انجیبنتری حساب (جلد اول)

خالد خان يوسفر. كي

جامعه کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

хi																																		پ	د يبا
xiii																														اچ	کادیہ	<u>_</u>	ي كتا	پيا نا جوا	مير د
1																											ت	باوار	ي مي	تفر ف	ساده	ول	. جدا	ور	1
2																														ئى مەسىي	نموز		1.	1	
14										ولر	ب	کید	رز	اور	مت	ے سر	ن کی	رال	ميا.		طلد	ئى م	زياؤ	ومية	كاجيو	'y'	' =	= ;	f(x, y	_/)		1.	2	
23																														، پاعلیم			1.	3	
39																														۔ پاساد			1.4	4	
51																														ی مار اساده			1.:	•	
68																														ی جائے ی خط			1.		
	•																يت	بتائ	بر یک	تاو	دین	وجو	ما کی	حل	ت:	ب ساوا،	يىر نى مى	ں تفر ف	رر ت	ِ ائی قیم	ر. ابتد		1.	_	
- 0																																			_
79																														، تفرق		وم	. جه د	נו	2
																										-				یں خو	•		2.	1	
95																																	2.	2	
110																																	2.	3	
114																																	2.	4	
130																												وات	مسا	كوشى	يولر		2.	5	
138																							L	ونسح	؛ور	تائی	وريكأ	تاو	ۇرىي	کی وج	حل		2.	6	
147																								ت	أوار) مسر	فر ق	اده ته	ی سا	متجانس	غير		2.	7	
159																											٦	رگر	ناثر	ن ار ت	جبرة		2.	8	
165																				ىك	ملی م	۶_	يطه.	كاج	حل	عال	زار	برق		2.8	3.1				
169																														ادوار			2.	_	
180										ىل	کاح	ت	باوار	مــه	رقی	تف	اده) سر	نطح	: س	متجانه	نير •	سے غ	تج	ر ا	کے ط	خ_	بر ل	لوم	ارمع	مقد	2	2.1	0	

iv

نظى ساده تفر قى مساوات		3
متجانس خطی ساده تفرقی مسادات	3.1	
مستقلّ عدد کی سروا کے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	3.2	
غير متجانس خطی ساده تفرقی مساوات	3.3	
غیر متجانس خطی سادہ تفر قی مساوات	3.4	
	نظامِ تفرق	4
قالب اور سمتىيە كے بنیادی حقائق		
سادہ تفر تی مساوات کے نظام بطورانجینئر کی مسائل کے نمونے	4.2	
نظرىيە نظام سادە تفرقى مساوات اور ورونسكى	4.3	
4.3.1 نظی نظام		
ستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب		
نقطہ فاصل کے جانچ کڑتال کامسلمہ معیار۔استحکام		
ي في تراكيب برائے غير خطي نظام		
ع د میب ایک در جی مساوات میں تباد کہ		
۱۰۰۲ مارون کو حتایت کا متاس تعطی نظام	4.7	
نادو کرن عرف کے بیر ہو جی من کا من کا ہے۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔	1.,	
2)1		
ں ہے سادہ تفر تی مساوات کاحل۔اعلٰی تفاعل	طاقق تسلسا	5
ى كى مادى مادى مادى ئارى ئارى ئارى ئارى ئارى ئارى ئارى ئار		٥
رىي ب ن ى داردى		
مبَسُوط طاقتى تسلىل ـ تركيب فَرومنيوس	<i>5</i> 2	
taran da antara da a	5.3	
5.3.1 علملى استعال	5.3	
مسادات بىيىل اور بىيىل تفاعل	5.4	
ساوات بىيل اور بىيل تفاعل	5.4 5.5	
مساوات بىيىل اور بىيىل نفاعل	5.4 5.5 5.6	
مساوات بيسل اور بيسل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7	
مساوات بىيىل اور بىيىل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7	
مساوات بيمبل اور بيمبل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7 5.8	6
مساوات ببیل اور ببیل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7 5.8	6
مساوات بيسل اور بيسل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7 5.8 لا پلاس تاد 6.1	6
مساوات بيمبل اور بيمبل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7 5.8 ال پياس تاباد 6.1 6.2	6
مساوات بيسل اور بيسل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7 5.8 ال پاس تا 6.1 6.2 6.3	6
مساوات بيل اور بيل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7 5.8 ال پاس جاد 6.1 6.2 6.3 6.4	6
مساوات بيل اور بيل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7 5.8 ال پاس جاد 6.1 6.2 6.3 6.4	6
مساوات بيسل اور بيسل نفاعل	5.4 5.5 5.6 5.7 5.8 6.1 6.2 6.3 6.4 6.5 6.6	6

عـــنوان V

لایلاس بدل کے عمومی کلیے	6.8	
مرا: سمتيات	خطىالجه	7
برر. غير سمتيات اور سمتيات	7.1	•
سر سیال از اور سایال ۱۹۵۰ میل ۱۹۵۰ میل ۱۹۵۰ میل ۱۹۵۶ میل	7.2	
سمتيات كالمجموعه، غير سمتى كے ساتھ ضرب	7.3	
ي مناه و خطح تابعيت اور غير تابعيت	7.4	
ل صلاح کا بلیت و میر مابیت	7.5	
الدروني شرب فضا	7.6	
ستي ضرب	7.7	
ن رب	7.8	
غير سمق سه ضرب اورديگر متعدد ضرب	7.9	
ير ن شه سرب اورو ير مسرو سرب	1.9	
برا: قالب، سمتىي، مقطع يه خطى نظام	خطىالجبر	8
قالب اور سمتیات به مجموعه اور غیر سمق ضرب	8.1	
قالبی ضرب "	8.2	
8.2.1 تېدىلىمى كى		
خطی مساوات کے نظام۔ گاو تی اسقاط	8.3	
8.3.1 صف زيند دار صورت		
خطى غير تالعيت در حبه قالب ـ سمتي فضا	8.4	
خطی نظام کے حل: وجو دیت، کیتا کی	8.5	
	8.6	
مقطع۔ قاعدہ کریم	8.7	
معكوس قالب_گاوُس جار دُن اسقاط	8.8	
سمتی فضا،اندرونی ضرب، خطی تبادله	8.9	
برا: امتيازي قدر مسائل قالب	خطىالج	9
بردانسیادی خدر مسائل قالب امتیازی اقدار اورامتیازی سمتیات کا حصول	9.1	
امتیازی مسائل کے چنداستعال 🐪 👢 🗓 👢 🗓 👢 🗓 دیں دیا ہے۔ دیا ہے جنداستعال 👚 دیا ہے 672	9.2	
تشاكلي، منحرف تشاكلي اور قائمه الزاويه قالب	9.3	
امتیازی اساس، وتری بناناه دودرجی صورت	9.4	
مخلوط قالب اور خلوط صورتیں	9.5	
ر قی علم الاحصاء ـ سمتی تفاعل 711	سمتی تفر	10
	10.1	
	10.2	
منحتي		
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	10.4	
•••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	10.5	
ستتحار فآراوراسراط	10.6	

vi

745																																	
751 .																					ن	لوال) ۋھ	ن کم	ميدا	سمتی	غير	رق،	متی تفا	س	10.8	3	
764																					يات	سمتب	كاك	رار	رتبادا	ماور	بانظا	نددې	إدل م	ت	10.9)	
769																										بميلاو	کی کچ	بران	متی مب	- 1	0.10)	
777 .																									. (رو شر	کی گر	عل	متى تفا	ر 1	0.11		
																												,			6		
781																															سمتی تکم		Ĺ
782																												ل	طی تکم	<i>;</i>	11.1		
782 . 787 .																											حل	ل کا	طی تکم	<i>;</i>	11.2	2	
796																												ىل	وہرائکم	,	11.3	;	
810																							لہ .	ا تباد	میں	أتكمل	خطى	ل کا	وہر اکم	,	11.4	ļ	
820																																	
825																																	
837																												ل	طحی تک		11.7	7	
845																																	
850																							. ر	تتعا	اورا	تائج	کے و	يلاو.	سُله کچ	م	11.9)	
861 . 866 .																						•		ء ،	٠,		ر	نوتسر	سكله سن	1 م	1.10)	
869		•	•	•		•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•		•	•			٠	٠ (الكمل	لتحطى	آزاد	اہسے	1را	1.12	2	
883																													,	نلىر	فوريئر ^ت	12	,
884																								ىل	, تىل	زناذ ونياذ	، تکو	فاعل	•		/		•
889																																	
902																																	
907																																	
916																																	
923																							ول	ا حصا	بتكمل	ابغير	اسرک	ردې	رييزء	فو	12.6)	
931 . 936 .				•		•	•		•	•			•	•	•					•			٠,		•		ں ر	إنعاث	بر کاار په	?	12.7	,	
936		٠	٠	•	 •	٠	٠	٠	•	•	 •	٠	•	٠	•	٠		•	•		علل	ب	_ مكعر	۔ کئی	لتثيرا	نگوتی	لعبه	ببذر	قريب خ	υ	12.8	3	
940														•											•			مل	ريئر	فو	12.9)	
953																												ا. •• .	رمد اه	نة ټ	جزوی ^آ	. 13	2
953 .																															.رون 13.1		,
958																																	
960																																	
973																																	
979																																	
987																						رت	وحرا	ر بها	خ میر	سلار	آیکی	الساف	متنابح	IJ	13.6)	

vii

	13.7	1 نمونه کشی:ار تعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ،	993 .	•
	13.9	1 قطبی محدد میں لایلاس	006 .	1
		13 دائری جیلی۔ مساوات بیبل		
	13.11	13 مساوات لا پلاس- نظر بير مخفّى قوه	018.	1
		13 کروی محدد میں مساوات لاپلاس۔مساوات لیزاندر ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ،		
	13.13	13 لا پلاس تبادل برائے جزوی تفرقی مساوات	030 .	1
		, re		
14	مخلوط اعداد	مداديه مخلوط تخليل نفاعل 	1037	
	14.1	مداد سوط سان ها ن 1 مخلوطاعداد	038 .	1
	14.3	1 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطیے	054 .	1
	14.4	1 مخلوط تفاعل ـ - حد ـ تفرق ـ تتحليلي تفاعل	059 .	1
		1 كوشي ريمان مساوات ـ		
		1		
	14.7	1 قوت نمائی تفاعل	084 .	1
	14.8	1 تىكونىاتى اور بذلولى تفاعل	089 .	1
	14.9	1 لوگار تقم به عمومی طاقت	095 .	1
		٠ ک ۀ		
15		راويه نقشه کشي عرب	1103	
		1 تشته گثی	104 .	1
		1 محافظ زاوییه نقش		
		1 مخطی کسری تبادل		
		1 مخصوص خطی کسری تبادل		
		1 نقش زیردیگر تفاعل		
	15.6	1 ريمان سطين	149 .	1
16	مخلوط تكملاب	(A	1157	
10	16.1	نات 1 مخلوط مستوی میں خطی تکمل	157	1
		۔		
	16.2	1 کوشی کا کا موال	172	1
	10.5	ا مون قامستگه شن	1/2.	1
	10.4	ا من من ما میت قاطعول بدر یعه خمیر من مل	184.	1
	16.5	1 كوشى كاكلية تكمل	189 .	1
	16.6	1 تحلیلی نفاعل کے تفرق	194 .	1
17	ر ترتیباور ^ن	. تبا	1201	
1/		اور سن 1 ترتیب		
	17.1	1 رئيب 1 شكل	201.	1.
	17.2	ا کس	∠∪8. 213	1.
	1 /)	ا و العول م وربت رائے رسیادر رن	41.7.	1

viii

1220.	يك سرحققى ترتيب ليبنش آزمائش برائ حقیقی تسلسل	17.4	
1225.	تىلىل كى مر كوزىت اورا نفراج كى آزما ئشيں	17.5	
1236.	تىلىل پراغال	17.6	
1243	ىل، ئىل تسلسل اور لوغوں تسلسل طاقتى تسلسل	طاقتي نسك	18
1243 .	طاق سلسل	18.1	
1256 .	طاقتی مسلس کی روپ مین نفاعل	18.2	
1263.	ٹیر شلس بنیادی تفاعل کے ٹیلر نسلسل	18.3	
1268 .	بنیادی فاهل کے تیر معتش	18.4	
1274.	طاقتی تشکسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب	18.5	
	یکیال استمرار		
1294 .	لوغول شلىل	18.7	
1303.	لامتنائى پرختلىل پذيرى ـ صفراورندرت	18.8	
1317	يە تركىپىقىيە	کلما .	10
1317	پير بربيايي لقير	س بدر: 10.1	19
	ىيىي		
	حقیقی تحمل بذریعه مسئله بقیه		
	سی کی میروییه سمیه بید		
1337.		17.4	
1345	ں تفاعل اور نظر یہ مخفی توہ	مخلوط تحليا	20
1346.	ت - برقی سکون		
	دوبعدی بهاوسیال		
1361.	ہار مونی تفاعل کے عمومی خواص	20.3	
1366.	پوسول کلیه تمل	20.4	
1373	ا کے اعدادی تراکیب ا	خطى الجبرا	21
1373 .	حطی مساوات کا نظام۔ گاو سی اسقاط، معکوس قالب	21.1	
	خطی مساوات کا نظام: حل بذریعه اعاده		
1391.	خطی مساوات کا نظام: بدخو کی	21.3	
1395.	تركيب كمتر مرابع كأبري بالمرابع أنان المرابع ا	21.4	
1401.	قالبی امتیازی اقدار کی شمول	21.5	
1410.	ا متياز کي آفدار کا حصول بذريعه اعاده	21.6	
1 4 1 5	Total Control		22
1415	را کیب برائے تفرقی مساوات یک درجی تفرقی مساوات کے اعداد می تراکیب	اعدادی سر 1 د د	22
	یک دربی نقر می مساوات کے اعداد می تراکیب		
	د وور بی عمر می مساوت ہے املا او کا ترابیب اعداد ی تراکب برائے بیفنو کی جزو کی افغر قی مساوات		

1436							 													لے	<u>څ</u>	لەۋر	مست	2	2	3.1					
1439							 											کیب	از	خفی	خ	تىرر	بدل	2	2	3.2					
1446 .									 		يد	מק ם	ظم	نه ر	غیر	نلە	امسك	بنت	ی قیم	عدا	سر ,	لوط	ر مخ	ناو	نيوم	مسكله	2	22.4	1		
1453 .									 							ات	ساوا	فی م	مكاف	طع.	ئے قد	را_ن	ب ب	اكيب	ی	اعداد	2	22.5	5		
1462 .																ت	أوار	رمس	زائد	طع	ئے قب		ب ب	اكيبه	ی تر	اعداد	2	22.6	6		
1467																												عداد ک		23	
1468.									 												زار	کمپيو	ـل	ملطياا	اورغ	خلل	2	23.1	l		
1470.									 											ىل	کاح	ات	ساو	سے م	نے۔	د ہرا۔	2	23.2	2		
1482.																															
1488.									 															ڣ	تحرا	باتهمى	2	23.4	1		
1497 .									 														ت	نميان	منح	لجكدا	2	23.5	5		
1504 .																					(فر ر	ور ت	ىل او	ی سکھ	اعداد	2	23.6	6		
1517																										ت	نبور	ضافی :	1	1	
1521																										ات	حلوما	فيدم		_	
1521 .									 												ت	باوار	، مس	۷ کے	فاعل	اعلى		 1.ب	l	•	

میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لا تعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

مارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذبین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود پچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور بوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے۔ کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظامِ اکائی استعال کی گئے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں کھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر کھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیرُ نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیرُ نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت اوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ اداکرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجو کیش کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان يوسفر. ئي

28 اكتوبر 2011

باب23

اعدادی تجزیه

انجینئری حساب کا متیجہ آخر کار اعدادی ہوتا ہے للذا انجینئری طالب علم کے لئے بنیادی اعدادی تو اکیب ا جاننا ضروری ہیں جن کی مدد سے دیے گئے مواد سے اعدادی جوابات اخذ کرنا ممکن ہو۔

