

## برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کشی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
69	1.6 عمودی خطوط کی تسلیں
73	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکسانیت
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات
89	2.2 ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ
96	2.3 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 2

### درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔ چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔ اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

#### 2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

یک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔ اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش<sup>1</sup>، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

---

<sup>1</sup>oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$(2.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

صورت میں لکھا جاسکے خطی<sup>2</sup> کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر خطی<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں  $y$ ،  $y'$  اور  $y''$  کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ  $p(x)$ ،  $q(x)$  اور  $r(x)$  متغیرہ  $x$  کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ دو درجی مساوات کا پہلا جزو  $f(x)y''$  ہونے کی صورت میں مساوات کو  $f(x)$  سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی معیاری صورت<sup>4</sup> میں لکھیں جہاں  $y''$  پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔ یقیناً  $r \equiv 0$  [جہاں زیر غور تمام  $x$  پر  $r(x) = 0$  ہو؛ اس کو مکمل صفر<sup>5</sup> پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$(2.2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جو متجانس ہے۔ اگر  $r(x) \neq 0$  ہو تب مساوات 2.1 غیر متجانس<sup>6</sup> کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔ آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$(y'')^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

linear<sup>2</sup>  
nonlinear<sup>3</sup>  
standard form<sup>4</sup>  
identically zero<sup>5</sup>  
nonhomogenous<sup>6</sup>



تفاعل  $p$  اور  $q$  مساوات 2.2 کے عددی سر<sup>7</sup> کہلاتے ہیں۔

دودرجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل  $y = h(x)$  کو کھلے وقفہ  $I$  پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دودرجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر  $y''$  اور  $h'$ ،  $h(x)$  کی جگہ  $h''$  پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں  $y$  کی جگہ  $h'$ ،  $y'$  کی جگہ  $h''$  پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔ چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

### متجانس خطی تفرقی مساوات

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔ متجانس مساوات کے حل میں اصول خطیت<sup>8</sup> یا اصول نفاذ<sup>9</sup> کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 2.1: اصول نفاذ

تمام  $x$  پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل  $y_1 = \cos 2x$  اور  $y_2 = \sin 2x$  ہیں۔

$$(2.3) \quad y'' + 4y = 0$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔ پہلے  $y_1 = \cos 2x$  کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ  $(\cos 2x)'' = -4 \cos 2x$  کے برابر ہے لہذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4 \cos 2x + 4 \cos 2x = 0$$

<sup>7</sup>coefficients

<sup>8</sup>linearity principle

<sup>9</sup>superposition principle

ملتا ہے۔ اسی طرح  $y_2 = \sin 2x$  کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4 \sin 2x + 4 \sin 2x = 0$$

ملتا ہے۔ ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں ہم  $\cos 2x$  کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور  $\sin 2x$  کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔ آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x)'' + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 4(-2.73 \cos 2x + 1.25 \sin 2x) + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل  $y_1$  اور  $y_2$  سے نیا حل

$$(2.4) \quad y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (c_1 \text{ اور } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں})$$

حاصل کیا۔ اس کو  $y_1$  اور  $y_2$  کا خطی میل<sup>10</sup> کہتے ہیں۔ اس مثال سے ہم مسئلہ خطی میل بیان کرتے ہیں جسے عموماً اصول خطیت یا اصول نفاذ کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: مسئلہ خطی میل  
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات کے دو عدد حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل  $y_1$  اور  $y_2$  پائے جاتے ہیں لہذا

$$\begin{aligned} (2.5) \quad y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ خطی میل سے نیا حل  $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$  حاصل کرتے ہیں۔ اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} y_3' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' \\ y_3'' &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' \end{aligned}$$

$y_3$ ،  $y_3'$  اور  $y_3''$  کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + p y_3' + q y_3 &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہذا ثابت ہوتا ہے کہ  $y_3$  بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔ غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ  $y_1$  اور  $y_2$  غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ  $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$  اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں  $c_1$  اور  $c_2$  مستقل مقدار ہیں۔

حل:  $y_1$  اور  $y_2$  غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= r \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= r \end{aligned} \quad (2.6)$$

