

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781 . . . . .	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
787 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
796 . . . . .	11.3	دوہرہ تکمیل
810 . . . . .	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820 . . . . .	11.5	سطحیں
825 . . . . .	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837 . . . . .	11.7	سطحی تکمیل
845 . . . . .	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850 . . . . .	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861 . . . . .	11.10	مسئلہ سٹوکس
866 . . . . .	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869 . . . . .	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883 . . . . .	12	فوریئر تسلسل
884 . . . . .	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889 . . . . .	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902 . . . . .	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907 . . . . .	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916 . . . . .	12.5	نصف حلقہ الساع
923 . . . . .	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931 . . . . .	12.7	جبری ارتعاش
936 . . . . .	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940 . . . . .	12.9	فوریئر تکمیل
953 . . . . .	13	جزوی تفرقی مساوات
953 . . . . .	13.1	بنیادی تصورات
958 . . . . .	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960 . . . . .	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973 . . . . .	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979 . . . . .	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987 . . . . .	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993 . . . . .	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996 . . . . .	13.8 مستطیل جھلی
1006 . . . . .	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010 . . . . .	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018 . . . . .	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024 . . . . .	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030 . . . . .	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038 . . . . .	14.1 مخلوط اعداد
1047 . . . . .	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054 . . . . .	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059 . . . . .	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067 . . . . .	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078 . . . . .	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084 . . . . .	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089 . . . . .	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095 . . . . .	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104 . . . . .	15.1 نقشہ کشی
1116 . . . . .	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125 . . . . .	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129 . . . . .	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138 . . . . .	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149 . . . . .	15.6 ریمان سطحیں
1157	16 مخلوط مکملات
1157 . . . . .	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168 . . . . .	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172 . . . . .	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184 . . . . .	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189 . . . . .	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194 . . . . .	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201	17 ترتیب اور تسلسل
1201 . . . . .	17.1 ترتیب
1208 . . . . .	17.2 تسلسل
1213 . . . . .	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220 . . . . .	17.4	یک سر حقیقی ترتیب۔ لیمنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل
1225 . . . . .	17.5	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں
1236 . . . . .	17.6	تسلسل پر اعمال

1243 . . . . .	18	18 طاقی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لورنٹ تسلسل
1243 . . . . .	18.1	طاقی تسلسل
1255 . . . . .	18.2	طاقی تسلسل کی روپ میں تفاعل
1262 . . . . .	18.3	ٹیلر تسلسل
1268 . . . . .	18.4	بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل
1274 . . . . .	18.5	طاقی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب
1281 . . . . .	18.6	یکساں استرار

1285 . . . . .	ا	اضافی ثبوت
----------------	---	------------

1289 . . . . .	ب	منفید معلومات
1289 . . . . .	1.ب	ا.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 18

### طاقتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لورنٹ تسلسل

مخلوط تجزیہ میں طاقتی تسلسل (حصہ 18.1) اہم ترین ہے چونکہ یہ تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے (مسئلہ 18.8)۔ اسی طرح ہر تحلیلی تفاعل کا طاقتی تسلسل پایا جاتا ہے جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں۔ یہ ٹیلر تسلسل حقیقی علم الاحصاء کی ٹیلر تسلسل کی مخلوط مماثل ہیں۔ بلکہ حقیقی ٹیلر تسلسل میں حقیقی متغیر کی جگہ مخلوط متغیر پر کرتے ہوئے ہم حقیقی تفاعل کو مخلوط دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں۔

باب کے آخری حصے میں تحلیلی تفاعل کی لورنٹ تسلسل پر غور کیا جائے گا۔ لورنٹ تسلسل میں غیر تابع متغیر کی مثبت اور منفی عدد صحیح طاقت پائے جاتے ہیں۔ جیسا ہم اگلے باب میں دیکھیں گے، یہ تسلسل حقیقی اور مخلوط مکمل کی قیمت حاصل کرنے میں مددگار ثابت ہوتی ہیں۔

#### 18.1 طاقتی تسلسل

گزشتہ باب کے حصہ 17.2 میں مستقل اجزاء کی تسلسل کی تعریف پیش کی گئی۔ اگر تسلسل کے اجزاء متغیر، مثلاً، متغیر  $z$  کے تفاعل ہوں تب کسی مقررہ  $z$  کے لئے یہ تمام اجزاء کوئی مستقل ہوں گے لہذا وہ تمام تعریف یہاں بھی قابل استعمال ہوں گے۔ ظاہر ہے کہ ایسا تسلسل جس کے اجزاء متغیر  $z$  کے تفاعل ہوں کے جزوی مجموعے، باقی اور

مجموعہ بھی  $z$  کے تفاعل ہوں گے۔ عموماً ایسا تسلسل  $z$  کی کچھ قیمتوں، مثلاً، کسی خطے میں تمام  $z$  کے لئے مرکوز ہو گا، جبکہ  $z$  کی دیگر قیمتوں کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔

مخلوط تجزیہ میں متغیر اجزاء کی اہم ترین تسلسل طاقی تسلسل ہے۔ متغیر  $z - a$  کی طاقی تسلسل<sup>1</sup> درج ذیل روپ کی لاتنا ہی تسلسل کو کہتے ہیں

$$(18.1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - a)^m = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots$$

جہاں  $z$  کوئی متغیر ہے جبکہ  $c_0, c_1, \dots$ ، جنہیں عددی سر<sup>2</sup> کہتے ہیں، مستقل قیمتیں ہیں اور  $a$ ، جس کو تسلسل کا مرکوز<sup>3</sup> کہتے ہیں، مستقل ہے۔ طاقی تسلسل میں طاقیت  $m$  صرف غیر منفی ہو سکتا ہے<sup>4</sup>۔

$a = 0$  کی صورت میں طاقی تسلسل کی درج ذیل مخصوص روپ حاصل ہوتی ہے جو  $z$  کی طاقی تسلسل ہے۔

$$(18.2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

طاقی تسلسل کی مرکوزیت کو سادہ طریقے سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ آئیں تین عمومی مثالوں سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 18.1: قرص میں مرکوزیت، ہندسی تسلسل  
ہندسی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \dots$$

□  $|z| < 1$  کی صورت میں حتیٰ مرکوز جبکہ  $|z| \geq 1$  کی صورت میں منفرج ہے (مسئلہ 17.13)۔

مثال 18.2: پورے متناہی مستوی میں مرکوزیت  
درج ذیل طاقی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

power series<sup>1</sup>

coefficients<sup>2</sup>

center<sup>3</sup>

<sup>4</sup> منفی  $m$  والے تسلسل پر اسی باب میں بعد میں غور کیا جائے گا۔

تناسی آزمائش کے تحت ہر (متناہی)  $z$  کے لئے حتمی مرکز ہے۔ درحقیقت کسی بھی مقررہ  $z$  کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

مثال 18.3: صرف مرکز پر مرکوزیت  
درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \dots$$

صرف مرکز  $z = 0$  پر مرکوز ہے جبکہ ہر  $z \neq 0$  کے لئے تسلسل منفرد ہے۔ یہی نتیجہ تناسی آزمائش سے مقررہ  $z$  کے لئے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$\left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = (n+1)|z| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty, \quad z \neq 0)$$

□

$z = a$  کے لئے طاقی تسلسل مساوات 18.1 مرکز ہے چونکہ تب  $z - a = 0$  ہو گا اور تسلسل واحد ایک جزو  $c_0$  پر مشتمل ہو گا۔ جیسا آپ نے مثال 18.3 میں دیکھا، بعض اوقات  $z$  کی یہ واحد قیمت ہو گی جس پر تسلسل مرکز ہو گا۔ البتہ اگر تسلسل 18.3 کسی  $z_0 \neq a$  کے لئے مرکوز ہو تب تسلسل  $z$  کی ہر اس قیمت کے لئے مرکوز ہو گا جس کا فاصلہ مرکز سے  $z_0$  کے فاصلے سے کم ہو۔

مسئلہ 18.1: طاقی تسلسل کی مرکوزیت

اگر مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقی تسلسل نقطہ  $z = a$  پر مرکوز ہو تب یہ ہر اس  $z$  پر حتمی مرکز ہو گا جس کے لئے  $|z - a| < |z_0 - a|$  ہو، یعنی ایسے دائرے کے اندر ہر  $z$  پر جو  $z_0$  سے گزرتا ہو اور جس کا مرکز  $a$  ہو۔

ثبوت: چونکہ مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقی تسلسل  $z_0$  پر مرکوز ہے لہذا مسئلہ 17.5 کے تحت

$$c_n (z_0 - a)^n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

ہو گا یعنی  $z = z_0$  پر اس تسلسل کے اجزاء محدود ہوں گے، مثلاً ہر  $n = 0, 1, 2, \dots$  کے لئے

$$|c_n(z_0 - a)^n| < M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ہو گا۔ اس سے درج ذیل ملتا ہے

$$|c_n(z_0 - a)^n| = \left| c_n(z_0 - a)^n \left( \frac{z - a}{z_0 - a} \right)^n \right| < M \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n$$

لہذا

$$(18.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z_0 - a)^n| < \sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n$$

ہو گا۔ چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ  $|z - a| < |z_0 - a|$  لہذا

$$\left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right| < 1$$

ہو گا اور یوں مساوات 18.3 کی دائیں ہاتھ (ہندسی) تسلسل مرتکز ہو گا۔ یوں مساوات 18.3 کا بائیں ہاتھ بھی مرتکز ہو گا لہذا مساوات 18.1 میں دیا گیا تسلسل  $|z - a| < |z_0 - a|$  کی صورت میں حتمی مرتکز ہو گا۔

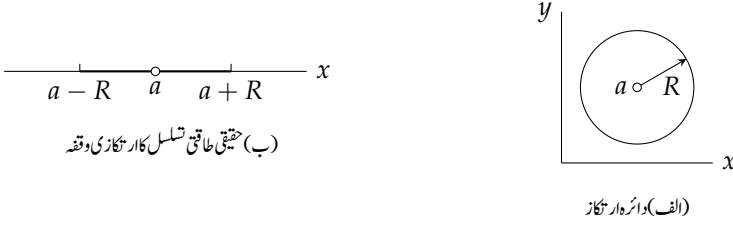
□

مثال 18.2 اور مثال 18.3 میں ہم نے دیکھا کہ طاقی تسلسل تمام  $z$  یا صرف  $z = a$  پر مرتکز ہو سکتا ہے۔ انیس ان دو صورتوں کو فی الحال نظر انداز کریں۔ اب اگر کوئی طاقی تسلسل (مساوات 18.1) دیا گیا ہو تب ہم مخلوط مستوی میں ان تمام  $z$  پر غور کرتے ہیں جہاں تسلسل مرتکز ہو۔ فرض کریں کہ  $R$  ایسا کم تر حقیقی عدد ہو کہ مرکز  $a$  سے ہر ایسے نقطے کا فاصلہ زیادہ سے زیادہ  $R$  ہو۔ (مثال کے طور پر مثال 18.1 میں  $R = 1$  ہے۔) تب مسئلہ 18.1 کے تحت رداس  $R$  کے دائرہ جس کا مرکز  $a$  ہو میں تمام  $z$  پر تسلسل مرتکز ہو گا یعنی ان تمام  $z$  پر جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

$$(18.4) \quad |z - a| < R$$

اور  $R$  کی تعریف کے تحت ان تمام  $z$  پر جو

$$|z - a| > R$$



شکل 18.1: دائرہ ارتکاز اور وقفہ ارتکاز

کو مطمئن کرتے ہوں، تسلسل منفرج ہو گا۔ دائرہ

$$|z - a| = R$$

کو دائرہ ارتکاز<sup>5</sup> کہتے ہیں جبکہ  $R$  کو رداس ارتکاز<sup>6</sup> کہتے ہیں (شکل 18.1-الف)۔