بعض اوقات نظریہ سے حاصل کردہ جوابات عملًا قابل استعال نہیں ہوتے ہیں، مثلاً یک درجی خطی تفرقی مساوات کے عل کا تکملی کلیہ (حصہ 1.5)، خطی الجبرائی مساوات کے نظام کا مقطع کی مدد سے حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7)۔ کئی بار نظریہ صرف حل کی وجودیت کی تقین دہائی کرتا ہے لیکن اصل حل حاصل کرنے کے بارے میں کوئی مدد فراہم نہیں کرتا ہے۔

اعدادی تراکیب کی اہمیت کمپیوٹر کی ایجاد کی نظر ہے۔ ہم ان تراکیب کے نظریہ اور عملی استعال پر غور کریں گے۔تجزیہ خلل 2 پر بھی غور کیا جائے گا جو اعدادی تراکیب میں زیادہ اہمیت کے حامل ہے۔

 $\begin{array}{c} numerical\ methods^1 \\ error\ analysis^2 \end{array}$

اب 23.اعدادي تحبزيد

23.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر

چونکہ اعدادی تراکیب میں متناہی تعداد کے اعداد استعال کرتے ہوئے متناہی تعداد کے چال کے بعد جواب حاصل کیا جاتا ہے لہذا یہ تراکیب متناہی چال ⁸ بیش کرتے ہیں ماسوائے ان چند صورتوں میں جب اصل جواب کافی سادہ ناطق عدد ہو اور ہم کوئی ایسا اعدادی ترکیب استعال کریں جو یہی بالکل درست جواب فراہم کرتا ہو۔

ا گر کسی مقدار کی اندازاً قیمت a^* ہو اور اس کی اصل قیمت a ہو تب فرق $\epsilon = a^* - a$ کو ختمی خلل یا مختراً a^* کا خلل a^* بیں۔یوں

$$a^* = a + \epsilon$$
 فلل + اصل قیت $a^* = a + \epsilon$

ہو گا۔ a^* کی اضافی خلل ϵ_r کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{r} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\dot{\sigma}}{a}$$
 ($a \neq 0$)

 $\gamma=$ ظاہر ہے اگر $|\epsilon|$ کی قیمت $|a^*|$ کی قیمت سے بہت کم ہو تب $\frac{\epsilon}{a^*}$ ہو گا۔ہم ایک نئی مقدار $|a^*|$ فاہر ہے اگر $|a^*|$ کی متعارف کرتے ہیں جس کو ہم درستگی a^{7} کہیں گے۔یوں $a-a^*=-\epsilon$

$$a=a^*+\gamma$$
 ورسگی $a=a^*+\gamma$ اصل قیت $a=a^*+\gamma$

ہو گا۔آخر میں a^* کی حد خلل 9 سے مراد عدد β ہے جس کی تعریف درج زیل ہے۔

$$|a^* - a| \le \beta \implies |\epsilon| \le \beta$$

خلل کی تین قشمیں تجربی خلل، قطع چال خلل اور تعداد اعداد خلل ہیں۔ تجربی خلل اسے مراد مواد میں خلل ہے (جو تجربی ناپ کی وجہ سے ہو سکتے ہیں)۔ بالکل درست جواب تک پہنچنے کی خاطر متناہی (یا لامتناہی) تعداد کے حسابی

finite processes³ approximation⁴

error⁵

relative $error^6$

 $correction^7$

8 بعض او قات خلل کی تعریف $\gamma = -\epsilon$ کی جاتی ہے۔ آپ کی ایک تعریف کو تسلیم کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ ہم خلل کی تعریف $\gamma = -\epsilon$

error bound⁹

Experimental errors¹⁰

چال (قدم) درکار ہوں گے۔ حقیقت میں کسی خاص تعداد کے چال بعد حساب روک دیا جاتا ہے اور یوں قطع چال خلل 11 پیدا ہو گا۔ ہر قدم پر حساب کے دوران کمپیوٹر متناہی تعداد کے اعداد استعال کرتے ہوئے کمتر ہندسہ سے کم قیتوں کو رد کرتا ہے جس سے تعداد ہندسہ خلل 12 پیدا ہو گا جس پر ہم اب غور کرتے ہیں۔

اعشاری نظام میں ہر عدد کو متناہی یا لامتناہی تعداد کے اعشاری ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کمپیوٹر لامتناہی تعداد کے ہندسوں سے ہندسوں کو ذخیرہ نہیں کر سکتا ہے للذا کمپیوٹر استعال کرتے ہوئے کسی بھی عدد کو متناہی تعداد کی ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مقورہ نقطہ 13 نظام میں نقطہ اعشاریہ کیا جاتا ہے۔ مقررہ تعداد کے ہندسے پائے جاتے ہیں مثلاً 35.143 ، 5.000 ، 6.006 جبکہ غیر مقورہ نقطہ 14 نظام میں ملحوظ ہندسوں 15 کی تعداد متعین ہوتی ہے مثلاً 10 کا 10 کا ہم ہندسہ ہونا کہ میں ملحوظ ہندسہ سے مراد 10 کا ہم ہندسہ ہے مادہ کی بائیں جانب صفر جو اعشاریہ کا مقام تعین کرتا ہو۔ (یوں اس کے علاوہ ہر صفر بھی کا مقام تعین کرتا ہو۔ (یوں اس کے علاوہ ہر صفر بھی کا معام ملحوظ ہندسہ ہوگا۔) مثال کے طور پر 5420 ، 1340 اور 0.001460 میں سے ہر ایک میں چار ملحوظ ہندسے 16 ہیں۔

تعداد ہندسہ خلل کا قاعدہ اب بیان کرتے ہیں۔ (k ملحوظ ہندسوں تک قطع کرنے کی تعریف بھی یہی ہے پس اس میں ہندسہ کی جگہ ملحوظ ہندسہ پر کریں۔)

k+1 وال ہندسہ اور اس کے بعد تمام ہندسوں کو رد کریں۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کی نصف سے کم ہو تب مقام k پر ہندسہ کو تبدیل نہ کریں ("گھٹانا")۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کی نصف سے زیادہ ہو تب تب مقام k کی ہندسے کے ساتھ k جمع کریں ("بڑھانا")۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کا نصف ہو تب اگر مقام k کا ہندسہ طاق ہو تب اس کو بڑھا کر جفت بنائیں۔(مثال کے طور پر k اور k کو اشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک قطع کرتے ہوئے بالترتیہ k اور k واصل ہوگا۔)

اس قاعدہ کا آخری حصہ یقینی بناتا ہے کہ عدد کا کمتر حصہ رد کرتے ہوئے اوسطاً برابر مرتبہ عدد بڑھایا اور گھٹایا جاتا ہے۔

Truncation error¹¹

rounding error¹²

fixed point¹³

floating point¹⁴

significant digits¹⁵

¹⁶ ایساجدول جو k ملحوظ ہندے دیتا ہومیں، جب تک کہانا جائے کہ ایسانہیں ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ دیا گیاعدد *a ، بالکل درست قیت a=1 آخری ہندے کی = 0.5 اکایاں مختلف ہوسکتا ہے۔ مثال کے طور پراگر 1.996 a جو سکتا ہے۔ مثال کے طور پراگر 1.996 a جو سکتا ہے۔ مثال کے طور پراگر 1.996 میں میں معالم کے ایسان میں میں میں معالم کے ایسان میں معالم کے ایسان کے ایسان میں میں معالم کے ایسان میں معالم کے ایسان کے ایسان

باب.23 اعب دادی تحب زید

اگر ہم 1.2535 کو 3 ، 2 اور 1 اشاریہ تک قطع کریں تب ہمیں بالترتیب 1.254 ، 1.25 اور 1.3 حاصل ہو گالیکن، بغیر مزید معلومات کے، 1.25 کو ایک اشاریہ تک قطع کرنے سے ہمیں 1.2 ملتا ہے۔

تعداد ہندسہ خلل کی وجہ سے کوئی بھی حساب مکمل غلط ہو سکتا ہے۔ عموماً چال کی تعداد بڑھانے سے یہ خلل بڑھتا ہے۔ یوں حسابی پرو گرام کو اس خلل کی نقطہ نظر سے دیکھنا ضروری ہو گا اور اس خلل کو کم سے کم کرنا لازم ہو گا۔

23.2 دہرانے سے مساوات کاحل

ہمیں عموماً مساوات

$$(23.1) f(x) = 0$$

اعداد کی دہرانے کے طریقہ میں ہم اختیار کی x_0 منتخب کرتے ہوئے درج ذیل روپ کلیہ

(23.2)
$$x_{n+1} = g(x_n)$$
 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

اس حصه میں دائرہ کار اور حلقہ g(x) دونوں حقیقی کیر پر ہوں گے۔زیادہ عمومی معمہ میں x یا g اور یا دونوں سمتات ہو سکتے ہیں۔

algebraic equations¹⁷

roots¹⁸

 $transcendental\ equations^{19}$

دہرانے کے تراکیب اعدادی تجزیہ کے لئے انتہائی اہم ہیں۔

مساوات 23.1 کو حل کرنے کے لئے دہرانے کے تراکیب کئی طریقوں سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ہم ان میں سے تین خصوصاً اہم طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

الجبرائي تبادل

ہم مساوات 23.1 کو الجبرائی طور پر تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل روپ حاصل کر سکتے ہیں

(23.3) x = g(x)

جو مساوات 23.2 کی روپ میں ہے۔مساوات 23.3 کے حل کو g کا مقررہ نقطہ 20 کہتے ہیں۔ویے گئے مساوات 23.1 کی مطابقتی مساوات 23.3 ہو سکتے ہیں جن کے ترتیب x_0, x_1, \dots مختلف (اور x_0 کے تابع) ہوں گے۔آئیں ایک سادہ مثال دکھتے ہیں جس میں یہ حقائق ابھر کر سامنے آتے ہیں۔

مثال 23.1: دہرانے کی ترکیب

مساوات $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ کے لئے وہرانے کی ترکیب عمل میں لائیں۔ چونکہ ہمیں اس مساوات $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$

 $x = 1.5 \mp \sqrt{1.25}$, $x_1 = 2.618034$, $x_2 = 0.381966$

معلوم ہیں، ہم دہرانے کے عمل کے دوران خلل کا رویہ دیکھ سکتے ہیں۔ہم دیے گئے مساوات سے

(23.4)
$$x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \implies x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1)$$

کھ سکتے ہیں۔ یوں $x_0=1$ منتخب کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ترتیب ملتی ہے

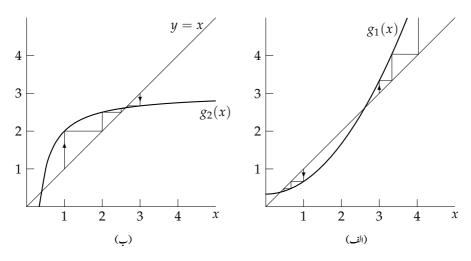
 $x_0 = 1.000$, $x_1 = 0.667$, $x_2 = 0.481$, $x_3 = 0.411$, $x_4 = 0.390$, ...

جو تھوٹے جذر کی طرف گامزن ہے (شکل 23.1-الف)۔اگر ہم $x_0=3.000$ منتخب کریں تب درج ذیل ملتا ہے

 $x_0 = 3.000$, $x_1 = 3.333$, $x_2 = 4.037$, $x_3 = 5.766$, $x_4 = 11.414$, ...

fixed point²⁰

باب 23,اعب ادى تحب زيه



شكل 23.1:اشكال برائے مثال 23.1

جو منفرج ترتیب ہے (شکل 23.1-الف)۔ دی گئی مساوات سے درج ذیل بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

(23.5)
$$x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x} \implies x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$$

اب x_0 منتخب کرتے ہوئے

 $x_0 = 1.000$, $x_1 = 2.000$, $x_2 = 2.500$, $x_3 = 2.600$, $x_4 = 2.615$, ...

 $x_0 = 3$ منتخب کرتے $x_0 = 3$ موتا ہے جو بڑے جذر کی طرف گامزن ترتیب ہے (شکل 23.1-ب)۔ای طرح $x_0 = 3$

 $x_0 = 3.000$, $x_1 = 2.667$, $x_2 = 2.625$, $x_3 = 2.619$, $x_4 = 2.618$, ...

اگر x_0 کا مطابقتی مساوات 23.2 سے حاصل کردہ ترتیب x_0, x_1, \dots مر تکز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ مساوات 23.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب موتکز ہے۔

ار تکاز کے لئے کافی شرط درج ذیل مسلہ پیش کرتا ہے جس کے کئی اہم عملی استعال پائے جاتے ہیں۔

مسكله 23.1: (ارتكاز)

فرض کریں کہ g(x) ہو تب میں x=s کا حل x=s کا حل x=s کا حل x=s کا حل ہو ہو تب میاوات x=s کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر x=s میں x=s کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر x=s میں دی گئی دہرانے کی ترکیب x=s میں ہر x=s کے لئے مرتکز ہو گی۔

ثبوت: تفرقی علم الاحصاء کے مسئلہ اوسط قیت کے تحت x اور s کے درمیان ایسا ج پایا جائے گا جو درج فیل کو مطمئن کرے گا،

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s)$$

جہاں x وقفہ J میں پایا جاتا ہے۔ چونکہ g(s)=s اور g(s)=s اور y وقفہ y میں درج ذیل ماتا ہے۔

$$|x_n - s| = |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(\xi)| |x_{n-1} - s| \le \alpha |x_{n-1} - s|$$

$$\le \alpha^2 |x_{n-2} - s| \le \dots \le \alpha^n |x_0 - s|$$

چونکہ $|x_n-s| o 0$ اور $|x_n-s| o 0$ ہوں گے۔یوں ثبوت مlpha o 0 ہوتا ہے۔

مثال 23.2: دہرانے کا طریقہ۔ مسئلہ 23.1

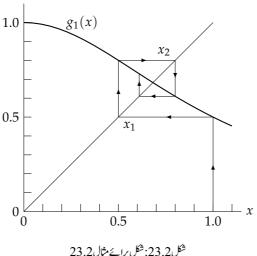
وہرانے کے طریقہ سے $f(x)=x^3+x-1=0$ کا حل تلاش کریں۔اس مساوات کا جلدی سے خاکہ بنا کر $f(x)=x^3+x-1=0$ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا جذر x=1 کے قریب پایا جاتا ہے۔ ہم اس مساوات سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_1(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$
 \Longrightarrow $x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n^2}$

یوں کسی بھی x کے لئے 1 کے الئے $|g_1'(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} < 1$ پر مرکوزیت پائی جائے گی۔ ہم x منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 23.2)

$$x_1 = 0.500$$
, $x_2 = 0.800$, $x_3 = 0.610$, $x_4 = 0.729$, $x_5 = 0.653$, $x_6 = 0.701$, \cdots

با_23.اعبدادی تحبزیه 1474



جبکہ چے ہندسوں تک درست اصل جذر $s=0.682\,328$ ہیں۔ $s=0.682\,328$

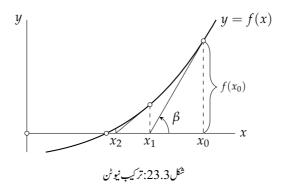
$$x = g_2(x) = 1 - x^3$$
, $\left| g_2'(x) \right| = 3x^2$

 $x_0=1$ ہندر کے قریب $|g_2'|$ کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے المذا ہم ارتکاز کی توقع نہیں کر سکتے ہیں۔ آپ یں تیلی کر سکتے ہیں۔ $x_0 = 2$ ، $x_0 = 0.5$

تر کیب نیوٹن

مساوات f(x)=0 ، جہاں f(x)=0 قابل تفرق ہے، کو توکیب نیوٹن سے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب میں ہم f(x)=0 کا تخمینہ اس کے موزوں مماس سے حاصل کرتے ہیں۔اس ترکیب میں ہم f(x)=0 کا تخمینہ اس کے موزوں مماس سے حاصل کرتے ہیں۔اس ترکیب میں ہم f(x)=0یں کے اور کا مماس بناتے ہیں۔ یہ مماس x محور کو x_1 کے محور کو x_2 کے بیات ہیں۔ یہ مماس بناتے ہیں۔

$$\tan \beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



ہو گا۔اگلے قدم پر ہم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حاصل کرتے ہیں۔ای طرح چلتے ہوئے جذر تک پہنچا جاتا ہے۔یوں دہرانے کے طریقے کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو

 $f(x)=x^2-c=0$ کا حذر المربع تلاش کری۔ہمارے ہاں \sqrt{c} لیعنی c=2 کا حذر المربع تلاش کری۔ہمارے ہاں ہو گا۔ یوں مساوات 23.6 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔ f'(x)=2x

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

اب اس ترکیب سے c=2 کا جذر المربع تلاش کرتے ہیں۔ ہم $x_0=1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = 1.500\,000$$
, $x_2 = 1.416\,667$, $x_3 = 1.414\,216$, $x_4 = 1.414\,214$, ...

