انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 16

مخلوط تکملات

مخلوط تکملات دو وجوہات کی بنا اہم ہیں۔ عملی وجہ یہ ہے کہ حقیقی تکملات حل کرنے کی تراکیب سے کئی حقیقی تکملات حل کرنا ناممکن ہے جبکہ ان کو مخلوط تکملات کی ترکیب سے حل کیا جا سکتا ہے۔دوسری وجہ نظریاتی ہے۔ جہاں مخلوط تکملات کی ترکیب سے تحلیلی تفاعل کی چند بنیادی خصوصیات دریافت ہوتی ہیں (بالخصوص بلند درجی تفرق کی موجودگی) جن کا ثبوت تکمل استعمال کیے بغیر انتہائی مشکل ہو گا۔یہ صورت حال حقیقی اور مخلوط علم الاحصاء میں بنیادی فرق کی نشاندہی کرتی ہے۔

اس باب میں ہم پہلے مخلوط تکملات کی تعریف پیش کرتے ہیں۔سب سے بنیادی نتیجہ کوشی مخلوط تکمل کا مسئلہ حاصل ہو گا جس سے کوشی تکمل کی کلیات حاصل ہوں گی جو بہت اہم ہیں۔ ہم ثابت کریں گے کہ اگر کوئی تفاعل تحلیلی ہو تب اس کے ہر درجہ کے تفرق موجود ہوں گے۔اس نقطہ نظر سے مخلوط تحلیلی تفاعل حقیقی متغیر کی حقیقی تفاعل سے زیادہ سادہ رویہ رکھتے ہیں۔

16.1 مخلوط مستوی میں خطی تکمل

حقیقی علم الاحصاء کی طرح ہم قطعی تکمل اور غیر قطعی تکمل میں تمیز کرتے ہیں۔ایک غیر قطعی تکمل ایسا تفاعل ہوتا ہے جس کا تفرق خطے میں دیا گیا تحلیلی تفاعل ہو گا۔تفاعل کی تفرق کو الٹ لکھتے ہوئے ہم کئی غیر قطعی تکمل دریافت کر سکتے ہیں۔

آئیں اب مخلوط تفاعل $f(z)$ ، جہاں $z = x + iy$ ہے، کی قطعی تکمل یا خطی تکمل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ حقیقی قطعی تکمل کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے مخلوط قطعی تکمل کا تصور پیدا ہوتا ہے۔یوں موجودہ بحث عین حصہ 11.1 کی طرح ہو گی۔قطعی تکمل کی صورت میں حقیقی محور پر کوئی وقفہ تکمل کی راہ ہو گی۔مخلوط قطعی تکمل کی صورت میں ہم مخلوط مستوی پر کسی منحنی[1] پر چلتے ہوئے تکمل حاصل کریں گے۔

فرض کریں کہ مخلوط z مستوی میں C ایک ہموار منحنی (حصہ 15.2) ہے۔تب ہم C کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \le t \le b) \tag{16.1}$$

جہاں تمام t کے لئے $z(t)$ کا استمراری تفرق $\dot{z}(t) \neq 0$ پایا جاتا ہے، اور یوں C قابل تصحیح (حصہ 10.4) ہو گی جس کا ہر نقطہ پر یکتا مماس ہو گا۔آپ کو یاد ہو گا کہ C پر مثبت رخ سے مراد t کی بڑھتی قیمت کا مطابقتی رخ ہے۔

فرض کریں کہ $f(z)$ ایک استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کی ہر نقطہ پر معین ہے۔ہم مساوات 16.1 میں دیے گئے وقفہ $a \le t \le b$ کو درج ذیل ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں

$$t_0(=a), t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n(=b)$$

جہاں $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ہے۔اس کے مطابق C کے ٹکڑے (شکل 16.1)

$$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n() = Z$$

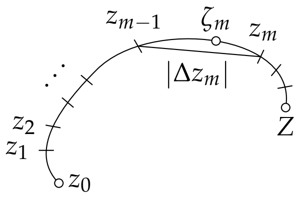
پائے جاتے ہیں جہاں $z_j = z(t_j)$ ہے۔ ہم C کے ہر ٹکڑے پر کوئی اختیاری نقطہ منتخب کرتے ہیں، مثلاً ہم z_0 اور z_1 کے درمیان نقطہ ζ_1 منتخب کرتے ہیں (یعنی $\zeta_1 = z(t)$ جہاں $t_0 \le t \le t_1$ ہے) اور z_1 اور z_2 کے درمیان نقطہ ζ_2 منتخب کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ہم اب مجموعہ

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)\Delta z_m \tag{16.2}$$

لیتے ہیں جہاں

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$$

[1] در حقیقت منحنی کے کسی حصے یا قوس پر تکمل لیا جائے گا۔اپنی آسانی کی خاطر ہم "منحنی" کی اصطلاح کو پوری منحنی کے لئے اور منحنی کے چھوٹے حصہ کے لئے بھی استعمال کریں گے۔



شکل 16.1: مخلوط خطی تکمل

ہے۔ہم ایسے مجموعے $n = 2, 3, \cdots$ کے لئے مکمل بے قاعدگی سے حاصل کرتے ہیں پس اتنا دھیان رکھتے ہیں کہ جب n لامتناہی کے قریب پہنچے تب $|\Delta z_m|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر کے قریب پہنچتی ہو۔یوں ہمیں مخلوط قیمتوں کا سلسلہ $S_2, S_3, \cdots$ ملتا ہے۔اس سلسلے کی حد، راہ C پر $f(z)$ کا **خطی تکمل**[2] (**یا صرف تکمل**) کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{16.3}$$

منحنی C کو تکمل کی راہ کہتے ہیں۔

ہم درج ذیل پوری بحث میں فرض کرتے ہیں کہ مخلوط خطی تکمل کی تمام راہ ٹکڑوں میں ہموار ہیں یعنی ہر راہ محدود تعداد کی ہموار منحنیات پر مشتمل ہے۔

ہمارے مفروضوں کی مد نظر خطی تکمل مساوات 16.3 موجود ہو گا، بلکہ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ لکھتے ہوئے اور

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m \quad \text{اور} \quad \Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m$$

لیتے ہوئے مساوات 16.2 کو

$$S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m) \tag{16.4}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $u = u(\zeta_m, \xi_m)$ اور $v = v(\zeta_m, \xi_m)$ ہیں اور ہم m کو 1 تا n لیتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔ہم اب S_n کو چار مجموعوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

$$S_n = \sum u\Delta x_m - \sum v\Delta y_m + i[\sum u\Delta y_m + \sum v\Delta x_m]$$

---
[2] line integral

یہ مجموعے حقیقی ہیں۔چونکہ f استمراری ہے لہٰذا u اور v بھی استمراری ہوں گے۔یوں اگر ہم n کی قیمت کو متذکرہ بالا طریقے سے بڑھا کر لامتناہی کے قریب کریں تب Δx_m اور Δy_m کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر کے قریب ہو گی اور دائیں ہاتھ ہر مجموعہ حقیقی تکمل کی صورت اختیار کرے گا:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - \int_C v\,\mathrm{d}y + i\Big[\int_C u\,\mathrm{d}y + \int_C v\,\mathrm{d}x\Big] \tag{16.5}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ خطی تکمل مساوات 16.3 موجود ہو گا اور اس تکمل کی قیمت پر راہ ٹکڑے کرنے کی ترکیب اور ہر ٹکڑے کے بیچ نقطہ ζ_m کی انتخاب کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

مزید، حصہ 11.2 کی طرح، منحنی C کی مساوات 16.1 استعمال کرتے ہوئے ہم ان میں سے ہر حقیقی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b u\dot{x}\,\mathrm{d}t - \int_a^b v\dot{y}\,\mathrm{d}t + i\Big[\int_a^b u\dot{y}\,\mathrm{d}t + \int_a^b v\dot{x}\,\mathrm{d}t\Big] \tag{16.6}$$

جہاں $u = u[x(t), y(t)]$ ، $v = v[x(t), y(t)]$ ہیں جبکہ t کے ساتھ تفرق کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

ہم اس کو عموماً

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y})\,\mathrm{d}t$$

یا مختصراً

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t \tag{16.7}$$

لکھتے ہیں۔

آئیں چند سادہ مثالیں دیکھیں۔

مثال 16.1: اکائی دائرے پر $\frac{1}{z}$ کا تکمل
اکائی دائرہ C پر گھڑی کی الٹ رخ $z = 1$ سے شروع کر کے ایک چکر لگاتے ہوئے $f(z) = \frac{1}{z}$ کا تکمل حاصل کریں۔ہم C کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$z(t) = \cos t + i \sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi) \tag{16.8}$$

یوں

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i \cos t$$

ہو گا لہٰذا مساوات 16.7 کے تحت درکار تکمل

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t}(-\sin t + i \cos t)\,\mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = i2\pi$$

ہو گا۔یہ بنیادی نتیجہ ہے جو ہم بار بار استعمال کریں گے۔

ظاہر ہے کہ ہم مساوات 16.8 کو مختصراً

$$z(t) = e^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi) \tag{16.9}$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں تفرق لیتے ہوئے

$$\dot{z}(t) = ie^{it}, \quad \mathrm{d}z = ie^{it}\,\mathrm{d}t$$

لکھ کر یہی نتیجہ

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,\mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = i2\pi \tag{16.10}$$

دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ □

مثال 16.2: غیر تحلیلی تفاعل کا تکمل
سیدھی راہ C_1 پر $z_0 = 0$ تا $z = 1 + i$ تفاعل $x = $ حقیقی $z = f(z)$ کا تکمل تلاش کریں (شکل 16.2-الف)۔
اس راہ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (1 + i)t \qquad (0 \le t \le 1)$$

یوں

$$f[z(t)] = z_{\text{حقیقی}} = x(t) = t, \quad \mathrm{d}z = (1+i)\,\mathrm{d}t$$

ہو گا جس سے ہم تکمل حاصل کرتے ہیں:

$$\int_{C_1} z_{\text{حقیقی}}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1+i)\,\mathrm{d}t = (1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+i)$$

آئیں اب حقیقی محور پر 0 تا 1 چل کر، یہاں سے خیالی محور کے متوازی چلتے ہوئے $1+i$ تک اسی تفاعل $f(z) = z_{\text{حقیقی}} = x$ کا تکمل حاصل کرتے ہیں (شکل 16.2-الف میں راہ C_2)۔ ہم اس راہ کے پہلے حصے کو

$$z = z(t) = t \qquad (0 \le t \le 1)$$

اور دوسرے حصے کو

$$z(t) = 1 + i(t-1) \qquad (1 \le t \le 2)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں پوری راہ وقفہ $0 \le t \le 2$ کی مطابقتی ہو گی۔ پہلے حصے پر $z_{\text{حقیقی}} = t,\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ اور دوسرے حصے پر $z_{\text{حقیقی}} = 1,\ \mathrm{d}z = i\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ یوں پورا تکمل دو ٹکڑوں میں حاصل ہو گا:

$$\int_{C_2} \mathrm{d}z = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 i\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + i$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ راہ کے دوسرے حصے کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

