

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8	مستطیل جھلی
1006	13.9	قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10	دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11	مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024	13.12	کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ-نڈر
1030	13.13	لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات

1037	14	مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1	مخلوط اعداد
1047	14.2	مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنونی عدم مساوات
1054	14.3	مخلوط سطح میں منحنيات اور خطے

1057 اضافی ثبوت ا

1061	ب	مفید معلومات
1061	1.ب	اعلی تفاعل کے مساوات

دیباچہ

انجینئری حساب دو جلدوں پر مشتمل ہے۔ جلد اول میں تقریباً 1351 سوالات جمع جوابات اور 221 اشکال پائے جاتے ہیں۔

اس کتاب کے پہلے چار ابواب میں بالترتیب ایک درجی سادہ تفرقی مساوات، دو درجی سادہ تفرقی مساوات، بلند درجی سادہ تفرقی مساوات اور سادہ تفرقی مساوات کے نظام پر بحث کی گئی ہے۔ سادہ تفرقی مساوات عملی انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

اس کے بعد ایک باب طاقی تسلسل اور ایک باب لاپلاس بدل پر غور کرتا ہے جہاں سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کرنا سکھایا گیا ہے۔

خطی الجبرا پر تین ابواب ہیں۔ پہلا باب میں سمتیات پر غور کیا گیا ہے جبکہ دوسرے باب میں قالب اور تیسرے باب میں امتیازی قدر مسائل قالب پر غور کیا گیا ہے۔

آخری باب سمتی میدان اور ان کے خواص پر غور کرتا ہے۔

کتاب کے آخر میں فرہنگ دیا گیا ہے۔ کتاب میں کسی بھی موضوع تک جلد پہنچنے کے لئے فرہنگ کو استعمال کریں۔ اردو کے علاوہ انگریزی زبان میں بھی فرہنگ دیا گیا ہے۔

یہ کتاب Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دی گئی جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima کی مدد سے حاصل کئے گئے ہیں۔

یہ کتاب درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے ہوئے لکھی گئی ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

18 مئی 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

عموماً طبعی تعلقات کو تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح عموماً انجینئرنگ مسائل تفرقی مساوات کی صورت میں پیش آتے ہیں۔ اسی لئے اس کتاب کی ابتدا تفرقی مساوات اور ان کے حل سے کی جاتی ہے۔

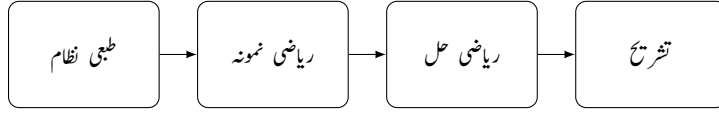
سادہ تفرقی مساوات¹ سے مراد ایسی تفرقی مساوات ہے جس میں ایک عدد آزاد متغیرہ پایا جاتا ہو۔ اس کے برعکس جزوی تفرقی مساوات² ایک سے زائد آزاد متغیرات پر منحصر ہوتی ہے۔ جزوی تفرقی مساوات کا حل نسبتاً مشکل ثابت ہوتا ہے۔

کسی بھی حقیقی صورت حال یا مشاہدے کی نقشہ کشی کرتے ہوئے اس کا ریاضی نمونہ³ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سائنس کے مختلف میدان مثلاً انجینئرنگ، طبیعیات، علم کیمیا، حیاتیات، کمپیوٹر وغیرہ میں درپیش مسائل کی صحیح تفرقی مساوات کا حصول اور ان کے حل پر تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

سادہ تفرقی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر کو علیحدہ باب میں پیش کیا جائے گا۔ یہ باب بقایا کتاب سے مکمل طور پر علیحدہ رکھا گیا ہے۔ یوں کتاب کے پہلے دو باب کے بعد اس باب کو پڑھا جاسکتا ہے۔

پہلی باب کا آغاز درجہ اول کے سادہ تفرقی مساوات کے حصول، مساوات کے حل اور حل کی تشریح سے کیا جاتا ہے۔ پہلی درجے کی سادہ تفرقی مساوات میں صرف ایک عدد نا معلوم تفاعل کا ایک درجہ تفرق پایا جاتا ہے۔ ایسی

¹ ordinary differential equation
² partial differential equation
³ mathematical model



شکل 1.1: نمونہ کشی، حل اور تشریح۔

مساوات میں ایک سے زیادہ درجے کا تفرق نہیں پایا جاتا۔ نامعلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ باب کے اختتام میں تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت⁴ اور یکتائی⁵ پر غور کیا جائے گا۔

تفرقی مساوات سمجھنے کی خاطر ضروری ہے کہ انہیں کاغذ اور قلم سے حل کیا جائے البتہ کمپیوٹر کی مدد سے آپ حاصل جواب کی درستگی دیکھنا چاہیں تو اس میں کوئی حرج نہیں ہے۔

1.1 نمونہ کشی

شکل 1.1 کو دیکھیے۔ انجینئرنگ مسئلے کا حل تلاش کرنے میں پہلا قدم مسئلے کو مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔ مسئلے کو مختلف متغیرات اور تفاعل کے تعلقات کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کو ریاضی نمونہ⁶ کہا جاتا ہے۔ ریاضی نمونے کا حصول، نمونے کا ریاضیاتی حل اور حل کی تشریح کے عمل کو نمونہ کشی⁷ کہا جاتا ہے۔ نمونہ کشی کی صلاحیت تجربے سے حاصل ہوتی ہے۔ کسی بھی نمونہ کی حل میں کمپیوٹر مدد کر سکتا ہے البتہ نمونہ کشی میں کمپیوٹر عموماً کوئی مدد فراہم نہیں کر پاتا۔

عموماً طبعی مقدار مثلاً اسراع اور رفتار در حقیقت میں تفرق کو ظاہر کرتے ہیں لہذا بیشتر ریاضی نمونے مختلف متغیرات اور تفاعل کے تفرق پر مشتمل ہوتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات⁸ کہا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو اس تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہو۔ تفرقی مساوات کا حل جانتے ہوئے مساوات میں موجود متغیرات اور تفاعل کے ترسیم کھینچے جاسکتا ہے اور ان پر غور کیا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات پر غور سے پہلے چند بنیادی تصورات تشکیل دیتے ہیں جو اس باب میں استعمال کی جائیں گی۔

existence⁴
 uniqueness⁵
 mathematical model⁶
 modeling⁷
 differential equation⁸

سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعل کی ایک درجی یا بلند درجی تفرقی پائے جاتے ہوں۔ نامعلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں نامعلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیر x (یا t) کے تفاعل بھی پائے جاسکتے ہیں۔ درج ذیل چند سادہ تفرقی مساوات ہیں

$$(1.1) \quad y' = \sin x$$

$$(1.2) \quad y' + \frac{6}{7}y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$(1.3) \quad y''' + 2y' - 11y'^2 = 0$$

جہاں $y' = \frac{dy}{dx}$ ، $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ، وغیرہ ہیں۔

دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل کے تفرقی پر مشتمل مساوات کو جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ ان کا حل سادہ تفرقی مساوات سے زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔ جزوی تفرقی مساوات پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ غیر تابع متغیرات x اور y پر منحصر تابع تفاعل $u(x, y)$ کی جزوی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے۔

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

n درجی تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعل y کی بلند تر تفرقی n درجے کی ہو۔ یوں مساوات 1.1 اول درجے کی مساوات ہے، مساوات 1.2 دوسرے درجے جبکہ مساوات 1.3 تیسرے درجے کی مساوات ہے۔

اس باب میں پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ ایسی مساوات میں اکائی درجہ تفرقی y' کے علاوہ نامعلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیر کا کوئی بھی تفاعل پایا جاسکتا ہے۔ ایک درجے کی سادہ تفرقی مساوات کو

$$(1.5) \quad F(y, y', x) = 0$$

یا

$$(1.6) \quad y' = f(x, y)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 1.5 خفی⁹ صورت کہلاتی ہے جبکہ مساوات 1.6 صریح¹⁰ صورت کہلاتی ہے۔ یوں خفی مساوات $x^2y' - 2y^3 = 0$ کی صریح صورت $y' = 2\frac{y^3}{x^2}$ ہے۔

implicit⁹
explicit¹⁰

حل کا تصور

ایک تفاعل

$$(1.7) \quad y = h(x)$$

جو کھلے وقفہ ¹¹ $a \leq x \leq b$ پر معین ¹² ہو اور پورے وقفے پر اس کا تفرق پایا جاتا ہو، اس صورت مساوات 1.5 کا حل ہو گا جب $h(x)$ اور $h'(x)$ کو مساوات 1.5 میں بالترتیب $y(x)$ اور $y'(x)$ کی جگہ پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر ہوں۔ تفاعل $h(x)$ کا خط منحنی حل ¹³ کہلائے گا۔

یہاں کھلے وقفے سے مراد ایسا وقفہ ہے جس کے آخری سر a اور b وقفے کا حصہ نہ ہوں۔ کھلا وقفہ لامتناہی ہو سکتا ہے مثلاً $-\infty \leq x \leq b$ یا $a \leq x \leq \infty$ اور یا $-\infty \leq x \leq \infty$ یعنی حقیقی محور۔

مثال 1.1: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty \leq x \leq \infty$ پر تفاعل $y = cx$ تفرقی مساوات $y = y'x$ کا حل ہے جہاں c ایک اختیاری مستقل ¹⁴ ہے۔

حل: پورے وقفے پر $y = cx$ معین ہے۔ اسی طرح اس کا تفرق $y' = c$ بھی پورے وقفے پر پایا جاتا ہے۔ ان بنیادی شرائط پر پورا اترنے کے بعد تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$y = cx \implies (cx) = (c)x$$

مساوات کے دونوں اطراف برابر ہیں لہذا $y = cx$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔ □

مثال 1.2: حل بذریعہ مکمل: مساوات $y' = \cos t$ کا حل بذریعہ مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی $y = \int \cos t$ جس سے $y = c - \sin t$ حاصل ہوتا ہے جو نسل حل ¹⁵ ہے۔ حاصل حل میں c اختیاری مستقل ہے۔ اختیاری مستقل کی ہر انفرادی قیمت تفرقی مساوات کا ایک منفرد حل دیتا ہے۔ یوں $c = 3.24$ پر کرتے ہوئے $y = 3.24 - \sin t$ حل حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.2 میں $c = -6, -3, 0, 3, 6$ سے حاصل حل دکھائے گئے ہیں۔ □

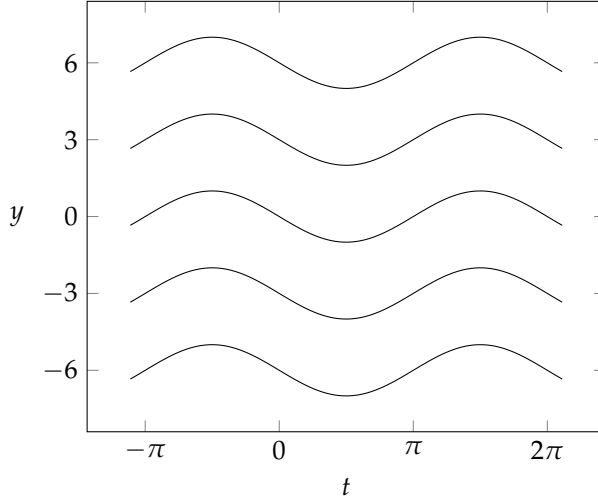
¹¹ open interval

¹² defined

¹³ solution curve

¹⁴ arbitrary constant

¹⁵ solution family



شکل 1.2: مثال 1.2 کے خط۔

مثال 1.3: مساوات مالتھس $y = ce^{kt}$ کے تفرق سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$(1.8) \quad y' = \frac{dy}{dt} = kce^{kt} = ky$$

یوں $y' = ky$ تفرقی مساوات کا حل $y = ce^{kt}$ ہے۔ مثبت k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی اضافے کی نمونہ کشی کرتی ہے۔ جرسوموں کی تعداد اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے۔ وسیع رقبے کے ملک میں کم انسانی آبادی اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے جہاں اس کو قانون مالتھس¹⁶ کہا¹⁷ جاتا ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = 0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

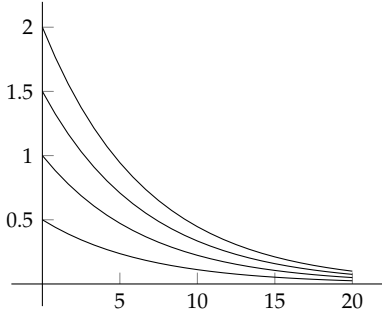
منفی k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی گھٹاؤ مثلاً تابکاری تحلیل¹⁸ کو ظاہر کرتی ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = -0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 1.5 میں تابکاری تحلیل کے مسئلے پر مزید غور کیا گیا ہے۔

□

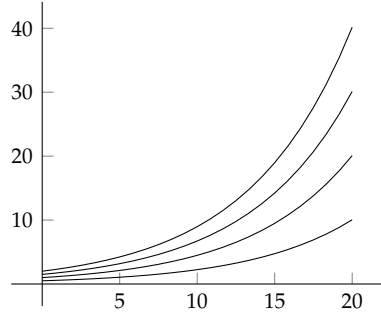
¹⁶ Malthus' law

¹⁷ یہ قانون انگلستانی ماہر معاشیات ٹامس رابرٹ مالتھس (1766-1834) کے نام ہے۔

¹⁸ radioactive decay



(الف) قوت نمائی گھٹاؤ۔ مساوات $y' = -0.15y$ کا حل۔



(الف) قوت نمائی اضافہ۔ مساوات $y' = 0.15y$ کا حل۔

شکل 1.3: قوت نمائی تفرقی مساوات کی نسل حل۔

درج بالا مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے حل میں ایک عدد اختیاری مستقل c پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کا ایسا حل جس میں اختیاری مستقل c پایا جاتا ہو عمومی حل¹⁹ کہلاتا ہے۔

(بعض اوقات c مکمل طور اختیاری مستقل نہیں ہوتا بلکہ اس کی قیمت کو کسی وقفے پر محدود کرنا لازم ہوتا ہے۔)

ہم یکتا²⁰ عمومی حل حاصل کرنے کی ترکیب سیکھیں گے۔

جیومیٹریائی طور پر سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل لامتناہی حل کے خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جہاں c کی ہر انفرادی قیمت منفرد خط دیتی ہے۔ عمومی حل میں c کی کوئی مخصوص قیمت مثلاً $c = -3.501$ یا $c = 0$ پر کرنے سے ہمیں مخصوص حل²¹ ملتا ہے۔ مخصوص حل میں کوئی اختیاری مستقل نہیں پایا جاتا۔

عام طور عمومی حل قابل حصول ہوتا ہے جس میں c کی مخصوص قیمت پر کرتے ہوئے درکار مخصوص حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بعض اوقات تفرقی مساوات ایسا حل بھی رکھتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ ایسے حل کو نادر²² حل کہتے ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفرقی مساوات

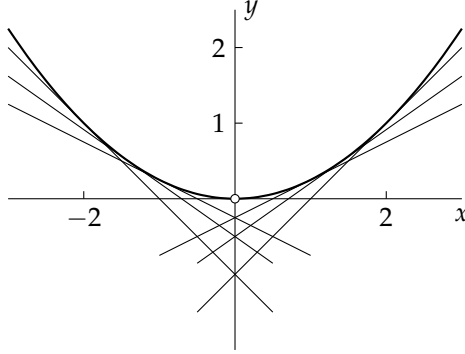
$$(1.9) \quad y'^2 - xy' + y = 0$$

general solution¹⁹

unique²⁰

particular solution²¹

singular solution²²



شکل 1.4: نادر حل اور مخصوص حل (تفرقی مساوات 1.9)

کا عمومی حل

$$y = cx - c^2$$

ہے جو سیدھے خطوط کی نسل ظاہر کرتی ہے جہاں ہر خط c کی مخصوص قیمت پر کرنے سے حاصل ہو گا۔ اسی تفرقی مساوات کا دوسرا حل

$$y = \frac{x^2}{4}$$

ہے جس کو c میں مستقل قیمت پر کرنے سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا یہ نادر حل ہے۔ جیسا کہ شکل 1.4 میں دکھایا گیا ہے، ہر مخصوص حل، اس نادر حل کا مماس ہے۔

انجینئری مسائل میں نادر حل شاذ و نادر استعمال ہوتا ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

عام طور پر عمومی حل میں ابتدائی قیمتیں²³ x_0 اور y_0 پر کرنے سے مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جہاں $y(x_0) = y_0$ ہے۔ جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ خط حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہے۔ سادہ تفرقی

²³initial values

مساوات اور مساوات کے ابتدائی قیمتوں کو ابتدائی قیمت سوال²⁴ کہا جاتا ہے۔ یوں صریح سادہ تفرقی مساوات کی صورت میں ابتدائی قیمت سوال درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(1.10) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

مثال 1.4: ابتدائی قیمت سوال: درج ذیل ابتدائی قیمت سوال کو حل کریں۔

$$y' = 5y, \quad y(0) = 3.2$$

حل: تفرقی مساوات کو $\frac{dy}{y} = 5 dx$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمل لینے سے $y = ce^{5x}$ عمومی حل حاصل ہوتا ہے جس میں $x = 0$ پر $y = 3.2$ پر کرنے سے $y(0) = ce^0 = 3.2$ لکھا جائے گا جس سے $c = 3.2$ ملتا ہے۔ یوں ابتدائی قیمت سوال کا مخصوص حل $y = 3.2e^{5x}$ ہے۔ □

نمونہ کشی پر مزید بحث

نمونہ کشی کو مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے لہذا ایسا ہی کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے پہلی قدم پر مسئلے کو تفرقی مساوات کا جامہ پہنایا جائے گا۔ دوسری قدم پر تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کیا جائے گا۔ تیسرے قدم پر ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل حاصل کیا جائے گا۔ آخر میں چوتھا قدم حاصل جواب کی تشریح ہوگی۔

مثال 1.5: تابکار مادے کی موجودہ کمیت 2 mg ہے۔ اس کی کمیت مستقبل میں دریافت کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ کسی بھی لمحے پر تابکاری تحلیل کی شرح اس لمحے پر موجود تابکار مادے کی کمیت کے راست تناسب ہے۔

(الف) پہلا قدم: نمونہ کشی: کیمیت کو y سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں کسی بھی لمحے پر تابکاری کی شرح سے مراد $y' = \frac{dy}{dt}$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کیمیت گھٹتی ہے لہذا تجربے سے حاصل معلومات کو درج ذیل تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جائے گا جہاں تناسبی مستقل k مثبت قیمت ہے۔

$$(1.11) \quad \frac{dy}{dt} = -ky$$

مثال 1.3 میں آپ نے دیکھا کہ تفرقی مساوات میں منفی کی علامت سے تفرقی مساوات کا قوت نمائی گھٹتی ہوا حل حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کیمیت گھٹتی ہے لہذا درج بالا مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی گئی ہے۔ تابکار اشیاء کے مستقل k کی قیمتیں تجربے سے حاصل کئے جاتے ہیں مثلاً ریڈیم²⁵ یعنی $^{226}_{88}\text{Ra}$ کا $k = 1.4 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ ہے۔

ابتدائی کیمیت 2 mg ہے۔ ابتدائی وقت کو $t = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی معلومات $y(0) = 2 \text{ mg}$ لکھی جائے گی۔ (غیر تابع متغیر وقت t کی بجائے کچھ اور مثلاً x ہونے کی صورت میں بھی (x_0, y_0) یا $y(x_0) = y_0$ کو ابتدائی معلومات ہی کہا جاتا ہے۔ اسی طرح تابع متغیر y کی قیمت $t \neq 0$ پر معلوم ہو سکتی ہے مثلاً $y(x_n) = y_n$ اور ایسی صورت میں (x_n, y_n) ابتدائی معلومات کہلاتی ہے۔ یوں دیے مسئلے سے درج ذیل ابتدائی قیمت سوال حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.12) \quad y' = -ky, \quad y(0) = 2 \text{ mg}$$

(ب) دوسرا قدم: عمومی حل: ابتدائی قیمت سوال کا عمومی حل درج ذیل ہے جہاں c اختیاری مستقل جبکہ k کی قیمت تابکار مادے پر منحصر ہے۔

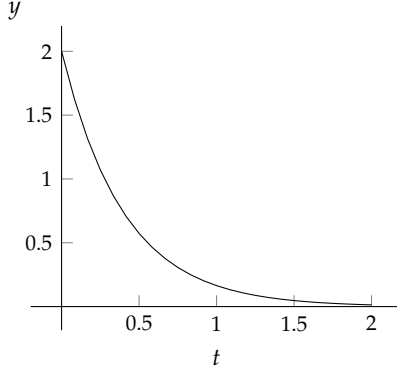
$$(1.13) \quad y = c^{-kt}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $t = 0$ پر $y = 2 \text{ mg}$ ہے جس کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں درج ذیل مخصوص حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.14) \quad y = 2e^{-kt} \quad (k > 0)$$

مخصوص حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ حاصل حل درست ہے۔ اسی طرح مخصوص حل سے ابتدائی معلومات حاصل کریں۔

$$\frac{dy}{dt} = -kce^{-kt} = -ky, \quad y(0) = 2e^{-0} = 2$$



شکل 1.5: مثال 1.5 کی منحنی-تابکاری تحلیل $y = 2e^{-kt}$ جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔

(پ) حاصل مخصوص حل کی تشریح: مساوات 1.14 کو شکل 1.5 میں دکھایا گیا ہے جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر یہ مساوات تابکار مادے کی درست کمیت دیتا ہے۔ لمحہ لامتناہی پر تابکار مادے کی کمیت $y(\infty) = 2e^{-k\infty} = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

□

سوالات

سوالات 1.1 تا 1.8 کے جوابات بذریعہ مکمل حاصل کریں یا کسی تفاعل کی تفرق سے جواب حاصل کریں۔

سوال 1.1: $y' + 3 \sin 2\pi x = 0$

جواب: $y = \frac{3}{2\pi} \cos 2\pi x + c$

سوال 1.2: $y' + xe^{-x^2} = 0$

جواب: $y = \frac{e^{-x^2}}{2} + c$

سوال 1.3: $y' = 4e^{-x} \cos x$

جواب: $y = 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + c$

سوال 1.4: $y' = y$

جواب: $y = ce^x$

سوال 1.5: $y' = -y$

جواب: $y = ce^{-x}$

سوال 1.6: $y' = 2.2y$

جواب: $y = ce^{2.2x}$

سوال 1.7: $y' = 1.5 \sinh 3.2x$

جواب: $y = \frac{15}{32} \cosh 3.2x + c$

سوال 1.8: $y'' = -y$

جواب: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

سوال 1.9 تا سوال 1.15 ابتدائی قیمت سوالات ہیں جن کے عمومی حل دیے گئے ہیں۔ انہیں تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہی عمومی جوابات ہیں۔ عمومی جواب سے مخصوص جواب حاصل کریں۔ مخصوص جواب کا خط کھینچیں۔

سوال 1.9: $y' + 2y = 0.8, \quad y = ce^{-2x} + 0.4, \quad y(0) = 1.2$

جواب: $y = 0.8e^{-2x} + 0.4$

سوال 1.10: $y' + x + y = 0, \quad y = ce^{-x} - x + 1, \quad y(0) = \pi$

جواب: $y = \pi e^{-x} - e^{-x} - x + 1$

سوال 1.11: $y' = 2x + e^x, \quad y = e^x + x^2 + c, \quad y(0) = 1$

جواب: $y = e^x + x^2$

سوال 1.12: $y' + 4xy = 0$, $y = ce^{-2x^2}$, $y(0) = 2$

جواب: $y = 2e^{-2x^2}$

سوال 1.13: $yy' = 2x$, $y^2 = 2x^2 + c$, $y(1) = 6$

جواب: $y^2 = 2x^2 + 34$

سوال 1.14: $y' = y + y^2$, $y = \frac{c}{e^{-x}-c}$, $y(0) = 0.1$

جواب: $y = \frac{1}{e^{(-x+23.98)}-1}$

سوال 1.15: $y' \tan x = y - 4$, $y = c \sin x + 4$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

جواب: $y = 4 - 4 \sin x$

سوال 1.16: نادر حل: بعض اوقات سادہ تفرقی مساوات کا ایسا حل بھی پایا جاتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ ایسے حل کو نادر حل²⁶ کہا جاتا ہے۔ مساوات $y^2 - xy' + y = 0$ کا عمومی حل $y = cx - c^2$ ہے جبکہ اس کا نادر حل $y = \frac{x^2}{4}$ ہے۔ ان حل کا تفرق لیتے ہوئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

سوال 1.17 تا سوال 1.21 نقشہ کشی کے سوالات ہیں۔

سوال 1.17: تابکار مادے کی نصف زندگی $t_{\frac{1}{2}}$ سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں تابکار مادے کی کیت نصف ہو جاتی ہے۔ مثال 1.5 میں ریڈیم $^{266}_{88}\text{Ra}$ کی نصف زندگی دریافت کریں۔

جواب: تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0 e^{-kt}$ میں لمحہ $t = 0$ پر (ابتدائی) کیت y_0 ہے جبکہ مستقبل میں لمحہ t پر کیت y ہے۔ ہم وہ دورانیہ جاننا چاہتے ہیں جس میں کیت نصف رہ جائے یعنی جب $y = \frac{y_0}{2}$ رہ جائے۔ تابکاری مساوات میں $y = \frac{y_0}{2}$ پر کرتے ہوئے $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kt}$ لکھا جائے گا جس سے $t_{\frac{1}{2}} =$

یعنی 4.95×10^{10} سال حاصل ہوتا ہے۔ یوں ریڈیم کی مقدار 1569.6 سالوں میں نصف رہ جائے گی۔

سوال 1.18: ریڈیم ہم جا $^{224}_{88}\text{Ra}$ کی نصف زندگی تقریباً 3.6 دن ہے۔ دو گرام (2g) ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک دن بعد کتنی رہ جائے گی۔ دو گرام ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک سال بعد کتنی رہ جائے گی۔

جوابات: 1.65 g ، $6 \times 10^{-31} \text{ g}$

سوال 1.19: ایک جہاز کی رفتار مستقل اسراع a سے مسلسل بڑھ رہی ہے۔ رفتار کی تبدیلی کی شرح $\frac{dv}{dt}$ کو اسراع کہتے ہیں۔ ان معلومات سے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے لمحہ t پر رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔ اگر $t = 0$ پر ابتدائی رفتار u ہو تب v کی مساوات کیا ہوگی؟

جوابات: $v = u + at$ ، $v = at + c$

سوال 1.20: رفتار سے مراد وقت کے ساتھ فاصلے کی تبدیلی کی شرح $\frac{dx}{dt}$ ہے۔ سوال 1.19 میں رفتار کی مساوات $v = u + at$ حاصل کی گئی جسے $\frac{dx}{dt}$ کے برابر پر کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی فاصلہ $x = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی قیمت سوال کو حل کرتے ہوئے x کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $x = ut + \frac{1}{2}at^2$

سوال 1.21: آواز سے کم رفتار پر پرواز کرنے والے جہاز کی کارگزاری ہوا کے دباؤ پر منحصر ہوتی ہے۔ ان کی کارگزاری 10500 m تا 12000 m کی اونچائی پر بہترین حاصل ہوتی ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ 10500 m کی اونچائی پر ہوا کا دباؤ دریافت کریں۔ طبعی معلومات: اونچائی کے ساتھ دباؤ میں تبدیلی کی شرح y' ہوا کے دباؤ y کے راست تناسب ہوتی ہے۔ تقریباً 5500 m کی اونچائی پر ہوا کا دباؤ سمندر کی سطح پر ہوا کے دباؤ y_0 کی نصف ہوتا ہے۔

جواب: $0.27y_0$ یعنی تقریباً ایک چوتھائی

$$1.2 \quad y' = f(x, y) \text{ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔}$$

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

$$(1.15) \quad y' = f(x, y)$$

سادہ معنی رکھتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ y' سے مراد y کی ڈھلوان ہے۔ یوں مساوات 1.15 کا وہ حل جو نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہو اس نقطے پر ڈھلوان $y'(x_0)$ ہو گا کو درج بالا مساوات کے تحت اس نقطے پر f کی قیمت کے برابر ہو گا۔

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 1.15 کو حل کرنے کے ترمیمی²⁸ یا اعدادی²⁹ طریقے دریافت کر سکتے ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے ترمیمی اور اعدادی طریقے اس لئے بھی اہم ہیں کہ کئی تفرقی مساوات کا کوئی تحلیلی³⁰ حل نہیں پایا جاتا جبکہ ہر قسم کے تفرقی مساوات کا ترمیمی اور اعدادی حل حاصل کرنا ممکن ہے۔

میدان کی سمت: ترمیمی طریقہ

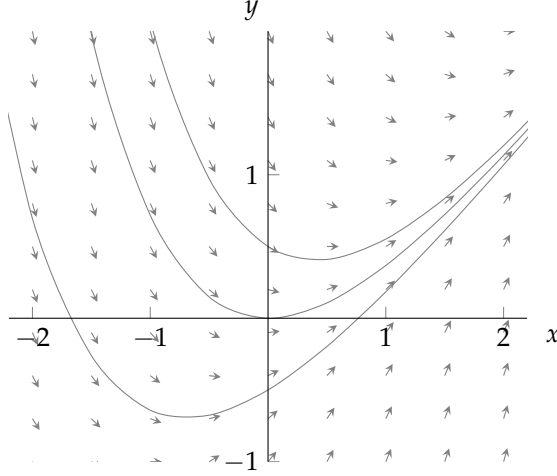
ہم xy سطح پر جگہ جگہ مساوات 1.15 سے حاصل ڈھلوان کی چھوٹی لمبائی کی سیدھی لکیریں کھینچ سکتے ہیں۔ ہر نقطے پر ایسی لکیر اس نقطے پر میدان کی سمت دیتی ہے۔ اس میدان سمت³¹ یا میدان ڈھال³² میں تفرقی مساوات کا منحنی حل³³ کھینچا جاسکتا ہے۔

منحنی حل کو کھینچنے کی ترکیب کچھ یوں ہے۔ کسی بھی نقطے پر ڈھلوان کی سمت میں چھوٹی لکیر کھینچیں۔ اس لکیر کو آہستہ آہستہ یوں موڑیں کہ لکیر کے اختتامی نقطے پر لکیر کی ڈھلوان عین اس نقطے کی ڈھلوان برابر ہو۔ اسی طرح آگے بڑھتے رہیں۔ ڈھال میدان میں نقطے جتنے قریب قریب ہوں تفرقی مساوات کا منحنی حل اتنا درست ہو گا۔

شکل 1.6 میں

$$(1.16) \quad y' = x - y$$

1.2. $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریکی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔



شکل 1.6: درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = x - y$ کا ڈھال میدان اور منحنی حل۔

کا ڈھال میدان دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چند منحنی حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

آئیں اب اعدادی طریقہ سیکھیں۔ سادہ ترین اعدادی طریقہ ترکیب یولر کہلاتا ہے۔ پہلے اسی پر بحث کرتے ہیں۔

یولر کی اعدادی ترکیب

درجہ اول تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو استعمال کرتے ہوئے ترکیب یولر³⁴ ہم فاصلہ نقطوں x_0 ، $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، ... پر تقریباً درست قیمتیں دیتا ہے یعنی

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

graphical²⁸
numerical²⁹
analytic³⁰
direction field³¹
slope field³²
solution curve³³
Euler's method³⁴

1.2. $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریکی مطلب - میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔

جدول 1.1: ترکیب یولر۔

غلطی	$y(x)$	y_n	x_n	n
0	0	0	0	0
0.00484	0.00484	0.0	0.1	1
0.00873	0.01873	0.01	0.2	2
0.01182	0.04082	0.029	0.3	3
0.01422	0.07032	0.0561	0.4	4

جدول 1.1 کے دوسرے صف میں ان قیمتوں کا اندراج کیا گیا ہے جن سے (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0 + 0.1(0.1 - 0) = 0.01$$

یہ قیمتیں بھی جدول میں درج ہیں۔ اسی طرح (x_3, y_3) حاصل کرتے ہوئے جدول میں درج کئے گئے ہیں۔

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.01 + 0.1(0.2 - 0.01) = 0.029$$

جدول کی آخری صف حاصل کرتے ہیں۔

$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

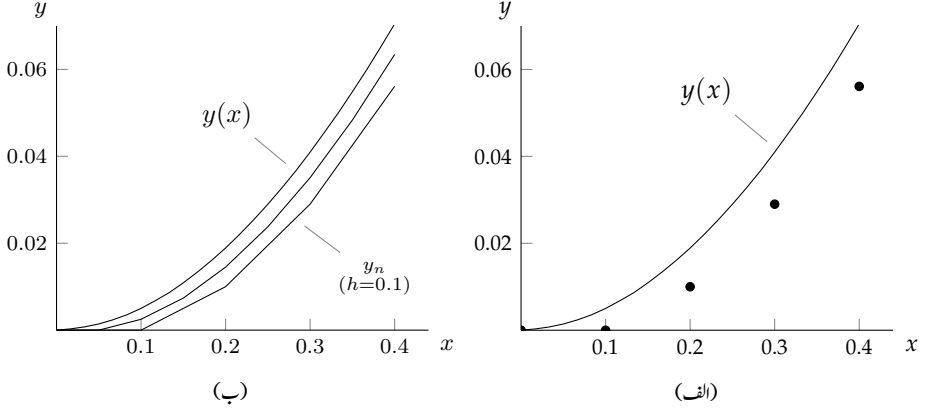
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.029 + 0.1(0.3 - 0.029) = 0.0561$$

شکل 1.8-الف میں ترکیب یولر سے حاصل حل اور ریاضیاتی حل $y(x)$ کا موازنہ کیا گیا ہے۔ شکل-الف میں یولر حل سے حاصل نقطوں کو سیدھی لکیروں سے ملاتے ہوئے مسلسل حل حاصل کیا جاسکتا ہے جسے شکل-ب میں y_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y(x)$ بھی دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ $h = 0.05$ استعمال کرتے ہوئے حاصل یولر حل کو بھی دکھایا گیا ہے جو $y(x)$ اور y_n کے بیچ میں پایا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ h کی قیمت کم کرنے سے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 1.22 تا سوال 1.28 کے میدان ڈھال کو قلم و کاغذ سے کھینچتے ہوئے دیے ابتدائی نقطوں سے گزرتے منحنی حل حاصل کریں۔ چند ڈھال میدان شکل 1.9 اور شکل 1.10 میں دیے گئے ہیں۔

سوالات

سوال 1.22: $y' = 1 + y^2, \quad (\frac{\pi}{4}, 1)$



شکل 1.8: ترکیب یولر سے حاصل حل کاریفائیٹی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

سوال 1.23: $y' = 1 - y^2, \quad (0, 0)$

سوال 1.24: $yy' + 8x = 0, \quad (1, 1)$

سوال 1.25: $y' = y - y^2, \quad (1, 0)$

سوال 1.26: $y' = x + \frac{1}{y}, \quad (0, 1)$

سوال 1.27: $y' = \sin^2 x, \quad (0, 1)$

سوال 1.28: $y' = \sin^2 y, \quad (0, 0)$

ڈھال میدان کے استعمال سے تفرقی مساوات کے تمام حل سامنے آ جاتے ہیں۔ بعض اوقات تفرقی مساوات کا تحلیلی حل حاصل کرنا ممکن ہی نہیں ہوتا۔ درج ذیل دو سوالات میں ڈھال میدان سے اخذ حل اور دیے گئے تحلیلی حل کا موازنہ کرتے ہوئے ڈھال میدان سے حاصل حل کی درستگی کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔

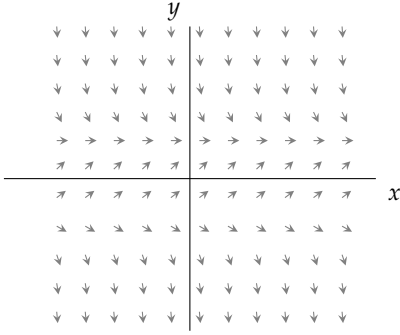
سوال 1.29: $y' = \sin x, \quad (\frac{\pi}{2}, 0), \quad y = -\cos x$

سوال 1.30: $y' = 3x^2, \quad (0, 0), \quad y = x^3$

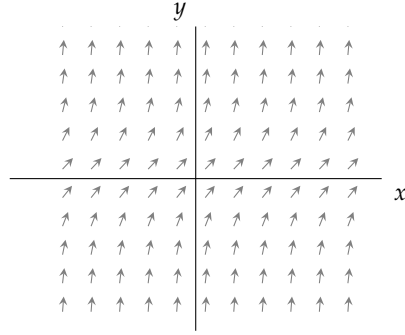
سوال 1.31: سوال 1.23، سوال 1.25 اور سوال 1.28 میں بے قابو متغیر x صریحاً ظاہر نہیں کیا گیا ہے۔ ایسی مساوات جن میں بے قابو متغیر کو صریحاً ظاہر نہ کیا جائے خود مختار³⁵ سادہ تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ خود مختار

autonomous ordinary differential equations³⁵

1.2. $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریکی مطالبہ۔ میدان کی سمت اور ترکیب پور

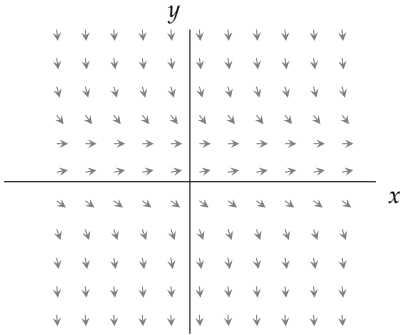


$$y' = 1 - y^2 \quad (\text{ب})$$

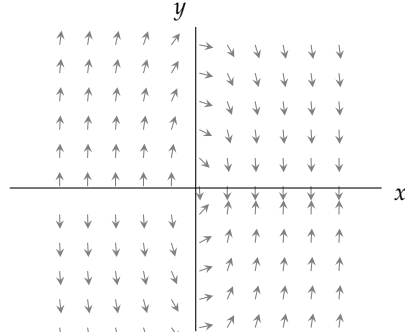


$$y' = 1 + y^2 \quad (\text{الف})$$

شکل 1.9: سوال 1.22 اور سوال 1.23 کے ڈھال میدان۔



$$y' = y - y^2 \quad (\text{ب})$$



$$y' = -\frac{8x}{y} \quad (\text{الف})$$

شکل 1.10: سوال 1.24 اور سوال 1.25 کے ڈھال میدان۔

سادہ تفرقی مساوات کے ہم میلان³⁶ حل $f(x, y) = c$ کی شکل و صورت کیا ہوگی؟

جواب: چونکہ y' کا دارومدار x پر نہیں ہے لہذا x تبدیل کرنے سے y کا میلان تبدیل نہیں ہوگا اور $f(x, y) = c$ افقی محور کے متوازی خط ہوں گے۔

ایک جسم y محدود پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر نقطہ $y = 0$ سے جسم کا فاصلہ $y(t)$ ہے۔ سوالات 1.32 تا سوال 1.34 میں دئے شرائط کے مطابق جسم کی رفتار کی نمونہ کشی کریں۔ ریاضی نمونے کی ڈھال میدان بناتے ہوئے دیے گئے ابتدائی معلومات پر پورا اترتا منحنی خط کھینچیں۔

سوال 1.32: جسم کی رفتار ضرب فاصلہ $y(t)$ مستقل ہے جو 4 کے برابر ہے جبکہ $y(0) = 4$ کے برابر ہے۔

جوابات: $y' = 4$ ، $y = 8t + 16$

سوال 1.33: رفتار ضرب وقت فاصلے کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 1$ پر فاصلہ $y(1) = 2$ ہے۔

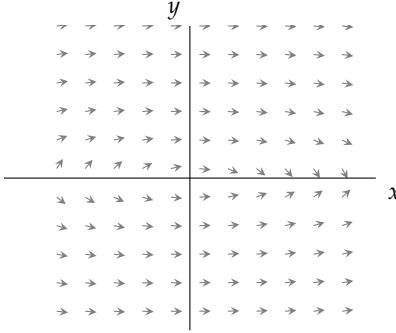
جوابات: $y' = 2t$ ، $y = t^2$

سوال 1.34: مربع رفتار منفی مربع فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔ ابتدائی فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔

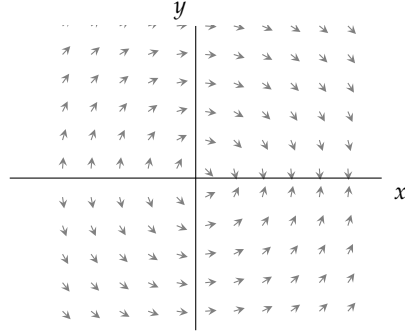
جوابات: $y' = \sqrt{1 + y^2}$ ، $\sinh^{-1} y = t + \sinh^{-1} 1$

سوال 1.35: ہوائی جہاز سے چھلانگ لگا کر زمین تک خیریت سے بذریعہ چھتری اترنا جاسکتا ہے۔ گرتے ہوئے شخص پر آپس میں الٹ، دو عدد قوتیں عمل کرتی ہیں۔ پہلی قوت زمینی کشش $F_1 = mg$ ہے جہاں m اس شخص کی کمیت اور $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع ہے۔ یہ قوت انسان کو زمین کی طرف اسراع دیتی ہے۔ دوسری قوت چھتری پر ہوا کے رگڑ سے پیدا قوت ہے جو اس شخص کی رفتار کو بڑھنے سے روکتی ہے۔ چھتری پر ہوا کے رگڑ سے رفتار کے مربع کے متناسب قوت $F_2 = cv^2$ پیدا ہوتی ہے۔ نیوٹن کی مساوات حرکت کہتی ہے کہ کسی بھی جسم پر قوت، اس جسم کی کمیت ضرب اسراع کے برابر ہوتی ہے۔ چھتری سے زمین پر اترتے شخص کی نمونہ کشی کرتے ہوئے رفتار v کی سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ کمیت کو $m = 1$ اور مستقل کو $c = 1$ لیتے ہوئے ڈھال

1.2. $y' = f(x, y)$ کا حیو میٹرانی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پر لر۔



(ب) تفرقی مساوات $y' = -\frac{x}{9y}$ کی ڈھال میدان۔



(الف) تفرقی مساوات $y' = -\frac{x}{y}$ کی ڈھال میدان۔

شکل 1.11: سوال 1.36 کی ڈھال میدان۔

میدان کھینچیں۔ تصور کریں کہ چھتری اس لمحہ کھلتی ہے جب شخص کی رفتار $v = 15 \text{ ms}^{-1}$ ہو۔ ایسی صورت میں منحنی حل حاصل کریں۔ اس شخص کی اختتامی رفتار کیا ہوگی؟ کیا چھتری پر قوت رفتار کے راست متناسب ہونے کی صورت میں بھی چھتری کے ذریعہ ہوائی جہاز سے زمین تک خیریت سے چھلانگ لگائی جاسکتی ہے؟

جوابات: $mg - cv^2 = m \frac{dv}{dt}$ ؛ گرنے کی رفتار اس قیمت پر رہتی ہے جہاں نیچے جانب قوت mg اور چھتری کی رکاوٹی اوپر جانب قوت cv^2 برابر ہوں۔ ایسی صورت میں گرتے شخص کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی یعنی $y' = 0$ ہوتا ہے۔ تفرقی مساوات میں $y' = 0$ پر کرتے اور $m = c = 1$ لیتے ہوئے اختتامی رفتار $v(t = \infty) = 3.13 \text{ ms}^{-1}$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 1.36: گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ ہے۔ رداس r کو مستقل تصور کرتے ہوئے دائرے کی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ڈھال میدان کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا آپ ڈھال میدان کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ منحنی حل گول دائرے ہیں؟ اسی طرح $x^2 + 9y^2 = c$ کا تفرق لیتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کی ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا ڈھال میدان کو دیکھ کر کہا جاسکتا ہے کہ منحنی حل بیضوی ہوگا؟

جوابات: $y' = -\frac{x}{9y}$ ، $y' = -\frac{x}{y}$

سوال 1.37 تا سوال 1.40 کو ترکیب یولر سے حل کریں۔ کل پانچ ہم فاصلہ نقطوں پر حل حاصل کریں۔ ایک ہی کارتیسی محدود پر حاصل y_1 تا y_5 اور سوال میں دئے گئے حل $y(x)$ کا خط کھینچیں۔ سوال 1.37:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1, \quad y(x) = e^{-x}$$

$$\text{جوابات: } y_1 = 0.9, \quad y_2 = 0.81, \quad y_3 = 0.729, \quad y_4 = 0.6561, \quad y_5 = 0.59049$$

سوال 1.38:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{-x}$$

$$\text{جوابات: } y_1 = 0.99, \quad y_2 = 0.9801, \quad y_3 = 0.9703, \quad y_4 = 0.9606, \quad y_5 = 0.95099$$

سوال 1.39:

$$y' = 1 + 3x^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1, \quad y(x) = x^3 + x$$

$$\text{جوابات: } y_1 = 2.1, \quad y_2 = 2.203, \quad y_3 = 2.315, \quad y_4 = 2.442, \quad y_5 = 2.59$$

سوال 1.40:

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{x^2-4}$$

$$\text{جوابات: } y_1 = 1.04, \quad y_2 = 1.0818, \quad y_3 = 1.1255, \quad y_4 = 1.1712, \quad y_5 = 1.2190$$

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات

متعدد اہم سادہ تفرقی مساوات کو الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$(1.18) \quad g(y)y' = f(x)$$

جس کو مزید یوں

$$g(y) \frac{dy}{dx} dx = f(x) dx$$

یعنی

$$g(y) dy = f(x) dx$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں جانب صرف y متغیر اور دائیں جانب صرف x متغیر پایا جاتا ہے لہذا اس کا مکمل لیا جاسکتا ہے۔

$$(1.19) \quad \int g(y) dy = \int f(x) dx + c$$

اگر $g(y)$ اور $f(x)$ قابل مکمل تفاعل ہوں تب مساوات 1.19 سے مساوات 1.18 کا حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب کو ترکیب علیحدگی متغیرات³⁷ کہتے ہیں۔ مساوات 1.18 کو قابل علیحدگی مساوات³⁸ کہتے ہیں۔

مثال 1.6: مساوات $y' = 1 + y^2$ قابل علیحدگی مساوات ہے چونکہ اس کو

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx$$

لکھا جاسکتا ہے جس کے دونوں اطراف کا مکمل لیتے ہوئے

$$\tan^{-1} y = x + c$$

یعنی

$$y = \tan(x + c)$$

variable separation technique³⁷
separable equation³⁸

حاصل ہوتا ہے جو تفرقی مساوات کا درکار حل ہے۔ حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ یہی صحیح حل ہے۔ □

مثال 1.7: قابل علیحدگی تفرقی مساوات $y' = xe^{-x}y^3$ کو علیحدہ کرتے ہوئے دونوں اطراف کا مکمل لے کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y^{-3} dy &= xe^{-x} dx \\ \frac{y^{-2}}{-2} &= c - (x+1)e^{-x} \quad \text{مکمل لیا گیا ہے} \\ y^2 &= \frac{1}{2(x+1)e^{-x} - 2c} \end{aligned}$$

□

مثال 1.8: درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1$$

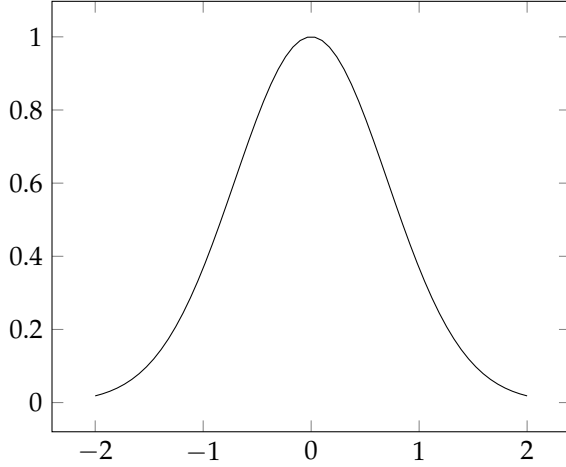
حل: مساوات کے متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے مکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= - \int 2x dx + c \\ \ln y &= -x^2 + c_1 \\ y &= ce^{-x^2} \end{aligned}$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = 0$ یعنی $c = e^{c_1} = 1$ ملتا ہے لہذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y = e^{-x^2}$ ہے جسے شکل 1.12 میں دکھایا گیا ہے اور جو گھنٹی نما³⁹ ہے۔ □

مثال 1.9: کاربن سے عمر دریافت کرنے کا طریقہ
طبعی معلومات: کائناتی شعاعیں⁴⁰ فضا میں تابکار کاربن $^{14}_6\text{C}$ بناتی ہیں۔ یہ عمل زمین کی پیدائش سے اب تک ہوتا آ

bell shaped³⁹
cosmic rays⁴⁰



شکل 1.12: مثال 1.8 کا گھنٹی نما حل۔

رہا ہے۔ وقت کے ساتھ فضا میں ^{14}C اور ^{12}C بم جہاں ^{14}C کی تناسب ایک مخصوص قیمت حاصل کر چکی ہے۔ کوئی بھی جاندار سانس لے کر یا خوراک کے ذریعہ فضا سے کاربن جذب کرتا ہے۔ یوں جب تک جانور زندہ رہے اس کی جسم میں دونوں ہم جا کاربن کی تناسب وہی ہوگی جو فضا میں ان کی تناسب ہے۔ البتہ مرنے کے بعد جسم میں تابکار کاربن کی مقدار تابکاری تحلیل کی بنا گھٹتی ہے جبکہ غیر تابکار کاربن کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ تابکار کاربن ^{14}C کی نصف زندگی 5715 سال ہے۔

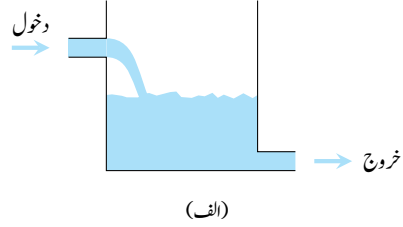
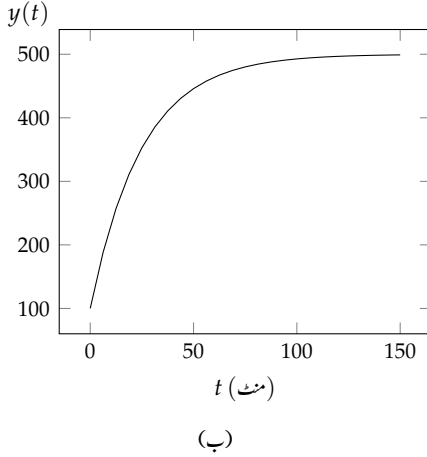
اہرام مصر میں دفن مومیائی ہوئی فرعون کی لاش میں ^{14}C اور ^{12}C کا تناسب فضا کے تناسب کا 56.95 % ہے۔ لاش کی عمر دریافت کریں۔

