

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

|     |       |  |
|-----|-------|--|
| 1   | 1     | درجہ اول سادہ تفرقی مساوات   |
| 2   | 1.1   | نمونہ کشی  |
| 14  | 1.2   | $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔    |
| 23  | 1.3   | قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات                                       |
| 39  | 1.4   | قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل                                  |
| 51  | 1.5   | خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی                                 |
| 68  | 1.6   | عمودی خطوط کی نسلیں  |
| 72  | 1.7   | ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت                  |
| 79  | 2     | درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات   |
| 79  | 2.1   | متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات                                      |
| 95  | 2.2   | مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات                       |
| 110 | 2.3   | تفرقی عامل   |
| 114 | 2.4   | اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش                                 |
| 130 | 2.5   | پولر کوئی مساوات   |
| 138 | 2.6   | حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی                                      |
| 147 | 2.7   | غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات   |
| 159 | 2.8   | جبری ارتعاش۔ گمک   |
| 165 | 2.8.1 | برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک                                       |
| 169 | 2.9   | برقی ادوار کی نمونہ کشی  |
| 180 | 2.10  | مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل |

|     |       |  |
|-----|-------|--|
| 187 | 3     | بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات                                      |
| 187 | 3.1   | متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات   |
| 198 | 3.2   | مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات                       |
| 207 | 3.3   | غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات                                     |
| 210 | 3.4   | مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل |
| 219 | 4     | نظام تفرقی مساوات  |
| 220 | 4.1   | قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق                                       |
| 229 | 4.2   | سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے               |
| 243 | 4.3   | نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی                               |
| 244 | 4.3.1 | خطی نظام   |
| 248 | 4.4   | مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب                           |
| 265 | 4.5   | نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام                      |
| 273 | 4.6   | کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام                                       |
| 282 | 4.6.1 | سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ                              |
| 290 | 4.7   | سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام                             |
| 291 | 4.7.1 | نامعلوم عددی سر کی ترکیب   |
| 299 | 5     | طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل                  |
| 300 | 5.1   | ترکیب طافقی تسلسل  |
| 315 | 5.2   | لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی                                      |
| 332 | 5.3   | مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس                                     |
| 337 | 5.3.1 | عملی استعمال   |
| 351 | 5.4   | مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل  |
| 366 | 5.5   | بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل                                    |
| 372 | 5.6   | قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ   |
| 378 | 5.7   | مسئلہ شیورم لیوویل   |
| 385 | 5.8   | قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل                               |
| 395 | 6     | لاپلاس متبادلہ   |
| 396 | 6.1   | لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت                                     |
| 405 | 6.2   | تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات                    |
| 417 | 6.3   | $s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل            |
| 437 | 6.4   | ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ               |
| 454 | 6.5   | الچھاؤ   |
| 463 | 6.6   | لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات     |
| 471 | 6.7   | تفرقی مساوات کے نظام   |

|               |       |  |
|---------------|-------|--|
| 479 . . . . . | 6.8   | لاپلاس بدل کے عمومی کیلے   |
| 483 . . . . . | 7     | خطی الجبرا: سمتیات   |
| 483 . . . . . | 7.1   | غیر سمتیات اور سمتیات  |
| 485 . . . . . | 7.2   | سمتیہ کے اجزاء   |
| 491 . . . . . | 7.3   | سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب                           |
| 499 . . . . . | 7.4   | سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت                              |
| 505 . . . . . | 7.5   | اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)   |
| 518 . . . . . | 7.6   | اندرونی ضرب فضا  |
| 520 . . . . . | 7.7   | سمتی ضرب   |
| 522 . . . . . | 7.8   | اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب                                       |
| 533 . . . . . | 7.9   | غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب                               |
| 541 . . . . . | 8     | خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام                          |
| 542 . . . . . | 8.1   | قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب                         |
| 552 . . . . . | 8.2   | قابلی ضرب  |
| 558 . . . . . | 8.2.1 | تبدیلی محل   |
| 570 . . . . . | 8.3   | خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط                                  |
| 582 . . . . . | 8.3.1 | صف زینہ دار صورت   |
| 590 . . . . . | 8.4   | خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا                              |
| 604 . . . . . | 8.5   | خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا                                     |
| 610 . . . . . | 8.6   | دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب                                   |
| 613 . . . . . | 8.7   | مقطع۔ قاعدہ کریبر  |
| 629 . . . . . | 8.8   | معکوس قالب۔ گاوس جارجون اسقاط                                    |
| 644 . . . . . | 8.9   | سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ                                |
| 661 . . . . . | 9     | خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب                               |
| 662 . . . . . | 9.1   | امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول |
| 672 . . . . . | 9.2   | امتیازی مسائل کے چند استعمال                                     |
| 680 . . . . . | 9.3   | تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب                       |
| 687 . . . . . | 9.4   | امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت                           |
| 700 . . . . . | 9.5   | مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں                                      |
| 711 . . . . . | 10    | سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل                               |
| 711 . . . . . | 10.1  | غیر سمتی میدان اور سمتی میدان                                    |
| 713 . . . . . | 10.2  | سمتی علم الاحصاء   |
| 720 . . . . . | 10.3  | منحنی  |
| 726 . . . . . | 10.4  | لمبائی قوس   |
| 733 . . . . . | 10.5  | مماس، انحناء اور مروڑ  |
| 738 . . . . . | 10.6  | سمتی رفتار اور اسراع   |