2 كا جذر المربع 1.414 213 562 به اور آپ د كيه سكتے ہيں كه مير ملحوظ بندسوں تك درست جواب ديتا

جدول 23.4: جدول برائے مثال 23.4

x_{n-}	⊦ 1	D_n	N_n	x_n	n
1.90	01 1	1.832	3.483	2.000	0
1.89	96 :	1.648	3.125	1.901	1
1.89	96 :	1.639	3.107	1.896	2

مثال 23.4: ماورائی مساوات کا دہرانیے کی ترکیب سے حل مثال $f'(x) = x - 2\sin x$ کی ترکیب سے حل مساوات $f(x) = x - 2\sin x$ کی شبت عل تلاش کریں۔ ہم $f(x) = x - 2\sin x$ کی شبت علی الماوات $f(x) = x - 2\sin x$ کی صورت درج ذیل ہو گی۔ $1 - 2\cos x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2\sin x_n}{1 - 2\cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n\cos x_n)}{1 - 2\cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}$$

 $x_0 = 2$ کی ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا حل $x_0 = 2$ کے قریب ہے۔یوں ہم جدول 23.1 حاصل کرتے ہیں۔ چواب 1.8955 ہے۔ $x_0 = 2$ ہیں۔چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 1.8955 ہے۔

مثال 23.5: توکیب نیوٹن کا الجبرائی مساوات پر اطلاق ساوات $f(x)=x^3+x-1=0$ کو ترکیب نیوٹن سے عل کریں۔ساوات 23.6 سے درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

ے شروع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔ $x_0 = 1$

1476

 $x_1 = 0.750\,000$, $x_2 = 0.686\,047$, $x_3 = 0.682\,340$, $x_4 = 0.682\,328$, \cdots

 x_4 چھ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔ مثال 23.2 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ مثال x_4 بہت تیزی کے ساتھ اصل حل پر مرکوز ہوتا ہے۔ اس سے دہرانے کی ترکیب کے درجہ کا تصور پیدا ہوتا ہے جس پر اب بات کی جائے گی۔

فرض کریں کہ مساوات g(x) کا طل g(x) کا طل g(x) ہے اور g(x) ایک وہرانے کی ترکیب ہے جو g(x) اس عل کی تخمین g(x) دیتی ہے۔ تب g(x) ہو گا جہاں g(x) میں خلل g(x) ہے۔ فرض کریں کہ اس عل کی تخمین g(x) ہے۔ نرض کریں کہ

8 متعدد بار قابل تفرق ہے للذا ٹیلر کے کلیہ سے

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \cdots$$
$$= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \cdots$$

g کو جبر و بیل خیر صفر جزو میں ε کے قوت نما کو دہرانے کی ترکیب (جس کو g(s) کا ملک جبر و بیل خیر صفر جزو میں $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \varepsilon_{n+1}$ کا خلل تعین کرتا ہے) کا درجہ ایک کی جبر بیل بڑی g(s) کے جبر ور اور از تکاز کی صورت میں بڑی g(s) کے لئے g(s) جبر اللہ از کیب کا درجہ اس کی مرکوزیت کی ناپ ہے، اور از تکاز کی صورت میں بڑی g(s) کے لئے g(s) جبر اللہ از کیب کا درجہ اس کی مرکوزیت کی ناپ ہے، اور از تکاز کی صورت میں بڑی

ترکیب نیوٹن دو درجی سے ترکیب نیوٹن کے لئے درج ذیل ہے

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

اور چونکہ g(s)=0 ہے البذا g'(s)=0 ہو گا؛ یوں ترکیب نیوٹن کم از کم دو درجی ہے۔ایک اور تفرق کے بعد $g_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$ مثال 23.2 میں $g_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$ اور $g''(s)=\frac{f''(s)}{f'(s)}$ بین لہذا ہے کہ درجی دہرانے کی ترکیب ہے۔

f(x)=0 ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے کیکن f(x)=0 ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے کیکن حل کے قریب f(x)=0 کی ترسیم کو دیکھتے ہوئے، ترکیب نیوٹن کی جیومیٹریائی تصور کو مد نظر رکھتے ہوئے عموماً اس مشکل سے چھٹکارا حاصل کرنا ممکن ہوگا۔ اگر درکار حل کے قریب f(x)=0 ہوتب f(x)=0 کی بہتر قیمت حاصل کرنا ضروری ہوگا۔ ایس مساوات کو بد خو f(x)=0 اور f(x)=0 اور f(x)=0 کو بد خو f(x)=0 کی بیتر ہوگا۔ ایس مساوات کو بد خو f(x)=0 کی بیتر ہوگا۔ ایس مساوات کو بد خو f(x)=0 کی بیتر ہیں۔

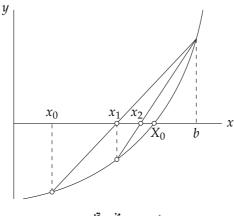
اس اس کو حل کرنے کی تیسری ترکیب جس کو ترکیب مقام غیر حقیقی 23 کہتے ہیں پر اب غور کرتے ہیں۔ اس f(x)=0 ترکیب میں ہم منحنی f(x)=0 کو تخمیناً ایک وتر سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 23.4)۔ یہ وتر محور x کو ترکیب میں ہم منحنی اس کے تحریب میں ہم منحنی اس کے تحریب میں ہم منحنی اس کے تحریب میں اس کے تحریب میں منحنی اس کے تحریب میں منحنی کے تحریب میں کے تحریب میں منحنی کے تحریب میں کے تحریب میں

(23.7)
$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

order²¹

 $ill\text{-}conditioned^{22}$

method of false position 23



شكل 23.4: منحنى كانتخميني وتر

x کے مل کے مل کے قریب ہوگا۔ اگلے قدم پر اس سے بہتر عل x کے قریب ہوگا۔ اگلے قدم پر اس سے بہتر عل

(23.8)
$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طرح بتدر تے بہتر حل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ b کو X_0 کے قریب کرنے سے ارتکاز کو بہتر بنایا جا سکتا ہے۔ عموماً قیاس کے ذریعہ ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

$$x_1 = \frac{0.5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

حاصل ہو گا جبکہ مساوات 23.8 سے 23.67 ملتا ہے۔ہم اسی طرح بندر تے بہتر حل تلاش کر سکتے ہیں۔ $x_2=0.672$

سوالات

سوال 23.1 نین $x_0=1$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0=1$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0=1$ کے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔ $x_1=1.900\,000$ جواب:

سوال 23.2: $x_0 = 2$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 2$ کے کر تین قدم حلتے ہوئے تلاش کریں۔ $x_1 = 1.478\,261$ جواب: $x_2 = 1.478\,261$

 $x_0=1$ سوال 23.3 سوال 23.1 میں دیے گئے مساوات کے جذر 0.9 میں اور 1.9 ہیں۔ اگرچہ 1 جذر 0.9 اور 1.1 کو تریب ہے لیکن ترکیب نیوٹن ان کی جگہ جذر 1.9 تلاش کرتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ جذر 20 اور قیت منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے جذر 1.1 حاصل کریں۔ جواب: تفاعل $x_0=1.2$ کو $x_0=1.2$ پر ممال $x_0=1.2$ پر ممال $x_0=1.2$ پر ممال $x_0=1.2$ برقطع کرتا ہے۔ آپ $x_0=1.2$ بیان کوئی اور عدد منتخب کر سکتے ہیں۔

سوال 23.4 تا سوال 23.7 میں دیے مساوات کی ترکیب نیوٹن کی مدد سے تمام جذر تلاش کریں۔

 $\cos x = x$:23.4 سوال 9.739 جواب

 $x + \ln x - 2$:23.5 سوال 3.577 عواب:

 $2x + \ln x - 1$:23.6 سوال 0.687 :جواب:

 $x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82$:23.7 سوال 23.7 براب: -1.3, 1.4

سوال 23.8: وکھائیں کہ مثال 23.2 میں $|g_1'(x)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\tilde{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ پر حاصل ہو گی اور کہ یہ قیمت $|g_1'(x)|=\frac{3\sqrt{3}}{8}=0.65$ برابر ہے۔

باب.23 اعب دادی تحب زید

سوال 23.9: ایما کیوں ہے کہ مثال 23.1 میں یک سر ترتیب حاصل ہوتی ہے لیکن مثال 23.2 میں ایما نہیں ہوتا ہے؟

سوال 23.10: مثال 23.2 کی آخر میں دہرانے کی ترکیب سے حاصل قیمتوں کو از خود حاصل کریں اور شکل 23.2 کی طرز کا شکل بنائیں۔

سوال 23.13: سوال 23.12 میں اگر آپ $x=x^5-0.2$ میں اگر آپ $x=x^5-0.2$ سے شروع کریں تو کیا عاصل ہو گا؟ جواب: $x=x^5-0.20$ میں اگر آپ جواب: $x=x^5-0.20$ میں اگر آپ کی سے شروع کریں تو کیا ہو گا۔

سوال 23.14: $c_{\pi}(1)$ کا کم تر جذر تقریباً سوال 23.14: $c_{\pi}(1)$ کا کم تر جذر تقریباً علی مساوات کی ترکیب استعال کرتے ہوئے و کھائیں کی مساوات کو جدار مساوات کی ترسیم سے اخذ کریں کہ جذر $c_{\pi}(1)$ کے قریب پایا جاتا ہے؛ مساوات کو $c_{\pi}(1)$ کا کھی کر آگے بڑھیں۔ $c_{\pi}(1)$ کا کھی کر آگے بڑھیں۔

سوال 23.15: $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے $\sqrt{5}$ کو مثال 23.3 کی ترکیب سے حاصل کرتے ہوئے ہوئے $x_0 = 2$ تلاش کریں۔ x_1, x_2, x_3, x_4 تلاب $\epsilon_4 = 0.000\,000$ ، $\epsilon_3 = 0.000\,043$ ، $\epsilon_2 = 0.013\,932$ ، $\epsilon_1 = 0.236\,068$ جواب:

سوال 23.16: و کھائیں کہ مثال 23.3 میں ہارے یاس

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{c}{x_n} \right)^2$$

ہے جو در تکی کی ناپ ہے۔د کھائیں کہ تخمیناً

$$\left|x_n - \sqrt{c}\right| \approx \frac{1}{2} \left|x_n - \frac{c}{x_n}\right|$$

ہو گا۔ اس کا اطلاق سوال 23.15 پر کریں۔

سوال 23.17: مثبت x محور پر ایبا وقفہ تلاش کریں کہ c=2 لیتے ہوئے مسکلہ 23.1 کی شرط کو مثال 23.3 کے دہرانے کی ترکیب مطمئن کرتی ہو۔ $x \geq \sqrt{\frac{2}{1+2\alpha}} \ , \quad \alpha < 1$ جواب: $\alpha < 1$

سوال 23.18: جذر الکعب کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔اس ترکیب کو استعال کرتے ہوئے $x_0=2$ سے شروع کر کے تین قدم چل کر $\sqrt[3]{7}$ تلاش کریں۔

وال 23.19: مثبت عدد c کا k وال جذر حاصل کرنے کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔ $f(x)=x^k-c$, $x_{n+1}=(1-\frac{1}{k})x_n+\frac{c}{kx_n^{k-1}}$: جواب:

سوال 23.20: $x^4=2$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔ جواب: $0, \quad 1$

سوال 23.21: $x^4 = 2x$ كا حقيقى جذر بذريعه تركيب غير حقيقى مقام حاصل كريں۔ 0, 0, 0

سوال 23.22 عاصل كرير $3\sin x = 2x$ كا حقيقى جذر بذريعه تركيب غير حقيقى مقام حاصل كرير- جواب: 0, 1.49

سوال 23.23: سوال 23.20 میں حاصل کردہ مثبت جذر ہر صورت اصل جذر سے معمولی کم ہو گا۔ایسا کیوں ہے؟

سوال 23.24: ترکیب نیوٹن میں f'(x) کا حساب کرنا ہوتا ہے۔ عملی استعال میں جمعی کھاریہ قدم کافی پیچیدہ ثابت ہو سکتا ہے۔ f'(x) سے چھٹکارا حاصل کرنا کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کی جگہ f'(x) ستعال کیا جائے۔ یوں حاصل کردہ کلیہ کا کلیہ غیر حقیقی مقام کے ساتھ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 23.25: فرض کریں بند وقفہ I میں g استمراری ہے اور اس کا حلقہ بھی I میں پایا جاتا ہے۔ و کھائیں کہ مساوات x=g(x) کا کم از کم ایک حل اس وقفہ میں پایا جائے گا۔ د کھائیں کہ اس وقفہ میں مساوات کے زیادہ جذر بھی ممکن ہیں۔

اب 23.اعدادي تحبزيد 1482

كاحدول فرق	f(x)	$= x^3, x =$	-3(1)	جدول23.2: تفاعل 3
0,000) (**/	,	- (-)	

x	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تيسرا فرق	چوتھا فرق
- 3	-27				
		19			
-2	-8	_	-12	_	
1	1	7		6	0
-1	-1	1	-6	(0
0	0	1	0	6	0
	U	1	U	6	U
1	1	1	6	O	0
		7		6	
2	8		12		
		19			
3	27				

23.3 تنابى فرق

متناہی فرق کا استعال اعدادی تجزیہ کے کئی شاخوں میں پایا جاتا ہے مثلاً دو قیمتوں کے درمیان قیمت کا تخمینہ لگانے میں، جدول کی جائج پڑتال میں، تخمینہ لگانے میں، تفرق میں، اور تفرقی مساوات کے حل میں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں تفاعل f کی اعدادی قیمتوں f و f کا جدول دیا گیا ہے جہاں نقطے f کی اعدادی قیمتوں f کی اعدادی جیسے فاصلے پر بیں۔

$$x_0$$
, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$, $(h > 0, 5, 5)$

f(x) کو عوماً کی کلیہ یا تجربہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم جدول میں ہر f(x) کو اگلی (بڑی) کی مطابقتی قیمت سے تفریق کرتے ہوئے پہلا فرق 24 عاصل کرتے ہیں۔ جدول 23.2 میں اس کی مثال پیش کی گئی ہے جہاں f(x) جہاں f(x) جہاں f(x) جہاں f(x) جہاں f(x) جہاں f(x) جہاں ہیں f(x) جہاں f(x) جہاں ہوں f(x) جہاں ہیں f(x) جہاں ہوں f(x) جہاں ہوں f(x) جہاں ہوں f(x) جہاں ہیں گزشتہ قطار (جس کیا جاتا ہے۔ اس طرح باقی فرق بھی حاصل کیے جاتے ہیں۔ جدول فرق میں ہر فرق کو اپنی قطار میں گزشتہ قطار (جس سے فرق حاصل کیا گیا ہے) کی اندراج کی در میان برابر مقام پر درج کیا جاتا ہے۔ نقطہ اعشار یہ اور فرق کی بائیں صفروں کو نظر انداز کیا جاتا ہے (جدول 23.3)۔

