انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ v

1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات 1
1.1 نمونہ کشی 2
1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔ 13
1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات 22
1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل 40
1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی 52
1.6 عمودی خطوط کی نسلیں 70
1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت 74

2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات 81
2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 81
2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 98
2.3 تفرقی عامل 113
2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش 118
2.5 یولر کوشی مساوات 134
2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی 143
2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 152
2.8 جبری ارتعاش۔ گمک 164
2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک 170
2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی 174
2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 185

3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات 193
3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 193
3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 205

3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 214
3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 217

4 نظام تفرقی مساوات 225
4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 226
4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 235
4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی 250
4.3.1 خطی نظام 251
4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 254
4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔استحکام 272
4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 281
4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 290
4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام 298
4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب 299

5 طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔اعلیٰ تفاعل 309
5.1 ترکیب طاقتی تسلسل 310
5.2 لیژانڈر مساوات۔لیژانڈر کثیر رکنی 324
5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ترکیب فروبنیوس 342
5.3.1 عملی استعمال 347

ا اضافی ثبوت 345

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 5

طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔اعلیٰ تفاعل

گزشتہ بابوں میں **مستقل عددی سر** والے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو **بنیادی تفاعل** تھے۔بنیاد تفاعل مثلاً $\sin 3t$ ، t^6 اور e^{2t} کو آپ **علم الاحصاء**[1] سے جانتے ہیں۔**متغیر عددی سر** والے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ **لیژانڈر**، **بیسل** اور **بیش ہندسی** مساوات اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔یہ مساوات اور ان کے حل **لیژانڈر تفاعل**، **بیسل تفاعل** اور **بیش ہندسی تفاعل** انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہٰذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف ترکیبوں پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل **طاقتی تسلسل**[2] $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا اس کو **ترکیب طاقتی تسلسل**[3] کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو $\ln x$ یا کسری طاقت x^r سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو **ترکیب فروبنیوس**[4] کہلاتی ہے۔جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کار آمد ثابت ہوتا ہے لہٰذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلیٰ حل جنہیں آپ علم الاحصاء سے نہیں جانتے **اعلیٰ تفاعل**[5] کہلاتے ہیں۔

calculus[1]
power series[2]
power series method[3]
Frobenius method[4]
higher functions or special functions[5]

5.1 ترکیب طاقتی تسلسل

متغیر عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً **ترکیب طاقتی تسلسل** سے حل کرتے ہوئے طاقتی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔اس طاقتی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے، حل کا خط کھینچا جا سکتا ہے، کلیات ثابت کیے جا سکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جا سکتی ہے۔اس حصے میں طاقتی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ $x - x_0$ کا طاقتی تسلسل درج ذیل ہے

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots \tag{5.1}$$

جس میں x متغیر ہے جبکہ a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\dots$ تسلسل کے **عددی سر**[6] کہلاتے ہیں اور x_0 مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا **وسط**[7] کہلاتا ہے۔جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً **علامت مجموعہ**[8] ($\sum$) کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں اشاریہ[9] مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔درج بالا مساوات میں m بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔علامت مجموعہ کے نیچے $m = 0$ اور اس کے اوپر ∞ مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔ تسلسل کا وسط صفر $(x_0 = 0)$ ہونے کی صورت میں x کا طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{5.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقتی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کی تسلسل ہے جس میں $x - x_0$ (یا x) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

---

[6] coefficients
[7] center
[8] summation
[9] index

مثال 5.1: مکلارن تسلسل درحقیقت میں طاقتی تسلسل ہیں

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1, \text{ہندسی تسلسل}) \\
e^x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \\
\cos x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots
\end{aligned}
$$

ترکیب طاقتی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقتی تسلسل دیکھے۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقتی تسلسل حل

تفرقی مساوات $y' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلی قدم میں حل کو طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.3}$$

تسلسل کا جزو با جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m x^{m-1} \tag{5.4}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots) = 0$$

x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تفاعل e^{-x} کی مکلارن تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots) = a_0e^{-x}$$

یہاں آپ $y'' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ حاصل کریں۔

اب اس ترکیب کی عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلے مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔پہلی قدم میں ہم خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.5}$$

میں $p(x)$ اور $q(x)$ کو x کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ از خود کثیر رکنی ہوں تب

پہلی قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسری قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح y' اور درج ذیل y'' لکھتے ہوئے

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} \tag{5.6}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔ تیسری قدم میں x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری x^1 ، x^2 ، ...کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔ یوں تمام عددی سر کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیژانڈر مساوات

درج ذیل مساوات کروی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حل: مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}(1 - x^2)(2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + 6 \cdot 5a_6 x^4 \cdots)&\\ - 2x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots)&\\ + 2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots) &= 0\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}(2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + 6 \cdot 5a_6 x^4 \cdots)&\\ + (-2a_2 x^2 - 3 \cdot 2a_3 x^3 - 4 \cdot 3a_4 x^4 - 5 \cdot 4a_5 x^5 - \cdots)&\\ + (-2a_1 x - 2 \cdot 2a_2 x^2 - 3 \cdot 2a_3 x^3 - 4 \cdot 2a_4 x^4 - \cdots)&\\ + (2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + 2a_4 x^4 + \cdots) &= 0\end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(2a_2 + 2a_0) + (3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x&\\ + (4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 2a_2)x^2&\\ + (5 \cdot 4a_5 - 3 \cdot 2a_3 - 3 \cdot 2a_3 + 2a_3)x^3&\\ + (6 \cdot 5a_6 - 4 \cdot 3a_4 - 4 \cdot 2a_4 + 2a_4)x^4 + \cdots &= 0\end{aligned}$$

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری x ، x^2 ، x^3 ، ... کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے بالترتیب a_2 ، a_3 ، a_4 ، ... کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_0\\
a_3 &= 0\\
a_4 &= \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3}\\
a_5 &= \frac{a_3}{2} = 0 \quad (\text{چونکہ } a_3 = 0 \text{ ہے})\\
a_6 &= \frac{3}{5}a_4 = -\frac{a_0}{5}
\end{aligned}$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots)$$

جس میں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل x اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \cdots$ پر مشتمل ہے جو **لیژانڈر کثیر رکنی**[10] $P_n(x)$ اور **لیژانڈر تفاعل**[11] $Q_n(x)$ کے رکن ہیں۔یہاں $x = P_1(x)$ اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots = -Q_1(x)$ ہیں جہاں منفی علامت روایتی ہے۔ n لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا **درجہ**[12] کہلاتا ہے۔یہاں $n = 1$ ہے لہٰذا لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔

نظریہ طاقتی تسلسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ $s_n(x)$ لکھتے ہیں جس کو n **جزوی مجموعہ**[13] کہتے ہیں۔

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{5.7}$$

---

[10] Legendre polynomials
[11] Legendre function
[12] order
[13] nth partial sum

یہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔ مساوات 5.1 سے $s_n(x)$ منفی کرنے سے بقایا $R_n(x)$ حاصل ہوتا ہے جس کو $a_n(x-x_0)^n$ کے بعد مساوات 5.1 کا **بقایا**[14] کہتے ہیں۔

$$R_n(x) = a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x-x_0)^{n+2} + \cdots \tag{5.8}$$

یوں ہندسی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

کے جزوی مجموعے اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \cdots \\
s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\
s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ $\cdots$ کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔ اگر کسی $x = x_1$ کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرتکز ہو مثلاً

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر تسلسل 5.1 **مرکوز**[15] ہے جبکہ $s(x_1)$ کو تسلسل 5.1 کی **قیمت**[16] یا **مجموعہ** کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_1 - x_0)^m$$

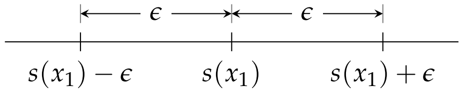
اس طرح کسی بھی n کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1) \tag{5.9}$$

اس کے برعکس اگر $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ ، $\cdots$ کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر مساوات 5.1 **منفرج**[17] ہے۔

