

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v میری پہلی کتاب کا بیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کثی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 یولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کثی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

- 3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات . . . . . 214
- 3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل . . . . . 217

- 4 نظام تفرقی مساوات
- 4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق . . . . . 225
- 4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے . . . . . 226
- 4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی . . . . . 235
- 4.3.1 خطی نظام . . . . . 250
- 4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب . . . . . 251
- 4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام . . . . . 254
- 4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام . . . . . 272
- 4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ . . . . . 281
- 4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام . . . . . 290
- 4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب . . . . . 298
- 299

- 5 طاقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
- 5.1 ترکیب طاقی تسلسل . . . . . 309
- 5.2 لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کثیر رکنی . . . . . 310
- 5.3 مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس . . . . . 325
- 5.3.1 عملی استعمال . . . . . 343
- 5.4 مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل . . . . . 348
- 5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل . . . . . 362
- 377

- 6 لاپلاس تبادلہ
- 6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت . . . . . 385
- 6.2 تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات . . . . . 386
- 6.3  $s$  محور پر منتقلی،  $t$  محور پر منتقلی، اکائی میٹرھی تفاعل . . . . . 395
- 6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ . . . . . 408
- 6.5 الجھاؤ . . . . . 429
- 6.6 لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات . . . . . 447
- 6.7 تفرقی مساوات کے نظام . . . . . 456
- 465

- ا اضافی ثبوت
- ب مفید معلومات
- ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات . . . . . 377
- 381
- 381

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 6.7 تفرقی مساوات کے نظام

لاپلاس بدل سے سادہ تفرقی مساوات کا نظام بھی حل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب کو چند مثالوں کی مدد سے دیکھتے ہیں۔ انہیں سب سے پہلے مستقل عددی سروالے خطی، ایک درجی سادہ تفرقی مساوات [حصہ 4.1 دیکھیں۔] کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(t) \end{aligned} \quad (6.57)$$

پر غور کریں۔  $\mathcal{L}(y_1) = Y_1$  ،  $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$  ،  $\mathcal{L}(g_1) = G_1$  اور  $\mathcal{L}(g_2) = G_2$  لکھتے ہوئے ضمنی نظام

$$\begin{aligned} sY_1 - y_1(0) &= a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + G_1(s) \\ sY_2 - y_2(0) &= a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + G_2(s) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)Y_1 + a_{12}Y_2 &= -y_1(0) - G_1(s) \\ a_{21}Y_1 + (a_{22} - s)Y_2 &= -y_2(0) - G_2(s) \end{aligned} \quad (6.58)$$

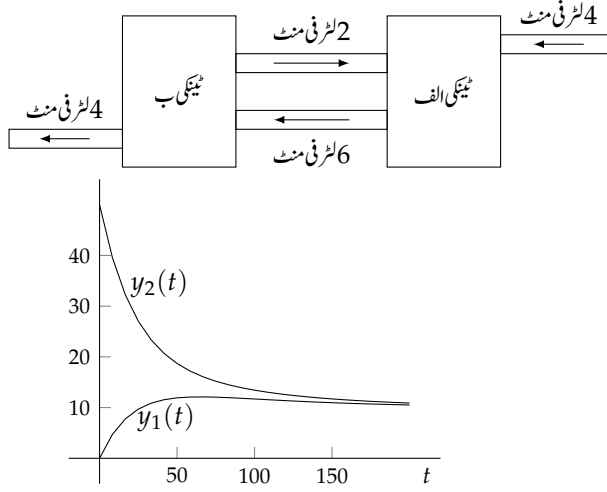
اس نظام کو الجبرائی طور پر حل کر کے  $Y_1$  اور  $Y_2$  حاصل ہوں گے جن سے  $y_1 = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)]$  اور  $y_2 = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$  ملتا ہے جو نظام کا حل ہے۔

نظام 6.58 اور نظام 6.58 کو سمتیہ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$  ،  $\mathbf{A} = [a_{jk}]$  ،  $\mathbf{G} = [g_1 \ g_2]^T$  اور  $\mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2]^T$  لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} \quad \text{اور} \quad (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{y} = -\mathbf{y}(0) - \mathbf{G}$$

مثال 6.44: مرکب تیار کرنے والا دو ٹینکیوں کا نظام

شکل 6.27 میں دو ٹینکیوں کا نظام دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی طور پر ٹینکی-الف میں دو سولٹر (2001) خالص پانی جبکہ ٹینکی-ب میں پچاس کلوگرام (50 kg) نمک ملا دو سولٹر پانی پایا جاتا ہے۔ نظام کے باہر سے ٹینکی-الف میں پانی کا



شکل 6.27: مثال 6.44 میں ٹینکیوں کا نظام۔

داخلی بہاو چار لٹر فی منٹ ہے جس میں نمک کی شرح  $\frac{1}{20}$  کلو گرام فی لٹر ( $0.05 \text{ kg l}^{-1}$ ) ہے۔ ٹینکیوں میں نمک کی مقدار بالمتقابل وقت  $y_1(t)$  اور  $y_2(t)$  دریافت کریں۔

