

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروسکی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجرى ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکملى علم الاحصاء تکمل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمل
787	11.2	خطی تکمل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمل
810	11.4	دوہرہ تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمل
845	11.8	تہرہ تکمل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخلوط اعداد
1047	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1 نقشہ کشی
1116	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6 ریمان سطحیں
1157	16 مخلوط مکملات
1157	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201	17 ترتیب اور تسلسل
1201	17.1 ترتیب
1208	17.2 تسلسل
1213	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1217

ا اضافی ثبوت

1221

ب مفید معلومات

1221 1. ب ا علی تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 17

ترتیب اور تسلسل

اس باب میں مخلوط اور حقیقی ترتیب اور تسلسل کے بنیادی تصورات پیش کیے جائیں گے۔

17.1 ترتیب

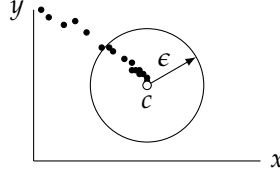
تسلسل، بالخصوص طاقی تسلسل مخلوط تجزیہ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ان کو متعارف کرنے کی خاطر ہم پہلے ترتیب اور اس سے متعلقہ تصورات کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ مخلوط ترتیب اور تسلسل کی زیادہ تر مسئلے اور تعریف، حقیقی ترتیب اور تسلسل کے مسائل اور تعریف کی مانند ہوں گے جنہیں حقیقی علم الاحصاء میں استعمال کیا جاتا ہے۔

اگر ہر مثبت عدد صحیح n کو عدد z_n مختص کی جائے تب ہم کہتے ہیں کہ اعداد

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

لامتناہی ترتیب¹ یا، مختصراً، ترتیب بناتے ہیں۔ ان اعداد z_n کو ترتیب کے مقدار یا اجزاء² کہتے ہیں۔

infinite sequence¹
terms²



شکل 17.1: مرکز مخلوط ترتیب

حقیقی اجزاء پر مبنی ترتیب کو حقیقی ترتیب³ کہتے ہیں۔

بعض اوقات ہم ترتیب کے اجزاء کی گنتی 0 یا 2 یا کسی دیگر عدد صحیح سے شروع کرتے ہیں۔

ایک ترتیب z_1, z_2, \dots اس صورت مرکوز یا موٹکز ہو گا جب ایسا عدد c پایا جاتا ہو کہ کسی بھی مثبت (غیر صفر) حقیقی عدد ϵ (جو چاہے جتنا چھوٹا کیوں نہ ہو) کی صورت میں ہم ایسا عدد صحیح N تلاش کر سکتے ہوں کہ تمام $n > N$ کے لئے درج ذیل درست ہو۔

$$(17.1) \quad |z_n - c| < \epsilon \quad n > N$$

c کو ترتیب کی حد⁴ کہتے ہیں جس کو عموماً

$$z_n \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty)$$

لکھا جاتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ ترتیب c کو مرکوز ہے یا کہ ترتیب کی حد c ہے۔

ایسا ترتیب جو مرکوز نہ ہو منفرج⁵ کہلاتا ہے۔

مساوات 17.1 کا ایک سادہ جیومیٹریائی مطلب ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $n > N$ کی صورت میں ہر جزو z_n اس کھلے قرص میں پایا جاتا ہے جس کا رداس ϵ اور مرکز c ہے (شکل 17.1) جبکہ قرص کا رداس ϵ کتنا ہی کم کیوں نہ کر دیا جائے اس قرص کے باہر اجزاء z_n کی زیادہ سے زیادہ تعداد محدود ہو گی۔ ظاہر ہے کہ N کی قیمت عموماً ϵ پر منحصر ہو گی۔

حقیقی ترتیب کی صورت میں مساوات 17.1 جیومیٹریائی طور کہتی ہے کہ $n > N$ کی صورت میں جزو z_n وقفہ $c - \epsilon$ تا $c + \epsilon$ پر پایا جائے گا (شکل 17.2) اور اس وقفہ سے باہر اجزاء کی زیادہ سے زیادہ تعداد محدود ہو گی۔

real sequence³
limit⁴
divergent⁵

$$\begin{array}{c} | \\ \hline c - \epsilon \quad c \quad c + \epsilon \end{array} x$$

