

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781 . . . . .	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
787 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
796 . . . . .	11.3	دوہرہ تکمیل
810 . . . . .	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820 . . . . .	11.5	سطحیں
825 . . . . .	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837 . . . . .	11.7	سطحی تکمیل
845 . . . . .	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850 . . . . .	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861 . . . . .	11.10	مسئلہ سٹوکس
866 . . . . .	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869 . . . . .	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883 . . . . .	12	فوریئر تسلسل
884 . . . . .	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889 . . . . .	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902 . . . . .	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907 . . . . .	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916 . . . . .	12.5	نصف حلقہ الساع
923 . . . . .	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931 . . . . .	12.7	جبری ارتعاش
936 . . . . .	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940 . . . . .	12.9	فوریئر تکمیل
953 . . . . .	13	جزوی تفرقی مساوات
953 . . . . .	13.1	بنیادی تصورات
958 . . . . .	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960 . . . . .	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973 . . . . .	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979 . . . . .	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987 . . . . .	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993 . . . . .	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996 . . . . .	13.8 مستطیل جھلی
1006 . . . . .	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010 . . . . .	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018 . . . . .	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024 . . . . .	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030 . . . . .	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037 . . . . .	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038 . . . . .	14.1 مخلوط اعداد
1047 . . . . .	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054 . . . . .	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059 . . . . .	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067 . . . . .	14.5 کوئی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078 . . . . .	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084 . . . . .	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089 . . . . .	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095 . . . . .	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103 . . . . .	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104 . . . . .	15.1 نقشہ کشی
1116 . . . . .	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125 . . . . .	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129 . . . . .	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138 . . . . .	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149 . . . . .	15.6 ریمان سطحیں
1157 . . . . .	16 مخلوط مکملات
1157 . . . . .	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168 . . . . .	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172 . . . . .	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184 . . . . .	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189 . . . . .	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194 . . . . .	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201 . . . . .	17 ترتیب اور تسلسل
1201 . . . . .	17.1 ترتیب
1208 . . . . .	17.2 تسلسل
1213 . . . . .	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220 . . . . .	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل	17.4
1225 . . . . .	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں	17.5
1236 . . . . .	تسلسل پر اعمال	17.6
1243 . . . . .	18 حلقہ تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل	
1243 . . . . .	18.1 حلقہ تسلسل	
1256 . . . . .	18.2 حلقہ تسلسل کی روپ میں تفاعل	
1263 . . . . .	18.3 ٹیلر تسلسل	
1268 . . . . .	18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل	
1274 . . . . .	18.5 حلقہ تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب	
1281 . . . . .	18.6 یکساں استرار	
1294 . . . . .	18.7 لوگوں تسلسل	
1303 . . . . .	18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت	
1317 . . . . .	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ	
1317 . . . . .	19.1 بقیہ	
1324 . . . . .	19.2 مسئلہ بقیہ	
1329 . . . . .	19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ	
1337 . . . . .	19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام	
1345 . . . . .	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی تودہ	
1346 . . . . .	20.1 ساکن برقی سکون	
1352 . . . . .	20.2 دوبعدی بہا و سیال	
1361 . . . . .	20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص	
1366 . . . . .	20.4 پوسوں کلیہ مکمل	
1373 . . . . .	21 اعدادی تجزیہ	
1374 . . . . .	21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر	
1376 . . . . .	21.2 دہرانے سے مساوات کا حل	
1388 . . . . .	21.3 متناہی فرق	
1394 . . . . .	21.4 باہمی تحریف	
1403 . . . . .	21.5 لچکدار منحنیات	
1410 . . . . .	21.6 اعدادی مکمل اور تفرق	
1422 . . . . .	21.7 متقارب اتساع	
1435 . . . . .	22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب	
1435 . . . . .	22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقاط، معکوس قالب	
1445 . . . . .	22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ	



1453	22.3	خطی مساوات کا نظام: بدخونی
1457	22.4	ترکیب کثر مرلغ
1463	22.5	قالب کے امتیازی اقدار کی شمول
1472	22.6	امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ

1477	23	اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات
1477	23.1	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1488	23.2	دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1495	23.3	اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1498	23.3.1	مسئلہ ڈرشلے
1501	23.3.2	بدلتی رخ خفی ترکیب
1508	23.4	مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ - غیر منظم سرحد
1515	23.5	اعدادی تراکیب برائے قطع مکافی مساوات
1524	23.6	اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات

1529	24	احتمال اور شماریات
1529	24.1	حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد
1531	24.2	نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترتیب
1541	24.3	نمونہ اوسط اور نمونی تغیریت
1546	24.4	بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات
1553	24.5	احتمال
1562	24.6	مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات
1568	24.7	بلا منصوبہ متغیرات - غیر مسلسل اور استمراری تقسیم
1576	24.8	تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت
1584	24.9	ثنائی، پوئسن، اور بیش ہندی تقسیم
1592	24.10	عمومی تقسیم
1601	24.11	ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں
1614	24.12	بلا منصوبہ نمونہ بندی - بلا منصوبہ اعداد
1617	24.13	مقدار معلوم کا اندازہ لگانا
1621	24.14	وقفہ اعتماد
1635	24.15	قیاس کی پرکھ - فیصلے

1651	ا	اضافی ثبوت
1655	ب	منفید معلومات
1655	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات
1665	ج	جدول

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

عمومی تقسیم کی صورت میں پرکھ

درج ذیل مثال عملاً اہم قیاس کے پرکھ کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 24.23: (معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ)  
فرض کریں کہ  $X$  بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی تغیریت  $\sigma^2 = 9$  ہے۔ نمونی جسامت  $n = 10$  لیتے ہوئے  
قیاس  $\mu = \mu_0 = 24$  کو درج ذیل تین متبادل کے بالمقابل پرکھیں۔

$$(الف) \mu > \mu_0 \quad (ب) \mu < \mu_0 \quad (پ) \mu \neq \mu_0$$

حل: ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 0.05$  منتخب کرتے ہیں۔ اوسط کی اندازاً قیمت درج ذیل سے حاصل ہو گی۔

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots, X_n)$$

اگر قیاس درست ہو تب  $X$  عمومی ہو گا جس کی اوسط  $\mu = 24$  اور تغیریت  $\frac{\sigma^2}{n} = 0.9$  ہو گی (مسئلہ  
24.20)۔ لہذا ہم فاصل قیمت  $c$  کو ضمیمہ ج کی جدول 4 ج سے حاصل کر سکتے ہیں۔  
صورت الف: ہم  $P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$  سے  $c$  تعین کرتے ہیں۔

$$P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4 ج سے  $\frac{c-24}{\sqrt{0.9}} = 1.645$  یعنی  $c = 25.56$  حاصل ہوتا ہے جو  $\mu_0$  سے بڑی قیمت  
ہے (اور جو شکل 24.20 میں سب سے اوپر دکھائی گئی صورت ہے)۔ اگر  $\bar{x} \leq 25.56$  ہو تب قیاس کو منظور کیا  
جائے گا۔ اگر  $\bar{x} > 25.56$  ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جائے گا۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\bar{X} > 25.56)_{\mu} = 1 - P(\bar{X} \leq 25.56)_{\mu} \\ (24.139) \quad &= 1 - \Phi\left(\frac{25.56 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu) \end{aligned}$$

صورت ب: فاصل قیمت  $c$  کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$P(\bar{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\right) = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 4. ج سے  $c = 24 - 1.56 = 22.44$  ملتا ہے۔ اگر  $\bar{x} \geq 22.44$  ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔ اگر  $\bar{x} < 22.44$  ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$(24.140) \quad \eta(\mu) = P(\bar{X} \leq 22.44)_\mu = \Phi\left(\frac{22.44 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) = \Phi(23.65 - 1.05\mu)$$