$y_3$  کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + p y_3' + q y_3 &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= (c_1 + c_2) r \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔ اس سے  $(c_1 + c_2)r$  حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ  $r$  کے برابر ہے لہذا  $y_3$  متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔ یوں  $y_3$  متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات

درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں  $y = 2 - \cos x$  اور  $y = 2 - \sin x$  کو پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔ اسی طرح ثابت کریں کہ  $3(2 - \cos x)$  یا  $-7(2 - \sin x)$  بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں  $y = 1$  اور  $y = x^3$  پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی  $y = -x^3$  حل ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو  $-1$  سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

## ابتدائی قیمت مسائل۔ اساس۔ عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ درجہ اول سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات  $y(x_0) = y_0$  مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل  $c$  حاصل کرتے ہوئے مخصوص یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی تصور کو دو درجی سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو درجی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$(2.7) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

$K_0$  اور  $K_1$  کھلے وقفہ پر نقطہ  $x_0$  پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$(2.8) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

کے اختیاری مستقل  $c_1$  اور  $c_2$  کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ یہاں  $y_1$  اور  $y_2$  مساوات 2.7 کے حل ہیں۔ یوں مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ  $(x_0, K_0)$  سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر  $K_1$  ہوتی ہے۔

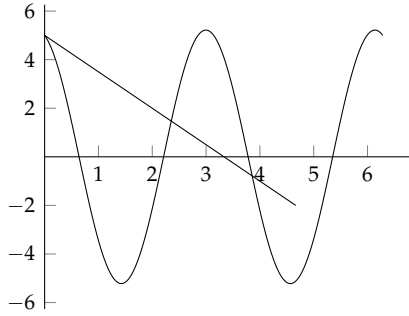
مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل: پہلا قدم: اس مساوات کے حل  $y_1 = \cos 2x$  اور  $y_2 = \sin 2x$  ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہذا اس کا موزوں عمومی حل

$$(2.9) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

ہو گا۔ (موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)



شکل 2.1: مثال 2.3 کا مخصوص حل۔

دوسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرتے ہیں۔ عمومی حل کا تفرق  $y' = -2 \sin 2x + 2c_2 \cos x$  ہے۔ ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 5$$

$$y'(0) = -2 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5$$

حاصل ہوتے ہیں لہذا مخصوص حل

$$y = 5 \cos 2x - 1.5 \sin 2x$$

ہو گا۔ شکل 2.1 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ نقطہ  $x = 0$  پر اس کی قیمت  $y(0) = 5$  ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس)  $y'(0) = 0.5$  ہے۔ مماس  $x$  محور کو  $x = \frac{5}{3} = 3.33$  پر قطع کرتا ہے۔

درج بالا مثال میں  $y_1$  اور  $y_2$  ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔ آپس میں دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً  $y_1 = \cos 2x$  اور  $y_2 = k \cos 2x$  لیتے ہوئے

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 k \cos 2x = (c_1 + c_2 k) \cos 2x = c_3 \cos 2x$$

عمومی حل لکھتے ہیں۔ اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل  $c_3$  پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل  $y_1$  اور  $y_2$  انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔ یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

عمومی حل، اساس اور مخصوص حل کے تعریف  
کھلے وقفہ  $I$  پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں  $I$  پر  $y_1$  اور  $y_2$  مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور  $c_1$ ،  $c_2$  اختیاری مستقل ہیں۔ فاصلہ  $I$  پر  $y_1$  اور  $y_2$  مساوات 2.2 کی اساس<sup>11</sup> حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ  $I$  پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا مخصوص حل مساوات 2.9 میں  $c_1$  اور  $c_2$  کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔  $y_1$  اور  $y_2$  اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے  $I$  پر

$$(2.10) \quad (a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1$$

ہو، جہاں  $k$  اور  $l$  اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔ (یہاں توجہ رکھیں:  $a$  اس صورت  $b$  کے مترادف ہے جب  $k \neq 0$  ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ  $I$  پر معین  $y_1$  اور  $y_2$  وقفہ  $I$  پر اس صورت خطی طور غیر تابع<sup>12</sup> کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$(2.11) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

سے مراد

$$(2.12) \quad \begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 0 \end{aligned}$$

