انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 12

فوریئر تسلسل

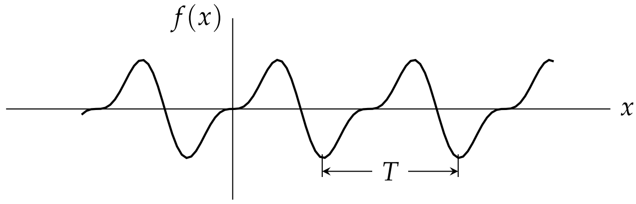
انجینئری مسائل میں دوری تفاعل عموماً پائے جاتے ہیں جن کو سادہ دوری تفاعل مثلاً $\sin$ اور $\cos$ کی روپ میں لکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔اسی عمل سے فوریئر تسلسل[1] ابھر کر سامنے آتی ہے جو سادہ تفرقی مساوات اور جزوی تفرقی مساوات کے حل میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

فوریئر تسلسل کا نظریہ پیچیدہ ہے جبکہ اس کا استعمال نہایت آسان ہے۔چونکہ بہت سارے غیر استمراری تفاعل کا فوریئر تسلسل حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ ان کا ٹیلر تسلسل نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا فوریئر تسلسل کو ٹیلر تسلسل کی عالمگیر صورت تصور کیا جا سکتا ہے۔

اس باب میں فوریئر تسلسل سے وابستہ تصورات، حقائق اور تکنیکی تراکیب پر غور کیا جائے گا۔اس کے علاوہ ان کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں ان کا استعمال دکھایا جائے گا۔

اس باب کی آخری حصے میں فوریئر تکمل پر غور کیا جائے گا جنہیں اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں استعمال کیا جائے گا۔

[1] فرانسیسی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات جین بپٹسٹ یوسف فوریئر [1768-1830]



شکل 12.1: دوری تفاعل

12.1 دوری تفاعل، تکونیاتی تسلسل

تفاعل $f(x)$ اس صورت **دوری**[2] کہلاتا ہے کہ جب پورے حقیقی x پر $f(x)$ معین ہو اور ایسا مثبت عدد T پایا جاتا ہو کہ تمام x پر درج ذیل درست ہو۔

$$f(x+T)=f(x) \qquad \text{تمام } x \text{ کے لئے} \tag{12.1}$$

عددی T کو $f(x)$ کا **دوری عرصہ**[3] کہتے[4] ہیں۔ T کے برابر $f(x)$ کے کسی بھی وقفے کا ترسیم دہراتے ہوئے ایسے تفاعل کا ترسیم حاصل کیا جاتا ہے (شکل 12.1)۔ عملی استعمال میں عموماً دوری اعمال اور تفاعل پائے جاتے ہیں۔

دوری تفاعل کی مثالیں $\sin x$ اور $\cos x$ ہیں۔اس کے علاوہ مستقل $f=c=$ بھی دوری تفاعل کی تعریف (مساوات 12.1 پر ہر مثبت T کے لئے) پورا اترنے کی بنا دوری تفاعل ہے۔

مساوات 12.1 سے ظاہر ہے کہ عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

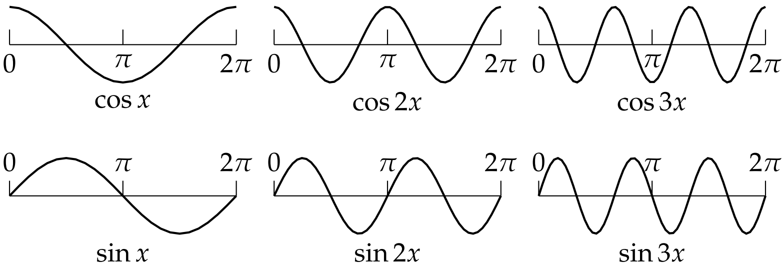
$$f(x+nT)=f(x) \qquad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

یوں $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، $\dots$ بھی تفاعل $f(x)$ کے دوری عرصے ہیں۔مزید اگر تفاعل $f(x)$ کا اور $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب درج ذیل تفاعل

$$h(x)=af(x)+bg(x) \qquad a\text{، }b \text{ مستقل}$$

---

[2] periodic
[3] period
[4] تفاعل $f(x)$ کا کم تر دوری عرصہ $T(>0)$، اگر موجود ہو، $f(x)$ کا اوّلی دوری عرصہ کہلاتا ہے۔مثلاً $\sin x$ اور $\sin 2x$ کا بالترتیب اوّلی دوری عرصہ 2π اور π ہے جبکہ مستقل $= f$ کا کوئی دوری عرصہ نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 12.2: سائن اور کوسائن تفاعل جن کا دوری عرصہ 2π ہے

کا دوری عرصہ بھی T ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

اس باب کی شروع میں ہم ایسے مختلف تفاعل جن کا دوری عرصہ 2π ہو کو درج ذیل سادہ تفاعل کی روپ میں ظاہر کرنا سیکھیں گے

$$1, \quad \cos x, \sin x, \quad \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \quad \cos nx, \sin nx, \cdots$$

جن کا دوری عرصہ 2π ہے (شکل 12.2)۔ہم دیکھیں گے کہ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل طرز کی تسلسل حاصل ہو گی

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots \tag{12.2}$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\cdots$ ، b_1 ، b_2 ، $\cdots$ حقیقی مستقل ہوں گے۔اس تسلسل کو **تکونیاتی تسلسل**[5] کہتے ہیں جبکہ a_n اور b_n تسلسل کی **عددی سر**[6] کہلاتے ہیں۔چونکہ اس تسلسل کے ہر رکن کا دوری عرصہ 2π ہے لہٰذا اگر یہ تسلسل مرکوز ہو تب یہ ایسا تفاعل ہو گا جس کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔

انجینئری میں واقع تفاعل پیچیدہ ہوتے ہیں جنہیں سادہ دوری تفاعل کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ عملی استعمال، مثلاً ارتعاش، میں پائے جانے والا تقریباً ہر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو فوریئر تسلسل کی روپ میں لکھنا ممکن ہو گا۔ہم مساوات 12.2 کے عددی سر حاصل کرنے کے ایسے کلیات دریافت کریں گے جو $f(x)$ پر منحصر ہوں گے اور جنہیں استعمال کرتے ہوئے حاصل تسلسل مرکوز ہو گا جس کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا۔اس کے بعد ہم حاصل کلیات کو عمومی شکل دیتے ہوئے ان کو کسی بھی دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے قابل استعمال بنائیں گے۔ایسا کرنا نہایت آسان ثابت ہو گا۔

[5] trigonometric series
[6] coefficients

سوالات

سوال 12.1: دیے گئے تفاعل کا کم تر دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos \pi x,\ \sin \pi x,\ \cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x$$

جوابات: $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$

سوال 12.2: اگر تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب ثابت کریں کہ nT جہاں $n = 2, 3, \cdots$ ہے بھی اس تفاعل کا دوری عرصہ ہو گا۔

سوال 12.3: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کا اور تفاعل $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب تفاعل $h(x) = af(x) + bg(x)$ کا دوری عرصہ بھی T ہو گا، جہاں a اور b مستقل ہیں۔یوں دوری عرصہ T رکھنے والے تمام تفاعل سمتی فضا پیدا کرتے ہیں۔

سوال 12.4: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x) =$ مستقل ایسا دوری تفاعل ہے جس کا دوری عرصہ T کوئی بھی مثبت عدد ہو سکتا ہے۔

سوال 12.5: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہونے کی صورت میں x کے دوری تفاعل $f(ax), a \neq 0$ کا دوری عرصہ $\frac{T}{a}$ ہو گا جبکہ x کے دوری تفاعل $f(\frac{x}{b}), b \neq 0$ کا دوری عرصہ bT ہو گا۔ان نتائج کی تصدیق $f(x) = \cos x,\ a = b = 2$ کے لئے کریں۔

سوال 12.6 تا سوال 12.12 میں دیے گئے تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.6: $\sin x, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$

سوال 12.7: $f(x + 2\pi) = f(x)$ اور

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ہے۔سوال 12.6 کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.8:

$$\sin 2\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x + \frac{1}{5}\sin 10\pi x$$

سوال 12.9:

$$\sin x, \quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x,$$
$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.10:

$$-\cos x, \quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x, \quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x,$$
$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.11: $f(x) = x^2, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

سوال 12.12: $f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

سوال 12.13 تا سوال 12.16 میں دوری تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔اس کی ترسیم کھینچیں۔وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ کے لئے $f(x)$ دیا گیا ہے۔

سوال 12.13:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi \le x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.14:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ \cos x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.15:

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x & -\pi\le x\le 0\\ \pi-x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

سوال 12.16:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x\le 0\\ \sin\frac{x}{2} & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

سوال 12.17 تا سوال 12.25 میں دیے گئے تکمل ہمیں آگے درکار ہوں گے۔ان تکمل میں $n=0,1,2,\cdots$ ہے۔تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 12.17: $\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x$

جواب: طاق n کے لئے $\frac{2}{n}$ اور جفت n کے لئے صفر۔

سوال 12.18: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos nx\,\mathrm{d}x$

جواب: جفت n کے لئے صفر اور طاق n کے لئے $\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

سوال 12.19: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$

جواب: $(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$

سوال 12.20: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,\mathrm{d}x$

جواب: طاق n ، $\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$ یعنی $\frac{2}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$ جبکہ جفت n ، $-\frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ یعنی $\frac{\pi}{n}(-1)^{\frac{n+2}{2}}$

سوال 12.21: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\,\mathrm{d}x$

جواب: 0

سوال 12.22: $\int_{0}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$

سوال 12.23: $\int_{-\pi}^{0} e^x \sin nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{n}{n^2+1}[(-1)^n e^{-\pi} - 1]$

سوال 12.24: $\int_{0}^{\pi} e^x \cos nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{1}{n^2+1}[e^{\pi}(-1)^n - 1]$

سوال 12.25: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$

12.2 فوریئر تسلسل۔یولر کلیات

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کو درج ذیل تکونیاتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12.3}$$

ہم دیے گئے تفاعل $f(x)$ کی تکونیاتی تسلسل (مساوات 12.3) کے عددی سر a_n ، اور b_n جاننا چاہتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے a_0 دریافت کرتے ہیں۔مساوات 12.3 کے دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \mathrm{d}x$$

اگر تسلسل کے ارکان کا جزو با جزو تکمل لینا جائز ہو[7]، تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x \right)$$

دائیں ہاتھ پہلا رکن $2\pi a_0$ کے برابر ہے۔بائیں ہاتھ باقی تمام ارکان صفر کے برابر ہیں، جیسا کہ تکمل لے کر ثابت کیا جا سکتا ہے۔یوں پہلا کلیہ درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.4}$$

ہم اب a_1 ، a_2 ، $\cdots$ اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔ہم مساوات 12.3 کو $\cos mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مقررہ مثبت عدد صحیح ہے، دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx\,\mathrm{d}x \tag{12.5}$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x \right]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔ضمیمہ-ب میں دیا گیا مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,\mathrm{d}x \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

تکمل لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ بالائی دائیں جزو کے علاوہ تمام تکمل صفر کے برابر ہیں۔بالائی دایاں جزو $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔چونکہ مساوات 12.5 میں اس جزو کو a_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا a_m لکھا جا سکتا ہے) لہٰذا مساوات 12.5 کا دایاں ہاتھ $a_m\pi$ کے برابر ہو گا۔یوں دوسرا کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{12.6}$$

