انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 20

مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ

مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ انجینئری حساب میں اہم ترین جزوی تفرقی مساوات میں سے ایک ہے چونکہ یہ ثقلی میدان (حصہ 10.8)، ساکن برقی میدان (حصہ 13.11)، برقرار حال ایصال حرارت (حصہ 15.5)، داب ناپذیر بہاو سیال، وغیرہ کے مسئلوں میں پایا جاتا ہے۔ اس مساوات کے حل کو **نظریہ مخفی قوہ**[1] کہتے ہیں۔

دو بعدی صورت جہاں u کارتیسی محدد کے دو محور x اور y کے تابع ہو میں لاپلاس مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ تب اس کے حل مخلوط تحلیلی تفاعل (حصہ 14.5) کے ساتھ گہرا تعلق رکھتے[2] ہیں۔ ہم اس تعلق پر اب تفصیلاً غور کرتے ہیں اور ماقوا حرکیات اور برقی سکون سے چند مثال بھی پیش کریں گے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ تحلیلی تفاعل کے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے ہارمونی تفاعل کی مختلف عمومی خواص بیان کی جا سکتی ہیں (حصہ ??)۔ آخر میں ہم دائری قرص پر مساوات لاپلاس کے سرحدی مسائل کے حل کا ایک اہم عمومی کلیہ (پوسوں تکملی کلیہ) اخذ کریں گے۔

[1] potential theory

[2] تین بعدی صورت میں ایسا گہرا تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

20.1 ساکن برقی سکون

بار بردار ذرات کے مابین قوت کشش یا دفع کو کلیہ کولمب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہ قوت تفاعل u جس کو **برقی ساکن مخفی قوہ**[3] کہتے ہیں کی ڈھلوان ہے، اور بار سے پاک نقطوں پر u مساوات لاپلاس (حصہ 13.11)

$$\nabla^2 u = 0$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ سطحیں $u =$ مستقل کو **ہم قوہ سطحیں**[4] کہتے ہیں۔ہر نقطہ N پر u کی ڈھلوان نقطہ N پر سطح $u =$ مستقل کی قائمہ ہو گی، یعنی برقی قوت اور ہم قوہ سطح آپس میں قائمہ ہوں گے۔

مثال 20.1: متوازی چادروں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ
دو لامتناہی وسعت کی متوازی موصل چادر جنہیں بالترتیب U_1 اور U_2 برقی دباو پر رکھا گیا ہے کے درمیان مخفی قوہ تلاش کریں (شکل 20.1-الف)۔چادروں کی شکل سے ظاہر ہے کہ u صرف x کا تابع ہو گا لہٰذا مساوات لاپلاس $u'' = 0$ صورت اختیار کرتی ہے۔دو مرتبہ تکمل لے کر $u = ax + b$ حاصل ہوتا ہے جہاں مستقل a اور b کو چادروں پر برقی دباو u کی سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر اگر چادر $x = -1$ اور $x = 1$ پر واقع ہوں تب حل

$$u(x) = \frac{1}{2}(U_2 - U_1)x + \frac{1}{2}(U_2 + U_1)$$

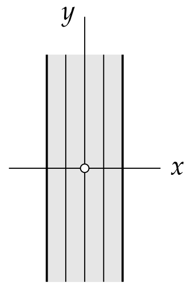
ہو گا۔ہم قوہ سطحیں چادروں کے متوازی سطحیں ہوں گی۔ □

مثال 20.2: ہم محور نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ
دو لامتناہی لمبائی کی ہم محور موصل نلکیاں جنہیں بالترتیب U_1 اور U_2 مخفی قوہ پر رکھا گیا ہو کے درمیان مخفی قوہ تلاش کریں (شکل 20.1-ب)۔ یہاں تشاکل کی بنا u صرف $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا تابع ہو گا اور مساوات لاپلاس

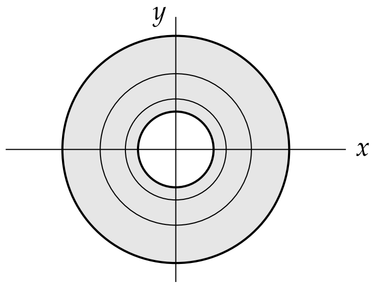
$$ru'' + u' = 0 \qquad \text{(مساوات 13.97 دیکھیں)}$$

---

[3] electrostatic potential
[4] equipotential surfaces



(الف) متوازی چادروں کے درمیان مخفی قوہ



(ب) ہم محور موصل نلکیوں کے درمیان مخفی قوہ

شکل 20.1: اشکال برائے مثال 20.1 اور مثال 20.2

صورت اختیار کرتی ہے۔ علیحدگی متغیرات کے بعد تکمل لینے سے

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{r}, \quad \ln u' = -\ln r + \tilde{a}, \quad u' = \frac{a}{r}, \quad u = a \ln r + b$$

حاصل ہو گا جہاں مستقل a اور b کو ہم محوری نلکیوں پر u کی دی گئی قیمتوں سے حاصل کیا جائے گا۔ اگرچہ لا متناہی لمبائی کی موصل نلکی کہیں نہیں پائی جاتی ہے، ہماری حاصل کردہ مخفی قوہ کسی بھی لمبی موصل نلکی کے اندر، نلکی کی سروں سے دور، اصل مخفی قوہ کے بہت قریب مخفی قوہ دے گی۔ □

اگر مخفی قوہ صرف دو کارتیسی محدد x اور y پر منحصر ہو تب مساوات لاپلاس درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{20.1}$$

مستوی xy میں ہم قوہ سطحیں $u =$ مستقل بطور ہم قوہ خطوط نظر آئیں گی۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $u(x, y)$ ہارمونی ہے یعنی اس کے دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ اب اگر $u(x, y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x, y)$ ہو (حصہ 14.5) تب تفاعل

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

متغیرہ $z = x + iy$ کا تحلیلی تفاعل ہو گا۔ اس تفاعل کو حقیقی مخفی قوہ u کا **مطابقتی مخلوط مخفی قوہ**[5] کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ u کا جوڑی دار، ما سوائے جمعی حقیقی جزو کے، یکتا ہو گا۔

[5] complex potential

چونکہ خطوط $v =$ مستقل ہم قوہ خطوط $u =$ مستقل کو قائمہ الزاویہ قطع کرتی ہیں [ما سوائے ان نقطوں پر جہاں $F'(z) = 0$ ہو] لہٰذا ان کی سمت اور برقی قوت کی سمت ایک ہو گی۔اسی لئے $v =$ مستقل کو **خطوط قوت**[6] کہتے ہیں۔

مثال 20.3: **مخلوط مخفی قوہ**
مثال 20.1 میں u کا جوڑی دار $v = ay$ ہے۔یوں مخلوط مخفی قوہ

$$F(z) = az + b = ax + b + iay$$

ہو گا اور خطوط قوت x محور کے متوازی سیدھی لکیریں ہوں گی۔ □

مثال 20.4: **مخلوط مخفی قوہ**
مثال 20.2 میں

$$u = a \ln r + b = a \ln|z| + b$$

ہے جس کا جوڑی دار $v = \underline{/z}$ ہے۔یوں مخلوط مخفی قوہ $F(z) = a \ln z + b$ ہو گا اور قوت کے خطوط مبدا سے گزرتی سیدھی لکیریں ہوں گی۔ $F(z)$ کو ایسی منبع لکیر کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کا xy مستوی میں عکس مبدا ہو۔ □

عموماً خطی میل کی مدد سے زیادہ پیچیدہ مخفی قوہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔درج ذیل مثال میں ایسا کیا گیا ہے۔

مثال 20.5: **جوڑی منبع لکیروں کی مخلوط مخفی قوہ**
$z = x_1$ اور $z = x_2$ پر یکساں لیکن مخالف علامت کی بار بردار منبع لکیریں پائی جاتی ہیں۔ان کا مخلوط مخفی قوہ تلاش کریں۔ مثال 20.2 اور مثال 20.2 سے ان منبع لکیروں کی مخفی قوہ

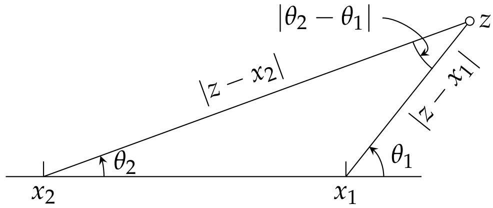
$$u_1 = -c \ln|z - x_1|, \quad u_2 = c \ln|z - x_2|$$

ہوں گی جو درج ذیل مخلوط مخفی قوہ کے حقیقی اجزاء ہیں۔

$$F_1(z) = -c \ln(z - x_1), \quad F_2(z) = c \ln(z - x_2)$$

---

[6] force lines



شکل 20.2: شکل برائے مثال 20.5

یوں دونوں منبع لکیروں کا مجموعی مخلوط مخفی قوہ

$$F(z)=F_1(z)+F_2(z)=c\ln\frac{z-x_2}{z-x_1} \tag{20.2}$$

ہو گا۔ہم قوہ خطوط درج ذیل منحنیات

$$u=F(z)\,\text{حقیقی}=c\ln\frac{|z-x_2|}{|z-x_1|}=\text{مستقل}$$

ہوں گی جو دائرے ہیں۔ قوت کی لکیریں درج ذیل منحنیات

$$v=F(z)\,\text{خیالی}=c\,\angle\frac{z-x_2}{z-x_1}=c[\angle z-x_2-\angle z-x_1]=\text{مستقل}$$

یعنی

$$v=c(\theta_2-\theta_1)=\text{مستقل}$$

ہوں گی (شکل 20.2)۔اب در حقیقت $|\theta_2-\theta_1|$ نقطہ z سے x_1 اور x_2 تک لکیروں کے مابین زاویہ ہے۔یوں قوت کی لکیریں ایسی منحنیات ہوں گی جن پر قطع x_1x_2 کا زاویہ تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ مساوات 20.2 میں دیے گیے تفاعل کو ایسی غیر ہم محور نلکی برق گیر کے اندر کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کے دونوں نلکیوں کے محور متوازی ہوں۔ □

سوالات

سوال 20.1 تا سوال 20.4 میں لامتناہی لمبائی کے دو ہم محور نلکیوں کے رداس r_1 اور $r_2\,(>r_1)$ ہیں جنہیں بالترتیب برقی دباو U_1 اور U_2 پر رکھا جاتا ہے۔ان نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ u تلاش کریں۔

سوال 20.1: $r_1 = 1,\ r_2 = 5,\ U_1 = 0,\ U_2 = 100\,\mathrm{V}$
جواب: $u = \frac{100}{\ln 5}\ln r = 62.13 \ln r$

سوال 20.2: $r_1 = 0.5,\ r_2 = 2,\ U_1 = -110,\ U_2 = 110\,\mathrm{V}$
جواب: $u = \frac{220}{\ln 4}\ln r$

سوال 20.3: $r_1 = 2,\ r_2 = 20,\ U_1 = 100,\ U_2 = 200\,\mathrm{V}$
جواب: $u = \frac{100}{\ln 10}(\ln r + \ln 5)$

سوال 20.4: $r_1 = 3,\ r_2 = 6,\ U_1 = 100,\ U_2 = 50\,\mathrm{V}$
جواب: $u = -\frac{50}{\ln 2}(\ln r - 50 \ln 12)$

سوال 20.5: مخلوط مخفی قوہ $F(z) = \frac{1}{z}$ کی ہم قوہ خطوط تلاش کریں اور ان کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: $(x - \frac{1}{2c})^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$

سوال 20.6: نقطہ $z = a$ اور $z = -a$ پر آپس میں الٹ علامتی بار سے بار بردار منبع کی لکیریں پائی جاتی ہیں۔ہم قوہ خطوط کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 20.7: نقطہ $z = a$ اور $z = -a$ پر یکساں علامتی بار سے بار بردار منبع کی لکیریں پائی جاتی ہیں۔ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔
جواب: $u = c\ln(z^2 - a^2)\ \text{حقیقی} = c\ln\left|z^2 - a^2\right|$

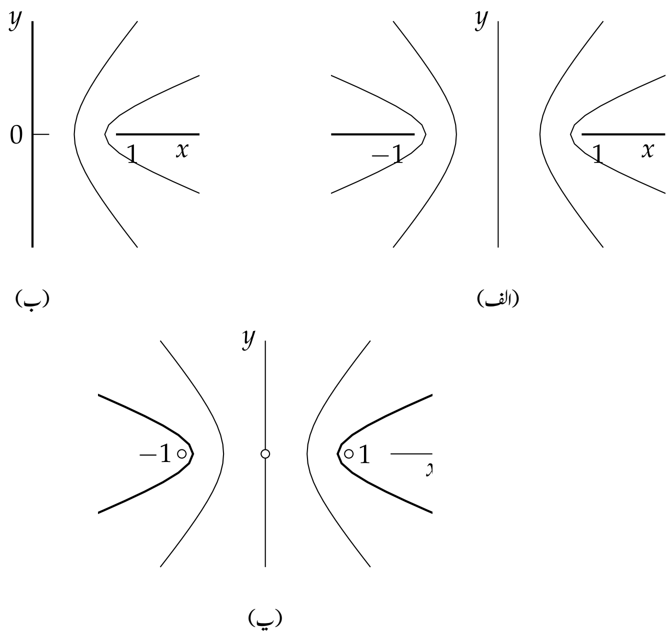
سوال 20.8: دکھائیں کہ $F(z) = \cos^{-1} z$ کو شکل 20.3 میں دکھائی گئی تینوں شکل کی موصل چادروں کی مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

سوال 20.9: دکھائیں کہ $F(z) = \cosh^{-1} z$ کو دو ہم ماسکہ ترخیمی نلکیوں کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔
جواب:

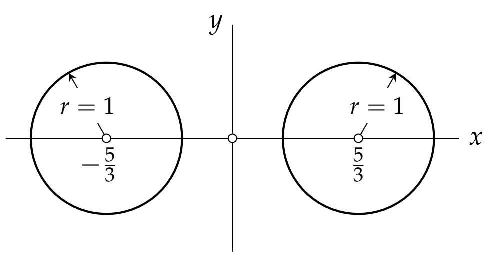
$$z = x + iy = \cosh(u + iv) = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v, \quad \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1$$

