

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفیی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479 . . . . .	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483 . . . . .	7	خطی الجبرا: سمتیات
483 . . . . .	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485 . . . . .	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491 . . . . .	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499 . . . . .	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505 . . . . .	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518 . . . . .	7.6	اندرونی ضرب فضا
520 . . . . .	7.7	سمتی ضرب
522 . . . . .	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533 . . . . .	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541 . . . . .	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542 . . . . .	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552 . . . . .	8.2	قابلی ضرب
558 . . . . .	8.2.1	تبدیلی محل
570 . . . . .	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582 . . . . .	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590 . . . . .	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604 . . . . .	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610 . . . . .	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613 . . . . .	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629 . . . . .	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644 . . . . .	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661 . . . . .	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662 . . . . .	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672 . . . . .	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680 . . . . .	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687 . . . . .	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700 . . . . .	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711 . . . . .	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711 . . . . .	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713 . . . . .	10.2	سمتی علم الاحصاء
720 . . . . .	10.3	منحنی
726 . . . . .	10.4	لمبائی قوس
733 . . . . .	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738 . . . . .	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781 . . . . .	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
787 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
796 . . . . .	11.3	دوہرا تکمیل
810 . . . . .	11.4	دوہرا تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820 . . . . .	11.5	سطحیں
825 . . . . .	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837 . . . . .	11.7	سطحی تکمیل
845 . . . . .	11.8	تہرا تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850 . . . . .	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861 . . . . .	11.10	مسئلہ سٹوکس
866 . . . . .	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869 . . . . .	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883 . . . . .	12	فوریئر تسلسل
884 . . . . .	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889 . . . . .	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902 . . . . .	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907 . . . . .	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916 . . . . .	12.5	نصف حلقہ الساع
923 . . . . .	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931 . . . . .	12.7	جبری ارتعاش
936 . . . . .	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940 . . . . .	12.9	فوریئر تکمیل
953 . . . . .	13	جزوی تفرقی مساوات
953 . . . . .	13.1	بنیادی تصورات
958 . . . . .	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960 . . . . .	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973 . . . . .	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979 . . . . .	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987 . . . . .	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993 . . . . .	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996 . . . . .	13.8 مستطیل جھلی
1006 . . . . .	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010 . . . . .	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018 . . . . .	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024 . . . . .	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030 . . . . .	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037 . . . . .	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038 . . . . .	14.1 مخلوط اعداد
1047 . . . . .	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054 . . . . .	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059 . . . . .	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067 . . . . .	14.5 کوئی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078 . . . . .	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084 . . . . .	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089 . . . . .	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095 . . . . .	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103 . . . . .	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104 . . . . .	15.1 نقشہ کشی
1116 . . . . .	15.2 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1125 . . . . .	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129 . . . . .	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138 . . . . .	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149 . . . . .	15.6 ریمان سطحیں
1157 . . . . .	16 مخلوط کمالات
1157 . . . . .	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168 . . . . .	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172 . . . . .	16.3 کوئی کاملاً مکمل
1184 . . . . .	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189 . . . . .	16.5 کوئی کاملاً مکمل
1194 . . . . .	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201 . . . . .	17 ترتیب اور تسلسل
1201 . . . . .	17.1 ترتیب
1208 . . . . .	17.2 تسلسل
1213 . . . . .	17.3 کوئی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220 . . . . .	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل	17.4
1225 . . . . .	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں	17.5
1236 . . . . .	تسلسل پر اعمال	17.6
1243 . . . . .	18 حلقہ تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل	
1243 . . . . .	18.1 حلقہ تسلسل	
1256 . . . . .	18.2 حلقہ تسلسل کی روپ میں تفاعل	
1263 . . . . .	18.3 ٹیلر تسلسل	
1268 . . . . .	18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل	
1274 . . . . .	18.5 حلقہ تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب	
1281 . . . . .	18.6 یکساں استرار	
1294 . . . . .	18.7 لوگوں تسلسل	
1303 . . . . .	18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت	
1317 . . . . .	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ	
1317 . . . . .	19.1 بقیہ	
1324 . . . . .	19.2 مسئلہ بقیہ	
1329 . . . . .	19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ	
1337 . . . . .	19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام	
1345 . . . . .	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی تودہ	
1346 . . . . .	20.1 ساکن برقی سکون	
1352 . . . . .	20.2 دوبعدی بہا و سیال	
1361 . . . . .	20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص	
1366 . . . . .	20.4 پوسوں کلیہ مکمل	
1373 . . . . .	21 اعدادی تجزیہ	
1374 . . . . .	21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر	
1376 . . . . .	21.2 دہرانے سے مساوات کا حل	
1388 . . . . .	21.3 متناہی فرق	
1394 . . . . .	21.4 باہمی تحریف	
1403 . . . . .	21.5 لچکدار منحنیات	
1410 . . . . .	21.6 اعدادی مکمل اور تفرق	
1422 . . . . .	21.7 متقارب اتساع	
1435 . . . . .	22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب	
1435 . . . . .	22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقاط، معکوس قالب	
1445 . . . . .	22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ	



1453	22.3	خطی مساوات کا نظام: بدخونی
1457	22.4	ترکیب کثر مرئع
1463	22.5	قالب کے امتیازی اقدار کی شمول
1472	22.6	امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ

1477	23	اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات
1477	23.1	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1488	23.2	دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1495	23.3	اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1498	23.3.1	مسئلہ ڈرشلے
1501	23.3.2	بدلتی رخ خفی ترکیب
1508	23.4	مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ - غیر منظم سرحد
1515	23.5	اعدادی تراکیب برائے قطع مکانی مساوات
1524	23.6	اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات

1529	24	احتمال اور شماریات
1529	24.1	حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد
1531	24.2	نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترتیب
1541	24.3	نمونہ اوسط اور نمونی تغیریت
1546	24.4	بلا منصوبہ تجربات، انجام، توقعات
1553	24.5	احتمال
1562	24.6	مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات
1568	24.7	بلا منصوبہ متغیرات - غیر مسلسل اور استمراری تقسیم
1576	24.8	تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت
1584	24.9	ثنائی، پوئسن، اور بیش ہندسی تقسیم
1592	24.10	عمومی تقسیم
1602	24.11	ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں
1614	24.12	بلا منصوبہ نمونہ بندی - بلا منصوبہ اعداد
1617	24.13	مقدار معلوم کا اندازہ لگانا
1622	24.14	وقفہ اختتام

1623	ا	اضافی ثبوت
1627	ب	منفید معلومات
1627	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات
1637	ج	جدول

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم ایک مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ واحد ایک بلا منصوبہ متغیر، مثلاً  $X$ ، وابستہ کرنا ہو گا۔ حصہ 24.7 سے ہم جانتے ہیں کہ اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم  $F(x) = P(X \leq x)$  اس تقسیم کو مکمل طور پر تعین کرتا ہے، چونکہ ہر وقفہ  $a < X \leq b$  کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم دو مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ دو بلا منصوبہ متغیرات، مثلاً  $X$  اور  $Y$ ، وابستہ کرنا ہو گا۔ مثال کے طور پر فولاد کی راک ویل سختی کو  $X$  اور اس میں کاربن کی مقدار کو  $Y$  ظاہر کر سکتے ہیں۔ ہر ایک تجربہ اعداد کی جوڑی  $X = x$ ،  $Y = y$  دے گی جس کو مختصراً  $(x, y)$  لکھا اور  $XY$  مستوی پر بطور نقطہ دکھایا جاسکتا ہے۔ ہم اب ایک مستطیل  $a_1 < X \leq b_1$ ،  $a_2 < Y \leq b_2$  پر غور کرتے ہیں (شکل 24.14)۔ اگر ایسے ہر ایک مستطیل کے لئے ہمیں مطابقتی احتمال

