انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ xi

1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات 1
1.1 نمونہ کشی 2
1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔ 14
1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات 23
1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل 39
1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی 51
1.6 عمودی خطوط کی نسلیں 68
1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت 72

2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات 79
2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 79
2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 95
2.3 تفرقی عامل 110
2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش 114
2.5 یولر کوشی مساوات 130
2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی 138
2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 147
2.8 جبری ارتعاش۔ گمک 159
2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک 165
2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی 169
2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 180

3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات 187
3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 187
3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 198
3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 207
3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 210

4 نظام تفرقی مساوات 219
4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 220
4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 229
4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی 243
4.3.1 خطی نظام 244
4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 248
4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام 265
4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 273
4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 282
4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام 290
4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب 291

5 طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل 299
5.1 ترکیب طاقتی تسلسل 300
5.2 لیژانڈر مساوات۔ لیژانڈر کثیر رکنی 315
5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس 332
5.3.1 عملی استعمال 337
5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل 351
5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل 366
5.6 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ 372
5.7 مسئلہ سٹیورم لیوویل 378
5.8 قائمیت لیژانڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل 385

6 لاپلاس تبادلہ 395
6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت 396
6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات 405
6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل 417
6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاو 437
6.5 الجھاو 454
6.6 لاپلاس بدل کی تکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 463
6.7 تفرقی مساوات کے نظام 471

6.8 لاپلاس بدل کے عمومی کلیے . . . 479

7 خطی الجبرا: سمتیات 483
7.1 غیر سمتیات اور سمتیات . . . 483
7.2 سمتیہ کے اجزاء . . . 485
7.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب . . . 491
7.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت . . . 499
7.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) . . . 505
7.6 اندرونی ضرب فضا . . . 518
7.7 سمتی ضرب . . . 520
7.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب . . . 522
7.9 غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب . . . 533

8 خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام 541
8.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب . . . 542
8.2 قالبی ضرب . . . 552
8.2.1 تبدیلی محل . . . 558
8.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط . . . 570
8.3.1 صف زینہ دار صورت . . . 582
8.4 خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا . . . 590
8.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی . . . 604
8.6 دو درجی اور تین درجی مقطع قالب . . . 610
8.7 مقطع۔ قاعدہ کریمر . . . 613
8.8 معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط . . . 629
8.9 سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ . . . 644

9 خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب 661
9.1 امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول . . . 662
9.2 امتیازی مسائل کے چند استعمال . . . 672
9.3 تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب . . . 680
9.4 امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجی صورت . . . 687
9.5 مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں . . . 700

10 سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل 711
10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان . . . 711
10.2 سمتی علم الاحصاء . . . 713
10.3 منحنی . . . 720
10.4 لمبائی قوس . . . 726
10.5 مماس، انحنا اور مروڑ . . . 733
10.6 سمتی رفتار اور اسراع . . . 738

10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ 745
10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان 751
10.9 تبادل محددی نظام اور تبادل ارکان سمتیات 764
10.10 سمتی میدان کی پھیلاو 769
10.11 سمتی تفاعل کی گردش 777

11 سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے 781
11.1 خطی تکمل 782
11.2 خطی تکمل کا حل 787
11.3 دوہرا تکمل 796
11.4 دوہرا تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ 810
11.5 سطحیں 820
11.6 مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ 825
11.7 سطحی تکمل 837
11.8 تہرا تکمل۔ گاوس کا مسئلہ پھیلاو 845
11.9 مسئلہ پھیلاو کے نتائج اور استعمال 850
11.10 مسئلہ سٹوکس 861
11.11 مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال 866
11.12 راہ سے آزاد خطی تکمل 869

12 فوریئر تسلسل 883
12.1 دوری تفاعل، تکونیاتی تسلسل 884
12.2 فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات 889
12.3 اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل 902
12.4 جفت اور طاق تفاعل 907
12.5 نصف حلقہ اتساع 916
12.6 فوریئر عددی سر کا بغیر تکمل حصول 923
12.7 جبری ارتعاش 931
12.8 تقریب بذریعہ تکونی کثیر رکنی۔ مکعب خلل 936
12.9 فوریئر تکمل 940

13 جزوی تفرقی مساوات 953
13.1 بنیادی تصورات 953
13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج 958
13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب) 960
13.4 مساوات موج کا ڈالومبیغ حل 973
13.5 یک بعدی بہاو حرارت 979
13.6 لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاو حرارت 987

13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج 993
13.8 مستطیل جھلی 996

ا اضافی ثبوت 1001

ب مفید معلومات 1005
ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات 1005

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 13

جزوی تفرقی مساوات

مختلف طبعی اور جیومیٹریائی مسائل جہاں دو یا دو سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل پایا جاتے ہوں، جزوی تفرقی مساوات کو جنم دیتے ہیں۔یہ متغیرات وقت اور خلا کے محدد ہو سکتے ہیں۔اس باب میں انجینئری نقطہ نظر سے اہم مسائل پر غور کیا جائے گا۔ان مساوات کو طبعی نظام کی نمونہ کے طور پر حاصل کرنے کے بعد ابتدائی قیمت اور سرحدی قیمت مسائل حل کرنے کی تراکیب پر غور کیا جائے گا، یعنی ان مساوات کو دی گئی طبعی شرائط کے مطابق حل کیا جائے گا۔
ہم دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کو لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

13.1 بنیادی تصورات

دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کی نا معلوم تفاعل اور اس کی ایک یا ایک سے زیادہ تفرقات پر مبنی مساوات کو **جزوی تفرقی مساوات**[1] کہتے ہیں۔ بلند تر تفرق کا درجہ مساوت کا **درجہ**[2] کہلاتا ہے۔

سادہ تفرقی مساوات کی طرح اگر جزوی تفرقی مساوات میں تابع متغیر (نا معلوم تفاعل) اور اس کے تفرق کی طاقت اکائی ہو تب یہ تفرقی مساوات **خطی**[3] کہلائے گی۔اگر مساوات کا ہر رکن، تابع متغیرہ یا تابع متغیرہ کی تفرقات میں سے کوئی ایک تفرق ہو تب اس کو **ہم جنسی**[4] کہیں گے ورنہ یہ **غیر ہم جنسی**[5] کہلائے گی۔

[1] partial differential equation
[2] order
[3] linear
[4] homogeneous
[5] non homogeneous

مثال 13.1: اہم خطی دو درجی جزوی تفرقی مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.1}$$ یک بعدی مساوات موج

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.2}$$ یک بعدی مساوات حرارت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{13.3}$$ دو بعدی لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{13.4}$$ دو بعدی پوئسن مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{13.5}$$ تین بعدی لاپلاس مساوات

یہاں c مستقل ہے، t وقت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ x ، y ، z کارتیسی محدد ہیں۔مساوات 13.4 میں اگر $f(x, y) \neq 0$ ہو تب یہ غیر ہم جنسی ہو گی۔باقی تمام مساوات ہم جنسی ہیں۔ □

فضا میں غیر تابع متغیرہ کی کسی خطہ R میں جزوی تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو خود اور جس کے وہ تمام تفرقات جو اس مساوات میں پائے جاتے ہوں کسی ایسے خطے میں موجود ہوں جس کا R حصہ ہو اور یہ تمام مل کر پورے خطہ R میں اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔(عموماً R کی سرحد پر اس تفاعل کا استمراری ہونا اور درکار تفرقات کا خطہ کے اندرون معین ہونے کے ساتھ ساتھ خطہ کے اندرون مساوات کو مطمئن کرنا درکار ہو گا۔)

عموماً جزوی تفرقی مساوات کے تمام حل کی تعداد بہت زیادہ ہو گی۔ مثلاً جیسا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل

$$u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2) \tag{13.6}$$

جو ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں مساوات 13.3 کے حل ہیں۔ہم بعد میں دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کا یکتا حل حاصل کرنے کی خاطر مزید معلومات درکار ہو گی جو طبعی حالت سے حاصل ہو گی۔مثال کے طور پر کبھی کبھار سرحد کے کسی حصے پر درکار حل کی قیمت معلوم ہو گی (**سرحدی شرائط**[6]) جب کہ بعض اوقات ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر حل کی قیمت معلوم ہو گی (**ابتدائی شرائط**[7])۔

---

[6] boundary conditions
[7] initial conditions

ہم جانتے ہیں کہ اگر سادہ تفرقی مساوات خطی اور ہم جنسی ہو تب اس کی معلوم حل سے مزید حل بذریعہ خطی میل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ جزوی تفرقی مساوات کے لئے بھی ایسا کرنا ممکن ہے جیسا درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 13.1: بنیادی مسئلہ
اگر کسی خطہ R میں خطی ہم جنسی جزوی تفرقی مساوات کے دو حل u_1 اور u_2 ہوں تب

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

جہاں c_1 اور c_2 کوئی مستقل ہیں، بھی اس خطے میں اس مساوات کا حل ہو گا۔

اس مسئلے کا ثبوت نہایت آسان اور مسئلہ 2.1 کی ثبوت سے ملتا جلتا ہے لہٰذا یہ آپ پر چھوڑا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 13.1: مسئلہ 13.1 کو دو اور تین متغیرات کی دو درجی جزوی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔

سوال 13.2: تصدیق کریں کہ مساوات 13.6 میں دیے گئے تمام تفاعل مساوات 13.3 کے حل ہیں۔
جواب: $u = x^2 + y^2$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$ ہو گا۔انہیں مساوت 13.3 میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ ملتا ہے۔یوں u تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3 تا سوال 13.8 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل لاپلاس مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3: $u = 2xy$

سوال 13.4: $u = e^x \sin y$

سوال 13.5: $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

سوال 13.6: $u = x^3 - 3xy^2$

سوال 13.7: $u = \sin x \sinh y$

سوال 13.8: $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

سوال 13.9 تا سوال 13.11 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل حراری مساوات 13.2 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.9: $u = e^{-2t} \cos x$

سوال 13.10: $u = e^{-t} \sin 3x$

سوال 13.11: $u = e^{-4t} \cos \omega x$

سوال 13.12 تا سوال 13.14 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.12: $u = x^2 + 4t^2$

سوال 13.13: $u = x^3 + 3xt^2$

سوال 13.14: $u = \sin \omega ct \sin \omega x$

سوال 13.15: تصدیق کریں کہ $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ تین بعدی لاپلاس مساوات 13.5 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.16: تصدیق کریں کہ $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ دو بعدی لاپلاس مساوات 13.3 کا حل ہے۔دی گئی سرحدی شرائط کے تحت دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر $u = 0$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ پر $u = 5$ ہے۔مستقل a اور b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ u ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرے۔حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.17: تصدیق کریں کہ $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$ موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔یہاں u اور v دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل ہیں۔

اگر جزوی تفرقی مساوات میں صرف ایک متغیر کے ساتھ تفرقات پائے جاتے ہوں تب اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کر کے حل کیا جا سکتا ہے جہاں باقی متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔سوال 13.18 تا سوال 13.21 کو حل کریں جہاں u کے متغیرات x اور y ہیں۔

سوال 13.18: $u_{xx} - u = 0$
جواب: $u = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}$

سوال 13.19: $u_y + yu = 0$
جواب: $u = c(x)e^{-\frac{y^2}{2}}$

سوال 13.20: $u_{yy} + 9u = 0$
جواب: $u = c_1(y)\cos 3x + c_2(y)\sin 3x$

سوال 13.21: $u_x + 2xyu = 0$
جواب: $u = c(y)e^{-x^2 y}$

سوال 13.22 تا سوال 13.25 میں $u_x = p$ لیتے ہوئے حل تلاش کریں۔

سوال 13.22: $u_{xy} = 0$
جواب: $u = v(x) + w(y)$

سوال 13.23: $u_{xy} = u_x$

سوال 13.24: $u_{xy} + u_x = 0$
جواب: $u = v(x)e^{-y} + w(y)$

سوال 13.25: $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$

سوال 13.26 تا سوال 13.29 میں دیے گئے تفرقی مساوات کی نظام کے حل تلاش کریں۔

سوال 13.26: $u_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0$
جواب: $u = axy + bx + cy + k$

