انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 2

درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہٰذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

یک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش[1]، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

[1] oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.1}$$

صورت میں لکھا جا سکے **خطی**[2] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر خطی**[3] کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں y ، y' اور y'' کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔دو درجی مساوات کا پہلا جزو $f(x)y''$ ہونے کی صورت میں مساوات کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی **معیاری صورت**[4] میں لکھیں جہاں y'' پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔یقیناً $r \equiv 0$ [جہاں زیر غور تمام x پر $r(x) = 0$ ہو؛ اس کو **مکمل صفر**[5] پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.2}$$

جو **متجانس** ہے۔اگر $r(x) \not\equiv 0$ ہو تب مساوات 2.1 **غیر متجانس**[6] کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$\left(y''\right)^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

---

[2] linear
[3] nonlinear
[4] standard form
[5] identically zero
[6] nonhomogenous

تفاعل p اور q مساوات 2.2 کے **عددی سر**[7] کہلاتے ہیں۔

دو درجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل $y = h(x)$ کو کھلے وقفہ I پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دو درجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر $h(x)$ ، h' اور h'' پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں y کی جگہ h ، y' کی جگہ h' اور y'' کی جگہ h'' پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔ چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

متجانس خطی تفرقی مساوات: خطی میل

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔ متجانس مساوات کے حل میں **اصول خطیت**[8] یا **اصول خطی میل**[9] کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.1: خطی میل

تمام x پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں۔

$$y'' + 4y = 0 \tag{2.3}$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔ پہلے $y_1 = \cos 2x$ کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ $(\cos 2x)'' = -4\cos 2x$ کے برابر ہے لہٰذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$$

---

[7] coefficients
[8] linearity principle
[9] superposition principle

ملتا ہے۔اسی طرح $y_2=\sin 2x$ کو پر کرتے ہوئے

$$y''+4y=(\sin 2x)''+4(\sin 2x)=-4\sin 2x+4\sin 2x=0$$

ملتا ہے۔ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔یوں ہم $\cos 2x$ کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور $\sin 2x$ کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3=2.73\cos 2x-1.25\sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
y''+4y&=(2.73\cos 2x-1.25\sin 2x)''+4(2.73\cos 2x-1.25\sin 2x)\\
&=4(-2.73\cos 2x+1.25\sin 2x)+4(2.73\cos 2x-1.25\sin 2x)\\
&=0
\end{aligned}$$

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل y_1 اور y_2 سے نیا حل

$$y_3=c_1y_1+c_2y_2,\quad (c_1 \text{ اور } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں}) \tag{2.4}$$

حاصل کیا۔ اس کو y_1 اور y_2 کا **خطی میل**[10] کہتے ہیں۔اس مثال سے ہم **مسئلہ خطی میل** بیان کرتے ہیں جسے عموماً **اصول خطیت** یا **اصول خطی میل** کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ دو درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات کے دو عدد حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل y_1 اور y_2 پائے جاتے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}
y_1''+py_1'+qy_1&=0\\
y_2''+y_2'+qy_2&=0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

---

[10] linear combination

ہو گا۔ خطی میل سے نیا حل $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ حاصل کرتے ہیں۔اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
y_3' &= c_1y_1' + c_2y_2' \\
y_3'' &= c_1y_1'' + c_2y_2''
\end{aligned}$$

y_3 ، y_3' اور y_3'' کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
y_3'' + py_3' + qy_3 &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔یوں مساوات کا بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہٰذا ثابت ہوتا ہے کہ y_3 بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

انتباہ: یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل مقدار ہیں۔

حل: y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہٰذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned}
y_1'' + py_1' + qy_1 &= r \\
y_2'' + py_2' + qy_2 &= r
\end{aligned} \tag{2.6}$$

y_3 کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
y_3'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= (c_1 + c_2)r
\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔اس سے $(c_1 + c_2)r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ r کے برابر ہے لہٰذا y_3 متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔یوں y_3 متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات
درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں $y = 2 - \cos x$ اور $y = 2 - \sin x$ کو پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔اسی طرح ثابت کریں کہ $3(2 - \cos x)$ یا $-7(2 - \sin x)$ بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں $y = 1$ اور $y = x^3$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی $y = -x^3$ حل ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو -1 سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

ابتدائی قیمت مسائل۔اساس۔عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔درجہ اول سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل c حاصل کرتے ہوئے مخصوص یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔اسی تصور کو دو درجی سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو درجی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{2.7}$$

K_0 اور K_1 کھلے وقفہ پر نقطہ x_0 پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{2.8}$$

کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔یہاں y_1 اور y_2 مساوات 2.7 کے حل ہیں۔یوں مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ (x_0, K_0) سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر K_1 ہوتی ہے۔

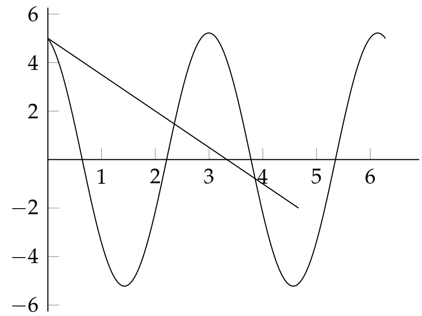
مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل:پہلا قدم: اس مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہٰذا اس کا موزوں عمومی حل

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \tag{2.9}$$

ہو گا۔ (موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)



شکل 2.1: مثال 2.3 کا مخصوص حل۔

دوسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرتے ہیں۔ عمومی حل کا تفرق $y' = -2\sin 2x + 2c_2\cos x$ ہے۔ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1\cos 0 + c_2\sin 0 = c_1 = 5 \\ y'(0) &= -2\sin 0 + 2c_2\cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مخصوص حل

$$y = 5\cos 2x - 1.5\sin 2x$$

ہو گا۔ شکل 2.1 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔نقطہ $x = 0$ پر اس کی قیمت $y(0) = 5$ ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس) $y'(0) = 0.5$ ہے۔ مماس x محور کو $x = \frac{5}{3} = 3.33$ پر قطع کرتا ہے۔

درج بالا مثال میں y_1 اور y_2 ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔آئیں اب دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = k\cos 2x$ لیتے ہوئے

$$y = c_1\cos 2x + c_2 k\cos 2x = (c_1 + c_2 k)\cos 2x = c_3\cos 2x$$

عمومی حل لکھتے ہیں۔اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل c_3 پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل y_1 اور y_2 انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

تعریف : عمومی حل، اساس اور مخصوص حل کے تعریف
کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔فاصلہ I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کی **اساس**[11] حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا مخصوص حل مساوات 2.9 میں c_1 اور c_2 کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔ y_1 اور y_2 اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے I پر

$$(a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1 \tag{2.10}$$

ہو، جہاں k اور l اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔(یہاں توجہ رکھیں: a اس صورت b کے مترادف ہے جب $k \neq 0$ ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت **خطی طور غیر تابع**[12] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.11}$$

سے مراد

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \tag{2.12}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 **خطی طور تابع**[13] کہلاتے ہیں۔اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.11 کو

---

[11] basis
[12] linearly independent
[13] linearly dependent

k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$y_1 = k y_2, \quad y_2 = l y_1 \qquad \text{پورے کھلے وقفے } I \text{ پر} \tag{2.13}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابع صورت میں ہم مساوات 2.11 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا (اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔)اس طرح اساس کی (درج ذیل) قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف : اساس کی قدر مختلف تعریف
کھلے وقفے I پر مساوات 2.11 کا خطی طور غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

اگر کسی کھلے وقفے I پر مساوات   کے عددی سر p اور q استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کا عمومی حل موجود ہے۔مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔ وقفہ I پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات کا کوئی نادر[14] حل موجود نہیں ہے (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور مخصوص حل
$\cos 2x$ اور $\sin 2x$ تمام x پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات $y'' + 4y = 0$ کے حل کی اساس ہیں۔ایسا اس لئے ہے کہ $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq c$ اور $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \neq 0$ ہیں جہاں c مستقل ہے۔اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے مخصوص حل $y = 5\cos 2x - 1.5\sin 2x$ حاصل کیا گیا تھا۔

---

[14] singular solution

مثال 2.5: پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ سادہ تفرقی مساوات $y'' - 4y = 0$ کے حل ہیں۔یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$$

حل: چونکہ $y_1'' - 4y_1 = (e^{2x})'' - 4e^{2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ اور $y_2'' - 4y_2 = (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ ہیں لہٰذا y_1 اور y_2 دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔چونکہ $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} \neq c$ ہے جہاں c مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں e^{2x} اور e^{-2x} پورے x پر حل کا اساس ہے۔اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2, \quad y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}, \quad y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1$$

دو عدد **ہمزاد مساوات**[15] $c_1 + c_2 = 2$ اور $2c_1 - 2c_2 = 1$ کو آپس میں حل کرتے ہوئے $c_1 = \frac{3}{4}$ اور $c_2 = \frac{5}{4}$ ملتے ہیں جس سے مخصوص حل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔تخفیف درجہ

بعض اوقات ایک حل با آسانی حاصل ہو جاتا ہے۔دوسرا خطی طور غیر تابع حل یک درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کو **تخفیف درجہ**[16] کی ترکیب[17] کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی مثال دیکھنے کے بعد اس کی عمومی اطلاق پر غور کرتے ہیں۔

[15] simultaneous equations
[16] reduction of order
[17] یہ ترکیب یوسف لوئی لیگرینج (1736-1813) نے دریافت کی۔

مثال 2.6: ایک حل جانتے ہوئے تخفیف درجہ۔اساس
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات کے اساس حل دریافت کریں۔

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

حل: دیے گئے مساوات کے معائنے سے ایک حل $y_1 = x$ لکھا جا سکتا ہے چونکہ یوں $y_1'' = 0$ ہو گا لہٰذا تفرقی مساوات کا پہلا جزو صفر ہو جاتا ہے اور $y_1' = 1$ ہو گا جس سے مساوات کے دوسرے اور تیسرے اجزاء کا مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس ترکیب میں دوسرے حل کو $y_2 = uy_1$ لکھ کر دیے گئے تفرقی مساوات میں

$$y_2 = uy_1 = ux, \quad y_2' = u'x + u, \quad y_2'' = u''x + 2u'$$

پر کرتے ہیں۔

$$x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$

درج بالا کو ترتیب دیتے ہوئے xu اور $-xu$ آپس میں کٹ جاتے ہیں اور $x^3u'' + x^2u' = 0$ رہ جاتا ہے جس کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xu'' + u' = 0$$

ملتا ہے۔اس میں $u' = v$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہیں۔

$$xv' + v = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad v = \frac{1}{x}$$

اس میں واپس $v = u'$ پر کرتے ہوئے تکمل سے u حاصل کرتے ہیں۔

$$v = u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x|$$

یوں $y_2 = x\ln|x|$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ y_1 اور y_2 کا **حاصل تقسیم** مستقل نہیں ہے لہٰذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں اساس حل $y_1 = x$ ، $y_2 = x\ln|x|$ ہے۔دونوں بار تکمل لیتے ہوئے تکمل کا مستقل نہیں لکھا گیا چونکہ ہمیں اساس درکار ہے۔عمومی مساوات لکھتے وقت مستقل لکھنا ضروری ہو گا۔

اس مثال میں ہم نے **تخفیف درجہ** کی ترکیب متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.14}$$

پر استعمال کی۔ درج بالا مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں پہلا جزو y'' ہے جس کا عددی سر اکائی کے برابر ہے۔ نیچے اخذ کلیات مساوات کی معیاری صورت کے لئے حاصل کئے گئے ہیں۔ تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر ہمیں مساوات 2.14 کا ایک عدد حل y_1 معلوم ہے اور ہم حل کا اساس جاننا چاہتے ہیں۔ اس کی خاطر ہمیں I پر خطی طور غیر تابع دوسرا حل y_2 درکار ہے۔ دوسرا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$y = y_2 = uy_1, \quad y' = y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

کو مساوات 2.14 میں پر کرتے ہوئے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0$$

u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

چونکہ y_1 مساوات 2.14 کا حل ہے لہٰذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $u' = v$ پر کرنے سے **تخفیف شدہ**[18] ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)v = 0$$

علیحدگی متغیرات کے بعد تکمل لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)\mathrm{d}x, \quad \ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p\,\mathrm{d}x$$

---

[18] reduced

یعنی

$$v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p \,\mathrm{d}x} \tag{2.15}$$

ملتا ہے۔ چونکہ $v = u'$ کے برابر ہے لہٰذا دوسرا حل

$$y_2 = y_1 u = y_1 \int v \,\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

ہو گا۔ حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = u = \int p \,\mathrm{d}x$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا چونکہ $v > 0$ ہے لہٰذا y_1 اور y_2 اساس حل ہیں۔

متجانس خطی دو درجی مساوات سے ایک درجی مساوات کا حصول ہم دیکھ چکے۔ آئیں تخفیف درجہ کے دو مثال دیکھیں جو خطی مساوات اور غیر خطی مساوات پر لاگو کی جا سکتی ہیں۔

مثال 2.7: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں y صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ y صریحاً نہیں پایا جاتا لہٰذا اس کو $F(x, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں جس میں $z = y'$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(x, z, z')$ حاصل ہوتی ہے۔ ایک درجی مساوات کے حل کے تکمل سے y حاصل ہو گا۔

مثال 2.8: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں x صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ x صریحاً نہیں پایا جاتا لہٰذا اس کو $F(y, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں۔ ہم $z = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ لیتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق[19] سے

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y''}{z}$$

[19] chain rule of differentiation

یعنی

$$y'' = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ z اور z_y کو دیے مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(y, z, z_y)$ ملتی ہے جس کا آزاد متغیرہ y ہے۔

سوالات

سوال 2.1 تا سوال 2.7 سے ایک درجی مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.1:

$$y'' - y' = 0$$

جواب: $y = c_1 e^x + c_2$

سوال 2.2:

$$xy'' + y' = 0$$

جواب: $y = c_1 \ln|x| + c_2$

سوال 2.3:

$$xy'' - 2y' = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2$

سوال 2.4:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

جواب: $y = c_2 e^{c_1 x}$

سوال 2.5:

$$y'' - (y')^3 \cos y = 0$$

جواب: $\cos y + c_1 y = x + c_2$

سوال 2.6:

$$y'' - (y')^2 \cos y = 1$$

جواب: $y = \ln \sec(x + c_1) + c_2$

سوال 2.7:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x^2$$

جواب: $y = c_1 x^2 + c_2 x$

قابل تخفیف سادہ تفرقی مساوات کے استعمال سوالات 2.8 تا سوال 2.11 دیتے ہیں۔

سوال 2.8: منحنی
کارتیسی محدد کے محور سے گزرتی منحنی $y'' + y' = 0$ کی مرکز پر ڈھلوان اکائی کے برابر ہے۔ منحنی کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $y = 1 - e^{-x}$

سوال 2.9: لیزم
دو مقررہ نقاط سے لٹکی ہوئی زنجیری ڈوری سے بننے والا خم لیزم[20] کہلاتا ہے جسے مساوات $y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$ کے حل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مستقل k کی قیمت ڈوری کی تناو اور کمیت پر منحصر ہے۔ڈوری نقطہ $(1,0)$ اور $(-1,0)$ سے لٹکی ہوئی ہے۔ $k = 1$ تصور کرتے ہوئے لیزم کی مساوات حاصل کریں۔

[20] catenary

جواب: زنجیر کے وسط یعنی $x=0$ پر ڈھلوان صفر کے برابر ہے۔یوں $y=-1+\cosh x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 2.10: حرکت
ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع اور رفتار میں فرق ایک مثبت مستقل k کے برابر رہتی ہے۔فاصلہ $y(t)$ ابتدائی رفتار u اور ابتدائی فاصلہ y_0 پر کس طرح منحصر ہے؟

جواب: $y=(k+u)e^t+(y_0-u)-k(t+1)$

سوال 2.11: حرکت
ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع کی قیمت رفتار کی قیمت کے مربع کے برابر رہتی ہے۔فاصلے کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $t=c_1-\ln(t+c_2)$

سوال 2.12 تا سوال 2.15 میں ثابت کریں کہ دیے گئے تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں یہ حل کی اساس ہیں۔ان ابتدائی قیمت سوالات کے حل لکھیں۔

سوال 2.12:

$$y''+9y=0,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=-2;\quad \cos 3x\ \sin 3x$$

جواب: $y=5\cos 3x-\frac{2}{3}\sin 3x$

سوال 2.13:

$$y''-2y'+y=0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=1;\quad e^x,\ xe^x$$

جواب: $y=e^{x-1}(x-1)$

سوال 2.14:

$$x^2y''-xy'+y=0,\quad y(1)=3.2,\quad y'(1)=-1.5;\quad x,\ x\ln x$$

جواب: $y=\frac{16}{5}x-\frac{47}{10}x\ln x$

سوال 2.15:

$$y''+2y'+3y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-3;\quad e^{-x}\cos\sqrt{2}x,\ e^{-x}\sin\sqrt{2}x$$

جواب: $y=e^{-x}(2\cos\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x)$

2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب ایسے دو درجی متجانس تفرقی مساوات پر بات کرتے ہیں جن کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہیں۔

$$y'' + ay' + b = 0 \tag{2.17}$$

یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔قوت نمائی تفاعل $y = e^{-kx}$ کے تفرق سے $y' = -ke^{-kx} = -ky$ یعنی $y' + ky = 0$ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔یوں $y' + ky = 0$ کا حل $y = e^{-kx}$ ہے۔اس کو دیکھتے ہوئے ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ آیا مساوات 2.17 کا حل

$$y = e^{\lambda x} \tag{2.18}$$

ممکن ہے یا نہیں۔یہ جاننے کی خاطر $y = e^{\lambda x}$ اور اس کے تفرق

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

کو مساوات 2.17 میں پر کرتے ہیں۔

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

کسی بھی محدود قیمت کے λ اور x کے لئے $e^{\lambda x}$ صفر نہیں ہو گا لہٰذا اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب λ **امتیازی مساوات**[21]

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.19}$$

کا جذر ہو۔اس **دو درجی الجبرائی مساوات**[22] کو حل کرتے ہیں۔

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{2.20}$$

یوں مساوات 2.17 کے حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.21}$$

ہوں گے۔انہیں مساوات 2.17 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہی تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