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2)$$

معلوم ہو تب ہم کہتے ہیں کہ دو بعدی بلا منصوبہ متغیر  $(X, Y)$  یا بلا منصوبہ متغیرات  $X$  اور  $Y$  کا دو بعدی تفاعل احتمال<sup>120</sup> ہمیں معلوم ہے۔ تفاعل

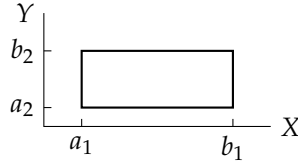
$$(24.81) \quad F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

کو اس تقسیم یا  $(X, Y)$  کا تقسیمی تفاعل<sup>121</sup> کہتے ہیں۔ چونکہ (سوال 24.145)

$$(24.82) \quad \begin{aligned} P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) \\ = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 24.81 تقسیم کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

two-dimensional random variable<sup>119</sup>  
two-dimensional probability distribution<sup>120</sup>  
distribution function<sup>121</sup>



شکل 24.14: دوبعدی تقسیم کا تصور

## غیر مسلسل دوبعدی تقسیمیں

اگر  $(X, Y)$  درج ذیل خواص رکھتا ہو تب متغیر  $(X, Y)$  اور اس کا مطابقتی تقسیم غیر مسلسل کہلائے گا۔

$X, Y$  متناہی تعداد یا قابل شمار لامتناہی تعداد کی جوڑی قیمتیں  $(x, y)$  اختیار کر سکتا ہے جن کے مطابقتی احتمال مثبت ہوں گے۔ ہر ایسا دائرہ کار جس میں ایسی کوئی جوڑی نہ پائی جاتی ہو کا احتمال 0 ہو گا<sup>122</sup>۔

فرض کریں کہ  $x_i, y_j$  ایسی کوئی جوڑی ہے اور  $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$  ہے (جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ  $p_{ij}$  کسی مخصوص  $i, j$  کی جوڑیوں کے لئے صفر بھی ہو سکتا ہے)۔ تفاعل

$$(24.83) \quad f(x, y) = \begin{cases} p_{ij} & x = x_i, y = y_j \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

کو  $(X, Y)$  کا تفاعل احتمال کہتے ہیں؛ یہاں غیر تابع طور پر  $i = 1, 2, \dots$  اور  $j = 1, 2, \dots$  ہیں۔ مساوات 24.42 کا مماثل

$$(24.84) \quad F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

ہے اور مساوات 24.38 کی جگہ درج ذیل شرط ہو گا۔

$$(24.85) \quad \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$$

<sup>122</sup> دھیان رہے کہ پہلی خاصیت سے یہ نہیں کہا جاسکتا ہے

مثال کے طور پر اگر ہم ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے اچھا کر

$X$  = ایک روپیہ کی خط کی تعداد

$Y$  = پانچ روپیہ کی خط کی تعداد

پر غور کریں تب  $X$  اور  $Y$  کی قیمت 0 یا 1 ہو سکتی ہے اور تفاعل احتمال

$$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = \frac{1}{4} \text{ (ان کے علاوہ) } f(x,y) = 0 \text{ ہو گا۔}$$

استمراری دو بعدی تقسیمیں

$(X, Y)$  اور اس کا تقسیم اس صورت استمراری کہلاتے ہیں جب مطابقتی تفاعل تقسیم کو دوہرا مکمل

$$(24.86) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x^*, y^*) dx^* dy^*$$

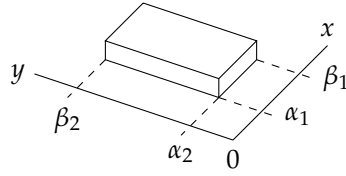
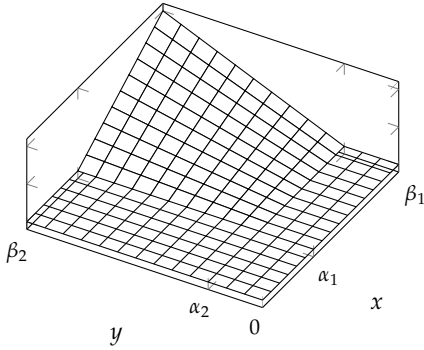
کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں  $f(x, y)$  معین، غیر منفی اور پورے مستوی میں محدود ہے ماسوائے متناہی تعداد کے استمراری قابل تفرق مخنثیات پر۔  $f(x, y)$  کو تقسیم کی کثافت احتمال کہتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(24.87) \quad P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy$$

مثال کے طور پر (شکل 24.15)

$$(24.88) \quad f(x, y) = \frac{1}{k} \text{ مستطیل } R \text{ میں ہو تب } f(x, y) = 0 \text{ ورنہ}$$

مستطیل  $R$  میں یکساں تقسیم کو ظاہر کرتا ہے؛ یہاں  $k$  مستطیل کا رقبہ یعنی  $k = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)$  ہے۔ اس تقسیم کو شکل 24.16 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 24.15: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل احتمال کثافت

شکل 24.16: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل تقسیم

### دو بعدی غیر مسلسل تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

فرض کریں کہ بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر  $(X, Y)$  کا تفاعل احتمال  $f(x, y)$  ہے۔ اگر  $X = x$  ہو، جبکہ  $Y$  جس میں ہمیں دلچسپی نہیں ہے کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہو، تب تفاعل احتمال  $P(X = x, Y \text{ اختیاری})$  کو  $f_1(x)$  لکھا جاسکتا ہے جو  $x$  کا تابع تفاعل ہے۔ یوں

$$(24.89) \quad f_1(x) = P(X = x, Y \text{ اختیاری}) = \sum_y f(x, y)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں اس  $x$  کے لئے ہم  $f(x, y)$  کی تمام غیر صفر قیمتوں کا مجموعہ لیا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ  $f_1(x)$  ایک بلا منصوبہ تقسیمی احتمال کا تفاعل احتمال ہے۔ اس تقسیم کو دیے گئے دو بعدی تقسیم کے لحاظ ہے  $X$  کا حاشیہ تقسیم<sup>123</sup> کہا جاتا ہے۔ اس کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$(24.90) \quad F_1(x) = P(X \leq x, Y \text{ اختیاری}) = \sum_{x^* \leq x} f_1(x^*)$$

اسی طرح تفاعل احتمال

$$(24.91) \quad f_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y = y) = \sum_x f(x, y)$$

جدول 24.7: تاش سے ملکہ اور بادشاہ کا حصول

$x \backslash y$	0	1	2	3	$f_1(x)$
0	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
1	$\frac{300}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	0	$\frac{432}{2197}$
2	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	0	0	$\frac{36}{2197}$
3	$\frac{1}{2197}$	0	0	0	$\frac{1}{2197}$
$f_2(y)$	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{726}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	

