

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینیری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ مخفی قوت
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات

1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخلوط اعداد
1047	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخلوط سطح میں مخنثیات اور خطے
1059	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوئی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت

1103	15 حافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1 نقشہ کشی
1116	15.2 حافظ زاویہ نقشہ

1117	ا اضافی ثبوت
1121	ب مفید معلومات
1121	1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 15

حافظ زاویہ نقشہ کشی

اگر z سطح میں دائرہ کار D میں مخلوط تفاعل $w = f(z)$ معین ہو، تب D میں ہر نقطہ کا مطابقتی نقطہ w سطح میں پایا جاتا ہے۔ یوں D کا مطابقتی، $f(z)$ کے حلقہ کا نقشہ، w سطح پر حاصل ہو گا۔ جیومیٹریائی نقشہ ذہن میں تفاعل کی تصویر قائم کرتا ہے۔ مختلف منحنیات اور خطوں کے نقوش دیکھ کر مخلوط تفاعل سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔

جیسا ہم دیکھیں گے، اگر $f(z)$ تحلیلی ہو تب $f(z)$ سے حاصل نقشہ میں زاویے تبدیل نہیں ہوں گے ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f'(z) = 0$ ہو۔ ایسا نقشہ حافظ زاویہ نقشہ¹ کہلاتا ہے۔

حافظ زاویہ نقشہ گشی² کے ذریعہ دیے گئے پیچیدہ خطے کا تبادلہ سادہ خطے میں کرتے ہوئے نظریہ مخفی قوہ کی دو بعدی سرحدی مسائل حل کیے جاتے ہیں۔ اسی وجہ سے حافظ زاویہ نقشہ گشی انجینئری میں اہمیت رکھتی ہے۔

ہم نقشہ گشی کی تعریف پیش کرنے کے بعد نقشہ گشی کا عمل سکھائیں گے۔ اس کے بعد کئی بنیادی تحلیلی تفاعل کے نقوش پیش کریں گے۔

conformal map¹
conformal mapping²

15.1 نقشہ کشی

حقیقی متغیرہ x کے حقیقی تفاعل $y = f(x)$ کی منحنی کو کارتیسی xy سطح پر کھینچا جاسکتا ہے۔ اس خط کو تفاعل کی ترسیم کہتے ہیں۔ چونکہ مخلوط متغیرہ z کو جیومیٹریائی طور پر مخلوط سطح میں نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہی کچھ w کے لئے بھی درست ہے لہذا مخلوط تفاعل

$$(15.1) \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$$

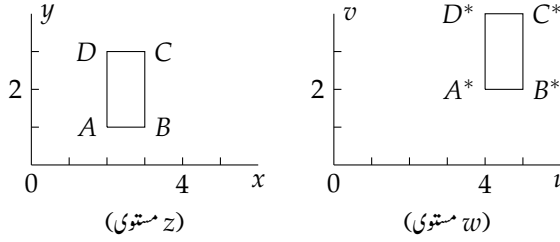
کی صورت حال زیادہ پیچیدہ ہے۔ اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم ان دو متغیرات کے لئے دو علیحدہ علیحدہ مخلوط سطحیں استعمال کریں۔ ایک z سطح جس میں $z = x + iy$ دکھایا جائے اور دوسری w سطح جس میں مطابقتی $w = u + iv$ دکھایا جائے۔ یوں $f(z)$ کی دائرہ کار D میں ہر z کے لئے تفاعل $f(z)$ سطح w میں قیمت $w = f(z)$ مختص کرے گا۔ اس معین تعلق کو f کی دائرہ کار کی سطح w میں ³ نقشہ کشی ⁴ (یا تبادل) کہتے ہیں، یا f کی دائرہ کار کا f کے حلقہ پر ⁵ نقشہ کشی کہتے ہیں۔

$w_0 = f(z_0)$ جو نقطہ z_0 کا مطابقتی نقطہ ہے، $f(z)$ کے لحاظ سے نقشے میں، z_0 کا عکس نقطہ ⁶ یا عکس ⁷ کہلاتا ہے۔ اگر z کسی منحنی پر حرکت کرے اور $f(z)$ استمراری (ناکہ مستقل) ہو تب مطابقتی نقطہ $w = f(z)$ عمومی طور پر سطح w میں منحنی C^* پر حرکت کرے گا۔ اس منحنی کو منحنی C کا عکس کہیں گے۔ لفظ "عکس" کسی بھی نقطوں کے سلسلے اور خطہ کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ ایسی نقشہ کشی کی خواص کی تفتیش، z سطح میں منحنیات اور خطے اور w سطح میں ان کے عکس پر غور اور w سطح میں منحنیات اور خطے اور z سطح میں ان کے عکس پر غور کرنے سے کی جاسکتی ہے۔ اس طرح انفرادی نقطوں پر غور کرنے سے حاصل معلومات سے زیادہ معلومات حاصل ہو گی۔