حل: تابکار کاربن کی نصف زندگی سے تابکاری تحلیل کا مستقل k دریافت کرتے ہیں۔

$$y_0 e^{-k(5715)} = \frac{y_0}{2}, \quad e^{-k(5715)} = \frac{1}{2}, \quad -k = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{5715}, \quad k = 0.0001213$$

لاش میں ہم جا کاربن کی تناسب سے لاش کی عمر حاصل کرتے ہیں۔

$$e^{-0.0001213t} = 0.5695, \quad -0.0001213t = \ln 0.5695, \quad t = 4641$$



شکل 1.13: مثال 1.10 میں مرکب بنانے کا عمل۔

یوں فرعون کی لاش 4641 سال پرانی ہے۔

□

مثال 1.10: مرکب بنانے کا عمل

کیمیائی صنعت میں مرکب بنانے کا عمل عام ہے۔ شکل 1.13-الف میں پانی کی ٹینکی دکھائی گئی ہے جس میں ابتدائی طور پر 1000 لٹر پانی پایا جاتا ہے۔ اس پانی میں کل 100 kg نمک ملا یا گیا ہے۔ پانی کو مسلسل ہلانے سے ٹینکی میں کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ ٹینکی میں 40 لٹری منٹ کی شرح سے نمکین پانی شامل کیا جاتا ہے۔ اس پانی میں نمک کی مقدار 0.5 kg l^{-1} ہے۔ ٹینکی سے نمکین پانی کا انخلا 40 لٹری منٹ ہے۔ ٹینکی میں نمک کی کل مقدار بالمقابل وقت دریافت کریں۔

حل: چونکہ ٹینکی میں پانی شامل ہونے کی شرح اور پانی خارج ہونے کی شرح برابر ہے یہ لہذا ٹینکی میں پانی کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ ٹینکی میں داخل ہونے والا ایک لٹر کا نمکین پانی 0.5 kg نمک ٹینکی میں شامل کرتا ہے۔ یوں 40 لٹری منٹ سے داخل ہوتا پانی $40 \times 0.5 = 20 \text{ kg min}^{-1}$ سے نمک شامل کرتا ہے۔ کسی بھی لمحہ ٹینکی میں کل نمک کو y کلوگرام لکھتے ہوئے ٹینکی میں نمک کی کثافت کو $\frac{y}{1000}$ کلوگرام فی لٹر لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

خارج ہوتا پانی $40 \times \frac{y}{1000}$ کلو گرام فی منٹ نمک خارج کرتا ہے۔ اس طرح نمک میں اضافے کی شرح $\frac{dy}{dt}$ کو

$$\begin{aligned} y' &= \text{نمک خارج ہونے کی شرح} - \text{نمک شامل ہونے کی شرح} \\ &= 20 - \frac{40y}{1000} \end{aligned} \quad (\text{متوازن مساوات})$$

یعنی

$$(1.20) \quad y' = 0.04(500 - y)$$

لکھا جاسکتا ہے جو قابل علیحدگی مساوات ہے لہذا اس میں متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکرار کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{y - 500} = -0.04 dt, \quad \ln|y - 500| = -0.04t + c_1, \quad y = 500 + ce^{-0.04t}$$

ٹینکی میں ابتدائی نمک کی کل مقدار 100 kg ہے۔ اس معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے مساوات کا مستقل c حاصل کرتے ہیں۔

$$100 = 500 + c^{-0.04(0)}, \quad c = -400$$

یوں کسی بھی لمحے ٹینکی میں کل نمک کی مقدار درج ذیل ہے جس کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$y(t) = 500 - 400e^{-0.04t}$$

شکل-ب کے مطابق ٹینکی میں آخر کار کل 500 kg نمک پایا جائے گا۔ یہی جواب بغیر کسی مساوات لکھے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ٹینکی میں لگاتار نمکین پانی شامل کیا جائے اور اس سے پرانا پانی خارج کیا جائے تو آخر کار ٹینکی میں صرف نیا شامل کردہ پانی ہی پایا جائے گا۔ چونکہ شامل کردہ پانی میں 0.5 کلو گرام فی لٹر نمک پایا جاتا ہے لہذا 1000 لٹر کی ٹینکی میں کل نمک $1000 \times 0.5 = 500 \text{ kg}$ ہو گا۔ □

مثال 1.11: نیوٹن قانون ٹھنڈک گرمیوں میں ایک دفتر کا درجہ حرارت ایئر کنڈیشنر کی مدد سے 21°C پر رکھا جاتا ہے۔ صبح سات بجے ایئر کنڈیشنر چالو کیا جاتا ہے اور شام نو بجے اس کو بند کر دیا جاتا ہے۔ ایک مخصوص دن کو شام نو بجے بیرونی درجہ حرارت 40°C ہوتا ہے جبکہ صبح سات بجے بیرونی درجہ حرارت 30°C تک گر چکا ہوتا ہے۔ دفتر کے اندر رات دو بجے درجہ حرارت 26°C ہوتا ہے۔ صبح سات بجے دفتر کے اندر درجہ حرارت معلوم کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ حرارتی توانائی کو با آسانی منتقل کرتے جسم (مثلاً لوہا) کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح جسم اور اس کے گرد ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست تناسب ہوتا ہے۔ اس کو نیوٹن کا قانون ٹھنڈک⁴² کہا جاتا ہے۔

حل: پہلا قدم: نمونہ کشی

دفتر کے اندرونی حرارت کو T سے ظاہر کرتے ہیں جبکہ بیرونی حرارت کو T_b سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں نیوٹن کا قانون ٹھنڈک کی ریاضیاتی صورت درج ذیل ہوگی۔

$$(1.21) \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_b)$$

دوسرا قدم: عمومی حل کی تلاش

اگرچہ دفتر کی دیواریں اور چھت حرارتی توانائی با آسانی منتقل نہیں کرتی ہم اسی کلیے کا سہارا لیتے ہوئے مسئلہ حل کریں گے۔ یہاں بیرونی درجہ حرارت مستقل قیمت نہیں ہے لہذا درج بالا مساوات کو حل کرنا مشکل ہو گا۔ انجینئرنگ کے شعبے میں عموماً ایسی ہی مشکلات کا سامنا کرنا ہوتا ہے۔ ہمیں مسئلے کی سادہ صورت حل کرنا ہوگی۔ اگر ہم تصور کریں کہ T_b مستقل قیمت ہے تب درج بالا مساوات کے متغیرات علیحدہ کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ بیرونی درجہ حرارت 30°C تا 40°C رہا ہے لہذا ہم اس کی اوسط قیمت یعنی 35°C کو بیرونی درجہ حرارت تصور کرتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔ مساوات کے متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے مکمل لے کر اس کو حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dT}{T - 35} = k dt, \quad \ln|T - 35| = kt + c_1, \quad T - 35 = ce^{kt}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل کا حصول

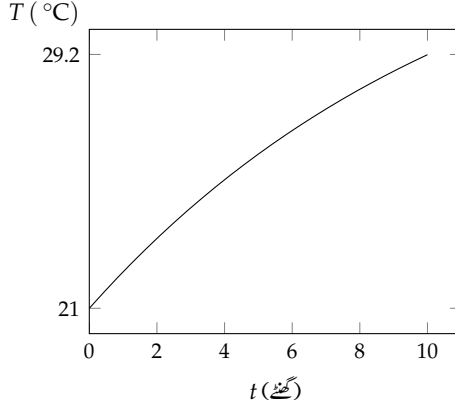
اگر شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا جائے اور وقت کو گھنٹوں میں ناپا جائے تب $T(0) = 21$ لکھا جائے گا جسے درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = -14$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مخصوص حل

$$T = 35 - 14e^{kt}$$

چوتھا قدم: مستقل k کا حصول

ہم جانتے ہیں کہ رات دو بجے اندرونی درجہ حرارت 26°C ہے۔ یاد رہے کہ شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا گیا لہذا رات دو بجے $t = 5$ ہو گا۔ یوں $T(5) = 26$ لکھا جائے گا۔ ان معلومات کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے k حاصل کرتے ہوئے مکمل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$26 = 35 - 14e^{5k}, \quad k = -0.088, \quad T = 35 - 14e^{-0.088t}$$



شکل 1.14: مثال 1.11: دفتر کا اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت۔

آخری قدم:

صبح سات بجے اندرونی درجہ حرارت کا تخمینہ لگاتے ہیں یعنی $t = 10$ پر درجہ حرارت درکار ہے۔

$$T = 35 - 14e^{-0.088(10)} = 29.2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

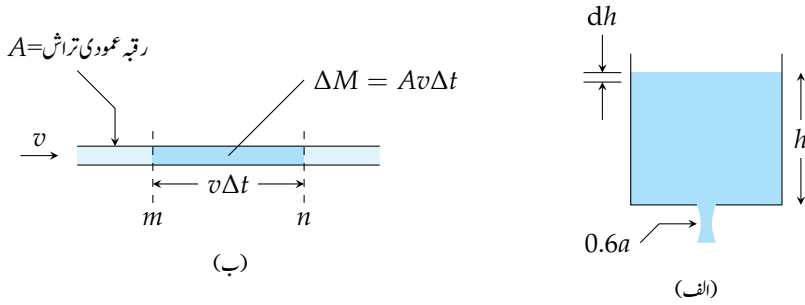
پوری رات میں اندرونی درجہ حرارت $8.2 \text{ } ^\circ\text{C}$ بڑھ گیا ہے۔ شکل 1.14 میں اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت دکھایا گیا ہے۔

□

مثال 1.12: پانی کا انخلا: پانی کی ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش $B = 2 \text{ m}^2$ ہے۔ ٹینکی کی تہہ میں $r = 0.5 \text{ cm}$ رداس کا گول سوراخ ہے جس سے پانی نکل رہا ہے۔ ٹینکی میں پانی کی ابتدائی گہرائی $h_1 = 1.5 \text{ m}$ ہے۔ ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہوگی۔

طبعی معلومات: پانی کی سطح پر m کمیت پانی کی مخفی توانائی mgh ہے جہاں $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع اور h پانی کی گہرائی ہے۔ سوراخ سے خارج ہوتے وقت یہ مخفی توانائی حرکی توانائی $\frac{mv^2}{2}$ میں تبدیل ہو جاتی ہے جہاں v رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔ مخفی توانائی اور حرکی توانائی کو برابر لکھتے ہوئے v کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad v = \sqrt{2gh}$$



شکل 1.15: مثال 1.12: پانی کا انخلا اور پانی کے دھار کا سکڑنا۔

شکل 1.15-الف میں پانی کی دھار دکھائی گئی ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں دھار سوراخ کے قریب سکڑتا ہے۔ اگر سوراخ کا رقبہ a ہو تب سکڑے ہوئے مقام پر دھار کا رقبہ عمودی تراش $0.6a$ ہوتا ہے۔ یوں سوراخ سے نکلا تمام پانی رقبہ $0.6a$ سے گزرتا ہے اور یہی وہ مقام ہے جہاں پانی کا ہر ذرہ ایک ہی سمت میں رفتار v سے حرکت کرتا ہے۔

شکل 1.15-ب میں ایک نالی دکھائی گئی ہے جس میں پانی کی رفتار v ہے۔ نالی کا رقبہ عمودی تراش A ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر مقام m پر موجود پانی کا ذرہ وقت Δt میں $v\Delta$ فاصلہ طے کرتے ہوئے مقام n تک پہنچ جائے گا۔ یوں Δt کے دوران مقام m سے گزرا ہوا پانی نالی کو m تا n بھرے گا۔ اس پانی کی مقدار $\Delta M = Av\Delta t$ ہو گی۔ اسی پلے کو استعمال کرتے ہوئے شکل 1.15-الف میں dt دورانیے میں کل $dM = 0.6av dt$ پانی خارج ہو گا۔ یوں پانی کی شرح انخلا درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{dM}{dt} = 0.6a\sqrt{2gh} \quad (1.22)$$

اس مساوات کو قانون ثاری سلی⁴³ کہتے ہیں۔

حل: دورانیہ dt میں پانی کی انخلا کے بنا ٹینگی میں پانی کی گہرائی dh کم ہو گی جو $B dh$ حجم کی کمی کو ظاہر کرتی ہے جہاں B ٹینگی کا رقبہ عمودی تراش ہے۔ چونکہ پانی کے انخلا سے ٹینگی میں پانی کم ہوتا ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو دیے گئے مسئلے کا تفریقی مساوات ہے۔

$$0.6a\sqrt{2gh} dt = -B dh \quad (1.23)$$

متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} dt, \quad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} t + c$$

ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر پانی کی گہرائی h_1 ہے۔ ان معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = 2h_1$ ملتا ہے لہذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل درج ذیل ہے۔

$$(1.24) \quad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} t + 2\sqrt{h_1}$$

خالی ٹینکی سے مراد $h = 0$ ہے۔ مخصوص حل میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے ٹینکی خالی کرنے کے لئے درکار وقت حاصل کرتے ہیں۔

$$2\sqrt{0} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B} t + 2\sqrt{h_1}, \quad t = \frac{2\sqrt{h_1}B}{0.6a\sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{1.5} \times 2}{0.6\pi 0.005^2 \sqrt{2 \times 9.8}} = 23482 \text{ s} \approx 6.52 \text{ h}$$

مساوات 1.24 کو شکل 1.16 میں دکھایا گیا ہے۔ یاد رہے کہ 23482 s میں ٹینکی خالی ہو جاتی ہے لہذا ترمیم کو اتنے وقت کے لئے ہی کھینچا گیا ہے۔

□

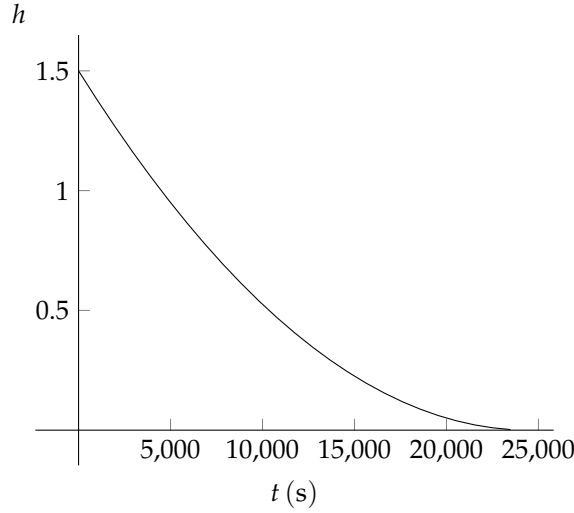
علیحدگی متغیرات کی جامع ترکیب

بعض اوقات نا قابل علیحدگی تفرقی مساوات کے متغیرات کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات کو قابل علیحدگی بنایا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب کو درج ذیل عملاً اہم قسم کی مساوات کے لئے سیکھتے ہیں جہاں $f(\frac{y}{x})$ قابل تفرق تفاعل ہے مثلاً $\cos \frac{y}{x}$ ، $e^{(y/x)}$ وغیرہ۔

$$(1.25) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

مساوات کی صورت دیکھتے ہوئے $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1.26) \quad y = ux, \quad y' = u + xu'$$



شکل 1.16: مثال 1.12: ٹینکی خالی ہونے کا عمل۔

جنہیں $y' = f(\frac{y}{x})$ میں پر کرتے ہوئے $u + xu' = f(u)$ یعنی $xu' = f(u) - u$ ملتا ہے۔ اگر $f(u) - u \neq 0$ ہو تب متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.27) \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

مثال 1.13: تفاعل $xy' - y = 2x$ کو حل کریں۔

حل: تفاعل کو $y' = \frac{y}{x} + 2$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہوئے مساوات 1.26 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u + xu' = u + 2, \quad du = 2\frac{dx}{x}, \quad u = 2\ln|x| + c$$

اس میں u کی جگہ واپس $\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے جواب حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y}{x} = 2\ln|x| + c, \quad y = 2x\ln|x| + cx$$

□

سوالات

سوال 1.41 تا سوال 1.49 کے عمومی حل حاصل کریں۔ حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 1.41: $y^2 y' + x^2 = 0$

جواب: $x^3 + y^3 = c$

سوال 1.42: $xy' + x = 0$

جواب: $x^2 + y^2 = c$

سوال 1.43: $y' = \sec^2 y$

جواب: $y = \tan x + c$

سوال 1.44: $y' \cos x = y \sin x$

جواب: $y = c \sec x$

سوال 1.45: $y' = ye^{x-1}$

جواب: $\ln|y| = e^{x-1} + c$

سوال 1.46: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y + x^2 \sin^2 \frac{y}{x}$ کو حل کریں۔

جواب: $\frac{\cos \frac{y}{x} - 1}{\cos \frac{y}{x} + 1} = ce^{2x}$

سوال 1.47: $y' = (2x + y)^2$ کو حل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر $u = 2x + y$ پر کرنا ہو گا۔

جواب: $y = -2x + \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x + c)$

سوال 1.48: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y^2 + y$ کو حل کریں۔

جواب: $y = -\frac{x}{x+c}$

سوال 1.49: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = x - y$ کو حل کریں۔

جواب: $xy - x^2 = c$

ابتدائی قیمت سوال 1.50 تا سوال 1.56 کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.50:

$$xy' + y = 0, \quad y(2) = 8$$

جواب: $y = \frac{16}{x}$

سوال 1.51:

$$y' = 1 + 9y^2, \quad y(1) = 0$$

جواب: $y = \frac{1}{3} \tan[3(x-1)]$

سوال 1.52:

$$y' \cos^2 x = \sin^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

جواب: $\tan y = \frac{1}{1-\tan x}$

سوال 1.53:

$$y' = -4xy, \quad y(0) = 5$$

جواب: $y = 5e^{-2x^2}$

سوال 1.54:

$$y' = -\frac{2x}{y}, \quad y(1) = 2$$

جواب: $2x^2 + y^2 = 6$

سوال 1.55:

$$y' = (x + y - 4)^2, \quad y(0) = 5$$

جواب: $x + y - 4 = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

سوال 1.56:

$$xy' = y + 3x^4 \cos^2 \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0$$

جواب: اس میں $u = \frac{y}{x}$ پر کرنے سے $\tan \frac{y}{x} = x^3 - 1$ ملتا ہے۔

سوال 1.57: کسی بھی لمحے پر جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح، اس لمحے موجود جرثوموں کی تعداد کے راست تناسب ہے۔ اگر ان کی تعداد دو گھنٹوں میں دگنی ہو جائے تب چار گھنٹوں بعد ان کی تعداد کتنی ہوگی؟ چوبیس گھنٹوں بعد کتنی ہوگی؟

جوابات: $y = y_0 e^{0.34657t}$ ، $4y_0$ ، $4095y_0$

سوال 1.58: جرثوموں کی شرح پیدائش موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ ان کی شرح اموات بھی موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح کیا ہوگی؟ تعداد بالمقابل وقت کیا ہوگا؟ تعداد کہاں متوازن صورت اختیار کرے گی؟

جوابات: $\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y$ جہاں α اور β بالترتیب پیدائشی اور امواتی راست تناسب کے مستقل ہیں۔ تعداد بالمقابل وقت کی مساوات $y = y_0 e^{(\alpha - \beta)t}$ ہے۔ اگر $\alpha > \beta$ ہو تب تعداد بڑھتی رہے گی۔ اس کے برعکس اگر $\alpha < \beta$ ہو تب تعداد گھٹتی رہے گی حتیٰ کہ جراثیم فنا ہو جائیں اور $\alpha = \beta$ کی صورت میں تعداد وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوگی۔

سوال 1.59: عموماً جاندار مرنے کے بعد مکمل طور پر خاک میں مل جاتے ہیں اور ان کا نشان تک نہیں رہتا البتہ بعض اوقات حالات یوں ہوتے ہیں کہ ان کا جسم پتھر میں بدل جاتا ہے۔ اس پتھریلی جسم میں موجود $^{14}_6\text{C}$ اور $^{12}_6\text{C}$ ہم جا کے تناسب سے اس کی عمر کا تخمینہ لگایا جاسکتا ہے۔ دو ہزار سال پرانی پتھریلی مچھلی میں کاربن کا تناسب، ابتدائی تناسب کے کتنا گنا ہو گا؟

جواب: 69.5 %

سوال 1.60: طبیعیات میں باربودار ^{44}Zr ذروں کو مسرع خطی ^{45}Zr کے ذریعہ اسراع دی جاتی ہے۔ تصور کریں کہ مسرع خطی میں $^{44}\text{He}^{2+}$ داخل ہوتا ہے جس کی رفتار مستقل اسراع کے ساتھ 1.2 ms دورانیے میں 10^3 ms^{-1} سے بڑھا کر $1.6 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}$ کر دی جاتی ہے۔ اسراع دریافت کریں۔ اس دورانیے میں ذرہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

جوابت: $1.25 \times 10^7 \text{ ms}^{-2}$ ، 10.2 m

سوال 1.61: ایک ٹینکی میں 2000 لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں 150 kg نمک ملایا گیا ہے۔ پانی کو مسلسل ہلانے سے کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ ٹینکی میں 10 لٹر فی منٹ تازہ پانی شامل کیا جاتا ہے۔ ٹینکی سے پانی کا اخراج بھی 10 لٹر فی منٹ ہے۔ ایک گھنٹہ بعد ٹینکی میں کل کتنا نمک پایا جائے گا؟

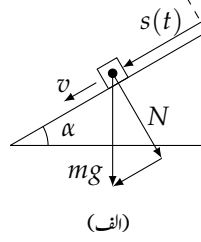
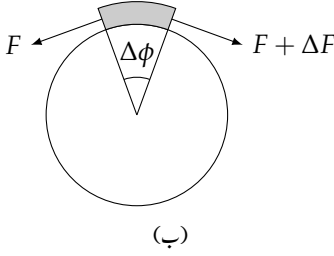
جوابت: $y = 111 \text{ kg}$ ، $y = 150e^{-\frac{t}{200}}$

سوال 1.62: مریض کے زبان کے نیچے تھرمامیٹر رکھ کر اس کا درجہ حرارت ناپا جاتا ہے۔ کمرے اور مریض کے درجہ حرارت بالترتیب 25°C اور 40°C ہیں۔ زبان کے نیچے رکھنے کے ایک منٹ بعد تھرمامیٹر کا پڑا 35°C تک پہنچتا ہے۔ تھرمامیٹر کتنی دیر میں اصل درجہ حرارت کے قریب (مثلاً 39.9°C) پہنچ پائے گا؟

جواب: $T = 40 - 15e^{-1.204t}$ ، $t = 4.16 \text{ min}$

سوال 1.63: سرطان⁴⁶ کی مہلک بیماری میرے خاندان کے کئی افراد کی جان لے چکی ہے۔ سن 1960 میں اینا کین لایرڈ⁴⁷ سرطان کی رسولی کی افزائش کو ٹھیک طرح گامپیرٹز تفاعل⁴⁸ سے ظاہر کرنے میں کامیاب ہوئے۔

⁴⁴charged
⁴⁵linear accelerator
⁴⁶cancer
⁴⁷Anna Kane Laird
⁴⁸Benjamin Gompertz



شکل 1.17: سوال 1.65 اور سوال 1.66 کے اشکال۔

سرطانی رسولی میں جسم کا نظام تباہ ہو جاتا ہے۔ یوں رسولی میں موجود خلیوں تک آکسیجن اور خوراک کا پہنچنا ممکن نہیں رہتا۔ رسولی کے اندرونی خلیے آکسیجن اور خوراک کی کمی کی بنا مر جاتے ہیں۔ ان حقائق کی نمونہ کشی درج ذیل گامپرٹز تفرقی مساوات کرتی ہے جہاں y رسولی کی کمیت ہے۔

$$(1.28) \quad y' = -Ay \ln y, \quad A > 0$$

جواب: $\ln y = ce^{-At}$

سوال 1.64: دھوپ میں کپڑے کی نمی خشک ہونی کی شرح کپڑے میں موجود نمی کے راست تناسب ہوتی ہے۔ اگر پہلے پندرہ منٹ میں نصف پانی خشک ہو جائے تب % 99.9 پانی کتنی دیر میں خشک ہو گا؟ ہم % 99.9 خشک کو مکمل خشک تصور کر سکتے ہیں۔

جواب: $y = y_0 e^{-0.0462t}$ ، 49.8 min

سوال 1.65: رگڑ دو سطحوں کو آپس میں رگڑنے سے قوت رگڑ پیدا ہوتی ہے جو اس حرکت کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ خشک سطحوں پر پیدا قوت $|F| = \mu|N|$ سے حاصل کی جاسکتی ہے جہاں N دونوں سطحوں پر عمودی قوت، μ حرکی رگڑ کا مستقل⁴⁹ اور F رگڑ سے پیدا قوت ہے۔

شکل 1.17-الف میں α زاویہ کی سطح پر m کمیت کا جسم دکھایا گیا ہے۔ اس پر ثقلی قوت (وزن) mg عمل کرتا ہے۔ اس قوت کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ پہلا حصہ N ہے جو سطح کے عمودی ہے۔ دوسرا حصہ

⁴⁹coefficient of kinetic friction

سطح کے متوازی ہے جو جسم کو اسراع دیتا ہے۔ کمیت 10 kg ، ثقلی اسراع $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ، رگڑ کا مستقل $\mu = 0.25$ اور زاویہ $\alpha = 30^\circ$ ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔ یہ جسم کتنی دیر میں کل 15 m فاصلہ طے کرے گا؟

جواب: $mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = m \frac{dv}{dt}$ ، $v = 3.93t \text{ ms}^{-1}$ ، 2.76 s

سوال 1.66: شکل 1.17-ب میں گول جسم کے گرد لپیٹی گئی رسی کا چھوٹا حصہ دکھایا گیا ہے۔ تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ رسی کے چھوٹے حصے کے سروں پر قوت میں فرق زاویہ $\Delta \phi$ اور قوت F کے راست تناسب ہوتا ہے۔ رسی کو جسم کے گرد کتنی مرتبہ لپیٹنے سے ایک شخص 500 گنا زیادہ قوت کے گاڑی کو روک سکتا ہے؟

جوابات: $F = F_0 e^{\phi}$ ، $\phi = 6.21 \text{ rad}$ یعنی 1.98 مرتبہ لپیٹنا ضروری ہے۔

سوال 1.67: کارتیسی محدود کے محور پر گول دائرے $x^2 + y^2 = r^2$ کا تفرقی مساوات y'_1 حاصل کریں۔ اسی طرح محور سے گزرتے ہوئے سیدھے خط کا تفرقی مساوات y'_2 حاصل کریں۔ دونوں تفرقی مساوات کا حاصل ضرب کیا ہو گا؟ اس حاصل ضرب سے آپ کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

جواب: $y'_1 y'_2 = -1$ ؛ آپس میں عمودی ہیں۔

سوال 1.68: آپ کو ایسے تقابل سے ضرور واسطہ پڑیگا جس کا تحلیلی عمل حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ ایسا ایک تقابل e^{x^2} ہے۔ اس تقابل کی مکلاون تسلسل 50 کے پہلے چار ارکان کا مکمل حاصل کریں۔

جواب: $\int e^{x^2} \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{36} + \dots$

سوال 1.69: قانون ٹاری سلی کروئی ٹینکی کا رداس R ہے۔ اس کی تہہ میں چھوٹا سوراخ ہے جس کا رداس r ہے۔ پوری طرح بھری ہوئی ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہوگی۔ اگر $R = 1 \text{ m}$ اور $r = 1 \text{ cm}$ ہو تب ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہوگی؟

جواب: $0.6\pi r^2 \sqrt{2gh} dt = -\pi[R^2 + (h - R)^2] dh$ ،
 $t = \frac{44R^2 \sqrt{gR}}{9gr^2}$ ، $t + c = -\frac{\sqrt{2gh}}{9gr^2} (30R^2 - 10hR + 3h^2)$
 دیے رداس کی ٹینکی 4.34 h یعنی چار گھنٹے اور بیس منٹ میں خالی ہوگی۔

1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل

ایسا تفاعل $u(x, y)$ جس کے استمراری⁵¹ (یعنی بلا جوڑ) جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کا (مکمل) تفرق درج ذیل ہے۔

$$(1.29) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

یوں اگر $u(x, y) = c$ ہو تب $du = 0$ ہو گا۔

مثال کے طور پر $u = xy + 2(x - y) = 7$ کا تفرق

$$du = (y + 2) dx + (x - 2) dy = 0$$

ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2}{x - 2}$$

الٹ چلتے ہوئے اس تفرقی مساوات کو ہم حل کر سکتے ہیں۔ اس مثال سے ایک ترکیب جنم دیتی ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ یعنی

$$(1.30) \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

کو اس صورت قطعی تفرقی مساوات⁵² کہتے ہیں جب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو جہاں $u(x, y)$ کوئی تفاعل ہے۔

$$(1.31) \quad \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

یوں مساوات 1.30 کو

$$(1.32) \quad du = 0$$

⁵¹continuous partial differential
⁵²exact differential equation

لکھ کر تکمیل لیتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی خفی حل⁵³

$$(1.33) \quad u(x, y) = c$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.30 اور مساوات 1.31 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 1.30 تب قطعی تفرقی مساوات ہو گا جب ایسا $u(x, y)$ پایا جاتا ہو کہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو۔

$$(1.34) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M$$

$$(1.35) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

ان سے ہم تفرقی مساوات کے قطعی ہونے کا شرط اخذ کرتے ہیں۔

سطح xy پر ایسا خطہ جس کا سرحد بند منحنی ہو اور یہ منحنی اپنے آپ کو نہ کاٹتا ہو پر تصور کریں کہ M اور N ایسے استمراری⁵⁴ (یعنی بلا جواز) تفاعل ہیں جن کے درجہ اول تفرق بھی اس خطے پر بے جوڑ ہیں۔ تب مساوات 1.34 کے تفرق درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

استمراری شرط کی بنا $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ برابر ہیں لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.36) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{شرط قطعیت}$$

مساوات 1.30 کا قطعی تفرقی مساوات ہونے کے لئے مساوات 1.36 پر پورا اتنا لازمی⁵⁵ اور معقول⁵⁶ شرط⁵⁷ ہے۔

⁵³ implicit solution

⁵⁴ continuous

⁵⁵ necessary condition

⁵⁶ sufficient condition

⁵⁷ اس حقیقت کو حصہ 11.12 میں ثابت کیا جائے گا۔

قطعی تفرقی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 1.34 کا x مکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1.37) \quad u = \int M dx + k(y)$$

جہاں مکمل کا مستقل از خود y کا تفاعل ہو سکتا ہے۔ مکمل کا مستقل $k(y)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.37 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial y}$ لیتے ہوئے مساوات 1.35 کی مدد سے $\frac{dk}{dy}$ حاصل کرتے ہیں جس کا y مکمل لینے سے k حاصل ہو گا۔ (مثال 1.14 دیکھیں۔)

اسی طرح مساوات 1.35 کا y مکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1.38) \quad u = \int N dy + m(x)$$

جہاں مکمل کا مستقل از خود x کا تفاعل ہو سکتا ہے۔ مکمل کا مستقل $m(x)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.38 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial x}$ لیتے ہوئے مساوات 1.34 کی مدد سے $\frac{dm}{dx}$ حاصل کرتے ہیں جس کا x مکمل لینے سے m حاصل ہو گا۔

مثال 1.14: قطعی تفرقی مساوات
درج ذیل کو حل کریں۔

$$(1.39) \quad (1 + 2xy^3) dx + (2y + 3x^2y^2) dy = 0$$

حل: پہلے ثابت کرتے ہیں کہ یہ مساوات قطعی ہے۔ یہ مساوات 1.30 کی طرح ہے جہاں

$$M = 1 + 2xy^3$$

$$N = 2y + 3x^2y^2$$

ہیں۔ $\frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\frac{\partial N}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

جو مساوات 1.36 پر پورا اترتے ہیں لہذا دی گئی مساوات قطعی تفرقی مساوات ہے۔ آئیں اب اس کو حل کرتے ہیں۔

مساوات 1.37 کو استعمال کرتے ہیں۔

$$(1.40) \quad u = \int (1 + 2xy^3) dx + k(y) = x + x^2y^3 + k(y)$$

اس کا y جزوی تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.35 کا استعمال کرتے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{dk}{dy} = N = 2y + 3x^2y^2$$

ہوئے $\frac{dk}{dy}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dk}{dy} = 2y$$

اس کا y تکمیل لیتے ہوئے k حاصل کرتے ہیں

$$(1.41) \quad k = \int 2y dy = y^2 + c_1$$

جہاں c_1 تکمیل کا مستقل ہے۔ چونکہ k صرف y پر منحصر ہے لہذا c_1 مستقل x پر منحصر نہیں ہو سکتا۔ یوں مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 سے قطعی تفرقی مساوات کا حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.42) \quad u(x, y) = x + x^2y^3 + y^2 + c_1 = 0$$

آخر میں مساوات 1.42 کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.39 حاصل کر کے حاصل حل کی درستگی ثابت کرتے ہیں۔

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (1 + 2xy^3) dx + (3x^2y^2 + 2y) dy$$

□

مثال 1.15: مخصوص حل

لیتے ہوئے مساوات 1.39 کو حل کریں جہاں $x = 1$ پر $y = 2$ ہے۔

حل: $\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2y + 3x^2y^2$ کا y تکمیل

$$(1.43) \quad u = \int (2y + 3x^2y^2) dy + m(x) = y^2 + x^2y^3 + m(x)$$

لے کر اس سے $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 + \frac{dm}{dx}$$

جو M کے برابر ہوگا

$$2xy^3 + \frac{dm}{dx} = M = 1 + 2xy^3$$

جس سے

$$\frac{dm}{dx} = 1, \quad m = x + c_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 1.43 میں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا حل ملتا ہے۔

$$u = y^2 + x^2y^3 + x + c_2 = 0$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$2^2 + (1^2)(2^3) + 1 + c_2 = 0, \quad c = -13$$

ملتا ہے جس سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y^2 + x^2y^3 + x - 13 = 0$$

□

مثال 1.16: غیر قطعی مساوات

مساوات $-y dx + x dy = 0$ میں $M = -y$ اور $N = x$ ہیں لہذا $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$ لیکن $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ ہے۔ یوں دیا گیا مساوات غیر قطعی⁵⁸ ہے۔ یوں قطعی مساوات کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے۔ آئیں قطعی مساوات کی ترکیب استعمال کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 1.37 سے

$$u = \int -y dx + k(y) = -xy + k(y)$$

ملتا ہے جس کا y تفرق $\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \frac{dk}{dy}$ ہے جسے N یعنی x کے برابر پر کرنے سے $\frac{dk}{dy} = 2x$ ملتا ہے جس کا مکمل $k = 2xy + c$ ہے۔ اب مستقل k صرف y پر منحصر ہو سکتا ہے جبکہ حاصل k اس شرط

پر پورا نہیں اترتا لہذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں قطعی تفرقی مساوات کی ترکیب اس مثال میں دیے تفرقی مساوات کے حل کے لئے ناقابل استعمال ہے۔ آپ N سے شروع کرتے ہوئے حل کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ آپ اس راستے سے بھی حل حاصل نہیں کر پائیں گے۔ □

تخفیف بذریعہ جزو مکمل

مثال 1.16 میں تفاعل $-y dx + x dy = 0$ غیر قطعی تھا البتہ اس کو $\frac{1}{x^2}$ سے ضرب دینے سے $-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy = 0$ حاصل ہوتا ہے جو قطعی مساوات ہے۔ آپ مساوات 1.36 استعمال کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ واقعی قطعی مساوات ہے۔ حاصل قطعی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.44) \quad -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c$$

اس ترکیب کو عمومی بناتے ہوئے ہم کہتے ہیں کہ غیر قطعی مساوات مثلاً

$$(1.45) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

کو ایک مخصوص تفاعل F سے ضرب دینے سے قطعی مساوات

$$(1.46) \quad FP dx + FQ dy = 0$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔ تفاعل F جزو تکمل⁵⁹ کہلاتا ہے اور یہ عموماً x اور y پر منحصر ہو گا۔ حاصل قطعی مساوات کو حل کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

مثال 1.17: جزو مکمل

مساوات 1.44 میں جزو مکمل $\frac{1}{x^2}$ تھا لہذا اس کا حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$FP dx + FQ dy = \frac{-y dx + x dy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c$$

مساوات $-y dx + x dy = 0$ کے مزید جزو تکمیل $\frac{1}{y^2}$ ، $\frac{1}{xy}$ اور $\frac{1}{x^2+y^2}$ ہیں جن سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{-y dx + x dy}{y^2} &= d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad \frac{x}{y} = c \\ \frac{-y dx + x dy}{xy} &= -d\left(\ln \frac{x}{y}\right), \quad \ln \frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = x \\ \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} &= d\left(\tan^{-1} \frac{x}{y}\right), \quad \tan^{-1} \frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = c\end{aligned}$$

□

جزو تکمیل کا حصول

مساوات $M dx + N dy = 0$ کی قطعیت کا شرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ مساوات 1.36 ہے۔ مساوات $FQ dy = 0$ کے لئے اس شرط کو درج ذیل لکھا جائے گا

$$(1.47) \quad \frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ)$$

جس کو زنجیری طریقہ تفرق سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں زیر نوشت تفرق کو ظاہر کرتی ہے (یعنی $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$)۔

$$(1.48) \quad F_y P + FP_y = F_x Q + FQ_x$$

یہ مساوات عموماً پیچیدہ ہو گا لہذا ہم اس پر مزید وقت ضائع نہیں کرتے۔ ہم ایسے جزو تکمیل تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو صرف x یا صرف y پر منحصر ہو۔ صرف x پر منحصر جزو تکمیل کی صورت میں $F = F(x)$ لکھا جائے گا اور $F_y = 0$ ہو گا جبکہ $F_x = F' = \frac{dF}{dx}$ ہو گا۔ یوں مساوات 1.47 درج ذیل صورت اختیار کر لیا

$$(1.49) \quad FP_y = F'Q + FQ_x$$

جسے FQ سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(1.50) \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right]$$

اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 1.1: اگر مساوات 1.45 سے مساوات 1.50 میں حاصل کردہ R صرف x پر منحصر ہو تب مساوات 1.45 کا جزو مکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.50 کا مکمل لے کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(1.51) \quad F(x) = e^{\int R(x) dx}$$

اسی طرح $F = F(y)$ کی صورت میں مساوات 1.50 کی جگہ درج ذیل ملتا ہے

$$(1.52) \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{P} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]$$

جس سے درج بالا مسئلے کی جوڑی ملتی ہے۔

مسئلہ 1.2: اگر مساوات 1.45 سے مساوات 1.52 میں حاصل کردہ R صرف y پر منحصر ہو تب مساوات 1.45 کا جزو مکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.52 کا مکمل لے کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(1.53) \quad F(y) = e^{\int R(y) dy}$$

مثال 1.18: جزو مکمل

دیے مساوات کا جزو مکمل حاصل کرتے ہوئے اس کا عمومی حل حاصل کریں۔ ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ سے مخصوص حل حاصل کریں۔

$$(1.54) \quad (e^{x+y} + ye^y) dx + (xe^y - 1) dy = 0$$

حل: پہلا قدم: غیر قطعیت ثابت کرتے ہیں۔ مساوات 1.36 پر درج ذیل پورا نہیں اترتا لہذا غیر قطعیت ثابت ہوتی ہے۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^y + ye^y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

دوسرا قدم: جزو مکمل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 1.50 سے حاصل R کی قیمت x اور y دونوں پر منحصر ہے

$$R = \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right] = \frac{1}{xe^y - 1} (e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y)$$

لہذا مسئلہ 1.1 قابل استعمال نہیں ہے۔ آئیں مسئلہ 1.2 استعمال کر کے دیکھیں۔ R کو مساوات 1.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{P} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] = \frac{1}{e^{x+y} + ye^y} (e^y - e^{x+y} - e^{-y} - ye^y) = -1$$

مساوات 1.53 سے جزو مکمل $F(y) = e^{-y}$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.54 کو F سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل قطعی مساوات ملتی ہے۔ اس کو قطعیت کے لئے پرکھ کر دیکھیں۔ آپ کو شرط قطعیت کے دونوں اطراف اکائی حاصل ہو گا۔

$$(e^x + y) dx + (x - e^{-y}) dy = 0$$

مساوات 1.37 استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں۔

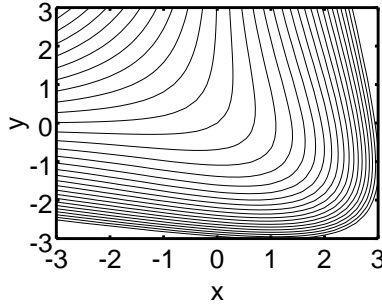
$$u = \int (e^x + y) dx + k(y) = e^x + xy + k(y)$$

اس کا y تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.35 کے استعمال سے $\frac{dk}{dy}$ حاصل کرتے ہیں جس کا مکمل k ہو گا۔

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{dk}{dy} = x - e^{-y}, \quad \frac{dk}{dy} = N = -e^{-y}, \quad k = e^{-y} + c_1$$

یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$$(1.55) \quad u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = c$$



شکل 1.18: مثال 1.18

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے مستقل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$e^0 + (0)(-2) + e^{-(-2)} = c, \quad c = e^2$$

یوں مخصوص حل $e^x + xy + e^{-y} = e^2 = 7.389$ ہے۔

چھوٹا قدم: عمومی حل اور مخصوص حل کو واپس دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔
□

سوالات

سوال 1.70 تا سوال 1.81 کو قطعیت کے لئے پرکھیں اور حل کریں۔ غیر قطعی صورت میں دیا گیا جزو مکمل استعمال کریں یا اس کو بھی حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہو، وہاں مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.70:

$$2xy \, dx + x^2 \, dy = 0$$

جواب: $y = \frac{c}{x^2}$

سوال 1.71:

$$x^2 \, dx + y \, dy = 0$$

جواب: $2x^3 + 3y^2 = c$

سوال 1.72:

$$[\sin x + (x + y^3) \cos x] \, dx + 3y^2 \sin x \, dy = 0$$

جواب: $\sin x(x + y^3)$

سوال 1.73:

$$(y + 1) \, dx + (x + 1) \, dy = 0$$

جواب: $x + xy + y = c$

سوال 1.74:

$$(e^y + ye^x + y) \, dx + (xe^y + e^x + x) \, dy = 0$$

جواب: $xe^y + xy + ye^x$

سوال 1.75:

$$\frac{y^2 + 4x}{x} \, dx + 2y \, dy = 0$$

جواب: $u = (2x + y^2)x = c$ ، $F = x$

سوال 1.76:

$$ye^x(2x + 1 + 2y^2) dx + e^x(x + 2y) dy = 0$$

جواب: $F = e^x$ ، $ye^{2x}(x + y) = c$

سوال 1.77:

$$(2y^2 + 2xy + y) dx + (2y + x) dy = 0$$

جواب: $F = e^{2x}$ ، $e^{2x}(y^2 + xy) = c$

سوال 1.78:

$$y dx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0, \quad y(1) = 1$$

جواب: $F = \frac{e^{2y}}{y}$ ، $xe^{2y} - \ln y = e^2$

سوال 1.79:

$$3(y + 1) dx = 2x dy, \quad y(1) = 3, \quad F = \frac{y + 1}{x^4}$$

جواب: $y + 1 = 4x^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.80:

$$y dx + [y + \tan(x + y)] dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad F = \cos(x + y)$$

جواب: $y \sin(x + y) = \frac{\pi}{2}$

سوال 1.81:

$$(a + 1)y dx + (b + 1)x dy = 0, \quad y(1) = 1, \quad F = x^a y^b$$

$$\text{جواب: } x^{a+1}y^{b+1} = 0$$

سوال 1.82: جزو مکمل کو مزید بہتر سمجھنے کی خاطر کسی بھی تفاعل مثلاً $u = e^{2x}(y^2 + xy) = c$ کے مکمل تفرق کو $Mdx + Ndy = 0$ صورت میں لکھیں یعنی $e^{2x}(2y^2 + 2xy + y)dx + e^{2x}(2y + x)dy = 0$ جو قطعی مساوات ہے۔ تفرقی مساوات کو e^{2x} سے تقسیم کرنے سے غیر قطعی مساوات $(2y^2 + 2xy + y)dx + (2y + x)dy = 0$ ملتا ہے۔ اس غیر قطعی مساوات کو e^{2x} سے ضرب دیتے ہوئے قطعی بنایا جاسکتا ہے لہذا e^{2x} اس غیر قطعی مساوات کا جزو مکمل ہے۔

1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی

ایسے سادہ درجہ اول تفرقی مساوات جنہیں درج ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہو خطی⁶⁰ کہلاتے ہیں

$$(1.56) \quad y' + p(x)y = r(x)$$

جبکہ ایسے مساوات جنہیں الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر خطی کہلاتے ہیں۔

خطی مساوات 1.56 کی بنیادی خاصیت یہ ہے کہ اس میں تابع متغیر y اور تابع متغیرہ کا تفرق y' دونوں خطی ہیں جبکہ $p(x)$ اور $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ اگر غیر تابع متغیرہ وقت ہو تب x کی جگہ t لکھا جاتا ہے۔

مساوات 1.56 خطی مساوات کی معیاری صورت ہے جس کے پہلے رکن y' کا جزو ضربی اکائی ہے۔ ایسی مساوات جس میں y' کی بجائے $y'f(x)$ پایا جاتا ہو کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے، اس کی معیاری صورت حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں خطی مساوات $(x + \sqrt{x})y' + y \sec x = e^x$ کو $(x + \sqrt{x})$ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے معیاری صورت $y' + \frac{\sec x}{x + \sqrt{x}}y = \frac{e^x}{x + \sqrt{x}}$ میں لکھا جاسکتا ہے۔

دائیں ہاتھ $r(x)$ قوت⁶¹ کو ظاہر کر سکتی ہے جبکہ مساوات کا حل $y(x)$ ہٹاؤ⁶² ہو سکتا ہے۔ اسی طرح $r(x)$ برقی دباؤ⁶³ ہو سکتا ہے جبکہ $y(x)$ برقی دو⁶⁴ ہو سکتی ہے۔ انجینئری میں $r(x)$ کو عموماً درآمدہ⁶⁵ یا جبری تفاعل⁶⁶ کہتے ہیں جبکہ $y(x)$ کو ماحصل⁶⁷ یا رد عمل⁶⁸ کہتے ہیں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم مساوات 1.56 کو خطہ $a < x < b$ میں حل کرنا چاہتے ہیں۔ اس خطے کو J کہا جائے گا۔ پہلے اس مساوات کی سادہ صورت حل کرتے ہیں جس میں J پر تمام x کے لئے $r(x)$ صفر کے برابر ہو۔ (اس کو بعض اوقات $r(x) \equiv 0$ لکھا جاتا ہے۔) ایسی صورت میں مساوات 1.56 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$(1.57) \quad y' + p(x)y = 0$$

جس کو متجانس⁶⁹ مساوات کہتے ہیں۔ متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx, \quad \ln|y| = -\int p(x) dx + c_1$$

دونوں اطراف کا قوت نمائی لیتے ہوئے متجانس خطی مساوات 1.57 کا حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.58) \quad y(x) = ce^{-\int p(x) dx}, \quad (c = \mp e^{c_1} \text{ جب } y \leq 0)$$

یہاں $c = 0$ بھی چننا جا سکتا ہے جو غیر اہم حل⁷⁰ (یعنی صفر حل) $y(x) = 0$ دیتا ہے۔

force⁶¹
displacement⁶²
voltage⁶³
current⁶⁴
input⁶⁵
forcing function⁶⁶
output⁶⁷
response⁶⁸
homogeneous⁶⁹
trivial solution⁷⁰

غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب مساوات 1.56 کو اس صورت میں حل کرتے ہیں جب $r(x) \neq 0$ ہو یعنی J پر کہیں کہیں یا پورے خطے پر $r(x)$ غیر صفر ہو۔ ایسی صورت میں مساوات 1.56 غیر متجانس⁷¹ کہلاتا ہے۔ غیر متجانس مساوات کی خوشگوار خاصیت یہ ہے کہ اس کا جزو مکمل $F(x)$ صرف x پر منحصر ہوتا ہے لہذا اس کو مسئلہ 1.1 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ جزو مکمل کو حاصل کرتے ہیں۔ غیر قطعی مساوات 1.56 کو ترتیب دے کر F سے ضرب دیتے ہوئے قطعی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$(py - r) dx + dy = 0, \quad F(py - r) dx + F dy = 0$$

جس سے مساوات 1.36 کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(py - r)] = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{یعنی} \quad Fp = \frac{\partial F}{\partial x}$$

متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے مکمل لیتے ہوئے F حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dF}{F} = p dx, \quad \ln|F| = h(x) = \int p(x) dx \quad \text{لہذا} \quad F = e^h$$

مساوات 1.56 کو جزو مکمل F سے ضرب دیتے اور $\frac{dh}{dx} = p$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$e^h y' + e^h h' y = e^h r \quad \text{یعنی} \quad (e^h y)' = e^h r$$

جس کا مکمل لیتے ہیں۔

$$e^h y = \int e^h r dx + c$$

دونوں اطراف کو e^h سے تقسیم کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات 1.56 کا حل ملتا ہے۔

$$(1.59) \quad y = e^{-h} \left(\int e^h r dx + c \right), \quad h = \int p(x) dx$$

یوں مساوات 1.56 کا حل درج بالا مکمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو نسبتاً آسان ثابت ہوتا ہے۔ اگر درج بالا مکمل بھی مشکل ثابت ہو تب تفرقی مساوات کا حل اعدادی ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہاں بتلاتا چلوں (سوال 1.83 دیکھیں) کہ h کے حصول میں مکمل کا مستقل کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہذا اسے صفر تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.59 کا مکمل درآیدہ $r(x)$ پر منحصر ہے جبکہ ابتدائی معلومات مکمل کا مستقل c تعین کرتی ہیں۔ اس مساوات کو درج ذیل لکھتے ہوئے

$$(1.60) \quad y = e^{-h} \int e^h r \, dx + ce^{-h}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(1.61) \quad \text{ابتدائی معلومات سے پیدا رد عمل} + \text{درآیدہ سے پیدا رد عمل} = \text{کل ماحصل}$$

مثال 1.19: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' + y \cot x = 2x \operatorname{cosec} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حل: یہاں $p = \cot x$ اور $r = \operatorname{cosec} x$ ہیں۔

$$h(x) = \int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

یوں مساوات 1.59 میں

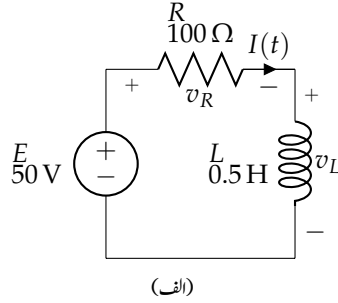
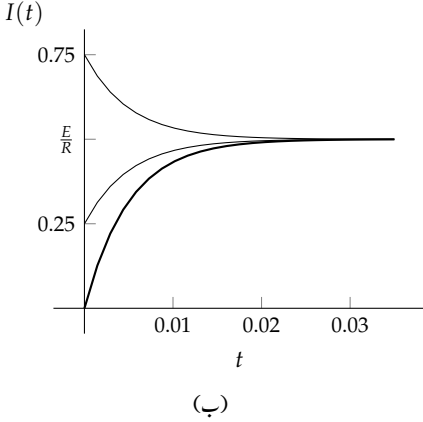
$$e^h = \sin x, \quad e^{-h} = \operatorname{cosec} x, \quad e^h r = (\sin x)(2x \operatorname{cosec} x) = 2x$$