دائرہ مرکزیت کے نقطوں پر تسلسل مرکب یا منفرج ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر مثال 18.1 میں  $R = 1$  ہے اور دائرہ مرکزیت  $|z| = 1$  کے ہر نقطہ پر تسلسل منفرج ہے۔ طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

تناسبی آزمائش کے تحت  $|z| < 1$  پر مرکب اور  $|z| > 1$  پر منفرج ہے۔ عین  $z = 1$  پر یہ ہارمونی تسلسل کی صورت اختیار کرتا ہے جو منفرج ہے جبکہ  $z = -1$  پر یہ  $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \dots$  صورت اختیار کرتا ہے جو مرکب ہے (مثال 17.3)۔ آپ نے دیکھا کہ دائرہ مرکزیت کے کچھ نقطوں پر تسلسل مرکب اور کچھ نقطوں پر تسلسل منفرج ہو سکتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم حقیقی طاقتی تسلسل مساوات 18.1 کی بات کی جائے جس کے عددی سر اور مرکز حقیقی ہوں اور متغیر  $z = x$  ہو تب  $x$  محور پر مساوات 18.4 ارتکازی وقفہ<sup>7</sup> کو ظاہر کرے گا جس کی لمبائی  $2R$  اور درمیانہ نقطہ  $x = a$  ہو گا (شکل 18.1-ب)۔

اگر طاقتی تسلسل مساوات 18.1 تمام  $z$  پر (مثال 18.2 کی طرح) مرکب ہو تب ہم

$$R = \infty \quad \text{اور} \quad \frac{1}{R} = 0$$

convergence circle<sup>5</sup>  
convergence radius<sup>6</sup>  
interval of convergence<sup>7</sup>

لکھتے ہیں اور اگر تسلسل (مثال 18.3 کی طرح) صرف مرکز  $z = a$  پر مرکوز ہو تب ہم

$$R = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{1}{R} = \infty$$

لکھتے ہیں۔ ان روایات کو استعمال کرتے ہوئے ارتکاز کے رداس  $R$  کو تسلسل کی عددی سروں سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی:

مسئلہ 18.2: ارتکاز کا رداس

اگر ترتیب  $\sqrt[n]{|c_n|}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  مرکوز ہو اور اس کا حد  $L$  ہو، تب طاقی تسلسل (مساوات 18.1) کا رداس ارتکاز  $R$  درج ذیل ہو گا

$$(18.5) \quad R = \frac{1}{L}$$

جو  $L = 0$  کی صورت میں  $R = \infty$  دے گا اور تسلسل (مساوات 18.1) تمام  $z$  کے لئے مرکوز ہو گا۔

اگر یہ ترتیب مرکوز نہ ہو لیکن محدود ہو، تب

$$(18.6) \quad R = \frac{1}{l}$$

ہو گا جہاں ترتیب کے تحدیدی نقطوں میں سب سے بڑا تحدیدی نقطہ  $l$  ہے۔

اگر یہ ترتیب غیر محدود ہو، تب  $R = 0$  ہو گا اور تسلسل صرف  $z = a$  پر مرکوز ہو گا۔

مساوات 18.6<sup>98</sup> کلیہ کو شی اور ادا مغ کہلاتا ہے۔

ثبوت: اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0$$

ہو تب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = |z-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |z-a| L$$

<sup>98</sup> فرانسس ریاضی دان آگسٹن لوئی کوٹی [1789-1857] اور جیکو بس ادا مغ [1865-1964]  
Cauchy-Hadamard formula<sup>9</sup>



ہو گا۔ چونکہ تسلسل (مساوات 18.1) کے اجزاء  $w_n = c_n(z - a)^n$  ہیں لہذا جذری آزمائش (حصہ 17.5) کے تحت

$$|z - a| < \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z - a| L < 1$$

کی صورت میں تسلسل حتمی مرتکز ہو گا جبکہ

$$|z - a| > \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z - a| L > 1$$

کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔ اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L = 0$$

ہو تب حد کی تعریف کے تحت کسی بھی  $\epsilon > 0$  مثلاً  $\epsilon = \frac{1}{2|z_1 - a|}$  کے لئے جہاں  $z_1$  مستقل ہے، ہم ایسا  $N$  تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر  $n > N$  کے لئے درج ذیل ہو۔

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_1 - a|} \quad (n > N)$$

اس سے ہمیں

$$|c_n| < \frac{1}{(2|z_1 - a|)^n} \implies |c_n(z_1 - a)^n| < \frac{1}{2^n}$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $\sum 2^{-n}$  مرتکز ہے لہذا تقابلی آزمائش (حصہ 17.5) کے تحت  $z = z_1$  کے لئے تسلسل (مساوات 18.1) حتمی مرتکز ہے۔ چونکہ  $z_1$  اختیاری ہے لہذا تسلسل ہر  $z$  کے لئے حتمی مرتکز ہے۔ یوں مساوات 18.5 کا ذکر کرنے والے فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ہم اب اس فقرے کو ثابت کرتے ہیں جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتا ہے۔ مسئلہ بلزانو وانشٹراس 17.6 کے تحت  $l$  موجود ہو گا اور چونکہ  $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$  ہے لہذا  $l > 0$  ہو گا۔ حد کی تعریف کے تحت کسی بھی دیے گئے  $\epsilon > 0$  کے لئے  $n$  کی لامتناہی تعداد کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{|c_n|} < l + \epsilon \quad n \text{ کی لامتناہی تعداد}$$

اس کو مثبت مقدار  $|z - a|$  سے ضرب دینے سے عدم مساوات

$$(18.7) \quad |z - a| (l - \epsilon) < \sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|}$$

اور

$$(18.8) \quad \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < |z-a| (l + \epsilon) <$$

حاصل ہوتی ہیں۔ چونکہ  $l$  سب سے بڑا تحدیدی نقطہ ہے لہذا عدم مساوات 18.8 کے دائیں ہاتھ سے بڑے اجزاء کی تعداد متناہی ہو گی اور یوں کافی بڑے تمام  $n$ ، مثلاً  $n > N$ ، کے لئے بھی عدم مساوات 18.8 مطمئن ہو گی۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$(18.9) \quad |z-a| < \frac{1}{l}$$

کے لئے طاقی تسلسل (مساوات 18.1) کا ارتکاز عدم مساوات 18.8 سے ثابت ہوتا ہے۔ درحقیقت، اگر ہم درج ذیل منتخب کریں

$$\epsilon = \frac{1-l|z-a|}{2|z-a|}$$

تب مساوات 18.9 کے تحت  $\epsilon > 0$  ہو گا اور عدم مساوات 18.8 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < \frac{1+l|z-a|}{2} \quad (n > N)$$

مساوات 18.9 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں ہاتھ اکائی سے کم ہے لہذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل مرتکز ہو گا۔ اس کے برعکس اگر

$$|z-a| > \frac{1}{l}$$

ہو تب

$$\epsilon = \frac{l|z-a|-1}{2|z-a|}$$

منتخب کرتے ہوئے  $\epsilon > 0$  حاصل ہو گا اور عدم مساوات 18.7 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > \frac{|z-a|l+1}{2} > 1$$

یوں جذری آزمائش کے تحت ان  $z$  کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔ یوں اس فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتی ہے۔

آخر میں اگر ترتیب  $\sqrt[n]{|c_n|}$  غیر محدود ہو، تب، انفرج کی تعریف کے تحت، کسی بھی  $K$  کے لئے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > K \quad n \text{ کی لامتناہی تعداد کے لئے}$$

ہو گا۔ ہم  $K = \frac{1}{|z-a|}$  منتخب کرتے ہیں جہاں  $z \neq a$  ہے اور یوں عدم مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z-a|} \implies \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1$$

لہذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔ یوں اس مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب طاقی تسلسل کے مجموعہ اور ان کی تفریق پر غور کرتے ہیں۔

دو طاقی تسلسل کو جزو در جزو ان تمام  $z$  کے لئے جمع کیا جا سکتا ہے جن پر دونوں تسلسل مرتکز ہوں۔ یہ نتیجہ مسئلہ 17.18 سے اخذ ہوتا ہے۔

آئیں دو طاقی تسلسل

$$(18.10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_1 + c_1 z + \dots$$

کی جزو در جزو ضرب پر غور کرتے ہیں۔ بائیں تسلسل کی ہر جزو کو دائیں تسلسل کی ہر جزو سے ضرب دے کر  $z$  کی ایک جیسی طاقتوں کو یکجا کرتے ہوئے

$$(18.11) \quad a_0 c_0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0)z + (a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0)z^2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \dots + z_n c_0) z^n$$

ملتا ہے۔ اس کو مساوات 18.10 میں دی گئی تسلسلوں کا کوشی حاصل ضرب<sup>10</sup> کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.3: طاقی تسلسلوں کا کوشی حاصل ضرب

مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کی دائرہ ارتکاز کے اندر ہر  $z$  کے لئے کوشی حاصل ضرب (مساوات 18.11)

Cauchy product<sup>10</sup>

حتیٰ مرتکز ہو گا۔ اگر ان تسلسلوں کے مجموعے بالترتیب  $g(z)$  اور  $h(z)$  ہوں تب کوئی حاصل ضرب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$(18.12) \quad s(z) = g(z)h(z)$$

ثبوت : کوئی حاصل ضرب (مساوات 18.11) کا عمومی جزو

$$p_n = (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \cdots + z_n c_0)z^n$$

ہے۔ اب عمومی تکنیکی عدم مساوات 14.26 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} |p_0| + |p_1| &= |a_0c_0| + |(a_0c_1 + a_1c_0)z| \leq (|a_0| + |a_1z|)(|c_0| + |c_1z|), \\ |p_0| + |p_1| + |p_2| &\leq (|a_0| + |a_1z| + |a_2z^2|)(|c_0| + |c_1z| + |c_2z^2|), \end{aligned}$$

جس کی تصدیق آپ دائیں ہاتھ ضرب حاصل کرتے ہوئے کر سکتے ہیں؛ اسی طرح درج ذیل عمومی عدم مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$(18.13) \quad |p_0| + |p_1| + \cdots + |p_n| \leq (|a_0| + |a_1z| + \cdots + |a_nz^n|)(|c_0| + |c_1z| + \cdots + |c_nz^n|)$$

اگر  $z$  مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کے دائرہ ارتکاز کے اندر پایا جاتا ہو، تب عدم مساوات 18.13 کا دایاں ہاتھ محدود ہو گا لہذا جزوی مجموعوں کی ترتیب کا مجموعہ  $|p_0| + |p_1| + \cdots$  بھی محدود ہو گا۔ چونکہ  $|p_n| \geq 0$  ہے لہذا یہ ترتیب یک سر بڑھتی ترتیب ہو گی اور مسئلہ 17.10 کے تحت مرتکز ہو گا۔ یوں یہ تسلسل مرتکز ہے اور حاصل ضرب تسلسل (مساوات 18.11) حتیٰ مرتکز ہو گا۔

