

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفنی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8	مستطیل جھلی
1006	13.9	قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10	دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11	مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوت
1024	13.12	کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ-نڈر
1030	13.13	لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات

1037	14	مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1	مخلوط اعداد
1047	14.2	مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3	مخلوط سطح میں مختصات اور خطے
1059	14.4	مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5	کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6	ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7	قوت نمائی تفاعل
1089	14.8	تکونائی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9	لوگار تھم۔ عمومی طاقت

1103	15	محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1	نقشہ کشی
1116	15.2	محافظ زاویہ نقش
1125	15.3	خطی کسری تبادلہ
1129	15.4	مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5	نقش زیر دیگر تفاعل
1149	15.6	ریمان سطحیں

1157	16	مخلوط کمالات
1157	16.1	مخلوط مستوی میں خطی تکمیل
1168	16.2	مخلوط خطی تکمیل کی خواص
1172	16.3	کوشی کا مسئلہ تکمیل
1184	16.4	خطی تکمیل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمیل
1189	16.5	کوشی کا کلیہ تکمیل

1193	ا	اضافی ثبوت
------	---	------------

1197	ب	مفید معلومات
1197	1.ب	اعلی تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 16

مخلوط تکملات

مخلوط تکملات دو وجوہات کی بنا اہم ہیں۔ عملی وجہ یہ ہے کہ حقیقی تکملات حل کرنے کی ترکیب سے کئی حقیقی تکملات حل کرنا ناممکن ہے جبکہ ان کو مخلوط تکملات کی ترکیب سے حل کیا جاسکتا ہے۔ دوسری وجہ نظریاتی ہے۔ جہاں مخلوط تکملات کی ترکیب سے تحلیلی تفاعل کی چند بنیادی خصوصیات دریافت ہوتی ہیں (بالخصوص بلند درجی تفرق کی موجودگی) جن کا ثبوت مکمل استعمال کیے بغیر انتہائی مشکل ہو گا۔ یہ صورت حال حقیقی اور مخلوط علم الاحصاء میں بنیادی فرق کی نشاندہی کرتی ہے۔

اس باب میں ہم پہلے مخلوط تکملات کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ سب سے بنیادی نتیجہ کوئی مخلوط مکمل کا مسئلہ حاصل ہو گا جس سے کوئی مکمل کی کلیات حاصل ہوں گی جو بہت اہم ہیں۔ ہم ثابت کریں گے کہ اگر کوئی تفاعل تحلیلی ہو تب اس کے ہر درجہ کے تفرق موجود ہوں گے۔ اس نقطہ نظر سے مخلوط تحلیلی تفاعل حقیقی متغیر کی حقیقی تفاعل سے زیادہ سادہ رویہ رکھتے ہیں۔

16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل

حقیقی علم الاحصاء کی طرح ہم قطعی مکمل اور غیر قطعی مکمل میں تمیز کرتے ہیں۔ ایک غیر قطعی مکمل ایسا تفاعل ہوتا ہے جس کا تفرق خطے میں دیا گیا تحلیلی تفاعل ہو گا۔ تفاعل کی تفرق کو الٹ لکھتے ہوئے ہم کئی غیر قطعی مکمل دریافت کر سکتے ہیں۔

آئیں اب مخلوط تفاعل $f(z)$ ، جہاں $z = x + iy$ ہے، کی قطعی مکمل یا خطی مکمل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ حقیقی قطعی مکمل کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے مخلوط قطعی مکمل کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ یوں موجودہ بحث عین حصہ 11.1 کی طرح ہو گی۔ قطعی مکمل کی صورت میں حقیقی محور پر کوئی وقفہ مکمل کی راہ ہو گی۔ مخلوط قطعی مکمل کی صورت میں ہم مخلوط مستوی پر کسی منحنی¹ پر چلتے ہوئے مکمل حاصل کریں گے۔

فرض کریں کہ مخلوط z مستوی میں C ایک ہموار منحنی (حصہ 15.2) ہے۔ تب ہم C کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں

$$(16.1) \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

جہاں تمام t کے لئے $z(t)$ کا استمراری تفرق $\dot{z}(t) \neq 0$ پایا جاتا ہے، اور یوں C قابل تصحیح (حصہ 10.4) ہو گی جس کا ہر نقطہ پر کیٹا مماس ہو گا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ C پر مثبت رخ سے مراد t کی بڑھتی قیمت کا مطابقتی رخ ہے۔

فرض کریں کہ $f(z)$ ایک استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کی ہر نقطہ پر معین ہے۔ ہم مساوات 16.1 میں دیے گئے وقفہ $a \leq t \leq b$ کو درج ذیل ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں

$$t_0 (= a), t_1, \dots, t_{n-1}, t_n (= b)$$

جہاں $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ہے۔ اس کے مطابق C کے ٹکڑے (شکل 16.1)

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n() = Z$$

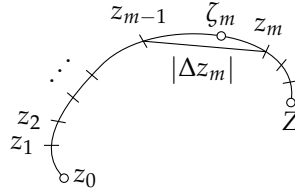
پائے جاتے ہیں جہاں $z_j = z(t_j)$ ہے۔ ہم C کے ہر ٹکڑے پر کوئی اختیاری نقطہ منتخب کرتے ہیں، مثلاً ہم z_1 اور z_0 کے درمیان نقطہ ζ_1 منتخب کرتے ہیں (یعنی $\zeta_1 = z(t)$ جہاں $t_0 \leq t \leq t_1$ ہے) اور z_1 اور z_2 کے درمیان نقطہ ζ_2 منتخب کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ ہم اب مجموعہ

$$(16.2) \quad S_n = \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m$$

لیتے ہیں جہاں

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$$

¹ درحقیقت منحنی کے کسی حصے یا قوس پر عمل لایا جائے گا۔ اپنی آسانی کی خاطر ہم "منحنی" کی اصطلاح کو پوری منحنی کے لئے اور منحنی کے چھوٹے حصے کے لئے بھی استعمال کریں گے۔



شکل 16.1: مخلوط خطی مکمل

ہے۔ ہم ایسے مجموعے $n = 2, 3, \dots$ کے لئے مکمل بے قاعدگی سے حاصل کرتے ہیں پس اتنا دھیان رکھتے ہیں کہ جب n لامتناہی کے قریب پہنچے تب $|\Delta z_m|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر کے قریب پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں مخلوط قیمتوں کا سلسلہ S_2, S_3, \dots ملتا ہے۔ اس سلسلے کی حد، راہ C پر $f(z)$ کا خطی تکمیل² (یا صرف تکمیل) کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(16.3) \quad \int_C f(z) dz$$

منحنی C کو تکمیل کی راہ کہتے ہیں۔

ہم درج ذیل پوری بحث میں فرض کرتے ہیں کہ مخلوط خطی مکمل کی تمام راہ ٹکڑوں میں بھوار ہیں یعنی ہر راہ محدود تعداد کی ہموار منحنیات پر مشتمل ہے۔

ہمارے مفروضوں کی مد نظر خطی مکمل مساوات 16.3 موجود ہوگا، بلکہ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ لکھتے ہوئے اور

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m \quad \text{اور} \quad \Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m$$

لیتے ہوئے مساوات 16.2 کو

$$(16.4) \quad S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $u = u(\zeta_m, \xi_m)$ اور $v = v(\zeta_m, \xi_m)$ ہیں اور ہم m کو 1 تا n لیتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔ ہم اب S_n کو چار مجموعوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

$$S_n = \sum u \Delta x_m - \sum v \Delta y_m + i[\sum u \Delta y_m + \sum v \Delta x_m]$$

line integral²

یہ مجموعے حقیقی ہیں۔ چونکہ f استمراری ہے لہذا u اور v بھی استمراری ہوں گے۔ یوں اگر ہم n کی قیمت کو متذکرہ بالا طریقے سے بڑھا کر لامتناہی کے قریب کریں تب Δx_m اور Δy_m کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر کے قریب ہو گی اور دائیں ہاتھ ہر مجموعہ حقیقی مکمل کی صورت اختیار کرے گا:

$$(16.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_C f(z) dz = \int_C u dx - \int_C v dy + i \left[\int_C u dy + \int_C v dx \right]$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ خطی مکمل مساوات 16.3 موجود ہو گا اور اس مکمل کی قیمت پر راہ ٹکڑے کرنے کی ترکیب اور ہر ٹکڑے کے بیچ نقطہ z_m کی انتخاب کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

مزید، حصہ 11.2 کی طرح، منحنی C کی مساوات 16.1 استعمال کرتے ہوئے ہم ان میں سے ہر حقیقی مکمل کو قطعی مکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں:

$$(16.6) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b u \dot{x} dt - \int_a^b v \dot{y} dt + i \left[\int_a^b u \dot{y} dt + \int_a^b v \dot{x} dt \right]$$

جہاں $u = u[x(t), y(t)]$ ، $v = v[x(t), y(t)]$ ہیں جبکہ t کے ساتھ تفرق کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

