

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
117	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
132	2.5 پولر کوئی مساوات	
141	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
150	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
162	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
168	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
172	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
183	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
191	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
191	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
203	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

- 3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات 212
- 3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل 215

- 4 نظام تفرقی مساوات 223
- 4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق 224
- 4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے 233
- 4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی 248
- 4.3.1 خطی نظام 249
- 4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب 252
- 4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام 270
- 4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام 279
- 4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ 288

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

عموماً طبعی تعلقات کو تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح عموماً انجینئرنگ مسائل تفرقی مساوات کی صورت میں پیش آتے ہیں۔ اسی لئے اس کتاب کی ابتدا تفرقی مساوات اور ان کے حل سے کی جاتی ہے۔

سادہ تفرقی مساوات¹ سے مراد ایسی تفرقی مساوات ہے جس میں ایک عدد آزاد متغیرہ پایا جاتا ہو۔ اس کے برعکس جزوی تفرقی مساوات² ایک سے زائد آزاد متغیرات پر منحصر ہوتی ہے۔ جزوی تفرقی مساوات کا حل نسبتاً مشکل ثابت ہوتا ہے۔

کسی بھی حقیقی صورت حال یا مشاہدے کی نقشہ کشی کرتے ہوئے اس کا ریاضی نمونہ³ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سائنس کے مختلف میدان مثلاً انجینئرنگ، طبیعیات، علم کیمیا، حیاتیات، کمپیوٹر وغیرہ میں درپیش مسائل کی صحیح تفرقی مساوات کا حصول اور ان کے حل پر تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

سادہ تفرقی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر کو علیحدہ باب میں پیش کیا جائے گا۔ یہ باب بقایا کتاب سے مکمل طور پر علیحدہ رکھا گیا ہے۔ یوں کتاب کے پہلے دو باب کے بعد اس باب کو پڑھا جاسکتا ہے۔

پہلے باب کا آغاز درجہ اول کے سادہ تفرقی مساوات کے حصول، مساوات کے حل اور حل کی تشریح سے کیا جاتا ہے۔ پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات میں صرف ایک عدد نا معلوم تفاعل کا ایک درجی تفرق پایا جاتا ہے۔ ایسی

¹ ordinary differential equation
² partial differential equation
³ mathematical model



شکل 1.1: نمونہ کشی، حل اور تشریح۔

مساوات میں ایک سے زیادہ درجے کا تفرق نہیں پایا جاتا۔ نامعلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ باب کے اختتام میں تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت⁴ اور یکتائی⁵ پر غور کیا جائے گا۔

تفرقی مساوات سمجھنے کی خاطر ضروری ہے کہ انہیں کاغذ اور قلم سے حل کیا جائے البتہ کمپیوٹر کی مدد سے آپ حاصل جواب کی درستگی دیکھنا چاہیں تو اس میں کوئی حرج نہیں ہے۔

1.1 نمونہ کشی

شکل 1.1 کو دیکھیے۔ انجینئرنگ مسئلے کا حل تلاش کرنے میں پہلا قدم مسئلے کو مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔ مسئلے کو مختلف متغیرات اور تفاعل کے تعلقات کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کو ریاضی نمونہ⁶ کہا جاتا ہے۔ ریاضی نمونے کا حصول، نمونے کا ریاضیاتی حل اور حل کی تشریح کے عمل کو نمونہ کشی⁷ کہا جاتا ہے۔ نمونہ کشی کی صلاحیت تجربے سے حاصل ہوتی ہے۔ کسی بھی نمونہ کی حل میں کمپیوٹر مدد کر سکتا ہے البتہ نمونہ کشی میں کمپیوٹر عموماً کوئی مدد فراہم نہیں کر پاتا۔

عموماً طبعی مقدار مثلاً اسراع اور رفتار در حقیقت میں تفرق کو ظاہر کرتے ہیں لہذا بیشتر ریاضی نمونے مختلف متغیرات اور تفاعل کے تفرق پر مشتمل ہوتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات⁸ کہا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو اس تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہو۔ تفرقی مساوات کا حل جانتے ہوئے مساوات میں موجود متغیرات اور تفاعل کے ترسیم کھینچے جاسکتا ہے اور ان پر غور کیا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات پر غور سے پہلے چند بنیادی تصورات تشکیل دیتے ہیں جو اس باب میں استعمال کی جائیں گی۔

existence⁴
 uniqueness⁵
 mathematical model⁶
 modeling⁷
 differential equation⁸

سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعل کی ایک درجی یا بلند درجی تفرقی پائے جاتے ہوں۔ نامعلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں نامعلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیر x (یا t) کے تفاعل بھی پائے جاسکتے ہیں۔ درج ذیل چند سادہ تفرقی مساوات ہیں

$$(1.1) \quad y' = \sin x$$

$$(1.2) \quad y' + \frac{6}{7}y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$(1.3) \quad y''' + 2y' - 11y'^2 = 0$$

جہاں $y' = \frac{dy}{dx}$ ، $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ، وغیرہ ہیں۔

دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل کے تفرقی پر مشتمل مساوات کو جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ ان کا حل سادہ تفرقی مساوات سے زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔ جزوی تفرقی مساوات پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ غیر تابع متغیرات x اور y پر منحصر تابع تفاعل $u(x, y)$ کی جزوی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے۔

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

n درجی تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعل y کی بلند تر تفرقی n درجے کی ہو۔ یوں مساوات 1.1 اول درجے کی مساوات ہے، مساوات 1.2 دوسرے درجے جبکہ مساوات 1.3 تیسرے درجے کی مساوات ہے۔

اس باب میں پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ ایسی مساوات میں اکائی درجہ تفرقی y' کے علاوہ نامعلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیر کا کوئی بھی تفاعل پایا جاسکتا ہے۔ ایک درجے کی سادہ تفرقی مساوات کو

$$(1.5) \quad F(y, y', x) = 0$$

یا

$$(1.6) \quad y' = f(x, y)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 1.5 خفی⁹ صورت کہلاتی ہے جبکہ مساوات 1.6 صریح¹⁰ صورت کہلاتی ہے۔ یوں خفی مساوات $x^2y' - 2y^3 = 0$ کی صریح صورت $y' = 2\frac{y^3}{x^2}$ ہے۔

implicit⁹
explicit¹⁰

حل کا تصور

ایک تفاعل

$$(1.7) \quad y = h(x)$$

جو کھلے وقفہ ¹¹ $a \leq x \leq b$ پر معین ¹² ہو اور پورے وقفے پر اس کا تفرق پایا جاتا ہو، اس صورت مساوات 1.5 کا حل ہو گا جب $h(x)$ اور $h'(x)$ کو مساوات 1.5 میں بالترتیب $y(x)$ اور $y'(x)$ کی جگہ پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر ہوں۔ تفاعل $h(x)$ کا خط منحنی حل ¹³ کہلائے گا۔

یہاں کھلے وقفے سے مراد ایسا وقفہ ہے جس کے آخری سر a اور b وقفے کا حصہ نہ ہوں۔ کھلا وقفہ لامتناہی ہو سکتا ہے مثلاً $-\infty \leq x \leq b$ یا $a \leq x \leq \infty$ اور یا $-\infty \leq x \leq \infty$ یعنی حقیقی محور۔

مثال 1.1: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty \leq x \leq \infty$ پر تفاعل $y = cx$ تفرقی مساوات $y = y'x$ کا حل ہے جہاں c ایک اختیاری مستقل ¹⁴ ہے۔

حل: پورے وقفے پر $y = cx$ معین ہے۔ اسی طرح اس کا تفرق $y' = c$ بھی پورے وقفے پر پایا جاتا ہے۔ ان بنیادی شرائط پر پورا اترنے کے بعد تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$y = cx \implies (cx) = (c)x$$

مساوات کے دونوں اطراف برابر ہیں لہذا $y = cx$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

مثال 1.2: حل بذریعہ مکمل: مساوات $y' = \cos t$ کا حل بذریعہ مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی $y = \int \cos t$ جس سے $y = c - \sin t$ حاصل ہوتا ہے جو نسل حل ¹⁵ ہے۔ حاصل حل میں c اختیاری مستقل

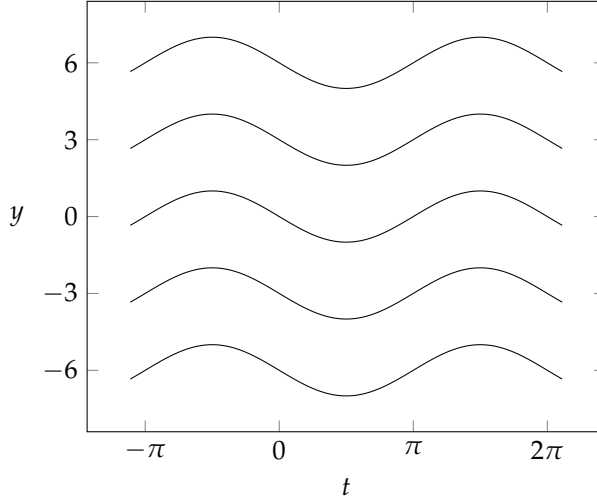
¹¹ open interval

¹² defined

¹³ solution curve

¹⁴ arbitrary constant

¹⁵ solution family



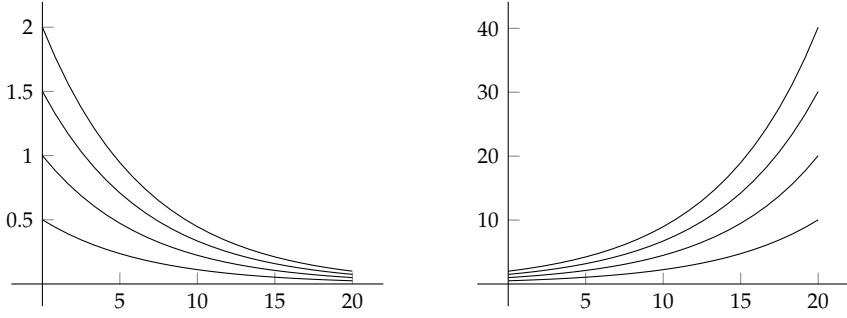
شکل 1.2: مثال 1.2 کے خط۔

ہے۔ اختیاری مستقل کی ہر انفرادی قیمت تفرقی مساوات کا ایک منفرد حل دیتا ہے۔ یوں $c = 3.24$ پر کرتے ہوئے $y = 3.24 - \sin t$ حل حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.2 میں $c = -6, -3, 0, 3, 6$ سے حاصل حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 1.3: مساوات مالتھس قوت نمائی تفاعل $y = ce^{kt}$ کے تفرق سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$(1.8) \quad y' = \frac{dy}{dt} = kce^{kt} = ky$$

یوں $y' = ky$ تفرقی مساوات کا حل $y = ce^{kt}$ ہے۔ مثبت k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی اضافے کی نمونہ کشی کرتی ہے۔ جرسوموں کی تعداد اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے۔ وسیع رقبے کے ملک میں کم انسانی



(الف) قوت نمائی گھٹاؤ۔ مساوات $y' = -0.15y$ کا حل۔

(الف) قوت نمائی اضافہ۔ مساوات $y' = 0.15y$ کا حل۔

شکل 1.3: قوت نمائی تفرقی مساوات کی نسل حل۔

آبادی اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے جہاں اس کو قانون مالٹھس¹⁶ کہا¹⁷ جاتا ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = 0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

منفی k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی گھٹاؤ مثلاً تابکاری تحلیل¹⁸ کو ظاہر کرتی ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = -0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 1.5 میں تابکاری تحلیل کے مسئلے پر مزید غور کیا گیا ہے۔

درج بالا مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ درج اول سادہ تفرقی مساوات کے حل میں ایک عدد اختیاری مستقل c پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کا ایسا حل جس میں اختیاری مستقل c پایا جاتا ہو عمومی حل¹⁹ کہلاتا ہے۔

(بعض اوقات c مکمل طور اختیاری مستقل نہیں ہوتا بلکہ اس کی قیمت کو کسی وقفے پر محدود کرنا لازم ہوتا ہے۔)

ہم یکتا²⁰ عمومی حل حاصل کرنے کی ترکیب سیکھیں گے۔

¹⁶ Malthus' law

¹⁷ یہ قانون انگریزی ماہر معاشیات ٹامس روبرٹ مالتھس (1766-1834) کے نام ہے۔

¹⁸ radioactive decay

¹⁹ general solution

²⁰ unique

جیومیٹریائی طور پر سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل لانتناہی حل کے خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جہاں c کی ہر انفرادی قیمت منفرد خط دیتی ہے۔ عمومی حل میں c کی کوئی مخصوص قیمت مثلاً $c = -3.501$ یا $c = 0$ پر کرنے سے ہمیں مخصوص حل²¹ ملتا ہے۔ مخصوص حل میں کوئی اختیاری مستقل نہیں پایا جاتا۔

عام طور عمومی حل قابل حصول ہوتا ہے جس میں c کی مخصوص قیمت پر کرتے ہوئے درکار مخصوص حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بعض اوقات تفرقی مساوات ایسا حل بھی رکھتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ ایسے حل کو نادر²² حل کہتے ہیں۔ صفحہ 12 پر سوال 1.16 میں نادر حل کی مثال دی گئی ہے۔

ابتدائی قیمت سوال

عام طور پر عمومی حل میں ابتدائی قیمتیں²³ x_0 اور y_0 پر کرنے سے مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جہاں $y(x_0) = y_0$ ہے۔ جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ خط حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہے۔ سادہ تفرقی مساوات اور مساوات کے ابتدائی قیمتوں کو ابتدائی قیمت سوال²⁴ کہا جاتا ہے۔ یوں صریح سادہ تفرقی مساوات کی صورت میں ابتدائی قیمت سوال درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(1.9) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

مثال 1.4: ابتدائی قیمت سوال: درج ذیل ابتدائی قیمت سوال کو حل کریں۔

$$y' = 5y, \quad y(0) = 3.2$$

حل: تفرقی مساوات کو $\frac{dy}{y} = 5 dx$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمیل لینے سے $y = ce^{5x}$ عمومی حل حاصل ہوتا ہے جس میں $x = 0$ پر $y = 3.2$ پر کرنے سے $y(0) = ce^0 = 3.2$ لکھا جائے گا جس سے $c = 3.2$ ملتا ہے۔ یوں ابتدائی قیمت سوال کا مخصوص حل $y = 3.2e^{5x}$ ہے۔

particular solution²¹

singular solution²²

initial values²³

initial value problem²⁴

نمونہ کشی پر مزید بحث

نمونہ کشی کو مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے لہذا ایسا ہی کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے پہلی قدم پر مسئلے کو تفرقی مساوات کا جامہ پہنایا جائے گا۔ دوسری قدم پر تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کیا جائے گا۔ تیسرے قدم پر ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل حاصل کیا جائے گا۔ آخر میں چوتھا قدم حاصل جواب کی تشریح ہوگی۔

مثال 1.5: تابکار مادے کی موجودہ کمیت 2 mg ہے۔ اس کی کمیت مستقبل میں دریافت کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ کسی بھی لمحے پر تابکاری تحلیل کی شرح اس لمحے پر موجود تابکار مادے کی کمیت کے راست تناسب ہے۔

(الف) پہلا قدم: نمونہ کشی: کمیت کو y سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں کسی بھی لمحے پر تابکاری کی شرح سے مراد $y' = \frac{dy}{dt}$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہذا تجربے سے حاصل معلومات کو درج ذیل تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جائے گا جہاں تناسبی مستقل k مثبت قیمت ہے۔

$$(1.10) \quad \frac{dy}{dt} = -ky$$

مثال 1.3 میں آپ نے دیکھا کہ تفرقی مساوات میں منفی کی علامت سے تفرقی مساوات کا قوت نمائی گھٹتا ہوا حل حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہذا درج بالا مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی گئی ہے۔ تابکار اشیاء کے مستقل k کی قیمتیں تجربے سے حاصل کئے جاتے ہیں مثلاً ریڈیم²⁵ یعنی $^{226}_{88}\text{Ra}$ کا $k = 1.4 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ ہے۔

ابتدائی کمیت 2 mg ہے۔ ابتدائی وقت کو $t = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی معلومات $y(0) = 2 \text{ mg}$ لکھی جائے گی۔ (غیر تابع متغیر وقت t کی بجائے کچھ اور مثلاً x ہونے کی صورت میں بھی (x_0, y_0) یا $y(x_0) = y_0$ کو ابتدائی معلومات ہی کہا جاتا ہے۔ اسی طرح تابع متغیر y کی قیمت $t \neq 0$ پر معلوم

ہو سکتی ہے مثلاً $y(x_n) = y_n$ اور ایسی صورت میں (x_n, y_n) ابتدائی معلومات کہلاتی ہے۔ یوں دیے مسئلے سے درج ذیل ابتدائی قیمت سوال حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.11) \quad y' = -ky, \quad y(0) = 2 \text{ mg}$$

(ب) دوسرا قدم: عمومی حل: ابتدائی قیمت سوال کا عمومی حل درج ذیل ہے جہاں c اختیاری مستقل جبکہ k کی قیمت تابکار مادے پر منحصر ہے۔

$$(1.12) \quad y = c^{-kt}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $t = 0$ پر $y = 2 \text{ mg}$ ہے جس کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں درج ذیل مخصوص حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.13) \quad y = 2e^{-kt} \quad (k > 0)$$

مخصوص حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ حاصل حل درست ہے۔ اسی طرح مخصوص حل سے ابتدائی معلومات حاصل کریں۔

$$\frac{dy}{dt} = -kce^{-kt} = -ky, \quad y(0) = 2e^{-0} = 2$$

(پ) حاصل مخصوص حل کی تشریح: مساوات 1.13 کو شکل 1.4 میں دکھایا گیا ہے جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر یہ مساوات تابکار مادے کی درست کمیت دیتا ہے۔ لمحہ لاقتناہی پر تابکار مادے کی کمیت $y(\infty) = 2e^{-k\infty} = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

سوالات

سوالات 1.1 تا 1.8 کے جوابات بذریعہ مکمل حاصل کریں یا کسی تفاعل کی تفرق سے جواب حاصل کریں۔

$$\text{سوال 1.1: } y' + 3 \sin 2\pi x = 0$$



شکل 1.4: مثال 1.5 کی معنی-تائیدی تحلیل $y = 2e^{-kt}$ جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔

جواب: $y = \frac{3}{2\pi} \cos 2\pi x + c$

سوال 1.2: $y' + xe^{-x^2} = 0$

جواب: $y = \frac{e^{-x^2}}{2} + c$

سوال 1.3: $y' = 4e^{-x} \cos x$

جواب: $y = 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + c$

سوال 1.4: $y' = y$

جواب: $y = ce^x$

سوال 1.5: $y' = -y$

جواب: $y = ce^{-x}$

سوال 1.6: $y' = 2.2y$

جواب: $y = ce^{2.2x}$

سوال 1.7: $y' = 1.5 \sinh 3.2x$

جواب: $y = \frac{15}{32} \cosh 3.2x + c$

سوال 1.8: $y'' = -y$

جواب: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

سوال 1.9 تا سوال 1.15 ابتدائی قیمت سوالات ہیں جن کے عمومی حل دیے گئے ہیں۔ انہیں تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہی عمومی جوابات ہیں۔ عمومی جواب سے مخصوص جواب حاصل کریں۔ مخصوص جواب کا خط کھینچیں۔

سوال 1.9: $y' + 2y = 0.8, \quad y = ce^{-2x} + 0.4, \quad y(0) = 1.2$

جواب: $y = 0.8e^{-2x} + 0.4$

سوال 1.10: $y' + x + y = 0, \quad y = ce^{-x} - x + 1, \quad y(0) = \pi$

جواب: $y = \pi e^{-x} - e^{-x} - x + 1$

سوال 1.11: $y' = 2x + e^x, \quad y = e^x + x^2 + c, \quad y(0) = 1$

جواب: $y = e^x + x^2$

سوال 1.12: $y' + 4xy = 0, \quad y = ce^{-2x^2}, \quad y(0) = 2$

جواب: $y = 2e^{-2x^2}$

سوال 1.13: $yy' = 2x, \quad y^2 = 2x^2 + c, \quad y(1) = 6$

جواب: $y^2 = 2x^2 + 34$

سوال 1.14: $y' = y + y^2, \quad y = \frac{c}{e^{-x} - c}, \quad y(0) = 0.1$

جواب: $y = \frac{1}{e^{(-x+23.98)} - 1}$

سوال 1.15: $y' \tan x = y - 4, \quad y = c \sin x + 4, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$

جواب: $y = 4 - 4 \sin x$

سوال 1.16: نادر حل: بعض اوقات سادہ تفرقی مساوات کا ایسا حل بھی پایا جاتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ ایسے حل کو نادر حل²⁶ کہا جاتا ہے۔ مساوات $y''^2 - xy' + y = 0$ کا عمومی حل $y = cx - c^2$ ہے جبکہ اس کا نادر حل $y = \frac{x^2}{4}$ ہے۔ ان حل کا تفرق لیتے ہوئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

سوال 1.17 تا سوال 1.21 نقشہ کشی کے سوالات ہیں۔

سوال 1.17: تابکار مادے کی نصف زندگی $t_{\frac{1}{2}}$ سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں تابکار مادے کی کمیت نصف ہو جاتی ہے۔ مثال 1.5 میں ریڈیم $^{266}_{88}\text{Ra}$ کی نصف زندگی دریافت کریں۔

جواب: تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0 e^{-kt}$ میں لمحہ $t = 0$ پر (ابتدائی) کمیت y_0 ہے جبکہ مستقبل میں لمحہ t پر کمیت y ہے۔ ہم وہ دورانیہ جاننا چاہتے ہیں جس میں کمیت نصف رہ جائے یعنی جب $y = \frac{y_0}{2}$ رہ جائے۔ تابکاری مساوات میں $y = \frac{y_0}{2}$ پر کرتے ہوئے $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kt}$ لکھا جائے گا جس سے $t_{\frac{1}{2}} = 4.95 \times 10^{10} \text{ s}$ یعنی 1569.6 سال حاصل ہوتا ہے۔ یوں ریڈیم کی مقدار 1569.6 سالوں میں نصف رہ جائے گی۔

سوال 1.18: ریڈیم ہم جا $^{224}_{88}\text{Ra}$ کی نصف زندگی تقریباً 3.6 دن ہے۔ دو گرام (2 g) ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک دن بعد کتنی رہ جائے گی۔ دو گرام ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک سال بعد کتنی رہ جائے گی۔

جوابات: 1.65 g ، $6 \times 10^{-31} \text{ g}$

سوال 1.19: ایک جہاز کی رفتار مستقل اسراع a سے مسلسل بڑھ رہی ہے۔ رفتار کی تبدیلی کی شرح $\frac{dv}{dt}$ کو اسراع کہتے ہیں۔ ان معلومات سے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے لمحہ t پر رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔ اگر $t = 0$ پر ابتدائی رفتار u ہو تب v کی مساوات کیا ہوگی؟

جوابات: $v = u + at$ ، $v = at + c$

²⁶singular solution
²⁷isotope

سوال 1.20: رفتار سے مراد وقت کے ساتھ فاصلے کی تبدیلی کی شرح $\frac{dx}{dt}$ ہے۔ سوال 1.19 میں رفتار کی مساوات $v = u + at$ حاصل کی گئی جسے $\frac{dx}{dt}$ کے برابر پر کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی فاصلہ $x = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی قیمت سوال کو حل کرتے ہوئے x کی مساوات حاصل کریں۔

$$x = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ جوابات:}$$

سوال 1.21: آواز سے کم رفتار پر پرواز کرنے والے جہاز کی کارگزاری ہوا کے دباؤ پر منحصر ہوتی ہے۔ ان کی کارگزاری $10\,500\text{ m}$ تا $12\,000\text{ m}$ کی اونچائی پر بہترین حاصل ہوتی ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ $10\,500\text{ m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباؤ دریافت کریں۔ طبعی معلومات: اونچائی کے ساتھ دباؤ میں تبدیلی کی شرح y' ہوا کے دباؤ y کے راست تناسب ہوتی ہے۔ تقریباً 5500 m کی اونچائی پر ہوا کا دباؤ سمندر کی سطح پر ہوا کے دباؤ y_0 کی نصف ہوتا ہے۔

$$\text{جواب: } 0.27y_0 \text{ یعنی تقریباً ایک چوتھائی}$$

$$1.2 \quad y' = f(x, y) \text{ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔}$$

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

$$(1.14) \quad y' = f(x, y)$$

سادہ معنی رکھتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ y' سے مراد y کی ڈھلوان ہے۔ یوں مساوات 1.14 کا وہ حل جو نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہو اس کا اس نقطے پر ڈھلوان $y'(x_0)$ ہو گا کہ درج بالا مساوات کے تحت اس نقطے پر f کی قیمت کے برابر ہو گا۔

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 1.14 کو حل کرنے کے تریسیمی²⁸ یا اعدادی²⁹ طریقے دریافت کر سکتے ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے تریسیمی اور اعدادی طریقے اس لئے بھی اہم ہیں کہ کئی تفرقی مساوات کا کوئی تحلیلی³⁰ حل نہیں پایا جاتا جبکہ ہر قسم کے تفرقی مساوات کا تریسیمی اور اعدادی حل حاصل کرنا ممکن ہے۔

graphical²⁸
numerical²⁹
analytic³⁰

میدان کی سمت: تریسی طریقہ

ہم xy سطح پر جگہ جگہ مساوات 1.14 سے حاصل ڈھلوان کی چھوٹی لمبائی کی سیدھی لکیریں کھینچ سکتے ہیں۔ ہر نقطے پر ایسی لکیر اس نقطے پر میدان کی سمت دیتی ہے۔ اس میدان سمت³¹ یا میدان ڈھال³² میں تفرقی مساوات کا منحنی حل³³ کھینچا جاسکتا ہے۔

منحنی حل کو کھینچنے کی ترکیب کچھ یوں ہے۔ کسی بھی نقطے پر ڈھلوان کی سمت میں چھوٹی لکیر کھینچیں۔ اس لکیر کو آہستہ آہستہ یوں موڑیں کہ لکیر کے اختتامی نقطے پر لکیر کی ڈھلوان عین اس نقطے کی ڈھلوان برابر ہو۔ اسی طرح آگے بڑھتے رہیں۔ ڈھال میدان میں نقطے جتنے قریب قریب ہوں تفرقی مساوات کا منحنی حل اتنا درست ہو گا۔

شکل 1.5 میں

$$(1.15) \quad y' = x - y$$

کا ڈھال میدان دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چند منحنی حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

آئیں اب اعدادی طریقہ سیکھیں۔ سادہ ترین اعدادی طریقہ ترکیب یولر کہلاتا ہے۔ پہلے اسی پر بحث کرتے ہیں۔

یولر کی اعدادی ترکیب

درجہ اول تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو استعمال کرتے ہوئے ترکیب یولر³⁴ ہم فاصلہ نقطوں x_0 ، $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، ... پر تقریباً درست قیمتیں دیتا ہے یعنی

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

direction field³¹
slope field³²
solution curve³³
Euler's method³⁴



شکل 1.5: درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = x - y$ کا ڈھال میدان اور منفی حل۔

یا

(1.16)

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

h کو قدم کہتے ہیں۔ شکل 1.6-الف میں y_1 کا حصول دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی نقطہ y_0 اور ترکیب یولر سے حاصل کردہ y_1 کو چھوٹے دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں h کی قیمت کم کرنے کا اثر دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹا قدم لینے سے اصل حل $y(x_1)$ اور یولر سے حاصل y_1 میں فرق (غلطی) کم ہو جاتا ہے۔ یوں قدم کو چھوٹا سے چھوٹا کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ درست حل دریافت کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 1.15 کا عمومی حل $y = ce^{-x} + x - 1$ ہے جس سے نقطہ $(0,0)$ سے گزرتا حل $y = e^{-x} + x - 1$ ملتا ہے۔ اس طرح کے حل ہم جلد حاصل کر پائیں گے۔ اس وقت صرف اتنا ضروری ہے کہ آپ دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکیں کہ یہی درست حل ہے۔

جدول 1.1 میں قدم $h = 0.1$ لیتے ہوئے نقطہ $(0,0)$ سے گزرتا ہوا مساوات 1.15 کا ترکیب یولر (مساوات 1.16) سے حل حاصل کیا گیا ہے۔ انہیں اس جدول کو حاصل کریں۔

ابتدائی نقطہ $(x_0, y_0) = (0,0)$ ہے جس کا اندراج جدول 1.1 کے پہلے صف میں کیا گیا ہے۔ ان قیمتوں کو



شکل 1.6: ترکیب یولر کا پہلا قدم۔

استعمال کرتے ہوئے (x_1, y_1) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 0 + 0.1(0 - 0) = 0$$

جدول 1.1 کے دوسرے صف میں ان قیمتوں کا اندراج کیا گیا ہے جن سے (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0 + 0.1(0.1 - 0) = 0.01$$

یہ قیمتیں بھی جدول میں درج ہیں۔ اسی طرح (x_3, y_3) حاصل کرتے ہوئے جدول میں درج کئے گئے ہیں۔

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.01 + 0.1(0.2 - 0.01) = 0.029$$

جدول کی آخری صف حاصل کرتے ہیں۔

$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

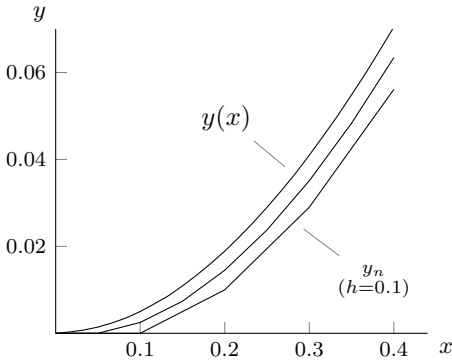
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.029 + 0.1(0.3 - 0.029) = 0.0561$$

شکل 1.7-الف میں ترکیب یولر سے حاصل حل اور ریاضیاتی حل $y(x)$ کا موازنہ کیا گیا ہے۔ شکل-الف میں یولر حل سے حاصل نقطوں کو سیدھی لکیروں سے ملاتے ہوئے مسلسل حل حاصل کیا جاسکتا ہے جسے شکل-ب میں y_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y(x)$ بھی دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ $h = 0.05$ استعمال کرتے ہوئے

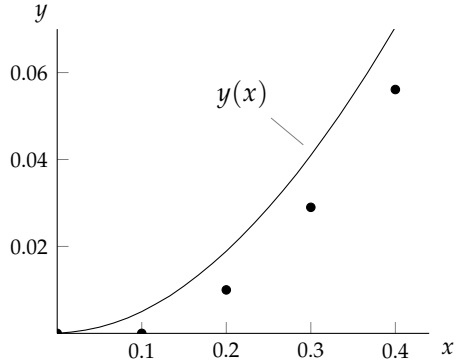
1.2. $y' = f(x, y)$ کا حیو میٹر یائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پور۔

جدول 1.1: ترکیب پور۔

نقطی	$y(x)$	y_n	x_n	n
0	0	0	0	0
0.00484	0.00484	0.0	0.1	1
0.00873	0.01873	0.01	0.2	2
0.01182	0.04082	0.029	0.3	3
0.01422	0.07032	0.0561	0.4	4



(ب)



(الف)

شکل 1.7: ترکیب پور سے حاصل حل کار یائیاتی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

حاصل پولر حل کو بھی دکھایا گیا ہے جو $y(x)$ اور y_n کے بیچ میں پایا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ h کی قیمت کم کرنے سے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 1.22 تا سوال 1.28 کے میدان ڈھال کو قلم و کاغذ سے کھینچتے ہوئے دیے ابتدائی نقطوں سے گزرتے منحنی حل حاصل کریں۔ چند ڈھال میدان شکل 1.8 اور شکل 1.9 میں دیے گئے ہیں۔

سوالات

سوال 1.22: $y' = 1 + y^2, \quad (\frac{\pi}{4}, 1)$

سوال 1.23: $y' = 1 - y^2, \quad (0, 0)$

سوال 1.24: $yy' + 8x = 0, \quad (1, 1)$

سوال 1.25: $y' = y - y^2, \quad (1, 0)$

سوال 1.26: $y' = x + \frac{1}{y}, \quad (0, 1)$

سوال 1.27: $y' = \sin^2 x, \quad (0, 1)$

سوال 1.28: $y' = \sin^2 y, \quad (0, 0)$

ڈھال میدان کے استعمال سے تفرقی مساوات کے تمام حل سامنے آ جاتے ہیں۔ بعض اوقات تفرقی مساوات کا تحلیلی حل حاصل کرنا ممکن ہی نہیں ہوتا۔ درج ذیل دو سوالات میں ڈھال میدان سے اخذ حل اور دیے گئے تحلیلی حل کا موازنہ کرتے ہوئے ڈھال میدان سے حاصل حل کی درستگی کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔

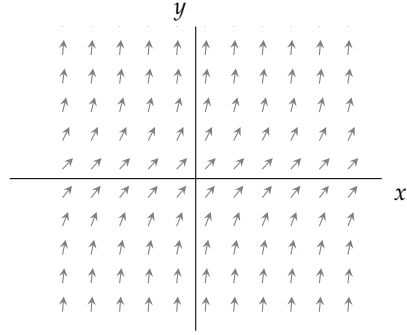
سوال 1.29: $y' = \sin x, \quad (\frac{\pi}{2}, 0), \quad y = -\cos x$

سوال 1.30: $y' = 3x^2, \quad (0, 0), \quad y = x^3$

1.2. $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریکی مطلب - میدان کی سمت اور ترکیب پور



$$y' = 1 - y^2 \quad (\text{ب})$$

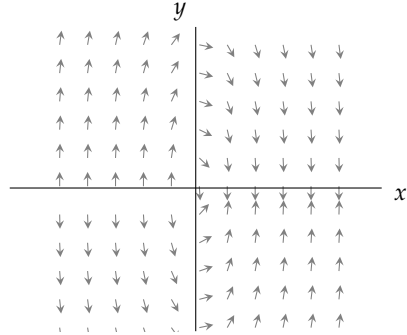


$$y' = 1 + y^2 \quad (\text{الف})$$

شکل 1.8: سوال 1.22 اور سوال 1.23 کے ڈھال میدان۔



$$y' = y - y^2 \quad (\text{ب})$$



$$y' = -\frac{8x}{y} \quad (\text{الف})$$

شکل 1.9: سوال 1.24 اور سوال 1.25 کے ڈھال میدان۔

سوال 1.31: سوال 1.23، سوال 1.25 اور سوال 1.28 میں بے قابو متغیرہ x صریحاً ظاہر نہیں کیا گیا ہے۔ ایسی مساوات جن میں بے قابو متغیرہ کو صریحاً ظاہر نہ کیا جائے خود مختار³⁵ سادہ تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ خود مختار سادہ تفرقی مساوات کے ہم میلان³⁶ حل $f(x, y) = c$ کی شکل و صورت کیا ہو گی؟

جواب: چونکہ y' کا دارومدار x پر نہیں ہے لہذا x تبدیل کرنے سے y کا میلان تبدیل نہیں ہو گا اور $f(x, y) = c$ افقی محور کے متوازی خط ہوں گے۔

ایک جسم y محدود پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر نقطہ $y = 0$ سے جسم کا فاصلہ $y(t)$ ہے۔ سوالات 1.32 تا سوال 1.34 میں دئے شرائط کے مطابق جسم کی رفتار کی نمونہ کشی کریں۔ ریاضی نمونے کی ڈھال میدان بناتے ہوئے دیے گئے ابتدائی معلومات پر پورا اترتا منحنی خط کھینچیں۔

سوال 1.32: جسم کی رفتار ضرب فاصلہ $y(t)$ مستقل ہے جو 4 کے برابر ہے جبکہ $y(0) = 4$ کے برابر ہے۔

جوابات: $y' = 4$ ، $y = 8t + 16$

سوال 1.33: رفتار ضرب وقت فاصلے کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 1$ پر فاصلہ $y(1) = 2$ ہے۔

جوابات: $y' = t$ ، $y = 2t$

سوال 1.34: مربع رفتار منفی مربع فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔ ابتدائی فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔

جوابات: $y' = \sqrt{1 + y^2}$ ، $\sinh^{-1} y = t + \sinh^{-1} 1$

سوال 1.35: ہوائی جہاز سے چھلانگ لگا کر زمین تک خیریت سے بذریعہ چھتری اترنا جاسکتا ہے۔ گرتے ہوئے شخص پر آپس میں الٹ، دو عدد قوتیں عمل کرتی ہیں۔ پہلی قوت زمینی کشش $F_1 = mg$ ہے جہاں m اس شخص کی کمیت اور $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ثقلی اسراع ہے۔ یہ قوت انسان کو زمین کی طرف اسراع دیتی ہے۔ دوسری قوت چھتری پر ہوا کے رگڑ سے پیدا قوت ہے جو اس شخص کی رفتار کو بڑھنے سے روکتی ہے۔ چھتری پر ہوا کے رگڑ سے

autonomous ordinary differential equations³⁵
isoclines³⁶

رفتار کے مربع کے متناسب قوت $F_2 = cv^2$ پیدا ہوتی ہے۔ نیوٹن کی مساوات حرکت کہتی ہے کہ کسی بھی جسم پر قوت، اس جسم کی کمیت ضرب اسراع کے برابر ہوتی ہے۔ چھتری سے زمین پر اترتے شخص کی نمونہ کشی کرتے ہوئے رفتار v کی سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ کمیت کو $m = 1$ اور مستقل کو $c = 1$ لیتے ہوئے ڈھال میدان کھینچیں۔ تصور کریں کہ چھتری اس لمحہ کھلتی ہے جب شخص کی رفتار $v = 15 \text{ ms}^{-1}$ ہو۔ ایسی صورت میں منحنی حل حاصل کریں۔ اس شخص کی اختتامی رفتار کیا ہوگی؟ کیا چھتری پر قوت رفتار کے راست متناسب ہونے کی صورت میں بھی چھتری کے ذریعہ ہوائی جہاز سے زمین تک خیریت سے چھلانگ لگائی جاسکتی ہے؟

جوابات: $mg - cv^2 = m \frac{dv}{dt}$ ؛ گرنے کی رفتار اس قیمت پر رہتی ہے جہاں نیچے جانب قوت mg اور چھتری کی رکاوٹی اوپر جانب قوت cv^2 برابر ہوں۔ ایسی صورت میں گرتے شخص کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی یعنی $y' = 0$ ہوتا ہے۔ تفرقی مساوات میں $y' = 0$ پر کرتے اور $m = c = 1$ لیتے ہوئے اختتامی رفتار حاصل ہوتی ہے۔ $v(t = \infty) = 3.13 \text{ ms}^{-1}$

سوال 1.36: گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ ہے۔ رداس r کو مستقل تصور کرتے ہوئے دائرے کی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ڈھال میدان کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا آپ ڈھال میدان کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ منحنی حل گول دائرے ہیں؟ اسی طرح $x^2 + 9y^2 = c$ کا تفرق لیتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کی ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا ڈھال میدان کو دیکھ کر کہا جاسکتا ہے کہ منحنی حل بیضوی ہوگا؟

جوابات: $y' = -\frac{x}{9y}$ ، $y' = -\frac{x}{y}$

سوال 1.37 تا سوال 1.40 کو ترکیب یولر سے حل کریں۔ کل پانچ ہم فاصلہ نقطوں پر حل حاصل کریں۔ ایک ہی کارٹیسی محدود پر حاصل y_1 تا y_5 اور سوال میں دئے گئے حل $y(x)$ کا خط کھینچیں۔ سوال 1.37:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1, \quad y(x) = e^{-x}$$

جوابات: $y_1 = 0.9$ ، $y_2 = 0.81$ ، $y_3 = 0.729$ ، $y_4 = 0.6561$ ، $y_5 = 0.59049$

سوال 1.38:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{-x}$$



شکل 1.10: سوال 1.36 کی ڈھال میدان۔

جوابات: $y_1 = 0.99$ ، $y_2 = 0.9801$ ، $y_3 = 0.9703$ ، $y_4 = 0.9606$ ، $y_5 = 0.95099$

سوال 1.39:

$$y' = 1 + 3x^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1, \quad y(x) = x^3 + x$$

جوابات: $y_1 = 2.1$ ، $y_2 = 2.203$ ، $y_3 = 2.315$ ، $y_4 = 2.442$ ، $y_5 = 2.59$

سوال 1.40:

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{x^2-4}$$

جوابات: $y_1 = 1.04$ ، $y_2 = 1.0818$ ، $y_3 = 1.1255$ ، $y_4 = 1.1712$ ، $y_5 = 1.2190$

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات

متعدد اہم سادہ تفرقی مساوات کو الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$(1.17) \quad g(y)y' = f(x)$$

جس کو مزید یوں

$$g(y) \frac{dy}{dx} dx = f(x) dx$$

یعنی

$$g(y) dy = f(x) dx$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں جانب صرف y متغیرہ اور دائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے لہذا اس کا مکمل لیا جاسکتا ہے۔

$$(1.18) \quad \int g(y) dy = \int f(x) dx + c$$

اگر $g(y)$ اور $f(x)$ قابل مکمل تفاعل ہوں تب مساوات 1.18 سے مساوات 1.17 کا حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب کو ترکیب علیحدگی متغیرات³⁷ کہتے ہیں۔ مساوات 1.17 کو قابل علیحدگی مساوات³⁸ کہتے ہیں۔

مثال 1.6: مساوات $y' = 1 + y^2$ قابل علیحدگی مساوات ہے چونکہ اس کو

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx$$

لکھا جاسکتا ہے جس کے دونوں اطراف کا مکمل لیتے ہوئے

$$\tan^{-1} y = x + c$$

یعنی

$$y = \tan(x + c)$$

حاصل ہوتا ہے جو تفرقی مساوات کا درکار حل ہے۔ حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ یہی صحیح حل ہے۔

مثال 1.7: قابل علیحدگی تفرقی مساوات $y' = xe^{-x}y^3$ کو علیحدہ کرتے ہوئے دونوں اطراف کا مکمل لے کر حل کرتے ہیں۔

$$y^{-3} dy = xe^{-x} dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = c - (x+1)e^{-x} \quad \text{مکمل لیا گیا ہے}$$

$$y^2 = \frac{1}{2(x+1)e^{-x} - 2c}$$

مثال 1.8: درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1$$

حل: مساوات کے متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے مکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{dy}{y} = - \int 2x dx + c$$

$$\ln y = -x^2 + c_1$$

$$y = ce^{-x^2}$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = 0$ یعنی $c = e^{c_1} = 1$ ملتا ہے لہذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y = e^{-x^2}$ ہے جسے شکل 1.11 میں دکھایا گیا ہے اور جو گھنٹی نما³⁹ ہے۔



شکل 1.11: مثال 1.8 کا گھنٹی نما عمل۔

مثال 1.9: کاربن سے عمر دریافت کرنے کا طریقہ
 طبعی معلومات: کائناتی شعاعیں⁴⁰ فضا میں تابکار کاربن $^{14}_6\text{C}$ بناتی ہیں۔ یہ عمل زمین کی پیدائش سے اب تک ہوتا آ رہا ہے۔ وقت کے ساتھ فضا میں $^{14}_6\text{C}$ اور $^{12}_6\text{C}$ ہم جا⁴¹ کی تناسب ایک مخصوص قیمت حاصل کر چکی ہے۔ کوئی بھی جاندار سانس لے کر یا خوراک کے ذریعہ فضا سے کاربن جذب کرتا ہے۔ یوں جب تک جانور زندہ رہے اس کی جسم میں دونوں ہم جا کاربن کی تناسب وہی ہوگی جو فضا میں ان کی تناسب ہے۔ البتہ مرنے کے بعد جسم میں تابکار کاربن کی مقدار تابکاری تحلیل کی بنا گھٹتی ہے جبکہ غیر تابکار کاربن کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ تابکار کاربن $^{14}_6\text{C}$ کی نصف زندگی 5715 سال ہے۔

اہرام مصر میں دفن مومیائی ہوئی فرعون کی لاش میں $^{14}_6\text{C}$ اور $^{12}_6\text{C}$ کا تناسب فضا کے تناسب کا 56.95 % ہے۔ لاش کی عمر دریافت کریں۔

cosmic rays⁴⁰
isotopes⁴¹

حل: تابکار کاربن کی نصف زندگی سے تابکاری تحلیل کا مستقل k دریافت کرتے ہیں۔

$$y_0 e^{-k(5715)} = \frac{y_0}{2}, \quad e^{-k(5715)} = \frac{1}{2}, \quad -k = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{5715}, \quad k = 0.0001213$$

لاش میں ہم جاکاربن کی تناسب سے لاش کی عمر حاصل کرتے ہیں۔

$$e^{-0.0001213t} = 0.5695, \quad -0.0001213t = \ln 0.5695, \quad t = 4641$$

یوں فرعون کی لاش 4641 سال پرانی ہے۔

مثال 1.10: مرکب بنانے کا عمل

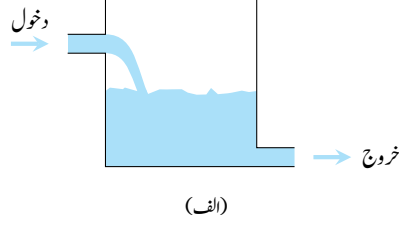
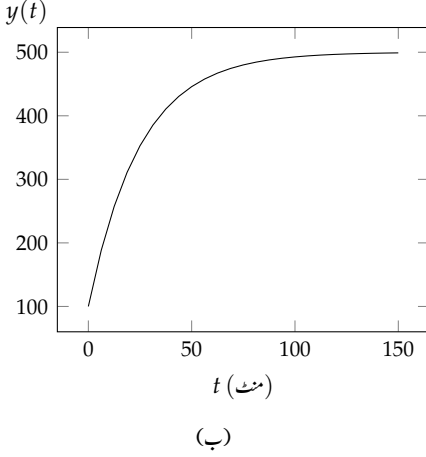
کیمیائی صنعت میں مرکب بنانے کا عمل عام ہے۔ شکل 1.12-الف میں پانی کی ٹینکی دکھائی گئی ہے جس میں ابتدائی طور پر 1000 لٹر پانی پایا جاتا ہے۔ اس پانی میں کل 100 kg نمک ملا یا گیا ہے۔ پانی کو مسلسل ہلانے سے ٹینکی میں کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ ٹینکی میں 40 لٹر فی منٹ کی شرح سے نمکین پانی شامل کیا جاتا ہے۔ اس پانی میں نمک کی مقدار 0.5 kg l^{-1} ہے۔ ٹینکی سے نمکین پانی کا انخلا 40 لٹر فی منٹ ہے۔ ٹینکی میں نمک کی کل مقدار بالمقابل وقت دریافت کریں۔

حل: چونکہ ٹینکی میں پانی شامل ہونے کی شرح اور پانی خارج ہونے کی شرح برابر ہے لہذا ٹینکی میں پانی کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ ٹینکی میں داخل ہونے والا ایک لٹر کا نمکین پانی 0.5 kg نمک ٹینکی میں شامل کرتا ہے۔ یوں 40 لٹر فی منٹ سے داخل ہوتا پانی $40 \times 0.5 = 20 \text{ kg min}^{-1}$ سے نمک شامل کرتا ہے۔ کسی بھی لمحہ ٹینکی میں کل نمک کو y کلو گرام لکھتے ہوئے ٹینکی میں نمک کی کثافت کو $\frac{y}{1000}$ کلو گرام فی لٹر لکھا جاسکتا ہے۔ یوں خارج ہوتا پانی $40 \times \frac{y}{1000}$ کلو گرام فی منٹ نمک خارج کرتا ہے۔ اس طرح نمک میں اضافے کی شرح $\frac{dy}{dt}$ کو

$$\begin{aligned} y' &= \text{نمک خارج ہونے کی شرح} - \text{نمک شامل ہونے کی شرح} \\ &= 20 - \frac{40y}{1000} \end{aligned}$$

یعنی

$$(1.19) \quad y' = 0.04(500 - y)$$



شکل 1.12: مثال 1.10 میں مرکب بنانے کا عمل۔

لکھا جاسکتا ہے جو قابل علیحدگی مساوات ہے لہذا اس میں متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکمیل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{y - 500} = -0.04 dt, \quad \ln|y - 500| = -0.04t + c_1, \quad y = 500 + ce^{-0.04t}$$

ٹینکی میں ابتدائی نمک کی کل مقدار 100 kg ہے۔ اس معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے مساوات کا مستقل c حاصل کرتے ہیں۔

$$100 = 500 + c^{-0.04(0)}, \quad c = -400$$

یوں کسی بھی لمحے ٹینکی میں کل نمک کی مقدار درج ذیل ہے جس کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$y(t) = 500 - 400e^{-0.04t}$$

شکل-ب کے مطابق ٹینکی میں آخر کار کل 500 kg نمک پایا جائے گا۔ یہی جواب بغیر کسی مساوات لکھے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ٹینکی میں لگاتار نمکین پانی شامل کیا جائے اور اس سے پرانا پانی خارج کیا جائے تو آخر کار ٹینکی میں صرف نیا شامل کردہ پانی ہی پایا جائے گا۔ چونکہ شامل کردہ پانی میں 0.5 کلوگرام فی لٹر نمک پایا جاتا ہے لہذا 1000 لٹر کی ٹینکی میں کل نمک $1000 \times 0.5 = 500 \text{ kg}$ ہو گا۔

مثال 1.11: نیوٹن قانون ٹھنڈک گرمیوں میں ایک دفتر کا درجہ حرارت ایئر کنڈیشنر کی مدد سے 21°C پر رکھا جاتا ہے۔ صبح سات بجے ایئر کنڈیشنر چالو کیا جاتا ہے اور شام نو بجے اس کو بند کر دیا جاتا ہے۔ ایک مخصوص دن کو شام نو بجے بیرونی درجہ حرارت 40°C ہوتا ہے جبکہ صبح سات بجے بیرونی درجہ حرارت 30°C تک گر چکا ہوتا ہے۔ دفتر کے اندر رات دو بجے درجہ حرارت 26°C ہوتا ہے۔ صبح سات بجے دفتر کے اندر درجہ حرارت معلوم کریں۔

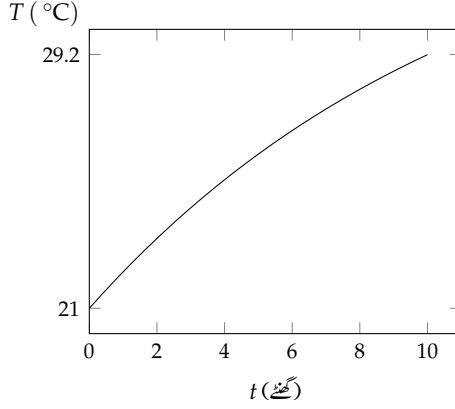
طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ حرارتی توانائی کو با آسانی منتقل کرتے جسم (مثلاً لوہا) کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح جسم اور اس کے گرد ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست تناسب ہوتا ہے۔ اس کو نیوٹن کا قانون ٹھنڈک⁴² کہا جاتا ہے۔

حل: پہلا قدم: نمونہ کشی
دفتر کے اندرونی حرارت کو T سے ظاہر کرتے ہیں جبکہ بیرونی حرارت کو T_b سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں نیوٹن کا قانون ٹھنڈک کی ریاضیاتی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$(1.20) \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_b)$$

دوسرا قدم: عمومی حل کی تلاش
اگرچہ دفتر کی دیواریں اور چھت حرارتی توانائی با آسانی منتقل نہیں کرتی ہم اسی کلیے کا سہارا لیتے ہوئے مسئلہ حل کریں گے۔ یہاں بیرونی درجہ حرارت مستقل قیمت نہیں ہے لہذا درجہ بالا مساوات کو حل کرنا مشکل ہو گا۔ انجینئرنگ کے شعبے میں عموماً ایسی ہی مشکلات کا سامنہ کرنا ہوتا ہے۔ ہمیں مسئلے کی سادہ صورت حل کرنا ہو گی۔ اگر ہم تصور کریں کہ T_b مستقل قیمت ہے تب درجہ بالا مساوات کے متغیرات علیحدہ کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ بیرونی درجہ حرارت 30°C تا 40°C رہا ہے لہذا ہم اس کی اوسط قیمت یعنی 35°C کو بیرونی درجہ حرارت تصور کرتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔ مساوات کے متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے مکمل لے کر اس کو حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dT}{T - 35} = k dt, \quad \ln|T - 35| = kt + c_1, \quad T - 35 = ce^{kt}$$



شکل 1.13: مثال 1.11: دفتر کا اندرونی درجہ حرارت بالمتقابل وقت۔

تیسرا قدم: مخصوص حل کا حصول

اگر شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا جائے اور وقت کو گھنٹوں میں ناپا جائے تب $T(0) = 21$ لکھا جائے گا جسے درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = -14$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مخصوص حل

$$T = 35 - 14e^{kt}$$

چوتھا قدم: مستقل k کا حصول

ہم جانتے ہیں کہ رات دو بجے اندرونی درجہ حرارت 26°C ہے۔ یاد رہے کہ شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا گیا لہذا رات دو بجے $t = 5$ ہو گا۔ یوں $T(5) = 26$ لکھا جائے گا۔ ان معلومات کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے k حاصل کرتے ہوئے مکمل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$26 = 35 - 14e^{5k}, \quad k = -0.088, \quad T = 35 - 14e^{-0.088t}$$

آخری قدم:

صبح سات بجے اندرونی درجہ حرارت کا تخمینہ لگاتے ہیں یعنی $t = 10$ پر درجہ حرارت درکار ہے۔

$$T = 35 - 14e^{-0.088(10)} = 29.2^\circ\text{C}$$

پوری رات میں اندرونی درجہ حرارت 8.2°C بڑھ گیا ہے۔ شکل 1.13 میں اندرونی درجہ حرارت بالمتقابل وقت دکھایا گیا ہے۔

مثال 1.12: پانی کا انخلا: پانی کی ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش $B = 2 \text{ m}^2$ ہے۔ ٹینکی کی تہہ میں $r = 0.5 \text{ cm}$ رداس کا گول سوراخ ہے جس سے پانی نکل رہا ہے۔ ٹینکی میں پانی کی ابتدائی گہرائی $h_1 = 1.5 \text{ m}$ ہے۔ ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہوگی۔

طبعی معلومات: پانی کی سطح پر m کمیت پانی کی مخفی توانائی mgh ہے جہاں $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع اور h پانی کی گہرائی ہے۔ سوراخ سے خارج ہوتے وقت یہ مخفی توانائی حرکی توانائی $\frac{mv^2}{2}$ میں تبدیل ہو جاتی ہے جہاں v رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔ مخفی توانائی اور حرکی توانائی کو برابر لکھتے ہوئے v کے لئے حل کرتے ہیں۔

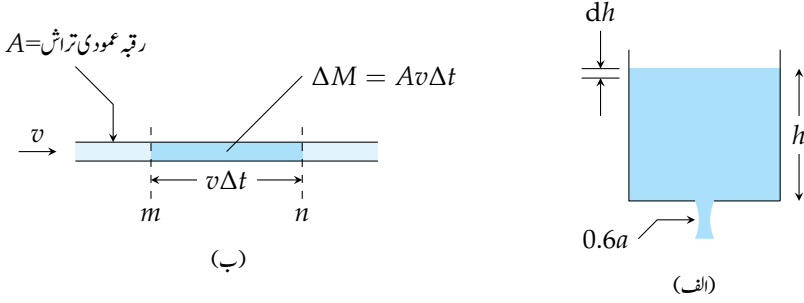
$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad v = \sqrt{2gh}$$

شکل 1.14-الف میں پانی کی دھار دکھائی گئی ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں دھار سوراخ کے قریب سکڑتا ہے۔ اگر سوراخ کا رقبہ a ہو تب سکڑے ہوئے مقام پر دھار کا رقبہ عمودی تراش $0.6a$ ہوتا ہے۔ یوں سوراخ سے نکلا تمام پانی رقبہ $0.6a$ سے گزرتا ہے اور یہی وہ مقام ہے جہاں پانی کا ہر ذرہ ایک ہی سمت میں رفتار v سے حرکت کرتا ہے۔

شکل 1.14-ب میں ایک نالی دکھائی گئی ہے جس میں پانی کی رفتار v ہے۔ نالی کا رقبہ عمودی تراش A ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر مقام m پر موجود پانی کا ذرہ وقت Δt میں $v\Delta t$ فاصلہ طے کرتے ہوئے مقام n تک پہنچ جائے گا۔ یوں Δt کے دوران مقام m سے گزرا ہوا پانی نالی کو m تا n بھرے گا۔ اس پانی کی مقدار $\Delta M = Av\Delta t$ ہوگی۔ اسی کلیے کو استعمال کرتے ہوئے شکل 1.14-الف میں dt دورانیے میں کل $dM = 0.6av dt$ پانی خارج ہوگا۔ یوں پانی کی شرح انخلا درج ذیل ہوگی۔

$$(1.21) \quad \frac{dM}{dt} = 0.6a\sqrt{2gh}$$

اس مساوات کو قانون ثاری سلی⁴³ کہتے ہیں۔



شکل 1.14: مثال 1.12: پانی کا انخلا اور پانی کے دھار کا سکڑنا۔

حل: دورانیہ dt میں پانی کی انخلا کے بنا ٹینکی میں پانی کی گہرائی dh کم ہوگی جو $B dh$ حجم کی کمی کو ظاہر کرتی ہے جہاں B ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ چونکہ پانی کے انخلا سے ٹینکی میں پانی کم ہوتا ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو دیے گئے مسئلے کا تفرقی مساوات ہے۔

$$(1.22) \quad 0.6a\sqrt{2gh} dt = -B dh$$

متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} dt, \quad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} t + c$$

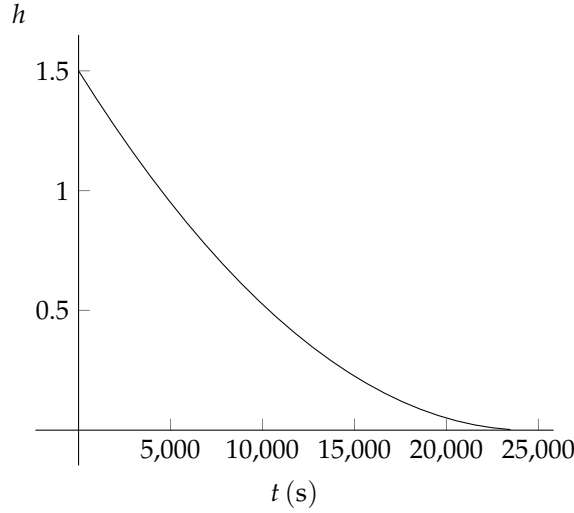
ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر پانی کی گہرائی h_1 ہے۔ ان معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = 2\sqrt{h_1}$ ملتا ہے لہذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل درج ذیل ہے۔

$$(1.23) \quad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} t + 2\sqrt{h_1}$$

خالی ٹینکی سے مراد $h = 0$ ہے۔ مخصوص حل میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے ٹینکی خالی کرنے کے لئے درکار وقت حاصل کرتے ہیں۔

$$2\sqrt{0} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} t + 2\sqrt{h_1}, \quad t = \frac{2\sqrt{h_1}B}{0.6a\sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{1.5} \times 2}{0.6\pi 0.005^2 \sqrt{2 \times 9.8}} = 23482 \text{ s} \approx 6.52 \text{ h}$$



شکل 1.15: مثال 1.12: ٹینکی خالی ہونے کا عمل۔

مساوات 1.23 کو شکل 1.15 میں دکھایا گیا ہے۔ یاد رہے کہ $23\,482\text{ s}$ میں ٹینکی خالی ہو جاتی ہے لہذا ترسیم کو اتنے وقت کے لئے ہی کھینچا گیا ہے۔

علیحدگی متغیرات کی جامع ترکیب

بعض اوقات نا قابل علیحدگی تفرقی مساوات کے متغیرات کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات کو قابل علیحدگی بنایا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب کو درج ذیل عملاً اہم قسم کی مساوات کے لئے سیکھتے ہیں جہاں $f(\frac{y}{x})$ قابل تفرق تفاعل ہے مثلاً $\cos \frac{y}{x}$ ، $e^{(y/x)}$ وغیرہ۔

$$(1.24) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

مساوات کی صورت دیکھتے ہوئے $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1.25) \quad y = ux, \quad y' = u + xu'$$

جنہیں $y' = f(\frac{y}{x})$ میں پر کرتے ہوئے $u + xu' = f(u)$ یعنی $xu' = f(u) - u$ ملتا ہے۔ اگر $f(u) - u \neq 0$ ہو تب متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.26) \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

مثال 1.13: تفاعل $xy' - y = 2x$ کو حل کریں۔

حل: تفاعل کو $y' = \frac{y}{x} + 2$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہوئے مساوات 1.25 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u + xu' = u + 2, \quad du = 2\frac{dx}{x}, \quad u = 2\ln|x| + c$$

اس میں u کی جگہ واپس $\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے جواب حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y}{x} = 2\ln|x| + c, \quad y = 2x\ln|x| + cx$$

سوالات

سوال 1.41 تا سوال 1.49 کے عمومی حل حاصل کریں۔ حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\text{سوال 1.41: } y^2y' + x^2 = 0$$

$$\text{جواب: } x^3 + y^3 = c$$

$$\text{سوال 1.42: } yy' + x = 0$$

جواب: $x^2 + y^2 = c$

سوال 1.43: $y' = \sec^2 y$

جواب: $y = \tan x + c$

سوال 1.44: $y' \cos x = y \sin x$

جواب: $y = c \sec x$

سوال 1.45: $y' = ye^{x-1}$

جواب: $\ln|y| = e^{x-1} + c$

سوال 1.46: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y + x^2 \sin^2 \frac{y}{x}$ کو حل کریں۔

