

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
40	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
70	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
74	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
81	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
81	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
98	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
113	2.3	تفرقی عامل
118	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
133	2.5	پولر کوئی مساوات
142	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
151	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
162	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
169	2.8.1	برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک
173	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
184	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

191	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
191	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
202	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
211	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
214	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
223	4	نظام تفرقی مساوات
224	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
233	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
247	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
248	4.3.1	خطی نظام
252	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
269	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
278	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
287	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
295	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
296	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
305	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
306	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
321	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
339	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
344	5.3.1	عملی استعمال
358	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
373	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
379	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
385	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
393	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
403	6	لاپلاس متبادلہ
404	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
413	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
425	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
446	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
464	6.5	الچھاؤ
473	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
481	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

489	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
493	7	خطی الجبرا: سمتیات
493	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
495	7.2	سمتیہ کے اجزاء
501	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
509	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
515	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
528	7.6	اندرونی ضرب فضا
530	7.7	سمتی ضرب
533	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
544	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
553	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
554	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
564	8.2	قابلی ضرب
570	8.2.1	تبدیلی محل
583	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
596	8.3.1	صف زینہ دار صورت
604	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
618	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
624	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
627	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
643	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
658	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
675	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
676	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
686	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
694	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
701	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
715	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
727	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
727	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
730	10.2	سمتی علم الاحصاء
736	10.3	منحنی
742	10.4	لبائی قوس
749	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
755	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

761	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
768	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
780	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمیت
786	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
793	10.11	سمتی تفاعل کی گردش

799	11	سمتی عملی علم الاحصاء۔ مکمل کے مسئلے
800	11.1	خطی مکمل
805	11.2	خطی مکمل کا حل
814	11.3	دوہرہ مکمل
827	11.4	دوہرہ مکمل کا خطی مکمل میں متبادلہ
837	11.5	سطحیں

841	ا	اضافی ثبوت
845	ب	مفید معلومات
845	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 11

سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے

تکمل سے آپ بخوبی واقف ہیں جس کو سمی تکملی علم الاحصاء¹ وسعت دیتا ہے۔ یوں منحنی پر تکمل، جسے خطی تکمل² کہتے ہیں، سطح پر تکمل جسے سطحی تکمل³ کہتے ہیں اور حجم پر تکمل جسے حجمی تکمل⁴ کہتے ہیں، حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مزید ایک قسم کی تکمل کا دوسری قسم کی تکمل میں تبادلہ کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے بعض اوقات نسبتاً آسان تکمل حاصل ہوتا ہے۔ یوں سطح میں مسئلہ گرین⁵ کی مدد سے خطی تکمل کو دو درجی تکمل میں یا دو درجی تکمل کو خطی تکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ گاوسی مسئلہ ارتکاز⁶ کی مدد سے حجمی تکمل کو سطحی تکمل یا سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ مسئلہ سٹوکس⁷ کی مدد سے تین درجی تکمل کو خطی تکمل یا خطی تکمل کو تین درجی تکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

سمتی تکملی الاحصاء کا انجینئری، طبیعیات، ٹھوس میکانیات، سیالی میکانیات اور دیگر میدان میں اہم کردار پایا جاتا ہے۔

vector calculus¹

line integral²

surface integral³

volume integral⁴

Green's theorem⁵

Gauss's convergence theorem⁶

Stoke's theorem⁷

11.1 خطی تکمیل

درج ذیل تفاعل f کی x محور پر $x = a$ تا $x = b$ قطعی تکمیل ہے

$$(11.1) \quad \int_a^b f(x) dx$$

جہاں وقفہ a اور b کے درمیان ہر نقطے پر f معین ہے۔ خطی تکمیل میں f کا تکمیل سطح میں (یا فضا میں) منحنی C پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں C کے ہر نقطے پر f معین ہے۔

خطی تکمیل کی تعریف عین قطعی تکمیل کی تعریف کی مانند ہے۔ خطی تکمیل کچھ یوں ہے۔

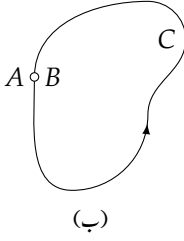
ہم فضا میں منحنی C لیتے ہیں اور اس پر ایک رخ کو مثبت سمت کہتے ہیں۔ یوں منحنی پر الٹ چلتے ہوئے منفی سمت حاصل ہو گی۔ مثبت سمت میں چلتے ہوئے منحنی پر ابتدائی نقطے کو A اور اختتامی نقطے کو B کہتے ہیں۔ جیسا شکل 11.1-ب میں دکھایا گیا ہے ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ ہم مقام ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں C بند راہ کہلاتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ C سادہ منحنی (حصہ 10.3) ہے جس کو

$$(11.2) \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad (a \leq s \leq b)$$

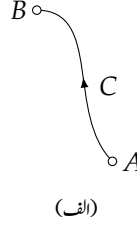
ظاہر کرتی ہے [جہاں s منحنی کی لمبائی قوس ہے (حصہ 10.4)] اور پورے C پر $\mathbf{r}(s)$ استمراری ہے جس کا (پورے C پر) تفرق \mathbf{r}' موجود ہے اور یہ تفرق غیر صفر سمتیہ ہے۔ اس طرح C بھوار منحنی⁸ کہلائے گی یعنی C کے ہر نقطے پر C کا منفرد مماس پایا جاتا ہے اور منحنی پر چلنے سے مماس کی سمت میں تبدیلی استمراری ہوتی ہے۔

فرض کریں کہ $f(x, y, z)$ متغیر s کا ایسا استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کے ہر نقطے پر معین ہے۔ ہم C کو بے قاعدہ طریقے سے n عدد ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.2)۔ یوں ہر ٹکڑے کی لمبائی مختلف ہو سکتی ہے۔ ہم ابتدائی سر سے شروع کرتے ہوئے ان ٹکڑوں کے سروں کو $P_0 (= A)$ ، P_1 ، P_2 ، ...، $P_n (= B)$ سے اور s کی مطابقتی قیمتوں کو

$$s_0 (= a) < s_1 < s_2 < \dots < s_n (= b)$$



(ب)



(الف)

شکل 11.1: سمت بند منحنی

سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم ہر ٹکڑے پر بے قاعدگی سے کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً P_0 اور P_1 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_1 چنتے ہیں، P_1 اور P_2 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_2 چنتے ہیں وغیرہ۔ یوں ہر ٹکڑے پر نقطہ باقی ٹکڑوں پر نقطوں سے ضروری نہیں کہ کوئی مشابہت رکھتا ہو۔ ان نقطوں پر f کی قیمتوں کو لیتے ہوئے ہم مجموعہ

$$(11.3) \quad J_n = \sum_{m=1}^n f(x_m, y_m, z_m) \Delta s_m$$

لیتے ہیں جہاں x_m, y_m, z_m نقطہ Q_m کے محدد ہیں اور Δs_m اس ٹکڑے کی لمبائی ہے جس پر Q_m واقع ہے۔

$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}$$

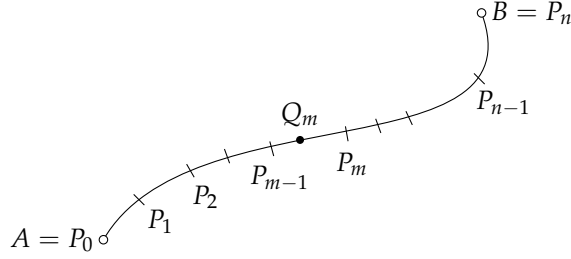
ہم اس طرح کے مجموعے مکمل بے قاعدگی سے $n = 2, 3, \dots$ کے لئے یوں حاصل کرتے ہیں کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی تک پہنچے، Δs کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں مجموعوں کا تسلسل J_2, J_3, \dots ملتا ہے۔ اس تسلسل کی حد کو C پر A تا B تفاعل f کی خطی تکمیل⁹ کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z) ds$$

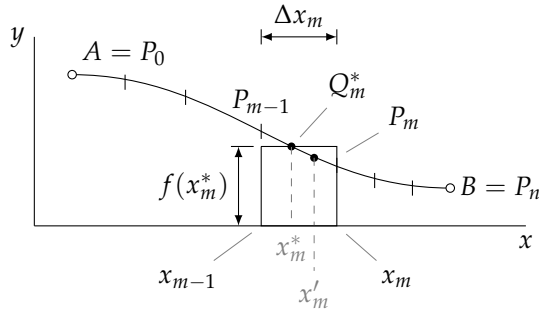
منحنی C کو تکمیل کی راہ کہتے ہیں جبکہ $f(x, y, z)$ کو تکمیل¹⁰ کہتے ہیں۔

چونکہ f کو استمراری فرض کیا گیا اور C ہموار ہے لہذا یہ حد موجود ہو گا جس کی قیمت پر ٹکڑوں کی چنناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کی چنناؤ کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ C پر کسی بھی نقطہ P کا تعین لمبائی قوس s سے کیا جاتا ہے۔ یوں

line integral⁹
integrand¹⁰



شکل 11.2: C کی ٹکڑوں میں تقسیم



شکل 11.3: رقبہ اور عمل (مثال 11.1)

A اور B کا تعین مطابقتی $s = a$ اور $s = b$ سے کیا جائے گا لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(11.4) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds$$

جو قطعی تکمیل ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمیل بھی تسلسل J_2, J_3, \dots کی حد کو کہتے ہیں جس کی قیمت پر نا تو ٹکڑوں کی تقسیم اور نا ہی ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر پایا جاتا ہے۔ مثال 11.1 میں مزید تفصیل دی گئی ہے۔