---

[14] remainder
[15] converge
[16] value or sum
[17] divergent



شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔

مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت ϵ کے لئے ایسا N (جس کی قیمت ϵ پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام $n>N$ کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\left|R_n(x_1)\right| = \left|s(x_1)-s_n(x_1)\right| < \epsilon \qquad \text{تمام } n>N \tag{5.10}$$

جیومیٹریائی طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ $s_n(x_1)$ جہاں $n>N$ ہے $s(x_1)-\epsilon$ اور $s(x_1)+\epsilon$ کے درمیان پایا جاتا ہے۔عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں x_1 پر مساوات 5.1 کا مجموعہ $s(x_1)$ تقریباً $s_n(x_1)$ کے برابر ہو گا۔مزید یہ کہ $s(x_1)$ اور $s_n(x_1)$ میں فرق کو ہم n بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

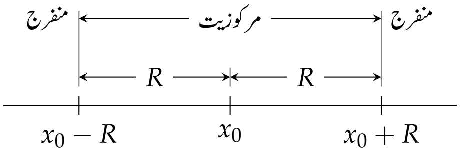
طاقتی تسلسل کہاں مرکوز ہوتی ہے؟ تسلسل 5.1 میں $x=x_0$ پر a_0 کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا تسلسل کی قیمت a_0 ہو گی۔یوں $x=x_0$ پر تسلسل a_0 پر مرکوز ہوتی ہے۔کبھی کبھار x کی واحد اسی قیمت پر تسلسل مرتکز ہو گا۔اگر x کے دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرتکز ہو تب x کی یہ قیمتیں ارتکازی وقفہ[18] کہلاتا ہے۔یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔محدود وقفہ جس کا وسط x_0 ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔یوں طاقتی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام x پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے x پر تسلسل مرکوز ہو گا

$$|x-x_0| < R \tag{5.11}$$

جبکہ $|x-x_0|>R$ پر تسلسل منفرج ہو گا۔ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طاقتی تسلسل x کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں R رداس ارتکاز[19] کہلاتا ہے۔(مخلوط طاقتی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول ٹکیا ہوتا ہے جس کا رداس R ہو گا)۔اگر تسلسل تمام x پر مرکوز ہو تب ہم $R=\infty$ یعنی $\frac{1}{R}=0$ لکھتے ہیں۔

[18] convergence interval
[19] convergence radius



شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.11 جس کا وسط x_0 ہے۔

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جا سکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد (lim) موجود اور غیر صفر ہو۔ اگر یہ حد لا متناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط x_0 پر مرکوز ہو گا۔

$$R = \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}} \tag{5.12}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|} \tag{5.13}$$

مثال 5.4: رداس ارتکاز ∞ ، 1 اور 0

تینوں تسلسل میں $m \to \infty$ لیتے ہوئے رداس ارتکاز R دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \to 0, \quad R \to \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! x^m = 1 + x + 2x^2 + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{(m+1)!}{m!}\right| = m + 1 \to \infty, \quad R \to 0$$

لا متناہی رداس ارتکاس $R \to \infty$ سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ $R = 0$ بے کار صورت ہے۔ عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔

درج بالا مثال میں $\frac{1}{1-x}$ کے طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز $R = 1$ حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط $x_0 = 0$ ہے۔مساوات 5.11 کے تحت $|x| < 1$ کے لئے طاقتی تسلسل تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کو ظاہر کرتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔نقطہ $x = 0.2$ پر تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-0.2} = 1.25$ ہے جبکہ اس کے تسلسل میں $x = 0.2$ پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \qquad \text{ایک رکن}\\
1+0.2 &= 1.2\\
1+0.2+0.2^2 &= 1.24\\
1+0.2+0.2^2+0.2^3 &= 1.248\\
1+0.2+0.2^2+0.2^3+0.2^4 &= 1.2496 \qquad \text{پانچ ارکان}
\end{aligned}
$$

طاقتی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کے اصل قیمت کے $\frac{1.2496}{1.25} \times 100 = 99.968$ فی صد ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی x پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جا سکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرج ہے۔آئیں رداس ارتکاز کے باہر $x = 1.2$ پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل کریں۔تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-1.2} = -5$ حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+1.2 &= 2.2\\
1+1.2+1.2^2 &= 3.64\\
1+1.2+1.2^2+1.2^3 &= 5.368
\end{aligned}
$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ x پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرج ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔طاقتی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہو گی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{5.14}$$

میں $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کے طاقتی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقتی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ایسا تفاعل $f(x)$ جس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا مثبت رداس ارتکاز پایا جاتا ہو، x_0 پر تحلیلی[20] کہلاتا ہے۔اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 **معیاری صورت** میں ہے یعنی یہ y'' سے شروع ہوتا ہے۔اگر دو درجی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پایا جاتا ہو، یعنی اس میں $h(x)y''$ پایا جاتا ہو تب مساوات کو $h(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

مسئلہ 5.1: طاقتی تسلسل حل کی وجودیت

اگر مساوات 5.14 میں p ، q اور r نقطہ $x = x_0$ پر تحلیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل $x = x_0$ پر تحلیلی ہو گا اور اس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رداس ارتکاز $R > 0$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت آپ کتاب کے آخر میں صفحہ 343 پر حوالہ [2] سے پڑھ سکتے ہیں۔(دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ x محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رداس ارتکاز کی لمبائی x_0 سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں p ، q اور r میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تحلیلی ہو۔

طاقتی تسلسل پر مختلف عمل

طاقتی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقتی تسلسلوں کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح) x کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقتی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

[20] analytic

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقتی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m$$

$|x-x_0|<R$ پر مرکوز ہو، جہاں $R<0$ ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی انہیں x پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان x پر تفرق y' کو ظاہر کرے گا۔

$$y'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m(x-x_0)^{m-1}\qquad(|x-x_0|<R)$$

اسی طرح دو درجی، تین درجی اور بلند درجی تفرقات بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقتی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-x_0)^m \tag{5.15}$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty}(a_m+b_m)(x-x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ $f(x)+g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقتی تسلسل کو رکن با رکن ضرب دیا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہیں۔اب پہلی تسلسل کے ہر رکن کو دوسری تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے $x-x_0$ کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$\begin{aligned}a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)(x-x_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(x-x_0)^2+\cdots\\=\sum_{m=0}^{\infty}(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\cdots+a_mb_0)(x-x_0)^m\end{aligned}$$

مرکوز ہو گا اور $f(x)g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ارتکاز دریافت کریں۔

سوال 5.1: $\sum_{\infty}^{m=0}(m+1)mx^m$
جواب: $R=1$

سوال 5.2: $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{k^m}$
جواب: $R=k$

سوال 5.3: $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
جواب: $R=\infty$

سوال 5.4: $\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^m x^m$
جواب: $R=\frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقتی تسلسل حل کریں۔

سوال 5.5: $y'=-2xy$
جواب: $y=a_0(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+-\cdots)=a_0e^{-x^2}$

سوال 5.6: $y''+y=0$
جواب: $y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2}x^2-\frac{a_1}{6}x^3+-\cdots=a_0\cos x+a_1\sin x$

سوال 5.7: $(1-x)y'=y$
جواب: $y=a_0(1+x+x^2+x^3+\cdots)=-\frac{a_0}{1-x}$

سوال 5.8: $xy' - 3y = k$ جہاں k مستقل مقدار ہے
جواب: $y = cx^3 - \frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاقتی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔ تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لامحدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں x کے صرف طاق یا صرف جفت طاقت پائیں جاتے ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9: $y'' - y' + xy = 0$
جواب: $y = a_0(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{240} + \cdots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} - \cdots)$

سوال 5.10: $y'' - y' - xy = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{144} + \cdots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} + \cdots)$

سوال 5.11: $y'' - y' - x^2y = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \cdots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots)$

سوال 5.12: $y'' - xy' - x^2y = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \cdots) + a_1(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots)$