[7] ایسا جائز ہے، مثلاً، استمراری مرتکز صورت میں۔

ہم آخر میں b_1 ، b_2 ، $\cdots$ حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 12.3 کو $\sin mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مثبت مقررہ عدد صحیح ہے، $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)\Big]\sin mx\,\mathrm{d}x \tag{12.7}$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دایاں ہاتھ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\sin mx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\sin mx\,\mathrm{d}x\Big]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔ دوسرے تکمل کی طرز کی تکمل پر ہم غور کر چکے ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ تمام $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے اس کی قیمت صفر ہے۔ آخری تکمل کو ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)\,\mathrm{d}x$$

آخری جزو صفر کے برابر ہے۔ دائیں ہاتھ پہلا جزو $n \neq m$ کی صورت میں صفر جبکہ $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 12.7 میں اس جزو کو b_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا b_m لکھا جا سکتا ہے) لہٰذا مساوات 12.7 کا دایاں ہاتھ $b_m\pi$ کے برابر ہو گا۔ یوں آخری کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{12.8}$$

اب m کی جگہ n لکھتے ہوئے ان کلیات کو، جنہیں یولر کلیات[8] کہتے، ایک جگہ اکٹھا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)} && a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&\text{(ب)} && a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots\\
&\text{(پ)} && b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{12.9}$$

چونکہ متکمل دوری ہیں لہٰذا مساوات 12.9 میں وقفہ تکمل کو 2π کے برابر کسی بھی وقفہ، مثلاً $0 \le x \le 2\pi$ ، سے بدلا جا سکتا ہے۔

---

[8] Euler formulas

دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.9 کی مدد سے عددی سر a_n اور b_n حاصل کر کے ہم درج ذیل تکونیاتی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \tag{12.10}$$

اس تسلسل کو $f(x)$ کی **فوریئر تسلسل**[9] کہتے ہیں جبکہ مساوات 12.9 سے حاصل عددی سر a_n ، b_n کو $f(x)$ کے **فوریئر عددی سر**[10] کہتے ہیں۔

قطعی تکمل کی تعریف سے واضح ہے کہ اگر $f(x)$ استمراری یا ٹکڑوں میں استمراری (جہاں وقفہ تکمل پر $f(x)$ میں محدود تعداد کے چھلانگ پائے جاتے ہوں) ہو تب مساوات 12.9 میں دیے گئے تکملات موجود ہوں گے لہٰذا ہم $f(x)$ کے فوریئر عددی سروں کو مساوات 12.9 کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا اس طرح حاصل کیا گیا فوریئر تسلسل مرکوز ہو گا اور آیا تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا؟ ان سوالات پر اسی حصے میں آگے جا کر غور کیا جائے گا۔

آئیں مساوات 12.9 کی استعمال کو ایک سادہ مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 12.1: چکور موج

چکور موج کے فوریئر عددی سر کو مساوات 12.9 سے حاصل کریں۔چکور موج کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔چکور موج کی تحلیلی روپ درج ذیل ہے۔

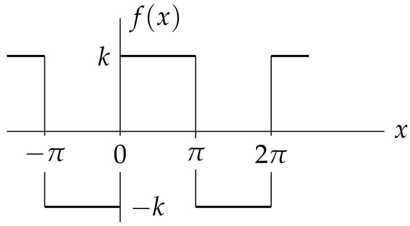
$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{جہاں} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

اس طرز کے تفاعل میکانی نظام میں بطور بیرونی قوت یا برقی ادوار میں بطور داخلی دباو پائے جا سکتے ہیں، وغیرہ۔

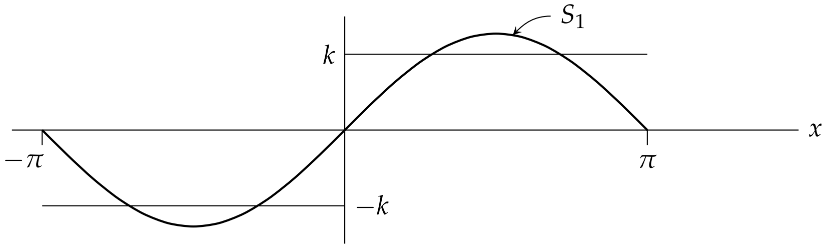
حل:مساوات 12.9-الف سے $a_0 = 0$ ملتا ہے۔یہ نتیجہ بغیر تکمل کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے کہ چکور موج کا رقبہ $-\pi$ تا π صفر ہے۔مساوات 12.9-ب سے

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\cos nx \, \mathrm{d}x\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right] = 0 \end{aligned}$$

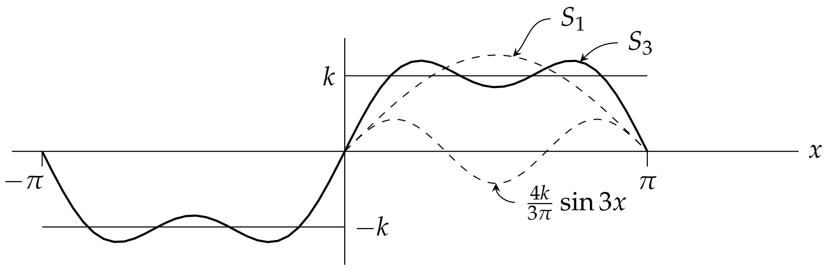
[9] Fourier series
[10] Fourier coefficients



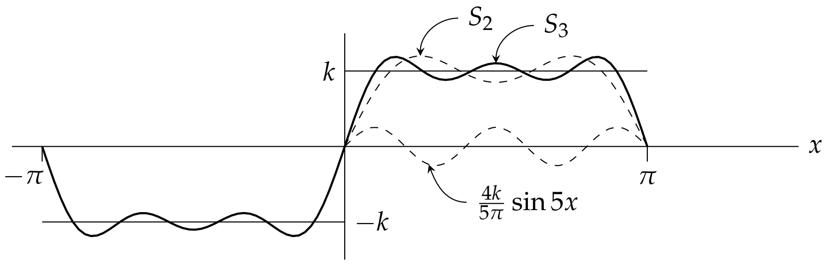
(الف) دیا گیا دوری چکور تفاعل $f(x)$



(ب)



(پ)



(ت)

شکل 12.3: چکور موج اور فوریئر تسلسل سے حاصل امواج (مثال 12.1)

ملتا ہے جہاں تمام $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے $-\pi$ ، 0 اور π پر $\sin nx = 0$ پر کیا گیا ہے۔اسی طرح مساوات 12.9-پ سے

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\sin nx \,\mathrm{d}x\Big]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

ملتا ہے۔چونکہ $\cos 0 = 1$ اور $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ہوتا ہے لہٰذا اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_n = \frac{k}{n\pi}[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

اب $\cos\pi = -1$ ، $\cos 2\pi = 1$ ، $\cos 3\pi = -1$ ، وغیرہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & n \text{ طاق} \\ 1 & n \text{ جفت}\end{cases} \implies 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت}\end{cases}$$

یوں b_n درج ذیل ہوں گے۔

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \cdots$$

چونکہ $a_n = 0$ ہیں لہٰذا دی گئی چکور تفاعل کی فوریئر تسلسل

$$\frac{4k}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\Big) \tag{12.11}$$

ہو گی جس کے جزوی مجموعے درج ذیل ہیں۔

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\sin x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\Big), \cdots$$

شکل 12.3 میں جزوی مجموعہ میں ارکان کی تعداد بتدریج بڑھاتے ہوئے تسلسل کا ترسیم کھینچا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ تسلسل کے زیادہ ارکان استعمال کرنے سے ترسیم کی شکل اصل تفاعل (چکور موج) کی زیادہ قریب ہوتی ہے۔ چکور موج $-\pi$ ، 0 ، π ، وغیرہ پر غیر استمراری ہے یعنی یہاں تفاعل میں چھلانگ پائی جاتی ہے۔یوں ہم نہیں کہہ سکتے کہ آیا $x = 0$ پر چکور تفاعل کی قیمت $-k$ ہے یا k ہے یا کہ ان دونوں قیمتوں کے مابین ہے۔اس کے برعکس فوریئر تسلسل کے تمام جزوی مجموعے ان نقطوں پر صفر کے برابر ہیں جو $-k$ اور k کی اوسط قیمت ہے۔

مزید فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہے۔شکل 12.3-الف سے ظاہر ہے کہ $x=\frac{\pi}{2}$ پر چکور تفاعل کی قیمت k کے برابر ہے۔یوں $x=\frac{\pi}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$f(\frac{\pi}{2})=k\frac{4k}{\pi}\Big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\Big)$$

یعنی

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4} \tag{12.12}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مشہور نتیجہ لیبنٹز نے 1673 کے لگ بھگ جیومیٹریائی اصولوں سے حاصل کیا۔اس سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل ارکان کی کئی تسلسل کی قیمت کو مختلف نقطوں پر فوریئر تسلسل کی قیمت سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

ایسے تفاعل جنہیں فوریئر تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کی تعداد غیر یقینی طور پر زیادہ ہے۔انجینئری میں استعمال ہونے والی تقریباً ہر ممکن تفاعل کو فوریئر تسلسل کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے درکار (کافی) شرائط درج ذیل مسئلہ 12.1 میں بیان کیے گئے ہیں۔اس مسئلہ میں چند تصورات کی ضرورت ہے جن پر پہلے بات کرتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ کی **بائیں ہاتھ حد**[11] سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو x_0 تک بائیں ہاتھ سے پہنچتے ہوئے حاصل ہو گی۔یوں بائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0-1)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے درج ذیل ہو گی

$$f(x_0-0)=\lim_{h\to0}f(x_0-h)$$

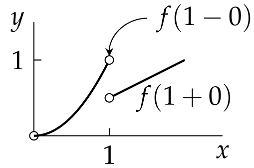
جہاں h مثبت قیمت ہے۔اسی طرح x_0 پر $f(x)$ کی **دائیں ہاتھ حد**[12] سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو دائیں ہاتھ سے آ کر x_0 تک پہنچتے ہوئے حاصل ہو گی۔یوں دائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0+0)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$f(x_0+0)=\lim_{h\to0}f(x_0+h)$$

ہو گی جہاں h مثبت قیمت ہے۔شکل 12.4 میں غیر استمراری تفاعل

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ \frac{x}{2} & x>1\end{cases}$$

[11] left hand limit
[12] right hand limit



شکل 12.4: بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد، بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق

دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $x_0 = 1$ پر اس تفاعل کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد درج ذیل ہیں

$$f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = \frac{1}{2}$$

جن میں فرق $(1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2})$ کو **چھلانگ**[13] کہتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر **بائیں ہاتھ تفرق**[14] سے مراد

