

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخلوط اعداد
1047	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1 نقشہ کشی
1116	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6 ریمان سطحیں
1157	16 مخلوط مکملات
1157	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201	17 ترتیب اور تسلسل
1201	17.1 ترتیب
1208	17.2 تسلسل
1213	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل	17.4
1225	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں	17.5
1236	تسلسل پر اعمال	17.6
1243	18 حلقہ تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل	
1243	18.1 حلقہ تسلسل	
1256	18.2 حلقہ تسلسل کی روپ میں تفاعل	
1263	18.3 ٹیلر تسلسل	
1268	18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل	
1274	18.5 حلقہ تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب	
1281	18.6 یکساں استرار	
1294	18.7 لوگوں تسلسل	
1303	18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت	
1317	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ	
1317	19.1 بقیہ	
1324	19.2 مسئلہ بقیہ	
1329	19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ	
1337	19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام	
1345	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی تودہ	
1346	20.1 ساکن برقی سکون	
1352	20.2 دوبعدی بہا و سیال	
1361	20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص	
1366	20.4 پوسوں کلیہ مکمل	
1373	21 اعدادی تجزیہ	
1374	21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر	
1376	21.2 دہرانے سے مساوات کا حل	
1388	21.3 متناہی فرق	
1394	21.4 باہمی تحریف	
1403	21.5 لچکدار منحنیات	
1410	21.6 اعدادی مکمل اور تفرق	
1422	21.7 متقارب اتساع	
1435	22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب	
1435	22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقاط، معکوس قالب	
1445	22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ	

1453	22.3 خطی مساوات کا نظام: بدخونی
1457	22.4 ترکیب کتر مربع
1463	22.5 قالب کے امتیازی اقدار کی شمول
1472	22.6 امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ

1477	23 اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات
1477	23.1 یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1488	23.2 دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1495	23.3 اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1498	23.3.1 مسئلہ ڈرشلے
1501	23.3.2 بدلتی رخ خفی ترکیب
1508	23.4 مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ - غیر منظم سرحد
1515	23.5 اعدادی تراکیب برائے قطع مکانی مساوات
1524	23.6 اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات

1529	24 احتمال اور شماریات
1529	24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد
1531	24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترتیب
1541	24.3 نمونی اوسط اور نمونی تعمیریت
1546	24.4 بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات
1553	24.5 احتمال
1562	24.6 مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات
1568	24.7 بلا منصوبہ متغیرات - غیر مسلسل اور استمراری تقسیم
1576	24.8 تقسیم کا اوسط اور اس کی تعمیریت

1583	ا اضافی ثبوت
1587	ب مفید معلومات
1587	1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 24

احتمال اور شماریات

بڑے پیمانے پر مصنوعات کی پیداوار اور تجرباتی مواد کے تجزیہ کے لئے حسابی شماریات بہت اہم ہے۔ اس باب کی شروع میں مواد کا جدول اور ترسیم سے اظہار پر غور کیا جائے گا۔ چونکہ شماریات کی بنیاد حسابی احتمال ہے لہذا اس کے بعد حسابی احتمال کے بنیادی تصورات اور اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ باب کا باقی حصہ شماریات کے اہم ترین تراکیب پر مشتمل ہے۔

24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد

انجینئری شماریات میں ہمیں ایسے تجربات کی بناوٹ اور تشخیص سے غرض ہو گا جو عملی مسائل کے بارے میں معلومات فراہم کر سکے، مثلاً، خام مال یا تیار کردہ مصنوعات کے معیار کی جانچ پڑتال، مشین اور آلات یا مصنوعات کی تیاری میں استعمال تراکیب کا آپس میں موازنہ، مزدور کی پیداوار، صارفین کا نئی مصنوعات کے لئے رد عمل، مختلف حالات میں کیمیائی عمل سے حاصل پیداوار، خام لوہا کی کثافت اور اس میں لوہے کی مقدار کا تعلق، مختلف درجہ حرارت پر ایئر کنڈشر نظام کی کارکردگی، فولاد میں کاربن کی مقدار اور فولاد کی راک ویل¹ سختی کا تعلق، وغیرہ وغیرہ۔

مثال کے طور پر، بڑے پیمانے پر (بیج، بلب، موبائل فون وغیرہ کی) پیداوار کے عمل میں عموماً بے عیب² اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا اترے ہیں، اور عیب دار³ اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا نہیں اترتے ہیں،

Rockwell¹
nondefective²
defective³

پائے جائیں گے۔ درکار خواص میں دھرا کا قطر، بلب کی کم سے کم عرصہ زندگی⁴، برقیاتی مصنوعات میں استعمال برقی مزاحمت کی قیمت کے حدود، کتاب میں استعمال کاغذ کی موٹائی، خود کار بھری گئی بوتل میں مشروب کی کم سے کم مقدار، برقی سوئچ کا زیادہ سے زیادہ دورانیہ رد عمل، اور کپڑے کی کم سے کم مضبوطی شامل ہیں۔

مصنوعات کی معیار میں فرق متعدد وجوہات (مثلاً خام مال، خود کار مشین کی کارکردگی، کاریگر کی کاریگری) کی بنا ممکن ہے جن کو قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہے لہذا انہیں بے ترتیب تبدیلیاں⁵ تصور کیا جات ہے۔ پیداوار کے تراکیب کی کارکردگی اور متذکرہ بالا دیگر مثالوں میں بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔

ہر ایک پیدا کردہ رکن کو پرکھنے کے لئے عموماً بہت وقت درکار ہو گا اور ایسا کرنا خاصہ مہنگا ہو گا۔ اگر پرکھنے کے دوران رکن ضائع ہوتا ہو تب ہر رکن کو پرکھنا ممکن نہیں ہو گا۔ اسی لئے تمام ارکان کو پرکھنے کی بجائے چند ارکان کو بطور نمونہ⁶ پرکھا جاتا ہے اور اس نمونہ کے نتائج سے کل تعداد (آبادی⁷) کے بارے میں رائے بنائی جاتی ہے۔ اگر 10000 پتچوں کی کھیپ سے 100 پتچوں کے نمونہ کو پرکھا جائے اور اس میں 5 پتچے عیب دار نکلیں تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس کھیپ میں 5% پتچے عیب دار ہوں گے، پس اتنا ضروری ہے کہ نمونہ کو بلا منصوبہ⁸ چنا جائے یعنی کھیپ میں موجود ہر پتچے کا بطور نمونہ منتخب ہونے کا امکان⁹ ایک جیسا ہو۔ ظاہر ہے کہ ایسی رائے مکمل طور پر درست نہیں ہو سکتی ہے اور یہ کہنا کہ ٹھیک 5% پتچے عیب دار ہوں گے عموماً درست نہیں ہو گا لیکن عام طور پر عملی زندگی میں اتنی درست رائے (یا نتیجہ) کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔ جتنے زیادہ ارکان کو پرکھا جائے ہمیں نتائج پر اتنا زیادہ اعتماد ہوتا ہے۔ حسابی احتمال کا نظریہ ان خیالات کو ٹھوس شکل دیتا ہے اور نتائج پر کتنا اعتبار کیا جائے، اس کی ناپ بھی پیش کرتا ہے۔ یوں شماریات کی بنیاد نظریہ احتمال ہے۔

اسی طرح خام لوہا میں لوہے کی فی صد مقدار μ جاننے کی خاطر ہم بلا منصوبہ n تعداد کے نمونے لیتے ہوئے ان میں لوہے کی فی صد مقدار تجرباتی طور دریافت کریں گے۔ ان n نمونوں کے تجرباتی نتائج x_1, \dots, x_n کی اوسط $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ لوہے کی فی صد مقدار μ کی تخمین ہو گی۔

مختلف نوعیت کے مسائل کے لئے مختلف تراکیب اور تکنیک درکار ہوں گے البتہ مسئلے کی تشکیل سے حل تک کے قدم عموماً ایک جیسے ہوتے ہیں۔ انہیں یہاں پیش کرتے ہیں۔

lifetime⁴
random variation⁵
sample⁶
population⁷
at random⁸
chance⁹

- مسئلے کی تشکیل۔ مسئلے کو ٹھیک ٹھیک بیان کرنا اور تفتیشی عمل کے حدود تعین کرنا ضروری ہے تاکہ شماریاتی تفتیش کی لاگت، تفتیش کار کی مہارت اور دستیاب سہولیات کو مد نظر رکھتے ہوئے مخصوص وقت میں قابل استعمال نتائج حاصل ہوں۔ اسی قدم میں واضح تصورات سے حسابی نمونہ¹⁰ کی تخلیق¹¹ بھی شامل ہے۔ (مثال کے طور پر ہم نے تعین کرنا ہو گا کہ عیب دار رکن سے کیا مراد ہے۔)
- تجربہ کی تخلیق۔ آخری مرحلے میں استعمال ہونے والی شماریاتی ترکیب کا انتخاب، نمونہ کی جسامت (جتنے ارکان کا تجربہ یا ان پر تجربہ کیا جائے گا، وغیرہ) اور طبعی ترکیب اور تکنیک جو بروئے کار لائے جائیں گے کا انتخاب اس قدم میں کیا جائے گا۔ کم سے کم وقت اور لاگت کے ساتھ زیادہ سے زیادہ معلومات حاصل کرنا مقصد ہے۔
- تجربہ یا مواد جمع کرنے کا عمل۔ اس قدم میں قواعد پر سختی سے عمل کرنا ضروری ہے۔
- جدول بندی۔ اس قدم میں تجرباتی نتائج کو واضح اور سادہ جدول کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور ساتھ ہی انہیں ترسیم کیا جاسکتا ہے یا انہیں ڈبہ ترسیم¹² کی صورت میں دکھایا جاسکتا ہے۔ اس قدم میں نمونہ کی اوسط اور قیمتوں میں پھیل کے تخمین کا حساب بھی کیا جاتا ہے۔
- شماریاتی رائے زنی۔ اس قدم میں کوئی مخصوص شماریاتی ترکیب کو نمونہ سے حاصل نتائج پر لاگو کرتے ہوئے نا معلوم خواص کے بارے میں رائے قائم کی جاتی ہے تاکہ ہم مطلوبہ جواب حاصل کر سکیں۔

24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم

شماریاتی تجربہ کے دوران عموماً مشاہدوں (زیادہ تر صورتوں میں اعداد) کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جنہیں ہم اسی ترتیب سے لکھتے ہیں جس میں انہیں حاصل کیا گیا ہو۔ ایک مثال جدول 24.1 میں دی گئی ہے۔ سینٹ اور بجری (کنکریٹ) سے معیاری ٹھوس بیلن (قطر 15.24 cm اور لمبائی 30.48 cm) بنا کر 28 دن¹³ بعد انہیں چیرا گیا۔ یوں ہمیں ایک نمونہ حاصل ہوا جو 100 نمونہ اعداد پر مشتمل ہے۔ یوں نمونہ کی جسامت¹⁴ $n = 100$ ہے۔

¹⁰ mathematical model

¹¹ لفظ "نمونہ" اور لفظ "حبابی نمونہ" علیحدہ معنی رکھتے ہیں۔ اسی لئے حبابی نمونہ کو بطور اصطلاح لینے ہوئے پورا لکھا جائے گا یعنی "حبابی نمونہ"۔

¹² bar graph

¹³ سینٹ کو مکمل مضبوط ہونے کے لئے اسے دن درکار ہوتے ہیں۔

¹⁴ size

جدول 24.1: کنکریٹ پیلن چیرنے کے لئے درکار فی مربع سنٹی میٹر قوت (N cm^{-2})

320	380	340	410	380	340	360	350	320	370
350	340	350	360	370	350	380	370	300	420
370	390	390	440	330	390	330	360	400	370
320	350	360	340	340	350	350	390	380	340
400	360	350	390	400	350	360	340	370	420
420	400	350	370	330	320	390	380	400	370
390	330	360	380	350	330	360	300	360	360
360	390	350	370	370	350	390	370	370	340
370	400	360	350	380	380	360	340	330	370
340	360	390	400	370	410	360	400	340	360

اس حصے میں ہم نمونہ کو جدول اور ترسیم کی صورت میں ظاہر کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم ان تراکیب کو جدول 24.1 کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

جدول 24.1 میں دی گئی معلومات جاننے کی خاطر ہم مواد کو ترتیب دیتے ہیں۔ ہم (کم سے کم قیمت) 310 ، 320 ، ... ، 440 (زیادہ سے زیادہ قیمت) کو ایک قطار میں لکھتے ہیں۔ اس کے بعد جدول 24.1 کے ہر صف سے گزرتے ہوئے ہر عدد کے لئے اس قطار میں مطابقتی مقام کی صف میں نشان شمار¹⁵ کھینچتے ہیں۔ اس طرح ہمیں جدول 24.2 کی پہلی دو قطاروں کا جدول حاصل ہو گا۔ نشان شمار کی گنتی کو جدول کی تیسری قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ یہ گنتی نمونہ میں کسی عدد x کی تعداد دیتی ہے جس کو نمونہ میں x کی حتمی تعدد¹⁶ یا مختصراً تعدد¹⁷ کہتے ہیں۔ اس کو نمونہ میں ارکان کی تعداد n سے تقسیم کرنے سے ہمیں اضافی تعدد¹⁸ حاصل ہوتی ہے جس کو جدول 24.2 کی چوتھی قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ یہاں $n = 100$ ہے لہذا $x = 330$ کی تعدد 6 اور اضافی تعدد 0.06 یا 6% ہے۔

کسی مخصوص x کے لئے نمونہ میں x اور x سے کم قیمتوں کی تمام تعدد کا مجموعہ لیتے ہوئے مجموعی تعدد¹⁹ حاصل ہوتی ہے جس کو پانچویں قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $x = 350$ کا مطابقتی مجموعی تعدد 37 ہے جس کے تحت 350 اور اس سے کم قیمتوں کی تعداد 37 ہے۔ اس کو جسامت n سے تقسیم کرنے

¹⁵ tally mark
¹⁶ absolute frequency
¹⁷ frequency
¹⁸ relative frequency
¹⁹ cumulative frequency

جدول 24.2: جدول تقسیم برائے جدول 24.1 کا نمونہ

1	2	3	4	5	6
مضبوطی	حتیٰ تعدد		اضافی تعدد	مجموعی تعدد	مجموعی اضافی تعدد
	نشان شمار				
300		2	0.02	2	0.02
310		0	0.00	2	0.02
320		4	0.04	6	0.06
330		6	0.06	12	0.12
340		11	0.11	23	0.23
350		14	0.14	37	0.37
360		16	0.16	53	0.53
370		15	0.15	68	0.68
380		8	0.08	76	0.76
390		10	0.10	86	0.86
400		8	0.08	94	0.94
410		2	0.02	96	0.96
420		3	0.03	99	0.99
430		0	0.00	99	0.99
440		1	0.01	100	1.00

سے چھٹی قطار میں درج مجموعی اضافی تعدد²⁰ حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر چھٹی قطار سے ہم دیکھتے ہیں کہ نمونہ میں 76% قیمتیں 380 کے برابر یا اس سے کم ہیں۔

اگر نمونہ میں کوئی قیمت نہ پائی جاتی ہو تب اس قیمت کی تعدد 0 ہوگی۔ اگر نمونہ میں تمام قیمتیں ایک جیسی ہوں تب اس قیمت کی تعدد n اور اضافی تعدد $\frac{n}{n} = 1$ ہوگی۔ چونکہ یہی تعدد کی دو انتہائی قیمتیں ہیں لہذا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.1: (اضافی تعدد)
اضافی تعدد کی کم سے کم قیمت 0 اور زیادہ سے زیادہ قیمت 1 ہے۔

