

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیض۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہمنڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات

1037	14 مخطوط اعداد۔ مخطوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخطوط اعداد
1047	14.2 مخطوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخطوط سطح میں مخنثیات اور خطے
1059	14.4 مخطوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوئی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل

1087 اضافی ثبوت ا

1091	ب مفید معلومات
1091	1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 14

مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیلی تفاعل

انجینئری کے کئی مسائل مخلوط تجزیہ سے با آسانی حل ہو پاتے ہیں۔ ان مسئلوں کو دو بڑے گروہوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ پہلی گروہ میں سادہ مسائل شامل ہیں جنہیں حل کرنے کے لئے کالج میں سیکھی گئی مخلوط اعداد کی الجبرا کافی ہے۔ برقی ادوار اور میکانیکی ارتعاش کے کئی مسائل اس نوعیت کے ہیں۔ دوسری گروہ کے لئے مخلوط تحلیلی تفاعل کا نظریہ اور اس میں استعمال کیے جانے والے انتہائی طاقتور اور شائستہ تراکیب تفصیلاً جاننا ضروری ہے۔ نظریہ حرارت، حرکیات سیال اور برقی سکون کے مسائل اس نوعیت کے ہیں۔

اس باب کے علاوہ اگلے کئی ابواب میں مخلوط تحلیلی تفاعل کے نظریہ کی بیشتر حصوں اور ان تفاعل کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں ان تفاعل کی اہمیت درج ذیل تین وجوہات کی بنا ہے۔

(الف) تحلیلی تفاعل کے حقیقی اور خیالی اجزاء، دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل ہوتے ہیں۔ یوں دو ابعادی مخفی قوہ مسائل پر تحلیلی تفاعل کے لئے بنائے گئے تراکیب کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مختلف مسائل میں درپیش کئی پیچیدہ حقیقی اور مخلوط کمالات کو مخلوط مکمل کی تراکیب سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

(پ) انجینئری حساب میں پائے جانے والے غیر بنیادی تفاعل کا بیشتر حصہ تحلیلی تفاعل پر مشتمل ہے۔ مخلوط غیر تابع متغیرات کے لئے ان تفاعل کے مشاہدہ سے تفاعل کی خواص کی مفصل اور گہری سمجھ پیدا ہوتی ہے۔

موجودہ باب میں ہم مخلوط اعداد اور تحلیلی تفاعل اور ان کے عمومی خواص پر غور کریں گے۔ باب کا دوسرا حصہ اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل کے لئے مختص ہے۔

14.1 مخلوط اعداد

تاریخی طور پر دیکھا گیا کہ کئی مساوات مثلاً

$$x^2 + 4 = 0, \quad x^2 + 2x + 5 = 0$$

کو کوئی بھی حقیقی عدد مطمئن نہیں کرتا ہے۔ مخلوط اعداد کا آغاز یہیں سے ہوا۔¹

تعریف: حقیقی اعداد x اور y کی مرتب جوڑی (x, y) کو مخلوط عدد z کہتے ہیں جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$z = (x, y)$$

ہم x کو z کا حقیقی حصہ³ اور y کو z کا خیالی حصہ⁴ کہتے ہیں جنہیں ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$x = z \text{ حقیقی}, \quad y = z \text{ خیالی}$$

یوں حقیقی $(-7, 2) = -7$ اور خیالی $(-7, 2) = 2i$ ہوں گے۔ مزید دو مخلوط اعداد $z_1 = (x_1, y_1)$ اور $z_2 = (x_2, y_2)$ کی برابری کی تعریف ہم یوں کرتے ہیں کہ یہ مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں۔

مخلوط اعداد $z_1 = (x_1, y_1)$ اور $z_2 = (x_2, y_2)$ کا مجموعہ درج ذیل قاعدہ دیتا ہے

$$(14.1) \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

جبکہ ان کا حاصل ضرب درج ذیل قاعدہ دے گا۔

$$(14.2) \quad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ان اعمال ریاضی پر مزید بحث آگے کی جائے گی۔

¹ اس مقصد کے لئے مخلوط اعداد سب سے پہلے اطالوی ریاضی دان جرولامو کوردانو [1501-1576] نے استعمال کیے جنہوں نے کعبی مساوات کے حل کا کامیاب دریاخت کیا۔ مخلوط اعداد کی منظم اور عام استعمال کی بنیاد جرمنی کے ریاضی دان یوهان کارل فرڈریش گاوس نے ڈالی۔

² complex number

³ real part

⁴ imaginary part

روپ $z = x + iy$ میں خیالی اعداد کا اظہار
ایسا مخلوط عدد جس کا خیالی حصہ صفر کی روپ $(x, 0)$ ہوگی۔ اس طرز کے مخلوط اعداد کے لئے حقیقی اعداد کی طرح

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا $(x, 0)$ کو حقیقی عدد تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں حقیقی عددی نظام کی توسیعی حالت مخلوط عددی نظام ہے۔ مزید درج ذیل مخلوط عدد

$$i = (0, 1)$$

کو خیالی اکائی⁵ کہتے ہیں۔ مساوات 14.2 کے تحت ہر حقیقی y کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$$

جبکہ مساوات 14.1 کے تحت

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

ہوگا۔ یوں $(x, 0)$ کے لئے x اور $(0, y) = iy$ استعمال کرتے ہوئے

$$z = x + iy$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مخلوط اعداد کو عموماً اسی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ خیالی اکائی i کی ایک اہم خاصیت

$$i^2 = -1 \quad (14.3)$$

کو مساوات 14.2 سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی: $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

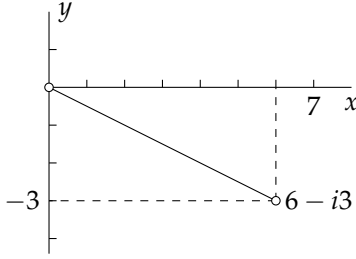
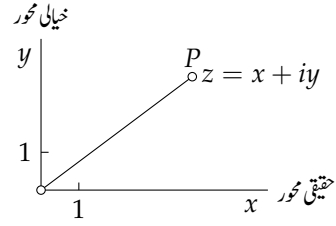
مخلوط سطح

مخلوط اعداد کو سطح پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنا نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ ہم دو عدد آپس میں عمودی محور چنتے ہیں۔ افقی x محور کو حقیقی محور⁶ جبکہ انتضابی y محور کو خیالی محور⁷ تصور کیا جاتا ہے۔ دونوں محوروں پر

imaginary unit⁵

real axis⁶

imaginary axis⁷

(ب) مخلوط سطح پر $6 - i3$ کا اظہار

(الف) مخلوط سطح

شکل 14.1: مخلوط سطح اور مخلوط سطح پر مخلوط عدد کا اظہار

یکساں اکائی لمبائی استعمال کی جاتی ہے (شکل 14.1-الف)۔ اس کو کارتیسی محدودی نظام کہتے ہیں۔ ہم اب مخلوط عدد $z = (x, y) = x + iy$ کو اس سطح پر بطور نقطہ P ظاہر کرتے ہیں جس کے محدود x اور y ہوں گے۔ ایسی سطح xy جس پر اس طرح مخلوط اعداد ظاہر کیے جاتے ہیں مخلوط سطح⁸ یا نقشہ اغگن⁹ کہلاتی¹⁰ ہے۔

"مخلوط سطح میں مخلوط عدد z " کہنے کی بجائے ہم "مخلوط سطح میں نقطہ z " کہیں گے۔ اس سے کوئی غلط فہمی پیدا نہیں ہوتی ہے۔

ریاضی اعمال

ہم اب مخلوط عدد کی روپ $z = x + iy$ اور مخلوط سطح کو استعمال کرتے ہیں۔

جمع۔ مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ $z_1 + z_2$ اب

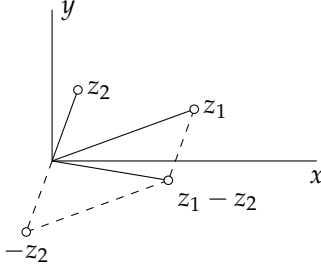
$$(14.4) \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط اعداد کی جمع، میکانیات میں قوتوں کا مجموعہ حاصل کرنے کے متوازی الاضلاع قاعدہ کے مطابق ہے (شکل 14.2-الف)۔

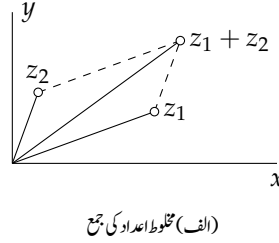
⁸ complex plane

⁹ Argand diagram

¹⁰ فرانسیسی ریاضی دان ژان فرانسوا غولگنگن [1768-1822]



(ب) مخلوط اعداد کی تفریق



(الف) مخلوط اعداد کی جمع

شکل 14.2: مخلوط اعداد کی جمع اور تفریق

تفریق۔ یہ جمع کا الٹ عمل ہے۔ فرق $z_1 - z_2$ ایسے مخلوط عدد z کے برابر ہو گا کہ $z_1 = z + z_2$ ہو۔ یوں (شکل 14.2-ب) درج ذیل ہو گا۔

$$(14.5) \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

ضرب۔ مساوات 14.2 میں دی گئی ضرب $z_1 z_2$ کو اب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.6) \quad z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

چونکہ یہ نتیجہ حقیقی اعداد کی حساب کے قوانین اور مساوات 14.3 یعنی $i^2 = ii = -1$ کی استعمال سے حاصل ہوتا ہے لہذا اس کو یاد رکھنا آسان ہے۔

تقسیم۔ یہ ضرب کا الٹ عمل ہے۔ یوں حاصل تقسیم $z = \frac{z_1}{z_2}$ ایسا مخلوط عدد $z = x + iy$ ہو گا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(14.7) \quad z_1 = z z_2 = (x + iy)(x_2 + iy_2) \quad (z_2 \neq 0)$$

ہم $z_2 \neq 0$ کی صورت میں حاصل تقسیم $z = x + iy = \frac{z_1}{z_2}$ کی درج ذیل صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(14.8) \quad x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

عملاً مساوات 14.8 کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{z_1}{z_2}$ کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $x_2 - iy_2$ سے ضرب دے کر سادہ صورت حاصل کرتے ہیں یعنی:

$$(14.9) \quad z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال کے طور پر اگر $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہوں تب

$$\frac{3 - i2}{-4 + i} = \frac{(3 - i2)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-12 - i3 + i8 - 2}{16 + 1} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$$

ہو گا جس کی درستگی آپ درج ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$zz_2 = \left(-\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}\right)(-4 + i) = \frac{56}{17} - i\frac{14}{17} - i\frac{20}{17} - \frac{5}{17} = 3 - i2$$

مساوات 14.8 کا ثبوت کچھ یوں ہے۔ مساوات 14.6 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 14.7 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

مخلوط اعداد کی برابری کی تعریف کے مطابق دونوں مخلوط اعداد کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں گے اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$x_1 = x_2x - y_2y$$

$$y_1 = y_2x + x_2y$$

یہ دو دو خطی مساوات کا نظام ہے جس کے نامعلوم متغیرات x اور y ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ x_2 اور y_2 بیک وقت صفر نہیں ہیں (جس کو مختصراً $z \neq 0$ لکھا جاتا ہے) ہمیں مساوات 14.8 میں دیا گیا یکتا حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.1: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم

فرض کریں کہ $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہیں۔ تب

$$z_1 + z_2 = -1 - i, z_1 - z_2 = 7 - i3, z_1z_2 = -10 + i11$$

□

اور جیسے ہم حاصل کر سکے ہیں $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$ ہو گا۔

ریاضی اعمال کے خواص

حقیقی اعداد کے قواعد سے مخلوط اعداد z_1 اور z_2 کے لئے درج ذیل قواعد حاصل ہوتے ہیں

$$(14.10) \quad \left. \begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \end{aligned} \right\} \text{ (قانون تبادل)}$$

$$\left. \begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \end{aligned} \right\} \text{ قانون تلازم}$$

