انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 14

مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیلی تفاعل

انجینئری کے کئی مسائل مخلوط تجزیہ سے با آسانی حل ہو پاتے ہیں۔ان مسئلوں کو دو بڑے گروہوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلی گروہ میں سادہ مسائل شامل ہیں جنہیں حل کرنے کے لئے کالج میں سیکھی گئی مخلوط اعداد کی الجبرا کافی ہے۔ برقی ادوار اور میکانی ارتعاش کے کئی مسائل اس نوعیت کے ہیں۔ دوسری گروہ کے لئے مخلوط تحلیلی تفاعل کا نظریہ اور اس میں استعمال کیے جانے والے انتہائی طاقتور اور شائستہ تراکیب تفصیلاً جاننا ضروری ہے۔ نظریہ حرارت، حرکیات سیال اور برقی سکون کے مسائل اس نوعیت کے ہیں۔

اس باب کے علاوہ اگلے کئی ابواب میں مخلوط تحلیلی تفاعل کے نظریہ کی بیشتر حصوں اور ان تفاعل کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں ان تفاعل کی اہمیت درج ذیل تین وجوہات کی بنا ہے۔

(الف) تحلیلی تفاعل کے حقیقی اور خیالی اجزاء، دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل ہوتے ہیں۔ یوں دو ابعادی مخفی قوہ مسائل پر تحلیلی تفاعل کے لئے بنائے گئے تراکیب کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مختلف مسائل میں درپیش کئی پیچیدہ حقیقی اور مخلوط تکملات کو مخلوط تکمل کی تراکیب سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

(پ) انجینئری حساب میں پائے جانے والے غیر بنیادی تفاعل کا بیشتر حصہ تحلیلی تفاعل پر مشتمل ہے۔مخلوط غیر تابع متغیرات کے لئے ان تفاعل کے مشاہدہ سے تفاعل کی خواص کی مفصل اور گہری سمجھ پیدا ہوتی ہے۔

موجودہ باب میں ہم مخلوط اعداد اور تحلیلی تفاعل اور ان ان کے عمومی خواص پر غور کریں گے۔باب کا دوسرا حصہ اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل کے لئے مختص ہے۔

14.1 مخلوط اعداد

تاریخی طور پر دیکھا گیا کہ کئی مساوات مثلاً

$$x^2+4=0, \quad x^2+2x+5=0$$

کو کوئی بھی حقیقی عدد مطمئن نہیں کرتا ہے۔ مخلوط اعداد کا آغاز یہیں سے ہوا۔[1]

تعریف: حقیقی اعداد x اور y کی مرتب جوڑی (x,y) کو **مخلوط عدد**[2] z کہتے ہیں جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$z=(x,y)$$

ہم x کو z کا **حقیقی حصہ**[3] اور y کو z کا **خیالی حصہ**[4] کہتے ہیں جنہیں ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$x=z_{\text{حقیقی}}, \quad y=z_{\text{خیالی}}$$

یوں حقیقی $(-7,2)=-7$ اور خیالی $(-7,2)=2$ ہوں گے۔ مزید دو مخلوط اعداد $z_1=(x_1,y_1)$ اور $z_2=(x_2,y_2)$ کی برابری کی تعریف ہم یوں کرتے ہیں کہ یہ مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں۔

مخلوط اعداد $z_1=(x_1,y_1)$ اور $z_2=(x_2,y_2)$ کا **مجموعہ** درج ذیل قاعدہ دیتا ہے

$$z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \tag{14.1}$$

جبکہ ان کا حاصل ضرب درج ذیل قاعدہ دے گا۔

$$z_1z_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1) \tag{14.2}$$

ان اعمال ریاضی پر مزید بحث آگے کی جائے گی۔

---

[1] اس مقصد کے لئے مخلوط اعداد سب سے پہلے اطالوی ریاضی دان جرولا مو کردانو [1501-1576] نے استعمال کیے جنہوں نے کعبی مساوات کے حل کا کلیہ دریافت کیا۔ مخلوط اعداد کی منظم اور عام استعمال کی بنیاد جرمنی کے ریاضی دان یوہان کارل فرڈرش گاوس نے ڈالی۔
[2] complex number
[3] real part
[4] imaginary part

روپ $z = x + iy$ میں خیالی اعداد کا اظہار

ایسا مخلوط عدد جس کا خیالی حصہ صفر کی روپ $(x, 0)$ ہو گی۔ اس طرز کے مخلوط اعداد کے لئے حقیقی اعداد کی طرح

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $(x, 0)$ کو حقیقی عدد تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں حقیقی عددی نظام کی توسیعی حالت مخلوط عددی نظام ہے۔مزید درج ذیل مخلوط عدد

$$i = (0, 1)$$

کو **خیالی اکائی**[5] کہتے ہیں۔ مساوات 14.2 کے تحت ہر حقیقی y کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$$

جبکہ مساوات 14.1 کے تحت

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

ہو گا۔یوں $(x, 0)$ کے لئے x اور $(0, y) = iy$ استعمال کرتے ہوئے

$$z = x + iy$$

لکھا جا سکتا ہے۔مخلوط اعداد کو عموماً اسی روپ میں لکھا جاتا ہے۔خیالی اکائی i کی ایک اہم خاصیت

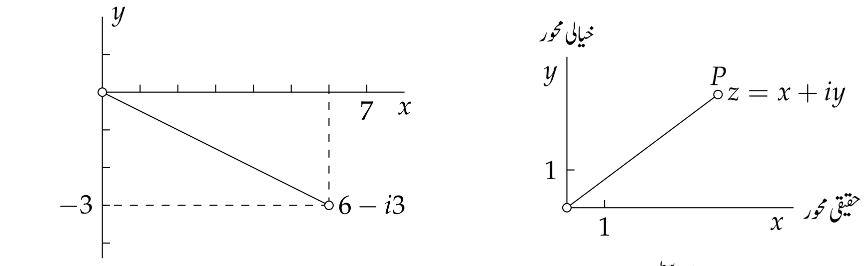
$$i^2 = -1 \tag{14.3}$$

کو مساوات 14.2 سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی: $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

مخلوط سطح

مخلوط اعداد کو سطح پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنا نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ہم دو عدد آپس میں عمودی محور چنتے ہیں۔افقی x محور کو **حقیقی محور**[6] جبکہ انتصابی y محور کو **خیالی محور**[7] تصور کیا جاتا ہے۔ دونوں محوروں پر

[5] imaginary unit
[6] real axis
[7] imaginary axis



(ب) مخلوط سطح پر $6 - i3$ کا اظہار

(الف) مخلوط سطح

شکل 14.1: مخلوط سطح اور مخلوط سطح پر مخلوط عدد کا اظہار

یکساں اکائی لمبائی استعمال کی جاتی ہے (شکل 14.1-الف)۔اس کو کارتیسی محددی نظام کہتے ہیں۔ہم اب مخلوط عدد $z = (x, y) = x + iy$ کو اس سطح پر بطور نقطہ P ظاہر کرتے ہیں جس کے محدد x اور y ہوں گے۔ایسی xy سطح جس پر اس طرح مخلوط اعداد ظاہر کیے جاتے ہیں **مخلوط سطح**[8] یا **نقشہ اغگن**[9] کہلاتی[10] ہے۔

"مخلوط سطح میں مخلوط عدد z " کہنے کی بجائے ہم "مخلوط سطح میں نقطہ z " کہیں گے۔ اس سے کوئی غلط فہمی پیدا نہیں ہوتی ہے۔

ریاضی اعمال

ہم اب مخلوط عدد کی روپ $z = x + iy$ اور مخلوط سطح کو استعمال کرتے ہیں۔

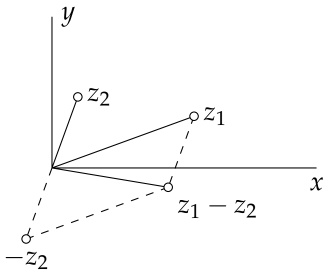
جمع۔ مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ $z_1 + z_2$ اب

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{14.4}$$

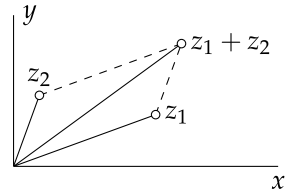
لکھا جا سکتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط اعداد کی جمع، میکانیات میں قوتوں کا مجموعہ حاصل کرنے کے **متوازی الاضلاع قاعدہ** کے مطابق ہے (شکل 14.2-الف)۔

---

[8] complex plane
[9] Argand diagram
[10] فرانسیسی ریاضی دان ژاں غوبغ اغگن [1768-1822]



(ب) مخلوط اعداد کی تفریق



(الف) مخلوط اعداد کی جمع

شکل 14.2: مخلوط اعداد کی جمع اور تفرق

تفریق۔ یہ جمع کا الٹ عمل ہے۔ فرق $z_1 - z_2$ ایسے مخلوط عدد z کے برابر ہو گا کہ $z_1 = z + z_2$ ہو۔ یوں (شکل 14.2-ب) درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{14.5}$$

ضرب۔ مساوات 14.2 میں دی گئی ضرب z_1z_2 کو اب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{14.6}$$

چونکہ یہ نتیجہ حقیقی اعداد کی حساب کے قوانین اور مساوات 14.3 یعنی $i^2 = ii = -1$ کی استعمال سے حاصل ہوتا ہے لہٰذا اس کو یاد رکھنا آسان ہے۔

تقسیم۔ یہ ضرب کا الٹ عمل ہے۔ یوں حاصل تقسیم $z = \frac{z_1}{z_2}$ ایسا مخلوط عدد $z = x + iy$ ہو گا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$z_1 = zz_2 = (x + iy)(x_2 + iy_2) \qquad (z_2 \neq 0) \tag{14.7}$$

ہم $z_2 \neq 0$ کی صورت میں حاصل تقسیم $z = x + iy = \frac{z_1}{z_2}$ کی درج ذیل صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{14.8}$$

عملاً مساوات 14.8 کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{z_1}{z_2}$ کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $x_2 - iy_2$ سے ضرب دے کر سادہ صورت حاصل کرتے ہیں یعنی:

$$z = \frac{x_1 + y_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{14.9}$$

مثال کے طور پر اگر $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہوں تب

$$\frac{3-i2}{-4+i} = \frac{(3-i2)(-4-i)}{(-4+i)(-4-i)} = \frac{-12-i3+i8-2}{16+1} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$$

ہو گا جس کی درستگی آپ درج ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$zz_2 = \Big(-\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}\Big)(-4+i) = \frac{56}{17} - i\frac{14}{17} - i\frac{20}{17} - \frac{5}{17} = 3 - i2$$

مساوات 14.8 کا ثبوت کچھ یوں ہے۔مساوات 14.6 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 14.7 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

مخلوط اعداد کی برابری کی تعریف کے مطابق دونوں مخلوط اعداد کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں گے اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x - y_2y \\ y_1 &= y_2x + x_2y \end{aligned}$$

یہ دو دو خطی مساوات کا نظام ہے جس کے نا معلوم متغیرات x اور y ہیں۔یہ فرض کرتے ہوئے کہ x_2 اور y_2 بیک وقت صفر نہیں ہیں (جس کو مختصراً $z \neq 0$ لکھا جاتا ہے) ہمیں مساوات 14.8 میں دیا گیا یکتا حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.1: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم

فرض کریں کہ $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہیں۔تب

$$z_1 + z_2 = -1 - i, z_1 - z_2 = 7 - i3, z_1z_2 = -10 + i11$$

اور جیسے ہم حاصل کر سکے ہیں $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$ ہو گا۔ $\square$

ریاضی اعمال کے خواص

حقیقی اعداد کے قواعد سے مخلوط اعداد z_1 اور z_2 کے لئے درج ذیل قواعد حاصل ہوتے ہیں

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} z_1+z_2&=z_2+z_1\\ z_1z_2&=z_2z_1 \end{aligned}\right\} && \text{(قانون تبادل)}\\
&\left.\begin{aligned} (z_1+z_2)+z_3&=z_1+(z_2+z_3)\\ (z_1z_2)z_3&=z_1(z_2z_3) \end{aligned}\right\} && \text{قانون تلازم}\\
&z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3 && \text{(قانون جزئیتی تقسیم)}\\
&0+z=z+0=z\\
&z+(-z)=(-z)+z=0\\
&z\cdot 1=z
\end{aligned}
\tag{14.10}
$$

جہاں $0=(0,0)$ اور $-z=-x-iy$ ہیں۔

جوڑی دار مخلوط اعداد

فرض کریں کہ $z=x+iy$ کوئی مخلوط عدد ہے۔تب $x-iy$ کو z کا جوڑی دار مخلوط کہا جائے گا اور z کے جوڑی دار مخلوط کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں

$$z=x+iy,\quad \bar{z}=x-iy$$

ہوں گا۔مثلاً $z=5+i2$ کا جوڑی دار مخلوط $\bar{z}=5-i2$ ہے (شکل 14.3)۔مزید جمع اور تفریق سے

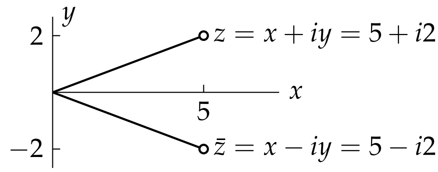
$$z+\bar{z}=2x,\quad z-\bar{z}=i2y$$

حاصل ہوتے ہیں جو درج ذیل اہم کلیات کا سبب بنتے ہیں۔

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z})=z\ \text{حقیقی},\quad \frac{1}{i2}(z-\bar{z})=z\ \text{خیالی} \tag{14.11}$$

حقیقی عدد $z=x$ کا مخلوط جوڑی دار عدد $\bar{z}=z$ ہو گا جبکہ $z=0+iy=iy$ کا جوڑی دار مخلوط عدد $\bar{z}=-z$ ہو گا۔اس طرح کا عدد جس کا حقیقی حصہ صفر ہو **خالص خیالی عدد**[11] کہلاتا ہے جو خیالی محدد پر کسی نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔

[11] pure imaginary number



شکل 14.3: جوڑی دار مخلوط اعداد

اس کے علاوہ درج ذیل تعلق بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \tag{14.12}$$

سوالات

سوال 14.1: **خیالی اکائی کے طاقت**
درج ذیل ثابت کریں۔

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \cdots$$
$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{i^2} = -1, \quad \frac{1}{i^3} = i, \cdots \tag{14.13}$$

فرض کریں کہ $z_1 = 4 + i3$ اور $z_2 = 2 - i5$ ہیں۔ سوال 14.2 تا سوال 14.5 کو حل کرتے ہوئے $x + iy$ روپ میں لکھیں۔

سوال 14.2: $(z_1 - z_2)^2$
جواب: $-60 + i32$

سوال 14.3: $\frac{z_1}{z_2}$
جواب: $-\frac{7}{29} + i\frac{26}{29}$

سوال 14.4: $\frac{1}{z_1^2}$
جواب: $\frac{7}{625} - i\frac{24}{625}$

سوال 14.5: $\frac{2z_1}{3z_2}$
جواب: $-\frac{14}{87}+i\frac{52}{87}$

سوال 14.6 تا سوال 14.15 کو حل کریں جہاں $z=x+iy$ ہے۔

سوال 14.6: خیالی $\frac{1}{1+i}$
جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 14.7: حقیقی $\frac{1-i}{1+i}$
جواب: 0