یوں ہم قوہ خطوط $u =$ مستقل ہم ماسکہ ترخیم ہیں۔

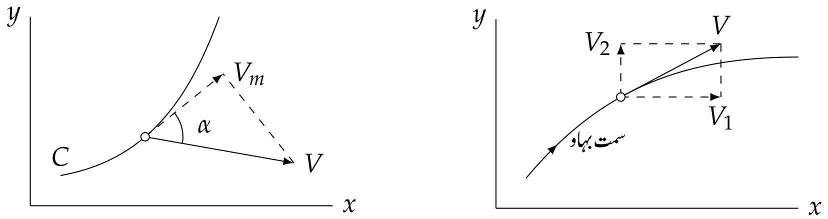
سوال 20.10: شکل 20.4 میں لامتناہی لمبائی کے دو نلکیاں دکھائی گئی ہیں۔بایاں نلکی پر $u = -1$ اور دایاں نلکی پر $u = 1$ ہے۔نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ u تلاش کریں۔ اشارہ۔ سوال 20.6 کا نتیجہ استعمال کریں۔



شکل 20.3: شکل برائے سوال 20.8



شکل 20.4: شکل برائے سوال 20.10



(ب) منحنی C کو سمتی رفتار کا مماسی جزو

(الف) سمتی رفتار

شکل 20.5: سمت بہاو اور سمتی رفتار

20.2 دو بعدی بہاو سیال

ہارمونی تفاعل بہاو سیال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔آئیں غیر چپچپا سیال کا دو بعدی برقرار بہاو پر غور کرتے ہیں۔یہاں "دو بعدی" کا مطلب ہے کہ xy مستوی کے متوازی تمام سطحوں میں سیال کی حرکت یکساں ہے اور حرکت ان سطحوں کے متوازی ہے۔ایسی صورت میں صفر xy سطح میں حرکت پر غور کرنا کافی ہو گا۔"برقرار" کا مطلب ہے کہ سمتی رفتار وقت کا تابع نہیں ہے۔

کسی بھی نقطہ (x, y) پر بہاو کی سمتی رفتار پائی جائے گی جس کو اس کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا سمتی رفتار ایک سمتیہ ہو گا۔چونکہ مخلوط سطح میں کوئی بھی عدد a ایک سمتیہ کو ظاہر کرتا ہے (جو مبدا سے عدد a کی مطابقتی مقام تک کا سمتیہ ہو گا) لہٰذا ہم بہاو کی سمتی رفتار کو مخلوط متغیرہ سے ظاہر کر سکتے ہیں مثلاً

$$V = V_1 + iV_2 \tag{20.3}$$

جہاں مخلوط سطح پر سمتی رفتار کے x اور y سمت میں اجزاء بالترتیب V_1 اور V_2 ہوں گے اور V حرکت کرتے ذرات کی راہ کو مماسی ہو گا۔ایسی راہ کو سمت بہاو[7] کہتے ہیں (شکل 20.5-الف)۔

اب کسی ایک ہموار منحنی C پر غور کریں جس کی لمبائی قوس کو ہم s سے ظاہر کرتے ہیں۔فرض کریں کہ C کو مماسی سمتی رفتار V کا جزو حقیقی متغیرہ V_m ہے (شکل 20.5-ب) تب C پر s کی بڑھتی رخ خطی تکمل

$$\int_C V_m \, \mathrm{d}s \tag{20.4}$$

---

[7] streamline

C کو C پر سیال کی **دائری بہاو**[8] کہتے ہیں۔دائری بہاو کو C کی لمبائی سے تقسیم کرنے سے منحنی C پر اوسط سمتی رفتار[9] حاصل ہوتی ہے۔اب شکل 20.5 سے

$$V_m = |V| \cos \alpha$$

لکھا جا سکتا ہے۔نتیجتاً C کے اکائی مماسی سمتیہ (حصہ 15.2)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + i\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

اور V کا اندرونی ضرب (حصہ 7.5) V_m ہو گا جہاں C کو $z(s) = x(s) + iy(s)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔اس طرح $V_m \,\mathrm{d}s$ کو

$$V_m \,\mathrm{d}s = V \cdot \mathrm{d}z = V_1 \,\mathrm{d}x + V_2 \,\mathrm{d}y \qquad (\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$$

لکھا جا سکتا ہے۔(یہاں اچھی طرح سمجھ لیں کہ یہ دو سمتیات کے مابین غیر سمتی ضرب ہے نا کہ مخلوط ضرب۔)

اب فرض کریں کہ C ایک بند منحنی ہے یعنی سادہ تعلق دائرہ کار D کا سرحد۔تب اگر ایسا دائرہ کار جس میں D اور C شامل ہوں میں V کے استمراری جزوی تفرق پائے جاتے ہوں تب مسئلہ گرین (حصہ 11.4) کے تحت C پر دائری بہاو کو دوہرا تکمل

$$\int_C (V_1 \,\mathrm{d}x + V_2 \,\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{20.5}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔دائیں ہاتھ تکمل کے اندر تفاعل کا ایک سادہ طبعی مطلب ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ C ایک دائرہ ہے جس کا رداس r ہے۔تب دائری بہاو کو $2\pi r$ سے تقسیم کرنے سے سیال کی C پر اوسط سمتی رفتار حاصل ہو گی جس کو r سے تقسیم کرتے ہوئے دائرے کی محور پر سیال کی زاویائی سمتی رفتار ω_0 حاصل ہوتی ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\pi r^2} \iint_D \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{20.6}$$

---

[8] circulation

[9] اوسط قیمتوں کی تعریفیں درج ذیل ہیں۔

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$ وقفہ $a \le x \le b$ پر f کی اوسط قیمت ہے۔

$\frac{1}{l}\int_C f(s)\,\mathrm{d}s$ $C =$ پر f کی اوسط قیمت ہے جہاں C کی لمبائی l ہے۔

$\frac{1}{A}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ $D =$ میں f کی اوسط قیمت ہے جہاں D کا رقبہ A ہے۔

دایاں ہاتھ قرص D جس کی سرحد C ہے پر درج ذیل تفاعل کی اوسط قیمت[10] ہے۔

$$\omega = \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\Big) \tag{20.7}$$

تفاعل ω **گھومنا**[11] کہلاتا ہے جبکہ 2ω کو حرکت کی **گردابیت**[12] کہتے ہیں۔اگر $r \to 0$ ہو تب مساوات 20.6 کے دایاں ہاتھ کی حد، C کی مرکز پر ω کی قیمت دے گی۔یوں اگر دائرہ C سکڑ کر نقطہ (x,y) مانند رہ جائے تب سیال کے دائری ٹکڑے کی زاویائی سمتی رفتار کی تحدیدی قیمت $w(x,y)$ ہو گی۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر سیال کا کروی ٹکرا یک دم ٹھوس صورت اختیار کرے اور ساتھ ہی باقی تمام سیال ہٹا دیا جائے تب اس ٹکڑے کی زاویائی سمتی رفتار ω ہو گی (حصہ 10.11 دیکھیں)۔

ہم صرف **ناگھومتے**[13] سیال پر غور کرتے ہیں یعنی ایسا سیال جس کا ω پورے خطہ D پر صفر کے برابر ہو،

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y} = 0$$

جہاں تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کی گئی ہے۔

ہم مزید فرض کرتے ہیں کہ سیال داب ناپذیر ہے۔تب ہر اس خطہ میں، جس میں نا کوئی **منبع**[14] (سوال 20.20) اور نا ہی کوئی **گڑھا**[15] پایا جاتا ہو یعنی جس میں سیال نا پیدا ہوتا ہو اور نا ہی غائب ہوتا ہو، مساوات 10.121 کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}y} = 0 \tag{20.8}$$

ہو گا۔

اگر D سادہ تعلق خطہ ہو اور بہاو ناگھومنے والی ہو تب مسئلہ 11.9 کے تحت خطی تکمل

$$\int_C (V_1\,\mathrm{d}x + V_2\,\mathrm{d}y) \tag{20.9}$$

---

[10] اوسط کی تعریف کے لئے گزشتہ حاشیہ دیکھیں
[11] rotation
[12] vorticity
[13] irrotational
[14] source
[15] sink

D میں راہ کا تابع نہیں ہو گا۔یوں D میں مقررہ نقطہ (a,b) سے D میں متغیر نقطہ (x,y) تک تکمل حاصل کرنے سے نقطہ (x,y) کا تابع تفاعل مثلاً $\Phi(x,y)$ حاصل ہو گا:

$$\Phi(x,y)=\int_{(a,b)}^{(x,y)}(V_1\,\mathrm{d}x+V_2\,\mathrm{d}y) \tag{20.10}$$

تفاعل $\Phi(x,y)$ کو حرکت کی سمتی رفتار **مخفی قوہ**[16] کہتے ہیں۔اب چونکہ درج بالا تکمل راہ کا تابع نہیں ہے لہٰذا $V_1\,\mathrm{d}x+V_2\,\mathrm{d}y$ قطعی تفرق (حصہ 11.12) ہو گا یعنی یہ تفاعل $\Phi(x,y)$ کا تفرق ہو گا:

$$V_1\,\mathrm{d}x+V_2\,\mathrm{d}y=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{20.11}$$

یوں

$$V_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad V_2=\frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{20.12}$$

ہو گا لہٰذا سمتی رفتار سمتیہ تفاعل $\Phi(x,y)$ کی ڈھلوان (حصہ 10.8) ہو گا۔

$$V=V_1+iV_2=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{20.13}$$

منحنی $\Phi(x,y)=$ مستقل کو ہم **قوہ خط**[17] کہتے ہیں۔چونکہ V ،Φ کی ڈھلوان ہے لہٰذا ($V\neq 0$ کی صورت میں) ہر نقطہ پر V اور اس نقطہ سے گزرتا ہم قوہ خط آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

مساوات 20.12 کو مساوات 20.8 میں پر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ Φ مساوات لاپلاس

$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

کو مطمئن کرتا ہے۔فرض کریں کہ $\Phi(x,y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $\Psi(x,y)$ ہو، تب[(ماسوائے اس نقطہ پر جہاں (مساوات 20.14 میں دیا گیا) $F'(z)=0$ ہو] ہر ایک نقطہ پر منحنیات

$$\Psi(x,y)=\text{مستقل}$$

[16] velocity potential
[17] equipotential lines

اور ہم قوہ خطوط $\Phi(x,y) =$ مستقل آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گی۔یوں منحنیات $\Psi(x,y) =$ مستقل کے مماس کی سمت اور سیال کی سمتی رفتار کی سمت ایک جیسی ہوں گی۔نتیجتاً منحنیات $\Psi(x,y) =$ مستقل سیال کی سمت بہاو خط ہوں گے۔تفاعل $\Psi(x,y) =$ مستقل کو بہاو کا **تفاعل بہاو**[18] کہتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ Φ اور Ψ دونوں کے استمراری دوہرا جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔تب مخلوط تفاعل

$$F(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \tag{20.14}$$

بہاو کے خطہ میں تحلیلی ہو گا۔اس تفاعل کو بہاو کی **مخلوط مخفی قوہ**[19] کہتے ہیں۔ Φ اور Ψ کے ساتھ علیحدہ علیحدہ کام کرنے سے مخلوط مخفی قوہ کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

مساوات 20.14 کا تفرق لے کر اور مساوات کوشی ریمان استعمال کرتے ہوئے بہاو کی سمتی رفتار حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_1 - iV_2$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$V = V_1 + iV_2 = \overline{F'(z)} \tag{20.15}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اس طرح دو بعدی، نا گھومنے والی، داب نا پذیر سیال کی برقرار بہاو کو تحلیلی تفاعل کی صورت میں بیان کیا جا سکتا ہے اور مخلوط تجزیہ کے تراکیب، مثلاً محافظ زاویہ نقش، استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

چونکہ وہ سرحد جس کو بہاو پار نہ کر سکتا ہو بہاو سمت ہو گا لہٰذا سرحدی شرائط مسائل میں بہاو سمت تفاعل Ψ نہایت اہم ثابت ہوتا ہے۔زیر محافظ زاویہ نقش، بہاو سمت کا تبادل سطح عکس میں بہاو سمت پر ہو گا۔پیچیدہ بہاو کے حصول اور ان پر غور کے لئے سادہ بہاو کا میل زیر استعمال لایا جا سکتا ہے۔دو بہاو F_1 ، F_2 کا مجموعہ $F = F_1 + F_2$ دونوں بہاو کی سمتی رفتار کی سمتیات کا سمتی مجموعہ سے حاصل بہاو کا مخلوط مخفی قوہ ہو گا۔چونکہ مساوات لاپلاس خطی اور متجانس ہے لہٰذا دو ہارمونی تفاعل کا مجموعہ بھی ہارمونی ہو گا۔

---

[18] stream function
[19] complex potential

دھیان رہے کہ اگرچہ برقی سکون میں دی گئی سرحدیں (موصل سطحیں) ہم قوہ خطوط ہوں گی، ماقوا حرکیات میں یہ سرحدیں بہاو سمت ہوں گی اور ہم قوہ خطوط کے قائمہ الزاویہ ہوں گی۔

آئیں ایک عمومی مثال کو دیکھیں۔مزید مسائل سوالات میں پیش کیے گئے ہیں۔

مثال 20.6: کونے کے ساتھ بہاو
مخلوط مخفی قوہ

$$F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \tag{20.16}$$

ایسی بہاو کو ظاہر کرتا ہے جس کے ہم قوہ خطوط درج ذیل قطع زائد

$$\Phi = x^2 - y^2 = \text{مستقل}$$

اور بہاو سمت درج ذیل قطع زائد

$$\Psi = 2xy = \text{مستقل}$$

ہوں گی۔مساوات 20.15 سے درج ذیل سمتی رفتار سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$V = 2\bar{z} = 2(x - iy), \quad \implies \quad V_1 = 2x, \quad V_2 = -2y$$