سوال 5.13: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$
جواب: $y = a_0(1 - 3x^2) + a_1(x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \cdots)$ ؛ جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
$\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{s}{s+1} x^{s+1}$ کے پہلے جزو کی نشاندہی $s = 0$ کرتا ہے۔اس مجموعے میں $k = s + 1$ پر کرتے ہوئے نیا مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر x^m پایا جاتا ہو۔اس عمل کو منتقلی اشاریہ[21] کہتے ہیں۔حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی $k = 1$ کرتا ہے۔

[21] shifting index

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
مجموعہ $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{p+2}{(p+1)!} x^{p+3}$ میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر x^m ہو۔

جواب: $\sum\limits_{m=5}^{\infty} \frac{m-1}{(m-2)!} x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.19 کو ترکیب طاقتی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں x^3 تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل a_0 (اور a_1) دریافت کریں۔دیے گئے نقطہ x_1 پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں تک جواب لکھیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

جوابات: $y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \cdots$ ، $a_0 = 6$ ، $y(1) = -514$

سوال 5.17:

$$y'' + 4xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad x_1 = 0.1$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{6} + \cdots)$ ، $a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$ ، $y(0.1) = 1.094$

سوال 5.18:

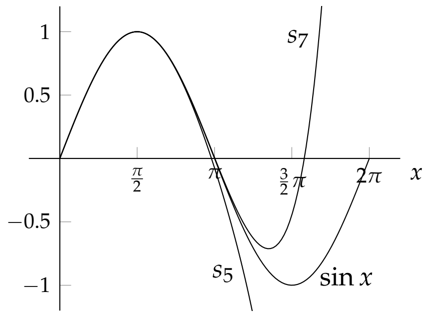
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = 0.5$$

جوابات: $y = a_0(1 - 6x^2 + 3x^4 + \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{3})$ ، $a_0 = 0$ ، $a_1 = -\frac{3}{2}$ ، $y(0.5) = -0.437$

سوال 5.19:

$$(x - 4)y' = xy, \quad y(1) = 5, \quad x_1 = 2$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{256} + \cdots)$ ، $a_0 = 5.827$ ، $y(2) = 2.307$



شکل 5.3: سوال 5.20 کا خط۔ $\sin x$ کے علاوہ جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 دکھائے گئے ہیں۔

سوال 5.20: کمپیوٹر کا استعمال
طاقتی تسلسل سے تفاعل کی قیمت جزوی تسلسل سے حاصل کی جاتی ہے۔تفاعل $\sin x$ کی تسلسل سے بذریعہ کمپیوٹر، تسلسل میں اجزاء کی تعداد مختلف لیتے ہوئے سائن کا خط کھینچیں۔آپ دیکھیں گے کے کم اجزاء لینے سے اصل تفاعل (یعنی $\sin x$)اور تسلسل میں فرق بہت جلد واضح ہوتا ہے جبکہ زیادہ تعداد میں اجزاء لینے سے یہ فرق دیر بعد نمودار ہوتا ہے۔

جوابات: شکل 5.3 میں $\sin x$ کا جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

5.2 لیژانڈر مساوات۔لیژانڈر کثیر رکنی

لیژانڈر تفرقی مساوات[22][23]

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (n \text{ مستقل ہے}) \tag{5.16}$$

طبیعیات کے اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک ہے جو متعدد مسائل، بالخصوص کرہ کے سرحدی قیمت مسئلوں، میں سامنے آتی ہے۔

[22] فرانسیسی ریاضی دان اڈریان مری لیژانڈر [1752-1833] نے اعلٰی تفاعل، بیضوی تکمل اور اعدادی نظریہ پر کام کیا۔
[23] Legendre's equation

مساوات میں مقدار معلوم n کی قیمت اصل مسئلے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے لہٰذا مساوات 5.16 درحقیقت سادہ تفرقی مساوات کی نسل کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم نے لیژانڈر مساوات، جس میں $n = 1$ تھا، کو مثال 5.3 میں حل کیا (جس کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ مساوات 5.16 کے کسی بھی حل کو **لیژانڈر تفاعل**[24] کہتے ہیں۔ لیژانڈر تفاعل اور ایسے دیگر اعلیٰ تفاعل، جو علم الاحصاء میں نہیں پائے جاتے، کے مطالعہ کو **نظریہ اعلیٰ تفاعل**[25] کہتے ہیں۔ دیگر اعلیٰ تفاعل اگلے حصوں میں سامنے آئیں گے۔

مساوات 5.16 کو $1 - x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ نقطہ $x = 0$ پر **تحلیلی تفاعل** ہیں [مثال 5.5 دیکھیں] لہٰذا لیژانڈر مساوات پر مسئلہ 5.1 کا اطلاق ہوتا ہے اور اس کا حل طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ طاقتی تسلسل

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.17}$$

اور اس کے تفرقات کو مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے مستقل $n(n+1)$ کو k لکھتے ہوئے

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں آپ مثال 5.3 کی طرح مجموعوں کے چند ابتدائی ارکان لکھ کر آگے بڑھ سکتے ہیں یا پھر درج ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ تمام مجموعوں کو x کی یکساں طاقت کی صورت (x^s) میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $s = m - 2$ یعنی $m = s + 2$ پر کرتے ہیں جبکہ بقایا تین مجموعوں میں m کی جگہ s پر کرتے ہیں۔ یوں پہلے مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ اب $s = 0$ ہو گا اور a_m کی جگہ a_{s+2} لکھا جائے گا۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} 2s a_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} k a_s x^s = 0 \tag{5.18}$$

درج بالا مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا مساوات کا بایاں ہاتھ بھی صفر کے برابر ہو گا اور یوں x کے ہر طاقت کے عددی سروں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔ یوں x^0 کے عددی سر سے شروع کرتے ہوئے باری باری

[24] Legendre function
[25] special functions theory

x^1، x^2، $\cdots$ کے عددی سر صفر کے برابر لکھتے ہیں۔مساوات 5.18 کا دوسرا مجموعہ x^2 اور تیسرا مجموعہ x^1 سے شروع ہوتا ہے لہٰذا ان میں x^0 نہیں پایا جاتا ہے۔یوں پہلے اور چوتھے مجموعوں سے x^0 کے عددی سر جمع کرتے ہوئے صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$$2 \cdot 1a_2 + n(n+1)a_0 = 0 \tag{5.19}$$

جہاں k کی جگہ واپس $n(n+1)$ لکھا گیا ہے۔اسی طرح x^1 پہلے، تیسرے اور چوتھے مجموعوں میں پایا جاتا ہے جن سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$3 \cdot 2a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0 \tag{5.20}$$

بلند طاقتی اجزاء x^2، x^3، $\cdots$ تمام مجموعوں میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے لئے x^s کے عددی سروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$(s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0 \tag{5.21}$$

چکور قوسین $[\cdots]$ کے اندر قوسین کو کھول کر ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
-s(s-1) - 2s + n(n+1) &= -s^2 + s - 2s + n^2 + n = n^2 - s^2 + n - s \\
&= (n-s)(n+s) + n - s \\
&= (n-s)(n+s+1)
\end{aligned}$$

لہٰذا مساوات 5.21 سے

$$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots) \tag{5.22}$$

حاصل ہوتا ہے جو کلیہ توالی[26] کہلاتا ہے۔کلیہ توالی کی مدد سے، a_0 اور a_1 کے علاوہ، بقایا تمام عددی سر، دو قدم پچھلی عددی سر استعمال کرتے ہوئے دریافت کیے جاتے ہیں۔یوں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔کلیہ توالی کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 & a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1 \\
a_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3}a_2 & a_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4}a_3 \\
&= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 & &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

[26] recurrence relation, recursion formula

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 5.17 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \tag{5.23}$$