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 & \text{(قانون جزئیتی تقسیم)} \\ 0 + z &= z + 0 = z \\ z + (-z) &= (-z) + z = 0 \\ z \cdot 1 &= z \end{aligned}$$

جہاں $0 = (0, 0)$ اور $-z = -x - iy$ ہیں۔

جوڑی دار مخلوط اعداد

فرض کریں کہ $z = x + iy$ کوئی مخلوط عدد ہے۔ تب $x - iy$ کو z کا جوڑی دار مخلوط کہا جائے گا اور z کے جوڑی دار مخلوط کو \bar{z} سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

ہوں گا۔ مثلاً $z = 5 + i2$ کا جوڑی دار مخلوط $\bar{z} = 5 - i2$ ہے (شکل 14.3)۔ مزید جمع اور تفریق سے

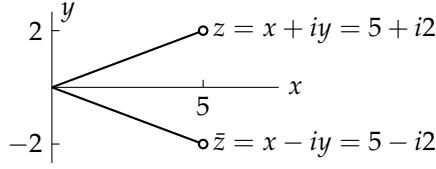
$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = i2y$$

حاصل ہوتے ہیں جو درج ذیل اہم کلیات کا سبب بنتے ہیں۔

$$(14.11) \quad \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = z \text{ حقیقی}, \quad \frac{1}{i2}(z - \bar{z}) = z \text{ خیالی}$$

حقیقی عدد $z = x$ کا مخلوط جوڑی دار عدد $\bar{z} = z$ ہو گا جبکہ $z = 0 + iy = iy$ کا جوڑی دار مخلوط عدد $\bar{z} = -z$ ہو گا۔ اس طرح کا عدد جس کا حقیقی حصہ صفر ہو خالص خیالی عدد¹¹ کہلاتا ہے جو خیالی محور پر کسی نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔

¹¹ pure imaginary number



شکل 14.3: جوڑی دار مختلط اعداد

اس کے علاوہ درج ذیل تعلق بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

$$(14.12) \quad \begin{aligned} \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{(z_1 - z_2)} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{aligned}$$

سوالات

سوال 14.1: خیالی اکائی کے طاقت
درج ذیل ثابت کریں۔

$$(14.13) \quad \begin{aligned} i^2 &= -1, & i^3 &= -i, & i^4 &= 1, & i^5 &= i, \dots \\ \frac{1}{i} &= -i, & \frac{1}{i^2} &= -1, & \frac{1}{i^3} &= i, \dots \end{aligned}$$

فرض کریں کہ $z_1 = 4 + i3$ اور $z_2 = 2 - i5$ ہیں۔ سوال 14.2 تا سوال 14.5 کو حل کرتے ہوئے $x + iy$ روپ میں لکھیں۔

سوال 14.2: $(z_1 - z_2)^2$
جواب: $-60 + i32$

سوال 14.3: $\frac{z_1}{z_2}$
جواب: $-\frac{7}{29} + i\frac{26}{29}$

سوال 14.4: $\frac{1}{z_1^2}$
جواب: $\frac{7}{625} - i\frac{24}{625}$

سوال 14.5: $\frac{2z_1}{3z_2}$
 جواب: $-\frac{14}{87} + i\frac{52}{87}$

سوال 14.6 تا سوال 14.15 کو حل کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

سوال 14.6: خیالی $\frac{1}{1+i}$
 جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 14.7: حقیقی $\frac{1-i}{1+i}$
 جواب: 0

سوال 14.8: خیالی z^2
 جواب: $2xy$

سوال 14.9: حقیقی z^3
 جواب: $x^3 - 3xy^2$

سوال 14.10: خیالی z^4
 جواب: $4xy(x^2 - y^2)$

سوال 14.11: حقیقی $\frac{(-1+i)^2}{-5+i4}$
 جواب: $-\frac{8}{41}$

سوال 14.12: خیالی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
 جواب: 1

سوال 14.13: حقیقی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
 جواب: -1

سوال 14.14: خیالی $\frac{z}{\bar{z}}$
 جواب: $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

سوال 14.15: حقیقی $\frac{z}{\bar{z}}$
 جواب: $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

سوال 14.16: قانون تبادل ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.17: قانون تلازم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.18: قانون جزئیت تقسیم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.19: اگر دو مخلوط اعداد کا حاصل ضرب صفر کے برابر ہو تب ثابت کریں کہ ان میں سے کم از کم ایک مخلوط عدد صفر ہو گا۔

سوال 14.20 تا سوال 14.27 میں ثبوت پیش درکار ہیں۔

سوال 14.20: کسی بھی عدد کے جوڑی دار مخلوط کا جوڑی دار مخلوط اس عدد کے برابر ہو گا۔

$$\overline{iz} = -i\bar{z} \quad \text{سوال 14.21}$$

سوال 14.22: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی ہو گا جب $\bar{z} = z$ ہو۔

سوال 14.23: z صرف اور صرف اس صورت خالص خیالی ہو گا جب $\bar{z} = -z$ ہو۔

سوال 14.24: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی یا خالص خیالی ہو گا جب $(\bar{z})^2 = z^2$ ہو۔

سوال 14.25: مساوات 14.12 ثابت کریں۔

سوال 14.26: حقیقی $z = iz$ خیالی $-z$ ، حقیقی $iz = -z$ خیالی

سوال 14.27: حقیقی $-z = iz$ خیالی $-z$ ، حقیقی $iz = -z$ خیالی

14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات

ہم مخلوط سطح میں درج ذیل قطبی محدود r ، θ متعارف کرتے ہیں۔

$$(14.14) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

یوں کسی بھی مخلوط عدد $z = x + iy \neq 0$ کو

$$(14.15) \quad z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

لکھا جاسکتا ہے جو مخلوط عدد کی قطبی روپ¹² یا تکونیاتی روپ¹³ کہلاتی ہے۔ r کو مخلوط عدد z کی حتمی قیمت¹⁴ یا معیار¹⁵ کہتے ہیں جسے $|z|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا (شکل 14.4-الف)۔

$$(14.16) \quad |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\geq 0)$$

مثبت x محور سے لکیر MN تک زاویہ کو z کی دلیل¹⁶ کہتے ہیں جس کو \angle سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ چلتے ہوئے زاویہ بڑھتا ہے۔ z کا زاویہ درج ذیل ہوگا۔

$$(14.17) \quad \angle z = \theta = \sin^{-1} \frac{y}{r} = \cos^{-1} \frac{x}{r} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

دھیان رہے کہ $z = 0$ کے لئے زاویہ θ غیر معین ہے۔ اسی لئے اوپر شرط $z \neq 0$ لاگو کی گئی ہے۔

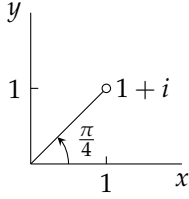
جیومیٹریائی طور پر مبدا M سے نقطہ z تک فاصلہ $|z|$ ہے (شکل 14.4-الف)۔ یوں

$$|z_1| > |z_2|$$

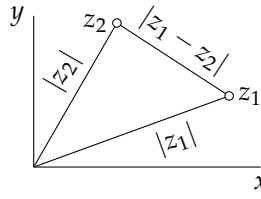
کا مطلب ہے کہ مبدا سے z_1 کا فاصلہ، مبدا سے z_2 کے فاصلے سے زیادہ ہے اور $|z_1 - z_2|$ سے مراد z_1 اور z_2 کے درمیان فاصلہ ہے (شکل 14.4-ب)۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی محور سے ہٹ کر مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات $z_1 < z_2$ یا $z_1 \geq z_2$ کوئی معنی نہیں رکھتی ہیں۔

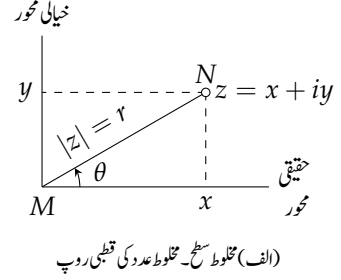
¹² polar form
¹³ trigonometric form
¹⁴ absolute value
¹⁵ modulus
¹⁶ argument



(پ) صدر زاویہ (مثال 14.2)



(ب) دو نقطوں کے مابین فاصلہ



(الف) مخلوط سطح۔ مخلوط عدد کی قطبی روپ

شکل 14.4: مخلوط سطح اور اس پر مخلوط نقطے۔

مخلوط عدد کے زاویہ θ کی وہ قیمت جو وقفہ

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

میں پائی جاتی ہو کہ z کے زاویے کی صدر قیمت¹⁷ کہتے ہیں جس کے ساتھ $\mp n\pi$ جمع کرنے سے z کے زاویے کی دیگر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔

مثال 14.2: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت
فرض کریں کہ $z = 1 + i$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \angle z = \frac{\pi}{4} \mp 2n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

□

z کے زاویہ کی صدر قیمت $\frac{\pi}{4}$ ہے (شکل 14.4-پ)۔

مثال 14.3: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت

فرض کریں کہ $z = -2 + i2\sqrt{3}$ ہے تب $z = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ ہو گا۔ z کی حتمی قیمت
□ $|z| = 4$ اور اس کا صدر زاویہ $\frac{2\pi}{3}$ ہو گا۔

مخلوط اعداد کی ضرب یا تقسیم میں مخلوط اعداد کی قطبی روپ نہایت مفید ثابت ہوتی ہے۔ فرض کریں کہ

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{اور} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

ہیں۔ مساوات 14.6 کے تحت

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)_i (\sin \theta_1 \cos \theta_2) + \cos \theta_1 \sin \theta_2]$$

یعنی

$$(14.18) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتائج

$$(14.19) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

اور

$$(14.20) \quad \angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2 \quad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح تقسیم کی تعریف سے

$$(14.21) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

اور

$$(14.22) \quad \angle \frac{z_1}{z_2} = \angle z_1 - \angle z_2 \quad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 14.4: کلیات ڈی مویرے ور
مساوات 14.19 اور مساوات 14.20 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$(14.23) \quad z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

جس سے کلیہ ڈی مویرے ور¹⁸

$$(14.24) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

□

حاصل ہوتا ہے۔

عدم مساوات

کسی بھی مخلوط عدد کے لئے درج ذیل تکنیکی عدم مساوات¹⁹ (شکل 14.5) درست ہوگی

$$(14.25) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔ نقطہ 0، z_1 اور z_2 شکل 14.5 میں تینوں کے کونے ہیں جس کے اطراف کی لمبائی $|z_1|$ ، $|z_2|$ اور $|z_1 + z_2|$ ہے۔ اب تینوں کا کوئی ایک طرف باقی دو کی مجموعی لمبائی سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے لہذا درج بالا عدم مساوات ثابت ہوتا ہے جس کا باضابطہ ثبوت آپ پر چھوڑا جاتا ہے (سوال 14.48)۔

مساوات 14.25 سے ہم زیادہ تعداد کی مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات

$$(14.26) \quad |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

اخذ کر سکتے ہیں، یعنی مجموعے کی حتمی قیمت تمام ارکان کی علیحدہ علیحدہ حتمی قیمتوں کے مجموعہ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے۔

کسی بھی $z = x + iy$ کے لئے

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم عدم مساوات

$$(14.27) \quad \left| \operatorname{Re}(z) \right| \leq |z|, \quad \left| \operatorname{Im}(z) \right| \leq |z|$$

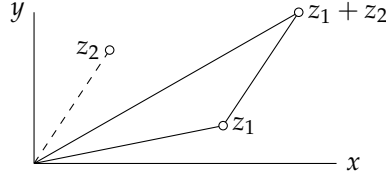
حاصل ہوتی ہیں۔

سوالات

سوال 14.28 تا سوال 14.34 کو حل کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

