتی نشان x	حتمی تعدد نشان شمار		$\tilde{f}(x)$	$\tilde{F}(x)$
$65-75$	70	||	2	0.04	0.04
$75-85$	80		8	0.16	0.20
$85-95$	90		11	0.22	0.42
$95-105$	100		12	0.24	0.66
$105-115$	110		8	0.16	0.82
$115-125$	120		5	0.10	0.92
$125-135$	130		4	0.08	1.00
		مجموعہ	50	1.00	

جماعتوں کی تعداد جتنی کم رکھی جائے، گروہ بند نمونہ کی تقسیم اتنی سادہ ہو گی اور اتنی ہی زیادہ معلومات کھوئی جائے گی چونکہ اصل نمونی قیمتیں اب صریحاً نظر نہیں آئیں گی۔ گروہ بندی کرتے وقت دھیان رکھیں کہ صرف غیر ضروری معلومات کھوئی جائے۔ گروہ بند نمونہ استعمال کرتے ہوئے مشکلات سے بچنے کی خاطر درج ذیل اصولوں کا خیال رکھیں۔

- جماعتی وقفے برابر رکھیں۔
- جماعتی نشان یوں منتخب کریں کہ جماعتی نشان سادہ اعداد (جن میں غیر صفر ہندسوں کی تعداد کم سے کم ہو) پر واقع ہوں۔
- اگر نمونی قیمت x_j دو جماعتوں کی سرحد پر واقع ہو تب یہ قیمت اس طبقہ میں شامل کیا جائے گا جو x_j سے شروع ہوتا ہو۔

سوالات

سوال 24.1 تا سوال 24.9 میں دیے گئے نمونہ کا تعددی جدول بنائیں اور نمونہ کو تعددی نقطہ ترسیم، ڈبہ ترسیم اور مستطیل ترسیم کی صورت میں دکھائیں۔

سوال 24.1: مزاحمت کی قیمت اوہم Ω میں۔

99	100	102	101	98	103	100	102	99	101
100	100	99	101	100	102	99	101	98	100

سوال 24.2:

6 2 4 1 2 4 3 3 2 1 6 5 6 3 4

سوال 24.3: برقی سوئچ کا سیکنڈوں میں دورانیہ ردعمل

1.3	1.4	1.1	1.5	1.4	1.3	1.2	1.4	1.5	1.3
1.2	1.3	1.5	1.4	1.4	1.6	1.3	1.5	1.1	1.4

سوال 24.4: خام کوئلہ میں کوئلہ کی فی صد مقدار

87	86	85	87	86	87	86	81	77	85
86	84	83	83	82	84	83	79	82	73

سوال 24.5: چادری فولاد کی تنشی مضبوطی [$\mathrm{kg\,mm^{-2}}$]

44	43	41	41	44	44	43	44	42	45	43	43	44	45	46
42	45	41	44	44	43	44	46	41	43	45	45	42	44	44

سوال 24.6: خودکار نظام سے 100 کاغذ کے گھٹے بنانے میں کمی بیشی

0 −1 0 0 1 1 2 0 1 0

سوال 24.7: ایک ہی قسم کے گاڑیوں کا تیل کا خرچہ۔ [کلومیٹر فی لیٹر]

12 11.5 11 12.5 11 12

سوال 24.8: خود کار نظام سے بھری گئی تھیلوں کا گرام میں وزن

200 203 199 198 201 200 201 201

سوال 24.9: اندرون شہر چلتی ریل گاڑی کا اڈے پر ٹھیک وقت پر پہنچنے سے انحراف (منٹوں میں)[35]

3 4 1 0 2 2 3 1 5 3

سوال 24.10: سوال 24.3 کے نمونہ کی مجموعی تعددی تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.11: جدول 24.4 کے گروہ بند نمونہ کا ڈبہ ترسیم، مستطیل ترسیم اور تعددی کثیر الاضلاع ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.12: جدول 24.1 میں جماعتی وقفوں کے جماعتی نشان 300 ، 320 ، 340 ، . . . پر لیتے ہوئے مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔اس کے مستطیل ترسیم کھینچ کا شکل 24.1-پ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 24.13: جدول 24.3 میں جماعتی نشان 75 ، 85 ، 95 ، . . . لے کر مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔اس کے مستطیل ترسیم کا سوال 24.10 کے ترسیم سے موازنہ کریں۔

سوال 24.14: 1500 تجرباتی نتائج میں سب سے کم ناپ 10.8 cm اور سب سے زیادہ ناپ 11.9 cm تھی۔اس مواد کی گروہ بندی لے لئے جماعتی وقفہ تجویز کریں۔

[35]امید کی جا سکتی ہے کہ ایک دن ہماری ریل گاڑیاں بھی وقت کی اتنی پابند ہوں گی۔

24.3 نمونی اوسط اور نمونی تغیریت

تعددی تفاعل (یا تقسیمی تفاعل) نمونہ کی صحیح تصویر کشی کرتا ہے۔اس تفاعل سے ہم نمونہ کے کئی خواص کا حساب لگا سکتے ہیں مثلاً نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت، پھیل، تشاکل، وغیرہ۔ اس حصہ میں ہم ایسے اہم ترین دو قیمتوں، نمونی اوسط اور نمونی تغیریت، پر غور کریں گے۔

نمونہ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کی اوسط قیمت یا مختصراً **نمونی اوسط**[36] کو $\bar{x}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{24.3}$$

تمام نمونی قیمتوں کے مجموعہ کو جسامت n سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی اوسط حاصل ہو گا۔ظاہر ہے کہ یہ نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت دے گا۔

نمونہ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کی **نمونی تغیریت**[37] کو s^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2] \end{aligned} \tag{24.4}$$

نمونی اوسط $\bar{x}$ سے نمونی قیمتوں کے انحراف کے مربعوں کو $n-1$ سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی تغیریت حاصل ہو گی۔یہ نمونی قیمتوں کی انحراف یا پھیل کی ناپ ہے۔نمونی تغیریت غیر منفی عدد ہو گا۔ نمونی تغیریت s^2 کا مثبت جذر **معیاری انحراف**[38] کہلاتا ہے جس کو s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 24.1: نمونی اوسط اور نمونی تغیریت
بے ترتیب منتخب کیے گئے کیلوں کی (سنٹی میٹروں میں) لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81

---

sample mean[36]
sample variance[37]
standard deviation[38]

مساوات 24.3 سے نمونی اوسط

$$\bar{x}=\frac{1}{10}(0.80+0.81+0.81+0.82+\cdots+0.81)=0.811\,\text{cm}$$

اور مساوات 24.4 سے نمونی تغیریت

$$s^2=\frac{1}{9}[(0.80-0.811)^2+\cdots+(0.81-0.811)^2]=0.000\,054\,\text{cm}^2$$

ہے۔ایک جیسی نمونی قیمتوں کو اکٹھا لکھنے سے حساب نسبتاً آسان بنایا جا سکتا ہے جیسے

$$\bar{x}=\frac{1}{10}(2\cdot 0.80+5\cdot 0.81+3\cdot 0.82)=0.811\,\text{cm}$$

جہاں قوسین میں تین مختلف نمونی قیمتوں $x_1=0.80$ ، $x_2=0.81$ اور $x_3=0.82$ کو ان کی تعدد سے ضرب دیا گیا ہے۔اسی طرح

$$s^2=\frac{1}{9}[(2(0.800-0.811)^2+5(0.810-0.811)^2+3(0.820-0.811)^2]=0.000\,054$$

ہو گا۔ $\square$

اس مثال میں ہم نے $\bar{x}$ اور s^2 کو نمونہ کے تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ کی مدد سے حاصل کرنا دیکھا۔اگر ایک نمونہ میں ٹھیک m مختلف اعدادی قیمتیں

$$x_1,x_2,\cdots,x_m$$

پائی جاتی ہوں جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\tilde{f}(x_1),\tilde{f}(x_2),\cdots,\tilde{f}(x_m)$$

ہوں تب حساب کے لئے درکار تعدد درج ذیل ہوں گے

$$n\tilde{f}(x_1),n\tilde{f}(x_2),\cdots,n\tilde{f}(x_m)$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 سے

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}x_jn\tilde{f}(x_j) \tag{24.5}$$

اور

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{m}(x_j - \bar{x})^2 n\tilde{f}(x_j) \tag{24.6}$$

حاصل ہو گا۔ دھیان رہے کہ مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 میں ہم تمام نمونی قیمتوں پر مجموعہ لیتے ہیں جبکہ مساوات 24.5 اور مساوات 24.6 میں ہم اعدادی طور مختلف نمونی قیمتوں پر مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔ حتمی تعدد $n\tilde{f}(x_j)$ عدد صحیح ہوں گے جبکہ اضافی تعدد $\tilde{f}(x_j)$ عموماً غیر عدد صحیح ہوں گے۔

چونکہ $x_j - \bar{x}$ کی حتمی قیمت نمونی اوسط کی نسبت بہت کم ہو سکتی ہے لہذا s^2 کے مذکورہ بالا کلیات کی استعمال سے (خود کار حساب میں) ملحوظ ہندسے ضائع ہوں گے۔ ہم s^2 کا ایک ایسا کلیہ اخذ کرتے ہیں جو ان مشکلات سے دو چار نہ ہو۔ ہم مساوات 24.4 میں

$$(x_j - \bar{x})^2 = x_j^2 - 2x_j\bar{x} + \bar{x}^2$$

پر کرتے ہوئے تین مجموعے

$$\sum(x_j - \bar{x})^2 = \sum x_j^2 - 2\bar{x}\sum x_j + \sum \bar{x}^2$$

حاصل کرتے ہیں جہاں آخری مجموعہ $n\bar{x}^2$ کے برابر ہے۔ مساوات 24.3 سے $\bar{x}$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$-2\bar{x}\sum x_j = -\frac{2}{n}\Big(\sum x_j\Big)^2 \quad \text{اور} \quad n\bar{x}^2 = \frac{1}{n}\Big(\sum x_j\Big)^2$$

لکھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2\Big] \tag{24.7}$$

حاصل ہو گا۔ اسی طرح مساوات 24.6 کو تبدیل کرتے ہوئے

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{j=1}^{m} x_j^2 n\tilde{f}(x_j) - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} x_j n\tilde{f}(x_j)\Big)^2\Big] \tag{24.8}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.1 میں مساوات 24.5 اور مساوات 24.8 (جدول 24.5) سے پہلے کی طرح $\bar{x} = \frac{8.11}{10} = 0.811$ اور

$$s^2 = \frac{1}{9}\Big(6.5777 - \frac{8.11^2}{10}\Big) = \frac{0.000\,49}{9} = 0.000\,054$$

حاصل ہوتے ہیں۔

جدول 24.5: اوسط اور تغیریت کا حساب برائے مثال 24.1

x_j	$10\tilde{f}(x_j)$	$x_j \cdot 10\tilde{f}(x_j)$	x_j^2	$x_j^2 \cdot 10\tilde{f}(x_j)$
0.80	2	1.60	0.6400	1.2800
0.81	5	4.05	0.6561	3.2805
0.82	3	2.46	0.6724	2.0172

سوالات

سوال 24.15: گزشتہ حصے کی سوال 24.2 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 3.47,\ s^2 = 2.98$

سوال 24.16: گزشتہ حصے کی سوال 24.4 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 84,\ s^2 = \frac{1251}{95}$

سوال 24.17: نمونہ $2, 1, 4, 5$ کا **مستطیل ترسیم** کھینچیں۔ ترسیم کو دیکھ کر $\bar{x}$ اور s کی قیمتوں کا اندازہ لگائیں۔ $\bar{x}$ ، s^2 اور s کی قیمتوں کا حساب لگائیں۔
جواب: $\bar{x} = 3,\ s^2 = 3.3,\ s = 1.817$

سوال 24.18: دکھائیں کہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نمونی قیمتوں کے بیچ $\bar{x}$ ہو گا۔

سوال 24.19: **نمونہ کا**
نمونہ میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو نمونہ کا [39] کہتے ہیں۔ مثال 24.1 میں دیے گئے نمونہ کا تلاش کریں۔
جواب: 0.02

سوال 24.20: **صدویہ، وسطانیہ**
نمونہ کی p ویں **صدویہ**[40] سے مراد ایسا عدد Q_p ہے کہ کم از کم $p\,\%$ نمونی قیمتیں Q_p سے کم یا اس کے برابر ہوں اور ساتھ ہی $(100-p)\,\%$ نمونی قیمتیں اس سے زیادہ یا اس کے برابر ہوں۔ اگر ایک سے زیادہ ایسا عدد پایا جاتا ہو (جس صورت میں ان اعداد کا وقفہ پایا جائے گا) تب p ویں صدویہ سے مراد ان اعداد کا اوسط (یعنی وقفے کا وسطی نقطہ) ہو گا۔ بالخصوص Q_{50} کو **وسطانیہ**[41] کہتے ہیں جس کو $\tilde{x}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وسطانیہ

[39] range
[40] percentile
[41] median

کو **نصف چوتھائی**[42] بھی کہتے ہیں۔جدول 24.2 کے نمونہ کا وسطانیہ $\tilde{x}$ تلاش کریں۔
جواب: 360

سوال 24.21: نمونہ کی Q_{25} اور Q_{75} صدویہ کو بالترتیب **نچلی چوتھائی**[43] اور **بالائی چوتھائی**[44] کہتے ہیں جبکہ $Q_{75} - Q_{25}$ جو پھیل کی ناپ ہے کو چوتھائی [45] کہتے ہیں۔جدول 24.2 کے نمونہ کا کی Q_{25} ، Q_{75} اور $Q_{75} - Q_{25}$ تلاش کریں۔
جواب: $350, \ 380, \ 30$

سوال 24.22: جدول 24.3 کے لئے سوال 24.21 کو حل کریں۔
جواب: $\frac{345}{4}, \ \frac{439}{4}, \ \frac{47}{2}$

سوال 24.23: **عادہ**
نمونہ میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت کو نمونہ کی **عادہ**[46] کہتے ہیں۔یہ سب سے عام قدر ہوتی ہے۔درج ذیل نمونہ کی اوسط، وسطانیہ اور عادہ تلاش کریں۔ ان پر تبصرہ کریں۔

قیمت	100	1000	1 000 000
تعدد	100	90	20

جواب: $100 =$ عادہ $, 1000 =$ وسطانیہ $, 10\,000 =$ اوسط

سوال 24.24: **مبدا کام**
اگر $x_j = x_j^* + c$ ہو جہاں $j = 1, \cdots, n$ اور c کوئی مستقل ہو تب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c + \bar{x}^*, \quad \left(\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^*\right) \quad \text{اور} \quad s^2 = s^{*2}$$