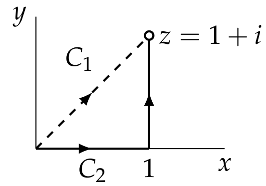
$$z(t) = 1 + it \qquad (0 \le t \le 1)$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے تکمل کے حدود 0 اور 1 ہوں گے اور تکمل کی قیمت وہی رہے گی۔

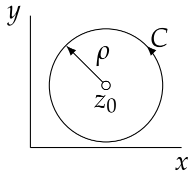
اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر تحلیلی تفاعل کے تکمل کی قیمت نا صرف راہ کی آخری حدود بلکہ راہ کی جیومیٹریائی شکل پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ □

مثال 16.3: عدد صحیح طاقت کے تکمل

مان لیں کہ $f(z) = (z - z_0)^m$ ہے جہاں m عدد صحیح اور z_0 مستقل ہیں۔ گھڑی کی الٹ رخ رداس ρ



(الف) مثال 16.2 میں تکمل کی راہ



(ب) مثال 16.3 میں تکمل کی راہ

شکل 16.2: تکملات کی راہ

کے دائرہ C پر تکمل حاصل کریں۔ دائرے کا مرکز z_0 ہے (شکل 16.2-ب)۔ ہم C کو

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \quad \mathrm{d}z = i\rho e^{it}\,\mathrm{d}t$$

ہو گا لہٰذا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C (z - z_0)^m \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it}\,\mathrm{d}t = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,\mathrm{d}t$$

$m = -1$ کی صورت مثال 16.1 میں دیکھی گئی ہے جبکہ $m \neq -1$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا (مساوات 14.71 دیکھیں):

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} = \Big[\frac{e^{i(m+1)t}}{i(m+1)}\Big]_0^{2\pi} = 0 \qquad (m \neq -1, \text{عدد صحیح})$$

یوں تکمل کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C (z - z_0)^m \,\mathrm{d}z = \begin{cases} i2\pi & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1, \text{عدد صحیح}) \end{cases} \tag{16.11}$$

□

مثال 16.4: تکمل کی تعریف کی عملی استعمال

مان لیں کہ $f(z) = k =$ مستقل ہے جبکہ ابتدائی نقطہ z_0 اور اختتامی نقطہ Z کے درمیان C کوئی

راہ ہے۔اس صورت میں ہم تکمل کی تعریف، یعنی مساوات 16.2 میں دیے گئے مجموعہ S_n کی حد، استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} k\Delta z_m = k[(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (Z - z_{n-1})] = k(Z - z_0)$$

ہو گا جس سے تکمل کی قیمت درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$\int_C k \,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} S_n = k(Z - z_0)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ اس تکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں z_0 اور Z پر منحصر ہے نا ان نقطوں کے مابین راہ پر۔بالخصوص اگر راہ C بند ہو تب $Z = z_0$ ہو گا لہٰذا تکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ □

مثال 16.5: تکمل کی تعریف کی دوسری مثال

فرض کریں کہ $f(z) = z$ ہے جبکہ ابتدائی نقطہ z_0 اور اختتامی نقطہ Z کے مابین C کوئی راہ ہے۔ہم دوبارہ مساوات 16.2 استعمال کرتے ہیں۔ $\zeta_m = z_m$ لیتے ہوئے

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} z_m \Delta z_m = z_1(z_1 - z_0) + z_2(z_2 - z_1) + \cdots + Z(Z - z_{n-1})$$

حاصل ہو گا۔اسی طرح $\zeta_m = z_{m-1}$ لیتے ہوئے

$$S_n^* = \sum_{m=1}^{n} z_{m-1} \Delta z_m = z_0(z_1 - z_0) + z_1(z_2 - z_1) + \cdots + z_{n-1}(Z - z_{n-1})$$

حاصل ہو گا۔ان دونوں کو جمع کرتے ہوئے $S_n + S_n^* = Z^2 - z_0^2$ ملتا ہے۔یوں

$$\lim_{n\to\infty}(S_n + S_n^*) = 2\int_{z_0}^{Z} z \,\mathrm{d}z = Z^2 - z_0^2$$

ہو گا جس سے ان نقطوں کے مابین ہر راہ پر تکمل کی قیمت

$$\int_{z_0}^{Z} z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2)$$

حاصل ہوتی ہے۔بالخصوص اگر C بند راہ ہو تب $Z = z_0$ ہو گا لہٰذا

$$\oint_C z \,\mathrm{d}z = 0 \tag{16.12}$$

ہو گا۔یہی نتیجہ مسئلہ 11.1 سے مساوات 16.6 میں دیے گئے کلیہ کی مدد سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

سوالات

سوال 16.1 تا سوال 16.6 میں A تا B قطع کو $z=z(t)$ روپ میں لکھیں۔

سوال 16.1: $A: z=0, \quad B: z=2-i3$
جواب: $(2-i3)t, \quad 0\le t\le 1$

سوال 16.2: $A: z=0, \quad B: z=1+i$
جواب: $(1+i)t, \quad 0\le t\le 1$

سوال 16.3: $A: z=1-i, \quad B: z=-1+i$
جواب: $1-i+(-1+i)t, \quad 0\le t\le 2$

سوال 16.4: $A: z=-2-i, \quad B: z=0$
جواب: $-2-i+(2+i)t, \quad 0\le t\le 1$

سوال 16.5: $A: z=i3, \quad B: z=3$
جواب: $i3+(1-i)t, \quad 0\le t\le 3$

سوال 16.6: $A: z=3i, \quad B: z=-2i$
جواب: $i3-it, \quad 0\le t\le 5$

سوال 16.7 تا سوال 16.15 میں دی گئی منحنیات کو $z=z(t)$ روپ میں لکھیں۔

سوال 16.7: $|z-2+i3|=5$
جواب: $z=2-i3+5e^{it}, \quad 0\le t\le 2\pi$

سوال 16.8: $y=x, \quad (0,0)$ تا $(4,4)$
جواب: $z=(1+i)t, \quad 0\le t\le 4$

سوال 16.9: $y=x^2, \quad (0,0)$ تا $(3,9)$
جواب: $z=t+it^2, \quad 0\le t\le 3$

سوال 16.10: $x^2+4y^2=4$
جواب: $z=2\cos t+i\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi$

سوال 16.11: $4x^2 + 9y^2 = 36$
جواب: $z = 3\cos t + i2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 16.12: $4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 36$
جواب: $z = (2 + 3\cos t) + i(-3 + 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 16.13: $(1,1)$ تا $(9,3)$، $y = \sqrt{x}$
جواب: $z = t + i\sqrt{t}, \quad 1 \le t \le 9$ یا $z = t^2 + it, \quad 1 \le t \le 3$

سوال 16.14: $(1,1)$ تا $(5, \frac{1}{5})$، $y = \frac{1}{x}$
جواب: $z = t + \frac{i}{t}, \quad 1 \le t \le 5$

سوال 16.15: $(0,5)$ تا $(2,-3)$، $y = 5 + 2x - 3x^2$
جواب: $z = t + i(5 + 2t - 3t^2), \quad 0 \le t \le 2$

سوال 16.16 تا سوال 16.21 میں دیے تفاعل کن منحنیات کو ظاہر کرتے ہیں۔

سوال 16.16: $-1 + (2+i)t, \quad 0 \le t \le 1$
جواب: سیدھی لکیر $x - 2y + 1 = 0$ پر -1 تا $1 + i$

سوال 16.17: $i + t + i2t^2, \quad -2 \le t \le 1$
جواب: منحنی $y = 2x^2 + 1$ پر $(-2 + i9)$ تا $(1 + i3)$

سوال 16.18: $2 - i3 + 5e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$
جواب: بالائی نصف دائرہ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

سوال 16.19: $1 + 2e^{it}, \quad -\pi \le t \le 0$
جواب: نچلا نصف دائرہ $(x-1)^2 + y^2 = 4$

سوال 16.20: $t + i2t^3, \quad -1 \le t \le 0$
جواب: منحنی $y = 2x^3$ پر $(-1, -i2)$ تا مبدا

سوال 16.21: $i - t + it^3, \quad 0 \le t \le 3$
جواب: منحنی $y = 1 - x^3$ پر i تا $(-3 + 28i)$

سوال 16.22 تا سوال 16.25 میں z^2 کا تکمل دی گئی قطع پر تلاش کریں۔

سوال 16.22: 0 تا $i3$
جواب: $-i9$

سوال 16.23: 0 تا $3+i3$
جواب: $-18+i18$

سوال 16.24: $1+i$ تا $2-i$
جواب: $\frac{1}{3}(4-i13)$

سوال 16.25: $-1+i$ تا $1-i$
جواب: $-\frac{4}{3}(1+i)$

سوال 16.26: تفاعل z^2 کا، گھڑی کی الٹ رخ، تکون کے گرد ایک مرتبہ تکمل حاصل کریں۔ تکون کے کونے 0 ، 1 اور i ہیں۔
جواب: 0

سوال 16.27: $z+\frac{1}{z}$ کا اکائی رداس کے گرد گھڑی کی رخ تکمل تلاش کریں۔
جواب: $-i2\pi$

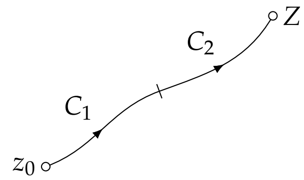
سوال 16.28: z کا 1 سے انتصابی $1+i$ تک اور یہاں سے افقی $-1+i$ تک تکمل تلاش کریں۔
جواب: $-\frac{1}{2}-i$

سوال 16.29: $az+b$ کا 0 تا $2+i3$ قطع پر تکمل تلاش کریں۔
جواب: $2b-2.5a+i(3b+6a)$

سوال 16.30: تکمل $\int_C (z-1)^{-1}\,\mathrm{d}z$ کو گھڑی کی رخ $C:|z-1|=2$ پر تلاش کریں۔ یہی تکمل گھڑی کی الٹ رخ تلاش کریں۔
جواب: گھڑی کی الٹ رخ $i2\pi$ جبکہ گھڑی کی رخ $-i2\pi$ ہے۔

سوال 16.31: تکمل $\int_C z\,$حقیقی$\,\mathrm{d}z$ گھڑی کی الٹ رخ دائرہ $|z|=r$ کے گرد حاصل کریں۔
جواب: $i\pi r^2$

سوال 16.32: تکمل $\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ کو $A:z=-i$ تا $B:z=i$ (الف) قطع AB پر تلاش کریں، (ب) بائیں نصف مستوی میں اکائی دائرہ پر تلاش کریں، (پ) دائیں نصف مستوی میں اکائی دائرہ پر تلاش کریں۔
جواب: (الف) i ، (ب) $i2$ ، (پ) $i2$



