انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 9

قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ

لیژانڈر تفاعل (حصہ 5.2) اور بیسل تفاعل کی ایک خاصیت جسے قائمیت[1] کہتے ہیں انجینئری حساب میں نمایاں کردار ادا کرتی ہے۔اس حصے میں قائمیت سے وابستہ تصورات اور علامت نویسی سیکھتے ہیں۔اگلے حصے میں ایسی سرحدی قیمت مسائل (سٹیورم لیوویل مسائل) پر غور کیا جائے گا جن کے حل قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ دیتے ہیں۔ان مسائل پر غور کے دوران حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفاعل اور بیسل تفاعل پر غور کیا جائے گا۔

آئیں پہلے تفاعل کی قائمیت کی تعریف پیش کرتے ہیں۔فرض کریں کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر **حقیقی قیمت تفاعل** $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ معین ہیں اور اس وقفے پر ان تفاعل کے حاصل ضرب $g_m(x)g_n(x)$ کا **تکمل** موجود ہے۔اس تکمل کو روایتی طور پر (g_m, g_n) لکھا جاتا ہے۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.1}$$

اگر درج بالا تکمل صفر کے برابر ہو تب تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ وقفہ $a \le x \le b$ پر **قائمہ الزاویہ**[2] کہلاتے ہیں۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \ne n) \tag{9.2}$$

orthogonality[1]
orthogonal[2]

حقیقی قیمت تفاعل کا سلسلہ $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، $\cdots$اس صورت وقفہ $a \le x \le b$ پر **قائمہ الزاویہ سلسلہ**[3] کہلائے گا جب اس وقفے پر یہ تمام تفاعل معین اور تمام تکمل (g_m, g_n) موجود ہوں اور اس سلسلے میں تمام ممکنہ منفرد جوڑیوں کے یہ تکمل صفر کے برابر ہوں۔

(g_m, g_m) کے غیر صفر جذر کو g_m کا **معیار**[4] کہتے ہیں جسے عموماً $\|g_m\|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x)\,\mathrm{d}x} \tag{9.3}$$

ہم پوری بحث کے دوران درج ذیل فرض کریں گے۔

عمومی مفروضہ: تمام تفاعل جن پر غور کیا جا رہا ہو محدود ہیں، جن تکمل پر غور کیا جا رہا ہو وہ موجود ہیں اور معیار غیر صفر ہیں۔

ظاہر ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر ایسے قائمہ الزاویہ سلسلہ g_1 ، g_2 ، $\cdots$جن میں ہر تفاعل کا معیار اکائی (1) ہو درج ذیل تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \ne n \quad (m = 1, 2, \cdots) \\ 1 & m = n \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{9.4}$$

ایسے سلسلے کو وقفہ $a \le x \le b$ پر **معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ**[5] کہتے ہیں۔

کسی بھی قائمہ الزاویہ سلسلے کے ہر تفاعل کو، زیر غور وقفے پر، اس تفاعل کی معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 9.1: تفاعل $g_m(x) = \sin mx$ جہاں $m = 1, 2, \cdots$ کا سلسلہ وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے کیونکہ ان تفاعل کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (ضمیمہ ب میں مساوات 11.ب)۔

$$\begin{aligned} (g_m, g_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x \quad (m \ne n) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{9.5}$$

---

[3] orthogonal set
[4] norm
[5] orthonormal set

ان تفاعل کا معیار $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$ ہے۔

$$\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \,\mathrm{d}x = \pi \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

یوں اس سلسلے سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}$$

مثال 9.2: کوسائن تفاعل $\cos mx$ کے سلسلے کو بھی مثال 9.1 کی طرح قائمہ الزاویہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔مزید تمام $m, n = 0, 1, \cdots$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \,\mathrm{d}x = 0$$

یوں ظاہر ہے کہ درج ذیل سلسلہ وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cdots$$

جس سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots$$

قائمہ الزاویہ سلسلہ استعمال کرتے ہوئے مختلف تفاعل کو تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ وقفہ $1 \le x \le b$ پر $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $\cdots$کوئی بھی قائمہ الزاویہ سلسلہ ہے۔اب فرض کریں کہ $f(x)$ کوئی بھی تفاعل ہے جس کو ان $g(x)$ کی ایسی تسلسل

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots \tag{9.6}$$

لکھنا ممکن ہو جو مرکوز ہو۔اس تسلسل کو $f(x)$ کی **عمومی فوریئر تسلسل**[6] کہتے ہیں جبکہ c_1 ، c_2 ، $\cdots$ کو ان قائمہ الزاویہ سلسلے کے لحاظ سے تسلسل کے **فوریئر مستقل**[7] کہتے ہیں۔

قائمیت کی بنا ان مستقل کو نہایت آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 9.6 کے دونوں اطراف کو $g_m(x)$ (معین m) سے ضرب دیتے ہوئے وقفہ $a \le x \le b$ پر تکمل لینے سے درج ذیل ملتا ہے جہاں فرض کیا گیا ہے کہ جزو در جزو تکمل لیا جا سکتا ہے۔

$$(f, g_m) = \int_a^b f g_m \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (g_n, g_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n g_m \, \mathrm{d}x$$