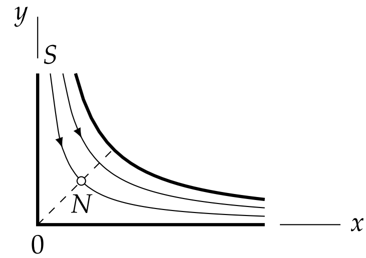
رفتار (سمتیہ کی مقدار) درج ذیل ہو گی۔

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

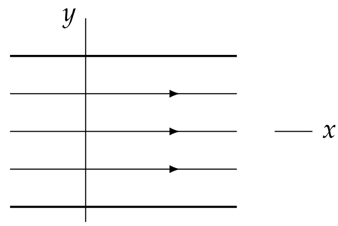
اس بہاو کو ایسی ندی کی بہاو تصور کیا جا سکتا ہے جس کے اطراف کارتیسی محدد کے مثبت محور اور قطع زائد مثلاً $xy = 1$ ہو (شکل 20.6)۔ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بہاو سمت S پر نقطہ N پر رفتار کم تر ہو گا۔یہ وہ نقطہ ہے جہاں ندی کی عمودی تراش رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا۔ □

سوالات

سوال 20.11: (متوازی بہاو) دکھائیں کہ $F(z) = Kz$ (جہاں K مثبت حقیقی ہے) دائیں رخ یکساں بہاو کو ظاہر کرتی ہے جس کو دو متوازی لکیروں (تین بعدی فضا میں دو متوازی چادروں) کے درمیان یکساں بہاو تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 20.7)۔ سمتی رفتار سمتیہ، بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔



شکل 20.6: کونے پر بہاو



شکل 20.7: یکساں متوازی بہاو

جواب: $V = V_1 = K,\ Ky =$ مستقل $,\ Kx =$ مستقل

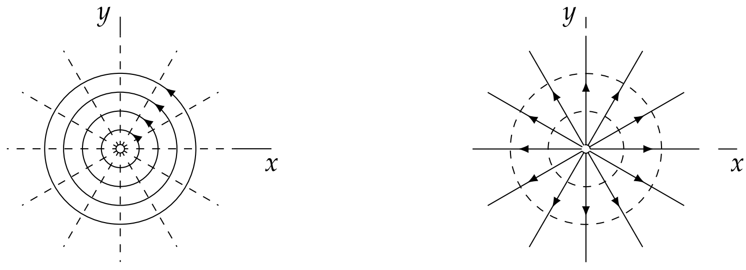
سوال 20.12: دکھائیں کہ کونے پر بہاو کو $F(z) = iz^2$ ظاہر کرتی ہے۔بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں اور انہیں ترسیم کریں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں۔

سوال 20.13: مثال 20.6 کی بہاو محافظ نقش کی استعمال سے سوال 20.11 سے حاصل کریں۔آپ کو ربع اول کا نقش بالائی نصف مستوی پر کرنا ہو گا۔

سوال 20.14: مخلوط مخفی قوہ $F(z) = z^3$ کے بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔انہیں ترسیم کریں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں اور وہ تمام نقطے دریافت کریں جہاں یہ سمتیہ x محور کے متوازی ہے۔

سوال 20.15 تا سوال 20.19 میں دی گئی مخلوط مخفی قوہ $F(z)$ پر غور کریں۔ہم قوہ خطوط اور بہاو سمت کی ترسیم کھینچیں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں اور وہ تمام نقطے دریافت کریں جہاں یہ سمتیہ x محور کے متوازی ہے۔

سوال 20.15: $F = iz$
جواب: منفی y محور کے رخ متوازی بہاو۔ $V = -i$



شکل 20.8: اشکال برائے سوال 20.20 اور سوال 20.21

سوال 20.16: $F = -ikz$ k حقیقی عدد صحیح ہے۔

سوال 20.17: $F = (1+i)z$
جواب: $y = -x$ کی رخ متوازی بہاو۔ $V = 1 - i$

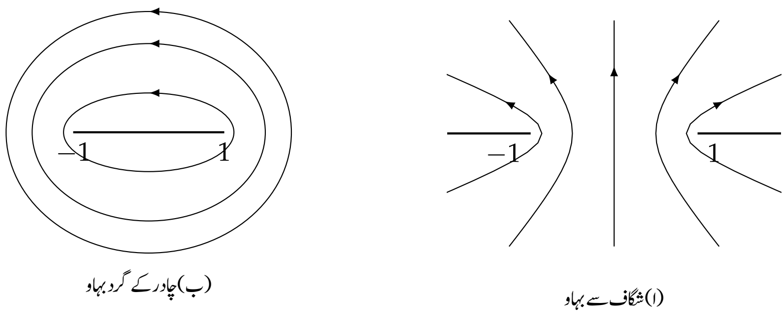
سوال 20.18: $F = z^2 + z$

سوال 20.19: $F = iz^3$
جواب: $V = -6xy + 3i(y^2 - x^2)$ ؛ $y = x$ اور $y = -x$ پر $V_2 = 0$ ہے۔

سوال 20.20: **منبع اور گڑھا** مخلوط مخفی قوہ $F(z) = \frac{c}{2\pi} \ln z$ پر غور کریں جہاں c حقیقی مثبت ہے۔ دکھائیں کہ $V = \frac{c}{2\pi r^2}(x + iy)$ ہو گا جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ یہ رداسی باہر رخ بہاو کو ظاہر کرتی ہے (شکل 20.8-الف)۔ یہ نقطہ $z = 0$ پر منبع[20] کا مخفی قوہ ہو گا (یعنی فضا میں $x = 0$ ، $y = 0$ پر منبع لکیر)۔ مستقل c کو منبع کا زور یا اخراج کہا جاتا ہے۔ اگر c منفی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $z = 0$ پر بہاو کا گڑھا[21] پایا جاتا ہے۔ اب بہاو رداسی اندر رخ کو ہے اور مخلوط مخفی قوہ کے نقطہ نادر $z = 0$ پر بہاو غائب ہو جاتی ہے۔

سوال 20.21: **(لکیر گرداب)** دکھائیں کہ $F(z) = -\frac{iK}{2\pi} \ln z$ جہاں K حقیقی ہے، مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ بہاو کو ظاہر کرتی ہے (شکل 20.8-ب)۔ نقطہ $z = 0$ **گرداب**[22] ہے۔ گرداب کے گرد ہر ایک چکر لگانے سے مخفی قوہ بڑھ جاتی ہے جہاں ہر مرتبہ بڑھنے کی مقدار K ہو گی۔

---
[20] source
[21] sink
[22] vortex



شکل 20.9: اشکال برائے سوال 20.26 اور سوال 20.27

سوال 20.22: نقطہ $z=-a$ پر اکائی زور کی منبع کے بہاو کا مخلوط مخفی قوہ تلاش کریں۔

سوال 20.23: دکھائیں کہ دو بہاو کے سمتی رفتار سمتیات کا سمتی مجموعہ حاصل کرنے سے ایسا بہاو حاصل ہو گا جس کا مخلوط مخفی قوہ ان بہاو کے مخلوط مخفی قوہ کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

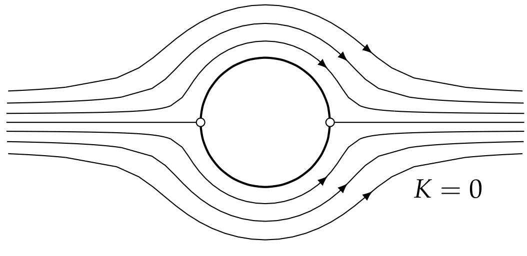
سوال 20.24: سوال 20.22 اور سوال 20.23 کے مخفی قوہ جمع کرتے ہوئے بہاو سمت کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 20.25: $F(z)=\frac{1}{z}$ کے بہاو کی بہاو سمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ چھوٹے $|a|$ کے لئے سوال 20.24 کے بہاو سمت موجودہ بہاو سمت کی طرح ہیں۔

سوال 20.26: دکھائیں کہ $F(z)=\cosh^{-1} z$ کے بہاو سمت، ہم ماسکہ قطع زائد ہوں گی جن کے ماسکہ $z=\mp 1$ ہیں اور بہاو کو شگاف سے گزرتی بہاو تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 20.9-الف)۔

سوال 20.27: دکھائیں کہ $F(z)=\cos^{-1} z$ کو ترخیم یا چادر ($z=-1$ تا $z=1$ سیدھی قطع) کے گرد بہاو کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ دکھائیں کہ بہاو سمت ہم ماسکہ ترخیم ہیں جن کے ماسکہ $z=\mp 1$ پر ہیں (شکل 20.9-ب)۔

سوال 20.28: **(بیلن کے گرد بہاو)** $F(z)=z+z^{-1}$ پر غور کریں۔ $z=re^{i\theta}$ لیتے ہوئے دکھائیں کہ سمتی قوہ $(r-r^{-1})\sin\theta=$ مستقل ہیں اور سمتی قوہ $(r-r^{-1})\sin\theta=0$ اکائی دائرہ اور x محور پر مشتمل ہے، اور بڑے $|z|$ کے لئے بہاو تقریباً یکساں اور متوازی ہے جس کو اکائی رداس کے بیلن کے گرد بہاو تصور کیا جا سکتا ہے (شکل ??)۔ بہاو کا نقطہ ٹھراو تلاش کریں (جہاں سمتی رفتار صفر ہو گی)۔



شکل 20.10: بیلن کے گرد بہاو (سوال 20.28)

جواب: نقطہ $z=-1$ اور $z=1$ پر $V=1-\bar{z}^{-1}=0$ ہو گا۔

سوال 20.29: (دائری بہاو کے ساتھ بیلن کے گرد بہاو) سوال 20.21 اور سوال 20.28 کے مخفی قوہ جمع کرتے ہوئے دکھائیں کہ بیلن کی سطح $|z|=1$ سمت بہاو ہے۔ سمتی رفتار تلاش کریں اور دکھائیں کہ نقطہ ٹھراو

$$z=\frac{iK}{4\pi}\sqrt{-\frac{K^2}{16\pi^2}+1}$$

ہیں جو $K=0$ کی صورت میں $z=\mp 1$ دیتی ہے۔ K بڑھانے سے دونوں نقطہ ٹھراو اکائی دائرہ پر اوپر رخ منتقل ہوں گے حتیٰ کہ $K=4\pi$ پر دونوں $z=i$ پر آن ملیں گے۔ اگر $K>4\pi$ کیا جائے تب ایک نقطہ ٹھراو خیالی محور پر بیلن کے باہر اور دوسرا خیالی محور پر بیلن کے اندر منتقل ہوتا ہے۔ بیلن کے اندر نقطہ ٹھراو کی کوئی طبعی معنی نہیں ہے۔ (شکل ?? میں $K=0$ کے لئے نقطہ ٹھراو کو چھوٹے دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔)

20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص

اس حصہ میں ہارمونی تفاعل کی عمومی خواص کو مخلوط تحلیلی تفاعل کے نتائج سے حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔

فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں تفاعل $u(x,y)$ ہارمونی ہے۔ تب ہم کوشی ریمان کلیات کی مدد سے $u(x,y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x,y)$ تلاش کیا جا سکتا ہے۔ یوں $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی ہو گا (حصہ 14.5 دیکھیں اور صفحہ 1121 پر حاشیہ دیکھیں)۔ یہ وہ تعلق ہے جس کو استعمال

کرتے ہوئے ہم تحلیلی تفاعل کے خواص سے ہارمونی تفاعل کے خواص اخذ کر سکتے ہیں۔چونکہ تحلیلی تفاعل کے ہر درجہ کے تفرق پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 20.1: **(جزوی تفرق)**
ایسا تفاعل $u(x, y)$ جو سادہ تعلق دائرہ کار D میں ہارمونی ہو کا D میں ہر درجہ کا جزوی تفرق پایا جائے گا۔

مزید اگر سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب کوشی کلیہ تکمل (مساوات 16.31) کے تحت

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z \tag{20.17}$$

ہو گا جہاں D میں C ایک سادہ بند راہ ہے اور نقطہ z_0 اس راہ کے اندر پایا جاتا ہے۔ C کو دائرہ

$$z = z_0 + re^{i\phi}$$

منتخب کرتے ہوئے جس کا مرکز z_0 اور رداس r ہے، D میں

$$z - z_0 = re^{i\phi}, \quad \mathrm{d}z = ire^{i\phi} \,\mathrm{d}\phi$$

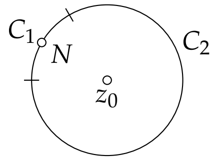
لکھا جا سکتا ہے اور یوں مساوات ?? درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\phi}) \,\mathrm{d}\phi \tag{20.18}$$

دایاں ہاتھ دائرہ C پر f کی اوسط قیمت ہے (یعنی تکمل کی قیمت تقسیم راہ کی لمبائی)۔اس سے درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 20.2: **تحلیلی تفاعل کی اوسط قیمت**
فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں f تحلیلی ہے۔تب D میں نقطہ z_0 پر $f(z)$ کی قیمت D میں ایسے کسی بھی دائرے پر $f(z)$ کی اوسط قیمت ہو گی جس کا مرکز z_0 ہو۔

تحلیلی تفاعل کی ایک اہم خاصیت درج ذیل ہے۔



شکل 20.11: ثبوت مسئلہ ??