شکل 16.3: تکمل کی راہ کے ٹکڑے

16.2 مخلوط خطی تکمل کی خواص

مجموعہ کی حد، مخلوط خطی تکمل کی تعریف ہے۔اس سے درج ذیل خواص اخذ ہوتے ہیں۔

اگر ہم راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں تقسیم کریں (شکل 16.3) تب درج ذیل ہو گا:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{16.13}$$

اگر ہم تکمل لیتے ہوئے راہ پر الٹ رخ چلیں تب تکمل کی قیمت منفی اکائی سے ضرب ہو گی

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{Z}^{z_0} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{16.14}$$

جہاں z_0 اور Z راہ C کے سر ہیں؛ بائیں ہاتھ تکمل کو z_0 تا Z حاصل کیا گیا ہے جبکہ دائیں ہاتھ تکمل کو Z تا z_0 حاصل کیا گیا ہے۔

دو یا دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کا تکمل جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے، اور مشترک مستقل جزو ضربی کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے، یعنی:

$$\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)]\,\mathrm{d}z = k_1 \int_C f_1(z)\,\mathrm{d}z + k_2 \int_C f_2(z)\,\mathrm{d}z \tag{16.15}$$

ہمیں مخلوط خطی تکمل کی حتمی قیمت کا تخمینہ بار بار درکار ہو گا جس کی حصول کا بنیادی کلیہ درج ذیل ہے

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le Ml \tag{16.16}$$

جہاں l راہ C کی لمبائی ہے جبکہ M ایسا حقیقی مستقل ہے کہ پوری C پر $|f(z)| \leq M$ ہو۔

مساوات 16.16 کو ثابت کرنے کی خاطر ہم مساوات 14.26 کو مساوات 16.2 کے ساتھ ملا کر

$$|S_n| = \left|\sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)\Delta z_m\right| \leq \sum_{m=1}^{n} |f(\zeta_m)||\Delta z_m| \leq M \sum_{m=1}^{n} |\Delta z_m|$$

لکھتے ہیں۔اب Δz_m اس قطع کی لمبائی ہے جس کے سر z_{m-1} اور z_m ہیں (شکل 16.1 دیکھیں)۔یوں دائیں ہاتھ مجموعہ در حقیقت ان سیدھی قطعات کی لمبائیوں کا مجموعہ L ہے جن کے سر $z_0, z_1, \cdots, z_n (= Z)$ ہیں۔ اگر n کی قیمت اس طرح لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو کہ Δz_m کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر کے قریب پہنچتی ہو تب L کی قیمت، لمبائی قوس کی تعریف (حصہ 10.4) کے تحت، قوس C کی لمبائی l کے قریب پہنچے گی۔ یوں 16.16 میں دیا گیا کلیہ ثابت ہوتا ہے۔

مثال 16.6: مساوات 16.16 کی استعمال

تفاعل $f(z) = \frac{1}{z}$ کا دائرہ $|z| = \rho$ کے گرد ایک مرتبہ تکمل تلاش کریں۔

حل: یوں $l = 2\pi\rho$ ہے اور دائرے پر $|f(z)| = \frac{1}{\rho}$ ہے۔اس طرح مساوات 16.16 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\left|\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leq \frac{1}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi \qquad \text{(مثال 16.1 دیکھیں)}$$

□

مثال 16.7: ایک اور تکمل کی قیمت کا تخمینہ

مثال 16.2 میں راہ C_2 کی لمبائی $l = 2$ ہے اور C_2 پر $\left| \text{حقیقی}\, z \right| \leq 1$ ہے۔یوں مساوات 16.16 درج ذیل دے گی۔

$$\left|\int_{C_2} \text{حقیقی}\, z \, \mathrm{d}z\right| \leq 2$$

□

سوالات

سوال 16.33: مساوات 16.13 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرہ ہے جبکہ C_1 اس کا بالائی نصف حصہ اور C_2 اس کا نچلا نصف حصہ ہے۔

سوال 16.34: تفاعل $f(z) = z^2$ کے لئے مساوات 16.14 کی تصدیق کریں جہاں C نقطہ $-1-i$ سے $1+i$ تک ہے۔

سوال 16.35: تفاعل $k_1 f_1 + k_2 f_2 = 3z - z^2$ کے لئے مساوات 16.15 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرے کا بالائی نصف حصہ 1 تا -1 ہے۔

سوال 16.36: تفاعل $f(z) = \frac{1}{z}$ کے لئے مساوات 16.16 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرے کا بالائی نصف حصہ 1 تا -1 ہے۔

سوال 16.37 تا سوال 16.48 میں $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.37: سیدھی قطع $-1-i$ تا $2+i$ پر تفاعل $f(z) = az + b$ ہے۔
جواب: $\frac{(a+2b)(3+i2)}{2}$

سوال 16.38: گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر $f(z) = z^2 + \frac{2}{z}$
جواب: $i4\pi$

سوال 16.39: 1 تا -1 اکائی دائرے کی بالائی نصف پر $f(z) = z^2 + \frac{3}{z^4}$
جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 16.40: گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر $f(z) = 2z + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.41: 0 تا $1 + i\frac{\pi}{2}$ سیدھی قطع پر $f(z) = e^z$
جواب: $-1 + ie$

سوال 16.42: گھڑی کی رخ دائرہ $|z-1| = 4$ پر $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}$
جواب: $-i2\pi$

سوال 16.43: قطع $i\pi$ تا $i2\pi$ پر $f(z) = \cos z$
جواب: $i(\sinh 2\pi - \sinh \pi)$

سوال 16.44: قطع $i\pi$ تا $i2\pi$ پر $f(z) = \sin z$
جواب: $\cosh \pi - \cosh 2\pi$

سوال 16.45: قطع $-i$ تا i پر $f(z) = \sin z$
جواب: 0

سوال 16.46: قطع 0 تا i پر $f(z) = \sin z$
جواب: $1 - \cosh 1$

سوال 16.47: قطع 0 تا i پر $f(z) = \sinh z$
جواب: $\cos 1 - 1$

سوال 16.48: قطع 0 تا i پر $f(z) = \cosh z$
جواب: $i \sin 1$

سوال 16.49 تا سوال 16.52 میں مساوات 16.16 کی مدد سے 0 تا $3 + i4$ راہ پر تکمل کی زیادہ سے زیادہ قیمت کا تخمینہ لگائیں۔

سوال 16.49: $\int_C z \,\mathrm{d}z$
جواب: 25

سوال 16.50: $\int_C e^z \,\mathrm{d}z$
جواب: $5e^3$

سوال 16.51: $\int_C \operatorname{Ln}(z+1) \,\mathrm{d}z$

سوال 16.52: $\int_C \frac{1}{z+1} \,\mathrm{d}z$
جواب: 5

سوال 16.53: سوال 16.49 میں راہ کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے تکمل کی زیادہ سے زیادہ قیمت کا بہتر تخمینہ لگائیں۔

16.3 کوشی کا مسئلہ تکمل

مخلوط تجزیہ میں کوشی کا مسئلہ تکمل اہم کردار ادا کرتا ہے۔ اس کے علاوہ اس مسئلے کے دیگر نظریاتی اور عملی اثرات بھی مرتب ہوتے ہیں۔اس مسئلہ کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصورات کی ضرورت پیش آئی گی۔

مخلوط مستوی میں دائرہ کار D اس صورت **سادہ تعلق خطہ**[3] کہلاتا ہے جب اس میں ہر سادہ بند منحنی (یعنی D میں اپنے آپ کو غیر منقطع کرتا ہوا بند منحنی) صرف D کے نقطوں کو گھیرتی ہو۔ایسا دائرہ کار جو سادہ تعلق نہ ہو **مضرب تعلق خطہ**[4] کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک دائرے کی اندرون (دائری قرص)، قطع مکافی کی اندرون اور چکور کی اندرون سادہ تعلق ہیں۔ بلکہ کسی بھی سادہ بند منحنی کی اندرون سادہ تعلق ہو گی۔ دائری چھلی (حصہ 14.3) مضرب تعلق (زیادہ درست اصطلاح دوہرا تعلق ہو گی) ہے۔

مزید، ایسا دائرہ کار D جو مکمل طور پر مبدا کے گرد کسی دائرے میں پایا جاتا ہو **محدود**[5] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر محدود**[6] کہتے ہیں۔

مسئلہ 16.1: **کوشی مسئلہ تکمل**
سادہ تعلق محدود دائرہ کار D میں تحلیلی[7] $f(z)$ کی صورت میں D میں ہر سادہ بند منحنی C پر درج ذیل ہو گا۔

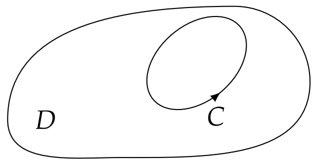
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{16.17}$$

ثبوت: کوشی کا ثبوت
مساوات 16.5 سے

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) \tag{16.18}$$

---

[3] simply connected domain
[4] multiply connected
[5] bounded
[6] unbounded
[7] یاد رہے کہ تفاعل کی تعریف کے تحت تفاعل واحد قیمت تعلق ہوتا ہے۔



شکل 16.4: کوشی کا مسئلہ تکمل

ملتا ہے۔ $f(z)$ تحلیلی ہے لہٰذا $f'(z)$ موجود ہے۔کوشی نے اضافی فرض کیا کہ $f'(z)$ استمراری ہے۔تب مساوات 14.42 اور مساوات 14.43 کے تحت D میں u اور v کے استمراری جزوی تفرق پائے جائیں گے۔مسئلہ 11.1 قابل اطلاق ہو گا (جس میں f اور g کی جگہ بالترتیب u اور v پر کرتے ہیں) لہٰذا

$$\int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) = \iint_R \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں R کی سرحد C ہے۔مساوات 14.44 کے تحت دائیں ہاتھ تکمل مکمل صفر کے برابر ہے لہٰذا بائیں ہاتھ کا تکمل صفر ہو گا۔اسی طرح مساوات 14.44 کے تحت مساوات 16.18 کا آخری تکمل بھی صفر ہو گا۔یوں کوشی کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

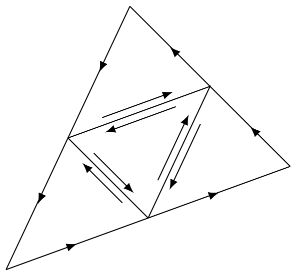
ثبوت : گرسا کا ثبوت

گرسا[8] نے مسئلہ کوشی کو $f'(z)$ کی استمراری ہونے کی شرط کے بغیر ثابت کیا جو بہت اہم حقیقت ہے۔ہم شروع ایسی صورت سے کرتے ہیں جہاں C ایک تکون کی سرحد ہے۔ہم اس تکون کو گھڑی کی الٹ رخ سمت بند کرتے ہیں۔تکون کی اطراف کی درمیانے نقطوں کو آپس میں ملاتے ہوئے تکون کو چار مماثل تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16.5)۔ یوں

