

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
117	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
132	2.5 پولر کوئی مساوات	
141	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
150	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
162	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
168	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
172	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
183	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
191	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
191	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
203	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

212	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
215	3.4	مقدار معلوم ہونے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

223	4	نظام تفرقی مساوات
224	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
233	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
248	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
249	4.3.1	خطی نظام
252	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
271	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ کا اصول۔ استحکام
280	4.6	کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

173	۱	اضافی ثبوت
-----	---	------------

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

4.5 نقطہ فاصل کے جانچ کا اصول۔ استحکام

ہم مستقل عددی سروالے متجانس خطی نظام 4.61 پر گفتگو جاری رکھتے ہیں۔

$$(4.61) \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \implies \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

اب تک حصہ 4.4 میں ہم نے دیکھا کہ نسل حل $\mathbf{y} = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$ کے خطوط کو y_1y_2 سطح حرکت پر کھینچتے ہوئے عمومی جائزہ لیا جاسکتا ہے۔ اس سطح پر منحنی کو نظام 4.61 کا خط حرکت کہتے ہیں۔ تمام خط حرکت کو ملا کر پیکر مرحلہ حاصل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے کہ $\mathbf{y} = x e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے مساوات 4.61 میں پر کرتے ہوئے

$$\mathbf{y}' = \lambda x e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{A} x e^{\lambda t}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(4.62) \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

ماتا ہے۔ یوں λ قالب \mathbf{A} کا آگنی قدر اور \mathbf{x} نظیری آگنی سمتیہ ہونے کی صورت میں $\mathbf{y}(t)$ مساوات 4.61 کا (غیر صفر) حل ہو گا۔

گزشتہ حصے کے مثالوں سے واضح ہے کہ پیکر مرحلہ کی صورت کا دارومدار بڑی حد تک نظام 4.61 کی نقطہ فاصل کی قسم پر منحصر ہے جہاں نقطہ فاصل سے مراد ایسا نقطہ ہے جہاں $\frac{dy_1}{dy_2}$ ناقابل معلوم قیمت $\frac{0}{0}$ ہو۔ [مساوات 4.49 دیکھیں۔]

$$(4.63) \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_2' dt}{y_1' dt} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$

حصہ 4.4 سے ہم یہ بھی جانتے ہیں نقطہ فاصل کے کئی اقسام پائے جاتے ہیں۔

موجودہ حصے میں ہم دیکھیں گے کہ نقطہ فاصل کی قسم کا تعلق آگنی قدر سے ہے جو امتیازی مساوات

$$(4.64)$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

جدول 4.1: آگنی قدر سے نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

نام	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	λ_1 اور λ_2 پر تبصرہ
(الف) جوڑ		$q > 0$	$\Delta \geq 0$	حقیقی۔ یکساں علاقے میں
(ب) نقطہ نیز		$q < 0$		حقیقی۔ آپس میں الٹ علاقے میں
(پ) وسط	$p = 0$	$q > 0$		خیالی عدد (حقیقی جزو صفر ہے)
(ت) نقطہ مرغولہ	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	مخلوط عدد (حقیقی اور خیالی اجزاء غیر صفر ہیں)

کے حل λ_1 اور λ_2 ہیں۔ امتیازی مساوات دو درجی مساوات $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ ہے جس کے عددی سر p ، q اور جدا کنندہ Δ درج ذیل ہیں۔

$$(4.65) \quad p = a_{11} + a_{22}, \quad q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta = p^2 - 4q$$

دو درجی مساوات کے حل الجبر کی مدد سے $\lambda = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ یعنی

$$(4.66) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(p + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(p - \sqrt{\Delta})$$

لکھتے ہیں۔ ان آگنی قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے امتیازی مساوات کو اجزائے ضربی کی صورت

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ p آگنی قیمتوں کا مجموعہ ہے جبکہ q ان کا حاصل ضرب ہے۔ اسی طرح مساوات 4.66 کی مدد سے $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ لکھا جاسکتا ہے۔

