

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
113	2.3 تفرقی عامل	2.3
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
134	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	2.6
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	2.8.1
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	3.1
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	3.2

3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	214
3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	217
4	نظام تفرقی مساوات	225
4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	226
4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	235
4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	250
4.3.1	خطی نظام	251
4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	254
4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام	272
4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام	281
4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ	290
4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	298
4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب	299
5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	309
5.1	ترکیب طافقی تسلسل	310
5.2	لیمنڈر مساوات۔ لیمنڈر کثیر رکنی	325
5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس	343
5.3.1	عملی استعمال	348
5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل	362
5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	377
5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ	383
5.7	مسئلہ سیورم لیوویل	390
5.8	قائمیت لیمنڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل	397
6	لاپلاس تبادلہ	407
6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	408
6.2	تفرقات اور کمالات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	417
6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیزھی تفاعل	430
6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	451
6.5	الچھاو	469
6.6	لاپلاس بدل کی عمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	478
6.7	تفرقی مساوات کے نظام	487
6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے	495
7	خطی الجبرا: سمتیات	499

499	غیر سمتیات اور سمتیات	7.1
501	سمتیہ کے اجزاء	7.2
507	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب	7.3
516	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت	7.4
522	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)	7.5
535	اندرونی ضرب فضا	7.6
537	سمتی ضرب	7.7
539	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب	7.8
550	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب	7.9

559	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام	8
560	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب	8.1
570	قالبی ضرب	8.2
577	8.2.1 تبدیلی محل	
590	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط	8.3
603	8.3.1 صف زینہ دار صورت	
611	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا	8.4
625	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکنائی	8.5
630	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب	8.6
633	مقطع۔ قاعدہ کریمیر	8.7
650	معکوس قالب۔ گاوس جاردن اسقاط	8.8
665	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ	8.9

683	خطی الجبرا: آگنی قدر مسائل قالب	9
684	آگنی قدر مسائل قالب۔ آگنی اقدار اور آگنی سمتیات کا حصول	9.1
695	آگنی مسائل کے چند استعمال	9.2
703	تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب	9.3
710	آگنی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت	9.4

725	اضافی ثبوت	ا
-----	------------	---

729	مفید معلومات	ب
729	1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات	



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 9

### خطی الجبرا: آگنی قدر مسائل قالب

آگنی قدر مسائل درج ذیل سمتی مساوات پر مبنی ہیں جہاں  $A$  چکور قالب،  $x$  نامعلوم سمتیہ اور  $\lambda$  نامعلوم غیر سمتیہ ہے۔

$$(9.1) \quad Ax = \lambda x$$

آگنی قدر مسائل میں ہمیں وہ  $\lambda$  اور  $x$  درکار ہیں جو درج بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔  $\lambda$  کی ہر قیمت کے لئے  $x = 0$  مساوات 9.1 کا غیر اہم صفر حل ہے۔ ہم اس غیر اہم صفر حل میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہذا ہم غیر صفر حل  $x \neq 0$  جاننا چاہیں گے۔

$\lambda$  کی وہ قیمتیں جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں  $A$  کے آگنی اقدار<sup>1</sup> کہلاتے ہیں اور وہ  $x$  جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں  $A$  کے آگنی سمتیات<sup>2</sup> کہلاتے ہیں۔

اس معصوم نظر آنے والا سمتی مساوات کے اندر حیران کن تفصیل چھپی ہے۔ آگنی قدر مسائل انجینئری، طبیعیات، ریاضی، حیاتیات، ماحولیاتی سائنس، شہری منصوبہ بندی، معاشیات، نفسیات اور دیگر شعبوں میں عموماً درپیش آتے ہیں۔ آپ کو یقیناً ان سے زندگی میں واسطہ پڑے گا۔

---

eigenvalues<sup>1</sup>  
eigenfunctions<sup>2</sup>

## 9.1 آنگنی قدر مسائل قالب۔ آنگنی اقدار اور آنگنی سمتیات کا حصول

درج ذیل پر غور کریں جہاں غیر صفر سمتیہ اور چکور قالب کے ضرب دکھائے گئے ہیں۔

$$(9.2) \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

بائیں ہاتھ کی ضرب میں ہمیں مکمل طور پر نیا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جس کی لمبائی اور سمت ابتدائی سمتیہ کی لمبائی اور سمت سے مختلف ہیں۔ عموماً سمتیہ کو چکور قالب سے ضرب دینے سے مکمل طور پر مختلف سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کی ضرب میں حاصل سمتیہ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

یعنی حاصل سمتیہ اور ابتدائی سمتیہ کی سمتیں ایک جیسی ہیں جبکہ حاصل سمتیہ کی لمبائی ابتدائی سمتیہ کی لمبائی کے دس گنا ہے جس کو  $\lambda = 10$  لکھا جائے گا۔ چکور قالب  $A$  کے لحاظ سے ایسے  $\lambda$  اور غیر صفر سمتیات کا حصول اس باب کا مرکزی مضمون ہے۔

آئیں درج بالا مشاہدے کو دستوری شکل دیں۔ فرض کریں کہ  $A = [a_{jk}]$  غیر صفر  $n \times n$  جسامت کا چکور قالب ہے۔ اب درج ذیل سمتی مساوات پر غور کریں۔

$$(9.3) \quad Ax = \lambda x$$

ان  $\lambda$  اور غیر صفر  $x$  کے حصول کے مسئلے کو، جو مساوات 9.3 پر پورا اترے ہوں، آنگنی قدر مسئلہ کہتے ہیں۔

یہاں توجہ دیں کہ  $A$  دیا گیا چکور قالب ہے جبکہ  $\lambda$  نامعلوم غیر سمتیہ اور  $x$  نامعلوم سمتیہ ہے۔ ہم وہ  $\lambda$  اور  $x$  حاصل کرنا چاہتے ہیں جو مساوات 9.3 پر پورا اترتے ہوں۔ جیومیٹریکی طور پر ہم وہ سمتیات  $x$  حاصل کرنا چاہتے ہیں جنہیں  $A$  سے ضرب دینا ایسا ہی ہے جیسے ان سمتیوں کو غیر سمتی  $\lambda$  سے ضرب دیا جائے یعنی کہ  $Ax$  اور  $x$  راست تناسب ہوں۔ یوں مثبت  $\lambda$  کی صورت میں ابتدائی اور حاصل سمتیات کی سمتیں ایک جیسی ہوں گی جبکہ منفی  $\lambda$  کی صورت میں ان کی سمتیں آپس میں الٹ ہوں گی۔ (باب کی شروع میں سادہ مثال سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔)

$\lambda$  کی وہ مخصوص قیمت جس کے لئے مساوات 9.3 کے غیر صفر  $x \neq 0$  حل موجود ہوں  $A$  کی آگنی قدر<sup>3</sup> کہلاتی ہے اور مطابقتی سمتیات  $x$ ، اس  $\lambda$  کے لحاظ سے قالب  $A$  کے آگنی سمتیات<sup>4</sup> یا امتیازی سمتیات<sup>5</sup> کہلاتے ہیں۔  $A$  کے تمام آگنی اقدار کو  $A$  کا طیف<sup>6</sup> کہتے ہیں۔ طیف میں کم سے کم ایک عدد آگنی قدر اور زیادہ سے زیادہ  $n$  مختلف آگنی اقدار ہو سکتے ہیں۔ آگنی اقدار کی سب سے زیادہ حتمی قیمت کو  $A$  کا رداس طیف<sup>7</sup> کہتے ہیں۔

آگنی قدر مسئلے کا حل چند مثالوں کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 9.1: آگنی اقدار اور آگنی سمتیات کا حصول  
درج ذیل قالب کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات قدم بہ قدم دریافت کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

پہلے آگنی اقدار دریافت کیے جاتے ہیں۔ مساوات 9.3 درج ذیل ہو گا۔

$$Ax = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

تمام اجزاء کو ایک طرف منتقل کرتے ہوئے

$$(9.4) \quad \begin{aligned} (-5 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

قابلی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(A - \lambda I)x = 0$$

eigenvalue<sup>3</sup>  
eigenvectors<sup>4</sup>  
characteristic vectors<sup>5</sup>  
spectrum<sup>6</sup>  
spectral radius<sup>7</sup>

مسئلہ 8.15 کے تحت اس متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل  $x \neq 0$  (قابل  $A$  کا آگنی سمتیہ جس کی ہمیں تلاش ہے) اس صورت ممکن ہو گا جب عددی سر قابل کا مقطع صفر کے برابر ہو گا۔

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

ہم  $D(\lambda) = 0$  کو  $A$  کی امتیازی مقطع جبکہ اس کی پھیلی ہوئی صورت کو امتیازی کثیر رکھی اور  $D(\lambda) = 0$  کو امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ اس دو درجی الجبرائی مساوات کے حل  $\lambda_1 = -1$  اور  $\lambda_2 = -6$  ہیں جو  $A$  کے آگنی اقدار ہیں۔

$\lambda_1 = -1$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ مساوات 9.4 میں  $\lambda = \lambda_1 = -1$  پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5 - (-1)]x_1 + 2x_2 &= 0 & \implies & -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + [-2 - (-1)]x_2 &= 0 & \implies & 2x_2 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے  $x_2 = 2x_1$  ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے متعدد متوازی آگنی سمتیات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یوں  $x_1$  (یا  $x_2$ ) کی کوئی بھی قیمت چن کر  $x_2$  ( $x_1$ ) حاصل کرتے ہوئے آگنی سمتیہ حاصل ہو گا۔ ہم  $x_1 = 1$  چن کر  $x_2 = 2$  حاصل کرتے ہیں اور یوں  $x_1 = [1 \ 2]^T$  ہو گا۔ اس جواب کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)x_1 = \lambda_1 x_1$$