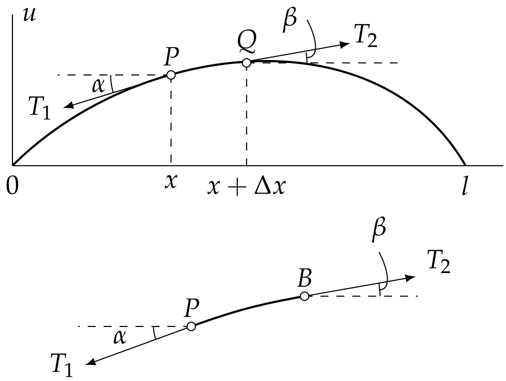
سوال 13.27: $u_x = 0, \quad u_y = 0$

سوال 13.28: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0$
جواب: $u = cx + g(y)$

سوال 13.29: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = 0$

سوال 13.30: تصدیق کریں کہ اگر سطح $z = z(x, y)$ پر منحنی $z = c$ محور x کے متوازی سیدھے خطوط ہوں، جہاں c مستقل ہے، تب z تفرقی مساوات $z_x = 0$ کا حل ہو گا۔ایسی ایک مثال بھی پیش کریں۔

سوال 13.31: تصدیق کریں کہ $yz_x - xz_y = 0$ کا حل $z = z(x, y)$ سطح گردش ہے۔اس کی مثال پیش کریں۔ (اشارہ: $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ لے کر تفرقی مساوات کو $z_\theta = 0$ میں تبدیل کریں۔)



شکل 13.1: ارتعاش پذیر تار

13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج

ایک لچک دار تار کو لمبائی l تک کھینچ کر سروں سے باندھا جاتا ہے۔ساکن تار کو x محور پر تصور کریں۔اس تار کو کسی نقطہ یا نقاط سے کھینچ کر لمحہ $t = 0$ پر چھوڑا دیا جاتا ہے تا کہ یہ ارتعاش کر سکے۔ہم تار کی ارتعاش معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی لمحہ $t > 0$ پر ساکن حالت سے تار کی نقطہ x کا انحراف $u(x,t)$ جاننا چاہتے ہیں (شکل 13.1)۔ کسی بھی نظام کا ریاضی نمونہ اخذ کرتے وقت کئی تریسلی مفروضے فرض کیے جاتے ہیں تا کہ حاصل مساوات ضرورت سے زیادہ پیچیدہ نہ ہوں۔ہم سادہ تفرقی مساوات کی طرح جزوی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہوئے بھی ایسا کریں گے۔

موجودہ مسئلے میں ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

(الف) تار کی کمیت فی اکائی لمبائی یکساں ہے (ہم جنسی تار)۔ تار مکمل طور پر لچکدار ہے اور مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے۔

(ب) تار کو اتنا تان کر باندھا گیا ہے کہ اس میں تناو، ثقلی قوت سے بہت زیادہ ہو۔یوں ثقلی قوت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

(پ) تار سیدھی کھڑی سطح میں حرکت کرتا ہے۔تار پر کوئی بھی نقطہ اپنے ساکن مقام سے بہت کم انحراف کرتا ہے لہٰذا ہر نقطے پر تار کی انحراف اور ڈھلوان کی حتمی قیمتیں قلیل ہوں گی۔

ہم توقع کر سکتے ہیں کہ یوں حاصل جزوی تفرقی مساوات کا حل $u(x,t)$ ، "غیر کامل" ہم جنسی تار جس میں ثقلی میدان سے بہت زیادہ تناو ہو کا صحیح نقش پیش کرے گا۔

مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر غور کرتے ہیں جس میں تناو T پایا جاتا ہے (شکل 13.1)۔چونکہ مڑنے کے خلاف تار مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے لہٰذا ہر نقطے پر تار میں تناو اس نقطے پر تار کا مماسی ہو گا۔فرض کریں کہ تار کے ٹکڑے کی سروں P اور Q پر تناو T_1 اور T_2 ہے۔چونکہ تار افقی حرکت نہیں کرتا ہے لہٰذا اس ٹکڑے پر تناو کا کل افقی جزو صفر کے برابر ہو گا۔ یوں شکل 13.1 کو دیکھ کر

$$T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0$$

یا

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{مستقل} \tag{13.7}$$

لکھا جا سکتا ہے یعنی ہر ایسے ٹکڑے پر بائیں اور دائیں رخ یکساں (مستقل T) تناو ہو گا۔ انتصابی رخ میں T_1 اور T_2 کے اجزاء $-T_1 \sin\alpha$ اور $T_2 \sin\beta$ ہیں جہاں اوپر رخ تناو کو مثبت تصور کیا گیا ہے۔ نیوٹن کی دوسری قانون کے تحت ان دو قوتوں کا مجموعہ تار کے ٹکڑے کی کمیت $\rho\Delta x$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا جہاں اسراع، x اور $x+\Delta x$ کے مابین کسی نقطے کی اسراع ہو گی۔ تار کی کمیت فی اکائی لمبائی ρ ہے جبکہ تار کے ٹکڑے کی لمبائی Δx ہے۔یوں

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13.8}$$

ہو گا۔اس کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_2 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13.9}$$

آپ تسلی کر لیں کہ چونکہ مساوات 13.7 میں $T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$ ہے لہٰذا مساوات 13.8 کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہوئے کہیں $T_2 \cos\beta$ ، کہیں $T_1 \cos\alpha$ اور کہیں T سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

اب $\tan\beta$ اور $\tan\alpha$ تار کی x اور $x+\Delta x$ پر مماس ہے یعنی

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \quad \text{اور} \quad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

جہاں جزوی تفرق اس لئے استعمال کیے گئے ہیں کہ u متغیرہ t کا بھی تابع ہے۔یوں مساوات 13.9 کو Δx سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{\Delta x}\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}\Big]=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں Δx کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{13.10}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو یک بعدی **مساوات موج**[8] کہتے ہیں۔ مساوات 13.10 ہمارے مسئلے کی درکار جزوی تفرقی مساوات ہے جو ہم جنسی اور دو درجی ہے۔مساوات میں مستقل $\frac{T}{\rho}$ کو c کی بجائے c^2 سے ظاہر کیا گیا ہے تا کہ واضح رہے کہ یہ مثبت مستقل ہے۔اس مساوات کا حل اگلے حصے میں حاصل کیا جائے گا۔

13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ لچک دار تار کی ارتعاش کو جزوی تفرقی مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{مساوات موج} \tag{13.11}$$

بیان کرتی ہے جہاں $u(x,t)$ تار کی انحراف ہے۔تار کی حرکت جاننے کی خاطر اس مساوات کا حل درکار ہو گا بلکہ ہمیں مساوات 13.11 کا ایسا حل $u(x,t)$ درکار ہے جو نظام پر لاگو شرائط کو بھی مطمئن کرے۔چونکہ تار کے دونوں سر غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا تمام t کے لئے $x=0$ اور $x=l$ پر سرحدی شرائط

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \tag{13.12}$$

لاگو ہیں۔تار کی حرکت ابتدائی انحراف (لمحہ $t=0$ پر انحراف) اور ابتدائی رفتار (لمحہ $t=0$ پر رفتار) پر منحصر ہو گی۔ابتدائی انحراف کو $f(x)$ اور ابتدائی رفتار کو $g(x)$ سے ظاہر کرتے ہوئے **ابتدائی شرائط**[9]

$$u(x,0)=f(x) \tag{13.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) \tag{13.14}$$

[8] one dimensional wave equation
[9] initial conditions

لکھی جائیں گی۔ ہمیں اب مساوات 13.12 کا ایسا حل چاہیے جو سرحدی شرائط مساوات اور ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرے۔ ہم درج ذیل اقدام کے ذریعہ ایسا حل تلاش کریں گے۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے ہم جزوی تفرقی مساوات سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔
دوسرا قدم۔ ہم ان سادہ تفرقی مساوات کے ایسے حل تلاش کریں گے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔
تیسرا قدم۔ حاصل حل سے ایسے حل حاصل کیے جائیں گے جو ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتے ہوں۔

ان اقدام کی تفصیل درج ذیل ہے۔

پہلا قدم۔ ترکیب ضرب مساوات 13.11 کے حل دو عدد تفاعل کا حاصل ضرب

$$u(x,t)=F(x)G(t) \tag{13.15}$$

کی روپ میں دیتا ہے جہاں ہر ایک تفاعل صرف ایک متغیرہ x یا t کا تابع ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں اس ترکیب کے کئی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مساوات 13.15 کے تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F\ddot{G} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''G$$

ملتا ہے جہاں ($'$) سے مراد x کے ساتھ تفرق اور $(\cdot)$ سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ انہیں مساوات 13.11 میں پر کر کے

$$F\ddot{G}=c^2F''G$$

دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا دایاں ہاتھ صرف متغیرہ x پر منحصر ہے جبکہ اس کا بایاں ہاتھ صرف متغیرہ t پر منحصر ہے۔ اب t تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن اس مساوات کے تحت دونوں اطراف برابر ہیں اور دایاں ہاتھ t تبدیل کرنے سے ہر گز تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ t تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اسی طرح x تبدیل کرنے سے صرف دایاں ہاتھ کا تبدیل ہونا ممکن ہے لیکن

دونوں اطراف برابر ہیں اور x کی تبدیلی ہے بایاں ہاتھ ہر گز تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔یوں اس مساوات کے دونوں اطراف غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا انہیں مستقل k کے برابر لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k$$

جس سے درج ذیل دو عدد مساوات علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہے جہاں k نا معلوم مستقل ہے۔

$$F''-kF=0 \tag{13.16}$$

$$\ddot{G}-c^2kG=0 \tag{13.17}$$

دوسرا قدم۔ ہم مساوات 13.16 اور مساوات 13.17 کے حل F اور G حاصل کرتے ہوئے ایسا $u=FG$ دریافت کرتے ہیں جو تمام t کے لئے سرحدی شرائط مساوات 13.12 کو مطمئن کرتا ہو یعنی:

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0,\quad u(l,t)=F(l)G(t)=0$$

اب اگر درج بالا میں $G\equiv 0$ ہو تب $u\equiv 0$ ہو گا جس میں ہم کوئی دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہٰذا $G\neq 0$ ہو گا۔یوں درج بالا سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\text{(الف)}\quad F(0)=0,\qquad \text{(ب)}\quad F(l)=0 \tag{13.18}$$

اگر مساوات 13.16 میں $k=0$ ہو تب اس مساوات کا عمومی حل $F=ax+b$ ہو گا جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $a=0$ ، $b-0$ یعنی $F\equiv 0$ یا $u\equiv$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔مثبت $k=\mu^2$ کے لئے مساوات 13.16 کا عمومی حل

$$F=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x}$$

ہے جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $A=0$ ، $B=0$ یعنی $F\equiv 0$ یا $u\equiv=0$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔یوں ہمارے پاس منفی $k=-p^2$ لینا رہ جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.16 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$F''+p^2F=0$$

اس کا عمومی حل

$$F(x)=A\cos px+B\sin px$$

ہے جو مساوات 13.18-الف کی مدد سے

$$F(0) = A = 0$$

لٰہذا $F = B\sin px$ ہو گا جو مساوات 13.18-ب کے ساتھ مل کر

$$F(l) = B\sin pl = 0$$

دیتی ہے۔اب اگر $B = 0$ ہو تب $F \equiv 0$ یعنی $u \equiv 0$ ہو گا جو غیر دلچسپ حل ہے لٰہذا $B \neq 0$ ہے۔اس طرح $\sin pl = 0$ ہو گا۔ہم جانتے ہیں کہ $\sin n\pi = 0$ ہوتا ہے لٰہذا یوں درج ذیل ملتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

$$pl = n\pi \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l} \tag{13.19}$$

ہم $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے لامحدود تعداد کے حل $F(x) = F_n(x)$ یعنی

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.20}$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.18 میں دیے گئے سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔چونکہ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ہوتا ہے لٰہذا منفی عدد صحیح $n = -1, -2, \ldots$ لینے سے یہی حل منفی علامت کے ساتھ دوبارہ ملتے ہیں۔

اب مساوات 13.19 کے تحت k کی قیمت صرف $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{l})^2$ ممکن ہے۔ k کی ان قیمتوں کے ساتھ مساوات 13.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

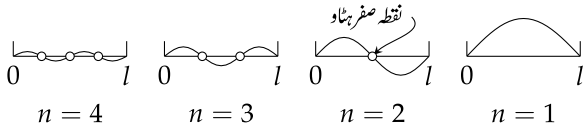
$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_b\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t$$