ہیں لہذا عمومی حل

$$y = \operatorname{cosec} x \left(\int 2x \, dx + c \right) = \operatorname{cosec} x (x^2 + c)$$

ہو گا۔ ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = -\frac{\pi^2}{4}$ ملتا ہے لہذا مخصوص حل درج ذیل ہے

$$y = \operatorname{cosec} x \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right)$$



شکل 1.19: مثال 1.20 کا سلسلہ وار برقی دور۔

جس میں $x^2 \operatorname{cosec} x$ درآئیدہ کا پیدا کردہ رد عمل ہے جبکہ $-\frac{\pi^2}{4} \operatorname{cosec} x$ ابتدائی معلومات کا پیدا کردہ رد عمل ہے۔
□

مثال 1.20: برقی دور
شکل 1.19 میں مزاحمت R ⁷² اور امالہ L ⁷³ سلسلہ وار جڑے ہیں۔ اس دور کو سلسلہ وار RL ⁷⁴ دور کہتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر برقی دباؤ E ⁷⁵ برقی دور پر لاگو کیا جاتا ہے جو دور میں برقی دو $I(t)$ ⁷⁶ کو جنم دیتا ہے۔ ابتدائی رو صفر $I(0) = 0$ کے برابر ہے۔

طبعی معلومات: مزاحمت کی اکائی اوہم Ω ⁷⁷ اور امالہ کی اکائی ہینری H ⁷⁸ ہے۔ قانون اوہم⁷⁹ کے تحت مزاحمت R میں رو I اور دباؤ v_R کا تعلق $v_R = IR$ ہے۔ اسی طرح امالہ میں رو اور دباؤ v_L کا تعلق $v_L = L \frac{dI}{dt}$ ہے۔ کرخوف قانون دباؤ⁸⁰ کے تحت ان برقی دباؤ کا مجموعہ درآئیدہ دباؤ E کے برابر ہو گا۔

resistance⁷²
inductor⁷³
series circuit⁷⁴
electric voltage⁷⁵
electric current⁷⁶
Ohm⁷⁷
Henry⁷⁸
Ohm's law⁷⁹
Kirchoff's voltage law⁸⁰

حل: یہاں غیر تابع متغیرہ وقت t ہے جبکہ تابع متغیرہ $I(t)$ ہے۔ کرخوف کے قانون کے تحت

$$v_L + v_R = E, \quad LI' + RI = E, \quad I' + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

لکھا جائے گا جہاں آخری قدم پر L سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے۔ اس کو مساوات 1.59 کی مدد سے حل کرتے ہیں جہاں x کی جگہ t اور y کی جگہ I استعمال ہو گا۔ یہاں $p = \frac{R}{L}$ اور $r = \frac{E}{L}$ ہیں لہذا $h = \frac{R}{L}t$ ہو گا اور عمومی حل

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\int e^{\frac{R}{L}t} \frac{E}{L} dx + c \right)$$

لکھا جائے گا۔ مکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(1.62) \quad I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} + c \right) = \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}$$

شکل 1.19- الف میں پرزوں کی قیمتیں دی گئی ہیں جن سے $\frac{E}{R} = \frac{50}{100} = 0.5$ اور $\frac{R}{L} = \frac{100}{0.5} = 200$ ملتا ہے لہذا عمومی حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.63) \quad I = 0.5 + ce^{-200t}$$

مساوات 1.62 میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات میں $ce^{-\frac{R}{L}t}$ جزو $t \rightarrow \infty$ پر صفر کے برابر ہو گا لہذا کافی دیر بعد رو پہلے جزو $\frac{E}{R}$ کے برابر ہو گی جسے رو کی برقرار حال⁸¹ قیمت کہتے ہیں۔ یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کافی دیر بعد رو کی قیمت کا دار و مدار ابتدائی معلومات پر منحصر نہیں ہے۔ رو کتنی جلدی برقرار حال قیمت اختیار کرتی ہے، اس کا دار و مدار $\frac{R}{L}$ کی قیمت پر ہے۔

مساوات 1.62 میں ابتدائی معلومات $I(0) = 0$ پر کرتے $0 = 0.5 + ce^0$ ہوئے $c = -0.5$ ملتا ہے لہذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.19- ب میں موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل میں ابتدائی قیمت $I(0) = 0.25$ اور $I(0) = 0.75$ سے حاصل مخصوص حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

$$(1.64) \quad I(t) = 0.5(1 - e^{-200t})$$

□

مثال 1.21: جسم میں ہارمونز کی مقدار

جسم میں موجود غدد⁸² یعنی گٹھی، خون میں مختلف مرکبات (ہارمونز)⁸³ خارج کرتے ہوئے مختلف نظام کو قابو کرتے ہیں۔ تصور کریں کہ خون سے ایک مخصوص ہارمون مسلسل ہٹایا جاتا ہے۔ ہٹانے کی شرح اس لمحے موجود ہارمون کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ ساتھ ہی ساتھ تصور کریں کہ روزانہ غدد اس ہارمون کو خون میں ایک مخصوص انداز سے خارج کرتی ہے۔ خون میں موجود ہارمون کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ صبح چھ بجے خون میں ہارمون کی مقدار y_0 لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔

حل: پہلا قدم: نمونہ کشی: چوبیس گھنٹوں میں خارج ہونے کے عمل کو $a + b \sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ چونکہ خون میں ہارمون خارج ہونے سے خون میں ہارمون کی مقدار بڑھتی ہے لہذا $a \geq b$ ہو گا۔ یوں خارج کردہ ہارمون کی مقدار مثبت ہو گی۔ کسی بھی لمحے خون میں ہارمون کی مقدار کی تبدیلی کی شرح، اس لمحے خون میں ہارمون کے داخل ہونے کی مقدار اور اس کی ہٹائی جانے والی مقدار میں فرق کے برابر ہو گا۔ یوں مسئلے کا تفرقی مساوات درج ذیل ہو گا۔

(1.65)

$$\frac{dy(t)}{dt} = a + b \sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right) - ky(t) \quad \text{یعنی} \quad y' - ky = a + b \sin \omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{24}$$

دوسرا قدم: عمومی حل: یہاں $p = k$ ہے لہذا $h = \int k dt = kt$ ہو گا۔ اسی طرح $r = a + b \sin \omega t$ ہے لہذا مساوات 1.59 سے عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو تکمیل بالخصص⁸⁴ حل کیا گیا ہے

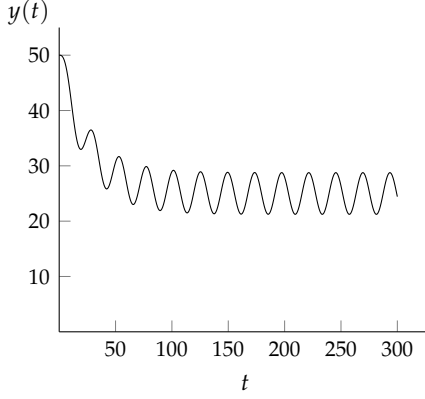
$$\begin{aligned} y &= e^{-kt} \int e^{kt} (a + b \sin \omega t) dt + ce^{-kt} \\ &= e^{-kt} \left[\frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] + ce^{-kt} \\ &= \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + ce^{-kt} \end{aligned}$$

عمومی حل کا آخری جزو وقت بڑھنے سے آخر کار صفر ہو جاتا ہے۔ یوں برقرار حل⁸⁵ بقایا اجزاء پر مشتمل ہے۔

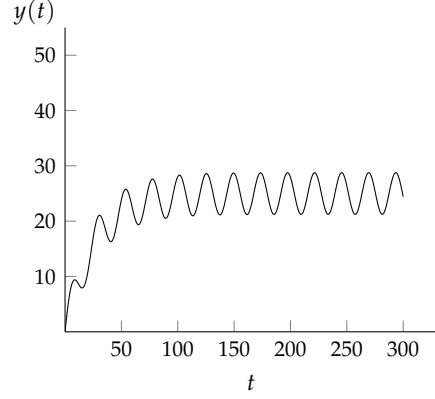
آخر قدم: مخصوص حل: صبح چھ بجے کو لمحہ $t = 0$ تصور کرتے ہوئے ابتدائی معلومات کو $y(0) = y_0$ لکھا جا سکتا ہے۔ ان قیمتوں کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$y_0 = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos 0 + \omega \sin 0) + ce^0, \quad \text{یعنی} \quad c = y_0 - \frac{a}{k} - \frac{b\omega}{k^2 + \omega^2}$$

⁸²gland
⁸³hormones
⁸⁴integration by parts
⁸⁵steady state response



(ب)



(الف)

شکل 1.20: مثال 1.21: خون میں ہارمون کی مقدار بالمتقابل وقت۔

اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔ مخصوص حل کو $a = 1$ ، $b = 1$ ، $k = 0.04$ اور $y_0 = 0$ لیتے ہوئے جسے شکل 1.20 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y_0 = 50$ لیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خون میں ہارمون کی مقدار بہت جلد ایک مخصوص اوسط قیمت پر پہنچ پاتی ہے۔

$$y = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2 + \omega^2} (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + (y_0 - \frac{a}{k} - \frac{bk}{k^2 + \omega^2}) e^{-kt}$$

□

حصول خطی مساوات بذریعہ تخفیف۔ برنولی مساوات

ایسے بہت سارے نظام ہیں جن کے غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کو خطی بنایا جاسکتا ہے۔ ان میں برنولی مساوات⁸⁶

$$(1.66) \quad y' + p(x)y = g(x)y^a, \quad \text{حقیقی عدد ہے } a$$

انتہائی اہم⁸⁷ ہے۔ برنولی مساوات $a = 0$ اور $a = 1$ کی صورت میں خطی ہے۔ اس کے علاوہ یہ غیر خطی ہے۔ آئیں اس کو تبدیل کرتے ہوئے خطی مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}$$

کا تفرق لیتے ہوئے اس میں مساوات 1.66 سے y' پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u' &= (1-a)y^{-a}y' \\ &= (1-a)y^{-a}(gy^a - py) \\ &= (1-a)g - (1-a)py^{1-a} \\ &= (1-a)g - (1-a)pu \end{aligned}$$

یوں خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(1.67) \quad u + (1-a)u' = (1-a)g$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 1.22: ورہلسٹ مساوات برائے نمو آبادی درج ذیل برنولی مساوات کو ورہلسٹ⁸⁸ مساوات کہتے ہیں جو نمو آبادی⁸⁹ کی تفرقی مساوات ہے۔ اس کو حل کریں۔ (سوال 1.109 کو بھی دیکھیں۔)

$$(1.68) \quad y' = ay - by^2$$

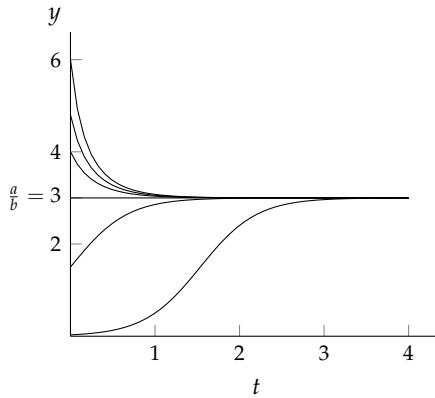
حل: اس کو مساوات 1.66 کی صورت $y' - ay = -by^2$ میں لکھ کر $a = 2$ ملتا ہے۔ یوں ہم $u = y^{1-a} = y^{-1}$ کے تفرق میں مساوات 1.68 سے y' پر کرتے ہیں

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(ay - by^2) = -ay^{-1} + b = -ua + b$$

جس سے خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u' + au = b$$

⁸⁷ یعقوب برنولی (1654-1705): سوئزر لینڈ کے برنولی خاندان نے دنیا کو کئی اہم ریاضی داں دیے۔ یعقوب برنولی ان میں سر فہرست ہے۔ انہوں نے علم الامکانیات میں بہت کام کیا۔ قوت نمائی کا مستقل e بھی انہوں نے دریافت کیا۔
⁸⁸ Pierre Francois Verhulst
⁸⁹ population growth



شکل 1.21: مثال 1.22: نموآبادی کا خط۔

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.59 سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$u = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

چونکہ $u = y^{-1}$ ہے لہذا اس سے درج ذیل ملتا ہے جس کو شکل 1.21 میں دکھایا گیا ہے۔

$$(1.69) \quad y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}}$$

□

مساوات 1.68 کو دیکھ کر $y(t) = 0$ حل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 1.23: مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ

مساوات 1.59 کو ایک دلچسپ ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے جسے مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ⁹⁰ کہتے ہیں۔ متجانس مساوات $y' + p(x)y = 0$ کا حل $y_1 = ce^{-\int p(x) dx}$ مساوات 1.58 دیتا ہے جس کو $y_1 = ce^{-h}$ لکھتے ہیں۔ تصور کریں کہ غیر متجانس مساوات $y' + p(x)y = e(x)$ کا حل $y_2 = uy_1$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ ہو گا۔ غیر متجانس مساوات میں y_2 اور y_2' پر کرتے ہیں۔

$$u'y_1 + uy_1' + puy_1 = r, \quad u'y_1 + u(y_1' + py_1) = r, \quad u'y_1 = r$$

⁹⁰variation of parameter

چونکہ y_1 متجانس مساوات کا حل ہے لہذا آخری قدم پر $y' + py = 0$ پر کرتے ہوئے $u'y_1 = r$ حاصل کیا گیا ہے۔ اس سے u بذریعہ مکمل حاصل کرتے ہوئے y_2 لکھتے ہیں جو مساوات 1.59 ہے۔

$$u = \int \frac{r}{y_1} dx, \quad u = \int re^h dx + c, \quad \text{لہذا} \quad y_2 = uy_1 = e^{-h} \left[\int re^h dx + c \right]$$

□

نمو آبادی

ورہلٹ مساوات پودوں، جانوروں اور انسانی آبادی کی نمو کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات میں $b = 0$ پر کرنے سے مالتھس مساوات 1.8 ملتی ہے جو آبادی کی بے روک نمو دیتی ہے۔ ورہلٹ مساوات میں جزو $-by^2$ آبادی بے قابو بڑھنے سے روکتی ہے۔ ورہلٹ مساوات کو $y' = ay(1 - \frac{b}{a}y)$ لکھ کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{b}{a}y < 1$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل بڑھے گی جب تک $\frac{b}{a}y < 1$ ہو، $\frac{b}{a}y > 1$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل گھٹے گی جب تک $\frac{b}{a}y < 1$ ہو گا۔ دونوں صورتوں میں عین $\frac{b}{a}y = 1$ یعنی $y = \frac{a}{b}$ پر آبادی میں تبدیلی رک جائے گی۔ شکل 1.21 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

ورہلٹ نمو آبادی کی مساوات میں غیر تابع متغیر t صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا یہ خود مختار مساوات ہے۔ خود مختار مساوات

$$(1.70) \quad y' = f(y)$$

کے مستقل حل پائے جاتے ہیں جنہیں متوازن حل⁹¹ یا متوازن نقطے⁹² کہا جاتا ہے۔ خود مختار مساوات میں تفاعل $f(y)$ کے صفر $(f(y)=0)$ پر $y' = 0$ ہو گا جس کا حل $y = c$ ہے جہاں c مکمل کا مستقل ہے۔ تفاعل کے صفر کو مساوات 1.70 کے فاصل نقطے⁹³ کہتے ہیں۔ مساوات 1.68 کے فاصل نقطے $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔ یوں اس مساوات کے مستقل حل $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔ متوازن حل کو دو گروہ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں مستحکم⁹⁴ اور غیر مستحکم⁹⁵ حل کہتے ہیں۔ ان کو شکل 1.21 کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے جہاں $y = \frac{a}{b} = 3$ مستحکم حل ہے جبکہ $y = 0$ غیر مستحکم حل ہیں۔

⁹¹equilibrium solution

⁹²equilibrium points

⁹³critical points

⁹⁴stable

⁹⁵unstable

سوالات

سوال 1.83: مساوات 1.59 میں h کے حصول میں مکمل کا مستقل صفر لیا جاسکتا ہے۔ ایسا کیوں ممکن ہے؟

سوال 1.84: ثابت کریں:

$$e^{\ln x} = x, \quad e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, \quad e^{-\ln \sec x} = \cos x$$

سوال 1.85 تا سوال 1.95 کے عمومی حل تلاش کریں۔ ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل حاصل کریں اور اس کا خط کھینچیں۔

سوال 1.85:

$$y' - y = 2$$

جواب: $y = ce^x - 2$

سوال 1.86:

$$y' - 4y = 2x$$

جواب: $y = ce^{4x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}$

سوال 1.87:

$$y' + 5y = e^{5x}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $y = \frac{e^{5x}}{10} + \frac{19}{10}e^{-5x}$

سوال 1.88:

$$y' + 6y = 4 \sin 4x, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 6$$

1.5. خطی ساده تفرقی مساوات - مساوات برنولی

جواب: $y = \frac{9}{13} \sin 4x - \frac{6}{13} \cos 4x + \frac{69}{13} e^{\frac{3\pi}{4} - 6x}$

سوال 1.89:

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 3$$

جواب: $y = 1 + 2e^{-x^2}$

سوال 1.90:

$$xy' = 2y + x^3 e^x$$

جواب: $y = x^2 e^x + cx^2$

سوال 1.91:

$$y' + y \tan x = \sin x$$

جواب: $y = c \cos x - \cos x \ln \cos x$

سوال 1.92:

$$y' + y \cos x = e^{-\sin x}$$

جواب: $y = xe^{-\sin x} + ce^{-\sin x}$

سوال 1.93:

$$\cos xy' + (4y - 2) \sec x = 0$$

جواب: $y = \frac{1}{2} + ce^{-4 \tan x}$

سوال 1.94:

$$y' = (y - 4) \tan x, \quad y(0) = 3$$

جواب: $y = 4 - \sec x$

سوال 1.95:

$$xy' + 6y = 5x^3, \quad y(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{5}{9}x^3 + \frac{4}{9x^6}$

سوال 1.96 تا سوال 1.100 میں خطی سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات زیر بحث لائیں جائیں گے۔ انہیں خصوصیات کی بنا انہیں غیر خطی سادہ تفرقی مساوات پر فوقیت حاصل ہے جو یہ خصوصیات نہیں رکھتے۔ نمونہ کشی کرتے ہوئے انہیں وجوہات کی وجہ سے خطی مساوات حاصل کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ ان سوالات میں آپ کو متجانس اور غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

سوال 1.96: متجانس مساوات 1.57 کے حل y_1 اور y_2 کا عمومی مجموعہ $ay_1 + by_2$ بھی اس کا حل ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ ثابت کریں کہ غیر متجانس مساوات 1.56 یہ خصوصیات نہیں رکھتا۔

سوال 1.97: مساوات 1.57 کا غیر اہم حل (یعنی صفر حل) $y \equiv 0$ [یعنی x کی ہر قیمت کے لئے $y(x) = 0$ ہے] پایا جاتا ہے جبکہ غیر متجانس مساوات 1.56 [جس میں $r(x) \neq 0$ ہو] کا ایسا حل نہیں پایا جاتا۔

سوال 1.98: مساوات 1.57 کے حل y_1 اور مساوات 1.56 کے حل y_2 کا مجموعہ $y_1 + y_2$ بھی مساوات 1.56 کا حل ہے۔

سوال 1.99: مساوات 1.56 کے دو عدد حل y_1 اور y_2 کا فرق $y_1 - y_2$ مساوات 1.57 کا حل ہے۔

سوال 1.100: اگر $y' + p(x)y = r_a(x)$ کا حل y_1 اور $y' + p(x)y = r_b(x)$ کا حل y_2 ہو جہاں دونوں مساوات کے $p(x)$ یکساں ہیں تو آپ $y_1 + y_2$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

اس حصے میں سیکھے گئے ترکیب یا علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہوئے سوال 1.101 تا سوال 1.106 کے عمومی حل حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہوں وہاں مخصوص حل بھی حاصل کریں۔

سوال 1.101:

$$y' + y = y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

جواب: $\frac{y-1}{y} = e^x$

سوال 1.102:

$$y' + xy = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $(y-1)(y+1) = 3^{-x^2}$

سوال 1.103:

$$y' + y = \frac{x}{y}$$

جواب: $2y^2 + 1 - 2x = ce^{-2x}$

سوال 1.104:

$$y' = 5y - 15y^2$$

جواب: $\frac{3y-1}{y} = ce^{-5x}$

سوال 1.105:

$$y' = \frac{\cot y}{x+1}, \quad y(0) = 1$$

جواب: $(x+1) \cos y = 2$

سوال 1.106:

$$2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x, \quad (y^2 = z \text{ پر کریں})$$

$$\text{جواب: } c = \frac{2e^x y^2 - x e^{2x}}{2x}$$

سوال 1.107: پانی کو چولہے پر برتن میں گرم کیا جاتا ہے۔ برتن کو آگ سے اتارتے وقت پانی کا درجہ حرارت 99°C ہے جبکہ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 90°C ہے۔ فضا کا درجہ حرارت 32°C ہے۔ پانی کتنی دیر میں تقریباً فضا کے درجہ حرارت (مثلاً 33°C) پر پہنچے گا؟

جواب: تقریباً چار گھنٹے اور پچاس منٹ۔

سوال 1.108: مریض کو قطرہ قطرہ نمکیات کا محلول بذریعہ شریان دیا جاتا ہے جس میں دوائی حل کی گئی ہے۔ لمحہ $t = 0$ سے مریض کو مسلسل a گرام فی منٹ دوائی دی جاتی ہے جبکہ جسم کا نظام دوائی کو مسلسل خون سے نکال کر خارج کرتا ہے۔ خون سے دوائی ہٹانے کی شرح خون میں کل دوائی کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفریقی مساوات حاصل کریں اور مساوات کو حل کریں۔

$$\text{جوابات: } y' = a - ky \text{ اور لمحہ } t = 0 \text{ پر خون میں دوائی کی مقدار صفر ہے، } y = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt})$$

سوال 1.109: وبائی بیماری کا پھیلاؤ
وبائی بیماری ایک شخص سے دوسرے شخص کو منتقل ہوتے ہوئے بڑھتی ہے۔ تصور کریں کہ ایک مخصوص وبا کی پھیلاؤ سائنس کے ذریعہ ہوتی ہے جو دو اشخاص کے قریب ہونے سے ممکن ہے۔ یوں وبا میں اضافے کی شرح مریض اور صحت مند شخص کے قریب آنے کے راست تناسب ہے۔ تصور کریں شہر میں کل آبادی a ہے جبکہ لمحہ t پر بیماروں کی تعداد $y(t)$ ہے۔ تصور کریں کہ تمام لاگ مکمل آزادی کے ساتھ آپس میں ملتے جلتے ہیں۔ اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے مسئلے کا تفریقی مساوات حاصل کریں۔ مساوات کو حل کریں۔

حل: کسی بھی لمحے y لوگ بیمار اور بقایا یعنی $a - y$ لوگ صحت مند ہیں۔ اگر dt دورانیے میں ایک بیمار شخص کسی ایک شخص سے ملے تو $\frac{a-y}{a}$ امکان ہے کہ وہ صحت مند شخص سے ملا ہو گا۔ اسی دورانیے میں بقایا بیمار بھی کسی سے ملے ہوں گے لہذا بیمار اور صحت مند کے ملنے کا امکان $y \left(\frac{a-y}{a} \right)$ ہو گا۔ اس طرح بیماری میں اضافے کی شرح کو $y' = ky \left(\frac{a-y}{a} \right)$ لکھا جاسکتا ہے جو مساوات 1.68 ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک شخص بیمار تصور کرتے ہوئے اس کا حل $\frac{y}{y-a} = \frac{e^t}{1-a}$ ملتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow a$ ہو گا یعنی آخر کار وبا پورے شہر میں پھیل جائے گی۔

سوال 1.110: ایک جھیل میں $200 \times 10^6 \text{ m}^3$ پانی پایا جاتا ہے جس میں ماہی گیروں کی غفلت سے گندگی کی مقدار 5% تک بڑھ جاتی ہے جس سے ماہی گیری متاثر ہو رہی ہے۔ جھیل سے سالانہ $20 \times 10^6 \text{ m}^3$ پانی خارج ہوتا ہے اور اتنا ہی تازہ پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ تازہ پانی میں 0.6% گندگی پائی جاتی ہے۔ جھیل کو صاف کرنے کی غرض سے اس میں ماہی گیری ممنوع کر دی جاتی ہے۔ جھیل میں گندگی کی مقدار کتنی مدت میں 2% رہ جائے گی؟

جوابات: جھیل میں کل گندگی کو $y(t)$ لکھتے ہوئے $y' = 120000 - 0.1y$ ملتا ہے جس کا عمومی حل $y = (1.2 + 8.8e^{-0.1t}) \times 10^6$ ہے۔ جھیل کو درکار حد تک صفائی کے لئے 11.45 سال درکار ہوں گے۔

سوال 1.111 سے سوال 1.114 میں ماہی گیری کو مثال بنایا گیا ہے۔ یہی حقائق ملک میں پالتو مال مویشی پر بھی لاگو ہوتا ہے۔

سوال 1.111: ایسا جھیل جس میں ماہی گیری منع ہو میں مچھلی کی تعداد مساوات دیتی ہے۔ ماہی گیری کی اجازت کے بعد مساوات کیا ہو گی؟ تصور کریں کہ مچھلی پکڑنے کی شرح مچھلی کی لمبائی تعداد کے راست تناسب ہے۔

حل: مچھلی پکڑنے کی شرح کو py لکھتے ہوئے نئی مساوات $y' = ay - by^2 - py$ ہو گی۔

سوال 1.112: سوال 1.111 میں مچھلی پکڑنے کی شرح اس قدر ہے کہ مچھلی کی تعداد تبدیل نہیں ہوتی۔ مچھلی کی تعداد کیا ہو گی؟

حل: مچھلی کی تعداد تبدیل نہ ہونے سے مراد $y' = 0$ ہے لہذا $y' = ay - by^2 - py = 0$ لکھتے ہوئے $y = 0$ اور $y = \frac{a-p}{b}$ ملتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جھیل سے مسلسل $p \left(\frac{a-p}{b} \right)$ پیداوار لی جاسکتی ہے۔

سوال 1.113: سوال 1.111 میں $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔ اس شرح سے پیداوار لیتے ہوئے ماہی گیری کی مستقبل کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

جواب: $y = \frac{0.9}{1 - e^{-0.9t - 0.198}}$ ؛ اس شرح سے $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow 0$ ہو گا اور ماہی گیری ممکن نہ رہ پائے گی۔

سوال 1.114: ماہی گیری کے شعبے کو برقرار رکھنے کی خاطر سوال 1.111 میں دو سال ماہی گیری کے بعد دو سال کا وقفہ دیا جاتا ہے جس میں ماہی گیری ممنوع ہوتی ہے اور جس دوران جھیل میں مچھلی کی آبادی دوبارہ بڑھتی ہے۔ اس

مسئلے کو آٹھ سال کے لئے حل کرتے ہوئے حل کا خط کھینچیں۔ $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیں۔

سوال 1.115: جنگل میں بھیڑیا کی آبادی میں شرح موت لمحاتی آبادی کے راست تناسب ہے جبکہ شرح پیدائش بھیڑیوں کی جوڑی کی اتفاقی ملاپ کے راست تناسب ہے۔ اس مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ غیر تغیر آبادی دریافت کریں۔

حل: بھیڑیا کی کل آبادی y میں آدھے ز اور آدھے مادہ ہوں گے۔ دورانیہ dt میں ایک جوڑی کے ملاپ کا امکان $\frac{y}{2}$ کے راست تناسب ہے۔ یوں $\frac{y}{2}$ جوڑیوں کے ملاپ کا امکان $\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right)$ ہو گا۔ یوں شرح تبدیلی $y' = ay^2 - by$ لکھی جائے گی جہاں $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔ غیر تغیر آبادی سے مراد $y' = 0$ ہے جس سے $y = 0$ اور $y = \frac{b}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y > \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا جس کی بنا آبادی مسلسل بڑھے گی۔ اس کے برعکس $y < \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا اور آبادی مسلسل گھٹے گی۔

سوال 1.116: شہروں کے بند مکانوں میں باہر فضا کی نسبت زیادہ آلودگی پائی جاتی ہے۔ گھر کے اندر جانور یا پودوں سے یہ مسئلہ مزید سنگین صورت اختیار کر لیتا ہے۔ قابل رہائش ہونے کے لئے لازم ہے کہ مکان میں ہوا کا بہاؤ پایا جاتا ہو۔ ایک عمارت کا حجم 1500 m^3 ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر تمام کھڑکیاں کھول دی جاتی ہیں جس کے بعد $200 \text{ m}^3/\text{h}$ تازہ ہوا مسلسل عمارت میں ایک رخ سے داخل ہوتی ہے اور اتنی ہی ہوا دوسری جانب خارج ہوتی ہے۔ عمارت میں پتکھے ہوا کو مسلسل حرکت میں رکھتے ہیں۔ کتنی دیر بعد 90% ہوا تازہ ہو گی؟ جواب: 17 گھنٹے اور 16 منٹ۔

1.6 عمودی خطوط کی نسلیں

ایک نسل کے خطوط کے عمودی مقاطع خطوط معلوم کرنا طبیعیات کے اہم مسائل میں سے ایک ہے۔ حاصل خطوط کو دیے گئے خطوط کے عمودی مقاطع خطوط⁹⁶ کہتے ہیں اور اسی طرح دیے گئے خطوط کو حاصل کردہ خطوط کے عمودی مقاطع خطوط کہتے ہیں۔

زاویہ تقاطع⁹⁷ سے مراد نقطہ تقاطع پر دو خطوط کے مماس کے مابین زاویہ ہے۔

orthogonal trajectories⁹⁶
angle of intersection⁹⁷

عمودی خطوط کو عموماً تفرقی مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر $G(x, y, c) = 0$ ایک ہی نسل کے خطوط کو ظاہر کرتی ہو تب مستقل c کی ہر انفرادی قیمت نسل کے ایک منفرد خط کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ اس مساوات میں ایک عدد مستقل (c) پایا جاتا ہے لہذا ان خطوط کو ایک عدد مقدار معلوم⁹⁸ کے خطوط کی نسل کہا جاتا ہے۔

آئیں درج ذیل خطوط کو مثال بناتے ہوئے اس ترکیب کو سیکھیں۔

$$(1.71) \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = c$$

مماس کی ڈھلوان y' کو تفرق کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.72) \quad \frac{2x}{4} + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{4y}$$

تفرقی مساوات میں c نہیں پایا جاسکتا۔ آپس میں عمودی خطوط کے ڈھلوان کا حاصل ضرب منفی اکائی (-1) کے برابر ہو گا۔ یوں درکار خطوط کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$(1.73) \quad y' = \frac{4y}{x}$$

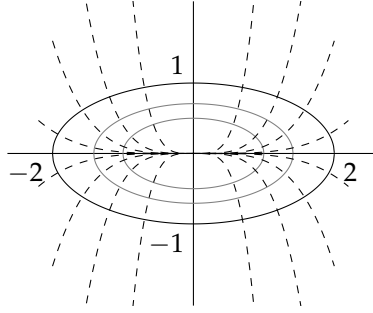
علیحدگی متغیرات کرتے ہوئے مکمل سے عمودی خطوط حاصل کرتے ہیں۔

$$(1.74) \quad \frac{dy}{y} = 4 \frac{dx}{x}, \quad y = c_1 x^4$$

اس مساوات کے مستقل کو c_1 لکھا گیا ہے جس کا ہر انفرادی قیمت نسل کی منفرد خط دیتا ہے۔ شکل 1.22 میں $c = 1$ لیتے ہوئے مساوات 1.71 کو گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیروں سے مختلف c سے حاصل نسل کے دیگر خطوط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 1.74 کو شکل میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ مستقل c_1 کے مثبت اور منفی قیمتیں لے کر ان خطوط کو کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ٹھوس خطوط کی نسل اور نقطہ دار خطوط کی نسل ایک دونوں کو عمودی قطع کرتے ہیں۔

سوالات

سوال 1.117 تا سوال 1.122 کے عمودی تقاطع خطوط دریافت کریں۔



شکل 1.22: عمودی خطوط کی نسلیں۔

سوال 1.117:

$$y = 2x + c$$

جواب: $y = -\frac{x}{2} + c_1$

سوال 1.118:

$$3y = -2x + c$$

جواب: $y = \frac{3x}{2} + c_1$

سوال 1.119:

$$y^2 = 3x + c$$

جواب: $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x}$

سوال 1.120:

$$y = x^2 + c$$

جواب: $y = \ln \frac{c_1}{\sqrt{|x|}}$

سوال 1.121:

$$G(x, y, c) = e^x \cos y = c$$

جواب: $\sin y = c_1 e^{-x}$

سوال 1.122:

$$2y = \frac{3}{x} + c$$

جواب: $y = \frac{2x^3}{9} + c_1$

سوال 1.123 تا سوال 1.125 عملی استعمال کے چند سوالات ہیں۔

سوال 1.123: ہم قوه خطوط اور ثقلی قوت

ثقلی قوت کی سمت زمین کی محور کو ہے۔ کارتیسی محدود پر اس قوت کی سمت کو $y = cx$ لکھا جاسکتا ہے۔ ان کی عمودی خطوط حاصل کریں جو ہم قوه خطوط⁹⁹ کہلاتے ہیں۔

جواب: ہم جانتے ہیں کہ y' کی مساوات c سے پاک ہونا لازمی ہے لہذا $y' = c$ میں دی گئی مساوات سے $c = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $y' = \frac{y}{x}$ حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح عمودی خطوط کی ڈھلوان $y' = -\frac{x}{y}$ ہوگی جس کا مکمل $x^2 + y^2 = c_1$ دیتا ہے۔

سوال 1.124: ہم محوری تار

حساس برقی اشارات کی ترسیل عموماً ہم محوری تار¹⁰⁰ کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ موصل نکلی کے محور پر موصل تار رکھنے سے ہم محوری تار حاصل ہوتی ہے۔ ہم محوری تار کو کارتیسی z محور پر رکھتے ہوئے دونوں موصل تاروں کے درمیانی خطے میں ہم قوه خطوط کی مساوات $u(x, y) = x^2 + y^2 = c$ حاصل ہوتی ہے جو z محور پر پڑی نکلی سطحوں کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم قوه خطوط کے عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں جو برقی میدان¹⁰¹ کو ظاہر کرتی ہیں۔

⁹⁹ equipotential lines
¹⁰⁰ coaxial cable
¹⁰¹ electric field

جواب: $y = c_1 x$

سوال 1.125: ہم حرارت خطوط

درجہ حرارت میں فرق، حرارتی توانائی کی منتقلی کا سبب ہے لہذا حرارتی توانائی کی منتقلی ہم حرارت خطوط¹⁰² کے عمودی ہوگی۔ کسی خطے میں ہم حرارتی خطوط کو $2x^2 + 5y^2 = c$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ان کی عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں۔

جواب: $y^2 = c_1 x^5$

1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتاہیت

کسی بھی متغیرہ کی حتمی قیمت صفر یا مثبت $|k| \geq 0$ ہوتی ہے لہذا درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا کوئی حل نہیں پایا جاتا۔ اس تفرقی مساوات کا واحد حل $y = 0$ ہے جو ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اترتا۔

$$2|y'| + 3|y| = 0, \quad y(0) = 2$$

اس کے برعکس درج ذیل مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل یعنی $y = x^3 + 2$ پایا جاتا ہے۔

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 2$$

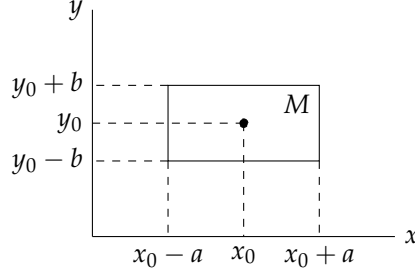
درج ذیل تفرقی مساوات کے لامتناہی حل $y = -1 + cx$ پائے چونکہ $x = 0$ پر c کی کسی بھی قیمت کے لئے $y = -1$ ہی ہے۔

$$xy' = y + 1, \quad y(0) = -1$$

یوں ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$(1.75) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

کے حل کے بارے میں درج ذیل دو اہم سوالات اٹھتے ہیں۔



شکل 1.23: وجوہیت اور یکتائی کے مسئلوں کا مستطیل۔

وجوہیت حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.75 کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہے۔

یکتائی حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.75 کا زیادہ سے زیادہ ایک حل ممکن ہے۔ (یوں ایک سے زیادہ حل رد کئے جاتے ہیں۔)

قبل از حل یہ جاننا کہ آیا ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا حل پایا جاتا ہے اور آیا کہ اس کا حل یکتا ہے انتہائی اہم معلومات ہیں جنہیں مسئلہ وجوہیت¹⁰³ اور مسئلہ یکتائی¹⁰⁴ سے جاننا ممکن ہے۔ ان مسئلوں پر غور کرتے ہیں۔

مسئلہ 1.3: مسئلہ وجوہیت
ابتدائی نقطہ (x_0, y_0) کو مرکز بناتے ہوئے شکل 1.23 میں مستطیل خطہ M دکھایا گیا ہے۔

$$(1.76) \quad M : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$$

تصور کریں کہ اس مستطیل خطے کے تمام نقطوں (x, y) پر ابتدائی قیمت سادہ تفرقی مساوات

$$(1.77) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

کا دایاں ہاتھ $f(x, y)$ استمراری تفاعل¹⁰⁵ (یعنی بلا جوڑ تفاعل) ہے۔ مزید اس خطے میں تفاعل کی قیمت محدود¹⁰⁶ ہے یعنی

$$(1.78) \quad |f(x, y)| \leq K \quad \text{پر} \quad (x, y) \quad \text{تمام نقطوں کے مستطیل کے تمام نقطوں}$$

existence theorem¹⁰³

uniqueness theorem¹⁰⁴

continuous function¹⁰⁵

bounded¹⁰⁶

جہاں K محدود قیمت کا مستقل ہے۔ ایسی صورت میں ابتدائی قیمت مساوات 1.77 کا کم از کم ایک حل موجود ہے۔ یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔ α کی قیمت a اور $\frac{b}{K}$ کی قیمتوں میں سے کم قیمت کے برابر ہے۔

مثال 1.24: تفاعل $f(x, y) = 2x + y^2$ خطہ $|x| < 1$ ، $|y| < 1$ میں محدود تفاعل ہے جس کی زیادہ سے زیادہ حتمی قیمت $K = 3$ ہے۔ اس کے برعکس تفاعل $\tan x$ خطہ $|x| < \frac{\pi}{5}$ میں غیر محدود ہے چونکہ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ اسی خطے میں پایا جاتا ہے جہاں $\tan \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$ ہے۔ □

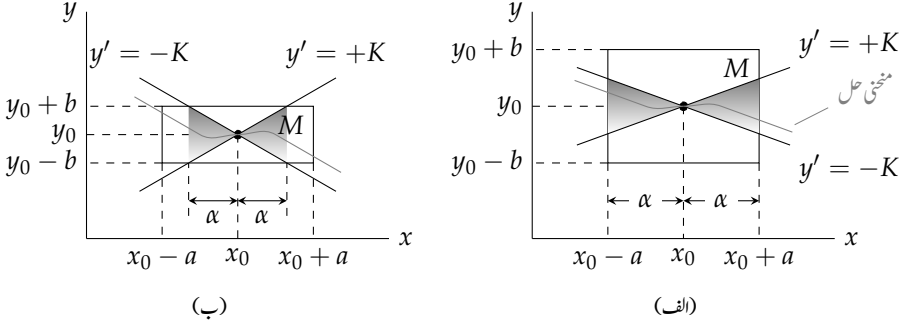
مسئلہ 1.4: مسئلہ یکتائی
تصور کریں کہ شکل 1.23 کے مستطیل میں تمام نقطوں (x, y) پر $f(x, y)$ اور $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ استمراری اور محدود تفاعل ہیں یعنی

$$(1.79) \quad |f(x, y)| < K_a$$

$$(1.80) \quad \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| < K_b$$

ایسی صورت میں مساوات 1.77 کا زیادہ سے زیادہ ایک عدد حل موجود ہے۔ یوں مسئلہ 1.3 کے تحت تفرقی مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل موجود ہے اور یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔

درج بالا دو مسئلوں کے ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیے جائیں گے۔ البتہ انہیں شکل 1.24 کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے جہاں ابتدائی نقطہ (x_0, y_0) مستطیل M کا مرکز ہے۔ مخصوص حل ابتدائی نقطے سے گزرتا ہے۔ مساوات 1.78 کے تحت $f(x, y)$ یعنی y' کی قیمت کم سے کم $-K$ اور زیادہ سے زیادہ $+K$ ممکن ہے یعنی مساوات 1.78 کے منحنی حل کی ڈھلوان $-K$ تا $+K$ ممکن ہے۔ شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا $y' = \mp K$ ڈھلوان کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔ یوں (x_0, y_0) سے گزرتا ہوا منحنی حل کسی صورت سایہ دار¹⁰⁷ خطہ $y' = \mp K$ سے باہر نہیں نکل سکتا۔ شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا منحنی حل ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 1.24: مساوات 1.78 میں دی گئی شرط اور α ۔

شکل 1.24-الف میں منحنی حل کو دیکھیے۔ سائے دار خطے میں رہتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ حل $|x - x_0| < \alpha$ پر پایا جائے گا جہاں $\alpha = a$ کے برابر ہے۔ شکل-ب میں منحنی حل مستطیل M سے باہر نکل جاتا ہے۔ چونکہ مستطیل کے باہر $f(x, y)$ اور $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ کے بارے میں کچھ نہیں کہا جاسکتا ہے لہذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $|x - x_0| < \alpha$ پر حل پایا جاتا ہے جہاں $\alpha = \frac{b}{K}$ کے برابر ہے۔

مثال 1.25: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

اور خطہ $|x| < 4$ ، $|y| < 5$ لیتے ہیں۔ یوں $a = 4$ ، $b = 5$ اور

$$|f(x, y)| = |1 + y^2| \leq K_a = 26$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y \leq K_b = 10$$

$$\alpha = \frac{b}{K_a} = \frac{5}{26} < a$$

ہوں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ اس تفرقی مساوات کا حل $y = \tan x$ ہے جس میں $x = \pm \frac{\pi}{2} > \alpha$ پر جوڑ پایا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستطیل کے پورے x پر مسلسل حل نہیں پایا جاتا۔ □

تفرقی مساوات کے حل کے لئے درج بالا دو مسئلوں میں معقول شرائط ناکہ لازم شرائط دیے گئے ہیں۔ ان شرائط

کو ہلکا بنایا جاسکتا ہے۔ احصاء تفرقیات¹⁰⁸ کے مسئلہ اوسط قیمت¹⁰⁹ کے تحت

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1) \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y_i}$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 خطہ M میں پائے جاتے ہیں اور y_i ان کے درمیان کوئی موزوں قیمت ہے۔ مساوات 1.80 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.81) \quad f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq (y_2 - y_1)K_b$$

مساوات 1.80 کی جگہ مساوات 1.81 استعمال کیا جاسکتا ہے جو نسبتاً ہلکا شرط ہے۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $f(x, y)$ کا مسلسل تقابل ہونا غیر معقول (یعنی ناکافی) شرط ہے۔ درج ذیل مثال اس حقیقت کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 1.26: غیر یکسانی
ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

کے دو حل پائے جاتے ہیں

$$y = 0 \quad \text{اور} \quad y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases}$$

اگرچہ $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ مسلسل تقابل ہے۔ مساوات 1.81 کی شرط لکیر $y = 0$ پر پوری نہیں ہوتی چونکہ $y_1 = 0$ اور y_2 کو مثبت لیتے ہوئے

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}, \quad (\sqrt{y_2} > 0)$$

ملتا ہے جس کی قیمت y_2 کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے لامتناہی بڑھائی جاسکتی ہے جبکہ مساوات 1.81 کہتا ہے کہ یہ قیمت کسی مخصوص مستقل قیمت K_b سے کم ہونا لازمی ہے۔

□

مثال 1.27: تصور کریں کہ $|x - x_0| \leq a$ فاصلے پر مساوات $y' + p(x)y = r(x)$ میں $p(x)$ اور $r(x)$ استمراری ہیں۔ ثابت کریں کہ یہ مساوات مسئلہ وجودیت اور مسئلہ یکتائی کے شرائط پر پورا اترتا ہے لہذا ابتدائی معلومات کی صورت میں اس تفرقی مساوات کا یکتا حل پایا جاتا ہے۔

جواب: $f(x, y) = r - py$ ہے لہذا $\frac{\partial f}{\partial y} = -p$ ہو گا۔ چونکہ p استمراری ہے لہذا $\frac{\partial f}{\partial y}$ استمراری اور دیے فاصلے پر محدود ہو گا۔ □

سوالات

سوال 1.126: خطی سادہ تفرقی مساوات $y' + p(x)y = r(x)$ میں $p(x)$ اور $r(x)$ وقفہ $|x - x_0| \leq a$ میں تمام x کے لئے استمراری ہو تب اس تفرقی مساوات کا $f(x, y)$ مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 کے شرائط پر پورا اترتا ہے لہذا اس تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل یکتا ہو گا۔

جواب: $y' = f(x, y) = r(x) - p(x)y$ ہے لہذا $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$ استمراری ہو گا۔ یکتا حل بند وقفہ $|x - x_0| \leq a$ میں محدود ہو گا۔

سوال 1.127: لامحدود پٹی لامحدود پٹی $|x - x_0| < a$ کے شرائط صرف مستطیل کی بجائے لامحدود پٹی پر پورا اترتے ہوں تب مساوات 1.75 کا حل کس وقفہ میں موجود ہو گا؟

جواب: $\alpha = \frac{b}{K}$ میں b کی قیمت بڑی لیں یعنی $b = \alpha K$ لہذا حل وقفہ $|x - x_0| < a$ میں موجود ہو گا۔

سوال 1.128: وقفے کی لمبائی x عموماً مساوات 1.75 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے کا حل مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 میں دیے گئے وقفے سے زیادہ لمبائی پر پر موجود ہوتا ہے۔ a کی بہترین قیمت (اور b کی اچھی قیمت) چنتے ہوئے اس حقیقت کو $y' = 2y^2$, $y(1) = 1$ کے لئے ثابت کریں۔

باب 1. درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

جواب: R کے اطراف $2a$ اور $2b$ ہیں اور چونکہ $y(1) = 1$ ہے لہذا اس کا وسط $(1, 1)$ ہے۔ R میں

$$f = 2y^2 \leq 2(b+1)^2 = K, \alpha = \frac{b}{K} = \frac{b}{2(b+1)^2}, \frac{d\alpha}{db} = 0 \implies b = 1$$

سے $\frac{b}{K} = \frac{1}{8}$ بہترین α حاصل ہو گا۔ تفرقی مساوات کا حل $\frac{dy}{y^2} = 2dx$ کے مکمل سے $y = \frac{1}{3-2x}$ ملتا ہے۔

سوال 1.129: کیا کسی ایک ہی تفرقی مساوات کے دو مختلف حل، مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 میں دیے گئے شرائط پر پورا اترتے ہوئے، مستطیل میں ایک ہی نقطے سے گزر سکتے ہیں۔

جواب: ایسا ممکن نہیں ہو گا چونکہ اگر ایسا ہو تب اس مشترک نقطہ (x_1, y_1) پر دونوں حل ابتدائی معلومات $y(x_1) = y_1$ پر پورا اتریں گے جو یکتائی کی خلاف ورزی ہے۔

باب 2

درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔ چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔ اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

ایک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔ اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش¹، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

¹oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$(2.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

صورت میں لکھا جاسکے خطی² کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر خطی³ کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں y ، y' اور y'' کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ دو درجی مساوات کا پہلا جزو $f(x)y''$ ہونے کی صورت میں مساوات کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی معیاری صورت⁴ میں لکھیں جہاں y'' پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔ یقیناً $r \equiv 0$ [جہاں زیر غور تمام x پر $r(x) = 0$ ہو] اس کو مکمل صفر⁵ پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$(2.2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جو متجانس ہے۔ اگر $r(x) \neq 0$ ہو تب مساوات 2.1 غیر متجانس⁶ کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔ آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$(y'')^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

linear²
nonlinear³
standard form⁴
identically zero⁵
nonhomogenous⁶

تفاعل p اور q مساوات 2.2 کے عددی سر⁷ کہلاتے ہیں۔

دودرجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل $y = h(x)$ کو کھلے وقفہ I پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دودرجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر y'' اور h' کی جگہ h'' پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں y کی جگہ h ، y' کی جگہ h' اور y'' کی جگہ h'' پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔ چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

متجانس خطی تفرقی مساوات: خطی میل

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔ متجانس مساوات کے حل میں اصول خطیت⁸ یا اصول خطی میل⁹ کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 2.1: خطی میل

تمام x پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں۔

$$(2.3) \quad y'' + 4y = 0$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔ پہلے $y_1 = \cos 2x$ کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ $(\cos 2x)'' = -4 \cos 2x$ کے برابر ہے لہذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4 \cos 2x + 4 \cos 2x = 0$$

ملتا ہے۔ اسی طرح $y_2 = \sin 2x$ کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4 \sin 2x + 4 \sin 2x = 0$$

⁷coefficients

⁸linearity principle

⁹superposition principle

میتا ہے۔ ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں ہم $\cos 2x$ کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور $\sin 2x$ کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔ آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x)'' + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 4(-2.73 \cos 2x + 1.25 \sin 2x) + 4(2.73 \cos 2x - 1.25 \sin 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل y_1 اور y_2 سے نیا حل

$$(2.4) \quad y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (c_1 \text{ اور } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں})$$

حاصل کیا۔ اس کو y_1 اور y_2 کا خطی میل¹⁰ کہتے ہیں۔ اس مثال سے ہم مسئلہ خطی میل بیان کرتے ہیں جسے عموماً اصول خطیت یا اصول خطی میل کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ دو درجی تفرقی مساوات کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 2.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل y_1 اور y_2 پائے جاتے ہیں لہذا

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ خطی میل سے نیا حل $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حاصل کرتے ہیں۔ اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} y_3' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' \\ y_3'' &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' \end{aligned}$$

y_3 ، y_3' اور y_3'' کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + py_3' + qy_3 &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہذا ثابت ہوتا ہے کہ y_3 بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

□

انتباہ: یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔ غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل مقدار ہیں۔

