انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 15

محافظ زاویہ نقشہ کشی

اگر z سطح میں دائرہ کار D میں مخلوط تفاعل $w = f(z)$ معین ہو، تب D میں ہر نقطہ کا مطابقتی نقطہ w سطح میں پایا جاتا ہے۔یوں D کا مطابقتی، $f(z)$ کے حلقہ کا نقشہ، w سطح پر حاصل ہو گا۔جیومیٹریائی نقشہ ذہن میں تفاعل کی تصویر قائم کرتا ہے۔مختلف منحنیات اور خطوں کے نقوش دیکھ کر مخلوط تفاعل سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔

جیسا ہم دیکھیں گے، اگر $f(z)$ **تحلیلی** ہو تب $f(z)$ سے حاصل نقشے میں زاویے تبدیل نہیں ہوں گے ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f'(z) = 0$ ہو۔ایسا نقشہ **محافظ زاویہ نقشہ**[1] کہلاتا ہے۔

محافظ زاویہ نقشہ کشی[2] کے ذریعہ دیے گئے پیچیدہ خطے کا تبادل سادہ خطے میں کرتے ہوئے نظریہ مخفی قوہ کی دو بعدی سرحدی مسائل حل کیے جاتے ہیں۔اسی وجہ سے محافظ زاویہ نقشہ کشی انجینئری میں اہمیت رکھتی ہے۔

ہم نقشہ کشی کی تعریف پیش کرنے کے بعد نقشہ کشی کا عمل سکھائیں گے۔اس کے بعد کئی بنیادی تحلیلی تفاعل کے نقوش پیش کریں گے۔

---

[1] conformal map
[2] conformal mapping

15.1 نقشہ گشی

حقیقی متغیرہ x کے حقیقی تفاعل $y = f(x)$ کی منحنی کو کارتیسی xy سطح پر کھینچا جا سکتا ہے۔اس خط کو تفاعل کی ترسیم کہتے ہیں۔چونکہ مخلوط متغیرہ z کو جیومیٹریائی طور پر مخلوط سطح میں نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہی کچھ w کے لئے بھی درست ہے لہٰذا مخلوط تفاعل

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (z = x + iy) \tag{15.1}$$

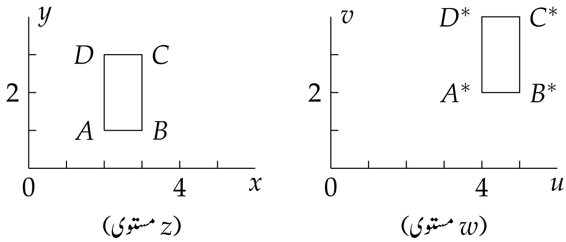
کی صورت حال زیادہ پیچیدہ ہے۔اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم ان دو متغیرات کے لئے دو علیحدہ علیحدہ مخلوط سطحیں استعمال کریں۔ایک z سطح جس میں $z = x + iy$ دکھایا جائے اور دوسری w سطح جس میں مطابقتی $w = u + iv$ دکھایا جائے۔یوں $f(z)$ کی دائرہ کار D میں ہر z کے لئے تفاعل $f(z)$ سطح w میں قیمت $w = f(z)$ مختص کرے گا۔اس معین تعلق کو f کی دائرہ کار کی سطح w میں[3] **نقشہ گشی**[4] (یا **تبادل**) کہتے ہیں، یا f کی دائرہ کار کا f کے حلقہ پر[5] نقشہ کشی کہتے ہیں۔

$w_0 = f(z_0)$ جو نقطہ z_0 کا مطابقتی نقطہ ہے، $f(z)$ کے لحاظ سے نقشے میں، z_0 کا **عکس نقطہ**[6] یا **عکس**[7] کہلاتا ہے۔ اگر z کسی منحنی پر حرکت کرے اور $f(z)$ استمراری (نا کہ مستقل) ہو تب مطابقتی نقطہ $w = f(z)$ عمومی طور پر سطح w میں منحنی C^* پر حرکت کرے گا۔اس منحنی کو منحنی C کا عکس کہیں گے۔لفظ "عکس" کسی بھی نقطوں کے سلسلے اور خطہ کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ ایسی نقشہ کشی کی خواص کی تفتیش، z سطح میں منحنیات اور خطے اور w سطح میں ان کے عکس پر غور اور w سطح میں منحنیات اور خطے اور z سطح میں ان کے عکس پر غور کرنے سے کی جا سکتی ہے۔ اس طرح انفرادی نقطوں پر غور کرنے سے حاصل معلومات سے زیادہ معلومات حاصل ہو گی۔

اگرچہ w اور z کو دو علیحدہ علیحدہ سطحوں سے ظاہر کیا جاتا ہے، بعض اوقات یوں سوچنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے کہ اصل اور نقش ایک ہی سطح پر پائے جاتے ہوں اور عمومی اصطلاحات مثلاً "گھومنا" اور "مستقیم حرکت" استعمال کرنا۔یوں $w = z + 3$ مستقیم حرکت کہلائے گی جو z سطح میں ہر نقطہ کو دائیں جانب تین اکایاں منتقل کرتی ہے۔

[3] into
[4] mapping
[5] onto
[6] image point
[7] image



شکل 15.1: مستقیم حرکت $w = z + 2 + i$

تحلیلی تفاعل $w = u + iv = f(z)$ جس نقشہ کو ظاہر کرتا ہو، کی کسی مخصوص خاصیت جاننے کے لئے ہم z سطح میں سیدھے لکیروں $x =$ مستقل اور $y =$ مستقل کا w سطح میں عکس پر غور کر سکتے ہیں۔اسی طرح ہم دائرہ $|z| =$ مستقل یا مبدا سے گزرتی سیدھی لکیروں کی عکس پر غور کر سکتے ہیں۔اس کے علاوہ ہم $u(x, y) =$ مستقل اور $v(x, y) =$ مستقل منحنیات پر z سطح میں غور کر سکتے ہیں۔ان منحنیات کو u اور v کی **ہموار منحنیات**[8] کہتے ہیں۔ ہم سادہ اشکال مثلاً چکور، تکون، مستطیل وغیرہ اور ان کے عکس پر بھی غور کر سکتے ہیں۔

آئیں چند مثالوں کی مدد سے ان حقائق کو بہتر سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مثال 15.1: **خطی تبادل** $w = ax + b$