|               |       |  |
|---------------|-------|--|
| 745 . . . . . | 10.7  | زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ |
| 751 . . . . . | 10.8  | سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان                        |
| 764 . . . . . | 10.9  | تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات                   |
| 769 . . . . . | 10.10 | سمتی میدان کی پھیلاؤ                                       |
| 777 . . . . . | 10.11 | سمتی تفاعل کی گردش   |
| 781 . . . . . | 11    | سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے                     |
| 782 . . . . . | 11.1  | خطی تکمیل  |
| 787 . . . . . | 11.2  | خطی تکمیل کا حل  |
| 796 . . . . . | 11.3  | دوہرہ تکمیل  |
| 810 . . . . . | 11.4  | دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ                        |
| 820 . . . . . | 11.5  | سطحیں  |
| 825 . . . . . | 11.6  | مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ                           |
| 837 . . . . . | 11.7  | سطحی تکمیل   |
| 845 . . . . . | 11.8  | تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ                           |
| 850 . . . . . | 11.9  | مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال                          |
| 861 . . . . . | 11.10 | مسئلہ سٹوکس  |
| 866 . . . . . | 11.11 | مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال                      |
| 869 . . . . . | 11.12 | راہ سے آزاد خطی تکمیل                                      |
| 883 . . . . . | 12    | فوریئر تسلسل   |
| 884 . . . . . | 12.1  | دوری تفاعل، تکوینی تسلسل                                   |
| 889 . . . . . | 12.2  | فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات                                   |
| 902 . . . . . | 12.3  | اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل                               |
| 907 . . . . . | 12.4  | جفت اور طاق تفاعل  |
| 916 . . . . . | 12.5  | نصف حلقہ الساع   |
| 923 . . . . . | 12.6  | فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول                           |
| 931 . . . . . | 12.7  | جبری ارتعاش  |
| 936 . . . . . | 12.8  | تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل                    |
| 940 . . . . . | 12.9  | فوریئر تکمیل   |
| 953 . . . . . | 13    | جزوی تفرقی مساوات  |
| 953 . . . . . | 13.1  | بنیادی تصورات  |
| 958 . . . . . | 13.2  | نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج             |
| 960 . . . . . | 13.3  | علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)                                |
| 973 . . . . . | 13.4  | مساوات موج کا دالو بیچ حل                                  |
| 979 . . . . . | 13.5  | یک بعدی بہاؤ حرارت   |
| 987 . . . . . | 13.6  | لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت                     |

|                |   |
|----------------|---|
| 993 . . . . .  | 13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج |
| 996 . . . . .  | 13.8 مستطیل جھلی                                      |
| 1006 . . . . . | 13.9 قطبی محدود میں لاپلاس                            |
| 1010 . . . . . | 13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل                         |
| 1018 . . . . . | 13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ                   |
| 1024 . . . . . | 13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر   |
| 1030 . . . . . | 13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات           |
| 1037 . . . . . | 14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل                     |
| 1038 . . . . . | 14.1 مخلوط اعداد                                      |
| 1047 . . . . . | 14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات      |
| 1054 . . . . . | 14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے                    |
| 1059 . . . . . | 14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل               |
| 1067 . . . . . | 14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات                 |
| 1078 . . . . . | 14.6 ناطق تفاعل۔ جذر                                  |
| 1084 . . . . . | 14.7 قوت نمائی تفاعل                                  |
| 1089 . . . . . | 14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل                          |
| 1095 . . . . . | 14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت                            |
| 1103 . . . . . | 15 محافظ زاویہ نقشہ کشی                               |
| 1104 . . . . . | 15.1 نقشہ کشی   |
| 1116 . . . . . | 15.2 محافظ زاویہ نقشہ                                 |
| 1125 . . . . . | 15.3 خطی کسری تبادلہ                                  |
| 1129 . . . . . | 15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ                            |
| 1138 . . . . . | 15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل                              |
| 1149 . . . . . | 15.6 ریمان سطحیں                                      |
| 1157 . . . . . | 16 مخلوط کمالات                                       |
| 1157 . . . . . | 16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل                         |
| 1168 . . . . . | 16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص                           |
| 1172 . . . . . | 16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل                               |
| 1184 . . . . . | 16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل    |
| 1189 . . . . . | 16.5 کوشی کا کلیہ مکمل                                |
| 1194 . . . . . | 16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق                              |
| 1201 . . . . . | 17 ترتیب اور تسلسل                                    |
| 1201 . . . . . | 17.1 ترتیب  |
| 1208 . . . . . | 17.2 تسلسل  |
| 1213 . . . . . | 17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل           |

|                |  |      |
|----------------|--|------|
| 1220 . . . . . | یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل | 17.4 |
| 1225 . . . . . | تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں              | 17.5 |
| 1236 . . . . . | تسلسل پر اعمال                                     | 17.6 |
| 1243 . . . . . | 18 حلقہ تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل          |      |
| 1243 . . . . . | 18.1 حلقہ تسلسل                                    |      |
| 1256 . . . . . | 18.2 حلقہ تسلسل کی روپ میں تفاعل                   |      |
| 1263 . . . . . | 18.3 ٹیلر تسلسل                                    |      |
| 1268 . . . . . | 18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل                    |      |
| 1274 . . . . . | 18.5 حلقہ تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب           |      |
| 1281 . . . . . | 18.6 یکساں استرار                                  |      |
| 1294 . . . . . | 18.7 لوگوں تسلسل                                   |      |
| 1303 . . . . . | 18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت         |      |
| 1317 . . . . . | 19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ                          |      |
| 1317 . . . . . | 19.1 بقیہ  |      |
| 1324 . . . . . | 19.2 مسئلہ بقیہ                                    |      |
| 1329 . . . . . | 19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ                  |      |
| 1337 . . . . . | 19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام                      |      |
| 1345 . . . . . | 20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی تودہ           |      |
| 1346 . . . . . | 20.1 ساکن برقی سکون                                |      |
| 1352 . . . . . | 20.2 دوبعدی بہا و سیال                             |      |
| 1361 . . . . . | 20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص                   |      |
| 1366 . . . . . | 20.4 پوسوں کلیہ مکمل                               |      |
| 1373 . . . . . | 21 اعدادی تجزیہ                                    |      |
| 1374 . . . . . | 21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر                       |      |
| 1376 . . . . . | 21.2 دہرانے سے مساوات کا حل                        |      |
| 1388 . . . . . | 21.3 متناہی فرق                                    |      |
| 1394 . . . . . | 21.4 باہمی تحریف                                   |      |
| 1403 . . . . . | 21.5 لچکدار منحنیات                                |      |
| 1410 . . . . . | 21.6 اعدادی مکمل اور تفرق                          |      |
| 1422 . . . . . | 21.7 متقارب اتساع                                  |      |
| 1435 . . . . . | 22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب                     |      |
| 1435 . . . . . | 22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقاط، معکوس قالب  |      |
| 1445 . . . . . | 22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ           |      |



|                |   |
|----------------|---|
| 1453 . . . . . | 22.3 خطی مساوات کا نظام: بدخونی         |
| 1457 . . . . . | 22.4 ترکیب کمتر مربع                    |
| 1463 . . . . . | 22.5 قالب کے امتیازی اقدار کی شمول      |
| 1472 . . . . . | 22.6 امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ |

|                |   |
|----------------|---|
| 1477           | 23 اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات                         |
| 1477 . . . . . | 23.1 یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب                  |
| 1488 . . . . . | 23.2 دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب                  |
| 1495 . . . . . | 23.3 اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات            |
| 1498 . . . . . | 23.3.1 مسئلہ ڈرشلے  |
| 1501 . . . . . | 23.3.2 بدلتی رخ خفی ترکیب                                   |
| 1508 . . . . . | 23.4 مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ - غیر منظم سرحد |
| 1515 . . . . . | 23.5 اعدادی تراکیب برائے قطع مکانی مساوات                   |
| 1524 . . . . . | 23.6 اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات                    |

|                |  |
|----------------|--|
| 1529           | 24 امکانات اور شماریات                     |
| 1529 . . . . . | 24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد |
| 1531 . . . . . | 24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترتیب  |
| 1540 . . . . . | 24.3 نمونی اوسط اور نمونی مقدار تغیر       |

|                |                           |
|----------------|---------------------------|
| 1541           | ا اضافی ثبوت              |
| 1545           | ب مفید معلومات            |
| 1545 . . . . . | ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات |

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 24

### امکانیات اور شماریات

بڑے پیمانے پر مصنوعات کی پیداوار اور تجرباتی مواد کے تجزیہ کے لئے حسابی شماریات بہت اہم ہے۔ اس باب کی شروع میں مواد کا جدول اور ترسیم سے اظہار پر غور کیا جائے گا۔ چونکہ شماریات کی بنیاد حسابی امکانیات ہے لہذا اس کے بعد حسابی امکانیات کے بنیادی تصورات اور اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ باب کا باقی حصہ شماریات کے اہم ترین تراکیب پر مشتمل ہے۔

#### 24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد

انجینئری شماریات میں ہمیں ایسے تجربات کی بناوٹ اور تشخیص سے غرض ہو گا جو عملی مسائل کے بارے میں معلومات فراہم کر سکے، مثلاً، خام مال یا تیار کردہ مصنوعات کے معیار کی جانچ پڑتال، مشین اور آلات یا مصنوعات کی تیاری میں استعمال تراکیب کا آپس میں موازنہ، مزدور کی پیداوار، صارفین کا نئی مصنوعات کے لئے رد عمل، مختلف حالات میں کیمیائی عمل سے حاصل پیداوار، خام لوہا کی کثافت اور اس میں لوہے کی مقدار کا تعلق، مختلف درجہ حرارت پر ایئر کنڈیشنر نظام کی کارکردگی، فولاد میں کاربن کی مقدار اور فولاد کی راک ویل<sup>1</sup> سختی کا تعلق، وغیرہ وغیرہ۔

مثال کے طور پر، بڑے پیمانے پر (پتچ، بلب، موبائل فون وغیرہ کی) پیداوار کے عمل میں عموماً بے عیب<sup>2</sup> اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا اترے ہیں، اور عیب دار<sup>3</sup> اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا نہیں اترتے ہیں،

Rockwell<sup>1</sup>  
nondefective<sup>2</sup>  
defective<sup>3</sup>

پائے جائیں گے۔ درکار خواص میں دھرا کا قطر، بلب کی کم سے کم عرصہ زندگی<sup>4</sup>، برقیاتی مصنوعات میں استعمال برقی مزاحمت کی قیمت کے حدود، کتاب میں استعمال کاغذ کی موٹائی، خود کار بھری گئی بوتل میں مشروب کی کم سے کم مقدار، برقی سوئچ کا زیادہ سے زیادہ دورانیہ رد عمل، اور کپڑے کی کم سے کم مضبوطی شامل ہیں۔

مصنوعات کی معیار میں فرق متعدد وجوہات (مثلاً خام مال، خود کار مشین کی کارکردگی، کاریگر کی کاریگری) کی بنا ممکن ہے جن کو قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہے لہذا انہیں بے ترتیب تبدیلیاں<sup>5</sup> تصور کیا جات ہے۔ پیداوار کے تراکیب کی کارکردگی اور متذکرہ بالا دیگر مثالوں میں بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔

ہر ایک پیدا کردہ رکن کو پرکھنے کے لئے عموماً بہت وقت درکار ہو گا اور ایسا کرنا خاصہ مہنگا ہو گا۔ اگر پرکھنے کے دوران رکن ضائع ہوتا ہو تب ہر رکن کو پرکھنا ممکن نہیں ہو گا۔ اسی لئے تمام ارکان کو پرکھنے کی بجائے چند ارکان کو بطور نمونہ<sup>6</sup> پرکھا جاتا ہے اور اس نمونہ کے نتائج سے تمام ارکان کل تعداد<sup>7</sup> کے بارے میں رائے بنائی جاتی ہے۔ اگر 10000 پتھروں کی ڈھیر سے 100 پتھروں کے نمونہ کو پرکھا جائے اور اس میں 5 پتچ عیب دار نکلیں تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس ڈھیر میں 5% پتچ عیب دار ہوں گے، پس اتنا ضروری ہے کہ نمونہ کو بے قاعدگی<sup>8</sup> سے چننا جائے یعنی ڈھیر میں موجود ہر پتچ کا بطور نمونہ منتخب ہونے کا امکان<sup>9</sup> ایک جیسا ہو۔ ظاہر ہے کہ ایسی رائے مکمل طور پر درست نہیں ہو سکتی ہے اور یہ کہنا کہ ٹھیک 5% پتچ عیب دار ہوں گے عموماً درست نہیں ہو گا لیکن عام طور عملی زندگی میں اتنی درست رائے (یا نتیجہ) کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ جتنے زیادہ ارکان کو پرکھا جائے ہمیں نتائج پر اتنا زیادہ اعتماد ہوتا ہے۔ حسابی امکانات کا نظریہ ان خیالات کو ٹھوس شکل دیتا ہے اور نتائج پر کتنا اعتبار کیا جائے، اس کی ناپ بھی پیش کرتا ہے۔ یوں شماریات کی بنیاد نظریہ امکانات ہے۔

اسی طرح خام لوہا میں لوہے کی فی صد مقدار  $\mu$  جاننے کی خاطر ہم بے قاعدگی سے  $n$  تعداد کے نمونے لیتے ہوئے ان میں لوہے کی فی صد مقدار تجرباتی طور دریافت کریں گے۔ ان  $n$  نمونوں کے تجرباتی نتائج  $x_1, \dots, x_n$  کی اوسط  $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  لوہے کی فی صد مقدار  $\mu$  کی تخمین ہو گی۔

