انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

11.8 تہرا تکمل۔ گاوس کا مسئلہ پھیلاو

دہرا تکمل (حصہ 11.3) کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے تہرا تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کہ فضا کے کسی بند محدود[45] خطہ T میں تفاعل $f(x,y,z)$ معین ہے۔ہم تینوں محور کے متوازی سطحوں سے T کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ہم T کے متوازی السطوح ٹکڑوں کو ہم 1 تا n سے ظاہر کرتے ہیں۔ایسے ہر ٹکڑے کے اندر ہم بے قاعدگی سے کوئی نقطہ منتخب کرتے ہیں، مثلاً ٹکڑا k میں نقطہ (x_k,y_k,z_k) چنا جاتا ہے، اور درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta H$$

جہاں ٹکڑا k کی حجم ΔH_k ہے۔ہم مثبت عدد صحیح n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . . کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے خطہ میں، جس کا T حصہ ہو، $f(x,y,z)$ استمراری ہے اور T کو لامتناہی تعداد کی ہموار سطحیں گھیرتی ہیں۔ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . . کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x,y_k,z_k) کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو خطہ T پر $f(x,y,z)$ کا **تہرا تکمل**[46] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{یا} \quad \iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}H$$

ہم اب ثاب کرتے ہیں کہ ایسا استمراری سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ جس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کی پھیلاو کا فضا میں خطہ T پر تہرا تکمل کا تبادلہ T کی سطح پر $\boldsymbol{u}$ کے عمودی جزو کی سطحی تکمل میں کیا جا سکتا ہے۔ایسا مسئلہ پھیلاو کی مدد سے کیا جاتا ہے جو دو بعدی مسئلہ گرین کا تین بعدی مماثل ہے۔ مسئلہ پھیلاو کئی نظریاتی اور عملی مسائل میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔

[45] "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو معقول وسعت کی کرہ میں گھیرا جا سکتا ہے۔

[46] triple integral

مسئلہ 11.2: گاوس کا مسئلہ پھیلاو (حجمی تکمل سے سطحی تکمل اور سطحی تکمل سے حجمی تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ فضا میں بند محدود خطہ T کی سرحد S ٹکڑوں میں ہموار (حصہ 11.5) اور قابل سمت بند ہے۔مزید فرض کریں کہ خطہ T میں $\boldsymbol{u}(x,y,z)$ ایک استمراری سمتی تفاعل ہے جس کے T میں استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\iiint\limits_T \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}H = \iint\limits_S u_n \, \mathrm{d}A \tag{11.75}$$

جہاں T کی لحاظ سے سطح S پر $\boldsymbol{u}$ کا باہر رخ عمودی جزو

$$u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \tag{11.76}$$

ہے اور $\boldsymbol{n}$ سطح S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ ہے۔

ثبوت: ہم $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{n}$ کو ارکان کی صورت میں لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$$

جہاں $\boldsymbol{n}$ اور مثبت x ، y ، z محور کے مابین زاویے بالترتیب α ، β ، γ ہیں۔یوں مساوات 11.75 درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S (u_1\cos\alpha + u_2\cos\beta + u_3\cos\gamma)\,\mathrm{d}A \tag{11.77}$$

جسے مساوات 11.70 کی مدد سے درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

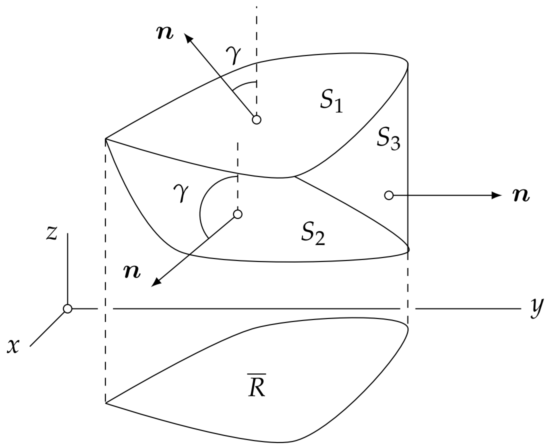
$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S (u_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + u_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + u_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \tag{11.78}$$

اب ظاہر ہے کہ اگر درج ذیل تین تعلقات یک وقت درست ہوں تب مساوات 11.77 درست ہو گا۔

$$\iiint\limits_T \frac{\partial u_1}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S u_1\cos\alpha\,\mathrm{d}A \tag{11.79}$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial u_2}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S u_2\cos\beta\,\mathrm{d} \tag{11.80}$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A \tag{11.81}$$



شکل 11.27: مخصوص خطہ

ہم مساوات 11.81 کو ایک خصوصی خطہ T کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کی سرحد ٹکڑوں میں ہموار قابل سمت بند سطح S ہے۔اس مخصوص T کی خاصیت ہے کہ x ، y یا z محور کے متوازی کوئی بھی خط جو T کو قطع کرتی ہو، کا زیادہ سے زیادہ صرف ایک حصہ (یا صرف ایک نقطہ) T کے ساتھ مشترک ہو گا۔ اس خاصیت کا مطلب ہے کہ T کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$g(x,y) \leq z \leq h(x,y) \tag{11.82}$$

جہاں xy مستوی پر T کے قائمہ الزاویہ سائے $\overline{R}$ میں نقطہ (x,y) ہو گا۔ظاہر ہے کہ $g(x,y)$ سطح S کی نچلی سطح S_2 کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $h(x,y)$ سطح S کی بالائی سطح S_1 کو ظاہر کرتی ہے (شکل 11.27)۔عین ممکن ہے کہ S کا کوئی کھڑا حصہ S_3 بھی پایا جاتا ہو۔(حصہ S_3 کی انحطاطی شکل ایک منحنی ہو سکتی ہے مثلاً کروی T کی صورت میں S_3 ایک گول دائرہ ہو گا۔)

مساوات 11.81 کو مساوات 11.82 کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔چونکہ کسی خطہ جس کا T حصہ ہے میں $\boldsymbol{u}$ استمراری قابل تفرق ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial u_3}{\partial z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\overline{R}} \Big[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial u_3}{\partial z} \,\mathrm{d}z \Big] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.83}$$

اس میں اندرونی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_g^h \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z = u_3(x,y,h) - u_3(x,y,g)$$

یوں مساوات 11.83 کا بایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا۔

$$\iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.84}$$

آئیں اب ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.81 کا دایاں ہاتھ بھی اسی کے برابر ہے۔ چونکہ S_3 پر $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ہے لٰہذا $\cos\gamma = 0$ ہو گا اور یوں مساوات 11.83 کے دائیں ہاتھ S_3 پر سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$\iint\limits_{S} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{S_1} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A + \iint\limits_{S_2} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A$$

S_1 پر γ زاویہ حادہ ہے لٰہذا $\sigma = \gamma$ لیتے ہوئے مساوات 11.61 سے $\mathrm{d}A = \sec\gamma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ملتا ہے۔چونکہ $\cos\gamma\sec\gamma = 1$ کے برابر ہے لٰہذا یوں

$$\iint\limits_{S_1} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

حاصل ہو گا جو مساوات 11.84 میں پہلی دوہرا تکمل کے برابر ہے۔اسی طرح S_2 پر γ زاویہ منفرجہ ہے لٰہذا $\pi - \gamma$ مساوات 11.61 میں زاویہ حادہ σ کے مترادف ہو گا۔یوں

$$\mathrm{d}A = \sec(\pi-\gamma)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\sec\gamma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھتے ہوئے

$$\iint\limits_{S_2} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = -\iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.85}$$

ہو گا جو عین 11.61 میں دوسرے دوہرا تکمل کے برابر ہے۔یوں مساوات 11.81 ثابت ہوا۔

مساوات 11.79 اور مساوات 11.80 کو بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے جہاں مساوات 11.82 کی طرح T کو درج ذیل سے ظاہر کیا جائے گا۔

$$\tilde{g}(y,z) \le x \le \tilde{h}(y,z) \quad \text{اور} \quad g^*(x,z) \le y \le h^*(x,z)$$

اس طرح مسئلہ پھیلاو کا مخصوص خطے میں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ایسا خطہ T جس کو اضافی سطحوں کی مدد سے محدود تعداد کی مخصوص ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کے ہر ٹکڑے پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے تمام جوابات کو مجموعہ لینے سے پوری خطے پر مسئلہ ثابت ہو گا۔اس ترکیب بالکل مسئلہ گرین میں استعمال کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔ہر اضافی سطح پر دو مرتبہ حاصل سطحی تکمل کے جوابات کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا جبکہ باقی سطحوں پر سطحی تکمل T کی پوری سطح S پر سطحی تکمل ہی ہو گا۔ T کے تمام ٹکڑوں کے حجمی تکملات کا مجموعہ T کے حجمی تکمل کے برابر ہو گا۔

یوں کسی بھی عملی استعمال کے محدود خطہ T کے لئے مسئلہ پھیلاو کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مسئلہ کو ایسی عمومی خطہ T جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم T کو تخمیناً ایسی خطوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ یہ ترکیب مسئلہ گرین کی ثبوت میں اختیار کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔

□

مسئلہ گرین خطی تکمل کے حل میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح مسئلہ پھیلاو سطحی تکمل کے حل میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