دو درجی الجبرائی مساوات 2.19 کے جذر کی تین ممکنہ قیمتیں ہیں جو $a^2 - 4b$ کی علامت $(\mp)$ پر منحصر ہیں۔

---
[21] characteristic equation
[22] quadratic equation

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر $a^2 - 4c > 0$

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر $a^2 - 4c = 0$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر $a^2 - 4c < 0$

آئیں ان تین صورتوں پر باری باری غور کریں۔

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر

اس صورت میں، چونکہ y_1 اور y_2 کسی بھی وقفے I پر معین ہیں (اور حقیقی ہیں) اور ان کا حاصل تقسیم مستقل قیمت نہیں ہے لہٰذا کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.22}$$

ہو گا۔یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{2.23}$$

مثال 2.9: دو حقیقی منفرد جذر
مساوات $y'' - 4y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔اس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 - 4 = 0$ ہے جس کے جذر $\lambda_1 = +2$ اور $\lambda_2 = -2$ دو منفرد قیمتیں ہیں۔یوں حل کا اساس $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ ہے جن سے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 2.10: ابتدائی قیمت مسئلہ۔دو حقیقی منفرد جذر
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + y' - 6 = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$$

حل: امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

جس کے جذر

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+24}}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+24}}{2} = -3,$$

ہیں۔ان سے اساس حل $y_1 = e^{2x}$ ، $y_2 = e^{-3x}$ ملتا ہے جس سے **عمومی حل** حاصل ہوتا ہے۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$ ہے لہٰذا

$$y(0) = c_1 + c_2 = -4$$
$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 5$$

لکھا جائے گا۔ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{7}{5}$ اور $c_2 = -\frac{13}{5}$ ملتا ہے جن سے **مخصوص حل** لکھتے ہیں۔

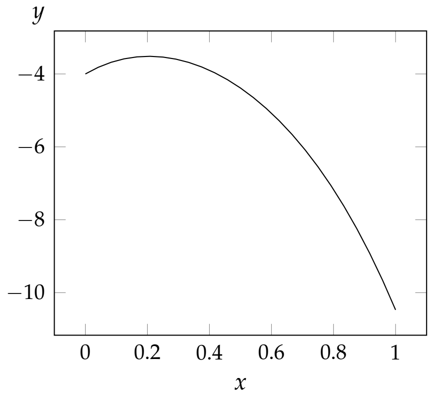
$$y = -\frac{7}{5} e^{2x} - \frac{13}{5} e^{-3x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے جو ابتدائی قیمتوں پر پورا اترتا ہے۔

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر

اگر $a^2 - 4c = 0$ ہو تب مساوات 2.20 سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ ملتا ہے جو واحد حل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$$



شکل 2.2: مثال 2.10 کا مخصوص حل۔

دیتا ہے۔ ہمیں اساس کے لئے دو حل درکار ہیں۔دوسرا حل **تخفیف درجہ** کی ترکیب سے حاصل کیا جائے گا۔اس ترکیب پر بحث ہو چکی ہے۔یوں ہم دوسرا حل $y_2 = uy_1$ تصور کرتے ہیں۔مساوات 2.17 میں

$$y_2 = uy_1, \quad y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \tag{2.24}$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے۔اب پہلی قوسین پر غور کرتے ہیں۔چونکہ $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ لہٰذا $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$ ہو گا۔ان قیمتوں کو پہلی قوسین میں پر کرتے

$$2y_1' + ay_1 = 2(-\frac{a}{2}y_1) + ay_1 = 0$$

ہوئے یہ قوسین بھی صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 2.24 سے $u''y_1 = 0$ یعنی $u'' = 0$ حاصل ہوتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لیتے ہوئے $u = c_1x + c_2$ ملتا ہے۔دوسرا خطی طور غیر تابع حل $y_2 = uy_1$ حاصل کرتے ہوئے ہم $c_1 = 1$ اور $c_2 = 0$ چن سکتے ہیں جن سے $u = x$ اور $y_2 = xy_1$ حاصل ہوتے ہیں۔چونکہ y_1 اور حاصل کردہ $y_2 = xy_1$ کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا یہ دونوں خطی

طور غیر تابع ہیں اور انہیں اساس لیا جا سکتا ہے۔یوں دوہرے جذر کی صورت میں کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

اور عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{a}{2}x} \tag{2.25}$$

مثال 2.11: دوہرے جذر کی صورت میں عمومی حل
سادہ تفرقی مساوات $y'' + 10y' + 25 = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ ہے جس کو $(\lambda + 5)^2 = 0$ لکھ کر دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ حاصل ہوتا ہے۔یوں تفرقی مساوات کے حل کا اساس $y_1 = e^{-5x}$ ، $y_2 = xe^{-5x}$ اور اس کا عمومی حل $y = (c_1 + c_2 x)e^{-5x}$ ہے۔

مثال 2.12: دوہرے جذر کی صورت میں مخصوص حل کا حصول
دیے گئے تفرقی مساوات کا مخصوص حل دریافت کریں۔

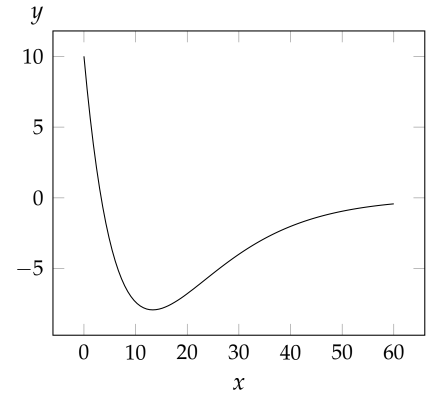
$$y'' + 0.2y' + 0.01y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = -4$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.01 = 0$ یعنی $(\lambda + 0.1)^2 = 0$ سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.1$ دوہرا جذر حاصل ہوتا ہے جس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل کا جذر لکھتے ہیں جو مخصوص حل کے حصول میں درکار ہے۔

$$y' = c_2 e^{-0.1x} - 0.1(c_1 + c_2 x)e^{-0.1x}$$



شکل 2.3: مثال 2.12 کا مخصوص حل۔

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 10 \\ y'(0) &= c_2 - 0.1c_1 = -4, \quad c_2 = -3 \end{aligned}$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (10 - 3x)e^{-0.1x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے۔

تیسری صورت: مخلوط جوڑی دار جذر

امتیازی مساوات 2.19 میں $a^2 - 4c$ کی قیمت منفی ہونے کی صورت میں مخلوط جوڑی دار جذر $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$ ملتے ہیں جہاں $\omega^2 = b - \frac{a^2}{4}$ کے برابر ہے۔ان سے مخلوط اساس لکھتے ہیں۔

$$y_{m1} = e^{(-\frac{a}{2}+i\omega)x}, \quad y_{m2} = e^{(-\frac{a}{2}-i\omega)x} \tag{2.26}$$

اس مخلوط اساس سے حقیقی اساس حاصل کیا جائے گا۔ایسا کرنے کی خاطر ریاضی کے چند کلیات پر غور کرتے ہیں۔تفاعل e^z ، جہاں $z = x + iy$ مخلوط عدد ہے جبکہ x اور y حقیقی اعداد ہیں، کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

e^{iy} کی **مکلارن تسلسل**[23] لکھ کر حقیقی اجزاء اور خیالی اجزاء کو علیحدہ علیحدہ قوسین میں اکٹھے کرتے ہیں۔یہاں $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$ لئے گئے ہیں۔

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} \cdots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \cdots\right) \\
&= \cos y + i \sin y
\end{aligned}$$

آخری قدم پر آپ تسلی کر لیں کہ پہلی قوسین $\cos y$ کی مکلارن تسلسل دیتی ہے جبکہ دوسری قوسین $\sin y$ کی مکلارن تسلسل دیتی ہے۔ آپ اس کتاب میں آگے پڑھیں گے کہ درج بالا تسلسل میں اجزاء کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔یوں ہم **یولر مساوات**[24]

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{2.27}$$

حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i \sin y \tag{2.28}$$

مساوات 2.27 اور مساوات 2.28 کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{2.29}$$

ہو گا۔یہ سب جاننے کے بعد آئیں مساوات 2.26 میں دیے مخلوط اساس پر دوبارہ غور کریں۔

$$\begin{aligned}
y_{m1} &= e^{(-\frac{a}{2}+i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos \omega x + i \sin \omega x) \\
y_{m2} &= e^{(-\frac{a}{2}-i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{-i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos \omega x - i \sin \omega x)
\end{aligned}$$

چونکہ اساس کے اجزاء کو مستقل (حقیقی یا خیالی یا مخلوط) سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے نیا حل حاصل کیا جا سکتا ہے لہٰذا ہم درج بالا دونوں اجزاء کو مستقل $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے ایک نیا اور حقیقی حل y_1

[23] Maclaurin series
[24] Euler equation

دریافت کرتے ہیں۔

$$y_1 = \frac{1}{2}y_{m1} + \frac{1}{2}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x}\cos\omega x$$

اسی طرح مخلوط اساس کے پہلے جزو کو مستقل $\frac{1}{2i}$ اور دوسرے جزو کو مستقل $-\frac{1}{2i}$ سے ضرب دیتے ہوئے جمع کر کے نیا اور حقیقی حل y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y_2 = \frac{1}{2i}y_{m1} - \frac{1}{2i}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x}\sin\omega x$$

درج بالا حاصل کردہ حقیقی تفاعل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}\cos\omega x \quad y_2 = e^{-\frac{a}{2}x}\sin\omega x \tag{2.30}$$

کو از خود حل کا اساس تصور کیا جا سکتا ہے۔ یہاں غور کریں کہ ہم نے مخلوط جذر $\lambda = (-\frac{a}{2} \mp i\omega)x$ سے حقیقی اساس (مساوات 2.30) حاصل کیا ہے۔ اس حقیقی اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x) \tag{2.31}$$

مثال 2.13: مخلوط جذر، ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

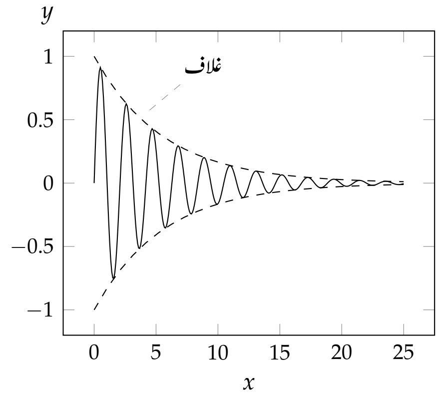
$$y'' + 0.36y' + 9.0324y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.36\lambda + 9.0324 = 0$ کے مخلوط جذر $\lambda = -0.18 + \mp i3$ ہیں لہٰذا عمومی حل

$$y = e^{-0.18x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$$

ہو گا۔ مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر c_1 اور c_2 درکار ہیں جنہیں عمومی مساوات میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ پہلے ابتدائی معلومات سے

$$y(0) = e^0(c_1\cos 0 + c_2\sin 0) = 0, \quad c_1 = 0$$



شکل 2.4: مثال 2.13 کا مخصوص حل۔

ملتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق

$$y' = -0.5e^{-0.5x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-0.5x}(-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x)$$

میں دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$y' = -0.5e^{0}(0 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^{0}(0 \sin 0 + 3c_2 \cos 0) = 3, \quad c_2 = 1$$

ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-0.18x} \sin 3x$$

شکل 2.4 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ، نقطہ دار لکیروں سے، سائن نما منحنی کے مثبت چوٹیوں کو چھوتا ہوا **غلاف**[25] $e^{-0.18x}$ اور منفی چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف $-e^{-0.18x}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ مخصوص حل (x کو t لیتے ہوئے) **قصری ارتعاش**[26] کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر y فاصلے کو ظاہر کرتی ہو تب یہ میکانی قصری ارتعاش ہو گی اور اگر y برقی رو یا برقی دباو ہو تب یہ برقی قصری ارتعاش ہو گی۔

---

[25] envelope
[26] damped oscillations

جدول 2.1: تین صورتوں کی تفصیل

صورت	مساوات 2.19 کے جذر	مساوات 2.17 کی اساس	مساوات 2.17 کا عمومی حل
پہلی	منفرد حقیقی λ_1 ، λ_2	$e^{\lambda_1 x}$ ، $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
دوسری	دوہرا جذر $\lambda = -\frac{a}{2}$	$e^{-\frac{a}{2}x}$ ، $xe^{-\frac{a}{2}x}$	$y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$
تیسری	جوڑی دار مخلوط $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$	$e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$ ، $e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x$	$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$

مثال 2.14: مخلوط جذر
سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad (\omega \text{ غیر صفر مستقل ہے})$$

کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

جدول 2.1 میں درج بالا تین صورتوں کی تفصیل اکٹھی کی گئی ہے۔یہ تین اقسام میکانی ارتعاش یا برقی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہیں۔آپ تفرقی مساوات کی قوت یہاں سے جان سکتے ہیں۔آپس میں بالکل مختلف میدانوں (مثلاً میکانی اور برقی) کے مسائل ایک طرز کی تفرقی مساوات سے ظاہر کئے جا سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.16 تا سوال 2.24 کے عمومی حل حاصل کریں۔انہیں واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ان کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 2.16:

$$y'' + 4y = 0$$

جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

سوال 2.17:

$$4y'' - 9y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.18:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

سوال 2.19:

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{-\pi x}$

سوال 2.20:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$

سوال 2.21:

$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3}{2}x}$

سوال 2.22:

$$4y'' + 4y' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.23:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

سوال 2.24:

$$9y'' - 30y' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{5}{3}x}$

سوال 2.25 تا سوال 2.29 میں اساس سے تفرقی مساوات $y'' + ay' + by = 0$ حاصل کریں۔

سوال 2.25:

$$e^{0.2x}, \quad e^{-0.5x}$$

جواب: $y'' + 0.3y' - 0.1y = 0$

سوال 2.26:

$$e^{-0.66x}, \quad e^{-0.32x}$$

جواب: $y'' + 0.98y' + 0.2112y = 0$

سوال 2.27:

$$\cos(4\pi x), \quad \sin(4\pi x)$$

جواب: $y'' + 16\pi^2 y = 0$

سوال 2.28:

$$e^{(-2+i3)x}, \quad e^{(-2-i3)x}$$

جواب: $y'' + 4y'' + 13y = 0$

سوال 2.29:

$$e^{-1.7x}\cos 6.2x, \quad e^{-1.7x}\sin 6.2x$$

جواب: $y'' + 3.4y'' + 41.33y = 0$

سوال 2.30 تا سوال 2.37 ابتدائی قیمت سوالات ہیں۔ان کے مخصوص حل دریافت کریں۔

سوال 2.30:

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$$

جواب: $y = 5\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x$

سوال 2.31:

$$y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

جواب: $y = 0.7e^{5x} + 1.3e^{-5x}$

سوال 2.32:

$$y'' - y'' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

جواب: $y = \frac{1}{5}(e^{3x} - e^{-2x})$

سوال 2.33:

$$4y'' + 4y'' + 37y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

جواب: $y = e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x$

سوال 2.34:

$$9y'' + 12y'' + 49y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

جواب: $y = e^{-\frac{2}{3}x}(2\cos\sqrt{5}x + \frac{1}{3\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}x)$

سوال 2.35:

$$y'' - 6y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$$

جواب: $y = \frac{1}{40}e^{3x}\sin 4x$

سوال 2.36:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

جواب: $y=\cos x+\sin x$

سوال 2.37:

$$8y''-2y'-y=0,\quad y(0)=2.2,\quad y'(0)=3.4$$

جواب: $y=\frac{79}{15}e^{\frac{x}{2}}-\frac{46}{15}e^{-\frac{x}{4}}$

عمومی حل کے حصول میں خطی طور غیر تابع تفاعل نہایت اہم ہیں۔ صرف ایسے تفاعل سے اساس حاصل ہوتا ہے۔ دیے وقفے پر سوال 2.38 تا سوال 2.42 میں دیے تفاعل میں خطی طور تابع اور غیر تابع کی نشاندہی کریں۔

سوال 2.38:

$$\cos kx,\quad \sin kx,\quad -\infty<x<\infty$$

جواب: چونکہ $\frac{\sin kx}{\cos kx}$ کی قیمت x تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتی ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 2.39:

$$e^{kx},\quad e^{-kx}\quad -\infty<x<\infty$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.40:

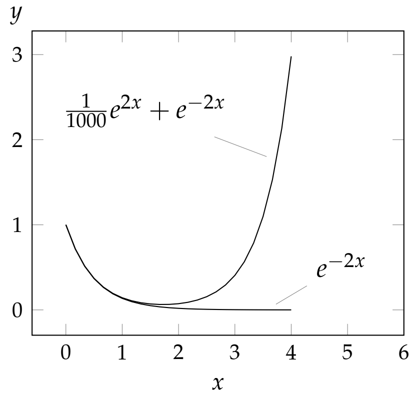
$$x,\quad x^2\quad x>1$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.41:

$$x\ln x,\quad x^2\ln x\quad x>1$$

جواب: خطی طور غیر تابع



شکل 2.5: سوال 2.43 کے منحنی حل۔

سوال 2.42:

$$x \ln x, \quad x \ln x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 2.43: غیر مستحکم صورت حال
ابتدائی قیمت مسئلہ $y'' - 4y = 0$ میں ابتدائی قیمتیں $y(0) = 1$ اور $y'(0) = -2$ لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔ مخصوص حل کو دوبارہ ابتدائی معلومات $y(0) = 1.001$ اور $y'(0) = -1.998$ کے لئے حاصل کریں۔

جوابات: $y = e^{-2x}$ اور $y = \frac{1}{1000}e^{2x} + e^{-2x}$ ؛ شکل 2.5 میں دونوں حل دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ابتدائی قیمتوں میں انتہائی کم فرق حل پر بہت زیادہ اثر ڈالتی ہیں۔یہ **غیر مستحکم**[27] صورت کو ظاہر کرتی ہے۔زلزلے میں غیر مستحکم عمارتیں انہیں وجوہات پر ڈھیر ہوتی ہیں۔فضا میں ہوا کا دباو، درجہ حرارت اور نمی کی تناسب بھی غیر مستحکم صورت پیدا کرتے ہوئے تباہ کن آندھیوں کا سبب بنتی ہیں۔

سوال 2.44: استمراری مساوات کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = 3$ ہیں۔مساوات 2.17 حاصل کریں۔