ہو۔  $k_1$  اور  $k_2$  میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے حل  $y_1$  اور  $y_2$  خطی طور تابع<sup>13</sup> کہلاتے ہیں۔ اگر  $k_1 \neq 0$  ہو تب ہم مساوات 2.11 کو

<sup>11</sup> basis  
<sup>12</sup> linearly independent  
<sup>13</sup> linearly dependent

$k_1$  سے تقسیم کرتے ہوئے  $y_1 = \frac{k_2}{k_1} y_2$  لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح  $k_2 \neq 0$  کی صورت میں  $y_2 = \frac{k_1}{k_2} y_1$  لکھا جاسکتا ہے جو تناسبی رشتہ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کے برعکس خطی طور پر غیر تابع صورت میں ہم مساوات 2.11 کو  $k_1$  (یا  $k_2$ ) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ اس طرح اساس کی (درج ذیل) قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

اساس کی قدر مختلف تعریف  
کھلے وقفے  $I$  پر مساوات 2.11 کا خطی طور پر غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

اگر کسی کھلے وقفے  $I$  پر مساوات کے عددی سر  $p$  اور  $q$  استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کے کا عمومی حل پایا جاتا ہے۔ مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔ وقفہ  $I$  پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہذا ایسی صورت میں مساوات کا کوئی نادر<sup>14</sup> حل نہیں پایا جاتا (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور مخصوص حل  
 $\cos 2x$  اور  $\sin 2x$  تمام  $x$  پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات  $y'' + 4y = 0$  کے حل کی اساس ہیں۔ ایسا اس لئے ہے کہ  $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq c$  اور  $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \neq 0$  ہیں جہاں  $c$  مستقل ہے۔ اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے مخصوص حل  $y = 5 \cos 2x - 1.5 \sin 2x$  حاصل کیا گیا تھا۔

مثال 2.5: پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ  $y_1 = e^{2x}$  اور  $y_2 = e^{-2x}$  سادہ تفرقی مساوات  $y'' - 4y = 0$  کے حل ہیں۔ یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$



2.2. ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

حل: چونکہ  $y_1'' - 4y_1 = (e^{2x})'' - 4e^{2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$  اور  $y_2'' - 4y_2 = (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} = 4e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0$  ہیں لہذا  $y_1$  اور  $y_2$  دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ چونکہ  $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} \neq c$  ہے جہاں  $c$  مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں  $e^{2x}$  اور  $e^{-2x}$  پورے  $x$  پر حل کا اساس ہے۔ اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل  $c_1$  اور  $c_2$  حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2, \quad y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}, \quad y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1$$

دو عدد ہمزاد مساوات  $c_1 + c_2 = 2$  اور  $2c_1 - 2c_2 = 1$  کو آپس میں حل کرتے ہوئے  $c_1 = \frac{3}{4}$  اور  $c_2 = \frac{5}{4}$  ملتے ہیں جس سے مخصوص حل لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

## 2.2 ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

بعض اوقات ایک حل با آسانی حاصل ہو جاتا ہے۔ دوسرا خطی طور غیر تابع حل یک درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کو تخفیف درجہ<sup>15</sup> کی ترکیب<sup>16</sup> کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی مثال دیکھنے کے بعد اس کی عمومی اطلاق پر غور کرتے ہیں۔

مثال 2.6: ایک حل جانتے ہوئے تخفیف درجہ۔ اساس  
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات کے اساس حل دریافت کریں۔

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

<sup>15</sup>reduction of order

<sup>16</sup>یہ ترکیب یوسف لونی لگرینج (1736-1813) نے دریافت کی۔

کل: دیے گئے مساوات کے معائنے سے ایک حل  $y_1 = x$  لکھا جاسکتا ہے چونکہ یوں  $y_1'' = 0$  ہو گا لہذا تفرقی مساوات کا پہلا جزو صفر ہو جاتا ہے اور  $y_1' = 1$  ہو گا جس سے مساوات کے دوسرے اور تیسرے اجزاء کا مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس ترکیب میں دوسرے حل کو  $y_2 = uy_1$  لکھ کر دیے گئے تفرقی مساوات میں

$$y_2 = uy_1 = ux, \quad y_2' = u'x + u, \quad y_2'' = u''x + 2u'$$

پر کرتے ہیں۔

$$x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$

درج بالا کو ترتیب دیتے ہوئے  $xu$  اور  $-xu$  آپس میں کٹ جاتے ہیں اور  $x^3u'' + x^2u' = 0$  رہ جاتا ہے جس کو  $x^2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xu'' + u' = 0$$