جواب: $\frac{\cos \frac{y}{x} - 1}{\cos \frac{y}{x} + 1} = ce^{2x}$

سوال 1.47: $y' = (2x + y)^2$ کو حل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر $u = 2x + y$ پر کرنا ہو گا۔

جواب: $y = -2x + \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x + c)$

سوال 1.48: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y^2 + y$ کو حل کریں۔

جواب: $y = -\frac{x}{x+c}$

سوال 1.49: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = x - y$ کو حل کریں۔

جواب: $xy - x^2 = c$

ابتدائی قیمت سوال 1.50 تا سوال 1.56 کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.50:

$$xy' + y = 0, \quad y(2) = 8$$

جواب: $y = \frac{16}{x}$

سوال 1.51:

$$y' = 1 + 9y^2, \quad y(1) = 0$$

جواب: $y = \frac{1}{3} \tan[3(x - 1)]$

سوال 1.52:

$$y' \cos^2 x = \sin^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

جواب: $\tan y = \frac{1}{1 - \tan x}$

سوال 1.53:

$$y' = -4xy, \quad y(0) = 5$$

جواب: $y = 5e^{-2x^2}$

سوال 1.54:

$$y' = -\frac{2x}{y}, \quad y(1) = 2$$

جواب: $2x^2 + y^2 = 6$

سوال 1.55:

$$y' = (x + y - 4)^2, \quad y(0) = 5$$

جواب: $x + y - 4 = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

سوال 1.56:

$$xy' = y + 3x^4 \cos^2 \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0$$

جواب: اس میں $u = \frac{y}{x}$ پر کرنے سے $\tan \frac{y}{x} = x^3 - 1$ ملتا ہے۔

سوال 1.57: کسی بھی لمحے پر جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح، اس لمحے موجود جرثوموں کی تعداد کے راست تناسب ہے۔ اگر ان کی تعداد دو گھنٹوں میں دگنی ہو جائے تب چار گھنٹوں بعد ان کی تعداد کتنی ہو گی؟ چوبیس گھنٹوں بعد کتنی ہو گی؟

جوابات: $y = y_0 e^{0.34657t}$ ، $4y_0$ ، $4095y_0$

سوال 1.58: جرثوموں کی شرح پیدائش موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ ان کی شرح اموات بھی موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟ تعداد بالمقابل وقت کیا ہو گا؟ تعداد کہاں متوازن صورت اختیار کرے گی؟

جوابات: $\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y$ جہاں α اور β بالترتیب پیدائشی اور امواتی راست تناسب کے مستقل ہیں۔ تعداد بالمقابل وقت کی مساوات $y = y_0 e^{(\alpha - \beta)t}$ ہے۔ اگر $\alpha > \beta$ ہو تب تعداد بڑھتی رہے گی۔ اس کے برعکس اگر $\alpha < \beta$ ہو تب تعداد گھٹتی رہے گی حتیٰ کہ جراثیم فنا ہو جائیں اور $\alpha = \beta$ کی صورت میں تعداد وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو گی۔

سوال 1.59: عموماً جاندار مرنے کے بعد مکمل طور پر خاک میں مل جاتے ہیں اور ان کا نشان تک نہیں رہتا البتہ بعض اوقات حالات یوں ہوتے ہیں کہ ان کا جسم پتھر میں بدل جاتا ہے۔ اس پتھریلی جسم میں موجود $^{14}_6\text{C}$ اور $^{12}_6\text{C}$ ہم جا کے تناسب سے اس کی عمر کا تخمینہ لگایا جاسکتا ہے۔ دو ہزار سال پرانی پتھریلی مچھلی میں کاربن کا تناسب، ابتدائی تناسب کے کتنا گنا ہو گا؟

جواب: 69.5 %

سوال 1.60: طبیعیات میں باربردار⁴⁴ ذروں کو مسرع خطی⁴⁵ کے ذریعہ اسراع دی جاتی ہے۔ تصور کریں کہ مسرع خطی میں ${}^4_2\text{He}^{2+}$ داخل ہوتا ہے جس کی رفتار مستقل اسراع کے ساتھ 1.2 ms دورانیے میں 10^3 m s^{-1} سے بڑھا کر $1.6 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ کر دی جاتی ہے۔ اسراع دریافت کریں۔ اس دورانیے میں ذرہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

جواب: $1.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-2}$ ، 10.2 m

سوال 1.61: ایک ٹینکی میں 2000 لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں 150 kg نمک ملایا گیا ہے۔ پانی کو مسلسل ہلانے سے کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ ٹینکی میں 10 لٹر فی منٹ تازہ پانی شامل کیا جاتا ہے۔ ٹینکی سے پانی کا اخراج بھی 10 لٹر فی منٹ ہے۔ ایک گھنٹہ بعد ٹینکی میں کل کتنا نمک پایا جائے گا؟

جواب: $y = 111 \text{ kg}$ ، $y = 150e^{-\frac{t}{200}}$

سوال 1.62: مریض کے زبان کے نیچے تھرمامیٹر رکھ کر اس کا درجہ حرارت ناپا جاتا ہے۔ کمرے اور مریض کے درجہ حرارت بالترتیب 25°C اور 40°C ہیں۔ زبان کے نیچے رکھنے کے ایک منٹ بعد تھرمامیٹر کا پڑھ 35°C تک پہنچتا ہے۔ تھرمامیٹر کتنی دیر میں اصل درجہ حرارت کے قریب (مثلاً 39.9°C) پہنچ پائے گا؟

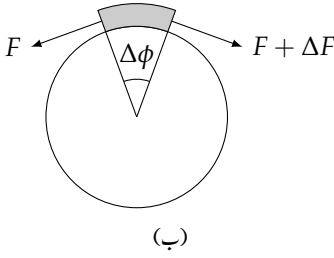
جواب: $T = 40 - 15e^{-1.204t}$ ، $t = 4.16 \text{ min}$

سوال 1.63: سرطان⁴⁶ کی مہلک بیماری میرے خاندان کے کئی افراد کی جان لے چکی ہے۔ سن 1960 میں اپنا کین لایڈ⁴⁷ سرطان کی رسولی کی افزائش کو ٹھیک طرح گامپرتز تفاعل⁴⁸ سے ظاہر کرنے میں کامیاب ہوئے۔

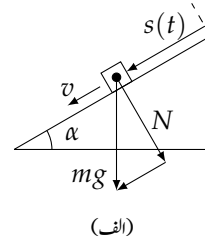
سرطانی رسولی میں جسم کا نظام تنہا ہو جاتا ہے۔ یوں رسولی میں موجود خلیوں تک آکسیجن اور خوراک کا پہنچنا ممکن نہیں رہتا۔ رسولی کے اندرونی خلیے آکسیجن اور خوراک کی کمی کی بنا مر جاتے ہیں۔ ان حقائق کی نمونہ کشی درج ذیل گامپرتز تفرقی مساوات کرتی ہے جہاں y رسولی کی کمیت ہے۔

$$(1.27) \quad y' = -Ay \ln y, \quad A > 0$$

⁴⁴charged
⁴⁵linear accelerator
⁴⁶cancer
⁴⁷Anna Kane Laird
⁴⁸Benjamin Gompertz



(ب)



(الف)

شکل 1.16: سوال 1.65 اور سوال 1.66 کے اشکال۔

جواب: $\ln y = ce^{-At}$

سوال 1.64: دھوپ میں کپڑے کی نمی خشک ہونی کی شرح کپڑے میں موجود نمی کے راست تناسب ہوتی ہے۔ اگر پہلے پندرہ منٹ میں نصف پانی خشک ہو جائے تب % 99.9 پانی کتنی دیر میں خشک ہو گا؟ ہم % 99.9 خشک کو مکمل خشک تصور کر سکتے ہیں۔

جواب: $y = y_0 e^{-0.0462t}$ ، 49.8 min

سوال 1.65: رگڑ دو سطحوں کو آپس میں رگڑنے سے قوت رگڑ پیدا ہوتی ہے جو اس حرکت کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ خشک سطحوں پر پیدا قوت $|F| = \mu|N|$ سے حاصل کی جاسکتی ہے جہاں N دونوں سطحوں پر عمودی قوت، μ حرکی رگڑ کا مستقل⁴⁹ اور F رگڑ سے پیدا قوت ہے۔

شکل 1.16-الف میں α زاویہ کی سطح پر m کمیت کا جسم دکھایا گیا ہے۔ اس پر ثقلی قوت (وزن) mg عمل کرتا ہے۔ اس قوت کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ پہلا حصہ N ہے جو سطح کے عمودی ہے۔ دوسرا حصہ سطح کے متوازی ہے جو جسم کو اسراع دیتا ہے۔ کمیت 10 kg ، ثقلی اسراع $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، رگڑ کا مستقل $\mu = 0.25$ اور زاویہ $\alpha = 30^\circ$ ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔ یہ جسم کتنی دیر میں کل 15 m فاصلہ طے کرے گا؟

جواب: $\frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$ ، $v = 3.93t \text{ m/s}$ ، 2.76 s

⁴⁹coefficient of kinetic friction

سوال 1.66: شکل 1.16-ب میں گول جسم کے گرد لپیٹی گئی رسی کا چھوٹا حصہ دکھایا گیا ہے۔ تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ رسی کے چھوٹے حصے کے سروں پر قوت میں فرق زاویہ $\Delta\phi$ اور قوت F کے راست تناسب ہوتا ہے۔ رسی کو جسم کے گرد کتنی مرتبہ لپیٹنے سے ایک شخص 500 گنا زیادہ قوت کے گاڑی کو روک سکتا ہے؟

جوابت: $F = F_0 e^{\phi}$ ، $\phi = 6.21 \text{ rad}$ یعنی 1.98 مرتبہ لپیٹنا ضروری ہے۔

سوال 1.67: کارتیسی محدد کے محور پر گول دائرے $x^2 + y^2 = r^2$ کا تفرقی مساوات y'_1 حاصل کریں۔ اسی طرح محور سے گزرتے ہوئے سیدھے خط کا تفرقی مساوات y'_2 حاصل کریں۔ دونوں تفرقی مساوات کا حاصل ضرب کیا ہوگا؟ اس حاصل ضرب سے آپ کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

جواب: $y'_1 y'_2 = -1$ ؛ آپس میں عمودی ہیں۔

سوال 1.68: آپ کو ایسے تفاعل سے ضرور واسطہ پڑیگا جس کا تحلیلی تکرار حاصل کرنا ممکن نہیں ہوگا۔ ایسا ایک تفاعل e^{x^2} ہے۔ اس تفاعل کی مکلاورن تسلسل ⁵⁰ کے پہلے چار ارکان کا تکرار حاصل کریں۔

جواب: $\int e^{x^2} \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{36} + \dots$

سوال 1.69: قانون ثاری سلی کروئی ٹینکی کا رداس R ہے۔ اس کی تہہ میں چھوٹا سوراخ ہے جس کا رداس r ہے۔ پوری طرح بھری ہوئی ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہوگی۔ اگر $R = 1 \text{ m}$ اور $r = 1 \text{ cm}$ ہو تب ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہوگی؟

جواب: $0.6\pi r^2 \sqrt{2gh} dt = -\pi[R^2 + (h - R)^2] dh$ ،
 $t_{\text{خالی}} = \frac{44R^2 \sqrt{gR}}{9gr^2}$ ، $t + c = -\frac{\sqrt{2gh}}{9gr^2} (30R^2 - 10hR + 3h^2)$
 دیے رداس کی ٹینکی 4.34 h یعنی چار گھنٹے اور بیس منٹ میں خالی ہوگی۔

1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل

ایسا تفاعل $u(x, y)$ جس کے استمراری⁵¹ (یعنی بلا جوڑ) جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کا (مکمل) تفرق درج ذیل ہے۔

$$(1.28) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

یوں اگر $u(x, y) = c$ ہو تب $du = 0$ ہو گا۔

مثال کے طور پر $u = xy + 2(x - y) = 7$ کا تفرق

$$du = (y + 2) dx + (x - 2) dy = 0$$

ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2}{x - 2}$$

الٹ چلتے ہوئے اس تفرقی مساوات کو ہم حل کر سکتے ہیں۔ اس مثال سے ایک ترکیب جنم دیتی ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ یعنی

$$(1.29) \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

کو اس صورت قطعی تفرقی مساوات⁵² کہتے ہیں جب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو جہاں $u(x, y)$ کوئی تفاعل ہے۔

$$(1.30) \quad \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

یوں مساوات 1.29 کو

$$(1.31) \quad du = 0$$

continuous partial differential⁵¹
exact differential equation⁵²

لکھ کر مکمل لیتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی خفی حل⁵³

$$(1.32) \quad u(x, y) = c$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.29 اور مساوات 1.30 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 1.29 تب قطعی تفرقی مساوات ہو گا جب ایسا $u(x, y)$ پایا جاتا ہو کہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو۔

$$(1.33) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M$$

$$(1.34) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

ان سے ہم تفرقی مساوات کے قطعی ہونے کا شرط اخذ کرتے ہیں۔

سطح xy پر ایسا خطہ جس کا سرحد بند منحنی ہو اور یہ منحنی اپنے آپ کو نہ کاٹتا ہو پر تصور کریں کہ M اور N ایسے استمراری⁵⁴ (یعنی بلا جوڑ) تفاعل ہیں جن کے درجہ اول تفرق بھی اس خطے پر بے جوڑ ہیں۔ تب مساوات 1.33 کے تفرق درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

استمراری شرط کی بنا $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ برابر ہیں لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.35) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{شرط قطعیت}$$

مساوات 1.29 کا قطعی تفرقی مساوات ہونے کے لئے مساوات 1.35 پر پورا اتنا لازمی⁵⁵ اور معقول⁵⁶ شرط ہے۔

قطعی تفرقی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 1.33 کا x مکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1.36) \quad u = \int M dx + k(y)$$

⁵³ implicit solution

⁵⁴ continuous

⁵⁵ necessary condition

⁵⁶ sufficient condition

جہاں تکمیل کا مستقل از خود y کا تفاعل ہو سکتا ہے۔ تکمیل کا مستقل $k(y)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.36 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial y}$ لیتے ہوئے مساوات 1.34 کی مدد سے $\frac{dk}{dy}$ حاصل کرتے ہیں جس کا y تکمیل لینے سے k حاصل ہو گا۔ (مثال 1.14 دیکھیں۔)

اسی طرح مساوات 1.34 کا y تکمیل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$u = \int N dy + m(x) \quad (1.37)$$

جہاں تکمیل کا مستقل از خود x کا تفاعل ہو سکتا ہے۔ تکمیل کا مستقل $m(x)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.37 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial x}$ لیتے ہوئے مساوات 1.33 کی مدد سے $\frac{dm}{dx}$ حاصل کرتے ہیں جس کا x تکمیل لینے سے m حاصل ہو گا۔

مثال 1.14: قطعی تفرقی مساوات
درج ذیل کو حل کریں۔

$$(1 + 2xy^3) dx + (2y + 3x^2y^2) dy = 0 \quad (1.38)$$

حل: پہلے ثابت کرتے ہیں کہ یہ مساوات قطعی ہے۔ یہ مساوات 1.29 کی طرح ہے جہاں

$$M = 1 + 2xy^3$$

$$N = 2y + 3x^2y^2$$

ہیں۔ $\frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\frac{\partial N}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

جو مساوات 1.35 پر پورا اترتے ہیں لہذا دی گئی مساوات قطعی تفرقی مساوات ہے۔ آئیں اب اس کو حل کرتے ہیں۔

مساوات 1.36 کو استعمال کرتے ہیں۔

$$(1.39) \quad u = \int (1 + 2xy^3) dx + k(y) = x + x^2y^3 + k(y)$$

اس کا y جزوی تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.34 کا استعمال کرتے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{dk}{dy} = N = 2y + 3x^2y^2$$

ہوئے $\frac{dk}{dy}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dk}{dy} = 2y$$

اس کا y مکمل لیتے ہوئے k حاصل کرتے ہیں

$$(1.40) \quad k = \int 2y dy = y^2 + c_1$$

جہاں c_1 مکمل کا مستقل ہے۔ چونکہ k صرف y پر منحصر ہے لہذا c_1 مستقل x پر منحصر نہیں ہو سکتا۔ یوں مساوات 1.39 اور مساوات 1.40 سے قطعی تفرقی مساوات کا حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.41) \quad u(x, y) = x + x^2y^3 + y^2 + c_1 = 0$$

آخر میں مساوات 1.41 کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.38 حاصل کر کے حاصل حل کی درستگی ثابت کرتے ہیں۔

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (1 + 2xy^3) dx + (3x^2y^2 + 2y) dy$$

مثال 1.15: مخصوص حل

$N = 2y + 3x^2y^2$ لیتے ہوئے مساوات 1.38 کو حل کریں جہاں $x = 1$ پر $y = 2$ ہے۔

حل: $\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2y + 3x^2y^2$ کا y تکمیل

$$(1.42) \quad u = \int (2y + 3x^2y^2) dy + m(x) = y^2 + x^2y^3 + m(x)$$

لے کر اس سے $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 + \frac{dm}{dx}$$

جو M کے برابر ہوگا

$$2xy^3 + \frac{dm}{dx} = M = 1 + 2xy^3$$

جس سے

$$\frac{dm}{dx} = 1, \quad m = x + c_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 1.42 میں پر کرتے ہوئے تفریقی مساوات کا حل ملتا ہے۔

$$u = y^2 + x^2y^3 + x + c_2 = 0$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$2^2 + (1^2)(2^3) + 1 + c_2 = 0, \quad c = -13$$

ملتا ہے جس سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y^2 + x^2y^3 + x - 13 = 0$$

مثال 1.16: غیر قطعی مساوات

مساوات $-y dx + x dy = 0$ میں $M = -y$ اور $N = x$ ہیں لہذا $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$ لیکن $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$

ہے۔ یوں دیا گیا مساوات غیر قطعی⁵⁷ ہے۔ یوں قطعی مساوات کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے۔ آئیں قطعی مساوات کی ترکیب استعمال کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 1.36 سے

$$u = \int -y \, dx + k(y) = -xy + k(y)$$

ملتا ہے جس کا y تفرق $\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \frac{dk}{dy}$ ہے جسے N یعنی x کے برابر پر کرنے سے $\frac{dk}{dy} = 2x$ ملتا ہے جس کا مکمل $k = 2xy + c$ ہے۔ اب مستقل k صرف y پر منحصر ہو سکتا ہے جبکہ حاصل k اس شرط پر پورا نہیں اترتا لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں قطعی تفرقی مساوات کی ترکیب اس مثال میں دیے تفرقی مساوات کے حل کے لئے ناقابل استعمال ہے۔ آپ N سے شروع کرتے ہوئے حل کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ آپ اس راستے سے بھی حل حاصل نہیں کر پائیں گے۔

تخفیف بذریعہ جزو مکمل

مثال 1.16 میں تفاعل $-y \, dx + x \, dy = 0$ غیر قطعی تھا البتہ اس کو $\frac{1}{x^2}$ سے ضرب دینے سے $-\frac{y}{x^2} \, dx + \frac{1}{x} \, dy = 0$ حاصل ہوتا ہے جو قطعی مساوات ہے۔ آپ مساوات 1.35 استعمال کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ واقعی قطعی مساوات ہے۔ حاصل قطعی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.43) \quad -\frac{y}{x^2} \, dx + \frac{1}{x} \, dy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c$$

اس ترکیب کو عمومی بناتے ہوئے ہم کہتے ہیں کہ غیر قطعی مساوات مثلاً

$$(1.44) \quad P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = 0$$

کو ایک مخصوص تفاعل F سے ضرب دینے سے قطعی مساوات

$$(1.45) \quad FP \, dx + FQ \, dy = 0$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔ تفاعل F جزو تکمیل⁵⁸ کہلاتا ہے اور یہ عموماً x اور y پر منحصر ہوگا۔ حاصل قطعی مساوات کو حل کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

مثال 1.17: جزو تکمیل
مساوات 1.43 میں جزو تکمیل $\frac{1}{x^2}$ تھا لہذا اس کا حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$FP dx + FQ dy = \frac{-y dx + x dy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c$$

مساوات $-y dx + x dy = 0$ کے مزید جزو تکمیل $\frac{1}{y^2}$ ، $\frac{1}{xy}$ اور $\frac{1}{x^2+y^2}$ ہیں جن سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{-y dx + x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad \frac{x}{y} = c$$

$$\frac{-y dx + x dy}{xy} = -d\left(\ln \frac{x}{y}\right), \quad \ln \frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = x$$

$$\frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1} \frac{x}{y}\right), \quad \tan^{-1} \frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = c$$

جزو تکمیل کا حصول

مساوات $M dx + N dy = 0$ کی قطعیت کا شرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ مساوات 1.35 ہے۔ مساوات $FP dx + FQ dy = 0$ کے لئے اس شرط کو درج ذیل لکھا جائے گا

$$(1.46) \quad \frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ)$$

جس کو زنجیری طریقہ تفرق سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں زیر نوشت تفرق کو ظاہر کرتی ہے (یعنی $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$)۔

$$(1.47) \quad F_y P + F P_y = F_x Q + F Q_x$$

یہ مساوات عموماً پیچیدہ ہو گا لہذا ہم اس پر مزید وقت ضائع نہیں کرتے۔ ہم ایسے جزو مکمل تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو صرف x یا صرف y پر منحصر ہو۔ صرف x پر منحصر جزو مکمل کی صورت میں $F = F(x)$ لکھا جائے گا اور $F_y = 0$ ہو گا جبکہ $F_x = F' = \frac{dF}{dx}$ ہو گا۔ یوں مساوات 1.46 درج ذیل صورت اختیار کر لیا

$$(1.48) \quad F P_y = F' Q + F Q_x$$

جسے FQ سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(1.49) \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$$

اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 1.1: اگر مساوات 1.44 سے مساوات 1.49 میں حاصل کردہ R صرف x پر منحصر ہو تب مساوات 1.44 کا جزو مکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.49 کا مکمل لے کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(1.50) \quad F(x) = e^{\int R(x) dx}$$

اسی طرح $F = F(y)$ کی صورت میں مساوات 1.49 کی جگہ درج ذیل ملتا ہے

$$(1.51) \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{P} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]$$

جس سے درج بالا مسئلے کی جوڑی ملتی ہے۔

مسئلہ 1.2: اگر مساوات 1.44 سے مساوات 1.51 میں حاصل کردہ R صرف y پر منحصر ہو تب مساوات 1.44 کا جزو مکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.51 کا مکمل لے کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(1.52) \quad F(y) = e^{\int R(y) dy}$$

مثال 1.18: جزو مکمل

دیے مساوات کا جزو مکمل حاصل کرتے ہوئے اس کا عمومی حل حاصل کریں۔ ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ سے مخصوص حل حاصل کریں۔

$$(1.53) \quad (e^{x+y} + ye^y) dx + (xe^y - 1) dy = 0$$

حل: پہلا قدم: غیر قطعیت ثابت کرتے ہیں۔ مساوات 1.35 پر درج ذیل پورا نہیں اترتا لہذا غیر قطعیت ثابت ہوتی ہے۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^y + ye^y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

دوسرا قدم: جزو مکمل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 1.49 سے حاصل R کی قیمت x اور y دونوں پر منحصر ہے

$$R = \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right] = \frac{1}{xe^y - 1} (e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y)$$

لہذا مسئلہ 1.1 قابل استعمال نہیں ہے۔ آئیں مسئلہ 1.2 استعمال کر کے دیکھیں۔ R کو مساوات 1.51 سے حاصل کرتے ہیں۔

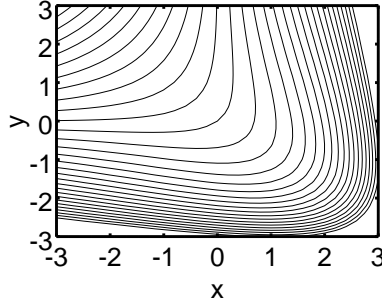
$$R = \frac{1}{P} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] = \frac{1}{e^{x+y} + ye^y} (e^y - e^{x+y} - e^{-y} - ye^y) = -1$$

مساوات 1.52 سے جزو مکمل $F(y) = e^{-y}$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.53 کو F سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل قطعی مساوات ملتی ہے۔ اس کو قطعیت کے لئے پرکھ کر دیکھیں۔ آپ کو شرط قطعیت کے دونوں اطراف اکائی حاصل ہو گا۔

$$(e^x + y) dx + (x - e^{-y}) dy = 0$$

مساوات 1.36 استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں۔

$$u = \int (e^x + y) dx + k(y) = e^x + xy + k(y)$$



شکل 1.17: مثال 1.18

اس کا y تفریق لیتے ہوئے مساوات 1.34 کے استعمال سے $\frac{dk}{dy}$ حاصل کرتے ہیں جس کا مکمل k ہو گا۔

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{dk}{dy} = x - e^{-y}, \quad \frac{dk}{dy} = N = -e^{-y}, \quad k = e^{-y} + c_1$$

یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.17 میں دکھایا گیا ہے۔

$$(1.54) \quad u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = c$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے مستقل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$e^0 + (0)(-2) + e^{-(-2)} = c, \quad c = e^2$$

یوں مخصوص حل $e^x + xy + e^{-y} = e^2 = 7.389$ ہے۔

چھوٹا قدم: عمومی حل اور مخصوص حل کو واپس دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

سوالات

سوال 1.70 تا سوال 1.81 کو قطعیت کے لئے پرکھیں اور حل کریں۔ غیر قطعی صورت میں دیا گیا جزو مکمل استعمال کریں یا اس کو بھی حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہو، وہاں مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.70:

$$2xy \, dx + x^2 \, dy = 0$$

جواب: $y = \frac{c}{x^2}$

سوال 1.71:

$$x^2 \, dx + y \, dy = 0$$

جواب: $2x^3 + 3y^2 = c$

سوال 1.72:

$$[\sin x + (x + y^3) \cos x] \, dx + 3y^2 \sin x \, dy = 0$$

جواب: $\sin x(x + y^3)$

سوال 1.73:

$$(y + 1) \, dx + (x + 1) \, dy = 0$$

جواب: $x + xy + y = c$

سوال 1.74:

$$(e^y + ye^x + y) \, dx + (xe^y + e^x + x) \, dy = 0$$

جواب: $xe^y + xy + ye^x$

سوال 1.75:

$$\frac{y^2 + 4x}{x} dx + 2y dy = 0$$

جواب: $u = (2x + y^2)x = c$ ، $F = x$

سوال 1.76:

$$ye^x(2x + 1 + 2y^2) dx + e^x(x + 2y) dy = 0$$

جواب: $ye^{2x}(x + y) = c$ ، $F = e^x$

سوال 1.77:

$$(2y^2 + 2xy + y) dx + (2y + x) dy = 0$$

جواب: $e^{2x}(y^2 + xy) = c$ ، $F = e^{2x}$

سوال 1.78:

$$y dx + (2xy - e^{-2y}) dx = 0, \quad y(1) = 1$$

جواب: $xe^{2y} - \ln y = e^2$ ، $F = \frac{e^{2y}}{y}$

سوال 1.79:

$$3(y + 1) dx = 2x dy, \quad y(1) = 3, \quad F = \frac{y + 1}{x^4}$$

جواب: $y + 1 = 4x^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.80:

$$y dx + [y + \tan(x + y)] dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad F = \cos(x + y)$$

جواب: $y \sin(x + y) = \frac{\pi}{2}$

سوال 1.81:

$$(a + 1)y dx + (b + 1)x dy = 0, \quad y(1) = 1, \quad F = x^a y^b$$

جواب: $x^{a+1}y^{b+1} = 0$

سوال 1.82: جزو مکمل کو مزید بہتر سمجھنے کی خاطر کسی بھی تفاعل مثلاً $u = e^{2x}(y^2 + xy) = c$ کے مکمل تفرق کو $M dx + N dy = 0$ صورت میں لکھیں یعنی $e^{2x}(2y^2 + 2xy + y) dx + e^{2x}(2y + x) dy = 0$ جو قطعی مساوات ہے۔ تفرقی مساوات کو e^{2x} سے تقسیم کرنے سے غیر قطعی مساوات $(2y^2 + 2xy + x) dy = 0$ ملتا ہے۔ اس غیر قطعی مساوات کو e^{2x} سے ضرب دیتے ہوئے قطعی بنایا جاسکتا ہے لہذا e^{2x} اس غیر قطعی مساوات کا جزو مکمل ہے۔

1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی

ایسے سادہ درج اول تفرقی مساوات جنہیں درج ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہو خطی⁵⁹ کہلاتے ہیں

$$y' + p(x)y = r(x) \quad (1.55)$$

جبکہ ایسے مساوات جنہیں الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر خطی کہلاتے ہیں۔

خطی مساوات 1.55 کی بنیادی خاصیت یہ ہے کہ اس میں تابع متغیر y اور تابع متغیر کا تفرق y' دونوں خطی ہیں جبکہ $p(x)$ اور $r(x)$ غیر تابع متغیر x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ اگر غیر تابع متغیر وقت ہو تب x کی جگہ t لکھا جاتا ہے۔

مساوات 1.55 خطی مساوات کی معیاری صورت ہے جس کے پہلے رکن y' کا جزو ضربی اکائی ہے۔ ایسی مساوات جس میں y' کی بجائے $f(x)y'$ پایا جاتا ہو کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے، اس کی معیاری صورت حاصل

⁵⁹linear

کی جاسکتی ہے۔ یوں خطی مساوات $e^x (x + \sqrt{x})y' + y \sec x = e^x$ کو $(x + \sqrt{x})$ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے معیاری صورت $y' + \frac{\sec x}{x + \sqrt{x}}y = \frac{e^x}{x + \sqrt{x}}$ میں لکھا جاسکتا ہے۔

دائیں ہاتھ $r(x)$ قوت⁶⁰ کو ظاہر کر سکتی ہے جبکہ مساوات کا حل $y(x)$ ہٹاؤ⁶¹ ہو سکتا ہے۔ اسی طرح $r(x)$ برقی دباؤ⁶² ہو سکتا ہے جبکہ $y(x)$ برقی رو⁶³ ہو سکتی ہے۔ انجینئری میں $r(x)$ کو عموماً درآئیدہ⁶⁴ یا جبری تفاعل⁶⁵ کہتے ہیں جبکہ $y(x)$ کو ماحصل⁶⁶ یا رد عمل⁶⁷ کہتے ہیں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم مساوات 1.55 کو خطہ $a < x < b$ میں حل کرنا چاہتے ہیں۔ اس خطے کو J کہا جائے گا۔ پہلے اس مساوات کی سادہ صورت حل کرتے ہیں جس میں J پر تمام x کے لئے $r(x)$ صفر کے برابر ہو۔ (اس کو بعض اوقات $r(x) \equiv 0$ لکھا جاتا ہے۔) ایسی صورت میں مساوات 1.55 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$(1.56) \quad y' + p(x)y = 0$$

جس کو متجانس⁶⁸ مساوات کہتے ہیں۔ متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx, \quad \ln|y| = -\int p(x) dx + c_1$$

دونوں اطراف کا قوت نمائی لیتے ہوئے متجانس خطی مساوات 1.56 کا حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.57) \quad y(x) = ce^{-\int p(x) dx}, \quad (c = \mp e^{c_1} \quad \text{جب} \quad y \leq 0)$$

یہاں $c = 0$ بھی چننا جاسکتا ہے جو غیر اہم حل⁶⁹ (یعنی صفر حل) $y(x) = 0$ دیتا ہے۔

force⁶⁰
displacement⁶¹
voltage⁶²
current⁶³
input⁶⁴
forcing function⁶⁵
output⁶⁶
response⁶⁷
homogeneous⁶⁸
trivial solution⁶⁹

غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب مساوات 1.55 کو اس صورت میں حل کرتے ہیں جب $r(x) \not\equiv 0$ ہو یعنی J پر کہیں کہیں یا پورے خطے پر $r(x)$ غیر صفر ہو۔ ایسی صورت میں مساوات 1.55 غیر متجانس⁷⁰ کہلاتا ہے۔ غیر متجانس مساوات کی خوشگوار خاصیت یہ ہے کہ اس کا جزو مکمل $F(x)$ صرف x پر منحصر ہوتا ہے لہذا اس کو مسئلہ 1.1 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ جزو مکمل کو حاصل کرتے ہیں۔ غیر قطعی مساوات 1.55 کو ترتیب دے کر F سے ضرب دیتے ہوئے قطعی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$(py - r) dx + dy = 0, \quad F(py - r) dx + F dy = 0$$

جس سے مساوات 1.35 کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(py - r)] = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{یعنی} \quad Fp = \frac{\partial F}{\partial x}$$

متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے مکمل لیتے ہوئے F حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dF}{F} = p dx, \quad \ln|F| = h(x) = \int p(x) dx \quad \text{لہذا} \quad F = e^h$$

مساوات 1.55 کو جزو مکمل F سے ضرب دیتے اور $\frac{dh}{dx} = p$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$e^h y' + e^h h' y = e^h r \quad \text{یعنی} \quad (e^h y)' = e^h r$$

جس کا مکمل لیتے ہیں۔

$$e^h y = \int e^h r dx + c$$

دونوں اطراف کو e^h سے تقسیم کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات 1.55 کا حل ملتا ہے۔

$$(1.58) \quad y = e^{-h} \left(\int e^h r dx + c \right), \quad h = \int p(x) dx$$

یوں مساوات 1.55 کا حل درج بالا تکمیل سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو نسبتاً آسان ثابت ہوتا ہے۔ اگر درج بالا تکمیل بھی مشکل ثابت ہو تب تفرقی مساوات کا حل اعدادی ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہاں بتلاتا چلوں (سوال 1.83 دیکھیں) کہ h کے حصول میں تکمیل کا مستقل کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہذا اسے صفر تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.58 کا تکمیل درآیدہ $r(x)$ پر منحصر ہے جبکہ ابتدائی معلومات تکمیل کا مستقل c تعین کرتی ہیں۔ اس مساوات کو درج ذیل لکھتے ہوئے

$$(1.59) \quad y = e^{-h} \int e^h r \, dx + ce^{-h}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(1.60) \quad \text{ابتدائی معلومات سے پیدا رد عمل} + \text{درآیدہ سے پیدا رد عمل} = \text{کل ماحصل}$$

مثال 1.19: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' + y \cot x = 2x \operatorname{cosec} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حل: یہاں $p = \cot x$ اور $r = \operatorname{cosec} x$ ہیں۔

$$h(x) = \int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

یوں مساوات 1.58 میں

$$e^h = \sin x, \quad e^{-h} = \operatorname{cosec} x, \quad e^h r = (\sin x)(2x \operatorname{cosec} x) = 2x$$

ہیں لہذا عمومی حل

$$y = \operatorname{cosec} x \left(\int 2x \, dx + c \right) = \operatorname{cosec} x (x^2 + c)$$

ہو گا۔ ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = -\frac{\pi^2}{4}$ ملتا ہے لہذا مخصوص حل درج ذیل ہے

$$y = \operatorname{cosec} x \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right)$$

جس میں $x^2 \operatorname{cosec} x$ درآئیدہ کا پیدا کردہ رد عمل ہے جبکہ $-\frac{\pi^2}{4} \operatorname{cosec} x$ ابتدائی معلومات کا پیدا کردہ رد عمل ہے۔

مثال 1.20: برقی دور

شکل 1.18 میں مزاحمت R ⁷¹ اور امالہ L ⁷² سلسلہ وار جڑے ہیں۔ اس دور کو سلسلہ وار RL ⁷³ دور کہتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر برقی دباؤ E ⁷⁴ برقی دور پر لاگو کیا جاتا ہے جو دور میں برقی دو $I(t)$ ⁷⁵ کو جنم دیتا ہے۔ ابتدائی رو صفر $I(0) = 0$ کے برابر ہے۔

طبعی معلومات: مزاحمت کی اکائی اوہم Ω ⁷⁶ اور امالہ کی اکائی ہینری H ⁷⁷ ہے۔ قانون اوہم⁷⁸ کے تحت مزاحمت R میں رو I اور دباؤ v_R کا تعلق $v_R = IR$ ہے۔ اسی طرح امالہ میں رو اور دباؤ v_L کا تعلق $v_L = L \frac{dI}{dt}$ ہے۔ کرخوف قانون دباؤ⁷⁹ کے تحت ان برقی دباؤ کا مجموعہ درآئیدہ دباؤ E کے برابر ہو گا۔

حل: یہاں غیر تابع متغیرہ وقت t ہے جبکہ تابع متغیرہ رو $I(t)$ ہے۔ کرخوف کے قانون کے تحت

$$v_L + v_R = E, \quad LI' + RI = E, \quad I' + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

resistance⁷¹

inductor⁷²

series circuit⁷³

electric voltage⁷⁴

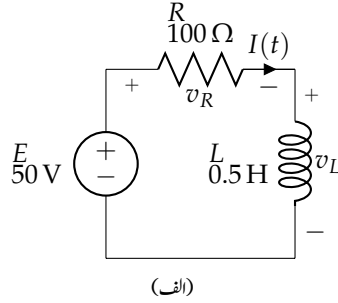
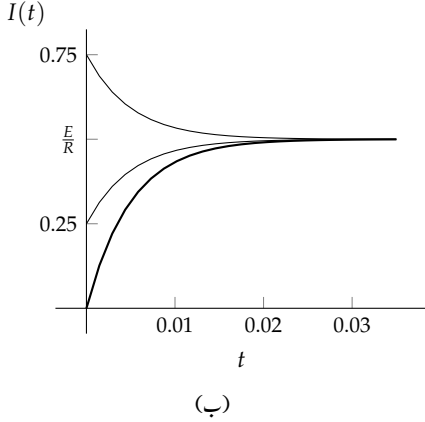
electric current⁷⁵

Ohm⁷⁶

Henry⁷⁷

Ohm's law⁷⁸

Kirchoff's voltage law⁷⁹



شکل 1.18: مثال 1.20 کا سلسلہ وار برقی دور۔

لکھا جائے گا جہاں آخری قدم پر L سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے۔ اس کو مساوات 1.58 کی مدد سے حل کرتے ہیں جہاں x کی جگہ t اور y کی جگہ I استعمال ہو گا۔ یہاں $p = \frac{R}{L}$ اور $r = \frac{E}{L}$ ہیں لہذا $h = \frac{R}{L}t$ ہو گا اور عمومی حل

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\int e^{\frac{R}{L}t} \frac{E}{L} dx + c \right)$$

لکھا جائے گا۔ مکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(1.61) \quad I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} + c \right) = \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}$$

شکل 1.18-الف میں پرزوں کی قیمتیں دی گئی ہیں جن سے $\frac{E}{R} = \frac{50}{100} = 0.5$ اور $\frac{R}{L} = \frac{100}{0.5} = 200$ ملتا ہے لہذا عمومی حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.62) \quad I = 0.5 + ce^{-200t}$$

مساوات 1.61 میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات میں $ce^{-\frac{R}{L}t}$ جزو $t \rightarrow \infty$ پر صفر کے برابر ہو گا لہذا کافی دیر بعد رو پہلے جزو $\frac{E}{R}$ کے برابر ہو گی جسے رو کی بوقرار حال⁸⁰

⁸⁰ steady state

قیمت کہتے ہیں۔ یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کافی دیر بعد رو کی قیمت کا دار و مدار ابتدائی معلومات پر منحصر نہیں ہے۔ رو کتنی جلدی برقرار حال قیمت اختیار کرتی ہے، اس کا دار و مدار $\frac{R}{L}$ کی قیمت پر ہے۔

مساوات 1.61 میں ابتدائی معلومات $I(0) = 0$ پر کرتے $0 = 0.5 + ce^0$ ہوئے $c = -0.5$ ملتا ہے لہذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.18-ب میں موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل میں ابتدائی قیمت $I(0) = 0.25$ اور $I(0) = 0.75$ سے حاصل مخصوص حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

$$I(t) = 0.5(1 - e^{-200t}) \quad (1.63)$$

مثال 1.21: جسم میں ہارمونز کی مقدار جسم میں موجود غدد⁸¹ یعنی گلیٹی، خون میں مختلف مرکبات (ہارمونز)⁸² خارج کرتے ہوئے مختلف نظام کو قابو کرتے ہیں۔ تصور کریں کہ خون سے ایک مخصوص ہارمون مسلسل ہٹایا جاتا ہے۔ ہٹانے کی شرح اس لمحے موجود ہارمون کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ ساتھ ہی ساتھ تصور کریں کہ روزانہ غدد اس ہارمون کو خون میں ایک مخصوص انداز سے خارج کرتی ہے۔ خون میں موجود ہارمون کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ صبح چھ بجے خون میں ہارمون کی مقدار y_0 لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔

حل: پہلا قدم: نمونہ کشی: چوبیس گھنٹوں میں خارج ہونے کے عمل کو $a + b \sin(\frac{2\pi t}{24})$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ چونکہ خون میں ہارمون خارج ہونے سے خون میں ہارمون کی مقدار بڑھتی ہے لہذا $a \geq b$ ہو گا۔ یوں خارج کردہ ہارمون کی مقدار مثبت ہو گی۔ کسی بھی لمحے خون میں ہارمون کی مقدار کی تبدیلی کی شرح، اس لمحے خون میں ہارمون کے داخل ہونے کی مقدار اور اس کی ہٹائی جانے والی مقدار میں فرق کے برابر ہو گا۔ یوں مسئلے کا تفرقی مساوات درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{dy(t)}{dt} = a + b \sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right) - ky(t) \quad \text{یعنی} \quad y' - ky = a + b \sin \omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{24} \quad (1.64)$$

دوسرا قدم: عمومی حل: یہاں $p = k$ ہے لہذا $h = \int k dt = kt$ ہو گا۔ اسی طرح $r = a + b \sin \omega t$ ہے لہذا مساوات 1.58 سے عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو مکمل بالخصوص⁸³ حل کیا گیا ہے

$$\begin{aligned} y &= e^{-kt} \int e^{kt} (a + b \sin \omega t) dt + ce^{-kt} \\ &= e^{-kt} e^{kt} \left[\frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] + ce^{-kt} \\ &= \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + ce^{-kt} \end{aligned}$$

عمومی حل کا آخری جزو وقت بڑھنے سے آخر کار صفر ہو جاتا ہے۔ یوں برقرار حل⁸⁴ بقایا اجزاء پر مشتمل ہے۔

آخر قدم: مخصوص حل: صبح چھ بجے کو لمحہ $t = 0$ تصور کرتے ہوئے ابتدائی معلومات کو $y(0) = y_0$ لکھا جا سکتا ہے۔ ان قیمتوں کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$y_0 = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos 0 + \omega \sin 0) + ce^0, \quad \text{یعنی} \quad c = y_0 - \frac{a}{k} - \frac{bk}{k^2 + \omega^2}$$

اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔ مخصوص حل کو $a = 1$ ، $b = 1$ ، $k = 0.04$ اور $y_0 = 0$ لیتے ہوئے جسے شکل 1.19 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y_0 = 50$ لیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خون میں ہارمون کی مقدار بہت جلد ایک مخصوص اوسط قیمت پر پہنچ پاتی ہے۔

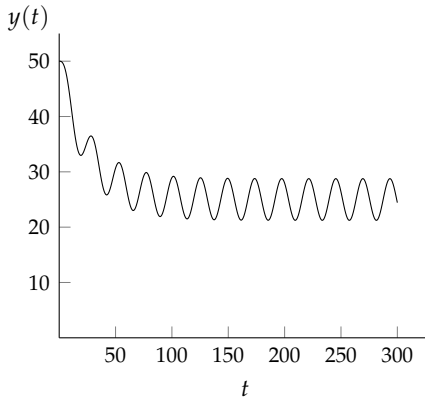
$$y = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \left(y_0 - \frac{a}{k} - \frac{bk}{k^2 + \omega^2} \right) e^{-kt}$$

حصول خطی مساوات بذریعہ تخفیف۔ برنولی مساوات

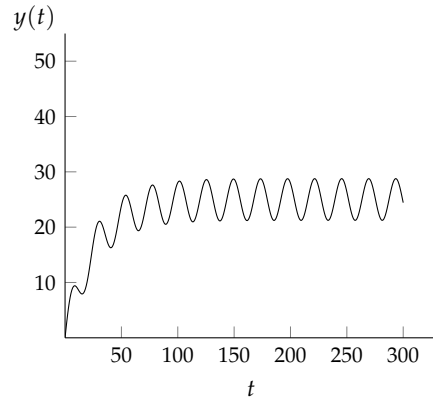
ایسے بہت سارے نظام ہیں جن کے غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کو خطی بنایا جا سکتا ہے۔ ان میں برنولی مساوات⁸⁵

$$(1.65) \quad y' + p(x)y = g(x)y^a, \quad a \text{ حقیقی عدد ہے}$$

integration by parts⁸³
steady state response⁸⁴
Bernoulli equation⁸⁵



(ب)



(الف)

شکل 1.19: مثال 1.21: خون میں ہارمون کی مقدار بالمتقابل وقت۔

انتہائی اہم⁸⁶ ہے۔ برنولی مساوات $a = 0$ اور $a = 1$ کی صورت میں خطی ہے۔ اس کے علاوہ یہ غیر خطی ہے۔ انہیں اس کو تبدیل کرتے ہوئے خطی مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}$$

کا تفرق لیتے ہوئے اس میں مساوات 1.65 سے y' پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u' &= (1-a)y^{-a}y' \\ &= (1-a)y^{-a}(gy^a - py) \\ &= (1-a)g - (1-a)py^{1-a} \\ &= (1-a)g - (1-a)pu \end{aligned}$$

یوں خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(1.66) \quad u + (1-a)u' = (1-a)g$$

حاصل ہوتی ہے۔

⁸⁶ یعقوب برنولی (1654-1705): سوئزر لینڈ کے برنولی خاندان نے دنیا کو کئی اہم ریاضی داں دیے۔ یعقوب برنولی ان میں سرفہرست ہے۔ انہوں نے علم الامکانیات میں بہت کام کیا۔ قوت نمائی کا مستقل e بھی انہوں نے دریافت کیا۔

مثال 1.22: ورہلسٹ مساوات برائے نمو آبادی درج ذیل برنولی مساوات کو ورہلسٹ⁸⁷ مساوات کہتے ہیں جو نمو آبادی⁸⁸ کی تفرقی مساوات ہے۔ اس کو حل کریں۔ (سوال 1.109 کو بھی دیکھیں۔)

$$(1.67) \quad y' = ay - by^2$$

حل: اس کو مساوات 1.65 کی صورت $y' - ay = -by^2$ میں لکھ کر $a = 2$ ملتا ہے۔ یوں ہم $u = y^{1-a} = y^{-1}$ کے تفرق میں مساوات 1.67 سے y' پر کرتے ہیں

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(ay - by^2) = -ay^{-1} + b = -ua + b$$

جس سے خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u' + au = b$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.58 سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$u = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

چونکہ $u = y^{-1}$ ہے لہذا اس سے درج ذیل ملتا ہے جس کو شکل 1.20 میں دکھایا گیا ہے۔

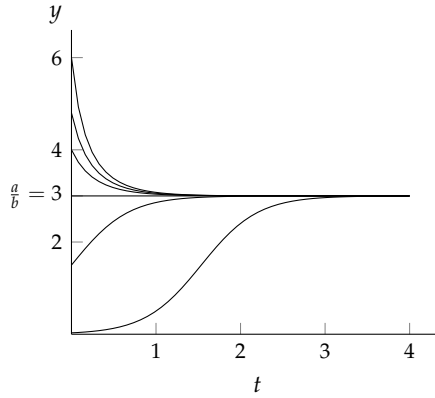
$$(1.68) \quad y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}}$$

مساوات 1.67 کو دیکھ کر $y(t) = 0$ حل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 1.23: مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ

مساوات 1.58 کو ایک دلچسپ ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے جسے مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ⁸⁹ کہتے ہیں۔ متجانس

Pierre Francois Verhulst⁸⁷
population growth⁸⁸
variation of parameter⁸⁹



شکل 1.20: مثال 1.22: نمو آبادی کا خط۔

مساوات $y' + p(x)y = 0$ کا حل $y_1 = ce^{-\int p(x) dx}$ مساوات 1.57 دیتا ہے جس کو $y_1 = ce^{-h}$ لکھتے ہیں۔ تصور کریں کہ غیر متجانس مساوات $y' + p(x)y = e(x)$ کا حل $y_2 = uy_1$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ ہو گا۔ غیر متجانس مساوات میں y_2 اور y_2' پر کرتے ہیں۔

$$u'y_1 + uy_1' + puy_1 = r, \quad u'y_1 + u(y_1' + py_1) = r, \quad u'y_1 = r$$

چونکہ y_1 متجانس مساوات کا حل ہے لہذا آخری قدم پر $y' + py = 0$ پر کرتے ہوئے $u'y_1 = r$ حاصل کیا گیا ہے۔ اس سے u بذریعہ مکمل حاصل کرتے ہوئے y_2 لکھتے ہیں جو مساوات 1.58 ہے۔

$$u = \int \frac{r}{y_1} dx, \quad u = \int re^h dx + c, \quad \text{لہذا} \quad y_2 = uy_1 = e^{-h} \left[\int re^h dx + c \right]$$

نمو آبادی

ورہلٹ مساوات پودوں، جانوروں اور انسانی آبادی کی نمو کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں $b = 0$ پر کرنے سے مالتھس مساوات 1.8 ملتی ہے جو آبادی کی بے روک نمو دیتی ہے۔ ورہلٹ مساوات میں جزو $-by^2$ آبادی بے قابو بڑھنے سے روکتی ہے۔ ورہلٹ مساوات کو $y' = ay(1 - \frac{b}{a}y)$ لکھ کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{b}{a}y < 1$

کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل بڑھے گی جب تک بڑھے گی جبکہ $\frac{b}{a}y < 1$ ہو، $\frac{b}{a}y > 1$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل گھٹے گی جب تک $\frac{b}{a}y < 1$ ہو گا۔ دونوں صورتوں میں عین $\frac{b}{a}y = 1$ یعنی $y = \frac{a}{b}$ پر آبادی میں تبدیلی رک جائے گی۔ شکل 1.20 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

ورہلست نمو آبادی کی مساوات میں غیر تابع متغیر t صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا یہ خود مختار مساوات ہے۔ خود مختار مساوات

$$(1.69) \quad y' = f(y)$$

کے مستقل حل پائے جاتے ہیں جنہیں متوازن حل⁹⁰ یا متوازن نقطے⁹¹ کہا جاتا ہے۔ خود مختار مساوات میں تفاعل $f(y)$ کے صفر ($f(y)=0$) پر $y' = 0$ ہو گا جس کا حل $y = c$ ہے جہاں c مکمل کا مستقل ہے۔ تفاعل کے صفر کو مساوات 1.69 کے فاصل نقطے⁹² کہتے ہیں۔ مساوات 1.67 کے فاصل نقطے $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔ یوں اس مساوات کے مستقل حل $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔ متوازن حل کو دو گروہ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں مستحکم⁹³ اور غیر مستحکم⁹⁴ حل کہتے ہیں۔ ان کو شکل 1.20 کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے جہاں $y = \frac{a}{b} = 3$ مستحکم حل ہے جبکہ $y = 0$ غیر مستحکم حل ہیں۔

سوالات

سوال 1.83: مساوات 1.58 میں h کے حصول میں مکمل کا مستقل صفر لیا جاسکتا ہے۔ ایسا کیوں ممکن ہے؟

سوال 1.84: ثابت کریں:

$$e^{\ln x} = x, \quad e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, \quad e^{-\ln \sec x} = \cos x$$

سوال 1.85 تا سوال 1.95 کے عمومی حل تلاش کریں۔ ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل حاصل کریں اور اس کا خط کھینچیں۔

⁹⁰equilibrium solution

⁹¹equilibrium points

⁹²critical points

⁹³stable

⁹⁴unstable

سوال 1.85:

$$y' - y = 2$$

جواب: $y = ce^x - 2$

سوال 1.86:

$$y' - 4y = 2x$$

جواب: $y = ce^{4x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}$

سوال 1.87:

$$y' + 5y = e^{5x}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $y = \frac{e^{5x}}{10} + \frac{19}{10}e^{-5x}$

سوال 1.88:

$$y' + 6y = 4 \sin 4x, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 6$$

جواب: $y = \frac{9}{13} \sin 4x - \frac{6}{13} \cos 4x + \frac{69}{13}e^{\frac{3\pi}{4} - 6x}$

سوال 1.89:

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 3$$

جواب: $y = 1 + 2e^{-x^2}$

سوال 1.90:

$$xy' = 2y + x^3e^x$$

1.5. خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی

جواب: $y = x^2 e^x + cx^2$

سوال 1.91:

$$y' + y \tan x = \sin x$$

جواب: $y = c \cos x - \cos x \ln \cos x$

سوال 1.92:

$$y' + y \cos x = e^{-\sin x}$$

جواب: $y = xe^{-\sin x} + ce^{-\sin x}$

سوال 1.93:

$$\cos xy' + (4y - 2) \sec x = 0$$

جواب: $y = \frac{1}{2} + ce^{-4 \tan x}$

سوال 1.94:

$$y' = (y - 4) \tan x, \quad y(0) = 3$$

جواب: $y = 4 - \sec x$

سوال 1.95:

$$xy' + 6y = 5x^3, \quad y(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{5}{9}x^3 + \frac{4}{9x^6}$

سوال 1.96 تا سوال 1.100 میں خطی سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات زیر بحث لائیں جائیں گے۔ انہیں خصوصیات کی بنا انہیں غیر خطی سادہ تفرقی مساوات پر فوقیت حاصل ہے جو یہ خصوصیات نہیں رکھتے۔ نمونہ کشی کرتے ہوئے

انہیں وجوہات کی وجہ سے خطی مساوات حاصل کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ ان سوالات میں آپ کو متجانس اور غیر متجانس سادہ تفریقی مساوات کے خصوصیات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

سوال 1.96: متجانس مساوات 1.56 کے حل y_1 اور y_2 کا عمومی مجموعہ $ay_1 + by_2$ بھی اس کا حل ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ ثابت کریں کہ غیر متجانس مساوات 1.55 یہ خصوصیات نہیں رکھتا۔

سوال 1.97: مساوات 1.56 کا غیر اہم حل (یعنی صفر حل) $y \equiv 0$ [یعنی x کی ہر قیمت کے لئے $y(x) = 0$ ہے] پایا جاتا ہے جبکہ غیر متجانس مساوات 1.55 [جس میں $r(x) \neq 0$ ہو] کا ایسا حل نہیں پایا جاتا۔

سوال 1.98: مساوات 1.56 کے حل y_1 اور مساوات 1.55 کے حل y_2 کا مجموعہ $y_1 + y_2$ بھی مساوات 1.55 کا حل ہے۔

سوال 1.99: مساوات 1.55 کے دو عدد حل y_1 اور y_2 کا فرق $y_1 - y_2$ مساوات 1.56 کا حل ہے۔

سوال 1.100: اگر $y' + p(x)y = r_a(x)$ کا حل y_1 اور $y' + p(x)y = r_b(x)$ کا حل y_2 ہو جہاں دونوں مساوات کے $p(x)$ یکساں ہیں تو آپ $y_1 + y_2$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

اس حصے میں سیکھے گئے ترکیب یا علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہوئے سوال 1.101 تا سوال 1.106 کے عمومی حل حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہوں وہاں مخصوص حل بھی حاصل کریں۔

سوال 1.101:

$$y' + y = y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

جواب: $\frac{y-1}{y} = e^x$

سوال 1.102:

$$y' + xy = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $(y-1)(y+1) = 3^{-x^2}$

سوال 1.103:

$$y' + y = \frac{x}{y}$$

$$2y^2 + 1 - 2x = ce^{-2x} \text{ جواب:}$$

سوال 1.104:

$$y' = 5y - 15y^2$$

$$\frac{3y-1}{y} = ce^{-5x} \text{ جواب:}$$

سوال 1.105:

$$y' = \frac{\cot y}{x+1}, \quad y(0) = 1$$

$$(x+1) \cos y = 2 \text{ جواب:}$$

سوال 1.106:

$$2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x, \quad (y^2 = z \text{ پر کریں})$$

$$\frac{2e^x y^2 - x e^{2x}}{2x} = c \text{ جواب:}$$

سوال 1.107: پانی کو چولہے پر برتن میں گرم کیا جاتا ہے۔ برتن کو آگ سے اتارنے وقت پانی کا درجہ حرارت 99°C ہے جبکہ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 90°C ہے۔ فضا کا درجہ حرارت 32°C ہے۔ پانی کتنی دیر میں تقریباً فضا کے درجہ حرارت (مثلاً 33°C) پر پہنچے گا؟

جواب: تقریباً چار گھنٹے اور پچاس منٹ۔

سوال 1.108: مریض کو قطرہ قطرہ نمکیات کا محلول بذریعہ شریان دیا جاتا ہے جس میں دوائی حل کی گئی ہے۔ لمحہ $t = 0$ سے مریض کو مسلسل a گرام فی منٹ دوائی دی جاتی ہے جبکہ جسم کا نظام دوائی کو مسلسل خون سے نکال کر خارج کرتا ہے۔ خون سے دوائی ہٹانے کی شرح خون میں کل دوائی کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفریقی مساوات حاصل کریں اور مساوات کو حل کریں۔

جوابات: $y' = a - ky$ اور لمحہ $t = 0$ پر خون میں دوائی کی مقدار صفر ہے، $y = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt})$

سوال 1.109: وبائی بیماری کا پھیلاؤ وبائی بیماری ایک شخص سے دوسرے شخص کو منتقل ہوتے ہوئے بڑھتی ہے۔ تصور کریں کہ ایک مخصوص وبا کی پھیلاؤ سانس کے ذریعہ ہوتی ہے جو دو اشخاص کے قریب ہونے سے ممکن ہے۔ یوں وبا میں اضافے کی شرح مریض اور صحت مند شخص کے قریب آنے کے راست تناسب ہے۔ تصور کریں شہر میں کل آبادی a ہے جبکہ لمحہ t پر بیماروں کی تعداد $y(t)$ ہے۔ تصور کریں کہ تمام لاگ مکمل آزادی کے ساتھ آپس میں ملتے جلتے ہیں۔ اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے مسئلے کا تفریقی مساوات حاصل کریں۔ مساوات کو حل کریں۔

حل: کسی بھی لمحے y لوگ بیمار اور بقایا یعنی $a - y$ لوگ صحت مند ہیں۔ اگر dt دورانیے میں ایک بیمار شخص کسی ایک شخص سے ملے تو $\frac{a-y}{a}$ امکان ہے کہ وہ صحت مند شخص سے ملا ہو گا۔ اسی دورانیے میں بقایا بیمار بھی کسی سے ملے ہوں گے لہذا بیمار اور صحت مند کے ملنے کا امکان $y \left(\frac{a-y}{a} \right)$ ہو گا۔ اس طرح بیماری میں اضافے کی شرح کو $y' = ky \left(\frac{a-y}{a} \right)$ لکھا جاسکتا ہے جو مساوات 1.67 ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک شخص بیمار تصور کرتے ہوئے اس کا حل $\frac{y}{y-a} = \frac{e^t}{1-a}$ ملتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow a$ ہو گا یعنی آخر کار وبا پورے شہر میں پھیل جائے گی۔

سوال 1.110: ایک جھیل میں $200 \times 10^6 \text{ m}^3$ پانی پایا جاتا ہے جس میں ماہی گیروں کی غفلت سے گندگی کی مقدار 5% تک بڑھ جاتی ہے جس سے ماہی گیری متاثر ہو رہی ہے۔ جھیل سے سالانہ $20 \times 10^6 \text{ m}^3$ پانی خارج ہوتا ہے اور اتنا ہی تازہ پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ تازہ پانی میں 0.6% گندگی پائی جاتی ہے۔ جھیل کو صاف کرنے کی غرض سے اس میں ماہی گیری ممنوع کر دی جاتی ہے۔ جھیل میں گندگی کی مقدار کتنی مدت میں 2% رہ جائے گی؟

جوابات: جھیل میں کل گندگی کو $y(t)$ لکھتے ہوئے $y' = 120000 - 0.1y$ ملتا ہے جس کا عمومی حل $y = (1.2 + 8.8e^{-0.1t}) \times 10^6$ ہے۔ جھیل کو درکار حد تک صفائی کے لئے 11.45 سال درکار ہوں گے۔

سوال 1.111 سے سوال 1.114 میں ماہی گیری کو مثال بنایا گیا ہے۔ یہی حقائق ملک میں پالتو مال مویشی پر بھی لاگو ہوتا ہے۔

سوال 1.111: ایسا جھیل جس میں ماہی گیری منع ہو میں مچھلی کی تعداد مساوات دیتی ہے۔ ماہی گیری کی اجازت کے بعد مساوات کیا ہوگی؟ تصور کریں کہ مچھلی پکڑنے کی شرح مچھلی کی لمحاتی تعداد کے راست تناسب ہے۔

حل: مچھلی پکڑنے کی شرح کو py لکھتے ہوئے نئی مساوات $y' = ay - by^2 - py$ ہوگی۔

سوال 1.112: سوال 1.111 میں مچھلی پکڑنے کی شرح اس قدر ہے کہ مچھلی کی تعداد تبدیل نہیں ہوتی۔ مچھلی کی تعداد کیا ہوگی؟

حل: مچھلی کی تعداد تبدیل نہ ہونے سے مراد $y' = 0$ ہے لہذا $y' = ay - by^2 - py = 0$ لکھتے ہوئے $y = 0$ اور $y = \frac{a-p}{b}$ ملتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جھیل سے مسلسل $p \left(\frac{a-p}{b} \right)$ پیداوار لی جاسکتی ہے۔

سوال 1.113: سوال 1.111 میں $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔ اس شرح سے پیداوار لیتے ہوئے ماہی گیری کی مستقبل کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

جواب: $y = \frac{0.9}{1 - e^{-0.9t - 0.198}}$ ؛ اس شرح سے $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow 0$ ہوگا اور ماہی گیری ممکن نہ رہ پائے گی۔