شکل 17.2: حقیقی مرتکز ترتیب

مثال 17.1: مرتکز اور منفرد ترتیب

ترتیب $z_n = 1 + \frac{2}{n}$ کے اجزاء $3, 2, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \dots$ ہیں۔ یہ ترتیب مرتکز ہے اور اس کی حد $c = 1$ ہے۔ درحقیقت مساوات 17.1 سے

$$z_n - c = 1 + \frac{2}{n} - 1 = \frac{2}{n}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\frac{2}{n} < \epsilon$ اس صورت ہوگا جب $\frac{n}{2} > \frac{1}{\epsilon}$ یا $n > \frac{2}{\epsilon}$ ہو۔ مثلاً $\epsilon = 0.01$ منتخب کرتے ہوئے $\frac{2}{n} < 0.01$ تب ہوگا جب $n > 200$ ہو۔

ترتیب $1, 2, 3, \dots$ اور $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots$ منفرد ہیں۔

وہ ترتیب جس کے اجزاء

$$z_n = 2 - \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

یعنی

$$1 + i, \quad \frac{3}{2} + i2, \quad \frac{7}{4} + i\frac{3}{2}, \dots$$

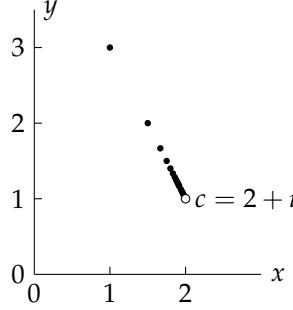
ہیں کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ یہ ترتیب مرتکز ہے اور اس کی حد $c = 2 + i$ ہے۔ مساوات 17.1 سے

$$|z_n - c| = \left| \frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} - (2+i) \right| = \left| -\frac{1}{n} + i\frac{2}{n} \right| = \frac{\sqrt{5}}{n}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\frac{\sqrt{5}}{n} < \epsilon$ تب ہوگا جب $\frac{n}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\epsilon}$ یعنی $n > \frac{\sqrt{5}}{\epsilon}$ ہو۔ مثال کے طور پر $\epsilon = \frac{1}{100}$ منتخب کرتے ہوئے $|z_n - c| < \epsilon$ تب ہوگا جب $n > 223.6$ یعنی $n = 224$ یا $n = 225$ ، وغیرہ ہو۔ □

مخلوط ترتیب z_1, z_2, z_3, \dots کی صورت میں $z_n = x_n + iy_n$ لکھ کر ہم حقیقی حصوں کی ترتیب اور خیالی حصوں کی ترتیب

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad \text{اور} \quad y_1, y_2, y_3, \dots$$



شکل 17.3: مثال 17.1 میں آخری ترتیب

پر علیحدہ علیحدہ غور کر سکتے ہیں۔ مثلاً مثال 17.1 کی آخری ترتیب کے دو علیحدہ علیحدہ ترتیب درج ذیل ہوں گی۔

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots \quad \text{اور} \quad 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \dots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی اور خیالی ترتیب کے حد بالترتیب 2 اور 1 ہیں (شکل 17.3) جو اصل مخلوط ترتیب کی حقیقی اور خیالی حصوں کی حد ہیں۔ عموماً ایسا ہی ہوتا ہے جو درج ذیل کی ایک مثال ہے۔

مسئلہ 17.1: (حقیقی اور خیالی اجزاء کی ترتیب)
مخلوط اعداد $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \dots$) کی ترتیب $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ صرف اور صرف اس صورت حد $c = a + ib$ پر مرکوز ہوگا جب حقیقی حصوں کی ترتیب x_1, x_2, \dots نقطہ a پر مرکوز ہو اور خیالی حصوں کی ترتیب y_1, y_2, \dots نقطہ b پر مرکوز ہو۔

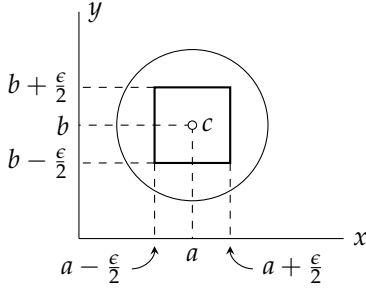
ثبوت: اگر $|z_n - c| < \epsilon$ ہو تب $z_n = x_n + iy_n$ اس دائرہ کے اندر پایا جائے گا جس کا رداس ϵ اور مرکز $c = a + ib$ ہوں۔ یوں لازماً

