

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ وروئسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	214
3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	217
4	نظام تفرقی مساوات	225
4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	226
4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	235
4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	250
4.3.1	خطی نظام	251
4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	254
4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام	272
4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام	281
4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ	290
4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	298
4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب	299
5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	309
5.1	ترکیب طافقی تسلسل	310
5.2	لیمنڈر مساوات۔ لیمنڈر کثیر رکنی	325
5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس	343
5.3.1	عملی استعمال	348
5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل	362
5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	377
5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ	383
5.7	مسئلہ سیورم لیوویل	390
5.8	قائمیت لیمنڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل	397
6	لاپلاس تبادلہ	407
6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	408
6.2	تفرقات اور کمالات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	417
6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیزھی تفاعل	430
6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	451
6.5	الچھاو	469
6.6	لاپلاس بدل کی عمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	478
6.7	تفرقی مساوات کے نظام	487
6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے	495
7	خطی الجبرا: سمتیات	499

499	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
501	7.2	سمتیہ کے اجزاء
507	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
516	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
522	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
535	7.6	اندرونی ضرب فضا
537	7.7	سمتی ضرب
539	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
550	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب

559	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
560	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
570	8.2	قالبی ضرب
577	8.2.1	تبدیلی محل
590	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
603	8.3.1	صف زینہ دار صورت
611	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
625	8.5	خطی نظام کے حل: وجوہیت، یکنائی
630	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
633	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریمیر
650	8.8	معلوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط
665	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی متبادلہ

683	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
684	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
695	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
703	9.3	تفاضلی، مخرف تفاضلی اور قائمہ الزاویہ قالب
710	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
724	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں

735	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
735	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
744	10.2	مختبی

753	ا	اضافی ثبوت
-----	---	------------

757	ب	مفید معلومات
757	1.ب	اعلی تفاعل کے مساوات



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 10

# سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل

### 10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان

غیر سمتی تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو فضا میں کسی سلسلہ نقاط کے ہر نقطے پر معین ہو اور جہاں تفاعل کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں جن کا دار و مدار صرف فضا میں نقطوں پر ہو ناکہ چنی گئی محوری نظام پر۔ ان نقطوں کے سلسلے کو تفاعل کا دائرہ کار<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ عملی استعمال میں تفاعل  $f$  کا دائرہ کار  $D$  عموماً منحنی یا سطح یا فضا میں تین بعدی خطہ ہو گا۔ تفاعل  $f$  دائرہ کار  $D$  کے ہر نقطے کے ساتھ ایک غیر سمتی حقیقی عدد وابستہ کرتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ  $D$  میں غیر سمتی میدان<sup>2</sup> دیا گیا ہے۔

$x$ ،  $y$ ،  $z$  متعارف کرنے سے تفاعل  $f$  کو ان محدود کی مدد سے  $f(x, y, z)$  لکھا جاسکتا ہے، پس اتنا یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ  $P$  پر تفاعل  $f$  کی قیمت، چنی گئی محدودی نظام پر ہر گز منحصر نہیں ہوگی۔ اس حقیقت کو ظاہر کرنے کی خاطر  $f(x, y, z)$  کی جگہ عموماً  $f(P)$  لکھا جاتا ہے۔ تفاعل  $f$  وقت پر بھی منحصر ہو سکتا ہے۔

---

domain<sup>1</sup>  
scalar field<sup>2</sup>

مثال 10.1: غیر سمتی تفاعل

غیر تغیر پذیر نقطہ  $P_0$  سے کسی نقطہ  $P$  کا فضا میں فاصلہ غیر سمتی تفاعل ہے جس کا دائرہ کار  $D$  پوری فضا ہے۔  $f(P)$  فضا میں غیر سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر کارتیسی نظام محدود میں  $P_0$  کے محدود  $x_0$ ،  $y_0$ ،  $z_0$  اور  $P$  کے محدود  $x$ ،  $y$ ،  $z$  ہوں تب  $f$  درج ذیل ہوگا۔

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

نظام محدود تبدیل کرنے سے عموماً  $P_0$  اور  $P$  کے محدود تبدیل ہوں گے لیکن  $f(P)$  کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی لہذا  $f(P)$  غیر سمتی تفاعل ہے۔

مثال 10.2: غیر سمتی میدان

کسی جسم کے اندر درجہ حرارت  $T$  غیر سمتی تفاعل ہے جو غیر سمتی میدان (یعنی جسم میں درجہ حرارت) تعین کرتا ہے۔

اگر فضا میں سلسلہ نقاط کے ہر نقطے  $P$  کے ساتھ سمتیہ  $v(P)$  وابستہ کیا جائے تب ہم کہتے ہیں کہ ان نقاط پر سمتی میدان<sup>3</sup> دیا گیا ہے اور  $v(P)$  سمتی تفاعل<sup>4</sup> کہلاتا ہے۔ یہ سلسلہ نقاط کسی منحنی یا سطح یا حجم میں پایا جاسکتا ہے۔