مثال 11.1: تکمیل کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کے چناؤ کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے
 آئیں دیکھتے ہیں کہ تکمیل کی قیمت پر راہ کی ٹکڑوں میں تقسیم اور ان ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر کیوں نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 11.3 میں تفاعل $y = f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ ان نقطوں کے درمیان تفاعل کو بے قاعدہ ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ وقفہ P_{m-1} تا P_m کے مابین تفاعل

کے نیچے چھوٹا رقبہ ΔS_m ہے۔ شکل 11.3 میں ایک مستطیل دکھایا گیا ہے جو نقطہ Q_m^* سے گزرتا ہے۔ Q_m^* یوں چنا گیا ہے کہ مستطیل کا رقبہ عین ΔS_m کے برابر ہو۔

$$\Delta S_m = f(x_m^*)\Delta x_m \quad (\Delta x_m = x_m - x_{m-1})$$

اس وقفے پر بغیر کسی قاعدہ دوسرا نقطہ Q_m بھی چنا گیا ہے۔ اس نقطے سے گزرتی مستطیل کا رقبہ $f(x'_m)\Delta x_m$ ہو گا جہاں Q_m کا x محدود x'_m ہے۔

اب استمراری تفاعل سے مراد یہ ہے کہ ہم کسی بھی نقطہ پر Δx اتنی کم لے سکتے ہیں کہ Δx وقفے پر تفاعل میں کل تبدیلی زیادہ سے زیادہ ϵ ہو جہاں ϵ جتنی بھی چھوٹی قیمت کیوں نہ ہو۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$|f(x'_m) - f(x_m^*)| \leq \epsilon$$

جس کو

$$f(x'_m) = f_m^* + t\epsilon \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں t ایسا متغیر ہے جس کی قیمت منفی اکائی سے مثبت اکائی تک ممکن ہے۔ یوں Q'_m سے گزرتی مستطیل کا رقبہ

$$f(x'_m)\Delta x_m = (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m$$

ہو گا۔ یہ رقبہ اس صورت کم سے کم ہو گا جب $t = -1$ ہو اور اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $t = 1$ ہو۔ ان دونوں صورتوں میں مستطیل کا رقبہ اصل تفاعل کے نیچے رقبے سے مختلف ہو گا۔ تمام ٹکڑوں پر بے قاعدگی سے نقطے چنتے ہوئے تمام مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^n (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{m=1}^n f_m^*\Delta x_m + \epsilon \sum_{m=1}^n t\Delta x_m$$

اب چونکہ $|t| \leq 1$ ہے لہذا دائیں جانب مجموعے کے اندر قیمت کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت $t = 1$ پر حاصل ہو گی۔ (حقیقت میں چونکہ ضروری نہیں ہے کہ t کی قیمت ہر مرتبہ اکائی ہی ہو لہذا اس مجموعے کی قیمت $b - a$ سے کم ہو گی۔) اب چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں لہذا ہم اسے اتنا کم رکھتے ہیں کہ $\epsilon(b - a)$ قابل نظر انداز ہو۔ درج بالا میں پہلا مجموعہ ان مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ ہے جن کا رقبہ عین تفاعل کے نیچے رقبے کے برابر رکھا گیا تھا لہذا Δx_m کی ہر قیمت پر یہ مجموعہ اصل رقبے کے برابر ہی ہو گا۔ یوں درج بالا سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{m=1}^n (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{i=m}^n f_m^*\Delta x_m$$

جو $x = a$ تا $x = b$ تقابل کے نیچے کل رقبہ ہے۔

یوں آپ نے دیکھا کہ ہر ٹکڑے پر Q_m بالکل بے قاعدگی سے چلتے ہوئے تقابل کے نیچے اصل رقبہ حاصل ہوتا ہے۔ □

عمومی مفروضہ

اس کتاب میں فرض کیا جائے گا کہ خطی تکمیل کی ہر راہ ٹکڑوں میں بھوار¹¹ ہے، یعنی کہ راہ کو محدود تعداد کی بھوار ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

بدن راہ پر خطی تکمیل کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\oint_C \left(\int_C \text{ کی جگہ} \right)$$

خطی تکمیل کی تعریف سے ظاہر ہے کہ قطعی تکمیل کی درج ذیل جانی پہچانی خصوصیات خطی تکمیل کے لئے بھی درست ہیں

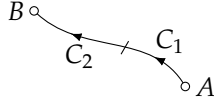
$$(الف) \quad \int_C k f \, ds = k \int_C f \, ds \quad (k \text{ مستقل})$$

$$(11.5) \quad (ب) \quad \int_C (f + g) \, ds = \int_C f \, ds + \int_C g \, ds$$

$$(پ) \quad \int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds$$

جہاں مساوات 11.5-پ میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ان ٹکڑوں کی سمت بندی عین C کی طرح ہے (شکل 11.4)۔ راہ پر تکمیل لیتے ہوئے دائری سمت تبدیل کرنے سے حاصل قیمت 1- سے ضرب ہوگی۔

¹¹ piecewise smooth



شکل 11.4: تکمل کی راہ کو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

11.2 خطی تکمل کا حل

خطی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے اس کو حل کیا جاتا ہے۔ ایسا تکمل کی راہ C کی روپ کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ آئیں اس عمل کو دیکھتے ہیں۔

اگر C کی روپ

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad a \leq s \leq b$$

ہو (جہاں s راہ C کی لمبائی قوس ہے) تب ہم مساوات 11.4 کی مدد سے درج ذیل استعمال کرتے ہیں۔

$$(11.6) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds$$

اگر C کی روپ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

ہو (جہاں t کوئی مقدار معلوم ہے) تب ہم

$$(11.7) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} dt$$

استعمال کرتے ہیں جہاں مساوات 10.31 سے

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

ہے اور گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی فرض کیا گیا ہے کہ $\mathbf{r}(t)$ اور $\dot{\mathbf{r}}(t)$ دونوں استمراری ہیں اور $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ ہے۔

آئیں مساوات 11.7 حاصل کرتے ہیں۔ ہم r کی جگہ

$$\tilde{r}(t) = \tilde{x}(t)i + \tilde{y}(t)j + \tilde{z}(t)k$$

لکھ کر قوس لمبائی $s(t)$ حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد $r(s(t)) = \tilde{r}(t)$ یعنی $x(s(t)) = \tilde{x}(t)$ ، وغیرہ لکھ کر مساوات 11.6 کے دائیں ہاتھ میں قطعی تکمل کے قاعدے کے تحت

$$\int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds = \int_{t_0}^{t_1} f[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)] \frac{ds}{dt} dt$$

حاصل کرتے ہیں جو (استعمال کی گئی علامتوں میں تبدیل کے علاوہ) عین مساوات 11.7 ہے۔

چونکہ عموماً $r(t)$ معلوم یا قابل معلوم ہو گا لہذا مساوات 11.7 عملی مسائل کی تقریباً تمام صورتوں کو حل کر پاتا ہے۔

مثال 11.2: برائے مساوات 11.6
تفاعل $f(x, y) = x^3 y$ کا شکل 11.5 میں دکھائی گئی گول قوس

$$r(s) = \cos s i + \sin s j \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$$

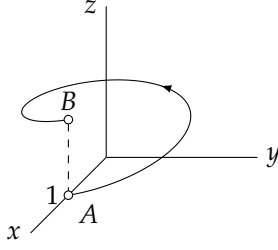
پر تکمل حاصل کریں۔

حل: چونکہ $x(s) = \cos s$ اور $y(s) = \sin s$ ہیں لہذا مساوات 11.5 سے درج ذیل ملتا ہے۔

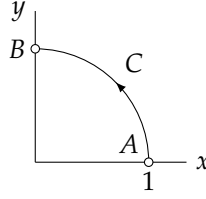
$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \int_C x^3 y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 s \sin s ds \\ &= \int_1^0 -u^3 du = \frac{1}{4} \quad (u = \sin s) \end{aligned}$$

□

مثال 11.3: برائے مساوات 11.7
 xy مستوی میں نقطہ $A : (-1, 1, 0)$ سے نقطہ $B : (1, 5, 0)$ تک راہ $y = 2x + 3$ پر $\int_C x^2 y ds$ کی قیمت دریافت کریں۔



(ب) فضائیں خطی مکمل کی راہ (مثال 11.4)



(الف) سطح میں مکمل کی راہ (مثال 11.2)

شکل 11.5: سطح میں راہ اور فضائیں راہ۔

حل: ہم C کو درج ذیل مقدار معلوم روپ¹² میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t + 3)\mathbf{j} \quad -1 \leq t \leq 1$$

یوں

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{5}$$

ہو گا۔ راہ پر رہتے ہوئے $x^2y = t^2(2t + 3) = 2t^3 + 3t^2$ ہو گا لہذا مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C x^2y \, ds = \sqrt{5} \int_{-1}^1 (2t^3 + 3t^2) \, dt = 2\sqrt{5}$$

□

مثال 11.4: فضا میں راہ پر خطی مکمل

پتچ دار راہ کو شکل 11.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, ds$ دریافت کریں۔

حل: پتچ دار راہ کی مساوات

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

¹² ظاہر ہے کہ ہم $t = x$ لیتے ہوئے راہ کو $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + (2x + 3)\mathbf{j}$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ہے لہذا

$$\dot{r} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} = \sqrt{2}$$

ہو گا۔ اس راہ پر چلتے ہوئے

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^2 = (1 + t^2)^2$$

ہو گا اور یوں مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 ds &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)^2 dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{2(2\pi)^3}{3} + 2\pi \right] \approx 3013 \end{aligned}$$

□

ایسا خطی تکمل جس کا متکمل تجربی تفاعل ہو یا جو پیچیدہ قطعی تکمل دیتا ہو کو تکمل کے اعدادی طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔

کئی معاملوں میں خطی تکمل کے متکمل درج ذیل روپ رکھتے ہیں

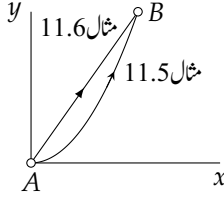
$$(11.8) \quad g(x, y, z) \frac{dx}{ds}, \quad g(x, y, z) \frac{dy}{ds}, \quad g(x, y, z) \frac{dz}{ds}$$

جہاں $\frac{dx}{ds}$ ، $\frac{dy}{ds}$ اور $\frac{dz}{ds}$ تکمل کی راہ کی مقدار معلوم روپ میں موجود تفاعل کے تفرق ہیں۔ ایسی صورت میں ہم

$$(11.9) \quad \int_C g(x, y, z) \frac{dx}{ds} ds = \int_C g(x, y, z) dx$$

لکھتے ہیں۔ باقی دو صورتوں کے لئے بھی ایسا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی راہ C پر ان طرز کے تکمل کے مجموعے کو درج ذیل سادہ صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$(11.10) \quad \int_C f dx + \int_C g dy + \int_C h dz = \int_C (f dx + g dy + h dz)$$



شکل 11.6: تکمل کے دو مختلف راہ (مثال 11.5 اور مثال 11.6)

راہ C کی روپ استعمال کرتے ہوئے تین میں سے دو آزاد متغیرات کو حذف کرتے ہوئے حاصل قطعی تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ تیسرا آزاد متغیر اس قطعی تکمل کا متغیر ہو گا۔

مثال 11.5: برائے مساوات 11.9 اور مساوات 11.10
خطی تکمل $\int_C [x^2 y^2 dx + (x - y + z) dy + xz dz]$ کی قیمت دریافت کریں۔ تکمل کی راہ سطح $z = 5$ میں قوس مکانی $y = x^2$ میں نقطہ $A : (0, 0, 5)$ تا نقطہ $B : (1, 1, 5)$ ہے (شکل 11.6-الف)۔

حل: چونکہ $y = x^2$ ہے لہذا $\frac{dy}{dx} = 2x$ یا $dy = 2x dx$ ہو گا۔ چونکہ $z = 5$ غیر متغیر ہے لہذا تکمل کے آخری جزو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^1 [x^2 x^4 dx + (x - x^2 + 5)2x dx] = \int_0^1 (x^6 - 2x^3 + 2x^2 + 10x) dx = \frac{223}{42} \approx 5.31$$

□

مثال 11.6: درج بالا مثال کے تکمل کو انہیں دو نقطوں کے درمیان سطح $z = 5$ میں راہ $y = x$ پر حاصل کریں (شکل 11.6-ب)۔

حل: اب $dy = dx$ ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 [x^2 x^2 dx + (x - x + 5)x dx] = \int_0^1 (x^4 + 5) dx = \frac{26}{5} = 5.2$$

□

مثال 11.5 اور مثال 11.6 میں ایک جیسے مکمل، ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ پائے گئے البتہ ان مثالوں میں راہ مختلف تھی۔ کمل کے جوابات بھی مختلف تھے۔ اس نتیجے کے مطابق کمل کی قیمت ابتدائی نقطہ، اختتامی نقطہ اور مکمل کے علاوہ راہ پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ اس بنیادی حقیقت پر مزید غور اسی باب میں کیا جائے گا۔

بعض اوقات مساوات 11.10 کے f ، g ، h سمتیہ v کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 ہوں گے

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k = f i + g j + h k$$

لہذا

$$v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = \left(v_1 \frac{dx}{ds} + v_2 \frac{dy}{ds} + v_3 \frac{dz}{ds} \right) ds$$

ہو گا جہاں قوسین میں بند حصہ سمتیہ v اور اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k \quad (\text{حصہ 10.5 دیکھیں})$$

کا اندرونی ضرب ہے۔ r کمل کی راہ C ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$(11.11) \quad \int_C (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = \int -Cv \cdot \frac{dr}{ds} ds$$

جس کو عموماً

$$\int_C v \cdot \frac{dr}{ds} ds = \int_C v \cdot dr$$

لکھا جاتا ہے جہاں

$$(11.12) \quad dr = dx i + dy j + dz k$$

ہے۔

مثال 11.7: قوت اور کام
ایک ذرہ پر متغیر قوت f عمل کرتی ہے جو ذرے کو راہ C پر ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک منتقل کرتی ہے۔ اس قوت سے سرزد کام¹³ درج ذیل خطی کمل دیتی ہے

$$(11.13) \quad W = \int_C f \cdot dr$$

جہاں تکمل کو راہ پر منتقلی کی سمت میں حاصل کیا جاتا ہے۔ مثال 7.7 میں کام کی تعریف اور تکمل کی تعریف بطور مجموعہ استعمال کرتے ہوئے درج بالا خطی تکمل لکھا گیا ہے۔

ہم وقت t کو تکمل کا متغیر چنتے ہیں۔ یوں

$$dr = \frac{dr}{dt} dt = dv dt$$

ہو گا جہاں v سمتی رفتار سمتیہ ہے۔ یوں مساوات 11.13 درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.14) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt$$

جہاں ابتدائی لمحہ t_0 اور اختتامی لمحہ t_1 ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت

$$(11.15) \quad \mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}}$$

ہو گا لہذا مساوات 11.14 سے درج ذیل ملتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) dt = \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \Big|_{t_0}^{t_1}$$

□ جس کے تحت ذرے کی میکانی توانائی میں اضافہ عین کام کے برابر ہے۔ یہ میکانات کا بنیادی قاعدہ ہے۔

سوالات

11.1 راہ کی مثبت سمت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے کی رخ رکھتے ہوئے $\int_C (x^2 + y^2) ds$ کی قیمت سوال 11.8 میں دریافت کریں۔

سوال 11.1: سیدھے خط $y = -4x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1, -4)$ -

جواب: $\frac{17\sqrt{17}}{3}$

سوال 11.2: سیدھے خط $y = 3x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(2,6)$ -

جواب: $\frac{80\sqrt{10}}{3}$ سوال 11.3: سیدھے خط پر نقطہ $(1, 2)$ تا نقطہ $(3, 0)$ -جواب: $\frac{34\sqrt{2}}{3}$ سوال 11.4: سیدھے خط پر نقطہ $(3, 0)$ تا نقطہ $(1, 2)$ -جواب: $-\frac{34\sqrt{2}}{3}$ سوال 11.5: گھڑی کی الٹ رخ دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ پر نقطہ $(3, 0)$ تا نقطہ $(0, 3)$ -جواب: $\frac{27\pi}{2}$ سوال 11.6: x محور پر $(0, 0)$ تا $(2, 0)$ اور یہاں سے y محور کے متوازی $(2, 2)$ تک۔جواب: $\frac{40}{3}$ سوال 11.7: y محور پر $(0, 0)$ تا $(0, 2)$ اور یہاں سے x محور کے متوازی $(2, 2)$ تک۔جواب: $\frac{40}{3}$ سوال 11.8: نقطہ $(0, 0)$ سے سیدھے خط پر نقطہ $(2, 2)$ تک۔جواب: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ سوال 11.9: مکمل $\int_C (x+z)y \, ds$ کی قیمت کو دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ ، $z = 2$ پر نقطہ $(0, 0, 2)$ تا نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ دریافت کریں (گھڑی کی الٹ رخ)۔جواب: $\frac{9}{4} - \sqrt{2}$ مکمل $\int_C (3y^2 \, dx - x^2 \, dy)$ کی قیمت کو سوال 11.10 تا سوال 11.12 میں دیے راہ پر دریافت کریں۔

سوال 11.10: سیدھے خط پر نقطہ $(0,1)$ تا نقطہ $(1,0)$ -

جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 11.11: قوس مکانی $y = x^2$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1,1)$ -

جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 11.12: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ نقطہ $(1,0)$ تا نقطہ $(1,1)$ -

جواب: $-\frac{8}{3}$

سوال 11.13 تا سوال 11.18 میں دی گئی راہ پر قوت $f = 2xi + zj - yk$ کا کام دریافت کریں۔

سوال 11.13: x محور پر $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$ -

جواب: 1

سوال 11.14: $z = 2$ سطح میں y محور پر $(0,0,2)$ تا $(0,1,2)$ -

جواب: 2

سوال 11.15: سطح مکانی $y = x^2$ ، $z = 1$ پر $(0,0,1)$ تا $(1,1,1)$ -

جواب: 2

سوال 11.16: سطح مکانی $y = z^4$ ، $x = 2$ پر $(0,2,0)$ تا $(1,2,1)$ -

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.17: سیدھے خط $y = x$ ، $z = 2x$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ -

جواب: 1

سوال 11.18: سیدھے خط $y = x^2$ ، $z = 2x^3$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ -

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.19: مان لیں کہ قوس C کے تمام نقطوں پر p معین ہے اور کہ $|p|$ محدود ہے یعنی C پر $|p| < M$ ہے جہاں M کوئی مثبت عدد ہے۔ ثابت کریں کہ

$$(11.16) \quad \left| \int_C p \cdot dr \right| < Ml$$

ہو گا جہاں C کی لمبائی l ہے۔

جواب: اندرونی ضرب کے تحت $p \cdot dr = |p| |dr| \cos \theta$ ہو گا۔ چونکہ $|p| < M$ ہے اور $\cos \theta \leq 1$ ہے لہذا $|p| \cos \theta < M$ ہو گا۔ خطی تکمل کی تعریف مساوات 11.3 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $|dr| = \Delta s$ لکھی گئی ہے۔

$$J_n = \sum_{m=1}^n |p| \cos \theta \Delta s_m < \sum_{m=1}^n M \Delta s_m = M \sum_{m=1}^n \Delta s_m = Ml$$