جہاں

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \cdots \tag{5.24}$$

اور

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \cdots \tag{5.25}$$

ہیں۔یہ تسلسل $1 > |x|$ کے لئے مرکوز ہیں۔بعض اوقات تسلسل کا کوئی عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں کلیہ توالی کے تحت اگلے تمام عددی سر بھی صفر ہوں گے اور یوں تسلسل محدود ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔چونکہ مساوات 5.24 میں x کے جفت طاقت پائے جاتے ہیں جبکہ مساوات 5.25 میں x کے طاق طاقت پائے جاتے ہیں لٰہذا $\frac{y_1}{y_2}$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا ہے اور یوں y_1 اور y_2 آپس میں خطی تعلق نہیں رکھتے لٰہذا یہ خطی طور غیر تابع حل ہیں۔یوں مساوات 5.23 کھلے وقفہ $-1 < x < 1$ پر عمومی حل ہے۔

دھیان رہے کہ $x = \mp 1$ پر $1 - x^2 = 0$ ہو گا لٰہذا سادہ تفرقی مساوات کی معیاری صورت میں عددی سر غیر تحلیلی ہوں گے۔یوں حیرانی کی بات نہیں ہے کہ تسلسل 5.24 اور تسلسل 5.24 کا ارتکازی وقفہ وسیع نہیں ہے ماسوائے اس صورت میں جب اجزاء کی تعداد محدود ہونے کی بنا تسلسل کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے۔

کثیر رکنی حل۔لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$

طاقتی تسلسل کے تخفیف سے کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے جس کا حل، ارتکازی شرط کے قید سے آزاد، تمام x کے لئے پایا جاتا ہے۔ایسے اعلٰی تفاعل جو سادہ تفرقی مساوات کے حل ہوتے ہیں میں یہ صورت عموماً پائی جاتی ہے جن سے مختلف نسل کے اہم کثیر رکنی حاصل ہوتے ہیں۔لیژانڈر مساوات میں n کی قیمت غیر منفی عدد صحیح ہونے کی صورت میں $s = n$ پر مساوات 5.22 صفر کے برابر ہوتا ہے لٰہذا $a_{n+2} = 0$ ہو گا اور یوں $a_{n+4} = 0$ ، $a_{n+6} = 0$ ، ...ہوں گے۔جفت n کی صورت میں y_1 کثیر رکنی ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں y_2

کثیر رکنی ہو گا۔ان کثیر رکنی کو مستقل مقدار سے ضرب دیتے ہوئے لیژانڈر کثیر رکنی[27] حاصل ہوتی ہیں جنہیں $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔روایتی طور پر اس مستقل مقدار کو درج ذیل طریقے سے چننا جاتا ہے۔

تسلسل میں x^n کے عددی سر a_n کو

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \qquad n \text{ مثبت عدد ہے} \tag{5.26}$$

چننا [مثال 5.6 دیکھیں] جاتا ہے (جبکہ $n=0$ کی صورت میں $a_n=1$ چننا جاتا ہے)۔ مساوات 5.22 کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے دیگر عددی سر حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)}a_{s+2} \qquad (s \le n-2) \tag{5.27}$$

کثیر رکنی میں x کی بلند تر طاقت کے عددی سر a_n کو مساوات 5.26 کے تحت چننے سے $x=1$ پر تمام P_n کی قیمت اکائی $[P_n(1)=1]$ حاصل ہوتی ہے [شکل 5.4 دیکھیں]۔یہی a_n یوں چننے کی وجہ ہے۔مساوات 5.27 میں $s+2=n$ یعنی $s=n-2$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.26 سے a_n پر کرتے ہیں۔

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

شمار کنندہ میں $(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)!$ اور نسب نما میں $(n!)^2$ کو $n!n!$ لکھ کر اس میں $n! = n(n-1)!$ اور $n! = n(n-1)(n-2)!$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں $n(n-1)2n(2n-1)$ کٹ جاتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned} a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} \end{aligned}$$

[27] Legendre polynomial

اور دیگر عددی سر حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں درج ذیل عمومی کلیہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \qquad (n-2m \geq 0) \tag{5.28}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفرقی مساوات 5.16 کا کثیر رکنی حل

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + - \cdots \end{aligned} \tag{5.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ عدد صحیح ہو گا اور M اس عدد صحیح کے برابر ہو گا [مثال 5.7 دیکھیں]۔درج بالا n درجی لیژانڈر کثیر رکنی[28] کہلاتا ہے اور اس کو $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند پہلے لیژانڈر کثیر رکنی جنہیں شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) \end{aligned} \tag{5.30}$$

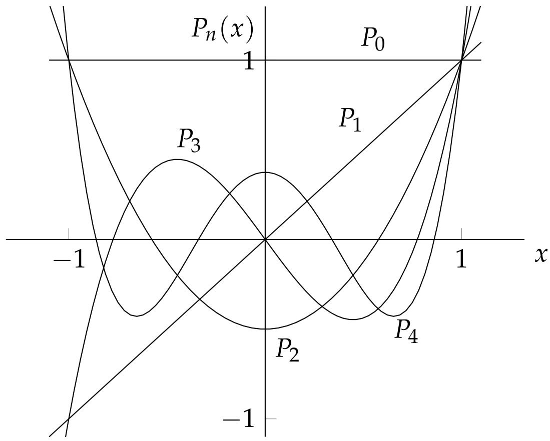
لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر آپس میں **عمودی**[29] ہیں۔یہ خصوصیت **فوریئر لیژانڈر** تسلسل کے لئے ضروری ہے جن پر فوریئر تسلسل کے باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال 5.5: لیژانڈر مساوات 5.16 کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت میں لکھتے ہوئے ثابت کریں کی اس کے عددی سر $x=0$ پر تحلیلی ہیں۔

حل: لیژانڈر مساوات کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ ہیں جن کی مکلارن تسلسل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{1-x^2} &= n(n+1)(1+x^2+x^4+\cdots) \\ \frac{-2x}{1-x^2} &= -2(x+x^3+x^5+\cdots) \end{aligned}$$

[28] Legendre polynomial
[29] orthogonal



شکل 5.4: لیژانڈر کثیر رکنی۔

پہلی تسلسل کا $1 = \frac{a_{m+1}}{a_m}$ ہیں لہٰذا اس کا رداس ارتکاز $R = 1$ ہے۔دوسری تسلسل کا بھی $1 = \frac{a_{m+1}}{a_m}$ اور $R = 1$ ہیں۔یوں دونوں تسلسل تحلیلی ہیں۔

مثال 5.6: درج ذیل مساوات کے بائیں ہاتھ سے اس کا دایاں ہاتھ حاصل کریں۔

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$$

حل: پہلے $n = 3$ کے لئے حل کرتے ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں شمار کنندہ میں طاق اعداد (جو طاق مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو ایک طرف اور جفت اعداد (جو جفت مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو دوسری طرف منتقل کرتے ہوئے ہر جفت عدد سے 2 کا ہندسہ نکالا گیا ہے۔

$$\frac{(2\cdot 3)!}{2^3(3!)^2} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^3(3\cdot 2\cdot 1)^2} = \frac{6\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^3(3!)^2} = \frac{2^3(3\cdot 2\cdot 1)\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^3(3!)^2} = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{3!}$$

شمار کنندہ میں اعداد کو ترتیب دیتے ہوئے اور اس میں سب سے بڑے عدد 5 کو $2\cdot3-1$ لکھتے ہوئے $\frac{1\cdot3\cdot(2\cdot3-1)}{3!}$ لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں یہی سب کچھ عمومی عددی صحیح n کے لئے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots8\cdot6\cdot4\cdot2\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots7\cdot5\cdot3\cdot1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{2^n n(n-1)(n-2)\cdots4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots7\cdot5\cdot3\cdot1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots7\cdot5\cdot3\cdot1}{n!}\\
&= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}
\end{aligned}$$

مثال 5.7: لیژانڈر کثیر رکنی مجموعہ [مساوات 5.29] کی بالائی حد M ہے۔ M کی قیمت دریافت کریں۔