حل: y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= r \\ y_2'' + py_2' + qy_2 &= r \end{aligned} \quad (2.6)$$

y_3 کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_3'' + py_3' + qy_3 &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= (c_1 + c_2)r \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔ اس سے $(c_1 + c_2)r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ r کے برابر ہے لہذا y_3 متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔ یوں y_3 متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔ □

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات

درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں $y = 2 - \cos x$ اور $y = 2 - \sin x$ کو پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔ اسی طرح ثابت کریں کہ $3(2 - \cos x)$ یا $-7(2 - \sin x)$ بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں $y = 1$ اور $y = x^3$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی $y = -x^3$ حل ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو -1 سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

ابتدائی قیمت مسائل۔ اساس۔ عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ درجہ اول سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل c حاصل کرتے ہوئے مخصوص یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی تصور کو دو درجہ اول سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو درجی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$(2.7) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

K_0 اور K_1 کھلے وقفہ پر نقطہ x_0 پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$(2.8) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ یہاں y_1 اور y_2 مساوات 2.7 کے حل ہیں۔ یوں مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ (x_0, K_0) سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر K_1 ہوتی ہے۔

مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل: پہلا قدم: اس مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہذا اس کا موزوں عمومی حل

$$(2.9) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

ہو گا۔ (موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)

دوسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرتے ہیں۔ عمومی حل کا تفرق $y' = -2 \sin 2x + 2c_2 \cos x$ ہے۔ ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

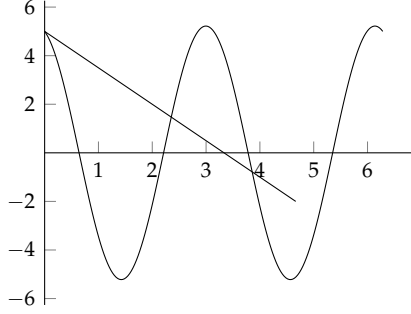
$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 5$$

$$y'(0) = -2 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5$$

حاصل ہوتے ہیں لہذا مخصوص حل

$$y = 5 \cos 2x - 1.5 \sin 2x$$

ہو گا۔ شکل 2.1 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $x = 0$ پر اس کی قیمت $y(0) = 5$ ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس) $y'(0) = 0.5$ ہے۔ مماس x محور کو $x = \frac{5}{3} = 3.33$ پر قطع کرتا ہے۔ □



شکل 2.1: مثال 2.3 کا مخصوص حل۔

درج بالا مثال میں y_1 اور y_2 ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔ آپس اب دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = k \cos 2x$ لیتے ہوئے

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 k \cos 2x = (c_1 + c_2 k) \cos 2x = c_3 \cos 2x$$

عمومی حل لکھتے ہیں۔ اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل c_3 پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل y_1 اور y_2 انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔ یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل کے تعریف

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ فاصلہ I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کی اساس¹¹ حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا مخصوص حل مساوات 2.9 میں c_1 اور c_2 کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

basis¹¹

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔ y_1 اور y_2 اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے I پر

$$(2.10) \quad (a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1$$

ہو، جہاں k اور l اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔ (یہاں توجہ رکھیں: a اس صورت b کے مترادف ہے جب $k \neq 0$ ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت خطی طور غیر تابع¹² کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$(2.11) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

سے مراد

$$(2.12) \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 خطی طور تابع¹³ کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.11 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1$ لکھا جاسکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(2.13) \quad y_1 = ky_2, \quad y_2 = ly_1 \quad \text{پر } I \text{ کھلے وقفے}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.11 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا (اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔) اس طرح اساس کی (درج ذیل) قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: اساس کی قدر مختلف تعریف

کھلے وقفے I پر مساوات 2.11 کا خطی طور غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

linearly independent¹²
linearly dependent¹³

اگر کسی کھلے وقفے I پر مساوات کے عددی سر p اور q استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کا عمومی حل موجود ہے۔ مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔ وقفہ I پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہذا ایسی صورت میں مساوات کا کوئی نادر¹⁴ حل موجود نہیں ہے (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور مخصوص حل
 $\cos 2x$ اور $\sin 2x$ تمام x پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات $y'' + 4y = 0$ کے حل کی اساس ہیں۔ ایسا اس لئے ہے کہ $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq c$ اور $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \neq c$ ہیں جہاں c مستقل ہے۔ اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے مخصوص حل $y = 5 \cos 2x - 1.5 \sin 2x$ حاصل کیا گیا تھا۔ □

مثال 2.5: پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ سادہ تفرقی مساوات $y'' - 4y = 0$ کے حل ہیں۔ یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

حل: چونکہ $y_2'' - 4y_2 = (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} = 4e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0$ اور $y_1'' - 4y_1 = (e^{2x})'' - 4e^{2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ ہیں لہذا $4e^{-2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ چونکہ $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} \neq c$ ہے جہاں c مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں e^{2x} اور e^{-2x} پورے x پر حل کا اساس ہے۔ اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔
 $y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2$, $y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$, $y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1$
 دو عدد ہمزاد مساوات¹⁵ $c_1 + c_2 = 2$ اور $2c_1 - 2c_2 = 1$ کو آپس میں حل کرتے ہوئے $c_1 = \frac{3}{4}$ اور $c_2 = \frac{5}{4}$ ملتے ہیں جس سے مخصوص حل لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

□

ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

بعض اوقات ایک حل با آسانی حاصل ہو جاتا ہے۔ دوسرا خطی طور غیر تابع حل ایک درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کو تخفیف درجہ¹⁶ کی ترکیب¹⁷ کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی مثال دیکھنے کے بعد اس کی عمومی اطلاق پر غور کرتے ہیں۔

مثال 2.6: ایک حل جانتے ہوئے تخفیف درجہ۔ اساس
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات کے اساس حل دریافت کریں۔

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

کل: دیے گئے مساوات کے معائنے سے ایک حل $y_1 = x$ لکھا جاسکتا ہے چونکہ یوں $y_1'' = 0$ ہو گا لہذا تفرقی مساوات کا پہلا جزو صفر ہو جاتا ہے اور $y_1' = 1$ ہو گا جس سے مساوات کے دوسرے اور تیسرے اجزاء کا مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس ترکیب میں دوسرے حل کو $y_2 = uy_1$ لکھ کر دیے گئے تفرقی مساوات میں

$$y_2 = uy_1 = ux, \quad y_2' = u'x + u, \quad y_2'' = u''x + 2u'$$

پر کرتے ہیں۔

$$x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$

درج بالا کو ترتیب دیتے ہوئے xu اور $-xu$ آپس میں کٹ جاتے ہیں اور $x^3u'' + x^2u' = 0$ رہ جاتا ہے جس کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xu'' + u' = 0$$

ملتا ہے۔ اس میں $u' = v$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہیں۔

$$xv' + v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}$$

¹⁶reduction of order

¹⁷یہ ترکیب یوسف لونی لکیرٹ (1736-1813) نے دریافت کی۔

اس میں واپس $v = u'$ پر کرتے ہوئے مکمل سے u حاصل کرتے ہیں۔

$$v = u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x|$$

یوں $y_2 = x \ln|x|$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ y_1 اور y_2 کا حاصل تقسیم مستقل نہیں ہے لہذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں اساس حل $y_1 = x$ ، $y_2 = x \ln|x|$ ہے۔ دونوں بار مکمل لیتے ہوئے مکمل کا مستقل نہیں لکھا گیا چونکہ ہمیں اساس درکار ہے۔ عمومی مساوات لکھتے وقت مستقل لکھنا ضروری ہوگا۔ □

اس مثال میں ہم نے تخفیف درجہ کی ترکیب متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.14) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

پر استعمال کی۔ درج بالا مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں پہلا جزو y'' ہے جس کا عددی سرکائی کے برابر ہے۔ نیچے اخذ کلیات مساوات کی معیاری صورت کے لئے حاصل کئے گئے ہیں۔ تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر ہمیں مساوات 2.14 کا ایک عدد حل y_1 معلوم ہے اور ہم حل کا اساس جاننا چاہتے ہیں۔ اس کی خاطر ہمیں I پر خطی طور غیر تابع دوسرا حل y_2 درکار ہے۔ دوسرا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$y = y_2 = uy_1, \quad y' = y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

کو مساوات 2.14 میں پر کرتے ہوئے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0$$

u'' ، u' اور u کے عددی سراکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

چونکہ y_1 مساوات 2.14 کا حل ہے لہذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے لہذا

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $u' = v$ پر کرنے سے تخفیف شدہ¹⁸ ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p \right) v = 0$$

علیحدگی متغیرات کے بعد مکمل لینے سے

$$\frac{dv}{v} = - \left(\frac{2y'_1}{y_1} + p \right) dx, \quad \ln|v| = -2 \ln|y_1| - \int p dx$$

یعنی

$$(2.15) \quad v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx}$$

ملتا ہے۔ چونکہ $v = u'$ کے برابر ہے لہذا دوسرا حل

$$(2.16) \quad y_2 = y_1 u = y_1 \int v dx$$

ہو گا۔ حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = u = \int p dx$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا چونکہ $v > 0$ ہے لہذا y_1 اور y_2 اساس حل ہیں۔

متجانس خطی دو درجی مساوات سے ایک درجی مساوات کا حصول ہم دیکھ چکے۔ انہیں تخفیف درجہ کے دو مثال دیکھیں جو خطی مساوات اور غیر خطی مساوات پر لاگو کی جاسکتی ہیں۔

مثال 2.7: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں y صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ y صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا اس کو $F(x, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں جس میں $z = y'$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(x, z, z')$ حاصل ہوتی ہے۔ ایک درجی مساوات کے حل کے مکمل سے y حاصل ہو گا۔ \square

مثال 2.8: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں x صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ x صریحاً نہیں پایا جاتا لہذا اس کو $F(y, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں۔ ہم $z = y' = \frac{dy}{dx}$ لیتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق¹⁹ سے

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z}$$

¹⁹chain rule of differentiation

یعنی

$$y'' = z \frac{dz}{dy}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ z اور z_y کو دیے مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(y, z, z_y)$ ملتی ہے جس کا آزاد متغیر y ہے۔

□

سوالات

سوال 2.1 تا سوال 2.7 سے ایک درجی مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.1:

$$y'' - y' = 0$$

جواب: $y = c_1 e^x + c_2$

سوال 2.2:

$$xy'' + y' = 0$$

جواب: $y = c_1 \ln|x| + c_2$

سوال 2.3:

$$xy'' - 2y' = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2$

سوال 2.4:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

2.1. متجانب خطی دودرجی تفرقی مساوات

جواب: $y = c_2 e^{c_1 x}$

سوال 2.5:

$$y'' - (y')^3 \cos y = 0$$

جواب: $\cos y + c_1 y = x + c_2$

سوال 2.6:

$$y'' - (y')^2 \cos y = 1$$

جواب: $y = \ln \sec(x + c_1) + c_2$

سوال 2.7:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x^2$$

جواب: $y = c_1 x^2 + c_2 x$

قابل تخفیف سادہ تفرقی مساوات کے استعمال سوالات 2.8 تا سوال 2.11 دیتے ہیں۔

سوال 2.8: منحنی

کارٹیسسی محدود کے مبدا سے گزرتی منحنی $y'' + y' = 0$ کی مبدا پر ڈھلوان اکائی کے برابر ہے۔ منحنی کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $y = 1 - e^{-x}$

سوال 2.9: لیزم

دو مقررہ نقاط سے لٹکی ہوئی زنجیری ڈوری سے بننے والا خم لیزم²⁰ کہلاتا ہے جسے مساوات $y'' = k\sqrt{1+y'^2}$ کے حل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مستقل k کی قیمت ڈوری کی تناؤ اور کمیت پر منحصر ہے۔ ڈوری نقطہ $(1, 0)$ اور $(-1, 0)$ سے لٹکی ہوئی ہے۔ $k = 1$ تصور کرتے ہوئے لیزم کی مساوات حاصل کریں۔

²⁰catenary

جواب: زنجیر کے وسط یعنی $x = 0$ پر ڈھلوان صفر کے برابر ہے۔ یوں $y = -1 + \cosh x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 2.10: حرکت

ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع اور رفتار میں فرق ایک مثبت مستقل k کے برابر رہتی ہے۔ فاصلہ $y(t)$ ابتدائی رفتار u اور ابتدائی فاصلہ y_0 پر کس طرح منحصر ہے؟

جواب: $y = (k + u)e^t + (y_0 - u) - k(t + 1)$

سوال 2.11: حرکت

ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع کی قیمت رفتار کی قیمت کے مربع کے برابر رہتی ہے۔ فاصلے کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $t = c_1 - \ln(t + c_2)$

سوال 2.12 تا سوال 2.15 میں ثابت کریں کہ دیے گئے تقاضے خطی طور پر تابع ہیں اور یوں یہ حل کی اساس ہیں۔ ان ابتدائی قیمت سوالات کے حل لکھیں۔

سوال 2.12:

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2; \quad \cos 3x \sin 3x$$

جواب: $y = 5 \cos 3x - \frac{2}{3} \sin 3x$

سوال 2.13:

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1; \quad e^x, xe^x$$

جواب: $y = e^{x-1}(x - 1)$

سوال 2.14:

$$x^2 y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 3.2, \quad y'(1) = -1.5; \quad x, x \ln x$$

جواب: $y = \frac{16}{5}x - \frac{47}{10}x \ln x$

سوال 2.15:

$$y'' + 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3; \quad e^{-x} \cos \sqrt{2}x, e^{-x} \sin \sqrt{2}x$$

جواب: $y = e^{-x}(2 \cos \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x)$

2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب ایسے دو درجی متجانس تفرقی مساوات پر بات کرتے ہیں جن کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہیں۔

$$(2.17) \quad y'' + ay' + b = 0$$

یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔ قوت نمائی تفاعل $y = e^{-kx}$ کے تفرق سے $y' + ky = 0$ یعنی $y' = -ke^{-kx} = -ky$ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔ یوں $y' + ky = 0$ کا حل $y = e^{-kx}$ ہے۔ اس کو دیکھتے ہوئے ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ آیا مساوات 2.17 کا حل

$$(2.18) \quad y = e^{\lambda x}$$

ممکن ہے یا نہیں۔ یہ جاننے کی خاطر $y = e^{\lambda x}$ اور اس کے تفرق

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

کو مساوات 2.17 میں پر کرتے ہیں۔

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

کسی بھی محدود قیمت کے λ اور x کے لئے $e^{\lambda x}$ صفر نہیں ہوگا لہذا اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب λ امتیازی مساوات²¹

$$(2.19) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

کا جذر ہو۔ اس دو درجی الجبرائی مساوات²² کو حل کرتے ہیں۔

$$(2.20) \quad \lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

یوں مساوات 2.17 کے حل

$$(2.21) \quad y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

ہوں گے۔ انہیں مساوات 2.17 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہی تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

دو درجی الجبرائی مساوات 2.19 کے جذر کی تین ممکنہ قیمتیں ہیں جو $a^2 - 4b$ کی علامت (\mp) پر منحصر ہیں۔

characteristic equation²¹
quadratic equation²²

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر $a^2 - 4c > 0$

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر $a^2 - 4c = 0$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر $a^2 - 4c < 0$

آئیں ان تین صورتوں پر باری باری غور کریں۔

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر

اس صورت میں، چونکہ y_1 اور y_2 کسی بھی وقفے I پر معین ہیں (اور حقیقی ہیں) اور ان کا حاصل تقسیم مستقل قیمت نہیں ہے لہذا کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$(2.22) \quad y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

ہو گا۔ یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.23) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

مثال 2.9: دو حقیقی منفرد جذر

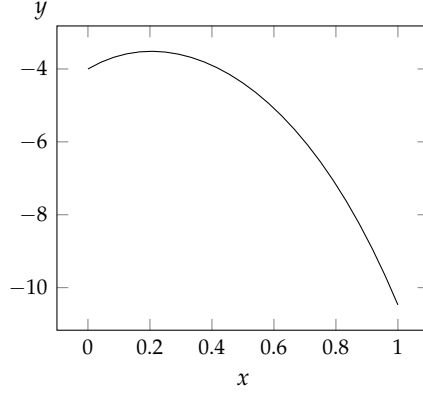
مساوات $y'' - 4y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 - 4 = 0$ ہے جس کے جذر $\lambda_1 = +2$ اور $\lambda_2 = -2$ دو منفرد قیمتیں ہیں۔ یوں حل کا اساس $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ ہے جن سے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ لکھا جاسکتا ہے۔ \square

مثال 2.10: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ دو حقیقی منفرد جذر
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + y' - 6 = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$$

حل: امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$



شکل 2.2: مثال 2.10 کا مخصوص حل۔

جس کے جذر

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+24}}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+24}}{2} = -3,$$

ہیں۔ ان سے اساس حل $y_1 = e^{2x}$ ، $y_2 = e^{-3x}$ ملتا ہے جس سے عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$ ہے لہذا

$$y(0) = c_1 + c_2 = -4$$

$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 5$$

لکھا جائے گا۔ ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{7}{5}$ اور $c_2 = -\frac{13}{5}$ ملتا ہے جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = -\frac{7}{5}e^{2x} - \frac{13}{5}e^{-3x}$$

□

مخصوص حل کو شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے جو ابتدائی قیمتوں پر پورا اترتا ہے۔

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر

اگر $a^2 - 4c = 0$ ہو تب مساوات 2.20 سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ ملتا ہے جو واحد حل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$$

دیتا ہے۔ ہمیں اساس کے لئے دو حل درکار ہیں۔ دوسرا حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جائے گا۔ اس ترکیب پر بحث ہو چکی ہے۔ یوں ہم دوسرا حل $y_2 = uy_1$ تصور کرتے ہیں۔ مساوات 2.17 میں

$$y_2 = uy_1, \quad y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$(2.24) \quad u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے۔ اب پہلی قوسین پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ لہذا $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$ ہو گا۔ ان قیمتوں کو پہلی قوسین میں پر کرتے

$$2y_1' + ay_1 = 2(-\frac{a}{2}y_1) + ay_1 = 0$$

ہوئے یہ قوسین بھی صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے۔ یوں مساوات 2.24 سے $u''y_1 = 0$ یعنی $u'' = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ دو مرتبہ مکمل لیتے ہوئے $u = c_1x + c_2$ ملتا ہے۔ دوسرا خطی طور غیر تابع حل $y_2 = uy_1$ حاصل کرتے ہوئے ہم $c_1 = 1$ اور $c_2 = 0$ چن سکتے ہیں جن سے $u = x$ اور $y_2 = xy_1$ حاصل ہوتے ہیں۔ چونکہ y_1 اور حاصل کردہ $y_2 = xy_1$ کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہذا یہ دونوں خطی طور غیر تابع ہیں اور انہیں اساس لیا جاسکتا ہے۔ یوں دوہرے جذر کی صورت میں کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

اور عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.25) \quad y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

مثال 2.11: دوہرے جذر کی صورت میں عمومی حل
 سادہ تفرقی مساوات $y'' + 10y' + 25 = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ ہے جس کو
 $(\lambda + 5)^2 = 0$ لکھ کر دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات کے حل کا اساس
 $y_1 = e^{-5x}$ ، $y_2 = xe^{-5x}$ اور اس کا عمومی حل $y = (c_1 + c_2x)e^{-5x}$ ہے۔

□

مثال 2.12: دوہرے جذر کی صورت میں مخصوص حل کا حصول
 دیے گئے تفرقی مساوات کا مخصوص حل دریافت کریں۔

$$y'' + 0.2y' + 0.01y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = -4$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.01 = 0$ یعنی $(\lambda + 0.1)^2 = 0$ سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.1$
 دوہرا جذر حاصل ہوتا ہے جس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل کا جذر لکھتے ہیں جو مخصوص حل کے حصول میں درکار ہے۔

$$y' = c_2e^{-0.1x} - 0.1(c_1 + c_2x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 = 10$$

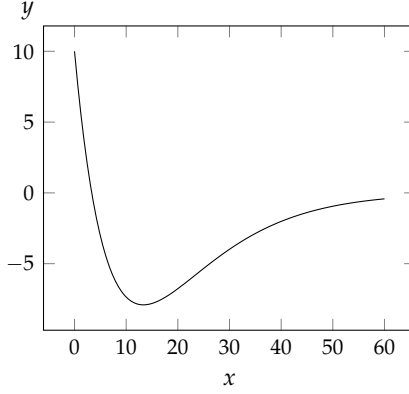
$$y'(0) = c_2 - 0.1c_1 = -4, \quad c_2 = -3$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (10 - 3x)e^{-0.1x}$$

□

مخصوص حل کو شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.3: مثال 2.12 کا مخصوص حل۔

تیسری صورت: مخلوط جوڑی دار جذر

اتنازی مساوات 2.19 میں $a^2 - 4c$ کی قیمت منفی ہونے کی صورت میں مخلوط جوڑی دار جذر $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$ ملتے ہیں جہاں $\omega^2 = b - \frac{a^2}{4}$ کے برابر ہے۔ ان سے مخلوط اساس لکھتے ہیں۔

$$(2.26) \quad y_{m1} = e^{(-\frac{a}{2} + i\omega)x}, \quad y_{m2} = e^{(-\frac{a}{2} - i\omega)x}$$

اس مخلوط اساس سے حقیقی اساس حاصل کیا جائے گا۔ ایسا کرنے کی خاطر ریاضی کے چند کلیات پر غور کرتے ہیں۔ تفاعل e^z ، جہاں $z = x + iy$ مخلوط عدد ہے جبکہ x اور y حقیقی اعداد ہیں، کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

e^{iy} کی مکلاون تسلسل 23 لکھ کر حقیقی اجزاء اور خیالی اجزاء کو علیحدہ علیحدہ قوسین میں اکٹھے کرتے ہیں۔ یہاں $i^4 = 1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^2 = -1$ لئے گئے ہیں۔

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + \dots\right) + i \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \dots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

آخری قدم پر آپ تسلی کر لیں کہ پہلی قوسین $\cos y$ کی مکملان تسلسل دیتی ہے جبکہ دوسری قوسین $\sin y$ کی مکملان تسلسل دیتی ہے۔ آپ اس کتاب میں آگے پڑھیں گے کہ درج بالا تسلسل میں اجزاء کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔ یوں ہم یولر مساوات²⁴

$$(2.27) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$(2.28) \quad e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y$$

مساوات 2.27 اور مساوات 2.28 کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$(2.29) \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

ہو گا۔ یہ سب جاننے کے بعد آئیں مساوات 2.26 میں دیے مخلوط اساس پر دوبارہ غور کریں۔

$$y_{m1} = e^{(-\frac{a}{2} + i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x} (\cos \omega x + i \sin \omega x)$$

$$y_{m2} = e^{(-\frac{a}{2} - i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{-i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x} (\cos \omega x - i \sin \omega x)$$

چونکہ اساس کے اجزاء کو مستقل (حقیقی یا خیالی یا مخلوط) سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے نیا حل حاصل کیا جاسکتا ہے لہذا ہم درج بالا دونوں اجزاء کو مستقل $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے ایک نیا اور حقیقی حل y_1 دریافت کرتے ہیں۔

$$y_1 = \frac{1}{2}y_{m1} + \frac{1}{2}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x$$

اسی طرح مخلوط اساس کے پہلے جزو کو مستقل $\frac{1}{2i}$ اور دوسرے جزو کو مستقل $-\frac{1}{2i}$ سے ضرب دیتے ہوئے جمع کر کے نیا اور حقیقی حل y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y_2 = \frac{1}{2i}y_{m1} - \frac{1}{2i}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$$

درج بالا حاصل کردہ حقیقی تفاعل

$$(2.30) \quad y_1 = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x \quad y_2 = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$$

کو از خود حل کا اساس تصور کیا جا سکتا ہے۔ یہاں غور کریں کہ ہم نے مخلوط جذر $\lambda = (-\frac{a}{2} \pm i\omega)x$ سے حقیقی اساس (مساوات 2.30) حاصل کیا ہے۔ اس حقیقی اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.31) \quad y = e^{-\frac{a}{2}x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$$

مثال 2.13: مخلوط جذر، ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + 0.36y' + 9.0324y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.36\lambda + 9.0324 = 0$ کے مخلوط جذر $\lambda = -0.18 \pm i3$ ہیں لہذا عمومی حل

$$y = e^{-0.18x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

ہو گا۔ مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر c_1 اور c_2 درکار ہیں جنہیں عمومی مساوات میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ پہلے ابتدائی معلومات سے

$$y(0) = e^0 (c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 0, \quad c_1 = 0$$

ملتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق

$$y' = -0.5e^{-0.5x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-0.5x} (-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x)$$

میں دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

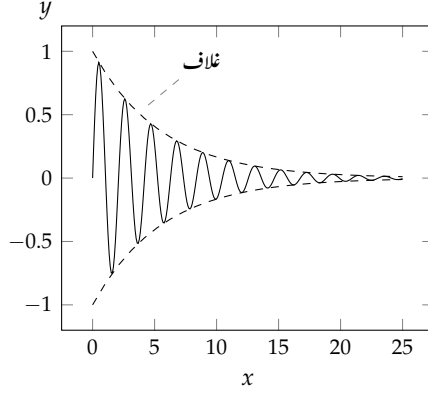
$$y' = -0.5e^0 (0 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^0 (0 \sin 0 + 3c_2 \cos 0) = 3, \quad c_2 = 1$$

ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-0.18x} \sin 3x$$

شکل 2.4 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ، نقطہ دار لکیروں سے، سائن نمائندگی کے مثبت چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف²⁵ $e^{-0.18x}$ اور منفی چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف $-e^{-0.18x}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ مخصوص حل (x کو t لیتے ہوئے) قصری ارتعاش²⁶ کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر y فاصلے کو ظاہر کرتی ہو تب یہ میکانی قصری ارتعاش ہوگی اور اگر y برقی رویا برقی دباؤ ہو تب یہ برقی قصری ارتعاش ہوگی۔

²⁵envelope
²⁶damped oscillations



شکل 2.4: مثال 2.13 کا مخصوص حل۔

جدول 2.1: تین صورتوں کی تفصیل

صورت	مساوات 2.19 کے جذر	مساوات 2.17 کی اساس	مساوات 2.17 کا عمومی حل
پہلی	منفرد حقیقی λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
دوسری	دوہرہ جذر $\lambda = -\frac{a}{2}$	$x e^{-\frac{a}{2} x}, e^{-\frac{a}{2} x}$	$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{a}{2} x}$
تیسری	جوڑی دار مخلوط $\lambda = -\frac{a}{2} \pm i\omega$	$e^{-\frac{a}{2} x} \cos \omega x, e^{-\frac{a}{2} x} \sin \omega x$	$y = e^{-\frac{a}{2} x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$

□

مثال 2.14: مخلوط جذر
سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad (\omega \text{ غیر صفر مستقل ہے})$$

کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$$

□

جدول 2.1 میں درج بالا تین صورتوں کی تفصیل اکٹھی کی گئی ہے۔ یہ تین اقسام میکانی ارتعاش یا برقی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہیں۔ آپ تفرقی مساوات کی قوت یہاں سے جان سکتے ہیں۔ آپس میں بالکل مختلف میدانوں (مثلاً میکانی اور برقی) کے مسائل ایک طرز کی تفرقی مساوات سے ظاہر کئے جاسکتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.16 تا سوال 2.24 کے عمومی حل حاصل کریں۔ انہیں واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ان کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 2.16:

$$y'' + 4y = 0$$

جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

سوال 2.17:

$$4y'' - 9y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.18:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

سوال 2.19:

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-\pi x}$

سوال 2.20:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$

سوال 2.21:

$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{3}{2}x}$

2.2. مستقل عددی سروا لے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

سوال 2.22:

$$4y'' + 4y' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.23:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

سوال 2.24:

$$9y'' - 30y' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{5}{3}x}$

سوال 2.25 تا سوال 2.29 میں اساس سے تفرقی مساوات $y'' + ay' + by = 0$ حاصل کریں۔

سوال 2.25:

$$e^{0.2x}, \quad e^{-0.5x}$$

جواب: $y'' + 0.3y' - 0.1y = 0$

سوال 2.26:

$$e^{-0.66x}, \quad e^{-0.32x}$$

جواب: $y'' + 0.98y' + 0.2112y = 0$

سوال 2.27:

$$\cos(4\pi x), \quad \sin(4\pi x)$$

جواب: $y'' + 16\pi^2 y = 0$

سوال 2.28:

$$e^{(-2+i3)x}, \quad e^{(-2-i3)x}$$

$$y'' + 4y'' + 13y = 0 \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.29:

$$e^{-1.7x} \cos 6.2x, \quad e^{-1.7x} \sin 6.2x$$

$$y'' + 3.4y'' + 41.33y = 0 \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.30 تا سوال 2.37 ابتدائی قیمت سوالات ہیں۔ ان کے مخصوص حل دریافت کریں۔

سوال 2.30:

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$$

$$y = 5 \cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.31:

$$y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

$$y = 0.7e^{5x} + 1.3e^{-5x} \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.32:

$$y'' - y'' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y = \frac{1}{5}(e^{3x} - e^{-2x}) \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.33:

$$4y'' + 4y'' + 37y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \sin 3x \quad \text{جواب:}$$

سوال 2.34:

$$9y'' + 12y' + 49y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

$$\text{جواب: } y = e^{-\frac{2}{3}x} \left(2 \cos \sqrt{5}x + \frac{1}{3\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}x \right)$$

سوال 2.35:

$$y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$$

$$\text{جواب: } y = \frac{1}{40} e^{3x} \sin 4x$$

سوال 2.36:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$\text{جواب: } y = \cos x + \sin x$$

سوال 2.37:

$$8y'' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = 2.2, \quad y'(0) = 3.4$$

$$\text{جواب: } y = \frac{79}{15} e^{\frac{x}{2}} - \frac{46}{15} e^{-\frac{x}{4}}$$

عمومی حل کے حصول میں خطی طور غیر تابع تفاعل نہایت اہم ہیں۔ صرف ایسے تفاعل سے اساس حاصل ہوتا ہے۔ دیے وقت پر سوال 2.38 تا سوال 2.42 میں دیے تفاعل میں خطی طور تابع اور غیر تابع کی نشاندہی کریں۔

سوال 2.38:

$$\cos kx, \quad \sin kx, \quad -\infty < x < \infty$$

جواب: چونکہ $\frac{\sin kx}{\cos kx}$ کی قیمت x تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتی ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 2.39:

$$e^{kx}, \quad e^{-kx} \quad -\infty < x < \infty$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.40:

$$x, \quad x^2 \quad x > 1$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.41:

$$x \ln x, \quad x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.42:

$$x \ln x, \quad x \ln x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور تابع

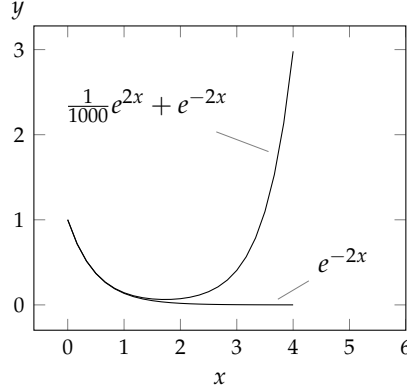
سوال 2.43: غیر مستحکم صورت حال

ابتدائی قیمت مسئلہ $y'' - 4y = 0$ میں ابتدائی قیمتیں $y(0) = 1$ اور $y'(0) = -2$ لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔ مخصوص حل کو دوبارہ ابتدائی معلومات $y(0) = 1.001$ اور $y'(0) = -1.998$ کے لئے حاصل کریں۔

جوابات: $y = e^{-2x}$ اور $y = \frac{1}{1000}e^{2x} + e^{-2x}$ ؛ شکل 2.5 میں دونوں حل دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ابتدائی قیمتوں میں انتہائی کم فرق حل پر بہت زیادہ اثر ڈالتی ہیں۔ یہ غیر مستحکم²⁷ صورت کو ظاہر کرتی ہے۔ زلزلے میں غیر مستحکم عمارتیں انہیں وجوہات پر ڈھیر ہوتی ہیں۔ فضا میں ہوا کا دباؤ، درجہ حرارت اور نمی کی تناسب بھی غیر مستحکم صورت پیدا کرتے ہوئے تباہ کن آندھیوں کا سبب بنتی ہیں۔

سوال 2.44: استمراری مساوات کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = 3$ ہیں۔ مساوات 2.17 حاصل کریں۔

$$y'' - y' - 6y = 0 \quad \text{جواب:}$$



شکل 2.5: سوال 2.43 کے منحنی حل۔

سوال 2.45: استمراری مساوات کے جذر λ_1 اور λ_2 ہیں۔ مساوات 2.17 میں a اور b حاصل کریں۔
یوں جذر جانتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$\text{جواب: } b = \lambda_1 \lambda_2, \quad a = -\lambda_1 - \lambda_2$$

سوال 2.46: تفرقی مساوات $y'' + ky' = 0$ کو موجودہ طریقے سے حل کریں۔ اسی کو تخفیف درجہ کی ترکیب سے بھی حل کریں۔ دونوں جواب کیوں یکساں ہونا ضروری ہے۔

$$\text{جواب: } y = c_1 + c_2 e^{-kx} \text{؛ یکتائیت۔}$$

سوال 2.47: دوہرا جذر کو منفرد λ_1 اور λ_2 کی وہ صورت تصور کی جاسکتی ہے جب $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ ہو۔
 $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ لیتے اور ایک حل $e^{\lambda_1 x}$ = لیتے ہوئے اساس کا دوسرا رکن $x e^{\lambda_1 x}$ تلاش کریں۔

حل: دوسرا حل $e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1 + \Delta\lambda)x} = e^{\lambda_1 x} e^{\Delta\lambda x}$ ہے۔ $e^{\Delta\lambda x}$ کا مکلا رن تسلسل لیتے ہوئے $\Delta\lambda \rightarrow 0$ کی بنا صرف پہلے دو ارکان لیتے ہیں۔ یوں $e^{\Delta\lambda x} = 1 + \frac{\Delta\lambda x}{1!} + \frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!} + \dots \approx 1 + \Delta\lambda x$ ہو گا اور
 $e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} + \Delta\lambda x e^{\lambda_1 x}$ لکھا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ $e^{\lambda_1 x}$ پہلے سے اساس کا حصہ ہے لہذا اساس کا دوسرا رکن $x e^{\lambda_1 x}$ ہو گا جہاں $\Delta\lambda$ کو مستقل تصور کرتے ہوئے رد کیا جاتا ہے

2.3 تفرقی عامل

آپ $y = \sin x$ یا $y = \frac{df(x)}{dx}$ کے عمل سے بخوبی واقف ہیں۔ پہلی مثال میں کسی مقدار یا تفاعل x پر عامل \sin عمل کرتے ہوئے ایک نیا تفاعل دیتا ہے۔ یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ عامل \sin تفاعل x کے نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ سے مبدل تفاعل y کا نقطہ $y = 1$ دیتا ہے۔ اسی طرح عامل $\frac{d}{dx}$ تفاعل x^3 پر عمل کرتے ہوئے تفاعل $3x^2$ دیتا ہے۔

یہ بتلاتا چلوں کہ ریاضیات اور طبیعیات میں عامل کا استعمال نہایت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ یہاں بالخصوص کوانٹم میکانیات²⁹ کا ذکر کرنا لازم جہاں عامل کا استعمال کثرت سے کیا جاتا ہے۔

اس کتاب میں ہم صرف تفرقی عامل³⁰ D پر بحث کریں گے جہاں $D = \frac{d}{dx}$ ہے۔ یوں ایک درجی تفرق

$$(2.32) \quad Dy = y' = \frac{dy}{dx}$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح دو درجی تفرق $D^2y = D(Dy) = y''$ اور تین درجی تفرق $D^3y = y'''$ لکھا جائے گا۔ اس طرح $D \sin x = \cos x$ اور $D^2 \sin x = -\sin x$ ہو گا۔

خطی متجانس مساوات $y'' + ay' + by = 0$ جہاں a اور b مستقل مقدار ہیں میں دو درجی تفرقی عامل

$$L = P(D) = D^2 + aD + bI$$

متعارف کرتے ہیں جہاں I مماثلی عامل³¹ ہے جس کی تعریف $Iy = y$ ہے۔ اس طرح دیے گئے تفرقی مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(2.33) \quad Ly = P(D)y = (D^2 + aD + bI)y = 0$$

L خطی عامل اور P کثیر رکنی³² ہے۔ یوں اگر Lw اور Ly پائے جاتے ہوں (یعنی w اور y دو مرتبہ قابل تفرق ہوں) تب $L(cy + kw)$ بھی پایا جاتا ہے جہاں c اور k کوئی مستقل ہیں۔ مزید درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(2.34) \quad L(cy + kw) = cLy + kLw$$

operator²⁸
quantum mechanics²⁹
differential operator³⁰
identity operator³¹
polynomial³²

چونکہ $De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ اور $D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ہیں لہذا

$$\begin{aligned} Le^{\lambda x} &= (D^2 + aD + bI)e^{\lambda x} \\ (2.35) \quad &= (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ حصہ 2.2 میں بھی ہم نے یہی نتیجہ اخذ کیا تھا کہ $e^{\lambda x}$ صرف اور صرف اس صورت اس تفرقی مساوات کا حل ہو گا اگر λ امتیازی مساوات $P(\lambda) = 0$ کا جذر ہو۔

یہاں دلچسپ بات یہ ہے کہ $P(\lambda)$ عام الجبرائی کثیر رکنی ہے جس کی تجزیہ³³ کی جاسکتی ہے۔ λ کی جگہ D پر کرنے سے کثیر رکنی عامل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.15: تفرقی مساوات کا حل بذریعہ تجزیہ
کثیر رکنی $P(D) = D^2 + 4D - 21I$ کی تجزیہ سے $P(D) = 0$ کو حل کریں۔

حل: $I^2 = 1$ لیتے ہوئے $D^2 + 4D - 21I = (D - 3)(D + 7)$ لکھا جاسکتا ہے۔ اب $(D - 3)y = y' - 3y = 0$ کا حل $y_1 = e^{3x}$ اور $(D + 7)y = y' + 7y = 0$ کا حل $y_2 = e^{-7x}$ ہے۔ یہ جوابات کسی بھی وقفے پر حل کی اساس ہیں۔ انہیں تفرقی مساوات حاصل کریں۔

$$(D - 3)(D + 7)y = (D - 3)(y' + 7y) = y'' + 7y' - 3y' - 21y = y'' + 4y' - 21y = 0$$

□

مساوات 2.33 میں کثیر رکنی کے عددی سر مستقل مقدار ہیں۔ ایسی صورت میں تفرقی عامل کے استعمال سے تفرقی مساوات حل کرنا نہایت آسان ثابت ہوتا ہے۔ عددی سر مستقل نہ ہونے کی صورت میں تفرقی عامل کا استعمال نہایت پیچیدہ ثابت ہوتا ہے جس پر اس کتاب میں تبصرہ نہیں کیا جائے گا۔

اب تین اہم کلیات

$$\begin{aligned} D^s(xf) &= xD^s f + sD^{s-1}f \\ (2.36) \quad D^s(x^2f) &= x^2D^s f + 2sx D^{s-1}f + s(s-1)D^{s-2}f \\ D^s[(x^2 - 1)f] &= (x^2 - 1)D^s f + 2sx D^{s-1}f + s(s-1)D^{s-2}f \end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں جن کی ضرورت باب 5 میں پیش آئے گی۔

درج ذیل کو دیکھ کر

(2.37)

$$D^1(xf) = xD^1f + f$$

$$D^2(xf) = D^1[D^1(xf)] = D^1[xD^1f + f] = xD^2f + D^1f + D^1f = xD^2f + 2D^1f$$

$$D^3(xf) = D^1[D^2(xf)] = D^1[xD^2f + 2D^1f] = xD^3f + D^2f + 2D^2f = xD^3f + 3D^2f$$

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ درج ذیل درست ہو گا۔

(2.38)

$$D^s(xf) = xD^s f + sD^{s-1}f$$

اس کلیے کو الکراجی ماحوذ³⁴ کے ذریعہ ثابت کرتے ہیں۔ ہم نے مساوات 2.37 میں دیکھا کہ $s = 1$ اور $s = 2$ کے لئے یہ کلیہ درست ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ کلیہ $s - 1$ کے لئے بھی درست ہے لہذا

(2.39)

$$D^{s-1}(xf) = xD^{s-1}f + (s-1)D^{s-2}f$$

لکھنا درست ہو گا۔ اس پر D^1 کا اطلاق کرنے سے $D^s(xf)$ لکھتے ہوئے مساوات 2.36 میں دیے پہلے کلیے کو ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D^s(xf) &= D^1[D^{s-1}(xf)] = D^1[xD^{s-1}f + (s-1)D^{s-2}f] \\ &= xD^s f + D^{s-1}f + (s-1)D^{s-1}f \\ &= xD^s f + sD^{s-1}f \end{aligned}$$

اب مساوات 2.36 میں دیا ہوا دوسرا کلیہ ثابت کرتے ہیں۔ مساوات 2.36 کے پہلی کلیہ سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$D^s(xg) = xD^s g + sD^{s-1}g$$

جس میں $g = xf$ پر کرتے ہوئے کلیے کو ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D^s(x \cdot xf) &= xD^s[xf] + sD^{s-1}[xf] \\ &= x[xD^s f + sD^{s-1}f] + sD^{s-1}[xf] \\ &= x[xD^s f + sD^{s-1}f] + s[D^{s-1}f + (s-1)D^{s-2}f] \\ &= x^2D^s f + 2sxD^{s-1}f + s(s-1)D^{s-2}f \end{aligned}$$

آخر میں مساوات 2.36 کا تیسرا کلیہ ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D^s[(x^2 - 1)f] &= D^s[x^2f] - D^s[f] \\ &= x^2D^s f + 2sxD^{s-1}f + s(s-1)D^{s-2}f - D^s f \\ &= (x^2 - 1)D^s f + 2sxD^{s-1}f + s(s-1)D^{s-2}f \end{aligned}$$

induction³⁴

سوالات

سوال 2.48 تا سوال 2.52 دیے تفاعل پر دیا تفرقی عامل لاگو کریں۔

سوال 2.48:

$$D + 2I; \quad x^3, \quad \cos 5x, \quad e^{-kx}, \quad \cosh x$$

جوابات: $3x^2 + 2x^3$ ، $-5 \sin 5x + 2 \cos 5x$ ، $(2 - k)e^{-kx}$ ، $\sinh x + 2 \cosh x$

سوال 2.49:

$$D^2 - 3D; \quad 2x^4 - x, \quad 2 \sinh 2x - \cos 5x$$

جوابات: $24x^2 - 24x^3 + 3$ ، $-15 \sin 5x - 12 \cosh 2x + 25 \cos 5x + \sinh 2x$

سوال 2.50:

$$(D + 2I)^2; \quad e^{3x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $25e^{3x}$ ، $(12x + 8)e^{2x}$

سوال 2.51:

$$(D - 3I)^2; \quad e^{2x}, \quad xe^{3x}$$

جوابات: e^{2x} ، 0

سوال 2.52:

$$(D + I)(D - 2I); \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $-2e^{2x}$ ، $2(1 - x)e^{2x}$

سوال 2.53 تا سوال 2.57 کی تجزی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.53:

$$(D^2 - 9I)y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

سوال 2.54:

$$(D^2 + 4D + 4I)y = 0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے لہذا دوسرا حل $x e^{2x}$ لیتے ہوئے $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$ ملتا ہے۔

سوال 2.55:

$$(D^2 + 4D + 13I)y = 0$$

جواب: $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

سوال 2.56:

$$(4D^2 + 4D - 17I)y = 0$$

جواب: $y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

سوال 2.57:

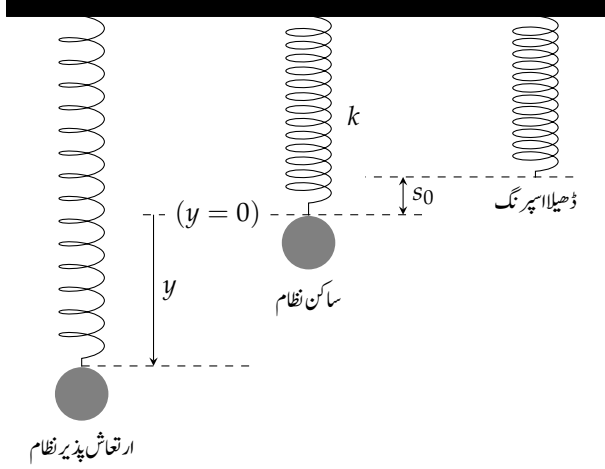
$$(9D^2 + 12D + 4I)y = 0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے۔ $y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{2}{3}x}$

2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش

مستقل قیمت کے عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات میکانی ارتعاش میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں اسپرنگ سے جڑی کمیت کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔ اس نظام کو اسپرنگ اور کمیت کا نظام کہا جائے گا جسے شکل 2.6 میں دکھایا گیا ہے۔

ایک عام اسپرنگ جو لمبائی میں اضافہ اور کمی کو روکتا ہو کو شکل 2.6 میں مستحکم سلاخ سے لٹکایا ہوا دکھایا گیا ہے۔ اس کی چلی سر سے کمیت m کی لوہے کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اس ساکن



شکل 2.6: اسپرنگ اور کمیت کا غیر قسری نظام۔

نظام میں اسپرنگ کے نچلے سر کو $y = 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ ہم نیچے رخ کو مثبت رخ تصور کرتے ہیں۔ یوں نیچے رخ قوت کو مثبت اور اوپر رخ قوت کو منفی تصور کیا جائے گا۔ اسی طرح مقام $y = 0$ سے نیچے رخ فاصلہ y مثبت ہو گا۔ مزید اسپرنگ کی کمیت کو گیند کی کمیت سے اتنا کم تصور کیا جاتا ہے کہ اسپرنگ کی کمیت کو درج ذیل تبصرے میں رد کیا جاسکتا ہے۔

ساکن حالت میں اسپرنگ پر نیچے رخ قوت mg عمل کرتا ہے جس سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ یہاں $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع اور mg گیند کا وزن ہے۔ اسپرنگ کی لمبائی میں اضافے کی وجہ سے، قانون ہک³⁵ کے تحت³⁶، اسپرنگ اوپر رخ بحالی قوت³⁷ $F_0 = -ks_0$ پیدا کرتا ہے جہاں k اسپرنگ مستقل³⁸ ہے جس کو kg s^{-2} یعنی Nm^{-1} میں ناپا جاتا ہے۔ بحالی قوت اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتا ہے۔ قوت mg مثبت رخ ہے لہذا اس کو مثبت لکھا گیا ہے جبکہ قوت $-ks_0$ منفی رخ ہے لہذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔ ان قوتوں کا مجموعہ صفر $mg - ks_0 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔ اگر ان قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر نہ ہوتا تو گیند ساکن نہ ہوتا بلکہ نیوٹن کے قانون $F = my''$ کے تحت حرکت کرتا۔ طاقتور اسپرنگ کے مستقل k کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ ان دونوں قوتوں کی مقدار گیند کی حرکت سے تبدیل نہیں ہوتی

³⁵Hooke's law

³⁶روبرٹ ہک (1635-1703) انگلستان کے ماہر طبیعیات تھے۔

³⁷restoring force

³⁸spring constant

لہذا ان کا مجموعہ ہر وقت صفر کے برابر ہو گا۔ یوں گیند کی حرکت میں ان دونوں قوتوں کا کوئی کردار نہیں ہے لہذا ان پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

فرض کریں کہ گیند کو نیچے رخ کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ شکل 2.6 میں گیند کو ساکن مقام سے لچاتی طور y فاصلے پر دکھایا گیا ہے۔ اس لمحہ اسپرنگ اضافی بحالی قوت $F_1 = -ky$ پیدا کرتا ہے جس کے تحت گیند نیوٹن کے قانون

$$(2.40)$$

$$F_1 = ma = my''$$

کے تحت حرکت کرے گا جہاں $y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}$ ہے۔

بلا تقصیر حرکت کی سادہ تفرقی مساوات

ہر نظام تقصیری ہوتا ہے ورنہ حرکت کبھی بھی نہ رکتی۔ نہایت کم تقصیری نظام جس کے حرکت کا مطالعہ نسبتاً کم دورانی کے لئے کیا جائے میں تقصیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں اس کو بلا تقصیر تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل 2.6 کا نظام بلا تقصیر نظام کی عمدہ مثال ہے۔ نیوٹن کے قانون کو بروئے کار لیتے ہوئے اس نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$(2.41)$$

$$my'' + ky = 0$$

یہ مستقل عددی سر والا خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ہے۔ امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$ ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.42)$$

$$y = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

اس حرکت کو ہارمونی ارتعاش³⁹ کہتے ہیں جس کی تعدد⁴⁰ $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ہوتی ہے⁴¹۔ تعدد f_0 کو نظام کی قدرتی تعدد⁴³ کہتے ہیں۔ چونکہ ایک سیکنڈ میں f_0 چکر (پھیرے) پورے ہوتے ہیں لہذا ایک چکر $\frac{1}{f_0}$ عرصے

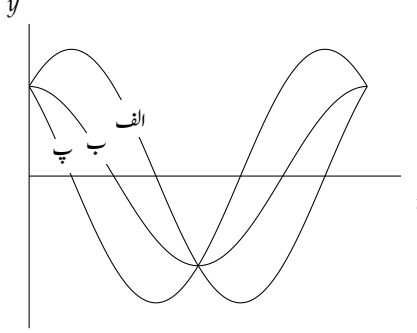
³⁹ harmonic oscillation

⁴⁰ frequency

⁴¹ Hertz

⁴² ہائزرک ہرٹز (1857-1894) جرمنی کے ماہر طبیعیات تھے جنہوں نے برقیاتی موج دریافت کئے۔

⁴³ natural frequency



شکل 2.7: مساوات 2.42 کے عمومی اشکال۔

میں پورا ہو گا۔ اس دورانیے کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو دوری عرصہ⁴⁴ کہتے ہیں۔

$$(2.43) \quad T = \frac{1}{f_0}$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{B}{A} \text{ اور } C = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ لیتے ہوئے مساوات 2.42 کو}$$

$$(2.44) \quad y = C \cos(\omega_0 t - \delta)$$

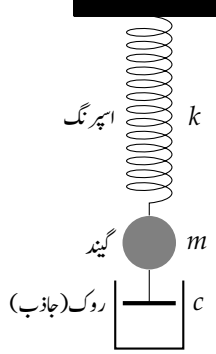
لکھا جاسکتا ہے جہاں C حیطہ⁴⁵ اور δ زاویائی فرق⁴⁶ کہلاتے ہیں۔

مساوات 2.42 (یعنی مساوات 2.44) کو شکل 2.7 میں دکھایا گیا ہے۔ دکھائے گئے تینوں منحنی میں ابتدائی فاصلہ $y(0) = A$ ہے جبکہ ابتدائی رفتار $y'(0) = \omega_0 B$ خط الف میں مثبت، ب میں صفر اور پ میں منفی ہے۔