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |y_n - b| < \epsilon$$

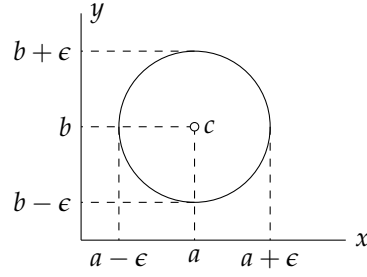
ہوگا (شکل 17.4-الف)۔ یوں $n \rightarrow \infty$ کی صورت میں مرکوزیت $z_n \rightarrow c$ سے مراد مرکوزیت $x_n \rightarrow a$ اور مرکوزیت $y_n \rightarrow b$ ہے۔

اس کی الٹ چلتے ہوئے، اگر $n \rightarrow \infty$ کی صورت میں $x_n \rightarrow a$ اور $y_n \rightarrow b$ ہوں تب کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم ایسا N اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$



(ب)



(الف)

شکل 17.4: مسئلہ 17.1 کا ثبوت

ہو۔ ان دو عدم مساوات کہتی ہیں کہ $z_n = x_n + iy_n$ اس چکور کے اندر پایا جائے گا جس کے اطراف کی لمبائی ϵ اور مرکز c ہو (شکل 17.4-ب)۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلہ کی باعث حقیقی حصہ اور خیالی حصہ کی ترتیب پر غور کرتے ہوئے مخلوط ترتیب کی مرکزیت کو حقیقی ترتیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر ایسا مثبت عدد K پایا جاتا ہو کہ مرکز پر رداس K کے دائرے میں ترتیب z_1, z_2, \dots کے تمام اجزاء پائے جاتے ہوں یعنی

$$|z_n| < K \quad \text{تمام } n$$

تب یہ ترتیب محدود⁶ کہلاتا ہے۔ ایسا ترتیب جو محدود نہ ہو غیر محدود⁷ کہلاتا ہے۔

اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے انفرج کو عموماً درج ذیل سادہ مسئلہ سے دریافت کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 17.2: ہر مرتکز ترتیب محدود ہو گی۔ یوں اگر ایک ترتیب غیر محدود ہو تب یہ منفرج ہو گی۔

⁶bounded
⁷unbounded

ثبوت: فرض کریں کہ ترتیب z_1, z_2, \dots مرکوز ہے اور اس کی حد c ہے۔ تب ہم $\epsilon > 0$ منتخب کرتے ہوئے ایسا مطابق N تلاش کر سکتے ہیں کہ $n > N$ کے لئے ہر z_n رداس ϵ کے قرص، جس کا مرکز c ہو، میں پائے جائیں گے اور وہ z_n جو اس قرص کے باہر ہوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد محدود ہوگی۔ اب ظاہر ہے کہ ہم مرکز پر اتنے بڑی رداس K کا دائرہ منتخب کر سکتے ہیں کہ یہ قرص اور قرص کے باہر تمام z_n اس دائرے میں پائیں جاتے ہوں۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ یہ ترتیب محدود ہے۔

□

یہاں دہان رہے کہ محدود ہونا مرکوزیت کے لئے کافی نہیں ہے۔ مثلاً ترتیب $1, 0, 1, 0, \dots$ محدود لیکن منفرج ہے۔ (کیوں؟) غیر محدود ترتیب کی مثالیں درج ذیل ہیں

$$1, 2, 3, 4, \dots \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots$$

جو مسئلہ 17.2 کے تحت منفرج ترتیب ہیں۔

سوالات

سوال 17.1 تا سوال 17.6 میں دیے ترتیب کے ابتدائی چند اجزاء لکھ کر ترسیم کریں۔

سوال 17.1: $\frac{n}{n+3}$
جواب: $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \dots$

سوال 17.2: $\frac{2n}{n^2+1}$
جواب: $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}, \dots$

سوال 17.3: $\frac{i^n}{n^2}$
جواب: $i, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{9}, \frac{1}{16}, \frac{i}{25}, \dots$

سوال 17.4: $\frac{in}{n+1}$
جواب: $\frac{i}{2}, \frac{i2}{3}, \frac{i3}{4}, \frac{i4}{5}, \frac{i5}{6}, \dots$

سوال 17.5: $\frac{i^n n^2}{n+i}$
 جواب: $\frac{1}{2}(1+i), \frac{4}{5}(-2+i), \frac{9}{10}(-1-i3), \frac{16}{17}(4-i), \frac{25}{26}(1+i5), \dots$

سوال 17.6: $(-1)^n + i2\pi n$
 جواب: $-1 + i2\pi, 1 + i4\pi, -1 + i6\pi, 1 + i8\pi, -1 + i10\pi, \dots$