مسئلہ 20.3: تحلیلی تفاعل کی زیادہ سے زیادہ معیار کا مسئلہ

فرض کریں کہ D محدود خطہ ہے اور D میں اور D کی سرحد پر $f(z)$ تحلیلی اور غیر مستقل تفاعل ہے۔تب $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کے اندر کسی بھی نقطہ پر نہیں ہو گی۔نتیجتاً $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کی سرحد پر ہو گی۔اگر D میں $f(z) \neq 0$ تب یہی کچھ $|f(z)|$ کی کم سے کم قیمت کے لئے بھی درست ہو گا۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ D کے اندر نقطہ z_0 پر $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ہم دیکھیں گے کہ اس مفروضہ سے تضاد پیدا ہوتا ہے۔فرض کریں کہ وہ زیادہ سے زیادہ قیمت $M = |f(z_0)|$ ہے۔چونکہ $f(z)$ غیر مستقل ہے لہٰذا $|f(z)|$ مستقل نہیں ہو گا۔نتیجتاً ہم ایسا دائرہ C جس کا اندرون D کے اندر ہو تلاش کر سکتے ہیں جس کا مرکز z_0 اور رداس r ہو، اور C پر کسی نقطہ N پر $|f(z)|$ کی قیمت M سے کم ہو۔چونکہ $|f(z)|$ استمراری ہے لہٰذا C پر ایسا قوس C_1 ، جس پر N پایا جاتا ہو، پایا جائے گا جس پر $f(z)$ کی قیمت M سے کم ہو گی مثلاً C_1 پر تمام z کے لئے $|f(z)| \leq M - \epsilon \, (\epsilon > 0)$ ہو گا (شکل ??)۔اگر C_1 کی لمبائی l_1 ہو تب متمم قوس C_2 کی لمبائی $2\pi r - l_1$ ہو گی۔ مساوات 16.16 کا اطلاق مساوات ?? پر کرتے ہوئے جہاں $|z - z_0| = r$ ہے درج ذیل

$$
\begin{aligned}
M = |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}(M - \epsilon)\frac{1}{r}l_1 + \frac{1}{2\pi}M\frac{1}{r}(2\pi r - l_1) = M - \frac{\epsilon l_1}{2\pi r} < M
\end{aligned}
$$

حاصل ہو گا جس کے تحت $M < M$ ہے جو تضاد ہے۔یوں ہمارا مفروضہ درست نہیں تھا لہٰذا مسئلہ کا پہلا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔

اب مسئلے کا آخری فقرہ ثابت کرتے ہیں۔اگر D میں $f(z) \neq 0$ ہو تب D میں $\frac{1}{f(z)}$ تحلیلی ہو گا۔جو فقرہ ہم ثابت کر چکے ہیں اس کے تحت D کی سرحد پر $\frac{1}{|f(z)|}$ پایا جائے گا۔اب $\frac{1}{|f(z)|}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے مراد $|f(z)|$ کی کم سے کم قیمت ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ان مسئلوں سے اب ہم ہارمونی تفاعل کے مطابقتی نتائج حاصل کرتے ہیں۔

مسئلہ 20.4: **(ہارمونی تفاعل)**
فرض کریں D ایک سادہ تعلق محدود دائرہ کار ہے جس کی سرحدی منحنی C ہے۔ اگر تفاعل $u(x,y)$ ایسے دائرہ کار میں ہارمونی ہو جس میں D اور C پائے جاتے ہوں تب $u(x,y)$ کے درج ذیل خواص ہوں گے۔
(الف) D میں نقطہ (x_0,y_0) پر $u(x,y)$ کی قیمت، D میں ایسے کسی بھی دائرہ پر $u(x,y)$ کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو۔
(ب) D میں نقطہ (x_0,y_0) پر $u(x,y)$ کی قیمت، D میں ایسے کسی بھی دائری قرص پر $u(x,y)$ کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو۔
(پ) **اصول زیادہ سے زیادہ قیمت** اگر $u(x,y)$ غیر مستقل ہو تب D میں $u(x,y)$ کی نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی کوئی کم سے کم قیمت پائی جائے گی۔ نتیجتاً $u(x,y)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت D کی سرحد پر پائی جائیں گی۔
(ت) اگر C پر $u(x,y)$ مستقل ہو تب $u(x,y)$ مستقل ہو گا۔
(ٹ) اگر D میں اور C پر $h(x,y)$ ہارمونی ہو اور اگر C پر $h(x,y)=u(x,y)$ ہو تب پورے D میں $h(x,y)=u(x,y)$ ہو گا۔

ثبوت: مساوات ?? کے دونوں اطراف حقیقی حصہ لے کر

$$u(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)_{\text{حقیقی}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\phi,y_0+r\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

پہلا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔ ہم درج بالا کے دونوں اطراف کو r سے ضرب دے کر، r کے ساتھ 0 تا r_0 تکمل حاصل کرتے ہیں جہاں D میں دائری قرص جس کا مرکز (x_0,y_0) ہے کا رداس r_0 ہے۔ یوں بایاں ہاتھ $\frac{1}{2}r_0^2u(x_0,y_0)$ کے برابر حاصل ہو گا۔ اس طرح

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\phi,y_0+r\sin\phi)r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$$

حاصل ہوتا ہے جو دوسرے فقرے کا ثبوت ہے۔

اب تیسرا فقرہ ثابت کرتے ہیں۔فرض کریں کہ D میں $u(x,y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x,y)$ ہے۔تب D میں $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی ہو گا اور D میں

$$F(z)=e^{f(z)}$$

بھی ہارمونی ہو گا۔اس کی مطلق قیمت

$$\left|F(z)\right|=e^{f(z)_{\text{حقیقی}}}=e^{u(x,y)}$$

ہو گی۔مسئلہ ?? کے تحت، $\left|F(z)\right|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کے اندر نہیں پائی جائے گی۔چونکہ e^u حقیقی متغیرہ u کا یک سر بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا فقرہ-پ میں u کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی بات اخذ ہوتی ہے جس میں u کی جگہ $-u$ استعمال کرتے ہوئے u کی کم سے کم قیمت کی بات بھی ثابت ہوتی ہے۔

اگر u مستقل ہو مثلاً $u=k$ تب فقرہ-پ کے تحت u کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت برابر ہوں گے جس سے فقرہ-ت اخذ ہوتا ہے۔

اگر C پر اور D میں u اور h ہارمونی ہوں تب C پر اور D میں $h-u$ بھی ہارمونی ہو گا لہٰذا مفروضہ کے تحت C پر ہر جگہ $h-u=0$ ہو گا۔یوں فقرہ-ت کے تحت پورے D میں $h-u=0$ ہو گا جس سے فقرہ-ٹ اخذ ہوتا ہے۔اس طرح مسئلہ کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ ?? کا آخری فقرہ انتہائی اہم ہے۔اس کے تحت D کی سرحد پر ہارمونی تفاعل کی قیمت سے D کے اندر ہارمونی تفاعل یکتا طور پر تعین ہوتا ہے۔عموماً D میں $u(x,y)$ کا ہارمونی ہونا اور D کی سرحد پر $u(x,y)$ کا استمراری[23] ہونا ضروری ہو گا۔ایسی صورت میں بھی مسئلہ ?? کا فقرہ-پ کارآمد ہو گا۔دی گئی سرحدی قیمتوں سے $u(x,y)$ کی قیمتیں تعین کرنے کو دو بعدی متغیرات کی مساوات لاپلاس کا **معمہ ڈرشلے**[24] کہتے ہیں۔ مسئلہ ?? سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 20.5: معمہ ڈرشلے
اگر دیے گئے خطہ اور دیے گئے سرحد پر دو متغیرات کی مساوات لاپلاس کے معمہ ڈرشلے کا حل موجود ہو تب یہ حل یکتا ہو گا۔

---

[23] یعنی اگر D کی سرحد پر (x_0,y_0) اور D کے اندر (x,y) ہو تب $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0)$ ہو۔

[24] Dirichlet problem

سوالات

سوال 20.30: تفاعل $f(z) = (z+2)^2,\ z_0 = 1$ کے لئے مسئلہ ?? کی تصدیق کریں۔دائرے کا رداس 1 اور مرکز z_0 ہے۔

سوال 20.31: تفاعل $f(z) = z^2$ اور مستطیل $-2 < x < 2, -1 < y < 1$ کے لئے مسئلہ ?? کی تصدیق کریں۔

سوال 20.32: تفاعل $f(z) = e^z$ اور کسی بھی محدود دائرہ کار میں مسئلہ ?? کی تصدیق کریں۔اشارہ۔ $|e^z| = e^x$ یک سر ہے۔

سوال 20.33: تفاعل $f(x) = \cos x$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 0$ پر پائے جاتی ہے۔مسئلہ ?? کے تحت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مقیاسی سطح $f(z) = \cos z$ (حصہ 14.9) کی زیادہ سے زیادہ قیمت $z = 0$ پر نہیں ہو سکتی ہے۔

سوال 20.34: سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ غیر مستقل اور تحلیلی تفاعل ہے اور بند منحنی $|f(z)| = c$ دائرہ کار D میں پائی جاتی ہے جہاں c مستقل ہے۔دکھائیں کہ $f(z) = 0$ اس دائرے کے اندر کسی نقطہ پر ہو گا۔مثال پیش کریں۔

20.4 پوسوں کلیہ تکمل

دائری قرص کے لئے معمہ ڈرشلے کو کلیہ پوسوں کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے جو ہارمونی تفاعل کو قرص کی سرحدی دائرے پر تفاعل کی قیمتوں کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ہم کوشی کلیہ تکمل

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z}\,\mathrm{d}z^* \tag{20.19}$$

کی مدد سے اس کلیہ کو اخذ کرتے ہیں جہاں دائرہ C کو

$$z^* = Re^{i\phi} \qquad (0 \le \phi \le 2\pi)$$

اور تفاعل کو

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \qquad (z = re^{i\theta})$$

روپ میں لکھا جائے گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تفاعل اس سادہ تعلق خطہ میں تحلیلی ہے جس کی اندرون میں C واقع ہے۔

چونکہ $\mathrm{d}z^* = iRe^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi = iz^*\,\mathrm{d}\phi$ ہے لٰہذا مساوات ?? کو

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{z^*}{z^*-z}\,\mathrm{d}\phi \qquad (z^* = Re^{i\phi},\, z = re^{i\theta}) \tag{20.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر ہم C کے باہر کسی نقطہ Z ، مثلاً $Z = \frac{z^*\bar{z}^*}{\bar{z}}$ (جس کی مطلق قیمت $R\frac{R^2}{r} > R$ ہے)، پر غور کیا جائے تب مساوات ?? کا متکمل قرص $|z| \leq R$ میں تحلیلی ہو گا لٰہذا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$0 = \frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{z^*-Z}\,\mathrm{d}z^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{z^*}{z^*-Z}\,\mathrm{d}\phi$$

اس میں $Z = \frac{z^*\bar{z}^*}{\bar{z}}$ پر کرتے ہوئے کسر کی سادہ صورت اختیار کرنے سے

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{z}^*}\,\mathrm{d}\phi$$

حاصل ہو گا۔اس کو مساوات ?? سے منفی کر کے درج ذیل

$$\frac{z^*}{z^*-z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{z}^*} = \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z}}{(z^*-z)(\bar{z}^*-\bar{z})} \tag{20.21}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z}}{(z^*-z)(\bar{z}^*-\bar{z})}\,\mathrm{d}\phi \tag{20.22}$$

حاصل ہو گا۔ z اور z^* کی قطبی روپ سے ہم دیکھتے ہیں کہ متکمل میں حاصل تقسیم درج ذیل کے برابر ہے۔

$$\frac{R^2-r^2}{(Re^{i\phi}-re^{i\theta})(Re^{-i\phi}-re^{-i\theta})} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}$$

نتیجتاً مساوات ?? کے دونوں اطراف حقیقی حصہ لیتے ہوئے **پوسون کلیہ تکمل**[25]

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\phi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\,\mathrm{d}\phi \tag{20.23}$$

حاصل ہو گا جو قرص $|z| \le R$ کی سرحدی دائرے پر ہارمونی تفاعل کی قیمت $u(R,\phi)$ کی صورت میں قرص کے اندر ہارمونی تفاعل u کو ظاہر کرتا ہے۔

عملاً مساوات ?? میں $u(R,\phi)$ کی جگہ کوئی بھی ایسا تفاعل استعمال کیا جا سکتا ہے جو وقفہ تکمل پر محض ٹکڑوں میں استمراری ہو۔تب مساوات ?? کھلا قرص $|z| < R$ میں ہارمونی اور دائرہ $|z| = R$ پر استمراری تفاعل $u(r,\theta)$ کو ظاہر کرے گا۔ اس دائرے پر تفاعل $u(R,\phi)$ کے برابر ہو گا ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $u(R,\phi)$ غیر استمراری ہو۔اس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات ?? سے ہم u کی ایک اہم تسلسل حاصل کر سکتے ہیں جس کے اجزاء ہارمونی تفاعل ہوں گے۔مساوات ?? کے متکمل کو مساوات ?? سے حاصل کیا گیا ہے جس کا دایاں ہاتھ $\frac{z^*+z}{z^*-z}$ کا حقیقی حصہ ہے۔ہندسی تسلسل سے

$$\frac{z^*+z}{z^*-z} = \frac{1+\frac{z}{z^*}}{1-\frac{z}{z^*}} = \left(1+\frac{z}{z^*}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n \tag{20.24}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $z = re^{i\theta}$ اور $z^* = Re^{i\phi}$ ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n_{\text{حقیقی}} &= \left[\frac{r^n}{R^n}e^{in\theta}e^{-in\phi}\right]_{\text{حقیقی}} = \left(\frac{r}{R}\right)^n\cos(n\theta-n\phi)\\ &= \left(\frac{r}{R}\right)^n(\cos n\theta\cos n\phi+\sin n\theta\sin n\phi)\end{aligned} \tag{20.25}$$

ہو گا۔مساوات ?? اور مساوات ?? سے

$$\frac{z^*+z}{z^*-z}_{\text{حقیقی}} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(\cos n\theta\cos n\phi+\sin n\theta\sin n\phi)$$

ملتا ہے جو، جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے ہیں، مساوات ?? میں متکمل کے حاصل تقسیم کے برابر ہے۔ اس تسلسل کو مساوات ?? میں پر کرتے ہوئے

$$u(r,\theta) = a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{20.26}$$

---

[25] Poisson's integral formula

حاصل ہو گا جس کے عددی سر

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R,\phi)\,\mathrm{d}\phi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R,\phi) \cos n\phi\,\mathrm{d}\phi,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R,\phi) \sin n\phi\,\mathrm{d}\phi, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{20.27}$$

ہوں گے جو $u(R,\phi)$ کے جانے پہچانے فوریئر عددی سر ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $r = R$ کی صورت میں مساوات ?? تفاعل $u(R,\phi)$ کا فوریئر تسلسل ہو گا لہٰذا جب بھی $u(R,\phi)$ کا فوریئر تسلسل کی روپ میں ظاہر کرنا ممکن ہو، مساوات ?? کی روپ درست ہو گی۔