¹⁹ triangle inequality

14.2. مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات



شکل 14.5: تکونی عدم مساوات

سوال 14.28: $|1 - i|^2$
جواب: 2

سوال 14.29: $|-i7|$
جواب: 7

سوال 14.30: $|\cos \theta + i \sin \theta|$
جواب: 1

سوال 14.31: $\left| \frac{2+i5}{5-i2} \right|$
جواب: 1

سوال 14.32: $\left| \frac{z+1}{z-1} \right|$
جواب: $\sqrt{\frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}}$

سوال 14.33: $\left| \frac{(-2+i3)^2}{(3+i2)^2} \right|$
جواب: 1

سوال 14.34: $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right|$
جواب: 1

سوال 14.35 تا سوال 14.40 میں دلیل کی صدر قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.35: -9
جواب: π

سوال 14.36: 9
جواب: 0

سوال 14.37: $i5$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.38: $5 - i5$
جواب: $-\frac{\pi}{4}$

سوال 14.39: $-5 - i5$
جواب: $-\frac{3\pi}{4}$

سوال 14.40: $-i3$
جواب: $-\frac{\pi}{2}$

سوال 14.41 تا سوال 14.44 میں دیے گئے مخلوط عدد کو قطبی روپ میں لکھیں۔

سوال 14.41: $2 + i2$
جواب: $2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

سوال 14.42: -6
جواب: $6 \cos \pi$

سوال 14.43: $-i8$
جواب: $8 \sin(-\frac{\pi}{2})$

سوال 14.44: $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$
جواب: $\frac{1}{2}[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]$

سوال 14.45: تکنونی عدم مساوات کی تصدیق $z_1 = -1 - i2$ اور $z_2 = 3 - i2$ کے لئے کریں۔
جواب: $|z_1| = \sqrt{5} \approx 2.236$, $|z_2| = \sqrt{13} \approx 3.606$, $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \approx 4.472$
لہذا $4.472 < 2.236 + 3.606$ ہے۔

سوال 14.46: تکنونی عدم مساوات کی تصدیق $z_1 = 1 + i$ اور $z_2 = i4$ کے لئے کریں۔

سوال 14.47: تکونی عدم مساوات میں برابر کی علامت کس صورت استعمال ہوگی۔
جواب: جب مبدا اور دیے گئے دو مخلوط اعداد تکون کی بجائے سیدھی لکیر بناتے ہوں۔

سوال 14.48: تکونی عدم مساوات کا ریاضی ثبوت پیش کریں۔

سوال 14.49: تکونی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ ثابت کریں۔

سوال 14.50: ثابت کریں کہ $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$ ہو گا۔ اعدادی مثال پیش کریں۔

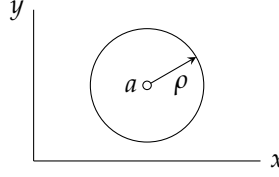
سوال 14.51: ثابت کریں کہ $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ہو گا۔

سوال 14.52: $z = (5 + i4)^2$ کے لئے مساوات 14.27 کی تصدیق کریں۔

سوال 14.53: i کے ساتھ ضرب
عمومی مخلوط عدد $z = x + iy$ کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔ z کو i سے ضرب دینے سے $z_1 = -y + ix$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کو بھی اسی مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔ z سے z_1 تک زاویہ کیا ہو گا؟ جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.54: i کے ساتھ ضرب
ثابت کریں کہ کسی بھی مخلوط عدد کو i سے ضرب دینا مخلوط سطح پر اس نقطے کو گھڑی کی الٹ رخ $\frac{\pi}{2}$ زاویے سے گمانے کے مترادف ہے۔

سوال 14.55: قطبی روپ استعمال کرتے ہوئے دو مخلوط اعداد کے حاصل ضرب مثلاً $(1 + i)(1 + 2i)$ کا جیومیٹریائی طریقہ دریافت کریں۔



شکل 14.6: مخلوط سطح میں دائرہ

14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے

مخلوط سطح میں منحنیات اور خطوں کی ضرورت ہمیں بار بار ہو گی۔ اس لئے چند اہم منحنیات اور خطوں اور ان کی مساواتوں اور عدم مساواتوں پر غور کرتے ہیں۔

چونکہ دو اعداد z اور a کے درمیان فاصلہ $|z - a|$ ہے لہذا اس ρ کا ایسا دائرہ C جس کا مرکز نقطہ a پر ہو (شکل 14.6) کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.28) \quad |z - a| = \rho$$

نتیجتاً عدم مساوات

$$(14.29) \quad |z - a| < \rho$$

دائرہ C کے اندر کسی بھی نقطہ کے لئے درست ہے۔ یوں مساوات 14.29 دائرے کی اندرون کو ظاہر کرتی ہے۔ ایسے دائری قرص²⁰ کو کھلا قرص²¹ کہتے ہیں جبکہ خطہ

$$(14.30) \quad |z - a| \leq \rho$$

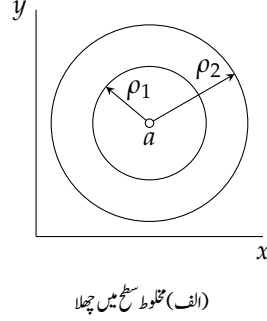
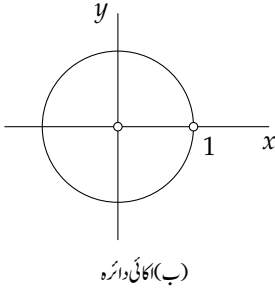
کو بند قرص²² کہتے ہیں جس میں دائرے کی اندرون کے ساتھ دائرہ بھی شامل ہے۔ کھلا قرص (مساوات 14.29) کو نقطہ a کی پڑوس²³ بھی کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ a کی ایسی لامحدود تعداد کے پڑوس پائے جاتے ہیں جن کا $\rho (> 0)$ آپس میں مختلف ہو گا۔

circular disk²⁰

open disk²¹

closed disk²²

neighbourhood²³



شکل 14.7: مخلوط سطح میں چھلا اور اکائی دائرہ

اسی طرح عدم مساوات

$$(14.31) \quad |z - a| > \rho$$

دائرے کی بیرون کو ظاہر کرتی ہے۔ مزید رداں ρ_1 اور ρ_2 کے دو ہم مرکز دائروں (شکل 14.7-الف) کے درمیان خطے کو

$$(14.32) \quad \rho_1 < |z - a| < \rho_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں نقطہ a دائروں کا مرکز ہے۔ ایسا خطہ کھلا چھلا²⁴ کہلاتا ہے۔

درج ذیل مساوات اکائی دائرہ²⁵ (شکل 14.7-ب) کو ظاہر کرتی ہے۔ اکائی دائرے کا رداں اکائی اور مبدا اس کا مرکز ہو گا۔ اکائی دائرہ مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 14.5: دائری قرص

مخلوط سطح میں $|z - 2 + i4| \leq 9$ کی خطہ کو ظاہر کرتی ہے۔

حل: یہ عدم مساوات ان تمام z کو ظاہر کرتی ہے جن کا نقطہ $2 - i4$ سے فاصلہ، 9 سے زیادہ نہیں ہے۔ یوں یہ اس بند قرص کو ظاہر کرتی ہے جس کا مرکز $2 - i4$ ہے۔ □

مثال 14.6: اکائی دائرہ اور اکائی قرص

درج ذیل کن خطوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

open annulus²⁴
unit circle²⁵

$$(الف) \quad |z| < 1 \quad (ب) \quad |z| \leq 1 \quad (پ) \quad |z| > 1$$

حل: (الف) اکائی دائرے کی اندرون یعنی اکائی کھلا دائرہ۔
 (ب) اکائی دائرے کی اندرون اور دائرہ یعنی اکائی بند دائرہ۔
 (پ) اکائی دائرے کی بیرون۔

□

یہ ضروری ہے کہ طلبہ و طالبات مخلوط سطح پر منحنیات اور خطوں کی اظہار کو اچھی طرح سمجھیں۔ اس لئے موجودہ حصے کی سوالات کو زیادہ غور سے حل کریں تاکہ آگے آپ کی مشکل کچھ آسان ہو سکے۔

ہم اب چند اصطلاحات کی تعریف بیان کرتے ہیں جو آگے استعمال کی جائیں گی۔

مخلوط سطح میں نقطوں کے سلسلہ²⁶ سے مراد محدود یا لامحدود تعداد کی نقطے ہیں۔ مثال کے طور پر دو درجی الجبرائی مساوات کے حل، کسی لکیر پر نقطوں کا سلسلہ، اور کسی دائرے کے اندر نقطوں کا سلسلہ۔

اگر سلسلہ S کے ہر نقطے کا ایسا پڑوس ہو جس کا ہر نقطہ بھی S کا حصہ ہو تب S کھلا²⁷ سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی دائرے یا کعب کے اندرون تمام نقطے مل کر کھلا سلسلہ بناتے ہیں۔ اسی طرح دایاں آدھی سطح $x > 0$ کے تمام نقطے کھلا سلسلہ ہیں۔ کسی دائرے کے اندر اور دائرے پر نقطے کھلا سلسلہ نہیں بناتے ہیں چونکہ دائرہ پر نقطوں کا ایسا کوئی پڑوس نہیں پایا جاتا ہے جس کے تمام نقطے اس سلسلے کا حصہ ہوں۔

مخلوط سطح میں ایسا سلسلہ جس کا متمم کھلا سلسلہ ہو، بند سلسلہ²⁸ ہو گا۔ مخلوط سطح میں سلسلہ S کا متمم²⁹، مخلوط سطح میں ان تمام نقطوں کا سلسلہ ہو گا جو S کا حصہ نہ ہوں۔ مثال کے طور پر اکائی دائرے کے اندر اور اکائی دائرے پر نقطوں کا سلسلہ بند سلسلہ ہے۔

ایک سلسلہ جس کے تمام نقطے حسب ضرورت بڑے رداس کی دائرے میں پائے جاتے ہوں محدود³⁰ سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی کعب کے اندر نقطے محدود سلسلہ ہیں جبکہ کسی لکیر پر نقطے محدود سلسلہ نہیں ہیں۔

set of points²⁶
 open²⁷
 closed²⁸
 complement²⁹
 bounded³⁰

ایک سلسلہ S جس کے ہر دو نقطوں کو محدود تعداد کے ایسے قطعات سے آپس میں ملایا جاسکتا ہو جن کا ہر نقطہ S کا حصہ ہو، جڑا ہوا³¹ سلسلہ کہلاتا ہے۔ کھلا جڑا ہوا سلسلہ کو دائرہ کار³² کہتے ہیں۔ یوں دائرے کی اندرون ایک دائرہ کار ہے۔

سلسلہ S کی سرحدی نقطہ³³ سے مراد ایسا نقطہ ہے جس کی پڑوس میں کچھ ایسے نقطے جو S کا حصہ ہوں اور کچھ ایسے نقطے جو S کا حصہ نہ ہوں دونوں شامل ہوں۔ مثلاً چھلا کی سرحدی نقاط میں چھلا کے دونوں اطراف کے دائروں کے نقطے شامل ہیں۔ ظاہر ہے کہ کھلا سلسلہ کا کوئی سرحدی نقطہ بھی کھلا سلسلہ کا حصہ نہیں ہوگا جبکہ بند سلسلہ کا ہر سرحدی نقطہ بند سلسلہ کا حصہ ہوگا۔

خطہ³⁴ سے مراد ایسا سلسلہ ہے جس میں دائرہ کار اور دائرہ کار کے چند یا تمام سرحدی نقطے شامل ہوں۔

سوالات

سوال 14.56 تا سوال 14.68 میں منحنی یا خطہ دریافت کرتے ہوئے انہیں ترسیم کر دکھائیں۔

سوال 14.56: $z \geq -1$ خیالی $y \geq -1$ جواب:

سوال 14.57: $z^2 \leq 7$ خیالی $2xy \leq 7$ جواب:

سوال 14.58: $z^2 \geq 1$ حقیقی $x^2 - y^2 = 1$ کے بائیں بازو کی بائیں طرف اور اس کے دائیں بازو کی دائیں طرف کے خطے۔

سوال 14.59: $z < \frac{\pi}{4}$ دلیل $y < 0$ کا پورا خطہ ماسوائے منفی y محور اور مبدا سے $\frac{\pi}{4}$ زاویہ پر لکیر کے نیچے خطہ۔

connected³¹
domain³²
boundary point³³
region³⁴

سوال 14.60: $\left| \frac{z}{4} \right| < \frac{\pi}{4}$ دلیل

جواب: $y = x$ اور $y = -x$ کے درمیان وہ پٹی جس کا مثبت x محور حصہ ہے۔

سوال 14.61: $-\pi < z < \pi$ حقیقی کے درمیان انتصابی پٹی۔
جواب: $y = \pi$ اور $y = -\pi$ کے درمیان انتصابی پٹی۔

سوال 14.62: $\left| \frac{1}{z} \right| > 1$

جواب: کھلا اکائی دائرہ۔

سوال 14.63: $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 2$
جواب: $(x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

سوال 14.64: $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 1$
جواب: $y = 0$

سوال 14.65: $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$
جواب: $x = 0$

سوال 14.66: $\frac{z+1}{z-1} < 2$ خیالی
جواب: ایسے اکائی دائرے کی بیرون جس کا مرکز نقطہ $(1, -1)$ پر ہو۔

سوال 14.67: $\frac{1}{z} > 1$ حقیقی
جواب: نقطہ $(\frac{1}{2}, 0)$ پر رداس $\frac{1}{2}$ کے دائرے کی اندرون۔

سوال 14.68: $\frac{2z+1}{4z-4} \leq 1$ خیالی
جواب: نقطہ $(1, -\frac{3}{8})$ پر رداس $\frac{3}{8}$ کے دائرے کی بیرون بشمول دائرہ۔

سوال 14.69: z_1 اور z_2 مخلوط سطح میں دو نقطے ہیں جبکہ α اور β حقیقی غیر منفی اعداد ہیں جہاں $\alpha + \beta = 1$ ہے۔ ایسی صورت میں $\alpha z_1 + \beta z_2$ کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: z_1 اور z_2 کو ملانے والا سیدھا قطع۔

سوال 14.70: قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کو $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ لکھیں۔

سوال 14.71: مساوات $|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔ اس حقیقت کی جیومیٹریائی دلیل دیں۔ اس حقیقت کو الجبرا کی مدد سے حاصل کریں۔

14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیلی تفاعل

مخلوط تجزیہ کی چند بنیادی تصورات، مثلاً مخلوط متغیرات کے تفاعل اور ایسے تفاعل کے حد اور تفرقات، کو اب پیش کرتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ تصورات علم الاحصاء کی تصورات کی طرح ہیں۔ اس کے بعد ہم مخلوط تحلیلی تفاعل کی تعریف پیش کریں گے۔ یہ تصورات مخلوط تجزیہ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے مخلوط متغیرہ کے تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ S مخلوط اعداد کا کوئی سلسلہ ہے۔ S پر معین تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو S میں ہر z کا مطابقتی یکتا³⁵ مخلوط عدد w دیتا ہو۔ تب ہم

$$w = f(z)$$

یا $w = g(z)$ ، وغیرہ، یا صرف $w(z)$ لکھتے ہیں۔ یہاں z مخلوط متغیر³⁶ کہلاتا ہے جس کی قیمت S کا کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ سلسلہ S کو $f(z)$ کی تعریف کا دائرہ کار³⁷ کہتے ہیں۔ ان مخلوط اعداد کا سلسلہ جو S میں z کی تبدیلی سے $w = f(z)$ اختیار کرتا ہو کو تفاعل $w = f(z)$ کی قیمتوں کا حلقہ کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ u اور v تفاعل w کے بالترتیب حقیقی اور خیالی جزو ہیں۔ اب چونکہ w متغیر $z = x + iy$ کے تابع ہے لہذا u اور v بھی x اور y کے تابع ہوں گے۔ یوں ہم

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

لکھ سکتے ہیں جس کے تحت مخلوط تفاعل $f(z)$ درحقیقت دو حقیقی تفاعل u اور v کے مترادف ہے جو از خود دو حقیقی متغیرات x اور y کے تابع ہیں۔

مثال 14.7: مخلوط متغیر کا تفاعل
فرض کریں کہ

$$w = f(z) = z^2 + 3z$$

³⁵ یوں عام تفاعل کی طرح مخلوط تفاعل $f(z)$ بھی ہر z کا صرف اور صرف ایک مطابقتی قیمت دے گا۔

³⁶ complex variable

³⁷ اگرچہ S بعض اوقات حصہ 14.3 میں دائرہ کار کی تعریف (یعنی کھلا اور جڑا ہوا سلسلہ) پر پورا نہیں اترتا، اس کے باوجود یہ دائرہ کار کہلاتا ہے۔

ہے۔ تب

$$u(x, y) = f(z) \text{ حقیقی} = x^2 - y^2 + 3x \quad \text{اور} \quad v(x, y) = f(z) \text{ خیالی} = 2xy + 3y$$

ہوں گے۔ یوں نقطہ $z = x + iy = 1 + i3$ پر اس تفاعل کی قیمت

$$(1 + i3)^2 + 3(1 + i3) = -5 + i15$$

ہو گی لہذا ہم

$$f(1 + i3) = -5 + i15, \quad u(1, 3) = -5, \quad v(1, 3) = 15$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح $f(1 + i) = 3 + i5$ ہو گا، وغیرہ۔ ظاہر ہے کہ یہ تفاعل تمام z کے لئے معین ہے۔ □

مثال 14.8: مخلوط متغیر کا تفاعل

تفاعل $f(z) = 3\bar{z} = 3x - i3y$ کا نقطہ $z = 2 + i4$ پر قیمت دریافت کریں۔

حل: چونکہ $x = 2$ اور $y = 4$ ہیں لہذا $f(2 + i4) = 6 - i12$ ہو گا۔ □

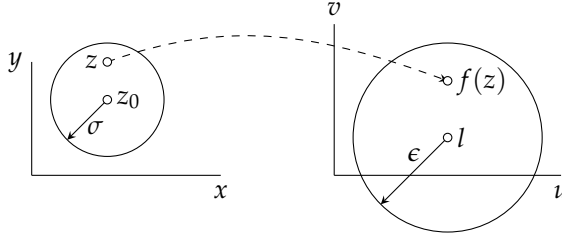
اگر تفاعل $f(z)$ نقطہ z_0 کی پڑوس میں معین ہو [جبکہ عین z_0 پر $f(z)$ غیر معین ہو سکتا ہے] اور ہم ایسا مثبت حقیقی عدد σ دریافت کر سکتے ہیں کہ ہر مثبت حقیقی عدد ϵ کے لئے، جہاں ϵ جتنا بھی چھوٹا (لیکن غیر صفر) کیوں نہ ہو، تمام $z \neq z_0$ کے لئے قرص $|z - z_0| < \sigma$ میں

$$|f(z) - l| < \epsilon \quad (14.33)$$

ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ z کا نقطہ z_0 کے قریب تر ہونے سے $f(z)$ کا حد l ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ z کو z_0 کے قریب کرتے ہوئے ہم $f(z)$ کی قیمت جتنی چاہیں l کے قریب کر سکتے ہیں (شکل 14.8)۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \quad (14.34)$$

یہاں دھیان رہے کہ حد کی اس تعریف کے تحت ہم مخلوط سطح میں z_0 تک کسی بھی سمت سے پہنچ سکتے ہیں۔ حقیقی علم الاحصاء میں حد کی تعریف سے موجودہ حد کی تعریف زیادہ شرائط پر پورا اترتا ہے۔



شکل 14.8: حد

اگر حد موجود ہو، تب یہ حد کیتا ہو گا (سوال 14.80)۔

نقطہ $z = z_0$ پر تفاعل $f(z)$ اس صورت استمراری³⁹ ہو گا اگر $f(z_0)$ معین ہو اور

$$(14.35) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ہو۔ یاد رہے کہ تفاعل کی حد کی تعریف سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ تفاعل $f(z)$ نقطہ z_0 کے کسی پڑوس میں معین ہو گا۔

تفاعل $f(z)$ اس صورت کسی دائرہ کار میں استمراری ہو گا جب اس دائرہ کار کے ہر نقطہ پر $f(z)$ استمراری ہو۔

تفاعل $f(z)$ نقطہ $z = z_0$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب حد

$$(14.36) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

موجود ہو۔ تب اس حد کو نقطہ $z = z_0$ پر تفاعل $f(z)$ کا تفرق⁴⁰ کہتے ہیں۔

مساوات 14.36 میں $z_0 + \Delta z = z$ پر کرتے ہوئے $\Delta z = z - z_0$ ہو گا لہذا ہم درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$(14.37) \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

continuous³⁹
derivative⁴⁰

یاد رہے کہ حد کی تعریف سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ کم از کم نقطہ z_0 کی پڑوس میں تفاعل $f(z)$ معین ہے۔ ساتھ ہی ساتھ z_0 تک کسی بھی سمت سے پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔ یوں z_0 پر قابل تفرق ہونے کا مطلب ہے کہ z_0 تک جس رخ سے بھی پہنچنے کی کوشش کی جائے مساوات 14.37 میں دی گئی حاصل تقسیم کسی ایک ہی قیمت تک پہنچنے کی کوشش کرے گی۔ یہ حقیقت بعد میں نہایت اہم ثابت ہو گا۔

حد کی تعریف کے تحت مساوات 14.37 کہتی ہے کہ ایسا مخلوط تفاعل $f'(z)$ پایا جاتا ہے جس کے لئے، کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $\sigma > 0$ دریافت کر سکتے ہیں کہ، $f'(z)$ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(14.38) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{جب} \quad |z - z_0| < \sigma$$

اگر z_0 پر $f(z)$ قابل تفرق ہو تب z_0 پر $f(z)$ استمراری ہو گا (سوال 14.96)۔

مثال 14.9: قابل تفرق۔ تفرق

تفاعل $f(z) = z^2$ تمام z کے لئے قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق $f'(z) = 2z$ ہے جس کو یوں

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z + \Delta z = 2z$$

□

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

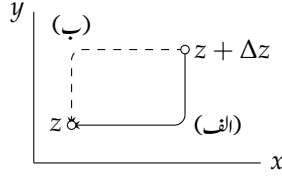
حقیقی تفرقات کے تمام اصول مثلاً مستقل کی تفرق، z^n کی تفرق جہاں n عددی صحیح ہے، قابل تفرق تفاعل کا مجموعہ، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور تفاعل کے تفرق کی زنجیری اصول مخلوط تفرقات کے لئے بھی درست ہیں۔

ان کے ثبوت تقریباً ہو بہو حقیقی تفاعل کے مطابق ثبوت کی طرح ہیں۔

مثال 14.10: \bar{z} قابل تفرق نہیں ہے

آپ دیکھیں گے کہ کئی انتہائی سادہ تفاعل کا کسی بھی نقطے پر تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ تفاعل $f(z) = \bar{z} = x - iy$ ایسا ہی ایک تفاعل ہے۔ یقیناً $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ لیتے ہوئے ہم اس تفاعل کی تفرق کو

$$(14.39) \quad \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{[(x + \Delta x) - i(y + \Delta y)] - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$



شکل 14.9: راہ (مثال 14.10)

لکھ سکتے ہیں جو $\Delta y = 0$ کی صورت میں $+1$ جبکہ $\Delta x = 0$ کی صورت میں -1 دیتا ہے۔ یوں راہ-الف پر چلتے ہوئے مساوات 14.39 کی قیمت $+1$ تک پہنچتی ہے جبکہ راہ-ب پر چلتے ہوئے اس کی قیمت -1 تک پہنچتی ہے (شکل 14.9)۔ تعریف کے تحت $\Delta z \rightarrow 0$ کرتے ہوئے مساوات 14.39 کا کوئی حد موجود نہیں ہے۔ یہ مثال حیرت کن ہے جو اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ مخلوط تفاعل کی تفرق پیچیدہ عمل ہے۔ □