حل: مساوات 5.22 لیژانڈر کثیر رکنی کے عددی سر دیتی ہے جس کے تحت $s=n$ پر عددی سر صفر $(a_{n+2}=0)$ کے برابر ہو گا اور یوں بقایا عددی سر a_{n+4} ، a_{n+6} ، . . . بھی صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں کثیر رکنی میں x کی زیادہ سے زیادہ طاقت n ہو گی۔ اس طرح $n=5$ کی صورت میں a_5x^5 ، a_3x^3 اور a_1x^1 پایا جائے گا جبکہ $n=8$ کی صورت میں a_8x^8 ، a_6x^6 ، a_4x^4 ، a_2x^2 اور a_0 پائے جائیں گے۔ آپ نے دیکھا کہ طاق n کی صورت میں کثیر رکنی میں کل $\frac{n-1}{2}$ پائے گئے جبکہ جفت n کی صورت میں ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ تھی۔ یوں طاق n کی صورت میں $M=\frac{n-1}{2}$ اور جفت n کی صورت میں $M=\frac{n}{2}$ ہو گا جہاں M عدد صحیح ہے۔

مثال 5.8: (کلیہ روڈریگیس)
تفاعل $(x^2-1)^n$ کو الکراجی کے مسئلہ ثنائی[30] سے پھیلا کر اس کا n درجی تفرق لیں۔حاصل جواب کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل کریں جس کو کلیہ روڈریگیس[31] کہتے ہیں۔

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \tag{5.31}$$

حل: $(x^2-1)^n$ کو مسئلہ الکراجی سے پھیلاتے ہوئے $n+1$ ارکان ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y=(x^2-1)^n&=(x^2)^n+\frac{n}{1!}(x^2)^{n-1}(-1)^1+\frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^{n-2}(-1)^2+\cdots\\ &\quad+\frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^2(-1)^{n-2}+\frac{n}{1!}(x^2)(-1)^{n-1}+(-1)^n \end{aligned} \tag{5.32}$$

اس مساوات کا آخری رکن مستقل مقدار $(-1)^n$ ہے جبکہ اس رکن سے ایک پہلے رکن میں x^2 پایا جاتا ہے۔یوں y' لینے سے آخری رکن صفر ہو جائے گا لہٰذا y' میں n ارکان رہ جائیں گے۔ y' کے آخری رکن میں x^1 پایا جائے گا۔ y'' لینے سے یہ رکن مستقل مقدار ہو جائے گا جبکہ ارکان کی تعداد میں مزید کمی رو نما نہیں ہو گی۔اسی طرح y''' لینے سے ایک اور رکن کم ہو جائے گا اور $n-1$ ارکان رہ جائیں گے۔ y'''' لینے سے ارکان کی تعداد میں کمی پیدا نہیں ہو گی۔یوں ہر دو مرتبہ تفرق لینے سے تعداد اکائی کمی پیدا ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ n درجی تفرق $y^{(n)}$ لینے کے بعد ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ ہو گی جس کو ہم M سے ظاہر کرتے ہیں اور جو صحیح عدد ہو گا۔

مساوات 5.32 کو مجموعے کی صورت میں لکھتے ہیں جس میں $m=0$ تا $m=n$ ارکان یعنی $n+1$ ارکان ہیں۔

$$y=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(x^2)^{n-m}(-1)^m}{(n-m)!m!}=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!}x^{2n-2m} \tag{5.33}$$

---

[30] binomial theorem ابو بکر ابن محمد ابن الحسین الکراجی [953-1029] ایران کے ریاضی دان تھے۔
[31] Rodrigues' formula فرانسیسی ریاضی دان بنجامن اولانڈے روڈریگیس [1794-1851]

اب $z = x^{2n-2m}$ پر نظر رکھیں۔اس کے تفرق لیتے ہیں۔

$$z' = (2n-2m)x^{2n-2m-1} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-1)!}x^{2n-2m-1}$$
$$z'' = (2n-2m)(2n-2m-1)x^{2n-2m-2} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-2)!}x^{2n-2m-2}$$
$$z''' = (2n-2m)(2n-2m-1)(2n-2m-2)x^{2n-2m-3} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-3)!}x^{2n-2m-3}$$
$$\vdots$$
$$z^{(k)} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-k)!}x^{2n-2m-k}$$
$$z^{(n)} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-n)!}x^{2n-2m-n} = \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.33 کا n درجی تفرق لکھتے ہیں

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] = \sum_{m=0}^{M} \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!}\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}$$

جس کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

مثال 5.9: روڈریگیس مساوات 5.31 استعمال کرتے ہوئے n مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

حل :فرض کریں کہ $y = (x-1)^3$ ہے۔یوں $y' = 3(x-1)^2$ ، $y'' = 3\cdot 2(x-1)$ ، $y''' = 3\cdot 2\cdot 1$ اور $y^{(4)} = 0$ ہوں گے جن سے $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ ، $y''(1) = 0$ ،

$y'''(1) = 3!$ اور $y(1)^{(4)} = 0$ حاصل ہوتے ہیں۔اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $y_1 = (x-1)^n$ کی صورت میں

$$y_1 = (x-1)^n, \quad y_1^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x-1)^{n-m}, \quad y_1^{(m)}(1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.34}$$

اور $y_2 = (x+1)^n$ کی صورت میں

$$y_2 = (x-1)^n, \quad y_2^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x+1)^{n-m}, \quad y_2^{(m)}(-1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.35}$$

ہو گا جہاں $\delta_{n,m}$ کی تعریف درج ذیل ہے (یعنی $m = n$ کی صورت میں $\delta = 1$ جبکہ $m \neq n$ کی صورت میں $\delta = 0$ ہے)۔

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{5.36}$$

مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $y_1 = (x-1)^n$ کے تمام تفرقات کی قیمت $x = 1$ پر صفر ہو گی ماسوائے n درجی تفرق، جس کی قیمت $n!$ ہو گی۔ مساوات 5.35 یہی کچھ $y_2 = (x+1)^n$ کے بارے میں $x = -1$ پر کہتی ہے۔

اب اگر $X = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n = y_1 y_2$ ہو تب کلیہ لیبنٹز[32] سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \overbrace{\frac{\mathrm{d}^{m-s} y_1}{\mathrm{d}x^{m-s}}}^{M} \cdot \overbrace{\frac{\mathrm{d}^s y_2}{\mathrm{d}x^s}}^{N}$$

اگر $m \neq n$ ہو، اور بالخصوص اگر $m < n$ ہو، تب مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $M(x=1) = 0$ ہو گا جبکہ مساوات 5.35 کہتی ہے کہ تب $N(x=-1) = 0$ ہو گا۔ان نتائج کی بنا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = 0 \tag{5.37}$$

مساوات 5.31 کو استعمال کرتے ہوئے $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n[(x^2-1)^n]}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n} \cdot \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \left[\left. \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}} \right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}} \,\mathrm{d}x \right]
\end{aligned}$$

---

[32] Leibnitz formula

ہو گا جہاں تکمل بالحصص استعمال کیا گیا ہے۔مساوات 5.37 کے تحت $\left.\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{1} = \left.\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{-1} = 0$ ہے لہٰذا آخری قدم پر تکمل کے باہر تمام حصہ صفر کے برابر ہے اور یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \left[\left. \frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-2} X}{\mathrm{d}x^{n-2}} \right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+2} X}{\mathrm{d}x^{n+2}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-2} X}{\mathrm{d}x^{n-2}} \,\mathrm{d}x \right]
\end{aligned}$$

جہاں دوبارہ تکمل بالحصص لیا گیا ہے۔پہلی کی طرح اب بھی تکمل کا باہر والا حصہ صفر کے برابر ہے۔اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر بار بیرونی حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔یوں s مرتبہ تکمل لیتے اور بیرونی حصے کو صفر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^s}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+s} X}{\mathrm{d}x^{n+s}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-s} X}{\mathrm{d}x^{n-s}} \,\mathrm{d}x$$

آخر کار $s = n$ ہو گا اور یوں درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}^0 X}{\mathrm{d}x^0} = X$ لکھا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+n} X}{\mathrm{d}x^{n+n}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-n} X}{\mathrm{d}x^{n-n}} \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{2n} X}{\mathrm{d}x^{2n}} \cdot X \,\mathrm{d}x$$