سوال 17.7: ترتیب $z_1 = 1, z_2 = \frac{i}{2}, z_n = iz_{n-2}z_{n-1} (n = 3, 4, \dots)$ کے ابتدائی چند اجزاء لکھیں۔ اس ترتیب کی حد تلاش کریں۔
 جواب: $1, \frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \dots$

سوال 17.8 تا سوال 17.13 میں دریافت کریں کہ آیا دی گئی ترتیب محدود ہے؟ کیا یہ ترتیب مرکوز ہے؟ مرکوزیت کی صورت میں ترتیب کی حد تلاش کریں۔

سوال 17.8: $z_n = i^n$
 جواب: محدود، منفرج

سوال 17.9: $z_n = \frac{i^n}{n}$
 جواب: محدود، مرکوز، حد 0

سوال 17.10: $z_n = \frac{in}{n+1}$
 جواب: محدود، مرکوز، حد i

سوال 17.11: $z_n = \frac{n^2}{n+i}$
 جواب: غیر محدود، منفرج

سوال 17.12: $z_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$
 جواب: محدود، مرکوز، حد 0

سوال 17.13: $z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$
 جواب: محدود، منفرج

سوال 17.14: حد کی یکتائی
 دکھائیں کہ اگر ایک ترتیب مرکوز ہو تب اس کا حد یکتا ہو گا۔

سوال 17.15: ثابت کریں (مثال 17.1 کی طرح) کہ $\frac{i^n}{n^3}$ مرکوز ہے۔

سوال 17.16: ایک ترتیب کے اجزاء درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔ اس ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 17.1 کی تصدیق کریں۔

$$z_n = \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1} + i \frac{n}{n + 2}$$

سوال 17.17: دکھائیں کہ مخلوط ترتیب z_1, z_2, \dots اس صورت محدود ہوگی جب اس کے حقیقی حصہ اور خیالی حصہ کے مطابقتی ترتیب محدود ہوں۔

سوال 17.18: اگر ترتیب z_1, z_2, \dots مرکوز ہو اور اس کا حد 0 ہو، اور ترتیب b_1, b_2, \dots کسی مقررہ $K > 0$ اور تمام n کے لئے $|b_n| \leq K|z_n|$ کو مطمئن کرتا ہو تب دکھائیں کہ ترتیب b_1, b_2, \dots مرکوز ہے اور اس کا حد 0 ہے۔

سوال 17.19: اگر ترتیب z_1, z_2, \dots مرکوز ہو اور اس کا حد l ہو اور ترتیب z_1^*, z_2^*, \dots مرکوز ہو اور اس کا حد l^* ہو تب دکھائیں کہ ترتیب $z_1 + z_1^*, z_2 + z_2^*, \dots$ مرکوز ہو گا اور اس کا حد $l + l^*$ ہو گا۔

سوال 17.20: سوال 17.19 کے مفروضوں کے ساتھ دکھائیں کہ ترتیب $z_1 z_1^*, z_2 z_2^*, \dots$ مرکوز ہو گا اور اس کا حد ll^* ہو گا۔

17.2 تسلسل

فرض کریں کہ $w_1, w_2, \dots, w_m, \dots$ حقیقی یا مخلوط اعداد کی ترتیب ہے۔ تب ہم درج ذیل لامتناہی تسلسل یا، مختصراً، تسلسل⁸ پر غور کرتے ہیں۔

$$(17.2) \quad \sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

w_m کو ترتیب کی مقدار یا اجزاء⁹ کہتے ہیں۔ ابتدائی n اجزاء کے مجموعہ

$$(17.3) \quad s_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

کو تسلسل 17.2 کا n واں جزوی مجموعہ¹⁰ کہتے ہیں۔ تسلسل 17.2 سے s_n ترک کرنے سے

$$(17.4) \quad R_n = w_{n+1} + w_{n+2} + w_{n+3} + \cdots$$

باقی رہ جاتا ہے جس کو تسلسل 17.2 کا، n اجزاء کے بعد، باقی¹¹ کہتے ہیں۔

اس طرح ہم تسلسل 17.2 کے ساتھ اس کے جزوی مجموعوں s_1, s_2, s_3, \dots کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔ اگر یہ ترتیب مرتکز ہو، مثلاً،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل 17.2 مرکوز¹² یا مرتکز ہے اور عدد s اس کی قیمت¹³ یا مجموعہ کہلاتا ہے اور ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

اگر جزوی مجموعوں کی ترتیب منفرج ہو تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل 17.2 منفرج¹⁴ ہے۔