اگرچہ w اور z کو دو علیحدہ علیحدہ سطحوں سے ظاہر کیا جاتا ہے، بعض اوقات یوں سوچنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے کہ اصل اور نقش ایک ہی سطح پر پائے جاتے ہوں اور عمومی اصطلاحات مثلاً "گھومنا" اور "مستقیم حرکت" استعمال کرنا۔ یوں $w = z + 3$ مستقیم حرکت کہلائے گی جو z سطح میں ہر نقطہ کو دائیں جانب تین اکایاں منتقل کرتی ہے۔

into³
mapping⁴
onto⁵
image point⁶
image⁷



شکل 15.1: مستقیم حرکت $w = z + 2 + i$

تحلیل تفاعل $w = u + iv = f(z)$ جس نقشہ کو ظاہر کرتا ہو، کی کسی مخصوص خاصیت جاننے کے لئے ہم z سطح میں سیدھے لکیروں مستقل $x =$ اور مستقل $y =$ کا w سطح میں عکس پر غور کر سکتے ہیں۔ اسی طرح ہم دائرہ مستقل $|z| =$ یا مبداسے گزرتی سیدھی لکیروں کی عکس پر غور کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مستقل $u(x, y) =$ اور مستقل $v(x, y) =$ منحنیات پر z سطح میں غور کر سکتے ہیں۔ ان منحنیات کو u اور v کی بھوار منحنیات⁸ کہتے ہیں۔ ہم سادہ اشکال مثلاً چکور، تکتوں، مستطیل وغیرہ اور ان کے عکس پر بھی غور کر سکتے ہیں۔

آئیں چند مثالوں کی مدد سے ان حقائق کو بہتر سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مثال 15.1: خطی تبادل $w = ax + b$ درج ذیل نقش مستقیم حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔

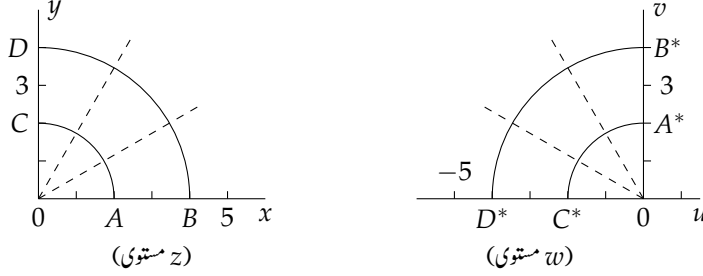
$$(15.2) \quad w = z + b$$

شکل 15.1 میں مساوات 15.2 کو $w = z + 2 + i$ کے لئے دکھایا گیا ہے جہاں مستطیل اور اس کا عکس دکھائے گئے ہیں جو یکساں ہیں (کیوں؟)۔ A کا عکس A^* ، وغیرہ۔ زیادہ پیچیدہ اشکال میں نقطوں کو اس طرح ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مساوات 15.2 میں $b = 0$ پر کرنے سے مماثل تبادل⁹

$$w = z$$

حاصل ہوتا ہے جو ہر نقطے کو اپنے آپ پر نقش کرتا ہے۔

⁸ level curves
⁹ identity transformation



شکل 15.2: گھڑی کی الٹ رخ گھومنے کا زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

درج ذیل تبادُل

$$w = az \quad (|a| = 1)$$

مقررہ زاویہ $\angle a$ سے گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.2 میں $w = iz$ یعنی گھڑی کی سوئیوں کی گھومنے کی الٹ رخ $\frac{\pi}{2}$ زاویہ سے گھومنا دکھایا گیا ہے۔

درج ذیل تبادُل

$$w = az \quad (a \text{ مثبت حقیقی})$$

میں $a > 1$ اتساع جبکہ $0 < a < 1$ سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح

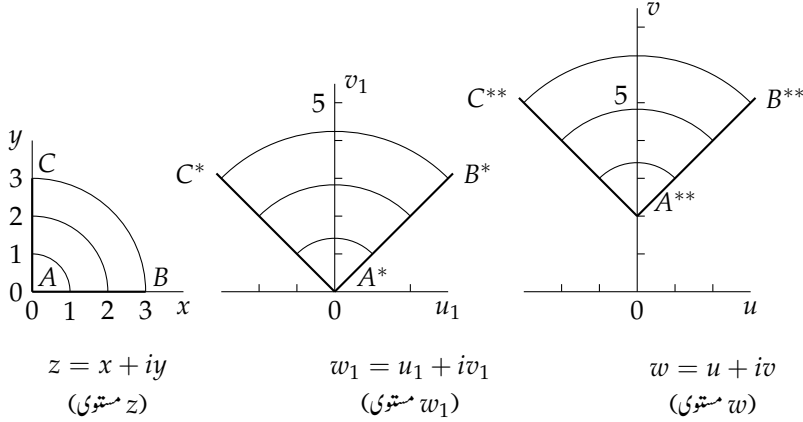
$$(15.3) \quad w = az \quad (a \text{ اختیاری})$$

زاویہ $\angle a$ سے گھومنے کو اور ساتھ ہی یکساں اتساع یا سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ درج ذیل تبادُل

$$(15.4) \quad w = az + b$$

خطی تبادُل¹⁰ کہلاتا ہے جو گھومنے کے ساتھ اتساع یا سکڑاو $w_1 = az$ کے ساتھ ساتھ مستقیم حرکت $w = w_1 + b$ کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.3 میں $w = (1+i)z + 2i$ تبادُل دکھایا گیا ہے جو گھڑی کی الٹ رخ $\frac{\pi}{4}$ زاویے کے گھومنے اور $|1+i| = \sqrt{2}$ تناسب کی اتساع کے بعد اوپر کی رخ مستقیم حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔ □

¹⁰linear transformation



شکل 15.3: خطی تبادلی $w = (1 + i)z + 2i$ جس میں گھومنا، اتساع $w_1 = (1 + i)z$ اور مستقیم حرکت $w = w_1 + 2i$ شامل ہے۔

مثال 15.2: نقش $w = z^2$ ہم درج ذیل نقش پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$(15.5) \quad w = z^2$$

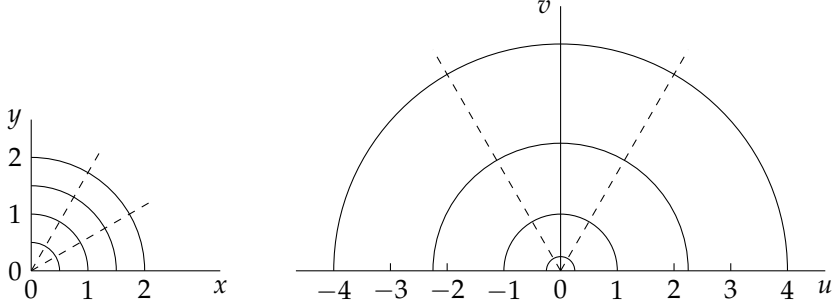
یہاں قطبی محدود استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ یوں $z = e^{i\theta}$ اور $w = Re^{i\phi}$ لیتے ہوئے مساوات 15.5 لکھی جائے گی جس سے

$$R = r^2, \quad \phi = 2\theta$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں دائروں مستقل $r = r_0$ کا نقش دائرے مستقل $R = r_0^2$ ہوں گے جبکہ مبداء سے گزرتی سیدھی لکیروں مستقل $\theta = \theta_0$ کا نقش دگنی زاویہ پر لکیریں مستقل $\phi = 2\theta_0$ ہوں گی۔ خاص کر z سطح میں مثبت حقیقی محور ($\theta = 0$) کا نقش w سطح میں مثبت حقیقی محور ہو گا جبکہ z سطح میں مثبت خیالی محور $\theta = \frac{\pi}{2}$ کا نقش w سطح میں منفی حقیقی محور ہو گا۔ یہ نقش مبداء پر ہر زاویہ کو دگنا کرتا ہے۔ ربع اول $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ کا نقش بالائی نصف w سطح ہو گی (شکل 15.4)۔

مستطیل محدود میں تبادلی $w = z^2$ درج ذیل دے گا۔

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$$

شکل 15.4: نقش $w = z^2$

حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$(15.6) \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

ملتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ u اور v کی ہموار سطحات متساوی الاضلاع قطع زائد ہوں گے جن کی متقارب لکیریں $y = \pm x$ اور محد کی محور ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں مساوات 15.6 میں دیے گئے خطوط ایک دوسرے کی عمودی مطلق خطوط (حصہ 1.6) ہیں۔ شکل 15.5 میں z سطح میں دو خطے w سطح میں مستطیل پر نقش ہوں گے۔ ظاہر ہے کہ ہر نقطہ $w \neq 0$ سطح z میں ٹھیک دو نقطوں کا عکس ہو گا۔