سوال 1.114: ماہی گیری کے شعبے کو برقرار رکھنے کی خاطر سوال 1.111 میں دو سال ماہی گیری کے بعد دو سال کا وقفہ دیا جاتا ہے جس میں ماہی گیری ممنوع ہوتی ہے اور جس دوران جھیل میں مچھلی کی آبادی دوبارہ بڑھتی ہے۔ اس مسئلے کو آٹھ سال کے لئے حل کرتے ہوئے حل کا خط کھینچیں۔ $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیں۔

سوال 1.115: جنگل میں بھیڑیا کی آبادی میں شرح موت لمحاتی آبادی کے راست تناسب ہے جبکہ شرح پیدائش بھیڑیوں کی جوڑی کی اتفاقی ملاپ کے راست تناسب ہے۔ اس مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ غیر تغیر آبادی دریافت کریں۔

حل: بھیڑیا کی کل آبادی y میں آدھے نر اور آدھے مادہ ہوں گے۔ دورانیہ dt میں ایک جوڑی کے ملاپ کا امکان $\frac{y}{2}$ کے راست تناسب ہے۔ یوں $\frac{y}{2}$ جوڑیوں کے ملاپ کا امکان $\left(\frac{y}{2}\right) \left(\frac{y}{2}\right)$ ہوگا۔ یوں شرح تبدیلی

$y' = ay^2 - by$ لکھی جائے گی جہاں $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔ غیر تغیر آبادی سے مراد $y' = 0$ ہے جس سے $y = 0$ اور $y = \frac{b}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y > \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا جس کی بنا آبادی مسلسل بڑھے گی۔ اس کے برعکس $y < \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی مسلسل گھٹے گی۔

سوال 1.116: شہروں کے بند مکانوں میں باہر فضا کی نسبت زیادہ آلودگی پائی جاتی ہے۔ گھر کے اندر جانور یا پودوں سے یہ مسئلہ مزید سنگین صورت اختیار کر لیتا ہے۔ قابل رہائش ہونے کے لئے لازم ہے کہ مکان میں ہوا کا بہاؤ پایا جاتا ہو۔ ایک عمارت کا حجم 1500 m^3 ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر تمام کھڑکیاں کھول دی جاتی ہیں جس کے بعد $200 \text{ m}^3/\text{h}$ تازہ ہوا مسلسل عمارت میں ایک رخ سے داخل ہوتی ہے اور اتنی ہی ہوا دوسری جانب خارج ہوتی ہے۔ عمارت میں پینکھے ہوا کو مسلسل حرکت میں رکھتے ہیں۔ کتنی دیر بعد 90% ہوا تازہ ہو گی؟

جواب: 17 گھنٹے اور 16 منٹ۔

1.6 عمودی خطوط کی نسلیں

ایک نسل کے خطوط کے عمودی مقاطع خطوط معلوم کرنا طبیعیات کے اہم مسائل میں سے ایک ہے۔ حاصل خطوط کو دیے گئے خطوط کے عمودی مقاطع خطوط⁹⁵ کہتے ہیں اور اسی طرح دیے گئے خطوط کو حاصل کردہ خطوط کے عمودی مقاطع خطوط کہتے ہیں۔

زاویہ تقاطع⁹⁶ سے مراد نقطہ تقاطع پر دو خطوط کے مماس کے مابین زاویہ ہے۔

عمودی خطوط کو عموماً تفرقی مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر $G(x, y, c) = 0$ ایک ہی نسل کے خطوط کو ظاہر کرتی ہو تب مستقل c کی ہر انفرادی قیمت نسل کے ایک منفرد خط کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ اس مساوات میں ایک عدد مستقل (c) پایا جاتا ہے لہذا ان خطوط کو ایک عدد مقدار معلوم⁹⁷ کے خطوط کی نسل کہا جاتا ہے۔

orthogonal trajectories⁹⁵
angle of intersection⁹⁶
parameter⁹⁷

آئیں درج ذیل خطوط کو مثال بناتے ہوئے اس ترکیب کو سیکھیں۔

$$(1.70) \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = c$$

مماس کی ڈھلوان y' کو تفرق کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.71) \quad \frac{2x}{4} + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{4y}$$

تفرقی مساوات میں c نہیں پایا جاسکتا۔ آپس میں عمودی خطوط کے ڈھلوان کا حاصل ضرب منفی اکائی (-1) کے برابر ہو گا۔ یوں درکار خطوط کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$(1.72) \quad y' = \frac{4y}{x}$$

علیحدگی متغیرات کرتے ہوئے مکمل سے عمودی خطوط حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.73) \quad \frac{dy}{y} = 4 \frac{dx}{x}, \quad y = c_1 x^4$$

اس مساوات کے مستقل کو c_1 لکھا گیا ہے جس کا ہر انفرادی قیمت نسل کی منفرد خط دیتا ہے۔ شکل 1.21 میں $c = 1$ لیتے ہوئے مساوات 1.70 کو گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیروں سے مختلف c سے حاصل نسل کے دیگر خطوط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 1.73 کو شکل میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ مستقل c_1 کے مثبت اور منفی قیمتیں لے کر ان خطوط کو کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ٹھوس خطوط کی نسل اور نقطہ دار خطوط کی نسل ایک دونوں کو عمودی قطع کرتے ہیں۔

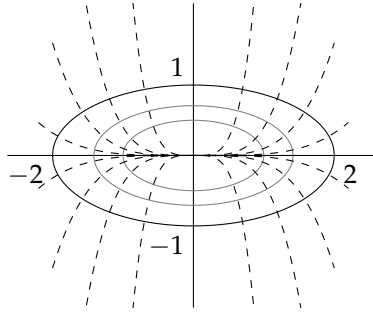
سوالات

سوال 1.117 تا سوال 1.122 کے عمودی تقاطع خطوط دریافت کریں۔

سوال 1.117:

$$y = 2x + c$$

$$y = -\frac{x}{2} + c_1 \text{ جواب:}$$



شکل 1.21: عمودی خطوط کی نسلیں۔

سوال 1.118:

$$3y = -2x + c$$

جواب: $y = \frac{3x}{2} + c_1$

سوال 1.119:

$$y^2 = 3x + c$$

جواب: $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x}$

سوال 1.120:

$$y = x^2 + c$$

جواب: $y = \ln \frac{c_1}{\sqrt{|x|}}$

سوال 1.121:

$$G(x, y, c) = e^x \cos y = c$$

جواب: $\sin y = c_1 e^{-x}$

سوال 1.122:

$$2y = \frac{3}{x} + c$$

$$y = \frac{2x^3}{9} + c_1 \text{ جواب:}$$

سوال 1.123 تا سوال 1.125 عملی استعمال کے چند سوالات ہیں۔

سوال 1.123: ہم قوه خطوط اور ثقلی قوت

ثقلی قوت کی سمت زمین کی محور کو ہے۔ کارتیسی محدود پر اس قوت کی سمت کو $y = cx$ لکھا جاسکتا ہے۔ ان کی عمودی خطوط حاصل کریں جو ہم قوه خطوط⁹⁸ کہلاتے ہیں۔

جواب: ہم جانتے ہیں کہ y' کی مساوات c سے پاک ہونا لازمی ہے لہذا $y' = c$ میں دی گئی مساوات سے $c = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $y' = \frac{y}{x}$ حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح عمودی خطوط کی ڈھلوان $y' = -\frac{x}{y}$ ہوگی جس کا مکمل $x^2 + y^2 = c_1$ دیتا ہے۔

سوال 1.124: ہم محوری تار

حساس برقی اشارات کی ترسیل عموماً ہم محوری تار⁹⁹ کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ موصل نکلی کے محور پر موصل تار رکھنے سے ہم محوری تار حاصل ہوتی ہے۔ ہم محوری تار کو کارتیسی z محور پر رکھتے ہوئے دونوں موصل تاروں کے درمیانی خطے میں ہم قوه خطوط کی مساوات $u(x, y) = x^2 + y^2 = c$ حاصل ہوتی ہے جو z محور پر پڑی نکلی سطحوں کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم قوه خطوط کے عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں جو برقی میدان¹⁰⁰ کو ظاہر کرتی ہیں۔

$$y = c_1 x \text{ جواب:}$$

سوال 1.125: ہم حرارت خطوط

درجہ حرارت میں فرق، حرارتی توانائی کی منتقلی کا سبب ہے لہذا حرارتی توانائی کی منتقلی ہم حرارت خطوط¹⁰¹ کے عمودی ہوگی۔ کسی خطے میں ہم حرارتی خطوط کو $2x^2 + 5y^2 = c$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ان کی عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں۔

$$y^2 = c_1 x^5 \text{ جواب:}$$

⁹⁸ equipotential lines
⁹⁹ coaxial cable
¹⁰⁰ electric field
¹⁰¹ isotherms

1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت

کسی بھی متغیرہ کی حتمی قیمت صفر یا مثبت $|k| \geq 0$ ہوتی ہے لہذا درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا کوئی حل نہیں پایا جاتا۔ اس تفرقی مساوات کا واحد حل $y = 0$ ہے جو ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اترتا۔

$$2|y'| + 3|y| = 0, \quad y(0) = 2$$

اس کے برعکس درج ذیل مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل یعنی $y = x^3 + 2$ پایا جاتا ہے۔

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 2$$

درج ذیل تفرقی مساوات کے لامتناہی حل $y = -1 + cx$ پائے چونکہ $x = 0$ پر c کی کسی بھی قیمت کے لئے $y = -1$ ہی ہے۔

$$xy' = y + 1, \quad y(0) = -1$$

یوں ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$(1.74) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

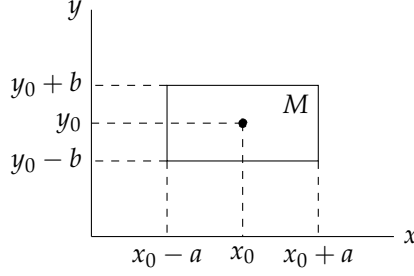
کے حل کے بارے میں درج ذیل دو اہم سوالات اٹھتے ہیں۔

وجودیت حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.74 کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہے۔

یکتائی حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.74 کا زیادہ سے زیادہ ایک حل ممکن ہے۔ (یوں ایک سے زیادہ حل رد کئے جاتے ہیں۔)

قبل از حل یہ جاننا کہ آیا ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا حل پایا جاتا ہے اور آیا کہ اس کا حل یکتا ہے انتہائی اہم معلومات ہیں جنہیں مسئلہ وجودیت¹⁰² اور مسئلہ یکتائی¹⁰³ سے جاننا ممکن ہے۔ ان مسئلوں پر غور کرتے ہیں۔

existence theorem¹⁰²
uniqueness theorem¹⁰³



شکل 1.22: وجودیت اور یکانیت کے مسئلوں کا مستطیل۔

مسئلہ 1.3: مسئلہ وجودیت
ابتدائی نقطہ (x_0, y_0) کو مرکز بناتے ہوئے شکل 1.22 میں مستطیل خطہ M دکھایا گیا ہے۔

$$(1.75) \quad M : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$$

تصور کریں کہ اس مستطیل خطے کے تمام نقطوں (x, y) پر ابتدائی قیمت سادہ تفرقی مساوات

$$(1.76) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

کا دایاں ہاتھ $f(x, y)$ استمراری تفاعل¹⁰⁴ (یعنی بلا جوڑ تفاعل) ہے۔ مزید اس خطے میں تفاعل کی قیمت محدود¹⁰⁵ ہے یعنی

$$(1.77) \quad |f(x, y)| \leq K \quad \text{پر} \quad (x, y) \text{ تمام نقطوں کے مستطیل کے تمام نقطوں پر}$$

جہاں K محدود قیمت کا مستقل ہے۔ ایسی صورت میں ابتدائی قیمت مساوات 1.76 کا کم از کم ایک حل موجود ہے۔ یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔ α کی قیمت a اور $\frac{b}{K}$ کی قیمتوں میں سے کم قیمت کے برابر ہے۔

¹⁰⁴ continuous function
¹⁰⁵ bounded

مثال 1.24: تفاعل $f(x, y) = 2x + y^2$ خطہ $|x| < 1$ ، $|y| < 1$ میں محدود تفاعل ہے جس کی زیادہ سے زیادہ حتمی قیمت $K = 3$ ہے۔ اس کے برعکس تفاعل $\tan x$ خطہ $|x| < \frac{\pi}{5}$ میں غیر محدود ہے چونکہ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ اسی خطے میں پایا جاتا ہے جہاں $\tan \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$ ہے۔

مسئلہ 1.4: مسئلہ یکنائی تصور کریں کہ شکل 1.22 کے مستطیل میں تمام نقطوں (x, y) پر $f(x, y)$ اور $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ استمراری اور محدود تفاعل ہیں یعنی

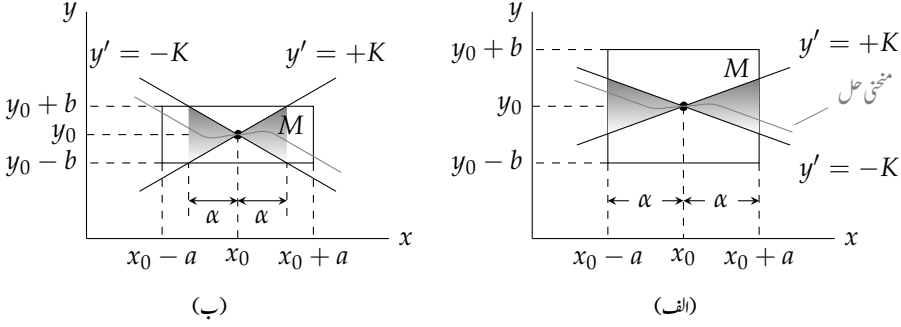
$$(1.78) \quad |f(x, y)| < K_a$$

$$(1.79) \quad \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| < K_b$$

ایسی صورت میں مساوات 1.76 کا زیادہ سے زیادہ ایک عدد حل موجود ہے۔ یوں مسئلہ 1.3 کے تحت تفرقی مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل موجود ہے اور یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔

درج بالا دو مسئلوں کے ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیے جائیں گے۔ البتہ انہیں شکل 1.23 کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے جہاں ابتدائی نقطہ (x_0, y_0) مستطیل M کا مرکز ہے۔ مخصوص حل ابتدائی نقطے سے گزرتا ہے۔ مساوات 1.77 کے تحت $f(x, y)$ یعنی y' کی قیمت کم سے کم $-K$ اور زیادہ سے زیادہ $+K$ ممکن ہے یعنی مساوات 1.77 کے منحنی حل کی ڈھلوان $-K$ تا $+K$ ممکن ہے۔ شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا $y' = \mp K$ ڈھلوان کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔ یوں (x_0, y_0) سے گزرتا ہوا منحنی حل کسی صورت سایہ دار¹⁰⁶ خطہ $y' = \mp K$ سے باہر نہیں نکل سکتا۔ شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا منحنی حل ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.23-الف میں منحنی حل کو دیکھیے۔ سائے دار خطے میں رہتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ حل $|x - x_0| < \alpha$ پر پایا جائے گا جہاں $\alpha = a$ کے برابر ہے۔ شکل-ب میں منحنی حل مستطیل M سے باہر نکل جاتا ہے۔ چونکہ مستطیل کے باہر $f(x, y)$ اور $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ کے بارے میں کچھ نہیں کہا جاسکتا ہے لہذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $|x - x_0| < \alpha$ پر حل پایا جاتا ہے جہاں $\alpha = \frac{b}{K}$ کے برابر ہے۔



شکل 1.23: مساوات 1.77 میں دی گئی شرط اور α ۔

مثال 1.25: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

اور خطہ $|x| < 4$ ، $|y| < 5$ لیتے ہیں۔ یوں $a = 4$ ، $b = 5$ اور

$$|f(x, y)| = |1 + y^2| \leq K_a = 26$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y \leq K_b = 10$$

$$\alpha = \frac{b}{K_a} = \frac{5}{26} < a$$

ہوں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ اس تفرقی مساوات کا حل $y = \tan x$ ہے جس میں $x = \pm \frac{\pi}{2} > \alpha$ پر جوڑ پایا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستطیل کے پورے x پر مسلسل حل نہیں پایا جاتا۔

تفرقی مساوات کے حل کے لئے درج بالا دو مسئلوں میں معقول شرائط ناکہ لازم شرائط دیے گئے ہیں۔ ان شرائط

کو ہلکا بنایا جاسکتا ہے۔ احصاء تفرقیات¹⁰⁷ کے مسئلہ اوسط قیمت¹⁰⁸ کے تحت

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1) \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y_i}$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 نقطہ M میں پائے جاتے ہیں اور y_i ان کے درمیان کوئی موزوں قیمت ہے۔ مساوات 1.79 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.80) \quad f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq (y_2 - y_1) K_b$$

مساوات 1.79 کی جگہ مساوات 1.80 استعمال کیا جاسکتا ہے جو نسبتاً ہلکا شرط ہے۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے یکتا حل کے لئے $f(x, y)$ کا مسلسل تفاعل ہونا غیر معقول (یعنی ناکافی) شرط ہے۔ درج ذیل مثال اس حقیقت کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 1.26: غیر یکسانی
ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

کے دو حل پائے جاتے ہیں

$$y = 0 \quad \text{اور} \quad y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases}$$

اگرچہ $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ مسلسل تفاعل ہے۔ مساوات 1.80 کی شرط لکیر $y = 0$ پر پوری نہیں ہوتی چونکہ $y_1 = 0$ اور y_2 کو مثبت لیتے ہوئے

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}, \quad (\sqrt{y_2} > 0)$$

ملتا ہے جس کی قیمت y_2 کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے لامتناہی بڑھائی جاسکتی ہے جبکہ مساوات 1.80 کہتا ہے کہ یہ قیمت کسی مخصوص مستقل قیمت K_b سے کم ہونا لازمی ہے۔

مثال 1.27: تصور کریں کہ $|x - x_0| \leq a$ فاصلے پر مساوات $y' + p(x)y = r(x)$ میں $p(x)$ اور $r(x)$ استمراری ہیں۔ ثابت کریں کہ یہ مساوات مسئلہ وجودیت اور مسئلہ یکتائی کے شرائط پر پورا اترتا ہے لہذا ابتدائی معلومات کی صورت میں اس تفرقی مساوات کا یکتا حل پایا جاتا ہے۔

جواب: $f(x, y) = r - py$ ہے لہذا $\frac{\partial f}{\partial y} = -p$ ہو گا۔ چونکہ p استمراری ہے لہذا $\frac{\partial f}{\partial y}$ استمراری اور دیے فاصلے پر محدود ہو گا۔

باب 2

درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔ چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔ اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

یک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔ اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش¹، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

¹oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$(2.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

صورت میں لکھا جاسکے خطی² کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر خطی³ کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں y ، y' اور y'' کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ دو درجی مساوات کا پہلا جزو $y''f(x)$ ہونے کی صورت میں مساوات کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی معیاری صورت⁴ میں لکھیں جہاں y'' پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔ یقیناً $r \equiv 0$ [جہاں زیر غور تمام x پر $r(x) = 0$ ہو؛ اس کو مکمل صفر⁵ پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$(2.2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جو متجانس ہے۔ اگر $r(x) \neq 0$ ہو تب مساوات 2.1 غیر متجانس⁶ کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔ آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$(y'')^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

linear²
nonlinear³
standard form⁴
identically zero⁵
nonhomogenous⁶

تفاعل p اور q مساوات 2.2 کے عددی سر⁷ کہلاتے ہیں۔

دودرجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل $y = h(x)$ کو کھلے وقفہ I پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دودرجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر y'' اور h' ، $h(x)$ ، h'' پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں y کی جگہ h ، y' کی جگہ h' اور y'' کی جگہ h'' پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔ چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

متجانس خطی تفرقی مساوات: خطی میل

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔ متجانس مساوات کے حل میں اصول خطیت⁸ یا اصول خطی میل⁹ کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 2.1: خطی میل

تمام x پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں۔

$$(2.3) \quad y'' + 4y = 0$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔ پہلے $y_1 = \cos 2x$ کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ $(\cos 2x)'' = -4 \cos 2x$ کے برابر ہے لہذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4 \cos 2x + 4 \cos 2x = 0$$

⁷coefficients
⁸linearity principle
⁹superposition principle

ملتا ہے۔ اسی طرح $y_2 = \sin 2x$ کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4 \sin 2x + 4 \sin 2x = 0$$

ملتا ہے۔ ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں ہم $\cos 2x$ کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور $\sin 2x$ کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔ آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x)'' + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 4(-2.73 \cos 2x + 1.25 \sin 2x) + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل y_1 اور y_2 سے نیا حل

$$(2.4) \quad y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (c_1 \text{ اور } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں})$$

حاصل کیا۔ اس کو y_1 اور y_2 کا خطی میل¹⁰ کہتے ہیں۔ اس مثال سے ہم مسئلہ خطی میل بیان کرتے ہیں جسے عموماً اصول خطیت یا اصول خطی میل کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ دو درجی تفرقی مساوات کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 2.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل y_1 اور y_2 پائے جاتے ہیں لہذا

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \end{aligned}$$

ہوگا۔ خطی میل سے نیا حل $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حاصل کرتے ہیں۔ اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$y_3' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$y_3'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

y_3 ، y_3' اور y_3'' کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + p y_3' + q y_3 &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہذا ثابت ہوتا ہے کہ y_3 بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

انتباہ: یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔ غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل مقدار ہیں۔

حل: y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= r \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= r \end{aligned} \quad (2.6)$$

y_3 کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + p y_3' + q y_3 &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= (c_1 + c_2) r \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔ اس سے $(c_1 + c_2)r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ r کے برابر ہے لہذا y_3 متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔ یوں y_3 متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات

درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں $y = 2 - \cos x$ اور $y = 2 - \sin x$ کو پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔ اسی طرح ثابت کریں کہ $3(2 - \cos x)$ یا $-7(2 - \sin x)$ بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں $y = 1$ اور $y = x^3$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی $y = -x^3$ حل ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو -1 سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

ابتدائی قیمت مسائل۔ اساس۔ عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ درجہ اول سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل c حاصل کرتے ہوئے مخصوص یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی تصور کو دو درجی سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو درجی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$(2.7) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

K_0 اور K_1 کھلے وقفہ پر نقطہ x_0 پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$(2.8) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ یہاں y_1 اور y_2 مساوات 2.7 کے حل ہیں۔ یوں مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ (x_0, K_0) سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر K_1 ہوتی ہے۔

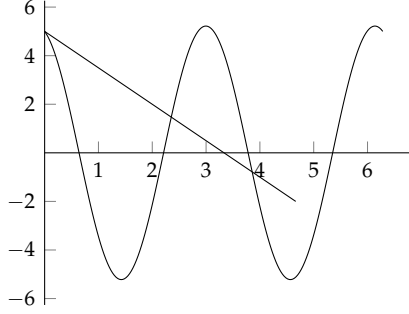
مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل: پہلا قدم: اس مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہذا اس کا موزوں عمومی حل

$$(2.9) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

ہو گا۔ (موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)



شکل 2.1: مثال 2.3 کا مخصوص حل۔

دوسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرتے ہیں۔ عمومی حل کا تفرق $y' = -2 \sin 2x + 2c_2 \cos x$ ہے۔ ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 5$$

$$y'(0) = -2 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5$$

حاصل ہوتے ہیں لہذا مخصوص حل

$$y = 5 \cos 2x - 1.5 \sin 2x$$

ہو گا۔ شکل 2.1 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $x = 0$ پر اس کی قیمت $y(0) = 5$ ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس) $y'(0) = 0.5$ ہے۔ مماس x محور کو $x = \frac{5}{3} = 3.33$ پر قطع کرتا ہے۔

درج بالا مثال میں y_1 اور y_2 ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔ آئیں اب دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = k \cos 2x$ لیتے ہوئے

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 k \cos 2x = (c_1 + c_2 k) \cos 2x = c_3 \cos 2x$$

عمومی حل لکھتے ہیں۔ اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل c_3 پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل y_1 اور y_2 انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔ یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل کے تعریف

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ فاصلہ I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کی اساس¹¹ حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا مخصوص حل مساوات 2.9 میں c_1 اور c_2 کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔ y_1 اور y_2 اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے I پر

$$(2.10) \quad (a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1$$

ہو، جہاں k اور l اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔ (یہاں توجہ رکھیں: a اس صورت b کے مترادف ہے جب $k \neq 0$ ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت خطی طور غیر تابع¹² کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$(2.11) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

سے مراد

$$(2.12) \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 خطی طور تابع¹³ کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.11 کو

¹¹ basis
¹² linearly independent
¹³ linearly dependent

k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جاسکتا ہے جو تناسبی رشتہ کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(2.13) \quad y_1 = ky_2, \quad y_2 = ly_1 \quad \text{پر وقفے } I$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.11 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا (اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔) اس طرح اساس کی (درج ذیل) قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: اساس کی قدر مختلف تعریف
کھلے وقفے I پر مساوات 2.11 کا خطی طور غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

اگر کسی کھلے وقفے I پر مساوات کے عددی سر p اور q استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کا عمومی حل موجود ہے۔ مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔ وقفہ I پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہذا ایسی صورت میں مساوات کا کوئی نادر¹⁴ حل موجود نہیں ہے (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور مخصوص حل
 $\cos 2x$ اور $\sin 2x$ تمام x پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات $y'' + 4y = 0$ کے حل کی اساس ہیں۔ ایسا اس لئے ہے کہ $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq c$ اور $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \neq 0$ ہیں جہاں c مستقل ہے۔ اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے مخصوص حل $y = 5 \cos 2x - 1.5 \sin 2x$ حاصل کیا گیا تھا۔

مثال 2.5: پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ سادہ تفرقی مساوات $y'' - 4y = 0$ کے حل ہیں۔ یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

حل: چونکہ $y_2'' - 4y_2 = (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} = 4e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0$ اور $y_1'' - 4y_1 = (e^{2x})'' - 4e^{2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ ہیں لہذا y_1 اور y_2 دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ چونکہ $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} = e^{4x} \neq c$ ہے جہاں c مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں e^{2x} اور e^{-2x} پورے x پر حل کا اساس ہے۔ اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2, \quad y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}, \quad y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1$$

دو عدد ہمزاد مساوات¹⁵ $c_1 + c_2 = 2$ اور $2c_1 - 2c_2 = 1$ کو آپس میں حل کرتے ہوئے $c_1 = \frac{3}{4}$ اور $c_2 = \frac{5}{4}$ ملتے ہیں جس سے مخصوص حل لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

بعض اوقات ایک حل با آسانی حاصل ہو جاتا ہے۔ دوسرا خطی طور غیر تابع حل یک درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کو تخفیف درجہ¹⁶ کی ترکیب¹⁷ کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی مثال دیکھنے کے بعد اس کی عمومی اطلاق پر غور کرتے ہیں۔

¹⁵ simultaneous equations

¹⁶ reduction of order

¹⁷ یہ ترکیب یوسف لونی لگرینج (1736-1813) نے دریافت کی۔

مثال 2.6: ایک حل جانتے ہوئے تخفیف درجہ۔ اساس
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات کے اساس حل دریافت کریں۔

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

کل: دیے گئے مساوات کے معائنے سے ایک حل $y_1 = x$ لکھا جاسکتا ہے چونکہ یوں $y_1'' = 0$ ہو گا لہذا
تفرقی مساوات کا پہلا جزو صفر ہو جاتا ہے اور $y_1' = 1$ ہو گا جس سے مساوات کے دوسرے اور تیسرے اجزاء کا
مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس ترکیب میں دوسرے حل کو $y_2 = uy_1$ لکھ کر دیے گئے تفرقی مساوات میں

$$y_2 = uy_1 = ux, \quad y_2' = u'x + u, \quad y_2'' = u''x + 2u'$$

پر کرتے ہیں۔

$$x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$

درج بالا کو ترتیب دیتے ہوئے xu اور $-xu$ آپس میں کٹ جاتے ہیں اور $x^3u'' + x^2u' = 0$ رہ جاتا
ہے جس کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xu'' + u' = 0$$

ملتا ہے۔ اس میں $u' = v$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو علیحدگی متغیرات کے ترکیب
سے حل کرتے ہیں۔

$$xv' + v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}$$

اس میں واپس $v = u'$ پر کرتے ہوئے مکمل سے u حاصل کرتے ہیں۔

$$v = u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x|$$

یوں $y_2 = x \ln|x|$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ y_1 اور y_2 کا حاصل تقسیم مستقل نہیں ہے لہذا یہ حل
خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں اساس حل $y_1 = x$ ، $y_2 = x \ln|x|$ ہے۔ دونوں بار مکمل لیتے ہوئے مکمل کا
مستقل نہیں لکھا گیا چونکہ ہمیں اساس درکار ہے۔ عمومی مساوات لکھتے وقت مستقل لکھنا ضروری ہو گا۔

اس مثال میں ہم نے تخفیف درجہ کی ترکیب متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.14) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

پر استعمال کی۔ درج بالا مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں پہلا جزو y'' ہے جس کا عددی سرانکائی کے برابر ہے۔ نیچے اخذ کلیات مساوات کی معیاری صورت کے لئے حاصل کئے گئے ہیں۔ تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر ہمیں مساوات 2.14 کا ایک عدد حل y_1 معلوم ہے اور ہم حل کا اساس جاننا چاہتے ہیں۔ اس کی خاطر ہمیں I پر خطی طور غیر تابع دوسرا حل y_2 درکار ہے۔ دوسرا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$y = y_2 = uy_1, \quad y' = y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

کو مساوات 2.14 میں پر کرتے ہوئے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0$$

u'' ، u' اور u کے عددی سرانکھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

چونکہ y_1 مساوات 2.14 کا حل ہے لہذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے لہذا

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $u' = v$ پر کرنے سے تخفیف شدہ¹⁸ ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p \right) v = 0$$

علیحدگی متغیرات کے بعد مکمل لینے سے

$$\frac{dv}{v} = - \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p \right) dx, \quad \ln|v| = -2 \ln|y_1| - \int p dx$$

یعنی

$$(2.15) \quad v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p \, dx}$$

ماتا ہے۔ چونکہ $v = u'$ کے برابر ہے لہذا دوسرا حل

$$(2.16) \quad y_2 = y_1 u = y_1 \int v \, dx$$

ہو گا۔ حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = u = \int p \, dx$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا چونکہ $v > 0$ ہے لہذا y_1 اور y_2 اساس حل ہیں۔

متجانس خطی دو درجی مساوات سے ایک درجی مساوات کا حصول ہم دیکھ چکے۔ انہیں تخفیف درجہ کے دو مثال دیکھیں جو خطی مساوات اور غیر خطی مساوات پر لاگو کی جاسکتی ہیں۔

مثال 2.7: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں y صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ y صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا اس کو $F(x, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں جس میں $z = y'$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(x, z, z')$ حاصل ہوتی ہے۔ ایک درجی مساوات کے حل کے مکمل سے y حاصل ہو گا۔

مثال 2.8: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں x صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ x صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا اس کو $F(y, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں۔ ہم $z = y' = \frac{dy}{dx}$ لیتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق¹⁹ سے

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z}$$

یعنی

$$y'' = z \frac{dz}{dy}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ z اور z_y کو دیے مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(y, z, z_y)$ ملتی ہے جس کا آزاد متغیر y ہے۔

سوالات

سوال 2.1 تا سوال 2.7 سے ایک درجی مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.1:

$$y'' - y' = 0$$

جواب: $y = c_1 e^x + c_2$

سوال 2.2:

$$xy'' + y' = 0$$

جواب: $y = c_1 \ln|x| + c_2$

سوال 2.3:

$$xy'' - 2y' = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2$

سوال 2.4:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

جواب: $y = c_2 e^{c_1 x}$

سوال 2.5:

$$y'' - (y')^3 \cos y = 0$$

جواب: $\cos y + c_1 y = x + c_2$

سوال 2.6:

$$y'' - (y')^2 \cos y = 1$$

جواب: $y = \ln \sec(x + c_1) + c_2$

سوال 2.7:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x^2$$

جواب: $y = c_1 x^2 + c_2 x$

قابل تخفیف سادہ تفرقی مساوات کے استعمال سوالات 2.8 تا سوال 2.11 دیتے ہیں۔

سوال 2.8: منحنی

کارٹیسائی محد کے محور سے گزرتی منحنی $y'' + y' = 0$ کی مرکز پر ڈھلوان اکائی کے برابر ہے۔ منحنی کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $y = 1 - e^{-x}$

سوال 2.9: لیزم

دو مقررہ نقاط سے لٹکی ہوئی زنجیری ڈوری سے بننے والا خم لیزم²⁰ کہلاتا ہے جسے مساوات $y'' = k\sqrt{1+y'^2}$ کے حل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مستقل k کی قیمت ڈوری کی تناؤ اور کمیت پر منحصر ہے۔ ڈوری نقطہ $(1, 0)$ اور $(-1, 0)$ سے لٹکی ہوئی ہے۔ $k = 1$ تصور کرتے ہوئے لیزم کی مساوات حاصل کریں۔

catenary²⁰

جواب: زنجیر کے وسط یعنی $x = 0$ پر ڈھلوان صفر کے برابر ہے۔ یوں $y = -1 + \cosh x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 2.10: حرکت

ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع اور رفتار میں فرق ایک مثبت مستقل k کے برابر رہتی ہے۔ فاصلہ $y(t)$ ابتدائی رفتار u اور ابتدائی فاصلہ y_0 پر کس طرح منحصر ہے؟

$$y = (k + u)e^t + (y_0 - u) - k(t + 1) \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.11: حرکت

ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع کی قیمت رفتار کی قیمت کے مربع کے برابر رہتی ہے۔ فاصلے کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

$$t = c_1 - \ln(t + c_2) \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.12 تا سوال 2.15 میں ثابت کریں کہ دیے گئے تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں یہ حل کی اساس ہیں۔ ان ابتدائی قیمت سوالات کے حل لکھیں۔

سوال 2.12:

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2; \quad \cos 3x \sin 3x$$

$$y = 5 \cos 3x - \frac{2}{3} \sin 3x \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.13:

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1; \quad e^x, xe^x$$

$$y = e^{x-1}(x - 1) \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.14:

$$x^2 y'' - x y' + y = 0, \quad y(1) = 3.2, \quad y'(1) = -1.5; \quad x, x \ln x$$

$$y = \frac{16}{5}x - \frac{47}{10}x \ln x \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.15:

$$y'' + 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3; \quad e^{-x} \cos \sqrt{2}x, e^{-x} \sin \sqrt{2}x$$

$$y = e^{-x}(2 \cos \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x) \quad \text{جواب:}$$

2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب ایسے دو درجی متجانس تفرقی مساوات پر بات کرتے ہیں جن کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہیں۔

$$y'' + ay' + b = 0 \quad (2.17)$$

یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔ قوت نمائی تفاعل $y = e^{-kx}$ کے تفرق سے $y' + ky = 0$ یعنی $y' = -ke^{-kx} = -ky$ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔ یوں $y' + ky = 0$ کا حل $y = e^{-kx}$ ہے۔ اس کو دیکھتے ہوئے ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ آیا مساوات 2.17 کا حل

$$y = e^{\lambda x} \quad (2.18)$$

ممکن ہے یا نہیں۔ یہ جاننے کی خاطر $y = e^{\lambda x}$ اور اس کے تفرق

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

کو مساوات 2.17 میں پر کرتے ہیں۔

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

کسی بھی محدود قیمت کے λ اور x کے لئے $e^{\lambda x}$ صفر نہیں ہوگا لہذا اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب λ امتیازی مساوات²¹

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (2.19)$$

کا جذر ہو۔ اس دو درجی الجبرائی مساوات²² کو حل کرتے ہیں۔

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (2.20)$$

یوں مساوات 2.17 کے حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \quad (2.21)$$

ہوں گے۔ انہیں مساوات 2.17 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہی تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

دو درجی الجبرائی مساوات 2.19 کے جذر کی تین ممکنہ قیمتیں ہیں جو $a^2 - 4b$ کی علامت (±) پر منحصر ہیں۔

²¹characteristic equation
²²quadratic equation

2.2. مستقل عددی سروا لے متبائنس خطی سادہ تفرقی مساوات

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر $a^2 - 4c > 0$

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر $a^2 - 4c = 0$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر $a^2 - 4c < 0$

آئیں ان تین صورتوں پر باری باری غور کریں۔

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر

اس صورت میں، چونکہ y_1 اور y_2 کسی بھی وقفے I پر معین ہیں (اور حقیقی ہیں) اور ان کا حاصل تقسیم مستقل قیمت نہیں ہے لہذا کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$(2.22) \quad y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

ہو گا۔ یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.23) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

مثال 2.9: دو حقیقی منفرد جذر

مساوات $y'' - 4y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 - 4 = 0$ ہے جس کے جذر $\lambda_1 = +2$ اور $\lambda_2 = -2$ دو منفرد قیمتیں ہیں۔ یوں حل کا اساس $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ ہے جن سے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 2.10: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ دو حقیقی منفرد جذر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + y' - 6 = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$$

حل: امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

جس کے جذر

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24}}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 24}}{2} = -3,$$

ہیں۔ ان سے اساس حل $y_1 = e^{2x}$ ، $y_2 = e^{-3x}$ ملتا ہے جس سے عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$ ہے لہذا

$$y(0) = c_1 + c_2 = -4$$

$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 5$$

لکھا جائے گا۔ ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{7}{5}$ اور $c_2 = -\frac{13}{5}$ ملتا ہے جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = -\frac{7}{5} e^{2x} - \frac{13}{5} e^{-3x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے جو ابتدائی قیمتوں پر پورا اترتا ہے۔

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر

اگر $a^2 - 4c = 0$ ہو تب مساوات 2.20 سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ ملتا ہے جو واحد حل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$$



شکل 2.2: مثال 2.10 کا مخصوص حل۔

دیتا ہے۔ ہمیں اساس کے لئے دو حل درکار ہیں۔ دوسرا حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جائے گا۔ اس ترکیب پر بحث ہو چکی ہے۔ یوں ہم دوسرا حل $y_2 = uy_1$ تصور کرتے ہیں۔ مساوات 2.17 میں

$$y_2 = uy_1, \quad y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے عددی سراکٹھے کرتے ہیں۔

$$(2.24) \quad u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے۔ اب پہلی قوسین پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ لہذا $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$ ہو گا۔ ان قیمتوں کو پہلی قوسین میں پر کرتے

$$2y_1' + ay_1 = 2(-\frac{a}{2}y_1) + ay_1 = 0$$

ہوئے یہ قوسین بھی صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے۔ یوں مساوات 2.24 سے $u''y_1 = 0$ یعنی $u'' = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ دو مرتبہ مکمل لیتے ہوئے $u = c_1x + c_2$ ملتا ہے۔ دوسرا خطی طور غیر تابع حل $y_2 = uy_1$ حاصل کرتے ہوئے ہم $c_1 = 1$ اور $c_2 = 0$ چن سکتے ہیں جن سے $u = x$ اور $y_2 = xy_1$ حاصل ہوتے ہیں۔ چونکہ y_1 اور حاصل کردہ $y_2 = xy_1$ کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہذا یہ دونوں خطی

طور غیر تابع ہیں اور انہیں اساس لیا جاسکتا ہے۔ یوں دوہرے جذر کی صورت میں کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

اور عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.25) \quad y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

مثال 2.11: دوہرے جذر کی صورت میں عمومی حل
سادہ تفرقی مساوات $y'' + 10y' + 25 = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ ہے جس کو $(\lambda + 5)^2 = 0$ لکھ کر دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات کے حل کا اساس $y_1 = e^{-5x}$ ، $y_2 = xe^{-5x}$ اور اس کا عمومی حل $y = (c_1 + c_2x)e^{-5x}$ ہے۔

مثال 2.12: دوہرے جذر کی صورت میں مخصوص حل کا حصول
دیے گئے تفرقی مساوات کا مخصوص حل دریافت کریں۔

$$y'' + 0.2y' + 0.01y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = -4$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.01 = 0$ یعنی $(\lambda + 0.1)^2 = 0$ سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.1$ دوہرا جذر حاصل ہوتا ہے جس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل کا جذر لکھتے ہیں جو مخصوص حل کے حصول میں درکار ہے۔

$$y' = c_2e^{-0.1x} - 0.1(c_1 + c_2x)e^{-0.1x}$$



شکل 2.3: مثال 2.12 کا مخصوص حل۔

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 = 10$$

$$y'(0) = c_2 - 0.1c_1 = -4, \quad c_2 = -3$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (10 - 3x)e^{-0.1x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے۔

تیسری صورت: مخلوط جوڑی دار جذر

اتمازی مساوات 2.19 میں $a^2 - 4c$ کی قیمت منفی ہونے کی صورت میں مخلوط جوڑی دار جذر $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$ ملتے ہیں جہاں $\omega^2 = b - \frac{a^2}{4}$ کے برابر ہے۔ ان سے مخلوط اساس لکھتے ہیں۔

$$(2.26) \quad y_{m1} = e^{(-\frac{a}{2} + i\omega)x}, \quad y_{m2} = e^{(-\frac{a}{2} - i\omega)x}$$

اس مخلوط اساس سے حقیقی اساس حاصل کیا جائے گا۔ ایسا کرنے کی خاطر ریاضی کے چند کلیات پر غور کرتے ہیں۔ تفاعل e^z ، جہاں $z = x + iy$ مخلوط عدد ہے جبکہ x اور y حقیقی اعداد ہیں، کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

e^{iy} کی مکلازن تسلسل²³ لکھ کر حقیقی اجزاء اور خیالی اجزاء کو علیحدہ علیحدہ قوسین میں اکٹھے کرتے ہیں۔ یہاں $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$ لئے گئے ہیں۔

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + \dots\right) + i \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \dots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

آخری قدم پر آپ تسلی کر لیں کہ پہلی قوسین $\cos y$ کی مکلازن تسلسل دیتی ہے جبکہ دوسری قوسین $\sin y$ کی مکلازن تسلسل دیتی ہے۔ آپ اس کتاب میں آگے پڑھیں گے کہ درج بالا تسلسل میں اجزاء کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔ یوں ہم یولر مساوات²⁴

$$(2.27) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$(2.28) \quad e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y$$

مساوات 2.27 اور مساوات 2.28 کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$(2.29) \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

ہو گا۔ یہ سب جاننے کے بعد آئیں مساوات 2.26 میں دیے مخلوط اساس پر دوبارہ غور کریں۔

$$y_{m1} = e^{(-\frac{a}{2} + i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x} (\cos \omega x + i \sin \omega x)$$

$$y_{m2} = e^{(-\frac{a}{2} - i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{-i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x} (\cos \omega x - i \sin \omega x)$$

چونکہ اساس کے اجزاء کو مستقل (حقیقی یا خیالی یا مخلوط) سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے نیا حل حاصل کیا جاسکتا ہے لہذا ہم درج بالا دونوں اجزاء کو مستقل $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے ایک نیا اور حقیقی حل y_1

دریافت کرتے ہیں۔

$$y_1 = \frac{1}{2}y_{m1} + \frac{1}{2}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x$$

اسی طرح مخلوط اساس کے پہلے جزو کو مستقل $\frac{1}{2i}$ اور دوسرے جزو کو مستقل $-\frac{1}{2i}$ سے ضرب دیتے ہوئے جمع کر کے نیا اور حقیقی حل y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y_2 = \frac{1}{2i}y_{m1} - \frac{1}{2i}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$$

درج بالا حاصل کردہ حقیقی تفاعل

$$(2.30) \quad y_1 = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x \quad y_2 = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$$

کو از خود حل کا اساس تصور کیا جاسکتا ہے۔ یہاں غور کریں کہ ہم نے مخلوط جذر $\lambda = (-\frac{a}{2} \pm i\omega)x$ سے حقیقی اساس (مساوات 2.30) حاصل کیا ہے۔ اس حقیقی اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.31) \quad y = e^{-\frac{a}{2}x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$$

مثال 2.13: مخلوط جذر، ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + 0.36y' + 9.0324y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.36\lambda + 9.0324 = 0$ کے مخلوط جذر $\lambda = -0.18 \pm i3$ ہیں لہذا عمومی حل

$$y = e^{-0.18x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

ہو گا۔ مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر c_1 اور c_2 درکار ہیں جنہیں عمومی مساوات میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ پہلے ابتدائی معلومات سے

$$y(0) = e^0 (c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 0, \quad c_1 = 0$$



شکل 2.4: مثال 2.13 کا مخصوص حل۔

ماتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق

$$y' = -0.5e^{-0.5x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-0.5x}(-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x)$$

میں دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$y' = -0.5e^0(0 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^0(0 \sin 0 + 3c_2 \cos 0) = 3, \quad c_2 = 1$$

ماتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-0.18x} \sin 3x$$

شکل 2.4 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ، نقطہ دار لکیروں سے، سائن نمائندگی کے مثبت چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف²⁵ $e^{-0.18x}$ اور منفی چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف²⁶ $-e^{-0.18x}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ مخصوص حل (x کو t لیتے ہوئے) قصری ارتعاش²⁶ کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر y فاصلے کو ظاہر کرتی ہو تب یہ میکانی قصری ارتعاش ہوگی اور اگر y برقی رویا برقی دباؤ ہو تب یہ برقی قصری ارتعاش ہوگی۔

²⁵envelope
²⁶damped oscillations

جدول 2.1: تین صورتوں کی تفصیل

صورت	مساوات 2.19 کے جذر	مساوات 2.17 کی اساس	مساوات 2.17 کا عمومی حل
پہلی	منفرد حقیقی λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
دوسری	دوہرہ جذر $\lambda = -\frac{a}{2}$	$x e^{-\frac{a}{2} x}, e^{-\frac{a}{2} x}$	$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{a}{2} x}$
تیسری	جوڑی دار مخلوط $\lambda = -\frac{a}{2} \pm i\omega$	$e^{-\frac{a}{2} x} \cos \omega x, e^{-\frac{a}{2} x} \sin \omega x$	$y = e^{-\frac{a}{2} x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$

مثال 2.14: مخلوط جذر
سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad (\omega \text{ غیر صفر مستقل ہے})$$

کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

جدول 2.1 میں درج بالا تین صورتوں کی تفصیل اکٹھی کی گئی ہے۔ یہ تین اقسام میکانی ارتعاش یا برقی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہیں۔ آپ تفرقی مساوات کی قوت یہاں سے جان سکتے ہیں۔ آپس میں بالکل مختلف میدانوں (مثلاً میکانی اور برقی) کے مسائل ایک طرز کی تفرقی مساوات سے ظاہر کئے جاسکتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.16 تا سوال 2.24 کے عمومی حل حاصل کریں۔ انہیں واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ان کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 2.16:

$$y'' + 4y = 0$$

جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

سوال 2.17:

$$4y'' - 9y = 0$$

$$y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.18:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.19:

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\pi x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.20:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{3x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.21:

$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3}{2}x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.22:

$$4y'' + 4y' - 3y = 0$$

$$y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \text{ :جواب}$$

سوال 2.23:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \text{ :جواب}$$

2.2. مستقل عددی سروا لے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

سوال 2.24:

$$9y'' - 30y' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{5}{3}x}$

سوال 2.25 تا سوال 2.29 میں اساس سے تفرقی مساوات $y'' + ay' + by = 0$ حاصل کریں۔

سوال 2.25:

$$e^{0.2x}, \quad e^{-0.5x}$$

جواب: $y'' + 0.3y' - 0.1y = 0$

سوال 2.26:

$$e^{-0.66x}, \quad e^{-0.32x}$$

جواب: $y'' + 0.98y' + 0.2112y = 0$

سوال 2.27:

$$\cos(4\pi x), \quad \sin(4\pi x)$$

جواب: $y'' + 16\pi^2y = 0$

سوال 2.28:

$$e^{(-2+i3)x}, \quad e^{(-2-i3)x}$$

جواب: $y'' + 4y'' + 13y = 0$

سوال 2.29:

$$e^{-1.7x} \cos 6.2x, \quad e^{-1.7x} \sin 6.2x$$

جواب: $y'' + 3.4y'' + 41.33y = 0$

سوال 2.30 تا سوال 2.37 ابتدائی قیمت سوالات ہیں۔ ان کے مخصوص حل دریافت کریں۔

سوال 2.30:

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$$

جواب: $y = 5 \cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x$

سوال 2.31:

$$y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

جواب: $y = 0.7e^{5x} + 1.3e^{-5x}$

سوال 2.32:

$$y'' - y'' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

جواب: $y = \frac{1}{5}(e^{3x} - e^{-2x})$

سوال 2.33:

$$4y'' + 4y'' + 37y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

جواب: $y = e^{-\frac{x}{2}} \sin 3x$

سوال 2.34:

$$9y'' + 12y'' + 49y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

جواب: $y = e^{-\frac{2}{3}x} (2 \cos \sqrt{5}x + \frac{1}{3\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}x)$

سوال 2.35:

$$y'' - 6y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$$

جواب: $y = \frac{1}{40}e^{3x} \sin 4x$

سوال 2.36:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

2.2. مستقل عددی سرواے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

جواب: $y = \cos x + \sin x$

سوال 2.37:

$$8y'' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = 2.2, \quad y'(0) = 3.4$$

جواب: $y = \frac{79}{15}e^{\frac{x}{2}} - \frac{46}{15}e^{-\frac{x}{4}}$

عمومی حل کے حصول میں خطی طور غیر تابع تفاعل نہایت اہم ہیں۔ صرف ایسے تفاعل سے اساس حاصل ہوتا ہے۔ دیے وقتے پر سوال 2.38 تا سوال 2.42 میں دیے تفاعل میں خطی طور تابع اور غیر تابع کی نشاندہی کریں۔

سوال 2.38:

$$\cos kx, \quad \sin kx, \quad -\infty < x < \infty$$

جواب: چونکہ $\frac{\sin kx}{\cos kx}$ کی قیمت x تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتی ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 2.39:

$$e^{kx}, \quad e^{-kx} \quad -\infty < x < \infty$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.40:

$$x, \quad x^2 \quad x > 1$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.41:

$$x \ln x, \quad x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور غیر تابع



شکل 2.5: سوال 2.43 کے منحنی حل۔

سوال 2.42:

$$x \ln x, \quad x \ln x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 2.43: غیر مستحکم صورت حال

ابتدائی قیمت مسئلہ $y'' - 4y = 0$ میں ابتدائی قیمتیں $y(0) = 1$ اور $y'(0) = -2$ لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔ مخصوص حل کو دوبارہ ابتدائی معلومات $y(0) = 1.001$ اور $y'(0) = -1.998$ کے لئے حاصل کریں۔

جوابات: $y = e^{-2x}$ اور $y = \frac{1}{1000}e^{2x} + e^{-2x}$ ؛ شکل 2.5 میں دونوں حل دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ابتدائی قیمتوں میں انتہائی کم فرق حل پر بہت زیادہ اثر ڈالتی ہیں۔ یہ غیر مستحکم²⁷ صورت کو ظاہر کرتی ہے۔ زلزلے میں غیر مستحکم عمارتیں انہیں وجوہات پر ڈھیر ہوتی ہیں۔ فضا میں ہوا کا دباؤ، درجہ حرارت اور نمی کی تناسب بھی غیر مستحکم صورت پیدا کرتے ہوئے تباہ کن آندھیوں کا سبب بنتی ہیں۔

سوال 2.44: استمراری مساوات کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = 3$ ہیں۔ مساوات 2.17 حاصل کریں۔

$$y'' - y' - 6y = 0 \quad \text{جواب:}$$

instability²⁷

سوال 2.45: استمراری مساوات کے جذر λ_1 اور λ_2 ہیں۔ مساوات 2.17 میں a اور b حاصل کریں۔ یوں جذر جانتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$b = \lambda_1 \lambda_2, \quad a = -\lambda_1 - \lambda_2$$

سوال 2.46: تفرقی مساوات $y'' + ky' = 0$ کو موجودہ طریقے سے حل کریں۔ اسی کو تخفیف درجہ کی ترکیب سے بھی حل کریں۔ دونوں جواب کیوں یکساں ہونا ضروری ہے۔

$$y = c_1 + c_2 e^{-kx} \text{؛ یکتائیت۔}$$

سوال 2.47: دوہرا جذر کو منفرد λ_1 اور λ_2 کی وہ صورت تصور کی جاسکتی ہے جب $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ ہو۔ $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ لیتے اور ایک حل $e^{\lambda_1 x}$ لیتے ہوئے اساس کا دوسرا رکن $x e^{\lambda_1 x}$ تلاش کریں۔

حل: دوسرا حل $e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1 + \Delta\lambda)x} = e^{\lambda_1 x} e^{\Delta\lambda x}$ ہے۔ $e^{\Delta\lambda x}$ کا مکلازن تسلسل لیتے ہوئے $\Delta\lambda \rightarrow 0$ کی بنا صرف پہلے دو ارکان لیتے ہیں۔ یوں $1 + \Delta\lambda x \approx 1 + \frac{\Delta\lambda x}{1!} + \frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!} + \dots$ ہو گا اور $e^{\Delta\lambda x} = 1 + \frac{\Delta\lambda x}{1!} + \frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!} + \dots$ ہو گا اور $e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} + \Delta\lambda x e^{\lambda_1 x}$ لکھا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ $e^{\lambda_1 x}$ پہلے سے اساس کا حصہ ہے لہذا اساس کا دوسرا رکن $x e^{\lambda_1 x}$ ہو گا جہاں $\Delta\lambda$ کو مستقل تصور کرتے ہوئے رد کیا جاتا ہے

2.3 تفرقی عامل

آپ $y = \sin x$ یا $y = \frac{df(x)}{dx}$ کے عمل سے بخوبی واقف ہیں۔ پہلی مثال میں کسی مقدار یا تفاعل x پر عامل \sin عمل کرتے ہوئے ایک نیا تفاعل دیتا ہے۔ یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ عامل \sin تفاعل x کے نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ سے مبدل تفاعل y کا نقطہ $y = 1$ دیتا ہے۔ اسی طرح عامل $\frac{d}{dx}$ تفاعل x^3 پر عمل کرتے ہوئے تفاعل $3x^2$ دیتا ہے۔

یہ بتلاتا چلوں کہ ریاضیات اور طبیعیات میں عامل کا استعمال نہایت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ یہاں بالخصوص کوانٹم میکانیٹ²⁹ کا ذکر کرنا لازم جہاں عامل کا استعمال کثرت سے کیا جاتا ہے۔

²⁸operator
²⁹quantum mechanics

اس کتاب میں ہم صرف تفرقی عامل D^{30} پر بحث کریں گے جہاں $D = \frac{d}{dx}$ ہے۔ یوں ایک درجی تفرقی

$$(2.32) \quad Dy = y' = \frac{dy}{dx}$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح دو درجی تفرقی $D^2y = D(Dy) = y''$ اور تین درجی تفرقی $D^3y = y'''$ لکھا جائے گا۔ اس طرح $D \sin x = \cos x$ اور $D^2 \sin x = -\sin x$ ہو گا۔

خطی متجانس مساوات $y'' + ay' + by = 0$ جہاں a اور b مستقل مقدار ہیں میں دو درجی تفرقی عامل

$$L = P(D) = D^2 + aD + bI$$

متعارف کرتے ہیں جہاں I مماثلی عامل³¹ ہے جس کی تعریف $Iy = y$ ہے۔ اس طرح دیے گئے تفرقی مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(2.33) \quad Ly = P(D)y = (D^2 + aD + bI)y = 0$$

L خطی عامل اور P کثیر رکنی³² ہے۔ یوں اگر Lw اور Ly پائے جاتے ہوں (یعنی w اور y دو مرتبہ قابل تفرق ہوں) تب $L(cy + kw)$ بھی پایا جاتا ہے جہاں c اور k کوئی مستقل ہیں۔ مزید درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(2.34) \quad L(cy + kw) = cLy + kLw$$

چونکہ $De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ اور $D^2e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ہیں لہذا

$$(2.35) \quad \begin{aligned} Le^{\lambda x} &= (D^2 + aD + bI)e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ حصہ 2.2 میں بھی ہم نے یہی نتیجہ اخذ کیا تھا کہ $e^{\lambda x}$ صرف اور صرف اس صورت اس تفرقی مساوات کا حل ہو گا اگر λ امتیازی مساوات $P(\lambda) = 0$ کا جذر ہو۔

یہاں دلچسپ بات یہ ہے کہ $P(\lambda)$ عام الجبرائی کثیر رکنی ہے جس کی تجزی³³ کی جاسکتی ہے۔ λ کی جگہ D پر کرنے سے کثیر رکنی عامل حاصل ہوتا ہے۔

³⁰differential operator
³¹identity operator
³²polynomial
³³factorization

مثال 2.15: تفرقی مساوات کا حل بذریعہ تجزی
کثیر رکنی $P(D) = D^2 + 4D - 21I$ کی تجزی سے $P(D) = 0$ کو حل کریں۔

حل: $I^2 = 1$ لیتے ہوئے $D^2 + 4D - 21I = (D - 3)(D + 7)$ لکھا جاسکتا ہے۔ اب $(D - 3)y = y' - 3y = 0$ کا حل $y_1 = e^{3x}$ اور $(D + 7)y = y' + 7y = 0$ کا حل $y_2 = e^{-7x}$ ہے۔ یہ جوابات کسی بھی وقفے پر حل کی اساس ہیں۔ انہیں تفرقی مساوات حاصل کریں۔
 $(D - 3)(D + 7)y = (D - 3)(y' + 7y) = y'' + 7y' - 3y' - 21y = y'' + 4y' - 21y = 0$

مساوات 2.33 میں کثیر رکنی کے عددی سر مستقل مقدار ہیں۔ ایسی صورت میں تفرقی عامل کے استعمال سے تفرقی مساوات حل کرنا نہایت آسان ثابت ہوتا ہے۔ عددی سر مستقل نہ ہونے کی صورت میں تفرقی عامل کا استعمال نہایت پیچیدہ ثابت ہوتا ہے جس پر اس کتاب میں تبصرہ نہیں کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 2.48 تا سوال 2.52 دیے تفاعل پر دیا تفرقی عامل لاگو کریں۔

سوال 2.48:

$$D + 2I; \quad x^3, \quad \cos 5x, \quad e^{-kx}, \quad \cosh x$$

جوابات: $3x^2 + 2x^3$ ، $-5 \sin 5x + 2 \cos 5x$ ، $(2 - k)e^{-kx}$ ، $\sinh x + 2 \cosh x$

سوال 2.49:

$$D^2 - 3D; \quad 2x^4 - x, \quad 2 \sinh 2x - \cos 5x$$

جوابات: $24x^2 - 24x^3 + 3$ ، $-15 \sin 5x - 12 \cosh 2x + 25 \cos 5x + \sinh 2x$

سوال 2.50:

$$(D + 2I)^2; \quad e^{3x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $25e^{3x}$ ، $(12x + 8)e^{2x}$

سوال 2.51:

$$(D - 3I)^2; \quad e^{2x}, \quad xe^{3x}$$

جوابات: e^{2x} ، 0

سوال 2.52:

$$(D + I)(D - 2I); \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $-2e^{2x}$ ، $2(1 - x)e^{2x}$

سوال 2.53 تا سوال 2.57 کی تجزی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.53:

$$(D^2 - 9I)y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

سوال 2.54:

$$(D^2 + 4D + 4I)y = 0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے لہذا دوسرا حل xe^{2x} لیتے ہوئے $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$ ملتا ہے۔

سوال 2.55:

$$(D^2 + 4D + 13I)y = 0$$

جواب: $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

سوال 2.56:

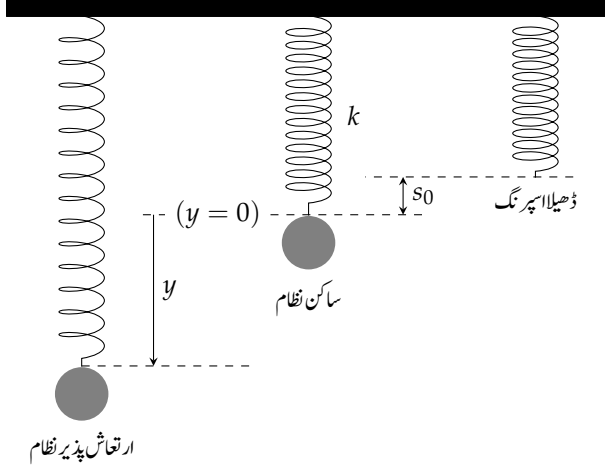
$$(4D^2 + 4D - 17I)y = 0$$

جواب: $y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

سوال 2.57:

$$(9D^2 + 12D + 4I)y = 0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے۔ $y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{2}{3}x}$



شکل 2.6: اسپرنگ اور کمیت کا غیر قصری نظام۔

2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش

مستقل قیت کے عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات میکانی ارتعاش میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں اسپرنگ سے جڑی کمیت کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔ اس نظام کو اسپرنگ اور کمیت کا نظام کہا جائے گا جسے شکل 2.6 میں دکھایا گیا ہے۔

ایک عام اسپرنگ جو لمبائی میں اضافہ اور کمی کو روکتا ہو کو شکل 2.6 میں مستحکم سلاخ سے لٹکایا ہوا دکھایا گیا ہے۔ اس کی چلی سر سے کمیت m کی لوہے کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اس ساکن نظام میں اسپرنگ کے نچلے سر کو $y = 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ ہم نیچے رخ کو مثبت رخ تصور کرتے ہیں۔ یوں نیچے رخ قوت کو مثبت اور اوپر رخ قوت کو منفی تصور کیا جائے گا۔ اسی طرح مقام $y = 0$ سے نیچے رخ فاصلہ y مثبت ہو گا۔ مزید اسپرنگ کی کمیت کو گیند کی کمیت سے اتنا کم تصور کیا جاتا ہے کہ اسپرنگ کی کمیت کو درج ذیل تبصرے میں رد کیا جاسکتا ہے۔