اگر تسلسل 17.2 مرکوز ہو اور اس کی قیمت s ہو تب

$$(17.5) \quad s = s_n + R_n \quad \implies \quad R_n = s - s_n$$

ہو گا۔ مرکوزیت کی تعریف کے تحت n کو کافی بڑا لیتے ہوئے ہم $|R_n|$ کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ بہت سی صورتوں میں مرکوز تسلسل کا مجموعہ s تلاش کرنا ممکن ہو گا۔ تب حساب کی خاطر ہم اس کے جزوی مجموعہ s_n کو s کی تقریب تصور کریں گے اور R_n کا تخمینہ لگا کر تقریب کی درستگی کا جائزہ لیں گے۔

terms⁹
partial sum¹⁰
remainder¹¹
convergent¹²
value¹³
divergent¹⁴

مثال 17.2: مرکوز اور منفرج تسلسل
تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

مرکوز ہے اور چونکہ

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$$

ہے لہذا تسلسل کی قیمت 1 ہے۔ اس کے برعکس تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = 1 + 2 + 3 + \dots$$

منفرج ہے اور تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = 1 - 1 + 1 - + \dots$$

منفرج ہے چونکہ

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 - 1 = 0, \quad s_2 = 1 - 1 + 1 = 1, \dots$$

ہے اور ترتیب $1, 0, 1, 0, \dots$ منفرج ہے۔

ہارمونی تسلسل¹⁵

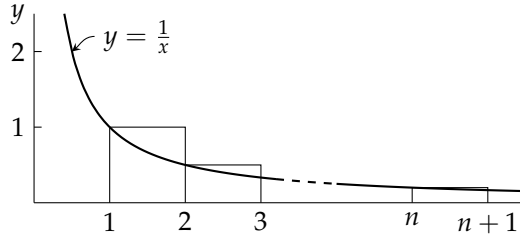
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

منفرج ہے۔ درحقیقت جزوی مجموعہ s_n

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

شکل 17.2 میں n عدد مستطیل کے نیچے رقبہ کے برابر ہے۔ یہ رقبہ قوس $y = \frac{1}{x}$ کے نیچے مطابق رقبہ A_n سے زیادہ ہے۔ اب

$$A_n = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$



شکل 17.5: شکل برائے مثال 17.2

ہے اور چونکہ $s_n > A_n$ ہے لہذا $n \rightarrow \infty$ کرنے سے $s_n \rightarrow \infty$ حاصل ہوگا جو انفرج کی تعریف ہے۔
□

مسئلہ 17.1 سے فوری طور پر تسلسل کے لئے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 17.3: حقیقی اور خیالی حصوں کی تسلسل
فرض کریں کہ $w_m = u_m + iv_m$ ہے۔ تب تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

کی قیمت صرف اور صرف اس صورت $s = a + jb$ ہوگی جب حقیقی حصہ کی تسلسل اور خیالی حصہ کی تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_m = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

مرکوز ہوں اور حقیقی حصے کی تسلسل کی قیمت a اور خیالی حصے کی تسلسل کی قیمت b ہو۔

یہ مسئلہ حقیقی اور مخلوط تسلسل کے درمیان تعلق دیتا ہے۔ اس سے زیادہ اہم تعلق درج ذیل تصور پر مبنی ہے۔

تسلسل $w_1 + w_2 + \dots$ اس صورت حتمی مرکوز¹⁶ کہلاتا ہے جب مطابقتی تسلسل

$$(17.6) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |w_m| = |w_1| + |w_2| + \dots$$

harmonic series¹⁵
absolutely convergent¹⁶

(جس کے اجزاء حقیقی اور غیر منفی ہیں) مرتکز ہو۔

اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \dots$ مرکوز ہو جبکہ تسلسل 17.6 منفرج ہو تب تسلسل مشروط مرتکز¹⁷ کہلاتا ہے۔

مثال 17.3: حتمی اور مشروط مرکوز تسلسل

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

حتمی مرتکز ہے چونکہ مطابقتی تسلسل 17.6 مرکوز ہے (مثال 17.2)۔ اس کے برعکس تسلسل

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

مشروط مرکوز ہے چونکہ تسلسل از خود (معیار لیبینٹز کے تحت) مرتکز ہے لیکن مطابقتی تسلسل 17.6 ہارمونی ہے جو منفرج ہے (مثال 17.2)۔ □

حتمی مرتکز تسلسل کی درج ذیل خاصیت بالکل واضح ہے۔

مسئلہ 17.4: اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \dots$ حتمی مرتکز ہو تب یہ مرکوز ہو گا۔