اب ہم اپنے اصل مضمون پر آتے ہیں یعنی:

تعریف: (تحلیلی ہونا)

دائرہ کار D میں تفاعل $f(z)$ اس صورت تحلیلی ہو گا جب پوری D میں ہر نقطے پر f معین اور قابل تفرق ہو۔ تفاعل $f(z)$ دائرہ کار D میں نقطہ $z = z_0$ پر تحلیلی ہو گا اگر z_0 کی پڑوس (حصہ 14.3) میں $f(z)$ تحلیلی ہو۔

یوں z_0 پر $f(z)$ کی تحلیلی ہونے کا مطلب ہے کہ z_0 کے کسی پڑوس کے ہر نقطہ (بشمول z_0 چونکہ z_0 از خود تمام پڑوس میں ایک نقطہ ہے) پر $f(z)$ قابل تفرق ہے۔ اس تصور کی وجہ یہ ہے کہ ایسا تفاعل، جو محض ایک نقطہ پر قابل تفرق ہو ناکہ نقطہ کی پڑوس میں، عملاً کسی استعمال کا نہیں ہے۔ ہم کسی مخصوص دائرہ کار کا ذکر کیے بغیر بھی تحلیلی تفاعل⁴¹ کی اصطلاح استعمال کریں گے جس سے مراد کسی دائرہ کار پر تحلیلی تفاعل ہو گا۔

مثال 14.11: کثیر دکنی

عدد صحیح طاقی تفاعل $1, z, z^2, \dots$ اور کثیر دکنی

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

analytic function⁴¹

جہاں c_0, \dots, c_n مخلوط مستقل ہیں پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہیں۔ تفاعل $f(z) = \frac{1}{1-z}$ نقطہ $z = 1$ کے علاوہ پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہے۔
□

مخلوط تجزیہ مکمل طور پر تحلیلی تفاعل پر مبنی ہے۔ اگرچہ بہت سارے سادہ تفاعل غیر تحلیلی ہیں، ان کو چھوڑ کر باقی بہت سارے اقسام کے تفاعل تحلیلی ہیں جو حساب کی ایسی شاخ کو جنم دیتی ہے جو تجزیہ کے لحاظ سے انتہائی خوبصورت اور استعمال کی نقطہ نظر سے انتہائی مفید ہے۔

سوالات

سوال 14.72 تا سوال 14.73 میں $f(1+i)$ ، $f(5i)$ اور $f(-2+i)$ دریافت کریں۔ $f(z)$ سوال میں دیا گیا ہے۔

سوال 14.72: $3z^2 + 2z$
جواب: $11 - i10$ ، $-73 + i2$ ، $2 + i8$

سوال 14.73: $\frac{1}{z^2}$
جواب: $i\frac{12}{25}$ ، $-\frac{3}{25}$ ، $-i\frac{3}{2}$

سوال 14.74 تا سوال 14.76 میں حقیقی اور خیالی اجزاء دریافت کریں۔

سوال 14.74: $f(z) = z^2 - 2z$
جواب: خیالی $= 2y(x-1)$ ، حقیقی $= x^2 - y^2 - 2x$

سوال 14.75: $f(z) = \frac{1}{1-z}$
جواب: خیالی $= \frac{y}{y^2 + (1-x)^2}$ ، حقیقی $= \frac{1-x}{y^2 + (1-x)^2}$

سوال 14.76: $f(z) = 1 - z + z^2 - z^3$
جواب: خیالی $= -y + 2xy - 3x^2y + y^3$ ، حقیقی $= 1 - x + x^2 - x^3 - y^2 + 3xy^2$

سوال 14.77 تا سوال 14.79 میں z خطہ R میں z سطح پر تبدیل ہوتا ہے۔ $w = f(z)$ سطح میں تفاعل کا مطابقتی خطہ کیا ہو گا۔ دونوں خطوں کی ترسیم دکھائیں۔

سوال 14.77: $f(z) = 3z$, $\left| \frac{z}{\text{دلیل}} \right| < \frac{\pi}{2}$ جواب: $0 < \text{حقیقی } z$

سوال 14.78: $f(z) = z^2$, $z > 4$ جواب: $w > 16$

سوال 14.79: $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $\left| \frac{z}{\text{دلیل}} \right| \leq \frac{\pi}{4}$ جواب: $0 \leq \text{حقیقی } w$

سوال 14.80: ثابت کریں کہ اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ موجود ہو تب یہ حد یکتا ہو گا۔

سوال 14.81: ثابت کریں کہ مساوات 14.34 درج ذیل دو عدد مساوات کی معادل ہے۔

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \text{ حقیقی}, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \text{ خیالی}$$

سوال 14.82: اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ اور $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = p$ ہو تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = l + p \\ \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = lp \end{aligned}$$

کیا سوال 14.83 تا سوال 14.85 میں دیا گیا تفاعل مبدا پر استمراری ہے؟

سوال 14.83: $f(0) = 0$ اور $f(z) = z \text{ حقیقی}$, $z \neq 0$ جواب: y محور پر چلتے ہوئے $z \rightarrow 0$ کرنے سے $f(z) \rightarrow 0 [= f(0)]$ ملتا ہے جبکہ مثبت x محور پر چلتے ہوئے $z \rightarrow 0$ کرنے سے $f(z) \rightarrow 1 \neq f(0)$ ملتا ہے لہذا تفاعل مبدا پر استمراری نہیں ہے۔

سوال 14.84: $f(0) = 0$ اور $z \neq 0$ خیالی $f(z) = \frac{z}{1+|z|}$ جواب: $|z| \rightarrow 0$ پر $f(z) \rightarrow 0 [= f(0)]$ ہو گا لہذا استمراری ہے۔

سوال 14.85: $f(0) = 0$ اور $z \neq 0$ حقیقی $f(z) = \frac{(z)^2}{|z|}$ جواب: $|z| \rightarrow 0$ سے $f(z) \rightarrow 0 [= f(0)]$ ملتا ہے لہذا استمراری ہے۔

سوال 14.86: حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $f(z) = z^2$ استمراری ہے۔

سوال 14.87: ثابت کریں: $[af(z) + bg(z)]' = af'(z) + bg'(z)$

سوال 14.88: ثابت کریں: $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

سوال 14.89 تا سوال 14.91 میں تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.89: $(z^2 + 4)^2$ جواب: $4z(z^2 + 4)$

سوال 14.90: $\frac{1}{1-z}$ جواب: $\frac{1}{(1-z)^2}$

سوال 14.91: $\frac{(z+1)^2}{1+z^2}$ جواب: $\frac{2(z+1)}{1+z^2} - \frac{2z(z+1)^2}{(1+z^2)^2}$

سوال 14.92 تا سوال 14.95 میں نقطہ z_0 پر تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.92: $f(z) = z^2 + z$, $z_0 = 1 + i$ جواب: $3 + i2$

سوال 14.93: $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$, $z_0 = 1 - i$ جواب: $\frac{8}{25} + i\frac{6}{25}$

سوال 14.94: $f(z) = (z^2 + 1)^2$, $z_0 = 2 + i3$
جواب: $-176 + i48$

سوال 14.95: $f(z) = iz^3 + 2z^2 - \frac{i}{z}$, $z_0 = -i$
جواب: $-i8$

سوال 14.96: اگر z_0 پر $f(z)$ قابل تفرق ہو تب ثابت کریں کہ z_0 پر $f(z)$ استمراری ہو گا۔

سوال 14.97: ثابت کریں کہ $f(z) = z$ حقیقی $x = z$ کسی بھی z پر قابل تفرق نہیں ہے۔
جواب: مساوات 14.37 میں حاصل تقسیم $\frac{\Delta x}{\Delta z}$ ہے جو $\Delta x = 0$ کی صورت میں 0 جبکہ $\Delta y = 0$ کی صورت میں 1 ہو گا لہذا Δz پر اس کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 14.98: ثابت کریں کہ $f(z) = |z|^2$ صرف $z = 0$ پر قابل تفرق ہے۔ اشارہ۔ درج ذیل تعلق استعمال کریں۔

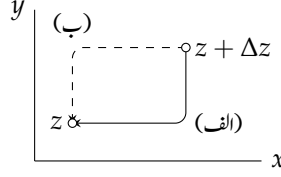
$$|z + \Delta z|^2 = (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z})$$

14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات

ہم درج ذیل مخلوط تفاعل کی تجلیلی ہونے کا بنیادی معیار دریافت کرتے ہیں۔

$$(14.40) \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ہم دکھائیں گے کہ اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تجلیلی ہو تب u اور v پورے D میں (نیچے دیے گئے) کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کریں گے۔ اسی طرح اگر u اور v استمراری ہوں اور ان کے ایک درجی جزوی تفرق پورے D میں کوشی ریمان مساوات 14.44 کو مطمئن کرتے ہوں تب D میں $f(z)$ تجلیلی ہو گا۔ تفصیل در ذیل ہے۔



شکل 14.10: راہ (مساوات 14.41)

فرض کریں کہ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ کسی اختیاری مقررہ نقطہ $z = x + iy$ پر قابل تفرق اور اس نقطہ کے کسی پڑوس میں معین اور استمراری ہے۔ تب تفرق کی تعریف کے تحت

$$(14.41) \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

نقطہ z پر موجود ہو گا۔ یہاں z کی پڑوس میں Δz کسی بھی راہ پر 0 تک پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔ ہم $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ لیتے ہیں۔ راہ-الف پر چلتے ہوئے ہم پہلے $\Delta y \rightarrow 0$ اور بعد میں $\Delta x \rightarrow 0$ کرتے ہیں (شکل 14.10)۔ جب $\Delta y \rightarrow 0$ ہو جائے تب $\Delta z = \Delta x$ ہو گا لہذا مساوات 14.40 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ہو گا۔ چونکہ $f'(z)$ موجود ہے لہذا آخری دونوں حد بھی موجود ہوں گے۔ یہ x کے لحاظ سے u اور v کے جزوی تفرق ہیں۔ یوں $f'(z)$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.42) \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

اسی طرح اگر ہم شکل 14.10 میں راہ-ب پر چلیں تب پہلے $\Delta x \rightarrow 0$ اور بعد میں $\Delta y \rightarrow 0$ ہو گا۔ یوں $\Delta z = i\Delta y$ کرنے کے بعد

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}$$

یعنی

$$(14.43) \quad f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

ہو گا جہاں $\frac{1}{i} = -i$ لکھا گیا ہے۔ چونکہ $f'(z)$ موجود ہے لہذا مساوات 14.42 اور مساوات 14.43 کے دائیں ہاتھ چار جزوی تفرق موجود ہوں گے۔

اب جیسے ہم نے فرض کیا، اگر $f'(z)$ موجود ہو، تب اس کو مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں ان دونوں مساوات کے حقیقی اجزاء آپس میں برابر ہوں گے اور اسی طرح ان کے خیالی اجزاء بھی آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$(14.44) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

مساوات 14.44 میں دیے گئے بنیادی تعلق کو کوٹشی ریمان تفرق مساوات⁴² کہتے ہیں۔

ہم ان نتائج کو ایک مسئلہ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 14.1: کوٹشی ریمان مساوات

فرض کریں کہ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ نقطہ $z = x + iy$ پر قابل تفرق اور اس نقطہ کے کسی پڑوس میں معین اور استمراری ہے۔ تب اس نقطہ پر u اور v کے ایک درجی جزوی تفرق موجود ہوں گے جو تفرق کوٹشی ریمان مساوات 14.44 کو مطمئن کریں گے۔