ہم اس کو عموماً

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) dt$$

یا مختصراً

$$(16.7) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt$$

لکھتے ہیں۔

آئیں چند سادہ مثالیں دیکھیں۔

مثال 16.1: اکائی دائرے پر $\frac{1}{z}$ کا تکمل
 اکائی دائرہ C پر گھڑی کی الٹ رخ $z = 1$ سے شروع کر کے ایک چکر لگاتے ہوئے $f(z) = \frac{1}{z}$ کا تکمل حاصل کریں۔ ہم C کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(16.8) \quad z(t) = \cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

یوں

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i \cos t$$

ہو گا لہذا مساوات 16.7 کے تحت درکار تکمل

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (-\sin t + i \cos t) dt = i \int_0^{2\pi} dt = i2\pi$$

ہو گا۔ یہ بنیادی نتیجہ ہے جو ہم بار بار استعمال کریں گے۔

ظاہر ہے کہ ہم مساوات 16.8 کو مختصراً

$$(16.9) \quad z(t) = e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں تفرق لیتے ہوئے

$$\dot{z}(t) = ie^{it}, \quad dz = ie^{it} dt$$

لکھ کر یہی نتیجہ

$$(16.10) \quad \int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = i2\pi$$

□

دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

مثال 16.2: غیر تحلیلی تفاعل کا تکمل

سیدھی راہ C_1 پر $z_0 = 0$ تا $z = 1 + i$ تفاعل $x = \text{حقیقی}$ $f(z) = z$ کا تکمل تلاش کریں (شکل 16.2-الف)۔

اس راہ کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (1 + i)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

یوں

$$f[z(t)] = z \text{ حقیقی} = x(t) = t, \quad dz = (1+i) dt$$

ہو گا جس سے ہم مکمل حاصل کرتے ہیں:

$$\int_{C_1} z \text{ حقیقی} dz = \int_0^1 t(1+i) dt = (1+i) \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(1+i)$$

آئیں اب حقیقی محور پر 0 تا 1 چل کر، یہاں سے خیالی محور کے متوازی چلتے ہوئے $1+i$ تک اسی تفاعل $f(z) = z \text{ حقیقی} = x$ کا مکمل حاصل کرتے ہیں (شکل 16.2-الف میں راہ C_2)۔ ہم اس راہ کے پہلے حصے کو

$$z = z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

اور دوسرے حصے کو

$$z(t) = 1 + i(t-1) \quad (1 \leq t \leq 2)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں پوری راہ وقفہ $0 \leq t \leq 2$ کی مطابقتی ہو گی۔ پہلے حصے پر $dz = dt$, $z \text{ حقیقی} = t$ اور دوسرے حصے پر $dz = i dt$, $z \text{ حقیقی} = 1$ ہو گا۔ یوں پورا مکمل دو ٹکڑوں میں حاصل ہو گا:

$$\int_{C_2} dz = \int_0^1 t dt + \int_1^2 i dt = \frac{1}{2} + i$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ راہ کے دوسرے حصے کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

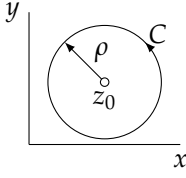
$$z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے مکمل کے حدود 0 اور 1 ہوں گے اور مکمل کی قیمت وہی رہے گی۔

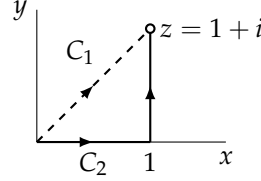
اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر تخلیلی تفاعل کے مکمل کی قیمت نا صرف راہ کی آخری حدود بلکہ راہ کی جیومیٹریائی شکل پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ □

مثال 16.3: عدد صحیح طاقت کے مکمل

مان لیں کہ $f(z) = (z - z_0)^m$ ہے جہاں m عدد صحیح اور z_0 مستقل ہیں۔ گھڑی کی الٹ رخ رداس ρ



(ب) مثال 16.3 میں تکمیل کی راہ



(الف) مثال 16.2 میں تکمیل کی راہ

شکل 16.2: تکمیل کی راہ

کے دائرہ C پر تکمیل حاصل کریں۔ دائرے کا مرکز z_0 ہے (شکل 16.2-ب)۔ ہم C کو

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{im t}, \quad dz = i\rho e^{it} dt$$

ہو گا لہذا تکمیل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{im t} i\rho e^{it} dt = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt$$

$m = -1$ کی صورت مثال 16.1 میں دیکھی گئی ہے جبکہ $m \neq -1$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا (مساوات 14.71 دیکھیں):

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \left[\frac{e^{i(m+1)t}}{i(m+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (m \neq -1, \text{صحیح عدد})$$

یوں تکمیل کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$(16.11) \quad \int_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} i2\pi & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1, \text{صحیح عدد}) \end{cases}$$

□

مثال 16.4: تکمیل کی تعریف کی عملی استعمال

مان لیں کہ $k = \text{مستقل} = f(z)$ ہے جبکہ ابتدائی نقطہ z_0 اور اختتامی نقطہ Z کے درمیان C کوئی

راہ ہے۔ اس صورت میں ہم مکمل کی تعریف، یعنی مساوات 16.2 میں دیے گئے مجموعہ S_n کی حد، استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$S_n = \sum_{m=1}^n k \Delta z_m = k[(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (Z - z_{n-1})] = k(Z - z_0)$$

ہو گا جس سے مکمل کی قیمت درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$\int_C k dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k(Z - z_0)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ اس مکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں z_0 اور Z پر منحصر ہے نا ان نقطوں کے مابین راہ پر۔ بالخصوص اگر راہ C بند ہو تب $Z = z_0$ ہو گا لہذا مکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ □

مثال 16.5: مکمل کی تعریف کی دوسری مثال

فرض کریں کہ $f(z) = z$ ہے جبکہ ابتدائی نقطہ z_0 اور اختتامی نقطہ Z کے مابین C کوئی راہ ہے۔ ہم دوبارہ مساوات 16.2 استعمال کرتے ہیں۔ لیتے ہوئے

$$S_n = \sum_{m=1}^n z_m \Delta z_m = z_1(z_1 - z_0) + z_2(z_2 - z_1) + \cdots + Z(Z - z_{n-1})$$

حاصل ہو گا۔ اسی طرح $\zeta_m = z_{m-1}$ لیتے ہوئے

$$S_n^* = \sum_{m=1}^n z_{m-1} \Delta z_m = z_0(z_1 - z_0) + z_1(z_2 - z_1) + \cdots + z_{n-1}(Z - z_{n-1})$$

حاصل ہو گا۔ ان دونوں کو جمع کرتے ہوئے $S_n + S_n^* = Z^2 - z_0^2$ ملتا ہے۔ یوں

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + S_n^*) = 2 \int_{z_0}^Z z dz = Z^2 - z_0^2$$

ہو گا جس سے ان نقطوں کے مابین ہر راہ پر مکمل کی قیمت

$$\int_{z_0}^Z z dz = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2)$$

حاصل ہوتی ہے۔ بالخصوص اگر C بند راہ ہو تب $Z = z_0$ ہو گا لہذا

$$\oint_C z dz = 0 \quad (16.12)$$

ہو گا۔ یہی نتیجہ مسئلہ 11.1 سے مساوات 16.6 میں دیے گئے کلیہ کی مدد سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

سوالات

سوال 16.1 تا سوال 16.6 میں A تا B قطع کو $z = z(t)$ روپ میں لکھیں۔

سوال 16.1: $A : z = 0, \quad B : z = 2 - i3$
جواب: $(2 - i3)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 16.2: $A : z = 0, \quad B : z = 1 + i$
جواب: $(1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 16.3: $A : z = 1 - i, \quad B : z = -1 + i$
جواب: $1 - i + (-1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال 16.4: $A : z = -2 - i, \quad B : z = 0$
جواب: $-2 - i + (2 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 16.5: $A : z = i3, \quad B : z = 3$
جواب: $i3 + (1 - i)t, \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال 16.6: $A : z = 3i, \quad B : z = -2i$
جواب: $i3 - it, \quad 0 \leq t \leq 5$

سوال 16.7 تا سوال 16.15 میں دی گئی منحنيات کو $z = z(t)$ روپ میں لکھیں۔

سوال 16.7: $|z - 2 + i3| = 5$
جواب: $z = 2 - i3 + 5e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16.8: $y = x, \quad (4, 4) \text{ تا } (0, 0)$
جواب: $z = (1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 4$

سوال 16.9: $y = x^2, \quad (3, 9) \text{ تا } (0, 0)$
جواب: $z = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال 16.10: $x^2 + 4y^2 = 4$
جواب: $z = 2 \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16.11: $4x^2 + 9y^2 = 36$
 جواب: $z = 3 \cos t + i2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16.12: $4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 36$
 جواب: $z = (2 + 3 \cos t) + i(-3 + 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16.13: $y = \sqrt{x}, \quad (9, 3) \text{ تا } (1, 1)$
 جواب: $z = t^2 + it, \quad 1 \leq t \leq 3$ یا $z = t + i\sqrt{t}, \quad 1 \leq t \leq 9$

