# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

# عنوان

# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

# باب 24

# احتمال اور شماریات

بڑے پیمانے پر مصنوعات کی پیداوار اور تجرباتی مواد کے تجزیہ کے لئے حسابی شماریات بہت اہم ہے۔ اس باب کی شروع میں مواد کا جدول اور ترسیم سے اظہار پر غور کیا جائے گا۔ چونکہ شماریات کی بنیاد حسابی احتمال ہے لہٰذا اس کے بعد حسابی احتمال کے بنیادی تصورات اور اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ باب کا باقی حصہ شماریات کے اہم ترین تراکیب پر مشتمل ہے۔

## 24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد

انجینئری شماریات میں ہمیں ایسے تجربات کی بناوٹ اور تشخیص سے غرض ہو گا جو عملی مسائل کے بارے میں معلومات فراہم کر سکے، مثلاً، خام مال یا تیار کردہ مصنوعات کے معیار کی جانچ پڑتال، مشین اور آلات یا مصنوعات کی تیاری میں استعمال تراکیب کا آپس میں موازنہ، مزدور کی پیداوار، صارفین کا نئی مصنوعات کے لئے رد عمل، مختلف حالات میں کیمیائی عمل سے حاصل پیداوار، خام لوہا کی کثافت اور اس میں لوہے کی مقدار کا تعلق، مختلف درجہ حرارت پر ایئر کنڈیشنر نظام کی کارکردگی، فولاد میں کاربن کی مقدار اور فولاد کی راک ویل[1] سختی کا تعلق، وغیرہ وغیرہ۔

مثال کے طور پر، بڑے پیمانے پر (پیچ، بلب، موبائل فون وغیرہ کی) پیداوار کے عمل میں عموماً بے عیب[2] اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا اترے ہیں، اور عیب دار[3] اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا نہیں اترتے ہیں،

---

Rockwell[1]
nondefective[2]
defective[3]

پائے جائیں گے۔ درکار خواص میں دھرا کا قطر، بلب کی کم سے کم عرصہ زندگی[4]، برقیاتی مصنوعات میں استعمال برقی مزاحمت کی قیمت کے حدود، کتاب میں استعمال کاغذ کی موٹائی، خود کار بھری گئی بوتل میں مشروب کی کم سے کم مقدار، برقی سوئچ کا زیادہ سے زیادہ دورانیہ رد عمل، اور کپڑے کی کم سے کم مضبوطی شامل ہیں۔

مصنوعات کی معیار میں فرق متعدد وجوہات (مثلاً خام مال، خود کار مشین کی کارکردگی، کاریگر کی کاریگری) کی بنا ممکن ہے جن کو قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہے لہٰذا انہیں بے ترتیب تبدیلیاں[5] تصور کیا جات ہے۔پیداوار کے تراکیب کی کارکردگی اور متذکرہ بالا دیگر مثالوں میں بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔

ہر ایک پیدا کردہ رکن کو پرکھنے کے لئے عموماً بہت وقت درکار ہو گا اور ایسا کرنا خاصہ مہنگا ہو گا۔اگر پرکھنے کے دوران رکن ضائع ہوتا ہو تب ہر رکن کو پرکھنا ممکن نہیں ہو گا۔اسی لئے تمام ارکان کو پرکھنے کی بجائے چند ارکان کو بطور نمونہ[6] پرکھا جاتا ہے اور اس نمونہ کے نتائج سے کل تعداد (آبادی[7]) کے بارے میں رائے بنائی جاتی ہے۔ اگر 10 000 پیچوں کی کھیپ سے 100 پیچوں کے نمونہ کو پرکھا جائے اور اس میں 5 پیچ عیب دار نکلیں تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس کھیپ میں %5 پیچ عیب دار ہوں گے، پس اتنا ضروری ہے کہ نمونہ کو بلا منصوبہ[8] چننا جائے یعنی کھیپ میں موجود ہر پیچ کا بطور نمونہ منتخب ہونے کا امکان[9] ایک جیسا ہو۔ظاہر ہے کہ ایسی رائے مکمل طور پر درست نہیں ہو سکتی ہے اور یہ کہنا کہ ٹھیک %5 پیچ عیب دار ہوں گے عموماً درست نہیں ہو گا لیکن عام طور عملی زندگی میں اتنی درست رائے (یا نتیجہ) کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔جتنے زیادہ ارکان کو پرکھا جائے ہمیں نتائج پر اتنا زیادہ اعتماد ہوتا ہے۔حسابی احتمال کا نظریہ ان خیالات کو ٹھوس شکل دیتا ہے اور نتائج پر کتنا اعتبار کیا جائے، اس کی ناپ بھی پیش کرتا ہے۔یوں شماریات کی بنیاد نظریہ احتمال ہے۔

اسی طرح خام لوہا میں لوہے کی فی صد مقدار $\mu$ جاننے کی خاطر ہم بلا منصوبہ $n$ تعداد کے نمونے لیتے ہوئے ان میں لوہے کی فی صد مقدار تجرباتی طور دریافت کریں گے۔ ان $n$ نمونوں کے تجرباتی نتائج $x_1, \cdots, x_n$ کی اوسط $\bar{x} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ لوہے کی فی صد مقدار $\mu$ کی تخمین ہو گی۔

مختلف نوعیت کے مسائل کے لئے مختلف تراکیب اور تکنیک درکار ہوں گے البتہ مسئلے کی تشکیل سے حل تک کے قدم عموماً ایک جیسے ہوتے ہیں۔انہیں یہاں پیش کرتے ہیں۔

---

lifetime[4]
random variation[5]
sample[6]
population[7]
at random[8]
chance[9]

- مسئلے کی تشکیل۔ مسئلے کو ٹھیک ٹھیک بیان کرنا اور تفتیشی عمل کے حدود تعین کرنا ضروری ہے تا کہ شماریاتی تفتیش کی لاگت، تفتیش کار کی مہارت اور دستیاب سہولیات کو مد نظر رکھتے ہوئے مخصوص وقت میں قابل استعمال نتائج حاصل ہوں۔اسی قدم میں واضح تصورات سے **حسابی نمونہ**[10] کی تخلیق[11] بھی شامل ہے۔ (مثال کے طور پر ہم نے تعین کرنا ہو گا کہ عیب دار رکن سے کیا مراد ہے۔)

- تجربہ کی تخلیق۔ آخری مرحلے میں استعمال ہونے والی شماریاتی ترکیب کا انتخاب، نمونہ کی جسامت (جتنے ارکان کا تجزیہ یا ان پر تجربہ کیا جائے گا، وغیرہ) اور طبعی تراکیب اور تکنیک جو بروئے کار لائے جائیں گے کا انتخاب اس قدم میں کیا جائے گا۔کم سے کم وقت اور لاگت کے ساتھ زیادہ سے زیادہ معلومات حاصل کرنا مقصد ہے۔

- تجربہ یا مواد جمع کرنے کا عمل۔ اس قدم میں قواعد پر سختی سے عمل کرنا ضروری ہے۔

- جدول بندی۔ اس قدم میں تجرباتی نتائج کو واضح اور سادہ جدول کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور ساتھ ہی انہیں ترسیم کیا جا سکتا ہے یا انہیں **ڈبہ ترسیم**[12] کی صورت میں دکھایا جا سکتا ہے۔ اس قدم میں نمونہ کی اوسط اور قیمتوں میں پھیل کے تخمین کا حساب بھی کیا جاتا ہے۔

- شماریاتی رائے زنی۔ اس قدم میں کوئی مخصوص شماریاتی ترکیب کو نمونہ سے حاصل نتائج پر لاگو کرتے ہوئے نا معلوم خواص کے بارے میں رائے قائم کی جاتی ہے تا کہ ہم مطلوبہ جواب حاصل کر سکیں۔

## 24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم

شماریاتی تجربہ کے دوران عموماً مشاہدوں (زیادہ تر صورتوں میں اعداد) کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جنہیں ہم اسی ترتیب سے لکھتے ہیں جس میں انہیں حاصل کیا گیا ہو۔ایک مثال جدول 24.1 میں دی گئی ہے۔سیمنٹ اور بجری (کنکریٹ) سے معیاری ٹھوس بیلن (قطر 15.24 cm اور لمبائی 30.48 cm ) بنا کر 28 دن[13] بعد انہیں چیرا گیا۔یوں ہمیں ایک نمونہ حاصل ہوا جو 100 **نمونہ اعداد** پر مشتمل ہے۔یوں نمونہ کی **جسامت**[14] $n = 100$ ہے۔

---

[10] mathematical model

[11] لفظ "نمونہ" اور لفظ "حسابی نمونہ" علیحدہ معنی رکھتے ہیں۔اسی لئے حسابی نمونہ کو بطور اصطلاح لیتے ہوئے پورا لکھا جائے گا یعنی "حسابی نمونہ"۔

[12] bar graph

[13] سیمنٹ کو مکمل مضبوط ہونے کے لئے اتنے دن درکار ہوتے ہیں۔

[14] size

جدول 24.1: کنکریٹ بیلن چیرنے کے لئے درکار فی مربع سنٹی میٹر قوت ( $\mathrm{N\,cm^{-2}}$ )

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 320 | 380 | 340 | 410 | 380 | 340 | 360 | 350 | 320 | 370 |
| 350 | 340 | 350 | 360 | 370 | 350 | 380 | 370 | 300 | 420 |
| 370 | 390 | 390 | 440 | 330 | 390 | 330 | 360 | 400 | 370 |
| 320 | 350 | 360 | 340 | 340 | 350 | 350 | 390 | 380 | 340 |
| 400 | 360 | 350 | 390 | 400 | 350 | 360 | 340 | 370 | 420 |
| 420 | 400 | 350 | 370 | 330 | 320 | 390 | 380 | 400 | 370 |
| 390 | 330 | 360 | 380 | 350 | 330 | 360 | 300 | 360 | 360 |
| 360 | 390 | 350 | 370 | 370 | 350 | 390 | 370 | 370 | 340 |
| 370 | 400 | 360 | 350 | 380 | 380 | 360 | 340 | 330 | 370 |
| 340 | 360 | 390 | 400 | 370 | 410 | 360 | 400 | 340 | 360 |

اس حصے میں ہم نمونہ کو جدول اور ترسیم کی صورت میں ظاہر کرنا سیکھتے ہیں۔ہم ان تراکیب کو جدول 24.1 کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

جدول 24.1 میں دی گئی معلومات جاننے کی خاطر ہم مواد کو ترتیب دیتے ہیں۔ہم (کم سے کم قیمت) 310 ، 320 ، $\cdots$ ، 440 (زیادہ سے زیادہ قیمت) کو ایک قطار میں لکھتے ہیں۔اس کے بعد جدول 24.1 کے ہر صف سے گزرتے ہوئے ہر عدد کے لئے اس قطار میں مطابقتی مقام کی صف میں **نشان شمار**[15] کھینچتے ہیں۔اس طرح ہمیں جدول 24.2 کی پہلی دو قطاروں کا جدول حاصل ہو گا۔ نشان شمار کی گنتی کو جدول کی تیسری قطار میں درج کیا جاتا ہے۔یہ گنتی نمونہ میں کسی عدد $x$ کی تعداد دیتی ہے جس کو نمونہ میں $x$ کی حتمی تعدد[16] یا مختصراً **تعدد**[17] کہتے ہیں۔اس کو نمونہ میں ارکان کی تعداد $n$ سے تقسیم کرنے سے ہمیں **اضافی تعدد**[18] حاصل ہوتی ہے جس کو جدول 24.2 کی چوتھی قطار میں درج کیا جاتا ہے۔یہاں $n = 100$ ہے لہٰذا $x = 330$ کی تعدد 6 اور اضافی تعدد 0.06 یا 6 % ہے۔

کسی مخصوص $x$ کے لئے نمونہ میں $x$ اور $x$ سے کم قیمتوں کی تمام تعدد کا مجموعہ لیتے ہوئے **مجموعی تعدد**[19] حاصل ہوتی ہے جس کو پانچویں قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $x = 350$ کا مطابقتی مجموعی تعدد 37 ہے جس کے تحت 350 اور اس سے کم قیمتوں کی تعداد 37 ہے۔اس کو جسامت $n$ سے تقسیم کرنے

---

tally mark[15]
absolute frequency[16]
frequency[17]
relative frequency[18]
cumulative frequency[19]

جدول24.2: جدول تقسیم برائے جدول24.1 کا نمونہ

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| مضبوطی | حتمی تعدد | | اضافی تعدد | مجموعی تعدد | مجموعی اضافی تعدد |
| | نشان شمار | | | | |
| 300 | \|\| | 2 | 0.02 | 2 | 0.02 |
| 310 | | 0 | 0.00 | 2 | 0.02 |
| 320 | \|\|\|\| | 4 | 0.04 | 6 | 0.06 |
| 330 | \|\|\|\| \| | 6 | 0.06 | 12 | 0.12 |
| 340 | | 11 | 0.11 | 23 | 0.23 |
| 350 | | 14 | 0.14 | 37 | 0.37 |
| 360 | | 16 | 0.16 | 53 | 0.53 |
| 370 | | 15 | 0.15 | 68 | 0.68 |
| 380 | | 8 | 0.08 | 76 | 0.76 |
| 390 | | 10 | 0.10 | 86 | 0.86 |
| 400 | | 8 | 0.08 | 94 | 0.94 |
| 410 | | 2 | 0.02 | 96 | 0.96 |
| 420 | | 3 | 0.03 | 99 | 0.99 |
| 430 | | 0 | 0.00 | 99 | 0.99 |
| 440 | | 1 | 0.01 | 100 | 1.00 |

سے چھٹی قطار میں درج **مجموعی اضافی تعدد**[20] حاصل ہوتی ہے۔مثال کے طور پر چھٹی قطار سے ہم دیکھتے ہیں کہ نمونہ میں $76\,\%$ قیمتیں $380$ کے برابر یا اس سے کم ہیں۔

اگر نمونہ میں کوئی قیمت نہ پائی جاتی ہو تب اس قیمت کی تعدد $0$ ہو گی۔اگر نمونہ میں تمام قیمتیں ایک جیسی ہوں تب اس قیمت کی تعدد $n$ اور اضافی تعدد $\frac{n}{n}=1$ ہو گی۔چونکہ یہی تعدد کی دو انتہائی قیمتیں ہیں لہٰذا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.1: **(اضافی تعدد)**
اضافی تعدد کی کم سے کم قیمت $0$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $1$ ہے۔

فرض کریں کہ جسامت $n$ کے نمونہ میں درج ذیل $m$ مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں

$$x_1, x_2, \cdots, x_m \qquad (m \le n)$$

جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_m$$

ہیں۔تب ہم درج ذیل تفاعل[21] متعارف کر سکتے ہیں

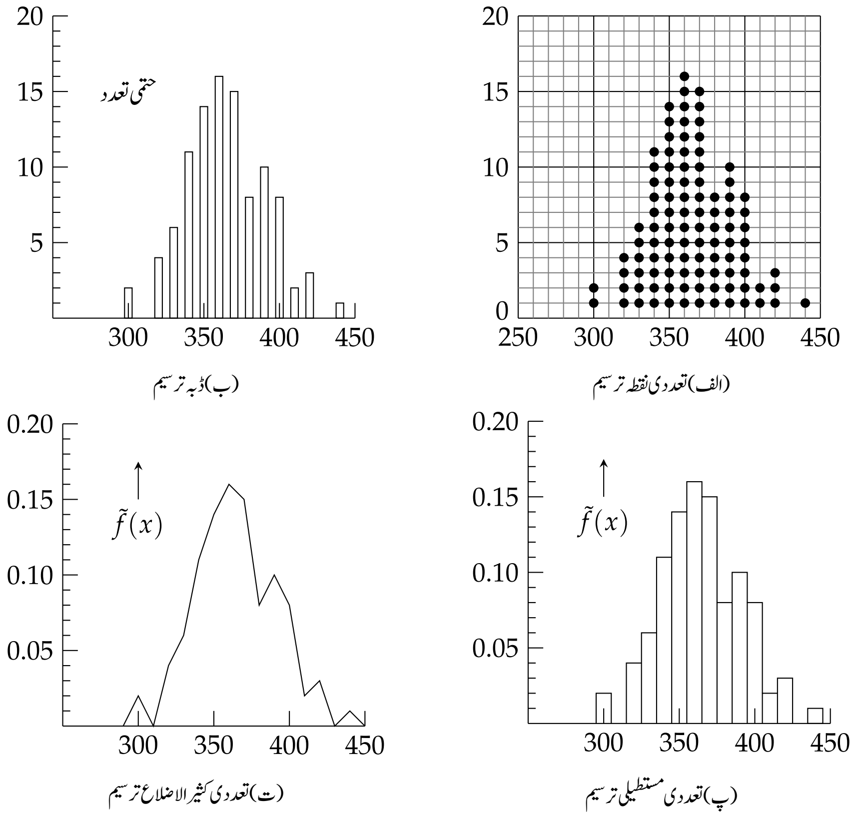
$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\tilde{f}_j & \text{جب } x=x_j \text{ ہو} \qquad (j=1,2,\cdots,m)\\ 0 & \text{کسی بھی قیمت } x \text{ کے لئے جو نمونہ میں نہ پایا جاتا ہو}\end{cases} \tag{24.1}$$

جس کو **نمونہ کا تعددی تفاعل**[22] کہتے ہیں۔یہ نمونہ میں قیمتوں کی تقسیم (پھیل) دیتا ہے۔اسی لئے ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل نمونہ کی **تعددی تقسیم**[23] دیتا ہے۔

مثال کے طور پر جدول 24.2 میں تعددی تفاعل کی قیمتیں قطار 4 میں دکھائی گئی ہیں جہاں $\tilde{f}(300)=0.02$ ، $\tilde{f}(310)=0$ ، $\tilde{f}(320)=0.04$ ، وغیرہ، ہیں۔

جسامت $n$ کے نمونہ میں تمام تعدد کا مجموعہ $n$ کے برابر ہو گا۔ (کیوں؟) اس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

[20] cumulative relative frequency
[21] ہم $\tilde{f}$ استعمال کرتے ہیں چونکہ $f$ کو تعددی تفاعل کے لئے استعمال کیا جائے گا جس کا استعمال کثرت سے ہو گا۔
[22] frequency function of the sample
[23] frequency distribution



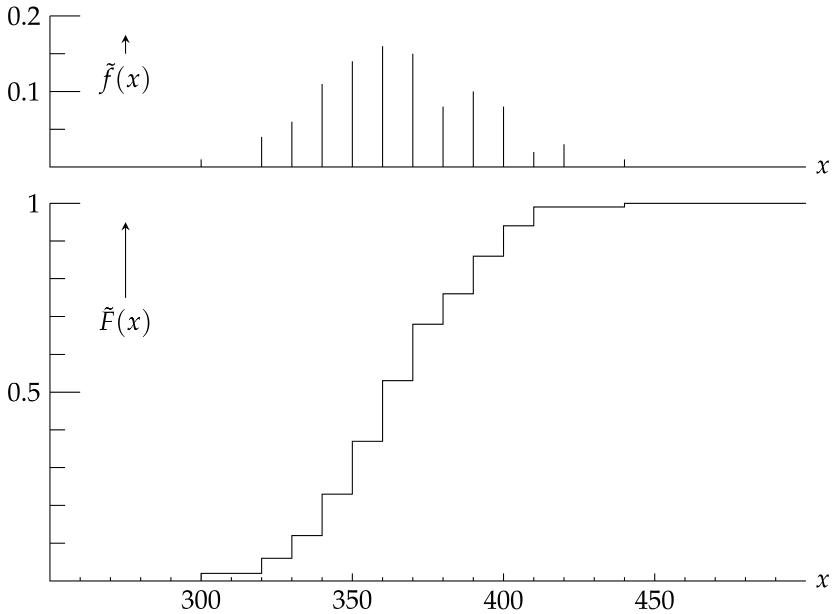

شکل 24.1: ترسیم برائے جدول 24.2

**مسئلہ 24.2: اضافی تعدد کا مجموعہ**

کسی بھی نمونہ میں تمام اضافی تعدد کا مجموعہ 1 کے برابر ہو گا، یعنی:

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \cdots + \tilde{f}(x_m) = 1$$

نمونہ کا ترسیمی اظہار شکل 24.1-الف تا شکل 24.1-ت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 24.1-پ میں ہر مستطیل کا رقبہ مطابقتی اضافی تعدد کے برابر ہو گا لہٰذا عمودی محدد پر اضافی تعدد فی اکائی رقبہ ہو گا۔ چونکہ شکل 24.1-پ میں تمام




شکل 24.2: تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ اور مجموعی تعددی تفاعل $\tilde{F}(x)$ برائے جدول 24.2

مستطیل کی چوڑائی ایک جیسی ہے لہٰذا عمودی محدد پر قیمتیں $\tilde{f}(x)$ کے راست متناسب ہوں گی۔ البتہ مستطیل کو چوڑائیاں مختلف ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہو گا۔ شکل 24.1-ت میں بھی یہی صورت حال ہو گی۔

ہم اب درج ذیل تفاعل متعارف کرتے ہیں

$\tilde{F}(x) =$ $x$ اور $x$ سے کم تمام قیمتوں کے اضافی تعدد کا مجموعہ

جس کو نمونے کا **مجموعی تعددی تفاعل**[24] یا مختصراً **تقسیمی تفاعل نمونہ**[25] کہتے ہیں۔ شکل 24.2 میں مثال دی گئی ہے۔

$\tilde{F}(x)$ سیڑھی تفاعل (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہے جس میں ٹھیک ان $x$ پر جہاں $\tilde{f}(x) \neq 0$ ہو $\tilde{f}(x)$ کے برابر چلانگ پائے جاتے ہیں۔ پہلی چھلانگ نمونہ کی کم سے کم قیمت اور آخری چھلانگ نمونہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پر پائی جائے گی۔ آخری چھلانگ کے بعد $\tilde{F}(x) = 1$ رہے گا۔

[24] cumulative frequency function of the sample
[25] sample distribution function

جدول 24.3: کپاس کے سوتی دھاگے کو توڑنے کے لئے درکار قوت (نیوٹن میں)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 114 | 118 | 86 | 107 | 87 | 94 | 82 | 81 | 98 | 84 |
| 120 | 126 | 98 | 89 | 114 | 83 | 94 | 106 | 96 | 111 |
| 123 | 110 | 83 | 118 | 83 | 96 | 96 | 74 | 91 | 81 |
| 102 | 107 | 103 | 80 | 109 | 71 | 96 | 91 | 86 | 129 |
| 130 | 104 | 86 | 121 | 96 | 96 | 127 | 94 | 102 | 87 |

$\tilde{f}(x)$ اور $\tilde{F}(x)$ کا تعلق درج ذیل ہے

$$\tilde{F}(x) = \sum_{t \leq x} \tilde{f}(t) \tag{24.2}$$

جہاں $t \leq x$ کا مطلب ہے کہ کسی بھی $x$ کے لئے ان تمام $\tilde{f}(x)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے $t$ کی قیمت $x$ کے برابر یا $x$ سے کم ہو۔

اگر کسی نمونہ میں مختلف اعداد کی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس کا جدولی اور ترسیمی اظہار غیر ضروری طور پر مشکل ہو گا جس کو **گروہ بندی**[26] سے آسان بنانا ممکن ہے۔آئیں گروہ بندی کے عمل کو سمجھیں۔

دیے گئے نمونہ کے لحاظ سے ہم ایسا وقفہ $I$ منتخب کرتے ہیں جس میں تمام نمونی قیمتیں شامل ہوں۔ہم $I$ کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں **جماعتی وقفہ**[27] کہتے ہیں۔ان جماعتی وقفوں کے وسطی نقطوں کو **جماعتی وسطی نقطے**[28] یا **جماعتی نشان**[29] کہتے ہیں۔ہر جماعتی وقفہ میں پائے جانے والے نمونی قیمتیں کو **طبقہ**[30] کہتے ہیں۔ طبقہ میں نمونی قیمتوں کی تعداد کو **جماعتی تعداد**[31] کہتے ہیں جس کو جسامت نمونہ $n$ سے تقسیم کرنے سے **اضافی جماعتی تعدد**[32] حاصل ہو گا۔ اس تعدد $\tilde{f}(x)$ کو جو جماعتی نشان کے تابع ہے **گروہ بند نمونہ کا تعددی تفاعل**[33] کہتے ہیں۔اسی طرح مجموعی اضافی جماعتی تعدد $\tilde{F}(x)$ جو جماعتی نشان کے تابع ہے **گروہ بند نمونہ کا تقسیمی تفاعل**[34] کہلاتا ہے۔جدول 24.3 اور جدول 24.4 میں مثال دیا گیا ہے۔

---

grouping[26]
class intervals[27]
class midpoints[28]
class marks[29]
class[30]
class frequency[31]
relative class frequency[32]
frequency function of the grouped sample[33]
distribution!function of the grouped sample[34]

جدول 24.4: تعددی جدول برائے جدول 24.3 (گروہ بند)

| جماعتی وقفہ | جماعتی نشان $x$ | حتمی تعدد نشان شمار | | $\tilde{f}(x)$ | $\tilde{F}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $65-75$ | 70 | $\|\|$ | 2 | 0.04 | 0.04 |
| $75-85$ | 80 | | 8 | 0.16 | 0.20 |
| $85-95$ | 90 | | 11 | 0.22 | 0.42 |
| $95-105$ | 100 | | 12 | 0.24 | 0.66 |
| $105-115$ | 110 | | 8 | 0.16 | 0.82 |
| $115-125$ | 120 | | 5 | 0.10 | 0.92 |
| $125-135$ | 130 | | 4 | 0.08 | 1.00 |
| | | مجموعہ | 50 | 1.00 | |

جماعتوں کی تعداد جتنی کم رکھی جائے، گروہ بند نمونہ کی تقسیم اتنی سادہ ہو گی اور اتنی ہی زیادہ معلومات کھوئی جائے گی چونکہ اصل نمونی قیمتیں اب صریحاً نظر نہیں آئیں گی۔ گروہ بندی کرتے وقت دھیان رکھیں کہ صرف غیر ضروری معلومات کھوئی جائے۔ گروہ بند نمونہ استعمال کرتے ہوئے مشکلات سے بچنے کی خاطر درج ذیل اصولوں کا خیال رکھیں۔

- جماعتی وقفے برابر رکھیں۔
- جماعتی نشان یوں منتخب کریں کہ جماعتی نشان سادہ اعداد (جن میں غیر صفر ہندسوں کی تعداد کم سے کم ہو) پر واقع ہوں۔
- اگر نمونی قیمت $x_j$ دو جماعتوں کی سرحد پر واقع ہو تب یہ قیمت اس طبقہ میں شامل کیا جائے گا جو $x_j$ سے شروع ہوتا ہو۔

## سوالات

سوال 24.1 تا سوال 24.9 میں دیے گئے نمونہ کا تعددی جدول بنائیں اور نمونہ کو تعددی نقطہ ترسیم، ڈبہ ترسیم اور مستطیل ترسیم کی صورت میں دکھائیں۔

سوال 24.1: مزاحمت کی قیمت اوہم $\Omega$ میں۔

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 99 | 100 | 102 | 101 | 98 | 103 | 100 | 102 | 99 | 101 |
| 100 | 100 | 99 | 101 | 100 | 102 | 99 | 101 | 98 | 100 |

سوال 24.2:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 6 | 5 | 6 | 3 | 4 |

سوال 24.3: برقی سوئچ کا سیکنڈوں میں دورانیہ رد عمل

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.3 | 1.4 | 1.1 | 1.5 | 1.4 | 1.3 | 1.2 | 1.4 | 1.5 | 1.3 |
| 1.2 | 1.3 | 1.5 | 1.4 | 1.4 | 1.6 | 1.3 | 1.5 | 1.1 | 1.4 |

سوال 24.4: خام کوئلہ میں کوئلہ کی فی صد مقدار

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 87 | 86 | 85 | 87 | 86 | 87 | 86 | 81 | 77 | 85 |
| 86 | 84 | 83 | 83 | 82 | 84 | 83 | 79 | 82 | 73 |

سوال 24.5: چادری فولاد کی تنشی مضبوطی $[\mathrm{kg\,mm^{-2}}]$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 44 | 43 | 41 | 41 | 44 | 44 | 43 | 44 | 42 | 45 | 43 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 42 | 45 | 41 | 44 | 44 | 43 | 44 | 46 | 41 | 43 | 45 | 45 | 42 | 44 | 44 |

سوال 24.6: خود کار نظام سے 100 کاغذ کے گھٹے بنانے میں کمی بیشی

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |

سوال 24.7: ایک ہی قسم کے گاڑیوں کا تیل کا خرچہ۔ [کلومیٹر فی لیٹر]

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 11.5 | 11 | 12.5 | 11 | 12 |

سوال 24.8: خود کار نظام سے بھری گئی تھیلوں کا گرام میں وزن

200 203 199 198 201 200 201 201

سوال 24.9: اندرون شہر چلتی ریل گاڑی کا اڈے پر ٹھیک وقت پر پہنچنے سے انحراف (منٹوں میں)[35]

3 4 1 0 2 2 3 1 5 3

سوال 24.10: سوال 24.3 کے نمونہ کی مجموعی تعددی تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.11: جدول 24.4 کے گروہ بند نمونہ کا ڈبہ ترسیم، مستطیل ترسیم اور تعددی کثیر الاضلاع ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.12: جدول 24.1 میں جماعتی وقفوں کے جماعتی نشان 300 ، 320 ، 340 ، ... پر لیتے ہوئے مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔اس کے مستطیل ترسیم کھینچ کا شکل 24.1-پ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 24.13: جدول 24.3 میں جماعتی نشان 75 ، 85 ، 95 ، ... لے کر مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔اس کے مستطیل ترسیم کا سوال 24.10 کے ترسیم سے موازنہ کریں۔

سوال 24.14: 1500 تجرباتی نتائج میں سب سے کم ناپ 10.8 cm اور سب سے زیادہ ناپ 11.9 cm تھی۔اس مواد کی گروہ بندی لے لئے جماعتی وقفہ تجویز کریں۔

[35]امید کی جاسکتی ہے کہ ایک دن ہماری ریل گاڑیاں بھی وقت کی اتنی پابند ہوں گی۔

## 24.3 نمونی اوسط اور نمونی تغیریت

تعددی تفاعل (یا تقسیمی تفاعل) نمونہ کی صحیح تصویر کشی کرتا ہے۔اس تفاعل سے ہم نمونہ کے کئی خواص کا حساب لگا سکتے ہیں مثلاً نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت، پھیل، تشاکل، وغیرہ۔ اس حصہ میں ہم ایسے اہم ترین دو قیمتوں، نمونی اوسط اور نمونی تغیریت، پر غور کریں گے۔

نمونہ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کی اوسط قیمت یا مختصراً **نمونی اوسط**[36] کو $\bar{x}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{24.3}$$

تمام نمونی قیمتوں کے مجموعہ کو جسامت $n$ سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی اوسط حاصل ہو گا۔ظاہر ہے کہ یہ نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت دے گا۔

نمونہ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کی **نمونی تغیریت**[37] کو $s^2$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2] \end{aligned} \tag{24.4}$$

نمونی اوسط $\bar{x}$ سے نمونی قیمتوں کے انحراف کے مربعوں کو $n-1$ سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی تغیریت حاصل ہو گی۔یہ نمونی قیمتوں کی انحراف یا پھیل کی ناپ ہے۔نمونی تغیریت غیر منفی عدد ہو گا۔ نمونی تغیریت $s^2$ کا مثبت جذر **معیاری انحراف**[38] کہلاتا ہے جس کو $s$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

**مثال 24.1: نمونی اوسط اور نمونی تغیریت**
بے ترتیب منتخب کیے گئے کیلوں کی (سنٹی میٹروں میں) لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81

[36] sample mean
[37] sample variance
[38] standard deviation

مساوات 24.3 سے نمونی اوسط

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(0.80 + 0.81 + 0.81 + 0.82 + \cdots + 0.81) = 0.811\,\text{cm}$$

اور مساوات 24.4 سے نمونی تغیریت

$$s^2 = \frac{1}{9}[(0.80 - 0.811)^2 + \cdots + (0.81 - 0.811)^2] = 0.000\,054\,\text{cm}^2$$

ہے۔ایک جیسی نمونی قیمتوں کو اکٹھا لکھنے سے حساب نسبتاً آسان بنایا جا سکتا ہے جیسے

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(2 \cdot 0.80 + 5 \cdot 0.81 + 3 \cdot 0.82) = 0.811\,\text{cm}$$

جہاں قوسین میں تین مختلف نمونی قیمتوں $x_1 = 0.80$ ، $x_2 = 0.81$ اور $x_3 = 0.82$ کو ان کی تعدد سے ضرب دیا گیا ہے۔اسی طرح

$$s^2 = \frac{1}{9}[(2(0.800 - 0.811)^2 + 5(0.810 - 0.811)^2 + 3(0.820 - 0.811)^2] = 0.000\,054$$

ہو گا۔ $\square$

اس مثال میں ہم نے $\bar{x}$ اور $s^2$ کو نمونہ کے تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ کی مدد سے حاصل کرنا دیکھا۔اگر ایک نمونہ میں ٹھیک $m$ مختلف اعدادی قیمتیں

$$x_1, x_2, \cdots, x_m$$

پائی جاتی ہوں جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2), \cdots, \tilde{f}(x_m)$$

ہوں تب حساب کے لئے درکار تعدد درج ذیل ہوں گے

$$n\tilde{f}(x_1), n\tilde{f}(x_2), \cdots, n\tilde{f}(x_m)$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 سے

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} x_j n\tilde{f}(x_j) \tag{24.5}$$

اور

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{m}(x_j - \bar{x})^2 n\tilde{f}(x_j) \tag{24.6}$$

حاصل ہو گا۔ دھیان رہے کہ مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 میں ہم تمام نمونی قیمتوں پر مجموعہ لیتے ہیں جبکہ مساوات 24.5 اور مساوات 24.6 میں ہم اعدادی طور مختلف نمونی قیمتوں پر مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔ حتمی تعدد $n\tilde{f}(x_j)$ عدد صحیح ہوں گے جبکہ اضافی تعدد $\tilde{f}(x_j)$ عموماً غیر عدد صحیح ہوں گے۔

چونکہ $x_j - \bar{x}$ کی حتمی قیمت نمونی اوسط کی نسبت بہت کم ہو سکتی ہے لہٰذا $s^2$ کے مذکورہ بالا کلیات کی استعمال سے (خود کار حساب میں) ملحوظ ہندسے ضائع ہوں گے۔ ہم $s^2$ کا ایک ایسا کلیہ اخذ کرتے ہیں جو ان مشکلات سے دو چار نہ ہو۔ ہم مساوات 24.4 میں

$$(x_j - \bar{x})^2 = x_j^2 - 2x_j\bar{x} + \bar{x}^2$$

پر کرتے ہوئے تین مجموعے

$$\sum(x_j - \bar{x})^2 = \sum x_j^2 - 2\bar{x}\sum x_j + \sum \bar{x}^2$$

حاصل کرتے ہیں جہاں آخری مجموعہ $n\bar{x}^2$ کے برابر ہے۔ مساوات 24.3 سے $\bar{x}$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$-2\bar{x}\sum x_j = -\frac{2}{n}\Big(\sum x_j\Big)^2 \quad \text{اور} \quad n\bar{x}^2 = \frac{1}{n}\Big(\sum x_j\Big)^2$$

لکھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2\Big] \tag{24.7}$$

حاصل ہو گا۔ اسی طرح مساوات 24.6 کو تبدیل کرتے ہوئے

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{j=1}^{m} x_j^2 n\tilde{f}(x_j) - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} x_j n\tilde{f}(x_j)\Big)^2\Big] \tag{24.8}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.1 میں مساوات 24.5 اور مساوات 24.8 (جدول 24.5) سے پہلے کی طرح $\bar{x} = \frac{8.11}{10} = 0.811$ اور

$$s^2 = \frac{1}{9}\Big(6.5777 - \frac{8.11^2}{10}\Big) = \frac{0.000\,49}{9} = 0.000\,054$$

حاصل ہوتے ہیں۔

جدول 24.5: اوسط اور تغیریت کا حساب برائے مثال 24.1

| $x_j$ | $10\tilde{f}(x_j)$ | $x_j \cdot 10\tilde{f}(x_j)$ | $x_j^2$ | $x_j^2 \cdot 10\tilde{f}(x_j)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.80 | 2 | 1.60 | 0.6400 | 1.2800 |
| 0.81 | 5 | 4.05 | 0.6561 | 3.2805 |
| 0.82 | 3 | 2.46 | 0.6724 | 2.0172 |

## سوالات

سوال 24.15: گزشتہ حصے کی سوال 24.2 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 3.47,\ s^2 = 2.98$

سوال 24.16: گزشتہ حصے کی سوال 24.4 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 84,\ s^2 = \frac{1251}{95}$

سوال 24.17: نمونہ $2, 1, 4, 5$ کا **مستطیل ترسیم** کھینچیں۔ ترسیم کو دیکھ کر $\bar{x}$ اور $s$ کی قیمتوں کا اندازہ لگائیں۔ $\bar{x}$ ، $s^2$ اور $s$ کی قیمتوں کا حساب لگائیں۔
جواب: $\bar{x} = 3,\ s^2 = 3.3,\ s = 1.817$

سوال 24.18: دکھائیں کہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نمونی قیمتوں کے بیچ $\bar{x}$ ہو گا۔

سوال 24.19: **نمونہ کا**
نمونہ میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو نمونہ کا [39] کہتے ہیں۔ مثال 24.1 میں دیے گئے نمونہ کا تلاش کریں۔
جواب: 0.02

سوال 24.20: **صدویہ، وسطانیہ**
نمونہ کی $p$ ویں **صدویہ**[40] سے مراد ایسا عدد $Q_p$ ہے کہ کم از کم $p\,\%$ نمونی قیمتیں $Q_p$ سے کم یا اس کے برابر ہوں اور ساتھ ہی $(100 - p)\,\%$ نمونی قیمتیں اس سے زیادہ یا اس کے برابر ہوں۔ اگر ایک سے زیادہ ایسا عدد پایا جاتا ہو (جس صورت میں ان اعداد کا وقفہ پایا جائے گا) تب $p$ ویں صدویہ سے مراد ان اعداد کا اوسط (یعنی وقفے کا وسطی نقطہ) ہو گا۔ بالخصوص $Q_{50}$ کو **وسطانیہ**[41] کہتے ہیں جس کو $\tilde{x}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وسطانیہ

[39] range
[40] percentile
[41] median

کو **نصف چوتھائی**[42] بھی کہتے ہیں۔جدول 24.2 کے نمونہ کا وسطانیہ $\tilde{x}$ تلاش کریں۔
جواب: 360

سوال 24.21: نمونہ کی $Q_{25}$ اور $Q_{75}$ صدویہ کو بالترتیب **نچلی چوتھائی**[43] اور **بالائی چوتھائی**[44] کہتے ہیں جبکہ $Q_{75} - Q_{25}$ جو پھیل کی ناپ ہے کو چوتھائی[45] کہتے ہیں۔جدول 24.2 کے نمونہ کا کی $Q_{25}$ ، $Q_{75}$ اور $Q_{75} - Q_{25}$ تلاش کریں۔
جواب: 350, 380, 30

سوال 24.22: جدول 24.3 کے لئے سوال 24.21 کو حل کریں۔
جواب: $\frac{345}{4}, \frac{439}{4}, \frac{47}{2}$

سوال 24.23: **عادہ**
نمونہ میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت کو نمونہ کی **عادہ**[46] کہتے ہیں۔یہ سب سے عام قدر ہوتی ہے۔درج ذیل نمونہ کی اوسط، وسطانیہ اور عادہ تلاش کریں۔ ان پر تبصرہ کریں۔

| قیمت | 100 | 1000 | 1 000 000 |
|---|---|---|---|
| تعدد | 100 | 90 | 20 |

جواب: اوسط $= 10\,000$, وسطانیہ $= 1000$, عادہ $= 100$

سوال 24.24: **مبدا کام**
اگر $x_j = x_j^* + c$ ہو جہاں $j = 1, \cdots, n$ اور $c$ کوئی مستقل ہو تب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c + \bar{x}^*, \quad \left(\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^*\right) \quad \text{اور} \qquad s^2 = s^{*2}$$

ہوں گے جہاں $x_j^*$ قیمتوں کی تغیریت $s^{*2}$ ہے۔(عملی استعمال میں $c$ یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ $x_j^*$ کی حتمی قیمتیں چھوٹی ہوں۔جیومیٹریائی طور پر یہ مبدا کی تبدیلی کے مترادف ہے لہٰذا اس کو ترکیب مبدا کام[47] کہتے ہیں۔)

سوال 24.25: ترکیب مبدا کام کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

---

[42] middle quartile
[43] lower quartile
[44] upper quartile
[45] interquartile range
[46] mode
[47] method of working origin

سوال 24.26: **مکمل رمز نویسی**
اگر $x_j = c_1 x_j^* + c_2$ ہو جہاں $j = 1, \cdots, n$ جبکہ $c_1$ اور $c_2$ مستقل ہیں تب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}^* + c_2, \quad s^2 = c_1^2 s^{*2}$$

ہوں گے جہاں $\bar{x}^*$ اور $s^{*2}$ کی معنی سوال 24.24 میں پیش کی گئی ہیں۔اس کو ترکیب **مکمل رمز نویسی**[48] کہتے ہیں۔(اس ترکیب سے قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے نتائج کی جلد جانچ پڑتال کی جا سکتی ہے۔)

سوال 24.27: اس ترکیب کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

سوال 24.28: کسی بھی نمونہ کی گروہ بندی سے عموماً نمونی اوسط متاثر ہو گا۔دکھائیں کہ نمونی اوسط میں تبدیل $\frac{l}{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے جہاں ہر ایک جماعتی وقفہ کی لمبائی $l$ ہے۔

سوال 24.29: جدول 24.3 کی غیر گروہ بند نمونہ کی گروہ بندی جدول 24.4 میں کی گئی ہے۔دونوں مواد کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔نتائج کا آپس میں موازنہ کریں۔
جواب: $\bar{x} = 99.4,\ s^2 = 254.7$ : گروہ بند; $\bar{x} = 99.2,\ s^2 = 234.7$ : غیر گروہ بند

## 24.4 بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات

شماریاتی تجربات یا شماریاتی مشاہدے سے ہمیں نمونے حاصل ہوں گے جن کی مدد سے ہم متعلقہ آبادی کے بارے میں نتائج اخذ کرنا چاہیں گے۔ایسا کرنے سے پہلے حسابی احتمال کی مدد سے ہمیں آبادی کے حسابی نمونے بنانے ہوں گے۔یہ نظریہ حسابی شماریات کی بنیاد ہے جس کی گہرائی میں ہم اپنی ضرورت کے مطابق جائیں گے۔اس حصہ میں کئی بنیادی تصورات کو متعارف کیا جائے گا۔

ایک بلا منصوبہ تجربہ یا بلا منصوبہ مشاہدہ، جنہیں ہم مختصراً **تجربہ**[49] یا **مشاہدہ**[50] کہیں گے، سے مراد وہ عمل ہے جو درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

---
[48] method of full coding
[49] experiment
[50] observation

- اس کو طے شدہ قواعد کے تحت سرانجام دیا جاتا ہے جو عمل کو مکمل طور پر بیان کرتے ہیں۔
- اس عمل کو جتنی بار چاہیں دوبارہ انجام دیا جا سکتا ہے۔
- ہر مرتبہ عمل کا نتیجہ اتفاق پر منحصر ہو گا (یعنی نتیجہ ان اثرات پر منحصر ہے جنہیں ہم قابو نہیں کر سکتے ہیں) لہٰذا قبل از وقت یکتا طور پر نتیجہ جاننا ممکن نہیں ہو گا۔

ایک مرتبہ تجربے کے عمل سے حاصل نتیجہ کو اس **کوشش**[51] کا **انجام**[52] کہتے ہیں۔

اس کی مثال (کرکٹ کی کھیل کی آغاز میں) سکہ پھینکنا، لوڈو[53] کی کھیل میں پانسہ[54] پھینکنا، 100 پیچ کی ڈبی سے 10 پیچوں کا انتخاب یا مختلف حالات میں کیمیائی عمل کی پیداوار تعین کرنا اور دیگر تجربات مثلاً بلا منصوبہ 20 افراد کا انتخاب اور ان کا فشار خون[55] تعین کرنا یا کسی موضوع پر ان کی رائے جاننا ہیں۔

کسی تجربہ کے تمام ممکنہ انجام کے سلسلہ کو اس تجربہ کی **نمونی فضا**[56] کہتے ہیں جس کو $S$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہر ایک انجام کو $S$ کا **رکن**[57] یا **نقطہ**[58] کہتے ہیں۔ متناہی تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ **متناہی** جبکہ لامتناہی تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ **لامتناہی** کہلائے گا۔

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے بلا منصوبہ تجربہ کے ساتھ درج ذیل نمونی سلسلہ منسلک کیا جا سکتا ہے،

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

چونکہ پانسہ پھینکنے کے بعد (چھ ممکنات میں سے) کسی ایک رخ رکے گا۔

صنعتی پیداوار سے ہم ایک رکن نکال کر دیکھ سکتے ہیں کہ آیا وہ بے عیب یا عیب دار ہے۔ یوں $S$ دو ارکان $D$ (عیب دار) اور $N$ (بے عیب) پر مشتمل ہو گا جنہیں اعداد مثلاً 0 (عیب دار) اور 1 (بے عیب) سے بھی

---

[51] trial
[52] outcome
[53] ludo
[54] ایک مکعب جس کی چھ سطحوں پر ایک تا چھ نقطے ہوتے ہیں۔
[55] blood pressure
[56] sample space
[57] element
[58] point

ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اب اگر ہم ایک سے زیادہ اقسام کے عیب میں تمیز کریں تب نمونی فضا دو سے زائد نقطوں پر مشتمل ہو گا۔

کپاس کی مضبوطی کے تجربہ (جدول 24.3) میں نمونی فضا لا متناہی ہو گا چونکہ دھاگہ توڑنے کے لئے درکار قوت کسی مخصوص میں کوئی بھی مثبت قیمت ہو سکتی ہے۔

عملی مسائل میں ہمیں انفرادی انجام سے زیادہ دلچسپی نہیں ہو گی بلکہ ہم صرف اتنا جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا کسی مخصوص سلسلہ انجام سے تعلق ہے (یا نہیں ہے)۔ظاہر ہے کہ ایسا ہر سلسلہ $A$ پوری نمونی فضا $S$ کا ذیلی سلسلہ ہو گا۔اس کو وقوعہ[59] کہتے ہیں۔

چونکہ کوئی بھی انجام $S$ کا ذیلی سلسلہ ہو گا لہٰذا یہ ایک مخصوص قسم کا وقوعہ ہو گا جس کو بنیادی وقوعہ کہتے ہیں۔اسی طرح پوری فضا $S$ بھی ایک مخصوص وقوعہ ہے۔

مثال 24.2: پانچ پانی کے نلکوں (جنہیں ایک تا پانچ سے ظاہر کیا جاتا ہے) میں سے دو نلکے منتخب کیے جاتے ہیں۔نمونی فضا درج ذیل دس ممکنہ انجام پر مشتمل ہو گی۔

$$1,2 \quad 1,3 \quad 1,4 \quad 1,5 \quad 2,3 \quad 2,4 \quad 2,5 \quad 3,4 \quad 3,5 \quad 4,5$$

اب اگر ہم عیب دار نلکوں میں دلچسپی رکھتے ہوں تب ہمیں درج ذیل تین انجاموں میں فرق کرنا ہو گا۔

$A$ : کوئی بھی عیب دار نہیں ہے، $B$ : ایک عیب دار ہے، $C$ : دونوں عیب دار ہیں

فرض کریں کہ نلکوں میں $1,2,3$ عیب دار ہیں تب درج ذیل ہو گا۔

$4,5$, منتخب کرنے سے $A$ ہو گا

$1,4 \quad 1,5 \quad 2,4 \quad 2,5 \quad 3,4 \quad 3,5$ منتخب کرنے سے $B$ ہو گا

$1,2 \quad 1,3 \quad 2,3$ منتخب کرنے سے $C$ ہو گا

□

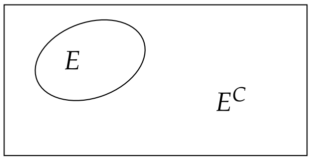
نمونی فضا $S$ اور تجربہ کے انجام کو وین اشکال[60] سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کہ شکل 24.3 میں چکور کے اندر نقطوں کا سلسلہ $S$ کو ظاہر کرتے ہے۔تب مستطیل کے اندر بند منحنی کا اندرون کسی وقوعہ کو ظاہر کرے گا جس کو ہم $E$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان تمام ارکان (انجاموں) کا سلسلہ جو $E$ میں شامل نہیں ہیں کو $S$ میں $E$ کا متمم کہتے ہیں جس کو $E^c$ [61] سے ظاہر کیا گیا ہے۔