ہوں گے جہاں x_j^* قیمتوں کی تغیریت s^{*2} ہے۔(عملی استعمال میں c یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ x_j^* کی حتمی قیمتیں چھوٹی ہوں۔جیومیٹریائی طور پر یہ مبدا کی تبدیلی کے مترادف ہے لہٰذا اس کو **ترکیب مبدا کام**[47] کہتے ہیں۔)

سوال 24.25: ترکیب مبدا کام کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

---
[42] middle quartile
[43] lower quartile
[44] upper quartile
[45] interquartile range
[46] mode
[47] method of working origin

سوال 24.26: **مکمل رمز نویسی**
اگر $x_j = c_1 x_j^* + c_2$ ہو جہاں $j = 1, \cdots, n$ جبکہ c_1 اور c_2 مستقل ہیں تب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}^* + c_2, \quad s^2 = c_1^2 s^{*2}$$

ہوں گے جہاں $\bar{x}^*$ اور s^{*2} کی معنی سوال 24.24 میں پیش کی گئی ہیں۔اس کو ترکیب **مکمل رمز نویسی**[48] کہتے ہیں۔(اس ترکیب سے قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے نتائج کی جلد جانچ پڑتال کی جا سکتی ہے۔)

سوال 24.27: اس ترکیب کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

سوال 24.28: کسی بھی نمونہ کی گروہ بندی سے عموماً نمونی اوسط متاثر ہو گا۔دکھائیں کہ نمونی اوسط میں تبدیل $\frac{l}{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے جہاں ہر ایک جماعتی وقفہ کی لمبائی l ہے۔

سوال 24.29: جدول 24.3 کی غیر گروہ بند نمونہ کی گروہ بندی جدول 24.4 میں کی گئی ہے۔دونوں مواد کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔نتائج کا آپس میں موازنہ کریں۔
جواب: $\bar{x} = 99.4,\ s^2 = 254.7$: گروہ بند؛ $\bar{x} = 99.2,\ s^2 = 234.7$: غیر گروہ بند

24.4 بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات

شماریاتی تجربات یا شماریاتی مشاہدے سے ہمیں نمونے حاصل ہوں گے جن کی مدد سے ہم متعلقہ آبادی کے بارے میں نتائج اخذ کرنا چاہیں گے۔ایسا کرنے سے پہلے حسابی احتمال کی مدد سے ہمیں آبادی کے حسابی نمونے بنانے ہوں گے۔یہ نظریہ حسابی شماریات کی بنیاد ہے جس کی گہرائی میں ہم اپنی ضرورت کے مطابق جائیں گے۔اس حصہ میں کئی بنیادی تصورات کو متعارف کیا جائے گا۔

ایک بلا منصوبہ تجربہ یا بلا منصوبہ مشاہدہ، جنہیں ہم مختصراً **تجربہ**[49] یا **مشاہدہ**[50] کہیں گے، سے مراد وہ عمل ہے جو درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

---

[48] method of full coding
[49] experiment
[50] observation

- اس کو طے شدہ قواعد کے تحت سرانجام دیا جاتا ہے جو عمل کو مکمل طور پر بیان کرتے ہیں۔
- اس عمل کو جتنی بار چاہیں دوبارہ انجام دیا جا سکتا ہے۔
- ہر مرتبہ عمل کا نتیجہ اتفاق پر منحصر ہو گا (یعنی نتیجہ ان اثرات پر منحصر ہے جنہیں ہم قابو نہیں کر سکتے ہیں) لہٰذا قبل از وقت یکتا طور پر نتیجہ جاننا ممکن نہیں ہو گا۔

ایک مرتبہ تجربے کے عمل سے حاصل نتیجہ کو اس **کوشش**[51] کا **انجام**[52] کہتے ہیں۔

اس کی مثال (کرکٹ کی کھیل کی آغاز میں) سکہ پھینکنا، **لوڈو**[53] کی کھیل میں **پانسہ**[54] پھینکنا، 100 پیچ کی ڈبی سے 10 پیچوں کا انتخاب یا مختلف حالات میں کیمیائی عمل کی پیداوار تعین کرنا اور دیگر تجربات مثلاً بلا منصوبہ 20 افراد کا انتخاب اور ان کا **فشار خون**[55] تعین کرنا یا کسی موضوع پر ان کی رائے جاننا ہیں۔

کسی تجربہ کے تمام ممکنہ انجام کے سلسلہ کو اس تجربہ کی **نمونی فضا**[56] کہتے ہیں جس کو S سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہر ایک انجام کو S کا **رکن**[57] یا **نقطہ**[58] کہتے ہیں۔ متناہی تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ **متناہی** جبکہ لامتناہی تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ **لامتناہی** کہلائے گا۔

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے بلا منصوبہ تجربہ کے ساتھ درج ذیل نمونی سلسلہ منسلک کیا جا سکتا ہے،

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

چونکہ پانسہ پھینکنے کے بعد (چھ ممکنات میں سے) کسی ایک رخ رکے گا۔

صنعتی پیداوار سے ہم ایک رکن نکال کر دیکھ سکتے ہیں کہ آیا وہ بے عیب یا عیب دار ہے۔ یوں S دو ارکان D (عیب دار) اور N (بے عیب) پر مشتمل ہو گا جنہیں اعداد مثلاً 0 (عیب دار) اور 1 (بے عیب) سے بھی

---

[51] trial
[52] outcome
[53] ludo
[54] ایک مکعب جس کی چھ سطحوں پر ایک تا چھ نقطے ہوتے ہیں۔
[55] blood pressure
[56] sample space
[57] element
[58] point

ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اب اگر ہم ایک سے زیادہ اقسام کے عیب میں تمیز کریں تب نمونی فضا دو سے زائد نقطوں پر مشتمل ہو گا۔

کپاس کی مضبوطی کے تجربہ (جدول 24.3) میں نمونی فضا لا متناہی ہو گا چونکہ دھاگہ توڑنے کے لئے درکار قوت کسی مخصوص میں کوئی بھی مثبت قیمت ہو سکتی ہے۔

عملی مسائل میں ہمیں انفرادی انجام سے زیادہ دلچسپی نہیں ہو گی بلکہ ہم صرف اتنا جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا کسی مخصوص سلسلہ انجام سے تعلق ہے (یا نہیں ہے)۔ظاہر ہے کہ ایسا ہر سلسلہ A پوری نمونی فضا S کا ذیلی سلسلہ ہو گا۔اس کو **وقوعہ**[59] کہتے ہیں۔

چونکہ کوئی بھی انجام S کا ذیلی سلسلہ ہو گا لہٰذا یہ ایک مخصوص قسم کا وقوعہ ہو گا جس کو **بنیادی وقوعہ** کہتے ہیں۔اسی طرح پوری فضا S بھی ایک مخصوص وقوعہ ہے۔

مثال 24.2: پانچ پانی کے نلکوں (جنہیں ایک تا پانچ سے ظاہر کیا جاتا ہے) میں سے دو نلکے منتخب کیے جاتے ہیں۔نمونی فضا درج ذیل دس ممکنہ انجام پر مشتمل ہو گی۔

$$1,2 \quad 1,3 \quad 1,4 \quad 1,5 \quad 2,3 \quad 2,4 \quad 2,5 \quad 3,4 \quad 3,5 \quad 4,5$$

اب اگر ہم عیب دار نلکوں میں دلچسپی رکھتے ہوں تب ہمیں درج ذیل تین انجاموں میں فرق کرنا ہو گا۔

A : کوئی بھی عیب دار نہیں ہے, B : ایک عیب دار ہے, C : دونوں عیب دار ہیں

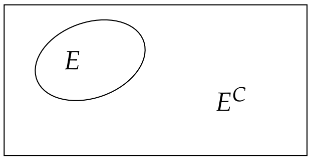
فرض کریں کہ نلکوں میں $1,2,3$ عیب دار ہیں تب درج ذیل ہو گا۔

$4,5,$ منتخب کرنے سے A ہو گا
$1,4 \quad 1,5 \quad 2,4 \quad 2,5 \quad 3,4 \quad 3,5$ منتخب کرنے سے B ہو گا
$1,2 \quad 1,3 \quad 2,3$ منتخب کرنے سے C ہو گا

□

نمونی فضا S اور تجربہ کے انجام کو **وین اشکال**[60] سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کہ شکل 24.3 میں چکور کے اندر نقطوں کا سلسلہ S کو ظاہر کرتے ہے۔تب مستطیل کے اندر بند منحنی کا اندرون کسی وقوعہ کو ظاہر کرے گا جس کو ہم E سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان تمام ارکان (انجاموں) کا سلسلہ جو E میں شامل نہیں ہیں کو S میں E کا متمم کہتے ہیں جس کو E^c [61] سے ظاہر کیا گیا ہے۔

[59] event
[60] Venn diagram
[61] یا $\bar{E}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو ہم استعمال نہیں کریں گے چونکہ اس کو کسی دوسرے مقصد (بندش سلسلہ) کے لئے مختص کیا گیا ہے۔



شکل 24.3: وین شکل میں نمونی سلسلہ S اور وقوعات E اور E^C دکھائے گئے ہیں

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں

$$E: \quad \text{جب جفت عدد حاصل ہو}$$

کا متمم

$$E^C: \quad \text{جب طاق عدد حاصل ہو}$$

ہو گا۔ایسا وقوعہ جس میں کوئی انجام نہ پایا جاتا ہو کو **خالی وقوعہ**[62] یا **نا ممکن وقوعہ**[63] کہتے ہیں جس کو $\varnothing$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ کسی تجربہ میں A اور B کوئی دو وقوعات ہیں۔تب وہ وقوعہ جو S میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو A یا B یا دونوں میں پائے جاتے ہوں کو A اور B کا **اشتراک**[64] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A \cup B$$

وہ وقوعہ جو S میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو A اور B دونوں میں پائے جاتے ہوں کو A اور B کا **تقاطع**[65] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔شکل 24.4 میں اشتراک اور تقاطع کو وین شکل پر دکھایا گیا ہے۔

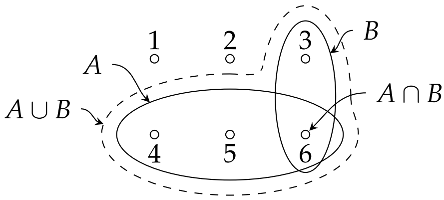
$$A \cap B$$

اگر A اور B میں کوئی وقوعہ مشترک نہ ہو تب $A \cup B = \varnothing$ ہو گا اور ہم کہیں گے کہ A اور B **بے ربط وقوع**[66] یا **باہمی بلا شرکت وقوعہ**[67] ہیں۔

[62] empty event
[63] impossible event
[64] union
[65] intersection
[66] disjoint events
[67] mutually exclusive events

(الف) اشتراک $A \cup B$ (ب) تقاطع $A \cap B$

شکل 24.4: نمونی فضا S میں دو وقوعات A ، B اور (گہری سیاہی میں) ان کی اشتراک اور تقاطع کی وین شکل



شکل 24.5: وین شکل برائے مثال 24.3

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں $B \cap C = \varnothing$ ہے جبکہ $B \cup C$ ایک یا دو عیب دار نلکیاں ہیں۔

مثال 24.3: پانسہ پھینکنے کے ایک تجربہ میں درج ذیل وقوعہ

A : 4 سے چھوٹا عدد نہ ہو

B : 3 سے قابل تقسیم عدد ہو

کا اشتراک $A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ اور تقاطع $A \cap B = \{6\}$ ہو گا (شکل 24.5)۔ □

اگر وقوعہ A کے تمام ارکان وقوعہ B میں پائے جاتے ہوں تب A کو B کا ذیلی وقوعہ[68] کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$A \subset B \quad \text{یا} \quad B \supset A$$

ظاہر ہے کہ $A \subset B$ کی صورت میں اگر B واقع پذیر ہو تب لازماً A بھی وقوع پذیر ہو گا۔ مثال کے طور پر وقوعہ $D = \{4, 6\}$ پانسہ کے جفت نتائج کے وقوعہ $E = \{2, 4, 6\}$ کا ذیلی وقوعہ ہے۔

---

[68] subevent

فرض کریں کہ نمونی فضا S میں کئی وقوعات $A_1, \cdots, A_m$ ہیں۔ تب ان m وقوعات میں سے ایک میں یا ایک سے زیادہ میں پائے جانے والے تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ان m وقوعات کا **اشتراک** ہو گا جس کو

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \quad \text{یا مختصراً} \quad \bigcup_{j=1}^{m} A_j$$

لکھا جاتا ہے۔ان تمام وقوعات میں پائے جانے والے ارکان پر مشتمل وقوعہ $A_1, \cdots, A_m$ کا **تقاطع** ہو گا جس کو

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \quad \text{یا مختصراً} \quad \bigcap_{j=1}^{m} A_j$$

لکھا جاتا ہے۔

زیادہ عمومی طور پر فرض کریں کہ S میں لامتناہی ارکان $A_1, \cdots, A_m, \cdots$ پائے جاتے ہیں۔تب اشتراک

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \quad \text{یا مختصراً} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو کم سے کم کسی ایک مذکورہ بالا وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔اسی طرح تقاطع

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \quad \text{یا مختصراً} \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو مذکورہ بالا تمام وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔

اگر وقوعات $A_1, \cdots, A_m, \cdots$ یوں ہوں کہ ان میں سے کسی ایک کا واقع ہونے سے باقی کسی وقوعہ کا واقع ہونا نا ممکن ہو تب کسی بھی $j \neq k$ کے لئے $A_j \cap A_k = \varnothing$ ہو گا اور ایسی وقوعات کو **بے ربط وقوعات** یا **باہمی بلا شرکت وقوعات** کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں A, B, C بے ربط وقوعات ہیں۔

فرض کریں کہ ہم بے منصوبہ تجربہ n مرتبہ کرتے ہوئے n قیمتوں پر مشتمل نمونہ حاصل کرتے ہیں۔فرض کریں کہ ان n کوششوں میں وقوعہ A اور وقوعہ B کے اضافی تعدد بالترتیب $\tilde{f}(A)$ اور $\tilde{f}(B)$ ہیں۔تب وقوعہ $A \cup B$ کی اضافی تعدد

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A \cap B) \tag{24.9}$$

ہو گی۔اگر A اور B باہمی بلا شرکت ہوں تب $\tilde{f}(A \cap B) = 0$ اور

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) \tag{24.10}$$

ہو گا۔یہ کلیات شکل 24.4 میں دکھائے گئے وین شکل سے صاف ظاہر ہیں۔ ان کا با ضابطہ ثبوت آپ سے سوال 24.34 میں مانگا گیا ہے۔