ہم اب مساوات 18.12 کو ثابت کرتے ہیں۔ ہم اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہیں کہ مساوات 18.11 کی ہر ردوبدل ان  $z$  کے لئے حتیٰ مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ مساوات 18.12 دیتی ہے (مسئلہ 17.20)۔ ہم ان میں سے ایک مخصوص ردوبدل  $p_0^* + p_1^* + \cdots$  پر غور کرتے ہیں جہاں  $p_n^*$  درج ذیل ہے۔

$$(a_nc_0 + a_0c_n)z^n + (a_nc_1 + a_1c_n)z^{n+1} + \cdots + (a_nc_{n-1} + a_{n-1}c_n)z^{2n-1} + a_nc_nz^{2n}$$

ظاہر ہے کہ

$$a_0c_0 = p_0^*, \quad (a_0 + a_1z)(c_0 + c_1z) = p_0^* + p_1^*$$

اور عمومی جزو

$$(a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n)(c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n) = p_0^* + p_1^* + \cdots + p_n^*$$

ہیں۔ اب  $n$  کو لامتناہی تک پہنچانے سے مساوات 18.12 حاصل ہوتی ہے۔ یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 18.4: کوشی حاصل ضرب

ہندی تسلسل  $1 + z + z^2 + \cdots$  کا  $|z| < 1$  کی صورت میں مجموعہ  $\frac{1}{1-z}$  ہے (حصہ 17.5)۔ مسئلہ 18.3 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^m = (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z + z^2 + \cdots) \\ &= 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z| < 1) \end{aligned}$$

□

## سوالات

سوال 18.1: اگر ترتیب  $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ ، جہاں  $n = 1, 2, \dots$  ہے، مرکب ہو اور اس کا حد  $L$  ہو تب دکھائیں کہ طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کی ارتکاز کے دائرے کا رداس،  $L > 0$  کی صورت میں  $R = \frac{1}{L}$  ہو گا جبکہ  $L = 0$  کی صورت میں  $R = \infty$  ہو گا۔

سوال 18.2: اگر مساوات 18.2 میں دی گئی تسلسل کی ارتکاز کا رداس (جو متناہی تصور کیا گیا ہو)  $R$  ہے، تب دکھائیں کہ  $\sum c_m z^{2m}$  کی ارتکاز کا رداس  $\sqrt{R}$  ہو گا۔

سوال 18.3 تا سوال 18.18 میں ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - i2)^n \quad \text{سوال 18.3}$$

جواب: 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^n} : \text{سوال 18.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{z}{3}\right)^n : \text{سوال 18.5}$$

جواب: 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} : \text{سوال 18.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} : \text{سوال 18.7}$$

جواب:  $\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} : \text{سوال 18.8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n : \text{سوال 18.9}$$

جواب:  $\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n : \text{سوال 18.10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n : \text{سوال 18.11}$$

جواب:  $\frac{1}{4}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} : \text{سوال 18.12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} : \text{سوال 18.13}$$

جواب:  $\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} : \text{سوال 18.14}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 6^n (z-i)^n : \text{سوال 18.15}$$

جواب:  $\frac{1}{6}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 z^n \quad \text{سوال 18.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n} z^n \quad \text{سوال 18.17}$$

جواب:  $\frac{1}{9}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{2^n} z^n \quad \text{سوال 18.18}$$

سوال 18.19: اگر  $\sum c_n z^n$  تمام متناہی  $z$  کے لئے مرکب ہو تب دکھائیں کہ  $n \rightarrow \infty$  کے لئے  $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow 0$  ہو گا۔ کوئی مثال پیش کریں۔

سوال 18.20: ارتکاز کے دائرے پر تسلسل مرکب یا منفرد ہو سکتا ہے۔ ہندسی تسلسل کے لئے اس حقیقت کو دکھائیں۔

## 18.2 طاقی تسلسل کی روپ میں تفاعل

اس حصے میں ہم دکھائیں گے کہ طاقی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں (مسئلہ 18.8)۔ اس کا الٹ یعنی ہر تحلیلی تفاعل کو طاقی تسلسل (جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے کو اگلے حصے میں ثابت کیا جائے گا۔ ان دو وجوہات کی بنا طاقی تسلسل مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  اختیاری طاقی تسلسل ہے جس کی ارتکاز کا رداس  $R$  غیر صفر ہے۔ تب اس تسلسل کا مجموعہ  $z$  کا تفاعل ہو گا مثلاً  $f(z)$  جس کو ہم

$$(18.14) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (|z| < R)$$

لکھتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ  $f(z)$  کو طاقی تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ مثال کے طور پر اکائی دائرہ  $|z| = 1$  کے اندر ہندسی تسلسل تفاعل  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  کو ظاہر کرتی ہے (مسئلہ 17.13)۔

مسئلہ 18.4: استمرار

$R > 0$  کی صورت میں  $z = 0$  پر مساوات 18.14 میں تفاعل  $f(z)$  استمراری ہے۔

ثبوت: ہم درج ذیل دکھانا چاہتے ہیں۔

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = c_0 \quad (18.15)$$

ہم اختیاری مثبت عدد  $r < R$  منتخب کرتے ہیں۔ چونکہ مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل قرص  $|z| < R$  میں حتیٰ مرتکز ہے لہذا درج ذیل تسلسل مرتکز ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \quad (0 < r < R)$$

فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ  $K$  ہے۔ تب ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$|f(z) - c_0| = \left| z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} \right| \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |z|^{n-1} \leq |z| K \quad (0 < |z| \leq r)$$

اب دیے گئے  $\epsilon > 0$  کے لئے، ان تمام  $z$  پر جو  $|z| < \sigma$  کو مطمئن کرتے ہوں جہاں  $\sigma$  ایسا حقیقی مثبت عدد ہے جو  $r$  اور  $\frac{\epsilon}{K}$  دونوں سے چھوٹا ہو،  $|f(z) - c_0| < \epsilon$  ہو گا۔ یوں حد کی تعریف کے تحت مساوات 18.15 مطمئن ہو گا لہذا مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب یکتائی پر غور کرتے ہیں۔ ہم دکھائیں گے کہ ایک ہی تفاعل  $f(z)$  کو ایک ہی مرکز والے دو مختلف طاقی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ اگر  $f(z)$  کو مرکز  $a$  کی طاقی تسلسل سے ظاہر کیا جائے تب ایسا تسلسل یکتا ہو گا۔ اس اہم حقیقت کی حقیقی اور مخلوط تجزیہ میں عموماً ضرورت پیش آتی ہے۔ ہم اس کو درج ذیل مسئلہ میں پیش کرتے ہیں (جہاں عمومیت کھوئے بغیر  $a = 0$  تصور کیا گیا ہے)۔

مسئلہ 18.5: طاقی تسلسل کا مسئلہ مماثلت

فرض کریں کہ مثبت  $R$  کے لئے تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{اور} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$



$|z| < R$  پر مرکب ہیں اور ان تمام  $z$  پر ان کا مجموعہ ایک جیسا ہے۔ تب دونوں تسلسل مماثل ہوں گے یعنی تمام  $n$  کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(18.16) \quad a_n = b_n \quad n = 0, 1, \dots$$

ثبوت: ہم الگرا جی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$(18.17) \quad a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots \quad (|z| < R)$$

$z$  کو صفر تک پہنچانے سے مسئلہ 18.4 کے تحت  $a_0 = b_0$  ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $n = 0, 1, \dots, m$  کے لئے  $a_n = b_n$  ہیں۔ تب مساوات 18.17 میں دونوں ہاتھ ابتدائی  $m+1$  اجزاء حذف کرنے کے بعد  $z^{m+1} (\neq 0)$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$a_{m+1} + a_{m+2}z + a_{m+3}z^2 + \dots = b_{m+1} + b_{m+2}z + b_{m+3}z^2 + \dots$$

میتا ہے۔ مسئلہ 18.4 کے تحت دونوں میں سے ہر ایک تسلسل  $z = 0$  پر استمراری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں  $a_{m+1} = b_{m+1}$  ہو گا۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اب طاقی تسلسل کی جزو در جزو تفرق اور مکمل لینے پر غور کرتے ہیں۔ تسلسل  $c_1 + c_1z + c_2z^2 + \dots$  کا تفرق لینے سے درج ذیل تسلسل حاصل ہوتی ہے۔

$$(18.18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \dots$$

اس کو طاقی تسلسل کی تفرقی تسلسل<sup>11</sup> کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.6: جزو در جزو تفرق

تفرقی تسلسل کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ  $nc_n = c_n^*$  ہے۔ تب  $\sqrt[n]{|c_n^*|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|c_n|}$  ہو گا۔ چونکہ  $n \rightarrow \infty$  کرنے سے  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 0$  ہو گا لہذا یا دونوں ترتیب  $\sqrt[n]{|c_n|}$  اور  $\sqrt[n]{|c_n^*|}$  مرکب ہوں گے اور ان کا ایک ہی حد ہو گا اور

یا دونوں ترتیب منفرد ہوں گے۔ اگر دونوں ترتیب منفرد ہوں، تب دونوں یا غیر محدود ہوں گے یا دونوں محدود ہوں گے۔ اگر دونوں محدود ہوں تب ان کے سب سے بڑے تحدیدی نقطے ایک جیسے ہوں گے۔ یوں اس سے اور مسئلہ 18.2 سے موجودہ مسئلے کا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔

□

مثال 18.5: طاقی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)z^n$$

کی ارتکاز کا رداس  $R = 1$  ہے۔ ہندسی تسلسل کا تفرق لے کر مسئلہ 18.6 کی اطلاق سے ایسا حاصل ہوتا ہے۔ □

مسئلہ 18.7: جزو در جزو تکمل جزو در جزو تکمل لینے سے حاصل تسلسل  $c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots$  کا جزو در جزو تکمل لینے سے حاصل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} = c_0z + \frac{c_1}{2}z^2 + \frac{c_2}{3}z^3 + \dots$$

کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

اس مسئلہ کا ثبوت مسئلہ 18.6 کی ثبوت کی طرح ہے۔

طاقی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں اور تفرقی تسلسل (جو تسلسل کا جزو در جزو تفرق لے کر حاصل کیا جاتا ہے) ان تفاعل کی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں۔

مسئلہ 18.8: تحلیلی تفاعل۔ ان کے تفرق

غیر صفر رداس ارتکاز  $R$  والی طاقی تسلسل دائرہ ارتکاز کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ ان تفاعل کے بلند درجی تفرق حاصل کرنے کی خاطر اصل طاقی تسلسل کے جزو در جزو تفرق لیے جاتے ہیں؛ یوں حاصل تمام تسلسلوں کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس جیسا ہو گا۔

ثبوت : ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ کسی بھی عددی صحیح  $n \geq 2$  کے لئے

(18.19)

$$(الف) \quad \frac{b^n - a^n}{b - a} - na^{n-1} = (b - a)A_n$$

$$(ب) \quad A_n = b^{n-2} + 2ab^{n-3} + 3a^2b^{n-4} + \dots + (n-1)a^{n-2} \quad \text{ہو گا جہاں}$$

