

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745 . . . . .	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751 . . . . .	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764 . . . . .	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769 . . . . .	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777 . . . . .	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782 . . . . .	11.1	خطی تکمیل
787 . . . . .	11.2	خطی تکمیل کا حل
796 . . . . .	11.3	دوہرہ تکمیل
810 . . . . .	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820 . . . . .	11.5	سطحیں
825 . . . . .	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837 . . . . .	11.7	سطحی تکمیل
845 . . . . .	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850 . . . . .	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861 . . . . .	11.10	مسئلہ سٹوکس
866 . . . . .	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869 . . . . .	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884 . . . . .	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889 . . . . .	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902 . . . . .	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907 . . . . .	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916 . . . . .	12.5	نصف حلقہ الساع
923 . . . . .	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931 . . . . .	12.7	جبری ارتعاش
936 . . . . .	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940 . . . . .	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953 . . . . .	13.1	بنیادی تصورات
958 . . . . .	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960 . . . . .	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973 . . . . .	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979 . . . . .	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987 . . . . .	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8	مستطیل جھلی
1006	13.9	قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10	دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11	مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024	13.12	کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13	لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات

1037	14	مطلوبہ اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1	مخلوط اعداد
1047	14.2	مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3	مخلوط سطح میں مخنثیات اور خطے
1059	14.4	مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5	کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6	ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7	قوت نمائی تفاعل
1089	14.8	تکونائی اور ہڈولی تفاعل
1095	14.9	لوگار تھم۔ عمومی طاقت

1103	15	محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1	نقشہ کشی
1116	15.2	محافظ زاویہ نقش
1125	15.3	خطی کسری تبادلہ
1129	15.4	مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5	نقش زیر دیگر تفاعل
1149	15.6	ریمان سطحیں

1157	16	مطلوبہ کمالات
1157	16.1	مطلوبہ مستوی میں خطی کمالات

1169	ا	اضافی ثبوت
------	---	------------

1173	ب	منفید معلومات
1173	1.ب	اعلیٰ تفاعل کے مساوات

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔



کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 16

### مخلوط تکملات

مخلوط تکملات دو وجوہات کی بنا اہم ہیں۔ عملی وجہ یہ ہے کہ حقیقی تکملات حل کرنے کی ترکیب سے کئی حقیقی تکملات حل کرنا ناممکن ہے جبکہ ان کو مخلوط تکملات کی ترکیب سے حل کیا جاسکتا ہے۔ دوسری وجہ نظریاتی ہے۔ جہاں مخلوط تکملات کی ترکیب سے تحلیلی تفاعل کی چند بنیادی خصوصیات دریافت ہوتی ہیں (بالخصوص بلند درجی تفرق کی موجودگی) جن کا ثبوت مکمل استعمال کیے بغیر انتہائی مشکل ہو گا۔ یہ صورت حال حقیقی اور مخلوط علم الاحصاء میں بنیادی فرق کی نشاندہی کرتی ہے۔

اس باب میں ہم پہلے مخلوط تکملات کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ سب سے بنیادی نتیجہ کوئی مخلوط مکمل کا مسئلہ حاصل ہو گا جس سے کوئی مکمل کی کلیات حاصل ہوں گی جو بہت اہم ہیں۔ ہم ثابت کریں گے کہ اگر کوئی تفاعل تحلیلی ہو تب اس کے ہر درجہ کے تفرق موجود ہوں گے۔ اس نقطہ نظر سے مخلوط تحلیلی تفاعل حقیقی متغیر کی حقیقی تفاعل سے زیادہ سادہ رویہ رکھتے ہیں۔

#### 16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل

حقیقی علم الاحصاء کی طرح ہم قطعی مکمل اور غیر قطعی مکمل میں تمیز کرتے ہیں۔ ایک غیر قطعی مکمل ایسا تفاعل ہوتا ہے جس کا تفرق خطے میں دیا گیا تحلیلی تفاعل ہو گا۔ تفاعل کی تفرق کو الٹ لکھتے ہوئے ہم کئی غیر قطعی مکمل دریافت کر سکتے ہیں۔