بائیں ہاتھ جن تکملات میں $n = m$ ہو، وہ $(g_n, g_m) = \|g_m\|^2$ کے برابر ہوں گے جبکہ قائمیت کی بنا باقی تمام تکملات صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا

$$(f, g_m) = c_m \|g_m\|^2 \tag{9.7}$$

ہو گا اور یوں فوریئر مستقل کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$c_m = \frac{(f, g_m)}{\|g_m\|^2} = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b f(x) g_m(x) \, \mathrm{d}x \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{9.8}$$

مثال 9.3: فوریئر تسلسل
مساوات 9.6 کو مثال 9.2 کے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ کی صورت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{9.9}$$

اور مساوات 9.8 اب درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned} \tag{9.10}$$

---

[6] generalized Fourier series
[7] Fourier constants

اب اگر تسلسل 9.9 مرکوز ہو تب یہ $f(x)$ کی **فوریئر تسلسل** کہلائے گا اور a_0 ، a_n ، b_n اس کے **فوریئر عددی سر**[8] کہلائیں گے۔کلیات 9.10 کو ان عددی سر کے **یولر کلیات**[9] کہتے ہیں۔

ایسے کئی اہم سلسلے پائے جاتے ہیں جو از خود قائمہ الزاویہ نہیں ہیں البتہ ان کے حقیقی تفاعل g_1 ، g_2 ، $\cdots$ درج ذیل پر پورا اترتے ہیں جہاں $p(x)$ کوئی غیر صفر تفاعل ہے۔

$$\int_a^b p(x)g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{9.11}$$

ہم کہتے ہیں کہ ایسا سلسلہ وقفہ $a \le x \le b$ پر **تفاعل قدر**[10] $p(x)$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ ہے۔ g_m کے معیار کی تعریف اب درج ذیل ہے۔

$$\|g_m\| = \sqrt{\int_a^b p(x)g_m^2\,\mathrm{d}x} \tag{9.12}$$

اگر سلسلے کے ہر تفاعل g_m کا معیار اکائی (1) ہو تب وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے یہ سلسلہ معیاری قائمہ الزاویہ کہلائے گا۔

ہم $h_m = \sqrt{p}g_m$ اور $h_n = \sqrt{p}g_n$ لکھ کر مساوات 9.11 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\int_a^b h_m(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n)$$

اور یوں ظاہر ہے کہ h_m تفاعل قائمہ الزاویہ ہیں۔

اگر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے، وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $\cdots$ قائمہ الزاویہ ہوں اور اگر کسی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل عمومی فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو (مساوات 9.6 دیکھیں)

$$f(x) = c_1g_1(x) + c_2g_2(x) + \cdots \tag{9.13}$$

---

[8] Fourier coefficients
[9] Euler formulae
[10] weight function

تب اس سلسلے کے لحاظ سے فوریئر مستقل c_1 ، c_2 ، . . . کو بھی پہلی کی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے بس فرق اتنا ہے کہ اب مساوات 9.13 کے دونوں اطراف کو (g_m کی بجائے) pg_m سے ضرب دے کر آگے بڑھا جائے گا۔ باقی سب کچھ پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں تفاعل کا معیار اب مساوات 9.12 دے گا۔

$$c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2}\int_a^b p(x)f(x)g_m(x)\,\mathrm{d}x \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{9.14}$$

سوالات

سوال 9.1 تا سوال 9.10 میں ثابت کریں کہ دیے گئے وقفے پر دیا گیا سلسلہ قائمہ الزاویہ ہے۔ معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ بھی دریافت کریں۔

سوال 9.1: $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \cdots, \qquad 0 \le x \le 2\pi$

جوابات: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}$

سوال 9.2: $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \qquad 0 \le x \le \pi$

جوابات: $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x, \cdots$

سوال 9.3: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \cdots, \qquad -1 \le x \le 1$

جوابات: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \cdots$

سوال 9.4: $1,\ \cos 2x,\ \cos 4x,\ \cos 6x,\ \cdots, \qquad 0 \le x \le \pi$

جوابات: $\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 4x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 6x,\ \cdots$

سوال 9.5: $1,\ \cos\frac{2n\pi}{T}x, \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad 0 \le x \le T$

جوابات: $\frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2n\pi}{T}x,$

سوال 9.6: $\sin\frac{2n\pi}{T}x, \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad 0 \le x \le T$

جوابات: $\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{2n\pi}{T}x,$

سوال 9.7: (حصہ 5.2 کے لیژانڈر تفاعل) $-1 \le x \le 1 \qquad P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \cdots,$

جوابات: $\frac{P_0}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}P_1,\ \sqrt{\frac{5}{2}}P_2,\ \sqrt{\frac{7}{2}}P_3$

سوال 9.8: ایسے a_0 ، b_0 ، $\cdots$ ، c_2 دریافت کریں کہ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر g_1 ، g_2 اور g_3 معیاری قائمہ الزاویہ ہوں۔ حاصل جواب کا لیژانڈر تفاعل کے ساتھ موازنہ کریں۔ $g_1 = a_0, g_2 = b_0 + b_1x, g_3 = c_0 + c_1x + c_2x^2$

سوال 9.9: ثابت کریں کہ اگر وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $\cdots$ قائمہ الزاویہ ہوں تب وقفہ $\frac{a-k}{c} \le t \le \frac{b-k}{c}$ پر تفاعل $g_1(ct+k)$ ، $g_2(ct+k)$ ، $\cdots$ قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

سوال 9.10: سوال 9.9 کے نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے سوال 9.1 سے سوال 9.5 کا نتیجہ حاصل کریں۔