سوال 14.8: خیالی z^2
جواب: $2xy$

سوال 14.9: حقیقی z^3
جواب: x^3-3xy^2

سوال 14.10: خیالی z^4
جواب: $4xy(x^2-y^2)$

سوال 14.11: حقیقی $\frac{(-1+i)^2}{-5+i4}$
جواب: $-\frac{8}{41}$

سوال 14.12: خیالی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
جواب: 1

سوال 14.13: حقیقی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
جواب: -1

سوال 14.14: خیالی $\frac{z}{\bar{z}}$
جواب: $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

سوال 14.15: حقیقی $\frac{z}{\bar{z}}$
جواب: $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

سوال 14.16: قانون تبادل ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.17: قانون تلازم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.18: قانون جزئیتی تقسیم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.19: اگر دو مخلوط اعداد کا حاصل ضرب صفر کے برابر ہو تب ثابت کریں کہ ان میں سے کم از کم ایک مخلوط عدد صفر ہو گا۔

سوال 14.20 تا سوال 14.27 میں ثبوت پیش درکار ہیں۔

سوال 14.20: کسی بھی عدد کے جوڑی دار مخلوط کا جوڑی دار مخلوط اس عدد کے برابر ہو گا۔

سوال 14.21: $\overline{iz} = -i\bar{z}$

سوال 14.22: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی ہو گا جب $\bar{z} = z$ ہو۔

سوال 14.23: z صرف اور صرف اس صورت خالص خیالی ہو گا جب $\bar{z} = -z$ ہو۔

سوال 14.24: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی یا خالص خیالی ہو گا جب $(\bar{z})^2 = z^2$ ہو۔

سوال 14.25: مساوات 14.12 ثابت کریں۔

سوال 14.26: حقیقی $(iz) = -z$ خیالی، (iz) خیالی $= z$ حقیقی

سوال 14.27: حقیقی $(\overline{iz}) = -z$ خیالی، $(\overline{iz})$ خیالی $= -z$ حقیقی

14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات

ہم مخلوط سطح میں درج ذیل قطبی محدد r ، θ متعارف کرتے ہیں۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{14.14}$$

یوں کسی بھی مخلوط عدد $z = x + iy \neq 0$ کو

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{14.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مخلوط عدد کی **قطبی روپ**[12] یا **تکونیاتی روپ**[13] کہلاتی ہے۔ r کو مخلوط عدد z کی **حتمی قیمت**[14] یا **معیار**[15] کہتے ہیں جسے $|z|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا (شکل 14.4-الف)۔

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\geq 0) \tag{14.16}$$

مثبت x محور سے لکیر MN تک زاویہ کو z کی **دلیل**[16] کہتے ہیں جس کو $\underline{/z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ چلتے ہوئے زاویہ بڑھتا ہے۔ z کا زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\underline{/z} = \theta = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \cos^{-1}\frac{x}{r} = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{14.17}$$

دھیان رہے کہ $z = 0$ کے لئے زاویہ θ غیر معین ہے۔اسی لئے اوپر شرط $z \neq 0$ لاگو کی گئی ہے۔

جیومیٹریائی طور پر مبدا M سے نقطہ z تک فاصلہ $|z|$ ہے (شکل 14.4-الف)۔یوں

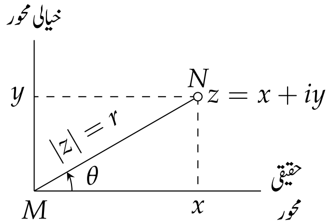
$$|z_1| > |z_2|$$

کا مطلب ہے کہ مبدا سے z_1 کا فاصلہ، مبدا سے z_2 کے فاصلے سے زیادہ ہے اور $|z_1 - z_2|$ سے مراد z_1 اور z_2 کے درمیان فاصلہ ہے (شکل 14.4-ب)۔

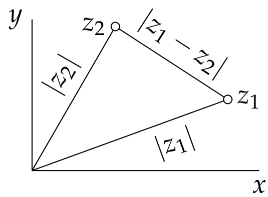
یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی محور سے ہٹ کر مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات $z_1 < z_2$ یا $z_1 \geq z_2$ کوئی معنی نہیں رکھتی ہیں۔

---

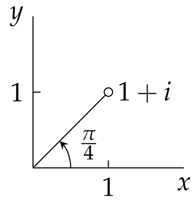
[12] polar form
[13] trigonometric form
[14] absolute value
[15] modulus
[16] argument



(الف) مخلوط سطح۔ مخلوط عدد کی قطبی روپ



(ب) دو نقطوں کے مابین فاصلہ



(پ) صدر زاویہ (مثال 14.2)

شکل 14.4: مخلوط سطح اور اس پر مخلوط نقطے۔

مخلوط عدد کے زاویہ θ کی وہ قیمت جو وقفہ

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

میں پائی جاتی ہو کو z کے زاویے کی **صدر قیمت**[17] کہتے ہیں جس کے ساتھ $\mp n\pi$ جمع کرنے سے z کے زاویے کی دیگر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے۔

مثال 14.2: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت
فرض کریں کہ $z = 1 + i$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$z = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big), \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \underline{/z} = \frac{\pi}{4} \mp 2n\pi \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

z کے زاویہ کی **صدر قیمت** $\frac{\pi}{4}$ ہے (شکل 14.4-پ)۔ □

مثال 14.3: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت
فرض کریں کہ $z = -2 + i2\sqrt{3}$ ہے تب $z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ ہو گا۔ z کی حتمی قیمت $|z| = 4$ اور اس کا صدر زاویہ $\frac{2\pi}{3}$ ہو گا۔ □

مخلوط اعداد کی ضرب یا تقسیم میں مخلوط اعداد کی قطبی روپ نہایت مفید ثابت ہوتی ہے۔ فرض کریں کہ

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{اور} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

[17] principal value

ہیں۔ مساوات 14.6 کے تحت

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)_i(\sin\theta_1\cos\theta_2) + \cos\theta_1\sin\theta_2]$$

یعنی

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{14.18}$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتائج

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \tag{14.19}$$

اور

$$\underline{/z_1z_2} = \underline{/z_1} + \underline{/z_2} \qquad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots) \tag{14.20}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح تقسیم کی تعریف سے

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{14.21}$$

اور

$$\underline{/\tfrac{z_1}{z_2}} = \underline{/z_1} - \underline{/z_2} \qquad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots) \tag{14.22}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 14.4: کلیات ڈی موے ور
مساوات 14.19 اور مساوات 14.20 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{14.23}$$

جس سے کلیہ ڈی موے ور[18]

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{14.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ □

[18] De Moivre formula

عدم مساوات

کسی بھی مخلوط عدد کے لئے درج ذیل **تکونی عدم مساوات**[19] (شکل 14.5) درست ہو گی

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{14.25}$$

جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔نقطہ 0 ، z_1 اور z_2 شکل 14.5 میں تکون کے کونے ہیں جس کے اطراف کی لمبائی $|z_1|$ ، $|z_2|$ اور $|z_1 + z_2|$ ہے۔اب تکون کا کوئی ایک طرف باقی دو کی مجموعی لمبائی سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا درج بالا عدم مساوات ثابت ہوتا ہے جس کا باضابطہ ثبوت آپ پر چھوڑا جاتا ہے (سوال 14.48)۔

مساوات 14.25 سے ہم زیادہ تعداد کی مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \tag{14.26}$$

اخذ کر سکتے ہیں، یعنی مجموعے کی حتمی قیمت تمام ارکان کی علیحدہ علیحدہ حتمی قیمتوں کے مجموعہ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے۔

کسی بھی $z = x + iy$ کے لئے

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم عدم مساوات

$$\left|z_{\text{حقیقی}}\right| \leq |z|, \quad \left|z_{\text{خیالی}}\right| \leq |z| \tag{14.27}$$

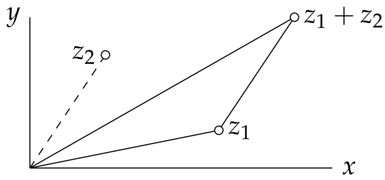
حاصل ہوتی ہیں۔

سوالات

سوال 14.28 تا سوال 14.34 کو حل کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

---

[19] triangle inequality



شکل 14.5: تکونی عدم مساوات

سوال 14.28: $|1-i|^2$
جواب: 2

سوال 14.29: $|-i7|$
جواب: 7

سوال 14.30: $|\cos\theta + i\sin\theta|$
جواب: 1

سوال 14.31: $\left|\frac{2+i5}{5-i2}\right|$
جواب: 1

سوال 14.32: $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$
جواب: $\sqrt{\frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}}$

سوال 14.33: $\left|\frac{(-2+i3)^2}{(3+i2)^2}\right|$
جواب: 1

سوال 14.34: $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|$
جواب: 1

سوال 14.35 تا سوال 14.40 میں دلیل کی صدر قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.35: -9
جواب: π

سوال 14.36: 9
جواب: 0

سوال 14.37: $i5$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.38: $5 - i5$
جواب: $-\frac{\pi}{4}$

سوال 14.39: $-5 - i5$
جواب: $-\frac{3\pi}{4}$

سوال 14.40: $-i3$
جواب: $-\frac{\pi}{2}$

سوال 14.41 تا سوال 14.44 میں دیے گئے مخلوط عدد کو قطبی روپ میں لکھیں۔

سوال 14.41: $2 + i2$
جواب: $2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

سوال 14.42: -6
جواب: $6\cos\pi$

سوال 14.43: $-i8$
جواب: $8\sin(-\frac{\pi}{2})$

سوال 14.44: $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$
جواب: $\frac{1}{2}[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]$

سوال 14.45: تکونی عدم مساوات کی تصدیق $z_1 = -1 - i2$ اور $z_2 = 3 - i2$ کے لئے کریں۔
جواب: $|z_1| = \sqrt{5} \approx 2.236, \quad |z_2| = \sqrt{13} \approx 3.606, \quad |z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \approx 4.472$ ہیں لہٰذا $4.472 < 2.236 + 3.606$ ہے۔

سوال 14.46: تکونی عدم مساوات کی تصدیق $z_1 = 1 + i$ اور $z_2 = i4$ کے لئے کریں۔

سوال 14.47: تکونی عدم مساوات میں برابر کی علامت کس صورت استعمال ہو گی۔
جواب: جب مبدا اور دیے گئے دو مخلوط اعداد تکون کی بجائے سیدھی لکیر بناتے ہوں۔

سوال 14.48: تکونی عدم مساوات کا ریاضی ثبوت پیش کریں۔

سوال 14.49: تکونی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ ثابت کریں۔

سوال 14.50: ثابت کریں کہ $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$ ہو گا۔اعدادی مثال پیش کریں۔

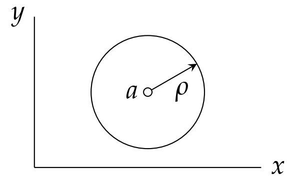
سوال 14.51: ثابت کریں کہ $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ہو گا۔

سوال 14.52: $z = (5 + i4)^2$ کے لئے مساوات 14.27 کی تصدیق کریں۔

سوال 14.53: i کے ساتھ ضرب
عمومی مخلوط عدد $z = x + iy$ کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔ z کو i سے ضرب دینے سے $z_1 = -y + ix$ حاصل ہوتا ہے۔اس کو بھی اسی مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔ z سے z_1 تک زاویہ کیا ہو گا؟ جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.54: i کے ساتھ ضرب
ثابت کریں کہ کسی بھی مخلوط عدد کو i سے ضرب دینا مخلوط سطح پر اس نقطے کو گھڑی کی الٹ رخ $\frac{\pi}{2}$ زاویے سے گمانے کے مترادف ہے۔

سوال 14.55: قطبی روپ استعمال کرتے ہوئے دو مخلوط اعداد کے حاصل ضرب مثلاً $(1 + i)(1 + 2i)$ کا جیومیٹریائی طریقہ دریافت کریں۔



شکل 14.6: مخلوط سطح میں دائرہ

14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے

مخلوط سطح میں منحنیات اور خطوں کی ضرورت ہمیں بار بار ہو گی۔اس لئے چند اہم منحنیات اور خطوں اور ان کی مساواتوں اور عدم مساواتوں پر غور کرتے ہیں۔

چونکہ دو اعداد z اور a کے درمیان فاصلہ $|z-a|$ ہے لہٰذا رداس ρ کا ایسا دائرہ C جس کا مرکز نقطہ a پر ہو (شکل 14.6) کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|z-a| = \rho \tag{14.28}$$

نتیجتاً عدم مساوات

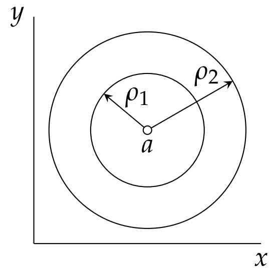
$$|z-a| < \rho \tag{14.29}$$

دائرہ C کے اندر کسی بھی نقطہ کے لئے درست ہے۔یوں مساوات 14.29 دائرے کی اندرون کو ظاہر کرتی ہے۔ایسے **دائری قرص**[20] کو **کھلا قرص**[21] کہتے ہیں جبکہ خطہ

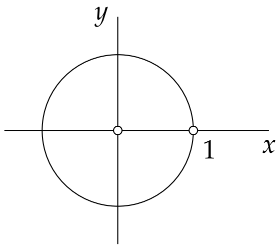
$$|z-a| \le \rho \tag{14.30}$$

کو **بند قرص**[22] کہتے ہیں جس میں دائرے کی اندرون کے ساتھ دائرہ بھی شامل ہے۔کھلا قرص (مساوات 14.29) کو نقطہ a کی **پڑوس**[23] بھی کہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ a کی ایسی لامحدود تعداد کے پڑوس پائے جاتے ہیں جن کا $\rho\,(>0)$ آپس میں مختلف ہو گا۔

---
[20] circular disk
[21] open disk
[22] closed dsik
[23] neighbourhood



(الف) مخلوط سطح میں چھلا



(ب) اکائی دائرہ

شکل 14.7: مخلوط سطح میں چھلا اور اکائی دائرہ

اسی طرح عدم مساوات

$$|z-a| > \rho \tag{14.31}$$

دائرے کی بیرون کو ظاہر کرتی ہے۔مزید رداس ρ_1 اور ρ_2 کے دو ہم مرکز دائروں (شکل 14.7-الف) کے درمیان خطے کو

$$\rho_1 < |z-a| < \rho_2 \tag{14.32}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نقطہ a دائروں کا مرکز ہے۔ایسا خطہ **کھلا چھلا**[24] کہلاتا ہے۔

درج ذیل مساوات **اکائی دائرہ**[25] (شکل 14.7-ب) کو ظاہر کرتی ہے۔اکائی دائرے کا رداس اکائی اور مبدا اس کا مرکز ہو گا۔اکائی دائرہ مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 14.5: **دائری قرص**
مخلوط سطح میں $|z-2+i4| \le 9$ کی خطہ کو ظاہر کرتی ہے۔
حل: یہ عدم مساوات ان تمام z کو ظاہر کرتی ہے جن کا نقطہ $2-i4$ سے فاصلہ، 9 سے زیادہ نہیں ہے۔یوں یہ اس بند قرص کو ظاہر کرتی ہے جس کا مرکز $2-i4$ ہے۔ □

مثال 14.6: **اکائی دائرہ اور اکائی قرص**
درج ذیل کن خطوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

---

open annulus[24]
unit circle[25]