 $^{{\}rm first\ difference^{24}}$

second difference²⁶

23.3. تنابى فرق

وظ ہند سوں کی تعداد چارہے۔	کاجدول فرق۔م $f(x) =$	$\frac{1}{x}$, $x = 1$	جدول 23.3: تفاعل 2(0.2)
----------------------------	-----------------------	-------------------------	-------------------------

x	$f(x) = x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تيسرا فرق
1.0	1.0000			
		-1667		
1.2	0.8333		477	
		-1190		-180
1.4	0.7143		297	
		-893		-98
1.6	0.6250		199	
		-694		-61
1.8	0.5556		138	
		-556		
2.0	0.5000			

جدول فرق میں فرق کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے رائج ہیں۔ان میں سے جو بھی طریقہ استعال کیا جائے، جدول میں نہ کوئی فرق تبدیل ہو گا اور نا ہی اس کا مقام۔ پہلی (اور غالباً اہم ترین) اظہار جس کو وسطی فرق²⁷ کہتے ہیں درج ذیل ہے

(23.9) جہاں دائیں ہاتھ دو زیر نوشت کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔ ای محموعہ جبال دائیں ہاتھ دو زیر نوشت کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔ ای طرح
$$\delta f_{m+1/2} = f_{m+1} - f_m$$

ہو گا۔ دیگر فرق بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسی زیر نوشت والے اجزاء ایک ہی صف میں پائے جاتے ہیں۔ (دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ جدول میں x کی سب سے چھوتی قیمت x_0 ہو۔ مثال کے طور

central difference²⁷

باب 23.اعبدادي تخب زمه

 $\delta f_{1/2} = -0.0694$ ، $f_0 = 0.6250$ بیر جدول $x_0 = 1.6$ میں جم $x_0 = 1.6$ میں جم $x_0 = 1.6$ میں جم جدول کے۔ $x_0 = 0.0199$

دوسری اظہار جس کو آگھے فوق^{28 کہتے} ہیں درج ذیل ہے

ہے۔اسی طرح

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m$$

 $\Delta f_0 = -0.0694$ ، $f_0 = 0.6250$ بین $x_0 = 1.6$ کیا جائے تب $x_0 = 1.6$ مثال کے طور پر اگر جدول میں 23.3 میں $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ ، $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ ، $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ کیروں پر پائے جائیں گے۔

تیری اظہار جس کو پیچھے فرق^{29 کہتے} ہیں درج ذیل ہے

forward difference²⁸ backward difference²⁹

23.3 . تناى فرق

ور $\nabla f_1 = f_1 - f_0$ اور $\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$ ، $\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$ بیل جزو $\nabla f_m = f_m - f_{m-1}$

ہو گا۔اسی طرح

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1}$$

ہو گا۔ باقی اجزاء بھی اس طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء تر چھی ککیروں پر اوپر رخ یا جدول میں پیچھے رخ ککیروں پر پائے جاتے ہیں۔ جدول کی آخر میں حساب کے دوران پیچے فرق عموماً زیادہ مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر جدول 23.3 میں ہم جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر جدول 23.3 میں ہم $x_0=1.6$ $x_0=1.6$ $x_0=1.6$ $x_0=1.6$

ہو گا۔

جدول میں غلطیوں کی نشاندہی کرنے کے لئے فرق کا سہارا لیا جاتا ہے۔جبیبا جدول 23.4 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل میں خلل e جلد تمام فرق میں پھیل جاتا ہے۔یوں فرق میں بہت زیادہ اتار چڑھاو تفاعل کی قیمت میں غلطی کو ظاہر کرتی ہے۔ظاہر ہے کہ کم تعداد کی ملحوظ ہندسوں کی بنا معمولی اتار چڑھاو ہر صورت پائی جائے گی۔

نفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں بھی فرق اہم کردار ادا کرتا ہے۔ قدم h لیتے ہوئے n در جی کثیر رکنی $p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ رکنی $p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ برابر) ہوں گے اور ان سے بلند فرق صفر ہوں گے۔اییا اس لئے ہو گا کہ پہلے فرق

$$p_n(x+h) - p_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] + \dots = a_0nhx^{n-1} + \dots$$

کا درجہ n-1 ہے، دوسرے فرق کے کثیر رکنی کا درجہ n-2 ہو گا اور اس کے پہلے جزو کا عددی سر $a_0n(n-1)h^2$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ وغیرہ لیا گر تفاعل f کے جدول فرق میں n ویں فرق کسی حلقہ میں تقریباً مستقل ہوں تب جدول کی قیمتوں کو اس حلقہ میں n درجی کثیر رکنی p_n سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ آئیں دیے گئے f کی صورت میں کثیر رکنی p_n کے حصول کی ایک ترکیب دیکھیں۔

مثال 23.7: تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کونا جدول 23.4 میں دوسرا فرق تقریباً مستقل (7- کے برابر) ہیں۔یوں ہم دیے گئے تفاعل کی تخیینی دو درجی کثیر اب 23.اعدادي تحبزيد

جدول 23.4: فلطى تمام فرق ميں پھيل جاتى ہے۔ يہاں نفاعل 2.0(0.1) جدول 4x, x=2.0(0.1) ہيں ہے۔ يہاں نفاعل 6x

x	\sqrt{x}		فرق		\sqrt{x}		فرق			المجميلنا	لمی € ک	غلة
2.0	1.4142				1.41412							
		349				349						
2.1	1.4491		-8		1.4491		8					
		341		1		341		<u>11</u>				ϵ
2.2	1.4832		-7		1.4832		<u>3</u>				ϵ	
		334		-1		<u>344</u>		-31		ϵ		-3ϵ
2.3	1.5166		-8		<u>1.5176</u>		-28		ϵ		-2ϵ	
		326		1		<u>316</u>		<u>31</u>		$-\epsilon$		3ϵ
2.4	1.5492		-7		1.5492		<u>3</u>				ϵ	
		319		2		319		$-\underline{8}$				$-\epsilon$
2.5	1.5811		-5		1.5811		<u>-5</u>					
		314				314						
2.6	1.6125				1.6125							

رکنی p_2 تلاش کر سکتے ہیں۔ہم پہلے جدول فرق بناتے ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام دوسرے فرق ٹھیک p_2 ٹھیک p_3 گھیک p_4 کے برابر ہیں ہم حلقہ کے وسط میں تفاعل کی کوئی قیمت اور پہلا فرق منتخب کرتے ہیں مثلاً 1.5166 اور 334 جس سے جدول 23.5 حاصل ہوتا ہے۔ p_2 کے پہلے عددی سر کو

$$a_02!h^2=a_0\cdot 2\cdot 0.1^2=-0.0007$$
 وسرا فرق $a_0=-0.0007=0.035$ ملتا ہے۔ اس طرح ماصل کیا جاتا ہے۔ یوں $p_1(x)=p_2(x)+0.035x^2$

ورجہ اول ہو گا اور جدول 23.5 سے ہم حماب لگا کر دیکھتے ہیں کہ اس کے پہلے صفر تقریباً مستقل ($a_1=\frac{0.04915}{0.1}=0.4915$ عاصل ہوتا ہے۔ آخر میں ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ یہ a_h کے برابر ہے۔ یوں $a_1=\frac{0.04915}{0.1}=0.4915$ عاصل ہوتا ہے۔ آخر میں $p_1(x)-0.4915x=a_2=0.5713$

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.5713$$

ہو گا۔اس مثال سے آپ دکھ سکتے ہیں کہ فرق کو استعال کرتے ہوئے تخینی کثیر رکنی حاصل کرنے سے پہلے، تخینی کثیر رکنی کی در علی کا معیار جانا جا سکتا ہے۔ تخینی کثیر رکنی کی حصول کے دیگر تراکیب پر اگلے جھے میں غور کیا جائے گا۔

23.3. شناى فرق

جدول 23.5: قاعل $x = \sqrt{x}$ کودودر جی کثیر رکنی p_2 سے ظاہر کرنا

х	$p_2(x)$	ق	فر
2.0	1.4143		
		348	
2.1	1.4491		-7
		341	
2.2	1.4832		-7
		<u>334</u>	
2.3	<u>1.5166</u>		-7
		327	
2.4	1.5493		-7
		320	
2.5	1.5813		-7
		313	
2.6	1.6126		

سوالات

سوال 23.26: قلم و كاغذ استعال كرتے ہوئے جدول 23.2 حاصل كريں۔

سوال 23.27: قلم و كاغذ استعال كرتے ہوئے جدول 23.3 حاصل كريں۔

سوال 23.28: جدول 23.3 میں $x_0 = 1.2$ منتخب کرتے ہوئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچیے فرق کے جدول مکمل کریں۔

سوال 23.29: $x_0 = 2$ منتخب کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = x^3$ کا $x_0 = 2$ کے لئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچیے فرق کے جدول مکمل کریں۔

باب.23 اعب دادی تحب زید

سوال 23.30: درج ذيل د كھائيں۔

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$$

$$\delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}$$

سوال 23.31: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ کی قیمتیں f(x) = 0 کے لئے (الف) دو ملحوظ ہندسوں، (ب) تین ملحوظ ہندسوں اور (پ) چار ملحوظ ہندسوں تک حاصل کریں۔ان کے مطابقتی جدول فرق میں تعداد ہندسہ خلل کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 23.32: x=0(1) کے لئے $x=x^2$ کے جدول فرق مکمل کریں۔ایک اور جدول میں $f(x)=x^2$ کے بہلا فرق، دوسرا فرق، تیسرا فرق اور چوتھا فرق تلاش کریں۔جدول میں غلطی کا پھیلنا دیکھیں۔

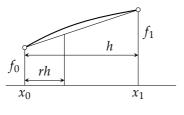
سوال 23.33: فرق استعال کرتے ہوئے ورج ذیل جدول کی جانج پڑتال کریں۔
$$\frac{x \mid 4.0 \quad 4.1 \quad 4.2 \quad 4.3 \quad 4.4 \quad 4.5}{f(x) \mid 0.250 \quad 0.244 \quad 0.242 \quad 0.233 \quad 0.227 \quad 0.222}$$

سوال 23.34: مثال 23.7 میں کی گئی تمام صاب خود کریں۔

23.4 بالهمى تحريف

عموماً تفاعل f(x) کی قیمتوں کا جدول دیا گیا ہو گا اور ہمیں ان x پر تفاعل کی قیمت درکار ہو گی جو جدول میں دیے گئے x کی قیمتوں کے درمیان پائے جاتے ہوں۔ایس قیمتوں کے حصول کی عمل کو ہم باہمی تحریف کی ترکیب اس گے۔اس عمل میں f(x) کی استعال ہونے والی قیمتوں کو چول قیمتیں f(x) کیتے ہیں۔باہمی تحریف کی ترکیب اس مفروضہ پر بنی ہے کہ نقط x کے قریب تفاعل f(x) کو کثیر رکنی f(x) سے ظاہر کرنا ممکن ہے لہذا f(x) قیمت کو اس نقطے پر تفاعل کی قیمت نصور کیا جا سکتا ہے۔

interpolation³⁰ pivotal values³¹



شكل 23.5: خطى باجمى تحريف

سادہ ترین طریقہ خطی باہمی تحریف 32 ہے۔اس ترکیب میں جدول میں درکار x کی دونوں جانب درج نقطوں مادہ ترین طریقہ خطی باہمی تحریف f(x) سے اس خطہ میں f(x) کو ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 23.5)۔یوں جیسا ہم چھوٹی جماعتوں کی حماب سے جانتے ہیں، نقطہ $x=x_0+r$ پر $x=x_0+r$ کی قیت تخمیناً

(23.12)

$$f(x) \approx p_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0$$
 $(r = \frac{x - x_0}{h}, \ 0 \le r \le 1)$

ہو گا۔ یوں اگر $\ln 9.0 = 2.197$ اور $\ln 9.5 = 2.251$ ہوں تب $\ln 9.0 = 2.197$ ماصل کرنے کی خاطر ہم $r = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$

$$\ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4(\ln 9.5 - \ln 9.0) = 2.219$$

حاصل کرتے ہیں۔

خطی باہمی تحریف اس صورت تسلی بخش ہو گی جب جدول میں x کی قیمتیں اتنی قریب قریب ہوں کہ ان کے مابین منحیٰ سے سید ھی قطعات کی انحراف کم ہو، مثلاً ہر x_0 اور x_1 کے در میان ہر x کے لئے انحراف جدول میں آخری ہندسہ کی اکائی کی نصف ($\frac{1}{2}$) سے کم ہو۔

دو درجی باہمی تحریف 33 میں ہم x_0 اور $x_0=x_0+2h$ اور $x_0=x_0+2h$ کو ایسی و درجی قطع مکافی سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_0,f_0) ، (x_0,f_0) اور (x_0,f_0) سے گزرتی ہو۔یوں بہتر کلیہ

(23.13)

$$f(x) \approx p_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0$$
 $(r = \frac{x - x_0}{h}, \ 0 \le r \le 2)$

linear interpolation³² quadratic interpolation³³

باب.23 اعب دادی تحب زید

$$f_0 + 2(f_1 - f_0) + [(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)] = f_2$$

ہو گی۔

مثال 23.8: خطى اور دو درجى بالهمى تحريف

اگر 1n 9.0 = 2.1972 اور 1n 9.5 = 2.2513 ہوں تب مساوات 23.12 سے 1n 9.0 = 2.2188 عاصل ہوتا ہے وہ تین ملحوظ ہند سول تک درست ہے جبکہ 23.02 = 1n 10.0 الیتے ہوئے مساوات 23.13

$$\ln 9.2 = 2.1972 + 0.4 \cdot 0.0541 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2} (-0.0028) = 2.2192$$

دیتی ہے جو چار ملحوظ ہند سول تک درست جواب ہے۔

مزید بہتر جوابات حاصل کرنے کی خاطر زیادہ بلند درجی کثیر رکنی استعال کرنی ہو گی۔ n+1 مختلف نقطوں پر قیمتوں سے بکتا n درکار ہے کہ قیمتوں سے بکتا n درکار ہے کہ

$$p_n(x_0) = f_0, \cdots, p_n(x_n) = f_n$$

 $f_n=f(x_n)$ ہوں جہاں $f_0=f(x_0)$ ہیں۔ یہ کثیر رکنی آگیے فرق، $f_n=f(x_n)$ ہوں جہاں ہیں۔ یہ کثیر رکنی آگیے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن $f_n=f(x_n)$

(23.14)
$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$
$$(x = x_0 + rh, \ r = \frac{x - x_0}{h}, \ 0 \le r \le n)$$

ویتی ہے۔ اس کلیہ میں n=1 پر کرنے سے مساوات 23.12 اور n=2 پر کرنے سے مساوات 23.13 اور $p_n(x_k)=f_k\;(k=0,1,\cdots,n)$ خاصل ہوتا ہے۔ ہمیں اب $p_n(x_k)=f_k\;(k=0,1,\cdots,n)$ ثابت کرنا ہو گا۔ مساوات 23.14 کے وائیں ہاتھ سے

$$(23.15) f_k = {k \choose 0} f_0 + {k \choose 1} \Delta f_0 + {k \choose 2} \Delta^2 f_0 + \dots + {k \choose k} \Delta^k f_0$$

Newton's forward-difference interpolation formula³⁴

23.4 بابمی تحسریف 23.4

کھا جا سکتا ہے جہاں ثنائی عددی 35 سر درج زیل ہیں جہاں $s!=1\cdot 2\cdot 3\cdots s$ کے برابر ہے۔

(23.16)
$$\binom{k}{0} = 1$$
, $\binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{s!}$ $(s \ge 0, \frac{2}{s})$

ور حقیقت مساوات 23.14 میں r=k پر کرنے سے مساوات 23.14 کا دایاں ہاتھ اور مساوات 23.15 بالکل ایک جیسے ہوں گے۔مساوات 23.15 کو الکراجی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت: k=q کے لئے مساوات 23.15 درست ہے۔ فرض کریں کہ یہ k=q کے لئے بھی درست ہے۔ تب مساوات 23.15 میں k=q استعال کر کے، Δ کی اطلاق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f_{q+1} = f_q + \Delta f_q$$

$$= \binom{q}{0} f_0 + \binom{q}{1} \Delta f_0 + \binom{q}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{q}{q} \Delta^q f_0$$

$$+ \binom{q}{0} \Delta f_0 + \binom{q}{1} \Delta^2 f_0 + \binom{q}{2} \Delta^3 f_0 + \dots + \binom{q}{q} \Delta^{q+1} f_0$$

