انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

عمومی تقسیم کی صورت میں پرکھ

درج ذیل مثال عملاً اہم قیاس کے پرکھ کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 24.23: (معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ)
فرض کریں کہ X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے۔نمونی جسامت $n = 10$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = \mu_0 = 24$ کو درج ذیل تین متبادل کے بالمقابل پرکھیں۔

$$\text{(الف)}\ \mu > \mu_0 \quad \text{(ب)}\ \mu < \mu_0 \quad \text{(پ)}\ \mu \neq \mu_0$$

حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 0.05$ منتخب کرتے ہیں۔اوسط کی اندازاً قیمت درج ذیل سے حاصل ہو گی۔

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots, X_n)$$

اگر قیاس درست ہو تب X عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 24$ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n} = 0.9$ ہو گی (مسئلہ 24.20)۔لہٰذا ہم فاصل قیمت c کو ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے حاصل کر سکتے ہیں۔
صورت الف: ہم $P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$ سے c تعین کرتے ہیں۔

$$P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{c-24}{\sqrt{0.9}} = 1.645$ یعنی $c = 25.56$ حاصل ہوتا ہے جو μ_0 سے بڑی قیمت ہے (اور جو شکل 24.20 میں سب سے اوپر دکھائی گئی صورت ہے)۔ اگر $\overline{x} \le 25.56$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جائے گا۔ اگر $\overline{x} > 25.56$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جائے گا۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\overline{X} > 25.56)_\mu = 1 - P(\overline{X} \le 25.56)_\mu \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{25.56-\mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu) \end{aligned} \tag{24.139}$$

صورت ب: فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $c = 24 - 1.56 = 22.24$ ملتا ہے۔اگر $\overline{x} \geq 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔اگر $\overline{x} < 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\eta(\mu) = P(\overline{X} \leq 22.44)_\mu = \Phi\Big(\frac{22.44 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = \Phi(23.65 - 1.05\mu) \tag{24.140}$$

صورت پ: چونکہ عمومی تقسیم تشاکلی ہے، ہم $\mu = 24$ سے c_1 اور c_2 کو ایک جیسے فاصلے پر چن کر، مثلاً $c_1 = 24 - k$ اور $c_2 = 24 + k$ ، مستقل k کو درج ذیل سے تعین کرتے ہیں۔

$$P(24 - k \leq \overline{X} \leq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{k}{\sqrt{0.9}} = 1.960$ یعنی $k = 1.86$ حاصل ہو گا۔یوں $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$ اور $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$ ہوں گے۔اگر $\overline{x}$ کی قیمت c_1 سے چھوٹی نہ ہو اور c_2 سے بڑی نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔اس کے علاوہ ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
\eta(\mu) &= P(\overline{X} < 22.14)_\mu + P(\overline{X} > 25.86)_\mu \\
&= P(\overline{X} < 22.14)_\mu + 1 - P(\overline{X} \leq 25.86)_\mu \\
&= 1 + \Phi\Big(\frac{22.14 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{25.86 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) \\
&= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu)
\end{aligned} \tag{24.141}$$

نتیجتاً خاصیت کارکردگی $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$ درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\beta(\mu) &= \Phi\Big(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) \\
&= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu)
\end{aligned}$$

شکل سے ظاہر ہے کہ $n = 10$ کی خاصیت کارکردگی کی مطابقتی منحنی کی ڈھلوان زیادہ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ n بڑھانے سے بہتر پرکھ حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی عملی استعمال میں n کو کم سے کم لیکن اتنا زیادہ رکھا جاتا ہے کہ پرکھ μ اور μ_0 میں انحراف، جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں، کو واضح کرے۔ مثال کے طور پر اگر انحراف ہماری دلچسپی ∓ 2 اکائی ہو، ہم شکل سے دیکھتے ہیں کہ $n = 10$ بہت کم ہو گا چونکہ جب $\mu = 24 - 2 = 22$ یا $\mu = 24 + 2 = 26$ ہو تب β تقریباً $50\,\%$ ہو گا۔اس کے برعکس، $n = 100$ اس صورت کافی ہو گا۔ □