فرض کریں کہ جسامت n کے نمونہ میں درج ذیل m مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad (m \leq n)$$

جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m$$

ہیں۔ تب ہم درج ذیل تفاعل²¹ متعارف کر سکتے ہیں

$$(24.1) \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} \bar{f}_j & \text{جب } x = x_j \text{ ہو} \\ 0 & \text{کسی بھی قیمت } x \text{ کے لئے جو نمونہ میں نہ پایا جاتا ہو} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

جس کو نمونہ کا تعددی تفاعل²² کہتے ہیں۔ یہ نمونہ میں قیمتوں کی تقسیم (پھیل) دیتا ہے۔ اسی لئے ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل نمونہ کی تعددی تقسیم²³ دیتا ہے۔

مثال کے طور پر جدول 24.2 میں تعددی تفاعل کی قیمتیں قطار 4 میں دکھائی گئی ہیں جہاں $\bar{f}(300) = 0.02$ ، $\bar{f}(310) = 0$ ، $\bar{f}(320) = 0.04$ ، وغیرہ، ہیں۔

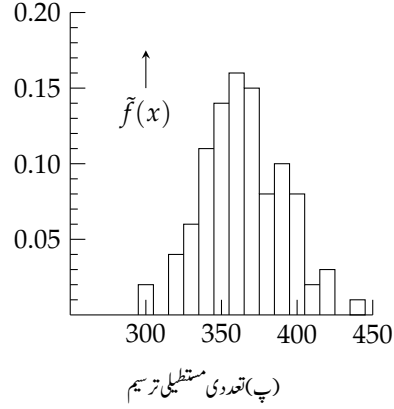
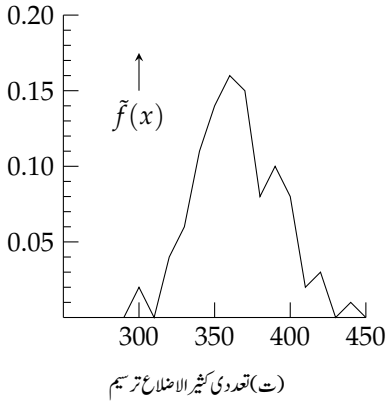
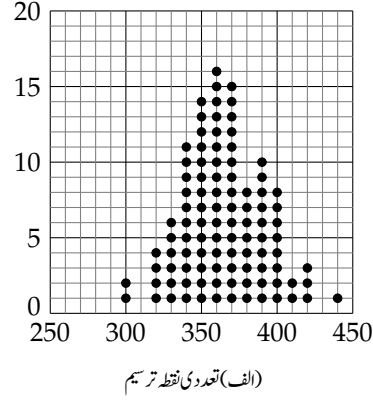
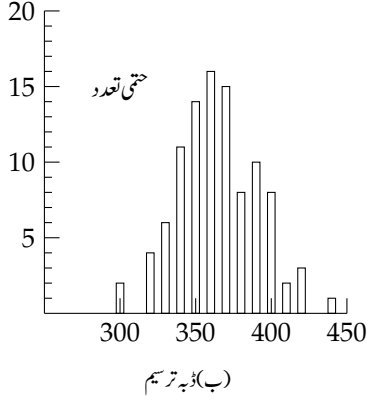
جسامت n کے نمونہ میں تمام تعدد کا مجموعہ n کے برابر ہو گا۔ (کیوں؟) اس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

²⁰cumulative relative frequency

²¹ہم \bar{f} استعمال کرتے ہیں چونکہ f کو تعددی تفاعل کے لئے استعمال کیا جانے کا جس کا استعمال کثرت سے ہوگا۔

²²frequency function of the sample

²³frequency distribution

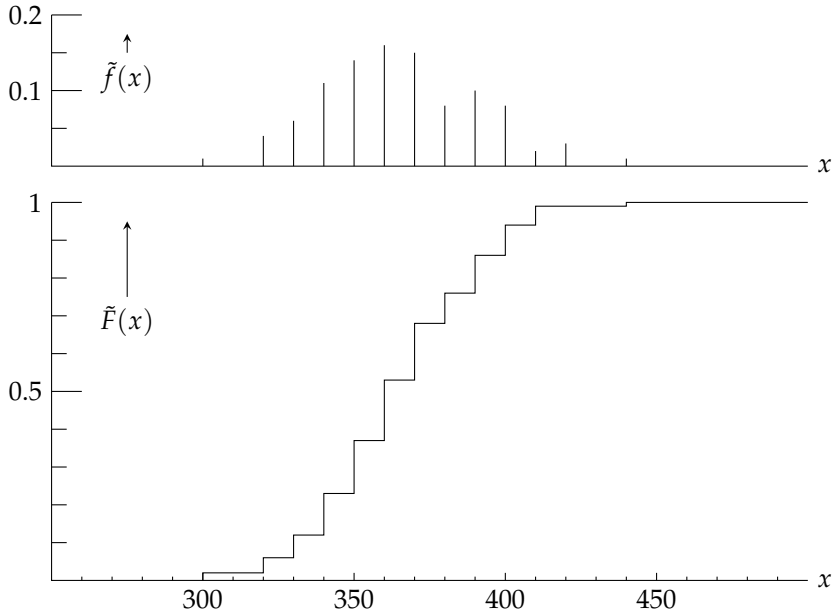


شکل 24.1: ترسیم برائے جدول 24.2

مسئلہ 24.2: اضافی تعدد کا مجموعہ
کسی بھی نمونہ میں تمام اضافی تعدد کا مجموعہ 1 کے برابر ہو گا، یعنی:

$$\sum_{j=1}^m \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \cdots + \tilde{f}(x_m) = 1$$

نمونہ کا ترسیمی اظہار شکل 24.1-الف تا شکل 24.1-ت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 24.1-پ میں ہر مستطیل کا رقبہ مطابقتی اضافی تعدد کے برابر ہو گا لہذا عمودی محدود پر اضافی تعدد فی اکائی رقبہ ہو گا۔ چونکہ شکل 24.1-پ میں تمام



شکل 24.2: تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ اور مجموعی تعددی تفاعل $\tilde{F}(x)$ برائے جدول 24.2

مستطیل کی چوڑائی ایک جیسی ہے لہذا عمودی محدود پر قیمتیں $\tilde{f}(x)$ کے راست متناسب ہوں گی۔ البتہ مستطیل کو چوڑائیاں مختلف ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہو گا۔ شکل 24.1-ت میں بھی یہی صورت حال ہو گی۔

ہم اب درج ذیل تفاعل متعارف کرتے ہیں

$$\tilde{F}(x) = \text{کم تمام قیمتوں کے اضافی تعدد کا مجموعہ}$$

جس کو نمونے کا مجموعی تعددی تفاعل²⁴ یا مختصراً تقسیمی تفاعل نمونہ²⁵ کہتے ہیں۔ شکل 24.2 میں مثال دی گئی ہے۔

$\tilde{F}(x)$ سیڑھی تفاعل (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہے جس میں ٹھیک ان x پر جہاں $\tilde{f}(x) \neq 0$ ہو $\tilde{f}(x)$ کے برابر چلانگ پائے جاتے ہیں۔ پہلی چلانگ نمونہ کی کم سے کم قیمت اور آخری چلانگ نمونہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پر پائی جائے گی۔ آخری چلانگ کے بعد $\tilde{F}(x) = 1$ رہے گا۔

²⁴cumulative frequency function of the sample
²⁵sample distribution function

جدول 24.3: کپاس کے سوئی دھاگے کو توڑنے کے لئے درکار قوت (نیوٹن میں)

114	118	86	107	87	94	82	81	98	84
120	126	98	89	114	83	94	106	96	111
123	110	83	118	83	96	96	74	91	81
102	107	103	80	109	71	96	91	86	129
130	104	86	121	96	96	127	94	102	87

$\tilde{F}(x)$ اور $\tilde{f}(x)$ کا تعلق درج ذیل ہے

$$(24.2) \quad \tilde{F}(x) = \sum_{t \leq x} \tilde{f}(t)$$

جہاں $t \leq x$ کا مطلب ہے کہ کسی بھی x کے لئے ان تمام $\tilde{f}(x)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے t کی قیمت x کے برابر یا x سے کم ہو۔

اگر کسی نمونہ میں مختلف اعداد کی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس کا جدولی اور تریسی اظہار غیر ضروری طور پر مشکل ہو گا جس کو گروہ بندی²⁶ سے آسان بنانا ممکن ہے۔ آئیں گروہ بندی کے عمل کو سمجھیں۔

دیے گئے نمونہ کے لحاظ سے ہم ایسا وقفہ I منتخب کرتے ہیں جس میں تمام نمونی قیمتیں شامل ہوں۔ ہم I کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں جماعتی وقفہ²⁷ کہتے ہیں۔ ان جماعتی وقفوں کے وسطی نقطوں کو جماعتی وسطی نقطے²⁸ یا جماعتی نشان²⁹ کہتے ہیں۔ ہر جماعتی وقفہ میں پائے جانے والے نمونی قیمتیں کو طبقہ³⁰ کہتے ہیں۔ طبقہ میں نمونی قیمتوں کی تعداد کو جماعتی تعدد³¹ کہتے ہیں جس کو جسامت نمونہ n سے تقسیم کرنے سے اضافی جماعتی تعدد³² حاصل ہو گا۔ اس تعدد $\tilde{f}(x)$ کو جو جماعتی نشان کے تابع ہے گروہ بند نمونہ کا تعددی تفاعل³³ کہتے ہیں۔ اسی طرح مجموعی اضافی جماعتی تعدد $\tilde{F}(x)$ جو جماعتی نشان کے تابع ہے گروہ بند نمونہ کا تقسیمی تفاعل³⁴ کہلاتا ہے۔ جدول 24.3 اور جدول 24.4 میں مثال دیا گیا ہے۔

grouping²⁶
class intervals²⁷
class midpoints²⁸
class marks²⁹
class³⁰
class frequency³¹
relative class frequency³²
frequency function of the grouped sample³³
distribution!function of the grouped sample³⁴

جدول 24.4: تعددی جدول برائے جدول 24.3 (گروہ بند)

جماعتی وقفہ	جماعتی نشان x	حتمی تعدد		$f(x)$	$\bar{F}(x)$
		نشان شمار			
65 – 75	70		2	0.04	0.04
75 – 85	80		8	0.16	0.20
85 – 95	90		11	0.22	0.42
95 – 105	100		12	0.24	0.66
105 – 115	110		8	0.16	0.82
115 – 125	120		5	0.10	0.92
125 – 135	130		4	0.08	1.00
		مجموعہ	50	1.00	

جماعتوں کی تعداد جتنی کم رکھی جائے، گروہ بند نمونہ کی تقسیم اتنی سادہ ہوگی اور اتنی ہی زیادہ معلومات کھوئی جائے گی چونکہ اصل نمونی قیمتیں اب صریحاً نظر نہیں آئیں گی۔ گروہ بندی کرتے وقت دھیان رکھیں کہ صرف غیر ضروری معلومات کھوئی جائے۔ گروہ بند نمونہ استعمال کرتے ہوئے مشکلات سے بچنے کی خاطر درج ذیل اصولوں کا خیال رکھیں۔

• جماعتی وقفے برابر رکھیں۔

• جماعتی نشان یوں منتخب کریں کہ جماعتی نشان سادہ اعداد (جن میں غیر صفر ہندسوں کی تعداد کم سے کم ہو) پر واقع ہوں۔

• اگر نمونی قیمت x_j دو جماعتوں کی سرحد پر واقع ہو تب یہ قیمت اس طبقہ میں شامل کیا جائے گا جو x_j سے شروع ہوتا ہو۔

سوالات

سوال 24.1 تا سوال 24.9 میں دیے گئے نمونہ کا تعددی جدول بنائیں اور نمونہ کو تعددی نقطہ ترسیم، ڈبہ ترسیم اور مستطیل ترسیم کی صورت میں دکھائیں۔

سوال 24.1: مزاحمت کی قیمت اوہم Ω میں۔

99	100	102	101	98	103	100	102	99	101
100	100	99	101	100	102	99	101	98	100

سوال 24.2:

6	2	4	1	2	4	3	3	2	1	6	5	6	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

سوال 24.3: برقی سوئچ کا سینڈوں میں دورانیہ رد عمل

1.3	1.4	1.1	1.5	1.4	1.3	1.2	1.4	1.5	1.3
1.2	1.3	1.5	1.4	1.4	1.6	1.3	1.5	1.1	1.4

سوال 24.4: خام کونلہ میں کونلہ کی فی صد مقدار

87	86	85	87	86	87	86	81	77	85
86	84	83	83	82	84	83	79	82	73

سوال 24.5: چادری فولاد کی تنش مضبوطی [kg mm^{-2}]

44	43	41	41	44	44	43	44	42	45	43	43	44	45	46
42	45	41	44	44	43	44	46	41	43	45	45	42	44	44

سوال 24.6: خود کار نظام سے 100 کاغذ کے گھٹے بنانے میں کمی بیشی

0	-1	0	0	1	1	2	0	1	0
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---

سوال 24.7: ایک ہی قسم کے گاڑیوں کا تیل کا خرچہ۔ [کلو میٹر فی لیٹر]

12	11.5	11	12.5	11	12
----	------	----	------	----	----

سوال 24.8: خود کار نظام سے بھری گئی تھیلوں کا گرام میں وزن

200 203 199 198 201 200 201 201

سوال 24.9: اندرون شہر چلتی ریل گاڑی کا اڈے پر ٹھیک وقت پر پہنچنے سے انحراف (منٹوں میں)³⁵

3 4 1 0 2 2 3 1 5 3

سوال 24.10: سوال 24.3 کے نمونہ کی مجموعی تعددی تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.11: جدول 24.4 کے گروہ بند نمونہ کا ڈبہ ترسیم، مستطیل ترسیم اور تعددی کثیر الاضلاع ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.12: جدول 24.1 میں جماعتی وقفوں کے جماعتی نشان 300 ، 320 ، 340 ، ... پر لیتے ہوئے مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔ اس کے مستطیل ترسیم کھینچ کا شکل 24.1-پ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 24.13: جدول 24.3 میں جماعتی نشان 75 ، 85 ، 95 ، ... لے کر مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔ اس کے مستطیل ترسیم کا سوال 24.10 کے ترسیم سے موازنہ کریں۔

سوال 24.14: 1500 تجرباتی نتائج میں سب سے کم ناپ 10.8 cm اور سب سے زیادہ ناپ 11.9 cm تھی۔ اس مواد کی گروہ بندی لے لئے جماعتی وقفہ تجویز کریں۔

³⁵ امید کی جاسکتی ہے کہ ایک دن ہماری ریل گاڑیاں بھی وقت کی اتنی پابند ہوں گی۔

24.3 نمونی اوسط اور نمونی تغیریت

تعددی تفاعل (یا تقسیمی تفاعل) نمونہ کی صحیح تصویر کشی کرتا ہے۔ اس تفاعل سے ہم نمونہ کے کئی خواص کا حساب لگا سکتے ہیں مثلاً نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت، پھیل، تفاعل، وغیرہ۔ اس حصہ میں ہم ایسے اہم ترین دو قیمتوں، نمونی اوسط اور نمونی تغیریت، پر غور کریں گے۔