ہے۔ ہم الگراچی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔ سادہ حساب سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $n = 2$  کے لئے مساوات 18.19 مطمئن ہوتی ہیں۔ فرض کریں کہ  $n = k$  کے لئے مساوات 18.19 مطمئن ہوتی ہیں۔ ہم دکھاتے ہیں کہ یہ  $n = k + 1$  کے لئے بھی یہ مساوات مطمئن ہوں گی۔ ہم  $n = k + 1$  کے لئے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = \frac{b^{k+1} - ba^k + ba^k - a^{k+1}}{b - a} = b \frac{b^k - a^k}{b - a} + a^k$$

مساوات 18.19-الف کے تحت دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا

$$b[(b - a)A_k + ka^{k-1}] + a^k$$

جس کو

$$(b - a)[bA_k + ka^{k-1}] + ka^k + a^k$$

لکھا جا سکتا ہے۔  $n = k$  لیتے ہوئے چکور قوسین میں بند حصے کو مساوات 18.19-ب سے

$$b^{k-1} + 2ab^{k-2} + \dots + (k-1)b^{k-2} + ka^{k-1} = A_{k+1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں ہمیں

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = (b - a)A_{k+1} + (k+1)a^k$$

ملتا ہوتا ہے جو  $n = k + 1$  لیتے ہوئے مساوات 18.19 ہے۔ اس طرح کسی بھی  $n \geq 2$  کے لئے مساوات 18.19 ثابت ہوتا ہے۔

ہم اب مسئلہ 18.8 کے فکروں کو ثابت کرتے ہیں۔ درج ذیل روپ پر غور کریں۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

فرض کریں کہ اس کی ارتکاز کارڈ اس  $R$  غیر صفر ہے۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی بھی مقررہ  $z$  جہاں  $|z| < R$  ہے کے لئے  $\Delta z \rightarrow 0$  کرنے سے  $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$  کی قیمت تفرقی تسلسل مساوات 18.18 تک پہنچتی ہے جس کو ہم  $f_1(z)$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ جزو در جزو مجموعہ لے کر

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left[ \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - n z^{n-1} \right]$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 18.19 میں  $a = z$ ،  $b = z + \Delta z$  اور  $b - a = \Delta z$  لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا تسلسل

$$\Delta z \sum_{n=2}^{\infty} c_n [(z+\Delta z)^{n-2} + 2z(z+\Delta z)^{n-3} + \dots + (n-1)z^{n-2}]$$

لکھا جاسکتا ہے اور  $|z| \leq R_0$  اور  $|z+\Delta z| \leq R_0$  جہاں  $R_0 < R$  ہے کے لئے اس کی حتمی قیمت درج ذیل سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے

$$(18.20) \quad |\Delta z| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) R_0^{n-2}$$

جہاں عددی سر  $1, 2, \dots, n-1$  میں سب سے بڑا عددی سر  $n-1$  ہے اور اجزاء کی تعداد  $n$  ہے۔ مساوات 18.20 میں دیا گیا تسلسل دوسری تفرقی تسلسل کے ساتھ  $R_0$  پر قریبی تعلق رکھتا ہے۔ بلکہ اس تفرقی مساوات کے عددی سر  $c_n$  ہیں (جبکہ مساوات 18.20 کے تسلسل کے عددی سر  $|c_n|$  ہیں) اور مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.1 کے تحت  $R_0 (< R)$  پر حتمی مرکب ہے۔ اس سے مراد مساوات 18.20 کے تسلسل کی  $R_0$  پر مرکزیت ہے؛ فرض کریں کہ اس کی قیمت  $K(R_0)$  ہے، تب ہمارا نتیجہ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\left| \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f_1(z) \right| \leq |\Delta z| K(R_0)$$

لیتے ہوئے اور جاننے ہوئے کہ  $R_0 (< R)$  اختیاری ہے، ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دائرہ ارتکاز کے اندر کسی بھی نقطہ پر  $f(z)$  تحلیلی ہو گا اور اس کے تفرق کو تفرقی تسلسل ظاہر کرے گا۔ اس سے بلند درجی تفرق کا فقرہ الکراجی مانوڈ سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ یوں مسئلہ 18.8 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 18.8 سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $f(z)$  (مساوات 18.14) کا  $m$  واں تفرق  $f^{(m)}(z)$  درج ذیل ہوگا۔

$$(18.21) \quad f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-m+1) c_n z^{n-m} \quad (|z| < R)$$

اگلے حصے میں ہم دیکھیں گے کہ ہر تحلیلی تفاعل کو طاقتی تسلسل ظاہر کر سکتا ہے۔

### سوالات

سوال 18.21: اگر مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل جفت ہو تب ثابت کریں کہ طاق  $n$  کے  $c_n$  صفر ہوں گے۔ (مسئلہ 18.5 استعمال کریں۔)

سوال 18.22: اگر مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل طاق ہو تب ثابت کریں کہ جفت  $n$  کے  $c_n$  صفر ہوں گے۔ مثال پیش کریں۔

سوال 18.23: مسئلہ 18.5 کا اطلاق  $(1+z)^p(1+z)^q = (1+z)^{p+q}$  پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں جہاں  $p$  اور  $q$  مثبت عدد صحیح ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} \binom{q}{r-n} = \binom{p+q}{r}$$

سوال 18.24: ہندسی تسلسل کے لئے مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.7 کی تصدیق کریں۔

ہندسی تسلسل پر مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.7 کے اطلاق سے سوال 18.25 تا سوال 18.30 میں دیے تسلسل کی ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} (z-i)^n \quad \text{سوال 18.25}$$

جواب: 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n} \quad \text{سوال 18.26}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} (z + i2)^n \quad \text{سوال 18.27:}$$

جواب:  $\frac{1}{4}$

سوال 18.28:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

سوال 18.29:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \binom{n+k}{n} \right]^{-1} z^{n+k}$$

جواب: 1

سوال 18.30:

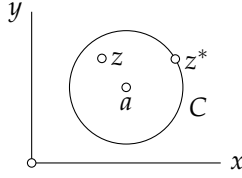
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \binom{n+k}{n} \right]^{-1} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

### 18.3 ٹیلر تسلسل

حقیقی علم الاحصاء میں ٹیلر تسلسل انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے۔ ہم اب دیکھیں گے کہ مخلوط تجربہ میں اس کی عمومی صورت پائی جاتی ہے جو اس سے بھی زیادہ اہم ہے۔

آئیں نقطہ  $z = a$  کی پڑوس میں تحلیلی تفاعل  $f(z)$  پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ اس پڑوس میں دائرہ  $C$  پایا جاتا ہے جس کا مرکز  $a$  ہے۔ ہم  $z_0$  اور  $z$  کی جگہ بالترتیب  $z$  اور  $z^*$  لکھتے ہوئے کوشی کا کلیہ مکمل (مساوات 16.31) استعمال کرتے ہیں

$$(18.22) \quad f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^*$$



شکل 18.2: شکل برائے مساوات 18.22

جہاں  $C$  کے اندر  $z$  اختیاری مقررہ نقطہ ہے اور  $z^*$  مخلوط مکمل کا متغیرہ ہے (شکل 18.2)۔ ہم اب مساوات 18.22 میں  $\frac{1}{z^* - z}$  کی طاقی تسلسل  $z - a$  کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔ ہم پہلے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(18.23) \quad \frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - a - (z - a)} = \frac{1}{(z^* - a) \left(1 - \frac{z - a}{z^* - a}\right)}$$

چونکہ  $z^*$  دائرہ  $C$  پر پایا جاتا ہے جبکہ  $z$  دائرے کے اندر پایا جاتا ہے لہذا

$$(18.24) \quad \left| \frac{z - a}{z^* - a} \right| < 1$$

ہو گا۔

ہندسی تسلسل سے

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + \cdots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں  $q = \frac{z - a}{z^* - a}$  پر کرنے سے

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{z^* - a}} = 1 + \frac{z - a}{z^* - a} + \left(\frac{z - a}{z^* - a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - a}{z^* - a}\right)^n + \frac{\left(\frac{z - a}{z^* - a}\right)^{n+1}}{\frac{z - a}{z^* - a}}$$

ملتا ہے۔ ہم اس کو مساوات 18.23 میں پر کرنے کے بعد مساوات 18.23 کو مساوات 18.22 میں پر کرتے ہیں۔ چونکہ  $z$  اور  $a$  مستقل ہیں لہذا ہم  $z - a$  کی طاقتوں کو مکمل کی علامت سے باہر نکال سکتے ہیں۔ یوں مساوات

18.22 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$(18.25) \quad f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - a} dz^* + \frac{z - a}{i2\pi} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^2} dz^* + \dots$$

$$+ \frac{(z - a)^n}{i2\pi} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}} dz^* + R_n(z)$$

جہاں آخری جزو درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$(18.26) \quad R_n(z) = \frac{(z - a)^{n+1}}{i2\pi} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}(z^* - z)} dz^*$$

مساوات 16.36 استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 18.25 کو

(18.27)

$$f(z) = f(a) + \frac{z - a}{1!} f'(a) + \frac{(z - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(z)$$

لکھ سکتے ہیں جو کلیہ ٹیلر<sup>12</sup> کہلاتا<sup>13</sup> ہے جبکہ  $R_n(z)$  کو باقی کہتے ہیں۔ چونکہ تحلیلی تعامل  $f(z)$  کا ہر درجے کا تفرق پایا جاتا ہے لہذا ہم مساوات 18.27 میں  $n$  جتنا چاہیں بڑا لے سکتے ہیں۔ مساوات 18.27 میں  $n \rightarrow \infty$  کرنے سے

$$(18.28) \quad f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (z - a)^m$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 18.28 کو  $f(z)$  کا ٹیلر تسلسل<sup>14</sup> کہتے ہیں جس کا مرکز  $a$  ہے۔ اس کی وہ مخصوص صورت جس میں  $a = 0$  ہو  $f(z)$  کا مکلارن تسلسل<sup>15</sup> کہلاتا<sup>16</sup> ہے۔

ظاہر ہے کہ مساوات 18.28 میں دیا گیا تسلسل اس صورت میں مرکب ہو گا اور  $f(z)$  کو ظاہر کرے گا جب درج ذیل ہو۔

$$(18.29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$$

<sup>12</sup> Taylor's formula

<sup>13</sup> [1685-1731] ٹیلر ریاضی دان بروک ٹیلر

<sup>14</sup> Taylor series

<sup>15</sup> Maclaurin series

<sup>16</sup> [1698-1746] مکلارن ریاضی دان کولن مکلارن



مساوات 18.29 کو ثابت کرنے کی خاطر ہم مساوات 18.26 پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ  $z^*$  دائرہ  $C$  پر ہے جبکہ  $z$  اس دائرے کے اندر ہے لہذا  $|z^* - z| > 0$  ہو گا۔ چونکہ  $f(z)$  دائرہ  $C$  پر اور اس دائرے کے اندر تحلیلی ہے لہذا  $\frac{f(z^*)}{z^* - z}$  کی حتمی قیمت محدود ہوگی، مثلاً  $C$  پر تمام  $z^*$  کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left| \frac{f(z^*)}{z^* - z} \right| < \tilde{M}$$