مثال 24.24: **نا معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ**
رسی کی تنشی مضبوطی $n = 16$ کا نمونہ لے کر ناپی گئی۔نمونی اوسط $\overline{x} = 4482\,\mathrm{kg}$ اور نمونی معیاری انحراف $s = 115\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوئے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تنشی مضبوطی عمومی بلا منصوبہ متغیر ہے۔ قیاس $\mu_0 = 4500\,\mathrm{kg}$ کو متبادل $\mu_1 = 4400\,\mathrm{kg}$ کے مقابلے میں پرکھیں۔یہاں μ_0 وہ قیمت ہو سکتی ہے جو بنانے والے نے فراہم کی ہو جبکہ μ_1 سابقہ تجربات کا نتیجہ ہو سکتا ہے۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو تب مسئلہ 24.21 کے تحت یاس بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} = 4\,\frac{\overline{X} - 4500}{S}$$

کا t تقسیم $n - 1 = 15$ درجہ آزادی کا ہو گا۔ فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے $c = -1.75$ حاصل ہو گا۔نمونہ سے T کی مشاہدہ سے حاصل قیمت $t = \frac{4(4482-4500)}{115} = -0.626$ ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $t > c$ ہے لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہمیں مزید جدول بند قیمتیں درکار ہوں گی جن پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔ □

مثال 24.25: **(عمومی تقسیم کی تغیریت کی پرکھ)**
عمومی آبادی کے $n = 15$ جسامت اور نمونی تغیریت $s^2 = 13$ کے نمونہ سے قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$ کو متبادل $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$ میں مقابلے میں پرکھیں۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو تب

$$Y = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} = 14\frac{S^2}{10} = 1.4S^2$$

کا مربع خا تقسیم $n - 1 = 14$ درجہ آزادی کا ہو گا (مسئلہ 24.22)۔ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل سے 14 درجہ آزادی کے لئے $c = 23.68$ حاصل ہو گا

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05 \quad\implies\quad P(Y \le c) = 0.95$$

جو Y کی فاصل قیمت ہے۔یوں $S^2 = \frac{\sigma_0^2 Y}{n-1} = 0.714Y$ کا مطابقتی فاصل قیمت $c^* = 0.714 \cdot 23.68 = 16.91$ ہو گا۔چونکہ $s^2 < c^*$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں،

اگر متبادل درست ہو تب متغیر

$$Y_1 = 14\frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7S^2$$

کے مربع خا تقسیم کا درجہ آزادی 14 ہو گا۔یوں ہمارے پرکھ کی طاقت

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \leq 11.84)_{\sigma^2 0} \approx 62\,\%$$

ہو گی اور ہم دیکھتے ہیں قسم دوم غلطی کا امکان (جو $38\,\%$ ہے) بہت زیادہ ہے جس کو کم کرنے کے لئے نمونی جسامت بڑھانی ضروری ہے۔ □

مثال 24.26: دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا آپس میں موازنہ
نا معلوم اوسط μ_1 کی عمومی تقسیم کا نمونہ $x_1, \cdots, x_{n1}$ اور دوسری عمومی تقسیم جس کی اوسط μ_2 نا معلوم ہو کا نمونہ $y_1, \cdots, y_{n2}$ استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل مثلاً $\mu_1 > \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھنا چاہتے ہیں۔تغیرات جاننا ضروری نہیں ہے لیکن انہیں ایک جیسا[163] تصور کیا جاتا ہے۔دو صورتیں عملاً اہم ہیں۔

پہلی صورت: نمونوں کی جسامت ایک جیسی ہے۔مزید پہلے نمونہ کی ہر قیمت کا دوسرے نمونہ میں مطابقتی ٹھیک ایک قیمت پایا جاتا ہے، چونکہ مطابقتی قیمتیں ایک ہی انسان یا چیز کی بدولت پائی جاتی ہیں (**جوڑی دار موازنہ**[164])؛مثال کے طور پر ایک ہی چیز کی دو مختلف طریقوں سے ناپ، یا ایک ہی جانور کی دو آنکھوں کی ناپ، یا زیادہ عمومی طور پر جہاں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نمونوں کی جوڑی قیمتیں ایک جیسے انسانوں یا چیزوں (مثلاً جڑواں بھائی، گاڑھی کے اگلے ٹائر، وغیرہ) سے حاصل کی گئی ہوں۔تب ہم مطابقتی قیمتوں کا فرق لے کر، مثال 24.24 میں دی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، اس قیاس کو پرکھیں گے کہ ان فرق کی مطابقتی آبادی کی اوسط 0 ہے۔اگر ممکن ہو تب ہم اسی ترکیب کو استعمال کریں گے ورنہ ہمیں درج ذیل ترکیب استعمال کرنی ہو گی۔