ہے۔یوں تفاعل $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$

$$u_n(x,t) = (B_b\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{13.21}$$



شکل 13.2: تار کے قائمہ انداز اور نقطہ صفر ہٹاو۔

مساوات 13.17 کے ایسے حل ہیں جو مساوات 13.18 میں دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ان تفاعل کو ارتعاش پذیر تار کے **آئگنی تفاعل**[10] یا **امتیازی تفاعل**[11] کہتے ہیں جبکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ کی قیمتوں کو ارتعاش پذیر تار کے **آئگنی اقدار**[12] یا **امتیازی اقدار**[13] کہتے ہیں۔ مزید $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ کا **سلسلہ طیف**[14] کہلاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک u_n ایک مخصوص ہارمونی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے جس کی تعدد $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2l}$ چکر فی اکائی وقت ہے۔ اس حرکت کو تار کی n ویں **قائمہ انداز**[15] کہتے ہیں۔ پہلا قائمہ انداز جس کا $n = 1$ ہو گا **بنیادی انداز**[16] کہلاتا ہے جبکہ باقی کو n ویں **ہارمونی انداز**[17] کہتے ہیں۔چونکہ مساوات 13.21 میں

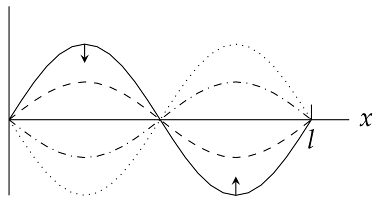
$$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad \implies \quad x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n} l$$

ہے لہٰذا n ویں قائمہ انداز کے $n - 1$ **نقطہ صفر ہٹاو**[18] پائے جائیں گے۔ ان نقطوں پر تار ساکن رہتی ہے (شکل 13.2)۔

شکل 13.3 میں دوسرا قائمہ انداز مختلف لمحات t پر دکھایا گیا ہے۔کسی بھی لمحہ پر تار کی شکل سائن تفاعل کی ہو گی۔جب تار کا بایاں آدھا حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت تار کا دایاں آدھا حصہ اوپر کو حرکت کرے گا۔اسی طرح جب بایاں حصہ اوپر کو حرکت کرتا ہے اس وقت دایاں حصہ نیچے کو حرکت کرتا ہے۔تار کا درمیانہ نقطہ حرکت نہیں کرتا ہے لہٰذا یہ نقطہ صفر ہٹاو ہے۔باقی انداز بھی اسی طرح کی خاصیت رکھتے ہیں۔

تیسرا قدم۔ ظاہر ہے کہ ایک عدد حل $u_n(x, t)$ عموماً ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے۔اب چونکہ مساوات 13.11 خطی اور ہم جنسی ہے لہٰذا بنیادی مسئلہ 13.1 کے تحت مساوات

[10] eigenfunctions
[11] characteristic functions
[12] eigenvalues
[13] characteristic values
[14] spectrum
[15] normal mode
[16] fundamental mode
[17] harmonics
[18] node



شکل 13.3: مختلف t پر دوسرا قائمہ انداز

13.11 کی محدود تعداد کے حلوں u_n کا مجموعہ بھی مساوات 13.11 کا حل ہو گا۔ اس طرح ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم لامتناہی تسلسل

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{13.22}$$

پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 13.22 اور ابتدائی شرط مساوات 13.13 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x) \tag{13.23}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.13 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x,0)$ تفاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n=1,2,\cdots \tag{13.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.22 کا t کے ساتھ تفرق لے کر اور ابتدائی شرط مساوات 13.14 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}&=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_{t=0}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{l}=g(x)\end{aligned}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.14 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n^* اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $t=0$ پر $\frac{\partial u}{\partial t}$ تفاعل $g(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n^*\lambda_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

اور چونکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ ہے لہٰذا

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.24 اور مساوات 13.25 میں حاصل کیے گئے عددی سر کو مساوات 13.22 میں پر کرنے سے حاصل تسلسل $u(x,t)$ ، مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرے گا بشرطیکہ حاصل $u(x,t)$ مرتکز ہو اور اس کی x اور t کے ساتھ جزو در جزو دو درجی تفرق لینے سے حاصل تسلسل مرتکز ہو اور ان کے مجموعے بالترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہوں جو استمراری ہیں۔

اب تک مساوات 13.22 محض ریاضی حل کے طور پر سامنے آیا ہے۔آئیں اس کی اصل حقیقت کو قائم کریں۔ہم اپنی آسانی کی خاطر ابتدائی رفتار $g(x)$ صفر لیتے ہیں۔یوں $B_n^* = 0$ ہوں گے لہٰذا مساوات 13.22 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \tag{13.26}$$

ہم ضمیمہ ب کا کلیہ 11.ب استعمال کرتے ہوئے

$$\cos\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{1}{2}\Big[\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\Big\} + \sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\Big\}\Big]$$

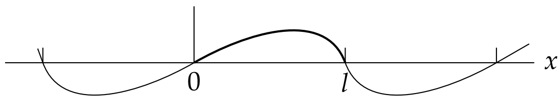
لکھ سکتے ہیں جس کو مساوات 13.26 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\Big\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\Big\}$$

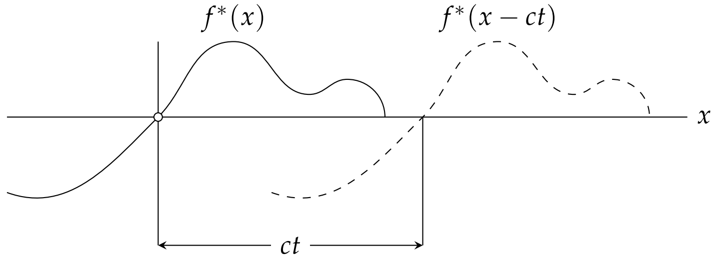
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 13.23 میں x کی جگہ $x-ct$ اور $x+ct$ پر کرنے سے یہی دو تسلسل حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)] \tag{13.27}$$

جہاں f کی طاق دوری توسیع جس کا دوری عرصہ $2l$ ہو تفاعل f^* ہے (شکل 13.4)۔چونکہ وقفہ $0 \le x \le l$ پر ابتدائی انحراف $f(x)$ استمراری ہے جبکہ $x = 0$ اور $x = l$ پر انحراف صفر ہے لہٰذا مساوات



شکل 13.4: $f(x)$ کی طاق توسیع

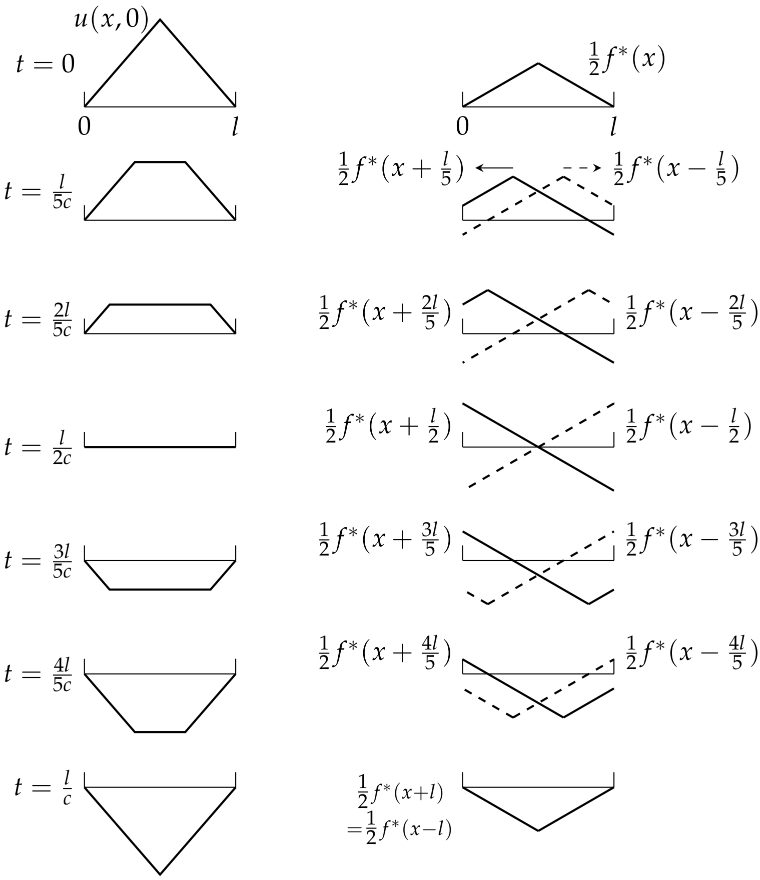


شکل 13.5: مساوات 13.27 کی معنی

13.27 سے ظاہر ہے کہ $u(x,t)$ دونوں متغیرات x اور t کی تمام قیمتوں پر استمراری ہو گا۔ مساوات 13.27 کا تفرق لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 13.11 کا حل ہے بشرطیکہ وقفہ $0 < x < l$ پر $f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہو اور $x = 0$ اور $x = l$ پر اس کے یک طرفہ دو درجی تفرق پائے جاتے ہوں جن کی قیمت صفر کے برابر ہو۔ اس طرح یہ حقیقت قائم ہوتی ہے کہ ان شرائط پر پورا اترتا ہوا تسلسل $u(x,t)$ مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

اگر $f'(x)$ اور $f''(x)$ محض ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہوں، یا اگر وقفہ کے سروں پر یک طرفہ تفرقات غیر صفر ہوں تب ہر ایک t کے لئے محدود تعداد کی x قیمتوں پر مساوات 13.11 کے u کی دو درجی تفرقات غیر معین ہوں گے۔ ان نقطوں کے علاوہ باقی تمام نقطوں پر u مساوات موج کو مطمئن کرے گی لہٰذا ہم $u(x,t)$ کو وسیع معنوں میں مسئلے کا حل تصور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں حاصل حل اس نوعیت کا ہو گا۔

آئیں مساوات 13.27 کی طبعی معنی سمجھتے ہیں۔ جیسا شکل 13.5 میں دکھایا گیا ہے، $f^*(x)$ کی ترسیم کو ct اکائیاں دائیں منتقل کرنے سے $f^*(x-ct)$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $f^*(x-ct),\ (c>0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ دائیں جانب کو حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح $f^*(x+ct),\ (c>0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ بائیں جانب کو حرکت کرتی ہے اور $u(x,t)$ ان دونوں کا مجموعہ ہے۔



شکل 13.6: مثال 13.2 کا مختلف لمحات پر دائیں کو اور بائیں کو حرکت کرتے اجزاء اور ان کا مجموعہ حل $u(x,t)$

مثال 13.2: تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں تار کی ارتعاش
مساوات موج 13.11 کا حل تکونی ابتدائی انحراف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

اور ابتدائی رفتار صفر $g(x) = 0$ کی صورت میں حاصل کریں۔
حل: چونکہ $g(x) \equiv 0$ ہے لہٰذا مساوات 13.26 میں $B_n^* = 0$ ہو گا جبکہ B_n کو صفحہ 919 پر مساوات 12.35 دے گی۔یوں مساوات 13.26 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u(x,t) = \frac{8k}{\pi^2}\Big[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi c}{l}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3\pi c}{l}t + - \cdots\Big]$$

اس حل کی ترسیم کھینچنے کی خاطر ہم $u(x,0) = f(x)$ سے شروع کرتے ہوئے مساوات 13.27 کی مدد لیتے ہیں۔یوں شکل 13.6 حاصل ہوتی ہے۔ □

سوالات

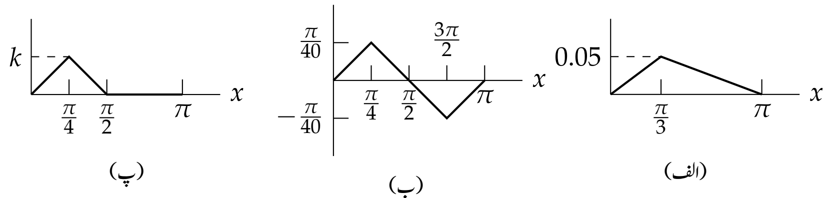
سوال 13.32 تا سوال 13.40 میں تار کی لمبائی $l = \pi$ اور $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$ ہے۔تار کے سرے ٹھوس نقطوں کے ساتھ باندھے گئے ہیں۔ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ سوال میں دی گئی ہے۔ارتعاش پذیر تار کا انحراف $u(x,t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.32: $0.02\sin x$
جواب: $u = 0.02\cos t\sin x$

سوال 13.33: $k\sin 2x$
جواب: $u = k\cos 2t\sin 2x$

سوال 13.34: $k(\sin x - \sin 2x)$
جواب: $u = k(\cos t\sin x - \cos 2t\sin 2x)$

سوال 13.35: شکل 13.7-الف
جواب: $\frac{9\sqrt{3}k}{2\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos t\sin x + \frac{1}{2^2}\cos 2t\sin 2x - \frac{1}{4^2}\cos 4t\sin 4x\cdots\right)$