کارتیسی نظام محدود میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(x, y, z) = v_1(x, y, z)i + v_2(x, y, z)j + v_3(x, y, z)k$$

یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر  $v$  کی قیمت اس نقطے پر منحصر ہے ناکہ نظام محدود پر۔

مثال 10.3: سمتی میدان (سمتی میدان رفتار)

گھومتے ہوئے جسم  $B$  کی سمتی رفتار  $v(P)$  کو سمتی میدان رفتار کہتے ہیں۔ گھومتے جسم کی محور پر کارتیسی محدود کا مبدارکتے ہوئے جسم پر کسی نقطہ  $N$  کی سمتی رفتار کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (صفحہ 544 پر مثال 7.13 دیکھیں)

$$(10.1) \quad v(x, y, z) = \omega \times (xi + yj + zk)$$

جہاں لمحہ غور پر نقطہ  $N$  کے محدود  $x$ ،  $y$ ،  $z$  ہیں۔ اگر کارتیسی  $z$  محور عین جسم کی محور پر واقع ہو اور  $\omega$  مثبت  $z$  محور کے رخ ہو تب  $\omega = \omega k$  لکھا جائے گا۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.2) \quad v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{bmatrix} = \omega(-yi + xj)$$

مثال 10.4: سمتی میدان (میدان قوت)

فرض کریں کہ کیت  $M$  مستقل طور پر فضا میں نقطہ  $N_0$  پر موجود ہے جبکہ کیت  $m$  فضا میں کسی بھی نقطہ  $N$  پر موجود ہو سکتا ہے۔ اب نیوٹن قانون تجاذب کے تحت  $m$  پر قوت کشش

$$(10.3) \quad |f| = \frac{GMm}{r^2}$$

عمل کرے گی جہاں  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$  تجاذبی مستقل ہے اور  $r$  ان جسموں کے مابین فاصلہ ہے۔ یہاں  $v$  فضا میں سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر ہم کارتیسی محدود کو یوں چنیں کہ  $N_0$  کے محدود  $x_0$ ،  $y_0$ ،  $z_0$  ہوں اور  $N$  کے محدود  $x$ ،  $y$ ،  $z$  ہوں تب مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (r \geq 0)$$

ہو گا۔ اب  $r > 0$  فرض کرتے ہوئے سمتیہ

$$(10.4) \quad r = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$$

متعارف کرتے ہوئے  $r = |r|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں  $f$  کی سمت میں اکائی سمتیہ  $-\frac{r}{r}$  ہو گا جہاں منفی کی علامت اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ قوت کشش  $N_0$  سے  $N$  کی رخ کو ہے۔ یوں درج ذیل لکھ جاسکتا ہے۔

$$(10.5) \quad f = |f| \left( -\frac{r}{r} \right) = -GMm \frac{r}{r^3} = -GMm \left[ \frac{x-x_0}{r^3} i + \frac{y-y_0}{r^3} j + \frac{z-z_0}{r^3} k \right]$$

یہ سمتی تفاعل  $m$  پر قوت کشش دیتا ہے۔

### سمتی علم الاحصاء

علم الاحصاء کے بنیادی تصورات مثلاً ارتکاز، استمراریت اور تفرق پذیری کو بالکل فطری طور پر سمتی علم الاحصاء کے لئے بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔ انہیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

سمتیت  $a_{(n)}$ ، جہاں  $n = 1, 2, \dots$  ہے، کا لامتناہی تسلسل اس صورت مرکوز تصور کیا جاتا ہے جب ایسا سمتیہ  $a$  موجود ہو کہ درج ذیل درست ہو۔

$$(10.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{(n)} - a| = 0$$

$a$  کو اس تسلسل کا تحدیدی سمتیہ<sup>5</sup> کہتے ہیں جسے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(10.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{(n)} = a$$

کار تیبی نظام محدود استعمال کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ سمتیت کا تسلسل اس صورت سمتیہ  $a$  پر مرکوز ہو گا جب تسلسل کے تین کار تیبی ارکان کا تسلسل بالترتیب  $a$  کے تین کار تیبی ارکان پر مرکوز ہوں۔

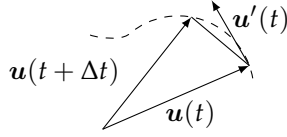
اسی طرح اگر حقیقی متغیر  $t$  پر مبنی سمتی تفاعل  $u(t)$  نقطہ  $t_0$  کے ہمسائیگی<sup>6</sup> میں معین ہو (جبکہ  $t_0$  پر یہ غیر معین ہو سکتا ہے) تب  $t$  کا  $t_0$  کے قریب تر ہونے سے تفاعل کی حد<sup>7</sup>  $l$  سے مراد درج ذیل ہے

$$(10.8) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} |u(t) - l| = 0$$

<sup>5</sup>limit vector

<sup>6</sup>ہمسائیگی سے مراد  $t$  محور پر ایسا نقطہ ہے جس کے اندر  $t_0$  پایا جاتا ہو۔