مثال 20.7: اکائی قرص کے لئے معمہ ڈرشلے

اکائی قرص $r < 1$ ، جس کی سرحد پر درج ذیل ہو، میں مخفی قوہ $u(r,\theta)$ تلاش کریں (شکل ??)۔

$$u(1,\phi) = \begin{cases} -\frac{\phi}{\pi} & -\pi < \phi < 0 \\ \frac{\phi}{\pi} & 0 < \phi < \pi \end{cases}$$

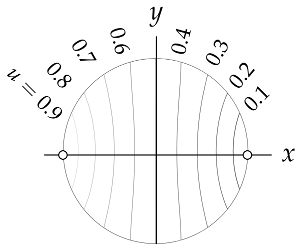
چونکہ $u(1,\phi)$ جفت ہے لہٰذا $b_n = 0$ ہو گا۔مساوات ?? سے $a_0 = \frac{1}{2}$ اور

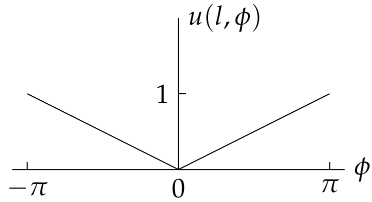
$$a_n = \frac{1}{\pi}\Big[-\int_{-\pi}^{0} \frac{\phi}{\pi} \cos n\phi\,\mathrm{d}\phi + \int_0^{\pi} \frac{\phi}{\pi} \cos n\phi\,\mathrm{d}\phi\Big] = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

حاصل ہوں گے۔یوں جفت n کی صورت میں $a_n = 0$ اور طاق n کی صورت میں $a_n = -\frac{4}{n^2\pi^2}$ ہوں گے۔یوں مخفی قوہ درج ذیل ہو گی۔

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}[r\cos\theta + \frac{r^3}{3^2}\cos 3\theta + \frac{r^5}{5^2}\cos 5\theta + \cdots]$$

□





شکل 20.12: سرحدی مخفی قوہ (مثال ??)

سوالات

سوال 20.35: مساوات ?? کی تصدیق کریں۔

سوال 20.36: دکھائیں کہ مساوات ?? کا ہر جزو قرص $r^2 < R^2$ میں ہارمونی تفاعل ہے۔

مساوات ?? استعمال کرتے ہوئے سوال ?? تا سوال ?? میں اکائی قرص $r < 1$ میں مخفی قوہ $u(r, \theta)$ تلاش کریں۔ قرص کی سرحد پر مخفی قوہ $u(1, \theta)$ ہے۔ تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء کے مجموعہ سے u کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم قوہ خطوط کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 20.37: $u(1, \theta) = \sin\theta$
جواب: $u = r\sin\theta$

سوال 20.38: $u(1, \theta) = 1 - \cos\theta$
جواب: $u = 1 - r\cos\theta$

سوال 20.39: $u(1, \theta) = \sin 3\theta$
جواب: $u = r^3 \sin 3\theta$

سوال 20.40: $u(1, \theta) = \cos 2\theta - \cos 4\theta$
جواب: $u = r^2 \cos 2\theta - r^4 \cos 4\theta$

سوال 20.41: $u(1, \theta) = 4\sin^3\theta$
جواب: $3r\sin\theta - r^3 \sin 3\theta$

سوال 20.42: $u(1,\theta)=\theta$
جواب: $\pi-2r\sin\theta-r^2\sin 2\theta-\frac{2r^3}{3}\sin 3\theta-\frac{r^4}{2}\sin 4\theta-\cdots$

سوال 20.43: $0<\theta<\pi$ پر $u(1,\theta)=1$ ہے جبکہ اس وقفہ کے علاوہ $u(1,\theta)=0$ ہے۔
جواب: $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(r\sin\theta+\frac{r^3}{3}\sin 3\theta+\frac{r^5}{5}\sin 5\theta+\cdots)$

سوال 20.44: $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=\theta$ ہے جبکہ $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=\pi-\theta$ ہے۔
جواب: $\frac{4}{\pi}(r\sin\theta-\frac{r^3}{9}\sin 3\theta+\frac{r^5}{25}\sin 5\theta-\frac{r^7}{49}\sin 7\theta\cdots)$

سوال 20.45: $-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=-\frac{\pi}{2}$ ہے، $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=\theta$ ہے اور $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ پر $u(1,\theta)=\frac{\pi}{2}$ ہے۔
جواب: $(1+\frac{2}{\pi})r\sin\theta-\frac{r^2}{2}\sin 2\theta+(\frac{1}{3}-\frac{2}{9\pi})r^3\sin 3\theta-\frac{r^4}{4}\sin 4\theta\cdots$

سوال 20.46: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=1$ ہے، $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ پر $u(1,\theta)=-1$ ہے جبکہ باقی تمام θ پر $u(1,\theta)=0$ ہے۔
جواب: $\frac{2}{\pi}(r\cos\theta+r^2\sin 2\theta-\frac{r^3}{3}\cos 3\theta+\frac{r^5}{5}\cos 5\theta\cdots)$

سوال 20.47: مساوات 18.42 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ سوال ?? کے نتیجہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\,\text{Ln}\,\frac{(1+iz)(1+z^2)}{(1-iz)(1-z^2)}\text{خیالی}$$

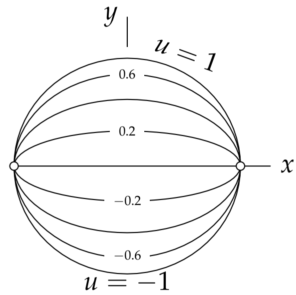
سوال 20.48: دکھائیں کہ سوال ?? کی مخفی قوہ کو $u(r,\theta)=2\,\text{Ln}(1+z)$خیالی لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 20.49: مساوات ?? استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اکائی قرص $r<1$ ، جس کا سرحدی مخفی قوہ

$$u(1,\theta)=\begin{cases}-1 & -\pi<\theta<0\\ 1 & 0<\theta<\pi\end{cases}$$

ہو، کے اندر مخفی قوہ $u(r,\theta)$ درج ذیل ہو گا۔

$$u(r,\theta)=\frac{4}{\pi}(r\sin\theta+\frac{r^3}{3}\sin 3\theta+\frac{r^5}{5}\sin 5\theta+\cdots)$$



شکل 20.13: شکل برائے سوال ??

اس تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء استعمال کرتے ہوئے u کی قیمتیں حاصل کر کے چند ہم قوہ خطوط ترسیم کریں۔ قوت کی لکیروں (قائمہ الزاویہ خطوط) کو ترسیم کر کے ان کا شکل ?? کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 20.50: مساوات 18.42 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ سوال ?? کے نتیجہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(r,\theta)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}\text{خیالی}=\frac{2}{\pi}\left(\underline{/1+z}-\underline{/1-z}\right)$$

سوال 20.51: جیومیٹری کے ایک بنیادی مسئلے کو سوال ?? کے نتیجے پر لاگو کرتے ہوئے دکھائیں کہ سوال ?? میں مستقل $= u$ دائری قوس ہیں۔

سوال 20.52: دکھائیں کہ بالائی نصف مستوی $v>0$ میں درج ذیل ہارمونی ہے اور وقفہ $-1<u<1$ پر اس کی قیمت -1 جبکہ باقی u محور پر اس کی قیمت $+1$ ہے۔

$$H=1+\frac{2}{\pi}\operatorname{Ln}\frac{w+1}{w-1}\text{خیالی}\qquad (w=u+iv)$$

سوال 20.53: دکھائیں کہ وہ خطی کسری تبادل جو $w_1=-1$ ، $w_2=0$ ، $w_3=1$ کو بالترتیب $z_1=-1$ ، $z_2=-i$ ، $z_3=1$ پر نقش کرتا ہو

$$z=\frac{w-i}{-iw+1}$$

ہے۔اس کا الٹ تبادل $w = w(z)$ تلاش کرتے ہوئے سوال ?? میں دیے گئے H میں پر کرتے ہوئے دکھائیں کہ حاصل ہارمونی تفاعل سوال ?? کا ہارمونی تفاعل ہے۔

سوال 20.54: مسئلہ ?? کو پوسوں کلیہ تکمل مساوات ?? سے اخذ کریں۔

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ?? خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ?? کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ?? کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ??-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ?? کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ?? کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\,z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ??-الف کو مساوات ?? کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\,y'^2 + |q|\,z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ?? اور مساوات ?? سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\,z + |q|\,z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ?? اور مساوات ?? کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ?? کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ?? کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل ??-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل ??-ب)

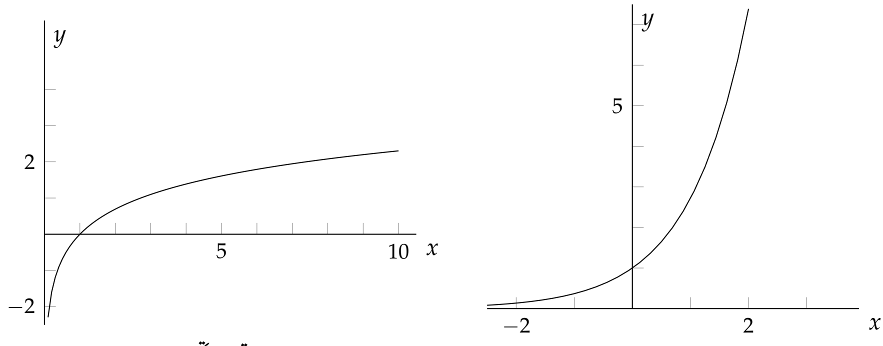
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

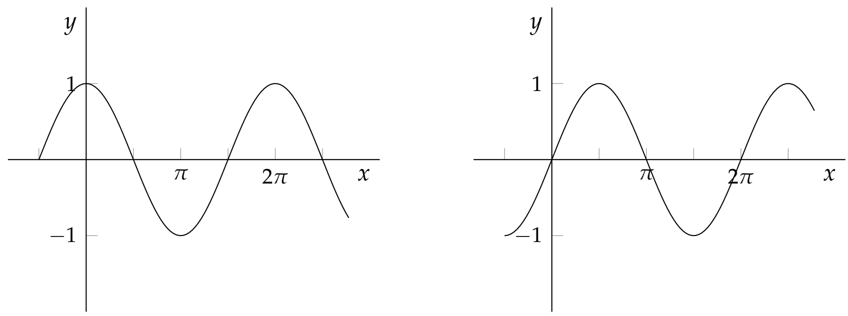
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$

(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل ??-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (\text{ب}.5)$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

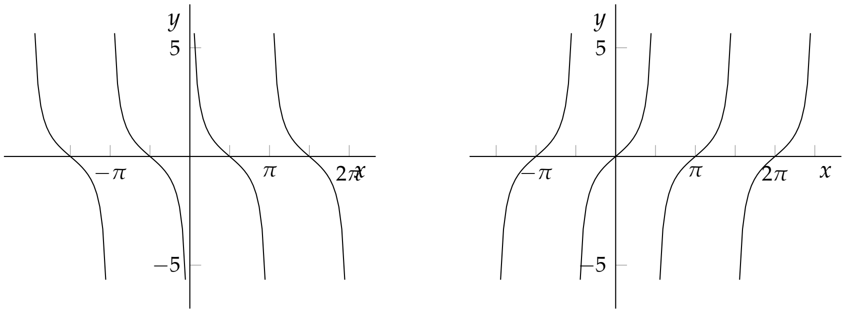
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل ??-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل ??-الف، ب)

$$\begin{gathered}
\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\
\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}
\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

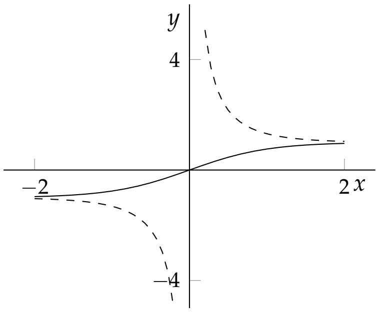
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{gathered}
\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y
\end{gathered} \tag{ب.20}$$

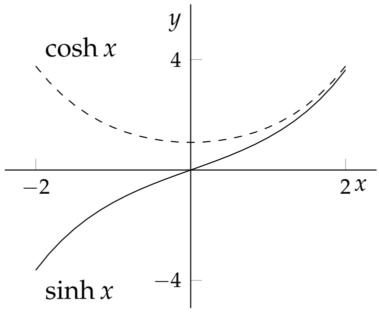
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل ?? اور ضمیمہ ?? کی جدول ??) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات ?? سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات ?? استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات ?? میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات ?? استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

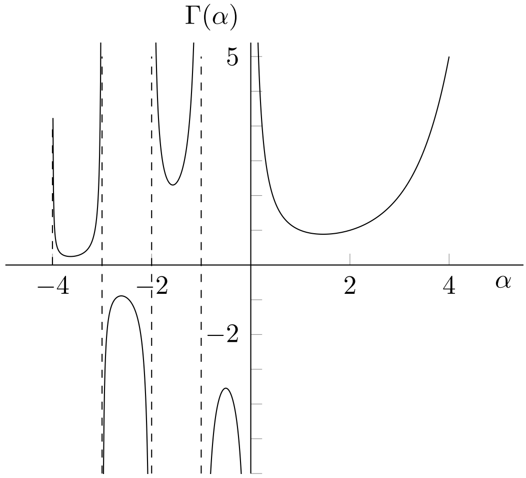
مساوات ?? کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات ?? اور مساوات ?? مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\qquad(\alpha\neq 0,-1,\cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات ?? اور مساوات ?? سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha=0,-1,-2,\cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)\approx\sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل(شکل ?? اور ضمیمہ ?? کی جدول ??)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات ?? کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

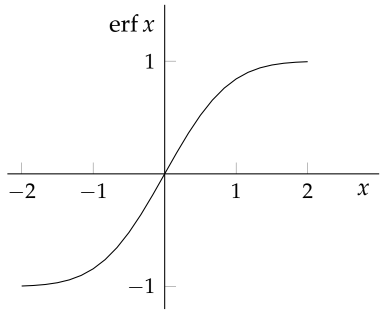
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

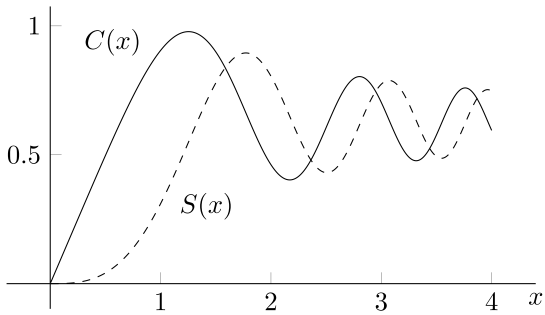
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل ??)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{C}(x)=\int_x^{\infty}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{S}(x)=\int_x^{\infty}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

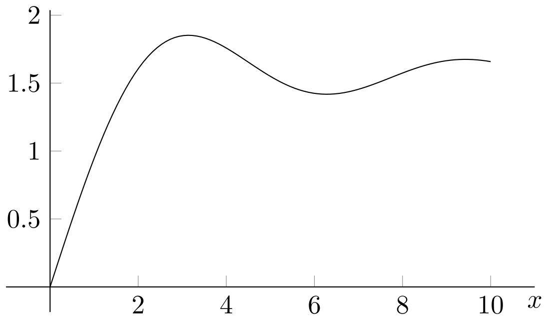
تکمل سائن (شکل ?? اور ضمیمہ ?? کی جدول ??)