شکل 13.7: اشکال برائے سوالات 13.35، 13.36 اور 13.37

سوال 13.36: شکل 13.7-ب

جواب: $\frac{4}{5\pi}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2t\sin 2x - \frac{1}{6^2}\cos 6t\sin 6x + \frac{1}{10^2}\cos 10t\sin 10x\cdots\right)$

سوال 13.37: شکل 13.7-پ

جواب: $\frac{4k}{\pi^2}[2(\sqrt{2}-1)\cos t\sin x + \cos 2t\sin 2x - 2(\sqrt{2}-\frac{1}{9})\cos 3t\sin 3x\cdots]$

سوال 13.38: $kx(x-\pi)$

جواب: $\frac{8k}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos t\sin x - \frac{1}{3^2}\cos 3t\sin 3x - \frac{1}{5^2}\cos 5t\sin 5x\cdots\right)$

سوال 13.39:

$$f(x)=\begin{cases} kx^2 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ k(x-\pi)^2 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $4k[(1-\frac{2}{\pi})\cos t\sin x - \frac{1}{9}(1+\frac{2}{3\pi})\cos 3t\sin 3x\cdots]$

سوال 13.40:

$$f(x)=\begin{cases} kx^2 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ -k(x-\pi)^2 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $k(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi})\cos 2t\sin 2x + \frac{k\pi}{4}\cos 4t\sin 4x + k(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{27\pi})\cos 6t\sin 6x\cdots$

سوال 13.41 تا سوال 13.43 میں $c^2=1$ ہے، تار کی لمبائی $l=\pi$ ہے اور تار کے سرے ٹھوس نقطوں سے بندھے ہیں۔ ابتدائی رفتار $g(x)$ اور ابتدائی انحراف $f(x)$ ہیں۔ ارتعاش پذیر تار کی انحراف $u(x,t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.41: $f=0, \quad g=kx \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{2}); \quad g(x)=k(\pi-x) \quad (\frac{\pi}{2} \le x \le \pi)$
جواب: $\frac{4k}{\pi}\left(\frac{1}{1^3}\sin t \sin x - \frac{1}{3^3}\sin 3t \sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5t \sin 5x \cdots\right)$

سوال 13.42: $f=0, \quad g=k\sin 3x$
جواب: $\frac{k}{3}\sin 3t \sin 3x$

سوال 13.43: $f=k\sin 2x, \quad g=-k\sin 2x$
جواب: $-\frac{k}{2}\sin 2t \sin 2x$

سوال 13.44: تناو T چار گنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ $c^2=\frac{T}{\rho}$ ہے لہٰذا T چار گنا کرنے سے c دگنا ہو گا جس سے بنیادی انداز کی تعدد دگنی ہو گی۔

سوال 13.45: تار کی لمبائی چار گنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: بنیادی انداز کی تعدد چار گنا کم ہو گی۔

سوال 13.46 تا سوال 13.53 میں دیے گئے جزوی تفرقی مساوات کو علیحدگی متغیرات کے طریقہ سے حل کریں۔

سوال 13.46: $u_x+u_y=0$
جواب: $u=ce^{k(x+y)}$

سوال 13.47: $u_x-u_y=0$
جواب: $u=ce^{k(x-y)}$

سوال 13.48: $xu_x-yu_y=0$
جواب: $u=kxy$

سوال 13.49: $u_x-yu_y=0$
جواب: $u=cy^ke^{kx}$

سوال 13.50: $yu_x-xu_y=0$
جواب: $u=ce^{k(x^2+y^2)}$

سوال 13.51: $u_x + u_y = 2(x+y)u$
جواب: $u = ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$

سوال 13.52: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
جواب: $u = (A\cos kx + B\sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$

سوال 13.53: $u_{xy} - u = 0$
جواب: $u = ce^{x+y}$

سوال 13.54 تا سوال 13.58 لچکدار تار کی جبری ارتعاش پر مبنی ہیں۔

سوال 13.54: لچک دار تار کی جبری ارتعاش کا الجبرائی نمونہ درج ذیل جزوی تفرقی مساوات ہے جہاں اکائی لمبائی پر بیرونی قوت $P(x,t)$ تار کے عمودی عمل کرتا ہے۔

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho} \tag{13.28}$$

دیے گئے مسئلے سے اس جزوی تفرقی مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 13.55: سائن نما بیرونی قوت $P = A\rho\sin\omega t$ کی صورت میں درج ذیل ثابت کریں

$$\frac{P}{\rho} = A\sin\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

جہاں $k_n(t) = \frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin\omega t$ ہے۔یوں جفت n کی صورت میں $k_n = 0$ اور طاق n کی صورت میں $k_n = \frac{4A}{n\pi}\sin\omega t$ ہو گا۔مزید ثابت کریں کہ مساوات 13.11 میں

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

سوال 13.56: ثابت کریں کہ سوال 13.55 کے $\frac{P}{\rho}$ اور u کو مساوات 13.28 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin\omega t, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ثابت کریں کہ $\lambda_n^2 \neq \omega^2$ کی صورت میں اس کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t + \frac{2A(1-\cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

سوال 13.57: ایسے B_n اور B_n^* دریافت کریں کہ u ابتدائی شرائط $u(x,0) = f(x)$ اور $u_t(x,0) = 0$ کو مطمئن کرے (سوال 13.56)۔

سوال 13.58: ثابت کریں کہ گمگ $\lambda_n = \omega$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \sin \omega t - \frac{A}{n\pi\omega}(1-\cos n\pi) t \cos \omega t$$

13.4 مساوات موج کا دالومبیخ حل

گزشتہ حصہ میں مساوات موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.29}$$

کا حل مساوات 13.27 حاصل کیا گیا۔یہی حل نہایت آسانی سے مساوات 13.29 کا موزوں بدل لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نئے غیر تابع متغیرات[19]

$$v = x + ct, \quad z = x - ct \tag{13.30}$$

متعارف کرتے ہوئے u کو متغیرات v اور z کا تفاعل لکھتے ہیں۔اس طرح مساوات 13.29 میں تفرقات اب v اور z کے لحاظ سے زنجیری ترکیب (حصہ 10.7) کی مدد سے لکھے جائیں گے۔جزوی تفرق کو زیر نوشت سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 13.30 سے $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ لکھے جائیں گے۔ہم اپنی آسانی کے لئے ہم v اور z متغیرات کے تفاعل کو بھی u سے ظاہر کرتے ہیں۔اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

[19] یہاں بتلاتا چلوں کہ جزوی تفرقی مساوات کا عمومی نظریہ اس طرح کے تبادل حاصل کرنے کی قدم باقدم ترکیب پیش کرتی ہے۔

دائیں ہاتھ پر زنجیری ترکیب لاگو کرتے ہوئے اور $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ پر کرتے ہوئے

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

ملتا ہے۔مساوات 13.29 کی دوسری تفرق کو بھی اسی طرح لکھتے ہیں۔

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

ان نتائج کو مساوات 13.29 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0 \tag{13.31}$$

آپ نے دیکھا کہ نئے متغیرات متعارف کرنے سے حاصل مساوات 13.31 نہایت آسانی سے دو مرتبہ تکمل لینے سے حل ہو سکتی ہے۔ایک مرتبہ z کے ساتھ تکمل لینے سے

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

حاصل ہو گا جہاں نا معلوم تفاعل $h(v)$ متغیرہ v کے تابع ہو سکتا ہے۔اس کا تکمل v کے ساتھ لیتے ہیں

$$u = \int h(v)\,\mathrm{d}v + \psi(z)$$

جہاں $\psi(z)$ متغیرہ z کا نا معلوم تفاعل ہے۔درج بالا میں تکمل کا حاصل از خود v کا تفاعل ہو گا جس کو نا معلوم تفاعل $\phi(v)$ لکھتے ہوئے مساوات 13.31 کی مدد سے

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \tag{13.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو موج کی مساوات 13.29 کا **دالومبیغ حل**[20] کہتے[21] ہیں۔

تفاعل ϕ اور ψ کو ابتدائی معلومات سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔آئیں صفر ابتدائی رفتار اور ابتدائی انحراف $u(x,0) = f(x)$ کے لئے ان تفاعل کو حاصل کریں۔

مساوات 13.32 کا تفرق لیتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct) \tag{13.33}$$

[20] d'Alembert solution

[21] فرانسیسی ریاضی دان ژاں باٹیسٹ لی غوں دالومبیغ [1717-1783]

جہاں $(')$ سے مراد قوسین میں بند پوری دلیل $x+ct$ اور $x-ct$ کے لحاظ سے بالترتیب تفرق ہے۔ مساوات 13.32، مساوات 13.33 اور ابتدائی معلومات سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0)=\phi(x)+\psi(x)=f(x)$$
$$u_t(x,0)=c\phi'(x)-c\psi'(x)=0$$

آخری مساوات یعنی $\phi'=\psi'$ سے $\psi=\phi+k$ حاصل ہوتا ہے جس کو پہلی مساوات کے ساتھ ملا کر $2\phi+k=f$ یا $\phi=\frac{f-k}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ ان حاصل کردہ ϕ اور ψ کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.32 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] \tag{13.34}$$

جو عین مساوات 13.27 ہے۔ آپ یہاں تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات 13.27 پر لاگو ابتدائی سرحدی شرائط مساوات 13.12 کی بنا f طاق ہو گا اور اس کا دوری عرصہ $2l$ ہو گا۔

ہمارے اس نتیجہ کے تحت دو عدد ابتدائی شرائط اور سرحدی شرائط مل کر مساوات موج کا حل یکتا طور پر تعین کرتی ہیں۔

سوالات

سوال 13.59: مساوات 13.30 دیکھ کر x اور t کو v اور z کی صورت میں لکھتے ہوئے مساوات 13.31 سے مساوات 13.29 حاصل کریں۔

سوال 13.60 تا سوال 13.65 میں مساوات 13.34 استعمال کرتے ہوئے شکل 13.6 کی طرح مختلف لمحات پر تار کی انحراف $u(x,t)$ کی ترسیم کھینچیں۔ تار کی لمبائی اکائی (1) ہے اور اس کے دونوں سرے ہل نہیں سکتے ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر ہے جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ ہے۔ k کی کوئی بھی چھوٹی قیمت مثلاً $k=0.01$ لیں۔

سوال 13.60: $f(x)=k\sin 2\pi x$

سوال 13.61: $f(x)=kx(1-x)$

سوال 13.62: $f(x)=k(x-x^3)$

سوال 13.63: $f(x) = k(x^2 - x^4)$

سوال 13.64: $f(x) = k(x^3 - x^5)$

سوال 13.65: $f(x) = k \sin^2 \pi x$

سوال 13.66 تا سوال 13.70 میں دیے گئے تبادل استعمال کرتے ہوئے جزوی تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 13.66: $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x,\, z = xy)$

سوال 13.67: $u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x + y)$
جواب: $u = f_1(x) + f_2(x + y)$

سوال 13.68: $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x - y)$

سوال 13.69: $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x + y)$
جواب: $u = xf_1(x + y) + f_2(x + y)$

سوال 13.70: $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y,\, z = 2x - y)$

سوال 13.71: **خطی جزوی تفرقی مساوات کی اقسام**
درج ذیل طرز کی مساوات

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{13.35}$$

کو $AC - B^2 > 0$ کی صورت میں **بیضوی**[22]، $AC - B^2 = 0$ کی صورت میں **قطع مکافی**[23] اور $AC - B^2 < 0$ کی صورت میں **قطع زائد**[24] کہتے ہیں۔ یہاں A، B اور C از خود x اور y کے تفاعل ہو سکتے ہیں۔ مساوات 13.35 سطح xy کی مختلف حصوں میں مختلف قسم کا ہو سکتا ہے۔ تصدیق کریں کہ

لاپلاسی مساوات $u_{xx} + u_{yy} = 0$ بیضوی ہے
حراری مساوات $u_t = c^2 u_{xx}$ قطع مکافی ہے
جبکہ مساوات موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ قطع زائد ہے۔

---

[22] elliptic
[23] parabolic
[24] hyperbolic

اس کے برعکس $yu_{xx}+u_{yy}=0$ بالائی نصف سطح پر بیضوی، x محور پر قطع مکافی اور نچلی نصف سطح پر قطع زائد ہے۔