مثال 2.16: ایک اسپرنگ سے 2 kg کیمت لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں 61.25 cm کا اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اس اسپرنگ سے کتنی کیمت لٹکانے سے ایک ہرٹز 1 Hz کا ارتعاش حاصل کیا جاسکتا ہے؟ ساکن حالت سے کیمت کو 10 cm نیچے کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ کیمت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قانون ہک کے تحت $mg = 0.6125k$ سے $k = \frac{2 \times 9.8}{0.6125} = 32 \text{ N m}^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔ ایک ہرٹز کی تعدد کے لئے $2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ سے $m = \frac{k}{(2\pi f_0)^2} = \frac{32}{(2\pi \times 1)^2} = 0.811 \text{ kg}$ حاصل ہوتا ہے۔

time period⁴⁴
amplitude⁴⁵
phase angle⁴⁶



شکل 2.8: اسپرنگ اور کمیت کا قسری نظام۔

مساوات 2.42 میں $y(0) = 0.10 \text{ m}$ اور $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $A = 0.1$ اور $B = 0$ حاصل ہوتا ہے لہذا حرکت کی مساوات $y = 0.1 \cos 2\pi t$ ہوگی۔ y کی قیمت میٹر میں ہوگی۔ □

قسری نظام کا سادہ تفرقی مساوات

شکل 2.8 میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک $F_3 = -cy'$ کا اضافہ کیا گیا ہے جو ہر لمحہ حرکت کے الٹ رخ عمل کرتی ہے۔ یوں $my'' = -ky - cy'$ لکھا جائے گا جس سے قسری نظام کی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.45) \quad my'' + cy' + ky = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ گیند کے ساتھ چادر منسلک کی گئی ہے جو ایک طرف سے بند نلکی میں حرکت کرتے ہوئے توانائی کا ضیاع اور یوں قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ اس حصے کو (توانائی کا) جاذب⁴⁷ بھی کہا جاتا ہے۔ اس سے قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ تجربے سے دیکھا گیا ہے کہ کم رفتار پر ایسی قوت رفتار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ c قسری مستقل⁴⁸ کہلاتا ہے۔ قسری مستقل از خود مثبت مستقل ہے۔ یوں نیچے رخ رفتار، یعنی مثبت رفتار، کی صورت میں قسری قوت منفی، یعنی اوپر رخ، ہوگی۔

⁴⁷ absorber
⁴⁸ damping constant

قصری نظام کی مساوات خطی متجانس ہے جس سے امتیازی مساوات (m سے تقسیم شدہ) لکھتے ہیں۔

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کے جذر لکھتے ہیں۔

$$(2.46) \quad \lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta \quad \text{جہاں} \quad \alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

تفصیل کی مقدار پر $c^2 - 4mk$ کی قیمت منحصر ہے جو تین مختلف صورتیں پیدا کرتی ہے۔

پہلی صورت: زیادہ تقصیر⁴⁹ دو منفرد حقیقی جذر $c^2 > 4mk$

دوسری صورت: فاصل تقصیر⁵⁰ دوہرا حقیقی جذر $c^2 = 4mk$

تیسری صورت: کم تقصیر⁵¹ جوڑی دار مخلوط جذر $c^2 < 4mk$

اس قسم کی تین صورتیں ہم صفحہ 95 پر پہلے دیکھ چکے ہیں۔

تین صورتوں کے حل

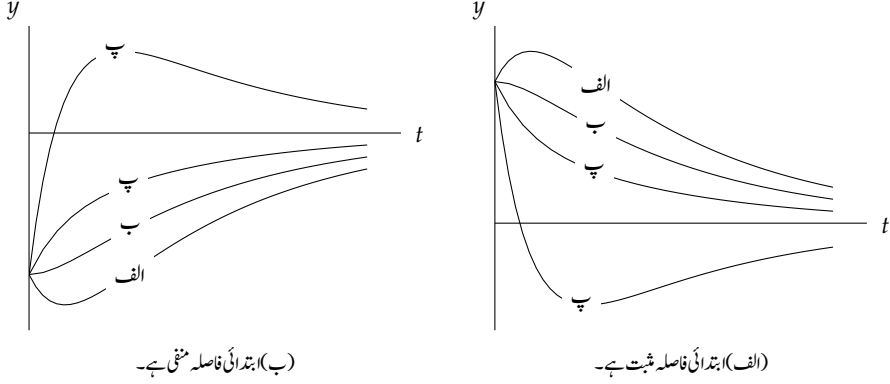
پہلی صورت

زیادہ تقصیر

پہلی صورت میں قصری قوت اتنا زیادہ ہے کہ $c^2 > 4mk$ ہے جس سے دو منفرد حقیقی جذر λ_1 اور λ_2 حاصل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.47) \quad y = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$$

over damping⁴⁹
critical damping⁵⁰
under damping⁵¹



شکل 2.9: تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

چونکہ $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ اور $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$ ہیں لہذا $\alpha - \beta$ اور $\alpha + \beta$ دونوں مثبت مقدار ہیں۔ یوں مساوات 2.47 میں دونوں قوت نمائی تفاعل کی طاقت منفی ہو گی اور دونوں تفاعل کی قیمتیں نہایت تیزی سے گھٹے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \rightarrow \infty$ پر $y(\infty) \rightarrow 0$ ہو گا یعنی گیند ساکن ہو گا۔ زیادہ قسری نظام میں قسری قوت اس تیزی سے نظام سے توانائی خارج کرتا ہے کہ نظام ارتعاش کرنے کے قابل نہیں رہتا۔

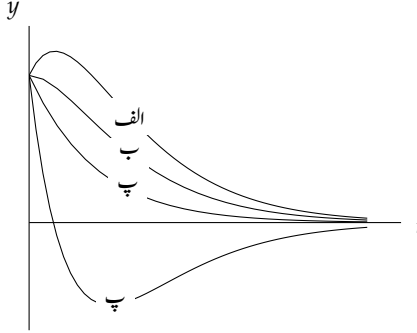
مساوات 2.47 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں ابتدائی فاصلہ مثبت ہے جبکہ شکل-ب میں ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔ شکل-الف میں خط الف مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔ شکل-ب میں خط الف منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تقصیری نظام میں ارتعاش ممکن نہیں ہے اور نظام میں حرکت بہت جلد ختم ہو جاتی ہے۔

دوسری صورت

فاصل تقصیر

زیادہ تقصیر اور کم تقصیر کے درمیان فاصل تقصیر کی صورت پائی جاتی ہے جہاں $c^2 = 4mk$ ہوتا ہے۔ یوں $\beta = 0$ اور امتیازی مساوات کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ پایا جاتا ہے۔ یوں مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(2.48) \quad y = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$$



شکل 2.10: فاصل تقصیری نظام میں حرکت بالقابل وقت۔

یہ مساوات ساکن مقام $y = 0$ سے صرف ایک مرتبہ گزر سکتی ہے۔ اس کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ $e^{-\alpha t}$ کبھی صفر یا منفی نہیں ہو سکتا جبکہ $c_1 + c_2 t$ صرف ایک صفر دیتا ہے۔ اگر c_1 اور c_2 دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $c_1 + c_2 t$ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اور y صفر سے کبھی نہیں گزرے گا۔

شکل 2.10 میں مساوات 2.48 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی فاصلہ مثبت لیا گیا ہے، خط الف میں ابتدائی رفتار مثبت، خط ب میں صفر اور دو عدد خط پ میں ابتدائی رفتار منفی لی گئی ہے۔ یہ خطوط شکل 2.9-الف سے مشابہت رکھتے ہیں۔ ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ موجودہ صورت منفرد حقیقی جذر کی وہ مخصوص صورت ہے جہاں دونوں جذر عین برابر ہوں۔

تیسری صورت

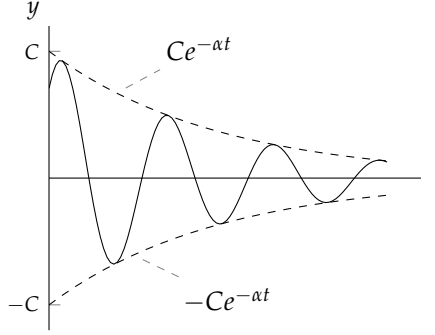
کم تقصیر

یہ سب سے زیادہ دلچسپ صورت ہے جہاں تقصیری مستقل کی قیمت اتنی کم ہے کہ $c^2 - 4mk < 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 2.46 میں β خیالی عدد ہوگا۔

$$(2.49) \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = i\omega \quad (\omega > 0)$$

امتیازی مساوات کے جذر جوڑی دار مخلوط اعداد ہوں گے

$$(2.50) \quad \lambda_1 = -\alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega$$



شکل 2.11: قصری ارتعاش۔

اور مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$(2.51) \quad y = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t - \delta)$$

جہاں $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$ ہیں۔

یہ قصری ارتعاش⁵² کو ظاہر کرتی ہے جس کو شکل 2.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اس منحنی کی چوٹیاں، نقطہ دار لکیر سے دکھائی گئیں، تفاعل $y = Ce^{-\alpha t}$ اور $y = -Ce^{-\alpha t}$ کے منحنی کو چھوتی ہے۔ ارتعاش کی تعدد $\frac{\omega}{2\pi}$ ہے جو قصری مستقل c کم کرنے سے بڑھتی ہے۔ قصری مستقل کی قیمت صفر کرنے سے مساوات 2.44 کی ہارمونی ارتعاش حاصل ہوتی ہے جس کی قدرتی تعدد $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ہو گی۔

مثال 2.17: تفصیری حرکت کے تین صورتیں

ایک اسپرنگ جس کا مستقل $k = 32 \text{ N kg}^{-1}$ ہے سے $m = 2 \text{ kg}$ کا گیند لٹکایا گیا ہے۔ اس نظام میں باری باری $c = 20 \text{ kg s}^{-1}$ ، $c = 16 \text{ kg s}^{-1}$ اور $c = 5 \text{ kg s}^{-1}$ تفصیری اثر شامل کیا جاتا ہے۔ ابتدائی معلومات $y(0) = 4 \text{ cm}$ اور $y'(0) = 0$ ہیں۔ گیند کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قوت روک نظام میں توانائی کے ضیاع کو ظاہر کرتی ہے جس سے مسلسل گھٹتی ارتعاش (پہلی صورت) یا غیر ارتعاشی حرکت (دوسری اور تیسری صورت) پیدا ہوتی ہے۔

پہلی صورت: $m = 2$ ، $k = 32$ اور $c = 20$ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے

$$2y'' + 20y' + 32y = 0, \quad y(0) = 0.04 \text{ m}, \quad y'(0) = 0$$

جس کا امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 20\lambda + 32 = 0$ ہے۔ امتیازی مساوات $2(\lambda + 8)(\lambda + 2) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = -8$ ہیں جن سے عمومی حل اور حل کا ایک درجی تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}, \quad y' = -2c_1 e^{-2t} - 8c_2 e^{-8t}$$

ان میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے $c_1 + c_2 = 0.04$ اور $-2c_1 - 8c_2 = 0$ ملتا ہے جنہیں حل کرنے سے $c_1 = \frac{4}{75}$ اور $c_2 = -\frac{1}{75}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح حرکت کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$y = \frac{4}{75} e^{-2t} - \frac{1}{75} e^{-8t}$$

یہ مسلسل گھٹتی ارتعاش ہے جو آخر کار $t \rightarrow \infty$ پر $y \rightarrow 0$ ہو گی یعنی بہت دیر بعد گیند ساکن ہو گا۔

دوسری صورت: $c = 16$ کی صورت میں امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 16\lambda + 32 = 0$ یعنی $2(\lambda + 4)^2 = 0$ ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ ہے۔ یوں حرکت کی عمومی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-4t}$$

جس میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c_1 = 0.04$ اور $c_2 = 0.16$ حاصل ہوتے ہیں جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = (0.04 + 0.16t) e^{-4t}$$

تیسری صورت: تقصیری مستقل $c = 5 \text{ kg s}^{-1}$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات $2y'' + 5y' + 32y = 0$ ہو گا جس سے امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 5\lambda + 32 = 0$ حاصل ہوتی ہے۔ امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $-1.25 \pm 3.8i$ ہیں جن سے عمومی مساوات اور عمومی مساوات کا تفرق لکھتے ہیں۔

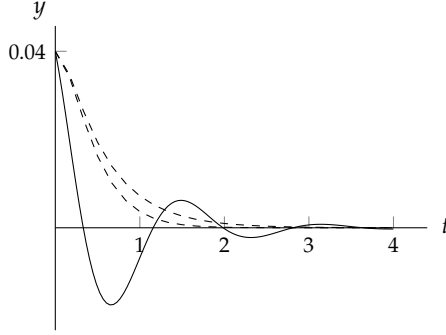
$$y = e^{-1.25t} (A \cos 3.8t + B \sin 3.8t)$$

$$y' = -1.25e^{-1.25t} (A \cos 3.8t + B \sin 3.8t) + 3.8e^{-1.25t} (-A \sin 3.8t + B \cos 3.8t)$$

ابتدائی معلومات کو y کی مساوات میں پر کرنے سے $A = 0.04$ حاصل ہوتا ہے جبکہ انہیں y' کی مساوات میں پر کرنے سے $-1.25A + 3.8B = 0$ یعنی $B = -0.013$ حاصل ہوتا ہے لہذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-1.25t} (0.04 \cos 3.8t - 0.013 \sin 3.8t)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلا تقصیری نظام کی قدرتی ارتعاش $\omega_0 = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$ سے موجودہ تعدد $\omega = 3.8$ کم ہے۔ شکل 2.12 میں اس مثال کی تینوں صورتوں کو دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.12: مثال 2.17 کی آزاد حرکت کی تین صورتیں۔

□

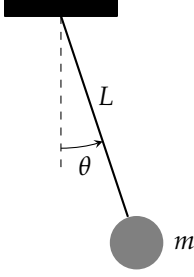
اس حصے میں بیرونی قوتوں سے پاک اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی آزاد حرکت⁵³ پر غور کیا گیا۔ ایسے نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔ ہم اسی باب میں بیرونی جبری قوتوں کی موجودگی میں پائی جانے والی جبری حرکت⁵⁴ پر بھی غور کریں گے۔ ایسے نظام کو غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

سوالات

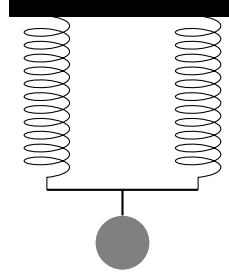
سوال 2.58 تا سوال 2.68 بلا تقصیر، ہارمونی ارتعاش کے سوالات ہیں۔

سوال 2.58: ابتدائی قیمت مسئلہ
بلا تقصیر ارتعاش کو مساوات 2.42 ظاہر کرتی ہے۔ ابتدائی فاصلہ $y(0) = y_0$ اور ابتدائی رفتار $y'(0) = v_0$ کی صورت میں مخصوص حل لکھیں۔

جواب: $y = y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$



(ب) سوال 2.64 کا نظام۔



(الف) سوال 2.62 کا نظام۔

شکل 2.13: متوازی اسپرنگ اور جھولا کے سوالات۔

سوال 2.59: تعدد

ایک اسپرنگ کی لمبائی 75 cm ہے۔ اس سے 0.25 kg کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی 85 cm ہو جاتی ہے۔ اس نظام کی تعدد f_0 اور دوری عرصہ T کیا ہوں گے؟

جوابات: $T = 0.63 \text{ s}$ ، $f_0 = 1.58 \text{ Hz}$

سوال 2.60: تعدد

اسپرنگ اور کمیت کی نظام میں کمیت چارگنا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔ مستقل اسپرنگ کی قیمت چارگنا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔

جوابات: کمیت چارگنا کرنے سے تعدد آدھی ہوتی ہے۔ مستقل اسپرنگ چارگنا کرنے سے تعدد دگنی ہوتی ہے۔

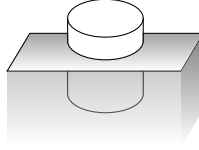
سوال 2.61: ابتدائی رفتار

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں ابتدائی رفتار صفر نہ ہونے کی صورت میں نظام کے تعدد اور رفتار پر کیا اثر ہوگا؟

جواب: نظام کی تعدد پر کوئی اثر نہیں ہوگا البتہ اس سے رفتار بڑھے گی۔

سوال 2.62: متوازی اسپرنگ

چار کلو گرام کی گیند کو $k_1 = 16 \text{ N m}^{-1}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جاتا ہے۔ نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ اگر اسی گیند کو $k_2 = 32 \text{ N m}^{-1}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جائے تب نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ دونوں کی لمبائی برابر ہے۔ ان دونوں اسپرنگ کو متوازی جوڑا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں نظام کی تعدد کیا ہوگی؟ شکل 2.13-الف کو دیکھیے۔



شکل 2.14: آرشیمیڈی اصول؛ سوال 2.65

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = 0.55 \text{ Hz} , 0.45 \text{ Hz} , 0.32 \text{ Hz} : \text{جوابات}$$

سوال 2.63: سلسلہ وار اسپرنگ گزشتہ سوال کے دونوں اسپرنگ کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔ نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تعدد حاصل کریں۔

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}} = 0.26 \text{ Hz} , my'' + \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} y = 0 : \text{جوابات}$$

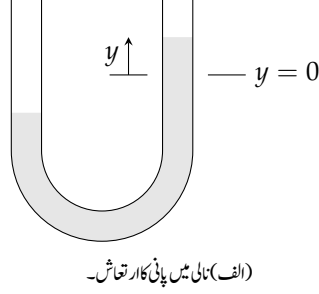
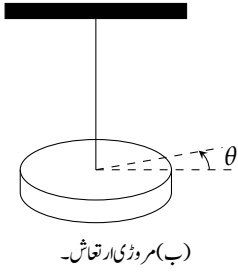
سوال 2.64: جھولا ایک ہلکے دھاگے سے m کمیت کا گیند لٹکایا شکل 2.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس نظام کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ نہایت چھوٹے زاویے کی صورت میں $\sin \theta \approx \theta$ لکھتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں جس کو حل کرتے ہوئے نظام کی تعدد حاصل کریں۔

$$\text{حل: گیند کا وزن } mg \text{ ہے جو نیچے رخ قوت ہے۔ اس کا مماس } mg \sin \theta \text{ ہے جو اسراع پیدا کرتا ہے۔}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} , \theta = \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t , L\theta'' = g\theta , L\theta' = g \sin \theta$$

سوال 2.65: اصول آرشیمیدس اصول آرشیمیدس⁵⁵ کے تحت جب کسی جسم کو مائع میں ڈبوایا جائے تو اس پر قوت اچھال عمل کرتی ہے جس کی مقدار، جسم کے ڈبوئے گئے حجم کے برابر، مائع کے وزن جتنی ہوتی ہے۔

ایک بیلن کو سیدھا پانی میں کھڑا کرنے سے اس کا کچھ حصہ پانی میں ڈوب جاتا ہے۔ شکل 2.14 میں اس کو ساکن حالت میں دکھایا گیا ہے۔ بیلن کا رداس $r = 20 \text{ cm}$ ہے۔ اگر بیلن کو نیچے دھکیل کر چھوڑا جائے تو یہ دو سیکنڈ کے دوری عرصے سے اوپر نیچے ارتعاشی حرکت کرتا ہے۔ بیلن کی کمیت M دریافت کریں۔ پانی کی کثافت $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ہے۔



شکل 2.15: سوال 2.67 اور سوال 2.68 کے اشکال۔

جوابات: $M = g\rho\pi r^2 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.8 \times 1000\pi 0.2^2 \left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 124.8 \text{ kg}$

سوال 2.66: زنجیر کا میز سے پھسلنا
ایک پھسلنی میز پر زنجیر سیدھا پڑا ہوا ہے۔ ان کے مابین قوت رگڑ قابل نظر انداز ہے۔ اگر زنجیر کے ایک سر کو میز سے اٹکایا جائے تو پورا زنجیر پھسلتے پھسلتے نیچے گر پڑتا ہے۔ زنجیر کی کل لمبائی L اور کیمت m کلوگرام فی میٹر لیتے ہوئے اس مسئلے کا تفرقی مساوات لکھیں۔ اگر $y(0) = 0$ اور $y'(0) = v_0$ ہو تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جوابات: $y = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t} \right)$ ، $mLy'' = mgy$

سوال 2.67: نالی میں پانی کی ارتعاش
شکل 2.15-الف میں $M = 9 \text{ kg}$ پانی زیر ثقلی قوت نالی میں ارتعاش کرتا ہے۔ نالی کا اندرونی رداس $r = 1.5 \text{ cm}$ ہے۔ ارتعاش کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

جوابات: $T = 5.06 \text{ s}$ ، $My'' = -2\pi r^2 \rho g y$

سوال 2.68: باریک غیر لچکدار تار سے I_0 جمودی معیار اثر⁵⁶ کی مکی لٹکائی جاتی ہے جو مروڑی ارتعاش کرتی ہے۔ شکل 2.15-ب کو دیکھیے۔ اس نظام کو $I_0\theta'' + k\theta = 0$ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے جہاں θ کو متوازن حال سے ناپا جاتا ہے۔ k مروڑی مستقل (یا اسپرنگ مستقل) ہے جس کو Nm rad^{-1} نیوٹن میٹر فی ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ ابتدائی زاویہ $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ریڈین یعنی 45° اور ابتدائی رفتار صفر ہے۔ اس مساوات کو

⁵⁶moment of inertia

$\frac{k}{I_0} = 9s^{-2}$ لیتے ہوئے حل کریں۔ تعدد کا کلیہ دریافت کریں۔ اس تجربے کو باریک تار کی مروڑی مستقل k حاصل کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مگی کا جمودی معیار اثر جانتے ہوئے اور قدرتی تعدد ناپ کر باریک تار کا مروڑی مستقل دریافت کیا جاسکتا ہے۔

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I_0}} \text{ ، } \theta = \frac{\pi}{4} \cos 3t \text{ : جواب}$$

سوالات 2.69 تا سوال 2.69 میں قسری حرکت پایا جاتا ہے۔

سوال 2.69: زیادہ تفصیر

زیادہ تفصیری صورت میں مساوات 2.47 حل دیتی ہے۔ ابتدائی معلومات $y(0) = y_0$ اور $y'(0) = v_0$ ہونے کی صورت میں c_1 اور c_2 دریافت کریں۔

$$c_2 = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) y_0 - \frac{v_0}{\beta} \right] \text{ ، } c_1 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) y_0 + \frac{v_0}{\beta} \right] \text{ : جوابات}$$

سوال 2.70: زیادہ تفصیر

زیادہ تفصیری صورت میں ثابت کریں کہ y زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ $y = 0$ سے گزر سکتا ہے۔

سوال 2.71: دھچکا روک

گاڑیوں میں دھچکا روک⁵⁷ نسب ہوتے ہیں جو گاڑی کی حرکت کو یقینی طور پر غیر ارتعاشی رکھتے ہیں۔ صفحہ 118 پر شکل 2.8 دھچکا روک کو ظاہر کرتی ہے۔ سوار کو دھچکوں سے پاک سواری اسپرنگ مہیا کرتا ہے جبکہ جاذب ان دھچکوں کی توانائی کو جذب کرتا ہے۔ گاڑی بچ سواری کی کمیت کو m ظاہر کرتی ہے۔

کمیت 1300 kg اور اسپرنگ مستقل $80\,000 \text{ kg s}^{-2}$ ہونے کی صورت میں تفصیری مستقل کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر یقین طور غیر ارتعاشی سواری حاصل ہوگی۔

$$c \geq 20\,396 \text{ kg s}^{-1} \text{ : جواب}$$

سوال 2.72: تعدد

کم قسری صورت کی ارتعاش کا تعدد ω مساوات 2.49 دیتا ہے۔ اس مساوات پر مسئلہ ثنائی کا اطلاق کرتے ہوئے

⁵⁷ shock absorber

پہلے دو اجزاء لیں اور مثال 2.17 کی کم قسری حرکت ($c = 5 \text{ kg s}^{-1}$) کی تعدد ارتعاش حاصل کریں۔ موجودہ جواب اور مثال میں حاصل کردہ جوابات میں کتنے فی صد فرق پایا جاتا ہے۔

جوابات: $\omega = \omega_0(1 - \frac{c^2}{8mk})$ ، $\omega = 3.8046$ ، لہذا دونوں جوابات میں 0.13% فرق پایا جاتا ہے۔ (مثال 2.17 میں تعدد کی بالکل ٹھیک قیمت $\omega = 3.79967$ ہے جسے مثال میں $\omega = 3.8$ لکھا گیا ہے۔)

سوال 2.73: بلا تقصیر نظام کے قدرتی تعدد اور کم تقصیری نظام (5 kg s^{-1}) کے تعدد ارتعاش میں فرق مثال 2.17 کے لئے حاصل کریں۔

جواب: 4.88% ؛ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگرچہ قوت روک تعدد ارتعاش پر فرق ڈالتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔

سوال 2.74: کم قسری ارتعاش کی مثبت چوٹیاں یکساں وقفوں پر پائی جاتی ہیں۔ اس وقفے کو دریافت کریں۔

جواب: مساوات 2.51 کی مثبت چوٹیاں $\omega t - \delta = 2n\pi$ پر پائی جاتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔ یوں دو چوٹیوں کے درمیان وقفہ $\frac{2\pi}{\omega}$ یعنی $T = \frac{1}{f}$ ہو گا۔

سوال 2.75: لوگار تھمی گھٹاؤ کم قسری نظام میں دو قریبی چوٹیوں کی قیمتوں کی شرح ایک مستقل قیمت ہوتی ہے جس کے لوگار تھم کو لوگار تھمی گھٹاؤ⁵⁸ کہتے ہیں۔ لوگار تھمی گھٹاؤ Δ حاصل کریں۔

جواب: $\Delta = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$

سوال 2.76: تقصیری مستقل ایک کم تقصیری نظام میں $m = 0.25 \text{ kg}$ ہے اور ارتعاش کا دوری عرصہ 5 s ہے۔ بیس پکروں میں چوٹی گھٹ کر $\frac{1}{4}$ گنا رہ جاتی ہے۔ نظام کے تقصیری مستقل کا تخمینہ لگائیں۔

جواب: $\alpha = 0.01386$

2.5 یولر کوشی مساوات

سادہ تفرقی مساوات⁵⁹

$$(2.52) \quad x^2 y'' + axy' + by = 0$$

یولر کوشی مساوات⁶⁰ کہلاتا ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ اس میں

$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

پر کرنے سے

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

ملتا ہے جس کو مشترک جزو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے ذیلی مساوات⁶¹ $m(m-1) + am + b = 0$ یعنی

$$(2.53) \quad m^2 + (a-1)m + b = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں $y = x^m$ مساوات 2.52 کا حل اس صورت ہو گا جب m مساوات 2.53 کا جذر ہو۔ مساوات 2.53 کے جذر

$$(2.54) \quad m_1 = \frac{1}{2}(1-a) + \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}, \quad m_2 = \frac{1}{2}(1-a) - \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}$$

ہیں۔

پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر کی صورت میں دو منفرد حل

$$y_1 = x^{m_1}, \quad y_2 = x^{m_2}$$

ملتے ہیں۔ چونکہ ان حل کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس طرح یہ حل کی اساس ہیں اور انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$(2.55) \quad y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

⁵⁹ یون آرڈیولر (1707-1783) سوزر لینڈ کا رہائشی اور ماہر حساب تھا۔ آگسٹن لوئی کوشی (1789-1857) فرانسیسی ماہر حساب تھا جنہوں نے جدید تجربے کی بنیاد ڈالی۔⁶⁰ Euler-Cauchy equationauxiliary equation⁶¹

لکھا جاسکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ یہ حل تمام x کے لئے درست ہے۔

مثال 2.18: یولر کوئی مساوات $x^2y'' + 0.5xy' - 1.5y = 0$ سے $m^2 - 0.5m - 1.5 = 0$ ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $m_1 = 1.5$ اور $m_2 = -1$ ہیں۔ ان سے اساس $y_1 = x^{\frac{3}{2}}$ ، $y_2 = x^{-1}$ لکھی جاسکتی ہے۔ اساس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1x\sqrt{x} + \frac{c_2}{x}$$

□

دوسری صورت: حقیقی دوہرا جذر $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}(1-a)$ اس صورت پایا جاتا ہے جب $b = \frac{1}{4}(1-a)^2$ ہو۔ ایسی صورت میں مساوات 2.52 درج ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے

$$(2.56) \quad x^2y'' + axy' + \frac{1}{4}(1-a)^2y = 0 \quad \implies \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0$$

جس کا ایک حل $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے۔

دوسرا خطی طور غیر تابع حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب پر حصہ 2.1 میں غور کیا گیا ہے۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے پہلا حل y_1 اور دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لیتے ہیں۔ یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ اور $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ ہوں گے جنہیں معیاری تفرقی مساوات 2.56 میں پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + \frac{1}{x}(u'y_1 + uy_1') + \frac{(1-a)^2}{4x^2}(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے جزو ضرب اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) + u[y_1'' + \frac{a}{x}y_1' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y_1] = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہذا درج بالا مساوات میں دایاں قوسین صفر کے برابر ہو گا اور یوں

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$u'' + u' \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{x} \right) = 0$$

اب چونکہ $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے لہذا $y_1' = \frac{1-a}{2} x^{\left(\frac{1-a}{2}-1\right)} = \frac{1-a}{2} \frac{y_1}{x}$ اور $\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1-a}{2x}$ ہو گا جس کو درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$u'' + u' \left[2 \left(\frac{1-a}{2x} \right) + \frac{a}{x} \right] = 0 \implies u'' + \frac{u'}{x} = 0$$

اس میں $u' = v$ لیتے ہوئے $v' + \frac{v}{x} = 0$ ملتا ہے جس کا حل $v = \frac{1}{x}$ ہے۔ یوں $v = u' = \frac{1}{x}$ لکھتے ہوئے مکمل لے کر $u = \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح خطی طور غیر تابع دوسرا حل $y_2 = u y_1 = y_1 \ln x$ ہو گا۔ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.57) \quad y = (c_1 + c_2 \ln x) x^m \quad m = \frac{1-a}{2}$$

مثال 2.19: دوہرا جذر

یولر کوشی مساوات $x^2 y'' - 7x y' + 16y = 0$ کا ذیلی مساوات $m^2 - 8m + 16 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $m_1 = m_2 = 4$ ہے۔ یوں تمام مثبت x کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x) x^4$$

□

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر کی صورت انجینئری نقطہ نظر سے زیادہ اہم نہیں ہے لہذا اس کی ایک عدد مثال ہی دیکھتے ہیں۔

مثال 2.20: یولر کوشی مساوات $x^2 y'' + 0.8x y' + 9.01y = 0$ کی $m^2 - 0.2m + 9.01 = 0$ ذیلی مساوات ہے جس کے جوڑی دار مخلوط جذر $m_1 = 0.1 + 3i$ اور $m_2 = 0.1 - 3i$ ہیں جہاں $i = \sqrt{-1}$

ہے۔ یہاں ایک چال چلاتے ہیں جس کے ذریعہ خیالی عدد i سے چھٹکارا حاصل ہو گا کرتے ہیں یعنی ہم $x = e^{\ln x}$ لکھتے ہیں۔ یوں

$$x^{m_1} = x^{0.1+3i} = x^{0.1} (e^{\ln x})^{3i} = x^{0.1} e^{(3 \ln x)i}$$

$$x^{m_2} = x^{0.1-3i} = x^{0.1} (e^{\ln x})^{-3i} = x^{0.1} e^{-(3 \ln x)i}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اب صفحہ 101 پر پولر مساوات 2.27 استعمال کرتے ہیں۔

$$x^{m_1} = x^{0.1} e^{(3 \ln x)i} = x^{0.2} [\cos(3 \ln x) + i \sin(3 \ln x)]$$

$$x^{m_2} = x^{0.1} e^{-(3 \ln x)i} = x^{0.2} [\cos(3 \ln x) - i \sin(3 \ln x)]$$

اب دونوں کا مجموعہ لیتے ہوئے دو (2) سے تقسیم کرتے ہیں۔ اسی طرح پہلی سے دوسری مساوات منفی کرتے ہوئے $-2i$ سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$x^{0.1} \cos(3 \ln x), \quad x^{0.1} \sin(3 \ln x)$$

ان کا حاصل تقسیم $\tan(3 \ln x)$ ہے جو مستقل مقدار نہیں ہے لہذا درج بالا دونوں خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس طرح یہ حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = x^{0.1} [c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \sin(3 \ln x)]$$

□

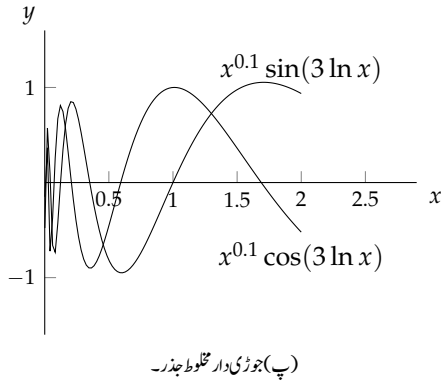
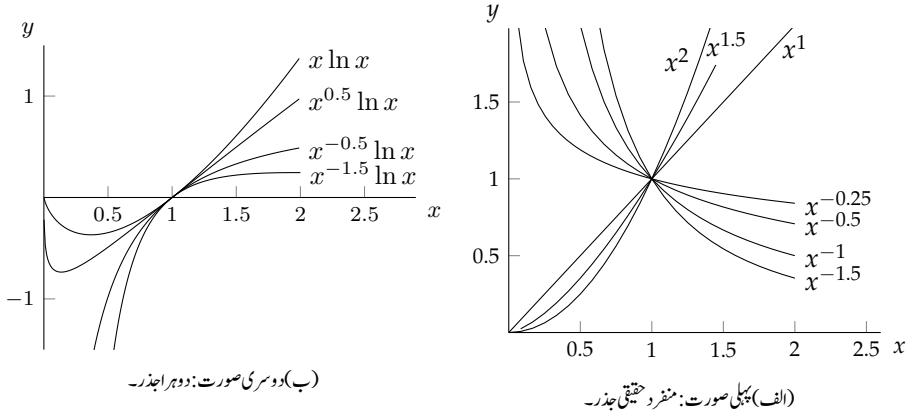
شکل 2.16 میں پولرکوشی سادہ تفرقی مساوات کی تینوں صورتوں کے حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 2.21: دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں ساکن برقی میدان؛ سرحدی قیمت مسئلہ

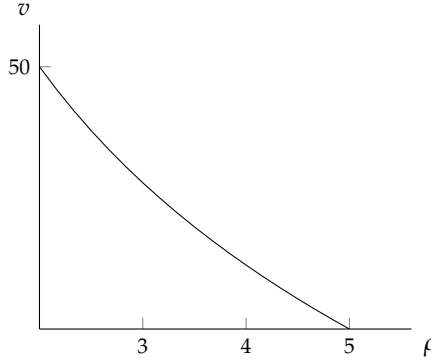
دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں برقی دباؤ تفرقی مساوات $\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{dv}{d\rho} = 0$ دیتی ہے۔ نلکی کے رداس $\rho_1 = 2 \text{ cm}$ اور $\rho_2 = 5 \text{ cm}$ ہیں جبکہ ان پر برقی دباؤ $v_1 = 50 \text{ V}$ اور $v_2 = 0 \text{ V}$ ہے۔ درمیانی خطے کی برقی دباؤ حاصل کریں۔

حل: پولرکوشی مساوات میں $a = 1$ اور $b = 0$ موجودہ تفرقی مساوات دیتا ہے۔ دیے مساوات میں $v = \rho^m$ پر کرتے ہوئے ذیلی مساوات $m^2 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کا دوہرا جذر $m = 0$ ہے۔ یوں عمومی حل $v = c_1 + c_2 \ln x$ ہو گا۔ دیے گئے سرحدی شرائط حل میں پر کرتے

$$50 = c_1 + c_2 \ln 0.02, \quad 0 = c_1 + c_2 \ln 0.05$$



شکل 2.16: پولرکوشنی سادہ تفرقی مساوات کے حل۔



شکل 2.17: مثال 2.21 کا حل۔

ہوئے $c_1 = -163.471$ اور $c_2 = -54.568$ حاصل ہوتے ہیں لہذا مخصوص حل $y = -163.471 - 54.568 \ln \rho$ ہو گا جسے شکل 2.17 میں دکھایا گیا ہے۔
□

مثال 2.22: پولرکوشی مساوات 2.52 میں $x = e^t$ پر کرتے ہوئے اس کو مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات میں تبدیل کریں۔

حل: ہم $y(x)$ کو $y[x(t)]$ یعنی $y(t)$ تصور کرتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق سے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 t}{dx^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ اور $\frac{d^2 t}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

انہیں مساوات 2.52 میں پر کرتے

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} \right) + ax \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + by = 0$$

ہوئے مستقل عددی سر والا سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ اور $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}$ ہیں۔

$$(2.58) \quad \ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0$$

□

سوالات

سوال 2.77 تا سوال 2.85 حل کریں۔

سوال 2.77:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

جواب: $y = c_1 x + c_2 x^2$

سوال 2.78:

$$x^2 y'' - 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-2}$

سوال 2.79:

$$x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$$

جواب: $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4}$

سوال 2.80:

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^3$

سوال 2.81:

$$x^2 y'' + 11xy' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-5}$

سوال 2.82:

$$10x^2 y'' + 11xy' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^{-\frac{3}{5}}$

سوال 2.83:

$$x^2 y'' + 0.44xy' + 0.0748y = 0$$

$$y = c_1 x^{0.22} + c_2 x^{0.34} \text{ جواب:}$$

سوال 2.84:

$$x^2 y'' + 0.4xy' + 0.73y = 0$$

$$y = x^{0.3} [c_1 \cos(0.8 \ln x) + c_2 \sin(0.8 \ln x)] \text{ جواب:}$$

سوال 2.85:

$$x^2 y'' + 2xy' + 4.25y = 0$$

$$y = x^{-0.5} [c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)] \text{ جواب:}$$

سوال 2.86 تا سوال 2.91 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 2.86:

$$x^2 y'' - 0.4xy' + 0.45y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$$

$$y = 7\sqrt{x} - 5x^{0.9} \text{ جواب:}$$

سوال 2.87:

$$x^2 y'' + 1.08xy' - 0.01713y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$$

$$y = \frac{23}{18}x^{0.23} - \frac{41}{18}x^{-0.31} \text{ جواب:}$$

سوال 2.88:

$$35x^2 y'' + 57xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -5$$

$$y = \frac{77}{4}x^{-\frac{3}{7}} - \frac{65}{4}x^{-\frac{1}{5}} \text{ جواب:}$$

سوال 2.89:

$$6x^2 y'' + 19xy' + 6y = 0, \quad y(1) = -3, \quad y'(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{6}{5}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{21}{5}x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 2.90:

$$25x^2y'' - 15xy' + 16y = 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 1$$

جواب: $y = 2^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}(\ln x - \ln 2)$

سوال 2.91:

$$49x^2y'' + 77xy' + 4y = 0, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 0$$

جواب: $y = x^{-\frac{2}{7}}(2.93 + 1.04 \ln x)$

2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورنسکی

اس حصے میں متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات،

$$(2.59) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جس کے عددی سر $p(x)$ اور $q(x)$ کوئی بھی استمراری تفاعل ہو سکتے ہیں، کے عمومی حل کی وجودیت⁶³ پر غور کیا جائے گا۔ ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.59 اور ابتدائی معلومات

$$(2.60) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے ابتدائی قیمت مسئلہ کی مخصوص حل کی یکتائی⁶⁴ پر بحث کی جائے گی۔

مسئلہ 2.2 کہتا ہے کہ اس ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل پایا جاتا ہے جو یکتا ہو گا اور مساوات 2.59 کے عمومی حل

$$(2.61) \quad y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad \text{اختیاری } c_2, c_1$$

existence⁶³
uniqueness⁶⁴

میں تمام حل شامل ہیں۔ یوں استمراری عددی سروالے متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا۔ نادر حل اس حل کو کہتے ہیں جسے عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

ہمیں مستقل عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات یا پولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل کی وجوہیت اور یکتائی جاننے کی ضرورت پیش نہیں آئی چونکہ ان کے حل کے دوران ہی ایسی تمام معلومات سامنے آ جاتی ہیں۔

مسئلہ 2.2: مسئلہ وجوہیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت تفرقی مساوات
اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کسی کھلے وقفے I پر استمراری ہوں اور x_0 اس وقفے پر پایا جاتا ہو، تب مساوات 2.59 اور مساوات 2.60 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا مخصوص حل $y(x)$ موجود ہے۔

وجوہیت حل کی ثبوت کے لئے وہی بنیادی شرائط درکار ہیں جو صفحہ 73 پر مسئلہ 1.3 کے لئے درکار تھے۔ اس کتاب میں ان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ اگرچہ یکتائی کا ثبوت عموماً آسان ہوتا ہے لیکن موجودہ مسئلہ 2.2 کے یکتائی حل کا ثبوت اتنا آسان نہیں ہے لہذا اس کو کتاب کے آخر میں بطور ضمیمہ شامل کیا گیا ہے۔

خطی طور غیر تابع حل

آپ کو حصہ 2.4 سے یاد ہو گا کہ کھلے وقفہ I پر عمومی حل اساس y_1 ، y_2 پر مشتمل ہوتا ہے جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفے I پر خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت خطی طور غیر تابع⁶⁵ کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$(2.62) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

سے مراد

$$(2.63) \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.62 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 خطی طور تابع⁶⁶ کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.62 کو

linearly independent⁶⁵
linearly dependent⁶⁶

k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جاسکتا ہے جو تناسبی رشتہ کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(2.64) \quad \text{پورے } I \text{ پر} \quad (ب) \quad y_2 = ly_1 \quad (الف) \quad y_1 = ky_2,$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.62 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا l (اور 1 صفر بھی ہو سکتے ہیں۔) خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع حل کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 2.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات 2.62 کے I پر دو حل y_1 اور y_2 اس صورت خطی طور تابع ہوں گے جب ان کے ورونسکی^{67 68}

$$(2.65) \quad W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W مکمل صفر⁶⁹ ہو گا۔ یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

ثبوت:

(الف) y_1 اور y_2 کو I پر خطی طور غیر تابع تصور کریں۔ یوں مساوات 2.64-الف یاب میں سے ایک درست ہو گا۔ اگر مساوات 2.64-الف درست ہو تب

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = k y_2 y_2' - y_2 k y_2' = 0$$

ہو گا۔ اسی طرح مساوات 2.64-ب کی صورت میں بھی $W = 0$ ملتا ہے۔

(ب) اس کے الٹ چلتے ہوئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی x_0 پر $W(y_1, y_2) = 0$ سے مراد y_1 اور y_2 کا I پر خطی طور تابع ہونا ہے۔ درج ذیل مساوات پر غور کریں جہاں k_1 اور k_2 کو نا معلوم

⁶⁷Wronskian

⁶⁸یوسف ماریا یون [1778-1853] جنہوں نے اپنا نام تبدیل کرتے ہوئے ورونسکی رکھا
⁶⁹identically zero

متغیرات تصور کریں۔

$$(2.66) \quad \begin{aligned} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) &= 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

k_2 حذف کرنے کی نیت سے پہلی مساوات کو $y_2'(x_0)$ اور دوسری کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(2.67) \quad k_1 y_1(x_0) y_2'(x_0) - k_1 y_1'(x_0) y_2(x_0) = k_1 W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$$

اسی طرح k_1 حذف کرنے کے لئے پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں مساوات کا مجموعہ

$$(2.68) \quad k_2 y_1(x_0) y_2'(x_0) - k_2 y_2(x_0) y_1'(x_0) = k_2 W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$$

لیتے ہیں۔ اب اگر x_0 پر W صفر نہ ہوتا تب ہم مساوات 2.67 اور مساوات 2.68 کو W سے تقسیم کرتے ہوئے $k_1 = k_2 = 0$ حاصل کرتے البتہ x_0 پر $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ ہے لہذا ہم ان مساوات کو W سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔ یوں ہمزاد مساوات 2.66 کا حل k_1 اور k_2 پایا جاتا ہے جہاں k_1 اور k_2 دونوں غیر صفر ہو سکتے ہیں۔ اب ان اعداد k_1 اور k_2 کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل

$$(2.69) \quad y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

لیتے ہیں۔ چونکہ مساوات 2.59 متجانس خطی ہے لہذا مسئلہ 2.1 (مسئلہ خطی میل) کے تحت یہ تفاعل بھی مساوات 2.59 کا حل ہو گا۔ مساوات 2.66 سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل ابتدائی معلومات $y(x_0) = 0$ اور $y'(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ اب تصور کریں کہ مساوات 2.59 کا دوسرا حل جو انہیں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہو $y^*(x) = 0$ ہے۔ اب چونکہ مساوات 2.59 میں $p(x)$ اور $q(x)$ استمراری ہیں لہذا مسئلہ 2.2 کے تحت اس کا مخصوص حل یکتا ہو گا۔ یوں $y(x)$ اور $y^*(x)$ مختلف نہیں ہو سکتے ہیں لہذا $y^*(x) = y(x) = 0$ یعنی

$$(2.70) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 \equiv 0 \quad \text{پورے } I \text{ پر}$$

ہو گا۔ چونکہ k_1 اور k_2 میں کم از کم ایک صفر کے برابر نہیں ہے لہذا مساوات 2.70 کہتا ہے کہ I پر y_1 اور y_2 خطی طور تالبع ہیں۔

(پ) ہم مسئلہ کا آخری نقطہ ثابت کرتے ہیں۔ اگر کھلے وقفے I پر نقطہ x_0 پر $W(x_0) = 0$ ہو تب ثبوت (ب) کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور تالبع ہیں لہذا ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہو

گاہ یوں خطی طور تابعیت کی صورت میں ایسا نہیں ہو سکتا ہے کہ $W(x_1) \neq 0$ ہو جہاں x_1 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب اس سے مراد خطی طور غیر تابعیت ہو گی جیسا کہ دعویٰ کیا گیا ہے۔

□

حساب کی نقطہ نظر سے مساوات 2.65 سے درج ذیل زیادہ آسان مساوات ہے۔

$$(2.71) \quad W(y_1, y_2) = \begin{cases} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 & (y_1 \neq 0) \\ -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' y_2^2 & (y_2 \neq 0) \end{cases}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ورونسکی کو قالب کی مقطع کے طرز پر لکھا جاسکتا ہے جس کو ورونسکی مقطع⁷⁰ یا حل y_1 اور y_2 کی ورونسکی کہتے ہیں۔

$$(2.72) \quad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

مثال 2.23: مسئلہ 2.3 کا اطلاق

تفرقی مساوات $y'' + \omega^2 y = 0$ کے حل $y_1 = \cos \omega x$ اور $y_2 = \sin \omega x$ ہیں۔ ان کی ورونسکی

$$W(\cos \omega x, \sin \omega x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega \cos^2 \omega x + \omega \sin^2 \omega x = \omega$$

ہے۔ مسئلہ 2.3 کے تحت یہ حل صرف اس صورت میں خطی طور غیر تابع ہوں گے جب $\omega \neq 0$ ہو۔ یہی دونوں حل کے حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = \tan \omega x$ سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے جہاں $\omega = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور تابع صورت ظاہر کرتی ہے۔

□

مثال 2.24: دوہرا جذر کی صورت میں مسئلہ 2.3 کا اطلاق

تفرقی مساوات $y'' - 6y' + 9y = 0$ کا (ثابت کریں کہ) عمومی حل $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$ ہے جس کا ورونسکی صفر کے برابر نہیں ہے لہذا e^{3x} اور xe^{3x} تمام x پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3xe^{6x} = e^{6x} \neq 0$$

□

مساوات 2.59 کے عمومی حل میں تمام حل کی شمولیت

اس حصے کو مساوات 2.59 کے عمومی حل کی وجوہیت سے شروع کرتے ہیں۔

مسئلہ 2.4: وجوہیت عمومی حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں مساوات 2.59 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: مسئلہ 2.2 کے تحت I پر مساوات 2.59 کا، ابتدائی معلومات

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_1(x)$ موجود ہے۔ اسی طرح ابتدائی معلومات

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_2(x)$ بھی موجود ہے۔ نقطہ x_0 پر ان کا ورنسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 1$$

ہے۔ مسئلہ 2.3 کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور پر غیر تابع ہیں لہذا یہ مساوات 2.59 کے حل کی اساس ہیں۔ اس طرح ثابت ہوا کہ I پر مساوات 2.59 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

□

آئیں اب ثابت کریں کہ عمومی حل اتنا عمومی ہے جتنا کوئی حل عمومی ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 2.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

کھلا وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.59 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$(2.73) \quad Y(x) = C_1y_1 + C_2y_2$$

لکھا جاسکتا ہے، جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.59 کی کوئی بھی اساس اور C_1 ، C_2 مناسب مستقل ہیں۔

یوں مساوات 2.59 کا کوئی نادر حل موجود نہیں ہے۔ (نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔)

ثبوت: تصور کریں کہ I پر مساوات 2.59 کا $y = Y(x)$ کوئی حل ہے۔ اب مسئلہ 2.4 کے تحت I پر تفرقی مساوات 2.59 کا عمومی حل

$$(2.74) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

موجود ہے۔ ہم c_1 اور c_2 کی وہ قیمتیں دریافت کرنا چاہتے ہیں جن سے I پر $y(x) = Y(x)$ حاصل ہوتا ہو۔ ہم I پر کوئی بھی x_0 چنتے ہوئے پہلے ثابت کرتے ہیں کہ c_1 اور c_2 کی ایسی قیمتیں دریافت کی جاسکتی ہیں کہ x_0 پر $y(x_0) = Y(x_0)$ اور $y'(x_0) = Y'(x_0)$ ہوں۔ اس کو مساوات 2.74 کے استعمال سے

$$(2.75) \quad c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0)$$

$$(2.76) \quad c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0)$$

لکھ سکتے ہیں۔ ان ہمزاد مساوات سے c_1 اور c_2 معلوم کرتے ہیں۔ مساوات 2.75 کو $y_2'(x_0)$ اور مساوات 2.76 کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لینے سے c_1 حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے مساوات 2.77 ملتی ہے۔ اسی طرح c_2 حاصل کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لیتے ہوئے مساوات 2.78 حاصل ہوتی ہے۔ ان مساوات میں y_1 ، y_1' ، y_2 ، y_2' ، Y اور Y' کی قیمتیں نقطہ x_0 پر لی گئی ہیں۔

$$(2.77) \quad c_1 y_1 y_2' - c_1 y_2 y_1' = c_1 W(y_1, y_2) = Y y_2' - y_2 Y$$

$$(2.78) \quad c_2 y_1 y_2' - c_2 y_2 y_1' = c_2 W(y_1, y_2) = y_1 Y - Y y_1'$$

اب چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہذا ورنہ کسی کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہے لہذا ان مساوات سے c_1 اور c_2 حاصل کیے جاسکتے ہیں

$$c_1 = \frac{Y y_2' - y_2 Y}{W} = C_1, \quad c_2 = \frac{y_1 Y - Y y_1'}{W} = C_2$$

