

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
117	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
132	2.5 پولر کوئی مساوات	
141	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
150	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
162	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
168	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
172	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
183	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
191	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
191	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
203	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

- 3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات . . . . . 212
- 3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل . . . . . 215

- 4 نظام تفرقی مساوات
- 4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق . . . . . 224
- 4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے . . . . . 233
- 4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور وروسی . . . . . 248
- 4.3.1 خطی نظام . . . . . 249
- 4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب . . . . . 252
- 4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام . . . . . 270
- 4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام . . . . . 279
- 4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ . . . . . 288
- 4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام . . . . . 296
- 4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب . . . . . 297

- 5 طاقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
- 5.1 ترکیب طاقی تسلسل . . . . . 307
- 308 . . . . .

## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 5

# طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

گزشتہ بابوں میں مستقل عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو بنیادی تفاعل تھے۔ بنیاد تفاعل مثلاً  $\sin 3t$ ،  $t^6$  اور  $e^{2t}$  کو آپ علم الاحصاء<sup>1</sup> سے جانتے ہیں۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ لیڈانڈر، بیسل اور بیش ہندسی مساوات اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔ یہ مساوات اور ان کے حل لیڈانڈر تفاعل، بیسل تفاعل اور بیش ہندسی تفاعل انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف ترکیبوں پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل طاقتی تسلسل<sup>2</sup>  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہذا اس کو ترکیب طاقتی تسلسل<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو  $\ln x$  یا کسری طاقت  $x^r$  سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو ترکیب فروبنیوس<sup>4</sup> کہلاتی ہے۔ جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کارآمد ثابت ہوتا ہے لہذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلیٰ حل جنہیں آپ علم الاحصاء سے نہیں جانتے اعلیٰ تفاعل<sup>5</sup> کہلاتے ہیں۔

<sup>1</sup>calculus

<sup>2</sup>power series

<sup>3</sup>power series method

<sup>4</sup>Frobenius method

<sup>5</sup>higher functions or special functions



## 5.1 ترکیب طاقتی تسلسل

متغیر عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کرتے ہوئے طاقتی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طاقتی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے، حل کا خط کھینچا جاسکتا ہے، کلیات ثابت کیے جاسکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس حصے میں طاقتی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ  $x - x_0$  کا طاقتی تسلسل درج ذیل ہے

$$(5.1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

جس میں  $x$  متغیر ہے جبکہ  $a_0, a_1, a_2, \dots$  تسلسل کے عددی سر<sup>6</sup> کہلاتے ہیں اور  $x_0$  مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا وسط<sup>7</sup> کہلاتا ہے۔ جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً علامت مجموعہ<sup>8</sup>  $(\sum)$  کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں اشاریہ<sup>9</sup> مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔ درج بالا مساوات میں  $m$  بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔ علامت مجموعہ کے نیچے  $m = 0$  اور اس کے اوپر  $\infty$  مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔ تسلسل کا وسط صفر  $(x_0 = 0)$  ہونے کی صورت میں  $x$  کا طاقتی تسلسل

$$(5.2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقتی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کی تسلسل ہے جس میں  $x - x_0$  (یا  $x$ ) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

مثال 5.1: مکلازن تسلسل در حقیقت میں طاقی تسلسل ہیں

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1, \text{ ہندسی تسلسل})$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

ترکیب طاقی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقی تسلسل دیکھے۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقی تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقی تسلسل حل  
تفرقی مساوات  $y' + y = 0$  کو ترکیب طاقی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلی قدم میں حل کو طاقی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$(5.3) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

باب 5. مل متق تسلسل سادہ تفريق مساوات كا حل۔ اعلیٰ تفاعل

تسلسل كا جزو با جزو تفريق لیتے ہیں۔

$$(5.4) \quad y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} ma_mx^{m-1}$$

انہیں دیے گئے تفريقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) = 0$$

$x$  کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \dots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تقاعل  $e^{-x}$  کی مکملان تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots) = a_0e^{-x}$$

یہاں آپ  $y'' + y = 0$  کو ترکیب طاقی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل  $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$  حاصل کریں۔

اب اس ترکیب کی عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلے مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں ہم خطی سادہ تفريقی مساوات

$$(5.5) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

میں  $p(x)$  اور  $q(x)$  کو  $x$  کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل  $x - x_0$  کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں  $x - x_0$  کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر  $p(x)$  اور  $q(x)$  از خود کثیر دکنی ہوں تب

