

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
113	2.3 تفرقی عامل	2.3
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
134	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	2.6
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	2.8.1
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	3.1
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	3.2

3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	214
3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	217
4	نظام تفرقی مساوات	225
4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	226
4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	235
4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	250
4.3.1	خطی نظام	251
4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	254
4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام	272
4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام	281
4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ	290
4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	298
4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب	299
5	طاقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	309
5.1	ترکیب طاقی تسلسل	310
5.2	لیٹرنڈر مساوات۔ لیٹرنڈر کثیر رکنی	325
5.3	مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس	343
5.3.1	عملی استعمال	348
5.4	مساوات بیسل اور بیسل تفاعل	362
5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	377
6	لاپلاس متبادلہ	385
6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	386
6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	395
6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیزھی تفاعل	408
6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	429
6.5	الچھاو	447
6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرقی۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	456
6.7	تفرقی مساوات کے نظام	465
6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے	473
7	سمتیات عارضی باب	477
7.1	غیر سمتیات اور سمتیات	477
7.2	سمتیہ کے اجزاء	479
7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب	485

494	سمتی فضا۔ خطی تابعت اور غیر تابعت	7.4
500	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)	7.5
513	اندرونی ضرب فضا	7.6
515	سمتی ضرب	7.7
517	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب	7.8
528	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب	7.9
537	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام	8
538	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب	8.1
548	قالبی ضرب	8.2
555	8.2.1 تبدیلی محل	
568	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط	8.3
581	8.3.1 صف زینہ دار صورت	
589	خطی غیر تابعت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا	8.4
603	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی	8.5
608	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب	8.6
611	مقطع۔ قاعدہ کریمر	8.7
628	معکوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط	8.8
643	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ	8.9
661	9 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ	
667	ا اضافی ثبوت	
671	ب مفید معلومات	
671	1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات	



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 9

### قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ

لیٹنڈر تفاعل (حصہ 5.2) اور بیسل تفاعل کی ایک خاصیت جسے قائمیت<sup>1</sup> کہتے ہیں انجینئری حساب میں نمایاں کردار ادا کرتی ہے۔ اس حصے میں قائمیت سے وابستہ تصورات اور علامت نویسی سیکھتے ہیں۔ اگلے حصے میں ایسی سرحدی قیمت مسائل (سٹیورم لیوویل مسائل) پر غور کیا جائے گا جن کے حل قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ دیتے ہیں۔ ان مسائل پر غور کے دوران حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے لیٹنڈر تفاعل اور بیسل تفاعل پر غور کیا جائے گا۔

آئیں پہلے تفاعل کی قائمیت کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ وقفہ  $a \leq x \leq b$  پر حقیقی قیمت تفاعل  $g_m(x)$  اور  $g_n(x)$  معین ہیں اور اس وقفے پر ان تفاعل کے حاصل ضرب  $g_m(x)g_n(x)$  کا مکمل موجود ہے۔ اس مکمل کو روایتی طور پر  $(g_m, g_n)$  لکھا جاتا ہے۔

$$(9.1) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx$$

اگر درج بالا مکمل صفر کے برابر ہو تب تفاعل  $g_m(x)$  اور  $g_n(x)$  وقفہ  $a \leq x \leq b$  پر قائمہ الزاویہ<sup>2</sup> کہلاتے ہیں۔

$$(9.2) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

orthogonality<sup>1</sup>  
orthogonal<sup>2</sup>

حقیقی قیمت تفاعل کا سلسلہ  $g_1(x)$ ،  $g_2(x)$ ،  $g_3(x)$ ، ... اس صورت وقفہ  $a \leq x \leq b$  پر قائم الزاویہ سلسلہ<sup>3</sup> کہلائے گا جب اس وقفے پر یہ تمام تفاعل معین اور تمام مکمل  $(g_m, g_n)$  موجود ہوں اور اس سلسلے میں تمام ممکنہ منفرد جوڑیوں کے یہ مکمل صفر کے برابر ہوں۔

$(g_m, g_m)$  کے غیر صفر جذر کو  $g_m$  کا معیار<sup>4</sup> کہتے ہیں جسے عموماً  $\|g_m\|$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(9.3) \quad \|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x) dx}$$

ہم پوری بحث کے دوران درج ذیل فرض کریں گے۔

عمومی مفروضہ: تمام تفاعل جن پر غور کیا جا رہا ہو محدود ہیں، جن مکمل پر غور کیا جا رہا ہو وہ موجود ہیں اور معیار غیر صفر ہیں۔