$|z| > 1$ (پ) $|z| \leq 1$ (ب) $|z| < 1$ (الف)

حل: (الف) اکائی دائرے کی اندرون یعنی اکائی کھلا دائرہ۔
(ب) اکائی دائرے کی اندرون اور دائرہ یعنی اکائی بند دائرہ۔
(پ) اکائی دائرے کی بیرون۔ □

یہ ضروری ہے کہ طلبہ و طالبات مخلوط سطح پر منحنیات اور خطوں کی اظہار کو اچھی طرح سمجھیں۔اس لئے موجودہ حصے کی سوالات کو زیادہ غور سے حل کریں تا کہ آگے آپ کی مشکل کچھ آسان ہو سکے۔

ہم اب چند اصطلاحات کی تعریف بیان کرتے ہیں جو آگے استعمال کی جائیں گی۔

مخلوط سطح میں **نقطوں کے سلسلہ**[26] سے مراد محدود یا لامحدود تعداد کی نقطے ہیں۔ مثال کے طور پر دو درجی الجبرائی مساوات کے حل، کسی لکیر پر نقطوں کا سلسلہ، اور کسی دائرے کے اندر نقطوں کا سلسلہ۔

اگر سلسلہ S کے ہر نقطے کا ایسا پڑوس ہو جس کا ہر نقطہ بھی S کا حصہ ہو تب S **کھلا**[27] سلسلہ کہلاتا ہے۔مثال کے طور پر کسی دائرے یا مکعب کے اندرون تمام نقطے مل کر کھلا سلسلہ بناتے ہیں۔اسی طرح دایاں آدھی سطح $x > 0$ کے تمام نقطے کھلا سلسلہ ہیں۔کسی دائرے کے اندر اور دائرے پر نقطے کھلا سلسلہ نہیں بناتے ہیں چونکہ دائرہ پر نقطوں کا ایسا کوئی پڑوس نہیں پایا جاتا ہے جس کے تمام نقطے اس سلسلے کا حصہ ہوں۔

مخلوط سطح میں ایسا سلسلہ جس کا متمم کھلا سلسلہ ہو، **بند سلسلہ**[28] ہو گا۔مخلوط سطح میں سلسلہ S کا **متمم**[29]، مخلوط سطح میں ان تمام نقطوں کا سلسلہ ہو گا جو S کا حصہ نہ ہوں۔مثال کے طور پر اکائی دائرے کے اندر اور اکائی دائرے پر نقطوں کا سلسلہ بند سلسلہ ہے۔

ایک سلسلہ جس کے تمام نقطے حسب ضرورت بڑے رداس کی دائرے میں پائے جاتے ہوں **محدود**[30] سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی مکعب کے اندر نقطے محدود سلسلہ ہیں جبکہ کسی لکیر پر نقطے محدود سلسلہ نہیں ہیں۔

---
[26] set of points
[27] open
[28] closed
[29] complement
[30] bounded

ایک سلسلہ S جس کے ہر دو نقطوں کو محدود تعداد کے ایسے قطعات سے آپس میں ملایا جا سکتا ہو جن کا ہر نقطہ S کا حصہ ہو، **جڑا ہوا**[31] سلسلہ کہلاتا ہے۔کھلا جڑا ہوا سلسلہ کو **دائرہ کار**[32] کہتے ہیں۔یوں دائرے کی اندرون ایک دائرہ کار ہے۔

سلسلہ S کی **سرحدی نقطہ**[33] سے مراد ایسا نقطہ ہے جس کی پڑوس میں کچھ ایسے نقطے جو S کا حصہ ہوں اور کچھ ایسے نقطے جو S کا حصہ نہ ہوں دونوں شامل ہوں۔مثلاً چھلا کی سرحدی نقاط میں چھلا کے دونوں اطراف کے دائروں کے نقطے شامل ہیں۔ظاہر ہے کہ کھلا سلسلہ کا کوئی سرحدی نقطہ بھی کھلا سلسلہ کا حصہ نہیں ہو گا جبکہ بند سلسلہ کا ہر سرحدی نقطہ بند سلسلہ کا حصہ ہو گا۔

خطہ[34] سے مراد ایسا سلسلہ ہے جس میں دائرہ کار اور دائرہ کار کے چند یا تمام سرحدی نقطے شامل ہوں۔

سوالات

سوال 14.56 تا سوال 14.68 میں منحنی یا خطہ دریافت کرتے ہوئے انہیں ترسیم کر دکھائیں۔

سوال 14.56: خیالی $z \geq -1$
جواب: $y \geq -1$

سوال 14.57: خیالی $z^2 \leq 7$
جواب: $2xy \leq 7$

سوال 14.58: حقیقی $z^2 \geq 1$
جواب: قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کے بائیں بازو کی بائیں طرف اور اس کے دائیں بازو کی دائیں طرف کے خطے۔

سوال 14.59: دلیل $z < \frac{\pi}{4}$
جواب: $y < 0$ کا پورا خطہ ماسوائے منفی y محور اور مبدا سے $\frac{\pi}{4}$ زاویہ پر لکیر کے نیچے خطہ۔

---

[31] connected
[32] domain
[33] boundary point
[34] region

سوال 14.60: $\left|\text{دلیل}\, z\right| < \frac{\pi}{4}$
جواب: $y = x$ اور $y = -x$ کے درمیان وہ پٹی جس کا مثبت x محور حصہ ہے۔

سوال 14.61: $-\pi < \text{حقیقی}\, z < \pi$
جواب: $y = -\pi$ اور $y = \pi$ کے درمیان انتصابی پٹی۔

سوال 14.62: $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$
جواب: کھلا اکائی دائرہ۔

سوال 14.63: $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 2$
جواب: $(x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

سوال 14.64: $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1$
جواب: $y = 0$

سوال 14.65: $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$
جواب: $x = 0$

سوال 14.66: $\text{خیالی}\, \frac{z+1}{z-1} < 2$
جواب: ایسے اکائی دائرے کی بیرون جس کا مرکز نقطہ $(1, -1)$ پر ہو۔

سوال 14.67: $\text{حقیقی}\, \frac{1}{z} > 1$
جواب: نقطہ $(\frac{1}{2}, 0)$ پر رداس $\frac{1}{2}$ کے دائرے کی اندرون۔

سوال 14.68: $\text{خیالی}\, \frac{2z+1}{4z-4} \leq 1$
جواب: نقطہ $(1, -\frac{3}{8})$ پر رداس $\frac{3}{8}$ کے دائرے کی بیرون بشمول دائرہ۔

سوال 14.69: z_1 اور z_2 مخلوط سطح میں دو نقطے ہیں جبکہ α اور β حقیقی غیر منفی اعداد ہیں جہاں $\alpha + \beta = 1$ ہے۔ایسی صورت میں $\alpha z_1 + \beta z_2$ کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: z_1 اور z_2 کو ملانے والا سیدھا قطع۔

سوال 14.70: قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کو $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ لکھیں۔

سوال 14.71: مساوات $|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔اس حقیقت کی جیومیٹریائی دلیل دیں۔اس حقیقت کو الجبرا کی مدد سے حاصل کریں۔

14.4 مخلوط تفاعل۔حد۔تفرق۔تحلیلی تفاعل

مخلوط تجزیہ کی چند بنیادی تصورات، مثلاً مخلوط متغیرات کے تفاعل اور ایسے تفاعل کے حد اور تفرقات، کو اب پیش کرتے ہیں۔آپ دیکھیں گے کہ یہ تصورات علم الاحصاء کی تصورات کی طرح ہیں۔اس کے بعد ہم مخلوط تحلیلی تفاعل کی تعریف پیش کریں گے۔یہ تصورات مخلوط تجزیہ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے مخلوط متغیرہ کے تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ S مخلوط اعداد کا کوئی سلسلہ ہے۔ S پر معین تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو S میں ہر z کا مطابقتی یکتا[35] مخلوط عدد w دیتا ہو۔تب ہم

$$w = f(z)$$

یا $w = g(z)$ ، وغیرہ، یا صرف $w(z)$ لکھتے ہیں۔ یہاں z **مخلوط متغیر**[36] کہلاتا ہے جس کی قیمت S کا کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔سلسلہ S کو $f(z)$ کی **تعریف کا دائرہ کار**[37] کہتے ہیں۔ان مخلوط اعداد کا سلسلہ جو S میں z کی تبدیلی سے $w = f(z)$ اختیار کرتا ہو کو تفاعل $w = f(z)$ کی **قیمتوں کا حلقہ** کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ u اور v تفاعل w کے بالترتیب حقیقی اور خیالی جزو ہیں۔اب چونکہ w متغیر $z = x + iy$ کے تابع ہے لہٰذا u اور v بھی x اور y کے تابع ہوں گے۔ یوں ہم

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

لکھ سکتے ہیں جس کے تحت مخلوط تفاعل $f(z)$ در حقیقت دو حقیقی تفاعل u اور v کے مترادف ہے جو از خود دو حقیقی متغیرات x اور y کے تابع ہیں۔

مثال 14.7: مخلوط متغیر کا تفاعل
فرض کریں کہ

$$w = f(z) = z^2 + 3z$$

---

[35] یوں عام تفاعل کی طرح مخلوط تفاعل $f(z)$ بھی ہر z کا صرف اور صرف ایک مطابقتی قیمت دے گا۔
[36] complex variable
[37] اگرچہ S بعض اوقات حصہ 14.3 میں دائرہ کار کی تعریف (یعنی کھلا اور جڑا ہوا سلسلہ) پر پورا نہیں اترتا، اس کے باوجود یہ دائرہ کار کہلاتا ہے۔

ہے۔تب

$$u(x,y) = f(z) \text{ حقیقی} = x^2 - y^2 + 3x \quad \text{اور} \quad v(x,y) = f(x) \text{ خیالی} = 2xy + 3y$$

ہوں گے۔یوں نقطہ $z = x + iy = 1 + i3$ پر اس تفاعل کی قیمت

$$(1 + i3)^2 + 3(1 + i3) = -5 + i15$$

ہو گی لہٰذا ہم

$$f(1 + i3) = -5 + i15, \quad u(1,3) = -5, \quad v(1,3) = 15$$

لکھ سکتے ہیں۔اسی طرح $f(1 + i) = 3 + i5$ ہو گا، وغیرہ۔ ظاہر ہے کہ یہ تفاعل تمام z کے لئے معین ہے۔ □

مثال 14.8: مخلوط متغیر کا تفاعل

تفاعل $f(z) = 3\bar{z} = 3x - i3y$ کا نقطہ $z = 2 + i4$ پر قیمت دریافت کریں۔

حل: چونکہ $x = 2$ اور $y = 4$ ہیں لہٰذا $f(2 + i4) = 6 - i12$ ہو گا۔ □

اگر تفاعل $f(z)$ نقطہ z_0 کی پڑوس میں معین ہو [جبکہ عین z_0 پر $f(z)$ غیر معین ہو سکتا ہے] اور ہم ایسا مثبت حقیقی عدد σ دریافت کر سکتے ہیں کہ ہر مثبت حقیقی عدد ϵ کے لئے، جہاں ϵ جتنا بھی چھوٹا (لیکن غیر صفر) کیوں نہ ہو، تمام $z \neq z_0$ کے لئے قرص $|z - z_0| < \sigma$ میں

$$\left|f(z) - l\right| < \epsilon \tag{14.33}$$

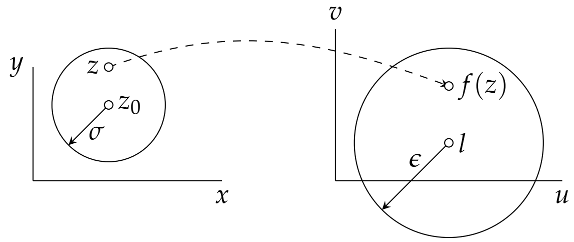
ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ z کا نقطہ z_0 کے قریب تر ہونے سے $f(z)$ کا حد[38] l ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ z کو z_0 کے قریب کرتے ہوئے ہم $f(z)$ کی قیمت جتنی چاہیں l کے قریب کر سکتے ہیں (شکل 14.8)۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \tag{14.34}$$

یہاں دھیان رہے کہ حد کی اس تعریف کے تحت ہم مخلوط سطح میں z_0 تک کسی بھی سمت سے پہنچ سکتے ہیں۔ حقیقی علم الاحصاء میں حد کی تعریف سے موجودہ حد کی تعریف زیادہ شرائط پر پورا اترتا ہے۔

---

[38] limit



شکل 14.8: حد

اگر حد موجود ہو، تب یہ حد یکتا ہو گا (سوال 14.80)۔

نقطہ $z = z_0$ پر تفاعل $f(z)$ اس صورت **استمراری**[39] ہو گا اگر $f(z_0)$ معین ہو اور

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{14.35}$$

ہو۔ یاد رہے کہ تفاعل کی حد کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ تفاعل $f(z)$ نقطہ z_0 کے کسی پڑوس میں معین ہو گا۔

تفاعل $f(z)$ اس صورت کسی **دائرہ کار میں استمراری** ہو گا جب اس دائرہ کار کے ہر نقطہ پر $f(z)$ استمراری ہو۔

تفاعل $f(z)$ نقطہ $z = z_0$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب حد

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{14.36}$$

موجود ہو۔ تب اس حد کو نقطہ $z = z_0$ پر تفاعل $f(z)$ کا **تفرق**[40] کہتے ہیں۔

مساوات 14.36 میں $z = z_0 + \Delta z$ پر کرتے ہوئے $\Delta z = z - z_0$ ہو گا لہٰذا ہم درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{14.37}$$

---

[39] continuous
[40] derivative

یاد رہے کہ حد کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ کم از کم نقطہ z_0 کی پڑوس میں تفاعل $f(z)$ معین ہے۔ساتھ ہی ساتھ z_0 تک z کسی بھی سمت سے پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔یوں z_0 پر قابل تفرق ہونے کا مطلب ہے کہ z_0 تک جس رخ سے بھی پہنچنے کی کوشش کی جائے مساوات 14.37 میں دی گئی حاصل تقسیم کسی ایک ہی قیمت تک پہنچنے کی کوشش کرے گی۔یہ حقیقت بعد میں نہایت اہم ثابت ہو گا۔

حد کی تعریف کے تحت مساوات 14.37 کہتی ہے کہ ایسا مخلوط تفاعل $f'(z)$ پایا جاتا ہے جس کے لئے، کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $\sigma > 0$ دریافت کر سکتے ہیں کہ، $f'(z)$ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\epsilon \quad \text{جب} \quad |z-z_0|<\sigma \tag{14.38}$$

اگر z_0 پر $f(z)$ قابل تفرق ہو تب z_0 پر $f(z)$ استمراری ہو گا (سوال 14.96)۔

مثال 14.9: قابل تفرق۔ تفرق
تفاعل $f(z)=z^2$ تمام z کے لئے قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق $f'(z)=2z$ ہے جس کو یوں

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}2z+\Delta z=2z$$

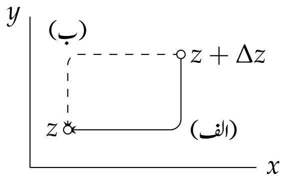
حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

حقیقی تفرقات کے تمام اصول مثلاً مستقل کی تفرق، z^n کی تفرق جہاں n عددی صحیح ہے، قابل تفرق تفاعل کا مجموعہ، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور تفاعل کے تفاعل کی تفرق کا زنجیری اصول مخلوط تفرقات کے لئے بھی درست ہیں۔