پہلی قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسری قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح  $y'$  اور درج ذیل  $y''$  لکھتے ہوئے

$$(5.6) \quad y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_mx^{m-2}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔ تیسری قدم میں  $x$  کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری  $x^1$ ،  $x^2$ ، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔ یوں تمام عددی سر کو  $a_0$  اور  $a_1$  کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیٹانڈر مساوات  
درج ذیل مساوات کروی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حل: مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} (1 - x^2)(2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + 6 \cdot 5a_6x^4 \dots) \\ - 2x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots) \\ + 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} (2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + 6 \cdot 5a_6x^4 \dots) \\ + (-2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 3a_4x^4 - 5 \cdot 4a_5x^5 - \dots) \\ + (-2a_1x - 2 \cdot 2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 2a_4x^4 - \dots) \\ + (2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3 + 2a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو  $x$  کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (2a_2 + 2a_0) + (3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x \\ + (4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 2a_2)x^2 \\ + (5 \cdot 4a_5 - 3 \cdot 2a_3 - 3 \cdot 2a_3 + 2a_3)x^3 \\ + (6 \cdot 5a_6 - 4 \cdot 3a_4 - 4 \cdot 2a_4 + 2a_4)x^4 + \dots = 0 \end{aligned}$$

باب 5. مل متقی تسل سے سادہ تصرفی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تنفس

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری  $x$ ،  $x^2$ ،  $x^3$ ، ... کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے بالترتیب  $a_2$ ،  $a_3$ ،  $a_4$ ، ... کو  $a_0$  اور  $a_1$  کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$a_2 = -a_0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{2} = 0 \quad (\text{چونکہ } a_3 = 0 \text{ ہے})$$

$$a_6 = \frac{3}{5}a_4 = -\frac{a_0}{5}$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \dots)$$

جس میں  $a_0$  اور  $a_1$  اختیاری مستقل ہیں۔ یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل  $x$  اور  $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \dots$  پر مشتمل ہے جو لیژانڈر کثیر رکنی  $P_n(x)$ <sup>10</sup> اور لیژانڈر تفاعل  $Q_n(x)$ <sup>11</sup> کے رکن ہیں۔ یہاں  $x = P_1(x)$  اور  $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \dots = -Q_1(x)$  ہیں جہاں منفی علامت روایتی ہے۔  $n$  لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ <sup>12</sup> کہلاتا ہے۔ یہاں  $n = 1$  ہے لہذا لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔

نظریہ طاقتی تسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ  $s_n(x)$  لکھتے ہیں جس کو  $n$  جزوی مجموعہ <sup>13</sup> کہتے ہیں۔

$$(5.7) \quad s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

Legendre polynomials<sup>10</sup>

Legendre function<sup>11</sup>

order<sup>12</sup>

nth partial sum<sup>13</sup>

یہاں  $n = 0, 1, 2, \dots$  ممکن ہے۔ مساوات 5.1 سے  $s_n(x)$  منفی کرنے سے بقایا  $R_n(x)$  حاصل ہوتا ہے جس کو  $a_n(x - x_0)^n$  کے بعد مساوات 5.1 کا بقایا<sup>14</sup> کہتے ہیں۔

$$(5.8) \quad R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \dots$$

یوں ہندی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

کے جزوی مجموعے اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \dots \\ s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \dots \end{aligned}$$

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں  $s_0(x)$ ،  $s_1(x)$ ،  $s_2(x)$  کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔ اگر کسی  $x = x_1$  کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرکوز ہو مثلاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ  $x = x_1$  پر تسلسل 5.1 مرکوز<sup>15</sup> ہے جبکہ  $s(x_1)$  کو تسلسل 5.1 کی قیمت<sup>16</sup> یا مجموعہ کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_1 - x_0)^m$$

اس طرح کسی بھی  $n$  کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(5.9) \quad s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1)$$

اس کے برعکس اگر  $s_0(x)$ ،  $s_1(x)$ ،  $s_2(x)$  کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ  $x = x_1$  پر مساوات 5.1 منفرج<sup>17</sup> ہے۔

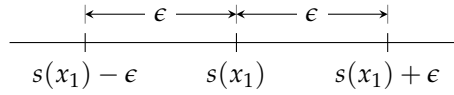
remainder<sup>14</sup>

converge<sup>15</sup>

value or sum<sup>16</sup>

divergent<sup>17</sup>

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تعریفی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تناسل



شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔

مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت  $\epsilon$  کے لئے ایسا  $N$  (جس کی قیمت  $\epsilon$  پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام  $n > N$  کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(5.10) \quad |R_n(x_1)| = |s(x_1) - s_n(x_1)| < \epsilon \quad n > N \quad \text{تمام}$$

جیومیٹری طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ  $s_n(x_1)$  جہاں  $n > N$  ہے  $s(x_1) - \epsilon$  اور  $s(x_1) + \epsilon$  کے درمیان پایا جاتا ہے۔ عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں  $x_1$  پر مساوات 5.1 کا مجموعہ  $s(x_1)$  تقریباً  $s_n(x_1)$  کے برابر ہو گا۔ مزید یہ کہ  $s(x_1)$  اور  $s_n(x_1)$  میں فرق کو ہم  $n$  بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

