# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

# عنوان

# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

# باب19

# تکمل بذریعہ ترکیب بقیہ

چونکہ مساوات 18.57 کے تکمل استعمال کیے بغیر لوغوں تسلسل (مساوات 18.56) کے عددی سر حاصل کرنے کے کئی تراکیب پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم $c_1$ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے مخلوط تکمل کی قیمت کو باآسانی اور نفاست کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں۔ $c_1$ کو $z = a$ پر $f(z)$ کا بقیہ کہا جائے گا۔جیسا ہم حصہ میں دیکھیں گے، اس طاقتور ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے کئی اہم حقیقی تکمل بھی حل کیے جاتے ہیں۔

## 19.1 بقیہ

تفاعل $f(z)$ جو نقطہ $z = 0$ کی پڑوس میں تحلیلی ہو کے لئے کوشی مسئلہ تکمل سے اس پڑوس میں کسی بھی خط ارتفاع پر

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{19.1}$$

ہو گا۔البتہ اگر $C$ کے اندر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا تنہا ندرت پایا جاتا ہو تب مساوات 19.1 میں دیا گیا تکمل عموماً غیر صفر ہو گا۔ایسی صورت میں $f(z)$ کو لوغوں تسلسل

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots \tag{19.2}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو دائرہ کار $0 < |z-a| < R$ میں مرتکز ہو گا جہاں $a$ سے $f(z)$ کی قریب ترین ندرت کا فاصلہ $R$ ہے۔مساوات 18.57 سے ہم دیکھتے ہیں کہ عددی سر $c_1$ درج ذیل ہو گا

$$c_1 = \frac{1}{i2\pi} \int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

لہٰذا

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = i2\pi c_1 \tag{19.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ کار $0 < |z-a| < R$ میں سادہ بند راہ $C$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔مساوات 19.2 میں $c_1$ کو نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا بقیہ[1] کہتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھ کر ظاہر کرتے ہیں۔

$$c_1 = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) \tag{19.4}$$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ لوغوں تسلسل کے عددی سر کو، عددی سر کی تکمل کلیات کو استعمال کیے بغیر، مختلف تراکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ان میں سے کسی ایک ترکیب سے $c_1$ حاصل کرتے ہوئے ارتفاعی تکمل[2] کی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔

**مثال 19.1: تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بقیہ**

تفاعل $f(z) = z^{-4}\sin z$ کا اکائی دائرے پر گھڑی کی رخ تکمل حاسل کریں۔

مساوات 18.38 سے ہم لوغوں تسلسل

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7! + - \cdots}$$

حاصل کرت ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ $z = 0$ پر $f(z)$ کا تین درجی قطب پایا جاتا ہے جس کا مطابقتی بقیہ $c_1 = -\frac{1}{3!}$ ہے لہٰذا مساوات 19.3 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C \frac{\sin z}{z^4}\,\mathrm{d}z = i2\pi c_1 = -\frac{i\pi}{3}$$

---

[1] residue
[2] contour integral

□

آگے بڑھنے سے پہلے قطب کی صورت مین بقیہ دریافت کرنے کا ایک منظم طریقہ سیکھتے ہیں۔

اگر نقطہ $z=a$ پر $f(z)$ کا **سادہ قطب** پایا جاتا ہو تب تفاعل کا مطابقتی لوغوں تسلسل (مساوات 19.2)

$$f(z)=\frac{c_1}{z-a}+b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots \qquad (0<\lvert z-a\rvert<R)$$

ہو گا جہاں $c_1\neq 0$ ہے۔ دونوں اطراف کو $z-a$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$(z-a)f(z)=c_1+(z-a)[b_0+b_1(z-a)+\cdots] \tag{19.5}$$

اب $z\to 0$ کرنے سے دایاں ہاتھ $c_1$ تک پہنچتا ہے لہٰذا ہمیں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=c_1=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{19.6}$$

یہ پہلا درکار نتیجہ ہے جو سادہ قطب کی صورت میں بقیہ دیتا ہے۔

سادہ قطب کی صورت میں بقیہ کا دوسرا کلیہ حاصل کرت ہیں۔اگر $f(z)$ کا نقطہ $z=a$ پر سادہ قطب ہو تب ہم

$$f(z)=\tfrac{p(z)}{q(z)}$$

لکھتے ہیں جہاں $p(z)$ اور $q(z)$ نقطہ $z=a$ پر تحلیلی ہیں، $p(a)\neq 0$ ہے اور $q(z)$ کا نقطہ $z=a$ پر سادہ صفر پایا جائے گا۔ نتیجتاً $q(z)$ کو ٹیلر تسلسل

$$q(z)=(z-a)q'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}q''(a)+\cdots$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 19.6 سے