ان کے ثبوت تقریباً ہو بہو حقیقی تفاعل کے مطابقتی ثبوت کی طرح ہیں۔

مثال 14.10: $\bar{z}$ قابل تفرق نہیں ہے
آپ دیکھیں گے کہ کئی انتہائی سادہ تفاعل کا کسی بھی نقطے پر تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔تفاعل $f(z)=\bar{z}=x-iy$ ایسا ہی ایک تفاعل ہے۔ یقیناً $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ لیتے ہوئے ہم اس تفاعل کی تفرق کو

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{[(x+\Delta x)-i(y+\Delta y)]-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \tag{14.39}$$



شکل 14.9: راہ (مثال 14.10)

لکھ سکتے ہیں جو $\Delta y = 0$ کی صورت میں $+1$ جبکہ $\Delta x = 0$ کی صورت میں -1 دیتا ہے۔ یوں راہ-الف پر چلتے ہوئے مساوات 14.39 کی قیمت $+1$ تک پہنچتی ہے جبکہ راہ-ب پر چلتے ہوئے اس کی قیمت -1 تک پہنچتی ہے (شکل 14.9)۔ تعریف کے تحت $\Delta z \to 0$ کرتے ہوئے مساوات 14.39 کا کوئی حد موجود نہیں ہے۔ یہ مثال حیرت کن ہے جو اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ مخلوط تفاعل کی تفرق پیچیدہ عمل ہے۔ □

اب ہم اپنے اصل مضمون پر آتے ہیں یعنی:

تعریف: (تحلیلی ہونا)
دائرہ کار D میں تفاعل $f(z)$ اس صورت تحلیلی ہو گا جب پوری D میں ہر نقطے پر f معین اور قابل تفرق ہو۔ تفاعل $f(z)$ دائرہ کار D میں نقطہ $z = z_0$ پر تحلیلی ہو گا اگر z_0 کی پڑوس (حصہ 14.3) میں $f(z)$ تحلیلی ہو۔

یوں z_0 پر $f(z)$ کی تحلیلی ہونے کا مطلب ہے کہ z_0 کے کسی پڑوس کے ہر نقطہ (بشمول z_0 چونکہ z_0 ازخود تمام پڑوس میں ایک نقطہ ہے) پر $f(z)$ قابل تفرق ہے۔ اس تصور کی وجہ یہ ہے کہ ایسا تفاعل، جو محض ایک نقطہ پر قابل تفرق ہو نا کہ نقطہ کی پڑوس میں، عملاً کسی استعمال کا نہیں ہے۔ ہم کسی مخصوص دائرہ کار کا ذکر کیے بغیر بھی **تحلیلی تفاعل**[41] کی اصطلاح استعمال کریں گے جس سے مراد کسی دائرہ کار پر تحلیلی تفاعل ہو گا۔

مثال 14.11: کثیر رکنی
عدد صحیح طاقتی تفاعل 1 ، z ، z^2 ، $\cdots$ اور کثیر رکنی

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

[41]analytic function

جہاں c_0، $\cdots$، c_n مخلوط مستقل ہیں پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہیں۔تفاعل $f(z)=\frac{1}{1-z}$ نقطہ $z=1$ کے علاوہ پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہے۔ $\square$

مخلوط تجزیہ مکمل طور پر تحلیلی تفاعل پر مبنی ہے۔اگرچہ بہت سارے سادہ تفاعل غیر تحلیلی ہیں، ان کو چھوڑ کر باقی بہت سارے اقسام کے تفاعل تحلیلی ہیں جو حساب کی ایسی شاخ کو جنم دیتی ہے جو تجزیہ کے لحاظ سے انتہائی خوبصورت اور استعمال کی نقطہ نظر سے انتہائی مفید ہے۔

سوالات

سوال 14.72 تا سوال 14.73 میں $f(1+i)$ ، $f(5i)$ اور $f(-2+i)$ دریافت کریں۔ $f(z)$ سوال میں دیا گیا ہے۔

سوال 14.72: $3z^2+2z$
جواب: $11-i10, \quad -73+i2, \quad 2+i8,$

سوال 14.73: $\frac{1}{z^2}$
جواب: $\frac{9}{25}+i\frac{12}{25}, \quad -\frac{3}{25}, \quad -i\frac{3}{2},$

سوال 14.74 تا سوال 14.76 میں حقیقی اور خیالی اجزاء دریافت کریں۔

سوال 14.74: $f(z)=z^2-2z$
جواب: $\text{خیالی}=2y(x-1), \quad \text{حقیقی}=x^2-y^2-2x,$

سوال 14.75: $f(z)=\frac{1}{1-z}$
جواب: $\text{خیالی}=\frac{y}{y^2+(1-x)^2}, \quad \text{حقیقی}=\frac{1-x}{y^2+(1-x)^2},$

سوال 14.76: $f(z)=1-z+z^2-z^3$
جواب: $\text{خیالی}=-y+2xy-3x^2y+y^3, \quad \text{حقیقی}=1-x+x^2-x^3-y^2+3xy^2,$

سوال 14.77 تا سوال 14.79 میں z خطہ R میں z سطح پر تبدیل ہوتا ہے۔ w سطح میں تفاعل $w=f(z)$ کا مطابقتی خطہ کیا ہو گا۔دونوں خطوں کی ترسیم دکھائیں۔

سوال 14.77: $f(z)=3z, \quad \left|\text{دلیل}\, z\right| < \frac{\pi}{2}$

جواب: $\text{حقیقی}\, z > 0$

سوال 14.78: $f(z)=z^2, \quad z>4$

جواب: $w>16$

سوال 14.79: $f(z)=\frac{1}{z^2}, \quad \left|\text{دلیل}\, z\right| \le \frac{\pi}{4}$

جواب: $\text{حقیقی}\, w \ge 0$

سوال 14.80: ثابت کریں کہ اگر $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ موجود ہو تب یہ حد یکتا ہو گا۔

سوال 14.81: ثابت کریں کہ مساوات 14.34 درج ذیل دو عدد مساوات کی معادل ہے۔

$$\lim_{z\to z_0} \text{حقیقی}\, f(z) = \text{حقیقی}\, l, \quad \lim_{z\to z_0} \text{خیالی}\, f(z) = \text{خیالی}\, l$$

سوال 14.82: اگر $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=l$ اور $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=p$ ہو تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z) = l+p$$
$$\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0} g(z) = lp$$

کیا سوال 14.83 تا سوال 14.85 میں دیا گیا تفاعل مبدا پر استمراری ہے؟

سوال 14.83: $f(z)=\text{حقیقی}\, z, z\neq 0, \quad$ اور $\quad f(0)=0$

جواب: y محور پر چلتے ہوئے $z\to 0$ کرنے سے $f(z)\to 0[=f(0)]$ ملتا ہے جبکہ مثبت x محور پر چلتے ہوئے $z\to 0$ کرنے سے $f(z)\to 1[\neq f(0)]$ ملتا ہے لہٰذا تفاعل مبدا پر استمراری نہیں ہے۔

سوال 14.84: $f(0) = 0$ اور $z \neq 0$,خیالی $f(z) = \frac{z}{1+|z|}$
جواب: $|z| < |y| < \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = f$ ہے لہٰذا $|z| \to 0$ پر $f(z) \to 0 [= f(0)]$ ہو گا لہٰذا استمراری ہے۔

سوال 14.85: $f(0) = 0$ اور $f(z) = \frac{(\text{حقیقی}\, z)^2}{|z|}, z \neq 0$
جواب: $|z| < |x| < \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(z)$ ہے لہٰذا $z \to 0$ سے $f \to 0 [= f(0)]$ ملتا ہے لہٰذا استمراری ہے۔

سوال 14.86: حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $f(z) = z^2$ استمراری ہے۔

سوال 14.87: ثابت کریں: $[af(z) + bg(z)]' = af'(z) + bg'(z)$

سوال 14.88: ثابت کریں: $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

سوال 14.89 تا سوال 14.91 میں تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.89: $(z^2+4)^2$
جواب: $4z(z^2+4)$

سوال 14.90: $\frac{1}{1-z}$
جواب: $\frac{1}{(1-z)^2}$

سوال 14.91: $\frac{(z+1)^2}{1+z^2}$
جواب: $\frac{2(z+1)}{1+z^2} - \frac{2z(z+1)^2}{(1+z^2)^2}$

سوال 14.92 تا سوال 14.95 میں نقطہ z_0 پر تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.92: $f(z) = z^2 + z, \quad z_0 = 1 + i$
جواب: $3 + i2$

سوال 14.93: $f(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad z_0 = 1 - i$
جواب: $\frac{8}{25} + i\frac{6}{25}$

سوال 14.94: $f(z)=(z^2+1)^2, \quad z_0=2+i3$
جواب: $-176+i48$

سوال 14.95: $f(z)=iz^3+2z^2-\frac{i}{z}, \quad z_0=-i$
جواب: $-i8$

سوال 14.96: اگر z_0 پر تفاعل $f(z)$ قابل تفرق ہو تب ثابت کریں کہ z_0 پر $f(z)$ استمراری ہو گا۔

سوال 14.97: ثابت کریں کہ $x=$ حقیقی $z=f(z)$ کسی بھی z پر قابل تفرق نہیں ہے۔
جواب: مساوات 14.37 میں حاصل تقسیم $\frac{\Delta x}{\Delta z}$ ہے جو $\Delta x=0$ کی صورت میں 0 جبکہ $\Delta y=0$ کی صورت میں 1 ہو گا لٰہذا Δz پر اس کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 14.98: ثابت کریں کہ $f(z)=|z|^2$ صرف $z=0$ پر قابل تفرق ہے۔ اشارہ۔ درج ذیل تعلق استعمال کریں۔

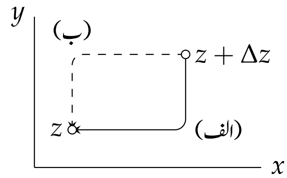
$$|z+\Delta z|^2=(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})$$

14.5 کوشی ریمان مساوات۔لاپلاس مساوات

ہم درج ذیل مخلوط تفاعل کی تحلیلی ہونے کا بنیادی معیار دریافت کرتے ہیں۔

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{14.40}$$

ہم دکھائیں گے کہ اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب u اور v پورے D میں (نیچے دیے گئے) کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کریں گے۔اسی طرح اگر u اور v استمراری ہوں اور ان کے ایک درجی جزوی تفرق پورے D میں کوشی ریمان مساوات 14.44 کو مطمئن کرتے ہوں تب D میں $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔تفصیل در ذیل ہے۔



شکل 14.10: راہ (مساوات 14.41)

فرض کریں کہ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ کسی اختیاری مقررہ نقطہ $z=x+iy$ پر قابل تفرق اور اس نقطہ کے کسی پڑوس میں معین اور استمراری ہے۔تب تفرق کی تعریف کے تحت

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{14.41}$$

نقطہ z پر موجود ہو گا۔یہاں z کی پڑوس میں Δz کسی بھی راہ پر 0 تک پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔ ہم $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ لیتے ہیں۔راہ-الف پر چلتے ہوئے ہم پہلے $\Delta y\to 0$ اور بعد میں $\Delta x\to 0$ کرتے ہیں (شکل 14.10)۔جب $\Delta y\to 0$ ہو جائے تب $\Delta z=\Delta x$ ہو گا لہٰذا مساوات 14.40 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
f'(z)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

ہو گا۔چونکہ $f'(z)$ موجود ہے لہٰذا آخری دونوں حد بھی موجود ہوں گے۔یہ x کے لحاظ سے u اور v کے جزوی تفرق ہیں۔یوں $f'(z)$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.42}$$

اسی طرح اگر ہم شکل 14.10 میں راہ-ب پر چلیں تب پہلے $\Delta x\to 0$ اور بعد میں $\Delta y\to 0$ ہو گا۔یوں $\Delta x\to 0$ کرنے کے بعد $\Delta z=i\Delta y$ ہو گا۔اس طرح

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}$$

یعنی

$$f'(z)=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{14.43}$$

ہو گا جہاں $\frac{1}{i} = -i$ لکھا گیا ہے۔چونکہ $f'(z)$ موجود ہے لہٰذا مساوات 14.42 اور مساوات 14.43 کے دائیں ہاتھ چار جزوی تفرق موجود ہوں گے۔

اب جیسے ہم نے فرض کیا، اگر $f'(z)$ موجود ہو، تب اس کو مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں ان دونوں مساوات کے حقیقی اجزاء آپس میں برابر ہوں گے اور اسی طرح ان کے خیالی اجزاء بھی آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.44}$$

مساوات 14.44 میں دیے گئے بنیادی تعلق کو **کوشی ریمان تفرقی مساوات**[42] کہتے[43] ہیں۔

ہم ان نتائج کو ایک مسئلہ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 14.1: **کوشی ریمان مساوات**

فرض کریں کہ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ نقطہ $z = x + iy$ پر قابل تفرق اور اس نقطہ کے کسی پڑوس میں معین اور استمراری ہے۔تب اس نقطہ پر u اور v کے ایک درجی جزوی تفرق موجود ہوں گے جو تفرق کوشی ریمان مساوات 14.44 کو مطمئن کریں گے۔

نتیجتاً اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب یہ جزوی تفرق موجود ہوں گے اور مساوات 14.44 کو D کے تمام نقطوں پر مطمئن کریں گے۔

مثال 14.12: **کوشی ریمان مساوات**

تفاعل $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ تمام z کے لئے قابل تفرق ہے اور $f'(z) = 2z$ ہے۔ہمارے پاس $u = x^2 - y^2$ اور $v = 2xy$ ہے۔یوں

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

ہیں جو کوشی ریمان مساوات 14.44 کو تمام x اور y پر مطمئن کرتے ہیں۔ □

---

[42] Cauchy Rienmann differential equations

[43] جرمن ریاضی دان برنہارڈ ریمان [1826-1866] نے مخلوط تجزیہ کی جیومیٹریائی ترکیب پر کام کیا۔انہوں نے ریمان جیومیٹری پر بھی کام کیا جو آئن سٹائن کی نظریہ اضافت کی ریاضیاتی بنیاد بنی۔

کوشی ریمان بنیادی حیثیت رکھتے ہیں چونکہ کسی تفاعل کی تحلیلی ہونے کے لئے یہ نا صرف لازم بلکہ کافی ہیں۔ اس کو درج ذیل مسئلہ میں بہتر ور پر بیان کیا گیا ہے۔(اس مسئلہ میں پیش کیے گئے شرائط تحلیلی ہونے کے لئے کافی ضرور لیکن لازم نہیں ہیں۔اس سے کم اقتناعی شرائط ممکن ہیں جنہیں اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔)

مسئلہ 14.2: **کوشی ریمان مساوات**
اگر حقیقی متغیرات x اور y کے حقیقی قیمت استمراری تفاعل $u(x,y)$ اور $v(x,y)$ کے ایک درجی جزوی تفرق موجود ہوں جو کسی دائرہ کار D میں کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کرتے ہوں، تب مخلوط تفاعل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ D میں $N:(x,y)$ کوئی مقررہ نقطہ ہے۔چونکہ D دائرہ کار ہے لہٰذا اس میں N کا پڑوس بھی شامل ہو گا۔اس پڑوس میں ہم نقطہ $Q:(x+\Delta x, y+\Delta y)$ یوں چنتے ہیں کہ سیدھا قطع NQ بھی D میں پایا جاتا ہو۔چونکہ ہم نے تفاعل کو استمراری تصور کیا ہے لہٰذا ہم مسئلہ 10.3 (صفحہ 748) استعمال کر سکتے ہیں۔یوں

$$
\begin{aligned}
u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) &= \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_1} \\
v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) &= \Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} + \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{M_2}
\end{aligned}
\tag{14.45}
$$