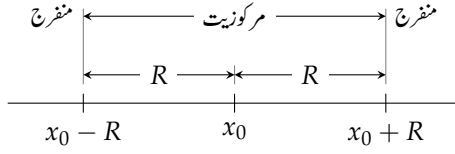
طافقی تسلسل کہاں مرکوز ہوتی ہے؟ تسلسل 5.1 میں  $x = x_0$  پر  $a_0$  کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہذا تسلسل کی قیمت  $a_0$  ہو گی۔ یوں  $x = x_0$  پر تسلسل  $a_0$  پر مرکوز ہوتی ہے۔ کبھی کبھار  $x$  کی واحد اسی قیمت پر تسلسل مرکوز ہو گا۔ اگر  $x$  کے دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرکوز ہو تب  $x$  کی یہ قیمتیں ارتکازی وقفہ<sup>18</sup> کہلاتا ہے۔ یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔ محدود وقفہ جس کا وسط  $x_0$  ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں طافقی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام  $x$  پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے  $x$  پر تسلسل مرکوز ہو گا

$$(5.11) \quad |x - x_0| < R$$

جبکہ  $|x - x_0| > R$  پر تسلسل منفرج ہو گا۔ ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طافقی تسلسل  $x$  کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں  $R$  رداس ارتکاز<sup>19</sup> کہلاتا ہے۔ (مخلوط طافقی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول نکلیا ہوتا ہے جس کا رداس  $R$  ہو گا)۔ اگر تسلسل تمام  $x$  پر مرکوز ہو تب ہم  $R = \infty$  یعنی  $\frac{1}{R} = 0$  لکھتے ہیں۔

<sup>18</sup> convergence interval  
<sup>19</sup> convergence radius



شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.1.1 جس کا وسط  $x_0$  ہے۔

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جاسکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد ( $\lim$ ) موجود اور غیر صفر ہو۔ اگر یہ حد لامتناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط  $x_0$  پر مرکوز ہو گا۔

$$(5.12) \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}}$$

$$(5.13) \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|}$$

مثال 5.4: رداس ارتکاز  $\infty$ ، 1 اور 0  
تینوں تسلسل میں  $m \rightarrow \infty$  لیتے ہوئے رداس ارتکاز  $R$  دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{1}{1} \right| = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! x^m = 1 + x + 2x^2 + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{(m+1)!}{m!} \right| = m+1 \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow 0$$

لامتناہی رداس ارتکاز  $R \rightarrow \infty$  سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ  $R = 0$  بے کار صورت ہے۔ عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔



باب 5. طاقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

درج بالا مثال میں  $\frac{1}{1-x}$  کے طاقی تسلسل کا رداس ارتکاز  $R = 1$  حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط  $x_0 = 0$  ہے۔ مساوات 5.11 کے تحت  $|x| < 1$  کے لئے طاقی تسلسل تفاعل  $\frac{1}{1-x}$  کو ظاہر کرتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔ نقطہ  $x = 0.2$  پر تفاعل کی قیمت  $\frac{1}{1-0.2} = 1.25$  ہے جبکہ اس کے تسلسل میں  $x = 0.2$  پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1 &= 1 && \text{ایک رکن} \\ 1 + 0.2 &= 1.2 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 &= 1.24 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 &= 1.248 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 + 0.2^4 &= 1.2496 && \text{پانچ ارکان} \end{aligned}$$

طاقی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کے اصل قیمت کے  $\frac{1.2496}{1.25} \times 100 = 99.968$  فی صد ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔ بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی  $x$  پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جاسکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرج ہے۔ آئیں رداس ارتکاز کے باہر  $x = 1.2$  پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل کریں۔ تفاعل کی قیمت  $\frac{1}{1-1.2} = -5$  حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 1.2 &= 2.2 \\ 1 + 1.2 + 1.2^2 &= 3.64 \\ 1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 &= 5.368 \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔ یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ  $x$  پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرج ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل  $\frac{1}{1-x}$  کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔ طاقی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہوگی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$(5.14) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

میں  $p(x)$ ،  $q(x)$  اور  $r(x)$  کے طاقتی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقتی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ ایسا تفاعل  $f(x)$  جس کو  $x - x_0$  کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا ثابت رد اس ارتکاز پایا جاتا ہو،  $x_0$  پر تخلیلی<sup>20</sup> کہلاتا ہے۔ اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 معیاری صورت میں ہے یعنی یہ  $y''$  سے شروع ہوتا ہے۔ اگر دو درجی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پایا جاتا ہو، یعنی اس میں  $h(x)y''$  پایا جاتا ہو تب مساوات کو  $h(x)$  سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