---

[59] event

[60] Venn diagram

[61] یا $\bar{E}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو ہم استعمال نہیں کریں گے چونکہ اس کو کسی دوسرے مقصد (بندش سلسلہ) کے لئے مختص کیا گیا ہے۔




شکل 24.3: وین شکل میں نمونی سلسلہ $S$ اور وقوعات $E$ اور $E^C$ دکھائے گئے ہیں

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں

$E:$ جب جفت عدد حاصل ہو

کا متمم

$E^C:$ جب طاق عدد حاصل ہو

ہو گا۔ایسا وقوعہ جس میں کوئی انجام نہ پایا جاتا ہو کو خالی وقوعہ[62] یا **نا ممکن وقوعہ**[63] کہتے ہیں جس کو $\varnothing$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ کسی تجربہ میں $A$ اور $B$ کوئی دو وقوعات ہیں۔تب وہ وقوعہ جو $S$ میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو $A$ یا $B$ یا دونوں میں پائے جاتے ہوں کو $A$ اور $B$ کا **اشتراک**[64] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A \cup B$$

وہ وقوعہ جو $S$ میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو $A$ اور $B$ دونوں میں پائے جاتے ہوں کو $A$ اور $B$ کا **تقاطع**[65] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔شکل 24.4 میں اشتراک اور تقاطع کو وین شکل پر دکھایا گیا ہے۔

$$A \cap B$$

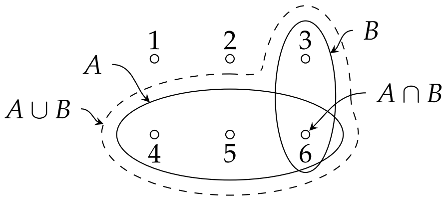
اگر $A$ اور $B$ میں کوئی وقوعہ مشترک نہ ہو تب $A \cup B = \varnothing$ ہو گا اور ہم کہیں گے کہ $A$ اور $B$ **بے ربط وقوع**[66] یا **باہمی بلا شرکت وقوعہ**[67] ہیں۔

---

empty event[62]
impossible event[63]
union[64]
intersection[65]
disjoint events[66]
mutually exclusive events[67]


(الف) اشتراک $A \cup B$ (ب) تقاطع $A \cap B$

شکل 24.4: نمونی فضا $S$ میں دو وقوعات $A$ ، $B$ اور (گہری سیاہی میں) ان کی اشتراک اور تقاطع کی وین شکل




شکل 24.5: وین شکل برائے مثال 24.3

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں $B \cap C = \varnothing$ ہے جبکہ $B \cup C$ ایک یا دو عیب دار نلکیاں ہیں۔

مثال 24.3: پانسہ پھینکنے کے ایک تجربہ میں درج ذیل وقوعہ

$A$ : 4 سے چھوٹا عدد نہ ہو

$B$ : 3 سے قابل تقسیم عدد ہو

کا اشتراک $A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ اور تقاطع $A \cap B = \{6\}$ ہو گا (شکل 24.5)۔ □

اگر وقوعہ $A$ کے تمام ارکان وقوعہ $B$ میں پائے جاتے ہوں تب $A$ کو $B$ کا ذیلی وقوعہ[68] کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$A \subset B \quad \text{یا} \quad B \supset A$$

ظاہر ہے کہ $A \subset B$ کی صورت میں اگر $B$ واقع پذیر ہو تب لازماً $A$ بھی وقوع پذیر ہو گا۔ مثال کے طور پر وقوعہ $D = \{4, 6\}$ پانسہ کے جفت نتائج کے وقوعہ $E = \{2, 4, 6\}$ کا ذیلی وقوعہ ہے۔

[68] subevent

فرض کریں کہ نمونی فضا $S$ میں کئی وقوعات $A_1, \cdots, A_m$ ہیں۔ تب ان $m$ وقوعات میں سے ایک میں یا ایک سے زیادہ میں پائے جانے والے تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ان $m$ وقوعات کا **اشتراک** ہو گا جس کو

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \quad \text{یا مختصراً} \quad \bigcup_{j=1}^{m} A_j$$

لکھا جاتا ہے۔ان تمام وقوعات میں پائے جانے والے ارکان پر مشتمل وقوعہ $A_1, \cdots, A_m$ کا **تقاطع** ہو گا جس کو

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \quad \text{یا مختصراً} \quad \bigcap_{j=1}^{m} A_j$$

لکھا جاتا ہے۔

زیادہ عمومی طور پر فرض کریں کہ $S$ میں لامتناہی ارکان $A_1, \cdots, A_m, \cdots$ پائے جاتے ہیں۔تب اشتراک

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \quad \text{یا مختصراً} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو کم سے کم کسی ایک مذکورہ بالا وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔اسی طرح تقاطع

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \quad \text{یا مختصراً} \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو مذکورہ بالا تمام وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔

اگر وقوعات $A_1, \cdots, A_m, \cdots$ یوں ہوں کہ ان میں سے کسی ایک کا واقع ہونے سے باقی کسی وقوعہ کا واقع ہونا ناممکن ہو تب کسی بھی $j \neq k$ کے لئے $A_j \cap A_k = \varnothing$ ہو گا اور ایسی وقوعات کو **بے ربط وقوعات** یا **باہمی بلا شرکت وقوعات** کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں $A, B, C$ بے ربط وقوعات ہیں۔

فرض کریں کہ ہم بے منصوبہ تجربہ $n$ مرتبہ کرتے ہوئے $n$ قیمتوں پر مشتمل نمونہ حاصل کرتے ہیں۔فرض کریں کہ ان $n$ کوششوں میں وقوعہ $A$ اور وقوعہ $B$ کے اضافی تعدد بالترتیب $\tilde{f}(A)$ اور $\tilde{f}(B)$ ہیں۔تب وقوعہ $A \cup B$ کی اضافی تعدد

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A \cap B) \tag{24.9}$$

ہو گی۔ اگر $A$ اور $B$ باہمی بلا شرکت ہوں تب $\tilde{f}(A \cap B) = 0$ اور

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) \tag{24.10}$$

ہو گا۔ یہ کلیات شکل 24.4 میں دکھائے گئے وین شکل سے صاف ظاہر ہیں۔ ان کا باضابطہ ثبوت آپ سے سوال 24.34 میں مانگا گیا ہے۔

## سوالات

سوال 24.30: دو سکے پھینکنے کے نمونی فضا کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.31: پانسہ کی جوڑی ایک مرتبہ پھینکی جاتی ہے۔ اس تجربہ کا نمونی فضا بنائیں جس میں تمام ارکان ہوں۔ اس شکل پر درج ذیل وقوعات کی نشاندہی کریں۔ (الف) دونوں یکساں عدد ہیں۔ (ب) دونوں اعداد کا مجموعہ 7 سے زیادہ ہے۔ (پ) دونوں اعداد کا مجموعہ 5 ہے۔

سوال 24.32: تین برقیاتی پرزوں کا عرصہ زندگی کا نمونی فضا تلاش کریں۔
جواب: غیر منفی اعداد کے تمام مرتب تین اعداد کا فضا۔

سوال 24.33: ایک تجربہ میں چادر میں سوراخ کر کے سوراخ کا قطر ناپا جاتا ہے۔ سوراخ کا قطر 2.9 cm اور 3.1 cm کے بیچ ہے۔ $E$ کا متمم تلاش کریں۔

سوال 24.34: مساوات 24.9 کو ثابت کریں۔
جواب: $A \cup B$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $A \cap B$ یا $A \cap B^C$ یا $A^C \cap B$ ہو۔ یہ تینوں باہمی بلا شرکت ہیں۔ فرض کریں کہ نمونہ میں متعلقہ حتمی تعدد $n_1$ ، $n_2$ ، $n_3$ ہو۔ تب $\tilde{f}(A) = \frac{n_1+n_2}{n}$ ، $\tilde{f}(B) = \frac{n_1+n_3}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cap B) = \frac{n_1}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cup B) = \frac{n_1+n_2+n_3}{n}$ ہوں گے۔ ان سے مساوات 24.9 حاصل ہوتا ہے۔

سوال 24.35: ایک ڈبیا میں 20 قلم ہیں جن میں سے 10 قلم بے عیب ہیں۔ 8 قلموں میں عیب $A$ ، 5 قلموں میں عیب $B$ اور 3 قلموں میں دونوں عیب پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ بلا منصوبہ ایک قلم نکالا جاتا ہے۔ متعلقہ نمونی فضا $S$ کی وین شکل بنائیں جس میں $A$ قسم کے عیب کا وقوعہ $E_A$ اور $B$ قسم کے

عیب کا وقوعہ $E_B$ دکھایا گیا ہو۔ مزید $E_A \cap E_B$ ، $E_A \cap E_B^C$ ، $E_A^C \cap E_B$ ، $E_A^C \cap E_B^C$ ، $E_A \cup E_B$ ، $E_A^C \cup E_B$ ، $E_A \cup E_B^C$ ، $E_A^C \cup E_B^C$ بھی دکھائیں۔ ہر وقوعہ میں انجام کی تعداد بتائیں۔

سوال 24.36: وین شکل کی مدد سے درج ذیل قواعد کو پرکھیں۔

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

سوال 24.37: **قوانین ڈی مارگن** وین اشکال بناتے ہوئے درج ذیل ڈی مارگن قوانین[69] کی تصدیق کریں۔

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

سوال 24.38: متمم کی تعریف سے درج ذیل اخذ کریں جہاں نمونی فضا $S$ کا $A$ کوئی ذیلی سلسلہ ہے۔

$$(A^C)^C = A, \quad S^C = \varnothing, \quad \varnothing^C = S, \quad A \cup A^C = S, \quad A \cap A^C = \varnothing$$

سوال 24.39: وین شکل استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $A \subset B$ صرف اور صرف تب ہو گا جب $A \cup B = B$ ہو۔ $A \subset B$ کے لئے $A \cap B$ کی صورت میں شرط تلاش کریں۔

## 24.5 احتمال

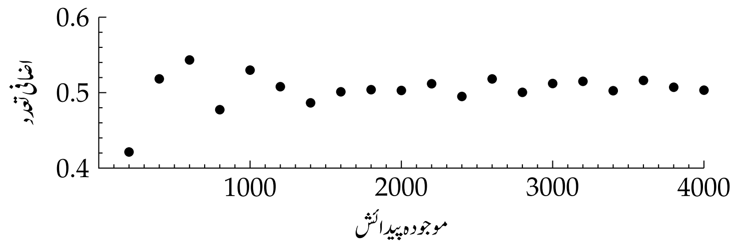
تجربہ سے ثابت ہوتا ہے کہ عموماً بلا منصوبہ تجربات کی اضافی تعدد میں شماریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے۔یعنی ایسے تجربہ کے مختلف لمبی تسلسل میں کسی وقوعہ کے مطابقتی اضافی تعدد تقریباً ایک جیسے ہوں گے۔اس کی مثالیں جدول 24.6 اور شکل 24.6 میں دکھائی گئی ہیں۔(سکہ پھینکنے سے شیر یا خط حاصل ہوتا ہے۔) شکل 24.6 میں یوں معلوم ہوتا ہے کہ جیسے جیسے لڑکوں کی تعداد بڑھتی ہے ویسے ویسے لڑکوں کی فی صد میں اتر چڑھاو کم ہوتی جاتی ہے۔عیب دار اشیاء کا فی صد بھی ایسا ہی رویہ رکھتا ہے اور اس طرح کے دیگر مثال بھی دیے جا سکتے ہیں۔

---

[69] De Morgan's laws

جدول 24.6: سکہ پھینکنے کے نتائج

| تجربہ کرنے والا | جتنی مرتبہ سکہ پھینکا گیا | جتنی مرتبہ شیر حاصل ہوا | شیر کی اضافی تعدد |
|---|---|---|---|
| امجد | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| مشرف | 12 000 | 6019 | 0.5016 |
| مشرف | 24 000 | 12 012 | 0.5005 |




شکل 24.6: وقوعہ "لڑکے کی پیدائش"

چونکہ عموماً بلا منصوبہ تجربات میں شماریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ ایسے تجربہ میں وقوعہ $E$ کے لئے ایسا عدد $P(E)$ پایا جاتا ہے کہ تجربہ بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دینے سے $E$ کا اضافی تعدد تخمیناً $P(E)$ ہو گا۔ ہم $P(E)$ کو بلا منصوبہ تجربہ میں $E$ کا **احتمال**[70] کہتے ہیں۔ دھیان رہے کہ یہ عدد $E$ کی حتمی خاصیت نہیں ہے بلکہ کسی نمونی فضا $S$ یعنی کسی بلا منصوبہ تجربہ سے متعلق ہے۔

جب ہم کہتے ہیں کہ $E$ کا احتمال $P(E)$ ہے، اس سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ اگر اس تجربہ کو بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دیا جائے تب اضافی تعدد $\tilde{f}(E)$ عملی طور پر لازماً $P(E)$ کے تخمیناً برابر ہو گا۔ (یہاں "تخمیناً برابر" کو ہم نے "ٹھیک برابر" بنانا ہو گا۔ اس کے لئے ہمیں انتظار کرنا ہو گا۔)

متعارف کردہ احتمال یوں تجربی اضافی تعدد سے وابستہ ہے۔ اس طرح ضروری ہے کہ یہ اضافی تعدد کی چند بنیادی خواص رکھتا ہو۔ یہ خواص مسئلہ 24.1، مسئلہ 24.2 اور مساوات 24.10 سے اخذ کیے جا سکتے ہیں جنہیں **حسابی احتمال کے مسلمات** کہتے ہیں۔

**حسابی احتمال کے مسلمات**

[70] probability

- (الف) اگر نمونی فضا $S$ میں $E$ ایک وقوعہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$0 \le P(E) \le 1 \tag{24.11}$$

- (ب) تمام نمونی فضا کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(S) = 1 \tag{24.12}$$

- (پ) اگر $A$ اور $B$ باہمی بلا شرکت وقوعات (حصہ 24.4) ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{24.13}$$

لا متناہی نمونی فضا کی صورت میں ہمیں مسلمہ-پ کی جگہ مسلمہ-پ* استعمال کرنا ہو گا۔

- (پ*) اگر $E_1$ ، $E_2$ ، $\cdots$ باہمی بلا شرکت وقوعات ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots \tag{24.13*}$$

مسلمہ-پ سے الکراجی ماخوذ کے ذریعہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

**مسئلہ 24.3: (قاعدہ جمع برائے باہمی بلا شرکت وقوعات)**
اگر $E_1$ ، $\cdots$ ، $E_m$ باہمی بلا شرکت ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_m) \tag{24.14}$$

آپ مساوات 24.9 کا درج ذیل مماثل ثابت کر سکتے ہیں۔

**مسئلہ 24.4: (قاعدہ جمع برائے صوابدیدی وقوعات)**
نمونی فضا $S$ میں وقوعات $A$ اور $B$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{24.15}$$

مزید وقوعہ $E$ اور اس کا متمم وقوعہ $E^C$ (حصہ 24.4) بلا شرکت ہیں لٰہذا $E \cup E^C = S$ ہو گا۔ یوں مسلمہ-ب اور پ سے

$$P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C) = 1$$

حاصل ہو گا جس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

**مسئلہ 24.5: (قاعدہ اتمام)**
نمونی فضا $S$ میں وقوعہ $E$ اور اس کے متمم وقوعہ $E^C$ کے احتمال کا تعلق درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$P(E) = 1 - P(E^C) \tag{24.16}$$

اس کلیہ کو وہاں استعمال کیا جا سکتا ہے جہاں $P(E^C)$ کا حساب $P(E)$ کے حساب سے زیادہ آسان ہو۔ مثال 24.5 میں اس کی استعمال دکھائی جائے گی۔

ہم نمونی فضا $S$ میں وقوعات کے احتمال کی قیمت کس طرح مقرر کر سکتے ہیں؟

اگر $S$ متناہی ہو اور $k$ ارکان پر مشتمل ہو اور تجربہ سے ظاہر ہوتا ہو کہ ان $k$ انجام کا امکان ایک جیسا ہے تب ہم ہر انجام کے احتمال کو یکساں قیمت مختص کر سکتے ہیں اور مسلمہ-ب کے تحت یہ احتمال لازماً $\frac{1}{k}$ ہو گا۔ اس صورت میں احتمال کا حساب، وقوعات کے ارکان کی گنتی کے مترادف ہو گا۔

**مثال 24.4: منصفانہ پانسہ**
منصفانہ پانسہ سے مراد یکساں خاصیت اور بالکل مربع شکل کا پانسہ ہے۔ پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے۔ یوں $P(1) = \frac{1}{6}$ ، $P(2) = \frac{1}{6}$ ، $\cdots$ ، $P(6) = \frac{1}{6}$ ہو گا۔ اس سے اور مسئلہ 24.3 سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$A$ : وقوعہ جس میں بالائی سطح پر جفت نقطے ہوں

کا احتمال $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔ اسی طرح

$B$ : وقوعہ جس میں بالائی سطح پر 4 نقطوں سے زیادہ نقطے ہوں

کا احتمال $P(B) = P(5) + P(6) = \frac{1}{3}$ ہو گا، وغیرہ، وغیرہ۔زیادہ پیچیدہ صورتیں اگلے حصے میں پیش کی جائیں گی۔ $\square$

مثال 24.5: **سکہ اچھالنا**
پانچ سکے ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں۔کم از کم ایک خط حاصل ہونے کا احتمال تلاش کریں۔
حل: چونکہ ہر ایک سکہ خط یا شیر دے سکتا ہے لہٰذا نمونی فضا $2^5 = 32$ ارکان پر مشتمل ہے۔منصفانہ سکہ کی صورت میں ہر انجام کو ایک جیسا احتمال $\frac{1}{32}$ مختص کیا جا سکتا ہے۔تب وقوعہ $A^C$ جس میں کوئی بھی خط حاصل نہ ہو صرف 1 رکن پر مشتمل ہو گا لہٰذا $P(A^C) = \frac{1}{32}$ ہو گا۔اس طرح $P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{31}{32}$ حاصل ہوتا ہے۔ $\square$

اگر تجربہ کی نوعیت سے ایسا ظاہر نہ ہو کہ متناہی انجام یکساں برابر امکان رکھتے ہیں یا اگر نمونی فضا متناہی نہ ہو تب، حسابی احتمال کے مسلمات پر پورا اترتے ہوئے، ہم لمبی تواتر میں کوشش دہرا کر اضافی تعدد کو استعمال کرتے ہوئے احتمال کی قیمتیں مختص کرتے ہیں۔

اس طرح ہمیں تخمینی قیمتیں حاصل ہوں گی لیکن اس سے کوئی فرق نہیں پڑے گا۔کلاسیکی طبیعیات میں ہمیں عموماً ایسی صورت حال کا سامنا ہوتا ہے مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مادہ کی کوئی کمیت ہوتی ہے لیکن اس کمیت کی ٹھیک قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ نظریہ بنانے میں یہ رکاوٹ پیدا نہیں کرتی ہے۔

اگر ہمیں شک ہو کہ ہم نے درست طریقہ سے احتمال کی قیمتیں مختص نہیں کی ہیں تب ہم شماریاتی پرکھ کا سہارا لے سکتے ہیں۔

عموماً یہ جانتے ہوئے کہ وقوعہ $A$ ہو چکا ہے ہمیں وقوعہ $B$ کا احتمال درکار ہو گا۔اس کو دیے گیے $A$ کی صورت میں $B$ کا **مشروط احتمال**[71] کہتے ہیں جس کو $P(B|A)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں $A$ بطور نئی (تخفیف شدہ) نمونی فضا کردار ادا کرتا ہے اور یہ احتمال $P(A)$ کا وہ (کسری) حصہ ہو گا جو $A \cap B$ کا مطابقتی ہو۔یوں

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad [P(A) \neq 0] \tag{24.17}$$

---

[71] conditional probability

ہو گا۔اسی طرح دیے گیے $B$ کی صورت میں $A$ کا مشروط احتمال

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad [P(B) \neq 0] \tag{24.18}$$

ہو گا۔

مساوات 24.17 اور مساوات 24.18 کو $P(A \cap B)$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

**مسئلہ 24.6: قاعدہ ضرب**
اگر نمونی فضا $S$ میں $A$ اور $B$ وقوعات ہوں اور $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہو تب

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \tag{24.19}$$

ہو گا۔

اگر $A$ اور $B$ ایسے وقوعات ہوں کہ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{24.20}$$

ہو تب انہیں **غیر تابع وقوعات**[72] کہتے ہیں۔اب اگر $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہوں تب مساوات 24.17، مساوات 24.18 اور مساوات 24.19 کے تحت

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

ہوں گے جس کا مطلب ہے کہ $A$ کا احتمال $B$ کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا اور اسی طرح $B$ کا احتمال $A$ کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا۔

اسی طرح $m$ وقوعات $A_1, \cdots, A_m$ اس صورت غیر تابع ہوں گے جب کسی بھی $k$ وقوعات $A_1, \cdots, A_k$ (جہاں $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq m$ اور $k = 2, 3, \cdots, m$ ہیں) کے لئے درج ذیل ہو۔

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}) \tag{24.21}$$

دھیان کریں کہ چیزوں کے سلسلہ سے چیز نکالنے، یعنی آبادی سے نمونہ حاصل کرنے، کے دو طریقے پائے جاتے ہیں۔

[72] independent events

- نمونہ واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔ ہم کل سے جس چیز کو بلا منصوبہ نکالتے ہیں، اسی چیز کو واپس کل میں رکھ کر کل کو اچھی طرح گڈ مڈ کرتے ہیں۔اس کے بعد اگلا نمونہ نکالا جاتا ہے۔

- نمونہ واپس نہ رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔ ہم نمونہ نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔

مثال 24.6: واپس رکھتے ہوئے اور بغیر واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول ایک ڈبیا میں 10 پیچ پائے جاتے ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔دو پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔دونوں پیچ بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ہم درج ذیل وقوعات پر غور کرتے ہیں۔

$$A: \text{پہلا نکالا گیا پیچ بے عیب ہے۔}$$
$$B: \text{دوسرا نکالا گیا پیچ بے عیب ہے۔}$$

چونکہ 10 میں سے 7 پیچ بے عیب ہیں اور ہم بلا منصوبہ پیچ نکالتے ہیں لہٰذا ہر پیچ کا نکالے جانے کا امکان $\frac{1}{10}$ ہے۔یوں $P(A) = \frac{7}{10}$ ہو گا۔اگر ہم اس پیچ کو واپس ڈبیا میں رکھ دیں تب دوسری مرتبہ پیچ نکالنے میں اور پہلی مرتبہ پیچ نکالنے میں کوئی فرق نہیں ہو گا لہٰذا $P(B) = \frac{7}{10}$ ہو گا۔یہ وقوعات غیر تابع ہیں اور

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49 = 49\,\%$$

ہو گا۔اس کے برعکس اگر ہم نمونہ واپس نہ رکھیں تب $A$ وقوع پذیر ہونے کے بعد دوسری مرتبہ ڈبیا میں کل 9 پیچ ہوں گے جن میں سے 3 عیب دار ہیں لہٰذا $P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ہو گا۔مسئلہ 24.6 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \approx 47\,\%$$

□

## سوالات

سوال 24.40: 5 منصفانہ سکے اچھال کر کم سے کم 1 خط حاصل کرنے کا کیا احتمال ہے؟
جواب: $\frac{31}{32}$

سوال 24.41: تین منصفانہ پانسہ اچھالے جاتے ہیں۔ وقوعہ $E$ جس میں کم از کم دو اعداد مختلف حاصل ہوتے ہیں کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.42: 100 پیچ کی کھیپ میں 10 عیب دار ہیں۔ اس کھیپ سے 3 پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ (الف) بغیر واپس رکھے، (ب) واپس رکھتے ہوئے، تینوں پیچ بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) $\frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} = 72.65\,\%$، (ب) $0.9^3 = 72.9\,\%$

سوال 24.43: تین برتن ہیں اور ہر برتن میں 5 مرچ ہیں جن پر 1 تا 5 لکھا گیا ہے۔ ہر برتن سے ایک مرچ نکالا جاتا ہے۔ وقوعہ $E$ جس میں نکالے گئے مرچ پر لکھے اعداد کا مجموعہ 3 سے زیادہ ہو کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.44: 100 لوہے کے سلاخوں کے جتھا میں 25 سلاخ زیادہ لمبے، 25 کم لمبے اور 50 صحیح لمبائی کے ہیں۔ اگر 2 سلاخ بلا منصوبہ نکالے جائیں اور انہیں واپس نہ رکھا جائے تب (الف) دونوں ٹھیک لمبائی کے، (ب) ایک ٹھیک لمبائی کا، (پ) دونوں غلط لمبائی کے، (ت) دو کم لمبائی کے سلاخ نکالنے کے احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) $24.75\,\%$، (ب) $50.5\,\%$، (پ) $24.75\,\%$، (ت) $6.06\,\%$

سوال 24.45: کافی عرصہ سے ایک کارخانے میں گلاس بنائے جا رہے ہیں جن میں عیب دار گلاسوں کی شرح برقرار $2\,\%$ ہے۔ ہر آدھا گھنٹہ بعد دو گلاس نکال کر پرکھے جاتے ہیں۔ اس وقوعہ کا کیا احتمال ہے کہ (الف) دونوں گلاس بے عیب ہوں، (ب) ایک گلاس بے عیب ہو، (پ) دونوں گلاس عیب دار ہوں؟ تینوں صورتوں کے احتمال کا مجموعہ کیا ہے؟

سوال 24.46: ایک ڈیزل انجن سے برقی جنریٹر چلایا جاتا ہے۔ 30 دن کے عرصہ میں ڈیزل انجن میں مرمت کی ضرورت کا احتمال $5\,\%$ جبکہ جنریٹر میں مرمت کی ضرورت کا احتمال $6\,\%$ ہے۔ کسی مخصوص دورانیہ میں دونوں کے مرمت کی ضرورت کا احتمال کیا ہو گا؟
جواب: $10.7\,\%$

سوال 24.47: کسی مشین میں ہوا کا دباو خود کار نظام سے قابو کیا جاتا ہے۔ یہ خود کار نظام 6 ٹرانزسٹر[73] پر مبنی ہے۔ کسی دورانیہ میں ہر ایک ٹرانزسٹر کے خراب ہونے کا احتمال 0.05 ہے۔ خود کار نظام صرف اس صورت کام کر سکتا ہے جب تمام ٹرانزسٹر ٹھیک ہوں۔ کسی دورانیہ میں خود کار نظام کے خراب ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

[73] transistor

سوال 24.48: ایک ڈبیا میں 100 پیچ ہیں جن میں سے 10 پیچوں میں $A$ قسم کا عیب، 5 میں $B$ قسم کا عیب اور 2 میں دونوں اقسام کے عیب پائے جاتے ہیں۔پہلے نکالے گئے پیچ میں $A$ قسم کا عیب پایا جاتا ہے۔اس پیچ میں $B$ قسم کے عیب کا احتمال کیا ہو گا؟

جواب: $P(E_B|E_A) = \frac{P(E_A \cap E_B)}{P(E_A)} = \frac{0.02}{0.10} = 20\,\%$

سوال 24.49: دو منصفانہ پانسہ اچھالے جاتے ہیں۔ایک پانسہ 5 دیتا ہے۔دونوں کا مجموعہ 9 سے زیادہ ہونے کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.50: اگر $P(A^C) = 0.2$ ، $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B^C) = 0.4$ ہوں تب $P(B|A \cup B^C)$ کیا ہو گا؟ (اشارہ۔ وین شکل استعمال کریں۔)

جواب: $\frac{0.4}{0.9} = 0.44$

سوال 24.51: مسئلہ 24.4 کو ثابت کریں۔

سوال 24.52: مسئلہ 24.3 کو ثابت کریں۔

سوال 24.53: مسئلہ 24.6 کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

سوال 24.54: دکھائیں کہ اگر $A$ کا ذیلی سلسلہ $B$ ہو تب $P(B) \leq P(A)$ ہو گا۔

جواب: $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) = B \cup (A \cap B^C)$ ہے جبکہ مسلمہ-پ سے $P(A) = P(B) + P(A \cap B^C) \geq P(B)$ اخذ کیا جا سکتا ہے چونکہ $P(A \cap B^C) \geq 0$ ہے۔

## 24.6 مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات

گزشتہ حصہ سے ہم جانتے ہیں کہ $k$ مساوی انجام پر مشتمل متناہی نمونی فضا $S$ میں ہر انجام کا احتمال $\frac{1}{k}$ ہے اور وقوعہ $A$ کا احتمال حاصل کرنے کی خاطر ہم $A$ وقوعات کو گنتے ہیں۔یوں اگر وقوعہ $m$ مرتبہ سر انجام ہو تب $P(A)=\frac{m}{k}$ ہو گا۔انجام کی گنتی کے لئے درج ذیل کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

فرض کریں کہ چیزوں یا ارکان کی تعداد $n$ ہے۔انہیں کسی بھی ترتیب سے ایک صف میں رکھا جا سکتا ہے۔ایسی ہر ترتیب ان چیزوں کی ایک **مرتب اجتماع**[74] کہلاتی ہے۔

مسئلہ 24.7: **مرتب اجتماعات**
$n$ مختلف چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی جہاں تمام چیزیں مرتب اجتماعات میں شامل ہیں۔

$$n!=1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots n \qquad \text{اس کو "عدد ضربیہ } n\text{" پڑھیں} \tag{24.22}$$

مرتب اجتماع میں پہلی جگہ کو $n$ مختلف طریقوں سے پر کیا جا سکتا ہے۔پہلی جگہ پر کرنے کے بعد $n-1$ ارکان رہ جاتے ہیں لہٰذا دوسری جگہ کو $n-1$ مختلف طریقوں سے پر کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح چلتے ہوئے درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.8: **مرتب اجتماعات**
اگر $n$ چیزوں کو $c$ مختلف جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہو جہاں ہر ایک جماعت میں تمام چیزیں بالکل یکساں ہوں جبکہ ہر جماعت میں چیزیں دوسری تمام جماعتوں کی چیزوں سے مختلف ہوں تب ان چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد

$$\frac{n!}{n_1 1 n_2!\cdots n_c!} \qquad (n_! + n_2+\cdots+n_c=n) \tag{24.23}$$

ہو گی جہاں تمام چیزیں لی گئی ہیں اور $j$ ویں جماعت میں چیزوں کی تعداد $n_j$ ہے۔

$n$ چیزوں سے ایک وقت میں $k$ چیزیں منتخب کرنے سے ایسی مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جن میں صرف $k$ چیزیں شامل ہوں گی۔ایک ہی $k$ ارکان کی دو مرتب اجتماعات جن میں ارکان کی ترتیب مختلف ہو،

---
[74] permutation

تعریف کی رو، سے مختلف مرتب اجتماعات ہوں گی۔ مثال کے طور پر تین حروف $a, b, c$ میں سے ایک وقت دو حروف منتخب کرتے ہوئے $ab$ ، $ac$ ، $bc$ ، $ba$ ، $ca$ ، $cb$ مرتب اجتماعات ملتی ہیں۔

**$n$ چیزوں میں سے $k$ چیزوں کی مرتب اجتماعات، جہاں چیز واپس رکھی جائے،** حاصل کرتے ہوئے کسی بھی چیز کو پہلی مقام پر رکھ کر، دوسری جگہ کوئی بھی چیز بشمول پہلی چیز رکھی جا سکتی ہے۔اسی طرح باقی جگہ پر کیے جاتے ہیں۔مثال کے طور پر $a, b, c$ میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے واپس رکھتے ہوئے کل $9 = 3^2$ مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جس میں مذکورہ بالا 6 مرتب اجتماعات اور $aa$ ، $bb$ ، $cc$ شامل ہیں۔ آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.63)۔

مسئلہ 24.9: **مرتب اجتماعات**
بغیر واپس رکھے، $n$ مختلف چیزوں میں سے ایک وقت میں $k$ چیزیں منتخب کرتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{24.24}$$

حاصل ہو گی جبکہ منتخب چیز واپس رکھتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$n^k \tag{24.24*}$$

مرتب اجتماعات (کی تعداد) میں نا صرف چیزیں اہمیت رکھتی ہیں بلکہ ان چیزوں کی ترتیب بھی اہمیت رکھتی ہے۔اس کے برعکس دی گئے چیزوں کے **غیر مرتب اجتماعات**[75] سے مراد ایک یا ایک سے زیادہ چیزوں کی وہ انتخاب ہے جس میں چیزوں کی ترتیب کو رد کیا جاتا ہے۔دو قسم کے غیر ترتیبی اجتماعات پائے جاتے ہیں۔

بغیر واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں $n$ چیزوں میں سے $k$ چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جا سکتے ہیں۔ہر سلسلہ میں $k$ مختلف چیزیں ہوں گی اور کسی بھی دو سلسلوں میں بالکل ایک جیسی چیزیں نہیں پائی جائیں گی۔

اس کے علاوہ، چیزوں کو واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں $n$ چیزوں میں سے $k$ چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جا سکتے ہیں۔

---

[75] combinations

مثال کے طور پر 3 حروف $a, b, c$ میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے بغیر واپس رکھے $ab$ ، $ac$ ، $bc$ حاصل کیے جا سکتے ہیں جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے $ab$ ، $ac$ ، $bc$ ، $aa$ ، $bb$ ، $cc$ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

**مسئلہ 24.10: غیر مرتب اجتماعات**
بغیر واپس رکھے، $n$ چیزوں میں سے ایک وقت میں $k$ چیزیں منتخب کرتے ہوئے

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \tag{24.25}$$

غیر مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے غیر مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\binom{n+k-1}{k} \tag{24.25*}$$

مساوات 24.25 کے ساتھ منسلک فقرہ مسئلہ 24.9 کے پہلے حصے سے اخذ ہوتا ہے یعنی $n$ چیزوں میں سے $k$ چیزیں منتخب کرتے ہوئے ان $k$ چیزوں کے مرتب اجتماعات $k!$ ہوں گے جن میں صرف چیزوں کی ترتیب مختلف ہو گی (مسئلہ 24.7) لیکن مسئلہ 24.10 کے پہلے فقرے کے تحت ان $k$ چیزوں کا صرف ایک غیر مرتب اجتماع پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ الکراجی ماخوذ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال 24.64)۔

**مثال 24.7: مسئلہ 24.7 اور مسئلہ 24.8 کا استعمال**
ایک ڈبیا میں 10 مختلف قسم کے پیچ ہیں جنہیں ایک مخصوص ترتیب سے مشین میں لگایا جانا ہے۔ان پیچوں کو ڈبیا سے بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔انہیں ڈبیا سے درکار ترتیب میں نکالنے کا احتمال $P$ بہت کم (مسئلہ 24.7) یعنی

$$P = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3\,628\,800} \approx 0.000\,03\,\%$$

ہو گا۔ اگر ڈبیا میں 6 دائیں ہاتھ اور 4 بائیں ہاتھ پیچ ہوں اور 6 دائیں ہاتھ پیچ پہلے اور 4 بائیں ہاتھ پیچ بعد میں درکار ہوں تب اس ترتیب میں پیچ نکالنے کا احتمال $P$ (مسئلہ 24.8) درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{6!4!}{10!} = \frac{1}{210} \approx 0.5\,\%$$

□

**مثال 24.8: مسئلہ 24.9 کا استعمال**
ایک خفی خط میں حروف کو 5 کی گروہ (الفاظ) میں لکھا جاتا ہے۔ مساوات 24.24* سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل

$$26^5 = 11\,881\,376$$

مختلف الفاظ ممکن ہیں۔ مساوات 24.24 کے تحت ایسے الفاظ جن میں ہر حرف زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ استعمال ہو کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{26!}{(26-5)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$$

□

**مثال 24.9: مسئلہ 24.10 کا استعمال**
500 پیچوں میں سے 5 پیچ بلا منصوبہ منتخب کرتے ہوئے

$$\binom{500}{5} = \frac{500!}{5!\,495!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497 \cdot 496}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 255\,244\,687\,600$$

نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ □

آئیں **عدد ضربیہ تفاعل** کے بار میں کچھ باتیں کریں۔ صفر کا عدد ضربیہ ( $0!$ ) کی تعریف

$$0! = 1 \tag{24.26}$$

ہے۔ باقی عدد صحیح کے عدد ضربیہ درج ذیل کلیہ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(n+1)! = (n+1)n! \tag{24.27}$$

بڑی عدد کے لئے یہ کلیہ بہت بڑے اعداد دیتا ہے۔ ہم بڑے عدد $n$ کی صورت میں عموماً درج ذیل **کلیہ سٹرلنگ**[76] استعمال کرتے ہیں[77]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (e = 2.718\cdots) \tag{24.28}$$

---

[76] Stirling formula
[77] انگلستانی ریاضی دان جیمس سٹرلنگ [1692-1770]

جہاں $\sim$ سے مراد یہ ہے کہ $n$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہونے سے مساوات 24.28 کی دونوں ہاتھ کا تناسب $1$ کے قریب تر ہو گا۔

**ثنائی عددی سر**[78] کی تعریف درج ذیل کلیہ ہے۔

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} \qquad (k \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{24.29}$$

شمار کنندہ میں $k$ اجزاء ہیں۔مزید ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

$$\binom{a}{0} = 1 \quad \implies \quad \binom{0}{0} = 1 \tag{24.30}$$

عدد صحیح $a = n$ کے لئے مساوات 24.29 سے

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n) \tag{24.31}$$

حاصل ہو گا۔چونکہ

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \qquad (k \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{24.32}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ثنائی عددی سر کو تکرار سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 24.29 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \qquad (k \geq 0, \text{عدد صحیح}; m > 0) \tag{24.33}$$

متعدد دیگر کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن میں سے ہم

$$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1} \qquad (k \geq 0, n \geq 1, \text{دونوں عدد صحیح}) \tag{24.34}$$

اور

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r} \tag{24.35}$$

پیش کرتے ہیں۔

---

[78] binomial coefficients

**سوالات**

سوال 24.55: تمام چار اعداد $1, 2, 3, 4$ لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.56: تمام پانچ حروف تہجی د،ڈ،ذ،ر،ڑ لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.57: دس افراد میں سے تین افراد کے کتنے پنچایت بنائی جا سکتی ہیں؟
جواب: $\binom{10}{3} = 120$

سوال 24.58: گاڑی کے نمبر پلیٹ پر دو حروف تہجی اور تین اعداد لکھ کر کتنے مختلف نمبر پلیٹ بنائے جا سکتے ہیں؟

سوال 24.59: 100 کی کھیپ سے 3 چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں؟
جواب: $\binom{100}{3} = 161\,700$

سوال 24.60: ایک لوٹے میں 2 سیاہ، 3 سفید، اور 4 سرخ گیند پڑے ہیں۔ہم بلا منصوبہ ایک گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔اس کے بعد دوسرا گیند نکل کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔اس کا احتمال تلاش کریں کہ پہلے 2 سیاہ، اس کے بعد 3 سفید اور آخر میں 4 سرخ گیند نکلیں۔

سوال 24.61: ہمارے پار 6 مختلف رنگ ہیں۔ہم کتنے طریقوں سے (الف) 2 ،(ب) 3 رنگ منتخب کر سکتے ہیں؟
جواب: $15, 15$

سوال 24.62: 10 کی کھیپ میں 2 چیزیں عیب دار ہیں۔ان میں سے چار چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں کوئی بھی چیز عیب دار نہ ہوں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں 1 چیز عیب دار ہ؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں 2 چیزیں عیب دار ہوں؟

سوال 24.63: مسئلہ 24.9 ثابت کریں۔
جواب: ثبوت کا طریقہ کار وہی ہے جو مسئلہ 24.7 میں استعمال کیا گیا ہے لیکن اب $n$ کی جگہ ہم $k$ جگہیں پر کرتے ہیں۔اگر واپس رکھنا ممکن ہو تب $k$ میں سے ہر ایک کو $n$ اشیاء سے پر کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.64: مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ ثابت کریں۔ اشارہ۔ مساوات 24.34 استعمال کریں۔

سوال 24.65: مساوات 24.28 استعمال کرتے ہوئے $4!$ اور $8!$ کی تخمینی قیمتیں حاصل کریں۔ان تخمینی قیمتوں کا حتمی اور اضافی خلل کیا ہے؟ جواب: 39 902, 400, 1 %; 23.5, 0.5, 2 %

سوال 24.66: ایک کھیپ سے 4 چیزوں کا نمونہ، بغیر واپس رکھے حاصل کیا جاتا ہے۔مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات کی تعداد کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 24.67: مساوات 24.29 سے مساوات 24.32 حاصل کریں۔

سوال 24.68: **(مسئلہ ثنائی) مسئلہ ثنائی[79] کے تحت**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ہو گا۔یوں $a^k b^{n-k}$ کا عددی سر $\binom{n}{k}$ ہے۔کیا مسئلہ 24.10 سے آپ یہ اخذ کر سکتے ہیں یا آپ سمجھتے ہیں کہ یہ محض اتفاق ہے۔

سوال 24.69: مسئلہ ثنائی (سوال 24.68) کو

$$(1+b)^p(1+b)^q = (1+b)^{p+q}$$

پر لاگو کرتے ہوئے مساوات 24.35 ثابت کریں۔

## 24.7 بلامنصوبہ متغیرات۔ غیر مسلسل اور استمراری تقسیم

دو پانسے اچھال کر 2 تا 12 عدد صحیح مجموعہ $X$ حاصل ہو گا لیکن اگلے اچھال میں حاصل $X$ کی پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $X$ "امکان" پر منحصر ہے۔اسی طرح اگر ہم پیچوں کی کھیپ سے 5 کا

[79] binomial theorem

نمونہ لے کر ان کی لمبائی ناپنا چاہیں تو ہم پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں کہ ان میں سے کتنے عیب دار ہوں گے؛ یوں عیب دار پیچوں کی تعداد $X$ "امکان" پر منحصر ہو گی۔

**بلا منصوبہ متغیر**[80] $X$ سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کی قیمت حقیقی اعداد اور "امکان" پر منحصر ہوں۔ بلا منصوبہ متغیر کو **امکانی متغیر**[81] بھی کہتے ہیں۔یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ تفاعل $X$ درج ذیل خواص رکھتا ہے۔

- تجربہ کی نمونی فضا $S$ پر $X$ معین ہے اور اس کی قیمتیں حقیقی اعداد ہیں۔

- فرض کریں کہ $a$ کوئی حقیقی عدد اور $I$ کوئی وقفہ ہیں۔تب $S$ میں ان تمام انجام کا سلسلہ جن کے لئے $X = a$ ہو کا احتمال پوری طرح معین ہو گا اور یہی کچھ $S$ میں ان تمام انجام کے لئے درست ہو گا جن کے لئے $X$ کی قیمت $I$ میں ہو۔یہ احتمال حصہ 24.5 میں دی گئی مسلمات کے تحت ہوں گی۔

اگرچہ یہ تعریف عمومی ہے جس میں بہت سے تفاعل شامل ہیں، ہم دیکھیں گے کہ عملاً اہم بلا منصوبہ متغیرات کے اقسام اور ان کی مطابقتی "تقسیم احتمال" کی تعداد بہت کم ہیں۔

اگر ہم بلا منصوبہ تجربہ سرانجام دیں اور عدد $a$ کا مطابقتی وقوعہ حاصل ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تجربہ کی کوشش میں بلا منصوبہ متغیر $X$ قیمت $a$ **اختیار**[82] کرتا ہے۔ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ ہم نے قیمت $X = a$ کا **مشاہدہ**[83] کیا۔ بجائے "عدد $a$ کا مطابقتی وقوعہ" کہنے کے ہم مختصراً کہتے ہیں، "وقوعہ $X = a$ "۔ مطابقتی احتمال $P(X = a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طرح وقوعہ

$X$ وقفہ $a < X < b$ میں کوئی قیمت اختیار کرتا ہے

کا احتمال $P(a < X < b)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔وقوعہ

($c$ کے برابر یا $c$ سے کم قیمت $X$ اختیار کرتا ہے) $\qquad X \le x$

کا احتمال $P(X \le c)$ سے ظاہر کیا جائے گا اور وقوعہ

($c$ سے زیادہ قیمت $X$ اختیار کرتا ہے) $\qquad X > x$

---

[80] random variable
[81] stochastic variable
[82] assume
[83] observed

کا احتمال $p(X > c)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

مندرجہ بالا دو آخری وقوعات باہمی بلا شرکت ہیں لہٰذا حصہ 24.5 کے مسلمہ-پ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(X \leq c) + P(X > c) = P(-\infty < X < \infty)$$

چونکہ $-\infty < X < \infty$ پورا نمونی فضا کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا مسلمہ-ب کے تحت دایاں ہاتھ $1$ کے برابر ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \qquad (c \text{ اختیاری}) \tag{24.36}$$

مثال کے طور پر، اگر $X$ وہ عدد ہو جو پانسہ اچھال کر حاصل ہوتا ہو، تب

$$P(X = 1) = \tfrac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \tfrac{1}{6}, \quad P(1 < X < 2) = 0, \quad P(1 \leq X \leq 2) = \tfrac{1}{3},$$
$$P(0 \leq X \leq 3.2) = \tfrac{1}{2}, \quad P(X > 4) = \tfrac{1}{3}, \quad P(X \leq 0.5) = 0, \quad \cdots$$

ہوں گے۔

عموماً صورتوں میں بلا منصوبہ متغیرات **غیر مسلسل**[84] یا **استمراری**[85] ہوں گے۔ان دونوں پر باری باری غور کرتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیر $X$ اور اس کا مطابقتی تقسیم اس صورت غیر مسلسل کہلاتے ہیں جب $X$ درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

- ان قیمتوں کا تعداد جن کے لئے $X$ کا احتمال غیر $0$ ہو متناہی یا قابل شمار لامتناہی ہوں۔
- اگر وقفہ $a < X \leq b$ میں ایسا قیمت نہ پایا جاتا ہو، تب $P(a < X \leq b) = 0$ ہو گا۔

فرض کریں کہ

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots$$

وہ قیمتیں ہیں جن کے لئے $X$ کا مثبت احتمال پایا جاتا ہو اور فرض کریں کہ مطابقتی احتمال درج ذیل ہیں۔

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \cdots$$

تب $P(X = x_1) = P_1$ ، وغیرہ ہو گا۔ہم اب تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} p_j & x = x_j \\ 0 & x \neq x_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{24.37}$$

متعارف کرتے ہیں۔ $f(x)$ کو $X$ کا **تفاعل احتمال**[86] کہتے ہیں۔

[84] discrete
[85] continuous
[86] probability function

چونکہ $P(S)=1$ (حصہ 24.5 مسلمہ-ب) ہے لہٰذا لازمی طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1 \tag{24.38}$$

اگر ہمیں بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر $X$ کا احتمال معلوم ہو، تب ہم کسی بھی وقفہ $a < X \le b$ کے لحاظ سے $P(a < X \le b$ کا حساب کر سکتے ہیں جو در حقیقت

$$P(a < X \le b) = \sum_{a < x_j \le b} f(x_j) = \sum_{a < x_j \le b} p_j \tag{24.39}$$

ہو گا جو اس وقفہ میں تمام $x_j$ کے لئے احتمال $f(x_j)=p_p$ کا مجموعہ ہے۔بند، کھلا یا لامتناہی وقفہ کے لئے صورت حال تقریباً اسی طرح ہے۔اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ بلا منصوبہ متغیر $X$ کے لئے تفاعل احتمال $f(x)$ ، **تقسیم احتمال**[87]، یا مختصراً، **تقسیم**[88] کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

اگر $X$ کوئی بلا منصوبہ متغیر ہو، جو ضروری نہیں کہ غیر مسلسل ہو، تب کسی بھی حقیقی عدد $x$ کے لئے

$$X \le x \quad \text{(}x\text{ سے کم یا }x\text{ کے برابر کوئی بھی قیمت }X\text{ اختیار کر سکتا ہے)}$$