درج ذیل نقش **مستقیم حرکت** کو ظاہر کرتا ہے۔

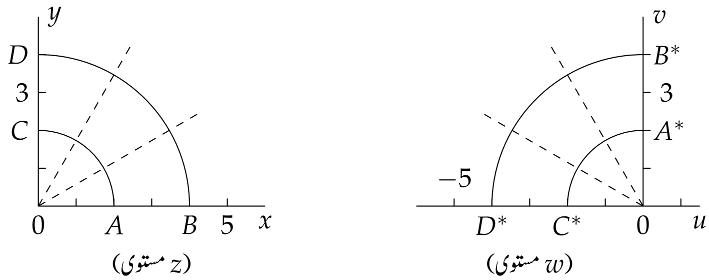
$$w = z + b \tag{15.2}$$

شکل 15.1 میں مساوات 15.2 کو $w = z + 2 + i$ کے لئے دکھایا گیا ہے جہاں مستطیل اور اس کا عکس دکھائے گئے ہیں جو یکساں ہیں (کیوں؟)۔ A کا عکس A^* ، وغیرہ۔زیادہ پیچیدہ اشکال میں نقطوں کو اس طرح ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مساوات 15.2 میں $b = 0$ پر کرنے سے **مماثل تبادل**[9]

$$w = z$$

حاصل ہوتا ہے جو ہر نقطے کو اپنے آپ پر نقش کرتا ہے۔

[8] level curves
[9] identity transformation



شکل 15.2: گھڑی کی الٹ رخ گھومنے کا زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

درج ذیل تبادل

$$w = az \qquad (|a| = 1)$$

مقررہ زاویہ $\underline{/a}$ سے گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.2 میں $w = iz$ یعنی گھڑی کی سوئیوں کی گھومنے کی الٹ رخ $\frac{\pi}{2}$ زاویہ سے گھومنا دکھایا گیا ہے۔

درج ذیل تبادل

$$w = az \qquad (\text{مثبت حقیقی } a)$$

میں $a > 1$ اتساع جبکہ $0 < a < 1$ سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح

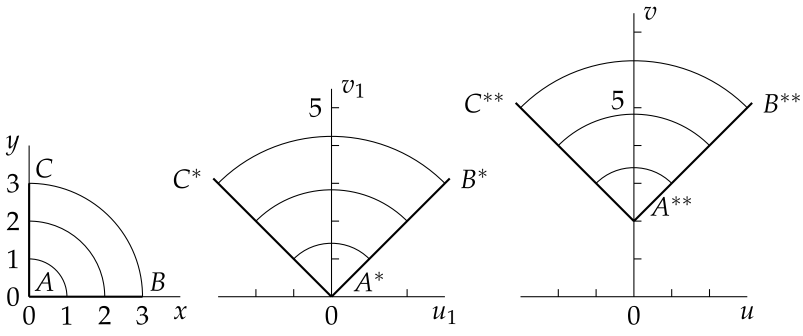
$$w = az \qquad (\text{اختیاری } a) \tag{15.3}$$

زاویہ $\underline{/a}$ سے گھومنے کو اور ساتھ ہی یکساں اتساع یا سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ درج ذیل تبادل

$$w = az + b \tag{15.4}$$

خطی تبادل[10] کہلاتا ہے جو گھومنے کے ساتھ اتساع یا سکڑاو $w_1 = az$ کے ساتھ ساتھ مستقیم حرکت $w = w_1 + b$ کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.3 میں $w = (1+i)z + 2i$ تبادل دکھایا گیا ہے جو گھڑی کی الٹ رخ $\frac{\pi}{4}$ زاویے کے گھومنے اور $|1+i| = \sqrt{2}$ تناسب کی اتساع کے بعد اوپر کی رخ مستقیم حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔
□

[10] linear transformation



$z = x + iy$ $\quad$ $w_1 = u_1 + iv_1$ $\quad$ $w = u + iv$

(مستوی z) $\quad$ (مستوی w_1) $\quad$ (مستوی w)

شکل 15.3: خطی تبادل $w = (1+i)z + 2i$ جس میں گھومنا، اتساع $w_1 = (1+i)z$ اور مستقیم حرکت $w = w_1 + 2i$ شامل ہے۔

مثال 15.2: **نقش** $w = z^2$

ہم درج ذیل نقش پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$w = z^2 \tag{15.5}$$

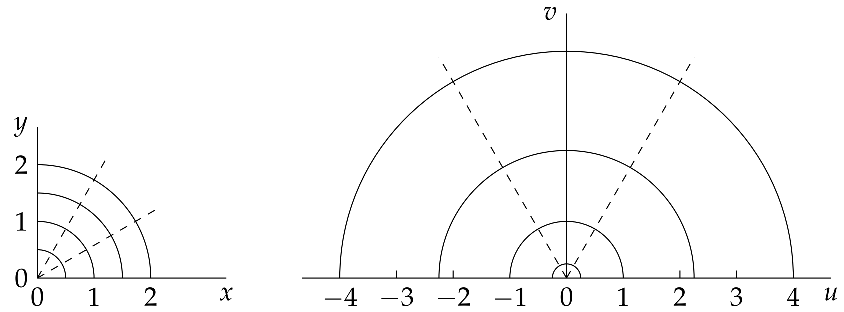
یہاں قطبی محدد استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔یوں $z = e^{i\theta}$ اور $w = Re^{i\phi}$ لیتے ہوئے مساوات 15.5 $Re^{i\phi} = r^2 e^{i2\theta}$ لکھی جائے گی جس سے

$$R = r^2, \quad \phi = 2\theta$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں دائروں $r = r_0 =$ مستقل کا نقش دائرے $R = r_0^2 =$ مستقل ہوں گے جبکہ مبدا سے گزرتی سیدھی لکیروں $\theta = \theta_0 =$ مستقل کا نقش دگنی زاویہ پر لکیریں $\phi = 2\theta_0 =$ مستقل ہوں گی۔ خاص کر z سطح میں مثبت حقیقی محور $(\theta = 0)$ کا نقش w سطح میں مثبت حقیقی محور ہو گا جبکہ z سطح میں مثبت خیالی محور $\theta = \frac{\pi}{2}$ کا نقش w سطح میں منفی حقیقی محور ہو گا۔ یہ نقش مبدا پر ہر زاویہ کو دگنا کرتا ہے۔ربع اول $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ کا نقش بالائی نصف w سطح ہو گی (شکل 15.4)۔