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(x)=\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1]complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن (ضمیمہ ?? کی جدول ??)

$$\operatorname{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

ضمیمہ ج

جدول

جدول 1.ج: بیسل تفاعل (قسم اول)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0	1.0000	0.0000	3.4	−0.3643	0.1792	6.8	0.2931	−0.0652
0.1	0.9975	0.0499	3.5	−0.3801	0.1374	6.9	0.2981	−0.0349
0.2	0.9900	0.0995	3.6	−0.3918	0.0955	7	0.3001	−0.0047
0.3	0.9776	0.1483	3.7	−0.3992	0.0538	7.1	0.2991	0.0252
0.4	0.9604	0.1960	3.8	−0.4026	0.0128	7.2	0.2951	0.0543
0.5	0.9385	0.2423	3.9	−0.4018	−0.0272	7.3	0.2882	0.0826
0.6	0.9120	0.2867	4	−0.3971	−0.0660	7.4	0.2786	0.1096
0.7	0.8812	0.3290	4.1	−0.3887	−0.1033	7.5	0.2663	0.1352
0.8	0.8463	0.3688	4.2	−0.3766	−0.1386	7.6	0.2516	0.1592
0.9	0.8075	0.4059	4.3	−0.3610	−0.1719	7.7	0.2346	0.1813
1.0	0.7652	0.4401	4.4	−0.3423	−0.2028	7.8	0.2154	0.2014
1.1	0.7196	0.4709	4.5	−0.3205	−0.2311	7.9	0.1944	0.2192
1.2	0.6711	0.4983	4.6	−0.2961	−0.2566	8	0.1717	0.2346
1.3	0.6201	0.5220	4.7	−0.2693	−0.2791	8.1	0.1475	0.2476
1.4	0.5669	0.5419	4.8	−0.2404	−0.2985	8.2	0.1222	0.2580
1.5	0.5118	0.5579	4.9	−0.2097	−0.3147	8.3	0.0960	0.2657
1.6	0.4554	0.5699	5	−0.1776	−0.3276	8.4	0.0692	0.2708
1.7	0.3980	0.5778	5.1	−0.1443	−0.3371	8.5	0.0419	0.2731
1.8	0.3400	0.5815	5.2	−0.1103	−0.3432	8.6	0.0146	0.2728
1.9	0.2818	0.5812	5.3	−0.0758	−0.3460	8.7	−0.0125	0.2697
2	0.2239	0.5767	5.4	−0.0412	−0.3453	8.8	−0.0392	0.2641
2.1	0.1666	0.5683	5.5	−0.0068	−0.3414	8.9	−0.0653	0.2559
2.2	0.1104	0.5560	5.6	0.0270	−0.3343	9	−0.0903	0.2453
2.3	0.0555	0.5399	5.7	0.0599	−0.3241	9.1	−0.1142	0.2324
2.4	0.0025	0.5202	5.8	0.0917	−0.3110	9.2	−0.1367	0.2174
2.5	−0.0484	0.4971	5.9	0.1220	−0.2951	9.3	−0.1577	0.2004
2.6	−0.0968	0.4708	6	0.1506	−0.2767	9.4	−0.1768	0.1816
2.7	−0.1424	0.4416	6.1	0.1773	−0.2559	9.5	−0.1939	0.1613
2.8	−0.1850	0.4097	6.2	0.2017	−0.2329	9.6	−0.2090	0.1395
2.9	−0.2243	0.3754	6.3	0.2238	−0.2081	9.7	−0.2218	0.1166
3	−0.2601	0.3391	6.4	0.2433	−0.1816	9.8	−0.2323	0.0928
3.1	−0.2921	0.3009	6.5	0.2601	−0.1538	10.8	−0.2032	−0.1422
3.2	−0.3202	0.2613	6.6	0.2740	−0.1250	11.8	0.0020	−0.2323
3.3	−0.3443	0.2207	6.7	0.2851	−0.0953	12.8	0.1887	−0.1114

$J_0(x)$ کے صفر $x = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, \cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔

$J_1(x)$ کے صفر $x = 0, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔

جدول 2.ج: بیسل تفاعل (قسم دوم)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5	−0.309	0.148
0.5	−0.445	−1.471	3	0.377	0.325	5.5	−0.339	−0.024
1	0.088	−0.781	3.5	0.189	0.410	6	−0.288	−0.175
1.5	0.382	−0.412	4	−0.017	0.398	6.5	−0.173	−0.274
2	0.510	−0.107	4.5	−0.195	0.301	7	−0.026	−0.303

جدول 3.ج: گیما تفاعل (ضمیمہ ?? میں مساوات ??)

α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$
1	1.000 000	1.22	0.913 106	1.44	0.885 805	1.66	0.901 668	1.88	0.955 071
1.02	0.988 844	1.24	0.908 521	1.46	0.885 604	1.68	0.905 001	1.9	0.961 766
1.04	0.978 438	1.26	0.904 397	1.48	0.885 747	1.7	0.908 639	1.92	0.968 774
1.06	0.968 744	1.28	0.900 718	1.5	0.886 227	1.72	0.912 581	1.94	0.976 099
1.08	0.959 725	1.3	0.897 471	1.52	0.887 039	1.74	0.916 826	1.96	0.983 743
1.10	0.951 351	1.32	0.894 640	1.54	0.888 178	1.76	0.921 375	1.98	0.991 708
1.12	0.943 590	1.34	0.892 216	1.56	0.889 639	1.78	0.926 227	2	1.000 000
1.14	0.936 416	1.36	0.890 185	1.58	0.891 420	1.8	0.931 384	2.02	1.008 621
1.16	0.929 803	1.38	0.888 537	1.6	0.893 515	1.82	0.936 845	2.04	1.017 576
1.18	0.923 728	1.4	0.887 264	1.62	0.895 924	1.84	0.942 612	2.06	1.026 868
1.2	0.918 169	1.42	0.886 356	1.64	0.898 642	1.86	0.948 687	2.08	1.036 503

جدول 4.ج: فیکٹوریل تفاعل

n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$
1	1	0.000 000	6	720	2.857 332	11	39 916 800	7.601 156
2	2	0.301 030	7	5040	3.702 431	12	479 001 600	8.680 337
3	6	0.778 151	8	40 320	4.605 521	13	6 227 020 800	9.794 280
4	24	1.380 211	9	362 880	5.559 763	14	87 178 291 200	10.940 408
5	120	2.079 181	10	3 628 800	6.559 763	15	1 307 674 368 000	12.116 500

جدول 5.ج: ثنائی تقسیم۔ تفاعل احتمال $f(x)$ (مساوات ؟؟) اور تفاعل تقسیم $F(x)$

n	x	$p = 0.1$		$p = 0.2$		$p = 0.3$		$p = 0.4$		$p = 0.5$	
		$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
1	0	0.9000	0.9000	0.8000	0.8000	0.7000	0.7000	0.6000	0.6000	0.5000	0.5000
	1	0.1000	1.0000	0.2000	1.0000	0.3000	1.0000	0.4000	1.0000	0.5000	1.0000
2	0	0.8100	0.8100	0.6400	0.6400	0.4900	0.4900	0.3600	0.3600	0.2500	0.2500
	1	0.1800	0.9900	0.3200	0.9600	0.4200	0.9100	0.4800	0.8400	0.5000	0.7500
	2	0.0100	1.0000	0.0400	1.0000	0.0900	1.0000	0.1600	1.0000	0.2500	1.0000
3	0	0.7290	0.7290	0.5120	0.5120	0.3430	0.3430	0.2160	0.2160	0.1250	0.1250
	1	0.2430	0.9720	0.3840	0.8960	0.4410	0.7840	0.4320	0.6480	0.3750	0.5000
	2	0.0270	0.9990	0.0960	0.9920	0.1890	0.9730	0.2880	0.9360	0.3750	0.8750
	3	0.0010	1.0000	0.0080	1.0000	0.0270	1.0000	0.0640	1.0000	0.1250	1.0000
4	0	0.6561	0.6561	0.4096	0.4096	0.2401	0.2401	0.1296	0.1296	0.0625	0.0625
	1	0.2916	0.9477	0.4096	0.8192	0.4116	0.6517	0.3456	0.4752	0.2500	0.3125
	2	0.0486	0.9963	0.1536	0.9728	0.2646	0.9163	0.3456	0.8208	0.3750	0.6875
	3	0.0036	0.9999	0.0256	0.9984	0.0756	0.9919	0.1536	0.9744	0.2500	0.9375
	4	0.0001	1.0000	0.0016	1.0000	0.0081	1.0000	0.0256	1.0000	0.0625	1.0000
5	0	0.5905	0.5905	0.3277	0.3277	0.1681	0.1681	0.0778	0.0778	0.0313	0.0313
	1	0.3281	0.9185	0.4096	0.7373	0.3602	0.5282	0.2592	0.3370	0.1563	0.1875
	2	0.0729	0.9914	0.2048	0.9421	0.3087	0.8369	0.3456	0.6826	0.3125	0.5000
	3	0.0081	0.9995	0.0512	0.9933	0.1323	0.9692	0.2304	0.9130	0.3125	0.8125
	4	0.0005	1.0000	0.0064	0.9997	0.0284	0.9976	0.0768	0.9898	0.1563	0.9688
	5	0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0024	1.0000	0.0102	1.0000	0.0313	1.0000
6	0	0.5314	0.5314	0.2621	0.2621	0.1176	0.1176	0.0467	0.0467	0.0156	0.0156
	1	0.3543	0.8857	0.3932	0.6554	0.3025	0.4202	0.1866	0.2333	0.0938	0.1094
	2	0.0984	0.9842	0.2458	0.9011	0.3241	0.7443	0.3110	0.5443	0.2344	0.3438
	3	0.0146	0.9987	0.0819	0.9830	0.1852	0.9295	0.2765	0.8208	0.3125	0.6563
	4	0.0012	0.9999	0.0154	0.9984	0.0595	0.9891	0.1382	0.9590	0.2344	0.8906
	5	0.0001	1.0000	0.0015	0.9999	0.0102	0.9993	0.0369	0.9959	0.0938	0.9844
	6	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0041	1.0000	0.0156	1.0000
7	0	0.4783	0.4783	0.2097	0.2097	0.0824	0.0824	0.0280	0.0280	0.0078	0.0078
	1	0.3720	0.8503	0.3670	0.5767	0.2471	0.3294	0.1306	0.1586	0.0547	0.0625
	2	0.1240	0.9743	0.2753	0.8520	0.3177	0.6471	0.2613	0.4199	0.1641	0.2266
	3	0.0230	0.9973	0.1147	0.9667	0.2269	0.8740	0.2903	0.7102	0.2734	0.5000
	4	0.0026	0.9998	0.0287	0.9953	0.0972	0.9712	0.1935	0.9037	0.2734	0.7734
	5	0.0002	1.0000	0.0043	0.9996	0.0250	0.9962	0.0774	0.9812	0.1641	0.9375
	6	0.0000	1.0000	0.0004	1.0000	0.0036	0.9998	0.0172	0.9984	0.0547	0.9922
	7	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0002	1.0000	0.0016	1.0000	0.0078	1.0000
8	0	0.4305	0.4305	0.1678	0.1678	0.0576	0.0576	0.0168	0.0168	0.0039	0.0039
	1	0.3826	0.8131	0.3355	0.5033	0.1977	0.2553	0.0896	0.1064	0.0313	0.0352
	2	0.1488	0.9619	0.2936	0.7969	0.2965	0.5518	0.2090	0.3154	0.1094	0.1445
	3	0.0331	0.9950	0.1468	0.9437	0.2541	0.8059	0.2787	0.5941	0.2188	0.3633
	4	0.0046	0.9996	0.0459	0.9896	0.1361	0.9420	0.2322	0.8263	0.2734	0.6367
	5	0.0004	1.0000	0.0092	0.9988	0.0467	0.9887	0.1239	0.9502	0.2188	0.8555
	6	0.0000	1.0000	0.0011	0.9999	0.0100	0.9987	0.0413	0.9915	0.1094	0.9648
	7	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0012	0.9999	0.0079	0.9993	0.0313	0.9961
	8	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0039	1.0000