جواب: $y'' - y' - 6y = 0$

[27]instability

سوال 2.45: استمراری مساوات کے جذر λ_1 اور λ_2 ہیں۔مساوات 2.17 میں a اور b حاصل کریں۔ یوں جذر جانتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔

جواب: $a = -\lambda_1 - \lambda_2$ ، $b = \lambda_1\lambda_2$

سوال 2.46: تفرقی مساوات $y'' + ky' = 0$ کو موجودہ طریقے سے حل کریں۔ اسی کو تخفیف درجہ کی ترکیب سے بھی حل کریں۔دونوں جواب کیوں یکساں ہونا ضروری ہے۔

جواب: $y = c_1 + c_2 e^{-kx}$ ؛ یکتائیت۔

سوال 2.47: دوہرا جذر کو منفرد λ_1 اور λ_2 کی وہ صورت تصور کی جا سکتی ہے جب $\lambda_2 \to \lambda_1$ ہو۔ $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ لیتے اور ایک حل $= e^{\lambda_1 x}$ لیتے ہوئے اساس کا دوسرا رکن $xe^{\lambda_1 x}$ تلاش کریں۔

حل:دوسرا حل $e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1+\Delta\lambda)x} = e^{\lambda_1 x}e^{\Delta\lambda x}$ ہے۔ $e^{\Delta\lambda x}$ کا مکلارن تسلسل لیتے ہوئے $\Delta\lambda \to 0$ کی بنا صرف پہلے دو ارکان لیتے ہیں۔ یوں $e^{\Delta\lambda x} = 1 + \frac{\Delta\lambda x}{1!} + \frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!} + \cdots \approx 1 + \Delta\lambda x$ ہو گا اور $e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} + \Delta\lambda x e^{\lambda_1 x}$ لکھا جا سکتا ہے۔اب چونکہ $e^{\lambda_1 x}$ پہلے سے اساس کا حصہ ہے لہٰذا اساس کا دوسرا رکن $xe^{\lambda_1 x}$ ہو گا جہاں $\Delta\lambda$ کو مستقل تصور کرتے ہوئے رد کیا جاتا ہے

2.3 تفرقی عامل

آپ $y = \sin x$ یا $y = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ کے عمل سے بخوبی واقف ہیں۔پہلی مثال میں کسی مقدار یا تفاعل x پر عامل $\sin$ عمل کرتے ہوئے ایک نیا تفاعل دیتا ہے۔یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ **عامل**[28] $\sin$ تفاعل x کے نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ سے مبدل تفاعل y کا نقطہ $y = 1$ دیتا ہے۔اسی طرح **عامل** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ تفاعل x^3 پر عمل کرتے ہوئے تفاعل $3x^2$ دیتا ہے۔

یہ بتلاتا چلوں کہ ریاضیات اور طبیعیات میں عامل کا استعمال نہایت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ یہاں بالخصوص **کوانٹم میکانیات**[29] کا ذکر کرنا لازم جہاں عامل کا استعمال کثرت سے کیا جاتا ہے۔

[28] operator
[29] quantum mechanics

اس کتاب میں ہم صرف **تفرقی عامل**[30] D پر بحث کریں گے جہاں $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ہے۔ یوں ایک درجی تفرق

$$Dy = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2.32}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح دو درجی تفرق $D^2y = D(Dy) = y''$ اور تین درجی تفرق $D^3y = y'''$ لکھا جائے گا۔اس طرح $D\sin x = \cos x$ اور $D^2 \sin x = -\sin x$ ہو گا۔

خطی متجانس مساوات $y'' + ay' + by = 0$ جہاں a اور b مستقل مقدار ہیں میں **دو درجی تفرق عامل**

$$L = P(D) = D^2 + aD + bI$$

متعارف کرتے ہیں جہاں I **مماثلی عامل**[31] ہے جس کی تعریف $Iy = y$ ہے۔اس طرح دیے گئے تفرقی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Ly = P(D)y = (D^2 + aD + bI)y = 0 \tag{2.33}$$

L خطی عامل اور P کثیر رکنی[32] ہے۔یوں اگر Lw اور Ly پائے جاتے ہوں (یعنی w اور y دو مرتبہ قابل تفرق ہوں) تب $L(cy + kw)$ بھی پایا جاتا ہے جہاں c اور k کوئی مستقل ہیں۔مزید درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L(cy + kw) = cLy + kLw \tag{2.34}$$

چونکہ $De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ اور $D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} Le^{\lambda x} &= (D^2 + aD + bI)e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

ہو گا۔حصہ 2.2 میں بھی ہم نے یہی نتیجہ اخذ کیا تھا کہ $e^{\lambda x}$ صرف اور صرف اس صورت اس تفرقی مساوات کا حل ہو گا اگر λ امتیازی مساوات $P(\lambda) = 0$ کا جذر ہو۔

یہاں دلچسپ بات یہ ہے کہ $P(\lambda)$ عام الجبرائی کثیر رکنی ہے جس کی تجزی[33] کی جا سکتی ہے۔ λ کی جگہ D پر کرنے سے کثیر رکنی عامل حاصل ہوتا ہے۔

---

[30] differential operator
[31] identity operator
[32] polynomial
[33] factorization

مثال 2.15: تفرقی مساوات کا حل بذریعہ تجزی
کثیر رکنی $P(D)=D^2+4D-21I$ کی تجزی سے $P(D)=0$ کو حل کریں۔

حل: $I^2=1$ لیتے ہوئے $D^2+4D-21I=(D-3)(D+7)$ لکھا جا سکتا ہے۔اب $(D-3)y=y'-3y=0$ کا حل $y_1=e^{3x}$ اور $()y=y'+7y=0$ کا حل $y_2=e^{-7x}$ ہے۔یہ جوابات کسی بھی وقفے پر حل کی اساس ہیں۔آئیں تفرقی مساوات حاصل کریں۔

$$(D-3)(D+7)y=(D-3)(y'+7y)=y''+7y'-3y'-21y=y''+4y'-21y=0$$

مساوات 2.33 میں کثیر رکنی کے عددی سر مستقل مقدار ہیں۔ایسی صورت میں تفرقی عامل کے استعمال سے تفرقی مساوات حل کرنا نہایت آسان ثابت ہوتا ہے۔عددی سر مستقل نہ ہونے کی صورت میں تفرقی عامل کا استعمال نہایت پیچیدہ ثابت ہوتا ہے جس پر اس کتاب میں تبصرہ نہیں کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 2.48 تا سوال 2.52 دیے تفاعل پر دیا تفرقی عامل لاگو کریں۔

سوال 2.48:

$$D+2I; \quad x^3, \quad \cos 5x, \quad e^{-kx}, \quad \cosh x$$

جوابات: $3x^2+2x^3$ ، $-5\sin 5x+2\cos 5x$ ، $(2-k)e^{-kx}$ ، $\sinh x+2\cosh x$

سوال 2.49:

$$D^2-3D; \quad 2x^4-x, \quad 2\sinh 2x-\cos 5x$$

جوابات: $24x^2-24x^3+3$ ، $-15\sin 5x-12\cosh 2x+25\cos 5x+\sinh 2x$

سوال 2.50:

$$(D+2I)^2; \quad e^{3x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $25e^{3x}$ ، $(12x+8)e^{2x}$

سوال 2.51:

$$(D-3I)^2; \quad e^{2x}, \quad xe^{3x}$$

جوابات: e^{2x} ، 0

سوال 2.52:

$$(D+I)(D-2I); \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $-2e^{2x}$ ، $2(1-x)e^{2x}$

سوال 2.53 تا سوال 2.57 کی تجزی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.53:

$$(D^2-9I)y=0$$

جواب: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$

سوال 2.54:

$$(D^2+4D+4I)y=0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے لہٰذا دوسرا حل xe^{2x} لیتے ہوئے $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$ ملتا ہے۔

سوال 2.55:

$$(D^2+4D+13I)y=0$$

جواب: $y=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$

سوال 2.56:

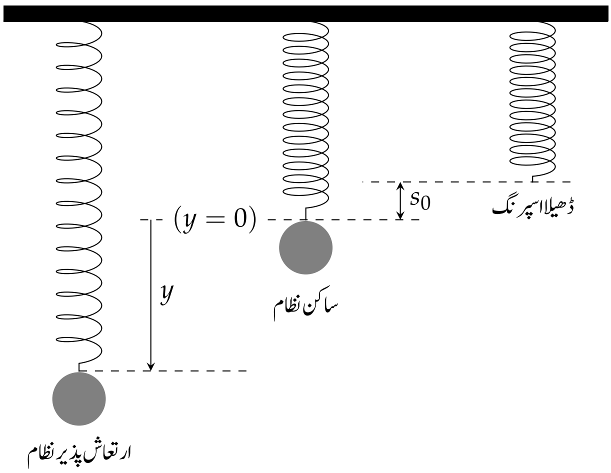
$$(4D^2+4D-17I)y=0$$

جواب: $y=e^{\frac{x}{2}}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

سوال 2.57:

$$(9D^2+12D+4I)y=0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے۔ $y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{2}{3}x}$



شکل 2.6: اسپر نگ اور کمیت کا غیر قصری نظام۔

2.4 اسپر نگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش

مستقل قیمت کے عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات میکانی ارتعاش میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔اس حصے میں اسپر نگ سے جڑی کمیت کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔اس نظام کو اسپرنگ اور کمیت کا نظام کہا جائے گا جسے شکل 2.6 میں دکھایا گیا ہے۔

ایک عام اسپر نگ جو لمبائی میں اضافہ اور کمی کو روکتا ہو کو شکل 2.6 میں مستحکم سلاخ سے لٹکایا ہوا دکھایا گیا ہے۔اس کی نچلی سر سے کمیت m کی لوہے کا گیند لٹکانے سے اسپر نگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اس ساکن نظام میں اسپر نگ کے نچلے سر کو $y = 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ہم نیچے رخ کو مثبت رخ تصور کرتے ہیں۔یوں نیچے رخ قوت کو مثبت اور اوپر رخ قوت کو منفی تصور کیا جائے گا۔اسی طرح مقام $y = 0$ سے نیچے رخ فاصلہ y مثبت ہو گا۔مزید اسپر نگ کی کمیت کو گیند کی کمیت سے اتنا کم تصور کیا جاتا ہے کہ اسپر نگ کی کمیت کو درج ذیل تبصرے میں رد کیا جا سکتا ہے۔

ساکن حالت میں اسپر نگ پر نیچے رخ قوت mg عمل کرتا ہے جس سے اسپر نگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ یہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع اور mg گیند کا وزن ہے۔اسپر نگ کی لمبائی میں اضافے کی وجہ

سے، **قانون ہک**[34] کے تحت[35]، اسپرنگ اوپر رخ **بحالی قوت**[36] $F_0=-ks_0$ پیدا کرتا ہے جہاں k **اسپرنگ مستقلہ**[37] ہے جس کو $\mathrm{kg\,s^{-2}}$ یعنی $\mathrm{N\,m^{-1}}$ میں ناپا جاتا ہے۔بحالی قوت اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتا ہے۔قوت mg مثبت رخ ہے لہٰذا اس کو مثبت لکھا گیا ہے جبکہ قوت $-ks_0$ منفی رخ ہے لہٰذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔ان قوتوں کا مجموعہ صفر $mg-ks_0=0$ کے برابر ہوتا ہے۔اگر ان قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر نہ ہوتا تو گیند ساکن نہ ہوتا بلکہ نیوٹن کے قانون $F=my''$ کے تحت حرکت کرتا۔طاقتور اسپرنگ کے مستقلہ k کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ان دونوں قوتوں کی مقدار گیند کی حرکت سے تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا ان کا مجموعہ ہر وقت صفر کے برابر ہو گا۔یوں گیند کی حرکت میں ان دونوں قوتوں کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا ان پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

فرض کریں کہ گیند کو نیچے رخ کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔شکل 2.6 میں گیند کو ساکن مقام سے لمحاتی طور y فاصلے پر دکھایا گیا ہے۔اس لمحہ اسپرنگ اضافی بحالی قوت $F_1=-ky$ پیدا کرتا ہے جس کے تحت گیند نیوٹن کے قانون

$$F_1=ma=my'' \tag{2.36}$$

کے تحت حرکت کرے گا جہاں $y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ ہے۔

بلا تقصیر حرکت کی سادہ تفرقی مساوات

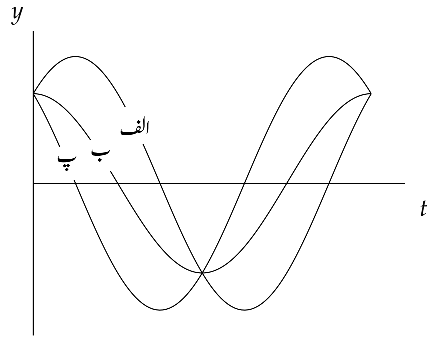
ہر نظام تقصیری ہوتا ہے ورنہ حرکت کبھی بھی نہ رکتی۔ نہایت کم تقصیری نظام جس کے حرکت کا مطالعہ نسبتاً کم دورانیے کے لئے کیا جائے میں تقصیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں اس کو بلا تقصیر تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 2.6 کا نظام بلا تقصیر نظام کی عمدہ مثال ہے۔نیوٹن کے قانون کو بروئے کار لیتے ہوئے اس نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$my''+ky=0 \tag{2.37}$$

یہ مستقل عددی سر والا خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا امتیازی مساوات $\lambda^2+\frac{k}{m}=0$ ہے۔امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $\lambda=\mp i\sqrt{\frac{k}{m}}=\mp i\omega_0$ ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.38}$$

[34] Hooke's law
[35] رابرٹ ہک (1635-1703) انگلستان کے ماہر طبیعیات تھے۔
[36] restoring force
[37] spring constant



شکل 2.7: مساوات 2.38 کے عمومی اشکال۔

اس حرکت کو **ہارمونی ارتعاش**[38] کہتے ہیں جس کی **تعدد**[39] $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ہرٹز[40] ہے[41]۔ تعدد f_0 کو نظام کی **قدرتی تعدد**[42] کہتے ہیں۔ چونکہ ایک سیکنڈ میں f_0 چکر (پھیرے) پورے ہوتے ہیں لٰہذا ایک چکر $\frac{1}{f_0}$ عرصے میں پورا ہو گا۔ اس دورانیے کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو **دوری عرصہ**[43] کہتے ہیں۔

$$T = \frac{1}{f_0} \tag{2.39}$$

$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$ لیتے ہوئے مساوات 2.38 کو

$$y = C \cos(\omega_0 t - \delta) \tag{2.40}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں C **حیطہ**[44] اور δ **زاویائی فرق**[45] کہلاتے ہیں۔

مساوات 2.38 (یعنی مساوات 2.40) کو شکل 2.7 میں دکھایا گیا ہے۔ دکھائے گئے تینوں منحنی میں ابتدائی فاصلہ $y(0) = A$ ہے جبکہ ابتدائی رفتار $y'(0) = \omega_0 B$ خط الف میں مثبت، ب میں صفر اور پ میں منفی ہے۔

[38] harmonic oscillation
[39] frequency
[40] Hertz
[41] ہائنرک ہرٹز (1857-1894) جرمنی کے ماہر طبیعیات تھے جنہوں نے برقناطیسی امواج دریافت کئے۔
[42] natural frequency
[43] time period
[44] amplitude
[45] phase angle

مثال 2.16: ایک اسپرنگ سے $2\,\mathrm{kg}$ کمیت لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں $61.25\,\mathrm{cm}$ کا اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اس اسپرنگ سے کتنی کمیت لٹکانے سے ایک ہرٹز $1\,\mathrm{Hz}$ کا ارتعاش حاصل کیا جا سکتا ہے؟ ساکن حالت سے کمیت کو $10\,\mathrm{cm}$ نیچے کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قانون ہک کے تحت $mg = 0.6125k$ سے $k = \frac{2\times 9.8}{0.6125} = 32\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے۔ایک ہرٹز کی تعدد کے لئے $2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ سے $m = \frac{k}{(2\pi f_0)^2} = \frac{32}{(2\pi\times 1)^2} = 0.811\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.38 میں $y(0) = 0.10\,\mathrm{m}$ اور $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $A = 0.1$ اور $B = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا حرکت کی مساوات $y = 0.1\cos 2\pi t$ ہو گی۔ y کی قیمت میٹر میں ہو گی۔

قصری نظام کا سادہ تفرقی مساوات

شکل 2.8 میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک $F_3 = -cy'$ کا اضافہ کیا گیا ہے جو ہر لمحہ حرکت کے الٹ رخ عمل کرتی ہے۔یوں $my'' = -ky - cy'$ لکھا جائے گا جس سے قصری نظام کی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{2.41}$$

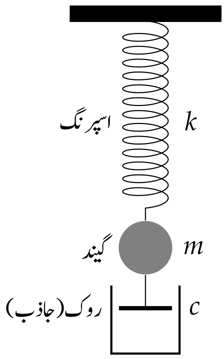
حاصل ہوتی ہے۔گیند کے ساتھ چادر منسلک کی گئی ہے جو ایک طرف سے بند نلکی میں حرکت کرتے ہوئے توانائی کا ضیاع اور یوں قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ اس حصے کو (توانائی کا) جاذب[46] بھی کہا جاتا ہے۔اس سے قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ تجربے سے دیکھا گیا ہے کہ کم رفتار پر ایسی قوت رفتار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ c **قصری مستقل**[47] کہلاتا ہے۔قصری مستقل از خود مثبت مستقل ہے۔یوں نیچے رخ رفتار، یعنی مثبت رفتار، کی صورت میں قصری قوت منفی، یعنی اوپر رخ، ہو گی۔

قصری نظام کی مساوات خطی متجانس ہے جس سے امتیازی مساوات (m سے تقسیم شدہ) لکھتے ہیں۔

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

---

[46] absorber
[47] damping constant



شکل 2.8: اسپرنگ اور کمیت کا قصری نظام۔

اس دو درجی الجبرائی مساوات کے جذر لکھتے ہیں۔

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta \quad \text{جہاں} \quad \alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{2.42}$$