مثال 11.21: سطحی تکمل کا حصول بذریعہ مسئلہ پھیلاو
درج ذیل کو تہرا تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے حل کریں جہاں S بیلن $x^2 + y^2 = a^2 \; (0 \le z \le b)$ اور اس کے دونوں اطراف کی ڈھکنوں کی سطح ہے۔

$$I = \iint_S (x^3 \, dy \, dz + x^2 y \, dx \, dz + x^2 z \, dx \, dy)$$

حل: یہاں مساوات 11.77 اور مساوات 11.78 میں $u_1 = x^3$ ، $u_2 = x^2 y$ ، $u_3 = x^2 z$ ہیں۔یوں خطہ T کی تشاکل کو دیکھ کر ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\iiint_T (3x^2 + x^2 + x^2) \, dx \, dy \, dz = 4 \cdot 5 \int_0^b \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} x^2 \, dx \, dy \, dz$$

اندرونی تکمل $\frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$ کے برابر ہے۔یوں $y=a\cos t$ چنتے ہوئے

$$\mathrm{d}y=-a\sin t\,\mathrm{d}t,\quad (a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sin^3 t$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب y پر تکمل

$$\frac{1}{3}\int_0^a (a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}a^4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi a^4}{16}$$

ہو گا اور آخر میں z پر تکمل جزو b دیتا ہے لہٰذا جواب درج ذیل ہو گا۔

$$I=4\cdot 5\frac{\pi a^4}{16}b=\frac{5}{4}\pi a^4 b$$

□

11.9 مسئلہ پھیلاو کے نتائج اور استعمال

مسئلہ پھیلاو کی عملی استعمال اور اس کے چند اہم نتائج کی مثالیں اس حصے میں پیش کی جائیں گی۔ان مثالوں میں فرض کیا جاتا ہے کی تفاعل اور خطہ مسئلہ پھیلاو کے شرائط پر پورا اترتے ہیں۔مزید کہ سطح S پر خطہ T کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔

مثال 11.22: محدد سے آزاد پھیلاو
مسئلہ پھیلاو کی (مساوات 11.75) کے دونوں اطراف کو خطہ T کی حجم $H(T)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{H(T)}\iiint\limits_T \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}H=\frac{1}{H(T)}\iint\limits_{S(T)} u_n\,\mathrm{d}A \tag{11.86}$$

ملتا ہے جہاں T کی سرحدی سطح $S(T)$ ہے۔دوہرا تکمل کی خصوصیات کو حصہ 11.3 میں بیان کیا گیا۔تہرا تکمل بھی یہی خصوصیات رکھتا ہے۔بالخصوص تہرا تکمل کا **مسئلہ اوسط قیمت** کہتا ہے کہ خطہ T میں کسی بھی استمراری تفاعل $f(x,y,z)$ کے لئے T میں ایسا نقطہ $Q:(x_0,y_0,z_0)$ پایا جائے گا کہ درج ذیل درست ہو گا۔

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}H=f(x_0,y_0,z_0)H(T)$$

یوں $f = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$ پر کرتے ہوئے مساوات 11.86 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{1}{H(T)} \iiint\limits_T \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}H = \nabla \cdot \boldsymbol{u}(x_0, y_0, z_0) \tag{11.87}$$

فرض کریں کہ T میں $N:(x_1, y_1, z_1)$ کوئی مقررہ نقطہ ہے اور T نقطہ N کے گرد یوں سکڑتا ہے کہ N سے T کے دور ترین نقطے کا فاصل $d(T)$ صفر کے قریب پہنچے۔اس طرح نقطہ Q نقطہ N کے قریب پہنچے گا اور مساوات 11.86 اور مساوات 11.87 سے ظاہر کہ کہ نقطہ N پر $\boldsymbol{u}$ کی پھیلاو درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T) \to 0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_{S(T)} u_n \, \mathrm{d}A \tag{11.88}$$

اس کلیہ کو بعض اوقات پھیلاو کی تعریف تصور کیا جاتا ہے۔جہاں حصہ 10.10 میں پھیلاو کی تعریف میں x ، y ، z محدد پائے جاتے ہیں مساوات 11.88 میں دی گئی پھیلاو کی تعریف محدد سے پاک ہے۔اس سے یک دم اخذ کیا جا سکتا ہے کہ پھیلاو کی قیمت پر محددی نظام کی انتخاب کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ $\square$

مثال 11.23: پھیلاو کا طبعی مفہوم

مسئلہ پھیلاو سے سمتیہ کی پھیلاو کا مفہوم سمجھا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرنے کی خاطر ہم اکائی کمیتی کثافت $\rho = 1$ کی داب ناپذیر سیال کی برقرار حال (وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا) بہاو پر غور کرتے ہیں (مثال 10.24 بھی دیکھیں)۔ کسی بھی نقطہ N پر ایسی بہاو کا تعین اس نقطہ پر سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}(N)$ سے کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ فضا میں خطہ T کی سرحدی سطح S ہے اور $\boldsymbol{n}$ باہر رخ S کا اکائی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کے چھوٹے حصہ ΔS جس کا رقبہ ΔA ہے سے، اندرون S سے بیرون S رخ، اکائی وقت میں کمیت کی اخراج $v_n \Delta A$ [47] ہو گی جہاں $v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا $\boldsymbol{n}$ رخ جزو ہے (یعنی S کا عمودی جزو ہے) اور $\boldsymbol{n}$ کو ΔS کے کسی موزوں نقطے پر لیا گیا ہے۔یوں T سے کل اخراج جو S سے گزرتا ہے سطحی تکمل

$$\iint\limits_S v_n \, \mathrm{d}A$$

[47] کسی نقطہ پر v_n منفی ہو سکتا ہے لہٰذا ایسے نقطے پر سیال S میں داخل ہو گا۔

سے حاصل ہو گا۔یہ تکمل T کا کل اخراج دیتا ہے۔یوں T کی اوسط اخراج

$$\frac{1}{H}\iint_S v_n \,\mathrm{d}A \tag{11.89}$$

ہو گی جہاں T کا حجم H ہے۔چونکہ بہاو برقرار حال ہے اور سیال داب نا پذیر ہے لہٰذا T سے اخراج برابر کمیت T کو مہیا کی جاتی ہو گی۔یوں اگر مساوات 11.89 کے تکمل کی قیمت غیر صفر ہو تب T میں **منبع**[48] (مثبت منبع یا منفی منبع) پایا جاتا ہو گا جہاں سیال پیدا یا غائب ہوتا ہے۔

اگر ہم T کو ایک نقطہ N مانند کر دیں تب مساوات 11.89 ہمیں N پر **شدت منبع**[49] دیگا (مساوات 11.88 کا دائیں ہاتھ جہاں v_n کی جگہ u_n لکھا گیا ہے)۔ اس سے ظاہر ہے کہ داب نا پذیر سیال کی برقرار حال سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا نقطہ N پر پھیلاو سے مراد N پر شدت منبع ہے۔صرف اور صرف اس صورت T میں کوئی منبع نہ ہو گا جب $\nabla \cdot \boldsymbol{v} \equiv 0$ ہو اور ایسی صورت میں میں کسی بھی بند سطح S^* کے لئے درج ذیل درست ہو گا۔

$$\iint_{S^*} v_n \,\mathrm{d}A = 0$$

آپ نے دیکھا کہ کسی نقطہ سے سیال کی اخراج کو اس نقطہ پر $\boldsymbol{v}$ کی پھیلاو ظاہر کرتی ہے۔ہم کہتے ہیں سیال اس نقطہ سے نکل کر پھیلتا ہے۔اسی سے اس عمل کو پھیلاو کہتے ہیں۔ □

مثال 11.24: مساوات حرارت۔ حراری بہاو
ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم میں حراری توانائی کا بہاو گرم سے سرد مقام کے رخ ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ حراری بہاو کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ درج طرز کی ہو گی

$$\boldsymbol{v} = -K\,\nabla U \tag{11.90}$$

جہاں $U(x,y,z,t)$ لمحہ t پر نقطہ (x,y,z) کا درجہ حرارت ہے اور K جسم کی **حراری موصلیت**[50] ہے۔عمومی طبعی حالات میں K ایک مستقل ہو گا۔

---

[48] source
[49] source intensity
[50] thermal conductivity

فرض کریں کہ جسم میں R کوئی خطہ ہے جس کی سرحدی سطح S ہے۔یوں اکائی وقت میں R سے کل حراری توانائی کا اخراج

$$\iint_S v_n \,\mathrm{d}A$$

ہو گا جہاں $v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ سرحد S پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی رخ $\boldsymbol{v}$ کا جزو ہے۔یہ تعلق گزشتہ مثال کی حاصل کیا گیا ہے۔ مساوات 11.90 اور مسئلہ پھیلاو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (مساوات 10.114)۔

$$\iint_S v_n \,\mathrm{d}A = -K\iiint_R \nabla\cdot(\nabla U)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -K\iiint_R \nabla^2 U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{11.91}$$

R میں کل حراری توانائی W درج ذیل ہے

$$W = \iiint_R \sigma\rho U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

جہاں σ جسم کے مواد کی **خصوصی حراری استعداد**[51] ہے جبکہ ρ جسم کی کمیتی کثافت (کمیت فی اکائی حجم) ہے۔یوں جسم میں حراری توانائی کی وقت کے ساتھ گھٹاو