فرض کریں کہ  $C$  کا رداس  $r$  ہے۔ تب  $C$  پر تمام  $z^*$  کے لئے  $|z^* - a| = r$  ہو گا جبکہ  $C$  کی لمبائی  $2\pi r$  ہو گی۔ یوں مساوات 18.26 پر مساوات 16.16 کا اطلاق کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} |R_n| &= \frac{|z - a|^{n+1}}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}(z^* - z)} dz^* \right| \\ &< \frac{|z - a|^{n+1}}{2\pi} \tilde{M} \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = \tilde{M} r \left| \frac{z - a}{r} \right|^{n+1} \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ اب  $n$  کی قیمت لامتناہی تک پہنچانے سے دایاں ہاتھ، مساوات 18.24 کے تحت، صفر تک پہنچے گا۔ یوں  $C$  کے اندر تمام  $z$  کے لئے مساوات 18.29 ثابت ہوتا ہے۔ چونکہ مسئلہ 18.5 کے تحت  $f(z)$  کا مساوات 18.28 کی روپ میں اظہار کیا ہے، یعنی مساوات 18.28 وہ واحد طاقی تسلسل ہے جس کا مرکز  $a$  ہے اور جو  $f(z)$  کو ظاہر کرتا ہے لہذا ہم حاصل نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ کو صورت میں بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 18.9: مسئلہ ٹیلر

فرض کریں کہ دائرہ کار  $D$  میں  $f(z)$  تحلیلی ہے اور  $D$  میں  $z = a$  کوئی نقطہ ہے۔ تب ایسا واحد ایک طاقی تسلسل موجود ہو گا جس کا مرکز  $a$  ہو اور جو  $f(z)$  کو ظاہر کرتا ہو؛ اس تسلسل کی روپ

$$(18.30) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n$$

ہے جہاں

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad n = 0, 1, \dots$$

ہے؛  $D$  میں اس بڑے سے بڑے کھلے قرص جس کا مرکز  $a$  ہو میں یہ تسلسل کارآمد ہو گا۔ مساوات 18.30 کے باقی  $R_n(z)$  کو مساوات 18.26 ظاہر کرتی ہے۔ تسلسل کے عددی سر عدم مساوات

$$(18.31) \quad |b_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں دائرہ  $|z - a| = r$  پر  $|f(z)|$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت  $M$  ہے۔

کوشی عدم مساوات 16.39 سے عدم مساوات 18.31 حاصل ہوتی ہے۔

عملاً مساوات 18.29 کہتی ہے کہ ان تمام  $z$  کے لئے جن پر مساوات 18.30 منفرج ہو، مساوات 18.30 کے  $n$  ویں جزوی مجموعہ کی قیمت  $f(z)$  کی قیمت کے اتنی قریب ہوگی جتنا درکار ہو، پس ہمیں  $n$  اتنا بڑا لینا ہوگا۔

ہم مسئلہ ٹیلر سے دیکھتے ہیں کہ مساوات 18.30 کی ارتکاز کا رداس کم از کم  $a$  سے  $D$  کی سرحد تک کم سے کم فاصلہ جتنا ہوگا۔ اگرچہ رداس ارتکاز اس سے بڑا ہو سکتا ہے لیکن تب  $D$  کی ان تمام نقطوں پر جو ارتکاز کے دائرے کے اندر پائے جاتے ہوں پر ضروری نہیں ہے کہ تسلسل  $f(z)$  کو ظاہر کرتا ہو۔

مخلوط تحلیل تفاعل کی ایک انوکھی خاصیت یہ ہے کہ ان کی ہر درجے کے تفرق پائے جاتے ہیں اور اب ہم نے ان کی دوسری انوکھی خاصیت دریافت کی ہے کہ ان کو ہر صورت مساوات 18.30 میں دی گئی طاقی تسلسل کی روپ میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ حقیقی تفاعل کے لئے عموماً ایسا درست نہ ہوگا۔ ایسے حقیقی تفاعل پائے جاتے ہیں جن کے ہر درجے کے تفرق پائے جاتے ہیں لیکن انہیں طاقی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہے؛ مثلاً  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  جب  $x \neq 0$  ہو اور  $f(z) = 0$  جب  $x = 0$  ہو۔

ہماری موجودہ اور گزشتہ حصے کے طاقی تسلسل کے تبصروں کے مابین درج ذیل مسئلہ تعلق پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 18.10: غیر صفر ارتکاز کے رداس والا ہر وہ طاقی تسلسل جو تفاعل کو ظاہر کرتا ہے، اس تفاعل کا ٹیلر تسلسل ہوگا۔

ثبوت: فرض کریں کہ درج ذیل طاقی تسلسل کا غیر صفر رداس ارتکاز  $R$  ہو۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

تب یہ قرص  $|z - a| < R$  میں کسی تفاعل  $f(z)$  کو ظاہر کرے گا یعنی:

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots$$

مسئلہ 18.8 کے تحت

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z - a) + \dots$$

اور

$$f^{(n)}(z) = n!b_n + (n+1)n \dots 3 \cdot 2 \cdot b_{n+1}(z - a) + \dots$$

ہو گا اور یہ تمام تسلسل قرص  $|z - a| < R$  میں مرکب ہوں گے اور تحلیلی تفاعل کو ظاہر کریں گے۔ یوں یہ تفاعل  $z = a$  پر استمراری ہوں گے۔ یوں  $z = a$  لیتے ہوئے

$$f(a) = b_0, \quad f'(a) = b_1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = n!b_n, \dots$$

ملتے ہیں۔ چونکہ یہ کلیات مسئلہ ٹیلر کے کلیات کے عین مطابق ہیں لہذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

وہ نقطہ جس پر تفاعل  $f(z)$  غیر تحلیلی صورت اختیار کرتا ہو  $f(z)$  کا نادر نقطہ<sup>17</sup> کہلاتا ہے؛ ہم کہتے ہیں کہ اس نقطہ پر  $f(z)$  کی ندرت پائی جاتی ہے۔ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ وہ نقطہ  $z = z_0$  جس پر  $f(z)$  قابل تفرق نہ ہو لیکن  $z_0$  کے ہر پڑوس میں  $f(z)$  قابل تفرق ہو تب  $z_0$  کو  $f(z)$  کا نادر نقطہ کہیں گے۔

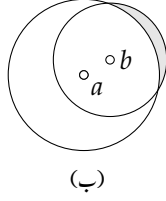
اس تصور کے تحت دائرہ ارتکاز<sup>18</sup> پر  $f(z)$  (کی طاقی تسلسل مساوات 18.30) کا کم از کم ایک نادر نقطہ پایا جائے گا۔

ٹیلر تسلسل کی عملی استعمال سے پہلے مختلف مرکزی نقطوں کے گرد تسلسل کی تصور اور تحلیلی استرار کی تصور پر بھی بات کرتے ہیں۔ فرض کریں غیر صفر داس ارتکاز  $R$  کے تفاعل  $f(z)$  کا  $z - a$  طاقتوں کا طاقی تسلسل دیا گیا ہے جس کے مجموعہ کو ہم  $f(z)$  سے ظاہر کرتے ہیں یعنی؛

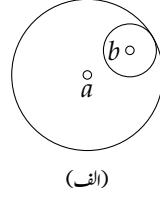
$$(18.32) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - a)^n$$

singular point<sup>17</sup>

<sup>18</sup> مساوات 18.30 کا داس ارتکاز عموماً  $a$  سے  $f(z)$  کے قریب ترین نادر نقطے تک فاصلے کے برابر ہو گا، لیکن اس سے زیادہ بھی ہو سکتا ہے؛ مثال کے طور پر  $\text{Ln } z$  منفی حقیقی محور پر دائرے اور  $a = -1 + i$  سے اس منفی محور تک فاصلہ 1 ہے لیکن  $\text{Ln } z$  کا ٹیلر تسلسل جس کا مرکز  $a = -1 + i$  ہو کی ارتکاز کا داس  $\sqrt{2}$  ہے۔



(ب)



(الف)

شکل 18.3: مختلف مرکز کے گرد طاقی تسلسل کا حصول اور تحلیلی استمرار

مسئلہ 18.8 سے ہم جانتے ہیں کہ قرص  $|z - a| < R$  میں  $f(z)$  تحلیلی ہو گا۔ مسئلہ 18.10 کے تحت مساوات 18.32 تقابل  $f(z)$  کا ایسا ٹیلر تسلسل ہو گا جس کا مرکز  $a$  ہے۔ ہم اس قرص میں کوئی نقطہ  $b$  منتخب کرتے ہوئے مسئلہ ٹیلر کی مدد سے  $f(z)$  کے لئے

$$(18.33) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - b)^n$$

حاصل کرتے ہیں جس کے عددی سر مساوات 18.32 کے تفرق میں  $z = b$  پر کرنے سے حاصل ہوں گے:

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(b) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{n}{k} a_k (b - a)^{k-n}$$

یہ نئی تسلسل کم از کم قرص  $|z - b| < R - |b|$  میں کارآمد ہو گی (شکل 18.3-الف)۔ البتہ کئی بار مساوات 18.33 کی ارتکاز کا رد اس  $R - |b|$  سے بڑا ہو گا (شکل 18.3-ب)۔ لہذا مساوات 18.33 تقابل  $f(z)$  کو قرص  $|z - a| < R$  کے باہر وسعت دے گی (شکل 18.3-ب میں سیاہ خط)۔ کسی ارتکازی خطے میں ایک تحلیلی تقابل کی دی گئی طاقی تسلسل کو اس خطے سے باہر وسعت دینے کو تحلیلی استمرار<sup>19</sup> کہتے ہیں۔

## 18.4 بنیادی تقابل کے ٹیلر تسلسل

مثال 18.6: بندسی تسلسل  
فرض کریں کہ  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  ہے۔ تب  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$  اور  $f^{(n)}(0) = n!$  ہوں گے۔ یوں

$\frac{1}{1-z}$  کا مکمل درج ذیل ہندی سلسل ہوگا۔

$$(18.34) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (|z| < 1)$$

□

$f(z)$  نقطہ  $z = 1$  پر نادر ہے؛ یہ نقطہ ارتکاز کے دائرے پر واقع ہے۔

مثال 18.7: قوت نمائی تفاعل

ہم جانتے ہیں کہ قوت نمائی تفاعل  $e^z$  (حصہ 14.7) تمام  $z$  پر تحلیل ہے اور  $(e^z)' = e^z$  ہے لہذا  $a = 0$  لیتے ہوئے مساوات 18.30 سے درج ذیل مکمل سلسل حاصل ہوتا ہے۔

$$(18.35) \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

یہی سلسل  $e^x$  کے مکمل سلسل میں  $x$  کی جگہ  $z$  پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

آئیں اب مساوات 18.35 کی مدد سے قوت نمائی تفاعل کے حاصل ضرب کا کلیہ

$$(18.36) \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

دریافت کریں۔ ہم

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

سے شروع کرتے ہیں۔ چونکہ دونوں سلسل مرتکز ہیں لہذا ہم انہیں جزو در جزو ضرب کر سکتے ہیں؛ حاصل ضرب میں ان اجزاء کا مجموعہ جن کے لئے  $k + m = n$  ہے درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} & \frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} \frac{z_2}{1!} + \dots + \frac{z_1}{1!} \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z_2^n}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} [z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + z_2^n] = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