9.1 مسئلہ سٹیورم لیوویل

انجینئری حساب میں کئی اہم قائمہ الزاویہ سلسلوں کے تفاعل وقفہ $a \le x \le b$ پر بطور درج ذیل دو درجی تفرقی مساوات کے حل سامنے آتے ہیں

$$[r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0 \tag{9.15}$$

جو درج ذیل شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad k_1y(a) + k_2y'(a) = 0 \qquad (k_1 \text{ اور } k_2 \text{ بیکوقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \\ &\text{(ب)} \quad l_1y(b) + l_2y'(b) = 0 \qquad (l_1 \text{ اور } l_2 \text{ بیکوقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \end{aligned} \tag{9.16}$$

یہاں λ مقدار معلوم ہے جبکہ k_1 ، k_2 ، l_1 اور l_2 حقیقی مستقل ہیں۔

مساوات 9.15 کو **مساوات سٹیورم لیوویل**[11] کہتے ہیں۔ مساوات 9.16 وقفے کے آخری سروں a اور b سے تعلق رکھتے ہیں لہٰذا انہیں **سرحدی شرائط** کہتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ لیژانڈر، بیسل اور دیگر مساوات کو مساوات 9.15 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ تفرقی مساوات اور سرحدی شرائط مل کر **سرحدی مسئلہ**[12] دیتے ہیں۔ مساوات 9.15 اور مساوات 9.16 کے سرحدی مسئلے کو **سٹیورم لیوویل مسئلہ**[13] کہتے ہیں۔

---

[11] Sturm-Liouville equation

[12] boundary problem

[13] سوئزرلینڈ کے ریاضی دان جیکویس چارلس فرانکوئس سٹیورم [1803-1882] اور فرانسیسی ریاضی دان یوسف لیوویل [1809-1882]

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ λ کی کسی بھی قیمت کے لئے سٹیورم لیوویل مسئلے کا غیر اہم صفر حل $y \equiv 0$ پایا جاتا ہے جو پورے وقفے پر $y(x) = 0$ دیتا ہے۔اگر غیر صفر اہم حل $y \not\equiv 0$ موجود ہوں تو انہیں **امتیازی تفاعل** یا **آئگنی تفاعل**[14] کہتے ہیں اور λ کی ان قیمتوں جن کے لئے مسئلے کا حل موجود ہو کو **امتیازی قیمت** یا **آئگنی قدر**[15] کہتے ہیں۔

مثال 9.4: درج ذیل سٹیورم لیوویل مسئلے کے آئگنی قدر اور آئگنی تفاعل دریافت کریں۔

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$$

حل: λ کی منفی قیمتوں $\lambda = -v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = c_1 e^{vx} + c_2 e^{-vx}$$

دیے گئے سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے $c_1 = c_2 = 0$ اور $y \equiv 0$ ملتا ہے جو آئگنی تفاعل نہیں ہے۔ $\lambda = 0$ کی صورت میں بھی یہی صورت حال پائی جاتی ہے۔مثبت $\lambda = v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = A\cos vx + B\sin vx$$

پہلی سرحدی شرط سے $y(0) = A = 0$ ملتا ہے۔دوسری سرحدی شرط سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$y(\pi) = B\sin v\pi = 0 \qquad \implies \qquad v = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$$

$v = 0$ سے $y \equiv 0$ ملتا ہے جبکہ $B = 1$ لیتے ہوئے $\lambda = v^2 = 1, 4, 9, \cdots$ کے لئے

$$y(x) = \sin vx \qquad v = 1, 2, 3, \cdots$$

ملتا ہے۔ یوں اس مسئلے کے آئگنی اقدار $\lambda = v^2$ ہیں جہاں $v = 1, 2, \cdots$ ہیں اور ان کے مطابقتی آئگنی تفاعل $y(x) = \sin vx$ ہیں۔

سٹیورم لیوویل مسئلہ درج ذیل قائمیت کی خاصیت رکھتا ہے۔

---

[14] eigenfunctions
[15] eigenvalue

مسئلہ 9.1: آئگنی تفاعل کی قائمیت
فرض کریں کہ مساوات 9.15 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلے میں p ، q ، r اور r' حقیقی قیمت تفاعل ہیں جو وقفہ $a \le x \le b$ پر استمراری ہیں۔فرض کریں کہ دو منفرد آئگنی قدر λ_m اور λ_n کے لئے مساوات 9.15 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلے کے مطابقتی حل $y_m(x)$ اور $y_n(x)$ ہیں۔اس وقفے پر تفاعل قدر p کے لحاظ سے y_m اور y_n قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

اگر $r(a) = 0$ ہو تب مساوات 9.16-الف کی ضرورت نہیں ہو گی لہٰذا اس کو مسئلے سے نکالا جا سکتا ہے۔اسی طرح اگر $r(b) = 0$ تب مساوات 9.16-ب کی ضرورت نہیں ہو گی لہٰذا اس کو مسئلے سے نکالا جا سکتا ہے۔اگر $r(a) = r(b)$ ہو تب مساوات 9.16 کی جگہ درج ذیل شرط لکھی جا سکتی ہے۔

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b) \tag{9.17}$$

ثبوت : چونکہ y_m اور y_n اس مسئلے کے حل ہیں لہٰذا یہ مساوات 9.15 پر پورا اترتے ہیں اور یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (ry_m')' + (q + \lambda_m p)y_m &= 0 \\ (ry_n')' + (q + \lambda_n p)y_n &= 0 \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو y_n اور دوسری مساوات کو $-y_m$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n)py_my_n &= y_m(ry_n')' - y_n(ry_m')' \\ &= [(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]' \end{aligned}$$

