انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ

سطح حرکت کی دوسری ترکیب خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] دو درجی سادہ تفرقی مساوات

$$F(y, y', y'') = 0$$

میں $y = y_1$ کو آزاد متغیرہ اور $y' = y_2$ لے کر y'' کو زنجیری تفرق سے

$$y'' = y_2' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$$

لکھ کر ایک درجی مساوات

$$F\left(y_1, y_2, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2\right) = 0 \tag{4.81}$$

میں تبدیل کرنے پر مبنی ہے۔اس ایک درجی مساوات کو یا تو حل کرنا ممکن ہوتا ہے اور یا **میدان ڈھال** کی مدد سے اس پر غور ممکن ہوتا ہے۔ آئیں مثال 4.14 پر اس ترکیب کی مدد سے غور کریں۔

مثال 4.17: بلا تقصیر ارتعاشی نظام کی ایک درجی تفرقی مساوات۔
مساوات 4.71 میں $\theta'' + k\sin\theta = 0$ ہے جس میں $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ (زاویائی رفتار) لیتے ہوئے

$$\theta'' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$$

لکھ کر $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2 = -k\sin y_1$ ملتا ہے جس کو علیحدگی متغیرات سے $y_2\,\mathrm{d}y_2 = -k\sin y_1\,\mathrm{d}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\frac{1}{2}y_2^2 = k\cos y_1 + C \tag{4.82}$$

دیتا ہے جہاں C تکمل کا مستقل ہے۔اس کو mL^2 سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2}m(Ly_2)^2 - mL^2k\cos y_1 = mL^2C$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تینوں اجزاء توانائی[78] کو ظاہر کرتے ہیں۔چونکہ y_2 زاویائی رفتار ہے لٰہذا Ly_2 لمحاتی رفتار اور $\frac{1}{2}m(Ly_2)^2$ **حرکی توانائی**[79] ہے۔درج بالا مساوات کا دوسرا جزو (بمع منفی علامت) **مخفی توانائی**[80] ہے جبکہ مساوات کا دایاں ہاتھ mL^2C کل توانائی ہے۔بلا تقصیر نظام میں توانائی کا ضیاع نہیں پایا جاتا لٰہذا حسب توقع کل توانائی مستقل مقدار ہے۔آئیں دیکھیں کہ حرکت کی نوعیت کل توانائی پر کیسے منحصر ہے۔

شکل 4.14-ب مختلف C کے لئے خط حرکت دیتی ہے۔ان خطوط کا دوری عرصہ 2π ہے۔ان میں ترخیمی بند دائرے اور لہر نما خطوط شامل ہیں جن کے مابین نقطہ زین [$(n\pi, 0)$ جہاں $n = \mp 1, \mp 3, \cdots$ ہے] سے گزرتے ہوئے دو عدد خط حرکت پائے جاتے ہیں۔مساوات 4.82 کے تحت C کی کم سے کم قیمت $C = -k$ ہے جس پر $y_2 = 0$ اور $\cos y_1 = 1$ ہوں گے جو ساکن کمیت کو ظاہر کرتی ہے۔جس نقطے پر $y_2 = \theta' = 0$ ہو اس نقطے پر حرت کی سمت تبدیل ہو کر الٹ ہو جائے گی لٰہذا مساوات 4.82 میں $y_2 = 0$ پر کرتے ہوئے $k \cos y_1 + C = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اب اگر $y_1 = \pi$ ہو تب $\cos y_1 = -1$ اور یوں $C = k$ ہو گا۔اس طرح اگر $-k < C < k$ ہو تب $|y_1| = |\theta| < \pi$ کی صورت میں کمیت کی حرکت کی سمت الٹ ہو گی اور C کی ان قیمتوں $(|C| < k)$ کے لئے کمیت ارتیاش پذیر ہو گا۔ترخیمی بند دائرے اس ارتعاشی حرکت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کے برعکس $C > k$ کی صورت میں $y_2 = 0$ ممکن نہیں ہے لٰہذا کمیت کی حرکت کی سمت الٹ نہیں ہو گی لٰہذا کمیت مرکز کے گرد گھومتا رہے گا جس کو لہری خط حرکت ظاہر کرتی ہیں۔ان دو صورتوں کے مابین $C = k$ پایا جاتا ہے جس کے خطوط نقطہ زین سے گزرتے ہیں۔انہیں شکل 4.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔

دو درجی مساوات کے تبادلے سے سطح حرکت پر (مثال 4.17 کی طرح) قابل حل ایک درجی مساوات کے علاوہ نا قابل حل مساوات بھی اہمیت کے حامل ہے۔ایسی صورت میں میدان ڈھال [حصہ 1.2 دیکھیں۔] کے ذریعہ نظام کے بارے میں معلومات حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔اس عمل کو ایک مشہور مثال کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 4.18: منحصر بہ خود ارتعاش۔ مساوات ون در پول
ایسی طبعی نظام پائے جاتے ہیں جن میں معمولی ارتعاش کی صورت میں نظام کو توانائی فراہم ہوتی ہے جبکہ وسیع ارتعاش

[78] energy
[79] kinetic energy
[80] potential energy

کی صورت میں نظام سے توانائی کا اخراج ہوتا ہے۔یوں وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام قصری صورت اختیار کرتا ہے جبکہ کم ارتعاش کی صورت میں نظام میں **منفی تقصیر** (نظام کو توانائی کی فراہمی) پائی جاتی ہے۔ ہم طبعی وجوہات کی بنا توقع کرتے ہیں کہ ایسا نظام دوری طرز عمل رکھے گا، جو سطح حرکت پر بند دائرے کی صورت اختیار کرے گا جسے **تحدیدی دائرہ**[81] کہتے ہیں۔ایسی ارتعاش کو **مساوات ون در پول**[82]

$$y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0 \qquad (\mu > 0) \tag{4.83}$$

ظاہر کرتی ہے جہاں μ مثبت مستقل ہے۔یہ مساوات پہلی مرتبہ **خلا نلکی**[83] والے برقی ادوار پر غور کے دوران رو پذیر ہوئی۔یہ مساوات $\mu = 0$ کی صورت میں ہارمونی ارتعاش کی تفرقی مساوات $y'' + y = 0$ ہے۔ون در پول مساوات میں قصری جزو $-\mu(1-y^2)$ ہے جہاں $\mu > 0$ ہے۔ یوں $y^2 < 1$ کی صورت میں منفی تقصیری، $y^2 = 1$ کی صورت میں بلا تقصیر جبکہ $y^2 > 1$ کی صورت میں مثبت تقصیری (جس میں توانائی کا ضیاع ہو گا) نظام پایا جائے گا۔ نہایت کم μ کی صورت میں مساوات ون در پول اور $y'' + y = 0$ میں بہت کم فرق پایا جائے گا لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ سطح حرکت پر تحدیدی دائرہ تقریباً گول دائرہ ہو گا۔اگر μ کی قیمت زیادہ ہو تب تحدیدی دائرہ کی شکل غالباً مختلف ہو گی۔

اس مساوات کو ایک درجی مساوات میں تبدیل کرنے کی خاطر $y = y_1$ ، $y' = y_2$ اور $y'' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$ لکھتے ہوئے ون در پول مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2 - \mu(1-y_1^2)y_2 + y_1 = 0 \tag{4.84}$$

سطح حرکت (y_1y_2 سطح) پر **ہم میلان**[84] خط $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = K$ ہیں جہاں K مستقل مقدار ہے۔یوں ہم میلان خطوط درج ذیل ہوں گے

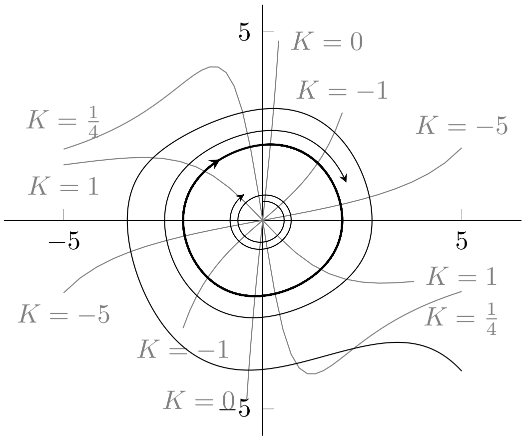
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \mu(1-y_1^2) - \frac{y_1}{y_2} = K$$

جن سے

$$y_2 = \frac{y_1}{\mu(1-y_1^2) - K} \qquad \text{(شکل 4.17 اور شکل 4.18 دیکھیں۔)} \tag{4.85}$$