$\lambda_2 = -6$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ مساوات 9.4 میں  $\lambda = \lambda_1 = -6$  پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5 - (-6)]x_1 + 2x_2 &= 0 & \implies & x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + [-2 - (-6)]x_2 &= 0 & \implies & 2x_2 + 4x_2 = 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے  $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$  ملتا ہے۔ یوں  $x_1 = 2$  چنتے ہوئے  $x_2 = -1$  ملتا ہے لہذا  $\lambda_2 = -6$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ  $x_2 = [2 \ -1]^T$  ہو گا۔ اس کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = (-6)x_2 = \lambda_2 x_2$$

آپ حصہ 9.1 کے آغاز میں مساوات 9.2 میں دیے گئے مثال کو حل کرتے ہوئے آگنی اقدار 10 ، 3 اور مطابقتی آگنی سمتیات  $[3 \ 4]^T$  ،  $[-1 \ 1]^T$  حاصل کریں۔

درج بالا مثال میں استعمال کی گئی ترکیب کی عمومی صورت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 9.3 کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \quad (9.5)$$

تمام اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

اس کو قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (9.7)$$

مسئلہ کریبر (مسئلہ 8.15) کے تحت درج بالا متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9.8)$$

$A - \lambda I$  کو  $A$  کا امتیازی قالب جبکہ  $D(\lambda)$  کو  $A$  کا امتیازی مقطع کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو  $A$  کی امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو پھیلا کر  $A$  کی امتیازی کثیر رکنی حاصل ہوگی۔

مسوات 9.8 کو پھیلا کر حاصل کثیر رکنی میں  $\lambda^n$  بلند تر طاقت ہے لہذا اس سے زیادہ سے زیادہ  $n$  مختلف آگنی اقدار حاصل ہو سکتے ہیں۔

مسئلہ 9.1: آگنی اقدار

چکور قالب  $A$  کے آگنی اقدار  $A$  کے امتیازی مساوات 9.8 سے حاصل ہوں گے۔  
یوں  $n \times n$  قالب کی کم سے کم ایک عدد آگنی قدر اور زیادہ سے زیادہ  $n$  مختلف آگنی اقدار ہو سکتے ہیں۔

$n$  کی بڑی قیمت کی صورت میں آگنی اقدار عموماً ترکیب نیوٹن یا کسی اور اعدادی ترکیب سے حاصل کئے جائیں گے۔

آگنی اقدار پہلے حاصل کیے جاتے ہیں۔ باری باری ان آگنی قدر کو مساوات 9.6 کے نظام میں پر کرتے ہوئے مطابقتی آگنی سمتیہ (گاوسی اسقاط کی مدد سے) حاصل کیا جاتا ہے۔

آگنی سمتیات درج ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

مسئلہ 9.2: آگنی سمتیات اور آگنی فضا

اگر قالب  $A$  کے کسی ایک آگنی قدر  $\lambda$  کے مطابقتی آگنی سمتیات  $w$  اور  $x$  ہوں تب  $w + x$  (بشرطیکہ  $w \neq -x$ ) اور  $kx$  جہاں  $k \neq 0$  ہے بھی اس  $\lambda$  کے مطابقتی بھی آگنی سمتیات ہوں گے۔

یوں کسی ایک آگنی قدر کے مطابقتی آگنی سمتیات اور  $0$  سمتیہ مل کر فضا بناتے ہیں جس کو اس  $\lambda$  کے لئے  $A$  کی مطابقتی آگنی فضا کہتے ہیں۔

ثبوت:  $Aw = \lambda w$  اور  $Ax = \lambda x$  سے مراد درج ذیل ہے

$$A(w + x) = Aw + Ax = \lambda w + \lambda x = \lambda(w + x)$$

اور  $A(kw + lx) = \lambda(kw + lx)$  ہے لہذا  $A(kw) = k(Aw) = k(\lambda w) = \lambda(kw)$  گا۔

آگنی سمتیہ کو معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری آگنی سمتیہ یعنی اکائی آگنی سمتیہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً مثال 9.1 میں  $x_1 = [1 \ 2]^T$  کی لمبائی  $\|x_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$  ہے جس سے معیاری آگنی سمتیہ (اکائی آگنی سمتیہ)  $[\frac{1}{\sqrt{5}} \ \frac{2}{\sqrt{5}}]^T$  حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: متعدد آگنی سمتیات  
درج ذیل قالب کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: اس قالب کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

جس سے  $A$  کے جذر  $\lambda_1 = 5$  اور  $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$  ملتے ہیں۔ (بلند درجی مساوات کا خط کھینچ کر اس کے جذر با آسانی حاصل کیے جاتے ہیں)۔ نظام  $(A - \lambda I)x = 0$  میں  $\lambda = \lambda_1 = 5$  پر کرتے ہوئے درج ذیل مطابقتی امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے

$$A - \lambda I = A - 5I = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جس کا درجہ دو (2) ہے۔ یوں  $-\frac{24}{7}x_2 - \frac{48}{7}x_3 = 0$  میں  $x_3 = -1$  چنتے ہوئے  $x_2 = 2$  حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو  $-7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$  میں پر کرتے ہوئے  $x_1 = 1$  ملتا ہے۔ یوں  $x_1 = [1 \ 2 \ -1]^T$  قالب  $A$  کا آگنی قدر  $\lambda = 5$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ ہے۔



$\lambda = -3$  سے درج ذیل امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے۔

$$A - \lambda I = A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$  سے  $x_1 = -2x_2 + 3x_3$  لکھا جاسکتا ہے۔  $x_2 = 1$  چنتے ہوئے  $x_3 = 0$  ملتا ہے جبکہ  $x_2 = 0$  چنتے ہوئے  $x_3 = 1$  ملتا ہے۔ اس طرح (مساوات 8.41 میں  $n = 3$  اور درجہ  $A = 2$  ہے لہذا)  $\lambda = -3$  کے مطابقتی خطی طور غیر تابع آگنی سمتیت درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

امتیازی کثیر رکنی کے جذر  $\lambda$  کے درجے کو  $\lambda$  کی الجبرائی کثرت<sup>8</sup> کہا اور  $M_\lambda$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کسی  $\lambda$  کے مطابقتی خطی طور غیر تابع آگنی سمتیت کی تعداد کو جیومیٹریائی کثرت<sup>9</sup> کہا اور  $m_\lambda$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں  $\lambda$  کے مطابقتی آگنی فضا کی بُعد  $m_\lambda$  ہوگی۔

چونکہ آگنی کثیر رکنی کا درجہ  $n$  ہے لہذا تمام الجبرائی کثرت کا مجموعہ  $n$  ہوگا۔ مثال 9.2 میں  $\lambda = -3$  کے لئے  $m_\lambda = M_\lambda = 2$  ہے۔ عموماً  $m_\lambda \leq M_\lambda$  ہوگا۔  $M_\lambda$  اور  $m_\lambda$  کے فرق  $\Delta_\lambda = M_\lambda - m_\lambda$  کو  $\lambda$  کی خامی<sup>10</sup> کہتے ہیں۔ یوں مثال 9.2 میں  $\Delta_{-3} = 0$  ہے۔ مثبت خامی کا پایا جانا عمومی بات ہے۔

مثال 9.3: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی  
قالب  $A$  کے آگنی قدر اور آگنی سمتیت حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت

<sup>8</sup> algebraic multiplicity  
<sup>9</sup> geometric multiplicity  
<sup>10</sup> defect

کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

یوں  $\lambda = 0$  آگنی قدر ہے جس کی الجبرائی کثرت  $M_0 = 2$  ہے۔  $0x_1 + 2x_2 = 0$  سے  $x_2 = 0$  حاصل کرتے ہوئے  $\lambda = 0$  کے مطابق آگنی سمتیہ کی صورت  $[x_1 \ 0]^T$  ملتی ہے لہذا  $\lambda$  کی جیومیٹریائی کثرت  $m_0 = 1$  ہے۔ یوں  $\lambda = 0$  کی خامی  $\Delta_0 = 2 - 1 = 1$  ہے۔

---



---

مثال 9.4: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی قالب  $A$  کے آگنی قدر اور آگنی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 = 0$$

یوں  $\lambda = 3$  کی الجبرائی کثرت  $M_3 = 2$  ہے۔  $0x_1 + 2x_2 = 0$  سے  $x_2 = 0$  حاصل کرتے ہوئے مطابق آگنی سمتیہ کی صورت  $[x_1 \ 0]^T$  ملتی ہے لہذا  $\lambda_3$  کی جیومیٹریائی کثرت  $3 = 1$  ہے خامی  $\Delta_3 = 2 - 1 = 1$  ہے۔

---



---

مثال 9.5: حقیقی قالب کے مخلوط آگنی اقدار اور مخلوط آگنی سمتیات چونکہ حقیقی کثیر رکنی کے مخلوط جذر ممکن ہیں (جو جوڑیوں کی صورت میں پائے جاتے ہیں) لہذا حقیقی قالب کے

مخلوط آگنی اقدار اور آگنی سمتیات ممکن ہیں۔ درج ذیل منحرف تشاکلی قالب  $A$  کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

یوں  $\lambda_1 = i = (\sqrt{-1})$  اور  $\lambda_2 = -i$  ملتے ہیں جن کے مطابقتی آگنی سمتیات بالترتیب  $-ix_1 + x_2 = 0$  اور  $ix_1 + x_2 = 0$  سے حاصل ہوں گے۔ ہم  $x_1 = 1$  چنتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

اگلے حصے میں درج ذیل مسئلے کی ضرورت پیش آئے گی۔

مسئلہ 9.3: تبدیل محل قالب کے آگنی سمتیات  
چکور قالب  $A$  کے تبدیل محل قالب  $A^T$  کے آگنی سمتیات وہی ہوں گے جو  $A$  کے ہیں۔

ثبوت: صفحہ 639 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت تبدیلی محل سے امتیازی قالب کا مقطع تبدیل نہیں ہوتا ہے۔

### سوالات

سوال 9.1 تا سوال 9.15 میں دیے قالب کے آگنی اقدار اور ان کے مطابقتی آگنی سمتیات دریافت کریں۔