ساکن حالت میں اسپرنگ پر نیچے رخ قوت mg عمل کرتا ہے جس سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ یہاں $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع اور mg گیند کا وزن ہے۔ اسپرنگ کی لمبائی میں اضافے کی وجہ

سے، قانون ہک³⁴ کے تحت³⁵، اسپرنگ اوپر رخ بحالی قوت³⁶ $F_0 = -ks_0$ پیدا کرتا ہے جہاں k اسپرنگ مستقلہ³⁷ ہے جس کو kg s^{-2} یعنی Nm^{-1} میں ناپا جاتا ہے۔ بحالی قوت اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتا ہے۔ قوت mg مثبت رخ ہے لہذا اس کو مثبت لکھا گیا ہے جبکہ قوت $-ks_0$ منفی رخ ہے لہذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔ ان قوتوں کا مجموعہ صفر $mg - ks_0 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔ اگر ان قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر نہ ہوتا تو گیند ساکن نہ ہوتا بلکہ نیوٹن کے قانون $F = my''$ کے تحت حرکت کرتا۔ طاقتور اسپرنگ کے مستقلہ k کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ ان دونوں قوتوں کی مقدار گیند کی حرکت سے تبدیل نہیں ہوتی لہذا ان کا مجموعہ ہر وقت صفر کے برابر ہو گا۔ یوں گیند کی حرکت میں ان دونوں قوتوں کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا ان پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

فرض کریں کہ گیند کو نیچے رخ کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ شکل 2.6 میں گیند کو ساکن مقام سے لحاقی طور y فاصلے پر دکھایا گیا ہے۔ اس لمحہ اسپرنگ اضافی بحالی قوت $F_1 = -ky$ پیدا کرتا ہے جس کے تحت گیند نیوٹن کے قانون

(2.36)

$$F_1 = ma = my''$$

کے تحت حرکت کرے گا جہاں $y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}$ ہے۔

بلا تقصیر حرکت کی سادہ تفرقی مساوات

ہر نظام تقصیری ہوتا ہے ورنہ حرکت کبھی بھی نہ رکتی۔ نہایت کم تقصیری نظام جس کے حرکت کا مطالعہ نسبتاً کم دورانیے کے لئے کیا جائے میں تقصیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں اس کو بلا تقصیر تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل 2.6 کا نظام بلا تقصیر نظام کی عمدہ مثال ہے۔ نیوٹن کے قانون کو بروئے کار لیتے ہوئے اس نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

(2.37)

$$my'' + ky = 0$$

یہ مستقل عددی سروالا خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ہے۔ امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$ ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

(2.38)

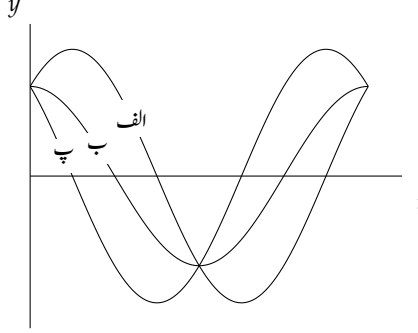
$$y = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Hooke's law³⁴

³⁵ روبرٹ ہک (1635-1703) انگلستان کے ماہر طبیعیات تھے۔

restoring force³⁶

spring constant³⁷



شکل 2.7: مساوات 2.38 کے عمومی اشکال۔

اس حرکت کو ہارمونی ارتعاش³⁸ کہتے ہیں جس کی تعدد $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ³⁹ ہرٹز⁴⁰ ہے۔⁴¹ تعدد f_0 کو نظام کی قدرتی تعدد⁴² کہتے ہیں۔ چونکہ ایک سیکنڈ میں f_0 چکر (پھیرے) پورے ہوتے ہیں لہذا ایک چکر $\frac{1}{f_0}$ عرصے میں پورا ہو گا۔ اس دورانیے کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو دوری عرصہ⁴³ کہتے ہیں۔

$$(2.39) \quad T = \frac{1}{f_0}$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{B}{A} \quad \text{اور} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$(2.40) \quad y = C \cos(\omega_0 t - \delta)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں C حیثہ⁴⁴ اور δ زاویائی فرق⁴⁵ کہلاتے ہیں۔

مساوات 2.38 (یعنی مساوات 2.40) کو شکل 2.7 میں دکھایا گیا ہے۔ دکھائے گئے تینوں منحنی میں ابتدائی فاصلہ $y(0) = A$ ہے جبکہ ابتدائی رفتار $y'(0) = \omega_0 B$ خط الف میں مثبت، ب میں صفر اور پ میں منفی ہے۔

³⁸ harmonic oscillation

³⁹ frequency

⁴⁰ Hertz

⁴¹ ہائز (1857-1894) جرمنی کے ماہر طبیعیات تھے جنہوں نے برقیاتی امواج دریافت کئے۔

⁴² natural frequency

⁴³ time period

⁴⁴ amplitude

⁴⁵ phase angle

مثال 2.16: ایک اسپرنگ سے 2 kg کمیت لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں 61.25 cm کا اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اس اسپرنگ سے کتنی کمیت لٹکانے سے ایک ہرٹز 1 Hz کا ارتعاش حاصل کیا جاسکتا ہے؟ ساکن حالت سے کمیت کو 10 cm نیچے کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قانون ہک کے تحت $mg = 0.6125k$ سے $k = \frac{2 \times 9.8}{0.6125} = 32 \text{ Nm}^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔ ایک ہرٹز کی تعدد کے لئے $2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ سے $m = \frac{k}{(2\pi f_0)^2} = \frac{32}{(2\pi \times 1)^2} = 0.811 \text{ kg}$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.38 میں $y(0) = 0.10 \text{ m}$ اور $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $A = 0.1$ اور $B = 0$ حاصل ہوتا ہے لہذا حرکت کی مساوات $y = 0.1 \cos 2\pi t$ ہوگی۔ y کی قیمت میٹر میں ہوگی۔

قصری نظام کا سادہ تفرقی مساوات

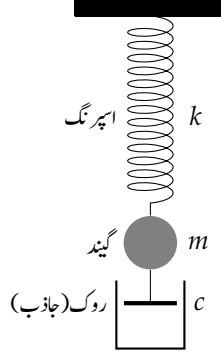
شکل 2.8 میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک $F_3 = -cy'$ کا اضافہ کیا گیا ہے جو ہر لمحہ حرکت کے الٹ رخ عمل کرتی ہے۔ یوں $my'' = -ky - cy'$ لکھا جائے گا جس سے قصری نظام کی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad (2.41)$$

حاصل ہوتی ہے۔ گیند کے ساتھ چادر منسلک کی گئی ہے جو ایک طرف سے بند نکی میں حرکت کرتے ہوئے توانائی کا ضیاع اور یوں قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ اس حصے کو (توانائی کا) جاذب⁴⁶ بھی کہا جاتا ہے۔ اس سے قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ تجربے سے دیکھا گیا ہے کہ کم رفتار پر ایسی قوت رفتار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ c قصری مستقل⁴⁷ کہلاتا ہے۔ قصری مستقل از خود مثبت مستقل ہے۔ یوں نیچے رخ رفتار، یعنی مثبت رفتار، کی صورت میں قصری قوت منفی، یعنی اوپر رخ، ہوگی۔

قصری نظام کی مساوات خطی متجانس ہے جس سے امتیازی مساوات (m سے تقسیم شدہ) لکھتے ہیں۔

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$



شکل 2.8: اسپرنگ اور کیفیت کا قسری نظام۔

اس دو درجی الجبرائی مساوات کے جذر لکھتے ہیں۔

$$(2.42) \quad \lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta \quad \text{جہاں} \quad \alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

تقصیر کی مقدار پر $c^2 - 4mk$ کی قیمت منحصر ہے جو تین مختلف صورتیں پیدا کرتی ہے۔

پہلی صورت: زیادہ تقصیر⁴⁸ دو منفرد حقیقی جذر $c^2 > 4mk$

دوسری صورت: فاصل تقصیر⁴⁹ دوہرا حقیقی جذر $c^2 = 4mk$

تیسری صورت: کم تقصیر⁵⁰ جوڑی دار مخلوط جذر $c^2 < 4mk$

اس قسم کی تین صورتیں ہم صفحہ 98 پر پہلے دیکھ چکے ہیں۔

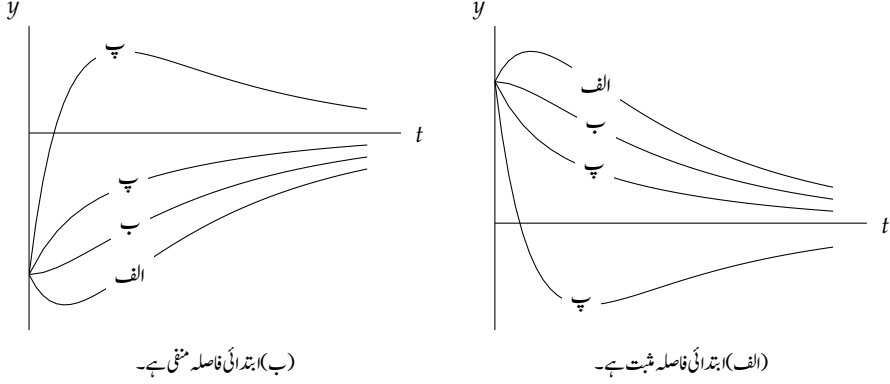
تین صورتوں کے حل

پہلی صورت

زیادہ تقصیر

پہلی صورت میں قسری قوت اتنا زیادہ ہے کہ $c^2 > 4mk$ ہے جس سے دو منفرد حقیقی جذر λ_1 اور λ_2

over damping⁴⁸
critical damping⁴⁹
under damping⁵⁰



شکل 2.9: تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

حاصل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

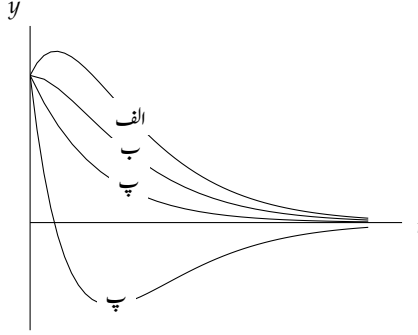
$$(2.43) \quad y = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$$

چونکہ $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ اور $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$ ہیں لہذا $\alpha - \beta$ اور $\alpha + \beta$ دونوں مثبت مقدار ہیں۔ یوں مساوات 2.43 میں دونوں قوت نمائی تفاعل کی طاقت منفی ہوگی اور دونوں تفاعل کی قیمتیں نہایت تیزی سے گھٹے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \rightarrow \infty$ پر $y(\infty) \rightarrow 0$ ہو گا یعنی گیند ساکن ہو گا۔ زیادہ قسری نظام میں قسری قوت اس تیزی سے نظام سے توانائی خارج کرتا ہے کہ نظام ارتعاش کرنے کے قابل نہیں رہتا۔

مساوات 2.43 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں ابتدائی فاصلہ مثبت ہے جبکہ شکل-ب میں ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔ شکل-الف میں خط الف مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔ شکل-ب میں خط الف منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تقصیری نظام میں ارتعاش ممکن نہیں ہے اور نظام میں حرکت بہت جلد ختم ہو جاتی ہے۔

دوسری صورت

فاصل تقصیر
زیادہ تقصیر اور کم تقصیر کے درمیان فاصل تقصیر کی صورت پائی جاتی ہے جہاں $c^2 = 4mk$ ہوتا ہے۔ یوں $\beta = 0$



شکل 2.10: فاصل تقصیری نظام میں حرکت بالقابل وقت۔

اور امتیازی مساوات کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ پایا جاتا ہے۔ یوں مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.44) \quad y = (c_1 + c_2 t) e^{-\alpha t}$$

یہ مساوات ساکن مقام $y = 0$ سے صرف ایک مرتبہ گزر سکتی ہے۔ اس کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ $e^{-\alpha t}$ کبھی صفر یا منفی نہیں ہو سکتا جبکہ $c_1 + c_2 t$ صرف ایک صفر دیتا ہے۔ اگر c_1 اور c_2 دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $c_1 + c_2 t$ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اور y صفر سے کبھی نہیں گزرے گا۔

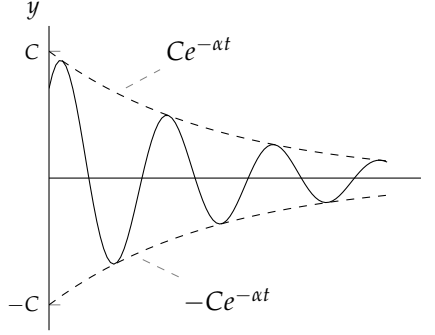
شکل 2.10 میں مساوات 2.44 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی فاصلہ مثبت لیا گیا ہے، خط الف میں ابتدائی رفتار مثبت، خط ب میں صفر اور دو عدد خط پ میں ابتدائی رفتار منفی لی گئی ہے۔ یہ خطوط شکل 2.9-الف سے مشابہت رکھتے ہیں۔ ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ موجودہ صورت منفرد حقیقی جذر کی وہ مخصوص صورت ہے جہاں دونوں جذر عین برابر ہوں۔

تیسری صورت

کم تقصیر

یہ سب سے زیادہ دلچسپ صورت ہے جہاں تقصیری مستقل کی قیمت اتنی کم ہے کہ $c^2 - 4mk < 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 2.42 میں β خیالی عدد ہو گا۔

$$(2.45) \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = i\omega \quad (\omega > 0)$$



شکل 2.11: قصری ارتعاش۔

امتیازی مساوات کے جذر جوڑی دار مخلوط اعداد ہوں گے

$$(2.46) \quad \lambda_1 = -\alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega$$

اور مساوات 2.41 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$(2.47) \quad y = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t - \delta)$$

جہاں $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$ ہیں۔

یہ قصری ارتعاش⁵¹ کو ظاہر کرتی ہے جس کو شکل 2.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اس منحنی کی چوٹیاں، نقطہ دار لکیر سے دکھائی گئیں، تقابل $y = Ce^{-\alpha t}$ اور $y = -Ce^{-\alpha t}$ کے منحنی کو چھوتی ہے۔ ارتعاش کی تعدد $\frac{\omega}{2\pi}$ ہے جو قصری مستقل c کم کرنے سے بڑھتی ہے۔ قصری مستقل کی قیمت صفر کرنے سے مساوات 2.40 کی ہارمونی ارتعاش حاصل ہوتی ہے جس کی قدرتی تعدد $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ہوگی۔

مثال 2.17: تقصیری حرکت کے تین صورتیں

ایک اسپرنگ جس کا مستقل $k = 32 \text{ N kg}^{-1}$ ہے سے $m = 2 \text{ kg}$ کا گیند لٹکایا گیا ہے۔ اس نظام میں باری باری $c = 20 \text{ kg s}^{-1}$ ، $c = 16 \text{ kg s}^{-1}$ اور $c = 5 \text{ kg s}^{-1}$ تقصیری اثر شامل کیا جاتا ہے۔ ابتدائی معلومات $y(0) = 4 \text{ cm}$ اور $y'(0) = 0$ ہیں۔ گیند کی حرکت دریافت کریں۔

⁵¹damped oscillations

حل: قوت روک نظام میں توانائی کے ضیاع کو ظاہر کرتی ہے جس سے مسلسل گھٹتی ارتعاش (پہلی صورت) یا غیر ارتعاشی حرکت (دوسری اور تیسری صورت) پیدا ہوتی ہے۔

پہلی صورت: $m = 2$ ، $k = 32$ اور $c = 20$ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے

$$2y'' + 20y' + 32y = 0, \quad y(0) = 0.04 \text{ m}, \quad y'(0) = 0$$

جس کا امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 20\lambda + 32 = 0$ ہے۔ امتیازی مساوات $2(\lambda + 8)(\lambda + 2) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = -8$ ہیں جن سے عمومی حل اور حل کا ایک درجی تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}, \quad y' = -2c_1 e^{-2t} - 8c_2 e^{-8t}$$

ان میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے $c_1 + c_2 = 0.04$ اور $-2c_1 - 8c_2 = 0$ ملتا ہے جنہیں حل کرنے سے $c_1 = \frac{4}{75}$ اور $c_2 = -\frac{1}{75}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح حرکت کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$y = \frac{4}{75} e^{-2t} - \frac{1}{75} e^{-8t}$$

یہ مسلسل گھٹتی ارتعاش ہے جو آخر کار $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow 0$ ہو گی یعنی بہت دیر بعد گیند ساکن ہو گا۔

دوسری صورت: $c = 16$ کی صورت میں امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 16\lambda + 32 = 0$ یعنی $2(\lambda + 4)^2 = 0$ ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ ہے۔ یوں حرکت کی عمومی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-4t}$$

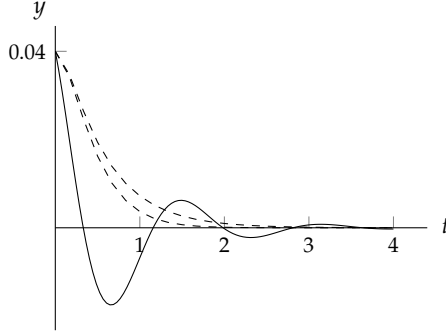
جس میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c_1 = 0.04$ اور $c_2 = 0.16$ حاصل ہوتے ہیں جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = (0.04 + 0.16t) e^{-4t}$$

تیسری صورت: تقصیری مستقل $c = 5 \text{ kg s}^{-1}$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات $2y'' + 5y' + 32y = 0$ ہو گا جس سے امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 5\lambda + 32 = 0$ حاصل ہوتی ہے۔ امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $-1.25 \pm 3.8i$ ہیں جن سے عمومی مساوات اور عمومی مساوات کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-1.25t} (A \cos 3.8t + B \sin 3.8t)$$

$$y' = -1.25e^{-1.25t} (A \cos 3.8t + B \sin 3.8t) + 3.8e^{-1.25t} (-A \sin 3.8t + B \cos 3.8t)$$



شکل 2.12: مثال 2.17 کی آزاد حرکت کی تین صورتیں۔

ابتدائی معلومات کو y کی مساوات میں پر کرنے سے $A = 0.04$ حاصل ہوتا ہے جبکہ انہیں y' کی مساوات میں پر کرنے سے $-1.25A + 3.8B = 0$ یعنی $B = -0.013$ حاصل ہوتا ہے لہذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-1.25t} (0.04 \cos 3.8t - 0.013 \sin 3.8t)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلا تقصیری نظام کی قدرتی ارتعاش $\omega_0 = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$ سے موجودہ تعدد $\omega = 3.8$ کم ہے۔ شکل 2.12 میں اس مثال کی تینوں صورتوں کو دکھایا گیا ہے۔

اس حصے میں بیرونی قوتوں سے پاک اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی آزاد حرکت⁵² پر غور کیا گیا۔ ایسے نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔ ہم اسی باب میں بیرونی جبری قوتوں کی موجودگی میں پائی جانے والی جبری حرکت⁵³ پر بھی غور کریں گے۔ ایسے نظام کو غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

سوالات

سوال 2.58 تا سوال 2.68 بلا تقصیر، ہارمونی ارتعاش کے سوالات ہیں۔

⁵² free motion
⁵³ forced motion

سوال 2.58: ابتدائی قیمت مسئلہ

بلا تقصیر ارتعاش کو مساوات 2.38 ظاہر کرتی ہے۔ ابتدائی فاصلہ $y(0) = y_0$ اور ابتدائی رفتار $y'(0) = v_0$ کی صورت میں مخصوص حل لکھیں۔

جواب: $y = y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$

سوال 2.59: تعدد

ایک اسپرنگ کی لمبائی 75 cm ہے۔ اس سے 0.25 kg کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی 85 cm ہو جاتی ہے۔ اس نظام کی تعدد f_0 اور دوری عرصہ T کیا ہوں گے؟

جوابات: $f_0 = 1.58 \text{ Hz}$ ، $T = 0.63 \text{ s}$

سوال 2.60: تعدد

اسپرنگ اور کمیت کی نظام میں کمیت چارگٹا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔ مستقلہ اسپرنگ کی قیمت چارگٹا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔

جوابات: کمیت چارگٹا کرنے سے تعدد آدھی ہوتی ہے۔ مستقلہ اسپرنگ چارگٹا کرنے سے تعدد دگنی ہوتی ہے۔

سوال 2.61: ابتدائی رفتار

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں ابتدائی رفتار صفر نہ ہونے کی صورت میں نظام کے تعدد اور رفتار پر کیا اثر ہوگا؟

جواب: نظام کی تعدد پر کوئی اثر نہیں ہوگا البتہ اس سے رفتار بڑھے گی۔

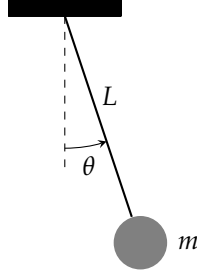
سوال 2.62: متوازی اسپرنگ

چار کلو گرام کی گیند کو $k_1 = 16 \text{ N m}^{-1}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جاتا ہے۔ نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ اگر اسی گیند کو $k_2 = 32 \text{ N m}^{-1}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جائے تب نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ دونوں کی لمبائی برابر ہے۔ ان دونوں اسپرنگ کو متوازی جوڑا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ شکل 2.13-الف کو دیکھیے۔

جوابات: 0.32 Hz ، 0.45 Hz ، 0.55 Hz $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

سوال 2.63: سلسلہ وار اسپرنگ

گزشتہ سوال کے دونوں اسپرنگ کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔ نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تعدد حاصل کریں۔



(ب) سوال 2.64 کا نظام۔



(الف) سوال 2.62 کا نظام۔

شکل 2.13: متوازی اسپرنگ اور جھولا کے سوالات۔

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = 0.26 \text{ Hz} \quad , \quad my'' + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y = 0 \quad \text{جوابات:}$$

سوال 2.64: جھولا

ایک ہلکے دھاگے سے m کمیت کا گیند لٹکایا شکل 2.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس نظام کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ نہایت چھوٹے زاویے کی صورت میں $\sin \theta \approx \theta$ لکھتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں جس کو حل کرتے ہوئے نظام کی تعدد حاصل کریں۔

حل: گیند کا وزن mg ہے جو نیچے رخ قوت ہے۔ اس کا مماس $mg \sin \theta$ ہے جو اسراع پیدا کرتا ہے۔

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad , \quad \theta = \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad , \quad L\theta'' = g\theta \quad , \quad L\theta' = g \sin \theta$$

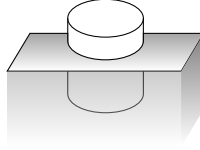
سوال 2.65: اصول آرشمیدس

اصول آرشمیدس⁵⁴ کے تحت جب کسی جسم کو مائع میں ڈبوایا جائے تو اس پر قوت اچھال عمل کرتی ہے جس کی مقدار، جسم کے ڈبوئے گئے حجم کے برابر، مائع کے وزن جتنی ہوتی ہے۔

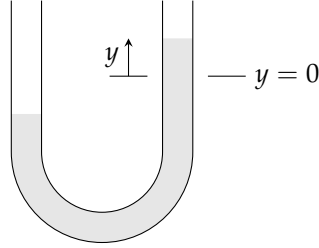
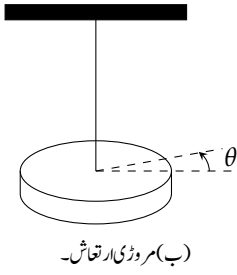
ایک بیلن کو سیدھا پانی میں کھڑا کرنے سے اس کا کچھ حصہ پانی میں ڈوب جاتا ہے۔ شکل 2.14 میں اس کو ساکن حالت میں دکھایا گیا ہے۔ بیلن کا رداس $r = 20 \text{ cm}$ ہے۔ اگر بیلن کو نیچے دھکیل کر چھوڑا جائے تو یہ دو سیکنڈ کے دوری عرصے سے اوپر نیچے ارتعاشی حرکت کرتا ہے۔ بیلن کی کمیت M دریافت کریں۔ پانی کی کثافت $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ہے۔

$$M = g\rho\pi r^2 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.8 \times 1000\pi 0.2^2 \left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 124.8 \text{ kg} \quad \text{جوابات:}$$

⁵⁴ Archimedian principle



شکل 2.14: آئرشید سی اصول؛ سوال 2.65



(الف) نالی میں پانی کا ارتعاش۔

شکل 2.15: سوال 2.67 اور سوال 2.68 کے اشکال۔

سوال 2.66: زنجیر کا میز سے پھسلنا
ایک پھسلنی میز پر زنجیر سیدھا پڑا ہوا ہے۔ ان کے مابین قوت رگڑ قابل نظر انداز ہے۔ اگر زنجیر کے ایک سر کو میز سے لٹکایا جائے تو پورا زنجیر پھسلنے پھسلنے نیچے گر پڑتا ہے۔ زنجیر کی کل لمبائی L اور کمیت m کلوگرام فی میٹر لیتے ہوئے اس مسئلے کا تفرقی مساوات لکھیں۔ اگر $y(0) = 0$ اور $y'(0) = v_0$ ہو تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

$$\text{جوابات: } mL y'' = mgy, \quad y = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}} t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} t} \right)$$

سوال 2.67: نالی میں پانی کی ارتعاش
شکل 2.15-الف میں $M = 9 \text{ kg}$ پانی زیر ثقلی قوت نالی میں ارتعاش کرتا ہے۔ نالی کا اندرونی رداس $r = 1.5 \text{ cm}$ ہے۔ ارتعاش کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\text{جوابات: } T = 5.06 \text{ s}, \quad My'' = -2\pi r^2 \rho g y$$

سوال 2.68: باریک غیر لچکدار تار سے I_0 جمودی معیار اثر⁵⁵ کی ٹکی لٹکائی جاتی ہے جو مروڑی ارتعاش کرتی ہے۔ شکل 2.15-ب کو دیکھیے۔ اس نظام کو $I_0 \theta'' + k\theta = 0$ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے جہاں θ کو

moment of inertia⁵⁵

متوازن حال سے ناپا جاتا ہے۔ k مروڑی مستقل (یا اسپرنگ مستقل) ہے جس کو Nm rad^{-1} نیوٹن میٹر فی ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ ابتدائی زاویہ $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ریڈیئن یعنی 45° اور ابتدائی رفتار صفر ہے۔ اس مساوات کو $\frac{k}{I_0} = 9 \text{ s}^{-2}$ لیتے ہوئے حل کریں۔ تعدد کا کلیہ دریافت کریں۔ اس تجربے کو باریک تار کی مروڑی مستقل k حاصل کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مکی کا جمودی معیار اثر جانتے ہوئے اور قدرتی تعدد ناپ کر باریک تار کا مروڑی مستقل دریافت کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{جواب: } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I_0}}, \theta = \frac{\pi}{4} \cos 3t$$

سوالات 2.69 تا سوال 2.69 میں قسری حرکت پایا جاتا ہے۔

سوال 2.69: زیادہ تفصیر

زیادہ تفصیری صورت میں مساوات 2.43 حل دیتی ہے۔ ابتدائی معلومات $y(0) = y_0$ اور $y'(0) = v_0$ ہونے کی صورت میں c_1 اور c_2 دریافت کریں۔

$$\text{جوابات: } c_2 = \frac{1}{2}[(1 - \frac{\alpha}{\beta})y_0 - \frac{v_0}{\beta}], c_1 = \frac{1}{2}[(1 + \frac{\alpha}{\beta})y_0 + \frac{v_0}{\beta}]$$

سوال 2.70: زیادہ تفصیر

زیادہ تفصیری صورت میں ثابت کریں کہ y زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ $y = 0$ سے گزر سکتا ہے۔

سوال 2.71: دھچکا روک

گاڑیوں میں دھچکا روک⁵⁶ نسب ہوتے ہیں جو گاڑی کی حرکت کو یقینی طور پر غیر ارتعاشی رکھتے ہیں۔ صفحہ 121 پر شکل 2.8 دھچکا روک کو ظاہر کرتی ہے۔ سوار کو دھچکوں سے پاک سواری اسپرنگ مہیا کرتا ہے جبکہ جاذب ان دھچکوں کی توانائی کو جذب کرتا ہے۔ گاڑی بج سواری کی کمیت کو m ظاہر کرتی ہے۔

کمیت 1300 kg اور اسپرنگ مستقل $80\,000 \text{ kg s}^{-2}$ ہونے کی صورت میں تفصیری مستقل کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر یقین طور غیر ارتعاشی سواری حاصل ہوگی۔

$$\text{جواب: } c \geq 20\,396 \text{ kg s}^{-1}$$

سوال 2.72: تعدد

کم قسری صورت کی ارتعاش کا تعدد ω مساوات 2.45 دیتا ہے۔ اس مساوات پر مسئلہ ثنائی کا اطلاق کرتے ہوئے پہلے دو اجزاء لیں اور مثال 2.17 کی کم قسری حرکت ($c = 5 \text{ kg s}^{-1}$) کی تعدد ارتعاش حاصل کریں۔ موجودہ جواب اور مثال میں حاصل کردہ جوابات میں کتنے فی صد فرق پایا جاتا ہے۔

جوابت: $\omega = \omega_0(1 - \frac{c^2}{8mk})$ ، $\omega = 3.8046$ ، لہذا دونوں جوابات میں 0.13% فرق پایا جاتا ہے۔ (مثال 2.17 میں تعدد کی بالکل ٹھیک قیمت $\omega = 3.79967$ ہے جسے مثال میں $\omega = 3.8$ لکھا گیا ہے۔)

سوال 2.73: بلا تقصیر نظام کے قدرتی تعدد اور کم تقصیری نظام (5 kg s^{-1}) کے تعدد ارتعاش میں فرق مثال 2.17 کے لئے حاصل کریں۔

جواب: 4.88% ؛ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگرچہ قوت روک تعدد ارتعاش پر فرق ڈالتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔

سوال 2.74: کم قسری ارتعاش کی مثبت چوٹیاں یکساں وقفوں پر پائی جاتی ہیں۔ اس وقفے کو دریافت کریں۔

جواب: مساوات 2.47 کی مثبت چوٹیاں $\omega t - \delta = 2n\pi$ پر پائی جاتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔ یوں دو چوٹیوں کے درمیان وقفہ $\frac{2\pi}{\omega}$ یعنی $T = \frac{1}{f}$ ہو گا۔

سوال 2.75: لوگار تھمی گھٹاؤ

کم قسری نظام میں دو قریبی چوٹیوں کی قیمتوں کی شرح ایک مستقل قیمت ہوتی ہے جس کے لوگار تھم کو لوگار تھمی گھٹاؤ⁵⁷ کہتے ہیں۔ لوگار تھمی گھٹاؤ Δ حاصل کریں۔

جواب: $\Delta = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$

سوال 2.76: تقصیری مستقل

ایک کم تقصیری نظام میں $m = 0.25 \text{ kg}$ ہے اور ارتعاش کا دوری عرصہ 5 s ہے۔ بیس چکروں میں چوٹی گھٹ کر $\frac{1}{4}$ گنا رہ جاتی ہے۔ نظام کے تقصیری مستقل کا تخمینہ لگائیں۔

جواب: $\alpha = 0.01386$

2.5 یولر کوشی مساوات

سادہ تفرقی مساوات⁵⁸

$$(2.48) \quad x^2 y'' + axy' + by = 0$$

یولر کوشی مساوات⁵⁹ کہلاتا ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ اس میں

$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

پر کرنے سے

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

ملتا ہے جس کو مشترک جزو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے ذیلی مساوات⁶⁰ $m(m-1) + am + b = 0$ یعنی

$$(2.49) \quad m^2 + (a-1)m + b = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں $y = x^m$ مساوات 2.48 کا حل اس صورت ہو گا جب m مساوات 2.49 کا جذر ہو۔ مساوات 2.49 کے جذر

$$(2.50) \quad m_1 = \frac{1}{2}(1-a) + \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}, \quad m_2 = \frac{1}{2}(1-a) - \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}$$

ہیں۔

پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر کی صورت میں دو منفرد حل

$$y_1 = x^{m_1}, \quad y_2 = x^{m_2}$$

ملتے ہیں۔ چونکہ ان حل کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہذا یہ حل خطی طور پر غیر تابع ہیں۔ اس طرح یہ حل کی اساس ہیں اور انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$(2.51) \quad y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

⁵⁸ لیون آریڈیئر (1707-1783) سوزر لینڈ کا رہائشی اور ماہر حساب تھا۔ آگسٹن لوئی کوشی (1789-1857) فرانسیسی ماہر حساب تھا جنہوں نے جدید تجربے کی بنیاد ڈالی۔
⁵⁹ Euler-Cauchy equation
⁶⁰ auxiliary equation

لکھا جاسکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ یہ حل تمام x کے لئے درست ہے۔

مثال 2.18: پولرکوشی مساوات $x^2 y'' + 0.5xy' - 1.5y = 0$ سے $m^2 - 0.5m - 1.5 = 0$ ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $m_1 = 1.5$ اور $m_2 = -1$ ہیں۔ ان سے اساس $y_1 = x^{\frac{3}{2}}$ ، $y_2 = x^{-1}$ لکھی جاسکتی ہے۔ اساس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 x \sqrt{x} + \frac{c_2}{x}$$

دوسری صورت: حقیقی دوہرا جذر $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}(1-a)$ اس صورت پایا جاتا ہے جب $b = \frac{1}{4}(1-a)^2$ ہو۔ ایسی صورت میں مساوات 2.48 درج ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے

$$(2.52) \quad x^2 y'' + axy' + \frac{1}{4}(1-a)^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0$$

جس کا ایک حل $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے۔

دوسرا خطی طور غیر تابع حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب پر حصہ 2.1 میں غور کیا گیا ہے۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے پہلا حل y_1 اور دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لیتے ہیں۔ یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ اور $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ ہوں گے جنہیں معیاری تفرقی مساوات 2.52 میں پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + \frac{1}{x}(u'y_1 + uy_1') + \frac{(1-a)^2}{4x^2}(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے جزو ضرب اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) + u[y_1'' + \frac{a}{x}y_1' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y_1] = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہذا درج بالا مساوات میں دایاں قوسین صفر کے برابر ہو گا اور یوں

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$u'' + u' \left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{x} \right) = 0$$

اب چونکہ $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے لہذا $y_1' = \frac{1-a}{2}x^{\frac{1-a}{2}-1} = \frac{1-a}{2}\frac{y_1}{x}$ ہو گا جس کو درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$u'' + u' \left[2 \left(\frac{1-a}{2x} \right) + \frac{a}{x} \right] = 0 \implies u'' + \frac{u'}{x} = 0$$

اس میں $u' = v$ لیتے ہوئے $v' + \frac{v}{x} = 0$ ملتا ہے جس کا حل $v = \frac{1}{x}$ ہے۔ یوں $v = u' = \frac{1}{x}$ لکھتے ہوئے تکمیل لے کر $u = \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح خطی طور غیر تابع دوسرا حل $y_2 = uy_1 = y_1 \ln x$ ہو گا۔ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.53) \quad y = (c_1 + c_2 \ln x)x^m \quad m = \frac{1-a}{2}$$

مثال 2.19: دوہرا جذر

یولر کوشی مساوات $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ کا ذیلی مساوات $m^2 - 8m + 16 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $m_1 = m_2 = 4$ ہے۔ یوں تمام مثبت x کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^4$$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر کی صورت انجینئری نقطہ نظر سے زیادہ اہم نہیں ہے لہذا اس کی ایک عدد مثال ہی دیکھتے ہیں۔

مثال 2.20: یولر کوشی مساوات $x^2 y'' + 0.8xy' + 9.01y = 0$ کی $m^2 - 0.2m + 9.01 = 0$ ذیلی مساوات ہے جس کے جوڑی دار مخلوط جذر $m_1 = 0.1 + 3i$ اور $m_2 = 0.1 - 3i$ ہیں جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ یہاں ایک چال چلاتے ہیں جس کے ذریعہ خیالی عدد i سے چھٹکارا حاصل ہوگا کرتے ہیں یعنی ہم $x = e^{\ln x}$ لکھتے ہیں۔ یوں

$$x^{m_1} = x^{0.1+3i} = x^{0.1} (e^{\ln x})^{3i} = x^{0.1} e^{(3 \ln x)i}$$

$$x^{m_2} = x^{0.1-3i} = x^{0.1} (e^{\ln x})^{-3i} = x^{0.1} e^{-(3 \ln x)i}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اب صفحہ 104 پر یولر مساوات 2.27 استعمال کرتے ہیں۔

$$x^{m_1} = x^{0.1} e^{(3 \ln x)i} = x^{0.2} [\cos(3 \ln x) + i \sin(3 \ln x)]$$

$$x^{m_2} = x^{0.1} e^{-(3 \ln x)i} = x^{0.2} [\cos(3 \ln x) - i \sin(3 \ln x)]$$

اب دونوں کا مجموعہ لیتے ہوئے دو (2) سے تقسیم کرتے ہیں۔ اسی طرح پہلی سے دوسری مساوات منفی کرتے ہوئے $-2i$ سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$x^{0.1} \cos(3 \ln x), \quad x^{0.1} \sin(3 \ln x)$$

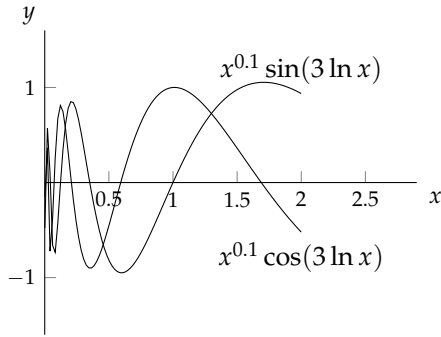
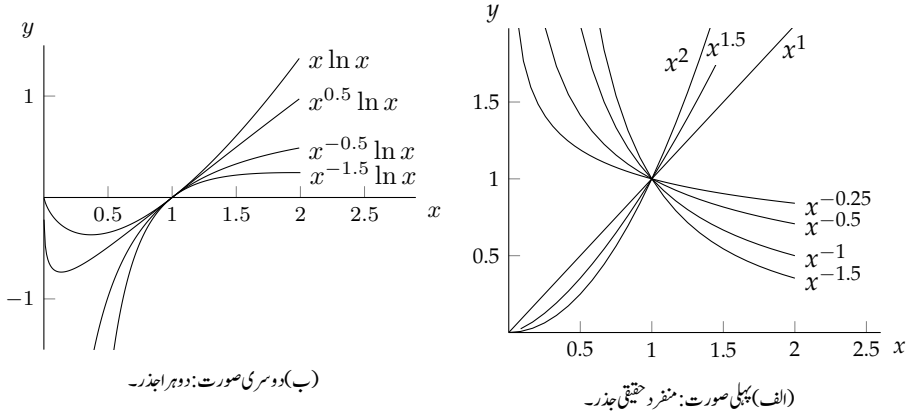
ان کا حاصل تقسیم $\tan(3 \ln x)$ ہے جو مستقل مقدار نہیں ہے لہذا درج بالا دونوں خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس طرح یہ حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = x^{0.1} [c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \sin(3 \ln x)]$$

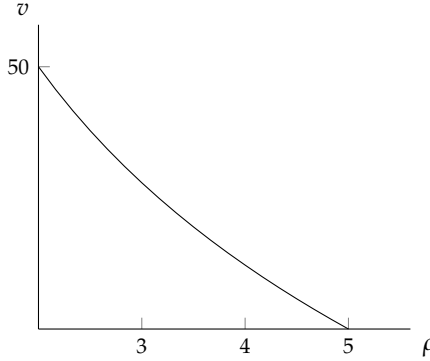
شکل 2.16 میں یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کی تینوں صورتوں کے حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 2.21: دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں ساکن برقی میدان؛ سرحدی قیمت مسئلہ
دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں برقی دباؤ تفرقی مساوات $\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{dv}{d\rho} = 0$ دیتی ہے۔ نلکی کے رداس $\rho_1 = 2 \text{ cm}$ اور $\rho_2 = 5 \text{ cm}$ ہیں جبکہ ان پر برقی دباؤ $v_1 = 50 \text{ V}$ اور $v_2 = 0 \text{ V}$ ہے۔ درمیانی خطے کی

electric voltage⁶¹



شکل 2.16: پولرکوشنی سادہ تفریق مساوات کے حل۔



شکل 2.17: مثال 2.21 کا حل۔

برقی دباؤ حاصل کریں۔

حل: یولر کوئی مساوات میں $a = 1$ اور $b = 0$ موجودہ تفرقی مساوات دیتا ہے۔ دیے مساوات میں $v = \rho^m$ پر کرتے ہوئے ذیلی مساوات $m^2 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کا دوہرا جذر $m = 0$ ہے۔ یوں عمومی حل $v = c_1 + c_2 \ln x$ ہو گا۔ دیے گئے سرحدی شرائط حل میں پر کرتے

$$50 = c_1 + c_2 \ln 0.02, \quad 0 = c_1 + c_2 \ln 0.05$$

ہوئے $c_1 = -163.471$ اور $c_2 = -54.568$ حاصل ہوتے ہیں لہذا مخصوص حل $y = -163.471 - 54.568 \ln \rho$ ہو گا جسے شکل 2.17 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.22: یولر کوئی مساوات 2.48 میں $x = e^t$ پر کرتے ہوئے اس کو مستقل عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات میں تبدیل کریں۔

حل: ہم $y(x)$ کو $y[x(t)]$ یعنی $y(t)$ تصور کرتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق سے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 t}{dx^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ اور $\frac{d^2 t}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

انہیں مساوات 2.48 میں پر کرتے

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} \right) + ax \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + by = 0$$

ہوئے مستقل عددی سر والا سادہ تفریقی مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں $y = \frac{dy}{dt}$ اور $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}$ ہیں۔

$$(2.54) \quad \ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0$$

سوالات

سوال 2.77 تا سوال 2.85 حل کریں۔

سوال 2.77:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

جواب: $y = c_1 x + c_2 x^2$

سوال 2.78:

$$x^2 y'' - 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-2}$

سوال 2.79:

$$x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$$

جواب: $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4}$

سوال 2.80:

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^3$

سوال 2.81:

$$x^2 y'' + 11xy' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-5}$

سوال 2.82:

$$10x^2 y'' + 11xy' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^{-\frac{3}{5}}$

سوال 2.83:

$$x^2 y'' + 0.44xy' + 0.0748y = 0$$

جواب: $y = c_1 x^{0.22} + c_2 x^{0.34}$

سوال 2.84:

$$x^2 y'' + 0.4xy' + 0.73y = 0$$

جواب: $y = x^{0.3} [c_1 \cos(0.8 \ln x) + c_2 \sin(0.8 \ln x)]$

سوال 2.85:

$$x^2 y'' + 2xy' + 4.25y = 0$$

جواب: $y = x^{-0.5} [c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)]$

سوال 2.86 تا سوال 2.91 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 2.86:

$$x^2 y'' - 0.4xy' + 0.45y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$$

جواب: $y = 7\sqrt{x} - 5x^{0.9}$

سوال 2.87:

$$x^2 y'' + 1.08xy' - 0.01713y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{23}{18}x^{0.23} - \frac{41}{18}x^{-0.31}$

سوال 2.88:

$$35x^2 y'' + 57xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -5$$

جواب: $y = \frac{77}{4}x^{-\frac{3}{7}} - \frac{65}{4}x^{-\frac{1}{5}}$

سوال 2.89:

$$6x^2 y'' + 19xy' + 6y = 0, \quad y(1) = -3, \quad y'(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{6}{5}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{21}{5}x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 2.90:

$$25x^2 y'' - 15xy' + 16y = 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 1$$

جواب: $y = 2^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} (\ln x - \ln 2)$

سوال 2.91:

$$49x^2 y'' + 77xy' + 4y = 0, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 0$$

جواب: $y = x^{-\frac{2}{7}} (2.93 + 1.04 \ln x)$

2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورورنکی

اس حصے میں متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات،

$$(2.55) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جس کے عددی سر $p(x)$ اور $q(x)$ کوئی بھی استمراری تفاعل ہو سکتے ہیں، کے عمومی حل کی وجودیت⁶² پر غور کیا جائے گا۔ ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.55 اور ابتدائی معلومات

$$(2.56) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے ابتدائی قیمت مسئلہ کی مخصوص حل کی یکتائی⁶³ پر بحث کی جائے گی۔

مسئلہ 2.2 کہتا ہے کہ اس ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل پایا جاتا ہے جو یکتا ہو گا اور مساوات 2.55 کے عمومی حل

$$(2.57) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{اختیاری } c_1, c_2$$

میں تمام حل شامل ہیں۔ یوں استمراری عددی سروالے متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا۔ نادر حل اس حل کو کہتے ہیں جسے عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

ہمیں مستقل عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات یا یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت اور یکتائی جاننے کی ضرورت پیش نہیں آئی چونکہ ان کے حل کے دوران ہی ایسی تمام معلومات سامنے آ جاتی ہیں۔

مسئلہ 2.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کسی کھلے وقفے I پر استمراری ہوں اور x_0 اس وقفے پر پایا جاتا ہو، تب مساوات 2.55 اور مساوات 2.56 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا مخصوص حل $y(x)$ موجود ہے۔

وجودیت حل کی ثبوت کے لئے وہی بنیادی شرائط درکار ہیں جو صفحہ 75 پر مسئلہ 1.3 کے لئے درکار تھے۔ اس کتاب میں ان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ اگرچہ یکتائی کا ثبوت عموماً آسان ہوتا ہے لیکن موجودہ مسئلہ 2.2 کے یکتائی حل کا ثبوت اتنا آسان نہیں ہے لہذا اس کو کتاب کے آخر میں بطور ضمیمہ شامل کیا گیا ہے۔

existence⁶²
uniqueness⁶³

خطی طور غیر تابع حل

آپ کو حصہ 2.4 سے یاد ہو گا کہ کھلے وقفہ I پر عمومی حل اساس y_1 ، y_2 پر مشتمل ہوتا ہے جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت خطی طور غیر تابع⁶⁴ کہلاتے ہیں جب پورے وقفہ پر

$$(2.58) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

سے مراد

$$(2.59) \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.58 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 خطی طور تابع⁶⁵ کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.58 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1$ لکھا جاسکتا ہے جو تناسبی رشتہ کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(2.60) \quad \text{پورے } I \text{ پر} \quad (ب) \quad y_2 = l y_1, \quad (الف) \quad y_1 = k y_2,$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.58 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا l (اور l صفر بھی ہو سکتے ہیں) خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع حل کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 2.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل

کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات 2.58 کے I پر دو حل y_1 اور y_2 اس صورت خطی طور تابع ہوں گے جب ان کے ورونسکی⁶⁶

$$(2.61) \quad W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W مکمل صفر⁶⁷ ہو گا۔ یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

⁶⁴ linearly independent

⁶⁵ linearly dependent

⁶⁶ Wronskian

⁶⁷ identically zero

ثبوت :

(الف) y_1 اور y_2 کو I پر خطی طور غیر تابع تصور کریں۔ یوں مساوات 2.60-الف یا b میں سے ایک درست ہو گا۔ اگر مساوات 2.60-الف درست ہو تب

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = k y_2 y_2' - y_2 k y_2' = 0$$

ہو گا۔ اسی طرح مساوات 2.60-ب کی صورت میں بھی $W = 0$ ملتا ہے۔

(ب) اس کے الٹ چلتے ہوئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی x_0 پر $W(y_1, y_2) = 0$ سے مراد y_1 اور y_2 کا I پر خطی طور تابع ہونا ہے۔ درج ذیل مساوات پر غور کریں جہاں k_1 اور k_2 کو نا معلوم متغیرات تصور کریں۔

$$(2.62) \quad \begin{aligned} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) &= 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

k_2 حذف کرنے کی نیت سے پہلی مساوات کو $y_2'(x_0)$ اور دوسری کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(2.63) \quad k_1 y_1(x_0) y_2'(x_0) - k_1 y_1'(x_0) y_2(x_0) = k_1 W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$$

اسی طرح k_1 حذف کرنے کے لئے پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں مساوات کا مجموعہ

$$(2.64) \quad k_2 y_1(x_0) y_2'(x_0) - k_2 y_2(x_0) y_1'(x_0) = k_2 W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$$

لیتے ہیں۔ اب اگر x_0 پر W صفر نہ ہوتا تب ہم مساوات 2.63 اور مساوات 2.64 کو W سے تقسیم کرتے ہوئے $k_1 = k_2 = 0$ حاصل کرتے البتہ x_0 پر $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ ہے لہذا ہم ان مساوات کو W سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔ یوں ہمزد مساوات 2.62 کا حل k_1 اور k_2 پایا جاتا ہے جہاں k_1 اور k_2 دونوں غیر صفر ہو سکتے ہیں۔ اب ان اعداد k_1 اور k_2 کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل

$$(2.65) \quad y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

لیتے ہیں۔ چونکہ مساوات 2.55 متجانس خطی ہے لہذا مسئلہ 2.1 (مسئلہ خطی میل) کے تحت یہ تفاعل بھی مساوات 2.55 کا حل ہو گا۔ مساوات 2.62 سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل ابتدائی معلومات $y(x_0) = 0$ اور

$y'(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ اب تصور کریں کہ مساوات 2.55 کا دوسرا حل جو ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہو $y^*(x) = 0$ ہے۔ اب چونکہ مساوات 2.55 میں $p(x)$ اور $q(x)$ استمراری ہیں لہذا مسئلہ 2.2 کے تحت اس کا مخصوص حل کیٹا ہو گا۔ یوں $y(x)$ اور $y^*(x)$ مختلف نہیں ہو سکتے ہیں لہذا $y^*(x) = y(x) = 0$ یعنی

$$(2.66) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 \equiv 0 \quad \text{پورے } I \text{ پر}$$

ہو گا۔ چونکہ k_1 اور k_2 میں کم از کم ایک صفر کے برابر نہیں ہے لہذا مساوات 2.66 کہتا ہے کہ I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں۔

(پ) ہم مسئلے کا آخری نقطہ ثابت کرتے ہیں۔ اگر کھلے وقفے I پر نقطہ x_0 پر $W(x_0) = 0$ ہو تب ثبوت (ب) کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں لہذا ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہو گا۔ یوں خطی طور تابعیت کی صورت میں ایسا نہیں ہو سکتا ہے کہ $W(x_1) \neq 0$ ہو جہاں x_1 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب اس سے مراد خطی طور غیر تابعیت ہو گی جیسا کہ دعویٰ کیا گیا ہے۔

حساب کی نقطہ نظر سے مساوات 2.61 سے درج ذیل زیادہ آسان مساوات ہے۔

$$(2.67) \quad W(y_1, y_2) = \begin{cases} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 & (y_1 \neq 0) \\ -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' y_2^2 & (y_2 \neq 0) \end{cases}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ورونسکی کو قالب کی مقطع کے طرز پر لکھا جاسکتا ہے جس کو ورونسکی مقطع⁶⁸ یا حل y_1 اور y_2 کی ورونسکی کہتے ہیں۔

$$(2.68) \quad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

مثال 2.23: مسئلہ 2.3 کا اطلاق

تفرقی مساوات $y'' + \omega^2 y = 0$ کے حل $y_1 = \cos \omega x$ اور $y_2 = \sin \omega x$ ہیں۔ ان کی ورنسکی

$$W(\cos \omega x, \sin \omega x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega \cos^2 \omega x + \omega \sin^2 \omega x = \omega$$

ہے۔ مسئلہ 2.3 کے تحت یہ حل صرف اس صورت میں خطی طور پر غیر تابع ہوں گے جب $\omega \neq 0$ ہو۔ یہی دونوں حل کے حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = \tan \omega x$ سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے جہاں $\omega = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور پر تابع صورت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 2.24: دوہرا جذر کی صورت میں مسئلہ 2.3 کا اطلاق

تفرقی مساوات $y'' - 6y' + 9y = 0$ کا (ثابت کریں کہ) عمومی حل $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$ ہے جس کا ورنسکی صفر کے برابر نہیں ہے لہذا e^{3x} اور xe^{3x} تمام x پر خطی طور پر غیر تابع ہیں۔

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3xe^{6x} = e^{6x} \neq 0$$

مساوات 2.55 کے عمومی حل میں تمام حل کی شمولیت

اس حصے کو مساوات 2.55 کے عمومی حل کی وجودیت سے شروع کرتے ہیں۔

مسئلہ 2.4: وجودیت عمومی حل

کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں مساوات 2.55 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: مسئلہ 2.2 کے تحت I پر مساوات 2.55 کا ابتدائی معلومات

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_1(x)$ موجود ہے۔ اسی طرح ابتدائی معلومات

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_2(x)$ بھی موجود ہے۔ نقطہ x_0 پر ان کا ورنسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 1$$

ہے۔ مسئلہ 2.3 کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور پر غیر تابع ہیں لہذا یہ مساوات 2.55 کے حل کی اساس ہیں۔ اس طرح ثابت ہوا کہ I پر مساوات 2.55 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ عمومی حل اتنا عمومی ہے جتنا کوئی حل عمومی ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 2.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

کھلا وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.55 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$(2.69) \quad Y(x) = C_1y_1 + C_2y_2$$

لکھا جاسکتا ہے، جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.55 کی کوئی بھی اساس اور C_1 ، C_2 مناسب مستقل ہیں۔

یوں مساوات 2.55 کا کوئی نادر حل موجود نہیں ہے۔ (نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔)

ثبوت: تصور کریں کہ I پر مساوات 2.55 کا $y = Y(x)$ کوئی حل ہے۔ اب مسئلہ 2.4 کے تحت I پر تفرقی مساوات 2.55 کا عمومی حل

$$(2.70) \quad y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

موجود ہے۔ ہم c_1 اور c_2 کی وہ قیمتیں دریافت کرنا چاہتے ہیں جن سے I پر $y(x) = Y(x)$ حاصل ہوتا ہو۔ ہم I پر کوئی بھی x_0 چنتے ہوئے پہلے ثابت کرتے ہیں کہ c_1 اور c_2 کی ایسی قیمتیں دریافت کی جاسکتی ہیں کہ x_0 پر $y(x_0) = Y(x_0)$ اور $y'(x_0) = Y'(x_0)$ ہوں۔ اس کو مساوات 2.70 کے استعمال سے

$$(2.71) \quad c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0)$$

$$(2.72) \quad c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0)$$

لکھ سکتے ہیں۔ ان ہمزاد مساوات سے c_1 اور c_2 معلوم کرتے ہیں۔ مساوات 2.71 کو $y_2'(x_0)$ اور مساوات 2.72 کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لینے سے c_1 حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے مساوات 2.73 ملتی ہے۔ اسی طرح c_2 حاصل کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لیتے ہوئے مساوات 2.74 حاصل ہوتی ہے۔ ان مساوات میں y_1 ، y_1' ، y_2 ، y_2' ، Y اور Y' کی قیمتیں نقطہ x_0 پر لی گئی ہیں۔

$$(2.73) \quad c_1 y_1 y_2' - c_1 y_2 y_1' = c_1 W(y_1, y_2) = Y y_2' - y_2 Y$$

$$(2.74) \quad c_2 y_1 y_2' - c_2 y_2 y_1' = c_2 W(y_1, y_2) = y_1 Y - Y y_1'$$

اب چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہذا ورنسکی کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہے لہذا ان مساوات سے c_1 اور c_2 حاصل کیے جاسکتے ہیں

$$c_1 = \frac{Y y_2' - y_2 Y}{W} = C_1, \quad c_2 = \frac{y_1 Y - Y y_1'}{W} = C_2$$

جہاں ان منفرد قیمتوں کو C_1 اور C_2 لکھا گیا ہے۔ انہیں مساوات 2.70 میں پر کرتے ہوئے مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ C_1 اور C_2 مساوات 2.71 اور مساوات 2.72 کے حل ہیں لہذا ہم ان مساوات سے دیکھتے ہیں کہ

$$y^*(x_0) = Y(x_0), \quad y^{*'}(x_0) = Y'(x_0)$$

مسئلہ 2.2 میں جس یکسانی کا ذکر کیا گیا ہے اس کے تحت y^* اور Y تمام I پر ہر جگہ برابر ہوں گے۔

سوالات

سوال 2.92: مساوات 2.67 سے مساوات 2.61 حاصل کریں۔

سوال 2.93 تا سوال 2.99 کی ورنسکی حاصل کریں۔ حاصل تقسیم سے ثابت کریں کہ یہ خطی طور غیر تابع ہیں اور مسئلہ 2.3 سے بھی اس بات کی تصدیق کریں

سوال 2.93: $e^{2x}, e^{-1.2x}$
جوابات: $c \neq e^{3.2x} = \frac{e^{2x}}{e^{-1.2x}}$ ، $W = -3.2e^{0.8x} \neq 0$

سوال 2.94: $e^{2.4x}, e^{1.1x}$
جوابات: $c \neq e^{1.3x} = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = -1.3e^{3.5x} \neq 0$

سوال 2.95: $x, \frac{1}{x}$
جوابات: $c \neq x^2 = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = -2x^{-2} \neq 0$

سوال 2.96: x, x^3
جوابات: $c \neq x^{-2} = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = 2x^3 \neq 0$

سوال 2.97: $e^{-0.2x} \sin 3x, e^{-0.2x} \cos 3x$
جوابات: $c \neq \tan 3x = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = 3e^{-0.4x} \neq 0$

سوال 2.98: $e^{-ax} \sinh kx, e^{-ax} \cosh kx$
جوابات: $c \neq \tanh kx = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = -ke^{-2ax} \neq 0$

سوال 2.99: $x^a \sin(k \ln x), x^a \cos(k \ln x)$
جوابات: $c \neq \tan(k \ln x) = \frac{y_1}{y_2}$ ، $W = -kx^{2a-1} \neq 0$

سوال 2.100 تا سوال 2.106 میں تفرقی مساوات کے حل دیے گئے ہیں۔ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ ورنسکی کی مدد سے ثابت کریں کہ دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں اور ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.100: $\sin 3x, \cos 3x, y(0) = 2, y'(0) = -3$
جوابات: $W = -3 \neq 0$ ، $y'' + 9y = 0$ ، $y = 2 \cos 3x - \sin 3x$

سوال 2.101: $x^3, x^{-4}, y(1) = -1, y'(1) = 2$
 $y = -\frac{2x^3}{7} - \frac{5x^{-4}}{7}, W = -\frac{7}{x^2} \neq 0, x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$ جوابات:

سوال 2.102: $e^{-1.2x} \sin 0.8x, e^{-1.2x} \cos 0.8x, y(0) = 5, y'(0) = 7$
 $W = -0.8e^{-2.4x} \neq 0, y'' + 2.4y' + 2.08y = 0$ جوابات:
 $y = e^{-\frac{6}{5}x} (\frac{65}{4} \sin \frac{4x}{5} + 5 \cos \frac{4x}{5})$

سوال 2.103: $x^3, x^3 \ln x, y(1) = 2, y'(1) = 8$
 $y = 2x^3(1 + \ln x), W = x^5 \neq 0, x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$ جوابات:

سوال 2.104: $1, e^{3x}, y(0) = 1.5, y'(0) = -2.5$
 $y = \frac{8}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}, W = 3e^{3x} \neq 0, y'' - 3y' = 0$ جوابات:

سوال 2.105: $e^{-kx} \sin \pi x, e^{-kx} \cos \pi x, y(0) = 1, y'(0) = -k - \pi$
 $W = -\pi e^{-2kx} \neq 0, y'' + 2ky' + (k^2 + \pi^2)y = 0$ جوابات:
 $y = e^{-kx}(\sin \pi x - \cos \pi x)$

سوال 2.106: $\sinh 1.8x, \cosh 1.8x, y(0) = 14.2, y'(0) = 16.38$
 $W = -1.8 \neq 0, y'' - 3.24y = 0$ جوابات:
 $y = 9.1 \sinh 1.8x + 14.2 \cosh 1.8x$

سوال 2.107: تفرقی مساوات $y'' - y = 0$ کا عمومی حل قوت نمائی تفاعل اور بذلولی⁶⁹ تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ دونوں صورتوں کے مستقل کا تعلق کیا ہے؟

جوابات: $c_b = c_1 + c_2, c_a = c_1 - c_2, y = c_a \sinh x + c_b \cosh x, y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات

اس باب میں اب تک متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ یہاں سے باب کے اختتام تک غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ درج ذیل غیر متجانس خطی تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جہاں $r \neq 0$ ہے۔

$$(2.75) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

ہم دیکھیں گے کہ مساوات 2.75 کا عمومی حل، مطابقتی متجانس مساوات

$$(2.76) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

کے عمومی حل اور مساوات 2.76 کے ایک مخصوص حل کا مجموعہ ہو گا۔ مساوات 2.75 کے عمومی حل اور مخصوص حل کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: عمومی حل اور مخصوص حل
کھلے وقفہ I پر غیر متجانس مساوات 2.75 کا عمومی حل

$$(2.77) \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ہو گا جہاں I پر $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ متجانس مساوات 2.76 کا عمومی حل ہے اور I پر y_p مساوات 2.75 کا کوئی بھی حل ہے جس میں مستقل نہیں پایا جاتا۔

مساوات 2.75 کا مخصوص حل، مساوات 2.77 کے c_1 اور c_2 میں خصوصی قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔

اب ہمیں حل کی ان تعریف کا جواز پیش کرنا ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.75 کا حل y_p حاصل کرنا ہو گا۔ پس ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 2.77 کا عمومی حل مساوات 2.75 پر پورا اترتا ہے اور یہ کہ مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل کا آپس میں سادہ تعلق ہے۔

مسئلہ 2.6: مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل کا آپس میں تعلق

(الف) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کے حل y اور اسی وقفے پر مساوات 2.76 کے حل \tilde{y} کا مجموعہ I پر مساوات 2.75 کا حل ہے۔ بالخصوص مساوات 2.77 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کا حل ہو گا۔