سوال 13.72: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع زائد ہو تب $v=\phi(x,y)$ اور $z=\psi(x,y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $u_{vz}=R^*(v,z,u,u_v,u_z)$ صورت میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں $\phi=c_1$ اور $\psi=c_2$ (c_1 اور c_2 مستقل ہیں) مساوات $Ay'^2-2By'+C=0$ کے حل $y=y(x)$ ہیں۔تصدیق کریں کہ مساوات 13.29 کی صورت میں درج ذیل تبادل حاصل ہوں گے۔

$$\phi=x+ct,\quad \psi=x-ct$$

جواب: مساوات موج کو $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ لکھ کر $A=1$ ، $B=0$ اور $C=-c^2$ ملتے ہیں۔چونکہ ہمارے متغیرات t اور x ہیں لہٰذا مساوات 13.35 کو $1u_{tt}+0-c^2u_{xx}=0$ لکھ سکتے ہیں۔یوں ہمیں $A(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2-2B(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2-c^2=0$ یعنی $(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2-c^2=0$ یا $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mp c$ کے حل درکار ہیں جو $x=\mp ct+k$ یعنی $x\mp ct=k$ ہیں۔یوں $\phi=x+ct$ اور $\psi=x-ct$ ملتے ہیں۔

سوال 13.73: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع مکافی ہو تب $v=x$ اور $z=\psi(x,y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $u_{vv}=R^*(v,z,u,u_v,u_z)$ صورت میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں ψ حاصل کرنے کی ترکیب سوال 13.72 میں دی گئی ہے۔اس حقیقت کو سوال 13.68 کی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔
جواب: $y'^2-2y'+1=(y'-1)^2=0$ سے $y=x+c$ یا $\psi(x,y)=x-y$ ملتا ہے۔ $v=x$ اور $z=x-y$ ہیں۔

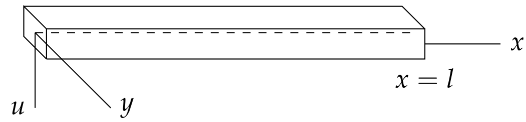
سوال 13.74 تا سوال 13.78 شہتیر کی لرزش میں مبنی ہیں۔

سوال 13.74: افقی شہتیر (شکل 13.8-الف) کی انتصابی لرزش درج ذیل جزوی تفرقی مساوات دیتی ہے

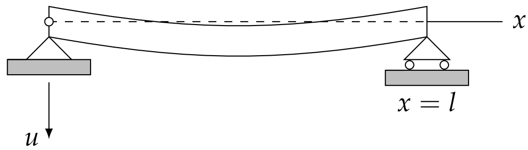
$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4u}{\partial x^4}=0\qquad c^2=\frac{EI}{\rho A}\tag{13.36}$$

جہاں E ینگ مقیاس لچک، محور y کے لحاظ سے I جمودی معیار اثر، ρ کثافت اور A رقبہ عمودی تراش ہیں۔ مساوات 13.36 میں $u=F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے علیحدگی متغیرات سے درج ذیل حاصل کریں۔

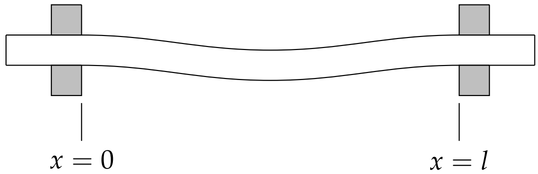
$$\begin{aligned}
&\frac{F^{(4)}}{F}=-\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\beta^4=\text{مستقل},\\
&F(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x+C\cosh\beta x+D\sinh\beta x,\\
&G(t)=a\cos c\beta^2t+b\sin c\beta^2t
\end{aligned}$$



(الف) شہتیر کی ساخت



(ب) شہتیر کے سر آزاد پڑے ہیں



(پ) شہتیر کے سر جکڑے ہیں

شکل 13.8: شہتیر کی لرزش

سوال 13.75: ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے مساوات 13.36 کے وہ حل $u_n = F_n(x)G_n(t)$ دریافت کریں جو درج ذیل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں (شکل 13.8-ب)۔

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$ شہتیر کے دونوں سر دیوار پر آزاد رکھے گئے ہیں

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0$$ یوں سروں پر صفر معیار اثر لہٰذا صفر گولائی ہو گی

جواب:

$$F_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad G_n = a_n \cos \frac{cn^2\pi^2 t}{l^2}$$

سوال 13.76: مساوات 13.36 کا وہ حل جو سوال 13.75 کے شرائط کے ساتھ ساتھ ابتدائی انحراف $u(x,0) = f(x) = x(l-x)$ کو مطمئن کرتا ہو حاصل کریں۔

سوال 13.77: شہتیر کے دونوں سروں سے جکڑنے سے کیا ابتدائی شرائط پیدا ہوں گے (شکل 13.8-پ)؟
جواب: $u(0,t) = 0, \quad u(l,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0$

سوال 13.78: تصدیق کریں کہ سوال 13.74 میں حاصل $F(x)$ سوال 13.77 میں دی گئی شرائط کو اس صورت مطمئن کرتا ہے جب βl درج ذیل مساوات کے جذر ہوں۔

$$\cosh \beta l \cos \beta l = 1 \tag{13.37}$$

مساوات 13.37 کے چند حل کا تخمینہ لگائیں۔

13.5 یک بعدی بہاو حرارت

ہم جنسی مادّہ میں حرارت کی بہاو حراری مساوات (حصہ 11.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

دیتی ہے جہاں $u(x, y, z, t)$ جسم کا درجہ حرارت، K جسم کی حراری موصلیت، σ جسم کی مخصوص حراری استعداد اور ρ جسم کے مادّہ کی کثافت ہے۔ $\nabla^2 u$ درجہ حرارت u کا لاپلاسی ہے جو کارتیسی نظام کی محدد x ، y ، z کے لحاظ سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

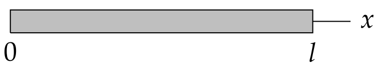
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

آئیں ایک لمبی سلاخ یا تار جو x محور پر رکھی گئی ہو میں درجہ حرارت پر غور کرتے ہیں (شکل 13.9)۔ یہ سلاخ ہم جنسی مادّہ سے بنی ہے اور اس کا رقبہ عمودی تراش یکساں ہے۔ اس سلاخ کے اطراف کو مکمل طور پر غیر موصل سے گھیر کر حاجز شدہ کیا گیا ہے لہٰذا سلاخ میں حرارت کی بہاو صرف لمبائی کے رخ ممکن ہے۔ اس طرح u صرف x اور t پر منحصر ہو گا لہٰذا حراری مساوات درج ذیل **یک بعدی حراری مساوات**[25] کی صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.38}$$

ہم مساوات 13.38 کو کئی اہم سرحدی شرائط اور ابتدائی شرائط کے لئے حل کرتے ہیں۔ ہم یک بعدی حراری مساوات کو مساوات موج کی طرح حل کرتے ہوئے دیکھیں گے کہ اس کا حل مکمل طور پر مساوات موج کے حل سے مختلف

[25] one dimensional heat equation



شکل 13.9: لمبی سلاخ

ہو گا۔اس کی وجہ یہ ہے کہ حراری مساوات میں $\frac{\partial u}{\partial t}$ جبکہ مساوات موج میں $\frac{\partial u}{\partial t^2}$ پایا جاتا ہے۔ (یوں سوال 13.71 میں جزوی تفرقی مساوات کی درجہ بندی یقیناً نہایت اہمیت کے حامل ہے۔)

آئیں پہلے اس صورت کو دیکھیں جہاں سلاخ کے سر $x = 0$ اور $x = l$ صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہوں۔اس طرح **سرحدی شرائط** تمام t کے لئے

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{13.39}$$

ہوں گے جو ہو بہو مساوات 13.12 کی طرح ہیں۔فرض کریں کہ سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔یوں **ابتدائی شرط**

$$u(x,0) = f(x) \tag{13.40}$$

ہو گی۔ہم مساوات 13.38 کا ایسا حل $u(x,t)$ دریافت کرتے ہیں جو مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

پہلا قدم۔ ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.38 کا ایسا حل حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.39 کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔یوں درج ذیل سے شروع کرتے ہیں۔

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{13.41}$$

مساوات 13.41 اور اس کے تفرق کو مساوات 13.38 میں پر کرتے ہوئے

$$F\dot{G} = c^2 F'' G$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $(')$ سے مراد x کے ساتھ تفرق اور $(\cdot)$ سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو $c^2 FG$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} \tag{13.42}$$

ملتا ہے جس کا بایاں ہاتھ صرف t اور دایاں ہاتھ صرف x پر منحصر ہے لہٰذا حصہ 13.3 کی طرح ہم اخذ کرتے ہیں کہ مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کسی مستقل مثلاً k کے برابر ہوں گے۔آپ خود تسلی کر سکتے ہیں کہ

$k \geq 0$ سے حاصل حل $u = FG$ جو مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا ہو $u \equiv 0$ ہے (جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے ہیں)۔اس طرح مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کو منفی $k = -p^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{13.43}$$

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \tag{13.44}$$

دوسرا قدم۔ مساوات 13.43 کا عمومی حل

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \tag{13.45}$$

ہے لہٰذا مساوات 13.39 کے تحت

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l,t) = F(l)G(t) = 0$$

ہو گا۔اب $G(t) \equiv 0$ کی صورت میں $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہٰذا ہم $F(0) = 0$ اور $F(l) = 0$ چنتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں مساوات 13.45 سے $F(0) = A = 0$ اور

$$F(l) = B\sin pl = 0$$

ملتے ہیں جہاں $B = 0$ لینے سے $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہٰذا $B \neq 0$ اور

$$\sin px = 0 \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

ہوں گے۔اس طرح $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات 13.42 کو مطمئن کرنے والا مساوات 13.43 کا درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

یہاں بھی حصہ 13.3 کی طرح $n = -1, -2, \cdots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے۔

ہم اب مساوات 13.44 پر غور کرتے ہیں جو $p = \frac{n\pi}{l}$ کی صورت میں درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

اس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

ہے جہاں B_n مستقل ہے۔اس طرح مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا مساوات 13.38 کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.46}$$

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو مساوات 13.40 کو بھی مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}\right) \tag{13.47}$$

جو مساوات 13.40 کے ساتھ مل کر

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

دیتی ہے۔یوں اگر مساوات 13.47 نے مساوات 13.40 کو مطمئن کرنا ہو تب B_n یوں منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x,0)$ تفاعل $f(x)$ کی طاق دوری توسیع کی تسلسل یعنی فوریئر سائن تسلسل ہو جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے (مساوات 12.34)۔

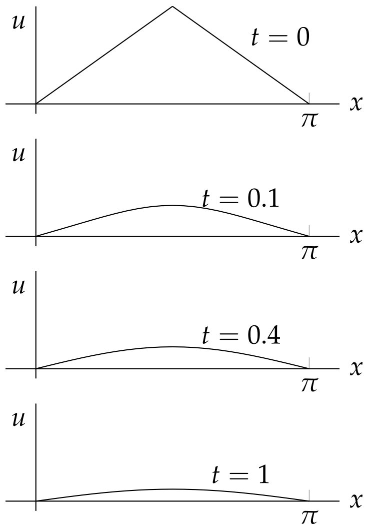
$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.48}$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ وقفہ $0 \le x \le l$ پر تفاعل $f(x)$ ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہے اور اس وقفہ کے تمام اندرونی نقطوں پر اس کے یک طرفہ تفرق (شکل 12.4) پائے جاتے ہیں۔ان شرائط کے ساتھ مساوات 13.47 میں دی گیا تسلسل، جس کے عددی سر مساوات 13.48 دیتی ہے، ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔

حاصل حل میں قوت نمائی جزو کی بنا جیسے جیسے t لامتناہی کے قریب تر پہنچے مساوات 13.47 کے تمام ارکان ویسے ویسے صفر کے قریب تر پہنچتے ہیں۔تنزل کی شرح n پر منحصر ہو گی۔

مثال 13.3: ابتدائی درجہ حرارت

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ l - x & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$



شکل 13.10: مختلف لمحات پر مثال 13.3 کا حل

اور $l=\pi$ کی صورت میں مساوات 13.48 سے

$$B_n=\frac{2}{l}\Big(\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\Big) \tag{13.49}$$

ملتا ہے جو طاق n کی صورت میں $B_n=0$ اور جفت n کی صورت میں

$$B_n=\frac{4}{n^2\pi}\qquad(n=1,5,9,\cdots)$$
$$B_n=-\frac{4}{n^2\pi}\qquad(n=3,7,11,\cdots)$$

دیتا ہے۔یوں حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 13.10 میں دکھایا گیا ہے۔اس کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\Big[\sin xe^{-c^2t}-\frac{1}{9}\sin 3xe^{-9c^2t}+\cdots\Big]$$