آپ آخری مساوات $[(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'$ کو کھول کر پہلی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کر سکتے ہیں۔چونکہ قیاس کے تحت r اور r' استمراری ہیں جبکہ y_m اور y_n مسئلے کے حل ہیں لہٰذا $[(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'$ استمراری ہے۔وقفہ $a \le x \le b$ پر اس کا تکمل لیتے ہیں

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b py_my_n \,\mathrm{d}x = \Big[r(y_n'y_m - y_m'y_n)\Big]_a^b \tag{9.18}$$

جہاں دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہے۔

$$r(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b)] - r(a)[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)] \tag{9.19}$$

پہلی صورت: اگر $r(a)=0$ اور $r(b)=0$ ہوں تب مساوات 9.19 صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مساوات 9.18 کا بایاں ہاتھ بھی صفر ہو گا اور چونکہ y_m اور y_n منفرد ہیں ہمیں مساوات 9.16 میں دیے گئے سرحدی شرائط کے استعمال کے بغیر درج ذیل قائمیت ملتی ہے۔

$$\int_a^b p y_m y_n \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{9.20}$$

دوسری صورت: اگر $r(b)=0$ لیکن $r(a)\neq 0$ ہو تب مساوات 9.19 کا بایاں حصہ صفر کے برابر ہو گا۔ آئیں مساوات 9.19 کے دائیں حصے پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 9.16-الف کے تحت

$$k_1 y_n(a) + k_2 y_n'(a) = 0$$
$$k_1 y_m(a) + k_2 y_m'(a) = 0$$

ہو گا۔ فرض کریں کہ $k_2 \neq 0$ ہے۔ یوں پہلی مساوات کو $y_m(a)$ اور دوسری مساوات کو $-y_n(a)$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_2[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)] = 0$$

اب چونکہ $k_2 \neq 0$ ہے لہٰذا قوسین میں بند تفاعل صفر کے برابر ہو گا۔ اب قوسین میں بند تفاعل عین مساوات 9.19 کے دائیں حصے میں قوسین میں بند حصہ ہے لہٰذا مساوات 9.19 صفر کے برابر ہو گا اور یوں مساوات 9.18 سے مساوات 9.20 ملتی ہے۔

تیسری صورت: اگر $r(a)=0$ لیکن $r(b)\neq 0$ ہو تب بالکل دوسری صورت کی طرح مساوات 9.20 حاصل کی جا سکتی ہے۔

چوتھی صورت: اگر $r(a)\neq 0$ اور $r(b)\neq 0$ ہوں تب مساوات 9.16 کے دونوں شرائط استعمال کرتے ہوئے دوسری اور تیسری صورت کی طرز پر مساوات 9.20 حاصل ہو گی۔

پانچویں صورت: اگر $r(a)=r(b)$ ہو تب مساوات 9.19 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$r(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b) - y_n'(a)y_m(a) + y_m'(a)y_n(a)]$$

جو پہلی کی طرح مساوات 9.16 کے استعمال سے صفر کے برابر ثابت ہوتا ہے۔ یہاں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 9.17 کی مدد سے بھی درج بالا صفر کے برابر ثابت ہوتی ہے لہٰذا ہم مساوات 9.16 کی جگہ مساوات 9.17 کی شرط استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات 9.18 سے مساوات 9.20 ملتی ہے اور مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مثال 9.5: مثال 9.4 کے تفرقی مساوات کو مساوات 9.15 کے طرز پر لکھتے ہوئے $q = 0$ ، $r = 1$ اور $p = 1$ ملتے ہیں۔مسئلہ 9.1 کے تحت وقفہ $0 \le x \le \pi$ پر اس کے آئگنی تفاعل قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

مثال 9.6: فوریئر تسلسل
آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ مثال 9.3 میں پائے جانے والے درج ذیل تفاعل

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

درج ذیل سٹیورم لیوویل مسئلے کے آئگنی تفاعل ہیں

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi)$$

لہٰذا مسئلہ 9.1 کے تحت وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر یہ آپس میں قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں۔اس مثال کے سرحدی شرائط مساوات 9.17 کی طرز کے ہیں۔

ایسی عمومی فوریئر تسلسل جس میں (قائمہ الزاویہ) آئگنی تفاعل کا سلسلہ استعمال ہو **آئگنی تفاعل پھیلاو**[16] کہلاتی ہے۔

مسئلہ 9.2: حقیقی آئگنی اقدار
اگر سٹیورم لیوویل مسئلہ جسے مساوات 9.15 اور مساوات 9.16 میں پیش کیا گیا ہے، مسئلہ 9.1 کے شرائط پر پورا اترتا ہو اور پورے وقفہ $a \le x \le b$ پر p مثبت ہو (یا اس پورے وقفے پر p منفی ہو) تب اس سٹیورم لیوویل مسئلے کے تمام آئگنی اقدار حقیقی ہوں گی۔