آئیں اب مخلوط تفاعل  $f(z)$ ، جہاں  $z = x + iy$  ہے، کی قطعی مکمل یا خطی مکمل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ حقیقی قطعی مکمل کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے مخلوط قطعی مکمل کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ یوں موجودہ بحث عین حصہ 11.1 کی طرح ہو گی۔ قطعی مکمل کی صورت میں حقیقی محور پر کوئی وقفہ مکمل کی راہ ہو گی۔ مخلوط قطعی مکمل کی صورت میں ہم مخلوط مستوی پر کسی منحنی<sup>1</sup> پر چلتے ہوئے مکمل حاصل کریں گے۔

فرض کریں کہ مخلوط  $z$  مستوی میں  $C$  ایک ہموار منحنی (حصہ 15.2) ہے۔ تب ہم  $C$  کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں

$$(16.1) \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

جہاں تمام  $t$  کے لئے  $z(t)$  کا استمراری تفرق  $\dot{z}(t) \neq 0$  پایا جاتا ہے، اور یوں  $C$  قابل تصحیح (حصہ 10.4) ہو گی جس کا ہر نقطہ پر یکتا مماس ہو گا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ  $C$  پر مثبت رخ سے مراد  $t$  کی بڑھتی قیمت کا مطابقتی رخ ہے۔

فرض کریں کہ  $f(z)$  ایک استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم)  $C$  کی ہر نقطہ پر معین ہے۔ ہم مساوات 16.1 میں دیے گئے وقفہ  $a \leq t \leq b$  کو درج ذیل ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں

$$t_0 (= a), t_1, \dots, t_{n-1}, t_n (= b)$$

جہاں  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  ہے۔ اس کے مطابق  $C$  کے ٹکڑے (شکل 16.1)

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n() = Z$$

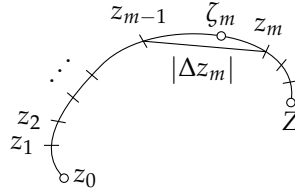
پائے جاتے ہیں جہاں  $z_j = z(t_j)$  ہے۔ ہم  $C$  کے ہر ٹکڑے پر کوئی اختیاری نقطہ منتخب کرتے ہیں، مثلاً ہم  $z_1$  اور  $z_0$  کے درمیان نقطہ  $\zeta_1$  منتخب کرتے ہیں (یعنی  $\zeta_1 = z(t)$  جہاں  $t_0 \leq t \leq t_1$  ہے) اور  $z_1$  اور  $z_2$  کے درمیان نقطہ  $\zeta_2$  منتخب کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ ہم اب مجموعہ

$$(16.2) \quad S_n = \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m$$

لیتے ہیں جہاں

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$$

<sup>1</sup> درحقیقت منحنی کے کسی حصے یا قوس پر عمل لایا جائے گا۔ اپنی آسانی کی خاطر ہم "منحنی" کی اصطلاح کو پوری منحنی کے لئے اور منحنی کے چھوٹے حصے کے لئے بھی استعمال کریں گے۔



شکل 16.1: مخلوط خطی مکمل

ہے۔ ہم ایسے مجموعے  $n = 2, 3, \dots$  کے لئے مکمل بے قاعدگی سے حاصل کرتے ہیں پس اتنا دھیان رکھتے ہیں کہ جب  $n$  لامتناہی کے قریب پہنچے تب  $|\Delta z_m|$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر کے قریب پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں مخلوط قیمتوں کا سلسلہ  $S_2, S_3, \dots$  ملتا ہے۔ اس سلسلے کی حد، راہ  $C$  پر  $f(z)$  کا خطی تکمیل<sup>2</sup> (یا صرف تکمیل) کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(16.3) \quad \int_C f(z) dz$$