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = -\iiint_R \sigma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

ہو گی جو عین R سے توانائی کی اخراج کے برابر ہو گا یعنی

$$-\iiint_R \sigma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -K\iiint_R \nabla^2 U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

یا:

$$\iiint_R \left(\sigma\rho\frac{\partial U}{\partial t} - K\nabla^2 U\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

چونکہ یہ مساوات کسی بھی خطہ R کے لئے درست ہے لہٰذا متکمل (اگر استمراری ہو تب) تمام R میں صفر کے برابر ہو گا یعنی:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2\nabla^2 U \qquad \left(c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}\right) \tag{11.92}$$

یہ **حراری مساوات**[52] کہلاتی ہے جو حراری بہاو کی بنیادی مساوات ہے۔ □

---

[51] specific heat capacity

[52] heat equation

مثال 11.25: **لاپلاسی مساوات کے حل کی بنیادی خصوصیت**
مسئلہ پھیلاو کی مساوات

$$\iiint\limits_{T} \nabla \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}H = \iint\limits_{S} u_n \, \mathrm{d}A \tag{11.93}$$

پر غور کریں۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{u}$ کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان $\boldsymbol{u} = \nabla f$ ہے۔یوں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

ہو گا (مساوات 10.114)۔مزید

$$u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla f$$

لکھا جائے گا جو مساوات 10.81 کے تحت S کے باہر رخ f کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{\partial f}{\partial n}$ سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 11.93 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\iiint\limits_{T} \nabla^2 f \, \mathrm{d}H = \iint\limits_{S} \frac{\partial f}{\partial n} \, \mathrm{d}A \tag{11.94}$$

ظاہر ہے کہ یہ مساوات 11.33 کی تین بعدی مماثل ہے۔ □

مسئلہ پھیلاو کے لئے درکار شرائط کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 11.94 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 11.3: **(لاپلاسی مساوات کے حل کی خصوصیت)**
فرض کریں کہ کسی دائرہ کار D میں تفاعل $f(x, y, z)$ لاپلاسی مساوات

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

کا حل ہے اور D میں f کے دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔تب D میں کسی بھی ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر f کے عمودی (سمتی) تفرق کا تکمل صفر ہو گا۔

مثال 11.26: مسئلہ گرین

فرض کریں کہ f اور g ایسے غیر سمتی تفاعل ہیں کہ کسی خطہ T میں $\boldsymbol{u} = f\nabla g$ مسئلہ پھیلاو کی شرائط پر پورا اترتا ہو۔تب درج ذیل ہو گا (سوال 10.179)۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

مزید

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot (f\nabla g) = f(\boldsymbol{n} \cdot \nabla g)$$

ہو گا جہاں $\boldsymbol{n} \cdot \nabla g$ سے مراد مسئلہ پھیلاو کی سطح S پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں g کا سمتی تفرق ہے۔ اس سمتی تفرق کو $\frac{\partial g}{\partial n}$ لکھنے سے مسئلہ پھیلاو کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\iiint\limits_T (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,\mathrm{d}H = \iint\limits_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A \tag{11.95}$$

جس کو **گرین کلیہ اول**[53] یا (لاگو شرائط کو شامل کرتے ہوئے) **مسئلہ گرین کی پہلی صورت** کہتے ہیں۔

f اور g کو آپس میں بدلنے سے اسی طرح کی دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو مساوات 11.95 سے منفی کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\iiint\limits_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,\mathrm{d}H = \iint\limits_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}A \tag{11.96}$$

جس کو **گرین کلیہ دوم**[54] یا (لاگو شرائط کو شامل کرتے ہوئے) **مسئلہ گرین کی دوسری صورت** کہتے ہیں۔ □

مثال 11.27: لاپلاس مساوات کی حل کی یکتائی

فرض کریں کہ f مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتا ہے اور D میں ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر ہر جگہ صفر کے برابر ہے۔تب مساوات 11.95 میں $f = g$ پر کرتے ہوئے اور S کے اندرونی حصہ کو T سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\iiint\limits_T \nabla f \cdot \nabla f\,\mathrm{d}H = \iiint\limits_T |\nabla f|^2\,\mathrm{d}H = 0$$

---

[53] Green's first formula
[54] Green's second formula

ملتا ہے جہاں مسئلہ 11.3 میں دیے شرط کے مطابق $\nabla^2 f = 0$ لیا گیا ہے اور مساوات 11.95 کے دائیں ہاتھ چونکہ سطح S پر $f = 0$ ہے لہٰذا اس سطحی تکمل کو صفر لیا گیا ہے۔اب چونکہ ہمارے مفروضہ کے تحت T کے اندر اور S پر $|\nabla f|$ استمراری اور غیر منفی ہے لہٰذا یہ ضرور پورے T میں ہر جگہ صفر کے برابر ہو گا۔یوں $f_x = f_y = f_z = 0$ ہو گا لہٰذا T میں f ایک مستقل ہو گا اور چونکہ f استمراری ہے لہٰذا T کے اندر اس کی قیمت وہی ہو گی جو S پر ہے یعنی $f = 0$ ہو گا۔ □

اس سے درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 11.4:
اگر تفاعل $f(x, y, z)$ مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتا ہے اور D میں ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر ہر جگہ صفر کے برابر ہے۔تب S کے احاطہ خطہ T میں $f = 0$ ہو گا۔

اس مسئلہ کے اہم نتائج پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ تفاعل f_1 اور f_2 مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتے ہیں اور S پر دونوں یکساں ہوں۔تب ان کا فرق $f_1 - f_2$ بھی ان شرائط پر پورا اترتا ہے اور پوری S پر اس کی قیمت صفر کے برابر ہے۔یوں مسئلہ 11.4 کے تحت پوری T میں $f_1 - f_2 = 0$ ہو گا جس سے درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 11.5: (لاپلاس مساوات کی حل کی یکتائی)
فرض کریں کہ f لاپلاس مساوات کا حل ہے اور دائرہ کار D میں اس کے ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔مزید فرض کریں کہ D میں خطہ T مسئلہ پھیلاو کی شرائط پر پورا اترتا ہے۔تب T میں f کی قیمت یکتا ہو گی اور یہ T کی سرحدی سطح S پر قیمت کے برابر ہو گی۔

سوالات

سوال 11.128 تا سوال 11.131 میں حجم بذریعہ تہرا تکمل دریافت کریں۔

سوال 11.128: چو سطحہ جس کے کونے $A : (0,0,0)$ ، $B : (3,0,0)$ ، $C : (0,2,0)$ ، $D : (0,0,1)$ ہیں۔

جواب: یہ چو سطح ربع اول میں جس سطح کے نیچے پایا جاتا ہے پہلے اس (بالائی) سطح کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ B تا C سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ اور B تا D سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ دونوں جو سطح کی اس بالائی سطح پر پائے جاتے ہیں لہٰذا دونوں سطح کے مماسی سمتیات ہیں۔ان سے بالائی سطح کی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|} = \frac{2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{7}$$

یوں بالائی سطح کی مساوات $[(x-3)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}] \cdot \boldsymbol{n} = 0$ سے

$$2x + 3y + 6z = 6$$

حاصل ہوتی ہے۔اس طرح چو سطح کا حجم درج ذیل ہو گا (سوال 11.27 دیکھیں)۔

$$\begin{aligned} H = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) \mathrm{d}x = 1 \end{aligned}$$

سوال 11.129: ربع اول میں وہ خطہ جس کی سرحدیں $y = x$ ، $y = x^2$ اور $z = 3 - 2x$ ہیں۔
جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 11.130: سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ اور xy مستوی کے مابین خطہ۔
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.131: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترکہ حصہ۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 11.132 تا سوال 11.135 میں کمیتی کثافت σ دیا گیا ہے۔خطہ T میں کل کمیت دریافت کریں۔

سوال 11.132: $\sigma = xy, \quad T: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$ مکعب
جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 11.133: چو سطح جس کے کونے $(0,0,0)$ ، $(3,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ ہیں اور $\sigma = x + y + z$ ہے۔
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 11.134: چو سطح جس کے کونے $(0,0,0)$ ، $(3,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ ہیں اور $\sigma = xy$ ہے۔
جواب: $\frac{3}{10}$

سوال 11.135: ربع اول میں $y = 1 - x^2$ اور $z = x$ کے درمیان T جہاں $\sigma = xy$ ہے۔
جواب: $\frac{4}{105}$

سوال 11.136 تا سوال 11.140 میں خطہ T میں کمیتی کثافت $\sigma = 1$ لیتے ہوئے z محور کے لحاظ سے جمودی معیار اثر $I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\sigma \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ دریافت کریں۔

سوال 11.136: مکعب $0 \le x \le c, \ 0 \le y \le c, \ 0 \le z \le c$
جواب: $\frac{2}{3}c^5$

سوال 11.137: بیلن $x^2 + y^2 \le c^2, 0 \le z \le h$
جواب: $\frac{1}{2}\pi c^4 h$

سوال 11.138: بیلن $x^2 + z^2 \le c^2, 0 \le y \le h$
جواب: $\frac{\pi c^2 h}{12}(4h^2 + 3c^2)$

سوال 11.139: مخروط $x^2 + y^2 \le z^2, \ 0 \le z \le h$
جواب: $\frac{\pi h^5}{10}$