نمونہ x_1, x_2, \dots, x_n کی اوسط قیمت یا مختصراً نمونی اوسط³⁶ کو \bar{x} سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$(24.3) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

تمام نمونی قیمتوں کے مجموعہ کو جسامت n سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی اوسط حاصل ہو گا۔ ظاہر ہے کہ یہ نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت دے گا۔

نمونہ x_1, x_2, \dots, x_n کی نمونی تغیریت³⁷ کو s^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$(24.4) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$$

نمونہ اوسط \bar{x} سے نمونی قیمتوں کے انحراف کے مربعوں کو $n-1$ سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی تغیریت حاصل ہو گی۔ یہ نمونی قیمتوں کی انحراف یا پھیل کی ناپ ہے۔ نمونی تغیریت غیر منفی عدد ہو گا۔ نمونی تغیریت s^2 کا مثبت جذر معیاری انحراف³⁸ کہلاتا ہے جس کو s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 24.1: نمونی اوسط اور نمونی تغیریت
بے ترتیب منتخب کیے گئے کیلوں کی (سٹی میٹروں میں) لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81

sample mean³⁶
sample variance³⁷
standard deviation³⁸

مساوات 24.3 سے نمونی اوسط

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(0.80 + 0.81 + 0.81 + 0.82 + \cdots + 0.81) = 0.811 \text{ cm}$$

اور مساوات 24.4 سے نمونی تغیریت

$$s^2 = \frac{1}{9}[(0.80 - 0.811)^2 + \cdots + (0.81 - 0.811)^2] = 0.000054 \text{ cm}^2$$

ہے۔ ایک جیسی نمونی قیمتوں کو اکٹھا لکھنے سے حساب نسبتاً آسان بنایا جاسکتا ہے جیسے

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(2 \cdot 0.80 + 5 \cdot 0.81 + 3 \cdot 0.82) = 0.811 \text{ cm}$$

جہاں قوسین میں تین مختلف نمونی قیمتوں $x_1 = 0.80$ ، $x_2 = 0.81$ اور $x_3 = 0.82$ کو ان کی تعدد سے ضرب دیا گیا ہے۔ اسی طرح

$$s^2 = \frac{1}{9}[(2(0.800 - 0.811)^2 + 5(0.810 - 0.811)^2 + 3(0.820 - 0.811)^2] = 0.000054$$

□

ہو گا۔

اس مثال میں ہم نے \bar{x} اور s^2 کو نمونہ کے تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ کی مدد سے حاصل کرنا دیکھا۔ اگر ایک نمونہ میں m مختلف اعدادی قیمتیں

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

پائی جاتی ہوں جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2), \dots, \tilde{f}(x_m)$$

ہوں تب حساب کے لئے درکار تعدد درج ذیل ہوں گے

$$n\tilde{f}(x_1), n\tilde{f}(x_2), \dots, n\tilde{f}(x_m)$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 سے

$$(24.5) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m x_j n\tilde{f}(x_j)$$

اور

$$(24.6) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 n \tilde{f}(x_j)$$

حاصل ہو گا۔ دھیان رہے کہ مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 میں ہم تمام نمونی قیمتوں پر مجموعہ لیتے ہیں جبکہ مساوات 24.5 اور مساوات 24.6 میں ہم اعدادی طور مختلف نمونی قیمتوں پر مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔ حتمی تعدد $n \tilde{f}(x_j)$ عدد صحیح ہوں گے جبکہ اضافی تعدد $\tilde{f}(x_j)$ عموماً غیر عدد صحیح ہوں گے۔

چونکہ $x_j - \bar{x}$ کی حتمی قیمت نمونی اوسط کی نسبت بہت کم ہو سکتی ہے لہذا s^2 کے مذکورہ بالا کلیات کی استعمال سے (خود کار حساب میں) ملحوظ ہند سے ضائع ہوں گے۔ ہم s^2 کا ایک ایسا کلیہ اخذ کرتے ہیں جو ان مشکلات سے دو چار نہ ہو۔ ہم مساوات 24.4 میں

$$(x_j - \bar{x})^2 = x_j^2 - 2x_j\bar{x} + \bar{x}^2$$

پر کرتے ہوئے تین مجموعے

$$\sum (x_j - \bar{x})^2 = \sum x_j^2 - 2\bar{x} \sum x_j + \sum \bar{x}^2$$

حاصل کرتے ہیں جہاں آخری مجموعہ $n\bar{x}^2$ کے برابر ہے۔ مساوات 24.3 سے \bar{x} کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$-2\bar{x} \sum x_j = -\frac{2}{n} (\sum x_j)^2 \quad \text{اور} \quad n\bar{x}^2 = \frac{1}{n} (\sum x_j)^2$$

لکھا جاسکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$(24.7) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right]$$

حاصل ہو گا۔ اسی طرح مساوات 24.6 کو تبدیل کرتے ہوئے

$$(24.8) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^m x_j^2 n \tilde{f}(x_j) - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m x_j n \tilde{f}(x_j) \right)^2 \right]$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.1 میں مساوات 24.5 اور مساوات 24.8 (جدول 24.5) سے پہلے کی طرح $\bar{x} = \frac{8.11}{10} = 0.811$ اور

$$s^2 = \frac{1}{9} \left(6.5777 - \frac{8.11^2}{10} \right) = \frac{0.00049}{9} = 0.000054$$

حاصل ہوتے ہیں۔

جدول 24.5: اوسط اور تغیریت کا حساب برائے مثال 24.1

x_j	$10\tilde{f}(x_j)$	$x_j \cdot 10\tilde{f}(x_j)$	x_j^2	$x_j^2 \cdot 10\tilde{f}(x_j)$
0.80	2	1.60	0.6400	1.2800
0.81	5	4.05	0.6561	3.2805
0.82	3	2.46	0.6724	2.0172

سوالات

سوال 24.15: گزشتہ حصے کی سوال 24.2 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 3.47$, $s^2 = 2.98$

سوال 24.16: گزشتہ حصے کی سوال 24.4 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 84$, $s^2 = \frac{1251}{95}$

سوال 24.17: نمونہ 2, 1, 4, 5 کا مستطیل ترسیم کھینچیں۔ ترسیم کو دیکھ کر \bar{x} اور s کی قیمتوں کا اندازہ لگائیں۔ \bar{x} ، s^2 اور s کی قیمتوں کا حساب لگائیں۔
جواب: $\bar{x} = 3$, $s^2 = 3.3$, $s = 1.817$

سوال 24.18: دکھائیں کہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نمونی قیمتوں کے بیچ \bar{x} ہو گا۔

سوال 24.19: نمونہ کا نمونہ میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو نمونہ کا ³⁹ کہتے ہیں۔ مثال 24.1 میں دیے گئے نمونہ کا تلاش کریں۔
جواب: 0.02

سوال 24.20: صدویہ، وسطانیہ نمونہ کی p ویں صدویہ ⁴⁰ سے مراد ایسا عدد Q_p ہے کہ کم از کم $p\%$ نمونی قیمتیں Q_p سے کم یا اس کے برابر ہوں اور ساتھ ہی $(100 - p)\%$ نمونی قیمتیں اس سے زیادہ یا اس کے برابر ہوں۔ اگر ایک سے زیادہ ایسا عدد پایا جاتا ہو (جس صورت میں ان اعداد کا وقفہ پایا جائے گا) تب p ویں صدویہ سے مراد ان اعداد کا اوسط (یعنی وقفے کا وسطی نقطہ) ہو گا۔ بالخصوص Q_{50} کو وسطانیہ ⁴¹ کہتے ہیں جس کو \bar{x} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وسطانیہ

³⁹ range
⁴⁰ percentile
⁴¹ median

کو نصف چوتھائی⁴² بھی کہتے ہیں۔ جدول 24.2 کے نمونہ کا وسطانیہ \bar{x} تلاش کریں۔
جواب: 360

سوال 24.21: نمونہ کی Q_{25} اور Q_{75} صدویہ کو بالترتیب نچلی چوتھائی⁴³ اور بالائی چوتھائی⁴⁴ کہتے ہیں جبکہ $Q_{75} - Q_{25}$ جو پھیل کی ناپ ہے کو چوتھائی⁴⁵ کہتے ہیں۔ جدول 24.2 کے نمونہ کا Q_{25} ، Q_{75} اور $Q_{75} - Q_{25}$ تلاش کریں۔
جواب: 350, 380, 30

سوال 24.22: جدول 24.3 کے لئے سوال 24.21 کو حل کریں۔
جواب: $\frac{345}{4}$, $\frac{439}{4}$, $\frac{47}{2}$

سوال 24.23: عادیہ نمونہ میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت کو نمونہ کی عادیہ⁴⁶ کہتے ہیں۔ یہ سب سے عام قدر ہوتی ہے۔ درج ذیل نمونہ کی اوسط، وسطانیہ اور عادیہ تلاش کریں۔ ان پر تبصرہ کریں۔

قیمت	100	1000	1 000 000
تعداد	100	90	20

جواب: 100 = عادیہ، 1000 = وسطانیہ، 10 000 = اوسط

سوال 24.24: مبدا کام اگر $x_j = x_j^* + c$ ہو جہاں $j = 1, \dots, n$ اور c کوئی مستقل ہوتب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c + \bar{x}^*, \quad \left(\bar{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^* \right) \quad \text{اور} \quad s^2 = s^{*2}$$

ہوں گے جہاں x_j^* قیمتوں کی تغیریت s^{*2} ہے۔ (عملی استعمال میں c یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ x_j^* کی حتمی قیمتیں چھوٹی ہوں۔ جیومیٹریائی طور پر یہ مبدا کی تبدیلی کے مترادف ہے لہذا اس کو ترکیب مبدا کام⁴⁷ کہتے ہیں۔)

سوال 24.25: ترکیب مبدا کام کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

⁴²middle quartile

⁴³lower quartile

⁴⁴upper quartile

⁴⁵interquartile range

⁴⁶mode

⁴⁷method of working origin

سوال 24.26: مکمل رمز نویسی

اگر $x_j = c_1 x_j^* + c_2$ ہو جہاں $j = 1, \dots, n$ جبکہ c_1 اور c_2 مستقل ہیں تب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}^* + c_2, \quad s^2 = c_1^2 s^{*2}$$

ہوں گے جہاں \bar{x}^* اور s^{*2} کی معنی سوال 24.24 میں پیش کی گئی ہیں۔ اس کو ترکیب مکمل رمز نویسی⁴⁸ کہتے ہیں۔ (اس ترکیب سے قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے نتائج کی جلد جانچ پڑتال کی جاسکتی ہے۔)

سوال 24.27: اس ترکیب کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

سوال 24.28: کسی بھی نمونہ کی گروہ بندی سے عموماً نمونی اوسط متاثر ہو گا۔ دکھائیں کہ نمونی اوسط میں تبدیل $\frac{1}{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے جہاں ہر ایک جماعتی وقفہ کی لمبائی 1 ہے۔

سوال 24.29: جدول 24.3 کی غیر گروہ بند نمونہ کی گروہ بندی جدول 24.4 میں کی گئی ہے۔ دونوں مواد کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔ نتائج کا آپس میں موازنہ کریں۔

جواب: $\bar{x} = 99.4, s^2 = 254.7$: گروہ بند $\bar{x} = 99.2, s^2 = 234.7$: غیر گروہ بند

24.4 بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات

شماریاتی تجربات یا شماریاتی مشاہدے سے ہمیں نمونے حاصل ہوں گے جن کی مدد سے ہم متعلقہ آبادی کے بارے میں نتائج اخذ کرنا چاہیں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے حسابی احتمال کی مدد سے ہمیں آبادی کے حسابی نمونے بنانے ہوں گے۔ یہ نظریہ حسابی شماریات کی بنیاد ہے جس کی گہرائی میں ہم اپنی ضرورت کے مطابق جائیں گے۔ اس حصہ میں کئی بنیادی تصورات کو متعارف کیا جائے گا۔

ایک بلا منصوبہ تجربہ یا بلا منصوبہ مشاہدہ، جنہیں ہم مختصراً تجربہ⁴⁹ یا مشاہدہ⁵⁰ کہیں گے، سے مراد وہ عمل ہے جو درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

method of full coding⁴⁸
experiment⁴⁹
observation⁵⁰

- اس کو طے شدہ قواعد کے تحت سرانجام دیا جاتا ہے جو عمل کو مکمل طور پر بیان کرتے ہیں۔
- اس عمل کو جتنی بار چاہیں دوبارہ انجام دیا جاسکتا ہے۔
- ہر مرتبہ عمل کا نتیجہ اتفاق پر منحصر ہوگا (یعنی نتیجہ ان اثرات پر منحصر ہے جنہیں ہم قابو نہیں کر سکتے ہیں) لہذا قبل از وقت یکتا طور پر نتیجہ جاننا ممکن نہیں ہوگا۔
- ایک مرتبہ تجربے کے عمل سے حاصل نتیجہ کو اس کوشش⁵¹ کا انجام⁵² کہتے ہیں۔
- اس کی مثال (کرکٹ کی کھیل کی آغاز میں) سکہ پھینکنا، لوڈو⁵³ کی کھیل میں پانسہ⁵⁴ پھینکنا، 100 پیچ کی ڈبی سے 10 بیٹیوں کا انتخاب یا مختلف حالات میں کیمیائی عمل کی پیداوار تعین کرنا اور دیگر تجربات مثلاً بلا منصوبہ 20 افراد کا انتخاب اور ان کا فشار خون⁵⁵ تعین کرنا یا کسی موضوع پر ان کی رائے جاننا ہیں۔
- کسی تجربہ کے تمام ممکنہ انجام کے سلسلہ کو اس تجربہ کی نمونی فضا⁵⁶ کہتے ہیں جس کو S سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہر ایک انجام کو S کا رکن⁵⁷ یا نقطہ⁵⁸ کہتے ہیں۔ تنہا تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ متناہی جبکہ لامتناہی تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ لامتناہی کہلائے گا۔

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے بلا منصوبہ تجربہ کے ساتھ درج ذیل نمونی سلسلہ منسلک کیا جاسکتا ہے،

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

چونکہ پانسہ پھینکنے کے بعد (چھ ممکنات میں سے) کسی ایک رخ رکے گا۔

صنعتی پیداوار سے ہم ایک رکن نکال کر دیکھ سکتے ہیں کہ آیا وہ بے عیب یا عیب دار ہے۔ یوں S دو ارکان D (عیب دار) اور N (بے عیب) پر مشتمل ہوگا جنہیں اعداد مثلاً 0 (عیب دار) اور 1 (بے عیب) سے بھی

trial⁵¹outcome⁵²ludo⁵³ایک کعب جس کی چھ سطحوں پر ایک تا چھ نقطے ہوتے ہیں۔⁵⁴blood pressure⁵⁵sample space⁵⁶element⁵⁷point⁵⁸

ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اب اگر ہم ایک سے زیادہ اقسام کے عیب میں تمیز کریں تب نمونی فضا دو سے زائد نقطوں پر مشتمل ہو گا۔

کپاس کی مضبوطی کے تجربہ (جدول 24.3) میں نمونی فضا لامتناہی ہو گا چونکہ دھاگہ توڑنے کے لئے درکار قوت کسی مخصوص میں کوئی بھی مثبت قیمت ہو سکتی ہے۔