سوال 9.1:  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$   
جوابات:  $2, [0 \ 1]^T; 4, [1 \ 0]^T$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.2:}$$

$$0, 0, [1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.3:}$$

$$3, [1 \ 1]^T; \quad 1, [1 \ -1]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.4:}$$

$$2 - \sqrt{3}, [1 \ -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2 + \sqrt{3}, [1 \ \frac{1}{\sqrt{3}}]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.5:}$$

$$2 - i\sqrt{3}, [1 \ -\frac{i}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2 + i\sqrt{3}, [1 \ \frac{i}{\sqrt{3}}]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.6:}$$

$$-4, [1 \ -1]^T; \quad 4, [1 \ 1]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.7:}$$

$$-4i, [1 \ i]^T; \quad 4i, [1 \ -i]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.8:}$$

$$a - ib, [1 \ -i]^T; \quad a + ib, [1 \ i]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.9:}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{5}}, [1 \ -\frac{i\sqrt{5}+2}{3}]^T; \quad \frac{i}{\sqrt{5}}, [1 \ \frac{i\sqrt{5}-2}{3}]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.10:}$$

$$\cos \theta - i \sin \theta, [1 \ i]^T; \quad \cos \theta + i \sin \theta, [1 \ -i]^T \quad \text{جوابات:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.11:}$$

$$\text{جوابات: } 0]^T, 1, [1 \quad 1 \quad 0]^T; \quad 0, [0 \quad 1 \quad 0]^T; \quad -1, [1 \quad -3 \quad 2]^T;$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.12:}$$

$$\text{جوابات: } 0]^T, 4, [1 \quad \frac{2}{5} \quad 0]^T; \quad 2, [1 \quad 0 \quad 0]^T; \quad 1, [1 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}]^T;$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.13:}$$

$$\text{جوابات: } \frac{1}{2}]^T, 9, [1 \quad -1 \quad 0]^T;$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.14: } \lambda = -1 \text{ کا مطابقتی آگنی سمتیہ دریافت کریں۔}$$

$$\text{جوابات: } [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.15: } \lambda = 3 \text{ کا مطابقتی آگنی سمتیہ دریافت کریں۔}$$

$$\text{جوابات: } [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

سوال 9.16 تا سوال 9.17 میں درکار تبدل  $y = Ax$  کے لئے  $A$  حاصل کریں جہاں  $x = [x_1 \quad x_2]^T$  ہے۔ آگنی اقدار اور آگنی سمتیات دریافت کریں اور ان کی جیومیٹریائی اہمیت بیان کریں۔

سوال 9.16:  $R^2$  میں گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ، کارتیسی محدود کی مہدا کے گرد  $\frac{\pi}{2}$  زاویہ گھومنا۔

جوابات:  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  آنگنی اقدار  $i$  اور  $-i$  ہیں۔ ان کے مطابقتی آنگنی سمتیات مخلوط ہیں لہذا گردش تبادلی میں کوئی سمت برقرار نہیں رہتی ہے۔

سوال 9.17:  $R^2$  کا  $x_2$  محور پر تطیل قائمہ۔

جوابات:  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $0, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  اپنے آپ پر ہی گرتی ہے جبکہ  $x_1$  مبداء پر گرتی ہے۔

## 9.2 آنگنی مسائل کے چند استعمال

مثال 9.6: پکدار جھلی کا تاننا

$x_1x_2$  سطح میں دائری سرحد  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  کی پکدار جھلی (شکل 9.6) کو یوں کھینچ کر پھیلا یا جاتا ہے کہ نقطہ  $N(x_1, x_2)$  اپنی جگہ سے نقطہ  $Q(y_1, y_2)$  کو منتقل ہوتا ہے جہاں اس نقطے کی ابتدائی اور اختتامی مقام کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = Ax = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

وہ صدر محور<sup>11</sup> دریافت کریں جن پر  $N$  کی تعین کر سمتیہ اور  $Q$  کی تعین کر سمتیہ ایک ہی رخ یا الٹ رخ ہوں۔ تبدیلی کے بعد جھلی کا سرحد کس صورت کا ہوگا؟

حل: ہمیں سمتیہ  $x$  اور سمتیہ  $y = \lambda x$  درکار ہیں۔ اب چونکہ  $y = Ax$  ہے لہذا  $Ax = \lambda x$  ہوگا جو آنگنی مسئلہ بیان کرتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$Ax = \lambda x \implies \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 & (4 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2 & 2x_1 + (4 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

اس کی امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

جس کے جذر  $\lambda_1 = 6$  اور  $\lambda_2 = 2$  ہمارے مسئلے کے آگنی اقدار ہیں۔ آگنی قدر  $\lambda_1 = 6$  کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

جس سے  $x_2 = x_1$  ملتا ہے جہاں  $x_1$  اختیاری مستقل ہے۔ ہم  $x_1 = 1$  چن کر  $x_2 = 1$  حاصل کرتے ہیں جس سے  $\lambda_1 = 6$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ  $[1 \ 1]^T$  ملتا ہے۔ آگنی قدر  $\lambda_2 = 2$  کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

جس سے  $x_2 = -x_1$  ملتا ہے جہاں  $x_1$  اختیاری مستقل ہے۔ ہم  $x_1 = 1$  چن کر  $x_2 = -1$  حاصل کرتے ہیں جس سے  $\lambda_2 = 2$  کا مطابقتی آگنی سمتیہ  $[1 \ -1]^T$  ملتا ہے۔

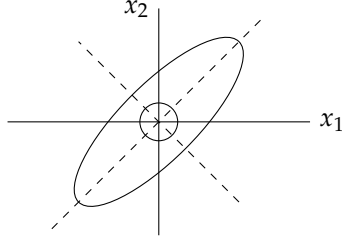
یہ آگنی سمتیات مثبت  $x_1$  محور کے ساتھ  $45^\circ$  اور  $-45^\circ$  زاویہ بناتے ہیں۔ صدر محور کے رخ اور ان آگنی سمتیات کے رخ ایک جیسے ہیں۔ آگنی اقدار کے تحت ان صدر محور کی سمت میں جھلی بالترتیب 6 اور 2 گنا پھیل گئی ہے۔ شکل 9.6 میں صدر محور کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اب اگر ہم صدر محور کو نئی کارتیسی نظام  $u_1 u_2$  کے محور یوں چنیں کہ  $x_1 x_2$  نظام کی پہلی ربع میں مثبت  $u_1$  اور اس کی دوسری ربع میں مثبت  $u_2$  پایا جاتا ہو تب جھلی پر کسی بھی نقطے کو  $u_1 = r \cos \phi$  ،  $u_2 = r \sin \phi$  لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح جھلی کی سرحد ابتدائی طور پر  $(\cos \phi, \sin \phi)$  ہو گا۔ کھینچنے کے بعد درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 = 6 \cos \phi, \quad z_2 = 2 \sin \phi$$

اب چونکہ  $\cos \phi + \sin \phi = 1$  کے برابر ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔ یوں کھینچی گئی جھلی کا سرحد ترخیمی ہو گا۔

$$\frac{z_1^2}{6^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$



شکل 9.1: صدر محور کو نقطہ دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ (مثال 9.6)

مثال 9.7: امکانی شماراتی عمل

صفحہ 583 پر مثال 8.18 میں شہری رقبے کی استعمال کی تقسیم پر غور کیا گیا۔ یہ عمل آخر کار تحدیدی حال<sup>12</sup> تک پہنچ جائے گا جس کے بعد اس میں مزید تبدیلی رو نما نہیں ہوگی۔ یوں امکانی شماراتی قالب  $Ax = x$  پر پورا اترے گا۔ اس مساوات کی آگنی قدر اکائی ہے جبکہ آگنی سمتیہ  $x$  درکار رقبے کی حتمی تقسیم ہے۔ یوں ہم  $A$  سے رو نما ہونے والے عمل کی طویل مدتی اثرات جان سکتے ہیں۔

اس مثال میں

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

ہے جس کے آگنی اقدار  $\frac{7+\sqrt{2}}{10}$ ،  $\frac{7-\sqrt{2}}{10}$  اور 1 ہیں۔ ہمیں اکائی آگنی قدر  $\lambda = 1$  سے غرض ہے جو  $[1 \ 2 \ 4]^T$  ہے۔ یوں شہر میں آخر کار رہائشی، تجارتی اور صنعتی تقسیم رقبہ بالترتیب 1، 2 اور 4 تناسب سے ہوگی۔



مثال 9.8: نمو آبادی کا لزی غونہ  
 لزی غونہ<sup>13</sup> جو عمر کے لحاظ سے آبادی میں اضافہ بتاتا ہے پر غور کرتے ہیں۔ لزی نمونے میں عمر کے لحاظ سے آبادی کی گروہ بندی کی جاتی ہے اور نظر عموماً صرف مادہ جانور پر رکھی جاتی ہے۔ فرض کریں کہ کسی جانور کی آبادی میں مادہ جانور کی زیادہ سے زیادہ عمر 12 سال ہے۔ ہم مادہ آبادی کو چار سال کے برابر وقفے سے تین گروہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ لزی قالب درج ذیل ہے۔

$$L = [l_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

لزی قالب میں  $l_{1k}$  سے مراد  $k$  گروہ میں رہتے ہوئے ایک مادہ سے پیدا ہونے والی بیٹیوں کی اوسط تعداد ہے جبکہ گروہ  $j - 1$  سے گروہ  $j$  تک زندہ پہنچنے والی مادہ کی تناسب کو  $l_{j,j-1}$  ( $j = 2, 3$ ) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پہلی چار سال کی عمر میں کم عمری کی بنا مادہ بچہ نہیں دیتی لہذا  $l_{11} = 0$  ہے۔ اسی طرح پانچ تا آٹھ سال کی عمر میں جوان مادہ زیادہ سے زیادہ (اوسطاً 2.3) بچے دیتی ہے جبکہ ضعیفی میں مادہ اوسطاً 0.4 بچے دیتی ہے۔ اسی طرح بچوں کا 0.6 حصہ یعنی 60% جوانی تک پہنچ پاتا ہے جبکہ جوان جانوروں کا 0.3 حصہ یعنی 30% بڑھاپے تک پہنچتا ہے۔