سوال 11.140: اندرون کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$
جواب: $\frac{4}{15}\pi c^5$

سوال 11.141: مسئلہ پھیلاو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ خطہ T جس کی سرحد سطح S ہو کا حجم H درج ذیل ہے۔

$$H = \iint\limits_S x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint\limits_S y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \iint\limits_S z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \iint\limits_S (x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y)$$

سوال 11.142: مکعب کا حجم سوال 11.141 کے کلیات کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.143: بیلن $x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le h$ کا حجم سوال 11.141 کے کلیات کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.144: $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے مساوات 11.75 کی مدد سے ثابت کریں کہ خطہ T جس کی سرحدی سطح S ہو کا حجم درج ذیل ہے

$$H = \frac{1}{3}\iint\limits_S r\cos\theta \,\mathrm{d}A$$

جہاں S پر نقطہ $N:(x,y,z)$ کا مبدا O سے فاصلہ r ہے اور O سے N تک سمتی خط اور N پر باہر رخ عمودی سمتیہ کے مابین زاویہ θ ہے۔

سوال 11.145: رداس a کی کرہ کا حجم سوال 11.144 کے کلیے کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.146 تا سوال 11.152 میں S مسئلہ پھیلاو کی شرط کے مطابق سمت بند ہے۔ سطحی تکمل کو مسئلہ پھیلاو کی مدد سے حل کریں۔

سوال 11.146:

$$\iint\limits_S [(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y], \quad S:\ x^2+y^2+z^2 = a^2$$

جواب: $\frac{8\pi a^3}{3}$

سوال 11.147: سطح مکعب سوال 11.132 $\iint\limits_S (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: 3

سوال 11.148: سطح بیلن سوال 11.137 $\iint\limits_S (x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: $\pi c^2 h^2$

سوال 11.149: سطح سوال 11.146 $\iint\limits_S (yz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: 0

سوال 11.150: متوازی السطوح $S: 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 4$ $\iint\limits_S x(y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$
جواب: 72

سوال 11.151: سطح سوال 11.150 $\iint\limits_S [x\cos y\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y - \sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z]$
جواب: 24

سوال 11.152: سطح سوال 11.146 $\iint\limits_S [(y\cos^2 x + y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z(\sin^2 x - 3y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]$
جواب: $\frac{4}{3}\pi a^3$

سوال 11.153 تا سوال 11.157 میں T بند محدود خطہ ہے جس کی سرحدی سطح S ہے۔ مسئلہ پھیلاو استعمال کرتے ہوئے دیے گئے فقرے ثابت کریں جہاں ہارمونی[55] سے مراد لاپلاس مساوات کا حل ہے جس کے T میں استمراری دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں۔

سوال 11.153: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S \frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A = 0$$

جواب: مساوات 11.95 میں $f = 1$ پر کریں۔

سوال 11.154: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S g\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A = \iiint\limits_T \left|\nabla g\right|^2\mathrm{d}H$$

جواب: مساوات 11.95 میں $f = g$ پر کریں۔

سوال 11.155: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو اور S پر $\frac{\partial g}{\partial n} = 0$ ہو تب T میں g ایک مستقل ہو گا۔
جواب: سوال 11.154 کو استعمال کریں۔

---

[55] harmonic

سوال 11.156: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g اور f ہارمونی ہوں اور S پر $\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial g}{\partial n}$ ہو تب T میں $f=g+c$ ہو گا جہاں c مستقل قیمت ہے۔

سوال 11.157: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g اور f ہارمونی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}A=0$$

سوال 11.158: ثابت کریں کہ لاپلاسی کو محدد سے پاک صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\nabla^2 f=\lim_{d(T)\to 0}\frac{1}{H(T)}\iint\limits_{S(T)}\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}A$$

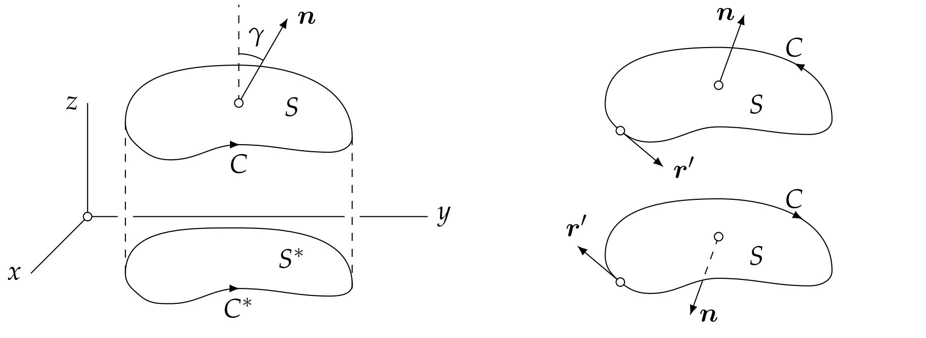
جہاں جس نقطے پر لاپلاسی درکار ہو، اس نقطے سے T میں دور ترین نقطے کا فاصلہ $d(T)$ ہے اور $H(T)$ خطہ T کا حجم ہے جس کی سرحدی سطح $S(T)$ ہے۔ (اشارہ: مساوات 11.88 میں $\boldsymbol{u}=\nabla f$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}$ لیتے ہوئے مساوات 10.81 استعمال کریں جہاں $\boldsymbol{n}$ سطح S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ ہے۔)

11.10 مسئلہ سٹوکس

ہم نے حصہ 11.4 میں دیکھا کہ مستوی پر دوہرا تکمل کو سطح کی سرحد پر خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔آئیں اس نتیجے کو عمومی بناتے ہوئے سطحی تکمل کے تبادل پر غور کریں۔

مسئلہ 11.6: مسئلہ سٹوکس[56] (سطحی تکمل سے خطی تکمل اور خطی تکمل سے سطحی تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ فضا میں ٹکڑوں میں ہموار سمت بند سطح S کی سرحد C ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی ہے۔ مزید

[56] آئرستانی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات جارج جبرائیل سٹوکس [1819-1903]



(ب) ثبوت مسئلہ سٹوکس (الف) سمت بندی (مسئلہ سٹوکس)

شکل 11.28: مسئلہ سٹوکس

فرض کریں کہ کسی ایسے خطہ میں جس کا S حصہ ہو، $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ استمراری سمتی تفاعل ہے اور اس خطے میں اس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔تب **مسئلہ سٹوکس**[57] کہتا ہے کہ

$$\iint\limits_S (\nabla \times \boldsymbol{v})_n \, \mathrm{d}A = \int\limits_C v_t \, \mathrm{d}s \tag{11.97}$$

ہو گا جہاں S کے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں $\nabla \times \boldsymbol{v}$ کا جزو $(\nabla \times \boldsymbol{v})_n = (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}$ ہے؛ C پر تکمل کا رخ شکل 11.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں C کی مماس $\boldsymbol{r}'$ (شکل 11.28-الف) کی سمت میں $\boldsymbol{v}$ کا جزو v_t ہے۔

ثبوت: ہم مسئلہ سٹوکس کو ایسی سطح S کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل تینوں طریقوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو

$$\text{(الف)}\; z = f(x, y), \quad \text{(ب)}\; y = g(x, z), \quad \text{(پ)}\; x = h(y, z) \tag{11.98}$$

جہاں f ، g اور h اپنے آزاد متغیرات کے استمراری تفاعل ہیں اور ان کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ S کا بالائی رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ درج ذیل

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \cos\beta\, \boldsymbol{j} + \cos\gamma\, \boldsymbol{k} \tag{11.99}$$

---

[57] Stokes' theorem

ہے (شکل 11.28-ب) اور $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ ایک سمتی تفاعل ہے۔اگر C کو $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ لکھا جائے جہاں قوس لمبائی s تکمل کے رخ بڑھتی ہو تب اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}$$

ہو گا لہٰذا

$$v_t = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = v_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + v_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$v_t\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z$$

یوں گردش کو دائیں ہاتھ کارتیسی نظام (حصہ 10.1) میں لکھتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\iint_S \Big[\Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big]\,\mathrm{d}A = \int_C (v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z) \tag{11.100}$$

جہاں α ، β ، γ مساوات 11.99 میں بیان کیے گئے ہیں۔

ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.100 میں دونوں اطراف وہ تکمل جن میں v_1 پایا جاتا ہے عین برابر ہیں یعنی:

$$\iint_S \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma\Big)\,\mathrm{d}A = \int_C v_1\,\mathrm{d}x \tag{11.101}$$

فرض کریں کہ xy مستوی پر S کا قائمہ سایہ S^* ہے جس کی سرحد C^* کی سمت بندی شکل 11.28-ب میں دکھائی گئی ہے۔ S کو مساوات 11.98-الف سے ظاہر کرتے ہوئے C پر خطی تکمل کو C^* پر خطی تکمل لکھتے ہیں۔

$$\int_C v_1(x,y,a)\,\mathrm{d}x = \int_{C^*} v_1[x,y,f(x,y)]\,\mathrm{d}x$$

اب مسئلہ گرین (حصہ 11.4) کو [f اور g کی بجائے] $v_1[x,y,f(x,y)]$ اور 0 پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{C^*} v_1[x,y,f(x,y)]\,\mathrm{d}x = -\iint_{S^*} \frac{\partial v_1}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