نتیجتاً اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب یہ جزوی تفرق موجود ہوں گے اور مساوات 14.44 کو D کے تمام نقطوں پر مطمئن کریں گے۔

مثال 14.12: کوٹشی ریمان مساوات

تفاعل $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ تمام z کے لئے قابل تفرق ہے اور $f'(z) = 2z$ ہے۔ ہمارے پاس $u = x^2 - y^2$ اور $v = 2xy$ ہے۔ یوں

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

□

ہیں جو کوٹشی ریمان مساوات 14.44 کو تمام x اور y پر مطمئن کرتے ہیں۔

⁴²Cauchy Riemann differential equations

⁴³جرمن ریاضی دان برنہارڈ ریمان [1826-1866] نے مخلوط تجزیہ کی جیومیٹری کی ترکیب پر کام کیا۔ انہوں نے ریمان جیومیٹری پر بھی کام کیا جو آئن سٹائن کی نظریہ اضافت کی ریاضیاتی بنیاد بنی۔

کوشی ریمان بنیادی حیثیت رکھتے ہیں چونکہ کسی تفاعل کی تحلیلی ہونے کے لئے یہ نا صرف لازم بلکہ کافی ہیں۔ اس کو درج ذیل مسئلہ میں بہتر در پر بیان کیا گیا ہے۔ (اس مسئلہ میں پیش کیے گئے شرائط تحلیلی ہونے کے لئے کافی ضرور لیکن لازم نہیں ہیں۔ اس سے کم امتناعی شرائط ممکن ہیں جنہیں اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔)

مسئلہ 14.2: کوشی ریمان مساوات

اگر حقیقی متغیرات x اور y کے حقیقی قیمت استمراری تفاعل $u(x, y)$ اور $v(x, y)$ کے ایک درجی جزوی تفرق موجود ہوں جو کسی دائرہ کار D میں کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کرتے ہوں، تب مخلوط تفاعل $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ D میں $(x, y) : N$ کوئی مقررہ نقطہ ہے۔ چونکہ D دائرہ کار ہے لہذا اس میں NQ کا پڑوس بھی شامل ہو گا۔ اس پڑوس میں ہم نقطہ $Q : (x + \Delta x, y + \Delta y)$ یوں چنتے ہیں کہ سیدھا قطع NQ بھی D میں پایا جاتا ہو۔ چونکہ ہم نے تفاعل کو استمراری تصور کیا ہے لہذا ہم مسئلہ 10.3 (صفحہ 748) استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) &= \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{M_1} \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) &= \Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} + \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{M_2} \end{aligned} \quad (14.45)$$

حاصل ہو گا جہاں جزوی تفرق قطع NQ پر موزوں نقاط M_1 اور M_2 پر حاصل کیے جاتے ہیں۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$$

یوں مساوات 14.45 سے

$$\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{M_1} + i \left[\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} + \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{M_2} \right]$$

حاصل ہوتا ہے۔ کوشی ریمان مساوات استعمال کرتے ہوئے ہم $\frac{\partial u}{\partial y}$ کی جگہ $-\frac{\partial v}{\partial x}$ لکھتے ہیں اور $\frac{\partial v}{\partial y}$ کی جگہ $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھ کر

$$\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} + i\Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_2} + i \left[\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} + i\Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} \right]$$

حاصل کرتے ہیں۔ اس کو $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ کی استعمال سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Delta f = \Delta z \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} + i\Delta y \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} \right\} \\ + i \left[\Delta z \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} + \Delta x \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} \right\} \right]$$

ہم دونوں اطراف کو Δz سے تقسیم کر کے $\Delta z \rightarrow 0$ کرتے ہیں۔ چونکہ دائیں ہاتھ جزوی تفرق استمراری ہیں لہذا یہ نقطہ (x, y) پر حاصل $\frac{\partial u}{\partial x}$ اور $\frac{\partial v}{\partial x}$ تک پہنچنے کی کوشش کریں گے۔ مزید چونکہ $\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1$ اور $\left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1$ ہیں لہذا دائیں ہاتھ کا حد موجود ہو گا جو Δz کی صفر تک پہنچنے کی راہ پر منحصر نہیں ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 14.42 کی دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ اس کا مطلب ہوا کہ D میں $f(z)$ تحلیلی ہے لہذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

یہ مسئلے عملی طور پر انتہائی اہم ہیں چونکہ انہیں استعمال کرتے ہوئے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا دیا گیا مخلوط تقابل تحلیلی ہے یا نہیں۔

مثال 14.13: کوشی ریمان مساوات

فرض کریں کہ $f(z) = z$ حقیقی x ہے۔ یوں

$$u = x, \quad v = 0$$

ہو گا جو مساوات 14.44 کو مطمئن نہیں کرتے ہیں لہذا $f(z)$ غیر تحلیلی ہے۔ اسی طرح خیالی $f(z) = iz$ بھی غیر تحلیلی ہے۔ دیگر سادہ غیر تحلیلی تقابل کو سوالات میں شامل کیا گیا ہے۔

□

کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ حاصل کرنے کی خاطر ہم مخلوط عدد کی قطبی روپ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r} \\ v_y = v_r r_y + v_\theta \theta_y = v_r \sin \theta + v_\theta \frac{\cos \theta}{r}$$

ہو گا لہذا $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.46) \quad u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r} = v_r \sin \theta + v_\theta \frac{\cos \theta}{r}$$

اسی طرح $u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y$ اور $v_x = v_r r_x + v_\theta \theta_x$ سے $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ کی روپ

$$(14.47) \quad u_r \sin \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r} = v_\theta \frac{\sin \theta}{r} - v_r \cos \theta$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 14.46 اور مساوات 14.47 سے $\sin \theta$ اور $\cos \theta$ حذف کرتے ہوئے کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ

$$(14.48) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.14: کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ

مان لیں کہ $f(z) = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ ہے۔ یوں

$$u = r^3 \cos 3\theta, \quad v = r^3 \sin 3\theta$$

ہو گا لہذا

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= 3r^2 \cos 3\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 3r^2 \sin 3\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

ہوں گے۔ اس طرح مساوات 14.48 کی مدد سے ثابت ہوا کہ $f(z) = z^3$ مساوائے $z = 0$ کے تمام z پر تحلیلی ہے۔ (ہم جانتے ہیں کہ z^3 نقطہ $z = 0$ پر بھی تحلیلی ہے۔) □

ہم اب مخلوط تجزیہ اور دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کے مابین ایک عملاً اہم تعلق دریافت کرتے ہیں۔ ہم بعد کے ایک باب میں ثابت کریں گے کہ تحلیلی تفاعل $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ کی تفرق بھی تحلیلی ہو گا۔ اس اہم نتیجہ کے تحت $u(x, y)$ اور $v(x, y)$ کے ہر درجہ کی استمراری جزوی تفرق موجود ہوں گے۔ بالخصوص ان کی دو درجہ مدغم تفرق برابر ہوں گے:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

کوشی ریمان مساوات کا تفرق لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{aligned}$$

ملتا ہے جن سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 14.3: مساوات لاپلاس
مخلوط تفاعل

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

جو دائرہ کار D میں تحلیلی ہے کا حقیقی جزو اور خیالی جزو D میں مساوات لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

کے حل ہیں اور ان کے استمراری دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔

جیسے ہم بعد کی ابواب میں دیکھیں گے، مخلوط تجزیہ کی انجینئری حساب میں اتنی اہمیت کی یہ ایک وجہ ہے۔

مساوات لاپلاس کا ایسا حل جس کے استمراری دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں ہارمونی تفاعل⁴⁴ (حصہ 13.11) کہلاتا ہے۔ یوں تحلیلی تفاعل کا حقیقی جزو اور خیالی جزو ہارمونی تفاعل ہوں گے۔

اگر دو عدد ہارمونی تفاعل $u(x, y)$ اور $v(x, y)$ دائرہ کار D میں مساوات کوشی ریمان کو مطمئن کرتے ہوں یعنی اگر تفاعل $u(x, y)$ اور $v(x, y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی تفاعل $f(z)$ کے حقیقی اور خیالی اجزاء ہوں، تب $v(x, y)$ کو $u(x, y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل⁴⁵ کہتے ہیں۔

کسی بھی ہارمونی تفاعل کی جوڑی دار ہارمونی تفاعل کو مساوات کوشی ریمان سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس عمل کو درج ذیل مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

harmonic function⁴⁴
conjugate harmonic function⁴⁵

مثال 14.15: جوڑی دار ہارمونی تفاعل
تفاعل $u = x^2 - y^2$ ہارمونی ہے۔ اس طرح $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ اور $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ ہیں لہذا u کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو گا۔

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

بائیں ہاتھ کی مساوات کا y کے ساتھ مکمل لینے سے

$$v = 2xy + h(x)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $h(x)$ صرف متغیر x کے تابع ہے۔ اس کو دائیں ہاتھ کی مساوات میں پر کرتے ہوئے
 $h'(x) = c$ یعنی $h = c$ مستقل ملتا ہے۔ یوں $x^2 - y^2$ کا عمومی جوڑی دار ہارمونی تفاعل $2xy + c$ ہے جہاں c مستقل ہے، اور عمومی تحلیلی تفاعل جس کا حقیقی جزو $x^2 - y^2$ ہو درج ذیل ہو گا۔

$$x^2 - y^2 + i(2xy + c) = z^2 + ic$$

□

سوالات

سوال 14.99 تا سوال 14.104 میں مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 کی مدد سے تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.99: $f(z) = az + b$
جواب: a

سوال 14.100: $f(z) = z^2$
جواب: $2z$

سوال 14.101: $f(z) = \frac{1}{z}$
جواب: $-\frac{1}{z^2}$

سوال 14.102: $f(z) = \frac{1}{1-z}$
جواب: $\frac{1}{(1-z)^2}$

سوال 14.103: $f(z) = z + \frac{1}{z}$
جواب: $1 - \frac{1}{z^2}$

سوال 14.104: $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$
جواب: $\frac{1+z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}$

سوال 14.105: مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 کی طرح درج ذیل بھی درست ہیں۔ انہیں حاصل کریں۔

(14.49) $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

سوال 14.106 تا سوال 14.108 میں تصدیق کریں کہ دیے گئے تفاعل کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 14.106: $u = x, \quad v = y$

سوال 14.107: $u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$

سوال 14.108: $u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3$

سوال 14.109 تا سوال 14.117 میں معلوم کریں کہ آیا دیا گیا تفاعل تحلیل ہے؟

سوال 14.109: $f(z) = z^3 + z$
جواب: تحلیل ہے

سوال 14.110: حقیقی z
جواب: چونکہ غیر قابل تفرق ہے لہذا غیر تحلیل ہے۔

سوال 14.111: $f(z) = \bar{z}$
جواب: غیر تحلیل ہے

سوال 14.112: $f(z) = |z|^2$
جواب: غیر تحلیل ہے

سوال 14.113: $f(z) = \frac{1}{1-z}$

جواب: تحلیلی ہے ماسوائے نقطہ $z = 1$ پر

سوال 14.114: $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$

جواب: تحلیلی ہے

سوال 14.115: $f(z) = e^x \cos y$

جواب: غیر تحلیلی ہے

سوال 14.116: $f(z) = \frac{1}{z^2}$

جواب: تحلیلی ہے ماسوائے نقطہ $z = 0$ پر

سوال 14.117: $f(z) = z$ دلیل

جواب: غیر تحلیلی

سوال 14.118: مساوات 14.48 حاصل کرنے کے لئے درکار تمام قدم دکھائیں۔

سوال 14.119: مساوات 14.48 استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $f(z) = z^4$ تحلیلی ہے۔

سوال 14.120: مساوات 14.48 استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $z \neq 0$ تحلیلی ہے۔

سوال 14.121 تا سوال 14.126 میں تصدیق کریں کہ دیے گئے تفاعل ہارمونی ہیں۔ ان کا مطابقتی تحلیلی تفاعل حاصل کریں۔