کا مطابقتی احتمال $P(X \le x)$ پایا جائے گا۔ ظاہر ہے کہ $P(X \le x)$ کی قیمت $x$ کے انتخاب پر منحصر ہو گی؛ یہ $x$ کا تفاعل ہو گا جس کو $X$ کا **تفاعل تقسیم**[89] کہتے[90] ہیں جس کو $F(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں

$$F(x) = P(X \le x) \tag{24.40}$$

ہو گا۔چونکہ کسی بھی $a$ اور $b > a$ کے لئے

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

ہے لہٰذا

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \tag{24.41}$$

---

[87] probability distribution
[88] distribution
[89] distribution function
[90] بعض مصنف $F(x)$ کو مجموعی تفاعل تقسیم کہتے ہیں، خصوصاً وہ جو $f(x)$ کو تفاعل احتمال کہتے ہیں۔

ہو گا جس سے ظاہر ہے کہ $X$ کی تقسیم کو تفاعل تقسیم یکتا طور پر تعین کرتا ہے لہٰذا اس کو احتمال کے حساب کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

فرض کریں کہ $X$ ایک غیر مسلسل متغیر ہے۔تب ہم تفاعل تقسیم $F(x)$ کو تفاعل احتمال $f(x)$ کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔یقیناً مساوات 24.39 ( $a=-\infty$ اور $b=x$ کے ساتھ) پر کرتے ہوئے

$$F(x)=\sum_{x_j\le x} f(x_j) \tag{24.42}$$

حاصل ہو گا جہاں دایاں ہاتھ $x_j\le x$ کے لئے ان تمام $f(x_j)$ کا مجموعہ ہے۔سادہ مثالیں شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں دکھائی گئی ہیں جو دو پانسہ کو ایک بار اچھال کر حاصل ہوا ہے۔دونوں اشکال میں $f(x)$ کو ڈبہ ترسیم کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔شکل 24.7 میں $x=1,2,\cdots,6$ کے لئے $f(x)=\frac{1}{6}$ اور اس کے علاوہ $f(x)=0$ ہے جو پانسہ اچھال کر حاصل ہوئے ہیں جبکہ شکل 24.8 میں $f(x)$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں جو دو پانسہ کا حاصل مجموعہ ہے۔

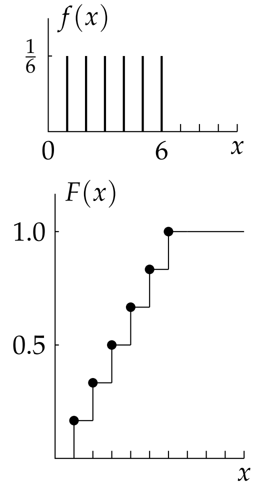
| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

دو پانسہ کے تجربہ میں چونکہ $6\cdot 6=36$ ممکنہ مساوی امکانی انجام ہیں لہٰذا ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{36}$ ہے۔صرف $(1,1)$ کے لئے (جہاں پہلا عدد ایک پانسہ اور دوسرا عدد دوسرے پانسہ کا نتیجہ ہے) $X=2$ ہو گا؛ اسی طرح $(1,2)$ اور $(2,1)$ انجام کے لئے $X=3$ ہو گا؛ $(1,3)$ ، $(2,2)$ ، $(3,1)$ کے لئے $X=4$ ہو گا، وغیرہ۔

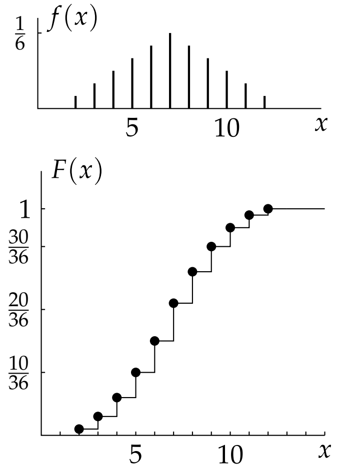
صرف وہ $x_1,x_2,x_3,\cdots$ قیمتیں جن کے لئے بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر $X$ مثبت احتمال رکھتا ہو $X$ کی **ممکنہ قیمتیں**[91] کہلاتی ہیں۔جس وقفہ میں کوئی ممکنہ قیمت نہ پائی جاتی اس وقفہ میں تفاعل تقسیم $F(x)$ مستقل ہو گا۔اس طرح $F(x)$ **سیڑھی تفاعل** (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہو گا جس میں $x=x_j$ پر اوپر رخ $p_j=P(X=x_j)$ چھلانگ پائی جائے گی جبکہ دو چھلانگوں کے بیچ یہ مستقل ہو گا۔شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں ایسا صاف ظاہر ہے۔

ہم اب استمراری بلا منصوبہ متغیر کی تعریف پیش کرتے ہیں اور اس پر غور کرتے ہیں۔ایک بلا منصوبہ متغیر $X$ اور اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم تب **استمراری** کہلاتے ہیں جب اس کا تفاعل تقسیم $F(x)=P(X\le x)$ مثبت ہو

[91] possible values




شکل 24.7: تفاعل احتمال $f(x)$ اور تفاعل تقسیم $F(x)$




شکل 24.8: تفاعل احتمال $f(x)$ اور تفاعل تقسیم $F(x)$

اور اسے درج ذیل تکمل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو[92]

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,\mathrm{d}v \tag{24.43}$$

جہاں متکمل استمراری ہے، ماسوائے $v$ کی متناہی تعداد کے قیمتوں کے لئے۔ متکمل $f$ کو تقسیم کی کثافت احتمال یا مختصراً کثافت کہتے ہیں۔ ہر اس $x$ پر جہاں $f(x)$ استمراری ہو وہاں مساوات 24.43 کو تقسیم کرتے ہوئے

$$F'(x) = f(x)$$

حاصل ہو گا۔ اس لحاظ سے تفاعل تقسیم کا تفرق کثافت ہے۔

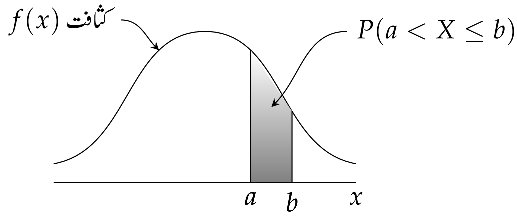
مساوات 24.43 اور حصہ 24.5 کے مسلمہ-ب کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v = 1 \tag{24.44}$$

مساوات 24.41 اور مساوات 24.43 سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(v)\,\mathrm{d}v \tag{24.45}$$

[92] $F(x)$ استمراری ہے لیکن $F(x)$ کے استمراری ہونے سے مساوات 24.43 کی موجودگی ثابت نہیں ہوتی ہے۔ چونکہ ایسے استمراری تفاعل تقسیم جنہیں مساوات 24.43 کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو عملاً بہت کم پائے جاتے ہیں لہٰذا اصطلاحات "استمراری بلا منصوبہ متغیر" اور "استمراری تقسیم" جو بہت زیادہ استعمال کی جاتی ہیں سے پریشانی پیدا ہونے کا امکان بہت کم ہو گا۔




شکل 24.9: شکل برائے مساوات 24.45

یوں جیسا شکل 24.9 میں دکھایا گیا ہے، کثافت $f(x)$ کے منحنی کے نیچے $x = a$ اور $x = b$ کے بیچ رقبہ احتمال کے برابر ہو گا۔

ظاہر ہے کہ کسی بھی مقررہ $a$ اور $b \, (> a)$ کے لئے وقفہ $a < X \leq b$ ، $a < X < b$ اور $a \leq X < b$ کے احتمال ایک جیسے ہوں گے جو غیر مسلسل صورت حال سے مختلف ہے۔

استمراری تقسیم کے مثال (سوالات) اگلے حصے کے سوالات اور آنے والے حصوں میں پیش کئے جائیں گے۔

## سوالات

سوال 24.70: تفاعل احتمال $f(x) = \frac{x^2}{14} \; (x = 1, 2, 3)$ اور تفاعل تقسیم کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.71: $X$ کا تفاعل احتمال $f(2) = \frac{1}{2}$ ، $f(3) = \frac{1}{4}$ ، $f(4) = f(5) = \frac{1}{8}$ ہے۔اس کا کیا احتمال ہے کہ $X$ کی قیمت 4 سے کم ہو گی؟

سوال 24.72: ایک مشین کو $X$ سالوں کے بعد تبدیل کرنا ضروری ہے۔ $X$ کا تفاعل احتمال $f(1) = 0.3$ ، $f(2) = 0.4$ ، $f(3) = 0.2$ ، $f(4) = 0.1$ ہے۔ $f$ اور $F$ کو ترسیم کریں۔

سوال 24.73: کسی پٹرول پمپ میں ایک دن کی درکار پٹرول بلا منصوبہ متغیر $X$ ہے۔ فرض کریں کہ $2000 < x < 6000$ کے لئے $X$ کی کثافت $f(x) = k$ ہے ورنہ 0 ہے۔ $k$ تلاش کریں اور تفاعل

تقسیم $F(x)$ ترسیم کریں۔
جواب:

$$k = \frac{1}{4000}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2000 \\ \frac{x}{4000} - 0.5 & 2000 \le x < 6000 \\ 1 & x \ge 6000 \end{cases}$$

سوال 24.74: $x > 0$ کے لئے $f(x) = ce^{-x}$ جبکہ $x < 0$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ $c$ تلاش کریں۔ $f$ اور $F$ کر ترسیم کریں۔

سوال 24.75: 3 پانسہ اچھال کر ان کا مجموعہ لے کر بلا منصوبہ متغیر $X$ حاصل کیا جاتا ہے۔ تفاعل احتمال $f(x)$ ترسیم کریں۔
جواب: $f(3) = \frac{1}{216}, f(4) = \frac{3}{216}, \cdots$

سوال 24.76: کاغذ کے گتے کی موٹائی $X$ ملی میٹر ہے۔ فرض کریں کہ $1.9 < x < 2.1$ کے لئے کثافت $f(x) = kx$ ہے ورنہ $f(x) = 0$ ہے۔ $k$ تلاش کریں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ گتے کی موٹائی 1.95 اور 2.05 کے بیچ ہو؟

سوال 24.77: ایک سکہ کو اتنی مرتبہ ( $X$ ) اچھالا جاتا ہے جب تک خط حاصل نہ ہو۔ دکھائیں کہ اس تجربہ کا تفاعل احتمال $f(x) = 2^{-x}, \ (x = 1, 2, \cdots)$ ہو گا۔ دکھائیں کہ $f(x)$ مساوات 24.38 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 24.78: $0 \le x \le 1$ کے لئے $f(x) = kx^2$ ہے ورنہ $f(x) = 0$ ہے۔ $k$ تلاش کریں۔ ایسا عدد $c$ تلاش کریں کہ $P(X \le c) = 72.9\,\%$ ہو۔

سوال 24.79: بلب کی عرصہ زندگی $X$ بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی کثافت

$$f(x) = 6[0.25 - (x - 1.5)^2] \qquad 1 \le x \le 2$$

اور باقی $x$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے، جہاں $x = 1$ سے مراد 1000 گھنٹے ہیں۔ کیا احتمال ہے کہ سڑک کے اشارے پر پہلے 1200 گھنٹوں میں تین میں سے کسی ایک بھی بلب کی تبدیل کرنے کی ضرورت پیش نہ آئے؟
جواب: $P(X > 1200) = \int_{1.2}^{2} 6[0.25 - (x - 1.5)^2]\,\mathrm{d}x = 0.896^3 = 72\,\%$

سوال 24.80: کسی دکان کی فروخت اور منافع کی نسبت $X$ ہے۔ فرض کریں کہ $X$ کی تفاعل تقسیم $x < 2$ کے لئے $0$ ، $F(x) = 0$ ، $2 \le x < 3$ کے لئے $F(x) = \frac{x^2-4}{5}$ اور $x \ge 3$ کے لئے $F(x) = 1$ ہے۔ کثافت تلاش کر کے ترسیم کریں۔ $X$ کی قیمت $2.5$ ( $40\,\%$ منافع) اور $5$ ( $20\,\%$ منافع) کے بیچ میں ہونے کا کیا احتمال ہے؟

سوال 24.81: $X$ ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جو کوئی بھی حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ وقوعہ $X \le b$ ، $X < b$ ، $X \ge c$ ، $X > c$ ، $b \le X \le c$ ، $b < X \le x$ کے متمم کے کیا احتمال ہوں گے؟
جواب: $X > b, X \ge b, X < c, X \le c, X > c$ یا $X < b, X > c$ یا $X \le b$

سوال 24.82: ایک ڈبہ میں $4$ دائیں ہاتھ پیچ اور $6$ بائیں ہاتھ پیچ پائے جاتے ہیں۔ بغیر واپس رکھے، دو پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ نکالے گئے بائیں ہاتھ پیچوں کی تعداد $X$ ہے۔ احتمال $P(X = 0)$ ، $P(X = 1)$ ، $P(1 < X < 2)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X \ge 1)$ ، $P(X > 1)$ ، $P(0.5 < X < 10)$ تلاش کریں۔

سوال 24.83: دکھائیں کہ $b < c$ سے مراد $P(X \le b) \le P(X \le c)$ ہے۔

## 24.8 تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت

تقسیم کے اوسط[93] کو $\mu$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\text{(الف)}\quad \mu = \sum_j x_j f(x_j) \qquad \text{(غیر مسلسل تقسیم)}$$
$$\text{(ب)}\quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(استمراری تقسیم)} \tag{24.46}$$

مساوات 24.46-الف میں زیر غور بلا منصوبہ متغیر $X$ کا تفاعل احتمال $f(x)$ ہے اور ہم تمام ممکنہ قیمتوں (حصہ 24.7) پر مجموعہ لیتے ہیں۔ مساوات 24.46-ب میں $X$ کی کثافت $f(x)$ ہے۔ اوسط کو $X$ کی حسابی توقع[94]

[93] mean
[94] mathematical expectation

بھی کہتے ہیں جس کو $E(X)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.46-الف کی تسلسل حتمی مرتکز ہو گی اور $-\infty$ سے $\infty$ تک $|x|f(x)$ کا تکمل موجود ہو گا۔اگر یہ تکمل موجود نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تقسیم کی اوسط نہیں پائی جاتی ہے؛ ایسی صورت عملی انجینئری میں شاذ و نادر پائی جاتی ہے۔

$x=c$ کے لحاظ سے ایک تقسیم کو اس صورت تشاکلی کہتے ہیں جب ہر حقیقی $x$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$f(c+x)=f(c-x) \tag{24.47}$$

آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.84)۔

مسئلہ 24.11: **(تشاکلی تقسیم کا اوسط)**
اگر ایک تقسیم $x=c$ کے لحاظ سے تشاکلی ہو اور اس کا اوسط $\mu$ ہو تب $\mu=c$ ہو گا۔

تقسیم کی **تغیریت**[95] کو $\sigma^2$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)}\quad \sigma^2=\sum_j (x_j-\mu)^2 f(x_j) &&\text{(غیر مسلسل تقسیم)}\\
&\text{(ب)}\quad \sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x &&\text{(استمراری تقسیم)}
\end{aligned} \tag{24.48}$$

جہاں تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.48-الف میں دی گئی تسلسل حتمی مرتکز ہے اور مساوات 24.48-ب کا تکمل موجود ہے۔

غیر مسلسل تقسیم کی صورت میں اگر کسی ایک نقطہ پر $f(x)=1$ اور باقی ہر جگہ $f(x)=0$ ہو تب $\sigma^2=0$ ہو گا جو عملاً غیر دلچسپ صورت ہے۔اس غیر دلچسپ صورت کے علاوہ ہر صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma^2>0 \tag{24.49}$$

تغیریت کا مثبت جذر **معیاری انحراف**[96] کہلاتا ہے جس کو $\sigma$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

---

[95] variance
[96] standard deviation

بلا منصوبہ متغیر $X$ جن قیمتوں کو اختیار کر سکتا ہے، تغیریت کو ان قیمتوں کی پھیل کی ناپ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مثال 24.10: **(اوسط اور تغیریت)**
بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{سکہ اچھال کر شیر کا حاصل ہونا}$$

کے ممکنہ قیمتیں $X = 0$ اور $X = 1$ ہیں جن کا احتمال $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ اور $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ ہے۔ مساوات 24.46-الف سے اوسط $\mu = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 24.46-ب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sigma^2 = (0 - \tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{2} + (1 - \tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

□

مثال 24.11: **یکساں تقسیم**
وہ تقسیم جس کی کثافت $a < x < b$ کے لئے

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \qquad (a < x < b \ \text{جب})$$

اور باقی $x$ کے لئے $f = 0$ ہو، وقفہ $a < x < b$ میں **یکساں تقسیم**[97] کہلاتی ہے۔ مسئلہ 24.11 یا مساوات 24.48-الف سے $\mu = \frac{a+b}{2}$ اور مساوات 24.48-ب سے تغیریت حاصل کرتے ہیں۔

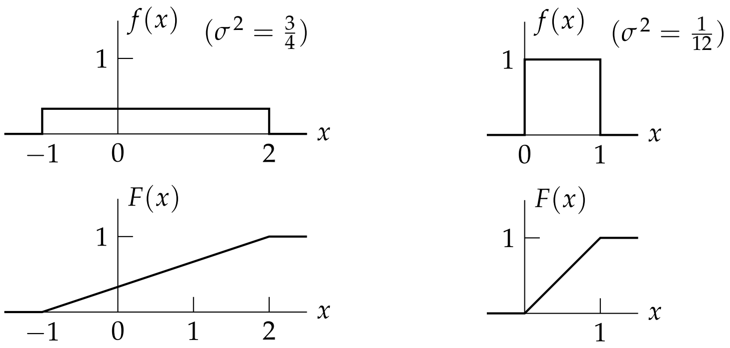
$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \tfrac{a+b}{2})^2 \tfrac{1}{b-a} \, \mathrm{d}x = \frac{(b - a)^2}{12}$$

شکل 24.10 میں چند خصوصی مثالیں پیش کی گئی ہیں جو دکھاتی ہیں کہ $\sigma^2$ پھیل کی ناپ ہے۔ □

مسئلہ 24.12: **(خطی تبادل)**
اگر بلا منصوبہ متغیر $X$ کی اوسط $\mu$ اور تغیریت $\sigma^2$ ہو تب بلا منصوبہ متغیر $X^* = c_1 X + c_2 \ (c_1 \neq 0)$ کی اوسط

$$\mu^* = c_1 \mu + c_2 \tag{24.50}$$

[97] uniform distribution




شکل 24.10: یکساں تقسیم جن کی ایک جیسی اوسط $(0.5)$ لیکن مختلف تغیریت $\sigma^2$ ہے

اور تغیریت

$$\sigma^{*2} = c_1^2\sigma^2 \tag{24.51}$$

ہو گی۔

ثبوت : ہم پہلے $c_1 > 0$ فرض کرتے ہوئے مساوات 24.50 کو استمراری صورت کے لئے ثابت کرتے ہیں۔چونکہ $X$ محور پر چھوٹے سے وقفہ $\Delta x$ کا مطابقتی احتمال (تخمیناً) $f(x)\Delta x$ ہو گا جو ہر صورت $X^*$ محور پر مطابقتی چھوٹے وقفہ $\Delta x^* = c_1\Delta x$ پر احتمال $f^*(x^*)\Delta x^*$ کے برابر ہو گا لہٰذا $x$ اور $x^* = c_1x + c_2$ کے مطابقتی، $X$ کی کثافت $f(x)$ اور $X^*$ کی کثافت $f^*(x^*)$ ، تعلق $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{c_1}$ کو مطمئن کریں گے۔چونکہ $\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}x} = c_1$ ہے لہٰذا $\mathrm{d}x^* = c_1\,\mathrm{d}x$ اور $f^*(x^*)\,\mathrm{d}x^* = f(x)\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}\mu^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^* f^*(x^*)\,\mathrm{d}x^* &= \int_{-\infty}^{\infty}(c_1x + c_2)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c_1\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x + c_2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

جہاں آخری تکمل مساوات 24.44 کے تحت 1 کے برابر ہو گا۔یوں مساوات 24.50 ثابت ہوتی ہے۔چونکہ

$$x^* - \mu^* = (c_1x + c_2) - (c_1\mu + c_2) = c_1x - c_1\mu$$

ہے لہٰذا تغیریت کی تعریف سے

$$\sigma^{*2} = \int_{-\infty}^{\infty}(x^* - \mu^*)^2 f^*(x^*)\,\mathrm{d}x^* = \int_{-\infty}^{\infty}(c_1x - c_1\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = c_1^2\sigma^2$$

حاصل ہو گا۔ $c_1 < 0$ سے نتائج تبدیل نہیں ہوتے ہیں چونکہ اس سے دو اضافی منفی کی علامتیں ملتی ہیں، ایک $x$ میں تکمل کے رخ کی تبدیلی کی بنا (دھیان رہے کہ $x^* = -\infty$ کا مطابقتی $x = \infty$ ہے) اور دوسرا $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{-c_1}$ کی بنا؛ یہاں $-c_1 > 0$ درکار ہو گا چونکہ کثافت غیر منفی قیمت ہے۔

غیر مسلسل کثافت کے لئے مسئلے کا ثبوت بھی بالکل ایسا ہی ہے۔

$\square$

مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے ہم درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.13: **(معیاری متغیر)**
اگر بلا منصوبہ متغیر $X$ کی اوسط $\mu$ اور تغیریت $\sigma^2$ ہو، تب مطابقتی متغیر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ کی اوسط $0$ اور تغیریت $1$ ہو گی۔

$Z$ کو $X$ کا **مطابقتی معیاری متغیر**[98] کہتے ہیں۔

اگر $X$ کوئی بلا منصوبہ متغیر اور $g(X)$ کوئی استمراری تفاعل ہو جو تمام حقیقی $X$ کے لئے معین ہو تب عدد

$$\begin{aligned} &\textbf{(الف)}\quad E(g(X)) = \sum_j g(x_j)f(x_j) \qquad (\text{غیر مسلسل } X) \\ &\textbf{(ب)}\quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\text{استمراری } X) \end{aligned} \tag{24.52}$$

کو $g(X)$ کی **حسابی توقع**[99] کہتے ہیں۔ یہاں $f$ بالترتیب تفاعل احتمال یا کثافت ہے۔

مساوات 24.52 میں $g(X) = X^k \ (k = 1, 2, \cdots)$ لیتے ہوئے بالترتیب

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad E(X^k) = \sum_j x_j^k f(x_j) \tag{24.53}$$

---

[98] standardized variable
[99] mathematical expectation

حاصل ہوتے ہیں۔ $E(X^k)$ کو $X$ کا $k$ **واں معیار اثر**[100] کہتے ہیں۔مساوات 24.52 میں $g(X) = (X-\mu)^k$ لیتے ہوئے بالترتیب

$$E([X-\mu]^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad E([X-\mu]^k) = \sum_j (x_j-\mu)^k f(x_j) \tag{24.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں $X$ کے $k$ **ویں وسطی معیار اثر**[101] کہتے ہیں۔آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

$$E(1) = 1 \tag{24.55}$$

$$\mu = E(X) \tag{24.56}$$

$$\sigma^2 = E([X-\mu]^2) \tag{24.57}$$

## سوالات

سوال 24.84: مسئلہ 24.11 ثابت کریں۔
جواب:

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{c} t f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\infty}^{0} (c-x) f(c-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (c+x) f(c+x)\,\mathrm{d}x = 2c\int_{0}^{\infty} f(c+x)\,\mathrm{d}x = c
\end{aligned}$$

غیر مسلسل تقسیم کے لئے بھی ثبوت اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.85: ایک تقسیم کی کثافت $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ہے۔اس کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\mu = 0, \sigma^2 = 2$

سوال 24.86: $0 \le x \le 2$ کے لئے $X$ کی کثافت $f(x) = 0.5x$ ہے جبکہ باقی $x$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔دکھائیں کہ $X$ کی اوسط $\frac{4}{3}$ اور تغیریت $\frac{2}{9}$ ہے۔

سوال 24.87: $Y = -2X + 5$ کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔ بلا منصوبہ متغیر $X$ سوال 24.86 میں دیا گیا ہے۔

---

[100] kth moment
[101] kth central moment

سوال 24.88: سوال 24.86 کے $X$ کا مطابقتی معیاری بلا منصوبہ متغیر تلاش کریں۔
جواب: $\frac{X-\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}$

سوال 24.89: مسئلہ 24.12 کو غیر مسلسل صورت کے لئے ثابت کریں۔

سوال 24.90: مسئلہ 24.13 کو مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے اخذ کریں۔
جواب: مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 میں $c_1 = \frac{1}{\sigma}$ اور $c_2 = -\frac{\mu}{\sigma}$ پر کریں۔

سوال 24.91: ایک مخصوص قسم کے ٹائر بلا منصوبہ متغیر $X$ (ہزار کلو میٹر) چلتے ہیں۔ $X$ کی کثافت $x > 0$ کے لئے $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ ورنہ $0$ ہے جہاں $\theta\ (>0)$ مقدار معلوم ہے۔ (الف) ایسے ایک ٹائر سے کتنے کلو میٹر طے کیے جا سکتے ہیں؟ (ب) اگر $\theta = 0.05$ ہو تب کم سے کم $30\,000$ کلو میٹر تک پہنچنے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.92: ایک کارخانے میں کیل بنائے جاتے ہیں جن کا وتر $X$ سنٹی میٹر ہے۔ فرض کریں کہ $X$ کی کثافت $0.9 < x < 1.1$ کے لئے $f(x) = k(x-0.9)(1.1-x)$ ورنہ $0$ ہے۔ $k$ معلوم کریں، $f(x)$ کو ترسیم کریں اور $\mu$ اور $\sigma^2$ کو تلاش کریں۔
جواب: $k = 750, \mu = 1, \sigma^2 = 0.002$

سوال 24.93: سوال 24.92 میں اگر کیل کے وتر کا $1\,\mathrm{cm}$ سے انحراف $0.06\,\mathrm{cm}$ بڑھ جائے تب اس کو عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔ کتنے فی صد کیل عیب دار ہوں گے؟

سوال 24.94: ایک پٹرول پمپ کو ہر جمعرات دوپہر کے وقت پٹرول مہیا کیا جاتا ہے۔ فروخت پٹرول کا حجم $X$ ہزار لٹر ہے۔ $0 \le x \le 1$ کے لئے $X$ کی کثافت احتمال $f(x) = 6x(1-x)$ ورنہ $0$ ہے۔ اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\mu = \frac{1}{2}, \sigma^2 = \frac{1}{20}$

سوال 24.95: سوال 24.94 میں پٹرول کی ٹینکی کا حجم کتنا ہو گا اگر ایک ہفتہ میں ٹینکی خالی ہونے کا احتمال $10\,\%$ ہو؟

سوال 24.96: مساوات 24.55، مساوات 24.56 اور مساوات 24.57 ثابت کریں۔

سوال 24.97: دکھائیں کہ $E(X-\mu) = 0$ اور $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$ ہوں گے۔

سوال 24.98: فرض کریں کہ $X$ کی کثافت $0 < x < 1$ کے لئے $f(x) = 2x$ ورنہ $0$ ہے۔ تمام معیار اثر تلاش کریں۔ سوال 24.97 میں دیے گئے کلیہ سے $\sigma^2$ حاصل کریں۔
جواب: $E(X^k) = \frac{2}{k+2}$, $\sigma^2 = \frac{1}{18}$

سوال 24.99: دکھائیں کہ $E(ag(X) + bh(X)) = aE(g(X)) + bE(h(X))$ ہو گا جہاں $a$ اور $b$ مستقل ہیں۔

سوال 24.100: وقفہ $0 \le x \le 1$ پر یکساں تقسیم کے معیار اثر تلاش کریں۔
جواب: $E(X^k) = \frac{1}{k+1}$

سوال 24.101: **(ترچھاپن)** عدد $\gamma = \frac{1}{\sigma^3}E([X-\mu]^3)$ کو $X$ کا **ترچھاپن**[102] کہتے ہیں۔اس اصطلاح کا جواز پیش کرنے کی خاطر دکھائیں کہ $\mu$ کے لحاظ سے تشاکلی $X$ کے لئے اگر تیسرا وسطی معیار اثر موجود ہو تب یہ معیار اثر صفر ہو گا۔

سوال 24.102: $x > 0$ کے لئے کثافت تقسیم $f(x) = xe^{-x}$ ورنہ $f = 0$ کی صورت میں کثافت تقسیم کا ترچھاپن تلاش کریں۔ $f(x)$ کو ترسیم کریں۔
جواب: تکمل بالحصص لیں $\sigma^2 = 2, \gamma = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

سوال 24.103: **(معیار اثر کا پیدا کار تفاعل)**
بلا منصوبہ غیر مسلسل یا استمراری متغیر $X$ کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل درج ذیل کلیات دیتے ہیں

$$G(t) = E(e^{tX}) = \sum_j e^{tx_j} f(x_j) \quad \text{اور} \quad G(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

جہاں فرض کیا گیا ہے کہ مجموعہ کی علامت کے اندر اور تکمل کی علامت کے اندر تفرق لیا جا سکتا ہے۔دکھائیں کہ $E(X^k) = G^{(k)}(0)$ ہو گا اور بالخصوص $\mu = G'(0)$ ہو گا جہاں $G^{(k)}(t)$ سے مراد $t$ کے لحاظ سے $G$ کا $k$ واں تفرق ہے۔

[102] skewness

## 24.9 ثنائی، پوئسن، اور بیش ہندسی تقسیم

ہم اب چند مخصوص غیر مسلسل تقسیم پر غور کرتے ہیں جو شماریات کے لئے اہم ہیں۔

### ثنائی تقسیم

ہم ایک تجربہ کو $n$ مرتبہ بلا منصوبہ سرانجام دینے میں وقوعہ $A$ کے واقع ہونے کی تعداد سے حاصل ثنائی تقسیم پر غور کرتے ہیں جہاں ایک کوشش میں $A$ کا احتمال $P(A) = p$ فرض کیا جائے گا۔تب ایک کوشش میں $A$ کے نا واقع ہونے کا احتمال $q = 1 - p$ ہو گا۔یہ تجربہ $n$ مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے ہم بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{واقع ہونے کی تعداد } A$$

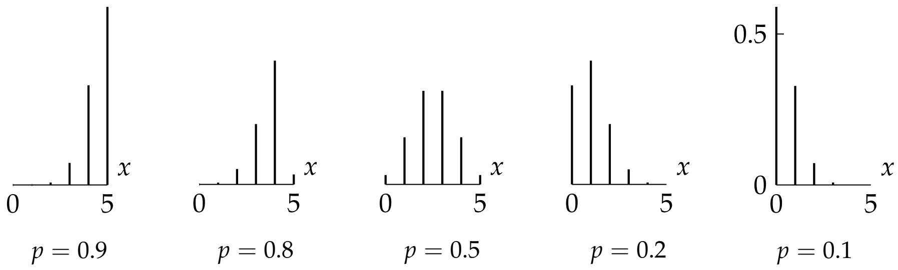
پر غور کرتے ہیں۔تب $X$ کی قیمتیں $0, 1, \cdots, n$ ہو سکتی ہیں۔ہمیں ان اعداد کے مطابقتی احتمال تلاش کرنا چاہتے ہیں۔اس مقصد کے لئے ہم ان قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت، مثلاً $X = x$ پر غور کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $n$ میں سے $x$ کوششوں میں $A$ واقع ہوا ہے جبکہ $n - x$ کوششوں میں $A$ واقع نہیں ہوا ہے۔یہ سب کچھ یوں

$$\underbrace{AA\cdots A}_{x \text{ مرتبہ}}\underbrace{BB\cdots B}_{n-x \text{ مرتبہ}} \tag{24.58}$$

نظر آئے گا۔یہاں $B = A^C$ ہے؛ یعنی $A$ واقع نہیں ہوا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام کوششیں بلا منصوبہ ہے یعنی یہ ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتی ہیں۔تب چونکہ $P(A) = p$ اور $P(B) = q$ ہیں لہٰذا مساوات 24.58 کا مطابقتی احتمال

$$\underbrace{pp\cdots p}_{x \text{ مرتبہ}}\underbrace{qq\cdots q}_{n-x \text{ مرتبہ}} = p^x q^{n-x}$$

ہو گا۔ظاہر ہے کہ $x$ گنا $A$ اور $n - x$ گنا $B$ کو مختلف انداز (ترتیب) میں لکھنے کا ایک طریقہ مساوات 24.58 دیتا ہے لہٰذا مسئلہ 24.3 کے تحت $p^x q^{n-x}$ کو $x$ گنا $A$ اور $n - x$ گنا $B$ کے کل مختلف انداز میں لکھنے کی تعداد سے ضرب دینے سے احتمال $P(X = x)$ حاصل ہو گا۔ہم $n$ کوششوں کو 1 تا $n$ سے




شکل 24.11: مختلف $p$ اور $n = 5$ کے لئے مساوات 24.59 میں دی گئی ثنائی تقسیم

ظاہر کرتے ہوئے ان میں سے ان $x$ کوششوں منتخب کرتے ہیں جن میں $A$ واقع پذیر ہوا ہو۔ چونکہ $x$ منتخب کرنے کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی ہے لہٰذا مساوات 24.25 کے تحت $n$ میں سے $x$ کا انتخاب $\binom{n}{x}$ مختلف انداز سے کیا جا سکتا ہے۔ یوں $X = x$ کا مطابقتی احتمال $P(X = x)$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.59}$$

ہو گا جبکہ $x$ کے کسی دوسری قیمت کے لئے $f(x) = 0$ ہو گا۔ $n$ کوششوں میں ٹھیک $x$ مرتبہ $A$ واقع ہونا کا احتمال مساوات 24.59 دیتی ہے جہاں ایک کوشش میں $A$ واقع ہونے کا احتمال $p$ ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ مساوات 24.59 میں دی گئی تقسیم کو ثنائی تقسیم[103] کہتے ہیں۔ $A$ کے واقع ہونے کو کامیابی[104] جبکہ اس کے نا واقع ہونے کو ناکامی[105] کہتے ہیں۔ $p$ کو ایک کوشش میں کامیابی کا احتمال کہتے ہیں۔ شکل 24.11 میں $n = 5$ اور مختلف $p$ کے لئے مساوات 24.59 ترسیم کیا گیا ہے۔

ثنائی تقسیم کی اوسط (سوال 24.107)

$$\mu = np \tag{24.60}$$

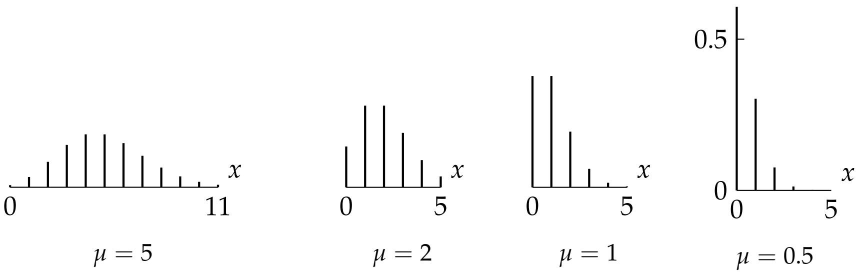
اور تغیریت (سوال 24.107)

$$\sigma^2 = npq \tag{24.61}$$

ہے۔ دھیان رہے کہ $p = 0.5$ پر $\mu$ کے لحاظ سے تقسیم تشاکلی ہے۔

---

binomial distribution[103]
success[104]
failure[105]




شکل 24.12: مختلف $p$ اور $n = 5$ کے لئے مساوات 24.62 میں دی گئی پوئسن تقسیم

### پوئسن تقسیم

ایسی غیر مسلسل تقسیم جس کا تفاعل احتمال درج ذیل ہو **پوئسن تقسیم**[106] کہلاتی[107] ہے۔

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \tag{24.62}$$

شکل 24.12 میں $n = 5$ اور مختلف $\mu$ کے لئے مساوات 24.62 میں دی گئی پوئسن تقسیم ترسیم کی گئی ہے۔ $p \to 0$ اور $n \to \infty$ کی صورت اوسط $\mu = np$ ایک متناہی قیمت کے قریب تر ہو گی اور ثنائی تقسیم کی تحدیدی صورت پوئسن تقسیم دیتی ہے۔ پوئسن تقسیم کی اوسط $\mu$ اور تغیریت (سوال 24.108) درج ذیل ہے۔

$$\sigma^2 = \mu \tag{24.63}$$

اکائی دورانیہ (وقت) میں کسی چوک سے گزرتی گاڑیوں کی تعداد، اکائی لمبائی کے تار میں عیبوں کی تعداد، کاغذ کے اکائی رقبہ میں عیبوں کی تعداد، وغیرہ پوئسن تقسیم سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

### واپس رکھ کر اور واپس نہ رکھ کر نمونے کا حصول۔ بیش ہندسی تقسیم

واپس رکھ کر نمونہ حاصل کرنے میں ثنائی تقسیم (مثال 24.6) اہم ہے۔ مثال کے طور پر ایک ڈبیا میں $N$ پیچ ہیں جن میں سے $M$ پیچ عیب دار ہیں۔ اگر ہم ڈبے سے ایک پیچ بلا منصوبہ نکالیں تب عیب دار پیچ کے حصول کا

[106] Poisson distribution
[107] سمیوں دنی پوسوں

احتمال

$$p=\frac{M}{N}$$

ہو گا۔یوں واپس رکھ کر حاصل، $x$ پیچوں کے نمونہ میں عیب دار پیچوں کی تعداد $x$ ہونے کا احتمال (مساوات 24.59)

$$f(x)=\binom{n}{x}\Big(\frac{M}{N}\Big)^x\Big(1-\frac{M}{N}\Big)^{n-x} \qquad (x=0,1,\cdots,n) \tag{24.64}$$

ہو گا۔واپس نہ رکھ کر حاصل نمونہ میں احتمال

$$f(x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (x=0,1,\cdots,n) \tag{24.65}$$

ہو گا۔مساوات 24.65 میں دی گئی تقسیم کو **بیش ہندسی تقسیم**[108] کہتے[109] ہیں۔

مساوات 24.65 ثابت کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 24.25 کے تحت

- (الف) $N$ اشیاء میں سے $n$ اشیاء کے انتخاب کے $\binom{N}{n}$ مختلف طریقے ہیں،
- (ب) $M$ میں سے $x$ عیب دار کے انتخاب کے $\binom{M}{x}$ مختلف طریقے ہیں،
- (پ) $N-M$ میں سے $n-x$ بے عیب کے انتخاب کے $\binom{N-M}{n-x}$ مختلف طریقے ہیں،

اور (ب) میں ہر طریقہ کے ساتھ (پ) کا ہر طریقہ لے کر، بغیر واپس رکھتے ہوئے $n$ میں سے $x$ عیب دار کی انتخاب کے کل طریقے حاصل ہوں گے۔چونکہ (الف) تمام وقوعات کا مجموعہ ہے اور ہم بلا منصوبہ انتخاب کرتے ہیں لہٰذا اس طرح کے ہر طریقہ کا احتمال $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ ہو گا۔یوں مساوات 24.65 ثابت ہوتا ہے۔

بیش ہندسی تقسیم کی اوسط (سوال 24.121)

$$\mu=n\frac{M}{N} \tag{24.66}$$

---

[108] hypergeometric distribution

[109] چونکہ اس تقسیم کے معیار اثر کے پیدا کار تفاعل کو بیش ہندسی تفاعل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} \tag{24.67}$$

ہے۔

**مثال 24.12: واپس رکھ کر اور نا رکھ کر نمونے کا حصول**
ایک ڈبہ میں 10 تصاویر ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔ہم بلا منصوبہ 2 تصاویر ڈبے سے نکالتے ہیں۔بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{نمونہ میں عیب دار کی تعداد}$$

کا تفاعل احتمال تلاش کریں۔
حل: یہاں $N = 10$ ، $M = 3$ ، $N - M = 7$ اور $n = 2$ ہیں۔واپس رکھ کر نمونہ حاصل کرتے ہوئے مساوات 24.64 کے تحت

$$f(x) = \binom{2}{x}\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{2-x}, \quad f(0) = 0.49, \quad f(1) = 0.42, \quad f(2) = 0.09$$

حاصل ہوتا ہے۔ واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کرتے ہوئے مساوات 24.65 سے

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{7}{2-x}}{\binom{10}{2}}, \quad f(0) = f(1) = \frac{21}{45} \approx 0.47, \quad f(2) = \frac{3}{45} \approx 0.07$$

حاصل ہوتا ہے۔ □

اگر $n$ کے لحاظ سے $N$ ، $M$ اور $N - M$ بہت بڑی مقدار ہوں تب واپس رکھتے ہوئے اور واپس نہ رکھتے ہوئے حاصل کردہ نمونے تقریباً ایک جیسے ہوں گے لہٰذا ایسی صورت میں بیش ہندسی تقسیم کی جگہ $p = \frac{M}{N}$ لیتے ہوئے ثنائی تقسیم استعمال کی جا سکتی ہے، جو نسبتاً سادہ تفاعل ہے۔

یوں بہت بڑی آبادی (لامتناہی آبادی) سے، واپس رکھتے ہوئے یا واپس نہ رکھتے ہوئے، نمونہ حاصل کرتے ہوئے ثنائی تقسیم استعمال کی جا سکتی ہے۔

## سوالات

سوال 24.104: چار سکے ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں۔ بلا منصوبہ متغیر "$X$ = تعداد خط" کا تفاعل احتمال تلاش کریں؟ 0 خط، 1 خط، کم سے کم 1 خط اور زیادہ سے زیادہ 3 خط کا احتمال حاصل کریں۔
جواب: $0.0625, 0.25, 0.9375, 0.9375$

سوال 24.105: نشانے پر تیر مارنے کا امکان $10\,\%$ ہے۔ 10 تیر چلائے جاتے ہیں۔ کم سے کم ایک بار نشانہ لگنے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.106: 24 گھنٹوں کے پرکھ میں $p = 1\,\%$ امکان ہے کہ ایک خاص قسم کا بلب زائل ہو جائے گا۔ ایسے 10 بلبوں کا، کوئی بھی بلب خراب ہوئے بغیر، مسلسل 24 گھنٹے روشنی دینے کا احتمال کیا ہو گا۔
جواب: $0.99^{10} \approx 90.4\,\%$

سوال 24.107: مسئلہ ثنائی استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ ثنائی تقسیم کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل (سوال 24.103) درج ذیل ہے اور مساوات 24.60 اور مساوات 24.61 کو ثابت کریں۔

$$G(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n$$

سوال 24.108: دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل درج ذیل ہے اور مساوات 24.63 کو ثابت کریں۔

$$G(t) = e^{-\mu} e^{\mu e^t}$$

سوال 24.109: دکھائیں کہ $E([X-\mu]^3) = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$ ہو گا۔ اس کو اور سوال 24.108 کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کا ترچھاپن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ہے جو کہتا ہے کہ $\mu$ کی بڑی قیمت کے لئے یہ تقسیم تقریباً تشاکلی ہے (شکل 24.12)۔

سوال 24.110: دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کا تفاعل تقسیم $F(\infty) = 1$ کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 24.111: ایک ٹیلیفون تقسیم کار تختی اوسطاً 600 ٹیلیفون کے لئے کافی ہے۔ یہ ایک منٹ میں زیادہ سے زیادہ 10 نئے ٹیلیفون ملا سکتی ہے۔پوئسن تقسیم استعمال کرتے ہوئے اس بات کا احتمال تلاش کریں کہ کسی ایک منٹ میں یہ تقسیم کار تختی ناکافی ثابت ہو گا۔

سوال 24.112: ایک کارخانے میں $50\,\Omega$ کے برقی مزاحمت پیدا کیے جاتے ہیں جن میں سے وہ مزاحمت بے عیب تصور کیے جاتے ہیں جن کی مزاحمت $45\,\Omega$ اور $55\,\Omega$ کے بیچ ہو۔عیب دار مزاحمت کا احتمال $0.2\,\%$ ہے۔ان مزاحمتوں کو 100 کی کھیپ میں، ضمانت کے ساتھ فروخت کیا جاتا ہے۔ تقسیم پوئسن استعمال کرتے ہوئے ایک کھیپ میں عیب دار مزاحمت نکلنے کا احتمال حاصل کریں۔
جواب: $1 - e^{-0.2} = 0.1813$

سوال 24.113: فرض کریں کہ ایک مشین کے پیدا کردہ پیچوں میں سے $3\,\%$ عیب دار ہوتے ہیں۔ایک ڈبیا میں 50 پیچ بھرے جاتے ہیں۔ تقسیم پوئسن استعمال کرتے ہوئے ایک ڈبیا میں $x$ عیب دار پیچ نکلنے کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.114: ایک پل سے جمع کے دن صبح 8 تا 10 بجے فی منٹ $X$ گاڑیاں گزرتی ہیں۔فرض کریں کہ $X$ کو پوئسن تقسیم ظاہر کرتی ہے جس کا اوسط 5 ہے۔کسی ایک منٹ میں 3 یا 3 سے کم گاڑیاں گزرنے کا احتمال تلاش کریں۔
جواب: 0.265

سوال 24.115: ایک مقناطیسی پٹی کے 100 میٹر لمبائی میں اوسطاً 2 عیب پائے جاتے ہیں۔ 300 میٹر لمبی پٹی (الف) میں $x$ عیب کا احتمال کیا ہو گا، (ب) بلا عیب ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.116: گتے کے ڈبا میں 20 فتیلہ ہیں جن میں سے 5 عیب دار ہیں۔ اس ڈبا سے بلا منصوبہ 3 فتیلے بغیر واپس رکھے بطور نمونہ نکالے جاتے ہیں۔اس نمونہ میں $x$ عیب دار فتیلے ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.117: ایک تقسیم کار 100 قلم کے ڈبوں فروخت کرتا ہے۔وہ اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ کسی ایک ڈبے میں سے زیادہ سے زیادہ $10\,\%$ قلم عیب دار ہوں گے۔ایک خریدار ہر ڈبے میں سے 10 قلم بغیر واپس رکھے نکال کر پرکھتا ہے۔کوئی بھی قلم عیب دار نہ ہونے کی صورت میں وہ ڈبا خرید لیتا ہے ورنہ وہ ڈبے کو نہیں خریدتا۔اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ڈبے میں 10 عیب دار قلم ہوں (لہٰذا یہ ضمانت پر پورا اترتا ہے) اور خریدار اس ڈبے کو نہ خریدے؟

سوال 24.118: سوال 24.117 میں کیا احتمال ہے کہ ایک ڈبے میں 20 عیب دار قلم ہونے کے باوجود خریدار اسے خرید لیتا ہے؟

سوال 24.119: ایک کارخانے میں پیچوں کی پیداوار کی جاتی ہے۔ہر گھنٹہ بلا منصوبہ $n$ پیچ کا نمونہ حاصل کر کے پرکھا جاتا ہے۔ایک یا ایک سے زیادہ عیب دار پیچ حاصل ہونے کی صورت میں کام روک کر مشینوں کی کارکردگی تسلی بخش بنائی جاتی ہے۔ $n$ کتنا ہو گا اگر 10% عیب دار پیچ کی صورت میں 95% احتمال ہے کہ کام روکا جائے گا؟

سوال 24.120: 1 سے لے کر 13 تک عدد کو علیحدہ علیحدہ کاغذ پر لکھا جاتا ہے۔ان میں سے بلا منصوبہ تین کاغذ نکالے جاتے ہیں جبکہ ایک شخص بغیر دیکھے تینوں پر لکھے اعداد بتاتا ہے۔کیا احتمال ہے کہ وہ (الف) کوئی بھی درست عدد نہ بتائے، (ب) ایک عدد ٹھیک بتائے، (پ) دو عدد ٹھیک بتائے، (ت) تینوں اعداد ٹھیک بتائے؟
جواب: $\frac{120}{286}, \frac{135}{286}, \frac{30}{286}, \frac{1}{286}$

سوال 24.121: مساوات 24.66 کو ثابت کریں۔

سوال 24.122: **(متعدد رکنی تقسیم)** $k$ باہمی بلا شرکت وقوعات $A_1, \cdots, A_k$ کے احتمال بالترتیب $p_1, \cdots, p_k$ ہیں جہاں $p_1 + \cdots + p_k = 1$ ہے۔فرض کریں کہ $n$ باہمی بلا شرکت کوشش کیے جاتے ہیں۔دکھائیں کہ ان میں $A_1$ کی تعداد $x_1$ ، $\cdots$، $A_k$ کی تعداد $x_k$ ہونے کا احتمال

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

ہو گا جہاں $0 \le x_j \le n$ ، $j = 1, \cdots, k$ ، اور $x_1 + \cdots + x_n = n$ ہیں۔ایسی تقسیم جس کی تفاعل تقسیم درج بالا ہو کو متعدد رکنی تقسیم[110] کہتے ہیں۔