عملی مسائل میں ہمیں انفرادی انجام سے زیادہ دلچسپی نہیں ہو گی بلکہ ہم صرف اتنا جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا کسی مخصوص سلسلہ انجام سے تعلق ہے (یا نہیں ہے)۔ ظاہر ہے کہ ایسا ہر سلسلہ A پوری نمونی فضا S کا ذیلی سلسلہ ہو گا۔ اس کو وقوعہ⁵⁹ کہتے ہیں۔

چونکہ کوئی بھی انجام S کا ذیلی سلسلہ ہو گا لہذا یہ ایک مخصوص قسم کا وقوعہ ہو گا جس کو بنیادی وقوعہ کہتے ہیں۔ اسی طرح پوری فضا S بھی ایک مخصوص وقوعہ ہے۔

مثال 24.2: پانچ پانی کے ٹلکوں (جنہیں ایک تا پانچ سے ظاہر کیا جاتا ہے) میں سے دو ٹلکے منتخب کیے جاتے ہیں۔ نمونی فضا درج ذیل دس ممکنہ انجام پر مشتمل ہو گی۔

1,2 1,3 1,4 1,5 2,3 2,4 2,5 3,4 3,5 4,5

اب اگر ہم عیب دار ٹلکوں میں دلچسپی رکھتے ہوں تب ہمیں درج ذیل تین انجاموں میں فرق کرنا ہو گا۔

دونوں عیب دار ہیں: C , ایک عیب دار ہے: B , کوئی بھی عیب دار نہیں ہے: A

فرض کریں کہ ٹلکوں میں 1,2,3 عیب دار ہیں تب درج ذیل ہو گا۔

4,5, منتخب کرنے سے A ہو گا

1,4 1,5 2,4 2,5 3,4 3,5 منتخب کرنے سے B ہو گا

1,2 1,3 2,3 منتخب کرنے سے C ہو گا

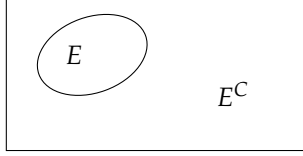
□

نمونی فضا S اور تجربہ کے انجام کو وین اشکال⁶⁰ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ شکل 24.3 میں چکور کے اندر نقطوں کا سلسلہ S کو ظاہر کرتے ہے۔ تب مستطیل کے اندر بند منحنی کا اندرون کسی وقوعہ کو ظاہر کرے گا جس کو ہم E سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان تمام ارکان (انجاموں) کا سلسلہ جو E میں شامل نہیں ہیں کو S میں E کا متمم کہتے ہیں جس کو E^c یا \bar{E} سے ظاہر کیا گیا ہے۔

⁵⁹event

⁶⁰Venn diagram

⁶¹یا \bar{E} سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو ہم احتمال نہیں کریں گے چونکہ اس کو کسی دوسرے مقصد (بندش سلسلہ) کے لئے مختص کیا گیا ہے۔



شکل 24.3: وین شکل میں نمونی سلسلہ S اور وقوعات E اور E^C دکھائے گئے ہیں

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں

E : جب جفت عدد حاصل ہو

کا متمم

E^C : جب طاق عدد حاصل ہو

ہو گا۔ ایسا وقوعہ جس میں کوئی انجام نہ پایا جاتا ہو کو خالی وقوعہ⁶² یا نا ممکن وقوعہ⁶³ کہتے ہیں جس کو \emptyset سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ کسی تجربہ میں A اور B کوئی دو وقوعات ہیں۔ تب وہ وقوعہ جو S میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو A یا B یا دونوں میں پائے جاتے ہوں کو A اور B کا اشتراک⁶⁴ کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A \cup B$$

وہ وقوعہ جو S میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو A اور B دونوں میں پائے جاتے ہوں کو A اور B کا تقاطع⁶⁵ کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ شکل 24.4 میں اشتراک اور تقاطع کو وین شکل پر دکھایا گیا ہے۔

$$A \cap B$$

اگر A اور B میں کوئی وقوعہ مشترک نہ ہو تب $A \cup B = \emptyset$ ہو گا اور ہم کہیں گے کہ A اور B بے ربط وقوعہ⁶⁶ یا باہمی بلا شرکت وقوعہ⁶⁷ ہیں۔

⁶² empty event

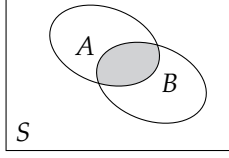
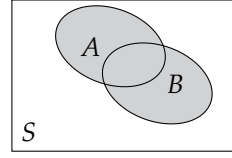
⁶³ impossible event

⁶⁴ union

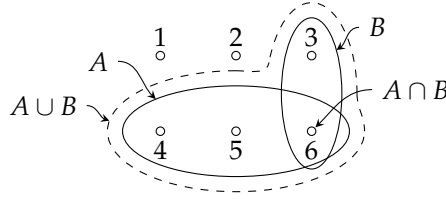
⁶⁵ intersection

⁶⁶ disjoint events

⁶⁷ mutually exclusive events

(ب) تقاطع $A \cap B$ (الف) اشتراک $A \cup B$

شکل 24.4: نمونی فضا S میں دو وقعات A ، B اور (گہری سیاہی میں) ان کی اشتراک اور تقاطع کی وین شکل



شکل 24.5: وین شکل برائے مثال 24.3

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں $B \cap C = \emptyset$ ہے جبکہ $B \cup C$ ایک یا دو عیب دار نلکیاں ہیں۔

مثال 24.3: پانسہ پھینکنے کے ایک تجربہ میں درج ذیل وقوعہ

A : 4 سے چھوٹا عدد نہ ہو

B : 3 سے قابل تقسیم عدد ہو

□ کا اشتراک $A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ اور تقاطع $A \cap B = \{6\}$ ہو گا (شکل 24.5)۔

اگر وقوعہ A کے تمام ارکان وقوعہ B میں پائے جاتے ہوں تب A کو B کا ذیلی وقوعہ⁶⁸ کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$A \subset B \quad \text{یا} \quad B \supset A$$

ظاہر ہے کہ $A \subset B$ کی صورت میں اگر B واقع پذیر ہو تب لازماً A بھی وقوع پذیر ہو گا۔ مثال کے طور پر وقوعہ $D = \{4, 6\}$ پانسہ کے ہفت نتائج کے وقوعہ $E = \{2, 4, 6\}$ کا ذیلی وقوعہ ہے۔

فرض کریں کہ نمونی فضا S میں کئی وقوعات A_1, \dots, A_m ہیں۔ تب ان m وقوعات میں سے ایک میں یا ایک سے زیادہ میں پائے جانے والے تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ان m وقوعات کا اشتراک ہو گا جس کو

$$\bigcup_{j=1}^m A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$$

لکھا جاتا ہے۔ ان تمام وقوعات میں پائے جانے والے ارکان پر مشتمل وقوعہ A_1, \dots, A_m کا تقاطع ہو گا جس کو

$$\bigcap_{j=1}^m A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$$

لکھا جاتا ہے۔

زیادہ عمومی طور پر فرض کریں کہ S میں لامتناہی ارکان A_1, \dots, A_m, \dots پائے جاتے ہیں۔ تب اشتراک

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو کم سے کم کسی ایک مذکورہ بالا وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔ اسی طرح تقاطع

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو مذکورہ بالا تمام وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔

اگر وقوعات A_1, \dots, A_m, \dots یوں ہوں کہ ان میں سے کسی ایک کا واقع ہونے سے باقی کسی وقوعہ کا واقع ہونا ناممکن ہو تب کسی بھی $j \neq k$ کے لئے $A_j \cap A_k = \emptyset$ ہو گا اور ایسی وقوعات کو بے ربط وقوعات یا باہمی بلا شرکت وقوعات کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں A, B, C بے ربط وقوعات ہیں۔

فرض کریں کہ ہم بے منصوبہ تجربہ n مرتبہ کرتے ہوئے n قیمتوں پر مشتمل نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ ان n کوششوں میں وقوعہ A اور وقوعہ B کے اضافی تعدد بالترتیب $\tilde{f}(A)$ اور $\tilde{f}(B)$ ہیں۔ تب وقوعہ $A \cup B$ کی اضافی تعدد

$$(24.9) \quad \tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A \cap B)$$

ہوگی۔ اگر A اور B باہمی بلا شرکت ہوں تب $\tilde{f}(A \cap B) = 0$ اور

$$(24.10) \quad \tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B)$$

ہوگا۔ یہ کلیات شکل 24.4 میں دکھائے گئے وین شکل سے صاف ظاہر ہیں۔ ان کا باضابطہ ثبوت آپ سے سوال 24.34 میں مانگا گیا ہے۔

سوالات

سوال 24.30: دو سکے پھینکنے کے نمونی فضا کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.31: پانسہ کی جوڑی ایک مرتبہ پھینکی جاتی ہے۔ اس تجربہ کا نمونی فضا بنائیں جس میں تمام ارکان ہوں۔ اس شکل پر درج ذیل وقوعات کی نشاندہی کریں۔ (الف) دونوں یکساں عدد ہیں۔ (ب) دونوں اعداد کا مجموعہ 7 سے زیادہ ہے۔ (پ) دونوں اعداد کا مجموعہ 5 ہے۔

سوال 24.32: تین برقیاتی پرزوں کا عرصہ زندگی کا نمونی فضا تلاش کریں۔
جواب: غیر منفی اعداد کے تمام مرتب تین اعداد کا فضا۔

سوال 24.33: ایک تجربہ میں چادر میں سوراخ کر کے سوراخ کا قطر ناپا جاتا ہے۔ سوراخ کا قطر 2.9 cm اور 3.1 cm کے بیچ ہے۔ E کا متمم تلاش کریں۔

سوال 24.34: مساوات 24.9 کو ثابت کریں۔
جواب: $A \cup B$ صرف اور صرف اس صورت ہوگا جب $A \cap B$ یا $A \cap B^C$ یا $A^C \cap B$ ہو۔ یہ تینوں باہمی بلا شرکت ہیں۔ فرض کریں کہ نمونہ میں متعلقہ حتمی تعداد n_1 ، n_2 ، n_3 ہو۔ تب $\tilde{f}(A) = \frac{n_1+n_2}{n}$ ، $\tilde{f}(B) = \frac{n_1+n_3}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cap B) = \frac{n_1}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cup B) = \frac{n_1+n_2+n_3}{n}$ ہوں گے۔ ان سے مساوات 24.9 حاصل ہوتا ہے۔

سوال 24.35: ایک ڈبیا میں 20 قلم ہیں جن میں سے 10 قلم بے عیب ہیں۔ 8 قلموں میں عیب A ، 5 قلموں میں عیب B اور 3 قلموں میں دونوں عیب پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ بلا منصوبہ ایک قلم نکالا جاتا ہے۔ متعلقہ نمونی فضا S کی وین شکل بنائیں جس میں A قسم کے عیب کا وقوعہ E_A اور B قسم کے

عیب کا وقوعہ E_B دکھایا گیا ہو۔ مزید $E_A \cup E_B$ ، $E_A \cap E_B$ ، $E_A^C \cap E_B^C$ ، $E_A^C \cap E_B$ ، $E_A \cap E_B^C$ ، $E_A \cup E_B^C$ ، $E_A^C \cup E_B^C$ ، $E_A^C \cup E_B$ ، $E_A \cup E_B$ بھی دکھائیں۔ ہر وقوعہ میں انجام کی تعداد بتائیں۔

سوال 24.36: وین شکل کی مدد سے درج ذیل قواعد کو پرکھیں۔

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

سوال 24.37: قوانین ڈی مارگن وین اشکال بناتے ہوئے درج ذیل ڈی مارگن قوانین⁶⁹ کی تصدیق کریں۔

$$\begin{aligned} (A \cup B)^C &= A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C &= A^C \cup B^C \end{aligned}$$

سوال 24.38: متمم کی تعریف سے درج ذیل اخذ کریں جہاں نمونی فضا S کا A کوئی ذیلی سلسلہ ہے۔

$$(A^C)^C = A, \quad S^C = \emptyset, \quad \emptyset^C = S, \quad A \cup A^C = S, \quad A \cap A^C = \emptyset$$

سوال 24.39: وین شکل استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $A \subset B$ صرف اور صرف تب ہو گا جب $A \cup B = B$ ہو۔ $A \subset B$ کے لئے $A \cap B$ کی صورت میں شرط تلاش کریں۔

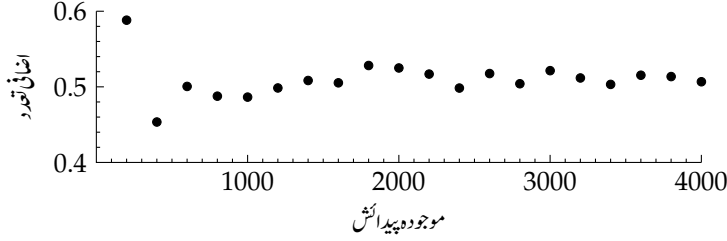
24.5 احتمال

تجربہ سے ثابت ہوتا ہے کہ عموماً بلا منصوبہ تجربات کی اضافی تعدد میں شریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے۔ یعنی ایسے تجربہ کے مختلف لمبی تسلسل میں کسی وقوعہ کے مطابقتی اضافی تعدد تقریباً ایک جیسے ہوں گے۔ اس کی مثالیں جدول 24.6 اور شکل 24.6 میں دکھائی گئی ہیں۔ (سکہ پھینکنے سے شیر یا خط حاصل ہوتا ہے۔) شکل 24.6 میں یوں معلوم ہوتا ہے کہ جیسے جیسے لڑکوں کی تعداد بڑھتی ہے ویسے ویسے لڑکوں کی فی صد میں اتر چڑھاؤ کم ہوتی جاتی ہے۔ عیب دار اشیاء کا فی صد بھی ایسا ہی رویہ رکھتا ہے اور اس طرح کے دیگر مثال بھی دیے جاسکتے ہیں۔

⁶⁹De Morgan's laws

جدول 24.6: سکہ پھینکنے کے نتائج

شیر کی اضافی تعدد	جتنی مرتبہ شیر حاصل ہوا	جتنی مرتبہ سکہ پھینکا گیا	تجربہ کرنے والا
0.5069	2048	4040	امجد
0.5016	6019	12 000	مشرف
0.5005	12 012	24 000	مشرف



شکل 24.6: وقوعہ "لڑکے کی پیدائش"

چونکہ عموماً بلا منصوبہ تجربات میں شماریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے، ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ ایسے تجربہ میں وقوعہ E کے لئے ایسا عدد $P(E)$ پایا جاتا ہے کہ تجربہ بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دینے سے E کا اضافی تعدد تخمیناً $P(E)$ ہو گا۔ ہم $P(E)$ کو بلا منصوبہ تجربہ میں E کا احتمال⁷⁰ کہتے ہیں۔ دھیان رہے کہ یہ عدد E کی حتمی خاصیت نہیں ہے بلکہ کسی نمونی فضا S یعنی کسی بلا منصوبہ تجربہ سے متعلق ہے۔

جب ہم کہتے ہیں کہ E کا احتمال $P(E)$ ہے، اس سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ اگر اس تجربہ کو بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دیا جائے تب اضافی تعدد $f(E)$ عملی طور پر لازماً $P(E)$ کے تخمیناً برابر ہو گا۔ (یہاں "تخمیناً برابر" کو ہم نے "ٹھیک برابر" بنانا ہو گا۔ اس کے لئے ہمیں انتظار کرنا ہو گا۔)