اس کلیه میں $\Delta^s f_0$ کا عددی سر (مساوات 23.16)

$$\binom{q}{s} + \binom{q}{s-1} = \binom{q+1}{s}$$

ہے جو k=q+1 کے لئے مساوات 23.15 دیتا ہے۔ یول الکراجی ماخوذ کے ذریعہ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

П

مساوات 23.14 کی طرح ایسا کلیہ جو پیچھے فرق پر مبنی ہو، پیچھے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن³⁶

(23.17)
$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r \nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \cdots + \frac{r(r+1) \cdots (r+n-1)}{n!} \nabla^n f_0$$

ے جہال مساوات 23.14 کی طرح $x = x_0 + rh, \ r = \frac{x - x_0}{h}, \ 0 \leq r \leq n$ بیں۔

binomial coefficients³⁵

Newton's backward-difference interpolation formula³⁶

اب 23.اعبدادي تحب زيه

باہمی تحریف کے کلیات اور استعال پر کثیر مواد پایا جاتا ہے۔مثال کے طور پر صرف جفت درجہ فرق پر مبنی کلیات پائے جاتے ہیں۔اس طرز کا ایک انتہائی اہم اور سادہ ترین کلیہ ایورٹ³⁷ درج ذیل ہے۔

$$(23.18) f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!} \delta^2 f_0 + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!} \delta^2 f_1$$

$$- \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^{x} r = \frac{x-x_0}{h}, \ 0 \le r \le 1$$

مثال 23.9: كليه ايورثكا استعمال

تفاعل $e^{1.24}$ کی قیت مساوات 23.18 میں دیے گئے کلیہ ایورٹ اور درج ذیل جدول سے حاصل کریں۔

$$\begin{array}{c|ccc} x & e^x & \delta^2 \\ \hline 1.2 & 3.3201 & 333 \\ 1.3 & 3.6693 & 367 \\ \end{array}$$

اب $r = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$ بے لہذا مساوات 23.18 درج ذیل دے گ

$$e^{1.24} \approx 0.6 \cdot 3.3201 + 0.4 \cdot 3.6693 + \frac{1.6 \cdot 0.6 \cdot (-0.4)}{6} \cdot 0.0333 + \frac{1.4 \cdot 0.4 \cdot (-0.6)}{6} \cdot 0.0367 = 3.4598 - 0.0021 - 0.0021 = 3.4556$$

جو چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔دھیان رہے کہ خطی باہمی تحریف $e^{1.4}=4.0552$ دیتی ہے جو صرف دو $e^{1.1}=3.0042$ استعال کرتے ہوئے ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔ (آپ $e^{1.1}=3.0042$ اور $e^{1.2}=4.0552$ استعال کرتے ہوئے دوسرے فرق کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں۔)

عمومی کلیہ ایورٹ 38 درج زیل ہے

(23.19)
$$f(x) = qf_0 + rf_1 + {\binom{q+1}{3}} \delta^2 f_0 + {\binom{r+1}{3}} \delta^2 f_1$$
$$+ {\binom{q+2}{5}} \delta^4 f_0 + {\binom{r+2}{5}} \delta^4 f_1 + \cdots$$

Everett formula³⁷ Everett formula³⁸ 23.4 بابمی تحسریف . 23.4

جہال $r=rac{x-x_0}{h},\ 0\leq r\leq 1$ اور $r=rac{x-x_0}{h},\ 0\leq r\leq 1$ عددی $r=rac{x-x_0}{h}$ اور $r=rac{x-x_0}{h}$

$$\frac{\binom{q+2}{5}}{\binom{q+1}{3}} = \frac{q^2 - 4}{20}$$

ہے۔ای طرح $\delta^4 f_1$ اور $\delta^2 f_1$ کے عددی سرول کی نسبت $\frac{r^2-4}{20}$ ۔یہ دونوں نسبت وقفہ 0 تا 1 میں بہت کم تبریل ہوتے ہیں۔یوں اگر ان کی جگہ ان کی کوئی موزوں اوسط قیمت μ منتخب کی جائے تب تبدیل شدہ دوسرمے فرق 89

(23.20)
$$\delta_m^2 f = \delta^2 f + \mu \delta^4 f, \quad \mu = -0.18393$$

استعال کرتے ہوئے چوتھی فرق کے اثر کو مساوات 23.18 میں سمویا جا سکتا ہے، جہاں μ کی دی گئی قیمت ایک موزوں قیمت ہے۔

n ہم بغیر ثبوت پیش کے بتلانا چاہتے ہیں کہ اگر x_0, x_1, \cdots, x_n کے آپس میں فاصلے اختیاری ہوں تب ہم ردجی کثیر رکنی جو $f_j = f(x_j)$ سے گزرتا ہو، جہال $f_j = f(x_j)$ ہے، منقسم فرق باہمی تحریف کلیہ نیوٹن x_0, x_0, x_0

(23.21)
$$f(x) \approx f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

کا دایاں ہاتھ ہو گا جہاں منقسم فرق⁴¹ درج ذیل دہرانے کے تعلقات دیتے ہیں۔

(23.22)
$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \dots$$
$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

 $f[x_0,\cdots,x_k]=rac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$ ہو تب $f[x_0,\cdots,x_k]=rac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$ ہو گا اور مساوات 23.21 سے مساوات 23.14 حاصل ہو گی۔

باہمی تحریف کی مختلف تراکیب فرق میں ہم فرق معلوم کرتے ہیں جس کو جدول کی درنگی کے لئے بھی استعال کیا جاتا ہے۔البتہ کس درجہ کی باہمی تحریف استعال کی جائے، عموماً اس سوال کا جدول میں جواب نہیں دیا جاتا

modified second differences³⁹

Newton's divided difference interpolation formula⁴⁰

divided difference⁴¹

ے۔لیگرینج باہمی تحریف⁴²کی ترکیب لیگرینج باہمی تحریف کے کلیہ

$$(23.23) f(x) \approx L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k$$

یر مبنی ہے جہاں ضروری نہیں ہے کہ x_0, \dots, x_n برابر فاصلوں پر ہوں اور

$$l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

$$(23.24) \quad l_k(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n), \quad 0 < k < n$$

$$l_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

 $j \neq k$ نقطوں کا کلیہ لیگرینج کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 23.24 سے 100 میں مساوات n+1 نقطوں کا کلیہ لیگرینج کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات n+1 واصل ہوتے ہیں لہذا $x=x_k$ اور $x=x_k$ اور $x=x_k$ ماصل ہوتے ہیں لہذا $x=x_k$ ہوگا۔ اس ترکیب میں فرق حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور ہم مختلف $x=x_k$ کے اثرات کو سیدھ و سیدھ دیکھ سکتے ہیں۔ ہاں اب حساب زیادہ مشکل ضرور ہوگا اور جدول میں غلطی کی جانچ پڑتال ممکن نہیں ہوگا۔ اس کئے ضروری ہے کہ یہ ترکیب صرف مستنہ جدول پر لا گو کیا جائے۔

مثال 23.10: لیگرینج کلیہ باہمی تحریف کا استعمال اللہ اللہ کا اللہ کا اللہ اللہ اللہ کا کہ کا اللہ کا اللہ کا تعمال کا اللہ کا کہ کا اللہ کا کہ کا اللہ کا کہ کا اللہ کا کہ کا اللہ کا کا اللہ کا اللہ کا اللہ کا اللہ کا کا اللہ کا کہ کا اللہ کا اللہ کا کہ کا اللہ کا کہ کا کا کہ ک

$$l_1(x)=(x-9)(x-10)(x-11)$$
 ، $l_0(x)=(x-9.5)(x-10)(x-11)$ ، $l_0(x)=(x-9.5)(x-10)(x-11)$ ، $l_0(x)=(x-9.5)(x-10)(x-11)$ ، $l_0(x)=(x-9.5)(x-10)(x-11)$

$$\ln 9.2 = \frac{-0.43200}{-1.00000} \cdot 2.19722 + \frac{0.28800}{0.37500} \cdot 2.25129 + \frac{0.10800}{-0.50000} \cdot 2.30259 + \frac{0.04800}{3.00000} \cdot 2.39790 = 2.21920$$

ہو گا جو پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب ہے۔

Lagrangian interpolation⁴²

23.4. باہمی محسریف

جدول 23.66: جدول برائے سوال 23.36 تاسوال 23.41

x	$\sin x$	پہلا فرق	دوسرا فرق
0.0	0.00000		
0.2	0.19867	19867	-792
0.2	0.170 07	19 075	-172
0.4	0.38942		-1553
0.6	0.564 64	17 522	-2250
0.0	0.50101	15 272	2230
0.8	0.71736	10 411	-2861
1.0	0.841 47	12 411	

سوالات

 (x_2, f_2) ، (x_1, f_1) ، (x_0, f_0) ویا گیا قطع مکافی نقطہ (x_1, f_1) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) ، مساوات 23.13 میں دیا گیا قطع مکافی نقطہ (x_1, f_1) ، (x_1, f_1) ، (x

جدول 23.6 كو سوال 23.41 تا سوال 23.36 مين استعال كرين

سوال 23.37: sin 0.26 کی قیمت دو در جی باہمی تحریف یعنی مساوات 23.13 کی مدد سے حاصل کریں۔ دکھائیں پہلے تین ملحوظ ہندسے بالکل درست ہیں۔ جواب: 0.257 53

سوال 23.38: جدول 23.60 میں تیسرے فرق اور چوشے فرق شامل کرتے ہوئے $\sin 0.26$ کی قیمت مساوات n=3 (الف) n=3 اور n=3 اور n=3 کی مدد سے (الف) n=3 اور n=3 اور n=3 کی مدد سے راست جواب n=3 اور n=3 کے ساتھ کریں۔آپ دیسیں گے کہ n=3 سے تین ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوگا۔ n=3 سے بیانچ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوگا۔

با__23.اعبدادی تحبزیه 1496

n=2 () ماوات n=1 () مرد سے (الف) n=1 کر اور () $\sin 0.26$ لے کر حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ دونوں صور توں میں پہلے دو ملحوظ ہندسے درست ہوں گے۔یوں موجودہ متیجہ سوال 23.36 کے متیجہ سے کم درست ہے۔ کیوں؟ جوابات: (الف) 0.258 27 (ب) 0.258 27

n = 4 (الف) n = 3 کر، n = 4 کر، n = 3 کر، n = 4 کر، n = 4 کر، n = 4 کر، n = 4 کر الف) n = 4 کر الف) الف x = 3 اور (بn = 5 کی قیت تلاش کریں۔آپ کو n = 5 اور (بn = 5 کی قیت تلاش کریں۔آپ کو sin x کی قیمتیں در کار ہوں گی اور مطابقتی فرق در کار ہوں گے۔سائن تفاعل sin x کی قیمتیں در کار ہوں گے۔سائن تفاعل کی کون سی خاصیت اس وسعت کو آسان بناتی ہے۔موجودہ نتائج سوال 23.38 کے نتائج سے کیوں کم ٹھیک ہیں؟ جوابات: (الف) 0.25709 ، (ب) 0.25705 اور (پ) 0.25708 ؛ جواب (پ) يانچ ملحوظ هندسول

0.257 07 حاصل ہوتا ہے۔

سوال 23.42: مثال 23.9 میں کی گئی حیاب کی تصدیق کریں۔

f(2.6) = 1.612452 let f(2.3) = 1.516575 (f(2.0) = 1.414214استعال کرتے ہوئے تفاعل x = f(x) = 0 کی دو درجی ہاہمی تحریف کریں۔ نتائج کا جدول 23.5 کے ساتھ موازنہ $f(x)pprox 0.566\,106 + 0.496\,098x - 0.036\,022x^2$ جوابات:

سوال 23.44: درج ذيل د کھائيں۔

$$\Delta^{k} f_{n} = {\binom{k}{0}} f_{n+k} - {\binom{k}{1}} f_{n+k-1} + \dots + (-1)^{k} {\binom{k}{k}} f_{n}$$

سوال 23.45: f(1)=2 اور f(2)=77 اور f(2)=11 ، f(1)=2 استعال کرتے ہوئے عمومی کلیہ لیگر پنج f(3) حاوات 23.23) سے f(3) تلاش کریں۔ $6x^2 - 15x + 9$, $6x^2 - 15x + 9$

23.10 لين جبكه $\ln 10$ ، $\ln 9.5$ ، $\ln 9.0$ لين جبكه $\ln 8.5 = 2.140$ كي قيمتين مثال $\ln 8.5 = 2.140$ عبد الم میں دی گئی ہیں۔ $\ln 9.2$ کو (الف) n=3 اور $x_0=8.8$ لیتے ہوئے مساوات 23.14 سے حاصل کری؛ (ب) n = 3 اور $x_0 = 10$ للتے ہوئے مساوات 23.17 سے حاصل کریں۔ 23.5. كىكدار منحنيات 23.5

سوال 23.47: $\ln 8.5 = 2.140$ لیں جبکہ $\ln 10$ ، $\ln 10$ اور $\ln 11$ مثال 23.10 میں دی گئی n = 3 ہیں۔ اب n = 3 لیتے ہوئے مساوات 23.23 سے 23.23 کی قیمت تلاش کریں۔ حاصل جواب کا مثال 23.10 کے متیجہ سے موازنہ کریں۔

جواب: 2.219 21 جو کم درست ہے چونکہ آخری ہندسہ میں 1 اکائی کا خلل ہے۔

سوال 23.48: سوال 23.46 میں دی گئی مواد استعال کرتے ہوئے $\ln 9.2$ کی قیت (الف) مساوات 23.18 استعال کرتے ہوئے تلاش کریں۔ n=3 (ب

سوال 23.49: فرض کریں کہ $x_3=x_0+3h$ ، $x_2=x_0+2h$ ، $x_1=x_0+h$ بیں اور $x_3=x_0+3h$ ، ورج زیل کھا جا سکتا $r=\frac{x-x_0}{h}$ ہے۔ $r=\frac{x-x_0}{h}$

$$f(x) \approx -\binom{r-1}{3}f_0 + \frac{r(r-2)(r-3)}{2}f_1 - \frac{r(r-1)(r-3)}{2}f_2 + \binom{r}{3}f_3$$

سوال 23.50: سوال 23.49 كاكليه استعال كرتے ہوئے سوال 23.48-ب كا متيجہ دوبارہ حاصل كريں۔

سوال 23.51: (فرق کی جانچ پڑتال) و کھائیں کہ قطار میں دیے گئے اندراجات کا مجموعہ گزشتہ قطر کی آخری اور پہلی اندراج کے فرق کے برابر ہو گا۔اس جزوی پر کھ کی جدول 23.3 پر اطلاق کریں۔

23.5 کپکدار منحنیات

 $a \leq x \leq b$ گروں میں تخمین کثیر رکنی کو کچکدار منحنی کہتے ہیں۔اس کا مطلب ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر ہم دیے گیے تفاعل اصل تفاعل g(x) کا تخمینی تفاعل g(x) حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ہم چاہیں گے کہ تخمینی تفاعل اصل تفاعل کے قریب سے قریب تر نما ئندگی کرے۔ہم g(x) کو حاصل کرنے کی خاطر وقفہ $a \leq x \leq b$ کو حجود نے خانوں (ککڑوں)

$$(23.25) a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

اب 23.اعدادي تحبزيد 1498

میں تقسیم کرتے ہیں جہاں خانوں کے سروں کو جوڑ ⁴³ کہا جاتا ہے۔ہر خانے پر g(x) کو ایک ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ خانے کی سروں پر g(x) بار بار قابل تفرق ہو۔یوں پورے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل خاہر کیا جاتا ہے کہ خانے کی سروں پر g(x) باہمی کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں حاصل شخینی f(x) کو خخینی کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں حاصل خخینی g(x) وقفہ g(x) کا رہی تجریف میں بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر ایک خانے میں کثیر رکنی سے $a \leq x \leq b$ کا راتعاثی کم ہو گا۔یوں حاصل تفاعل g(x) کو چکدار منحنیات $a \leq x \leq b$ کہتے ہیں۔