<sup>7</sup>limit



شکل 10.1: سمتی تعامل کا تفرق

جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(10.9) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l$$

سمتی تعامل  $u(t)$  اس صورت  $t = t_0$  پر استمراری تصور کیا جاتا ہے جب یہ  $t_0$  کے ہمسائیگی میں معین ہو اور درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$(10.10) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u(t_0)$$

کار تیزی نظام محدود میں تعامل  $u(t)$  درج لکھا جائے گا

$$(10.11) \quad u(t) = u_1(t)i + u_2(t)j + u_3(t)k$$

اور  $t_0$  پر  $u(t)$  اس صورت استمراری ہو گا جب اس کے تینوں کار تیزی اجزاء  $t_0$  پر استمراری ہوں۔

تفاعل  $u(t)$  نقطہ  $t$  پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب درج ذیل حد موجود ہو۔

$$(10.12) \quad u'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

$u'(t)$  کو  $u(t)$  کا تفرق<sup>8</sup> کہتے ہیں (شکل 10.1)۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر سمتیہ  $u(t)$  کی نوک کو آزاد متغیر  $t$  کے لئے وقفہ  $t$  تا  $t + \Delta t$  ظاہر کرتی ہے۔

کار تیزی نظام محدود استعمال کرتے ہوئے نقطہ  $t$  پر  $u(t)$  اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس نقطے پر درج ذیل تینوں تفرق موجود ہوں۔

$$u'_m(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_m(t + \Delta t) - u_m(t)}{\Delta t} \quad (m = 1, 2, 3)$$

یوں سمتیہ تفاعل کا تفرق لینا اس کے تینوں ارکان کا علیحدہ علیحدہ تفرق لینے کے مترادف ہے یعنی:

$$(10.13) \quad \mathbf{u}'(t) = u'_1(t)\mathbf{i} + u'_2(t)\mathbf{j} + u'_3(t)\mathbf{k}$$

تفرق کے جانی پہچانی اصولوں کے مطابقتی اصول سمتیہ تفاعل کے تفرق کے لئے بھی حاصل کیے جاسکتے ہیں مثلاً

$$(10.14) \quad (cu)' = cu' \quad (c \text{ مستقل ہے}), \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$$

اور

$$(10.15) \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$

$$(10.16) \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{v}$$

$$(10.17) \quad \left(\frac{\mathbf{u}}{v}\right)' = \frac{v\mathbf{u}' - \mathbf{u}v'}{v^2}$$

$$(10.18) \quad (uvw)' = (u'vw) + (uv'w) + (uvw')$$

چونکہ سمتی ضرب غیر قابل تبادل ہے لہذا مساوات 10.16 میں سمتیات کی ترتیب برقرار رکھنا لازم ہے۔

مثال 10.5: مستقل لمبائی کے تفاعل کا تفرق

اگر تفاعل  $\mathbf{u}(t)$  کی لمبائی مستقل ہو یعنی  $|\mathbf{u}(t)| = c$  تب  $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = c^2$  ہو گا اور مساوات 10.15 کی مدد سے  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})' = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$  حاصل ہو گا جس کے تحت مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل کا تفرق یا صفر سمتیہ ہو گا اور یا یہ  $\mathbf{u}(t)$  کے قائمہ الزاویہ ہو گا۔

درج بالا گفتگو سے سمتی تفاعل کی جزوی تفرق کے اصول حاصل کرتے ہیں۔ اگر کسی سمتی تفاعل  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

کے اجزاء  $n$  عدد متغیرات  $t_1, \dots, t_n$  کے ساتھ قابل تفرق ہوں تب  $t_1$  کے ساتھ  $\mathbf{u}$  کے جزوی تفرق کو  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_1}$  سے ظاہر کیا جائے گا جو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1}\mathbf{i} + \frac{\partial u_2}{\partial t_1}\mathbf{j} + \frac{\partial u_3}{\partial t_1}\mathbf{k}$$

اسی طرح دیگر جزوی تفرقات لکھے جاسکتے ہیں مثلاً:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_m \partial t_n} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_m \partial t_n} i + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_m \partial t_n} j + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t_m \partial t_n} k$$

مثال 10.6: جزوی تفرق

سمتی تفاعل  $r(t_1, t_2) = a \cos \omega t_1 i + a \sin \omega t_1 j + t_2 k$  کے جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\partial r}{\partial t_1} = a\omega(-\sin \omega t_1 i + \cos \omega t_1 j), \quad \frac{\partial r}{\partial t_2} = k$$

تفاعل  $r$  ایسی نکلی سطح کو ظاہر کرتا ہے جس کا رداس  $a$  ہے اور محور  $z$  محور ہے۔