صورت پ: چونکہ عمومی تقسیم تشاکلی ہے، ہم  $\mu = 24$  سے  $c_1$  اور  $c_2$  کو ایک جیسے فاصلے پر چن کر، مثلاً  $c_1 = 24 - k$  اور  $c_2 = 24 + k$ ، مستقل  $k$  کو درج ذیل سے تعین کرتے ہیں۔

$$P(24 - k \leq \bar{X} \leq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4. ج سے  $\frac{k}{\sqrt{0.9}} = 1.960$  یعنی  $k = 1.86$  حاصل ہو گا۔ یوں  $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$  اور  $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$  ہوں گے۔ اگر  $\bar{x}$  کی قیمت  $c_1$  سے چھوٹی نہ ہو اور  $c_2$  سے بڑی نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$(24.141) \quad \begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\bar{X} < 22.14)_\mu + P(\bar{X} > 25.86)_\mu \\ &= P(\bar{X} < 22.14)_\mu + 1 - P(\bar{X} \leq 25.86)_\mu \\ &= 1 + \Phi\left(\frac{22.14 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{25.86 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) \\ &= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu) \end{aligned}$$

نتیجتاً خاصیت کارکردگی  $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$  درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= \Phi\left(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) \\ &= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu) \end{aligned}$$

شکل سے ظاہر ہے کہ  $n = 10$  کی خاصیت کارکردگی کی مطابقتی منحنی کی ڈھلوان زیادہ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $n$  بڑھانے سے بہتر پرکھ حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی عملی استعمال میں  $n$  کو کم سے کم لیکن اتنا زیادہ رکھا جاتا ہے کہ پرکھ  $\mu$  اور  $\mu_0$  میں انحراف، جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں، کو واضح کرے۔ مثال کے طور پر اگر انحراف ہماری دلچسپی  $\pm 2$  اکائی ہو، ہم شکل سے دیکھتے ہیں کہ  $n = 10$  بہت کم ہو گا چونکہ جب  $\mu = 24 - 2 = 22$  یا  $\mu = 24 + 2 = 26$  ہو تب  $\beta$  تقریباً 50% ہو گا۔ اس کے برعکس،  $n = 100$  اس صورت کافی ہو گا۔ □

مثال 24.24: نا معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ  
 رسی کی تنشی مضبوطی  $n = 16$  کا نمونہ لے کر ناپی گئی۔ نمونی اوسط  $\bar{x} = 4482 \text{ kg}$  اور نمونی معیاری  
 انحراف  $s = 115 \text{ kg}$  حاصل ہوئے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تنشی مضبوطی عمومی بلا منصوبہ متغیر ہے۔ قیاس  
 $\mu_0 = 4500 \text{ kg}$  کو متبادل  $\mu_1 = 4400 \text{ kg}$  کے مقابلے میں پرکھیں۔ یہاں  $\mu_0$  وہ قیمت ہو سکتی ہے جو  
 بنانے والے نے فراہم کی ہو جبکہ  $\mu_1$  سابقہ تجربات کا نتیجہ ہو سکتا ہے۔  
 حل: ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو تب مسئلہ 24.21 کے تحت یاس بلا  
 منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} = 4 \frac{\bar{X} - 4500}{S}$$

کا  $t$  تقسیم  $n - 1 = 15$  درجہ آزادی کا ہو گا۔ فاصل قیمت  $c$  کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے  
 گا۔

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے  $c = -1.75$  حاصل ہو گا۔ نمونہ سے  $T$  کی مشاہدہ سے حاصل قیمت  $t =$   
 $\frac{4(4482 - 4500)}{115} = -0.626$  ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $t > c$  ہے لہذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ پرکھ  
 کی طاقت کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہمیں مزید جدول بند قیمتیں درکار ہوں گی جن پر اس کتاب میں  
 غور نہیں کیا جائے گا۔ □

مثال 24.25: (عمومی تقسیم کی تغیریت کی پرکھ)  
 عمومی آبادی کے  $n = 15$  جسامت اور نمونی تغیریت  $s^2 = 13$  کے نمونہ سے قیاس  $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$  کو  
 متبادل  $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$  میں مقابلے میں پرکھیں۔  
 حل: ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو تب

$$Y = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} = 14 \frac{S^2}{10} = 1.4S^2$$