ہم مساوات 15.6 استعمال کرتے ہوئے سیدھی خطوط مستقل $x = c$ اور مستقل $y = k$ کا عکس تلاش کر سکتے ہیں۔ خط مستقل $x = c =$ کا عکس

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy$$

سے y حذف کرتے ہوئے

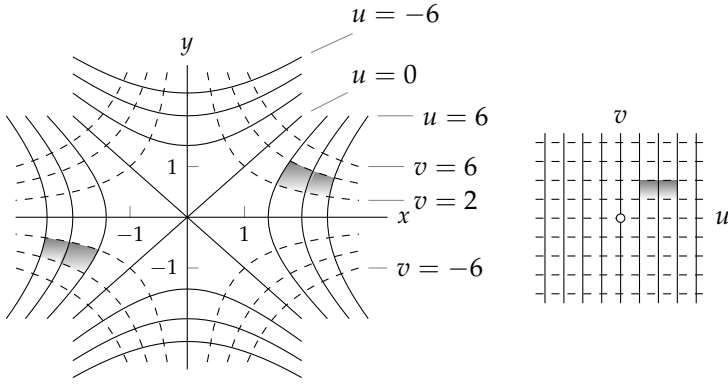
$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

حاصل ہوتا ہے جو قطع مکانی کو ظاہر کرتی ہے جو بائیں رخ کھلتا ہے۔ مبدا اس قطع مکانی کا ماسکہ ہو گا۔ اسی طرح مستقل $y = k =$ کا عکس

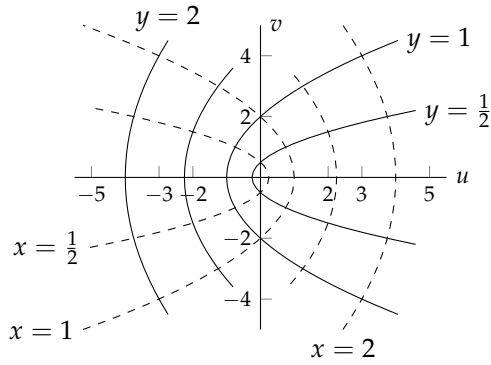
$$v^2 = 4k^2(k^2 + u)$$

□

ہو گا جو دائیں کو کھلتا ہوا قطع مکانی ہے جس کا ماسکہ عین مبدا پر ہے (شکل 15.6)۔



شکل 15.5: نقش $w = z^2$ کی صورت میں u اور v کی ہموار سطحیں



شکل 15.6: نقش $w = z^2$ میں سیدھے خطوط $x = c$ اور $y = c^*$ کے عکس

شکل 15.7: نقش $w = z^n$

باقی طاقت

$$(15.7) \quad w = z^n, \quad n = 3, 4, \dots$$

پر بھی اسی طرح غور کیا جاسکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ ان کی ہموار سطحات کی مساوات مزید پیچیدہ ہوں گی۔ زاویائی خطہ $0 \leq \angle z \leq \frac{\pi}{n}$ بالائی نصف w سطح پر نقش ہو گا (شکل 15.7)۔

منفی طاقت کی نقش $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots$ پر بھی قطبی محدود کی مدد سے غور کیا جاسکتا ہے۔ عملاً اہم ترین صورت درج ذیل مثال میں دی گئی ہے۔

مثال 15.3: نقش $w = \frac{1}{z}$ ۔ الٹ جانا ہم درج ذیل نقش پر غور کرتے ہیں۔

$$(15.8) \quad w = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$$

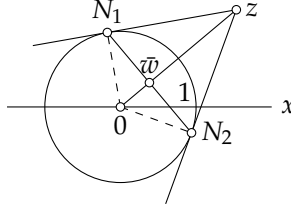
قطبی محدود استعمال کرتے ہوئے $z = re^{i\theta}$ اور $w = Re^{i\phi}$ لکھتے ہیں۔ یوں مساوات 15.8 سے

$$(15.9) \quad R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta \quad (r \neq 0)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $w = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$)، مبدا سے نکلتی سیدھی لکیر جو \bar{z} سے گزرتی ہو پر واقع ہے۔ مبدا سے اس نقطے کا فاصلہ $\frac{1}{|z|}$ ہے۔

جیومیٹریائی طور پر z کو اکائی دائرے میں لٹاتے ہوئے اس کا x محور میں عکس لینے سے $w = \frac{1}{z}$ حاصل ہو گا۔ آپ متشابہ مشابہات استعمال کرتے ہوئے اس حقیقت کو ثابت کر سکتے ہیں (شکل 15.8)۔