مختلف نوعیت کے مسائل کے لئے مختلف تراکیب اور تکنیک درکار ہوں گے البتہ مسئلے کی تشکیل سے حل تک کے قدم عموماً ایک جیسے ہوتے ہیں۔ انہیں یہاں پیش کرتے ہیں۔

lifetime<sup>4</sup>  
random variation<sup>5</sup>  
sample<sup>6</sup>  
totality<sup>7</sup>  
at random<sup>8</sup>  
chance<sup>9</sup>

- مسئلے کی تشکیل۔ مسئلے کو ٹھیک ٹھیک بیان کرنا اور تفتیشی عمل کے حدود تعین کرنا ضروری ہے تاکہ شماریاتی تفتیش کی لاگت، تفتیش کار کی مہارت اور دستیاب سہولیات کو مد نظر رکھتے ہوئے مخصوص وقت میں قابل استعمال نتائج حاصل ہوں۔ اسی قدم میں واضح تصورات سے حسابی نمونہ<sup>10</sup> کی تخلیق<sup>11</sup> بھی شامل ہے۔ (مثال کے طور پر ہم نے تعین کرنا ہو گا کہ عیب دار رکن سے کیا مراد ہے۔)
- تجربہ کی تخلیق۔ آخری مرحلے میں استعمال ہونے والی شماریاتی ترکیب کا انتخاب، نمونہ کی جسامت (جتنے ارکان کا تجربہ یا ان پر تجربہ کیا جائے گا، وغیرہ) اور طبعی ترکیب اور تکنیک جو بروئے کار لائے جائیں گے کا انتخاب اس قدم میں کیا جائے گا۔ کم سے کم وقت اور لاگت کے ساتھ زیادہ سے زیادہ معلومات حاصل کرنا مقصد ہے۔
- تجربہ یا مواد جمع کرنے کا عمل۔ اس قدم میں قواعد پر سختی سے عمل کرنا ضروری ہے۔
- جدول بندی۔ اس قدم میں تجرباتی نتائج کو واضح اور سادہ جدول کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور ساتھ ہی انہیں ترسیم کیا جاسکتا ہے یا انہیں ڈبہ ترسیم<sup>12</sup> کی صورت میں دکھایا جاسکتا ہے۔ اس قدم میں نمونہ کی اوسط اور قیمتوں میں پھیل کے تخمین کا حساب بھی کیا جاتا ہے۔
- شماریاتی رائے زنی۔ اس قدم میں کوئی مخصوص شماریاتی ترکیب کو نمونہ سے حاصل نتائج پر لاگو کرتے ہوئے نا معلوم خواص کے بارے میں رائے قائم کی جاتی ہے تاکہ ہم مطلوبہ جواب حاصل کر سکیں۔

## 24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم

شماریاتی تجربہ کے دوران عموماً مشاہدوں (زیادہ تر صورتوں میں اعداد) کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جنہیں ہم اسی ترتیب سے لکھتے ہیں جس میں انہیں حاصل کیا گیا ہو۔ ایک مثال جدول 24.1 میں دی گئی ہے۔ سینٹ اور بجری (کنکریٹ) سے معیاری ٹھوس بیلن (قطر 15.24 cm اور لمبائی 30.48 cm) بنا کر 28 دن<sup>13</sup> بعد انہیں چیرا گیا۔ یوں ہمیں ایک نمونہ حاصل ہوا جو 100 نمونہ اعداد پر مشتمل ہے۔ یوں نمونہ کی جسامت<sup>14</sup>  $n = 100$  ہے۔

<sup>10</sup> mathematical model

<sup>11</sup> لفظ "نمونہ" اور لفظ "حبابی نمونہ" علیحدہ معنی رکھتے ہیں۔ اسی لئے حبابی نمونہ کو بطور اصطلاح لینے ہوئے پورا لکھا جائے گا یعنی "حبابی نمونہ"۔

<sup>12</sup> bar graph

<sup>13</sup> سینٹ کو مکمل مضبوط ہونے کے لئے اسنے دن درکار ہوتے ہیں۔

<sup>14</sup> size

جدول 24.1: کنکریٹ پلین چرنے کے لئے درکار فی مربع سنٹی میٹر قوت ( $\text{N cm}^{-2}$ )

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 320 | 380 | 340 | 410 | 380 | 340 | 360 | 350 | 320 | 370 |
| 350 | 340 | 350 | 360 | 370 | 350 | 380 | 370 | 300 | 420 |
| 370 | 390 | 390 | 440 | 330 | 390 | 330 | 360 | 400 | 370 |
| 320 | 350 | 360 | 340 | 340 | 350 | 350 | 390 | 380 | 340 |
| 400 | 360 | 350 | 390 | 400 | 350 | 360 | 340 | 370 | 420 |
| 420 | 400 | 350 | 370 | 330 | 320 | 390 | 380 | 400 | 370 |
| 390 | 330 | 360 | 380 | 350 | 330 | 360 | 300 | 360 | 360 |
| 360 | 390 | 350 | 370 | 370 | 350 | 390 | 370 | 370 | 340 |
| 370 | 400 | 360 | 350 | 380 | 380 | 360 | 340 | 330 | 370 |
| 340 | 360 | 390 | 400 | 370 | 410 | 360 | 400 | 340 | 360 |

اس حصے میں ہم نمونہ کو جدول اور ترسیم کی صورت میں ظاہر کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم ان تراکیب کو جدول 24.1 کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

جدول 24.1 میں دی گئی معلومات جاننے کی خاطر ہم مواد کو ترتیب دیتے ہیں۔ ہم (کم سے کم قیمت) 310 ، 320 ، ... ، 440 (زیادہ سے زیادہ قیمت) کو ایک قطار میں لکھتے ہیں۔ اس کے بعد جدول 24.1 کے ہر صف سے گزرتے ہوئے ہر عدد کے لئے اس قطار میں مطابقتی مقام کی صف میں نشان شمار<sup>15</sup> کھینچتے ہیں۔ اس طرح ہمیں جدول 24.2 کی پہلی دو قطاروں کا جدول حاصل ہو گا۔ نشان شمار کی گنتی کو جدول کی تیسری قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ یہ گنتی نمونہ میں کسی عدد  $x$  کی تعداد دیتی ہے جس کو نمونہ میں  $x$  کی حتمی تعدد<sup>16</sup> یا مختصراً تعدد<sup>17</sup> کہتے ہیں۔ اس کو نمونہ میں ارکان کی تعداد  $n$  سے تقسیم کرنے سے ہمیں اضافی تعدد<sup>18</sup> حاصل ہوتی ہے جس کو جدول 24.2 کی چوتھی قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ یہاں  $n = 100$  ہے لہذا  $x = 330$  کی تعدد 6 اور اضافی تعدد 0.06 یا 6% ہے۔