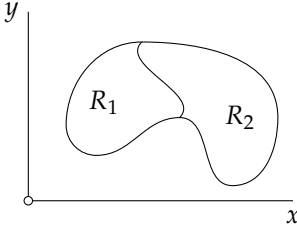
11.3 دوہرا تکمل

وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x)$ کا x محور پر a تا b قطعی تکمل

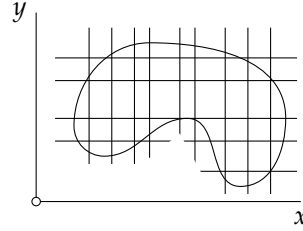
$$\int_a^b f(x) dx$$

لکھا جاتا ہے۔ دوہرا تکمل کی صورت میں xy سطح میں بند محدود¹⁴ خطہ R کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x, y)$ متکمل ہو گا۔

¹⁴ "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو معقول وسعت کے دائرے میں گھیرا جاسکتا ہے۔



(ب) خطے کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔



(الف) R کے متعدد ٹکڑے

شکل 11.7: دوہرا تکمیل کی تعریف اور خواص

دوہرا تکمیل کی تعریف قطعی تکمیل کی تعریف سے مشابہت رکھتی ہے۔ ہم x اور y محور کے متوازی خطوط کھینچ کر خطہ R کو ٹکڑے کرتے ہیں (شکل 11.7-الف)۔ R کے اندر ٹکڑوں کو 1 تا n کہتے ہیں۔ ہر ٹکڑے میں کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً k مستطیلی ٹکڑے میں نقطہ (x_k, y_k) ہو گا۔ تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k \quad (11.17)$$

لیتے ہیں جہاں k مستطیلی ٹکڑے کا رقبہ A_k ہے۔ ہم مثبت عدد n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1}, J_{n2}, \dots کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ R میں $f(x, y)$ استمراری ہے اور R کو لامتناہی تعداد کی ہموار منحنیات گھیرتی ہیں۔ ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1}, J_{n2}, \dots کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x, y_k) کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا۔ اس حد کو خطہ R پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکمیل¹⁵ کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

دوہرا تکمیل کی تعریف سے ظاہر ہے یہ قطعی تکمیل کی طرح کئی خواص رکھتا ہے۔ فرض کریں کہ خطہ R میں متعین

اور استمراری f اور g تفاعل کے متغیرات x اور y ہیں۔ تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\iint_R k f \, dx \, dy = k \iint_R f \, dx \, dy \quad (k \text{ مستقل ہے})$$

$$(11.18) \quad \iint_R (f + g) \, dx \, dy = \iint_R f \, dx \, dy + \iint_R g \, dx \, dy$$

$$\iint_R f \, dx \, dy = \iint_{R_1} f \, dx \, dy + \iint_{R_2} f \, dx \, dy \quad (\text{شکل 11.7-ب})$$

مزید R میں کم از کم ایک ایسا نقطہ (x_0, y_0) ضرور پایا جاتا ہے کہ درج ذیل تعلق درست ثابت ہو

$$(11.19) \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = f(x_0, y_0) A$$

جہاں خطہ R کا رقبہ A ہے۔ یہ تعلق دوہرا نکلات کا اوسط قیمت مسئلہ¹⁶ کہلاتا ہے۔

خطہ R پر دوہرا نکلات کو یکے بعد دیگرے دو عدد مکمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ انہیں اس ترکیب کو سمجھیں۔

فرض کریں کہ R کو درج ذیل غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے (شکل 11.8-الف)

$$a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x)$$

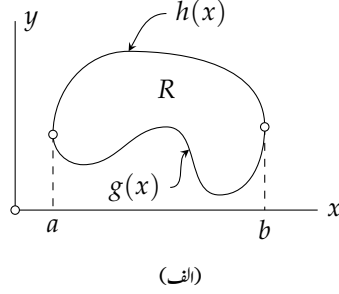
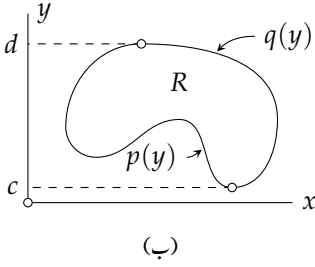
تب $y = g(x)$ اور $y = h(x)$ خطہ R کی سرحد کو ظاہر کریں گے اور

$$(11.20) \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right] dx$$

ہو گا۔ ہم پہلے (چکور قوسین میں بند) اندرونی مکمل

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy$$

کی قیمت حاصل کرتے ہیں جہاں x بطور مقدار معلوم کردار ادا کرتا ہے لہذا اس مکمل کا حاصل x کا تفاعل $F(x)$ ہو گا۔ اس کے بعد x محور پر $F(x)$ کا مکمل a تا b حاصل کرتے ہوئے دوہرا مکمل (مساوات 11.20) کی قیمت حاصل ہو گی۔



شکل 11.8: تجزیہ دوہرا تکامل

اسی طرح اگر R کو درج ذیل غیر مساوات (شکل 11.8-ب)

$$c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y)$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب درج ذیل ہو گا

$$(11.21) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

جہاں اندرونی تکامل کا حاصل y کا تفاعل ہو گا جس کو y محور پر c تا d تکامل کرتے ہوئے دوہرا تکامل کی قیمت حاصل ہو گی۔

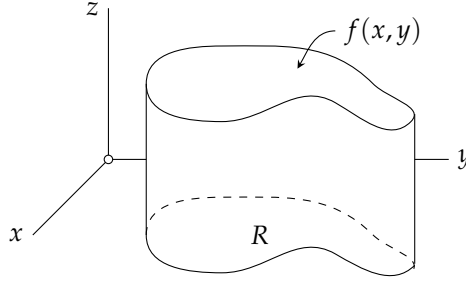
اگر R کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن نہ ہو لیکن R کو ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب علیحدہ علیحدہ ہر ٹکڑے پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکامل حاصل کرتے ہوئے تمام کا مجموعہ لیتے ہوئے R پر $f(x, y)$ کے دوہرا تکامل کی قیمت حاصل ہو گی۔

دوہرا تکامل کے عملی استعمال

دوہرا تکامل کے کئی عملی جیومیٹریائی اور طبعی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مثلاً R کا رقبہ A ¹⁷ درج ذیل ہے۔

$$A = \iint_R dx dy$$

area¹⁷



شکل 11.9: دوہرا کمل بطور حجم

چونکہ مساوات 11.17 میں جزو $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ سے مراد اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم ہے جس کے بنیاد کا رقبہ A_k اور قد $f(x_k, y_k)$ ہے (شکل 11.9) لہذا خطہ R کے اوپر سطح $z = f(x, y) (> 0)$ کے نیچے حجم H درج ذیل ہے۔

$$H = \iint_R f(x, y) dx dy$$

فرض کریں کہ مستوی xy میں پھیلے کیت کی کثافت (کیت فی اکائی رقبہ) کو $f(x, y)$ ظاہر کرتی ہے۔ تب R میں کل کیت M درج ذیل ہوگی۔

$$M = \iint_R f(x, y) dx dy$$

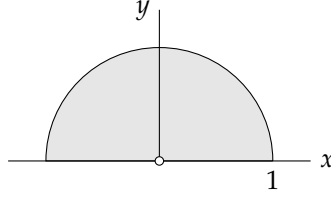
R میں موجود کیت کی مرکز ثقل¹⁸ کے محدد

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x f(x, y) dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y f(x, y) dx dy$$

ہوں گے۔ خطہ R میں موجود کیت کے x اور y محور کے گرد جمودی معیار اثر¹⁹ بالترتیب I_x اور I_y ہوں گے

$$I_x = \iint_R y^2 f(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_R x^2 f(x, y) dx dy$$

¹⁸ center of gravity
¹⁹ moment of inertia



شکل 11.10: کثافت کیت (مثال 11.8)

جبکہ مبدا کے گرد اس کی قطبی جمودی معیار اثر I_0 ہوگی۔

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy$$

مثال 11.8: عملی دوہرا کٹل

خطہ $R: 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$ میں کثافت کیت $f(x, y) = 1$ ہے (شکل 11.10)۔ مرکز ثقل اور جمودی معیار اثر I_0, I_y, I_x دریافت کریں۔

حل: R میں کل کیت M درج ذیل ہے (جہاں آخری قدم پر مکمل میں $x = \sin \theta$ پر کیا گیا ہے)۔

$$M = \iint_R 1 dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

چونکہ $f(x, y) = 1$ ہے لہذا کل کیت عین نصف دائرے کے رقبے کے برابر ہے۔ مرکز ثقل کے محدود

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2}{\pi} \iint_R x dx dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy \right] dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^0 z^2 dz = 0 \quad (\sqrt{1-x^2} = z) \end{aligned}$$

اور

$$\bar{y} = \frac{2}{\pi} \iint_R y dx dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right] dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{4\pi}{3}$$

polar moment of inertia²⁰

ہیں۔ مزید

$$I_x = \iint_R y^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 d\theta = \frac{\pi}{8}$$

اور

$$I_y = \iint_R x^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right] dx = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{8}$$

سے قطبی جمودی معیار اثر I_0 درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{4}$$

□

مثال 11.9 میں I_x کو نسبتاً آسان ترکیب سے حاصل کیا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ قطعی مکمل

$$\int_a^b f(x) dx$$

میں

$$x = x(u)$$

پر کرتے ہوئے نیا متغیر u متعارف کیا جاتا ہے، جہاں کسی وقفہ $\alpha \leq u \leq \beta$ پر تفاعل $x(u)$ اور اس کا تفرق استمراری اور $x(\alpha) = a$ ، $x(\beta) = b$ [یا $x(\alpha) = b$ ، $x(\beta) = a$] ہیں اور جیسے جیسے $x(u)$ وقفہ a تا b پر تبدیل ہوتا ہو ویسے ویسے وقفہ α تا β پر u تبدیل ہوتا ہو۔ یوں

$$(11.22) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(u)] \frac{dx}{du} du$$