جہاں ان منفرد قیمتوں کو C_1 اور C_2 لکھا گیا ہے۔ انہیں مساوات 2.74 میں پر کرتے ہوئے مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ C_1 اور C_2 مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل ہیں لہذا ہم ان مساوات سے دیکھتے ہیں کہ

$$y^*(x_0) = Y(x_0), \quad y^{*'}(x_0) = Y'(x_0)$$

مسئلہ 2.2 میں جس یکتائی کا ذکر کیا گیا ہے اس کے تحت y^* اور Y تمام I پر ہر جگہ برابر ہوں گے۔

□

سوالات

سوال 2.92: مساوات 2.71 سے مساوات 2.65 حاصل کریں۔

سوال 2.93 تا سوال 2.99 کی ور ونکی حاصل کریں۔ حاصل تقسیم سے ثابت کریں کہ یہ خطی طور غیر تابع ہیں اور مسئلہ 2.3 سے بھی اس بات کی تصدیق کریں

سوال 2.93: $e^{2x}, e^{-1.2x}$
جوابات: $W = -3.2e^{0.8x} \neq 0$ ، $\frac{e^{2x}}{e^{-1.2x}} = e^{3.2x} \neq c$

سوال 2.94: $e^{2.4x}, e^{1.1x}$
جوابات: $W = -1.3e^{3.5x} \neq 0$ ، $\frac{y_1}{y_2} = e^{1.3x} \neq c$

سوال 2.95: $x, \frac{1}{x}$
جوابات: $W = -2x^{-2} \neq 0$ ، $\frac{y_1}{y_2} = x^2 \neq c$

سوال 2.96: x, x^3
جوابات: $W = 2x^3 \neq 0$ ، $\frac{y_1}{y_2} = x^{-2} \neq c$

سوال 2.97: $e^{-0.2x} \sin 3x, e^{-0.2x} \cos 3x$
 جوابات: $W = 3e^{-0.4x} \neq 0$ ، $\frac{y_1}{y_2} = \tan 3x \neq c$

سوال 2.98: $e^{-ax} \sinh kx, e^{-ax} \cosh kx$
 جوابات: $W = -ke^{-2ax} \neq 0$ ، $\frac{y_1}{y_2} = \tanh kx \neq c$

سوال 2.99: $x^a \sin(k \ln x), x^a \cos(k \ln x)$
 جوابات: $W = -kx^{2a-1} \neq 0$ ، $\frac{y_1}{y_2} = \tan(k \ln x) \neq c$

سوال 2.100 تا سوال 2.106 میں تفرقی مساوات کے حل دیے گئے ہیں۔ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ ورنہ کی مدد سے ثابت کریں کہ دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں اور ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.100: $\sin 3x, \cos 3x$ ، $y(0) = 2$ ، $y'(0) = -3$
 جوابات: $y = 2 \cos 3x - \sin 3x$ ، $W = -3 \neq 0$ ، $y'' + 9y = 0$

سوال 2.101: x^3, x^{-4} ، $y(1) = -1$ ، $y'(1) = 2$
 جوابات: $y = -\frac{2x^3}{7} - \frac{5x^{-4}}{7}$ ، $W = -\frac{7}{x^2} \neq 0$ ، $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$

سوال 2.102: $e^{-1.2x} \sin 0.8x, e^{-1.2x} \cos 0.8x$ ، $y(0) = 5$ ، $y'(0) = 7$
 جوابات: $W = -0.8e^{-2.4x} \neq 0$ ، $y'' + 2.4y' + 2.08y = 0$
 $y = e^{-\frac{6}{5}x} (\frac{65}{4} \sin \frac{4x}{5} + 5 \cos \frac{4x}{5})$

سوال 2.103: $x^3, x^3 \ln x$ ، $y(1) = 2$ ، $y'(1) = 8$
 جوابات: $y = 2x^3(1 + \ln x)$ ، $W = x^5 \neq 0$ ، $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$

سوال 2.104: $1, e^{3x}$ ، $y(0) = 1.5$ ، $y'(0) = -2.5$
 جوابات: $y = \frac{8}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}$ ، $W = 3e^{3x} \neq 0$ ، $y'' - 3y' = 0$

سوال 2.105: $e^{-kx} \sin \pi x, e^{-kx} \cos \pi x$ ، $y(0) = 1$ ، $y'(0) = -k - \pi$
 جوابات: $W = -\pi e^{-2kx} \neq 0$ ، $y'' + 2ky' + (k^2 + \pi^2)y = 0$
 $y = e^{-kx}(\sin \pi x - \cos \pi x)$

سوال 2.106: $\sinh 1.8x, \cosh 1.8x$ ، $y(0) = 14.2$ ، $y'(0) = 16.38$
 جوابات: $W = -1.8 \neq 0$ ، $y'' - 3.24y = 0$
 $y = 9.1 \sinh 1.8x + 14.2 \cosh 1.8x$

سوال 2.107: تفرقی مساوات $y'' - y = 0$ کا عمومی حل قوت نمائی تفاعل اور بذلولی⁷¹ تفاعل کی صورت میں لکھیں۔ دونوں صورتوں کے مستقل کا تعلق کیا ہے؟

جوابات: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ، $y = c_a \sinh x + c_b \cosh x$ ، $c_a = c_1 - c_2$ ، $c_b = c_1 + c_2$

2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات

اس باب میں اب تک متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔ یہاں سے باب کے اختتام تک غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ درج ذیل غیر متجانس خطی تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جہاں $r \neq 0$ ہے۔

$$(2.79) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

ہم دیکھیں گے کہ مساوات 2.79 کا عمومی حل، مطابقتی متجانس مساوات

$$(2.80) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

کے عمومی حل اور مساوات 2.80 کے ایک مخصوص حل کا مجموعہ ہو گا۔ مساوات 2.79 کے عمومی حل اور مخصوص حل کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: عمومی حل اور مخصوص حل
کھلے وقفہ I پر غیر متجانس مساوات 2.79 کا عمومی حل

$$(2.81) \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ہو گا جہاں I پر $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ متجانس مساوات 2.80 کا عمومی حل ہے اور I پر y_p مساوات 2.79 کا کوئی بھی حل ہے جس میں مستقل نہیں پایا جاتا۔

مساوات 2.79 کا مخصوص حل، مساوات 2.81 کے c_1 اور c_2 میں خصوصی قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔

اب ہمیں حل کی ان تعریف کا جواز پیش کرنا ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.79 کا حل y_p حاصل کرنا ہو گا۔ پس ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 2.81 کا عمومی حل مساوات 2.79 پر پورا اترتا ہے اور یہ کہ مساوات 2.79 اور مساوات 2.80 کے حل کا آپس میں سادہ تعلق ہے۔

مسئلہ 2.6: مساوات 2.79 اور مساوات 2.80 کے حل کا آپس میں تعلق

(الف) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے حل y اور اسی وقفے پر مساوات 2.80 کے حل \tilde{y} کا مجموعہ I پر مساوات 2.79 کا حل ہے۔ بالخصوص مساوات 2.81 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کا حل ہو گا۔

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے دو حل کا فرق I پر مساوات 2.80 کا حل ہے۔

ثبوت:

(الف) مساوات 2.79 کے بائیں ہاتھ کو $L[y]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں I پر مساوات 2.79 کے کسی بھی حل y اور مساوات 2.80 کے کسی بھی حل \tilde{y} کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L[y + \tilde{y}] = L[y] + L[\tilde{y}] = r + 0 = r$$

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے کسی بھی حل y اور y^* کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L[y - y^*] = L[y] - L[y^*] = r - r = 0$$

□

ہم جانتے ہیں کہ متجانس مساوات 2.80 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہوتے ہیں۔ اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متجانس مساوات 2.79 کے عمومی حل میں اس کے تمام حل شامل ہیں۔

مسئلہ 2.7: غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.79 کا ہر حل، مساوات

2.81 میں دیے گئے عمومی حل کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر y^* ، مساوات 2.79 کا کوئی حل ہے جبکہ x_0 اس وقفے پر کوئی x ہے۔ اسی طرح مساوات 2.81 کھلے وقفے پر مساوات 2.79 کا کوئی عمومی حل ہے۔ یہ حل موجود ہے۔ یقیناً $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ مسئلہ 2.4 کے تحت موجود ہے جبکہ y_p کی وجودیت حصہ 2.10 میں دکھائی جائے گی۔ اب مسئلہ 2.6-ب کے تحت $Y = y^* - y_p$ کھلے وقفے پر مساوات 2.80 کا حل ہے۔ نقطہ x_0 پر

$$Y(x_0) = y^*(x_0) - y_p(x_0), \quad Y'(x_0) = y^{*'}(x_0) - y_p'(x_0)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کھلے وقفے I پر، مسئلہ 2.2 کے مطابق، کسی بھی ابتدائی معلومات کی طرح، ان معلومات پر پورا اترتا ہوا، مساوات 2.80 کا مخصوص حل موجود ہے جسے y_h میں c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے $y^* = Y + y_p$ سے مسئلہ کا دعویٰ ثابت ہوتا ہے۔

□

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

آپ نے دیکھا کہ مساوات 2.79 یا اس پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 2.80 کو حل کرنا ہو گا اور مساوات 2.79 کا کوئی بھی حل y_p تلاش کرنا ہو گا۔ اس طرح عمومی حل 2.81 حاصل ہو گا۔

مساوات 2.79 کا حل y_p حاصل کرنے کی ایک ترکیب کو نامعلوم عددی سر کی ترکیب⁷² کہتے ہیں۔ یہ ترکیب نہایت آسان ہے۔ اس ترکیب سے ارتعاشی نظام عمدگی سے حل ہوتے ہیں لہذا اسے انجینئری شعبے میں مقبولیت حاصل ہے۔ اس باب کے آخری حصے میں عمومی ترکیب پر غور کیا جائے گا جو نسبتاً مشکل ترکیب ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب ان خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.82) \quad y'' + ay' + by = r(x)$$

method of undetermined coefficients⁷²

کے حل کے لئے موزوں ہے جس کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہوں اور $r(x)$ قوت نمائی تفاعل ہو یا x کی طاقت ہو یا سائن نمائی تفاعل ہو اور یا ان تفاعل کا مجموعہ یا حاصل ضرب ہو۔ ایسی تفاعل کی تفرقات بھی یہی تفاعل ہوتی ہیں۔ مثلاً x^3 کے تفرقات $3x^2$ ، $6x$ اور 6 ہیں جو از خود x کی طاقت ہیں۔ اسی طرح $\sin \omega x$ کا ایک درجی تفرق $\omega \cos \omega x$ جبکہ دو درجی تفرق $-\omega^2 \sin \omega x$ ہے۔ یہ دونوں تفرقات از خود سائن نمائی تفاعل ہیں۔

اس ترکیب میں y_p کو $r(x)$ اور اس کے تمام تفرقات کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ مجموعہ لکھتے ہوئے ہر رکن کو نامعلوم مستقل سے ضرب دیا جاتا ہے۔ y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.82 میں پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کے یکساں اجزاء کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے نامعلوم مستقل دریافت کئے جاتے ہیں۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p جدول 2.2 کے تحت لکھی جاتی ہے۔ تفاعل $r(x)$ سے y_p درج ذیل قواعد کے تحت لکھی جاتی ہے۔

بنیادی قاعدہ: اگر مساوات 2.82 کا $r(x)$ جدول 2.2 کے دائیں قطار میں دیا گیا ہو تب اس تفاعل کے صف سے $y_p(x)$ حاصل کریں۔ حاصل y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.2 میں پر کرتے ہوئے نامعلوم عددی سر کی قیمت دریافت کریں۔

ترمیمی قاعدہ: اگر y_p کا کوئی رکن تفاعل مساوات 2.82 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل ہو تب اس رکن کو x سے ضرب دے کر y_p میں شامل کریں۔ (اگر یہ حل مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل کیا گیا ہو تب اس رکن کو x^2 سے ضرب دیں۔)

مجموعے کا قاعدہ: اگر $r(x)$ جدول 2.2 کے دوسرے قالب کے اجزاء کا مجموعہ ہو تب $y_p(x)$ کو جدول کے تیسرے قالب سے ان اجزاء کے مطابقتی تفاعل کے مجموعے کی صورت میں لکھا جائے گا۔

$r(x)$ صرف ایک رکن پر مشتمل ہونے کی صورت میں بنیادی قاعدہ استعمال ہو گا۔ ترمیمی قاعدہ استعمال کرنے سے پہلے متجانس مساوات حل کرنا ہو گا۔ اگر $r = r_1$ کی صورت میں مساوات 2.82 کا حل y_{p1} ہو اور $r = r_2$ کی صورت میں اس کا حل y_{p2} ہو تب $r = r_1 + r_2$ کی صورت میں اس کا حل $y_{p1} + y_{p2}$ ہو گا۔ یہ حقیقت مجموعے کا قاعدہ دیتی ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب خود اصلاحی ہے۔ یوں y_p چنتے ہوئے کم اجزاء لینے سے تضاد پیدا ہو گا اور عددی سر حاصل کرنا ممکن نہ ہو گا۔ زیادہ اجزاء لینے سے زائد ارکان کے عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوں گے۔

جدول 2.2: نامعلوم عددی سر کی ترکیب

$y_p(x)$ کے ارکان	$r(x)$ کے ارکان
$Ce^{\gamma x}$	$ke^{\gamma x}$
$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0$	$kx^n \quad (n = 0, 1, \dots)$
$K \cos \omega x + M \sin \omega x$	$k \cos \omega x$
$K \cos \omega x + M \sin \omega x$	$k \sin \omega x$
$e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$	$ke^{\alpha x} \cos \omega x$
$e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$	$ke^{\alpha x} \sin \omega x$

آئیں مثال 2.25 تا مثال 2.27 کی مدد سے اس ترکیب کو مزید سمجھیں۔

مثال 2.25: بنیادی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تلاش کریں۔

$$y'' + 9y = 0.2x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 9y = 0$ کا حل y_h درج ذیل ہے۔

$$y_h = A \cos 3x + B \sin 3x$$

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: اگر ہم $y_p = Kx^2$ چننے تب $y'_p = 2Kx$ اور $y'' = 2K$ ہو گے جنہیں دیے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے $2K + 9Kx^2 = 0.2x^2$ ملتا ہے۔ یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت تمام x کے لئے درست ہو سکتی ہے کہ دونوں جانب x^2 کے عددی سر برابر ہوں۔ اسی طرح x^1 یا x^0 کے عددی سر بھی دونوں اطراف برابر ہونا ضروری ہے۔ اس کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہوئے $2K = 0$ اور $9K = 0.2$ لکھا جائے گا جس سے $K = 0$ اور $K = \frac{0.2}{9}$ حاصل ہوتا ہے جو تضاد کی صورت حال ہے۔ یوں اس y_p کو رد کیا جاتا ہے۔

آئیں اب دیے گئے قواعد کے تحت جدول 2.2 سے y_p لکھیں۔ جدول کی دوسری صف کے تحت درج ذیل لکھا جائے گا

$$y_p = K_2 x^2 + K_1 x + K_0$$

جس کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(2K_2) + 9(K_2 x^2 + K_1 x + K_0) = 0.2x^2 \implies 9K_2 x^2 + 9K_1 x + 2K_2 + 9K_0 = 0.2x^2$$

اس مساوات کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔ یوں بائیں جانب x^2 کا عددی سر $9K_2$ ہے جبکہ دائیں جانب یہ 0.2 کے برابر ہے۔ انہیں آپس میں برابر پر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بائیں جانب x^1 کا عددی سر $9K_1$ ہے جبکہ دائیں جانب ایسا کوئی رکن نہیں پایا جاتا لہذا دائیں جانب x^1 کا عددی سر صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح x^0 کا عددی سر بائیں جانب $2K_2 + 9K_0$ اور دائیں جانب صفر ہے۔

$$9K_2 = 0.2, \quad 9K_1 = 0, \quad 2K_2 + 9K_0 = 0$$

ان تین ہمزاد مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے $K_2 = \frac{1}{45}$ ، $K_1 = 0$ اور $K_0 = -\frac{2}{405}$ حاصل ہوتے ہیں لہذا $y_p = \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = y_h + y_p = A \cos 3x + B \sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

ہو گا۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ پر $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $1 = A - \frac{2}{405}$ لکھا جائے گا جس سے $A = \frac{407}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $y'(0) = -5$ کو استعمال کرتے ہوئے $3B = -6$ لکھا جائے گا جس سے $B = -2$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

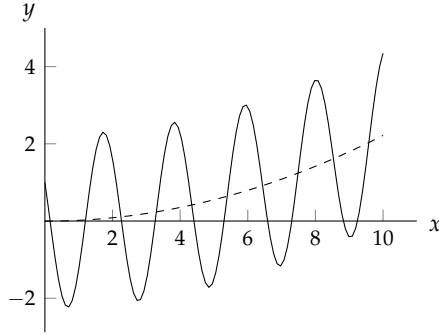
$$y = \frac{407}{405} \cos 3x - 2 \sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

مخصوص حل کو شکل 2.18 میں دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر y_p کو ظاہر کرتی ہے۔ مخصوص حل y_p کے دونوں اطراف ارتعاش کر رہی ہے۔ □

مثال 2.26: ترمیمی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 2.4y' + 1.44y = -5e^{-1.2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2.4\lambda + 1.44 = 0$ یعنی $(\lambda + 1.2)^2 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1.2$ ہے جس سے $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے۔



شکل 2.18: مثال 2.25 کا مخصوص حل۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: تفرقی مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل $e^{-1.2x}$ سے عام طور جدول 2.2 کو دیکھ کر $y_p = Ce^{-1.2x}$ لکھا جاتا البتہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تفاعل متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل حل ہے۔ یوں ترمیمی قاعدے کے تحت منتخب تفاعل کو x^2 سے ضرب دینا ہو گا۔ یوں درج ذیل چنا جائے گا

$$y_p = Cx^2e^{-1.2x}$$

جس کے تفرقات $y_p' = (2x - 1.2x^2)Ce^{-1.2x}$ اور $y_p'' = (1.44x^2 - 4.8x + 2)Ce^{-1.2x}$ ہیں۔ ان تمام کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں جہاں دونوں اطراف $e^{-1.2x}$ کو حذف کیا گیا ہے۔

$$(1.44x^2 - 4.8x + 2)C + 2.4(2x - 1.2x^2)C + 1.44Cx^2 = -5$$

دونوں اطراف x^2 ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھے ہوئے $0 = 0$ ، $0 = 0$ اور $2C = -5$ لکھا جاتا ہے جس سے $C = -2.5$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں $y_p = -2.5x^2e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے لہذا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

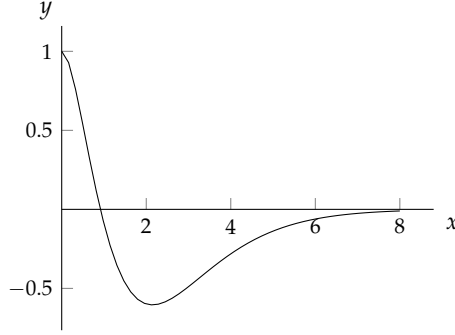
$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x} - 2.5x^2e^{-1.2x}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ ، $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $c_1 = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ y کے تفرق

$$y' = [3x^2 - (1.2c_2 + 5)x + c_2 - 1.2c_1]e^{-1.2x}$$

میں $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $0 = 2c_2 - 1.2c_1$ یعنی $c_2 = 1.2$ ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y = (1 + 1.2x - 2.5x^2)e^{-1.2x}$$



شکل 2.19: مثال 2.26 کا مخصوص حل۔

□

مخصوص حل کو شکل 2.19 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2.27: مجموعے کا قاعدہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + 3y' + 2y = 0.2 \cos x + 0.1x - 0.4, \quad y(0) = -2.1, \quad y'(0) = 3.2$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 3y' + 2y = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ یعنی $(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -2$ ہیں جن سے $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: غیر متجانس مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل کے تحت جدول 2.2 سے لکھتے ہیں جہاں $y_p = y_{p1} + y_{p2}$

$$y_{p1} = K \cos x + M \sin x, \quad y_{p2} = K_1 x + K_0$$

کے برابر ہیں۔ یوں $y_p = K \cos x + M \sin x + K_1 x + K_0$ اور اس کے تفرقات

$$y'_p = -K \sin x + M \cos x + K_1, \quad y''_p = -K \cos x - M \sin x$$

کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(-K \cos x - M \sin x) + 3(-K \sin x + M \cos x + K_1) + 2(K \cos x + M \sin x + K_1 x + K_0) = 0.2 \cos x + 0.1x - 0.4$$

دونوں اطراف $\cos x$ ، $\sin x$ ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھتے

$$-K + 3M + 2K = 0.2, \quad -M - 3K + 2M = 0, \quad 2K_1 = 0.1, \quad 3K_1 + 2K_0 = -0.4$$

ہوئے حل کرنے سے $K_0 = -\frac{11}{40}$ ، $K_1 = \frac{1}{20}$ ، $M = \frac{3}{50}$ اور $K = \frac{1}{50}$ ملتے ہیں لہذا

$$y_p = \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

لکھا جائے گا جس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

حاصل ہوتا ہے۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: y اور y' میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{50} - \frac{11}{40} = -2.1, \quad -c_1 - 2c_2 + \frac{3}{50} + \frac{1}{20} = 3.2$$

جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{3}{5}$ اور $c_2 = -\frac{249}{200}$ ملتے ہیں۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

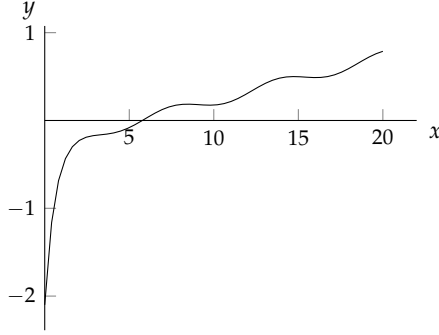
$$y = -\frac{3}{5} e^{-x} - \frac{249}{200} e^{-2x} + \frac{1}{50} \cos x + \frac{3}{50} \sin x + \frac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

□

مخصوص حل کو شکل 2.20 میں دکھایا گیا ہے۔

استحکام

کسی بھی انجینیری نظام کا مستحکم ہونا نہایت اہم ہوتا ہے۔ مساوات 2.82 کے مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دونوں جذر منفی یا دونوں جذر کے حقیقی حصے منفی ہونے کی صورت میں نظام اور تفرقی مساوات کو



شکل 2.20: مثال 2.27 کا مخصوص حل۔

مستحکم⁷³ کہتے ہیں۔ ایسی صورت میں $t \rightarrow \infty$ پر $y_h \rightarrow 0$ ہو گا لہذا عارضی حل $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حل y_p کے قریب قریب ہو گا۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں نظام غیر مستحکم⁷⁴ کہلاتا ہے۔ چونکہ مثال 2.25 میں امتیازی مساوات کے جذر کے حقیقی حصے منفی مقدار نہیں ہیں لہذا یہ غیر مستحکم نظام کو ظاہر کرتا ہے۔

اگلے دو حصوں میں ان مساوات کا استعمال ہو گا۔

سوالات

سوال 2.108 تا سوال 2.117 میں دیے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کے حقیقی عمومی حل دریافت کریں۔

سوال 2.108: $y'' - y' - 6y = e^{-1.5x}$
جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{4}{9} e^{-1.5x}$

سوال 2.109: $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$
جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} - (1 + x)e^{-3x}$

سوال 2.110: $4y'' + 12y' + 9y = 4^{-1.5x}$
جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-1.5x} + \frac{x^2}{2} e^{-1.5x}$

⁷³ stable
⁷⁴ unstable

سوال 2.111: $4y'' + 2y' + 3y = 4 \cos 3x$
 جواب: $y = c_1 e^{-0.5x} + c_2 e^{-1.5x} + \frac{32}{555} \sin 3x - \frac{44}{555} \cos 3x$

سوال 2.112: $y'' + 4y = \sin 2x$
 جواب: $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - 0.5x \cos 2x$

سوال 2.113: $9y'' + 4y = e^{-2x} \sin \frac{2x}{3}$
 جواب: $y = c_1 \cos \frac{2x}{3} + c_2 \sin \frac{2x}{3} + \frac{e^{-2x}}{156} (2 \cos \frac{2x}{3} + 3 \sin \frac{2x}{3})$

سوال 2.114: $y'' + 3y' + 2y = x^2$
 جواب: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{2x^2 - 6x + 7}{4}$

سوال 2.115: $y'' + 9y = 3 \sin x + \sin 3x$
 جواب: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{3}{8} \sin x - \frac{x}{6} \cos 3x$

سوال 2.116: $y'' + 8y' + 15y = 0.5x$
 جواب: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-5x} + \frac{15x - 8}{450}$

سوال 2.117: $y'' + 2y' + y = x \cos x$
 جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + 0.5 \cos x + 0.5(x - 1) \sin x$

سوال 2.118 تا سوال 2.130 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلوں کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.118: $y'' + 5y' + 6y = 0.2e^{-1.5x}$, $y(0) = 1.2$, $y'(0) = -0.5$
 جواب: $y = -\frac{4}{15}e^{-1.5x} + \frac{27}{10}e^{-2x} - \frac{53}{30}e^{-3x}$

سوال 2.119: $y'' + 2.7y' + 1.8y = 3.4e^{-1.2x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -3$
 جواب: $y = (\frac{102x - 340}{9})e^{-1.2x} - 20e^{-1.2x} + \frac{302}{9}e^{-1.5x}$

سوال 2.120: $y'' + 6y' + 9y = 1.1e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
 جواب: $y = 1.1e^{-2x} + (0.9x - 0.1)e^{-3x}$

سوال 2.121: $y'' + 8y' + 16y = 0.7e^{-4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = \frac{7}{20}x^2 e^{-4x} + (6x + 2)e^{-4x}$

سوال 2.122: $4y'' + 8y' + 3y = 24x^2$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = -101e^{-0.5x} + \frac{59}{9}e^{-1.5x} + \frac{72x^2 - 384x + 832}{9}$

سوال 2.123: $4y'' + 8y' + 3y = 2.4e^{-0.5x} + 8x^2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = (\frac{3x}{5} - \frac{301}{10})e^{-0.5x} + \frac{617}{270}e^{-1.5x} + \frac{8x^2}{3} - \frac{128x}{9} + \frac{832}{27}$

سوال 2.124: $6y'' + 29y' + 35y = 6 \cos x$, $y(0) = 0.5$, $y'(0) = -0.2$
 جواب: $y = \frac{3}{29} \cos x + \frac{3}{29} \sin x + \frac{1197}{290}e^{-\frac{7}{3}x} - \frac{541}{145}e^{-\frac{5}{2}x}$

سوال 2.125: $y'' + 9y = \cos 3x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.3$
 جواب: $y = \frac{1}{5} \cos 3x + (\frac{x}{6} + \frac{1}{10}) \sin 3x$

سوال 2.126: $8y'' - 6y' + y = 6 \sinh x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.1$
 جواب: $y = e^x - \frac{19}{5}e^{0.5x} + \frac{16}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.127: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 3 \ln x - 4$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y_p = \ln x$
 جواب: $y = \frac{1}{3} \ln x + \frac{4}{9} + \frac{5x^3}{9} - x$

سوال 2.128: $y'' + 2y' + 10y = 17 \sin x - 37 \sin 3x$, $y(0) = 6.6$, $y'(0) = -2.2$
 جواب: $y = e^{-x} \cos 3x - \sin 3x + 6 \cos 3x + \frac{9}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x$

سوال 2.129: $8y'' - 6y' + y = 6 \sinh x$, $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 0.05$
 جواب: $y = e^x - 4e^{0.5x} + \frac{17}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.130: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1.5$
 جواب: $y = (1 + x - 0.25 \sin 2x)e^{-2x}$

2.8 جبری ارتعاش۔ گمک۔

ہم اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر حصہ 2.4 میں غور کر چکے ہیں جہاں اس نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad (2.83)$$

سے ظاہر کیا گیا جہاں، ساکن حالت میں گیند کے مقام سے، حرکت کی صورت میں گیند کا فاصلہ $y(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حصہ 2.4 میں نظام پر کوئی بیرونی قوت لاگو نہیں کیا گیا۔ نظام کی حرکت صرف اور صرف نظام کی اندرونی قوتوں کی بنا تھی۔ قوت جمود my'' ، قوت بحالی ky اور قوت روک cy' نظام کی اندرونی قوتیں تھیں۔

آگے بڑھتے ہوئے اس نظام میں بیرونی قوت $r(t)$ کا اضافہ کرتے ہیں۔ شکل 2.21 میں ایسا نظام دکھایا گیا ہے۔ بیرونی قوت $r(t)$ انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔ اس نظام کی نمونہ کشی درج ذیل تفرقی مساوات کرتی ہے۔

$$my'' + cy' + ky = r(t) \quad (2.84)$$

میکانی طور پر اس مساوات کا مطلب ہے کہ ہر لمحہ t پر اندرونی قوتوں کا مجموعہ بیرونی قوت $r(t)$ کے برابر ہے۔ اس نظام میں گیند کی حرکت کو جبری حرکت⁷⁵ کہتے ہیں جبکہ بیرونی قوت کو جبری قوت⁷⁶ یا داخلی قوت⁷⁷ کہتے ہیں۔ گیند کی حرکت کو نظام کا رد عمل⁷⁸ یا نظام کا ماحصل⁷⁹ بھی کہا جاتا ہے۔

ہمیں دوری⁸⁰ بیرونی قوتوں میں زیادہ دلچسپی ہے لہذا ہم

$$r(t) = F_0 \cos \omega t \quad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

طرز کے قوتوں پر توجہ دیں گے۔ یوں غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t \quad (2.85)$$

حاصل ہوتی ہے جس کے حل سے بنیادی اہمیت کے حقائق حاصل ہوں گے جن سے گمک⁸¹ کی نمونہ کشی ممکن ہو گی۔

⁷⁵ forced motion

⁷⁶ forcing function

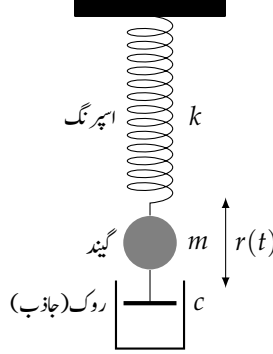
⁷⁷ input force

⁷⁸ response

⁷⁹ output

⁸⁰ periodic

⁸¹ resonance



شکل 2.21: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

غیر متجانس مساوات کا حل

ہم نے حصہ 2.7 میں دیکھا کہ غیر متجانس مساوات 2.85 کا عمومی حل متجانس مساوات 2.83 کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.85 کے کوئی بھی حل y_p کا مجموعہ ہے۔ ہم y_p کو حصہ 2.7 کے نامعلوم عدد سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$(2.86) \quad y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

اور اس کے تفرقات

$$y_p'(t) = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t, \quad y_p''(t) = -\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t$$

کو مساوات 2.85 میں پر کرتے ہوئے

$$m(-\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t) + c(-\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t) + k(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = F_0 \cos \omega t$$

دونوں اطراف کے $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے اور دونوں اطراف $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے ہمزا مساوات

$$(k - m\omega^2)a + c\omega b = F_0, \quad -c\omega a + (k - m\omega^2)b = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان ہمزا مساوات کو a اور b کے لئے حل کرتے ہیں۔ b حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $-c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(k - m\omega^2)^2 a + c^2 \omega^2 a = F_0(k - m\omega^2)$$

اسی طرح a حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$c^2\omega^2b + (k - m\omega^2)^2b = F_0c\omega$$

ان مساوات میں جزو $c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2$ صفر کے برابر نہیں ہے لہذا دونوں مساوات کو اس جزو سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے a اور b حاصل کرتے ہیں۔

$$a = F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

اگر حصہ 2.4 کی طرح $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ لکھا جائے تب $k = m\omega_0^2$ ہو گا اور

$$(2.87) \quad a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

ہوں گے۔

اس طرح غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 2.85 کا عمومی حل

$$(2.88) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y_h(t)$ متجانس مساوات 2.83 کا عمومی حل ہے اور $y_p(t)$ مساوات 2.86 میں دیا گیا ہے جس میں a اور b کی قیمتیں مساوات 2.87 سے پر کی گئی ہیں۔

آئیں اب اس میکانی نظام کی دو بالکل مختلف صورتوں پر غور کریں۔ پہلی صورت $c = 0$ غیر قسری ہے جبکہ دوسری صورت $c > 0$ تقصیری ہے۔

پہلی صورت: بلا تقصیر جبری ارتعاش۔ گمک۔

اگر نظام میں قوت روک اتنا کم ہو کہ دورانیہ غور کے دوران اس کا اثر قابل نظر انداز ہو تب $c = 0$ لیا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 2.87 سے $a = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ اور $b = 0$ حاصل ہوتے ہیں لہذا مساوات 2.86

$$(2.89) \quad y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{F_0}{k[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]} \cos \omega t$$

لکھا جائے گا جہاں $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یہاں ضروری ہے کہ $\omega \neq \omega_0$ فرض کیا جائے جس کا مطلب ہے کہ جبری قوت کی تعدد $f = \frac{\omega}{2\pi}$ بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ سے مختلف فرض کی گئی ہے۔ (بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد کے لئے مساوات 2.42 دیکھیں۔) یوں مساوات 2.89 اور مساوات 2.44 کی مدد سے بلا تقصیر نظام کی عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(2.90) \quad y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

ہم دیکھتے ہیں کہ نظام کا رد عمل دو مختلف تعدد کے ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

گمک

مساوات 2.89 کا حیظ

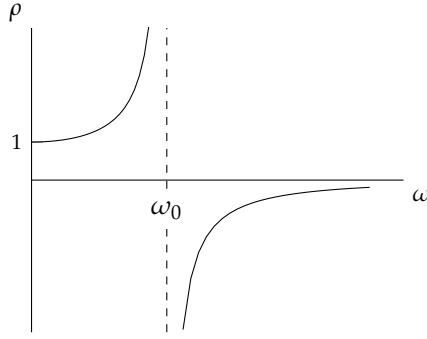
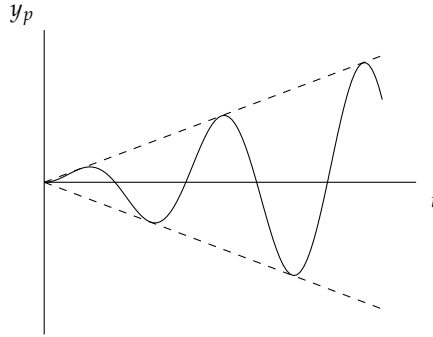
$$(2.91) \quad a = \frac{F_0}{k} \rho, \quad \rho = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

ω اور ω_0 پر منحصر ہے۔ $\omega \rightarrow \omega_0$ کرنے سے $\rho \rightarrow \infty$ اور $a \rightarrow \infty$ ہو گا۔ داخلی جبری قوت کی تعدد کو نظام کی قدرتی تعدد کے برابر ($\omega = \omega_0$) کرنے سے انتہائی زیادہ حیظ کی پیدا ارتعاش کو گمک⁸² کہتے ہیں۔ ρ کو گمکی جزو⁸³ کہتے ہیں جسے شکل 2.22 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 2.91 سے $\frac{\rho}{k} = \frac{a_0}{F_0}$ لکھا جا سکتا ہے جو مخصوص حل y_p اور داخلی جبری قوت کے حیظوں کا تناسب ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ ارتعاشی نظام میں گمک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ گمک کی صورت میں غیر متجانس مساوات 2.85 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$(2.92) \quad y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

جس کا حل مساوات 2.89 نہیں دیتی۔ مساوات 2.92 کا مخصوص حل y_p ، صفحہ 150 پر دیے گئے ترمیمی قاعدہ کے تحت

$$y_p(t) = t(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$$

شکل 2.22: مگکی جزو $\rho(\omega)$ 

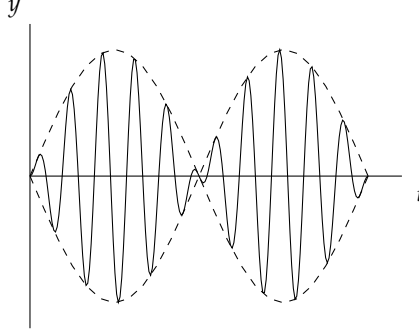
شکل 2.23: مگک کی صورت میں مخصوص حل۔

ہو گا جس کو مساوات 2.92 میں پر کرتے ہوئے $a = 0$ اور $b = \frac{F_0}{2m\omega_0}$ ملتے ہیں لہذا مخصوص حل

$$(2.93) \quad y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

ہو گا جسے شکل 2.23 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ جزو t کی وجہ سے ارتعاش کا حیثہ مسلسل بڑھتا ہے۔ عملاً اس کا مطلب ہے کہ کم قسری نظام زیادہ جھولے گا۔ نہایت کم تقصیر کی صورت میں نظام جھولنے سے تباہ ہو سکتا ہے۔

تھاپ



شکل 2.24: قریبی سر تھا پ پیدا کرتے ہیں۔

ω اور ω_0 قریب قریب ہونے کی صورت میں ایک دلچسپ صورت پیدا ہوتی ہے۔ اسے سمجھنے کی خاطر مساوات 2.90 میں $C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ اور $\delta = 0$ لکھتے ہیں۔

$$(2.94) \quad y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega_0 t + \cos \omega t) \quad (\omega \neq \omega_0)$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$(2.95) \quad y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ ω اور ω_0 نہایت قریب ہیں لہذا $\frac{\omega_0 - \omega}{2}$ چھوٹی مقدار ہوگی اور یوں دائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ زیادہ ہوگا۔ اس کے برعکس $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$ بڑی مقدار ہوگی لہذا بائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ کم ہوگا۔ شکل 2.24 میں اس مساوات کو دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر دائیں سائن تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔ اس شکل کے تفاعل کی آواز میں بلند تعدد کے ساتھ ساتھ کم تعدد بھی سنائی دیتی ہے جنہیں تھا پ⁸⁴ کہتے ہیں۔ موسیقار تھا پ پر دھیان دیتے ہوئے موسیقی آلے کی تعدد درست کرتا ہے۔

دوسری صورت: قصری جبری ارتعاش

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک قابل نظر انداز نہ ہونے کی صورت میں $c > 0$ ہوگا اور (جیسا ہم حصہ 2.4 میں دیکھ چکے ہیں) متجانس مساوات 2.83 کا حل y_h وقت گزرتے گھٹے گا حتیٰ کہ $t \rightarrow \infty$ پر

⁸⁴beats

$y_h \rightarrow 0$ ہو گا۔ عملاً کافی دیر بعد y_h صفر کے برابر ہو گا لہذا مساوات 2.85 کا عارضی حل⁸⁵ مساوات 2.88 یعنی $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حال حل⁸⁶ y_p کے برابر ہو گا۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 2.8: برقرار حال حل
سائن نما جبری قوت کی موجودگی میں قسری ارتعاشی نظام کافی دیر کے بعد عملاً ہارمونی ارتعاش کرے گا جس کی تعدد داخلی تعدد کے برابر ہو گی۔

2.8.1 برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک

بلا تقصیر نظام میں $\omega \rightarrow \omega_0$ کرنے سے y_p کا حیط لامتناہی ہو گا۔ قسری نظام میں ایسا نہیں ہوتا اور y_p کا حیط محدود رہتا ہے۔ ہاں کسی مخصوص ω پر حیط زیادہ سے زیادہ ہو سکتا ہے جس کا دارومدار c کی قیمت پر ہو گا۔ ایسی صورت کو عملی گمک کہہ سکتے ہیں۔ عملی گمک اس لئے اہم ہے کہ اگر c کی قیمت زیادہ نہ ہو تب عین ممکن ہے کہ داخلی جبری قوت نظام میں نقصان دہ یا تباہ کن حیط کی ارتعاش پیدا کر سکے۔ جس زمانے میں انسان کو گمک کی سمجھ نہ تھی اس زمانے میں اس کو ایسے نقصان اٹھانے پڑتے تھے۔ مشین، جہاز، گاڑی، پل اور بلند عمارتیں وہ میکانیکی نظام ہیں جن میں ارتعاش پایا جاتا ہے۔ زلزلہ یا آندھی بطور جبری قوت بلند عمارت میں تباہ کن گمک پیدا کرتے ہوئے اسے طے کا ڈھیر بنا سکتی ہے۔ بعض اوقات گمک سے پاک نظام کی تخلیق ناممکن ہوتی ہے۔

y_p کا حیط بالمتقابل ω پر غور کی خاطر مساوات 2.86 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$(2.96) \quad y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta)$$

جہاں

$$(2.97) \quad C^*(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

$$\eta(\omega) = \tan^{-1} \frac{b}{a} = \tan^{-1} \frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

⁸⁵ transient solution
⁸⁶ steady state solution

ہیں۔ انہیں شکل 2.25 میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ C^* رد عمل y_p کا محیط⁸⁷ اور η اس کا زاویائی فاصلہ⁸⁸ ہے۔ داخلی جبری تفاعل اور y_p میں زاویائی فرق η کے برابر ہو گا۔ مثبت η کی صورت میں مساوات 2.96 کے تحت داخلی قوت سے y_p پیچھے⁸⁹ ہے۔

حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کرنے کی خاطر C^* کے تفرق کو صفر کے برابر $(\frac{dC^*}{d\omega} = 0)$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dC^*}{d\omega} = -\frac{F_0[2m^2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2c^2\omega]}{2[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

کسر کا شمار کنندہ صفر ہونے کی صورت میں درج بالا صفر کے برابر ہو گا جس سے

$$(2.98) \quad c^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \omega^2) \quad (\omega_0^2 = \frac{k}{m})$$

یعنی

$$(2.99) \quad 2m^2\omega^2 = 2m^2\omega_0^2 - c^2 = 2mk - c^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے $c^2 > 2mk$ کی صورت میں خیالی تعدد $\omega = \mp i\sqrt{\frac{c^2 - 2mk}{2m^2}}$ حاصل ہوتا ہے۔ خیالی تعدد حساب کے نقطہ نظر سے درست جواب ہے لیکن عملی دنیا میں تعدد کی قیمت صرف حقیقی قیمت ممکن ہے۔ ایسی صورت میں ω کی قیمت بڑھانے سے C^* کی قیمت گھٹتی ہے۔ اس کے برعکس $c^2 < 2mk$ کی صورت میں مساوات 2.99 سے حقیقی تعدد بلندتر ω

$$(2.100) \quad \omega_{\text{بلندتر}}^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}$$

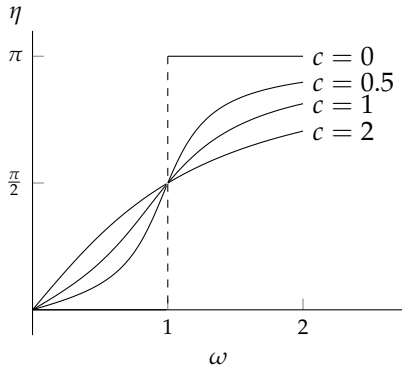
حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 2.100 سے ظاہر ہے کہ c کی قیمت کم کرنے سے بلندتر ω کی قیمت ω_0 بڑھتی ہے حتیٰ کہ $c \rightarrow 0$ کی صورت میں $\omega_{\text{بلندتر}} \rightarrow 0$ حاصل ہوتا ہے۔

بلندتر ω کو مساوات 2.97 میں پر کرنے سے $(\omega_{\text{بلندتر}}) C^*$ حاصل کرتے ہیں۔

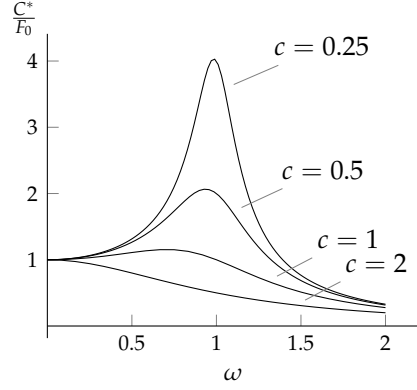
$$(2.101) \quad C^*(\omega_{\text{بلندتر}}) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2})^2 + c^2(\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2})}} = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $c \rightarrow 0$ کرنے سے $C^* \rightarrow \infty$ حاصل ہو گا یعنی بلا تقصیر صورت میں لا متناہی حیطہ پایا جائے گا۔

amplitude⁸⁷
phase angle⁸⁸
lagging⁸⁹



(ب) $\omega_0 = 1, m = 1, k = 1$ رکھے ہوئے
مختلف c کے لئے η بالمتقابل ω



(الف) $\omega_0 = 1, m = 1, k = 1$ رکھے ہوئے
مختلف c کے لئے $\frac{C^*}{F_0}$ بالمتقابل ω

شکل 2.25: مساوات 2.97 کا حیطہ اور زوایائی فاصلہ۔

سوالات

سوال 2.131 تا سوال 2.134 اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی تفرقی مساوات ہیں۔ ان کے برقرار حال حل دریافت کریں۔

سوال 2.131: $y'' + 7y' + 10y = 4 \cos 3t$
جواب: $y = \frac{2}{221} \cos 3t + \frac{42}{221} \sin 3t$

سوال 2.132: $y'' + 4y' + 3y = 2 \sin 6t$
جواب: $y = \frac{16}{555} \cos 6t - \frac{22}{555} \sin 6t$

سوال 2.133: $10y'' + 11y' + 3y = 20 + 15 \cos 3t - 5 \sin 2t$
جواب: $y = 6.67 + 0.057 \sin 3t - 0.151 \cos 3t + 0.0998 \sin 2t + 0.059 \cos 2t$

سوال 2.134: $2y'' + 3y' + y = 0.8 + \sin 2t$
جواب: $y = 0.8 - 0.08 \sin 2t - 0.07 \cos 2t$

سوال 2.135 تا سوال 2.143 کے عارضی حل دریافت کریں۔

سوال 2.135: $6y'' + 7y' + 2y = 3 \sin(3.5t)$
 جواب: $y = Ae^{-\frac{1}{2}t} = k - 2e^{-\frac{2}{3}t} - 0.037 \sin(3.5t) - 0.013 \cos(3.5t)$

سوال 2.136: $y'' + 2y' + 2y = 2 \sin 2t$
 جواب: $y = e^{-t}(A \cos t + B \sin 2t) - 0.4 \cos 2t - 0.2 \sin 2t$

سوال 2.137: $y'' + 9y = 4 \cos 3t$
 جواب: $y = A \cos 3t + B \sin 3t + \frac{2}{3}t \sin 3t + \frac{2}{9} \cos 3t$

سوال 2.138: $y'' + 3y = \cos \sqrt{3}t - \sin \sqrt{3}t$
 جواب: $y = A \cos \sqrt{3}t + B \sin \sqrt{3}t + \frac{t}{2\sqrt{3}}(\cos \sqrt{3}t + \sin \sqrt{3}t) + \frac{1}{6} \cos \sqrt{3}t$

سوال 2.139: $y'' + 2y' + 5y = 3 \cos 2t + 2 \sin 2t$
 جواب: $y = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) - \frac{10}{17} \cos 2t + \frac{11}{17} \sin 2t$

سوال 2.140: $y'' + y = 5 \sin \omega t$ ($\omega^2 \neq 1$)
 جواب: $y = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \frac{5}{\omega^2 - 1} \sin \omega t$

سوال 2.141: $y'' + 4y = 3 \cos 2t$
 جواب: $y = A \cos 2t + B \sin 2t + \frac{3}{4}t \sin 2t + \frac{3}{8} \cos 2t$

سوال 2.142: $y'' + 4y = e^{-2t} \cos 2t$
 جواب: $y = A \cos 2t + B \sin 2t + \frac{e^{-2t}}{20}(\cos 2t - 2 \sin 2t)$

سوال 2.143: $y'' + 4y' + 5y = 2 \cos t + 3 \sin t$
 جواب: $y = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t) - \frac{1}{8} \cos t + \frac{5}{8} \sin t$

سوال 2.144 تا سوال 2.149 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 2.144: $y'' + 4y = 5 \cos t$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$
 جواب: $y = \frac{5}{3} \cos t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{2}{3} \cos 2t$

سوال 2.145: $y'' + 9y = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 4t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{5}$
 جواب: $y = \frac{1}{8} \sin t + \frac{1}{10} \sin 2t + \frac{1}{168} \sin 3t - \frac{1}{28} \sin 4t$

سوال 2.146: $y'' + 4y' + 8y = 4 \cos(0.5t)$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$
 جواب: $y = 0.125 \sin(0.5t) + 0.484 \cos(0.5t) + e^{-2t} [3.516 \cos 2t + 2.485 \sin 2t]$

سوال 2.147: $y'' + 4y' + 5y = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 جواب: $y = \frac{e^{-2t}}{15} (8 \sin t - 4 \cos t) + \frac{e^{-0.5t}}{15} [4 \cos(0.5t) + 2 \sin(0.5t)]$

سوال 2.148: $y'' + 36y = \cos \pi t - \sin \pi t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 جواب: $y = \frac{1}{\pi^2 - 36} (\sin \pi t - \cos \pi t + \cos 6t + \frac{\pi^2 - \pi - 36}{6} \sin 6t)$

سوال 2.149: $y'' + 36y = \cos(5.9t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ تھاپ
 جواب: $y = \frac{19}{119} \cos 6t + \frac{100}{119} \cos(5.9t)$

سوال 2.150: خود کار بندوق 90 کے چلنے سے گولی پر نہایت کم دورانیے کے لئے قوت عمل کرتا ہے اور اتنا ہی قوت بندوق کی نالی پر الٹ سمت میں عمل کرتا ہے۔ نالی کا جھکا اسپرنگ برداشت کرتا ہے۔ اس قوت کو تفاعل $1 - \frac{t^2}{\pi^2}$ سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل تفرقی مساوات حل کریں جس میں $y(0) = 0$ اور $y'(0) = 0$ ہوں گے۔ لمحہ $t = \pi$ پر y اور y' دونوں استمراری ہیں۔

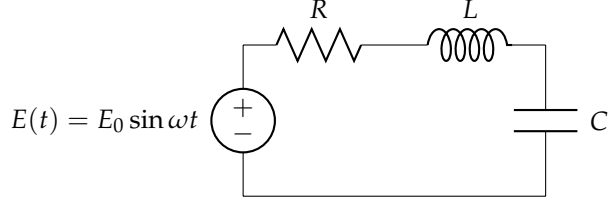
$$y'' + y = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{\pi^2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t < 0, t > \pi \end{cases}$$