منحنی  $C$  کو تکمیل کی راہ کہتے ہیں۔

ہم درج ذیل پوری بحث میں فرض کرتے ہیں کہ مخلوط خطی مکمل کی تمام راہ ٹکڑوں میں بھوار ہیں یعنی ہر راہ محدود تعداد کی ہموار منحنیات پر مشتمل ہے۔

ہمارے مفروضوں کی مد نظر خطی مکمل مساوات 16.3 موجود ہوگا، بلکہ  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  لکھتے ہوئے اور

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m \quad \text{اور} \quad \Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m$$

لیتے ہوئے مساوات 16.2 کو

$$(16.4) \quad S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $u = u(\zeta_m, \xi_m)$  اور  $v = v(\zeta_m, \xi_m)$  ہیں اور ہم  $m$  کو 1 تا  $n$  لیتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔ ہم اب  $S_n$  کو چار مجموعوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

$$S_n = \sum u \Delta x_m - \sum v \Delta y_m + i[\sum u \Delta y_m + \sum v \Delta x_m]$$

line integral<sup>2</sup>

یہ مجموعے حقیقی ہیں۔ چونکہ  $f$  استمراری ہے لہذا  $u$  اور  $v$  بھی استمراری ہوں گے۔ یوں اگر ہم  $n$  کی قیمت کو متذکرہ بالا طریقے سے بڑھا کر لامتناہی کے قریب کریں تب  $\Delta x_m$  اور  $\Delta y_m$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر کے قریب ہو گی اور دائیں ہاتھ ہر مجموعہ حقیقی مکمل کی صورت اختیار کرے گا:

$$(16.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_C f(z) dz = \int_C u dx - \int_C v dy + i \left[ \int_C u dy + \int_C v dx \right]$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ خطی مکمل مساوات 16.3 موجود ہو گا اور اس مکمل کی قیمت پر راہ ٹکڑے کرنے کی ترکیب اور ہر ٹکڑے کے بیچ نقطہ  $z_m$  کی انتخاب کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

مزید، حصہ 11.2 کی طرح، منحنی  $C$  کی مساوات 16.1 استعمال کرتے ہوئے ہم ان میں سے ہر حقیقی مکمل کو قطعی مکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں:

$$(16.6) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b u \dot{x} dt - \int_a^b v \dot{y} dt + i \left[ \int_a^b u \dot{y} dt + \int_a^b v \dot{x} dt \right]$$

جہاں  $u = u[x(t), y(t)]$  ،  $v = v[x(t), y(t)]$  ہیں جبکہ  $t$  کے ساتھ تفرق کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

ہم اس کو عموماً

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) dt$$

یا مختصراً

$$(16.7) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt$$

لکھتے ہیں۔

آئیں چند سادہ مثالیں دیکھیں۔

مثال 16.1: اکائی دائرے پر  $\frac{1}{z}$  کا تکمل  
 اکائی دائرہ  $C$  پر گھڑی کی الٹ رخ  $z = 1$  سے شروع کر کے ایک چکر لگاتے ہوئے  $f(z) = \frac{1}{z}$  کا تکمل حاصل کریں۔ ہم  $C$  کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(16.8) \quad z(t) = \cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

یوں

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i \cos t$$

ہو گا لہذا مساوات 16.7 کے تحت درکار تکمل

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (-\sin t + i \cos t) dt = i \int_0^{2\pi} dt = i2\pi$$

ہو گا۔ یہ بنیادی نتیجہ ہے جو ہم بار بار استعمال کریں گے۔

ظاہر ہے کہ ہم مساوات 16.8 کو مختصراً

$$(16.9) \quad z(t) = e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں تفرق لیتے ہوئے

$$\dot{z}(t) = ie^{it}, \quad dz = ie^{it} dt$$

لکھ کر یہی نتیجہ

$$(16.10) \quad \int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = i2\pi$$