تقصیر کی مقدار پر $c^2 - 4mk$ کی قیمت منحصر ہے جو تین مختلف صورتیں پیدا کرتی ہے۔

پہلی صورت: **زیادہ تقصیر**[48] دو منفرد حقیقی جذر $c^2 > 4mk$

دوسری صورت: **فاصل تقصیر**[49] دوہرا حقیقی جذر $c^2 = 4mk$

تیسری صورت: **کم تقصیر**[50] جوڑی دار مخلوط جذر $c^2 < 4mk$

اس قسم کی تین صورتیں ہم صفحہ 96 پر پہلے دیکھ چکے ہیں۔

تین صورتوں کے حل

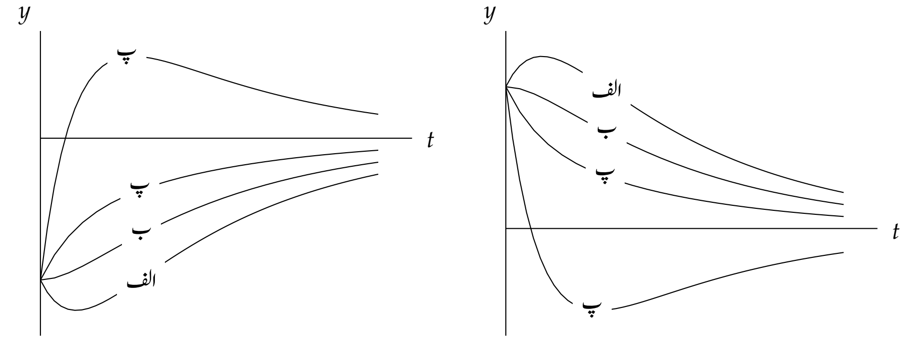
پہلی صورت

زیادہ تقصیر

پہلی صورت میں قصری قوت اتنا زیادہ ہے کہ $c^2 > 4mk$ ہے جس سے دو منفرد حقیقی جذر λ_1 اور λ_2

---

[48] over damping
[49] critical damping
[50] under damping



(ب)ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔

(الف)ابتدائی فاصلہ مثبت ہے۔

شکل 2.9: تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

حاصل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \tag{2.43}$$

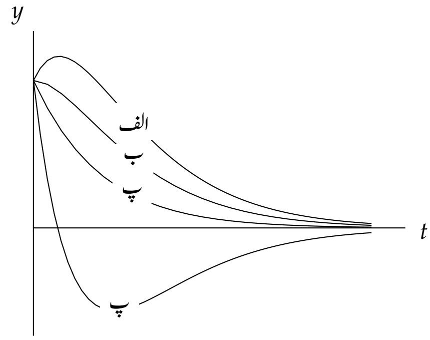
چونکہ $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ اور $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$ ہیں لہٰذا $\alpha - \beta$ اور $\alpha + \beta$ دونوں مثبت مقدار ہیں۔یوں مساوات 2.43 میں دونوں قوت نمائی تفاعل کی طاقت منفی ہو گی اور دونوں تفاعل کی قیمتیں نہایت تیزی سے گھٹے گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \to \infty$ پر $y(\infty) \to 0$ ہو گا یعنی گیند ساکن ہو گا۔زیادہ قصری نظام میں قصری قوت اس تیزی سے نظام سے توانائی خارج کرتا ہے کہ نظام ارتعاش کرنے کے قابل نہیں رہتا۔

مساوات 2.43 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں ابتدائی فاصلہ مثبت ہے جبکہ شکل-ب میں ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔شکل-الف میں خط الف مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔شکل-ب میں خط الف منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تقصیری نظام میں ارتعاش ممکن نہیں ہے اور نظام میں حرکت بہت جلد ختم ہو جاتی ہے۔

دوسری صورت

فاصل تقصیر

زیادہ تقصیر اور کم تقصیر کے درمیان فاصل تقصیر کی صورت پائی جاتی ہے جہاں $c^2 = 4mk$ ہوتا ہے۔یوں $\beta = 0$



شکل 2.10: فاصل تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

اور امتیازی مساوات کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ پایا جاتا ہے۔یوں مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t} \tag{2.44}$$

یہ مساوات ساکن مقام $y = 0$ سے صرف ایک مرتبہ گزر سکتی ہے۔اس کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ $e^{-\alpha t}$ کبھی صفر یا منفی نہیں ہو سکتا جبکہ $c_1 + c_2 t$ صرف ایک صفر دیتا ہے۔اگر c_1 اور c_2 دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $c_1 + c_2 t$ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اور y صفر سے کبھی نہیں گزرے گا۔

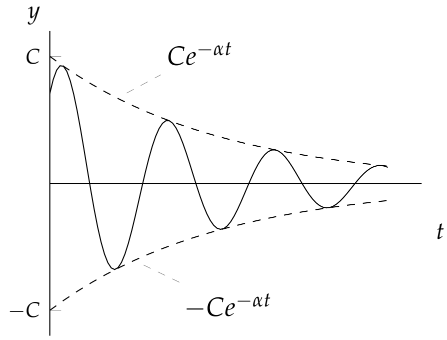
شکل 2.10 میں مساوات 2.44 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ابتدائی فاصلہ مثبت لیا گیا ہے، خط الف میں ابتدائی رفتار مثبت، خط ب میں صفر اور دو عدد خط پ میں ابتدائی رفتار منفی لی گئی ہے۔یہ خطوط شکل 2.9-الف سے مشابہت رکھتے ہیں۔ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ موجودہ صورت منفرد حقیقی جذر کی وہ مخصوص صورت ہے جہاں دونوں جذر عین برابر ہوں۔

تیسری صورت

کم تقصیر

یہ سب سے زیادہ دلچسپ صورت ہے جہاں تقصیری مستقل کی قیمت اتنی کم ہے کہ $c^2 - 4mk < 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 2.42 میں β خیالی عدد ہو گا۔

$$\beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = i\omega \qquad (\omega > 0) \tag{2.45}$$



شکل 2.11: قصری ارتعاش۔

امتیازی مساوات کے جذر جوڑی دار مخلوط اعداد ہوں گے

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega \tag{2.46}$$

اور مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$y = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta) \tag{2.47}$$

جہاں $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$ ہیں۔

یہ **قصری ارتعاش**[51] کو ظاہر کرتی ہے جس کو شکل 2.11 میں دکھایا گیا ہے۔اس منحنی کی چوٹیاں، نقطہ دار لکیر سے دکھائی گئیں، تفاعل $y = Ce^{-\alpha t}$ اور $y = -Ce^{-\alpha t}$ کے منحنی کو چھوتی ہے۔ارتعاش کی تعدد $\frac{\omega}{2\pi}$ ہے جو قصری مستقل c کم کرنے سے بڑھتی ہے۔قصری مستقل کی قیمت صفر کرنے سے مساوات 2.40 کی ہارمونی ارتعاش حاصل ہوتی ہے جس کی قدرتی تعدد $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ہو گی۔

مثال 2.17: تقصیری حرکت کے تین صورتیں

ایک اسپرنگ جس کا مستقل $k = 32\,\mathrm{N\,kg^{-1}}$ ہے سے $m = 2\,\mathrm{kg}$ کا گیند لٹکایا گیا ہے۔اس نظام میں باری باری $c = 20\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ، $c = 16\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ اور $c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ تقصیری اثر شامل کیا جاتا ہے۔ابتدائی معلومات $y(0) = 4\,\mathrm{cm}$ اور $y'(0) = 0$ ہیں۔گیند کی حرکت دریافت کریں۔

[51] damped oscillations

حل: قوت روک نظام میں توانائی کے ضیاع کو ظاہر کرتی ہے جس سے مسلسل گھٹتی ارتعاش (پہلی صورت) یا غیر ارتعاشی حرکت (دوسری اور تیسری صورت) پیدا ہوتی ہے۔

پہلی صورت: $m = 2$ ، $k = 32$ اور $c = 20$ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے

$$2y'' + 20y' + 32y = 0, \quad y(0) = 0.04\,\mathrm{m}, \quad y'(0) = 0$$

جس کا امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 20\lambda + 32 = 0$ ہے۔ امتیازی مساوات $2(\lambda+8)(\lambda+2) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = -8$ ہیں جن سے عمومی حل اور حل کا یک درجی تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}, \quad y' = -2c_1 e^{-2t} - 8e^{-8t}$$

ان میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے $c_1 + c_2 = 0.04$ اور $-2c_1 - 8c_2 = 0$ ملتا ہے جنہیں حل کرنے سے $c_1 = \frac{4}{75}$ اور $c_2 = -\frac{1}{75}$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح حرکت کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$y = \frac{4}{75}e^{-2t} - \frac{1}{75}e^{-8t}$$

یہ مسلسل گھٹتی ارتعاش ہے جو آخر کار $t \to \infty$ پر $y \to 0$ ہو گی یعنی بہت دیر بعد گیند ساکن ہو گا۔

دوسری صورت: $c = 16$ کی صورت میں امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 16\lambda + 32 = 0$ یعنی $2(\lambda+4)^2 = 0$ ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ ہے۔یوں حرکت کی عمومی مساوات درج ذیل ہو گی

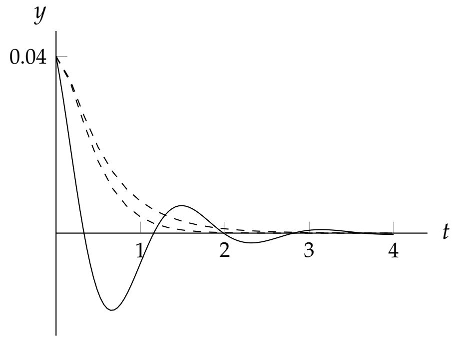
$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-4t}$$

جس میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c_1 = 0.04$ اور $c_2 = 0.16$ حاصل ہوتے ہیں جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = (0.04 + 0.16t)e^{-4t}$$

تیسری صورت: تقصیری مستقل $c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات $2y'' + 5y' + 32y = 0$ ہو گا جس سے امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 5\lambda + 32 = 0$ حاصل ہوتی ہے۔امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $-1.25 \mp 3.8i$ ہیں جن سے عمومی مساوات اور عمومی مساوات کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-1.25t}\left(A\cos 3.8t + B\sin 3.8t\right)$$
$$y' = -1.25e^{-1.25t}\left(A\cos 3.8t + B\sin 3.8t\right) + 3.8e^{-1.25t}\left(-A\sin 3.8t + B\cos 3.8t\right)$$



شکل 2.12: مثال 2.17 کی آزاد حرکت کی تین صورتیں۔

ابتدائی معلومات کو y کی مساوات میں پر کرنے سے $A = 0.04$ حاصل ہوتا ہے جبکہ انہیں y' کی مساوات میں پر کرنے سے $-1.25A + 3.8B = 0$ یعنی $B = -0.013$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-1.25t} \left(0.04 \cos 3.8t - 0.013 \sin 3.8t\right)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلا تقصیری نظام کی قدرتی ارتعاش $\omega_0 = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$ سے موجودہ تعدد $\omega = 3.8$ کم ہے۔ شکل 2.12 میں اس مثال کی تینوں صورتوں کو دکھایا گیا ہے۔

اس حصے میں بیرونی قوتوں سے پاک اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی آزاد حرکت[52] پر غور کیا گیا۔ ایسے نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔ ہم اسی باب میں بیرونی جبری قوتوں کی موجودگی میں پائی جانے والی جبری حرکت[53] پر بھی غور کریں گے۔ ایسے نظام کو غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

سوالات

سوال 2.58 تا سوال 2.68 بلا تقصیر، ہارمونی ارتعاش کے سوالات ہیں۔

[52] free motion
[53] forced motion

سوال 2.58: ابتدائی قیمت مسئلہ
بلا تقصیر ارتعاش کو مساوات 2.38 ظاہر کرتی ہے۔ابتدائی فاصلہ $y(0)=y_0$ اور ابتدائی رفتار $y'(0)=v_0$ کی صورت میں مخصوص حل لکھیں۔

جواب: $y=y_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

سوال 2.59: تعدد
ایک اسپرنگ کی لمبائی $75\,\mathrm{cm}$ ہے۔اس سے $0.25\,\mathrm{kg}$ کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی $85\,\mathrm{cm}$ ہو جاتی ہے۔اس نظام کی تعدد f_0 اور دوری عرصہ T کیا ہوں گے؟

جوابات: $f_0=1.58\,\mathrm{Hz}$ ، $T=0.63\,\mathrm{s}$

سوال 2.60: تعدد
اسپرنگ اور کمیت کی نظام میں کمیت چار گنّا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔مستقلہ اسپرنگ کی قیمت چار گنّا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔

جوابات: کمیت چار گنّا کرنے سے تعدد آدھی ہوتی ہے۔مستقلہ اسپرنگ چار گنّا کرنے سے تعدد دگنی ہوتی ہے۔

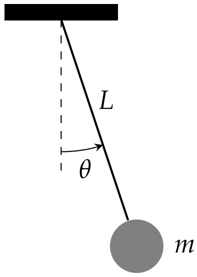
سوال 2.61: ابتدائی رفتار
اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں ابتدائی رفتار صفر نہ ہونے کی صورت میں نظام کے تعدد اور رفتار پر کیا اثر ہو گا؟

جواب: نظام کی تعدد پر کوئی اثر نہیں ہو گا البتہ اس سے رفتار بڑھے گی۔

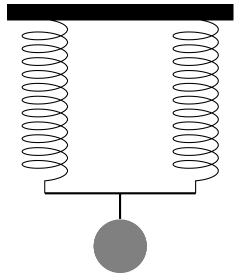
سوال 2.62: متوازی اسپرنگ
چار کلو گرام کی گیند کو $k_1=16\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جاتا ہے۔نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ اگر اسی گیند کو $k_2=32\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جائے تب نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ دونوں کی لمبائی برابر ہے۔ ان دونوں اسپرنگ کو متوازی جوڑا جاتا ہے۔ایسی صورت میں نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ شکل 2.13-الف کو دیکھیے۔

جوابات: $0.32\,\mathrm{Hz}$ ، $0.45\,\mathrm{Hz}$ ، $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}=0.55\,\mathrm{Hz}$

سوال 2.63: سلسلہ وار اسپرنگ
گزشتہ سوال کے دونوں اسپرنگ کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تعدد حاصل کریں۔



(ب) سوال 2.64 کا نظام۔


(الف) سوال 2.62 کا نظام۔

شکل 2.13: متوازی اسپرنگ اور جھولا کے سوالات۔

جوابات: $my'' + \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}y = 0$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}} = 0.26\,\text{Hz}$

سوال 2.64: جھولا
ایک ہلکے دھاگے سے m کمیت کا گیند لٹکایا شکل 2.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس نظام کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔نہایت چھوٹے زاویے کی صورت میں $\sin\theta \approx \theta$ لکھتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں جس کو حل کرتے ہوئے نظام کی تعدد حاصل کریں۔

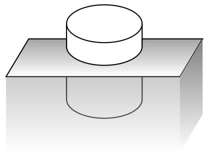
حل: گیند کا وزن mg ہے جو نیچے رخ قوت ہے۔اس کا مماس $mg\sin\theta$ ہے جو اسراع پیدا کرتا ہے۔
$L\theta'' = g\sin\theta$ ، $L\theta'' = g\theta$ ، $\theta = \cos\sqrt{\frac{g}{L}}t$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

سوال 2.65: اصول آرشمیدس
اصول آرشمیدس[54] کے تحت جب کسی جسم کو مائع میں ڈبویا جائے تو اس پر قوت اچھال عمل کرتی ہے جس کی مقدار، جسم کے ڈبویے گئے حجم کے برابر، مائع کے وزن جتنی ہوتی ہے۔

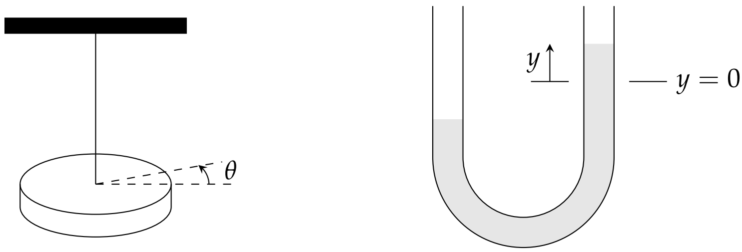
ایک بیلن کو سیدھا پانی میں کھڑا کرنے سے اس کا کچھ حصہ پانی میں ڈوب جاتا ہے۔شکل 2.14 میں اس کو ساکن حالت میں دکھایا گیا ہے۔بیلن کا رداس $r = 20\,\text{cm}$ ہے۔اگر بیلن کو نیچے دھکیل کر چھوڑا جائے تو یہ دو سیکنڈ کے دوری عرصے سے اوپر نیچے ارتعاشی حرکت کرتا ہے۔بیلن کی کمیت M دریافت کریں۔ پانی کی کثافت $\rho = 1000\,\text{kg}/\text{m}^3$ ہے۔

جوابات: $M = g\rho\pi r^2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.8\times 1000\pi 0.2^2\left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 124.8\,\text{kg}$

[54] Archimedian principle



شکل 2.14: آرشمیدسی اصول؛ سوال 2.65



(ب) مروڑی ارتعاش۔

(الف) نالی میں پانی کا ارتعاش۔

شکل 2.15: سوال 2.67 اور سوال 2.68 کے اشکال۔

سوال 2.66: زنجیر کا میز سے پھسلنا

ایک پھسلنی میز پر زنجیر سیدھا پڑا ہوا ہے۔ ان کے مابین قوت رگڑ قابل نظر انداز ہے۔ اگر زنجیر کے ایک سر کو میز سے لٹکایا جائے تو پورا زنجیر پھسلتے پھسلتے نیچے گر پڑتا ہے۔ زنجیر کی کل لمبائی L اور کمیت m کلوگرام فی میٹر لیتے ہوئے اس مسئلے کا تفرقی مساوات لکھیں۔ اگر $y(0) = 0$ اور $y'(0) = v_0$ ہو تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جوابات: $mLy'' = mgy$ ، $y = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right)$

سوال 2.67: نالی میں پانی کی ارتعاش

شکل 2.15-الف میں $M = 9\,\mathrm{kg}$ پانی زیر ثقلی قوت نالی میں ارتعاش کرتا ہے۔ نالی کا اندرونی رداس $r = 1.5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ ارتعاش کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

جوابات: $My'' = -2\pi r^2 \rho g y$ ، $T = 5.06\,\mathrm{s}$

سوال 2.68: باریک غیر لچکدار تار سے I_0 **جمودی معیار اثر**[55] کی ٹکی لٹکائی جاتی ہے جو مروڑی ارتعاش کرتی ہے۔ شکل 2.15-ب کو دیکھیے۔ اس نظام کو $I_0\theta'' + k\theta = 0$ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے جہاں θ کو