---

[16] eigenfunction expansion

ثبوت: فرض کریں کہ اس سٹیورم لیوویل مسئلے کا $\lambda = \alpha + i\beta$ آئگنی قدر ہے جس کا مطابقتی آئگنی تفاعل درج ذیل ہے جہاں α ، β ، u اور v حقیقی ہیں۔

$$y(x) = u(x) + iv(x) \tag{9.21}$$

اس کو مساوات 9.15 میں پر کرتے ہوئے

$$(ru' + irv')' + (q + \alpha p + i\beta p)(u + iv) = 0$$

ملتا ہے جس کے حقیقی اور خیالی حصوں کو علیحدہ علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل دو مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(ru')' + (q + \alpha p)u - \beta p v &= 0\\(rv')' + (q + \alpha p)v - \beta p u &= 0\end{aligned}$$

پہلی مساوات کو v اور دوسری مساوات کو $-u$ سے ضرب دے کر مجموعہ لیتے ہیں

$$\begin{aligned}-\beta(u^2 + v^2)p &= u(rv')' - v(ru')'\\&= [(rv')u - (ru')v]'\end{aligned}$$

جس کا $x = a$ تا $x = b$ تکمل درج ذیل ہے۔

$$-\beta \int_a^b (u^2 + v^2)p \,\mathrm{d}x = \Big[r(uv' - u'v)\Big]_a^b$$

مسئلہ 9.1 کی ثبوت کی طرز پر، سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے دایاں ہاتھ صفر کے برابر ملتا ہے۔چونکہ y آئگنی تفاعل ہے لہٰذا $u^2 + v^2 \not\equiv 0$ ہو گا۔اب y اور p استمراری ہیں اور پورے وقفے پر $p > 0$ ہے (یا پورے وقفے پر $p < 0$ ہے) لہٰذا تکمل کا بایاں ہاتھ صفر نہیں ہو سکتا ہے۔یوں $\beta = 0$ ہو گا لہٰذا $\lambda = \alpha$ حقیقی ہو گا۔یوں مسئلے کا ثبوت پورا ہوتا ہے۔

مثال 9.5 اور مثال 9.6 کے آئگنی اقدار مسئلہ 9.2 کے تحت حقیقی ہیں۔

سوالات

سوال 9.11: مثال 9.4 کے لئے مسئلہ 9.1 ثابت کریں۔

سوال 9.12: مسئلہ 9.1 میں تیسری اور چوتھی صورت کا ثبوت مکمل کریں۔

سوال 9.13: اگر مساوات 9.15 اور مساوات 9.16 میں دیے گئے مسئلے کی آئگنی قدر λ_0 اور مطابقتی آئگنی تفاعل $y = y_0$ ہوں تب ثابت کریں کہ λ_0 کا مطابقتی آئگنی تفاعل $y = \alpha y_0$ بھی ہو گا جہاں α غیر صفر اختیاری مستقل ہے۔(اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے ایسے آئگنی تفاعل دریافت کئے جا سکتے ہیں جن کا معیار اکائی ہو۔)

سوال 9.14 تا سوال 9.21 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلوں کے آئگنی قدر اور آئگنی تفاعل دریافت کریں۔

سوال 9.14: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(l) = 0$

جوابات: $y_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ، $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہیں۔چونکہ $n = 0$ سے $y = 0$ ملتا ہے جو آئگنی تفاعل نہیں ہے لہٰذا $n = 0$ جواب میں شامل نہیں کیا جائے گا۔

سوال 9.15: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y'(l) = 0$

جوابات: $y_n = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ ، $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 9.16: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y(l) = 0$

جوابات: $y_n = \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ ، $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 9.17: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(l) = 0$

جوابات: $y_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$ ، $\lambda = \left[\frac{n(2n+1)\pi}{l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 9.18: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$

جوابات: $y_n = \cos nx$ ، $\lambda = n^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 9.19: $(xy')' + \lambda x^{-1} y = 0, \quad y(1) = 0, y(e) = 0$

جوابات: $y_n = \sin(n\pi \ln|x|)$ ، $\lambda = n^2\pi^2$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔

سوال 9.20: $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda+1)y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$
جوابات: $y_n = e^{-x}\sin nx$ ، $\lambda = n^2$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔

سوال 9.21: ثابت کریں کہ مسئلہ سٹیورم لیوویل

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$$

کے حل مساوات $\sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔اس مساوات کے کتنے حل ممکن ہیں۔

جواب: لاتعداد

سوال 9.22: ایسا سٹیورم لیوویل مسئلہ دریافت کریں جس کے آئگنی تفاعل درج ذیل ہوں۔

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x \cdots$$

جواب: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$

9.2 قائمیت لیژانڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل

لیژانڈر مساوات (مساوات 5.16) کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1) \tag{9.22}$$

لہٰذا یہ مساوات سٹیورم لیوویل (حصہ 9.1) ہے جہاں $r = 1 - x^2$ ، $q = 0$ اور $p = 1$ ہیں۔ چونکہ $x = \mp 1$ پر $r = 0$ ہے لہٰذا سرحدی شرائط کے بغیر وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر اس سے مسئلہ سٹیورم لیوویل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $n = 0, 1, 2, \cdots$ پر اس مسئلے کے حل لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ ہیں لہٰذا یہ آئگنی تفاعل ہیں جو مسئلہ 9.1 کے تحت قائمہ الزاویہ ہوں گے یعنی

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{9.23}$$

اور ان آئگنی تفاعل کا معیار مساوات 5.39 دیتی ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\|P_m\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \qquad m = 0, 1, \cdots \tag{9.24}$$

بیسل تفاعل (حصہ 5.4) جو مساوات بیسل (مساوات 5.76) پر پورا اترتے ہیں کے اہم انجینئری استعمال پائے جاتے ہیں مثلاً دائری سطح کی ارتعاش جس پر اس کتاب میں غور کیا جائے گا۔ مساوات بیسل کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$s^2\ddot{J}_n + s\dot{J}_n + (s^2 - n^2)J_n = 0$$