سوال 24.123: برقی مزاحمت کی پیداوار میں 3% کی مزاحمت $R < 198\,\Omega$ اور 5% کی مزاحمت $R > 201\,\Omega$ ہے۔بلا منصوبہ 20 مزاحمتوں کے نمونہ میں $R < 198\,\Omega$ کے $x_1$ اور $R > 201\,\Omega$ کے $x_2$ مزاحمت حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟

---
[110] multinomial distribution

## 24.10 عمومی تقسیم

ایسی تقسیم جس کی کثافت

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad (\sigma > 0) \tag{24.68}$$

ہو کو **عمومی تقسیم**[111] یا گاوسی تقسیم[112] کہتے ہیں۔اس طرح تقسیم والا بلا منصوبہ متغیر **عمومی**[113] یا **عمومی بانٹا ہوا**[114] کہلاتا ہے۔ عملی دلچسپی کے بہت سارے بلا منصوبہ متغیرات عمومی یا تخمیناً عمومی ہیں اور یا ان کا تبادلہ با آسانی عمومی بلا منصوبہ متغیرات میں کیا جا سکتا ہے۔ اس کے علاوہ کئی پیچیدہ تقسیم کو تخمیناً عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شماریاتی پرکھ کے کئی ثبوت میں بھی یہ تقسیم کردار ادا کرتی ہے۔

مساوات 24.68 میں تقسیم کی اوسط $\mu$ اور اس کا معیاری انحراف $\sigma$ ہے۔ $f(x)$ کی منحنی $\mu$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور اس کو قوس جرس[115] کہتے ہیں۔قوس جرس کو شکل 24.13 میں $\mu = 0$ اور $\sigma$ کے کئی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ $\mu > 0$ ( $\mu < 0$ ) کے لئے قوس کی شکل تبدیل نہیں ہوتی البتہ یہ $|\mu|$ اکائیاں دائیں (بائیں) منتقل ہوتا ہے۔ $\sigma^2$ کی قیمت جتنی کم ہو، $x = \mu$ پر قوس کی چوٹی اتنی زیادہ بلند ہو گی اور چوٹی کے دونوں اطراف ڈھلوان اتنی زیادہ ہو گی (شکل 24.13) جو تغیریت کے تصور کے عین مطابق ہے۔

مساوات 24.68 سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کا تقسیمی تفاعل

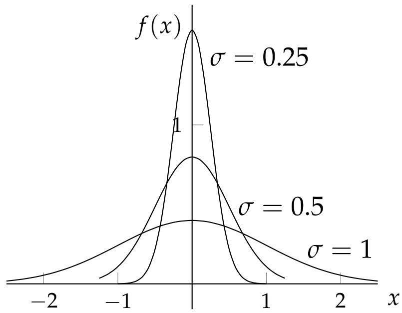
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v-\mu}{\sigma})^2} \, \mathrm{d}v \tag{24.69}$$

ہو گا۔یوں مساوات 24.45 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v-\mu}{\sigma})^2} \, \mathrm{d}v \tag{24.70}$$

---

[111] normal distribution
[112] Gauss distribution
[113] normal
[114] normally distributed
[115] bell curve




شکل 24.13: عمومی تقسیم (مساوات 24.68) برائے $\mu = 0$ اور مختلف $\sigma$

مساوات 24.69 کا تکمل بنیادی طریقوں سے حاصل کرنا ممکن نہیں ہے البتہ اس کو درج ذیل تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u \tag{24.71}$$

جو عمومی تقسیم کا وہ تفاعل ہے جس کی اوسط $0$ اور تغیریت $1$ ہے اور جس کو جدول بند کیا گیا ہے۔ یہ جدول ضمیمہ ج میں پیش کیے گئے ہیں۔ اگر $u = \frac{v-\mu}{\sigma}$ لیا جائے تب $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{\sigma}$ اور $\mathrm{d}v = \sigma \, \mathrm{d}u$ ہو گا اور ہمیں $-\infty$ تا $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ تکمل لینا ہو گا۔ مساوات 24.69 سے یوں

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma \, \mathrm{d}u$$

حاصل ہو گا جس میں $\sigma$ کٹ جاتا ہے اور جس کا دایاں ہاتھ مساوات 24.71 دیتا ہے جہاں $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ہے یعنی:

$$F(x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) \tag{24.72}$$

اس سے اور مساوات 24.70 سے درج ذیل ایک اہم کلیہ اخذ ہوتا ہے۔

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big) \tag{24.73}$$

بالخصوص $a = \mu - \sigma$ اور $b = \mu + \sigma$ کی صورت میں دایاں ہاتھ $\Phi(1) - \Phi(-1)$ کے برابر ہے؛ $a = \mu - 2\sigma$ اور $b = \mu + 2\sigma$ کی صورت میں دایاں ہاتھ $\Phi(2) - \Phi(-2)$ کے برابر ہے، وغیرہ،

وغیرہ۔ تفاعل $\Phi(z)$ کی قیمتیں جدول سے دیکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad P(\mu-\sigma < X \le \mu+\sigma) \approx 68\,\% \\
&\text{(ب)} \quad P(\mu-2\sigma < X \le \mu+2\sigma) \approx 95.5\,\% \\
&\text{(پ)} \quad P(\mu-3\sigma < X \le \mu+3\sigma) \approx 99.7\,\%
\end{aligned} \tag{24.74}
$$

یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ بلا منصوبہ عمومی متغیر $X$ کی بہت ساری قیمتیں درج ذیل طرح بانٹی گئی ہوں گی۔

- (الف) تقریباً $\frac{2}{3}$ قیمتیں $\mu-\sigma$ اور $\mu+\sigma$ کے بیچ ہوں گی،
- (ب) تقریباً $95\,\%$ قیمتیں $\mu-2\sigma$ اور $\mu+2\sigma$ کے بیچ ہوں گی،
- (پ) تقریباً $99\frac{3}{4}\%$ قیمتیں $\mu-3\sigma$ اور $\mu+3\sigma$ کے بیچ ہوں گی

جس کو درج ذیل طریقہ سے بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔

وہ قیمت جس کی $\mu$ سے دوری $\sigma$ سے زیادہ ہو، 3 کوششوں میں تقریباً 1 مرتبہ واقع ہو گی، جبکہ وہ قیمت جس کی $\mu$ سے دوری $2\sigma$ یا $3\sigma$ سے زیادہ ہو، بالترتیب 20 اور 400 کوششوں میں تقریباً 1 مرتبہ واقع ہو گی۔ یوں عملی طور پر تمام قیمتیں $\mu-3\sigma$ اور $\mu+3\sigma$ کے بیچ پائی جائیں گی۔ اس دو اعداد کو **تین سگما حدود**[116] کہتے ہیں۔

اسی طرح درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad P(\mu-1.96\sigma < X \le \mu+1.96\sigma) = 95\,\% \\
&\text{(ب)} \quad P(\mu-2.58\sigma < X \le \mu+2.58\sigma) = 99\,\% \\
&\text{(پ)} \quad P(\mu-3.29\sigma < X \le \mu+3.29\sigma) = 99.9\,\%
\end{aligned} \tag{24.75}
$$

درج ذیل مثال ضمیمہ ج میں دیے گئے عمومی تقسیم کی جدول کا استعمال سمجھنے میں مدد دیں گی۔

مثال 24.13: درج ذیل احتمال ضمیمہ ج کی مدد سے تلاش کریں جہاں $X$ عمومی ہے جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے۔

(الف) $P(X \le 2.44)$، (ب) $P(X \le -1.16)$، (پ) $P(X \ge 1)$، (ت) $P(2 \le X \le 10)$

---

[116] three-sigma limits

حل: ہم ضمیمہ ج سے جوابات پڑھ کر لکھتے ہیں۔

$$\text{(الف)}\ 0.9927,\quad \text{(ب)}\ 0.1230,\quad \text{(پ)}\ 1-P(X\le 1)=1-0.8413=0.1587,$$
$$\text{(ت)}\ \Phi(10)=1.0000\,\text{(کیوں؟)},\Phi(2)=0.9772,\Phi(10)-\Phi(2)=0.0228$$

□

مثال 24.14: گزشتہ مثال کو دوبارہ حل کریں۔اس مرتبہ فرض کریں کہ $X$ عمومی ہے جس کی اوسط 0.8 اور تغیریت 4 ہے۔

جواب: ضمیمہ ج اور مساوات 24.73 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{(الف)}\quad F(2.44)=\Phi\left(\frac{2.44-0.80}{2}\right)=\Phi(0.82)=0.7939$$
$$\text{(ب)}\quad F(-1.16)=\Phi(-0.98)=0.1635$$
$$\text{(پ)}\quad 1-P(X\le 1)=1-F(1)=1-\Phi(0.1)=0.4602$$
$$\text{(ت)}\quad F(10)-F(2)=\Phi(4.6)-\Phi(0.6)=1-0.7257=0.2743$$

□

مثال 24.15: فرض کریں کہ $X$ عمومی ہے جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے۔ایسا مستقل $c$ تلاش کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$\text{(الف)}\ P(X\ge c)=10\,\%,\quad \text{(ب)}\ P(X\le c)=5\,\%$$
$$\text{(پ)}\ P(0\le X\le c)=45\,\%,\quad \text{(ت)}\ P(-c\le X\le c)=99\,\%$$

حل: ضمیمہ ج سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{(الف)}\quad 1-P(X\le c)=1-\Phi(c)=0.1,\Phi(c)=0.9,c=1.282,$$
$$\text{(ب)}\quad c=-1.645,$$
$$\text{(پ)}\quad \Phi(c)-\Phi(0)=\Phi(c)-0.5=0.45,\Phi(c)=0.95,c=1.645,$$
$$\text{(ت)}\quad c=2.576$$

□

سوال 24.124: فرض کریں کہ $X$ عمومی ہے جس کی اوسط $-2$ اور تغیریت $0.25$ ہے۔ایسا $c$ تلاش کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

(الف) $P(X \geq c) = 0.2,$ (ب) $P(-c \leq X \leq -1) = 0.5$
(پ) $P(-2-c \leq X \leq -2+c) = 0.9,$ (ت) $P(-2-c \leq X \leq -2+c) = 99.6\,\%$

حل: ضمیمہ ج سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

(الف) $$1 - P(X \leq c) = 1 - \Phi(\frac{c+2}{0.5}) = 0.2,$$
$$\Phi(2c+4) = 0.8, 2c+4 = 0.842, c = -1.579$$
(ب) $$\Phi(\frac{-1+2}{0.5}) - \Phi(\frac{-c+2}{0.5}) = 0.9772 - \Phi(4-2c) = 0.5,$$
$$\Phi(4-2c) = 0.4772, 4-2c = -0.057, c = 2.03$$
(پ) $$\Phi(\frac{-2+c+2}{0.5}) - \Phi(\frac{-2-c+2}{0.5})$$
$$= \Phi(2c) - \Phi(-2c) = 0.9, 2c = 1.645, c = 0.823$$
(ت) $$\Phi(2c) - \Phi(-2c) = 99.6\,\%, 2c = 2.878, c = 1.439$$

مثال 24.16: ایک کارخانے میں ایک خاص موٹائی کی لوہے کی چادریں بنائی جاتی ہیں۔یہ کام خود کار مشین کرتے ہیں۔ خام مال میں فرق اور درجہ حرارت، لرزش وغیرہ کی بنا مشینوں کا رویہ اور استعمال آلات میں معمولی تبدیلیاں رو نما ہوتی ہیں جنہیں قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ان وجوہات کی بنا چادریں ایک دوسرے سے مختلف ہوتی ہیں۔یوں ہم چادر کی موٹائی $X$ (ملی میٹر) کو بلا منصوبہ متغیر تصور کر سکتے ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ متغیر عمومی ہے جس کی اوسط $\mu = 10\,\text{mm}$ اور معیاری انحراف $\sigma = 0.02\,\text{mm}$ ہے۔ہم عیب دار چادروں کی تعداد جاننا چاہیں گے۔عیب دار چادر وہ چادر ہے جس کی موٹائی (الف) $9.97\,\text{mm}$ سے کم ہو، (ب) $10.05\,\text{mm}$ سے زیادہ ہو، (پ) کا اوسط ( $10\,\text{mm}$ ) سے انحراف $0.03\,\text{mm}$ سے زیادہ ہو۔ (ت) ہم اعداد $10-c$ اور $10+c$ منتخب کرنا چاہتے ہیں کہ عیب دار چادروں کی تعداد $5\,\%$ سے زیادہ نہ ہو۔(ٹ) جزو-ت میں $\mu = 10.01\,\text{mm}$ کرنے سے عیب دار کی فی صد تعداد پر کیا اثر پڑے گا؟

حل: ضمیمہ ج استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{(الف)}\quad P(X \le 9.97) = \Phi(\frac{9.97-10.00}{0.02}) = \Phi(-1.5) = 0.0668 \approx 6.7\,\%$$

$$\begin{aligned}\text{(ب)}\quad P(X \ge 10.05) &= 1 - P(X \le 10.05) = 1 - \Phi(\frac{10.05-10.00}{0.02})\\ &= 1-\Phi(2.5) = 1-0.9938 \approx 0.6\,\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(پ)}\quad P(9.97 \le X \le 10.03) &= \Phi(\frac{10.03-10.00}{0.02}) - \Phi(\frac{9.97-10.00}{0.02})\\ &= \Phi(1.5)-\Phi(-1.5) = 0.8664;\implies 1-0.8664 \approx 13\,\%\end{aligned}$$

(ت) مساوات 24.75-الف سے

$$c = 1.96\sigma = 0.039$$

یوں جواب $9.961\,\text{mm}$ اور $10.039\,\text{mm}$ ہے۔

$$\begin{aligned}\text{(ٹ)}\quad P(9.961 \le X \le 10.039) &= \Phi(\frac{10.039-10.010}{0.02}) - \Phi(\frac{9.961-10.010}{0.02})\\ &= \Phi(1.45)-\Phi(-2.45) = 0.9265-0.0071 \approx 92\,\%\end{aligned}$$

لہٰذا جواب $8\,\%$ ہو گا۔آپ نے دیکھا کہ مشین میں معمولی تبدیلی سے عیب دار چادروں کی تعداد میں بہت زیادہ اضافہ پیدا ہوتا ہے۔

□

بلا منصوبہ عمومی متغیر سے خطی تبادل کے ذریعہ بلا منصوبہ عمومی متغیر ہی حاصل ہو گا۔مساوات 24.72 سے آپ یقیناً درج ذیل حاصل کر پائیں گے۔

**مسئلہ 24.14: (خطی تبادل)**
اگر $X$ عمومی ہو اور اس کی اوسط $\mu$ اور تغیریت $\sigma^2$ ہو تب $X^* = c_1X + c_2\ (c_1 \neq 0)$ عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu^* = c_1\mu + c_2$ اور تغیریت $\sigma^{*2} = c_1^2\sigma^2$ ہو گی۔

بڑی $n$ کی صورت میں ثنائی تقسیم کو تخمیناً عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔بڑی $n$ کی صورت میں تفاعل تقسیم

$$f(x) = \binom{n}{x}p^xq^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.76}$$

کے ثنائی عددی سر اور طاقت سادہ نہیں رہتے اور ان سے چھٹکارا حاصل کرنے میں بہتری ہے۔

مسئلہ 24.15: **(ڈی موے ور اور لاپلاس کا تحدیدی مسئلہ)**
بڑی $n$ کے لئے

$$f(x) \sim f^*(x) \qquad (x = 0, 1, \cdots, n)$$

ہو گا جہاں $f$ کو مساوات 24.76 میں پیش کیا گیا ہے جبکہ

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \tag{24.77}$$

عمومی تقسیم کی کثافت ہے جس کی اوسط $\mu = np$ اور تغیریت $\sigma^2 = npq$ ہے (جو ثنائی تقسیم کی اوسط اور تغیریت ہیں) اور علامت $\sim$ (متقاربی برابر) کا مطلب ہے کہ جیسے جیسے $n$ لامتناہی کے قریب تر ہوتا جائے ویسے ویسے دونوں اطراف کی نسبت 1 کے قریب تر ہوتی جائے گی۔ مزید کسی بھی غیر منفی اعداد صحیح $a$ اور $b\,(> a)$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{gathered} P(a \le X \le b) = \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \\ \alpha = \frac{a - np - 0.5}{\sqrt{npq}}, \quad \beta = \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{npq}} \end{gathered} \tag{24.78}$$

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔ اس مسئلے کے ثبوت سے ظاہر ہوتا ہے کہ غیر مسلسل سے استمراری صورت میں تبادلے کی بنا اصلاح کی ضرورت پیش آتی ہے جو اجزاء 0.5 ، $\alpha$ اور $\beta$ کی صورت میں نظر آتا ہے۔

## سوالات

سوال 24.125: دکھائیں کہ مساوات 24.68 کے **نقاط تصریف**[117] $x = \mu - \sigma$ اور $x = \mu + \sigma$ پر پائے جاتے ہیں۔ نقطہ تصریف سے مراد وہ نقطہ ہے جس پر منحنی کی شکل محدب سے مجوف یا مجوف سے محدب ہوتی ہو۔

[117] inflextion points

سوال 24.126: دکھائیں $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

سوال 24.127: $X$ عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 80 اور تغیریت 9 ہے۔ $P(X > 83)$ ، $P(X < 81)$ ، $P(X < 80)$ اور $P(78 < X < 82)$ تلاش کریں۔
جواب: $0.1587, 0.6306, 0.5, 0.4950$

سوال 24.128: $X$ عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 105 اور تغیریت 25 ہے۔ $P(X \le 112.5)$ ، $P(X > 100)$ اور $P(110.5 < X < 111.25)$ تلاش کریں۔
جواب:

سوال 24.129: $X$ عمومی ہے جس کی اوسط 14 اور تغیریت 4 ہے۔ایسا $c$ کہ $P(X \le c) = 95\,\%$ ، $P(X \le c) = 5\,\%$ ، $P(-c \le X \le c) = 99\,\%$ ہو تلاش کریں۔
جواب: $17.29, -17.29, 19.152$

سوال 24.130: $X$ عمومی ہے جس کی اوسط 3.6 اور تغیریت 0.01 ہے۔ایسا $c$ تلاش کریں کہ $P(X \le c) = 50\,\%$ ، $P(X > c) = 10\,\%$ ، $P(-c < X \le c) = 99.9\,\%$ ہوں۔

سوال 24.131: گاڑی کی ایک مخصوص بیٹری کی زندگی $X$ عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 4 سال اور معیاری انحراف 1 سال ہے۔ صنعت گر بیٹری کی تین سال کی ضمانت دیتا ہے۔اس کو ضمانت کی بنا کتنی فی صد بیٹریاں مہیا کرنی ہوں گی؟
جواب: $16\,\%$

سوال 24.132: ایک سکہ 4040 مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ 2048 شیر حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.133: ایک صنعت کار کاغذ بناتا ہے جس کی کمیت عمومی متغیر ہے جس کی اوسط $\mu = 1.950\,\mathrm{g}$ اور معیاری انحراف $\sigma = 0.025\,\mathrm{g}$ ہے۔کاغذ کو 1000 کی جتھوں میں فروخت کیا جاتا ہے۔ایک جتھا میں کتنے کاغذ $2\,\mathrm{g}$ سے زیادہ بھاری ہوں گے؟
جواب: تقریباً 22

سوال 24.134: مثال 24.16 کے جزو-پ میں عیب دار چادروں کی تعداد $6\,\%$ کے لئے $\sigma$ کتنا ہو گا؟

سوال 24.135: برقی مزاحمت کا پیداکار تجربہ سے جانتا ہے کہ اس کے بنائے گئے مزاحمت کی قیمت عمومی متغیر ہے جس کی اوسط $\mu = 150\,\Omega$ اور معیاری انحراف $\sigma = 5\,\Omega$ ہے۔کتنے فی صد کی مزاحمت $148\,\Omega$ اور

$152\,\Omega$ کے بیچ ہو گی؟ کتنے فی صد کی مزاحمت $140\,\Omega$ اور $160\,\Omega$ کے بیچ ہو گی؟
جواب: $31.1\,\%, 95.5\,\%$

سوال 24.136: ایک پلاسٹک اینٹ کی طاقت توڑ[118] $X$ (کلو گرام) عمومی متغیر ہے جس کی اوسط $1250\,\text{kg}$ اور معیاری انحراف $55\,\text{kg}$ ہے۔وہ کمیت تلاش کریں جس پر پلاسٹک ٹوٹنے کا انحراف $5\,\%$ سے زیادہ نہ ہو۔

سوال 24.137: ایک صارف کو $0.280 \mp 0.002\,\text{cm}$ قطر کے قابلے درکار ہیں۔ایک صنعت کار کے بنائے گئے قابلوں کی $\mu = 0.279\,\text{cm}$ اور $\sigma = 0.001\,\text{cm}$ ہے اور ان کی تقسیم عمومی ہے۔اس صنعت کار کے کتنے فی صد قابلے صارف کی تخصیص پر پورا اترتے ہیں؟
جواب: $84\,\%$

سوال 24.138: ایک فروش کار $1000$ بلب گتے کے ایک ڈبے میں بیچتا ہے۔ $p = 1\,\%$ لیتے ہوئے مساوات 24.78 کی مدد سے اس بات کا احتمال تلاش کریں کہ ایک ڈبے میں $1\,\%$ سے زیادہ بلب خراب نہیں ہوں گے۔

سوال 24.139: جدول عمومی استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.75 میں دیے گئے نتائج حاصل کریں۔

سوال 24.140: مسئلہ 24.14 ثابت کریں۔

سوال 24.141: اگر $X$ عمومی ہو جس کی اوسط $\mu$ اور تغیریت $\sigma^2$ ہے تب $-X$ کی تقسیم کیا ہو گی؟
جواب: $-X$ بھی عمومی ہو گا۔اس کی اوسط $-\mu$ اور تغیریت $\sigma^2$ ہو گی۔

سوال 24.142: **(بڑے اعداد کے لئے برنولی کا قاعدہ)**
فرض کریں کہ ایک تجربہ میں وقوعہ $A$ کا احتمال $p\,(0 < p < 1)$ ہے، اور فرض کریں کہ $n$ بلا منصوبہ کوششوں میں $A$ واقع ہونے کی تعداد $X$ ہے۔دکھائیں کہ کسی بھی $\epsilon > 0$ کے $n \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \to 1 \qquad (n \to \infty) \tag{24.79}$$

[118] breaking strength

سوال 24.143: $\Phi^2(\infty)$ میں قطبی محدد ( $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ ) متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u = 1 \tag{24.80}$$

جواب:

$$\Phi^2(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 1$$

سوال 24.144: مساوات 24.80 اور تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مساوات 24.68 میں $\sigma$ معیاری تقسیم کا معیاری انحراف ہے۔

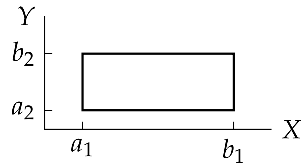
## 24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم ایک مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ واحد ایک بلا منصوبہ متغیر، مثلاً $X$، وابستہ کرنا ہو گا۔ حصہ 24.7 سے ہم جانتے ہیں کہ اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم $F(x) = P(X \leq x)$ اس تقسیم کو مکمل طور پر تعین کرتا ہے، چونکہ ہر وقفہ $a < X \leq b$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم دو مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ دو بلا منصوبہ متغیرات، مثلاً $X$ اور $Y$، وابستہ کرنا ہو گا۔ مثال کے طور پر فولاد کی راک ویل سختی کو $X$ اور اس میں کاربن کی مقدار کو $Y$ ظاہر کر سکتے ہیں۔ ہر ایک تجربہ اعداد کی جوڑی $X = x$ ، $Y = y$ دے گی جس کو مختصراً $(x, y)$ لکھا اور $XY$ مستوی پر بطور نقطہ دکھایا جا سکتا ہے۔ ہم اب ایک مستطیل $a_1 < X \leq b_1$ ، $a_2 < Y \leq b_2$ پر غور کرتے ہیں (شکل 24.14)۔ اگر ایسے ہر ایک مستطیل کے لئے ہمیں مطابقتی احتمال

$$P(a_1 < X \leq b_1,\ a_2 < Y \leq b_2)$$




شکل 24.14: دو بعدی تقسیم کا تصور

معلوم ہو تب ہم کہتے ہیں کہ **دو بعدی بلا منصوبہ متغیر**[119] $(X, Y)$ یا بلا منصوبہ متغیرات $X$ اور $Y$ کا **دو بعدی تفاعل احتمال**[120] ہمیں معلوم ہے۔ تفاعل

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \tag{24.81}$$

کو اس تقسیم یا $(X, Y)$ کا **تقسیمی تفاعل**[121] کہتے ہیں۔ چونکہ (سوال 24.145)

$$\begin{aligned} &P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) \\ &\quad = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \end{aligned} \tag{24.82}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 24.81 تقسیم کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

## غیر مسلسل دو بعدی تقسیمیں

اگر $(X, Y)$ درج ذیل خواص رکھتا ہو تب متغیر $(X, Y)$ اور اس کا مطابقتی تقسیم **غیر مسلسل** کہلائے گا۔

$X, Y$ متناہی تعداد یا قابل شمار لا متناہی تعداد کی جوڑی قیمتیں $(x, y)$ اختیار کر سکتا ہے جن کے مطابقتی احتمال مثبت ہوں گے۔ ہر ایسا دائرہ کار جس میں ایسی کوئی جوڑی نہ پائی جاتی ہو کا احتمال $0$ ہو گا[122]۔

فرض کریں کہ $x_i, y_j$ ایسی کوئی جوڑی ہے اور $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ ہے (جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ $p_{ij}$ کسی مخصوص $i, j$ کی جوڑیوں کے لئے صفر بھی ہو سکتا ہے)۔ تفاعل

$$f(x, y) = \begin{cases} p_{ij} & x = x_i, y = y_j \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases} \tag{24.83}$$

---

[119] two-dimensional random variable
[120] two-dimensional probability distribution
[121] distribution function
[122] دھیان رہے کہ پہلی خاصیت سے یہ نہیں کہا جا سکتا ہے

$(X,Y)$ کو **تفاعل احتمال** کہتے ہیں؛ یہاں غیر تابع طور پر $i = 1,2,\cdots$ اور $j = 1,2,\cdots$ ہیں۔ مساوات 24.42 کا مماثل

$$F(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i, y_j) \tag{24.84}$$

ہے اور مساوات 24.38 کی جگہ درج ذیل شرط ہو گا۔

$$\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1 \tag{24.85}$$

مثال کے طور پر اگر ہم ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے اچھال کر

$$X = \text{ایک روپیہ کی خط کی تعداد}$$
$$Y = \text{پانچ روپیہ کی خط کی تعداد}$$

پر غور کریں تب $X$ اور $Y$ کی قیمت $0$ یا $1$ ہو سکتی ہے اور تفاعل احتمال

$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = \frac{1}{4}$ ورنہ (ان کے علاوہ) $f(x,y) = 0$ ہو گا۔

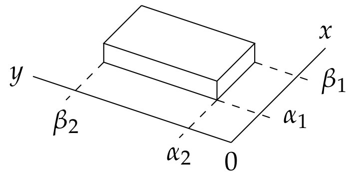
استمراری دوبعدی تقسیمیں

$(X,Y)$ اور اس کا تقسیم اس صورت استمراری کہلاتے ہیں جب مطابقتی تفاعل تقسیم کو دوہرا تکمل

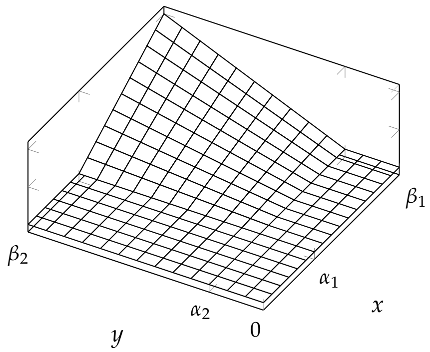
$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x^*, y^*) \, \mathrm{d}x^* \, \mathrm{d}y^* \tag{24.86}$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں $f(x,y)$ معین، غیر منفی اور پورے مستوی میں محدود ہے ماسوائے متناہی تعداد کے استمراری قابل تفرق منحنیات پر۔ $f(x,y)$ کو تقسیم کی **کثافت احتمال** کہتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{24.87}$$




شکل 24.15: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل احتمال کثافت




شکل 24.16: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل تقسیم

مثال کے طور پر (شکل 24.15)

$$f(x,y)=\frac{1}{k} \quad \text{جب } (x,y) \text{ مستطیل } R \text{ میں ہو تب} \quad f(x,y)=0 \text{ ورنہ} \tag{24.88}$$

مستطیل $R$ میں یکساں تقسیم کو ظاہر کرتا ہے؛ یہاں $k$ مستطیل کا رقبہ یعنی $k=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)$ ہے۔اس تقسیم کو شکل 24.16 میں دکھایا گیا ہے۔

## دوبعدی غیر مسلسل تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

فرض کریں کہ بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر $(X,Y)$ کا تفاعل احتمال $f(x,y)$ ہے۔اگر $X=x$ ہو، جبکہ $Y$ جس میں ہمیں دلچسپی نہیں ہے کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہو، تب تفاعل احتمال $P(X=x, Y$ (اختیاری کو $f_1(x)$ لکھا جا سکتا ہے جو $x$ کا تابع تفاعل ہے۔یوں

$$f_1(x)=P(X=x, Y \text{ اختیاری})=\sum_y f(x,y) \tag{24.89}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اس $x$ کے لئے ہم $f(x,y)$ کی تمام غیر صفر قیمتوں کا مجموعہ لیا گیا ہے۔ظاہر ہے کہ $f_1(x)$ ایک بلا منصوبہ متغیر تقسیمی احتمال کا تفاعل احتمال ہے۔اس تقسیم کو دیے گئے دو بعدی تقسیم کے لحاظ ہے

$X$ کا **حاشیہ تقسیم**[123] کہا جاتا ہے۔اس کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_1(x) = P(X \leq x, Y \text{ اختیاری}) = \sum_{x^* \leq x} f_1(x^*) \tag{24.90}$$

اسی طرح تفاعل احتمال

$$f_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y = y) = \sum_{x} f(x, y)) \tag{24.91}$$

دیے گئے دو بعدی تقسیم کا $Y$ کے لحاظ سے **حاشیہ تقسیم** تعین کرتا ہے۔مساوات 24.91 میں ہم $y$ کے مطابقتی غیر صفر $f(x, y)$ کا مجموعہ لیتے ہیں۔اس تقسیم کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y \leq y) = \sum_{y^* \leq y} f_2(y^*) \tag{24.92}$$

ظاہر ہے کہ بلا منصوبہ متغیر $(X, Y)$ کے دونوں حاشیہ تقسیم غیر مسلسل ہیں۔

جدول 24.7 میں ان کی مثال دی گئی ہے جہاں تاش کے پتوں سے تین پتے نکال کر واپس رکھے جاتے ہیں۔ملکہ کے حصول کو $X$ جبکہ بادشاہ کے حصول کو $Y$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔تاش کے کل 52 پتے ہوتے ہیں جن میں 4 ملکہ اور 4 بادشاہ کے پتے ہوتے ہیں۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ہو گا۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ یا بادشاہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{2}{13}$ ہو گا۔اس طرح اس بلا منصوبہ تجربہ کا مطابقتی تفاعل احتمال

$$f(x, y) = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!}\left(\frac{1}{13}\right)^x\left(\frac{2}{13}\right)^y\left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} \qquad (x+y \leq 3)$$

ہو گا اور ان کے علاوہ $f(x, y) = 0$ ہو گا۔جدول 24.7 میں $f(x, y)$ ، $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ دیے گئے ہیں۔

## دو بعدی استمراری تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

اسی طرح کثافت $f(x, y)$ والے استمراری متغیر $X, Y$ کے لئے ہم

$$(X \leq x, -\infty < Y < \infty) \quad \text{یا} \quad (X \leq x, Y \text{ اختیاری})$$

[123] marginal distribution

جدول 24.7: تاش سے ملکہ اور بادشاہ کا حصول

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $f_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1000}{2197}$ | $\frac{600}{2197}$ | $\frac{120}{2197}$ | $\frac{8}{2197}$ | $\frac{1728}{2197}$ |
| 1 | $\frac{300}{2197}$ | $\frac{120}{2197}$ | $\frac{12}{2197}$ | 0 | $\frac{432}{2197}$ |
| 2 | $\frac{30}{2197}$ | $\frac{6}{2197}$ | 0 | 0 | $\frac{36}{2197}$ |
| 3 | $\frac{1}{2197}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2197}$ |
| $f_2(y)$ | $\frac{1331}{2197}$ | $\frac{726}{2197}$ | $\frac{132}{2197}$ | $\frac{8}{2197}$ | |

پر غور کر سکتے ہیں جس کا مطابقتی احتمال

$$F_1(x) = P(X \le x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big( \int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y) \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x^*$$

ہو گا جس میں

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}y \tag{24.93}$$

لکھتے ہوئے

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x^*) \, \mathrm{d}x^* \tag{24.94}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $f_1(x)$ اور $F_1(x)$ کو بالترتیب دیے گئے استمراری تقسیم کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم $X$ کی کثافت اور تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔دیے گئے دو بعدی استمراری تقسیم کے لحاظ سے تفاعل

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x \tag{24.95}$$

کو حاشیہ تقسیم $Y$ کی کثافت اور

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y^*) \, \mathrm{d}y^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y^*) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y^* \tag{24.96}$$

کو حاشیہ تقسیم $Y$ کا تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ استمراری تقسیم کے دونوں حاشیہ تقسیم استمراری ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کی تابعیت اور غیر تابعیت

دو بعدی $(X, Y)$ تقسیم جس کا تفاعل تقسیم $F(x, y)$ ہو کے بلا منصوبہ متغیرات $X$ اور $Y$ اس صورت غیر تابع کہلاتے ہیں جب تمام $(x, y)$ کے لئے

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \tag{24.97}$$

ہو ورنہ انہیں تابع کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ $X$ اور $Y$ دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہوں۔تب $X$ اور $Y$ اس صورت غیر تابع ہوں گے جب ان کے مطابقتی تفاعل احتمال یا کثافتیں $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں (سوال 24.160)۔

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) \tag{24.98}$$

مثال کے طور پر جدول 24.7 میں متغیرات تابع ہیں۔ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے ایک بار اچھال کر متغیرات

$X =$ ایک روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد, $Y =$ پانچ روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد

0 یا 1 قیمت اختیار کر سکتے ہیں اور یہ متغیرات غیر تابع ہیں۔

تابعیت اور غیر تابعیت کی تصور کو $n$ بعدی تقسیم $X_1, \cdots, X_n$ جس کا تفاعل احتمال

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_! \leq x_1, \cdots X_n \leq x_n)$$

ہو کے $n$ بلا منصوبہ متغیرات تک وسعت دی جا سکتی ہے۔اگر تمام $x_1, \cdots, x_n$ کے لئے

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(n) \tag{24.99}$$

ہو جہاں $X_j$ کے حاشیہ تقسیم کا تقسیمی تفاعل $F_j(x_j)$ ہو، یعنی

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j, X_k \text{ اختیاری}, k \neq j)$$

تب یہ بلا منصوبہ متغیرات غیر تابع کہلاتے ہیں ورنہ ان متغیرات کو تابع کہتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل

فرض کریں کہ بلا منصوبہ متغیر $(X, Y)$ کا تفاعل احتمال یا کثافت $f(x, y)$ اور تقسیمی تفاعل $F(x, y)$ ہیں اور فرض کریں کہ $g(x, y)$ غیر مستقل استمراری تفاعل ہے جو تمام $(x, y)$ پر معین ہے۔تب $Z = g(X, Y)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔مثال کے طور پر ہم دو پانسہ پھینکتے ہیں۔پہلے پانسہ عدد $X$ اور دوسرا پانسہ عدد $Y$ دیتا ہے۔ عدد $Z = X + Y$ ان دونوں کا مجموعہ ہے (شکل 24.8)۔

اگر $n$ $(X_1, \cdots, X_n)$ بعدی متغیر ہو اور تمام $(x_1, \cdots, x_n)$ پر $g(x_1, \cdots, x_n)$ معین غیر مستقل استمراری تفاعل ہو تب $Z = g(X_1, \cdots, X_n)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔

غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر $(X, Y)$ کی صورت میں ان تمام $f(x, y)$ کا مجموعہ لیتے ہوئے جن کے لئے $g(x, y)$ کی قیمت زیر غور $y$ کے برابر ہو، ہم $Z = g(X, Y)$ کا تفاعل احتمال $f(z)$ حاصل کر سکتے ہیں، یعنی:

$$f(z) = P(Z = z) = \sum_{g(x,y)=z}\sum f(x, y) \tag{24.100}$$

$Z$ کا تقسیمی تفاعل

$$F(z) = P(Z \le z) = \sum_{g(x,y)\le z}\sum f(x, y) \tag{24.101}$$

ہے جہاں ہم ان $f(x, y)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے $g(x, y) \le z$ ہو۔

بلا منصوبہ استمراری متغیر $(X, Y)$ کے لئے اسی طرح

$$F(z) = P(Z \le z) = \iint_{g(x,y)\le z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{24.102}$$

ہو گا جہاں ہر $z$ کے لئے ہم $xy$ مستوی میں خطہ $g(x, y) \le z$ پر تکمل حاصل کرتے ہیں۔

### $g(X,Y)$ کی حسابی توقع۔ مجموعہ اوسط اور تغیریت

درج ذیل عدد کو $g(X,Y)$ کی **حسابی توقع**[124] یا مختصراً **توقع** کہتے ہیں۔

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y)f(x,y) & [(X,Y) \text{ غیر مسلسل}] \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & [(X,Y) \text{ استمراری}] \end{cases} \tag{24.103}$$

یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ دوہرا مجموعہ حتمی مرتکز ہے اور $xy$ مستوی پر $|g(x,y)|f(x,y)$ کا تکمل موجود ہے۔درج ذیل کلیہ کو سوال 24.99 کی طرز پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$E(ag(X,Y)+bh(X,Y)) = aE(g(X,Y)) + bE(h(X,Y)) \tag{24.104}$$

اس کے ایک مخصوص صورت $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ ہے اور الکراجی ماخوذ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

**مسئلہ 24.16: (مجموعہ اوسط)**
بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعے کی اوسط (توقع) ان کے انفرادی اوسط کا مجموعہ ہو گا، یعنی:

$$E(X_1+X_2,\cdots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) \tag{24.105}$$

مزید درج ذیل با آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

**مسئلہ 24.17: اوسطوں کا حاصل ضرب**
**غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے حاصل ضرب کی اوسط ان کے انفرادی اوسط کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا، یعنی:**

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n) \tag{24.106}$$

**ثبوت:** فرض کریں کہ $X$ اور $Y$ بلا منصوبہ متغیرات ہیں (جہاں دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہیں)۔ تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ ہو گا۔ غیر مسلسل صورت میں

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x,y) = \sum_x xf_1(x)\sum_y yf_2(y) = E(X)E(Y)$$

---

[124] mathematical expectation

لکھا جا سکتا ہے اور استمراری صورت میں بھی ثبوت اسی طرح کا ہے۔اس نتیجہ کو $n$ غیر تابع متغیرات تک وسعت دینے سے مساوات 24.106 ثابت ہوتی ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب تغیریت کے مجموعہ پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ $Z = X + Y$ ہے اور $Z$ کی اوسط $\mu$ اور تغیریت $\sigma^2$ ہے۔سوال 24.97 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma^2 = E([Z - \mu]^2) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

مساوات 24.104 سے دائیں ہاتھ پہلے جزو کو

$$E(Z^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کو مسئلہ 24.17 کی مدد سے

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔انہیں $\sigma^2$ کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]\end{aligned}$$

سوال 24.97 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ پہلی لکیر پر دیا گیا تعلق $X$ اور $Y$ کی تغیریت کا مجموعہ ہے جنہیں ہم بالترتیب $\sigma_1^2$ اور $\sigma_2^2$ سے ظاہر کرتے ہیں۔دوسری لکیر پر مقدار

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{24.107}$$

کو $X$ اور $Y$ کی باہمی تغیریت[125] کہتے ہیں۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY} \tag{24.108}$$

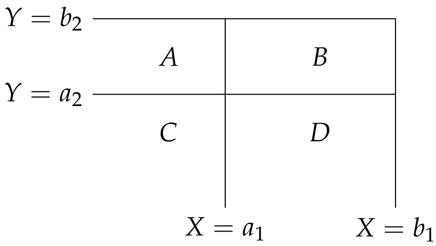
اگر $X$ اور $Y$ غیر تابع ہوں تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ لہٰذا $\sigma_{XY} = 0$ اور

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{24.109}$$

ہو گا۔دو سے زائد متغیرات تک وسعت دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

**مسئلہ 24.18:** **(تغیرات کا مجموعہ)**
**غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعہ کی تغیریت ان متغیرات کے انفرادی تغیریت کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔**

covariance[125]




شکل 24.17: شکل برائے سوال 24.145

## سوالات

سوال 24.145: مساوات 24.82 کو ثابت کریں۔

جواب: شکل 24.17 میں $(X,Y)$ احتمال $F(b_1,b_2)$ کے ساتھ $A$ ، $B$ ، $C$ یا $D$ سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1,b_2)$ کے ساتھ $A$ یا $C$ سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(b_1,a_2)$ کے ساتھ $C$ یا $D$ سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1,a_2)$ کے ساتھ $C$ سے قیمت اختیار کر سکتا ہے لہٰذا $B$ سے قیمت حاصل کرنے کا احتمال مساوات 24.82 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

سوال 24.146: شکل 24.15 اور شکل 24.16 میں دیے تقسیم کے حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔

سوال 24.147: فرض کریں کہ $8 \le x \le 12$ اور $0 \le y \le 2$ میں $f(x,y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ۔ $k$ ، $P(X \le 11, 1 \le Y \le 1.5)$ اور $P(9 \le X \le 12, Y \le 1)$ تلاش کریں۔

جواب: $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{8}$

سوال 24.148: ایک کاغذ کی اوسط کمیت $10\,\text{g}$ اور معیاری انحراف $0.05\,\text{g}$ ہے۔ ایسی $10\,000$ کاغذوں کی ڈھیر کی اوسط کمیت اور تغیریت کیا ہو گی؟

سوال 24.149: فرض کریں کہ $x > 0$ ، $y > 0$ اور $x + y < 3$ میں $f(x,y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ $k$ تلاش کریں۔ $f(x,y)$ ترسیم کریں۔ $P(X + Y \le 1)$ اور $P(Y > X)$ تلاش کریں۔

جواب: $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}$

سوال 24.150: ایک خالی ڈبے کی اوسط $2\,\mathrm{kg}$ اور معیاری انحراف $0.1\,\mathrm{kg}$ ہے۔اس ڈبے میں مال کی اوسط $75\,\mathrm{kg}$ اور تغیریت $0.8\,\mathrm{kg}$ ہے۔ بھرے ڈبے کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.151: خطہ $0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1$ میں بلا منصوبہ متغیرات کی کثافتیں $f(x,y) = x + y$ اور $g(x,y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$ ہیں۔دکھائیں کہ ان کی حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہیں۔

سوال 24.152: ایسی دو مختلف غیر مسلسل تقسیم کی مثال دیں جن کے حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہوں۔

سوال 24.153: چار گراریوں کو یوں یکجا کیا جاتا ہے کہ ان کے بیچ فاصلہ رہے۔ گراریوں کے بیچ باریک چادر کی ٹکیا رکھ کر فاصل پیدا کیا جاتا ہے۔ گراری کی موٹائی کی اوسط $5.020\,\mathrm{cm}$ اور معیاری انحراف $0.003\,\mathrm{cm}$ ہے جبکہ ٹکیا کی موٹائی کی اوسط $0.040\,\mathrm{cm}$ اور معیاری انحراف $0.002\,\mathrm{cm}$ ہے۔بلا منصوبہ 4 گراریوں اور 3 ٹکیوں سے بنائی گئی پوری گراری کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے۔
جواب: تقریباً $20.200, 0.007$

سوال 24.154: لوہے کی چادروں اور کاغذ کو تہہ در تہہ رکھ کر ٹرانسفارمر کا قالب بنایا جاتا ہے۔اگر لوہے کی چادر کی موٹائی کی اوسط $0.5\,\mathrm{mm}$ اور معیاری انحراف $0.05\,\mathrm{mm}$ ہو اور کاغذ کی موٹائی کی اوسط $0.05\,\mathrm{mm}$ اور معیاری انحراف $0.02\,\mathrm{mm}$ ہو تب 50 لوہے کی چادروں اور 49 کاغذوں سے بنائے گئے قالب کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.155: خطہ $x^2 + y^2 < 1$ میں $(X, Y)$ کی کثافت $f(x,y) = k$ ہے جبکہ اس خطہ کے باہر کثافت صفر ہے۔ $k$ تلاش کریں۔حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔احتمال $P(X^2 + Y^2 < \frac{1}{2})$ تلاش کریں۔
جواب: $k = \frac{1}{\pi}; f_1(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}, f_2(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}, 50\,\%$

سوال 24.156: ایک پنیا اور سوراخ کے قطر بالترتیب $X$ سنٹی میٹر اور $Y$ سنٹی میٹر ہیں۔فرض کریں کہ $(X, Y)$ کی کثافت

$$\text{اگر}\quad 0.99 < x < 1.01, 1.00 < y < 1.02 \quad \text{ہو تب} \quad f(x,y) = 2500$$

ہے ورنہ $f = 0$ ہے۔ حاشیہ تقسیمیں حاصل کریں۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ منتخب کردہ پنیا 1.00 سنٹی میٹر کی سوراخ میں ٹھیک بیٹھے گا؟

سوال 24.157: خطہ $x \geq 0, y \geq 0$ میں $(X, Y)$ کی کثافت $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ ہے جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ $P(X > Y)$ تلاش کریں۔
جواب: 50 %

سوال 24.158: سوال 24.157 میں حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔

سوال 24.159: ایک برقیاتی آلہ میں دو برقیاتی پرزے پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ پہلا پرزہ $X$ مہینوں تک اور دوسرا پرزہ $Y$ مہینوں تک کام کر سکتا ہے۔فرض کریں کہ $(X, Y)$ کی احتمال کثافت

$$f(x, y) = 0.01e^{-0.1(x+y)} \qquad x > 0, y > 0$$

جبکہ اس کے علاوہ $f = 0$ ہے۔ (الف) کیا $X$ اور $Y$ تابع ہیں؟ (ب) حاشیہ تقسیم کی کثافت تلاش کریں۔ (پ) پہلے پرزے کی زندگی 10 مہینے یا اس سے زیادہ ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟
جواب: غیر تابع، $f_1(x) = 0.1e^{-0.1x}, x > 0; f_2(y) = 0.1e^{-0.1y}, y > 0; 36.8\,\%$ ہے

سوال 24.160: مساوات 24.98 سے منسلک فقرہ ثابت کریں۔

سوال 24.161: فرض کریں کہ $(X, Y)$ کا تفاعل احتمال $f(0,0) = f(1,1) = \frac{1}{8}$ ، $f(0,1) = f(1,0) = \frac{3}{8}$ ہے۔کیا $X$ اور $Y$ غیر تابع ہیں؟
جواب: جی نہیں

سوال 24.162: مسئلہ 24.16 کو استعمال کرتے ہوئے ثنائی تقسیم کی اوسط $\mu$ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 24.163: مسئلہ 24.18 کی مدد سے ثنائی تقسیم کی تغیریت $\sigma^2$ کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 24.164: مسئلہ 24.16 کی مدد سے بیش ہندسی تقسیم کی اوسط کا کلیہ حاصل کریں۔کیا مسئلہ 24.18 کی مدد سے اس تقسیم کی تغیریت کا کلیہ حاصل کیا جا سکتا ہے؟

## 24.12 بلا منصوبہ نمونہ بندی۔ بلا منصوبہ اعداد

حصہ 24.3 تا حصہ 24.11 میں نظریہ احتمال پر غور کیا گیا۔اس باب کے باقی حصوں میں شماریات پر غور کیا جائے گا۔آبادی کے حسابی نمونے بنانے میں نظریہ شماریات مدد دیتا ہے۔شماریاتی تراکیب، جن پر غور کیا جائے گا، نظریہ اور حقیقی مشاہدوں کے مابین تعلقات پیش کرتے ہیں۔یوں نمونہ بندی کے ذریعہ آبادی کے بارے میں نتائج حاصل کیے جا سکتے ہیں (شماریاتی رائے زنی؛ حصہ 24.1)۔