سوال 16.14: $y = \frac{1}{x}, \quad (5, \frac{1}{5}) \text{ تا } (1, 1)$
 جواب: $z = t + \frac{i}{t}, \quad 1 \leq t \leq 5$

سوال 16.15: $y = 5 + 2x - 3x^2, \quad (2, -3) \text{ تا } (0, 5)$
 جواب: $z = t + i(5 + 2t - 3t^2), \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال 16.16 تا سوال 16.21 میں دیے تقابل کن منحنیات کو ظاہر کرتے ہیں۔

سوال 16.16: $-1 + (2 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$
 جواب: سیدھی لکیر $x - 2y + 1 = 0$ پر -1 تا $1 + i$

سوال 16.17: $i + t + i2t^2, \quad -2 \leq t \leq 1$
 جواب: منحنی $y = 2x^2 + 1$ پر $(-2 + i9)$ تا $(1 + i3)$

سوال 16.18: $2 - i3 + 5e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$
 جواب: بالائی نصف دائرہ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

سوال 16.19: $1 + 2e^{it}, \quad -\pi \leq t \leq 0$
 جواب: نچلا نصف دائرہ $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

سوال 16.20: $t + i2t^3, \quad -1 \leq t \leq 0$
 جواب: منحنی $y = 2x^3$ پر $(-1, -i2)$ تا مبدا

سوال 16.21: $i - t + it^3, \quad 0 \leq t \leq 3$
 جواب: منحنی $y = 1 - x^3$ پر i تا $(-3 + 28i)$

سوال 16.22 تا سوال 16.25 میں z^2 کا مکمل دی گئی قطع پر تلاش کریں۔

سوال 16.22: 0 تا $i3$
جواب: $-i9$

سوال 16.23: 0 تا $3 + i3$
جواب: $-18 + i18$

سوال 16.24: $1 + i$ تا $2 - i$
جواب: $\frac{1}{3}(4 - i13)$

سوال 16.25: $-1 + i$ تا $1 - i$
جواب: $-\frac{4}{3}(1 + i)$

سوال 16.26: تقابل z^2 کا، گھڑی کی الٹ رخ، تکتون کے گرد ایک مرتبہ مکمل حاصل کریں۔ تکتون کے
کونے 0 ، 1 اور i ہیں۔
جواب: 0

سوال 16.27: $z + \frac{1}{z}$ کا اکائی رداس کے گرد گھڑی کی رخ مکمل تلاش کریں۔
جواب: $-i2\pi$

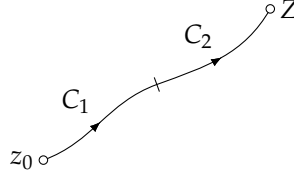
سوال 16.28: z کا 1 سے انتضابی $1 + i$ تک اور یہاں سے افقی $-1 + i$ تک مکمل تلاش کریں۔
جواب: $-\frac{1}{2} - i$

سوال 16.29: $az + b$ کا 0 تا $2 + i3$ قطع پر مکمل تلاش کریں۔
جواب: $2b - 2.5a + i(3b + 6a)$

سوال 16.30: مکمل $\int_C (z - 1)^{-1} dz$ کو گھڑی کی رخ $C : |z - 1| = 2$ پر تلاش کریں۔ یہی مکمل
گھڑی کی الٹ رخ تلاش کریں۔
جواب: گھڑی کی الٹ رخ $i2\pi$ جبکہ گھڑی کی رخ $-i2\pi$ ہے۔

سوال 16.31: مکمل $\int_C z dz$ حقیقی $\int_C z dz$ گھڑی کی الٹ رخ دائرہ $|z| = r$ کے گرد حاصل کریں۔
جواب: $i\pi r^2$

سوال 16.32: مکمل $\int_C |z| dz$ کو $A : z = -i$ تا $B : z = i$ (الف) قطع AB پر تلاش کریں،
(ب) بائیں نصف مستوی میں اکائی دائرہ پر تلاش کریں، (پ) دائیں نصف مستوی میں اکائی دائرہ پر تلاش کریں۔
جواب: (الف) i ، (ب) $i2$ ، (پ) $i2$



شکل 16.3: تکمل کی راہ کے ٹکڑے

16.2 مخلوط خطی تکمل کی خواص

مجموعہ کی حد، مخلوط خطی تکمل کی تعریف ہے۔ اس سے درج ذیل خواص اخذ ہوتے ہیں۔

اگر ہم راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں تقسیم کریں (شکل 16.3) تب درج ذیل ہوگا:

$$(16.13) \quad \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

اگر ہم تکمل لیتے ہوئے راہ پر الٹ رخ چلیں تب تکمل کی قیمت منفی اکائی سے ضرب ہوگی

$$(16.14) \quad \int_{z_0}^Z f(z) dz = - \int_Z^{z_0} f(z) dz$$

جہاں z_0 اور Z راہ C کے سر ہیں؛ بائیں ہاتھ تکمل کو z_0 تا Z حاصل کیا گیا ہے جبکہ دائیں ہاتھ تکمل کو Z تا z_0 حاصل کیا گیا ہے۔

دو یا دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کا تکمل جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے، اور مشترک مستقل جزو ضربی کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے، یعنی:

$$(16.15) \quad \int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] dz = k_1 \int_C f_1(z) dz + k_2 \int_C f_2(z) dz$$

ہمیں مخلوط خطی تکمل کی حتمی قیمت کا تخمینہ بار بار درکار ہو گا جس کی حصول کا بنیادی کلیہ درج ذیل ہے

$$(16.16) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq Ml$$

جہاں l راہ C کی لمبائی ہے جبکہ M ایسا حقیقی مستقل ہے کہ پوری C پر $|f(z)| \leq M$ ہو۔

مساوات 16.16 کو ثابت کرنے کی خاطر ہم مساوات 14.26 کو مساوات 16.2 کے ساتھ ملا کر

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m \right| \leq \sum_{m=1}^n |f(\zeta_m)| |\Delta z_m| \leq M \sum_{m=1}^n |\Delta z_m|$$

لکھتے ہیں۔ اب Δz_m اس قطع کی لمبائی ہے جس کے سر z_{m-1} اور z_m ہیں (شکل 16.1 دیکھیں)۔ یوں دائیں ہاتھ مجموعہ درحقیقت ان سیدھی قطعات کی لمبائیوں کا مجموعہ L ہے جن کے سر $z_0, z_1, \dots, z_n (= Z)$ ہیں۔ اگر n کی قیمت اس طرح لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو کہ Δz_m کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر کے قریب پہنچتی ہو تب L کی قیمت، لمبائی قوس کی تعریف (حصہ 10.4) کے تحت، قوس C کی لمبائی l کے قریب پہنچے گی۔ یوں 16.16 میں دیا گیا کلیہ ثابت ہوتا ہے۔

مثال 16.6: مساوات 16.16 کی استعمال

تفاعل $f(z) = \frac{1}{z}$ کا دائرہ $|z| = \rho$ کے گرد ایک مرتبہ مکمل تلاش کریں۔
حل: یوں $l = 2\pi\rho$ ہے اور دائرے پر $|f(z)| = \frac{1}{\rho}$ ہے۔ اس طرح مساوات 16.16 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\left| \int_C \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi \quad (\text{مثال 16.1 دیکھیں})$$

□

مثال 16.7: ایک اور تکمل کی قیمت کا تخمینہ

مثال 16.2 میں راہ C_2 کی لمبائی $l = 2$ ہے اور C_2 پر $|\text{حقیقی } z| \leq 1$ ہے۔ یوں مساوات 16.16 درج ذیل دے گی۔

$$\left| \int_{C_2} z \, dz \right| \leq 2$$

□

سوالات

سوال 16.33: مساوات 16.13 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرہ ہے جبکہ C_1 اس کا بالائی نصف حصہ اور C_2 اس کا نچلا نصف حصہ ہے۔

سوال 16.34: تفاعل $f(z) = z^2$ کے لئے مساوات 16.14 کی تصدیق کریں جہاں C نقطہ $-1 - i$ سے $1 + i$ تک ہے۔

سوال 16.35: تفاعل $k_1 f_1 + k_2 f_2 = 3z - z^2$ کے لئے مساوات 16.15 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرے کا بالائی نصف حصہ 1 تا -1 ہے۔

سوال 16.36: تفاعل $f(z) = \frac{1}{z}$ کے لئے مساوات 16.16 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرے کا بالائی نصف حصہ 1 تا -1 ہے۔

سوال 16.37 تا سوال 16.48 میں $\int_C f(z) dz$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.37: سیدھی قطع $-1 - i$ تا $2 + i$ پر تفاعل $f(z) = az + b$ ہے۔
جواب: $\frac{(a+2b)(3+i2)}{2}$