□

سوالات

سوال 13.79: شکل 13.10 کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔دونوں میں کیا اہم فرق پایا جاتا ہے۔
جواب: شکل 13.10 غیر ارتعاشی ہے جبکہ مساوات موج کا حل ارتعاشی ہے

سوال 13.80: مساوات 13.46 میں کسی مخصوص n کے لئے K ، σ اور ρ کا تنزل پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟
جواب: K بڑھنے سے تنزل بڑھتی ہے جبکہ σ اور ρ کے بڑھنے سے تنزل گھٹتی ہے۔

سوال 13.81: u_1 ، u_2 اور u_3 کا ترسیم $B_n = 1$ ، $c = 1$ اور $l = \pi$ لیتے ہوئے $t = 0$ ، $t = 1$ اور $t = 2$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.82: ایک سلاخ جس کے اطراف مکمل طور حاجز شدہ ہیں کے سر برقرار $u(0, t) = U_1$ اور $u(0, l) = U_2$ پر رکھے گئے ہیں۔سلاخ کی لمبائی l ہے۔بہت دیر بعد (یعنی $t \to \infty$ پر) سلاخ میں درجہ حرارت $u_I(x)$ دریافت کریں۔
جواب: $u_I = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l}$ جہاں $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.83 تا سوال 13.88 میں لوہے کی سلاخ کا درجہ حرارت $u(x, t)$ دریافت کریں۔ سلاخ کی لمبائی $L = 1\,\mathrm{m}$ ہے جبکہ لوہے کے مستقل $K = 73\,\mathrm{W\,m^{-1}\,{}^{\circ}C^{-1}}$ ، $\sigma = 444\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,{}^{\circ}C^{-1}}$ اور $\rho = 7860\,\mathrm{kg/m^3}$ ہیں۔ سلاخ کا رقبہ عمودی تراش $1\,\mathrm{cm^2}$ ہے جبکہ اس کے سر $0\,{}^{\circ}\mathrm{C}$ پر برقرار رکھے گئے ہیں۔ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔سلاخ کے اطراف حاجز شدہ ہیں۔

سوال 13.83:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u = \frac{4}{\pi^2}(e^{-\lambda_1^2 t}\sin \pi x - \frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t}\sin 3\pi x + - \cdots)$

سوال 13.84: $f(x) = \sin \pi x$
جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u = e^{-\lambda_1^2 t}\sin \pi x$

سوال 13.85:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<\frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

جواب: $\lambda_1^2=\frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u=(\frac{2}{\pi^2}-\frac{4}{\pi^3})e^{-\lambda_1^2 t}\sin\pi x+(\frac{1}{4\pi}-\frac{1}{\pi^3})e^{-4\lambda_1^2 t}\sin 2\pi x\cdots$

سوال 13.86: $f(x)=x(L-x)$
جواب: $\lambda_1^2=\frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u=\frac{8}{\pi^3}(e^{-\lambda_1^2 t}\sin\pi x+\frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t}\sin 3\pi x+\cdots)$

سوال 13.87: $f(x)=x(L-x^2)$
جواب: $\lambda_1^2=\frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u=\frac{12}{\pi^3}e^{-\lambda_1^2 t}\sin\pi x-\frac{3}{2\pi^3}e^{-4\lambda_1^2 t}\sin 2\pi x\cdots$

سوال 13.88: $f(x)=x\sin\pi x$
جواب: $\lambda_1^2=\frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u=\frac{1}{2}e^{-\lambda_1^2 t\sin\pi x-\frac{16}{9\pi^2}e^{-4\lambda_1^2 t}\sin 2\pi x}\cdots$

سوال 13.89: ایک سلاخ جس کی لمبائی L ہے ہر طرف سے (بشمول دونوں سر) حاجز شدہ ہے۔ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔طبعی معلومات: سلاخ کے سر سے حراری توانائی کا اخراج سر پر $\frac{\partial u}{\partial x}$ کے راست تناسب ہو گا۔ تصدیق کریں کہ دی گئی معلومات درج ذیل کے مترادف ہے۔

$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\quad u(x,0)=f(x)$$

علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{-\lambda_n^2 t},\qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$$

جہاں A_0 اور A_n مساوات 12.32 سے درج ذیل ہیں۔

$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x,\quad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,\cdots$$

سوال 13.90: سوال 13.89 میں $t\to\infty$ پر $u\to A_0$ ملتا ہے۔کیا یہ آپ کے توقع کے مطابق ہے؟

سوال 13.91 تا سوال 13.95 کو سوال 13.89 میں دی گئی صورت حال کے لئے حل کریں جہاں $l=\pi$ اور $c=1$ ہیں۔

سوال 13.91: $f(x)=1$
جواب: $u(x,t)=1$

سوال 13.92: $f(x)=x$
جواب: $u=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(e^{-t}\cos x+\frac{1}{9}e^{-9t}\cos 3x+\frac{1}{25}e^{-25t}\cos 5x\cdots)$

سوال 13.93: $f(x)=x^2$
جواب: $u=\frac{\pi^2}{3}-4(e^{-t}\cos x-\frac{1}{4}e^{-4t}\cos 2x+\frac{1}{9}e^{-9t}\cos 3x\cdots)$

سوال 13.94:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{L}{2} \\ L-x & \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

جواب: $u=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(e^{-4t}\cos 2x+\frac{1}{9}e^{-36t}\cos 6x+\frac{1}{25}e^{-100t}\cos 10x\cdots)$

سوال 13.95:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\frac{L}{2} \\ -1 & \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

جواب: $u=\frac{4}{\pi}(e^{-t}\cos x-\frac{1}{3}e^{-9t}\cos 3x+\frac{1}{5}e^{-25t}\cos 5x\cdots)$

سوال 13.96: فرض کریں کہ سوال 13.82 میں ابتدائی درجہ حرارت $u(x,0)=f(x)$ ہے۔ثابت کریں کہ کسی بھی لمحے پر سلاخ میں درجہ حرارت $u(x,y)=u_I(x)+u_{II}(x,t)$ ہو گی جہاں u_I پہلی کی طرح ہے جبکہ u_{II} درج ذیل ہے

$$u_{II}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}t}$$

جہاں B_n درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{2}{l}\int_0^l[f(x)-u_I(x)]\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{n\pi}[(-1)^nU_2-U_1]\end{aligned}$$

13.6 لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاو حرارت

ہم اطراف سے حاجز شدہ ایسی سلاخ جو دونوں جانب لامتناہی تک لمبی ہو کی صورت میں حراری مساوات

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.50}$$

پر غور کریں گے۔ایسی صورت میں ہمارے پاس کوئی سرحدی شرط نہیں ہے جبکہ ابتدائی معلومات درج ذیل ہے۔

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{13.51}$$

اس مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.50 میں $u(x,t) = F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{13.52}$$

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \tag{13.53}$$

جن کا موازنہ مساوات 13.43 اور مساوات 13.44 کے ساتھ کرتے ہوئے درج ذیل حل لکھے جا سکتے ہیں

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \quad \text{اور} \quad G(t) = e^{-c^2 p^2 t}$$

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔اس طرح مساوات 13.50 کا حل

$$u(x,t;p) = FG = (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2 p^2 t} \tag{13.54}$$

ہو گا۔[گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی علیحدگی کا مستقل k منفی لینا ہو گا یعنی $k = -p^2$ چونکہ مثبت k کی صورت میں مساوات 13.54 میں مسلسل بڑھتی قوت نمائی تفاعل پیدا ہوتا ہے جس کا کوئی طبعی مطلب ممکن نہیں ہے۔]

مساوات 13.54 کی تفاعل میں p کی قیمتوں کو کسی مستقل عدد کا ضربی لے کر ان تفاعل کی تسلسل لکھی جا سکتی ہے لیکن ایسی تسلسل لمحہ $t = 0$ پر x کے لحاظ سے دوری ہو گی لیکن $f(x)$ غیر دوری ہے۔یوں فطری بات ہے کہ ہم فوریئر تسلسل کی بجائے فوریئر تکمل کی طرف رجحان کریں۔

چونکہ مساوات 13.54 میں A اور B اختیاری مستقل ہیں لہٰذا ہم انہیں p کے تفاعل $A = A(p)$ اور $B = B(p)$ تصور کر سکتے ہیں۔چونکہ حراری مساوات خطی اور ہم جنسی ہے لہٰذا

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;p)\,\mathrm{d}p = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]e^{-c^2p^2t}\,\mathrm{d}p \tag{13.55}$$

مساوات 13.50 کا حل ہو گا بشرطیکہ یہ تکمل موجود ہو اور یہ دو مرتبہ x کے ساتھ اور ایک مرتبہ t کے ساتھ قابل تفرق ہو۔

مساوات 13.55 اور ابتدائی معلومات مساوات 13.51 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0) = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]\,\mathrm{d}p = f(x) \tag{13.56}$$

مساوات 12.69 اور مساوات 12.70 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos pv\ \mathrm{d}v, \quad B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin pv\ \mathrm{d}v \tag{13.57}$$

صفحہ 952 پر مساوات 12.82 کے تحت اس تکمل کو

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(px - pv)\ \mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}p$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 13.55 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(px - pv)e^{-c^2p^2t}\ \mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}p$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس دوہرا تکمل کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے ہم اس کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\Big[\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px - pv)\ \mathrm{d}p\Big]\,\mathrm{d}v \tag{13.58}$$

اندرونی تکمل کو درج ذیل کلیہ کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-s^2}\cos 2bs\ \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2} \tag{13.59}$$

مساوات 13.59 میں نیا متغیرہ p متعارف کرتے ہوئے $s = cp\sqrt{t}$ لکھ کر اور

$$b = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}$$

لیتے ہوئے مساوات 13.59 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\int_0^{\infty} e^{-c^2p^2t} \cos(px - pv) \, \mathrm{d}p = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}$$

جس کو مساوات 13.58 میں پر کرتے ہوئے

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}} \, \mathrm{d}v \tag{13.60}$$

ملتا ہے۔آخر میں ہم تکمل کا متغیرہ $z = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ متعارف کرتے ہوئے

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} \, \mathrm{d}z \tag{13.61}$$

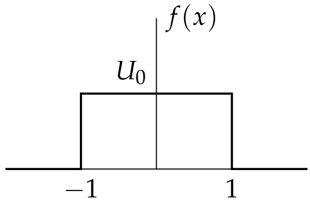
حاصل کرتے ہیں۔ تمام x کے لئے محدود $f(x)$ اور ہر محدود وقفہ پر قابل تکمل $f(x)$ کی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مساوات 13.60 اور مساوات 13.61 دونوں مساوات 13.50 اور مساوات 13.51 کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ موجودہ مسئلے کا حل ہیں۔

مثال 13.4: لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں درجہ حرارت
لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت درج ذیل ہے (شکل 13.4)۔

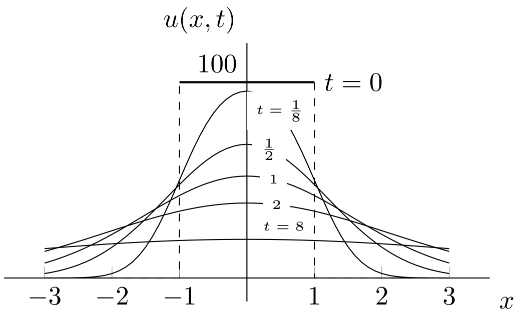
$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{مستقل} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

مساوات 13.60 سے

$$u(x,t) = \frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}} \, \mathrm{d}v$$



شکل 13.11: ابتدائی درجہ حرارت (مثال 13.4)



شکل 13.12: حل $u(x,t)$ برائے مثال 13.4

لکھتے ہیں۔ تکمل کا نیا متغیرہ $z=\frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ استعمال کرتے ہوئے -1 تا 1 پر v کا تکمل $\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}$ تا $\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}$ پر z کے تکمل میں تبدیل ہو گا یعنی؛

$$u(x,t)=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \qquad (z>0) \tag{13.62}$$

اس تکمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے البتہ اس کو تفاعل خلل[26] کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 13.12 میں $u(x,t)$ کو $U_0=100\,°\mathrm{C}$ ، $c^2=1\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ کے لئے لمحات $t=\frac{1}{8},\frac{1}{2},1,2,8$ پر دکھایا گیا ہے۔ □

[26] error function

سوالات

سوال 13.97: نقطہ $x = 0.5, 1, 1.5$ پر مثال 13.4 میں $U_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ اور $c^2 = 1\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ لے کر حاصل کردہ درجہ حرارت $u(x,t)$ کی ترسیم مختلف لمحات پر کھینچیں۔کیا جوابات آپ کی سوچ کے مطابق ہیں؟