جواب: $y = (1 + \frac{2}{\pi^2})(1 - \cos t) - \frac{t^2}{\pi^2}$

2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی

شکل 2.26 میں مزاحمت R ، امالہ L اور برقی گنیر C کو منبع دباؤ کے ساتھ سلسلہ وار جوڑا گیا ہے۔ اس دور کو سلسلہ وار RLC دور کہتے ہیں۔ ہم صفحہ 55 پر مثال 1.20 میں مزاحمت اور امالہ کا سلسلہ وار RL دور دیکھ چکے ہیں جہاں مزاحمت پر دباؤ $v_R = IR$ اور امالہ پر دباؤ $v_L = L \frac{dI}{dt}$ کے مجموعے کو کر خوف کے قانون برائے

automatic gun⁹⁰
 capacitor⁹¹



شکل 2.26: مزاحمت، امالہ اور برقی گیر سلسلہ وار منبع دباؤ کے ساتھ جڑے ہیں۔

دباؤ کے تحت درآئیدہ دباؤ E کے برابر پر کیا گیا۔ موجودہ RLC میں v_R اور v_L کے ساتھ برقی گیر کا دباؤ v_C بھی جمع کیا جائے گا۔ برقی گیر پر دباؤ v_C اور اس میں ذخیرہ بار Q کا تعلق $Q = Cv_C$ ہے۔ برقی گیر کی اکائی فیراڈ⁹³ F جبکہ بار کی اکائی کولمب⁹⁴ C ہے۔ برقی بار اور برقی رو کا تعلق $Q = \int I dt$ استعمال کرتے ہوئے برقی گیر کے رو اور دباؤ کا تعلق

$$(2.102) \quad v_C = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

حاصل ہوتا ہے۔

یوں کر خوف مساوات دباؤ

$$(2.103) \quad LI' + RI + \frac{1}{C} \int I dt = E_0 \sin \omega t$$

ہوگی جو مکمل و تفرقی مساوات ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے مکمل سے پاک تفرقی مساوات

$$(2.104) \quad LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مستقل عددی سروالی غیر متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا حل $I(t)$ دے گا۔ مساوات 2.103 میں مکمل Q کے برابر ہے جبکہ $I = \frac{dQ}{dt}$ لکھا جاسکتا ہے جن سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے جس کا حل $Q(t)$ دے گا۔

$$(2.105) \quad LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t) = E_0 \sin \omega t$$

charge⁹²
Farad⁹³
Coulomb⁹⁴

سلسلہ واردور میں رو کا حصول

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.104 کا حل $I = I_h + I_p$ ہو گا جہاں I_h مطابقتی متجانس مساوات کا عمومی حل اور I_p غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل ہے۔ ہم I_p کو نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 2.104 میں

$$\begin{aligned} I_p &= a \cos \omega t + b \sin \omega t \\ I_p' &= -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t \\ I_p'' &= -\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.106)$$

پر کرتے ہوئے دونوں اطراف $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں اور اسی طرح دونوں اطراف $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) a + \omega R b &= \omega E_0 \\ -\omega R a + \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) b &= 0 \end{aligned}$$

ان مساوات کو ω سے تقسیم کرتے ہوئے

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (2.107)$$

لکھتے ہیں جہاں S کو متعاملیت⁹⁵ کہتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -Sa + Rb &= E_0 \\ -Ra - Sb &= 0 \end{aligned}$$

b حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو S اور دوسری کو R سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔
 a حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو R اور دوسری کو $-S$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$-(S^2 + R^2)a = E_0 S, \quad (R^2 + S^2)b = E_0 R \quad (2.108)$$

ان سے درج ذیل عددی سر حاصل ہوتے ہیں

$$a = -\frac{E_0 S}{S^2 + R^2}, \quad b = \frac{E_0 R}{S^2 + R^2} \quad (2.109)$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے I_p لکھتے ہیں۔

$$(2.110) \quad I_p(t) = -\frac{E_0 S}{S^2 + R^2} \cos \omega t + \frac{E_0 R}{S^2 + R^2} \sin \omega t$$

اس کو

$$(2.111) \quad I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \theta)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(2.112) \quad I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{E_0}{\sqrt{S^2 + R^2}}, \quad \tan \theta = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R}$$

ہیں۔ I_0 کو رو کا حیظہ اور θ کو رو کا زاویہ کہتے ہیں۔ داخلی دباؤ سے رو θ زاویے کے فاصلے پر ہے۔ درج بالا مساوات میں $\frac{E_0}{I_0} = \sqrt{S^2 + R^2}$ لکھا جاسکتا ہے جو قانون اوہم سے مشابہت رکھتا ہے لہذا $\sqrt{S^2 + R^2}$ کو بروقی رکاوٹ⁹⁶ کہا جاتا ہے۔

مساوات 2.104 کے مطابقتی متجانس مساوات کی امتیازی مساوات

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

کے جذر

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ہیں جن میں $\alpha = \frac{R}{2L}$ اور $\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ لکھتے ہوئے

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں I_h درج ذیل ہو گا۔

$$I_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

کسی بھی حقیقی دور میں R کبھی بھی صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ یوں $R > 0$ اور $\alpha > 0$ ہوں گے۔ اس طرح $t \rightarrow \infty$ پر $I_h \rightarrow 0$ ہو گا لہذا RLC دور کا عمومی حل آخر کار I_p کے برابر ہو گا جو داخلی دباؤ کے تعدد ω پر ہارمونی ارتعاش کرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال 2.28: سلسلہ وار RLC دور میں سواوہم کی مزاحمت $R = 100 \Omega$ ، آدھا ہینری امالہ $L = 0.5 \text{ H}$ ، بیس ملی فیراڈ برقی گیر $C = 20 \text{ mF}$ اور داخلی دباؤ $E(t) = 310 \sin(2\pi 50t)$ وولٹ ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر رو اور برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر کے برابر ہیں۔ دور میں رو $I(t)$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.104 میں دی گئی معلومات پر کرتے ہوئے

$$0.5I'' + 100I' + 50I = (100\pi)(310) \cos(100\pi t)$$

ملتا ہے جس سے متجانس مساوات $0.5I'' + 100I' + 50I = 0$ لکھ کر امتیازی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$0.5\lambda^2 + 100\lambda + 50 = 0$$

امتیازی مساوات کے جذر $\lambda_1 = -199.5$ اور $\lambda_2 = -0.5$ ہیں لہذا

$$I_h(t) = c_1 e^{-199.5t} + c_2 e^{-0.5t}$$

ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو گا۔

دور کی متعاملیت $S = 100\pi 0.5 - \frac{1}{100\pi 0.02} = 156.92$ لیتے ہوئے

$$I_p(t) = a \cos(100\pi t) + b \sin(100\pi t)$$

کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$a = -\frac{310 \times 156.92}{156.92^2 + 100^2} = -1.4049, \quad b = \frac{310 \times 100}{156.92^2 + 100^2} = 0.8953$$

یوں

(2.113)

$$I_p(t) = -1.4049 \cos(100\pi t) + 0.8953 \sin(100\pi t) = 1.422 \sin(100\pi t - 1.003)$$

ہو گا لہذا عمومی حل

$$I(t) = I_h + I_p = c_1 e^{-199.5t} + c_2 e^{-0.5t} + 1.422 \sin(100\pi t - 1.003)$$

ہو گا۔ ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے c_1 اور c_2 دریافت کرتے ہیں۔ عمومی حل میں $t = 0$ پر $I(0) = 0$ پر کرنے سے

$$(2.114) \quad c_1 + c_2 - 1.4049 = 0, \implies c_1 = 1.4049 - c_2$$

ماتا ہے۔ مساوات 2.103 میں مکمل کی قیمت بار کے برابر ہے یعنی $\int I dt = Q$ لہذا $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $Q(0) = 0$ اور $I(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.103 سے

$$LI'(0) + RI(0) = E_0 \sin 0 \implies I' = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق میں $I'(0) = 0$ پر کرنے سے

$$I'(0) = -199.5c_1 - 0.5c_2 + 0.8953(2\pi 50) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 2.114 کی مدد سے حل کرتے ہوئے $c_1 = 1.4099$ اور $c_2 = -0.00497$ ملتے ہیں۔ یوں مخصوص حل یعنی دور میں رو درج ذیل ہو گی۔

$$I(t) = 1.4099e^{-199.5t} - 0.00497e^{-0.5t} + 1.422 \sin(100\pi t - 1.003)$$

شکل 2.27-الف میں $I(t)$ کو نقطہ دار لکیر جبکہ I_p کو ٹھوس لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ چونکہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو جاتا ہے لہذا I اور I_p میں صرف شروع میں فرق پایا جاتا ہے۔ شکل-ب میں $E(t)$ اور $I_p(t)$ کو دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں میں زاویائی فاصلہ 1.003 ریڈین یعنی 57.5° ہے جو شکل میں صاف واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ دباؤ سے رو 57.5° پیچھے⁹⁷ ہے۔ آپ یہاں خود تسلی کر سکتے ہیں کہ $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباؤ سے رو پیچھے ہو گی جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباؤ سے رو آگے ہو گی۔ $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباؤ اور رو ہم زاویہ⁹⁸ ہوں گے یعنی ان میں زاویائی فاصلہ نہیں پایا جاتا۔ □

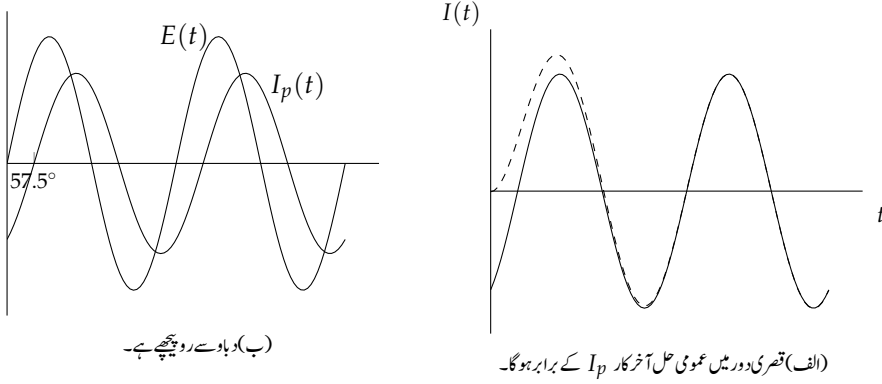
برقی اور میکانیکی مقدار کی مماثلت

دو بالکل مختلف نظام کی ایک ہی تفرقی مساوات ہو سکتی ہے۔ اسپرنگ اور کمیت کی تفرقی مساوات 2.85 اور سلسلہ وار RLC کی مساوات 2.104 کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t, \quad LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میکانیکی نظام میں کمیت اور برقی نظام میں امالہ تفرقی مساوات میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔ کمیت کی جمود کی طرح امالہ برقی دور کی رو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ اسی طرح c اور R تفرقی مساوات

⁹⁷lagging
⁹⁸in-phase



شکل 2.27: مثال 2.28 کی رو کے خطوط۔

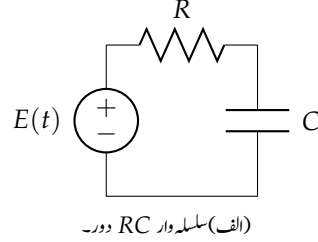
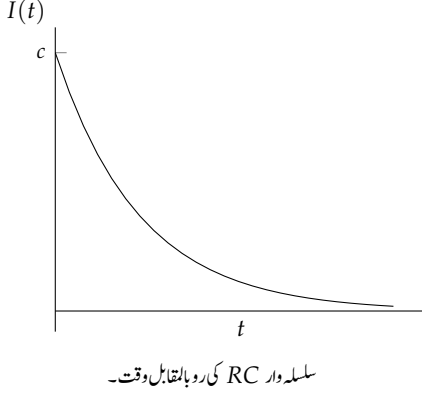
جدول 2.3: میکانیکی اور برقی نظام میں یکساں عناصر۔

برقی نظام	میکانی نظام
امالہ L	کمیت m
مزاحمت R	قسری مستقل c
برق گیر کا بال عکس $\frac{1}{C}$	اسپرنگ مستقل k
داخلی دباؤ کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$	جبری قوت $F_0 \cos \omega t$
برقی رو $I(t)$	ہٹاؤ $y(t)$

میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں اور نظام میں توانائی کی ضیاع کا باعث بنتے ہیں۔ اسپرنگ کا مستقل k اور برق گیر کا بال عکس متناسب $\frac{1}{C}$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔ میکانیکی جبری قوت $F_0 \cos \omega t$ اور برقی داخلی دباؤ کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔ میکانیکی اور برقی نظام کی یکسانیت کو جدول 2.3 میں پیش کیا گیا ہے۔

میکانی اور برقی نظام میں یکسانیت صحیح معنوں میں صرف مقداری نوعیت کی ہے۔ یوں ہم میکانیکی نظام کے مطابق ایسا برقی دور تخلیق دے سکتے ہیں جس میں رو بالمقابل وقت میکانیکی نظام میں ہٹاؤ بالمقابل وقت کے بالکل برابر ہوگی۔ یہ ایک انتہائی اہم نتیجہ ہے کیونکہ میکانیکی نظام مثلاً پل یا بلند عمارت کا برقی نمونہ انتہائی آسانی اور سستے دام بناتے ہوئے اس کی کارکردگی پر تفصیلاً غور کیا جاسکتا ہے۔ مزید، برقی متغیرات مثلاً رو یا دباؤ انتہائی آسانی سے ٹھیک ٹھیک ناپے جاسکتے ہیں جبکہ میکانیکی متغیرات اتنے آسانی سے اور ٹھیک ٹھیک ناپنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔

میکانی متغیرات کو برقی متغیرات میں تبدیل کرنے والے کئی مبدل⁹⁹ اسی مشابہت پر کام کرتے ہیں۔



شکل 2.28: سلسلہ وار RC دور اور اس کی ردیافتی وقت۔

سوالات

سوال 2.151 تا سوال 2.157 خصوصی سلسلہ وار RLC ادوار ہیں۔

سوال 2.151: سلسلہ وار RC دور شکل 2.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں داخلی دباؤ مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔ دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی ردیافت کریں۔

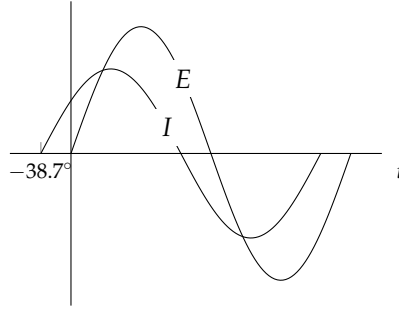
جواب: $RI' + \frac{I}{C} = 0$ ، رو $I = ce^{-\frac{t}{RC}}$ کو شکل 2.28-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 2.152: شکل 2.28-الف کو سائن نما برقی دباؤ $E(t) = E_0 \sin \omega t$ کے لئے حل کریں۔

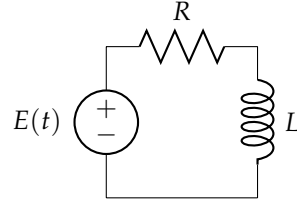
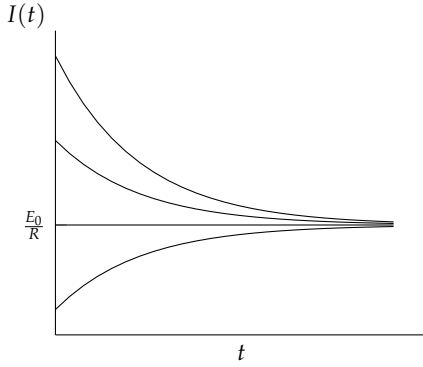
جواب: $RI' + \frac{I}{C} = \omega E_0 \cos \omega t$ ، $I = ce^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega CE_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} (\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t)$

سوال 2.153: شکل 2.28-الف میں $R = 50 \Omega$ ، $C = 0.25 \text{ mF}$ اور $E(t) = 20 \sin 100t$ لیتے ہوئے برقرار حال رو دریافت کریں۔ دباؤ کو حوالہ لیتے ہوئے برقرار حل رو کا زاویہ کتنا ہے؟ $E(t)$ اور $I(t)$ کے خط اکٹھے کھینچیں۔

جواب: $I_p = \frac{2}{\sqrt{41}} \sin(100t + 0.6747)$ ؛ دباؤ سے رو 38.7° زاویہ آگے ہے۔ RC دور میں داخلی دباؤ سے رو 0° تا 90° آگے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.29 میں دباؤ اور رو کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کے حیطے ٹھیک تناسب سے نہیں دکھائے گئے ہیں۔



شکل 2.29: RC دور میں دباؤ سے برقرار رو آگے رہتی ہے۔



(الف) سلسلہ وار RL دور۔

سلسلہ وار RL کی رو بالمتقابل وقت۔ داخلی دباؤ مستقل مقدار ہے۔

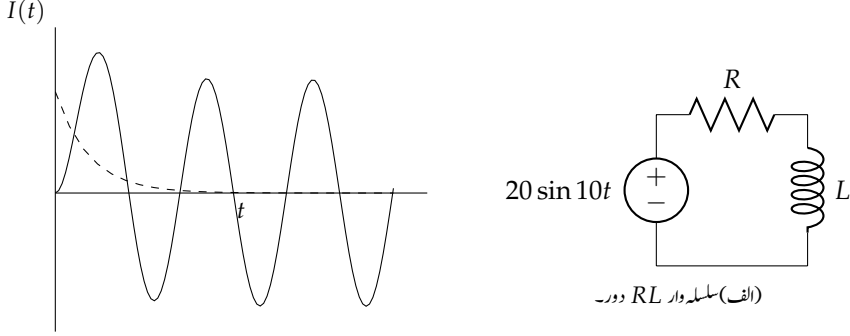
شکل 2.30: سلسلہ وار RL دور اور اس کی رو۔

سوال 2.154: سلسلہ وار RL دور شکل 2.30-الف میں دکھایا گیا ہے۔ داخلی دباؤ مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔ دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: $LI' + RI = E_0$ ، $I = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}$ کو شکل 2.30-ب میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔

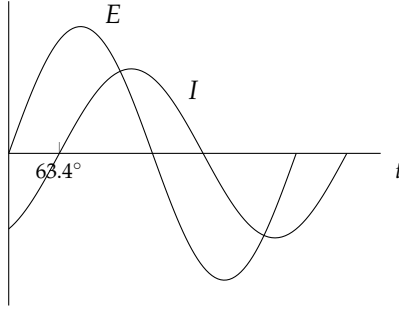
سوال 2.155: شکل 2.31-الف میں $R = 5 \Omega$ اور $L = 1 \text{ H}$ لیں۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $I(0) = 0$ لیتے ہوئے $I(t)$ حاصل کریں۔ رو کا خط کھینچیں۔

جواب: $LI' + RI = E_0 \sin \omega t$ ، $I = \frac{8}{5}e^{-5t} + \frac{4}{5} \sin 10t - \frac{8}{5} \cos 10t$



سلسلہ وار RL کی رو بمقابلہ وقت۔ داخلی دباؤ مستقل مقدار ہے۔

شکل 2.31: سوال 2.155 کا دور۔



شکل 2.32: RL دور میں دباؤ سے برقرار رہتی ہے۔

سوال 2.156: شکل 2.31-الف میں $R = 10 \Omega$ اور $L = 2 \text{ H}$ لیں۔ برقرار حل رو دریافت کریں۔ دباؤ کے حوالے سے رو کا زاویہ کتنا ہے۔ داخلی دباؤ اور برقرار رو کے خط کھینچیں۔

جواب: $I = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(10t - 1.107)$ ؛ داخلی دباؤ سے رو 63.4° زاویہ پیچھے ہے۔ RL دور میں داخلی دباؤ سے رو 0° تا 90° پیچھے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.32 میں دونوں خطوط دکھائے گئے ہیں۔

سوال 2.157: سلسلہ وار LC دور میں $L = 2 \text{ H}$ اور $C = 0.02 \text{ F}$ ہیں۔ $R = 0$ ہونے کی ناطے LC دور بلا تقصیر ہو گا۔ یوں LC نظام بلا تقصیر اسپرنگ اور کمیت کی نظام کی طرح ہے۔ اس دور کا داخلی دباؤ $E(t) = \sin 5t$ ہے۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر رو اور برق گیر میں ذخیرہ بار دونوں صفر کے برابر ہیں۔ رو کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $I(t) = \cos 5t - \cos 100t$

سوال 2.158 تا سوال 2.165 شکل 2.26 کے سلسلہ وار RLC دور پر مبنی ہیں۔ ان کی برقرار حال رو دریافت کریں۔

سوال 2.158: $R = 6 \Omega$, $L = 0.4 \text{ H}$, $C = 0.1 \text{ F}$, $E = 100 \sin 2t \text{ V}$
جواب: $I = 13.65 \sin(2t + 0.611) \text{ A}$

سوال 2.159: $R = 6 \Omega$, $L = 0.4 \text{ H}$, $C = 0.1 \text{ F}$, $E = 100 \text{ V}$
جواب: $I = 0 \text{ A}$

سوال 2.160: $R = 6 \Omega$, $L = 0.4 \text{ H}$, $C = 0.1 \text{ F}$, $E = 100 \sin 5t \text{ V}$
جواب: $I = \frac{50}{3} \sin 5t \text{ A}$

سوال 2.161: $R = 6 \Omega$, $L = 0.4 \text{ H}$, $C = 0.1 \text{ F}$, $E = 100 \sin 7t \text{ V}$
جواب: $I = 16.25 \sin(7t - 0.225) \text{ A}$

سوال 2.162: $R = 2 \Omega$, $L = 0.8 \text{ H}$, $C = 1.2 \text{ F}$, $E = 50 \cos 10t \text{ V}$
جواب: $I = 5.9 \sin 10t + 1.5 \cos 10t \text{ A}$

سوال 2.163: $R = 1 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 1.5 \text{ F}$, $E = 10 \cos t \text{ V}$
جواب: $I = -1.6 \sin t + 9.7 \cos t \text{ A}$

سوال 2.164: $R = 0.1 \Omega$, $L = 0.2 \text{ H}$, $C = 0.01 \text{ F}$, $E = 20 \sin 10t + 10 \sin 100t \text{ V}$
جواب: $I = 0.003 \sin 100t - 0.526 \cos 100t + 0.031 \sin 10t + 2.5 \cos 10t \text{ A}$

سوال 2.165: اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں کم قسری، فاصل قسری اور زیادہ قسری صورت پائے گئے۔ سلسلہ وار RLC دور میں کم قسری، فاصل قسری اور زیادہ قسری صورت کے شرائط معلوم کریں۔

جوابات: کم قسری صورت $R^2 < \frac{4L}{C}$ دیتی ہے، جبکہ فاصل قسری صورت میں $R^2 = \frac{4L}{C}$ اور زیادہ قسری صورت میں $R^2 > \frac{4L}{C}$ ہوگا۔

سوال 2.166 تا سوال 2.168 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں جن میں ابتدائی روادور برق گیر میں ذخیرہ ابتدائی بار صفر ہیں۔ ان کی مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.166: $R = 0.1 \Omega, L = 0.22 H, C = 0.1 F, E = 36 \sin 15t V$
 جواب: $I = 0.52 \sin 15t - 13.65 \cos 15t + e^{-\frac{5}{22}t} (-0.69 \sin 6.74t + 13.65 \cos 6.74t) A$

سوال 2.167: $R = 2 \Omega, L = 0.1 H, C = 0.1 F, E = 10 \sin 100t V$
 جواب: $I = 0.196 \sin 100t - 0.97 \cos 100t + e^{-10t} (0.97 - 9.9t) A$

سوال 2.168: $R = 4 \Omega, L = 0.4 H, C = 0.2 F, E = 5 \sin 25t V$
 جواب: $I = 0.179 \sin 25t - 0.437 \cos 25t - 0.103e^{-1.46t} + 0.541e^{-8.54t} A$

2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

پہلے باب میں صفحہ 60 پر مثال 1.23 میں ہم نے مقدار معلوم بدلنے کے طریقے¹⁰⁰ سے تفرقی مساوات کا حل نکالا۔ اس ترکیب¹⁰¹ سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(2.115) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں کھلے وقفے I پر $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ استمراری تفاعل ہیں۔ اس مساوات کو معیاری صورت میں لکھنا ضروری ہے جہاں y'' کا عددی سر اکائی (1) کے برابر ہے۔ حصہ 2.6 میں ہم نے دیکھا کہ مساوات 2.115 کے مطابقتی متجانس مساوات کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.115 کے کسی بھی مخصوص حل y_p کا مجموعہ اس غیر متجانس مساوات کا عمومی حل دیتا ہے۔ سادہ $r(x)$ کی صورت میں نا معلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے y_p حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس ترکیب پر حصہ 2.7 میں غور کیا گیا جبکہ حصہ 2.8 اور حصہ 2.9 میں اس کا استعمال کیا گیا۔

¹⁰⁰variation of parameter

¹⁰¹یہ ترکیب یوسف لونی لکیرٹھ سے منسوب ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب ان $r(x)$ کے لئے قابل استعمال ہے جن کے تفرق، اصل تفاعل کی صورت رکھتے ہوں مثلاً سائن نما تفاعل، قوت نمائی تفاعل اور x^n تفاعل۔ اس کے برعکس مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ زیادہ مشکل تفاعل کے لئے کارآمد ہے۔ اس ترکیب کے تحت مساوات 2.115 کا مخصوص حل

$$(2.116) \quad y_p(t) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 ، مطابقتی متجانس مساوات

$$(2.117) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

کے حل کی اساس ہیں اور W ان کی ورونسکی [حصہ 2.6 دیکھیں] ہے۔

$$(2.118) \quad W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

مساوات 2.115 میں متغیر عددی سر کی صورت میں مساوات 2.116 کے نکملات عموماً مشکلات پیش کرتے ہیں لہذا جہاں ممکن ہو وہاں نا معلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کریں۔ مساوات 2.116 کے حصول سے پہلے ایک مثال دیکھتے ہیں جہاں نا معلوم عددی سر کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے لہذا موجودہ ترکیب ہی استعمال کی جائے گی۔

مثال 2.29: درج ذیل غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل دریافت کریں۔

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x$$

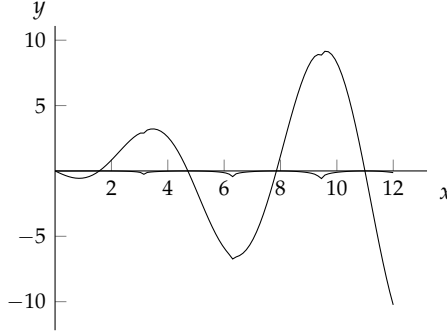
حل: کسی بھی کھلے وقفے پر متجانس سادہ تفرقی مساوات کی اساس $y_1 = \cos x$ اور $y_2 = \sin x$ ہیں جن سے ورونسکی لکھتے ہیں۔

$$W = \cos^2 x - \sin x(\sin x) = 1$$

مساوات 2.116 سے y_p حاصل کرتے ہیں

$$(2.119) \quad \begin{aligned} y_p(t) &= -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x dx + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x dx \\ &= -x \cos x + \sin x \ln|\sin x| \end{aligned}$$

جہاں نکمل کے مستقل صفر چنے گئے ہیں۔



شکل 2.33: مثال 2.29 کے خطوط۔

شکل 2.33 میں y_p اور اس کا دوسرا جزو دکھائے گئے ہیں۔ y_p کا دوسرا جزو اتنا کم ہے کہ حقیقتاً پہلا جزو $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ہی $-x \cos x$ کی قیمت تعین کرتا ہے۔ غیر متجانس تفرقی مساوات کا عمومی حل y_p اور y_p کا مجموعہ ہو گا۔

$$(2.120) \quad y = y_h + y_p = (c_1 - x) \cos x + (c_2 + \ln|\sin x|) \sin x$$

مساوات 2.119 میں مکمل لیتے ہوئے مکمل کے مستقل a اور b بھی شامل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \, dx + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \, dx \\ &= -\cos x(x + a) + \sin x(\ln|\sin x| + b) \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ مساوات 2.120 کے ساتھ موازنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ از خود عمومی حل ہے۔

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.115 کا عمومی حل مساوات 2.116 میں نکلات کے مستقل شامل کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

□

مقدار معلوم بدلنے کے طریقے کا حصول

اس ترکیب میں متجانس تفرقی مساوات کے حل

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

میں مستقل (یعنی مقدار معلوم) c_1 اور c_2 کی جگہ نامعلوم تفاعل $u(x)$ اور $v(x)$ پر کئے جاتے ہیں۔ اسی لئے اس کو مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ کہتے ہیں۔ $u(x)$ اور $v(x)$ کی ایسی قیمتیں چننی جاتی ہیں کہ

$$(2.121) \quad y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.115 کا مخصوص حل ہو۔ حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.4 کے تحت کھلے وقفہ I پر استمراری p اور q کی صورت میں اس وقفے پر y_h موجود ہو گا۔ جبری تفاعل r کے استمراری ہونے کی ضرورت جلد پیش آئے گی۔

مساوات 2.121 اور اس کے تفرق کو مساوات 2.115 میں پر کرتے ہوئے u اور v دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 2.121 کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y'_p = u'y_1 + uy'_1 + v'y_2 + vy'_2$$

ہم ایسی u اور v دریافت کر سکتے ہیں کہ y_p غیر متجانس تفرق مساوات پر پورا اترتا ہو جبکہ u اور v درج ذیل مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

$$(2.122) \quad u'y_1 + v'y_2 = 0$$

یوں y_p نسبتاً آسان صورت اختیار کرتی ہے

$$(2.123) \quad y'_p = uy'_1 + vy'_2$$

جس کا تفرق لیتے ہوئے y''_p کی مساوات ملتی ہے۔

$$(2.124) \quad y''_p = u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + vy''_2$$

مساوات 2.121، مساوات 2.123 اور مساوات 2.124 کو مساوات 2.115 میں پر کرتے ہوئے

$$(u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + vy''_2) + p(uy'_1 + vy'_2) + q(uy_1 + vy_2) = r$$

u ، اور v کے عددی سراکھٹے کرتے ہیں۔

$$u(y''_1 + py'_1 + qy_1) + v(y''_2 + py'_2 + qy_2) + u'y'_1 + v'y'_2 = r$$

چونکہ y_1 اور y_2 متجانس مساوات 2.117 کے حل ہیں لہذا دونوں قوسین صفر کے برابر ہیں اور درج بالا مساوات نسبتاً سادہ صورت اختیار کر لیتی ہے۔

$$(2.125) \quad u'y'_1 + v'y'_2 = r$$

یہاں مساوات 2.122 کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(2.126) \quad u'y_1 + v'y_2 = 0$$

مساوات 2.125 اور مساوات 2.126 دو ہمزاو مساوات ہیں جنہیں حل کرتے ہوئے u اور v حاصل کرتے ہیں۔ v' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_2$ سے اور دوسری مساوات کو y_2' سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں

$$u'(y_1y_2' - y_2y_1') = -y_2r \quad \implies \quad u'W = -y_2r$$

جہاں W مساوات 2.118 ہے۔ اسی طرح u' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو y_1 اور دوسری کو $-y_1'$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$v'(y_1y_2' - y_2y_1') = y_1r \quad \implies \quad v'W = y_1r$$

چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہذا حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.3 کے تحت $W \neq 0$ ہو گا۔ اس طرح درج بالا مساوات کو W سے تقسیم کیا جاسکتا ہے جس سے

$$u' = -\frac{y_2r}{W}, \quad v' = \frac{y_1r}{W}$$

ملتے ہیں۔ مکمل لیتے ہوئے u اور v حاصل ہوتے ہیں۔

$$u = -\int \frac{y_2r}{W} dx, \quad v = \int \frac{y_1r}{W} dx$$

چونکہ کھلے وقفہ I پر r استمراری تفاعل ہے لہذا درج بالا نکلات موجود ہیں۔ حاصل u اور v کو مساوات 2.121 میں پر کرتے ہوئے مساوات 2.116 حاصل ہوتا ہے۔

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1r}{W} dx$$

سوالات

مساوات 2.169 تا مساوات 2.169 کو مقدار معلوم بدلنے کے طریقے یا نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حل کریں۔

سوال 2.169: $y'' + 4y = \sec 2x$
 جواب: $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln|\cos 2x|$

سوال 2.170: $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$
 جواب: $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln |\sin 2x|$

سوال 2.171: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \cos x$
 جواب: $y_p = c_1 x^2 + c_2 x - x \cos x$

سوال 2.172: $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{cosec} x$
 جواب: $y_p = e^x (A \cos x + B \sin x) - x e^x \cos x + e^x \sin x \ln |\sin x|$

سوال 2.173: $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x$
 جواب: $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8}(1 - 2x) \cos 2x$

سوال 2.174: $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2}$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^{-3x} - e^{-3x}(1 + \ln x)$

سوال 2.175: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^{-x} - x e^{-x}(1 - \ln x)$

سوال 2.176: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^{-x} - e^{-x}(1 + \ln x)$

سوال 2.177: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^3}$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^{-x} + \frac{e^{-x}}{2x}$

سوال 2.178: $y'' + 4y = \sinh 2x$
 جواب: $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{8} \sinh 2x$

سوال 2.179: $y'' - 2y' + y = 28x^{\frac{1}{3}}e^x$
 جواب: $y_p = (ax + b)e^x + 9x^{\frac{7}{3}}e^x$

سوال 2.180: $y'' + 2y' + y = e^{-x} \operatorname{cosec}^3 x$
 جواب: $y_p = \frac{1}{2}e^{-x} \operatorname{cosec} x [(A + B \sin 2x) + (1 - A) \cos 2x]$

سوال 2.181: $x^2 y'' + 6xy' + 6y = x$
 جواب: $y_p = \frac{x}{12} + c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3}$

سوال 2.182: $x^2 y'' + 7xy' + 9y = 25x^2$
 جواب: $y_p = x^2 + c_1 x^{-3} + c_2 x^{-2} \ln |x|$

باب 3

بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات

دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے طریقے بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی صورت میں مساوات زیادہ پیچیدہ ہوں گے، امتیازی مساوات کے جذر بھی تعداد میں زیادہ اور حصول میں نسبتاً مشکل ہوں گے اور ورنہ کسی زیادہ اہم کردار ادا کرے گا۔

3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم متغیرہ $y(x)$ کا $y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$ سب سے بلند درجی تفرق ہو۔ ایسی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں y اور کم درجی تفرق موجود یا غیر موجود ہو سکتے ہیں۔ ایسی مساوات کو خطی کہتے ہیں اگر اس کو

$$(3.1) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

لکھنا ممکن ہو۔ صفحہ 80 پر دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کی بات کی گئی۔ موجودہ مساوات میں $n = 2$ ،
 $p_1 = p$ اور $p_0 = q$ پر کرنے سے دو درجی مساوات حاصل ہوگی۔ عددی سر $p_0(x)$ تا $p_n(x)$ اور جبری
تفاعل $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں جبکہ $y(x)$ نامعلوم متغیرہ ہے۔ خطی مساوات
کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں $y^{(n)}$ کا عددی سر اکائی 1 ہے۔ تفرقی مساوات میں $p_n(x)y^{(n)}$
موجود ہونے کی صورت میں پوری مساوات کو $p_n(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کریں۔ جو
تفرقی مساوات درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر خطی کہلاتی ہے۔

کسی کھلے وقفے I پر $r(x)$ مکمل صفر $r \equiv 0$ ہونے کی صورت میں مساوات 3.1 سے متجانس مساوات
(3.2)
$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ کھلے وقفے پر $r(x)$ کے مکمل صفر ہونے سے مراد یہ ہے کہ اس وقفے پر ہر x کے لئے $r(x)$
کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ دو درجی تفرقی مساوات کی طرح اگر $r(x)$ مکمل صفر نہ ہو تب مساوات غیر متجانس
کہلائے گی۔

کھلے وقفہ I پر n درجی خطی یا غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل $y = h(x)$ سے مراد ایسا تفاعل ہے
جو I پر معین ہو، کھلے وقفے پر اس کا n درجی تفرق موجود ہو اور تفرقی مساوات میں y اور اس کے تفرقات
کی جگہ h اور اس کے تفرقات پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں حاصل ہوں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات: خطی میل اور عمومی حل

خطی میل یا اصول خطیت جس کا ذکر صفحہ 82 مسئلہ 2.1 میں کیا گیا بلند درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کے
لئے بھی درست ہے۔

مسئلہ 3.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ بلند درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی بلند درجی تفرقی مساوات 3.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو
گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔ (یہ اصول غیر
خطی اور غیر متجانس مساوات پر لاگو نہیں ہوتا۔)

اس کا ثبوت گزشتہ باب میں دئے گئے ثبوت کی طرح ہے جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہماری بقایا گفتگو ہو بہو دو درجی تفرقی مساوات کی طرح ہوگی لہذا یہاں بلند درجی خطی متجانس مساوات کی عمومی حل کی بات کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر n عدد تفاعل کی خطی طور غیر تابع ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل
کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل

$$(3.3) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

ہے جہاں $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ حل کی اساس اور c_1 تا c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ یوں y_1 تا y_n کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

عمومی حل کے مستقل کی قیمتیں مقرر کرنے سے مخصوص حل حاصل ہوگا۔

تعریف: خطی طور تابع تفاعل اور خطی طور غیر تابع تفاعل
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر n عدد تفاعل $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ معین ہیں۔

وقفہ I پر معین y_1 تا y_n ، اس وقفے پر اس صورت خطی طور غیر تابع¹ کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$(3.4) \quad k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$$

سے مراد

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

ہو۔ k_1 تا k_n میں کم از کم ایک کی قیمت صفر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 3.4 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 تا y_n خطی طور تابع² کہلاتے ہیں۔

¹ linearly independent
² linearly dependent

y_1 تا y_n میں (کم از کم ایک) تفاعل کو اس صورت بقایا تفاعل کے خطی میل کے طرز پر لکھا جاسکتا ہے جب اس وقفے پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہوں۔ یوں اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 3.4 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$y_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2y_2 + k_3y_3 + \cdots + k_ny_n)$$

لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ y_1 کو بقایا تفاعل کے خطی میل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی کو خطی طور تابع کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 2$ کی صورت میں ہمیں حصہ 2.6 میں بیان کئے گئے تصورات ملتے ہیں۔

مثال 3.1: خطی طور تابع ثابت کریں کہ تفاعل $y_1 = 2 \sin x$ ، $y_2 = 1.5x^2$ ، $y_3 = 5 \cos x + \sin x$ اور $y_4 = 4 \cos x$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور تابع ہیں۔

حل: ہم $y_3 = \frac{1}{2}y_1 + 0y_2 + \frac{5}{4}y_4$ لکھ سکتے ہیں لہذا y_1 تا y_4 خطی طور تابع تفاعل ہیں۔ □

مثال 3.2: خطی طور غیر تابع ثابت کریں کہ $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ اور $y = x^4$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: ہم مساوات $k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 = 0$ میں مختلف x کی قیمتیں پر کرتے ہوئے k_1 تا k_3 دریافت کرتے ہیں۔ کھلے وقفے پر نقطہ $x = 1$ ، $x = -1$ اور $x = 2$ چنتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 8k_2 + 16k_3 &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $k_1 = 0$ ، $k_2 = 0$ اور $k_3 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور غیر تابع ہونے کا ثبوت ہے۔ □

مثال 3.3: اساس۔ عمومی حل $y^{(3)} - y' = 0$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ $y^{(3)}$ سے مراد $\frac{d^3y}{dx^3}$ ہے۔

حل: حصہ 2.2 کی طرح ہم اس متجانس مساوات کا حل $y = e^{\lambda x}$ تصور کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ اس کو $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ لکھتے ہوئے $\lambda = 0$ اور $\lambda = \pm 1$ ملتے ہیں جن سے اساس $y_1 = c$ ، $y_2 = e^x$ اور $y_3 = e^{-x}$ ملتا ہے۔ جیسا مثال 3.5 میں ثابت کیا جائے گا، یہ اساس کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں لہذا کسی بھی کھلے وقفے پر عمومی حل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

□

ہو گا۔

ابتدائی قیمت مسئلہ۔ وجودیت اور یکتائی

مساوات 3.2 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.2 اور درج ذیل n ابتدائی شرائط پر مشتمل ہو گا

$$(3.5) \quad y(x_0) = K_0, y'(x_0) = K_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$$

جہاں x_0 کھلے وقفے I پر ایک نقطہ اور K_0 تا K_{n-1} اس نقطے پر دیے گئے مقدار ہیں۔

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 کو وسعت دیتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

مسئلہ 3.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت بلند درجی تفرقی مساوات کھلے وقفہ I پر مساوات 3.2 کے عددی سر p_0 تا p_{n-1} استمراری ہونے کی صورت میں اگر x_0 کھلے وقفے پر پایا جاتا ہو تب مساوات 3.2 اور مساوات 3.5 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا حل $y(x)$ موجود ہے۔

حل کی موجودگی کا ثبوت اس کتاب میں نہیں دیا جائے گا۔ کتاب کے آخر میں ضمیمہ 1 میں حل کی یکتائی کے ثبوت میں معمولی رد بدل سے یکتائی ثابت کی جاسکتی ہے۔

مثال 3.4: تین درجی پولر کوئی مساوات کا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$x^3 y''' - 5x^2 y'' + 12xy' - 12y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 0$$

حل: ہم تفرقی مساوات میں آزمائشی تفاعل $y = x^m$ پر کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$m^3 - 8m^2 + 19m - 12 = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس کے جذر $m = 1$ ، $m = 3$ اور $m = 4$ ہیں۔ جذر کو مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ یہاں جذر حاصل کرنے پر بحث نہیں کی جائے گی۔ یوں حل کی اساس $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ اور $y_3 = x^4$ ہیں جنہیں مثال 3.2 میں خطی طور غیر تابع ثابت کیا گیا۔ اس طرح عمومی حل

$$y = c_1x + c_2x^3 + c_3x^4$$

ہو گا۔ دیے گئے تفرقی مساوات کو x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے y''' کا عددی سر اکائی حاصل کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے۔ معیاری صورت میں مساوات کے دیگر عددی سر $x = 0$ پر غیر استمراری ہیں۔ اس کے باوجود درج بالا عمومی حل تمام x بشمول $x = 0$ کے لئے درست ہے۔

عمومی حل اور اس کے تفرقات $y' = c_1 + 3c_2x^2 + 4c_3x^3$ اور $y'' = 6c_2x + 12c_3x^2$ میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$c_1 + 3c_2 + 4c_3 = -1$$

$$6c_2 + 12c_3 = 0$$

جن کا حل $c_1 = 3$ ، $c_2 = -4$ اور $c_3 = 2$ ہے۔ اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = 3x - 4x^3 + 2x^4$$

□

خطی طور غیر تابع حل۔ ورنسکی

عمومی حل کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ حل خطی طور غیر تابع ہوں۔ اگرچہ عموماً حل کو دیکھ کر ہی اندازہ ہو جاتا ہے کہ وہ خطی طور غیر تابع ہیں یا نہیں ہیں، البتہ ایسا معلوم کرنے کا منظم طریقہ زیادہ بہتر ہو گا۔ صفحہ 140 پر

مسئلہ 2.3 دو درجہ $n = 2$ مساوات کے علاوہ بلند درجہ مساوات کے لئے بھی درست ہے۔ بلند درجہ مساوات کی صورت میں ورونسکی درج ذیل ہوگی۔

$$(3.6) \quad W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ورونسکی تفرقی مساوات کے حل y_1 تا y_n پر مبنی ہے جو از خود x پر مبنی ہیں۔ ورونسکی غیر صفر ہونے کی صورت میں y_1 تا y_n خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

مسئلہ 3.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل

کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات 3.2 کے I پر حل y_1 تا y_n اس صورت خطی طور تابع ہوں گے جب ان کے ورونسکی³ کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W مکمل صفر⁴ ہو گا۔ یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب I پر y_1 تا y_n خطی طور غیر تابع ہوں گے اور یہ حل کی اساس ہوں گے۔

ثبوت:

(الف) تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر y_1 تا y_n مساوات 3.2 کے حل ہیں۔ یوں خطی طور غیر تابع کی تعریف سے

$$(3.7) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ I پر اس مساوات کی $n - 1$ تفرقات لیتے ہیں۔

$$k_1 y_1' + \cdots + k_n y_n' = 0$$

$$k_1 y_1'' + \cdots + k_n y_n'' = 0$$

(3.8)

\vdots

$$k_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + k_n y_n^{(n-1)} = 0$$

Wronskian³
identically zero⁴

مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 n عدد خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کا نظام ہے جس کا غیر صفر حل k_1 تا k_n ہے لہذا I پر تمام x کے لئے، اس نظام کی عددی سر قالب کا مقطع⁶، مسئلہ کریمر⁷ (مسئلہ 8.15) کے تحت، صفر کے برابر ہوگی۔ اب قالب کا مقطع ہی ورونسکی ہے لہذا I پر تمام x کے لئے W صفر کے برابر ہے۔

(ب) مسئلہ کریمر کو استعمال کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ $W = 0$ کی صورت میں مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کے نظام کا $x = x_0$ پر غیر صفر حل k_1^* تا k_n^* پایا جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے، I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y^* = k_1^* y_1 + \dots + k_n^* y_n$ لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 کے تحت y^* ابتدائی شرائط $y^*(x_0) = 0$ تا $y^{*(n-1)}(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ انہیں ابتدائی شرائط پر حل $y \equiv 0$ بھی پورا اترتا ہے اور یوں مسئلہ 3.2 کے تحت، چونکہ مساوات 3.7 کے عددی سر I پر استمراری ہیں، لہذا $y^* = y$ ہوگا۔ اس طرح $y^* = k_1^* y_1 + \dots + k_n^* y_n \equiv 0$ پورے I پر ہوگا جس کا مطلب ہے کہ I پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہیں۔

(پ) اگر W کی قیمت x_0 پر صفر ہو جہاں x_0 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہو، تب ثبوت (ب) کے تحت خطی طور تابع ہونا ثابت ہوتا ہے اور یوں ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہوگا۔ اس طرح اگر I پر نقطہ x_1 پر W صفر نہ ہو تب y_1 تا y_n کھلے وقفہ I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

□

مثال 3.5: اساس۔ ورونسکی

ثابت کریں کہ مثال 3.3 میں حاصل کردہ حل $y_1 = c$ ، $y_2 = e^x$ اور $y_3 = e^{-x}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: مساوات 3.6 کے طرز پر ورونسکی لکھ کر

$$W = \begin{vmatrix} c & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^x \end{vmatrix} = ce^x e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2c$$

non trivial solution⁵
determinant⁶
Cramer's theorem⁷

حل کیا گیا ہے جہاں پہلی قطار سے c ، دوسری قطار سے e^x اور تیسری قطار سے e^{-x} باہر نکال کر قالب کی سادہ صورت حاصل کی گئی اور اس کے بعد پہلی قطار سے قالب کو پھیلا کر اس کا مقطع حاصل کی گئی ہے۔ چونکہ x کی کسی بھی قیمت کے لئے $W \neq 0$ ہے لہذا کسی بھی کھلے وقفے پر y_1 تا y_3 خطی طور پر غیر تابع ہیں۔ □

مساوات 3.2 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

پہلے عمومی حل کی وجودیت پر بات کرتے ہیں۔ صفحہ 143 پر دیا گیا مسئلہ 2.4 بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی کارآمد ہے۔

مسئلہ 3.4: وجودیت عمومی حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ اور $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں مساوات 3.2 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: ہم I پر کوئی نقطہ x_0 لیتے ہیں۔ مسئلہ 3.2 کے تحت مساوات 3.2 کے n عدد حل y_1 تا y_n پائے جاتے ہیں جو مساوات 3.5 میں دیے گئے ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ ہم ابتدائی شرائط یوں چنتے ہیں کہ $K_{j-1} = 1$ ہوں جبکہ بقایا K صفر کے برابر ہوں۔ اس طرح x_0 پر حل کی وروئسکی کی قیمت اکائی (1) ہو گی۔ مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $y_1(x_0) = 1$ ، $y_2'(x_0) = 1$ اور $y_3''(x_0) = 1$ ہوں گے جبکہ بقایا تمام ابتدائی قیمتیں صفر کے برابر ہوں گی۔ اس طرح وروئسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0), y_3(x_0)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

اکائی ہو گی۔ یوں کسی بھی n کے لئے حل y_1 تا y_n مسئلہ 3.3 کے تحت I پر خطی طور پر غیر تابع ہوں گے۔ یہ حل اساس ہیں لہذا I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ ہو گا۔

□

اب ہم اس قابل ہیں کہ ثابت کریں کہ مساوات 3.2 کے عمومی حل میں مساوات 3.2 کے تمام حل شامل ہیں۔ مساوات 3.2 کے عمومی حل کے اختیاری مستقل میں موزوں قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل حاصل کیا

جا سکتا ہے۔ یوں n درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔ نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

کھلے وقفے I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 3.2 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$(3.9) \quad Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

لکھا جس سکتا ہے جہاں y_1 تا y_n کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کے حل کی اساس ہیں جبکہ C_1 تا C_n موزوں مستقل ہیں۔

ثبوت: فرض کریں کہ I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ ہے جبکہ Y مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل ہے۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر کسی بھی نقطہ x_0 پر ایسے c_1 تا c_n دریافت کیے جا سکتے ہیں کہ x_0 پر y اور اس کے پہلے $n-1$ درجی تفرقات اسی نقطے پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ درجہ تفرقات کے برابر ہوں۔ اس طرح x_0 پر

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = Y$$

$$c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' = Y'$$

(3.10)

\vdots

$$c_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n y_n^{(n-1)} = Y^{(n-1)}$$

ہو گا جو الجبرائی مساوات کا خطی نظام ہے، جس کے نامعلوم متغیرات c_1 تا c_n جبکہ اس کا عددی سر قالب، x_0 پر حل y_1 تا y_n کا، وروئسی ہے۔ چونکہ y_1 تا y_n اساس ہیں لہذا مسئلہ 3.3 کے تحت اس کی وروئسی غیر صفر ہے۔ یوں باب-7 میں دیے گئے قاعدہ کرمیر⁸ کے تحت مساوات 3.10 کا یکتا حل $c_1 = C_1$ تا $c_n = C_n$ پایا جاتا ہے۔ عمومی حل میں اختیاری مستقل کی جگہ ان قیمتوں کو پر کرتے ہوئے I پر مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

ماتا ہے۔ مساوات 3.10 کے تحت x_0 پر y^* اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات، x_0 پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات کے برابر ہیں یعنی x_0 پر y^* اور Y یکساں ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ یوں مسئلہ 3.2 کے تحت I پر $y^* \equiv Y$ ہو گا جو درکار ثبوت ہے۔



متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر ہماری بحث یہاں اختتام پذیر ہوتی ہے۔ حزب توقع $n = 2$ کے لئے یہ بحث ہو بہو حصہ 2.6 کی طرز اختیار کر لیتی ہے۔

سوالات

سوال 3.1 تا سوال 3.6 میں دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ ورنہ استعمال کرتے ہوئے، ثابت کریں کہ کسی بھی کھلے وقفے پر، دیے حل خطی طور غیر تابع ہیں لہذا یہ حل کی اساس ہیں۔ سوال 3.1: $y''' = 0, \quad 1, x, x^2$ جواب: $W = 2$

سوال 3.2: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, \quad e^x, e^{-x}, e^{2x}$ جواب: $W = -6e^{2x}$

سوال 3.3: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad \cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$ جواب: $W = 4$