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \int_{C_a} f\,\mathrm{d}z + \int_{C_b} f\,\mathrm{d}z + \int_{C_c} f\,\mathrm{d}z + \int_{C_d} f\,\mathrm{d}z$$

ہو گا جہاں C_a ، $\cdots$، C_d ان چار تکون کی سرحد ہیں۔اب دائیں ہاتھ میں ہم تقسیم کی ہر قطع پر تکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ رخ حاصل کرتے ہیں۔ایک ہی قطع پر آپس میں الٹ رخ کی جوڑی تکمل ایک دوسرے کو حذف

[8] فرانسیسی ریاضی دان ایڈورڈ گرسا [1858-1936]



شکل 16.5: مسئلہ کوشی کا ثبوت

کرتے ہیں لہٰذا دائیں ہاتھ چار تکملوں کا مجموعہ بائیں ہاتھ کی تکمل کے برابر ہو گا۔دائیں ہاتھ کے تکملوں میں سے ایک تکمل، جس کی سرحد کو ہم C_1 کہیں گے، ایسا ہو گا جس کے لئے درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا۔

$$\left|\int_C f\,\mathrm{d}z\right| \le 4\left|\int_{C_1} f\,\mathrm{d}z\right|$$

ہم درج بالا اس لئے لکھ سکتے ہیں کہ چاروں تکمل میں سے ہر ایک کی حتمی قیمت چاروں کے مجموعے کی حتمی قیمت سے چار گنا کم نہیں ہو سکتی ہے۔یہ مساوات 14.26 سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

ہم اس تکون جس کی سرحد C_1 ہے کو اسی طرح چار تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ان میں سے ایسی تکون، جس کی سرحد کو ہم C_2 کہیں گے، منتخب کرتے ہیں جس کے لئے

$$\left|\int_{C_1} f\,\mathrm{d}z\right| \le 4\left|\int_{C_2} f\,\mathrm{d}z\right| \quad\implies\quad \left|\int_C f\,\mathrm{d}z\right| \le 4^2\left|\int_{C_2} f\,\mathrm{d}z\right|$$

لکھنا ممکن ہو۔

اسی طرح بڑھتے ہوئے ہمیں تکونوں کا ایک سلسلہ T_1 ، T_2 ، $\cdots$ حاصل ہو گا جن کی سرحدیں بالترتیب C_1 ، C_2 ، $\cdots$ ہوں گی۔یہ تکون متشابہ ہوں گے اور $n > m$ کی صورت میں تکون T_n تکون T_m کے اندر پایا جائے گا۔مزید

$$\left|\int_C f\,\mathrm{d}z\right| \le 4^n\left|\int_{C_n} f\,\mathrm{d}z\right|, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{16.19}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

فرض کریں کہ z_0 ان تمام تکونوں کے اندر ایک نقطہ ہے۔چونکہ f نقطہ z_0 پر قابل تفرق ہے لہٰذا $f'(z_0)$ موجود ہو گا لہٰذا ہم

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + h(z)(z - z_0) \tag{16.20}$$

لکھ سکتے ہیں جس کا تکون T_n کی سرحد C_n پر تکمل حاصل کرتے ہوئے

$$\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1} (z - z_0)f'(z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{C_n} h(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z \tag{16.21}$$

لکھتے ہیں۔چونکہ $f(z_0)$ اور $f'(z_0)$ مستقل ہیں لہٰذا مثال 16.4 اور مثال 16.5 کے نتیجہ کے تحت بائیں ہاتھ پہلے دو تکمل صفر کے برابر ہوں گے۔یوں

$$\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_n} h(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z \tag{16.22}$$

رہ جاتا ہے۔مساوات 16.20 کو $z - z_0$ سے تقسیم کر کے دو اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہوئے حتمی قیمت لے کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| = \left|h(z)\right|$$

اس کا مساوات 14.38 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ دیے گئے مثبت عدد ϵ کی صورت میں ہم ایسا مثبت عدد σ تلاش کر سکتے ہیں جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرے گا۔

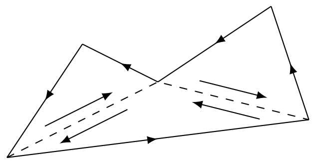
جب $|z - z_0| < \sigma$ ہو تب $\left|h(z)\right| \le \epsilon$ ہو گا۔

ہم اب عدد n اتنا بڑا لیتے ہیں کہ تکون T_n دائرہ $|z - z_0| < \sigma$ میں پایا جائے۔ہم C_n کی لمبائی کو l_n لکھتے ہیں۔یوں T_n میں z_0 اور C_n پر تمام z کے لئے $|z - z_0| \le \frac{l_n}{2}$ ہو گا۔مساوات 16.16 کی اطلاق سے ہم

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_n} h(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z\right| < \epsilon\frac{l_n}{2}l_n = \frac{\epsilon}{2}l_n^2 \tag{16.23}$$

لکھ سکتے ہیں۔فرض کریں کہ C کی لمبائی l ہو۔تب راہ C_1 کی لمبائی $l_1 = \frac{l}{2}$ ہو گی، راہ C_2 کی لمبائی $l_2 = \frac{l_1}{2} = \frac{l}{4}$ ہو گی، اور اسی طرح C_n کی لمبائی

$$l_n = \frac{l}{2^n}$$



شکل 16.6: کثیر رکنے کے لئے کوشی مسئلہ تکمل کا ثبوت

ہو گی۔مساوات 16.23 اور مساوات 16.19 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left|\int_C f\,\mathrm{d}z\right| \le 4^n\left|\int_{C_n} f\,\mathrm{d}z\right| < 4^n\frac{\epsilon}{2}l_n^2 = 4^n\frac{\epsilon}{2}\frac{l^2}{4^n} = \frac{\epsilon}{2}l^2$$

اب $\epsilon\,(>0)$ کی قیمت کو کافی چھوٹا کرتے ہوئے ہم دائیں ہاتھ کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں جبکہ دایاں ہاتھ (تکمل کی) ایک مستقل قیمت ہے۔اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ اس تکمل کی قیمت صفر ہو گی۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

آئیں اب کثیر الاضلاع کے لئے اس مسئلے کو ثابت کریں۔ہم کثیر الاضلاع کو تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16.6)۔ایسی ہر تکون کا تکمل صفر ہو گا۔ ہر تکون کی سرحد پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا ہر دو تکونوں کے درمیان تقسیمی قطع پر تکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ رخ حاصل ہو گا۔ایسی ہر جوڑی تکملات کا مجموعہ صفر ہو گا۔یوں تمام تکونوں کی سرحد پر تکملوں کا مجموعہ کثیر رکنی کی سرحد پر تکمل کے برابر ہو گا۔اب چونکہ ہر تکون پر تکمل صفر کے برابر ہے لہٰذا ان کا مجموعہ بھی صفر کے برابر ہو گا۔یوں کثیر رکنی کی سرحد پر تکمل صفر ہو گا۔

کسی بھی بند راہ C کے لئے اب ثبوت پیش کرتے ہیں۔کسی بھی بند راہ کے اندر اتنے اطراف کی کثیر رکنی P نقش کریں کہ C اور کثیر رکنی میں فرق قابل نظر انداز ہو۔ہم بغیر ثبوت پیش کیے (چونکہ یہ ثبوت پیچیدہ ہے) کہنا چاہیں گے کہ C کے تکمل کی قیمت اور P کے تکمل کی قیمت میں فرق ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں جہاں ϵ ایک مثبت عدد ہے۔ چونکہ کثیر رکنی کے لئے ہم اس مسئلے کو ثابت کر چکے ہیں لہٰذا کسی بھی بند راہ کے لئے بھی مسئلہ ثابت ہوا۔

□

مثال 16.8:

$$\int_C e^z\,\mathrm{d}z = 0$$

چونکہ ہر z پر e^z تحلیلی ہے لہٰذا درج بالا ہو گا۔ □

مثال 16.9:

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = 0$$

جہاں C اکائی دائرہ ہے (حصہ 16.1)۔ چونکہ $z = 0$ پر $\frac{1}{z^2}$ تحلیلی نہیں ہے لہٰذا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ نہیں ہو گا۔ یوں D میں f کی تحلیلی ہونے کی شرط، مساوات 16.17 کی درست ہونے کے لئے، کافی ہے نا کہ لازمی۔ □

مثال 16.10:

$$\int_C \frac{\mathrm{d}}{z} = i2\pi$$

جہاں تکمل اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا گیا ہے (حصہ 16.1)۔ راہ C جھلی $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ میں پائی جاتی ہے جہاں $\frac{1}{z}$ تحلیلی ہے لیکن یہ راہ سادہ تعلق نہیں رکھتی لہٰذا مسئلہ کوشی قابل اطلاق نہیں ہو گا۔ یوں دائرہ کار D کی سادہ تعلق ہونے کی شرط انتہائی اہم ہے۔

□

مسئلہ کوشی میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2^* میں تقسیم (شکل 16.7-الف) کرنے سے مساوات 16.17 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

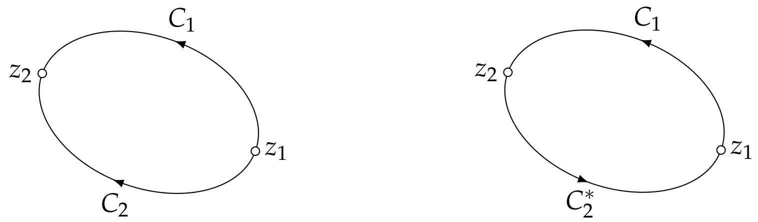
$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}z + \int_{C_2^*} f\,\mathrm{d}z = 0$$

یوں

$$-\int_{C_2^*} f\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}z \tag{16.24}$$

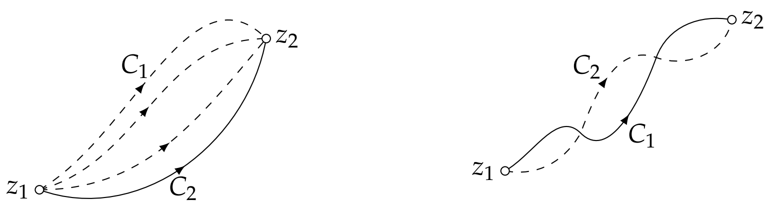
ہو گا۔ C_2^* پر تکمل کی سمت الٹ کرنے سے تکمل کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔ یوں

$$\int_{C_2} f\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}z \tag{16.25}$$



(ب) مساوات 16.25 (الف) مساوات 16.24

شکل 16.7: دو نقطوں کے درمیان دو مختلف راہ



(ب) راہ کی مسلسل تبدیلی (الف) دونوں راہ محدود نقطوں پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں

شکل 16.8: دو نقطوں کے مابین مختلف طرز کی راہ

حاصل ہو گا (شکل 16.7-ب)۔اس طرح اگر D میں f تحلیلی ہو اور D میں دو نقطوں کے درمیان C_1 اور C_2 کوئی بھی راہ ہوں جن پر کوئی نقطہ مشترک نہ ہو تب ان راہ پر مساوات 16.25 درست ہو گی۔

اگر ان راہ C_1 اور C_2 میں محدود تعداد کے نقطے مشترک ہوں (شکل 16.8-الف) تب ہر قریبی مشترک نقطوں کی جوڑی کے مابین چونکہ مساوات 16.25 قابل اطلاق ہے لہٰذا ان پوری راہ C_1 اور C_2 کے لئے بھی مساوات 16.25 درست ہو گی۔

درحقیقت کسی بھی دو نقطوں z_1 اور z_2 کے درمیان کسی بھی دو راہ، جو مکمل طور پر سادہ تعلق دائرہ کار D میں ہوں جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے، کے لئے مساوات 16.25 درست ہو گا۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ z_1 تا z_2 تفاعل $f(z)$ کے تکمل کی قیمت D میں راہ کی غیر تابع (یا راہ سے آزاد) ہے ۔(ظاہر ہے کہ ایسی تکمل کی قیمت z_1 اور z_2 پر منحصر ہو گی۔)

(الف) دوہرا تعلق دائرہ کار

(ب) مساوات 16.27 میں تکمل کی راہ

شکل 16.9: دوہرا تعلق دائرہ کار

ہم تصور کر سکتے ہیں کہ راہ C_1 کو مسلسل تبدیل کرتے ہوئے راہ C_2 حاصل کی گئی ہے (شکل 16.8-ب)۔یوں ایسے تکمل میں، راہ کے سر z_1 اور z_2 تبدیل کیے بغیر، تکمل کی راہ یوں مسلسل تبدیل کرنے سے کہ ایسے نقطہ سے نہ گزرا جائے جہاں $f(z)$ غیر تحلیلی ہو، تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔ اس حقیقت کو **تبدیلی راہ کا اصول**[9] کہتے ہیں۔

مضرب تعلق دائرہ کار D^* کو یوں کاٹا جا سکتا ہے کہ حاصل دائرہ کار (یعنی D^* ماسوائے ان نقطوں کے جو ایک کٹ یا ایک سے زیادہ کٹ پر ہوں) سادہ تعلق دائرہ کار ہو۔دوہرا تعلق دائرہ کار D^* پر ہمیں ایک عدد کٹ $\tilde{C}$ درکار ہو گا (شکل 16.9-الف)۔اگر دائرہ کار D^* ، راہ C_1 اور C_2 پر $f(z)$ تحلیلی ہو تب چونکہ C_1 ، C_2 اور $\tilde{C}$ سادہ تعلق دائرہ کار کو گھیرتے ہیں لہٰذا مسئلہ کوشی کے تحت راہ C_1 ، C_2 اور $\tilde{C}$ پر، شکل 16.9-الف میں تیر کی نشان سے دکھائے گئے رخ، $f(z)$ کے تکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ چونکہ ہم $\tilde{C}$ پر دونوں رخ تکمل لیتے ہیں جن کا مجموعہ صفر ہو گا لہٰذا ہمیں

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{16.26}$$

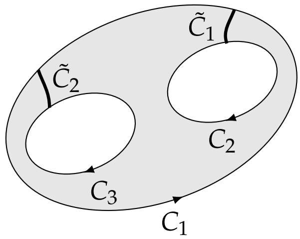
حاصل ہوتا ہے جہاں ایک بند راہ پر گھڑی کی رخ اور دوسری راہ پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 16.26 کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{16.27}$$

---

[9] principle of deformation of path



شکل 16.10: تین تعلقی دائرہ کار

جہاں دونوں بند راہ پر تکمل گھڑی کی ایک ہی رخ حاصل کیا جاتا ہے (شکل 16.9-ب)۔ یاد رہے کہ مساوات 16.27 اس صورت درست ہو گا جب C_1 اور C_2 کی ہر نقطہ پر اور ان کی گھیرے ہوئے دائرہ کار پر $f(z)$ تحلیلی ہو۔

زیادہ پیچیدہ دائرہ کار میں ایک سے زیادہ کٹ درکار ہوں گے۔ان کٹ کو لگانے کا بنیادی اصول وہی رہے گا۔مثلاً تین تعلقی دائرہ کار (شکل 16.10) کے لئے

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں C_2 اور C_3 پر تکمل ایک ہی رخ حاصل کیا جائے گا جبکہ C_1 پر تکمل ان کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔

سادہ بند راہ کو کبھی کبھار **خط ارتفاع**[10] بھی کہتے ہیں اور ایسی راہ پر تکمل کو **ارتفاعی تکمل**[11] کہتے ہیں۔

مثال 16.11: فرض کریں کہ C_1 اکائی دائرہ $|z| = 1$ ہے جبکہ C_2 دائرہ $|z| = \frac{1}{2}$ ہے۔تب مساوات 16.27 سے

$$\int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = i2\pi \qquad \text{(مثال 16.1)}$$

ہو گا جہاں دونوں دائروں پر تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا گیا ہے۔ □

---

[10] contour
[11] contour integral

مثال 16.12: مثال 16.3 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تبدیلی راہ کے اصول کے تحت

$$\int_C (z-z_0)^m \,\mathrm{d}z = \begin{cases} i2\pi & (m=-1) \\ 0 & (m \neq -1, \text{عدد صحیح}) \end{cases}$$

ہو گا جہاں C ایسا کوئی بھی خط ارتفاع ہو سکتا ہے جو نقطہ z_0 کو گھیرتا ہو اور تکمل کو C پر گھڑی کی الٹ رخ ایک مرتبہ حاصل کیا جاتا ہے۔ □

سوالات

سوال 16.54: مسئلہ کوشی کی تصدیق $\int_C z^2 \,\mathrm{d}z$ کے لئے کریں جہاں C وہ تکون ہے جس کے کونے 0 ، 2 اور $i2$ ہیں۔

سوال 16.55: دکھائیں کہ اکائی دائرے کے گرد $\frac{1}{z^3}$ کا تکمل صفر کے برابر ہے۔کیا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ کیا جا سکتا ہے؟

جواب: چونکہ $z=0$ پر تفاعل $\frac{1}{z^3}$ غیر تحلیلی ہے اور اکائی دائرہ اس نقطے کو گھیرتی ہے لہٰذا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوال 16.56: کس سادہ بند راہ پر $\frac{1}{z}$ کا تکمل صفر کے برابر ہو گا؟

جواب: وہ راہ جو $z=0$ کو نہ گھیرتی ہو۔

سوال 16.57 تا سوال 16.65 اکائی دائرے کے گرد ایک مرتبہ گھڑی کی الٹ رخ دیے گئے تفاعل کے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔ہر سوال میں بتلائیں کہ آیا اس سوال میں مسئلہ کوشی کا اطلاق ہو گا؟

سوال 16.57: $f(z)=\frac{1}{z^4}$

جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.58: $f(z)=e^{-z}$

جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.59: $f(z) = |z|$
جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.60: $f(z) =$ خیالی z
جواب: $-\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.61: $f(z) =$ حقیقی z
جواب: $i\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.62: $f(z) = \tanh z$
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.63: $f(z) = \frac{1}{z^2+2}$
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.64: $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$
جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.65: $f(z) = z^2 \sec z$
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.66: مسئلہ کوشی کا اطلاق $f(z) = z$ پر کرتے ہوئے سوال 16.60 سے سوال 16.61 کا جواب حاصل کریں۔

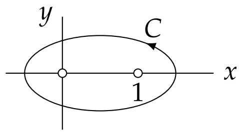
سوال 16.67: تبدیلی راہ کا اصول اور

$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں جہاں C کو شکل 16.67 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-1} = i4\pi$$

سوال 16.68: تفاعل $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$ کا تکمل گھڑی کی الٹ رخ (الف) دائرہ $|z| = 2$ اور (ب) دائرہ $|z| = 4$ پر حاصل کریں۔کیا (الف) کے جواب سے تبدیلی راہ کے قاعدہ کی مدد سے (ب) کا جواب حاصل کیا جا



شکل 16.11: شکل برائے سوال 16.67

سکتا ہے؟
جواب: (الف) $i2\pi$ ، (ب) $i2\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.69 تا سوال 16.77 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں تفاعل کو جزوی کسر کی صورت میں لکھیں۔

سوال 16.69: گھڑی کی رخ $C : |z-2| = 1$ $\quad \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z},$
جواب: 0

سوال 16.70: گھڑی کی الٹ رخ (ب) $C : |z| = \frac{1}{2}$ (الف) $C : |z| = 2,$ $\quad \int_C \frac{z^2-z-1}{z^3-z^2}\,\mathrm{d}z,$
جواب: (الف) $i2\pi$، (ب) 0

سوال 16.71: گھڑی کی رخ, (ب) $C : |z-1| = 1,$ (الف) $C : |z| = 2,$ $\quad \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1},$
جواب: (الف) 0، (ب) $-i\pi$

سوال 16.72: گھڑی کی الٹ رخ, (ب) $C : |z+i| = 1,$ (الف) $C : |z| = 2,$ $\quad \int_C \frac{z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z,$
جواب: (الف) $i2\pi$، (ب) $i\pi$

سوال 16.73: گھڑی کی الٹ رخ, (ب) $C : |z-i| = 1,$ (الف) $C : |z+i| = 1,$ $\quad \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1},$
جواب: (الف) $-\pi$، (ب) π

سوال 16.74: گھڑی کی الٹ رخ, (ب) $C : |z| = 1,$ (الف) $C : |z| = 2,$ $\quad \int_C \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z,$
جواب: (الف) 0، (ب) 0

سوال 16.75: گھڑی کی الٹ رخ, (الف) $C : |z-i2| = 1,$ $\quad \int_C \frac{\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z,$
جواب: 0

سوال 16.76: گھڑی کی الٹ رخ $\int_C \frac{3z+1}{z^3-z}\,\mathrm{d}z,\quad$ (الف) $C:|z|=\frac{1}{2}$, (ب) $C:|z|=2$,
جواب: (الف) $-i2\pi$، (ب) $-i2\pi$

سوال 16.77: گھڑی کی الٹ رخ $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^4+4z^2},\quad$ (الف) $C:|z|=\frac{3}{2}$, (ب) $C:|z|=1$,
جواب: (الف) $i2\pi$، (ب) 0