ملتا ہے۔ اس میں  $u' = v$  پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہیں۔

$$xv' + v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}$$

اس میں واپس  $v = u'$  پر کرتے ہوئے مکمل سے  $u$  حاصل کرتے ہیں۔

$$v = u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x|$$

یوں  $y_2 = x \ln|x|$  حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  کا حاصل تقسیم مستقل نہیں ہے لہذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں اساس حل  $y_1 = x$ ،  $y_2 = x \ln|x|$  ہے۔ دونوں بار تکمل لیتے ہوئے مکمل کا مستقل نہیں لکھا گیا چونکہ ہمیں اساس درکار ہے۔ عمومی مساوات لکھتے وقت مستقل لکھنا ضروری ہو گا۔

اس مثال میں ہم نے تخفیف درجہ کی ترکیب متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.13) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

پر استعمال کی۔ درج بالا مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں پہلا جزو  $y''$  ہے جس کا عددی سر اکائی کے برابر ہے۔ نیچے اخذ کلیات مساوات کی معیاری صورت کے لئے حاصل کئے گئے ہیں۔ تصور کریں کہ کھلے وقفہ  $I$

پر ہمیں مساوات 2.13 کا ایک عدد حل  $y_1$  معلوم ہے اور ہم حل کا اساس جاننا چاہتے ہیں۔ اس کی خاطر ہمیں I پر خطی طور غیر تابع دوسرا حل  $y_2$  درکار ہے۔ دوسرا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$y = y_2 = uy_1, \quad y' = y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

کو مساوات 2.13 میں پر کرتے ہوئے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0$$

$u''$ ،  $u'$  اور  $u$  کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

چونکہ  $y_1$  مساوات 2.13 کا حل ہے لہذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے لہذا

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو  $y_1$  سے تقسیم کرتے ہوئے  $u' = v$  پر کرنے سے تخفیف شدہ<sup>17</sup> ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v' + \left( \frac{2y_1'}{y_1} + p \right) v = 0$$

علیحدگی متغیرات کے بعد مکمل لینے سے

$$\frac{dv}{v} = - \left( \frac{2y_1'}{y_1} + p \right) dx, \quad \ln|v| = -2 \ln|y_1| - \int p dx$$

یعنی

$$(2.14) \quad v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx}$$

ملتا ہے۔ چونکہ  $v = u'$  کے برابر ہے لہذا دوسرا حل

$$(2.15) \quad y_2 = y_1 u = y_1 \int v dx$$

ہو گا۔ حاصل تقسیم  $\frac{y_2}{y_1} = u = \int p dx$  مستقل مقدار نہیں ہو سکتا چونکہ  $v > 0$  ہے لہذا  $y_1$  اور  $y_2$  اساس حل ہیں۔

متجانس خطی دو درجی مساوات سے ایک درجی مساوات کا حصول ہم دیکھ چکے۔ انہیں تخفیف درجہ کے دو مثال دیکھیں جو خطی مساوات اور غیر خطی مساوات پر لاگو کی جاسکتی ہیں۔

مثال 2.7: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات  $F(x, y, y', y'')$  میں  $y$  صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ  $y$  صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا اس کو  $F(x, y', y'')$  لکھ سکتے ہیں جس میں  $z = y'$  پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات  $F(x, z, z')$  حاصل ہوتی ہے۔ ایک درجی مساوات کے حل کے مکمل سے  $y$  حاصل ہو گا۔

مثال 2.8: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات  $F(x, y, y', y'')$  میں  $x$  صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ  $x$  صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا اس کو  $F(y, y', y'')$  لکھ سکتے ہیں۔ ہم  $z = y' = \frac{dy}{dx}$  لیتے ہیں۔ یوں زنجیری تفریق<sup>18</sup> سے

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z}$$

یعنی

$$y'' = z \frac{dz}{dy}$$

لکھا جاسکتا ہے۔  $z$  اور  $z_y$  کو دیے مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات  $F(y, z, z_y)$  ملتی ہے جس کا آزاد متغیر  $y$  ہے۔