دائیں ہاتھ تکمل میں

$$\frac{\partial v_1[x,y,f(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial v_1(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad [z=f(x,y)]$$

لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{C} v_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x = -\iint_{S^*} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.102}$$

ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.101 کے بائیں ہاتھ کا تکمل مساوات 11.102 کے دائیں ہاتھ کے تکمل کے برابر ہے۔ ہم پہلے تکمل میں x اور y کو بطور متغیرات تکمل متعارف کرتے ہیں۔ مساوات 11.98-الف کو

$$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$$

لکھتے ہوئے

$$\nabla F = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

ملتا ہے جس سے ڈھلوان F کی لمبائی a لکھتے ہیں۔

$$a = |\nabla F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

چونکہ ∇F سطح S کو عمودی ہے لہٰذا S کی اکائی عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}$ درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \mp\frac{\nabla F}{a}$$

اب مثبت z رخ میں $\boldsymbol{n}$ اور ∇F دونوں کے اجزاء مثبت ہیں لہٰذا

$$\boldsymbol{n} = +\frac{\nabla F}{a}$$

ہو گا۔ xyz کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{n}$ اور ∇F کی روپ سے یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos\alpha = -\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{a}$$

مزید مساوات 11.60 کے تحت مساوات 11.101 میں $\mathrm{d}A = a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا لہٰذا

$$\iint\limits_S \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma\Big)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{S^*}\Big[\frac{\partial v_1}{\partial z}\Big(-\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\Big) - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{1}{a}\Big]a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 11.102 کے دائیں ہاتھ تکمل برابر ہے۔یوں مساوات 11.101 ثابت ہوتی ہے۔

اگر $-\boldsymbol{n}$ کو مثبت اکائی عمودی سمتیہ چنا جاتا تب C کی مثبت سمت الٹ رخ ہوتی لہٰذا حاصل جواب پر کوئی اثر نہ ہوتا۔یوں مساوات 11.101 S کے دونوں مثبت اکائی عمودی سمتیات کے لئے درست ہے۔

مساوات 11.98-ب اور مساوات 11.98-پ میں دیے روپ استعمال کر کر بالکل اسی طرح درج ذیل ثابت ہوں گے۔

$$\iint\limits_S \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial v_2}{\partial z}\cos\alpha\Big)\,\mathrm{d}A = \int\limits_C v_2\,\mathrm{d}y \tag{11.103}$$

$$\iint\limits_S \Big(\frac{\partial v_3}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial v_3}{\partial x}\cos\beta\Big)\,\mathrm{d}A = \int\limits_C v_3\,\mathrm{d}z \tag{11.104}$$

مساوات 11.101، مساوات 11.103 اور مساوات 11.104 جمع کرتے ہوئے مساوات 11.97 ملتا ہے۔اس طرح مسئلہ سٹوکس ایسی سطح S کے لئے ثابت ہوتا ہے جس کو بیک وقت مساوات 11.98-الف، مساوات 11.98-ب اور مساوات 11.98-پ کی روپ میں لکھنا ممکن ہو۔

مسئلہ پھیلاو کی طرح موجودہ ثبوت کو وسعت دیتے ہوئے اسے ایسی سطح پر لاگو کیا جا سکتا ہے جس کو محدود تعداد کے ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو مساوات 11.98 کی روپ میں لکھا جا سکے۔عموماً عملاً استعمال کی سطحیں ایسی ہی ہوتی ہیں۔

مسئلہ کو ایسی عمومی سطح S جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم S کو تخمیناً ایسی سطحوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ یہ ترکیب مسئلہ گرین کی ثبوت میں اختیار کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔

□

11.11 مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال

مثال 11.28: سطح میں مسئلہ گرین درحقیقت مسئلہ سٹوکس کی خصوصی شکل ہے
فرض کریں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ مستوی xy میں کسی ایسا خطہ میں استمراری قابل تفرق ہے جس میں سادہ تعلق بند محدود خطہ S پایا جاتا ہے جس کی سرحد C ٹکڑوں میں ہموار بند سادہ منحنی ہے۔تب مساوات 10.122 کے تحت

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

ہو گا۔مزید $v_t \, \mathrm{d}s = v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y$ لیتے ہوئے مساوات 11.97 درج ذیل لکھا جائے گا

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \int\limits_C (v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y)$$

جو سطح میں مسئلہ گرین (حصہ 11.4) ہے۔ □

مثال 11.29: گردش کا طبعی مفہوم
فرض کریں کہ رداس r کے دائری قرص S_r کا مرکز N اور سرحد دائرہ C_r ہے (شکل 11.29)۔مزید فرض کریں کہ کسی خطہ جس کا S_r حصہ ہو میں $\boldsymbol{v}(Q) = \boldsymbol{v}(x, y, z)$ استمراری قابل تفرق سمتی تفاعل ہے۔تب مسئلہ سٹوکس اور سطحی تکمل کے اوسط قیمت مسئلہ کے تحت درج ذیل ہو گا

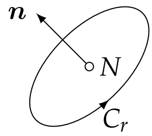
$$\int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s = \iint\limits_{S_r} (\nabla \times \boldsymbol{v})_n \, \mathrm{d}A = [\nabla \times \boldsymbol{v}(N^*)]_n A_r$$

جہاں S_r کا رقبہ A_r اور S_r میں N^* کوئی موزوں نقطہ ہے۔اس کو یوں

$$[\nabla \times \boldsymbol{v}(N^*)]_n = \frac{1}{A_r} \int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔سیال کی حرکت کی صورت میں تکمل

$$\int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s$$



شکل 11.29: قرص (مثال 11.29)

C_r پر سیال کی دائری بہاو[58] کی ناپ ہے۔اب r کو صفر مانند کرنے سے

$$[\nabla \times \boldsymbol{v}(N)]_n = \lim_{r\to 0} \frac{1}{A_r} \int\limits_{C_r} v_t \,\mathrm{d}s \tag{11.105}$$

ملتا ہے جس کو N پر فی اکائی رقبہ دائری بہاو کہا جا سکتا ہے۔ □

مثال 11.30: خطی تکمل کا حصول بذریعہ مسئلہ سٹوکس

تکمل $\int_C v_t \,\mathrm{d}s$ حل کریں جہاں مبدا سے دیکھتے ہوئے دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں دائرہ $C:\ x^2+y^2=4,\ z=-3$ گھڑی کی الٹ رخ سمت بند ہے جبکہ $\boldsymbol{v}$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + xz^3\boldsymbol{j} - zy^3\boldsymbol{k}$$

ہم C کے احاطہ S کو مستوی دائری قرص $x^2+y^2 \le 4,\ z=-3$ لیتے ہیں۔یوں مسئلہ سٹوکس میں $\boldsymbol{n}$ کی سمت مثبت z رخ ہو گی لہٰذا $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ ہو گا۔یوں $(\nabla\times\boldsymbol{v})_n$ سے مراد مثبت z رخ میں $\nabla\times\boldsymbol{v}$ کا جزو۔چونکہ $z=-3$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء $v_1=y$ ، $v_2=-27x$ اور $v_3=3y^3$ ملتے ہیں لہٰذا

$$(\nabla\times\boldsymbol{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -27-1=-28$$

ہو گا۔یوں مسئلہ سٹوکس میں تکمل کی قیمت قرص کا رقبہ ضرب -28 یعنی -112π ہو گی۔

یہاں مسئلہ سٹوکس کی افادیت جاننے کی خاطر آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ مسئلہ سٹوکس استعمال کیے بغیر اس تکمل کو حل کریں۔ □

---

[58] circulation

سوالات

سوال 11.159 تا سوال 11.161 میں $\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v})_n \,\mathrm{d}A$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.159: $\boldsymbol{v} = xz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j},\ S:$ مکعب $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = 1$
جواب: ∓ 1

سوال 11.160: $\boldsymbol{v} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k},\ S:$ مکعب $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = -1$
جواب: ∓ 1

سوال 11.161: $\boldsymbol{v} = -\frac{1}{3}y^3\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}x^3\boldsymbol{j},\ S:$ دائری قرص $x^2 + y^2 \le a^2,\ z = 0$
جواب: $\mp \frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.162: مسئلہ سٹوکس کا دوسرا ہاتھ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.159 حل کریں۔

سوال 11.163: مسئلہ سٹوکس کا دوسرا ہاتھ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.161 حل کریں۔

سوال 11.164: ثابت کریں کہ اگر $\boldsymbol{v}$ اور S مسئلہ سٹوکس کے شرائط پر پورا اترتے ہوں اور $\boldsymbol{v} = \nabla f$ ہو تب $\int_C v_t \,\mathrm{d}s = 0$ ہو گا جہاں S کی سرحد C ہے۔

سوال 11.165 تا سوال 11.169 میں $\int_C v_t \,\mathrm{d}s$ کو مسئلہ سٹوکس سے حل کریں جہاں معلومات دائیں ہاتھ کارتیسی نظام کے لحاظ سے فراہم کی گئی ہیں۔

سوال 11.165: $\boldsymbol{v} = 3y\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ جبکہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ اور $z = x + 2$ کا قطع C ہے جو مبدا سے دیکھتے ہوئے گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ سمت بند نظر آتا ہے۔
جواب: $\frac{27\pi}{\sqrt{2}}$