مستطیل محدد میں تبادل $w = z^2$ درج ذیل دے گا۔

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$$



شکل 15.4: نقش $w = z^2$

حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \tag{15.6}$$

ملتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ u اور v کی **ہموار سطحات متساوی الاضلاع قطع زائد** ہوں گے جن کی متقارب لکیریں[11] $y = \mp x$ اور محدد کی محور ہیں۔ہم دیکھتے ہیں مساوات 15.6 میں دیے گئے خطوط ایک دوسرے کی عمودی مطقاطع خطوط (حصہ 1.6) ہیں۔ شکل 15.5 میں z سطح میں دو خطے w سطح میں مستطیل پر نقش ہوں گے۔ظاہر ہے کہ ہر نقطہ $w \neq 0$ سطح z میں ٹھیک دو نقطوں کا عکس ہو گا۔

ہم مساوات 15.6 استعمال کرتے ہوئے سیدھی خطوط مستقل $= x$ اور مستقل $= y$ کا عکس تلاش کر سکتے ہیں۔خط مستقل $= c = x$ کا عکس

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy$$

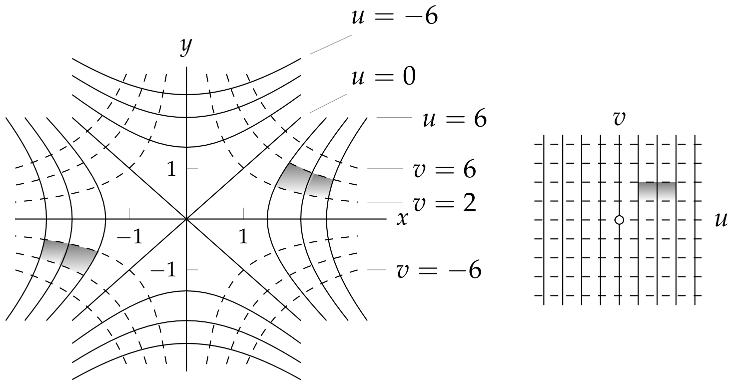
سے y حذف کرتے ہوئے

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

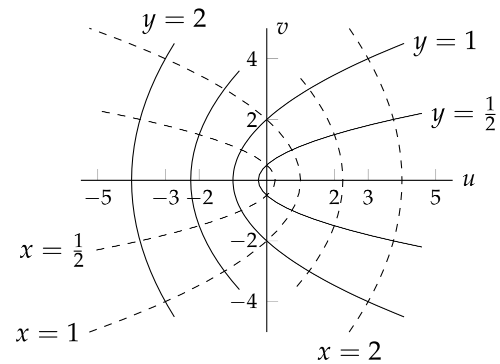
حاصل ہوتا ہے جو قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے جو بائیں رخ کھلتا ہے۔مبدا اس قطع مکافی کا ماسکہ ہو گا۔اسی طرح مستقل $= k = y$ کا عکس

$$v^2 = 4k^2(k^2 + u)$$

ہو گا جو دائیں کو کھلتا ہوا قطع مکافی ہے جس کا ماسکہ عین مبدا پر ہے (شکل 15.6)۔ □



شکل 15.5: نقش $w = z^2$ کی صورت میں u اور v کی ہموار سطحیں



شکل 15.6: نقش $w = z^2$ میں سیدھے خطوط $x = c$ اور $y = c^*$ کے عکس

شکل 15.7: نقش $w = z^n$

باقی طاقت

$$w = z^n, \quad n = 3, 4, \cdots \tag{15.7}$$

پر بھی اسی طرح غور کیا جا سکتا ہے۔ظاہر ہے کہ ان کی ہموار سطحات کی مساوات مزید پیچیدہ ہوں گی۔زاویائی خطہ $0 \le \angle z \le \frac{\pi}{n}$ بالائی نصف w سطح پر نقش ہو گا (شکل 15.7)۔

منفی طاقت کی نقش $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \cdots$ پر بھی قطبی محدد کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔عملاً اہم ترین صورت درج ذیل مثال میں دی گئی ہے۔

مثال 15.3: نقش $w = \frac{1}{z}$۔ الٹ جانا
ہم درج ذیل نقش پر غور کرتے ہیں۔

$$w = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0 \tag{15.8}$$

قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے $z = re^{i\theta}$ اور $w = Re^{i\phi}$ لکھتے ہیں۔یوں مساوات 15.8 سے

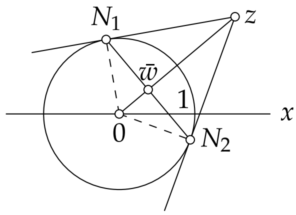
$$R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta \qquad (r \neq 0) \tag{15.9}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $w = \frac{1}{z}\ (z \neq 0)$ ، مبدا سے نکلتی سیدھی لکیر جو $\bar{z}$ سے گزرتی ہو پر واقع ہے۔مبدا سے اس نقطے کا فاصلہ $\frac{1}{|z|}$ ہے۔

جیومیٹریائی طور پر z کو اکائی دائرے میں الٹاتے ہوئے اس کا x محور میں عکس لینے سے $w = \frac{1}{z}$ حاصل ہو گا۔آپ تتشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے اس حقیقت کو ثابت کر سکتے ہیں (شکل 15.8)۔

شکل میں دکھایا گیا ہے کہ $w = \frac{1}{z}$ نقش، افقی اور کھڑی سیدھی لکیروں کو دائروں یا سیدھی لکیروں پر عکس کرتی ہے۔یہاں تک کہ درج ذیل جملہ ہر صورت درست ہو گا۔

---
asymptotes[11]



شکل 15.8: z سے $w = \frac{1}{z}$ کا جیو میٹریائی حصول۔ نقطہ z سے اکائی دائرے تک مماس، دائرے کو N_1 اور N_2 پر چھوتے ہیں۔ مبدا سے z تک لکیر اور N_1 سے N_2 تک لکیر نقطہ $\bar{w}$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

$w = \frac{1}{z}$ ہر سیدھی لکیر یا دائرے کو دائرے یا سیدھے لکیر پر نقش کرتا ہے۔
ثبوت: z سطح میں ہر سیدھی لکیر یا دائرہ کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے۔

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad (A,B,C,D \text{حقیقی})$$

$A=0$ سیدھی لکیر دیتی ہے جبکہ $A \neq 0$ دائرہ دیتی ہے۔ z اور $\bar{z}$ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Az\bar{z}+B\frac{z+\bar{z}}{2}+C\frac{z-\bar{z}}{i2}+D=0$$

چونکہ $w=\frac{1}{z}$ ہے لہٰذا اس میں $z=\frac{1}{w}$ پر کرتے ہوئے $w\bar{w}$ سے ضرب دینے سے

$$A+B\frac{w+\bar{w}}{2}+C\frac{\bar{w}-w}{i2}+Dw\bar{w}=0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو u اور v کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0$$