دیے گئے دو بعدی تقسیم کا  $Y$  کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم تعین کرتا ہے۔ مساوات 24.91 میں ہم  $y$  کے مطابقتی غیر صفر  $f(x, y)$  کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اس تقسیم کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$(24.92) \quad F_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y \leq y) = \sum_{y^* \leq y} f_2(y^*)$$

ظاہر ہے کہ بلا منصوبہ متغیر  $(X, Y)$  کے دونوں حاشیہ تقسیم غیر مسلسل ہیں۔

جدول 24.7 میں ان کی مثال دی گئی ہے جہاں تاش کے پتوں سے تین پتے نکال کر واپس رکھے جاتے ہیں۔ ملکہ کے حصول کو  $X$  جبکہ بادشاہ کے حصول کو  $Y$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تاش کے کل 52 پتے ہوتے ہیں جن میں 4 ملکہ اور 4 بادشاہ کے پتے ہوتے ہیں۔ یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ حاصل کرنے کا احتمال  $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$  ہو گا۔ یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ یا بادشاہ حاصل کرنے کا احتمال  $\frac{2}{13}$  ہو گا۔ اس طرح اس بلا منصوبہ تجربہ کا مطابقتی تفاعل احتمال

$$f(x, y) = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!} \left(\frac{1}{13}\right)^x \left(\frac{2}{13}\right)^y \left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} \quad (x+y \leq 3)$$

ہو گا اور ان کے علاوہ  $f(x, y) = 0$  ہو گا۔ جدول 24.7 میں  $f(x, y)$ ،  $f_1(x)$  اور  $f_2(y)$  دیے گئے ہیں۔

دو بعدی استمراری تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

اسی طرح کثافت  $f(x, y)$  والے استمراری متغیر  $X, Y$  کے لئے ہم

$$(X \leq x, Y \text{ اختیاری}) \quad \text{یا} \quad (X \leq x, -\infty < Y < \infty)$$



پر غور کر سکتے ہیں جس کا مطابقتی احتمال

$$F_1(x) = P(X \leq x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y) dy \right) dx^*$$

ہو گا جس میں

$$(24.93) \quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

لکھتے ہوئے

$$(24.94) \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x^*) dx^*$$

لکھا جاسکتا ہے۔  $f_1(x)$  اور  $F_1(x)$  کو بالترتیب دیے گئے استمراری تقسیم کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم  $X$  کی کثافت اور تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ دیے گئے دو بعدی استمراری تقسیم کے لحاظ سے تفاعل

$$(24.95) \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

کو حاشیہ تقسیم  $Y$  کی کثافت اور

$$(24.96) \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y^*) dy^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y^*) dx dy^*$$

کو حاشیہ تقسیم  $Y$  کا تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ استمراری تقسیم کے دونوں حاشیہ تقسیم استمراری ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کی تابعیت اور غیر تابعیت

دو بعدی  $(X, Y)$  تقسیم جس کا تفاعل تقسیم  $F(x, y)$  ہو کے بلا منصوبہ متغیرات  $X$  اور  $Y$  اس صورت غیر تابع کہلاتے ہیں جب تمام  $(x, y)$  کے لئے

$$(24.97) \quad F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

ہو ورنہ انہیں تابع کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ  $X$  اور  $Y$  دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہوں۔ تب  $X$  اور  $Y$  اس صورت غیر تابع ہوں گے جب ان کے مطابقتی تفاعل احتمال یا کثافتیں  $f_1(x)$  اور  $f_2(y)$  درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں (سوال 24.160)۔

$$(24.98) \quad f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

مثال کے طور پر جدول 24.7 میں متغیرات تابع ہیں۔ ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے ایک بار اچھا کر متغیرات

پانچ روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد  $Y =$ ، ایک روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد  $X =$

0 یا 1 قیمت اختیار کر سکتے ہیں اور یہ متغیرات غیر تابع ہیں۔

تابعیت اور غیر تابعیت کی تصور کو  $n$  بعدی تقسیم  $X_1, \dots, X_n$  جس کا تفاعل احتمال

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

ہو کے  $n$  بلا منصوبہ متغیرات تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ اگر تمام  $x_1, \dots, x_n$  کے لئے

$$(24.99) \quad F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)$$

ہو جہاں  $X_j$  کے حاشیہ تقسیم کا تقسیمی تفاعل  $F_j(x_j)$  ہو، یعنی

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j, X_k \text{ اختیاری}, k \neq j)$$

تب یہ بلا منصوبہ متغیرات غیر تابع کہلاتے ہیں ورنہ ان متغیرات کو تابع کہتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل

فرض کریں کہ بلا منصوبہ متغیر  $(X, Y)$  کا تفاعل احتمال یا کثافت  $f(x, y)$  اور تقسیمی تفاعل  $F(x, y)$  ہیں اور فرض کریں کہ  $g(x, y)$  غیر مستقل استمراری تفاعل ہے جو تمام  $(x, y)$  پر معین ہے۔ تب  $Z = g(X, Y)$  بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔ مثال کے طور پر ہم دو پانسہ پھینکتے ہیں۔ پہلے پانسہ عدد  $X$  اور دوسرا پانسہ عدد  $Y$  دیتا ہے۔ عدد  $Z = X + Y$  ان دونوں کا مجموعہ ہے (شکل 24.8)۔

اگر  $n$   $(X_1, \dots, X_n)$  بعدی متغیر ہو اور تمام  $(x_1, \dots, x_n)$  پر  $g(x_1, \dots, x_n)$  معین غیر مستقل استمراری تفاعل ہو تب  $Z = g(X_1, \dots, X_n)$  بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔

غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر  $(X, Y)$  کی صورت میں ان تمام  $f(x, y)$  کا مجموعہ لیتے ہوئے جن کے لئے  $g(x, y)$  کی قیمت زیر غور  $y$  کے برابر ہو، ہم  $Z = g(X, Y)$  کا تفاعل احتمال  $f(z)$  حاصل کر سکتے ہیں، یعنی:

$$(24.100) \quad f(z) = P(Z = z) = \sum_{g(x,y)=z} \sum f(x, y)$$

$Z$  کا تقسیمی تفاعل

$$(24.101) \quad F(z) = P(Z \leq z) = \sum_{g(x,y) \leq z} \sum f(x, y)$$

ہے جہاں ہم ان  $f(x, y)$  کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے  $g(x, y) \leq z$  ہو۔

بلا منصوبہ استمراری متغیر  $(X, Y)$  کے لئے اسی طرح

$$(24.102) \quad F(z) = P(Z \leq z) = \int \int_{g(x,y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

ہوگا جہاں ہر  $z$  کے لئے ہم  $xy$  مستوی میں خطہ  $g(x, y) \leq z$  پر مکمل حاصل کرتے ہیں۔

$g(X, Y)$  کی حسابی توقع۔ مجموعہ اوسط اور تغیریت

درج ذیل عدد کو  $g(X, Y)$  کی حسابی توقع<sup>124</sup> یا مختصراً توقع کہتے ہیں۔

$$(24.103) \quad E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y) & [(X, Y) \text{ غیر مسلسل}] \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy & [(X, Y) \text{ استمراری}] \end{cases}$$

یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ دوہرا مجموعہ حتمی مرتکز ہے اور  $xy$  مستوی پر  $|g(x, y)| f(x, y)$  کا مکمل موجود ہے۔ درج ذیل کلیہ کو سوال 24.99 کی طرز پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$(24.104) \quad E(ag(X, Y) + bh(X, Y)) = aE(g(X, Y)) + bE(h(X, Y))$$

اس کے ایک مخصوص صورت  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$  ہے اور الگراجی مانوڈ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.16: (مجموعہ اوسط)

بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعے کی اوسط (توقع) ان کے انفرادی اوسط کا مجموعہ ہو گا، یعنی:

$$(24.105) \quad E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

مزید درج ذیل با آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 24.17: اوسطوں کا حاصل ضرب

غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے حاصل ضرب کی اوسط ان کے انفرادی اوسط کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا، یعنی:

$$(24.106) \quad E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n)$$

ثبوت: فرض کریں کہ  $X$  اور  $Y$  بلا منصوبہ متغیرات ہیں (جہاں دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہیں)۔ تب  $E(XY) = E(X)E(Y)$  ہو گا۔ غیر مسلسل صورت میں

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x, y) = \sum_x xf_1(x) \sum_y yf_2(y) = E(X)E(Y)$$

لکھا جاسکتا ہے اور استمراری صورت میں بھی ثبوت اسی طرح کا ہے۔ اس نتیجہ کو  $n$  غیر تابع متغیرات تک وسعت دینے سے مساوات 24.106 ثابت ہوتی ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب تغیریت کے مجموعہ پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ  $Z = X + Y$  ہے اور  $Z$  کی اوسط  $\mu$  اور تغیریت  $\sigma^2$  ہے۔ سوال 24.97 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sigma^2 = E([Z - \mu]^2) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

مساوات 24.104 سے دائیں ہاتھ پہلے جزو کو

$$E(Z^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کو مسئلہ 24.17 کی مدد سے

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں  $\sigma^2$  کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

سوال 24.97 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ پہلی لکیر پر دیا گیا تعلق  $X$  اور  $Y$  کی تغیریت کا مجموعہ ہے جنہیں ہم بالترتیب  $\sigma_1^2$  اور  $\sigma_2^2$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ دوسری لکیر پر مقدار

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (24.107)$$

کو  $X$  اور  $Y$  کی باہمی تغیریت<sup>125</sup> کہتے ہیں۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY} \quad (24.108)$$

اگر  $X$  اور  $Y$  غیر تابع ہوں تب  $E(XY) = E(X)E(Y)$  لہذا  $\sigma_{XY} = 0$  اور

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (24.109)$$

ہو گا۔ دو سے زائد متغیرات تک وسعت دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.18: (تغیرات کا مجموعہ)

غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعہ کی تغیریت ان متغیرات کے انفرادی تغیریت کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

## سوالات

سوال 24.145: مساوات 24.82 کو ثابت کریں۔

جواب: شکل 24.17 میں  $(X, Y)$  احتمال  $F(b_1, b_2)$  کے ساتھ  $A$ ،  $B$ ،  $C$  یا  $D$  سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال  $F(a_1, b_2)$  کے ساتھ  $A$  یا  $C$  سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال  $F(b_1, a_2)$  کے

$Y = b_2$	A	B
$Y = a_2$	C	D
	$X = a_1$	$X = b_1$

شکل 24.17: شکل برائے سوال 24.145

ساتھ C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال  $F(a_1, a_2)$  کے ساتھ C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے لہذا B سے قیمت حاصل کرنے کا احتمال مساوات 24.82 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

سوال 24.146: شکل 24.15 اور شکل 24.16 میں دیے تقسیم کے حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔

سوال 24.147: فرض کریں کہ  $8 \leq x \leq 12$  اور  $0 \leq y \leq 2$  میں  $f(x, y) = k$  جبکہ باقی جگہوں پر  $f = 0$ ،  $k = P(X \leq 11, 1 \leq Y \leq 1.5)$  اور  $P(9 \leq X \leq 12, Y \leq 1)$  تلاش کریں۔  
جواب:  $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{8}$

سوال 24.148: ایک کاغذ کی اوسط کمیت 10 g اور معیاری انحراف 0.05 g ہے۔ ایسی 10000 کاغذوں کی ڈھیر کی اوسط کمیت اور تغیریت کیا ہوگی؟

سوال 24.149: فرض کریں کہ  $x > 0$ ،  $y > 0$  اور  $x + y < 3$  میں  $f(x, y) = k$  جبکہ باقی جگہوں پر  $f = 0$  ہے۔  $k$  تلاش کریں۔  $f(x, y)$  ترسیم کریں۔  $P(X + Y \leq 1)$  اور  $P(Y > X)$  تلاش کریں۔  
جواب:  $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}$

سوال 24.150: ایک خالی ڈبے کی اوسط 2 kg اور معیاری انحراف 0.1 kg ہے۔ اس ڈبے میں مال کی اوسط 75 kg اور تغیریت 0.8 kg ہے۔ بھرے ڈبے کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.151: خطہ  $0 \leq x \leq 1$ ،  $0 \leq y \leq 1$  میں بلا منصوبہ متغیرات کی کثافتیں  $f(x, y) = x + y$  اور  $g(x, y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$  ہیں۔ دکھائیں کہ ان کی حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہیں۔

سوال 24.152: ایسی دو مختلف غیر مسلسل تقسیم کی مثال دیں جن کے حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہوں۔

سوال 24.153: چار گراریوں کو یوں یکجا کیا جاتا ہے کہ ان کے بیچ فاصلہ رہے۔ گراریوں کے بیچ باریک چادر کی ٹکلیا رکھ کر فاصل پیدا کیا جاتا ہے۔ گراری کی موٹائی کی اوسط 5.020 cm اور معیاری انحراف 0.003 cm ہے جبکہ ٹکلیا کی موٹائی کی اوسط 0.040 cm اور معیاری انحراف 0.002 cm ہے۔ بلا منصوبہ 4 گراریوں اور 3 ٹکلیوں سے بنائی گئی پوری گراری کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے۔  
جواب: تقریباً 20.200, 0.007

سوال 24.154: لوہے کی چادروں اور کاغذ کو تہہ در تہہ رکھ کر ٹرانسفارمر کا قالب بنایا جاتا ہے۔ اگر لوہے کی چادر کی موٹائی کی اوسط 0.5 mm اور معیاری انحراف 0.05 mm ہو اور کاغذ کی موٹائی کی اوسط 0.05 mm اور معیاری انحراف 0.02 mm ہو تب 50 لوہے کی چادروں اور 49 کاغذوں سے بنائے گئے قالب کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.155: خطہ  $x^2 + y^2 < 1$  میں  $(X, Y)$  کی کثافت  $f(x, y) = k$  ہے جبکہ اس خطہ کے باہر کثافت صفر ہے۔  $k$  تلاش کریں۔ حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔ احتمال  $P(X^2 + Y^2 < \frac{1}{2})$  تلاش کریں۔  
جواب:  $k = \frac{1}{\pi}$ ;  $f_1(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}$ ,  $f_2(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2}$ , 50 %