دوسری صورت: دونوں نمونے غیر تابع ہیں اور ان کی جسامت مختلف ہو سکتی ہے۔تب ہم درج ذیل طریقے سے بڑھتے ہیں۔فرض کریں کہ متبادل $\mu_1 > \mu_2$ ہے۔ہم معنی خیز سطح α منتخب کرتے ہیں۔ہم نمونی اوسط $\overline{x}$ ،

[163] اگر اگلے مثال کا پرکھ واضح کرے کہ تغیرات میں واضح فرق پایا جاتا ہے تب ایک جیسے $n_1 = n_2 = n$ ، مثلاً $n > 30$ منتخب کرتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ مساوات تخمیناً عمومی بلا منصوبہ متغیر، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے، کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے، اور مثال 24.23 کی طرز پر حل کریں۔

[164] paired comparison

$\overline{y}$ اور $(n_1-1)s_1^2$ ، $(n-1)s_2^2$ کا حساب کرتے ہیں جہاں s_1^2 اور s_2^2 نمونی تغیریت ہیں۔ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں n_1+n_2-2 درجہ آزادی لیتے ہوئے ہم c کو

$$P(T \leq c) = 1-\alpha \tag{24.142}$$

سے تعین کرتے ہیں۔آخر میں ہم درج ذیل کا حساب کرتے ہیں۔

$$t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \, \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}} \tag{24.143}$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر قیاس درست ہو تب یہ t تقسیم کے n_1+n_2-2 درجہ آزادی کے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے۔اگر $t_0 \leq c$ ہو تب قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔اگر $t_0 > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے۔

اگر متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ ہو تب مساوات 24.142 کی جگہ درج ذیل استعمال کیا جائے گا۔

$$P(T \leq c_1) = 0.5\alpha, \quad P(T \leq c_2) = 1-0.5\alpha \tag{24.142*}$$

دھیان رہے کہ ایک جیسی نمونی جسامت $n_1 = n_2 = n$ کے لئے مساوات 24.143 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$t_0 = \sqrt{n} \, \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} \tag{24.144}$$

اس کی وضاحت کے لئے آئیں درج ذیل دو نمونوں پر غور کرتے ہیں جو ایک ہی کام میں دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی ہے۔

105	108	86	103	103	107	124	105
89	92	84	97	103	107	111	97

فرض کریں کہ مطابقتی آبادی عمومی ہے اور ان کی تغیریت ایک جیسی ہے۔آئیں قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ (تغیریت کی ایک جیسا ہونے کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔)

حل: ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\overline{x} = 105.125, \quad \overline{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000$$

ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔مساوات 24.142* میں $0.5\alpha = 2.5\,\%$ ، $1 - 0.5\alpha = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں 14 درجہ آزادی سے $c_1 = -2.15$ اور $c_2 = 2.15$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 24.144 میں $n = 8$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$t_0 = \frac{\sqrt{8} \cdot 7.625}{\sqrt{190.125}} = 1.56$$

چونکہ $c_1 \leq t_0 \leq c_2$ ہے ہم دونوں صورتوں میں ایک جیسی اوسط کے قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

پہلی صورت اس مثال پر لاگو ہوتی ہے چونکہ پہلی دونوں نمونوں کی پہلی نمونی قیمت ایک قسم کے کام کے لئے حاصل کی گئی۔اسی طرح دونوں نمونوں کی دوسری نمونی قیمت کسی دوسرے کام کے لئے حاصل کی گئی، وغیرہ۔یوں ہم ان نمونی قیمتوں کا مطابقتی فرق

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

اور مثال 24.24 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0$ پرکھ سکتے ہیں جہاں μ اس فرق کی اوسط ہے۔ہم اس کا منطقی متبادل $\mu \neq 0$ لیتے ہیں۔نمونی اوسط $\bar{d} = 7.625$ اور نمونی تغیریت $s^2 = 45.696$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$t = \frac{\sqrt{8}(7.625 - 0)}{\sqrt{45.696}} = 3.19$$

$P(T \leq c_1) = 2.5\,\%$ ، $P(T \leq c_2) = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں $n - 1 = 7$ درجہ آزادی سے $c_1 = -2.37$ اور $c_2 = 2.37$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں چونکہ $t = 3.19$ معلوم شدہ c_1 اور c_2 کے بیچ نہیں پایا جاتا ہے۔اس طرح ہمارا موجودہ پرکھ، جو اسی نمونوں پر مبنی ہے لیکن زیادہ معلومات کو استعمال کرتا ہے، دکھاتا ہے کہ نتائج میں فرق کافی ہے۔ □