□

دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

مثال 16.2: غیر تحلیلی تفاعل کا تکمل

سیدھی راہ  $C_1$  پر  $z_0 = 0$  تا  $z = 1 + i$  تفاعل  $x$  حقیقی  $f(z) = z$  کا تکمل تلاش کریں (شکل 16.2-الف)۔

اس راہ کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (1 + i)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

یوں

$$f[z(t)] = z \text{ حقیقی} = x(t) = t, \quad dz = (1+i) dt$$

ہو گا جس سے ہم مکمل حاصل کرتے ہیں:

$$\int_{C_1} z \text{ حقیقی} dz = \int_0^1 t(1+i) dt = (1+i) \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(1+i)$$

آئیں اب حقیقی محور پر 0 تا 1 چل کر، یہاں سے خیالی محور کے متوازی چلتے ہوئے  $1+i$  تک اسی تفاعل  $f(z) = z \text{ حقیقی} = x$  کا مکمل حاصل کرتے ہیں (شکل 16.2-الف میں راہ  $C_2$ )۔ ہم اس راہ کے پہلے حصے کو

$$z = z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

اور دوسرے حصے کو

$$z(t) = 1 + i(t-1) \quad (1 \leq t \leq 2)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں پوری راہ وقفہ  $0 \leq t \leq 2$  کی مطابقتی ہو گی۔ پہلے حصے پر  $dz = dt$ ,  $z \text{ حقیقی} = t$  اور دوسرے حصے پر  $dz = i dt$ ,  $z \text{ حقیقی} = 1$  ہو گا۔ یوں پورا مکمل دو ٹکڑوں میں حاصل ہو گا:

$$\int_{C_2} dz = \int_0^1 t dt + \int_1^2 i dt = \frac{1}{2} + i$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ راہ کے دوسرے حصے کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

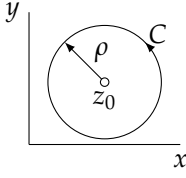
$$z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے مکمل کے حدود 0 اور 1 ہوں گے اور مکمل کی قیمت وہی رہے گی۔

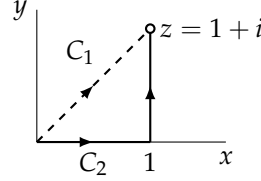
اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر تخلیلی تفاعل کے مکمل کی قیمت نا صرف راہ کی آخری حدود بلکہ راہ کی جیومیٹریائی شکل پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ □

مثال 16.3: عدد صحیح طاقت کے مکمل

مان لیں کہ  $f(z) = (z - z_0)^m$  ہے جہاں  $m$  عدد صحیح اور  $z_0$  مستقل ہیں۔ گھڑی کی الٹ رخ رداس  $\rho$



(ب) مثال 16.3 میں تکمل کی راہ



(الف) مثال 16.2 میں تکمل کی راہ

شکل 16.2: تکملات کی راہ

کے دائرہ  $C$  پر تکمل حاصل کریں۔ دائرے کا مرکز  $z_0$  ہے (شکل 16.2-ب)۔ ہم  $C$  کو

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{im t}, \quad dz = i\rho e^{it} dt$$

ہو گا لہذا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{im t} i\rho e^{it} dt = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt$$

$m = -1$  کی صورت مثال 16.1 میں دیکھی گئی ہے جبکہ  $m \neq -1$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا (مساوات 14.71 دیکھیں):

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \left[ \frac{e^{i(m+1)t}}{i(m+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (m \neq -1, \text{صحیح عدد})$$

یوں تکمل کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$(16.11) \quad \int_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} i2\pi & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1, \text{صحیح عدد}) \end{cases}$$

□

مثال 16.4: تکمل کی تعریف کی عملی استعمال

مان لیں کہ  $k = \text{مستقل} = f(z)$  ہے جبکہ ابتدائی نقطہ  $z_0$  اور اختتامی نقطہ  $Z$  کے درمیان  $C$  کوئی