سوال 16.38: گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر $f(z) = z^2 + \frac{2}{z}$
جواب: $i4\pi$

سوال 16.39: -1 تا 1 اکائی دائرے کی بالائی نصف پر $f(z) = z^2 + \frac{3}{z^4}$
جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 16.40: گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر $f(z) = 2z + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.41: 0 تا $1 + i\frac{\pi}{2}$ سیدھی قطع پر $f(z) = e^z$
جواب: $-1 + ie$

سوال 16.42: گھڑی کی رخ دائرہ $|z - 1| = 4$ پر $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}$
جواب: $-i2\pi$

سوال 16.43: قطع $i\pi$ تا $i2\pi$ پر $f(z) = \cos z$ جواب: $i(\sinh 2\pi - \sinh \pi)$

سوال 16.44: قطع $i\pi$ تا $i2\pi$ پر $f(z) = \sin z$ جواب: $\cosh \pi - \cosh 2\pi$

سوال 16.45: قطع $-i$ تا i پر $f(z) = \sin z$ جواب: 0

سوال 16.46: قطع 0 تا i پر $f(z) = \sin z$ جواب: $1 - \cosh 1$

سوال 16.47: قطع 0 تا i پر $f(z) = \sinh z$ جواب: $\cos 1 - 1$

سوال 16.48: قطع 0 تا i پر $f(z) = \cosh z$ جواب: $i \sin 1$

سوال 16.49 تا سوال 16.52 میں مساوات 16.16 کی مدد سے 0 تا $3 + i4$ راہ پر مکمل کی زیادہ سے زیادہ قیمت کا تخمینہ لگائیں۔

سوال 16.49: $\int_C z dz$ جواب: 25

سوال 16.50: $\int_C e^z dz$ جواب: $5e^3$

سوال 16.51: $\int_C \ln(z+1) dz$

سوال 16.52: $\int_C \frac{1}{z+1} dz$ جواب: 5

سوال 16.53: سوال 16.49 میں راہ کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے مکمل کی زیادہ سے زیادہ قیمت کا بہتر تخمینہ لگائیں۔

16.3 کوشی کا مسئلہ تکمیل

مخلوط تجزیہ میں کوشی کا مسئلہ تکمیل اہم کردار ادا کرتا ہے۔ اس کے علاوہ اس مسئلے کے دیگر نظریاتی اور عملی اثرات بھی مرتب ہوتے ہیں۔ اس مسئلہ کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصورات کی ضرورت پیش آئی گی۔

مخلوط مستوی میں دائرہ کار D اس صورت سادہ تعلق خطہ³ کہلاتا ہے جب اس میں ہر سادہ بند منحنی (یعنی D میں اپنے آپ کو غیر منقطع کرتا ہوا بند منحنی) صرف D کے نقطوں کو گھیرتی ہو۔ ایسا دائرہ کار جو سادہ تعلق نہ ہو مضرب تعلق خطہ⁴ کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک دائرے کی اندرون (دائرے قریص)، قطع مکانی کی اندرون اور چکور کی اندرون سادہ تعلق ہیں۔ بلکہ کسی بھی سادہ بند منحنی کی اندرون سادہ تعلق ہو گی۔ دائری جہلی (حصہ 14.3) مضرب تعلق (زیادہ درست اصطلاح دوہرا تعلق ہو گی) ہے۔

مزید، ایسا دائرہ کار D جو مکمل طور پر مبدا کے گرد کسی دائرے میں پایا جاتا ہو محدود⁵ کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر محدود⁶ کہتے ہیں۔

مسئلہ 16.1: کوشی مسئلہ تکمیل
سادہ تعلق محدود دائرہ کار D میں تجلیلی⁷ $f(z)$ کی صورت میں D میں ہر سادہ بند منحنی C پر درج ذیل ہو گا۔

$$(16.17) \quad \int_C f(z) dz = 0$$

ثبوت: کوشی کا ثبوت
مساوات 16.5 سے

$$(16.18) \quad \int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx)$$

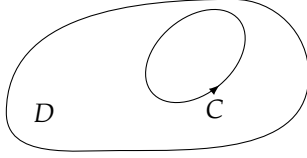
simply connected domain³

multiply connected⁴

bounded⁵

unbounded⁶

⁷ یاد رہے کہ تفاعل کی تعریف کے تحت تفاعل واحد قیمت تعلق ہوتا ہے۔



شکل 16.4: کوئی کا مسئلہ مکمل

ملتا ہے۔ $f(z)$ تحلیل ہے لہذا $f'(z)$ موجود ہے۔ کوئی نے اضافی فرض کیا کہ $f'(z)$ استمراری ہے۔ تب مساوات 14.42 اور مساوات 14.43 کے تحت D میں u اور v کے استمراری جزوی تفرق پائے جائیں گے۔ مسئلہ 11.1 قابل اطلاق ہو گا (جس میں f اور g کی جگہ بالترتیب u اور v پر کرتے ہیں) لہذا

$$\int_C (u dx - v dy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں R کی سرحد C ہے۔ مساوات 14.44 کے تحت دائیں ہاتھ مکمل مکمل صفر کے برابر ہے لہذا بائیں ہاتھ کا مکمل صفر ہو گا۔ اسی طرح مساوات 14.44 کے تحت مساوات 16.18 کا آخری مکمل بھی صفر ہو گا۔ یوں کوئی کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

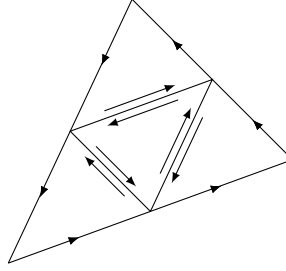
ثبوت : گرسا کا ثبوت

گرسا⁸ نے مسئلہ کوئی کو $f'(z)$ کی استمراری ہونے کی شرط کے بغیر ثابت کیا جو بہت اہم حقیقت ہے۔ ہم شروع ایسی صورت سے کرتے ہیں جہاں C ایک تکون کی سرحد ہے۔ ہم اس تکون کو گھڑی کی الٹ رخ سمت بند کرتے ہیں۔ تکون کی اطراف کی درمیانے نقطوں کو آپس میں ملاتے ہوئے تکون کو چار مماثل تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16.5)۔ یوں

$$\int_C f dz = \int_{C_a} f dz + \int_{C_b} f dz + \int_{C_c} f dz + \int_{C_d} f dz$$

ہو گا جہاں C_a, \dots, C_d ان چار تکون کی سرحد ہیں۔ اب دائیں ہاتھ میں ہم تقسیم کی ہر قطع پر مکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ رخ حاصل کرتے ہیں۔ ایک ہی قطع پر آپس میں الٹ رخ کی جوڑی مکمل ایک دوسرے کو حذف

⁸فرانسیسی ریاضی دان ایڈورڈ گرسا [1858-1936]



شکل 16.5: مسئلہ کوئی کا ثبوت

کرتے ہیں لہذا دائیں ہاتھ چار تکملوں کا مجموعہ بائیں ہاتھ کی تکمل کے برابر ہو گا۔ دائیں ہاتھ کے تکملوں میں سے ایک تکمل، جس کی سرحد کو ہم C_1 کہیں گے، ایسا ہو گا جس کے لئے درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا۔

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f dz \right|$$

ہم درج بالا اس لئے لکھ سکتے ہیں کہ چاروں تکمل میں سے ہر ایک کی حتمی قیمت چاروں کے مجموعے کی حتمی قیمت سے چار گنا کم نہیں ہو سکتی ہے۔ یہ مساوات 14.26 سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

ہم اس تکون جس کی سرحد C_1 ہے کو اسی طرح چار تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ان میں سے ایسی تکون، جس کی سرحد کو ہم C_2 کہیں گے، منتخب کرتے ہیں جس کے لئے

$$\left| \int_{C_1} f dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_2} f dz \right| \implies \left| \int_C f dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{C_2} f dz \right|$$

لکھنا ممکن ہو۔

اسی طرح بڑھتے ہوئے ہمیں تکونوں کا ایک سلسلہ T_1 ، T_2 ، ... حاصل ہو گا جن کی سرحدیں بالترتیب C_1 ، C_2 ، ... ہوں گی۔ یہ تکون متشابہ ہوں گے اور $n > m$ کی صورت میں تکون T_n تکون T_m کے اندر پایا جائے گا۔ مزید

$$(16.19) \quad \left| \int_C f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f dz \right|, \quad n = 1, 2, \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔

فرض کریں کہ z_0 ان تمام تکتونوں کے اندر ایک نقطہ ہے۔ چونکہ f نقطہ z_0 پر قابل تفرق ہے لہذا $f'(z_0)$ موجود ہو گا لہذا ہم

$$(16.20) \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + h(z)(z - z_0)$$