مثال 24.27: (دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا موازنہ)
گزشتہ مثال کے دو نمونے استعمال کرتے ہوئے قیاس $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو پرکھیں۔فرض کریں کہ مطابقتی آبادیاں عمومی ہیں اور تجربہ کی نوعیت سے متبادل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ہو گا۔
حل: ہم $s_1^2 = 106.125$ اور $s_2^2 = 84.000$ حاصل کرتے ہیں۔ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔ $P(V \leq c) = 1 - \alpha = 95\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 8.ج میں $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$

درجہ آزادی سے $c = 3.79$ تعین ہوتا ہے۔ہم آخر میں $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.26$ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $v_0 \leq c$ ہے ہم قیاس کو نامنظور نہیں کرتے ہیں۔اگر $v_0 > c$ ہوتا ہم اس کو نامنظور کرتے۔

قیاس درست ہونے کی صورت میں v_0 ایسے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے جس کی تقسیم درجہ آزادی $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ کی F **تقسیم**[165] ہے۔ (m, n) درجہ آزادی کے F تقسیم کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہے

$$F(z) = \begin{cases} K_{mn} \int_0^z t^{\frac{m-2}{2}} (mt + n)^{-\frac{m+n}{2}} \, \mathrm{d}t & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \tag{24.145}$$

جہاں $K_{mn} = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$ ہے۔ □

سوالات

[165] F-distribution

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.ا خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q| \left|2yy'\right| \leq |q| z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p| y'^2 + |q| z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p| z + |q| z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

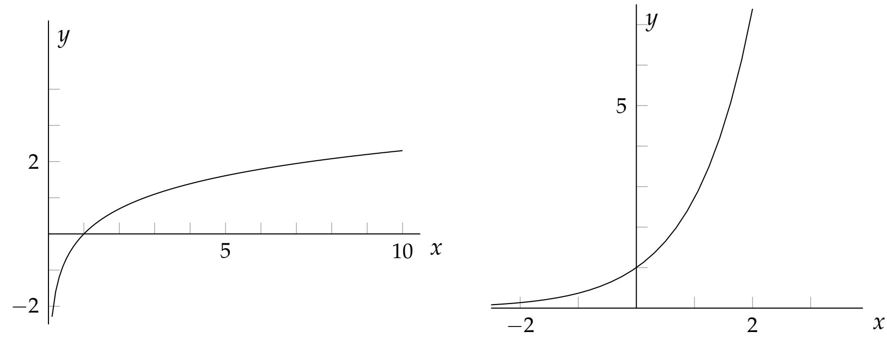
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

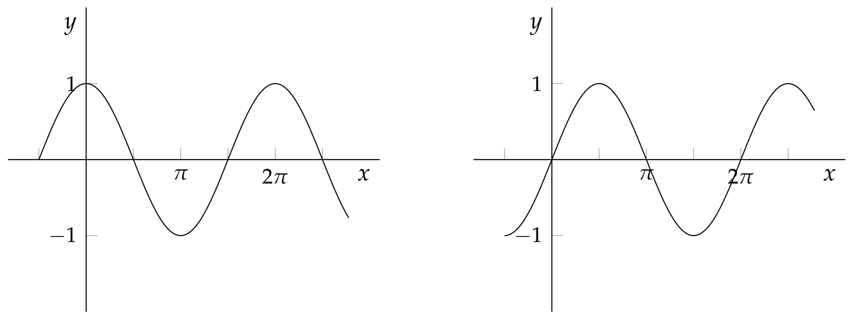
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب)قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف)قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\sin(x-y)\quad=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[-\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u+\sin v=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v-\cos u=2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

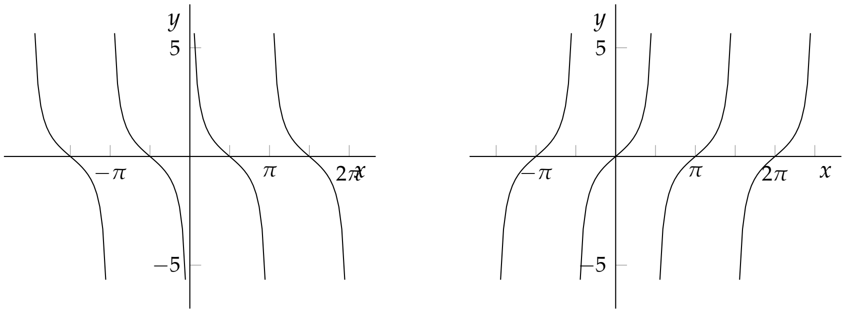
(ب.13)
$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\cos(x\mp\delta),\quad \tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x\mp\delta),\quad \tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc=\frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},\quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$