(الف) اگر ہر گروہ کی ابتدائی مادہ آبادی 2600 ہو تب 4، 8 اور 12 سال بعد ان گروہوں کی مادہ آبادی کیا ہو گی؟ (ب) ان گروہوں کی ابتدائی آبادی کیا ہونے سے تمام گروہوں میں تبدیلی کی تناسب برابر ہو گی؟ یہ تناسب کیا ہو گی؟

حل: (الف) ابتدائی طور پر  $x_0 = [2600, 2600, 2600]^T$  ہے۔ چار سال بعد گروہ بندی درج ذیل ہو گی۔

$$x_4 = Lx_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2600 \\ 2600 \\ 2600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7020 \\ 1560 \\ 780 \end{bmatrix}$$

اسی طرح آٹھ سال بعد آبادی  $x_8 = Lx_4 = L^2x_0 = [3900, 4212, 468]^T$  اور بارہ سال بعد آبادی  $x_{12} = Lx_8 = L^3x_0 = [9875, 2340, 1264]^T$  ہو گی۔

(ب) تناسب تبدیلی آبادی دریافت کرنے کی خاطر ہمیں ایسا آگنی سمتیہ  $x$  درکار ہے جو  $Lx = \lambda x$  پر پورا اترتا ہو جہاں  $\lambda > 1$  آبادی میں اضافے کے تناسب اور  $\lambda < 1$  آبادی میں کمی کے تناسب کو ظاہر کرے گا۔ امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.38\lambda + 0.072 = 0$$

جس کے آگنی اقدار  $\frac{6}{5}$ ،  $-\frac{\sqrt{30}+6}{10}$  اور  $\frac{\sqrt{30}-6}{10}$  ہیں جنہیں کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ آگنی قدر  $\lambda = \frac{6}{5} = 1.2$  آبادی میں اضافے کو ظاہر کرتی ہے جس کا مطابقتی آگنی سمتیہ درج ذیل ہے

$$Lx - \lambda x = \begin{bmatrix} -1.2 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies x = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جہاں  $x_3 = 1$  چنتے ہوئے  $x_2 = 4$  اور  $x_1 = 8$  حاصل کیا گیا ہے۔ ابتدائی کل آبادی  $3 \times 2600 = 7800$  حاصل کرنے کی خاطر ہم اس آگنی سمتیہ کو  $\frac{7800}{8+4+1} = 600$  سے ضرب دیتے ہوئے ابتدائی آبادی درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$600[8 \ 4 \ 1]^T = [4800 \ 2400 \ 600]^T$$

آبادی میں تبدیلی کا تناسب 1.2 فی چار سال ہو گا۔

### سوالات

سوال 9.18 تا سوال 9.23 میں تبدیلی شکل  $y = Ax$  کا قالب  $A$  دیا گیا ہے۔ صدر سمتیں اور ان کی مطابقتی سکڑاو یا پھیلاؤ کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.18:  $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  جوابات:  $45^\circ$ ,  $[1 \ 1]^T$ ,  $7$ ;  $-45^\circ$ ,  $[1 \ -1]^T$ ,  $3$ ;

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.19:}$$

$$\text{جوابات: } -3.23, [1 \ -1.529]^T, -56.8^\circ; \quad 14.23, [1 \ 0.654]^T, 33.2^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.20:}$$

$$\text{جوابات: } 1 - 2\sqrt{2}, [1 \ -\sqrt{2}]^T, -54.7^\circ; \quad 1 + 2\sqrt{2}, [1 \ \sqrt{2}]^T, 54.7^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 43 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.21:}$$

$$\text{جوابات: } 7 - \sqrt{34}, [1 \ \frac{5-\sqrt{34}}{3}]^T, -15.5^\circ; \quad 7 + \sqrt{34}, [1 \ \frac{5+\sqrt{34}}{3}]^T, 74.5^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.22:}$$

$$\text{جوابات: } 2, [1 \ -1]^T, -45^\circ; \quad 8, [1 \ 5]^T, 78.7^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 1.25 & 0.45 \\ 0.75 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.23:}$$

$$\text{جوابات: } 1.02, [1 \ -0.507]^T, -26.9^\circ; \quad 2.73, [1 \ 3.285]^T, 73.1^\circ$$

سوال 9.24 تا سوال 9.26 میں دیے گئے امکانی شماریاتی عمل کا تحدیدی حال دریافت کریں۔

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.24:}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 5 & 8 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.25:}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.26:}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 29 & 27 & 49 \end{bmatrix}^T$$

سوال 9.27 اور سوال 9.28 میں لڑی نمونے کا قالب  $L$  دیا گیا ہے (مثال 9.8)۔ نمونہ آبادی کا تناسب دریافت کریں۔

$$\begin{bmatrix} 0 & 3.45 & 0.6 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.27}$$

جواب:  $\frac{9}{5}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.28}$$

جواب: 2

سوال 9.29 تا سوال 9.31 لیونٹف نمونہ<sup>14</sup> برائے مدخل و مخرج پر مبنی ہیں۔

سوال 9.29: لیونٹف مدخل و مخرج نمونہ<sup>15</sup> صنعت کی پیداوار اور اس کے اخراجات کا تعلق بیان کرتا ہے۔ فرض کریں کہ تین صنعتوں کی پیداوار بھی صنعت استعمال کرتے ہیں اور اس تعلق کو درج ذیل  $3 \times 3$  قالب صرف<sup>16</sup> پیش کرتا ہے

$$A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

جہاں  $a_{jk}$  صنعت  $k$  کی پیداوار کی وہ تناسب ہے جو صنعت  $j$  خرید کر استعمال کرتی ہے۔ فرض کریں کہ صنعت  $j$  کی کل پیداوار کی آمدن  $p_j$  ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ ہر صنعت کی اخراجات اس صنعت کی آمدی کے برابر ہو۔ اس کو بطور مسئلہ  $Ap = p$  لکھا جاسکتا ہے جہاں  $p = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T$  ہے۔ ایسا  $p$  دریافت کریں کہ  $p_1$ ،  $p_2$  اور  $p_3$  غیر منفی ہوں۔

جواب:  $c[10 \ 18 \ 25]^T$  جہاں  $c$  مستقل ہے۔

سوال 9.30: ثابت کریں کہ سوال 9.29 کے قالب صرف کے ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی (1) ہو گا اور اس قالب صرف کا آگنی قدر بھی اکائی ہو گا۔

<sup>14</sup> Leontief model

<sup>15</sup> روس کے ویلی ویلی ویلیونٹ [1906-1999] نے یہ نمونہ پیش کر کے نوبل انعام حاصل کیا۔

<sup>16</sup> consumption matrix

سوال 9.31: آزاد لیونٹ نمونے میں پیداوار کا کچھ حصہ یہی صنعت استعمال کرتے ہیں جبکہ باقی حصہ فروخت کیا جاتا ہے۔ یوں  $Ax = x$  (سوال 9.29) کی بجائے،  $x - Ax = y$  ہو گا جہاں  $x$  پیداوار ہے جبکہ  $Ax$  وہ حصہ ہے جو یہی صنعتیں خود استعمال کرتی ہیں لہذا  $y$  وہ حصہ ہے جس کو فروخت کیا جاسکتا ہے۔

قالب مانگ  $y = [0.1 \ 0.3 \ 0.1]^T$  کو پورا کرنے کے لئے قالب پیداوار  $x$  دریافت کریں جہاں قالب صرف درج ذیل ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$x = (I - A)^{-1}y = [0.6747 \ 0.7128 \ 0.7543]^T \text{ جواب:}$$

سوال 9.32 تا سوال 9.35 آگنی قدر مسائل کے عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں جنہیں آپ نے ثابت کرنا ہے۔ ان مسائل میں فرض کریں کہ  $n \times n$  قالب  $A$  کے آگنی اقدار  $\lambda_1$  تا  $\lambda_n$  ہیں جو غیر منفرد ہو سکتے ہیں۔ سوال 9.32: مرکزی وتر کے ارکان کا مجموعہ اور آگنی اقدار کا مجموعہ برابر ہیں۔

سوال 9.33: طیفی منتقلی  $A - kI$  کے آگنی اقدار  $\lambda_1 - k$  تا  $\lambda_n - k$  ہیں جبکہ اس کے آگنی سمتیات وہی ہیں جو  $A$  کے آگنی سمتیات ہیں۔

سوال 9.34: غیر سمتی مضرب، طاقت  $kA$  کے آگنی اقدار  $k\lambda_1$  تا  $k\lambda_n$  ہیں جبکہ  $A^m$  جہاں  $m = 1, 2, \dots$  ہے کے آگنی اقدار  $\lambda_1^m$  تا  $\lambda_n^m$  ہیں۔ دونوں صورتوں میں آگنی سمتیات وہی ہیں جو  $A$  کے آگنی سمتیات ہیں۔

سوال 9.35: کثیر رکنی  $p(A) = k_m A^m + k_{m-1} A^{m-1} + \dots + k_1 A + k_0 I$  کے آگنی اقدار درج ذیل ہیں

$$p(\lambda_j) = k_j \lambda_j^m + k_{m-1} \lambda_j^{m-1} + \dots + k_1 \lambda_j + k_0$$

جہاں  $j = 1, 2, \dots$  ہے جبکہ اس کثیر رکنی کے آگنی سمتیات وہی ہیں جو  $A$  کے آگنی سمتیات ہیں۔ (سوال 9.34 کے نتائج استعمال کریں۔)

## 9.3 تشاکی، منحرف تشاکی اور قائمہ الزاویہ قالب

حقیقی چکور قالب کی تین اقسام پر یہاں غور کیا جائے گا جن کی غیر معمولی خصوصیات پائی جاتی ہیں۔ تشاکی اور منحرف تشاکی قالب کا حصہ 8.2 میں ذکر ہو چکا ہے۔