یوں دونوں سلسل کے حاصل ضرب کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}$$

یوں مساوات 18.36 ثابت ہوتی ہے۔

مزید مساوات 18.35 میں  $z = iy$  پر کرنے کے بعد مسئلہ 17.18 کی اطلاق سے

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دائیں ہاتھ تسلسل حقیقی تفاعل  $\cos y$  اور  $\sin y$  کے مکملان تسلسل ہیں لہذا ان سے کلیہ بولر

$$(18.37) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

حاصل ہوتا ہے (مساوات 14.64)۔ مساوات 18.37 کو  $e^x$  سے ضرب دے کر مساوات 18.36 کا استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.60 حاصل ہو گا۔ مساوات 18.35 کو قوت نمائی تفاعل کی تعریف لیتے ہوئے ہم اس سے حصہ 14.7 کے تمام کلیات حاصل کر سکتے ہیں۔

□

مثال 18.8: تکنیکی اور ہڈولی تفاعل  
مساوات 18.35 کو مساوات 14.74 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(18.38) \quad \begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \end{aligned}$$

$z = x$  کی صورت میں ان سے بالترتیب حقیقی تفاعل  $\cos x$  اور  $\sin x$  کی جانی پہچانی مکملان تسلسل حاصل ہوتی ہیں۔ اسی طرح مساوات 18.35 کو مساوات 14.84 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(18.39) \quad \begin{aligned} \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

□

مثال 18.9: لوگاریتم

مساوات 18.30 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(18.40) \quad \text{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \dots \quad (|z| < 1)$$

$z$  کی جگہ  $-z$  لکھتے ہوئے دونوں اطراف کو  $-1$  سے ضرب دے کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$(18.41) \quad -\text{Ln}(1-z) = \text{Ln} \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \quad (|z| < 1)$$

ان دونوں تسلسل کو جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(18.42) \quad \text{Ln} \frac{1+z}{1-z} = 2 \left( z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) \quad (|z| < 1)$$

□

## سوالات

سوال 18.31: مساوات 18.35 کی استعمال سے  $(e^z)' = e^z$  ثابت کریں۔

سوال 18.32: مساوات 18.38 اور مساوات 18.39 کو مساوات 18.35 سے حاصل کریں۔

سوال 18.33: مساوات 18.38 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ  $\cos z$  جفت تفاعل ہے جبکہ  $\sin z$  طاق تفاعل ہے۔

سوال 18.34: مساوات 18.39 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ تمام حقیقی  $z = x$  کے لئے  $\cosh z \neq 0$  ہو گا۔

سوال 18.35 تا سوال 18.46 میں دیے گئے تفاعل کا نقطہ  $z = a$  کے گرد ٹیلر تسلسل حاصل کریں اور اس کا رداس ارتکاز  $R$  تلاش کریں۔

$$\text{سوال 18.35: } \cos 2z, a = 0 \quad \text{جواب: } 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - + \dots, R = \infty$$

سوال 18.36:  $\sin z^2, a = 0$   
 $z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - + \dots, R = \infty$  جواب:

سوال 18.37:  $e^{-z}, a = 0$   
 $1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + - \dots, R = \infty$  جواب:

سوال 18.38:  $e^z, a = 1$   
 $e[1 + (z - 1) + \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \dots] R = \infty$  جواب:

سوال 18.39:  $e^z, a = i\pi$   
 $-1 - (z - i\pi) - \frac{(z-i\pi)^2}{2!} - \frac{(z-i\pi)^3}{3!} - \dots, R = \infty$  جواب:

سوال 18.40:  $\sin z, a = \frac{\pi}{2}$   
 $1 - \frac{1}{2}(z - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{24}(z - \frac{\pi}{2})^4 - \dots, R = \infty$  جواب:

سوال 18.41:  $\cos z, a = -\frac{\pi}{4}$   
 $\frac{1}{\sqrt{2}}[1 + (z + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(z + \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(z + \frac{\pi}{4})^3 + \dots], R = \infty$  جواب:

سوال 18.42:  $\frac{1}{1-z}, a = -1$   
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z + 1) + \frac{1}{8}(z + 1)^2 + \frac{1}{16}(z + 1)^3 + \dots, R = 2$  جواب:

سوال 18.43:  $\frac{1}{z}, a = -1$   
 $-1 - (z + 1) - (z + 1)^2 - (z + 1)^3 - (z + 1)^4 + \dots, R = 1$  جواب:  
 نقطہ  $z = 0$  پر تفاعل  $\frac{1}{z}$  نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز  $a = -1$  سے نقطہ نادر تک فاصلہ، ارتکاز کا رداس  $R = 1$  ہے۔

سوال 18.44:  $\frac{1}{1-z}, a = i$   
 $\frac{1}{1-i}[1 + \frac{z-i}{1-i} + \frac{(z-i)^2}{(1-i)^2} + \frac{(z-i)^3}{(1-i)^3} + \dots], R = \sqrt{2}$  جواب:  
 نقطہ  $z = 1$  پر تفاعل  $\frac{1}{1-z}$  نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز  $a = i$  سے نقطہ نادر تک فاصلہ، ارتکاز کا رداس  $R = \sqrt{2}$  ہے۔

سوال 18.45:  $\cos^2 z, a = i$   
 $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) = \frac{1}{2}(2 - \frac{2^2}{2!}z^2 + \frac{2^4}{4!}z^4 - + \dots), R = \infty$  جواب:



سوال 18.46:  $\sin^2 z, a = i$   
 جواب:  $z^2 - \frac{z^4}{3} + \frac{2z^6}{45} \dots, R = \infty$

سوال 18.47 تا سوال 18.49 میں دیے گئے تفاعل کے مکمل کے ابتدائی تین اجزاء اور اس کی رداس اور تکرار تلاش کریں۔

سوال 18.47:  $\tan z$   
 جواب:  $z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} \dots, R = \frac{\pi}{2}$   
 تفاعل  $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$  نقطہ  $z = \pm \frac{\pi}{2}$  پر نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز  $a = 0$  سے نقطہ نادر کا فاصلہ  $R = \frac{\pi}{2}$  ہے۔

سوال 18.48:  $e^z \sin z$   
 جواب:  $z + z^2 + \frac{z^3}{3} \dots$

سوال 18.49:  $z \cot z$   
 جواب:  $1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{45} \dots, R = \pi$

سوال 18.50 تا سوال 18.55 میں مکمل کے مکمل کا جزو در جزو مکمل لیتے ہوئے تسلسل دریافت کریں۔

سوال 18.50:  $\int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt$   
 جواب:

$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{t} \left( t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \dots$$

$$\int_0^z \left( 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \dots \right) dt = z + \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \frac{z^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

سوال 18.51:  $\int_0^z \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$   
 جواب:  $\frac{z}{2!} - \frac{z^3}{3 \cdot 4!} + \frac{z^5}{5 \cdot 6!} \dots, R = \infty$

سوال 18.52:  $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$   
 جواب:  $\operatorname{erf} z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 2z - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{21} \dots \right)$

سوال 18.53:  $\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$   
 جواب:  $\operatorname{Si}(z) = z - \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \frac{z^5}{5 \cdot 5!} - \frac{z^7}{7 \cdot 7!} \dots, R = \infty$

$$S(z) = \int_0^z \sin t^2 dt \quad : 18.54 \text{ سوال}$$

$$S(z) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^7}{42} + \frac{z^{11}}{1320} \cdots \quad : \text{جواب}$$

$$C(z) = \int_0^z \cos t^2 dt \quad : 18.55 \text{ سوال}$$

$$C(z) = z - \frac{z^5}{10} + \frac{z^9}{216} \cdots, \quad R = \infty \quad : \text{جواب}$$

### 18.5 طاقی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب

عموماً عملی صورتوں میں مسئلہ ٹیلر میں دیے کلیہ کی مدد سے ٹیلر تسلسل کے عددی سر حاصل کرنا پیچیدہ ثابت ہو گا۔ ایسے کئی دیگر نسبتاً سادہ تراکیب ہیں جن کی مدد سے ان عددی سروں کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مسئلہ 18.5 کے تحت تفاعل کا طاقی تسلسل یکتا ہو گا لہذا ہم بغیر فکر کیے جیسے چاہیں اس کو حاصل کر سکتے ہیں۔ آئیں اس عمل کو چند مثالوں کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 18.10: متغیرہ کی تبدیلی

ہمیں تفاعل  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  کا مکملارن تسلسل تلاش کرنا ہے۔ مساوات 18.34 میں  $-z^2$  پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(18.43) \quad \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

□

مثال 18.11: تکمل

فرض کریں کہ  $f(z) = \tan^{-1} z$  ہے۔ اب  $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$  ہے۔ مساوات 18.43 کے تسلسل کا جزو در جزو تکمل لے کر اور  $f(0) = 0$  استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \cdots \quad (|z| < 1)$$

□ یہ تسلسل  $w = u + iv = \tan^{-1} z$  کی صدقیت دیتا ہے جس کے لئے  $|u| < \frac{\pi}{2}$  ہو گا۔

مثال 18.12: ہندسی تسلسل کا استعمال  
ہمیں تفاعل  $\frac{1}{c-bz}$  کا تسلسل  $z - a$  کی طاقتوں میں تلاش کرنا ہے جہاں  $c - ab \neq 0$  اور  $b \neq 0$  ہیں۔ ہم اس تفاعل کو

$$\frac{1}{c-bz} = \frac{1}{c-ab-b(z-a)} = \frac{1}{(c-ab)\left[1 - \frac{b(z-a)}{c-ab}\right]}$$

لکھتے ہیں۔ اب  $z = \frac{b(z-a)}{c-ab}$  لیتے ہوئے مساوات 18.34 سے نتیجہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{1}{c-bz} &= \frac{1}{c-ab} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{b(z-a)}{c-ab} \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{(c-ab)^{n+1}} (z-a)^n \\ &= \frac{1}{c-ab} + \frac{b}{(c-ab)^2} (z-a) + \frac{b^2}{(c-ab)^3} (z-a)^2 + \dots \end{aligned}$$

یہ تسلسل درج ذیل صورت میں مرتکز ہو گا۔

$$\left| \frac{b(z-a)}{c-ab} \right| < 1 \quad \equiv |z-a| < \left| \frac{c-ab}{b} \right| = \left| \frac{c}{b} - a \right|$$

□

مثال 18.13: ثنائی تسلسل، جزوی کسری پھیلاؤ  
درج ذیل تفاعل کا ٹیلر تسلسل دریافت کریں۔ تسلسل کا مرکز  $z = 1$  پر رکھیں۔

$$f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$$

کسی بھی ناطق تفاعل کا جزوی کسی پھیلاؤ حاصل کر کے ثنائی تسلسل

(18.44)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z)^m} &= (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n \\ &= 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!} z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} z^3 + \dots \end{aligned}$$

کی مدد سے تسلسل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ ہاتھ تفاعل  $z = -1$  پر نادر ہے لہذا تسلسل قرص  $|z| < 1$  میں مرککز ہو گا۔ موجودہ تفاعل کا جزوی کسری پھیلاؤ