لکھ سکتے ہیں جس کا تکتون T_n کی سرحد C_n پر مکمل حاصل کرتے ہوئے

$$(16.21) \quad \int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_1} f(z_0) dz + \int_{C_1} (z - z_0)f'(z_0) dz + \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz$$

لکھتے ہیں۔ چونکہ $f(z_0)$ اور $f'(z_0)$ مستقل ہیں لہذا مثال 16.4 اور مثال 16.5 کے نتیجے کے تحت بائیں ہاتھ پہلے دو مکمل صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں

$$(16.22) \quad \int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz$$

رہ جاتا ہے۔ مساوات 16.20 کو $z - z_0$ سے تقسیم کر کے دو اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہوئے حتمی قیمت لے کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| = |h(z)|$$

اس کا مساوات 14.38 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ دیے گئے مثبت عدد ϵ کی صورت میں ہم ایسا مثبت عدد σ تلاش کر سکتے ہیں جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرے گا۔

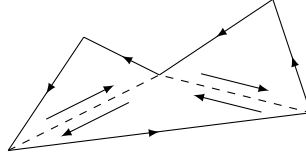
$$\text{جب } |z - z_0| < \sigma \text{ ہو تب } |h(z)| \leq \epsilon \text{ ہو گا۔}$$

ہم اب عدد n اتنا بڑا لیتے ہیں کہ تکتون T_n دائرہ $|z - z_0| < \sigma$ میں پایا جائے۔ ہم C_n کی لمبائی کو l_n لکھتے ہیں۔ یوں T_n میں z_0 اور C_n پر تمام z کے لئے $|z - z_0| \leq \frac{l_n}{2}$ ہو گا۔ مساوات 16.16 کی اطلاق سے ہم

$$(16.23) \quad \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz \right| < \epsilon \frac{l_n}{2} l_n = \frac{\epsilon}{2} l_n^2$$

لکھ سکتے ہیں۔ فرض کریں کہ C کی لمبائی l ہو۔ تب راہ C_1 کی لمبائی $l_1 = \frac{l}{2}$ ہو گی، راہ C_2 کی لمبائی $l_2 = \frac{l}{2} = \frac{l}{4}$ ہو گی، اور اسی طرح C_n کی لمبائی

$$l_n = \frac{l}{2^n}$$



شکل 16.6: کثیر رکنے کے لئے کوئی مسئلہ مکمل کا ثبوت

ہو گی۔ مساوات 16.23 اور مساوات 16.19 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f dz \right| < 4^n \frac{\epsilon}{2} l_n^2 = 4^n \frac{\epsilon}{2} \frac{l^2}{4^n} = \frac{\epsilon}{2} l^2$$

اب $\epsilon (> 0)$ کی قیمت کو کافی چھوٹا کرتے ہوئے ہم دائیں ہاتھ کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں جبکہ دایاں ہاتھ (مکمل کی) ایک مستقل قیمت ہے۔ اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ اس مکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

آئیں اب کثیر الاضلاع کے لئے اس مسئلے کو ثابت کریں۔ ہم کثیر الاضلاع کو تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16.6)۔ ایسی ہر تکون کا مکمل صفر ہو گا۔ ہر تکون کی سرحد پر گھڑی کی الٹ رخ مکمل حاصل کیا جاتا ہے لہذا ہر دو تکونوں کے درمیان تقسیمی قطع پر مکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ رخ حاصل ہو گا۔ ایسی ہر جوڑی کمالات کا مجموعہ صفر ہو گا۔ یوں تمام تکونوں کی سرحد پر مکملوں کا مجموعہ کثیر رکنی کی سرحد پر مکمل کے برابر ہو گا۔ اب چونکہ ہر تکون پر مکمل صفر کے برابر ہے لہذا ان کا مجموعہ بھی صفر کے برابر ہو گا۔ یوں کثیر رکنی کی سرحد پر مکمل صفر ہو گا۔

کسی بھی بند راہ C کے لئے اب ثبوت پیش کرتے ہیں۔ کسی بھی بند راہ کے اندر اتنے اطراف کی کثیر رکنی P نقش کریں کہ C اور کثیر رکنی میں فرق قابل نظر انداز ہو۔ ہم بغیر ثبوت پیش کیے (چونکہ یہ ثبوت پیچیدہ ہے) کہنا چاہیں گے کہ C کے مکمل کی قیمت اور P کے مکمل کی قیمت میں فرق ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں جہاں ϵ ایک مثبت عدد ہے۔ چونکہ کثیر رکنی کے لئے ہم اس مسئلے کو ثابت کر چکے ہیں لہذا کسی بھی بند راہ کے لئے بھی مسئلہ ثابت ہوا۔

□

مثال 16.8:

$$\int_C e^z dz = 0$$

□

چونکہ ہر z پر e^z تحلیلی ہے لہذا درج بالا ہو گا۔

مثال 16.9:

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

جہاں C اکائی دائرہ ہے (حصہ 16.1)۔ چونکہ $z = 0$ پر $\frac{1}{z^2}$ تحلیلی نہیں ہے لہذا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ نہیں ہو گا۔ یوں D میں f کی تحلیلی ہونے کی شرط، مساوات 16.17 کی درست ہونے کے لئے، کافی ہے ناکہ لازمی۔ □

مثال 16.10:

$$\int_C \frac{d}{z} = i2\pi$$

جہاں مکمل اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا گیا ہے (حصہ 16.1)۔ راہ C جہلی $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ میں پائی جاتی ہے جہاں $\frac{1}{z}$ تحلیلی ہے لیکن یہ راہ سادہ تعلق نہیں رکھتی لہذا مسئلہ کوشی قابل اطلاق نہیں ہو گا۔ یوں دائرہ کار D کی سادہ تعلق ہونے کی شرط انتہائی اہم ہے۔

□

مسئلہ کوشی میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2^* میں تقسیم (شکل 16.7-الف) کرنے سے مساوات 16.17 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

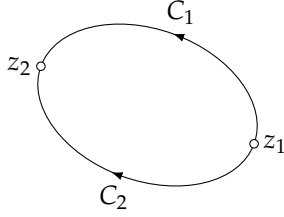
$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2^*} f dz = 0$$

یوں

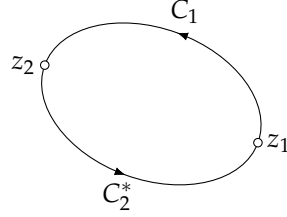
$$(16.24) \quad - \int_{C_2^*} f dz = \int_{C_1} f dz$$

ہو گا۔ C_2^* پر مکمل کی سمت الٹ کرنے سے مکمل کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔ یوں

$$(16.25) \quad \int_{C_2} f dz = \int_{C_1} f dz$$

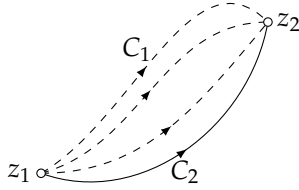


(ب) مساوات 16.25

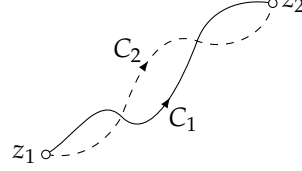


(الف) مساوات 16.24

شکل 16.7: دو نقطوں کے درمیان دو مختلف راہ



(ب) راہ کی مسلسل تبدیلی



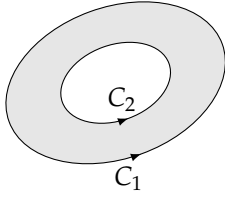
(الف) دونوں راہ محدود نقطوں پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں

شکل 16.8: دو نقطوں کے مابین مختلف طرز کی راہ

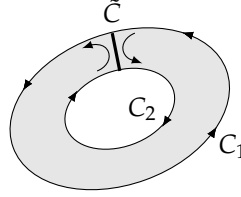
حاصل ہو گا (شکل 16.7-ب)۔ اس طرح اگر D میں f تحلیلی ہو اور D میں دو نقطوں کے درمیان C_1 اور C_2 کوئی بھی راہ ہوں جن پر کوئی نقطہ مشترک نہ ہو تب ان راہ پر مساوات 16.25 درست ہو گی۔

اگر ان راہ C_1 اور C_2 میں محدود تعداد کے نقطے مشترک ہوں (شکل 16.8-الف) تب ہر قریبی مشترک نقطوں کی جوڑی کے مابین چونکہ مساوات 16.25 قابل اطلاق ہے لہذا ان پوری راہ C_1 اور C_2 کے لئے بھی مساوات 16.25 درست ہو گی۔

درحقیقت کسی بھی دو نقطوں z_1 اور z_2 کے درمیان کسی بھی دو راہ، جو مکمل طور پر سادہ تعلق دائرہ کار D میں ہوں جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے، کے لئے مساوات 16.25 درست ہو گا۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ z_1 تا z_2 تفاعل $f(z)$ کے مکمل کی قیمت D میں راہ کی غیر تابع (یا راہ سے آزاد) ہے۔ (ظاہر ہے کہ ایسی مکمل کی قیمت z_1 اور z_2 پر منحصر ہو گی۔)