### سوالات

سوال 10.1 تا سوال 10.5 میں برابر سطح  $f = c$  کیا ہو گا جہاں  $c$  مستقل ہے۔

سوال 10.1:  $f = x + y + z$

جواب: متوازی سطحیں

سوال 10.2:  $f = x^2 + y^2 + z^2$

جواب: ہم مرکز کرہ

سوال 10.3:  $f = x^2 + y^2$

جواب: کارٹیزی  $z$  کے ہم محوری نکلی سطحیں

سوال 10.4:  $f = 4x^2 + 5y^2$

جواب: کارٹیزی  $z$  کے ہم محوری نکلی ترخیم سطحیں

سوال 10.5:  $f = x^2 + y^2 - z$   
جواب: قطع مکانی نما سطحیں

$xy$  سطح پر سمتیہ  $v$  سوال 10.6 تا سوال 10.9 میں دیا گیا ہے۔ وہ سطح دریافت کریں جس پر  $v$  کی لمبائی مستقل ہو۔ وہ سطح دریافت کریں جس پر  $v$  کی یکساں سمت ہو۔

سوال 10.6:  $v = 2xi + 3yj$   
جوابات: مستقل،  $\frac{y}{x} =$  مستقل،  $4x^2 + 9y^2 =$  مستقل

سوال 10.7:  $v = x^2i + \sqrt{y}j$   
جوابات: مستقل،  $\frac{\sqrt{y}}{x^2} =$  مستقل،  $x^4 + y =$  مستقل

سوال 10.8:  $v = (x^2 - y^2)i + 2xyj$   
جوابات: مستقل،  $\frac{2xy}{x^2 - y^2} =$  مستقل،  $x^2 + y^2 =$  مستقل

سوال 10.9:  $v = (x + y)i + (x - y)j$   
جوابات: مستقل،  $\frac{x - y}{x + y} =$  مستقل،  $x^2 + y^2 =$  مستقل

سوال 10.10 تا سوال 10.18 میں  $u$  دیا گیا ہے۔ آپ سے التماس ہے کہ  $u'$  اور  $u''$  دریافت کریں۔

سوال 10.10:  $a + bt^2$   
جوابات:  $u' = 2bt$ ,  $u'' = 2b$

سوال 10.11:  $ti + (t^2 + 2)j$   
جوابات:  $u' = i + 2tj$ ,  $u'' = 2j$

سوال 10.12:  $4 \cos t i + 2 \sin t j$   
جوابات:  $u' = -4 \sin t i + 2 \cos t j$ ,  $u'' = -4 \cos t i - 2 \sin t j = -u$

سوال 10.13:  $4 \cos t i + 2 \sin t j - 3t k$   
جوابات:  $u' = -4 \sin t i + 2 \cos t j - 3k$ ,  $u'' = -4 \cos t i - 2 \sin t j$

سوال 10.14:  $t^2i + 2j + 4tk$   
جوابات:  $u' = 2ti + 4k$ ,  $u'' = 2i$



سوال 10.15:  $\cos 2t \mathbf{i} - 3 \sin 2t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$   
 جوابات:  $\mathbf{u}' = -2 \sin 2t \mathbf{i} - 6 \cos 2t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{u}'' = -4 \cos 2t \mathbf{i} + 12 \sin 2t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$

سوال 10.16:  $e^t \mathbf{i} - 2e^{-3t} \mathbf{j}$   
 جوابات:  $\mathbf{u}' = e^t \mathbf{i} + 6e^{-3t} \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{u}'' = e^t \mathbf{i} - 18e^{-3t} \mathbf{j}$

سوال 10.17:  $e^{-t}(\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j})$   
 جوابات:  $\mathbf{u}' = e^{-t}[-(\cos t + \sin t) \mathbf{i} - (\cos t - \sin t) \mathbf{j}]$ ,  $\mathbf{u}'' = e^{-t}(2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j})$

سوال 10.18:  $t^2(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$   
 جوابات:  $\mathbf{u}' = 2t(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$ ,  $\mathbf{u}'' = 2(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$

سوال 10.19 تا سوال 10.23 میں  $\mathbf{u} = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{k}$  ،  $\mathbf{v} = t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$  اور  $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$  لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 10.19:  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})'$   
 جواب:  $4t^3$

سوال 10.20:  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})'$   
 جواب:  $-t^4\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$

سوال 10.21:  $[\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]'$   
 جواب:  $-8t^3\mathbf{i} - (7t^6 + 5t^4 - 6t^2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

سوال 10.22:  $[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}]'$   
 جواب:  $(6t^2 - 7t^6)\mathbf{j} + (4t - 6t^5)\mathbf{k}$

سوال 10.23:  $[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}]'$   
 جواب:  $-15t^4 - 3t^2$

سوال 10.24 تا سوال 10.29 میں دیے گئے سمتی تفاعل  $\mathbf{u}$  کا  $x$  ،  $y$  اور  $z$  کے ساتھ جزوی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.24:  $x\mathbf{i} + 3y\mathbf{k}$   
 جوابات:  $\mathbf{i}$ ,  $3\mathbf{k}$ ,  $0$