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} = \frac{1}{[3-(z-1)]^2} - \frac{2}{2-(z-1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{[1+\frac{1}{3}(z-1)]^2} - \frac{1}{\frac{1}{2}(z-1)}$$

ہے۔ یوں ثنائی تسلسل کی مدد سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{z-1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

ہم ان دونوں تسلسل کو جزو در جزو جمع کر سکتے ہیں۔ چونکہ پہلے تسلسل کا ثنائی عددی سر

$$\frac{(-2)(-3)\cdots(-(n+1))}{n!} = (-1)^n(n+1)$$

ہے لہذا دیے گئے تفاعل کا تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n} \right] (z-1)^n = -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z-1) - \frac{23}{108}(z-1)^2 \dots$$

چونکہ  $f(z)$  کا مرکز  $z = 1$  کے قریب ترین نادر نقطہ  $z = 3$  ہے لہذا تسلسل قرص  $|z-1| < 2$  میں مرککز ہو گا۔ □

مثال 18.14: تفرقی مساوات کا استعمال

ہمیں تفاعل  $f(z) = \tan z$  کا مکملارن تسلسل تلاش کرنا ہے۔ چونکہ  $f'(z) = \sec^2 z$  ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$f'(z) = 1 + f^2(z), \quad f'(0) = 1$$

چونکہ  $f(0) = 0$  ہے لہذا لگاتار تفرق لے کر ابتدائی چند عددی سر درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$f'' = 2ff', \quad f''(0) = 0,$$

$$f''' = 2f'^2 + 2ff'', \quad f'''(0) = 2, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$f^{(4)} = 6f'f'' + 2ff''', \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)} = 6f''^2 + 8f'f''' + 2ff^{(4)}, \quad f^{(5)}(0) = 16, \quad \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{2}{15},$$

یوں مکلا رن تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$(18.45) \quad \tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \quad (|z| < \frac{\pi}{2})$$

□

مثال 18.15: نا معلوم عددی سر

$\cos z$  اور  $\sin z$  کے تسلسل (حصہ 18.4) استعمال کرتے ہوئے  $\tan z$  کا مکلا رن تسلسل حاصل کریں۔ چونکہ  $\tan z$  طاق تفاعل ہے لہذا اس کا تسلسل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$\tan z = b_1z + b_3z^3 + b_5z^5 + \dots$$

ہم  $\sin z = \tan z \cos z$  سے

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots = (b_1z + b_3z^3 + b_5z^5 + \dots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots)$$

لکھ سکتے ہیں۔ چونکہ  $\tan z$  ماسوائے  $z = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$  پر تحلیل ہے لہذا اس کا تسلسل قرص  $\frac{\pi}{2}$  میں تحلیل ہو گا اور قرص کے اندر  $z$  کے لئے ہم درج بالا کو جزو در جزو ضرب دے سکتے ہیں (حصہ 18.3) جس کو ہم  $z$  کی طاقی تسلسل کی صورت میں لکھتے ہیں۔ مسئلہ 18.5 کے تحت دونوں اطراف  $z$  کی ایک جیسے طاقتوں کے عددی سر یکساں ہوں گے۔ اس طرح

$$1 = b_1, \quad -\frac{1}{3!} = -\frac{b_1}{2!} + b_3, \quad \frac{1}{5!} = \frac{b_1}{4!} - \frac{b_3}{2!} + b_5, \quad \dots$$

□

ملتے ہیں جن سے عددی سر  $b_1 = 1$ ،  $b_3 = \frac{1}{3}$ ،  $b_5 = \frac{2}{15}$  حاصل ہوتے ہیں۔

سوالات

سوال 18.56 تا سوال 18.56 میں دیے گئے تفاعل کا مکلا رن تسلسل تلاش کریں۔

سوال 18.56:  $\frac{1}{1+z^4}$   
جواب:  $1 - z^4 + z^8 - z^{12} + \dots$ ,  $|z| < 1$

سوال 18.57:  $\frac{1}{1-z^3}$   
جواب:  $1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots, |z| < 1$

سوال 18.58:  $\frac{1}{1+z^3}$   
جواب:  $1 - z^3 + z^6 - z^9 + \dots, |z| < 1$

سوال 18.59:  $\frac{1}{1-z^6}$   
جواب:  $1 + z^6 + z^{12} + z^{18} + \dots, |z| < 1$   
 $1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + 5z^8 - \dots, |z| < 1$

سوال 18.60:  $\frac{4z^2+30z+68}{(z+4)^2(z-2)}$   
جواب:  $-\frac{17}{8} - \frac{15}{16}z - \frac{67}{128}z^2 - \frac{31}{128}z^3 - \dots, |z| < 2$   
دیے گئے تفاعل کے نادر نقطے  $z = -4$  اور  $z = 2$  ہیں۔ تسلسل کے مرکز  $a = 0$  سے قریب ترین نادر نقطہ کا فاصلہ  $R = 2$  ہے لہذا تسلسل  $|z| < 2$  کی صورت میں تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔

سوال 18.61:  $\cos z^2$   
جواب:  $1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \dots, |z| < 1$

سوال 18.62:  $e^{z^2-z}$   
جواب:  $1 - z + \frac{3}{2}z^2 - \frac{7}{6}z^3 + \frac{25}{24}z^4 - \dots$

سوال 18.63:  $e^{z^4}$   
جواب:  $1 + z^4 + \frac{z^8}{2} + \dots$

سوال 18.64 تا سوال 18.69 میں دیے گئے تفاعل کے مکملان تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء تلاش کریں۔

سوال 18.64:  $\frac{\cos z}{1-z^2}$   
جواب:  $1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{13}{24}z^4 + \frac{389}{720}z^6 + \dots, |z| < 1$

سوال 18.65:  $e^{z^2} \sin z^2$   
جواب:  $z^2 + z^4 + \frac{z^6}{3} - \frac{z^{10}}{30} \dots$

سوال 18.66:  $\frac{e^{z^2}}{\cos z}$   
جواب:  $1 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{29}{24}z^4 + \frac{511}{720}z^6 \dots, |z| < \frac{\pi}{2}$

سوال 18.67:  $e^{\frac{1}{1-z}}$   
 جواب:  $e(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\dots)$ ,  $|z| < 1$

سوال 18.68:  $\cos(\frac{z}{1-z})$   
 جواب:  $1 - \frac{1}{2}z^2 - z^3 - \frac{35}{24}z^4 \dots$

سوال 18.69:  $e^{(e^z)}$   
 جواب:  $e(1+z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\dots)$

سوال 18.70 تا سوال 18.75 میں دیے تفاعل کا ٹیلر تسلسل  $z = a$  کے گرد دریافت کریں۔

سوال 18.70:  $\frac{1}{2z-i}$ ,  $a = -1$   
 جواب:  $-\frac{1}{2+i} - \frac{2(z+1)}{(2+i)^2} - \frac{4(z+1)^3}{(2+i)^3} - \dots$ ,  $|z+1| < \frac{\sqrt{5}}{2}$   
 تفاعل  $\frac{1}{2z-i}$  نقطہ  $z = \frac{i}{2}$  پر نادر ہے۔ یہ نقطہ ٹیلر تسلسل کے مرکز  $a = -1$  سے  $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$  فاصلہ پر ہے۔

سوال 18.71:  $\frac{1}{4-3z}$ ,  $a = 1+i$   
 جواب:  $\frac{1}{1-i3} + \frac{3(z-1-i)}{(1-i3)^2} + \frac{9(z-1-i)^2}{(1-i3)^3} + \dots$ ,  $|z-1-i| < \frac{\sqrt{10}}{3}$   
 تفاعل  $\frac{1}{4-3z}$  نقطہ  $z = \frac{4}{3}$  پر نادر ہے۔ نقطہ نادر کا تسلسل کی مرکز  $a = 1+i$  سے فاصلہ  $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$  ہے۔

سوال 18.72:  $\frac{2-3z}{2z^2-3z+1}$ ,  $a = -1$   
 جواب:  $\frac{5}{6} + \frac{17}{36}(z+1) + \frac{59}{216}(z+1)^2 + \dots$ ,  $|z+1| < \frac{3}{2}$   
 دیا گیا تفاعل  $z = 1$  اور  $z = \frac{1}{2}$  پر نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز سے قریب ترین نقطہ نادر کا فاصلہ  $R = \frac{3}{2}$  ہے۔

سوال 18.73:  $\frac{1}{(1+z)^2}$ ,  $a = -i$   
 جواب:  $\frac{1}{(1-i)^2} - \frac{2(z+i)}{(1-i)^3} + \frac{3(z+i)^2}{(1-i)^4} - \dots$ ,  $|z+i| < \sqrt{2}$

سوال 18.74:  $\frac{1}{(2+3z^3)^2}$ ,  $a = 0$   
 جواب:  $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}z^3 + \frac{27}{16}z^6 - \frac{27}{8}z^9 \dots$ ,  $|z| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

سوال 18.75:  $\tan z$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$   
 جواب:  $3 + (z - \frac{\pi}{4}) + 2(z - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(z - \frac{\pi}{4})^3 \dots$ ,  $|z - \frac{\pi}{4}| < \frac{\pi}{4}$

سوال 18.76: تفاعل  $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$  کی مکھارن تسلسل کا جزو در جزو تکمل لے کر درج ذیل ثابت کریں۔

$$\sin^{-1} z = z + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{z^3}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \frac{z^5}{5} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \frac{z^7}{7} + \dots, \quad |z| < 1$$

دکھائیں کہ یہ تسلسل  $\sin^{-1} z$  کی صدر قیمت دیتا ہے (صفحہ 1102 پر سوال 14.255 میں تعریف بیان کی گئی ہے)۔

سوال 18.77: یولر اعداد

درج ذیل مکھارن تسلسل

$$(18.46) \quad \sec z = E_0 - \frac{E_2}{2!} z^2 + \frac{E_4}{4!} z^4 - + \dots$$

یولر اعداد  $E_{2n}$  کی تعریف ہے۔ دکھائیں کہ  $E_0 = 1$ ،  $E_2 = -1$ ،  $E_4 = 5$ ،  $E_6 = -61$  ہیں۔

سوال 18.78: برنولی اعداد

درج ذیل مکھارن تسلسل برنولی اعداد  $B_n$  کی تعریف ہے۔

$$(18.47) \quad \frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \dots$$

نا معلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$(18.48) \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

سوال 18.79: مساوات 14.74، مساوات 14.75 اور مساوات 18.47 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$(18.49) \quad \tan z = \frac{i2}{e^{i2z} - 1} - \frac{i4}{e^{i4z} - 1} - i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}$$