(ب) $\cot x$ (الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

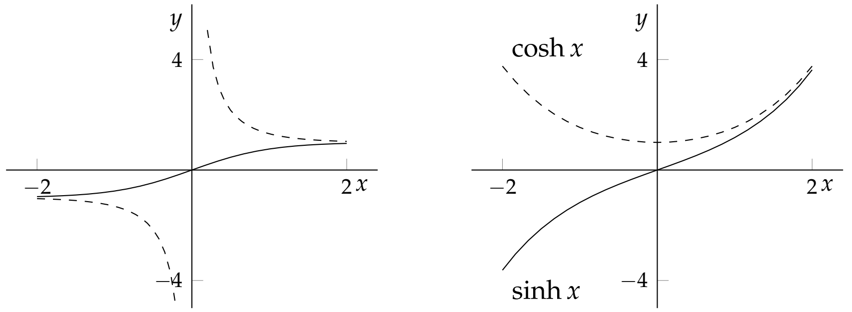
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{gathered}\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{gathered} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

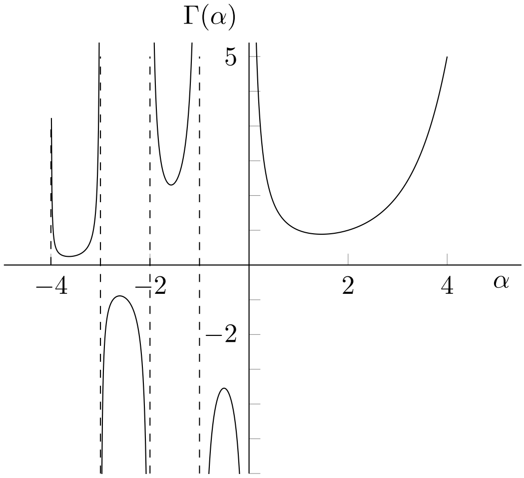
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

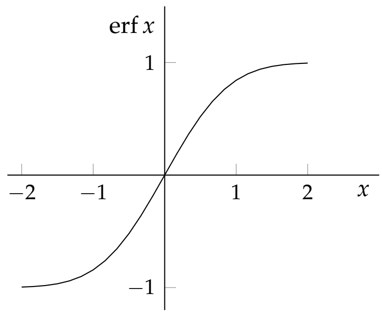
$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

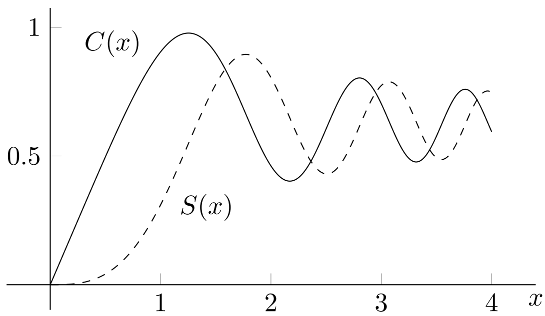
$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرینل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

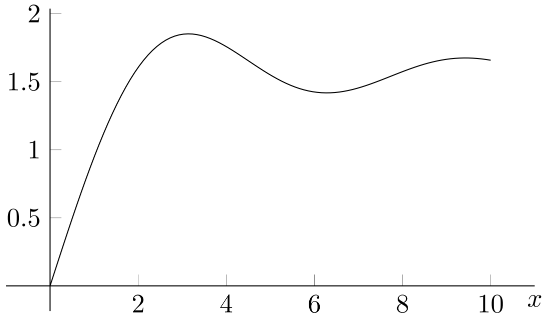
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

ضمیمہ ج

جدول

جدول 1.ج: ثنائی تقسیم

جدول 2.ج: پوئسن تقسیم

جدول 3.ج: عمومی تقسیم

جدول 4.ج: عمومی تقسیم

جدول 5.ج: شبلا منصوبہ اعداد

جدول 6.ج: t تقسیم

جدول 7.ج: مربع خا تقسیم

جدول 8.ج: مربع خا تقسیم