سوال 24.156: ایک پنیا اور سوراخ کے قطر بالترتیب  $X$  سنٹی میٹر اور  $Y$  سنٹی میٹر ہیں۔ فرض کریں کہ  $(X, Y)$  کی کثافت

$$f(x, y) = 2500 \quad \text{اگر} \quad 0.99 < x < 1.01, 1.00 < y < 1.02 \quad \text{ہو تب}$$

ہے ورنہ  $f = 0$  ہے۔ حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ منتخب کردہ پنیا 1.00 سنٹی میٹر کی سوراخ میں ٹھیک بیٹھے گا؟

سوال 24.157: خطہ  $x \geq 0, y \geq 0$  میں  $(X, Y)$  کی کثافت  $f(x, y) = e^{-(x+y)}$  ہے جبکہ باقی جگہوں پر  $f = 0$  ہے۔  $P(X > Y)$  تلاش کریں۔  
جواب: 50 %

سوال 24.158: سوال 24.157 میں حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔

سوال 24.159: ایک برقیاتی آلہ میں دو برقیاتی پرزے پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ پہلا پرزہ  $X$  مہینوں تک اور دوسرا پرزہ  $Y$  مہینوں تک کام کر سکتا ہے۔ فرض کریں کہ  $(X, Y)$  کی احتمال کشاف

$$f(x, y) = 0.01e^{-0.1(x+y)} \quad x > 0, y > 0$$

جبکہ اس کے علاوہ  $f = 0$  ہے۔ (الف) کیا  $X$  اور  $Y$  تابع ہیں؟ (ب) حاشیہ تقسیم کی کشاف تلاش کریں۔ (پ) پہلے پرزے کی زندگی 10 مہینے یا اس سے زیادہ ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟  
جواب: غیر تابع، 36.8%،  $f_1(x) = 0.1e^{-0.1x}, x > 0; f_2(y) = 0.1e^{-0.1y}, y > 0$

سوال 24.160: مساوات 24.98 سے منسلک فقرہ ثابت کریں۔

سوال 24.161: فرض کریں کہ  $(X, Y)$  کا تفاعل احتمال  $f(0, 1) = \frac{1}{8}$ ،  $f(0, 0) = f(1, 1) = \frac{1}{8}$  ہے۔ کیا  $X$  اور  $Y$  غیر تابع ہیں؟  
جواب: جی نہیں

سوال 24.162: مسئلہ 24.16 کو استعمال کرتے ہوئے ثنائی تقسیم کی اوسط  $\mu$  کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 24.163: مسئلہ 24.18 کی مدد سے ثنائی تقسیم کی تغیریت  $\sigma^2$  کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 24.164: مسئلہ 24.16 کی مدد سے بیش ہندسی تقسیم کی اوسط کا کلیہ حاصل کریں۔ کیا مسئلہ 24.18 کی مدد سے اس تقسیم کی تغیریت کا کلیہ حاصل کیا جاسکتا ہے؟

## 24.12 بلا منصوبہ نمونہ بندی۔ بلا منصوبہ اعداد

حصہ 24.3 تا حصہ 24.11 میں نظریہ احتمال پر غور کیا گیا۔ اس باب کے باقی حصوں میں شماریات پر غور کیا جائے گا۔ آبادی کے حسابی نمونے بنانے میں نظریہ شماریات مدد دیتا ہے۔ شماریاتی تراکیب، جن پر غور کیا جائے گا، نظریہ اور حقیقی مشاہدوں کے مابین تعلقات پیش کرتے ہیں۔ یوں نمونہ بندی کے ذریعہ آبادی کے بارے میں نتائج حاصل کیے جاسکتے ہیں (شماریاتی رائے زنی، حصہ 24.1)۔



اب تک اتنا جاننا کافی تھا کہ آبادی کے نمونہ سے مراد آبادی سے اشیاء کا انتخاب ہے (حصہ 24.1 میں مثالیں) لیکن اب ہمیں اس تصور کی تعریف باریک بینی سے دینی ہو گی۔ حقیقتاً کسی بھی آبادی سے نمونہ بندی کے ذریعہ معنی خیز نتائج حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ نمونہ بلا منصوبہ انتخاب<sup>126</sup> ہو، یعنی آبادی میں ہر چیز کا منتخب ہو کر نمونے میں شامل ہونے کے احتمال کی قیمت معلوم ہو۔ یہ شرط ہر صورت (کم از کم تخمینی طور پر) پوری کرنا لازم ہے ورنہ حاصل نتائج مکمل طور پر بے معنی اور غلط ہو سکتے ہیں۔

لاتناہی نمونی فضا کی صورت میں نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی، یعنی، کسی بلا منصوبہ تجربہ کو  $n$  مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے حاصل  $n$  بلا منصوبہ نمونی قیمتیں ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوں گی۔ عمومی آبادی سے حاصل نمونوں کے لئے یہ یقینی طور پر درست ہے۔ تنناہی نمونی فضا کی صورت میں اگر ہم واپس رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی؛ اگر ہم واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب، آبادی کی جسامت کے لحاظ سے نمونے کی جسامت چھوٹی رکھتے ہوئے (مثلاً 1000 کی آبادی سے 5 یا 10 کا نمونہ لیتے ہوئے)، حاصل نمونی قیمتیں عملاً غیر تابع ہوں گی۔ اس کے برعکس اگر ہم بغیر واپس رکھتے ہوئے تنناہی آبادی سے بڑے نمونے لیں تب تابعیت کا بہت زیادہ اثر پایا جائے گا۔

بلا منصوبہ انتخاب کی شرط پر پورا اترنا آسان نہیں ہے۔ کئی وجوہات نمونہ بندی کے عمل پر اثر انداز ہو سکتی ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ایک خریدار نے 80 کی ڈھیر سے 10 کا انتخاب کر کے ڈھیر خریدنے یا نہ خریدنے کا فیصلہ کرنا ہو تب وہ طبعی طور پر ان 10 چیزوں کا انتخاب کس طرح کرے گا کہ  $\binom{80}{10}$  ممکنات میں سے ہر ایک کے منتخب ہونے کا احتمال ایک جیسا ہو؟

اس مسئلے کی حل کے لئے مختلف تراکیب تشکیل دی گئی ہیں۔ ہم اب ایک ایسے طریقہ کار پر غور کرتے ہیں جس کو عموماً استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم اس ڈھیر کے اجزاء کو 1 تا 80 کے شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ضمیمہ ج میں بلا منصوبہ اعداد کی جدول استعمال کرتے ہوئے 10 اجزاء چنتے ہیں۔ بلا منصوبہ اعداد کے جدول کو ہم یوں استعمال کرتے ہیں کہ ہم پہلے 0 سے 99 کوئی صف بلا منصوبہ منتخب کرتے ہیں۔ بلا منصوبہ صف منتخب کرنے کی خاطر ہم ایک سکے کو 7 مرتبہ اچھال کر 7 ثنائی ہندسوں پر مبنی عدد حاصل کرتے ہیں جس میں خط کو 1 اور شیر کو 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ ثنائی عدد 0 تا 127 کو ظاہر کر سکتا ہے۔ 99 سے بڑا عدد حاصل ہونے کی صورت میں عدد کو رد کرتے ہوئے سکے دوبارہ 7 مرتبہ اچھالا جاتا ہے حتیٰ کہ ہمیں 0 تا 99 کوئی عدد حاصل ہو جو صف دے گا۔ اس کے بعد اسی طرح ہم بلا منصوبہ 0 تا 9 قطار منتخب کرتے ہیں۔ بلا منصوبہ قطار منتخب کرنے کی خاطر سکے 4 مرتبہ اچھال کر

4 ثنائی ہندسوں کا عدد حاصل کیا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ صف کے لئے  $(= 26)$  0011010 اور قطار کے لئے  $(= 7)$  0111 حاصل ہو تب جدول کے 26 ویں صف اور 7 ویں قطار سے 44973 حاصل کرتے ہوئے اس کے پہلے دو ہندسوں پر مبنی عدد 44 لیا جاتا ہے جبکہ باقی ہندسوں کو رد کیا جاتا ہے۔ اسی قطر میں نیچے چلتے ہوئے اعداد کے پہلے دو ہندسے لیتے ہوئے درج ذیل اعداد حاصل کیے جاتے ہیں۔

44 44 83 91 55 ...