ہم اگلے حصے کی آخر میں کوشی اصول مرکوزیت کی مدد سے اس مسئلے کا سادہ ثبوت پیش کریں گے۔

ہم آخر میں ایک سادہ مسئلہ پیش کرتے ہیں جو عموماً کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 17.5: اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \dots$ مرتکز ہو تب

$$(17.7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} w_m = 0$$

ہو گا۔ یوں وہ تسلسل جو مساوات 17.7 کو مطمئن نہ کرتا ہو منفرج ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ $w_1 + w_2 + \dots$ مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ s ہے۔ تب

$$w_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

اور

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0$$

ہو گا۔

□

یاد رہے کہ مساوات 17.7 مرکوزیت کے لئے لازمی لیکن ناکافی شرط ہے۔ مثلاً مثال 17.2 کی ہارمونی تسلسل مساوات 17.7 کو مطمئن کرتے ہوئے بھی منفرج ہے۔ مساوات 17.7 میں دوسری اور تیسری تسلسل مساوات 17.7 کو مطمئن نہیں کرتے ہیں لہذا وہ منفرج ہیں۔

17.3 کوشی اصول مرکوزیت برائے ترتیب اور تسلسل

کسی بھی ترتیب یا تسلسل کو استعمال کرنے سے پہلے ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا وہ مرتکز ہے یا نہیں۔ چونکہ ہمیں پہلے سے حد معلوم نہیں ہوتا ہے لہذا مرکوزیت کی تعریف سے ایسا فیصلہ کرنا عموماً ممکن نہیں ہو گا۔ کوشی اصول مرکوزیت سے، حد جانے بغیر مرکوزیت دریافت کرتا ہے۔

کوشی اصول مرکوزیت میں ہم مسئلہ بلزانو وانشسٹر اس زیر استعمال لائیں گے۔ مسئلہ بلزانو وانشسٹر اس کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصور کی ضرورت ہو گی۔

نقطہ a اس صورت ترتیب z_1, z_2, \dots کا تحدیدی نقطہ¹⁸ کہلائے گا جب کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ (جو جتنا چاہیں چھوٹا کیوں نا ہو) کے لئے درج ذیل درست ہو۔

$$(17.8) \quad |z_n - a| < \epsilon \quad (\text{جہاں } n \text{ لامتناہی تعداد ہے})$$

جدول 17.1: تحدیدی نقطہ، مرکوزیت، محدود ہونا (مثال 17.4)

ترتیب	تحدیدی نقطہ	مرکز یا منفرج	محدود یا غیر محدود
$1, 2, 3, \dots$	(کوئی نہیں)	منفرج	غیر محدود
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$	1	مرکز	محدود
$\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots$	0	منفرج	غیر محدود
$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots$	0 اور 1	منفرج	محدود

جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ ϵ کو جتنا بھی چھوٹا کیوں نہ منتخب کیا جائے، رداس ϵ کا دائرہ جس کا مرکز a ہو، میں تسلسل کے نقطوں کی لامتناہی تعداد پائی جائے گی۔

دھیان رہے کہ مساوات 17.8 مطمئن ہونے کے باوجود دائرے کے باہر نقطوں کی تعداد لامتناہی ہو سکتی ہے اور ترتیب منفرج ہو سکتا ہے۔ درحقیقت مرکز ترتیب کا حد ہی تحدیدی نقطہ ہو گا (کیوں؟) اور یہ ترتیب کا واحد تحدیدی نقطہ ہو گا۔ اگر کسی ترتیب کا ایک سے زیادہ تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو تب یہ ترتیب منفرج ہو گا۔

مزید، اگر ایک نقطہ لامتناہی بار کسی ترتیب میں پایا جاتا ہو تب تحدیدی نقطہ کی تعریف کے تحت یہی نقطہ اس ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہو گا۔

آئیں صورت حال کو سمجھنے کے لئے مثال 17.4 دیکھتے ہیں۔ یاد رہے کہ حصہ 17.1 کے آخر کے قریب محدود ہونے کی تعریف پیش کی گئی۔

مثال 17.4: تحدیدی نقطہ، مرکوزیت اور محدود ہونا
جدول 17.1 میں مختلف ممکنہ صورت حال دکھائے گئے ہیں۔

□

اس مثال میں دو محدود ترتیب کے تحدیدی نقطے پائے گئے جو درج ذیل اہم مسئلہ کے عین مطابق ہے۔