سوال 14.121: $u = x$

جواب: $f(z) = x + iy = z$

سوال 14.122: $u = xy$

جواب: $f(z) = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2) = -i\frac{z^2}{2}$

سوال 14.123: $v = xy$

جواب: $\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + ixy = \frac{z^2}{2}$

سوال 14.124: $u = \sin x \cosh y$
 جواب: $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

سوال 14.125: $v = -\sin x \sinh y$
 جواب: $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

سوال 14.126: $u = \frac{x}{x^2+y^2}$
 جواب: $f(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

سوال 14.127: کس صورت میں $u = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ky^3$ ہارمونی ہو گا؟
 جواب: $u = ax^3 - 3kx^2y - 3axy^2 + ky^3$ ہے لہذا $b = -3k$ اور $c = -3a$ ہونا لازم ہے۔

سوال 14.128: کس صورت میں $e^{\alpha x} \cos \beta y$ ہارمونی ہو گا؟

سوال 14.129: اگر u کا جوڑی دار ہارمونی v ہو تب ثابت کریں کہ $v - u$ کا جوڑی دار ہارمونی ہو گا۔

سوال 14.130: $\cos \alpha x \cosh y$ کب ہارمونی ہو گا؟

سوال 14.131: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں $|f(z)| = c$ مستقل ہو، تب دکھائیں کریں کہ $f(z)$ مستقل ہے۔

سوال 14.132: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں $f'(z) = 0$ حقیقی z ہو تب دکھائیں کہ f مستقل ہے۔

سوال 14.133: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں ہر جگہ $f'(z) = 0$ ہو تب دکھائیں کہ $f(z)$ مستقل ہے۔

14.6 ناطق تفاعل۔ جذر

اس باب کے باقی حصوں میں اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل مثلاً طاقی تفاعل، قوت نمائی، لوگار تھم، تکونیاتی تفاعل، وغیرہ پر غور کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ ان تفاعل کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ حقیقی قیمت کی غیر تابع متغیرات کے لئے یہ عین جانی پہچانی حقیقی تفاعل کی صورت اختیار کریں۔ چند مخلوط تفاعل دلچسپ خصوصیات رکھتے ہیں جو حقیقی غیر تابع متغیرہ کی صورت میں ظاہر نہیں ہوتی ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ ذیل تفصیل کو غور سے پڑھیں چونکہ عملی استعمال میں ان بنیادی تفاعل کی ضرورت ہوگی۔ مزید ان تفاعل کی تفصیلی معلومات ہمیں عمومی غور و فکر میں مدد دے گی۔

ان میں سے چند تفاعل پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہوں گے۔ ایسے تفاعل کو سالم تفاعل⁴⁶ کہتے ہیں۔

طاقی تفاعل

$$(14.50) \quad w = z^n \quad n = 0, 1, \dots$$

پوری مخلوط سطح پر تحلیلی ہیں لہذا یہ سالم تفاعل ہیں۔ یہی درج ذیل صورت کی تفاعل کے لئے بھی درست ہے

$$(14.51) \quad w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n \quad (c_n \neq 0)$$

جہاں c_0, \dots, c_n (مخلوط یا حقیقی) مستقل ہیں۔ ایسا تفاعل کثیر رکنی یا سالم ناطق تفاعل کہلاتا ہے جہاں n کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔ کثیر رکنی کا مطالعہ کلاسیکی الجبرا کا بنیادی موضوع ہے۔

دو کثیر رکنی $p(z)$ اور $q(z)$ کا حاصل تقسیم

$$(14.52) \quad z = \frac{p(z)}{q(z)}$$

(کسری) ناطق تفاعل⁴⁷ کہلاتا ہے۔ یہ تفاعل ان تمام z پر تحلیلی ہوگا جہاں $q(z)$ صفر نہ ہو؛ یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ $p(z)$ اور $q(z)$ کے مشترکہ جزو ضربی حذف شدہ ہیں۔ ناطق تفاعل کی بالخصوص سادہ صورت

$$(14.53) \quad \frac{c}{(z - z_0)^m}$$

entire function⁴⁶
rational function⁴⁷

جہاں c اور z_0 مخلوط اعداد ہیں جبکہ m مثبت عدد صحیح ہے کو جزوی کسر⁴⁸ کہتے ہیں۔ ریاضی میں اس کا ثبوت موجود ہے کہ ہر ناظم تقاعلی کو ایک کثیر رکنی اور محدود تعداد کی جزوی کسر کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

اگر $z = w^n$ ($n = 1, 2, \dots$) ہو تب w کی ہر ایک قیمت کا ایک مطابقتی z قیمت ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی $z \neq 0$ کے مطابقتی n منفرد w قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ ایسی ہر ایک قیمت کو z کی n ویں جذر کہتے ہیں جسے

$$(14.54) \quad w = \sqrt[n]{z}$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں یہ علامت کثیر قیمتی یعنی n قیمتیں ہے جبکہ حقیقی علم الاحصاء میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ $\sqrt[n]{z}$ کی n قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$w = R(\cos \phi + i \sin \phi) \quad \text{اور} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

لیتے ہیں۔ یوں کلیہ ڈی موئے ور مساوات 14.24 استعمال کرتے ہوئے

$$z = w^n = R^n(\cos n\phi + i \sin n\phi) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

حاصل ہو گا جس کے دونوں اطراف کی حتمی قیمتیں آپس میں برابر پر کرتے ہوئے

$$(14.55) \quad R^n = r \implies R = \sqrt[n]{r}$$

ماتا ہے جہاں جذر حقیقی مثبت لہذا منفرد ہو گا۔ اسی طرح دونوں اطراف کے دلیل آپس میں پر کرتے ہوئے

$$n\phi = \theta + 2k\pi \implies \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

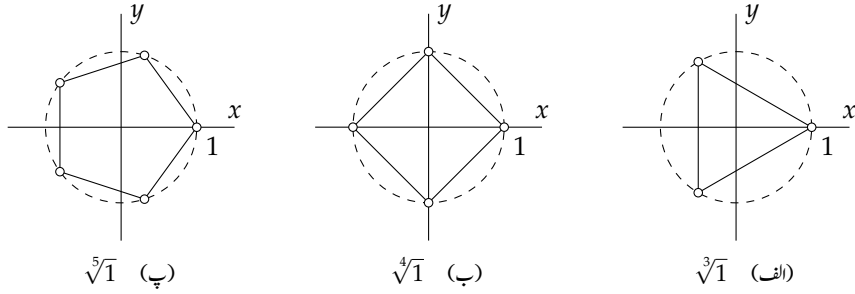
ماتا ہے جہاں k عدد صحیح ہے۔ یوں $z \neq 0$ لیتے ہوئے $\sqrt[n]{z}$ کے درج ذیل n عدد منفرد قیمتیں ہوں گی۔

$$(14.56) \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

یہ قیمتیں n اطراف کی منظم کثیر الاضلاع بناتے ہوئے رداس $\sqrt[n]{r}$ کی دائرہ، جس کا مرکز مبدا ہو، پر پائے جاتے ہیں (شکل 14.11)۔

دلیل z کی صدر قیمت (حصہ 14.2) اور مساوات 14.56 میں $k = 0$ لیتے ہوئے $\sqrt[n]{z}$ کی حاصل قیمت کو $w = \sqrt[n]{z}$ کی صدر قیمت⁴⁹ کہتے ہیں۔

partial fraction⁴⁸
principal value⁴⁹



شکل 14.11: مخلوط جذر

مثال 14.16: جذر المربع
 $w = \sqrt{z}$ کی درج ذیل دو قیمتیں ہیں

$$z_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$z_2 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right] = -z_1$$

جو مبدا کے لحاظ سے تشاکلی نقطوں پر ہیں یعنی

$$\sqrt{i4} = \mp 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \mp (\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

□

سوال 14.134: جذر الکعب

اگر z مثبت حقیقی ہو تب $w = \sqrt[3]{z}$ کے جذر حقیقی قیمت $\sqrt[3]{r}$ اور درج ذیل جوڑی دار مخلوط قیمتیں ہوں گی۔

$$\sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{r} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{r} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

مثلاً $\sqrt[3]{1} = 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوں گے (شکل 14.134-الف)۔ ظاہر ہے کہ یہ مساوات $w^3 - 1 = 0$ کی جذر ہیں۔

مثال 14.17: اکائی کی n ویں جذر مساوات 14.56 سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

اگر $k = 1$ کا مطابقتی جذر w ہو تب $\sqrt[n]{1}$ کے n جذر کو $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ لکھا جاسکتا ہے جو مبداء پر اکائی رداس کے دائرے پر n اطراف کی منظم کثیر الاضلاع بناتے ہیں جس کی ایک نوک نقطہ 1 پر ہے۔ ان n قیمتوں میں سے ہر ایک کو 1 کی n ویں جذر کہتے ہیں۔ مثلاً $\sqrt[4]{1}$ کی قیمتیں $1, i, -1, -i$ ہیں (شکل 14.11-ب)۔ شکل 14.11-پ میں $\sqrt[5]{1}$ دکھائے گئے ہیں۔

اگر کسی اختیاری مخلوط عدد z کا کوئی n واں جذر w_1 ہو تب درج ذیل $\sqrt[n]{z}$ کی n قیمتیں ہوں گی

$$w_1, w_1\omega, w_1\omega^2, \dots, w_1\omega^{n-1}$$

چونکہ w_1 کو ω^k سے ضرب دینا w_1 کی زاویہ میں $\frac{2k\pi}{n}$ اضافہ کے مترادف ہے۔ □

سوالات

سوال 14.135 تا سوال 14.146 میں تمام جذر تلاش کریں۔ ان جذروں کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

سوال 14.135: \sqrt{i}
جواب: $\pm \frac{1}{2}(1+i)$

سوال 14.136: $\sqrt{-i}$
جواب: $\pm \frac{1}{2}(1-i)$

سوال 14.137: $\sqrt{-9}$
جواب: $\pm i3$

سوال 14.138: $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$
جواب: $\pm \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$

سوال 14.139: $\sqrt[3]{-1}$
جواب: $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

سوال 14.140: $\sqrt[3]{i}$
جواب: $-i, \mp \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

سوال 14.141: $\sqrt[3]{-i}$
جواب: $i, \mp \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

سوال 14.142: $\sqrt[3]{1+i}$
جواب: $1.08 + i0.29, -0.29 - i1.08, -0.79 + i0.79,$

سوال 14.143: $\sqrt[3]{1-i}$
جواب: $1.08 - i0.29, -0.29 + i1.08, -0.79 - i0.79,$

سوال 14.144: $\sqrt[4]{-1}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

سوال 14.145: $\sqrt[5]{-1}$
جواب: $-1, -\cos \frac{2\pi}{5} \mp i \sin \frac{2\pi}{5}, -\cos \frac{4\pi}{5} \mp i \sin \frac{4\pi}{5}$

سوال 14.146: $\sqrt[6]{-1}$
جواب: $\mp i, \mp \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \mp \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

سوال 14.147 تا سوال 14.149 میں دی گئی مساوات کو حل کریں۔

سوال 14.147: $z^3 = 8$
جواب: $2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}$

سوال 14.148: $z^4 + 5z^2 = 32$
جواب: $2, -2, i3, -i3$

سوال 14.149: $z^6 + 7z^3 = 8$
جواب: $1, -2, 1 \mp i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 14.150: اکائی کے n جذر کا مجموعہ حاصل کریں۔ (الف) $n = 3$ لیں۔ (ب) $n = 4$ لیں۔
جواب: 0

سوال 14.151: جذر المربع

درج ذیل تعلق ثابت کریں جہاں $y < 0$ کی صورت میں علامت -1 اور $y > 0$ کی صورت میں علامت 1 ہے جبکہ تمام مثبت قیمتوں کے جذر مثبت علامت کے ساتھ لئے گئے ہیں۔

$$\sqrt{z} = \mp \left[\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + (y \text{ علامت}) i \sqrt{\frac{|z|-x}{2}} \right] \quad z = x + iy$$