حاصل ہوتا ہے جو $D \neq 0$ کی صورت میں دائرہ ہو گا جبکہ $D=0$ کی صورت میں w سطح میں سیدھی لکیر ہو گی۔ □

سوالات

سوال 15.1 تا سوال 15.3 میں زیر نقش $w=(1-i)z+2$ دیے گئے منحنیات یا خطوں کا عکس تلاش کریں۔ عکس کو w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.1: $x = 0, 1, 2, 3$
جواب: $v = u - 2, u - 4, u - 6, u - 8 \quad v = u - 2 - 2x,$

سوال 15.2: $y = 0, -1, -2, -3$
جواب: $v = -u + 2, -u, -u - 2, -u - 4 \quad v = -u + 2 + 2y,$

سوال 15.3: $|z + 2| \leq 2$
جواب: $|w - i2| \leq 2\sqrt{2}$

سوال 15.4 تا سوال 15.9 میں نقش $w = u + iv = z^2$ ہے۔ دیے گئے منحنیات کا عکس تلاش کرتے ہوئے انہیں w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.4: $y = x$
جواب: $u = 0, v \geq 0$

سوال 15.5: $y = 0, 1, 2, 3$
جواب: $v = 0, \mp 2\sqrt{u+1}, \mp 4\sqrt{u+4}, \mp 6\sqrt{u+9} \quad v = 2y\sqrt{u + y^2},$

سوال 15.6: $x = 0, 1, 2, 3$
جواب: $x = 0$ پر $v = 0, u < 0$ ہو گا جبکہ عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$v = 2x\sqrt{x^2 - u}, v = 0, \mp 2\sqrt{1-u}, \mp 4\sqrt{4-u}, \mp 6\sqrt{9-u}$$

سوال 15.7: $y = 1 + x$
جواب: $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ میں $y = 1 + x$ پر کرنے سے $u = -1 - 2x, v = 2x(1 + x)$ ملتا ہے۔ یوں $x = -\frac{1}{2}(1 + u)$ حاصل کرتے ہوئے $v = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$ حاصل ہو گا۔

سوال 15.8: $y = 1 - x$
جواب: $v = \frac{1}{2}(u + 1)(u + 3)$

سوال 15.9: $y^2 = 1 + x^2$
جواب: $u = -1$

سوال 15.10 تا سوال 15.15 میں نقش $w=z^2$ ہے۔ دیا گیا خطہ w سطح میں حاصل کرتے ہوئے w سطح میں دکھائیں۔

سوال 15.10: $|z|\geq 3$
جواب: $|w|\geq 9$

سوال 15.11: $|z|<2$
جواب: $|w|<4$

سوال 15.12: $\angle z<\frac{\pi}{3}$
جواب: $\angle w<\frac{2\pi}{3}$

سوال 15.13: $1<x<2$
جواب: قطع مکافی $v^2=4(1-u)$ اور $v^2=16(4-x)$ کے درمیان خطہ۔

سوال 15.14: $0\leq y\leq 1$
جواب: قطع مکافی $v^2=4(1+u)$ اور مثبت u محور اور ان دونوں کے درمیان خطہ۔

سوال 15.15: $-\frac{\pi}{4}<\angle z<\frac{\pi}{2}$
جواب: $-\frac{\pi}{2}<\angle w<\pi$

سوال 15.16 تا سوال 15.21 میں دیے سیدھی لکیروں اور دائروں کا زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ عکس دریافت کریں۔

سوال 15.16: $|z|=1$
جواب: $|w|=1$

سوال 15.17: $|z+1|=1$
جواب:

$$|z+1|=1,\quad \left|\frac{1}{w}+1\right|=1,\quad |1+w|=|w|\,,|u+iv+1|=|u+iv|$$
$$(u+1)^2+v^2=u^2+v^2,\quad u=-\frac{1}{2}$$

سوال 15.18: $|z+1|=1$
جواب: $u=\frac{1}{2}$

سوال 15.19: $|z - i2| = 2$
جواب: $v = -\frac{1}{4}$

سوال 15.20: $y = x - 1$
جواب: $z = x + iy$ سے $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ اور $y = \frac{1}{i2}(z - \bar{z})$ لکھتے ہوئے $y = x - 1$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $z = \frac{1}{w}$ اور $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ کا استعمال کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $i2$ سے ضرب دیا گیا ہے۔

$$\frac{1}{i2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - 1, \quad z - \bar{z} = i(z + \bar{z}) - i2$$

اس میں $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $w\bar{w}$ سے ضرب دینے سے

$$\begin{gathered}\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = i(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}) - i2, \quad \bar{w} - w = i(\bar{w} + w) - i2w\bar{w}, \\ -i2v = i2u - i2w\bar{w}, \quad u^2 - u + v^2 - v = 0, \\ (u - \tfrac{1}{2})^2 + (v - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{2}, \quad \left|w - \tfrac{1}{2}(1 + i)\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{gathered}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.21: $x = 1$
جواب: $z = x + iy$ سے $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ لکھتے ہوئے $x = 1$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $z = \frac{1}{w}$ اور $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}&\frac{z + \bar{z}}{2} = 1, \quad \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} = 2, \quad \bar{w} + w = 2w\bar{w}, \quad 2u = 2(u^2 + v^2), \\ &u^2 - u + v^2 = 0, \quad (u - \tfrac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}, \quad \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

سوال 15.22: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ خطہ $-2 < x < 1, -1 < y < 1$ کا عکس تلاش کریں۔
جواب: وہ خطہ جس کے حدود $\left|w + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ ، $\left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ، $\left|w - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ اور $\left|w + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ دائرے ہوں۔

سوال 15.23: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ خطہ $1 < x < 2$ کا عکس تلاش کریں۔
جواب: دائرہ $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ اور دائرہ $\left|w - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ کے درمیان خطہ۔

سوال 15.24: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ کن سیدھی لکیروں کا عکس سیدھی لکیریں اور کن کا عکس دائرے ہیں۔اسی طرح کن دائروں کا عکس دائرے اور کن کا عکس سیدھی لکیریں ہیں؟
جواب: اگر سیدھی لکیر $Bx + Cy + D = 0$ میں $D = 0$ ہو تب عکس سیدھی لکیر ہو گی ورنہ عکس دائرہ ہو گا۔اسی طرح اگر دائرہ $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ میں $D = 0$ ہو تب عکس سیدھی لکیر ہو گی ورنہ عکس دائرہ ہو گا۔