کا مربع خا تقسیم  $n - 1 = 14$  درجہ آزادی کا ہو گا (مسئلہ 24.22)۔ ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل سے  
 14 درجہ آزادی کے لئے  $c = 23.68$  حاصل ہو گا

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05 \implies P(Y \leq c) = 0.95$$

جو  $Y$  کی فاصل قیمت ہے۔ یوں  $S^2 = \frac{\sigma_0^2 Y}{n-1} = 0.714Y$  کا مطابقتی فاصل قیمت  $c^* = 0.714 \cdot 23.68 = 16.91$  ہو گا۔ چونکہ  $s^2 < c^*$  ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں،

اگر متبادل درست ہو تب متغیر

$$Y_1 = 14 \frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7S^2$$

کے مربع خا تقسیم کا درجہ آزادی 14 ہو گا۔ یوں ہمارے پرکھ کی طاقت

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \leq 11.84)_{\sigma^2=20} \approx 62\%$$

ہو گی اور ہم دیکھتے ہیں قسم دوم غلطی کا امکان (جو 38% ہے) بہت زیادہ ہے جس کو کم کرنے کے لئے نمونی جسامت بڑھانی ضروری ہے۔

□

مثال 24.26: دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا آپس میں موازنہ

نا معلوم اوسط  $\mu_1$  کی عمومی تقسیم کا نمونہ  $x_1, \dots, x_{n1}$  اور دوسری عمومی تقسیم جس کی اوسط  $\mu_2$  نا معلوم ہو کا نمونہ  $y_1, \dots, y_{n2}$  استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس  $\mu_1 = \mu_2$  کو متبادل مثلاً  $\mu_1 > \mu_2$  کے مقابلے میں پرکھنا چاہتے ہیں۔ تغیرات جاننا ضروری نہیں ہے لیکن انہیں ایک جیسا<sup>163</sup> تصور کیا جاتا ہے۔ دو صورتیں عملاً اہم ہیں۔

پہلی صورت: نمونوں کی جسامت ایک جیسی ہے۔ مزید پہلے نمونہ کی ہر قیمت کا دوسرے نمونہ میں مطابقتی ٹھیک ایک قیمت پایا جاتا ہے، چونکہ مطابقتی قیمتیں ایک ہی انسان یا چیز کی بدولت پائی جاتی ہیں (جوڑی دار موازنہ<sup>164</sup>)؛ مثال کے طور پر ایک ہی چیز کی دو مختلف طریقوں سے ناپ، یا ایک ہی جانور کی دو آنکھوں کی ناپ، یا زیادہ عمومی طور پر جہاں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نمونوں کی جوڑی قیمتیں ایک جیسے انسانوں یا چیزوں (مثلاً جڑواں بھائی، گاڑھی کے اگلے ٹائر، وغیرہ) سے حاصل کی گئی ہوں۔ تب ہم مطابقتی قیمتوں کا فرق لے کر، مثال 24.24 میں دی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، اس قیاس کو پرکھیں گے کہ ان فرق کی مطابقتی آبادی کی اوسط 0 ہے۔ اگر ممکن ہو تب ہم اسی ترکیب کو استعمال کریں گے ورنہ ہمیں درج ذیل ترکیب استعمال کرنی ہو گی۔

دوسری صورت: دونوں نمونے غیر تابع ہیں اور ان کی جسامت مختلف ہو سکتی ہے۔ تب ہم درج ذیل طریقے سے بڑھتے ہیں۔ فرض کریں کہ متبادل  $\mu_1 > \mu_2$  ہے۔ ہم معنی خیز سطح  $\alpha$  منتخب کرتے ہیں۔ ہم نمونی اوسط  $\bar{x}$  ،

<sup>163</sup> اگر اگلے مثال کا پرکھ واضح کرے کہ تغیرات میں واضح فرق پایا جاتا ہے تب ایک جیسے  $n_1 = n_2 = n$  مثلاً  $n > 30$  منتخب کرتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ مساوات تجزیہ عمومی بلا مضبوط متغیر، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے، کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے، اور مثال 24.23 کی طرز پر حل کریں۔