16.4 خطی تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمل

کوشی مسئلہ تکمل استعمال کرتے ہوئے ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ بہت سارے مخلوط خطی تکمل کو ایک سادہ طریقہ کار، یعنی غیر قطعی تکمل، سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے اور D میں z_0 ایک مقررہ نقطہ ہے۔تب z_0 اور z کے درمیان D میں تمام راہ پر تکمل

$$\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^*$$

z کا تفاعل ہو گا لہٰذا ہم

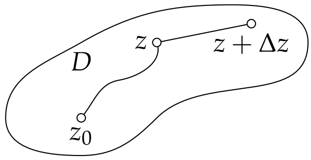
$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^* \tag{16.28}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں ثابت کرتے ہیں کہ D میں $F(z)$ متغیرہ z کا تحلیلی تفاعل ہے اور $F'(z)=f(z)$ ہے۔

ہم z کو مقررہ رکھتے ہیں۔چونکہ D دائرہ کار ہے لہٰذا z کی پڑوس N بھی D کا حصہ ہو گی۔ ہم N میں نقطہ $z+\Delta z$ یوں منتخب کرتے ہیں کہ وہ قطع جس کے سر z اور $z+\Delta z$ ہوں از خود N کا اور یوں D کا حصہ ہو۔ مساوات 16.28 سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^*-\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^*=\int_{z}^{z+\Delta z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^*$$



شکل 16.12: تکمل کی راہ

جہاں z تا $z+\Delta z$ تکمل کو اس قطع پر حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 16.12)۔ چونکہ z مقررہ ہے لہٰذا

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}[f(z^*)-f(z)]\,\mathrm{d}z^*$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$-\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}f(z)\,\mathrm{d}z^*=-\frac{f(z)}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}\mathrm{d}z^*=-f(z)$$

ہو گا۔ اب $f(z)$ استمراری ہے لہٰذا کسی بھی دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ہم ایسا $\sigma>0$ حاصل کر سکتے ہیں کہ

جب $\left|z^*-z\right|<\sigma$ ہو تب $\left|f(z^*)-f(z)\right|<\epsilon,$ ہو گا۔

نتیجتاً اگر $|\Delta z|<\sigma$ ہو تب

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|&=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(z^*)-f(z)]\,\mathrm{d}z^*\right|\\&<\frac{\epsilon}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}\mathrm{d}z^*\right|=\epsilon\end{aligned}$$

ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z) \tag{16.29}$$

اب مساوات 16.28 سے ہم دیکھتے ہیں کہ z_0 کی جگہ کوئی دوسرا مقررہ نقطہ منتخب کرنے سے تفاعل $F(z)$ کے ساتھ ایک مستقل جمع ہو گا۔ مساوات 16.29 سے ہم دیکھتے ہیں کہ $F(z)$ تفاعل $f(z)$ کا تفرق یا غیر قطعی تکمل ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے،

$$F(z)=\int f(z)\,\mathrm{d}z$$

یعنی D میں $F(z)$ تحلیلی تفاعل ہے جس کا تفرق $f(z)$ ہے۔

اگر $F'(z) = f(z)$ اور $G'(z) = f(z)$ ہوں تب D میں $F'(z) - G'(z) \equiv 0$ ہو گا۔یوں تفاعل $F(z) - G(z)$ ایک مستقل (سوال 14.133) ہو گا۔یوں غیر قطعی تکمل $F(z)$ اور $G(z)$ میں صرف ایک مستقل کا فرق ہو سکتا ہے۔اب مساوات 16.28 کو مد نظر رکھتے ہوئے D میں نقطہ a اور b اور D میں a تا b کسی بھی راہ کے لئے حقیقی قطعی تکمل کی طرح

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z_0}^b f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{z_0}^a f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$$

لکھا جا سکتا ہے، پس اتنا ضروری ہے کہ تکمل کی راہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں پائی جاتی ہو جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے۔

ہم متذکرہ بالا نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 16.2: **تکمل کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمل**

اگر سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب D میں $f(z)$ کا غیر قطعی تکمل موجود ہو گا، یعنی ایسا تحلیلی تفاعل $F(z)$ کہ D میں $F'(z) = f(z)$ ہو، اور D میں نقطہ a اور نقطہ b کے درمیان D میں ہر راہ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a) \tag{16.30}$$

یہ مسئلہ مخلوط خطی تکمل کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمل ممکن بناتا ہے۔یاد رہے کہ چونکہ $F(z)$ ایک مستقل جمعی جزو کے علاوہ یکتا ہے لہٰذا مساوات 16.30 میں ہم D میں $f(z)$ کا کوئی بھی غیر قطعی تکمل $F(z)$ لے سکتے ہیں۔

مثال 16.13:

$$\int_i^{1+i4} z^2\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z^3}{3}\right]_i^{1+i4} = \frac{1}{3}[(1+i4)^3 - i^3] = -\frac{47}{3} - i17$$

□

مثال 16.14:

$$\int_i^{\frac{\pi}{2}} \cos z\,\mathrm{d}z = \sin z\Big|_i^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin i = 1 - i\sinh 1$$

□

سوالات

سوال 16.78 تا سوال 16.97 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.78: $\int_i^{1+i2} z\,\mathrm{d}z$
جواب: $-1+i2$

سوال 16.79: $\int_i^2 z^2\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{3}(8+i)$

سوال 16.80: $\int_i^1 (z-1)^2\,\mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{2}{3}(1+i)$

سوال 16.81: $\int_{1+i}^{1-i} z^3\,\mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 16.82: $\int_1^{1+i\pi} e^z\,\mathrm{d}z$
جواب: $-2e$

سوال 16.83: $\int_{i\pi}^{i2\pi} e^{3z}\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{2}{3}$

سوال 16.84: $\int_{-i}^{i} ze^{z^2}\,\mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 16.85: $\int_{1-i\pi}^{1+i\pi} e^{\frac{z}{2}}\,\mathrm{d}z$
جواب: $i4\sqrt{e}$

سوال 16.86: $\int_0^{i\pi} \cos z\,\mathrm{d}z$
جواب: $i\sinh\pi$

سوال 16.87: $\int_0^{i\frac{\pi}{2}} \sin z\,\mathrm{d}z$
جواب: $1-\cosh\frac{\pi}{2}$

سوال 16.88: $\int_0^{i\frac{\pi}{2}} z\sin z^2\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi^2}{4})$

سوال 16.89: $\int_0^{i\frac{\pi}{2}} 16z \sin z \, \mathrm{d}z$
جواب: $-ie^{-\frac{\pi}{2}} \left[2\pi^2 e^{\frac{\pi}{2}} \sinh \frac{\pi}{2} + (-\pi^2 + 4\pi - 8)e^{\pi} + \pi^2 + 4\pi + 8\right]$

سوال 16.90: $\int_{-i\pi}^{i\pi} \sin^2 z \, \mathrm{d}z$
جواب: $i(\pi - \frac{1}{2} \sinh 2\pi)$

سوال 16.91: $\int_{1-i}^{1+i} \cos z \, \mathrm{d}z$
جواب: $\sin(i+1) + \sin(i-1)$

سوال 16.92: $\int_0^{i3} \cosh z \, \mathrm{d}z$
جواب: $i \sin 3$

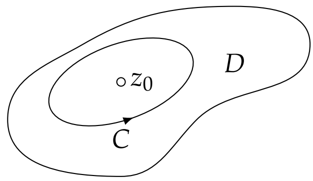
سوال 16.93: $\int_i^{1+i3} \sinh z \, \mathrm{d}z$
جواب: $\cosh(1+i3) - \cos 1$

سوال 16.94: $\int_0^{i3} \sinh z \, \mathrm{d}z$
جواب: $\cos 3 - 1$

سوال 16.95: $\int_i^{i3} z \sinh z^2 \, \mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{2}(\cosh 9 - \cosh 1)$

سوال 16.96: $\int_{-1}^{1} z \cosh z^2 \, \mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 16.97: $\int_{-i\pi}^{i\pi} z \cosh z \, \mathrm{d}z$
جواب: 0



شکل 16.13: کوشی کا کلیہ تکمل

16.5 کوشی کا کلیہ تکمل

کوشی کے مسئلہ تکمل کا اہم ترین نتیجہ کوشی کا کلیہ تکمل ہے۔ یہ کلیہ اور اس کے کے لازمی شرائط درج ذیل مسئلہ میں پیش کیے گئے ہیں۔

مسئلہ 16.3: **کوشی کا کلیہ تکمل**[12]
فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے۔ تب D میں کسی بھی نقطہ z_0 اور D میں کسی بھی بند راہ C جو z_0 کو گھیرتا (شکل 16.13) ہو درج ذیل ہو گا

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = i2\pi f(z_0) \qquad \text{کوشی کا کلیہ تکمل} \tag{16.31}$$

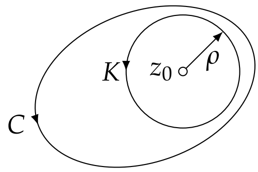
جہاں تکمل کو C پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$ لکھ کر یاد رکھتے ہوئے کہ مستقل کو تکمل سے باہر نکالا جا سکتا ہے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0)\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} + \int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \tag{16.32}$$

مثال 16.12 کے تحت دائیں ہاتھ پہلا تکمل $i2\pi f(z_0)$ کے برابر ہے۔ یوں مساوات 16.32 میں دائیں ہاتھ دوسرا تکمل صفر ہونے کی صورت میں مساوات 16.31 درست ثابت ہو گی۔ اب اس تکمل لا متکمل ماسوائے نقطہ z_0 کے D میں تحلیلی ہے۔ یوں ہم تکمل کی قیمت بغیر تبدیل کیے C کی جگہ z_0 کے گرد ایک چھوٹے دائرے پر تکمل

[12] Cauchy's integral formula



شکل 16.14: کوشی کے کلیہ تکمل کا ثبوت

حاصل کر سکتے ہیں (شکل 16.14)۔ چونکہ $f(z)$ تحلیلی ہے لہٰذا یہ استمراری ہے۔ یوں کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم ایسا $\sigma > 0$ تلاش کر سکتے ہیں کہ

قرص $|z - z_0| < \sigma$ میں ہر z کے لئے $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ ہو گا۔

قرص کا رداس ρ چھوٹے سے چھوٹا کرتے ہوئے K کو σ سے کم بنایا جا سکتا ہے۔ یوں K پر ہر نقطہ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\epsilon}{\rho}$$

K کی لمبائی $2\pi\rho$ ہے۔ یوں مساوات 16.16 کے تحت

$$\left|\int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon$$

ہو گا۔ چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں لہٰذا مساوات 16.32 میں آخری تکمل صفر ہو گا۔ یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 16.15: مختلف راہوں پر تکمل کی قیمت

درج ذیل تکمل گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر حاصل کریں۔ دائرے کا مرکز (الف) $z = 1$، (ب) $z = \frac{1}{2}$، (پ) $z = -1$ اور (ت) $z = i$ پر لیں۔