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کے دو حل کا فرق I پر مساوات 2.76 کا حل ہے۔

ثبوت :

(الف) مساوات 2.75 کے بائیں ہاتھ کو $L[y]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں I پر مساوات 2.75 کے کسی بھی حل y اور مساوات 2.76 کے کسی بھی حل \tilde{y} کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L[y + \tilde{y}] = L[y] + L[\tilde{y}] = r + 0 = r$$

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.75 کے کسی بھی حل y اور y^* کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L[y - y^*] = L[y] - L[y^*] = r - r = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ متجانس مساوات 2.76 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہوتے ہیں۔ اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متجانس مساوات 2.75 کے عمومی حل میں اس کے تمام حل شامل ہیں۔

مسئلہ 2.7: غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.75 کا ہر حل، مساوات 2.77 میں دیے گئے عمومی حل کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت : تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر y^* ، مساوات 2.75 کا کوئی حل ہے جبکہ x_0 اس وقفے پر کوئی x ہے۔ اسی طرح مساوات 2.77 کھلے وقفہ پر مساوات 2.75 کا کوئی عمومی حل ہے۔ یہ حل موجود ہے۔ یقیناً

2.4 مسئلہ $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ کے تحت موجود ہے جبکہ y_p کی وجودیت حصہ 2.10 میں دکھائی جائے گی۔ اب مسئلہ 2.6-ب کے تحت $Y = y^* - y_p$ کھلے وقفے پر مساوات 2.76 کا حل ہے۔ نقطہ x_0 پر

$$Y(x_0) = y^*(x_0) - y_p(x_0), \quad Y'(x_0) = y^{*'}(x_0) - y_p'(x_0)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کھلے وقفے I پر، مسئلہ 2.2 کے مطابق، کسی بھی ابتدائی معلومات کی طرح، ان معلومات پر پورا اترتا ہوا، مساوات 2.76 کا مخصوص حل موجود ہے جسے y_h میں c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے $y^* = Y + y_p$ سے مسئلہ کا دعویٰ ثابت ہوتا ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

آپ نے دیکھا کہ مساوات 2.75 یا اس پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 2.76 کو حل کرنا ہو گا اور مساوات 2.75 کا کوئی بھی حل y_p تلاش کرنا ہو گا۔ اس طرح عمومی حل 2.77 حاصل ہو گا۔

مساوات 2.75 کا حل y_p حاصل کرنے کی ایک ترکیب کو نامعلوم عددی سر کی ترکیب⁷⁰ کہتے ہیں۔ یہ ترکیب نہایت آسان ہے۔ اس ترکیب سے ارتعاشی نظام عددی سے حل ہوتے ہیں لہذا اسے انجینئری شعبے میں مقبولیت حاصل ہے۔ اس باب کے آخری حصے میں عمومی ترکیب پر غور کیا جائے گا جو نسبتاً مشکل ترکیب ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب ان خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.78) \quad y'' + ay' + by = r(x)$$

کے حل کے لئے موزوں ہے جس کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہوں اور $r(x)$ قوت نمائی تفاعل ہو یا x کی طاقت ہو یا سائن نما تفاعل ہو اور یا ان تفاعل کا مجموعہ یا حاصل ضرب ہو۔ ایسی تفاعل کی تفرقات بھی یہی تفاعل ہوتی ہیں۔ مثلاً x^3 کے تفرقات $3x^2$ ، $6x$ اور 6 ہیں جو از خود x کی طاقت ہیں۔ اسی طرح $\sin \omega x$ کا ایک درجی تفرق $\omega \cos \omega x$ جبکہ دو درجی تفرق $-\omega^2 \sin \omega x$ ہے۔ یہ دونوں تفرقات از خود سائن نما تفاعل ہیں۔

⁷⁰ method of undetermined coefficients

جدول 2.2: نامعلوم عددی سر کی ترکیب

$y_p(x)$ کے ارکان	$r(x)$ کے ارکان
$Ce^{\gamma x}$	$ke^{\gamma x}$
$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0$	$kx^n \quad (n = 0, 1, \dots)$
$K \cos \omega x + M \sin \omega x$	$k \cos \omega x$
$K \cos \omega x + M \sin \omega x$	$k \sin \omega x$
$e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$	$ke^{\alpha x} \cos \omega x$
$e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$	$ke^{\alpha x} \sin \omega x$

اس ترکیب میں y_p کو $r(x)$ اور اس کے تمام تفرقات کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ مجموعہ لکھتے ہوئے ہر رکن کو نامعلوم مستقل سے ضرب دیا جاتا ہے۔ y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.78 میں پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کے یکساں اجزاء کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے نامعلوم مستقل دریافت کئے جاتے ہیں۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p جدول 2.2 کے تحت لکھی جاتی ہے۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p درج ذیل قواعد کے تحت لکھی جاتی ہے۔

بنیادی قاعدہ: اگر مساوات 2.78 کا $r(x)$ جدول 2.2 کے دائیں قطار میں دیا گیا ہو تب اس تفاعل کے صف سے $y_p(x)$ حاصل کریں۔ حاصل y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.2 میں پر کرتے ہوئے نامعلوم عددی سر کی قیمت دریافت کریں۔

تریمی قاعدہ: اگر y_p کا کوئی رکن تفاعل مساوات 2.78 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل ہو تب اس رکن کو x سے ضرب دے کر y_p میں شامل کریں۔ (اگر یہ حل مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل کیا گیا ہو تب اس رکن کو x^2 سے ضرب دیں۔)

مجموعے کا قاعدہ: اگر $r(x)$ جدول 2.2 کے دوسرے قالب کے اجزاء کا مجموعہ ہو تب $y_p(x)$ کو جدول کے تیسرے قالب سے ان اجزاء کے مطابقتی تفاعل کے مجموعے کی صورت میں لکھا جائے گا۔

$r(x)$ صرف ایک رکن پر مشتمل ہونے کی صورت میں بنیادی قاعدہ استعمال ہو گا۔ تریمی قاعدہ استعمال کرنے سے پہلے متجانس مساوات حل کرنا ہو گا۔ اگر $r = r_1$ کی صورت میں مساوات 2.78 کا حل y_{p1} ہو اور $r = r_2$ کی صورت میں اس کا حل y_{p2} ہو تب $r = r_1 + r_2$ کی صورت میں اس کا حل $y_{p1} + y_{p2}$ ہو گا۔ یہ حقیقت مجموعے کا قاعدہ دیتی ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب خود اصلاحی ہے۔ یوں y_p چنتے ہوئے کم اجزاء لینے سے تضاد پیدا ہو گا اور عددی سر حاصل کرنا ممکن نہ ہو گا۔ زیادہ اجزاء لینے سے زائد ارکان کے عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوں گے۔

آئیں مثال 2.25 تا مثال 2.27 کی مدد سے اس ترکیب کو مزید سمجھیں۔

مثال 2.25: بنیادی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تلاش کریں۔

$$y'' + 9y = 0.2x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 9y = 0$ کا حل y_h درج ذیل ہے۔

$$y_h = A \cos 3x + B \sin 3x$$

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: اگر ہم $y_p = Kx^2$ چننے تب $y'_p = 2Kx$ اور $y'' = 2K$ ہو گے جنہیں دیے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے $2K + 9Kx^2 = 0.2x^2$ ملتا ہے۔ یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت تمام x کے لئے درست ہو سکتی ہے کہ دونوں جانب x^2 کے عددی سر برابر ہوں۔ اسی طرح x^1 یا x^0 کے عددی سر بھی دونوں اطراف برابر ہونا ضروری ہے۔ اس کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہوئے $2K = 0$ اور $9K = 0.2$ لکھا جائے گا جس سے $K = 0$ اور $K = \frac{0.2}{9}$ حاصل ہوتا ہے جو تضاد کی صورت حال ہے۔ یوں اس y_p کو رد کیا جاتا ہے۔

آئیں اب دیے گئے قواعد کے تحت جدول 2.2 سے y_p لکھیں۔ جدول کی دوسری صف کے تحت درج ذیل لکھا جائے گا

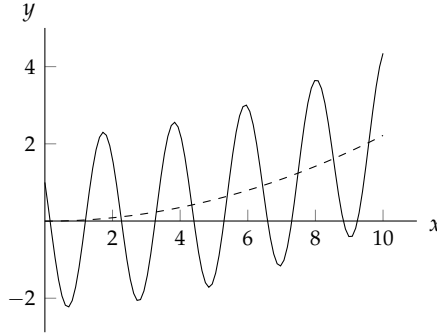
$$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$$

جس کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(2K_2) + 9(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 0.2x^2 \implies 9K_2x^2 + 9K_1x + 2K_2 + 9K_0 = 0.2x^2$$

اس مساوات کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔ یوں بائیں جانب x^2 کا عددی سر $9K_2$ ہے جبکہ دائیں جانب یہ 0.2 کے برابر ہے۔ انہیں آپس میں برابر پر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بائیں جانب x^1 کا عددی سر $9K_1$ ہے جبکہ دائیں جانب ایسا کوئی رکن نہیں پایا جاتا لہذا دائیں جانب x^1 کا عددی سر صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح x^0 کا عددی سر بائیں جانب $2K_2 + 9K_0$ اور دائیں جانب صفر ہے۔

$$9K_2 = 0.2, \quad 9K_1 = 0, \quad 2K_2 + 9K_0 = 0$$



شکل 2.18: مثال 2.25 کا مخصوص حل۔

ان تین ہمزاہ مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے $K_2 = \frac{1}{45}$ ، $K_1 = 0$ اور $K_0 = -\frac{2}{405}$ حاصل ہوتے ہیں لہذا $y_p = \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = y_h + y_p = A \cos 3x + B \sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

ہو گا۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ پر $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $1 = A - \frac{2}{405}$ لکھا جائے گا جس سے $A = \frac{407}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $y'(0) = -5$ کو استعمال کرتے ہوئے $3B = -6$ لکھا جائے گا جس سے $B = -2$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = \frac{407}{405} \cos 3x - 2 \sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

مخصوص حل کو شکل 2.18 میں دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر y_p کو ظاہر کرتی ہے۔ مخصوص حل y_p کے دونوں اطراف ارتعاش کر رہی ہے۔

مثال 2.26: ترمیمی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 2.4y' + 1.44y = -5e^{-1.2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2.4\lambda + 1.44 = 0$ یعنی $(\lambda + 1.2)^2 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1.2$ ہے جس سے $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: تفرقی مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل $e^{-1.2x}$ سے عام طور جدول 2.2 کو دیکھ کر $y_p = Ce^{-1.2x}$ لکھا جاتا البتہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تفاعل متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل حل ہے۔ یوں ترمیمی قاعدے کے تحت منتخب تفاعل کو x^2 سے ضرب دینا ہو گا۔ یوں درج ذیل چننا جائے گا

$$y_p = Cx^2e^{-1.2x}$$

جس کے تفرقات $y_p' = (2x - 1.2x^2)Ce^{-1.2x}$ اور $y_p'' = (1.44x^2 - 4.8x + 2)Ce^{-1.2x}$ ہیں۔ ان تمام کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں جہاں دونوں اطراف $e^{-1.2x}$ کو حذف کیا گیا ہے۔

$$(1.44x^2 - 4.8x + 2)C + 2.4(2x - 1.2x^2)C + 1.44Cx^2 = -5$$

دونوں اطراف x^2 ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھے ہوئے $0 = 0$ ، $0 = 0$ اور $2C = -5$ لکھا جاتا ہے جس سے $C = -2.5$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں $y_p = -2.5x^2e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے لہذا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

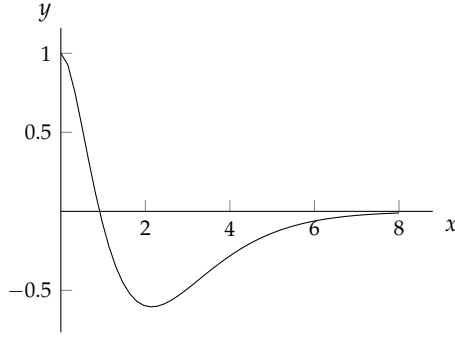
$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x} - 2.5x^2e^{-1.2x}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $y(0) = 1$ ، $x = 0$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $c_1 = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ y کے تفرق

$$y' = [3x^2 - (1.2c_2 + 5)x + c_2 - 1.2c_1]e^{-1.2x}$$

میں $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $0 = 2c_2 - 1.2c_1$ یعنی $c_2 = 1.2$ ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y = (1 + 1.2x - 2.5x^2)e^{-1.2x}$$



شکل 2.19: مثال 2.26 کا مخصوص حل۔

مخصوص حل کو شکل 2.19 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.27: مجموعے کا قاعدہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + 3y' + 2y = 0.2 \cos x + 0.1x - 0.4, \quad y(0) = -2.1, \quad y'(0) = 3.2$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 3y' + 2y = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ یعنی $(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -2$ ہیں جن سے $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: غیر متجانس مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل کے تحت جدول 2.2 سے لکھتے ہیں جہاں $y_p = y_{p1} + y_{p2}$

$$y_{p1} = K \cos x + M \sin x, \quad y_{p2} = K_1 x + K_0$$

کے برابر ہیں۔ یوں $y_p = K \cos x + M \sin x + K_1 x + K_0$ اور اس کے تفرقات

$$y'_p = -K \sin x + M \cos x + K_1, \quad y''_p = -K \cos x - M \sin x$$

کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(-K \cos x - M \sin x) + 3(-K \sin x + M \cos x + K_1) + 2(K \cos x + M \sin x + K_1 x + K_0) = 0.2 \cos x + 0.1x - 0.4$$

دونوں اطراف $\cos x$ ، $\sin x$ ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھتے

$$-K + 3M + 2K = 0.2, \quad -M - 3K + 2M = 0, \quad 2K_1 = 0.1, \quad 3K_1 + 2K_0 = -0.4$$

ہوئے حل کرنے سے $K_0 = -\frac{11}{40}$ ، $K_1 = \frac{1}{20}$ ، $M = \frac{3}{50}$ اور $K = \frac{1}{50}$ ملتے ہیں لہذا

$$y_p = \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

لکھا جائے گا جس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

حاصل ہوتا ہے۔

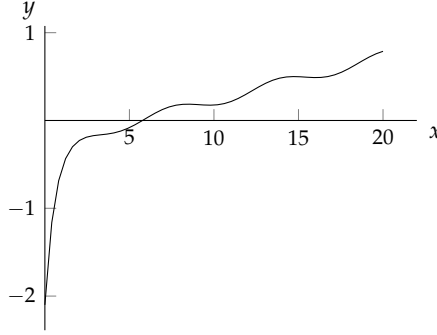
تیسرا قدم: مخصوص حل: y اور y' میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{50} - \frac{11}{40} = -2.1, \quad -c_1 - 2c_2 + \frac{3}{50} + \frac{1}{20} = 3.2$$

جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{3}{5}$ اور $c_2 = -\frac{249}{200}$ ملتے ہیں۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = -\frac{3}{5} e^{-x} - \frac{249}{200} e^{-2x} + \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

مخصوص حل کو شکل 2.20 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.20: مثال 2.27 کا مخصوص حل۔

استحکام

کسی بھی انجینیری نظام کا مستحکم ہونا نہایت اہم ہوتا ہے۔ مساوات 2.78 کے مطابق متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دونوں جذر منفی یا دونوں جذر کے حقیقی حصے منفی ہونے کی صورت میں نظام اور تفرقی مساوات کو مستحکم⁷¹ کہتے ہیں۔ ایسی صورت میں $t \rightarrow \infty$ پر $y_h \rightarrow 0$ ہو گا لہذا عارضی حل $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حل y_p کے قریب قریب ہو گا۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں نظام غیر مستحکم⁷² کہلاتا ہے۔ چونکہ مثال 2.25 میں امتیازی مساوات کے جذر کے حقیقی حصے منفی مقدار نہیں ہیں لہذا یہ غیر مستحکم نظام کو ظاہر کرتا ہے۔

اگلے دو حصوں میں ان مساوات کا استعمال ہو گا۔

سوالات

سوال 2.108 تا سوال 2.117 میں دیے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کے حقیقی عمومی حل دریافت کریں۔

سوال 2.108: $y'' - y' - 6y = e^{-1.5x}$
 جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{4}{9} e^{-1.5x}$

stable⁷¹
 unstable⁷²

سوال 2.109: $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$
 جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} - (1+x)e^{-3x}$

سوال 2.110: $4y'' + 12y' + 9y = 4^{-1.5x}$
 جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-1.5x} + \frac{x^2}{2}e^{-1.5x}$

سوال 2.111: $4y'' + 2y' + 3y = 4 \cos 3x$
 جواب: $y = c_1 e^{-0.5x} + c_2 e^{-1.5x} + \frac{32}{555} \sin 3x - \frac{44}{555} \cos 3x$

سوال 2.112: $y'' + 4y = \sin 2x$
 جواب: $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - 0.5x \cos 2x$

سوال 2.113: $9y'' + 4y = e^{-2x} \sin \frac{2x}{3}$
 جواب: $y = c_1 \cos \frac{2x}{3} + c_2 \sin \frac{2x}{3} + \frac{e^{-2x}}{156} (2 \cos \frac{2x}{3} + 3 \sin \frac{2x}{3})$

سوال 2.114: $y'' + 3y' + 2y = x^2$
 جواب: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{2x^2 - 6x + 7}{4}$

سوال 2.115: $y'' + 9y = 3 \sin x + \sin 3x$
 جواب: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{3}{8} \sin x - \frac{x}{6} \cos 3x$

سوال 2.116: $y'' + 8y' + 15y = 0.5x$
 جواب: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-5x} + \frac{15x-8}{450}$

سوال 2.117: $y'' + 2y' + y = x \cos x$
 جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + 0.5 \cos x + 0.5(x-1) \sin x$

سوال 2.118 تا سوال 2.130 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسلوں کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.118: $y'' + 5y' + 6y = 0.2e^{-1.5x}$, $y(0) = 1.2$, $y'(0) = -0.5$
 جواب: $y = -\frac{4}{15}e^{-1.5x} + \frac{27}{10}e^{-2x} - \frac{53}{30}e^{-3x}$

سوال 2.119: $y'' + 2.7y' + 1.8y = 3.4e^{-1.2x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -3$
 جواب: $y = (\frac{102x-340}{9})e^{-1.2x} - 20e^{-1.2x} + \frac{302}{9}e^{-1.5x}$

سوال 2.120: $y'' + 6y' + 9y = 1.1e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
 جواب: $y = 1.1e^{-2x} + (0.9x - 0.1)e^{-3x}$

سوال 2.121: $y'' + 8y' + 16y = 0.7e^{-4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = \frac{7}{20}x^2e^{-4x} + (6x + 2)e^{-4x}$

سوال 2.122: $4y'' + 8y' + 3y = 24x^2$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = -101e^{-0.5x} + \frac{59}{9}e^{-1.5x} + \frac{72x^2 - 384x + 832}{9}$

سوال 2.123: $4y'' + 8y' + 3y = 2.4e^{-0.5x} + 8x^2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = (\frac{3x}{5} - \frac{301}{10})e^{-0.5x} + \frac{617}{270}e^{-1.5x} + \frac{8x^2}{3} - \frac{128x}{9} + \frac{832}{27}$

سوال 2.124: $6y'' + 29y' + 35y = 6 \cos x$, $y(0) = 0.5$, $y'(0) = -0.2$
 جواب: $y = \frac{3}{29} \cos x + \frac{3}{29} \sin x + \frac{1197}{290}e^{-\frac{7}{3}x} - \frac{541}{145}e^{-\frac{5}{2}x}$

سوال 2.125: $y'' + 9y = \cos 3x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.3$
 جواب: $y = \frac{1}{5} \cos 3x + (\frac{x}{6} + \frac{1}{10}) \sin 3x$

سوال 2.126: $8y'' - 6y' + y = 6 \sinh x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.1$
 جواب: $y = e^x - \frac{19}{5}e^{0.5x} + \frac{16}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.127: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 3 \ln x - 4$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y_p = \ln x$
 جواب: $y = \frac{1}{3} \ln x + \frac{4}{9} + \frac{5x^3}{9} - x$

سوال 2.128: $y'' + 2y' + 10y = 17 \sin x - 37 \sin 3x$, $y(0) = 6.6$, $y'(0) = -2.2$
 جواب: $y = e^{-x} \cos 3x - \sin 3x + 6 \cos 3x + \frac{9}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x$

سوال 2.129: $8y'' - 6y' + y = 6 \sinh x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.05$
 جواب: $y = e^x - 4e^{0.5x} + \frac{17}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.130: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1.5$
 جواب: $y = (1 + x - 0.25 \sin 2x)e^{-2x}$

2.8 جبری ارتعاش۔ مگ

ہم اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر حصہ 2.4 میں غور کر چکے ہیں جہاں اس نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.79) \quad my'' + cy' + ky = 0$$

سے ظاہر کیا گیا جہاں، ساکن حالت میں گیند کے مقام سے، حرکت کی صورت میں گیند کا فاصلہ $y(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حصہ 2.4 میں نظام پر کوئی بیرونی قوت لاگو نہیں کیا گیا۔ نظام کی حرکت صرف اور صرف نظام کی اندرونی قوتوں کی بنا تھی۔ قوت جمود my'' ، قوت بحالی ky اور قوت روک cy' نظام کی اندرونی قوتیں تھیں۔

آگے بڑھتے ہوئے اس نظام میں بیرونی قوت $r(t)$ کا اضافہ کرتے ہیں۔ شکل 2.21 میں ایسا نظام دکھایا گیا ہے۔ بیرونی قوت $r(t)$ انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔ اس نظام کی نمونہ کشی درج ذیل تفرقی مساوات کرتی ہے۔

$$(2.80) \quad my'' + cy' + ky = r(t)$$

میکانی طور پر اس مساوات کا مطلب ہے کہ ہر لمحہ t پر اندرونی قوتوں کا مجموعہ بیرونی قوت $r(t)$ کے برابر ہے۔ اس نظام میں گیند کی حرکت کو جبری حرکت⁷³ کہتے ہیں جبکہ بیرونی قوت کو جبری قوت⁷⁴ یا داخلی قوت⁷⁵ کہتے ہیں۔ گیند کی حرکت کو نظام کا رد عمل⁷⁶ یا نظام کا ماحصل⁷⁷ بھی کہا جاتا ہے۔

ہمیں دوری⁷⁸ بیرونی قوتوں میں زیادہ دلچسپی ہے لہذا ہم

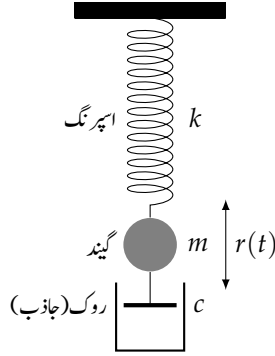
$$r(t) = F_0 \cos \omega t \quad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

طرز کے قوتوں پر توجہ دیں گے۔ یوں غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.81) \quad my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$$

حاصل ہوتی ہے جس کے حل سے بنیادی اہمیت کے حقائق حاصل ہوں گے جن سے گمک⁷⁹ کی نمونہ کشی ممکن ہو گی۔

forced motion⁷³
forcing function⁷⁴
input force⁷⁵
response⁷⁶
output⁷⁷
periodic⁷⁸
resonance⁷⁹



شکل 2.21: اسپرنگ اور کیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

غیر متجانس مساوات کا حل

ہم نے حصہ 2.7 میں دیکھا کہ غیر متجانس مساوات 2.81 کا عمومی حل متجانس مساوات 2.79 کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.81 کے کوئی بھی حل y_p کا مجموعہ ہے۔ ہم y_p کو حصہ 2.7 کے نامعلوم عدد سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$(2.82) \quad y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

اور اس کے تفرقات

$$y_p'(t) = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t, \quad y_p''(t) = -\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t$$

کو مساوات 2.81 میں پر کرتے ہوئے

$$m(-\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t) + c(-\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t) + k(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = F_0 \cos \omega t$$

دونوں اطراف کے $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے اور دونوں اطراف کے $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے ہمزا مساوات

$$(k - m\omega^2)a + c\omega b = F_0, \quad -c\omega a + (k - m\omega^2)b = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان ہمزا مساوات کو a اور b کے لئے حل کرتے ہیں۔ b حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $-c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(k - m\omega^2)^2 a + c^2 \omega^2 a = F_0(k - m\omega^2)$$

اسی طرح a حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$c^2\omega^2b + (k - m\omega^2)^2b = F_0c\omega$$

ان مساوات میں جزو $c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2$ صفر کے برابر نہیں ہے لہذا دونوں مساوات کو اس جزو سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے a اور b حاصل کرتے ہیں۔

$$a = F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

اگر حصہ 2.4 کی طرح $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ لکھا جائے تب $k = m\omega_0^2$ ہو گا اور

$$(2.83) \quad a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

ہوں گے۔

اس طرح غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 2.81 کا عمومی حل

$$(2.84) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y_h(t)$ متجانس مساوات 2.79 کا عمومی حل ہے اور $y_p(t)$ مساوات 2.82 میں دیا گیا ہے جس میں a اور b کی قیمتیں مساوات 2.83 سے پر کی گئی ہیں۔

آئیں اب اس میکانی نظام کی دو بالکل مختلف صورتوں پر غور کریں۔ پہلی صورت $c = 0$ غیر قسری ہے جبکہ دوسری صورت $c > 0$ تقصیری ہے۔

پہلی صورت: بلا تقصیر جبری ارتعاش۔ گمک

اگر نظام میں قوت روک اتنا کم ہو کہ دورانیہ غور کے دوران اس کا اثر قابل نظر انداز ہو تب $c = 0$ لیا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 2.83 سے $a = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ اور $b = 0$ حاصل ہوتے ہیں لہذا مساوات 2.82

$$(2.85) \quad y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{F_0}{k[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]} \cos \omega t$$

لکھا جائے گا جہاں $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یہاں ضروری ہے کہ $\omega \neq \omega_0$ فرض کیا جائے جس کا مطلب ہے کہ جبری قوت کی تعدد $f = \frac{\omega}{2\pi}$ بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ سے مختلف فرض کی گئی ہے۔ (بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد کے لئے مساوات 2.38 دیکھیں۔) یوں مساوات 2.85 اور مساوات 2.40 کی مدد سے بلا تقصیر نظام کی عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.86) \quad y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

ہم دیکھتے ہیں کہ نظام کا رد عمل دو مختلف تعدد کے ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

گمک

مساوات 2.85 کا حیث

$$(2.87) \quad a = \frac{F_0}{k} \rho, \quad \rho = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

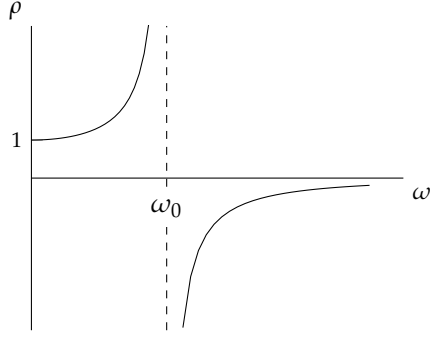
ω اور ω_0 پر منحصر ہے۔ $\omega \rightarrow \omega_0$ کرنے سے $\rho \rightarrow \infty$ اور $a \rightarrow \infty$ ہو گا۔ داخلی جبری قوت کی تعدد کو نظام کی قدرتی تعدد کے برابر ($\omega = \omega_0$) کرنے سے انتہائی زیادہ حیثے کی پیدا ارتعاش کو گمک⁸⁰ کہتے ہیں۔ ρ کو گمکی جزو⁸¹ کہتے ہیں جسے شکل 2.22 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 2.87 سے $\frac{\rho}{k} = \frac{a_0}{F_0}$ لکھا جا سکتا ہے جو مخصوص حل y_p اور داخلی جبری قوت کے حیثوں کا تناسب ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ ارتعاشی نظام میں گمک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ گمک کی صورت میں غیر متجانس مساوات 2.81 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$(2.88) \quad y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

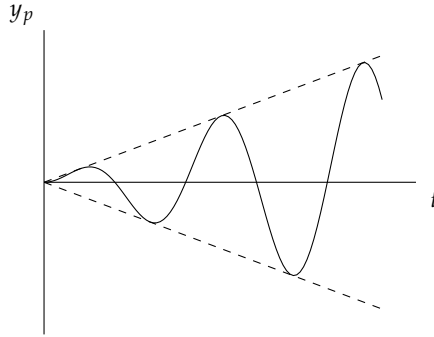
جس کا حل مساوات 2.85 نہیں دیتی۔ مساوات 2.88 کا مخصوص حل y_p ، صفحہ 153 پر دیے گئے تریبی قاعدہ کے تحت

$$y_p(t) = t(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$$

resonance⁸⁰
resonance factor⁸¹



شکل 2.22: گنگی جزو $\rho(\omega)$



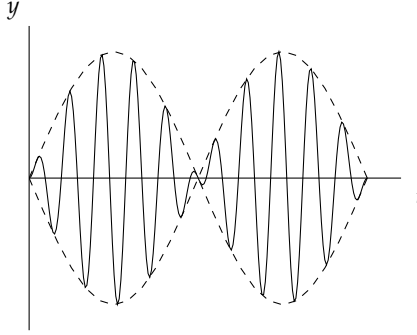
شکل 2.23: گنگ کی صورت میں مخصوص حل۔

ہو گا جس کو مساوات 2.88 میں پر کرتے ہوئے $a = 0$ اور $b = \frac{F_0}{2m\omega_0}$ ملتے ہیں لہذا مخصوص حل

$$(2.89) \quad y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

ہو گا جسے شکل 2.23 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ جزو t کی وجہ سے ارتعاش کا چٹہ مسلسل بڑھتا ہے۔ عملاً اس کا مطلب ہے کہ کم قسری نظام زیادہ جھولے گا۔ نہایت کم تقصیر کی صورت میں نظام جھولنے سے تباہ ہو سکتا ہے۔

تھاپ



شکل 2.24: قریبی سر تھا پ پیدا کرتے ہیں۔

ω اور ω_0 قریب قریب ہونے کی صورت میں ایک دلچسپ صورت پیدا ہوتی ہے۔ اسے سمجھنے کی خاطر مساوات 2.86 میں $C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ اور $\delta = 0$ لکھتے ہیں۔

$$(2.90) \quad y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega_0 t + \cos \omega t) \quad (\omega \neq \omega_0)$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$(2.91) \quad y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ ω_0 اور ω نہایت قریب ہیں لہذا $\frac{\omega_0 - \omega}{2}$ چھوٹی مقدار ہوگی اور یوں دائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ زیادہ ہوگا۔ اس کے برعکس $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$ بڑی مقدار ہوگی لہذا بائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ کم ہوگا۔ شکل 2.24 میں اس مساوات کو دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر دائیں سائن تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔ اس شکل کے تفاعل کی آواز میں بلند تعدد کے ساتھ ساتھ کم تعدد بھی سنائی دیتی ہے جنہیں تھا پ⁸² کہتے ہیں۔ موسیقار تھا پ پر دھیان دیتے ہوئے موسیقی آلے کی تعدد درست کرتا ہے۔

دوسری صورت: قصری جبری ارتعاش

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک قابل نظر انداز نہ ہونے کی صورت میں $c > 0$ ہوگا اور (جیسا ہم حصہ 2.4 میں دیکھ چکے ہیں) متجانس مساوات 2.79 کا حل y_h وقت گزرتے گھٹے گا حتیٰ کہ $t \rightarrow \infty$ پر

⁸²beats

$y_h \rightarrow 0$ ہو گا۔ عملاً کافی دیر بعد y_h صفر کے برابر ہو گا لہذا مساوات 2.81 کا عارضی حل⁸³ مساوات 2.84 یعنی $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حال حل⁸⁴ y_p کے برابر ہو گا۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 2.8: برقرار حال حل
سائن نما جبری قوت کی موجودگی میں قسری ارتعاشی نظام کافی دیر کے بعد عملاً ہارمونی ارتعاش کرے گا جس کی تعدد داخلی تعدد کے برابر ہو گی۔

2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک

بلا تقصیر نظام میں $\omega \rightarrow \omega_0$ کرنے سے y_p کا حیطہ لامتناہی ہو گا۔ قسری نظام میں ایسا نہیں ہوتا اور y_p کا حیطہ محدود رہتا ہے۔ ہاں کسی مخصوص ω پر حیطہ زیادہ سے زیادہ ہو سکتا ہے جس کا دارومدار c کی قیمت پر ہو گا۔ ایسی صورت کو عملی گمک کہہ سکتے ہیں۔ عملی گمک اس لئے اہم ہے کہ اگر c کی قیمت زیادہ نہ ہو تب عین ممکن ہے کہ داخلی جبری قوت نظام میں نقصان دہ یا تباہ کن حیطے کی ارتعاش پیدا کر سکے۔ جس زمانے میں انسان کو گمک کی سمجھ نہ تھی اس زمانے میں اس کو ایسے نقصان اٹھانے پڑتے تھے۔ مشین، جہاز، گاڑی، پل اور بلند عمارتیں وہ میکانیکی نظام ہیں جن میں ارتعاش پایا جاتا ہے۔ زلزلہ یا آندھی بطور جبری قوت بلند عمارت میں تباہ کن گمک پیدا کرتے ہوئے اسے لمبے کا ڈھیر بنا سکتی ہے۔ بعض اوقات گمک سے پاک نظام کی تخلیق ناممکن ہوتی ہے۔

y_p کا حیطہ بالمقابل ω پر غور کی خاطر مساوات 2.82 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$(2.92) \quad y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta)$$

جہاں

$$(2.93) \quad C^*(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

$$\eta(\omega) = \tan^{-1} \frac{b}{a} = \tan^{-1} \frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

⁸³ transient solution
⁸⁴ steady state solution

ہیں۔ انہیں شکل 2.25 میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ C^* رد عمل y_p کا حیض⁸⁵ اور η اس کا زاویائی فاصلہ⁸⁶ ہے۔ داخلی جبری تفاعل اور y_p میں زاویائی فرق η کے برابر ہو گا۔ مثبت η کی صورت میں مساوات 2.92 کے تحت داخلی قوت سے y_p پیچھے⁸⁷ ہے۔

حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کرنے کی خاطر C^* کے تفرق کو صفر کے برابر $(\frac{dC^*}{d\omega} = 0)$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dC^*}{d\omega} = -\frac{F_0[2m^2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2c^2\omega]}{2[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

کسر کا شمار کنندہ صفر ہونے کی صورت میں درج بالا صفر کے برابر ہو گا جس سے

$$(2.94) \quad c^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \omega^2) \quad (\omega_0^2 = \frac{k}{m})$$

یعنی

$$(2.95) \quad 2m^2\omega^2 = 2m^2\omega_0^2 - c^2 = 2mk - c^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے $c^2 > 2mk$ کی صورت میں خیالی تعدد $\omega = \mp i\sqrt{\frac{c^2 - 2mk}{2m^2}}$ حاصل ہوتا ہے۔ خیالی تعدد حساب کے نقطہ نظر سے درست جواب ہے لیکن عملی دنیا میں تعدد کی قیمت صرف حقیقی قیمت ممکن ہے۔ ایسی صورت میں ω کی قیمت بڑھانے سے C^* کی قیمت گھٹتی ہے۔ اس کے برعکس $c^2 < 2mk$ کی صورت میں مساوات 2.95 سے حقیقی تعدد بلندتر ω

$$(2.96) \quad \omega_{\text{بلندتر}}^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}$$

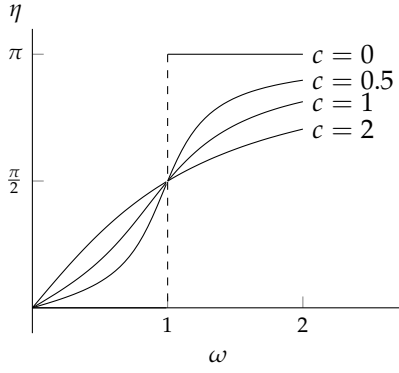
حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 2.96 سے ظاہر ہے کہ c کی قیمت کم کرنے سے بلندتر ω کی قیمت ω_0 بڑھتی ہے حتیٰ کہ $c \rightarrow 0$ کی صورت میں $\omega_{\text{بلندتر}} \rightarrow 0$ حاصل ہوتا ہے۔

بلندتر ω کو مساوات 2.93 میں پر کرنے سے $(\omega_{\text{بلندتر}}) C^*$ حاصل کرتے ہیں۔

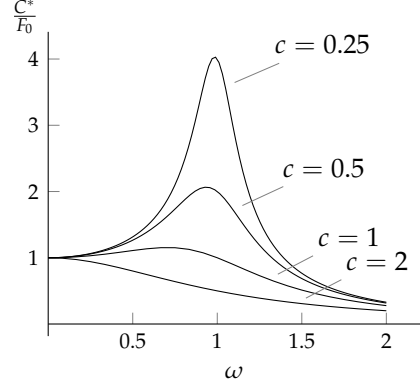
$$(2.97) \quad C^*(\omega_{\text{بلندتر}}) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2})^2 + c^2(\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2})}} = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $c \rightarrow 0$ کرنے سے $C^* \rightarrow \infty$ حاصل ہو گا یعنی بلا تقصیر صورت میں لاقتناہی حیض پایا جائے گا۔

amplitude⁸⁵
phase angle⁸⁶
lagging⁸⁷



(ب) $\omega_0 = 1, m = 1, k = 1$ رکھتے ہوئے
مختلف c کے لئے η بالقابل ω



(الف) $\omega_0 = 1, m = 1, k = 1$ رکھتے ہوئے
مختلف c کے لئے $\frac{C^*}{F_0}$ بالقابل ω

شکل 2.25: مساوات 2.93 کا محیط اور زاویائی فاصلہ۔

سوالات

سوال 2.131 تا سوال 2.134 اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی تفرقی مساوات ہیں۔ ان کے برقرار حال حل دریافت کریں۔

سوال 2.131: $y'' + 7y' + 10y = 4 \cos 3t$
جواب: $y = \frac{2}{221} \cos 3t + \frac{42}{221} \sin 3t$

سوال 2.132: $y'' + 4y' + 3y = 2 \sin 6t$
جواب: $y = \frac{16}{555} \cos 6t - \frac{22}{555} \sin 6t$

سوال 2.133: $10y'' + 11y' + 3y = 20 + 15 \cos 3t - 5 \sin 2t$
جواب: $y = 6.67 + 0.057 \sin 3t - 0.151 \cos 3t + 0.0998 \sin 2t + 0.059 \cos 2t$

سوال 2.134: $2y'' + 3y' + y = 0.8 + \sin 2t$
جواب: $y = 0.8 - 0.08 \sin 2t - 0.07 \cos 2t$

سوال 2.135 تا سوال 2.143 کے عارضی حل دریافت کریں۔

سوال 2.135: $6y'' + 7y' + 2y = 3 \sin(3.5t)$
 جواب: $y = Ae^{-\frac{1}{2}t} = k - 2e^{-\frac{2}{3}t} - 0.037 \sin(3.5t) - 0.013 \cos(3.5t)$

سوال 2.136: $y'' + 2y' + 2y = 2 \sin 2t$
 جواب: $y = e^{-t}(A \cos t + B \sin 2t) - 0.4 \cos 2t - 0.2 \sin 2t$

سوال 2.137: $y'' + 9y = 4 \cos 3t$
 جواب: $y = A \cos 3t + B \sin 3t + \frac{2}{3}t \sin 3t + \frac{2}{9} \cos 3t$

سوال 2.138: $y'' + 3y = \cos \sqrt{3}t - \sin \sqrt{3}t$
 جواب: $y = A \cos \sqrt{3}t + B \sin \sqrt{3}t + \frac{t}{2\sqrt{3}}(\cos \sqrt{3}t + \sin \sqrt{3}t) + \frac{1}{6} \cos \sqrt{3}t$

سوال 2.139: $y'' + 2y' + 5y = 3 \cos 2t + 2 \sin 2t$
 جواب: $y = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) - \frac{10}{17} \cos 2t + \frac{11}{17} \sin 2t$

سوال 2.140: $y'' + y = 5 \sin \omega t \quad (\omega^2 \neq 1)$
 جواب: $y = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \frac{5}{\omega^2 - 1} \sin \omega t$

سوال 2.141: $y'' + 4y = 3 \cos 2t$
 جواب: $y = A \cos 2t + B \sin 2t + \frac{3}{4}t \sin 2t + \frac{3}{8} \cos 2t$

سوال 2.142: $y'' + 4y = e^{-2t} \cos 2t$
 جواب: $y = A \cos 2t + B \sin 2t + \frac{e^{-2t}}{20}(\cos 2t - 2 \sin 2t)$

سوال 2.143: $y'' + 4y' + 5y = 2 \cos t + 3 \sin t$
 جواب: $y = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t) - \frac{1}{8} \cos t + \frac{5}{8} \sin t$

سوال 2.144 تا سوال 2.149 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 2.144: $y'' + 4y = 5 \cos t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$
 جواب: $y = \frac{5}{3} \cos t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{2}{3} \cos 2t$

سوال 2.145: $y'' + 9y = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 4t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{5}$
 جواب: $y = \frac{1}{8} \sin t + \frac{1}{10} \sin 2t + \frac{1}{168} \sin 3t - \frac{1}{28} \sin 4t$

سوال 2.146: $y'' + 4y' + 8y = 4 \cos(0.5t)$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = 0.125 \sin(0.5t) + 0.484 \cos(0.5t) + e^{-2t} [3.516 \cos 2t + 2.485 \sin 2t]$

سوال 2.147: $y'' + 4y' + 5y = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 جواب: $y = \frac{e^{-2t}}{15} (8 \sin t - 4 \cos t) + \frac{e^{-0.5t}}{15} [4 \cos(0.5t) + 2 \sin(0.5t)]$

سوال 2.148: $y'' + 36y = \cos \pi t - \sin \pi t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 جواب: $y = \frac{1}{\pi^2 - 36} (\sin \pi t - \cos \pi t + \cos 6t + \frac{\pi^2 - \pi - 36}{6} \sin 6t)$

سوال 2.149: $y'' + 36y = \cos(5.9t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ تھاپ
 جواب: $y = \frac{19}{119} \cos 6t + \frac{100}{119} \cos(5.9t)$

سوال 2.150: خود کار بندوق⁸⁸ کے چلنے سے گولی پر نہایت کم دورانیے کے لئے قوت عمل کرتا ہے اور اتنا ہی قوت بندوق کی نالی پر الٹ سمت میں عمل کرتا ہے۔ نالی کا جھکا اسپرنگ برداشت کرتا ہے۔ اس قوت کو تفاعل $1 - \frac{t^2}{\pi^2}$ سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل تفرقی مساوات حل کریں جس میں $y(0) = 0$ اور $y'(0) = 0$ ہوں گے۔ لمحہ $t = \pi$ پر y اور y' دونوں استمراری ہیں۔

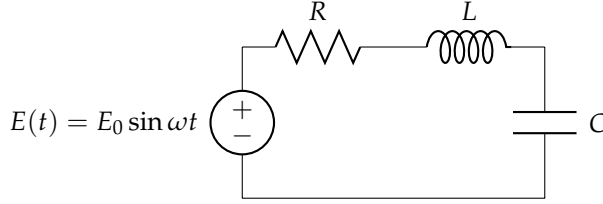
$$y'' + y = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{\pi^2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t < 0, t > \pi \end{cases}$$

جواب: $y = (1 + \frac{2}{\pi^2})(1 - \cos t) - \frac{t^2}{\pi^2}$

2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی

شکل 2.26 میں مزاحمت R ، امالہ L اور برق گیر⁸⁹ C کو منبع دباؤ کے ساتھ سلسلہ وار جوڑا گیا ہے۔ اس دور کو سلسلہ وار RLC دور کہتے ہیں۔ ہم صفحہ 56 پر مثال 1.20 میں مزاحمت اور امالہ کا سلسلہ وار RL دور دیکھ چکے ہیں جہاں مزاحمت پر دباؤ $v_R = IR$ اور امالہ پر دباؤ $v_L = L \frac{dI}{dt}$ کے مجموعے کو کر خوف کے قانون برائے

automatic gun⁸⁸
 capacitor⁸⁹



شکل 2.26: مزاحمت، امالہ اور برقی گیر سلسلہ وار منبع دباؤ کے ساتھ جڑے ہیں۔

دباؤ کے تحت درآیدہ دباؤ E کے برابر پر کیا گیا۔ موجودہ RLC میں v_R اور v_L کے ساتھ برقی گیر کا دباؤ v_C بھی جمع کیا جائے گا۔ برقی گیر پر دباؤ v_C اور اس میں ذخیرہ بار Q^{90} کا تعلق $Q = Cv_C$ ہے۔ برقی گیر کی اکائی فی راڈ F^{91} جبکہ بار کی اکائی کولمب C^{92} ہے۔ برقی بار اور برقی رو کا تعلق $Q = \int I dt$ استعمال کرتے ہوئے برقی گیر کے رو اور دباؤ کا تعلق

$$(2.98) \quad v_C = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

حاصل ہوتا ہے۔

یوں کر خوف مساوات دباؤ

$$(2.99) \quad LI' + RI + \frac{1}{C} \int I dt = E_0 \sin \omega t dt$$

ہوگی جو مکمل و تفرقی مساوات ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے مکمل سے پاک تفرقی مساوات

$$(2.100) \quad LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مستقل عددی سروالی غیر متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا حل $I(t)$ دے گا۔ مساوات 2.99 میں مکمل Q کے برابر ہے جبکہ $I = \frac{dQ}{dt}$ لکھا جاسکتا ہے جن سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے جس کا حل $Q(t)$ دے گا۔

$$(2.101) \quad LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t) = E_0 \sin \omega t$$

charge⁹⁰
Farad⁹¹
Coulomb⁹²

سلسلہ واردور میں رو کا حصول

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.100 کا حل $I = I_h + I_p$ ہو گا جہاں I_h مطابقتی متجانس مساوات کا عمومی حل اور I_p غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل ہے۔ ہم I_p کو نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 2.100 میں

$$\begin{aligned} I_p &= a \cos \omega t + b \sin \omega t \\ I_p' &= -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t \\ I_p'' &= -\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.102)$$

پر کرتے ہوئے دونوں اطراف $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں اور اسی طرح دونوں اطراف $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) a + \omega R b &= \omega E_0 \\ -\omega R a + \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) b &= 0 \end{aligned}$$

ان مساوات کو ω سے تقسیم کرتے ہوئے

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (2.103)$$

لکھتے ہیں جہاں S کو متعاملیت⁹³ کہتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -Sa + Rb &= E_0 \\ -Ra - Sb &= 0 \end{aligned}$$

b حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو S اور دوسری کو R سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔
 a حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو R اور دوسری کو $-S$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$-(S^2 + R^2)a = E_0 S, \quad (R^2 + S^2)b = E_0 R \quad (2.104)$$

ان سے درج ذیل عددی سر حاصل ہوتے ہیں

$$a = -\frac{E_0 S}{S^2 + R^2}, \quad b = \frac{E_0 R}{S^2 + R^2} \quad (2.105)$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے I_p لکھتے ہیں۔

$$(2.106) \quad I_p(t) = -\frac{E_0 S}{S^2 + R^2} \cos \omega t + \frac{E_0 R}{S^2 + R^2} \sin \omega t$$

اس کو

$$(2.107) \quad I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \theta)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(2.108) \quad I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{E_0}{\sqrt{S^2 + R^2}}, \quad \tan \theta = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R}$$

ہیں۔ I_0 کو رو کا حیظہ اور θ کو رو کا زاویہ کہتے ہیں۔ داخلی دباؤ سے رو θ زاویے کے فاصلے پر ہے۔ درج بالا مساوات میں $\frac{E_0}{I_0} = \sqrt{S^2 + R^2}$ لکھا جاسکتا ہے جو قانون اوہم سے مشابہت رکھتا ہے لہذا $\sqrt{S^2 + R^2}$ کو برقی رکاوٹ⁹⁴ کہا جاتا ہے۔

مساوات 2.100 کے مطابقتی متجانس مساوات کی امتیازی مساوات

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

کے جذر

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ہیں جن میں $\alpha = \frac{R}{2L}$ اور $\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ لکھتے ہوئے

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں I_h درج ذیل ہو گا۔

$$I_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

کسی بھی حقیقی دور میں R کبھی بھی صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ یوں $R > 0$ اور $\alpha > 0$ ہوں گے۔ اس طرح $t \rightarrow \infty$ پر $I_h \rightarrow 0$ ہو گا لہذا RLC دور کا عمومی حل آخر کار I_p کے برابر ہو گا جو داخلی دباؤ کے تعدد ω پر ہارمونی ارتعاش کرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔

⁹⁴ impedance

مثال 2.28: سلسلہ وار RLC دور میں سو اوہم کی مزاحمت $R = 100 \Omega$ ، آدھا ہینری امالہ $L = 0.5 \text{ H}$ ، بیس ملی فیراڈ برقی گیر $C = 20 \text{ mF}$ اور داخلی دباؤ $E(t) = 310 \sin(2\pi 50t)$ وولٹ ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر رو اور برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر کے برابر ہیں۔ دور میں رو $I(t)$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.100 میں دی گئی معلومات پر کرتے ہوئے

$$0.5I'' + 100I' + 50I = (100\pi)(310) \cos(100\pi t)$$

ملتا ہے جس سے متجانس مساوات $0.5I'' + 100I' + 50I = 0$ لکھ کر امتیازی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$0.5\lambda^2 + 100\lambda + 50 = 0$$

امتیازی مساوات کے جذر $\lambda_1 = -199.5$ اور $\lambda_2 = -0.5$ ہیں لہذا

$$I_h(t) = c_1 e^{-199.5t} + c_2 e^{-0.5t}$$

ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو گا۔

دور کی تعاملیت $S = 100\pi \cdot 0.5 - \frac{1}{100\pi \cdot 0.02} = 156.92$ لیتے ہوئے

$$I_p(t) = a \cos(100\pi t) + b \sin(100\pi t)$$

کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$a = -\frac{310 \times 156.92}{156.92^2 + 100^2} = -1.4049, \quad b = \frac{310 \times 100}{156.92^2 + 100^2} = 0.8953$$

یوں

(2.109)

$$I_p(t) = -1.4049 \cos(100\pi t) + 0.8953 \sin(100\pi t) = 1.422 \sin(100\pi t - 1.003)$$

ہو گا لہذا عمومی حل

$$I(t) = I_h + I_p = c_1 e^{-199.5t} + c_2 e^{-0.5t} + 1.422 \sin(100\pi t - 1.003)$$

ہو گا۔ ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے c_1 اور c_2 دریافت کرتے ہیں۔ عمومی حل میں $t = 0$ پر $I(0) = 0$ پر کرنے سے

$$(2.110) \quad c_1 + c_2 - 1.4049 = 0, \implies c_1 = 1.4049 - c_2$$

ملتا ہے۔ مساوات 2.99 میں مکمل کی قیمت بار کے برابر ہے یعنی $\int I dt = Q$ لہذا $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $I(0) = 0$ اور $Q(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.99 سے

$$LI'(0) + RI(0) = E_0 \sin 0 \implies I' = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق میں $I'(0) = 0$ پر کرنے سے

$$I'(0) = -199.5c_1 - 0.5c_2 + 0.8953(2\pi 50) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 2.110 کی مدد سے حل کرتے ہوئے $c_1 = 1.4099$ اور $c_2 = -0.00497$ ملتے ہیں۔ یوں مخصوص حل یعنی دور میں رو درج ذیل ہو گی۔

$$I(t) = 1.4099e^{-199.5t} - 0.00497e^{-0.5t} + 1.422 \sin(100\pi t - 1.003)$$

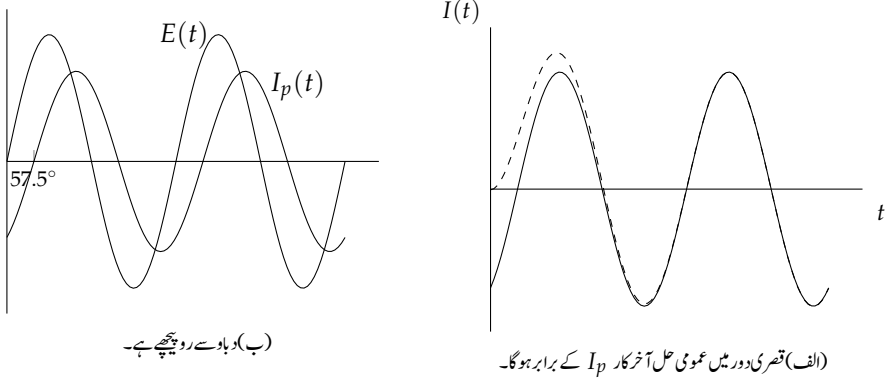
شکل 2.27-الف میں $I(t)$ کو نقطہ دار لکیر جبکہ I_p کو ٹھوس لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ چونکہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو جاتا ہے لہذا I اور I_p میں صرف شروع میں فرق پایا جاتا ہے۔ شکل-ب میں $E(t)$ اور $I_p(t)$ کو دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں میں زاویائی فاصلہ 1.003 ریڈین یعنی 57.5° ہے جو شکل میں صاف واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ دباو سے رو 57.5° پیچھے⁹⁵ ہے۔ آپ یہاں خود تسلی کر سکتے ہیں کہ $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو سے رو پیچھے ہو گی جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو سے رو آگے ہو گی۔ $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو اور رو ہم زاویہ⁹⁶ ہوں گے یعنی ان میں زاویائی فاصلہ نہیں پایا جاتا۔

برقی اور میکانیکی مقدار کی مماثلت

دو بالکل مختلف نظام کی ایک ہی تفرقی مساوات ہو سکتی ہے۔ اسپرنگ اور کمیت کی تفرقی مساوات 2.81 اور سلسلہ وار RLC کی مساوات 2.100 کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t, \quad LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t$$

lagging⁹⁵
in-phase⁹⁶



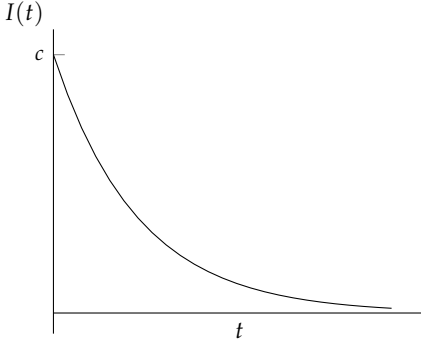
شکل 2.27: مثال 2.28 کی رو کے خطوط۔

جدول 2.3: میکانی اور برقی نظام میں یکساں عناصر۔

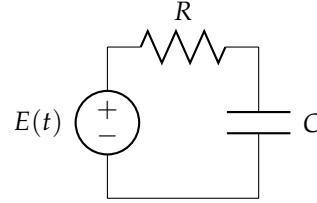
برقی نظام	میکانی نظام
امالہ L	کمیت m
مزاحمت R	قسری مستقل c
برق گیر کا بالکس $\frac{1}{C}$	اسپرنگ مستقل k
داخلی دباؤ کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$	جبری قوت $F_0 \cos \omega t$
برقی رو $I(t)$	ہٹاو $y(t)$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میکانی نظام میں کمیت اور برقی نظام میں امالہ تفرقی مساوات میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔ کمیت کی جمود کی طرح امالہ برقی دور کی رو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ اسی طرح c اور R تفرقی مساوات میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں اور نظام میں توانائی کی ضیاع کا باعث بنتے ہیں۔ اسپرنگ کا مستقل k اور برق گیر کا بالکس متناسب $\frac{1}{C}$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔ میکانی جبری قوت $F_0 \cos \omega t$ اور برقی داخلی دباؤ کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔ میکانی اور برقی نظام کی یکسانیت کو جدول 2.3 میں پیش کیا گیا ہے۔

میکانی اور برقی نظام میں یکسانیت صحیح معنوں میں صرف مقداری نوعیت کی ہے۔ یوں ہم میکانی نظام کے مطابق ایسا برقی دور تخلیق دے سکتے ہیں جس میں رو بالمقابل وقت میکانی نظام میں ہٹاو بالمقابل وقت کے بالکل برابر ہوگی۔ یہ ایک انتہائی اہم نتیجہ ہے کیونکہ میکانی نظام مثلاً پل یا بلند عمارت کا برقی نمونہ انتہائی آسانی اور سستے دام بناتے ہوئے اس کی کارکردگی پر تفصیلاً غور کیا جاسکتا ہے۔ مزید، برقی متغیرات مثلاً رو یا دباؤ انتہائی آسانی سے ٹھیک ٹھیک ناپے جاسکتے ہیں جبکہ میکانی متغیرات اتنے آسانی سے اور ٹھیک ٹھیک ناپنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔



سلسلہ وار RC کی رو با متقابل وقت۔



(الف) سلسلہ وار RC دور۔

شکل 2.28: سلسلہ وار RC دور اور اس کی رو۔

میکانی متغیرات کو برقی متغیرات میں تبدیل کرنے والے کئی مبدل⁹⁷ اسی مشابہت پر کام کرتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.151 تا سوال 2.157 خصوصی سلسلہ وار RLC ادوار ہیں۔

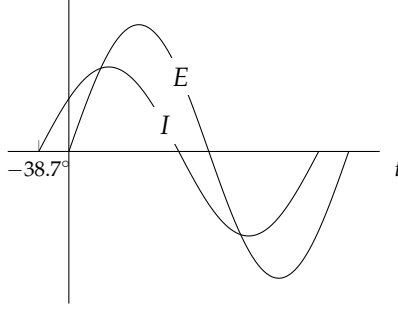
سوال 2.151: سلسلہ وار RC دور شکل 2.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں داخلی دباؤ مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔ دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: $0 = RI' + \frac{I}{C}$ ، رو $I = ce^{-\frac{t}{RC}}$ کو شکل 2.28-ب میں دکھایا گیا ہے۔

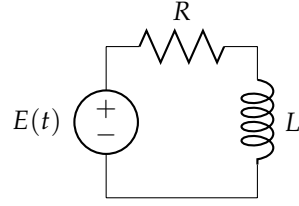
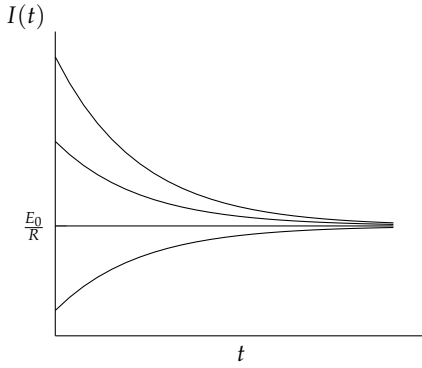
سوال 2.152: شکل 2.28-الف کو سائن نما برقی دباؤ $E(t) = E_0 \sin \omega t$ کے لئے حل کریں۔

جواب: $RI' + \frac{I}{C} = \omega E_0 \cos \omega t$ ، $I = ce^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega CE_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} (\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t)$

سوال 2.153: شکل 2.28-الف میں $R = 50 \Omega$ ، $C = 0.25 \text{ mF}$ اور $E(t) = 20 \sin 100t$ لیتے ہوئے برقرار حال رو دریافت کریں۔ دباؤ کو حوالہ لیتے ہوئے برقرار حل رو کا زاویہ کتنا ہے؟ $E(t)$ اور $I(t)$ کے خط اکٹھے کھینچیں۔



شکل 2.29: RC دور میں دباؤ سے برقرار رو آگے رہتی ہے۔



(الف) سلسلہ وار RL دور۔

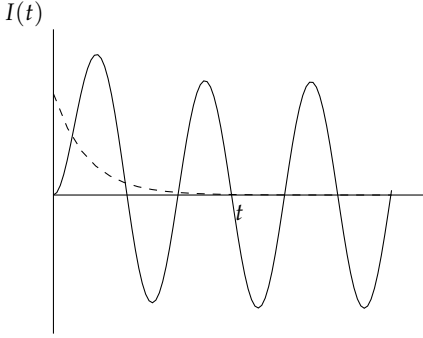
سلسلہ وار RL کی رو بالمتقابل وقت۔ داخلی دباؤ مستقل مقدار ہے۔

شکل 2.30: سلسلہ وار RL دور اور اس کی رو۔

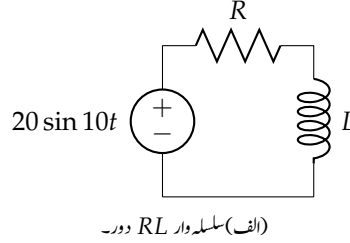
جواب: $I_p = \frac{2}{\sqrt{41}} \sin(100t + 0.6747)$ ؛ دباؤ سے رو 38.7° زاویہ آگے ہے۔ RC دور میں داخلی دباؤ سے رو 0° تا 90° آگے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.29 میں دباؤ اور رو کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کے حیطے ٹھیک تناسب سے نہیں دکھائے گئے ہیں۔

سوال 2.154: سلسلہ وار RL دور شکل 2.30-الف میں دکھایا گیا ہے۔ داخلی دباؤ مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔ دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: $LI' + RI = E_0$ ، $I = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}$ کو شکل 2.30-ب میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔

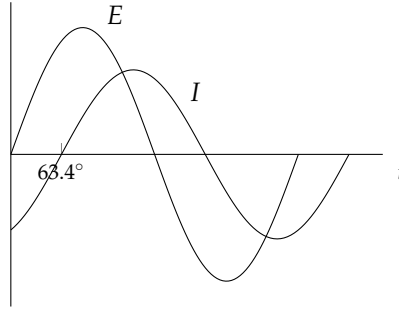


سلسلہ وار RL کی رو با متقابل وقت۔ داخلی دباؤ مستقل مقدار ہے۔



(الف) سلسلہ وار RL دور۔

شکل 2.31: سوال 2.155 کا دور۔



شکل 2.32: RL دور میں دباؤ سے برقرار رو پیچھے رہتی ہے۔

سوال 2.155: شکل 2.31-الف میں $R = 5 \Omega$ اور $L = 1 \text{ H}$ لیں۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $I(0) = 0$ لیتے ہوئے $I(t)$ حاصل کریں۔ رو کا خط کھینچیں۔