<sup>164</sup> paired comparison

$\bar{y}$  اور  $s_1^2$ ،  $(n-1)s_2^2$  کا حساب کرتے ہیں جہاں  $s_1^2$  اور  $s_2^2$  نمونی تغیریت ہیں۔ ضمیمہ ۶ کی جدول 6.6 میں  $n_1 + n_2 - 2$  درجہ آزادی لیتے ہوئے ہم  $c$  کو

$$(24.142) \quad P(T \leq c) = 1 - \alpha$$

سے تعین کرتے ہیں۔ آخر میں ہم درج ذیل کا حساب کرتے ہیں۔

$$(24.143) \quad t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}}$$

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اگر قیاس درست ہو تب یہ  $t$  تقسیم کے  $n_1 + n_2 - 2$  درجہ آزادی کے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے۔ اگر  $t_0 \leq c$  ہو تب قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔ اگر  $t_0 > c$  ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے۔

اگر متبادل  $\mu_1 \neq \mu_2$  ہو تب مساوات 24.142 کی جگہ درج ذیل استعمال کیا جائے گا۔

$$(24.142^*) \quad P(T \leq c_1) = 0.5\alpha, \quad P(T \leq c_2) = 1 - 0.5\alpha$$

دھیان رہے کہ ایک جیسی نمونی جسامت  $n_1 = n_2 = n$  کے لئے مساوات 24.143 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(24.144) \quad t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 - s_2^2}}$$

اس کی وضاحت کے لئے انہیں درج ذیل دو نمونوں پر غور کرتے ہیں جو ایک ہی کام میں دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی ہے۔

105	108	86	103	103	107	124	105
89	92	84	97	103	107	111	97

فرض کریں کہ مطابقتی آبادی عمومی ہے اور ان کی تغیریت ایک جیسی ہے۔ انہیں قیاس  $\mu_1 = \mu_2$  کو متبادل  $\mu_1 \neq \mu_2$  کے مقابلے میں پرکھیں۔ (تغیریت کی ایک جیسا ہونے کو انگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔)  
حل: ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = 105.125, \quad \bar{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000$$



ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہیں۔ مساوات  $24.142^*$  میں  $0.5\alpha = 2.5\%$  ،  $1 - 0.5\alpha = 97.5\%$  اور ضمیمہ ج کی جدول 6 ج میں 14 درجہ آزادی سے  $c_1 = -2.15$  اور  $c_2 = 2.15$  حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 24.144 میں  $n = 8$  استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$t_0 = \frac{\sqrt{8} \cdot 7.625}{\sqrt{190.125}} = 1.56$$

چونکہ  $c_1 \leq t_0 \leq c_2$  ہے ہم دونوں صورتوں میں ایک جیسی اوسط کے قیاس  $\mu_1 = \mu_2$  کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

پہلی صورت اس مثال پر لاگو ہوتی ہے چونکہ پہلی دونوں نمونوں کی پہلی نمونی قیمت ایک قسم کے کام کے لئے حاصل کی گئی۔ اسی طرح دونوں نمونوں کی دوسری نمونی قیمت کسی دوسرے کام کے لئے حاصل کی گئی، وغیرہ۔ یوں ہم ان نمونی قیمتوں کا مطابقتی فرق

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

اور مثال 24.24 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے قیاس  $\mu = 0$  پرکھ سکتے ہیں جہاں  $\mu$  اس فرق کی اوسط ہے۔ ہم اس کا منطقی متبادل  $\mu \neq 0$  لیتے ہیں۔ نمونی اوسط  $\bar{d} = 7.625$  اور نمونی تغیریت  $s^2 = 45.696$  ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$t = \frac{\sqrt{8}(7.625 - 0)}{\sqrt{45.696}} = 3.19$$