سوالات

سوال 24.30: دو سکے پھینکنے کے نمونی فضا کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.31: پانسہ کی جوڑی ایک مرتبہ پھینکی جاتی ہے۔اس تجربہ کا نمونی فضا بنائیں جس میں تمام ارکان ہوں۔اس شکل پر درج ذیل وقوعات کی نشاندہی کریں۔ (الف) دونوں یکساں عدد ہیں۔ (ب) دونوں اعداد کا مجموعہ 7 سے زیادہ ہے۔ (پ) دونوں اعداد کا مجموعہ 5 ہے۔

سوال 24.32: تین برقیاتی پرزوں کا عرصہ زندگی کا نمونی فضا تلاش کریں۔
جواب: غیر منفی اعداد کے تمام مرتب تین اعداد کا فضا۔

سوال 24.33: ایک تجربہ میں چادر میں سوراخ کر کے سوراخ کا قطر ناپا جاتا ہے۔سوراخ کا قطر 2.9 cm اور 3.1 cm کے بیچ ہے۔ E کا متمم تلاش کریں۔

سوال 24.34: مساوات 24.9 کو ثابت کریں۔
جواب: $A \cup B$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $A \cap B$ یا $A \cap B^C$ یا $A^C \cap B$ ہو۔ یہ تینوں باہمی بلا شرکت ہیں۔فرض کریں کہ نمونہ میں متعلقہ حتمی تعدد n_1 ، n_2 ، n_3 ہو۔تب $\tilde{f}(A) = \frac{n_1+n_2}{n}$ ، $\tilde{f}(B) = \frac{n_1+n_3}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cap B) = \frac{n_1}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cup B) = \frac{n_1+n_2+n_3}{n}$ ہوں گے۔ان سے مساوات 24.9 حاصل ہوتا ہے۔

سوال 24.35: ایک ڈبیا میں 20 قلم ہیں جن میں سے 10 قلم بے عیب ہیں۔ 8 قلموں میں عیب A ، 5 قلموں میں عیب B اور 3 قلموں میں دونوں عیب پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ بلا منصوبہ ایک قلم نکالا جاتا ہے۔متعلقہ نمونی فضا S کی وین شکل بنائیں جس میں A قسم کے عیب کا وقوعہ E_A اور B قسم کے

عیب کا وقوعہ E_B دکھایا گیا ہو۔ مزید $E_A \cap E_B$ ، $E_A \cap E_B^C$ ، $E_A^C \cap E_B$ ، $E_A^C \cap E_B^C$ ، $E_A \cup E_B$ ، $E_A^C \cup E_B$ ، $E_A \cup E_B^C$ ، $E_A^C \cup E_B^C$ بھی دکھائیں۔ ہر وقوعہ میں انجام کی تعداد بتائیں۔

سوال 24.36: وین شکل کی مدد سے درج ذیل قواعد کو پرکھیں۔

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

سوال 24.37: **قوانین ڈی مارگن** وین اشکال بناتے ہوئے درج ذیل ڈی مارگن قوانین[69] کی تصدیق کریں۔

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

سوال 24.38: متمم کی تعریف سے درج ذیل اخذ کریں جہاں نمونی فضا S کا A کوئی ذیلی سلسلہ ہے۔

$$(A^C)^C = A, \quad S^C = \varnothing, \quad \varnothing^C = S, \quad A \cup A^C = S, \quad A \cap A^C = \varnothing$$

سوال 24.39: وین شکل استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $A \subset B$ صرف اور صرف تب ہو گا جب $A \cup B = B$ ہو۔ $A \subset B$ کے لئے $A \cap B$ کی صورت میں شرط تلاش کریں۔

24.5 احتمال

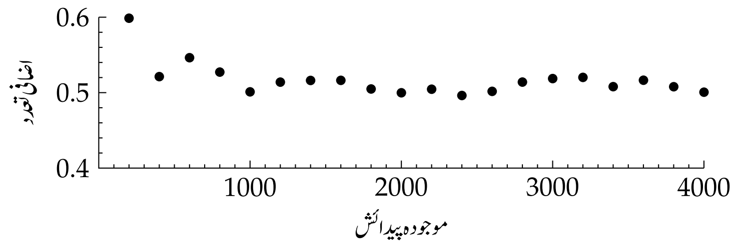
تجربہ سے ثابت ہوتا ہے کہ عموماً بلا منصوبہ تجربات کی اضافی تعدد میں شماریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے۔ یعنی ایسے تجربہ کے مختلف لمبی تسلسل میں کسی وقوعہ کے مطابقتی اضافی تعدد تقریباً ایک جیسے ہوں گے۔ اس کی مثالیں جدول 24.6 اور شکل 24.6 میں دکھائی گئی ہیں۔ (سکہ پھینکنے سے شیر یا خط حاصل ہوتا ہے۔) شکل 24.6 میں یوں معلوم ہوتا ہے کہ جیسے جیسے لڑکوں کی تعداد بڑھتی ہے ویسے ویسے لڑکوں کی فی صد میں اتر چڑھاو کم ہوتی جاتی ہے۔ عیب دار اشیاء کا فی صد بھی ایسا ہی رویہ رکھتا ہے اور اس طرح کے دیگر مثال بھی دیے جا سکتے ہیں۔

---

[69] De Morgan's laws

جدول 24.6: سکہ پھینکنے کے نتائج

تجربہ کرنے والا	جتنی مرتبہ سکہ پھینکا گیا	جتنی مرتبہ شیر حاصل ہوا	شیر کی اضافی تعدد
امجد	4040	2048	0.5069
مشرف	12 000	6019	0.5016
مشرف	24 000	12 012	0.5005



شکل 24.6: وقوعہ "لڑکے کی پیدائش"

چونکہ عموماً بلا منصوبہ تجربات میں شماریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ ایسے تجربہ میں وقوعہ E کے لئے ایسا عدد $P(E)$ پایا جاتا ہے کہ تجربہ بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دینے سے E کا اضافی تعدد تخمیناً $P(E)$ ہو گا۔ ہم $P(E)$ کو بلا منصوبہ تجربہ میں E کا **احتمال**[70] کہتے ہیں۔ دھیان رہے کہ یہ عدد E کی حتمی خاصیت نہیں ہے بلکہ کسی نمونی فضا S یعنی کسی بلا منصوبہ تجربہ سے متعلق ہے۔

جب ہم کہتے ہیں کہ E کا احتمال $P(E)$ ہے، اس سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ اگر اس تجربہ کو بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دیا جائے تب اضافی تعدد $\tilde{f}(E)$ عملی طور پر لازماً $P(E)$ کے تخمیناً برابر ہو گا۔ (یہاں "تخمیناً برابر" کو ہم نے "ٹھیک برابر" بنانا ہو گا۔ اس کے لئے ہمیں انتظار کرنا ہو گا۔)

متعارف کردہ احتمال یوں تجربی اضافی تعدد سے وابستہ ہے۔ اس طرح ضروری ہے کہ یہ اضافی تعدد کی چند بنیادی خواص رکھتا ہو۔ یہ خواص مسئلہ 24.1، مسئلہ 24.2 اور مساوات 24.10 سے اخذ کیے جا سکتے ہیں جنہیں **حسابی احتمال کے مسلمات** کہتے ہیں۔

حسابی احتمال کے مسلمات

[70] probability

- (الف) اگر نمونی فضا S میں E ایک وقوعہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$0 \leq P(E) \leq 1 \tag{24.11}$$

- (ب) تمام نمونی فضا کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(S) = 1 \tag{24.12}$$

- (پ) اگر A اور B باہمی بلا شرکت وقوعات (حصہ 24.4) ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{24.13}$$

لا متناہی نمونی فضا کی صورت میں ہمیں مسلمہ-پ کی جگہ مسلمہ-پ* استعمال کرنا ہو گا۔

- (پ*) اگر E_1 ، E_2 ، $\cdots$ باہمی بلا شرکت وقوعات ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots \tag{24.13*}$$

مسلمہ-پ سے الکراجی ماخوذ کے ذریعہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.3: (قاعدہ جمع برائے باہمی بلا شرکت وقوعات)
اگر E_1 ، $\cdots$، E_m باہمی بلا شرکت ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_m) \tag{24.14}$$

آپ مساوات 24.9 کا درج ذیل مماثل ثابت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.4: (قاعدہ جمع برائے صوابدیدی وقوعات)
نمونی فضا S میں وقوعات A اور B کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{24.15}$$

مزید وقوعہ E اور اس کا متمم وقوعہ E^C (حصہ 24.4) بلا شرکت ہیں لہٰذا $E \cup E^C = S$ ہو گا۔ یوں مسلمہ-ب اور پ سے

$$P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C) = 1$$

حاصل ہو گا جس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.5: (قاعدہ اتمام)
نمونی فضا S میں وقوعہ E اور اس کے متمم وقوعہ E^C کے احتمال کا تعلق درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$P(E) = 1 - P(E^C) \tag{24.16}$$

اس کلیہ کو وہاں استعمال کیا جا سکتا ہے جہاں $P(E^C)$ کا حساب $P(E)$ کے حساب سے زیادہ آسان ہو۔ مثال 24.5 میں اس کی استعمال دکھائی جائے گی۔

ہم نمونی فضا S میں وقوعات کے احتمال کی قیمت کس طرح مقرر کر سکتے ہیں؟

اگر S متناہی ہو اور k ارکان پر مشتمل ہو اور تجربہ سے ظاہر ہوتا ہو کہ ان k انجام کا امکان ایک جیسا ہے تب ہم ہر انجام کے احتمال کو یکساں قیمت مختص کر سکتے ہیں اور مسلمہ-ب کے تحت یہ احتمال لازماً $\frac{1}{k}$ ہو گا۔ اس صورت میں احتمال کا حساب، وقوعات کے ارکان کی گنتی کے مترادف ہو گا۔

مثال 24.4: منصفانہ پانسہ
منصفانہ پانسہ سے مراد یکساں خاصیت اور بالکل مربع شکل کا پانسہ ہے۔ پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے۔ یوں $P(1) = \frac{1}{6}$ ، $P(2) = \frac{1}{6}$ ، $\cdots$ ، $P(6) = \frac{1}{6}$ ہو گا۔ اس سے اور مسئلہ 24.3 سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$A: \text{وقوعہ جس میں بالائی سطح پر جفت نقطے ہوں}$$

کا احتمال $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔ اسی طرح

$$B: \text{وقوعہ جس میں بالائی سطح پر } 4 \text{ نقطوں سے زیادہ نقطے ہوں}$$

کا احتمال $P(B) = P(5) + P(6) = \frac{1}{3}$ ہو گا، وغیرہ، وغیرہ۔زیادہ پیچیدہ صورتیں اگلے حصے میں پیش کی جائیں گی۔ $\square$

مثال 24.5: سکہ اچھالنا

پانچ سکے ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں۔کم از کم ایک خط حاصل ہونے کا احتمال تلاش کریں۔

حل: چونکہ ہر ایک سکہ خط یا شیر دے سکتا ہے لہٰذا نمونی فضا $2^5 = 32$ ارکان پر مشتمل ہے۔منصفانہ سکہ کی صورت میں ہر انجام کو ایک جیسا احتمال $\frac{1}{32}$ مختص کیا جا سکتا ہے۔تب وقوعہ A^C جس میں کوئی بھی خط حاصل نہ ہو صرف 1 رکن پر مشتمل ہو گا لہٰذا $P(A^C) = \frac{1}{32}$ ہو گا۔اس طرح $P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{31}{32}$ حاصل ہوتا ہے۔ $\square$

اگر تجربہ کی نوعیت سے ایسا ظاہر نہ ہو کہ متناہی انجام یکساں برابر امکان رکھتے ہیں یا اگر نمونی فضا متناہی نہ ہو تب، حسابی احتمال کے مسلمات پر پورا اترتے ہوئے، ہم لمبی تواتر میں کوشش دہرا کر اضافی تعدد کو استعمال کرتے ہوئے احتمال کی قیمتیں مختص کرتے ہیں۔

اس طرح ہمیں تخمینی قیمتیں حاصل ہوں گی لیکن اس سے کوئی فرق نہیں پڑے گا۔کلاسیکی طبیعیات میں ہمیں عموماً ایسی صورت حال کا سامنا ہوتا ہے مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مادہ کی کوئی کمیت ہوتی ہے لیکن اس کمیت کی ٹھیک قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ نظریہ بنانے میں یہ رکاوٹ پیدا نہیں کرتی ہے۔

اگر ہمیں شک ہو کہ ہم نے درست طریقہ سے احتمال کی قیمتیں مختص نہیں کی ہیں تب ہم شماریاتی پرکھ کا سہارا لے سکتے ہیں۔

عموماً یہ جانتے ہوئے کہ وقوعہ A ہو چکا ہے ہمیں وقوعہ B کا احتمال درکار ہو گا۔اس کو دیے گئے A کی صورت میں B کا **مشروط احتمال**[71] کہتے ہیں جس کو $P(B|A)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں A بطور نئی (تخفیف شدہ) نمونی فضا کردار ادا کرتا ہے اور یہ احتمال $P(A)$ کا وہ (کسری) حصہ ہو گا جو $A \cap B$ کا مطابقتی ہو۔یوں

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad [P(A) \neq 0] \tag{24.17}$$

---

[71] conditional probability

ہو گا۔اسی طرح دیے گیے B کی صورت میں A کا مشروط احتمال

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad [P(B) \neq 0] \tag{24.18}$$

ہو گا۔

مساوات 24.17 اور مساوات 24.18 کو $P(A \cap B)$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.6: **قاعدہ ضرب**
اگر نمونی فضا S میں A اور B وقوعات ہوں اور $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہو تب

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \tag{24.19}$$

ہو گا۔

اگر A اور B ایسے وقوعات ہوں کہ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{24.20}$$

ہو تب انہیں **غیر تابع وقوعات**[72] کہتے ہیں۔اب اگر $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہوں تب مساوات 24.17، مساوات 24.18 اور مساوات 24.19 کے تحت

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

ہوں گے جس کا مطلب ہے کہ A کا احتمال B کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا اور اسی طرح B کا احتمال A کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا۔

اسی طرح m وقوعات $A_1, \cdots, A_m$ اس صورت غیر تابع ہوں گے جب کسی بھی k وقوعات $A_1, \cdots, A_k$ (جہاں $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq m$ اور $k = 2, 3, \cdots, m$ ہیں) کے لئے درج ذیل ہو۔