حاصل ہو گا جہاں جزوی تفرق قطع NQ پر موزوں نقاط M_1 اور M_2 پر حاصل کیے جاتے ہیں۔

ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$
f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f = f(z+\Delta z) - f(z)
$$

یوں مساوات 14.45 سے

$$
\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_1} + i\Big[\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} + \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{M_2}\Big]
$$

حاصل ہوتا ہے۔کوشی ریمان مساوات استعمال کرتے ہوئے ہم $\frac{\partial u}{\partial y}$ کی جگہ $-\frac{\partial v}{\partial x}$ لکھتے ہیں اور $\frac{\partial v}{\partial y}$ کی جگہ $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھ کر

$$
\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} + i\Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_2} + i\Big[\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} + i\Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\Big]
$$

حاصل کرتے ہیں۔اس کو $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ کی استعمال سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Delta f = \Delta z \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} + i\Delta y \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}\right\} + i\left[\Delta z \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1} + \Delta x \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\right\}\right]$$

ہم دونوں اطراف کو Δz سے تقسیم کر کے $\Delta z \to 0$ کرتے ہیں۔چونکہ دائیں ہاتھ جزوی تفرق استمراری ہیں لہٰذا یہ نقطہ (x, y) پر حاصل $\frac{\partial u}{\partial x}$ اور $\frac{\partial v}{\partial x}$ تک پہنچنے کی کوشش کریں گے۔مزید چونکہ $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le 1$ اور $\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le 1$ ہیں لہٰذا دائیں ہاتھ کا حد موجود ہو گا جو Δz کی صفر تک پہنچنے کی راہ پر منحصر نہیں ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 14.42 کی دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔اس کا مطلب ہوا کہ D میں $f(z)$ تحلیلی ہے لہٰذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

یہ مسئلے عملی طور پر انتہائی اہم ہیں چونکہ انہیں استعمال کرتے ہوئے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا دیا گیا مخلوط تفاعل تحلیلی ہے یا نہیں۔

مثال 14.13: کوشی ریمان مساوات
فرض کریں کہ $f(z) = z$ حقیقی $= x$ ہے۔یوں

$$u = x, \quad v = 0$$

ہو گا جو مساوات 14.44 کو مطمئن نہیں کرتے ہیں لہٰذا $f(z)$ غیر تحلیلی ہے۔اسی طرح $f(z) = z$ خیالی بھی غیر تحلیلی ہے۔دیگر سادہ غیر تحلیلی تفاعل کو سوالات میں شامل کیا گیا ہے۔ □

کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ حاصل کرنے کی خاطر ہم مخلوط عدد کی قطبی روپ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r}$$
$$v_y = v_r r_y + v_\theta \theta_y = v_r \sin\theta + v_\theta \frac{\cos\theta}{r}$$

ہو گا لہٰذا $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r} = v_r \sin\theta + v_\theta \frac{\cos\theta}{r} \tag{14.46}$$

اسی طرح $u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y$ اور $v_x = v_r r_x + v_\theta \theta_x$ سے $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ کی روپ

$$u_r \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r} = v_\theta \frac{\sin\theta}{r} - v_r \cos\theta \tag{14.47}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 14.46 اور مساوات 14.47 سے $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ حذف کرتے ہوئے کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{14.48}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.14: کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ

مان لیں کہ $f(z) = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ ہے۔یوں

$$u = r^3 \cos 3\theta, \quad v = r^3 \sin 3\theta$$

ہو گا لہٰذا

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= 3r^2 \cos 3\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 3r^2 \sin 3\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

ہوں گے۔اس طرح مساوات 14.48 کی مدد سے ثابت ہوا کہ $f(z) = z^3$ ماسوائے $z = 0$ کے تمام z پر تحلیلی ہے۔(ہم جانتے ہیں کہ z^3 نقطہ $z = 0$ پر بھی تحلیلی ہے۔) □

ہم اب مخلوط تجزیہ اور دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کے مابین ایک عملاً اہم تعلق دریافت کرتے ہیں۔ہم بعد کے ایک باب میں ثابت کریں گے کہ تحلیلی تفاعل $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ کی تفرق بھی تحلیلی ہو گا۔اس اہم نتیجہ کے تحت $u(x, y)$ اور $v(x, y)$ کے ہر درجہ کی استمراری جزوی تفرق موجود ہوں گے۔بالخصوص ان کی دو درجی مدغم تفرق برابر ہوں گے:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

کوشی ریمان مساوات کا تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ملتا ہے جن سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 14.3: **مساوات لاپلاس**
مخلوط تفاعل

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

جو دائرہ کار D میں تحلیلی ہے کا حقیقی جزو اور خیالی جزو D میں مساوات لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

کے حل ہیں اور ان کے استمراری دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔

جیسے ہم بعد کی ابواب میں دیکھیں گے، مخلوط تجزیہ کی انجینئری حساب میں اتنی اہمیت کی یہ ایک وجہ ہے۔

مساوات لاپلاس کا ایسا حل جس کے استمراری دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں **ہارمونی تفاعل**[44] (حصہ 13.11) کہلاتا ہے۔یوں تحلیلی تفاعل کا حقیقی جزو اور خیالی جزو ہارمونی تفاعل ہوں گے۔

اگر دو عدد ہارمونی تفاعل $u(x,y)$ اور $v(x,y)$ دائرہ کار D میں مساوات کوشی ریمان کو مطمئن کرتے ہوں یعنی اگر تفاعل $u(x,y)$ اور $v(x,y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی تفاعل $f(z)$ کے حقیقی اور خیالی اجزاء ہوں، تب $v(x,y)$ کو $u(x,y)$ کا **جوڑی دار ہارمونی تفاعل**[45] کہتے ہیں۔

کسی بھی ہارمونی تفاعل کی جوڑی دار ہارمونی تفاعل کو مساوات کوشی ریمان سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس عمل کو درج ذیل مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

[44] harmonic function
[45] conjugate harmonic function

مثال 14.15: **جوڑی دار ہارمونی تفاعل**
تفاعل $u = x^2 - y^2$ ہارمونی ہے۔اس طرح $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ اور $== 2y$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ ہیں لہٰذا u کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو گا۔

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

بائیں ہاتھ کی مساوات کا y کے ساتھ تکمل لینے سے

$$v = 2xy + h(x)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $h(x)$ صرف متغیرہ x کے تابع ہے۔اس کو دائیں ہاتھ کی مساوات میں پر کرتے ہوئے $h'(x) = 0$ یعنی $h = c =$ مستقل ملتا ہے۔ یوں $x^2 - y^2$ کا عمومی جوڑی دار ہارمونی تفاعل $2xy + c$ ہے جہاں c مستقل ہے، اور عمومی تحلیلی تفاعل جس کا حقیقی جزو $x^2 - y^2$ ہو درج ذیل ہو گا۔

$$x^2 - y^2 + i(2xy + c) = z^2 + ic$$

□

سوالات

سوال 14.99 تا سوال 14.104 میں مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 کی مدد سے تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.99: $f(z) = az + b$
جواب: a

سوال 14.100: $f(z) = z^2$
جواب: $2z$

سوال 14.101: $f(z) = \frac{1}{z}$
جواب: $-\frac{1}{z^2}$

سوال 14.102: $f(z) = \frac{1}{1-z}$
جواب: $\frac{1}{(1-z)^2}$

سوال 14.103: $f(z)=z+\frac{1}{z}$
جواب: $1-\frac{1}{z^2}$

سوال 14.104: $f(z)=\frac{z+1}{z-1}$
جواب: $\frac{1+z}{(1-z)^2}+\frac{1}{1-z}$

سوال 14.105: مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 کی طرح درج ذیل بھی درست ہیں۔انہیں حاصل کریں۔

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.49}$$

سوال 14.106 تا سوال 14.108 میں تصدیق کریں کہ دیے گئے تفاعل کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 14.106: $u=x, \quad v=y$

سوال 14.107: $u=e^x\cos y, \quad v=e^x\sin y$

سوال 14.108: $u=x^3-3xy^2, \quad v=3x^2y-y^3$

سوال 14.109 تا سوال 14.117 میں معلوم کریں کہ آیا دیا گیا تفاعل تحلیلی ہے؟

سوال 14.109: $f(z)=z^3+z$
جواب: تحلیلی ہے

سوال 14.110: حقیقی z
جواب: چونکہ غیر قابل تفرق ہے لہٰذا غیر تحلیلی ہے۔

سوال 14.111: $f(z)=\bar{z}$
جواب: غیر تحلیلی ہے

سوال 14.112: $f(z)=|z|^2$
جواب: غیر تحلیلی ہے

سوال 14.113: $f(z)=\frac{1}{1-z}$
جواب: تحلیلی ہے ماسوائے نقطہ $z=1$ پر

سوال 14.114: $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$
جواب: تحلیلی ہے

سوال 14.115: $f(z)=e^{x}\cos y$
جواب: غیر تحلیلی ہے

سوال 14.116: $f(z)=\frac{1}{z^2}$
جواب: تحلیلی ہے ماسوائے نقطہ $z=0$ پر

سوال 14.117: دلیل $f(z)=z$
جواب: غیر تحلیلی

سوال 14.118: مساوات 14.48 حاصل کرنے کے لئے درکار تمام قدم دکھائیں۔

سوال 14.119: مساوات 14.48 استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $f(z)=z^4$ تحلیلی ہے۔

سوال 14.120: مساوات 14.48 استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $f(z)=\frac{1}{z^2},\quad z\neq 0$ تحلیلی ہے۔

سوال 14.121 تا سوال 14.126 میں تصدیق کریں کہ دیے گئے تفاعل ہارمونی ہیں۔ان کا مطابقتی تحلیلی تفاعل $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ حاصل کریں۔

سوال 14.121: $u=x$
جواب: $f(z)=x+iy=z$

سوال 14.122: $u=xy$
جواب: $f(z)=xy-\frac{i}{2}(x^2-y^2)=-i\frac{z^2}{2}$

سوال 14.123: $v=xy$
جواب: $\frac{1}{2}(x^2-y^2)+ixy=\frac{z^2}{2}$

سوال 14.124: $u = \sin x \cosh y$
جواب: $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

سوال 14.125: $v = -\sin x \sinh y$
جواب: $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

سوال 14.126: $u = \frac{x}{x^2+y^2}$
جواب: $f(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

سوال 14.127: کس صورت میں $u = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ky^3$ ہارمونی ہو گا؟
جواب: $u = ax^3 - 3kx^2y - 3axy^2 + ky^3$ ہے لہٰذا $b = -3k$ اور $c = -3a$ ہونا لازم ہے۔

سوال 14.128: کس صورت میں $e^{\alpha x} \cos \beta y$ ہارمونی ہو گا؟

سوال 14.129: اگر u کا جوڑی دار ہارمونی v ہو تب ثابت کریں کہ $-v$ کا جوڑی دار ہارمونی u ہو گا۔

سوال 14.130: $\cos \alpha x \cosh y$ کب ہارمونی ہو گا؟

سوال 14.131: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں $c =$ مستقل $= |f(z)|$ ہو، تب دکھائیں کریں کہ $f(z) =$ مستقل ہے۔

سوال 14.132: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں مستقل $=$ حقیقی z ہو تب دکھائیں کہ $f =$ مستقل ہے۔

سوال 14.133: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں ہر جگہ $f'(z) = 0$ ہو تب دکھائیں کہ $f(z) =$ مستقل ہے۔

14.6 ناطق تفاعل۔ جذر

اس باب کے باقی حصوں میں اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل مثلاً طاقتی تفاعل، قوت نمائی، لوگارتھم، تکونیاتی تفاعل، وغیرہ پر غور کیا جائے گا۔ہم دیکھیں گے کہ ان تفاعل کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے کہ حقیقی قیمت کی غیر تابع متغیرات کے لئے یہ عین جانی پہچانی حقیقی تفاعل کی صورت اختیار کریں۔ چند مخلوط تفاعل دلچسپ خصوصیات رکھتے ہیں جو حقیقی غیر تابع متغیرہ کی صورت میں ظاہر نہیں ہوتی ہیں۔آپ سے گزارش ہے کہ ذیل تفصیل کو غور سے پڑھیں چونکہ عملی استعمال میں ان بنیادی تفاعل کی ضرورت ہو گی۔مزید ان تفاعل کی تفصیلی معلومات ہمیں عمومی غور و فقر میں مدد دے گی۔

ان میں سے چند تفاعل پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہوں گے۔ایسے تفاعل کو **سالم تفاعل**[46] کہتے ہیں۔

طاقتی تفاعل

$$w = z^n \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{14.50}$$

پوری مخلوط سطح پر تحلیلی ہیں لہٰذا یہ سالم تفاعل ہیں۔یہی درج ذیل صورت کی تفاعل کے لئے بھی درست ہے

$$w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \qquad (c_n \neq 0) \tag{14.51}$$

جہاں c_0 ، $\cdots$ ، c_n (مخلوط یا حقیقی) مستقل ہیں۔ایسا تفاعل **کثیر رکنی یا سالم ناطق تفاعل** کہلاتا ہے جہاں n کثیر رکنی کا **درجہ** کہلاتا ہے۔کثیر رکنی کا مطالعہ کلاسیکی الجبرا کا بنیادی موضوع ہے۔

دو کثیر رکنی $p(z)$ اور $q(z)$ کا حاصل تقسیم

$$z = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{14.52}$$

(کسری) ناطق تفاعل[47] کہلاتا ہے۔یہ تفاعل ان تمام z پر تحلیلی ہو گا جہاں $q(z)$ صفر نہ ہو؛ یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ $p(z)$ اور $q(z)$ کے مشترکہ جزو ضربی حذف شدہ ہیں۔ناطق تفاعل کی بالخصوص سادہ صورت

$$\frac{c}{(z - z_0)^m} \tag{14.53}$$

---

[46] entire function
[47] rational function

جہاں c اور z_0 مخلوط اعداد ہیں جبکہ m مثبت عدد صحیح ہے کو جزوی کسر[48] کہتے ہیں۔ریاضی میں اس کا ثبوت موجود ہے کہ ہر ناطق تفاعل کو ایک کثیر رکنی اور محدود تعداد کی جزوی کسر کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

اگر $z = w^n \ (n = 1, 2, \cdots)$ ہو تب w کی ہر ایک قیمت کا ایک مطابقتی z قیمت ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی $z \neq 0$ کے مطابقتی n منفرد w قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ایسی ہر ایک قیمت کو z کی n ویں جذر کہتے ہیں جسے

$$w = \sqrt[n]{z} \tag{14.54}$$

لکھا جاتا ہے۔یوں یہ علامت کثیر قیمتی یعنی n قیمتی ہے جبکہ حقیقی علم الاحصاء میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ $\sqrt[n]{z}$ کی n قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$w = R(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \text{اور} \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