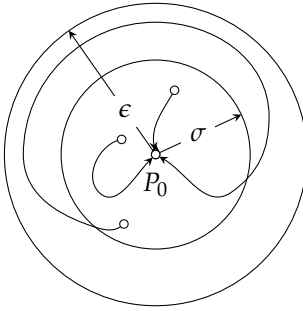
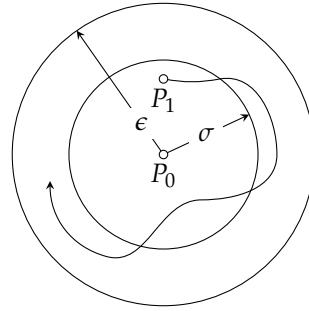
$$(4.67) \quad p = \lambda_1 + \lambda_2, \quad q = \lambda_1 \lambda_2, \quad \Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

ان نتائج سے نقطہ فاصل کی جانچ کے اصول طے کئے جاسکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ ان اصولوں کو اسی حصے میں اخذ کیا جائے گا۔

استحکام

نقطہ فاصل کی درجہ بندی ان کی استحکام⁶¹ کی بنیاد پر بھی کی جاسکتی ہے۔ انجینئری کے علاوہ دیگر شعبوں میں بھی استحکام نہایت اہم تصور ہے۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی یا خلل سے بعد کے تمام لمحات پر معمولی خلل ہی پایا جاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل تصورات اہم ہیں۔

discriminant⁶⁰
stability⁶¹

(ب) مستحکم اور جاذب نقطہ فاصل P_0 ۔(الف) مستحکم نقطہ فاصل P_0 کی صورت میں خط حرکت D_ϵ میں رہتی ہے۔

شکل 4.11: نظام 4.61 کے نقطہ فاصل۔

تعریف: مستحکم، غیر مستحکم، مستحکم اور جاذب
اگر نظام 4.61 کے نقطہ فاصل P_0 کے قریب تمام خط حرکت مستقبل میں بھی P_0 کے قریب رہیں تب P_0 مستحکم⁶² کہلائے گا۔ یوں اگر کسی بھی رداس ϵ کی ٹکلیا D_ϵ کے لئے رداس σ کی ایسی ٹکلیا D_σ موجود ہو، جہاں دونوں ٹکلیوں کا مرکز P_0 ہے، کہ ٹکلیا D_σ میں (لحہ $t = t_1$ کا نظیری) نقطہ P_1 پر پائے جانے والا، نظام 4.61 کا ہر خط حرکت، مستقبل میں ٹکلیا D_ϵ میں رہتا ہو، تب P_0 کا نقطہ فاصل مستحکم⁶³ کہلائے گا۔ [شکل 4.11-الف دیکھیں]

اگر P_0 مستحکم نہ ہو تب یہ غیر مستحکم⁶⁵ کہلاتا ہے۔

ایسا مستحکم P_0 جہاں وہ تمام خط حرکت جن کا کوئی بھی نقطہ، D_σ پر پایا جاتا ہو، آخر کار $(t \rightarrow \infty)$ P_0 کے قریب تر پہنچے مستحکم اور جاذب⁶⁶ کہلاتا ہے۔ [شکل 4.11-ب دیکھیں۔]

استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی جدول 4.2 میں دی گئی ہے۔

stable⁶²

stable⁶³

⁶⁴ روسی ریاضی دان سکندر میکائل لیاپونوف [1857-1918] کا مستحکم تفرقی مساوات پر کام بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ استحکام کی یہ تعریف انہوں نے ہی پیش کی۔

unstable⁶⁵

stable and attractive⁶⁶

جدول 4.2: استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

استحکام کی قسم	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$
(الف) مستحکم اور جاذب	$p < 0$	$q > 0$
(ب) مستحکم	$p \leq 0$	$q > 0$
(پ) غیر مستحکم	$p > 0$ یا $q < 0$	

آئیں جدول 4.1 اور جدول 4.2 کو حاصل کریں۔ اگر $q = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ ہو تب دونوں آگنی قدر مثبت ہوں گے یا دونوں آگنی قدر منفی ہوں گے اور یا آگنی قدر جوڑی دار مخلوط ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ہو تب دونوں آگنی قیمتیں منفی ہوں گے یا (مخلوط جوڑی دار صورت میں) ان کا حقیقی جزو منفی ہو گا لہذا P_0 مستحکم اور جاذب ہو گا۔ جدول 4.2 کے بقایا دو نتائج کو آپ خود اسی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