ظاہر ہے کہ وقفہ  $a \leq x \leq b$  پر ایسے قائم الزاویہ سلسلہ  $g_1$ ،  $g_2$ ، ... جن میں ہر تفاعل کا معیار اکائی (1) ہو درج ذیل تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(9.4) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad (m = 1, 2, \dots) \\ 1 & m = n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

ایسے سلسلے کو وقفہ  $a \leq x \leq b$  پر معیاری قائم الزاویہ سلسلہ<sup>5</sup> کہتے ہیں۔

کسی بھی قائم الزاویہ سلسلے کے ہر تفاعل کو، زیر غور وقفے پر، اس تفاعل کی معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری قائم الزاویہ سلسلہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 9.1: تفاعل  $g_m(x) = \sin mx$  جہاں  $m = 1, 2, \dots$  کا سلسلہ وقفہ  $-\pi \leq x \leq \pi$  پر قائم الزاویہ ہے کیونکہ ان تفاعل کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (ضمیمہ ب)۔

$$\begin{aligned} (g_m, g_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \quad (m \neq n) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = 0 \end{aligned}$$

orthogonal set<sup>3</sup>

norm<sup>4</sup>

orthonormal set<sup>5</sup>

ان تفاعل کا معیار  $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$  ہے۔

$$\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi \quad (m = 1, 2, \dots)$$

یوں اس سلسلے سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}$$


---



- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.



ضمیمہ ب

## مفید معلومات

1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارتم (شکل 1. ب-ب)

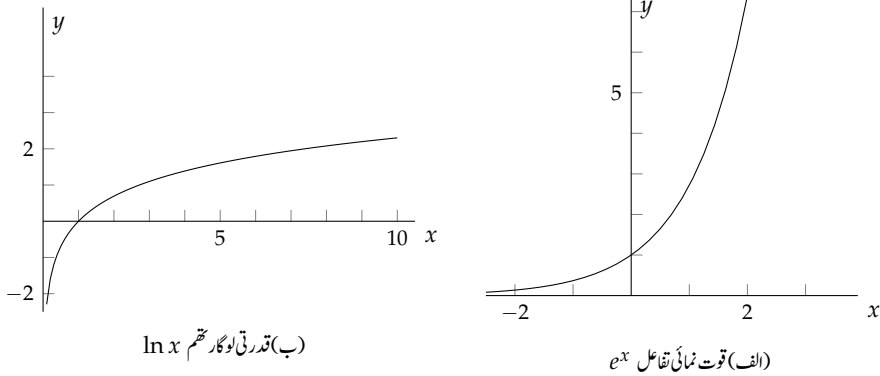
$$(2. ب) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$$e^x \text{ کا الٹ } \ln x \text{ ہے۔ اس کے علاوہ } e^{\ln x} = x \text{ اور } e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \text{ ہیں۔}$$

---

exponential function<sup>1</sup>





شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل

اساس دس کا لوگار تھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$ 

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$

$$10^x \text{ کا الٹ } \log x \text{ ہے۔ اس کے علاوہ } 10^{\log x} = x \text{ اور } 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \text{ ہیں۔}$$

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\ 453\ 292\ 519\ 943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ\ 17'\ 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

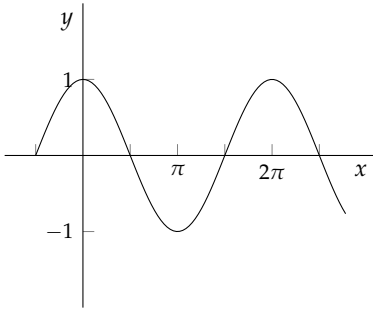
$$(ب.5) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

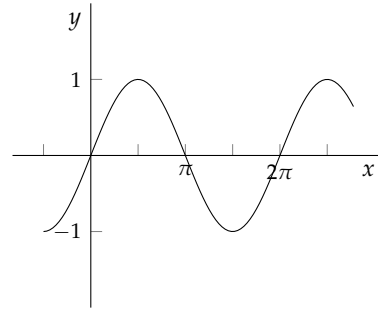
$$(ب.6) \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$(ب.7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$



cos x (ب)



sin x (الف)

شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\ \cos x &= \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \end{aligned} \quad (ب.8)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad (ب.9)$$