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}) \tag{24.21}$$

دھیان کریں کہ چیزوں کے سلسلہ سے چیز نکالنے، یعنی آبادی سے نمونہ حاصل کرنے، کے دو طریقے پائے جاتے ہیں۔

[72] independent events

- نمونہ واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔ ہم کل سے جس چیز کو بلا منصوبہ نکالتے ہیں، اسی چیز کو واپس کل میں رکھ کر کل کو اچھی طرح گڈ مڈ کرتے ہیں۔اس کے بعد اگلا نمونہ نکالا جاتا ہے۔

- نمونہ واپس نہ رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔ ہم نمونہ نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔

مثال 24.6: واپس رکھتے ہوئے اور بغیر واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول ایک ڈبیا میں 10 پیچ پائے جاتے ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔دو پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔دونوں پیچ بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ہم درج ذیل وقوعات پر غور کرتے ہیں۔

A : پہلا نکالا گیا پیچ بے عیب ہے۔

B : دوسرا نکالا گیا پیچ بے عیب ہے۔

چونکہ 10 میں سے 7 پیچ بے عیب ہیں اور ہم بلا منصوبہ پیچ نکالتے ہیں لہٰذا ہر پیچ کا نکالے جانے کا امکان $\frac{1}{10}$ ہے۔یوں $P(A)=\frac{7}{10}$ ہو گا۔اگر ہم اس پیچ کو واپس ڈبیا میں رکھ دیں تب دوسری مرتبہ پیچ نکالنے میں اور پہلی مرتبہ پیچ نکالنے میں کوئی فرق نہیں ہو گا لہٰذا $P(B)=\frac{7}{10}$ ہو گا۔یہ وقوعات غیر تابع ہیں اور

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.7\cdot 0.7=0.49=49\,\%$$

ہو گا۔اس کے برعکس اگر ہم نمونہ واپس نہ رکھیں تب A وقوع پذیر ہونے کے بعد دوسری مرتبہ ڈبیا میں کل 9 پیچ ہوں گے جن میں سے 3 عیب دار ہیں لہٰذا $P(B|A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ ہو گا۔مسئلہ 24.6 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$P(A\cap B)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\approx 47\,\%$$

□

سوالات

سوال 24.40: 5 منصفانہ سکے اچھال کر کم سے کم 1 خط حاصل کرنے کا کیا احتمال ہے؟
جواب: $\frac{31}{32}$

سوال 24.41: تین منصفانہ پانسہ اچھالے جاتے ہیں۔ وقوعہ E جس میں کم از کم دو اعداد مختلف حاصل ہوتے ہیں کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.42: 100 پیچ کی کھیپ میں 10 عیب دار ہیں۔ اس کھیپ سے 3 پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ (الف) بغیر واپس رکھے، (ب) واپس رکھتے ہوئے، تینوں پیچ بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) $\frac{90}{100}\cdot\frac{89}{99}\cdot\frac{88}{98}=72.65\,\%$ ، (ب) $0.9^3=72.9\,\%$

سوال 24.43: تین برتن ہیں اور ہر برتن میں 5 مرچ ہیں جن پر 1 تا 5 لکھا گیا ہے۔ ہر برتن سے ایک مرچ نکالا جاتا ہے۔ وقوعہ E جس میں نکالے گئے مرچ پر لکھے اعداد کا مجموعہ 3 سے زیادہ ہو کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.44: 100 لوہے کے سلاخوں کے جتھا میں 25 سلاخ زیادہ لمبے، 25 کم لمبے اور 50 صحیح لمبائی کے ہیں۔ اگر 2 سلاخ بلا منصوبہ نکالے جائیں اور انہیں واپس نہ رکھا جائے تب (الف) دونوں ٹھیک لمبائی کے، (ب) ایک ٹھیک لمبائی کا، (پ) دونوں غلط لمبائی کے، (ت) دو کم لمبائی کے سلاخ نکالنے کے احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) $24.75\,\%$ ، (ب) $50.5\,\%$ ، (پ) $24.75\,\%$ ، (ت) $6.06\,\%$

سوال 24.45: کافی عرصہ سے ایک کارخانے میں گلاس بنائے جا رہے ہیں جن میں عیب دار گلاسوں کی شرح برقرار $2\,\%$ ہے۔ ہر آدھا گھنٹہ بعد دو گلاس نکال کر پرکھے جاتے ہیں۔ اس وقوعہ کا کیا احتمال ہے کہ (الف) دونوں گلاس بے عیب ہوں، (ب) ایک گلاس بے عیب ہو، (پ) دونوں گلاس عیب دار ہوں؟ تینوں صورتوں کے احتمال کا مجموعہ کیا ہے؟

سوال 24.46: ایک ڈیزل انجن سے برقی جنریٹر چلایا جاتا ہے۔ 30 دن کے عرصہ میں ڈیزل انجن میں مرمت کی ضرورت کا احتمال $5\,\%$ جبکہ جنریٹر میں مرمت کی ضرورت کا احتمال $6\,\%$ ہے۔ کسی مخصوص دورانیہ میں دونوں کے مرمت کی ضرورت کا احتمال کیا ہو گا؟
جواب: $10.7\,\%$

سوال 24.47: کسی مشین میں ہوا کا دباو خود کار نظام سے قابو کیا جاتا ہے۔ یہ خود کار نظام 6 ٹرانزسٹر[73] پر مبنی ہے۔ کسی دورانیہ میں ہر ایک ٹرانزسٹر کے خراب ہونے کا احتمال 0.05 ہے۔ خود کار نظام صرف اس صورت کام کر سکتا ہے جب تمام ٹرانزسٹر ٹھیک ہوں۔ کسی دورانیہ میں خود کار نظام کے خراب ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

[73] transistor

سوال 24.48: ایک ڈبیا میں 100 پیچ ہیں جن میں سے 10 پیچوں میں A قسم کا عیب، 5 میں B قسم کا عیب اور 2 میں دونوں اقسام کے عیب پائے جاتے ہیں۔پہلے نکالے گئے پیچ میں A قسم کا عیب پایا جاتا ہے۔اس پیچ میں B قسم کے عیب کا احتمال کیا ہو گا؟

جواب: $P(E_B|E_A) = \frac{P(E_A \cap E_B)}{P(E_A)} = \frac{0.02}{0.10} = 20\,\%$

سوال 24.49: دو منصفانہ پانسہ اچھالے جاتے ہیں۔ایک پانسہ 5 دیتا ہے۔دونوں کا مجموعہ 9 سے زیادہ ہونے کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.50: اگر $P(A^C) = 0.2$ ، $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B^C) = 0.4$ ہوں تب $P(B|A \cup B^C)$ کیا ہو گا؟ (اشارہ۔ وین شکل استعمال کریں۔)

جواب: $\frac{0.4}{0.9} = 0.44$

سوال 24.51: مسئلہ 24.4 کو ثابت کریں۔

سوال 24.52: مسئلہ 24.3 کو ثابت کریں۔

سوال 24.53: مسئلہ 24.6 کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

سوال 24.54: دکھائیں کہ اگر A کا ذیلی سلسلہ B ہو تب $P(B) \leq P(A)$ ہو گا۔

جواب: $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) = B \cup (A \cap B^C)$ ہے جبکہ مسلمہ-پ سے $P(A) = P(B) + P(A \cap B^C) \geq P(B)$ اخذ کیا جا سکتا ہے چونکہ $P(A \cap B^C) \geq 0$ ہے۔

24.6 مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات

گزشتہ حصہ سے ہم جانتے ہیں کہ k مساوی انجام پر مشتمل متناہی نمونی فضا S میں ہر انجام کا احتمال $\frac{1}{k}$ ہے اور وقوعہ A کا احتمال حاصل کرنے کی خاطر ہم A وقوعات کو گنتے ہیں۔ یوں اگر وقوعہ m مرتبہ سر انجام ہو تب $P(A) = \frac{m}{k}$ ہو گا۔ انجام کی گنتی کے لئے درج ذیل کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

فرض کریں کہ چیزوں یا ارکان کی تعداد n ہے۔ انہیں کسی بھی ترتیب سے ایک صف میں رکھا جا سکتا ہے۔ ایسی ہر ترتیب ان چیزوں کی ایک **مرتب اجتماع**[74] کہلاتی ہے۔

مسئلہ 24.7: **مرتب اجتماعات**
n مختلف چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی جہاں تمام چیزیں مرتب اجتماعات میں شامل ہیں۔

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \qquad \text{اس کو "عدد ضربیہ } n\text{" پڑھیں} \tag{24.22}$$

مرتب اجتماع میں پہلی جگہ کو n مختلف طریقوں سے پر کیا جا سکتا ہے۔ پہلی جگہ پر کرنے کے بعد $n-1$ ارکان رہ جاتے ہیں لہٰذا دوسری جگہ کو $n-1$ مختلف طریقوں سے پر کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح چلتے ہوئے درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.8: **مرتب اجتماعات**
اگر n چیزوں کو c مختلف جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہو جہاں ہر ایک جماعت میں تمام چیزیں بالکل یکساں ہوں جبکہ ہر جماعت میں چیزیں دوسری تمام جماعتوں کی چیزوں سے مختلف ہوں تب ان چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد

$$\frac{n!}{n_1 1 n_2! \cdots n_c!} \qquad (n_! + n_2 + \cdots + n_c = n) \tag{24.23}$$

ہو گی جہاں تمام چیزیں لی گئی ہیں اور j ویں جماعت میں چیزوں کی تعداد n_j ہے۔

n چیزوں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرنے سے ایسی مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جن میں صرف k چیزیں شامل ہوں گی۔ ایک ہی k ارکان کی دو مرتب اجتماعات جن میں ارکان کی ترتیب مختلف ہو،

[74] permutation

تعریف کی رو، سے مختلف مرتب اجتماعات ہوں گی۔ مثال کے طور پر تین حروف a, b, c میں سے ایک وقت دو حروف منتخب کرتے ہوئے ab ، ac ، bc ، ba ، ca ، cb مرتب اجتماعات ملتی ہیں۔

n چیزوں میں سے k چیزوں کی مرتب اجتماعات، جہاں چیز واپس رکھی جائے، حاصل کرتے ہوئے کسی بھی چیز کو پہلی مقام پر رکھ کر، دوسری جگہ کوئی بھی چیز بشمول پہلی چیز رکھی جا سکتی ہے۔اسی طرح باقی جگہ پر کیے جاتے ہیں۔مثال کے طور پر a, b, c میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے واپس رکھتے ہوئے کل $3^2 = 9$ مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جس میں مذکورہ بالا 6 مرتب اجتماعات اور aa ، bb ، cc شامل ہیں۔ آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.63)۔

مسئلہ 24.9: **مرتب اجتماعات**
بغیر واپس رکھے، n مختلف چیزوں میں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{24.24}$$

حاصل ہو گی جبکہ منتخب چیز واپس رکھتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$n^k \tag{24.24*}$$

مرتب اجتماعات (کی تعداد) میں نا صرف چیزیں اہمیت رکھتی ہیں بلکہ ان چیزوں کی ترتیب بھی اہمیت رکھتی ہے۔اس کے برعکس دی گئے چیزوں کے **غیر مرتب اجتماعات**[75] سے مراد ایک یا ایک سے زیادہ چیزوں کی وہ انتخاب ہے جس میں چیزوں کی ترتیب کو رد کیا جاتا ہے۔دو قسم کے غیر ترتیبی اجتماعات پائے جاتے ہیں۔

بغیر واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جا سکتے ہیں۔ہر سلسلہ میں k مختلف چیزیں ہوں گی اور کسی بھی دو سلسلوں میں بالکل ایک جیسی چیزیں نہیں پائی جائیں گی۔

اس کے علاوہ، چیزوں کو واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جا سکتے ہیں۔

---

[75] combinations

مثال کے طور پر 3 حروف a, b, c میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے بغیر واپس رکھے ab ، ac ، bc حاصل کیے جا سکتے ہیں جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے ab ، ac ، bc ، aa ، bb ، cc حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.10: **غیر مرتب اجتماعات**
بغیر واپس رکھے، n چیزوں میں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرتے ہوئے

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \tag{24.25}$$

غیر مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے غیر مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\binom{n+k-1}{k} \tag{24.25*}$$

مساوات 24.25 کے ساتھ منسلک فقرہ مسئلہ 24.9 کے پہلے حصے سے اخذ ہوتا ہے یعنی n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے ان k چیزوں کے مرتب اجتماعات $k!$ ہوں گے جن میں صرف چیزوں کی ترتیب مختلف ہو گی (مسئلہ 24.7) لیکن مسئلہ 24.10 کے پہلے فقرے کے تحت ان k چیزوں کا صرف ایک غیر مرتب اجتماع پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ الکراجی ماخوذ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال 24.64)۔

مثال 24.7: **مسئلہ 24.7 اور مسئلہ 24.8 کا استعمال**
ایک ڈبیا میں 10 مختلف قسم کے پیچ ہیں جنہیں ایک مخصوص ترتیب سے مشین میں لگایا جانا ہے۔ان پیچوں کو ڈبیا سے بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔انہیں ڈبیا سے درکار ترتیب میں نکالنے کا احتمال P بہت کم (مسئلہ 24.7) یعنی

$$P = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3\,628\,800} \approx 0.000\,03\,\%$$

ہو گا۔ اگر ڈبیا میں 6 دائیں ہاتھ اور 4 بائیں ہاتھ پیچ ہوں اور 6 دائیں ہاتھ پیچ پہلے اور 4 بائیں ہاتھ پیچ بعد میں درکار ہوں تب اس ترتیب میں پیچ نکالنے کا احتمال P (مسئلہ 24.8) درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{6!4!}{10!} = \frac{1}{210} \approx 0.5\,\%$$

□

مثال 24.8: مسئلہ 24.9 کا استعمال
ایک خفی خط میں حروف کو 5 کی گروہ (الفاظ) میں لکھا جاتا ہے۔مساوات 24.24* سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل

$$26^5 = 11\,881\,376$$

مختلف الفاظ ممکن ہیں۔ مساوات 24.24 کے تحت ایسے الفاظ جن میں ہر حرف زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ استعمال ہو کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{26!}{(26-5)!} = 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22 = 7\,893\,600$$

□

مثال 24.9: مسئلہ 24.10 کا استعمال
500 پیچوں میں سے 5 پیچ بلا منصوبہ منتخب کرتے ہوئے

$$\binom{500}{5} = \frac{500!}{5!\,495!} = \frac{500\cdot 499\cdot 498\cdot 497\cdot 496}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 255\,244\,687\,600$$

نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ □

آئیں **عدد ضربیہ تفاعل** کے بار میں کچھ باتیں کریں۔صفر کا عدد ضربیہ ($0!$) کی تعریف

$$0! = 1 \tag{24.26}$$

ہے۔باقی عدد صحیح کے عدد ضربیہ درج ذیل کلیہ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(n+1)! = (n+1)n! \tag{24.27}$$

بڑی عدد کے لئے یہ کلیہ بہت بڑے اعداد دیتا ہے۔ہم بڑے عدد n کی صورت میں عموماً درج ذیل **کلیہ سٹرلنگ**[76] استعمال کرتے ہیں[77]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (e = 2.718\cdots) \tag{24.28}$$

---

[76] Stirling formula
[77] انگلستانی ریاضی دان جیمس سٹرلنگ [1692-1770]

جہاں $\sim$ سے مراد یہ ہے کہ n کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہونے سے مساوات 24.28 کی دونوں ہاتھ کا تناسب 1 کے قریب تر ہو گا۔

ثنائی عددی سر[78] کی تعریف درج ذیل کلیہ ہے۔

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} \qquad (k \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{24.29}$$

شمار کنندہ میں k اجزاء ہیں۔مزید ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

$$\binom{a}{0} = 1 \implies \binom{0}{0} = 1 \tag{24.30}$$

عدد صحیح $a = n$ کے لئے مساوات 24.29 سے

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n) \tag{24.31}$$

حاصل ہو گا۔چونکہ

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \qquad (k \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{24.32}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ثنائی عددی سر کو تکرار سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 24.29 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \qquad (k \geq 0, \text{عدد صحیح}; m > 0) \tag{24.33}$$

متعدد دیگر کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن میں سے ہم

$$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1} \qquad (k \geq 0, n \geq 1, \text{دونوں عدد صحیح}) \tag{24.34}$$

اور

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r} \tag{24.35}$$

پیش کرتے ہیں۔

---

[78] binomial coefficients

سوالات

سوال 24.55: تمام چار اعداد $1, 2, 3, 4$ لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.56: تمام پانچ حروف تہجی د،ڈ،ذ،ر،ڑ لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.57: دس افراد میں سے تین افراد کے کتنے پنچایت بنائی جا سکتی ہیں؟
جواب: $\binom{10}{3} = 120$

سوال 24.58: گاڑی کے نمبر پلیٹ پر دو حروف تہجی اور تین اعداد لکھ کر کتنے مختلف نمبر پلیٹ بنائے جا سکتے ہیں؟

سوال 24.59: 100 کی کھیپ سے 3 چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں؟
جواب: $\binom{100}{3} = 161\,700$

سوال 24.60: ایک لوٹے میں 2 سیاہ، 3 سفید، اور 4 سرخ گیند پڑے ہیں۔ہم بلا منصوبہ ایک گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔اس کے بعد دوسرا گیند نکل کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔اس کا احتمال تلاش کریں کہ پہلے 2 سیاہ، اس کے بعد 3 سفید اور آخر میں 4 سرخ گیند نکلیں۔

سوال 24.61: ہمارے پار 6 مختلف رنگ ہیں۔ہم کتنے طریقوں سے (الف) 2 ،(ب) 3 رنگ منتخب کر سکتے ہیں؟
جواب: $15, 15$

سوال 24.62: 10 کی کھیپ میں 2 چیزیں عیب دار ہیں۔ان میں سے چار چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں کوئی بھی چیز عیب دار نہ ہوں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں 1 چیز عیب دار ہ؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں 2 چیزیں عیب دار ہوں؟

سوال 24.63: مسئلہ 24.9 ثابت کریں۔
جواب: ثبوت کا طریقہ کار وہی ہے جو مسئلہ 24.7 میں استعمال کیا گیا ہے لیکن اب n کی جگہ ہم k جگہیں پر کرتے ہیں۔اگر واپس رکھنا ممکن ہو تب k میں سے ہر ایک کو n اشیاء سے پر کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.64: مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ ثابت کریں۔ اشارہ۔ مساوات 24.34 استعمال کریں۔

سوال 24.65: مساوات 24.28 استعمال کرتے ہوئے $4!$ اور $8!$ کی تخمینی قیمتیں حاصل کریں۔ان تخمینی قیمتوں کا حتمی اور اضافی خلل کیا ہے؟ جواب: $39\,902,\ 400,\ 1\,\%$; $23.5,\ 0.5,\ 2\,\%$

سوال 24.66: ایک کھیپ سے 4 چیزوں کا نمونہ، بغیر واپس رکھے حاصل کیا جاتا ہے۔مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات کی تعداد کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 24.67: مساوات 24.29 سے مساوات 24.32 حاصل کریں۔

سوال 24.68: **(مسئلہ ثنائی)** **مسئلہ ثنائی[79] کے تحت**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ہو گا۔یوں $a^k b^{n-k}$ کا عددی سر $\binom{n}{k}$ ہے۔کیا مسئلہ 24.10 سے آپ یہ اخذ کر سکتے ہیں یا آپ سمجھتے ہیں کہ یہ محض اتفاق ہے۔

سوال 24.69: مسئلہ ثنائی (سوال 24.68) کو

$$(1+b)^p(1+b)^q = (1+b)^{p+q}$$

پر لاگو کرتے ہوئے مساوات 24.35 ثابت کریں۔

24.7 بلا منصوبہ متغیرات۔غیر مسلسل اور استمراری تقسیم

دو پانسے اچھال کر 2 تا 12 عدد صحیح مجموعہ X حاصل ہو گا لیکن اگلے اچھال میں حاصل X کی پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ X "امکان" پر منحصر ہے۔اسی طرح اگر ہم پیچوں کی کھیپ سے 5 کا

[79] binomial theorem

نمونہ لے کر ان کی لمبائی ناپنا چاہیں تو ہم پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں کہ ان میں سے کتنے عیب دار ہوں گے؛ یوں عیب دار پیچوں کی تعداد X "امکان" پر منحصر ہو گی۔

بلا منصوبہ متغیر[80] X سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کی قیمت حقیقی اعداد اور "امکان" پر منحصر ہوں۔ بلا منصوبہ متغیر کو **امکانی متغیر**[81] بھی کہتے ہیں۔یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ تفاعل X درج ذیل خواص رکھتا ہے۔

- تجربہ کی نمونی فضا S پر X معین ہے اور اس کی قیمتیں حقیقی اعداد ہیں۔

- فرض کریں کہ a کوئی حقیقی عدد اور I کوئی وقفہ ہیں۔تب S میں ان تمام انجام کا سلسلہ جن کے لئے $X = a$ ہو کا احتمال پوری طرح معین ہو گا اور یہی کچھ S میں ان تمام انجام کے لئے درست ہو گا جن کے لئے X کی قیمت I میں ہو۔یہ احتمال حصہ 24.5 میں دی گئی مسلمات کے تحت ہوں گی۔

اگرچہ یہ تعریف عمومی ہے جس میں بہت سے تفاعل شامل ہیں، ہم دیکھیں گے کہ عملاً اہم بلا منصوبہ متغیرات کے اقسام اور ان کی مطابقتی "تقسیم احتمال" کی تعداد بہت کم ہیں۔

اگر ہم بلا منصوبہ تجربہ سرانجام دیں اور عدد a کا مطابقتی وقوعہ حاصل ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تجربہ کی کوشش میں بلا منصوبہ متغیر X قیمت a **اختیار**[82] کرتا ہے۔ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ ہم نے قیمت $X = a$ کا **مشاہدہ**[83] کیا۔ بجائے "عدد a کا مطابقتی وقوعہ" کہنے کے ہم مختصراً کہتے ہیں، "وقوعہ $X = a$ "۔ مطابقتی احتمال $P(X = a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طرح وقوعہ

X وقفہ $a < X < b$ میں کوئی قیمت اختیار کرتا ہے

کا احتمال $P(a < X < b)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔وقوعہ

$$X \le x \qquad (c \text{ کے برابر یا } c \text{ سے کم قیمت } X \text{ اختیار کرتا ہے})$$

کا احتمال $P(X \le c)$ سے ظاہر کیا جائے گا اور وقوعہ

$$X > x \qquad (c \text{ سے زیادہ قیمت } X \text{ اختیار کرتا ہے})$$

---

random variable[80]
stochastic variable[81]
assume[82]
observed[83]

کا احتمال $p(X > c)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔
مندرجہ بالا دو آخری وقوعات باہمی بلا شرکت ہیں لہٰذا حصہ 24.5 کے مسلمہ-پ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(X \leq c) + P(X > c) = P(-\infty < X < \infty)$$

چونکہ $-\infty < X < \infty$ پورا نمونی فضا کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا مسلمہ-ب کے تحت دایاں ہاتھ 1 کے برابر ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \qquad (c \text{ اختیاری}) \tag{24.36}$$

مثال کے طور پر، اگر X وہ عدد ہو جو پانسہ اچھال کر حاصل ہوتا ہو، تب

$$P(X = 1) = \tfrac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \tfrac{1}{6}, \quad P(1 < X < 2) = 0, \quad P(1 \leq X \leq 2) = \tfrac{1}{3},$$
$$P(0 \leq X \leq 3.2) = \tfrac{1}{2}, \quad P(X > 4) = \tfrac{1}{3}, \quad P(X \leq 0.5) = 0, \quad \cdots$$

ہوں گے۔

عموماً صورتوں میں بلا منصوبہ متغیرات **غیر مسلسل**[84] یا **استمراری**[85] ہوں گے۔ان دونوں پر باری باری غور کرتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیر X اور اس کا مطابقتی تقسیم اس صورت غیر مسلسل کہلاتے ہیں جب X درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

- ان قیمتوں کا تعداد جن کے لئے X کا احتمال غیر 0 ہو متناہی یا قابل شمار لامتناہی ہوں۔
- اگر وقفہ $a < X \leq b$ میں ایسا قیمت نہ پایا جاتا ہو، تب $P(a < X \leq b) = 0$ ہو گا۔

فرض کریں کہ

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots$$

وہ قیمتیں ہیں جن کے لئے X کا مثبت احتمال پایا جاتا ہو اور فرض کریں کہ مطابقتی احتمال درج ذیل ہیں۔

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \cdots$$

تب $P(X = x_1) = P_1$ ، وغیرہ ہو گا۔ہم اب تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} p_j & x = x_j \\ 0 & x \neq x_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{24.37}$$

متعارف کرتے ہیں۔ $f(x)$ کو X کا **تفاعل احتمال**[86] کہتے ہیں۔

---

discrete[84]
continuous[85]
probability function[86]

چونکہ $P(S) = 1$ (حصہ 24.5 مسلمہ-ب) ہے لہٰذا لازمی طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1 \tag{24.38}$$

اگر ہمیں بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر X کا احتمال معلوم ہو، تب ہم کسی بھی وقفہ $a < X \le b$ کے لحاظ سے $P(a < X \le b$ کا حساب کر سکتے ہیں جو در حقیقت

$$P(a < X \le b) = \sum_{a<x_j\le b} f(x_j) = \sum_{a<x_j\le b} p_j \tag{24.39}$$

ہو گا جو اس وقفہ میں تمام x_j کے لئے احتمال $f(x_j) = p_p$ کا مجموعہ ہے۔بند، کھلا یا لامتناہی وقفہ کے لئے صورت حال تقریباً اسی طرح ہے۔اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ بلا منصوبہ متغیر X کے لئے تفاعل احتمال $f(x)$ ، **تقسیم احتمال**[87] ،یا مختصراً، **تقسیم**[88] کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

اگر X کوئی بلا منصوبہ متغیر ہو، جو ضروری نہیں کہ غیر مسلسل ہو، تب کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے

$$X \le x \quad (x \text{ سے کم یا } x \text{ کے برابر کوئی بھی قیمت } X \text{ اختیار کر سکتا ہے})$$

کا مطابقتی احتمال $P(X \le x)$ پایا جائے گا۔ ظاہر ہے کہ $P(X \le x)$ کی قیمت x کے انتخاب پر منحصر ہو گی؛ یہ x کا تفاعل ہو گا جس کو X کا **تفاعل تقسیم**[89] کہتے[90] ہیں جس کو $F(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں

$$F(x) = P(X \le x) \tag{24.40}$$

ہو گا۔چونکہ کسی بھی a اور $b > a$ کے لئے

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

ہے لہٰذا

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \tag{24.41}$$

---

[87] probability distribution
[88] distribution
[89] distribution function
[90] بعض مصنف $F(x)$ کو مجموعی تفاعل تقسیم کہتے ہیں، خصوصاً وہ جو $f(x)$ کو تفاعل احتمال کہتے ہیں۔

ہو گا جس سے ظاہر ہے کہ X کی تقسیم کو تفاعل تقسیم یکتا طور پر تعین کرتا ہے لہٰذا اس کو احتمال کے حساب کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

فرض کریں کہ X ایک غیر مسلسل متغیر ہے۔تب ہم تفاعل تقسیم $F(x)$ کو تفاعل احتمال $f(x)$ کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔یقیناً مساوات 24.39 ($a=-\infty$ اور $b=x$ کے ساتھ) پر کرتے ہوئے

$$F(x)=\sum_{x_j\le x} f(x_j) \tag{24.42}$$

حاصل ہو گا جہاں دایاں ہاتھ $x_j\le x$ کے لئے ان تمام $f(x_j)$ کا مجموعہ ہے۔سادہ مثالیں شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں دکھائی گئی ہیں جو دو پانسہ کو ایک بار اچھال کر حاصل ہوا ہے۔دونوں اشکال میں $f(x)$ کو ڈبہ ترسیم کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔شکل 24.7 میں $x=1,2,\cdots,6$ کے لئے $f(x)=\frac{1}{6}$ اور اس کے علاوہ $f(x)=0$ ہے جو پانسہ اچھال کر حاصل ہوئے ہیں جبکہ شکل 24.8 میں $f(x)$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں جو دو پانسہ کا حاصل مجموعہ ہے۔

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

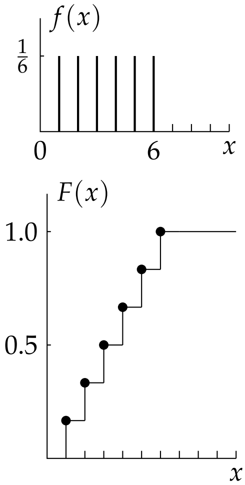
دو پانسہ کے تجربہ میں چونکہ $6\cdot 6=36$ ممکنہ مساوی امکانی انجام ہیں لہٰذا ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{36}$ ہے۔صرف $(1,1)$ کے لئے (جہاں پہلا عدد ایک پانسہ اور دوسرا عدد دوسرے پانسہ کا نتیجہ ہے) $X=2$ ہو گا؛ اسی طرح $(1,2)$ اور $(2,1)$ انجام کے لئے $X=3$ ہو گا؛ $(1,3)$ ، $(2,2)$ ، $(3,1)$ کے لئے $X=4$ ہو گا، وغیرہ۔