$\Delta < 0$ کی صورت میں آگنی قدر جوڑی دار مخلوط $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ اور $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha < 0$ ہو تب مستحکم، جاذب نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس $p = 2\alpha > 0$ کی صورت میں غیر مستحکم نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔

$p = 0$ کی صورت میں $\lambda_2 = -\lambda_1$ ہو گا اور یوں $q = \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda_1^2$ ہو گا۔ اب اگر $q > 0$ ہو تب $\lambda_1^2 = -q < 0$ ہو گا لہذا λ_1 اور λ_2 خیالی ہوں گے جن سے دوری حل⁶⁷ حاصل ہو گا۔ دوری حل کا خط حرکت ایسا بند دائرہ ہے جس کا مرکز P_0 ہے۔

مثال 4.12: جدول 4.1 اور جدول 4.2 کا عملی استعمال

گزشتہ حصے کے مثال 4.6 میں نظام 4.48 یعنی $y' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y$ کی بات کی گئی جہاں $p = -4$ ، $q = 3$ اور $\Delta = 4$ ہیں۔ یوں جدول 4.1-الف کے تحت نقطہ فاصل ایک جوڑ ہو گا۔ جدول 4.2-الف کے تحت یہ جوڑ مستحکم اور جاذب ہے۔

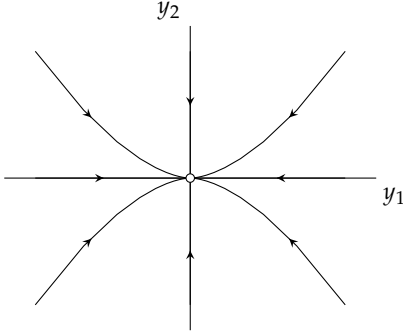
مثال 4.13: اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ حرکت
اسپرنگ اور کمیت [حصہ 2.4 دیکھیں] کے نظام $my'' + cy' + ky = 0$ کا نقطہ فاصل دریافت کریں۔

حل: تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے کی خاطر m سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$
لکھتے ہیں۔ دو درجی مساوات سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر [حصہ 4.1 دیکھیں] ہم $y_1 = y$ اور $y_2 = y'$ لیتے ہیں۔ یوں $y_2' = y_1' = y'' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$ ہو گا۔ اس طرح

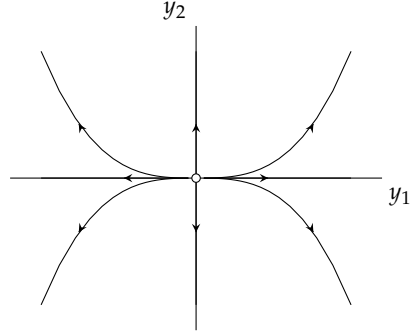
$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} y, \quad |A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے $p = -\frac{c}{m}$ ، $q = \frac{k}{m}$ اور $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$ ملتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے
جدول 4.1 اور جدول 4.2 سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جہاں Δ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

- [بلا تقصیر] $c = 0$ ، $p = 0$ اور $q > 0$ وسط دیتا ہے۔
- [کم مقصور] $c^2 < 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ مستحکم جاذب نقطہ مرغولہ دیتا ہے۔
- [فاصل تقصیر] $c^2 = 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta = 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔
- [زیادہ مقصور] $c^2 > 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔



(ب) سوال 4.37 مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔



(الف) سوال 4.36 غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔

شکل 4.12: سوال 4.36 اور سوال 4.37 کے اشکال۔

سوالات

سوال 4.36 تا سوال 4.45 کے نقطہ فاصل کی قسم جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔ ان کے حقیقی عمومی حل حاصل کریں اور ان کے خط حرکت کمپیوٹر کی مدد سے کھینچیں۔ [پہلے چار جوابات کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔]

سوال 4.36:

$$y_1' = y_1$$

$$y_2' = 3y_2$$

جوابات: غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔ $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ ، $y_1 = c_1 e^t$ ، $y_2 = c_2 e^{3t}$ یعنی