(ب) مساوات 16.27 میں مکمل کی راہ



(الف) دوہرا تعلق دائرہ کار

شکل 16.9: دوہرا تعلق دائرہ کار

ہم تصور کر سکتے ہیں کہ راہ C_1 کو مسلسل تبدیل کرتے ہوئے راہ C_2 حاصل کی گئی ہے (شکل 16.8-ب)۔ یوں ایسے مکمل میں، راہ کے سر z_1 اور z_2 تبدیل کیے بغیر، مکمل کی راہ یوں مسلسل تبدیل کرنے سے کہ ایسے نقطہ سے نہ گزرا جائے جہاں $f(z)$ غیر تحلیلی ہو، مکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی۔ اس حقیقت کو تبدیلی راہ کا اصول⁹ کہتے ہیں۔

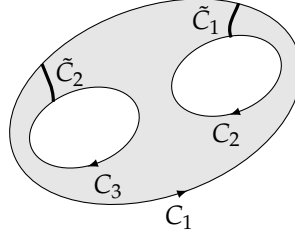
مضرب تعلق دائرہ کار D^* کو یوں کاٹا جاسکتا ہے کہ حاصل دائرہ کار (یعنی D^* ماسوائے ان نقطوں کے جو ایک کٹ یا ایک سے زیادہ کٹ پر ہوں) سادہ تعلق دائرہ کار ہو۔ دوہرا تعلق دائرہ کار D^* پر ہمیں ایک عدد کٹ \tilde{C} درکار ہوگا (شکل 16.9-الف)۔ اگر دائرہ کار D^* ، راہ C_1 اور C_2 پر $f(z)$ تحلیلی ہو تب چونکہ C_1 ، C_2 اور \tilde{C} سادہ تعلق دائرہ کار کو گھیرتے ہیں لہذا مسئلہ کوئی کے تحت راہ C_1 ، C_2 اور \tilde{C} پر، شکل 16.9-الف میں تیر کی نشان سے دکھائے گئے رخ، $f(z)$ کے مکمل کی قیمت صفر ہوگی۔ چونکہ ہم \tilde{C} پر دونوں رخ مکمل لیتے ہیں جن کا مجموعہ صفر ہوگا لہذا ہمیں

$$(16.26) \quad \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ایک بند راہ پر گھڑی کی رخ اور دوسری راہ پر گھڑی کی الٹ رخ مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 16.26 کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(16.27) \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$



شکل 16.10: تین تعلق دائرہ کار

جہاں دونوں بند راہ پر مکمل گھڑی کی ایک ہی رخ حاصل کیا جاتا ہے (شکل 16.9-ب)۔ یاد رہے کہ مساوات 16.27 اس صورت درست ہو گا جب C_1 اور C_2 کی ہر نقطہ پر اور ان کی گھیرے ہوئے دائرہ کار پر $f(z)$ تحلیل ہو۔

زیادہ پیچیدہ دائرہ کار میں ایک سے زیادہ کٹ درکار ہوں گے۔ ان کٹ کو لگانے کا بنیادی اصول وہی رہے گا۔ مثلاً تین تعلق دائرہ کار (شکل 16.10) کے لئے

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں C_2 اور C_3 پر مکمل ایک ہی رخ حاصل کیا جائے گا جبکہ C_1 پر مکمل ان کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔

سادہ بند راہ کو کبھی کبھار خط ارتفاع¹⁰ بھی کہتے ہیں اور ایسی راہ پر مکمل کو ارتفاعی مکمل¹¹ کہتے ہیں۔

مثال 16.11: فرض کریں کہ C_1 اکائی دائرہ $|z| = 1$ ہے جبکہ C_2 دائرہ $|z| = \frac{1}{2}$ ہے۔ تب مساوات 16.27 سے

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} = i2\pi \quad (\text{مثال 16.1})$$

□

ہو گا جہاں دونوں دائروں پر مکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا گیا ہے۔

¹⁰ contour
¹¹ contour integral

مثال 16.12: مثال 16.3 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تبدیلی راہ کے اصول کے تحت

$$\int_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} i2\pi & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1, \text{ عدد صحیح}) \end{cases}$$

ہوگا جہاں C ایسا کوئی بھی خط ارتفاع ہو سکتا ہے جو نقطہ z_0 کو گھیرتا ہو اور مکمل کو C پر گھڑی کی الٹ رخ ایک مرتبہ حاصل کیا جاتا ہے۔
□

سوالات

سوال 16.54: مسئلہ کوشی کی تصدیق $\int_C z^2 dz$ کے لئے کریں جہاں C وہ بتکون ہے جس کے کونے 0 ، 2 اور $i2$ ہیں۔

سوال 16.55: دکھائیں کہ اکائی دائرے کے گرد $\frac{1}{z^3}$ کا مکمل صفر کے برابر ہے۔ کیا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ کیا جاسکتا ہے؟

جواب: چونکہ $z = 0$ پر تفاعل $\frac{1}{z^3}$ غیر تحلیلی ہے اور اکائی دائرہ اس نقطے کو گھیرتی ہے لہذا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ نہیں کیا جاسکتا ہے۔

سوال 16.56: کس سادہ بند راہ پر $\frac{1}{z}$ کا مکمل صفر کے برابر ہوگا؟
جواب: وہ راہ جو $z = 0$ کو نہ گھیرتی ہو۔

سوال 16.57 تا سوال 16.65 اکائی دائرے کے گرد ایک مرتبہ گھڑی کی الٹ رخ دیے گئے تفاعل کے مکمل کی قیمت حاصل کریں۔ ہر سوال میں بتلائیں کہ آیا اس سوال میں مسئلہ کوشی کا اطلاق ہوگا؟

سوال 16.57: $f(z) = \frac{1}{z^4}$: جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.58: $f(z) = e^{-z}$: جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.59: $f(z) = |z|$ جی نہیں
جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.60: خیالی $f(z) = z$ جی نہیں
جواب: $-\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.61: حقیقی $f(z) = z$ جی نہیں
جواب: $i\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.62: $f(z) = \tanh z$ جی ہاں
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.63: $f(z) = \frac{1}{z^2+2}$ جی ہاں
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.64: $f(z) = \frac{1}{z}$ جی نہیں
جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.65: $f(z) = z^2 \sec z$ جی ہاں
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.66: مسئلہ کوشی کا اطلاق $f(z) = z$ پر کرتے ہوئے سوال 16.60 سے سوال 16.61 کا جواب حاصل کریں۔

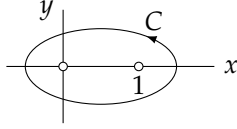
سوال 16.67: تبدیلی راہ کا اصول اور

$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں جہاں C کو شکل 16.67 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_C \frac{dz}{z} + \int_C \frac{dz}{z-1} = i4\pi$$

سوال 16.68: تقابل $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$ کا مکمل گھڑی کی الٹ رخ (الف) دائرہ $|z| = 2$ اور (ب) دائرہ $|z| = 4$ پر حاصل کریں۔ کیا (الف) کے جواب سے تبدیلی راہ کے قاعدہ کی مدد سے (ب) کا جواب حاصل کیا جا



شکل 16.11: شکل برائے سوال 16.67

سکتا ہے؟

جواب: (الف) $i2\pi$ ، (ب) $i2\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.69 تا سوال 16.77 میں مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں تفاعل کو جزوی کسر کی صورت میں لکھیں۔

سوال 16.69: گھڑی کی رخ $C: |z-2|=1$ ، $\int_C \frac{dz}{z}$ ، جواب: 0

سوال 16.70: گھڑی کی الٹ رخ $C: |z| = \frac{1}{2}$ ، (ب) $C: |z| = 2$ ، (الف) $\int_C \frac{z^2-z-1}{z^3-z^2} dz$ ، جواب: (الف) $i2\pi$ ، (ب) 0

سوال 16.71: گھڑی کی رخ $C: |z-1|=1$ ، (ب) $C: |z|=2$ ، (الف) $\int_C \frac{dz}{z^2-1}$ ، جواب: (الف) 0، (ب) $-i\pi$

سوال 16.72: گھڑی کی الٹ رخ $C: |z+i|=1$ ، (ب) $C: |z|=2$ ، (الف) $\int_C \frac{z}{z^2+1} dz$ ، جواب: (الف) $i2\pi$ ، (ب) $i\pi$

سوال 16.73: گھڑی کی الٹ رخ $C: |z-i|=1$ ، (ب) $C: |z+i|=1$ ، (الف) $\int_C \frac{dz}{z^2+1}$ ، جواب: (الف) $-\pi$ ، (ب) π

سوال 16.74: گھڑی کی الٹ رخ $C: |z|=1$ ، (ب) $C: |z|=2$ ، (الف) $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ ، جواب: (الف) 0، (ب) 0