سوال 10.25:  $(x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$   
 جوابات:  $2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ ,  $-2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ ,  $0$

سوال 10.26:  $x^2i - 3y^2j + 2z^2k$   
جوابات:  $2xi, -6yj, 4zk$

سوال 10.27:  $xyi + yzj + zxk$   
جوابات:  $yi + zk, xi + zj, yj + xk$

سوال 10.28:  $(x + y)i + (y + z)j + (z + x)k$   
جوابات:  $i + k, i + j, j + k$

سوال 10.29:  $x^2yi + y^2zj + z^2xk$   
جوابات:  $2xyi + z^2k, x^2i + 2yzj, y^2j + 2xz k$

سوال 10.30:  $(u \cdot v)''$  اور  $(u \times v)''$  کے لئے مساوات 10.15 اور مساوات 10.16 کی طرز کے کلیات دریافت کریں۔

جوابات:  $(u \cdot v)'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$   
 $(u \times v)'' = u'' \times v + 2u' \times v' + u \times v''$

سوال 10.31: ثابت کریں کہ  $\left(\frac{u}{|u|}\right)' = \frac{u'(u \cdot u) - u(u \cdot u')}{(u \cdot u)^{\frac{3}{2}}}$   
جواب:  $\left(\frac{u}{\sqrt{u \cdot u}}\right)' = \left(\frac{u}{|u|}\right)'$  لکھتے ہوئے مساوات 10.17 کا استعمال کریں۔

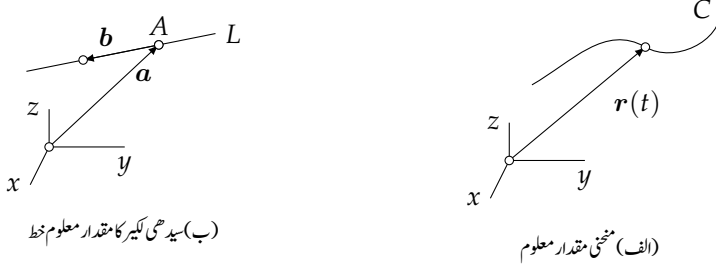
## 10.2 منحنی

کار تیمی نظام میں منحنی  $C$  کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے (شکل 10.2-الف)۔

$$(10.19) \quad r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

آزاد حقیقی متغیر  $t$  کی ہر قیمت  $t_0$  کا  $C$  پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کے محدد  $x(t_0)$ ،  $y(t_0)$  اور  $z(t_0)$  تعین کر سکتے ہیں۔ مساوات 10.19 کو  $C$  کی منحنی مقدار معلوم<sup>9</sup> کہتے ہیں جبکہ  $t$  کو مقدار معلوم کہتے ہیں۔ منحنی مقدار معلوم کی طرز پر منحنی کا اظہار نہایت عمدہ ثابت ہوتا ہے۔

<sup>9</sup>parametric representation



شکل 10.2: سیدھی لکیر اور منحنی کے مقدار معلوم خطوط۔

فضا میں منحنی ظاہر کرنے کے دیگر طریقے

$$(10.20) \quad y = f(x), \quad z = g(x)$$

اور

$$(10.21) \quad F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

ہیں۔ مساوات 10.20 میں  $x = t$  پر کرتے ہوئے اس کو مساوات 10.19 کی طرح لکھ سکتے ہیں یعنی:

$$\mathbf{r}(t) = ti + f(t)j + g(t)k$$

مساوات 10.21 میں دو سطحوں کے مساوات دیے گئے ہیں جن کا ملاپ منحنی دیتا ہے۔

مستوی منحنی<sup>10</sup> سے مراد ایسی منحنی ہے جو فضا میں کسی سطح مستوی پر پائی جاتی ہو۔ غیر مستوی منحنی کو خم دار منحنی<sup>11</sup> کہتے ہیں۔

مثال 10.7: سیدھا خط

کسی بھی سیدھی لکیر  $L$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $a$  اور  $b$  مستقل سمتیات ہیں (شکل 10.2-ب)۔

$$(10.22) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (a_1 + tb_1)\mathbf{i} + (a_2 + tb_2)\mathbf{j} + (a_3 + tb_3)\mathbf{k}$$

<sup>10</sup> plane curve  
<sup>11</sup> twisted curve

$L$  نقطہ  $A$  سے گزرتی ہے جس کا تعین گر سمتیہ  $a$  ہے جبکہ  $b$  کے رخ  $L$  ہو گا۔ اگر  $b$  اکائی سمتیہ ہو تب اس کے ارکان کو سائن رخ<sup>12</sup> ہوں گے اور  $L$  پر کسی بھی نقطے کا  $A$  سے فاصلہ  $|t|$  ہو گا۔