تعریف: تشاکی، منحرف تشاکی اور قائمہ الزاویہ قالب ایسا حقیقی چکور قالب  $A = [a_{jk}]$  جو تبدیلی محل سے تبدیل نہیں ہوتا تشاکی<sup>18</sup> قالب کہلاتا ہے۔

$$(9.9) \quad A^T = A \implies [a_{kj}] = [a_{jk}]$$

ایسا حقیقی چکور قالب  $A = [a_{jk}]$  جس کا تبدیل محل اس قالب کا منفی ہو منحرف تشاکی<sup>19</sup> قالب کہلاتا ہے۔

$$(9.10) \quad A^T = -A \implies [a_{kj}] = -[a_{jk}]$$

ایسا حقیقی چکور قالب  $A = [a_{jk}]$  جس کا تبدیل محل اس قالب کا معکوس ہو قائمہ الزاویہ<sup>20</sup> قالب کہلاتا ہے۔

$$(9.11) \quad A^T = A^{-1}$$

مثال 9.9: تشاکی، منحرف تشاکی اور قائمہ الزاویہ قالب آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل میں تشاکی، منحرف تشاکی اور قائمہ الزاویہ قالب کی پہچان کریں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

کیا آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر منحرف تشاکی قالب کے مرکزی وتر کے تمام اجزاء صفر ہوں گے؟

symmetric<sup>18</sup>  
skew-symmetric<sup>19</sup>  
orthogonal<sup>20</sup>

کسی بھی حقیقی چکور قالب کو تشاکلی قالب  $R$  اور منحرف تشاکلی قالب  $S$  کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے جہاں تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب درج ذیل ہیں۔

$$(9.12) \quad R = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad S = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

مثال 9.10: قالب بطور تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = R + S = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مسئلہ 9.4: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کے آگنی اقدار  
(الف) تشاکلی قالب کے آگنی اقدار حقیقی ہوں گے۔  
(ب) منحرف تشاکلی قالب کے آگنی اقدار خیالی یا صفر ہوں گے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت اسی باب میں آگے پیش کیا جائے گا۔

مثال 9.11: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کے آگنی اقدار

درج ذیل تشاکلی قالب  $R$  کے آگنی اقدار  $-2$  اور  $4$  ہیں جبکہ منحرف تشاکلی قالب  $S$  کے آگنی اقدار  $-3i$  اور  $3i$  ہیں۔ قالب  $C$  نا تشاکلی اور نا منحرف تشاکلی ہے جبکہ اس کے آگنی اقدار  $0$  اور  $4$  ہیں۔ مسئلہ 9.4 ایسے قالب کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے۔

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

قائمہ الزاویہ تبادلے اور قائمہ الزاویہ قالب

قائمہ الزاویہ تبادلے سے مراد درج ذیل ہے جہاں  $A$  قائمہ الزاویہ قالب ہے۔

$$(9.13) \quad y = Ax$$

قائمہ الزاویہ تبادلہ  $R^n$  میں ہر سمتیہ  $x$  کی جگہ  $R^n$  میں سمتیہ  $y$  مقرر کرتا ہے۔ مثال کے طور پر سطح میں گردش، قائمہ الزاویہ تبادلے سے یعنی:

$$(9.14) \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے سطح یا تین بعدی فضا میں قائمہ الزاویہ تبادلے گردش کو ظاہر کرتا ہے (اور ساتھ ہی بالترتیب کسی خط یا سطح میں انعکاس بھی ممکن ہے)۔

قائمہ الزاویہ قالب کی اہمیت درج ذیل کی بنا ہے۔ مسئلہ 9.5: اندرونی ضرب کی عدم تغیر  $R^n$  میں سمتیات  $a$  اور  $b$  کے اندرونی ضرب کی قیمت کو قائمہ الزاویہ تبادلے برقرار رکھتا ہے جہاں اندرونی ضرب درج ذیل ہے۔

$$(9.15) \quad a \cdot b = a^T b = [a_1 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

یوں  $n \times n$  قائمہ الزاویہ قالب  $A$  اور  $R^n$  میں کسی بھی  $a$ ،  $b$  اور  $u = Aa$ ،  $v = Ab$  کی صورت میں  $u \cdot v = a \cdot b$  ہوگا۔

اس طرح  $R^n$  میں ہر سمتیہ  $a$  کی لمبائی یا معیار کو قائمہ الزاویہ تبادلے برقرار رکھتا ہے جہاں سمتیہ کی لمبائی یا معیار درج ذیل ہے۔

$$(9.16) \quad \|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^T a}$$



ثبوت: فرض کریں کہ  $A$  قائمہ الزاویہ ہے اور  $u = Aa$  ،  $v = Ab$  ہیں۔ اب صفحہ 578 پر مساوات 8.23 کے تحت  $(Aa)^T = a^T A^T$  ہو گا جبکہ مساوات 9.11 کے تحت  $A^T A = A^{-1} A = I$  ہو گا۔ اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.17) \quad u \cdot v = u^T v = (Aa)^T Ab = a^T A^T Ab = a^T Ib = a^T b = a \cdot b$$

اس میں  $b = a$  پر کرنے سے  $\|a\|$  عدم تغیر ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.6: صف اور قطار کی معیاری قائمیت  
حقیقی چکور قالب صرف اور صرف اس صورت قائمہ الزاویہ ہو گا جب اس کے سمتیات قطار  $a_1$  تا  $a_n$  (اور سمتیات صف) معیاری قائمہ الزاویہ ہوں یعنی:

$$(9.18) \quad a_j \cdot a_k = a^T a_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ  $A$  قائمہ الزاویہ ہے۔ یوں  $A^{-1} A = A^T A = I$  ہو گا جس کو سمتیات قطار  $a_1$  تا  $a_n$  کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(9.19) \quad I = A^{-1} A = A^T A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{bmatrix}$$

چونکہ  $n \times n$  اکائی قالب  $I$  کا مرکزی وتر اکائی جبکہ باقی تمام اجزاء صفر ہوتے ہیں لہذا مساوات 9.19 کا دائیں ہاتھ مساوات 9.18 دیتا ہے۔ مساوات 9.11 کے تحت قائمہ الزاویہ قالب کا معکوس بھی قائمہ الزاویہ ہو گا۔ اب  $A^{-1} (= A^T)$  کے سمتیات قطار  $A$  کے سمتیات صف ہیں لہذا  $A$  کے سمتیات صف بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

(ب) اس کے برعکس اگر  $A$  کے سمتیات قطار مساوات 9.18 پر پورا اترتے ہوں تب مساوات 9.19 دائیں ہاتھ قالب کے مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر (0) ہوں گے جبکہ وتری ارکان اکائی (1) ہوں گے لہذا  $A^T A = I$  ہو گا۔ اسی طرح  $AA^T = I$  ہو گا۔ اس سے مراد  $A^T = A^{-1}$  ہے چونکہ

آخر کی طرح  $A$  کے سمتیت قطار بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔  
 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$  ہے جبکہ  $A^{-1}$  یوں  $A$  قائمہ الزاویہ ہو گا۔ ثبوت کے حصہ - الف کے

مسئلہ 9.7: قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع  
 قائمہ الزاویہ قالب کی مقطع کی قیمت  $+1$  یا  $-1$  ہو گی۔

ثبوت: صفحہ 661 پر مسئلہ 8.19 کے تحت درج ذیل ہے

$$(AB) \text{ مقطع} = (A \text{ مقطع})(B \text{ مقطع})$$

جبکہ صفحہ 639 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت  $A^T \text{ مقطع} = A \text{ مقطع}$  ہے لہذا قائمہ الزاویہ قالب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(9.20) \quad 1 = I \text{ مقطع} = (AA^{-1}) \text{ مقطع} = (AA^T) \text{ مقطع} = (A \text{ مقطع})(A^T \text{ مقطع}) = (A \text{ مقطع})^2$$

مثال 9.12: مسئلہ 9.7  
 مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع  $-1$  ہے جبکہ مساوات 9.14 کے قالب کا مقطع  $+1$  ہے۔

مسئلہ 9.8: قائمہ الزاویہ قالب کے آگنی اقدار  
 قائمہ الزاویہ قالب کے آگنی اقدار حقیقی یا جوڑی دار مخلوط ہوں گے جن کی حتمی قیمت اکائی ہو گی۔

ثبوت: چونکہ حقیقی قالب کی امتیازی کثیر رکنی کے عددی سر حقیقی ہوتے ہیں لہذا اس کے آگنی اقدار (یعنی صفر) مسئلے کے تحت ہوں گے۔ یوں مسئلے کا پہلا حصہ کسی بھی حقیقی قالب کے لئے درست ہے۔ آگنی قدر کی حتمی قیمت اکائی کے برابر  $|\lambda| = 1$  ہونے کو اسی باب میں آگے پیش کیا جائے گا۔

مثال 9.13: مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کی امتیازی کثیر رکنی درج ذیل ہے۔

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

چونکہ مخلوط جذر صرف جوڑی دار ممکن ہیں لہذا اس کثیر رکنی کا ایک جذر حقیقی ہو گا جو مسئلہ 9.7 کے تحت  $+1$  یا  $-1$  ہو گا۔ ان قیمتوں کو کثیر رکنی میں پر کرتے ہوئے پہلا جذر یعنی آگنی اقدار  $\lambda = -1$  ملتا ہے۔ کثیر رکنی کو  $\lambda + 1$  سے تقسیم کرتے ہوئے  $0 = (\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + 1)$  ملتا ہے جس کے جذر  $\frac{5+i\sqrt{11}}{6}$  اور  $\frac{5-i\sqrt{11}}{6}$  ہیں جن کی حتمی قیمت 1 ہے۔

### سوالات

سوال 9.36 تا سوال 9.44 میں قالب تشاکلی، منحرف تشاکلی یا قائمہ الزاویہ ہیں؟ ان کا طیف دریافت کریں جو مسئلہ 9.4 اور مسئلہ 9.8 پر پورا اتریں گے۔ آگنی سمتیات بھی معلوم کریں۔

سوال 9.36:  $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$  : جوابات: قائمہ الزاویہ،  $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ،  $\frac{4+i3}{5}$ ،  $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ،  $\frac{4-i3}{5}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.37}$$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے،  $2 - i3, [1 \quad -i]^T$ ;  $2 + i3, [1 \quad i]^T$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.38}$$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے،  $a - ib, [1 \quad -i]^T$ ;  $a + ib, [1 \quad i]^T$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.39}$$