صرف وہ $x_1,x_2,x_3,\cdots$ قیمتیں جن کے لئے بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر X مثبت احتمال رکھتا ہو X کی **ممکنہ قیمتیں**[91] کہلاتی ہیں۔جس وقفہ میں کوئی ممکنہ قیمت نہ پائی جاتی اس وقفہ میں تفاعل تقسیم $F(x)$ مستقل ہو گا۔اس طرح $F(x)$ **سیڑھی تفاعل** (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہو گا جس میں $x=x_j$ پر اوپر رخ $p_j=P(X=x_j)$ چھلانگ پائی جائے گی جبکہ دو چھلانگوں کے بیچ یہ مستقل ہو گا۔شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں ایسا صاف ظاہر ہے۔

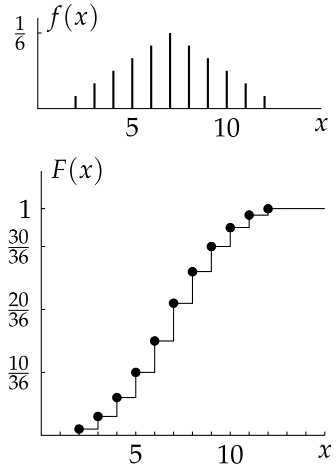
ہم اب استمراری بلا منصوبہ متغیر کی تعریف پیش کرتے ہیں اور اس پر غور کرتے ہیں۔ایک بلا منصوبہ متغیر X اور اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم تب **استمراری** کہلاتے ہیں جب اس کا تفاعل تقسیم $F(x)=P(X\le x)$ مثبت ہو

---

[91] possible values



شکل 24.7: تفاعل احتمال $f(x)$ اور تفاعل تقسیم $F(x)$



شکل 24.8: تفاعل احتمال $f(x)$ اور تفاعل تقسیم $F(x)$

اور اسے درج ذیل تکمل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو[92]

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,\mathrm{d}v \tag{24.43}$$

جہاں متکمل استمراری ہے، ماسوائے v کی متناہی تعداد کے قیمتوں کے لئے۔ متکمل f کو تقسیم کی **کثافت احتمال** یا مختصراً **کثافت** کہتے ہیں۔ ہر اس x پر جہاں $f(x)$ استمراری ہو وہاں مساوات 24.43 کو تقسیم کرتے ہوئے

$$F'(x) = f(x)$$

حاصل ہو گا۔اس لحاظ سے تفاعل تقسیم کا تفرق کثافت ہے۔

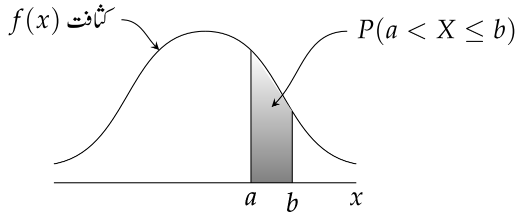
مساوات 24.43 اور حصہ 24.5 کے مسلمہ-ب کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v = 1 \tag{24.44}$$

مساوات 24.41 اور مساوات 24.43 سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(v)\,\mathrm{d}v \tag{24.45}$$

[92] $F(x)$ استمراری ہے لیکن $F(x)$ کے استمراری ہونے سے مساوات 24.43 کی موجودگی ثابت نہیں ہوتی ہے۔چونکہ ایسے استمراری تفاعل تقسیم جنہیں مساوات 24.43 کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو عملاً بہت کم پائے جاتے ہیں لہٰذا اصطلاحات "استمراری بلا منصوبہ متغیر" اور "استمراری تقسیم" جو بہت زیادہ استعمال کی جاتی ہیں سے پریشانی پیدا ہونے کا امکان بہت کم ہو گا۔



شکل 24.9: شکل برائے مساوات 24.45

یوں جیسا شکل 24.9 میں دکھایا گیا ہے، کثافت $f(x)$ کے منحنی کے نیچے $x = a$ اور $x = b$ کے بیچ رقبہ احتمال کے برابر ہو گا۔

ظاہر ہے کہ کسی بھی مقررہ a اور $b\,(> a)$ کے لئے وقفہ $a < X \le b$ ، $a < X < b$ اور $a \le X < b$ کے احتمال ایک جیسے ہوں گے جو غیر مسلسل صورت حال سے مختلف ہے۔

استمراری تقسیم کے مثال (سوالات) اگلے حصے کے سوالات اور آنے والے حصوں میں پیش کئے جائیں گے۔

سوالات

سوال 24.70: تفاعل احتمال $f(x) = \frac{x^2}{14}\ (x = 1, 2, 3)$ اور تفاعل تقسیم کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.71: X کا تفاعل احتمال $f(2) = \frac{1}{2}$ ، $f(3) = \frac{1}{4}$ ، $f(4) = f(5) = \frac{1}{8}$ ہے۔اس کا کیا احتمال ہے کہ X کی قیمت 4 سے کم ہو گی؟

سوال 24.72: ایک مشین کو X سالوں کے بعد تبدیل کرنا ضروری ہے۔ X کا تفاعل احتمال $f(1) = 0.3$ ، $f(2) = 0.4$ ، $f(3) = 0.2$ ، $f(4) = 0.1$ ہے۔ f اور F کو ترسیم کریں۔

سوال 24.73: کسی پٹرول پمپ میں ایک دن کی درکار پٹرول بلا منصوبہ متغیر X ہے۔ فرض کریں کہ $2000 < x < 6000$ کے لئے X کی کثافت $f(x) = k$ ہے ورنہ 0 ہے۔ k تلاش کریں اور تفاعل

تقسیم $F(x)$ ترسیم کریں۔
جواب:

$$k=\frac{1}{4000}, \quad F(x)=\begin{cases} 0 & x<2000 \\ \frac{x}{4000}-0.5 & 2000 \le x < 6000 \\ 1 & x \ge 6000 \end{cases}$$

سوال 24.74: $x>0$ کے لئے $f(x)=ce^{-x}$ جبکہ $x<0$ کے لئے $f(x)=0$ ہے۔ c تلاش کریں۔ f اور F کر ترسیم کریں۔

سوال 24.75: 3 پانسہ اچھال کر ان کا مجموعہ لے کر بلا منصوبہ متغیر X حاصل کیا جاتا ہے۔ تفاعل احتمال $f(x)$ ترسیم کریں۔
جواب: $f(3)=\frac{1}{216}, f(4)=\frac{3}{216}, \cdots$

سوال 24.76: کاغذ کے گتے کی موٹائی X ملی میٹر ہے۔ فرض کریں کہ $1.9<x<2.1$ کے لئے کثافت $f(x)=kx$ ہے ورنہ $f(x)=0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ گتے کی موٹائی 1.95 اور 2.05 کے بیچ ہو؟

سوال 24.77: ایک سکہ کو اتنی مرتبہ (X) اچھالا جاتا ہے جب تک خط حاصل نہ ہو۔ دکھائیں کہ اس تجربہ کا تفاعل احتمال $f(x)=2^{-x}, \ (x=1,2,\cdots)$ ہو گا۔ دکھائیں کہ $f(x)$ مساوات 24.38 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 24.78: $0 \le x \le 1$ کے لئے $f(x)=kx^2$ ہے ورنہ $f(x)=0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ ایسا عدد c تلاش کریں کہ $P(X \le c)=72.9\,\%$ ہو۔

سوال 24.79: بلب کی عرصہ زندگی X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی کثافت

$$f(x)=6[0.25-(x-1.5)^2] \qquad 1 \le x \le 2$$

اور باقی x کے لئے $f(x)=0$ ہے، جہاں $x=1$ سے مراد 1000 گھنٹے ہیں۔ کیا احتمال ہے کہ سڑک کے اشارے پر پہلے 1200 گھنٹوں میں تین میں سے کسی ایک بھی بلب کی تبدیل کرنے کی ضرورت پیش نہ آئے؟
جواب: $P(X>1200)=\int_{1.2}^{2} 6[0.25-(x-1.5)^2]\,\mathrm{d}x=0.896^3=72\,\%$

سوال 24.80: کسی دکان کی فروخت اور منافع کی نسبت X ہے۔ فرض کریں کہ X کی تفاعل تقسیم $x < 2$ کے لئے $F(x) = 0$ ، $2 \le x < 3$ کے لئے $F(x) = \frac{x^2-4}{5}$ اور $x \ge 3$ کے لئے $F(x) = 1$ ہے۔ کثافت تلاش کر کے ترسیم کریں۔ X کی قیمت 2.5 (40% منافع) اور 5 (20% منافع) کے بیچ میں ہونے کا کیا احتمال ہے؟

سوال 24.81: X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جو کوئی بھی حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ وقوعہ $X \le b$ ، $X < b$ ، $X \ge c$ ، $X > c$ ، $b \le X \le c$ ، $b < X \le x$ کے متمم کے کیا احتمال ہوں گے؟
جواب: $X > b$, $X \ge b$, $X < c$, $X \le c$, $X > c$ یا $X < b$, $X > c$ یا $X \le b$

سوال 24.82: ایک ڈبہ میں 4 دائیں ہاتھ پیچ اور 6 بائیں ہاتھ پیچ پائے جاتے ہیں۔ بغیر واپس رکھے، دو پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ نکالے گئے بائیں ہاتھ پیچوں کی تعداد X ہے۔ احتمال $P(X = 0)$ ، $P(X = 1)$ ، $P(1 < X < 2)$ $P(X \le 1)$ ، $P(X \ge 1)$ ، $P(X > 1)$ ، $P(0.5 < X < 10)$ تلاش کریں۔

سوال 24.83: دکھائیں کہ $b < c$ سے مراد $P(X \le b) \le P(X \le c)$ ہے۔

24.8 تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت

تقسیم کے اوسط[93] کو μ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\text{(الف)}\quad \mu = \sum_j x_j f(x_j) \qquad \text{(غیر مسلسل تقسیم)} \tag{24.46}$$
$$\text{(ب)}\quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(استمراری تقسیم)}$$

مساوات 24.46-الف میں زیر غور بلا منصوبہ متغیر X کا تفاعل احتمال $f(x)$ ہے اور ہم تمام ممکنہ قیمتوں (حصہ 24.7) پر مجموعہ لیتے ہیں۔ مساوات 24.46-ب میں X کی کثافت $f(x)$ ہے۔ اوسط کو X کی حسابی توقع[94]

[93] mean
[94] mathematical expectation

بھی کہتے ہیں جس کو $E(X)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.46-الف کی تسلسل حتمی مرتکز ہو گی اور $-\infty$ سے ∞ تک $|x| f(x)$ کا تکمل موجود ہو گا۔اگر یہ تکمل موجود نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تقسیم کی اوسط نہیں پائی جاتی ہے؛ ایسی صورت عملی انجینئری میں شاذ و نادر پائی جاتی ہے۔

$x = c$ کے لحاظ سے ایک تقسیم کو اس صورت تشاکلی کہتے ہیں جب ہر حقیقی x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$f(c+x) = f(c-x) \tag{24.47}$$

آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.84)۔

مسئلہ 24.11: **(تشاکلی تقسیم کا اوسط)**
اگر ایک تقسیم $x = c$ کے لحاظ سے تشاکلی ہو اور اس کا اوسط μ ہو تب $\mu = c$ ہو گا۔

تقسیم کی **تغیریت**[95] کو σ^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad \sigma^2 = \sum_j (x_j - \mu)^2 f(x_j) \qquad \text{(غیر مسلسل تقسیم)} \\ &\text{(ب)} \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{(استمراری تقسیم)} \end{aligned} \tag{24.48}$$

جہاں تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.48-الف میں دی گئی تسلسل حتمی مرتکز ہے اور مساوات 24.48-ب کا تکمل موجود ہے۔

غیر مسلسل تقسیم کی صورت میں اگر کسی ایک نقطہ پر $f(x) = 1$ اور باقی ہر جگہ $f(x) = 0$ ہو تب $\sigma^2 = 0$ ہو گا جو عملاً غیر دلچسپ صورت ہے۔اس غیر دلچسپ صورت کے علاوہ ہر صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma^2 > 0 \tag{24.49}$$

تغیریت کا مثبت جذر **معیاری انحراف**[96] کہلاتا ہے جس کو σ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

[95] variance
[96] standard deviation

بلا منصوبہ متغیر X جن قیمتوں کو اختیار کر سکتا ہے، تغیریت کو ان قیمتوں کی پھیل کی ناپ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مثال 24.10: **(اوسط اور تغیریت)**
بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{سکہ اچھال کر شیر کا حاصل ہونا}$$

کے ممکنہ قیمتیں $X = 0$ اور $X = 1$ ہیں جن کا احتمال $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ اور $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ ہے۔ مساوات 24.46-الف سے اوسط $\mu = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 24.46-ب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sigma^2 = (0 - \tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{2} + (1 - \tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

□

مثال 24.11: **یکساں تقسیم**
وہ تقسیم جس کی کثافت $a < x < b$ کے لئے

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad (\text{جب } a < x < b)$$

اور باقی x کے لئے $f = 0$ ہو، وقفہ $a < x < b$ میں **یکساں تقسیم**[97] کہلاتی ہے۔ مسئلہ 24.11 یا مساوات 24.48-الف سے $\mu = \frac{a+b}{2}$ اور مساوات 24.48-ب سے تغیریت حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \tfrac{a+b}{2})^2 \tfrac{1}{b-a} \, \mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{12}$$

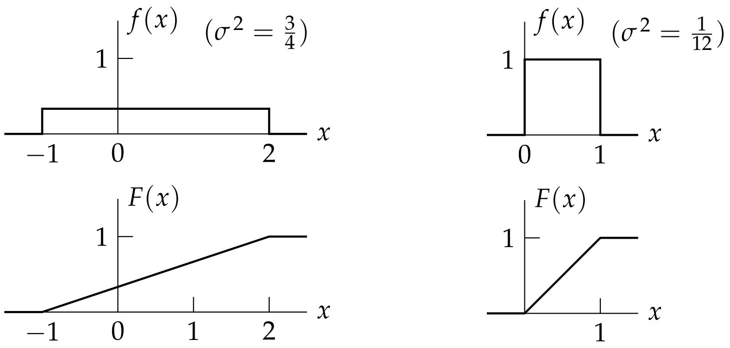
شکل 24.10 میں چند خصوصی مثالیں پیش کی گئی ہیں جو دکھاتی ہیں کہ σ^2 پھیل کی ناپ ہے۔ □