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}$$

اور **دائیں ہاتھ تفرق**[15] سے مراد

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

ہے جہاں h مثبت قیمت ہے۔ ظاہر ہے کہ اگر نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ استمراری ہو تب $f(x_0 - 0)$ اور $f(x_0 + 0)$ دونوں $f(x_0)$ ہی کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 12.1: (تفاعل کا فوریئر تسلسل کی روپ میں اظہار)
اگر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو، وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ میں ٹکڑوں میں استمراری[16] ہو اور اس وقفے کے ہر نقطے پر تفاعل کا دایاں ہاتھ تفرق اور بایاں ہاتھ تفرق موجود ہو تب تفاعل کی فوریئر تسلسل، مساوات 12.10، جس کی عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل کیے گئے ہوں، مرتکز ہو گی۔ تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا ماسوائے نقطہ x_0 پر جہاں تفاعل غیر استمراری ہو۔ نقطہ x_0 پر تسلسل کی قیمت، نقطہ x_0 پر $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کی اوسط ہو گی۔

[13] jump
[14] left hand differential
[15] right hand differential
[16] ٹکڑوں میں استمراری کی تعریف حصہ 6.1 میں دی گئی ہے۔

رائے زنی: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل مرتکز ہو اور اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو (جیسا مسئلہ 12.1 میں بیان کیا گیا ہے) تب اس تسلسل کو $f(x)$ کی فوریئر تسلسل کہتے ہیں جس کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

اور ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کو یہ فوریئر تسلسل ظاہر کرتی ہے۔اب چونکہ کسی بھی مرتکز تسلسل میں قوسین لگانے سے ایک نئی مرتکز تسلسل ملتی ہے جس کا مجموعہ اصل تسلسل کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ہم درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ثبوت: استمراری تفاعل $f(x)$ جس کا استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پایا جاتا ہو کی مرکوزیت (مسئلہ 12.1) کا ثبوت۔
مساوات 12.9-ب کا تکمل بالحصص لیتے ہوئے

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \left. \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, \mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے برابر ہے۔دوبارہ تکمل بالحصص لینے سے

$$a_n = \left. \frac{f'(x) \cos nx}{n^2\pi} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, \mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔چونکہ $f'(x)$ دوری اور استمراری ہے لہٰذا دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر ہو گا۔وقفہ تکمل میں $f''(x)$ استمراری ہے لہٰذا

$$\left| f''(x) \right| < M$$

ہو گا جہاں M ایک موزوں مستقل ہے۔مزید $|\cos nx| < 1$ ہے۔یوں

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \right| < \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, \mathrm{d}x = \frac{2M}{n^2}$$

ہو گا۔اسی طرح تمام n کے لئے $|b_n| < \frac{2M}{n^2}$ ہو گا۔اس طرح فوریئر تسلسل کی ہر رکن کی زیادہ سے زیادہ قیمت درج ذیل تسلسل کی مطابقتی رکن کی قیمت کے برابر ہو سکتی ہے جو مرتکز تسلسل ہے۔

$$|a_0| + 2M\left(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

یوں فوریئر تسلسل بھی مرتکز ہو گی۔

ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(x)$ کی صورت میں فوریئر تسلسل کی مرکوزیت اور مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

□

سوالات

سوال 12.26 تا سوال 12.42 میں دیے گئے دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کا فوریئر تسلسل دریافت کریں۔پہلے تین جزوی مجموعوں[17] کا ترسیم کھینچیں۔

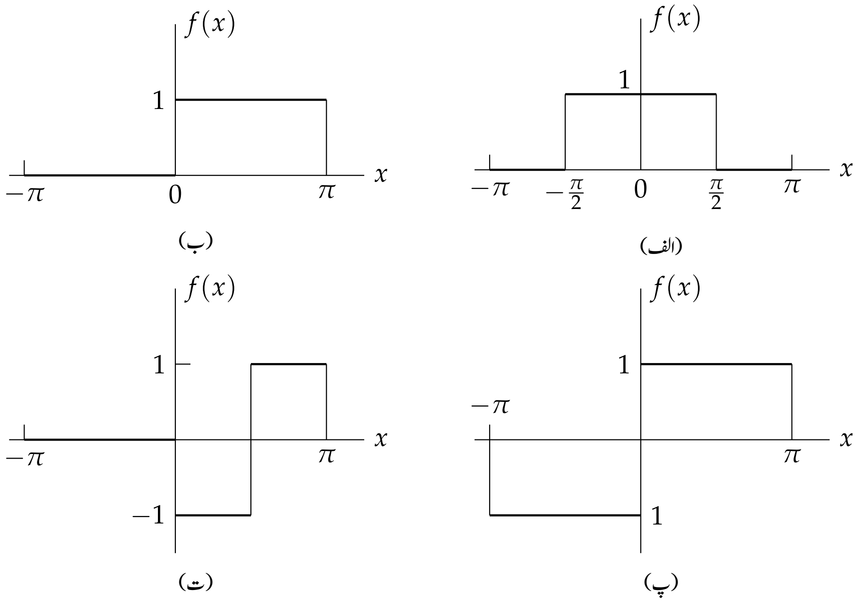
سوال 12.26: تفاعل کو شکل 12.5-الف میں دیا گیا ہے۔

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots)$

سوال 12.27: تفاعل کو شکل 12.5-ب میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x \cdots)$

سوال 12.28: تفاعل کو شکل 12.5-پ میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$

[17] یعنی $a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ جہاں $N = 1, 2, 3$ ہے۔



شکل 12.5: تفاعل برائے سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.29: تفاعل کو شکل 12.5-ت میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{2}{\pi}(-\cos x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x \cdots)$

سوال 12.30:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots)$

سوال 12.31:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos x - \sin x - \sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x \cdots)$

سوال 12.32:

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x \cdots$

سوال 12.33:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(-\cos x + \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x \cdots)$

سوال 12.34:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{4}{25}\cos 5x \cdots$

سوال 12.35:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x \cdots)$

سوال 12.36:

$$f(x) = \begin{cases} \pi & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x - \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{9\pi}\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x \cdots$

سوال 12.37:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $2\sin x + \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x \cdots$

سوال 12.38:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}(-\cos x + 3\sin x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \sin 3x \cdots)$

سوال 12.39: $f(x) = x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

جواب: $\frac{\pi}{16} + \frac{1}{\pi}[(\frac{\pi}{2} - 1)\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \cdots]$

سوال 12.40: $f(x) = \sin x, \quad -\pi < x < \pi$

جواب: $\sin x$

سوال 12.41: **نصف لہر سمت کار**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \cdots)$

سوال 12.42: **مکمل لہر سمت کار** $f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$

جواب: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x \cdots)$

سوال 12.43: مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کی سوال 12.26 کے لئے تصدیق کریں۔

سوال 12.44: سوال 12.26 کی حاصل تسلسل سے سوال 12.27 کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.45: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریئر عددی سر a_n اور b_n ہوں تب ثابت کریں کہ تفاعل $kf(x)$ جہاں k مستقل ہے کے عددی سر ka_n اور kb_n ہوں گے۔

سوال 12.46: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کے عددی سر a_n ، b_n اور تفاعل $g(x)$ کے عددی سر a_n^* ، b_n^* ہوں تب تفاعل $f(x)+g(x)$ کے عددی سر $a_n+a_n^*$ ، $b_n+b_n^*$ ہوں گے۔

سوال 12.47: سوال 12.33 میں دیے گئے تفاعل کی فوریئر تسلسل سوال 12.46 کو استعمال کرتے ہوئے شکل 12.5 کی نتائج سے حاصل کریں۔

12.3 اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل

عملی استعمال میں پائے جانے والے دوری تفاعل کا دوری عرصہ شاذ و نادر 2π ہوتا ہے۔ 2π دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے حاصل کی گئی کلیات کی x ناپ تبدیل کرتے ہوئے کسی بھی دوری عرصہ T کے تفاعل کی کلیات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔ہم نیا متغیر x متعارف کرتے ہیں جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$t=\frac{T}{2\pi}x \quad \text{(ب)} \quad x=\frac{2\pi}{T}t \qquad \text{(الف)} \tag{12.13}$$

لہذا $x=\mp\pi$ کے مطابقتی قیمتیں $t=\mp\frac{T}{2}$ ہوں گی۔اس طرح x کے تفاعل f کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔یوں اگر f کی فوریئر تسلسل موجود ہو، اس کی صورت درج ذیل ہو گی

$$f(t)=f\Big(\frac{T}{2\pi}x\Big)=a_0\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{12.14}$$

جہاں یولر عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل ہوں گے یعنی:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{T}{2\pi}x\Big)\,\mathrm{d}x,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{T}{2\pi}x\Big)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{T}{2\pi}x\Big)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

ہم ان کلیات کو استعمال کر سکتے ہیں لیکن متغیر کو t میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوتی ہے۔یوں

$$x = \frac{2\pi}{T}t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{T}\,\mathrm{d}t$$

استعمال کرتے ہوئے اور x محور پر $-\pi$ تا π تکمل کو t محور پر $-\frac{T}{2}$ تا $\frac{T}{2}$ تکمل لکھتے ہوئے یولر مساوات درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\text{(الف)} \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{(ب)} \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \tag{12.15}$$
$$\text{(پ)} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t$$

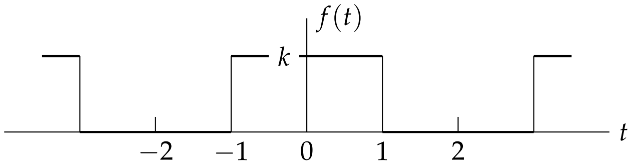
مزید مساوات 12.14 میں دی گئی فوریئر تسلسل میں x متغیر کی جگہ t متغیر پر کرنے سے

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\Big) \tag{12.16}$$

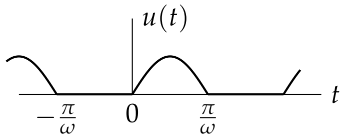
فوریئر تسلسل حاصل ہوتی ہے۔چونکہ تفاعل $f(t)$ دوری ہے لہٰذا مساوات 12.15 میں تکمل کو $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ کی بجائے T کے برابر کسی بھی وقفہ مثلاً $0 \le t \le T$ پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 12.2: درج ذیل چکور تفاعل (شکل 12.6)، جس کا دوری عرصہ $T = 4$ ہے، کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ k & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$



شکل 12.6: مثال 12.2



شکل 12.7: نصف لہر سمت کار (مثال 12.3)

حل: مساوات 12.15 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\\
a_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{4}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi}{2}t\,\mathrm{d}t = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\\
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{4}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\sin\frac{n\pi}{2}t\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

یوں جفت n کے لئے $a_n = 0$ جبکہ $n = 1, 5, 9, \cdots$ کے لئے $a_n = \frac{2k}{n\pi}$ اور $n = 3, 7, 11, \cdots$ کے لئے $a_n = -\frac{2k}{n\pi}$ ہو گا جن سے درج ذیل فوریئر تسلسل ملتی ہے۔

$$
f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\Big(\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}t - + \cdots\Big)
$$

□

مثال 12.3: سائن نما برقی دباو $v = E\sin\omega t$ کو نصف لہر سمت کار سے گزارا جاتا ہے۔ نصف لہر سمت کار کی خارجی برقی دباو $u(t)$ (شکل 12.7) درج ذیل ہے۔

$$
u(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ E\sin\omega t & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}
$$

حل: یہاں $T=\frac{2\pi}{\omega}$ کے برابر ہے۔یوں مساوات 12.15-الف سے

$$a_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{E}{\pi}$$

ملتا ہے جبکہ مساوات 12.15-ب میں ضمیمہ ب کی مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E\sin\omega t\,\cos n\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t]\,\mathrm{d}t$$