جوابات: تشاکی،  $4, [1 \quad 0 \quad 0]^T$ ;  $1, [0 \quad 1 \quad \frac{1}{2}]^T$ ;  $6, [0 \quad 1 \quad -2]^T$

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.40}$$

جوابات: تشاکی،  $[0 \quad 1 \quad -1]^T$ ;  $a - b, [1 \quad 0 \quad -1]^T$ ;  $a + 2b, [1 \quad 1 \quad 1]^T$

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.41}$$

جوابات: منحرف تشاکی،  $0, [0 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{9}{20}]^T$ ;  $\pm 25i, [1 \quad \pm \frac{16+i15}{15} \quad \pm \frac{12-i20}{15}]^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.42}$$

جوابات: تینوں قسم نہیں،  $1, [1 \quad 0 \quad 0]^T$ ;  $\sin \theta \pm i \cos \theta, [0 \quad 1 \quad \pm i]^T$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.43}$$

جوابات: قائم الزاویہ،  $1, [1 \quad 1 \quad -3]^T$ ;  $\frac{3 \pm i\sqrt{11}}{10}, [1 \quad \frac{-1 \pm i3\sqrt{11}}{10} \quad \frac{7 \pm i5\sqrt{11}}{18}]^T$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.44:}$$

جوابات: قائمہ الزاویہ،  $[0 \ 1 \ 0]^T$ ،  $1$ ،  $[1 \ 0 \ \pm i]^T$ ،  $\pm i$ ،

سوال 9.45 تا سوال 9.48 عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں۔

سوال 9.45: مجموعہ

کیا  $A + B$  کے آگنی اقدار  $A$  اور  $B$  کے آگنی اقدار کا مجموعہ ہوں گے۔

جواب: نہیں

سوال 9.46: ثبوت

ثابت کریں کہ تشاکلی قالب کے منفرد آگنی اقدار کے مطابقتی آگنی سمتیات قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ مثال دیں۔

سوال 9.47: منحرف تشاکلی قالب

ثابت کریں کہ منحرف تشاکلی قالب کا معکوس بھی منحرف تشاکلی قالب ہو گا۔

$$A^{-1} = (-A^T)^{-1} = -(A^{-1})^T \quad \text{جواب:}$$

سوال 9.48: قائمہ الزاویہ قالب

کیا  $3 \times 3$  منحرف تشاکلی قائمہ الزاویہ قالب موجود ہیں؟

## 9.4 آگنی اساس، وتری بنانا، دودرجی صورت

اب تک آگنی اقدار کی خصوصیات پر غور کیا گیا۔ آئیں اب آگنی سمتیات کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔  $n \times n$  قالب  $A$  کے آگنی سمتیات کبھی کبھار فضا  $R^n$  کی اساس ہوتے ہیں لہذا  $R^n$  میں کسی بھی سمتیہ  $x$  کو ان آگنی سمتیات  $x_1, \dots, x_n$  کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے مثلاً:

(9.21)

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

ان آگنی سمتیات کے مطابقتی آگنی اقدار (جو ضروری نہیں کہ منفرد ہوں) کو  $\lambda_1$  تا  $\lambda_n$  سے ظاہر کرتے ہوئے  $Ax_j = \lambda_j x_j$  لکھا جاسکتا ہے لہذا تبادلہ  $y = Ax$  درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} y = Ax &= A(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n) \\ (9.22) \quad &= c_1 Ax_1 + c_2 Ax_2 + \cdots + c_n Ax_n \\ &= c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + c_n \lambda_n x_n \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $A$  کا کسی بھی سمتیہ  $x$  پر پیچیدہ عمل اساس کی مدد سے غیر سمتی ضرب کی سادہ عمل میں تبدیل ہو گیا ہے۔ یہی آگنی اساس کی افادیت ہے۔

اگر تمام آگنی اقدار منفرد ہوں تب آگنی سمتیات ضرور آگنی اساس ہوں گے۔

مسئلہ 9.9: آگنی سمتیات کی اساس

اگر  $n \times n$  قالب  $A$  کے  $n$  منفرد آگنی اقدار ہوں تب  $R^n$  کی اساس  $A$  کے آگنی سمتیات  $x_1$  تا  $x_n$  ہوں گے۔

ثبوت: ہمیں صرف اتنا ثابت کرنا ہے کہ  $x_1$  تا  $x_n$  خطی طور غیر تابع ہیں۔ فرض کریں کہ ایسا نہیں ہے اور صرف  $r$  عدد آگنی سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔ یوں  $r < n$  ہوگا اور سمتیات  $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$  کا سلسلہ خطی طور تابع ہوگا۔ یوں ایسے غیر سمتی مستقل  $c_1$  تا  $c_{r+1}$  (جن میں سے کم از کم ایک مستقل غیر صفر ہو) موجود ہوں گے جو درج ذیل مساوات پر پورا اتریں گے (حصہ 8.4)۔

$$(9.23) \quad c_1 x_1 + \cdots + c_{r+1} x_{r+1} = 0$$

دونوں اطراف کو  $A$  سے ضرب دے کر  $Ax_j = \lambda_j x_j$  استعمال کرتے ہیں۔

$$(9.24) \quad A(c_1 x_1 + \cdots + c_{r+1} x_{r+1}) = c_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + c_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1} = A0 = 0$$

درج بالا میں آخری رکن کو ہٹانے کی خاطر مساوات 9.23 کو  $\lambda_{r+1}$  سے ضرب دیتے ہوئے مساوات 9.24 سے منفی کرتے ہیں۔

$$(9.25) \quad c_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) x_1 + \cdots + c_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) x_r = 0$$

اب چونکہ  $x_1$  تا  $x_r$  خطی طور غیر تابع ہیں لہذا مساوات 9.25 صرف اس صورت ممکن ہوگا جب اس کے عددی سر صفر ہوں یعنی  $c_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = 0$  تا  $c_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$  ہوں۔ اب چونکہ تمام آگنی

اقدار منفرد ہیں لہذا اس سے  $c_1 = 0$  تا  $c_r = 0$  ملتے ہیں۔ اس حقیقت کے تحت مساوات 9.23 سے  $c_{r+1}x_{r+1} = 0$  ملتا ہے اور چونکہ آگنی سمتیہ صفر نہیں ہو سکتا لہذا  $c_{r+1} = 0$  ہو گا۔ اب مساوات 9.23 لکھتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ اس میں کم از کم ایک مستقل غیر صفر ہے جبکہ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ تمام مستقل صفر ہیں۔ یہ تضاد صرف اس صورت دور کیا جاسکتا ہے جب تمام آگنی سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں۔

مثال 9.14: آگنی اساس۔ غیر منفرد آگنی اقدار۔ عدم موجودگی

قالب  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  کے آگنی اقدار 6 اور 2 اور مطابقتی آگنی سمتیات کی اساس  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T$  اور  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T$  ہیں۔

بعض اوقات غیر منفرد آگنی اقدار بھی آگنی سمتیات کی اساس دیتے ہیں مثلاً مثال 9.2۔

اس کے برعکس عین ممکن ہے کہ قالب کی خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد اتنی نہ ہو کہ یہ اساس دیں۔ مثلاً  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  کا صرف ایک عدد آگنی سمتیہ  $\begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix}^T$  پایا جاتا ہے جہاں  $k$  غیر صفر اختیاری ہے اور ایک عدد سمتیہ نا کافی ہے۔

حقیقت میں آگنی اساس مسئلہ 9.9 سے نرم شرائط کی صورتوں میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔ درج ذیل ایسی ایک صورت ہے۔

مسئلہ 9.10: تشاکلی قالب

تشاکلی قالب کے آگنی سمتیات  $R^n$  کی معیاری قائمہ الزاویہ اساس ہے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 9.15: مثال 9.14 میں پہلے قالب کی معیاری آگنی سمتیات کی اساس  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  اور  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  ہے۔

قالبوں کی متشابہت۔ وتری بنانا

آگنی اساس کی مدد سے قالب  $A$  کی تخفیف سے ایسا وتری قالب حاصل کیا جاسکتا ہے جس کے وتری اجزاء قالب  $A$  کے آگنی اقدار ہوں۔ ایسا درج ذیل متشابہت تبادله کے ذریعہ سے کیا جاتا ہے۔

تعریف: متشابہ قالب۔ متشابہت تبادله

ایسا  $n \times n$  قالب  $\hat{A}$  جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو،  $n \times n$  قالب  $A$  کا متشابہ قالب<sup>21</sup> کہلاتا ہے۔

$$(9.26) \quad \hat{A} = P^{-1}AP$$

یہاں  $n \times n$  قالب  $P$  کوئی غیر نادر قالب ہے۔  $A$  سے  $\hat{A}$  حاصل کرنے کے اس عمل کو متشابہت تبادله<sup>22</sup> کہتے ہیں۔

متشابہت تبادله کی خاصیت ہے کہ یہ قالب  $A$  کے آگنی اقدار برقرار رکھتا ہے۔

مسئلہ 9.11: متشابہ قالب کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات

$A$  کے آگنی اقدار ہی اس کے متشابہ قالب  $\hat{A}$  کے آگنی اقدار ہوں گے۔

مزید اگر  $A$  کا آگنی سمتیہ  $x$  ہو تب  $\hat{A}$  کا اسی آگنی قدر کا مطابقتی آگنی سمتیہ  $y = P^{-1}x$  ہو گا۔

ثبوت:  $Ax = \lambda x$  (اور  $x \neq 0$  آگنی قدر ہے) سے  $P^{-1}Ax = \lambda P^{-1}x$  ملتا ہے جس میں  $I = PP^{-1}$  پر کرتے ہوئے درج حاصل ہوتا ہے۔

$$P^{-1}Ax = P^{-1}AIX = P^{-1}APP^{-1}x = (P^{-1}AP)P^{-1}x = \hat{A}(P^{-1}x) = \lambda P^{-1}x$$