اشارہ۔ $\sqrt{z} = w = u + iv$ لے کر حقیقی اور خیالی اجزاء سے دو عدد حقیقی مساوات حاصل کریں۔ u^2 اور v^2 کو x اور y کی صورت میں لکھیں۔

سوال 14.152 تا سوال 14.154 میں سوال 14.151 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے جذر حاصل کریں۔

سوال 14.152: $\sqrt{i4}$
جواب: $\pm \sqrt{2}(1 + i)$

سوال 14.153: $\sqrt{4 + i3}$
جواب: $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i)$

سوال 14.154: $\sqrt{-8 + i6}$
جواب: $-3, \mp(1 + i3)$

سوال 14.155 تا سوال 14.158 کو حل کریں۔ سوال 14.151 کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال 14.155: $z^2 - 3z + 3 - i = 0$
جواب: $2 + i, 1 - i$

سوال 14.156: $z^2 + z + 1 - i = 0$
جواب: $i, -1 - i$

سوال 14.157: $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$
جواب: $2 - i, 2 + i2$

سوال 14.158: $z^4 - 3(1 + i2)z^2 = 8 - i6$
جواب: $\mp(1 + i), \mp(2 + i)$

سوال 14.159: درج ذیل سے $z = x + iy$ کی ایک عدد مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔
 $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 4, \quad xy(x^2 - y^2) = 1$
 جواب: $z^4 = 4(1 + i), z = \sqrt[8]{32}(\cos \beta + i \sin \beta), \quad \beta = \frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}$

سوال 14.160: $z^4 + 4$ کو حقیقی عددی سروالے دو درجی اجزاء کا حاصل ضرب لکھیں۔

سوال 14.161: $z^4 + 1$ کو حقیقی عددی سروالے دو درجی اجزاء کا حاصل ضرب لکھیں۔
 جواب: $(z^2 - z\sqrt{2} + 1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1)$

سوال 14.162: ایک منظم کثیر الاضلاع p کے n عدد اطراف اکائی دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ p کے کسی ایک کونے سے باقی $n - 1$ کونوں تک سیدھے فاصلوں کا مجموعہ دریافت کریں۔

14.7 قوت نمائی تفاعل

حقیقی قوت نمائی تفاعل e^x کی دو خواص

$$(14.57) \quad (e^x)' = e^x$$

$$(14.58) \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$$

ہیں جبکہ اس کی مکمل تسلسل درج ذیل ہے۔

$$(14.59) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

مخلوط $z = x + iy$ کی قوت نمائی تفاعل جسے e^z سے ظاہر کیا جاتا ہے کی تعریف حقیقی تفاعل e^x ، $\cos y$ اور $\sin y$ کی مدد سے پیش کی جاتی ہے یعنی:

$$(14.60) \quad e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

یہ تعریف ذیل حقائق سے اخذ کی جاسکتی ہے۔ حقیقی $z = x$ کی صورت میں $e^z = e^x$ ہو گا۔ کوشی ریمان مساوات کے تحت e^z تمام z کے لئے تخلیلی ہے۔ مساوات 14.42 کی مدد سے

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

یعنی

$$(14.61) \quad (e^z)' = e^z$$

حاصل ہوتا ہے۔ مزید $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ لے کر ضمیمہ ب میں مساوات 6. ب استعمال کرتے ہوئے

$$(14.62) \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات 14.58 کی طرح ہے۔ بالخصوص جب $z_1 = x$ اور $z_2 = iy$ ہوں تب

$$(14.63) \quad e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

ہو گا۔ ہم بعد کی باب میں دیکھیں گے کہ مخلوط تحلیلی تفاعل کی ٹیلر تسلسل عین حقیقی تفاعل کی ٹیلر تسلسل کی طرح حاصل کی جاتی ہیں۔ یوں ہم دیکھ پائیں گے کہ مساوات 14.59 میں x کی جگہ z پر کرنے سے e^z کی مکملارن تسلسل⁵⁰ حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 14.60 سے ہم یولر مساوات

$$(14.64) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں ظاہر ہے کہ مخلوط عدد $z = x + iy$ کی قطبی روپ (حصہ 14.2) کو اب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.65) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r^{i\theta}$$

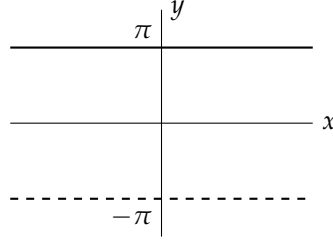
مزید مساوات 14.64 سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$$

ہو گا یعنی خالص خیالی طاقت کے لئے قوت نمائی تفاعل کی حتمی قیمت اکائی کے برابر ہے۔ اس اہم نتیجہ کو یاد رکھنا مفید ثابت ہو گا۔ یوں مساوات 14.60 کے تحت درج ذیل ہوں گے۔

$$(14.66) \quad |e^z| = |e^x|, \quad e^z \text{ دلیل } = y$$

⁵⁰ یہ تسلسل e^z کی تعریف کے طور پر استعمال کی جاسکتی ہے۔

شکل 14.12: قوت نمائی تفاعل e^z کا بنیادی خط

چونکہ $\cos 2\pi = 1$ اور $\sin 2\pi = 0$ ہیں لہذا مساوات 14.64 سے

$$(14.67) \quad e^{i2\pi} = 1$$

ملتا ہے۔ اسی طرح درج ذیل بھی حاصل ہوتے ہیں۔

$$(14.68) \quad e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

مساوات 14.68 اور مساوات 14.62 سے

$$(14.69) \quad e^{z+i2\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z$$

ملتا ہے جس کے تحت e^z دوری ہے جس کا خیالی دوری عرصہ 2π ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(14.70) \quad e^{z \mp i2n\pi} = e^z, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

دوری ہونے کی بنا $w = e^z$ کی جتنی بھی ممکنہ قیمتیں ہیں وہ تمام درج ذیل پٹی (شکل 14.12)

$$(14.71) \quad -\pi < y \leq \pi$$

میں موجود ہیں۔ اس لامتناہی پٹی کو e^z کا بنیادی خطہ کہتے ہیں۔

مساوات 14.62 سے $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ ملتا ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

$$(14.72) \quad e^z \neq 0 \quad \text{تمام } z$$

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارتم (شکل 1. ب-ب)

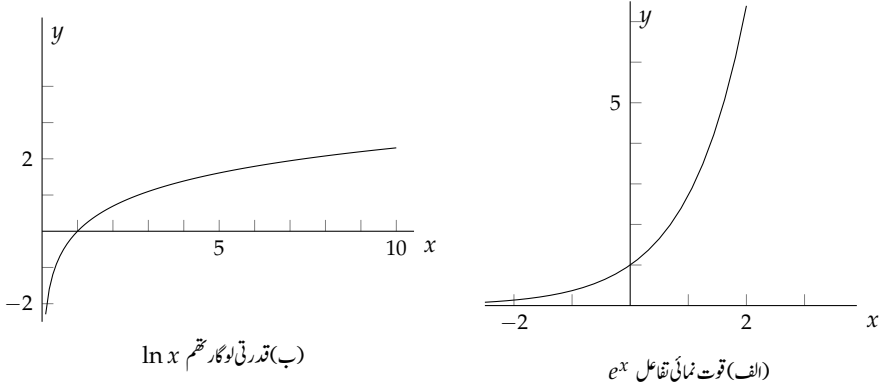
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

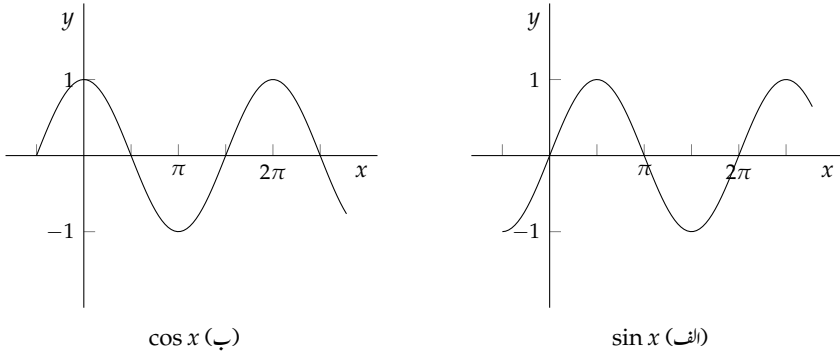
اساس دس کا لوگارتم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

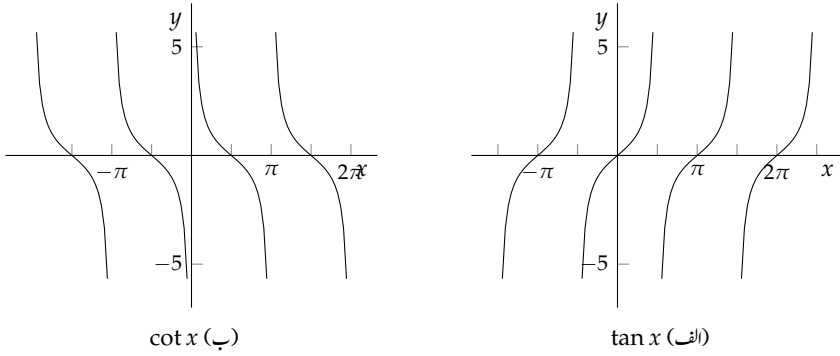
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

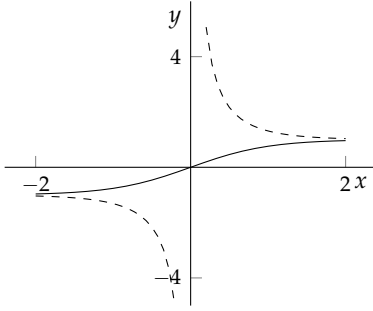
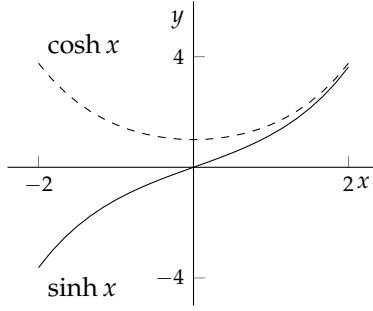
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. ب)$$

مساوات 24. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. ب)$$

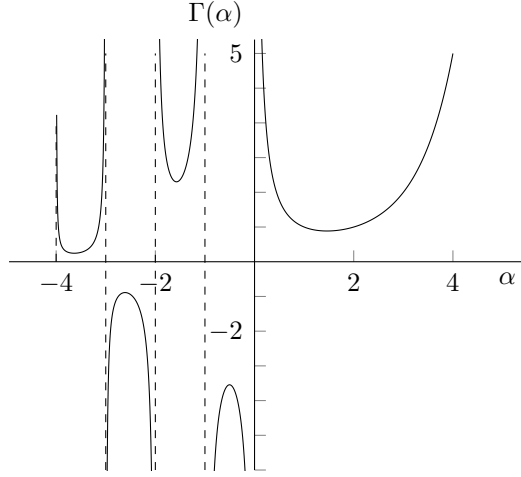
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. ب)$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

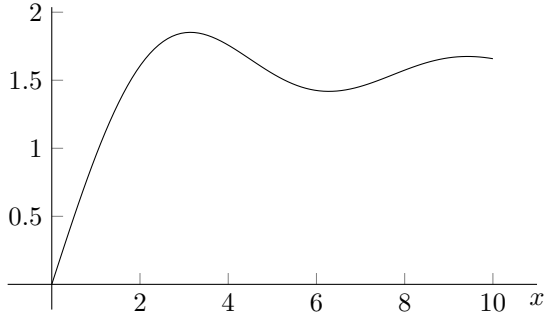
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