ہم ہر خانے کا تخمینی خطی تفاعل استعال کر سکتے ہیں لیکن ایسا تفاعل خانہ کی جوڑوں پر غیر استمراری ہو گا۔ایسا تفاعل جو وقفہ $a \leq x \leq b$ ہے ہر نقطہ پر کئی بار قابل تفرق ہو بہتر ثابت ہوتا ہے۔

ہم تعبی کیکدار منحنیات پر غور کرتے ہیں جو عملی استعال کے نقطہ نظر سے غالباً اہم ترین ہیں۔ تعریف کی رو سے وقفہ g(x) $a \leq x \leq b$ یر مساوات 23.25 میں دیے گئے خانوں کے لحاظ سے تعبی پلحکدار منحنی $a \leq x \leq b$ سے مراد استمراری تفاعل g(x) ہے جس کے استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پورے وقفہ پر پائے جاتے ہوں اور جس کو ہر خانہ پر ایک کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہو جس کا درجہ تین سے زیادہ نہ ہو۔ یوں ہر خانہ میں g(x) کو ایک تعبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہو جس کا درجہ تین سے زیادہ نہ ہو۔ یوں ہر خانہ میں g(x) کو ایک تعبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جائے گا۔

اگر وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل f(x) دیا گیا ہو اور اس وقفہ کے خانے (مساوات 23.25) منتخب کیے گئے ہوں تب، گزشتہ حصہ کی طرح، f(x) کی تخمین کعبی کچکدار منحنی g(x) ورج ذیل کو مطمئن کرتے ہوئے حاصل ہو گی۔

(23.26)
$$g(x_0) = f(x_0), \quad g(x_1) = f(x_1), \dots, g(x_n) = f(x_n)$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ ایسا تعبی کچکدار منحنی g(x) پایا جاتا ہے جو مساوات 23.26 کو مطمئن کرتا ہو۔اب اگر g(x) درج ذیل بھی شرائط

(23.27)
$$g'(x_0) = k_0, \quad g'(x_n) = k_n$$

(جہاں k_0 اور k_n دیے گئی عدد ہیں) پر بھی پورا اترتا ہو تب g(x) کیتا ہو گا۔ درج ذیل مسکلہ کچکدار منحنی کی موجود گی اور کیتائی کو بیان کرتا ہے۔

مسّله 23.2: كعبي لچكدار منحنيات

فرض کریں کہ وقفہ کے خانے مساوات 23.25 میں f(x) دیا گیا ہے اور اس وقفہ کے خانے مساوات 23.25 میں

nodes⁴³

splines or flexible curves⁴⁴

 $^{{\}rm cubic\ spline}^{45}$

23.5 ليكدار منحنيات 23.5

ویے گئے ہوں اور فرض کریں کہ k_0 اور k_n کوئی دو عدد ہوں۔تب مساوات 23.25 کے کحاظ سے ایسا صرف اور صرف ایک تعبی کچکدار منحنی g(x) موجود ہو گا جو مساوات 23.26 اور مساوات 23.27 کو مطمئن کرتا ہو۔

g(x) فیر کرتا ہے، کچکدار منحنی $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ میں، جس کو $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ فاہر کرتا ہے، کچکدار منحنی اور کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ ایک جیسے ہوں گے اور درج ذیل کو مطمئن کریں گے۔

(23.28)
$$p_i(x_i) = f(x_i), \quad p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

اور $rac{1}{x_{j+1}-x_j}=c_j$ اور

(23.29)
$$p'_{j}(x_{j}) = k_{j}, \quad p'_{j}(x_{j+1}) = k_{j+1}$$

 $p_j(x)$ ۔ اور a_n اور a_n دیے گئے ہیں جبکہ k_1, \dots, k_{n-1} بعد میں حاصل کیے جائیں گے۔ a_n اور a_0 اور مساوات 23.28 اور مساوات 23.29 میں دیے چار شرائط کو مطمئن کرنا ہو گا۔ سیدھے حساب سے ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ ایسا تعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو درج ذیل ہے۔

(23.30)
$$p_{j}(x) = f(x_{j})c_{j}^{2}(x - x_{j+1})^{2}[1 + 2c_{j}(x - x_{j})] + f(x_{j+1})c_{j}^{2}(x - x_{j})^{2}[1 - 2c_{j}(x - x_{j+1})] + k_{j}c_{j}^{2}(x - x_{j})(x - x_{j+1})^{2} + k_{j+1}c_{j}^{2}(x - x_{j})^{2}(x - x_{j+1})$$

اس کا دو درجی تفرق درج ذیل دیگا۔

(23.31)
$$p_i'' = -6c_i^2 f(x_i) + 6c_i^2 f(x_{i+1}) - 4c_i k_i - 2c_i k_{i+1}$$

(23.32)
$$p_j''(x_{j+1}) = -6c_j^2 f(x_j) + 6c_j^2 f(x_{j+1}) + 2c_j k_j + 4c_j k_{j+1}$$

تحریف کی رو سے ورج ذیل شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$p''_{j-1}(x_j) = p''_j(x_j)$$
 $j = 1, 2, \dots, n-1$

n-1 مساوات 23.32 میں j کی جگہ j اور مساوات 23.31 استعال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عدد مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

(23.33)
$$c_{j-1}k_{j-1} + 2(c_{j-1} + c_j)k_j + c_jk_{j+1} = 3[c_{j-1}^2 \nabla f_j + c_j^2 \nabla f_{j+1}]$$

اب 23.اعدادي تحبزيد

 $j=1,\cdots,n-1$ بین جبکه $\nabla f_{j+1}=f(x_{j+1})-f(x_{j})$ اور $\nabla f_{j}=f(x_{j})-f(x_{j-1})$ بین جبکه $p=1,\cdots,n-1$ بین جبکه $p=1,\cdots,n-1$ بین جبک اس نظام کے تمام عددی سر غیر منفی بین اور مرکزی و تر پر ہر جزو، مطابقتی صف کے باقی اجزاء کے مجموعہ سے زیادہ ہے لہذا عددی سر قالب صفر نہیں ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم جوڑ پر $p=1,\cdots,n-1$ کی کیک درجی تفرق کے کیکا $p=1,\cdots,n-1$ حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

آئیں اس مسئلے کو ایک مثال کی مدد سے دیکھیں۔

مثال 23.11: تخميني لچكدار منحني

وقفه $f(x)=x^4$ کی اور $x_1=0$ اور $x_1=0$ کی اور $x_1=0$ کی $x_2=1$ کی ایک تخمین کتبی کیکدار منحنی تلاش کریں جو مساوات 23.26 کو مطمئن کرتی ہو اور g'(-1)=f'(-1) ہوں۔ g'(1)=f'(1)

صُل: السمبين ورج ذيل كے عدوى سر علاش كرنے ہوں گے۔

$$p_0(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$p_1(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

 $p_0'(0)=p_1'(0)$ سے $a_0=b_0=0$ سے $a_0=b_0=0$ سے $a_0=b_0=0$ سے $a_0=b_0=0$ سے $a_1(0)=a_1=0$ اور $a_1=a_1=a_1$ سے $a_1=a_1=a_1$

$$p_0(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$$

$$p_1(x) = b_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$$

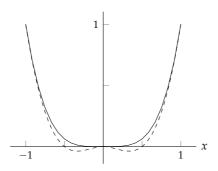
ہو گا۔ باقی چار عددی سروں کو باقی چار شرائط سے حاصل کرتے ہیں۔

(23.34)
$$p_0(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 = f(-1) = 1$$
$$p_1(1) = b_3 + a_2 + a_1 = f(1) = 1$$
$$p'_0(-1) = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = f'(-1) = -4$$
$$p'_1(1) = 3b_3 + 2a_2 + a_1 = f'(1) = 4$$

اس نظام کا حل میں در کار کیکدار منحتی $b_3=2$ ، $a_3=-2$ ، $a_2=-1$ ، $a_1=0$ اس نظام کا حل

(23.35)
$$g(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2 & -1 \le x \le 0\\ 2x^3 - x^2 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

23.5. كىپكدار منحنيات



(23.11 اور (نقطه دار) تعبی کچکدار منحنی g(x) (مثال f(x) ورزنقطه دار) تعبی کچکدار منحنی

ہو گی (شکل 23.6 میں نقطہ دار منحنی)۔

کپلدار منحنیات کی ایک دلچیپ کمتر خوبی ہے جس کو اب اخذ کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ مسکلہ 23.2 ہیں وقفہ کپلدار منحنیات کی ایک درجی استمراری ہے اور اس وقفہ پر f(x) کے یک درجی اور دو درجی استمراری تفرق پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ مساوات 23.2 کی صورت درج ذیل ہے (مثال 23.11 کی طرح)۔

(23.36)
$$g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b)$$

تب a اور b پر g'-g'-g' صفر ہو گا۔ تمل بالحصص سے

$$\int_{a}^{b} g''(x)[f''(x) - g''(x)] dx = -\int_{a}^{b} g'''(x)[f'(x) - g'(x)] dx$$

حاصل ہو گا۔ چونکہ وقفہ کے ہر چھوٹے جھے پر (x) مستقل ہے لہذا دائیں ہاتھ تکمل کو کسی ایک نکڑے پر حاصل کرتے ہوئے c[f(x)-g(x)] ملتا ہے جہاں c مستقل ہے اور تکمل کی بیہ قیمت نکڑے کے سروں پر حاصل کی جائے گی جو مساوات 23.26 کی بنا صفر حاصل ہو گی۔ چونکہ ہر نکڑے پر تکمل صفر ہے لہذا پورے وقفے پر تکمل صفر ہو گا۔ اس طرح درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_{a}^{b} f''(x)g''(x) \, \mathrm{d}x = \int_{a}^{b} g''(x)^{2} \, \mathrm{d}x$$

اب 23.اعدادي تحبزيد

نتيحتأ

$$\int_{a}^{b} [f''(x) - g''(x)]^{2} dx = \int_{a}^{b} f''(x)^{2} dx - 2 \int_{a}^{b} f''(x)g''(x) dx + \int_{a}^{b} g''(x)^{2} dx$$
$$= \int_{a}^{b} f''(x)^{2} dx - \int_{a}^{b} g''(x)^{2} dx$$

ہو گا۔ بائیں ہاتھ متکمل غیر منفی ہے للذا تکمل بھی غیر منفی ہو گا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

اس نتیجہ کو درج ذیل مسکلہ بیش کرتا ہے۔

مسئله 23.3: كعبي لچكدار منحني كي كمتر خاصيت

فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل f(x) اور اس کے یک درجی اور دو درجی تفرق استمراری مول کریں کہ اس وقفہ کے خانوں (مساوات 23.25) کے لحاظ سے g(x) مطابقتی تعبی لچکدار منحیٰ ہو جو مساوات 23.26 اور مساوات 23.36 کو مطمئن کرتی ہو۔ تب f(x) اور g(x) مساوات 23.36 کو مطمئن کرتی ہو۔ تب f(x) اور g(x) تعبی لچکدار منحیٰ g(x) کریں گے جس میں علامت مساوات g(x) اس صورت کو ظاہر کرتی ہے جب f(x) تعبی لچکدار منحیٰ g(x)

سوالات

سوال 23.52: تصدیق کریں کہ مساوات 23.30 میں دیا گیا $p_j(x)$ مساوات 23.28 اور مساوات 23.29 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 23.53: مساوات 23.31 اور مساوات 23.32 كو مساوات 23.30 سے اخذ كريں۔

سوال 23.54: مثال 23.11 پر غور کریں۔ دکھائیں کہ مثال میں دی گئی شرائط کے تحت مساوات 23.30 درج ذیل دے گ

$$p_0(x) = -2x^3 - x^2 + k_1 x(x+1)^2$$

$$p_1(x) = 2x^3 - x^2 + k_1 x(x-1)^2$$

23.5. كىپكدار منحنيات

جبکه مساوات 23.33 سے $k_1=0$ حاصل ہو گا اور یوں مساوات 23.35 حاصل ہو گا۔

سوال 23.55: مثال 23.11 میں تعبی کیکدار منحنی کا موازنہ پورے وقفہ پر دو درجی تخمینی کثیر رکنی p(x) کے ساتھ کریں۔ g(x) سے اور g(x) اور g(x) کی زیادہ سے زیادہ انحراف کتنی ہیں۔

سوال 23.56: مساوات 23.34 میں دیے گئے نظام کا حل تلاش کریں۔

سوال 23.57: دکھائیں کہ وقفہ کے خانوں کے لحاظ سے تعبی لچکدار منحنیات سمتی فضا (حصہ 7.4) بناتے ہیں۔

سوال 23.58: وکھائیں کہ وقفہ کے دیے گئے خانوں (مساوات 23.25) کے لحاظ سے n+1 کیا تعبی کچکدار منحنیات $g_i'(a)=g_i'(b)=0$ موجود ہوں گی جو $g_0(x),\cdots,g_n(x)$ اور

$$g_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

کو مطمئن کریں گی۔ جواب: مسئلہ 23.2 سے ایبا اخذ ہوتا ہے۔

سوال 23.59: دکھائیں کہ اگر ایک لحکدار منحیٰ تین بار قابل تفرق ہوتب بہ ضرور کثیر رکنی ہو گا۔

سوال 23.60 اییا ممکن ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ کی دو قریبی خانوں کی کچکدار منحنیات ایک جیسی $x_1 = 0$ ، $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ کی خاطر وقفہ $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کی خانوں $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ہوں۔اس طرز کی کچکدار منحنیات ویکھنے کی خاطر وقفہ $g'(-\frac{\pi}{2}) = f'(-\frac{\pi}{2}) = f'(-\frac{\pi}{2})$ ور $g(x) = \sin x$ پر $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ، $g(x) = \frac{\pi}{2}$ ور $g'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})$ جواب $g(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x$

سوال 23.61: مساوات 23.37 کی جیومیٹریائی مطلب کچھ یوں ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ لچکدار منحیٰ، مربع انخا کے تکمل کی قیت کو کم کرنے کی کوشش کرتی ہے۔اس پر بحث کریں۔ باب.23 اعب دادي تحب زيد

23.6 اعدادی تکمل اور تفرق

اعدادی تکمل 46 سے مراد قطعی کمل

$$(23.38) J = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

کی اعدادی قیمت کی تلاش ہے جہاں a اور b دیے گئے ہوں گے اور f دیا گیا تفاعل کی قیمتوں کا جدول ہو گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم ایبا قابل تفرق تفاعل F تلاش کر سکیں جس کا تفرق f ہو تب J کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

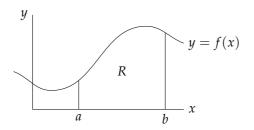
$$J = \int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)]$$

انجینئری میں عموماً ایسے تکمل پائے جاتے ہیں جن کا متکمل جدول کی صورت میں ہو گا یا تکمل کو متناہی تعداد کے بنیادی نفاعل کی صورت پیچیدہ اور غیر مفید ثابت ہو گا۔ ایسی صورتوں میں اعدادی تکمل کارآ مد ثابت ہوتا ہے۔

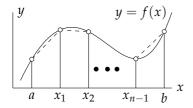
چونکہ وقفہ $a \leq x \leq b$ میں تفاعل f(x) کے نیچے خطہ R کا رقبہ J ہے (شکل 23.7) لہذا ہم گتے R کے شکل کاٹ کر، گئے کی اس کھڑے کے وزن کو اکائی رقبہ گئے کی وزن سے تقسیم کرتے ہوئے R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم کاغذ توسیم R پر R کی شکل بنا کر ڈب گن کر بھی R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ رقبہ کی بہتر ناپ کے لئے مسطح پیما R4کی استعمال ضروری ہوگا۔