یوں  $\hat{A}$  کا آگنی قدر  $\lambda$  اور مطابقتی آگنی سمتیہ  $P^{-1}x$  ہے۔ درحقیقت  $P^{-1}x \neq 0$  ہے کیوں کہ  $P^{-1}x = 0$  سے  $x = Px = PP^{-1}x = P0 = 0$  لکھا جاسکتا ہے جو تضاد ہے چونکہ  $x \neq 0$  ہے۔

<sup>21</sup> similar matrix

<sup>22</sup> similarity transformation



مثال 9.16: متشابہ قابلوں کے آگنی اقدار اور آگنی سمتیات فرض کریں کہ  $A$  اور  $P$  درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

یوں  $\hat{A}$  درج ذیل ہو گا جہاں  $-7 = \text{مقطع } P \text{ لیتے ہوئے } P^{-1}$  کو مساوات 8.68 کی مدد سے حاصل کیا گیا ہے۔

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\hat{A}$  کی امتیازی مساوات  $(8 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$  سے اس کے آگنی اقدار  $\lambda_1 = 8$  اور  $\lambda_2 = 1$  ملتے ہیں۔  $A$  کی امتیازی مساوات  $\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0$  سے بھی آگنی اقدار  $\lambda_1 = 8$  اور  $\lambda_2 = 1$  ملتے ہیں جو مسئلہ 9.11 کے پہلے حصے کے عین مطابق ہے۔

$(A - \lambda I) = 0$  کے پہلے حصے  $(3 - \lambda)x_1 + 5x_2 = 0$  میں  $\lambda = \lambda_1 = 8$  پر کرنے سے  $-5x_1 + 5x_2 = 0$  یعنی  $x_2 = x_1$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں  $x_1 = 1$  چنتے ہوئے  $x_2 = 1$  ملتا ہے لہذا  $x_1 = [1 \ 1]^T$  ہو گا۔ اسی طرح  $\lambda_2 = 1$  پر کرنے سے  $2x_1 + 5x_2 = 0$  حاصل ہو گا جس میں  $x_1 = 5$  چنتے ہوئے  $x_2 = -2$  یعنی  $x_2 = [5 \ -2]^T$  حاصل ہوتا ہے۔ ان سے  $\hat{A}$  کے آگنی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$y_1 = P^{-1}x_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = P^{-1}x_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

آپ تسلی کر لیں کہ یہی  $\hat{A}$  کے آگنی سمتیات ہیں۔

درج بالا مثال میں  $P$  کے قطار،  $A$  کے آگنی سمتیات ہیں جس سے حاصل وتری قالب  $\hat{A}$  کے ارکان،  $A$  کے آگنی اقدار ہیں۔ یوں ہم کسی بھی قالب  $A$  کو موزوں متناہت تبادلے سے ایسے وتری قالب میں تبدیل کر سکتے ہیں جس کے وتری ارکان،  $A$  کے آگنی اقدار ہوں۔

مسئلہ 9.12: قالب کو وتری بنانا

اگر  $n \times n$  قالب  $A$  کے آگنی سمتیات کی اساس ہو تب

$$(9.27) \quad D = X^{-1}AX$$

وتری ہو گا جس کے مرکزی وتر کے ارکان  $A$  کے آگنی اقدار ہوں گے۔ یہاں  $X$  ایسا قالب ہے جس کے قطار  $A$  کے آگنی سمتیات ہیں۔ مزید درج ذیل بھی ہو گا۔

$$(9.28) \quad D^m = X^{-1}A^mX \quad (m = 2, 3, \dots)$$

ثبوت: فرض کریں کہ  $A$  کے آگنی سمتیات  $x_1, \dots, x_n$  فضا  $R^n$  کی اساس ہیں اور ان کے مطابق آگنی اقدار بالترتیب  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ہیں لہذا  $Ax_1 = \lambda_1 x_1, \dots, Ax_n = \lambda_n x_n$  ہو گا۔ یوں  $X = [x_1, \dots, x_n]$  کا درجہ مسئلہ 8.4 کے تحت  $n$  ہو گا لہذا مسئلہ 8.16 کے تحت  $X^{-1}$  موجود ہو گا۔ ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ درج ذیل درست ہے

$$(9.29) \quad AX = A[x_1, \dots, x_n] = [Ax_1, \dots, Ax_n] = [\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n] = XD$$

جہاں  $D$  کو مساوات 9.27 پیش کرتی ہے۔ ہم بائیں ہاتھ دوسری مساوات کو  $n = 2$  کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} AX &= A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تیسری مساوات  $Ax_k = \lambda_k x_k$  سے حاصل ہوتی ہے۔ آپ اسی طرح پہلے  $n = 2$  اور بعد میں عمومی  $n$  کے لئے چوتھی مساوات کو ثابت کر سکتے ہیں۔

باب 9. خطی الجبرا: آگنی قدر مسائل قالب

مساوات 9.29 کو دائیں  $X^{-1}$  سے ضرب کرتے ہوئے مساوات 9.27 حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ مساوات 9.27 متناہت تبادلہ ہے لہذا مسئلہ 9.11 کے تحت  $A$  کے آگنی اقدار ہی  $D$  کے آگنی اقدار ہوں گے۔ مساوات 9.28 کو  $m = 2$  کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

$$D^2 = DD = (X^{-1}AX)(X^{-1}AX) = X^{-1}A(XX^{-1})AX \\ = X^{-1}AAX = X^{-1}A^2X$$

مثال 9.17: قالب کو وتری بنانا  
درج ذیل قالب کو وتری بنائیں۔

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$A$  کی امتیازی مقطع سے اس کی امتیازی کثیر رکنی  $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 27\lambda - 90 = 0$  حاصل ہوتی ہے جس کے جذر  $\lambda_1 = 6$ ،  $\lambda_2 = 3$  اور  $\lambda_3 = -5$  ہیں۔ مساوات  $(A - \lambda I)x = 0$  میں باری باری  $\lambda_1$ ،  $\lambda_2$  اور  $\lambda_3$  پر کرتے ہوئے گاوسی اسقاط سے حل کر کے درج ذیل آگنی سمتیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ان آگنی سمتیات سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 16 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{33} & 0 & \frac{2}{33} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} \end{bmatrix}$$

$AX$  حاصل کر کے بائیں  $X^{-1}$  سے ضرب دے کر  $D$  حاصل کرتے ہیں۔

$$D = X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \frac{1}{33} & 0 & \frac{2}{33} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 36 & -\frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ 96 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

آئثار قالب

چکور  $n \times n$  قالب  $A = [a_{jk}]$  کے مرکزی وتر کے اجزاء کے مجموعے کو آئثار  $A$  کہتے<sup>23</sup> ہیں۔

$$A \text{ آئثار} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{j=1}^n a_{jj}$$

دو قالبوں کے حاصل ضرب کے آئثار کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

(9.30)

$$(AB) \text{ آئثار} = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (AB)_{jj} = (BA) \text{ آئثار}$$

لہذا ضرب میں قالبوں کی ترتیب کا آئثار پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

$A$  اور اس کے متشابہ قالب  $\hat{A} = P^{-1}AP$  کا آئثار ایک جیسا ہوگا یعنی:

$$(9.31) \quad (P^{-1}AP) \text{ آئثار} = (P^{-1}(AP)) \text{ آئثار} = ((AP)P^{-1}) \text{ آئثار} \\ = (APP^{-1}) \text{ آئثار} = (A) \text{ آئثار}$$

چونکہ متشابہ قالب  $\hat{A}$  کے مرکزی ارکان،  $A$  کے آگنی اقدار ہوتے ہیں لہذا درج بالا کے تحت آئثار  $A$  آگنی اقدار کا مجموعہ ہوگا۔

دو درجی صورتیں۔ صدر محوروں پر تبادلہ

سمتیہ  $x$  کی دو درجی صورت<sup>24</sup>  $Q$  سے مراد  $x_1, \dots, x_n$  اجزاء کی  $n^2$  ارکان پر مشتمل درج ذیل مجموعہ ہے۔

$$\begin{aligned}
 Q = x^T A x &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k \\
 &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\
 &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2
 \end{aligned}
 \tag{9.32}$$

$A = [a_{jk}]$  کو اس صورت کا عددی سر قالب کہتے ہیں۔ چونکہ ہم وتر سے ہٹ کر ارکان کے جوڑیوں کے مجموعے کو دو برابر اجزاء کی صورت میں لکھ سکتے ہیں لہذا ہم  $A$  کو تشاکلی فرض کر سکتے ہیں (درج ذیل مثال میں اس بات کی وضاحت کی گئی ہے)۔

مثال 9.18: فرض کریں کہ درج ذیل ہے۔

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_1 + 7x_2^2 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

درج بالا میں درمیانے دو ارکان کے عددی سر کا مجموعہ  $6 + 2 = 8$  ہے جس کو  $4 + 4$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں  $A$  کی جگہ مطابقتی تشاکلی قالب  $C$  استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتیجہ حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$x^T C x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 7x_2^2 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

مسئلہ 9.10 کے تحت مساوات 9.32 میں تشاکلى عددى سر قالب  $A$  کے آگنى سمتيات، معيارى قائمہ الزاویہ اساس ہیں۔ انہیں سمتیہ قطار لیتے ہوئے ہمیں ایسا قالب  $X$  ملتا ہے جو قائمہ الزاویہ ہو گا لہذا  $A^{-1} = A^T$  ہو گا۔ یوں مساوات 9.27 کو بائیں سے  $X$  اور دائیں سے  $X^{-1}$  کے ساتھ ضرب دینے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$A = XDX^{-1} = XDX^T$$

اس کو مساوات 9.32 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(9.33) \quad Q = x^T XDX^T x$$

اگر ہم  $x^T x = y$  لیں تب  $X^T = X^{-1}$  کی بنا  $X^{-1}x = y$  ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(9.34) \quad x = Xy$$

مساوات 9.33 میں  $x^T X = (X^T x)^T = y^T$  اور  $X^T x = y$  ہو گا لہذا  $Q$  کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(9.35) \quad Q = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

اس سے مسئلہ صدر محور<sup>25</sup> ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.13: مسئلہ صدر محور  
دو درجى صورت

$$(9.36) \quad Q = x^T Ax = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k \quad (a_{kj} = a_{jk})$$