راہ ہے۔ اس صورت میں ہم مکمل کی تعریف، یعنی مساوات 16.2 میں دیے گئے مجموعہ  $S_n$  کی حد، استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$S_n = \sum_{m=1}^n k \Delta z_m = k[(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (Z - z_{n-1})] = k(Z - z_0)$$

ہو گا جس سے مکمل کی قیمت درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$\int_C k dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k(Z - z_0)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ اس مکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں  $z_0$  اور  $Z$  پر منحصر ہے نا ان نقطوں کے مابین راہ پر۔ بالخصوص اگر راہ  $C$  بند ہو تب  $Z = z_0$  ہو گا لہذا مکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ □

مثال 16.5: مکمل کی تعریف کی دوسری مثال

فرض کریں کہ  $f(z) = z$  ہے جبکہ ابتدائی نقطہ  $z_0$  اور اختتامی نقطہ  $Z$  کے مابین  $C$  کوئی راہ ہے۔ ہم دوبارہ مساوات 16.2 استعمال کرتے ہیں۔ لیتے ہوئے

$$S_n = \sum_{m=1}^n z_m \Delta z_m = z_1(z_1 - z_0) + z_2(z_2 - z_1) + \cdots + Z(Z - z_{n-1})$$

حاصل ہو گا۔ اسی طرح  $\zeta_m = z_{m-1}$  لیتے ہوئے

$$S_n^* = \sum_{m=1}^n z_{m-1} \Delta z_m = z_0(z_1 - z_0) + z_1(z_2 - z_1) + \cdots + z_{n-1}(Z - z_{n-1})$$

حاصل ہو گا۔ ان دونوں کو جمع کرتے ہوئے  $S_n + S_n^* = Z^2 - z_0^2$  ملتا ہے۔ یوں

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + S_n^*) = 2 \int_{z_0}^Z z dz = Z^2 - z_0^2$$

ہو گا جس سے ان نقطوں کے مابین ہر راہ پر مکمل کی قیمت

$$\int_{z_0}^Z z dz = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2)$$

حاصل ہوتی ہے۔ بالخصوص اگر  $C$  بند راہ ہو تب  $Z = z_0$  ہو گا لہذا

$$\oint_C z dz = 0 \quad (16.12)$$

ہو گا۔ یہی نتیجہ مسئلہ 11.1 سے مساوات 16.6 میں دیے گئے کلیہ کی مدد سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

## سوالات

سوال 16.1 تا سوال 16.6 میں A تا B قطع کو  $z = z(t)$  روپ میں لکھیں۔

سوال 16.1:  $A : z = 0, \quad B : z = 2 - i3$   
جواب:  $(2 - i3)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 16.2:  $A : z = 0, \quad B : z = 1 + i$   
جواب:  $(1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 16.3:  $A : z = 1 - i, \quad B : z = -1 + i$   
جواب:  $1 - i + (-1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال 16.4:  $A : z = -2 - i, \quad B : z = 0$   
جواب:  $-2 - i + (2 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 16.5:  $A : z = i3, \quad B : z = 3$   
جواب:  $i3 + (1 - i)t, \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال 16.6:  $A : z = 3i, \quad B : z = -2i$   
جواب:  $i3 - it, \quad 0 \leq t \leq 5$

سوال 16.7 تا سوال 16.15 میں دی گئی منحنيات کو  $z = z(t)$  روپ میں لکھیں۔

سوال 16.7:  $|z - 2 + i3| = 5$   
جواب:  $z = 2 - i3 + 5e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16.8:  $y = x, \quad (4, 4) \text{ تا } (0, 0)$   
جواب:  $z = (1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 4$