سوال 15.25: دکھائیں کہ زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ دائرہ اور منعکس دائرہ عموماً ہم مرکز نہیں ہوں گے۔
جواب: دائرہ $|z - z_0| = r$ کا مرکز $z_0 = x_0 + iy_0$ ہے۔زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ اس دائرے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں تیسری قدم پر $|w_0 - w| = |w - w_0|$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\left|\frac{1}{w} - \frac{1}{w_0}\right| = r, \quad \left|\frac{w_0 - w}{ww_0}\right| = r, \quad |w - w_0| = r|ww_0|$$

اس دائرے کا مرکز $w_0 = \frac{1}{z_0}$ ہے جو اصل دائرے کی مرکز z_0 سے مختلف ہے۔($z_0 = 1$ کی صورت میں $w_0 = 1$ ہو گا لہٰذا دائرہ اور عکس ہم مرکز ہوں گے۔)

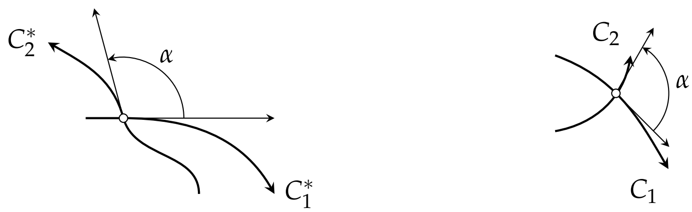
سوال 15.26: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ نقطہ $3 + i4$ کا عکس $\frac{1}{3+i4}$ جیومیٹریائی طریقے سے دریافت کریں۔

سوال 15.27: زاویائی خطہ $0 \le \underline{/z} \le \frac{\pi}{4}$ کا زیر نقش $w = z$ ، $w = iz$ ، $w = -iz$ ، $w = z^2$ ، $w = -z^2$ ، $w = -iz^2$ اور $w = z^3$ عکس دریافت کریں اور انہیں w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.28: زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ ، $w = \frac{i}{z}$ ، $w = \frac{1}{z^2}$ اور $w = \frac{i}{z^2}$ سوال 15.27 میں دیے گئے خطے کا عکس تلاش کریں۔

سوال 15.29: ایسا نقش $w = u + iv = f(z)$ دریافت کریں جو آدھی سطح $x \ge 0$ کو خطہ $u \ge 2$ پر عکس کرے اور ساتھ ہی ساتھ نقطہ $z = 0$ کو نقطہ $w = 2 + i$ پر عکس کرے۔
جواب: $w = z + 2 + i$

سوال 15.30: ایسا نقش $w = u + iv = f(z)$ تلاش کریں جو زاویائی خطہ $0 < \underline{/z} < \frac{\pi}{3}$ کو خطہ $u < 1$ پر عکس کرتا ہو۔
جواب: $w = iz^3$



شکل 15.9: منحنیات C_1 اور C_2 کا محافظ زاویہ نقش میں عکس بالترتیب C_1^* اور C_2^* ہے۔

15.2 محافظ زاویہ نقش

ہم اب تحلیلی تفاعل کی نقش کی اہم ترین خاصیت یعنی **محافظت زاویہ**[12] پر تبصرہ کرتے ہیں۔

سطح میں ایسا نقش جو سمت بند منحنیات کے درمیان زاویوں کی مقدار اور ان زاویوں کی مثبت سمت برقرار رکھتا ہو **محافظ زاویہ نقش**[13] کہلاتا ہے، یعنی دو سمت بند منحنیات کا زاویہ تقاطع اور اس زاویہ کی مثبت سمت، عکس کی (مطابقتی سمت بن) منحنیات کا زاویہ تقاطع اور اس زاویہ کی مثبت سمت ایک جیسے ہوں گے۔ یہاں دو منحنیات کے مابین زاویہ سے مراد ان کی نقطہ تقاطع پر مماثل کے مابین زاویہ $\alpha \ (0 \le \alpha \le \pi)$ ہے (شکل 15.9)۔

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ نقش $w = f(z)$ ان تمام نقطوں پر محافظ زاویہ ہے جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے، ماسوائے ان نقطوں پر جہاں تفرق $f'(z)$ کی قیمت صفر ہے۔ ایسے نقطہ کو **نقطہ فاصل**[14] کہتے ہیں۔ مثلاً $f(z) = z^2$ کی صورت میں $z = 0$ پر $f'(z) = 2z = 0$ ہے لہٰذا $z = 0$ پر نقش محافظ زاویہ نہیں ہے اور اس نقطہ پر زاویہ دگنا ہوتا ہے (مثال 15.2)۔

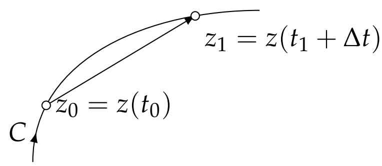
اس مقصد کے لئے ہمیں منحنیات اور ان کی عکس پر غور کرنا ہو گا۔ مخلوط سطح z میں منحنی C کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$z(t) = x(t) + iy(t) \tag{15.10}$$

جہاں t حقیقی مقدار معلوم ہے۔ مثال کے طور پر تفاعل

$$z(t) = r\cos t + ir\sin t$$

[12] conformality
[13] conformal
[14] critical point



شکل 15.10: مساوات 15.11 کی استنباط

دائرہ $|z| = r$ کو ظاہر کرتا ہے جبکہ تفاعل

$$z(t) = t + it^2$$

قطع مکافی $y = x^2$ کو ظاہر کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ مساوات 15.10 میں بڑھتے t سے حاصل رخ کو منحنی پر مثبت سمت[15] کہتے ہیں۔ یوں مساوات 15.10 منحنی C پر سمت بندی تعین کرتی ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 15.10 میں $z(t)$ قابل تفرق ہے اور تفرق $\dot{z}(t)$ استمراری اور ہر نقطے پر غیر صفر ہے۔ تب C کے ہر نقطہ پر یکتا مماس پایا جائے گا اور C **ہموار منحنی**[16] کہلائے گی۔ C پر مثبت سمت کا مماس پر مطابقتی سمت اس مماس پر مثبت سمت کہلاتی ہے اور ایسا مماس سمت بند کہلاتا ہے۔