سوال 16.75: گھڑی کی الٹ رخ $C: |z-i2|=1$ ، (الف) $\int_C \frac{\cos z}{z^2} dz$ ، جواب: 0

سوال 16.76: گھڑی کی الٹ رخ، $C : |z| = 2$ (ب)، $C : |z| = \frac{1}{2}$ (الف) $\int_C \frac{3z+1}{z^3-z} dz$ ،
جواب: (الف) $-i2\pi$ ، (ب) $i2\pi$

سوال 16.77: گھڑی کی الٹ رخ، $C : |z| = 1$ (ب)، $C : |z| = \frac{3}{2}$ (الف) $\int_C \frac{dz}{z^4+4z^2}$ ،
جواب: (الف) $i2\pi$ ، (ب) 0

16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل

کوشی مسئلہ مکمل استعمال کرتے ہوئے ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ بہت سارے مخلوط خطی مکمل کو ایک سادہ طریقہ کار، یعنی غیر قطعی مکمل، سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے اور D میں z_0 ایک مقررہ نقطہ ہے۔ تب z_0 اور z کے درمیان D میں تمام راہ پر مکمل

$$\int_{z_0}^z f(z^*) dz^*$$

z کا تفاعل ہو گا لہذا ہم

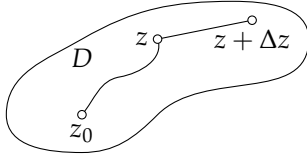
$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z^*) dz^* \quad (16.28)$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں ثابت کرتے ہیں کہ D میں $F(z)$ متغیرہ z کا تحلیلی تفاعل ہے اور $F'(z) = f(z)$ ہے۔

ہم z کو مقررہ رکھتے ہیں۔ چونکہ D دائرہ کار ہے لہذا z کی پڑوس N بھی D کا حصہ ہو گی۔ ہم N میں نقطہ $z + \Delta z$ یوں منتخب کرتے ہیں کہ وہ قطع جس کے سر z اور $z + \Delta z$ ہوں از خود N کا اور یوں D کا حصہ ہو۔ مساوات 16.28 سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z^*) dz^* - \int_{z_0}^z f(z^*) dz^* = \int_z^{z+\Delta z} f(z^*) dz^*$$



شکل 16.12: مکمل کی راہ

جہاں z تا $z + \Delta z$ مکمل کو اس قطع پر حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 16.12)۔ چونکہ z مقررہ ہے لہذا

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^*$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$-\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) dz^* = -\frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} dz^* = -f(z)$$

ہوگا۔ اب $f(z)$ استمراری ہے لہذا کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $\sigma > 0$ حاصل کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جب } |z^* - z| < \sigma \text{ ہو تب } |f(z^*) - f(z)| < \epsilon, \text{ ہوگا۔}$$

نتیجتاً اگر $|\Delta z| < \sigma$ ہو تب

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^* \right| \\ &< \frac{\epsilon}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} dz^* \right| = \epsilon \end{aligned}$$

ہوگا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(16.29) \quad F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

اب مساوات 16.28 سے ہم دیکھتے ہیں کہ z_0 کی جگہ کوئی دوسرا مقررہ نقطہ منتخب کرنے سے تفاعل $F(z)$ کے ساتھ ایک مستقل جمع ہوگا۔ مساوات 16.29 سے ہم دیکھتے ہیں کہ $F(z)$ تفاعل $f(z)$ کا تفرق یا غیر قطعی مکمل ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے،

$$F(z) = \int f(z) dz$$

یعنی D میں $F(z)$ تحلیلی تفاعل ہے جس کا تفرق $f(z)$ ہے۔

اگر $F'(z) = f(z)$ اور $G'(z) = f(z)$ ہوں تب D میں $F'(z) - G'(z) \equiv 0$ ہو گا۔ یوں تفاعل $F(z) - G(z)$ ایک مستقل (سوال 14.133) ہو گا۔ یوں غیر قطعی مکمل $F(z)$ اور $G(z)$ میں صرف ایک مستقل کا فرق ہو سکتا ہے۔ اب مساوات 16.28 کو مد نظر رکھتے ہوئے D میں نقطہ a اور b اور D میں a تا b کسی بھی راہ کے لئے حقیقی قطعی مکمل کی طرح

$$\int_a^b f(z) dz = \int_{z_0}^b f(z) dz - \int_{z_0}^a f(z) dz = F(b) - F(a)$$

لکھا جاسکتا ہے، پس اتنا ضروری ہے کہ مکمل کی راہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں پائی جاتی ہو جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے۔

ہم متذکرہ بالا نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 16.2: تکمیل کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل

اگر سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب D میں $f(z)$ کا غیر قطعی مکمل موجود ہو گا، یعنی ایسا تحلیلی تفاعل $F(z)$ کہ D میں $F'(z) = f(z)$ ہو، اور D میں نقطہ a اور نقطہ b کے درمیان D میں ہر راہ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$(16.30) \quad \int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a)$$

یہ مسئلہ مخلوط خطی مکمل کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل ممکن بناتا ہے۔ یاد رہے کہ چونکہ $F(z)$ ایک مستقل جمعی جزو کے علاوہ یکتا ہے لہذا مساوات 16.30 میں ہم D میں $f(z)$ کا کوئی بھی غیر قطعی مکمل $F(z)$ لے سکتے ہیں۔

مثال 16.13:

$$\int_i^{1+i4} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_i^{1+i4} = \frac{1}{3} [(1+i4)^3 - i^3] = -\frac{47}{3} - i17$$

□

مثال 16.14:

$$\int_i^{\frac{\pi}{2}} \cos z dz = \sin z \Big|_i^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin i = 1 - i \sinh 1$$

□

سوالات

سوال 16.78 تا سوال 16.97 میں مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.78: $\int_i^{1+i^2} z \, dz$
جواب: $-1 + i2$

سوال 16.79: $\int_i^2 z^2 \, dz$
جواب: $\frac{1}{3}(8 + i)$

سوال 16.80: $\int_i^1 (z - 1)^2 \, dz$
جواب: $-\frac{2}{3}(1 + i)$

سوال 16.81: $\int_{1+i}^{1-i} z^3 \, dz$
جواب: 0

سوال 16.82: $\int_1^{1+i\pi} e^z \, dz$
جواب: $-2e$

سوال 16.83: $\int_{i\pi}^{i2\pi} e^{3z} \, dz$
جواب: $\frac{2}{3}$

سوال 16.84: $\int_{-i}^i z e^{z^2} \, dz$
جواب: 0

سوال 16.85: $\int_{1-i\pi}^{1+i\pi} e^{\frac{z}{2}} \, dz$
جواب: $i4\sqrt{e}$

سوال 16.86: $\int_0^{i\pi} \cos z \, dz$
جواب: $i \sinh \pi$

سوال 16.87: $\int_0^{i\frac{\pi}{2}} \sin z \, dz$
جواب: $1 - \cosh \frac{\pi}{2}$

سوال 16.88: $\int_0^{i\frac{\pi}{2}} z \sin z^2 \, dz$
جواب: $\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{\pi^2}{4})$

سوال 16.89: $\int_0^{i\frac{\pi}{2}} 16z \sin z \, dz$
 جواب: $-ie^{-\frac{\pi}{2}} \left[2\pi^2 e^{\frac{\pi}{2}} \sinh \frac{\pi}{2} + (-\pi^2 + 4\pi - 8)e^{\pi} + \pi^2 + 4\pi + 8 \right]$

سوال 16.90: $\int_{-i\pi}^{i\pi} \sin^2 z \, dz$
 جواب: $i(\pi - \frac{1}{2} \sinh 2\pi)$

سوال 16.91: $\int_{1-i}^{1+i} \cos z \, dz$
 جواب: $\sin(i+1) + \sin(i-1)$

سوال 16.92: $\int_0^{i3} \cosh z \, dz$
 جواب: $i \sin 3$

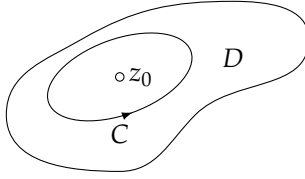
سوال 16.93: $\int_i^{1+i3} \sinh z \, dz$
 جواب: $\cosh(1+i3) - \cos 1$

سوال 16.94: $\int_0^{i3} \sinh z \, dz$
 جواب: $\cos 3 - 1$

سوال 16.95: $\int_i^{i3} z \sinh z^2 \, dz$
 جواب: $\frac{1}{2}(\cosh 9 - \cosh 1)$

سوال 16.96: $\int_{-1}^1 z \cosh z^2 \, dz$
 جواب: 0

سوال 16.97: $\int_{-i\pi}^{i\pi} z \cosh z \, dz$
 جواب: 0



شکل 16.13: کوشی کا کلیہ تکمیل

16.5 کوشی کا کلیہ تکمیل

کوشی کے مسئلہ تکمیل کا اہم ترین نتیجہ کوشی کا کلیہ تکمیل ہے۔ یہ کلیہ اور اس کے کے لازمی شرائط درج ذیل مسئلہ میں پیش کیے گئے ہیں۔