[55] moment of inertia

متوازن حال سے ناپا جاتا ہے۔ k مروڑی مستقل (یا اسپرنگ مستقلہ) ہے جس کو $\mathrm{N\,m\,rad^{-1}}$ نیوٹن میٹر فی ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ ابتدائی زاویہ $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ریڈیئن یعنی $45°$ اور ابتدائی رفتار صفر ہے۔اس مساوات کو $\frac{k}{I_0} = 9\,\mathrm{s^{-2}}$ لیتے ہوئے حل کریں۔تعدد کا کلیہ دریافت کریں۔اس تجربے کو باریک تار کی مروڑی مستقل k حاصل کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ٹکی کا جمودی معیار اثر جانتے ہوئے اور قدرتی تعدد ناپ کر باریک تار کا مروڑی مستقل دریافت کیا جا سکتا ہے۔

جواب: $\theta = \frac{\pi}{4}\cos 3t$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I_0}}$

سوالات 2.69 تا سوال 2.69 میں قصری حرکت پایا جاتا ہے۔

سوال 2.69: زیادہ تقصیر

زیادہ تقصیری صورت میں مساوات 2.43 حل دیتی ہے۔ابتدائی معلومات $y(0) = y_0$ اور $y'(0) = v_0$ ہونے کی صورت میں c_1 اور c_2 دریافت کریں۔

جوابات: $c_1 = \frac{1}{2}[(1+\frac{\alpha}{\beta})y_0 + \frac{v_0}{\beta}]$ ، $c_2 = \frac{1}{2}[(1-\frac{\alpha}{\beta})y_0 - \frac{v_0}{\beta}]$

سوال 2.70: زیادہ تقصیر

زیادہ تقصیری صورت میں ثابت کریں کہ y زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ $y = 0$ سے گزر سکتا ہے۔

سوال 2.71: دھچکا روک

گاڑیوں میں **دھچکا روک**[56] نسب ہوتے ہیں جو گاڑی کی حرکت کو یقینی طور پر غیر ارتعاشی رکھتے ہیں۔صفحہ 119 پر شکل 2.8 دھچکا روک کو ظاہر کرتی ہے۔سوار کو دھچکوں سے پاک سواری اسپرنگ مہیا کرتا ہے جبکہ جاذب ان دھچکوں کی توانائی کو جذب کرتا ہے۔گاڑی بمع سواری کی کمیت کو m ظاہر کرتی ہے۔

کمیت $1300\,\mathrm{kg}$ اور اسپرنگ مستقل $80\,000\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$ ہونے کی صورت میں تقصیری مستقل کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر یقین طور غیر ارتعاشی سواری حاصل ہو گی۔

جواب: $c \geq 20\,396\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

---

[56] shock absorber

سوال 2.72: تعدد
کم قصری صورت کی ارتعاش کا تعدد ω مساوات 2.45 دیتا ہے۔اس مساوات پر مسئلہ ثنائی کا اطلاق کرتے ہوئے پہلے دو اجزاء لیں اور مثال 2.17 کی کم قصری حرکت $(c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}})$ کی تعدد ارتعاش حاصل کریں۔موجودہ جواب اور مثال میں حاصل کردہ جوابات میں کتنے فی صد فرق پایا جاتا ہے۔

جوابات: $\omega = \omega_0(1 - \frac{c^2}{8mk})$ ، $\omega = 3.8046$ لہٰذا دونوں جوابات میں $0.13\,\%$ فرق پایا جاتا ہے۔(مثال 2.17 میں تعدد کی بالکل ٹھیک قیمت $\omega = 3.79967$ ہے جسے مثال میں $\omega = 3.8$ لکھا گیا ہے۔)

سوال 2.73: بلا تقصیر نظام کے قدرتی تعدد اور کم تقصیری نظام ($5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$) کے تعدد ارتعاش میں فرق مثال 2.17 کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $4.88\,\%$ ؛ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگرچہ قوت روک تعدد ارتعاش پر فرق ڈالتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔

سوال 2.74: کم قصری ارتعاش کی مثبت چوٹیاں یکساں وقفوں پر پائی جاتی ہیں۔اس وقفے کو دریافت کریں۔

جواب: مساوات 2.47 کی مثبت چوٹیاں $\omega t - \delta = 2n\pi$ پر پائی جاتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2 \cdots$ ہے۔یوں دو چوٹیوں کے درمیان وقفہ $\frac{2\pi}{\omega}$ یعنی $T = \frac{1}{f}$ ہو گا۔

سوال 2.75: لوگارتھمی گھٹاو
کم قصری نظام میں دو قریبی چوٹیوں کی قیمتوں کی شرح ایک مستقل قیمت ہوتی ہے جس کے لوگارتھم کو **لوگارتھمی گھٹاو**[57] کہتے ہیں۔لوگارتھمی گھٹاو Δ حاصل کریں۔

جواب: $\Delta = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$

سوال 2.76: تقصیری مستقل
ایک کم تقصیری نظام میں $m = 0.25\,\mathrm{kg}$ ہے اور ارتعاش کا دوری عرصہ $5\,\mathrm{s}$ ہے۔بیس چکروں میں چوٹی گھٹ کر $\frac{1}{4}$ گنا رہ جاتی ہے۔نظام کے تقصیری مستقل کا تخمینہ لگائیں۔

جواب: $\alpha = 0.01386$

---
[57] logarithmic decrement

2.5 یولر کوشی مساوات

سادہ تفرقی مساوات[58]

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{2.48}$$

یولر کوشی مساوات[59] کہلاتا ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔اس میں

$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

پر کرنے سے

$$x^2m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

ملتا ہے جس کو مشترک جزو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے **ذیلی مساوات**[60] $m(m-1) + am + b = 0$ یعنی

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \tag{2.49}$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں $y = x^m$ مساوات 2.48 کا حل اس صورت ہو گا جب m مساوات 2.49 کا جذر ہو۔مساوات 2.49 کے جذر

$$m_1 = \frac{1}{2}(1-a) + \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}, \quad m_2 = \frac{1}{2}(1-a) - \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b} \tag{2.50}$$

ہیں۔

پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر کی صورت میں دو منفرد حل

$$y_1 = x^{m_1}, \quad y_2 = x^{m_2}$$

ملتے ہیں۔چونکہ ان حل کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں۔اس طرح یہ حل کی اساس ہیں اور انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2} \tag{2.51}$$

[58] لیون آرڈ یولر (1707-1783) سوئزرلینڈ کا رہائشی اور ماہر حساب تھا۔آگستن لوئی کوشی (1789-1857) فرانسیسی ماہر حساب تھا جنہوں نے جدید تجزیے کی بنیاد ڈالی۔

[59] Euler-Cauchy equation

[60] auxiliary equation

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔یہ حل تمام x کے لئے درست ہے۔

مثال 2.18: یولر کوشی مساوات $x^2y'' + 0.5xy' - 1.5y = 0$ سے $m^2 - 0.5m - 1.5m = 0$ ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $m_1 = 1.5$ اور $m_2 = -1$ ہیں۔ان سے اساس $y_1 = x^{\frac{3}{2}}$ ، $y_2 = x^{-1}$ لکھی جا سکتی ہے۔اساس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 x\sqrt{x} + \frac{c_2}{x}$$

دوسری صورت: حقیقی دوہرا جذر $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}(1-a)$ اس صورت پایا جاتا ہے جب $b = \frac{1}{4}(1-a)^2$ ہو۔ایسی صورت میں مساوات 2.48 درج ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے

$$x^2y'' + axy' + \frac{1}{4}(1-a)^2y = 0 \quad \implies \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0 \tag{2.52}$$

جس کا ایک حل $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے۔

دوسرا خطی طور غیر تابع حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب پر حصہ 2.1 میں غور کیا گیا ہے۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے پہلا حل y_1 اور دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لیتے ہیں۔یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ اور $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ ہوں گے جنہیں معیاری تفرقی مساوات 2.52 میں پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + \frac{1}{x}(u'y_1 + uy_1') + \frac{(1-a)^2}{4x^2}(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے جزو ضرب اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) + u[y_1'' + \frac{a}{x}y_1' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y_1] = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں دایاں قوسین صفر کے برابر ہو گا اور یوں

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$u'' + u'\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{x}\right) = 0$$

اب چونکہ $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے لہٰذا $y_1' = \frac{1-a}{2}x^{(\frac{1-a}{2}-1)} = \frac{1-a}{2}\frac{y_1}{x}$ اور $\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1-a}{2x}$ ہو گا جس کو درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$u'' + u'\left[2\left(\frac{1-a}{2x}\right) + \frac{a}{x}\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u'' + \frac{u'}{x} = 0$$

اس میں $u' = v$ لیتے ہوئے $v' + \frac{v}{x} = 0$ ملتا ہے جس کا حل $v = \frac{1}{x}$ ہے۔یوں $v = u' = \frac{1}{x}$ لکھتے ہوئے تکمل لے کر $u = \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح خطی طور غیر تابع دوسرا حل $y_2 = uy_1 = y_1 \ln x$ ہو گا۔ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^m \qquad m = \frac{1-a}{2} \tag{2.53}$$

مثال 2.19: دوہرا جذر

یولر کوشی مساوات $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ کا ذیلی مساوات $m^2 - 8m + 16 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $m_1 = m_2 = 4$ ہے۔یوں تمام مثبت x کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^4$$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر کی صورت انجینئری نقطہ نظر سے زیادہ اہم نہیں ہے لہٰذا اس کی ایک عدد مثال ہی دیکھتے ہیں۔

مثال 2.20: یولر کوشی مساوات $x^2y'' + 0.8xy' + 9.01y = 0$ کی $m^2 - 0.2m + 9.01 = 0$ ذیلی مساوات ہے جس کے جوڑی دار مخلوط جذر $m_1 = 0.1 + 3i$ اور $m_2 = 0.1 - 3i$ ہیں جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔یہاں ایک چال چلاتے ہیں جس کے ذریعہ خیالی عدد i سے چھٹکارا حاصل ہو گا کرتے ہیں یعنی ہم $x = e^{\ln x}$ لکھتے ہیں۔یوں

$$x^{m_1} = x^{0.1+3i} = x^{0.1}\left(e^{\ln x}\right)^{3i} = x^{0.1}e^{(3\ln x)i}$$
$$x^{m_2} = x^{0.1-3i} = x^{0.1}\left(e^{\ln x}\right)^{-3i} = x^{0.1}e^{-(3\ln x)i}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اب صفحہ 102 پر یولر مساوات 2.27 استعمال کرتے ہیں۔

$$x^{m_1} = x^{0.1}e^{(3\ln x)i} = x^{0.2}[\cos(3\ln x) + i\sin(3\ln x)]$$
$$x^{m_2} = x^{0.1}e^{-(3\ln x)i} = x^{0.2}[\cos(3\ln x) - i\sin(3\ln x)]$$

اب دونوں کا مجموعہ لیتے ہوئے دو (2) سے تقسیم کرتے ہیں۔اسی طرح پہلی سے دوسری مساوات منفی کرتے ہوئے $-2i$ سے تقسیم کرتے ہیں۔یوں درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$x^{0.1}\cos(3\ln x), \quad x^{0.1}\sin(3\ln x)$$

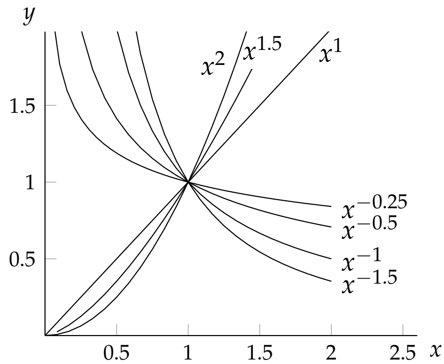
ان کا حاصل تقسیم $\tan(3\ln x)$ ہے جو مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا درج بالا دونوں خطی طور غیر تابع ہیں۔اس طرح یہ حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = x^{0.1}[c_1\cos(3\ln x) + c_2\sin(3\ln x)]$$

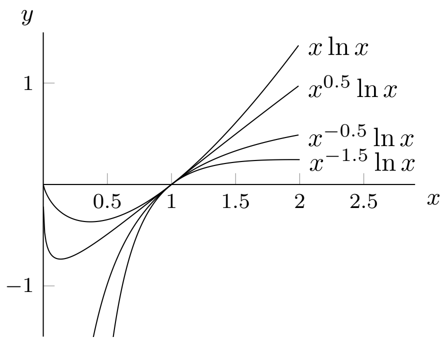
شکل 2.16 میں یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کی تینوں صورتوں کے حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 2.21: دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں ساکن برقی میدان؛ سرحدی قیمت مسئلہ
دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں برقی دباو تفرقی مساوات $\rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} = 0$ دیتی ہے۔نلکی کے رداس $\rho_1 = 2\,\mathrm{cm}$ اور $\rho_2 = 5\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ ان پر برقی دباو[61] $v_1 = 50\,\mathrm{V}$ اور $v_2 = 0\,\mathrm{V}$ ہے۔درمیانی خطے کی

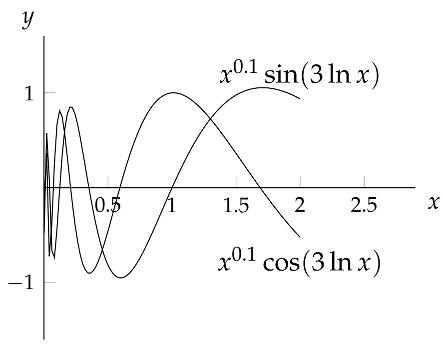
[61] electric voltage



(الف) پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر۔

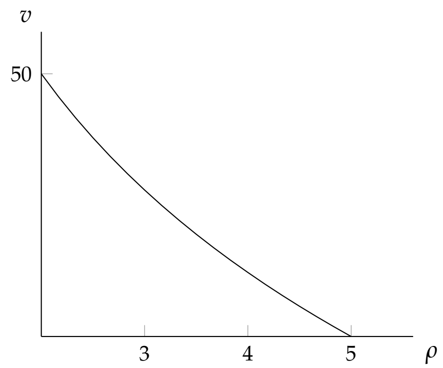


(ب) دوسری صورت: دوہرا جذر۔



(پ) جوڑی دار مخلوط جذر۔

شکل 2.16: یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل۔



شکل 2.17: مثال 2.21 کا حل۔

برقی دباو حاصل کریں۔

حل: یولر کوشی مساوات میں $a = 1$ اور $b = 0$ موجودہ تفرقی مساوات دیتا ہے۔ دیے مساوات میں $v = \rho^m$ پر کرتے ہوئے ذیلی مساوات $m^2 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کا دوہرا جذر $m = 0$ ہے۔ یوں عمومی حل $v = c_1 + c_2 \ln x$ ہو گا۔ دیے گئے سرحدی شرائط حل میں پر کرتے

$$50 = c_1 + c_2 \ln 0.02, \quad 0 = c_1 + c_2 \ln 0.05$$

ہوئے $c_1 = -163.471$ اور $c_2 = -54.568$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مخصوص حل $y = -163.471 - 54.568 \ln \rho$ ہو گا جسے شکل 2.17 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.22: یولر کوشی مساوات 2.48 میں $x = e^t$ پر کرتے ہوئے اس کو مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات میں تبدیل کریں۔

حل: ہم $y(x)$ کو $y[x(t)]$ یعنی $y(t)$ تصور کرتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{x^2}$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

انہیں مساوات 2.48 میں پر کرتے

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+ax\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+by=0$$

ہوئے مستقل عددی سر والا سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں $\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\ddot{y}=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$ ہیں۔

$$\ddot{y}+(a-1)\dot{y}+by=0 \tag{2.54}$$

سوالات

سوال 2.77 تا سوال 2.85 حل کریں۔

سوال 2.77:

$$x^2y''-2xy'+2y=0$$

جواب: $y=c_1x+c_2x^2$

سوال 2.78:

$$x^2y''-6y=0$$

جواب: $y=c_1x^3+c_2x^{-2}$

سوال 2.79:

$$x^2y''+6xy'+4y=0$$

جواب: $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^4}$

سوال 2.80:

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^3$

سوال 2.81:

$$x^2y'' + 11xy' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-5}$

سوال 2.82:

$$10x^2y'' + 11xy' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^{-\frac{3}{5}}$

سوال 2.83:

$$x^2y'' + 0.44xy' + 0.0748y = 0$$

جواب: $y = c_1x^{0.22} + c_2x^{0.34}$

سوال 2.84:

$$x^2y'' + 0.4xy' + 0.73y = 0$$

جواب: $y = x^{0.3}[c_1 \cos(0.8 \ln x) + c_2 \sin(0.8 \ln x)]$

سوال 2.85:

$$x^2y'' + 2xy' + 4.25y = 0$$

جواب: $y = x^{-0.5}[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)]$

سوال 2.86 تا سوال 2.91 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 2.86:

$$x^2y'' - 0.4xy' + 0.45y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$$

جواب: $y=7\sqrt{x}-5x^{0.9}$

سوال 2.87:

$$x^2y''+1.08xy'-0.01713y=0, \quad y(1)=-1, \quad y'(1)=1$$

جواب: $y=\frac{23}{18}x^{0.23}-\frac{41}{18}x^{-0.31}$

سوال 2.88:

$$35x^2y''+57xy'+3y=0, \quad y(1)=3, \quad y'(1)=-5$$

جواب: $y=\frac{77}{4}x^{-\frac{3}{7}}-\frac{65}{4}x^{-\frac{1}{5}}$

سوال 2.89:

$$6x^2y''+19xy'+6y=0, \quad y(1)=-3, \quad y'(1)=1$$

جواب: $y=\frac{6}{5}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{21}{5}x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 2.90:

$$25x^2y''-15xy'+16y=0, \quad y(2)=0, \quad y'(2)=1$$

جواب: $y=2^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}(\ln x-\ln 2)$

سوال 2.91:

$$49x^2y''+77xy'+4y=0, \quad y(2)=3, \quad y'(2)=0$$

جواب: $y=x^{-\frac{2}{7}}(2.93+1.04\ln x)$

2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی

اس حصے میں متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات،

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.55}$$

جس کے عددی سر $p(x)$ اور $q(x)$ کوئی بھی **استمراری تفاعل** ہو سکتے ہیں، کے **عمومی حل** کی **وجودیت**[62] پر غور کیا جائے گا۔ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.55 اور **ابتدائی معلومات**