مثال 10.8: ترخیم، دائرہ

درج ذیل سمتی تفاعل  $xy$  سطح میں ترخیم کو ظاہر کرتا ہے جس کا مرکز کارتیسی نظام کے مبدا اور صدر محور  $x$  اور  $y$  محور پر ہیں۔

$$(10.23) \quad r(t) = a \cos t i + b \sin t j$$

$x = a \cos t$  اور  $y = b \sin t$  لیتے ہوئے  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  کے استعمال سے

$$(10.24) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

ملتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔ اگر  $a = b$  ہو تب مساوات 10.23 رد اس  $a$  کی دائرے کی مساوات ہو گی۔

سوال 10.32: پیچ دار لچھا

پیچ دار لچھے<sup>13</sup> کو

$$(10.25) \quad r(t) = a \cos t i + a \sin t j + ct k \quad (c \neq 0)$$

ظاہر کرتا ہے۔ اس خم دار منحنی کو  $c > 0$  (دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) اور  $c < 0$  (بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کے لئے شکل 10.3 میں دکھایا گیا ہے۔

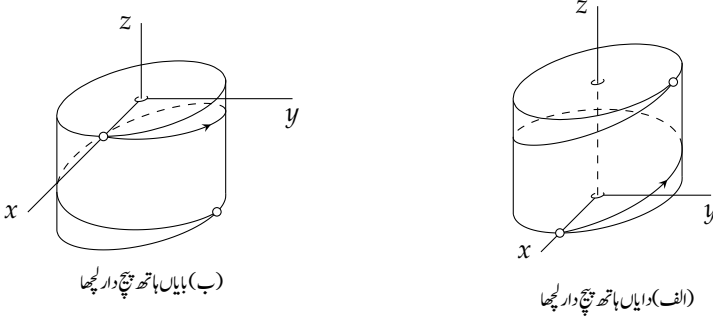
ہم قطع منحنی اپنی آپ کو قطع کرتی ہے۔ نقطہ قطع کو منحنی کا متعدد نقطہ<sup>14</sup> کہتے ہیں (شکل 10.4)۔ ایسی منحنی جس کے متعدد نقطے نہ پائے جاتے ہوں سادہ منحنی<sup>15</sup> کہلاتی ہے۔

<sup>12</sup> direction cosines

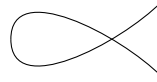
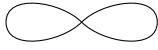
<sup>13</sup> circular helix

<sup>14</sup> multiple point

<sup>15</sup> simple curve



شکل 10.3: پیچ دار لچھے (مثال 10.32)۔



شکل 10.4: دوہرا نقطوں والے منحنی

مثال 10.9: سادہ اور غیر سادہ منحنی  
ترخیم اور پیچ دار لچھے سادہ ترخیم کی مثالیں ہیں۔ درج ذیل  $t = 1$  اور  $t = -1$  پر مبدا سے دو مرتبہ گزرتی  
ہے لہذا یہ غیر سادہ منحنی کی مثال ہے۔

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^3 - 1)\mathbf{j}$$

آخر میں بتانا چلوں کہ کسی بھی منحنی  $C$  کو کئی سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے مثلاً اگر  $C$  کو مساوات 10.19  
ظاہر کرے تب ہم  $t = h(t^*)$  لیتے ہوئے، جہاں مساوات 10.19 میں استعمال  $t$  کی تمام قیمتوں کے لئے  
 $h(t^*)$  بھی پائے جاتے ہوں،  $C$  کو نئی سمتی تفاعل  $\tilde{\mathbf{r}}(t^*) = \mathbf{r}[h(t^*)]$  سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثال 10.10: مقدار معلوم کی تبدیلی  
 $xy$  سطح میں قطع مکانی  $y = x^2$  کو درج ذیل سمتیہ تفاعل ظاہر کرتی ہے۔

$$(10.26) \quad r = ti + t^2j \quad (-\infty < t < \infty)$$

ہم  $t = -2t^*$  لیتے ہوئے اس قطع مکانی کو درج ذیل سمتیہ تفاعل سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\tilde{r}(t^*) = r(-2t^*) = -2t^*i + 4t^{*2}j$$

اگر ہم  $t = t^{*2}$  لیں تب ہمیں درج ذیل نیا سمتیہ تفاعل ملتا ہے

$$\tilde{r}(t^*) = t^{*2}i + t^{*4}j$$

لیکن  $t^{*2} > 0$  کی بنا یہ تفاعل قطع مکانی کو صرف ربع اول میں ظاہر کرتا ہے۔

### سوالات

سوال 10.33 تا سوال 10.36 میں نقطہ  $A$  سے گزرتی ہوئی سمتیہ  $b$  کے رخ سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.33:  $A : (0, 0, 0), \quad b = i - j$   
 جواب:  $r = ti - tj$

سوال 10.34:  $A : (2, -3, 1), \quad b = i + 2j$   
 جواب:  $r = (t + 2)i + (2t - 3)j + k$

سوال 10.35:  $A : (2, 0, -3), \quad b = -j + 3k$   
 جواب:  $r = 2i - tj + 3(t - 1)k$