حاصل ہوتا ہے۔

[81] limit cycle
[82] van del Pol equation
[83] vacuum tube
[84] isoclines



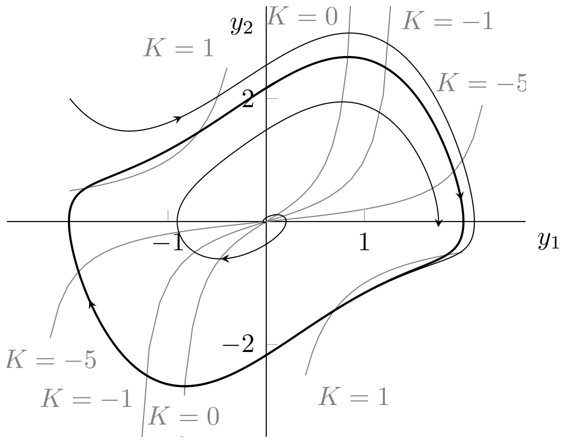
شکل 4.17: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu = 0.1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.17 میں μ کی کم قیمت $(\mu = 0.1)$ کے لئے چند ہم میلان خطوط کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔اس کے علاوہ تحدیدی دائرے کو موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔تحدیدی دائرہ تقریباً گول ہے۔ ایک خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے باہر ہے، اور دوسرا خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے اندر ہے، کو تحدیدی دائرے تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔تحدیدی دائرہ اور نقطہ فاصل کے گرد بند دائرہ (وسط) میں فرق یہ ہے کہ تحدیدی دائرے تک خط حرکت پہنچتی ہے جبکہ وسط کا خط اسی دائرے پر پایا جاتا ہے۔ μ کی زیادہ قیمت پر تحدیدی دائرہ گول صورت نہیں رکھتا۔ شکل 4.18 میں μ کی زیادہ قیمت $(\mu = 1)$ کے لئے تمام صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں تحدیدی دائرہ گول نہیں ہے۔

مثال 4.19: تفرقی مساوات $y'' + y - y^3 = 0$ سے نظام حاصل کریں۔اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

حل: $y = y_1$ اور $y' = y_1' = y_2$ لیتے ہوئے اور $y'' = y_2'$ لکھتے ہوئے دیے گئے دو درجی مساوات سے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1 = y_2 \\ y_2' &= f_2 = -y_1 + y_1^3 \end{aligned} \tag{4.86}$$



شکل 4.18: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu=1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔نقطہ فاصل $f_1=f_2=0$ سے حاصل ہوں گے۔ $f_1=0$ سے $y_2=0$ ملتا ہے جبکہ $f_2=y_1(-1+y_1^2)=0$ سے $y_1=0$ اور $y_1=\mp1$ ملتے ہیں۔یوں نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $-1,0$ اور $1,0$ ہیں۔نقطہ فاصل $(0,0)$ مرکز پر پایا جاتا ہے لہٰذا اس پر پہلے غور کرتے ہیں۔نقطہ فاصل کی نوعیت جاننے کی خاطر نظام کو خطی بناتے ہیں۔ایسا کوئی بھی جزو جو y^m یا $y_1^n y_2^q$ کی صورت میں لکھا گیا ہو، جہاں $m\neq1$ جبکہ n اور q کوئی بھی مستقل ہو سکتے ہیں، غیر خطی ہو گا۔ان غیر خطی اجزاء کو رد کرنے سے خطی نظام حاصل ہوتا ہے۔یوں y_2' کی مساوات میں y_1^3 کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

حاصل ہو گا جس سے $p=a_{11}+a_{22}=0$ ، $q=1>0$ اور $\Delta=-4<0$ ملتے ہیں لہٰذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔

آئیں اب نقطہ $(-1,0)$ پر غور کریں۔اس کو مرکز منتقل کرنے کی خاطر نظام 4.86 میں $\tilde{y}_1=y_1+1$ یعنی $y_1=\tilde{y}_1-1$ اور $\tilde{y}_2=y_2$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= -(\tilde{y}_1-1)+(\tilde{y}_1-1)^3 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1-3\tilde{y}_1^2+\tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ غیر خطی اجزاء $\tilde{y}_1^2$ اور $\tilde{y}_1^3$ کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2\\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1\end{aligned} \implies \tilde{\boldsymbol{y}}' = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

ملتا ہے۔اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا نقطہ $(-1,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

نقطہ $(1,0)$ پر غور کرنے کی خاطر اس کو مرکز منتقل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ چنتے ہیں۔یوں نظام

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2\\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3\end{aligned}$$