مسئلہ 17.6: بیلزانو¹⁹ اور وائشسٹراس²⁰
مخلوط مستوی میں محدود لامتناہی ترتیب z_1, z_2, z_3, \dots کا کم از کم ایک عدد تحدیدی نقطہ ہو گا۔

¹⁹ جرمن ریاضی دان برنارت بیلزانو [1781-1848]

²⁰ جرمن ریاضی دان کارل وائشسٹراس [1815-1897]

		y	
	K		
	1	2	
$-K$	3	4	K
	$-K$		
		x	

شکل 17.6: مسئلہ 17.6 کا ثبوت

ثبوت: صاف ظاہر ہے کہ ہمیں دونوں شرائط کی ضرورت ہوگی: ایک متناہی ترتیب کا کوئی تحدیدی نقطہ نہیں ہوگا، اور ترتیب $1, 2, 3, \dots$ جو لامتناہی لیکن غیر محدود ہے کا کوئی تحدیدی نقطہ نہیں ہے۔ اس مسئلے کو ثابت کرنے کی خاطر محدود لامتناہی ترتیب z_1, z_2, \dots پر غور کرتے ہیں جہاں تمام n کے لئے K ایسا عدد ہے جو $|z_n| < K$ کو مطمئن کرتا ہو۔ اگر z_n کی قیمتوں میں متناہی تعداد قیمتیں آپس میں مختلف ہوں، تب، چونکہ ترتیب لامتناہی ہے لہذا کوئی عدد z ترتیب میں ضرور لامتناہی بار پایا جائے گا، جو تحدیدی نقطہ کی تعریف کے تحت، اس ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہوگا۔

آئیں اب اس صورت پر غور کرتے ہیں جب ترتیب میں لامتناہی تعداد کی مختلف قیمتیں پائی جاتی ہوں۔ ہم ایک بڑا چکور Q_0 بناتے ہیں (شکل 17.6) جس میں تمام z_n پائے جاتے ہیں۔ ہم اس چکور کو چار مماثل چکوروں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ان میں سے کم از کم ایک چکور (بشمول چکور کی مکمل سرحد) میں ترتیب کے لامتناہی تعداد کے اجزاء پائے جائیں گے۔ ایسے چکور کو ہم Q_1 سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ پہلا قدم ہے۔ دوسرے قدم میں ہم Q_1 کو چار مماثل چکوروں میں تقسیم کرتے ہوئے اسی قاعدہ کے تحت چکور Q_2 منتخب کرتے ہیں۔ اسی طرح چلتے ہوئے ہمیں چکوروں کی ترتیب $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ یوں حاصل ہوتی ہے کہ $n \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے چکور Q_n کے طرف کی لمبائی صفر کو پہنچتی ہے اور $n > m$ کی صورت میں Q_m میں تمام Q_n شامل ہوں گے۔ یہاں صاف ظاہر ہے کہ وہ عدد (جس کو ہم $z = a$ کہتے ہیں) جو ان تمام چکوروں میں پایا جاتا ہو ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہوگا۔ درحقیقت کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم N اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ چکور Q_N کے طرف کی لمبائی ϵ سے چھوٹی ہو، اور چونکہ Q_N میں لامتناہی تعداد کے z_n پائے جاتے ہیں لہذا لامتناہی تعداد کے z_n کے لئے $|z_n - a| < \epsilon$ ہوگا۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب اس حصے کی مرکزی مسئلہ کو پیش کرنے کے قابل ہیں۔

مسئلہ 17.7: (کوشی اصول مرکوزیت برائے ترتیب)

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو $z \leq |2yy'|$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

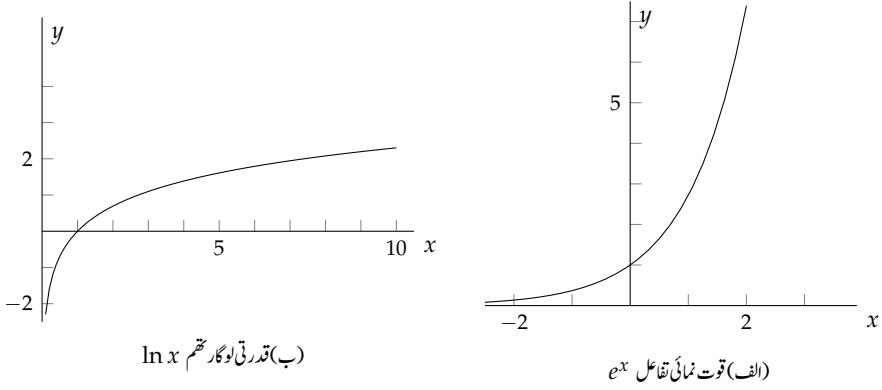
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