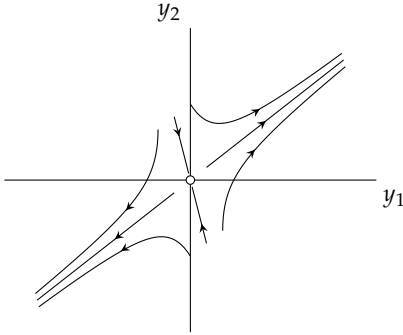
؛ شکل 4.12-الف۔

سوال 4.37:

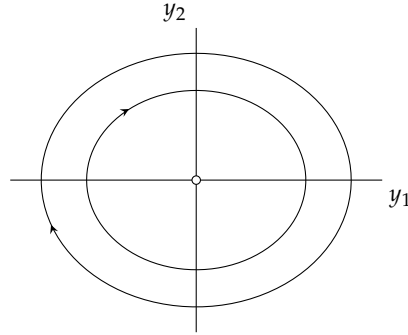
$$y_1' = -3y_1$$

$$y_2' = -5y_2$$

جوابات: مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔ $y_1 = c_1 e^{-3t}$ ، $y_2 = c_2 e^{-5t}$ ؛ شکل 4.12-ب۔



(ب) سوال 4.39 غیر مستحکم، نقطہ نیز۔



(الف) سوال 4.38 مستحکم وسط۔

شکل 4.13: سوال 4.38 اور سوال 4.39 کے اشکال۔

سوال 4.38:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -16y_1 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم وسط۔ $y_1 = A \cos 4t + B \sin 4t$ ، $y_2 = 4B \cos 4t - 4A \sin 4t$ ؛ شکل 4.13-الف۔

سوال 4.39:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2y_1 + y_2 \\ y_2 &= 5y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ نیز؛ $y_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}$ ، $y_2 = -5c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}$ ؛ شکل 4.13-ب۔

سوال 4.40:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2y_1 - 2y_2 \\ y_2 &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-2t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-2t}(-B \cos 2t + A \sin 2t)$

سوال 4.41:

$$y_1 = -10y_1 + 2y_2$$

$$y_2 = -15y_1 + y_2$$

جوابات: مستحکم اور جاذب جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-4t}$ ، $y_2 = \frac{5}{2} c_1 e^{-5t} + 3c_2 e^{-4t}$

سوال 4.42:

$$y_1 = -y_1 + y_2$$

$$y_2 = 2y_2$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ نیز؛ $y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ ، $y_2 = 3c_2 e^{2t}$

سوال 4.43:

$$y_1 = -y_1 + 2y_2$$

$$y_2 = 6y_1 + 3y_2$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ نیز؛ $y_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{5t}$ ، $y_2 = -c_1 e^{-3t} + 3c_2 e^{5t}$

سوال 4.44:

$$y_1 = 13y_1 - 3y_2$$

$$y_2 = 18y_1 - 2y_2$$

جوابات: غیر مستحکم جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{7t} + c_2 e^{4t}$ ، $y_2 = 2c_1 e^{7t} + 3c_2 e^{4t}$

سوال 4.45:

$$y_1 = y_2$$

$$y_2 = -5y_1 - 2y_2$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-t}[-(A + 2B) \cos 2t - (2A + B) \sin 2t]$

سوال 4.46 تا سوال 4.46 خط حرکت، دو درجی سادہ تفرقی مساوات اور نقطہ فاصل کے بارے میں ہیں۔

سوال 4.46: قسری ارتعاش

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \text{ کو حل کریں۔ امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟}$$

جواب: $y = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t)$ ؛ مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ۔

سوال 4.47: ہارمونی ارتعاش

$$y'' + 4y = 0 = 0 \text{ کو حل کریں۔ امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟}$$

جواب: $y = A \cos 2t + B \sin 2t$ ؛ مستحکم وسط۔

سوال 4.48: مقدار معلوم کا تبادلہ

مثال 4.12 میں متغیر $\tau = -t$ متعارف کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پڑے گا؟

جواب: اب $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو گا لہذا غیر مستحکم جوڑ پایا جائے گا۔

سوال 4.49: وسط میں خلل

سوال 4.38 میں A کو تبدیل کرتے ہوئے $A - 0.12I$ کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ I اکائی قالب ہے۔