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z$$

جواب: (الف) اس تکمل کو

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{z^2+1}{z+1}\frac{\mathrm{d}z}{z-1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔دائیں ہاتھ کا مساوات 16.31 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ نقطہ $z_0 = 1$ دائرہ C کے اندر پایا جاتا ہے اور $f(z)$ راہ C پر اور اس کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی ہے (نقطہ $z=-1$ جہاں $f(z)$ غیر تحلیلی ہے C کے باہر پایا جاتا ہے۔) للہذا کوشی کے کلیہ تکمل کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{z^2+1}{z+1}\frac{\mathrm{d}z}{z-1} = i2\pi\Big[\frac{z^2+1}{z+1}\Big]_{z=1} = i2\pi$$

(ب) ہمیں یہی نتیجہ دوبارہ ملتا ہے چونکہ دیا گیا تفاعل نقطہ $z=1$ اور نقطہ $z=-1$ پر غیر تحلیلی ہے اور ہم (الف) میں استعمال ہوئے دائرے کو، بغیر کسی غیر تحلیلی نقطہ سے گزرتے ہوئے، مسلسل تبدیل کرتے ہوئے یہاں درکار دائرہ حاصل کر سکتا ہے۔

(پ) ہم اب درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

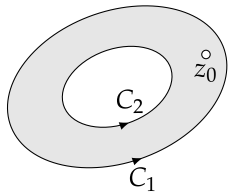
$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{z^2+1}{z-1}\frac{\mathrm{d}z}{z+1} = i2\pi\Big[\frac{z^2}{z-1}\Big]_{z=-1} = -i2\pi$$

(ت) چونکہ دیا گیا تفاعل دائرے پر اور دائرے کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی ہے للہذا کوشی کے کلیہ تکمل کے تحت یہ تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ □

مضرب تعلق دائرہ کار میں ہم حصہ 16.3 کی طرح ہی بڑھتے ہیں۔مثلاً اگر C_1 اور C_2 کے درمیان دائرہ کار (شکل 16.15) میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور C_1 اور C_2 پر بھی $f(z)$ تحلیلی ہو اور اس دائرہ کار میں z_0 کوئی نقطہ ہو تب

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{i2\pi}\int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \tag{16.33}$$

ہو گا جہاں دونوں تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیے جائیں گے۔



شکل 16.15: شکل برائے مساوات 16.33

سوالات

سوال 16.98 تا سوال 16.101 میں دیے دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ $\frac{z^2}{z^2+1}$ کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.98: $|z+i|=1$
جواب: π

سوال 16.99: $|z-i|=\frac{2}{3}$
جواب: $-\pi$

سوال 16.100: $|z|=3$
جواب: 0

سوال 16.101: $|z|=\frac{1}{3}$
جواب: 0

سوال 16.102 تا سوال 16.105 میں گھڑی کی الٹ رخ دیے گئے دائرے پر $\frac{z^2}{z^4-1}$ کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.102: $|z-1|=1$
جواب: $i\frac{\pi}{2}$

سوال 16.103: $|z+i|=1$
جواب: $-\frac{\pi}{2}$

سوال 16.104: $|z-i|=1$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 16.105: $|z| = 3$
جواب: 0

سوال 16.106 تا سوال 16.117 میں دیے تفاعل کی اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کریں۔

سوال 16.106: $\frac{1}{z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.107: $\frac{1}{z^2+9}$
جواب: 0

سوال 16.108: $\frac{1}{3z+1}$
جواب: $i\frac{2\pi}{3}$

سوال 16.109: $\frac{e^z}{z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.110: $\frac{e^{3z}}{z+i3}$
جواب: 0

سوال 16.111: $\frac{e^{3z}}{3z+i}$
جواب: $\frac{i2\pi e^{-i}}{3}$

سوال 16.112: $\frac{\cos z}{z}$
جواب: $i2\pi$

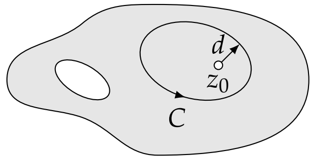
سوال 16.113: $\frac{\sin z}{z}$
جواب: 0

سوال 16.114: $\frac{e^z-1}{z}$
جواب: 0

سوال 16.115: $\frac{\sinh z}{z}$
جواب: 0

سوال 16.116: $\frac{\cosh z}{z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.117: $\frac{\cosh z}{z-2}$
جواب: 0



شکل 16.16: شکل برائے مسئلہ 16.4

16.6 تحلیلی تفاعل کے تفرق

یہ جانتے ہوئے کہ ایک حقیقی تفاعل ایک مرتبہ قابل تفرق ہے سے یہ جاننا ممکن نہیں ہے کہ اس کے بلند درجی تفرق موجود ہوں گے یا نہیں۔ہم اب دیکھیں گے کہ یہ جانتے ہوئے کہ ایک مخلوط تفاعل کا دائرہ کار D میں ایک درجی تفرق موجود ہے سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ D میں اس تفاعل کے ہر درجے کا تفرق موجود ہو گا۔اس لحاظ سے مخلوط تفاعل ایک مرتبہ قابل تفرق حقیقی تفاعل سے زیادہ سادہ رویہ رکھتے ہیں۔

مسئلہ 16.4: **تحلیلی تفاعل کے تفرق**
دائرہ کار D میں تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا D میں ہر درجے کا تفرق موجود ہے اور ایسا تفرق از خود D میں تحلیلی ہو گا۔ D میں نقطہ z_0 پر ان تفاعل کے تفرق درج ذیل کلیات

$$f'(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z \tag{16.34}$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,\mathrm{d}z \tag{16.35}$$

اور عمومی کلیہ

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{16.36}$$

سے حاصل ہوں گے جہاں دائرہ کار D میں C کوئی بھی ایسی سادہ بند راہ ہے جو z_0 کو گھیرتی ہو اور جس کی مکمل اندرون D میں پائی جاتی ہو؛ تکمل گھڑی کی الٹ رخ C پر حاصل کیا جاتا ہے (شکل 16.16)۔

رائے۔ مساوات 16.31 میں تکمل کی نشان کے اندر z_0 کے لحاظ سے تفرق لینے سے مساوات 16.36 کو باضابطہ طور پر حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 16.36 کو یاد رکھنے کا یہی بہترین طریقہ ہے۔

ثبوت: ہم مساوات 16.34 کو ثابت کرتے ہیں۔ تفرق کی تعریف کے تحت

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

ہو گا۔یوں کوشی کے کلیہ تکمل مساوات 16.31 سے

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{i2\pi\Delta z} \Big[\int_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} \,\mathrm{d}z - \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z \Big] \tag{16.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{\Delta z}\Big[\frac{1}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{z - z_0}\Big] = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}$$

یوں مساوات 16.37 کو

$$f'(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \,\mathrm{d}z + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} \,\mathrm{d}z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر ہم ثابت کر سکیں کہ دائیں ہاتھ آخری جزو صفر کے برابر ہے تب ہم مساوات 16.34 کو ثابت کر پائیں گے۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

C پر تفاعل $f(z)$ استمراری ہے۔یوں C پر $f(z)$ کی حتمی قیمت محدود ہو گی مثلاً $|f(z)| < M$ جہاں M حقیقی عدد ہے۔فرض کریں کہ z_0 سے C کا قریب ترین نقطہ یا نقطوں کا فاصلہ d ہے۔تب C پر تمام z کے لئے

$$\frac{1}{|z - z_0|} \le \frac{1}{d} \quad \text{اور} \quad |z - z_0| \ge d$$

ہوں گے۔ مزید اگر $|\Delta z| \le \frac{d}{2}$ ہو تب C پر تمام z کے لئے

$$\frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \le \frac{2}{d} \quad \text{اور} \quad |z - z_0 - \Delta z| \ge \frac{d}{2}$$

ہوں گے۔یوں C کی لمبائی کو L سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 16.16 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\left|\frac{\Delta z}{i2\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{|\Delta z|}{2\pi}\frac{M}{\frac{1}{2}dd^2}L \qquad \left(|\Delta z| \le \frac{d}{2}\right)$$

Δz صفر کے قریب پہنچنے سے دایاں ہاتھ بھی صفر کے قریب پہنچتا ہے۔ یوں مساوات 16.34 ثابت ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے یہاں کوشی کا کلیہ تکمل مساوات 16.31 استعمال کیا لیکن اگر ہمیں صرف اتنا معلوم ہوتا کہ $f(z_0)$ کو مساوات 16.31 سے ظاہر کیا جا سکتا ہے تب ہمارے متذکرہ بالا دلائل اس حقیقت کو ثابت کر پاتے کہ $f(z)$ کا تفرق $f'(z_0)$ موجود ہے۔اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ اسی طرح کے دلائل مساوات 16.32 کو ثابت کر پائیں گے۔اسی طرح الکراجی ماخوذ سے ہم عمومی تفرق کی مساوات 16.36 کو بھی ثابت کر پائیں گے۔

□

مسئلہ 16.4 کی استعمال سے مسئلہ کوشی کا الٹ ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 16.5: **مسئلہ موریرا**[13]
اگر سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ استمراری ہو اور D میں ہر بند راہ پر

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{16.38}$$

ہو تب D میں $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔

ثبوت: حصہ 16.4 میں دکھایا گیا کہ D میں $f(z)$ تحلیلی ہونے کی صورت میں D میں

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^*$$

تحلیلی ہو گا اور $F'(z) = f(z)$ ہو گا۔ ایسا ثابت کرتے ہوئے ہم نے صرف $f(z)$ کی استمرار اور اس حقیقت کو استعمال کیا کہ D میں ہر بند راہ پر $f(z)$ کا تکمل صفر ہے؛ ان مفروضوں سے ہم نے اخذ کیا کہ $F(z)$ تحلیلی ہے۔ مسئلہ 16.4 کے تحت $F(z)$ کا تفرق تحلیلی ہے یعنی D میں $f(z)$ تحلیلی ہے۔یوں مسئلہ موریرا ثابت ہوا۔

[13] اطالوی ریاضی دان جاچینتو موریرا [1856-1909]

□

ہم اب ایک اہم عدم مساوات دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 16.36 میں فرض کریں کہ C رداس r کا ایک دائرہ ہے جس کا مرکز z_0 پر ہے اور C پر $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت M ہے۔تب مساوات 16.16 کو مساوات 16.36 پر لاگو کرتے ہوئے

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{n!}{2\pi}M\frac{1}{r^{n+1}}2\pi r$$

ملتا ہے جس سے **کوشی عدم مساوات**[14]

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!M}{r^n} \tag{16.39}$$

حاصل ہوتی ہے۔

آئیں مساوات 16.39 سے درج ذیل اہم اور بنیادی نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

مسئلہ 16.6: **مسئلہ لیوویل**
محدود مخلوط مستوی (حصہ 15.3) میں تمام z کے لئے تحلیلی $f(z)$ اور محدود $|f(z)|$ کی صورت میں $f(z)$ مستقل ہو گا۔