مسئلہ 5.1: طاقتی تسلسل حل کی وجودیت

اگر مساوات 5.14 میں  $p$ ،  $q$  اور  $r$  نقطہ  $x = x_0$  پر تخلیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل  $x = x_0$  پر تخلیلی ہو گا اور اس کو  $x - x_0$  کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رد اس ارتکاز  $R > 0$  ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت آپ کتاب کے آخر میں صفحہ 323 پر حوالہ [2] سے پڑھ سکتے ہیں۔ (دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ  $x$  محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رد اس ارتکاز کی لمبائی  $x_0$  سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں  $p$ ،  $q$  اور  $r$  میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تخلیلی ہو۔

طاقتی تسلسل پر مختلف عمل

طاقتی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقتی تسلسلوں کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح)  $x$  کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔ یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقتی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

<sup>20</sup>analytic

باب 5. طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرق

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقتی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جاسکتا ہے۔ اگر طاقتی تسلسل

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

انہیں  $x$  پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان  $x$  پر تفرق  $y'$  کو ظاہر کرے گا۔ جہاں  $R < 0$  ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \quad (|x - x_0| < R)$$

اسی طرح دو درجی، تین درجی اور بلند درجی تفرقات بھی حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقتی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر طاقتی تسلسل

$$(5.15) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے  $f(x)$  اور  $g(x)$  ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) (x - x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ  $f(x) + g(x)$  کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر  $x$  پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقتی تسلسل کو رکن باریک ضرب دیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے  $f(x)$  اور  $g(x)$  ہیں۔ اب پہلی تسلسل کے ہر رکن کو دوسری تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے  $x - x_0$  کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_m b_0)(x - x_0)^m \end{aligned}$$

مرکوز ہو گا اور  $f(x)g(x)$  کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر  $x$  پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

## سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ارتکاز دریافت کریں۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)mx^m \quad \text{سوال 5.1:}$$

جواب:  $R = 1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{k^m} \quad \text{سوال 5.2:}$$

جواب:  $R = k$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad \text{سوال 5.3:}$$

جواب:  $R = \infty$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m x^m \quad \text{سوال 5.4:}$$

جواب:  $R = \frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقتی تسلسل حل کریں۔

$$y' = -2xy \quad \text{سوال 5.5:}$$

$$y = a_0(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots) = a_0 e^{-x^2} \quad \text{جواب:}$$

$$y'' + y = 0 \quad \text{سوال 5.6:}$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{a_1}{6} x^3 + \dots = a_0 \cos x + a_1 \sin x \quad \text{جواب:}$$

$$(1-x)y' = y \quad \text{سوال 5.7:}$$

$$y = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = -\frac{a_0}{1-x} \quad \text{جواب:}$$

باب 5. ط. متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرق

سوال 5.8: جہاں  $k$  مستقل مقدار ہے  $xy' - 3y = k$  جواب:  $y = cx^3 - \frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاقی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔ تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لامحدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں  $x$  کے صرف طاق یا صرف جفت طاقت پائیں جاتے ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9:  $y'' - y' + xy = 0$  جواب:  $y = a_0(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{240} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} - \dots)$

سوال 5.10:  $y'' - y' - xy = 0$  جواب:  $y = a_0(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{144} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} + \dots)$

سوال 5.11:  $y'' - y' - x^2y = 0$  جواب:  $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots)$

سوال 5.12:  $y'' - xy' - x^2y = 0$  جواب:  $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \dots) + a_1(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots)$

سوال 5.13:  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$  جواب:  $y = a_0(1 - 3x^2) + a_1(x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \dots)$  جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی کے پہلے جزو کی نشاندہی  $s = 0$  کرتا ہے۔ اس مجموعے میں  $k = s + 1$  پر کرتے ہوئے نیا مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر  $x^m$  پایا جاتا ہو۔ اس عمل کو منتقلی اشاریہ<sup>21</sup> کہتے ہیں۔ حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی  $k = 1$  کرتا ہے۔

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی  
مجموعہ  $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{p+2}{(p+1)!} x^{p+3}$  میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر  $x^m$  ہو۔

جواب:  $\sum_{m=5}^{\infty} \frac{m-1}{(m-2)!} x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.16 کو ترکیب طاقی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں  $x^3$  تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل  $a_0$  (اور  $a_1$ ) دریافت کریں۔ دیے گئے نقطہ  $x_1$  پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔ جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسے درکار ہیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

جوابات:  $y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \dots$   
 $y(1) = -514$  ،  $a_0 = 6$



## حوالہ

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.