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(q)}=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)p(z)}{(z-a)[q'(a)+\frac{1}{2}(z-a)q''(a)+\cdots]}$$

یعنی

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(a)}{q'(a)} \tag{19.7}$$

حاصل ہو گا جو سادہ قطب کی صورت میں بقیہ حاصل کرنے کا دوسرا کلیہ ہے۔

**مثال 19.2: سادہ قطب کی صورت میں بقیہ**

تفاعل $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$ کا $z=0$ اور $z=1$ پر سادہ قطب پائے جاتے ہیں۔مساوات 19.7 کی مدد سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \left[\frac{4-3z}{2z-1}\right]_{z=0} = -4, \quad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \left[\frac{4-3z}{2z-1}\right]_{z=1} = 1$$

□

آئیں اب **بلند درجی قطبین** کی بات کرتے ہیں۔اگر نقطہ $z=a$ پر $f(z)$ کے قطب کا درجہ $m>1$ ہو تب تفاعل کا لوغوں تسلسل

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \frac{c_1}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + \cdots$$

ہو گا جہاں $c_m \neq 0$ ہے اور نقطہ $z=a$ کی پڑوس میں، ماسوائے نقطہ $z=a$ پر، تسلسل مرتکز ہو گا۔ دونوں اطراف کو $(z-a)^m$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\begin{aligned}(z-a)^m f(z) = c_m + c_{m-1}(z-a) + \cdots + c_2(z-a)^{m-2} + c_1(z-a)^{m-1}\\ + b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + \cdots\end{aligned}$$

ملتا ہے۔یوں نقطہ $z=a$ پر $f(z)$ کا بقیہ $c_1$ اب تفاعل $g(z) = (z-a)^m f(z)$ کا $z=a$ کے گرد ٹیلر تسلسل میں $(z-a)^{m-1}$ کا عددی سر ہے۔یوں مسئلہ ٹیلر (مسئلہ 18.9) کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$c_1 = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

یوں اگر نقطہ $z=a$ پر $f(z)$ کے قطب کا درجہ $m$ ہو تب بقیہ درج ذیل (تیسرا) کلیہ دے گا۔

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \right\} \tag{19.8}$$

**مثال 19.3: بلند درجہ قطب پر بقیہ**

تفاعل

$$f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}$$

$z=1$ کا پر دو درجی قطب پایا جاتا ہے۔یوں مساوات 19.8 درج ذیل بقیہ دے گا۔

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z=1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z=1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{2z}{z+4}\right) = \frac{8}{25}$$

□

ظاہر ہے کہ ناطق تفاعل $f(z)$ کی صورت میں بقیہ کو $f(z)$ کی جزوی کسری پھیلاو سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 19.4:

$$f(z) = \frac{7z^4 - 13z^3 + z^2 + 4z - 1}{(z^3+z^2)(z-1)^2} = \frac{3}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل بقیہ حاصل ہوں گے۔

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 3, \quad \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = 4, \quad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 0$$

□

## سوالات

سوال 19.1 تا سوال 19.13 میں دیے تفاعل کا ندرت پر بقیہ تلاش کریں۔

سوال 19.1: $\frac{1}{1-z}$
جواب: نقطہ $z=1$ پر بقیہ $-1$ ہے۔

سوال 19.2: $\frac{z-3}{z+1}$
جواب: نقطہ $z=-1$ پر بقیہ $-4$ ہے۔

سوال 19.3: $\frac{1}{z^2}$
جواب: نقطہ $z=0$ پر بقیہ $0$ ہے۔

سوال 19.4: $\frac{z}{z^2-1}$
جواب: نقطہ $z=1$ اور $z=-1$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں۔

سوال 19.5: $\frac{1}{z^2+1}$
جواب: نقطہ $z=-i$ اور $z=i$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{i}{2}$ اور $-\frac{i}{2}$ ہیں۔

سوال 19.6: $\frac{1}{(z^2+1)^2}$
جواب: نقطہ $z=-i$ اور $z=i$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{i}{4}$ اور $-\frac{i}{4}$ ہیں۔

سوال 19.7: $\frac{1}{(z^2-1)^2}$
جواب: نقطہ $z=-1$ اور $z=1$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{1}{4}$ اور $-\frac{1}{4}$ ہیں۔

سوال 19.8: $\frac{z}{z^4-1}$
جواب: نقطہ $z=-1,1,-i,i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}$ ہیں۔

سوال 19.9: $\frac{1}{z^4-1}$
جواب: نقطہ $z=-1,1,-i,i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{i}{4},\frac{i}{4}$ ہیں۔

سوال 19.10: $\frac{1}{1-e^z}$
جواب: نقطہ $z=\mp i2n\pi$ پر بقیہ $-1$ ہے۔

سوال 19.11: $\sec z$
جواب: نقطہ $z=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ اور $z=-\frac{\pi}{2}-2n\pi$ پر بقیہ بالترتیب $-1$ اور $1$ ہے جہاں $n=0,1,2\cdots$ ہے۔