لکھا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ کی صورت میں $x = \sin u$ پر کرتے ہوئے

$$f[x(u)] = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u, \quad \frac{dx}{du} = \cos u, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

ہوں گے جن سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{\pi}{4}$$

دوہرا مکمل

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

کی صورت میں ہم نئے متغیرات u ، v متعارف کرنے کی خاطر

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

لکھتے ہیں، جہاں uv سطح میں کسی خطہ R^* پر تفاعل $x(u, v)$ ، $y(u, v)$ اور ان کے ایک درجی جزوی تفرق استمراری ہوں تاکہ R^* میں ہر نقطہ (u_0, v_0) کا خطہ R میں مطابقتی نقطہ $[x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)]$ پایا جائے اور مزید پورے R^* پر یعقوبی J^{21}

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثبت اور یا پورے R^* پر یعقوبی J^{22} منفی ہو۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$(11.23) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

یوں مسئلہ کو u ، v کی صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ $dx dy$ کی جگہ $du dv$ ضرب یعقوبی J کی حتمی قیمت لکھی جاتی ہے۔

مثال کے طور پر قطبی محدد r^{23} اور θ متعارف کرنے کی خاطر ہم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Jacobian²¹

²² جرمن ریاضی دان [1804-1851] کارل گسٹاف یقوب یعقوبی

polar coordinates²³

لکھتے ہیں لہذا

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

ہو گا اور یوں

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f[r \cos \theta, r \sin \theta] r dr d\theta$$

لکھا جائے گا جہاں xy سطح میں خطہ R کا سطح $r\theta$ میں مطابقتی خطہ R^* ہے۔

مثال 11.9: مساوات 11.23 استعمال کرتے ہوئے مثال 11.8 کی I_x دوبارہ دریافت کریں۔

حل:

$$I_x = \iint_R y^2 dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

□

مثال 11.10: درج ذیل دوہرا کمل حل کریں

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

جہاں R کو شکل 11.11 میں دکھایا گیا ہے۔

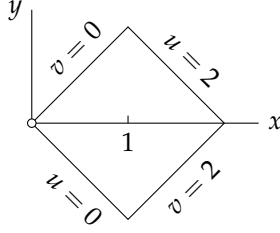
حل: R کی شکل کو دیکھ کر ہم $x + y = u$ اور $x - y = v$ تبادیل چنتے ہیں۔ یوں $x = \frac{1}{2}(u + v)$ اور $y = \frac{1}{2}(u - v)$ ہو گے اور یعقوبی درج ذیل ہو گا۔

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

R کا مطابقتی چکور $0 \leq u \leq 2$ ، $0 \leq v \leq 2$ ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{8}{3}$$

□



شکل 11.11: مثال 11.10 میں مکمل کا خطہ

سوالات

سوال 11.20 تا سوال 11.26 حل کریں۔ مکمل کا خطہ بیان کریں۔

سوال 11.20: $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y^2) dx dy$ جواب: $\frac{10}{3}$

سوال 11.21: $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$ جواب: $\frac{\pi}{8}$

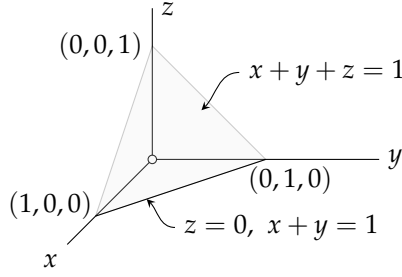
سوال 11.22: $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$ جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.23: $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy dy dx$ جواب: $\frac{1}{24}$

سوال 11.24: $\int_0^2 \int_0^{4-2x} (x + y) dy dx$ جواب: 8

سوال 11.25: $\int_0^2 \int_{1+x}^{5-x} (1 + xy) dy dx$ جواب: 12

سوال 11.26: $\int_0^1 \int_{1+x}^{5-x} (1 - xy) dy dx$ جواب: -1



شکل 11.12: سطح $x + y + z = 1$ کے نیچے ربع اول میں چو سطح

سوال 11.27 تا سوال 11.30 میں فضا میں خطہ دیا گیا ہے۔ اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 11.27: کارتیسی نظام کے ربع اول میں سطح $x + y + z = 1$ کے نیچے چو سطح۔

جواب: شکل 11.12 میں سطح $x + y + z = 1$ کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے جو x ، y اور z محور کو بالترتیب $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ پر چھوتی ہے۔ ربع اول میں چو سطحی کے کونے $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ ہیں۔ مستوی xy پر $z = 0$ ہو گا لہذا دی گئی سطح xy مستوی کو خط $x + y = 1$ یعنی $x = 1 - y$ پر قطع کرتی ہے۔ یوں ربع اول میں $x = 0$ اور $x = 1 - y$ کے مابین خطہ R ہو گا۔ R کے کونے $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ اور $(0, 1, 0)$ ہیں۔ اس طرح ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_0^{1-y} z \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1 - x - y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_0^{1-y} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (y^2 - 2y + 1) \, dy = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

سوال 11.28: وہ چو سطح جس کو سطح $2x + 6y + z = 12$ ربع اول سے کاٹی ہے۔
جواب: 216

سوال 11.29: وہ حجم جس کو تکلی $x^2 + y^2 = 1$ اور تکلی $y^2 + z^2 = 1$ گھیرتی ہیں۔
جواب: تکلی $y^2 + z^2 = 1$ سے حجم کی بالائی سطح $z = \sqrt{1 - y^2}$ اور نیچلی سطح $z = -\sqrt{1 - y^2}$ ملتے

ہیں۔ مشابہت سے ہم مکمل کو بالائی سطح اور xy مستوی کے درمیان حاصل کرتے ہوئے حاصل جواب کو 2 سے ضرب دے سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا جہاں $x^2 + y^2 = 1$ سے x کے حدود $-\sqrt{1-y^2}$ اور $\sqrt{1-y^2}$ لکھے گئے ہیں۔

$$H = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z \, dx \, dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \, dx \, dy = \frac{16}{3}$$

سوال 11.30: سطح $z = x^2$ اور سطح $x = z^2$ کے درمیان $y = 0$ تا $y = 2$ (تسلی جواب: یہ سطحیں $x = 0$ اور $x = 1$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ بالائی سطح $z = \sqrt{x}$ ہے (تسلی کر لیں)۔ xy مستوی اور بالائی سطح کے مابین حجم معلوم کرتے ہوئے اس سے xy مستوی اور نیچلی سطح کے مابین حجم منفی کرتے ہیں۔

$$H = \int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx \, dy = \frac{2}{3}$$

سوال 11.31 تا سوال 11.34 میں کمیت کے مرکز ثقل کے محدد \bar{x} ، \bar{y} معلوم کریں۔ خطہ R اور اس میں کمیت کی کثافت $f(x, y)$ دی گئی ہے۔

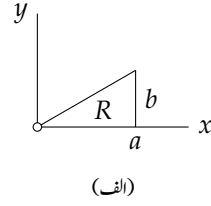
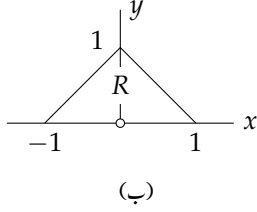
سوال 11.31: $f(x, y) = 1$, $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$
جوابات: $\bar{x} = 1, \bar{y} = \frac{3}{2}$

سوال 11.32: ربع اول $R : x^2 + y^2 \leq 1$, $f(x, y) = 1$
جوابات: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4\pi}{3}$

سوال 11.33: $f(x, y) = x + y$, $R : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$
جوابات: $\bar{x} = \frac{12}{7}, \bar{y} = \frac{50}{21}$

سوال 11.34: ربع اول $R : y \leq 4 - 3x$, $f(x, y) = xy$
جوابات: $\bar{x} = \frac{8}{15}, \bar{y} = \frac{8}{5}$

سوال 11.35: شکل 11.13 میں دکھائے گئے خطہ R میں کمیتی کثافت $f(x, y) = 1$ پایا جاتا ہے۔ جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_z دریافت کریں۔



شکل 11.13: خطہ کشافت (سوال 11.35)

جوابات:

(الف) $I_x = \frac{ab^3}{12}, I_y = \frac{a^3b}{4}, I_0 = I_x + I_y$

(ب) $I_x = I_y = \frac{1}{6}, I_0 = \frac{1}{3}$

قطبی محدود استعمال کرتے ہوئے سوال 11.36 تا سوال 11.39 میں $\iint_R f(x, y) dx dy$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.36: $f = x + y, R: x^2 + y^2 < 4, y \geq 0$
جواب: $\frac{11}{3}$

سوال 11.37: $f = \sqrt{x^2 + y^2}, R: x^2 + y^2 \leq a, y \geq 0, x \geq 0$
جواب: $\frac{a^3\pi}{6}$

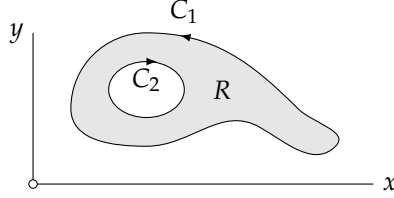
سوال 11.38: $f = x^2 + y^2, R: x^2 + y^2 \leq a$
جواب: $\frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.39: $f = e^{-x^2-y^2}, R: x^2 + y^2 = 9$ اور $x^2 + y^2 = 16$ کے درمیان چھلا
جواب: $\pi(e^{-9} - e^{-16})$

سوال 11.40 تا سوال 11.41 میں یقینی دریافت کریں۔ حاصل جواب کی جیومیٹریائی وجہ بیان کریں۔