متعارف کردہ احتمال یوں تجربی اضافی تعدد سے وابستہ ہے۔ اس طرح ضروری ہے کہ یہ اضافی تعدد کی چند بنیادی خواص رکھتا ہو۔ یہ خواص مسئلہ 24.1، مسئلہ 24.2 اور مساوات 24.10 سے اخذ کیے جاسکتے ہیں جنہیں حسابی احتمال کے مسلمات کہتے ہیں۔

حسابی احتمال کے مسلمات

probability⁷⁰

• (الف) اگر نمونی فضا S میں E ایک وقوعہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$(24.11) \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

• (ب) تمام نمونی فضا کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(24.12) \quad P(S) = 1$$

• (پ) اگر A اور B باہمی بلا شرکت وقوعات (حصہ 24.4) ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(24.13) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

لا متناہی نمونی فضا کی صورت میں ہمیں مسلمہ -پ کی جگہ مسلمہ -پ* استعمال کرنا ہو گا۔

• (پ*) اگر E_1, E_2, \dots باہمی بلا شرکت وقوعات ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(24.13^*) \quad P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$$

مسلمہ -پ سے الگراجی مانخوؤ کے ذریعہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.3: (قاعدہ جمع برائے باہمی بلا شرکت وقوعات)

اگر E_1, \dots, E_m باہمی بلا شرکت ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(24.14) \quad P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_m)$$

آپ مساوات 24.9 کا درج ذیل مماثل ثابت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.4: (قاعدہ جمع برائے صوابدیدی وقوعات)

نمونی فضا S میں وقوعات A اور B کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(24.15) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مزید وقوعہ E اور اس کا متمم وقوعہ E^C (حصہ 24.4) بلا شرکت ہیں لہذا $E \cup E^C = S$ ہو گا۔ یوں
مسئلہ - ب اور پ سے

$$P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C) = 1$$

حاصل ہو گا جس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.5: (قاعدہ انعام)

نمونی فضا S میں وقوعہ E اور اس کے متمم وقوعہ E^C کے احتمال کا تعلق درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$P(E) = 1 - P(E^C) \quad (24.16)$$

اس کلیہ کو وہاں استعمال کیا جاسکتا ہے جہاں $P(E^C)$ کا حساب $P(E)$ کے حساب سے زیادہ آسان ہو۔ مثال
24.5 میں اس کی استعمال دکھائی جائے گی۔

ہم نمونی فضا S میں وقوعات کے احتمال کی قیمت کس طرح مقرر کر سکتے ہیں؟

اگر S متناہی ہو اور k ارکان پر مشتمل ہو اور تجربہ سے ظاہر ہوتا ہو کہ ان k انجام کا امکان ایک جیسا ہے
تب ہم ہر انجام کے احتمال کو یکساں قیمت مختص کر سکتے ہیں اور مسئلہ - ب کے تحت یہ احتمال لازماً $\frac{1}{k}$ ہو گا۔ اس
صورت میں احتمال کا حساب، وقوعات کے ارکان کی گنتی کے مترادف ہو گا۔

مثال 24.4: منصفانہ پانسہ

منصفانہ پانسہ سے مراد یکساں خاصیت اور بالکل مربع شکل کا پانسہ ہے۔ پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
ہے۔ یوں $P(1) = \frac{1}{6}$ ، $P(2) = \frac{1}{6}$ ، \dots ، $P(6) = \frac{1}{6}$ ہو گا۔ اس سے اور مسئلہ 24.3 سے ہم دیکھتے
ہیں کہ

وقوعہ جس میں بالائی سطح پر جفت نقطے ہوں: A

کا احتمال $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔ اسی طرح

وقوعہ جس میں بالائی سطح پر 4 نقطوں سے زیادہ نقطے ہوں: B

کا احتمال $P(B) = P(5) + P(6) = \frac{1}{3}$ ہوگا، وغیرہ، وغیرہ۔ زیادہ پیچیدہ صورتیں اگلے حصے میں پیش کی جائیں گی۔ □

مثال 24.5: سکے اچھالنا

پانچ سکے ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں۔ کم از کم ایک خط حاصل ہونے کا احتمال تلاش کریں۔
حل: چونکہ ہر ایک سکے خط یا شیر دے سکتا ہے لہذا نمونی فضا $2^5 = 32$ ارکان پر مشتمل ہے۔ منصفانہ سکے کی صورت میں ہر انجام کو ایک جیسا احتمال $\frac{1}{32}$ مختص کیا جاسکتا ہے۔ تب وقوعہ A^C جس میں کوئی بھی خط حاصل نہ ہو صرف 1 رکن پر مشتمل ہوگا لہذا $P(A^C) = \frac{1}{32}$ ہوگا۔ اس طرح $P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{31}{32}$ حاصل ہوتا ہے۔ □

اگر تجربہ کی نوعیت سے ایسا ظاہر نہ ہو کہ متناہی انجام یکساں برابر امکان رکھتے ہیں یا اگر نمونی فضا متناہی نہ ہو تب، حسابی احتمال کے مسلمات پر پورا اترتے ہوئے، ہم لمبی قوتار میں کوشش دہرا کر اضافی تعدد کو استعمال کرتے ہوئے احتمال کی قیمتیں مختص کرتے ہیں۔

اس طرح ہمیں تخمینی قیمتیں حاصل ہوں گی لیکن اس سے کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ کلاسیکی طبیعیات میں ہمیں عموماً ایسی صورت حال کا سامنا ہوتا ہے مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مادہ کی کوئی کمیت ہوتی ہے لیکن اس کمیت کی ٹھیک قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ نظریہ بنانے میں یہ رکاوٹ پیدا نہیں کرتی ہے۔

اگر ہمیں شک ہو کہ ہم نے درست طریقہ سے احتمال کی قیمتیں مختص نہیں کی ہیں تب ہم شمار پاتی پر کھ کا سہارا لے سکتے ہیں۔

عموماً یہ جانتے ہوئے کہ وقوعہ A ہو چکا ہے ہمیں وقوعہ B کا احتمال درکار ہوگا۔ اس کو دیے گئے A کی صورت میں B کا مشروط احتمال⁷¹ کہتے ہیں جس کو $P(B|A)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں A بطور نئی (تخفیف شدہ) نمونی فضا کردار ادا کرتا ہے اور یہ احتمال $P(A)$ کا وہ (کسری) حصہ ہوگا جو $A \cap B$ کا مطابقتی ہو۔ یوں

$$(24.17) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad [P(A) \neq 0]$$

ہو گا۔ اسی طرح دیے گئے B کی صورت میں A کا مشروط احتمال

$$(24.18) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad [P(B) \neq 0]$$

ہو گا۔

مساوات 24.17 اور مساوات 24.18 کو $P(A \cap B)$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.6: قاعدہ ضرب

اگر نمونی فضا S میں A اور B وقوعات ہوں اور $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہو تب

$$(24.19) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

ہو گا۔

اگر A اور B ایسے وقوعات ہوں کہ

$$(24.20) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ہو تب انہیں غیر تابع وقوعات⁷² کہتے ہیں۔ اب اگر $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہوں تب مساوات 24.17، مساوات 24.18 اور مساوات 24.19 کے تحت

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

ہوں گے جس کا مطلب ہے کہ A کا احتمال B کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا اور اسی طرح B کا احتمال A کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا۔

اسی طرح m وقوعات A_1, \dots, A_m اس صورت غیر تابع ہوں گے جب کسی بھی k وقوعات A_1, \dots, A_k (جہاں $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m$ اور $k = 2, 3, \dots, m$ ہیں) کے لئے درج ذیل ہو۔

$$(24.21) \quad P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_k})$$

دھیان کریں کہ چیزوں کے سلسلہ سے چیز نکالنے، یعنی آبادی سے نمونہ حاصل کرنے، کے دو طریقے پائے جاتے ہیں۔

⁷² independent events

• نمونہ واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔ ہم کل سے جس چیز کو بلا منصوبہ نکالتے ہیں، اسی چیز کو واپس کل میں رکھ کر کل کو اچھی طرح گڈ مڈ کرتے ہیں۔ اس کے بعد اگلا نمونہ نکالا جاتا ہے۔

• نمونہ واپس نہ رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔ ہم نمونہ نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔

مثال 24.6: واپس رکھتے ہوئے اور بغیر واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول ایک ڈبیا میں 10 بیج پائے جاتے ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔ دو بیج بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ دونوں بیج بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ ہم درج ذیل توقعات پر غور کرتے ہیں۔

پہلا نکالا گیا بیج بے عیب ہے۔ $A :$

دوسرا نکالا گیا بیج بے عیب ہے۔ $B :$

چونکہ 10 میں سے 7 بیج بے عیب ہیں اور ہم بلا منصوبہ بیج نکالتے ہیں لہذا ہر بیج کا نکالے جانے کا امکان $\frac{1}{10}$ ہے۔ یوں $P(A) = \frac{7}{10}$ ہو گا۔ اگر ہم اس بیج کو واپس ڈبیا میں رکھ دیں تب دوسری مرتبہ بیج نکالنے میں اور پہلی مرتبہ بیج نکالنے میں کوئی فرق نہیں ہو گا لہذا $P(B) = \frac{7}{10}$ ہو گا۔ یہ توقعات غیر تابع ہیں اور

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49 = 49\%$$

ہو گا۔ اس کے برعکس اگر ہم نمونہ واپس نہ رکھیں تب A وقوع پذیر ہونے کے بعد دوسری مرتبہ ڈبیا میں کل 9 بیج ہوں گے جن میں سے 3 عیب دار ہیں لہذا $P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ہو گا۔ مسئلہ 24.6 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \approx 47\%$$

□

سوالات

سوال 24.40: 5 منصفانہ سکے اچھال کر کم سے کم 1 خط حاصل کرنے کا کیا احتمال ہے؟
جواب: $\frac{31}{32}$

سوال 24.41: تین منصفانہ پانسہ اچھالے جاتے ہیں۔ وقوعہ E جس میں کم از کم دو اعداد مختلف حاصل ہوتے ہیں کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.42: 100 بیچ کی کھیپ میں 10 عیب دار ہیں۔ اس کھیپ سے 3 بیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ (الف) بغیر واپس رکھے، (ب) واپس رکھتے ہوئے، تینوں بیچ بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) $0.9^3 = 72.9\%$ ، (ب) $\frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} = 72.65\%$

سوال 24.43: تین برتن ہیں اور ہر برتن میں 5 مرچ ہیں جن پر 1 تا 5 لکھا گیا ہے۔ ہر برتن سے ایک مرچ نکالا جاتا ہے۔ وقوعہ E جس میں نکالے گئے مرچ پر لکھے اعداد کا مجموعہ 3 سے زیادہ ہو کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.44: 100 لوہے کے سلاخوں کے جتھا میں 25 سلاخ زیادہ لمبے، 25 کم لمبے اور 50 صحیح لمبائی کے ہیں۔ اگر 2 سلاخ بلا منصوبہ نکالے جائیں اور انہیں واپس نہ رکھا جائے تب (الف) دونوں ٹھیک لمبائی کے، (ب) ایک ٹھیک لمبائی کا، (پ) دونوں غلط لمبائی کے، (ت) دو کم لمبائی کے سلاخ نکالنے کے احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) 24.75% ، (ب) 50.5% ، (پ) 24.75% ، (ت) 6.06%

سوال 24.45: کافی عرصہ سے ایک کارخانے میں گلاس بنائے جا رہے ہیں جن میں عیب دار گلاسوں کی شرح برقرار 2% ہے۔ ہر آدھا گھنٹہ بعد دو گلاس نکال کر پرکھے جاتے ہیں۔ اس وقوعہ کا کیا احتمال ہے کہ (الف) دونوں گلاس بے عیب ہوں، (ب) ایک گلاس بے عیب ہو، (پ) دونوں گلاس عیب دار ہوں؟ تینوں صورتوں کے احتمال کا مجموعہ کیا ہے؟

سوال 24.46: ایک ڈیزل انجن سے برقی جزیئر چلایا جاتا ہے۔ 30 دن کے عرصہ میں ڈیزل انجن میں مرمت کی ضرورت کا احتمال 5% جبکہ جزیئر میں مرمت کی ضرورت کا احتمال 6% ہے۔ کسی مخصوص دورانیہ میں دونوں کے مرمت کی ضرورت کا احتمال کیا ہوگا؟
جواب: 10.7%

سوال 24.47: کسی مشین میں ہوا کا دباؤ خود کار نظام سے قابو کیا جاتا ہے۔ یہ خود کار نظام 6 ٹرانزسٹر⁷³ پر مبنی ہے۔ کسی دورانیہ میں ہر ایک ٹرانزسٹر کے خراب ہونے کا احتمال 0.05 ہے۔ خود کار نظام صرف اس صورت کام کر سکتا ہے جب تمام ٹرانزسٹر ٹھیک ہوں۔ کسی دورانیہ میں خود کار نظام کے خراب ہونے کا احتمال کیا ہوگا؟

سوال 24.48: ایک ڈبیا میں 100 بیج ہیں جن میں سے 10 بیجوں میں A قسم کا عیب، 5 میں B قسم کا عیب اور 2 میں دونوں اقسام کے عیب پائے جاتے ہیں۔ پہلے نکالے گئے بیج میں A قسم کا عیب پایا جاتا ہے۔ اس بیج میں B قسم کے عیب کا احتمال کیا ہوگا؟

$$P(E_B|E_A) = \frac{P(E_A \cap E_B)}{P(E_A)} = \frac{0.02}{0.10} = 20\% \quad \text{جواب:}$$

سوال 24.49: دو منصفانہ پانسے اچھالے جاتے ہیں۔ ایک پانسہ 5 دیتا ہے۔ دونوں کا مجموعہ 9 سے زیادہ ہونے کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.50: اگر $P(A^C) = 0.2$ ، $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B^C) = 0.4$ ہوں تب $P(B|A \cup B^C)$ کیا ہوگا؟ (شمارہ۔ وین شکل استعمال کریں۔)

$$\frac{0.4}{0.9} = 0.44 \quad \text{جواب:}$$

سوال 24.51: مسئلہ 24.4 کو ثابت کریں۔

سوال 24.52: مسئلہ 24.3 کو ثابت کریں۔

سوال 24.53: مسئلہ 24.6 کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

سوال 24.54: دکھائیں کہ اگر A کا ذیلی سلسلہ B ہو تب $P(B) \leq P(A)$ ہوگا۔

$$\text{جواب: } A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) = B \cup (A \cap B^C) \quad \text{ہے جبکہ مسلمہ۔ پ سے}$$

$$P(A \cap B^C) \geq 0 \quad \text{ہے۔ چونکہ } P(A) = P(B) + P(A \cap B^C) \geq P(B)$$

24.6 مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات

گزشتہ حصہ سے ہم جانتے ہیں کہ k مساوی انجام پر مشتمل متناہی نمونی فضا S میں ہر انجام کا احتمال $\frac{1}{k}$ ہے اور وقوعہ A کا احتمال حاصل کرنے کی خاطر ہم A وقوعات کو گنتے ہیں۔ یوں اگر وقوعہ m مرتبہ سرانجام ہو تب $P(A) = \frac{m}{k}$ ہو گا۔ انجام کی گنتی کے لئے درج ذیل کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

فرض کریں کہ چیزوں یا ارکان کی تعداد n ہے۔ انہیں کسی بھی ترتیب سے ایک صف میں رکھا جاسکتا ہے۔ ایسی ہر ترتیب ان چیزوں کی ایک مرتب اجتماع⁷⁴ کہلاتی ہے۔