جواب: اب $p = -0.2 \neq 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ہیں لہذا غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے گا۔

سوال 4.50: وسط میں خلل

سوال 4.38 میں تمام a_{jk} کی جگہ $a_{jk} + b$ پر کریں۔ (الف) b کی ایسی قیمت دریافت کریں کہ نقطہ زین حاصل ہو۔ اسی طرح b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں جن پر (ب) مستحکم اور جاذب جوڑ، (پ) مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ اور (ت) غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے۔

جواب: مثلاً (الف) $b = -2$ ، (ب) $b = -1$ ، (پ) $b = -0.2$ ، (ت) $b = 15$

4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

کیفی تراکیب⁶⁸ سے مسئلے کو حل کئے بغیر حل کے بارے میں کیفی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ ایسے مسائل جن کا تحلیلی حل مشکل یا ناقابل حصول ہو، کے لئے یہ ترکیب خاص طور پر کارآمد ہے۔ عملاً اہم کئی غیر خطی نظام

$$(4.68) \quad y' = f(y) \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

کے لئے یہ درست ہے۔

گزشتہ حصے میں سطح مرحلہ کی ترکیب خطی نظام کے لئے استعمال کیا گیا۔ اس حصے میں اس ترکیب کو وسعت دے کر غیر خطی نظام کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 4.68 خود مختار⁶⁹ ہے یعنی اس میں غیر تابع متغیر t صریحاً نہیں پایا جاتا۔ (اس حصے میں تمام مثال خود مختار ہیں۔) ہم یہاں بھی حل کی نسل پیش کریں گے۔ اعدادی ترکیب سے ایک وقت میں صرف ایک (تقریباً درست) حل حاصل ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے سطح مرحلہ کی ترکیب زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

گزشتہ حصے کے چند تصورات اس حصے میں بھی درکار ہیں۔ ان میں سطح حرکت ($y_1 y_2$ سطح)، خط حرکت (مساوات 4.68 کا $y_1 y_2$ سطح پر حل)، مساوات 4.68 کا پیکر مرحلہ (تمام خط حرکت کا مجموعہ)، اور مساوات 4.68 کا نقطہ فاصل (ایسا نقطہ (y_1, y_2) جہاں $f_1(y_1, y_2)$ اور $f_2(y_1, y_2)$ دونوں صفر کے برابر ہوں۔) کے تصورات شامل ہیں۔

مساوات 4.68 کے کئی نقطہ فاصل ہو سکتے ہیں۔ ان پر باری باری بات کی جائے گی۔ مرکز سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل پر غور کرنے سے پہلے، تکنیکی آسانی کی خاطر، ایسے نقطہ فاصل کو گھمائے بغیر مرکز پر منتقل کیا جائے گا۔ یوں مرکز $(0, 0)$ سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل $P_0 : (a, b)$ کو گھمائے بغیر مرکز $(0, 0)$ پر درج ذیل عمل سے منتقل کیا جائے گا۔

$$\tilde{y}_1 = y_1 - a, \quad \tilde{y}_2 = y_2 - b$$

اس عمل کے بعد نقطہ فاصل P_0 مرکز $(0, 0)$ پر پایا جائے گا۔ یوں ہم فرض کرتے ہیں کہ یہاں دیے گئے تمام مثالوں میں نقطہ فاصل مرکز پر پایا جاتا ہے لہذا \tilde{y}_1 ، \tilde{y}_2 کی جگہ ہم y_1 اور y_2 ہی لکھیں گے۔ ہم یہ بھی

qualitative methods⁶⁸
autonomous⁶⁹

فرض کرتے ہیں کہ نقطہ فاصل تنہا⁷⁰ ہے یعنی ایسے کسی بھی معقول حد تک چھوٹی ٹکلیا جس کا وسط مرکز پر پایا جاتا ہو میں مساوات 4.68 کا صرف ایک عدد نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ اگر مساوات 4.68 کے محدود تعداد میں نقطہ فاصل پائے جاتے ہوں تب ایسے تمام نقطہ فاصل خود بخود تنہا ہوں گے۔

غیر خطی نظام کو خطی بنانا