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{2.56}$$

کے ابتدائی قیمت مسئلہ کی مخصوص حل کی **یکتائی**[63] پر بحث کی جائے گی۔

مسئلہ 2.2 کہتا ہے کہ اس ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل پایا جاتا ہے جو یکتا ہو گا اور مساوات 2.55 کے عمومی حل

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad c_1, c_2 \text{ اختیاری} \tag{2.57}$$

میں تمام حل شامل ہیں۔یوں استمراری عددی سر والے متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی **نادر حل** نہیں پایا جاتا۔نادر حل اس حل کو کہتے ہیں جسے عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

ہمیں مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات یا یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت اور یکتائی جاننے کی ضرورت پیش نہیں آئی چونکہ ان کے حل کے دوران ہی ایسی تمام معلومات سامنے آ جاتی ہیں۔

مسئلہ 2.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت تفرقی مساوات
اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کسی کھلے وقفے I پر استمراری ہوں اور x_0 اس وقفے پر پایا جاتا ہو، تب مساوات 2.55 اور مساوات 2.56 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا مخصوص حل $y(x)$ موجود ہے۔

وجودیت حل کی ثبوت کے لئے وہی بنیادی شرائط درکار ہیں جو صفحہ 74 پر مسئلہ 1.3 کے لئے درکار تھے۔اس کتاب میں ان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ اگرچہ یکتائی کا ثبوت عموماً آسان ہوتا ہے لیکن موجودہ مسئلہ 2.2 کے یکتائی حل کا ثبوت اتنا آسان نہیں ہے لہٰذا اس کو کتاب کے آخر میں بطور ضمیمہ ا شامل کیا گیا ہے۔

---

[62] existence
[63] uniqueness

خطی طور غیر تابع حل

آپ کو حصہ 2.4 سے یاد ہو گا کہ کھلے وقفہ I پر عمومی حل **اساس** y_1 ، y_2 پر **مشتمل** ہوتا ہے جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفے I پر خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت **خطی طور غیر تابع**[64] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.58}$$

سے مراد

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \tag{2.59}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.58 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 **خطی طور تابع**[65] کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.58 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\text{(الف)} \quad y_1 = ky_2, \quad \text{(ب)} \quad y_2 = ly_1 \qquad \text{پورے } I \text{ پر} \tag{2.60}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابع صورت میں ہم مساوات 2.58 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا (اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔) خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع حل کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 2.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 2.58 کے I پر دو حل y_1 اور y_2 اس صورت خطی طور غیر تابع ہوں گے جب ان کے **ورونسکی**[66]

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' \tag{2.61}$$

کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر $W = 0$ ہو گا۔ یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

ثبوت:

[64] linearly independent
[65] linearly dependent
[66] Wronskian

(الف) y_1 اور y_2 کو I پر خطی طور غیر تابع تصور کریں۔یوں مساوات 2.60-الف یا ب میں سے ایک درست ہو گا۔اگر مساوات 2.60-الف درست ہو تب

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = ky_2y_2' - y_2ky_2' = 0$$

ہو گا۔اسی طرح مساوات 2.60-ب کی صورت میں بھی $W = 0$ ملتا ہے۔

(ب) اس کے الٹ چلتے ہوئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی x_0 پر $W(y_1, y_2) = 0$ سے مراد y_1 اور y_2 کا I پر خطی طور تابع ہونا ہے۔درج ذیل مساوات پر غور کریں جہاں k_1 اور k_2 کو نا معلوم متغیرات تصور کریں۔

$$\begin{aligned} k_1y_1(x_0) + k_2y_2(x_0) &= 0 \\ k_1y_1'(x_0) + k_2y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

k_2 حذف کرنے کی نیت سے پہلی مساوات کو $y_2'(x_0)$ اور دوسری کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_1y_1(x_0)y_2'(x_0) - k_1y_1'(x_0)y_2(x_0) = k_1W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0 \tag{2.63}$$

اسی طرح k_1 حذف کرنے کے لئے پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں مساوات کا مجموعہ

$$k_2y_1(x_0)y_2'(x_0) - k_2y_2(x_0)y_1'(x_0) = k_2W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0 \tag{2.64}$$

لیتے ہیں۔اب اگر x_0 پر W صفر نہ ہوتا تب ہم مساوات 2.63 اور مساوات 2.64 کو W سے تقسیم کرتے ہوئے $k_1 = k_2 = 0$ حاصل کرتے البتہ x_0 پر $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ ہے لہٰذا ہم ان مساوات کو W سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔یوں ہمزاد مساوات 2.62 کا حل k_1 اور k_2 پایا جاتا ہے جہاں k_1 اور k_2 دونوں غیر صفر ہو سکتے ہیں۔اب ان اعداد k_1 اور k_2 کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل

$$y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x) \tag{2.65}$$

لیتے ہیں۔چونکہ مساوات 2.55 متجانس خطی ہے لہٰذا مسئلہ 2.1 (مسئلہ خطی میل) کے تحت یہ تفاعل بھی مساوات 2.55 کا حل ہو گا۔مساوات 2.62 سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل ابتدائی معلومات $y(x_0) = 0$ اور $y'(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔اب تصور کریں کہ مساوات 2.55 کا دوسرا حل جو انہیں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہو $y^*(x) = 0$ ہے۔اب چونکہ مساوات 2.55 میں $p(x)$ اور $q(x)$ استمراری ہیں

لہٰذا مسئلہ 2.2 کے تحت اس کا مخصوص حل یکتا ہو گا۔یوں $y(x)$ اور $y^*(x)$ مختلف نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا $y^*(x) = y(x) = 0$ یعنی

$$k_1y_1 + k_2y_2 \equiv 0 \qquad \text{پورے } I \text{ پر} \tag{2.66}$$

ہو گا۔چونکہ k_1 اور k_2 میں کم از کم ایک صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا مساوات 2.66 کہتا ہے کہ I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں۔

(پ) ہم مسئلے کا آخری نقطہ ثابت کرتے ہیں۔اگر کھلے وقفے I پر نقطہ x_0 پر $W(x_0) = 0$ ہو تب ثبوت (ب) کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں لہٰذا ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہو گا۔یوں خطی طور تابع صورت میں ایسا نہیں ہو سکتا ہے کہ $W(x_1) \neq 0$ ہو جہاں x_1 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔اگر ایسا ممکن ہو تب اس سے مراد خطی طور غیر تابع صورت ہو گی جیسا کہ دعویٰ کیا گیا ہے۔

حساب کی نقطہ نظر سے مساوات 2.61 سے درج ذیل زیادہ آسان مساوات ہے۔

$$W(y_1, y_2) = \begin{cases} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 & (y_1 \neq 0) \\ -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' y_2^2 & (y_2 \neq 0) \end{cases} \tag{2.67}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ورونسکی کو قالب کی مقطع کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جس کو **ورونسکی مقطع**[67] یا حل y_1 اور y_2 **کی ورونسکی** کہتے ہیں۔

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \tag{2.68}$$

مثال 2.23: مسئلہ 2.3 کا اطلاق

تفرقی مساوات $y'' + \omega^2 y = 0$ کے حل $y_1 = \cos\omega x$ اور $y_2 = \sin\omega x$ ہیں۔ان کی ورونسکی

$$W(\cos\omega x, \sin\omega x) = \begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & -\omega\cos\omega x \end{vmatrix} = \omega\cos^2\omega x + \omega\sin^2\omega x = \omega$$

[67] Wronskian determinant

ہے۔مسئلہ 2.3 کے تحت یہ حل صرف اس صورت میں خطی طور غیر تابع ہوں گے جب $\omega \neq 0$ ہو۔یہی دونوں حل کے حاصل تقسیم $\tan \omega x = \frac{y_2}{y_1}$ سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے جہاں $\omega = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور تابع صورت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 2.24: دوہرا جذر کی صورت میں مسئلہ 2.3 کا اطلاق
تفرقی مساوات $y'' - 6y' + 9y = 0$ کا (ثابت کریں کہ) عمومی حل $y = (c_1 + c_2x)e^{3x}$ ہے جس کا ورونسکی صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا e^{3x} اور xe^{3x} تمام x پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3xe^{6x} = e^{6x} \neq 0$$

مساوات 2.55 کے عمومی حل میں تمام حل کی شمولیت

اس حصے کو مساوات 2.55 کے عمومی حل کی وجودیت سے شروع کرتے ہیں۔

مسئلہ 2.4: وجودیت عمومی حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں مساوات 2.55 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: مسئلہ 2.2 کے تحت I پر مساوات 2.55 کا، ابتدائی معلومات

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_1(x)$ موجود ہے۔اسی طرح ابتدائی معلومات

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_2(x)$ بھی موجود ہے۔نقطہ x_0 پر ان کا ورونسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 1$$

ہے۔مسئلہ 2.3 کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ مساوات 2.55 کے حل کی اساس ہیں۔اس طرح ثابت ہوا کہ I پر مساوات 2.55 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ عمومی حل اتنا عمومی ہے جتنا کوئی حل عمومی ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 2.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلا وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.55 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$Y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{2.69}$$

لکھا جا سکتا ہے، جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.55 کی کوئی بھی اساس اور C_1 ، C_2 مناسب مستقل ہیں۔

یوں مساوات 2.55 کا کوئی نادر حل موجود نہیں ہے۔(نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔)

ثبوت: تصور کریں کہ I پر مساوات 2.55 کا $y = Y(x)$ کوئی حل ہے۔اب مسئلہ 2.4 کے تحت I پر تفرقی مساوات 2.55 کا عمومی حل

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{2.70}$$

موجود ہے۔ہم c_1 اور c_2 کی وہ قیمتیں دریافت کرنا چاہتے ہیں جن سے I پر $y(x) = Y(x)$ حاصل ہوتا ہو۔ہم I پر کوئی بھی x_0 چنتے ہوئے پہلے ثابت کرتے ہیں کہ c_1 اور c_2 کی ایسی قیمتیں دریافت کی جا سکتی ہیں کہ x_0 پر $y(x_0) = Y(x_0)$ اور $y'(x_0) = Y'(x_0)$ ہوں۔اس کو مساوات 2.70 کے استعمال سے

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0) \tag{2.71}$$
$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0) \tag{2.72}$$

لکھ سکتے ہیں۔ان ہمزاد مساوات سے c_1 اور c_2 معلوم کرتے ہیں۔مساوات 2.71 کو $y_2'(x_0)$ اور مساوات 2.72 کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لینے سے c_1 حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے مساوات 2.73 ملتی ہے۔اسی طرح c_2 حاصل کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لیتے ہوئے مساوات 2.74 حاصل ہوتی ہے۔ان مساوات میں y_1 ، y_1' ، y_2 ، y_2' ، Y اور Y' کی قیمتیں نقطہ x_0 پر لی گئی ہیں۔

$$c_1 y_1 y_2' - c_1 y_2 y_1' = c_1 W(y_1, y_2) = Y y_2' - y_2 Y \tag{2.73}$$
$$c_2 y_1 y_2' - c_2 y_2 y_1' = c_2 W(y_1, y_2) = y_1 Y - Y y_1' \tag{2.74}$$

اب چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہٰذا ورونسکی کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا ان مساوات سے c_1 اور c_2 حاصل کیے جا سکتے ہیں

$$c_1 = \frac{Y y_2' - y_2 Y}{W} = C_1, \quad c_2 = \frac{y_1 Y - Y y_1'}{W} = C_2$$

جہاں ان منفرد قیمتوں کو C_1 اور C_2 لکھا گیا ہے۔انہیں مساوات 2.70 میں پر کرتے ہوئے مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ C_1 اور C_2 مساوات 2.71 اور مساوات 2.72 کے حل ہیں لہٰذا ہم ان مساوات سے دیکھتے ہیں کہ

$$y^*(x_0) = Y(x_0), \quad y^{*'}(x_0) = Y'(x_0)$$

مسئلہ 2.2 میں جس یکتائی کا ذکر کیا گیا ہے اس کے تحت y^* اور Y تمام I پر ہر جگہ برابر ہوں گے۔

سوالات

سوال 2.92: مساوات 2.67 سے مساوات 2.61 حاصل کریں۔

سوال 2.93 تا سوال 2.99 کی ورونسکی حاصل کریں۔حاصل تقسیم سے ثابت کریں کہ یہ خطی طور غیر تابع ہیں اور مسئلہ 2.3 سے بھی اس بات کی تصدیق کریں

سوال 2.93: $e^{2x}, e^{-1.2x}$
جوابات: $\frac{e^{2x}}{e^{-1.2x}} = e^{3.2x} \neq c$ ، $W = -3.2e^{0.8x} \neq 0$

سوال 2.94: $e^{2.4x}, e^{1.1x}$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = e^{1.3x} \neq c$ ، $W = -1.3e^{3.5x} \neq 0$

سوال 2.95: $x, \frac{1}{x}$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = x^2 \neq c$ ، $W = -2x^{-2} \neq 0$

سوال 2.96: x, x^3
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = x^{-2} \neq c$ ، $W = 2x^3 \neq 0$

سوال 2.97: $e^{-0.2x}\sin 3x, e^{-0.2x}\cos 3x$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tan 3x \neq c$ ، $W = 3e^{-0.4x} \neq 0$

سوال 2.98: $e^{-ax}\sinh kx, e^{-ax}\cosh kx$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tanh kx \neq c$ ، $W = -ke^{-2ax} \neq 0$

سوال 2.99: $x^a \sin(k\ln x), x^a \cos(k\ln x)$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tan(k\ln x) \neq c$ ، $W = -kx^{2a-1} \neq 0$

سوال 2.100 تا سوال 2.106 میں تفرقی مساوات کے حل دیے گئے ہیں۔تفرقی مساوات حاصل کریں۔ورونسکی کی مدد سے ثابت کریں کہ دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں اور ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.100: $\sin 3x, \cos 3x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$
جوابات: $y'' + 9y = 0$ ، $W = -3 \neq 0$ ، $y = 2\cos 3x - \sin 3x$

سوال 2.101: $x^3, x^{-4}, \quad y(1)=-1, \quad y'(1)=2$
جوابات: $x^2y''+2xy'-12y=0$ ، $W=-\frac{7}{x^2}\neq 0$ ، $y=-\frac{2x^3}{7}-\frac{5x^{-4}}{7}$

سوال 2.102: $e^{-1.2x}\sin 0.8x, e^{-1.2x}\cos 0.8x, \quad y(0)=5, \quad y'(0)=7$
جوابات: $y''+2.4y'+2.08y=0$ ، $W=-0.8e^{-2.4x}\neq 0$ ، $y=e^{-\frac{6}{5}x}(\frac{65}{4}\sin\frac{4x}{5}+5\cos\frac{4x}{5})$

سوال 2.103: $x^3, x^3\ln x, \quad y(1)=2, \quad y'(1)=8$
جوابات: $x^2y''-5xy'+9y=0$ ، $W=x^5\neq 0$ ، $y=2x^3(1+\ln x)$

سوال 2.104: $1, e^{3x}, \quad y(0)=1.5, \quad y'(0)=-2.5$
جوابات: $y''-3y'=0$ ، $W=3e^{3x}\neq 0$ ، $y=\frac{8}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}$

سوال 2.105: $e^{-kx}\sin\pi x, e^{-kx}\cos\pi x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-k-\pi$
جوابات: $y''+2ky'+(k^2+\pi^2)y=0$ ، $W=-\pi e^{-2kx}\neq 0$ ، $y=e^{-kx}(\sin\pi x-\cos\pi x)$

سوال 2.106: $\sinh 1.8x, \cosh 1.8x, \quad y(0)=14.2, \quad y'(0)=16.38$
جوابات: $y''-3.24y=0$ ، $W=-1.8\neq 0$ ، $y=9.1\sinh 1.8x+14.2\cosh 1.8x$

سوال 2.107: تفرقی مساوات $y''-y=0$ کا عمومی حل قوت نمائی تفاعل اور بذلولی[68] تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ دونوں صورتوں کے مستقل کا تعلق کیا ہے؟

جوابات: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ ، $y=c_a\sinh x+c_b\cosh x$ ، $c_a=c_1-c_2$ ، $c_b=c_1+c_2$

[68] hyperbolic

2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات

اس باب میں اب تک متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ یہاں سے باب کے اختتام تک غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ درج ذیل غیر متجانس خطی تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جہاں $r \not\equiv 0$ ہے۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.75}$$

ہم دیکھیں گے کہ مساوات 2.75 کا عمومی حل، مطابقتی متجانس مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.76}$$

کے عمومی حل اور مساوات 2.76 کے ایک مخصوص حل کا مجموعہ ہو گا۔ مساوات 2.75 کے عمومی حل اور مخصوص حل کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف : عمومی حل اور مخصوص حل
کھلے وقفہ I پر غیر متجانس مساوات 2.75 کا عمومی حل

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{2.77}$$

ہو گا جہاں I پر $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ متجانس مساوات 2.76 کا عمومی حل ہے اور I پر y_p مساوات 2.75 کا کوئی بھی حل ہے جس میں مستقل نہیں پایا جاتا۔

مساوات 2.75 کا مخصوص حل، مساوات 2.77 کے c_1 اور c_2 میں خصوصی قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔

اب ہمیں حل کی ان تعریف کا جواز پیش کرنا ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.75 کا حل y_p حاصل کرنا ہو گا۔ پس ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 2.77 کا عمومی حل مساوات 2.75 پر پورا اترتا ہے اور یہ کہ مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل کا آپس میں سادہ تعلق ہے۔

مسئلہ 2.6: مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل کا آپس میں تعلق

(الف) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کے حل y اور اسی وقفے پر مساوات 2.76 کے حل $\tilde{y}$ کا مجموعہ I پر مساوات 2.75 کا حل ہے۔ بالخصوص مساوات 2.77 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کا حل ہو گا۔

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کے دو حل کا فرق I پر مساوات 2.76 کا حل ہے۔

ثبوت:

(الف) مساوات 2.75 کے بائیں ہاتھ کو $L[y]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں I پر مساوات 2.75 کے کسی بھی حل y اور مساوات 2.76 کے کسی بھی حل $\tilde{y}$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L[y+\tilde{y}] = L[y] + L[\tilde{y}] = r + 0 = r$$