جواب: $LI' + RI = E_0 \sin \omega t$ ، $I = \frac{8}{5}e^{-5t} + \frac{4}{5} \sin 10t - \frac{8}{5} \cos 10t$

سوال 2.156: شکل 2.31-الف میں $R = 10 \Omega$ اور $L = 2 \text{ H}$ لیں۔ برقرار حل رو دریافت کریں۔ دباؤ کے حوالے سے رو کا زاویہ کتنا ہے۔ داخلی دباؤ اور برقرار رو کے خط کھینچیں۔

جواب: $I = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(10t - 1.107)$ ؛ داخلی دباؤ سے رو 63.4° زاویہ پیچھے ہے۔ RL دور میں داخلی دباؤ سے رو 0° تا 90° پیچھے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.32 میں دونوں خطوط دکھائے گئے ہیں۔

سوال 2.157: سلسلہ وار LC دور میں $L = 2H$ اور $C = 0.02F$ ہیں۔ $R = 0$ ہونے کی ناطے LC دور بلا تقصیر ہو گا۔ یوں LC نظام بلا تقصیر اسپرنگ اور کمیت کی نظام کی طرح ہے۔ اس دور کا داخلی دباؤ $E(t) = \sin 5t$ ہے۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر رد اور برق گیر میں ذخیرہ بار دونوں صفر کے برابر ہیں۔ رو کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $I(t) = \cos 5t - \cos 100t$

سوال 2.158 تا سوال 2.165 شکل 2.26 کے سلسلہ وار RLC دور پر مبنی ہیں۔ ان کی برقرار حال رو دریافت کریں۔

سوال 2.158: $R = 6\Omega$, $L = 0.4H$, $C = 0.1F$, $E = 100 \sin 2t V$
جواب: $I = 13.65 \sin(2t + 0.611) A$

سوال 2.159: $R = 6\Omega$, $L = 0.4H$, $C = 0.1F$, $E = 100 V$
جواب: $I = 0 A$

سوال 2.160: $R = 6\Omega$, $L = 0.4H$, $C = 0.1F$, $E = 100 \sin 5t V$
جواب: $I = \frac{50}{3} \sin 5t A$

سوال 2.161: $R = 6\Omega$, $L = 0.4H$, $C = 0.1F$, $E = 100 \sin 7t V$
جواب: $I = 16.25 \sin(7t - 0.225) A$

سوال 2.162: $R = 2\Omega$, $L = 0.8H$, $C = 1.2F$, $E = 50 \cos 10t V$
جواب: $I = 5.9 \sin 10t + 1.5 \cos 10t A$

سوال 2.163: $R = 1\Omega$, $L = 0.5H$, $C = 1.5F$, $E = 10 \cos t V$
جواب: $I = -1.6 \sin t + 9.7 \cos t A$

سوال 2.164: $R = 0.1\Omega$, $L = 0.2H$, $C = 0.01F$, $E = 20 \sin 10t + 10 \sin 100t V$
جواب: $I = 0.003 \sin 100t - 0.526 \cos 100t + 0.031 \sin 10t + 2.5 \cos 10t A$

سوال 2.165: اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں کم قسری، فاصل قسری اور زیادہ قسری صورت پائے گئے۔ سلسلہ وار RLC دور میں کم قسری، فاصل قسری اور زیادہ قسری صورت کے شرائط معلوم کریں۔

2.10. مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

جوابات: کم قسری صورت $R^2 < \frac{4L}{C}$ دیتی ہے، جبکہ فاصل قسری صورت میں $R^2 = \frac{4L}{C}$ اور زیادہ قسری صورت میں $R^2 > \frac{4L}{C}$ ہو گا۔

سوال 2.166 تا سوال 2.168 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں جن میں ابتدائی رو اور برق گیر میں ذخیرہ ابتدائی بار صفر ہیں۔ ان کی مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.166: $R = 0.1 \Omega, L = 0.22 H, C = 0.1 F, E = 36 \sin 15t V$
 جواب: $I = 0.52 \sin 15t - 13.65 \cos 15t + e^{-\frac{5}{22}t} (-0.69 \sin 6.74t + 13.65 \cos 6.74t) A$

سوال 2.167: $R = 2 \Omega, L = 0.1 H, C = 0.1 F, E = 10 \sin 100t V$
 جواب: $I = 0.196 \sin 100t - 0.97 \cos 100t + e^{-10t} (0.97 - 9.9t) A$

سوال 2.168: $R = 4 \Omega, L = 0.4 H, C = 0.2 F, E = 5 \sin 25t V$
 جواب: $I = 0.179 \sin 25t - 0.437 \cos 25t - 0.103e^{-1.46t} + 0.541e^{-8.54t} A$

2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

پہلے باب میں صفحہ 61 پر مثال 1.23 میں ہم نے مقدار معلوم بدلنے کے طریقے⁹⁸ سے تفرقی مساوات کا حل نکالا۔ اس ترکیب⁹⁹ سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.111) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں کھلے وقفے I پر $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ استمراری تفاعل ہیں۔ اس مساوات کو معیاری صورت میں لکھنا ضروری ہے جہاں y'' کا عددی سراکائی (1) کے برابر ہے۔ حصہ 2.6 میں ہم نے دیکھا کہ مساوات 2.111 کے مطابق متجانس مساوات کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.111 کے کسی بھی مخصوص حل y_p کا مجموعہ اس غیر متجانس مساوات کا عمومی حل دیتا ہے۔ سادہ $r(x)$ کی صورت میں نا معلوم

⁹⁸ variation of parameter

⁹⁹ یہ ترکیب یوسف لونی لگرٹھ سے منسوب ہے۔

عددی سرکی ترکیب استعمال کرتے ہوئے y_p حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس ترکیب پر حصہ 2.7 میں غور کیا گیا جبکہ حصہ 2.8 اور حصہ 2.9 میں اس کا استعمال کیا گیا۔

نا معلوم عددی سرکی ترکیب ان $r(x)$ کے لئے قابل استعمال ہے جن کے تفرق، اصل تفاعل کی صورت رکھتے ہوں مثلاً سائن نما تفاعل، قوت نمائی تفاعل اور x^n تفاعل۔ اس کے برعکس مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ زیادہ مشکل تفاعل کے لئے کارآمد ہے۔ اس ترکیب کے تحت مساوات 2.111 کا مخصوص حل

$$(2.112) \quad y_p(t) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 ، مطابقتی متجانس مساوات

$$(2.113) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

کے حل کی اساس ہیں اور W ان کی ورونسکی [حصہ 2.6 دیکھیں] ہے۔

$$(2.114) \quad W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

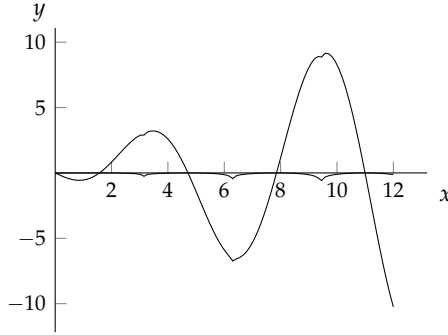
مساوات 2.111 میں متغیر عددی سرکی صورت میں مساوات 2.112 کے نکلات عملاً مشکلات پیش کرتے ہیں لہذا جہاں ممکن ہو وہاں نا معلوم عددی سرکی ترکیب استعمال کریں۔ مساوات 2.112 کے حصول سے پہلے ایک مثال دیکھتے ہیں جہاں نا معلوم عددی سرکی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے لہذا موجودہ ترکیب ہی استعمال کی جائے گی۔

مثال 2.29: درج ذیل غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل دریافت کریں۔

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x$$

حل: کسی بھی کھلے وقفے پر متجانس سادہ تفرقی مساوات کی اساس $y_1 = \cos x$ اور $y_2 = \sin x$ ہیں جن سے ورونسکی لکھتے ہیں۔

$$W = \cos^2 x - \sin x(\sin x) = 1$$



شکل 2.33: مثال 2.29 کے خطوط۔

مساوات 2.112 سے y_p حاصل کرتے ہیں

$$(2.115) \quad \begin{aligned} y_p(t) &= -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \, dx + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x \ln|\sin x| \end{aligned}$$

جہاں مکمل کے مستقل صفر چنے گئے ہیں۔

شکل 2.33 میں y_p اور اس کا دوسرا جزو دکھائے گئے ہیں۔ y_p کا دوسرا جزو اتنا کم ہے کہ حقیقتاً پہلا جزو $-x \cos x$ ہی y_p کی قیمت تعین کرتا ہے۔ غیر متجانس تفرقی مساوات کا عمومی حل $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ اور y_p کا مجموعہ ہو گا۔

$$(2.116) \quad y = y_h + y_p = (c_1 - x) \cos x + (c_2 + \ln|\sin x|) \sin x$$

مساوات 2.115 میں مکمل لیتے ہوئے مکمل کے مستقل a اور b بھی شامل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \, dx + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \, dx \\ &= -\cos x(x + a) + \sin x(\ln|\sin x| + b) \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ مساوات 2.116 کے ساتھ موازنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ از خود عمومی حل ہے۔

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.111 کا عمومی حل مساوات 2.112 میں مکملات کے مستقل شامل کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مقدار معلوم بدلنے کے طریقے کا حصول

اس ترکیب میں متجانس تفرقی مساوات کے حل

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

میں مستقل (یعنی مقدار معلوم) c_1 اور c_2 کی جگہ نامعلوم تفاعل $u(x)$ اور $v(x)$ پر کئے جاتے ہیں۔ اسی لئے اس کو مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ کہتے ہیں۔ $u(x)$ اور $v(x)$ کی ایسی قیمتیں چننی جاتی ہیں کہ

$$(2.117) \quad y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.111 کا مخصوص حل ہو۔ حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.4 کے تحت کھلے وقفہ I پر استمراری p اور q کی صورت میں اس وقفے پر y_h موجود ہو گا۔ جبری تفاعل r کے استمراری ہونے کی ضرورت جلد پیش آئے گی۔

مساوات 2.117 اور اس کے تفرق کو مساوات 2.111 میں پر کرتے ہوئے u اور v دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 2.117 کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y'_p = u'y_1 + uy'_1 + v'y_2 + vy'_2$$

ہم ایسی u اور v دریافت کر سکتے ہیں کہ y_p غیر متجانس تفرق مساوات پر پورا اترتا ہو جبکہ u اور v درج ذیل مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

$$(2.118) \quad u'y_1 + v'y_2 = 0$$

یوں y'_p نسبتاً آسان صورت اختیار کرتی ہے

$$(2.119) \quad y'_p = uy'_1 + vy'_2$$

جس کا تفرق لیتے ہوئے y''_p کی مساوات ملتی ہے۔

$$(2.120) \quad y''_p = u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + vy''_2$$

مساوات 2.117، مساوات 2.119 اور مساوات 2.120 کو مساوات 2.111 میں پر کرتے ہوئے

$$(u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + vy''_2) + p(uy'_1 + vy'_2) + q(uy_1 + vy_2) = r$$

2.10. مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

u ، اور v کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u(y_1'' + py_1' + qy_1) + v(y_2'' + py_2' + qy_2) + u'y_1' + v'y_2' = r$$

چونکہ y_1 اور y_2 متجانس مساوات 2.113 کے حل ہیں لہذا دونوں قوسین صفر کے برابر ہیں اور درج بالا مساوات نسبتاً سادہ صورت اختیار کر لیتی ہے۔

$$(2.121) \quad u'y_1' + v'y_2' = r$$

یہاں مساوات 2.118 کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(2.122) \quad u'y_1 + v'y_2 = 0$$

مساوات 2.121 اور مساوات 2.122 دو ہمزاد مساوات ہیں جنہیں حل کرتے ہوئے u اور v حاصل کرتے ہیں۔ v' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_2$ سے اور دوسری مساوات کو y_2' سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں

$$u'(y_1y_2' - y_2y_1') = -y_2r \quad \Rightarrow \quad u'W = -y_2r$$

جہاں W مساوات 2.114 ہے۔ اسی طرح u' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو y_1 اور دوسری کو $-y_1'$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$v'(y_1y_2' - y_2y_1') = y_1r \quad \Rightarrow \quad v'W = y_1r$$

چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہذا حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.3 کے تحت $W \neq 0$ ہو گا۔ اس طرح درج بالا مساوات کو W سے تقسیم کیا جاسکتا ہے جس سے

$$u' = -\frac{y_2r}{W}, \quad v' = \frac{y_1r}{W}$$

ملتے ہیں۔ مکمل لیتے ہوئے u اور v حاصل ہوتے ہیں۔

$$u = -\int \frac{y_2r}{W} dx, \quad v = \int \frac{y_1r}{W} dx$$

چونکہ کھلے وقفہ I پر r استمراری تفاعل ہے لہذا درج بالا نکلات موجود ہیں۔ حاصل u اور v کو مساوات 2.117 میں پر کرتے ہوئے مساوات 2.112 حاصل ہوتا ہے۔

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1r}{W} dx$$

سوالات

مساوات 2.169 تا مساوات 2.169 کو مقدار معلوم بدلنے کے طریقے یا نا معلوم عددی سرکی ترکیب سے حل کریں۔

سوال 2.169: $y'' + 4y = \sec 2x$
 جواب: $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x|$

سوال 2.170: $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$
 جواب: $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln |\sin 2x|$

سوال 2.171: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \cos x$
 جواب: $y_p = c_1 x^2 + c_2 x - x \cos x$

سوال 2.172: $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{cosec} x$
 جواب: $y_p = e^x (A \cos x + B \sin x) - x e^x \cos x + e^x \sin x \ln |\sin x|$

سوال 2.173: $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x$
 جواب: $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8}(1 - 2x) \cos 2x$

سوال 2.174: $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2}$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^{-3x} - e^{-3x}(1 + \ln x)$

سوال 2.175: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^{-x} - x e^{-x}(1 - \ln x)$

سوال 2.176: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^{-x} - e^{-x}(1 + \ln x)$

سوال 2.177: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^3}$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^{-x} + \frac{e^{-x}}{2x}$

سوال 2.178: $y'' + 4y = \sinh 2x$
 جواب: $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{8} \sinh 2x$

سوال 2.179: $y'' - 2y' + y = 28x^{\frac{1}{3}}e^x$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^x + 9x^{\frac{7}{3}}e^x$

2.10. مقدار معلوم ہونے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفریق مساوات کا حل

سوال 2.180: $y'' + 2y' + y = e^{-x} \operatorname{cosec}^3 x$
 جواب: $y_p = \frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{cosec} x [(A + B \sin 2x) + (1 - A) \cos 2x]$

سوال 2.181: $x^2 y'' + 6xy' + 6y = x$
 جواب: $y_p = \frac{x}{12} + c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3}$

سوال 2.182: $x^2 y'' + 7xy' + 9y = 25x^2$
 جواب: $y_p = x^2 + c_1 x^{-3} + c_2 x^{-2} \ln|x|$

باب 3

بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات

دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے طریقے بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی صورت میں مساوات زیادہ پیچیدہ ہوں گے، امتیازی مساوات کے جذر بھی تعداد میں زیادہ اور حصول میں نسبتاً مشکل ہوں گے اور ورنہ کسی زیادہ اہم کردار ادا کرے گا۔

3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم متغیرہ $y(x)$ کا $y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$ سب سے بلند درجی تفرق ہو۔ ایسی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں y اور کم درجی تفرق موجود یا غیر موجود ہو سکتے ہیں۔ ایسی مساوات کو خطی کہتے ہیں اگر اس کو

$$(3.1) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

لکھنا ممکن ہو۔ صفحہ 82 پر دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کی بات کی گئی۔ موجودہ مساوات میں $n = 2$ ،
 $p_1 = p$ اور $p_0 = q$ پر کرنے سے دو درجی مساوات حاصل ہوگی۔ عددی سر $p_0(x)$ تا $p_n(x)$ اور جبری
تفاعل $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں جبکہ $y(x)$ نامعلوم متغیرہ ہے۔ خطی مساوات
کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں $y^{(n)}$ کا عددی سر اکائی 1 ہے۔ تفرقی مساوات میں $p_n(x)y^{(n)}$
موجود ہونے کی صورت میں پوری مساوات کو $p_n(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کریں۔ جو
تفرقی مساوات درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر خطی کہلاتی ہے۔

کسی کھلے وقفے I پر $r(x)$ مکمل صفر $r \equiv 0$ ہونے کی صورت میں مساوات 3.1 سے متجانس مساوات
(3.2) $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$

حاصل ہوتی ہے۔ کھلے وقفے پر $r(x)$ کے مکمل صفر ہونے سے مراد یہ ہے کہ اس وقفے پر ہر x کے لئے $r(x)$
کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ دو درجی تفرقی مساوات کی طرح اگر $r(x)$ مکمل صفر نہ ہو تب مساوات غیر متجانس
کہلائے گی۔

کھلے وقفہ I پر n درجی خطی یا غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل $y = h(x)$ سے مراد ایسا تفاعل ہے
جو I پر معین ہو، کھلے وقفے پر اس کا n درجی تفرق موجود ہو اور تفرقی مساوات میں y اور اس کے تفرقات
کی جگہ h اور اس کے تفرقات پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں حاصل ہوں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات: خطی میل اور عمومی حل

خطی میل یا اصول خطیت جس کا ذکر صفحہ 84 مسئلہ 2.1 میں کیا گیا بلند درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کے
لئے بھی درست ہے۔

مسئلہ 3.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ بلند درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی بلند درجی تفرقی مساوات 3.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو
گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔ (یہ اصول غیر
خطی اور غیر متجانس مساوات پر لاگو نہیں ہوتا۔)

اس کا ثبوت گزشتہ باب میں دئے گئے ثبوت کی طرح ہے جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہماری بقایا گفتگو ہو بہو دو درجی تفرقی مساوات کی طرح ہوگی لہذا یہاں بلند درجی خطی متجانس مساوات کی عمومی حل کی بات کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر n عدد تفاعل کی خطی طور غیر تابع ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل
کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل

$$(3.3) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

ہے جہاں $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ حل کی اساس اور c_1 تا c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ یوں y_1 تا y_n کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

عمومی حل کے مستقل کی قیمتیں مقرر کرنے سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔

تعریف: خطی طور تابع تفاعل اور خطی طور غیر تابع تفاعل
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر n عدد تفاعل $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ معین ہیں۔

وقفہ I پر معین y_1 تا y_n ، اس وقفے پر اس صورت خطی طور غیر تابع¹ کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$(3.4) \quad k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$$

سے مراد

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

ہو۔ k_1 تا k_n میں کم از کم ایک کی قیمت صفر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 3.4 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 تا y_n خطی طور تابع² کہلاتے ہیں۔

¹ linearly independent
² linearly dependent

y_1 تا y_n میں (کم از کم ایک) تفاعل کو اس صورت بقایا تفاعل کے خطی میل کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جب اس وقفے پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہوں۔ یوں اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 3.4 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$y_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2y_2 + k_3y_3 + \cdots + k_ny_n)$$

لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ y_1 کو بقایا تفاعل کے خطی میل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسی کو خطی طور تابع کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 2$ کی صورت میں ہمیں حصہ 2.6 میں بیان کئے گئے تصورات ملتے ہیں۔

مثال 3.1: خطی طور تابع

ثابت کریں کہ تفاعل $y_1 = 2 \sin x$ ، $y_2 = 1.5x^2$ ، $y_3 = 5 \cos x + \sin x$ اور $y_4 = 4 \cos x$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور تابع ہیں۔

حل: ہم $y_3 = \frac{1}{2}y_1 + 0y_2 + \frac{5}{4}y_4$ لکھ سکتے ہیں لہذا y_1 تا y_4 خطی طور تابع تفاعل ہیں۔

مثال 3.2: خطی طور غیر تابع

ثابت کریں کہ $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ اور $y = x^4$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: ہم مساوات $k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 = 0$ میں مختلف x کی قیمتیں پر کرتے ہوئے k_1 تا k_3 دریافت کرتے ہیں۔ کھلے وقفے پر نقطہ $x = 1$ ، $x = -1$ اور $x = 2$ چنتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

$$-k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

$$2k_1 + 8k_2 + 16k_3 = 0$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $k_1 = 0$ ، $k_2 = 0$ اور $k_3 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور غیر تابع ہونے کا ثبوت ہے۔

مثال 3.3: اساس۔ عمومی حل $y^{(3)} - y' = 0$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ $y^{(3)}$ سے مراد $\frac{d^3 y}{dx^3}$ ہے۔

حل: حصہ 2.2 کی طرح ہم اس متجانس مساوات کا حل $y = e^{\lambda x}$ تصور کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ اس کو $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ لکھتے ہوئے $\lambda = 0$ اور $\lambda = \pm 1$ ملتے ہیں جن سے اساس $y_1 = c$ ، $y_2 = e^x$ اور $y_3 = e^{-x}$ ملتا ہے۔ جیسا مثال 3.5 میں ثابت کیا جائے گا، یہ اساس کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں لہذا کسی بھی کھلے وقفے پر عمومی حل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

ہو گا۔

ابتدائی قیمت مسئلہ۔ وجودیت اور یکتائی

مساوات 3.2 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.2 اور درج ذیل n ابتدائی شرائط پر مشتمل ہو گا

$$(3.5) \quad y(x_0) = K_0, y'(x_0) = K_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$$

جہاں x_0 کھلے وقفے I پر ایک نقطہ اور K_0 تا K_{n-1} اس نقطے پر دیے گئے مقدار ہیں۔

صفحہ 141 پر مسئلہ 2.2 کو وسعت دیتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

مسئلہ 3.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت بلند درجی تفرقی مساوات کھلے وقفہ I پر مساوات 3.2 کے عددی سر p_0 تا p_{n-1} استمراری ہونے کی صورت میں اگر x_0 کھلے وقفہ پر پایا جاتا ہو تب مساوات 3.2 اور مساوات 3.5 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا حل $y(x)$ موجود ہے۔

حل کی موجودگی کا ثبوت اس کتاب میں نہیں دیا جائے گا۔ کتاب کے آخر میں ضمیمہ امیں حل کی یکتائی کے ثبوت میں معمولی رد بدل سے یکتائی ثابت کی جاسکتی ہے۔

مثال 3.4: تین درجی پولر کوئی مساوات کا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$x^3 y''' - 5x^2 y'' + 12xy' - 12y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 0$$

حل: ہم تفرقی مساوات میں آزمائشی تفاعل $y = x^m$ پر کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$m^3 - 8m^2 + 19m - 12 = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس کے جذر $m = 1$ ، $m = 3$ اور $m = 4$ ہیں۔ جذر کو مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ یہاں جذر حاصل کرنے پر بحث نہیں کی جائے گی۔ یوں حل کی اساس $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ اور $y_3 = x^4$ ہیں جنہیں مثال 3.2 میں خطی طور غیر تابع ثابت کیا گیا۔ اس طرح عمومی حل

$$y = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^4$$

ہو گا۔ دپے گئے تفرقی مساوات کو x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے y''' کا عددی سر اکائی حاصل کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے۔ معیاری صورت میں مساوات کے دیگر عددی سر $x = 0$ پر غیر استمراری ہیں۔ اس کے باوجود درج بالا عمومی حل تمام x بشمول $x = 0$ کے لئے درست ہے۔

عمومی حل اور اس کے تفرقات $y' = c_1 + 3c_2 x^2 + 4c_3 x^3$ اور $y'' = 6c_2 x + 12c_3 x^2$ میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزا مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$c_1 + 3c_2 + 4c_3 = -1$$

$$6c_2 + 12c_3 = 0$$

جن کا حل $c_1 = 3$ ، $c_2 = -4$ اور $c_3 = 2$ ہے۔ اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = 3x - 4x^3 + 2x^4$$

خطی طور غیر تابع حل۔ ورونسکی

عمومی حل کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ حل خطی طور غیر تابع ہوں۔ اگرچہ عموماً حل کو دیکھ کر ہی اندازہ ہو جاتا ہے کہ وہ خطی طور غیر تابع ہیں یا نہیں ہیں، البتہ ایسا معلوم کرنے کا منظم طریقہ زیادہ بہتر ہو گا۔ صفحہ 142 پر مسئلہ 2.3 دو درجی $n = 2$ مساوات کے علاوہ بلند درجی مساوات کے لئے بھی درست ہے۔ بلند درجی مساوات کی صورت میں ورونسکی درج ذیل ہو گی۔

$$(3.6) \quad W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ورونسکی تفرقی مساوات کے حل y_1 تا y_n پر مبنی ہے جو از خود x پر مبنی ہیں۔ ورونسکی غیر صفر ہونے کی صورت میں y_1 تا y_n خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

مسئلہ 3.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل

کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات 3.2 کے I پر حل y_1 تا y_n اس صورت خطی طور تابع ہوں گے جب ان کے ورونسکی³ کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W مکمل صفر⁴ ہو گا۔ یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب I پر y_1 تا y_n خطی طور غیر تابع ہوں گے اور یہ حل کی اساس ہوں گے۔

³Wronskian
⁴identically zero

ثبوت :

(الف) تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر y_1 تا y_n مساوات 3.2 کے حل ہیں۔ یوں خطی طور غیر تابع کی تعریف سے

$$(3.7) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ I پر اس مساوات کی $n-1$ تفرقات لیتے ہیں۔

$$k_1 y_1' + \cdots + k_n y_n' = 0$$

$$k_1 y_1'' + \cdots + k_n y_n'' = 0$$

(3.8)

⋮

$$k_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + k_n y_n^{(n-1)} = 0$$

مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 n عدد خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کا نظام ہے جس کا غیر صفر حل k_1 تا k_n ہے لہذا I پر تمام x کے لئے، اس نظام کی عددی سر قالب کا مقطع⁶، مسئلہ کریمر⁷ [جسے باب-7 میں پیش کیا گیا ہے] کے تحت، صفر کے برابر ہوگی۔ اب قالب کا مقطع ہی ورونسکی ہے لہذا I پر تمام x کے لئے W صفر کے برابر ہے۔

(ب) مسئلہ کریمر کو استعمال کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ $W = 0$ کی صورت میں مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کے نظام کا $x = x_0$ پر غیر صفر حل k_1^* تا k_n^* پایا جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے، I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y^* = k_1^* y_1 + \cdots + k_n^* y_n$ لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 کے تحت y^* ابتدائی شرائط $y^*(x_0) = 0$ تا $y^{*(n-1)}(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ انہیں ابتدائی شرائط پر حل $y \equiv 0$ بھی پورا اترتا ہے اور یوں مسئلہ 3.2 کے تحت، چونکہ مساوات 3.7 کے عددی سر I پر استمراری ہیں، لہذا $y^* = y$ ہوگا۔ اس طرح $y^* = k_1^* y_1 + \cdots + k_n^* y_n \equiv 0$ پورے I پر ہوگا جس کا مطلب ہے کہ I پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہیں۔

(پ) اگر W کی قیمت x_0 پر صفر ہو جہاں x_0 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہو، تب ثبوت (ب) کے تحت خطی طور تابع ہونا ثابت ہوتا ہے اور یوں ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہوگا۔ اس طرح اگر I پر نقطہ x_1 پر W صفر نہ ہو تب y_1 تا y_n کھلے وقفہ I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

non trivial solution⁵
determinant⁶
Cramer's theorem⁷

مثال 3.5: اساس۔ ورنسکی

ثابت کریں کہ مثال 3.3 میں حاصل کردہ حل $y_1 = c$ ، $y_2 = e^x$ اور $y_3 = e^{-x}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: مساوات 3.6 کے طرز پر ورنسکی لکھ کر

$$W = \begin{vmatrix} c & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^x \end{vmatrix} = ce^xe^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2c$$

حل کیا گیا ہے جہاں پہلی قطار سے c ، دوسری قطار سے e^x اور تیسری قطار سے e^{-x} باہر نکال کر قالب کی سادہ صورت حاصل کی گئی اور اس کے بعد پہلی قطار سے قالب کو پھیلا کر اس کا مقطع حاصل کی گئی ہے۔ چونکہ x کی کسی بھی قیمت کے لئے $W \neq 0$ ہے لہذا کسی بھی کھلے وقفے پر y_1 تا y_3 خطی طور غیر تابع ہیں۔

مساوات 3.2 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

پہلے عمومی حل کی وجودیت پر بات کرتے ہیں۔ صفحہ 145 پر دیا گیا مسئلہ 2.4 بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی کار آمد ہے۔

مسئلہ 3.4: وجودیت عمومی حل

کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ اور $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں مساوات 3.2 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: ہم I پر کوئی نقطہ x_0 لیتے ہیں۔ مسئلہ 3.2 کے تحت مساوات 3.2 کے n عدد حل y_1 تا y_n پائے جاتے ہیں جو مساوات 3.5 میں دیے گئے ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ ہم ابتدائی شرائط یوں چنتے ہیں کہ $K_{j-1} = 1$ ہوں جبکہ بقایا K صفر کے برابر ہوں۔ اس طرح x_0 پر حل کی وروئسی کی قیمت اکائی (1) ہو گی۔ مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $y_1(x_0) = 1$ ، $y_2'(x_0) = 1$ اور $y_3''(x_0) = 1$ ہوں گے جبکہ بقایا تمام ابتدائی قیمتیں صفر کے برابر ہوں گی۔ اس طرح وروئسی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0), y_3(x_0)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

اکائی ہو گی۔ یوں کسی بھی n کے لئے حل y_1 تا y_n مسئلہ 3.3 کے تحت I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ یہ حل اساس ہیں لہذا I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ ہو گا۔

اب ہم اس قابل ہیں کہ ثابت کریں کہ مساوات 3.2 کے عمومی حل میں مساوات 3.2 کے تمام حل شامل ہیں۔ مساوات 3.2 کے عمومی حل کے اختیاری مستقل میں موزوں قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں n درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔ نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 3.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

کھلے وقفے I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 3.2 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$(3.9) \quad Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_nY_n(x)$$

لکھا جس سکتا ہے جہاں y_1 تا y_n کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کے حل کی اساس ہیں جبکہ C_1 تا C_n موزوں مستقل ہیں۔

ثبوت: فرض کریں کہ I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$ ہے جبکہ Y مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل ہے۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر کسی بھی نقطہ x_0 پر ایسے c_1 تا c_n دریافت کیے جا

سکتے ہیں کہ x_0 پر y اور اس کے پہلے $n-1$ درجی تفرقات اسی نقطے پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ درجہ تفرقات کے برابر ہوں۔ اس طرح x_0 پر

$$\begin{aligned} c_1 y_1 + \dots + c_n y_n &= Y \\ c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' &= Y' \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} &= Y^{(n-1)} \end{aligned}$$

ہوگا جو الجبرائی مساوات کا خطی نظام ہے، جس کے نامعلوم متغیرات c_1 تا c_n جبکہ اس کا عددی سر قالب، x_0 پر حل y_1 تا y_n کا، وروئسکی ہے۔ چونکہ y_1 تا y_n اساس ہیں لہذا مسئلہ 3.3 کے تحت اس کی وروئسکی غیر صفر ہے۔ یوں باب-7 میں دیے گئے قاعدہ کرمیر⁸ کے تحت مساوات 3.10 کا یکتا حل $c_1 = C_1$ تا $c_n = C_n$ پایا جاتا ہے۔ عمومی حل میں اختیاری مستقل کی جگہ ان قیمتوں کو پر کرتے ہوئے I پر مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

ملتا ہے۔ مساوات 3.10 کے تحت x_0 پر y^* اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات، x_0 پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات کے برابر ہیں یعنی x_0 پر y^* اور Y یکساں ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ یوں مسئلہ 3.2 کے تحت I پر $y^* \equiv Y$ ہوگا جو درکار ثبوت ہے۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر ہماری بحث یہاں اختتام پذیر ہوتی ہے۔ حزب توقع $n = 2$ کے لئے یہ بحث ہو بہو حصہ 2.6 کی طرز اختیار کر لیتی ہے۔

سوالات

سوال 3.1 تا سوال 3.6 میں دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ وروئسکی استعمال کرتے ہوئے، ثابت کریں کہ کسی بھی کھلے وقفے پر، دیے حل خطی طور غیر تابع ہیں لہذا یہ حل کی اساس ہیں۔ سوال 3.1: $y''' = 0, \quad 1, x, x^2$ جواب: $W = 2$

سوال 3.2: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, e^x, e^{-x}, e^{2x}
جواب: $W = -6e^{2x}$

سوال 3.3: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$, $\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$
جواب: $W = 4$

سوال 3.4: $y^{(4)} + 12y^{(3)} + 54y^{(2)} + 108y^{(1)} + 81y = 0$, $e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}$
جواب: $W = 12e^{-12x}$

سوال 3.5: $y''' + 4y'' + 13y' = 0$, $1, e^{-2x} \cos 3x, e^{-2x} \sin 3x$
جواب: $W = 39e^{-4x}$

سوال 3.6: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$, $1, x^2, x^4$
میں کھلا وقفہ $x > 0$ ہے۔ ثابت کریں کہ دیے گئے حل درست اور اساس ہیں۔

جواب: $W = 16x^3$ صرف $x = 0$ پر صفر کے برابر ہے لیکن یہ نقطہ کھلے وقفے میں شامل نہیں ہے لہذا کھلے وقفے پر $W \neq 0$ ہے۔

سوال 3.7 تا سوال 3.10: کیا دیے گئے تفاعل کھلے وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 3.7: $\sin x, \cos x, 1$
جواب: $W = -1$ ہے لہذا یہ خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.8: $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$
جواب: $W = 2e^{-3x}$ ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.9: $\sinh x, \cosh x, e^x$
جواب: $W = 0$ ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور تابع ہیں۔

سوال 3.10: $\sin x, \cos x, e^x$
جواب: $W = -2e^x$ ہے لہذا تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم حصہ 2.2 کے طرز پر چلتے ہوئے، مستقل عددی سروالے متجانس خطی n درجی سادہ تفرقی مساوات

$$(3.11) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں $y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}$ اور a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار ہیں۔ حصہ 2.2 کی طرح ہم اس مساوات میں $y = e^\lambda$ پر کرتے ہوئے اس کی امتیازی مساوات

$$(3.12) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ اگر λ مساوات 3.12 کا جذر ہو تب $y = e^\lambda$ مساوات 3.11 کا حل ہو گا۔ مساوات 3.12 کے جذر کو اعدادی طریقوں⁹ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بلند درجی ($n > 2$) تفرقی مساوات کے حل میں زیادہ ممکنات پائے جاتے ہیں۔ انہیں چند مثالوں کی مدد سے دیکھیں۔

منفرد جذر

اگر مساوات 3.12 کے n جذر λ_1 تا λ_n منفرد اور حقیقی ہوں تب حل

$$(3.13) \quad y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

کسی بھی x کے لئے حل کی اساس ہوں گے جن سے مساوات 3.11 کا عمومی حل

$$(3.14) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم درج ذیل مثال کے بعد دیکھیں گے کہ مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔

مثال 3.6: تفرقی مساوات $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ کا حل تلاش کریں۔

حل: اس کا امتیازی مساوات $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ہے جس کے جذر -1 ، 1 اور -2 ہیں۔ اگر آپ کسی طرح امتیازی مساوات کا ایک جذر حاصل کر لیں تو بقیہ دو جذر با آسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں اگر $\lambda = -1$ دریافت کر لیا جائے تو امتیازی مساوات کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ حاصل کر کے اس کے جذر 1 اور -2 نسبتاً آسانی سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں دیے گئے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$ ہو گا۔

مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر متابع ہیں

ہم مساوات 3.13 میں دیے گئے حل کی وروئسی لکھ کر، قالب کی پہلی قطار سے $e^{\lambda_1 x}$ ، دوسری قطار سے $e^{\lambda_2 x}$ اور اسی طرح چلتے ہوئے n قطار سے $e^{\lambda_n x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $E = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}$ باہر نکال کر نسبتاً آسان قالب حاصل کرتے ہیں۔

(3.15)

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

اب قوت نمائی تفاعل E کسی بھی صورت صفر کے برابر نہیں ہو سکتا لہذا $W = 0$ صرف اس صورت ہو گا جب دائیں قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو۔ دائیں قالب کے مقطع کو کوشی مقطع¹⁰ کہتے ہیں جس کی قیمت

$$(3.16) \quad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V$$

کے برابر ثابت کی جاسکتی ہے۔ تمام V تمام $(\lambda_j - \lambda_k)$ کا حاصل ضرب ہے جہاں $j < k (\leq n)$ ہے مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $V = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو جذر یکساں ہونے کی صورت میں $V = 0$ اور یوں $W = 0$ ہو گا۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ وروئسی

صرف اس صورت میں صفر کے برابر نہیں ہوگا جب مساوات 3.12 کے تمام جذر ایک دونوں سے مختلف ہوں۔ اس سے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 3.6: اساس
مساوات 3.11 کے حل $e^{\lambda_1 x}$ تا $e^{\lambda_n x}$ ، جہاں λ حقیقی یا مخلوط ہو سکتا ہے، صرف اس صورت کھلے وقفے پر مساوات 3.11 کے حل کی اساس ہو سکتے ہیں جب مساوات 3.12 کے تمام n جذر منفرد (یعنی ایک دونوں سے مختلف) ہوں۔

حقیقت میں مسئلہ 3.6، مساوات 3.15 اور مساوات 3.16 سے حاصل عمومی نتیجہ (مسئلہ 3.7) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

مسئلہ 3.7: خطی طور غیر تابعیت
مساوات 3.11 کے $e^{\lambda x}$ طرز کے حل، جن کی تعداد کچھ بھی ہو سکتی ہے، I پر اس صورت خطی طور غیر تابع ہوں گے جب ان حل کے λ منفرد ہوں۔

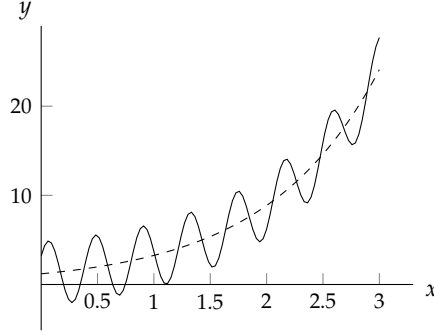
سادہ مخلوط جذر

چونکہ مساوات 3.11 کے عددی سر حقیقی مقدار ہیں لہذا مخلوط جذر صرف اور صرف جوڑی دار مخلوط ممکن ہیں۔ یوں اگر مساوات 3.12 کا ایک ایک سادہ جذر $\lambda = \gamma + i\omega$ ہو تب $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ بھی اس کا جذر ہوگا اور یوں تفرقی مساوات کے دو عدد خطی طور غیر تابع حل [حصہ 2.2 دیکھیں] درج ذیل ہوں گے۔

$$y_1 = e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad y_2 = e^{\gamma x} \sin \omega x$$

مثال 3.7: سادہ مخلوط جذر۔ ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - y'' + 225y' - 225y = 0, \quad y(0) = 3.2, \quad y'(0) = 46.2, \quad y''(0) = -448.8$$



شکل 3.1: مثال 3.7 کا مخصوص حل۔

حل: امتیازی مساوات $\lambda^3 - \lambda^2 + 225\lambda - 225 = 0$ کا ایک جذر $\lambda_1 = 1$ ہے۔ امتیازی مساوات کو $\lambda - 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے بقایا جذر $\lambda_2 = 15i$ اور $\lambda_3 = -15i$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان سے عمومی حل اور عمومی حل کے تفرقات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= ce^x + A \cos 15x + B \sin 15x \\ y' &= ce^x - 15A \sin 15x + 15B \cos 15x \\ y'' &= ce^x - 225A \cos 15x - 225B \sin 15x \end{aligned}$$

ان مساوات میں $x = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$3.2 = c + A, \quad 46.2 = c + 15B, \quad -448.8 = c - 225A$$

ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔ پہلی مساوات کو تیسری مساوات سے منفی کرنے سے $-452 = -226A$ یعنی $A = 2$ حاصل ہوتا ہے جسے پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 1.2$ ملتا ہے۔ دوسری مساوات میں $c = 1.2$ پر کرتے ہوئے $B = 3$ ملتا ہے۔ اس طرح مخصوص حل

$$y = 1.2e^x + 2 \cos 15x + 3 \sin 15x$$

حاصل ہوتا ہے جسے شکل 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔ مخصوص حل نقطہ دار لکیر سے دکھائے گئے $y = 1.2e^x$ کے گرد ارتعاش کرتا ہے۔

متعدد حقیقی جذر

امتیازی مساوات کا دوہرا منفرد جذر $\lambda_1 = \lambda_2$ ہونے کی صورت میں، صفحہ 107 پر جدول 2.1 کے تحت، تفرقی مساوات کے خطی طور غیر تابع حل $y = y_1$ اور $y_2 = xy_1$ ہوں گے۔

اسی حقیقت کے تحت اگر امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ پایا جائے تب تفرقی مساوات کے m عدد خطی طور غیر تابع حل

$$(3.17) \quad e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda x}$$

ہوں گے۔ ایک مثال دیکھنے کے بعد درج بالا حل کو ثابت کرتے ہیں۔

مثال 3.8: حقیقی دہرا اور سہ گنا جذر
درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 25y''' - 38y'' + 28y' - 8y = 0$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^5 - 8\lambda^4 + 25\lambda^3 - 38\lambda^2 + 28\lambda - 8 = 0$ کے جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ اور $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2$ ہیں۔ یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^{2x}$$

ہو گا۔

آئیں اب مساوات 3.17 کو ثابت کریں۔ مساوات 3.11 کے بائیں ہاتھ کو

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y$$

لکھ کر اس میں $y = e^{\lambda x}$ پر کرتے ہوئے تفرق لیتے ہیں۔

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^{\lambda x}$$

اب تصور کریں کہ امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ_1 پایا جاتا ہے (جہاں $m < n$ ہے) جبکہ بقیہ λ_1 سے مختلف، جذر λ_{m+1} تا λ_n ہیں۔ یوں کثیر رکنی کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

(3.18)

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda - \lambda_1)^m (\lambda - \lambda_{m+1}) (\lambda - \lambda_{m+2}) \cdots (\lambda - \lambda_n) e^{\lambda x} = (\lambda - \lambda_1)^m h(\lambda) e^{\lambda x}$$

جہاں $m = n$ کی صورت میں $h(\lambda) = 1$ ہو گا۔ دونوں ہاتھ λ تفرق لیتے ہیں۔

$$(3.19) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} L[e^{\lambda x}] = m(\lambda - \lambda_1)^{m-1} h(\lambda) e^{\lambda x} + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial}{\partial \lambda} [h(\lambda) e^{\lambda x}]$$

اب چونکہ x تفرق اور λ تفرق غیر تابع اور حاصل تفرق استمراری ہیں لہذا بائیں ہاتھ ان کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔

$$(3.20) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} L[e^{\lambda x}] = L \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} \right] = L[x e^{\lambda x}]$$

چونکہ λ_1 جذر m گنا ہے، جہاں $m \geq 2$ ہے، لہذا $\lambda = \lambda_1$ پر مساوات 3.19 کے دائیں ہاتھ کی قیمت جزو $(\lambda - \lambda_1)$ کی بنا صفر ہوگی۔ اس طرح مساوات 3.19 اور مساوات 3.20 کو ملا کر $L[x e^{\lambda x}] = 0$ حاصل ہوتا ہے لہذا ثابت ہوا کہ $x e^{\lambda x}$ مساوات 3.11 کا حل ہے۔

اسی ترتیب کو دہراتے ہوئے مساوات 3.18 کا دو درجی تفرق لیتے ہوئے $L[x^2 e^{\lambda x}] = 0$ لکھا جاسکتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^2 e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔ اس ترکیب کو بار بار دہراتے ہوئے آخر کار $m-1$ درجی تفرق لیتے ہیں۔

(3.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} L[e^{\lambda x}] &= L[x^{m-1} e^{\lambda x}] = m(m-1)(m-2) \cdots (3)(2)(\lambda - \lambda_1)^1 h(\lambda) e^{\lambda x} \\ &\quad + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} [h(\lambda) e^{\lambda x}] \end{aligned}$$

مساوات کا دایاں ہاتھ $\lambda - \lambda_1$ کی بنا $\lambda = \lambda_1$ پر صفر کے برابر ہے لہذا اس سے $L[x^{m-1} e^{\lambda x}] = 0$ حاصل ہوتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^{m-1} e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔

مساوات 3.18 کا m درجی تفرق لینے کے لئے مساوات 3.21 کا تفرق لے سکتے ہیں جس سے

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L[e^{\lambda x}] &= L[x^m e^{\lambda x}] = m(m-1)(m-2) \cdots (3)(2)(1) h(\lambda) e^{\lambda x} \\ &\quad + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [h(\lambda) e^{\lambda x}] \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو میں $\lambda - \lambda_1$ کا جزو نہیں پایا جاتا لہذا $\lambda = \lambda_1$ پر اس کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہوگی۔ یوں $L[x^m e^{\lambda x}] \neq 0$ ہو گا لہذا $x^m e^{\lambda x}$ تفرقی مساوات 3.11 کا حل نہیں ہوگا۔ یوں مساوات 3.17 ثابت ہوتی ہے۔

آئیں اب ثابت کریں کہ مساوات 3.17 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔ مخصوص m کے لئے ان حل کا وروئسکی غیر صفر حاصل ہوتا ہے جس سے حل کی خطی طور غیر تابع ہونا ثابت ہوتا ہے۔ کسی بھی m کی صورت میں وروئسکی کی m عدد قالب سے $e^{\lambda x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $e^{m\lambda x}$ باہر نکالا جائے گا۔ بقایا قالب میں مختلف صف آپس میں جمع اور منفی کرتے ہوئے قالب کا مقطع $1, x, \dots, x^{m-1}$ کی وروئسکی کے برابر ثابت کیا جا سکتا ہے جو غیر صفر مقدار ہے۔ یہ تفاعل تفرقی مساوات $y^{(m)} = 0$ کے حل ہیں لہذا مسئلہ 3.3 کے تحت یہ حل خطی طور غیر تابع ثابت ہوتے ہیں۔

متعدد مخلوط جذر

مخلوط جذر کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ یوں دوہرے مخلوط جذر کی صورت میں $\lambda = \gamma + i\omega$ اور $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ دو مرتبہ پائے جائیں گے جن سے

$$e^{\gamma x + i\omega x}, \quad x e^{\gamma x + i\omega x}, \quad e^{\gamma x - i\omega x}, \quad x e^{\gamma x - i\omega x}$$

حل لکھے جاسکتے ہیں۔ ان سے حقیقی حل لکھتے ہیں۔

$$(3.22) \quad e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad e^{\gamma x} \sin \omega x, \quad x e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad x e^{\gamma x} \sin \omega x$$

بائیں جانب کے دو عدد حل $e^{\gamma x + i\omega x}$ اور $e^{\gamma x - i\omega x}$ جبکہ بقایا دو حل $x e^{\gamma x + i\omega x}$ اور $x e^{\gamma x - i\omega x}$ سے حاصل کیے گئے ہیں۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(3.23) \quad y = e^{\gamma x} [(A_1 + A_2 x) \cos \omega x + (B_1 + B_2 x) \sin \omega x]$$

مخلوط سہ گنا جذر (جو حقیقی مسائل میں شاذ و نادر پایا جاتا ہے) کی صورت میں درج ذیل حقیقی حل حاصل ہوں گے۔

$$e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad e^{\gamma x} \sin \omega x, \quad x e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad x e^{\gamma x} \sin \omega x, \quad x^2 e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad x^2 e^{\gamma x} \sin \omega x$$

اسی طرح آپ زیادہ تعداد میں پائے جانے والے مخلوط جذر سے بھی حل لکھ سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 3.11 تا سوال 3.17 کے عمومی حل لکھیں۔

سوال 3.11: $y''' + 4y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$

سوال 3.12: $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 \cos 2x + c_4 x \sin 2x$

سوال 3.13: $y^{(4)} - y = 0$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

سوال 3.14: $y^{(4)} + 9y'' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$

سوال 3.15: $y^{(5)} + y''' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x$

سوال 3.16: $y^{(5)} - y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 11y' + 3y = 0$
جواب: $y = c_0 e^{-3x} + c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x$

سوال 3.17: $y^{(5)} - 2y^{(4)} - y' + 2y = 0$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x$

سوال 3.18 تا سوال 3.23 ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل دریافت کریں۔ جذر حاصل کرنے کی خاطر کمپیوٹر استعمال کیا جاسکتا ہے۔

سوال 3.18: $y''' - 2.7y'' - 4.6y' + 9.6y = 0, \quad y(0) = 1.5, y'(0) = 2, y''(0) = -3$
جواب: $y = 2.521e^{1.5x} - 0.286e^{-2x} - 0.735e^{3.2x}$

سوال 3.19:

$$y''' + 10.06y'' - 94.82y' - 670.8766y = 0,$$

$$y(0) = -1.2, y'(0) = 5.2, y''(0) = -2.8$$

3.2. مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

جواب: $y = 0.229e^{-13.4x} - 1.447e^{-5.6x} + 0.018e^{8.94x}$

سوال 3.20: $y''' + 5y'' + 49y' + 245y = 0, \quad y(0) = 10, y'(0) = -5, y''(0) = 1$
جواب: $y = 6.635e^{-5x} + 3.365 \cos 7x + 4.025 \sin 7x$

سوال 3.21: $y''' + 8y'' + 21y' + 18y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = -0.5$
جواب: $y = 23.5e^{-2x} - 21.5e^{-3x} - 16.5xe^{-3x}$

سوال 3.22:

$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
 $y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1$
جواب: $y = \cos 2x + 0.3125 \sin 2x - 0.125x \cos 2x + 0.875x \sin 2x$

سوال 3.23:

$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 4y' = 0$
 $y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1, y^{(4)}(0) = 2$
جواب: $y = 0.5 + 0.5e^x \cos x + 0.75e^x \sin x - 0.75xe^x \cos x - 0.25xe^x \sin x$

سوال 3.24: تخفیف درجہ
آپ تخفیف درجہ کے ذریعہ مثال 2.6 میں دو درجی مساوات سے کم درجی تفرقی مساوات حاصل کر چکے ہیں۔ مستقل عددی سروالے خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا ایک حل λ_1 جانتے ہوئے کم درجی مساوات کیسے حاصل کی جا سکتی ہے؟

جوابات: امتیازی مساوات کو $\lambda - \lambda_1$ سے تقسیم کرتے ہوئے کم درجی تفرقی مساوات کی امتیازی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جس سے کم درجی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

سوال 3.25: تخفیف درجہ
متغیر عددی سروالے خطی متجانس مساوات

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

کا ایک حل y_1 جانتے ہوئے دوسرے حل کو $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ لکھ کر، جہاں $u(x) = \int z(x) dx$ ہے، درج بالا میں پر کرتے ہوئے کم درجی مساوات

$$y_1 z'' + (3y_1' + p_2 y_1) z' + (3y_1'' + 2p_2 y_1' + p_1 y_1) z = 0$$

حاصل کریں ہے۔

سوال 3.26: تخفیف درجہ
تفرقی مساوات

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + (6x - x^3) y' - (6 - x^2) y = 0$$

کا ایک حل $y_1 = x$ ہے۔ تخفیف درجہ سے دو درجی مساوات حاصل کریں۔

$$z'' - z = 0 \text{ جواب:}$$

3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

آئیں اب معیاری صورت میں لکھی گئی، n درجی غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(3.24) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

پر غور کریں جہاں $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ اور $r(x) \not\equiv 0$ ہیں۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کا عمومی حل

$$(3.25) \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ہوگا جہاں $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ مطابقتی متجانس خطی تفرقی مساوات

$$(3.26) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

کا I پر عمومی حل ہے۔ $y_p(x)$ مساوات 3.24 کا I پر ایسا کوئی بھی حل ہے جس میں اختیاری مستقل نہ پایا جاتا ہو۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کے استمراری عددی سر اور استمراری $r(x)$ کی صورت میں I پر

مساوات 3.24 کا عمومی حل موجود ہے جس میں مساوات 3.24 کے تمام حل موجود ہیں۔ یوں مساوات 3.24 کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 3.24 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.24 اور درج ذیل $n-1$ ابتدائی شرائط پر مبنی ہو گا جہاں x_0 کھلے وقفے x_0 پر پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے عددی سر اور r کھلے وقفے پر استمراری ہونے کی صورت میں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل یکتا ہو گا۔ حل کے یکتائی کو حصہ 2.7 میں دو درجی تفرقی مساوات کے یکتا حل کے ثبوت کے نمونے پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$(3.27) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$$

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

غیر متجانس تفرقی مساوات 3.24 کے عمومی حل کے لئے مساوات 3.24 کا مخصوص حل درکار ہو گا۔ مستقل عددی سر والی تفرقی مساوات،

$$(3.28) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x)$$

جہاں a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار اور $r(x)$ ، حصہ 2.7 کی طرح، خاص نوعیت کا تفاعل ہو، کا مخصوص حل حصہ 2.7 کی طرح، بذریعہ نامعلوم عددی سر کی ترکیب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مخصوص حل y_p کو جبری تفاعل r سے درج ذیل قواعد کے تحت لکھا جاتا ہے۔

بنیادی قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

تریمی قاعدہ: اگر r کو دیکھ کر چنے گئے y_p کا کوئی رکن مساوات 3.28 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_k ہو تب اس رکن کی جگہ $x^k y_k$ کو y_p میں شامل کریں، جہاں k ایسا کم سے کم قیمت کا مثبت عدد ہے کہ تفاعل $x^k y_k$ مطابقتی متجانس مساوات کا حل نہ ہو۔

مجموعے کا قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

موجودہ ترکیب میں $k = 1$ یا $k = 2$ سے حصہ 2.7 کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔ انہیں مثال کی مدد سے موجودہ ترکیب کا ترمیمی قاعدہ استعمال کرنا سیکھیں۔

مثال 3.9: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ ترمیمی قاعدہ۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = -5$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ ہے جس کو $(\lambda - 1)^3 = 0$ لکھا جاسکتا ہے جس سے سہ گنا جذر $\lambda = 1$ ملتا ہے۔ یوں متجانس مساوات کو عمومی حل

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

لکھا جاسکتا ہے۔

دوسرا قدم: اب اگر ہم دیے گئے غیر متجانس مساوات کے جبری تفاعل کو دیکھ کر $y_p = C e^x$ چنتے ہوئے y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے مساوات میں پر کریں تو $C - 3C + 3C - C = 1$ ملتا ہے جس سے C کی قیمت حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ چنا گیا y_p دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتا لہذا اس y_p کو رد کرنا ہوگا۔ آپ $y_p = C x e^x$ یا $y_p = C x^2 e^x$ چن کر دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل بھی دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتے۔ یوں ہم اوپر دیے گئے ترمیمی قاعدے کے تحت $y_p = C x^3 e^x$ چنتے ہیں جس کے تفرقات درج ذیل ہیں۔

$$y' = C e^x (x^3 + 3x^2)$$

$$y'' = C e^x (x^3 + 6x^2 + 6x)$$

$$y''' = C e^x (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$$

y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے

$$C e^x (x^3 + 9x^2 + 18x + 6) - 3 C e^x (x^3 + 6x^2 + 6x) + 3 C e^x (x^3 + 3x^2) - C x^3 e^x = e^x$$

ہوئے $C = \frac{1}{6}$ ملتا ہے۔ یوں دیے گئے غیر متجانس تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y_p = \frac{1}{6}x^3e^x$ ہے لہذا اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

تیسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر عمومی حل کے مستقل حاصل کرنے ہوں گے۔ عمومی حل میں پہلی ابتدائی معلومات $y(0) = 8$ پر کرتے ہوئے $c_1 = 8$ ملتا ہے۔ اس قیمت کو y میں پر کرتے ہوئے y' لے کر دوسری ابتدائی معلومات $y'(0) = -2$ سے c_2 حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح y''' لیتے ہوئے اس میں $y'''(0) = -5$ پر کرتے ہوئے c_3 کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^x, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 8 = c_1$$

$$y' = (c_1 + c_2 + c_2x + c_3x^2 + 2c_3x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^x, \quad y'(0) = -2, \quad c_2 = -10$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_2x + 4c_3x + c_3x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{5}{6}x^2 + x)e^x, \quad y''(0) = -5, \quad c_3 = \frac{7}{2}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = \left(8 - 10x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}\right)e^x$$

3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ (حصہ 2.10 دیکھیں) بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔ یوں معیاری صورت میں لکھے گئے خطی غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 3.24، جس کے عددی سر اور $r(x)$ کھلے وقفہ I پر استمراری ہوں، کا I پر مخصوص حل y_p درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \sum_{k=1}^n y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)} r(x) dx \\ (3.29) \quad &= y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x) dx + \cdots + y_n(x) \int \frac{W_n(x)}{W(x)} r(x) dx \end{aligned}$$

مساوات 3.29 میں y_1 تا y_n مطابقتی متجانس مساوات 3.26 کے حل کی اساس ہیں جبکہ ورنسکی W کے k قطار میں $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$ پر کرتے ہوئے W_k حاصل کی جاتی ہے۔ یوں $n = 2$ کی صورت میں W ، W_1 اور W_2 درج ذیل ہوں گے۔

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = -y_2, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} = y_1$$

مساوات 3.29 کو صفحہ 184 پر دیے گئے مساوات 2.112 کی ثبوت کی طرز پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.10: مقدار معلوم کی تبدیلی۔ یولر کوشی غیر متجانس مساوات درج ذیل غیر متجانس یولر کوشی مساوات کو حل کریں۔

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x, \quad (x > 0)$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات میں $y = x^m$ اور اس کے تفرقات پر کرتے ہوئے

$$[m(m-1)(m-1) - 3m(m-1) + 6m - 6]x^m = 0$$

ملتا ہے جس کو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے جذر 1، 2 اور 3 حاصل ہوتے ہیں۔ ان جذر سے اساس

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3$$

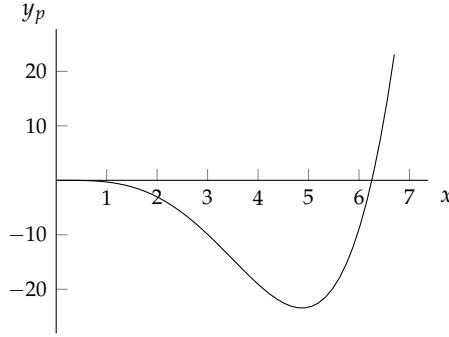
لکھتے ہیں۔ یوں متجانس یولر کوشی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

دوسرا قدم: مساوات 3.29 میں درکار قالب کا مقطع حاصل کرتے ہیں۔

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

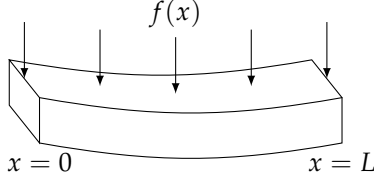
شکل 3.2: مثال 3.10 کا y_p

تیسرا قدم: مساوات 3.29 کے مکمل میں $r(x)$ بھی درکار ہے جو دیے گئے پولر کوشی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے سے ملتا ہے۔ دیے گئے مساوات کو y''' کے عددی سر x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $r = x \ln x$ ملتا ہے۔ مساوات 3.29 میں $\frac{W_1}{W} = \frac{x}{2}$ ، $\frac{W_2}{W} = -1$ اور $\frac{W_3}{W} = \frac{1}{2x}$ ہیں لہذا

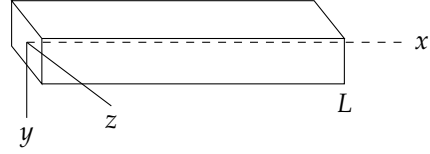
$$\begin{aligned} y_p &= x \int \frac{x}{2} x \ln x \, dx - x^2 \int x \ln x \, dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x \, dx \\ &= \frac{x}{2} \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right) - x^2 \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) + \frac{x^3}{2} (x \ln x - x) \\ &= \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right) \end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا۔ y_p کو شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)$$



(ب) بوجھ شہتیر کو چھکا دیتی ہے۔



(الف) مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر جس کی لمبائی L ہے۔

شکل 3.3: مثال 3.11 کا شہتیر۔

عملی استعمال۔ لکچرار شہتیر

دو درجی تفرقی مساوات کا عملی انجینئری میں بہت زیادہ استعمال پایا جاتا ہے البتہ بلند درجی تفرقی مساوات عملی انجینئری کے بہت کم مسائل میں کام آتے ہیں۔ انجینئری کا ایک انتہائی اہم مسئلہ لکچرار شہتیر کا جھکاؤ ہے جس کی نمونہ کشی چہارم درجی تفرقی مساوات کرتی ہے۔ کسی بھی عمارت یا پل میں شہتیر کلیدی کردار ادا کرتے ہیں جو لکڑی یا لوہے کے ہو سکتے ہیں۔

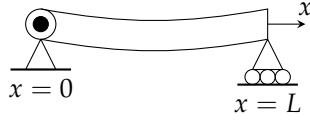
مثال 3.11: شکل 3.3-الف میں، یکساں پلک کے مادے سے بنا ہوا، مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L ہے۔ شہتیر کی اپنی وزن سے شہتیر کے جھکاؤ کو رد کیا جاسکتا ہے۔ شکل-ب میں شہتیر کے x محور پر عمودی بیرونی بوجھ f(x) ڈالا گیا ہے جس کی وجہ سے شہتیر میں جھکاؤ پیدا ہوا ہے۔ بیرونی بوجھ اور شہتیر کی جھکاؤ کا تعلق، علم پلک کے تحت، درج ذیل ہے جہاں E ینگ کا مقیاس پلک¹¹ کہلاتا ہے جبکہ I مستطیل کا محور z پر جمودی معیار اثر¹² ہے۔ شہتیر کی فی اکائی لمبائی پر بیرونی قوت کو بوجھ f(x) لکھا گیا ہے۔

$$(3.30) \quad EIy^{(4)} = f(x)$$

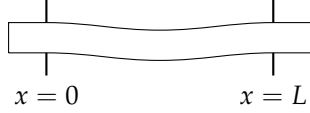
شہتیر کو عموماً شکل 3.4 میں دکھائے گئے تین طریقوں سے نصب کیا جاتا ہے جو درج ذیل سرحدی شرائط کو جنم دیتے ہیں۔

$$(الف) \quad \text{سادہ سہارا} \quad y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0$$