شکل میں دکھایا گیا ہے کہ $w = \frac{1}{z}$ نقش، افقی اور کھڑی سیدھی لکیروں کو دائروں یا سیدھی لکیروں پر عکس کرتی ہے۔ یہاں تک کہ درج ذیل جملہ ہر صورت درست ہو گا۔



شکل 15.8: z سے $\frac{1}{z}$ کا جیومیٹری حصول۔ نقطہ z سے اکائی دائرے تک مماس، دائرے کو N_1 اور N_2 پر چھوتے ہیں۔ مبدأ سے z تک لکیر اور N_1 سے N_2 تک لکیر نقطہ w پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

$w = \frac{1}{z}$ ہر سیدھی لکیر یا دائرے کو دائرے یا سیدھے لکیر پر نقش کرتا ہے۔
ثبوت: z سطح میں ہر سیدھی لکیر یا دائرہ کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے۔

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (A, B, C, D \text{ حقیقی})$$

$A = 0$ سیدھی لکیر دیتی ہے جبکہ $A \neq 0$ دائرہ دیتی ہے۔ z اور \bar{z} استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{i2} + D = 0$$

چونکہ $w = \frac{1}{z}$ ہے لہذا اس میں $z = \frac{1}{w}$ پر کرتے ہوئے $w\bar{w}$ سے ضرب دینے سے

$$A + B\frac{w + \bar{w}}{2} + C\frac{\bar{w} - w}{i2} + Dw\bar{w} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو u اور v کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو $D \neq 0$ کی صورت میں دائرہ ہو گا جبکہ $D = 0$ کی صورت میں w سطح میں سیدھی لکیر ہو گی۔
□

سوالات

سوال 15.1 تا سوال 15.3 میں زیر نقش $w = (1 - i)z + 2$ دیے گئے منحنیات یا خطوں کا عکس تلاش کریں۔ عکس کو w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.1: $x = 0, 1, 2, 3$
 جواب: $v = u - 2 - 2x, \quad v = u - 2, u - 4, u - 6, u - 8$

سوال 15.2: $y = 0, -1, -2, -3$
 جواب: $v = -u + 2 + 2y, \quad v = -u + 2, -u, -u - 2, -u - 4$

سوال 15.3: $|z + 2| \leq 2$
 جواب: $|w - i2| \leq 2\sqrt{2}$

سوال 15.4 تا سوال 15.9 میں نقش $w = u + iv = z^2$ دیے گئے منحنیات کا عکس تلاش کرتے ہوئے انہیں w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.4: $y = x$
 جواب: $u = 0, v \geq 0$

سوال 15.5: $y = 0, 1, 2, 3$
 جواب: $v = 2y\sqrt{u + y^2}, \quad v = 0, \pm 2\sqrt{u + 1}, \pm 4\sqrt{u + 4}, \pm 6\sqrt{u + 9}$

سوال 15.6: $x = 0, 1, 2, 3$
 جواب: $x = 0, v = 0, u < 0$ پر ہو گا جبکہ عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$v = 2x\sqrt{x^2 - u}, v = 0, \pm 2\sqrt{1 - u}, \pm 4\sqrt{4 - u}, \pm 6\sqrt{9 - u}$$

سوال 15.7: $y = 1 + x$
 جواب: $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ میں $y = 1 + x$ پر کرنے سے
 ملتا ہے۔ یوں $u = -1 - 2x, v = 2x(1 + x)$ حاصل کرتے
 ہوئے $v = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$ حاصل ہو گا۔

سوال 15.8: $y = 1 - x$
 جواب: $v = \frac{1}{2}(u + 1)(u + 3)$

سوال 15.9: $y^2 = 1 + x^2$
 جواب: $u = -1$

سوال 15.10 تا سوال 15.15 میں نقش $w = z^2$ ہے۔ دیا گیا خطہ w سطح میں حاصل کرتے ہوئے w سطح میں دکھائیں۔

سوال 15.10: $|z| \geq 3$
جواب: $|w| \geq 9$

سوال 15.11: $|z| < 2$
جواب: $|w| < 4$

سوال 15.12: $\angle z < \frac{\pi}{3}$
جواب: $\angle w < \frac{2\pi}{3}$

سوال 15.13: $1 < x < 2$
جواب: قطع مکافی $v^2 = 4(1 - u)$ اور $v^2 = 16(4 - x)$ کے درمیان خطہ۔

سوال 15.14: $0 \leq y \leq 1$
جواب: قطع مکافی $v^2 = 4(1 + u)$ اور مثبت u محور اور ان دونوں کے درمیان خطہ۔