سوال 10.36:  $A : (-3, 2, 6), \quad b = 5i + 3j - 7k$   
 جواب:  $r = (5t - 3)i + (3t + 2)j + (6 - 7t)k$

سوال 10.37 تا سوال 10.40 میں نقطہ  $A$  اور نقطہ  $B$  سے گزرتی ہوئی سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.37:  $A : (0, 0, 0), \quad B : (1, 1, 1)$   
 جواب:  $r = ti + tj + tk$

سوال 10.38:  $A : (-3, 7, -5), \quad B : (2, 0, 3)$   
 جواب:  $r = (5t - 3)i + 7(1 - t)j + (8t - 5)k$

سوال 10.39:  $A : (1, 2, -3), \quad B : (7, 2, -3)$   
 جواب:  $r = (6t + 1)i + 2j - 3k$

سوال 10.40:  $A : (3, 2, 0), \quad B : (0, 0, 0)$   
 جواب:  $r = 3(1 - t)i + 2(1 - t)j + t^*k$  جس میں  $t^* = 1 - t$  چنتے ہوئے  $r = 3t^*i + 2t^*j + t^*k$  بھی لکھا جاسکتا ہے۔

سوال 10.41 تا سوال 10.45 میں دیے سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.41:  $y = x, \quad z = 0$   
 جواب:  $r = ti + tj$

سوال 10.42:  $y = -3x, \quad z = 2x$   
 جواب:  $r = ti - 3tj + 2tk$

سوال 10.43:  $2y = 5x, \quad z = x - 3y$   
 جواب:  $r = ti + \frac{5}{2}j - \frac{13}{2}k$  یا  $r = 2ti + 5tj - 13tk$  جہاں  $t^*$  کی جگہ  $t$  ہی لکھا گیا ہے۔

سوال 10.44:  $4x - y + z = 3, \quad -3x + 2y + 3z = 19$   
 جواب:  $y$  اور  $z$  حاصل کرتے ہوئے  $r = ti + (3t + 2)j + (5 - t)k$

سوال 10.45:  $x - y = 2, \quad 2x + z = 3$   
 جواب:  $r = ti + (t - 2)j + (3 - 2t)k$

سوال 10.46 تا سوال 10.51 میں دیے خطوط کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.46:  $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$   
 جواب:  $r = \cos t i + \sin t j$

سوال 10.47:  $y = x^3, \quad z = 0$   
 جواب:  $r = ti + t^3 j$

سوال 10.48:  $y = 2x^3, \quad z = -3x^2$   
 جواب:  $r = ti + 2t^3 j - 3t^2 k$

سوال 10.49:  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -9, \quad z = 0$   
 جواب: نقطہ  $(2, -3)$  پر رداس 2 کا دائرہ  $r = (2 + 2 \cos t)i + (-3 + 2 \sin t)j$

سوال 10.50:  $4(x + 1)^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$   
 جواب:  $r = (-1 + 2 \cos t)i + 2 \sin t j$

سوال 10.51:  $x^2 + y^2 = 4, \quad z = e^{-x}$   
 جواب:  $r = 2 \cos t i + 2 \sin t j + e^{-t} k$



- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(1.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(1.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(1.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $1 + |q| + |p| = h$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

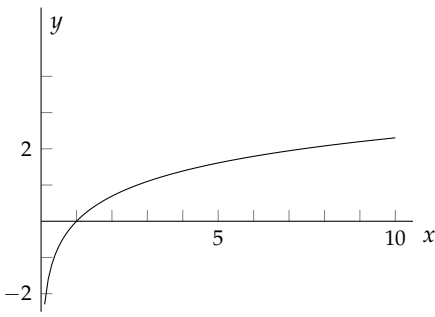
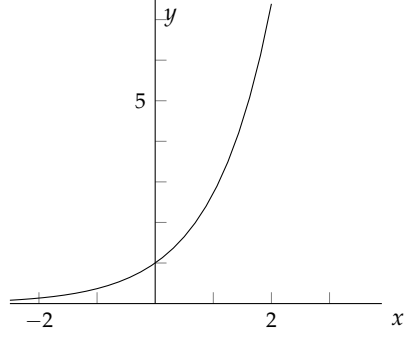
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

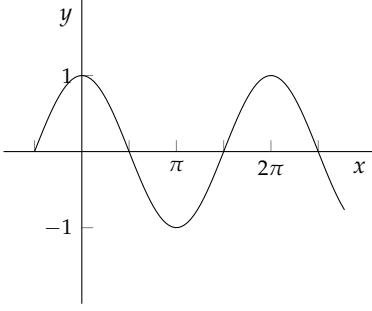
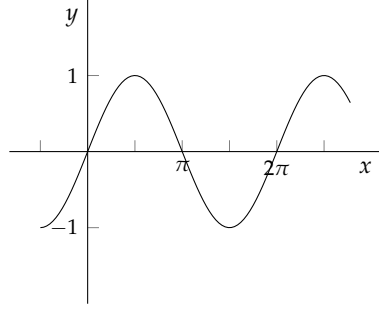
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$