سے $n=1$ کے لئے صفر جبکہ $n=2,3,\cdots$ کے لئے

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\omega E}{2\pi}\Big[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega}-\frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\Big]_0^{\frac{\pi}{\omega}}\\&=\frac{E}{2\pi}\Big(\frac{-\cos(1+n)\pi+1}{1+n}+\frac{-\cos(1-n)\pi+1}{1-n}\Big)\end{aligned}$$

ملتی ہے جو طاق n کے لئے صفر اور جفت n کے لئے

$$a_n=\frac{E}{2\pi}\Big(\frac{2}{1+n}+\frac{2}{1-n}\Big)=-\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi}\qquad(n=2,4,\cdots)$$

دیتی ہے۔اسی طرح مساوات 12.15-پ سے $b_1=\frac{E}{2}$ جبکہ $n=2,3,\cdots$ کے لئے $b_n=0$ ملتے ہیں۔اس طرح فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$u(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t-\frac{2E}{\pi}\Big(\frac{1}{1\cdot3}\cos2\omega t+\frac{1}{3\cdot5}\cos4\omega t+\cdots\Big)$$

□

سوالات

سوال 12.48: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.16 میں تمام ارکان کا دوری عرصہ T ہے۔

سوال 12.49: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.15 میں T کے برابر کسی بھی وقفے پر تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 12.50: مثال 12.3 کی چکور تفاعل کی تسلسل کو سوال 12.26 کی تسلسل سے سیدھ و سیدھ بذریعہ تبدیلی متغیر حاصل کریں۔

سوال 12.51: نصف لہر سمت کار کو $v = E\cos t$ داخلی دباو مہیا کی جاتی ہے۔خارجی دباو کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔
جواب: $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t + \frac{1}{35}\cos 6t - + \cdots)$

سوال 12.52 تا سوال 12.62 میں تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔اس کی فوریئر تسلسل دریافت کریں۔تفاعل $f(t)$ اور اس کی تسلسل کے اولین تین جزوی مجموعوں کے خط کھینچیں۔آپ دیکھیں گے کہ تسلسل کی زیادہ ارکان استعمال کرنے سے اصل تفاعل سے زیادہ قریبی مشابہت رکھنے والا خط حاصل ہوتا ہے۔

سوال 12.52: $f(t) = -1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = 1 \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$
جواب: $\frac{4}{\pi}(\sin \pi t + \frac{1}{3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5}\sin 5\pi t + \cdots)$

سوال 12.53: $f(t) = 1 \quad (-1 < t < 2), \quad f(t) = 0 \quad (2 < t < 3), \quad T = 4$
جواب: $\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos\frac{\pi t}{2} + \sin\frac{\pi t}{2} - \sin \pi t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{2} \cdots)$

سوال 12.54: $f(t) = 1 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 4$
جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} \cdots)$

سوال 12.55: $f(t) = t \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
جواب: $\frac{1}{\pi}(2\sin \pi t - \sin 2\pi t + \frac{2}{3}\sin 3\pi t - \frac{1}{2}\sin 4\pi t \cdots)$

سوال 12.56: $f(t) = t^2 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
جواب: $\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}(-4\cos \pi t + \cos 2\pi t - \frac{1}{9}\cos 3\pi t + \frac{1}{4}\cos 4\pi t \cdots)$

سوال 12.57: $f(t) = -t \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = t \quad (0 < t < 1) \quad T = 2$
جواب: $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos \pi t + \frac{1}{9}\cos 3\pi t + \frac{1}{25}\cos 5\pi t \cdots)$

سوال 12.58: مکمل لہر سمت کار $f(t) = \sin \pi t \quad (0 < t < 1), \quad T = 1$
جواب: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2\pi t + \frac{1}{15}\cos 4\pi t + \frac{1}{35}\cos 6\pi t \cdots)$

سوال 12.59: $f(t) = -1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = t \quad (0 < t < 1) \quad T = 2$
جواب: $-\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos \pi t + \frac{3}{\pi}\sin \pi t = \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t - \frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi t \cdots$

سوال 12.60: $f(t) = 1 \quad (0 < t < 1), \quad f(t) = 2 \quad (1 < t < 2) \quad T = 3$
جواب: $1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{3} + \frac{3}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{3} \cdots$

سوال 12.61: $f(t) = -t \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = 2t \quad (0 < t < 1) \quad T = 2$
جواب: $\frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{1}{\pi} \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t - \frac{2}{3\pi^2} \cos 3\pi t \cdots$

سوال 12.62: $f(t) = \cos(\pi t) \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
جواب: $\cos \pi t$

سوال 12.63: مکمل لہر سمت کار کی فوریئر تسلسل سوال 12.58 میں حاصل کی گئی۔ سوال 12.42 میں حاصل کی گئی تسلسل میں متغیر تبدیل کرتے ہوئے یہی جواب دوبارہ حاصل کریں۔

12.4 جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل کی صورت میں $b_n = 0$ جبکہ طاق تفاعل کی صورت میں $a_n = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں یہ جاننے سے کہ آیا تفاعل جفت یا طاق ہے، عددی سر دریافت کرنے کا کام نسبتاً کم ہو گا۔

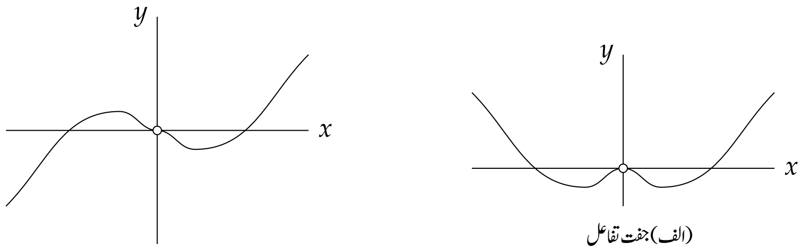
تمام x کے لئے درج ذیل خاصیت والے تفاعل $y = g(x)$ کو جفت[18] تفاعل کہتے ہیں۔

$$g(-x) = g(x) \tag{12.17}$$

ایسا تفاعل y محور کی دونوں اطراف تشاکلی (شکل 12.8-الف) ہو گا۔ اس کے برعکس تفاعل $y = h(x)$ جس کی خاصیت درج ذیل ہو طاق[19] تفاعل کہلاتا ہے (شکل 12.8-ب)۔

$$h(-x) = -h(x) \tag{12.18}$$

[18] even
[19] odd



(الف) جفت تفاعل

(ب) طاق تفاعل

شکل 12.8: جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل $g(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہے (شکل 12.8-الف) لہٰذا $g(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{T}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} g(x), \mathrm{d}x \qquad (\text{جفت } g) \tag{12.19}$$

طاق تفاعل $h(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ ضرب منفی اکائی کے برابر ہے (شکل 12.8-ب) لہٰذا $h(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x == \int_{-\frac{T}{2}}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{T}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (\text{طاق } h) \tag{12.20}$$

جفت تفاعل $g(x)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کی حاصل ضرب $q = gh$ کے لئے

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -g(x)h(x) = -q(x)$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $q = gh$ طاق تفاعل ہو گا۔یوں اگر $f(t)$ جفت تفاعل ہو تب مساوات 12.15-پ میں متکمل $f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہٰذا $b_n = 0$ ہو گا۔اسی طرح اگر $f(t)$ طاق ہو تب مساوات 12.15-ب میں $f\cos\frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہٰذا $a_n = 0$ ہو گا۔ان نتائج سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.2: جفت اور طاق تفاعل کی فوریئر تسلسل
دوری عرصہ T کی جفت تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل، **فوریئر کوسائن تسلسل**[20]

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t \qquad (\text{جفت } f) \tag{12.21}$$

[20] Fourier cosine series

ہو گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.22}$$

دوری عرصہ T کی طاق تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل، **فوریئر سائن تسلسل**[21]

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t \qquad (\text{طاق } f) \tag{12.23}$$

ہو گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.24}$$

اس مسئلہ کے تحت دوری عرصہ 2π کی جفت تفاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل درج ذیل فوریئر کوسائن تسلسل

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots \qquad (\text{جفت } f) \tag{12.25}$$

ہو گی جس کے فوریئر عددی سر

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.26}$$

ہوں گے۔اسی طرح دوری عرصہ 2π والی تفاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل

$$f(x) = b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots \qquad (\text{طاق } f) \tag{12.27}$$

پائی جائے گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.28}$$

مثال 12.2 میں دی گئی چکور تفاعل جفت ہے لہٰذا اس کی فوریئر کوسائن تسلسل پائی گئی۔

[21] Fourier sine series

مزید آسانی درج ذیل مسئلہ سے حاصل ہوتی ہے۔

مسئلہ 12.3: (تفاعل کا مجموعہ) مجموعہ تفاعل $f_1 + f_2$ کی فوریئر عددی سر، تفاعل f_1 اور تفاعل f_2 کی مطابقتی فوریئر عددی سر کا مجموعہ ہو گا۔

کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = g(x) + h(x) \tag{12.29}$$

جہاں

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) &= \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{aligned} \tag{12.30}$$

ہیں۔درج ذیل سے ثابت ہوتا ہے کہ $g(x)$ جفت اور $h(x)$ طاق ہیں (مساوات 12.17 اور مساوات 12.18)۔

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = g(x) \\ h(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -h(x) \end{aligned}$$

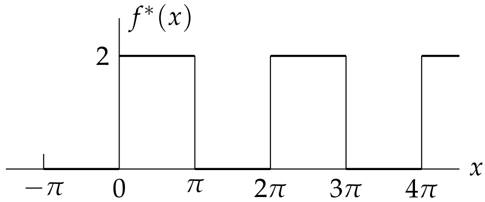
یوں کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو جفت تفاعل $g(h)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جنہیں مساوات 12.30 سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 12.4: مستطیل دھڑکن
مستطیل دھڑکن[22] $f^*(x)$ کو شکل 12.9 میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوال 12.28 میں دکھائی گئی تفاعل $f(x)$ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے موجودہ تفاعل $f^*(x)$ حاصل ہو گی۔یوں سوال 12.28 میں حاصل کیے گئے فوریئر تسلسل سے $f^*(x)$ کی فوریئر تسلسل سیدھ و سیدھ لکھتے ہیں۔

$$1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

□

[22] pulse



شکل 12.9: مستطیل دھڑکن (مثال 12.4)

مثال 12.5: دندان موج
دندان موج[23]

$$f(x) = x + \pi, \quad (-\pi < x < \pi); \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

کو شکل 12.10-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس کی فوریئر تسلسل دریافت کریں۔ حل: دندان موج کی تفاعل کو

$$f = f_1 + f_2; \quad f_1 = x, \quad f_2 = \pi$$

لکھا جا سکتا ہے۔ f_2 کی فوریئر عددی سر صفر کے برابر ہیں ماسوائے a_0 کے جو π کے برابر ہے۔یوں مسئلہ 12.3 کے تحت دندان موج کے عددی سر a_n ، b_n تفاعل f_1 کے عددی سر ہوں گے جبکہ اس کا $a_0 = \pi$ ہو گا (f_1 طاق ہے لہٰذا اس کا اپنا $a_0 = 0$ ہے)۔یوں