سوال 15.15: $-\frac{\pi}{4} < \angle z < \frac{\pi}{2}$
جواب: $-\frac{\pi}{2} < \angle w < \pi$

سوال 15.16 تا سوال 15.21 میں دیے سیدھی لکیروں اور دائروں کا زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ عکس دریافت کریں۔

سوال 15.16: $|z| = 1$
جواب: $|w| = 1$

سوال 15.17: $|z + 1| = 1$
جواب:

$$|z + 1| = 1, \quad \left| \frac{1}{w} + 1 \right| = 1, \quad |1 + w| = |w|, \quad |u + iv + 1| = |u + iv|$$

$$(u + 1)^2 + v^2 = u^2 + v^2, \quad u = -\frac{1}{2}$$

سوال 15.18: $|z + 1| = 1$
جواب: $u = \frac{1}{2}$

سوال 15.19: $|z - i2| = 2$
جواب: $v = -\frac{1}{4}$

سوال 15.20: $y = x - 1$
جواب: $z = x + iy$ سے $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ اور $y = \frac{1}{i2}(z - \bar{z})$ لکھتے ہوئے $y = x - 1$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $z = \frac{1}{w}$ اور $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ کا استعمال کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $i2$ سے ضرب دیا گیا ہے۔

$$\frac{1}{i2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - 1, \quad z - \bar{z} = i(z + \bar{z}) - i2$$

اس میں $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $w\bar{w}$ سے ضرب دینے سے

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} &= i\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) - i2, \quad \bar{w} - w = i(\bar{w} + w) - i2w\bar{w}, \\ -i2v &= i2u - i2w\bar{w}, \quad u^2 - u + v^2 - v = 0, \\ (u - \frac{1}{2})^2 + (v - \frac{1}{2})^2 &= \frac{1}{2}, \quad \left|w - \frac{1}{2}(1 + i)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.21: $x = 1$
جواب: $z = x + iy$ سے $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ لکھتے ہوئے $x = 1$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $z = \frac{1}{w}$ اور $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{z + \bar{z}}{2} &= 1, \quad \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} = 2, \quad \bar{w} + w = 2w\bar{w}, \quad 2u = 2(u^2 + v^2), \\ u^2 - u + v^2 &= 0, \quad (u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}, \quad \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

سوال 15.22: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ خطہ $-2 < x < 1, -1 < y < 1$ کا عکس تلاش کریں۔
جواب: وہ خطہ جس کے حدود $\left|w + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ ، $\left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ، $\left|w - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ اور $\left|w + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ دائرے ہوں۔

سوال 15.23: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ خطہ $1 < x < 2$ کا عکس تلاش کریں۔
جواب: دائرہ $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ اور دائرہ $\left|w - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ کے درمیان خطہ۔

سوال 15.24: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ کن سیدھی لکیروں کا عکس سیدھی لکیریں اور کن کا عکس دائرے ہیں۔ اسی طرح کن دائروں کا عکس دائرے اور کن کا عکس سیدھی لکیریں ہیں؟
جواب: اگر سیدھی لکیر $Bx + Cy + D = 0$ میں $D = 0$ ہو تب عکس سیدھی لکیر ہو گی ورنہ عکس دائرہ ہو گا۔ اسی طرح اگر دائرہ $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ میں $D = 0$ ہو تب عکس سیدھی لکیر ہو گی ورنہ عکس دائرہ ہو گا۔

سوال 15.25: دکھائیں کہ زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ دائرہ اور منعکس دائرہ عموماً ہم مرکز نہیں ہوں گے۔
جواب: دائرہ $|z - z_0| = r$ کا مرکز $z_0 = x_0 + iy_0$ ہے۔ زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ اس دائرے کو درج ذیل دکھا جاسکتا ہے جہاں تیسری قدم پر $|w_0 - w| = |w - w_0|$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\left| \frac{1}{w} - \frac{1}{w_0} \right| = r, \quad \left| \frac{w_0 - w}{ww_0} \right| = r, \quad |w - w_0| = r|ww_0|$$

اس دائرے کا مرکز $w_0 = \frac{1}{z_0}$ ہے جو اصل دائرے کی مرکز z_0 سے مختلف ہے۔ ($z_0 = 1$ کی صورت میں $w_0 = 1$ ہو گا لہذا دائرہ اور عکس ہم مرکز ہوں گے۔)