جہاں تفاعل کا s کے ساتھ تفرق کو نقطہ ظاہر کرتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ n غیر منفی عدد صحیح ہے۔ $s = \lambda x$ لیتے ہوئے جہاں λ غیر صفر مستقل ہے ہم $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\lambda}$ اور زنجیری تفرق سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں $'$ سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\dot{J}_n = \frac{J_n'}{\lambda}, \quad \ddot{J}_n = \frac{J_n''}{\lambda^2}$$

انہیں مساوات بیسل میں پر کر کے

$$x^2J_n''(\lambda x) + xJ_n'(\lambda x) + (\lambda^2x^2 - n^2)J_n(\lambda x) = 0$$

ملتا ہے جس کو x سے تقسیم کر کے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$[xJ_n'(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) J_n(\lambda x) = 0 \tag{9.25}$$

جو n کی ہر معین قیمت کے لئے ایک مساوات سٹیورم لیوویل دیتا ہے جہاں مقدار معلوم کو λ کی بجائے λ^2 لکھا گیا ہے اور

$$p(x) = x, \quad q(x) = -\frac{n^2}{x}, \quad r(x) = x$$

ہیں۔چونکہ $x = 0$ پر $r(x) = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ 9.1 کے تحت وقفہ $0 \le x \le R$ پر مساوات 9.25 کے وہ حل جو درج ذیل سرحدی شرط پر پورا اترتے ہوں تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیں گے۔(یہاں دھیان رہے کہ $n \neq 0$ کی صورت میں تفاعل q نقطہ $x = 0$ پر غیر استمراری ہے البتہ اس کا مسئلہ 9.1 کے ثبوت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔)

$$J_n(\lambda R) = 0 \tag{9.26}$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $J_n(s)$ کے لامحدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ $J_n(s)$ کے مثبت صفروں کو $\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \alpha_{3n} \cdots$ ، سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں مساوات 9.26 کی شرط تب پوری ہو گی جب

$$\lambda R = \alpha_{mn} \implies \lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R} \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{9.27}$$

ہو جس سے درج ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 9.3: بیسل تفاعل کی قائمیت
بیسل تفاعل $J_n(\lambda_{1n}x)$ ، $J_n(\lambda_{2n}x)$ ، $J_n(\lambda_{3n}x)$ ، $\cdots$ ، جہاں مساوات 9.27 λ_{mn} دیتی ہے، وقفہ $0 \le x \le R$ پر تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے ہر معین $n = 0, 1, \cdots$ کے لئے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں یعنی:

$$\int_0^R x J_n(\lambda_{mn}x) J_n(\lambda_{kn}x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad (k \neq m) \tag{9.28}$$

یوں ہمیں لامحدود تعداد کے قائمہ الزاویہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں جہاں n کی ہر معین قیمت ایک منفرد سلسلہ دیتی ہے۔

چونکہ $p(x) = x$ ہے لہٰذا مساوات 9.12 تا مساوات 9.14 کے تحت اگر کسی ایک ایسے سلسلے کے آگنی تفاعل کی فوریئر تسلسل کی صورت میں کسی تفاعل $f(x)$ کو لکھنا ممکن ہو تو یہ فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = c_1 J_n(\lambda_{1n}x) + c_2 J_n(\lambda_{2n}x) + \cdots \tag{9.29}$$

اس کو **فوریئر بیسل تسلسل**[17] کہتے ہیں۔ہم اب درج ذیل ثابت کرتے ہیں جہاں $\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ ہے۔

$$\left\| J_n(\lambda_{mn}x) \right\|^2 = \int_0^R x J_n^2(\lambda_{mn}x)\,\mathrm{d}x = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R) \tag{9.30}$$

یوں مساوات 9.29 کے عددی سر c_m مساوات 9.14 سے درج ذیل اخذ ہوتے ہیں۔

$$c_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R x f(x) J_n(\lambda_{mn}x)\,\mathrm{d}x \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{9.31}$$

اب مساوات 9.30 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 9.25 کو $2xJ_n'(\lambda x)$ سے ضرب دے کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\{[xJ_n'(\lambda x)]^2\}' + (\lambda^2 x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}' = 0$$

---

[17] Fourier Bessel series

جس کا 0 تا R تکمل لیتے ہیں۔

$$[xJ_n'(\lambda x)]^2\Big|_0^R = -\int_0^R (\lambda^2 x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}'\,\mathrm{d}x \tag{9.32}$$

مساوات 5.99 میں x اور ν کی جگہ بالترتیب s اور n لکھتے ہوئے اور s کے ساتھ تفرق کو نقطہ سے ظاہر کرتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$-ns^{-n-1}J_n(s) + s^{-n}\dot{J}_n(s) = -s^{-n}J_{n+1}(s)$$

اس کو s^{n+1} سے ضرب دے کر اور $s = \lambda x$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں $'$ سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\lambda x J_n'(\lambda x)\frac{1}{\lambda} = nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)$$

اس طرح مساوات 9.32 کا بایاں ہاتھ

$$\Big[[nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)]^2\Big]_{x=0}^R$$