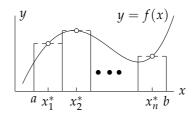
numerical integration⁴⁶ graph paper⁴⁷

planimeter⁴⁸



شكل23.7: قطعي تكمل كي جيو ميٹر مائي معنی





(ب) ذوزنقه قاعده

(الف)مستطيل قاعده

شكل23.8: اعدادي تكمل

کو سیڑھی تفاعل 49 (کلڑوں میں مستقل تفاعل) ظاہر کرے گی۔شکل 23.8-الف کے n مستطیلوں کے انفرادی رقبے $hf(x_1^*),\cdots,hf(x_n^*)$

(23.39)
$$J = \int_{a}^{b} f(x) dx \approx h[f(x_{1}^{*}) + f(x_{2}^{*}) + \dots + f(x_{n}^{*})], \quad \left(h = \frac{b - a}{n}\right)$$

step function 49 rectangular rule 50

اب 23.اعبدادي تحبيريد 25.اعبدادي المحبيريد

تفاعل f کو کمگروں میں خطی قطعات (شکل 23.8-ب) سے ظاہر کرنے سے اعدادی کمل کا ذوزنقہ قاعدہ f تفاعل (23.40)

$$J = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

حاصل ہو گا جہاں $x_0 = h = \frac{b-a}{n}$ ہوں جو اور $x_0 = h = \frac{b-a}{n}$ ہیں جو ماوات 23.40 میں استعال کیے گئے ہیں۔یوں $x_j = x_0 + jh$ ہو گا۔شکل 23.40-ب کے $x_j = x_0 + jh$ وزرنقہ کے انفرادی رقبے

$$\frac{1}{2}[f(a)+f(x_1)]h$$
, $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]h$, \cdots , $\frac{1}{2}[f(x_{n-1})+f(b)]h$

ہیں جن کا مجموعہ مساوات 23.40 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

ين خلل (حصه 23.1 ϵ ررج ذيل هو گا۔ J^*

$$\epsilon = J^* - J$$

f(x) اگر f(x) خطی تفاعل ہو تب $\epsilon=0$ ہو گا اور تمام x کے لئے t' مستقل اور t' صفر ہو گا۔ عین ممکن ہو کے کہ کسی عمومی تفاعل f(x) و درجی تفرق پایا جاتا ہو) کی صورت میں ہم حد خلل t' (یعنی خلل ϵ کی حد) تلاش کر سکیں جو t' پر منحصر ہو۔ اس خاطر ہم t' کی جگہ متغیر t' لیتے ہوئے مساوات 23.40 کا اطلاق t' کے کہ کے کرتے ہیں۔ تب مطابقتی خلل

$$\begin{split} \varepsilon(t) &= \frac{t-a}{2}[f(a)+f(t)] - \int_a^t f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{t-a}{2}[f(a)+f(t)] - \frac{1}{2}[f(a)+f(t)] + \frac{t-a}{2}f'(t) - f(t) \\ &= \frac{1}{2}[f(a)+f(t)] + \frac{t-a}{2}f'(t) - f(t) \\ &= \frac{1}{2}[f(a)+f(t)] + \frac{t-a}{2}f'(t) - f(t) \\ &= \frac{1}{2}[f(a)+f(t)] + \frac{1}{2}[f'(a)+f(t)] + \frac{1}{2}[f'(a)+f(t)] + \frac{1}{2}[f'(a)+f(t)] \end{split}$$

 $[\]begin{array}{c} {\rm trapezoidal~rule^{51}} \\ {\rm error~bound^{52}} \end{array}$

 M_2 عاصل ہو گا جس میں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت پر کرنے سے وقفے پر تمام t کے لئے حد خلل

$$\frac{1}{2}(t-a)M_2^* \le \epsilon''(t) \le \frac{1}{2}(t-a)M_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ a تا t تمل لینے سے

$$\frac{1}{4}(t-a)^2 M_2^* \le \epsilon'(t) - \epsilon'(a) \le \frac{1}{4}(t-a)^2 M_2$$

t=a+h کوتے ہوئے دوبارہ کمل لے کر $\epsilon(a)=0$ اور $\epsilon(a)=0$ پر کرتے ہوئے دوبارہ کمل لے کر $\epsilon(a)=0$ کھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{12}h^3M_2^* \le \epsilon(a+h) \le \frac{1}{2}h^3M_2$$

باقی n-1 کلڑوں کے خلل کے لئے اسی طرح کے n-1 عدد مطابقتی عدم مساوات حاصل ہوں گے۔ان $h=\frac{b-a}{n}$ تمام n عدم مساوات کا مجموعہ a تا a ککمل کے لئے خلل ϵ کی عدم مساوات دے گا۔ چونکہ a تا a کی عدم مساوات کے لئے خلل ϵ کہ خلل کے لئے خلل کے لئے خلل کے المذا ہمیں

(23.41)
$$KM_2^* \le \epsilon \le KM_2, \qquad [K = \frac{(b-a)^3}{12n^2}]$$

 M_2 عاصل ہوتا ہے جہاں کمل کے وقفہ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 ہے۔

مثال 23.12: ذوزنقه قاعده ـ تخمينه خلل

ی مدد سے حاصل کریں۔جدول $J=\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی مدد سے حاصل کریں۔جدول $I=\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ماتا ہے۔ I=10

$$J \approx 0.1(0.5 \cdot 1.367879 + 6.778167) = 0.746211$$

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$
 پيونکه $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

$$M_2^* = f''(0) = -2, \quad M_2 = f''(1) = 0.735759$$

 $K = \frac{1}{1200}$ ہول گے۔مزید $K = \frac{1}{1200}$ کے تحت

 $-0.001667 \le \epsilon \le 0.000614$

اب 23.اعدادي تحبزيد

جدول 23.72: جدول برائے مثال 23.12

		1		2
J	x_j	x_j^2	e^{-}	$-x_j^2$
0	0	0	1.000 000	
1	0.1	0.01		0.990 050
2	0.2	0.04		0.960789
3	0.3	0.09		0.913 931
4	0.4	0.16		0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801
6	0.6	0.36		0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626
8	0.8	0.64		0.527 292
9	0.9	0.81		0.444858
10	1.0	1.00	0.367 879	
مجموعه			1.367 879	6.778 167

ہو گا۔ یوں J کی درست قیمت

کے در میان ہو گی۔ (چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب 0.746 824 ہے۔)

f کی کلڑوں میں مستقل تخمین سے مستطیل قاعدہ (مساوات 23.39) حاصل ہوا جبکہ f کی کلڑوں میں خطی تخمین سے ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 23.40) حاصل ہوا۔ کلڑوں میں دو درجی تخمین سے قاعدہ سمسن 53 اخذ ہو گا جو، سادہ ہونے کے باوجود، عموماً مسکوں کا کافی درست جواب دیتا ہے۔ قاعدہ سمسن اخذ کرنے کی خاطر ہم وقفہ $a \leq x \leq b$ کو ایک جیسی لمبائیوں کے جفت تعداد کی کلڑوں، مثلاً $n \leq x \leq b$ اور $n \leq x \leq b$ اور $n \leq x \leq b$ اور $n \leq x \leq a$ اور $n \leq x \leq a$ اور $n \leq x \leq a$ میں نقطہ $n \leq x \leq a$ ہوں گے۔ ہم پہلی دو کلڑوں کو لیتے ہیں اور $n \leq x \leq a$ کو وقفہ $n \leq x \leq a$ میں نقطہ $n \leq x \leq a$

⁵³ برطانوى رياضى دان طامس سمسن [1710-1761]

ے طاہر کرتے ہیں جہاں f_i سے مراد $f(x_i)$ ہے۔ مساوات 23.23 سے $p_2(x)$

(23.42)

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

 $x-x_0=(s+1)h$ و گر جہاں نسب نما $s=rac{x-x_1}{h}$ اور $2h^2$ کے برابر ہیں۔ $s=rac{x-x_1}{h}$ اور $x-x_2=(s-1)h$ اور $x-x_1=sh$ ، اور $x-x_1=sh$

(23.43)
$$p_2(x) = \frac{1}{2}s(s-1)f_0 - (s+1)(s-1)f_1 + \frac{1}{2}(s+1)sf_2$$

کھا جا سکتا ہے۔اب ہم x کے ساتھ x_0 تا x_0 تا x_0 کمل کے x_0 ساتھ x_0 تا x_0 کمل کے مترادف ہے۔چونکہ x_0 ہے لہذا

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) \, \mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) \, \mathrm{d}x = h\left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2\right)$$

ہو گا۔اگلے دو ٹکڑوں، x_2 تا x_2 ، اور باقی دو دو ٹکڑوں کے لئے بھی اسی طرح کے نتائج حاصل ہوں گے۔ان تمام n عدد نتائج کا مجموعہ قاعدہ سمسہ: 54

(23.44)
$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n})$$

وے گا جہاں $h=\frac{b-a}{2n}$ اور $f_j=f(x_j)$ ہیں۔ تکمل کے وقفہ میں f کے چار در جی تفرق کی موجود گی اور استمرار فرض کرتے ہوئے مساوات 23.44 کی حد خلل ϵ_S کو ذوزنقنہ قاعدہ (مساوات 23.40) کے خلل کی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ تیجہ درج ذیل ہے

(23.45)
$$CM_4^* \le \epsilon_S \le CM_4 \qquad [C = \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}]$$

جہال کمل کے وقفہ پر f کی چار درجہ تفرق کی زیادہ سے زیادہ قیت M_4 اور کم سے کم قیمت M_4^* ہے۔

مثال 23.13: قاعده سمسن ـ تخمينه حد خلل

کے عاصل کریں۔ حد خلل کا تخیینہ بھی حاصل $\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ کی قیت قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ حد خلل کا تخیینہ بھی حاصل کریں۔ چونکہ h=0.1 ہے، جدول h=0.1 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J \approx \frac{0.1}{3}(1.367879 + 4 \cdot 3.740266 + 2 \cdot 3.037901) = 0.746825$$

Simpson's rule⁵⁴

j	x_j	x_i^2		$e^{-x_j^2}$	
0	0.0	0.00	1.000 000		
1	0.1	0.01		0.990050	
2	0.2	0.04			0.960789
3	0.3	0.09		0.913 931	
4	0.4	0.16			0.852144
5	0.5	0.25		0.778801	
6	0.6	0.36			0.697676
7	0.7	0.49		0.612626	
8	0.8	0.64			0.527292
9	0.9	0.81		0.444858	
10	1.0	1.00	0.367 879		
مجموعه			1.367 879	3.740 266	3.037 901

جدول 23.44: جدول برائے مثال 23.44

تخمینہ حد خلل: چار در جی تفرق $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ کم وقفہ کمل میں کم سے تخمینہ حد خلل: چار در جی تفرق $X = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ کم قیمت $X = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $X = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ کم قیمت $X = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ کم قیمت $X = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ کم قیمت $X = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ کا میں لیڈا $X = x^* = 0$ کا میں لیڈا $X = x^* = 0$ کا میں لیڈا $X = x^* = 0$ کم کیا گول کے میں لیڈا کم کار کیا گار کیا گلار کیا گار کیا گار کیا گلار کیا گار کیا گار کیا گلار کیا گار کیا گلار کلی کلی کلی گلار کیا گلار کیا گلار کلی گلار کیا گلار کیا گلار کیا گلار کلی گلار کلی

 $-0.000\,004 \le \epsilon_S \le 0.000\,006$ اور $0.746\,818 \le J \le 0.746\,830$

ہوں گے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ تخمین سے کم از کم چار ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ حقیقت میں موجودہ جواب پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے چو نکہ چھ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب $J=0.746\,824$ میں موجودہ جواب پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہے۔

غور کریں کہ مثال 23.12 میں حاصل نتیجہ سے موجودہ نتیجہ بہت زیادہ بہتر ہے اگرچہ ہمیں دونوں مثالوں میں تقریباً ایک جتنا کام کرنا پڑا ہے۔

قاعدہ سمسن سے حاصل نتائج کی در تھی عموماً انجینئری مسکوں کے لئے کافی ہوتی ہیں۔اس لئے کمپیوٹر سے اعدادی کلمل کے حصول میں زیادہ در تھی کے کلیوں کی بجائے ترکیب سمسن کو زیادہ ترجیح دی جاتی ہے۔ زیادہ طاقت کی کثیر رکنی استعال کرتے ہوئے زیادہ در تھی کے کلیات حاصل کیے جاتے ہیں۔ہم یہاں دوالیی کلیات کا ذکر کرتے ہیں جو بعض او قات مفید ثابت ہوتی ہیں۔ نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_0, f_0) سے قاعدہ آٹھ میں سے تین

(23.46)
$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

حاصل 55 ہوتا ہے جو کعبی کثیر رکنی کی صورت (مثلاً قاعدہ سمسن) میں بالکل درست ثابت ہوتا ہے۔ مزید وقفہ کی طاق کلڑوں (جو 3 سے قابل تقییم ہو) پر اس قاعدہ کو لا گو کیا جا سکتا ہے۔ چھ درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) تا (x_0, f_0) سے گزرتی ہو سے پیچیدہ عددی سر والا کلیہ حاصل ہوتا ہے البتہ اسی قسم کا ایک اور کلیہ جس کی در شکی نستاً کم ہے اور جس کو قاعدہ ویڈل 56 کہتے ہیں درج ذیل ہے۔

(23.47)
$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \approx \frac{3h}{10} (f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6)$$

کمل کے جن اعدادی کلیات پر بحث کی گئی ان میں کمل کے وقفہ کو برابر کلڑوں میں تقسیم کیا گیا اور یہ تراکیب کسی مخصوص طاقت تک کثیر رکنی کی صورت میں بالکل درست جواب حاصل کرتے ہیں۔ خطی تبادل پیا استعال کرتے ہوئے وار b کو بالترتیب b اور c کو بالترتیب c اور c کو بالترتیب c اور c کو بالترتیب و بالترتیب c کو بالترتیب و بالترتیب c کو بالترتیب و بال

(23.48)
$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^{n} A_{j} f_{j} \qquad [f_{j} = f(x_{j})]$$

کھ جا سکتا ہے جس میں ہم ایسے 2n مستقل A_n تا A_n اور x_n تا x_n حاصل کر سکتے ہیں کہ کثیر رکنی کے کا درجہ m جتنا چاہیں بڑا ہو، مساوات 23.48 بالکل درست جواب دے۔ چونکہ درجہ 2n-1 کثیر رکنی کے عددی سرول کی تعداد 2n ہے لہٰذا 2n-1 ہو گا۔گاوی کے تحت اس صورت درجہ 2n-1 کثیر رکنی کے لئے بالکل درست جواب حاصل ہو گا جب x_1, \dots, x_n درجہ x_n لیڑانڈر کثیر رکنی x_n درجہ x_n کی کے لئے بالکل درست جواب حاصل ہو گا جب x_1, \dots, x_n درجہ x_n کی درجہ x_n کی اس کا درست جواب حاصل ہو گا جب

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1! (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + \frac{(2n-4)!}{2^n 2! (n-2)! (n-4)!} x^{n-4} - + \cdots$$

three-eight's rule⁵⁵ Weddle's rule⁵⁶

Legendre polynomial⁵⁷

لعيني

$$P_0 = 1$$
, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, ...