ملتا ہے جس میں غیر خطی اجزاء $\tilde{y}_1^2$ اور $\tilde{y}_1^3$ رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2\\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1\end{aligned} \implies \tilde{\boldsymbol{y}}' = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

ملتا ہے۔اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا نقطہ $(1,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوالات

سوال 4.51 تا سوال 4.55 کو **خطی** بناتے ہوئے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 4.51: $y_1' = 4y_1 - y_1^2, \quad y_2' = y_2$

جوابات:نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0,0)$ اور $(4,0)$ حاصل ہوتے ہیں۔مسئلے کو $(0,0)$ پر خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لکھا جاتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہٰذا نقطہ $(0,0)$ غیر مستحکم جوڑ ہے۔ نقطہ $(4,0)$ کو مرکز پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 4$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو ($-\tilde{y}_1^2$ رد کرتے ہوئے) خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جو $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ دیتا ہے جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 4.52: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1 + \frac{2}{3}y_1^2$
جوابات:نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0,0)$ اور $(\frac{3}{2},0)$ حاصل ہوتے ہیں۔نقطہ $(0,0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p = 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ملتے ہیں لہٰذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔ نقطہ $(\frac{3}{2},0)$ کو مرکز پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - \frac{3}{2}$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو ($\frac{2}{3}\tilde{y}_1^2$ رد کرتے ہوئے) خطی بنانے سے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $(\frac{2}{3},0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.53: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -2y_1 - y_1^2$
جوابات: مستحکم وسط $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.54: $y_1' = -y_1 + y_2 + y_1^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$
جوابات: $(0,0)$ پر مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.55: $y_1' = -y_1 + y_2 - y_2^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$
جوابات: $(0,0)$ پر جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.56 تا سوال 4.60 میں تفرقی مساوات سے نظام حاصل کریں۔اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔نظام کو خطی بناتے ہوئے نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

سوال 4.56: $y''-4y+y^3=0$
جوابات: نظام $y_1'=y_2$ اور $y_2'=4y_1-y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین، $(-2,0)$ مستحکم وسط اور $(2,0)$ مستحکم وسط ہیں۔

سوال 4.57: $y''+4y-y^3=0$
جوابات: نظام $y_1'=y_2$ اور $y_2'=4y_1-y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ مستحکم وسط، $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین اور $(2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔

سوال 4.58: $y''+4y+y^2=0$
جوابات: $(0,0)$ مستحکم وسط اور $(-4,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.59: $y''+\sin y=0$
جوابات: $(0,0)$ اور $(\mp n2\pi,0)$ مستحکم وسط ہیں جہاں $n=1,2,3,\cdots$ ہو سکتا ہے۔نقطہ $(\mp m\pi,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے جہاں $m=1,3,5,\cdots$ ہو سکتا ہے۔

سوال 4.60: $y''+\cos y=0$
جوابات: نقطہ $(\frac{\pi}{2}\mp n2\pi,0)$ غیر مستحکم نقطہ نیز جبکہ $(-\frac{\pi}{2}\mp n2\pi,0)$ وسط ہیں جہاں $n=1,2,3,\cdots$ ہو سکتا ہے۔آپ کو $-\cos(\mp\frac{\pi}{2}+\tilde{y}_1)=\sin(\mp\tilde{y}_1)\approx\mp\tilde{y}_1$ کی مدد لے سکتے ہیں۔

سوال 4.61: ریلے مساوات
$Y''-\mu(1-\frac{1}{3}Y'^2)Y'+Y=0$ جہاں $\mu>0$ ہے، **ریلے مساوات**[85] کہلاتی[86] ہے۔اس میں $y=Y'$ پر کرتے ہوئے تفرق لے کر ون در پول مساوات حاصل کریں۔

سوال 4.62: ڈفنگ مساوات
اسپرنگ اور کمیت کی مساوات $y''+\omega_0^2=0$ میں غیر خطی قوت بحالی کی صورت میں **ڈفنگ مساوات**[87] $y''+\omega_0^2y+\beta y^3=0$ حاصل ہوتی ہے جہاں $|\beta|$ عموماً چھوٹی مقدار ہوتی ہے۔ $\beta>0$ کو **سخت اسپرنگ** اور $\beta<0$ کو **نرم اسپرنگ** کی صورت پکارا جاتا ہے۔ سطح حرکت پر خط حرکت کی مساوات دریافت کریں۔

جواب: $2y_2^2+2\omega_0^2y_1^2+\beta y_1^4=K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