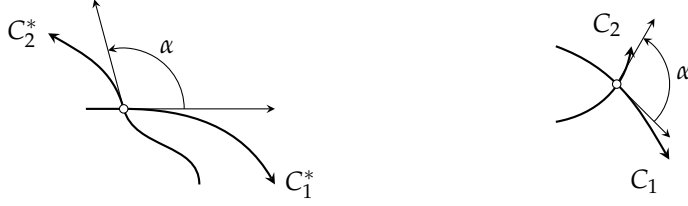
سوال 15.26: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ نقطہ $3 + i4$ کا عکس $\frac{1}{3+i4}$ جیومیٹریائی طریقے سے دریافت کریں۔

سوال 15.27: زاویائی خطہ $0 \leq \angle z \leq \frac{\pi}{4}$ کا زیر نقش $w = z$ ، $w = iz$ ، $w = -iz$ ، $w = z^2$ ، $w = -z^2$ ، $w = iz^2$ ، $w = -iz^2$ عکس دریافت کریں اور انہیں w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.28: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ ، $w = \frac{i}{z}$ ، $w = \frac{1}{z^2}$ اور $w = \frac{i}{z^2}$ سوال 15.27 میں دیے گئے خطے کا عکس تلاش کریں۔

سوال 15.29: ایسا نقش $w = u + iv = f(z)$ دریافت کریں جو آدھی سطح $x \geq 0$ کو خطہ $u \geq 2$ پر عکس کرے اور ساتھ ہی ساتھ نقطہ $z = 0$ کو نقطہ $w = 2 + i$ پر عکس کرے۔
جواب: $w = z + 2 + i$

سوال 15.30: ایسا نقش $w = u + iv = f(z)$ تلاش کریں جو زاویائی خطہ $0 < \angle z < \frac{\pi}{3}$ کو خطہ $u < 1$ پر عکس کرتا ہو۔
جواب: $w = iz^3$



شکل 15.9: منحنیات C_1 اور C_2 کا حافظ زاویہ نقش کشی میں عکس بالترتیب C_1^* اور C_2^* ہے۔

15.2 حافظ زاویہ نقش

ہم اب تحلیلی تفاعل کی نقش کشی کی اہم ترین خاصیت یعنی محافظت زاویہ¹² پر تبصرہ کرتے ہیں۔

سطح میں ایسا نقش جو منحنیات کے درمیان زاویوں کی مقدار اور ان زاویوں کی مثبت سمت برقرار رکھتا ہو حافظ زاویہ نقش¹³ کہلاتا ہے، یعنی دو منحنیات کا زاویہ تقاطع اور مثبت سمت، عکس کی منحنیات کا زاویہ تقاطع اور مثبت سمت ایک جیسے ہوں گے۔ یہاں دو منحنیات کے مابین زاویہ سے مراد ان کی نقطہ تقاطع پر مماثل کے مابین زاویہ ہے (شکل 15.9)۔

conformality¹²
conformal¹³

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو $z \leq |2yy'|$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

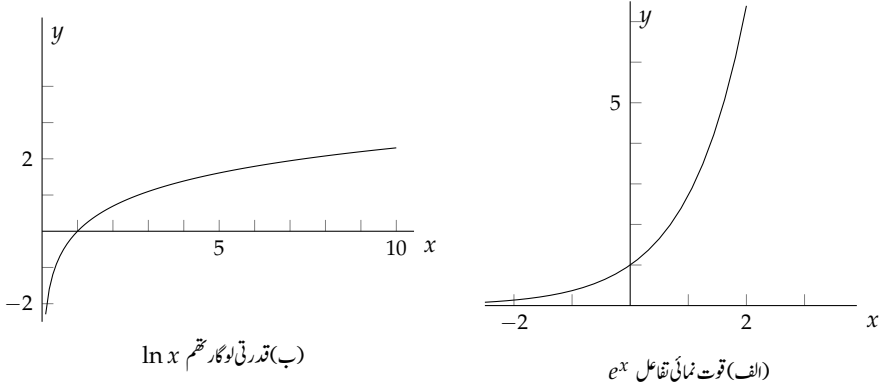
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

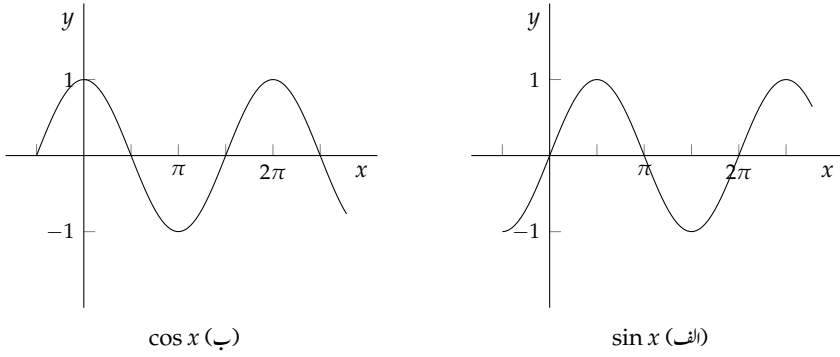
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