2.2. ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

سوالات

سوال 2.1 تا سوال 2.7 سے ایک درجی مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.1:

$$y'' - y' = 0$$

جواب:  $y = c_1 e^x + c_2$

سوال 2.2:

$$xy'' + y' = 0$$

جواب:  $y = c_1 \ln|x| + c_2$

سوال 2.3:

$$xy'' - 2y' = 0$$

جواب:  $y = c_1 x^3 + c_2$

سوال 2.4:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

جواب:  $y = c_2 e^{c_1 x}$

سوال 2.5:

$$y'' - (y')^3 \cos y = 0$$

جواب:  $\cos y + c_1 y = x + c_2$

سوال 2.6:

$$y'' - (y')^2 \cos y = 1$$

جواب:  $y = \ln \sec(x + c_1) + c_2$ 

سوال 2.7:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x^2$$

جواب:  $y = c_1 x^2 + c_2 x$ 

قابل تخفیف سادہ تفرقی مساوات کے استعمال سوالات 2.8 تا سوال 2.11 دیتے ہیں۔

سوال 2.8: منحنی

کارٹیزیی محدود کے محور سے گزرتی منحنی  $y'' + y' = 0$  کی مرکز پر ڈھلوان اکائی کے برابر ہے۔ منحنی کی مساوات حاصل کریں۔

جواب:  $y = 1 - e^{-x}$ 

سوال 2.9: لیزم

دو مقررہ نقاط سے لٹکی ہوئی زنجیری ڈوری سے بننے والا خم لیزم<sup>19</sup> کہلاتا ہے جسے مساوات  $y'' = k\sqrt{1+y'^2}$  کے حل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مستقل  $k$  کی قیمت ڈوری کی تناؤ اور کمیت پر منحصر ہے۔ ڈوری نقطہ  $(1, 0)$  اور  $(-1, 0)$  سے لٹکی ہوئی ہے۔  $k = 1$  تصور کرتے ہوئے لیزم کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: زنجیر کے وسط یعنی  $x = 0$  پر ڈھلوان صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y = -1 + \cosh x$  حاصل ہوتا ہے۔

سوال 2.10: حرکت

ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع اور رفتار میں فرق ایک مثبت مستقل  $k$  کے برابر رہتی ہے۔ فاصلہ  $y(t)$  ابتدائی رفتار  $u$  اور ابتدائی فاصلہ  $y_0$  پر کس طرح منحصر ہے؟

---

catenary<sup>19</sup>

2.2. ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

$$y = (k + u)e^t + (y_0 - u) - k(t + 1) \text{ : جواب}$$

سوال 2.11: حرکت

ایک چھوٹی جسمات کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع کی قیمت رفتار کی قیمت کے مربع کے برابر رہتی ہے۔ فاصلے کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

$$t = c_1 - \ln(t + c_2) \text{ : جواب}$$

سوال 2.12 تا سوال 2.15 میں ثابت کریں کہ دیے گئے تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں یہ حل کی اساس ہیں۔ ان ابتدائی قیمت سوالات کے حل لکھیں۔

سوال 2.12:

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2; \quad \cos 3x \sin 3x$$

$$y = 5 \cos 3x - \frac{2}{3} \sin 3x \text{ : جواب}$$

سوال 2.13:

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1; \quad e^x, xe^x$$

$$y = e^{x-1}(x - 1) \text{ : جواب}$$

سوال 2.14:

$$x^2 y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 3.2, \quad y'(1) = -1.5; \quad x, x \ln x$$

$$y = \frac{16}{5}x - \frac{47}{10}x \ln x \text{ : جواب}$$

سوال 2.15:

$$y'' + 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3; \quad e^{-x} \cos \sqrt{2}x, e^{-x} \sin \sqrt{2}x$$

$$y = e^{-x}(2 \cos \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x) \text{ : جواب}$$

## 2.3 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب ایسے دو درجی متجانس تفرقی مساوات پر بات کرتے ہیں جن کے عددی سر  $a$  اور  $b$  مستقل مقدار ہیں۔

$$y'' + ay' + b = 0 \quad (2.16)$$

یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