ہم 80 سے بڑے اعداد رد کرتے ہیں اور کسی بھی عدد کو ایک سے زیادہ مرتبہ شامل نہیں کرتے ہیں۔ یوں درکار بلا منصوبہ اعداد کا درج ذیل سلسلہ حاصل ہوتا ہے جس کے تحت اجزاء کو منتخب کیا جائے گا۔

44 55 53 03 52 61 67 78 39 54

زیادہ اجزاء کے نمونہ کے لئے یہ طریقہ کار موزوں نہیں ہے۔ اسی لئے ایسے اعداد جن کی خاصیت بلا منصوبہ اعداد کی طرح ہو، پیدا کرنے کے کئی طریقے بنائے گئے ہیں جنہیں کمپیوٹر کی زبان میں پیدا کار بلا منصوبہ اعداد<sup>127</sup> کہتے ہیں۔

## سوالات

سوال 24.165: فرض کریں کہ مذکورہ بالا مثال میں ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول کے صف 83 اور قطار 2 سے شروع کرتے ہوئے اوپر رخ چلیں۔ تب کون سے اجزاء نمونہ میں شامل کیے جائیں گے؟  
جواب: 38, 69, 02, 49, 23, 52, 73, 29, 09, 05

سوال 24.166: ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول استعمال کرتے ہوئے 250 کی ڈھیر سے 20 اجزاء بلا منصوبہ منتخب کریں۔

سوال 24.167: منصفانہ پانسہ کو بلا منصوبہ انتخاب کے لئے کس طرح استعمال کیا جاسکتا ہے؟

سوال 24.168: ایک بلا منصوبہ متغیر  $Y$  پر غور کریں جس کی خطہ  $0 < y < 1$  میں کثافت یکساں  $f(y) = 1$  جبکہ خطہ سے باہر  $f = 0$  ہے۔ ہم بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے باآسانی  $Y$  (یعنی  $Y$  کی قیمتوں)

کا نقل اتار<sup>128</sup> سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر 2 اعشاریہ تک کے 20 قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کے جدول کے کسی بھی (بلا منصوبہ) قطار اور صف سے شروع کرتے ہوئے نیچے چلتے ہوئے، پانچ ہندسوں پر مشتمل دیے اعداد کے صرف پہلے دو ہندسوں کو لیتے ہوئے ان کے بائیں جانب اعشاریہ پر کرتے ہوئے اعداد حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم ایک سے زیادہ مرتبہ آنے والے اعداد کو بھی شامل کرتے ہیں۔ فرض کریں ہم صف 36 اور قطار 3 سے شروع کرتے ہیں۔ دکھائیں کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔ ان کا تعددی نقطہ ترسیم کھینچیں۔

0.89	0.40	0.67	0.86	0.87	0.86	0.06	0.20	0.38	0.12
0.68	0.50	0.53	0.10	0.08	0.90	0.19	0.85	0.53	0.98

سوال 24.169: بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے کسی بھی بلا منصوبہ استمراری متغیر  $X$  کی نقل اتاری جاسکتی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم  $X$  کی تفاعل تقسیم کو ترسیم کرتے ہیں۔ سوال 24.168 کی طرز پر بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے متغیر  $Y$  کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے انہیں  $y$  محدود پر ترسیم کریں اور ان کے مطابقتی  $X$  قیمتیں پڑھیں۔ سوال 24.168 کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے عمومی بلا منصوبہ متغیر  $X$ ، جس کی اوسط 0 اور تغیرات 1 ہو، کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کریں۔ جماعتی نشان -2، -1، 0، 1 اور 2 لیتے ہوئے  $x$  کی ان 20 نمونی قیمتوں کا مستطیلی ترسیم کھینچیں۔

جواب: جماعتی تعدد 1، 5، 7، 6، 1 ہیں۔

سوال 24.170: سوال 24.169 کا طریقہ کار غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔ اگر دو منصفانہ پانسہ پھینک کر حاصل اعداد کا مجموعہ  $X$  ہو تب اس طریقہ کو کس طرح استعمال کیا جائے گا؟

## 24.13 مقدار معلوم کا اندازہ لگانا

تقسیمات میں پائی جانے والے مقدار مثلاً ثنائی تقسیم میں  $p$ ، عمومی تقسیم میں  $\mu$  اور  $\sigma$ ، کو مقدار معلوم<sup>129</sup> کہتے ہیں۔

simulation<sup>128</sup>  
parameters<sup>129</sup>

ایک نقطہ پر مقدار معلوم کی اندازاً قیمت ایک عدد (حقیقی محور پر نقطہ) ہو گا جس کو دیے گئے نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے جو مقدار معلوم کی اصل قیمت کی تخمین ہو گی۔ وقفہ اندازہ<sup>130</sup> (یعنی وقفہ اعتماد<sup>131</sup>)، جس پر اگلے حصے میں بحث کی جائے گی، کو نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مقدار معلوم کی قیمت کا اندازہ لگانا ایک اہم مسئلہ ہے۔

آبادی کی اوسط  $\mu$  کا اندازہ لگانے کی خاطر ہم نمونے کی اوسط  $\bar{x}$  لے سکتے ہیں جس سے ہمیں  $\mu$  کا اندازہ  $\hat{\mu} = \bar{x}$  حاصل ہوتا ہے، یعنی

$$(24.110) \quad \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

جہاں نمونہ کی جسامت  $n$  ہے۔ اسی طرح آبادی کی تغیریت کا اندازہ  $\sigma^2$  در حقیقت مطابقتی نمونے کی تغیریت  $s^2$  ہو گی، یعنی:

$$(24.111) \quad \widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

ظاہر ہے کہ مساوات 24.110 اور مساوات 24.111 ان تقسیمات کی مقدار معلوم کی اندازاً قیمت دیتے ہیں جن میں  $\mu$  اور  $\sigma^2$  صریحاً پائے جاتے ہیں؛ عمومی تقسیم اور پوٹسن تقسیم ایسی تقسیمات ہیں۔ ثنائی تقسیم میں  $p = \frac{\mu}{n}$  (مساوات 24.60) ہے۔ اس صورت میں اگر  $z$  ویں کوشش میں وقوعہ  $A$  جس کا احتمال  $p$  ہے واقع ہو تب مساوات 24.110 میں  $x_j = 1$  ہو گا اور اگر اس کوشش میں  $A$  واقع نہ ہو تب  $x_j = 0$  ہو گا۔ اس طرح مساوات 24.110 سے  $p$  کا اندازہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(24.112) \quad \hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$$