مسئلہ 24.7: مرتب اجتماعات

n مختلف چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی جہاں تمام چیزیں مرتب اجتماعات میں شامل ہیں۔

$$(24.22) \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad \text{اس کو "عدد ضربیہ" } n \text{ پڑھیں}$$

مرتب اجتماع میں پہلی جگہ کو n مختلف طریقوں سے پر کیا جاسکتا ہے۔ پہلی جگہ پر کرنے کے بعد $n-1$ ارکان رہ جاتے ہیں لہذا دوسری جگہ کو $n-1$ مختلف طریقوں سے پر کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح چلتے ہوئے درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.8: مرتب اجتماعات

اگر n چیزوں کو c مختلف جماعتوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہو جہاں ہر ایک جماعت میں تمام چیزیں بالکل یکساں ہوں جبکہ ہر جماعت میں چیزیں دوسری تمام جماعتوں کی چیزوں سے مختلف ہوں تب ان چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد

$$(24.23) \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_c!} \quad (n_1 + n_2 + \cdots + n_c = n)$$

ہو گی جہاں تمام چیزیں لی گئی ہیں اور j ویں جماعت میں چیزوں کی تعداد n_j ہے۔

n چیزوں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرنے سے ایسی مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جن میں صرف k چیزیں شامل ہوں گی۔ ایک ہی k ارکان کی دو مرتب اجتماعات جن میں ارکان کی ترتیب مختلف ہو،

⁷⁴ permutation

تعریف کی رو، سے مختلف مرتب اجتماعات ہوں گی۔ مثال کے طور پر تین حروف a, b, c میں سے ایک وقت دو حروف منتخب کرتے ہوئے ab, ac, bc, ba, ca, cb مرتب اجتماعات ملتی ہیں۔

n چیزوں میں سے k چیزوں کی مرتب اجتماعات، جہاں چیز واپس رکھی جائے، حاصل کرتے ہوئے کسی بھی چیز کو پہلی مقام پر رکھ کر، دوسری جگہ کوئی بھی چیز بشمول پہلی چیز رکھی جاسکتی ہے۔ اسی طرح باقی جگہ پر کیے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر a, b, c میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے واپس رکھتے ہوئے کل $3^2 = 9$ مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جس میں مذکورہ بالا 6 مرتب اجتماعات اور aa, bb, cc شامل ہیں۔ آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.63)۔

مسئلہ 24.9: مرتب اجتماعات

بغیر واپس رکھے، n مختلف چیزوں میں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد

$$(24.24) \quad n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

حاصل ہو گی جبکہ منتخب چیز واپس رکھتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$(24.24^*) \quad n^k$$

مرتب اجتماعات (کی تعداد) میں نا صرف چیزیں اہمیت رکھتی ہیں بلکہ ان چیزوں کی ترتیب بھی اہمیت رکھتی ہے۔ اس کے برعکس دی گئے چیزوں کے غیر مرتب اجتماعات⁷⁵ سے مراد ایک یا ایک سے زیادہ چیزوں کی وہ انتخاب ہے جس میں چیزوں کی ترتیب کو رد کیا جاتا ہے۔ دو قسم کے غیر ترتیبی اجتماعات پائے جاتے ہیں۔

بغیر واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جاسکتے ہیں۔ ہر سلسلہ میں k مختلف چیزیں ہوں گی اور کسی بھی دو سلسلوں میں بالکل ایک جیسی چیزیں نہیں پائی جائیں گی۔

اس کے علاوہ، چیزوں کو واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جاسکتے ہیں۔

مثال کے طور پر 3 حروف a, b, c میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے بغیر واپس رکھے ab ، ac ، bc حاصل کیے جاسکتے ہیں جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے ab ، ac ، bc ، aa ، bb ، cc حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

مسئلہ 24.10: غیر مرتب اجتماعات
بغیر واپس رکھے، n چیزوں میں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرتے ہوئے

$$(24.25) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

غیر مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے غیر مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہوگی۔

$$(24.25^*) \quad \binom{n+k-1}{k}$$

مسائل 24.25 کے ساتھ منسلک فقرہ مسئلہ 24.9 کے پہلے حصے سے اخذ ہوتا ہے یعنی n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے ان k چیزوں کے مرتب اجتماعات $k!$ ہوں گے جن میں صرف چیزوں کی ترتیب مختلف ہوگی (مسئلہ 24.7) لیکن مسئلہ 24.10 کے پہلے فقرے کے تحت ان k چیزوں کا صرف ایک غیر مرتب اجتماع پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ الگراجی مانوڈ سے حاصل کیا جاسکتا ہے (سوال 24.64)۔

مثال 24.7: مسئلہ 24.7 اور مسئلہ 24.8 کا استعمال
ایک ڈبیا میں 10 مختلف قسم کے پیچ ہیں جنہیں ایک مخصوص ترتیب سے مشین میں لگایا جاتا ہے۔ ان پیچوں کو ڈبیا سے بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔ انہیں ڈبیا سے درکار ترتیب میں نکلنے کا احتمال P بہت کم (مسئلہ 24.7) یعنی

$$P = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800} \approx 0.00003\%$$

ہوگا۔ اگر ڈبیا میں 6 دائیں ہاتھ اور 4 بائیں ہاتھ پیچ ہوں اور 6 دائیں ہاتھ پیچ پہلے اور 4 بائیں ہاتھ پیچ بعد میں درکار ہوں تب اس ترتیب میں پیچ نکلنے کا احتمال P (مسئلہ 24.8) درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{6!4!}{10!} = \frac{1}{210} \approx 0.5\%$$

□

مثال 24.8: مسئلہ 24.9 کا استعمال
ایک خفی خط میں حروف کو 5 کی گروہ (الفاظ) میں لکھا جاتا ہے۔ مساوات 24.24* سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل

$$26^5 = 11\,881\,376$$

مختلف الفاظ ممکن ہیں۔ مساوات 24.24 کے تحت ایسے الفاظ جن میں ہر حرف زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ استعمال ہو کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{26!}{(26-5)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$$

□

مثال 24.9: مسئلہ 24.10 کا استعمال
500 پیچوں میں سے 5 پیچ بلا منصوبہ منتخب کرتے ہوئے

$$\binom{500}{5} = \frac{500!}{5!495!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497 \cdot 496}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 255\,244\,687\,600$$

□

نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

آئیں عدد ضربیہ تفاعل کے بار میں کچھ باتیں کریں۔ صفر کا عدد ضربیہ (0!) کی تعریف

$$(24.26) \quad 0! = 1$$

ہے۔ باقی عدد صحیح کے عدد ضربیہ درج ذیل کلیہ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(24.27) \quad (n+1)! = (n+1)n!$$

بڑی عدد کے لئے یہ کلیہ بہت بڑے اعداد دیتا ہے۔ ہم بڑے عدد n کی صورت میں عموماً درج ذیل کلیہ سٹرلنگ⁷⁶ استعمال کرتے ہیں⁷⁷

$$(24.28) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (e = 2.718\ldots)$$

⁷⁶ Stirling formula

⁷⁷ انگلستانی ریاضی دان جیمس سٹرلنگ [1692-1770]

جہاں \sim سے مراد یہ ہے کہ n کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہونے سے مساوات 24.28 کی دونوں ہاتھ کا تناسب 1 کے قریب تر ہو گا۔

ثنائی عددی سر⁷⁸ کی تعریف درج ذیل کلیہ ہے۔

$$(24.29) \quad \binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} \quad (k \geq 0, \text{ عدد صحیح})$$

شمار کنندہ میں k اجزاء ہیں۔ مزید ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

$$(24.30) \quad \binom{a}{0} = 1 \implies \binom{0}{0} = 1$$

عدد صحیح $a = n$ کے لئے مساوات 24.29 سے

$$(24.31) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (n \geq 0, 0 \leq k \leq n)$$

حاصل ہو گا۔ چونکہ

$$(24.32) \quad \binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \quad (k \geq 0, \text{ عدد صحیح})$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا ثنائی عددی سر کو تکرار سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 24.29 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(24.33) \quad \binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \quad (k \geq 0, \text{ عدد صحیح}; m > 0)$$

متعدد دیگر کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں جن میں سے ہم

$$(24.34) \quad \sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad (k \geq 0, n \geq 1, \text{ عدد صحیح})$$

اور

$$(24.35) \quad \sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

پیش کرتے ہیں۔

سوالات

سوال 24.55: تمام چار اعداد 1, 2, 3, 4 لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.56: تمام پانچ حروف تہجی د، ڈ، ذ، ر، ٹ لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.57: دس افراد میں سے تین افراد کے کتنے پنچلیت بنائی جاسکتی ہیں؟
جواب: $\binom{10}{3} = 120$

سوال 24.58: گاڑی کے نمبر پلیٹ پر دو حروف تہجی اور تین اعداد لکھ کر کتنے مختلف نمبر پلیٹ بنائے جاسکتے ہیں؟

سوال 24.59: 100 کی کھیپ سے 3 چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں؟
جواب: $\binom{100}{3} = 161700$

سوال 24.60: ایک لوٹے میں 2 سیاہ، 3 سفید، اور 4 سرخ گیند پڑے ہیں۔ ہم بلا منصوبہ ایک گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔ اس کے بعد دوسرا گیند نکل کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔ اس کا احتمال تلاش کریں کہ پہلے 2 سیاہ، اس کے بعد 3 سفید اور آخر میں 4 سرخ گیند نکلیں۔

سوال 24.61: ہمارے پار 6 مختلف رنگ ہیں۔ ہم کتنے طریقوں سے (الف) 2، (ب) 3 رنگ منتخب کر سکتے ہیں؟
جواب: 15, 15

سوال 24.62: 10 کی کھیپ میں 2 چیزیں عیب دار ہیں۔ ان میں سے چار چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں کہ ان میں کوئی بھی چیز عیب دار نہ ہوں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں کہ ان میں 1 چیز عیب دار ہو؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جاسکتے ہیں کہ ان میں 2 چیزیں عیب دار ہوں؟

سوال 24.63: مسئلہ 24.9 ثابت کریں۔

جواب: ثبوت کا طریقہ کار وہی ہے جو مسئلہ 24.7 میں استعمال کیا گیا ہے لیکن اب n کی جگہ ہم k جگہیں پر کرتے ہیں۔ اگر واپس رکھنا ممکن ہو تب k میں سے ہر ایک کو n اشیاء سے پر کیا جاسکتا ہے۔

سوال 24.64: مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ ثابت کریں۔ اشارہ۔ مساوات 24.34 استعمال کریں۔

سوال 24.65: مساوات 24.28 استعمال کرتے ہوئے $4!$ اور $8!$ کی تخمینی قیمتیں حاصل کریں۔ ان تخمینی قیمتوں کا حتمی اور اضافی خلل کیا ہے؟ جواب: $1\%, 400, 39\,902; 2\%, 0.5, 23.5$

سوال 24.66: ایک کھیپ سے 4 چیزوں کا نمونہ، بغیر واپس رکھے حاصل کیا جاتا ہے۔ مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات کی تعداد کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 24.67: مساوات 24.29 سے مساوات 24.32 حاصل کریں۔

سوال 24.68: (مسئلہ ثنائی) مسئلہ ثنائی 79 کے تحت

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ہو گا۔ یوں $a^k b^{n-k}$ کا عددی سر $\binom{n}{k}$ ہے۔ کیا مسئلہ 24.10 سے آپ یہ اخذ کر سکتے ہیں یا آپ سمجھتے ہیں کہ یہ محض اتفاق ہے۔

سوال 24.69: مسئلہ ثنائی (سوال 24.68) کو

$$(1 + b)^p (1 + b)^q = (1 + b)^{p+q}$$

پر لاگو کرتے ہوئے مساوات 24.35 ثابت کریں۔

24.7 بلا منصوبہ متغیرات۔ غیر مسلسل اور استمراری تقسیم

دو پانسے اچھال کر 2 تا 12 عدد صحیح مجموعہ X حاصل ہو گا لیکن اگلے اچھال میں حاصل X کی پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ X "امکان" پر منحصر ہے۔ اسی طرح اگر ہم پیچوں کی کھیپ سے 5 کا

نمونہ لے کر ان کی لمبائی ناپنا چاہیں تو ہم پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں کہ ان میں سے کتنے عیب دار ہوں گے؛ یوں عیب دار بیچوں کی تعداد X "امکان" پر منحصر ہوگی۔

بلا منصوبہ متغیر X ⁸⁰ سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کی قیمت حقیقی اعداد اور "امکان" پر منحصر ہوں۔ بلا منصوبہ متغیر کو امکانی متغیر⁸¹ بھی کہتے ہیں۔ یہ کہنا زیادہ درست ہوگا کہ تفاعل X درج ذیل خواص رکھتا ہے۔

• تجربہ کی نمونی فضا S پر X معین ہے اور اس کی قیمتیں حقیقی اعداد ہیں۔

• فرض کریں کہ a کوئی حقیقی عدد اور I کوئی وقفہ ہیں۔ تب S میں ان تمام انجام کا سلسلہ جن کے لئے $X = a$ ہو کا احتمال پوری طرح معین ہوگا اور یہی کچھ S میں ان تمام انجام کے لئے درست ہوگا جن کے لئے X کی قیمت I میں ہو۔ یہ احتمال حصہ 24.5 میں دی گئی مسلمات کے تحت ہوں گی۔

اگرچہ یہ تعریف عمومی ہے جس میں بہت سے تفاعل شامل ہیں، ہم دیکھیں گے کہ عملاً اہم بلا منصوبہ متغیرات کے اقسام اور ان کی مطابقتی "تقسیم احتمال" کی تعداد بہت کم ہیں۔

اگر ہم بلا منصوبہ تجربہ سرانجام دیں اور عدد a کا مطابقتی وقوعہ حاصل ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تجربہ کی کوشش میں بلا منصوبہ متغیر X قیمت a اختیار⁸² کرتا ہے۔ ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ ہم نے قیمت $X = a$ کا مشاہدہ⁸³ کیا۔ بجائے "عدد a کا مطابقتی وقوعہ" کہنے کے ہم مختصراً کہتے ہیں، "وقوعہ $X = a$ "۔ مطابقتی احتمال $P(X = a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح وقوعہ

X وقفہ $a < X < b$ میں کوئی قیمت اختیار کرتا ہے

کا احتمال $P(a < X < b)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وقوعہ

(c کے برابر یا c سے کم قیمت X اختیار کرتا ہے) $X \leq c$

کا احتمال $P(X \leq c)$ سے ظاہر کیا جائے گا اور وقوعہ

(c سے زیادہ قیمت X اختیار کرتا ہے) $X > c$

random variable⁸⁰

stochastic variable⁸¹

assume⁸²

observed⁸³

کا احتمال $p(X > c)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

مندرجہ بالا دو آخری وقوعات باہمی بلا شرکت ہیں لہذا حصہ 24.5 کے مسلمہ-پ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(X \leq c) + P(X > c) = P(-\infty < X < \infty)$$

چونکہ $-\infty < X < \infty$ پورا نمونی فضا کو ظاہر کرتا ہے لہذا مسلمہ-ب کے تحت دایاں ہاتھ 1 کے برابر ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

$$(24.36) \quad P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \quad (\text{اختیاری } c)$$

مثال کے طور پر، اگر X وہ عدد ہو جو پانسہ اچھال کر حاصل ہوتا ہو، تب

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(1 < X < 2) = 0, \quad P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{3}, \\ P(0 \leq X \leq 3.2) = \frac{1}{2}, \quad P(X > 4) = \frac{1}{3}, \quad P(X \leq 0.5) = 0, \quad \dots$$