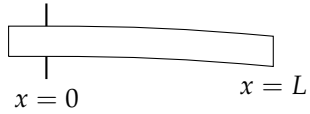
Young's modulus of elasticity¹¹
moment of inertia¹²



(الف) سادہ سہارا دیا گیا ہے۔



(ب) دونوں اطراف سے جکڑا ہوا۔



(پ) ایک طرف سے جکڑا گیا ہے۔

شکل 3.4: شبہ جکڑنے کے عمومی طریقے۔

(ب) دونوں اطراف جکڑے گئے ہیں $y(0) = y(L) = y'(0) = y'(L) = 0$

(پ) ایک طرف جکڑا گیا ہے $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$

سرحدی شرط $y = 0$ سے مراد صفر ہٹاؤ ہے، $y' = 0$ سے مراد افقی مماس ہے، $y'' = 0$ سے مراد صفر خمناؤ کا معیار اثر¹³ ہے جبکہ $y''' = 0$ سے مراد صفر جزئی قوت¹⁴ ہے۔

آئیں سادہ سہارے والی شبہ جکڑنے کے مسئلے کو حل کریں جسے شکل 3.4-الف میں دکھایا گیا ہے۔ یکساں بیرونی بوجھ کی صورت میں $f(x) = f_0$ ہو گا اور مساوات 3.30 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$(3.31) \quad y^{(4)} = k, \quad k = \frac{f_0}{EI}$$

جس کو مکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔ دو مرتبہ مکمل لیتے ہیں۔

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

bending moment¹³
shearing force¹⁴

$y''(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $c_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے بعد $y''(L) = 0$ پر کرنے سے ملتا ہے۔ یوں

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 - \frac{kL}{2}x$$

ہو گا جس کا دو مرتبہ تکمیل لینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{L}{6}x^3 + c_3x + c_4 \right)$$

$y(0) = 0$ پر کرنے سے $c_4 = 0$ ملتا ہے جس کے بعد $y(L) = 0$ پر کرتے ہوئے c_3 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(L) = \frac{kL}{2} \left(\frac{L^3}{12} - \frac{L^3}{6} + c_3 \right) = 0, \quad c_3 = \frac{L^3}{12}$$

یوں $k = \frac{f_0}{EI}$ لکھتے ہوئے شہتیر کی لچک بالمقابل لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$y(x) = \frac{f_0}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

ہم توقع رکھتے ہیں کہ شہتیر کے درمیان سے دونوں اطراف یکساں جھکاؤ پایا جائے گا یعنی $y(x) = y(L - x)$ ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ جھکاؤ $y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5f_0L^4}{16 \times 24EI}$ ہے جو $x = \frac{L}{2}$ پر پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ شکل 3.3 میں مثبت y نیچے کی طرف کو ہے۔

سوالات

سوال 3.27 تا سوال 3.34 کو حل کریں۔

سوال 3.27: $y^{(4)} + 3y''' - 4y = 0$
جواب: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

3.4. متدرج معلوم ہونے کے طریقے غیر متجانس خطی سادہ تفریق مساوات کا حل

سوال 3.28: $y''' + 16y'' + 13y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 e^{-3x} \cos 2x + c_3 e^{-3x} \sin 2x$

سوال 3.29: $y''' + 3y'' - y' - 3y = 5e^{2x}$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{2x}$

سوال 3.30: $y^{(4)} + 8y'' - 9y = \cosh 2x$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x + \frac{5}{39} \cosh 2x$

سوال 3.31: $x^2 y''' + 3x y'' - 2y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 x^{\sqrt{3}} + c_3 x^{-\sqrt{3}}$

سوال 3.32: $y''' + 2.25y'' + 1.6875y' + 0.421875y = 0$
جواب: $y = c_1 e^{-0.75x} + c_2 x e^{-0.75x} + c_3 x^2 e^{-0.75x}$

سوال 3.33: $y''' - y' = \frac{3}{40} \sinh \frac{x}{2}$
جواب: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 2 \cosh \frac{x}{2}$

سوال 3.34: $y''' + 9y'' + 27y' + 27 = 2x^2$
جواب: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + c_3 x^2 e^{-3x} + \frac{2}{27} x^2 - \frac{4}{27} x + \frac{8}{81}$

سوال 3.35 تا سوال 3.39 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 3.35:

$y^{(4)} - 10y'' + 9y = 4e^{-2x}$
 $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -0.5, \quad y'''(0) = 0.2$
جواب: $y = -\frac{2}{15} e^{-2x} + \frac{1}{1440} (127e^x + 1383e^{-x} - 119e^{3x} - 271e^{-3x})$

سوال 3.36:

$y^{(4)} + y'' - 2y = 0.5 \sin 2x$
 $y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$
جواب: $y = 0.05 \sin 2x + 3 \cos x - 0.358 \sin x - \cos \sqrt{2}x - 0.424 \sin \sqrt{2}x$

سوال 3.37: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W ، W_1 ، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔ (یاد رہے تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھتے ہوئے $r = x$ حاصل ہو گا)

$$x^3 y''' - 5x^2 y'' + 12xy' - 12y = x^4, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1, y''(1) = 2$$

جوابات: $W_3 = 2x^3$ ، $W_2 = -3x^4$ ، $W_1 = x^6$ ، $W = 6x^5$ ، $y_h = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^4$
 $y = \frac{59}{18}x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{x^4}{3} \ln x - \frac{4}{9}x^4$

سوال 3.38: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W ، W_1 ، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = -1$$

جوابات: $W_3 = 2x^{-1}$ ، $W_2 = x^{-4}$ ، $W_1 = -3x^{-2}$ ، $W = 6x^{-5}$ ، $y_h = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x^{-2}$
 $y = \frac{5}{3x} + x - \frac{3}{4x^2} + \frac{x^2}{12}$ ، $W_3 = 2x^{-1}$

سوال 3.39:

$$y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 27x^2, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1, y''(0) = -1$$

جواب: $y = \frac{2}{3}e^{-3x} + 3xe^{-3x} + \frac{9}{2}x^2e^{-3x} + x^2 - 2x + \frac{4}{3}$

باب 4

نظام تفرقی مساوات

گزشتہ باب میں آپ نے بلند درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔ اس باب میں سادہ تفرقی مساوات حل کرنے کا نیا طریقہ دکھایا جائے گا جس میں n درجی سادہ تفرقی مساوات سے n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جائے گا۔ اس نظام کو حل کرنا بھی سکھایا جائے گا۔ تفرقی مساوات کے نظام کو قالب اور سمتیہ کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے لہذا حصہ 4.1 میں قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق پر غور کیا جائے گا۔

اسی باب میں تفرقی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بجائے تمام مساوات کی مجموعی طرز عمل پر غور کیا جائے گا جس سے نظام کے حل کی استحکام¹ کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہے۔ انجینئری میں مستحکم نظام اہمیت رکھتے ہیں۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی، مستقبل کے لمحات پر معمولی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔ اس ترکیب سے مساوات کا اصل حل دریافت نہیں ہوتا لہذا اس کو کیفی ترکیب² کہتے ہیں۔ جس ترکیب سے نظام کا اصل حل حاصل ہوتا ہو اس کو مقداری ترکیب³ کہتے ہیں۔

stability¹
qualitative method²
quantitative method³

4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق

تفرقی مساوات کے نظام پر غور کے دوران قالب اور سمتیات استعمال کئے جائیں گے۔

دو عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام

$$(4.1) \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 & y_1' &= 2y_1 - 7y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 & y_2' &= 5y_1 + y_2 \end{aligned} \quad \text{یا}$$

میں دو عدد نامعلوم تفاعل $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ پائے جاتے ہیں۔ ان مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل $g_1(t)$ اور $g_2(t)$ بھی موجود ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر مبنی نظام

$$(4.2) \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

میں $y_1(t)$ تا $y_n(t)$ نامعلوم تفاعل پائے جائیں گے۔ درج بالا ہر مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل بھی پائے جاسکتے ہیں۔

تکنیکی اصطلاحات

قالب

نظام 4.1 کے عددی سر (جو مستقل یا متغیرات ممکن ہیں) کو 2×2 قالب A کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.3) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

matrix⁴

اسی طرح نظام 4.2 کے عددی سر کو $n \times n$ قالب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.4) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قالب میں درج a_{11} ، a_{12} ، a_{21} وغیرہ کو ارکان⁵ کہتے ہیں۔ افقی لکیروں کو صف⁶ جبکہ عمودی لکیروں کو قطار⁷ کہتے ہیں۔ قالب 4.3 میں پہلا صف $[a_{11} \ a_{12}]$ یا $[2 \ 3]$ جبکہ دوسرا صف $[a_{21} \ a_{22}]$ یا $[-1 \ \frac{2}{3}]$ ہے۔ اسی طرح پہلا قطار درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ارکان کی علامتی اظہار میں دو گنا زیر نوشت کا پہلا عدد صف کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دوسرا عدد قطار کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں a_{21} دوسری صف اور پہلی قطار کا رکن ہے۔ قالب 4.3 کا مرکزی وتر⁸ a_{11} اور a_{22} پر مبنی ہے جبکہ قالب 4.4 کا مرکزی وتر a_{11} ، a_{22} ، \dots ، a_{nn} پر مبنی ہے۔ ہمیں یہاں صرف مربع قالب⁹ درکار ہوں گے۔ مربع قالب سے مراد ایسی قالب ہے جس میں صفوں کی تعداد قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ قالب 4.3 اور قالب 4.4 مربع قالب ہیں۔

سمتیہ۔ ایک قطار اور n ارکان کا سمتیہ قطار¹⁰ درج ذیل ہے۔

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اسی طرح ایک صف اور n ارکان کا سمتیہ صف¹¹ درج ذیل ہے۔

$$v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \cdots \ v_n]$$

entry⁵
row⁶
column⁷
main diagonal⁸
square matrix⁹
column vector¹⁰
row vector¹¹

قالب اور سمتیات کا حساب

برابری مساوات

دو عدد $n \times n$ قالب صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے تمام نظیری¹² ارکان برابر ہوں۔ ظاہر ہے کہ دو قالب کی برابری کے لئے لازم ہے کہ ان میں صفوں کی تعداد یکساں ہو اور ان میں قطاروں کی تعداد یکساں ہو۔ یوں $n = 2$ کی صورت میں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

صرف اور صرف اس صورت برابر $(A = B)$ ہوں گے جب

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, & a_{12} &= b_{12} \\ a_{21} &= b_{21}, & a_{22} &= b_{22} \end{aligned}$$

ہوں۔ دو عدد سمتیہ صف (یا دو عدد سمتیہ قطار) صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب دونوں میں ارکان کی تعداد n برابر ہو اور ان کے تمام نظیری ارکان برابر ہوں۔ یوں

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

کی صورت میں $v = x$ صرف اور صرف تب ہو گا جب

$$v_1 = x_1 \quad \text{اور} \quad v_2 = x_2$$

ہوں۔

مجموعہ

مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر دونوں قالب کے نظیری ارکان کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ دونوں قالب یکساں $m \times n$ ہونا لازم ہے۔ اسی طرح دونوں سمتیہ صف (یا دونوں سمتیہ قطار) میں برابر ارکان ہونا لازم ہے۔ یوں 2×2 قالب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$(4.5) \quad A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, \quad v + x = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix}$$

corresponding¹²

غیر سمتی ضرب

¹³ غیر سمتی ضرب یعنی مستقل c سے قالب کا ضرب حاصل کرنے کی خاطر قالب کے تمام ارکان کو c سے ضرب دیا جاتا ہے۔ مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad -4A = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -20 & -4 \end{bmatrix}$$

اور

$$v = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad 3v = \begin{bmatrix} 27 \\ -12 \end{bmatrix}$$

قالب ضرب قالب

دو عدد $n \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ اور $B = [b_{jk}]$ کا حاصل ضرب $C = AB$ ، (اسی ترتیب میں) $n \times n$ قالب $C = [c_{jk}]$ ہو گا جس کے ارکان

$$(4.6) \quad c_{jk} = \sum_{m=1}^n a_{jm} b_{mk} \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n$$

ہوں گے یعنی A قالب کے j صف کے ہر رکن کو B قالب کے j قطار کے نظیری رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے n حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔ ہم کہتے ہیں کہ قالب کے ضرب سے مراد صف ضرب قطار ہے۔ مثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) \\ (-3) \cdot 7 + 0 \cdot 2 & (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 \\ -21 & -3 \end{bmatrix}$$

یہاں دھیان رہے کہ ضرب قالب غیر مستبدل¹⁴ ہے لہذا عموماً $AB \neq BA$ ہو گا۔ یوں دو قالب کو آپس میں ضرب دیتے ہوئے قالبوں کی ترتیب تبدیل نہیں کی جاسکتی۔ اس حقیقت کی وضاحت کی خاطر درج بالا مثال میں قالبوں کی ترتیب بدلتے ہوئے ان کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 7 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}$$

¹³ scalar product
¹⁴ non commutative

$n \times n$ قالب A کو n ارکان کی سمتیہ قطار x سے ضرب بھی اسی قاعدے کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔ یوں $v = Ax$ کے n عدد ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$(4.7) \quad v_j = \sum_{m=1}^n a_{jm}x_m \quad j = 1, \dots, n$$

یوں

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔

سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا اظہار بذریعہ سمتیات

تفرق

قالب یا سمتیہ کا تفرق، تمام ارکان کا تفرق حاصل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t^3 \\ 6 \cos 2t \end{bmatrix}, \quad y'(t) = \begin{bmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15t^2 \\ -12 \sin 2t \end{bmatrix}$$

قالب کی تفرق اور ضرب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 4.1 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.8) \quad y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

اسی طرح مساوات 4.2 کو درج ذیل $y = Ax$ صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.9) \quad \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

مزید اعمال اور اصطلاحات

تبدیل محل

تبدیلی محل¹⁵ کے عمل سے قالب کے قطاروں کو صفوں کی جگہ لکھا جاتا ہے۔ یوں 2×2 قالب A سے تبدیلی محل¹⁶ کے ذریعہ تبدیلی محل قالب¹⁷ A^T حاصل ہو گا۔

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف x کا تبدیلی محل سمتیہ x^T سمتیہ قطار ہو گا۔ اسی طرح سمتیہ قطار v کا تبدیلی محل سمتیہ v^T سمتیہ صف ہو گا۔

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad v^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

قالب کا معکوس

ایسا $n \times n$ قالب جس کے مرکزی وتر کے تمام ارکان اکائی (1) اور بقیہ ارکان صفر ہوں کو اکائی قالب¹⁸ I کہتے ہیں۔

$$(4.10) \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

¹⁵transposition

¹⁶transposition

¹⁷transpose matrix

¹⁸unit matrix

ایسا B قالب، جس کا A قالب کے ساتھ حاصل ضرب اکائی قالب ہو $BA = AB = I$ ، قالب A کا معکوس قالب کہلاتا ہے جسے A^{-1} لکھا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت میں A غیر نادر قالب¹⁹ کہلاتا ہے۔ یہاں A اور B دونوں $n \times n$ قالب ہیں۔

$$(4.11) \quad A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

قالب A کا معکوس تب پایا جاتا ہے جب A کا مقطع غیر صفر $|A| \neq 0$ ہو۔ اگر A کا معکوس نہ پایا جاتا ہو تب A نادر²⁰ قالب کہلاتا ہے۔ مربع 2×2 قالب کا معکوس

$$(4.12) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ہے جہاں A کا مقطع $|A|$ درج ذیل ہے۔

$$(4.13) \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

خطی طور تالبعیت

r عدد سمتیات $v^{(1)}$ تا $v^{(r)}$ جہاں ہر سمتیہ n ارکان پر مشتمل ہو، اس صورت خطی طور غیر تابع سلسلہ²¹ یا خطی طور غیر تابع کہلاتے ہیں جب

$$(4.14) \quad c_1 v^{(1)} + \dots + c_r v^{(r)} = 0$$

سے مراد c_1 تا c_r کی قیمتیں صفر ہو۔ درج بالا مساوات میں 0 صفر سمتیہ²² ہے جس کے تمام n ارکان صفر کے برابر ہیں۔ اگر مساوات 4.14 میں c_1 تا c_r کوئی ایک یا ایک سے زائد مستقل غیر صفر ہوں تب $v^{(1)}$ تا $v^{(r)}$ خطی طور تابع سلسلہ²³ یا خطی طور تابع کہلائیں گے چونکہ ایسی صورت میں کم از کم ایک سمتیہ کو

¹⁹ non singular matrix

²⁰ singular

²¹ linearly independent set

²² zero vector

²³ linearly dependent vector

بقایا سمتیات کی مدد سے لکھا جاسکتا ہے، مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.14 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$v^{(1)} = -\frac{1}{c_1} [c_2 v^{(2)} + \dots + c_r v^{(r)}]$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آگنی قدر اور آگنی سمتیات

آگنی قدر²⁴ اور آگنی سمتیات²⁵ انتہائی اہم ہیں جو کوانٹم میکانیات²⁶ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ مساوات

$$(4.15) \quad Ax = \lambda x$$

میں $A = [a_{jk}]$ معلوم $n \times n$ قالب ہے جبکہ λ نا معلوم مستقل (جو حقیقی یا مخلوط مقدار ہو سکتا ہے) اور x نا معلوم سمتیہ ہے جنہیں حاصل کرنا درکار ہے۔ کسی بھی λ کے لئے مساوات 4.15 کا ایک حل $x = 0$ ممکن ہے۔ ایسی غیر سمتی²⁷ λ جو $x \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.15 پر پورا اترتی ہو، A کی آگنی قدر²⁸ کہلاتی ہے جبکہ، اس λ کی نظیری، x کو A کی آگنی سمتیہ²⁹ کہتے ہیں۔

ہم مساوات 4.15 کو $Ax - \lambda x = 0$ یا

$$(4.16) \quad (A - \lambda I)x = 0$$

لکھ سکتے ہیں جو n عدد خطی الجبرائی مساوات کو ظاہر کرتی ہے جس کے نا معلوم متغیرات x_1 تا x_n ، سمتیہ x کے ارکان ہیں۔ اس مساوات کے غیر صفر حل $x \neq 0$ کے لئے ضروری ہے کہ $A - I$ کے عددی سر قالب کا مقطع صفر ہو۔ (یہ خطی الجبرا کی بنیادی حقیقت ہے)۔ اس باب میں ہمیں $n = 2$ سے دلچسپی ہے لہذا مساوات 4.16 کو

$$(4.17) \quad \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues²⁴
Eigenvectors²⁵
quantum mechanics²⁶
scalar²⁷
Eigenvalue²⁸
Eigenvector²⁹

لکھتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(4.18) \quad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

اب نادر قالب کا مقطع صفر ہوتا ہے لہذا $A - \lambda I$ اس صورت نادر قالب ہو گا جب اس قالب کا مقطع (جسے A کی امتیازی مقطع³⁰ کہتے ہیں) صفر ہو۔

$$(4.19) \quad \begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \end{aligned}$$

اس دو درجی مساوات کو A کی امتیازی مساوات³¹ کہتے ہیں۔ اس کے حل λ_1 اور λ_2 ، قالب A کے آگنی قدر یا آگنی قیمتیں ہیں۔ پہلے آگنی قدر حاصل کریں۔ اس کے بعد λ_1 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_1 کی نظیری، A کی آگنی سمتیہ $x^{(1)}$ دریافت کریں۔ اسی طرح λ_2 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_2 کی نظیری، A کی آگنی سمتیہ $x^{(2)}$ دریافت کریں۔ یاد رہے کہ اگر x قالب A کا آگنی سمتیہ ہو تب kx بھی A کا آگنی سمتیہ ہو گا جہاں $k \neq 0$ ہے۔

مثال 4.1: درج ذیل قالب کی آگنی قیمتیں اور آگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

حل: امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 3 \\ -0.8 & 0.4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.6\lambda + 1.2 = 0$$

characteristic determinant³⁰
characteristic equation³¹

سے A کے آگنی قدر $\lambda_1 = -0.6$ اور $\lambda_2 = -2$ ملتے ہیں۔ آگنی قیمت $\lambda = \lambda_1 = -0.6$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (-3 + 0.6)x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -0.8x_1 + (0.4 + 0.6)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جاسکتا ہے۔ دوسری مساوات کو بھی $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اگر $x_1 = 1$ چنا جائے تو $x_2 = 0.8$ ہو گا لہذا، $\lambda_1 = -0.6$ کی نظیری، A کا آگنی سمتیہ

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -2$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (-3 + 2)x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -0.8x_1 + (0.4 + 2)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

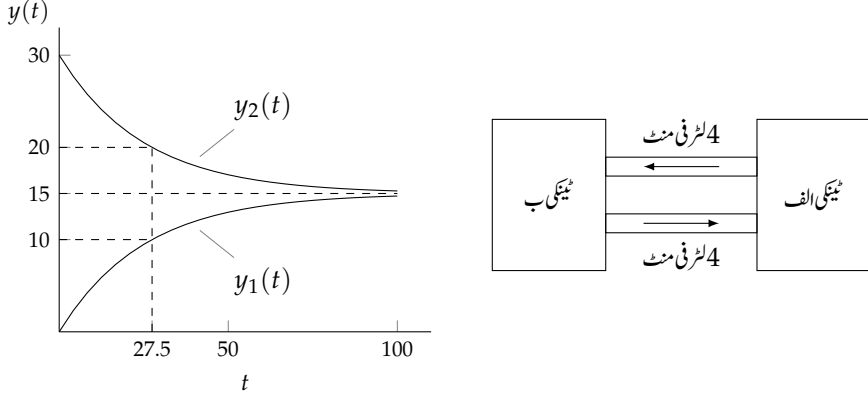
ان دونوں مساوات کو $x_1 = 3x_2$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اگر $x_2 = 1$ چنا جائے تو $x_1 = 3$ حاصل ہو گا لہذا، $\lambda_2 = -2$ کی نظیری، A کا آگنی سمتیہ

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔ جیسا پہلے ذکر کیا گیا، آگنی سمتیات کو کسی بھی غیر صفر عدد سے ضرب دیا جاسکتا ہے۔

4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

اس حصے میں ہم تفرقی مساوات کے نظام کی عملاً اہمیت دیکھیں گے۔ ہم پہلے دیکھتے ہیں کہ ایسے نظام مختلف عملی مسائل میں کیسے کردار ادا کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی تفرقی مساوات کو کیسے تفرقی مساوات کے نظام میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔



شکل 4.1: ٹینکیوں کا نظام۔

مثال 4.2: دو ٹینکیوں کا نظام

ایک ٹینکی کو استعمال کرتے ہوئے مرکب بنانے کے عمل پر صفحہ 26 مثال 1.10 میں غور کیا گیا جہاں مسئلے کو ایک عدد تفرقی مساوات سے ظاہر کیا گیا۔ اس مثال کو ایک مرتبہ دیکھ لیں چونکہ وہی معلومات یہاں بھی استعمال کی جائیں گی۔

شکل 4.1 میں دو ٹینکیاں دکھائی گئی ہیں جن میں یک برابر دو سو (200) لٹر پانی موجود ہے۔ ٹینکی الف میں خالص پانی ہے جبکہ ٹینکی ب کی پانی میں تیس (30) کلو گرام کا نمک ملا یا گیا ہے۔ ٹینکیوں میں پانی کو مسلسل ہلایا جاتا ہے تاکہ ان میں ہر جگہ محلول یکساں رہے۔ ٹینکیوں میں پانی کو چار (4) لٹر فی منٹ سے گردش دینے سے ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار $y_2(t)$ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔ کتنی دیر کے بعد ٹینکی الف میں نمک کی مقدار، ٹینکی ب میں نمک کی مقدار کا نصف ہو گا؟

حل: پہلا قدم: نظام کی نمونہ کشی کرتے ہیں۔ ایک ٹینکی کی طرح، ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ میں تبدیلی کی شرح $y_1'(t)$ نمک کی درآمدی اور برآمدی شرح میں فرق کے برابر ہوگی۔ یہی کچھ $y_2'(t)$ کے لئے

بھی کہا جاسکتا ہے لہذا

$$\begin{aligned} y_1' &= 4 \frac{y_2}{200} - 4 \frac{y_1}{200} \\ y_2' &= 4 \frac{y_1}{200} - 4 \frac{y_2}{200} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.02y_1 + 0.02y_2 \\ y_2' &= 0.02y_1 - 0.02y_2 \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس نظام کو

$$(4.20) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

ہیں۔

دوسرا قدم: عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح یہاں بھی حل کو قوت نمائی تفاعل

$$(4.21) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$$

فرض کرتے ہیں۔ مساوات 4.20 میں اس فرضی تفاعل اور اس کے تفرق کو پر کرتے ہیں۔

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t}$$

دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے دونوں اطراف کو بدل کر لکھتے ہیں۔

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

ہمیں اس مساوات کے غیر صفر اہم حل درکار ہیں لہذا ہمیں \mathbf{A} کے آگنی قدر اور آگنی سمتیات حاصل کرنے ہوں گے۔ آگنی قدر امتیازی مساوات

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -0.02 - \lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.02 - \lambda) - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0$$

کے حل $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ ہوں گے۔ (یہاں دھیان رہے کہ ہمیں غیر صفر آگنی سمتیات درکار ہیں۔ آگنی قدر صفر ہو سکتے ہیں۔) آگنی سمتیات مساوات 4.18 کے پہلے یا دوسرے مساوات سے حاصل ہوں گے۔ مساوات 4.18 کی پہلے مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے لئے

$$-0.02x_1 + 0.02x_2 = 0, \quad (-0.02 + 0.04)x_1 + 0.02x_2 = 0$$

لکھے جائیں گے جن سے $x_1 = x_2$ اور $x_1 = -x_2$ ملتے ہیں۔ ہم $x_1 = x_2 = 1$ اور $x_1 = -x_2 = 1$ چنتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے نظیری آگنی سمتیات

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 4.21 اور مسئلہ خطی میل (جو خطی متجانس تفرقی مساوات کے نظام پر بھی لاگو ہوتا ہے) کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$(4.22) \quad y = c_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

تیسرا قدم: ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ (یعنی ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر کوئی نمک نہیں پایا جاتا) اور $y_2(0) = 30$ (یعنی ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر تیس کلو گرام نمک پایا جاتا ہے) ہیں۔ مساوات 4.22 میں $t = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

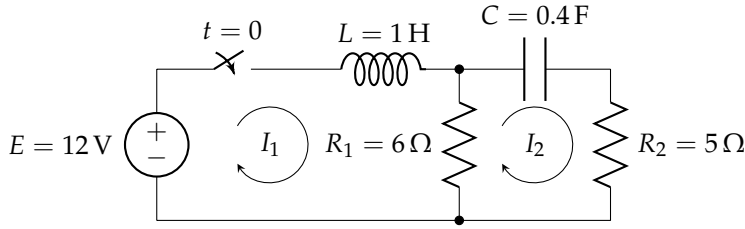
درج بالا مساوات کی جزوی صورت $c_1 + c_2 = 0$ اور $c_1 - c_2 = 30$ ہے جس کا حل $c_1 = 15$ اور $c_2 = -15$ ہے۔ یوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہوا حل

$$y = 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

یعنی

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t}$$

$$y_2(t) = 15 + 15e^{-0.04t}$$



شکل 4.2: مثال 4.3 کا برقی جال۔

ہو گا۔ اس حل کو شکل 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

چوتھا قدم: ٹینکی الف میں اس وقت ٹینکی ب کا آدھا نمک ہو گا جب اس میں $\frac{30}{3} = 10$ کلو گرام نمک ہو۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t} = 10, \quad t = -\frac{1}{0.04} \ln \frac{1}{3} = 27.5 \text{ min}$$

مثال 4.3: برقی جال

شکل 4.2 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو ہوتا ہے۔ برقی رو $I_1(t)$ اور $I_2(t)$ دریافت کریں۔ ابتدائی رو اور ابتدائی برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر ہیں۔

حل: پہلا قدم نظام کی نمونہ کشی ہے۔ امالہ میں رو I_1 ہے لہذا اس پر برقی دباؤ $v_L = L \frac{dI_1}{dt}$ ہو گا۔ برقی گیر میں رو I_2 ہے لہذا اس پر دباؤ $v_C = \frac{1}{C} \int I_2 dt$ ہو گا۔ مزاحمت R_2 پر دباؤ $v_{R2} = I_2 R_2$ ہو گا جبکہ مزاحمت R_1 میں کل رو $I_1 - I_2$ ہے لہذا اس پر دباؤ $v_{R1} = (I_1 - I_2) R_1$ ہو گا۔ کرخوف قانون دباؤ کے تحت کسی بھی بند دائرے میں کل دباؤ کا اضافہ اس دائرے میں کل دباؤ کے گھٹاؤ کے برابر ہو گا۔ یوں بائیں دائرے کے لئے

$$E = L \frac{dI_1}{dt} + (I_1 - I_2) R_1$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $E = 12$ ، $L = 1$ اور $R_1 = 6$ پر کرتے ہوئے

$$(4.23) \quad I_1' = -6I_1 + 6I_2 + 12$$

ملتا ہے۔ اسی طرح دائیں دائرے کے لئے

$$0 = \frac{1}{C} \int I_2 dt + I_2 R_2 + (I_2 - I_1) R_1$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $C = 0.4$ اور $R_2 = 5$ پر کرتے ہوئے تفرق لینے سے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4I_1' = 0$$

ملتا ہے۔ اس میں مساوات 4.23 سے I_1' کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4(-6I_1 + 6I_2 + 12) = 0$$

یعنی

$$(4.24) \quad I_2' = -\frac{36}{11}I_1 + \frac{67}{22}I_2 + \frac{72}{11}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.23 اور مساوات 4.24 کو

$$(4.25) \quad J' = AJ + g$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$J = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 12 \\ \frac{72}{11} \end{bmatrix}$$

ہیں۔ I_1' اور I_2' کے سمتیہ قطار کو J اس لئے لکھا گیا ہے کہ اس باب میں I اکائی قالب کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

دوسرا قدم نظام کا حل تلاش کرنا ہے۔ g کی موجودگی غیر متجانس سادہ تفرقی نظام کو ظاہر کرتی ہے لہذا ہم ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح پہلے متجانس مطابقتی نظام $J' = AJ$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ ہم $J = xe^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے متجانس نظام میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$J' = \lambda xe^{\lambda t} = A xe^{\lambda t} \implies Ax = \lambda x$$

غیر صفر اہم حل کے حصول کے لئے A کا آگنی قدر اور آگنی سمتیات درکار ہوں گے۔ آگنی قدر امتیازی مساوات

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{65}{22}\lambda - \frac{15}{11} = 0$$

سے $\lambda_1 = -2.38209$ اور $\lambda_2 = -0.57245$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان آگنی قدر کی نظیری آگنی سمتیات مساوات 4.18 سے حاصل ہوں گے۔ مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_1 پر کرتے ہوئے

$$(-6 + 2.38209)x_1 + 6x_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.658416x_2$$

ملتا ہے۔ یوں $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_1 = 1.658416$ ملتا ہے جس سے $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.658416 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_2 پر کرتے ہوئے

$$(-6 + 0.57245)x_1 + 6x_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.105471x_2$$

ملتا ہے۔ یوں $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_1 = 1.105471$ ملتا ہے جس سے $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.105471 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں متجانس نظام کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(4.26) \quad J = c_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

مساوات 4.25 کے غیر متجانس نظام کا جبری تفاعل g مستقل مقدار ہے لہذا اس نظام کا مخصوص حل مستقل سمتیہ قطار $J_p = a$ فرض کرتے ہیں جس کے ارکان a_1 اور a_2 ہیں۔ یوں $J' = 0$ ہو گا۔ مساوات 4.25 میں فرض کردہ مخصوص حل پر کرتے ہوئے $Aa + g = 0$ ملتا ہے جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

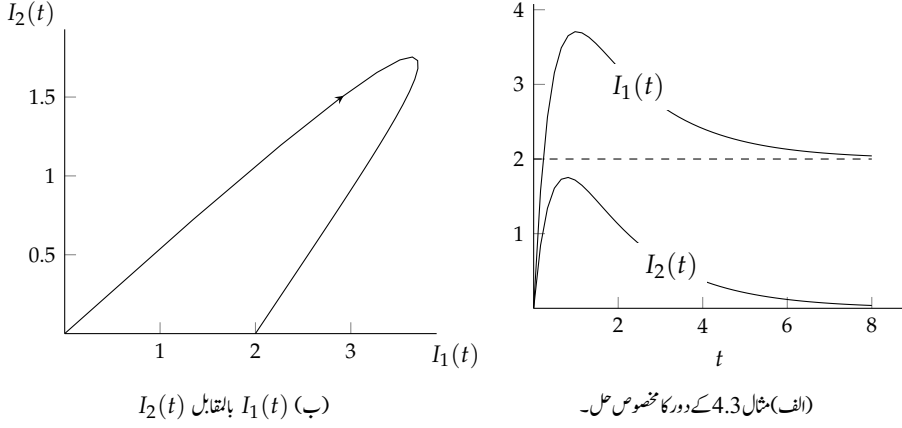
$$\begin{aligned} -6a_1 + 6a_2 + 12 &= 0 \\ -\frac{36}{11}a_1 + \frac{67}{22}a_2 + \frac{72}{11} &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے $a_1 = 2$ اور $a_2 = 0$ ملتا ہے لہذا $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ہو گا۔ یوں عمومی حل

$$J = J_h + J_p = c_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t} + a$$

ہو گا جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} I_1 &= 1.658416c_1 e^{-2.38209t} + 1.105471c_2 e^{-0.57245t} + 2 \\ I_2 &= c_1 e^{-2.38209t} + c_2 e^{-0.57245t} \end{aligned}$$



شکل 4.3: مثال 4.3 کے منحنی۔

ابتدائی معلومات کے تحت $I_1(0) = 0$ اور $I_2(0) = 0$ ہے۔ انہیں درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$1.658416c_1 + 1.105471c_2 + 2 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

ماتا ہے جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -3.61699$ اور $c_2 = 3.61699$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مخصوص حل

$$\mathbf{J} = -3.617x^{(1)}e^{-2.38t} + 3.617x^{(2)}e^{-0.57t} + \mathbf{a}$$

یعنی

$$I_1 = -5.998e^{-2.38t} + 3.998e^{-0.57t} + 2$$

$$I_2 = -3.617e^{-2.38t} + 3.617e^{-0.57t}$$

ہو گا جسے شکل 4.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.3-ب میں $I_1(t)$ بالقابل $I_2(t)$ کو I_1I_2 سطح پر دکھایا گیا ہے جس میں t مقدار معلوم ہے۔ مقدار معلوم کے بڑھنے کی سمت کو منحنی پر تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے۔ سطح I_1I_2 کو نظام کی سطح مرحلہ³² کہتے ہیں جبکہ شکل 4.3-ب کی منحنی کو خط حرکت³³ کہتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ سطح مرحلہ اشکال، سادہ شکل

phase plane³²
trajectory³³

4.3-الف طرز کے اشکال سے زیادہ اہم ثابت ہوتے ہیں۔ یہ خطوط کی نسل کے بارے میں بہتر کیفی معلومات فراہم کرتے ہیں۔

صفحہ 26 مثال 1.10 میں ایک عدد ٹینکی کی مثال پر غور کیا گیا جس کی نمونہ کشی ایک عدد سادہ تفرقی مساوات سے کی گئی۔ مثال 4.2 میں دو ٹینکیوں پر مبنی نظام کی نمونہ کشی دو عدد تفرقی مساوات سے کی گئی۔ اسی طرح مثال 4.3 میں دو عدد نامعلوم رو کی بنا دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ بڑے نظام کی نمونہ کشی زیادہ تعداد کی تفرقی مساوات سے کی جائے گی۔

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے تفرقی مساوات کے نظام کا حصول

درج ذیل مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے کہ n درجی سادہ تفرقی مساوات 4.27 سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 4.1: تفرقی مساوات کا مبادلہ
سادہ n درجی تفرقی مساوات

$$(4.27) \quad y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

میں

$$(4.28) \quad y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

لے کر اس کو n عدد سادہ ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام

$$(4.29) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

ثبوت : مساوات 4.28 کے تفرق سے نظام کے پہلے $n - 1$ عدد تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 4.28 سے $y'_n = y^{(n)}$ بھی حاصل ہوتا ہے لہذا مساوات 4.27 سے مساوات 4.29 کی آخری مساوات بھی حاصل ہوتی ہے۔

مثال 4.4: ہم اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ ارتعاش کے مسئلے پر غور کر چکے ہیں جس کی تفرقی مساوات صفحہ 120 پر مساوات 2.41

$$(4.30) \quad my'' + cy' + ky = 0 \quad \implies \quad y'' = -\frac{k}{m}y - \frac{c}{m}y'$$

دیتی ہے جس کے لئے مساوات 4.29 کا نظام

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{aligned}$$

متجانس اور خطی ہے۔ قالب کا استعمال کرتے ہوئے $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ لکھتے ہوئے اس نظام کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(4.31) \quad y' = Ay = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

جس سے امتیازی مساوات لکھتے ہیں۔

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

بامثالاً $m = 1$ ، $c = 1.4$ اور $k = 0.24$ ہوں تب

$$\lambda^2 + 1.4\lambda + 0.24 = (\lambda + 0.2)(\lambda + 1.2) = 0$$

ہو گا جس سے آگنی قدر $\lambda_1 = -0.2$ اور $\lambda_2 = -1.2$ حاصل ہوتے ہیں۔ آگنی سمتیات $A - \lambda I = 0$ کی پہلی مساوات $-\lambda x_1 + x_2$ سے حاصل کرتے ہیں۔ آگنی قدر $\lambda_1 = -0.2$ پر کرتے ہوئے $0.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -0.2x_1$ ملتا ہے لہذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -0.2$ ہو گا۔ اسی طرح $\lambda_2 = -1.2$ پر کرتے ہوئے $1.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -1.2x_1$ ملتا ہے لہذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1.2$ ہو گا۔ یوں درج ذیل آگنی سمتیات حاصل ہوتی ہیں

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} e^{-0.2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix} e^{-1.2t}$$

سمتیہ حل لکھا جائے گا۔ اس نظام کی پہلی مساوات

$$y = y_1 = c_1 e^{-0.2t} + c_2 e^{-1.2t}$$

درکار حل ہے جبکہ نظام کی دوسری مساوات حل کی تفرق ہے۔

$$y_2 = y'_1 = y' = -0.2c_1 e^{-0.2t} - 1.2c_2 e^{-1.2t}$$

سوالات

سوال 4.1 تا سوال 4.5 میں دیے گئے قالب کے آگنی قدر اور آگنی سمتیات حاصل کریں۔

سوال 4.1: الیکٹران کی ایک خاصیت چکر³⁴ کہلاتی ہے جس کی مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ یا $\frac{\hbar}{2}$ ہو سکتی ہے جہاں $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ہے اور $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$ مستقل پلانک³⁵ ہے۔ چکر سمتیہ مقدار ہے۔ مقناطیسی میدان

³⁴ spin
³⁵ Plank's constant

میں الیکٹران کا چکر یا ہمہ میدان (مقناطیسی میدان کی سمت میں) رہتا ہے اور یا مخالف میدان (میدان کی الٹ سمت میں) رہتا ہے۔ ہمہ میدان صورت میں الیکٹران کو اوپر چکر³⁶ الیکٹران کہتے ہیں جبکہ میدان مخالف چکر کی صورت میں الیکٹران کو نیچے چکر³⁷ الیکٹران کہتے ہیں۔ z سمت میں مقناطیسی میدان میں موجود الیکٹران کی خاصیت S_z قالب چکر³⁸ سے معلوم کی جاسکتی ہے۔ z میدان میں اوپر چکر الیکٹران کو آگنی سمتیہ χ_+^z اور نیچے چکر الیکٹران کو آگنی سمتیہ χ_-^z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل S_z قالب کے آگنی قدر (یعنی الیکٹران کا چکر) حاصل کرتے ہوئے آگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$S_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}$$

$$\chi_+^z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi_-^z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_+ = \frac{\hbar}{2}, \lambda_- = -\frac{\hbar}{2} \text{ جوابات:}$$

سوال 4.2: مقناطیسی میدان میں الیکٹران کی زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع S^2 قالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس قالب کی آگنی قدر زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع ہو گا۔ قالب کی آگنی قدر اور آگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$S^2 = \begin{bmatrix} \frac{3\hbar}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3\hbar}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3\hbar^2}{4} \text{ جوابات:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ سوال 4.3:}$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ جوابات:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ سوال 4.4:}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}, x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}, \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ جوابات:}$$

spin up³⁶
spin down³⁷
spin matrix³⁸

4.2. سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

سوال 4.5: $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$

جوابات: $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = \frac{4}{5}$ ، $\lambda_1 = \frac{3}{5}$

سوال 4.6 اور سوال 4.7 ٹینکیوں کے سوالات ہیں۔

سوال 4.6: اگر مثال 4.2 میں ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر چار سو (400) لٹر پانی موجود ہو تب جوابات کیا ہوں گے؟

جوابات: $A = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.02 \\ 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -0.03$ ، $\lambda_2 = 0$ ، $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ ، $c_1 = -20$ ، $c_2 = 20$ ، 23.1 min

سوال 4.7: مثال 4.2 میں ٹینکی الف کے ساتھ دو سو (200) لٹر کی ٹینکی پ دو نالیوں کے ذریعہ جوڑی جاتی ہے۔ ان کے مابین بھی چار لٹری منٹ کی شرح سے پانی کا تبادلہ ہوتا ہے۔ ٹینکی پ میں ابتدائی طور پر دو سو لٹر کا خالص پانی پایا جاتا ہے۔ اس نظام کے تفرقی مساوات لکھ کر A حاصل کریں۔ نظام کی آگنی قدر اور آگنی سمتیت دریافت کرتے ہوئے مخصوص حل دریافت کریں۔

جوابات: $A = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -0.06$ ، $\lambda_2 = -0.02$ ، $\lambda_3 = 0$

$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

$y = -10x^{(1)}e^{-0.06t} + 15x^{(-0.02t)} + 10x^{(3)}$

سوال 4.8 تا سوال 4.10 برقی جال پر مبنی ہیں۔

سوال 4.8: اگر مثال 4.3 میں ابتدائی برقی رو $I_1(0) = 0$ اور $I_2 = 2A$ ہوں تب حل کیا ہوگا؟

جواب: $I_2 = 9.62e^{-0.57t} - 7.62e^{-2.38t}$ ، $I_1 = 10.63e^{-0.57t} - 12.63e^{-2.38t} + 2$

سوال 4.9: اگر مثال 4.3 میں $L = 0.5H$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہوگا؟

جواب: $I_2 = 2.83e^{-0.529t} - 2.83e^{-5.153t}$ ، $I_1 = 2.96e^{-0.529t} - 4.96e^{-5.153t} + 2$

سوال 4.10: اگر مثال 4.3 میں $L = 2H$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہوگا؟

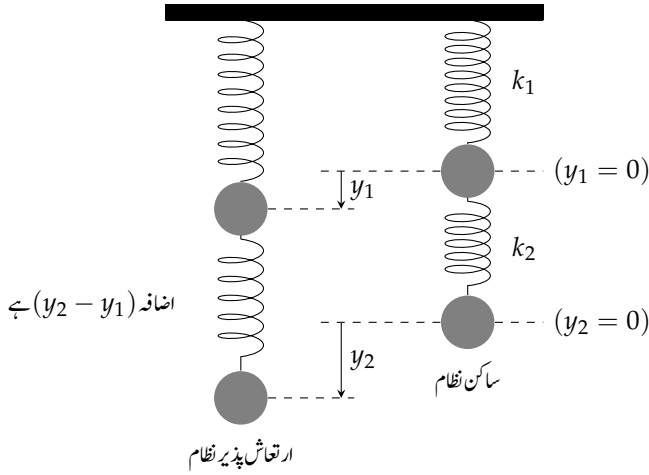
جواب: $I_2 = 14.77e^{-\frac{35}{44}t} \sin(0.22t)$ ، $I_1 = 2 + e^{-\frac{35}{44}t} [19.9 \cos(0.22t) - 2 \sin(0.22t)]$

سوال 4.11 تا سوال 4.11 میں تفرقی مساوات کو نظام میں تبدیل کرتے ہوئے A قالب حاصل کریں۔ اس قالب کی آگنی قدر اور آگنی سمتیات دریافت کریں۔ مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کو جوں کا توں بھی حل کریں۔

سوال 4.11: $y'' + 5y' + 6y = 0$
 جوابات: $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = -2$ ، $\lambda_1 = -3$ ، $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$
 $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$ ،

سوال 4.12: $12y'' - y' - 6y = 0$
 جوابات: $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ ، $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ ، $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$
 $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} e^{\frac{3}{4}t}$

سوال 4.13: $y''' - y' = 0$
 جوابات: $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\lambda_2 = 1$ ، $\lambda_1 = -1$ ، $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



شکل 4.4: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام۔

سوال 4.14: $y'' + 9y' + 14y = 0$

جوابات: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14 & -9 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = -7$ ، $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ،

$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} e^{-7t}$ ، $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$

سوال 4.15: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام شکل 4.4 میں دکھایا گیا ہے جس میں $k_1 = 3$ ، $m_1 = m_2 = 1$ اور $k_2 = 4$ ہیں۔ اس نظام کے تفرقی مساوات لکھیں۔ $y = x e^{\omega t}$ تصور کرتے ہوئے، جہاں $\omega^2 = \lambda$ ہے، ان کا حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1 = A \cos(1.109t) + B \sin(1.109t) + C \cos(3.126t) + D \sin(3.126t)$ ، $y_2 = A * \cos(1.109t) + B * \sin(1.109t) + C * \cos(3.126t) + D * \sin(3.126t)$

4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی

گزشتہ حصے کے ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام، درج ذیل عمومی نظام کی مخصوص صورت ہے۔

$$(4.32) \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_2 &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad \implies \quad \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

نظام کو سمتیہ کی صورت میں سمتیہ قطار $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ اور سمتیہ قطار $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ (یہاں T سے مراد تبدیلی محل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے سمتیہ قطار کو افقی لکھ کر جگہ بچائی گئی ہے) کی استعمال سے لکھا گیا ہے۔ درج بالا نظام عملی استعمال کے تقریباً تمام صورتوں کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں $n = 1$ کی صورت میں یہ $y'_1 = f_1(t, y_1)$ یعنی $y' = f(t, y)$ کو ظاہر کرے گی جسے ہم باب 1 سے جانتے ہیں۔

کسی کھلے وقفہ $a < t < b$ پر مساوات 4.32 کا حل، وقفہ $a < t < b$ پر قابل تفرق، n عدد تفاعل کا سلسلہ

$$y_1 = h_1(t), \quad y_2 = h_2(t), \quad \dots, \quad y_n = h_n(t)$$

ہو گا جو پورے وقفے پر مساوات 4.32 پر پورا اترتا ہو۔ حل سمتیہ³⁹ کو قطار سمتیہ $\mathbf{h} = [h_1(t), \dots, h_n(t)]^T$ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(t)$$

اس نظام پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 4.32 اور n عدد ابتدائی شرائط

$$(4.33) \quad y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = K_n$$

پر مبنی ہو گا۔ ان ابتدائی شرائط کو سمتیہ کی صورت میں $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{K}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں t_0 دیے گئے وقفے پر پایا جاتا ہے اور سمتیہ قطار $\mathbf{K} = [K_1, \dots, K_n]^T$ کے ارکان دیے گئے مستقل مقدار ہیں۔ مساوات 4.32 اور مساوات 4.33 کے ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کی وجودیت اور یکتائی کے لئے معقول شرائط درج ذیل مسئلہ بیان کرتی ہے جو حصہ 1.7 میں دیے گئے مسئلے کو وسعت دیتی ہے۔ اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

³⁹solution vector

مسئلہ 4.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ $t y_1 y_2 \dots y_n$ میدان عمل⁴⁰ پر تفاعل f_1 تا f_n اور ان کے تفرق $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ تا $\frac{\partial f_1}{\partial y_n}$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_1}$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ استمراری ہیں اور اس میدان عمل پر نقطہ (t_0, K_1, \dots, K_n) پایا جاتا ہو تب کچھ وقفہ $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ پر مساوات 4.32 کا ایسا حل موجود ہے جو مساوات 4.33 کے ابتدائی شرائط پر پورا اترتا ہو اور یہ حل یکتا ہے۔

4.3.1 خطی نظام

سادہ تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہم مساوات 4.32 کو اس صورت خطی نظام⁴¹ کہیں گے جب اس کو

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ y'_2 &= a_{21}(t)y_1 + \dots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ y'_n &= a_{n1}(t)y_1 + \dots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$$

لکھنا ممکن ہو جہاں

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 4.34 میں y'_1 تا y'_n کا y_1 تا y_n کے ساتھ خطی تعلق ہے۔ اگر $g = 0$ ہو تب نظام 4.34

$$(4.35) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

صورت اختیار کرتا ہے جو متجانس نظام ہے جبکہ $g \neq 0$ کی صورت میں نظام 4.34 کو غیر متجانس کہلاتا ہے۔ یوں مثال 4.2 اور مثال 4.4 متجانس نظام ہیں جبکہ مثال 4.3 غیر متجانس نظام ہے۔

⁴⁰ domain
⁴¹ linear system

خطی نظام میں $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = a_{11}(t)$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n} = a_{nn}(t)$ ہیں لہذا مسئلہ 4.2 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.3: خطی نظام کا مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ کھلے وقفہ $\alpha < t < \beta$ جس پر نقطہ t_0 پایا جاتا ہو، پر نظام 4.34 کے تمام a_{jk} اور g_j استمراری ہیں۔ ایسی صورت میں نظام 4.34 کا ایسا حل y موجود ہے جو ابتدائی شرائط مساوات 4.33 پر پورا اترتا ہے اور یہ حل یکتا ہے۔

ایک عدد متجانس سادہ تفرقی مساوات کی طرح مسئلہ خطی میل متجانس نظام کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ خطی میل
اگر $y^{(1)}$ اور $y^{(2)}$ کسی کھلے وقفے پر متجانس خطی نظام 4.35 کے حل ہوں تب ان کا کوئی بھی خطی میل $y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}$ بھی اس نظام کا حل ہو گا۔

ثبوت: خطی میل کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 4.35 کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y' &= [c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}]' \\ &= c_1 y^{(1)'} + c_2 y^{(2)'} \\ &= c_1 A y^{(1)} + c_2 A y^{(2)} \\ &= A(c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}) = A y \end{aligned}$$

خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا نظریہ، ایک عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظریے سے بہت مشابہت رکھتا ہے جس پر حصہ 2.6 اور حصہ 2.7 میں غور کیا گیا ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر ہم بالکل بنیادی تصورات اور حقائق پر غور کرتے ہیں۔

اساس، عمومی حل اور ورنسکی

متجانس نظام 4.35 کا کھلے وقفہ J پر حل کی اساس یعنی بنیادی نظام⁴² سے مراد n عدد، J پر خطی طور غیر تابع حل، $y^{(1)}$ تا $y^{(n)}$ کا سلسلہ ہے۔ (یہاں کھلے وقفے کو J کہا گیا ہے چونکہ I اکائی قالب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔) ان حل کے خطی میل

$$(4.36) \quad y = c_1 y^{(1)} + \dots + c_n y^{(n)}$$

کو J پر مساوات 4.35 کا عمومی حل کہا جاتا ہے جہاں c_1 تا c_n اختیاری مستقل ہیں۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر مساوات 4.35 میں تمام a_{jk} کھلے وقفے پر استمراری ہوں تب اس وقفے پر مساوات 4.35 کے حل کی اساس موجود ہے لہذا اس کا عمومی حل موجود ہے جس میں، کھلے وقفے پر، تمام حل شامل ہیں۔

ہم کھلے وقفے پر n عدد حل کو $n \times n$ قالب کی قطاروں کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(4.37) \quad Y = [y^{(1)} \quad \dots \quad y^{(n)}]$$

Y کے مقطع کو $y^{(1)}$ تا $y^{(n)}$ کا ورنسکی کہتے ہیں۔

$$(4.38) \quad W(y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \dots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

درج بالا ورنسکی میں قطار $y^{(1)}$ تا $y^{(n)}$ حل کی اساس ہیں جنہیں اجزاء کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یہ حل صرف اور صرف اس صورت حل کی اساس ہوں گے جب ان کا ورنسکی کھلے وقفہ J پر کسی بھی نقطہ t_1 پر صفر کے برابر نہ ہو۔ کھلے وقفے پر W یا تو کہیں بھی صفر کے برابر نہیں ہو گا اور یا یہ کھلے وقفے پر مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ (یہ بالکل مسئلہ 2.3 اور مسئلہ 3.3 کی طرح ہے۔)

اگر مساوات 4.36 میں دیے حل اساس یعنی بنیادی نظام ہوں تب قالب 4.37 بنیادی قالب⁴³ کہلاتا ہے۔ سمتیہ قطار $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T$ کی مدد سے مساوات 4.36 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.39) \quad y = Yc$$

fundamental system⁴²
fundamental matrix⁴³

آئیں مساوات 4.38 کا حصہ 2.6 کے ساتھ تعلق جوڑیں۔ فرض کریں کہ متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل y اور z ہیں۔ یوں ورونسکی

$$W(y, z) = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

ہو گا۔ اس سادہ دو درجی مساوات کو تفرقی مساوات کی نظام کی صورت میں لکھنے کی خاطر، حصہ 4.1 کے تحت،
درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے
 $y = y_1$ ، $y' = y'_1 = y_2$ ، $z = z_1$ اور $z' = z'_1 = z_2$ لکھنا ہو گا۔ ایسا کرتے ہوئے ورونسکی

$$W(y_1, z_1) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

جو، علامتوں میں فرق کے علاوہ، ہو بہو مساوات 4.38 ہے۔

4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب

فرض کریں کہ متجانس خطی نظام

$$(4.40) \quad y' = Ay$$

کے عددی سر مستقل مقدار ہیں لہذا $n \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کے ارکان t پر منحصر نہیں ہوں گے۔ ہم مساوات 4.40 کو حل کرنا چاہتے ہیں۔ اب ہم جانتے ہیں کہ ایک عدد سادہ تفرقی مساوات $y' = ky$ کا حل $y = Ce^{kt}$ ہے لہذا ہم مساوات 4.40 کا حل

$$(4.41) \quad y = xe^{\lambda t}$$

تصور کرتے ہیں۔ تصوراتی حل اور اس کے تفرق $y' = \lambda xe^{\lambda t}$ کو مساوات 4.40 میں پر کرتے ہوئے ہمیں
 $y' = \lambda xe^{\lambda t} = Axe^{\lambda t}$ ملتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے آگنی قیمت مسئلہ

$$(4.42) \quad Ax = \lambda x$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 4.40 کے غیر صفر اہم حل مساوات 4.41 کی صورت رکھتے ہیں جہاں λ قالب A کے آگنی قدر اور x اس کے نظیری آگنی سمتیات ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ A کا n عدد خطی طور غیر تابع آگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہے۔ عموماً مسائل میں ایسا ہی ہوتا ہے بالخصوص اگر A تشاکل⁴⁴ ہو $(a_{kj} = a_{jk})$ یا منحرف تشاکل⁴⁵ $(a_{kj} = -a_{jk})$ ہو اور یا اگر اس کے n عدد منفرد آگنی قدر پائے جاتے ہوں۔

ان خطی طور غیر تابع آگنی سمتیات کے سلسلے کو $x^{(1)}$ تا $x^{(n)}$ لکھتے ہیں جو آگنی قدر λ_1 تا λ_n کے نظیری سمتیات ہیں (جو منفرد ہو سکتے ہیں یا ان میں سے چند یا تمام یکساں ہو سکتے ہیں)۔ یوں مساوات 4.41 طرز کے نظیری حل درج ذیل ہوں گے۔

$$(4.43) \quad y^{(1)} = x^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \dots, y^{(n)} = x^{(n)}e^{\lambda_n t}$$

مساوات 4.38 کی مدد سے ان کی وروئسی $W(y^{(1)}), \dots, y^{(n)}$ لکھتے ہیں۔

$$W(y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \dots & x_1^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ x_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \dots & x_2^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_n^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \dots & x_n^{(n)}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

(4.44)

$$= e^{\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

اب نا قوت نمائی تفاعل کبھی بھی صفر نہیں ہوتا اور درج بالا مساوات میں آخری مقطع کے قطار، خطی طور غیر تابع آگنی سمتیات ہیں، لہذا یہ مقطع بھی غیر صفر ہے۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: عمومی حل

اگر مساوات 4.40 میں دیے نظام کے مستقل قیمت قالب A کے n عدد منفرد آگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہو تب مساوات 4.43 میں دیے گئے حل $y^{(1)}$ تا $y^{(n)}$ مساوات 4.40 کے حل کی اساس ہوں گے جن سے درج ذیل عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(4.45) \quad y = c_1 x^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n x^{(n)}e^{\lambda_n t}$$

symmetric⁴⁴
skew-symmetric⁴⁵

تفائل یا منحرف تفائل A کی صورت میں اور یا اگر A کے n عدد منفرد آگنی سمتیات پائے جاتے ہوں تب A کے منفرد آگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جائے گا اور درج بالا مسئلے کا فرض کردہ شرط پورا ہوگا۔

سطح مرحلہ پر حل منحنی کا اظہار

ہم اب دو عدد مستقل عددی سروالے متجانس سادہ تفرقی مساوات کے نظام کی صورت میں مساوات 4.40 پر غور کرتے ہیں۔

$$(4.46) \quad y' = Ay \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

ہم عموماً مساوات 4.46 کے دونوں حل بالمقابل t کو علیحدہ علیحدہ (شکل 4.3-الف کی طرح) کھینچتے ہیں۔ ہم انہیں حل

$$(4.47) \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

کو ایک ہی خط کی صورت میں (شکل 4.3-ب کی طرح) سطح مرحلہ پر بھی کھینچ سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے t کو بطور مقدار معلوم تصور کیا جاتا ہے لہذا ایسے خط کو منحنی مقدار معلوم⁴⁶ بھی کہتے ہیں۔ ایسے منحنی کو مساوات 4.46 کا خط حرکت کہا جاتا ہے جبکہ $y - 1y_2$ سطح کو سطح مرحلہ کہتے ہیں۔ سطح مرحلہ کو مساوات 4.46 کے خطوط حرکت سے بھرنے سے مساوات 4.46 کا پیکر مرحلہ⁴⁷ حاصل ہوتا ہے۔

کمپیوٹر کے استعمال نے سطح مرحلہ پر حل کے خط حرکت کو اہمیت بخشی ہے۔ پیکر مرحلہ تمام حل کی خفی تجزیہ میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔ انہیں پیکر مرحلہ کی ایک مثال دیکھیں۔

parametric curve⁴⁶
phase portrait⁴⁷

مثال 4.5: سطح مرحلہ پر خط حرکت
درج ذیل نظام کے حل کی منحنی کھینچیں۔

$$(4.48) \quad y' = Ay = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y \implies \begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

حل: $y = xe^{\lambda t}$ اور $y' = \lambda xe^{\lambda t}$ پر کر کے قوت نمائی تفاعل سے تقسیم کرتے ہوئے $Ax = \lambda x$ ملتا ہے۔ امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$$

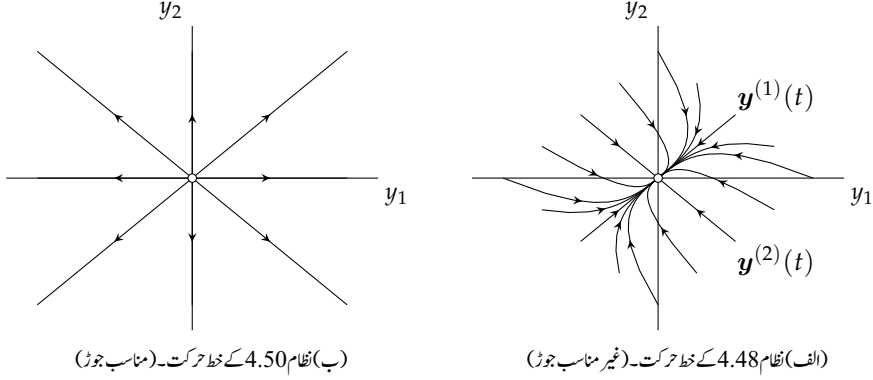
ہے۔ یوں آگنی قدر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -3$ حاصل ہوتے ہیں۔ آگنی سمتیات $(A - \lambda I)x = 0$ کے پہلے صف $(-2 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$ سے حاصل کرتے ہیں جس میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے $x_2 = x_1$ ملتا ہے۔ یوں x_1 چنتے ہوئے $x_2 = 1$ حاصل ہو گا جس سے آگنی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \ 1]^T$ چنتے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -3$ پر کرتے ہوئے $x_2 = -x_1$ ملتا ہے لہذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ حاصل ہو گا اور یوں $x^{(2)} = [1 \ -1]^T$ ہو گا۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں جس کے مختلف خط حرکت (یعنی پیکر حرکت) شکل 4.5-الف میں دکھائے گئے ہیں۔

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

نظام کا نقطہ فاصل

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ نظام 4.46 کے تمام خط حرکت نقطہ $y = 0$ سے گزرتے ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ ایسا کیوں ہے۔ علم الاحصاء سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.49) \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_2' dt}{y_1' dt} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$