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

کا تکمل بالحصص لینے سے

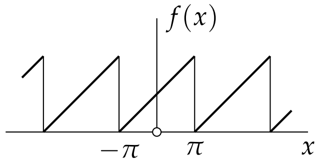
$$b_n = \frac{2}{\pi} \Big[\left. \frac{-x \cos nx}{n} \right|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \Big] = -\frac{2}{n} \cos n\pi$$

ملتا ہے جس سے $b_1 = 2$ ، $b_2 = -1$ ، $b_3 = \frac{2}{3}$ ، $b_4 = -\frac{1}{2}$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا دندان موج کی فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی (شکل 12.10-ب)۔

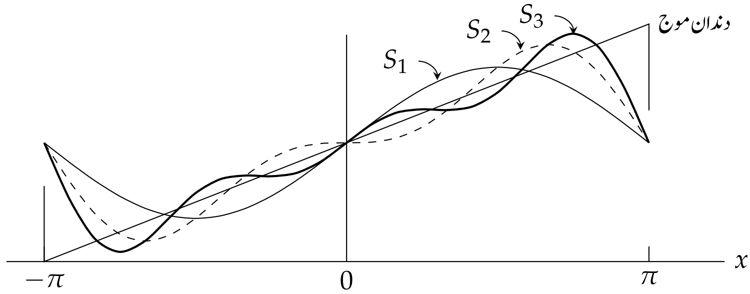
$$f(x) = \pi + 2\Big(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - + \cdots \Big)$$

□

[23] saw tooth wave



(الف) دی گئی دندان موج $f(x)$



(ب) جزوی مجموعے

شکل 12.10: دندان موج اور اس کا فوریئر تسلسل (مثال 12.5)

سوالات

سوال 12.64: کیا درج ذیل تفاعل جفت، طاق یا ان میں سے دونوں نہیں (نہ طاق اور نہ ہی جفت) ہیں؟

$$e^x,\ e^{x^2},\ \sin nx,\ x\sin nx,\ \frac{\cos x}{x},\ \ln x,\ \sin x^2,\ \sin^2 x$$

جوابات: بائیں سے 4 ، 6 طاق، 3 ، 9 دونوں نہیں اور باقی تمام جفت ہیں۔

سوال 12.65 تا سوال 12.72 میں دوری تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ 2π ہے۔ کیا تفاعل جفت، طاق یا دونوں نہیں ہیں۔

سوال 12.65: $f(x)=|x|, \quad (-\pi<x<\pi)$
جواب: جفت

سوال 12.66: $f(x)=x, \quad (-\pi<x<\pi)$
جواب: طاق

سوال 12.67: $f(x) = x^2, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.68: $f(x) = x^3, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: طاق

سوال 12.69: $f(x) = e^x, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: نہ طاق اور نہ ہی جفت

سوال 12.70: $f(x) = e^{|x|}, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.71:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: طاق

سوال 12.72: $f(x) = 1, \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ جواب: جفت

سوال 12.73: ایسا تفاعل دریافت کریں جو جفت بھی ہو اور طاق بھی۔
جواب: $f(x) = 0$

سوال 12.74: مساوات 12.19 اور مساوات 12.20 ثابت کریں۔

سوال 12.75: مسئلہ 12.3 کو ثابت کریں۔

سوال 12.76 تا سوال 12.79 میں دیے گئے تفاعل کو ایک عدد جفت تفاعل اور ایک عدد طاق تفاعل کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 12.76: $\frac{1}{1-x}$
جواب: $\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}$

سوال 12.77: $\frac{1}{1-x^2}$
جواب: $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

سوال 12.78: e^x
جواب: $\cosh x + \sinh x$

سوال 12.79: $\cos x$
جواب: جفت تفاعل یا طاق تفاعل جوں کا توں لکھا جائے گا۔ $\cos x$

سوال 12.80: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا مجموعہ جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.81: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.82: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا مجموعہ طاق تفاعل ہو گا۔

سوال 12.83: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.84: ثابت کریں کہ جفت $f(x)$ کی صورت میں $|f(x)| + f^2(x)$ جفت ہو گا۔

سوال 12.85: ثابت کریں کہ طاق $f(x)$ کی صورت میں $|f(x)| + f^2(x)$ اور $f^3(x)$ جفت ہوں گے۔

سوال 12.86 تا سوال 12.91 میں دیے گئے تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔ان تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.86:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \cdots)$

سوال 12.87:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ \pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

جواب: $-\frac{4}{\pi}\cos x + 2\sin x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{4}{25}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x \cdots$

سوال 12.88:

$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi<x<0\\ -x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x\cdots)$

سوال 12.89:

$$f(x)=\begin{cases} \pi+x & -\pi<x<0\\ \pi-x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x\cdots)$

سوال 12.90: $f(x)=\frac{x^2}{4},\quad (-\pi<x<\pi)$

جواب: $\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 4x-+\cdots$

سوال 12.91:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(\pi+1)\cos x+\frac{1}{\pi}(-\pi^2+\pi+4)\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\cdots$

سوال 12.92 تا سوال 12.95 میں دی گئی تعلق کو ثابت کریں (مساوات 12.12 دیکھیں)۔

سوال 12.92: (سوال 12.86 یا سوال 12.90 استعمال کریں) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4}$

سوال 12.93: (سوال 12.90 استعمال کریں) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

سوال 12.94: (سوال 12.90 استعمال کریں) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\cdots=\frac{\pi^2}{12}$

سوال 12.95: (سوال 12.93 اور سوال 12.94 استعمال کریں) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

12.5 نصف حلقہ اتساع

کئی انجینئری اور طبیعیاتی مسائل میں ایسے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل درکار ہو گی جو کسی محدود وقفہ $0 \le t \le l$ پر معین ہو۔ہم وقفہ $0 \le t \le l$ کو تکمل کا وقفہ $0 \le t \le \frac{T}{2}$ لیتے ہوئے مسئلہ 12.2 استعمال کرتے ہیں۔یوں $l = \frac{T}{2}$ یعنی $T = 2l$ چنا گیا ہے۔ مساوات 12.22 استعمال کرتے ہوئے فوریئر کوسائن تسلسل حاصل ہوتی ہے جو $T = 2l$ عددی عرصہ کی جفت تفاعل $f_1(t)$ کو ظاہر کرتی ہے۔وقفہ $0 \le t \le l$ پر $f_1(t) = f(t)$ ہو گا۔اسی لئے $f_1(t)$ کو $f(t)$ کی **جفت دوری توسیع**[24] کہتے ہیں۔شکل 12.11-ب میں جفت دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔مساوات 12.21 اور مساوات 12.22 میں $T = 2l$ لیتے ہوئے

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t \qquad (0 \le t \le l) \tag{12.31}$$

جفت فوریئر تسلسل حاصل ہو گی جس کی عددی سر

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.32}$$

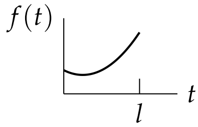
ہوں گے۔

ہم مسئلہ 12.2 کی مساوات 12.22 کی جگہ، پہلی کی طرح $T = 2l$ لیتے ہوئے، مساوات 12.24 استعمال کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے فوریئر سائن تسلسل حاصل ہو گی جو دوری عرصہ $T = 2l$ کی دوری تفاعل $f_2(t)$ کو ظاہر کرے گی۔وقفہ $0 \le t \le l$ پر $f_2(t) = f(t)$ ہو گا۔ $f_2(t)$ کو $f(t)$ کی **طاق دوری توسیع**[25] کہتے ہیں۔شکل 12.11-پ میں طاق دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔مساوات 12.23 اور مساوات 12.24 میں $T = 2l$ لیتے ہوئے

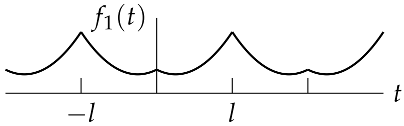
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \qquad (0 \le t \le l) \tag{12.33}$$

طاق فوریئر تسلسل حاصل ہو گی جس کی عددی سر

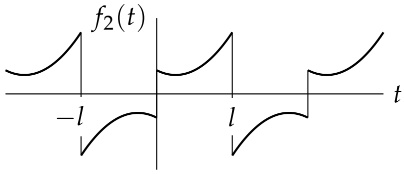
$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.34}$$



(الف) دیا گیا تفاعل $f(t)$



(ب) تفاعل $f(t)$ کی جفت دوری توسیع



(پ) تفاعل $f(t)$ کی طاق دوری توسیع

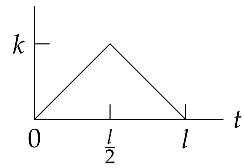
شکل 12.11: دوری توسیع

ہوں گے۔مساوات 12.32 اور مساوات 12.34 میں دی گئی عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.31 اور مساوات 12.33 کو دی گئی تفاعل $f(t)$ کی **نصف حلقہ اتساع**[26] کہتے ہیں۔

مثال 12.6: تکونی دھڑکن
درج ذیل تکونی دھڑکن کی نصف حلقہ اتساع کریں (شکل 12.12)۔

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l}t & 0 < t < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-t) & \frac{l}{2} < t < l \end{cases}$$

[24] even periodic extension
[25] odd periodic extension
[26] half range expansion



شکل 12.12: تکونی دھڑکن (مثال 12.6)

حل: مساوات 12.32 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\Big[\frac{2k}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} t \; \mathrm{d}t + \frac{2k}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l} (l-t) \; \mathrm{d}t\Big] = \frac{k}{2} \\
a_n &= \frac{2}{l}\Big[\frac{2k}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi}{l}t \; \mathrm{d}t + \frac{2k}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l} (l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t \; \mathrm{d}t\Big]
\end{aligned}
$$

تکمل بالحصص لیتے سے

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi}{l}t \; \mathrm{d}t &= \frac{lt}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}t\Big|_0^{\frac{l}{2}} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{l}{2}} \sin\frac{n\pi}{l}t \; \mathrm{d}t \\
&= \frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1)
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔اسی طرح تکمل بالحصص سے

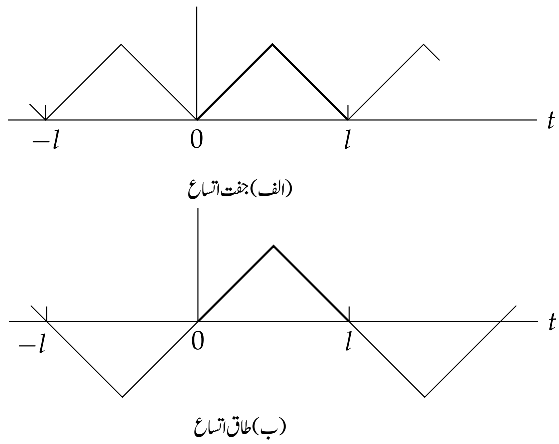
$$
\int_{\frac{l}{2}}^{l} (l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t \; \mathrm{d}t = -\frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2})
$$

ملتا ہے۔ان نتائج سے

$$
a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1)
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
&a_2 = -\frac{16k}{2^2\pi^2}, \quad a_6 = -\frac{16k}{6^2\pi^2}, \quad a_{10} = -\frac{16k}{10^2\pi^2}, \cdots \\
&a_n = 0, \quad n \neq 2, 6, 10, 14, \cdots
\end{aligned}
$$