ہوں گے۔

عموماً صورتوں میں بلا منصوبہ متغیرات غیر مسلسل⁸⁴ یا استمراری⁸⁵ ہوں گے۔ ان دونوں پر باری باری غور کرتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیر X اور اس کا مطابقتی تقسیم اس صورت غیر مسلسل کہلاتے ہیں جب X درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

• ان قیمتوں کا تعداد جن کے لئے X کا احتمال غیر 0 ہو متناہی یا قابل شمار لا متناہی ہوں۔

• اگر وقفہ $a < X \leq b$ میں ایسا قیمت نہ پایا جاتا ہو، تب $P(a < X \leq b) = 0$ ہو گا۔

فرض کریں کہ

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots$$

وہ قیمتیں ہیں جن کے لئے X کا مثبت احتمال پایا جاتا ہو اور فرض کریں کہ مطابقتی احتمال درج ذیل ہیں۔

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \dots$$

تب $P(X = x_1) = P_1$ ، وغیرہ ہو گا۔ ہم اب تفاعل

$$(24.37) \quad f(x) = \begin{cases} p_j & x = x_j \\ 0 & x \neq x_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

متعارف کرتے ہیں۔ $f(x)$ کو X کا تفاعل احتمال⁸⁶ کہتے ہیں۔

discrete⁸⁴
continuous⁸⁵
probability function⁸⁶

چونکہ $P(S) = 1$ (حصہ 24.5 مسلمہ-ب) ہے لہذا لازمی طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$(24.38) \quad \sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1$$

اگر ہمیں بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر X کا احتمال معلوم ہو، تب ہم کسی بھی وقفہ $a < X \leq b$ کے لحاظ سے $P(a < X \leq b)$ کا حساب کر سکتے ہیں جو درحقیقت

$$(24.39) \quad P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_j \leq b} f(x_j) = \sum_{a < x_j \leq b} p_j$$

ہو گا جو اس وقفہ میں تمام x_j کے لئے احتمال $f(x_j) = p_j$ کا مجموعہ ہے۔ بند، کھلا یا لامتناہی وقفہ کے لئے صورت حال تقریباً اسی طرح ہے۔ اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ بلا منصوبہ متغیر X کے لئے تفاعل احتمال $f(x)$ ، تقسیم احتمال⁸⁷، یا مختصراً، تقسیم⁸⁸ کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

اگر X کوئی بلا منصوبہ متغیر ہو، جو ضروری نہیں کہ غیر مسلسل ہو، تب کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے

$$X \leq x \quad (x \text{ سے کم یا } x \text{ کے برابر کوئی بھی قیمت } X \text{ اختیار کر سکتا ہے})$$

کا مطابقتی احتمال $P(X \leq x)$ پایا جائے گا۔ ظاہر ہے کہ $P(X \leq x)$ کی قیمت x کے انتخاب پر منحصر ہو گی؛ یہ x کا تفاعل ہو گا جس کو X کا تفاعل تقسیم⁸⁹ کہتے⁹⁰ ہیں جس کو $F(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$(24.40) \quad F(x) = P(X \leq x)$$

ہو گا۔ چونکہ کسی بھی a اور $b > a$ کے لئے

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

ہے لہذا

$$(24.41) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

⁸⁷probability distribution

⁸⁸distribution

⁸⁹distribution function

⁹⁰بعض مصنف $F(x)$ کو مجموعی تفاعل تقسیم کہتے ہیں، خصوصاً وہ جو $f(x)$ کو تفاعل احتمال کہتے ہیں۔

ہو گا جس سے ظاہر ہے کہ X کی تقسیم کو تفاعل تقسیم کی طرح پر تعین کرتا ہے لہذا اس کو احتمال کے حساب کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

فرض کریں کہ X ایک غیر مسلسل متغیر ہے۔ تب ہم تفاعل تقسیم $F(x)$ کو تفاعل احتمال $f(x)$ کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ یقیناً مساوات 24.39 ($a = -\infty$ اور $b = x$ کے ساتھ) پر کرتے ہوئے

$$(24.42) \quad F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

حاصل ہو گا جہاں دایاں ہاتھ $x_j \leq x$ کے لئے ان تمام $f(x_j)$ کا مجموعہ ہے۔ سادہ مثالیں شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں دکھائی گئی ہیں جو دو پانسے کو ایک بار اچھال کر حاصل ہوا ہے۔ دونوں اشکال میں $f(x)$ کو ڈبہ ترسیم کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 24.7 میں $x = 1, 2, \dots, 6$ کے لئے $f(x) = \frac{1}{6}$ اور اس کے علاوہ $f(x) = 0$ ہے جو پانسے اچھال کر حاصل ہوئے ہیں جبکہ شکل 24.8 میں $f(x)$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں جو دو پانسے کا حاصل مجموعہ ہے۔

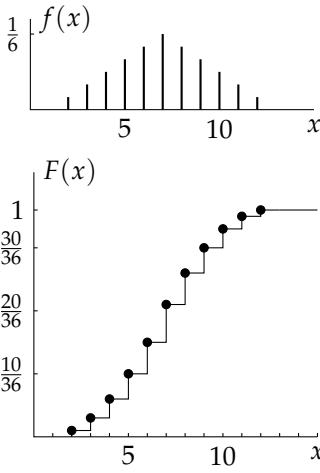
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

دو پانسے کے تجربہ میں چونکہ $6 \cdot 6 = 36$ ممکنہ مساوی امکاناتی انجام ہیں لہذا ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{36}$ ہے۔ صرف (1,1) کے لئے (جہاں پہلا عدد ایک پانسے اور دوسرا عدد دوسرے پانسے کا نتیجہ ہے) $X = 2$ ہو گا؛ اسی طرح (1,2) اور (2,1) انجام کے لئے $X = 3$ ہو گا؛ (1,3)، (2,2)، (3,1) کے لئے $X = 4$ ہو گا، وغیرہ۔

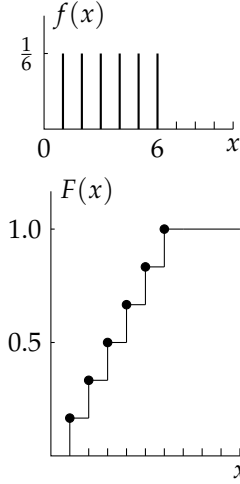
صرف وہ x_1, x_2, x_3, \dots قیمتیں جن کے لئے بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر X مثبت احتمال رکھتا ہو X کی ممکنہ قیمتیں⁹¹ کہلاتی ہیں۔ جس وقفہ میں کوئی ممکنہ قیمت نہ پائی جاتی اس وقفہ میں تفاعل تقسیم $F(x)$ مستقل ہو گا۔ اس طرح $F(x)$ سیڑھی تفاعل (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہو گا جس میں $x = x_j$ پر اوپر رخ $p_j = P(X = x_j)$ چھلانگ پائی جائے گی جبکہ دو چھلانگوں کے بیچ یہ مستقل ہو گا۔ شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں ایسا صاف ظاہر ہے۔

ہم اب استمراری بلا منصوبہ متغیر کی تعریف پیش کرتے ہیں اور اس پر غور کرتے ہیں۔ ایک بلا منصوبہ متغیر X اور اس کا مطابق تفاعل تقسیم تب استمراری کہلاتے ہیں جب اس کا تفاعل تقسیم $F(x) = P(X \leq x)$ مثبت ہو

⁹¹ possible values



شکل 24.8: $f(x)$ احتمال اور $F(x)$ تقسیم



شکل 24.7: $f(x)$ احتمال اور $F(x)$ تقسیم

اور اسے درج ذیل مکمل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو⁹²

$$(24.43) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(v) dv$$

جہاں مکمل استمراری ہے، ماسوائے v کی متناہی تعداد کے قیمتوں کے لئے۔ مکمل f کو تقسیم کی کثافت احتمال یا مختصر کثافت کہتے ہیں۔ ہر اس x پر جہاں $f(x)$ استمراری ہو وہاں مساوات 24.43 کو تقسیم کرتے ہوئے

$$F'(x) = f(x)$$

حاصل ہو گا۔ اس لحاظ سے تقسیم کا تفرق کثافت ہے۔

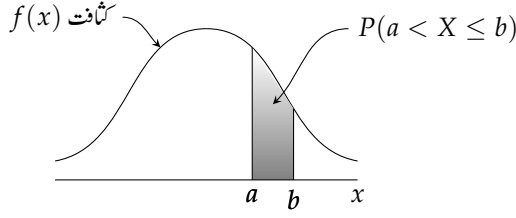
مساوات 24.43 اور حصہ 24.5 کے مسلمہ - ب کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$(24.44) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv = 1$$

مساوات 24.41 اور مساوات 24.43 سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(24.45) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(v) dv$$

⁹² $F(x)$ استمراری ہے لیکن $F(x)$ کے استمراری ہونے سے مساوات 24.43 کی موجودگی ثابت نہیں ہوتی ہے۔ چونکہ ایسے استمراری تقسیم جنہیں مساوات 24.43 کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو عملاً بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا اصطلاحات "استمراری بلا منصوبہ متغیر" اور "استمراری تقسیم" جو بہت زیادہ استعمال کی جاتی ہیں سے پریشانی پیدا ہونے کا امکان بہت کم ہو گا۔



شکل 24.9: شکل برائے مساوات 24.45

یوں جیسا شکل 24.9 میں دکھایا گیا ہے، کثافت $f(x)$ کے منحنی کے نیچے $x = a$ اور $x = b$ کے بیچ رقبہ احتمال کے برابر ہو گا۔

ظاہر ہے کہ کسی بھی مقررہ a اور $b (> a)$ کے لئے وقفہ $a < X \leq b$ ، $a < X < b$ اور $a \leq X < b$ کے احتمال ایک جیسے ہوں گے جو غیر مسلسل صورت حال سے مختلف ہے۔

استمراری تقسیم کے مثال (سوالات) اگلے حصے کے سوالات اور آنے والے حصوں میں پیش کئے جائیں گے۔

سوالات

سوال 24.70: تفاعل احتمال $f(x) = \frac{x^2}{14}$ ($x = 1, 2, 3$) اور تفاعل تقسیم کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.71: X کا تفاعل احتمال $f(2) = \frac{1}{2}$ ، $f(3) = \frac{1}{4}$ ، $f(4) = \frac{1}{8}$ ، $f(5) = \frac{1}{8}$ ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ X کی قیمت 4 سے کم ہوگی؟

سوال 24.72: ایک مشین کو X سالوں کے بعد تبدیل کرنا ضروری ہے۔ X کا تفاعل احتمال $f(1) = 0.3$ ، $f(2) = 0.4$ ، $f(3) = 0.2$ ، $f(4) = 0.1$ ہے۔ f اور F کو ترسیم کریں۔

سوال 24.73: کسی پٹرول پمپ میں ایک دن کی درکار پٹرول بلا منصوبہ متغیر X ہے۔ فرض کریں کہ $2000 < x < 6000$ کے لئے X کی کثافت $f(x) = k$ ہے ورنہ 0 ہے۔ k تلاش کریں اور تفاعل

تقسیم $F(x)$ ترسیم کریں۔
جواب:

$$k = \frac{1}{4000}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2000 \\ \frac{x}{4000} - 0.5 & 2000 \leq x < 6000 \\ 1 & x \geq 6000 \end{cases}$$

سوال 24.74: $x > 0$ کے لئے $f(x) = ce^{-x}$ جبکہ $x < 0$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ c تلاش کریں۔ f اور F کر ترسیم کریں۔

سوال 24.75: 3 پانسہ اچھال کر ان کا مجموعہ لے کر بلا منصوبہ متغیر X حاصل کیا جاتا ہے۔ تفاعل احتمال $f(x)$ ترسیم کریں۔
جواب: $f(3) = \frac{1}{216}, f(4) = \frac{3}{216}, \dots$

سوال 24.76: کاغذ کے گتے کی موٹائی X ملی میٹر ہے۔ فرض کریں کہ $1.9 < x < 2.1$ کے لئے کثافت $f(x) = kx$ ہے ورنہ $f(x) = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ گتے کی موٹائی 1.95 اور 2.05 کے بیچ ہو؟

سوال 24.77: ایک سکہ کو اتنی مرتبہ (X) اچھالا جاتا ہے جب تک خط حاصل نہ ہو۔ دکھائیں کہ اس تجربہ کا تفاعل احتمال $f(x) = 2^{-x}, (x = 1, 2, \dots)$ ہو گا۔ دکھائیں کہ $f(x)$ مساوات 24.38 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 24.78: $0 \leq x \leq 1$ کے لئے $f(x) = kx^2$ ہے ورنہ $f(x) = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ ایسا عدد c تلاش کریں کہ $P(X \leq c) = 72.9\%$ ہو۔

سوال 24.79: بلب کی عرصہ زندگی X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی کثافت

$$f(x) = 6[0.25 - (x - 1.5)^2] \quad 1 \leq x \leq 2$$

اور باقی x کے لئے $f(x) = 0$ ہے، جہاں $x = 1$ سے مراد 1000 گھنٹے ہیں۔ کیا احتمال ہے کہ سڑک کے اشارے پر پہلے 1200 گھنٹوں میں تین میں سے کسی ایک بھی بلب کی تبدیل کرنے کی ضرورت پیش نہ آئے؟
جواب: $P(X > 1200) = \int_{1.2}^2 6[0.25 - (x - 1.5)^2] dx = 0.896^3 = 72\%$

سوال 24.80: کسی دکان کی فروخت اور منافع کی نسبت X ہے۔ فرض کریں کہ X کی تفاعل تقسیم $x < 2$ کے لئے $F(x) = 0$ ، $2 \leq x < 3$ کے لئے $F(x) = \frac{x^2-4}{5}$ اور $x \geq 3$ کے لئے $F(x) = 1$ ہے۔ کثافت تلاش کر کے ترسیم کریں۔ X کی قیمت 2.5 (40% منافع) اور 5 (20% منافع) کے بیچ میں ہونے کا کیا احتمال ہے؟

سوال 24.81: X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جو کوئی بھی حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ وقوعہ $X \leq b$ ، $X < b$ ، $X \geq c$ ، $X > c$ ، $b < X \leq c$ ، $b \leq X < c$ کے متمم کے کیا احتمال ہوں گے؟
جواب: $X \leq b$ یا $X > c$ ، $X < b$ یا $X \geq c$ ، $X \leq c$ ، $X < c$ ، $X \geq b$ ، $X > b$

سوال 24.82: ایک ڈبہ میں 4 دائیں ہاتھ پیچ اور 6 بائیں ہاتھ پیچ پائے جاتے ہیں۔ بغیر واپس رکھے، دو پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ نکالے گئے بائیں ہاتھ پیچوں کی تعداد X ہے۔ احتمال $P(X=1)$ ، $P(X=0)$ ، $P(1 < X < 2)$ ، $P(X \leq 1)$ ، $P(X \geq 1)$ ، $P(X > 1)$ ، $P(0.5 < X < 10)$ تلاش کریں۔

سوال 24.83: دکھائیں کہ $b < c$ سے مراد $P(X \leq b) \leq P(X \leq c)$ ہے۔

24.8 تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت

تقسیم کے اوسط⁹³ کو μ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(24.46) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad \mu &= \sum_j x_j f(x_j) & \text{(غیر مسلسل تقسیم)} \\ \text{(ب)} \quad \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{(استمراری تقسیم)} \end{aligned}$$