C پر $z_0 = z(t_0)$ اور $z_1 = z(t_1 + \Delta t)$ نقطوں سے گزرتی وہ تحدیدی سیدھی لکیر جو $\Delta z \to 0$ کرنے سے حاصل ہو، نقطہ z_0 پر C کی مماس کہلاتی ہے (حصہ 10.5 دیکھیں)۔ اب عدد $z_1 - z_0$ کو z_0 سے z_1 تک سمتیہ (شکل 15.10) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے اور $\frac{z_1 - z_0}{\Delta t}$، جہاں $\Delta t > 0$ ہے، کی مطابقتی سمتیہ کی وہی سمت ہو گی جو اس سمتیہ کی ہے۔ یوں درج ذیل کا مطابقتی سمتیہ

$$\dot{z}(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \tag{15.11}$$

نقطہ z_0 پر C کا مماس ہو گا اور اس سمتیہ اور مثبت x محور کے مابین زاویہ $\underline{/\dot{z}(t_0)}$ ہو گا۔

اب ایسے غیر مستقل تحلیلی تفاعل $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ کی نقش پر غور کریں جو اس دائرہ کار میں معین ہو جس میں C پایا جاتا ہو۔ اس نقش میں C کا عکس، سطح w میں منحنی C^* ہو گی یعنی:

$$w(t) = f[z(t)]$$

---

[15] positive sense
[16] smooth curve

C^* پر نقطہ $w(t_0)$ کا مطابقتی نقطہ $z_0 = z(t_0)$ ہے اور $\dot{w}(t_0)$ اس نقطہ پر C^* کی مماسی سمتیہ ہے۔اب زنجیری قاعدہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{15.12}$$

لہٰذا $f'(z_0) \neq 0$ کی صورت میں ہم دیکھتے ہیں کہ $\dot{w}(t_0) \neq 0$ ہو گا اور $w(t_0)$ پر C^* کا یکتا مماس موجود ہو گا جو مثبت u محور کے ساتھ $\underline{/\dot{w}(t_0)}$ زاویہ بنائے گا۔چونکہ حاصل ضرب کی دلیل جزو ضربی کی دلیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے لہٰذا مساوات 15.12 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\underline{/\dot{w}(t_0)} = \underline{/f'(z_0)} + \underline{/\dot{z}(t_0)}$$

یوں زیر نقش نقطہ z_0 پر C کا سمتی مماس زاویہ

$$\underline{/\dot{w}(t_0)} - \underline{/\dot{z}(t_0)} = \underline{/f'(z_0)} \tag{15.13}$$

سے گھوم جائے گا جو C اور C^* کی مماسوں کے مابین زاویہ کے برابر ہے۔چونکہ مساوات 15.13 کا دایاں ہاتھ C کے غیر تابع ہے لہٰذا یہ زاویہ بھی C کی انتخاب کے تابع نہیں ہو گا۔یوں تبادل $w = f(z)$ نقطہ z_0 سے گزرتی ہوئی تمام منحنیات کی مماس کو ایک ہی زاویہ $\underline{/f'(z_0)}$ سے گھومائے گی۔اس طرح نقطہ z_0 سے گزرتی ایسی دو منحنیات جن کی مماس کے مابین ایک مخصوص زاویہ ہو کی عکس کی منحنیات کی مماس کے مابین بھی، نقطہ z_0 کے مطابقتی نقطہ w_0 پر، مقدار اور سمت دونوں میں، یہی مخصوص زاویہ ہو گا۔ اس سے درج ذیل بنیادی نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.1: **محافظ زاویہ نقش**
تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا نقش **محافظ زاویہ** ہے، ماسوائے ان نقطوں پر جہاں تفرق $f'(z)$ صفر کے برابر ہو۔

مثال 15.4: **محافظت زاویہ زیر** $w = z^2$
نقش $w = z^2$ محافظ زاویہ ہے ماسوائے نقطہ $z = 0$ پر جہاں $w' = 2z = 0$ ہے۔ شکل 15.4 اور شکل 15.6 میں دکھایا گیا ہے کہ عکسی منحنیات ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں ماسوائے $z = 0$ پر جہاں زاویے دگنا ہو جاتے ہیں یعنی اس نقطے پر سیدھے خط $\underline{/z} = c$ کا عکس سیدھا خط $\underline{/w} = 2c$ ہو گا (شکل 15.4)۔
□

مزید تفرق کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \left| f'(z_0) \right|$$

یوں نقش $w = f(z)$ چھوٹے قطعات کی لمبائی کو تقریباً $|f'(z_0)|$ گنا بڑھاتا ہے۔ کسی چھوٹے شکل کا عکس تقریباً اصل صورت برقرار رکھے گا۔ چونکہ $f'(z_0)$ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر تبدیل ہوتا ہے لہٰذا وسیع شکل کا عکس عموماً اصل سے بہت مختلف ہو گا۔

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 14.40 اور کوشی ریمان مساوات سے

$$\left| f'(z) \right|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right| = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \tag{15.14}$$

یعنی

$$\left| f'(z) \right|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \tag{15.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نقش $w = f(z)$ کی حقیقی روپ

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

استعمال کرتے ہوئے مقطع، **یعقوبی**[17] (حصہ 11.3) کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں شرط $f'(z_0) \neq 0$ سے مراد ہے کہ z_0 پر یعقوبی غیر صفر ہے۔ اس شرط کی بنا نقش $w = f(z)$ کو کافی چھوٹی پڑوس میں محدود کرنے سے ایک **ایک مطابقتی**[18] نقش حاصل ہوتی ہے یعنی ہر انفرادی نقطے کا منفرد عکس پایا جاتا ہے۔ اس حقیقت کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 15.5: نقش $w = z^2$ ماسوائے $z = 0$ کے، کافی چھوٹی پڑوس میں ایک ایک مطابقت رکھتا ہے۔ نقطہ $z = 0$ کی پڑوس میں یہ نقش ایک ایک مطابقت نہیں رکھتا ہے۔ پوری z سطح یوں w سطح پر نقش ہوتی ہے کہ w سطح کا ہر نقطہ $w \neq 0$ سطح z کی دو نقطوں کا عکس ہوتا ہے۔ مثلاً $z = 1$ اور $z = -1$ دونوں $w = 1$ پر عکس ہوتے ہیں بلکہ z_1 اور $-z_1$ کا ایک ہی عکس $w = z_1^2$ ہو گا۔ □

Jacobian[17]
one to one[18]