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 24.110 ترکیب معیار اثر<sup>132</sup> کی ایک مخصوص صورت ہے۔ اس ترکیب میں جس مقدار معلوم کی اندازاً قیمت درکار ہو، اس کو تقسیم کی معیار اثر کی صورت میں لکھا جاتا ہے (حصہ 24.8)۔ حاصل کلیات میں ان معیار اثر کی جگہ نمونہ سے حاصل مطابقتی معیار اثر پر کرتے ہوئے درکار اندازے حاصل کیے جاتے ہیں۔ یہاں نمونہ  $x_1, \dots, x_n$  کا  $k$  وال معیار اثر درج ذیل ہے۔

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k$$

اندازے حاصل کرنے کی دوسری ترکیب کو زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب<sup>133</sup> کہتے ہیں۔ اس ترکیب کو سمجھنے

interval estimate<sup>130</sup>  
confidence interval<sup>131</sup>  
method of moments<sup>132</sup>  
maximum likelihood method<sup>133</sup>

کی خاطر ہم غیر مسلسل (یا استمراری) بلا منصوبہ متغیر  $X$  پر غور کرتے ہیں جس کا تفاعل احتمال واحد متغیر  $\theta$  پر منحصر ہے۔ ہم  $n$  غیر تابع قیمتوں  $x_1, \dots, x_n$  کا نمونہ لیتے ہیں۔ تب غیر مسلسل صورت میں  $n$  جسامت کے نمونہ میں بالکل یہی قیمتیں حاصل ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$(24.113) \quad l = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$$

استمراری صورت میں، چھوٹے چھوٹے وقفوں  $x_i \leq x \leq x_i + \Delta x$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) میں قیمتیں حاصل کرنے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$(24.114) \quad f(x_1)\Delta x f(x_2)\Delta x \cdots f(x_n)\Delta x = l(\Delta x)^n$$

چونکہ  $f(x_i)$  متغیر  $\theta$  کا تابع ہے لہذا تفاعل  $l$  متغیرات  $x_1, \dots, x_n$  اور  $\theta$  کا تابع ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں  $x_1, \dots, x_n$  دیے گئے ہیں اور یہ مقررہ قیمتیں ہیں۔ تب  $l$  متغیر  $\theta$  کا تابع ہو گا جس کو تفاعل امکان<sup>134</sup> کہتے ہیں۔ زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب کا بنیادی تصور بہت سادہ ہے۔ ہم نامعلوم قیمت  $\theta$  کے لئے وہ تخمینہ چنتے ہیں جس سے  $l$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہو۔ اگر تفاعل  $l$  متغیر  $\theta$  کا قابل تفرق تفاعل ہو تب (سرحد سے ہٹ کر)  $l$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے درج ذیل لازمی شرط ہے۔

$$(24.115) \quad \frac{\partial l}{\partial \theta} = 0$$

(ہم یہاں جزوی تفرق لکھتے ہیں چونکہ  $l$  متغیرات  $x_1, \dots, x_n$  کا بھی تابع ہے۔) مساوات 24.115 کا حل جو  $x_1, \dots, x_n$  کا تابع ہے  $\theta$  کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کہلاتا ہے۔ چونکہ  $f(x) \geq 0$  اور  $f(x)$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت عموماً مثبت ہوتی ہے اور  $\ln l$  ایک سر بڑھتا تفاعل ہے لہذا مساوات 24.115 کی جگہ درج ذیل بھی استعمال کیا جاسکتا ہے

$$(24.116) \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0$$

جس سے عموماً حساب میں آسانی پیدا ہوتی ہے۔

اگر  $X$  کی تقسیم میں  $r$  مقدار معلوم  $\theta_1, \dots, \theta_r$  پائے جاتے ہوں تب مساوات 24.115 کی جگہ  $r$  لازمی شرائط  $\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_r} = 0$  ہوں گے اور مساوات 24.116 کی جگہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(24.117) \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0$$

مثال 24.17: عمومی تقسیم

عمومی تقسیم کی صورت میں  $\mu$  اور  $\sigma$  کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔  
حل: مساوات 24.68 اور مساوات 24.113 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-h} \quad h = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

دونوں ہاتھ لوگار تھم لیتے ہیں۔

$$\ln l = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - h$$

مساوات 24.117 میں پہلی شرط  $\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = 0$  ہے جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = -\frac{\partial h}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \implies \sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0$$

جس کا حل  $\mu$  کا درکار اندازہ  $\hat{\mu}$  ہے، یعنی:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

مساوات 24.117 میں دوسری شرط  $\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = 0$  ہے جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

$\mu$  کی جگہ  $\hat{\mu}$  پر کرتے ہوئے  $\sigma^2$  کے لئے حل کر کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

دھیان رہے کہ یہ نتیجہ مساوات 24.111 سے مختلف ہے۔ ہم اندازوں کی عمدگی کی قواعد پر بحث نہیں کر سکتے ہیں  
لیکن اتنا جاننا ضروری ہے کہ چھوٹی  $n$  کے لئے مساوات 24.111 بہتر نتائج دیتی ہے۔  
□

## سوالات

سوال 24.171:  $x \geq 0$  کے لئے کثافت  $f(x) = \theta e^{-\theta x}$  اور  $x < 0$  کے لئے  $f(x) = 0$  ہے۔  $\theta$  کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔  
جواب:  $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_j} = \frac{1}{\bar{x}}$

سوال 24.172: سوال 24.171 میں اوسط  $\mu$  تلاش کر کے  $f(x)$  میں پر کریں۔  $\mu$  کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ وہی ہے جو سوال 24.171 کے  $\theta$  کے اندازے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سوال 24.173: معلوم تغیریت  $\sigma^2 = \sigma_0^2$  کی عمومی تقسیم کے  $\mu$  کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔  
جواب:  $\hat{\mu} = \bar{x}$

سوال 24.174:  $\mu = 0$  کی صورت میں عمومی تقسیم پر زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازے کی ترکیب لاگو کریں۔

سوال 24.175: (ہوٹسن تقسیم) زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازہ کی ترکیب کا اطلاق تقسیم پوٹسن پر کریں۔  
جواب:  $\hat{\mu} = \bar{x}$

سوال 24.176: (یکساں تقسیم) حصہ 24.8 میں دیے گئے یکساں تقسیم کی صورت میں دکھائیں کہ مقدار معلوم  $a$  اور  $b$  کو زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے پہلی جزوی تفرق کو صفر کے برابر پر نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت میں زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کس طرح لگایا جاسکتا ہے؟

سوال 24.177: (ثنائی تقسیم)  $p$  کے لئے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔  
جواب:  $n$  کوششوں میں کامیابی کی تعداد  $k$ ,  $\hat{p} = \frac{k}{n}$ ,  $l = p^k(1-p)^{n-k}$