ک n صفر ہوں اور A_j کی موزوں قیمتیں منتخب کی جائیں۔ ایکی صورت میں مساوات 23.48 کو گاوسی کلیہ تکمل x_1, \dots, x_n کی غیر کیساں فاصلے دخواری کا سبب بنتے ہیں۔

چونکہ مساوات 23.48 میں مستعمل آخری سر 1 اور 1 کثیر رکنی $P_n(x)$ کے صفر نہیں ہیں (یہ دونوں x_1, \dots, x_n میں شامل نہیں ہیں) لہذا گاوی کلیہ کمل کھلا کلیہ x_1, \dots, x_n میں شامل نہیں ہیں) لہذا گاوی کلیہ کمل کھلا کلیہ x_1, \dots, x_n مساوات 23.44 اور مساوات 23.44 اور مساوات 33.44 اور مساوات 33.44 بند کلیات ہیں)۔

باہمی تحریف کی طرح اعدادی تکمل کو بھی فرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایک انتہائی موثر کلیہ درج ذیل گاوسی وسطی فرق کلیہ⁶¹ ہے۔

(23.49)
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(f_0 + f_1 - \frac{\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1}{12} + \frac{11(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)}{720} \right)$$

اعدادی تفرق

جدول کی صورت میں دیے نفاعل کے تفرق کا تخمینہ اعدادی طریقہ سے حاصل کرنے کو اعدادی تفوق⁶⁰ کہتے ہیں۔ جہاں ممکن ہو وہاں اعدادی تفرق سے گریز کریں چونکہ اعدادی تفرق کی در نگی جدول میں دیے قیمتوں کی در نگی سے کم ہو گی۔در حقیقت تفرق کے حصول میں ہم دو بڑی قیمتوں کے فرق کو ایک چھوٹی قیمت سے تقسیم کرتے ہیں۔؛ مزید اگر نفاعل کثیر رکنی p کی صورت میں دیا گیا ہو تب نفاعل کی قیمتوں میں فرق کم ہو سکتا ہے جبہ تفرق کی قیمت بہت مختلف ہو سکتی ہے۔یوں اعدادی تفرق ایک نازک عمل ہے۔اس کے برعکس اعدادی تکمل ہمواری کا عمل ہے لہذا اعدادی تکمل پر تفاعل کی قیمتوں میں خلل کا بہت زیادہ اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

Gaussian integration formula⁵⁸

open formula⁵⁹

closed formula 60

central-difference formula by Gauss^{61}

numerical differentiation⁶²

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اس کو دیکھ کر ہم یک درجی تفرق کے لئے

(23.50)
$$f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

لکھتے ہیں۔اسی طرح دو درجی تفرق کو

(23.51)
$$f_1'' \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

کھا جا سکتا ہے۔بلند درجی تفرق کے لئے اس طرح کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

موزوں لیگر نئے کثیر رکنی کی تفرق سے تفرق کا بہتر تخمینہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 23.42 کا تفرق لینے ۔ سر

$$f(x) \approx p_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2$$

 x_0 عاصل ہوتا ہے جہاں یاد رہے کہ مساوات 23.42 کے نسب نما x_0 ، x_0 ، x_0 ہیں۔اس کی قیمت مامال ہوتا ہے جہاں یاد رہے کہ مساوات 23.42 کے نسب نما x_0 ، x_0

(23.52)
$$f'_0 \approx \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)$$

$$f'_1 \approx \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2)$$

$$f'_2 \approx \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2)$$

حاصل ہوتا ہے۔ پانچ نقاطی لیگر نئے کثیر رکنی سے اس طرح بالخصوص درج ذیل حاصل ہو گا۔

(23.53)
$$f_2' \approx \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4)$$

three point formula⁶³

باپ23.اعبدادی تحب زیه

سوالات

1514

کمل کے کلیات کی یاد دہانی کی خاطر سوال 23.62 تا سوال 23.70 حل کریں۔

 $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \quad :23.62$

 $\int \cos^2 \omega x \, dx \quad :23.63$

 $\int e^{ax} \sin bx \, dx$:23.64

 $\int e^{ax} \cos bx \, dx \qquad :23.65 \quad$

 $\int \tan kx \, dx$:23.66

 $\int \ln x \, dx$:23.67

 $\int \frac{\mathrm{d}x}{k^2 + x^2} \qquad :23.68$

 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad :23.69$

 $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$:23.70

سوال 23.71: n=5 کی مدد سے مثال 23.12 حل کریں۔ n=5

سوال 23.72: n=5 لیتے ہوئے مستطیل قاعدہ مساوات 23.39کی مرد سے n=5 حل کریں۔ خلل کتنا ہو گا؟

 $0.245, \ \epsilon = -0.005$ جواب:

سوال 23.73: 5 = n لیتے ہوئے سوال 23.72 کو ذور نقہ قاعدہ مساوات 23.40 سے حل کریں۔مساوات 23.41 سے حد خلل کیا حاصل ہوں گے ؟ نتائج کے حقیقی حد خلل کیا ہیں؟ان میں فرق کیوں ہے؟

سوال 23.74: 2n=4 ليتے ہوئے سمسن قاعدہ سے $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ کا تخمینہ صاوات 23.45 سے حاصل کریں۔ جواب:

 $\ln 2 \approx 0.693\,25,\ M_4^* = 0.75, M_4 = 0.24,\ 0.000\,016 < \varepsilon_S < 0.000\,53, \\ 0.692\,72 < \ln 2 < 0.693\,24$

سوال 23.75: 2n = 10 لیتے ہوئے سمسن قاعدہ سے $\int_0^1 x^5 \, dx$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ حد خلال کا تخمینہ مساوات 23.45 سے حاصل کریں۔ نتیج کی اصل حد خلال کیا ہے؟

سوال 23.76 تا سوال 23.79 میں $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ سائن تفاعل کی پاریج ملحوظ ہندسوں تک درست قیمتیں استعال کریں۔

سوال 23.76: منتظیل قاعده مساوات 23.39 استعال کریں اور n=5 لیں۔ جواب: 0.9466

سوال 23.77: ووزنقه قاعده مساوات 23.40 استعال کریں اور n=5 لیں۔

سوال 23.78: فوزنقه قاعده مساوات 23.40 استعال كرين اور n=10 لين-جواب: 0.9458

سوال 23.79: 2n=2 اور 2n=10 ليتے ہوئے قاعدہ سمسن استعال كريں۔

سوال 23.80: ایسے α اور β تلاش کریں کہ ایک درجی کثیر رکنی کے لئے

 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx h[\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n+1})], \qquad h = x_{n+1} - x_n$

بالکل درست ہو۔ کونسا کلیہ اخذ ہوتا ہے؟ جواب: $eta=eta=rac{1}{2}$ ذوز نقہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 23.81: اگر f(x) دو درجی کثیر رکنی ہو تب دکھائیں کہ مساوات 23.50 بالکل درست ہے۔اس کا کیا جیومیٹریائی مطلب ہے؟

سوال 23.82: مساوات 23.52 حاصل كري<u>ن</u>

اب 23.اعب دادی تحب زیبے 25.

سوال 23.83: مساوات 23.53 اخذ كرين ـ

حوال 23.84 موال $x_4=0.8$ ، $x_3=0.6$ ، $x_2=0.4$ ، $x_1=0.2$ ، $x_0=0$:23.84 عوال کریں۔ خلل تلاش کریں۔ حال تا تا شرک کریں۔ خلل تلاش کریں۔ خلل تلاش کریں۔ خلل تلاش کریں۔ خلل تلاش کریں۔ خلاب جواب: $f(x)=x_4=0.8$

سوال 23.85: تفرق کا چار نقطی کلیہ درج ذیل ہے۔

$$f_2' \approx \frac{1}{6h}(-2f_1 - 3f_2 + 6f_3 - f_4)$$

پراس کلیہ $f(x)=x^4$ کے لئے $x_4=0.8$ ، $x_3=0.6$ ، $x_2=0.4$ ، $x_1=0.2$ ، $x_0=0$ کو لاگو کریں۔ حد خلل تلاش کریں۔ مساوات 23.53 سے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 23.86: f'(x) کو یک درجی اور مزید زیادہ بلند درجی فرق سے درج ذیل کھا جا سکتا ہے۔

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \cdots)$$

r کے ساتھ مساوات 23.14 کا تفرق لیتے ہوئے اس کلیہ کو حاصل کریں۔ مساوات 23.14 کا r کے ساتھ تفرق

$$hf'(x) \approx \Delta f_0 + \frac{2r-1}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{3r^2 - 6r + 2}{3!} \Delta^3 f_0 + \cdots$$

ہے، جہاں $x = x_0 + rh$ ہے، جہاں $x = x_0 + rh$ ہوگا۔ (الف) یک در جی فرق تک، (ب) دو در جی فرق تک، (ب) وو در جی فرق تک، (پ) تین در جی فرق تک، (ت) چار در جی فرق تک شامل کرتے ہوئے اس کلیہ سے سوال 23.84 کے f'(0.4) کی قیمت تلاش کریں۔ جواب: 0.52, 0.080, 0.304, 0.256

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسکلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: کیتائی (مئله 2.2) تصور کریں که کھلے وقفے I پر ابتدائی قیت مئلہ

$$(1.1) y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, y(x_0) = K_0, y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ یائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ $y_1(x)$

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

کمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو کیتائی کا ثبوت ہے۔

یو نکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے للذا y(x) پر y(x) جمی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور ونوں یکسال ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں للذا الله ورج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(1.3) z = y^2 + y'^2$$

1518 معیب النصافی ثبوت

اور اس کے تفرق

$$(1.4) z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکه y اور y حقیقی تفاعل بین للذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \ge 0$$

لعيني

(1.7)
$$(1.7) 2yy' \le y^2 + y'^2 = z, -2yy' \le y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.1 کا استعال کیا گیا ہے۔مساوات 7.1-ب کو z=-z کلھے ہوئے مساوات 1.7 کھو سکتے ہیں جہاں مساوات 5.1 کے دونوں حصوں کو z=-z کھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 5.1 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \le \left| -2qyy' \right| = \left| q \right| \left| 2yy' \right| \le \left| q \right| z$$

کھا جا سکتا ہے۔اس نتیج کے ساتھ ساتھ p = p استعال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 5.1 کھا جا سکتا ہے۔ $p \leq |p|$ جزو میں استعال کرتے ہوئے

$$z' \le z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ماتا ہے۔اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہنتا اس سے

$$z' \le (1+|p|+|q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں 1 + |q| + |p| = h کھتے ہوئے

$$(0.8) z' \le hz x \checkmark I$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 7.1 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

(i.9)
$$-z' = -2yy' + 2py'^2 + 2qyy'$$
$$\leq z + 2|p|z + |q|z = hz$$

مساوات 8. ا اور مساوات 9. ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے متر ادف ہیں
$$z'-hz \leq 0, \quad z'+hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

 $F_1 = e^{-\int h(x) \, dx}, \qquad F_2 = e^{\int h(x) \, dx}$

چونکہ h(x) استمراری ہے للذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں للذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

 $(z'-hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z'+hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$

$$(.11) zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, zF_2 \le (zF_2)_{x_0}$$

ہوگا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) zF_1 \leq 0, zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیتوں F₁ اور F₂ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13)$$
 $z \le 0$, $z \ge 0$ $z \ge 0$ $z \le 1$

 $y_1 \equiv y_2$ کی $y \equiv 0$ پ $y \equiv 0$ ہاتا ہے جس کا مطلب ہے کہ $y \equiv 0$ پ $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ پر $y \equiv 0$ ماتا ہے جس کا مطلب ہے کہ $y \equiv 0$ ہو در کار ثبوت ہے۔

1520 صمير المنافى ثبوت

صميمه ب مفيد معلومات

1.ب اعلی تفاعل کے مساوات

e = 2.718281828459045235360287471353

(4.1)
$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارهم (شکل 1.ب-ب)

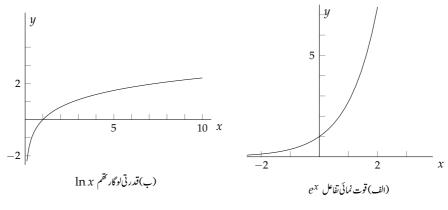
(...2)
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$$-\ln x = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \quad \text{let} \quad e^{\ln x} = x \quad \text{for } x = x$$

 $\log x$ اساس دس کا لوگارهم $\log_{10} x$ اساس دس کا لوگارهم

(....3) $\log x = M \ln x$, $M = \log e = 0.434294481903251827651128918917$

$$(-.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302585092994045684017991454684$$



شكل 1. ب: قوت نمائي تفاعل اور قدرتي لو گار تھم تفاعل



شكل2.ب:سائن نما تفاعل

 $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ اور $10^{\log x} = 10^{\log x} = 10^{\log x}$ کیاں 10^{x}

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے کملات میں زاویہ کو ریڈئی میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا وورکی عرصہ $\sin x$ ہوگا۔ $\sin x$ طاق ہے لیخی $\sin x$ $\sin x$ کو $\cos x$ کا دورک عرصہ $\cos x$ ہوگا۔ $\cos x$ کا جکہ جنگ ہوگا۔ $\cos x$ ہوگا۔

 $1^{\circ} = 0.017453292519943 \text{ rad}$ $1 \text{ radian} = 57^{\circ} 17' 44.80625'' = 57.2957795131^{\circ}$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$(-.7) \sin 2x = 2\sin x \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(...8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$(-.9) \sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(-.10) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

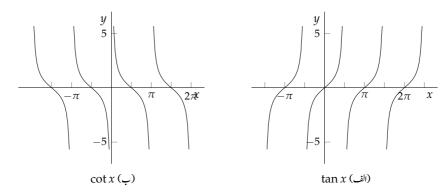
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(x \mp \delta)$$
, $\tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x \mp \delta)$$
, $\tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

$$(-.15) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc = \frac{1}{\sin x}$$

$$(-.16) \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شكل 3.ب: ٹىنىجنٹ اور كو ٹىنىجنٹ

بذلولي تفاعل (بذلولي سائن sin hx وغيره - شكل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

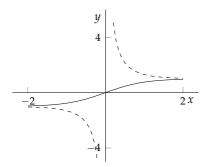
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

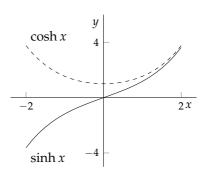
(-.19)
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$
$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

(21)
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما نفاعل (شکل 5.ب) کی تعریف درج زیل کمل ہے
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha>0)$$





-2 coth x ہے۔ نقطہ دار خط + tanh + ہے۔

(الف) تھوس خط sinh x ہے جبکہ نقطہ دار خط cosh x ہے۔

شكل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha>0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب ہے α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ حکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہوگا جے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times1$ ملتا ہے۔ای طرح بار بار مساوات 23.ب استعال کرتے ہوئے κ کی کئی بھی عدد صحیح مثبت قیت κ کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k!$$
 $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

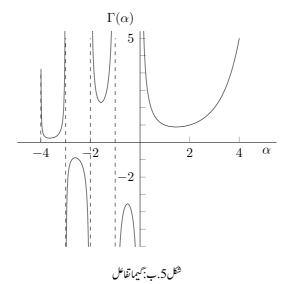
مساوات 23.ب کے بار بار استعال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعال کرتے ہوئے ہم می کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$(-.25) \qquad \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیت چی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔ مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب منفی قیمتوں کے لئے سیما تفاعل دیتے ہیں۔ مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے سیما تفاعل دیتے ہیں۔



گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots)$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha=0,-1,-2,\cdots$ پر علی مساوات 26. میں مساوات کے بیں۔

e کی بڑی قیت کے لئے سیما تفاعل کی قیت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مكمل گيما تفاعل

$$(-.29) \qquad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha - 1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1} dt \qquad (\alpha > 0)$$

(...30)
$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بيٹا تفاعل

$$(-.31) B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو سیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل(شكل 6.ب)

$$(-.33) \qquad \text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33.ب کے تفرق $erf' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن شلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

(4.34)
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \cdots \right)$$

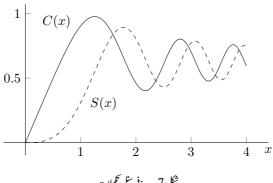
ے۔ مکملہ تفاعل خلل $\operatorname{erf} \infty = 1$

(ب.35)
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^{2}} dt$$

فرسنل تكملات (شكل 7.س)

(-.36)
$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$





شكل 7.ب: فرسنل تكملات

1
اور $rac{\pi}{8}$ اور $S(\infty)=\sqrt{rac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty)=\sqrt{rac{\pi}{8}}$

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_{x}^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(-.38) \qquad \qquad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_{x}^{\infty} \sin(t^2) dt$$

تكمل سائن (شكل 8.ب)

$$(-.39) Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل Si $\infty = \frac{\pi}{2}$

(.40)
$$\operatorname{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



تكمل كوسائن

(.41)
$$\operatorname{si}(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

تكمل قوت نمائي

(4.42)
$$\operatorname{Ei}(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

تكمل لوگارهمي

(i.43)
$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$