محافظ زاویہ نقش کی عملی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ دو حقیقی متغیرات کی ہارمونی تفاعل محافظ زاویہ تبادل کے بعد نئی متغیرات کے لحاظ سے ہارمونی رہتا ہے (مسئلہ 15.2)۔ اس کے دور رس اثرات ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ہمیں دو بعدی نظریہ مخفی قوہ میں سرحدی مسئلہ حل کرنا ہو یعنی ہمیں دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل دائرہ کار D میں درکار ہو جو D کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ایسے موقع پر عین ممکن ہے کہ ہم ایسا محافظ زاویہ نقش استعمال کر پائیں جو D کو ایک سادہ خطہ D^* ، جیسے آدھی سطح یا دائری قرص، پر عکس کر سکے۔ ہم مساوات لاپلاس کے D^* کے لحاظ سے حل کا اسی نقش کے ذریعہ الٹ حاصل کرتے ہوئے اصل مسئلے کا حل تلاش کر پائیں گے۔یہ انتہائی طاقتور ترکیب درج ذیل مسئلہ کے تحت ممکن ہے۔

مسئلہ 15.2: ہارمونی تفاعل اور محافظ زاویہ نقش
تحلیلی تفاعل $w = f(z)$ کی، ایک ایک مطابقتی، محافظ زاویہ تبادل سے ہارمونی تفاعل $h(x,y)$ ، تبدیل شدہ متغیرات کے لحاظ سے ہارمونی رہتا ہے۔

ثبوت : پہلا ثبوت جوڑی دار ہارمونی تفاعل کی موجودگی فرض کرتا ہے
فرض کریں کہ دائرہ کار D میں ہارمونی تفاعل $h(x,y)$ ہے اور D میں $h(x,y)$ کا جوڑی دار[19] ہارمونی تفاعل $g(x,y)$ ہے، نتیجتاً $h+ig$ دائرہ کار D میں $z = x+iy$ کا تحلیلی تفاعل $H(z)$ ہو گا۔ ہم فرض کر چکے ہیں کہ نقش $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ایک ایک مطابقتی اور محافظ زاویہ ہے لہٰذا D کا عکس D^* دائرہ کار ہے؛ ساتھ ہی D میں $f'(z) \neq 0$ ہے اور الٹ تفاعل $z = F(w)$ جو D^* کو واپس D پر عکس کرتا ہو موجود ہے۔ D^* میں $F(w)$ تحلیلی ہے: یقیناً اس کا تفرق درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}z}$$

اس کلیہ کا ثبوت حقیقی علم الاحصاء کی طرح ہے۔یوں $H[F(w)]$ دائرہ کار D^* میں w کا تحلیلی تفاعل ہو گا۔اس کا حقیقی جزو $h[x(u,v),y(u,v)]$ ہو گا جو D^* میں u اور v کا ہارمونی تفاعل ہے۔

□

ثبوت : دوسرا ثبوت بلا جوڑی دار ہارمونی تفاعل
فرض کریں کہ D میں $h(x,y)$ ہارمونی ہے۔پہلے کی طرح ہم اب بھی $z = x+iy = F(w)$ استعمال کرتے ہوئے $h[x(u,v),y(u,v)]$ حاصل کرتے ہیں۔ہم اپنی آسانی کی خاطر، اس تفاعل، جو u اور v کا

[19] حصہ 14.5 دیکھیں۔ہم بغیر ثبوت دیے بتانا چاہتے ہیں کہ اگر D سادہ تعلق (تعریف حصہ 11.12) والا خطہ ہو تب جوڑی دار ہارمونی تفاعل موجود ہو گا۔

تابع ہے، کو دوبارہ h سے ہی ظاہر کرتے ہیں اور دکھاتے ہیں کہ D^* میں یہ ہارمونی ہے جہاں D^* زیر نقش $w = f(z)$ دائرہ کار D کا عکس ہے۔ہم زنجیری قاعدہ بروئے کار لاتے ہیں

$$h_x = h_u u_x + h_v v_x$$

جہاں زیر نوشت میں x اور y تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔ہم زنجیری قاعدہ ایک بار دوبارہ استعمال کرتے ہیں اور ان ارکان کے نیچے خط کھینچتے ہیں جو $h_{xx} + h_{yy}$ مجموعہ حاصل کرتے وقت آپس میں کٹ جائیں گے۔

$$h_{xx} = \underline{h_u u_{xx}} + (h_{uu} u_x + \underline{h_{uv} v_x}) u_x + \underline{h_v v_{xx}} + (\underline{h_{vu} u_x} + h_{vv} v_x) v_x$$

بالکل اسی طرح ہم h_{yy} حاصل کر سکتے ہیں جو درج بالا میں x کی جگہ y اور y کی جگہ x لکھنے سے حاصل ہو گا۔ان دونوں کا مجموعہ $h_{xx} + h_{yy}$ ہمیں درکار ہے۔اب چونکہ $w = u + iv$ تحلیلی ہے لہٰذا مسئلہ 14.3 کے تحت

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

ہو گا اور ساتھ ہی مجموعہ میں $h_{vu} = h_{uv}$ کو

$$u_x v_x + u_y v_y$$

ضرب کرتا ہے جو مساوات کوشی ریمان کے تحت صفر کے برابر ہے۔یوں مجموعہ

$$h_{xx} + h_{yy} = h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(v_x^2 + v_y^2)$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات کوشی ریمان کی مدد سے

$$(h_{uu} + h_{vv})(u_x^2 + v_x^2)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 15.14 استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left| f'(z) \right|^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right) \tag{15.16}$$

حاصل ہوتا ہے۔محافظت زاویہ کی وجہ سے $f'(z) \neq 0$ ہے اور ہم فرض کر چکے ہیں کہ D میں بایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا قوسین میں بند حصہ D^* میں لازماً صفر کے برابر ہو گا۔

□

نظریہ مخفی قوہ میں محافظ زاویہ نقش کی ترکیب استعمال کرنے میں سب سے مشکل قدم اس نقش کا جاننا ہے جو دیے گئے خطہ کو سادہ خطہ پر نقش کرتا ہو۔اس کے لئے ہمیں تجربہ درکار ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ بنیادی تحلیلی تفاعل کی خواص نقش کی گہری سمجھ ضروری ہو گی۔اس ضرورت کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم اہم ترین بنیادی تحلیلی تفاعل پر غور کریں گے۔