شکل 4.5: غیر مناسب جوڑ اور مناسب جوڑ۔

یوں ماسوائے نقطہ $P_0 : (0, 0)$ کے، ہر نقطہ $P : (y_1, y_2)$ کے ساتھ خط حرکت کا مماس $\frac{dy_2}{dy_1}$ منسلک کیا جاسکتا ہے۔ نقطہ P_0 پر مساوات 4.49 کا دایاں ہاتھ نا قابل معلوم قیمت $\frac{0}{0}$ ہو گا۔ ایسا نقطہ P_0 جس پر $\frac{dy_2}{dy_1}$ کی قیمت نا قابل معلوم ہو کو نظام 4.46 کا نقطہ فاصل⁴⁸ کہتے ہیں۔

نقطہ فاصل کے پانچ اقسام

نقطہ فاصل کے قریب، خط حرکت کی جیومیٹریائی صورت کو دیکھ کر نقطہ فاصل کی پانچ اقسام بیان کیے جاسکتے ہیں جنہیں غیر مناسب جوڑ⁴⁹، مناسب جوڑ⁵⁰، نقطہ زین⁵¹، وسط⁵² اور نقطہ مرغولہ⁵³ کہتے ہیں۔ ان کی وضاحت درج ذیل پانچ مثالوں میں کی گئی ہے جہاں ان کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔

مثال 4.6: غیر مناسب جوڑ

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر، دو خط حرکت کے علاوہ، تمام خط حرکت کی مماس کی ایک جیسی تحدیدی سمت پائی جاتی

- critical point⁴⁸
- improper node⁴⁹
- proper node⁵⁰
- saddle point⁵¹
- centre⁵²
- spiral point⁵³

ہو غیر مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔ دو مختلف خط حرکت کا بھی نقطہ P_0 پر تحدیدی سمت پایا جاتا ہے البتہ یہ تحدیدی سمت مختلف ہو گا۔

نظام 4.48 کا 0 پر غیر مناسب جوڑ پایا جاتا ہے۔ چونکہ e^{-t} کی نسبت سے e^{-3t} زیادہ تیزی سے گھٹتی ہے لہذا غیر مناسب جوڑ پر مشترکہ تحدیدی سمت، $x^{(1)} = [1 \ 1]^T$ کی سمت ہے۔ دو غیر معمولی خط حرکت کی سمت $x^{(2)} = [1 \ -1]^T$ اور $-x^{(2)} = [-1 \ 1]^T$ کی سمتیں ہیں۔

مثال 4.7: مناسب جوڑ

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر ہر خط حرکت کی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔ مناسب جوڑ پر ایسا خط حرکت ضرور ہو گا جس کی تحدیدی سمت d ہو جہاں d کوئی بھی سمت ہو سکتی ہے۔

نظام

$$(4.50) \quad y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y'_1 &= y_1 \\ y'_2 &= y_2 \end{aligned}$$

کا مناسب جوڑ مرکز پر پایا جاتا ہے۔ اس میں فرضی حل $y = xe^{\lambda t}$ اور اس کا تفرق $y' = \lambda xe^{\lambda t}$ پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $Ax = \lambda x$ یعنی $(A - \lambda I)x = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی آگنی قدر، $x \neq 0$ کی صورت میں، امتیازی مساوات $(1 - \lambda)^2 = 0$ سے $\lambda = 1$ حاصل ہوتی ہے۔ مساوات $(A - \lambda I)x = 0$ کے اجزاء $(1 - \lambda)x_1 = 0$ اور $(1 - \lambda)x_2 = 0$ میں حاصل آگنی قدر پر کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $x \neq 0$ کے علاوہ آگنی سمتیہ x کی کوئی بھی قیمت چننی جاسکتی ہے۔ یوں $[1 \ 0]^T$ اور $[0 \ 1]^T$ چنتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad c_1 y_2 = c_2 y_1$$

شکل 4.5-ب میں سطح حرکت پر پیکر مرحلہ اور مناسب جوڑ دکھائے گئے ہیں۔

مثال 4.8: نقطہ زین

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر دو عدد آمدی اور دو عدد رخصتی خط حرکت پائے جاتے ہوں نقطہ زین کہلاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے قریب بقایا تمام خط حرکت اس نقطے کو نہیں چھوتے۔

نظام

$$(4.51) \quad y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y \implies \begin{aligned} y'_1 &= y_1 \\ y'_2 &= -y_2 \end{aligned}$$

کا نقطہ زین مرکز پر پایا جاتا ہے۔ اس نظام کے امتیازی مساوات $(-1 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = 1$ اور $\lambda_2 = -1$ ہیں۔ جذر λ_1 کے لئے $(A - \lambda I)x = 0$ کے دوسرے صف $0x_1(1 - 1)x_2 = 0$ میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 0$ ملتا ہے جس سے آگنی سمتیہ $[1 \ 0]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ جذر λ_2 کے لئے پہلے صف سے آگنی سمتیہ $[0 \ 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(4.52) \quad y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \implies \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^{-t} \end{aligned} \implies y_1 y_2 = c$$

عمومی حل ہڈلولی⁵⁴ ہے جس کو شکل 4.6-الف میں دکھایا گیا ہے۔

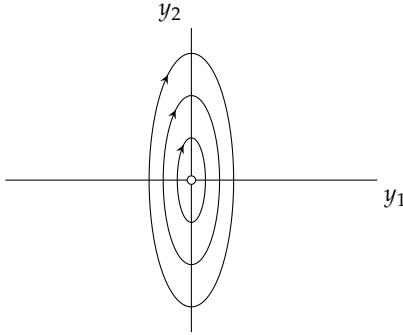
مثال 4.9: وسط

ایسا نقطہ فاصل جسے لامتناہی بند خط حرکت گھیرتے ہوں وسط کہلاتا ہے۔

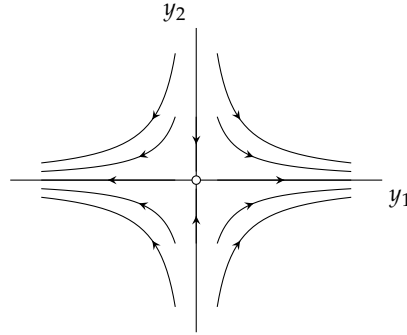
نظام

$$(4.53) \quad y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} y \implies \begin{aligned} y'_1 &= y_2 \quad (\text{الف}) \\ y'_2 &= -9y_1 \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

hyperbolic⁵⁴



(ب) نظام 4.53 کے خط حرکت۔ (وسط)



(الف) نظام 4.51 کے خط حرکت۔ (نقطہ زین)

شکل 4.6: نقطہ زین اور وسط۔

میں $y = x e^{\lambda t}$ حل تصور کرتے ہوئے y اور y' کو درج بالا میں پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $(A - \lambda I)x = 0$ ملتا ہے۔ اس سے $x \neq 0$ کی صورت میں امتیازی مساوات $\lambda^2 + 9 = 0$ حاصل ہو گا جس کے آگنی قدر $\lambda_1 = 3i$ اور $\lambda_2 = -3i$ ہیں۔ مساوات $(A - \lambda I)x = 0$ کے پہلے صف میں λ_1 پر کرتے ہوئے $x_2 = 3ix_1$ ملتا ہے۔ یوں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 3i$ حاصل ہو گا جس سے آگنی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \ 3i]^T$ ملتا ہے۔ اسی طرح λ_2 کی مطابقتی آگنی سمتیہ $x^{(2)} = [1 \ -3i]^T$ حاصل ہو گا۔ یوں مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(4.54) \quad y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \end{bmatrix} e^{3it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix} e^{-3it} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{3it} + c_2 e^{-3it} \\ y_2 &= 3ic_1 e^{3it} - 3ic_2 e^{-3it} \end{aligned}$$

حقیقی حل یولر مساوات⁵⁵ سے

$$\begin{aligned} y_1 &= A \cos 3t + B \sin 3t \\ y_2 &= 3B \cos 3t - 3A \sin 3t \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

حقیقی حل کو مساوات 4.53 سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر مساوات 4.53-الف کے بائیں ہاتھ اور مساوات 4.53-ب کے دائیں ہاتھ کو ضرب دیا جائے تو $-9y_1 y_1' - 9y_2 y_2' = 0$ حاصل ہو گا جو مساوات-ب کے بائیں ہاتھ اور مساوات-الف

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad ^{55}$$

کے دائیں ہاتھ کے حاصل ضرب $y_2 y_2'$ کے برابر $-9y_1 y_1' = y_2 y_2'$ ہو گا۔ اس کا مکمل

$$(4.55) \quad \frac{9}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = c$$

ہے جو t سے پاک حقیقی حل ہے۔ یہ ترخیم⁵⁶ کی نسل کی مساوات ہے جس کو شکل 4.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.10: نقطہ مرغولہ

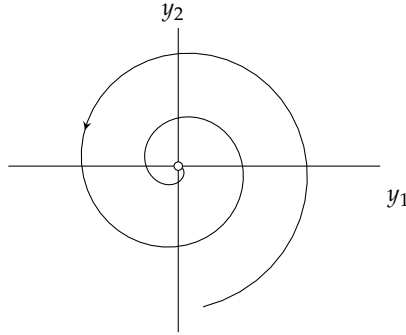
ایسا نقطہ فاصل جس کے گرد خط حرکت گھومتے ہوئے نقطہ فاصل تک آن پہنچنے کی کوشش کرے یا نقطہ فاصل سے نکل کر اس نقطے کے گرد گھومتے ہوئے دور ہٹتا جائے⁵⁷ کہلاتا ہے۔ پہلی صورت میں لمحہ $t \rightarrow \infty$ پر خط حرکت نقطہ مرغولہ تک آن پہنچے گا۔

نظام

$$(4.56) \quad y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} y \implies \begin{array}{ll} y_1' = -y_1 + y_2 & \text{(الف)} \\ y_2' = -y_1 - y_2 & \text{(ب)} \end{array}$$

کا نقطہ مرغولہ مرکز پر پایا جاتا ہے۔ امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ سے آگنی قدر $\lambda_1 = -1 + i$ اور $\lambda_2 = -1 - i$ حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات $(-1 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$ میں آگنی قدر λ_1 پر کرتے ہوئے $-ix_1 + x_2 = 0$ ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = i$ حاصل ہوتا ہے اور یوں λ_1 کا نظیری آگنی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \ i]^T$ ہو گا۔ اسی طرح λ_2 کا نظیری آگنی سمتیہ $x^{(2)} = [1 \ -i]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$$



شکل 4.7: نظام 4.56 کے خط حرکت۔ (نقطہ مرغولہ)

مخلوط عمومی حل سے حقیقی حل حاصل کو یولر مساوات کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔ ہم گزشتہ مثال کی طرح نسبتاً آسان طریقہ استعمال کرتے ہوئے حقیقی حل حاصل کرتے ہیں۔ یولر مساوات 4.56-الف کو y_1 اور مساوات 4.56-ب کو y_2 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_1 y_1' + y_2 y_2' = -(y_1^2 + y_2^2)$$

اب ہم نئی محدود r اور t زیر استعمال لاتے ہیں جہاں $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ ہے۔ r کا t کے ساتھ تفرق $2rr' = 2y_1 y_1' + 2y_2 y_2'$ ہو گا لہذا درج بالا مساوات سے

$$rr' = -r^2, \implies \frac{dr}{r} = -dt, \implies r = ce^{-t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ c کی کسی بھی قیمت کے لئے یہ مرغولی خط کی مساوات ہے جس کو شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.11: انحطاطی جوڑ

بعض اوقات نظام کی آگنی حل کی اساس نہیں پائی جاتی۔ ایسے صورت میں انحطاطی جوڑ⁵⁸ پایا جاتا ہے۔ انحطاطی جوڑ، مثال 4.6 تا مثال 4.8 کی طرح تشاکلی A (جس میں $a_{kj} = a_{jk}$ ہوتا ہے) کی صورت میں نہیں پایا جائے

گا اور نا ہی یہ منحرف تشاکلی (جس میں $a_{kj} = -a_{jk}$ اور $a_{jj} = 0$ ہوتا ہے) صورت میں پایا جائے گا۔ ان کے علاوہ، مثال 4.9 اور مثال 4.10 کی طرح، کئی دیگر صورتوں میں بھی انخطاطی جوڑ نہیں پایا جاتا ہے۔ انخطاطی جوڑ کی صورت میں جو ترکیب استعمال کی جاتی ہے اس کو درج ذیل نظام کی عمومی حل کے حصول کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

$$(4.57) \quad y' = Ay = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} y$$

حل: A : منحرف تشاکلی نہیں ہے۔ ہم اس کا حل $y = xe^{\lambda t}$ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں y اور y' کو درج بالا میں پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $(A - \lambda I)x = 0$ ملتا ہے۔ اس کی امتیازی مساوات

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

سے دوہرا آگنی قدر $\lambda = 3$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات $(A - \lambda I)x = 0$ کے پہلے صف میں $\lambda = 3$ پر کرتے ہوئے

$$(4 - \lambda)x_1 + x_2 = 0, \quad \implies \quad x_1 + x_2 = 0$$

ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چننے سے $x_2 = -1$ اور یوں آگنی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا حل

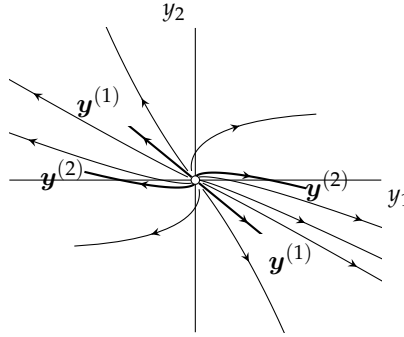
$$y^{(2)} = xte^{\lambda t} + ue^{\lambda t}$$

فرض کرتے ہیں جہاں $x = x^{(1)}$ ، $\lambda = -3$ جبکہ $u = [u_1 \quad u_2]^T$ مستقل ہے۔ (اگر یہاں حصہ 2.2 کی طرح دوسرا حل صرف $xte^{\lambda t}$ پر کیا جائے تو بات نہیں بنتی۔ آپ ایسا کر کے تسلی کر لیں۔) فرض کردہ حل اور اس کے تفرق کو مساوات 4.57 میں پر کرتے ہیں۔

$$y^{(2)'} = xe^{\lambda t} + \lambda xte^{\lambda t} + \lambda ue^{\lambda t} = Ay^{(2)} = A xte^{\lambda t} + Aue^{\lambda t}$$

دائیں ہاتھ $Ax = \lambda x$ ہے لہذا دونوں اطراف $\lambda xte^{\lambda t}$ کٹ جائے گا۔ بقایا مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$x + \lambda u = Au \quad \implies \quad (A - \lambda I)u = x$$



شکل 4.8: نظام 4.57 کے خط حرکت۔ (انخطاطی جوڑ)

ملتا ہے۔ اس میں $x = x^{(1)}$ اور $\lambda = -3$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 \\ -u_1 - u_2 &= -1 \end{aligned}$$

انہیں حل کرتے ہوئے یکتا u حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔ یوں $u_1 = 0$ چننے سے $u_2 = 1$ لہذا $u = [0 \ 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح دوسرا حل جو $x^{(1)} = [1 \ -1]^T$ سے خطی طور غیر تابع ہو حاصل ہوتا ہے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(4.58) \quad y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$$

ان حل کو شکل 4.8 میں دکھایا گیا ہے جہاں $y^{(1)}$ اور $y^{(2)}$ کو موٹی لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں مرکز پر واقع نقطہ فاصل کو عموماً انخطاطی جوڑ⁵⁹ کہا جاتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ، تین یا تین سے زائد تفرقی مساوات کے نظام جس کے سہ گنا آگنی قدر اور ایک عدد خطی طور غیر تابع آگنی سمتیہ پایا جاتا ہو کا دوسرا خطی طور غیر تابع آگنی سمتیہ مثال 4.11 کی طرح حاصل کیا جائے گا جبکہ

اس کا تیسرا خطی طور غیر تابع آگنی سمتیہ درج ذیل فرض کرتے ہوئے حاصل ہو گا

$$(4.59) \quad y^{(3)} = \frac{1}{2}xt^2e^{\lambda t} + ute^{\lambda t} + ve^{\lambda t}$$

جہاں v کو

$$(4.60) \quad u + \lambda v = Av$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یہاں u دوسرے خطی طور آگنی سمتیہ سے لیا جائے گا۔

سوالات

سوال 4.16 تا سوال 4.25 کے حل دریافت کریں۔

سوال 4.16:

$$y_1' = -y_1 + y_2$$

$$y_2' = 3y_1 + y_2$$

$$\text{جوابات: } y_2 = -c_1e^{-2t} + 3c_2e^{2t}, \quad y_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}$$

سوال 4.17:

$$y_1' = 6y_1 + y_2$$

$$y_2' = -6y_1 + y_2$$

$$\text{جوابات: } y_2 = -3c_1e^{3t} - 2c_2e^{4t}, \quad y_1 = c_1e^{3t} + c_2e^{4t}$$

سوال 4.18:

$$y_1' = y_1 + y_2$$

$$y_2' = 2y_1 + 2y_2$$

$$\text{جوابات: } y_2 = -c_1 + 2c_2e^{3t}, \quad y_1 = c_1 + c_2e^{3t}$$

سوال 4.19:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

جواب: $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} e^t$ چنا گیا ہے۔ $u_1 = 1$ جہاں

سوال 4.20:

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -\frac{4}{3}y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$ ، $y_2 = -\frac{1}{3}c_1 e^{2t} - \frac{4}{3}c_2 e^{-t}$

سوال 4.21:

$$\begin{aligned} y_1' &= -12y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= \frac{56}{3}y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-4t}$ ، $y_2 = -\frac{7}{5}c_1 e^{-5t} - \frac{8}{5}c_2 e^{-4t}$

سوال 4.22:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -9y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

جوابات:

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1-i) \end{bmatrix} e^{(2-i3)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1+i) \end{bmatrix} e^{(2+i3)t}$$

جس سے یولر مساوات کی مدد سے درج ذیل حقیقی حل لکھا جا سکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = -i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

$$y_1 = e^{2t}(A \cos 3t + B \sin 3t)$$

$$y_2 = \frac{3}{2}e^{2t}[(B + A) \cos 3t + (B - A) \sin 3t]$$

سوال 4.23:

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_2 \\y_2' &= -y_1 + 3y_3 \\y_3' &= -y_2\end{aligned}$$

جوابات:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-i\sqrt{5}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{i\sqrt{5}t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

سوال 4.24:

$$\begin{aligned}y_1' &= 11y_1 + 2y_2 \\y_2' &= -4y_1 + 5y_2\end{aligned}$$

$$\text{جوابات: } y_2 = -c_1 e^{9t} - 2c_2 e^{7t}, \quad y_1 = c_1 e^{9t} + c_2 e^{7t}$$

سوال 4.25:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - 10y_2 - 14y_3 \\y_2' &= -10y_1 + 10y_2 - 4y_3 \\y_3' &= -14y_1 - 4y_2 - 2y_3\end{aligned}$$

جوابات:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{18t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{9t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-18t}$$

سوال 4.26 تا سوال 4.31 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 4.26:

$$\begin{aligned}y_1' &= -6y_1 + 2y_2 \\y_2' &= -12y_1 + 5y_2 \\y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = 1\end{aligned}$$

4.4. مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب

$$y_2 = \frac{21}{5}e^{-3t} - \frac{16}{5}e^{2t} \text{ ، } y_1 = \frac{14}{5}e^{-3t} - \frac{4}{5}e^{2t} \text{ : جوابات}$$

سوال 4.27:

$$y_1' = -\frac{11}{3}y_1 + y_2$$

$$y_2' = -\frac{32}{3}y_1 + 3y_2$$

$$y_1(0) = -10, \quad y_2(0) = 2$$

$$y_2 = 86e^{\frac{t}{3}} - 84e^{-t} \text{ ، } y_1 = \frac{43}{2}e^{\frac{t}{3}} - \frac{63}{2}e^{-t} \text{ : جوابات}$$

سوال 4.28:

$$y_1' = -y_1 - 3y_2$$

$$y_2' = \frac{5}{3}y_1 + 5y_2$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = -1$$

$$y_2 = -\frac{5}{12}e^{4t} - \frac{7}{12} \text{ ، } y_1 = \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{7}{4} \text{ : جوابات}$$

سوال 4.29:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_1$$

$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 2$$

$$y_2 = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \text{ ، } y_1 = \frac{1}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} \text{ : جوابات}$$

سوال 4.30:

$$y_1' = -y_2$$

$$y_2' = y_1$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -1$$

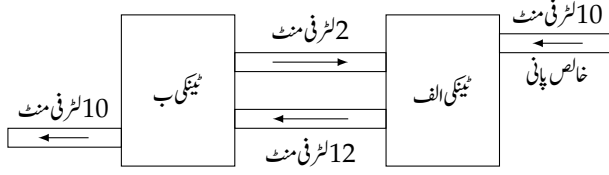
$$y_2 = -\cos t \text{ ، } y_1 = \sin t \text{ : جوابات}$$

سوال 4.31:

$$y_1' = -y_1 + y_2$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

$$y_1(0) = -2, \quad y_2(0) = 1$$



شکل 4.9: سوال 4.34 میں ٹینکیوں کا نظام۔

جوابات: $y_2 = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$ ، $y_1 = -\frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$

سوال 4.32 تا سوال 4.33 میں تفرقی مساوات تبدیل کرنے کو کہا گیا ہے۔ ان میں y_1 کی عمومی مساوات دریافت کریں۔

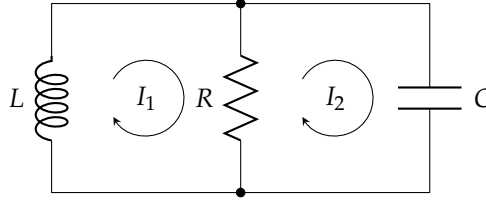
سوال 4.32: آپ نے گزارش ہے کہ سوال 4.16 کے نظام سے دو درجی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔ حاصل دو درجی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: پہلی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے $y_2' = -y_1' + y_2'$ ملتا ہے جس میں y_2' کی جگہ دوسری مساوات پر کرتے ہوئے $y_1' = -y_1' + (3y_1 + y_2)$ حاصل ہوتا ہے۔ اب پہلی مساوات سے y_2 اس میں پر کریں۔ یوں $y_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}$ اس کا عمومی حل $y_1' = 4y_1$ یعنی $y_1' = -y_1' + 3y_1 + (y_1' + y_1)$ ملتا ہے۔

سوال 4.33: یہاں سوال 4.31 کے نظام سے دو درجی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔ حاصل دو درجی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1 = c_1 + c_2e^{-2t}$ ، $y_1'' + 2y_1' = 0$

سوال 4.34: ٹینکیوں میں محلول کی تیاری
 دو عدد ٹینکیاں شکل 4.9 میں دکھائی گئی ہیں۔ ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں پچاس (50) کلو گرام نمک حل کی گئی ہے۔ ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر خالص پانی پایا جاتا ہے۔ پانی کے نظام کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ٹینکی الف میں نمک کی مقدار y_1 اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار y_2 کے لئے تفرقی مساوات کا نظام لکھیں۔ اس نظام کو حل کریں۔



شکل 4.10: سوال 4.35 کا دور۔

جوابت: $y_2' = \frac{12}{200}y_1 - \frac{12}{200}y_2$ ، $y_1' = -\frac{12}{200}y_1 + \frac{2}{200}y_2$ ،
 $y_2 = 50\sqrt{6}e^{-\frac{3}{50}t} \sinh \frac{\sqrt{6}t}{100}$ ، $y_1 = 50e^{-\frac{3}{50}t} \cosh \frac{\sqrt{6}t}{100}$

سوال 4.35: مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو شکل 4.10 میں متوازی جڑا دکھایا گیا ہے۔ اس کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کریں۔ $L = 2H$ ، $R = 1\Omega$ اور $C = 0.5F$ کی صورت میں I_1 اور I_2 کا عمومی حل دریافت کریں۔

جوابت:

$$LI_1' + (I_1 - I_2)R = 0$$

$$\frac{1}{C} \int I_2 dt + (I_2 - I_1)R = 0$$

پہلی مساوات سے نظام کی ایک مساوات $I_1' = -\frac{R}{L}I_1 + \frac{R}{L}I_2$ ملتی ہے۔ دوسری مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ترتیب دے کر آخر میں پہلی مساوات سے I_1' پر کرتے ہیں

$$\frac{I_2}{C} + (I_2' - I_1')R = 0 \implies I_2' = I_1' - \frac{I_2}{RC} \implies I_2' = \frac{R}{L}(-I_1 + I_2) - \frac{I_2}{RC}$$

جس سے تفرقی مساوات کے نظام کی دوسری مساوات $I_2' = -\frac{R}{L}I_1 + (\frac{R}{L} - \frac{1}{RC})I_2$ حاصل ہوتی ہے۔ دی گئی قیمتیں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام

$$I_1' = -0.5I_1 + 0.5I_2$$

$$I_2' = -0.5I_1 - 1.5I_2$$

ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1$ اور نظیری آگنی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ ہے۔ یوں مثال 4.11 کی

طرز پر حل کرتے ہوئے $u_1 = 1$ چننے سے $u_2 = 1$ حاصل ہوتا ہے لہذا درج ذیل اساس حاصل کرتے ہیں

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

جس سے عمومی حل $I = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}$ لکھا جائے گا۔

4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام

ہم مستقل عددی سروالے متجانس خطی نظام 4.61 پر گفتگو جاری رکھتے ہیں۔

$$(4.61) \quad y' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} y, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

اب تک حصہ 4.4 میں ہم نے دیکھا کہ نسل حل $y = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$ کے خطوط کو $y_1 y_2$ سطح حرکت پر کھینچتے ہوئے عمومی جائزہ لیا جاسکتا ہے۔ اس سطح پر منحنی کو نظام 4.61 کا خط حرکت کہتے ہیں۔ تمام خط حرکت کو ملا کر پیکر مرحلہ حاصل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے کہ $y = x e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے مساوات 4.61 میں پر کرتے ہوئے

$$y' = \lambda x e^{\lambda t} = A y = A x e^{\lambda t}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(4.62) \quad A x = \lambda x$$

ماتا ہے۔ یوں λ قالب A کا آگنی قدر اور x نظیری آگنی سمتیہ ہونے کی صورت میں $y(t)$ مساوات 4.61 کا (غیر صفر) حل ہو گا۔

گزشتہ حصے کے مثالوں سے واضح ہے کہ پیکر مرحلہ کی صورت کا دار و مدار بڑی حد تک نظام 4.61 کی نقطہ فاصل کی قسم پر منحصر ہے جہاں نقطہ فاصل سے مراد ایسا نقطہ ہے جہاں $\frac{dy_1}{dy_2}$ نا قابل معلوم قیمت $\frac{0}{0}$ ہو۔ [مساوات 4.49 دیکھیں۔]

$$(4.63) \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y'_2 dt}{y'_1 dt} = \frac{y'_2}{y'_1} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$

حصہ 4.4 سے ہم یہ بھی جانتے ہیں نقطہ فاصل کے کئی اقسام پائے جاتے ہیں۔

موجودہ حصے میں ہم دیکھیں گے کہ نقطہ فاصل کی قسم کا تعلق آگنی قدر سے ہے جو امتیازی مساوات

(4.64)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

کے حل λ_1 اور λ_2 ہیں۔ امتیازی مساوات دو درجی مساوات $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ ہے جس کے عددی سر p ، q اور جدا کنندہ Δ^{60} درج ذیل ہیں۔

$$(4.65) \quad p = a_{11} + a_{22}, \quad q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta = p^2 - 4q$$

دو درجی مساوات کے حل الجبرا کی مدد سے $\lambda = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ یعنی

$$(4.66) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(p + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(p - \sqrt{\Delta})$$

لکھتے ہیں۔ ان آگنی قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے امتیازی مساوات کو اجزائے ضربی کی صورت

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ p آگنی قیمتوں کا مجموعہ ہے جبکہ q ان کا حاصل ضرب ہے۔ اسی طرح مساوات 4.66 کی مدد سے $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.67) \quad p = \lambda_1 + \lambda_2, \quad q = \lambda_1\lambda_2, \quad \Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

ان نتائج سے نقطہ فاصل کی جانچ کے اصول طے کئے جاسکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ ان اصولوں کو اسی حصے میں اخذ کیا جائے گا۔

جدول 4.1: آگنی قدر سے نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

نام	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	λ_1 اور λ_2 پر تبصرہ
(الف) جوڑ		$q > 0$	$\Delta \geq 0$	حقیقی۔ یکساں علامتیں
(ب) نقطہ زین		$q < 0$		حقیقی۔ آپس میں الٹ علامتیں
(پ) وسط	$p = 0$	$q > 0$		خالص خیالی عدد (حقیقی جزو صفر ہے)
(ت) نقطہ مرغولہ	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	مخلوط عدد (حقیقی اور خیالی اجزاء غیر صفر ہیں)

استحکام

نقطہ فاصل کی درجہ بندی ان کی استحکام⁶¹ کی بنیاد پر بھی کی جاسکتی ہے۔ انجینئری کے علاوہ دیگر شعبوں میں بھی استحکام نہایت اہم تصور ہے۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی یا خلل سے بعد کے تمام لمحات پر معمولی خلل ہی پایا جاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل تصورات اہم ہیں۔

تعریف: مستحکم، غیر مستحکم، مستحکم اور جاذب

اگر نظام 4.61 کے نقطہ فاصل P_0 کے قریب تمام خط حرکت مستقبل میں بھی P_0 کے قریب رہیں تب P_0 مستحکم⁶² کہلائے گا۔ یوں اگر کسی بھی رداس ϵ کی ٹکلیا D_ϵ کے لئے رداس σ کی ایسی ٹکلیا D_σ موجود ہو، جہاں دونوں ٹکلیوں کا مرکز P_0 ہے، کہ ٹکلیا D_σ میں (لمحہ $t = t_1$ کا نظیری) نقطہ P_1 پر پائے جانے والا، نظام 4.61 کا ہر خط حرکت، مستقبل میں ٹکلیا D_ϵ میں رہتا ہو، تب P_0 کا نقطہ فاصل مستحکم⁶³ کہلائے گا۔ [شکل 4.11-الف دیکھیں]

اگر P_0 مستحکم نہ ہو تب یہ غیر مستحکم⁶⁵ کہلاتا ہے۔

ایسا مستحکم P_0 جہاں وہ تمام خط حرکت جن کا کوئی بھی نقطہ، D_σ پر پایا جاتا ہو، آخر کار $(t \rightarrow \infty)$ P_0 کے قریب تر پہنچے مستحکم اور جاذب⁶⁶ کہلاتا ہے۔ [شکل 4.11-ب دیکھیں۔]

استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی جدول 4.2 میں دی گئی ہے۔

stability⁶¹

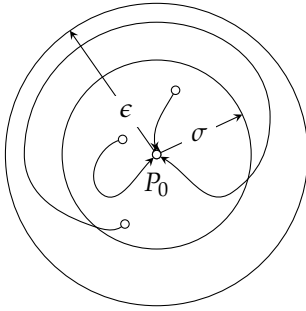
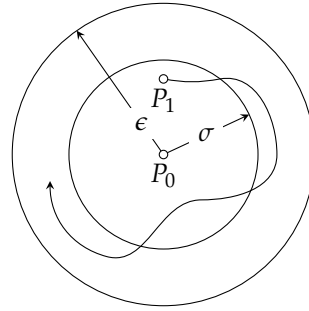
stable⁶²

stable⁶³

⁶⁴ روسی ریاضی دان سکندر میکائیل اپونو [1857-1918] کا مستحکم تفرقی مساوات پر کام بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ استحکام کی یہ تعریف انہوں نے ہی پیش کی۔

unstable⁶⁵

stable and attractive⁶⁶

(ب) مستحکم اور جاذب نقطہ فاصل P_0 ۔(الف) مستحکم نقطہ فاصل P_0 کی صورت میں خط حرکت D_ϵ میں رہتی ہے۔

شکل 4.11: نظام 4.61 کے نقطہ فاصل۔

جدول 4.2: استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

استحکام کی قسم	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$
(الف) مستحکم اور جاذب	$p < 0$	$q > 0$
(ب) مستحکم	$p \leq 0$	$q > 0$
(پ) غیر مستحکم	$p > 0$ یا $q < 0$	

آئیں جدول 4.1 اور جدول 4.2 کو حاصل کریں۔ اگر $q = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ ہو تب دونوں آگنی قدر مثبت ہوں گے یا دونوں آگنی قدر منفی ہوں گے اور یا آگنی قدر جوڑی دار مخلوط ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ہو تب دونوں آگنی قیمتیں منفی ہوں گے یا (مخلوط جوڑی دار صورت میں) ان کا حقیقی جزو منفی ہو گا لہذا P_0 مستحکم اور جاذب ہو گا۔ جدول 4.2 کے بقایا دو نتائج کو آپ خود اسی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

$\Delta < 0$ کی صورت میں آگنی قدر جوڑی دار مخلوط $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ اور $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha < 0$ ہو تب مستحکم، جاذب نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس $p = 2\alpha > 0$ کی صورت میں غیر مستحکم نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔

$p = 0$ کی صورت میں $\lambda_2 = -\lambda_1$ ہو گا اور یوں $\lambda_1^2 = -q$ ہو گا۔ اب اگر $q > 0$ ہو تب $\lambda_1^2 = -q < 0$ ہو گا لہذا λ_1 اور λ_2 خالص خیالی ہوں گے جن سے دوری حل⁶⁷ حاصل ہو گا۔ دوری حل کا خط حرکت ایسا بند دائرہ ہے جس کا مرکز P_0 ہے۔

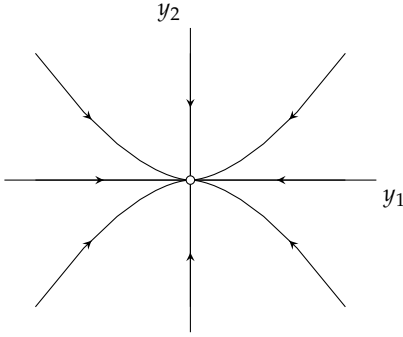
مثال 4.12: جدول 4.1 اور جدول 4.2 کا عملی استعمال
 گزشتہ حصے کے مثال 4.6 میں نظام 4.48 یعنی $y' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y$ کی بات کی گئی جہاں $p = -4$ ،
 $q = 3$ اور $\Delta = 4$ ہیں۔ یوں جدول 4.1-الف کے تحت نقطہ فاصل ایک جوڑ ہو گا۔ جدول 4.2-الف کے تحت
 یہ جوڑ مستحکم اور جاذب ہے۔

مثال 4.13: اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ حرکت
 اسپرنگ اور کمیت [حصہ 2.4 دیکھیں] کے نظام $my'' + cy' + ky = 0$ کا نقطہ فاصل دریافت کریں۔
 حل: تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے کی خاطر m سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$
 لکھتے ہیں۔ دو درجی مساوات سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر [حصہ 4.1 دیکھیں] ہم $y_1 = y$
 اور $y_2 = y'$ لیتے ہیں۔ یوں $y_2' = y'' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$ ہو گا۔ اس طرح

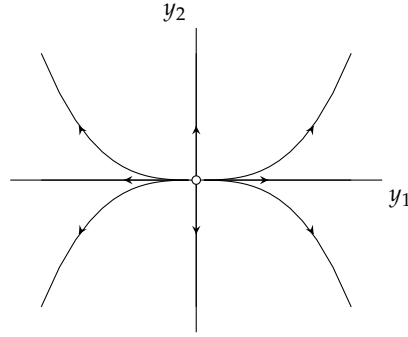
$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} y, \quad |A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

 لکھا جائے گا جس سے $p = -\frac{c}{m}$ ، $q = \frac{k}{m}$ اور $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$ ملتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے
 جدول 4.1 اور جدول 4.2 سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جہاں Δ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

- [بلا تقصیر] $c = 0$ ، $p = 0$ اور $q > 0$ وسط دیتا ہے۔
- [کم مقصور] $c^2 < 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ مستحکم جاذب نقطہ مرغولہ دیتا ہے۔
- [فاصل تقصیر] $c^2 = 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta = 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔
- [زیادہ مقصور] $c^2 > 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔



(ب) سوال 4.37 مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔



(الف) سوال 4.36 غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔

شکل 4.12: سوال 4.36 اور سوال 4.37 کے اشکال۔

سوالات

سوال 4.36 تا سوال 4.45 کے نقطہ فاصل کی قسم جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔ ان کے حقیقی عمومی حل حاصل کریں اور ان کے خط حرکت کمپیوٹر کی مدد سے کھینچیں۔ [پہلے چار جوابات کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔]

سوال 4.36:

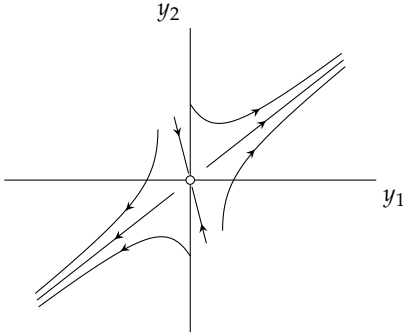
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 3y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔ $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ یعنی $y_1 = c_1 e^t$ ، $y_2 = c_2 e^{3t}$ ؛ شکل 4.12-الف۔

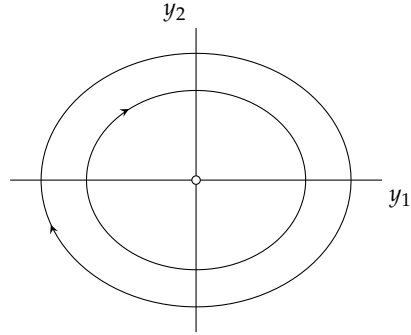
سوال 4.37:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 \\ y_2' &= -5y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔ $y_1 = c_1 e^{-3t}$ ، $y_2 = c_2 e^{-5t}$ ؛ شکل 4.12-ب۔



(ب) سوال 4.39 غیر مستحکم، نقطہ زین۔



(الف) سوال 4.38 مستحکم وسط۔

شکل 4.13: سوال 4.38 اور سوال 4.39 کے اشکال۔

سوال 4.38:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -16y_1$$

جوابات: مستحکم وسط۔ $y_1 = A \cos 4t + B \sin 4t$ ، $y_2 = 4B \cos 4t - 4A \sin 4t$ ؛ شکل 4.13-الف۔

سوال 4.39:

$$y_1' = 2y_1 + y_2$$

$$y_2' = 5y_1 - 2y_2$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}$ ، $y_2 = -5c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}$ ؛ شکل 4.13-ب۔

سوال 4.40:

$$y_1' = -2y_1 - 2y_2$$

$$y_2' = 2y_1 - 2y_2$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-2t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-2t}(-B \cos 2t + A \sin 2t)$

سوال 4.41:

$$y_1 = -10y_1 + 2y_2$$

$$y_2 = -15y_1 + y_2$$

جوابات: مستحکم اور جاذب جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-4t}$ ، $y_2 = \frac{5}{2}c_1 e^{-5t} + 3c_2 e^{-4t}$

سوال 4.42:

$$y_1 = -y_1 + y_2$$

$$y_2 = 2y_2$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ ، $y_2 = 3c_2 e^{2t}$

سوال 4.43:

$$y_1 = -y_1 + 2y_2$$

$$y_2 = 6y_1 + 3y_2$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{5t}$ ، $y_2 = -c_1 e^{-3t} + 3c_2 e^{5t}$

سوال 4.44:

$$y_1 = 13y_1 - 3y_2$$

$$y_2 = 18y_1 - 2y_2$$

جوابات: غیر مستحکم جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{7t} + c_2 e^{4t}$ ، $y_2 = 2c_1 e^{7t} + 3c_2 e^{4t}$

سوال 4.45:

$$y_1 = y_2$$

$$y_2 = -5y_1 - 2y_2$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-t}[-(A + 2B) \cos 2t - (2A + B) \sin 2t]$

سوال 4.46 تا سوال 4.46 خط حرکت، دو درجی سادہ تفرقی مساوات اور نقطہ فاصل کے بارے میں ہیں۔

سوال 4.46: قسری ارتعاش

$y'' + 4y' + 5y = 0$ کو حل کریں۔ امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t)$ ؛ مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ۔

سوال 4.47: ہارمونی ارتعاش

$y'' + 4y = 0 = 0$ کو حل کریں۔ امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y = A \cos 2t + B \sin 2t$ ؛ مستحکم وسط۔

سوال 4.48: مقدار معلوم کا تبادلہ

مثال 4.12 میں متغیر $\tau = -t$ متعارف کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پڑے گا؟

جواب: اب $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو گا لہذا غیر مستحکم جوڑ پایا جائے گا۔

سوال 4.49: وسط میں خلل

سوال 4.38 میں A کو تبدیل کرتے ہوئے $A - 0.12I$ کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ I اکائی قالب ہے۔

جواب: اب $p = -0.2 \neq 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ہیں لہذا غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے گا۔

سوال 4.50: وسط میں خلل

سوال 4.38 میں تمام a_{jk} کی جگہ $a_{jk} + b$ پر کریں۔ (الف) b کی ایسی قیمت دریافت کریں کہ نقطہ زین حاصل ہو۔ اسی طرح b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں جن پر (ب) مستحکم اور جاذب جوڑ، (پ) مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ اور (ت) غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے۔

جواب: مثلاً (الف) $b = -2$ ، (ب) $b = -1$ ، (پ) $b = -0.2$ ، (ت) $b = 15$

4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

کیفی تراکیب⁶⁸ سے مسئلے کو حل کئے بغیر حل کے بارے میں کیفی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ ایسے مسائل جن کا تحلیلی حل مشکل یا ناقابل حصول ہو، کے لئے یہ ترکیب خاص طور پر کارآمد ہے۔ عملاً اہم کئی غیر خطی نظام

$$(4.68) \quad y' = f(y) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

کے لئے یہ درست ہے۔

گزشتہ حصے میں سطح مرحلہ کی ترکیب خطی نظام کے لئے استعمال کیا گیا۔ اس حصے میں اس ترکیب کو وسعت دے کر غیر خطی نظام کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 4.68 خود مختار⁶⁹ ہے یعنی اس میں غیر تابع متغیر t صریحاً نہیں پایا جاتا۔ (اس حصے میں تمام مثال خود مختار ہیں۔) ہم یہاں بھی حل کی نسل پیش کریں گے۔ اعدادی ترکیب سے ایک وقت میں صرف ایک (تقریباً درست) حل حاصل ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے سطح مرحلہ کی ترکیب زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

گزشتہ حصے کے چند تصورات اس حصے میں بھی درکار ہیں۔ ان میں سطح حرکت (y_1, y_2) (سطح)، خط حرکت (مساوات 4.68 کا y_1, y_2 سطح پر حل)، مساوات 4.68 کا پیکر مرحلہ (تمام خط حرکت کا مجموعہ)، اور مساوات 4.68 کا نقطہ فاصل (ایسا نقطہ (y_1, y_2) جہاں $f_1(y_1, y_2)$ اور $f_2(y_1, y_2)$ دونوں صفر کے برابر ہوں۔) کے تصورات شامل ہیں۔

مساوات 4.68 کے کئی نقطہ فاصل ہو سکتے ہیں۔ ان پر باری باری بات کی جائے گی۔ مرکز سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل پر غور کرنے سے پہلے، تکنیکی آسانی کی خاطر، ایسے نقطہ فاصل کو گھمائے بغیر مرکز پر منتقل کیا جائے گا۔ مرکز $(0, 0)$ سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل $P_0 : (a, b)$ کو گھمائے بغیر مرکز $(0, 0)$ پر درج ذیل عمل سے منتقل کیا جاتا ہے۔

$$\tilde{y}_1 = y_1 - a, \quad \tilde{y}_2 = y_2 - b$$

اس عمل کے بعد نقطہ فاصل P_0 مرکز $(0, 0)$ پر پایا جائے گا۔ یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہاں دیے گئے تمام مثالوں میں نقطہ فاصل کو مرکز پر منتقل کیا گیا ہے اور \tilde{y}_1 ، \tilde{y}_2 کی جگہ ہم y_1 اور y_2 ہی لکھیں گے۔ ہم

qualitative methods⁶⁸
autonomous⁶⁹

یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ نقطہ فاصل تنہا⁷⁰ ہے یعنی ایسے کسی بھی معقول حد تک چھوٹی ٹکیا جس کا وسط مرکز پر پایا جاتا ہو میں مساوات 4.68 کا صرف ایک عدد نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ اگر مساوات 4.68 کے محدود تعداد میں نقطہ فاصل پائے جاتے ہوں تب ایسے تمام نقطہ فاصل خود بخود تنہا ہوں گے۔

غیر خطی نظام کو خطی بنانا

عموماً نظام 4.68 کو نقطہ فاصل $P_0 : (0, 0)$ کے قریب خطی تصور کرتے ہوئے نظام کی استحکام کی نوعیت دریافت کی جاسکتی ہے۔ نظام 4.68 کو $y' = Ay + h(y)$ لکھ کر $h(y)$ رد کرنے سے خطی نظام حاصل کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو تفصیلاً دیکھتے ہیں۔

ہم اگلے باب میں دیکھیں گے کہ عموماً تفاعل کو تسلسل $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح ایک سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل کے تسلسل بھی لکھے جاسکتے ہیں۔ آئیں ایسے ہی چند تفاعل مثلاً

$$f_a(x) = 2x^2 + 5x, \quad f_b(x, y) = 2x^3 - y^2 + xy, \quad f_c(x, y) = 2x^2 - 3y + 5$$

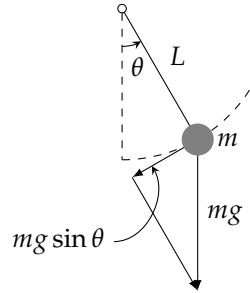
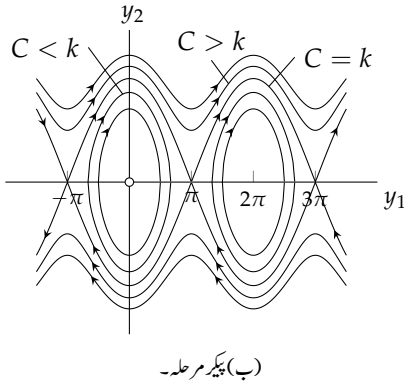
میں آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کریں۔ ایسا کرنے سے $f_a(0) = 0$ ، $f_b(0, 0) = 0$ اور $f_c(0, 0) = 5$ ملتا ہے۔ آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کرنے سے صرف اس تفاعل کی قیمت غیر صفر حاصل ہوگی جس میں c_0 طرز کا بالکل علیحدہ مستقل پایا جاتا ہو جو متغیرات کے ساتھ ضرب نہ ہو۔

اب چونکہ P_0 نقطہ فاصل ہے لہذا $f_1(0, 0) = 0$ اور $f_2(0, 0) = 0$ ہوگا۔ اس کا مطلب ہے کہ ان تفاعل میں c_0 طرز کا علیحدہ مستقل نہیں پایا جاتا لہذا ان کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں h_1 اور h_2 غیر خطی تفاعل ہیں۔

$$(4.69) \quad y' = Ay + h(y) \quad \implies \quad \begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h_1(y_1, y_2) \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + h_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

چونکہ نظام 4.68 خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] تفاعل ہے لہذا A مستقل مقدار ہوگا۔ اب خطی بنانے کا مسئلہ⁷¹ پیش کرتے ہیں (جس کا ثبوت کتاب کے آخر میں صفحہ 289 پر حوالہ [1] کے صفحات 375 تا 388 پر پیش کیا گیا ہے)۔

⁷⁰isolated
⁷¹linearization theorem



شکل 4.14: مثال 4.14 کے اشکال۔ [C کی تفصیل آگے مثال میں دی گئی ہے۔]

مسئلہ 4.6: خطی بنانا

اگر نظام 4.68 کے نقطہ فاصل $P_0 : (0, 0)$ کے ہمسائیگی میں f_1 ، f_2 اور ان کے جزوی تفرق استمراری ہوں، اور مساوات 4.69 میں مقطع A غیر صفر ($|A| \neq 0$) ہو تب نظام 4.68 کے نقطہ فاصل کی قسم اور استحکام وہی ہوگی جو درج ذیل خطی کردہ نظام کی ہوگی

$$(4.70) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

البتہ A کے خالص خیالی یا برابر آگئی قدر ہونے کی صورت میں نظام 4.68 کا نقطہ فاصل نظام 4.70 کے نقطہ فاصل کی قسم کا ہو سکتا ہے یا وہ نقطہ مرغولہ ہو سکتا ہے۔

مثال 4.14: پلکے ڈنڈے سے لٹکی کیت کی آزادانہ ارتعاش۔ خطی بنانا

پلکے ڈنڈے سے لٹکی کیت کو شکل 4.14-الف میں دکھایا گیا ہے۔ ڈنڈے کی کیت اور ہوا کی رکاوٹی قوت کو نظر انداز کرتے ہوئے نقطہ فاصل کا مقام اور اس کی نوعیت دریافت کریں۔ حل: پہلا قدم نمونہ کشی ہے۔ متوازن مقام سے گھڑی کے الٹ رخ زاویائی فاصلہ θ ناپتے ہیں۔ قوت ثقل mg کیت پر نیچے رخ عمل کرتا ہے جس کی وجہ

سے حرکت کی مماسی، بحالی قوت $mg \sin \theta$ پیدا ہوتی ہے جہاں $g = 0.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت بحالی قوت اور اسراع قوت $mL\theta''$ جہاں $L\theta''$ اسراع ہے، ہر لمحہ برابر ہوں گے۔ یوں ان دونوں قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔

$$mL\theta'' + mg \sin \theta = 0$$

دونوں اطراف کو mL سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(4.71) \quad \theta'' + k \sin \theta = 0, \quad \left(k = \frac{g}{L}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ نہایت کم θ کی صورت میں $\sin \theta \approx \theta$ ہوتا ہے لہذا ایسی صورت میں درج بالا مساوات کو $\theta'' + k\theta = 0$ لکھ کر حل $\theta = A \cos \sqrt{k}t + B \sin \sqrt{k}t$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ کم θ کی صورت میں تقریباً درست جواب ہے البتہ بالکل درست جواب بنیادی تفاعل⁷² کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

دوسرا قدم نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $(\pm 2\pi, 0)$ ، $(\pm 4\pi, 0)$ ، ... کا حصول اور مسئلے کو خطی بنانا ہے۔ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر ہم $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہیں۔ یوں مساوات 4.71 سے درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے جو نظام 4.68 کے طرز کا ہے۔

$$(4.72) \quad \begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = -k \sin y_1 \end{aligned}$$

جہاں دونوں دائیں اطراف بیک وقت صفر کے برابر ہوں $y_2 = 0$ اور $\sin y_1 = 0$ وہاں نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ یوں لامحدود تعداد میں نقطہ فاصل $(n\pi, 0)$ پائے جاتے ہیں جہاں $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ہے۔ انہیں نقطہ فاصل $(0,0)$ پر غور کریں جہاں مکلاون تسلسل⁷³ سے

$$\sin y_1 = y_1 - \frac{y_1^3}{6} + \dots \approx y_1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں نقطہ فاصل کے ہمسائیگی میں $h = -\frac{y_1^3}{6} + \dots$ کو رد کرتے ہوئے نظام 4.72 کی خطی صورت

$$(4.73) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2 &= -ky_1 \end{aligned} \implies \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

elementary function⁷²
Maclaurin series⁷³

حاصل ہوتی ہے۔ $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = |A| = k = \frac{g}{L} (> 0)$ اور $\Delta = p^2 - 4q = -4k$ لکھتے ہوئے نقطہ فاصل کی قسم اور اس کا استحکام جاننے ہیں۔ یوں جدول 4.1-پ کے تحت $(0, 0)$ وسط ہے اور جدول 4.2 کے تحت یہ مستحکم ہے۔ چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \pm 2, \pm 4, \dots$ بھی مستحکم وسط ہیں۔

تیسرا قدم نقطہ فاصل $(\pm\pi, 0)$ ، $(\pm 3\pi, 0)$ ، $(\pm 5\pi, 0)$ کا حصول اور مسئلے کو خطی بنانا ہے۔ ہم نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کرتے ہیں۔ یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ لیتے اور مکلا رن تسلسل

$$\sin(\theta) = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 = -y_1 + \frac{y_1^3}{6} + \dots \approx -y_1$$

کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(\pi, 0)$ پر نظام 4.72 کی خطی کردہ صورت

$$(4.74) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1 \end{aligned} \implies \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اب $p = 0$ ، $q = -k$ اور $\Delta = -4q = 4k$ ہیں جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \pm 1, \pm 3, \dots$ ہے، غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔ یہ نتائج شکل 4.14-ب کے عین مطابق ہیں۔

مثال 4.15: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی تقصیری ارتعاش۔ خطی بنانا
نقطہ فاصل پر غور کی ترکیب کو مزید بہتر جاننے کی خاطر مثال 4.14 میں زاویائی رفتار کے راست متناسب قوت روک $c\theta'$ کا اثر شامل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 4.71 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جس میں $c = 0$ سے مساوات 4.71 ہی ملتا ہے۔

$$(4.75) \quad \theta'' + c\theta' + k \sin \theta = 0, \quad (k > 0), \quad (c \geq 0)$$

پہلے کی طرح $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہوئے غیر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -k \sin \theta - cy_2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\theta'' = y_2' = y_2$ لکھا گیا ہے۔ اب بھی نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $(\pm\pi, 0)$ ، $(\pm 2\pi, 0)$ ، ... پر پائے جاتے ہیں۔ انہیں نقطہ $(0,0)$ پر غور کریں۔ یہاں بھی $\sin y_1 \approx y_1$ لکھ کر $(0,0)$ پر خطی نظام

$$(4.76) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1 - cy_2 \end{aligned} \implies \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ بالکل مثال 4.13 کی طرح ہے ماسوائے (مثبت) m کی موجودگی کے (اور ماسوائے y_1 کے مطلب میں فرق کے)۔ اس طرح بلا تقصیر ($c = 0$) صورت میں وسط حاصل ہوتا ہے جسے شکل 4.14 میں دکھایا گیا ہے جبکہ کم تقصیری صورت میں نقطہ مرغولہ حاصل ہوتا ہے، اور اسی طرح آپ تمام صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔

انہیں اب نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کریں۔ یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ کے علاوہ

$$\sin \theta = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 \approx -y_1$$

لکھ کر $(\pi, 0)$ پر خطی نظام

$$(4.77) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1 - cy_2 \end{aligned} \implies \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -c \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

حاصل کرتے ہیں۔ گزشتہ حصے میں نقطہ فاصل کے جانچ کے مسلمہ معیار دیے گئے جن کے لئے

$$p = a_{11} + a_{22} = -c, \quad q = |\mathbf{A}| = -k, \quad \Delta = p^4 - 4q = c^2 + 4k$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $(\pi, 0)$ پر پائے جانے والے نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

• بلا تقصیر $c = 0$ ، $p = 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ نقطہ زین دیگا۔ [شکل 4.14-ب دیکھیں۔]

• تقصیری $c > 0$ ، $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ نقطہ زین دیگا۔

چونکہ $\sin y_1$ دوری عرصہ 2π کا دوری تفاعل ہے لہذا $(\pm 2\pi, 0)$ ، $(\pm 4\pi, 0)$ ، ... پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(0, 0)$ پر پایا جاتا ہے اور اسی طرح $(-\pi, 0)$ ، $(\pm 3\pi, 0)$ ، ... پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(\pi, 0)$ پر پایا جاتا ہے۔

مثال 4.16: آبادی شکار اور شکاری۔ [مسئلہ لوٹکا-ولٹیرا]
یہاں لومڑی (شکاری) اور خرگوش (شکار) کی آبادی کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: ہم فرض کرتے ہیں کہ خرگوش کو جتنی خوراک چاہیے دستیاب ہے۔ یوں لومڑی کی غیر موجودگی میں ان کی تعداد $y_1' = ay_1$ کے تحت قوت نمائی طور پر بڑھے گی۔ لومڑی کی موجودگی میں (اتفاقی آنے سامنے سے) خرگوش کی تعداد میں $y_1 y_2$ کے راست تناسب کمی پیدا ہوگی۔ یوں خرگوش کی تعداد $y_1' = ay_1 - by_1 y_2$ سے حاصل ہوگی جہاں مستقل $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔ اسی طرح خرگوش کی غیر موجودگی میں لومڑی کی تعداد $y_2' = -ly_2$ کے تحت قوت نمائی طور پر گھٹے گی۔ خرگوش کی موجودگی میں (اتفاقی آنے سامنے سے) لومڑی کی تعداد $y_1 y_2$ کے راست تناسب بڑھے گی۔ یوں خرگوش کی موجودگی میں $y_2' = -ly_2 + ky_1 y_2$ لومڑی کی تعداد دے گا جہاں مستقل $l > 0$ اور $k > 0$ ہیں۔

یوں غیر خطی مسئلہ لوٹکا-ولٹیرا⁷⁴

$$(4.78) \quad \begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = ay_1 - by_1 y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = ky_1 y_2 - ly_2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(0, 0)$ کا حصول ہے۔ مساوات 4.78 کو دیکھ کر نقطہ فاصل مساوات

$$(4.79) \quad f_1(y_1, y_2) = y_1(a - by_2) = 0, \quad f_2(y_1, y_2) = y_2(ky_1 - l) = 0$$

⁷⁴ امریکی ماہر حیاتی طبیعیات الفریڈ جیمز لوٹکا [1880-1949] اور اطالوی ریاضی دان ویٹو ولٹیرا [1860-1940] نے شکار اور شکاری کے مسئلے کو پیش کیا۔

کے حل سے $(y_1, y_2) = (0, 0)$ اور $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ حاصل ہوتے ہیں۔ انہیں $(0, 0)$ پر غور کریں۔ نقطہ $(0, 0)$ کے ہمسائیگی میں مساوات 4.78 میں $-by_1y_2$ اور ky_1y_2 کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$y' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -l \end{bmatrix} y$$

حاصل ہوتا ہے جس کی آگنی قدر $\lambda_1 = a > 0$ اور $\lambda_2 = -l < 0$ کی علامتیں آپس میں الٹ ہیں لہذا $(0, 0)$ پر نقطہ نیز پایا جاتا ہے۔

تیسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ کا حصول ہے۔ دوسرا نقطہ فاصل $(y_1, y_2) = (\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر پایا جاتا ہے۔ اس نقطے کو $(0, 0)$ منتقل کرنے کی خاطر ہم $y_1 = \tilde{y}_1 + \frac{l}{k}$ اور $y_2 = \tilde{y}_2 + \frac{a}{b}$ چنتے ہیں۔ یوں نقطہ فاصل $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0, 0)$ لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ $y_1 = \tilde{y}_1'$ اور $y_2 = \tilde{y}_2'$ ہیں لہذا نظام 4.78 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k} \right) \left[a - b \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b} \right) \right] = \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k} \right) (-b\tilde{y}_2) \\ \tilde{y}_2' &= \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b} \right) \left[k \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k} \right) - l \right] = \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b} \right) k\tilde{y}_1 \end{aligned}$$

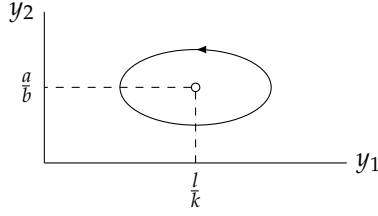
نقطہ $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0, 0)$ کے ہمسائیگی میں $-b\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ اور $k\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2 \quad (\text{الف}) \\ \tilde{y}_2' &= \frac{ak}{b}\tilde{y}_1 \quad (\text{ب}) \end{aligned} \quad (4.80)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.80-الف کا بائیں ہاتھ ضرب مساوات-ب کا دایاں ہاتھ برابر ہو گا الف کا دایاں ضرب ب کا بائیں،

$$\frac{ak}{b}\tilde{y}_1'\tilde{y}_1 = -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2'\tilde{y}_2 \implies \frac{ak}{b}\tilde{y}_1^2 + \frac{bl}{k}\tilde{y}_2^2 = C$$

جس کا مکمل لیتے ہوئے \tilde{y}_1 بالقابل \tilde{y}_2 کا ترخیمی⁷⁵ تعلق حاصل کیا گیا ہے۔ یوں $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر شکل 4.15 میں دکھایا گیا وسط پایا جاتا ہے۔



شکل 4.15: شکار اور شکاری کی آبادی: ماحولیاتی توازن۔

نسبتاً مشکل تجربے سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ غیر خطی نظام 4.78 کا $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر وسط پایا جاتا ہے البتہ خط حرکت اس نقطے کے گرد غیر ترخیمی بند دائرہ بناتا ہے۔

شکل 4.15 کے دائیں کنارے پر خرگوش کی تعداد y_1 زیادہ سے زیادہ ہے جس کی وجہ سے لومڑی کی تعداد y_2 میں اضافے کی شرح بھی زیادہ سے زیادہ ہے۔ اس خط پر گھڑی کی الٹی سمت چلتے ہوئے لومڑی کی زیادہ سے زیادہ آبادی حاصل ہوتی ہے۔ اس مقام پر خرگوش کی تعداد اتنی کم ہو چکی ہوتی ہے کہ لومڑی کی بڑھتی تعداد کو خوراک پورا نہیں ہو پایا لہذا لومڑی کی آبادی گٹھنے شروع ہو جاتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں جانوروں کی دوری تعداد حالات کے مطابق مسلسل تبدیل ہوتی ہے۔

شکار اور شکاری کی دیگر مثالیں ملخ اور گھاس، ببر شیر اور زیرہا ہیں۔

4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ

سطح حرکت کی دوسری ترکیب خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] دو درجی سادہ تفرقی مساوات

$$F(y, y', y'') = 0$$

میں $y = y_1$ کو آزاد متغیر اور $y' = y_2$ لے کر y'' کو زنجیری تفرق سے

$$y'' = y'_2 = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$$

لکھ کر ایک درجی مساوات

$$(4.81) \quad F\left(y_1, y_2, \frac{dy_2}{dy_1} y_2\right) = 0$$

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