شکل 12.13: تفاعل $f(t)$ کی دوری اتساع (مثال 12.6)

حاصل ہوتا ہے۔یوں تکونی دھڑکن $f(t)$ کی پہلی نصف حلقہ اتساع درج ذیل ہو گی جو $f(t)$ کی دوری جفت توسیع ہے (شکل 12.13-الف)۔

$$f(t)=\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{l}t+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{l}t+\cdots\right)$$

اسی طرح مساوات 12.34 سے

$$b_n=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

حاصل ہو گا جس سے $f(t)$ کی دوسری نصف حلقہ اتساع درج ذیل حاصل ہو گی جو $f(t)$ کی دوری طاق توسیع ہے (شکل 12.13-ب)۔

$$f(t)=\frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}t+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{l}t-+\cdots\right)$$

□

سوالات

سوال 12.96 تا سوال 12.103 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر سائن تسلسل حاصل کریں اور مطابقتی دوری طاق تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.96: $f(t)=t, \quad (0<t<\pi)$
جواب: $2\sin t-\sin 2t+\frac{2}{3}\sin 3t-\frac{1}{2}\sin 4t\cdots$

سوال 12.97: $f(t)=k, \quad (0<t<l)$
جواب: $\frac{4k}{\pi}(\sin\frac{\pi t}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{l}\cdots)$

سوال 12.98: $f(t)=1-t, \quad (0<t<1)$
جواب: $\frac{1}{\pi}(2\sin\pi t+\sin 2\pi t+\frac{2}{3}\sin 3\pi t\cdots)$

سوال 12.99: $f(t)=\cos t, \quad (0<t<\frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{8}{\pi}(\frac{1}{3}\sin 2t+\frac{2}{15}\sin 4t+\frac{3}{35}\sin 6t\cdots)$

سوال 12.100:

$$f(t)=\begin{cases} t & 0<t<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases}$$

جواب: $(1+\frac{2}{\pi})\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+(\frac{1}{3}-\frac{2}{9\pi})\sin 3t\cdots$

سوال 12.101:

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<1\\ 2-t & 1<t<2\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}[(1+\frac{2}{\pi})\sin\frac{\pi t}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi t+(\frac{1}{3}-\frac{2}{9\pi})\sin\frac{3\pi}{2}t\cdots]$

سوال 12.102:

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<1\\ 2 & 1<t<2\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}[3\sin\frac{\pi t}{2}-\sin\pi t+\sin\frac{3\pi t}{2}\cdots]$

سوال 12.103:

$$f(t)=\begin{cases}1-t & 0<t<1\\ 1 & 1<t<2\end{cases}$$

جواب: $(\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi^2})\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{1}{\pi}\sin\pi t+(\frac{4}{3\pi}+\frac{4}{9\pi^2})\sin\frac{3\pi t}{2}\cdots$

سوال 12.104 تا سوال 12.109 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر کوسائن تسلسل دریافت کریں اور مطابقتی دوری جفت تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.104: $f(t)=k, \quad (0<t<l)$
جواب: $f(t)=k$

سوال 12.105: $f(t)=t, \quad (0<t<l)$
جواب: $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}(\cos\frac{\pi t}{l}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi t}{l}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi t}{l}\cdots)$

سوال 12.106: $f(t)=t^2, \quad (0<t<l)$
جواب: $\frac{l^2}{3}-\frac{l^2}{\pi^2}(4\cos\frac{\pi t}{l}-\cos\frac{2\pi t}{l}+\frac{4}{9}\cos\frac{3\pi t}{l}\cdots)$

سوال 12.107: $f(t)=\sin t, \quad (0<t<\frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t+\frac{1}{15}\cos 4t+\frac{1}{35}\cos 6t\cdots)$

سوال 12.108: $f(t)=\cos t, \quad (0<t<\frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{15}\cos 4t+\frac{1}{35}\cos 6t-+\cdots)$

سوال 12.109: $f(t)=e^t, \quad (0<t<1)$
جواب: $e-1-\frac{2}{\pi^2+1}(e+1)\cos\pi t+\frac{2}{4\pi^2+1}(e-1)\cos 2\pi t\cdots$

سوال 12.110: (فوریئر تسلسل کی مخلوط صورت، مخلوط فوریئر عددی سر)
کلیہ یولر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}), \quad \sin nx=\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے فوریئر تسلسل

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_b \sin nx)$$

کو

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}) \tag{12.35}$$

لکھیں جہاں $c_0 = a_0$ ، $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ، $k_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ ، $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔ مساوات 12.9 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x, \quad k_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

علامت k_n کی جگہ علامت c_{-n} لکھتے ہوئے مساوات 12.35 کو درج ذیل صورت میں لکھیں۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots \tag{12.36}$$

اس کو **مخلوط فوریئر تسلسل**[27] کہتے ہیں جہاں c_n کو $f(x)$ کی **مخلوط فوریئر عددی سر**[28] کہتے ہیں۔

سوال 12.111: ثابت کریں کہ جفت تفاعل کی مخلوط فوریئر عددی سر حقیقی ہوں گے جبکہ طاق تفاعل کی فوریئر عددی سر خالص خیالی ہوں گے۔

سوال 12.112 تا سوال 12.115 میں دوری عرصہ 2π کی دی گئی تفاعل $f(x)$ کی مخلوط فوریئر تسلسل دریافت کریں۔ مخلوط فوریئر تسلسل سے حقیقی فوریئر تسلسل حاصل کرتے ہوئے گزشتہ حاصل کردہ تسلسل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.112: (سوال 12.65) $(-\pi < x < \pi)$ $f(x) = |x|$

جواب: $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{-2e^{inx}}{\pi n^2}$

---

[27] complex Fourier series

[28] complex Fourier coefficients

سوال 12.113: (سوال 12.66) $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

جواب: $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n e^{inx}}{n}$

سوال 12.114: (سوال 12.67) $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$

جواب: $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n e^{inx}}{n^2}$

سوال 12.115: (سوال 12.69) $f(x) = e^x \quad (-\pi < x < \pi)$

جواب: $\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$

12.6 فوریئر عددی سر کا بغیر تکمل حصول

آپ نے دیکھا کہ بعض اوقات پیچیدہ تکملات حل کرنے کے بعد نسبتاً سادہ فوریئر عددی سر a_n اور b_n حاصل ہوتے ہیں۔اس سے سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا عددی سر حاصل کرنے کا کوئی آسان طریقہ بھی ہے؟ جس کا جواب ہے، "جی ہاں"۔ ہم یہاں ثابت کرتے ہیں کہ دوری کثیر رکنی تفاعل کی فوریئر عددی سر تفاعل کی اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگ سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یوں بغیر کوئی تکمل حل کرتے ہوئے a_n اور b_n حاصل کیے جائیں گے (ماسوائے a_0 ، جس کو اب بھی تکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $g(x)$ کی **چھلانگ**[29] j سے مراد x_0 پر $g(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد میں فرق ہے (حصہ 12.2) یعنی:

$$j = g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0) \tag{12.37}$$

یوں اوپر کو چھلانگ مثبت چھلانگ ہو گی جبکہ نیچے کو چھلانگ منفی چھلانگ ہو گی (شکل 12.14)۔

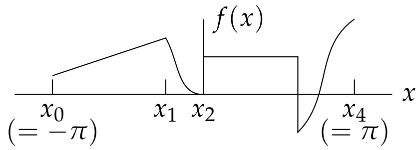
فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا عددی عرصہ 2π ہے کو وقفہ $-\pi < x < \pi$ میں کثیر رکنی p_1 ، $\cdots$ ، p_m سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (مثلاً شکل 12.15)۔

---

[29] jump

(ب) منفی چھلانگ (الف) مثبت چھلانگ

شکل 12.14: تفاعل کی چھلانگ



شکل 12.15: کثیر رکنی روپ کی مثال (مساوات 12.38) جہاں $m = 4$ ہے

$$f(x) = \begin{cases} p_1(x) & x_0 < x < x_1, \quad (x_0 = -\pi) \\ p_2(x) & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \\ p_3(x) & x_{m-1} < x < x_m \quad (x_m = \pi) \end{cases} \tag{12.38}$$

یوں x_0 ، $\cdots$ ، x_m پر تفاعل f کی چھلانگ اور اس کی تفرق f' ، f'' ، $\cdots$ کی چھلانگ ہو سکتی ہیں جنہیں ہم درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

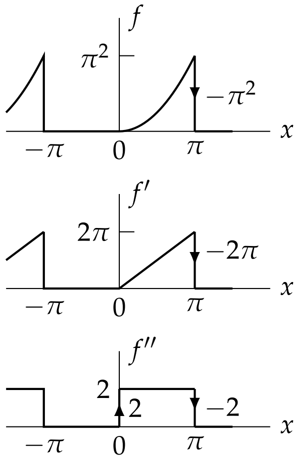
$$\begin{aligned} j_s &= x_s \text{ پر } f \text{ کی چھلانگ} \\ j'_s &= x_s \text{ پر } f' \text{ کی چھلانگ} \\ j''_s &= x_s \text{ پر } f'' \text{ کی چھلانگ} \qquad (s = 1, 2, \cdots, m) \\ &\vdots \\ j^n_s &= x_s \text{ پر } f^{(n)} \text{ کی چھلانگ} \end{aligned} \tag{12.39}$$

ظاہر ہے کہ اگر x_s پر f استمراری ہو تب x_s پر $j_s = 0$ ہو گا۔ایسا ہی f' ، f'' ، $\cdots$ کے لئے بھی کہا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 12.39 میں کئی j_s ، j'_s ، $\cdots$ صفر قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

مثال 12.7: تفاعل کی چھلانگ اور اس کی تفرق کی چھلانگیں

جدول 12.1: مثال 12.7 کی چھلانگیں

	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	$x_2 = \pi$ پر چھلانگ
f	$j_1 = 0$	$j_2 = -\pi^2$
f'	$j_1' = 0$	$j_2' = -2\pi$
f''	$j_1'' = 2$	$j_2'' = -2$



شکل 12.16: تفاعل اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگیں (مثال 12.7)

تفاعل $f(x)$

$$f = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

اور اس کی تفرقات f' ، f'' ، $\cdots$

$$f' = \begin{cases} 0 \\ 2x \end{cases} \qquad f'' = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \qquad f''' = 0$$

کی ترسیم شکل 12.16 میں کھینچی گئی ہیں اور ان کی چھلانگیں جدول 12.1 میں دی گئی ہیں۔

یاد رہے کہ وقفہ کی ابتدا $x = -\pi$ پر چھلانگیں شمار نہیں کیے جاتے ہیں۔انہیں دوری وقفہ کی اختتام $x = \pi$ پر شمار کیا جاتا ہے۔ایک ہی وقفہ پر انہیں دو مرتبہ نہیں گیا جائے گا۔ $\square$

مساوات 12.38 میں دی گئی تفاعل f کی فوریئر عددی سر a_1 ، a_2 ، . . . حاصل کرنے کی خاطر ہم یولر مساوات 12.9-ب استعمال کرتے ہیں۔

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx \; \mathrm{d}x \tag{12.40}$$

چونکہ f کو مساوات 12.38 ظاہر کرتی ہے للہذا ہمیں m عدد تکمل کا مجموعہ

$$\pi a_n = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} = \sum_{s=1}^{m} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \; \mathrm{d}x \tag{12.41}$$