لیتے ہیں۔یوں کلیہ ڈی موے ور مساوات 14.24 استعمال کرتے ہوئے

$$z = w^n = R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حاصل ہو گا جس کے دونوں اطراف کی حتمی قیمتیں آپس میں برابر پر کرتے ہوئے

$$R^n = r \quad \implies R = \sqrt[n]{r} \tag{14.55}$$

ملتا ہے جہاں جذر حقیقی مثبت لہٰذا منفرد ہو گا۔اسی طرح دونوں اطراف کے دلیل آپس میں پر کرتے ہوئے

$$n\phi = \theta + 2k\pi \quad \implies \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

ملتا ہے جہاں k عدد صحیح ہے۔یوں $z \neq 0$ لیتے ہوئے $\sqrt[n]{z}$ کے درج ذیل n عدد منفرد قیمتیں ہوں گی۔

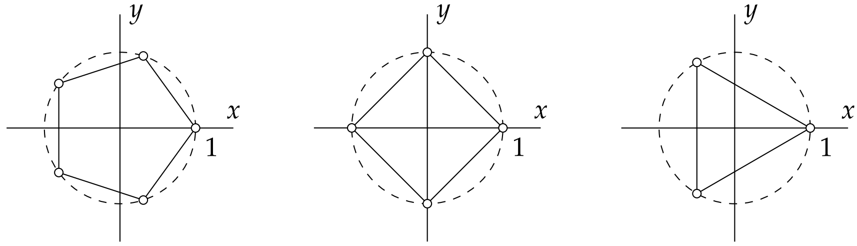
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{14.56}$$

یہ قیمتیں n اطراف کی منظم کثیر الاضلاع بناتے ہوئے رداس $\sqrt[n]{r}$ کی دائرہ، جس کا مرکز مبدا ہو، پر پائے جاتے ہیں (شکل 14.11)۔

دلیل z کی صدر قیمت (حصہ 14.2) اور مساوات 14.56 میں $k = 0$ لیتے ہوئے $\sqrt[n]{z}$ کی حاصل قیمت کو $w = \sqrt[n]{z}$ کی صدر قیمت[49] کہتے ہیں۔

---

[48] partial fraction
[49] principal value



(الف) $\sqrt[3]{1}$ (ب) $\sqrt[4]{1}$ (پ) $\sqrt[5]{1}$

شکل 14.11: مخلوط جذر

مثال 14.16: جذر المربع

$w = \sqrt{z}$ کی درج ذیل دو قیمتیں ہیں

$$z_1 = \sqrt{r}\Big(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\Big)$$
$$z_2 = \sqrt{r}\Big[\cos\Big(\frac{\theta}{2} + \pi\Big) + i\sin\Big(\frac{\theta}{2} + \pi\Big)\Big] = -z_1$$

جو مبدا کے لحاظ سے تشاکلی نقطوں پر ہیں یعنی

$$\sqrt{i4} = \mp 2\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = \mp(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

□

سوال 14.134: جذر الکعب

اگر z مثبت حقیقی ہو تب $w = \sqrt[3]{z}$ کے جذر حقیقی قیمت $\sqrt[3]{r}$ اور درج ذیل جوڑی دار مخلوط قیمتیں ہوں گی۔

$$\sqrt[3]{r}\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\Big) = \sqrt[3]{r}\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$
$$\sqrt[3]{r}\Big(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\Big) = \sqrt[3]{r}\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

مثلاً $\sqrt[3]{1} = 1, -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوں گے (شکل 14.134-الف)۔ ظاہر ہے کہ یہ مساوات $w^3 - 1 = 0$ کی جذر ہیں۔

مثال 14.17: اکائی کی n ویں جذر
مساوات 14.56 سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

اگر $k=1$ کا مطابقتی جذر w ہو تب $\sqrt[n]{1}$ کے n جذر کو $1, w, w^2, \cdots w^{n-1}$ لکھا جا سکتا ہے جو مبدا پر اکائی رداس کے دائرے پر n اطراف کی منظم کثیر الاضلاع بناتے ہیں جس کی ایک نوک نقطہ 1 پر ہے۔ان n قیمتوں میں سے ہر ایک کو 1 کی n ویں جذر کہتے ہیں۔ مثلاً $\sqrt[4]{1}$ کی قیمتیں $1, i, -1, -i$ ہیں (شکل 14.11-ب)۔ شکل 14.11-پ میں $\sqrt[5]{1}$ دکھائے گئے ہیں۔

اگر کسی اختیاری مخلوط عدد z کا کوئی n واں جذر w_1 ہو تب درج ذیل $\sqrt[n]{z}$ کی n قیمتیں ہوں گی

$$w_1, \quad w_1\omega, \quad w_1\omega^2, \quad \cdots, \quad w_1\omega^{n-1}$$

چونکہ w_1 کو ω^k سے ضرب دینا w_1 کی زاویہ میں $\frac{2k\pi}{n}$ اضافہ کے مترادف ہے۔ □

سوالات

سوال 14.135 تا سوال 14.146 میں تمام جذر تلاش کریں۔ان جذروں کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

سوال 14.135: $\sqrt{i}$
جواب: $\mp\frac{1}{2}(1+i)$

سوال 14.136: $\sqrt{-i}$
جواب: $\mp\frac{1}{2}(1-i)$

سوال 14.137: $\sqrt{-9}$
جواب: $\mp i3$

سوال 14.138: $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$
جواب: $\mp\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$

سوال 14.139: $\sqrt[3]{-1}$
جواب: $-1, \quad \frac{1\mp i\sqrt{3}}{2}$

سوال 14.140: $\sqrt[3]{i}$
جواب: $-i, \quad \mp\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

سوال 14.141: $\sqrt[3]{-i}$
جواب: $i, \quad \mp\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

سوال 14.142: $\sqrt[3]{1+i}$
جواب: $-0.79+i0.79, \quad -0.29-i1.08, \quad 1.08+i0.29$

سوال 14.143: $\sqrt[3]{1-i}$
جواب: $-0.79-i0.79, \quad -0.29+i1.08, \quad 1.08-i0.29$

سوال 14.144: $\sqrt[4]{-1}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

سوال 14.145: $\sqrt[5]{-1}$
جواب: $-1, -\cos\frac{2\pi}{5}\mp i\sin\frac{2\pi}{5}, -\cos\frac{4\pi}{5}\mp i\sin\frac{4\pi}{5}$

سوال 14.146: $\sqrt[6]{-1}$
جواب: $\mp i, \mp\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

سوال 14.147 تا سوال 14.149 میں دی گئی مساوات کو حل کریں۔

سوال 14.147: $z^3=8$
جواب: $2, -1-i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3}$

سوال 14.148: $z^4+5z^2=32$
جواب: $2, -2, i3, -i3$

سوال 14.149: $z^6+7z^3=8$
جواب: $1, -2, 1\mp i\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 14.150: اکائی کے n جذر کا مجموعہ حاصل کریں۔ (الف) $n=3$ لیں۔ (ب) $n=4$ لیں۔
جواب: 0

سوال 14.151: **جذر المربع**
درج ذیل تعلق ثابت کریں جہاں $y < 0$ کی صورت میں علامت $y = -1$ اور $y > 0$ کی صورت میں علامت $y = 1$ ہے جبکہ تمام مثبت قیمتوں کے جذر مثبت علامت کے ساتھ لئے گئے ہیں۔

$$\sqrt{z} = \mp\Big[\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} + (\text{علامت}\, y)i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\Big] \quad z = x + iy$$

اشارہ۔ $\sqrt{z} = w = u + iv$ لے کر حقیقی اور خیالی اجزاء سے دو عدد حقیقی مساوات حاصل کریں۔ u^2 اور v^2 کو x اور y کی صورت میں لکھیں۔

سوال 14.152 تا سوال 14.154 میں سوال 14.151 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے جذر حاصل کریں۔

سوال 14.152: $\sqrt{i4}$
جواب: $\mp\sqrt{2}(1 + i)$

سوال 14.153: $\sqrt{4 + i3}$
جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i)$

سوال 14.154: $\sqrt{-8 + i6}$
جواب: $-3, \mp(1 + i3)$

سوال 14.155 تا سوال 14.158 کو حل کریں۔سوال 14.151 کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال 14.155: $z^2 - 3z + 3 - i = 0$
جواب: $2 + i, 1 - i$

سوال 14.156: $z^2 + z + 1 - i = 0$
جواب: $i, -1 - i$

سوال 14.157: $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$
جواب: $2 - i, 2 + i2$

سوال 14.158: $z^4 - 3(1 + i2)z^2 = 8 - i6$
جواب: $\mp(1 + i), \mp(2 + i)$

سوال 14.159: درج ذیل سے $z = x + iy$ کی ایک عدد مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔
$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 4, \quad xy(x^2 - y^2) = 1$$
جواب: $z^4 = 4(1+i), z = \mp\sqrt[8]{32}(\cos\beta + i\sin\beta), \quad \beta = \frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}$

سوال 14.160: $z^4 + 4$ کو حقیقی عددی سر والے دو درجی اجزاء کا حاصل ضرب لکھیں۔

سوال 14.161: $z^4 + 1$ کو حقیقی عددی سر والے دو درجی اجزاء کا حاصل ضرب لکھیں۔
جواب: $(z^2 - z\sqrt{2} + 1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1)$

سوال 14.162: ایک منظم کثیر الاضلاع p کے n عدد اطراف اکائی دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ p کے کسی ایک کونے سے باقی $n-1$ کونوں تک سیدھے فاصلوں کا مجموعہ دریافت کریں۔

14.7 قوت نمائی تفاعل

حقیقی قوت نمائی تفاعل e^x کی دو خواص

$$(e^x)' = e^x \tag{14.57}$$
$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2} \tag{14.58}$$

ہیں جبکہ اس کی مکلارن تسلسل درج ذیل ہے۔

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{14.59}$$

مخلوط $z = x + iy$ کی قوت نمائی تفاعل جسے e^z سے ظاہر کیا جاتا ہے کی تعریف حقیقی تفاعل e^x، $\cos y$ اور $\sin y$ کی مدد سے پیش کی جاتی ہے یعنی:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{14.60}$$

یہ تعریف ذیل حقائق سے اخذ کی جا سکتی ہے۔ حقیقی $z = x$ کی صورت میں $e^z = e^x$ ہو گا۔ کوشی ریمان مساوات کے تحت e^z تمام z کے لئے تحلیلی ہے۔ مساوات 14.42 کی مدد سے

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y) + i\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y$$

یعنی

$$(e^z)' = e^z \tag{14.61}$$

حاصل ہوتا ہے۔مزید $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ لے کر ضمیمہ ب میں مساوات 6.ب استعمال کرتے ہوئے

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \tag{14.62}$$

حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات 14.58 کی طرح ہے۔بالخصوص جب $z_1 = x$ اور $z_2 = iy$ ہوں تب

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \tag{14.63}$$

ہو گا۔ ہم بعد کی باب میں دیکھیں گے کہ مخلوط تحلیلی تفاعل کی ٹیلر تسلسل عین حقیقی تفاعل کی ٹیلر تسلسل کی طرح حاصل کی جاتی ہیں۔یوں ہم دیکھ پائیں گے کہ مساوات 14.59 میں x کی جگہ z پر کرنے سے e^z کی مکلارن تسلسل[50] حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 14.60 سے ہم یولر مساوات

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{14.64}$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں ظاہر ہے کہ مخلوط عدد $z = x + iy$ کی قطبی روپ (حصہ 14.2) کو اب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r^{i\theta} \tag{14.65}$$

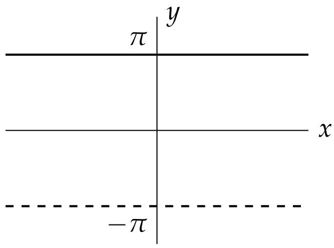
مزید مساوات 14.64 سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\left|e^{iy}\right| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1 \tag{14.66}$$

ہو گا یعنی خالص خیالی طاقت کے لئے قوت نمائی تفاعل کی حتمی قیمت اکائی کے برابر ہے۔اس اہم نتیجہ کو یاد رکھنا مفید ثابت ہو گا۔یوں مساوات 14.60 کے تحت درج ذیل ہوں گے۔

$$\left|e^z\right| = \left|e^x\right|, \quad \text{دلیل}\; e^z = y \tag{14.67}$$

[50] یہ تسلسل e^z کی تعریف کے طور پر استعمال کی جا سکتی ہے۔



شکل 14.12: قوت نمائی تفاعل e^z کا بنیادی خطہ

چونکہ $\cos 2\pi = 1$ اور $\sin 2\pi = 0$ ہیں لہٰذا مساوات 14.64 سے

$$e^{i2\pi} = 1 \tag{14.68}$$

ملتا ہے۔اسی طرح درج ذیل بھی حاصل ہوتے ہیں۔

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \tag{14.69}$$

مساوات 14.69 اور مساوات 14.62 سے

$$e^{z+i2\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z \tag{14.70}$$

ملتا ہے جس کے تحت e^z **دوری** ہے جس کا **خیالی دوری عرصہ** 2π ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$e^{z\mp i2n\pi} = e^z, \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{14.71}$$

دوری ہونے کی بنا $w = e^z$ کی جتنی بھی ممکنہ قیمتیں ہیں وہ تمام درج ذیل پٹی (شکل 14.12)

$$-\pi < y \leq \pi \tag{14.72}$$

میں موجود ہیں۔اس لامتناہی پٹی کو e^z کا **بنیادی خطہ** کہتے ہیں۔

مساوات 14.62 سے $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ ملتا ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

$$e^z \neq 0 \quad \text{تمام } z \tag{14.73}$$

سوالات

سوال 14.163: مساوات کوشی ریمان استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ e^z تمام z کے لئے تحلیلی ہے۔

سوال 14.164: مساوات 14.62 حاصل کریں۔

سوال 14.165 تا سوال 14.168 میں دیا گیا z استعمال کرتے ہوئے e^z دریافت کریں۔

سوال 14.165: $i\frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

سوال 14.166: $-i\frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

سوال 14.167: $1+i$
جواب: $e(\cos 1 + i\sin 1)$

سوال 14.168: $-5+i\pi$
جواب: $-e^{-5}$

سوال 14.169 تا سوال 14.172 میں حقیقی اور خیالی اجزاء دریافت کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

سوال 14.169: e^{2z}
جوابات: $\text{حقیقی} = e^{2x}\cos 2y, \quad \text{خیالی} = e^{2x}\sin 2y$

سوال 14.170: e^{-2z}
جوابات: $\text{حقیقی} = e^{-2x}\cos 2y, \quad \text{خیالی} = -e^{-2x}\sin 2y$

سوال 14.171: e^{z^2}
جوابات: $\text{حقیقی} = e^{x^2-y^2}\cos 2xy, \quad \text{خیالی} = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$

سوال 14.172: e^{z^3}
جوابات: $\text{حقیقی} = e^{x^3-3xy^2}\cos(3x^2y-y^3), \quad \text{خیالی} = e^{x^3-3xy^2}\sin(3x^2y-y^3)$

سوال 14.173 تا سوال 14.177 میں دیے گئے تفاعل کو کو قطبی روپ میں لکھیں۔

سوال 14.173: $\sqrt{i}$
جواب: $e^{i\frac{\pi}{4}}$

سوال 14.174: $4 - i3$
جواب: $5e^{-i\tan^{-1}\frac{3}{4}}$

سوال 14.175: $1 + i$
جواب: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

سوال 14.176: $\sqrt{z}$
جواب: $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}\, e^{i\frac{\tan^{-1}\frac{y}{x}}{2}}$

سوال 14.177: $\sqrt[n]{z}$ جواب: $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2n}}\, e^{i\frac{\tan^{-1}\frac{y}{x}}{n}}$