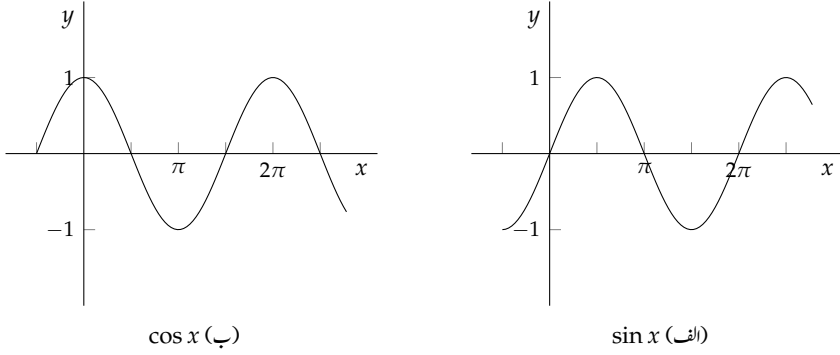
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

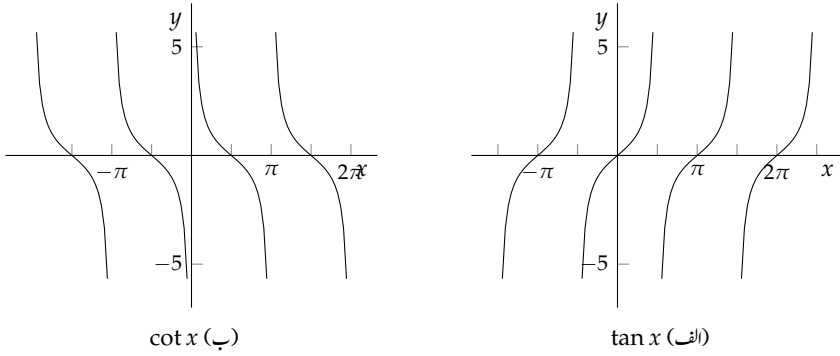
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

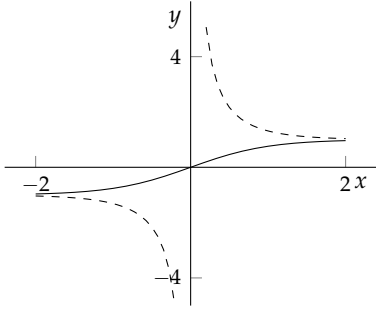
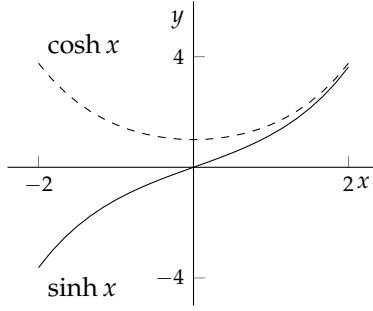
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

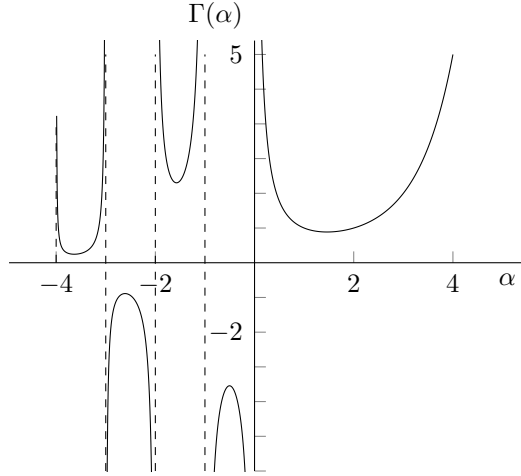
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

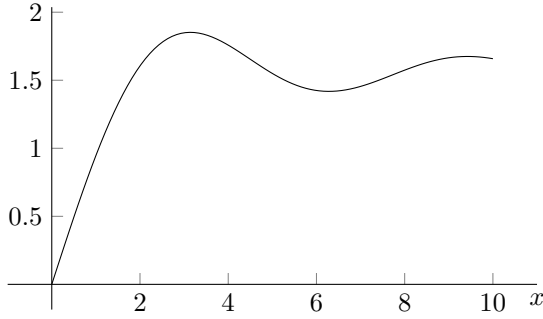
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

¹complementary functions



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