## 18.6 یکساں استمرار

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ کسی خطہ  $R$  میں دیا گیا تسلسل استمراری ہے۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا پورے خطے میں استمرار کافی تیز ہے یا کہ خطے میں ایسے نقطے بھی پائے جاتے ہیں جہاں استمرار بہت کم ہے۔ کمپیوٹر کی استعمال سے حساب کرنے کے نقطہ نظر سے یہ سوال اہم ہے، لیکن جیسا ہم دیکھیں گے خالصتاً نظریاتی نقطہ نظر سے یہ سوال مزید زیادہ اہم ہے۔ اس حقیقت کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال 18.16: فرض کریں کہ ہم وقفہ  $0 \leq x \leq 1$  میں مثلاً  $x = 0, 0.1, 0.2, \dots$  پر حقیقی  $x$  کے تفاعل  $e^x$  کی قیمتوں کا ایسا جدول بنانا چاہتے ہیں جس میں حتی قیمت کا خلل کسی مقررہ عدد  $\epsilon$ ، مثلاً  $0.5 \times 10^{-6}$  سے کم ہو۔ ہم مکلارن تسلسل کا موزوں جزوی مجموعہ

$$s_n = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

لیتے ہیں۔ یوں قیمت کی حتی قیمت میں خلل  $|R_n| = |s - s_n|$  ہو گا جہاں  $s = e^x$  تسلسل کا مجموعہ ہے اور ہم نے ایسا  $n$  منتخب کرنا ہے کہ درج ذیل ہو۔

$$|s(x) - s_n(x)| < \epsilon (= 0.5 \times 10^{-6})$$

اب سوال 17.75 سے ہم جانتے ہیں کہ  $x = 1$  کی صورت میں  $n = 10$  یا کوئی بھی  $n > N = 9$  ہمیں درکار درستگی کا جواب مہیا کرے گا۔ اب  $x \geq 0$  کے گٹھنے سے باقی کی حتی قیمت گھٹتی ہے لہذا  $n > N(\epsilon) (= 9)$  منتخب کرتے ہوئے اس خطے میں کسی بھی  $x$  کے لئے

$$|s(x) - s_n(x)| < \epsilon$$

ہو گا۔ دھیان رہے کہ  $N$  کی قیمت  $\epsilon$  پر منحصر ہے۔ یوں اگر ہمیں زیادہ درست قیمتیں درکار ہوں تب  $\epsilon$  مزید کم اور  $N$  مزید بڑا ہو گا۔ □

مثال 18.17: ہندسی تسلسل  $1 + z + z^2 + \dots$  کا باقی

$$R_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{m=n+1}^{\infty} z^m = \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

ہے جو 1 کے کافی قریب کسی بھی حقیقی  $z = x$  کے لئے بے قابو بڑا ہو گا۔ یوں کسی بھی مقررہ  $\epsilon$  کے لئے ہم صرف  $\epsilon$  پر مبنی ایسا  $N$  تلاش نہیں کر سکتے ہیں کہ وقفہ  $0 \leq x \leq 1$  پر کسی بھی  $x$  کے لئے  $n > N$  منتخب کر کے  $|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \epsilon$  حاصل ہو گا (سوال 17.74 دیکھیں)۔ یہ متوقع نتیجہ ہے چونکہ  $z = 1$  پر تسلسل منفرج ہے۔ آپ اگلے مثال میں حقیقتاً حیران کن صورت حال دیکھیں گے۔ □

مثال 18.18:

درج ذیل تسلسل پر غور کریں۔

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots$$

ہندسی تسلسل کے مجموعے کی مساوات استعمال کرتے ہوئے آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ اس تسلسل کا  $n$  واں جزوی مجموعہ

$$s_n(x) = 1 = x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

ہو گا۔ ان میں چند مجموعوں کو شکل 18.4 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں  $x \neq 0$  کی صورت میں تسلسل کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 1 + x^2$$

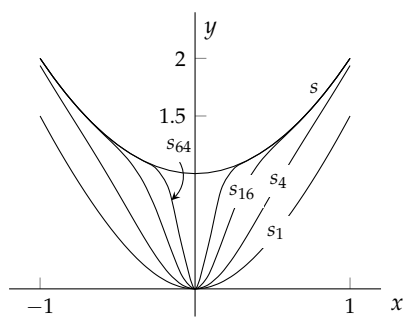
$x = 0$  کی صورت میں تمام  $n$  کے لئے  $s_n = 0$  ہوں گے لہذا

$$s(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(0) = 0$$

ہو گا۔ اس سے ظاہر ہے کہ تمام  $x$  کے لئے تسلسل منفرج (بلکہ حتیٰ منفرج) ہے لیکن ہمیں اس حیران کن نتیجہ کا سامنا ہے کہ اگرچہ تسلسل کے اجزاء استمراری تفاعل ہیں،  $x = 0$  پر مجموعہ غیر استمراری ہے۔ مزید جب  $x \neq 0$  ہو تب باقی کی حتمی قیمت

$$|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی مقررہ  $\epsilon$  کے لئے ایسا  $N$  جو صرف  $\epsilon$  پر منحصر ہو معلوم نہیں کیا جاسکتا ہے جو  $0 \leq x \leq 1$  پر تمام  $x$  کے لئے اور تمام  $n > N(\epsilon)$  کے لئے،  $|R_n| < \epsilon$  کو مطمئن کرتا ہو۔ □



شکل 18.4: مثال 18.18 کے چند جزوی مجموعے



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z \leq |2yy'|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $h = 1 + |p| + |q|$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□





ضمیمہ ب

## مفید معلومات

### 1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارتم (شکل 1. ب-ب)

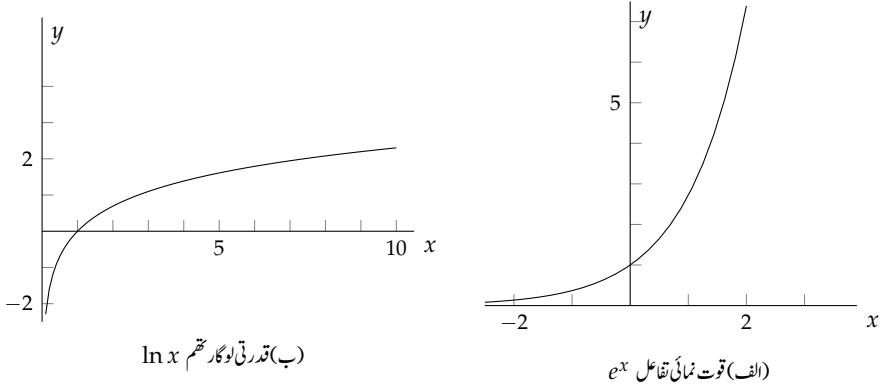
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

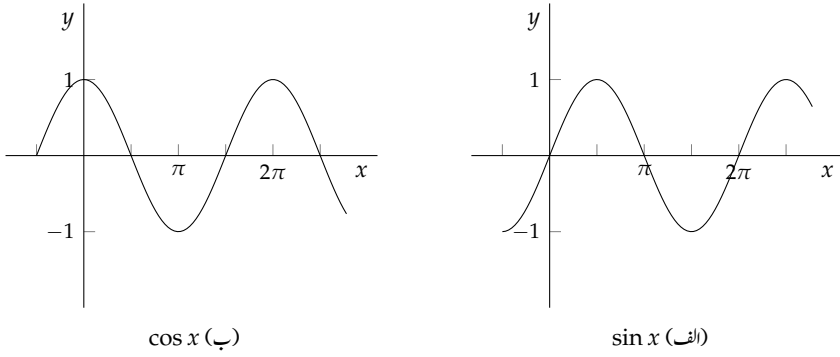
اساس دس کا لوگارتم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

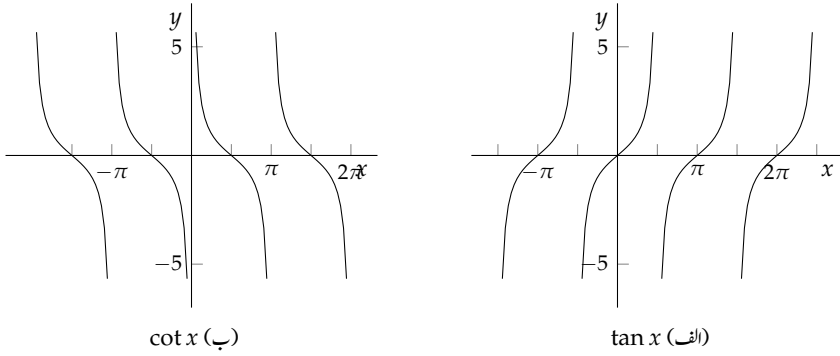
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

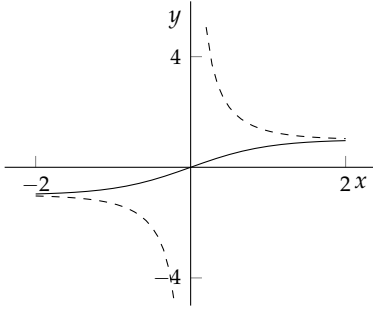
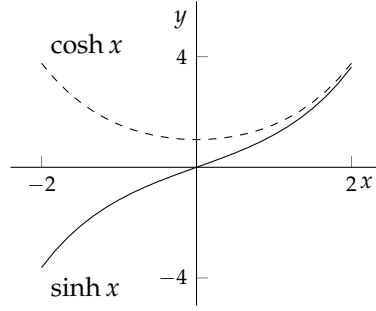
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

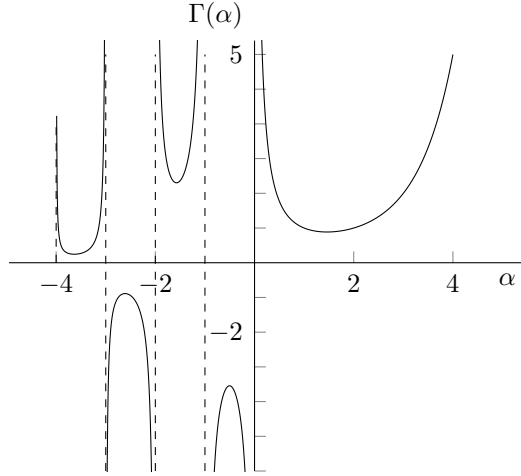
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

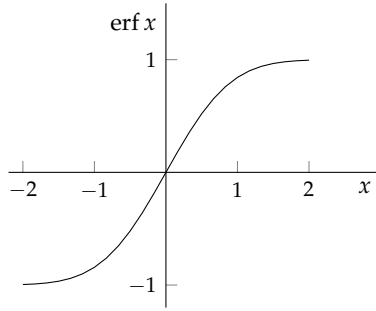
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

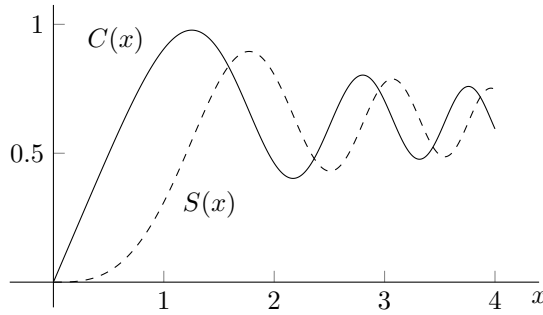
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسئل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

تکمل سائن (شکل 8.ب)

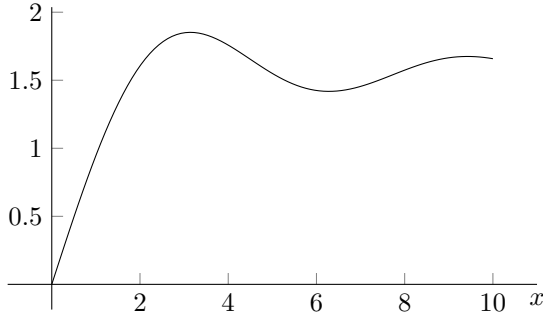
$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>





شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