کسی مخصوص  $x$  کے لئے نمونہ میں  $x$  اور  $x$  سے کم قیمتوں کی تمام تعدد کا مجموعہ لیتے ہوئے مجموعی تعدد<sup>19</sup> حاصل ہوتی ہے جس کو پانچویں قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر  $x = 350$  کا مطابقتی مجموعی تعدد 37 ہے جس کے تحت 350 اور اس سے کم قیمتوں کی تعداد 37 ہے۔ اس کو جسامت  $n$  سے تقسیم کرنے

<sup>15</sup> tally mark  
<sup>16</sup> absolute frequency  
<sup>17</sup> frequency  
<sup>18</sup> relative frequency  
<sup>19</sup> cumulative frequency



جدول 24.2: جدول تقسیم برائے جدول 24.1 کا نمونہ

| 1      | 2         | 3  | 4          | 5           | 6                 |
|--------|-----------|----|------------|-------------|-------------------|
| مضبوطی | حتی تعدد  |    | اضافی تعدد | مجموعی تعدد | مجموعی اضافی تعدد |
|        | نشان شمار |    |            |             |                   |
| 300    |           | 2  | 0.02       | 2           | 0.02              |
| 310    |           | 0  | 0.00       | 2           | 0.02              |
| 320    |           | 4  | 0.04       | 6           | 0.06              |
| 330    |           | 6  | 0.06       | 12          | 0.12              |
| 340    |           | 11 | 0.11       | 23          | 0.23              |
| 350    |           | 14 | 0.14       | 37          | 0.37              |
| 360    |           | 16 | 0.16       | 53          | 0.53              |
| 370    |           | 15 | 0.15       | 68          | 0.68              |
| 380    |           | 8  | 0.08       | 76          | 0.76              |
| 390    |           | 10 | 0.10       | 86          | 0.86              |
| 400    |           | 8  | 0.08       | 94          | 0.94              |
| 410    |           | 2  | 0.02       | 96          | 0.96              |
| 420    |           | 3  | 0.03       | 99          | 0.99              |
| 430    |           | 0  | 0.00       | 99          | 0.99              |
| 440    |           | 1  | 0.01       | 100         | 1.00              |

سے چھٹی قطار میں درج مجموعی اضافی تعدد<sup>20</sup> حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر چھٹی قطار سے ہم دیکھتے ہیں کہ نمونہ میں 76% قیمتیں 380 کے برابر یا اس سے کم ہیں۔

اگر نمونہ میں کوئی قیمت نہ پائی جاتی ہو تب اس قیمت کی تعدد 0 ہوگی۔ اگر نمونہ میں تمام قیمتیں ایک جیسی ہوں تب اس قیمت کی تعدد  $n$  اور اضافی تعدد  $\frac{n}{n} = 1$  ہوگی۔ چونکہ یہی تعدد کی دو انتہائی قیمتیں ہیں لہذا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.1: (اضافی تعدد)  
اضافی تعدد کی کم سے کم قیمت 0 اور زیادہ سے زیادہ قیمت 1 ہے۔

فرض کریں کہ جسامت  $n$  کے نمونہ میں درج ذیل  $m$  مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad (m \leq n)$$

جن کے مطابق اضافی تعدد

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m$$

ہیں۔ تب ہم درج ذیل تفاعل<sup>21</sup> متعارف کر سکتے ہیں

$$(24.1) \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \tilde{f}_j & \text{جب } x = x_j \text{ ہو} \\ 0 & \text{کسی بھی قیمت } x \text{ کے لئے جو نمونہ میں نہ پایا جاتا ہو} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

جس کو نمونہ کا تعددی تفاعل<sup>22</sup> کہتے ہیں۔ یہ نمونہ میں قیمتوں کی تقسیم (پھیل) دیتا ہے۔ اسی لئے ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل نمونہ کی تعددی تقسیم<sup>23</sup> دیتا ہے۔

مثال کے طور پر جدول 24.2 میں تعددی تفاعل کی قیمتیں قطار 4 میں دکھائی گئی ہیں جہاں  $\tilde{f}(300) = 0.02$  ،  $\tilde{f}(310) = 0$  ،  $\tilde{f}(320) = 0.04$  ، وغیرہ، ہیں۔

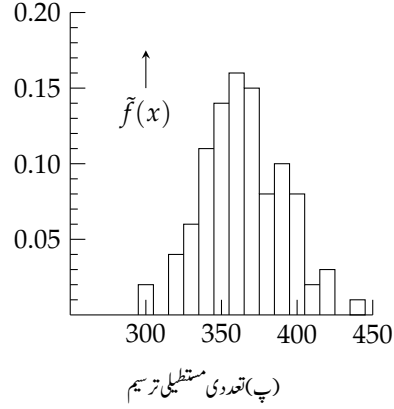
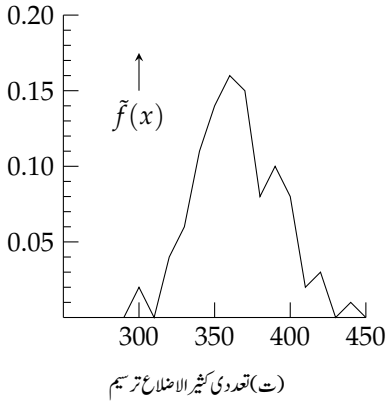
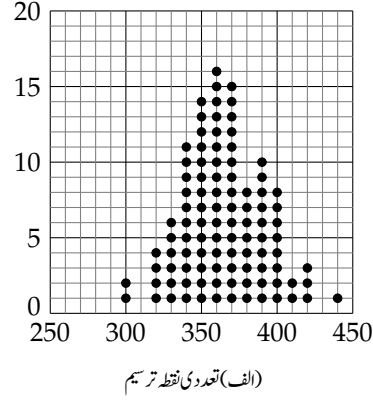
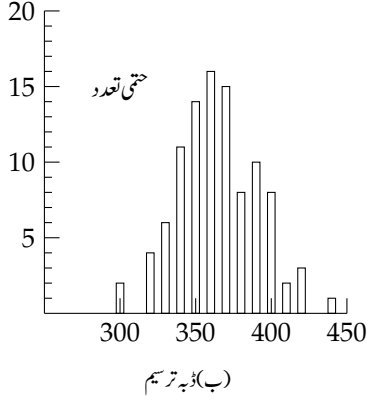
جسامت  $n$  کے نمونہ میں تمام تعدد کا مجموعہ  $n$  کے برابر ہو گا۔ (کیوں؟) اس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