سوال 16.9:  $y = x^2, \quad (3, 9) \text{ تا } (0, 0)$   
جواب:  $z = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال 16.10:  $x^2 + 4y^2 = 4$   
جواب:  $z = 2 \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16.11:  $4x^2 + 9y^2 = 36$   
 جواب:  $z = 3 \cos t + i2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16.12:  $4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 36$   
 جواب:  $z = (2 + 3 \cos t) + i(-3 + 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16.13:  $y = \sqrt{x}, \quad (9, 3) \text{ تا } (1, 1)$   
 جواب:  $z = t^2 + it, \quad 1 \leq t \leq 3$  یا  $z = t + i\sqrt{t}, \quad 1 \leq t \leq 9$

سوال 16.14:  $y = \frac{1}{x}, \quad (5, \frac{1}{5}) \text{ تا } (1, 1)$   
 جواب:  $z = t + \frac{i}{t}, \quad 1 \leq t \leq 5$

سوال 16.15:  $y = 5 + 2x - 3x^2, \quad (2, -3) \text{ تا } (0, 5)$   
 جواب:  $z = t + i(5 + 2t - 3t^2), \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال 16.16 تا سوال 16.21 میں دیے متقابل کن منحنیات کو ظاہر کرتے ہیں۔

سوال 16.16:  $-1 + (2 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$   
 جواب: سیدھی لکیر  $x - 2y + 1 = 0$  پر  $-1$  تا  $1 + i$

سوال 16.17:  $i + t + i2t^2, \quad -2 \leq t \leq 1$   
 جواب: منحنی  $y = 2x^2 + 1$  پر  $(-2 + i9)$  تا  $(1 + i3)$

سوال 16.18:  $2 - i3 + 5e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$   
 جواب: بالائی نصف دائرہ  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

سوال 16.19:  $1 + 2e^{it}, \quad -\pi \leq t \leq 0$   
 جواب: نچلا نصف دائرہ  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

سوال 16.20:  $t + i2t^3, \quad -1 \leq t \leq 0$   
 جواب: منحنی  $y = 2x^3$  پر  $(-1, -i2)$  تا مبدا

سوال 16.21:  $i - t + it^3, \quad 0 \leq t \leq 3$   
 جواب: منحنی  $y = 1 - x^3$  پر  $i$  تا  $(-3 + 28i)$

سوال 16.22 تا سوال 16.25 میں  $z^2$  کا مکمل دی گئی قطع پر تلاش کریں۔

16.1. مخلوط مستوی میں خطی شکل

سوال 16.22:  $0$  تا  $i3$   
جواب:  $-i9$

سوال 16.23:  $0$  تا  $3 + i3$   
جواب:  $-18 + i18$

سوال 16.24:  $1 + i$  تا  $2 - i$   
جواب:  $\frac{1}{3}(4 - i13)$

سوال 16.25:  $-1 + i$  تا  $1 - i$   
جواب:  $-\frac{4}{3}(1 + i)$

سوال 16.26: تفاعل  $z^2$  کا، گھڑی کی الٹ رخ، بتکون کے گرد ایک مرتبہ مکمل حاصل کریں۔ بتکون کے کونے  $0$ ،  $1$  اور  $i$  ہیں۔



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z \leq |2yy'|$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $1 + |q| + |p| = h$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□





## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### 1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

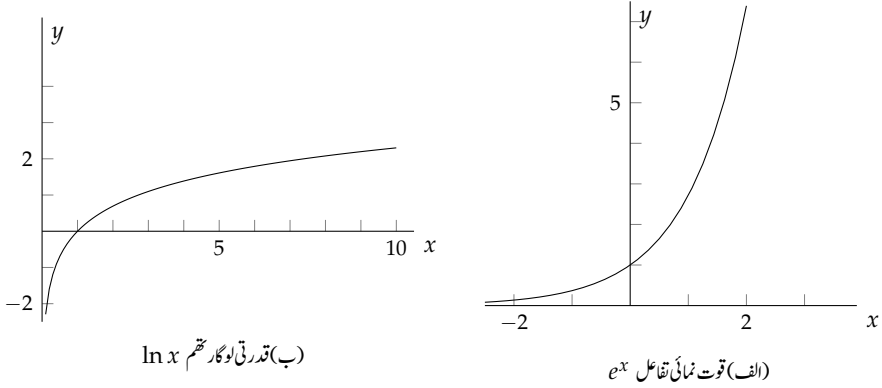
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