سوالات

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

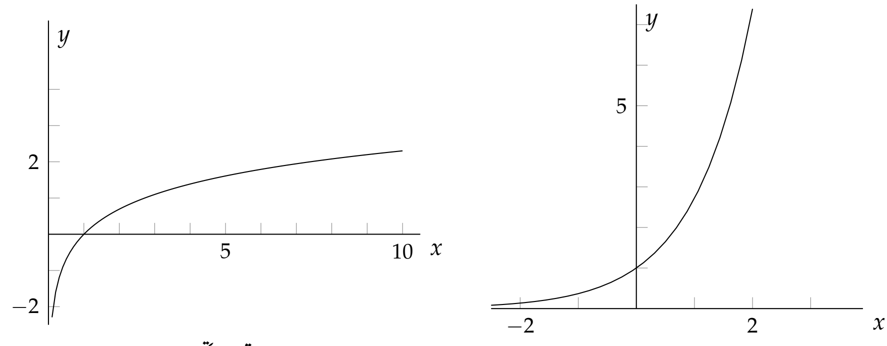
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

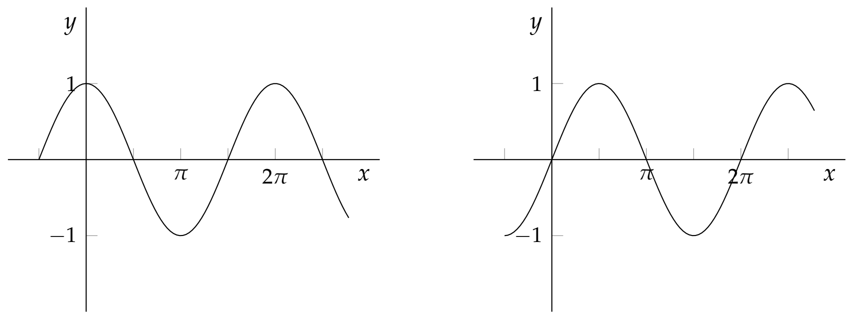
$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$

(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $\frac{1}{x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = 10^{-\log x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\sin(x-y)\quad=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[-\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u+\sin v=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v-\cos u=2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

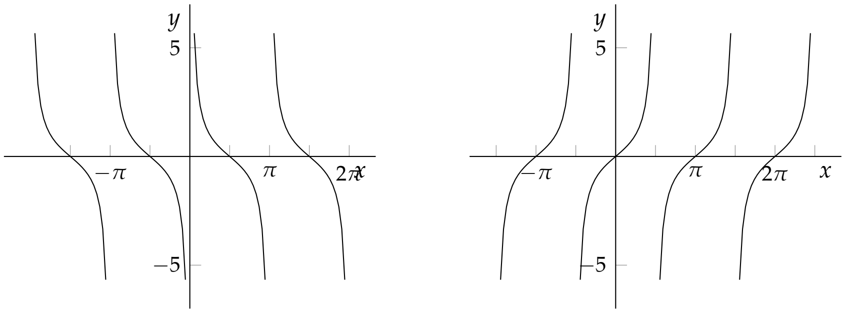
(ب.13)
$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\cos(x\mp\delta),\quad \tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x\mp\delta),\quad \tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc=\frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},\quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$



cot x (ب) tan x (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.17}$$
$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

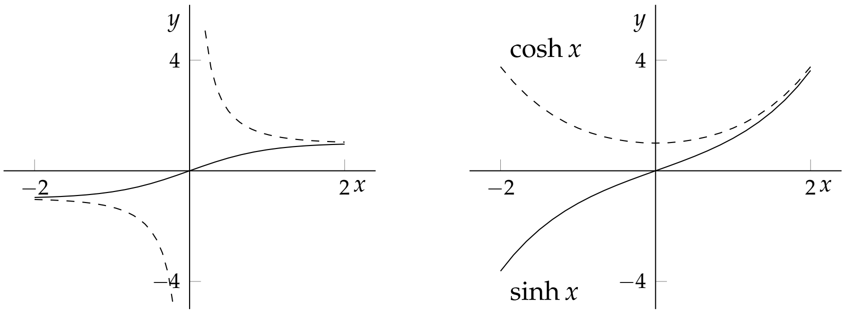
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{ب.24}$$

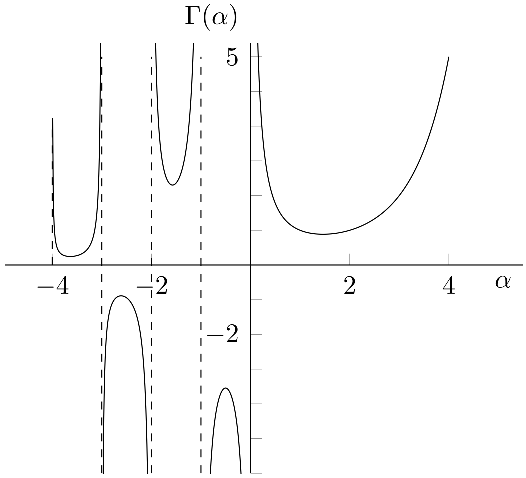
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\qquad(\alpha\neq 0,-1,\cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha=0,-1,-2,\cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)\approx\sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\,y>0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

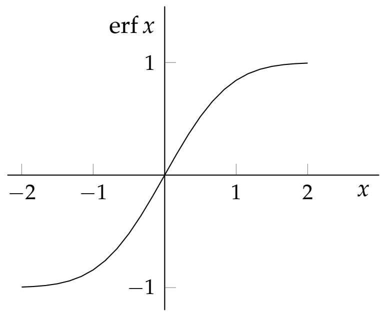
$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

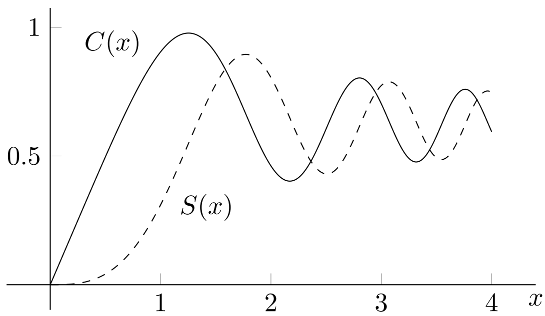
$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔**مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

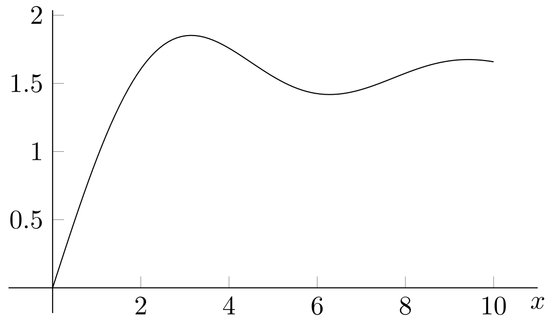
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$