سوال 19.12: $\tan z$
جواب: نقطہ $z=\frac{\pi}{2}+n\pi$ پر بقیہ $-1$ ہے جہاں $n=\mp1,\mp2,\cdots$ ہے۔

سوال 19.13: $\cot z$
جواب: نقطہ $z=\mp n\pi$ پر بقیہ $1$ ہے۔

سوال 19.14 تا سوال 19.18 میں دائرہ $|z|=1.5$ کے اندر ندرت پر تفاعل کا بقیہ تلاش کریں۔

سوال 19.14: $\frac{3z^2}{1-z^4}$
جواب: نقطہ $z=-1,1,-i,i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $\frac{3}{4},i\frac{3}{4}$ ہیں۔

سوال 19.15: $\frac{z-\frac{3}{4}}{z^2-3z+2}$
جواب: نقطہ $z=1$ پر بقیہ $-\frac{1}{4}$ ہے۔

سوال 19.16: $\frac{6z+1}{z^2-3z}$
جواب: نقطہ $z=0$ پر بقیہ $-\frac{1}{3}$ ہے۔

سوال 19.17: $\frac{z-1}{(z+1)(z^2+16)}$
جواب: نقطہ $z=-1$ پر بقیہ $-\frac{2}{17}$ ہے۔

سوال 19.18: $\frac{4+3z}{z^3-3z^2+2z}$
جواب: نقطہ $z=0,1$ پر اسی ترتیب سے بقیہ $2,-7$ ہیں۔

سوال 19.19 تا سوال 19.30 میں اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 19.19: $\int_C e^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.20: $\int_C ze^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.21: $\int_C \cot z\,\mathrm{d}z$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.22: $\int_C \tan z\,\mathrm{d}z$

سوال 19.23: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.24: $\int_C \frac{z}{2z+i}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.25: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z}$
جواب: $0$

سوال 19.26: $\int_C \frac{z^2-4}{(z-2)^4}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.27: $\int_C \frac{z^2+1}{z^2-2z}\,\mathrm{d}z$
جواب: $-i\pi$

سوال 19.28: $-i\pi \int_C \frac{\sin \pi z}{z^4}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.29: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1-e^z}\,\mathrm{d}z$
جواب: $-i2\pi$

سوال 19.30: $\int_C \frac{z^2+1}{e^z \sin z}\,\mathrm{d}z$

## 19.2 مسئلہ بقیہ

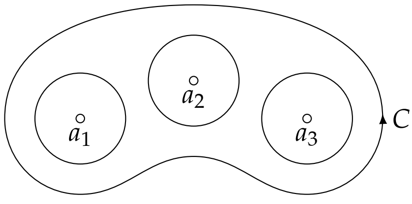
گزشتہ حصے میں ہم نے ایسا ارتفاعی تکمل جس کے متکمل کا خط ارتفاع میں بند صرف ایک عدد ندرت پایا جاتا ہو کو حل کرنا سیکھا۔ ہم اب دیکھیں گے کہ اسی ترکیب کو وسعت دے کر ان تکمل کو بھی حل کیا جا سکتا ہے جن کے متکمل کا خط ارتفاع میں بند ایک سے زیادہ تنہا ندرت پائے جاتے ہوں۔

مسئلہ 19.1: **مسئلہ بقیہ**
فرض کریں کہ تفاعل $f(z)$ سادہ بند راہ $C$ پر اور $C$ کے اندر تحلیلی ہے ماسوائے محدود تعداد کے نقطوں $a_1, a_2, \cdots, a_m$ پر جہاں $f(z)$ کے ندرت پائے جاتے ہیں۔ تب درج ذیل ہو گا جہاں $C$ پر تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = i2\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z) \tag{19.9}$$

ثبوت: ہم ہر ندرت $a_j$ کو انفرادی دائرہ $C_j$ میں بند کرتے ہیں جس کا رداس اتنا چھوٹا رکھا جاتا ہے کہ تمام $m$ عدد دائرے اور $C$ ایک دوسرے کو نہ چھوئے (شکل 19.1)۔ تب مضرب تعلق دائرہ کار $D$ جس کے حدود $C$ اور $C_1$ تا $C_m$ ہوں پر اور $D$ کی تمام سرحد پر $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔ کوشی مسئلہ تکمل سے

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int\limits_{C_m} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{19.10}$$




شکل 19.1: مسئلہ بقیہ

لکھا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو $C$ پر گھڑی کی الٹ رخ اور $C_1$ تا $C_m$ پر تکمل کو گھڑی کی رخ حاصل کیا جاتا ہے (حصہ 16.3)۔ ہم اب $C_1$ تا $C_m$ پر تکمل کا رخ الٹ کرتے ہیں جس سے ان تکمل کی قیمتوں کی علامت تبدیل ہو جائے گی لہٰذا مساوات 19.9 سے