---
[85] Rayleigh equation
[86] لارڈ ریلے، جن کا اصل نام جان ولیم سٹرٹ ہے انگلستان کے ماہر طبیعیات اور ریاضی دان تھے۔
[87] Duffing equation

سوال 4.63: خط حرکت
سادہ تفرقی مساوات $y'' - 9y + y^3 = 0$ کو نظام کی صورت میں لکھیں جس کو حل کرتے ہوئے y_2 بالمقابل y_1 کی مساوات حاصل کریں۔حاصل مساوات سے سطح حرکت پر چند خط حرکت کھینچیں۔

جواب: $2y_2^2 = 18y_1^2 - y_1^4 + K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام

اس حصے میں غیر متجانس نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \qquad \text{(حصہ 4.3 دیکھیں)} \tag{4.87}$$

جہاں $\boldsymbol{g}$ غیر صفر سمتیہ ہے، کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{g}(t)$ اور $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}(t)$ کے ارکان، محور t کے کھلے وقفہ J پر استمراری ہیں۔وقفہ J پر متجانس مساوات $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ کے عمومی حل $\boldsymbol{y}^{(h)}(t)$ اور J پر مساوات 4.87 کے کسی بھی **مخصوص حل** $\boldsymbol{y}^{(p)}(t)$ [جس میں کوئی مستقل نہیں پایا جاتا] سے مساوات 4.87 کا J پر **عمومی حل**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} \tag{4.88}$$

حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ 4.3 کے تحت عمومی حل $\boldsymbol{y}$ میں J پر مساوات 4.87 کے تمام ممکنہ حل شامل ہیں۔

متجانس مساوات کے حل پر ہم گزشتہ حصوں میں غور کر چکے ہیں۔اس حصے میں غیر متجانس مساوات کے مخصوص حل کے حصول پر غور کرتے ہیں۔نا معلوم عددی سر کی ترکیب اور مقدار معلوم بدلنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں جنہیں ہم حصہ 2.7 اور حصہ 2.10 سے جانتے ہیں۔

4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب

ایک عدد سادہ تفرقی مساوات کے حل میں استعمال ہونے کی طرح اب بھی یہ ترکیب اس صورت قابل استعمال ہو گی جب $\boldsymbol{A}$ کے ارکان مستقل مقدار ہوں اور $\boldsymbol{g}$ کی قیمت مستقل مقدار ہو، t^m تفاعل ہوں جہاں m مثبت اعداد ہیں، قوت نمائی تفاعل ہوں، سائن اور کوسائن تفاعل ہوں۔ایسی صورت میں مخصوص حل کو $\boldsymbol{g}$ کی طرح تصور کیا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{g} = t^2$ ہونے کی صورت میں $\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{w}t^2$ فرض کیا جائے گا۔ مساوات 4.87 میں $\boldsymbol{y}^{(p)}$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ حاصل کیے جاتے ہیں۔یہ حصہ 2.7 کی طرح ہے البتہ یہاں ترمیمی قاعدہ قدر مختلف ہے۔ آئیں ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کا استعمال دیکھیں۔

مثال 4.20: نا معلوم عددی سر کی ترکیب۔ترمیمی قاعدہ
درج ذیل مساوات کی عمومی حل حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.89}$$

حل:ہم صفحہ 255 پر مثال 4.5 میں نظیری متجانس مساوات کا حل

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.90}$$

حاصل کر چکے ہیں۔چونکہ $\boldsymbol{A}$ کا $\lambda = -3$ آئگنی قدر ہے اور مساوات 4.89 میں دائیں جانب e^{-3t} پایا جاتا ہے لہٰذا اس جزو کو t سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{y}^{(h)}$ میں شامل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(h)} = \boldsymbol{u}te^{-3t} + \boldsymbol{v}e^{-3t} \tag{4.91}$$

$\boldsymbol{y}^{(h)}$ میں بائیں ہاتھ کا پہلا جزو حصہ 2.7 میں دیے گئے ترمیمی قاعدے کا مماسی قاعدہ ہے، جو یہاں نا کافی ہے۔[آپ کوشش کر کے دیکھ سکتے ہیں]۔ مساوات 4.91 کو مساوات 4.89 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)\prime} = \boldsymbol{u}e^{-3t} - 3\boldsymbol{u}te^{-3t} - 3\boldsymbol{v}e^{-3t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}te^{-3t} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}e^{-3t} + \boldsymbol{g}$$