جدول 6.ج: پوئسن تقسیم

تفاعل احتمال $f(x)$ (مساوات ??) اور تفاعل تقسیم $F(x)$

x	$\mu = 0.1$		$\mu = 0.2$		$\mu = 0.3$		$\mu = 0.4$		$\mu = 0.5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.9048	0.9048	0.8187	0.8187	0.7408	0.7408	0.6703	0.6703	0.6065	0.6065
1	0.0905	0.9953	0.1637	0.9825	0.2222	0.9631	0.2681	0.9384	0.3033	0.9098
2	0.0045	0.9998	0.0164	0.9989	0.0333	0.9964	0.0536	0.9921	0.0758	0.9856
3	0.0002	1.0000	0.0011	0.9999	0.0033	0.9997	0.0072	0.9992	0.0126	0.9982
4	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0007	0.9999	0.0016	0.9998
5							0.0001	1.0000	0.0002	1.0000

x	$\mu = 0.6$		$\mu = 0.7$		$\mu = 0.8$		$\mu = 0.9$		$\mu = 1$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.5488	0.5488	0.4966	0.4966	0.4493	0.4493	0.4066	0.4066	0.3679	0.3679
1	0.3293	0.8781	0.3476	0.8442	0.3595	0.8088	0.3659	0.7725	0.3679	0.7358
2	0.0988	0.9769	0.1217	0.9659	0.1438	0.9526	0.1647	0.9371	0.1839	0.9197
3	0.0198	0.9966	0.0284	0.9942	0.0383	0.9909	0.0494	0.9865	0.0613	0.9810
4	0.0030	0.9996	0.0050	0.9992	0.0077	0.9986	0.0111	0.9977	0.0153	0.9963
5	0.0004	1.0000	0.0007	0.9999	0.0012	0.9998	0.0020	0.9997	0.0031	0.9994
6			0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0003	1.0000	0.0005	0.9999
7									0.0001	1.0000

x	$\mu = 1.5$		$\mu = 2$		$\mu = 3$		$\mu = 4$		$\mu = 5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.2231	0.2231	0.1353	0.1353	0.0498	0.0498	0.0183	0.0183	0.0067	0.0067
1	0.3347	0.5578	0.2707	0.4060	0.1494	0.1991	0.0733	0.0916	0.0337	0.0404
2	0.2510	0.8088	0.2707	0.6767	0.2240	0.4232	0.1465	0.2381	0.0842	0.1247
3	0.1255	0.9344	0.1804	0.8571	0.2240	0.6472	0.1954	0.4335	0.1404	0.2650
4	0.0471	0.9814	0.0902	0.9473	0.1680	0.8153	0.1954	0.6288	0.1755	0.4405
5	0.0141	0.9955	0.0361	0.9834	0.1008	0.9161	0.1563	0.7851	0.1755	0.6160
6	0.0035	0.9991	0.0120	0.9955	0.0504	0.9665	0.1042	0.8893	0.1462	0.7622
7	0.0008	0.9998	0.0034	0.9989	0.0216	0.9881	0.0595	0.9489	0.1044	0.8666
8	0.0001	1.0000	0.0009	0.9998	0.0081	0.9962	0.0298	0.9786	0.0653	0.9319
9			0.0002	1.0000	0.0027	0.9989	0.0132	0.9919	0.0363	0.9682
10					0.0008	0.9997	0.0053	0.9972	0.0181	0.9863
11					0.0002	0.9999	0.0019	0.9991	0.0082	0.9945
12					0.0001	1.0000	0.0006	0.9997	0.0034	0.9980
13							0.0002	0.9999	0.0013	0.9993
14							0.0001	1.0000	0.0005	0.9998
15									0.0002	0.9999
16									0.0000	1.0000

جدول 7.ج: عمومی تقسیم۔تفاعل تقسیم $\Phi(z)$ (مساوات ??)

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ ، $\Phi(0) = 0.5000$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.01	0.9778	2.51	0.9940
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.02	0.9783	2.52	0.9941
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.03	0.9788	2.53	0.9943
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.04	0.9793	2.54	0.9945
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.05	0.9798	2.55	0.9946
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.06	0.9803	2.56	0.9948
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.07	0.9808	2.57	0.9949
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.08	0.9812	2.58	0.9951
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.09	0.9817	2.59	0.9952
0.10	0.5398	0.6	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	2.1	0.9821	2.60	0.9953
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	2.11	0.9826	2.61	0.9955
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	2.12	0.9830	2.62	0.9956
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	2.13	0.9834	2.63	0.9957
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	2.14	0.9838	2.64	0.9959
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	2.15	0.9842	2.65	0.9960
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	2.16	0.9846	2.66	0.9961
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	2.17	0.9850	2.67	0.9962
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	2.18	0.9854	2.68	0.9963
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	2.19	0.9857	2.69	0.9964
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.7	0.9554	2.20	0.9861	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	2.21	0.9864	2.71	0.9966
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	2.22	0.9868	2.72	0.9967
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	2.23	0.9871	2.73	0.9968
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	2.24	0.9875	2.74	0.9969
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	2.25	0.9878	2.75	0.9970
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	2.26	0.9881	2.76	0.9971
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	2.27	0.9884	2.77	0.9972
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	2.28	0.9887	2.78	0.9973
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	2.29	0.9890	2.79	0.9974
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	2.30	0.9893	2.80	0.9974
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649	2.31	0.9896	2.81	0.9975
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656	2.32	0.9898	2.82	0.9976
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664	2.33	0.9901	2.83	0.9977
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671	2.34	0.9904	2.84	0.9977
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678	2.35	0.9906	2.85	0.9978
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686	2.36	0.9909	2.86	0.9979
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693	2.37	0.9911	2.87	0.9979
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699	2.38	0.9913	2.88	0.9980
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706	2.39	0.9916	2.89	0.9981
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713	2.4	0.9918	2.90	0.9981
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719	2.41	0.9920	2.91	0.9982
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726	2.42	0.9922	2.92	0.9982
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732	2.43	0.9925	2.93	0.9983
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738	2.44	0.9927	2.94	0.9984
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744	2.45	0.9929	2.95	0.9984
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750	2.46	0.9931	2.96	0.9985
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756	2.47	0.9932	2.97	0.9985
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761	2.48	0.9934	2.98	0.9986
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767	2.49	0.9936	2.99	0.9986
0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772	2.50	0.9938	3.00	0.9987

جدول 8.ج: عمومی تقسیم

$\Phi(z)$ (مساوات ??) اور $D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$ کے لئے z کی قیمتیں۔
مثال کے طور پر $\Phi(z) = 61\,\%$ پر $z = 0.279$ ہو گا اور $D(z) = 61\,\%$ پر $z = 0.860$ ہو گا۔

%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
1	−2.326	0.013	41	−0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	−2.054	0.025	42	−0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	−1.881	0.038	43	−0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	−1.751	0.050	44	−0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	−1.645	0.063	45	−0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	−1.555	0.075	46	−0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	−1.476	0.088	47	−0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	−1.405	0.100	48	−0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	−1.341	0.113	49	−0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	−1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	−1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	−1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	−1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	−1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	−1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	−0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	−0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	−0.915	0.228	58	0.202	0.806	97.5	1.960	2.241
19	−0.878	0.240	59	0.228	0.824	98	2.054	2.326
20	−0.842	0.253	60	0.253	0.842	99	2.326	2.576
21	−0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	−0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	−0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	−0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	−0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	−0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	−0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	−0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	−0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	−0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	−0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	−0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	−0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	−0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	−0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	−0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	−0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	−0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	−0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	−0.253	0.524	80	0.842	1.282			

جدول 9.ج: بلا منصوبہ اعداد

شمار صف	شمار قطار									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	87331	82442	28104	26432	83640	17323	68764	84728	37995	96106
1	33628	17364	01409	87803	65641	33433	48944	64299	79066	31777
2	54680	13427	72496	16967	16195	96593	55040	53729	62035	66717
3	51199	49794	49407	10774	98140	83891	37195	24066	61140	65144
4	78702	98067	61313	91661	59861	54437	77739	19892	54817	88645
5	55672	16014	24892	13089	00410	81458	76156	28189	40595	21500
6	18880	58497	03862	32368	59320	24807	63392	79793	63043	09425
7	10242	62548	62330	05703	33535	49128	66298	16193	55301	01306
8	54993	17182	94618	23228	83895	73251	68199	64639	83178	70521
9	22686	50885	16006	04041	08077	33065	35237	05502	94755	72062
10	42349	03145	15770	70665	53291	32288	41568	66079	98705	31029
11	18093	09553	39428	75464	71329	86344	80729	40916	18860	51780
12	11535	03924	84252	74795	40193	84597	42497	21918	91384	84721
13	35066	73848	65351	53270	63341	70177	92373	17604	42204	60476
14	57477	22809	73558	96182	96779	01604	25748	59553	64876	94611
15	48647	33850	52956	45410	88212	05120	99391	32276	55961	41775
16	86857	81154	22223	74950	53296	67767	55866	49361	66937	81818
17	20182	36907	94644	99122	09774	29189	27212	79000	50217	71077
18	83687	31231	01133	41432	54542	60204	81618	09586	34481	87683
19	81315	12390	46074	47810	90171	36313	95440	77583	28506	38808
20	87026	52826	58341	76549	04105	66191	12914	55348	07907	06978
21	34301	76733	07251	90524	21931	83695	41340	53581	64582	60210
22	70734	24337	32674	49508	49751	90489	63202	24380	77943	09942
23	94710	31527	73445	32839	68176	53580	85250	53243	03350	00128
24	76462	16987	07775	43162	11777	16810	75158	13894	88945	15539
25	14348	28403	79245	69023	64196	46398	05964	64715	11330	17515
26	74618	89317	30146	25606	94507	98104	04239	44973	37636	88866
27	99442	19200	85406	45358	86253	60638	38858	44964	54103	57287
28	26869	44399	89452	06652	31271	00647	46551	83050	92058	83814
29	80988	08149	50499	98584	28385	63680	44638	91864	96002	87802
30	07511	79047	89289	17774	67194	37362	85684	55505	97809	67056
31	49779	12138	05048	03535	27502	63308	10218	53296	48687	61340
32	47938	55945	24003	19635	17471	65997	85906	98694	56420	78357
33	15604	06626	14360	79442	13512	87595	08542	03800	35443	52823
34	12307	27726	21864	00045	16075	03770	86978	52718	02693	09096
35	02450	28053	66134	99445	91316	25727	89399	85272	67148	78358
36	57623	54382	35236	89244	27245	90500	75430	96762	71968	65838
37	91762	78849	93105	40481	99431	03304	21079	86459	21287	76566
38	87373	31137	31428	67050	64309	44914	80711	61738	61498	24288
39	67094	41485	54149	86088	10192	21174	39948	67286	29938	32476
40	94456	66767	76922	87627	71834	57688	04878	78348	68970	60048
41	68359	75292	27710	86889	81678	79798	58360	39175	75667	65782
42	52393	31404	32584	06837	79762	13168	76055	54833	22841	98889
43	59565	91254	11847	20672	37625	41454	86861	55824	79793	74575
44	48185	11066	20162	38230	16043	48409	47421	21195	98008	57305
45	19230	12187	86659	12971	52204	76546	63272	19312	81662	96557
46	84327	21942	81727	68735	89190	58491	55329	96875	19465	89687
47	77430	71210	00591	50124	12030	50280	12358	76174	48353	09862
48	12462	19108	70512	53926	25595	97085	03833	59806	12351	64253
49	11684	06644	57816	10078	45021	47751	38285	773520	08434	65627

بلا منصوبہ اعداد (جدول ??)

شمار صف	شمار قطار									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	12896	36576	68686	08462	65652	76571	70891	09007	04581	01684
51	59090	05111	27587	90349	30789	50304	70650	06646	70126	15284
52	42486	67483	65282	19037	80588	73076	41820	46651	40442	40718
53	88662	03928	03249	85910	97533	88643	29829	21557	47328	36724
54	69403	03626	92678	59460	15465	83516	54012	80509	55976	46115
55	56434	70543	38696	98502	32092	95505	62091	39549	30117	98209
56	58227	62694	42837	29183	11393	68463	25150	86338	95620	39836
57	41272	94927	15413	40505	33123	63218	72940	98349	57249	40170
58	36819	01162	30425	15546	16065	68459	35776	64276	92868	07372
59	31700	66711	26115	55755	33584	18091	38709	57276	74660	90392
60	69855	63699	36839	90531	97125	87875	62824	03889	12538	24740
61	44322	17569	45439	41455	34324	90902	07978	26268	04279	76816
62	62226	36661	87011	66267	78777	78044	40819	49496	39814	73867
63	27284	19737	98741	72531	52741	26699	98755	19657	08665	16818
64	88341	21652	94743	77268	79525	44769	66583	30621	90534	62050
65	53266	18783	51903	56711	38060	69513	61963	80470	88018	86510
66	50527	49330	24839	42529	03944	95219	88724	37247	84116	23023
67	15655	07852	77206	35944	71446	30573	19405	57824	23576	23301
68	62057	22206	03314	83465	57466	10465	19891	32308	01900	67484
69	41769	56091	19892	96253	92808	45785	52774	49674	68103	65032
70	25993	72416	44473	41299	93095	17338	69802	98548	02429	85238
71	22842	57871	04470	37373	34516	04042	04078	35336	34393	97573
72	55704	31982	05234	22664	22181	40358	28089	15790	33340	18852
73	94258	18706	09437	96041	90052	80862	20420	24323	11635	91677
74	74145	20453	29657	98868	56695	53483	87449	35060	98942	62697
75	88881	12673	73961	89884	73247	97670	69570	88888	58560	72580
76	01508	56780	52223	35632	73347	71317	46541	88023	36656	76332
77	92069	43000	23233	06058	82527	25250	27555	20426	60361	63525
78	53366	35249	02117	68620	39388	69795	73215	01846	16983	78560
79	88057	54097	49511	74867	32192	90071	04147	46094	63519	07199
80	85492	82238	02668	91854	86149	28590	77853	81035	45561	16032
81	39453	62123	69611	53017	34964	09786	24614	49514	01056	18700
82	82627	98111	93870	56969	69566	62662	07353	84838	14570	14508
83	61142	51743	38209	31474	96095	15163	54380	77849	20465	03142
84	12031	32528	61311	53730	89032	16124	58844	35386	45521	59368
85	31313	59838	29147	76882	74328	09955	63673	96651	53264	29871
86	50767	41056	97409	44376	62219	35439	70102	99248	71179	26052
87	30522	95699	84966	26554	24768	72247	84993	85375	92518	16334
88	74176	19870	89874	64799	03792	57006	57225	36677	46825	14087
89	17114	93248	37065	91346	04657	93763	92210	43676	44944	75798
90	53005	11825	64608	87587	05742	31914	55044	41818	29667	77424
91	31985	81539	79942	49471	46200	27639	94099	42085	79231	03932
92	63499	60508	77522	15624	15088	78519	52279	79214	43623	69166
93	30506	42444	99047	66010	91657	37160	37408	85714	21420	80996
94	78248	16841	92357	10130	68990	38307	61022	56806	81016	38511
95	64996	84789	50185	32200	64382	29752	11876	00664	54547	62597
96	11963	13157	09136	01769	30117	71486	80111	09161	08371	71749
97	44335	91450	43456	90449	18338	19787	31339	60473	06606	89788
98	42277	11868	44520	01113	11341	11743	97949	49718	99176	42006
99	77562	18863	58515	90166	78508	14864	19111	57183	85808	59385