سوال 11.40: مستقیم حرکت $x = u + a, y = v + b$
جواب: 1

سوال 11.41: مرکز کے گرد گھومنا $x = u \cos \phi - v \sin \phi, y = u \sin \phi + v \cos \phi$
جواب: 1



شکل 11.14: خطہ R کی سرحد کے دو حصے C1 اور C2 ہیں۔ C1 پر گھڑی کی الٹ رخ جبکہ C2 پر گھڑی کی رخ چلتے ہوئے خطی مکمل حاصل کیا جائے گا۔

11.4 دوہرا مکمل کا خطی مکمل میں تبادلہ

سطح میں کسی خطے پر دوہرا مکمل کو اس خطے کے سرحد پر خطی مکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ بعض اوقات ایسا کرنے سے آسانی سے حل ہونے والا مکمل حاصل ہوتا ہے۔ مکمل پر نظریاتی غور و فکر کے دوران یہ تبادلہ سودمند ثابت ہوتا ہے۔ یہ تبادلہ درج ذیل مسئلے کے تحت ممکن ہے۔

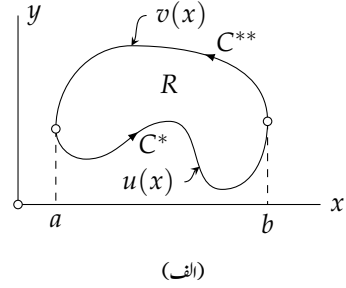
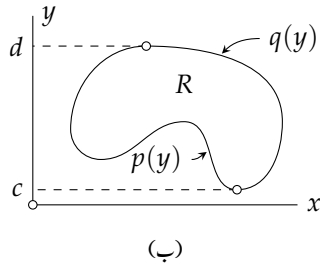
مسئلہ 11.1: سطح میں مسئلہ گرین²⁴ (دوہرا مکمل سے خطی مکمل اور خطی مکمل سے دوہرا مکمل کا حصول) فرض کریں کہ مستوی xy میں R ایک ایسا بند اور محدود خطہ ہے کہ جس کی سرحد C ، محدود تعداد کی ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہے۔ مزید فرض کریں کہ کسی ایسے پورے خطے میں، جس کا R حصہ ہو، تفاعل $f(x, y)$ اور $g(x, y)$ اور ان کے جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ استمراری ہوں۔ تب درج ذیل ہوگا

$$(11.24) \quad \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (f dx + g dy)$$

جہاں خطی مکمل R کی پوری سرحد C پر یوں حاصل کیا جاتا ہے کہ مکمل لینے کی رخ C پر چلتے ہوئے R بائیں ہاتھ کو ہو (شکل 11.14)۔

ثبوت: ہم مسئلہ گرین²⁵ کو پہلے ایسے خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل دونوں صورتوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو (شکل 11.15)۔

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & a \leq x \leq b, \quad u(x) \leq y \leq v(x), \\ \text{(ب)} \quad & c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y) \end{aligned}$$



شکل 11.15: مخصوص قسم کا خطہ (مسئلہ گرین)

مساوات 11.20 استعمال کرتے ہوئے

$$(11.25) \quad \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dx$$

لکھ کر (جہاں ممکن $\frac{\partial f}{\partial y}$ ہے) اندرونی تکمل

$$\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(x, y) \Big|_{u(x)}^{v(x)} = f[x, v(x)] - f[x, u(x)]$$

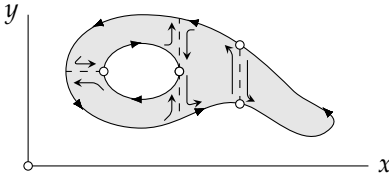
حاصل کر کے مساوات 11.25 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_a^b f[x, v(x)] dx - \int_a^b f[x, u(x)] dx \\ &= - \int_a^b f[x, u(x)] dx - \int_b^a f[x, v(x)] dx \end{aligned}$$

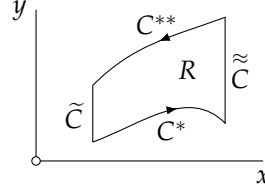
چونکہ $y = u(x)$ شکل 11.15-الف میں سمت بند منحنی C^* کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $y = v(x)$ منحنی C^{**} کو ظاہر کرتی ہے لہذا بائیں ہاتھ کے تکملات کو C^* اور C^{**} پر خطی تکملات

$$(11.26) \quad \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dy = - \int_{C^*} f(x, y) dx - \int_{C^{**}} f(x, y) dx = - \int_C f(x, y) dx$$

Green's theorem²⁴²⁵ برطانوی ریاضی دان جارج گرین [1793-1841]



(ب)



(الف)

شکل 11.16: مسئلہ گرین کا ثبوت

لکھا جاسکتا ہے۔ آخری قدم پر سرحد C^* اور سرحد C^{**} پر حاصل نکلات کو پوری سرحد C پر حاصل مکمل لکھا گیا ہے۔

اگر C کے کچھ حصے y محور کے متوازی ہوں (جیسے شکل 11.16-الف میں \tilde{C} اور $\tilde{\tilde{C}}$ ہیں) تب بھی مساوات 11.26 درست ہو گا۔ ایسا اس لئے ہو گا کہ y محور کے متوازی حصوں پر مکمل کی قیمت صفر ہوگی لہذا سرحد کی ان حصوں (یعنی \tilde{C} اور $\tilde{\tilde{C}}$) پر مکمل کو بھی مساوات 11.26 میں شامل کرتے ہوئے R کی پوری سرحد پر مکمل لکھا جاسکتا ہے۔

اسی طرح مساوات 11.21 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{\partial g}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial g}{\partial x} dx \right] dy \\
 &= \int_c^d g[q(y), y] dy + \int_d^c g[p(y), y] dy \\
 &= \int_C g(x, y) dy
 \end{aligned}
 \tag{11.27}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 11.26 اور مساوات 11.27 ملا کر مخصوص خطے کے لئے مساوات 11.24 ثابت ہوتی ہے۔

اب ہم مسئلے کو ایسی خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جو از خود مخصوص خطہ نہیں ہے لیکن اس کو محدود تعداد کی مخصوص خطوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے (شکل 11.16-ب)۔ ایسی صورت میں ہم تمام ضمنی مخصوص خطوں پر مسئلہ لاگو کرتے ہوئے جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں۔ بائیں ہاتھ کے ارکان کا مجموعہ R پر مکمل دیگا جبکہ دائیں ہاتھ کے ارکان سرحد C پر خطی مکمل جمع اضافی پیدا کردہ سرحدوں پر مکمل دیگا۔ ہر اضافی سرحد پر خطی مکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ سمتوں

میں حاصل کیا جائے گا۔ آپس میں الٹ سمتوں میں خطی تکمیل کا مجموعہ صفر ہوتا ہے لہذا تمام اضافی سرحدوں پر حاصل خطی تکملوں کا مجموعہ صفر ہو گا۔ اس طرح دائیں ہاتھ ارکان کا مجموعہ R کی سرحد C پر خطی تکمیل کے برابر ہو گا۔

□

مسئلہ گرین انتہائی اہم مسئلہ ہے جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔ انہیں اس کی استعمال کی چند مثالیں دیکھیں۔

مثال 11.11: مستوی کا رقبہ بطور سرحد پر خطی تکمیل

مسئلہ گرین یعنی مساوات 11.24 میں $f = 0$ اور $g = x$ پر کرنے سے

$$A = \iint_R dx dy = \int_C x dy$$

ملتا ہے جس کا بائیں ہاتھ R کا رقبہ A دیتا ہے۔ اسی طرح اگر ہم مساوات 11.24 میں $f = -y$ اور $g = 0$ پر کریں تب

$$A = \iint_R dx dy = - \int_C y dx$$

ملتا ہے۔ ان دونوں جوابات سے

$$(11.28) \quad A = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)$$

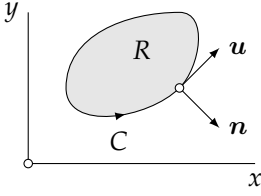
لکھا جاسکتا ہے جہاں خطی تکمیل کو مسئلہ گرین میں دیے گئے رخ حاصل کیا جائے گا۔ یہ تکمیل مستوی xy پر رقبہ کو بطور اسی رقبہ کی سرحد پر خطی تکمیل پیش کرتا ہے۔ کئی سطح پیمائے²⁶ اسی کلیے پر مبنی ہیں۔

□

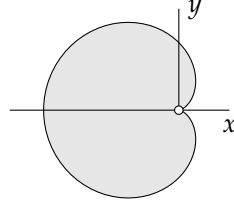
مثال 11.12: قطبی محدود میں مستوی سطح کا رقبہ

قطبی محدود r اور θ ہیں جہاں $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ ہیں۔ یوں

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$



(ب) منحنی برائے مثال 11.14



(الف) منحنی قلب نما

شکل 11.17: اشکال منحنیات برائے مثال 11.13 اور مثال 11.14

ہو گا جنہیں مساوات 11.28 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

(11.29)

$$A = \frac{1}{2} \int_C r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) = \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta$$

□

مثال 11.13: مساوات 11.29 کی مدد سے قلب نما منحنی $r = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ کا رقبہ دریافت کرتے ہیں (شکل 11.17-الف)۔

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$

□

مثال 11.14: لاپلاسی تفاعل کے دوہرا مکمل سے تفاعل کی عمودی مماس کے خطی مکمل کا تبدل فرض کریں کہ xy مستوی میں مسئلہ گرین میں بیان کردہ خطے میں تفاعل $w(x, y)$ اور اس کا ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ ہم $f = -\frac{\partial w}{\partial y}$ اور $g = \frac{\partial w}{\partial x}$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ خطہ میں استمراری ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا جو w کا لاپلاسی ہے (حصہ 10.8)۔

$$(11.30) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w$$

دی گئی f اور g استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.31) \quad \int_C (f dx + g dy) = \int_C \left(f \frac{dx}{ds} + g \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds$$