کے برابر ہو گا۔اب $\lambda = \lambda_{mn}$ کی صورت میں $J_n(\lambda R) = 0$ ہو گا اور $n = 1, 2, \cdots$ کی صورت میں $J_n(0) = 0$ ہو گا لہٰذا بایاں ہاتھ درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lambda_{mn}^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn} R) \tag{9.33}$$

مساوات 9.32 کے دائیں ہاتھ کا تکمل بالحصص درج ذیل دیتا ہے۔

$$-\Big[(\lambda^2 x^2 - n^2)J_n^2(\lambda x)\Big]_0^R + 2\lambda^2\int_0^R xJ_n^2(\lambda x)\,\mathrm{d}x \tag{9.34}$$

$\lambda = \lambda_{mn}$ کی صورت میں اس کا پہلا حصہ $x = R$ پر صفر کے برابر ہے۔چونکہ $n = x = 0$ پر $\lambda^2 x^2 - n^2 = 0$ ہے جبکہ $x = 0$ اور $n = 1, 2, \cdots$ کی صورت میں $J_n(\lambda x) = 0$ ہے لہٰذا یہ حصہ $x = 0$ پر بھی صفر کے برابر ہو گا۔اس نتیجے اور مساوات 9.33 سے مساوات 9.30 اخذ ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 9.23 تا سوال 9.26 میں دیے گئے کثیر رکنی کو لیژانڈر کثیر رکنی کو صورت میں لکھیں۔(مساوات 5.30 کی مدد لیں۔)

سوال 9.23: $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$
جوابات:

$$1 = P_0(x),\ x = P_1(x),\ x^2 = \tfrac{1}{3}P_0(x) + \tfrac{2}{3}P_2(x),\ x^3 = \tfrac{3}{5}P_1(x) + \tfrac{2}{5}P_3(x),\\ x^4 = \tfrac{1}{5}P_0(x) + \tfrac{4}{7}P_2(x) + \tfrac{8}{35}P_4(x)$$

سوال 9.24: $3x^2 + 2x$
جواب: $2P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$

سوال 9.25: $5x^3 + 6x^2 - x - 1$
جواب: $2P_3(x) + 4P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$

سوال 9.26: $35x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 2x - 10$
جواب: $8P_4(x) - 6P_3(x) + 42P_2(x) - 11P_1(x) - P_0(x)$

سوال 9.27 تا سوال 9.29 میں دیے گئے تفاعل کی لیجانڈر فوریئر تسلسل وقفہ $-1 < x < 1$ پر دریافت کریں۔

سوال 9.27:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

جواب: مساوات 9.13 میں g_m کی جگہ P_n اور $p = 1$ پر کرتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی لیجانڈر فوریئر تسلسل $f = c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots$ لکھی جائے گی۔ مساوات 5.39 اور مساوات 5.30 استعمال کرتے ہوئے یوں مساوات 9.14 سے تسلسل کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\|P_0\|^2}\int_0^1 P_0(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 1\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}\\
c_1 &= \frac{1}{\|P_1\|^2}\int_0^1 P_1(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}\\
c_2 &= \frac{1}{\|P_2\|^2}\int_0^1 P_2(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

یوں لیجانڈر فوریئر تسلسل $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \cdots$ ہو گا۔

سوال 9.28:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$$

جواب: $f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\cdots$

سوال 9.29:

$$f(x)=\lvert x\rvert \qquad -1<x<1$$

جواب: $f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{5}{8}P_2(x)+\cdots$

سوال 9.30: ثابت کریں کہ تفاعل قدر $\sin\theta$ کے لحاظ سے $n=0,1,\cdots$ کی صورت میں $P_n(\cos\theta)$ وقفہ $\pi>\theta>0$ پر قائمہ الزاویہ تفاعل ہوں گے۔

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\,z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\,y'^2 + |q|\,z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\,z + |q|\,z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلٰی تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

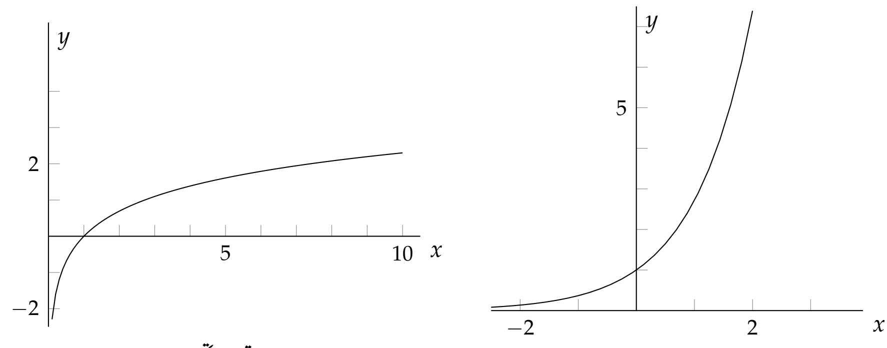
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

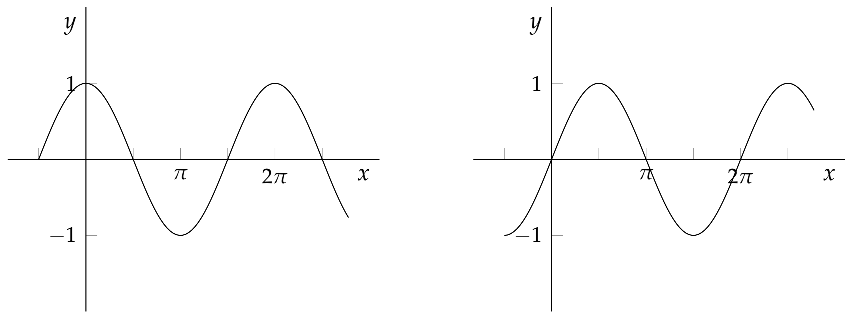
$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$