تفاعل خلل درج ذیل تکمل کو کہتے ہیں

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} \, \mathrm{d}w$$

جو انجینئری میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔اس سے واقفیت پیدا کرنے کی خاطر سوال 13.98 تا سوال 13.105 حل کریں۔

سوال 13.98: تصدیق کریں کہ تفاعل خلل طاق ہے۔

سوال 13.99: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_a^b e^{-w^2} \, \mathrm{d}w = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a), \qquad \int_{-b}^b e^{-w^2} \, \mathrm{d}w = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} b$$

سوال 13.100: قلم و کاغذ سے متکمل e^{-w^2} کی قیمتوں کا جدول بناتے ہوئے اس کی ترسیم کھینچیں جو قوس جرس[27] کہلاتی ہے۔

سوال 13.101: قوس جرس (جس کو آپ نے سوال 13.100 میں حاصل کیا) کے نیچے رقبہ معلوم کرتے ہوئے $\operatorname{erf} x$ کا جدول $x = 0, 0.2, 0.4, \cdots, 1, 1.5, 2$ کے لئے حاصل کریں۔قوس جرس پر افقی اور انتصابی لکیریں کھینچ کر قوس کے نیچے مکعب گن کر رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔
جوابات: نقطہ اعشاریہ کے بعد صرف دو اعداد لیتے ہوئے۔
$0.00, 0.22, 0.43, 0.60, 0.74, 0.84, 0.97, 1.00$

سوال 13.102: تفاعل خلل کی متکمل e^{-w^2} کی مکلارن تسلسل حاصل کریں۔اس تسلسل کا تکمل لے کر تفاعل خلل $\operatorname{erf} x$ کی مکلارن تسلسل دریافت کریں۔
جواب: $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} \cdots\right)$

---
[27] bell curve

سوال 13.103: مساوات 13.62 سے درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$u(x,t)=\frac{U_0}{2}\Big[\operatorname{erf}\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}+\operatorname{erf}\frac{1+x}{2c\sqrt{t}}\Big] \qquad (t>0)$$

سوال 13.104: اگر $x>0$ کی صورت میں $f(x)=1$ اور $x<0$ کی صورت میں $f(x)=0$ ہو تب تصدیق کریں کہ مساوات 13.61 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \qquad (t>0)$$

سوال 13.105: چونکہ $\operatorname{erf}\infty=1$ ہے لہٰذا سوال 13.104 سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x}{2c\sqrt{t}}$$

سوال 13.106: نصف لامتناہی لمبی سلاخ (0 تا ∞) کے $x=0$ پر سر کو صفر درجہ پر رکھا گیا ہے جبکہ اس کی ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ثابت کریں کہ اس مسئلہ کا حل درج ذیل ہے جہاں $\tau=2c\sqrt{t}$ ہے۔

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\int_{-\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(x+\tau w)e^{-w^2}\,\mathrm{d}w-\int_{\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(-x+\tau w)e^{-w^2}\,\mathrm{d}w\Big] \tag{13.63}$$

سوال 13.107: $f(v)$ کو طاق تصور کرتے ہوئے مساوات 13.60 سے مساوات 13.63 حاصل کریں۔

سوال 13.108: $f(x)=1$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ سوال 13.106 میں درج ذیل حل حاصل ہو گا۔

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w=\operatorname{erf}\frac{x}{2c\sqrt{t}} \qquad (t>0)$$

سوال 13.109: درج ذیل ابتدائی معلومات کی صورت میں مساوات 13.63 کیا صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x)=\begin{cases}1 & a<x<b \qquad (a>0)\\ 0 & \text{باقی جگہوں پر}\end{cases}$$

جواب:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{a-x}{\tau}}^{\frac{b-x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{a+x}{\tau}}^{\frac{b+x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w$$

سوال 13.110: $x>0$ پر $f(x)=1$ اور $x<0$ پر $f(x)=-1$ لیتے ہوئے مساوات 13.60 یا مساوات 13.61 کی استعمال سے سوال 13.108 کا نتیجہ حاصل کریں۔

سوال 13.111: ثابت کریں کہ سوال 13.60 میں کوئی دو نقطے کا ایک ہی درجہ حرارت تک پہنچنے کے لئے درکار وقت ان نقطوں کا سرحد $x=0$ سے فاصلہ کے مربع کے راست تناسب ہو گا۔

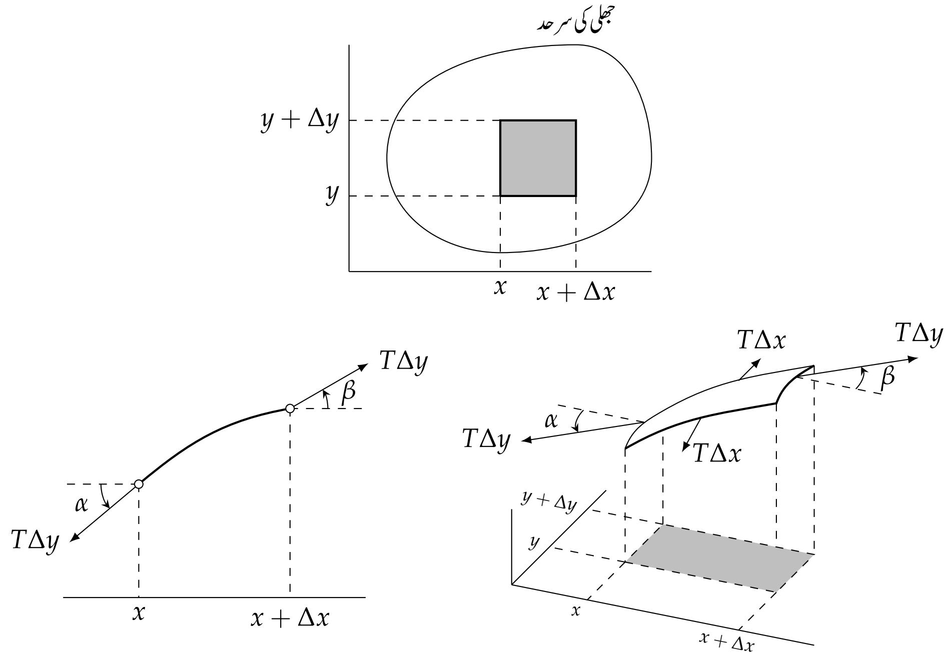
13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج

ارتعاش کی میدان میں ایک اور اہم مسئلے کے طور پر تنی ہوئی جھلی، مثلاً طبل پر چڑھا ہوا چمڑے کا پردہ، کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ موجودہ تجزیہ حصہ 13.2 میں ارتعاش تار کی مانند ہو گا۔

ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

(الف) اکائی رقبہ پر جھلی کی کمیت یکساں ہے (ہم جنسی جھلی)۔ جھلی مکمل لچکدار اور اتنی باریک ہے کہ مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتی ہے۔
(ب) جھلی کو تان کر، اس کی پوری سرحد سے xy مستوی میں باندھا گیا ہے۔ جھلی میں ہر نقطہ پر اور ہر رخ فی اکائی لمبائی تناو T یکساں ہے جو ارتعاش کے دوران تبدیل نہیں ہوتی۔
(پ) حرکت کے دوران جھلی کی انحراف $u(x,y,t)$، جھلی کی جسامت کے لحاظ سے کم ہے اور تمام زاویہ میلان چھوٹے ہیں۔

اگرچہ حقیقت میں ان مفروضوں پر مکمل طور پورا اترنا ممکن نہیں ہے، پتلی جھلی کی قلیل عرضی لرزش ان مفروضوں پر تقریباً پورا اترتی ہیں۔



شکل 13.13: ارتعاش پذیر جھلی

جھلی کی حرکت کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم جھلی کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرتے ہیں (شکل 13.13)۔ چونکہ جھلی کی انحراف اور زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہٰذا اس ٹکڑے کے اطراف کی لمبائی تقریباً Δx اور Δy ہو گی۔ اکائی لمبائی پر قوت کو تناو T کہتے ہیں لہٰذا اس ٹکڑے کے اطراف پر قوت $T\Delta x$ اور $T\Delta y$ عمل کرے گی۔ چونکہ جھلی مکمل لچکدار ہے لہٰذا یہ قوتیں جھلی کی مماسی ہوں گی۔

ہم پہلے قوتوں کی افقی اجزاء پر غور کرتے ہیں۔ اطراف پر قوت کو زاویہ میلان کی کوسائن سے ضرب دینے سے ان کی افقی جزو حاصل ہو گی۔ چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہٰذا ان کی کوسائن تقریباً اکائی (1) کے برابر ہوں گے۔ یوں مخالف کناروں پر تقریباً برابر قوتیں پائی جائیں گی۔ یوں افقی رخ جھلی کی حرکت قابل نظر انداز ہو گی لہٰذا ہم جھلی کی حرکت کو عرضی حرکت تصور کرتے ہیں یعنی جھلی صرف اوپر نیچے حرکت کرتی ہے۔

اس ٹکڑے کی کناروں پر کھڑی رخ (yu سطح کی متوازی) قوتوں کے اجزاء[28]

$$T\Delta y\,\sin\beta \quad \text{اور} \quad -T\Delta y\,\sin\alpha$$

ہوں گے جہاں منفی علامت نیچے رخ کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں ہم ان کے $\sin$ کی جگہ ان کے $\tan$ استعمال[29] کر سکتے ہیں۔ یوں ان دو عدد قوتوں کا مجموعہ

$$\begin{aligned} T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) &\approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \end{aligned} \tag{13.64}$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں جبکہ y اور $y+\Delta y$ کے درمیان y_1 اور y_2 کوئی نقطے ہیں۔ اسی طرح ٹکڑے کے باقی دو کناروں پر قوتوں کے انتصابی اجزاء کا مجموعہ

$$T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)] \tag{13.65}$$

ہو گا جہاں x اور $x+\Delta x$ کے درمیان x_1 اور x_2 کوئی نقطے ہیں۔

نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت مساوات 13.64 اور مساوات 13.65 میں دی گئی قوتوں کا مجموعہ جھلی کے ٹکڑے کی کمیت $\rho\Delta A$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا۔ یہاں بلا انحراف فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے جبکہ بلا انحراف ٹکڑے کا رقبہ $\Delta A = \Delta x\Delta y$ ہے۔ یوں

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

ہو گا جہاں بائیں ہاتھ تفرق ٹکڑے کے کسی موزوں نقطہ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ پر حاصل کیا جائے گا۔ $\rho\Delta x\Delta y$ سے دونوں اطراف کو تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\Big[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\Big]$$

Δx اور Δy کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے درج ذیل جزوی تفرقی مساوات حاصل ہو گی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{13.66}$$

[28] دھیان رہے کہ کنارے پر چلتے ہوئے زاویہ میلان تبدیل ہو گا۔ α اور β زیر غور کنارے کے کسی موزوں نقطہ پر زاویہ میلان ہوں گے۔
[29] چھوٹے زاویہ θ کا $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$ ہوتا ہے۔

جس کو **دو ابعادی مساوات موج**[30] کہتے ہیں۔قوسین میں بند u کا لاپلاسی $\nabla^2 u$ ہے (حصہ 10.8) لٰہذا مساوات 13.66 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \tag{13.67}$$

13.8 مستطیل جھلی

ارتعاش پذیر جھلی کے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل دو ابعادی مساوات موج کا حل $u(x,y,t)$ تلاش کرنا ہو گا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{13.68}$$

جو تمام $t \geq 0$ کے لئے پوری سرحد پر سرحدی شرط

$$u = 0 \tag{13.69}$$

اور دو عدد ابتدائی شرائط

$$u(x,y,0) = f(x,y) \qquad \text{ابتدائی انحراف} \tag{13.70}$$

اور

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x,y) \qquad \text{ابتدائی رفتار} \tag{13.71}$$

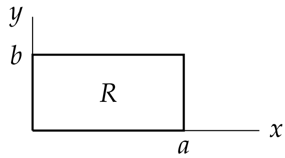
کو مطمئن کرتا ہو۔یہ شرائط ارتعاش پذیر تار کے شرائط کی مانند ہیں۔آئیں شکل 13.14 میں دکھائی گئی مستطیل جھلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.68 کا ایسا حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.69 کو مطمئن کرتا ہو۔یوں

$$u(x,y,t) = F(x,y)G(t) \tag{13.72}$$

---

[30] two dimensional wave equation



شکل13.14: مستطیل جھلی

کو مساوات 13.68 میں پر کرتے ہیں

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

جہاں $(')$ جزوی تفرق اور $(\cdot)$ وقت t کے ساتھ تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy})$$