سوال 11.166: $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$ جبکہ دائرہ $x = cos\alpha$ ، $y = \sin\alpha$ ، $z = 1$ ، $0 \le \alpha \le 2\pi$ سرحد C ہے۔
جواب: 3π

سوال 11.167: $\boldsymbol{v} = y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} - (y + z)\boldsymbol{k}$ جبکہ گھڑی کی الٹ رخ تکون کی سرحد C ہے۔ تکون کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(1,3,0)$ ہیں۔
جواب: -1

سوال 11.168: $\boldsymbol{v} = 2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ جبکہ گھڑی کی الٹ رخ بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور سطح $z = y + 3$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: -3π

سوال 11.169: $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ جبکہ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ اور مکافی $z = x^2 + y^2$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: 0

سوال 11.170 تا سوال 11.173 کو مساوات 11.100 کی مدد سے حل کریں۔مبدا سے دیکھتے ہوئے C گھڑی کی رخ ہے۔

سوال 11.170: $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ جبکہ $x^2 + y^2 = 1$ اور مکافی $z = y^2$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: 0

سوال 11.171: $\boldsymbol{v} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ تکون $(1,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ کا محیط C ہے۔
جواب: 5

سوال 11.172: $\boldsymbol{v} = \sin z\boldsymbol{i} - \cos x\boldsymbol{j} + \sin y\boldsymbol{k}$ مستطیل $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ ، $0 \le y \le 2$ ، $z = 2$ کا محیط C ہے۔
جواب: 2

سوال 11.173: $\boldsymbol{v} = 2e^x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ ، $z = 2$ کا محیط C ہے۔
جواب: 0

11.12 راہ سے آزاد خطی تکمل

ہم نے حصہ 11.2 میں دیکھا کہ خطی تکمل

$$\int_C (f \,\mathrm{d}x + g \,\mathrm{d}y + h \,\mathrm{d}z) \tag{11.106}$$

کی قیمت عموماً راہ C اور اس کے سروں P اور Q پر منحصر ہوتی ہے؛ یعنی P تا Q تکمل کو مختلف راہوں پر حاصل کرنے سے عموماً مختلف جوابات حاصل ہوں گے۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کن صورتوں میں تکمل کی قیمت راہ کی سروں پر نا کہ راہ پر منحصر ہو گی۔یہ ایک اہم مسئلہ ہے۔ہم پہلے درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ فضا کے دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y,z)$ ، $g(x,y,z)$ اور $h(x,y,z)$ استمراری اور معین ہیں۔تب مساوات 11.106 اس صورت D میں **راہ سے آزاد**[59] کہلاتی ہے جب D میں P اور Q سروں کی ہر جوڑی کے لئے مساوات 11.106 کی قیمت D میں P تا Q ہر C کے لئے یکساں ہو۔تکمل کی یہ قیمت عموماً راہ کی سروں P اور Q پر منحصر ہو گی جبکہ ان نقطوں کو ملانے والی راہ کا تکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

یہاں یاد دہانی کرتا چلوں کہ **واحد قیمت**[60] تعلق کو تفاعل کہتے ہیں یعنی دائرہ کار D ، جہاں تفاعل معین ہو، کے ہر نقطہ کے لئے تفاعل واحد ایک قیمت مختص کرتا ہے۔یہ ہماری موجودہ بحث کے لئے ضروری ہے معلومات ہے۔

فضا کے دائرہ کار D میں معین تفاعل f ، g ، h کا تعلق

$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z \tag{11.107}$$

تین متغیرات کی ایک **درجی تفرق روپ**[61] کہلاتی ہے۔اگر پورے D میں ہر جگہ یہ روپ قابل تفرق تفاعل $u(x,y,z)$ کا تفرق

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{11.108}$$

ہو تب یہ D میں **قطعی تفرق روپ یا قطعی**[62] کہلاتی ہے.یوں پورے D میں ہر جگہ درج ذیل ہو گا۔

$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}u \tag{11.109}$$

مساوات 11.108 اور مساوات 11.109 کا موازنہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ D میں مساوات 11.107 صرف اور صرف اس صورت قطعی تفرق ہو گا کہ ایسا تفاعل $u(x,y,z)$ پایا جاتا ہو کہ پورے D میں

$$f = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad h = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{11.110}$$

---

[59] independent of path
[60] single valued
[61] first order differential form
[62] exact

ہو۔سمتی ریاضی کی زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ مساوات 11.107 صرف اور صرف اس صورت D میں قطعی تفرقی ہو گا کہ سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

تفاعل $u(x,y,z)$ کا D میں ڈھلوان ہو یعنی:

$$\boldsymbol{v} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{11.111}$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ آزادی راہ کے لئے قطعیت کی شرط لازم اور کافی ہے۔

مسئلہ 11.7: (آزادی راہ اور قطعیت)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں $f(x,y,z)$ ، $g(x,y,z)$ اور $h(x,y,z)$ استمراری ہیں۔ تب تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.112}$$

D میں صرف اور صرف اس صورت راہ سے آزاد ہو گا کہ تکمل کے اندر تفرقی صورت D میں قطعی تفرقی ہو۔

مساوات 11.112 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

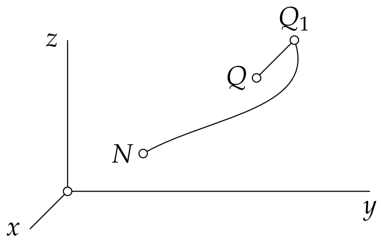
$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.113}$$

جہاں $\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}$ ہیں۔

ثبوت : (الف) فرض کریں کہ دیا گیا تکمل D میں راہ سے آزاد ہے۔ہم D میں کوئی مقررہ نقطہ N اور نقطہ Q منتخب کرتے ہیں۔مزید ہم تفاعل $u(x,y,z)$ جس کی تعریف درج ذیل ہے لیتے ہیں

$$u(x,y,z) = u_0 + \int_N^Q (f\,\mathrm{d}x^* + g\,\mathrm{d}y^* + h\,\mathrm{d}z^*) \tag{11.114}$$

جہاں u_0 مستقل ہے اور D میں N تا Q کسی بھی راہ پر تکمل لیا گیا ہے۔اب چونکہ N غیر تغیر پذیر ہے اور تکمل راہ سے آزاد ہے لٰہذا تکمل کی قیمت Q کے محدد x ، y ، z پر منحصر ہو گی جو یقیناً



شکل 11.30: ثبوت مسئلہ 11.7

D میں تفاعل $u(x,y,z)$ کی تعریف ہے۔اب مساوات 11.110 میں دیے گئے تعلقات، جو D میں $f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y+h\,\mathrm{d}z$ کی قطعی تفرق ہونے کا ثبوت ہے، کو مساوات 11.114 سے حاصل کرتے ہیں ۔ ہم ان تین تعلقات میں سے ایک کو ثابت کرتے ہیں۔چونکہ تکمل راہ سے آزاد ہے لہٰذا ہم N سے نقطہ Q_1 : (x_1,y,z) تک تکمل لینے کے بعد x محور کے متوازی Q_1 سے Q تک تکمل لے سکتے ہیں۔یہاں Q_1 کو اس طرح چنا جاتا ہے کہ پورا QQ_1 قطع D کے اندر ہو (شکل 11.30)۔یوں

$$u(x,y,z)=u_0+\int_N^{Q_1}(f\,\mathrm{d}x^*+g\,\mathrm{d}y^*+h\,\mathrm{d}z^*)+\int_{Q_1}^{Q}(f\,\mathrm{d}x^*+g\,\mathrm{d}y^*+h\,\mathrm{d}z^*) \tag{11.115}$$

ہو گا۔ ہم مساوات 11.115 کا x کے ساتھ جزوی تفرق لیتے ہیں۔چونکہ N اور Q_1 دونوں x سے آزاد ہیں لہٰذا پہلی تکمل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔چونکہ قطع QQ_1 پر y اور z دونوں غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا آخری تکمل کو قطعی تکمل

$$\int_{x_1}^{x} f(x^*,y,z)\,\mathrm{d}x^*$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا x کے ساتھ تفرق $f(x,y,z)$ ہے۔یوں مساوات 11.115 کی تفرق سے

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 11.110 میں دیا گیا ایک تعلق ثابت ہوتا ہے۔

مساوات 11.110 میں دیے گئے باقی تعلقات کو بھی اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مذکورہ بالا کے برعکس فرض کریں کہ D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرق ہے۔تب D میں مساوات 11.110 تفاعل $u(x, y, z)$ کے لئے درست ہو گی۔فرض کریں کہ D میں N تا Q کوئی راہ C ہے جس کی مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad (t_0 \le t \le t_1)$$

ہے جہاں $t = t_0$ نقطہ N اور $t = t_1$ نقطہ Q دیتا ہے۔تب درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}\int_N^Q (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= \int_N^Q \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = u[x(t), y(t), z(t)]\Big|_{t_0}^{t_1} = u(Q) - u(N)\end{aligned}$$

جس کے تحت تکمل کی قیمت C کے سروں پر u کی قیمت کے فرق کے برابر ہے۔یوں تکمل راہ سے آزاد ہے۔