(ب) قدرتی لوگار تھم  $\ln x$ (الف) قوت نمائی تفاعل  $e^x$ 

شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل

(ب)  $\cos x$ (الف)  $\sin x$ 

شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(پ.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(پ.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(پ.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}
 \end{aligned}$$

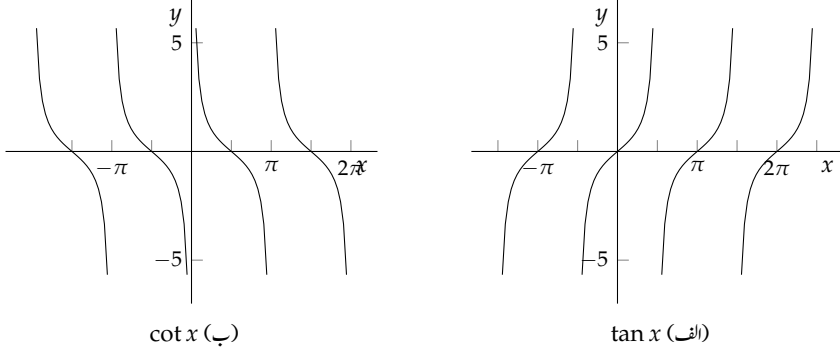
$$(پ.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(پ.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(پ.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(پ.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

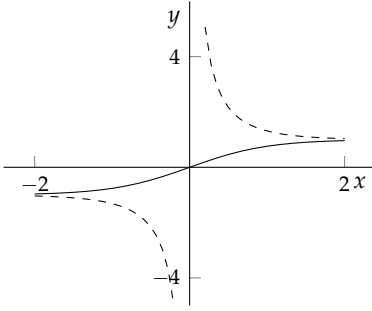
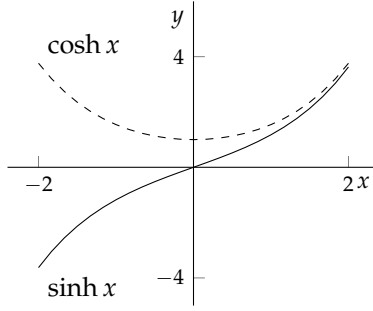
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. ب)$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. ب)$$

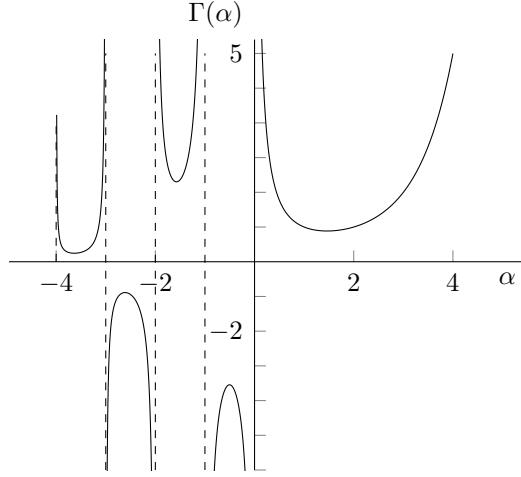
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. ب)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35.ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

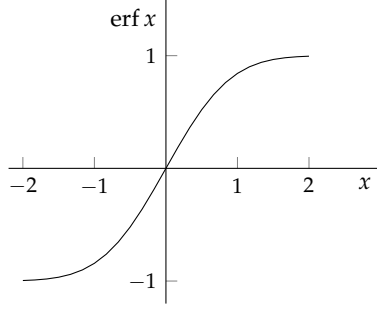
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

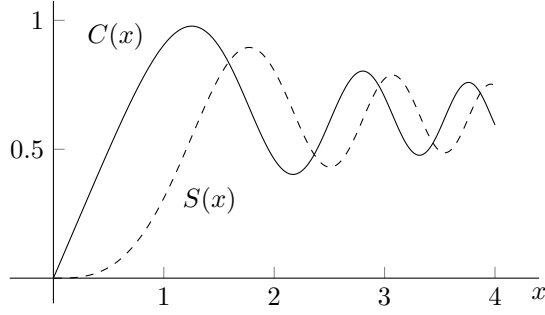
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

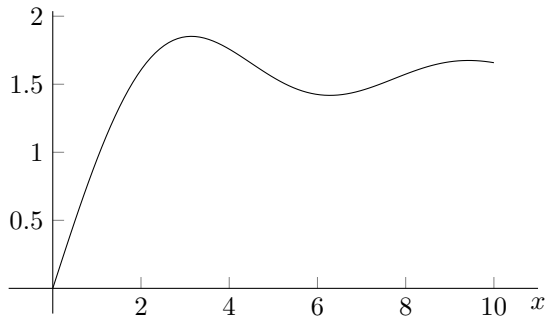
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