(ب) کھلے وقفے I پر مساوات 2.75 کے کسی بھی حل y اور y^* کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L[y-y^*] = L[y] - L[y^*] = r - r = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ متجانس مساوات 2.76 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہوتے ہیں۔اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متجانس مساوات 2.75 کے عمومی حل میں اس کے تمام حل شامل ہیں۔

مسئلہ 2.7: غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.75 کا ہر حل، مساوات 2.77 میں دیے گئے عمومی حل کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: کھلے وقفے I پر y^* مساوات 2.75 کا کوئی حل ہے جبکہ x_0 اس وقفے پر کوئی x ہے۔اسی طرح مساوات 2.77 کھلے وقفے پر مساوات 2.75 کا کوئی عمومی حل ہے۔یہ حل موجود ہے۔یقیناً $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$

مسئلہ 2.4 کے تحت موجود ہے جبکہ y_p کی وجودیت اس باب میں آگے جا کر دکھائی جائے گی۔اب مسئلہ 2.6-ب کے تحت $Y = y^* - y_p$ کھلے وقفے پر مساوات 2.76 کا حل ہے۔نقطہ x_0 پر

$$Y(x_0) = y^*(x_0) - y_p(x_0), \quad Y'(x_0) = y^{*'}(x_0) - y_p'(x_0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔کھلے وقفے I پر، مسئلہ 2.2 کے مطابق، کسی بھی ابتدائی معلومات کی طرح، ان معلومات پر پورا اترتا ہوا، مساوات 2.76 کا مخصوص حل موجود ہے جسے y_h میں c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے $y^* = Y + y_p$ سے مسئلہ کا دعویٰ ثابت ہوتا ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

آپ نے دیکھا کہ مساوات 2.75 یا اس پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 2.76 کو حل کرنا ہو گا اور مساوات 2.75 کا کوئی بھی حل y_p تلاش کرنا ہو گا۔اس طرح عمومی حل 2.77 حاصل ہو گا۔

مساوات 2.75 کا حل y_p حاصل کرنے کی ایک ترکیب کو **نا معلوم عددی سر کی ترکیب**[69] کہتے ہیں۔ یہ ترکیب نہایت آسان ہے۔ اس ترکیب سے ارتعاشی نظام عمدگی سے حل ہوتے ہیں لہٰذا اسے انجینئری شعبے میں مقبولیت حاصل ہے۔اس باب کے آخری حصے میں عمومی ترکیب پر غور کیا جائے گا جو نسبتاً مشکل ترکیب ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب ان خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{2.78}$$

کے حل کے لئے موزوں ہے جس کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہوں اور $r(x)$ قوت نمائی تفاعل ہو یا x کی طاقت ہو یا سائن نما تفاعل ہو اور یا ان تفاعل کا مجموعہ یا حاصل ضرب ہو۔ایسی تفاعل کی تفرقات بھی یہی تفاعل ہوتی ہیں۔ مثلاً x^3 کے تفرقات $3x^2$ ، $6x$ اور 6 ہیں جو از خود x کی طاقت ہیں۔اسی طرح $\sin \omega x$ کا ایک درجی تفرق $\omega \cos \omega x$ جبکہ دو درجی تفرق $-\omega^2 \sin \omega x$ ہے۔یہ دونوں تفرقات از خود سائن نما تفاعل ہیں۔

---

[69] method of undetermined coefficients

جدول 2.2: نامعلوم عددی سر کی ترکیب

$y_p(x)$ کے ارکان	$r(x)$ کے ارکان
$Ce^{\gamma x}$	$ke^{\gamma x}$
$k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$	$kx^n \quad (n = 0, 1, \cdots)$
$K\cos\omega x + M\sin\omega x$	$k\cos\omega x$
$K\cos\omega x + M\sin\omega x$	$k\sin\omega x$
$e^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$	$ke^{\alpha x}\cos\omega x$
$e^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$	$ke^{\alpha x}\sin\omega x$

اس ترکیب میں y_p کو $r(x)$ اور اس کے تمام تفرقات کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ مجموعہ لکھتے ہوئے ہر رکن کو نا معلوم مستقل سے ضرب دیا جاتا ہے۔ y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.78 میں پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کے یکساں اجزاء کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے نا معلوم مستقل دریافت کئے جاتے ہیں۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p جدول 2.2 کے تحت لکھی جاتی ہے۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p درج ذیل قواعد کے تحت لکھی جاتی ہے۔

بنیادی قاعدہ: اگر مساوات 2.78 کا $r(x)$ جدول 2.2 کے دائیں قطار میں دیا گیا ہو تب اس تفاعل کے صف سے $y_p(x)$ حاصل کریں۔ حاصل y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.2 میں پر کرتے ہوئے نا معلوم عددی سر کی قیمت دریافت کریں۔

ترمیمی قاعدہ: اگر y_p کا کوئی رکن تفاعل مساوات 2.78 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل ہو تب اس رکن کو x سے ضرب دے کر y_p میں شامل کریں۔ (اگر یہ حل مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل کیا گیا ہو تب اس رکن کو x^2 سے ضرب دیں۔)

مجموعے کا قاعدہ:

$r(x)$ صرف ایک رکن پر مشتمل ہونے کی صورت میں بنیادی قاعدہ استعمال ہو گا۔ ترمیمی قاعدہ استعمال کرنے سے پہلے متجانس مساوات حل کرنا ہو گا۔ اگر $r = r_1$ کی صورت میں مساوات 2.78 کا حل y_{p1} ہو اور $r = r_2$ کی صورت میں اس کا حل y_{p2} ہو تب $r = r_1 + r_2$ کی صورت میں اس کا حل $y_{p1} + y_{p2}$ ہو گا۔ یہ حقیقت مجموعے کا قاعدہ دیتی ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب خود اصلاحی ہے۔ یوں y_p چنتے ہوئے کم اجزاء لینے سے تضاد پیدا ہو گا اور عددی سر حاصل کرنا ممکن نہ ہو گا۔ زیادہ اجزاء لینے سے زائد ارکان کے عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوں گے۔

آئیں مثال 2.25 تا مثال 2.27 کی مدد سے اس ترکیب کو مزید سمجھیں۔

مثال 2.25: بنیادی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تلاش کریں۔

$$y'' + 9y = 0.2x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 9y = 0$ کا حل y_h درج ذیل ہے۔

$$y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$$

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: اگر ہم $y_p = Kx^2$ چننے تب $y'_p = 2Kx$ اور $y'' = 2K$ ہو گے جنہیں دیے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے $2K + 9Kx^2 = 0.2x^2$ ملتا ہے۔یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت تمام x کے لئے درست ہو سکتی ہے کہ دونوں جانب x^2 کے عددی سر برابر ہوں۔اسی طرح x^1 یا x^0 کے عددی سر بھی دونوں اطراف برابر ہونا ضروری ہے۔اس کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہوئے $2K = 0$ اور $9K = 0.2$ لکھا جائے گا جس سے $K = 0$ اور $K = \frac{0.2}{9}$ حاصل ہوتا ہے جو تضاد کی صورت حال ہے۔یوں اس y_p کو رد کیا جاتا ہے۔

آئیں اب دیے گئے قواعد کے تحت جدول 2.2 سے y_p لکھیں۔جدول کی دوسری صف کے تحت درج ذیل لکھا جائے گا

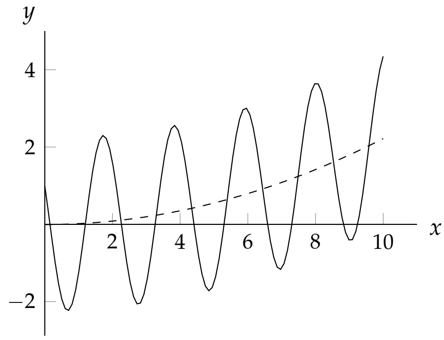
$$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$$

جس کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(2K_2) + 9(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 0.2x^2 \implies 9K_2x^2 + 9K_1x + 2K_2 + 9K_0 = 0.2x^2$$

اس مساوات کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔یوں بائیں جانب x^2 کا عددی سر $9K_2$ ہے جبکہ دائیں جانب یہ 0.2 کے برابر ہے۔انہیں آپس میں برابر پر کیا جاتا ہے۔اسی طرح بائیں جانب x^1 کا عددی سر $9K_1$ ہے جبکہ دائیں جانب ایسا کوئی رکن نہیں پایا جاتا لہٰذا دائیں جانب x^1 کا عددی سر صفر کے برابر ہے۔اسی طرح x^0 کا عددی سر بائیں جانب $2K_2 + 9K_0$ اور دائیں جانب صفر ہے۔

$$9K_2 = 0.2, \quad 9K_1 = 0, \quad 2K_2 + 9K_0 = 0$$



شکل 2.18: مثال 2.25 کا مخصوص حل۔

ان تین ہمزاد مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے $K_2 = \frac{1}{45}$ ، $K_1 = 0$ اور $K_0 = -\frac{2}{405}$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $y_p = \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = y_h + y_p = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

ہو گا۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ پر $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $1 = A - \frac{2}{405}$ لکھا جائے گا جس سے $A = \frac{407}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $y'(0) = -5$ کو استعمال کرتے ہوئے $3B = -6$ لکھا جائے گا جس سے $B = -2$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = \frac{407}{405}\cos 3x - 2\sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

مخصوص حل کو شکل 2.18 میں دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر y_p کو ظاہر کرتی ہے۔مخصوص حل y_p کے دونوں اطراف ارتعاش کر رہی ہے۔

مثال 2.26: ترمیمی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 2.4y' + 1.44y = -5e^{-1.2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2.4\lambda + 1.44 = 0$ یعنی $(\lambda + 1.2)^2 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1.2$ ہے جس سے $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: تفرقی مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل $e^{-1.2x}$ سے عام طور جدول 2.2 کو دیکھ کر $y_p = Ce^{-1.2x}$ لکھا جاتا البتہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تفاعل متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل حل ہے۔یوں ترمیمی قاعدے کے تحت منتخب تفاعل کو x^2 سے ضرب دینا ہو گا۔یوں درج ذیل چننا جائے گا

$$y_p = Cx^2e^{-1.2x}$$

جس کے تفرقات $y_p' = (2x - 1.2x^2)Ce^{-1.2x}$ اور $y_p'' = (1.44x^2 - 4.8x + 2)Ce^{-1.2x}$ ہیں۔ان تمام کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں جہاں دونوں اطراف $e^{-1.2x}$ کو حذف کیا گیا ہے۔

$$(1.44x^2 - 4.8x + 2)C + 2.4(2x - 1.2x^2)C + 1.44Cx^2 = -5$$

دونوں اطراف x^2 ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھے ہوئے $0 = 0$ ، $0 = 0$ اور $2C = -5$ لکھا جاتا ہے جس سے $C = -2.5$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $y_p = -2.5x^2e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

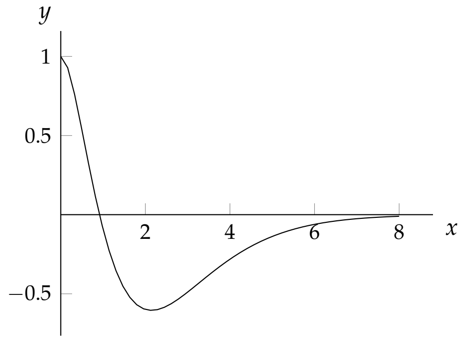
$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x} - 2.5x^2e^{-1.2x}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ ، $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $c_1 = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ y کے تفرق

$$y' = [3x^2 - (1.2c_2 + 5)x + c_2 - 1.2c_1]e^{-1.2x}$$

میں $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $0 = 2c_2 - 1.2c_1$ یعنی $c_2 = 1.2$ ملتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y = (1 + 1.2x - 2.5x^2)e^{-1.2x}$$



شکل 2.19: مثال 2.26 کا مخصوص حل۔

مخصوص حل کو شکل 2.19 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.27: مجموعے کا قاعدہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y''3y' + 2y = 0.2\cos x + 0.1x - 0.4, \quad y(0) = -2.1, \quad y'(0) = 3.2$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 3y' + 2y = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ یعنی $(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -2$ ہیں جن سے $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: غیر متجانس مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل کے تحت جدول 2.2 سے $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ لکھتے ہیں جہاں

$$y_{p1} = K\cos x + M\sin x, \quad y_{p2} = K_1x + K_0$$

کے برابر ہیں۔یوں $y_p = K\cos x + M\sin x + K_1x + K_0$ اور اس کے تفرقات

$$y_p' = -K\sin x + M\cos x + K_1, \quad y_p'' = -K\cos x - M\sin x$$

کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(-K\cos x - M\sin x) + 3(-K\sin x + M\cos x + K_1) \\ + 2(K\cos x + M\sin x + K_1 x + K_0) = 0.2\cos x + 0.1x - 0.4$$

دونوں اطراف $\cos x$ ، $\sin x$ ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھتے

$$-K + 3M + 2K = 0.2, \quad -M - 3K + 2M = 0, \quad 2K_1 = 0.1, \quad 3K_1 + 2K_0 = -0.4$$

ہوئے حل کرنے سے $K_0 = -\frac{11}{40}$ ، $K_1 = \frac{1}{20}$ ، $M = \frac{3}{50}$ اور $K = \frac{1}{50}$ ملتے ہیں لہٰذا

$$y_p = \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

لکھا جائے گا جس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

حاصل ہوتا ہے۔

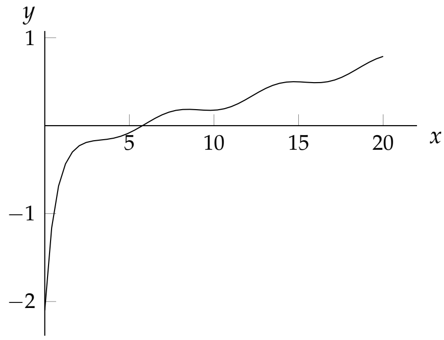
تیسرا قدم: مخصوص حل: y اور y' میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{50} - \frac{11}{40} = -2.1, \quad -c_1 - 2c_2 + \frac{3}{50} + \frac{1}{20} = 3.2$$

جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{3}{5}$ اور $c_2 = -\frac{249}{200}$ ملتے ہیں۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = -\frac{3}{5}e^{-x} - \frac{249}{200}e^{-2x} + \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

مخصوص حل کو شکل 2.20 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.20: مثال 2.27 کا مخصوص حل۔

توازن

کسی بھی انجینئری نظام کا متوازن ہونا نہایت اہم ہوتا ہے۔مساوات 2.78 کے مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دونوں جذر منفی یا دونوں جذر کے حقیقی حصے منفی ہونے کی صورت میں نظام اور تفرقی مساوات کو متوازن[70] کہتے ہیں۔ایسی صورت میں $t \to \infty$ پر $y_h \to 0$ ہو گا لہٰذا عارضی حل $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حل y_p کے قریب قریب ہو گا۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں نظام غیر متوازن[71] کہلاتا ہے۔چونکہ مثال 2.25 میں امتیازی مساوات کے جذر کے حقیقی حصے منفی مقدار نہیں ہیں لہٰذا یہ غیر متوازن نظام کو ظاہر کرتا ہے۔

اگلے دو حصوں میں ان مساوات کا استعمال ہو گا۔

سوالات

سوال 2.108 تا سوال 2.117 میں دیے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کے حقیقی عمومی حل دریافت کریں۔

سوال 2.108: $y'' - y' - 6y = e^{-1.5x}$
جواب: $y = k_1 e^{3x} + k_2 e^{-2x} - \frac{4}{9} e^{-1.5x}$

---
[70] stable
[71] unstable

سوال 2.109: $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$
جواب: $y = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{-3x} - (1+x)e^{-3x}$

سوال 2.110: $4y'' + 12y' + 9y = 4^{-1.5x}$
جواب: $y = (k_1 + k_2 x)e^{-1.5x} + \frac{x^2}{2} e^{-1.5x}$

سوال 2.111: $4y'' + 2y' + 3y = 4\cos 3x$
جواب: $y = k_1 e^{-0.5x} + k_2 e^{-1.5x} + \frac{32}{555}\sin 3x - \frac{44}{555}\cos 3x$

سوال 2.112: $y'' + 4y = \sin 2x$
جواب: $y = k_1 \sin 2x + k_2 \cos 2x - 0.5x\cos 2x$

سوال 2.113: $9y'' + 4y = e^{-2x}\sin\frac{2x}{3}$
جواب: $y = k_1 \cos\frac{2x}{3} + k_2 \sin\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2x}}{156}(2\cos\frac{2x}{3} + 3\sin\frac{2x}{3})$

سوال 2.114: $y'' + 3y' + 2y = x^2$
جواب: $y = k_1 e^{-x} + k_2 e^{-2x} + \frac{2x^2 - 6x + 7}{4}$

سوال 2.115: $y'' + 9y = 3\sin x + \sin 3x$
جواب: $y = k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x + \frac{3}{8}\sin x - \frac{x}{6}\cos 3x$

سوال 2.116: $y'' + 8y' + 15y = 0.5x$
جواب: $y = k_1 e^{-3x} + k_2 e^{-5x} + \frac{15x - 8}{450}$

سوال 2.117: $y'' + 2y' + y = x\cos x$
جواب: $y = (k_1 + k_2 x)e^{-x} + 0.5\cos x + 0.5(x-1)\sin x$

سوال 2.118 تا سوال 2.130 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلوں کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.118: $y'' + 5y' + 6y = 0.2e^{-1.5x}, \quad y(0) = 1.2, \quad y'(0) = -0.5$
جواب: $y = -\frac{4}{15}e^{-1.5x} + \frac{27}{10}e^{-2x} - \frac{53}{30}e^{-3x}$

سوال 2.119: $y'' + 2.7y' + 1.8y = 3.4e^{-1.2x}, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -3$
جواب: $y = (\frac{102x - 340}{9})e^{-1.2x} - 20e^{-1.2x} + \frac{302}{9}e^{-1.5x}$

سوال 2.120: $y'' + 6y' + 9y = 1.1e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
جواب: $y = 1.1e^{-2x} + (0.9x - 0.1)e^{-3x}$

سوال 2.121: $y'' + 8y' + 16y = 0.7e^{-4x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = \frac{7}{20}x^2e^{-4x} + (6x + 2)e^{-4x}$

سوال 2.122: $4y'' + 8y' + 3y = 24x^2, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = -101e^{-0.5x} + \frac{59}{9}e^{-1.5x} + \frac{72x^2 - 384x + 832}{9}$