جدول 10.ج: t تقسیم

تفاعل تقسیم $F(z)$ (مساوات ??) کے لئے z کی قیمتیں۔
مثال کے طور پر 9 درجہ آزادی کے لئے $F(z) = 0.95$ تب ہو گا جب $z = 1.83$ ہو۔

$F(z)$	درجہ آزادی									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.32	0.29	0.28	0.27	0.27	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.73	0.62	0.58	0.57	0.56	0.55	0.55	0.55	0.54	0.54
0.8	1.38	1.06	0.98	0.94	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.88
0.9	3.08	1.89	1.64	1.53	1.48	1.44	1.41	1.40	1.38	1.37
0.95	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.89	1.86	1.83	1.81
0.975	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
0.99	31.82	6.96	4.54	3.75	3.36	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76
0.995	63.66	9.92	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17
0.999	318.31	22.33	10.21	7.17	5.89	5.21	4.79	4.50	4.30	4.14

$F(z)$	درجہ آزادی									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.53	0.53
0.8	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86
0.9	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.33	1.33
0.95	1.80	1.78	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.72
0.975	2.20	2.18	2.16	2.14	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09
0.99	2.72	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57	2.55	2.54	2.53
0.995	3.11	3.05	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.85
0.999	4.02	3.93	3.85	3.79	3.73	3.69	3.65	3.61	3.58	3.55

$F(z)$	درجہ آزادی									
	22	24	26	28	30	40	50	100	200	∞
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25	0.25
0.7	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52
0.8	0.86	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.84	0.84
0.9	1.32	1.32	1.31	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28
0.95	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.68	1.68	1.66	1.65	1.64
0.975	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.97	1.96
0.99	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.33
0.995	2.82	2.80	2.78	2.76	2.75	2.70	2.68	2.63	2.60	2.58
0.999	3.50	3.47	3.43	3.41	3.39	3.31	3.26	3.17	3.13	3.09

جدول 11.ج: مربع خا تقسیم

تفاعل تقسیم $F(z)$ (مساوات ??) کے لئے z کی قیمتیں۔
مثال کی طور پر 3 درجہ آزادی کے لئے $F(z) = 0.99$ تب ہو گا جب $z = 11.34$ ہو۔

$F(z)$	درجہ آزادی									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19

$F(z)$	درجہ آزادی									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.72	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00

$F(z)$	درجہ آزادی									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.95	32.67	33.92	35.17	36.42	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67

$F(z)$	درجہ آزادی							
	40	50	60	70	80	90	100	> 100(تخمین)
0.005	20.71	27.99	35.53	43.28	51.17	59.20	67.33	$\frac{1}{2}(h-2.58)^2$
0.01	22.16	29.71	37.48	45.44	53.54	61.75	70.06	$\frac{1}{2}(h-2.33)^2$
0.025	24.43	32.36	40.48	48.76	57.15	65.65	74.22	$\frac{1}{2}(h-1.96)^2$
0.05	26.51	34.76	43.19	51.74	60.39	69.13	77.93	$\frac{1}{2}(h-1.64)^2$
0.95	55.76	67.50	79.08	90.53	101.88	113.15	124.34	$\frac{1}{2}(h+1.64)^2$
0.975	59.34	71.42	83.30	95.02	106.63	118.14	129.56	$\frac{1}{2}(h+1.96)^2$
0.99	63.69	76.15	88.38	100.43	112.33	124.12	135.81	$\frac{1}{2}(h+2.33)^2$
0.995	66.77	79.49	91.95	104.21	116.32	128.30	140.17	$\frac{1}{2}(h+2.58)^2$

آخری قطار میں $h=\sqrt{2m-1}$ ہے جہاں m درجہ آزادی ہے۔

جدول 12.ج: (m,n) درجہ آزادی کے F تقسیم

z کی وہ قیمتیں جن پر تفاعل تقسیم $F(z)$ (مساوات ??) کی قیمت 0.95 ہو گی۔
مثال کے طور پر $(7,4)$ درجہ آزادی کے لئے $F(z) = 0.95$ تب ہو گا جب $z = 6.09$ ہو۔

n	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

(m,n) درجہ آزادی کی F تقسیم (جدول ??)

z کی وہ قیمتیں جن پر $F(z)=0.95$ ہے۔

n	$m=10$	$m=15$	$m=20$	$m=30$	$m=40$	$m=50$	$m=100$	$m=\infty$
1	241.88	245.95	248.01	250.10	251.14	251.77	253.04	254.31
2	19.40	19.43	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.40
12	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
15	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.01
17	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.96
18	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.84
22	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.78
24	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
26	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
28	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.65
30	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.62
32	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67	1.59
34	2.12	1.97	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65	1.57
36	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62	1.55
38	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61	1.53
40	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
50	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
60	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.39
70	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.35
80	1.95	1.79	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.32
90	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.30
100	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.28
150	1.89	1.73	1.64	1.54	1.48	1.44	1.34	1.22
200	1.88	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.19
1000	1.84	1.68	1.58	1.47	1.41	1.36	1.26	1.08
∞	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.01

(m, n) درجہ آزادی کی F تقسیم (جدول ??)

z کی وہ قیمتیں جن پر $F(z) = 0.99$ ہے۔

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
150	6.81	4.75	3.91	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

(m,n) درجہ آزادی کی F تقسیم (جدول ??)

z کی وہ قیمتیں جن پر $F(z)=0.99$ ہے۔

n	$m=10$	$m=15$	$m=20$	$m=30$	$m=40$	$m=50$	$m=100$	$m=\infty$
1	6055.85	6157.28	6208.73	6260.65	6286.78	6302.52	6334.11	6365.85
2	99.40	99.43	99.45	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	26.87	26.69	26.50	26.41	26.35	26.24	26.13
4	14.55	14.20	14.02	13.84	13.75	13.69	13.58	13.46
5	10.05	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
6	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
7	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.65
8	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.96	4.86
9	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.41	4.31
10	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
11	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.60
12	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.36
13	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.17
14	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.00
15	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.87
16	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.75
17	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.65
18	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.57
19	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.49
20	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.42
22	3.26	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.31
24	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
26	3.09	2.81	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.13
28	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.06
30	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.01
32	2.93	2.65	2.50	2.34	2.25	2.20	2.08	1.96
34	2.89	2.61	2.46	2.30	2.21	2.16	2.04	1.91
36	2.86	2.58	2.43	2.26	2.18	2.12	2.00	1.87
38	2.83	2.55	2.40	2.23	2.14	2.09	1.97	1.84
40	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.80
50	2.70	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.82	1.68
60	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.60
70	2.59	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.54
80	2.55	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.65	1.49
90	2.52	2.24	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.46
100	2.50	2.22	2.07	1.89	1.80	1.74	1.60	1.43
150	2.44	2.16	2.00	1.83	1.73	1.66	1.52	1.33
200	2.41	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.28
1000	2.34	2.06	1.90	1.72	1.61	1.54	1.38	1.11
∞	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.01

جدول 13.ج: بلا منصوبہ متغیر T کا تفاعل تقسیم $F(x) = P(T \leq x)$ (برائے حصہ ??)

مثال کے طور پر $n = 3$ پر $F(2) = 1 - 0.167 = 0.833$ ہو گا۔
$n = 4$ پر $F(3) = 1 - 0.375 = 0.625$ اور $F(4) = 1 - 0.167 = 0.833$ ہوں گے۔

x	$n = 3$
	0.
0	167
1	500

x	$n = 4$
	0.
0	042
1	167
2	375

x	$n = 5$
	0.
0	008
1	042
2	117
3	242
4	408

x	$n = 6$
	0.
0	001
1	008
2	028
3	068
4	136
5	235
6	360
7	500

x	$n = 7$
	0.
1	001
2	005
3	015
4	035
5	068
6	119
7	191
8	281
9	386
10	500

x	$n = 8$
	0.
2	001
3	003
4	007
5	016
6	031
7	054
8	089
9	138
10	199
11	274
12	360
13	452

x	$n = 9$
	0.
4	001
5	003
6	006
7	012
8	022
9	038
10	060
11	090
12	130
13	179
14	238
15	306
16	381
17	460

x	$n = 10$
	0.
6	001
7	002
8	005
9	008
10	014
11	023
12	036
13	054
14	078
15	108
16	146
17	190
18	242
19	300
20	364
21	431
22	500

x	$n = 11$
	0.
8	001
9	002
10	003
11	005
12	008
13	013
14	020
15	030
16	043
17	060
18	082
19	109
20	141
21	179
22	223
23	271
24	324
25	381
26	440
27	500

(جدول ??)

x	$n = 20$
	O.
50	001
51	002
52	002
53	003
54	004
55	005
56	006
57	007
58	008
59	010
60	012
61	014
62	017
63	020
64	023
65	027
66	032
67	037
68	043
69	049
70	056
71	064
72	073
73	082
74	093
75	104
76	117
77	130
78	144
79	159
80	176
81	193
82	211
83	230
84	250
85	271
86	293
87	315
88	339
89	362
90	387
91	411
92	436
93	462
94	487

x	$n = 19$
	O.
43	001
44	002
45	002
46	003
47	003
48	004
49	005
50	006
51	008
52	010
53	012
54	014
55	017
56	021
57	025
58	029
59	034
60	040
61	047
62	054
63	062
64	072
65	082
66	093
67	105
68	119
69	133
70	149
71	166
72	184
73	203
74	223
75	245
76	267
77	290
78	314
79	339
80	365
81	391
82	418
83	445
84	473
85	500

x	$n = 18$
	O.
38	001
39	002
40	003
41	003
42	004
43	005
44	007
45	009
46	011
47	013
48	016
49	020
50	024
51	029
52	034
53	041
54	048
55	056
56	066
57	076
58	088
59	100
60	115
61	130
62	147
63	165
64	184
65	205
66	227
67	250
68	275
69	300
70	327
71	354
72	383
73	411
74	441
75	470
76	500

x	$n = 17$
	O.
32	001
33	002
34	002
35	003
36	004
37	005
38	007
39	009
40	011
41	014
42	017
43	021
44	026
45	032
46	038
47	046
48	054
49	064
50	076
51	088
52	102
53	118
54	135
55	154
56	174
57	196
58	220
59	245
60	271
61	299
62	328
63	358
64	388
65	420
66	452
67	484

x	$n = 16$
	O.
27	001
28	002
29	002
30	003
31	004
32	006
33	008
34	010
35	013
36	016
37	021
38	026
39	032
40	039
41	048
42	058
43	070
44	083
45	097
46	114
47	133
48	153
49	175
50	199
51	225
52	253
53	282
54	313
55	345
56	378
57	412
58	447
59	482

x	$n = 15$
	O.
23	001
24	002
25	003
26	004
27	006
28	008
29	010
30	014
31	018
32	023
33	029
34	037
35	046
36	057
37	070
38	084
39	101
40	120
41	141
42	164
43	190
44	218
45	248
46	279
47	313
48	349
49	385
50	423
51	461
52	500

x	$n = 14$
	O.
18	001
19	002
20	002
21	003
22	005
23	007
24	010
25	013
26	018
27	024
28	031
29	040
30	051
31	063
32	079
33	096
34	117
35	140
36	165
37	194
38	225
39	259
40	295
41	334
42	374
43	415
44	457
45	500

x	$n = 13$
	O.
14	001
15	001
16	002
17	003
18	005
19	007
20	011
21	015
22	021
23	029
24	038
25	050
26	064
27	082
28	102
29	126
30	153
31	184
32	218
33	255
34	295
35	338
36	383
37	429
38	476

x	$n = 12$
	O.
11	001
12	002
13	003
14	004
15	007
16	010
17	016
18	022
19	031
20	043
21	058
22	076
23	098
24	125
25	155
26	190
27	230
28	273
29	319
30	369
31	420
32	473

جدول 14.ج: تفاعل خلل، سائن اور کوسائن تکملات

تفاعل خلل، سائن اور کوسائن تکملات (بالترتیب ضمیمہ ?? میں مساوات ??، مساوات ?? اور مساوات ??)

x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{Si}(x)$	$\operatorname{ci}(x)$	x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{Si}(x)$	$\operatorname{ci}(x)$
0.0	0.0000	0.0000	∞	2.0	0.9953	1.6054	-0.4230
0.2	0.2227	0.1996	1.0422	2.2	0.9981	1.6876	-0.3751
0.4	0.4284	0.3965	0.3788	2.4	0.9993	1.7525	-0.3173
0.6	0.6039	0.5881	0.0223	2.6	0.9998	1.8004	-0.2533
0.8	0.7421	0.7721	-0.1983	2.8	0.9999	1.8321	-0.1865
1.0	0.8427	0.9461	-0.3374	3.0	1.0000	1.8487	-0.1196
1.2	0.9103	1.1080	-0.4205	3.2	1.0000	1.8514	-0.0553
1.4	0.9523	1.2562	-0.4620	3.4	1.0000	1.8419	0.0045
1.6	0.9763	1.3892	-0.4717	3.6	1.0000	1.8219	0.0580
1.8	0.9891	1.5058	-0.4568	3.8	1.0000	1.7934	0.1038
2.0	0.9953	1.6054	-0.4230	4.0	1.0000	1.7582	0.1410