$X = (x^2-1)^n$ کا الکراجی ثنائی تسلسل مساوات 5.32 دیتی ہے جس کا $2n$ درجی تفرق لینے سے، پہلے رکن کے علاوہ، تمام ارکان صفر کے برابر ہو جاتے ہیں۔یوں اس کا $2n$ درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}^{2n} X}{\mathrm{d}x^{2n}} = (2n)!$ ہو گا جس سے درج بالا تکمل یوں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x \tag{5.38}$$

لکھا جاتا ہے۔آئیں $\int X \,\mathrm{d}x$ کو تکمل بالحصص کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n \,\mathrm{d}x \\
&= \left. (x-1)^n \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n(x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر ہے۔اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر مرتبہ تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ s مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے اور تکمل کے باہر حصے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X\,\mathrm{d}x &= (-1)^s \int_{-1}^{1} [n(n-2)\cdots(n-s+1)](x-1)^{n-s} \frac{(x+1)^{n+s}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+s)}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^s \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{n!(x+1)^{n+s}}{(n+s)!}\end{aligned}$$

آخر کار $s = n$ ہو گا جس پر درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X\,\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-n}}{(n-n)!} \frac{n!(x+1)^{n+n}}{(n+n)!} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_{-1}^{1} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

جہاں $0! = 1$ پر کیا گیا ہے۔درج بالا نتیجے کو مساوات 5.38 میں پر کرتے ہیں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \tag{5.39}$$

جہاں منفی ایک کا جفت طاقت اکائی کے برابر $[(-1)^{2n} = 1]$ ہے۔

مثال 5.10: درج ذیل ثابت کریں جہاں $n \neq m$ ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \neq m) \tag{5.40}$$

حل: فرض کریں کہ $X = (x^2-1)^n$ اور $Y = (x^2-1)^m$ ہیں۔ یوں مساوات 5.31 کے تحت $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ اور $P_m = \frac{1}{2^m m!}\frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m}$ ہوں گے لہٰذا

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+m} n! m!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m}\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔چونکہ n اور m برابر نہیں ہیں لہٰذا ان میں ایک کی قیمت دوسرے سے کم ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $n < m$ ہے۔ گزشتہ مثال کی طرح، درج بالا کو بار بار تکمل بالحصص سے حل کرتے ہوئے، ہر بار تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور آخر کار درج ذیل ملتا ہے۔ مساوات 5.36 کے تحت Y کا صرف اور صرف m درجی تفرق غیر صفر ہے درج ذیل صفر کے برابر ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!}\int_{-1}^{1} \frac{(n!)^2}{(m-n)!}\frac{\mathrm{d}^{m-n} Y}{\mathrm{d}x^{m-n}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!}\frac{(n!)^2}{(m-n)!}\frac{\mathrm{d}^{m-n+1} Y}{\mathrm{d}x^{m-n+1}}\bigg|_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

مثال 5.11: پیداکار تفاعل

الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ کا تسلسل لکھ کر اس میں $v = 2xu - u^2$ پر کریں۔ ان میں u^0 ارکان کا مجموعہ حاصل کریں۔اسی طرح u^1 ارکان کا مجموعہ،اور u^2 ارکان کا مجموعہ، ...حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ ان مجموعوں کا عددی سر بالترتیب P_0 ، P_1 ، P_2 ، ... ہو گا یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n \tag{5.41}$$

حل:آئیں P_0 ، P_1 اور P_2 کے لئے حل کریں۔ دیے تفاعل کا الکراجی ثنائی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^1}{2^1\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3v^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5v^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7v^4}{2^4\cdot 4!} + \cdots$$

چونکہ u^2 کا عدد سر P_2 ہو گا اور درج بالا تسلسل کے پہلے تین ارکان میں کے بعد u کے زیادہ بلند طاقت پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم تسلسل کے پہلے تین ارکان پر نظر رکھتے ہیں۔اس تسلسل میں $v = 2xu - u^2$ پر کرتے ہوئے درکار نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(1-v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(2xu-u^2)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3(2xu-u^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \cdots \\ &= 1 + (xu - \frac{u^2}{2}) + \frac{3}{8}(4x^2u^2 + u^4 - 4xu^3) + \cdots \\ &= \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{(x)}_{P_1} u + \underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)}_{P_2} u^2 + \cdots\end{aligned}$$

سوالات

سوال 5.21 تا سوال 5.26 لیژانڈر کثیر رکنی اور تفاعل پر مبنی ہیں۔

سوال 5.21: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 0$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقت کے x پائے جاتے ہیں لہٰذا $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 0$ پر کرتے اور $0! = 1$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ ملتا ہے۔[$0! = 1$ کا ثبوت **گیما تفاعل**[33] کی مدد سے اسی باب میں دیا جائے گا۔]

سوال 5.22: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 1$ لیتے ہوئے $P_1(x)$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقتی x پائے جاتے ہیں لہٰذا $n = 1$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے $P_1(x) = x$ ملتا ہے۔

سوال 5.23: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 سے $P_3(x)$ تا $P_5(x)$ حاصل کریں جنہیں مساوات 5.30 میں پیش کیا گیا ہے۔

---

[33] Gamma function

سوال 5.24: $P_0(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n = 0$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$ ہو گی اور $y = P_0 = 1$ ، $y' = P_0' = 0$ اور $y'' = P_0'' = 0$ ہوں گے۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1-x^2)(0) - 2x(0)$ یعنی 0 حاصل ہوتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.25: $P_1(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n = 1$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ہو گی جبکہ $y = P_1 = x$ ، $y' = P_1' = 1$ اور $y'' = P_1'' = 0$ ہیں۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1-x^2)(0) - 2x(1) + 2(x)$ یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.26: $P_3(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کے حل ہیں۔

جوابات: $n = 3$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی صورت $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ ہو گی جبکہ $y = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ، $y' = \frac{1}{2}(15x^2 - 3)$ اور $y'' = 15x$ ہیں جنہیں مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے

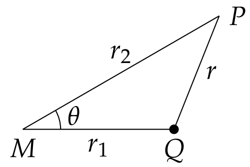
$$(1-x^2)(15x) - 2x[\tfrac{1}{2}(15x^2-3)] + 12[\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)]$$

یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.27: **نظریہ مخفی توانائی**

آپ نقطہ برقی بار کے برقی میدان سے بخوبی واقف ہیں۔شکل 5.5 میں محدد کے مرکز M سے ہٹ کر نقطہ بار Q پایا جاتا ہے جس کا عمومی مقام P پر برقی دباو $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}$ ہے۔ $\frac{Q}{4\pi\epsilon}$ کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.41 کی استعمال سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}} = \frac{1}{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m \tag{5.42}$$



شکل 5.5: نقطہ برقی بار کا برقی میدان [سوال 5.27]۔

جواب: $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta = r_2^2[1 - 2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cos\theta + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2]$ لکھتے ہوئے $u = \frac{r_1}{r_2}$ اور $x = \cos\theta$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 5.28: درج ذیل ثابت کریں۔مساوات 5.41 کو استعمال کریں۔

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

سوال 5.29: بونٹ کلیہ توالی

مساوات 5.41 کا u تفرق لے کر دوبارہ مساوات 5.41 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل بونٹ کلیہ توالی[34] حاصل کریں۔

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{5.43}$$

جواب: مساوات 5.41 کا ایک درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$ لیتے ہوئے دوبارہ مساوات 5.41 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\frac{-\frac{1}{2}(-2x+2u)}{(1-2xu+u^2)\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum nP_n u^{n-1} \\
\implies &\frac{x-u}{1-2xu+u^2}\sum P_n u^n = \sum nP_n u^{n-1} \\
\implies &x\sum P_n u^n - \sum P_n u^{n+1} = \sum nP_n u^{n-1} - 2x\sum nP_n u^n + \sum nP_n u^{n+1}
\end{aligned}$$

اب دونوں جانب u^n کے عددی سر برابر لیتے ہیں۔

$$xP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1}$$

اس کو ترتیب دے کر درکار نتیجہ $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

---
[34] Bonnet's recursion

سوال 5.30: **شریک لیژانڈر تفاعل**
درج ذیل مساوات

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{5.44}$$

میں $y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+[n(n+1)-m(m+1)]u=0 \tag{5.45}$$

صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ درج بالا مساوات کا حل

$$u=\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$$

ہے جس کے شریک $y(x)$ کو $P_n^m(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو **شریک لیژانڈر تفاعل**[35] کہتے ہیں۔

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} \tag{5.46}$$

شریک لیژانڈر تفاعل **کوانٹم میکانیات**[36] میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

جواب: مساوات 5.44 میں $y=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u$ پر کرنے سے مساوات 5.45 حاصل ہوتا ہے۔بقایا حصے کو اب حل کرتے ہیں۔ لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق صفحہ 115 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں $D^{m-1}[y']=D^m[y]$ ، $D^m[y'']=D^{m+2}[y]$ ، ...ہو گا۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ کو

$$D^m[(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y]=-D^m[(x^2-1)y'']-2D^m[xy']+n(n+1)D^m[y]$$

لکھتے ہیں جس میں

$$\begin{aligned}
D^m[(x^2-1)y'']&=(x^2-1)D^m[y'']+2mxD^{m-1}[y'']+m(m-1)D^{m-2}[y'']\\
&=(x^2-1)D^{m+2}[y]+2mxD^{m+1}[y]+m(m-1)D^m[y]\\
D^m[xy']&=xD^m[y']+mD^{m-1}[y']=xD^{m+1}[y]+mD^m[y]\\
D^m[y]&=D^m[y]
\end{aligned}$$

---

[35] associated Legendre's functions
[36] quantum mechanics

پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)D^{m+2}[y]-2(m+1)xD^{m+1}[y]+[n(n+1)-m(m+1)]D^m[y]$$

ملتا ہے جس میں $D^m[y]=y^m=u$ ، $D^{m+1}=y^{m+1}=u'$ اور $D^{m+2}=y^{m+2}=u''$ لیتے ہوئے

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+[n(n+1)-m(m+1)]u=0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ابتدائی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر تھا۔ اس مساوات کا حل $u=y^m$ ہے جہاں y ازخود لیژانڈر مساوات کا حل ہے یعنی $u=\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ ہے۔

سوال 5.31: گزشتہ سوال میں شریک لیژانڈر تفاعل کا حل P_n^m حاصل کیا گیا۔مساوات 5.31 کی مدد سے اس کو لکھیں۔

جواب: $P_n^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n]$

5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ترکیب فروبنیوس

کئی نہایت اہم دو درجی سادہ تفرقی مساوات، مثلاً بیسل تفاعل (جس پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا)، کے عددی سر تحلیلی [حصہ 5.1 میں تعریف دی گئی ہے] نہیں ہیں۔اس کے باوجود انہیں تسلسل (طاقتی تسلسل ضرب لوگارتھم یا طاقتی تسلسل ضرب x کی کسری طاقت، . . .) سے حل کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو ترکیب فروبنیوس[37] کہتے ہیں[38]۔ درج ذیل مسئلہ طاقتی ترکیب کو وسعت دیتے ہوئے ترکیب فروبنیوس کا استعمال ممکن بناتا ہے۔

مسئلہ 5.2: ترکیب فروبنیوس
$x=0$ پر تحلیلی $b(x)$ اور $c(x)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں سادہ تفرقی مساوات

$$y''+\frac{b(x)}{x}y'+\frac{c(x)}{x^2}y=0 \tag{5.47}$$

[37] Frobenius method

[38] جرمن ریاضی دان فرڈیناند گیوگ فروبنیوس [1849-1917]

کا کم از کم ایک عدد حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5.48}$$

جہاں r حقیقی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے اور اس کی قیمت یوں چنی جاتی ہے کہ $a_0 \neq 0$ ہو۔

مساوات 5.47 کا (خطی طور غیر تابع) دوسرا حل بھی پایا جاتا ہے جو مساوات 5.48 کی طرز کا ہو سکتا ہے (جس میں r مختلف ہو گا اور تسلسل کے عددی سر بھی مختلف ہوں گے) اور یا اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔

اس مسئلے میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں x_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ مسئلے میں $a \neq 0$ شرط بیان نہیں کرتا بلکہ اس کا مطلب ہے کہ بذریعہ تجزی قوسین سے x کی بلند تر طاقت باہر نکالی جاتی ہے۔

بیسل تفاعل کو مساوات 5.47 کی طرز پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2}y = 0 \qquad (v \text{ مقدار معلوم ہے})$$

جس میں $b(x) = 1$ اور $c(x) = x^2 - v^2$ دونوں $x = 0$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا اس پر درج بالا مسئلہ لاگو ہو گا۔ سادہ طاقتی تسلسل سے بیسل تفاعل کا حل ممکن نہیں ہے۔

مساوات 5.48 میں طاقتی تسلسل کو x کی ایسی طاقت سے ضرب دیا گیا ہے جو منفی بھی ہو سکتا ہے۔ یاد رہے کہ غیر منفی طاقت کے x پر مبنی تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔

مسئلہ فروبنیوس کے ثبوت([جو کتاب کے آخر میں حوالہ [2] میں دیا گیا ہے) کے لئے اعلیٰ درجہ مخلوط تجزیہ[39] درکار ہے لہٰذا اسے پیش نہیں کیا جائے گا۔

اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے p اور q تحلیلی ہوں تب x_0 **غیر نادر نقطہ**[40] کہلائے گا۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

[39] advanced complex analysis
[40] regular point

اسی طرح اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے h ، p اور q تحلیلی ہوں اور $h \neq 0$ ہو (تا کہ ہم تفرقی مساوات کو h سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کر سکھیں) تب x_0 **غیر نادر نقطہ**[41] کہلائے گا ورنہ اسے **نادر نقطہ**[42] کہیں گے۔

$$\tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = 0$$

اشاری مساوات حل ظاہر کرتی ہے

آئیں مساوات 5.47 کو ترکیب فروبنیوس سے حل کریں۔ مساوات 5.47 کو x^2 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0 \tag{5.49}$$

چونکہ $b(x)$ اور $c(x)$ تحلیلی ہیں لہٰذا انہیں طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \quad c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

اور اگر b یا (اور) c کثیر رکنی ہوں تب b یا (اور) c کو جوں کا توں رہنے دیا جاتا ہے۔ مساوات 5.48 کا جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

(5.50)
$$\begin{aligned}
y' &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r-1} = x^{r-1}[ra_0 + (r+1)a_1x + \cdots]\\
y'' &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-2} = x^{r-2}[r(r-1)a_0 + (r+1)ra_1x + \cdots]
\end{aligned}$$

ان تمام کو مساوات 5.49 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^r[r(r-1)a_0 + \cdots] + (b_0 + b_1x + \cdots)x^r(ra_0 + \cdots)\\
+ (c_0 + c_1x + \cdots)x^r(a_0 + a_1x + \cdots) = 0
\end{aligned} \tag{5.51}$$

---

[41] regular point
[42] singular point

اب ہم x^r ، x^{r+1} ، x^{r+2} ، . . . کے عددی مجموعوں کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔سب سے کم طاقت x^r ہے جس کا عددی سر درج ذیل ہے۔

$$[r(r-1)+b_0r+c_0]a_0=0$$

چونکہ مسئلہ فروبنیوس کے تحت $a_0 \neq 0$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$r(r-1)+b_0r+c_0=0 \qquad \text{(اشاری مساوات)} \tag{5.52}$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کو سادہ تفرقی مساوات 5.47 کی **اشاری مساوات**[43] کہتے ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے تفرقی مساوات کے حل کی اساس حاصل ہوتی ہے جن میں ایک حل مساوات 5.48 کی طرز کا ہو گا جس میں r کی قیمت درج بالا اشاری مساوات کا جذر ہو گا۔دوسرے حل کی تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں جنہیں اشاری مساوات سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