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int\limits_{C_m} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{19.11}$$

حاصل ہو گا جہاں تمام تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیے جائیں گے۔ اب چونکہ مساوات 19.3 کے تحت

$$\int\limits_{C_j} f(z)\,\mathrm{d}z = i2\pi \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)$$

ہو گا لہٰذا مساوات 19.11 سے مساوات 19.9 حاصل ہو گا۔ یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس اہم مسئلے کی مختلف مخلوط اور حقیقی تکملات میں ضرورت پیش آتی ہے۔ہم چند مخلوط تکملات کی مثالیں پیش کرتے ہیں۔

**مثال 19.5: تکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ**

تفاعل $\frac{4-3z}{z^2-z}$ تحلیلی ہے ماسوائے نقطہ $0$ اور $1$ کے جہاں تفاعل کے سادہ قطب پائے جاتے ہیں جن کے بقیہ بالترتیب $-4$ اور $1$ ہیں (مثال 19.2)۔یوں ہر اس راہ $C$ کے لئے جو نقطہ $0$ اور $1$ دونوں کو گھیرتی ہے پر

$$\int_C \frac{4-3z}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = i2\pi(-4+1) = -i6\pi$$

ہو گا جہاں تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔اسی طرح ہر اس راہ $C$ پر جس کے اندر نقطہ $z=0$ پایا جاتا ہو جبکہ نقطہ $z=1$ اس کے باہر پایا جاتا ہو کے لئے

$$\int_C \frac{4-3z}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = i2\pi(-4) = -i8\pi$$

ہو گا جہاں تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔ □

**مثال 19.6: متکمل کے بلند درجی قطبین پائے جاتے ہیں**

دائرہ $|z-a|=1$ پر گھڑی کی الٹ رخ تفاعل $\frac{1}{(z^3-1)^2}$ کا تکمل تلاش کریں۔اس تفاعل کے نقطہ $z=1$، $z=e^{i\frac{2\pi}{2}}$ اور $z=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ پر دو درجی قطب پائے جاتے ہیں۔صرف نقطہ $z=1$ پر قطب دائرے کے اندر ہے۔یوں

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)^2} = i2\pi \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{(z^3-1)^2} = i2\pi\Big(-\frac{2}{9}\Big) = -\frac{i4\pi}{9}$$

ہو گا جہاں بقیہ کو مساوات 19.8 کی مدد سے حاصل کیا گیا ہے۔ □

**مثال 19.7: پہلے حاصل کردہ نتیجے کی تصدیق**

ہم تفاعل $\frac{1}{(z-a)^m}$ جہاں $m$ مثبت عدد صحیح ہے کا گھڑی کی الٹ رخ تکمل ایسی سادہ بند راہ $C$ پر حاصل کرتے ہیں جو نقطہ $z=a$ کو گھیرتی ہو۔ پہلے بقیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{1}{z-a} = 1, \quad \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{1}{(z-a)^m} = 0 \quad (m=2,3,\cdots)$$

یوں نتیجہ عین مثال 16.3 کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m} = \begin{cases} i2\pi & (m=1) \\ 0 & (m=2,3,\cdots) \end{cases}$$

□

### سوالات

سوال 19.31 تا سوال 19.33 میں تفاعل $\frac{3z^2+2z-4}{z^3-4z}$ کا تکمل گھڑی کی الٹ رخ دی گئی راہ $C$ پر تلاش کریں۔

سوال 19.31: $|z|=1$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.32: $|z|=3$
جواب: $i6\pi$

سوال 19.33: $|z-4|=1$
جواب: $0$

سوال 19.34 تا سوال 19.36 میں تفاعل $\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}$ کا تکمل گھڑی کی الٹ رخ دی گئی راہ $C$ پر تلاش کریں۔

سوال 19.34: $|z-2|=\frac{1}{2}$
جواب: $-i3\pi$

سوال 19.35: $|z|=\frac{3}{2}$
جواب: $i3\pi$

سوال 19.36: $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$
جواب: $0$

سوال 19.37 تا سوال 19.60 کا تکمل اکائی دائرہ $C$ پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کریں۔

سوال 19.37: $\int_C \frac{3z}{3z-1}\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{i2\pi}{3}$

سوال 19.38: $\int_C \frac{z}{4z^2-1}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.39: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-2z}$
جواب: $-i\pi$

سوال 19.40: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4}$

سوال 19.41: $\int_C \frac{z+1}{4z^3-z}\,\mathrm{d}z$
جواب: $0$

سوال 19.42: $\int_C \frac{z^5-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.43: $\int_C \frac{z}{1+9z^2}\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{i2\pi}{9}$