مسئلہ 24.12: **(خطی تبادل)**
اگر بلا منصوبہ متغیر X کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو تب بلا منصوبہ متغیر $X^* = c_1 X + c_2 \; (c_1 \neq 0)$ کی اوسط

$$\mu^* = c_1 \mu + c_2 \tag{24.50}$$

---

[97] uniform distribution



شکل 24.10: یکساں تقسیم جن کی ایک جیسی اوسط (0.5) لیکن مختلف تغیریت σ^2 ہے

اور تغیریت

$$\sigma^{*2} = c_1^2\sigma^2 \tag{24.51}$$

ہو گی۔

ثبوت: ہم پہلے $c_1 > 0$ فرض کرتے ہوئے مساوات 24.50 کو استمراری صورت کے لئے ثابت کرتے ہیں۔چونکہ X محور پر چھوٹے سے وقفہ Δx کا مطابقتی احتمال (تخمیناً) $f(x)\Delta x$ ہو گا جو ہر صورت X^* محور پر مطابقتی چھوٹے وقفہ $\Delta x^* = c_1\Delta x$ پر احتمال $f^*(x^*)\Delta x^*$ کے برابر ہو گا لہٰذا x اور $x^* = c_1x + c_2$ کے مطابقتی، X کی کثافت $f(x)$ اور X^* کی کثافت $f^*(x^*)$، تعلق $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{c_1}$ کو مطمئن کریں گے۔چونکہ $\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}x} = c_1$ ہے لہٰذا $\mathrm{d}x^* = c_1\,\mathrm{d}x$ اور $f^*(x^*)\,\mathrm{d}x^* = f(x)\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}\mu^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^* f^*(x^*)\,\mathrm{d}x^* &= \int_{-\infty}^{\infty} (c_1x + c_2) f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= c_1\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x + c_2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

جہاں آخری تکمل مساوات 24.44 کے تحت 1 کے برابر ہو گا۔یوں مساوات 24.50 ثابت ہوتی ہے۔چونکہ

$$x^* - \mu^* = (c_1x + c_2) - (c_1\mu + c_2) = c_1x - c_1\mu$$

ہے لہٰذا تغیریت کی تعریف سے

$$\sigma^{*2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x^* - \mu^*)^2 f^*(x^*)\,\mathrm{d}x^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1x - c_1\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = c_1^2\sigma^2$$

حاصل ہو گا۔ $c_1 < 0$ سے نتائج تبدیل نہیں ہوتے ہیں چونکہ اس سے دو اضافی منفی کی علامتیں ملتی ہیں، ایک x میں تکمل کے رخ کی تبدیلی کی بنا (دھیان رہے کہ $x^* = -\infty$ کا مطابقتی $x = \infty$ ہے) اور دوسرا $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{-c_1}$ کی بنا؛ یہاں $-c_1 > 0$ درکار ہو گا چونکہ کثافت غیر منفی قیمت ہے۔

غیر مسلسل کثافت کے لئے مسئلے کا ثبوت بھی بالکل ایسا ہی ہے۔

□

مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے ہم درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.13: (معیاری متغیر)
اگر بلا منصوبہ متغیر X کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو، تب مطابقتی متغیر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی۔

Z کو X کا مطابقتی **معیاری متغیر**[98] کہتے ہیں۔

اگر X کوئی بلا منصوبہ متغیر اور $g(X)$ کوئی استمراری تفاعل ہو جو تمام حقیقی X کے لئے معین ہو تب عدد

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad E(g(X)) = \sum_j g(x_j)f(x_j) \qquad (X \text{ غیر مسلسل}) \\ &\text{(ب)} \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (X \text{ استمراری}) \end{aligned} \tag{24.52}$$

کو $g(X)$ کی **حسابی توقع**[99] کہتے ہیں۔ یہاں f بالترتیب تفاعل احتمال یا کثافت ہے۔

مساوات 24.52 میں $g(X) = X^k \; (k = 1, 2, \cdots)$ لیتے ہوئے بالترتیب

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad E(X^k) = \sum_j x_j^k f(x_j) \tag{24.53}$$

---

[98] standardized variable
[99] mathematical expectation

حاصل ہوتے ہیں۔ $E(X^k)$ کو X کا k واں **معیار اثر**[100] کہتے ہیں۔مساوات 24.52 میں $g(X) = (X-\mu)^k$ لیتے ہوئے بالترتیب

$$E([X-\mu]^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad E([X-\mu]^k) = \sum_j (x_j-\mu)^k f(x_j) \tag{24.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں X کے k ویں **وسطی معیار اثر**[101] کہتے ہیں۔آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

$$E(1) = 1 \tag{24.55}$$

$$\mu = E(X) \tag{24.56}$$

$$\sigma^2 = E([X-\mu]^2) \tag{24.57}$$

سوالات

سوال 24.84: مسئلہ 24.11 ثابت کریں۔
جواب:

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{c} t f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\infty}^{0} (c-x) f(c-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (c+x) f(c+x)\,\mathrm{d}x = 2c\int_{0}^{\infty} f(c+x)\,\mathrm{d}x = c
\end{aligned}$$

غیر مسلسل تقسیم کے لئے بھی ثبوت اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.85: ایک تقسیم کی کثافت $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ہے۔اس کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\mu = 0, \sigma^2 = 2$

سوال 24.86: $0 \le x \le 2$ کے لئے X کی کثافت $f(x) = 0.5x$ ہے جبکہ باقی x کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔دکھائیں کہ X کی اوسط $\frac{4}{3}$ اور تغیریت $\frac{2}{9}$ ہے۔

سوال 24.87: $Y = -2X + 5$ کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔ بلا منصوبہ متغیر X سوال 24.86 میں دیا گیا ہے۔

---

kth moment[100]
kth central moment[101]

سوال 24.88: سوال 24.86 کے X کا مطابقتی معیاری بلا منصوبہ متغیر تلاش کریں۔
جواب: $\frac{X-\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}$

سوال 24.89: مسئلہ 24.12 کو غیر مسلسل صورت کے لئے ثابت کریں۔

سوال 24.90: مسئلہ 24.13 کو مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے اخذ کریں۔
جواب: مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 میں $c_1 = \frac{1}{\sigma}$ اور $c_2 = -\frac{\mu}{\sigma}$ پر کریں۔

سوال 24.91: ایک مخصوص قسم کے ٹائر بلا منصوبہ متغیر X (ہزار کلو میٹر) چلتے ہیں۔ X کی کثافت $x > 0$ کے لئے $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ ورنہ 0 ہے جہاں $\theta\ (>0)$ مقدار معلوم ہے۔ (الف) ایسے ایک ٹائر سے کتنے کلو میٹر طے کیے جا سکتے ہیں؟ (ب) اگر $\theta = 0.05$ ہو تب کم سے کم $30\,000$ کلو میٹر تک پہنچنے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.92: ایک کارخانے میں کیل بنائے جاتے ہیں جن کا وتر X سنٹی میٹر ہے۔ فرض کریں کہ X کی کثافت $0.9 < x < 1.1$ کے لئے $f(x) = k(x-0.9)(1.1-x)$ ورنہ 0 ہے۔ k معلوم کریں، $f(x)$ کو ترسیم کریں اور μ اور σ^2 کو تلاش کریں۔
جواب: $k = 750, \mu = 1, \sigma^2 = 0.002$

سوال 24.93: سوال 24.92 میں اگر کیل کے وتر کا $1\,\text{cm}$ سے انحراف $0.06\,\text{cm}$ بڑھ جائے تب اس کو عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔ کتنے فی صد کیل عیب دار ہوں گے؟

سوال 24.94: ایک پٹرول پمپ کو ہر جمعرات دوپہر کے وقت پٹرول مہیا کیا جاتا ہے۔ فروخت پٹرول کا حجم X ہزار لٹر ہے۔ $0 \le x \le 1$ کے لئے X کی کثافت احتمال $f(x) = 6x(1-x)$ ورنہ 0 ہے۔ اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\mu = \frac{1}{2}, \sigma^2 = \frac{1}{20}$

سوال 24.95: سوال 24.94 میں پٹرول کی ٹینکی کا حجم کتنا ہو گا اگر ایک ہفتہ میں ٹینکی خالی ہونے کا احتمال $10\,\%$ ہو؟

سوال 24.96: مساوات 24.55، مساوات 24.56 اور مساوات 24.57 ثابت کریں۔

سوال 24.97: دکھائیں کہ $E(X-\mu) = 0$ اور $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$ ہوں گے۔

سوال 24.98: فرض کریں کہ X کی کثافت $0 < x < 1$ کے لئے $f(x) = 2x$ ورنہ 0 ہے۔ تمام معیار اثر تلاش کریں۔سوال 24.97 میں دیے گئے کلیہ سے σ^2 حاصل کریں۔
جواب: $E(X^k) = \frac{2}{k+2}$, $\sigma^2 = \frac{1}{18}$

سوال 24.99: دکھائیں کہ $E(ag(X) + bh(X)) = aE(g(X)) + bE(h(X))$ ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

سوال 24.100: وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر یکساں تقسیم کے معیار اثر تلاش کریں۔
جواب: $E(X^k) = \frac{1}{k+1}$

سوال 24.101: **(ترچھاپن)** عدد $\gamma = \frac{1}{\sigma^3}E([X-\mu]^3)$ کو X کا **ترچھاپن**[102] کہتے ہیں۔اس اصطلاح کا جواز پیش کرنے کی خاطر دکھائیں کہ μ کے لحاظ سے تشاکلی X کے لئے اگر تیسرا وسطی معیار اثر موجود ہو تب یہ معیار اثر صفر ہو گا۔

سوال 24.102: $x > 0$ کے لئے کثافت تقسیم $f(x) = xe^{-x}$ ورنہ $f = 0$ کی صورت میں کثافت تقسیم کا ترچھاپن تلاش کریں۔ $f(x)$ کو ترسیم کریں۔
جواب: تکمل بالحصص لیں $\sigma^2 = 2, \gamma = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

سوال 24.103: **(معیار اثر کا پیدا کار تفاعل)**
بلا منصوبہ غیر مسلسل یا استمراری متغیر X کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل درج ذیل کلیات دیتے ہیں

$$G(t) = E(e^{tX}) = \sum_j e^{tx_j} f(x_j) \quad \text{اور} \quad G(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

جہاں فرض کیا گیا ہے کہ مجموعہ کی علامت کے اندر اور تکمل کی علامت کے اندر تفرق لیا جا سکتا ہے۔دکھائیں کہ $E(X^k) = G^{(k)}(0)$ ہو گا اور بالخصوص $\mu = G'(0)$ ہو گا جہاں $G^{(k)}(t)$ سے مراد t کے لحاظ سے G کا k واں تفرق ہے۔

[102] skewness

24.9 ثنائی، پوئسن، اور بیش ہندسی تقسیم

ہم اب چند مخصوص غیر مسلسل تقسیم پر غور کرتے ہیں جو شماریات کے لئے اہم ہیں۔

ثنائی تقسیم

ہم ایک تجربہ کو n مرتبہ بلا منصوبہ سرانجام دینے میں وقوعہ A کے واقع ہونے کی تعداد سے حاصل ثنائی تقسیم پر غور کرتے ہیں جہاں ایک کوشش میں A کا احتمال $P(A) = p$ فرض کیا جائے گا۔تب ایک کوشش میں A کے نا واقع ہونے کا احتمال $q = 1 - p$ ہو گا۔یہ تجربہ n مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے ہم بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{واقع ہونے کی تعداد } A$$

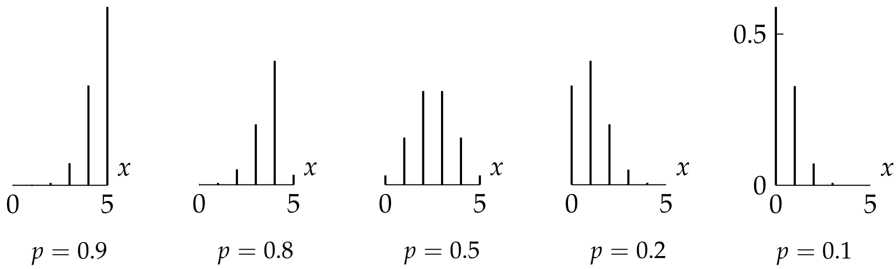
پر غور کرتے ہیں۔تب X کی قیمتیں $0, 1, \cdots, n$ ہو سکتی ہیں۔ہمیں ان اعداد کے مطابقتی احتمال تلاش کرنا چاہتے ہیں۔اس مقصد کے لئے ہم ان قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت، مثلاً $X = x$ پر غور کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ n میں سے x کوششوں میں A واقع ہوا ہے جبکہ $n - x$ کوششوں میں A واقع نہیں ہوا ہے۔یہ سب کچھ یوں

$$\underbrace{AA\cdots A}_{x \text{ مرتبہ}}\underbrace{BB\cdots B}_{n-x \text{ مرتبہ}} \tag{24.58}$$

نظر آئے گا۔یہاں $B = A^C$ ہے؛ یعنی A واقع نہیں ہوا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام کوششیں بلا منصوبہ ہے یعنی یہ ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتی ہیں۔تب چونکہ $P(A) = p$ اور $P(B) = q$ ہیں لہٰذا مساوات 24.58 کا مطابقتی احتمال

$$\underbrace{pp\cdots p}_{x \text{ مرتبہ}}\underbrace{qq\cdots q}_{n-x \text{ مرتبہ}} = p^x q^{n-x}$$

ہو گا۔ظاہر ہے کہ x گنا A اور $n - x$ گنا B کو مختلف انداز (ترتیب) میں لکھنے کا ایک طریقہ مساوات 24.58 دیتا ہے لہٰذا مسئلہ 24.3 کے تحت $p^x q^{n-x}$ کو x گنا A اور $n - x$ گنا B کے کل مختلف انداز میں لکھنے کی تعداد سے ضرب دینے سے احتمال $P(X = x)$ حاصل ہو گا۔ہم n کوششوں کو 1 تا n سے