باب 11. سمتی تکلی عمل الا حصاء۔ تکمل کے مسئلے

جہاں s سرحد C کی لمبائی ہے جس کی سمت بندی شکل 11.13-ب میں دکھائی گئی ہے۔ دائیں ہاتھ آخری متکمل کو درج ذیل دو سمتیات

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}$$

کا اندرونی ضرب

$$(11.32) \quad -\frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} = (\nabla w) \cdot \mathbf{n}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ درج ذیل سمتیہ u سرحد C کا مماس ہے (حصہ 10.5)

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}$$

اور چونکہ $u \cdot n = 0$ ہے لہذا n سرحد C کا قائمہ سمتیہ ہے۔ مزید n کا رخ خطہ R کی باہر کو ہے۔ اس نتیجے اور مساوات 10.79 سے ظاہر ہے کہ مساوات 11.32 کا دایاں ہاتھ C کی بیرونی رخ قائمہ سمتیہ کی سمت میں w کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{dw}{dn}$ لکھتے ہوئے اور مساوات 11.30، مساوات 11.31 اور مساوات 11.32 کو مد نظر رکھتے ہوئے مسئلہ گرین سے درج ذیل کلیہ ثابت ہوتا ہے۔

$$(11.33) \quad \iint_R \nabla^2 w \, dx \, dy = \int_C \frac{\partial w}{\partial n} \, ds$$

□

اسی باب میں مسئلہ گرین کی استعمال اور اس سے حاصل مزید نتائج پر غور کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 11.42 تا سوال 11.48 کو پہلے جوں کا توں حل کریں۔ بعد میں اس کو مسئلہ گرین کی مدد سے حل کریں۔

سوال 11.42: C ، گھڑی کی الٹ رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y^2 \, dx - x^2 \, dy), \quad C: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

جواب: 0

سوال 11.43: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y \, dx + x \, dy), \quad C: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

جواب: 0

سوال 11.44: راہ C ، گھڑی کی رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y \, dx - x \, dy), \quad C: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

جواب: 8

سوال 11.45: راہ C ، گھڑی کی رخ، تکتون کی سرحد ہے۔ تکتون کے کونے دیے گئے ہیں۔

$$\int_C [(x^2 - y) \, dx + y^2 \, dy], \quad (0,0), (3,0), (0,1)$$

جواب: $-\frac{3}{2}$ سوال 11.46: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ دو قوسین میں بند خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [y^2 \, dx + (x^3 + 2xy) \, dy], \quad y = x^2, y = x$$

جواب: $-\frac{3}{20}$ سوال 11.47: راہ C ، گھڑی کی رخ دو قوسین میں بند $0 \leq x \leq 2$ خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [y^3 \, dx + (x^3 + 3y^2x) \, dy], \quad y = x^3, y = 4x$$

جواب: 16

باب 11. سمتی تکلی عمل الاحصاء۔ مکمل کے مسئلے

سوال 11.48: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ ربع اول میں قوس $y = 1 - x^2$ اور محدود کے محوروں کے درمیان بند خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [-xy^2 dx + x^2y dy]$$

جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 11.49 تا سوال 11.55 میں $f dx + g dy$ دیا گیا ہے۔ خطے کے گرد گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے، مسئلہ گرین کی مدد سے $\int_C (f dx + g dy)$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.49: مستطیل خطہ۔ $(x + 2y) dx - x^2 dy$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$
جواب: -8

سوال 11.50: تکونی خطے کے کونے دیے گئے ہیں۔ $(x^2 - 2y) dx + 2x^2 dy$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$
جواب: $\frac{5}{3}$

سوال 11.51: مستطیل خطہ۔ $(x^2 + y) dx + (2x + \sin y) dy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.52: گول دائرے میں بند خطہ۔ $C: x^2 + y^2 = 1$, $(e^{2x} + 3y) dx + (2e^y + 4x) dy$
جواب: π

سوال 11.53: گول دائرے میں بند خطہ۔ $C: x^2 + y^2 = 1$, $-\frac{y^3}{3} dx + \frac{x^3}{3} dy$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.54: مستطیل خطہ۔ $(x + \sinh y) dx + (y^2 + \sin x) dy$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$
جواب: $-\pi \sinh 1$

سوال 11.55: قوسین میں بند خطہ۔ $\frac{e^y}{x} dx + (e^y \ln x + x) dy$, $y = 5$, $y = 1 + x^2$
جواب: $\frac{64}{3}$

سوال 11.56 تا سوال 11.58 میں دیے مستوی خطہ کا رقبہ مثال 11.11 کی کلیات استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

سوال 11.56: اندرونِ ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ جواب: $ab\pi$

سوال 11.57: ربع اول میں تین قوسین میں بند خطہ۔ $y = x, y = \frac{x}{4}, y = \frac{1}{x}$ جواب: $\ln 2$

سوال 11.58: قوسین میں بند خطہ۔ $y = 2x + 3, y = x^2$ جواب: $\frac{32}{3}$

سوال 11.59 تا سوال 11.61 میں $\int_C \frac{\partial w}{\partial n} ds$ کی قیمت کو مساوات 11.33 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.59: $w = 3y^2 - x^2, C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ جواب: 72π

سوال 11.60: مستطیل خطہ۔ $w = 3x^2y - y^3, C: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ جواب: 0

سوال 11.61: مستطیل خطہ۔ $w = e^x + 2xy, C: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ جواب: $3(e^2 - 1)$

سوال 11.62: اگر تفاعل $w(x, y)$ کسی خطہ R میں لاپلاس مساوات $\nabla^2 w = 0$ پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ثابت کریں۔ (اشارہ: مثال 11.14 کی طرز پر ثابت کریں۔)

$$(11.34) \quad \iint_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int_C w \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

جواب: مسئلہ گرین میں $f = -ww_y$ اور $g = ww_x$ لیں جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں۔ یوں $g_x - f_y = w_x^2 + w_y^2$ ہو گا جہاں $w_{xx} + w_{yy} = 0$ استعمال کیا گیا ہے۔ مزید درج ذیل ہو گا جہاں ' سے مراد s کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\begin{aligned} f dx + g dy &= (-ww_y x' + ww_x y') ds = w(\nabla w) \cdot (y' \mathbf{i} - x' \mathbf{j}) ds \\ &= w(\nabla w) \cdot \mathbf{n} ds = w \frac{\partial w}{\partial n} ds \end{aligned}$$

سوال 11.63 تا سوال 11.64 میں $\int_C w \frac{\partial w}{\partial n} ds$ کی قیمت کو مساوات 11.34 کی مدد سے حاصل کریں۔

باب 11. سمتی تکلی عمل الاحصاء۔ مکمل کے مسئلے

سوال 11.63: مستطیل خطہ۔ $w = x + y$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 5$
جواب: 40

سوال 11.64: مستطیل خطہ۔ $w = e^x \cos y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$
جواب: $e^2 - 1$

سوال 11.65: سمتیہ $v = gi - fj$ متعارف کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مسئلہ گرین کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(11.35) \quad \iint_R \nabla \cdot v \, dx \, dy = \int_C v \cdot n \, ds$$

جہاں n سرحد کی باہر رخ قائمہ اکائی سمتیہ ہے (شکل 11.17-ب) اور s راہ C کی لمبائی قوس ہے۔

سوال 11.66: مسئلہ گرین کی دوسری صورت یعنی مساوات 11.35 کو $v = xi + yj$ اور دائرہ $C : x^2 + y^2 = 1$ کے لئے درست ثابت کریں۔

جواب: 2π

سوال 11.67: ثابت کریں کہ مسئلہ گرین کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(11.36) \quad \iint_R (\nabla \times v) \cdot k \, dx \, dy = \int_C v \cdot u \, ds$$

جہاں k مستوی xy کا قائمہ اکائی سمتیہ ہے، u راہ C کی اکائی مماس سمتیہ ہے اور s راہ C کی لمبائی قوس ہے۔

سوال 11.68: مسئلہ گرین کی تیسری صورت یعنی مساوات 11.36 کو $v = -yi + xj$ کے لئے ایسی تکتوں پر ثابت کریں جس کے کونے $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(1,1)$ ہیں۔

جواب: 1

11.5 سطحیں

ہم سطحی کھل پر آگے غور کریں گے۔ اس لئے ضروری ہے کہ ہمیں سطحوں سے واقفیت ہو۔ انہیں انہیں پر غور کرتے ہیں۔

سطح S کو

$$(11.37) \quad f(x, y, z) = 0$$

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں x ، y ، z فضا میں کارتیسی محدود ہیں اور یوں f کی ڈھلوان سطح S کو عمودی ہوگا (مسئلہ 10.5)، بشرطیکہ $\nabla f \neq 0$ ہو۔ نتیجتاً S کے ہر نقطہ پر یکساں عمود، جس کی سمت سطح پر حرکت کرنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہو، کے لئے لازم ہے کہ f کی استمراری ایک درجی جزوی تفرق موجود ہوں اور ہر نقطے پر ان تین میں سے کم از کم ایک جزوی تفرق غیر صفر ہو۔ تب درج ذیل سمتیہ

$$(11.38) \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

سطح S کا اکائی عمودی سمتیہ ہوگا (اور n اس کا دوسرا اکائی عمودی سمتیہ ہوگا)۔

مثال 11.15: اکائی عمودی سمتیہ

کرہ $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ کا اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k}$$