ثبوت: ہم فرض کر چکے ہیں کہ تمام z کے لئے $|f(z)|$ محدود ہے مثلاً $|f(z)| < K$ جہاں K حقیقی عددی ہے۔ مساوات 16.39 استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $|f'(z_0)| < \frac{K}{r}$ ہو گا۔چونکہ یہ ہر r کے لئے درست ہے لہٰذا ہم r کو جتنا چاہیں بڑا لے سکتے ہیں جس سے $f'(z_0) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ z_0 اختیاری ہے اور تمام محدود z کے لئے $f'(z) = 0$ ہے لہٰذا $f(z)$ مستقل (سوال 14.133) ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

---

[14] Cauchy's inequality

سوالات

سوال 16.118 تا سوال 16.132 میں دیے تفاعل کا گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر تکمل تلاش کریں۔

سوال 16.118: $\frac{z^2}{(3z-1)^2}$
جواب: $i\frac{4\pi}{27}$

سوال 16.119: $\frac{z^2}{(3z-1)^4}$
جواب: 0

سوال 16.120: $\frac{z^2}{(2z-i)^3}$
جواب: $-\frac{3\pi}{8}$

سوال 16.121: $\frac{z^4}{(z+i)^2}$
جواب: -8π

سوال 16.122: $\frac{z}{(5z+i)^2}$
جواب: $i\frac{2\pi}{25}$

سوال 16.123: $\frac{e^z}{z^2}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.124: $\frac{e^z}{z^4}$
جواب: $i\frac{\pi}{3}$

سوال 16.125: $\frac{e^z}{z^n}$
جواب: $i\frac{2\pi}{(n-1)!}$

سوال 16.126: $\frac{ze^z}{(z+i\pi)^2}$
جواب: $i2\pi(i\pi-1)$

سوال 16.127: $z^{-2}\cos z$
جواب: 0

سوال 16.128: $z^{-2}\sin z$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.129: $z^{-2n-1}\cos z$
جواب: $i\frac{2\pi(-1)^n}{(2n)!}$

سوال 16.130: $\frac{e^{z^2}}{z^3}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.131: $z^{-2}e^z\sin z$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.132: $z^{-3}e^{z^3}$
جواب: 0

سوال 16.133: اگر $f(z)$ غیر مستقل ہو اور تمام (محدود) z کے لئے تحلیلی ہو، اور R اور M کوئی مثبت حقیقی اعداد ہیں (جو جتنا چاہیں بڑے ہو سکتے ہیں) تب دکھائیں کہ z کی ایسی قیمتیں موجود ہوں گی جن کے لئے $|z|>R$ اور $|f(z)|>M$ ہو گا۔اشارہ۔ مسئلہ لیوویل استعمال کریں۔

سوال 16.134: اگر $f(z)$ درجہ $n>0$ کا کثیر رکنی ہو اور M (جتنا چاہیں بڑا) اختیاری مثبت حقیقی عدد ہو تب دکھائیں کہ ایسا حقیقی مثبت عدد R موجود ہو گا کہ تمام $|z|>R$ کے لئے $|f(z)|>M$ ہو گا۔

سوال 16.135: دکھائیں کہ $f(z)=e^z$ سوال 16.133 میں بیان کی گئی خاصیت رکھتا ہے جبکہ سوال 16.134 میں بیان کہ گئی خاصیت نہیں رکھتا ہے۔

سوال 16.136: **الجبرا کا بنیادی مسئلہ**[15] کہتا ہے کہ اگر غیر مستقل تفاعل $f(z)$ متغیرہ z کا کثیر رکنی ہو تب z کی کم از کم ایک قیمت کے لئے $f(z)=0$ ہو گا۔اس مسئلے کو ثابت کریں۔ اشارہ۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام z کے لئے $f(z)\neq 0$ ہے سوال 16.133 کا نتیجہ $g=\frac{1}{f}$ پر لاگو کریں۔

[15] Fundamental theorem of algebra

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$(\text{الف})\quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad (\text{ب})\quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\,z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\,y'^2 + |q|\,z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\,z + |q|\,z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلی تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

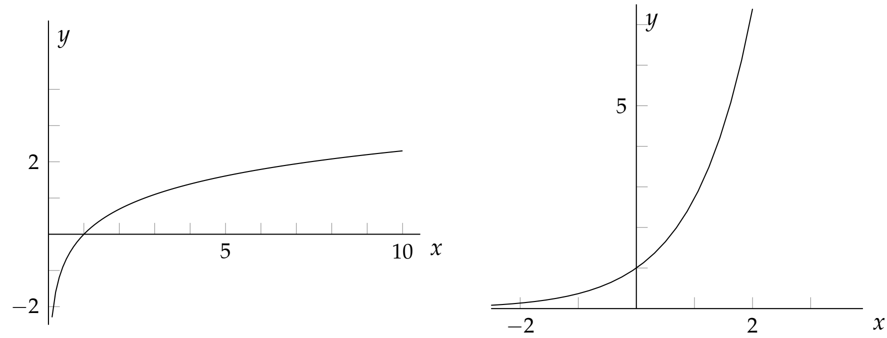
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

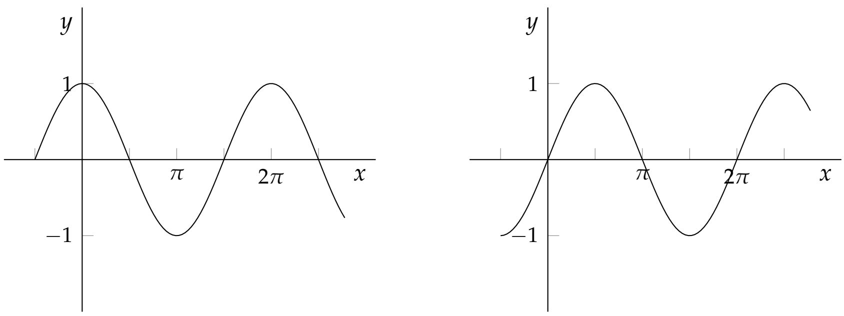
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب)قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف)قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{-\log x}=10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}1^\circ &= 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}\\ 1\,\text{radian} &= 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ\end{aligned}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

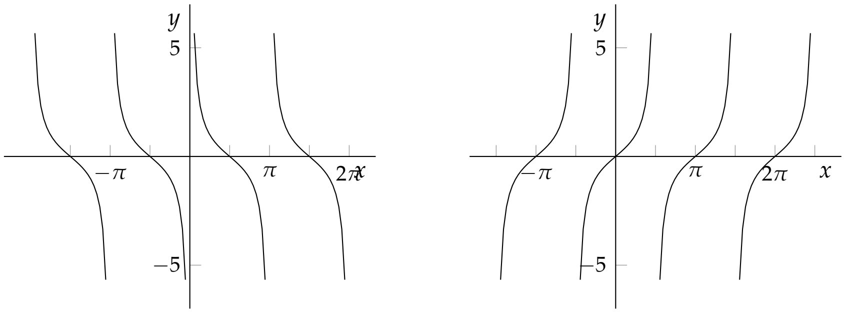
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

(ب.17)
$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered}$$

(ب.18)
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

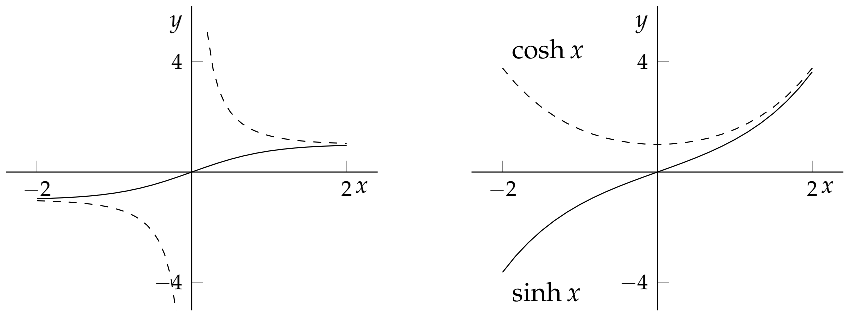
(ب.19)
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

(ب.20)
$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned}$$

(ب.21)
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

(ب.22)
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

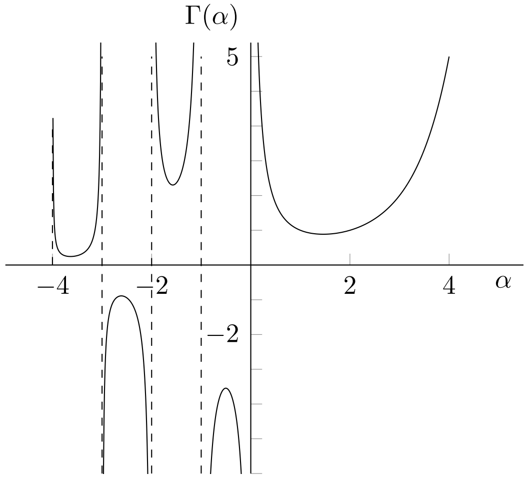
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0, \; y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

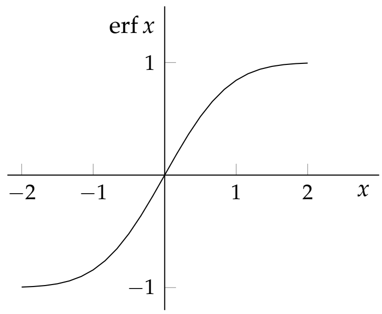
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

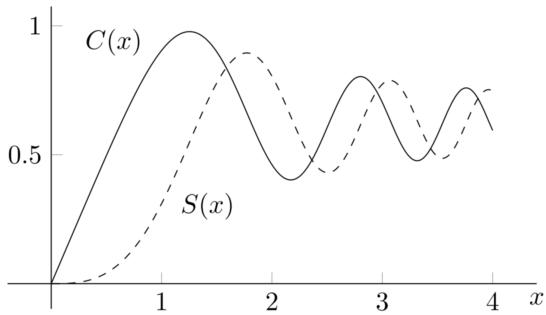
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2) \, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2) \, \mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{ب.37}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{ب.38}$$

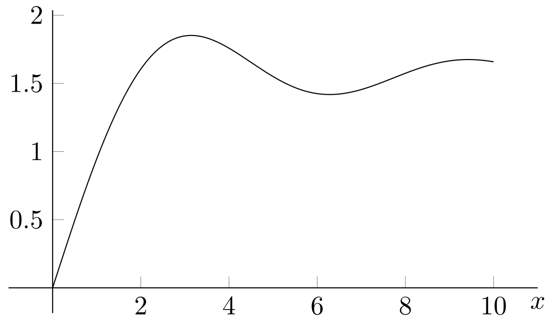
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.40}$$

[1]complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{41.ب}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{42.ب}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{43.ب}$$