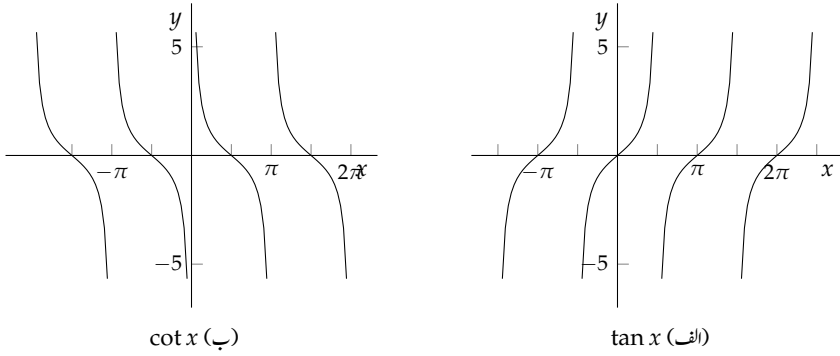
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

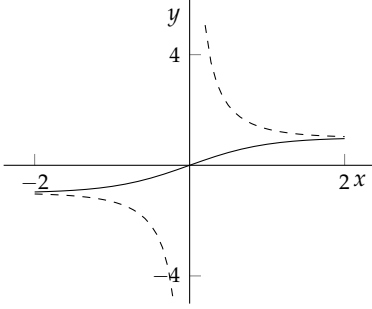
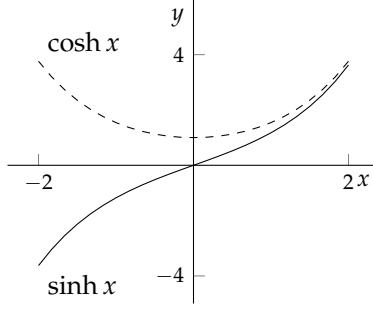
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

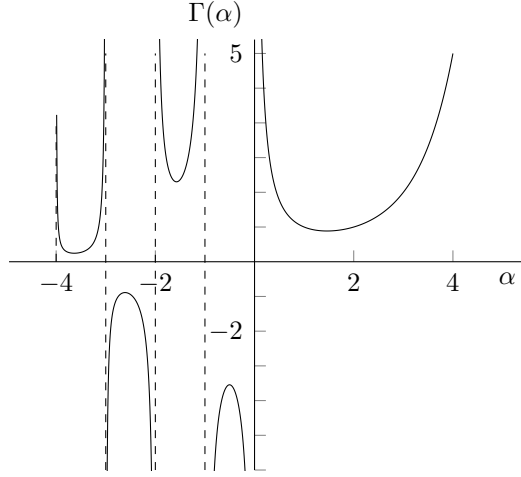
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

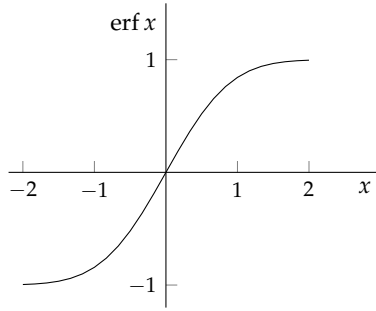
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

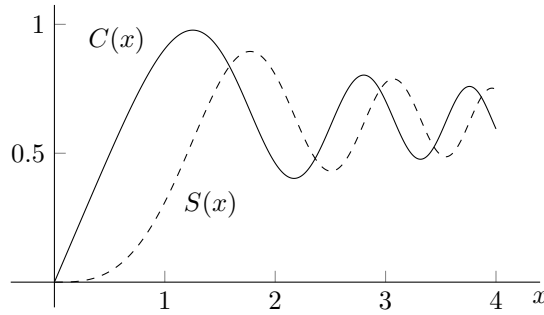
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسئل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

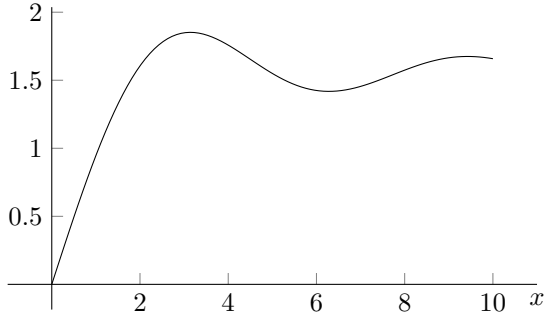
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