<sup>20</sup>cumulative relative frequency

<sup>21</sup>ہم  $\tilde{f}$  استعمال کرتے ہیں چونکہ  $f$  کو تعددی تفاعل کے لئے استعمال کیا جائے گا جس کا استعمال کثرت سے ہوگا۔

<sup>22</sup>frequency function of the sample

<sup>23</sup>frequency distribution

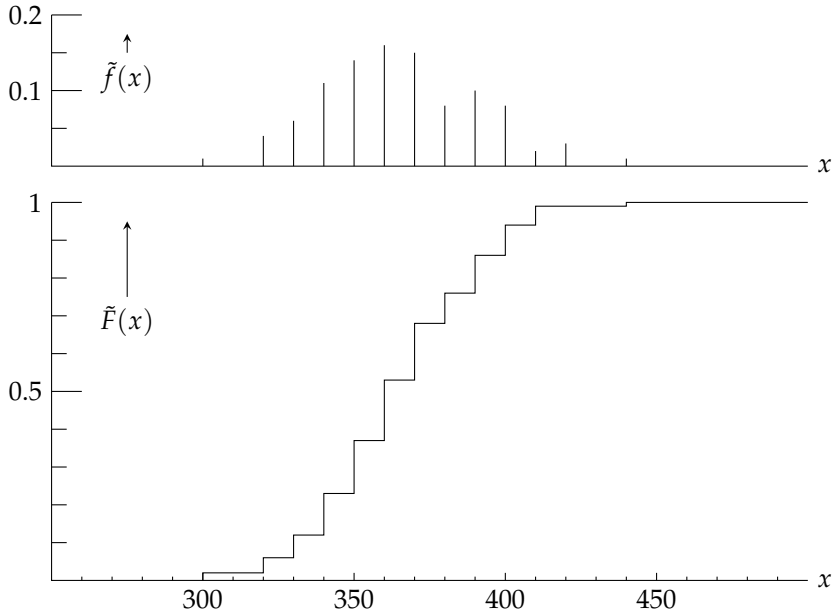


شکل 24.1: ترسیم برائے جدول 24.2

مسئلہ 24.2: اضافی تعدد کا مجموعہ  
کسی بھی نمونہ میں تمام اضافی تعدد کا مجموعہ 1 کے برابر ہو گا، یعنی:

$$\sum_{j=1}^m \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \cdots + \tilde{f}(x_m) = 1$$

نمونہ کا ترسیمی اظہار شکل 24.1-الف تا شکل 24.1-ت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 24.1-پ میں ہر مستطیل کا رقبہ مطابقتی اضافی تعدد کے برابر ہو گا لہذا عمودی محدود پر اضافی تعدد فی اکائی رقبہ ہو گا۔ چونکہ شکل 24.1-پ میں تمام



شکل 24.2: تعددی تفاعل  $\tilde{f}(x)$  اور مجموعی تعددی تفاعل  $\tilde{F}(x)$  برائے جدول 24.2

مستطیل کی چوڑائی ایک جیسی ہے لہذا عمودی محدود پر قیمتیں  $\tilde{f}(x)$  کے راست متناسب ہوں گی۔ البتہ مستطیل کو چوڑائیاں مختلف ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہو گا۔ شکل 24.1-ت میں بھی یہی صورت حال ہو گی۔

ہم اب درج ذیل تفاعل متعارف کرتے ہیں

$$\tilde{F}(x) = \text{کم تمام قیمتوں کے اضافی تعدد کا مجموعہ}$$

جس کو نمونے کا مجموعی تعددی تفاعل<sup>24</sup> یا مختصراً تقسیمی تفاعل نمونہ<sup>25</sup> کہتے ہیں۔ شکل 24.2 میں مثال دی گئی ہے۔

$\tilde{F}(x)$  سیڑھی تفاعل (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہے جس میں ٹھیک ان  $x$  پر جہاں  $\tilde{f}(x) \neq 0$  ہو  $\tilde{f}(x)$  کے برابر چلانگ پائے جاتے ہیں۔ پہلی چلانگ نمونہ کی کم سے کم قیمت اور آخری چلانگ نمونہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پر پائی جائے گی۔ آخری چلانگ کے بعد  $\tilde{F}(x) = 1$  رہے گا۔

<sup>24</sup>cumulative frequency function of the sample  
<sup>25</sup>sample distribution function

جدول 24.3: کپاس کے سوتی دھاگے کو توڑنے کے لئے درکار قوت (نیوٹن میں)

|     |     |     |     |     |    |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| 114 | 118 | 86  | 107 | 87  | 94 | 82  | 81  | 98  | 84  |
| 120 | 126 | 98  | 89  | 114 | 83 | 94  | 106 | 96  | 111 |
| 123 | 110 | 83  | 118 | 83  | 96 | 96  | 74  | 91  | 81  |
| 102 | 107 | 103 | 80  | 109 | 71 | 96  | 91  | 86  | 129 |
| 130 | 104 | 86  | 121 | 96  | 96 | 127 | 94  | 102 | 87  |

$\tilde{f}(x)$  اور  $\tilde{F}(x)$  کا تعلق درج ذیل ہے

$$(24.2) \quad \tilde{F}(x) = \sum_{t \leq x} \tilde{f}(t)$$

جہاں  $t \leq x$  کا مطلب ہے کہ کسی بھی  $x$  کے لئے ان تمام  $\tilde{f}(x)$  کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے  $t$  کی قیمت  $x$  کے برابر یا  $x$  سے کم ہو۔

اگر کسی نمونہ میں مختلف اعداد کی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس کا جدولی اور تریسی اظہار غیر ضروری طور پر مشکل ہو گا جس کو گروہ بندی<sup>26</sup> سے آسان بنانا ممکن ہے۔ آئیں گروہ بندی کے عمل کو سمجھیں۔