میں مساوات 9.34 پر کرنے سے مساوات 9.35 میں دی گئی صدر محوری صورت یا با ضابطہ صورت<sup>26</sup> حاصل ہوتی ہے جہاں  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  تشاکلى قالب  $A$  کے آگنى اقدار ہیں (جو غیر منفرد بھی ہو سکتے ہیں) اور  $X$  ایسا قائمہ الزاویہ قالب ہے جس کے سمتیہ قطار مطابقتی (بالترتیب) آگنى سمتيات  $x_1, \dots, x_n$  ہیں۔

مثال 9.19: صدر محور پر تبادلہ۔ مخروطی حصے  
درج ذیل دو درجی صورت کس مخروطی حصے کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کا صدر محور پر تبادلہ کریں۔

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

حل: ہم  $Q = x^T A x$  لکھ سکتے ہیں جہاں  $A$  اور  $x$  درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

اس سے امتیازی مساوات  $(17 - \lambda)^2 - 15^2 = 0$  ملتا ہے جس کے جذر  $\lambda_1 = 2$  اور  $\lambda_2 = 32$  ہیں لہذا مساوات 9.36 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Q = 2y_1^2 + 32y_2^2$$

ہم دیکھتے ہیں کہ  $Q = 128$  ترخیم  $2y_1^2 + 32y_2^2 - 128 = 0$  کو ظاہر کرتا ہے یعنی:

$$\frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1$$

$x_1x_2$  محدود میں صدر محور جاننے کی خاطر ہمیں  $\lambda = \lambda_1 = 2$  اور  $\lambda = \lambda_2 = 8$  لیتے ہوئے  
سے معیاری آگنی سمتیات حاصل کر کے مساوات 9.34 کا استعمال کرنا ہوگا۔ یوں

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

سے

$$x = Xy = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ یہ  $45^\circ$  گھومنے کو ظاہر کرتی ہے۔

## سوالات

سوال 9.49 تا سوال 9.54 میں  $A$  اور  $P$  دیے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ قالب  $A$  اور متقابل قالب  $\hat{A}$  کے ایک جیسے آگنی اقدار ہیں۔ مزید اگر  $\hat{A}$  کا آگنی سمتیہ  $y$  ہو تب ثابت کریں کہ  $A$  کا آگنی سمتیہ  $x = Py$  ہو گا۔

$$\text{سوال 9.49: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = -1, 1; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}^T; \quad x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.50: } A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = 3, 2; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{11}{32} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.51: } A = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = -2, -1; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{33}{16} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.52: } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = 2, -1, 1; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.53: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = -1, 1, 0; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^T$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$



باب 9. خطی الجبرا: آگنی قدر مسئل قالب

سوال 9.54: مساوات 9.31 کے تحت کسی بھی قالب کا آثار اس قالب کے آگنی اقدار کا مجموعہ ہو گا۔ سوال 9.49 تا سوال 9.54 میں دیے گئے  $A$  کے آگنی اقدار اور آثار کا موازنہ کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ ایسا ہی ہے۔

سوال 9.55 تا سوال 9.55 میں آگنی اساس (آگنی سمتیات کی اساس) دریافت کرتے ہوئے قالب کو وتری بنائیں۔

سوال 9.55:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

جوابات:  $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

سوال 9.56:  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

جوابات:  $X = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.57:  $\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

جوابات:  $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

سوال 9.58:  $\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 30 & 13 \end{bmatrix}$

جوابات:  $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

سوال 9.59:  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

جوابات:  $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(1.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(1.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(1.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $1 + |q| + |p| = h$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

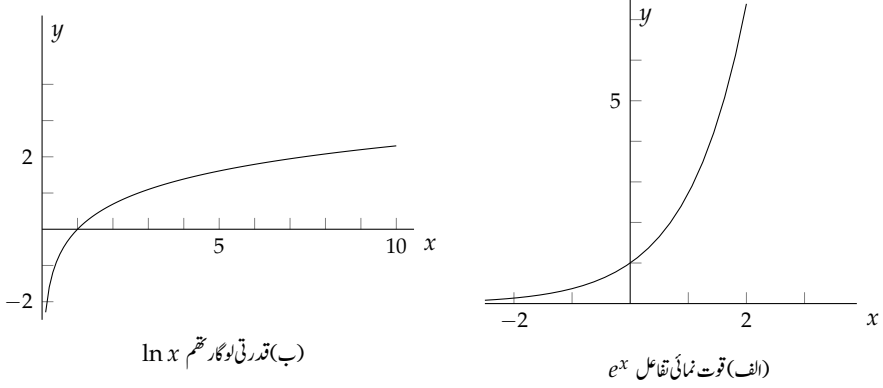
$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

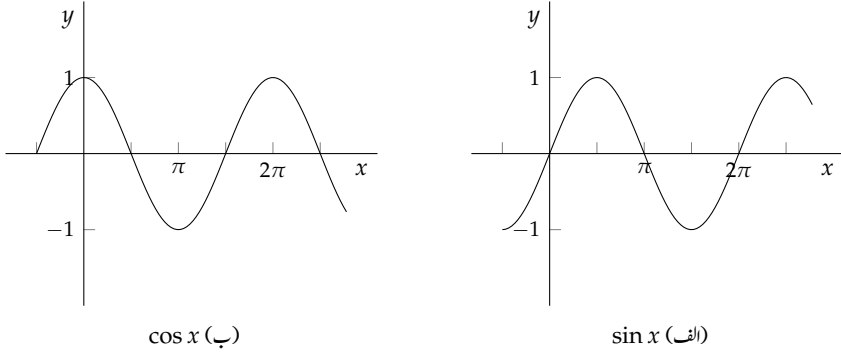
$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$





شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نما تفاعل

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}
 \end{aligned}$$

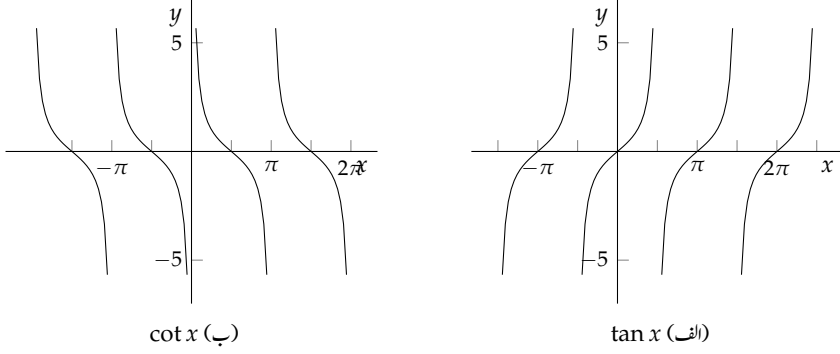
$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

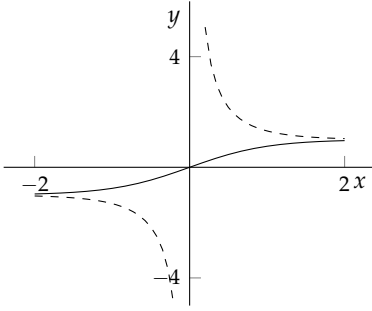
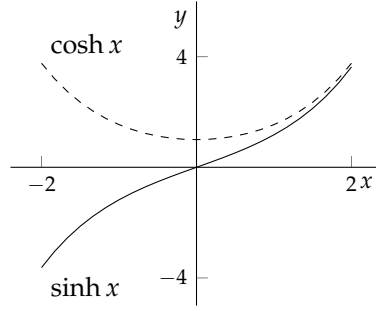
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

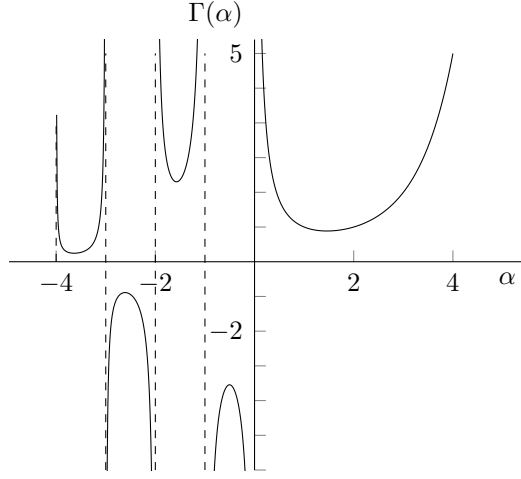
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35.ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

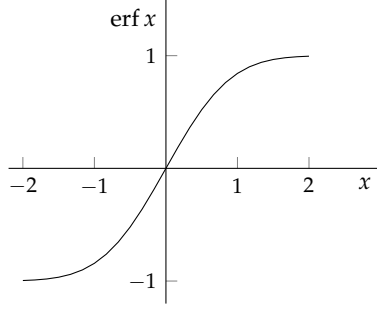
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

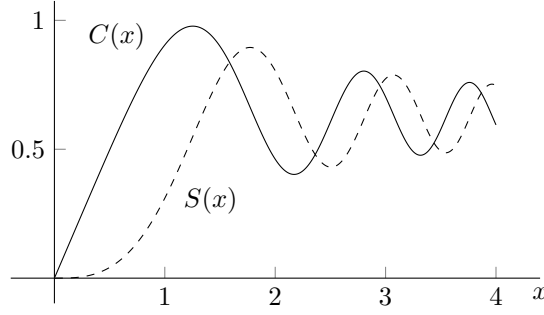
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

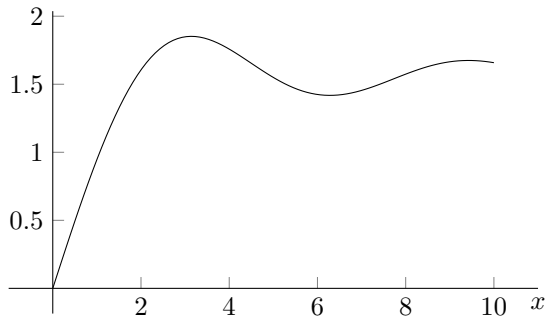
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$