□

بعض اوقات سطح کی صریح روپ

$$(11.39) \quad z = g(x, y)$$

استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اس کو $z - g(x, y) = 0$ لکھ کر مساوات 11.37 طرز کی خفی روپ حاصل ہوتی ہے۔

سطح S کو مقدار معلوم روپ

$$(11.40) \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں u اور v غیر تابع حقیقی متغیرات ہیں جنہیں اس روپ کی مقدار معلوم کہتے ہیں۔ $\mathbf{r}(u, v)$ آزاد متغیرات u اور v کا تابع تفاعل ہے۔ سطح S پر نقاط کا تعین گر سمتیہ $\mathbf{r}(u, v)$ ہے۔ مستوی uv میں کسی خطہ R پر (u, v) تبدیل کرنے سے اس سمتیہ کی نوک سطح S پر حرکت کرے گی۔ R میں ہر نقطہ (u_0, v_0) کا سطح S پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کا تعین گر سمتیہ $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ ہے۔ یوں سطح S مستوی uv میں خطہ R کا عکس ہے۔ یہ منحنی C کی مقدار معلوم روپ $\mathbf{r}(t)$ کی طرح ہے جس پر حصہ 10.3 میں غور کیا گیا جہاں t محور پر کسی وقفہ کا عکس منحنی C ہے۔ پس فرق اتنا ہے کہ سطح کی صورت میں دو عدد مقدار معلوم ہوں گے جبکہ منحنی کی صورت میں ایک عدد مقدار معلوم ہو گا۔

سطحوں کی جیومیٹریائی خواص بھی ہو سکتے ہیں جن کو یقینی بنانے کی خاطر ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

مفروضہ

مستوی uv میں کسی خطہ میں، جس کا R حصہ ہے، (مساوات 11.40 میں دیا گیا) سمتی تفاعل $\mathbf{r}(u, v)$ استمراری ہے اور اس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات r_u اور r_v پائے جاتے ہیں، اور R سادہ تعلق²⁷ کا محدود²⁸ خطہ ہے۔ مزید پورے R پر درج ذیل ہو گا۔

$$(11.41) \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$$

ہموار سطح S کی تعریف کے تحت، سطح کا منفرد عمود پایا جاتا ہے جس کی سمت S پر نقطہ بدلنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہے۔

ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے کہ درج بالا مفروضہ پر پوری اترتی سطح $\mathbf{r}(u, v)$ ہموار سطح ہو گی۔

ٹکڑوں میں ہموار سطح²⁹ سے مراد ایسی سطح ہے جس کو محدود تعداد کی ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے کہ ہر ٹکڑا ہموار سطح ہو۔ مثلاً کرہ ہموار سطح ہے جبکہ مکعب کی سرحدی سطح ٹکڑوں میں ہموار ہے۔

²⁷ simply connected

²⁸ سادہ تعلق کے خطے سے مراد ہے کہ اس خطے میں کسی بھی بند منحنی کو، اس خطے میں رہتے ہوئے، گھٹا کر نقطہ مانند بنایا جاسکتا ہے۔ محدود سے مراد ہے کہ اس خطے کو معقول رداس کے دائرے

میں بند کیا جاسکتا ہے۔

²⁹ piecewise smooth surface

مثال 11.16: کرہ کی مقدار معلوم روپ
رداس a کی کرہ کی مقدار معلوم روپ

$$(11.42) \quad r(u, v) = a \cos v \cos u \mathbf{i} + a \cos v \sin u \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}$$

ہے جہاں $0 \leq u \leq 2\pi$ اور $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ ہیں۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$x = a \cos v \cos u, \quad y = a \cos v \sin u, \quad z = a \sin v$$

بلد³⁰ کو ظاہر کرتے ہیں۔ مساوات 11.41 کی شرط قطبین $v = -\frac{\pi}{2}$ اور $v = \frac{\pi}{2}$ کے علاوہ کرہ کی ہر نقطہ پر پورا ہوتا ہے۔ مساوات 11.42 کو استعمال کرتے ہوئے زمین کی سطح پر نقطہ کے خط طول بلد اور خط عرض بلد دریافت کیے جاتے ہیں۔
□

سوالات

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 142 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

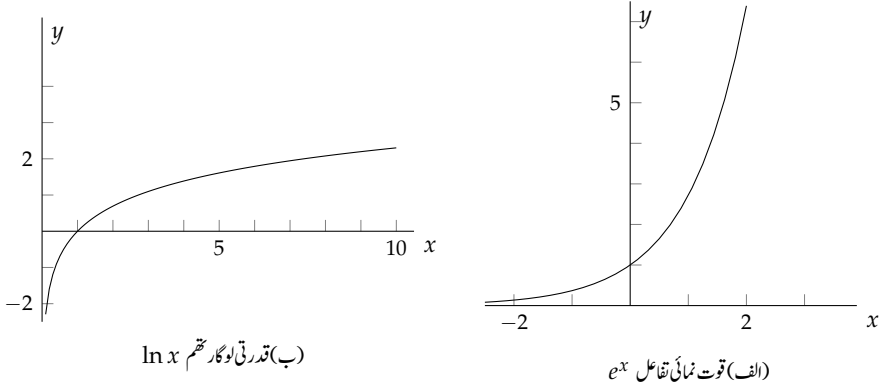
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

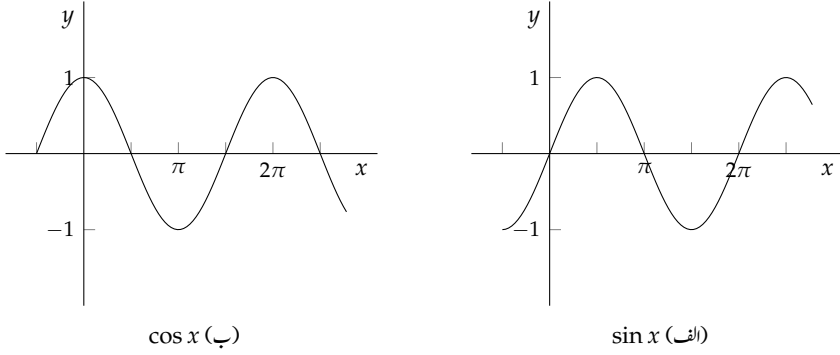
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
 \end{aligned}$$

$$(ب.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \cos x &= \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)
 \end{aligned}$$

$$(ب.9) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(ب.10) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned}
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\
 \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\
 \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}
 \end{aligned}$$

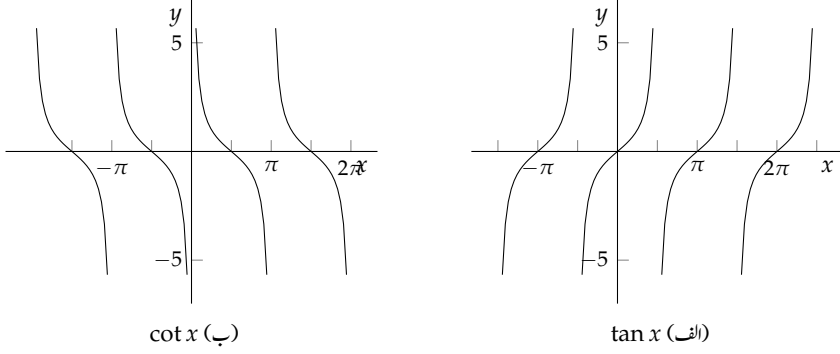
$$(ب.13) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

$$(ب.14) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(ب.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(ب.16) \quad \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

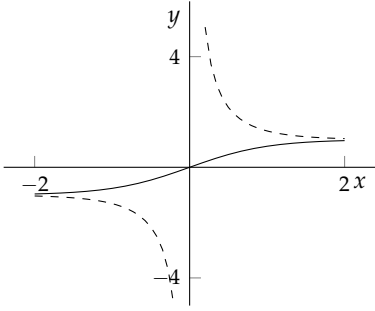
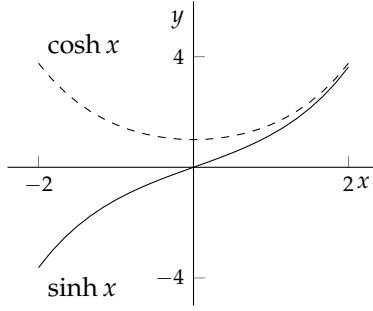
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تقاض۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

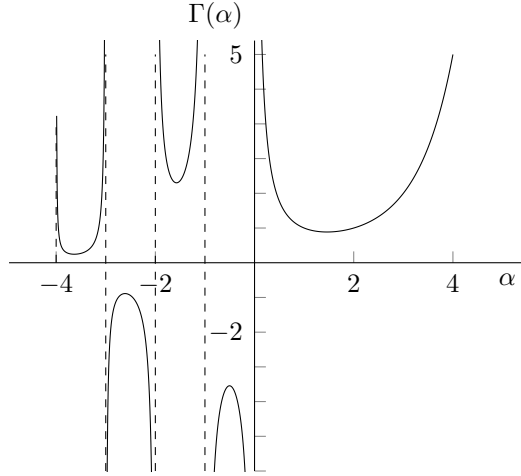
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

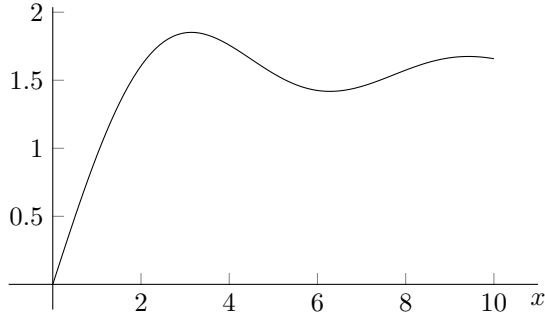
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Si $\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