شکل 24.11: مختلف p اور $n = 5$ کے لئے مساوات 24.59 میں دی گئی ثنائی تقسیم

ظاہر کرتے ہوئے ان میں سے ان x کوششوں منتخب کرتے ہیں جن میں A واقع پذیر ہوا ہو۔ چونکہ x منتخب کرنے کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی ہے لہٰذا مساوات 24.25 کے تحت n میں سے x کا انتخاب $\binom{n}{x}$ مختلف انداز سے کیا جا سکتا ہے۔ یوں $X = x$ کا مطابقتی احتمال $P(X = x)$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.59}$$

ہو گا جبکہ x کے کسی دوسری قیمت کے لئے $f(x) = 0$ ہو گا۔ n کوششوں میں ٹھیک x مرتبہ A واقع ہونا کا احتمال مساوات 24.59 دیتی ہے جہاں ایک کوشش میں A واقع ہونے کا احتمال p ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ مساوات 24.59 میں دی گئی تقسیم کو **ثنائی تقسیم**[103] کہتے ہیں۔ A کے واقع ہونے کو **کامیابی** جبکہ اس کے نا واقع ہونے کو **ناکامی** کہتے ہیں۔ p کو ایک کوشش میں کامیابی کا احتمال کہتے ہیں۔ شکل 24.11 میں $n = 5$ اور مختلف p کے لئے مساوات 24.59 ترسیم کیا گیا ہے۔

ثنائی تقسیم کی اوسط

$$\mu = np \tag{24.60}$$

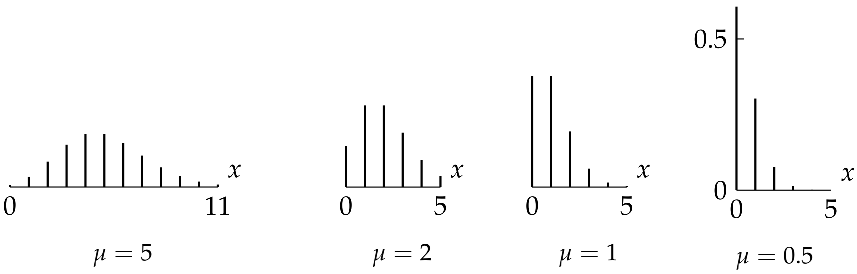
اور تغیریت

$$\sigma^2 = npq \tag{24.61}$$

ہے۔ دھیان رہے کہ $p = 0.5$ پر μ کے لحاظ سے تقسیم تشاکلی ہے۔

---

[103] binomial distribution



شکل 24.12: مختلف p اور $n = 5$ کے لئے مساوات 24.62 میں دی گئی پوئسن تقسیم

پوئسن تقسیم

ایسی غیر مسلسل تقسیم جس کا تفاعل احتمال درج ذیل ہو **پوئسن تقسیم**[104] کہلاتی[105] ہے۔

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} \tag{24.62}$$

شکل 24.12 میں $n = 5$ اور مختلف μ کے لئے مساوات 24.62 میں دی گئی پوئسن تقسیم ترسیم کی گئی ہے۔ $p \to 0$ اور $n \to \infty$ کی صورت اوسط $\mu = np$ ایک متناہی قیمت کے قریب تر ہو گی اور ثنائی تقسیم کی تحدیدی صورت پوئسن تقسیم دیتی ہے۔ پوئسن تقسیم کی اوسط μ اور تغیریت درج ذیل ہے۔

$$\sigma^2 = \mu \tag{24.63}$$

اکائی دورانیہ (وقت) میں کسی چوک سے گزرتی گاڑیوں کی تعداد، اکائی لمبائی کے تار میں عیبوں کی تعداد، کاغذ کے اکائی رقبہ میں عیبوں کی تعداد، وغیرہ پوئسن تقسیم سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

واپس رکھ کر اور واپس نہ رکھ کر نمونے کا حصول۔ بیش ہندسی تقسیم

واپس رکھ کر نمونہ حاصل کرنے میں ثنائی تقسیم (مثال 24.6) اہم ہے۔ مثال کے طور پر ایک ڈبیا میں N پیچ ہیں جن میں سے M پیچ عیب دار ہیں۔ اگر ہم ڈبے سے ایک پیچ بلا منصوبہ نکالیں تب عیب دار پیچ کے حصول کا

---

104 Poisson distribution
105 سمیوں دنی پوسوں

احتمال

$$p = \frac{M}{N}$$

ہو گا۔یوں واپس رکھ کر حاصل، x پیچوں کے نمونہ میں عیب دار پیچوں کی تعداد x ہونے کا احتمال (مساوات 24.59)

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{M}{N}\right)^{x}\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.64}$$

ہو گا۔واپس نہ رکھ کر حاصل نمونہ میں احتمال

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.65}$$

ہو گا۔مساوات 24.65 میں دی گئی تقسیم کو **بیش ہندسی تقسیم**[106] کہتے[107] ہیں۔

مساوات 24.65 ثابت کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 24.25 کے تحت

- (الف) N اشیاء میں سے n اشیاء کے انتخاب کے $\binom{N}{n}$ مختلف طریقے ہیں،
- (ب) M میں سے x عیب دار کے انتخاب کے $\binom{M}{x}$ مختلف طریقے ہیں،
- (پ) $N-M$ میں سے $n-x$ بے عیب کے انتخاب کے $\binom{N-M}{n-x}$ مختلف طریقے ہیں،

اور (ب) میں ہر طریقہ کے ساتھ (پ) کا ہر طریقہ لے کر، بغیر واپس رکھتے ہوئے n میں سے x عیب دار کی انتخاب کے کل طریقے حاصل ہوں گے۔چونکہ (الف) تمام وقوعات کا مجموعہ ہے اور ہم بلا منصوبہ انتخاب کرتے ہیں لہٰذا اس طرح کے ہر طریقہ کا احتمال $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ ہو گا۔یوں مساوات 24.65 ثابت ہوتا ہے۔

بیش ہندسی تقسیم کی اوسط

$$\mu = n\frac{M}{N} \tag{24.66}$$

[106] hypergeometric distribution

[107] چونکہ اس تقسیم کے معیار اثر کے پیدا کار تفاعل کو بیش ہندسی تفاعل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} \tag{24.67}$$

ہے۔

مثال 24.12: واپس رکھ کر اور نا رکھ کر نمونے کا حصول
ایک ڈبہ میں 10 تصاویر ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔ہم بلا منصوبہ 2 تصاویر ڈبے سے نکالتے ہیں۔بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{نمونہ میں عیب دار کی تعداد}$$

کا تفاعل احتمال تلاش کریں۔
حل: یہاں $N = 10$ ، $M = 3$ ، $N - M = 7$ اور $n = 2$ ہیں۔واپس رکھ کر نمونہ حاصل کرتے ہوئے مساوات 24.64 کے تحت

$$f(x) = \binom{2}{x}\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{2-x}, \quad f(0) = 0.49, \quad f(1) = 0.42, \quad f(2) = 0.09$$

حاصل ہوتا ہے۔ واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کرتے ہوئے مساوات 24.65 سے

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{7}{2-x}}{\binom{10}{2}}, \quad f(0) = f(1) = \frac{21}{45} \approx 0.47, \quad f(2) = \frac{3}{45} \approx 0.07$$

حاصل ہوتا ہے۔ □

اگر n کے لحاظ سے N ، M اور $N - M$ بہت بڑی مقدار ہوں تب واپس رکھتے ہوئے اور واپس نہ رکھتے ہوئے حاصل کردہ نمونے تقریباً ایک جیسے ہوں گے لہٰذا ایسی صورت میں بیش ہندسی تقسیم کی جگہ $p = \frac{M}{N}$ لیتے ہوئے ثنائی تقسیم استعمال کی جا سکتی ہے، جو نسبتاً سادہ تفاعل ہے۔

یوں بہت بڑی آبادی (لامتناہی آبادی) سے، واپس رکھتے ہوئے یا واپس نہ رکھتے ہوئے، نمونہ حاصل کرتے ہوئے ثنائی تقسیم استعمال کی جا سکتی ہے۔

سوالات

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

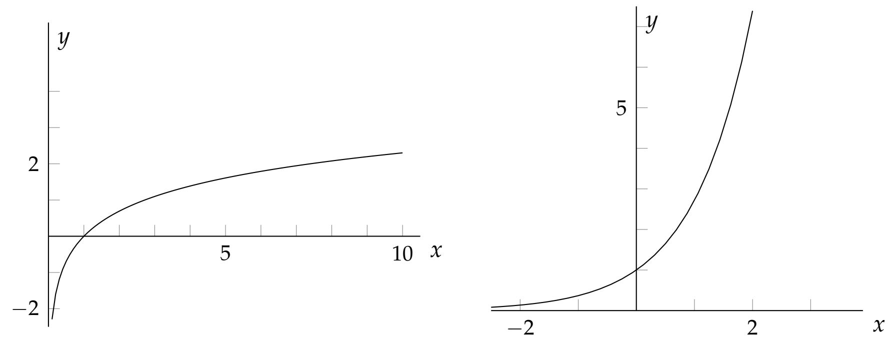
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

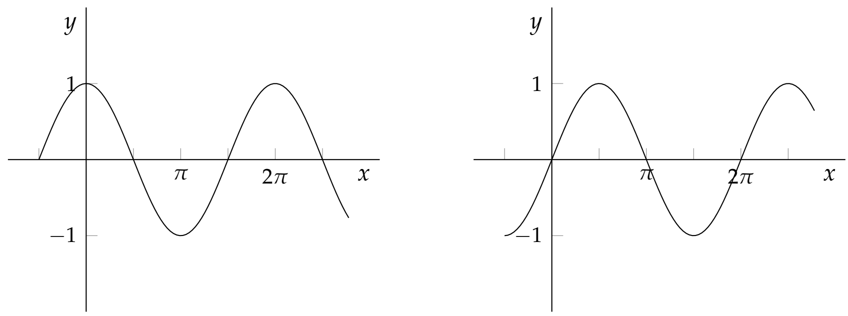
$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{-\log x}=10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
1^\circ &= 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}\\
1\,\text{radian} &= 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ
\end{aligned}
$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

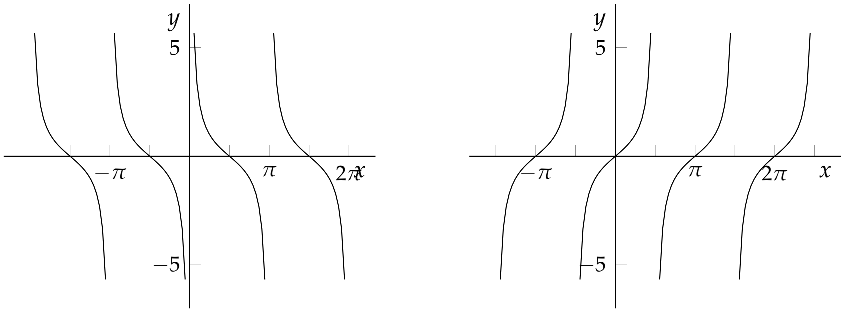
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



(ب) $\cot x$ (الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.17}$$
$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

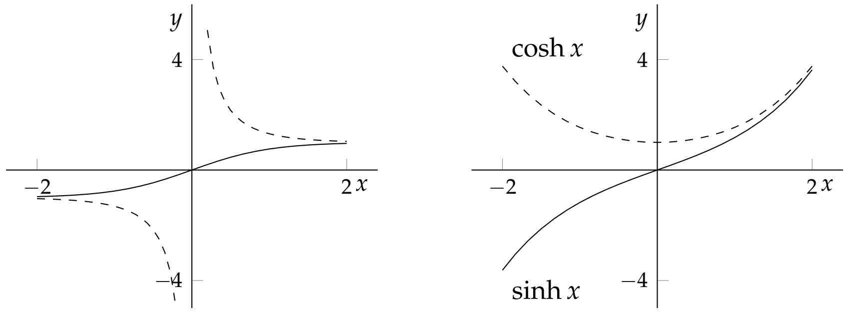
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔
(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

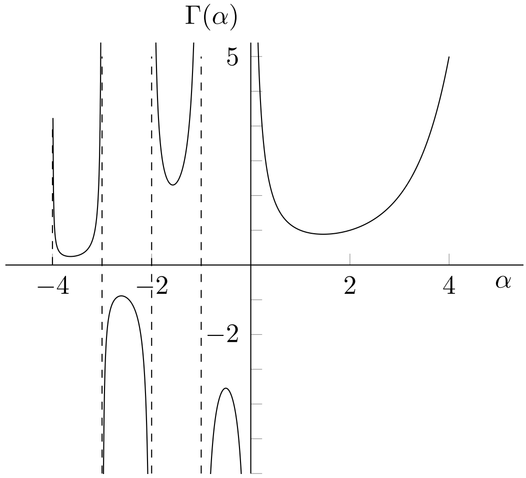
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\qquad(\alpha>0)\tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x)\tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\qquad(x>0,\,y>0)\tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\tag{ب.32}$$

تفاعل خلل(شکل ب.6)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\tag{ب.33}$$

مساوات ب.33 کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

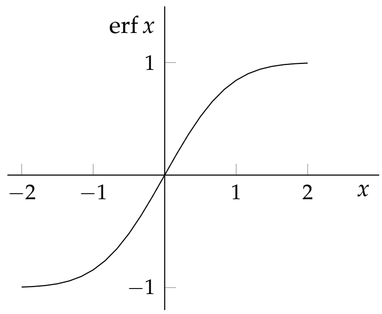
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)\tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

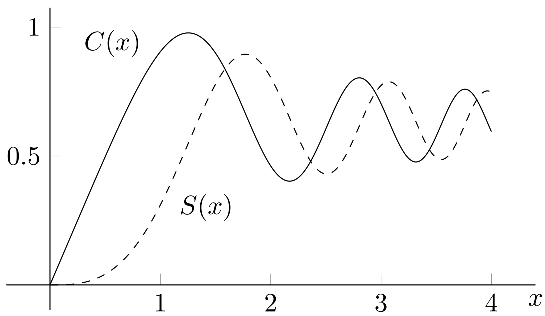
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل ب.7)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔**مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

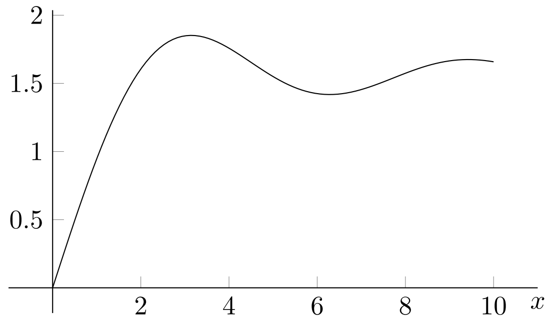
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔**تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{ci}(x)=\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$