$n - 1 = 7$  میں  $P(T \leq c_2) = 97.5\%$  ،  $P(T \leq c_1) = 2.5\%$  اور ضمیمہ ج کی جدول 6 ج میں  $c_1 = -2.37$  اور  $c_2 = 2.37$  حاصل ہوتے ہیں لہذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں چونکہ  $t = 3.19$  معلوم شدہ  $c_1$  اور  $c_2$  کے بیچ نہیں پایا جاتا ہے۔ اس طرح ہمارا موجودہ پرکھ، جو اسی نمونوں پر مبنی ہے لیکن زیادہ معلومات کو استعمال کرتا ہے، دکھاتا ہے کہ نتائج میں فرق کافی ہے۔ □

مثال 24.27: (دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا موازنہ)

گزشتہ مثال کے دو نمونے استعمال کرتے ہوئے قیاس  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  کو پرکھیں۔ فرض کریں کہ مطابقتی آبادیاں عمومی ہیں اور تجربہ کی نوعیت سے متبادل  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$  ہو گا۔

حل: ہم  $s_1^2 = 106.125$  اور  $s_2^2 = 84.000$  حاصل کرتے ہیں۔ ہم معنی خیز سطح  $\alpha = 5\%$  منتخب کرتے ہیں۔  $P(V \leq c) = 1 - \alpha = 95\%$  اور ضمیمہ ج کی جدول 8 ج میں  $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$

درجہ آزادی سے  $c = 3.79$  تعین ہوتا ہے۔ ہم آخر میں  $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.26$  حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ  $v_0 \leq c$  ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ اگر  $v_0 > c$  ہوتا ہم اس کو نا منظور کرتے۔

قیاس درست ہونے کی صورت میں  $v_0$  ایسے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے جس کی تقسیم درجہ آزادی  $(n_1 - 1, n_2 - 1)$  کی  $F$  تقسیم<sup>165</sup> ہے۔  $(m, n)$  درجہ آزادی کے  $F$  تقسیم کا تفاعل تقسیم درجہ ذیل ہے

$$(24.145) \quad F(z) = \begin{cases} K_{mn} \int_0^z t^{\frac{m-2}{2}} (mt + n)^{-\frac{m+n}{2}} dt & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

□

جہاں  $K_{mn} = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$  ہے۔

سوالات



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



ضمیمہ ب

## مفید معلومات

### 1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارتم (شکل 1. ب-ب)

$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

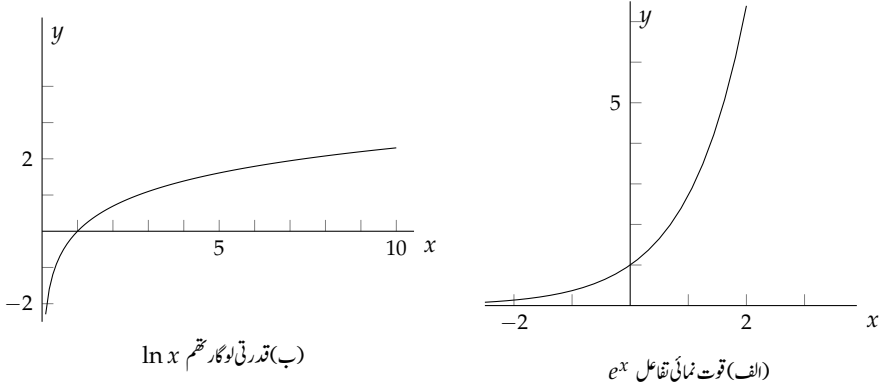
$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

اساس دس کا لوگارتم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

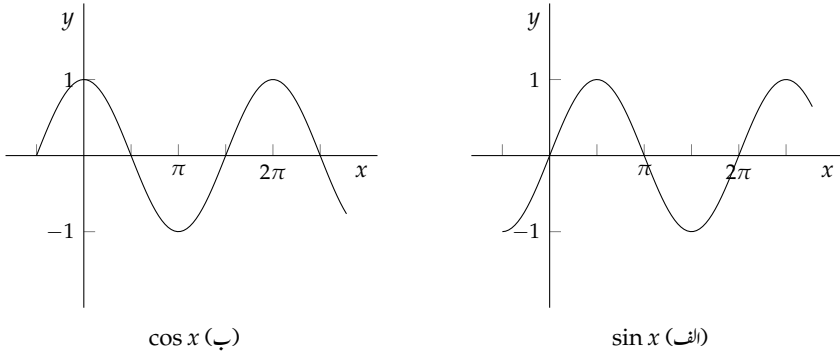
$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$





شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

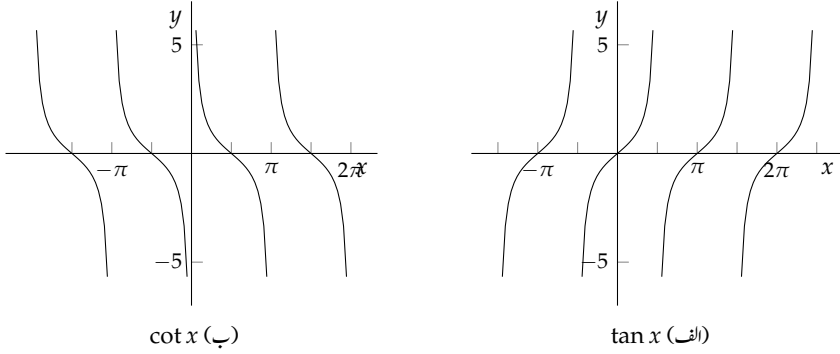
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

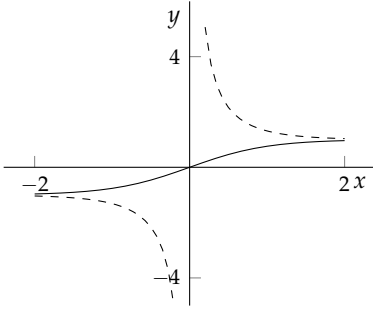
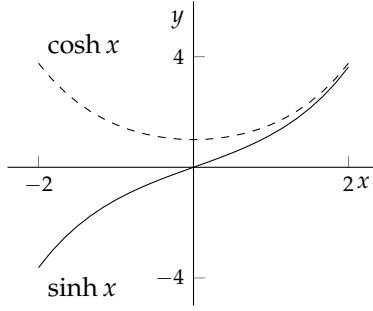
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

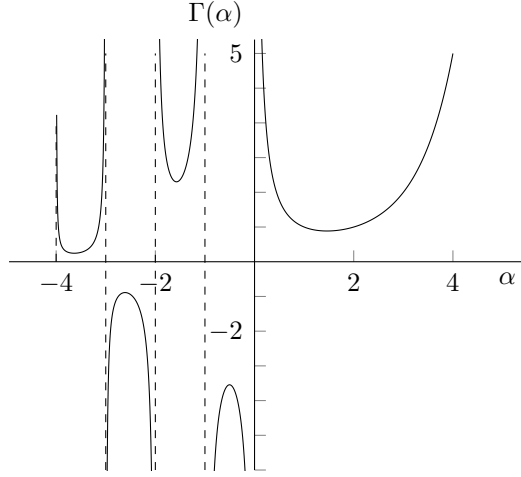
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

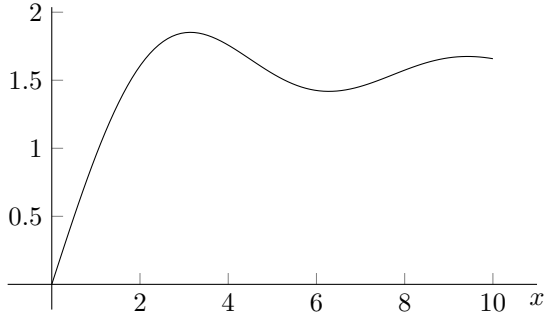
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$





ضمیمہ ج

جدول

جدول 1. ج: شنائی تقسیم

جدول 2. ج: پوسن تقسیم

جدول 3. ج: عمومی تقسیم

جدول 4. ج: عمومی تقسیم

جدول 5. ج: شبلا منصوبہ اعداد

جدول 6. ج: تقسیم

جدول 7. ج: مربع خا تقسیم

جدول 8. ج: مربع خا تقسیم