دونوں جانب te^{-3t} والے اجزاء کے عددی سر برابر ہوں گے لہٰذا $-3\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{A}$ قالب کے آئگنی قدر $\lambda = -3$ کا نظیری آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ ہو گا۔اس طرح $\boldsymbol{u} = a[1 \quad -1]^T$ لکھا جا سکتا ہے جہاں a کوئی بھی غیر صفر مستقل ہو سکتا ہے۔بقایا اجزاء کے عددی سر برابر لکھ کر

$$\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} \implies \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 \\ v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= a + 4 \\ v_1 + v_2 &= -a - 3 \end{aligned}$$

دوسری مساوات کو پہلی سے منفی کرتے ہوئے $2a + 7 = 0$ یعنی $a = -\frac{7}{2}$ ملتا ہے۔یوں درج بالا میں پہلی مساوات $v_1 + v_2 = -\frac{7}{2} + 4 = \frac{1}{2}$ ہو گی جس میں $v_1 = k$ لیتے ہوئے $v_2 = \frac{1}{2} - k$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $\boldsymbol{v} = [k \quad \frac{1}{2} - k]^T$ ہو گا۔ہم $k = 0$ چن سکتے ہیں۔ایسا ہی کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.92}$$

مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب

اس ترکیب سے غیر متجانس نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{g}(t) \tag{4.93}$$

کو حل کیا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{A}(t)$ متغیر مقدار ہیں اور $\boldsymbol{g}(t)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے۔اگر t محور کے کسی کھلے وقفے J پر نظیری متجانس نظام کا عمومی حل $\boldsymbol{y}^{(h)}$ معلوم ہو تب اس ترکیب کی مدد سے اس وقفے پر نظام 4.93 کا مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں مثال 4.20 کو اس ترکیب سے حل کریں۔

مثال 4.21: مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے حل
گزشتہ مثال کے نظام 4.89 کو مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب سے حل کریں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.94}$$

حل: متجانس مساوات کے حل کی اساس $[e^{-t} \quad e^{-t}]^T$ ، $[e^{-3t} \quad -e^{-3t}]^T$ ہے جس سے درج ذیل عمومی حل لکھا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c} \tag{4.95}$$

یہاں $\boldsymbol{Y}(t) = [\boldsymbol{y}^{(1)} \quad \boldsymbol{y}^{(2)}]^T$ بنیادی قالب [حصہ 4.3 دیکھیں] ہے۔ حصہ 2.10 کی طرح ہم مستقل سمتیہ $\boldsymbol{c}$ کی جگہ متغیر سمتیہ $\boldsymbol{u}$ پر کرتے ہوئے مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{4.96}$$

نظام 4.89 میں $\boldsymbol{y}^{(p)}$ پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} \tag{4.97}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ متجانس نظام کا حل ہے لہٰذا $\boldsymbol{y}^{(1)\prime} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)\prime} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)}$ یعنی $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}$ لکھ کر مساوات 4.97 سے $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{g}$ حاصل ہوتا ہے جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{g} \tag{4.98}$$

درج بالا اس حقیقت کی بنیاد پر لکھا گیا ہے کہ چونکہ $\boldsymbol{Y}$ کا امتیازی مقطع دراصل ورونسکی [حصہ 4.1 دیکھیں] W ہے جو اساس کی صورت میں غیر صفر ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{Y}^{-1}$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ معکوس قالب کو مساوات 4.12 کی مدد سے حاصل کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-4t}} \begin{bmatrix} -e^{-3t} & -e^{-3t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{g}$ سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{u}'$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{g} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}$ حاصل کرنے کی خاطر تکمل لیتے ہیں۔ تفرق کی طرح ہر جو کا علیحدہ تکمل لیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t}-1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix}$$

یوں مساوات 4.95 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t}-1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{7}{2}te^{-3t} \\ \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{2}te^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{7}{2}t \\ \frac{1}{4} + \frac{7}{2}t \end{bmatrix} e^{-3t} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} e^{-t}$$

اس مساوات کے بائیں ہاتھ آخری جزو متجانس مساوات کا حل ہے لہٰذا اس جزو کو متجانس مساوات کے حل $\boldsymbol{y}^{(h)}$ میں ضم کیا جا سکتا ہے۔ یوں بقایا حصے کو $\boldsymbol{y}^{(p)}$ لیتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} \tag{4.99}$$

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.