سوال 24.178: وقوع  $A$  واقع ہونے تک کوششوں کی تعداد  $X$  ہے۔ دکھائیں کہ  $X$  کا تفاعل احتمال  $f(x) = pq^{x-1}$ ,  $x = 1, 2, \dots$  ہے جہاں واحد کوشش میں  $A$  واقع ہونے کا احتمال  $p$  ہے اور  $q = 1 - p$  ہے۔  $X$  کی واحد قیمت  $x$  کے مشاہدے میں  $p$  کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

سوال 24.179: سوال 24.178 میں نمونہ  $x_1, \dots, x_n$  سے  $p$  کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔  
جواب:  $\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$

سوال 24.180: سوال 24.177 کو وسعت دیتے ہیں۔ فرض کریں کہ  $n$  کوششوں کو  $m$  مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔ پہلی  $n$  کوششوں میں  $A$  واقع ہونے کی تعداد  $k_1$  ہے، دوسری  $n$  کوششوں میں  $A$  واقع ہونے کی تعداد  $k_2$  ہے،  $\dots$ ،  $m$  ویں  $n$  کوششوں میں  $A$  واقع ہونے کی تعداد  $k_m$  ہے۔ ان معلومات سے  $p$  کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

24.14 وقفہ اعتماد



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z \leq |2yy'|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $1 + |q| + |p| = h$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارتم (شکل 1.1-ب-ب)

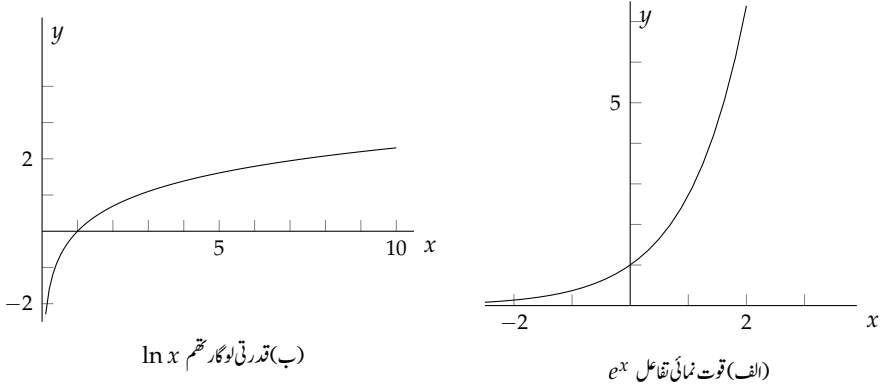
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

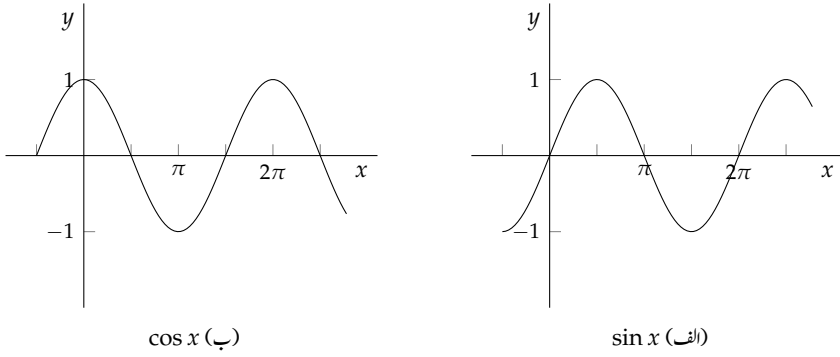
اساس دس کا لوگارتم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

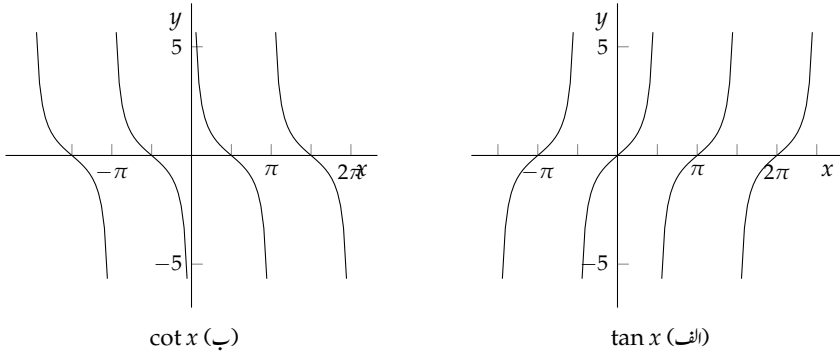
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

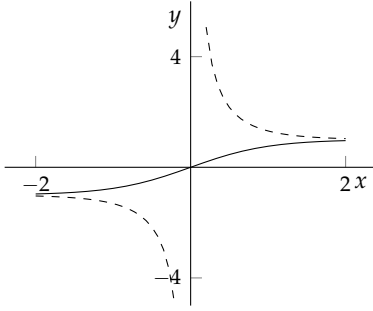
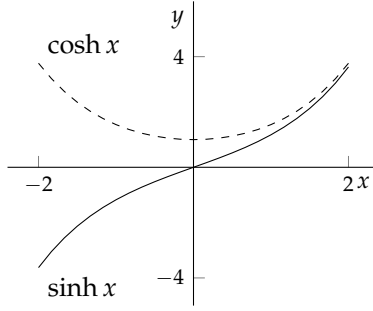
$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$



(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

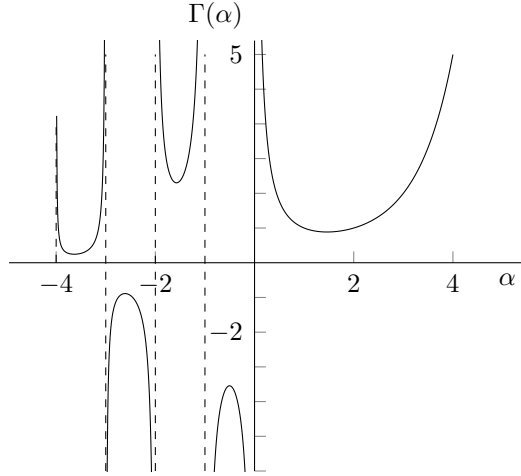
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

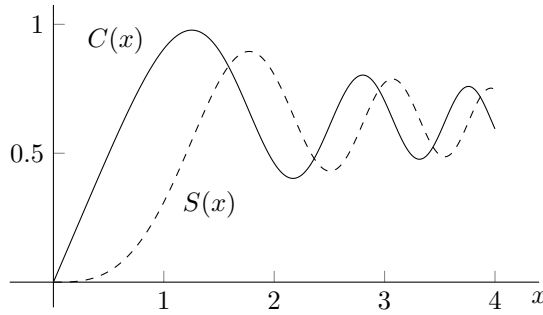
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

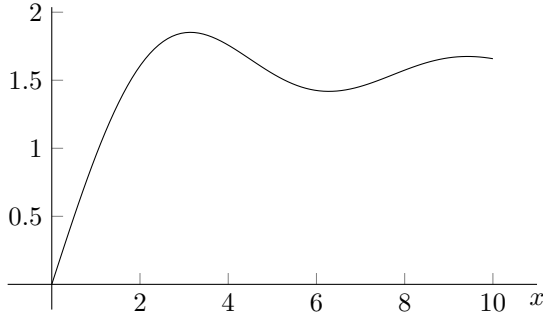
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$



ضمیمہ ج

جدول