سوال 19.44: $\int_C \frac{z+1}{z^4-2z^3}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.45: $\int_C \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2}\,\mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{i16\pi}{9}$

سوال 19.46: $\int_C \tan z\,\mathrm{d}z$

سوال 19.47: $\int_C \tan \pi z\,\mathrm{d}z$
جواب: $-i4$

سوال 19.48: $\int_C \frac{6z^2-4z+1}{(z-2)(1+4z^2)}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.49: $\int_C \tan 2\pi z\,\mathrm{d}z$
جواب: $-i4$

سوال 19.50: $\int_C \frac{\tan \pi z}{z^3}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.51: $\int_C \frac{e}{z^2-5z}\,\mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{i2\pi}{5}$

سوال 19.52: $\int_C \frac{e^z}{\sin z}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.53: $\int_C \frac{e^z}{\cos z}\,\mathrm{d}z$
جواب: $0$

سوال 19.54: $\int_C \frac{e^z}{\cos \pi z} \, \mathrm{d}z$

سوال 19.55: $\int_C \frac{\cosh z}{z^2 - i3z} \, \mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{i2\pi}{3}$

سوال 19.56: $\int_C \coth z \, \mathrm{d}z$

سوال 19.57: $\int_C \frac{\sinh z}{2z - i} \, \mathrm{d}z$
جواب: $-\pi \sin \frac{1}{2}$

سوال 19.58: $\int_C \cot z \, \mathrm{d}z$

سوال 19.59: $\int_C \frac{\cot z}{z} \, \mathrm{d}z$
جواب: $0$

سوال 19.60: $\int_C \frac{e^{z^2}}{\cos \pi z} \, \mathrm{d}z$

## 19.3 حقیقی تکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ

کئی پیچیدہ قسم کے حقیقی تکمل کو نہایت نفاست کے ساتھ مسئلہ بقیہ کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

### $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ کے ناطق تفاعل کے تکمل

ہم سب سے پہلے درج ذیل قسم کے تکمل پر غور کرتے ہیں

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{19.12}$$

جہاں $R$ وقفہ $0 \le \theta \le 2\pi$ پر متناہی حقیقی ناطق تفاعل ہے جس کے متغیرات $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ ہیں۔ہم $z = e^{i\theta}$ لے کر

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{i2}(z - \frac{1}{z})$$

لکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ متکمل، $z$ کا ناطق تفاعل مثلاً $f(z)$ بنتا ہے۔$\theta$ کو $0$ تا $2\pi$ کرنے سے $z$ اکائی دائرہ $|z| = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر کاٹتا ہے۔چونکہ $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = ie^{i\theta}$ ہے لہٰذا $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$ ہو گا اور یوں تکمل درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے

$$I = \int_C f(z)\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{19.13}$$

جہاں اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

**مثال 19.8: حقیقی تکمل (قسم مساوات 19.13)**

فرض کریں کہ $p$ وقفہ $0 < p < 1$ میں کوئی مقررہ عدد ہے۔ہم درج ذیل پر غور کرتے ہیں۔

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} = \int_C \frac{\frac{\mathrm{d}z}{iz}}{1 - 2p\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + p^2} = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{i(1-pz)(z-p)}$$

متکمل کے $z = \frac{1}{p} > 1$ اور $z = p < 1$ پر سادہ قطبین پائے جاتے ہیں۔صرف $z = p$ پر قطب اکائی دائرہ $C$ کے اندر پایا جاتا ہے جس کا بقیہ

$$\operatorname*{Res}_{z=p} \frac{1}{i(1-pz)(z-p)} = \left[\frac{1}{i(1-pz)}\right]_{z=p} = \frac{1}{i(1-p^2)}$$

ہے۔ یوں مسئلہ بقیہ کے تحت تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = i2\pi \frac{1}{i(1-p^2)} = \frac{2\pi}{1-p^2} \qquad (0<p<1)$$

□

### ناطق تفاعل کے غیر مناسب تکمل

ہم اب درج ذیل قسم کے حقیقی تکمل پر غور کرتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.14}$$

اس قسم کا تکمل جس میں تکمل کے حدود غیر متناہی ہوں کو **غیر مناسب تکمل**[3] کہتے ہیں اور اس سے مراد درج ذیل ہے۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.15}$$

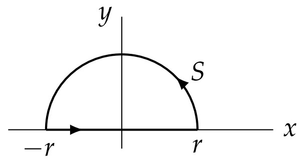
اگر دونوں حد موجود ہوں تب دونوں راہ کو ایک ساتھ ملا کر ہم درج ذیل لکھتے ہیں[4]۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r=\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.16}$$