مساوات 24.46-الف میں زیر غور بلا منصوبہ متغیر X کا تفاعل احتمال $f(x)$ ہے اور ہم تمام ممکنہ قیمتوں (حصہ 24.7) پر مجموعہ لیتے ہیں۔ مساوات 24.46-ب میں X کی کثافت $f(x)$ ہے۔ اوسط کو X کی حسابی توقع⁹⁴

⁹³ mean
⁹⁴ mathematical expectation

بھی کہتے ہیں جس کو $E(X)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.46-
الف کی تسلسل حقیقی مرتکز ہوگی اور $-\infty$ سے ∞ تک $|x| f(x)$ کا مکمل موجود ہوگا۔ اگر یہ مکمل موجود نہ
ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تقسیم کی اوسط نہیں ہائی جاتی ہے؛ ایسی صورت عملی انجینئری میں شاذ و نادر پائی جاتی ہے۔

$x = c$ کے لحاظ سے ایک تقسیم کو اس صورت تشاکلی کہتے ہیں جب ہر حقیقی x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا
ہو۔

$$f(c+x) = f(c-x) \quad (24.47)$$

آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.11: (تشاکلی تقسیم کا اوسط)

اگر ایک تقسیم $x = c$ کے لحاظ سے تشاکلی ہو اور اس کا اوسط μ ہو تب $\mu = c$ ہوگا۔

تقسیم کی تغیریت⁹⁵ کو σ^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad \sigma^2 &= \sum_j (x_j - \mu)^2 f(x_j) & \text{(غیر مسلسل تقسیم)} \\ \text{(ب)} \quad \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx & \text{(استمراری تقسیم)} \end{aligned} \quad (24.48)$$

جہاں تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.48-الف میں دی گئی تسلسل حقیقی مرتکز ہے اور مساوات
24.48-ب کا مکمل موجود ہے۔

غیر مسلسل تقسیم کی صورت میں اگر کسی ایک نقطہ پر $f(x) = 1$ اور باقی ہر جگہ $f(x) = 0$ ہو تب
 $\sigma^2 = 0$ ہوگا جو عملاً غیر دلچسپ صورت ہے۔ اس غیر دلچسپ صورت کے علاوہ ہر صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$\sigma^2 > 0 \quad (24.49)$$

تغیریت کا مثبت جذر معیاری انحراف⁹⁶ کہلاتا ہے جس کو σ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

⁹⁵ variance
⁹⁶ standard deviation

بلا منصوبہ متغیر X جن قیمتوں کو اختیار کر سکتا ہے، تغیریت کو ان قیمتوں کی پھیل کی ناپ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مثال 24.10: (اوسط اور تغیریت)
بلا منصوبہ متغیر

سکہ اچھال کر شیر کا حاصل ہونا $X =$

کے ممکنہ قیمتیں $X = 0$ اور $X = 1$ ہیں جن کا احتمال $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ اور $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ ہے۔ مساوات 24.46-الف سے اوسط $\mu = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 24.46-ب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sigma^2 = (0 - \frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

□

مثال 24.11: یکساں تقسیم
وہ تقسیم جس کی کثافت $a < x < b$ کے لئے

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a < x < b)$$

اور باقی x کے لئے $f = 0$ ہو، وقفہ $a < x < b$ میں یکساں تقسیم⁹⁷ کہلاتی ہے۔ مسئلہ 24.11 یا مساوات 24.48-الف سے $\mu = \frac{a+b}{2}$ اور مساوات 24.48-ب سے تغیریت حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

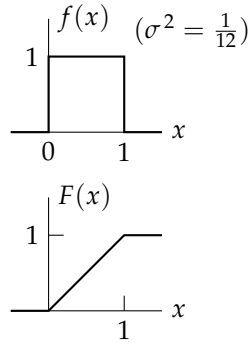
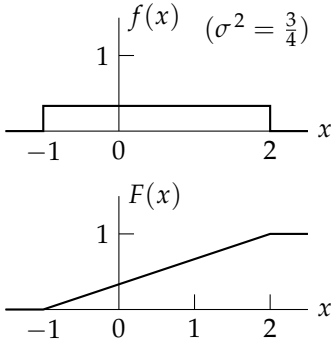
□

شکل 24.10 میں چند خصوصی مثالیں پیش کی گئی ہیں جو دکھاتی ہیں کہ σ^2 پھیل کی ناپ ہے۔

مسئلہ 24.12: (خطی تبادل)

اگر بلا منصوبہ متغیر X کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو تب بلا منصوبہ متغیر $X^* = c_1 X + c_2$ ($c_1 \neq 0$) کی اوسط

$$(24.50) \quad \mu^* = c_1 \mu + c_2$$



شکل 24.10: یکساں تقسیم جن کی ایک جیسی اوسط (0.5) لیکن مختلف تغیریت σ^2 ہے

اور تغیریت

$$(24.51) \quad \sigma^{*2} = c_1^2 \sigma^2$$

ہو گی۔

ثبوت : ہم پہلے $c_1 > 0$ فرض کرتے ہوئے مساوات 24.50 کو استمراری صورت کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ X محور پر چھوٹے سے وقفہ Δx کا مطابقتی احتمال (تخمیناً) $f(x)\Delta x$ ہو گا جو ہر صورت X^* محور پر مطابقتی چھوٹے وقفہ $\Delta x^* = c_1 \Delta x$ پر احتمال $f^*(x^*)\Delta x^*$ کے برابر ہو گا لہذا $x^* = c_1 x + c_2$ کے مطابقتی، X کی کثافت $f(x)$ اور X^* کی کثافت $f^*(x^*)$ تعلق $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{c_1}$ کو مطمئن کریں گے۔ چونکہ $\frac{dx^*}{dx} = c_1$ ہے لہذا $dx^* = c_1 dx$ اور $f^*(x^*) dx^* = f(x) dx$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} \mu^* &= \int_{-\infty}^{\infty} x^* f^*(x^*) dx^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x + c_2) f(x) dx \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

جہاں آخری مکمل مساوات 24.44 کے تحت 1 کے برابر ہو گا۔ یوں مساوات 24.50 ثابت ہوتی ہے۔ چونکہ

$$x^* - \mu^* = (c_1 x + c_2) - (c_1 \mu + c_2) = c_1 x - c_1 \mu$$

ہے لہذا تغیریت کی تعریف سے

$$\sigma^{*2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x^* - \mu^*)^2 f^*(x^*) dx^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x - c_1 \mu)^2 f(x) dx = c_1^2 \sigma^2$$

حاصل ہو گا۔ $c_1 < 0$ سے نتائج تبدیل نہیں ہوتے ہیں چونکہ اس سے دو اضافی منفی کی علامتیں ملتی ہیں، ایک x میں کھل کے رخ کی تبدیلی کی بنا (دھیان رہے کہ $x^* = -\infty$ کا مطابقتی $x = \infty$ ہے) اور دوسرا $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{-c_1}$ کی بنا؛ یہاں $-c_1 > 0$ درکار ہو گا چونکہ کثافت غیر منفی قیمت ہے۔

غیر مسلسل کثافت کے لئے مسئلے کا ثبوت بھی بالکل ایسا ہی ہے۔

□

مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے ہم درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.13: (معیاری متغیر) اگر بلا منصوبہ متغیر X کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو، تب مطابقتی متغیر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی۔

Z کو X کا مطابقتی معیاری متغیر⁹⁸ کہتے ہیں۔

اگر X کوئی بلا منصوبہ متغیر اور $g(X)$ کوئی استمراری تفاعل ہو جو تمام حقیقی X کے لئے معین ہو تب عدد

$$(24.52) \quad (الف) \quad E(g(X)) = \sum_j g(x_j) f(x_j) \quad (X \text{ غیر مسلسل})$$

$$(ب) \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (X \text{ استمراری})$$

کو $g(X)$ کی حسابی توقع⁹⁹ کہتے ہیں۔ یہاں f بالترتیب تفاعل احتمال یا کثافت ہے۔

مساوات 24.52 میں $g(X) = X^k$ ($k = 1, 2, \dots$) لیتے ہوئے بالترتیب

$$(24.53) \quad E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad \text{اور} \quad E(X^k) = \sum_j x_j^k f(x_j)$$

⁹⁸ standardized variable
⁹⁹ mathematical expectation

حاصل ہوتے ہیں۔ $E(X^k)$ کو X کا k واں معیار اثر¹⁰⁰ کہتے ہیں۔ مساوات 24.52 میں $g(X) = (X - \mu)^k$ لیتے ہوئے بالترتیب

(24.54)

$$E([X - \mu]^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \quad \text{اور} \quad E([X - \mu]^k) = \sum_j (x_j - \mu)^k f(x_j)$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں X کے k ویں وسطی معیار اثر¹⁰¹ کہتے ہیں۔ آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

(24.55)

$$E(1) = 1$$

(24.56)

$$\mu = E(X)$$

(24.57)

$$\sigma^2 = E([X - \mu]^2)$$

سوالات

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو $z \leq |2yy'|$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

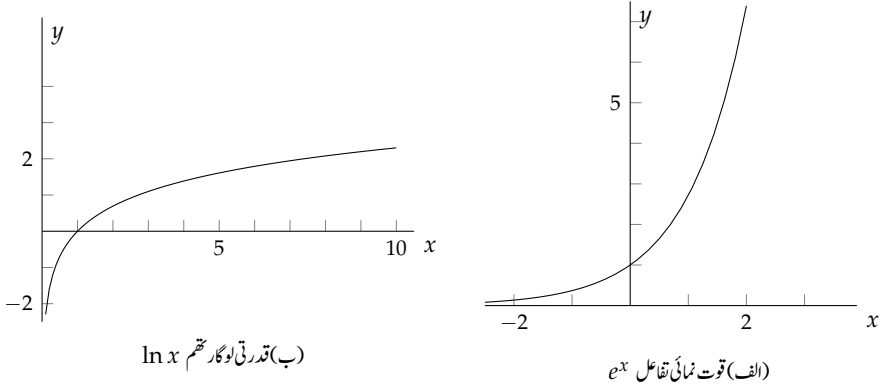
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

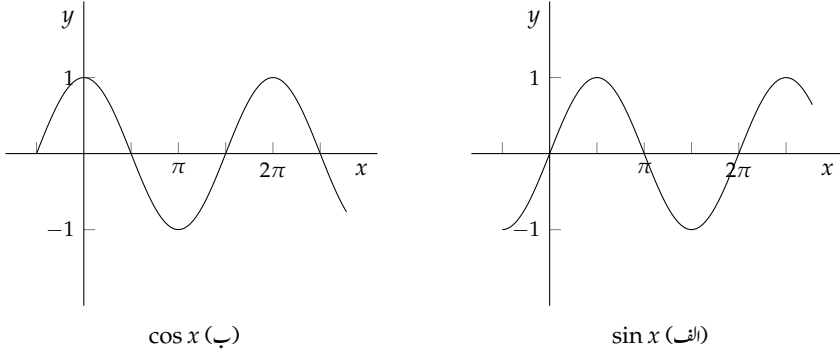
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

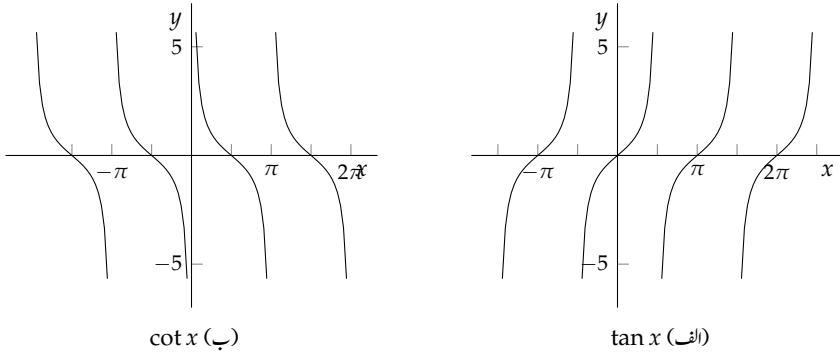
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

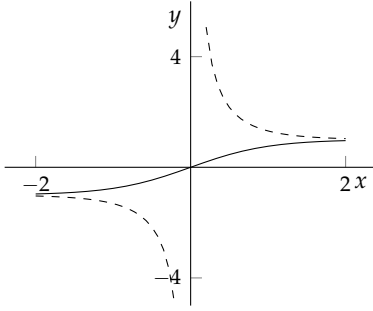
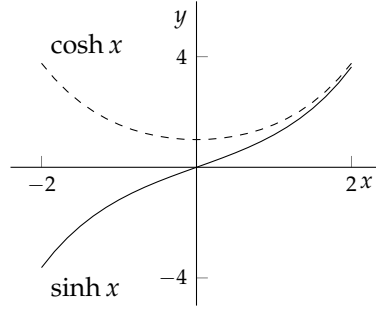
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولوی سائن، ہڈولوی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

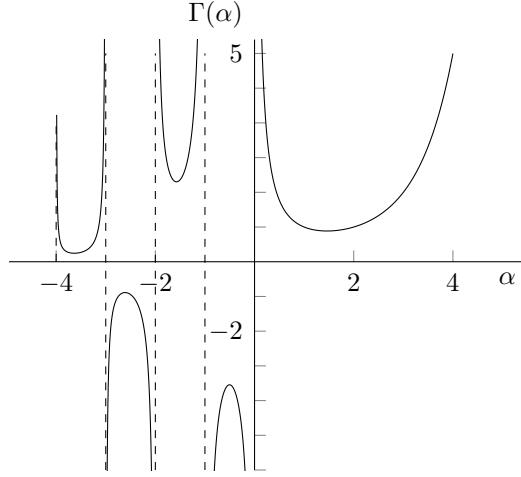
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

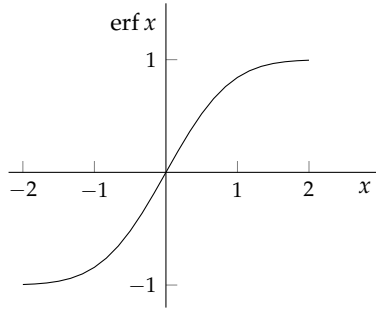
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

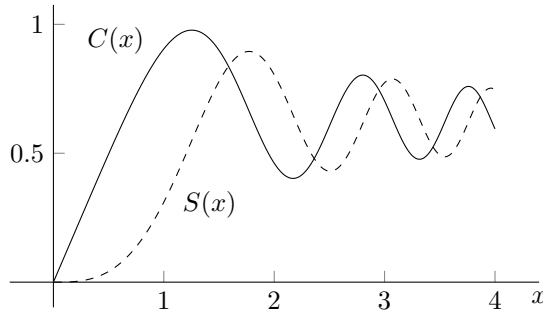
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

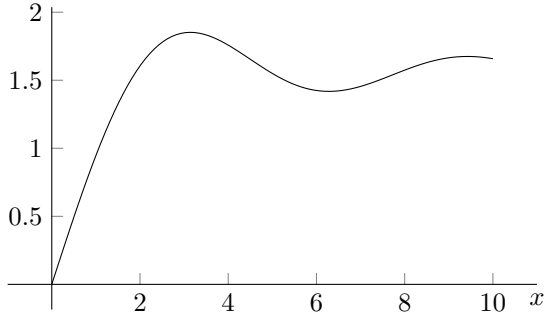
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Si $\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