مسئلہ 16.3: کوشی کا کلیہ تکمیل¹²

فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے۔ تب D میں کسی بھی نقطہ z_0 اور D میں کسی بھی بند راہ C جو z_0 کو گھیرتا (شکل 16.13) ہو درج ذیل ہو گا

$$(16.31) \quad \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i2\pi f(z_0) \quad \text{کوشی کا کلیہ تکمیل}$$

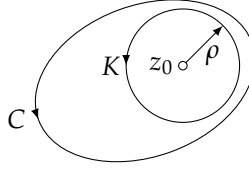
جہاں تکمیل کو C پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$ لکھ کر یاد رکھتے ہوئے کہ مستقل کو تکمیل سے باہر نکالا جاسکتا ہے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(16.32) \quad \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_C \frac{dz}{z - z_0} + \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

مثال 16.12 کے تحت دائیں ہاتھ پہلا تکمیل $i2\pi f(z_0)$ کے برابر ہے۔ یوں مساوات 16.32 میں دائیں ہاتھ دوسرا تکمیل صفر ہونے کی صورت میں مساوات 16.31 درست ثابت ہو گی۔ اب اس تکمیل لا متکمل ماسوائے نقطہ z_0 کے D میں تحلیلی ہے۔ یوں ہم تکمیل کی قیمت بغیر تبدیل کیے C کی جگہ z_0 کے گرد ایک چھوٹے دائرے پر تکمیل

¹²Cauchy's integral formula



شکل 16.14: کوشی کے کایہ تھم کے ثبوت

حاصل کر سکتے ہیں (شکل 16.14)۔ چونکہ $f(z)$ تجلیلی ہے لہذا یہ استمراری ہے۔ یوں کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم ایسا $\sigma > 0$ تلاش کر سکتے ہیں کہ

$$\text{قرص } |z - z_0| < \sigma \text{ میں ہر } z \text{ کے لئے } |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ ہو گا۔}$$

قرص کا رداس ρ چھوٹے سے چھوٹا کرتے ہوئے K کو σ سے کم بنایا جاسکتا ہے۔ یوں K پر ہر نقطہ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho}$$

K کی لمبائی $2\pi\rho$ ہے۔ یوں مساوات 16.16 کے تحت

$$\left| \int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon$$

ہو گا۔ چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں لہذا مساوات 16.32 میں آخری تکرر صفر ہو گا۔ یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 16.15: مختلف راہوں پر تکمیل کی قیمت

درج ذیل تکمیل گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر حاصل کریں۔ دائرے کا مرکز (الف) $z = 1$ ، (ب) $z = \frac{1}{2}$ ، (پ) $z = -1$ اور (ت) $z = i$ پر لیں۔

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz$$

جواب: (الف) اس مکمل کو

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_C \frac{z^2 + 1}{z + 1} \frac{dz}{z - 1}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دائیں ہاتھ کا مساوات 16.31 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ نقطہ $z_0 = 1$ دائرہ C کے اندر پایا جاتا ہے اور $f(z)$ راہ C پر اور اس کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی ہے (نقطہ $z = -1$ جہاں $f(z)$ غیر تحلیلی ہے C کے باہر پایا جاتا ہے۔) لہذا کوئی کے کلیہ مکمل کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_C \frac{z^2 + 1}{z + 1} \frac{dz}{z - 1} = i2\pi \left[\frac{z^2 + 1}{z + 1} \right]_{z=1} = i2\pi$$

(ب) ہمیں یہی نتیجہ دوبارہ ملتا ہے چونکہ دیا گیا تفاعل نقطہ $z = 1$ اور نقطہ $z = -1$ پر غیر تحلیلی ہے اور ہم (الف) میں استعمال ہوئے دائرے کو، بغیر کسی غیر تحلیلی نقطہ سے گزرتے ہوئے، مسلسل تبدیل کرتے ہوئے یہاں درکار دائرہ حاصل کر سکتے ہیں۔
(پ) ہم اب درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_C \frac{z^2 + 1}{z - 1} \frac{dz}{z + 1} = i2\pi \left[\frac{z^2 + 1}{z - 1} \right]_{z=-1} = -i2\pi$$

(ت) چونکہ دیا گیا تفاعل دائرے پر اور دائرے کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی ہے لہذا کوئی کے کلیہ مکمل کے تحت یہ مکمل صفر کے برابر ہو گا۔
□

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

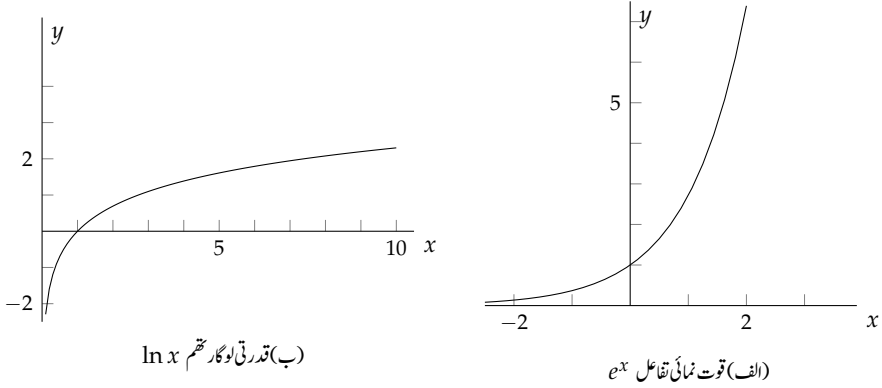
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

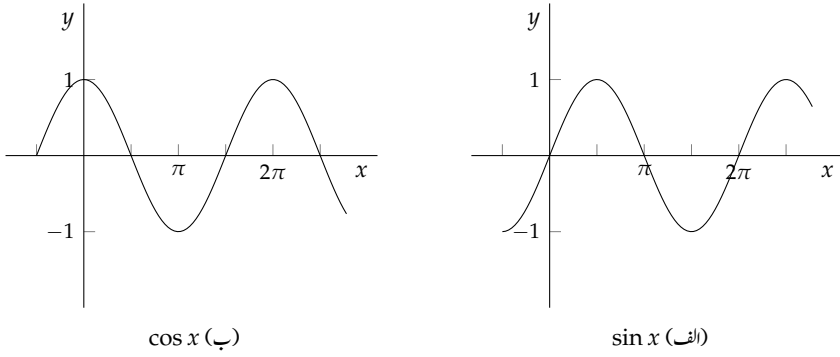
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

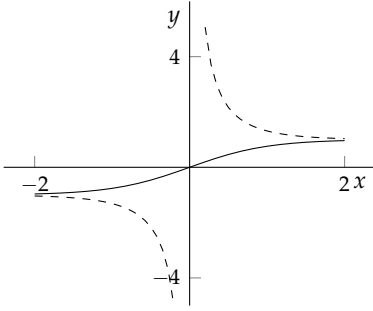
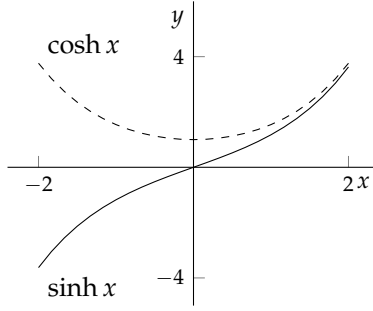
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

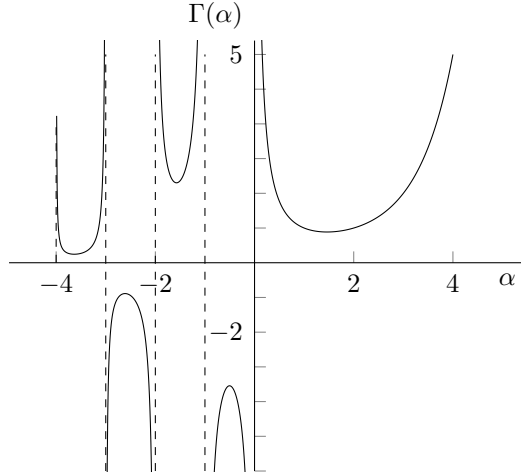
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ مکملہ تفاعل¹

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2) dt$$

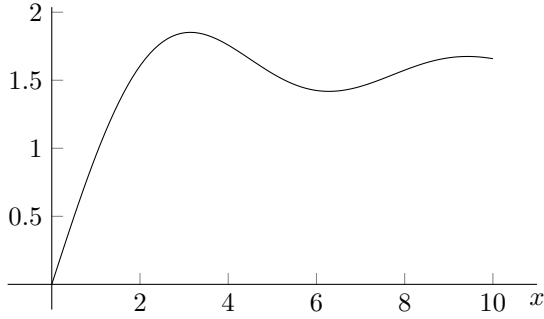
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