ملتا ہے۔اب بایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر نہیں ہے لہٰذا دونوں اطراف کسی مستقل A کے برابر ہیں۔آپ حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہوئے تسلی کر سکتے ہیں کہ A کے صرف منفی قیمتیں استعمال کرنے سے ایسا غیر صفر حل حاصل ہو گا جو مساوات 13.69 کی شرط کو مطمئن کرتا ہو۔اس منفی مستقل کو $-\nu^2$ سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -\nu^2$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دو علیحدہ علیحدہ سادہ تفرقی مساوات

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad (\lambda = c\nu) \tag{13.73}$$

$$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0 \tag{13.74}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

ہم مساوات 13.74 کا حل تلاش کرتے ہیں جو جھلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہو گا۔ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب دوبارہ لاگو کرتے ہوئے

$$F(x,y) = H(x)Q(y) \tag{13.75}$$

لیتے ہیں جو کو مساوات 13.74 میں پر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} Q = -\left(H \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 HQ\right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کے دونوں اطراف کو HQ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{H} \frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 Q\right)$$

ملتا ہے جہاں بائیں ہاتھ تفاعل صرف x پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف y پر منحصر ہے۔یوں دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔یہاں بھی صرف منفی قیمت کا مستقل مثلاً $-k^2$ غیر صفر حل دیتے ہیں۔یوں

$$\frac{1}{H} \frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 Q\right) = -k^2$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} + k^2 H = 0 \tag{13.76}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + p^2 Q = 0 \qquad (p^2 = \nu^2 - k^2) \tag{13.77}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ مساوات 13.76 اور مساوات 13.77 کے حل عمومی

$$H(x) = A\cos kx + B\sin kx \quad \text{اور} \quad Q(y) = C\cos py + D\sin py$$

ہیں جہاں A ، B ، C اور D مستقل ہیں۔یوں مساوات 13.72 اور مساوات 13.69 سے ظاہر ہے کہ جھلی کی سرحد پر $F = HQ$ صفر ہو گا۔جیسا آپ شکل 13.14 سے دیکھ سکتے ہیں، جھلی کی سرحد $x = 0$ ، $x = a$ ، $y = 0$ اور $y = b$ ہے۔یوں درج ذیل شرائط لکھے جا سکتے ہیں۔

$$H(0) = 0, \quad H(a) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0$$

اس طرح $H(0) = A = 0$ ہو گا جبکہ

$$H(a) = B\sin ka = 0$$

میں $B=0$ لینے سے (غیر دلچسپ حل) $H\equiv 0$ یعنی $F\equiv 0$ ملتا ہے لہٰذا ہم $B\neq 0$ فرض کرتے ہیں۔یوں $\sin ka=0$ ہو گا جس سے $ka=m\pi$ یعنی

$$k=\frac{m\pi}{a} \qquad (m \text{ عدد صحیح}) \tag{13.78}$$

حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح $C=0$ جبکہ $D\neq 0$ سے $p=\frac{n\pi}{b}$ حاصل ہوتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔یوں درج ذیل حل ملتے ہیں۔

$$H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a} \quad \text{اور} \quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad {\scriptstyle m=1,2,\cdots \atop n=1,2,\cdots}$$

(ارتعاش پذیر تار کی طرح یہاں بھی $m,n=-1,-2,\cdots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے چونکہ ایسا کرنے سے یہی حل ضرب -1 دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔) یوں $B=1$ اور $D=1$ چنتے ہوئے مساوات 13.74 کے حل درج ذیل ہوں گے

$$F_{mn}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad {\scriptstyle m=1,2,\cdots \atop n=1,2,\cdots} \tag{13.79}$$

جو جھلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہیں۔

چونکہ مساوات 13.77 میں $p^2=\nu^2-k^2$ ہے اور مساوات 13.73 میں $\lambda=c\nu$ ہے لہٰذا

$$\lambda=c\sqrt{k^2+p^2}$$

ہو گا۔یوں $k=\frac{m\pi}{a}$ اور $p=\frac{n\pi}{b}$ کا مطابقتی λ مساوات 13.73 میں

$$\lambda=\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} \qquad {\scriptstyle m=1,2,\cdots \atop n=1,2,\cdots} \tag{13.80}$$

ہو گا اور مساوات 13.73 کا مطابقتی عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_{mn}(t)=B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t \tag{13.81}$$

یوں مساوات 13.73 کے غیر صفر حل $u_{mn}(x,y,t)=F_{mn}(x,y)G_{mn}(t)$ درج ذیل ہوں گے

$$u_{mn}(x,y,t)=(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13.82}$$

جن میں λ_{mn} مساوات 13.80 دے گی۔ تفاعل u_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے **آئگنی تفاعل**[31] **یا امتیازی تفاعل**[32] کہتے ہیں جبکہ λ_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے **آئگنی اقدار**[33] **یا امتیازی اقدار**[34] کہتے ہیں۔ تفاعل u_{mn} کی تعدد $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ ہو گی۔

a اور b کی مختلف قیمتیں ایک ہی امتیازی قدر دیتے ہوئے کئی مختلف تفاعل F_{mn} دے سکتی ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ جھلی میں ایک ہی تعدد کے کئی مختلف انداز کے ارتعاش ممکن ہیں جن کی **صفر ہٹاو لکیریں**[35] مختلف ہوں گی۔ ارتعاش پذیر جھلی پر وہ لکیریں جو حرکت نہیں کرتی ہیں صفر ہٹاو لکیریں کہلاتی ہیں۔ آئیں اس کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 13.5: مکعب جھلی

□

---

[31] eigenfunctions
[32] characteristic functions
[33] eigenvalues
[34] characteristic values
[35] nodal lines

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

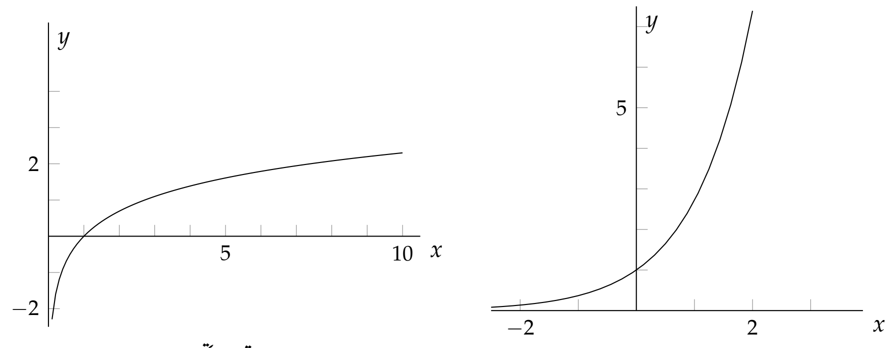
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

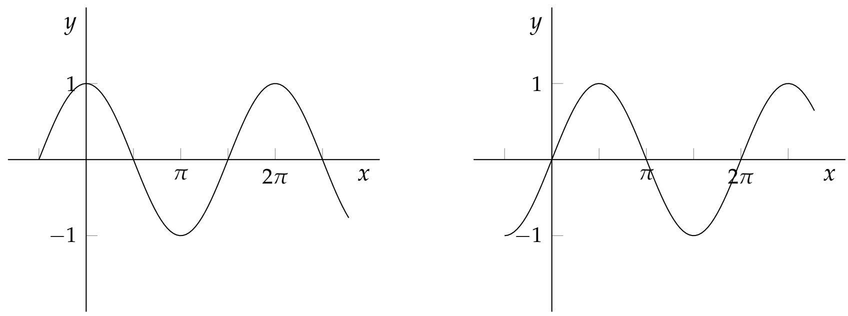
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب)قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف)قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \quad \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

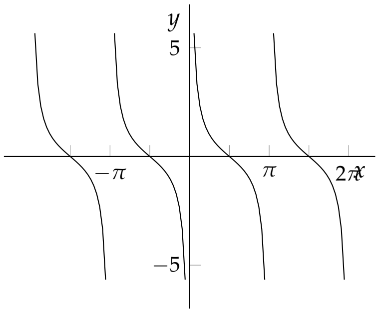
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

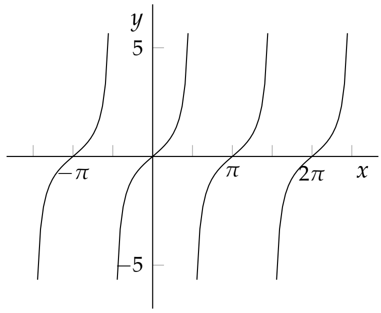
ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



(ب) $\cot x$



(الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad \cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x+\sinh x=e^x,\quad \cosh x-\sinh x=e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \tag{ب.20}$$

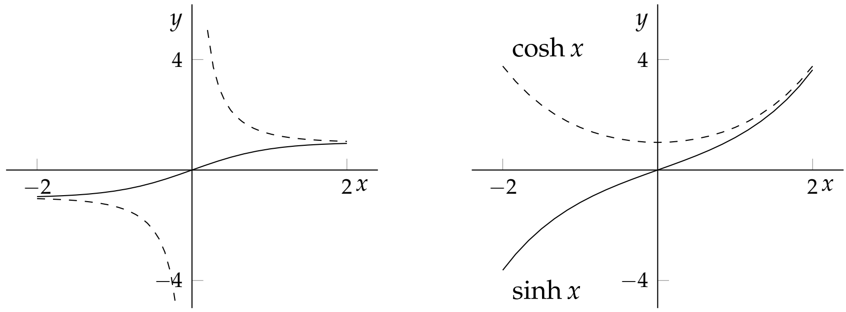
$$\sinh^2=\frac{1}{2}(\cosh 2x-1),\quad \cosh^2 x=\frac{1}{2}(\cosh 2x+1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x\mp y)&=\sinh x\cosh y\mp\cosh x\sinh y\\ \cosh(x\mp y)&=\cosh x\cosh y\mp\sinh x\sinh y\end{aligned} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x\mp y)=\frac{\tanh x\mp\tanh y}{1\mp\tanh x\tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.24}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{ب.26}$$

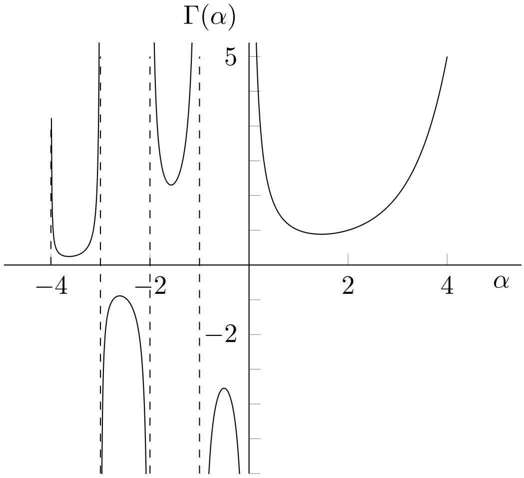
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

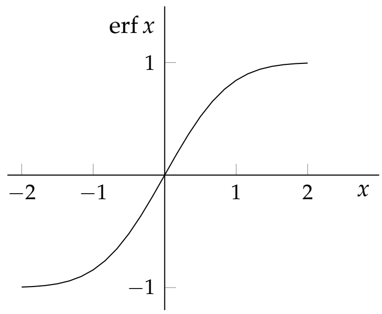
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

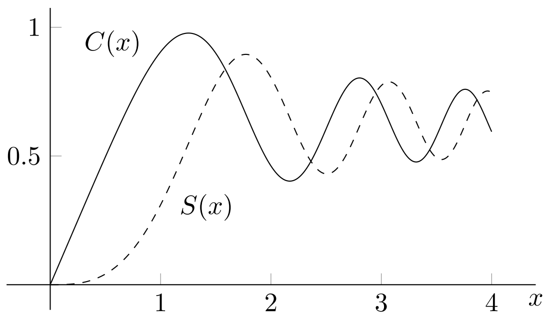
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{ب.39}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{ب.40}$$

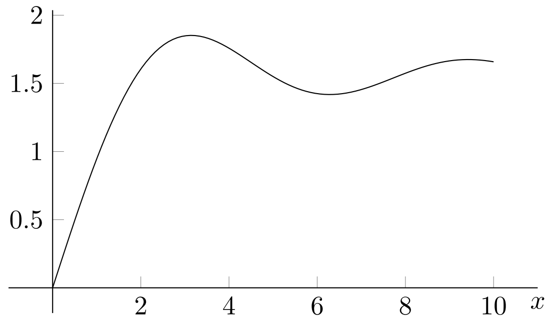
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.41}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\mathrm{si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$