سوال 14.178 تا سوال 14.180 میں دیے مساوات کا حل تلاش کریں۔چند حل کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

سوال 14.178: $e^z = 1$
جوابات: $z = \mp i2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.179: $e^z = 3$
جوابات: $z = \ln 3 \mp i2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.180: $e^z = -3$
جوابات: $z = \ln 3 \mp i(2n+1)\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.181 تا سوال 14.184 میں z کی وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جو دیے گئے تعلق کو مطمئن کرتے ہوں۔

سوال 14.181: $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$
جواب: تمام z

سوال 14.182: $e^{i\bar{z}} = \overline{e^{iz}}$
جواب: $z = 0$

سوال 14.183: $\left|e^{-2z}\right| < 1$
جواب: z حقیقی > 0

سوال 14.184: e^z حقیقی ہے
جواب: $y = \mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.185: دکھائیں کہ $u = e^{xy}\cos(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2})$ ہارمونی ہے اور اس کا جوڑی دار ہارمونی جزو حاصل کریں۔
جواب: $v = -e^{xy}\sin(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2})$

سوال 14.186: یہ ایک دلچسپ بات ہے کہ $f(x + i0) = e^x$ اور $f'(z) = f(z),$ کی شرط، $f(z)$ (جسے تمام پر تحلیل تصور کیا گیا ہے) کی یکتا قیمت یعنی $f(z) = e^z$ تعین کرتی ہے جہاں e^z کی تعریف مساوات 14.60 میں پیش کی گئی ہے۔اس حقیقت کو کوشی ریمان مساوات سے ثابت کریں۔

سوال 14.187: مختلف راہ مثلاً $0 =$ دلیلz ، $\frac{\pi}{2} =$ دلیلz اور $\pi =$ دلیلz پر چلتے ہوئے $|z| \to \infty$ کرنے سے تفاعل e^z کی کیا خاصیت ہو گی؟
جوابات: $0 =$ دلیلz کی راہ پر $e^z \to \infty$ ہو گا، $\frac{\pi}{2} =$ دلیلz کی راہ پر کوئی حد نہیں ہو گا جبکہ $\pi =$ دلیلz کی راہ پر $e^z \to 0$ ہو گا۔

14.8 تکونیاتی اور ہذلولی تفاعل

یولر مساوات 14.64 سے

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{i2}(e^{ix} - e^{-ix}) \qquad (x \text{ حقیقی ہے})$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں دیکھ کر ہم مخلوط z کے تفاعل $\cos z$ اور $\sin z$ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{i2}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{14.74}$$

مزید باقی حقیقی تکونیاتی تفاعل کی طرح ہم مخلوط z کے لئے درج ذیل تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \tag{14.75}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} \tag{14.76}$$

چونکہ e^z تمام z کے لئے تحلیلی ہے لہٰذا $\sin z$ اور $\cos z$ بھی تمام z کے لئے تحلیلی ہوں گے۔تفاعل $\tan z$ اور $\sec z$ تحلیلی ہیں ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $\cos z$ کی قیمت صفر ہے۔اسی طرح $\cot z$ اور $\operatorname{cosec} z$ تحلیلی ہیں ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $\sin z$ کی قیمت صفر ہے۔

تفاعل $\cos z$ اور $\sec z$ جفت ہیں جبکہ باقی تفاعل طاق ہیں مثلاً:

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \\ \cot(-z) &= -\cot z, \quad \tan(-z) = -\tan z \end{aligned} \tag{14.77}$$

وغیرہ۔ چونکہ قوت نمائی تفاعل دوری ہے لہٰذا تکونیاتی تفاعل بھی دوری ہیں اور ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہے۔

$$\begin{aligned} \cos(z \mp 2n\pi) &= \cos z, \quad \sin(z \mp 2n\pi) = \sin z \\ \tan(z \mp 2n\pi) &= \tan z, \quad \cot(z \mp 2n\pi) = \cot z \end{aligned} \tag{14.78}$$

ان مخلوط تفاعل کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ حقیقی تفاعل کے تعلق مخلوط تفاعل کے لئے بھی درست ہوں گے مثلاً:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z = -\sin z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z = \cos z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan z = \sec^2 z \tag{14.79}$$

اور

$$\begin{aligned} \cos(z_1 \mp z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 \mp z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \mp \cos z_1 \sin z_2 \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \end{aligned} \tag{14.80}$$

مساوات 14.74 سے ہم دیکھتے ہیں کہ **مساوات یولر** مخلوط قیمتوں کے لئے بھی درست ہے۔

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{14.81}$$

مساوات 14.80 استعمال کرتے ہوئے ہم $\cos z$ اور $\sin z$ کو حقیقی تفاعل کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \cos x\cos iy - \sin x\sin iy\\ \sin(x+iy) &= \sin x\cos iy + \cos x\sin iy\end{aligned} \tag{14.82}$$

لکھتے ہیں۔ اب مساوات 14.74 اور ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سائن کی تعریف سے

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y}) = \cosh y, \quad \sin iy = \frac{1}{2}(e^{-y}-e^{y}) = i\sinh y$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں درکار تعلق

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\\ \sin(x+iy) &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y\end{aligned} \tag{14.83}$$

حاصل ہوتے ہیں جو $\cos z$ اور $\sin z$ کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی کام آتے ہیں۔

مخلوط متغیرہ z کی ہذلولی کوسائن[51] اور ہذلولی سائن[52] کی تعریف درج ذیل ہے

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) \tag{14.84}$$

جو مطابقتی حقیقی تفاعل کی تعریف کے عین مطابق ہے (ضمیمہ ب مساوات 17.ب)۔ یہ تفاعل پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہیں۔ مساوات 14.84 اور مساوات 14.74 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

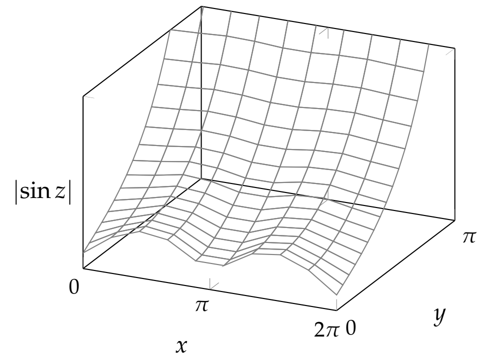
$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i\sin(iz) \tag{14.85}$$

حقیقی تفاعل کی طرح ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}\\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}\end{aligned} \tag{14.86}$$

---

[51] hyperbolic cosine
[52] hyperbolic sine



شکل 14.13: $\sin z$ کی مقیاسی سطح

مخلوط متغیرہ $z = x + iy$ کے مخلوط تفاعل $f(z)$ کی حتمی قیمت $|f(z)|$ دو حقیقی متغیرات x اور y کا حقیقی تفاعل ہے لہٰذا اس کو تین بعدی فضا میں ایک سطح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔یوں xy مستوی پر ہر نقطہ (x, y) کا مطابقتی نقطہ تین بعدی فضا میں کارتیسی محدد $(x, y, |f|)$ دیتا ہے اور یہ نقطے مل کر ایک سطح دیتے ہیں جس کو **مقیاسی سطح**[53] کہتے ہیں۔مقیاسی سطح پر $|f| =$ مستقل اور دلیل$z =$ مستقل کی منحنی دکھائے جا سکتے ہیں جو تحلیلی تفاعل کی رویہ کی جیومیٹریائی روپ پیش کرتی ہے۔

شکل 14.13 میں $\sin z$ کی مقیاسی سطح دکھائی گئی ہے۔مقیاسی سطحیں برقی انجینئری میں بہت کار آمد ثابت ہوتی ہیں۔

سوال 14.188: دکھائیں کہ $\cos z$ ، $\sin z$ ، $\cosh z$ اور $\sinh z$ تمام z کے لئے تحلیلی ہیں۔

سوال 14.189: مساوات 14.77 ثابت کریں۔

سوال 14.190: مساوات 14.74 سے مساوات 14.78 حاصل کریں۔

سوال 14.191: مساوات 14.79 ثابت کریں۔

سوال 14.192: مساوات 14.80 ثابت کریں۔

سوال 14.193: مساوات 14.85 ثابت کریں۔

---

[53] modular surface

سوال 14.194 تا سوال 14.199 میں دی گئی تفاعل کی قیمت دریافت کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

سوال 14.194: $|\cos z|$
جواب: $\sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$

سوال 14.195: $|\sin z|$
جواب: $\sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$

سوال 14.196: $|\tan z|$
جواب: $\sqrt{\frac{\sin^2 x + \sinh^2 y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}}$

سوال 14.197: حقیقی $\tan z$
جواب: $\frac{\sin^2 x + \sinh^2 y}{\sin x \cos x}$

سوال 14.198: حقیقی $\cot z$
جواب: $\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sinh^2 y}$

سوال 14.199: حقیقی $\sec z$
جواب: $\frac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$

سوال 14.200 تا سوال 14.204 میں اعدادی قیمتیں حاصل کریں۔

سوال 14.200: $\sin i$
جواب: $i1.175$

سوال 14.201: $\sinh i$
جواب: $i0.841$

سوال 14.202: $\sinh(1 + i)$
جواب: $0.635 + i1.298$

سوال 14.203: $\cos(3.2 - i5.3)$
جواب: $-100 - i5.847$

سوال 14.204: $\cosh(-2-i3)$
جواب: $-3.725+i0.512$

سوال 14.205 تا سوال 14.210 میں دی گئی مساوات کے تمام حل تلاش کریں۔

سوال 14.205: $\cos z=5$
جواب: $\mp 2n\pi \mp i2.29, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.206: $\sin z=10$
جواب: $\mp 2n\pi - i2.99, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.207: $\cosh z=0$
جواب: $\mp i(2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.208: $\cosh z=0.5$
جواب: $\mp i2n\pi \mp i\frac{\pi}{3}, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.209: $\sinh z=0$
جواب: $\mp in\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.210: $\sin z=i\sinh 1$
جواب: $i\mp 2n\pi$

سوال 14.211 تا سوال 14.219 میں دیے تعلق کی تصدیق کریں۔

سوال 14.211: $\cos z=\cosh iz, \quad \sin z=-i\sinh z$

سوال 14.212: $(\cosh z)'=\sinh z, \quad (\sinh z)'=\cosh z$

سوال 14.213:

$$\begin{aligned}\cosh z&=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y,\\ \sinh z&=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y\end{aligned}$$

سوال 14.214: $\left|\sinh y\right|\le\left|\sin z\right|\le\cosh y, \quad \left|\sinh y\right|\le\left|\cos z\right|\le\cosh y$

سوال 14.215: $\cosh^2 z-\sinh^2=1$

سوال 14.216: تمام z کے لئے $\cot z \neq \mp i$

سوال 14.217: $\tanh z$ کا دوری عرصہ $i\pi$ ہے۔

سوال 14.218: $\cos z = 0$ صرف حقیقی z کے لئے ہے۔

سوال 14.219: $\sin z = 0$ صرف حقیقی z کے لئے ہے۔

سوال 14.220: مساوات 14.74 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔
$\cos^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$

سوال 14.221: مساوات 14.64 اور $z = e^{i\frac{\theta}{2}}$ ، $1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$1 + \tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{4}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}\cos 3\theta + \cdots = \frac{4 - 2\cos\theta}{5 - 4\cos\theta}$$

14.9 لوگارتھم۔عمومی طاقت

z کی قدرتی لوگارتھملوگارتھم!قدرتی[54] کو $\ln z$ (بعض اوقات $\log z$) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔قوت نمائی تفاعل کی الٹ کو قدرتی لوگارتھم کہتے ہیں (یہ قدرتی لوگارتھم کی تعریف ہے) یوں ہر $z \neq 0$ کے لئے $w = \ln z$ کی تعریف درج ذیل تعلق ہے۔

$$e^w = z \tag{14.87}$$

مساوات 14.87 میں $w = u + iv$ اور $z = |z| e^{i\theta} = re^{i\theta}$ پر کرتے ہوئے

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i\theta}$$

natural logarithm[54]

ملتا ہے۔ مساوات کی دونوں اطراف حتمی قیمت یکساں ہو گی۔مساوات 14.66 کے تحت $\left|e^{iv}\right| = 1$ ہے لہٰذا $e^u e^{i\theta}$ کی حتمی قیمت e^u ہو گی۔اسی طرح $re^{i\theta}$ کی حتمی قیمت r ہے لہٰذا

$$e^u = |z| = r \qquad \Longrightarrow \qquad u = \ln|z|$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\ln|z|$ مثبت عدد $|z|$ کی بنیادی حقیقی قدرتی لوگارتھم ہے۔اسی طرح مساوات کی دونوں اطراف دلیل بھی یکساں ہو گی:

$$v = \theta = \text{دلیل}\, z$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\ln z = \ln|z| + i(\text{دلیل}\, z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i(\text{دلیل}\, z) \tag{14.88}$$

چونکہ مخلوط z کی دلیل ہر $2n\pi$ پر دہراتا ہے لہٰذا مخلوط قدرتی لوگارتھم کی لامتناہی قیمتیں ہوں گی۔

دلیل z کی صدر قیمت

$$-\pi < \text{دلیل}\, z \le \pi \qquad\qquad (\text{حصہ } 14.2)$$

پر $\ln z$ کی قیمت کو $\ln z$ کی صدر قیمت[55] کہتے ہیں جس کو عموماً $\operatorname{Ln} z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ظاہر ہے کہ $\ln z$ کی باقی قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$\ln z = \operatorname{Ln} z \mp i2n\pi \qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{14.89}$$

جن کی خیالی اجزاء میں 2π کی مضرب کا فرق پایا جائے گا جو اس حقیقت کے عین مطابق ہے کہ e^z دوری تفاعل ہے جس کا خیالی دوری عرصہ $i2\pi$ ہے۔

مزید حقیقی مثبت z کی صورت میں دلیل z کی صدر قیمت صفر ہو گی لہٰذا $\operatorname{Ln} z$ کی صدر قیمت اور حقیقی قدرتی لوگارتھم کی قیمت یکساں ہوں گی۔ اگر z حقیقی منفی ہو تب دلیل z کی صدر قیمت π ہو گی اور تب درج ذیل ہو گا۔

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\pi$$

---

[55] principal value

مثال 14.18: قدرتی لوگارتھم۔ صدر قیمت

$$\ln(-1) = \mp i\pi, \mp i3\pi, \mp i5\pi, \cdots, \quad \operatorname{Ln}(-1) = i\pi$$
$$\ln i = i\frac{\pi}{2}, -i\frac{3\pi}{2}, i\frac{5\pi}{2}, -i\frac{7\pi}{2}, i\frac{9\pi}{2}, \cdots, \quad \operatorname{Ln} i = i\frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{Ln}(-i) = -i\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Ln}(-2-i2) = \ln\sqrt{8} - i\frac{3\pi}{4}$$

□

حقیقی قدرتی لوگارتھم کے قواعد مخلوط قیمتوں کے لئے بھی درست ہیں یعنی

$$\text{(الف)} \quad \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \qquad \text{(ب)} \quad \ln\frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 \tag{14.90}$$

لیکن ان تعلق کا مطلب کچھ یوں لینا ہو گا کہ مساوات کی ایک ہاتھ کی ہر ایک قیمت دوسری ہاتھ کی قیمتوں میں شامل ہے۔