---

[3] improper integral

[4] مساوات 19.16 کا دایاں ہاتھ تکمل کی **کوشی صدر قیمت** کہلاتی ہے؛ جو مساوات 19.15 کے حد کی غیر موجودگی میں بھی موجود ہو سکتی ہے۔ مثال کے طور پر
$\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\,\mathrm{d}x = \infty$ لیکن $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} x\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^2}{2}) = 0$




شکل 19.2: ارتفاعی تکمل (مساوات 19.17) کی راہ

ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 19.14 میں تفاعل $f(x)$ حقیقی ناطق تفاعل ہے جس کا نسب نما تمام حقیقی $x$ کے لئے غیر صفر ہے اور جس کا درجہ شمار کنندہ سے کم از کم 2 زیادہ ہے۔تب مساوات 19.15 کے حد موجود ہوں گے لہٰذا ہم مساوات 19.16 استعمال کر سکتے ہیں۔ہم مطابقتی ارتفاعی تکمل

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{19.17}$$

پر غور کرتے ہیں جس کی راہ $C$ کو شکل 19.2 میں دکھایا گیا ہے۔چونکہ $f(x)$ ناطق ہے، بالائی نصف مستوی میں $f(z)$ کے قطبین کی تعداد متناہی ہے اور اگر ہم $r$ کو کافی بڑا منتخب کریں تب $C$ ان تمام قطبین کو گھیرے گی۔تب مسئلہ بقیہ کے تحت

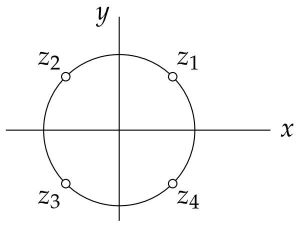
$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_S f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = i2\pi \sum \operatorname{Res} f(z)$$

ہو گا جہاں مجموعہ، بالائی نصف مستوی میں ان تمام نقطوں پر $f(z)$ کے بقیہ پر مشتمل ہے جہاں $f(z)$ کا قطب پایا جاتا ہو۔اس سے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = i2\pi \sum \operatorname{Res} f(z) - \int\limits_S f(z)\,\mathrm{d}z \tag{19.18}$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ $r \to \infty$ کرنے سے نصف دائرہ $S$ پر تکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے۔اگر ہم $z = re^{i\theta}$ لیں تب ہم $S$ کو مستقل $r =$ سے ظاہر کریں گے اور جیسے جیسے $z$ نصف دائرہ $S$ پر چلتا ہے ویسے ویسے متغیرہ $\theta$ کی قیمت $0$ سے $2\pi$ تک پہنچتی ہے۔چونکہ نسب نما کا درجہ شمار کنندہ کے درجہ سے کم از کم 2 زیادہ ہے لہٰذا کافی بڑے مستقل $k$ اور $r_0$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|f(z)\right| < \frac{k}{|z|^2} \qquad (|z| = r > r_0)$$




شکل 19.3: شکل برائے مثال 19.9

مساوات 16.16 کی اطلاق سے

$$\left|\int_S f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{k}{r^2}\pi r = \frac{k\pi}{r} \qquad (r > r_0)$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں جیسے جیسے $r$ لامتناہی تک پہنچتا ہے ویسے ویسے $S$ پر تکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے لہٰذا مساوات 19.16 اور مساوات 19.18 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = i2\pi \sum \operatorname{Res} f(z) \tag{19.19}$$

جہاں بالائی نصف مستوی میں $f(z)$ کی تمام قطبین کے مطابقتی بقیہ کو مجموعہ میں شامل کیا جائے گا۔

**مثال 19.9: 0 تا $\infty$ ایک غیر مناسب تکمل**
مساوات 19.19 استعمال کرتے ہوئے ہم درج ذیل دکھانا چاہتے ہیں۔

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

تفاعل $\frac{1}{1+z^4}$ کے چار عدد قطبین درج ذیل نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ان میں سے $z_1$ اور $z_2$ پر قطبین بالائی نصف مستوی میں پائے جاتے ہیں (شکل 19.3)۔ مساوات 19.7 کی درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

یوں مساوات 14.74 اور مساوات 19.19 سے

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{i2\pi}{4}\left(-e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \pi \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{19.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\frac{1}{1+x^4}$ جفت تفاعل ہے لہٰذا

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

ہو گا۔اس سے اور مساوات 19.20 سے درکار نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ □

## سوالات

سوال 19.61 تا سوال 19.72 میں تکمل حل کریں۔یہ تکمل $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ پر مبنی ہیں۔

سوال 19.61: $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$

جواب: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

سوال 19.62: $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}$

سوال 19.63: $(k>1)$ $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{k+\cos\theta}$

جواب: $\frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}}$

سوال 19.64: $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{25-24\cos\theta}$

سوال 19.65: $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\cos\theta}$

جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 19.66: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{17-8\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19.67: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