اب تک اتنا جاننا کافی تھا کہ آبادی کے نمونہ سے مراد آبادی سے اشیاء کا انتخاب ہے (حصہ 24.1 میں مثالیں) لیکن اب ہمیں اس تصور کی تعریف باریک بینی سے دینی ہو گی۔حقیقتاً کسی بھی آبادی سے نمونہ بندی کے ذریعہ معنی خیز نتائج حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ نمونہ **بلا منصوبہ انتخاب**[126] ہو، یعنی آبادی میں ہر چیز کا منتخب ہو کر نمونے میں شامل ہونے کے احتمال کی قیمت معلوم ہو۔یہ شرط ہر صورت (کم از کم تخمینی طور پر) پوری کرنا لازم ہے ورنہ حاصل نتائج مکمل طور پر بے معنی اور غلط ہو سکتے ہیں۔

لامتناہی نمونی فضا کی صورت میں نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی، یعنی، کسی بلا منصوبہ تجربہ کو $n$ مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے حاصل $n$ بلا منصوبہ نمونی قیمتیں ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوں گی۔ عمومی آبادی سے حاصل نمونوں کے لئے یہ یقینی طور پر درست ہے۔متناہی نمونی فضا کی صورت میں اگر ہم واپس رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی؛ اگر ہم واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب، آبادی کی جسامت کے لحاظ سے نمونے کی جسامت چھوٹی رکھتے ہوئے (مثلاً 1000 کی آبادی سے 5 یا 10 کا نمونہ لیتے ہوئے)، حاصل نمونی قیمتیں عملاً غیر تابع ہوں گی۔ اس کے برعکس اگر ہم بغیر واپس رکھتے ہوئے متناہی آبادی سے بڑے نمونے لیں تب تابعیت کا بہت زیادہ اثر پایا جائے گا۔

بلا منصوبہ انتخاب کی شرط پر پورا اترنا آسان نہیں ہے۔ کئی وجوہات نمونہ بندی کے عمل پر اثر انداز ہو سکتی ہیں۔مثال کے طور پر اگر ایک خریدار نے 80 کی ڈھیر سے 10 کا انتخاب کر کے ڈھیر خریدنے یا نہ خریدنے کا فیصلہ کرنا ہو تب وہ طبعی طور پر ان 10 چیزوں کا انتخاب کس طرح کرے گا کہ $\binom{80}{10}$ ممکنات میں سے ہر ایک کے منتخب ہونے کا احتمال ایک جیسا ہو؟

اس مسئلے کی حل کے لئے مختلف تراکیب تشکیل دی گئی ہیں۔ہم اب ایک ایسے طریقہ کار پر غور کرتے ہیں جس کو عموماً استعمال کیا جاتا ہے۔

---

[126] random selection

ہم اس ڈھیر کے اجزاء کو 1 تا 80 کے شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔اس کے بعد ہم ضمیمہ ج میں بلا منصوبہ اعداد کی جدول استعمال کرتے ہوئے 10 اجزاء چنتے ہیں۔بلا منصوبہ اعداد کے جدول کو ہم یوں استعمال کرتے ہیں کہ ہم پہلے 0 سے 99 کوئی صف بلا منصوبہ منتخب کرتے ہیں۔بلا منصوبہ صف منتخب کرنے کی خاطر ہم ایک سکہ کو 7 مرتبہ اچھال کر 7 ثنائی ہندسوں پر مبنی عدد حاصل کرتے ہیں جس میں خط کو 1 اور شیر کو 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یہ ثنائی عدد 0 تا 127 کو ظاہر کر سکتا ہے۔ 99 سے بڑا عدد حاصل ہونے کی صورت میں عدد کو رد کرتے ہوئے سکہ دوبارہ 7 مرتبہ اچھالا جاتا ہے حتیٰ کہ ہمیں 0 تا 99 کوئی عدد حاصل ہو جو صف دے گا۔اس کے بعد اسی طرح ہم بلا منصوبہ 0 تا 9 قطار منتخب کرتے ہیں۔بلا منصوبہ قطار منتخب کرنے کی خاطر سکہ 4 مرتبہ اچھال کر 4 ثنائی ہندسوں کا عدد حاصل کیا جاتا ہے۔فرض کریں کہ صف کے لئے $0011010 \, (= 26)$ اور قطار کے لئے $0111 \, (= 7)$ حاصل ہو تب جدول کے 26 ویں صف اور 7 ویں قطار سے 44973 حاصل کرتے ہوئے اس کے پہلے دو ہندسوں پر مبنی عدد 44 لیا جاتا ہے جبکہ باقی ہندسوں کو رد کیا جاتا ہے۔اسی قطر میں نیچے چلتے ہوئے اعداد کے پہلے دو ہندسے لیتے ہوئے درج ذیل اعداد حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$44 \quad 44 \quad 83 \quad 91 \quad 55 \quad \cdots$$

ہم 80 سے بڑے اعداد رد کرتے ہیں اور کسی بھی عدد کو ایک سے زیادہ مرتبہ شامل نہیں کرتے ہیں۔یوں درکار بلا منصوبہ اعداد کا درج ذیل سلسلہ حاصل ہوتا ہے جس کے تحت اجزاء کو منتخب کیا جائے گا۔

$$44 \quad 55 \quad 53 \quad 03 \quad 52 \quad 61 \quad 67 \quad 78 \quad 39 \quad 54$$

زیادہ اجزاء کے نمونہ کے لئے یہ طریقہ کار موزوں نہیں ہے۔ اسی لئے ایسے اعداد جن کی خاصیت بلا منصوبہ اعداد کی طرح ہو، پیدا کرنے کے کئی طریقے بنائے گئے ہیں جنہیں کمپیوٹر کی زبان میں **پیدا کار بلا منصوبہ اعداد**[127] کہتے ہیں۔

### سوالات

سوال 24.165: فرض کریں کہ مذکورہ بالا مثال میں ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول کے صف 83 اور قطار 2 سے شروع کرتے ہوئے اوپر رخ چلیں۔تب کون سے اجزاء نمونہ میں شامل کیے جائیں گے؟
جواب: $38, 69, 02, 49, 23, 52, 73, 29, 09, 05$

[127] random number generator

سوال 24.166: ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول استعمال کرتے ہوئے 250 کی ڈھیر سے 20 اجزاء بلا منصوبہ منتخب کریں۔

سوال 24.167: منصفانہ پانسہ کو بلا منصوبہ انتخاب کے لئے کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے؟

سوال 24.168: ایک بلا منصوبہ متغیر $Y$ پر غور کریں جس کی خطہ $0 < y < 1$ میں کثافت یکساں $f(y) = 1$ جبکہ خطہ سے باہر $f = 0$ ہے۔ہم بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے باآسانی $Y$ (یعنی $Y$ کی قیمتوں) کا نقل اتار[128] سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر 2 اعشاریہ تک کے 20 قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کے جدول کے کسی بھی (بلا منصوبہ) قطار اور صف سے شروع کرتے ہوئے نیچے چلتے ہوئے، پانچ ہندسوں پر مشتمل دیے اعداد کے صرف پہلے دو ہندسوں کو لیتے ہوئے ان کے بائیں جانب اعشاریہ پر کرتے ہوئے اعداد حاصل کر سکتے ہیں۔ہم ایک سے زیادہ مرتبہ آنے والے اعداد کو بھی شامل کرتے ہیں۔فرض کریں ہم صف 36 اور قطار 3 سے شروع کرتے ہیں۔دکھائیں کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔ان کا تعددی نقطہ ترسیم کھینچیں۔

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.89 | 0.40 | 0.67 | 0.86 | 0.87 | 0.86 | 0.06 | 0.20 | 0.38 | 0.12 |
| 0.68 | 0.50 | 0.53 | 0.10 | 0.08 | 0.90 | 0.19 | 0.85 | 0.53 | 0.98 |

سوال 24.169: بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے کسی بھی بلا منصوبہ استمراری متغیر $X$ کی نقل اتاری جا سکتی ہے۔ایسا کرنے کی خاطر ہم $X$ کی تفاعل تقسیم کو ترسیم کرتے ہیں۔ سوال 24.168 کی طرز پر بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے متغیر $Y$ کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے انہیں $y$ محدد پر ترسیم کریں اور ان کے مطابقتی $X$ قیمتیں پڑھیں۔سوال 24.168 کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے عمومی بلا منصوبہ متغیر $X$ ، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو، کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کریں۔جماعتی نشان $-2$ ، $-1$ ، 0 ، 1 اور 2 لیتے ہوئے $x$ کی ان 20 نمونی قیمتوں کا مستطیلی ترسیم کھینچیں۔
جواب: جماعتی تعدد 1 ، 5 ، 7 ، 6 ، 1 ہیں۔

سوال 24.170: سوال 24.169 کا طریقہ کار غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔اگر دو منصفانہ پانسہ پھینک کر حاصل اعداد کا مجموعہ $X$ ہو تب اس طریقہ کو کس طرح استعمال کیا جائے گا؟

---
simulation[128]

## 24.13 مقدار معلوم کا اندازہ لگانا

تقسیمات میں پائی جانے والے مقدار مثلاً ثنائی تقسیم میں $p$ ، عمومی تقسیم میں $\mu$ اور $\sigma$ ، کو **مقدار معلوم**[129] کہتے ہیں۔

ایک نقطہ پر مقدار معلوم کی اندازاً قیمت (**نقطی اندازہ**[130] ) ایک عدد (حقیقی محور پر نقطہ) ہو گا جس کو دیے گئے نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے جو مقدار معلوم کی اصل قیمت کی تخمین ہو گی۔ **وقفہ اندازہ**[131] (یعنی وقفہ اعتماد[132] )، جس پر اگلے حصے میں بحث کی جائے گی، کو نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مقدار معلوم کی قیمت کا اندازہ لگانا ایک اہم مسئلہ ہے۔

آبادی کی اوسط $\mu$ کا اندازہ لگانے کی خاطر ہم نمونے کی اوسط $\overline{x}$ لے سکتے ہیں جس سے ہمیں $\mu$ کا اندازہ $\widehat{\mu} = \overline{x}$ حاصل ہوتا ہے، یعنی

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{24.110}$$

جہاں نمونہ کی جسامت $n$ ہے۔ اسی طرح آبادی کی تغیریت کا اندازہ $\widehat{\sigma^2}$ در حقیقت مطابقتی نمونے کی تغیریت $s^2$ ہو گی، یعنی:

$$\widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 \tag{24.111}$$

ظاہر ہے کہ مساوات 24.110 اور مساوات 24.111 ان تقسیمات کی مقدار معلوم کی اندازاً قیمت دیتے ہیں جن میں $\mu$ اور $\sigma^2$ صریحاً پائے جاتے ہیں؛ عمومی تقسیم اور پوئسن تقسیم ایسی تقسیمات ہیں۔ ثنائی تقسیم میں $p = \frac{\mu}{n}$ (مساوات 24.60) ہے۔ اس صورت میں اگر $j$ ویں کوشش میں وقوعہ $A$ جس کا احتمال $p$ ہے واقع ہو تب $x_j = 1$ ہو گا اور اگر اس کوشش میں $A$ واقع نہ ہو تب $x_j = 0$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 24.110 سے $p$ کا اندازہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\widehat{p} = \frac{\overline{x}}{n} \tag{24.112}$$

---

parameters[129]
point estimate[130]
interval estimate[131]
confidence interval[132]

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 24.110 **ترکیب معیار اثر**[133] کی ایک مخصوص صورت ہے۔اس ترکیب میں جس مقدار معلوم کی اندازاً قیمت درکار ہو، اس کو تقسیم کی معیار اثر کی صورت میں لکھا جاتا ہے (حصہ 24.8)۔حاصل کلیات میں ان معیار اثر کی جگہ نمونہ سے حاصل مطابقتی معیار اثر پر کرتے ہوئے درکار اندازے حاصل کیے جاتے ہیں۔یہاں نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کا $k$ واں معیار اثر درج ذیل ہے۔

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^k$$

اندازے حاصل کرنے کی دوسری ترکیب کو **زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب**[134] کہتے ہیں۔اس ترکیب کو سمجھنے کی خاطر ہم غیر مسلسل (یا استمراری) بلا منصوبہ متغیر $X$ پر غور کرتے ہیں جس کا تفاعل احتمال واحد متغیر $\theta$ پر منحصر ہے۔ ہم $n$ غیر تابع قیمتوں $x_1, \cdots, x_n$ کا نمونہ لیتے ہیں۔تب غیر مسلسل صورت میں $n$ جسامت کے نمونہ میں بالکل یہی قیمتیں حاصل ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$l = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \tag{24.113}$$

استمراری صورت میں، چھوٹے چھوٹے وقفوں $x_i \le x \le x_i + \Delta x \; (i = 1, 2, \cdots, n)$ میں قیمتیں حاصل کرنے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$f(x_1) \Delta x f(x_2) \Delta x \cdots f(x_n) \Delta x = l (\Delta x)^n \tag{24.114}$$

چونکہ $f(x_i)$ متغیر $\theta$ کا تابع ہے لہٰذا تفاعل $l$ متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ اور $\theta$ کا تابع ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں $x_1, \cdots, 2.0_n$ دیے گئے ہیں اور یہ مقررہ قیمتیں ہیں۔تب $l$ متغیر $\theta$ کا تابع ہو گا جس کو **تفاعل امکان**[135] کہتے ہیں۔ زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب کا بنیادی تصور بہت سادہ ہے۔ہم نا معلوم قیمت $\theta$ کے لئے وہ تخمین چنتے ہیں جس سے $l$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہو۔اگر تفاعل $l$ متغیر $\theta$ کا قابل تفرق تفاعل ہو تب (سرحد سے ہٹ کر) $l$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے درج ذیل لازمی شرط ہے۔

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \tag{24.115}$$

(ہم یہاں جزوی تفرق لکھتے ہیں چونکہ $l$ متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ کا بھی تابع ہے۔) مساوات 24.115 کا حل جو $x_1, \cdots, x_n$ کا تابع ہے $\theta$ کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کہلاتا ہے۔چونکہ $f(x) \ge 0$ اور $f(x)$

---

[133] method of moments
[134] maximum likelihood method
[135] likelihood function

کی زیادہ سے زیادہ قیمت عموماً مثبت ہوتی ہے اور $\ln l$ یک سر بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا مساوات 24.115 کی جگہ درج ذیل بھی استعمال کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0 \tag{24.116}$$

جس سے عموماً حساب میں آسانی پیدا ہوتی ہے۔

اگر $X$ کی تقسیم میں $r$ مقدار معلوم $\theta_1, \cdots, \theta_r$ پائے جاتے ہوں تب مساوات 24.115 کی جگہ $r$ لازمی شرائط $\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0, \cdots, \frac{\partial l}{\partial \theta_r} = 0$ ہوں گے اور مساوات 24.116 کی جگہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0 \tag{24.117}$$

مثال 24.17: **عمومی تقسیم**

عمومی تقسیم کی صورت میں $\mu$ اور $\sigma$ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

حل: مساوات 24.68 اور مساوات 24.113 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-h} \qquad h = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

دونوں ہاتھ لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$\ln l = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - h$$

مساوات 24.117 میں پہلی شرط $\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = 0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = -\frac{\partial h}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \qquad \implies \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

جس کا حل $\mu$ کا درکار اندازہ $\widehat{\mu}$ ہے، یعنی:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

مساوات 24.117 میں دوسری شرط $\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = 0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

$\mu$ کی جگہ $\widehat{\mu}$ پر کرتے ہوئے $\sigma^2$ کے لئے حل کر کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\overline{x})^2$$

دھیان رہے کہ یہ نتیجہ مساوات 24.111 سے مختلف ہے۔ہم اندازوں کی عمدگی کی قواعد پر بحث نہیں کر سکتے ہیں لیکن اتنا جاننا ضروری ہے کہ چھوٹی $n$ کے لئے مساوات 24.111 بہتر نتائج دیتی ہے۔ $\square$

## سوالات

سوال 24.171: $x \geq 0$ کے لئے کثافت $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ اور $x < 0$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ $\theta$ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{\theta} = \frac{n}{\sum x_j} = \frac{1}{\overline{x}}$

سوال 24.172: سوال 24.171 میں اوسط $\mu$ تلاش کر کے $f(x)$ میں پر کریں۔ $\mu$ کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ وہی ہے جو سوال 24.171 کے $\theta$ کے اندازے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.173: معلوم تغیریت $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کی عمومی تقسیم کے $\mu$ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{\mu} = \overline{x}$

سوال 24.174: $\mu = 0$ کی صورت میں عمومی تقسیم پر زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازے کی ترکیب لاگو کریں۔

سوال 24.175: **(پوئسن تقسیم)** زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازہ کی ترکیب کا اطلاق تقسیم پوئسن پر کریں۔
جواب: $\widehat{\mu} = \overline{x}$

سوال 24.176: **(یکساں تقسیم)** حصہ 24.8 میں دیے گئے یکساں تقسیم کی صورت میں دکھائیں کہ مقدار معلوم $a$ اور $b$ کو زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے پہلی جزوی تفرق کو صفر کے برابر پر نہیں کیا جا سکتا ہے۔اس صورت میں زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کس طرح لگایا جا سکتا ہے؟

سوال 24.177: **(ثنائی تقسیم)** $p$ کے لئے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $n$ کوششوں میں کامیابی کی تعداد $l = p^k(1-p)^{n-k}, \widehat{p} = \frac{k}{n}, k =$

سوال 24.178: وقوعہ $A$ واقع ہونے تک کوششوں کی تعداد $X$ ہے۔دکھائیں کہ $X$ کا تفاعل احتمال $f(x) = pq^{x-1}, x = 1, 2, \cdots$ ہے جہاں واحد کوشش میں $A$ واقع ہونے کا احتمال $p$ ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ $X$ کی واحد قیمت $x$ کے مشاہدے میں $p$ کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

سوال 24.179: سوال 24.178 میں نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے $p$ کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$

سوال 24.180: سوال 24.177 کو وسعت دیتے ہیں۔فرض کریں کہ $n$ کوششوں کو $m$ مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔پہلی $n$ کوششوں میں $A$ واقع ہونے کی تعداد $k_1$ ہے، دوسری $n$ کوششوں میں $A$ واقع ہونے کی تعداد $k_2$ ہے، $\cdots$، $m$ ویں $n$ کوششوں میں $A$ واقع ہونے کی تعداد $k_m$ ہے۔ان معلومات سے $p$ کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

## 24.14 وقفہ اعتماد

گزشتہ حصہ میں مقدار معلوم کی نقطی اندازہ پر غور کیا گیا۔اب ہم وقفی اندازہ[136] پر غور کریں گے۔

حسابی تخمینی کلیات استعمال کرتے ہوئے ضروری ہے کہ ہم جاننے کی کوشش کریں کہ تخمینی قیمت اور اصل درست قیمت میں کتنا فرق ہے۔مثال کے طور پر اعدادی تکملی تراکیب میں زیادہ سے زیادہ خلل کے کلیات پائے جاتے ہیں جس سے ہم جان سکتے ہیں کہ تخمینی قیمت اور اصل قیمت میں کتنا فرق پایا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ ہم کسی تکمل کا اعدادی تخمینی قیمت 2.47 اور اصل قیمت سے زیادہ سے زیادہ ممکنہ خلل $\mp 0.02$ حاصل کریں۔تب ہم پوری یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تکمل کی اصل قیمت $2.45 = 2.47 - 0.02$ تا $2.49 = 2.47 + 0.02$

[136] interval estimate

قیمتوں میں شامل ہے، یعنی اصل قیمت $2.47 - 0.02 = 2.45$ یا اس سے زیادہ اور $2.47 + 0.02 = 2.49$ یا اس سے کم ہو گی۔

مقدار معلوم $\theta$ کا اندازہ لگاتے ہوئے ہم نمونی قیمتوں پر منحصر ایسے دو مقدار جاننا چاہیں گے جن میں یقینی طور پر اصل قیمت شامل ہو۔البتہ ہم جانتے ہیں کہ نمونی قیمتوں سے $100\,\%$ درست نتائج حاصل کرنا ممکن نہیں ہے۔یوں حقیقت پسندی سے کام لیتے ہوئے ہم اس مسئلے کو درج ذیل بیان کرتے ہیں۔

احتمال $\gamma$ کی قیمت کو $1$ کے قریب منتخب کریں (مثلاً، $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ ، وغیرہ)۔اس کے بعد ایسے دو مقدار $\Theta_1$ اور $\Theta_2$ منتخب کریں جن میں مقدار معلوم $\theta$ کی اصل قیمت کے شامل ہونے کا احتمال $\gamma$ ہو۔

ہم سو فی صد یقین کے ساتھ جاننے کی "نا ممکن شرط" کی بجائے تقریباً $1$ احتمال کی "ممکن شرط" پیش کرتے ہیں۔

دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے ان دو مقداروں کی قیمتوں کا حساب لگایا جائے گا۔ان $n$ قیمتوں کو مشاہدے سے حاصل $n$ بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ کی قیمتیں تصور کریں۔تب $\Theta_1$ اور $\Theta_2$ ان بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل ہوں گے اور یوں خود بھی بلا منصوبہ متغیرات ہوں گے۔اس طرح ہماری شرط درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$P(\Theta_1 \le \theta \le \Theta_2) = \gamma$$

اگر ہمیں تفاعل $\Theta_1$ اور $\Theta_2$ معلوم ہوں، تب دیے گئے نمونہ سے ہم $\Theta_1$ کی اعدادی قیمت $\theta_1$ اور $\Theta_2$ کی اعدادی قیمت $\theta_2$ کا حساب لگا سکتے ہیں۔وہ وقفہ جس کے سر $\theta_1$ اور $\theta_2$ ہوں، نا معلوم مقدار معلوم $\theta$ کا **وقفہ اعتماد**[137] یا وقفی اندازہ[138] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\text{اعتماد}\{\theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

$\theta_1$ کو $\theta$ کی **نچلی حد اعتماد**[139] اور $\theta_2$ کو اس کی **بالائی حد اعتماد**[140] کہتے ہیں۔عدد $\gamma$ کو **سطح اعتماد**[141] کہتے ہیں۔ ہم عموماً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ اور کبھی کبھار $\gamma = 99.9\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔

---

[137] confidence interval
[138] interval estimate
[139] lower confidence limit
[140] upper confidence limit
[141] confidence level

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک نمونہ حاصل کر کے مطابقتی وقفہ اعتماد تعین کرنا چاہیں، تب مقدار معلوم کی اصل قیمت شامل کرنے والے وقفہ کے حصول کا احتمال $\gamma$ ہو گا۔

مثال کے طور پر اگر ہم $\gamma = 95\,\%$ منتخب کریں، تب ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $95\,\%$ نمونے جو ہم حاصل کریں ایسے اعتمادی وقفے دیں گے جن میں $\theta$ کی قیمت شامل ہو گی اور باقی $5\,\%$ میں ایسا نہیں ہو گا۔یوں 20 میں سے تقریباً 19 صورتوں میں یہ فقرہ کہ "اعتمادی وقفہ میں $\theta$ شامل ہے" درست ہو گا جبکہ باقی صورتوں میں یہ فقرہ غلط ہو گا۔

$\gamma = 95\,\%$ کی بجائے $\gamma = 99\,\%$ منتخب کرنے سے ہم توقع کریں گے کہ 100 میں سے 99 صورتوں میں یہ فقرہ درست ہو گا۔البتہ ہم دیکھیں گے کہ $\gamma = 99\,\%$ کے مطابقتی وقفے $\gamma = 95\,\%$ کے مطابقتی وقفوں سے لمبے ہوں گے۔ $\gamma$ بڑھانے کا یہ ایک نقصان ہے۔

کسی حقیقی صورت میں $\gamma$ کی کیا قیمت منتخب کرنی چاہیے؟ یہ محض حسابی دلچسپی کی بات نہیں ہے بلکہ عملی استعمال میں، غلط قیمت منتخب کرنے کی صورت میں نقصان کو مد نظر رکھتے ہوئے، اس کا جواب ہمیں ہر صورت دینا ہو گا۔

صاف ظاہر ہے کہ موجودہ ترکیب اور آنے والے دیگر تراکیب میں غیر یقینی صورت حال کی وجہ نمونہ بندی کا طریقہ کار ہے۔یوں ماہر شماریات کو اپنی غلطیوں کے بارے میں جواب دینے کے لئے تیار ہونا چاہیے۔تاہم کسی بھی روزگار میں ایسا ہی ہو گا مثلاً قاضی اور ساہو کار بھی امکان کے قواعد سے نہیں بچ پاتے۔ ماہر شماریات غلطی کرنے کا احتمال تو جانتا ہے جبکہ قاضی اور ساہو کار کو یہ سہولت میسر نہیں ہے۔

### اعتمادی وقفے برائے عمومی تقسیم کے $\mu$ اور $\sigma^2$

ہم اب عمومی تقسیم کی اوسط $\mu$ (جدول 24.8، جدول 24.9) اور تغیریت $\sigma^2$ (جدول 24.10) کے اعتمادی وقفے حاصل کرنا سیکھتے ہیں جس کا مطابقتی نظریہ اس حصے کے آخر میں پیش کیا جائے گا۔

**مثال 24.18: معلوم تغیریت کی صورت میں عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد**

$n = 100$ کا نمونہ جس کی اوسط $\overline{x} = 5$ ہو استعمال کرتے ہوئے تغیریت $\sigma^2 = 9$ والی عمومی تقسیم کے لئے $95\,\%$ وقفہ اعتماد تعین کریں۔

جدول 24.8: معلوم تغیریت $\sigma^2$ والی عمومی تقسیم کے اوسط $\mu$ کے وقفہ اعتماد کا تعین

**پہلا قدم:** وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔

**دوسرا قدم:** مطابقتی $c$ تلاش کریں۔

| $\gamma$ | 0.90 | 0.95 | 0.99 | 0.999 |
|---|---|---|---|---|
| $c$ | 1.645 | 1.960 | 2.576 | 3.291 |

**تیسرا قدم:** نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے اوسط $\overline{x}$ حاصل کریں۔

**چوتھا قدم:** $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ $\mu$ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{\overline{x} - k \le \mu \le \overline{x} + k\} \tag{24.118}$$

حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔

**دوسرا قدم:** اس کا مطابقتی $c = 1.960$ ہے۔

**تیسرا قدم:** $\overline{x} = 5$ دیا گیا ہے۔

**چوتھا قدم:** ہمیں $k = \frac{1.960 \cdot 3}{\sqrt{100}} = 0.588$ درکار ہے لہٰذا $\overline{x} - k = 4.412$ ، $\overline{x} + k = 5.588$ ہو گا جن سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{4.412 \le \mu \le 5.588\}$$

□

**مثال 24.19: مخصوص لمبائی کا اعتمادی وقفہ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت**

گزشتہ مثال میں $95\,\%$ اعتمادی وقفہ جس کی لمبائی $L = 0.4$ ہو حاصل کرنے کے لئے $n$ کتنا ہو گا؟

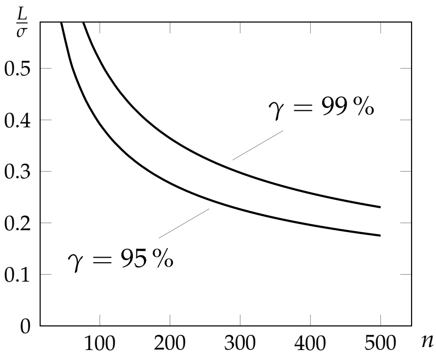
حل: وقفے کی لمبائی مساوات 24.118 کے تحت $L = 2k = \frac{2c\sigma}{\sqrt{n}}$ ہے جس کو $n$ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$n = \left(\frac{2c\sigma}{L}\right)^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں $n = (\frac{2 \cdot 1.960 \cdot 3}{0.4})^2 \approx 870$ ہے۔

شکل 24.18 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ اعتماد کی لمبائی $L$ جتنی کم ہو، نمونے کی جسامت $n$ اتنی زیادہ منتخب کرنی ہو گی۔

□




شکل 24.18: وقفہ اعتماد کی لمبائی بالمقابل نمونی جسامت $n$

نا معلوم تغیریت $\sigma^2$ والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد تعین کرنا جدول 24.9 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ تقریباً جدول 24.8 کی طرح ہے ماسوائے $k$ کی قیمتوں کے۔ مزید $c$ کی قیمت $n$ پر منحصر ہے اور اس اس کو ضمیمہ ج میں $t$ تقسیم کے تفاعل کی جدول 6.ج سے حاصل کرنا لازمی ہے جہاں $t$ تقسیم[142] کے تفاعل

$$F(z) = K_m \int_{-\infty}^{z} \left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} \mathrm{d}u$$

کی قیمتوں کے مطابقتی $z$ قیمتیں دی گئی ہیں۔ یہاں $K_m = \Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2})/[\sqrt{m\pi}\Gamma(\frac{1}{2}m)]$ ایک مستقل ہے اور $\Gamma(\alpha)$ گیما تفاعل (ضمیمہ ب مساوات 22.ب) ہے۔ $m\ (1, 2, \cdots)$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی درجہ آزادی کی تعداد[143] کہتے ہیں۔

**مثال 24.20: نا معلوم تغیریت والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد**

جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے لئے اوسط $\mu$ کا 99 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔ فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے۔ (اس مفروضے کا جواز بعد میں دیا جائے گا۔)

حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.99$ درکار ہے۔

**دوسرا قدم:** چونکہ $n = 100$ ہے لہٰذا $c = 2.63$ حاصل ہوتا ہے۔

**تیسرا قدم:** حساب سے $\bar{x} = 364.70$ اور $s = \sqrt{720.1} = 26.83$ ملتے ہیں۔

**چوتھا قدم:** ہم $k = \frac{26.83 \cdot 2.63}{10} = 7.06$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{357.64 \leq \mu \leq 371.76\}$$

---

[142] $t$ تقسیم کو انگلستانی ماہر شماریات ولیم سیلی گوسٹ [1876-1937] نے دریافت کیا۔

[143] number of degrees of freedom

جدول 24.9: نامعلوم تغیریت $\sigma^2$ والی عمومی تقسیم کے اوسط $\mu$ کے وقفہ اعتماد کا تعین

**پہلا قدم:** وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔
**دوسرا قدم:** درج ذیل مساوات کا حل $c$،

$$F(c) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.119}$$

$n-1$ درجہ آزادی کے $t$ تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول 6.ج میں نمونی جسامت $n$ لیتے ہوئے) سے حاصل کریں۔
**تیسرا قدم:** نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے اوسط $\overline{x}$ اور تغیریت $s^2$ حاصل کریں۔
**چوتھا قدم:** $k = \frac{sc}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ $\mu$ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{\overline{x} - k \le \mu \le \overline{x} + k\} \tag{24.120}$$

موازنے کی خاطر فرض کریں کہ ہمیں $\sigma = 26.83$ معلوم ہے۔تب جدول 24.8 سے $k = \frac{2.576 \cdot 26.83}{\sqrt{100}} = 6.91$ حاصل ہوتا جس کے تحت $\{357.79 \le \mu \le 371.61\}$ اعتماد حاصل ہوتا ہے۔دونوں نتائج میں معمولی فرق پایا جاتا ہے۔بڑی $n$ کی صورت میں نتائج میں فرق بہت کم ہوتا ہے لیکن کم $n$ کی صورت میں دونوں نتائج میں واضح فرق پایا جائے گا۔ $\square$

جدول 24.10 میں عمومی تقسیم کی تغیریت کا وقفہ اعتماد تعین کرنے کے قدم دیے گئے ہیں۔ جو جدول 24.8 اور جدول 24.9 کی طرح ہیں، پس، یہاں دو مستقل $c_1$ اور $c_2$ حاصل کرنے ہوں گے۔دونوں مستقل کو ضمیمہ ج میں جدول 7.ج سے حاصل کیا جاتا ہے جس میں تفاعل تقسیم

$$F(z) = \begin{cases} C_m \int_0^z e^{-u^2/2}\, u^{(m-2)/2}\, \mathrm{d}u & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

کی قیمتوں کے لئے $z$ کے مطابقتی قیمتیں دی گئی ہیں۔اس تقسیم کو $\chi^2$ تقسیم (مربع خا تقسیم) کہتے ہیں۔یہاں $C_m = \frac{1}{[2^{m/2}\Gamma(m/2)]}$ اور $m = 1, 2, \cdots$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی درجہ آزادی کی تعداد کہتے ہیں۔

**مثال 24.21: عمومی تقسیم کے تغیریت کا وقفہ اعتماد**
جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے تغیریت کا وقفہ اعتماد تلاش کریں۔
**حل:** **پہلا قدم:** $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔

جدول 24.10: عمومی تقسیم کی تغیریت $\sigma^2$ کے وقفہ اعتماد کا تعین جہاں اوسط جاننا ضروری نہیں ہے

**پہلا قدم:** وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔
**دوسرا قدم:** درج ذیل مساوات کے حل $c_1$ اور $c_2$

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.121}$$

کو مربع خا تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول 7.ج، جسامت نمونہ $= n$) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کریں۔ **تیسرا قدم:** نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کی تغیریت $s^2$ سے $(n-1)s^2$ حاصل کریں۔
**چوتھا قدم:** $k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_1}$ اور $k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_2}$ کا حساب لگائیں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{k_2 \le \sigma^2 \le k_1\} \tag{24.122}$$

**دوسرا قدم:** چونکہ $n = 100$ ہے لہٰذا ہم $c_1 = 73.4$ اور $c_2 = 128$ حاصل کرتے ہیں۔
**تیسرا قدم:** جدول 24.2 سے $99s^2 = 71291$ حاصل ہوتا ہے۔
**چوتھا قدم:** وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{556 \le \sigma^2 \le 972\}$$

□

## دیگر تقسیمات

کافی بڑے نمونے لیتے ہوئے دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد گزشتہ تراکیب سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ عملاً، اگر نا معلوم تقسیم کا ترچھاپن کم ہو تب $\mu$ کا وقفہ اعتماد حاصل کرنے کے لئے نمونی جسامت کم سے کم $n = 20$ لینی چاہیے اور $\sigma^2$ کا وقفہ اعتماد کے لئے کم سے کم $n = 50$ لینا چاہیے۔ اس کی تفصیل اس حصے کے آخر میں پیش کی جائے گی۔

## جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 میں دیے گئے تراکیب کا نظریہ

ہم اب درج ذیل سادہ تصور استعمال کرتے ہوئے اس نظریہ پر غور کرتے ہیں جو وقفہ اعتماد حاصل کرنے کی ان تراکیب کو ممکن بناتی ہے۔

اب تک ہم نمونی قیمتوں $x_1, \cdots, x_n$ کو واحد بلا منصوبہ متغیر $X$ کی مشاہدے سے حاصل $n$ قیمتیں تصور کرتے رہے ہیں۔ہم ان $n$ قیمتوں کو $n$ بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ ، جن کی تقسیم ایک جیسی ہے (جو $X$ کی تقسیم ہے)، کی ایک مشاہدے کی قیمتیں بھی تصور کر سکتے ہیں جنہیں غیر تابع اس لئے تصور کیا جا سکتا ہے کہ نمونی قیمتیں کو غیر تابع تصور کیا گیا ہے۔

جدول 24.8 میں مساوات 24.118 اخذ کرنے کے لئے درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.19: **(بلا منصوبہ عمومی متغیرات کا مجموعہ)**
فرض کریں کہ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ بلا منصوبہ غیر تابع عمومی متغیرات ہیں جن کے اوسط بالترتیب $\mu_1, \cdots, \mu_n$ اور تغیریت بالترتیب $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2$ ہیں۔ تب بلا منصوبہ متغیر

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$

ہو گی۔ $\mu$ اور $\sigma^2$ کے فقرے مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18 دیتے ہیں جبکہ $X$ عمومی ہونے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

اس مسئلے سے اور مسئلہ 24.14 اور مسئلہ 24.13 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.20: اگر $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن میں سے ہر ایک کی اوسط $\mu$ اور تغیریت $\sigma^2$ ہو، تب بلا منصوبہ متغیر

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \tag{24.123}$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu$ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n}$ ہو گی، اور بلا منصوبہ متغیر

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \tag{24.124}$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط $0$ اور تغیریت $1$ ہو گی۔

آئیں مساوات 24.118 اخذ کرتے ہیں۔اس حصے کی شروع میں ہم نے چاہا کہ ہم ایسے دو بلا منصوبہ متغیرات $\Theta_1$ اور $\Theta_2$ حاصل کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

$$P(\Theta_1 \le \mu \le \Theta_2) = \gamma \tag{24.125}$$

جہاں $\gamma$ منتخب کردہ ہے، اور نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ $\Theta_1$ کی قیمت $\theta_1$ اور $\Theta_2$ کی قیمت $\theta_2$ حاصل کرتے ہوئے درج ذیل وقفہ اعتماد حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\text{اعتماد}\{\theta_1 \le \mu \le \theta_2\}$$

موجودہ صورت میں ایسا کرنے کی خاطر ہم $\gamma$ کی قیمت $0$ اور $1$ کے بیچ منتخب کرتے ہیں اور ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے ایسا $c$ حاصل کرتے ہیں جو $P(-c \le Z \le z) = \gamma$ کو مطمئن کرتا ہو۔ (جدول 24.8 میں $\gamma$ کی مختلف قیمتوں کے لئے $c$ کی قیمتیں اسی طرح حاصل کی گئی ہیں۔) مساوات 24.123 میں دیا گیا $Z$ استعمال کرتے ہوئے عدم مساوات $-c \le Z \le c$ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$-c \le \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \le c$$

جس کو $\mu$ کی عدم مساوات میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔اس کو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ سے ضرب کر $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ لکھتے ہوئے $-k \le \overline{X} - \mu \le k$ ملتا ہے۔اس کو $-1$ سے ضرب دے کر $\overline{X}$ جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\overline{X} + k \ge \mu \ge \overline{X} - k \tag{24.126}$$

یوں $P(-c \le Z \le c) = \gamma$ سے مراد $P(\overline{X} - k \le \mu \le \overline{X} + k) = \gamma$ ہے جو مساوات 24.125 کی طرز کا ہے جہاں $\Theta_1 = \overline{X} - k$ اور $\Theta_2 = \overline{X} + k$ ہوں گے۔یوں ہمارے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیرات $\overline{X} - k$ اور $\overline{X} + k$ وہ قیمتیں اختیار کریں گے جن میں نا معلوم اوسط $\mu$ شامل ہو گا۔ جہاں تک $n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ کی مشاہدہ سے حاصل، جدول 24.8 میں دی گئی، نمونی قیمتیں $x_1, \cdots, x_n$ ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ نمونی اوسط $\bar{x}$ مساوات 24.123 کی مشاہدہ سے حاصل قیمت ہے جس کو مساوات 24.126 میں پر کرتے ہوئے مساوات 24.118 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 24.120 اخذ کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.21: فرض کریں کہ $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن میں ہر ایک کی اوسط $\mu$ اور تغیریت $\sigma^2$ ہے۔تب بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \tag{24.127}$$

کی تقسیم $n-1$ درجہ آزادی کی $t$ تقسیم (صفحہ 1623) ہو گی؛ یہاں $\overline{X}$ کو مساوات 24.123 اور

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\overline{X}\right)^2 \tag{24.128}$$

دیتے ہیں۔ اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 24.120 کا ثبوت مساوات 24.118 کی ثبوت کی طرح کا ہے۔ہم $\gamma$ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہوئے ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے $n-1$ درجہ آزادی کا ایسا $c$ حاصل کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$P(-c \le T \le c) = F(c) - F(-c) = \gamma \tag{24.129}$$

چونکہ $t$ تقسیم تشاکلی ہے لہٰذا $F(-c) = 1 - F(c)$ ہو گا اور یوں مساوات 24.129 سے مساوات 24.119 حاصل ہو گا۔مساوات 24.129 میں پہلے کی طرح $-c \le T \le c$ کے تبادلہ سے

$$\overline{X} - K \le \mu \le \overline{X} + K \qquad K = \frac{cS}{\sqrt{n}} \tag{24.130}$$

حاصل ہو گا اور یوں مساوات 24.129 سے $P(\overline{X} - K \le \mu \le \overline{X} + K) = \gamma$ حاصل ہو گا۔مساوات 24.130 میں مشاہدے سے حاصل $\overline{X}$ کی قیمت $\overline{x}$ اور $S^2$ کی قیمت $s^2$ پر کرتے ہوئے مساوات 24.120 حاصل ہو گا۔

مساوات 24.122 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل کی ضرورت ہو گی۔

مسئلہ 24.22: مسئلہ 24.21 کے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$Y = (n-1)\,\frac{S^2}{\sigma^2} \tag{24.131}$$

کا تقسیم $n-1$ درجہ آزادی کا مربع خا تقسیم (صفحہ 1624) ہو گا؛ یہاں $S^2$ کو مساوات 24.128 میں پیش کیا گیا ہے۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 24.122 کا ثبوت مساوات 24.118 اور مساوات 24.120 کی ثبوتوں کی طرح ہے۔ہم 0 اور 1 کے بیچ عدد $\gamma$ منتخب کرتے ہیں۔ضمیمہ ج میں جدول سے ایسے $c_1$ اور $c_2$ کی حاصل کریں جو درج ذیل (مساوات 24.121) کو مطمئن کرتے ہوں۔

$$P(Y \le c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad P(Y \le c_2) = F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma)$$

تفریق سے

$$P(c_1 \le Y \le c_2) = P(Y \le c_2) - P(Y \le c_1) = \gamma$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 24.131 میں دیے $Y$ سے $c_1 \le Y \le c_2$ کے تبادلہ سے $\sigma^2$ کی عدم مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم

$$\frac{n-1}{c_2}S^2 \le \sigma^2 \le \frac{n-1}{c_1}S^2$$

حاصل کرتے ہیں۔مشاہدے سے حاصل $S^2$ کی قیمت $s^2$ کرتے ہوئے مساوات 24.122 حاصل ہو گا۔

### دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد

دیگر تقسیمات کے لئے بھی ہم وقفہ اعتماد کو جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 سے حاصل کر سکتے ہیں، پس نمونوں کی جسامت بڑی رکھنی ہو گی۔یہ درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 24.23: **(مسئلہ وسطی حد)**

فرض کریں کہ $X_1, \cdots, X_m, \cdots$ غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن کی تقسیم ایک جیسی ہے لہٰذا ان کی اوسط $\mu$ ایک جیسی ہو گی اور ان کی تغیریت $\sigma^2$ ایک جیسی ہو گی۔فرض کریں کہ $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ ہے تب بلا منصوبہ متغیر

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \tag{24.132}$$

**متقاربی عمومی**[144] ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی، یعنی، $Z_n$ کا تفاعل تقسیم $F_n(x)$ درج

[144] asymptotically normal

ذیل کو مطمئن کرے گا

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$$

جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی ایک جیسی اوسط $\mu$ اور ایک جیسی تغیریت $\sigma^2$ ہو، تب ان کے مجموعہ $X = X_1 + \cdots + X_n$ کے درج ذیل خواص ہوں گے۔

- (الف) $X$ کی اوسط $n\mu$ اور تغیریت $n\sigma^2$ ہو گی (مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18)۔
- (ب) اگر یہ متغیرات عمومی ہوں تب $X$ بھی عمومی ہو گا (مسئلہ 24.19)۔

اگر یہ متغیرات عمومی نہ ہوں تب مذکورہ بالا شق-ب درست نہیں ہو گا، البتہ بڑی $n$ کی صورت میں $X$ تخمیناً عمومی (مسئلہ 24.23) ہو گا اور یہی وجہ ہے کہ $n$ کی قیمت بڑی لیتے ہوئے ان تراکیب کو دیگر تقسیمات کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

## سوالات

سوال 24.181: عمومی صورتوں میں نقطی اندازہ سے وقفی اندازہ کیوں زیادہ کار آمد ہوتے ہیں؟

سوال 24.182: 100 جسامت کا نمونہ جس کی اوسط 38.25 ہو استعمال کرتے ہوئے عمومی آبادی جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے کی اوسط $\mu$ کے لئے 95 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.183: نمونی جسامت کو گھٹا کر 25 کرنے سے سوال 24.182 میں وقفہ اعتماد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: وقفہ اعتماد دگنا ہو جائے گا۔

سوال 24.184: نمونہ $28, 24, 31, 27, 22$ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف $\sigma = 2.2$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99 % وقفی اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.185: اوسط 16.30 اور جسامت 290 والا نمونہ استعمال کرتے ہوئے شکل 24.18 کی مدد سے تغیریت $\sigma^2 = 0.36$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقفی اعتماد تعین کریں۔
جواب: $\{16.21 \le \mu \le 16.39\}$اعتماد

سوال 24.186: مساوات 24.118 میں 95% وقفہ اعتماد کی لمبائی (الف) $2\sigma$ (ب) $\sigma$ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت $n$ تلاش کریں۔

سوال 24.187 تا سوال 24.191 میں فرض کریں کہ دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے حاصل کیا گیا ہے۔آبادی کی اوسط $\mu$ کے لئے 99% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.187: $325, 320, 325, 335$
جواب: $\{307 \le \mu \le 345\}$اعتماد

سوال 24.188: 20 قابلوں کا نمونہ جس کی اوسط $10.20\,\mathrm{cm}$ اور تغیریت $\sigma^2 = 0.04\,\mathrm{cm}^2$ ہو۔

سوال 24.189: سلاخ کی ملی میٹروں میں لمبائی $124, 127, 126, 122, 124$
جواب: $\{120.6 \le \mu \le 128.6\}$اعتماد

سوال 24.190: پشاور تا لاہور موٹروے پر بلا منصوبہ 500 گاڑیوں کو روک کر ان کے بریک پرکھے جاتے ہیں جن میں سے 87 گاڑیوں کے بریک کمزور ثابت ہوتے ہیں۔اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے موٹروے پر کمزور بریک والی گاڑیوں کی فی صد کے لئے 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.191: ثنائی تقسیم کی مقدار معلوم $p$ کے لئے 99% وقفہ اعتماد تعین کریں۔صفحہ 1552 پر جدول 24.6 کی آخری صف میں مشرف کے نتائج استعمال کریں۔
جواب: $\{0.492 \le p \le 0.509\}$اعتماد

سوال 24.192 تا سوال 24.192 میں عمومی آبادی سے نمونے حاصل کیے گئے ہیں۔آبادی کی تغیریت $\sigma^2$ کی 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.192: $145.3, 145.1, 145.4, 146.2$

سوال 24.193: نمونی جسامت 30 اور تغیریت 0.0007 ہے۔
جواب: $\{0.00044 \leq \sigma^2 \leq 0.00127\}$اعتماد

سوال 24.194: درجہ حرارت کمرہ پر ایک مخصوص قسم کی دھات کی حتمی تنشی مضبوطی ( $\mathrm{kg\,cm^{-2}}$ ): $17.6, 19.7, 18.1, 17.8, 17.8, 17.7, 17.6, 17.7, 17.9, 18$

سوال 24.195: یورینیم $\mathrm{U^{35}}$ کی انشقاق سے پیدا تاخیری نیوٹران گروہ (تیسرا گروہ جس کی نصف زندگی 6.2 سیکنڈ ہے) کی اوسط توانائی $(\mathrm{keV})$: $435, 451, 430, 444, 438$
جواب: $\{23 \leq \sigma^2 \leq 553\}$اعتماد

سوال 24.196: $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے سفر کرتے ہوئے ایک گاڑی کی فی کلومیٹر خارج کردہ $\mathrm{CO}$ (گرام): $10.8, 11.1, 11.2, 11, 11.3, 10.8, 10.9, 11.2$

سوال 24.197: اگر $X$ عمومی ہو جس کی اوسط 27 اور تغیریت 16 ہو تب $-X$ ، $3X$ اور $5X-2$ کے تقسیم، اوسط اور تغیریت کیا ہوں گے؟
جواب: تینوں عمومی، اوسط $-27, 81, 133$ اور تغیریت $16, 144, 400$ ہوں گے۔

سوال 24.198: اگر $X_1$ اور $X_2$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی اوسط بالترتیب 23 ، 4 اور تغیریت بالترتیب 3 ، 1 ہوں تب $4X_1 - X_2$ کی تقسیم، اوسط اور تغیریت کیا ہوں گے؟