(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $\frac{1}{x} = 10^{\log\frac{1}{x}} = 10^{-\log x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \tag{ب.6}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{ب.7}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned} \tag{ب.8}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \tag{ب.9}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{ب.10}$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned} \tag{ب.11}$$

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos v - \cos u &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \end{aligned} \tag{ب.12}$$

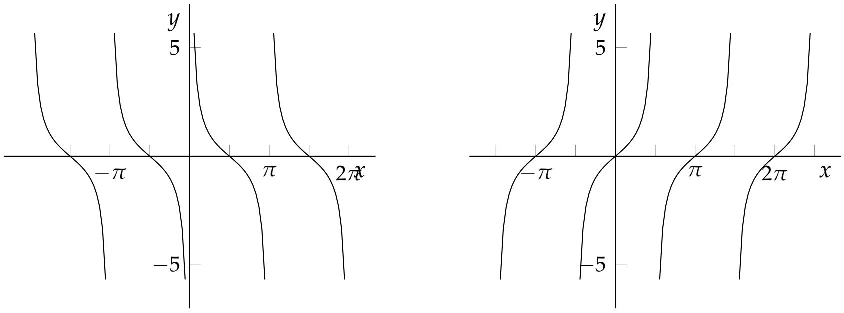
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A} \tag{ب.13}$$

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B} \tag{ب.14}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x} \tag{ب.15}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \tag{ب.16}$$



(الف) $\tan x$ (ب) $\cot x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$ (ب.17)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$ (ب.18)

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$ (ب.19)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$ (ب.20)

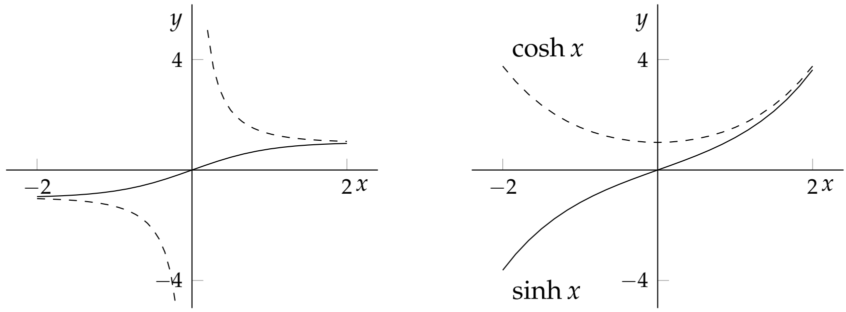
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$ (ب.21)

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$ (ب.22)

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$ (ب.23)

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$ (ب.24)



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

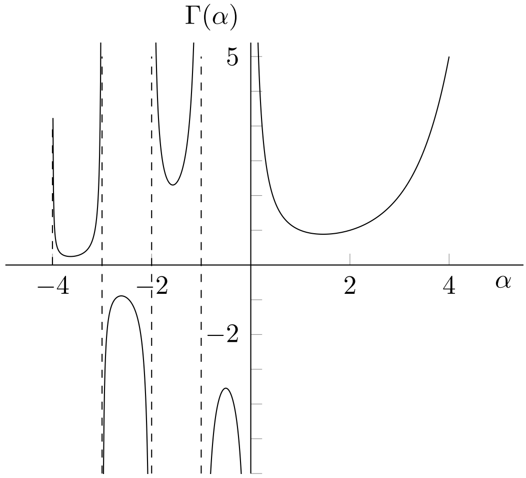
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

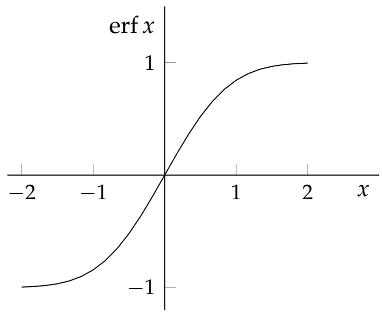
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

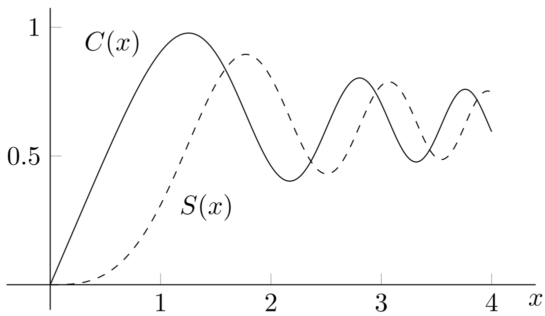
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{ب.39}$$

$$s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{ب.40}$$

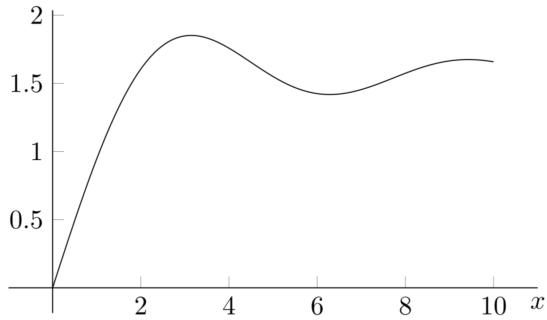
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.41}$$

$\text{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$