دیے گئے نمونہ کے لحاظ سے ہم ایسا وقفہ  $I$  منتخب کرتے ہیں جس میں تمام نمونی قیمتیں شامل ہوں۔ ہم  $I$  کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں طبقاتی وقفہ<sup>27</sup> کہتے ہیں۔ ان طبقاتی وقفوں کے وسطی نقطوں کو طبقاتی وسطی نقطے<sup>28</sup> یا طبقاتی نشان<sup>29</sup> کہتے ہیں۔ ہر طبقاتی وقفہ میں پائے جانے والے نمونی قیمتیں کو طبقہ<sup>30</sup> کہتے ہیں۔ طبقہ میں نمونی قیمتوں کی تعداد کو طبقاتی تعدد<sup>31</sup> کہتے ہیں جس کو جسامت نمونہ  $n$  سے تقسیم کرنے سے اضافی طبقاتی تعدد<sup>32</sup> حاصل ہو گا۔ اس تعدد  $\tilde{f}(x)$  کو جو طبقاتی نشان کے تابع ہے گروہ بند نمونہ کا تعددی تفاعل<sup>33</sup> کہتے ہیں۔ اسی طرح مجموعی اضافی طبقاتی تعدد  $\tilde{F}(x)$  جو طبقاتی نشان کے تابع ہے گروہ بند نمونہ کا تقسیمی تفاعل تقسیمی! تفاعل، گروہ بند نمونہ<sup>34</sup> کہلاتا ہے۔ جدول 24.3 اور جدول 24.4 میں مثال دی گئی ہے۔

grouping<sup>26</sup>  
class intervals<sup>27</sup>  
class midpoints<sup>28</sup>  
class marks<sup>29</sup>  
class<sup>30</sup>  
class frequency<sup>31</sup>  
relative class frequency<sup>32</sup>  
frequency function of the grouped sample<sup>33</sup>  
distribution!function of the grouped sample<sup>34</sup>

جدول 24.4: تعددی جدول برائے جدول 24.3 (گروہ بند)

| طبقاتی وقفہ | طبقاتی نشان<br>$x$ | حتمی تعدد |    | $\tilde{f}(x)$ | $\tilde{F}(x)$ |
|-------------|--------------------|-----------|----|----------------|----------------|
|             |                    | نشان شمار |    |                |                |
| 65 – 75     | 70                 |           | 2  | 0.04           | 0.04           |
| 75 – 85     | 80                 |           | 8  | 0.16           | 0.20           |
| 85 – 95     | 90                 |           | 11 | 0.22           | 0.42           |
| 95 – 105    | 100                |           | 12 | 0.24           | 0.66           |
| 105 – 115   | 110                |           | 8  | 0.16           | 0.82           |
| 115 – 125   | 120                |           | 5  | 0.10           | 0.92           |
| 125 – 135   | 130                |           | 4  | 0.08           | 1.00           |
|             |                    | مجموعہ    | 50 | 1.00           |                |

طبقات کی تعداد جتنی کم رکھی جائے، گروہ بند نمونہ کی تقسیم اتنی سادہ ہوگی اور اتنی ہی زیادہ معلومات کھوئی جائے گی چونکہ اصل نمونی قیمتیں اب صریحاً نظر نہیں آئیں گی۔ گروہ بندی کرتے وقت دھیان رکھیں کہ صرف غیر ضروری معلومات کھوئی جائے۔ گروہ بند نمونہ استعمال کرتے ہوئے مشکلات سے بچنے کی خاطر درج ذیل اصولوں کا خیال رکھیں۔

• طبقاتی وقفے برابر رکھیں۔

• طبقاتی نشان یوں منتخب کریں کہ طبقاتی نشان سادہ اعداد (جن میں غیر صفر ہندسوں کی تعداد کم سے کم ہو) پر واقع ہوں۔

• اگر نمونی قیمت  $x_j$  دو طبقات کی سرحد پر واقع ہو تب یہ قیمت اس طبقہ میں شامل کیا جائے گا جو  $x_j$  سے شروع ہوتا ہو۔

### سوالات

سوال 24.1 تا سوال 24.9 میں دیے گئے نمونہ کا تعددی جدول بنائیں اور نمونہ کو تعددی نقطہ ترسیم، ڈبہ ترسیم اور مستطیل ترسیم کی صورت میں دکھائیں۔

سوال 24.1: مزاحمت کی قیمت اوہم  $\Omega$  میں۔

|     |     |     |     |     |     |     |     |    |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|
| 99  | 100 | 102 | 101 | 98  | 103 | 100 | 102 | 99 | 101 |
| 100 | 100 | 99  | 101 | 100 | 102 | 99  | 101 | 98 | 100 |

سوال 24.2:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 6 | 5 | 6 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

سوال 24.3: برقی سوئچ کا سینڈوں میں دورانیہ رد عمل

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1.3 | 1.4 | 1.1 | 1.5 | 1.4 | 1.3 | 1.2 | 1.4 | 1.5 | 1.3 |
| 1.2 | 1.3 | 1.5 | 1.4 | 1.4 | 1.6 | 1.3 | 1.5 | 1.1 | 1.4 |

سوال 24.4: خام کونلہ میں کونلہ کی فی صد مقدار

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 87 | 86 | 85 | 87 | 86 | 87 | 86 | 81 | 77 | 85 |
| 86 | 84 | 83 | 83 | 82 | 84 | 83 | 79 | 82 | 73 |

سوال 24.5: چادری فولاد کی تنش مضبوطی [ $\text{kg mm}^{-2}$ ]

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 44 | 43 | 41 | 41 | 44 | 44 | 43 | 44 | 42 | 45 | 43 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 42 | 45 | 41 | 44 | 44 | 43 | 44 | 46 | 41 | 43 | 45 | 45 | 42 | 44 | 44 |

سوال 24.6: خود کار نظام سے 100 کاغذ کے گھٹے بنانے میں کمی بیشی

|   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
|---|----|---|---|---|---|---|---|---|---|

سوال 24.7: ایک ہی قسم کے گاڑیوں کا تیل کا خرچہ۔ [کلو میٹر فی لیٹر]

|    |      |    |      |    |    |
|----|------|----|------|----|----|
| 12 | 11.5 | 11 | 12.5 | 11 | 12 |
|----|------|----|------|----|----|

سوال 24.8: خود کار نظام سے بھری گئی تھیلوں کا گرام میں وزن

200 203 199 198 201 200 201 201

سوال 24.9: اندرون شہر چلتی ریل گاڑی کا اڈے پر ٹھیک وقت پر پہنچنے سے انحراف (منٹوں میں)<sup>35</sup>

3 4 1 0 2 2 3 1 5 3

سوال 24.10: سوال 24.3 کے نمونہ کی مجموعی تعددی تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.11: جدول 24.4 کے گروہ بند نمونہ کا ڈبہ ترسیم، مستطیل ترسیم اور تعددی کثیر الاضلاع ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.12: جدول 24.1 میں طبقاتی وقفوں کے طبقاتی نشان 300 ، 320 ، 340 ، ... پر لیتے ہوئے مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔ اس کے مستطیل ترسیم کھینچ کا شکل 24.1-پ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 24.13: جدول 24.3 میں طبقاتی نشان 75 ، 85 ، 95 ، ... لے کر مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔ اس کے مستطیل ترسیم کا سوال 24.10 کے ترسیم سے موازنہ کریں۔