سوال 24.199: ایک مشین $Y$ کلو گرام کمیت کے ڈبوں میں $X$ کلو گرام نمک بھرتی ہے جہاں $X$ اور $Y$ کی اوسط بالترتیب 100 کلو گرام، 5 کلو گرام اور تغیریت بالترتیب 1 کلو گرام، 0.5 کلو گرام ہیں۔ کتنے فی صد بھرے گئے ڈبوں کی کمیت 104 کلو گرام اور 106 کلو گرام کے بیچ ہو گی؟
جواب: $P(104 \leq Z \leq 106) = 63\,\%$

سوال 24.200: اگر سیمنٹ کی بوری کی کمیت $X$ عمومی متغیر ہو جس کی اوسط $40\,\mathrm{kg}$ اور تغیریت $2\,\mathrm{kg}$ ہو تب ایک ٹرک میں کتنی بوریاں رکھی جا سکتی ہیں تا کہ بوریوں کی کل کمیت کا $2000\,\mathrm{kg}$ سے تجاوز کرنے کا احتمال $5\,\%$ ہو۔

## 24.15 قیاس کی پرکھ۔ فیصلے

بلا منصوبہ متغیر کی تقسیم کے بارے میں کچھ فرض کرنے کو **شماریاتی قیاس**[145] کہتے ہیں۔مثال کے طور پر کسی تقسیم کے بارے میں یہ فرض کرنا کہ اس کی اوسط 20.3 ہے شماریات قیاس ہو گا۔ایسا عمل جس سے ہم معلوم کر سکیں کہ آیا ہمارا قیاس ٹھیک ہے اور ہم اس کو **منظور**[146] کریں یا کہ یہ غلط ہے اور ہم اس کو **نا منظور**[147] کریں **شماریاتی پرکھ**[148] کہلاتا ہے۔

یہ پرکھ عموماً استعمال کیے جاتے ہیں اور ہم جاننا چاہیں گے کہ یہ کیوں اہم ہیں۔ہمیں عموماً ایسی صورتوں میں فیصلہ کرنا ہوتا ہے جہاں امکانی تبدیلیاں عمل پیرا ہوتی ہیں۔مثال کے طور پر اگر ہمیں دو ممکنات میں سے ایک کو چننا ہو، ہمارا فیصلہ کسی شماریاتی پرکھ پر منحصر ہو سکتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر ہمیں ایک خراد کی مشین پر قابلے بنانا ہو جن کی قطر مخصوص حدود میں رہنا ضروری ہو اور ہم چاہتے ہیں کہ زیادہ سے زیادہ 2% قابلے عیب دار ہوں تب ہم اس خراد پر بنائے گئے قابلوں سے 100 قابلوں کا نمونہ حاصل کرتے ہوئے قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کو پرکھ کر دیکھیں گے کہ آیا مطابقتی آبادی کی تغیریت $\sigma^2$ کسی مخصوص قیمت $\sigma_0^2$ کے برابر ہے۔ $\sigma_0^2$ کو یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ 2% قابلے عیب دار حاصل ہوں۔اس کا متبادل پرکھ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ہے۔ہم پرکھ کے نتیجہ کو دیکھ کر قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کو منظور کرتے ہوئے اسی خراد کو استعمال کرتے ہیں یا ہم اس کو نا منظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ہے اور اس سے بہتر خراد استعمال کرتے ہیں۔نا منظوری کی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ $\sigma_0^2$ سے $\sigma^2$ کا **معنی خیز انحراف**[149] پایا جاتا ہے، یعنی انحراف نا گزیر امکانی وجوہات کی بنا نہیں ہے بلکہ خراد کی ناقص پن کی وجہ سے ہے۔

ہو سکتا ہے کہ کسی دوسری جگہ پر ہمیں دو چیزوں کا آپس میں موازنہ کرنا ہو، مثلاً، دو ادویات، ایک کام سرانجام دینے کے دو تراکیب، ناپنے کے دو طریقے، دو مشینوں پر بنائے گئے چیزوں کی معیار، وغیرہ وغیرہ۔ موزوں پرکھ کے نتیجہ کے تحت ہم ایک دوائی کو منتخب کریں گے، کام کرنے کی بہتر ترکیب منتخب کریں گے، وغیرہ۔

قیاس عمومی درج ذیل سے حاصل ہو گا۔

---

hypothesis[145]
accept, not reject[146]
reject[147]
test[148]
significant deviation[149]

- ضرورت معیاری پیداوار سے قیاس پیش کیا جا سکتا ہے۔(سخت نگرانی اور احتیاط کے ساتھ زیادہ تعداد کی چیزیں پیدا کرنے سے قابل حصول معیار کے بارے میں تجربہ حاصل ہوتا ہے۔)

- گزشتہ تجربہ سے حاصل معلوم قیمتوں پر قیاس منحصر ہو سکتا ہے۔

- قیاس ایک نظریہ پر مبنی ہو سکتا ہے جس کو آپ پرکھنا چاہتے ہیں۔

- بعض اوقات اتفاقی مشاہدے پر قیاس مبنی ہو سکتا ہے۔

آئیں ایک تعارفی مثال سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 24.22: **قیاس کا پرکھ**
ایک بچہ پیدا ہونے کو بلا منصوبہ تجربہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کے دو ممکنہ انجام ہیں، یعنی لڑکا $B$ اور لڑکی $G$۔ وجدانی طور پر ہم قیاس کر سکتے ہیں کہ دونوں کا احتمال ایک جیسا ہو گا البتہ کچھ لوگوں کا متبادل قیاس ہے کہ نو زائدہ بچوں میں لڑکوں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے۔ہم قیاس کو پرکھنا چاہتے ہیں۔اگر ہم انجام $B$ کے احتمال کو $p$ سے ظاہر کریں تب ہم قیاس $p = 50\,\% = 0.5$ کو پرکھا جا سکتا ہے۔متبادل قیاس $p > 0.5$ کو بھی پرکھا جا سکتا ہے۔ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔

اس پرکھ کے لئے ایک شہر میں ایک سال میں پیدا بچوں سے ہم $n = 3000$ نمونہ منتخب کرتے ہیں جن میں سے 1578 لڑکے ہیں۔

اگر قیاس درست ہو تب $n = 3000$ کی نمونہ میں اوسطاً تقریباً 1500 نو زائدہ لڑکے متوقع ہوں گے۔اگر متبادل درست ہو تب 1500 سے اوسطاً زائد لڑکے متوقع ہوں گے۔یوں اگر حقیقتاً نو زائدہ لڑکوں کی تعداد 1500 سے بہت زیادہ ہو تب ہم اس کو قیاس غلط ہونے کی نشانی تصور کرتے ہوئے قیاس کو نا منظور کریں گے۔

ہم سب سے پہلے ایک فاصل قیمت $c$ متعین کرتے ہیں۔ متبادل کی بنا $c$ کی قیمت 1500 سے زیادہ ہو گی۔( $c$ تعین کرنے کا ایک طریقہ نیچے پیش کیا گیا ہے۔) تب نو زائد لڑکوں کی تعداد $c$ سے زیادہ ہونے کی صورت میں ہم قیاس کو نا منظور کریں گے اور اگر نو زائد لڑکوں کی تعداد $c$ سے زیادہ نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کریں گے۔

اب ہمیں $c$ کی ایسی قیمت منتخب کرنی ہو گی جو معمولی بلا منصوبہ انحراف اور زیادہ معنی خیز انحراف میں تمیز کرے۔ہر شخص کی اپنی ایک منفرد رائے ہو سکتی ہے لیکن ہمیں حسابی دلائل کے تحت چلنا ہو گا جو موجودہ صورت میں بہت سادہ ہیں (جیسے آپ اب دیکھیں گے)۔

ہم $c$ یوں تعین کرتے ہیں کہ قیاس درست ہونے کی صورت میں $c$ سے زیادہ لڑکوں کا احتمال بہت کم ہو مثلاً $\alpha$ ۔ روایتی طور پر $\alpha = 1\%$ یا $\alpha = 5\%$ منتخب کیا جاتا ہے۔ $\alpha = 1\%$ (یا $\alpha = 5\%$ ) منتخب کرتے ہوئے ہم 100 میں (یا 20 میں) 1 زیادہ لڑکوں کی صورت میں بھی قیاس کو نا منظور کرتے ہیں اگرچہ قیاس درست ہے۔اس نقطے پر ہم بعد میں غور کریں گے۔آئیں ہم $\alpha = 1\%$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل بلا منصوبہ متغیر پر غور کرتے ہیں۔

$$X = \text{بچوں کی 3000 پیدائشوں میں لڑکوں کی تعداد}$$

یہ فرض کرتے ہوئے قیاس درست ہے ہم $c$ کی فاصل قیمت کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کرتے ہیں

$$P(X > c)_{p=0.5} = \alpha = 0.01 \tag{24.133}$$

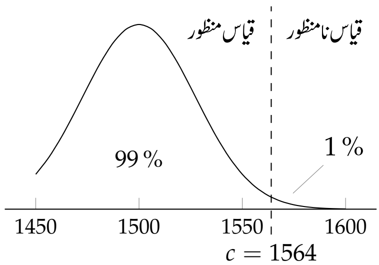
جہاں مفروضے کو زیر نوشت میں $p = 0.5$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔اگر لڑکوں کی حقیقی تعداد 1578 منتخب $c$ سے زیادہ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کریں گے۔اگر $c \leq 1578$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کریں گے۔

مساوات 24.133 سے $c$ حاصل کرنے کی خاطر ہمیں $X$ کی تقسیم معلوم ہونی چاہیے۔موجودہ مثال کے لئے ثنائی تقسیم کافی درست ہے۔یوں اگر قیاس درست ہو تب ثنائی تقسیم میں $X$ کی $p = 0.5$ اور $n = 300$ ہوں گے۔اس تقسیم کو تخمینی طور پر ایسی عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کی اوسط $\mu = np$ اور تغیریت $\sigma^2 = npq = 750$ ہو (حصہ 24.10)۔(ہم اپنی آسانی کی خاطر مساوات 24.78 میں جزو 0.5 کو رد کرتے ہیں۔) تقسیم کی منحنی کو شکل 24.19 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 24.133 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \approx 1 - \Theta\Big(\frac{c - 1500}{\sqrt{750}}\Big) = 0.01$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{c-1500}{\sqrt{750}} = 2.326$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $c = 1564$ ہو گا۔چونکہ $c < 1578$ ہے لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہوئے فیصلہ کرتے ہیں کہ $p > 0.5$ ہے۔یوں پرکھ مکمل ہوتا ہے۔

300 کے نمونہ کے لئے مساوات 24.133 میں $X$ کو 300 پیدائشوں میں لڑکوں کی تعداد لیتے ہوئے فاصل قیمت $c = 170$ حاصل ہو گی اور نمونہ میں 158 (جو وہی فی صد ہے جو بڑی جسامت کے نمونہ میں تھی)



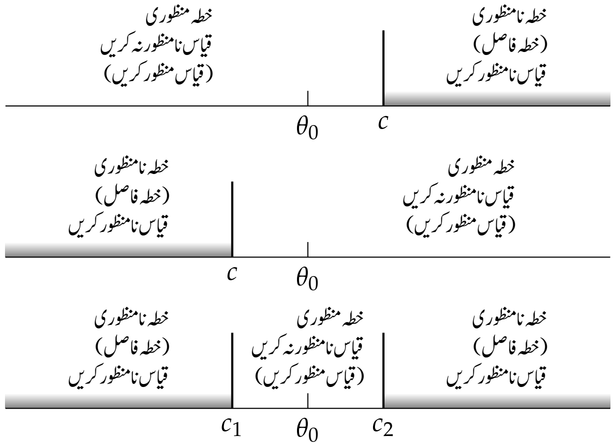

شکل 24.19: درست قیاس کی صورت میں $X$ کی تخمینی تقسیم (مثال 24.22)۔ فاصل قیمت $c = 1564$ ہے

لڑکے ہونے کی صورت میں $c > 158$ حاصل ہو گا اور ہم قیاس کو منظور کریں گے۔ یہ ایک دلچسپ صورت حال ہے جس سے یہ حقیقت اجاگر ہوتی ہے کہ پرکھ کی افادیت نمونی جسامت $n$ بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ ہمیں $n$ اتنا بڑا لینا ہو گا کہ عملی صورت میں زیر غور متغیر کے بارے میں درست نتائج حاصل ہوں۔ ساتھ ہی ساتھ $n$ زیادہ بڑا بھی نہیں ہونا چاہیے تا کہ وقت اور سرمایہ کا ضیاع نہ ہو۔ عموماً صورتوں میں پہلے چھوٹا تجربہ کرتے ہوئے بہتر $n$ کو تعین کرنا ممکن ہو گا۔ $\square$

متبادل کا تصور۔ متبادل کی قسمیں

جس قیاس کو پرکھا جا رہا ہو اس کو **پسندیدہ قیاس**[150] کہتے ہیں اور اس کا مخالفانہ قیاس (مثلاً مثال 24.22 میں $p > 0.5$) کو متبادل قیاس[151] یا مختصراً متبادل کہتے ہیں۔ عدد $\alpha$ (یا $100\alpha\%$) کو پرکھ کی **معنی خیز سطح**[152] کہتے ہیں جبکہ $c$ **فاصل قیمت**[153] کہلاتا ہے۔ جس خطے میں وہ قیمتیں پائی جاتی ہوں جن کے لئے قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے، اس خطے کو **خطہ نا منظوری**[154] یا **خطہ فاصل**[155] کہتے ہیں۔ وہ خطہ جس میں پائے جانے والی قیمتوں کے لئے قیاس کو منظور کیا جاتا ہے **خطہ منظوری**[156] کہلاتا ہے۔ $\alpha$ کو عموماً $\alpha = 5\%$ منتخب کیا جاتا ہے۔

default hypothesis[150]
alternative hypothesis[151]
significant level[152]
critical value[153]
rejection region[154]
critical region[155]
acceptance region[156]




شکل 24.20: مساوات 24.134 کی متبادل (بالائی شکل)، مساوات 24.135 کی متبادل (درمیانی شکل) اور مساوات 24.136 کی متبادل (نچلی شکل) کی صورت میں پرکھ

فرض کریں کہ ایک تقسیم میں مقدار معلوم $\theta$ کی قیمت نا معلوم ہے۔فرض کریں کہ ہم قیاس $\theta = \theta_0$ کو پرکھنا چاہتے ہیں۔اس کے درج ذیل تین متبادل قیاس پائے جاتے ہیں۔

$$\theta > \theta_0 \tag{24.134}$$
$$\theta < \theta_0 \tag{24.135}$$
$$\theta \neq \theta_0 \tag{24.136}$$

مساوات 24.134 اور مساوات 24.135 کو **یک طرفہ متبادل**[157] جبکہ مساوات 24.136 کو **دو طرفہ متبادل**[158] کہتے ہیں۔مثال 24.22 میں دو طرفہ متبادل پر غور کیا گیا (جہاں $\theta_0 = p = 0.5$ اور $\theta_0 = p > 0.5$ تھے)؛ $\theta_0$ کی دائیں جانب $c$ پایا جاتا ہے اور خطہ نا منظور $c$ سے لے کر $\infty$ ہو گا اور اس پرکھ کو **دایاں طرفہ پرکھ**[159] کہتے ہیں۔مساوات 24.135 میں $\theta_0$ کی بائیں جانب $c$ پایا جاتا ہے، اور خطہ نا منظوری $c$ سے $-\infty$ تک ہو گا (شکل 24.20) اور اس پرکھ کو **بایاں طرفہ پرکھ** کہیں گے۔ان دونوں قسم کے پرکھ کو یک طرفہ پرکھ کہتے ہیں۔مساوات 24.136 کی صورت میں ہمارے پاس دو فاصل قیمتیں $c_1$ اور $c_2\,(> c_1)$ ہوں گی اور خطہ نا منظوری $c_1$ تا $-\infty$ اور $c_2$ تا $\infty$ ہو گا، اور پرکھ کو **دو طرفہ پرکھ** کہیں گے۔

تینوں اقسام کے متبادل عملاً اہم ہیں۔مثال کے طور پر مساوات 24.135 مادہ کی مضبوطی کی پرکھ میں ہمیں پیش آ سکتا

---
one-sided alternatives[157]
two-sided alternative[158]
right-sided test[159]

ہے جہاں $\theta_0$ درکار مضبوطی ہو سکتی ہے جبکہ متبادل غیر پسندیدہ کمزوری کو ظاہر کرے گا۔درکار قیمت سے زیادہ مضبوطی کی صورت میں مادہ منظور کیا جائے گا لہٰذا اس کو علیحدہ سے پرکھنے کی ضرورت نہیں ہو گی۔ مساوات 24.136 ایسی صورت میں اہم ہو گا جیسے دھرا کی قطر جہاں $\theta_0$ درکار قطر کو ظاہر کرے گا جبکہ اس سے کم یا زیادہ موٹائی دونوں برابر مسئلہ خیز ہوں گے لہٰذا درکار موٹائی کے دونوں جانب انحراف پر نظر رکھنا ضروری ہو گا۔

## پرکھ میں غلطیوں کے اقسام

ہم اب متبادل، جس کو ہم اپنی آسانی کی خاطر واحد عدد $\theta_1$ تصور کرتے ہیں، کے لحاظ سے قیاس $\theta = \theta_0$ کے پرکھ سے غلط فاصلوں کے خطرات پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں $\theta_1 > \theta_0$ ہے لہٰذا ہمارے پاس دایاں طرفہ پرکھ ہو گا۔ (بایاں طرفہ یا دو طرفہ پرکھ کے لئے بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔) دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے ہم قیمت $\widehat{\theta} = g(x_1, \cdots, x_n)$ کا حساب لگاتے ہیں۔اگر $\widehat{\theta} > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے (جیسا مثال 24.22 میں کیا گیا)۔ اگر $\widehat{\theta} \le c$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جاتا ہے۔ $\widehat{\theta}$ کی قیمت کو بلا منصوبہ متغیر

$$\widehat{\Theta} = g(X_1, \cdots, X_n)$$

کی مشاہدے سے حاصل قیمت تصور کیا جا سکتا ہے چونکہ $x_j$ کو $X_j$ کی مشاہدے سے حاصل قیمت تصور کیا جا سکتا ہے، جہاں $j = 1, \cdots, n$ ہے۔ان پرکھ میں غلطی کرنے کے درج ذیل دو امکانات پائے جاتے ہیں۔

### غلطی قسم اول

جدول 24.11 میں پرکھ درست ہے لیکن $\Theta$ قیمت $\widehat{\theta} > c$ اختیار کرتا ہے جس کی بنا اس پرکھ کو نا منظور کیا جاتا ہے (لہٰذا متبادل کو منظور کیا جاتا ہے) ظاہر ہے کہ ایسی غلطی کا احتمال

$$P(\widehat{\Theta} > c)_{\theta=\theta_0} = \alpha \tag{24.137}$$

ہو گا جو معنی خیز سطح کے برابر ہے۔

جدول 24.11: متبادل $\theta = \theta_1$ کے لحاظ سے قیاس $\theta = \theta_0$ کی پرکھ میں پہلی اور دوسری قسم کا خلل

| | | نا معلوم حقیقت | |
|---|---|---|---|
| | | $\theta = \theta_0$ | $\theta = \theta_1$ |
| فیصلہ | $\theta = \theta_0$ | ٹھیک فیصلہ $P = 1 - \alpha$ | دوسری قسم کا خلل $P = \beta$ |
| | $\theta = \theta_1$ | پہلی قسم کا خلل $P = \alpha$ | ٹھیک فیصلہ $P = a - \beta$ |

### غلطی قسم دوم

جدول 24.11 پر نظر رکھیں۔ قیاس غلط ہے لیکن اس کو منظور کیا جاتا ہے، چونکہ $\widehat{\Theta}$ قیمت $\widehat{\theta} \leq c$ اختیار کرتا ہے۔ ایسی غلطی کرنے کے احتمال کو $\beta$ سے ظاہر کیا جاتا ہے؛ لہٰذا

$$P(\widehat{\Theta} \leq c)_{\theta=\theta_1} = \beta \tag{24.138}$$

$\eta = 1 - \beta$ کو پرکھ کی **طاقت**[160] کہتے ہیں جو غلطی کی قسم دوم سے بچنے کا احتمال ہے۔ ہو گا۔

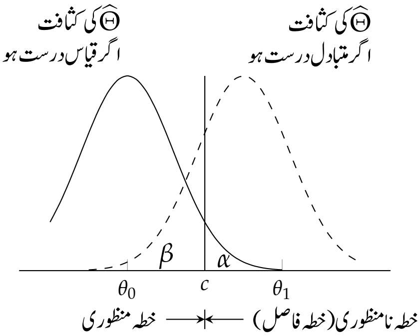
مساوات 24.137 اور مساوات 24.138 سے ظاہر ہے کہ $\alpha$ اور $\beta$ دونوں $c$ پر منحصر ہیں اور ہم چاہیں گے کہ ہم ایسا $c$ منتخب کریں کہ غلطیاں کرنے کے احتمال کم سے کم ہوں۔ البتہ شکل 24.21 سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہ متصادم ضروریات ہیں۔ $\alpha$ گھٹانے کی خاطر $c$ کو دائیں منتقل کرنا ہو گا جس سے $\beta$ بڑھتا ہے۔ حقیقت میں ہم $\alpha$ ( $5\%$ یا $1\%$ ) منتخب کر کے $c$ تعین کرتے ہیں اور آخر میں $\beta$ کا حساب کرتے ہیں۔ اگر $\beta$ بڑی ہو جس سے طاقت $\eta = 1 - \beta$ چھوٹی حاصل ہو گی تب ہمیں زیادہ بڑا نمونہ (جس کی وجہ جلد سامنے آئے گی) لے کر پرکھ دہرانا چاہیے۔

اگر متبادل واحد عدد نہ ہو بلکہ مساوات 24.134 تا مساوات 24.136 کی طرح ہو تب $\beta$ تفاعل ہو گا جو $\theta$ کا تابع ہو گا۔ تفاعل $\beta(\theta)$ کو پرکھ کی **خاصیت کارکردگی**[161] کہتے ہیں اور اس کی منحنی کو **منحنی خاصیت کارکردگی** کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں $\eta = 1 - \beta$ بھی $\theta$ کے تابع ہو گا اور تفاعل $\eta(\theta)$ کو پرکھ کا **تفاعل طاقت**[162] کہتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ ایسی پرکھ جس کی بنا کوئی قیاس $\theta_0$ منظور ہو سے یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ یہی سب سے بہتر یا واحد قیاس ہے۔ یوں لفظ "منظور" کی جگہ "نا منظور نہ کرنا" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔

---

[160] power
[161] operating characteristic
[162] power function




شکل 24.21: قیاس $\theta = \theta_0$ بالمقابل متبادل $\theta = \theta_1 \ (> \theta_0)$ کی پرکھ میں قسم اول اور دوم غلطیوں کی وضاحت

### عمومی تقسیم کی صورت میں پرکھ

درج ذیل مثال عملاً اہم قیاس کے پرکھ کی وضاحت کرتا ہے۔

**مثال 24.23: (معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ)**
فرض کریں کہ $X$ بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے۔ نمونی جسامت $n = 10$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = \mu_0 = 24$ کو درج ذیل تین متبادل کے بالمقابل پرکھیں۔

(الف) $\mu > \mu_0$ (ب) $\mu < \mu_0$ (پ) $\mu \neq \mu_0$

**حل:** ہم معنی خیز سطح $\alpha = 0.05$ منتخب کرتے ہیں۔ اوسط کی اندازاً قیمت درج ذیل سے حاصل ہو گی۔

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots , X_n)$$

اگر قیاس درست ہو تب $X$ عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 24$ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n} = 0.9$ ہو گی (مسئلہ 24.20)۔ لہٰذا ہم فاصل قیمت $c$ کو ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے حاصل کر سکتے ہیں۔
**صورت الف:** ہم $P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$ سے $c$ تعین کرتے ہیں۔

$$P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{c-24}{\sqrt{0.9}} = 1.645$ یعنی $c = 25.56$ حاصل ہوتا ہے جو $\mu_0$ سے بڑی قیمت ہے (اور جو شکل 24.20 میں سب سے اوپر دکھائی گئی صورت ہے)۔ اگر $\overline{x} \leq 25.56$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جائے گا۔ اگر $\overline{x} > 25.56$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جائے گا۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\overline{X} > 25.56)_\mu = 1 - P(\overline{X} \leq 25.56)_\mu \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{25.56-\mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu) \end{aligned} \tag{24.139}$$

صورت ب: فاصل قیمت $c$ کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$P(\overline{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $c = 24 - 1.56 = 22.24$ ملتا ہے۔اگر $\overline{x} \geq 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔اگر $\overline{x} < 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\eta(\mu) = P(\overline{X} \leq 22.44)_\mu = \Phi\Big(\frac{22.44-\mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = \Phi(23.65 - 1.05\mu) \tag{24.140}$$

صورت پ: چونکہ عمومی تقسیم تشاکلی ہے، ہم $\mu = 24$ سے $c_1$ اور $c_2$ کو ایک جیسے فاصلے پر چن کر، مثلاً $c_1 = 24 - k$ اور $c_2 = 24 + k$، مستقل $k$ کو درج ذیل سے تعین کرتے ہیں۔

$$P(24 - k \leq \overline{X} \leq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{k}{\sqrt{0.9}} = 1.960$ یعنی $k = 1.86$ حاصل ہو گا۔یوں $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$ اور $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$ ہوں گے۔اگر $\overline{x}$ کی قیمت $c_1$ سے چھوٹی نہ ہو اور $c_2$ سے بڑی نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔اس کے علاوہ ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\overline{X} < 22.14)_\mu + P(\overline{X} > 25.86)_\mu \\ &= P(\overline{X} < 22.14)_\mu + 1 - P(\overline{X} \leq 25.86)_\mu \\ &= 1 + \Phi\Big(\frac{22.14-\mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{25.86-\mu}{\sqrt{0.9}}\Big) \\ &= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu) \end{aligned} \tag{24.141}$$

نتیجتاً خاصیت کارکردگی $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$ درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Phi\Big(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big)\\ &= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu)\end{aligned}$$

شکل سے ظاہر ہے کہ $n = 10$ کی خاصیت کارکردگی کی مطابقتی منحنی کی ڈھلوان زیادہ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $n$ بڑھانے سے بہتر پرکھ حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی عملی استعمال میں $n$ کو کم سے کم لیکن اتنا زیادہ رکھا جاتا ہے کہ پرکھ $\mu$ اور $\mu_0$ میں انحراف، جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں، کو واضح کرے۔ مثال کے طور پر اگر انحراف ہماری دلچسپی $\mp 2$ اکائی ہو، ہم شکل سے دیکھتے ہیں کہ $n = 10$ بہت کم ہو گا چونکہ جب $\mu = 24 - 2 = 22$ یا $\mu = 24 + 2 = 26$ ہو تب $\beta$ تقریباً $50\,\%$ ہو گا۔اس کے برعکس، $n = 100$ اس صورت کافی ہو گا۔ □

**مثال 24.24: نا معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ**

رسی کی تنشی مضبوطی $n = 16$ کا نمونہ لے کر ناپی گئی۔نمونی اوسط $\bar{x} = 4482\,\mathrm{kg}$ اور نمونی معیاری انحراف $s = 115\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوئے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تنشی مضبوطی عمومی بلا منصوبہ متغیر ہے۔ قیاس $\mu_0 = 4500\,\mathrm{kg}$ کو متبادل $\mu_1 = 4400\,\mathrm{kg}$ کے مقابلے میں پرکھیں۔یہاں $\mu_0$ وہ قیمت ہو سکتی ہے جو پیداکار نے فراہم کی ہو جبکہ $\mu_1$ سابقہ تجربات کا نتیجہ ہو سکتا ہے۔

حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو تب مسئلہ 24.21 کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n}\ \frac{\overline{\mathrm{X}} - \mu_0}{S} = 4\ \frac{\overline{\mathrm{X}} - 4500}{S}$$

کا $t$ تقسیم $n - 1 = 15$ درجہ آزادی کا ہو گا۔ فاصل قیمت $c$ کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے $c = -1.75$ حاصل ہو گا۔نمونہ سے $T$ کی مشاہدہ سے حاصل قیمت $t = \frac{4(4482-4500)}{115} = -0.626$ ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $t > c$ ہے لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہمیں مزید جدول بند قیمتیں درکار ہوں گی جن پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔ □

**مثال 24.25: (عمومی تقسیم کی تغیریت کی پرکھ)**
عمومی آبادی کے $n = 15$ جسامت اور نمونی تغیریت $s^2 = 13$ کے نمونہ سے قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$ کو متبادل $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$ میں مقابلے میں پرکھیں۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو تب

$$Y = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} = 14\frac{S^2}{10} = 1.4S^2$$

کا مربع خا تقسیم $n - 1 = 14$ درجہ آزادی کا ہو گا (مسئلہ 24.22)۔ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل سے 14 درجہ آزادی کے لئے $c = 23.68$ حاصل ہو گا

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05 \qquad \implies \qquad P(Y \le c) = 0.95$$

جو $Y$ کی فاصل قیمت ہے۔یوں $S^2 = \frac{\sigma_0^2 Y}{n-1} = 0.714Y$ کا مطابقتی فاصل قیمت $= c^* = 0.714 \cdot 23.68 = 16.91$ ہو گا۔چونکہ $s^2 < c^*$ ہے ہم قیاس کو نامنظور نہیں کرتے ہیں،

اگر متبادل درست ہو تب متغیر

$$Y_1 = 14\frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7S^2$$

کے مربع خا تقسیم کا درجہ آزادی 14 ہو گا۔یوں ہمارے پرکھ کی طاقت

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \le 11.84)_{\sigma^2 0} \approx 62\,\%$$

ہو گی اور ہم دیکھتے ہیں قسم دوم غلطی کا امکان (جو $38\,\%$ ہے) بہت زیادہ ہے جس کو کم کرنے کے لئے نمونی جسامت بڑھانی ضروری ہے۔ □

**مثال 24.26: دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا آپس میں موازنہ**
نامعلوم اوسط $\mu_1$ کی عمومی تقسیم کا نمونہ $x_1, \cdots, x_{n1}$ اور دوسری عمومی تقسیم جس کی اوسط $\mu_2$ نامعلوم ہو کا نمونہ $y_1, \cdots, y_{n2}$ استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل مثلاً $\mu_1 > \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھنا چاہتے ہیں۔تغیرات جاننا ضروری نہیں ہے لیکن انہیں ایک جیسا[163] تصور کیا جاتا ہے۔دو صورتیں عملاً اہم ہیں۔
**پہلی صورت:** نمونوں کی جسامت ایک جیسی ہے۔مزید پہلے نمونہ کی ہر قیمت کا دوسرے نمونہ میں مطابقتی ٹھیک ایک قیمت پایا جاتا ہے، چونکہ مطابقتی قیمتیں ایک ہی انسان یا چیز کی بدولت پائی جاتی ہیں (**جوڑی دار موازنہ**[164] )؛مثال کے طور

[163] اگر اگلے مثال کا پرکھ واضح کرے کہ تغیرات میں واضح فرق پایا جاتا ہے تب ایک جیسے $n_1 = n_2 = n$، مثلاً $n > 30$ منتخب کرتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ مساوات تخمیناً عمومی بلا منصوبہ متغیر، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے، کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے، اور مثال 24.23 کی طرز پر حل کریں۔
[164] paired comparison

پر ایک ہی چیز کی دو مختلف طریقوں سے ناپ، یا ایک ہی جانور کی دو آنکھوں کی ناپ، یا زیادہ عمومی طور پر جہاں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نمونوں کی جوڑی قیمتیں ایک جیسے انسانوں یا چیزوں (مثلاً جڑواں بھائی، گاڑھی کے اگلے ٹائر، وغیرہ) سے حاصل کی گئی ہوں۔ تب ہم مطابقتی قیمتوں کا فرق لے کر، مثال 24.24 میں دی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، اس قیاس کو پرکھیں گے کہ ان فرق کی مطابقتی آبادی کی اوسط $0$ ہے۔ اگر ممکن ہو تب ہم اسی ترکیب کو استعمال کریں گے ورنہ ہمیں درج ذیل ترکیب استعمال کرنی ہو گی۔

**دوسری صورت:** دونوں نمونے غیر تابع ہیں اور ان کی جسامت مختلف ہو سکتی ہے۔ تب ہم درج ذیل طریقے سے بڑھتے ہیں۔فرض کریں کہ متبادل $\mu_1 > \mu_2$ ہے۔ہم معنی خیز سطح $\alpha$ منتخب کرتے ہیں۔ہم نمونی اوسط $\overline{x}$ ، $\overline{y}$ اور $(n_1-1)s_1^2$ ، $(n-1)s_2^2$ کا حساب کرتے ہیں جہاں $s_1^2$ اور $s_2^2$ نمونی تغیریت ہیں۔ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں $n_1+n_2-2$ درجہ آزادی لیتے ہوئے ہم $c$ کو

$$P(T \le c) = 1-\alpha \tag{24.142}$$

سے تعین کرتے ہیں۔آخر میں ہم درج ذیل کا حساب کرتے ہیں۔

$$t_0 = \sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\;\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}} \tag{24.143}$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر قیاس درست ہو تب یہ $t$ تقسیم کے $n_1+n_2-2$ درجہ آزادی کے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے۔اگر $t_0 \le c$ ہو تب قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔اگر $t_0 > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے۔

اگر متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ ہو تب مساوات 24.142 کی جگہ درج ذیل استعمال کیا جائے گا۔

$$P(T \le c_1) = 0.5\alpha, \quad P(T \le c_2) = 1-0.5\alpha \tag{24.142*}$$

دھیان رہے کہ ایک جیسی نمونی جسامت $n_1 = n_2 = n$ کے لئے مساوات 24.143 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$t_0 = \sqrt{n}\;\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} \tag{24.144}$$

اس کی وضاحت کے لئے آئیں درج ذیل دو نمونوں پر غور کرتے ہیں جو دو مختلف حالات میں ایک ہی کام پر مزدور کی کارکردگی ہے۔

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 105 | 108 | 86 | 103 | 103 | 107 | 124 | 105 |
| 89 | 92 | 84 | 97 | 103 | 107 | 111 | 97 |

فرض کریں کہ مطابقتی آبادی عمومی ہے اور ان کی تغیریت ایک جیسی ہے۔آئیں قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ (تغیریت کی ایک جیسا ہونے کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔)

**حل:** ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = 105.125, \quad \bar{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000$$

ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔مساوات 24.142* میں $0.5\alpha = 2.5\,\%$ ، $1 - 0.5\alpha = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں 14 درجہ آزادی سے $c_1 = -2.15$ اور $c_2 = 2.15$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 24.144 میں $n = 8$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$t_0 = \frac{\sqrt{8} \cdot 7.625}{\sqrt{190.125}} = 1.56$$

چونکہ $c_1 \leq t_0 \leq c_2$ ہے ہم دونوں صورتوں میں ایک جیسی اوسط کے قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

پہلی صورت اس مثال پر لاگو ہوتی ہے چونکہ پہلی دونوں نمونوں کی پہلی نمونی قیمت ایک قسم کے کام کے لئے حاصل کی گئی۔اسی طرح دونوں نمونوں کی دوسری نمونی قیمت کسی دوسرے کام کے لئے حاصل کی گئی، وغیرہ۔یوں ہم ان نمونی قیمتوں کا مطابقتی فرق

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

اور مثال 24.24 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0$ پرکھ سکتے ہیں جہاں $\mu$ اس فرق کی اوسط ہے۔ہم اس کا منطقی متبادل $\mu \neq 0$ لیتے ہیں۔نمونی اوسط $\bar{d} = 7.625$ اور نمونی تغیریت $s^2 = 45.696$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$t = \frac{\sqrt{8}(7.625 - 0)}{\sqrt{45.696}} = 3.19$$

$P(T \leq c_1) = 2.5\,\%$ ، $P(T \leq c_2) = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں $n - 1 = 7$ درجہ آزادی سے $c_1 = -2.37$ اور $c_2 = 2.37$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں چونکہ $t = 3.19$ معلوم شدہ $c_1$ اور $c_2$ کے بیچ نہیں پایا جاتا ہے۔اس طرح ہمارا موجودہ پرکھ، جو اسی نمونوں پر مبنی ہے لیکن زیادہ معلومات کو استعمال کرتا ہے، دکھاتا ہے کہ نتائج میں فرق کافی ہے۔ □

**مثال 24.27: (دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا موازنہ)**
گزشتہ مثال کے دو نمونے استعمال کرتے ہوئے قیاس $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو پرکھیں۔فرض کریں کہ مطابقتی آبادیاں عمومی

ہیں اور تجربہ کی نوعیت سے متبادل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ہو گا۔
**حل:** ہم $s_1^2 = 106.125$ اور $s_2^2 = 84.000$ حاصل کرتے ہیں۔ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔ $P(V \le c) = 1 - \alpha = 95\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 8.ج میں $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7,7)$ درجہ آزادی سے $c = 3.79$ تعین ہوتا ہے۔ہم آخر میں $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.26$ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $v_0 \le c$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔اگر $v_0 > c$ ہوتا ہم اس کو نا منظور کرتے۔

قیاس درست ہونے کی صورت میں $v_0$ ایسے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے جس کی تقسیم درجہ آزادی $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ کی $F$ **تقسیم**[165] ہے۔ $(m, n)$ درجہ آزادی کے $F$ تقسیم[166] کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہے

$$F(z) = \begin{cases} K_{mn} \int_0^z t^{\frac{m-2}{2}} (mt + n)^{-\frac{m+n}{2}} \, \mathrm{d}t & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \tag{24.145}$$

جہاں $K_{mn} = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})}$ ہے۔ □

## سوالات

سوال 24.201: صفحہ 1552 پر جدول 24.6 میں امجد کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ سکہ منصفانہ ہے، یعنی خط اور شیر کا احتمال ایک جیسا ہے۔ $\alpha = 5\,\%$ منتخب کریں۔
جواب: اگر قیاس $p = 0.5$ درست ہو تب 4040 کوششوں میں خط کی تعداد $X =$ تقریباً عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 2020$ اور تغیریت $\sigma^2 = 1010$ ہو گی (حصہ 24.10)۔
$P(X \le c) = \Phi(\frac{c - 2020}{\sqrt{1010}}) = 0.95, \; c = 2072 > 2048$ ہے لہٰذا قیاس نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.202: مشرف کا مواد استعمال کرتے ہوئے سوال 24.201 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.203: عمومیت تصور کرتے ہوئے اور $\sigma^2 = 4$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = 15.0$ کو متبادل (الف) $\mu = 12.0$ اور (ب) $\mu = 15.8$ کے بالمقابل پرکھیں۔نمونی جسامت 10 اور نمونی اوسط $\overline{x} = 14$ لیں

[165] F-distribution
[166] انگلستانی ماہر جینیات رونلڈ ایلمر فشر [1890-1962]

جبکہ $\alpha = 5\,\%$ منتخب کریں۔
جواب: (الف) $c = 13.96 > 12.00$ ہے۔ قیاس کو نامنظور کریں۔
(ب) $c = 16.04 > 15.80$ ہے۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.204: اگر بڑی نمونی جسامت، مثلاً 100، استعمال کی جائے تب سوال 24.203 میں باقی مواد ($\overline{x} = 14$ ، $\alpha = 5\,\%$ ، وغیرہ) تبدیل کیے بغیر نتیجے میں کیا تبدیلی پیدا ہو گی؟

سوال 24.205: دو طرفہ پرکھ، $5\,\%$ سطح پر استعمال کرتے ہوئے سوال 24.203 میں خطہ نامنظوری تلاش کریں؟
جواب: $\mu < 13.76$ یا $\mu > 16.24$

سوال 24.206: سوال 24.203-الف میں پرکھ کی طاقت تلاش کریں۔

سوال 24.207: مثال 24.23-الف اور ب کی خاصیت کارکردگی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.208: دکھائیں کہ عمومی تقسیم میں قیاس $H_0 : \mu = \mu_0$ اور متبادل $H_1 : \mu = \mu_1$ کی پرکھ میں دو اقسام کی غلطیوں کو نمونی جسامت کافی بڑھا کر جتنا چاہیں کم (ماسوائے صفر کرنے کے) کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.209: $\mu = 0$ کو $\mu > 0$ کے بالمقابل سطح $\alpha = 5\,\%$ پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونہ $1, -1, 1, 3, -8, 6, 0$ لیں جو مصنوعی سیارہ ٹلسٹار کی 143 ویں گردش میں مدار سے مضرب 0.01 ریڈیئن انحراف ہے۔
جواب: $t = \sqrt{7}\frac{0.286-0}{4.31} = 0.18 < c = 1.94$ ہے لہٰذا قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.210: مثال 24.1 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0.80\,\text{cm}$ (ڈبے پر درج لمبائی) کو متبادل $\mu \neq 0.80\,\text{cm}$ کے مقابل پرکھیں۔ (عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ لیں۔)

سوال 24.211: ایک مشین ڈبوں میں فی ڈبہ $1000\,\text{g}$ تیل بھرتی ہے۔ آپ جاننا چاہتے ہیں کہ آیا $\alpha = 5\,\%$ سطح پر اوسط کی درکار کمیت $1000\,\text{g}$ سے تجاوز زیادہ ہے۔ اگر ایسا ہو تب مشین میں مطابقت پیدا کرنی ہو گی۔ ایک قیاس اور متبادل بنائیں اور انہیں پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونی جسامت 20 جس کی اوسط $996\,\text{g}$ اور معیاری انحراف $5\,\text{g}$ ہو استعمال کریں۔
جواب: متبادل $\mu \neq 1000$ ، $t = \sqrt{20}\frac{996-1000}{5} = -3.58 < c = -2.09$ (ضمیمہ ج جدول 6.ج درجہ آزادی 19)۔ قیاس $\mu = 1000\,\text{g}$ کو نامنظور کریں۔

سوال 24.212: ایک مخصوص ٹائر کی اوسط زندگی $32\,000\,\text{km}$ اور معیاری انحراف $4000\,\text{km}$ ہے۔ کیا ٹائر کا پیداکار یہ دعویٰ کر سکتا ہے کہ اس کے بنائے ہوئے ٹائروں کی اوسط زندگی $30\,000\,\text{km}$ سے زیادہ ہے۔ متبادل قیاس بناتے ہوئے اس کو $5\,\%$ سطح پر پرکھیں۔

سوال 24.213: برقی دباو کو بیک وقت دو عدد وولٹ پیما سے ناپا جاتا ہے۔ ان کے نتائج میں فرق

$$0.8, 0.2, -0.3, 0.1, 0.0, 0.5, 0.2$$

وولٹ ہے۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے کیا ہم $5\,\%$ سطح کے لحاظ سے وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ دونوں وولٹ پیما کی پیمانہ بندی[167] میں کوئی معنی خیز فرق نہیں پایا جاتا ہے۔
جواب: $\mu = 0$ کو متبادل $\mu \neq 0$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ $t = 2.11 < c = 2.37$ (درجہ آزادی 7)۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.214: ایک معیاری دوائی ایک مخصوص مرض میں مبتلا $70\,\%$ مریضوں کو صحتیاب کرتی ہے اور ایک نئی دوائی پہلے 200 مریضوں میں سے 148 کو صحتیاب کرتی ہے۔ کیا $\alpha = 5\,\%$ لیتے ہوئے ہم وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ نئی دوائی زیادہ بہتر ہے؟

سوال 24.215: ماضی میں ایک مشین جو فی ڈبہ $25\,\text{kg}$ چینی بھرتی تھی کا معیاری انحراف $0.4\,\text{kg}$ تھا۔ قیاس $H_0 : \sigma = 0.4$ کو متبادل $H_1 : \sigma > 0.4$ کے بالمقابل پرکھیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے نمونی جسامت 10 جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.4$ ہو لیں اور $\alpha = 5\,\%$ منتخب کریں۔
جواب: $\alpha = 5\,\%, c = 16.92 > \frac{9 \cdot 0.5^2}{0.4^2} = 14.06$ ہے۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.216: فرض کریں کہ معیاری انحراف کسی مخصوص حد سے کم، مثلاً، 5 گھنٹوں سے کم، ہونے کی صورت میں بیٹری سے چلنے والی مشینوں میں تمام بیٹریوں کو مخصوص مدت کے بعد بیک وقت تبدیل کرنا کم مہنگا پڑتا ہے بہ نسبت ہر بیٹری کو اس وقت تبدیل کرنے کے جب وہ خراب ہو جائے۔ ایک موزوں پرکھ بنا کر اس قیاس کو پرکھیں۔ عرصہ زندگی کے 28 قیمتیں جن کا معیاری انحراف $s = 3.5$ گھنٹے ہو استعمال کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ لیں۔ عمومیت تصور کریں۔

سوال 24.217: تیل کی قسم $A$ کو 9 ایک جیسی گاڑیوں میں ایک جیسے حالات میں استعمال کیا گیا جنہوں نے اوسط 20.2 کلومیٹر فی لٹر اور معیاری انحراف 0.5 دیا۔ انہیں حالات میں تیل کی بہتر قسم $B$ کو اس جیسی

[167] calibration

10 گاڑیوں میں استعمال کیا گیا جن سے اوسط 21.8 اور معیاری انحراف 0.6 حاصل ہوا۔ کیا $B$ بہت بہتر نتائج دیتا ہے؟اس قیاس کو $\alpha = 5\,\%$ پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کریں۔
جواب: $t_0 = \sqrt{\frac{10 \cdot 9 \cdot 17}{19}} \frac{21.8-20.2}{\sqrt{9 \cdot 0.6^2 + 8 \cdot 0.5^2}} = 6.3 > c = 1.74$ (درجہ آزادی 17 ہے۔)

سوال 24.218: ماسوائے عرصہ زندگی، بلب $A$ اور $B$ ایک جیسے ہیں۔ایک خریدار دونوں قسم کے 100 بلب کو پرکھتا ہے۔قسم $A$ کی اوسط عرصہ زندگی $1120\,\mathrm{h}$ اور معیاری انحراف $75\,\mathrm{h}$ جبکہ $B$ کی اوسط $1064\,\mathrm{h}$ اور معیاری انحراف $82\,\mathrm{h}$ حاصل ہوتے ہیں۔ کیا عرصہ زندگی میں معنی خیز فرق پایا جاتا ہے؟ (عمومیت فرض کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ سطح پر پرکھیں۔)

سوال 24.219: نمونی جسامت 10 اور 16 اور تغیریت $s_1^2 = 50$ اور $s_2^2 = 30$ لیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ سطح پر قیاس $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو متبادل $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ کے بالمقابل پرکھیں۔
جواب: $v_0 = \frac{50}{30} = 1.67 < c = 2.59$ [درجہ آزادی $(9, 15)$ ہے۔] قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.220: دو نمونے $50, 90, 100, 90, 110, 80$ اور $110, 110, 120, 110, 130, 110, 120$ لوہے کی ڈھلائی کے دوران دو مختلف بالٹیوں میں دو مختلف وقتوں پر درجہ حرارت $(^\circ\mathrm{C})$ میں فرق دیتی ہیں۔ کیا پہلے نمونہ کی تغیریت دوسرے سے زیادہ ہے؟ عمومیت فرض کریں اور $\alpha = 5\,\%$ لیں۔

## 24.16 ضبط معیار

پیداوار کا کوئی بھی عمل اتنا ٹھیک نہیں ہوتا ہے کہ تمام پیداوار مکمل طور پر ایک جیسی ہو۔ بہت ساری معمولی، غیر قابو وجوہات کی بنا ان میں ہر صورت معمولی فرق پایا جاتا ہے جس کو امکانی فرق تصور کیا جا سکتا ہے۔یہ ضروری ہے کہ پیداوار کی درکار خاصیت کی قیمت درست ہو (مثلاً لمبائی، مضبوطی، یا جو بھی خاصیت کسی مخصوص صورت میں درکار ہو)۔ اس مقصد کے لئے اس قیاس کو پرکھا جاتا ہے کہ پیداوار درکار خاصیت، مثلاً $\mu = \mu_0$ ، رکھتے ہیں جہاں $\mu_0$ درکار قیمت ہے۔اگر ایسا پوری کھیپ کی پیداوار (مثلاً، 100000 پیچوں کی کھیپ) کے بعد کیا جائے تب پرکھ ہمیں بتائے گا کہ پیداوار کتنی اچھی یا کتنی خراب ہے لیکن ظاہر ہے کہ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کوئی بہتری نہیں لا سکتے ہیں۔ بہتری لانے کے لئے ضروری ہے کہ پرکھ دوران پیداوار کیا جائے۔ایسا عموماً مقررہ دورانیہ (مثلاً ہر