حل: نظام کا نمونہ درج ذیل مساوات سے لکھا جائے گا (حصہ 4.1 دیکھیں)۔

خارجی بہاو فی منٹ - داخلی بہاو فی منٹ = تبدیلی کی شرح

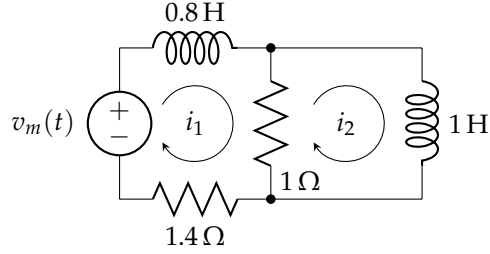
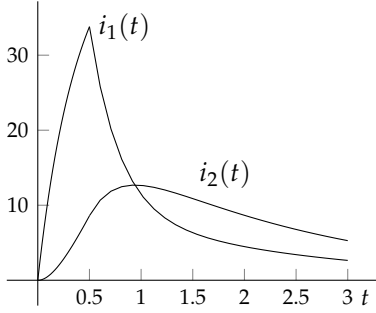
یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں ابتدائی معلومات  $y_1(0) = 0$  اور  $y_2(0) = 50$  ہیں۔

$$y_1' = -\frac{6}{200}y_1 + \frac{2}{200}y_2 + 4(0.05) \quad y_2' = \frac{6}{200}y_1 - \frac{2}{200}y_2 - \frac{4}{200}y_2$$

اس طرح ضمنی نظام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} -(0.03 + s)Y_1 + 0.01Y_2 &= -\frac{0.2}{s} \\ 0.03Y_1 - (0.03 + s)Y_2 &= -50 \end{aligned}$$





شکل 6.28: مثال 6.45 کا دور اور اس کی برقی رو۔

ضمنی نظام کے دو عدد ہمزا مساوات کو الجبرائی طور پر حل کرتے ہوئے  $Y_1$  اور  $Y_2$  حاصل کرتے ہیں۔

$$Y_1 = \frac{3500s + 30}{5000s^2 + 300s + 3} = \frac{10}{s} + \frac{6.56}{s + 0.0127} - \frac{16.56}{s + 0.0473}$$

$$Y_2 = \frac{250000s^2 + 7500s + 30}{5000s^2 + 300s + 3} = \frac{10}{s} + \frac{11.33}{s + 0.0127} + \frac{28.67}{s + 0.0473}$$

ان کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں جو نظام کا حل ہے۔

$$y_1(t) = 10 + 6.56e^{-0.0127t} - 16.56e^{-0.0473t}$$

$$y_2(t) = 10 + 11.33e^{-0.0127t} + 28.67e^{-0.0473t}$$

مثال 6.45: برقی دور

برقی دور کو شکل 6.28 میں دکھایا گیا ہے۔ منبع کا دباؤ  $v_m(t)$  وقت  $t = 0$  تا  $t = 0.5$  سیکنڈ کے لئے 100 وولٹ ہے جبکہ بقیہ اوقات اس کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ رو  $i_1(t)$  اور  $i_2(t)$  دریافت کریں۔

حل: کرخوف قانون دباؤ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$0.8i_1' + 1(i_1 - i_2) + 1.4i_1 = 100[1 - u(t - 1)]$$

$$1(i_2 - i_1) + 1i_2' = 0$$

ابتدائی معلومات  $i_1(0) = 0$  اور  $i_2(0) = 0$  استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.5 اور منتقلی کے دوسرے مسئلے کی مدد سے ضمنی نظام حاصل کرتے ہیں

$$(s+3)I_1 - 1.25I_2 = \frac{125}{s}(1 - e^{-\frac{s}{2}})$$

$$-I_1 + (s+1)I_2 = 0$$

جس کا الجبرائی حل درج ذیل ہے۔

$$I_1 = \frac{125(s+1)}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1 - e^{-\frac{s}{2}})$$

$$I_2 = \frac{125}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1 - e^{-\frac{s}{2}})$$

دائیں اطراف جزو  $1 - e^{-\frac{1}{2}}$  کے علاوہ حصے کے جزوی کسری پھیلاؤ درج ذیل ہیں

$$\frac{500}{7s} - \frac{125}{3(s+\frac{1}{2})} - \frac{625}{21(s+\frac{7}{2})}$$

$$\frac{500}{7s} - \frac{250}{3(s+\frac{1}{2})} + \frac{250}{21(s+\frac{7}{2})}$$

جن کا الٹ لاپلاس بدل  $t = 0$  تا  $t = \frac{1}{2}$  کا حل دیتے ہیں۔

$$i_1(t) = \frac{500}{7} - \frac{125}{3}e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{625}{21}e^{-\frac{7}{2}t}$$