لکھنا ہو گا جہاں $x_0 = -\pi$ اور $x_m = \pi$ ہیں۔ تکمل بالحصص لیتے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \; \mathrm{d}x = \frac{f}{n} \sin nx \bigg|_{x_{s-1}}^{x_s} - \frac{1}{n} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \; \mathrm{d}x \tag{12.42}$$

اب بائیں ہاتھ پہلی جزو میں نقطہ x_s پر تفاعل $f(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ایسا ہونے کی صورت میں x_s پر تفاعل کی بائیں ہاتھ حد $f(x_s - 0)$ لینی ہو گی۔اسی طرح x_{s-1} پر غیر استمراری $f(x)$ کی صورت میں تفاعل کی دائیں ہاتھ حد $f(x_{s-1} + 0)$ لینی ہو گی۔یوں مساوات 12.42 کا دائیں ہاتھ پہلی جزو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{n}[f(x_s - 0) \sin nx_s - f(x_{s-1} + 0) \sin nx_{s-1}]$$

اب مساوات 12.42 کو مساوات 12.41 میں پر کرتے ہوئے اور چھوٹی علامتیں $S_0 = \sin nx_0$ ، $S_1 = \sin nx_1$ ، . . . استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \pi a_n = \frac{1}{n}[f(x_1 - 0)S_1 - f(x_0 + 0)S_0 + f(x_2 - 0)S_2 - f(x_1 + 0)S_1 \\ + \cdots + f(x_m - 0)S_m - f(x_{m-1} + 0)S_{m-1}] \\ - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{m} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \; \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{12.43}$$

ملتا ہے۔قوسین میں بند یکساں S کے ارکان اکٹھا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} - f(x_0 + 0)S_0 + [f(x_1 - 0) - f(x_1 + 0)]S_1 \\ + [f(x_2 - 0) - f(x_2 + 0)]S_2 + \cdots + f(x_m - 0)S_m \end{aligned} \tag{12.44}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 12.44 میں ہر چکور قوسین میں بند قیمت f کی چھلانگ ضرب -1 کے برابر ہے۔ مزید چونکہ f دوری ہے لہٰذا $S_0 = S_m$ اور $f(x_0) = f(x_m)$ ہوں گے لہٰذا مساوات 12.44 کے پہلے اور آخری رکن کو ملا کر $[f(x_m - 0) - f(x_m + 0)]S_m$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 12.44 درج ذیل ہو گا

$$-j_1 S_1 - j_2 S_2 - \cdots - j_m S_m$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.43 کو

$$\pi a_n = -\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s \sin nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, \mathrm{d}x \tag{12.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہی ترکیب دائیں ہاتھ کی تکمل پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \cos nx_s + \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f'' \cos nx \, \mathrm{d}x \tag{12.46}$$

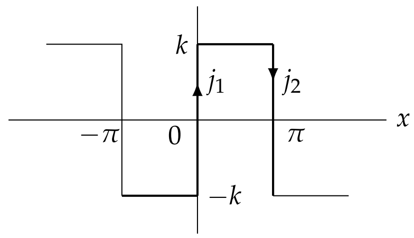
ایسا بار بار کرتے ہوئے ہمیں تکمل کے اندر f کا بتدریج زیادہ درجے کا تفرق حاصل ہو گا۔ اب چونکہ f کو کثیر رکنی ظاہر کرتی ہیں اور درجہ r کثیر رکنی کا درجہ $r+1$ تفرق صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا آخر کار کوئی تکمل باقی نہ رہے گا۔ تکمل پر محدود مرتبہ یہ عمل کرنے سے ایسا ہو گا۔ مساوات 12.46 اور اس عمل کے دہرانے سے حاصل نتائج کو مساوات 12.45 میں پر کرتے ہوئے درکار کلیہ

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n\pi}\Big[-\sum_{s=1}^{m} j_s \sin nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \cos nx_s] \\ + \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \sin nx_s + \frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \cos nx_s - - + + \cdots \Big] \end{aligned} \tag{12.47}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے (اور a_0 کو پہلی کی طرح تکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔ بالکل اسی طرح یولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے b_n کا کلیہ

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{n\pi}\Big[\sum_{s=1}^{m} j_s \cos nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \sin nx_s] \\ - \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \cos nx_s + \frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \sin nx_s + - - + + \cdots \Big] \end{aligned} \tag{12.48}$$

حاصل ہو گا۔



شکل 12.17: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

غلطیوں سے بچنے کی خاطر $f(x)$ اور اس کی تفرقات کی ترسیم کھینچ کر چھلانگوں کو (مثال 12.7 کی طرح) جدول میں لکھنا سود مند ثابت ہوتا ہے۔

مثال 12.8: دوری چکور موج
دوری چکور موج $f(x)$ کی فوریئر عددی سر دریافت کریں (شکل 12.17)۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل: چونکہ $f' = 0$ ہے لٰہذا صرف f کی چھلانگیں پائی جاتی ہیں۔ یہ چھلانگیں جدول 12.2 میں دی گئی ہیں۔

جدول 12.2: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	$x_2 = \pi$ پر چھلانگ
f	$j_1 = 2k$	$j_2 = -2k$

f طاق ہے لٰہذا مساوات 12.48 سے فوریئر عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi}[j_1 \cos nx_1 + j_2 \cos nx_2] = \frac{1}{n\pi}[2k\cos 0 - 2k\cos n\pi] \\ &= \frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases} \qquad (\text{مثال 12.1 دیکھیں}) \end{aligned}$$

□

مثال 12.9: مثال 12.7 میں دی گئی تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔
حل: تکمل سے a_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$$

مساوات 12.47 سے

$$a_n = \frac{1}{n\pi}[\pi^2 \sin n\pi + \frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(2\sin 0 - 2\sin n\pi)] = \frac{2}{n^2}\cos n\pi$$

یعنی $a_1 = -\frac{2}{1^2}$ ، $a_2 = \frac{2}{2^2}$ ، $a_3 = -\frac{2}{3^2}$ ، $\cdots$ ملتے ہیں۔مساوات 12.48 سے

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi}[-\pi^2 \cos n\pi + \frac{2\pi}{n}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}(2\cos 0 - 2\cos n\pi)] \\ &= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

یعنی

$$b_1 = \pi - \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad b_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3^2\pi}, \quad b_4 = -\frac{\pi}{4}, \cdots$$

ملتے ہیں۔یوں فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\cos x + (\pi - \frac{4}{\pi})\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \cdots$$

□

سوالات

سوال 12.116: مثال 12.9 کو عمومی طریقہ سے حل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ عمومی طریقہ بہت لمبا ہو گا۔

سوال 12.117: یولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.48 حاصل کریں۔

سوال 12.118: ثابت کریں کہ T دوری عرصہ کی تفاعل کے لئے مساوات 12.47 اور مساوات 12.48 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\Big[-\sum_{s=1}^{m} j_s \sin K_n t_s - \frac{1}{K_n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \cos K_n t_s \qquad (K_n = \frac{2n\pi}{T})$$
$$+\frac{1}{K_n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \sin K_n t_s + \frac{1}{K_n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \cos K_n t_s - - + + \cdots\Big] \tag{12.49}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\Big[\sum_{s=1}^{m} j_s \cos K_n t_s - \frac{1}{K_n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \sin K_n t_s$$
$$-\frac{1}{K_n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \cos K_n t_s + \frac{1}{K_n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \sin K_n t_s + - - + + \cdots\Big] \tag{12.50}$$

سوال 12.119 تا سوال 12.122 میں فوریئر تسلسل کو مساوات 12.47 تا مساوات 12.50 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.119: سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.120: سوال 12.32 تا سوال 12.35

سوال 12.121: سوال 12.54 تا سوال 12.57

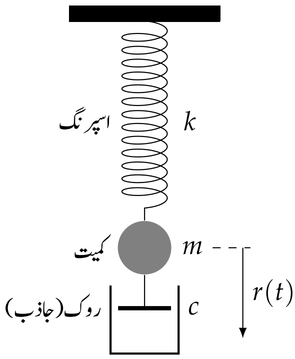
سوال 12.122: سوال 12.59 تا سوال 12.61

سوال 12.123 تا سوال 12.126 کی فوریئر سائن تسلسل کو مساوات 12.47 تا مساوات 12.50 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.123: $f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad (0 < x < \pi)$
جواب: $(2\pi - \frac{4}{\pi} + 4)\sin x - (2+\pi)\sin 2x + (\frac{2}{3} + \frac{28}{27\pi} + \frac{4}{3})\sin 3x \cdots$

سوال 12.124: $f(x) = x^3 \quad (0 < x < 1)$
جواب: $\frac{2}{\pi^3}(\pi^2 - 6)\sin \pi x - \frac{(4\pi^2-6)}{4\pi^3}\sin 2\pi x + \frac{2(9\pi^2-6)}{27\pi^3}\sin 3\pi x \cdots$

سوال 12.125: $f(x) = x(1-x) \quad (0 < x < 1)$
جواب: $\frac{8}{\pi^3}(\sin \pi t + \frac{1}{3^3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5^3}\sin 5\pi t + \cdots)$



شکل 12.18: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

سوال 12.126: $(0 < x < 1) \quad f(x) = x(x^2 - 1)$
جواب: $\frac{1}{\pi^3}(-12\sin\pi t + \frac{3}{2}\sin 2\pi t - \frac{4}{9}\sin 3\pi t + \frac{3}{16}\sin 4\pi t \cdots)$

سوال 12.127: تفاعل $(0 < x < l) \quad f(x) = x^3,$ کی فوریئر کوسائن تسلسل کو مساوات 12.49 کی مدد سے حاصل کریں۔
جواب: $\frac{l^3}{4} + l^3(\frac{24}{\pi^4} - \frac{6}{\pi^2})\cos\frac{\pi t}{l} + \frac{3l^3}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{l} \cdots$

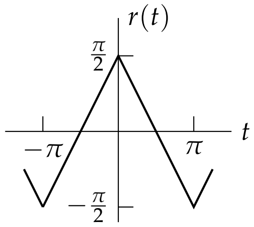
12.7 جبری ارتعاش

تفرقی مساوات میں فوریئر تسلسل اہم ثابت ہوتے ہیں۔آئیں ایک اہم عملی مسئلہ پر غور کریں جس کی سادہ تفرقی مساوات پائی جاتی ہے۔ (جزوی تفرقی مساوات والے مسائل پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔)

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ اسپرنگ کے ساتھ جڑی ہوئی کمیت m (شکل 12.18) کی جبری ارتعاش کی سادہ تفرقی مساوات

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t) \tag{12.51}$$

ہے جہاں c تقصیری مستقل اور k مقیاس لچک ہے۔بیرونی قوت سائن یا کوسائن تفاعل ہونے اور غیر صفر تقصیری مستقل کی صورت میں برقرار حالت ہارمونی ارتعاش پیدا ہو گی جس کی تعدد بیرونی قوت کی تعدد ہو گی۔



شکل 12.19: تکونی قوت (مثال 12.10)