30 منٹ یا ہر گھنٹہ) بعد جاتا ہے اور اس کو **ضبط معیار**[168] کہتے ہیں۔ہر مرتبہ ایک جیسی جسامت (عملاً 3 یا 10 اجزاء) کا نمونہ لیا جاتا ہے۔قیاس نا منظور ہونے کی صورت میں عمل پیداوار روک کر اس وجہ کو تلاش کیا جاتا ہے جس کی بنا انحراف پیدا ہوا ہے۔

اگر ہم عمل پیداوار کو روک دیں اگرچہ سب ٹھیک چل رہا ہو تب ہم غلطی قسم اول کر رہے ہوں گے۔اگر خرابی کے باوجود ہم عمل پیداوار کو نا روکیں تب ہم غلطی قسم دوم کر رہے ہوں گے (حصہ 24.15)۔

ہر پرکھ کا نتیجہ کو ترسیمی صورت میں **نقشہ ضبط**[169] پر ظاہر[170] کیا جاتا ہے۔

#### اوسط کا نقشہ ضبط

شکل 24.22 میں نقشہ ضبط کی مثال دکھائی گئی ہے۔اوسط کے نقشہ ضبط پر **نچلی حد ضبط**[171] LCL ، **وسطی خط ضبط**[172] CL اور **بالائی حد ضبط**[173] UCL دکھائے گئے ہیں۔ یہ حدود مثال 24.23-پ میں فاصل قیمتوں $c_1$ اور $c_2$ کے مطابقتی ہیں۔جیسے ہم نمونی اوسط نچلی حد ضبط یا بالائی حد ضبط سے تجاوز کر جائے ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ عمل پیداوار "بے قابو" ہے، یعنی، ہم کہتے ہیں کہ عمل پیداوار میں تبدیلی رو نما ہوئی ہے۔جب بھی کوئی نقطہ حدود ضبط سے تجاوز کرے عمل پیداوار میں مداخلت کی ضرورت ہو گی۔

اگر ہم حدود ضبط ڈھیلے رکھیں تب ہم عمل پیداوار میں نا پسندیدہ تبدیلی کو پکڑ نہیں پائیں گے۔اس کے برعکس حدود ضبط بہت سخت رکھنے سے ہم بار بار عمل پیداوار کو روک کر نا پسندیدہ تبدیلی کی غیر موجود وجہ تلاش کرتے رہیں گے جس سے پیداوار بری طرح متاثر ہو گی۔عموماً معنی خیز سطح $\alpha = 1\,\%$ منتخب کی جاتی ہے۔صفحہ 1626 پر مسئلہ 24.20 اور ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کی صورت میں اوسط کے مطابقتی حد ضبط

$$\text{LCL} = \mu_0 - 2.58\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{اور} \quad \text{UCL} = \mu_0 + 2.58\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{24.146}$$

ہوں گے۔یہاں فرض کیا گیا ہے کہ ہمیں $\sigma$ معلوم ہے۔اگر $\sigma$ نامعلوم ہو تب پہلی 20 یا 30 نمونوں کی معیاری انحراف حاصل کر کے ان کی اوسط کو $\sigma$ کی تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل 24.22 میں اوسط کو لکیر سے جوڑا جاتا ہے جو محض نتائج کو واضح کرنے میں مدد دیتی ہے۔

---

[168] quality control
[169] control chart
[170] امریکی ماہر شماریات والٹر انڈر وشوہارٹ [1891-1967] نے یہ نقشہ 1924 میں تجویز کیا جو معیار کو قابو کرنے میں انتہائی موثر ثابت ہوا ہے۔
[171] lower control limit (LCL)
[172] central control line (CL)
[173] upper control limit (UCL)

### تغیریت کا نقشہ ضبط

اوسط کے ساتھ ساتھ عموماً تغیریت، معیاری انحراف یا سعت کو بھی قابو رکھا جاتا ہے۔ عمومی تقسیم کی صورت میں معیاری انحراف کا نقشہ ضبط بناتے ہوئے مثال 24.25 میں استعمال ترکیب بروئے کار لاتے ہوئے حدود ضبط تعین کیے جا سکتے ہیں۔ روایتی طور پر صرف بالائی حد ضبط استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال 24.25 سے یہ حد

$$\text{UCL} = \frac{\sigma^{\,2} c}{n-1} \tag{24.147}$$

ہو گا جہاں $c$ کو مساوات

$$P(Y > c) = \alpha \qquad \implies \qquad P(Y \le c) = 1 - \alpha$$

اور ضمیمہ ج کی جدول 7.ج (مربع خا تقسیم) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کیا جاتا ہے؛ یہاں نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ $S^2$ کی حاصل قیمت $s^2$ کا بالائی حد ضبط سے تجاوز کا احتمال $\alpha$ ( $5\,\%$ یا $1\,\%$ ) ہے۔

اگر ہم تغیریت کے نقشہ ضبط میں نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط استعمال کرنا چاہیں تب یہ حدود

$$\text{LCL} = \frac{\sigma^2 c_1}{n-1}, \quad \text{UCL} = \frac{\sigma^2 c_2}{n-1} \tag{24.148}$$

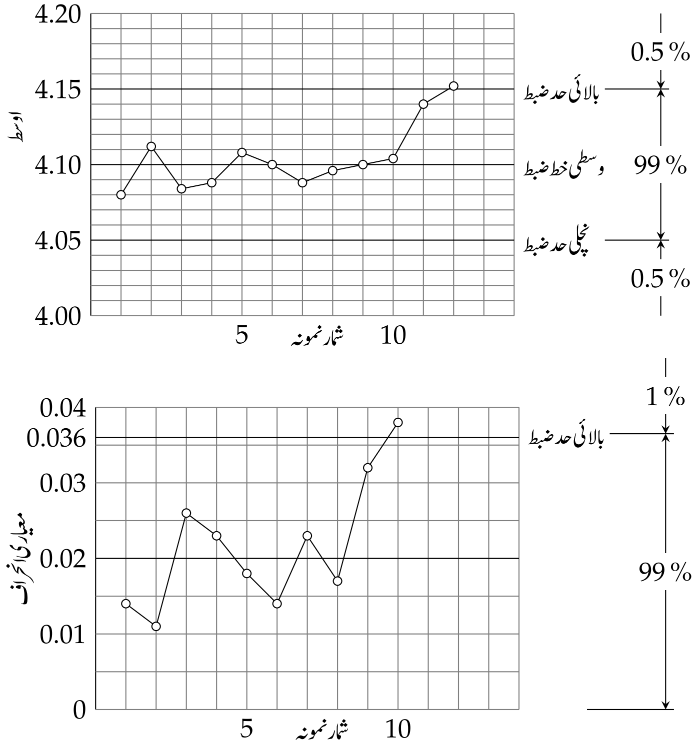
ہوں گے جہاں $c_1$ اور $c_2$ کو $n-1$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(Y \le c_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(Y \le c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \tag{24.149}$$

### معیاری انحراف کا نقشہ ضبط

تغیریت کے نقشہ ضبط کی طرح ہمیں بالائی حد ضبط

$$\text{UCL} = \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{n-1}} \tag{24.150}$$




شکل 24.22: اوسط اور معیاری انحراف کے نقشہ ضبط برائے جدول 24.12

جدول 24.12: بارہ نمونے جہاں ہر نمونہ 5 قیمتوں (چھوٹی نلکیوں کے ملی میٹروں میں قطر) پر مشتمل ہے

| نمونی شمار | نمونی قیمتیں | | | | | $\overline{x}$ | $s$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.06 | 4.08 | 4.08 | 4.08 | 4.10 | 4.080 | 0.014 | 0.04 |
| 2 | 4.10 | 4.10 | 4.12 | 4.12 | 4.12 | 4.112 | 0.011 | 0.02 |
| 3 | 4.06 | 4.06 | 4.08 | 4.10 | 4.12 | 4.084 | 0.026 | 0.06 |
| 4 | 4.06 | 4.08 | 4.08 | 4.10 | 4.12 | 4.088 | 0.023 | 0.06 |
| 5 | 4.08 | 4.10 | 4.12 | 4.12 | 4.12 | 4.108 | 0.018 | 0.04 |
| 6 | 4.08 | 4.10 | 4.10 | 4.10 | 4.12 | 4.100 | 0.014 | 0.04 |
| 7 | 4.06 | 4.08 | 4.08 | 4.10 | 4.12 | 4.088 | 0.023 | 0.06 |
| 8 | 4.08 | 4.08 | 4.10 | 4.10 | 4.12 | 4.096 | 0.017 | 0.04 |
| 9 | 4.06 | 4.08 | 4.10 | 4.12 | 4.14 | 4.100 | 0.032 | 0.08 |
| 10 | 4.06 | 4.08 | 4.10 | 4.12 | 4.16 | 4.104 | 0.038 | 0.10 |
| 11 | 4.12 | 4.14 | 4.14 | 4.14 | 4.16 | 4.140 | 0.014 | 0.04 |
| 12 | 4.14 | 4.14 | 4.16 | 4.16 | 4.16 | 4.152 | 0.011 | 0.02 |

درکار ہو گا جس کو مساوات 24.147 سے حاصل کیا گیا ہے۔مثال کے طور پر جدول 24.12 میں $n = 5$ ہے۔مطابقتی آبادی کو عمومی تصور کرتے ہوئے جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.02$ ہو، $\alpha = 1\%$ منتخب کرتے ہوئے 4 درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور مساوات

$$P(Y \leq c) = 1 - \alpha = 99\,\%$$

سے فاصل قیمت $c = 13.28$ حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 24.150 سے

$$\text{UCL} = \frac{0.02\sqrt{13.28}}{\sqrt{4}} = 0.0365$$

حاصل ہو گا جس کو شکل 24.22 کے نچلے حصے میں دکھایا گیا ہے۔

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط جس میں بالائی حد ضبط اور نچلا حد ضبط پائے جاتے ہوں کو مساوات 24.148 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

### سعت کا نقشہ ضبط

اگر ہم $\sigma^2$ یا $\sigma$ کو قابو رکھتے ہوں تب ہمیں بالترتیب $s^2$ یا $s$ کا حساب کرنا ہو گا۔ایسا کرنا غیر تربیت یافتہ شخص کے لئے مشکل ہوتا ہے لہٰذا ہم تغیریت یا معیاری انحراف کی حد ضبط کی جگہ سعت $R =$ (نمونہ کی زیادہ

سے زیادہ قیمت منفی نمونہ کی کم سے کم قیمت) استعمال کرنا چاہیں گے۔ عمومی تقسیم کی صورت میں یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ معیاری انحراف $\sigma$ کی قیمت بلا منصوبہ متغیر $R^*$ کی توقع کے راست متناسب ہے جس کی مشاہدے سے حاصل قیمت $R$ ہو، یعنی $\sigma = \lambda_n E(R^*)$ ، جہاں جزو $\lambda_n$ کی قیمت نمونی جسامت پر منحصر ہے اور اس کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_n = \sigma/E(R^*)$ | 0.89 | 0.59 | 0.49 | 0.43 | 0.40 | 0.37 | 0.35 | 0.34 | 0.32 |

| $n$ | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_n = \sigma/E(R^*)$ | 0.31 | 0.29 | 0.28 | 0.28 | 0.27 | 0.25 | 0.23 | 0.22 |

چونکہ $R$ صرف دو نمونی قیمتوں پر منحصر ہے لہٰذا یہ نمونے کے بارے میں $s$ کے لحاظ سے کم معلومات فراہم کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ نمونی جسامت $n$ جتنی بڑی ہو گی، $s$ کی جگہ $R$ استعمال کرنے سے، اتنی زیادہ معلومات ہم ضائع کریں گے۔ عملاً اگر $n$ کی قیمت 10 سے زائد ہو تب $s$ استعمال کیا جاتا ہے۔

دھیان رہے کہ سعت سے معیاری انحراف کا جلدی سے اندازہ لگانا عملی استعمال میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

## سوالات

سوال 24.221: ایک مشین چکنا تیل کو ٹین کی بوتل میں یوں بھرتی ہے کہ عمومی آبادی حاصل ہو جس کی اوسط 1 لٹر اور معیاری انحراف 0.03 لٹر ہو۔ اوسط کے لئے شکل 24.22 کی طرح نقشہ درکار ہے۔ نمونی جسامت 6 فرض کرتے ہوئے نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط تلاش کریں۔
جواب: نچلی حد ضبط $\text{LCL} = 1 - \frac{2.58 \cdot 0.03}{\sqrt{6}} = 0.968$ جبکہ بالائی حد ضبط $\text{UCL} = 1.032$

سوال 24.222: سوال 24.221 میں دکھائیں کہ $\alpha = 0.3\,\%$ سطح سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔ ان کی اعدادی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{LCL} = \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{UCL} = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

سوال 24.223: معنی خیز سطح تبدیل کیے بغیر ہمیں سوال 24.221 میں نمونی جسامت کتنی رکھنی ہو گی تاکہ بالائی اور نچلی حد ضبط قریب قریب ہوں، مثلاً $\text{UCL} - \text{LCL} = 0.05$
جواب: $n = 10$

سوال 24.224: اگر ہم غیر عمومی آبادی کے لئے مساوات 24.146 کے حدود ضبط والا نقشہ ضبط استعمال کریں تب ان حدود کا کیا مطلب ہو گا؟

سوال 24.225: عمومی آبادی کی اوسط قابو کرتے ہوئے $\text{UCL} - \text{LCL}$ کو نصف کرنے کی خاطر نمونی جسامت کو کس طرح تبدیل کرنا ہو گا؟
جواب: نمونی جسامت کو 4 گنا بڑھانا ہو گا۔

سوال 24.226: قابلوں کی پیداوار میں سے 2 جسامت کے 10 نمونے لئے گئے۔ان کی لمبائی ملی میٹروں میں درج ذیل ہے۔

| نمونی شمار | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| لمبائی | 27.4 | 27.4 | 27.5 | 27.3 | 27.9 | 27.6 | 27.6 | 27.8 | 27.5 | 27.3 |
| | 27.6 | 27.4 | 27.7 | 27.4 | 27.5 | 27.5 | 27.4 | 27.3 | 27.4 | 27.7 |

فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 27.5 اور تغیریت 0.024 ہے۔مساوات 24.146 استعمال کرتے ہوئے اوسط کے لئے نقش ضبط بنائیں اور نمونی اوسط اس پر ترسیم کریں۔
جواب: $\frac{2.58\sqrt{0.024}}{\sqrt{2}} = 0.283, \text{UCL} = 27.783, \text{LCL} = 27.217$

سوال 24.227: لوہے کی چادر موٹائی کے درج ذیل نمونے 30 منٹ کے وقفوں پر حاصل کیے گئے۔ان کی اوسط کو نقش ضبط پر ترسیم کریں۔فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 5 اور معیاری انحراف 1.55 ہے۔

| نمونی شمار | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| نمونی قیمتیں | 3 | 3 | 5 | 7 | 7 | 4 | 5 | 6 | 5 | 5 |
| | 4 | 6 | 2 | 5 | 3 | 4 | 6 | 4 | 5 | 2 |
| | 8 | 6 | 5 | 4 | 6 | 3 | 4 | 6 | 6 | 5 |
| | 4 | 8 | 6 | 4 | 5 | 6 | 6 | 4 | 4 | 3 |

سوال 24.228: سعت کے نقشہ ضبط پر سوال 24.227 کے نمونی سعت کو ترسیم کریں۔

سوال 24.229: $\lambda_n = \frac{\sigma}{E(R^*)}$ بالمقابل $n$ ترسیم کریں۔ $\lambda_n$ متغیر $n$ کا یک سر گھٹتا تفاعل ہے۔اس کی وجہ بیان کریں۔

سوال 24.230: حدود ضبط کے باہر اوسط کا نقطہ نظام میں خرابی کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہم (الف) $1\sigma$ حد، (ب) $2\sigma$ حد، منتخب کریں تب ہم کتنی بار نظام میں غیر موجود خرابی کو تلاش کرنے کی کوشش کریں گے۔ (عمومیت فرض کریں۔)
جواب: تقریباً $30\,\%$ $(5\,\%)$ صورتوں میں

سوال 24.231: ایک خود کار خراد کی مشین پر قابلے بنائے جاتے ہیں۔ مسلسل رگڑ سے پیدا تبدیلی، اوسط کی نقش ضبط پر کس طرح رونما ہو گی؟ خراد کی مشین میں یک دم تبدیلی کس طرح نقش ضبط پر نظر آئے گی؟

سوال 24.232: **(عیب داروں کی تعداد)** $3\sigma$ حدود ضبط کے لحاظ سے UCL ، CL اور LCL کے کلیات عیب دار کے نقشہ ضبط کے لئے تلاش کریں۔ (فرض کریں کہ شماریاتی ضبط میں $p$ عیب دار کو ظاہر کرتا ہے۔)

$$\mathrm{UCL} = np + 3\sqrt{np(1-p)}, \mathrm{CL} = np, \mathrm{LCL} = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

سوال 24.233: **خاصیت کی نقش ضبط** برتنوں کی پیداوار سے جسامت 100 کے نمونے حاصل کیے گئے۔ عیب دار (رستا برتنوں) کی تعداد (اسی ترتیب سے) درج ذیل تھی۔

3 7 6 1 4 5 4 9 7 0 5 6 13 4 9 0 2 1 12 8

گزشتہ تجربہ سے ہم جانتے ہیں کہ اگر عمل پیداوار میں خرابی نہ ہو تب عیب دار کی اوسط تعداد $p\%$ ہوتی ہے۔ ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے عیب دار نقشہ ضبط (جس کو $p$ نقشہ بھی کہتے ہیں) بنائیں، یعنی، $\mathrm{LCL} = 0$ لیں اور $3\sigma$ حدود کے لئے حاصل عیب دار (فی صد) کو UCL لیں، جہاں بلا منصوبہ متغیر $\overline{\mathrm{X}} =$ نمونہ میں فی صد عیب دار کی تغیریت $\sigma^2$ ہے۔ کیا عمل پیداوار قابو میں ہے؟

سوال 24.234: **فی اکائی عیب دار کی تعداد** فی اکائی عیب دار کے نقشہ (جس کو $c$ نقشہ بھی کہتے ہیں) کو فی اکائی عیب دار $X$ (مثلاً 10 میٹر کاغذ میں عیبوں کی تعداد، جہاز کے ایک پر میں غیر موجود کیلوں کی تعداد، وغیرہ) کو قابو کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ (الف) $X$ کی تقسیم کو پوئسن تقسیم تصور کرتے ہوئے $\mu \mp 3\sigma$ کے لحاظ سے CL ، LCL اور UCL کے کلیات بنائیں۔ (ب) شیشے کی چادر میں عیب کے لئے **عمل قابو**[174] کے لئے CL ، LCL اور UCL تلاش کریں؛ فرض کریں کہ جب عمل پیداوار شماریاتی قابو میں ہو تب اوسطاً یہ عدد 2.5 فی چادر ہے۔

[174] control process

## 24.17 قبولیت نمونہ

بڑے پیمانہ پر پیداوار میں، جہاں پیداکار خریدار کو $N$ اشیاء کی کھیپ مہیا کرتا ہے، قبولیت نمونہ لاگو کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں ہر کھیپ کو قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ کرنا ہو گا۔ کھیپ سے $n$ جسامت کے نمونے کا معائنہ کرتے ہوئے **عیب دار اشیاء**، جنہیں مختصراً **عیب دار**[175] کہتے ہیں، کی تعداد کو مد نظر رکھ کر عموماً فیصلہ کیا جاتا ہے۔ جو اشیاء درکار تخصیص (بیان کردہ خواص، مثلاً جسامت، رنگ، مضبوطی، یا جو بھی اہمیت رکھتا ہو) پر پورا نہیں اترتے ہیں، انہیں عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔ اگر نمونہ میں عیب دار اشیاء کی تعداد $x$ طے شدہ عدد $c\,(< n)$ سے زیادہ نہ ہو تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اگر $x > c$ ہو تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔ $c$ کو عیب دار کی قابل قبول تعداد یا **تعداد قبولیت**[176] کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ پیدا کار اور خریدار کو **نمونی منصوبہ**[177] پر اتفاق کرنا ہو گا، یعنی، نمونی جسامت $n$ کی قیمت اور تعداد قبولیت $c$ کی قیمت۔چونکہ یہ ایک نمونہ پر منحصر ہے لہٰذا اس کو **واحد نمونی منصوبہ**[178] کہتے ہیں۔ **دوہرا نمونی منصوبہ** پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

فرض کریں کہ کھیپ قبول ہونے کا وقوعہ $A$ ہے۔ظاہر ہے کہ مطابقتی احتمال $P(A)$ نا صرف $n$ اور $c$ بلکہ کھیپ میں عیب داروں کی تعداد $M$ پر بھی منحصر ہے۔فرض کریں کہ نمونہ میں عیب داروں کی تعداد بلا منصوبہ متغیر $X$ ہے اور ہم بغیر واپس رکھے نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ تب (حصہ 24.9)

$$P(A) = P(X \le c) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{24.151}$$

ہو گا۔اگر $M = 0$ (کھیپ میں کوئی عیب دار نہیں ہے) ہو تب $X$ کی قیمت لازماً $0$ ہو گی اور

$$P(A) = \frac{\binom{0}{0}\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$$

ہو گا۔مقررہ $n$ اور $c$ اور بڑھتے $M$ کی صورت میں احتمال $P(M)$ گھٹتا ہے۔اگر $M = N$ (کھیپ میں تمام اشیاء عیب دار) ہو، تب $X$ کی قیمت لازماً $n$ ہو گی اور $P(A) = P(X \le c) = 0$ ہو گا چونکہ $c < n$ ہے۔

---

[175] defectives
[176] acceptance number
[177] sampling plan
[178] single sampling plan

نسبت $\theta = \frac{M}{N}$ کو کھیپ میں **نسبت عیب دار**[179] کہتے ہیں۔دھیان رہے کہ $M = N\theta$ ہے اور مساوات 24.151 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P(A;\theta) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{N\theta}{x}\binom{N-N\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{24.152}$$

چونکہ $\theta$ کی قیمت $N+1$ قیمتوں $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, \frac{N}{N}$ میں سے ایک ہو سکتی ہے، احتمال $P(A)$ صرف ان قیمتوں کے لئے معین ہو گا۔مقررہ $n$ اور $c$ کے لئے ہم $P(A)$ بالمقابل $\theta$ ترسیم کر سکتے ہیں۔یہ $N+1$ نقطے ہوں گے۔ان نقطوں سے ہموار منحنی گزاری جا سکتی ہے جس کو مد نظر نمونی منصوبہ کی **منحنی خاصیت کارکردگی**[180] ( OC منحنی) کہتے ہیں۔

مثال 24.28: لکڑی میں سوراخ کرنے والی ایک مخصوص قسم کے ورموں کو 20 فی ڈبیا بند کیا جاتا ہے اور مذکورہ زیر نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ 2 ورموں کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے اور دونوں ورمے غیر عیب دار ہونے کی صورت میں ڈبے کو قبول کیا جاتا ہے۔یہاں $N = 20$ ، $n = 2$ ، $c = 0$ ہیں لہٰذا مساوات 24.152 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$P(A;\theta) = \frac{\binom{20\theta}{0}\binom{20-20\theta}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{(20-20\theta)(19-20\theta)}{380}$$

اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

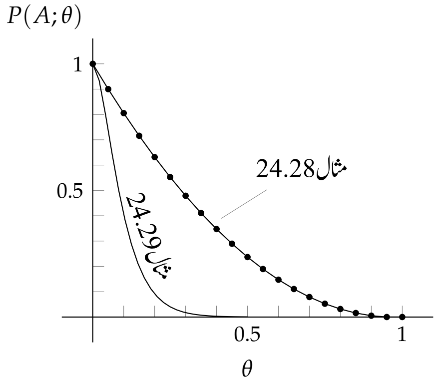
| $\theta$ | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(A;\theta)$ | 1.00 | 0.90 | 0.81 | 0.72 | 0.63 | $\cdots$ |

منحنی خاصیت کارکردگی کو شکل 24.23 میں دکھایا گیا ہے۔ □

عملی صورتوں میں عموماً $\theta$ چھوٹا ہو گا ( 10% سے کم)۔ عموماً صورتوں میں جسامت کھیپ $N$ بہت بڑا ( 1000 ، 10000 ، وغیرہ) ہو گا لہٰذا ہم مساوات 24.151 اور مساوات 24.152 میں بیش ہندسی تقسیم کو تخمیناً ثنائی تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں جس میں $p = \theta$ لیا جائے گا۔اب اگر $n$ ایسا ہو کہ $n\theta$ معتدل (مثلاً 20 سے کم)

---

[179] fraction defective
[180] operating characteristic curve




شکل 24.23: منحنیات خاصیت کارکردگی برائے مثال24.28 اور مثال24.29

ہو، تب ہم اس تقسیم کو $\mu = np$ اوسط کی پوئسن تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں۔یوں مساوات 24.152 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(A;\theta) \sim e^{-\mu} \sum_{x=0}^{c} \frac{\mu^x}{x!} \qquad (\mu = n\theta) \tag{24.153}$$

مثال 24.29: فرض کریں کہ بری کھیپ کے لئے مذکورہ ذیل واحد نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ $n = 20$ نمونہ لیا جاتا ہے۔اگر اس میں 1 سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اگر نمونہ میں 2 یا اس سے زیادہ عیب دار ہوں تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔اس منصوبہ میں مساوات 24.153 درج ذیل دیتا ہے

$$P(A;\theta) \sim e^{-20\theta}(1 + 20\theta)$$

جس کی مطابقتی منحنی شکل 24.23 میں دکھائی گئی ہے۔ □

ہم اب قبولیت نمونہ میں دو اقسام کے غلطیوں پر غور کرتے ہیں اور $n$ اور $c$ منتخب کرنے کی تفصیل پیش کرتے ہیں۔قبولیت نمونہ میں پیداکار اور خریدار کے غرض مختلف ہوں گے۔پیداکار چاہے گا کہ "اچھی" یا "قابل قبول" کھیپ کی مسترد ہونے کا احتمال، جس کو ہم $\alpha$ سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ خریدار چاہے گا کہ "خراب" یا "نا قابل قبول" کھیپ کے قبول ہونے کا احتمال، جس کو ہم $\beta$ سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ دونوں اس پر اتفاق کرتے ہیں کہ جس کھیپ کے لئے $\theta$ کی قیمت ایک مخصوص عدد $\theta_0$

جدول 24.13: پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ کا تعلق

| معائنہ نمونہ | پرکھ قیاس |
|---|---|
| سطح قابل قبول معیار $\theta = \theta_0$ | قیاس $\theta = \theta_0$ |
| سطح قابل مسترد معیار $\theta = \theta_1$ | متبادل $\theta = \theta_1$ |
| عیب دار کی قابل قبول تعداد $c$ | فاصل قیمت $c$ |
| $\theta \leq \theta_0$ کھیپ مسترد ہونے کا احتمال $\alpha$ (خطر پیداکار) | قسم اول غلطی کا احتمال $\alpha$ (معنی خیز سطح) |
| $\theta \geq \theta_1$ کھیپ قبول ہونے کا احتمال $\beta$ (خطر خریدار) | قسم دوم غلطی کا احتمال $\beta$ |

سے تجاوز نہ کرے تب کھیپ "قابل قبول" ہو گا جبکہ وہ کھیپ جس کے لئے $\theta$ کی قیمت ایک مخصوص عدد $\theta_1$ کے برابر یا اس سے زیادہ ہو تب کھیپ "نا قابل قبول" ہو گا۔ تب وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \leq \theta_0$ ہو کے مسترد ہونے کا احتمال $\alpha$ ہو گا جس کو **خطر پیداکار**[181] کہتے ہیں۔ یہ قیاس کی پرکھ کی قسم اول غلطی کے مترادف ہے (حصہ 24.15)۔ وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \geq \theta_1$ ہو کے قبول ہونے کا احتمال $\beta$ ہو گا جس کو **خطر خریدار**[182] کہتے ہیں۔ یہ حصہ 24.15 میں قسم دوم غلطی کے مترادف ہے۔ شکل میں ان کی وضاحت کی گئی ہے۔ $\theta_0$ کو **سطح قابل قبول معیار**[183] اور $\theta_1$ کو **سطح قابل مسترد معیار**[184] کہتے ہیں جبکہ کھیپ $\theta_0 < \theta < \theta_1$ کو **لا تعلق کھیپ**[185] کہتے ہیں۔

شکل سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $(\theta_0, 1-\alpha)$ اور نقطہ $(\theta_1, \beta)$ منحنی خاصیت کارکردگی پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ بڑی کھیپ کے لئے ہم $\theta_0$ ، $\theta_1 (> \theta_0)$ ، $\alpha$ ، $\beta$ منتخب کرتے ہوئے $n$ اور $c$ یوں تعین کر سکتے ہیں کہ منحنی خاصیت کارکردگی ان نقطوں کے قریب سے گزرتی ہو۔ متعین $\alpha$ ، $\beta$ ، $\theta_0$ اور $\theta_1$ کے لئے نمونی منصوبے شائع کیے گئے ہیں۔

پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ میں قریبی تعلق پایا جاتا ہے جس کو جدول 24.13 میں دکھایا گیا ہے۔

نمونی عمل ازخود خریدار کو مکمل تحفظ فراہم نہیں کرتا ہے۔ درحقیقت اگر پیداکار کو اجازت ہو کہ وہ خراب کھیپ کو دوبارہ قبول ہونے کے لئے پیش کرے تب آخر کار خراب کھیپ بھی قبول ہو جائیں گے۔ خریدار کو اس صورت حال سے بچانے کی خاطر پیداکار اس بات سے اتفاق کر سکتا ہے کہ مسترد کھیپ کو **سدھارا**[186] جائے گا یعنی اس کا

---

producer's risk[181]
consumer's risk[182]
acceptable quality level[183]
rejectable quality level[184]
indifferent lot[185]
rectified[186]

100% معائنہ کرتے ہوئے ہر جزو کو پرکھا جائے گا اور کھیپ میں تمام عیب دار اشیاء کی جگہ بے عیب اشیاء رکھے جائیں گے[187]۔ فرض کریں ایک کارخانہ $100\theta\%$ عیب دار اشیاء بناتا ہے اور مسترد کھیپ کو سدھارا جاتا ہے۔ تب $N$ جسامت کے $K$ کھیپ میں $KN$ اشیاء ہوں گے جن میں سے $KN\theta$ عیب دار ہوں گے۔ کھیپوں میں سے $KP(A;\theta)$ قبول کیے جائیں گے؛ ان میں کل $KPN\theta$ عیب دار اجزاء ہوں گے۔ مسترد اور سدھارے گئے کھیپ میں کوئی عیب دار جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں سدھارنے کے بعد $K$ کھیپ میں عیب دار کا تناسب $\frac{KPN\theta}{KN} = \theta P(A;\theta)$ ہو گا۔ $\theta$ کی اس تفاعل کو **اوسط خارجی معیار**[188] کہتے ہیں جس کو $\mathrm{AOQ}(\theta)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، یعنی:

$$\mathrm{AOQ}(\theta) = \theta P(A;\theta) \tag{24.154}$$

اگر نمونی منصوبہ دیا گیا ہو تب یہ تفاعل اور منحنی اوسط خارجی معیار کو $P(A;\theta)$ اور منحنی خاصیت کارکردگی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کی مثال شکل میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ $\mathrm{AOQ}(0) = 0$ ہو گا۔ چونکہ $P(A;1) = 0$ ہے لہٰذا $\mathrm{AOQ}(1) = 0$ ہو گا۔ اس سے اور $\mathrm{AOQ}(\theta) \geq 0$ سے ہم یہ نتیجہ حاصل کرتے ہیں کہ کسی $\theta = \theta^*$ پر اس تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جس کی مطابقتی قیمت $\mathrm{AOQ}(\theta^*)$ کو **اوسط خارجی حد معیار**[189] کہتے ہیں۔ یہ خراب ترین معیار ہے جو سدھارنے کے عمل کے ساتھ قابل قبول ہو گا۔

کئی نمونی منصوبے ایک ہی اوسط خارجی حد معیار دے سکتے ہیں۔ یوں اگر خریدار صرف اوسط خارجی حد معیار میں دلچسپ ہو تب پیداکار وہ نمونی منصوبہ منتخب کر سکتا ہے جس میں نمونے کا حصول کم سے کم ہو، یعنی نمونی معائنے کی تعداد کم سے کم ہو۔ یہ تعداد درج ذیل ہے

$$nP(A;\theta) + N(1 - P(A;\theta))$$

جہاں پہلا جزو قبول شدہ کھیپوں اور دوسرا جزو مسترد اور سدھارے گئے کھیپ کے مطابقتی اجزاء ہیں؛ حقیقت میں سدھارنے کے عمل میں کھیپ کے تمام $N$ اجزاء کو پرکھا جاتا ہے، اور کھیپ مسترد ہونے کا احتمال $1 - P(A;\theta)$ ہے۔

ہم بتانا چاہتے ہیں کہ معائنے کے عمل کو **دوہرا نمونی منصوبہ**[190] استعمال کرتے ہوئے کم کیا جا سکتا ہے جس میں جسامت $n$ کے نمونے کو جسامت $n_1$ اور $n_2$ (جہاں $n_1 + n_2 = n$) کے دو نمونوں میں تقسیم کیا جاتا

[187] ظاہر ہے کہ اگر معائنہ سے اشیاء تباہ ہوتے ہوں یا ہر جزو کا معائنہ کرنا اشیاء کی قیمت سے زیادہ مہنگا پڑتا ہو تب ہر جزو کے معائنے کی بجائے مسترد کھیپ کو کم دام فروخت کیا جائے گا۔
[188] average outgoing quality
[189] average outgoing quality limit
[190] double sampling plan

ہے۔اگر کھیپ بہت اچھی یا بہت خراب ہو تب کھیپ قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ ایک نمونے کو دیکھ کر کیا جا سکتا ہے چونکہ توقع کی جا سکتی ہے کہ دوسرے نمونے کا معیار درمیانہ ہو گا۔ہم دوہرا نمونی منصوبہ اور سدھارنے کا عمل استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قسم کے منصوبے استعمال کر سکتے ہیں جہاں نمونوں میں عیب دار کی تعداد بالترتیب $x_1$ اور $x_2$ ہے۔

- اگر $x_1 \leq c_1$ ہو، کھیپ قبول کریں۔اگر $x_1 > c_2$ ہو، کھیپ مسترد کریں۔
- اگر $c_1 < x_1 \leq c_2$ ہو، دوسرا نمونہ بھی استعمال کریں۔اگر $x_1 + x_2 \leq c_2$ ہو، کھیپ قبول کریں۔اگر $x_1 + x_2 > c_2$ ہو، کھیپ مسترد کریں۔

## سوالات

سوال 24.235: ایک صارف قلم پرکھنے کے لئے واحد نمونی منصوبہ استعمال کرتا ہے جس میں نمونی جسامت 40 اور تعداد قبولیت 1 ہے۔ضمیمہ ج کی جدول 2.ج استعمال کرتے ہوئے 0.2 %, 0.25 %, 0.5 %, 1 %, 2 %, 5 %, 10 % عیب دار کھیپ کے قبول ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ منحنی OC کو ترسیم کریں۔
جواب: $0.9953, 0.9825, 0.9384, \cdots$

سوال 24.236: حسابی کیلکولیٹر کی بیٹریوں کی بڑی کھیپوں کو مذکورہ ذیل منصوبہ کے تحت پرکھا جاتا ہے۔کھیپ سے بلا منصوبہ 30 بیٹریاں منتخب کر کے پرکھی جاتی ہیں۔اگر اس نمونہ میں زیادہ سے زیادہ 1 عیب دار بیٹری ہو تب اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے ورنہ اس کر مسترد کیا جاتا ہے۔پوئسن تقسیم استعمال کرتے ہوئے اس منصوبے کی OC منحنی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.237: سوال 24.236 میں AOQ منحنی ترسیم کریں۔سدھارنے کے عمل کے ساتھ اوسط خارجی حد معیار تعین کریں۔
جواب: $\theta = 0.054$ پر 0.028

سوال 24.238: $n = 50$ اور $c = 0$ کی صورت میں سوال 24.236 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.239: مثال 24.28 میں بیش ہندسی تقسیم کی تخمینی ثنائی تقسیم تلاش کرتے ہوئے تخمینی اور اصل قیمت کا موازنہ کریں۔
جواب: $(1 - \theta)^2$

سوال 24.240: مثال 24.28 میں سطح قابل قبول معیار $0.1$ اور سطح قابل مسترد معیار $0.6$ ہونے کی صورت میں خطی پیداکار اور خطر خریدار کیا ہوں گے؟

سوال 24.241: پیچوں کی کھیپ میں $\theta$ تناسب عیب دار ہیں۔اس کھیپ سے $5$ کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے۔اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے اگر نمونہ میں (الف) کوئی بھی عیب دار نہ ہو، (ب) زیادہ سے زیادہ ایک عیب دار ہو۔ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے OC منحنیات تلاش کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں اور ان کا آپس میں موازنہ کریں۔
جواب: $(1-\theta)^5, (1-\theta)^5 + 5\theta(1-\theta)^4$

سوال 24.242: برقی فتیلہ کی کھیپ سے $3$ کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے۔اگر نمونہ میں ایک سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اس نمونی منصوبہ پر تنقید کریں۔بالخصوص $50\,\%$ عیب دار کی کھیپ قبول ہونے کا احتمال حاصل کریں۔ (ثنائی تقسیم استعمال کریں۔)

سوال 24.243: $c = 0$ اور $n$ کی بڑھتی قیمت (مثلاً $n = 2, 3, 4, \cdots$) کی نمونی منصوبوں کا موازنہ کریں اور ان کو ترسیم کریں۔ (ثنائی تقسیم استعمال کریں۔)
جواب: $P(A;\theta) = (1-\theta)^n$

سوال 24.244: $c = 1$ لیتے ہوئے سوال 24.243 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.245: OC منحنی میں اچھی معیار اور خراب معیار کو علیحدہ کرنے کا انتصابی حصہ کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟
جواب: چونکہ $n$ متناہی ہے۔

سوال 24.246: $n = 5$ اور $c = 10$ لیتے ہوئے بڑی کھیپ کے لئے واحد نمونی منصوبہ کے OC اور AOQ منحنیات ترسیم کریں۔

سوال 24.247: خطر خریدار $5\,\%$ کے لئے سوال 24.246 کی منحنی سے $\theta_0$ تلاش کریں۔خطر پیداکار $10\,\%$ کے لئے سوال 24.246 کی منحنی سے $\theta_1$ تلاش کریں۔
جواب: $\theta_0 \approx 0.01, \theta_1 \approx 0.37$

سوال 24.248: $n = 4$ اور $c = 1$ لیتے ہوئے سوال 24.246 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.249: ہم گھڑیوں کی بڑی کھیپوں سے 100 جسامت کے نمونے لیتے ہیں۔ہم چاہتے ہیں کہ سطح قابل قبول معیار $5\,\%$ اور خطر پیدا کار $2\,\%$ ہو۔ ہمیں تعداد قبولیت $c$ کی کیا قیمت منتخب کرنی ہو گی؟ (عمومی تقسیم استعمال کریں۔)
جواب: 9

سوال 24.250: اگر سطح قابل مسترد معیار $12\,\%$ ہو تب سوال 24.249 میں خطر خریدار کیا ہو گا؟

سوال 24.251: $n = 5$ اور $c = 0$ کی صورت میں سطح قابل قبول معیار $\theta_0 = 1\,\%$ اور سطح قابل مسترد معیار $\theta_1 = 15\,\%$ فرض کرتے ہوئے واحد نمونی منصوبہ میں خطر تلاش کریں۔
جواب: $\alpha = 5\,\%, \beta = 44\,\%$

سوال 24.252: $n = 5$ اور $c = 0$ لیتے ہوئے بڑی کھیپ کے لئے واحد نمونی منصوبہ استعمال کرتے ہوئے OC منحنی اور AOQ منحنی تلاش کرتے ہوئے ترسیم کریں۔ اوسط خارجی سطح معیار بھی تلاش کریں۔

## 24.18 عمدگی موافقت

ہم نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھنا چاہتے ہیں کہ جس آبادی سے نمونہ لیا گیا ہو اس کا تفاعل تقسیم $F(x)$ ہے۔ظاہر ہے کہ نمونے کا تفاعل تقسیم $\tilde{F}(x)$ اصل تفاعل تقسیم $F(x)$ کا تخمین ہو گا اور اگر یہ $F(x)$ کی "اچھی تخمین" دیتا ہو تب ہم اس قیاس کو نا منظور نہیں کریں گے کہ تفاعل $F(x)$ اس آبادی کا تفاعل تقسیم ہے۔اگر $\tilde{F}(x)$ تفاعل $F(x)$ سے بہت زیادہ انحراف کرتا ہو تب ہم اس قیاس کو نا منظور کریں گے۔

اس طرح فیصلہ کرنے کے لئے ضروری ہے ہم جانتے ہوں کہ قیاس درست ہونے کی صورت میں $F(x)$ سے $\tilde{F}(x)$ کتنا انحراف کر سکتا ہے۔اس خاطر ہم ایک مقدار متعارف کرتے ہیں جو $F(x)$ سے $\tilde{F}(x)$ کا انحراف ناپتا ہے اور ہمیں اس مفروضہ کے تحت، کہ قیاس درست ہے، اس مقدار کا تفاعل احتمال درکار ہو گا۔آئیں اس کو حاصل کرتے ہیں۔ ہم عدد $c$ یوں تعین کرتے ہیں کہ، قیاس درست ہونے کی صورت میں، $c$ سے زائد انحراف کا ایک چھوٹا پیشگی مختص احتمال ہو۔بہر حال، اگر $c$ سے زیادہ انحراف پایا جاتا ہو تب ہمیں قیاس درست ہونے پر

شک و شبہ ہو گا اور ہم قیاس کو نا منظور کریں گے۔اس کے بر عکس اگر انحراف $c$ سے تجاوز نہ کرتا ہو، تا کہ $\tilde{F}(x)$ تفاعل $F(x)$ کی اچھی تخمین ہو، ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ظاہر ہے کہ قیاس نا منظور نہ کرنے کی صورت میں ہمارے پاس قیاس نا منظور کرنے کا نا کافی ثبوت ہے اور یہ اس امکان کو خارج نہیں کرتی ہے کہ پرکھ میں دیگر تفاعل بھی نا منظور نہیں ہوں گے۔یوں صورت حال کافی حد تک حصہ 24.15 کی طرح ہے۔

جدول 24.14 میں اس طرز کی پرکھ دکھائی گئی ہے[191]۔اس پرکھ کا جواز کچھ یوں ہے کہ اگر قیاس درست ہو، تب $\chi_0^2$ اس بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہو گی جس کی تفاعل تقسیم $K-1$ درجہ آزادی (یا $K-r-1$ درجہ آزادی اگر $r$ مقدار معلوم کا اندازہ لگایا گیا ہو) کی مربع خا تقسیم تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے جیسے جیسے $n$ لا متناہی تک پہنچے کی کوشش کرتا ہے۔کم سے کم 5 نمونی قیمتوں کا جدول 24.14 کے ہر وقفہ میں پائے جانے کی شرط کی وجہ متناہی بلا منصوبہ $n$ کی صورت میں اس بلا منصوبہ متغیر کی تقسیم کا صرف تخمینی طور پر مربع خا تقسیم ہونا ہے۔ (اس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔) اگر نمونہ اتنا چھوٹا ہو کہ اس شرط کو مطمئن کرنا ممکن نہ ہو تب پرکھ سے حاصل نتیجہ کو بہت احتیاط کے ساتھ استعمال کریں۔

**مثال 24.30:** **عمومیت کا پرکھ**

کیا صفحہ 1531 پر جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے لیا گیا ہے؟

حل: $\mu$ اور $\sigma^2$ کی زیادہ سے زیادہ امکانی اندازے $\hat{\mu} = \bar{x} = 364.7$ اور $\tilde{\sigma}^2 = 712.9$ ہیں۔جدول 24.15 میں کیا گیا حساب $\chi_0^2 = 2.790$ دیتا ہے۔ہم $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔چونکہ $K = 10$ ہے اور ہم مقدار معلوم کا اندازہ $r = 2$ لگاتے ہیں، ہم $K - r - 1 = 7$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول ج.7 سے $P(\chi^2 \le c) = 95\,\%$ کا حل $c = 14.07$ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $\chi^2 < c$ ہے لہٰذا ہم آبادی کا عمومی ہونے کا قیاس نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ $\square$

## سوالات

سوال 24.253: تین مشینوں میں سے ہر ایک مشین پر بنائے جانے والے کیلوں سے 200 جسامت کے نمونے حاصل کیے گئے۔ان نمونوں میں عیب دار کیلوں کی تعداد $7, 8, 12$ تھی۔کیا یہ فرق معنی خیز ہے؟ ($\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)

---

[191]اس پرکھ کو رونلڈ ایلمر فشر نے متعارف کیا۔

جدول 24.14: جس آبادی سے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ حاصل کیا گیا ہو اس آبادی کا تفاعل تقسیم $F(x)$ ہونے کی قیاس کا مربع خا پرکھ

**پہلا قدم:** $x$ محور کو $K$ وقفوں $I_1, I_2, \cdots, I_K$ میں یوں تقسیم کریں کہ ہر وقفہ میں دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کے کم سے کم 5 قیمتیں پائی جاتی ہوں۔ وقفہ $I_j$ میں نمونی قیمتوں کی شمار $b_j$ تعین کریں جہاں $j = 1, \cdots, K$ ہے۔ اگر نمونی قیمت دو وقفوں کی مشترک سرحد پر پائی جاتی ہو تب دونوں مطابقتی $b_j$ میں 0.5 جمع کریں۔

**دوسرا قدم:** $F(x)$ استعمال کرتے ہوئے زیر غور بلا منصوبہ متغیر $X$ کا وقفہ $I_j$ میں کوئی بھی قیمت اختیار کرنے کا احتمال $p_j$ بذریعہ حساب تلاش کریں، جہاں $j = 1, \cdots, K$ ہے۔ درج ذیل بذریعہ حساب حاصل کریں (جو قیاس درست ہونے کی صورت میں وقفہ $I_j$ میں نمونی قیمتوں کا نظیری متوقع شمار ہے)۔

$$e_j = np_j$$

**تیسرا قدم:** درج ذیل انحراف کا حساب کریں۔

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} \tag{24.155}$$

**چوتھا قدم:** معنی خیز سطح (5 %، 1 %، وغیرہ) منتخب کریں۔

**پانچواں قدم:** درج ذیل مساوات کا حل $c$، ضمیمہ ج کی جدول 7.ج میں $K - 1$ درجہ آزادی لیتے ہوئے، تلاش کریں۔

$$P(\chi^2 \leq c) = 1 - \alpha$$

اگر $F(x)$ کے $r$ مقدار معلوم ہمیں معلوم نہ ہوں اور ان کی زیادہ سے زیادہ امکانی اندازے (حصہ 24.13) استعمال کیے جا رہے ہوں تب ($K - 1$ کی بجائے) $K - r - 1$ درجہ آزادی استعمال کریں۔ اگر $\chi_0^2 \leq c$ ہو، قیاس کو نامنظور نہ کریں۔ اگر $\chi_0^2 > c$ ہو، قیاس کو نامنظور کریں۔

جدول 24.15: حساب برائے مثال 24.30

| $x_j$ | $\frac{x_j-364.7}{26.7}$ | $\Phi\left(\frac{x_j-364.7}{26.7}\right)$ | $e_j = 100p_j$ | $b_j$ | اجزاء مساوات 155.24 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty \cdots 325$ | $-\infty \cdots -1.49$ | $0.0000 \cdots 0.0681$ | 6.81 | 6 | 0.096 |
| $325 \cdots 335$ | $-1.49 \cdots -1.11$ | $0.0681 \cdots 0.1335$ | 6.54 | 6 | 0.045 |
| $335 \cdots 345$ | $-1.11 \cdots -0.74$ | $0.1335 \cdots 0.2296$ | 9.61 | 11 | 0.201 |
| $345 \cdots 355$ | $-0.74 \cdots -0.36$ | $0.2296 \cdots 0.3594$ | 12.98 | 14 | 0.080 |
| $355 \cdots 365$ | $-0.36 \ldots 0.00$ | $0.3594 \cdots 0.5000$ | 14.06 | 16 | 0.268 |
| $365 \cdots 375$ | $0.00 \cdots 0.39$ | $0.5000 \cdots 0.6517$ | 15.17 | 15 | 0.002 |
| $375 \cdots 385$ | $0.39 \cdots 0.76$ | $0.6517 \cdots 0.7764$ | 12.47 | 8 | 1.602 |
| $385 \cdots 395$ | $0.76 \cdots 1.13$ | $0.7764 \cdots 0.8708$ | 9.44 | 10 | 0.033 |
| $395 \cdots 405$ | $1.13 \cdots 1.51$ | $0.8708 \cdots 0.9345$ | 6.37 | 8 | 0.417 |
| $405 \cdots \infty$ | $1.51 \cdots \infty$ | $0.9345 \cdots 1.0000$ | 6.55 | 6 | 0.046 |
| | | | | | $\chi_0^2 = 2.790$ |