سوال 24.14: 1500 تجرباتی نتائج میں سب سے کم ناپ 10.8 cm اور سب سے زیادہ ناپ 11.9 cm تھی۔ اس مواد کی گروہ بندی لے لئے طبقاتی وقفہ تجویز کریں۔

### 24.3 نمونی اوسط اور نمونی تغیریت

<sup>35</sup> امید کی جاسکتی ہے کہ ایک دن ہماری ریل گاڑیاں بھی وقت کی اتنی پابند ہوں گی۔



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z \leq |2yy'|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### 1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

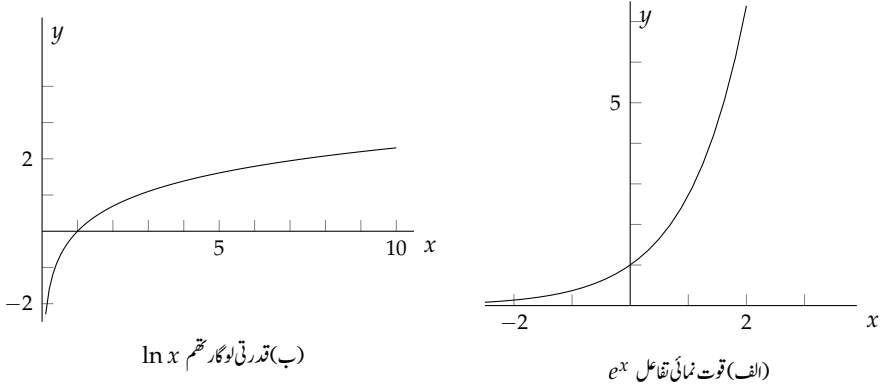
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

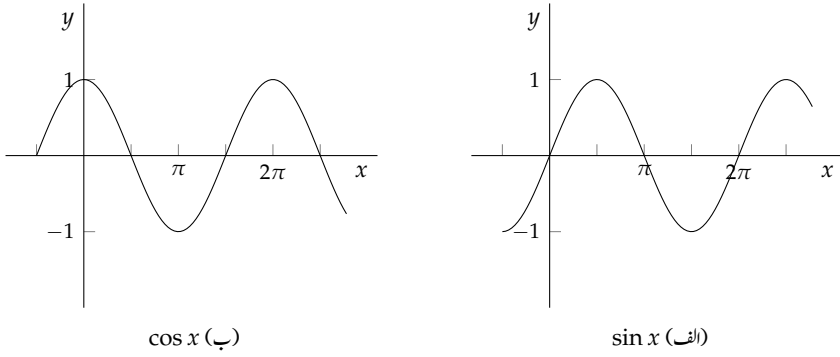
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

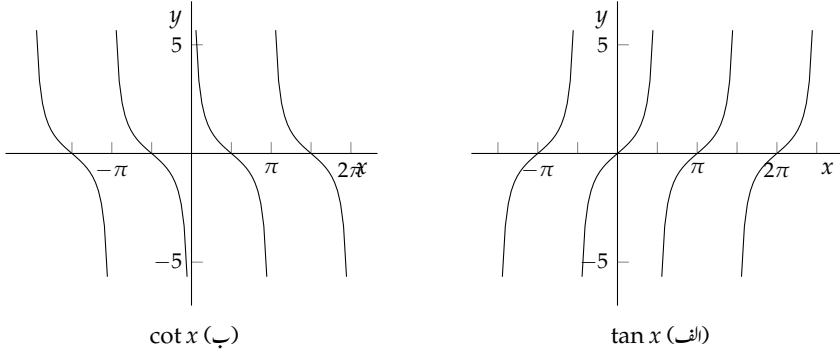
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

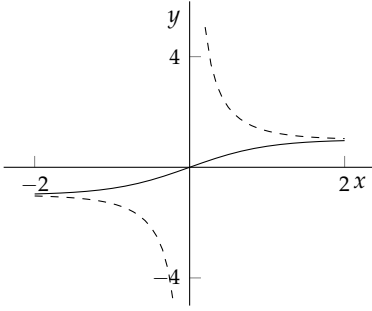
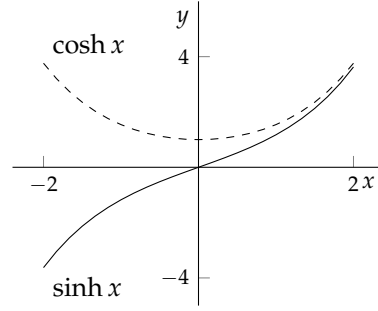
$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$



(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (\text{ب.23})$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{ب.24})$$

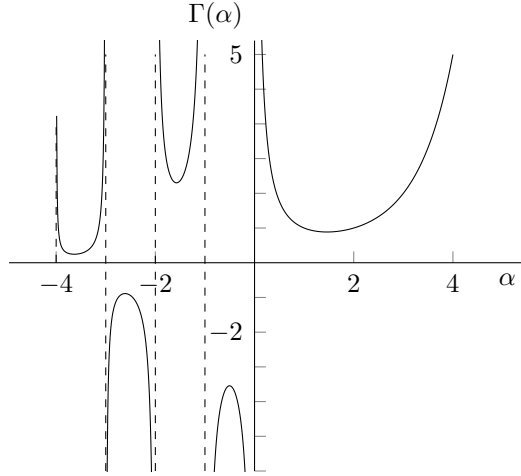
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (\text{ب.25})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

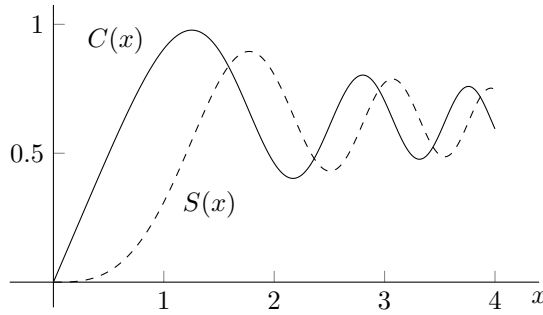
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

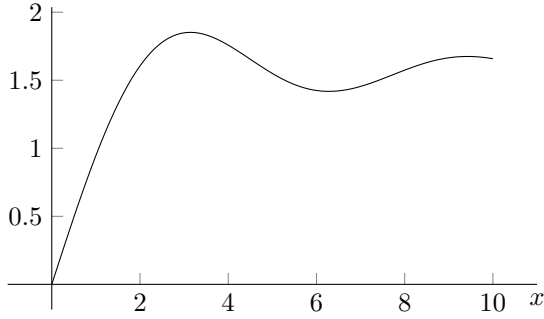
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