مثال 14.19: مخلوط قیمتوں کی صورت میں مساوات 14.90 کا اطلاق

مان لیں کہ

$$z_1 = z_2 = e^{i\pi} = -1$$

ہے۔ اگر ہم

$$\ln z_1 = \ln z_2 = i\pi$$

لیں تب مساوات 14.90 اس صورت درست ہو گی جب ہم $\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = i2\pi$ لکھیں جبکہ صدر قیمت کے لئے یہ درست نہیں ہے یعنی $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln}(1) = 0$ □

مساوات 14.42 کو مساوات 14.88 پر لاگو کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z &= \frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{x^2+y^2} + i\frac{\partial}{\partial x}(z \text{ دلیل})\\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}\end{aligned}$$

ملتا ہے۔اس طرح قدرتی لوگارتھم کی تفرق درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0) \tag{14.91}$$

یوں صدر قیمت $\operatorname{Ln} z \ (z \neq 0)$ جو واحد قیمتی ہے اور یوں تفاعل کی عمومی تعریف پر پورا اترتا ہے، دائرہ کار $-\pi < z$ دلیل $< \pi$ یعنی ماسوائے منفی حقیقی محور کے، تمام مخلوط سطح پر تحلیلی ہے۔منفی حقیقی محور پر یہ تفاعل غیر استمراری ہے جہاں اس میں 2π کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔

عمومی طاقت: مخلوط عدد $z = x + iy (\neq 0)$ کی عمومی طاقت کی تعریف درج ذیل کلیہ ہے۔

$$z^c = e^{c\ln z} \qquad (z \neq 0, \quad c \text{ مخلوط}) \tag{14.92}$$

چونکہ $\ln z$ کی لامتناہی قیمتیں ہیں لہٰذا z^c بھی عموماً کثیر قیمتی ہو گا۔اس کی مخصوص قیمت

$$z^c = e^{c\operatorname{Ln} z}$$

کو z^c کی **صدر قیمت** کہتے ہیں۔

$c = n = 1, 2, \cdots$ کی صورت میں z^n واحد قیمتی ہو گا جس کی وہی قیمت ہو گی جو z کی عمومی n ویں طاقت کی ہوتی ہے۔اسی طرح $c = -1, -2, \cdots$ کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا۔

اگر $c = \frac{1}{n}$ ہو جہاں $n = 2, 3, \cdots$ ہے تب

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{(1/n)\ln z} \qquad (z \neq 0)$$

ہو گا جہاں طاقت ($1/n \ln z$) کی قیمت $\frac{i2\pi}{n}$ کی مضرب تک تعین کی جا سکتی ہے جس سے ہمیں جذر کی n منفرد قیمتیں حاصل ہوں گی، جو حصہ 14.6 میں حاصل کردہ نتیجہ کے عین مطابق ہے۔اگر $c = \frac{p}{q}$ دو مثبت عدد صحیح کا حاصل تقسیم ہو تب بھی صورت حال یہی ہو گی اور z^c کی محدود تعداد کی منفرد قیمتیں ہوں گی۔البتہ، اگر c حقیقی غیر ناطق یا واقعتاً مخلوط ہو تب z^c کی لامتناہی تعداد کی قیمتیں ہوں گی۔

مثال 14.20: **عمومی طاقت**

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i\left[i\frac{\pi}{2} \mp i2n\pi\right]} = e^{-\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi}$$

یہ تمام قیمتیں حقیقی ہیں اور صدر قیمت $(n=0)$ کو درج بالا سے $e^{-\frac{\pi}{2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ $\square$

روایتی طور پر حقیقی مثبت $z=x$ کی صورت میں z^c کا مطلب $e^{c\ln x}$ لیا جاتا ہے جہاں $\ln x$ بنیادی حقیقی قدرتی لوگارتھم ہے (یعنی ہماری تعریف کے تحت $\ln z\,(z=x>0)$ کی صدر قیمت)۔اس کے علاوہ اگر $z=e$ (یعنی قدرتی لوگارتھم کی اساس) ہو تب $z^c=e^c$ سے مراد مساوات 14.60 سے حاصل کردہ یکتا قیمت لی جاتی ہے۔

مساوات 14.91 سے کسی بھی مخلوط عدد a کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a^z=e^{z\ln a} \tag{14.93}$$

سوالات

سوال 14.222: مساوات 14.90 کی تصدیق $z_1=i$ اور $z_2=-1$ کے لئے کریں۔

سوال 14.223: مساوات 14.48 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\operatorname{Ln} z\,(z\neq 0)$ خطہ $-\pi<\theta<\pi$ میں تحلیلی ہے جہاں دلیل z کے زاویہ کی صدر قیمت θ ہے۔

سوال 14.224: دکھائیں کہ منفی حقیقی محور پر $\operatorname{Ln} z$ غیر استمراری ہے۔

سوال 14.225: دکھائیں: $e^{\ln z}=z,\ \ln(e^z)=z\mp i2n\pi,\ n=0,1,\cdots$

سوال 14.226 تا سوال 14.233 میں تمام قیمتیں دریافت کریں۔چند قیمتوں کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

سوال 14.226: $\ln 1$
جواب: $\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.227: $\ln 2$
جواب: $0.693\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.228: $\ln i$
جواب: $i(\frac{\pi}{2} \mp 2n\pi), \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.229: $\ln e$
جواب: $1 \mp i2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.230: $\ln(ie)$
جواب: $1 + i\frac{\pi}{2} \mp i2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.231: $\ln(-ie)$
جواب: $1 - i\frac{\pi}{2} \mp i2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.232: $\ln(e^i)$
جواب: $i \mp i2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.233: $\ln(e^{-3})$
جواب: $-3 \mp i2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.234 تا سوال 14.237 کو z کے لئے حل کریں۔

سوال 14.234: $\ln z = -i\frac{\pi}{2}$
جواب: $z = -i$

سوال 14.235: $\ln z = i\frac{\pi}{2}$
جواب: $z = i$

سوال 14.236: $\ln z = 1 + i\pi$
جواب: $z = -e$

سوال 14.237: $\ln z = (1 + i)\pi$
جواب: $z = e^{-\pi}$

سوال 14.238 تا سوال 14.241 میں صدر قیمت $\operatorname{Ln} z$ دریافت کریں جہاں z دیا گیا ہے۔

سوال 14.238: $(1 - i)^2$
جواب: $0.693 - i1.571$

سوال 14.239: $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
جواب: $0.693+i0.785$

سوال 14.240: -5
جواب: $1.609+i\pi$

سوال 14.241: $3+i\sqrt{11}$
جواب: $1.498+i0.835$

سوال 14.242 تا سوال 14.248 میں صدر قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.242: $(2i)^{\frac{1}{2}}$
جواب: $1+i$

سوال 14.243: $(1+i)^i$
جواب: $0.429+i0.155$

سوال 14.244: $(1+i)^{1-i}$
جواب: $2.808+i1.318$

سوال 14.245: 3^{3-i}
جواب: $12.28-i24.046$

سوال 14.246: $2^(i2)$
جواب: $0.183+i0.983$

سوال 14.247: $(2-i)^{1+i}$
جواب: $3.35+i1.189$

سوال 14.248: $(2+i)^{3-i2}$
جواب: $27.588-i6.126$

الٹ سائن یعنی $w=\sin^{-1}z$ سے مراد (کی تعریف) ایسا تفاعل ہے جو $\sin w=z$ کی تعلق کو مطمئن کرتا ہو۔اسی طرح الٹ کوسائن $w=\cos^{-1}z$ سے مراد ایسا تفاعل ہے جو $\cos w=z$ کو مطمئن کرتا ہو۔باقی تمام الٹ تکونیاتی تفاعل اور الٹ ہذلولی تکونیاتی تفاعل کی تعریف بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔طاقتی روپ

(مثلاً $\sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/i2$ وغیرہ) استعمال کرتے ہوئے سوال 14.249 تا سوال 14.254 میں دیے گئے تعلق کی تصدیق کریں۔

سوال 14.249: $\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

سوال 14.250: $\cos^{-1} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

سوال 14.251: $\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$
جواب:

$$\cosh w = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = z, \quad \frac{e^{2w} + 1}{2e^w} = z, \quad e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0$$
$$e^w = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

سوال 14.252: $\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$

سوال 14.253: $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}$

سوال 14.254: $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$

سوال 14.255: دکھائیں کہ $w = \sin^{-1} z$ کثیر قیمتی ہے، اور اگر w_1 ان میں سے ایک ہو تب باقی کی روپ $w_1 \mp 2n\pi$ اور $\pi - w_1 \mp 2n\pi$ ہو گی جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہے۔
($w = u + iv = \sin^{-1} z$ کی صدر قیمت سے مراد (کی تعریف) وہ قیمت ہے جس کا $v \geq 0$ کی صورت میں $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ہو اور $v < 0$ کی صورت میں $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ہو۔)
جواب: $\sin(w \mp 2n\pi) = \sin w$ اور $\sin(\pi - w) = \sin w$ سے یک دم یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لٰہذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لٰہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 8.ا اور مساوات 9.ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 10.ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 2.ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل ب.1-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل ب.1-ب)

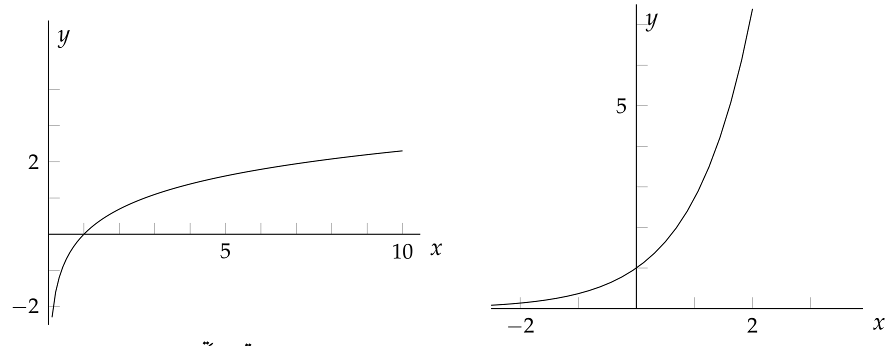
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

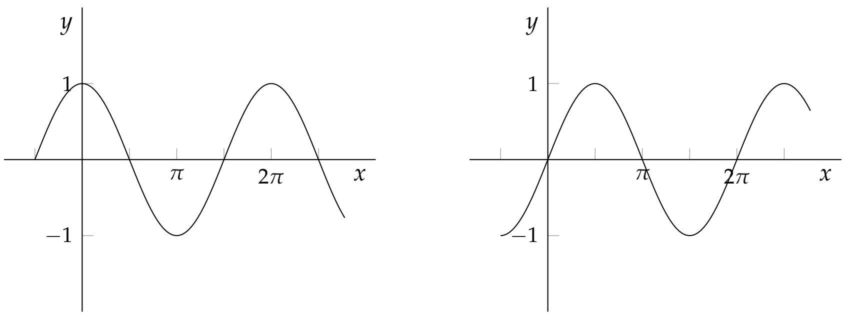
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{-\log x}=10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}1^\circ &= 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}\\ 1\,\text{radian} &= 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ\end{aligned}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

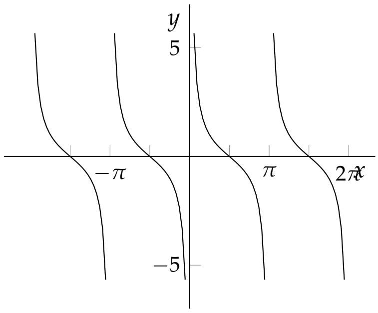
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

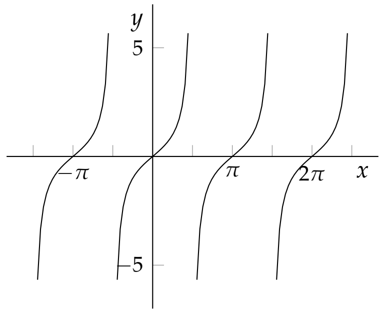
ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



(ب) $\cot x$



(الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

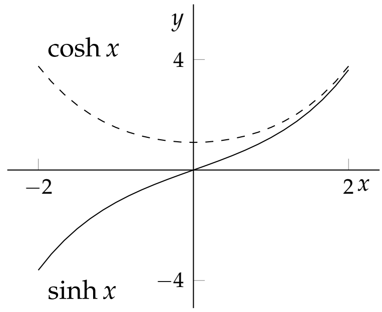
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned} \tag{ب.20}$$

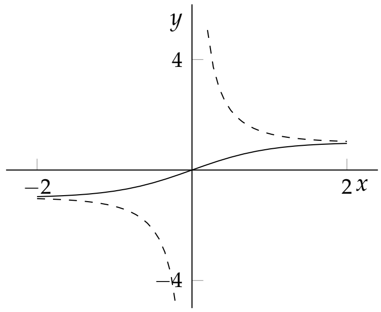
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{23.ب}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{24.ب}$$

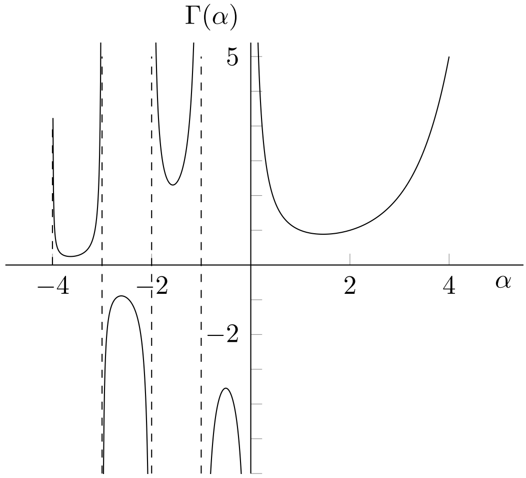
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{25.ب}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

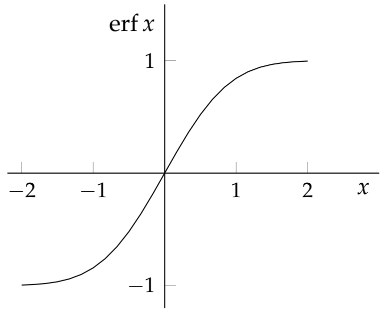
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

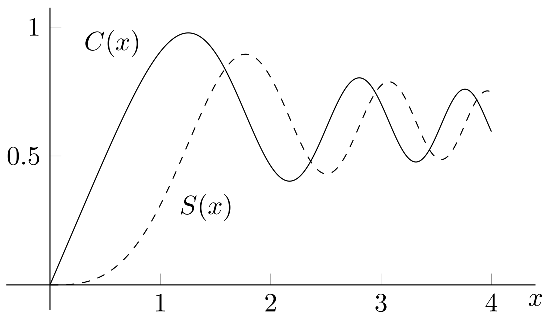
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{C}(x)=\int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{S}(x)=\int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

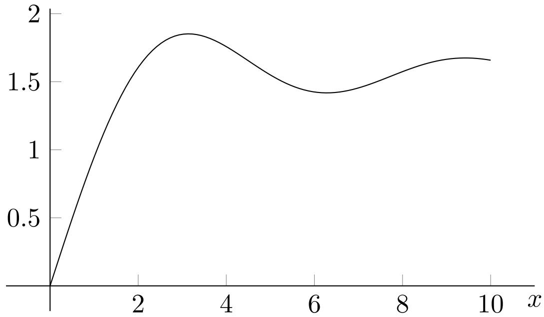
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$