

## برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کشی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
69	1.6 عمودی خطوط کی تسلیں
73	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکسانیت
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 2

### درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔ چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔ اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں جبری حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

#### 2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

یک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔ اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش<sup>1</sup>، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

---

<sup>1</sup>oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$(2.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

صورت میں لکھا جاسکے خطی<sup>2</sup> کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر خطی<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں  $y$ ،  $y'$  اور  $y''$  کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ  $p(x)$ ،  $q(x)$  اور  $r(x)$  متغیرہ  $x$  کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ دو درجی مساوات کا پہلا جزو  $f(x)y''$  ہونے کی صورت میں مساوات کو  $f(x)$  سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی معیاری صورت<sup>4</sup> میں لکھیں جہاں  $y''$  پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔ یقیناً  $r \equiv 0$  [جہاں زیر غور تمام  $x$  پر  $r(x) = 0$  ہو؛ اس کو مکمل صفر<sup>5</sup> پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$(2.2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جو متجانس ہے۔ اگر  $r(x) \neq 0$  ہو تب مساوات 2.1 غیر متجانس<sup>6</sup> کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔ آخر میں غیر خطی مساوات کی دو مثال پیش کرتے ہیں۔

$$(y'')^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0$$

linear<sup>2</sup>  
nonlinear<sup>3</sup>  
standard form<sup>4</sup>  
identically zero<sup>5</sup>  
nonhomogenous<sup>6</sup>



دو درجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل  $y = h(x)$  کو کھلا فاصلے  $I$  پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دو درجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر  $h(x)$ ،  $h'$  اور  $h''$  پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں  $y$  کی جگہ  $h$ ،  $y'$  کی جگہ  $h'$  اور  $y''$  کی جگہ  $h''$  پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔ چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

### متجانس خطی تفرقی مساوات

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔ متجانس مساوات کے حل میں اصول خطیت<sup>7</sup> یا اصول نفاذ<sup>8</sup> کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

#### مثال 2.1: اصول نفاذ

تمام  $x$  پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل  $y_1 = \cos 2x$  اور  $y_2 = \sin 2x$  ہیں۔

$$y'' + 4y = 0$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔ پہلے  $y_1 = \cos 2x$  کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ  $(\cos 2x)'' = -4 \cos 2x$  کے برابر ہے لہذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4 \cos 2x + 4 \cos 2x = 0$$

ملتا ہے۔ اسی طرح  $y_2 = \sin 2x$  کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4 \sin 2x + 4 \sin 2x = 0$$

linearity principle<sup>7</sup>  
superposition principle<sup>8</sup>

ماتا ہے۔ ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں ہم  $\cos 2x$  کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور  $\sin 2x$  کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔ آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x)'' + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 4(-2.73 \cos 2x + 1.25 \sin 2x) + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل  $y_1$  اور  $y_2$  سے نیا حل

$$(2.3) \quad y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (c_1 \text{ اور } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں})$$

حاصل کیا۔ اس کو  $y_1$  اور  $y_2$  کا خطی میل<sup>9</sup> کہتے ہیں۔ اس مثال سے ہم مسئلہ خطی میل بیان کرتے ہیں جسے عموماً اصول خطیت یا اصول نفاذ کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: مسئلہ خطی میل  
کھلے فاصلہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات کے دو عدد حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل  $y_1$  اور  $y_2$  پائے جاتے ہیں لہذا

$$(2.4) \quad \begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \end{aligned}$$

ہوگا۔ خطی میل سے نیا حل  $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$  حاصل کرتے ہیں۔ اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} y_3' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' \\ y_3'' &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' \end{aligned}$$

$y_3$  ،  $y_3'$  اور  $y_3''$  کو متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + p y_3' + q y_3 &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 2.4 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ  $y_3$  بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔ غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جاسکتے ہیں۔