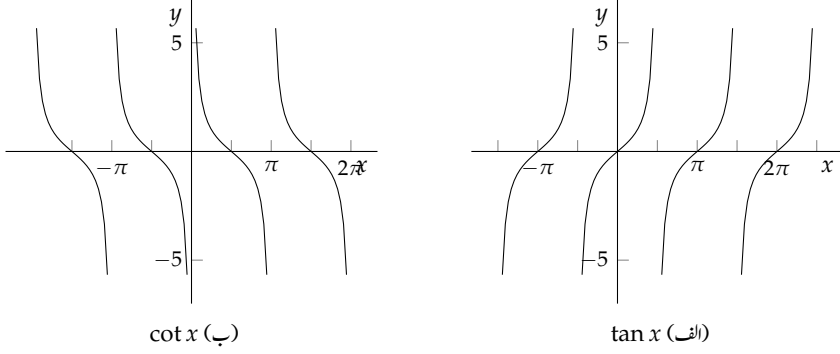
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (ب.10)$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned} \quad (ب.11)$$

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \end{aligned} \quad (ب.12)$$

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A} \quad (ب.13)$$

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B} \quad (ب.14)$$



شکل 3. ب: ٹینجنٹ اور کو ٹینجنٹ

ٹینجنٹ، کو ٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ، (شکل 3. ب-الف، ب)

$$(ب.15) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(ب.16) \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

ہڈلولی تفاعل<sup>2</sup> (ہڈلولی سائن  $\sin hx$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

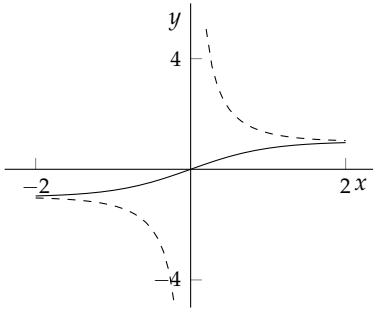
$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(ب.21) \quad \sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

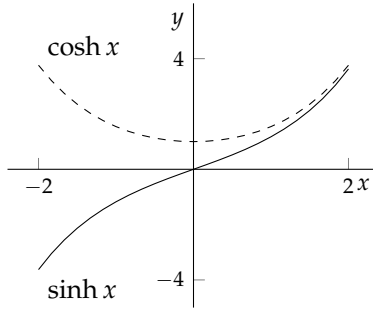
$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل<sup>3</sup> (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل مکمل ہے



(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔



(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تفاعل۔

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$(ب.25) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(ب.26) \quad \Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔

گیمما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(28.ب) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیمما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیمما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ<sup>4</sup> سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(29.ب) \quad \Gamma(\alpha + 1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیمما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(30.ب) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیمما تفاعل<sup>5</sup>

$$(31.ب) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

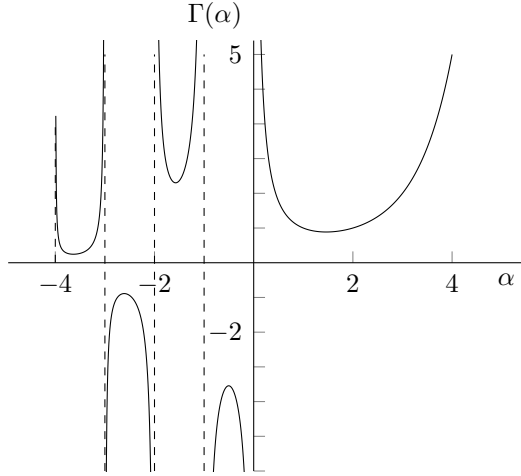
$$(32.ب) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل<sup>6</sup>

$$(33.ب) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

---

Stirling formula<sup>4</sup>  
incomplete Gamma function<sup>5</sup>  
Beta function<sup>6</sup>



شکل 5. ب: گیمما تفاعل

یہ تفاعل کو گیمما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل<sup>7</sup>

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل<sup>8</sup>

$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات<sup>9</sup>

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$

<sup>7</sup>error function  
<sup>8</sup>complementary error function  
<sup>9</sup>Fresnel integrals

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}^{10}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

تکمل سائن<sup>11</sup>

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Si  $\infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

تکمل کوسائن<sup>12</sup>

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی<sup>13</sup>

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی<sup>14</sup>

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

complementary functions<sup>10</sup>Sine integral<sup>11</sup>Cosine integral<sup>12</sup>Exponential integral<sup>13</sup>Logarithmic integral<sup>14</sup>