ایسی قوت $r(t)$ جو نہ خالص سائن تفاعل ہو اور نہ ہی خالص کوسائن تفاعل ہو بلکہ کسی اور شکل کی دوری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم دیکھیں گے کہ برقرار حالت حل کئی ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہو گا جس میں $r(t)$ کی تعدد اور اس کی مضرب تعدد پائی جائیں گی۔ اگر ان تمام تعدد میں سے کوئی تعدد، نظام کی قدرتی تعدد کے قریب ہو تب عین ممکن ہے کہ، بیرونی قوت کی رد عمل میں، نظام کی حرکت میں اسی تعدد کا حصہ غالب ہو گا۔ ہارمونی ارتعاش اور گمک کے بارے میں نہ جانتے ہوئے یہ عمل حیرت انگیز ثابت ہو گا۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

مثال 12.10: غیر سائن نما جبری قوت سے پیدا ارتعاش

مساوات 12.51 میں $m = 1\,\mathrm{kg}$ ، $k = 25\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$ ، $c = 0.02\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لینے سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $r(t)$ کی اکائی $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ ہو گی۔

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = r(t) \tag{12.52}$$

اب فرض کریں کہ جبری قوت $r(t)$ درج ذیل ہے جس کو شکل 12.19 میں دکھایا گیا ہے۔ برقرار حالت حل دریافت کریں۔

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t)$$

حل: ہم $r(t)$ کو فوریئر کوسائن تسلسل

$$r(t) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt = \frac{4}{\pi}\Big(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\Big) \tag{12.53}$$

سے ظاہر کرتے ہیں۔ اب ہم درج ذیل تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جس کا دایاں ہاتھ فوریئر تسلسل (مساوات 12.53) کا ایک رکن ہے۔

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \qquad (n = 1, 23, \cdots) \tag{12.54}$$

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ درج بالا تفرقی مساوات کا برقرار حالت حل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt \tag{12.55}$$

مساوات 12.55 کو مساوات 12.54 میں پر کرتے ہوئے

$$A_n = \frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D}, \quad B_n = \frac{0.08}{n\pi D}, \qquad D = (25-n^2)^2 + (0.02n)^2 \tag{12.56}$$

ملتا ہے۔چونکہ تفرقی مساوات 12.52 خطی ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس کا برقرار حالت حل

$$y = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots \tag{12.57}$$

ہو گا جہاں مساوات 12.55 y_n دیتی ہے۔

مساوات 12.56 سے مساوات 12.55 کا حیطہ

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{A}{n^2\pi\sqrt{D}}$$

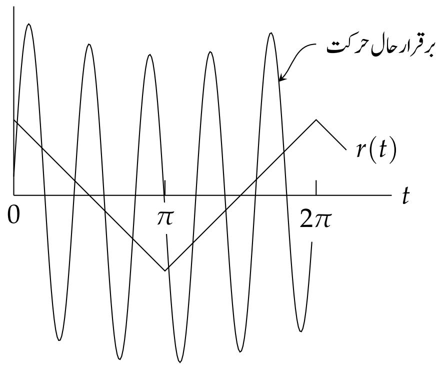
حاصل ہوتا ہے جس کی چند اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.0530 \\ C_3 &= 0.0088 \\ C_5 &= 0.5100 \\ C_7 &= 0.0011 \\ C_9 &= 0.0003 \end{aligned}$$

$n = 5$ پر D کی قیمت نہایت کم ملتی ہے جس سے C_5 کی قیمت اتنی زیادہ حاصل ہوتی ہے کہ مساوات 12.57 میں y_5 غالب جزو ہے۔ یوں برقرار حالت حرکت تقریباً ہارمونی ہو گا جس کی تعدد جبری قوت کی تعدد کی پانچ گنا ہے (شکل 12.20)۔ □

سوالات

سوال 12.128 تا سوال 12.128 میں تفرقی مساوات $\ddot{y} + \omega^2 2.0 = r(t)$ کی عمومی حل دریافت کریں۔



شکل 12.20: داخلی قوت اور برقرار حالت ردعمل (مثال 12.10)

سوال 12.128: $r(t) = \sin t, \quad \omega = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10$
جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A(\omega) \sin t, \quad A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 1}$
$A(0.5) = -1.33, A(0.7) = -0.2, A(0.9) = -5.3, A(1.1) = 4.8, A(1.5) = 0.8,$
$A(2) = 0.33, A(10) = 0.01$

سوال 12.129: $r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t, \quad (\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2)$
جواب: $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{(\omega^2 - \alpha^2) \cos \beta t + (\omega^2 - \beta^2) \cos \alpha t}{\omega^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\omega^2 + \alpha^2 \beta^2}$

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)}\quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)}\quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

$\square$

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

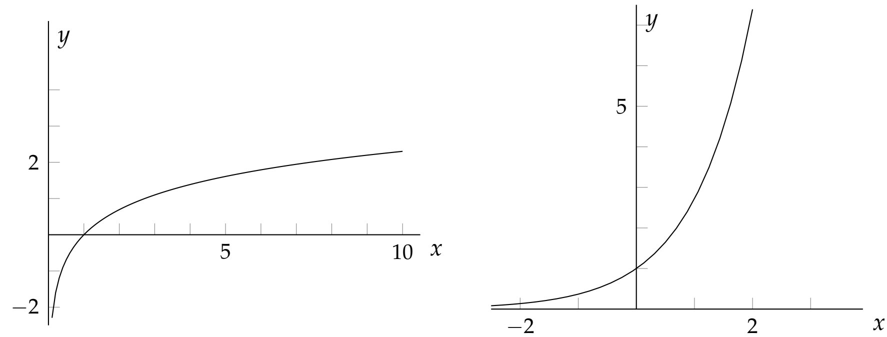
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

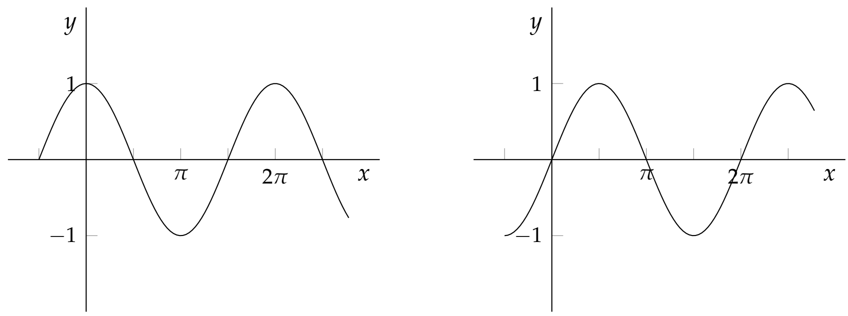
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$

(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئین میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943 \text{ rad}$$
$$1 \text{ radian} = 57^\circ\, 17'\, 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{5.ب}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

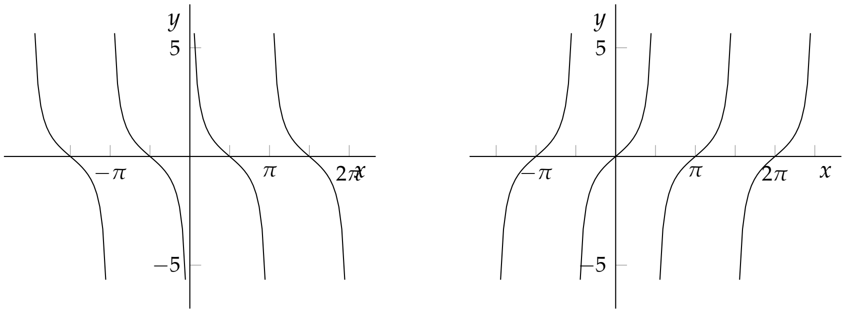
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



$\tan x$ (الف) $\cot x$ (ب)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

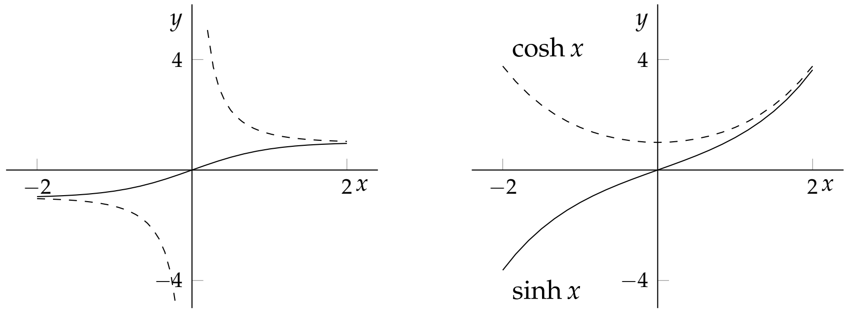
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

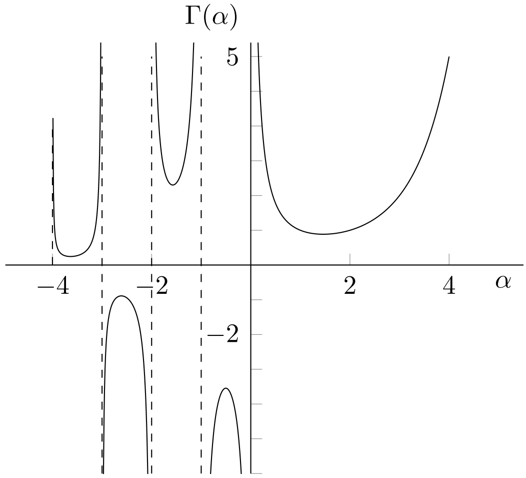
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

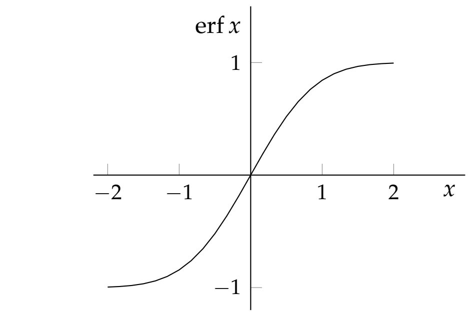
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

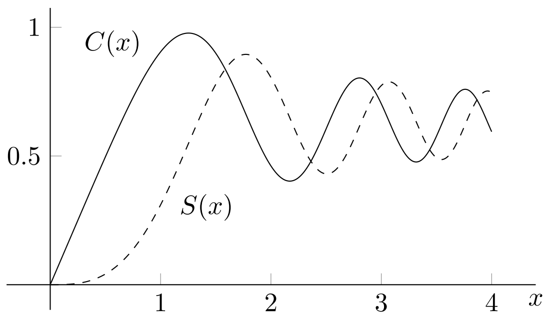
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{C}(x)=\int_x^{\infty}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$$\mathrm{s}(x)=\frac{\pi}{8}-\mathrm{S}(x)=\int_x^{\infty}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

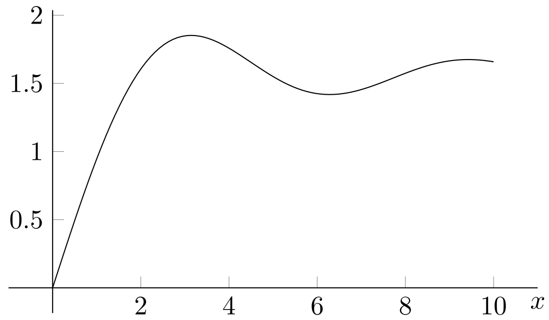
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\operatorname{Si}(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.41}$$

$\operatorname{Si}\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\operatorname{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si}(x)=\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$