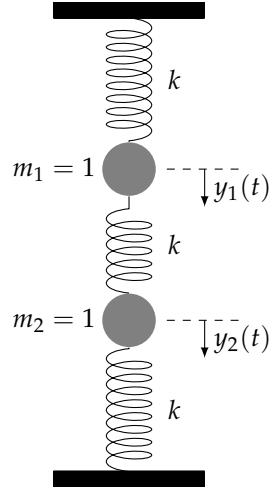
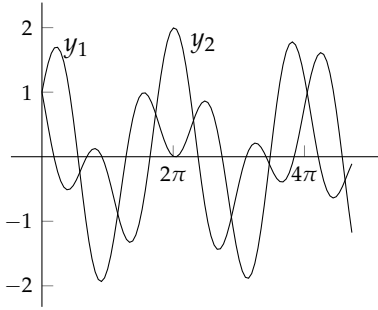
$$i_2(t) = \frac{500}{7} - \frac{250}{3}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{250}{21}e^{-\frac{7}{2}t} \quad (0 \leq t \leq \frac{1}{2})$$

منتقلی کے دوسرے مسئلے کے تحت  $t < \frac{1}{2}$  کے لئے حل درج ذیل ہو گا۔ رو کو شکل 6.28 میں دکھایا گیا ہے۔

$$i_1(t) = -\frac{125}{3}(1 - e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}} - \frac{625}{21}(1 - e^{\frac{7}{4}})e^{-\frac{7}{2}t}$$

$$i_2(t) = -\frac{250}{3}(1 - e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}} + \frac{250}{21}(1 - e^{\frac{7}{4}})e^{-\frac{7}{2}t} \quad (t > \frac{1}{2})$$

کیا آپ بتلا سکتے ہیں کہ آخر کار دونوں روصفر کیوں ہو گی؟



شکل 6.29: اسپرنگ اور کمیت کا نظام (مثال 6.46)۔

بلند درجی تفرقی مساوات کے نظام کو بھی اسی طرح لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔ آئیں اسپرنگ اور کمیت کا ایک ایسا نظام حل کریں۔

مثال 6.46: دو عدد کمیت اور تین عدد اسپرنگ کا نظام شکل 6.29 میں دکھایا گیا ہے۔ قسری قوت صفر کے برابر ہے۔ ساکن حال سے نیچے کی جانب فاصلہ  $y_1(t)$  اور  $y_2(t)$  مثبت تصور کیا گیا ہے۔ ابتدائی معلومات  $y_1(0) = 1$  ،  $y_2(0) = 1$  ،  $y_1'(0) = \sqrt{3k}$  اور  $y_2'(0) = -\sqrt{3k}$  ہیں۔ مسئلہ حل کریں۔

حل: نیوٹن کا کلیہ کہتا ہے کہ کمیت ضرب اسراع برابر ہے قوت کے۔ یوں بالائی اور نچلے کمیت کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y_1'' &= -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\ y_2'' &= -k(y_2 - y_1) - ky_2 \end{aligned}$$

کمیت  $m_1$  پر بالائی اسپرنگ کی بنا  $-ky_1$  قوت عمل کرتا ہے جبکہ درمیانی اسپرنگ کی بنا اس پر  $k(y_2 - y_1)$  قوت عمل کرتا ہے۔ درمیانی اسپرنگ کی لمبائی میں کل اضافہ  $y_2 - y_1$  کے برابر ہے۔ کمیت  $m_2$  پر درمیانی اسپرنگ کی بنا  $-k(y_2 - y_1)$  قوت عمل کرتا ہے جبکہ نچلی اسپرنگ کی بنا اس پر  $-ky_2$  قوت عمل کرتا ہے۔

ضمنی مساوات لکھتے ہیں  $\mathcal{L}(y_1) = Y_1$  اور  $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$  لکھتے ہوئے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.6 کی مدد سے

$$s^2 Y_1 - s - \sqrt{3k} = -k Y_1 + k(Y_2 - Y_1)$$

$$s^2 Y_2 - s + \sqrt{3k} = -k(Y_2 - Y_1) - k Y_2$$

جن کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(s^2 + 2k)Y_1 - kY_2 = s + \sqrt{3k}$$

$$-kY_1 + (s^2 + 2k)Y_2 = s - \sqrt{3k}$$

ان ہمزاد مساوات کا الجبرائی حل لکھتے ہیں۔

$$Y_1 = \frac{(s + \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s - \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{s}{s^2 + k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}$$

$$Y_2 = \frac{(s - \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s + \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{s}{s^2 + k} - \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں

$$y_1(t) = \cos \sqrt{k}t + \sin \sqrt{3k}t$$

$$y_2(t) = \cos \sqrt{k}t - \sin \sqrt{3k}t$$

جس کو شکل 6.29 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حرکت دو ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔



- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.