جواب: $0$

سوال 19.68: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19.69: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{5}{4}-\sin\theta}$

جواب: $\frac{8\pi}{3}$

سوال 19.70: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19.71: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

جواب:

$$\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}\left(z^2+\tfrac{1}{z^2}\right)$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{i20}\int_C \frac{(z^2+1)^2}{z(z^2-\frac{1}{5})(z^5-5)}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{20}$$

سوال 19.72: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19.73 تا سوال 19.84 کے غیر مناسب تکمل حاصل کریں۔

سوال 19.73: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

جواب: $\pi$

سوال 19.74: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

سوال 19.75: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$
جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 19.76: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+16}$

سوال 19.77: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$
جواب: $\frac{3\pi}{8}$

سوال 19.78: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(4+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 19.79: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x$
جواب: $0$

سوال 19.80: $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

سوال 19.81: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+9)}$
جواب: $\frac{\pi}{12}$

سوال 19.82: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$

سوال 19.83: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 19.84: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$

سوال 19.85: سوال 19.84، سوال 19.78 اور سوال 19.79 کو بنیادی طریقہ سے حل کریں۔

## 19.4 حقیقی تکمل کے دیگر اقسام

# ضمیمہ ا

# اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے $I$ پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ $I$ پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا $I$ پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ $y_1$ اور $y_2$ دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا $y$ درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو $z'$ میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ $y$ اور $y'$ حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ $F_1$ اور $F_2$ مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $I$ پر $zF_1$ بڑھ نہیں رہا اور $zF_2$ گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں $F_1$ اور $F_2$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے} \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ $I$ پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں $I$ پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

# ضمیمہ ب

# مفید معلومات

## 1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

**قوت نمائی تفاعل** $e^x$ (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

**قدرتی لوگارتھم** (شکل 1.ب-ب)

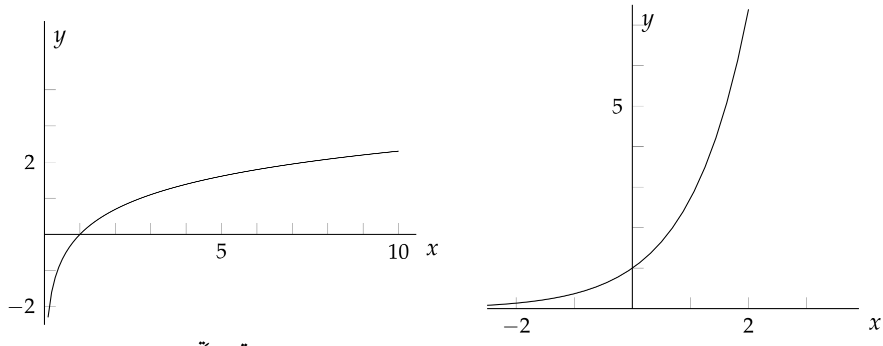
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

$e^x$ کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

**اساس دس کا لوگارتھم** $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

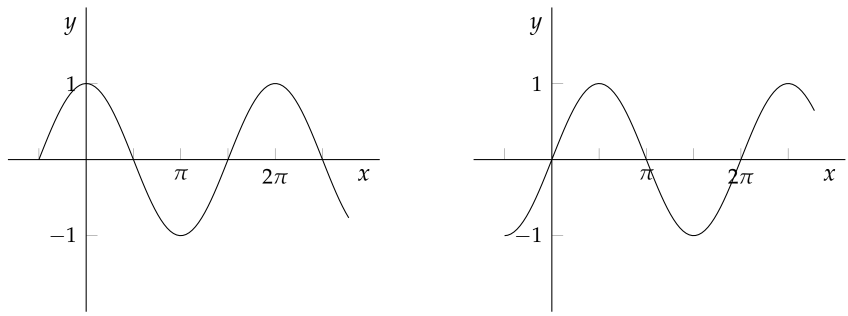
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$




(الف) قوت نمائی تفاعل $e^x$

(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل




(الف) $\sin x$

(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

$10^x$ کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $\frac{1}{x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = 10^{-\log x}$ ہیں۔

**سائن اور کوسائن تفاعل** (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ $2\pi$ ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

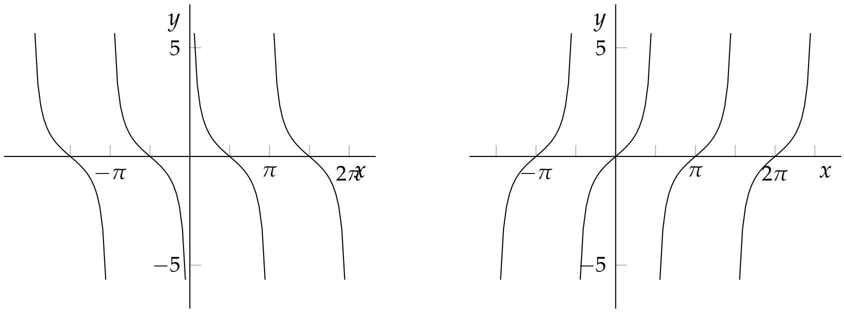
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x\mp\delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x\mp\delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

**ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)**

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$




cot $x$ (ب) tan $x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

**ہذلولی تفاعل** (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

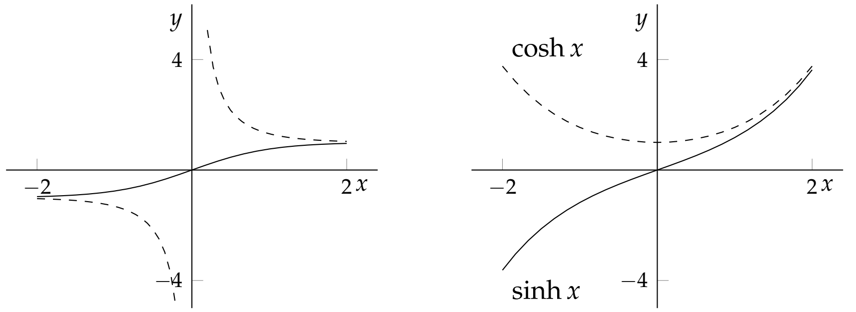
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

**گیما تفاعل** (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$




(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط $\alpha$ کی بات کریں تب یہ $\alpha$ کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\alpha$ کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت $k$ کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

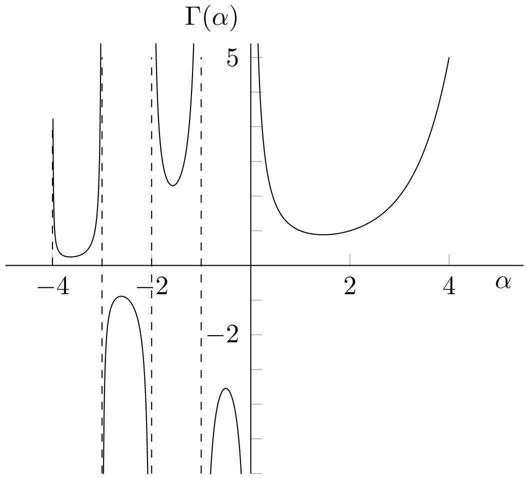
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\alpha$ کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں $k$ کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر $\alpha$ کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔




شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط $\alpha$ کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$ کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $e$ قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

**نا مکمل گیما تفاعل**

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.30}$$

**بیٹا تفاعل**

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

**تفاعل خلل(شکل 6.ب)**

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

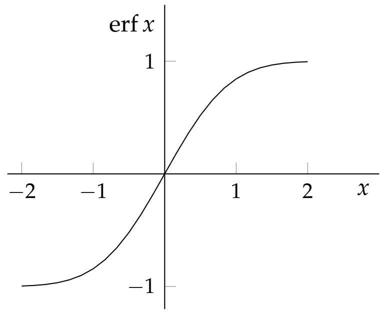
$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

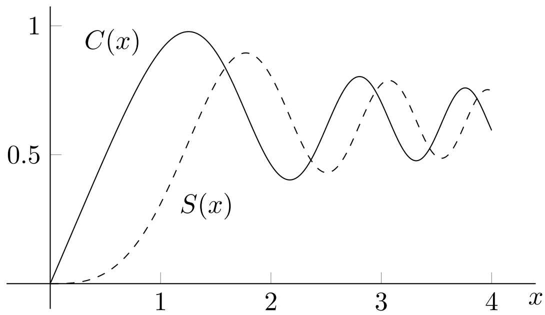
$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

**فرسنل تکملات (شکل 7.ب)**

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$




شکل 6.ب: تفاعل خلل۔




شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

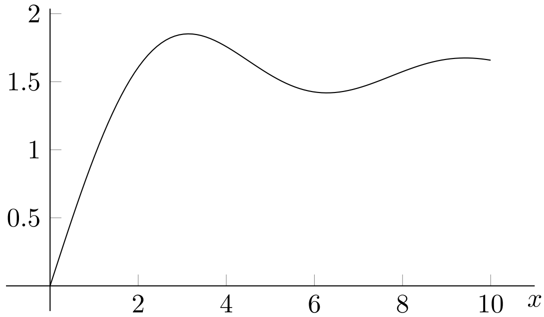
**تکمل سائن (شکل 8.ب)**

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions




شکل 8.ب: تکمل سائن

**تکمل کوسائن**

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

**تکمل قوت نمائی**

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

**تکمل لوگارھمی**

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$