□

مذکورہ بالا ثبوت میں آخری مساوات

$$\int_N^Q (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = u(Q) - u(N) \tag{11.116}$$

درج ذیل قطعی تکمل کی مماثل ہے جو ہم بنیادی علم الاحصاء سے جانتے ہیں۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)]$$

راہ سے آزاد تکمل کو حل کرنے کی خاطر مساوات 11.116 استعمال کی جاتی ہے۔مثال 11.33 میں ایسا کیا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ تغیر پذیر قوت $\boldsymbol{p} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$ کسی ذرہ کو راہ C پر منتقل کرتے ہوئے درج ذیل کام W سرانجام دیتی ہے

$$W = \int_C \boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)$$

جہاں راہ پر چلنے کی سمت میں تکمل لیا جاتا ہے۔مسئلہ 11.7 کے تحت کام اس صورت راہ سے آزاد ہو گا جب تکمل کے اندر قطعی تفرقی روپ پایا جاتا ہو اور ایسا تب ہو گا جب قوت $\boldsymbol{p}$ کسی غیر سمتی تفاعل u کی ڈھلوان ہو۔ایسی قوت کا میدان بقائی[63] کہلاتا ہے (حصہ 10.8 کا آخر دیکھیں)۔

مثال 11.31: متغیر قوت کا سرانجام کام
قوت $\boldsymbol{p} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ ایک ذرہ کو $N : (3, 2, 4)$ سے سیدھی راہ پر $Q : (5, 4, 6)$ منتقل کرتی ہے۔اس کام کو

$$W = \int_C (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$$

لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 11.106 کی طرز کا تکمل ہے جہاں

$$f = yz, \quad xz, \quad h = xy$$

ہیں جو $u = xyz$ لیتے ہوئے مساوات 11.110 پر پورا اترتے ہیں۔یوں W تکمل کی راہ سے آزاد ہے لہٰذا ہم مساوات 11.116 استعمال کر سکتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$W = u(Q) - u(N) = u(5, 4, 6) - u(3, 2, 4) = 120 - 24 = 96$$

□

مسئلہ 11.7 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

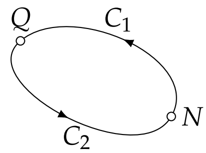
مسئلہ 11.8: (راہ سے آزادی)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں f ، g ، h استمراری ہوں تب تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)$$

صرف اور صرف اس صورت D میں راہ سے آزاد ہو گا جب D میں ہر سادہ بند راہ پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو۔

---

[63] conservative



شکل 11.31: ثبوت مسئلہ 11.8

ثبوت : (الف) فرض کریں کہ D میں C ایک سادہ بند راہ ہے اور تکمل راہ سے آزاد ہے۔ہم C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.31)۔یوں

$$\oint_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = \int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) + \int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.117}$$

ہو گا۔راہ سے آزادی کی بنا

$$\begin{aligned}\int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= \int_{C_1^*} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\\ &= -\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\end{aligned}$$

ہو گا جہاں C_1 پر الٹ رخ چلنے کو C_1^* سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس سے مساوات 11.117 کا بایاں ہاتھ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ (ب) مذکورہ بالا کے برعکس فرض کریں کہ D میں ہر سادہ بند راہ پر دیا گیا تکمل صفر کے برابر ہے۔مزید فرض کریں کہ N اور Q دائرہ کار D میں کوئی دو نقطے ہیں اور ان نقطوں کے مابین D میں C_1 اور C_2 دو ایسے راہ ہیں جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں (شکل 11.31)۔ C_1 اور C_2 مل کر سادہ بند راہ دیتے ہیں۔یوں

$$\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) + \int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = \oint_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = 0$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}\int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= -\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\\ &= \int_{C_1^*} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلہ کو فوری وسعت دیتے ہوئے، اپنی آپ کو محدود مرتبہ قطع کرتی ہوئی راہ پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔

اس سادہ مسئلہ کو قابل استعمال بنانے کی خاطر ایسا اصول درکار ہو گا جس سے جاننا ممکن ہو کہ آیا تکمل کے اندر قطعی تفرقی روپ پایا جاتا ہے یا نہیں۔ ایسا اصول مسئلہ 11.9 میں پیش کیا گیا ہے۔اس مسئلے کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصور ضروری ہے۔

دائرہ کار D اس صورت **سادہ تعلق**[64] رکھتا ہے جب D میں رہتے ہوئے D میں ہر بند راہ کو مسلسل گھٹاتے ہوئے نقطہ مانند بنانا ممکن ہو۔

مثلاً کرہ یا مکعب کی اندرون، ایسی کرہ کا اندرون جس میں محدود تعداد کے نقطے شامل نہ ہوں، یا دو ہم مرکز کرہ کے مابین دائرہ کار سادہ تعلق رکھتے ہیں۔اس کے برعکس اندرسہ کی اندرون کا دائرہ کار سادہ تعلق نہیں رکھتا ہے۔

مسئلہ 11.9: (اصول قطعیت اور راہ سے آزادی)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y,z)$ ، $g(x,y,z)$ ، $h(x,y,z)$ اور ان کے ایک درجی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔اگر خطی تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.118}$$

D میں راہ سے آزاد ہو (اور یوں D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرق ہو) تب پورے D میں ہر جگہ

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{11.119}$$

ہو گا جس کو سمتی ریاضی میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}) \tag{11.120}$$

اس کے برعکس اگر D سادہ تعلق رکھتا ہو اور D میں ہر جگہ مساوات 11.119 درست ہو تب مساوات 11.118 میں دیا گیا تکمل D میں راہ سے آزاد ہو گا (اور نتیجتاً D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہو گا)۔

[64] simply connected

ثبوت:
(الف) فرض کریں کہ مساوات 11.118 D میں راہ سے آزاد ہے۔ تب مسئلہ 11.7 کے تحت $f\boldsymbol{i}+g\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}$ دائرہ کار D میں قطعی تفرق ہو گا اور مساوات 11.111 کے تحت درج ذیل ایسا تفاعل $u(x,y,z)$ پایا جائے گا کہ D میں درج ذیل ہو

$$\boldsymbol{v}=f\boldsymbol{i}+g\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}=\nabla u$$

لہٰذا مساوات 10.124 کی مدد سے درج ذیل ہو گا۔

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\nabla u)=\boldsymbol{0}$$

(ب) اس کے برعکس فرض کریں کہ D سادہ تعلق رکھتا ہے اور پورے D میں ہر جگہ مساوات 11.120 درست ثابت ہوتی ہے۔مزید فرض کریں کہ D میں C سادہ بند راہ ہے۔چونکہ D سادہ تعلق رکھتا ہے لہٰذا ہم D میں ایسی سطح S دریافت کر سکتے ہیں جس کی تحدیدی سرحد C ہو۔یہاں مسئلہ سٹوکس (مسئلہ 11.6) قابل استعمال ہے جس سے

$$\int\limits_C(f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y+h\,\mathrm{d}z)=\int\limits_C v_t\,\mathrm{d}s=\iint\limits_S(\nabla\times\boldsymbol{v})_n\,\mathrm{d}A=0$$

ملتا ہے جہاں C کی درست سمت کے لحاظ سے S کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ استعمال کیا جائے گا۔اس نتیجے کے ساتھ مسئلہ 11.8 ملاتے ہوئے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 11.118 کا تکمل D میں راہ سے آزاد ہے۔

□

ہم دیکھتے ہیں کہ xy مستوی میں خطی تکمل

$$\int_C(f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y)$$

کی صورت میں مساوات 11.119 سے درج ذیل ایک شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}\tag{11.121}$$

D کی سادہ تعلق رکھنے کا شرط لازم ہے جس کی وضاحت درج ذیل مثال میں ہوتی ہے۔

مثال 11.32: فرض کریں کہ درج ذیل ہو۔

$$f = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad g = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad h = 0$$

ان کا تفرق لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ xy مستوی میں مبدا کو نہ شامل کرتے ہوئے کسی بھی دائرہ کار پر یہ تفاعل مساوات 11.121 پر پورا اترتے ہیں مثلاً دائرہ کار $D : \frac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{3}{2}$ میں (شکل 11.32)۔ ظاہر ہے کہ D سادہ تعلق نہیں رکھتا ہے۔ اگر تکمل

$$I = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \int_C \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

D میں راہ سے آزاد ہوتا تب D میں کسی بھی بند راہ مثلاً دائرہ $x^2+y^2=1$ پر $I=0$ ہوتا۔ ہم $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ پر کرتے ہوئے اور راہ کو $r=1$ لکھتے ہوئے

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ ایک مرتبہ گھومتے ہوئے تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ چونکہ D سادہ تعلق نہیں رکھتا لہٰذا مسئلہ 11.9 لاگو نہیں ہو گا اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ I راہ سے آزاد ہے۔ مزید درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

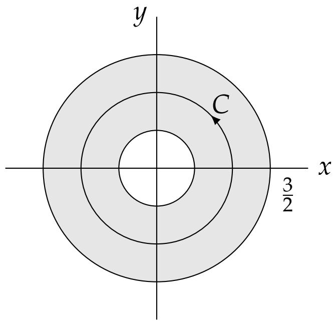
$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}u, \quad u = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \theta$$