سوال 2.123: $4y'' + 8y' + 3y = 2.4e^{-0.5x} + 8x^2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = (\frac{3x}{5} - \frac{301}{10})e^{-0.5x} + \frac{617}{270}e^{-1.5x} + \frac{8x^2}{3} - \frac{128x}{9} + \frac{832}{27}$

سوال 2.124: $6y'' + 29y' + 35y = 6\cos x, \quad y(0) = 0.5, \quad y'(0) = -0.2$
جواب: $y = \frac{3}{29}\cos x + \frac{3}{29}\sin x + \frac{1197}{290}e^{-\frac{7}{3}x} - \frac{541}{145}e^{-\frac{5}{2}x}$

سوال 2.125: $y'' + 9y = \cos 3x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.3$
جواب: $y = \frac{1}{5}\cos 3x + (\frac{x}{6} + \frac{1}{10})\sin 3x$

سوال 2.126: $8y'' - 6y' + y = 6\sinh x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.1$
جواب: $y = e^x - \frac{19}{5}e^{0.5x} + \frac{16}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.127: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 3\ln x - 4, \quad y(1) = 0, \ y'(1) = 1, \ y_p = \ln x$
جواب: $y = \frac{1}{3}\ln x + \frac{4}{9} + \frac{5x^3}{9} - x$

سوال 2.128: $y'' + 2y' + 10y = 17\sin x - 37\sin 3x, \quad y(0) = 6.6, \quad y'(0) = -2.2$
جواب: $y = e^{-x}\cos 3x - \sin 3x + 6\cos 3x + \frac{9}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$

سوال 2.129: $8y'' - 6y' + y = 6\sinh x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.05$
جواب: $y = e^x - 4e^{0.5x} + \frac{17}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.130: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.5$
جواب: $y = (1 + x - 0.25\sin 2x)e^{-2x}$

2.8 جبری ارتعاش۔ گمک

ہم اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر حصہ 2.4 میں غور کر چکے ہیں جہاں اس نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{2.79}$$

سے ظاہر کیا گیا جہاں، ساکن حالت میں گیند کے مقام سے، حرکت کی صورت میں گیند کا فاصلہ $y(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حصہ 2.4 میں نظام پر کوئی بیرونی قوت لاگو نہیں کیا گیا۔نظام کی حرکت صرف اور صرف نظام کی اندرونی قوتوں کی بنا تھی۔ قوت جمود my'' ، قوت بحالی ky اور قوت روک cy' نظام کی اندرونی قوتیں تھیں۔

آگے بڑھتے ہوئے اس نظام میں بیرونی قوت $r(t)$ کا اضافہ کرتے ہیں۔شکل 2.21 میں ایسا نظام دکھایا گیا ہے۔بیرونی قوت $r(t)$ انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔اس نظام کی نمونہ کشی درج ذیل تفرقی مساوات کرتی ہے۔

$$my'' + cy' + ky = r(t) \tag{2.80}$$

میکانی طور پر اس مساوات کا مطلب ہے کہ ہر لمحہ t پر اندرونی قوتوں کا مجموعہ بیرونی قوت $r(t)$ کے برابر ہے۔اس نظام میں گیند کی حرکت کو **جبری حرکت**[72] کہتے ہیں جبکہ بیرونی قوت کو **جبری قوت**[73] یا **داخلی قوت**[74] کہتے ہیں۔گیند کی حرکت کو نظام کا **رد عمل**[75] یا نظام کا **ماحصل**[76] بھی کہا جاتا ہے۔

ہمیں **دوری**[77] بیرونی قوتوں میں زیادہ دلچسپی ہے لہٰذا ہم

$$r(t) = F_0 \cos \omega t \qquad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

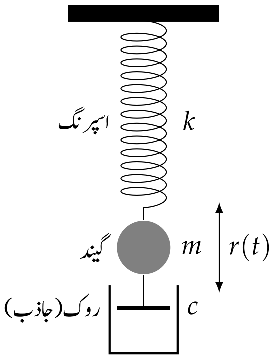
طرز کے قوتوں پر توجہ دیں گے۔یوں غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t \tag{2.81}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے حل سے بنیادی اہمیت کے حقائق حاصل ہوں گے جن سے **گمک**[78] کی نمونہ کشی ممکن ہو گی۔

---

[72] forced motion
[73] forcing function
[74] input force
[75] response
[76] output
[77] periodic
[78] resonance



شکل 2.21: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

غیر متجانس مساوات کا حل

ہم نے حصہ 2.7 میں دیکھا کہ غیر متجانس مساوات 2.81 کا عمومی حل متجانس مساوات 2.79 کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.81 کے کوئی بھی حل y_p کا مجموعہ ہے۔ہم y_p کو حصہ 2.7 کے نا معلوم عدد سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔یوں

$$y_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{2.82}$$

اور اس کے تفرقات

$$y_p'(t) = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t, \quad y_p''(t) = -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t$$

کو مساوات 2.81 میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} m(-\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t) + c(-\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t) \\ + k(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = F_0\cos\omega t \end{aligned}$$

دونوں اطراف کے $\cos\omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے اور دونوں اطراف $\sin\omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے ہمزاد مساوات

$$(k - m\omega^2)a + c\omega b = F_0, \quad -c\omega a + (k - m\omega^2)b = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان ہمزاد مساوات کو a اور b کے لئے حل کرتے ہیں۔ b حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $-c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(k - m\omega^2)^2 a + c^2\omega^2 a = F_0(k - m\omega^2)$$

اسی طرح a حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$c^2\omega^2 b + (k - m\omega^2)^2 b = F_0 c\omega$$

ان مساوات میں جزو $c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2$ صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا دونوں مساوات کو اس جزو سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے a اور b حاصل کرتے ہیں۔

$$a = F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

اگر حصہ 2.4 کی طرح $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ لکھا جائے تب $k = m\omega_0^2$ ہو گا اور

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2} \tag{2.83}$$

ہوں گے۔

اس طرح غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 2.81 کا عمومی حل

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{2.84}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y_h(t)$ متجانس مساوات 2.79 کا عمومی حل ہے اور $y_p(t)$ مساوات 2.82 میں دیا گیا ہے جس میں a اور b کی قیمتیں مساوات 2.83 سے پر کی گئی ہیں۔

آئیں اب اس میکانی نظام کی دو بالکل مختلف صورتوں پر غور کریں۔پہلی صورت $c = 0$ غیر قصری ہے جبکہ دوسری صورت $c > 0$ تقصیری ہے۔

پہلی صورت: بلا تقصیر جبری ارتعاش۔گمک

اگر نظام میں قوت روک اتنا کم ہو کہ دورانیہ غور کے دوران اس کا اثر قابل نظر انداز ہو تب $c = 0$ لیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 2.83 سے $a = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ اور $b = 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مساوات 2.82

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos\omega t = \frac{F_0}{k[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]} \cos\omega t \tag{2.85}$$

لکھا جائے گا جہاں $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یہاں ضروری ہے کہ $\omega \neq \omega_0$ فرض کیا جائے جس کا مطلب ہے کہ جبری قوت کی تعدد $f = \frac{\omega}{2\pi}$ بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ سے مختلف فرض کی گئی ہے۔ (بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد کے لئے مساوات 2.38 دیکھیں۔) یوں مساوات 2.85 اور مساوات 2.40 کی مدد سے بلا تقصیر نظام کی عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t \tag{2.86}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ نظام کا رد عمل دو مختلف تعدد کے ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

گمک

مساوات 2.85 کا حیطہ

$$a_0 = \frac{F_0}{k}\rho, \quad \rho = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{2.87}$$

ω اور ω_0 پر منحصر ہے۔ $\omega \to \omega_0$ کرنے سے $\rho \to \infty$ اور $a \to \infty$ ہو گا۔ داخلی جبری قوت کی تعدد کو نظام کی قدرتی تعدد کے برابر $(\omega = \omega_0)$ کرنے سے انتہائی زیادہ حیطے کی پیدا ارتعاش کو گمک[79] کہتے ہیں۔ ρ کو گمکی جزو[80] کہتے ہیں جسے شکل 2.22 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 2.87 سے $\frac{\rho}{k} = \frac{a_0}{F_0}$ لکھا جا سکتا ہے جو مخصوص حل y_p اور داخلی جبری قوت کے حیطوں کا تناسب ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ ارتعاشی نظام میں گمک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ گمک کی صورت میں غیر متجانس مساوات 2.81 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

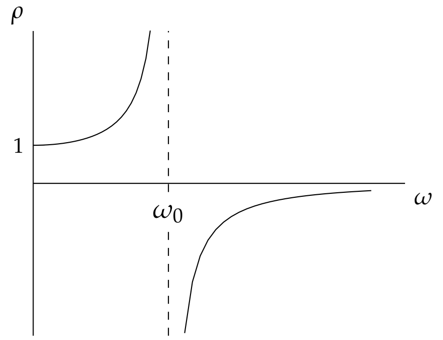
$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{2.88}$$

جس کا حل مساوات 2.85 نہیں دیتی۔ مساوات 2.88 کا مخصوص حل y_p، صفحہ 151 پر دیے گئے ترمیمی قاعدہ کے تحت

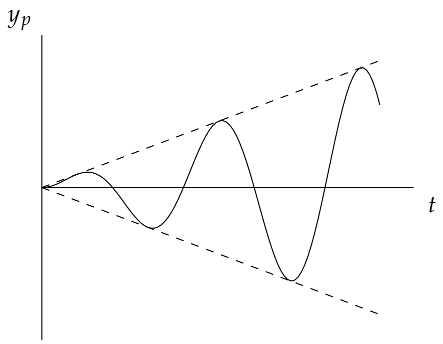
$$y_p(t) = t(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t)$$

---

[79] resonance
[80] resonance factor



شکل 2.22: گمگی جزو $\rho(\omega)$



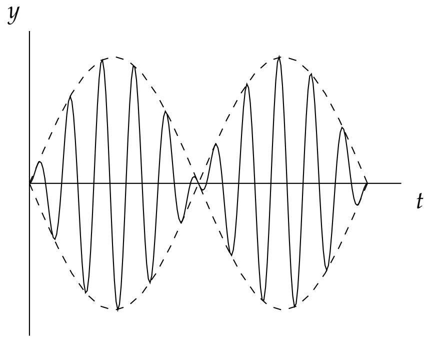
شکل 2.23: گمک کی صورت میں مخصوص حل۔

ہو گا جس کو مساوات 2.88 میں پر کرتے ہوئے $a=0$ اور $b=\frac{F_0}{2m\omega_0}$ ملتے ہیں لہٰذا مخصوص حل

$$y_p(t)=\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \tag{2.89}$$

ہو گا جسے شکل 2.23 میں دکھایا گیا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ جزو t کی وجہ سے ارتعاش کا حیطہ مسلسل بڑھتا ہے۔عملاً اس کا مطلب ہے کہ کم قصری نظام زیادہ جھولے گا۔ نہایت کم تقصیر کی صورت میں نظام جھولنے سے تباہ ہو سکتا ہے۔

تھاپ



شکل 2.24: قریبی سر تھاپ پیدا کرتے ہیں۔

ω اور ω_0 قریب قریب ہونے کی صورت میں ایک دلچسپ صورت پیدا ہوتی ہے۔اسے سمجھنے کی خاطر مساوات 2.86 میں $C=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ اور $\delta=0$ لکھتے ہیں۔

$$y(t)=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega_0 t+\cos\omega t) \qquad (\omega\neq\omega_0) \tag{2.90}$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$y(t)=\frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right) \tag{2.91}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ ω_0 اور ω نہایت قریب ہیں لہٰذا $\frac{\omega_0-\omega}{2}$ چھوٹی مقدار ہو گی اور یوں دائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ زیادہ ہو گا۔اس کے برعکس $\frac{\omega_0+\omega}{2}$ بڑی مقدار ہو گی لہٰذا بائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ کم ہو گا۔ شکل 2.24 میں اس مساوات کو دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر دائیں سائن تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔اس شکل کے تفاعل کی آواز میں بلند تعدد کے ساتھ ساتھ کم تعدد بھی سنائی دیتی ہے جنہیں تھاپ[81] کہتے ہیں۔موسیقار تھاپ پر دھیان دیتے ہوئے موسیقی آلے کی تعدد درست کرتا ہے۔

دوسری صورت: قصری جبری ارتعاش

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک قابل نظر انداز نہ ہونے کی صورت میں $c>0$ ہو گا اور (جیسا ہم حصہ 2.4 میں دیکھ چکے ہیں) متجانس مساوات 2.79 کا حل y_h وقت گزرتے گھٹے گا حتیٰ کہ $t\to\infty$ پر

[81] beats

$y_h \to 0$ ہو گا۔عملاً کافی دیر بعد y_h صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مساوات 2.81 کا **عارضی حل**[82] مساوات 2.84 یعنی $y = y_h + y_p$ آخر کار **برقرار حال حل**[83] y_p کے برابر ہو گا۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 2.8: برقرار حال حل
سائن نما جبری قوت کی موجودگی میں قصری ارتعاشی نظام کافی دیر کے بعد عملاً ہارمونی ارتعاش کرے گا جس کی تعدد داخلی تعدد کے برابر ہو گی۔

2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔عملی گمک

بلا تقصیر نظام میں $\omega \to \omega_0$ کرنے سے y_p کا حیطہ لامتناہی ہو گا۔قصری نظام میں ایسا نہیں ہوتا اور y_p کا حیطہ محدود رہتا ہے۔ہاں کسی مخصوص ω پر حیطہ زیادہ سے زیادہ ہو سکتا ہے جس کا دارومدار c کی قیمت پر ہو گا۔ایسی صورت کو **عملی گمک** کہہ سکتے ہیں۔ عملی گمک اس لئے اہم ہے کہ اگر c کی قیمت زیادہ نہ ہو تب عین ممکن ہے کہ داخلی جبری قوت نظام میں نقصان دہ یا تباہ کن حیطے کی ارتعاش پیدا کر سکے۔جس زمانے میں انسان کو گمک کی سمجھ نہ تھی اس زمانے میں اس کو ایسے نقصان اٹھانے پڑتے تھے۔مشین، جہاز، گاڑی، پل اور بلند عمارتیں وہ میکانی نظام ہیں جن میں ارتعاش پایا جاتا ہے۔زلزلہ یا آندھی بطور جبری قوت بلند عمارت میں تباہ کن گمک پیدا کرتے ہوئے اسے ملبے کا ڈھیر بنا سکتی ہے۔بعض اوقات گمک سے پاک نظام کی تخلیق نا ممکن ہوتی ہے۔

y_p کا حیطہ بالمقابل ω پر غور کی خاطر مساوات 2.82 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta) \tag{2.92}$$

جہاں

$$\begin{aligned} C^*(\omega) &= \sqrt{a^2+b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+c^2\omega^2}} \\ \eta(\omega) &= \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{c\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \end{aligned} \tag{2.93}$$

[82] transient solution
[83] steady state solution

ہیں۔انہیں شکل 2.25 میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ C^* رد عمل y_p کا **حیطہ**[84] اور η اس کا **زاویائی فاصلہ**[85] ہے۔داخلی جبری تفاعل اور y_p میں زاویائی فرق η کے برابر ہو گا۔مثبت η کی صورت میں مساوات 2.92 کے تحت داخلی قوت سے y_p **پیچھے**[86] ہے۔

حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کرنے کی خاطر C^* کے تفرق کو صفر کے برابر $(\frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}\omega} = 0)$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{F_0[2m^2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2c^2\omega]}{2[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

کسر کا شمار کنندہ صفر ہونے کی صورت میں درج بالا صفر کے برابر ہو گا جس سے

$$c^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \omega^2) \qquad (\omega_0^2 = \frac{k}{m}) \tag{2.94}$$

یعنی

$$2m^2\omega^2 = 2m^2\omega_0^2 - c^2 = 2mk - c^2 \tag{2.95}$$

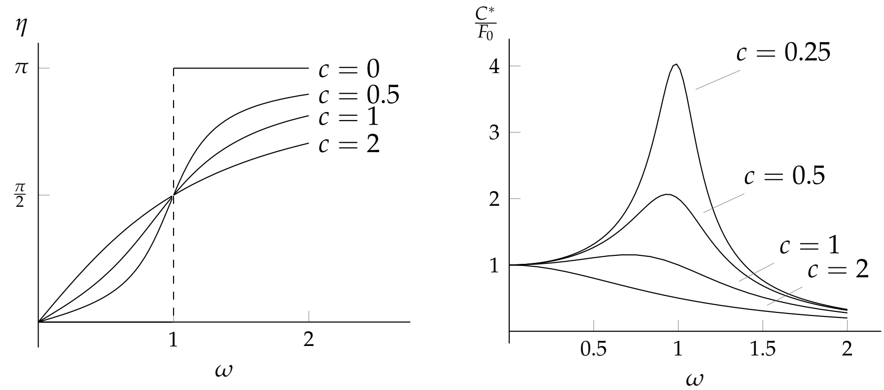
حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے $c^2 > 2mk$ کی صورت میں خیالی تعدد $\omega = \mp i\sqrt{\frac{c^2-2mk}{2m^2}}$ حاصل ہوتا ہے۔خیالی تعدد حساب کے نقطہ نظر سے درست جواب ہے لیکن عملی دنیا میں تعدد کی قیمت صرف حقیقی قیمت ممکن ہے۔ایسی صورت میں ω کی قیمت بڑھانے سے C^* کی قیمت گھٹتی ہے۔اس کے برعکس $c^2 < 2mk$ کی صورت میں مساوات 2.95 سے حقیقی تعدد $\omega_{\text{بلندتر}}$

$$\omega_{\text{بلندتر}}^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2} \tag{2.96}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 2.96 سے ظاہر ہے کہ c کی قیمت کم کرنے سے $\omega_{\text{بلندتر}}$ کی قیمت ω_0 کے قریب ہوتی ہے حتیٰ کہ $c \to 0$ کی صورت میں $\omega_{\text{بلندتر}} \to 0$ حاصل ہوتا ہے۔

---

amplitude[84]
phase angle[85]
lagging[86]



(الف) $k = 1$ ، $m = 1$ ، $\omega_0 = 1$ رکھتے ہوئے مختلف c کے لئے $\frac{C^*}{F_0}$ بالمقابل ω

(ب) $k = 1$ ، $m = 1$ ، $\omega_0 = 1$ رکھتے ہوئے مختلف c کے لئے η بالمقابل ω

شکل 2.25: مساوات 2.93 کا حیطہ اور زاویائی فاصلہ۔