جواب: تینوں مشینوں میں عیب دار کیلوں کی تعداد ایک جیسا کو قیاس $H_0$ لے کر $p = \frac{27}{600} = 4.5\,\%$ اندازہ حاصل ہو گا۔یوں $\chi_0^2 = \frac{1}{9}(2^2 + 1^2 + 3^2) = 1.56 < 5.99$ ہو گا ( $\alpha = 5\,\%$ ، اور درجہ آزادی 2 ہے)۔ نتیجہ: نہیں

سوال 24.254: دوپہر ایک بجے سے دو بجے تک ایک دکان پر متواتر پانچ دنوں میں بالترتیب $92, 60, 66, 62, 90$ صارفین آئے۔اس قیاس کو پرکھیں کہ ان دنوں میں صارفین کی تعداد ایک جیسی ہے۔( $\alpha = 5\,\%$ لیں۔)

سوال 24.255: گرگر یوہان مینڈل کے ایک کلاسیکی تجربہ کے نتیجہ میں 355 پیلے مٹر اور 123 سبز مٹر کے دانے حاصل ہوئے۔کیا یہ نظریہ مینڈل کے مطابق ہے جس کے تحت نسبت پیلے مٹر:سبز مٹر کی قیمت $3:1$ ہونی چاہیے۔

جواب: $K = 2, n = 355 + 123 = 478, e_1 = 478 \cdot \frac{3}{4} = 358.5, e_2 = 478 \cdot \frac{1}{4} = 119.5,$ $\chi_0^2 = \frac{(355-358.5)^2}{358.5} + \frac{(123.0-119.5)^2}{119.5} = 0.137 < c,$ ہے جہاں $c = 3.84$ (درجہ آزادی 1 ، $\alpha = 5\,\%$ ) ہے۔للذا ہم وثوق سے کہتے ہیں کہ نظری قیمتوں سے انحراف محض بلا منصوبہ اثرات ہیں۔

سوال 24.256: ایک پیداکار دعویٰ کرتا ہے کہ عمل پیداوار میں صرف $2.5\,\%$ استرے تیز دھار نہیں ہوتے ہیں۔اس قیاس کو متبادل: $2.5\,\%$ سے زیادہ تعداد تعداد تیز دھار نہیں ہوتے، پرکھیں۔ 400 استروں کا نمونہ استعمال کریں جن میں 17 تیز دھار نہیں ہیں۔( $\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)

سوال 24.257: بلا منصوبہ اعداد کی جدول میں طاق اور جفت اعداد کی تعداد تقریباً ایک جیسی ہونی چاہیے۔ ضمیمہ ج کی جدول 5.ج کے صف 0 میں دیے گئے 50 اعداد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں۔ ( $\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)
جواب: 20 طاق اور 30 جفت اعداد، $K = 2$ جماعتیں، $\chi_0^2 = 2 < 3.84$ لہٰذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.258: ایک سکہ کو 50 بار اچھالا جاتا ہے۔ خط کی کم سے کم تعداد ( 25 سے زیادہ) کیا ہو گی جس پر سکہ منصفانہ ہونے کی قیاس کو $5\,\%$ کی سطح پر نا منظور کیا جائے گا۔

سوال 24.259: ایک معیاری طریقہ پر پیدا کردہ لوہے کی ایک مخصوص قسم کی سلاخوں میں سے $25\,\%$ سلاخ $900\,\mathrm{kg}$ کی بوجھ ڈالنے سے ٹوٹ جاتے ہیں۔ ایک نئے طریقہ سے پیدا 80 سلاخوں پر اتنا ہی بوجھ ڈالنے سے 27 سلاخ ٹوٹ جاتے ہیں۔ کیا نیے طریقہ سے پیدا سلاخوں کے ٹوٹ جانے کی شرح وہی ہے؟
جواب: $\alpha = 5\,\%$ اور درجہ آزادی 1 ہے۔ جہاں $\chi_0^2 = \frac{49}{20} + \frac{49}{60} = 3.27 < c = 3.84$ نتیجہ: جی ہاں۔

سوال 24.260: موٹروے کی تین لینوں میں ایک مخصوص دورانیہ کے دوران، ایک ہی رخ چلتی گاڑیوں کی تعداد بالترتیب 910 ، 850 اور 720 گاڑیاں گنی گئیں۔ کیا ہم وثوق کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تینوں لینوں پر سے ایک جتنی گاڑیاں گزریں؟

سوال 24.261: ایک کلاسیکی تجربہ میں پانسہ 20000 مرتبہ پھینکا گیا جس میں $1, \ldots, 6$ ہندسوں کی حتمی تعدد $3407, 3631, 3176, 2916, 3448, 3422$ حاصل ہوئی۔ $\alpha = 5\,\%$ استعمال کرتے ہوئے پانسہ کے منصفانہ ہونے کی قیاس کو پرکھیں۔
جواب: $K = 6, \chi_0^2 = 94.19, c = 11.07$ قیاس نا منظور کیا جاتا ہے۔

سوال 24.262: کیا صفحہ 1536 پر جدول 24.4 میں دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے لیا گیا؟
جواب: $\bar{x} = 99.4, \tilde{\sigma} = 15.8, K = 5$ (حدود $-\infty, 95, 95, 105, 115, \infty$ ہیں۔) $\chi_0^2 = 0.7 <$ $c = 5.99$ $(\alpha = 5\,\%)$ قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔

سوال 24.263: درج ذیل نمونہ جس آبادی سے لیا گیا اس آبادی کو عمومیت کے لئے پرکھیں جہاں $0.3\,\mathrm{mm}$ موٹی فولادی چادروں کی تنشی مضبوطی $x$ [ $\mathrm{kg\,mm^{-2}}$ ] ہے۔

| $x$ | حتمی تعدد | $x$ | حتمی تعدد |
| --- | --- | --- | --- |
| $< 42.0$ | 15 | $43.5 - 44.0$ | 22.5 |
| $42.0 - 42.5$ | 11 | $44.0 - 44.5$ | 19.5 |
| $42.5 - 43.0$ | 15 | $44.5 - 45.0$ | 12 |
| $43.0 - 43.5$ | 14 | $> 45.0$ | 19 |

سوال 24.264: درج ذیل مواد استعمال کرتے ہوئے آبادی کو پوئسن تقسیم کے لئے پرکھیں۔ 7.5 سیکنڈ میں الفا ذرات کی تعداد $x$ اور $a(x)$ ان کی حتمی تعدد (=وقفوں کی تعداد جن میں ٹھیک $x$ ذرے دیکھے گئے) ہے۔ یہ کلاسیکی تجربہ ارنسٹ ردرفورڈ اور ہانس گائیگر نے 1910 سرانجام دیا۔

| $x$ | $a(x)$ | $x$ | $a(x)$ | $x$ | $a(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 57 | 5 | 408 | 10 | 10 |
| 1 | 203 | 6 | 273 | 11 | 4 |
| 2 | 383 | 7 | 139 | 12 | 2 |
| 3 | 525 | 8 | 45 | $\geq 13$ | 0 |
| 4 | 532 | 9 | 27 | | |

جواب: آخری تینوں صفوں کو ایک ساتھ لیتے ہوئے $K - r - 1 = 7$ ہو گا جہاں $r = 1$ ہے چونکہ اوسط کا اندازہ حاصل کیا گیا ہے۔ $\chi_0^2 = 12.8 < c = 16.92$ ہے جہاں $\alpha = 5\,\%$ لیا گیا ہے۔قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.265: پوئسن تقسیم کی آبادی سے 1000 کاغذ لئے گئے۔اس قیاس کو پرکھیں۔درج ذیل ایک کاغذ پر دھبوں کی تعداد $x$ ہے اور $a(x)$ حتمی تعدد ( $x$ دھبوں والے کاغذوں کی تعداد) ہے۔

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\geq 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a(x)$ | 419 | 352 | 154 | 56 | 19 | 0 |

سوال 24.266: کیا یہ ممکن ہے کہ ہم $\chi_0^2 = 0$ حاصل کریں اگرچہ نمونی تفاعل تقسیم پرکھے جانے والے تفاعل تقسیم $F(x)$ سے مختلف ہو؟

## 24.19 غیر مقدار معلوم پرکھ

حصہ 24.15 کے پرکھ عمومی آبادی کے لئے تھے۔کئی بار آبادی کی تقسیم غیر عمومی یا نامعلوم تقسیم رکھتی ہے۔ایسی صورت میں ہم **غیر مقدار معلوم پرکھ**[192] یا **تقسیم پاک پرکھ**[193] استعمال کر سکتے ہیں جس کی بنیاد شماریات

nonparametric test[192]
distribution-free test[193]

رجحان[194] ہے لٰہذا اس کو کسی بھی استمراری تقسیم کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ البتہ عمومی تقسیم کے لئے حصہ 24.15 کے پرکھ بہتر نتائج دیتے ہیں۔ تقسیم پاک پرکھ کو سمجھنے کی خاطر ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 24.31: **پرکھ برائے علامت وسطانیہ**
مساوات $F(x) = 0.5$ کے حل $x = \tilde{\mu}$ کو وسطانیہ کہتے ہیں، جہاں $F$ تفاعل تقسیم ہے۔ مثال 24.26 کا نمونی فرق، یعنی،

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\tilde{\mu} = 0$ کو پرکھتے ہیں جو کہتا ہے کہ کام کرنے کے دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی تقریباً ایک جیسی ہے۔
حل: ہم متبادل $\tilde{\mu} > 0$ اور معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہوئے۔ اگر قیاس درست ہو تب مثبت فرق کا احتمال $p$ اور منفی فرق کا احتمال ایک جیسے ہوں گے۔ یوں $p = 0.5$ ہو گا اور بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{مجموعہ کا قیمتوں مثبت میں قیمتوں } n$$

کا تقسیم ثنائی ہو گا جس کا $p = 0.5$ ہو گا۔ ہمارے نمونے میں $8$ قیمتیں ہیں۔ ہم $0$ قیمتوں کو خارج کرتے ہیں چونکہ ان کا فیصلہ پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ تب $6$ قیمتیں رہ جاتی ہیں۔ یہ تمام قیمتیں مثبت ہیں۔۔ چونکہ

$$P(X = 6) = \binom{6}{6}(0.5)^6(0.5)^0 = 0.0156 = 1.56\,\% < \alpha$$

ہے لٰہذا ہم قیاس نا منظور کرتے ہیں۔

اگر ان $6$ قیمتوں میں صرف $1$ قیمت منفی ہوتی تب

$$P(X \geq 5) = \binom{6}{5}(0.5)^5 \cdot 0.5 + \binom{6}{6}(0.5)^6 = 10.9\,\%$$

ہوتا اور ہم قیاس کو نا منظور نہ کرتے۔ □

مثال 24.32: **بلا منصوبہ رجحان کے لئے پرکھ**
تار کو کاٹنے کے لئے ایک مشین استعمال کی جاتی ہے۔ لگاتار کٹی لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

$$29 \quad 31 \quad 28 \quad 30 \quad 32$$

---
[194] order statistics

اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ مشین تار کو بغیر کسی رجحان کاٹتی ہے، یعنی مشین مسلسل بڑھتی یا مسلسل گھٹتی لمبائی کی تار نہیں کاٹتی ہے۔فرض کریں کہ مشین کی قسم سے ایسا ظاہر ہوتا ہے کہ یہ مسلسل بڑھتی لمبائی کی تار کاٹے گی (مثبت رجحان)۔

حل: جتنی بار کوئی بڑی قیمت کسی چھوٹی قیمت سے پہلے رونما ہو، ہم ان تبدیلیوں کی تعداد گنتے ہیں۔

29 قیمت 28 قیمت سے پہلے آتی ہے: (1 تبدیلی)

31 کی قیمت 28 اور 30 سے پہلے آتی ہے: (2 تبدیلیاں)

باقی تین قیمتیں بڑھتی رجحان رکھتی ہیں۔یوں نمونہ میں $3 = 2 + 1$ تبدیلیاں پائی جاتی ہیں۔ہم اب بلا منصوبہ متغیر

$$T = \text{تعداد تبدیلیاں}$$

پر غور کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو (غیر رجحانی)، تب پانچ اجزاء 5 4 3 2 1 کے $5! = 120$ ترتیبی اجتماعات میں ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{120}$ ہو گا۔ ہم ان ترتیبی اجتماعات کو ان کی تبدیلیوں کے لحاظ سے لکھتے ہیں:

| $T = 3$ | $T = 2$ | $T = 1$ | $T = 0$ |
|---|---|---|---|
| 1 2 5 4 3 | 1 2 4 5 3 | 1 2 3 5 4 | 1 2 3 4 5 |
| 1 3 4 5 2 | 1 2 5 3 4 | 1 2 4 3 5 | |
| 1 3 5 2 4 | 1 3 2 5 4 | 1 3 2 4 5 | |
| 1 4 2 5 3 | 1 3 4 2 5 | 2 1 3 4 5 | |
| 1 4 3 2 5 | 1 4 2 3 5 | | |
| 1 5 2 3 4 | 2 1 3 5 4 | | |
| 2 1 4 5 3 | 2 1 4 3 5 | | |
| 2 1 5 3 4 | 2 3 1 4 5 | | |
| 2 3 1 5 4 | 3 1 2 4 5 | | |
| 2 3 4 1 5 | | | |
| 2 4 1 3 5 | | | |
| 3 1 2 5 4 | | | |
| 3 1 4 2 5 | | | |
| 3 2 1 4 5 | | | |
| 4 1 2 3 5 | | | |
| وغیرہ | | | |

ان سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$P(T \leq 3) = \frac{1}{120} + \frac{4}{120} + \frac{9}{120} + \frac{15}{120} = \frac{29}{120} = 24\,\%$$

لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

ضمیمہ ج کی جدول 9.ج میں بلا رجحان صورت میں بلا منصوبہ متغیر $T$ کی تقسیم دی گئی ہے۔ ہمارے تراکیب اور اس جدول کی قیمتیں استمراری تقسیمات کے کئے ہیں۔یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ نمونہ کی تمام قیمتیں ایک دوسرے سے

مختلف ہوں گی۔ پور و پور کی بنا عملاً چند نمونی قیمتیں ایک جیسی ہو سکتی ہیں۔ اگر $m$ قیمتیں ایک جیسی ہوں تب $\frac{m(m-1)}{4}$ ( $m$ اجزاء کی ترتیبی اجتماعات میں تبدیلیوں کے تعداد کی اوسط) جمع کریں، یعنی، ایک جیسی قیمتوں کے ہر جوڑی کے لئے $\frac{1}{2}$، ایک جیسی تین قیمتوں کے لئے $\frac{3}{2}$، وغیرہ۔ $\square$

## سوالات

سوال 24.267: 10 کوششوں میں سے 7 کوششوں میں قسم الف ہوئی چھلنی نے قسم ب ہوائی چھلنی سے زیادہ صاف ہوا پیدا کی، 1 کوشش میں چھلنی ب نے زیادہ صاف ہوا پیدا کی جبکہ 2 کوششوں میں دونوں کے نتائج ایک جیسے تھے۔ کیا چھلنی الف زیادہ بہتر ہے؟
جواب: قیاس: الف اور ب ایک جیسی معیار رکھتی ہیں۔ تب 8 کوششوں میں 7 یا 8 بار الف کے حق میں وقوعہ کا احتمال $3.5\,\%$ ہے۔ قیاس کو نامنظور کریں۔

سوال 24.268: کن صورتوں میں ہم پرکھ علامت کو استمراری تقسیم کی اوسط پرکھنے کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔

سوال 24.269: پرکھ علامت کو سوال 24.209 کے نمونہ پر لاگو کریں۔
جواب: $P(X \le 2) = 0.5^6(1+6+15) = 34\,\%$ قیاس $\tilde{\mu} = 0$ کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.270: اگر $\tilde{\mu} = 0$ کی بجائے قیاس $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ ہو تب آپ پرکھ علامت کو کس طرح استعمال کریں گے۔ ( $\mu_0$ کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔)

سوال 24.271: 16 جسامت کے نمونہ میں 10 مثبت، 4 منفی اور 2 قیمتیں صفر ہیں۔ (ضمیمہ ج کی جدول ج.1 میں درکار قیمتیں نہیں دی گئی ہیں۔ آپ کو یہ قیمتیں حاصل کرنی ہوں گی۔)
جواب: اگر $\tilde{\mu} = 0$ ہو، 14 میں سے 4 یا 4 سے کم عدد قیمتیں منفی ہونے کا احتمال $9\,\%$ ہے۔ قیاس $\tilde{\mu} = 0$ کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.272: $\tilde{\mu} = 5$ میٹر لمبائی سلاخ پیدا کرنے کے عمل کے ایک نمونہ میں 4 سلاخوں کی لمبائی ٹھیک ہے، 15 کی لمبائی کم اور 3 کی لمبائی زیادہ ہے۔ کیا اس عمل کو درست کرنے کی ضرورت ہے؟ (عمومی تقسیم کو ثنائی تقسیم کا تخمین لیں۔ حصہ 24.10)

سوال 24.273: مسئلہ 24.15 استعمال کیے بغیر سوال 24.272 کو حل کریں۔
جواب: 3 یا اس سے کم سلاخوں کی لمبائی 5 میٹر سے زیادہ ہونے کا ٹھیک احتمال $0.38\,\%$ ہے۔یہ سوال 24.272 میں حاصل تخمینی احتمال سے کچھ کم ہے۔

سوال 24.274: 10 مریضوں میں سے ہر ایک کو دو مختلف نیند کی دوائیاں دی گئی۔درج ذیل جدول ان کے اثرات (سونے کے دورانیے میں گھنٹوں میں اضافہ) پیش کرتا ہے۔پرکھ علامت کی مدد سے دیکھیں کہ آیا ان میں فرق معنی خیز ہے۔

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1.9 | 0.8 | 1.1 | 0.1 | −0.1 | 4.4 | 5.5 | 1.6 | 4.6 | 3.4 |
| $B$ | 0.7 | −1.6 | −0.2 | −1.2 | −0.1 | 3.4 | 3.7 | 0.8 | 0.0 | 2.0 |
| فرق | 1.2 | 2.4 | 1.3 | 1.3 | 0.0 | 1.0 | 1.8 | 0.8 | 4.6 | 1.4 |

سوال 24.275: مثال 24.24 میں سمجھائے گئے پرکھ کو سوال 24.274 پر لاگو کریں۔(سوال میں دیے گئے نمونہ کی آبادی کو عمومی تصور کریں۔)
جواب: قیاس $\mu = 0$ ؛ متبادل $\mu > 0$ ، $\bar{x} = 1.58$ ،
$t = \sqrt{10} \cdot \frac{1.58}{1.23} = 4.06 > c = 1.83\ (\alpha = 5\,\%)$ ؛قیاس نا منظور۔

سوال 24.276: نچلی چوتھائی $q_{25}$ (جس کی تعریف $F(q_{25}) = 0.25$ ہے) کے لئے پرکھ علامت بنائیں۔

سوال 24.277: 8 قیمتوں کا نمونہ جس میں 7 کی قیمت $20\,^\circ\mathrm{C}$ سے کم اور 1 کی قیمت $20\,^\circ\mathrm{C}$ سے زیادہ ہو استعمال کرتے ہوئے خود کار حراری سوئچ ٹھیک $20\,^\circ\mathrm{C}$ پر مقرر ہونے کے قیاس کو بالمقابل کہ سوئچ کم درجہ حرارت پر مقرر ہے، پرکھیں۔
جواب: $P(X \geq 1) = 0.5^8(1+8) = 3.5\,\% < \alpha = 5\,\%$ ؛ اس قیاس کو نا منظور کریں کہ سوئچ ٹھیک درجہ حرارت پر مقرر ہے۔

سوال 24.278: وولٹ پیما کی پیمائش درجہ حرارت $T[^\circ\mathrm{C}]$ سے آزاد ہے کے قیاس کو بالمقابل کہ اس کی پیمائش بڑھتے $T$ کے ساتھ بڑھتی ہے پرکھیں۔مستقل برقی دباو مہیا کرتے ہوئے حاصل درج ذیل پیمائشوں کا نمونہ استعمال کریں۔

| درجہ حرارت $T[^\circ\mathrm{C}]$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| پیمائش $V[\mathrm{V}]$ | 99.8 | 101.0 | 100.4 | 100.8 | 101.5 |

سوال 24.279: $n = 4$ لیتے ہوئے مثال 24.32 میں دی گئی جدول کی طرح جدول بنائیں۔

سوال 24.280: کیا کھاد سے گندم کی استعمال سے پیداوار $X$ [kg/رقبہ] بڑھتی ہے؟ کھاد کی بڑھتی مقدار کے لحاظ سے مرتب درج ذیل نمونہ استعمال کریں۔

$$15.2 \quad 16.8 \quad 13.2 \quad 16.6 \quad 17.2 \quad 17.5 \quad 17.3 \quad 18.1$$

سوال 24.281: مثال 24.32 کے پرکھ کو درج ذیل نمونہ پر لاگو کریں۔(اون میں ڈائی سلفائڈ کی مقدار $x$ جس کو کیمیائی عمل سے نا گزاری گئی اوون میں مقدار کے فی صد میں ناپا گیا ہے۔اون میں پانی کی فی صد مقدار $y$ ہے۔)

| $x$ | 10 | 15 | 30 | 40 | 50 | 55 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 50 | 46 | 43 | 42 | 36 | 39 | 37 | 33 |

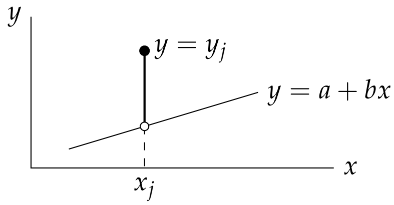
## 24.20 پیمائشوں کی جوڑیاں۔سیدھے خطوط کو موافق بنانا

ہم اب ایسی تجربات پر غور کرتے ہیں جن میں ہم جوڑی مقدار ناپتے یا ان کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ہم تجربات کو درج ذیل دو اقسام میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

- تجزیہ باہمی رشتہ[195] میں دونوں متغیرات بلا منصوبہ ہوں گے اور ہم ان کے درمیان رشتہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔(اس کتاب میں شماریات کی اس شاخ پر غور نہیں کی جائے گی۔)

- رجعی تجزیہ[196] میں دو میں سے ایک متغیر، مثلاً $x$، کو عام متغیر تصور کیا جاتا ہے، یعنی، اس کی ناپ میں خاطر خواہ خلل نہیں پایا جاتا ہے۔دوسرا متغیر، $Y$، بلا منصوبہ متغیر ہے۔ $x$ کو غیر تابع متغیر کہتے ہیں اور ہم جاننا چاہتے ہیں کہ $Y$، متغیر $x$ کا کتنا تابع ہے؟اس کی ایک اچھی مثال فشار خون $Y$ ہے جو انسان کے عمر $x$ کی تابع ہے، جس کو ہم اب سے $x$ پر $Y$ کی رجعت کہیں گے۔

[195] correlation analysis
[196] regression analysis




شکل 24.24: نقطہ $(x_j, y_j)$ سے سیدھے خط $y = a + bx$ کا انتصابی فاصلہ

تجربہ کرنے والا پہلے $x$ کی $n$ قیمتیں $x_1, \cdots, x_n$ منتخب کرتا ہے اور اس کے بعد ان $x$ پر $Y$ کی قیمتیں مشاہدے سے حاصل کرتا ہے۔یوں اس کو درج ذیل صورت کا نمونہ ملتا ہے۔

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

رجعی تجزیہ میں فرض کیا جاتا ہے کہ $Y$ کی اوسط $\mu$، متغیر $x$ کے تابع ہے، یعنی، ان کے مابین عام تعلق $\mu = \mu(x)$ پایا جاتا ہے۔ $\mu(x)$ کی منحنی کو $Y$ کی $x$ پر رجعی منحنی کہتے ہیں۔اس حصہ میں ہم سادہ ترین صورت پر غور کرتے ہیں جہاں $\mu(x)$ خطی تفاعل $\mu(x) = \alpha + \beta x$ ہے۔ہم نمونی قیمتوں کو $xY$ مستوی پر ترسیم کر کے، ان پر سیدھی خط بٹھا کر، اس خط کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی $x$ کے لحاظ سے $\mu(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کرنا چاہیں گے تا کہ کسی بھی $x$ سے حاصل $Y$ کی متوقع قیمت ہم جان سکیں۔اگر نقطے بکھرے ہوں تب، خط کو آنکھ کی مدد سے ٹھیک بٹھانا غیر یقینی ہو گا لہٰذا ہمیں حسابی طریقہ درکار ہو گا جو صرف نقطوں پر منحصر یکتا نتیجہ دے۔ایک بہت زیادہ استعمال ہونے والی ترکیب، جس کو گاوس نے بنایا، **کمتر مربعوں کی ترکیب**[197] کہلاتی ہے۔ہمارے موجودہ ضرورت کو مد نظر رکھتے ہوئے اس کو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

نقطوں پر سیدھا خط یوں بٹھایا جائے کہ نقطوں کا سیدھی لکیر سے فاصلوں کا مربع کم سے کم ہو، جہاں نقطہ اور سیدھی لکیر کے مابین فاصلہ انتصابی رخ ( $y$ محور کے متوازی) ناپا جاتا ہے۔

مفروضہ (الف)
نمونہ $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ میں تمام $x$ قیمتیں $x_1, \cdots, x_n$ ایک جیسی نہیں ہیں۔

---
[197] method of least squares

جسامت $n$ کے نمونہ $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ پر غور کریں۔ نمونی قیمت $(x_j, y_j)$ کی سیدھی لکیر $y = a + bx$ سے انتصابی رخ فاصلہ ( $y$ محور کے متوازی ناپا گیا فاصلہ) $\left|y_j - a - bx_j\right|$ ہو گا (شکل 24.24)۔ یوں ان فاصلوں کے مربع کا مجموعہ

$$q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_j)^2 \tag{24.156}$$

ہو گا۔ کمتر مربعوں کی ترکیب میں ہم $a$ اور $b$ یوں منتخب کرتے ہیں کہ $q$ کی قیمت کم سے کم حاصل ہو۔ $q$ کی قیمت $a$ اور $b$ پر منحصر ہے اور اس کی کم سے کم قیمت درج ذیل لازمی شرائط سے حاصل ہو گی۔

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0 \tag{24.157}$$

ہم دیکھیں گے کہ ان شرائط سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے

$$y - \overline{y} = b(x - \overline{x}) \tag{24.158}$$

جہاں

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \quad \text{اور} \quad \overline{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n) \tag{24.159}$$

ہیں۔ مساوات 24.157 کو نمونے کی $y$ قیمتوں کا نمونے کی $x$ قیمتوں پر **رجعی خط**[198] کہتے ہیں۔ اس کی ڈھلوان $b$ کو $x$ پر $y$ کا **تجزی عددی سر**[199] کہتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ

$$b = \frac{s_{xy}}{s_1^2} \tag{24.160}$$

ہو گا جہاں

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1} \Big[ \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n} \Big( \sum_{j=1}^{n} x_j \Big)^2 \Big] \tag{24.161}$$

اور

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y}) = \frac{1}{n-1} \Big[ \sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \frac{1}{n} \Big( \sum_{j=1}^{n} x_j \Big) \Big( \sum_{j=1}^{n} y_j \Big) \Big] \tag{24.162}$$

---

[198] regression line
[199] regression coefficient

ہوں گے۔ $s_{xy}$ کو نمونے کی باہمی تغیریت[200] کہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ مساوات 24.158 میں دیا گیا رجعی خط نقطہ $(\overline{x}, \overline{y})$ سے گزرے گا۔

مساوات 24.158 کو حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 24.156 اور مساوات 24.157 استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{\partial q}{\partial a} = -2\sum(y_j - a - bx_j) = 0$$
$$\frac{\partial q}{\partial b} = -2\sum x_j(y_j - a - bx_j) = 0$$

لکھتے ہوئے (جہاں $j$ پر $1$ تا $n$ مجموعے لیے جاتے ہیں)۔یوں

$$na + b\sum x_j = \sum y_j$$
$$a\sum x_j + b\sum x_j^2 = \sum x_j y_j$$

حاصل ہو گا۔مفروضہ-الف کے تحت خطی مساوات کے نظام (مساوات 24.161)

$$n\sum x_j^2 - \left(\sum x_j\right)^2 = n(n-1)s_1^2$$

کا مقطع غیر صفر ہو گا اور اس نظام کا یکتا حل (مساوات 24.159، مساوات 24.161، مساوات 24.162)

$$a = \overline{y} - b\overline{x}, \qquad b = \frac{n\sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{n(n-1)s_1^2} \tag{24.163}$$

پایا جائے گا۔اس سے مساوات 24.158 حاصل ہوتا ہے جس میں $b$ کی قیمت مساوات 24.160 تا مساوات 24.162 دیتے ہیں۔( $s_1^2$ کے دو تعلقات کا ایک جیسا ہونے کو آپ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.294)؛اسی طرح $s_{xy}$ کے لئے بھی آپ کر سکتے ہیں)

ہاتھ سے نتائج حاصل کرنے کو آسان بنانے کی خاطر ہم

$$x_j = c_1 x_j^* + l_1, \qquad y_j = c_2 y_j^* + l_2 \tag{24.164}$$

استعمال کرتے ہیں جن میں $c_1$ ، $c_2$ ، $l_1$ ، $l_2$ یوں منتخب کیے جاتے ہیں کہ متبادل قیمتیں $x_j^*$ ، $y_j^*$ سادہ ترین ہوں۔ہم متبادل قیمتیں استعمال کرتے ہوئے $\overline{x}^*$ ، $\overline{y}^*$ ، $x_1^{*2}$ ، $s_{xy}^*$ بذریعہ حساب تلاش کرنے کے بعد درج ذیل تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \overline{x} &= c_1\overline{x}^* + l_1, \qquad & \overline{y} &= c_2\overline{y}^* + l_2 \\ s_1^2 &= c_1^2 s_1^{*2}, & s_{xy} &= c_1 c_2 s_{xy}^* \end{aligned} \tag{24.165}$$

---

covariance[200]

جدول 24.16: چمڑے کی حجم میں کمی $y\,[\%]$ کا دباو $x$ پر رجعت

| دی گئی قیمتیں | | معاون قیمتیں | |
|---|---|---|---|
| $x_j$ | $y_j$ | $x_j^2$ | $x_jy_j$ |
| 4000 | 2.3 | 16 000 000 | 9200 |
| 6000 | 4.1 | 36 000 000 | 24 600 |
| 8000 | 5.7 | 64 000 000 | 45 600 |
| 10 000 | 6.9 | 100 000 000 | 69 000 |
| 28 000 | 19.0 | 216 000 000 | 148 400 |

**مثال 24.33: رجعی خط**
ایک مخصوص چمڑے کی حجم میں فی صد کمی $y$ بالمقابل مقررہ دباو $x$ ناپے گئے۔ کرہ ہوائی کے دباو کو دباو کی اکائی لی گئی ہے۔ نتائج جدول 24.16 میں پیش کیے گئے ہیں۔ $y$ کا $x$ پر رجعی خط تلاش کریں۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $n=4$ ہے اور $\overline{x}=\frac{28000}{4}=7000$ ، $\overline{y}=\frac{19.0}{4}=4.75$ ،

$$s_1^2=\frac{1}{3}\left(216\,000\,000-\frac{28\,000^2}{4}\right)=\frac{20\,000\,000}{3}$$
$$s_{xy}=\frac{1}{3}\left(148\,400-\frac{28\,000\cdot 19}{4}\right)=\frac{15\,400}{3}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $b=\frac{15\,400}{20\,000\,000}=0.000\,777$ ہو گا اور رجعی خط درج ذیل ہو گا۔

$$y-4.75=0.000\,77(x-7000)\qquad\Longrightarrow\qquad y=0.000\,77x-0.64$$

□

ہم درج ذیل دو مفروضے فرض کرتے ہیں۔

مفروضہ (ب)
ہر مقررہ $x$ کے لئے بلا منصوبہ متغیر $Y$ عمومی ہے جس کی اوسط

$$\mu(x)=\alpha+\beta x \tag{24.166}$$

اور تغیریت $\sigma^2$ ہے جہاں تغیریت $x$ کا تابع نہیں ہے۔

جدول 24.17: زیر مفروضہ الف تا پ مساوات 24.166 میں دیے گئے $\beta$ کا وقفہ اعتماد

**پہلا قدم:** سطح اعتماد $\gamma$ (95 %، 99 %، وغیرہ) منتخب کریں۔
**دوسرا قدم:** $n-2$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 6. ج سے درج ذیل مساوات کا حل $c$ تلاش کریں۔ ($n =$ نمونی جسامت)

$$F(c) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.167}$$

**تیسرا قدم:** نمونہ $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.161 سے $(n-1)s_1^2$، مساوات 24.162 سے $(n-1)s_{xy}$، مساوات 24.160 سے $b$،

$$(n-1)s_2^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j\Big)^2 \tag{24.168}$$

اور

$$q_0 = (n-1)(s_2^2 - b^2 s_1^2) \tag{24.169}$$

حاصل کریں۔
**چوتھا قدم:** $k = c\sqrt{\frac{q_0}{(n-2)(n-1)s_1^2}}$ کو بذریعہ حساب حاصل کریں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{b-k \le \beta \le b+k\} \tag{24.170}$$

مفروضہ (پ)
نمونہ $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ لینے کے لئے $n$ مرتبہ تجربات غیر تابع طریقے سے سرانجام دیے گئے۔

زیر مفروضہ الف تا پ دکھایا جا سکتا ہے کہ $\beta$ کا زیادہ سے زیادہ امکانی اندازہ مساوات 24.160 میں دیا گیا رجعی عددی سر $b$ ہو گا۔ اسی لئے $\beta$ کو آبادی کا **رجعی عددی سر**[201] کہتے ہیں۔

زیر مفروضہ الف تا پ، جیسا جدول 24.17 میں دکھایا گیا ہے، ہم $\beta$ کا وقفہ اعتماد حاصل کر سکتے ہیں۔

**مثال 24.34: رجعی عددی سر کا وقفہ اعتماد**
جدول 24.16 میں دی گئی نمونی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے جدول 24.17 میں دی گئی ترکیب سے $\beta$ کا وقفہ اعتماد تلاش کریں۔

---
[201] regression coefficient

حل: **پہلا قدم:** ہم $\gamma = 0.95$ منتخب کرتے ہیں۔
**دوسرا قدم:** مساوات 24.167 کو $F(c) = 0.975$ لکھ سکتے ہیں۔ ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے $n - 2 = 2$ درجہ آزادی کے لئے $c = 4.30$ حاصل ہوتا ہے۔
**تیسرا قدم:** مثال 24.33 ہمیں $3s_1^2 = 20\,000\,000$ اور $b = 0.000\,77$ دیتی ہے۔ جدول 24.16 سے ہم درج ذیل بذریعہ حساب حاصل کرتے ہیں۔

$$3s_2^2 = 102.2 - \frac{19^2}{4} = 11.95, \qquad q_0 = 11.95 - 20\,000\,000 \cdot 0.000\,77^2 = 0.092$$

**چوتھا قدم:** یوں $k = 4.30\sqrt{\frac{0.092}{2 \cdot 20\,000\,000}} = 0.000\,206$ حاصل ہو گا لہٰذا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\{0.000\,56 \leq \beta \leq 0.000\,98\}$$

□

## سوالات

سوال 24.282: آنکھ سے سیدھا خط تلاش کریں۔ایک گاڑی $35\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے چل رہی ہے جبکہ گاڑی کی (کلو میٹر فی گھنٹہ) رفتار $x$ بالمقابل (میٹروں میں) رکنے کے لئے درکار فاصلہ $y$ درج ذیل ہے۔

| $x$ | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 50 | 95 | 150 | 210 |

جواب: تقریباً $120\,\mathrm{m}$

سوال 24.283: $x_j = 2000x_j^* + 4000$ اور $y_j = 0.1y_j^* + 5$ لیتے ہوئے مثال 24.33 کے نتائج حاصل کریں۔

سوال 24.284: ایسا نمونہ حاصل کریں جس کے لئے $b = 0$ ہو۔

سوال 24.285 تا سوال 24.289 میں $x$ پر $y$ کی نمونی رجعی خط ترسیم کریں۔

سوال 24.285: سوال 24.281 کا نمونہ استعمال کریں۔

سوال 24.286: $(1,1), (2,1.7), (3,3)$
جواب: $y = x - 0.1$

سوال 24.287: ڈیزل انجن کی درج ذیل زاویائی رفتار $x$ (فی منٹ چکر) بالمقابل طاقت $y$ (کلو واٹ)

| $x$ | 400 | 500 | 600 | 700 | 750 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 580 | 1030 | 1420 | 1880 | 2100 |

سوال 24.288: ایک مخصوص فولاد کی بد شکلی $x\,[\mathrm{mm}]$ اور برینل سختی[202] $y\,[\mathrm{kg\,mm^{-2}}]$

| $x$ | 6 | 9 | 11 | 13 | 22 | 26 | 28 | 33 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 68 | 67 | 65 | 53 | 44 | 40 | 37 | 34 | 32 |

جواب: $y - 48.89 = -1.32(x - 20.33)$

سوال 24.289: کلورانیفتھالین کا گاڑھاپن $x\,[\%]$ اور دیکم کی اموات $y\,[\%]$

| $x$ | 0.04 | 0.15 | 0.30 | 1.00 | 2.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 16 | 13 | 70 | 90 |

زیر مفروضہ ب اور پ، سوال 24.290 تا سوال 24.295 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے، رجعی عددی سر $\beta$ کا $95\,\%$ وقفہ اعتماد تلاش کریں۔

سوال 24.290: $(1,1), (2,2+a), (3,3)$ جہاں $a$ مستقل ہے۔
جواب: $2s_1^2 = 2, 2s_{xy} = 2, b = 1, 2s_2^2 = 2 + \frac{2}{3}p^2, q_0 = \frac{2}{3}p^2,$
$k = \frac{12.7a}{\sqrt{3}} = 7.3a\ (\gamma = 95\,\%)$, اعتماد $\{1 - 7.3a \le \beta \le 1 + 7.3a\}$

سوال 24.291: سوال 24.287 کا نمونہ۔

سوال 24.292: سوال 24.288 کا نمونہ۔
جواب: $q_0 = 76, k = 2.37\sqrt{\frac{76}{7\cdot 944}} = 0.254$, اعتماد $= \{-1.58 \le \beta \le -1.06\}$

[202] Brinell hardness

سوال 24.293: ہوا میں نمی کا تناسب $x\,[\%]$ بالمقابل جیلی نما مادہ کا پھیل $y\,[\%]$

| $x$ | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.8 | 1.6 | 2.3 | 2.8 |

سوال 24.294: مساوات 24.161 میں ایک ہاتھ سے دوسرا ہاتھ حاصل کریں۔ اشارہ۔ مربع لے کر $\overline{x}$ کی تعریف پر کرتے ہوئے سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 24.295: مساوات 24.162 میں دائیں ہاتھ کو بائیں ہاتھ سے حاصل کریں۔

# ضمیمہ ا

# اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے $I$ پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ $I$ پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا $I$ پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ $y_1$ اور $y_2$ دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا $y$ درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرق مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو $z'$ میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ $y$ اور $y'$ حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ $F_1$ اور $F_2$ مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $I$ پر $zF_1$ بڑھ نہیں رہا اور $zF_2$ گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں $F_1$ اور $F_2$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ $I$ پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں $I$ پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

# ضمیمہ ب

# مفید معلومات

## 1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

**قوت نمائی تفاعل** $e^x$ (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

**قدرتی لوگارتھم** (شکل 1.ب-ب)

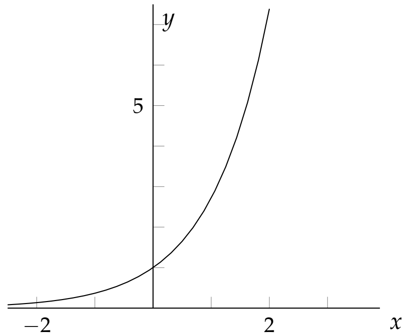
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

$e^x$ کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

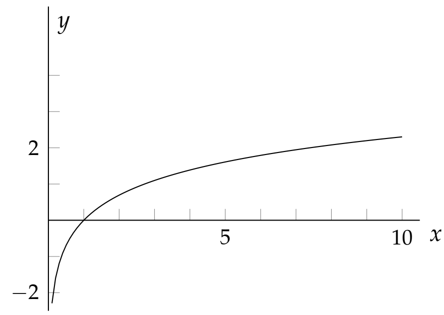
**اساس دس کا لوگارتھم** $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

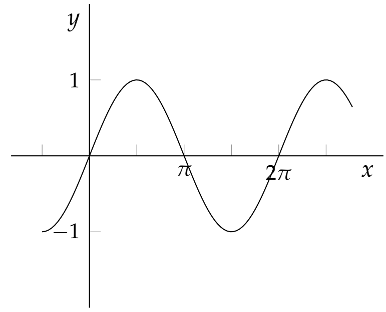



(الف) قوت نمائی تفاعل $e^x$

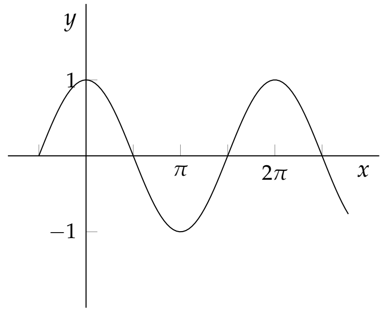



(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل




(الف) $\sin x$




(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

$10^x$ کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $\frac{1}{x} = 10^{\log\frac{1}{x}} = 10^{-\log x}$ ہیں۔

**سائن اور کوسائن تفاعل** (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ $2\pi$ ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
1^\circ &= 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad} \\
1\,\text{radian} &= 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ
\end{aligned}
$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\begin{aligned}\sin x &= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ \cos x &= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\end{aligned}$$

(ب.9)
$$\sin(\pi-x) = \sin x, \quad \cos(\pi-x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\begin{aligned}\sin x\sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y)+\cos(x-y)]\\ \cos x\cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\\ \sin x\cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\end{aligned}$$

(ب.12)
$$\begin{aligned}\sin u + \sin v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\\ \cos u + \cos v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\\ \cos v - \cos u &= 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\end{aligned}$$

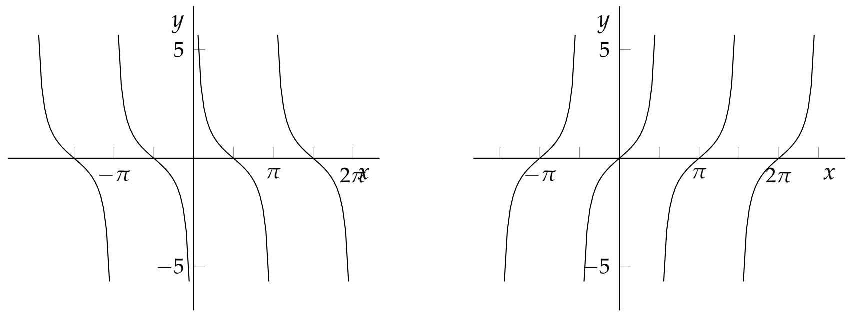
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x\mp\delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x\mp\delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

**ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)**

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$




$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

**ہذلولی تفاعل** (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

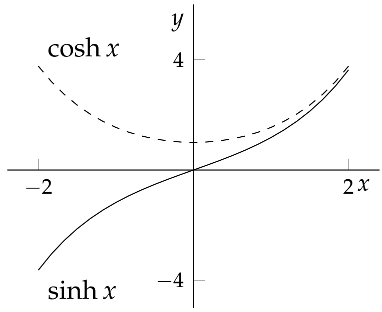
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned} \tag{ب.20}$$

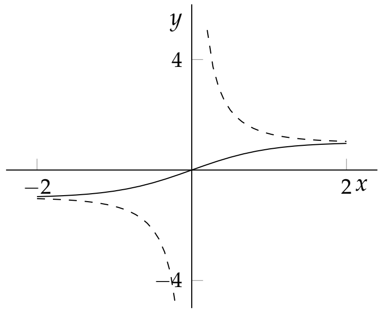
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

**گیما تفاعل** (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$




(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔




(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط $\alpha$ کی بات کریں تب یہ $\alpha$ کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\alpha$ کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت $k$ کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

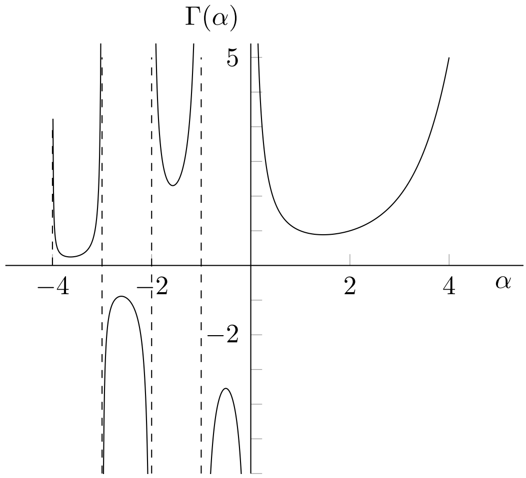
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\alpha$ کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں $k$ کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر $\alpha$ کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔




شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط $\alpha$ کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$ کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $e$ قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

**نا مکمل گیما تفاعل**

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

**بیٹا تفاعل**

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

**تفاعل خلل(شکل 6.ب)**

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

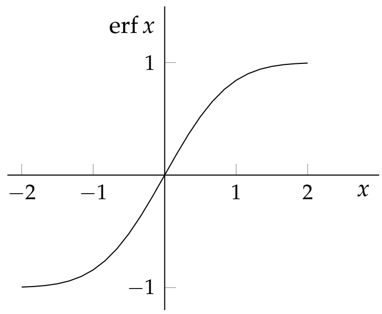
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

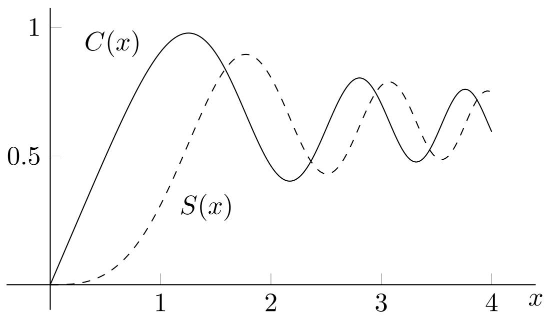
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

**فرسنل تکملات (شکل 7.ب)**

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$




شکل 6.ب: تفاعل خلل۔




شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{C}(x)=\int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{37.ب}$$

$$\mathrm{s}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{S}(x)=\int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{38.ب}$$

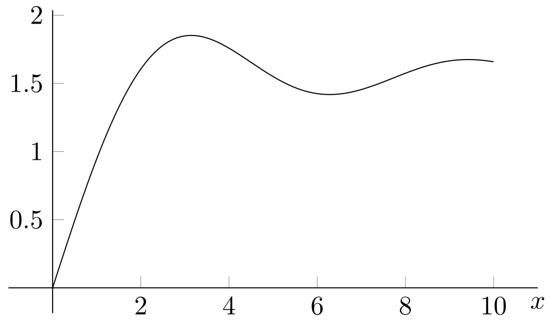
**تکمل سائن (شکل 8.ب)**

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{39.ب}$$

$\mathrm{Si}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{40.ب}$$

[1] complementary functions




شکل 8.ب: تکمل سائن

**تکمل کوسائن**

$$\operatorname{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

**تکمل قوت نمائی**

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

**تکمل لوگارتھمی**

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

# ضمیمہ ج

# جدول

جدول 1.ج: ثنائی تقسیم

جدول 2.ج: پوئسن تقسیم

جدول 3.ج: عمومی تقسیم

جدول 4.ج: عمومی تقسیم

جدول 5.ج: شبلا منصوبہ اعداد

جدول 6.ج: $t$ تقسیم

جدول 7.ج: مربع خا تقسیم

جدول 8.ج: مربع ایف تقسیم

جدول 9.ج: ؟؟