- پہلی صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر نہیں ہے۔

- دوسری صورت:اشاری مساوات کے دو یکساں جذر پائے جاتے ہیں۔

- تیسری صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر ہے۔

پہلی صورت میں جوڑی دار مخلوط جذر $r_1=a+ib$ اور $r_2=\bar{r_1}=a-ib$ شامل ہیں چونکہ ان کا فرق $r_1-r_2=i2b$ خیالی عدد ہے جو حقیقی عدد صحیح نہیں ہے۔اساس کی صورت مسئلہ 5.3 (جسے ضمیمے میں ثابت کیا گیا ہے) دیتی ہے جہاں ارتکاز کا عمومی ثبوت نہیں دیا گیا ہے۔ہاں انفرادی تسلسل کی مرکوزیت عام طریقے سے ثابت کی جا سکتی ہے۔ دوسری صورت میں لوگارتھمی جزو کا ہونا لازم ہے جبکہ تیسری صورت میں ہو سکتا ہے کہ لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہو یا نہ پایا جاتا ہو۔

مسئلہ 5.3: ترکیب فروبنیوس۔ حل کی اساس۔ تین صورتیں۔ فرض کریں کہ سادہ تفرقی مساوات 5.47 مسئلہ 5.2 پر پورا اترتا ہے اور اشاری مساوات 5.52 کی جذر r_1 اور r_2 ہیں تب تین صورتیں پائی جاتی ہیں۔

[43] indicial equation

پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، ...) کے برابر نہیں ہے۔ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{5.53}$$

اور

$$y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \tag{5.54}$$

ہو گی جہاں عددی سر مساوات 5.51 میں $r = r_1$ اور $r = r_2$ پر کرتے ہوئے سے حاصل کیے جائیں گے۔

دوسری صورت: یکساں جذر $r_1 = r_2 = r$ کی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.55}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r}(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \qquad (x > 0) \tag{5.56}$$

ہو گی۔

تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، ...) کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{5.57}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = Ky_1(x)\ln x = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.58}$$

ہے جہاں جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو اور K کی قیمت صفر بھی ہو سکتی ہے۔

5.3.1 عملی استعمال

اشاری مساوات 5.52 کے جذر دریافت کرنے کے بعد ترکیب فروبنیوس بالکل طاقتی ترکیب کی طرح ہے۔ مساوات 5.53 تا مساوات 5.58 محض حل کی صورت دیتے ہیں جبکہ دوسرا حل عموماً **تخفیف درجہ** (حصہ 2.1) کی ترکیب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 5.12: یولر کوشی مساوات۔ پہلی، دوسری اور تیسری صورتیں۔ بلا لوگارتھمی جزو
مساوات یولر کوشی (حصہ 2.5)

$$x^2y'' + b_0xy' + c_0y = 0 \qquad (\text{اور } b_0 \text{ } c_0 \text{ مستقل ہیں})$$

میں $y = x^r$ پر کرنے سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$r(r-1) + b_0r + c_0 = 0$$

جو اشاری مساوات ہے [اور $y = x^r$ مساوات 5.48 کی ایک صورت ہے]۔ دو منفرد جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^{r_1}$ ، $y_2 = x^{r_2}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ دوہرا جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^r$ ، $y_2 = x^r \ln x$ حاصل ہوتی ہے۔ مساوات یولر کوشی کی صورت میں تیسری صورت نہیں پائی جاتی۔

مثال 5.13: دوسری صورت۔ (دوہرا جذر)
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0 \tag{5.59}$$

(یہ بیش ہندسی[44] مساوات کی ایک مخصوص صورت ہے۔)

[44] hypergeometric equation

حل دیے گئے مساوات کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 کے شرائط پر پورا اترتی ہے۔یوں مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.50 کو مساوات 5.59 میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1}+3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0 \tag{5.60}$$

x کی کمتر طاقت x^{r-1} ، جو دوسرے اور چوتھے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$[-r(r-1)-r]a_0=0 \quad \implies \quad r^2=0$$

اشاری مساوات کا دوہرا جذر $r=0$ حاصل ہوتا ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.60 میں $r=0$ پر کرتے ہوئے x^s کی عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$s(s-1)a_s-(s+1)sa_{s+1}+3sa_s-(s+1)a_{s+1}+a_s=0$$

$a_{s+1}=a_s$ ملتا ہے۔یوں $a_0=a_1=a_2=\cdots$ ہو گا لہٰذا $a_0=1$ چنتے ہوئے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

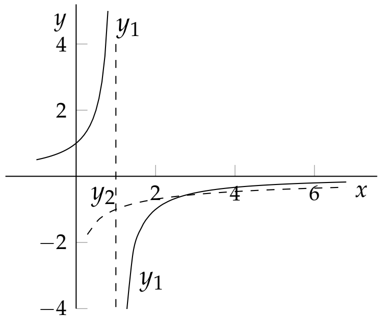
$$y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1)$$

دوسرا حل: دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ (حصہ 2.1) حاصل کرتے ہیں۔یوں $y_2=uy_1$ اور اس کے تفرقات کو مساوات میں پر کرتے ہوئے (صفحہ 94 پر) مساوات 2.15 ملتا ہے جس کو یہاں استعمال کرتے ہیں۔یہاں $p=\frac{3x-1}{x(x-1)}$ ہے لہٰذا

$$\int p\,\mathrm{d}x=\int\frac{3x-1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=2\ln(x-1)+\ln x$$

ہو گا اور یوں مساوات 2.15 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u'=v=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,\mathrm{d}x}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2x}=\frac{1}{x}, \quad u=\ln x, \quad y_2=uy_1=\frac{\ln x}{1-x}$$



شکل 5.6: مثال 5.13 کے حل۔

y_1 اور y_2 جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے وقفہ $0 < x < 1$ اور $1 < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا اس وقفے پر یہ حل کی اساس ہیں۔

مثال 5.14: لوگارتھمی جزو والا دوسرا حل
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0 \tag{5.61}$$

حل: مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.50 کو مساوات 5.61 میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} - x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r} = 0$$

x^2 اور x کو مجموعوں کے اندر لے جاتے ہوئے اور x کی یکساں طاقتوں کا اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2 a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} = 0 \tag{5.62}$$

x کی کم تر طاقت x^{r-1} ، جو $m=0$ پر کرنے سے دوسرے مجموعے سے ملتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرنے سے

$$r(r-1)=1$$

یعنی $r_1=1$ اور $r_2=0$ ملتے ہیں (جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1-r_2>0$ ہو۔) جن میں فرق عدد صحیح کے برابر ہے لہٰذا یہ تیسری صورت ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.62 کو یکساں طاقت کی صورت میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $m=s$ اور دوسرے مجموعے میں $s=m-1$ یعنی $m=s+1$ پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+r-1)^2 a_s x^{s+r}-\sum_{s=-1}^{\infty}(s+r+1)(s+r)a_{s+1}x^{s+r}=0 \tag{5.63}$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1}=\frac{(s+r-1)^2}{(s+r+1)(s+r)}a_s$$

ملتا ہے جس میں $r=1$ پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1}=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s=0,1,\cdots) \tag{5.64}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $a_1=0$ ، $a_2=0$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔یوں $a_0=1$ چنتے ہوئے پہلا حل $y_1=a_0x^{r_1}=x$ ملتا ہے۔

دوسرا حل: ترکیب تخفیف درجہ (حصہ 2.1) استعمال کرتے ہوئے $y_2=uy_1=xu$ لیتے ہیں۔یوں $y_2'=u+u'x$ اور $y_2''=xu''+2u'$ ہوں گے۔انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2-x)(xu''+2u')-x(xu'+u)+xu=0$$

اس میں xu کٹ جاتا ہے۔بقایا مساوات کو x سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(x^2-x)u''+(x-2)u'=0$$

اس کو جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنا گیا ہے۔)

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{x-2}{x^2-x}=-\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}, \quad \ln u'=\ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right|$$

اس کو قوت نمائی طور پر لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنتے ہیں۔)

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad u = \ln x + \frac{1}{x}, \quad y_2 = uy_1 = x\ln x + 1$$

y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں اور y_2 میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے۔یوں مثبت x پر یہ حل کی اساس ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے بیش ہندسی مساوات حل ہوتا ہے جس کے حل میں کئی اہم تفاعل شامل ہیں۔

سوالات

سوال 5.32 تا سوال 5.32 ترکیب فروبنیوس پر مبنی ہیں۔
سوال 5.32:

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.