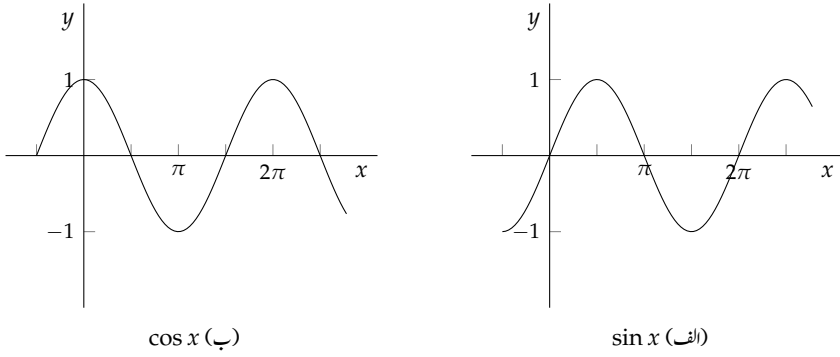
اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

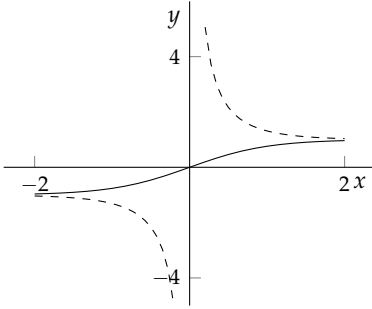
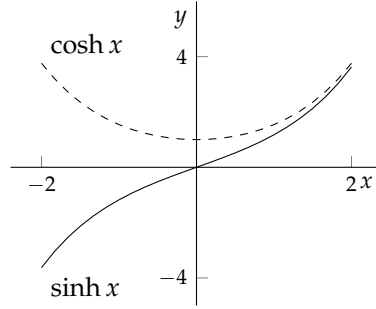
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

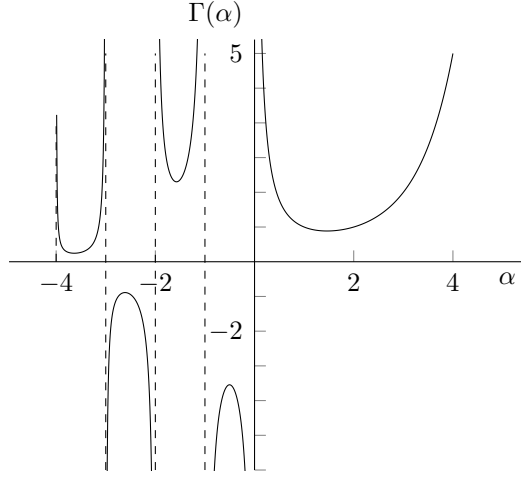
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسئل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$





شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  اور  $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$  ہیں۔ مکملہ تفاعل<sup>1</sup>

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

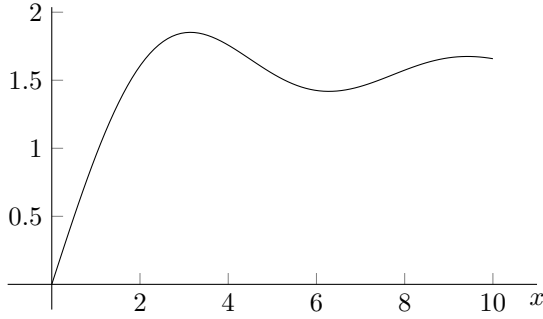
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