لیکن D میں u واحد قیمت نہیں ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم u کی "صدر قیمت" لیں جس کو $-\pi < u \le \pi$ لیں تب منفی x محور پر u نا تو قابل تفرق ہے (اور نا ہی استمراری ہے) جو قطعیت کی بنیادی شرط ہے۔ □

اگر خطی تکمل راہ سے آزاد ہو تب اس کو مساوات 11.116 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 11.33: راہ سے آزاد خطی تکمل کا حل
درج ذیل خطی تکمل کی قیمت $N : (0, 0, 1)$ تا $Q : (1, \frac{\pi}{4}, 2)$ کسی بھی راہ پر دریافت کرتے ہیں۔

$$I = \int_C [2xyz^2\,\mathrm{d}x + (x^2z^2 + z\cos yz)\,\mathrm{d}y + (2x^2yz + y\cos yz)\,\mathrm{d}z]$$



شکل 11.32: شکل برائے مثال 11.32

مسئلہ 11.9 کے تحت تکمل راہ سے آزاد ہے۔ چونکہ $f = 2xyz^2$ ہے لہٰذا مساوات 11.110 میں دیے پہلا تعلق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u = \int f \,\mathrm{d}x = x^2yz^2 + a(y,z) \tag{11.122}$$

جس کو مساوات 11.110 کے دوسرے تعلق میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2z^2 + \frac{\partial a}{\partial y} = g = x^2z^2 + z\cos yz$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial a}{\partial y} = z\cos yz, \qquad \implies \qquad a = \sin yz + c(z)$$

اس کو مساوات 11.110 کے تیسرے تعلق اور مساوات 11.122 کے ساتھ ملاتے ہوئے

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2yz + y\cos yz + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z} = h = 2x^2yz + y\cos yz$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z} = 0$$

ملتا ہے جس سے $c =$ مستقل حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$u(x,y,z) = x^2yz + a = x^2yz^2 + \sin yz + c$$

ہو گا۔آپ سے التماس ہے کہ تکمل کو دیکھ کر u لکھنے کی کوشش کریں۔مساوات 11.116 استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$I = [x^2yz^2 + \sin yz + c]\Big|_N^Q = \pi + \sin\frac{\pi}{2} = \pi + 1$$

□

سوالات

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

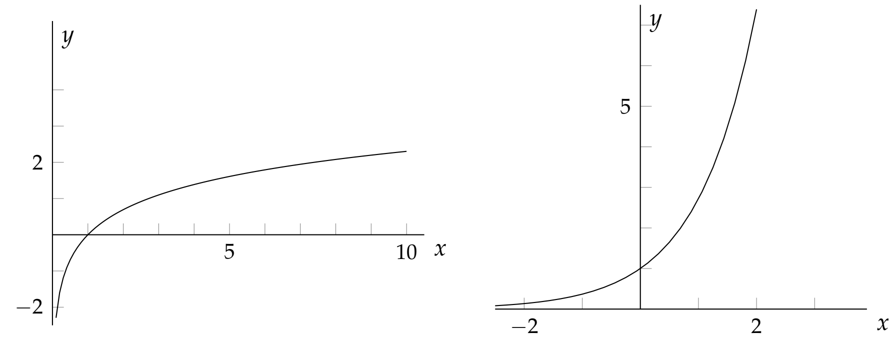
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

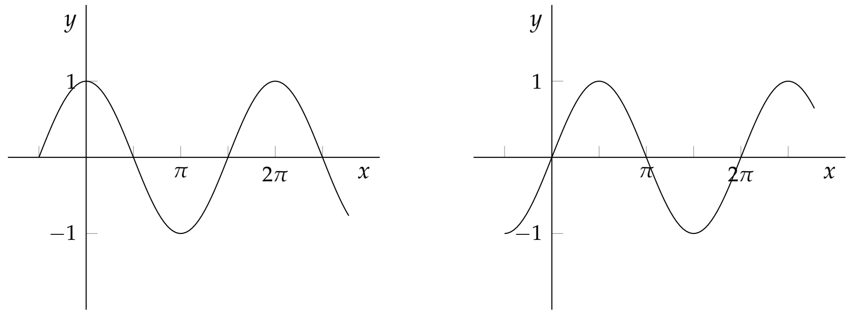
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $\frac{1}{x} = 10^{\log\frac{1}{x}} = 10^{-\log x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x\sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x\sin y \end{aligned} \tag{ب.6}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{ب.7}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ \cos x &= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \end{aligned} \tag{ب.8}$$

$$\sin(\pi-x) = \sin x, \quad \cos(\pi-x) = -\cos x \tag{ب.9}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \tag{ب.10}$$

$$\begin{aligned} \sin x\sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y)+\cos(x-y)] \\ \cos x\cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)] \\ \sin x\cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)] \end{aligned} \tag{ب.11}$$

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \\ \cos v - \cos u &= 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} \end{aligned} \tag{ب.12}$$

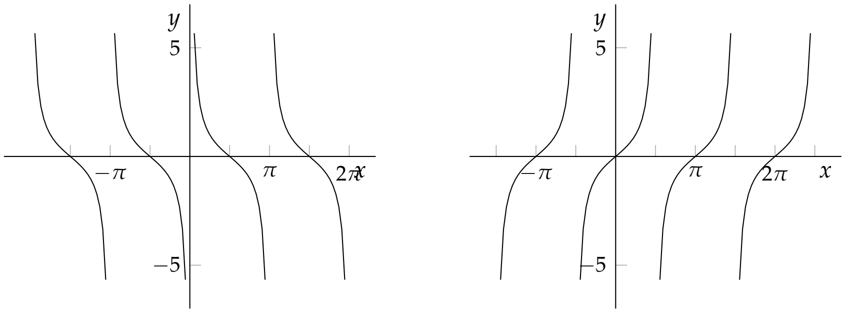
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x\mp\delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A} \tag{ب.13}$$

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x\mp\delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B} \tag{ب.14}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x} \tag{ب.15}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y} \tag{ب.16}$$



$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

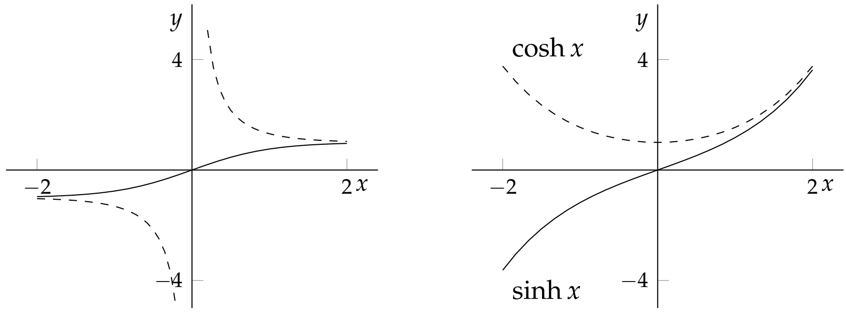
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

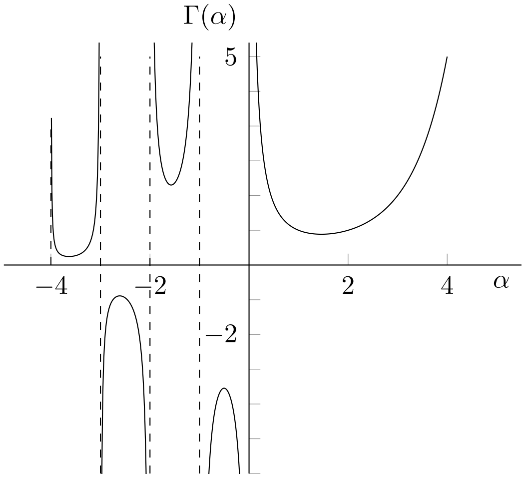
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

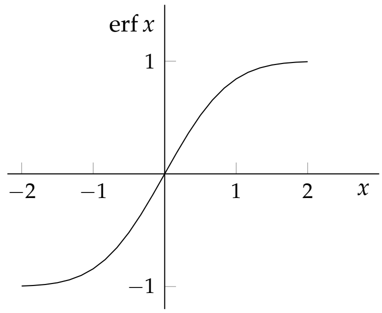
$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

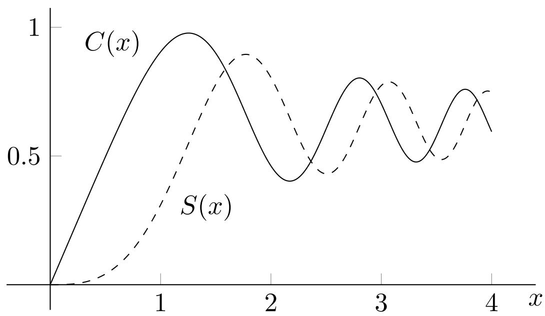
$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

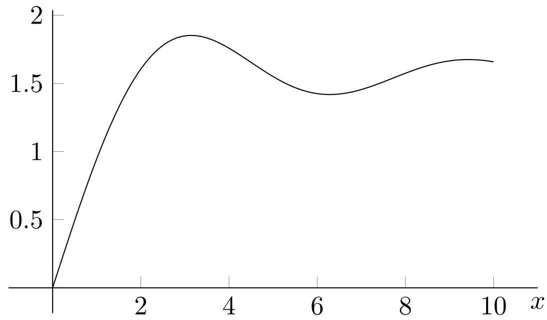
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.41}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$