سوال 3.4: $y^{(4)} + 12y^{(3)} + 54y^{(2)} + 108y^{(1)} + 81y = 0, \quad e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}$ جواب: $W = 12e^{-12x}$

سوال 3.5: $y''' + 4y'' + 13y' = 0, \quad 1, e^{-2x} \cos 3x, e^{-2x} \sin 3x$ جواب: $W = 39e^{-4x}$

سوال 3.6: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0, \quad 1, x^2, x^4$ میں کھلا وقفہ $x > 0$ ہے۔ ثابت کریں کہ دیے گئے حل درست اور اساس ہیں۔

جواب: $W = 16x^3$ صرف $x = 0$ پر صفر کے برابر ہے لیکن یہ نقطہ کھلے وقفے میں شامل نہیں ہے لہذا کھلے وقفے پر $W \neq 0$ ہے۔

سوال 3.7 تا سوال 3.10: کیا دیے گئے تفاعل کھلے وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 3.7: $\sin x, \cos x, 1$
جواب: $W = -1$ ہے لہذا یہ خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.8: $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$
جواب: $W = 2e^{-3x}$ ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.9: $\sinh x, \cosh x, e^x$
جواب: $W = 0$ ہے لہذا یہ تفاعل خطی طور تابع ہیں۔

سوال 3.10: $\sin x, \cos x, e^x$
جواب: $W = -2e^x$ ہے لہذا تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم حصہ 2.2 کے طرز پر چلتے ہوئے، مستقل عددی سروالے متجانس خطی n درجی سادہ تفرقی مساوات

$$(3.11) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں $y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}$ اور a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار ہیں۔ حصہ 2.2 کی طرح ہم اس مساوات میں $y = e^{\lambda}$ پر کرتے ہوئے اس کی امتیازی مساوات

$$(3.12) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ اگر λ مساوات 3.12 کا جذر ہو تب $y = e^{\lambda}$ مساوات 3.11 کا حل ہو گا۔ مساوات 3.12 کے جذر کو اعدادی طریقوں⁹ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بلند درجی ($n > 2$) تفرقی مساوات کے حل میں زیادہ ممکنات پائے جاتے ہیں۔ انہیں چند مثالوں کی مدد سے دیکھیں۔

منفرد جذر

اگر مساوات 3.12 کے n جذر λ_1 تا λ_n منفرد اور حقیقی ہوں تب حل

$$(3.13) \quad y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

کسی بھی x کے لئے حل کی اساس ہوں گے جن سے مساوات 3.11 کا عمومی حل

$$(3.14) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم درج ذیل مثال کے بعد دیکھیں گے کہ مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔

مثال 3.6: تفرقی مساوات $y'' + 2y' - y' - 2y = 0$ کا حل تلاش کریں۔

حل: اس کا امتیازی مساوات $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ہے جس کے جذر -1 ، 1 اور -2 ہیں۔ اگر آپ کسی طرح امتیازی مساوات کا ایک جذر حاصل کر لیں تو بقیہ دو جذر با آسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں اگر $\lambda = -1$ دریافت کر لیا جائے تو امتیازی مساوات کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ حاصل کر کے اس کے جذر 1 اور -2 نسبتاً آسانی سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں دیے گئے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$ ہو گا۔ □

مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں

ہم مساوات 3.13 میں دیے گئے حل کی ورنسٹی لکھ کر، قالب کی پہلی قطار سے $e^{\lambda_1 x}$ ، دوسری قطار سے $e^{\lambda_2 x}$ اور اسی طرح چلتے ہوئے n قطار سے $e^{\lambda_n x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $E = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}$ باہر نکال کر نسبتاً آسان قالب حاصل کرتے ہیں۔

(3.15)

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

اب قوت نمائی تفاعل E کسی بھی صورت صفر کے برابر نہیں ہو سکتا لہذا $W = 0$ صرف اس صورت ہو گا جب دائیں قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو۔ دائیں قالب کے مقطع کو کوشی مقطع¹⁰ کہتے ہیں جس کی قیمت

$$(3.16) \quad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V$$

کے برابر ثابت کی جاسکتی ہے۔ تمام V تمام $(\lambda_j - \lambda_k)$ کا حاصل ضرب ہے جہاں $j < k (\leq n)$ ہے مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $V = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو جذر یکساں ہونے کی صورت میں $V = 0$ اور یوں $W = 0$ ہو گا۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ درونکی صرف اس صورت میں صفر کے برابر نہیں ہو گا جب مساوات 3.12 کے تمام جذر ایک دونوں سے مختلف ہوں۔ اس سے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 3.6: اساس $e^{\lambda_1 x}$ تا $e^{\lambda_n x}$ ، جہاں λ حقیقی یا مخلوط ہو سکتا ہے، صرف اس صورت کھلے وقفے پر مساوات 3.11 کے حل کی اساس ہو سکتے ہیں جب مساوات 3.12 کے تمام n جذر منفرد (یعنی ایک دونوں سے مختلف) ہوں۔

حقیقت میں مسئلہ 3.6، مساوات 3.15 اور مساوات 3.16 سے حاصل عمومی نتیجہ (مسئلہ 3.7) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

مسئلہ 3.7: خطی طور غیر تابعیت $e^{\lambda x}$ طرز کے حل، جن کی تعداد کچھ بھی ہو سکتی ہے، I پر اس صورت خطی طور غیر تابع ہوں گے جب ان حل کے λ منفرد ہوں۔

سادہ مخلوط جذر

چونکہ مساوات 3.11 کے عددی سر حقیقی مقدار ہیں لہذا مخلوط جذر صرف اور صرف جوڑی دار مخلوط ممکن ہیں۔ یوں اگر مساوات 3.12 کا ایک ایک سادہ جذر $\lambda = \gamma + i\omega$ ہو تب $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ بھی اس کا جذر ہو گا اور یوں تفرقی مساوات کے دو عدد خطی طور غیر تابع حل [حصہ 2.2 دیکھیں] درج ذیل ہوں گے۔

$$y_1 = e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad y_2 = e^{\gamma x} \sin \omega x$$

مثال 3.7: سادہ مخلوط جذر۔ ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - y'' + 225y' - 225y = 0, \quad y(0) = 3.2, \quad y'(0) = 46.2, \quad y''(0) = -448.8$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^3 - \lambda^2 + 225\lambda - 225 = 0$ کا ایک جذر $\lambda_1 = 1$ ہے۔ امتیازی مساوات کو $\lambda - 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے بقایا جذر $\lambda_2 = 15i$ اور $\lambda_3 = -15i$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان سے عمومی حل اور عمومی حل کے تفرقات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= ce^x + A \cos 15x + B \sin 15x \\ y' &= ce^x - 15A \sin 15x + 15B \cos 15x \\ y'' &= ce^x - 225A \cos 15x - 225B \sin 15x \end{aligned}$$

ان مساوات میں $x = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

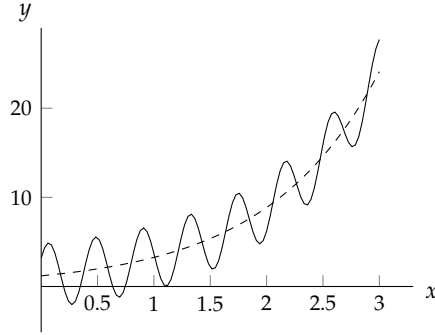
$$3.2 = c + A, \quad 46.2 = c + 15B, \quad -448.8 = c - 225A$$

ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔ پہلی مساوات کو تیسری مساوات سے منفی کرنے سے $-452 = -226A$ یعنی $A = 2$ حاصل ہوتا ہے جسے پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 1.2$ ملتا ہے۔ دوسری مساوات میں $c = 1.2$ پر کرتے ہوئے $B = 3$ ملتا ہے۔ اس طرح مخصوص حل

$$y = 1.2e^x + 2 \cos 15x + 3 \sin 15x$$

حاصل ہوتا ہے جسے شکل 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔ مخصوص حل نقطہ دار لکیر سے دکھائے گئے $y = 1.2e^x$ کے گرد ارتعاش کرتا ہے۔





شکل 3.1: مثال 3.7 کا مخصوص حل۔

متعدد حقیقی جذر

امتیازی مساوات کا دوہرا منفرد جذر $\lambda_1 = \lambda_2$ ہونے کی صورت میں، صفحہ 103 پر جدول 2.1 کے تحت، تفرقی مساوات کے خطی طور غیر تابع حل $y = y_1$ اور $y_2 = xy_1$ ہوں گے۔

اسی حقیقت کے تحت اگر امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ پایا جائے تب تفرقی مساوات کے m عدد خطی طور غیر تابع حل

$$(3.17) \quad e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda x}$$

ہوں گے۔ ایک مثال دیکھنے کے بعد درج بالا حل کو ثابت کرتے ہیں۔

مثال 3.8: حقیقی دہرا اور سہ گنا جذر
درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 25y''' - 38y'' + 28y' - 8y = 0$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^5 - 8\lambda^4 + 25\lambda^3 - 38\lambda^2 + 28\lambda - 8 = 0$ کے جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ اور $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2$ ہیں۔ یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^{2x}$$

□

ہو گا۔

آئیں اب مساوات 3.17 کو ثابت کریں۔ مساوات 3.11 کے بائیں ہاتھ کو

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y$$

لکھ کر اس میں $y = e^{\lambda x}$ پر کرتے ہوئے تفرق لیتے ہیں۔

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^{\lambda x}$$

اب تصور کریں کہ امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ_1 پایا جاتا ہے (جہاں $m < n$ ہے) جبکہ بقیہ λ_1 سے مختلف، جذر λ_{m+1} تا λ_n ہیں۔ یوں کثیر رکنی کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

(3.18)

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda - \lambda_1)^m (\lambda - \lambda_{m+1}) (\lambda - \lambda_{m+2}) \dots (\lambda - \lambda_n) e^{\lambda x} = (\lambda - \lambda_1)^m h(\lambda) e^{\lambda x}$$

جہاں $m = n$ کی صورت میں $h(\lambda) = 1$ ہو گا۔ دونوں ہاتھ λ تفرق لیتے ہیں۔

$$(3.19) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} L[e^{\lambda x}] = m(\lambda - \lambda_1)^{m-1} h(\lambda) e^{\lambda x} + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial}{\partial \lambda} [h(\lambda) e^{\lambda x}]$$

اب چونکہ x تفرق اور λ تفرق غیر تابع اور حاصل تفرق استمراری ہیں لہذا بائیں ہاتھ ان کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔

$$(3.20) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} L[e^{\lambda x}] = L \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} \right] = L[x e^{\lambda x}]$$

چونکہ λ_1 جذر m گنا ہے، جہاں $m \geq 2$ ہے، لہذا $\lambda = \lambda_1$ پر مساوات 3.19 کے دائیں ہاتھ کی قیمت جزو $(\lambda - \lambda_1)$ کی بنا صفر ہو گی۔ اس طرح مساوات 3.19 اور مساوات 3.20 کو ملا کر $L[x e^{\lambda x}] = 0$ حاصل ہوتا ہے لہذا ثابت ہوا کہ $x e^{\lambda x}$ مساوات 3.11 کا حل ہے۔

اسی ترتیب کو دہراتے ہوئے مساوات 3.18 کا دو درجی تفرق لیتے ہوئے $L[x^2 e^{\lambda x}] = 0$ لکھا جاسکتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^2 e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔ اس ترکیب کو بار بار دہراتے ہوئے آخر کار $m-1$ درجی تفرق لیتے ہیں۔

(3.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} L[e^{\lambda x}] &= L[x^{m-1} e^{\lambda x}] = m(m-1)(m-2) \dots (3)(2)(\lambda - \lambda_1)^1 h(\lambda) e^{\lambda x} \\ &+ (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} [h(\lambda) e^{\lambda x}] \end{aligned}$$

مساوات کا دایاں ہاتھ $\lambda - \lambda_1$ کی بنا $\lambda = \lambda_1$ پر صفر کے برابر ہے لہذا اس سے $L[x^{m-1}e^{\lambda x}] = 0$ حاصل ہوتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^{m-1}e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔

مساوات 3.18 کا m درجی تفرق لینے کے لئے مساوات 3.21 کا تفرق لے سکتے ہیں جس سے

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L[e^{\lambda x}] = L[x^m e^{\lambda x}] = m(m-1)(m-2) \cdots (3)(2)(1)h(\lambda)e^{\lambda x} \\ + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [h(\lambda)e^{\lambda x}]$$

ماتا ہے۔ مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو میں $\lambda - \lambda_1$ کا جزو نہیں پایا جاتا لہذا $\lambda = \lambda_1$ پر اس کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہوگی۔ یوں $L[x^m e^{\lambda x}] \neq 0$ ہو گا لہذا $x^m e^{\lambda x}$ تفرقی مساوات 3.11 کا حل نہیں ہو گا۔ یوں مساوات 3.17 ثابت ہوتی ہے۔

آئیں اب ثابت کریں کہ مساوات 3.17 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔ مخصوص m کے لئے ان حل کا وروئسی غیر صفر حاصل ہوتا ہے جس سے حل کی خطی طور غیر تابع ہونا ثابت ہوتا ہے۔ کسی بھی m کی صورت میں وروئسی کی m عدد قالب سے $e^{\lambda x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $e^{m\lambda x}$ باہر نکالا جائے گا۔ بقایا قالب میں مختلف صف آپس میں جمع اور منفی کرتے ہوئے قالب کا مقطع 1، x ، \dots ، x^{m-1} کی وروئسی کے برابر ثابت کیا جا سکتا ہے جو غیر صفر مقدار ہے۔ یہ تفاعل تفرقی مساوات $y^{(m)} = 0$ کے حل ہیں لہذا مسئلہ 3.3 کے تحت یہ حل خطی طور غیر تابع ثابت ہوتے ہیں۔

متعدد مخلوط جذر

مخلوط جذر کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ یوں دوہرے مخلوط جذر کی صورت میں $\lambda = \gamma + i\omega$ اور $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ دو مرتبہ پائے جائیں گے جن سے

$$e^{\gamma x + i\omega x}, \quad xe^{\gamma x + i\omega x}, \quad e^{\gamma x - i\omega x}, \quad xe^{\gamma x - i\omega x}$$

حل لکھے جاسکتے ہیں۔ ان سے حقیقی حل لکھتے ہیں۔

$$(3.22) \quad e^{\gamma x} \cos \omega x, \quad e^{\gamma x} \sin \omega x, \quad xe^{\gamma x} \cos \omega x, \quad xe^{\gamma x} \sin \omega x$$

بائیں جانب کے دو عدد حل $e^{\gamma x + i\omega x}$ اور $e^{\gamma x - i\omega x}$ جبکہ بقایا دو حل $xe^{\gamma x + i\omega x}$ اور $xe^{\gamma x - i\omega x}$ سے حاصل کیے گئے ہیں۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(3.23) \quad y = e^{\gamma x} [(A_1 + A_2 x) \cos \omega x + (B_1 + B_2 x) \sin \omega x]$$

مخلوط سہ گنا جذر (جو حقیقی مسائل میں شاذ و نادر پایا جاتا ہے) کی صورت میں درج ذیل حقیقی حل حاصل ہوں گے۔

$$e^{\gamma x} \cos \omega x, e^{\gamma x} \sin \omega x, xe^{\gamma x} \cos \omega x, xe^{\gamma x} \sin \omega x, x^2 e^{\gamma x} \cos \omega x, x^2 e^{\gamma x} \sin \omega x$$

اسی طرح آپ زیادہ تعداد میں پائے جانے والے مخلوط جذر سے بھی حل لکھ سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 3.11 تا سوال 3.17 کے عمومی حل لکھیں۔

$$\text{سوال 3.11: } y''' + 4y' = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

$$\text{سوال 3.12: } y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x$$

$$\text{سوال 3.13: } y^{(4)} - y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$$\text{سوال 3.14: } y^{(4)} + 9y'' = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$$

$$\text{سوال 3.15: } y^{(5)} + y''' = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x$$

$$\text{سوال 3.16: } y^{(5)} - y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 11y' + 3y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_0 e^{-3x} + c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x$$

$$\text{سوال 3.17: } y^{(5)} - 2y^{(4)} - y' + 2y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x$$

سوال 3.18 تا سوال 3.23 ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل دریافت کریں۔ جذر حاصل کرنے کی خاطر کمپیوٹر استعمال کیا جاسکتا ہے۔

سوال 3.18: $y''' - 2.7y'' - 4.6y' + 9.6y = 0$, $y(0) = 1.5$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -3$
جواب: $y = 2.521e^{1.5x} - 0.286e^{-2x} - 0.735e^{3.2x}$

سوال 3.19:

$$y''' + 10.06y'' - 94.82y' - 670.8766y = 0,$$

$$y(0) = -1.2, y'(0) = 5.2, y''(0) = -2.8$$

جواب: $y = 0.229e^{-13.4x} - 1.447e^{-5.6x} + 0.018e^{8.94x}$

سوال 3.20: $y''' + 5y'' + 49y' + 245y = 0$, $y(0) = 10$, $y'(0) = -5$, $y''(0) = 1$
جواب: $y = 6.635e^{-5x} + 3.365 \cos 7x + 4.025 \sin 7x$

سوال 3.21: $y''' + 8y'' + 21y' + 18y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -0.5$
جواب: $y = 23.5e^{-2x} - 21.5e^{-3x} - 16.5xe^{-3x}$

سوال 3.22:

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1$$

جواب: $y = \cos 2x + 0.3125 \sin 2x - 0.125x \cos 2x + 0.875x \sin 2x$

سوال 3.23:

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 4y' = 0$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1, y^{(4)}(0) = 2$$

جواب: $y = 0.5 + 0.5e^x \cos x + 0.75e^x \sin x - 0.75xe^x \cos x - 0.25xe^x \sin x$

سوال 3.24: تخفیف درجہ
آپ تخفیف درجہ کے ذریعہ مثال 2.6 میں دو درجی مساوات سے کم درجی تفرقی مساوات حاصل کر چکے ہیں۔ مستقل

عددی سروالے خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا ایک حل λ_1 جانتے ہوئے کم درجی مساوات کیسے حاصل کی جا سکتی ہے؟

جوابات: امتیازی مساوات کو $\lambda - \lambda_1$ سے تقسیم کرتے ہوئے کم درجی تفرقی مساوات کی امتیازی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جس سے کم درجی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

سوال 3.25: تخفیف درجہ
متغیر عددی سروالے خطی متجانس مساوات

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

کا ایک حل y_1 جانتے ہوئے دوسرے حل کو $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ لکھ کر، جہاں $u(x) = \int z(x) dx$ ہے، درج بالا میں پر کرتے ہوئے کم درجی مساوات

$$y_1 z'' + (3y_1' + p_2 y_1)z' + (3y_1'' + 2p_2 y_1' + p_1 y_1)z = 0$$

حاصل کریں ہے۔

سوال 3.26: تخفیف درجہ
تفرقی مساوات

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + (6x - x^3)y' - (6 - x^2)y = 0$$

کا ایک حل $y_1 = x$ ہے۔ تخفیف درجہ سے دو درجی مساوات حاصل کریں۔

$$z'' - z = 0 \text{ جواب:}$$

3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

آئیں اب معیاری صورت میں لکھی گئی، n درجی غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(3.24) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

پر غور کریں جہاں $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ اور $r(x) \not\equiv 0$ ہیں۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کا عمومی حل

$$(3.25) \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ہو گا جہاں $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ مطابقتی متجانس خطی تفرقی مساوات

$$(3.26) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

کا I پر عمومی حل ہے۔ $y_p(x)$ مساوات 3.24 کا I پر ایسا کوئی بھی حل ہے جس میں اختیاری مستقل نہ پایا جاتا ہو۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کے استمراری عددی سر اور استمراری $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 3.24 کا عمومی حل موجود ہے جس میں مساوات 3.24 کے تمام حل موجود ہیں۔ یوں مساوات 3.24 کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 3.24 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.24 اور درج ذیل $n-1$ ابتدائی شرائط پر مبنی ہو گا جہاں x_0 کھلے وقفے x_0 پر پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے عددی سر اور r کھلے وقفے پر استمراری ہونے کی صورت میں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل یکتا ہو گا۔ حل کے یکتائی کو حصہ 2.7 میں دو درجی تفرقی مساوات کے یکتا حل کے ثبوت کے نمونے پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$(3.27) \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$$

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

غیر متجانس تفرقی مساوات 3.24 کے عمومی حل کے لئے مساوات 3.24 کا مخصوص حل درکار ہو گا۔ مستقل عددی سر والی تفرقی مساوات،

$$(3.28) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x)$$

جہاں a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار اور $r(x)$ ، حصہ 2.7 کی طرح، خاص نوعیت کا تفاعل ہو، کا مخصوص حل حصہ 2.7 کی طرح، بذریعہ نامعلوم عددی سر کی ترکیب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مخصوص حل y_p کو جبری تفاعل r سے درج ذیل قواعد کے تحت لکھا جاتا ہے۔

بنیادی قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

تریمی قاعدہ: اگر r کو دیکھ کر چنے گئے y_p کا کوئی رکن مساوات 3.28 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_k ہو تب اس رکن کی جگہ $x^k y_k$ کو y_p میں شامل کریں، جہاں k ایسا کم سے کم قیمت کا مثبت عدد ہے کہ تفاعل $x^k y_k$ مطابقتی متجانس مساوات کا حل نہ ہو۔

مجموعے کا قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

موجودہ ترکیب میں $k = 1$ یا $k = 2$ سے حصہ 2.7 کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔ انہیں مثال کی مدد سے موجودہ ترکیب کا تریمی قاعدہ استعمال کرنا سیکھیں۔

مثال 3.9: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ تریمی قاعدہ۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = -5$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ ہے جس کو $(\lambda - 1)^3 = 0$ لکھا جاسکتا ہے جس سے سہ گنا جذر $\lambda = 1$ ملتا ہے۔ یوں متجانس مساوات کو عمومی حل

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

لکھا جاسکتا ہے۔

دوسرا قدم: اب اگر ہم دیے گئے غیر متجانس مساوات کے جبری تفاعل کو دیکھ کر $y_p = C e^x$ چنتے ہوئے y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے مساوات میں پر کریں تو $C - 3C + 3C - C = 1$ ملتا ہے جس سے C کی قیمت حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ چنا گیا y_p دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتا لہذا اس y_p کو رد کرنا ہو گا۔ آپ $y_p = C x e^x$ یا $y_p = C x^2 e^x$ چن کر دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل بھی دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتے۔ یوں ہم اوپر دیے گئے تریمی قاعدے کے تحت $y_p = C x^3 e^x$ چنتے ہیں جس کے تفرقات درج ذیل ہیں۔

$$y' = C e^x (x^3 + 3x^2)$$

$$y'' = C e^x (x^3 + 6x^2 + 6x)$$

$$y''' = C e^x (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$$

y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے

$$Ce^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6) - 3Ce^x(x^3 + 6x^2 + 6x) + 3Ce^x(x^3 + 3x^2) - Cx^3e^x = e^x$$

ہوئے $C = \frac{1}{6}$ ملتا ہے۔ یوں دیے گئے غیر متجانس تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y_p = \frac{1}{6}x^3e^x$ ہے لہذا اس کا عمومی حل درج ذیل ہوگا۔

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

تیسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر عمومی حل کے مستقل حاصل کرنے ہوں گے۔ عمومی حل میں پہلی ابتدائی معلومات $y(0) = 8$ پر کرتے ہوئے $c_1 = 8$ ملتا ہے۔ اس قیمت کو y میں پر کرتے ہوئے y' لے کر دوسری ابتدائی معلومات $y'(0) = -2$ سے c_2 حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح y''' لیتے ہوئے اس میں $y'''(0) = -5$ پر کرتے ہوئے c_3 کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^x, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 8 = c_1$$

$$y' = (c_1 + c_2 + c_2x + c_3x^2 + 2c_3x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^x, \quad y'(0) = -2, \quad c_2 = -10$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_2x + 4c_3x + c_3x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{5}{6}x^2 + x)e^x, \quad y''(0) = -5, \quad c_3 = \frac{7}{2}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = \left(8 - 10x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}\right)e^x$$

□

3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ (حصہ 2.10 دیکھیں) بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔ یوں معیاری صورت میں لکھے گئے خطی غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 3.24، جس کے عددی سر اور $r(x)$ کھلے وقفہ

3.4. مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفریق مساوات کا حل

I پر استمراری ہوں، کا I پر مخصوص حل y_p درج ذیل ہو گا۔

$$(3.29) \quad \begin{aligned} y_p(x) &= \sum_{k=1}^n y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)} r(x) dx \\ &= y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x) dx + \cdots + y_n(x) \int \frac{W_n(x)}{W(x)} r(x) dx \end{aligned}$$

مساوات 3.29 میں y_1 تا y_n مطابقتی متجانس مساوات 3.26 کے حل کی اساس ہیں جبکہ ورنسکی W کے k قطار میں $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T$ پر کرتے ہوئے W_k حاصل کی جاتی ہے۔ یوں $n = 2$ کی صورت میں W ، W_1 اور W_2 درج ذیل ہوں گے۔

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = -y_2, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} = y_1$$

مساوات 3.29 کو صفحہ 181 پر دیے گئے مساوات 2.116 کی ثبوت کی طرز پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.10: مقدار معلوم کی تبدیلی۔ یولر کوشی غیر متجانس مساوات
درج ذیل غیر متجانس یولر کوشی مساوات کو حل کریں۔

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x, \quad (x > 0)$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات میں $y = x^m$ اور اس کے تفرقات پر کرتے ہوئے

$$[m(m-1)(m-1) - 3m(m-1) + 6m - 6]x^m = 0$$

ملتا ہے جس کو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے جذر 1، 2 اور 3 حاصل ہوتے ہیں۔ ان جذر سے اساس

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3$$

لکھتے ہیں۔ یوں متجانس یولر کوشی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

دوسرا قدم: مساوات 3.29 میں درکار قالب کا مقطع حاصل کرتے ہیں۔

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

تیسرا قدم: مساوات 3.29 کے عمل میں $r(x)$ بھی درکار ہے جو دیے گئے پولر کو شی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے سے ملتا ہے۔ دیے گئے مساوات کو y''' کے عددی سر x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $r = x \ln x$ ملتا ہے۔ مساوات 3.29 میں $\frac{W_1}{W} = \frac{x}{2}$ ، $\frac{W_2}{W} = -1$ اور $\frac{W_3}{W} = \frac{1}{2x}$ ہیں لہذا

$$y_p = x \int \frac{x}{2} x \ln x \, dx - x^2 \int x \ln x \, dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x \, dx$$

$$= \frac{x}{2} \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right) - x^2 \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) + \frac{x^3}{2} (x \ln x - x)$$

$$= \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)$$

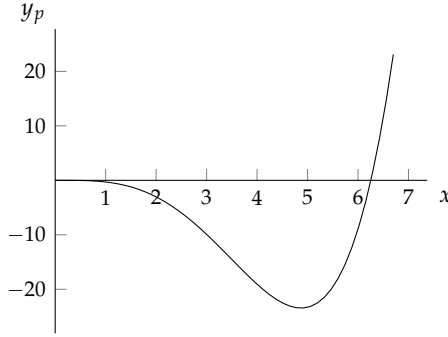
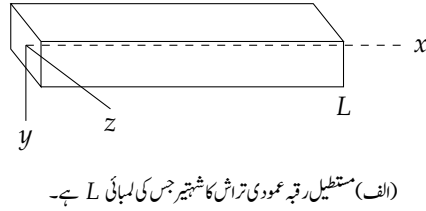
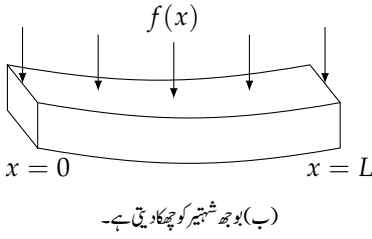
ہو گا۔ یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا۔ y_p کو شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)$$

□

عملی استعمال۔ پکدار شہتیر

دو درجی تفرقی مساوات کا عملی انجینئری میں بہت زیادہ استعمال پایا جاتا ہے البتہ بلند درجی تفرقی مساوات عملی انجینئری کے بہت کم مسائل میں کام آتے ہیں۔ انجینئری کا ایک انتہائی اہم مسئلہ پکدار شہتیر کا جھکا و ہے جس کی نمونہ کشی

شکل 3.2: مثال 3.10 کا y_p 

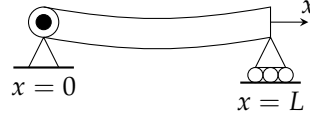
شکل 3.3: مثال 3.11 کا شہتیر۔

چہارم درجی تفریق مساوات کرتی ہے۔ کسی بھی عمارت یا پیل میں شہتیر کلیدی کردار ادا کرتے ہیں جو کلڑی یا لوہے کے ہو سکتے ہیں۔

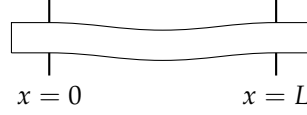
مثال 3.11: شکل 3.3-الف میں، یکساں پلک کے مادے سے بنا ہوا، مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L ہے۔ شہتیر کی اپنی وزن سے شہتیر کے جھکاؤ کو رد کیا جاسکتا ہے۔ شکل-ب میں شہتیر کے x محور پر عمودی بیرونی بوجھ $f(x)$ ڈالا گیا ہے جس کی وجہ سے شہتیر میں جھکاؤ پیدا ہوا ہے۔ بیرونی بوجھ اور شہتیر کی جھکاؤ کا تعلق، علم پلک کے تحت، درج ذیل ہے جہاں E ینگ کا مقیاس پلک¹¹ کہلاتا ہے جبکہ I مستطیل کا محور پر جھودی معیار اثر¹² ہے۔ شہتیر کی فی اکائی لمبائی پر بیرونی قوت کو بوجھ $f(x)$ لکھا گیا ہے۔

$$(3.30) \quad EIy^{(4)} = f(x)$$

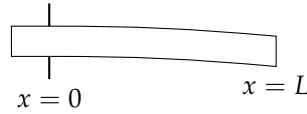
¹¹ Young's modulus of elasticity
¹² moment of inertia



(الف) سادہ سہارا دیا گیا ہے۔



(ب) دونوں اطراف سے جکڑا ہوا۔



(پ) ایک طرف سے جکڑا گیا ہے۔

شکل 3.4: شہتیر جکڑنے کے عمومی طریقے۔

شہتیر کو عموماً شکل 3.4 میں دکھائے گئے تین طریقوں سے نصب کیا جاتا ہے جو درج ذیل سرحدی شرائط کو جنم دیتے ہیں۔

$$(الف) \quad \text{سادہ سہارا} \quad y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0$$

$$(ب) \quad \text{دونوں اطراف جکڑے گئے ہیں} \quad y(0) = y(L) = y'(0) = y'(L) = 0$$

$$(پ) \quad \text{ایک طرف جکڑا گیا ہے} \quad y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$$

سرحدی شرط $y = 0$ سے مراد صفر ہٹاؤ ہے، $y' = 0$ سے مراد افقی مماس ہے، $y'' = 0$ سے مراد صفر خمناؤ کا معیار اثر¹³ ہے جبکہ $y''' = 0$ سے مراد صفر جزئی قوت¹⁴ ہے۔

آئیں سادہ سہارے والی شہتیر کے مسئلے کو حل کریں جسے شکل 3.4-الف میں دکھایا گیا ہے۔ یکساں بیرونی بوجھ کی صورت میں $f(x) = f_0$ ہو گا اور مساوات 3.30 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$(3.31) \quad y^{(4)} = k, \quad k = \frac{f_0}{EI}$$

¹³ bending moment
¹⁴ shearing force

جس کو تکمیل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔ دو مرتبہ تکمیل لیتے ہیں۔

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

$y''(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $c_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے بعد $y''(L) = 0$ پر کرنے سے ملتا ہے۔ یوں $c_1 = \frac{kL}{2}$

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 - \frac{kL}{2}x$$

ہو گا جس کا دو مرتبہ تکمیل لینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{L}{6}x^3 + c_3x + c_4 \right)$$

$y(0) = 0$ پر کرنے سے $c_4 = 0$ ملتا ہے جس کے بعد $y(L) = 0$ پر کرتے ہوئے c_3 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(L) = \frac{kL}{2} \left(\frac{L^3}{12} - \frac{L^3}{6} + c_3 \right) = 0, \quad c_3 = \frac{L^3}{12}$$

یوں $k = \frac{f_0}{EI}$ لکھتے ہوئے شہتیر کی پلک بالمتقابل لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$y(x) = \frac{f_0}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

ہم توقع رکھتے ہیں کہ شہتیر کے درمیان سے دونوں اطراف یکساں جھکاؤ پایا جائے گا یعنی $y(x) = y(L - x)$ ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ جھکاؤ $y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5f_0L^4}{16 \times 24EI}$ ہے جو $x = \frac{L}{2}$ پر پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ شکل 3.3 میں مثبت y نیچے کی طرف کو ہے۔

□

سوالات

سوال 3.27 تا سوال 3.34 کو حل کریں۔

سوال 3.27: $y^{(4)} + 3y''' - 4y = 0$
 جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

سوال 3.28: $y''' + 16y'' + 13y' = 0$
 جواب: $y = c_1 + c_2 e^{-3x} \cos 2x + c_3 e^{-3x} \sin 2x$

سوال 3.29: $y''' + 3y'' - y' - 3y = 5e^{2x}$
 جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{2x}$

سوال 3.30: $y^{(4)} + 8y'' - 9y = \cosh 2x$
 جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x + \frac{5}{39} \cosh 2x$

سوال 3.31: $x^2 y''' + 3x y'' - 2y' = 0$
 جواب: $y = c_1 + c_2 x^{\sqrt{3}} + c_3 x^{-\sqrt{3}}$

سوال 3.32: $y''' + 2.25y'' + 1.6875y' + 0.421875y = 0$
 جواب: $y = c_1 e^{-0.75x} + c_2 x e^{-0.75x} + c_3 x^2 e^{-0.75x}$

سوال 3.33: $y''' - y' = \frac{3}{40} \sinh \frac{x}{2}$
 جواب: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 2 \cosh \frac{x}{2}$

سوال 3.34: $y''' + 9y'' + 27y' + 27 = 2x^2$
 جواب: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + c_3 x^2 e^{-3x} + \frac{2}{27} x^2 - \frac{4}{27} x + \frac{8}{81}$

سوال 3.35 تا سوال 3.39 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 3.35:

$$y^{(4)} - 10y'' + 9y = 4e^{-2x}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -0.5, \quad y'''(0) = 0.2$$

جواب: $y = -\frac{2}{15} e^{-2x} + \frac{1}{1440} (127e^x + 1383e^{-x} - 119e^{3x} - 271e^{-3x})$

سوال 3.36:

$$y^{(4)} + y'' - 2y = 0.5 \sin 2x$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$$

3.4. متدرج معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

جواب: $y = 0.05 \sin 2x + 3 \cos x - 0.358 \sin x - \cos \sqrt{2}x - 0.424 \sin \sqrt{2}x$

سوال 3.37: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W ، W_1 ، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔ (یاد رہے تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھتے ہوئے $r = x$ حاصل ہوگا)

$$x^3 y''' - 5x^2 y'' + 12xy' - 12y = x^4, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1, y''(1) = 2$$

جوابات: $W_3 = 2x^3$ ، $W_2 = -3x^4$ ، $W_1 = x^6$ ، $W = 6x^5$ ، $y_h = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^4$
 $y = \frac{59}{18}x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{x^4}{3} \ln x - \frac{4}{9}x^4$

سوال 3.38: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W ، W_1 ، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = -1$$

جوابات: $W_2 = x^{-4}$ ، $W_1 = -3x^{-2}$ ، $W = 6x^{-5}$ ، $y_h = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x^{-2}$
 $y = \frac{5}{3x} + x - \frac{3}{4x^2} + \frac{x^2}{12}$ ، $W_3 = 2x^{-1}$

سوال 3.39:

$$y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 27x^2, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1, y''(0) = -1$$

جواب: $y = \frac{2}{3}e^{-3x} + 3xe^{-3x} + \frac{9}{2}x^2e^{-3x} + x^2 - 2x + \frac{4}{3}$

باب 4

نظام تفرقی مساوات

گزشتہ باب میں آپ نے بلند درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔ اس باب میں سادہ تفرقی مساوات حل کرنے کا نیا طریقہ دکھایا جائے گا جس میں n درجی سادہ تفرقی مساوات سے n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جائے گا۔ اس نظام کو حل کرنا بھی سکھایا جائے گا۔ تفرقی مساوات کے نظام کو قالب اور سمتیہ کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے لہذا حصہ 4.1 میں قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق پر غور کیا جائے گا۔

اسی باب میں تفرقی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بجائے تمام مساوات کی مجموعی طرز عمل پر غور کیا جائے گا جس سے نظام کے حل کی استحکام¹ کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہے۔ انجینئری میں مستحکم نظام اہمیت رکھتے ہیں۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی، مستقبل کے لمحات پر معمولی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔ اس ترکیب سے مساوات کا اصل حل دریافت نہیں ہوتا لہذا اس کو کیفی ترکیب² کہتے ہیں۔ جس ترکیب سے نظام کا اصل حل حاصل ہوتا ہو اس کو مقداری ترکیب³ کہتے ہیں۔

stability¹
qualitative method²
quantitative method³

4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق

تفرقی مساوات کے نظام پر غور کے دوران قالب اور سمتیات استعمال کئے جائیں گے۔

دو عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام

$$(4.1) \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 & y_1' &= 2y_1 - 7y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 & y_2' &= 5y_1 + y_2 \end{aligned} \quad \text{یا}$$

میں دو عدد نا معلوم تفاعل $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ پائے جاتے ہیں۔ ان مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل $g_1(t)$ اور $g_2(t)$ بھی موجود ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر مبنی نظام

$$(4.2) \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

میں $y_1(t)$ تا $y_n(t)$ نا معلوم تفاعل پائے جائیں گے۔ درج بالا ہر مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل بھی پائے جاسکتے ہیں۔

تکنیکی اصطلاحات

قالب

نظام 4.1 کے عددی سر (جو مستقل یا متغیرات ممکن ہیں) کو 2×2 قالب A^4 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.3) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

اسی طرح نظام 4.2 کے عددی سر کو $n \times n$ قالب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.4) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قالب میں درج a_{11} ، a_{12} ، a_{21} وغیرہ کو ارکان⁵ کہتے ہیں۔ افقی لکیروں کو صف⁶ جبکہ عمودی لکیروں کو قطار⁷ کہتے ہیں۔ قالب 4.3 میں پہلا صف $[a_{11} \ a_{12}]$ یا $[2 \ 3]$ جبکہ دوسرا صف $[a_{21} \ a_{22}]$ یا $[-1 \ \frac{2}{3}]$ ہے۔ اسی طرح پہلا قطار درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ارکان کی علامتی اظہار میں دو گنا زیر نوشت کا پہلا عدد صف کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دوسرا عدد قطار کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں a_{21} دوسری صف اور پہلی قطار کا رکن ہے۔ قالب 4.3 کا مرکزی وتر⁸ a_{11} اور a_{22} پر مبنی ہے جبکہ قالب 4.4 کا مرکزی وتر a_{11} ، a_{22} ، \dots ، a_{nn} پر مبنی ہے۔ ہمیں یہاں صرف مربع قالب⁹ درکار ہوں گے۔ مربع قالب سے مراد ایسی قالب ہے جس میں صفوں کی تعداد قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ قالب 4.3 اور قالب 4.4 مربع قالب ہیں۔

سمتیہ۔ ایک قطار اور n ارکان کا سمتیہ قطار¹⁰ درج ذیل ہے۔

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اسی طرح ایک صف اور n ارکان کا سمتیہ صف¹¹ درج ذیل ہے۔

$$v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \cdots \ v_n]$$

entry⁵
row⁶
column⁷
main diagonal⁸
square matrix⁹
column vector¹⁰
row vector¹¹

قالب اور سمتیات کا حساب

برابری مساوات

دو عدد $n \times n$ قالب صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے تمام مطابقتی¹² ارکان برابر ہوں۔ ظاہر ہے کہ دو قالب کی برابری کے لئے لازم ہے کہ ان میں صفوں کی تعداد یکساں ہو اور ان میں قطاروں کی تعداد یکساں ہو۔ یوں $n = 2$ کی صورت میں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

صرف اور صرف اس صورت برابر $(A = B)$ ہوں گے جب

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, & a_{12} &= b_{12} \\ a_{21} &= b_{21}, & a_{22} &= b_{22} \end{aligned}$$

ہوں۔ دو عدد سمتیہ صف (یا دو عدد سمتیہ قطار) صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب دونوں میں ارکان کی تعداد n برابر ہو اور ان کے تمام مطابقتی ارکان برابر ہوں۔ یوں

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

کی صورت میں $v = x$ صرف اور صرف تب ہو گا جب

$$v_1 = x_1 \quad \text{اور} \quad v_2 = x_2$$

ہوں۔

مجموعہ

مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر دونوں قالب کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ دونوں قالب یکساں $m \times n$ ہونا لازم ہے۔ اسی طرح دونوں سمتیہ صف (یا دونوں سمتیہ قطار) میں برابر ارکان ہونا لازم ہے۔ یوں 2×2 قالب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$(4.5) \quad A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, \quad v + x = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix}$$

corresponding¹²

غیر سمتی ضرب

¹³ غیر سمتی ضرب یعنی مستقل c سے قالب کا ضرب حاصل کرنے کی خاطر قالب کے تمام ارکان کو c سے ضرب دیا جاتا ہے۔ مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad -4A = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -20 & -4 \end{bmatrix}$$

اور

$$v = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad 3v = \begin{bmatrix} 27 \\ -12 \end{bmatrix}$$

قالب ضرب قالب

دو عدد $n \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ اور $B = [b_{jk}]$ کا حاصل ضرب $C = AB$ ، (ای ترتیب میں) $C = [c_{jk}]$ قالب $n \times n$ ہو گا جس کے ارکان

$$(4.6) \quad c_{jk} = \sum_{m=1}^n a_{jm}b_{mk} \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n$$

ہوں گے یعنی A قالب کے j صف کے ہر رکن کو B قالب کے j قطار کے مطابقتی رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے n حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔ ہم کہتے ہیں کہ قالب کے ضرب سے مراد صف ضرب قطار ہے۔ مثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) \\ (-3) \cdot 7 + 0 \cdot 2 & (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 \\ -21 & -3 \end{bmatrix}$$

یہاں دھیان رہے کہ ضرب قالب غیر مستبدل¹⁴ ہے لہذا عموماً $AB \neq BA$ ہو گا۔ یوں دو قالب کو آپس میں ضرب دیتے ہوئے قالبوں کی ترتیب تبدیل نہیں کی جاسکتی۔ اس حقیقت کی وضاحت کی خاطر درج بالا مثال میں قالبوں کی ترتیب بدلتے ہوئے ان کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 7 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}$$

scalar product¹³
non commutative¹⁴

$n \times n$ قالب A کو n ارکان کی سمتیہ قطار x سے ضرب بھی اسی قاعدے کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔ یوں $v = Ax$ کے n عدد ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$(4.7) \quad v_j = \sum_{m=1}^n a_{jm}x_m \quad j = 1, \dots, n$$

یوں

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔

سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا اظہار بذریعہ سمتیات

تفرق

قالب یا سمتیہ کا تفرق، تمام ارکان کا تفرق حاصل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t^3 \\ 6 \cos 2t \end{bmatrix}, \quad y'(t) = \begin{bmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15t^2 \\ -12 \sin 2t \end{bmatrix}$$

قالب کی تفرق اور ضرب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 4.1 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.8) \quad y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

اسی طرح مساوات 4.2 کو درج ذیل $y = Ax$ صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.9) \quad \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

مزید اعمال اور اصطلاحات

تبدیل محل

تبدیلی محل¹⁵ کے عمل سے قالب کے قطاروں کو صفوں کی جگہ لکھا جاتا ہے۔ یوں 2×2 قالب A سے تبدیلی محل¹⁶ کے ذریعہ تبدیلی محل قالب¹⁷ A^T حاصل ہو گا۔

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف x کا تبدیلی محل سمتیہ x^T سمتیہ قطار ہو گا۔ اسی طرح سمتیہ قطار v کا تبدیلی محل سمتیہ v^T سمتیہ صف ہو گا۔

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad v^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

قالب کا معکوس

ایسا $n \times n$ قالب جس کے مرکزی وتر کے تمام ارکان اکائی (1) اور بقیہ ارکان صفر ہوں کو اکائی قالب¹⁸ I کہتے ہیں۔

$$(4.10) \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

¹⁵ transposition

¹⁶ transposition

¹⁷ transpose matrix

¹⁸ unit matrix

ایسا B قالب، جس کا A قالب کے ساتھ حاصل ضرب اکائی قالب ہو $BA = AB = I$ ، قالب A کا معکوس قالب¹⁹ کہلاتا ہے جسے A^{-1} لکھا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت میں A غیر نادر قالب²⁰ کہلاتا ہے۔ یہاں A اور B دونوں $n \times n$ قالب ہیں۔

$$(4.11) \quad A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

قالب A کا معکوس تب پایا جاتا ہے جب A کا مقطع غیر صفر $|A| \neq 0$ ہو۔ اگر A کا معکوس نہ پایا جاتا ہو تب A نادر²¹ قالب کہلاتا ہے۔ مربع 2×2 قالب کا معکوس

$$(4.12) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ہے جہاں A کا مقطع $|A|$ درج ذیل ہے۔

$$(4.13) \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

خطی طور تابعیت

r عدد سمتیات $v^{(1)}$ تا $v^{(r)}$ جہاں ہر سمتیہ n ارکان پر مشتمل ہو، اس صورت خطی طور غیر تابع سلسلہ²² یا خطی طور غیر تابع کہلاتے ہیں جب

$$(4.14) \quad c_1 v^{(1)} + \dots + c_r v^{(r)} = 0$$

سے مراد c_1 تا c_r کی قیمتیں صفر ہو۔ درج بالا مساوات میں 0 صفر سمتیہ²³ ہے جس کے تمام n ارکان صفر کے برابر ہیں۔ اگر مساوات 4.14 میں c_1 تا c_r کوئی ایک یا ایک سے زائد مستقل غیر صفر ہوں تب $v^{(1)}$ تا $v^{(r)}$ خطی طور تابع سلسلہ²⁴ یا خطی طور تابع کہلائیں گے چونکہ ایسی صورت میں کم از کم ایک سمتیہ کو

¹⁹ inverse matrix

²⁰ non singular matrix

²¹ singular

²² linearly independent set

²³ zero vector

²⁴ linearly dependent vector

بقایا سمتیات کی مدد سے لکھا جاسکتا ہے، مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.14 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$v^{(1)} = -\frac{1}{c_1} [c_2 v^{(2)} + \dots + c_r v^{(r)}]$$

لکھا جاسکتا ہے۔

امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات

امتیازی اقدار²⁵ اور امتیازی سمتیات²⁶ انتہائی اہم ہیں جو کوانٹم میکانیات²⁷ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ مساوات

$$(4.15) \quad Ax = \lambda x$$

میں $A = [a_{jk}]$ معلوم $n \times n$ قالب ہے جبکہ λ نامعلوم مستقل (جو حقیقی یا مخلوط مقدار ہو سکتا ہے) اور x نامعلوم سمتیہ ہے جنہیں حاصل کرنا درکار ہے۔ کسی بھی λ کے لئے مساوات 4.15 کا ایک حل $x = 0$ ممکن ہے۔ ایسی غیر سبھی²⁸ λ جو $x \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.15 پر پورا اترتی ہو، A کی امتیازی قدر²⁹ کہلاتی ہے جبکہ، اس λ کی مطابقتی، x کو A کی امتیازی سمتیہ³⁰ کہتے ہیں۔

ہم مساوات 4.15 کو $Ax - \lambda x = 0$ یا

$$(4.16) \quad (A - \lambda I)x = 0$$

لکھ سکتے ہیں جو n عدد خطی الجبرائی مساوات کو ظاہر کرتی ہے جس کے نامعلوم متغیرات x_1 تا x_n ، سمتیہ x کے ارکان ہیں۔ اس مساوات کے غیر صفر حل $x \neq 0$ کے لئے ضروری ہے کہ $A - I$ کے عددی سر قالب کا مقطع صفر ہو۔ اس کا ثبوت خطی الجبرا میں بطور بنیادی حقیقت پیش کیا جاتا ہے [مسئلہ 8.15]۔ اس باب میں ہمیں $n = 2$ سے دلچسپی ہے لہذا مساوات 4.16 کو

$$(4.17) \quad \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

²⁵Eigenvalues, characteristic values

²⁶Eigenvectors

²⁷quantum mechanics

²⁸scalar

²⁹Eigenvalue

³⁰Eigenvector

لکھتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(4.18) \quad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

اب نادر قالب کا مقطع صفر ہوتا ہے لہذا $A - \lambda I$ اس صورت نادر قالب ہو گا جب اس قالب کا مقطع (جسے A کی امتیازی مقطع³¹ کہتے ہیں) صفر ہو۔

$$(4.19) \quad \begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \end{aligned}$$

اس دو درجی مساوات کو A کی امتیازی مساوات³² کہتے ہیں۔ اس کے حل λ_1 اور λ_2 ، قالب A کے امتیازی قدر یا امتیازی اقدار ہیں۔ پہلے امتیازی قدر حاصل کریں۔ اس کے بعد λ_1 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_1 کی مطابقتی، A کی امتیازی سمتیہ $x^{(1)}$ دریافت کریں۔ اسی طرح λ_2 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_2 کی مطابقتی، A کی امتیازی سمتیہ $x^{(2)}$ دریافت کریں۔ یاد رہے کہ اگر x قالب A کا امتیازی سمتیہ ہو تب kx بھی A کا امتیازی سمتیہ ہو گا جہاں $k \neq 0$ ہے۔

مثال 4.1: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

حل: امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 3 \\ -0.8 & 0.4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.6\lambda + 1.2 = 0$$

سے A کے امتیازی قدر $\lambda_1 = -0.6$ اور $\lambda_2 = -2$ ملتے ہیں۔ امتیازی قدر $\lambda = \lambda_1 = -0.6$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (-3 + 0.6)x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -0.8x_1 + (0.4 + 0.6)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

characteristic determinant³¹
characteristic equation³²

4.2. سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

پہلی مساوات کو $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جاسکتا ہے۔ دوسری مساوات کو بھی $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اگر $x_1 = 1$ چننا جائے تو $x_2 = 0.8$ ہوگا لہذا، $\lambda_1 = -0.6$ کی مطابقتی، A کا امتیازی سمتیہ

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

ہوگا۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -2$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (-3 + 2)x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -0.8x_1 + (0.4 + 2)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان دونوں مساوات کو $x_1 = 3x_2$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اگر $x_2 = 1$ چننا جائے تو $x_1 = 3$ حاصل ہوگا لہذا، $\lambda_2 = -2$ کی مطابقتی، A کا امتیازی سمتیہ

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

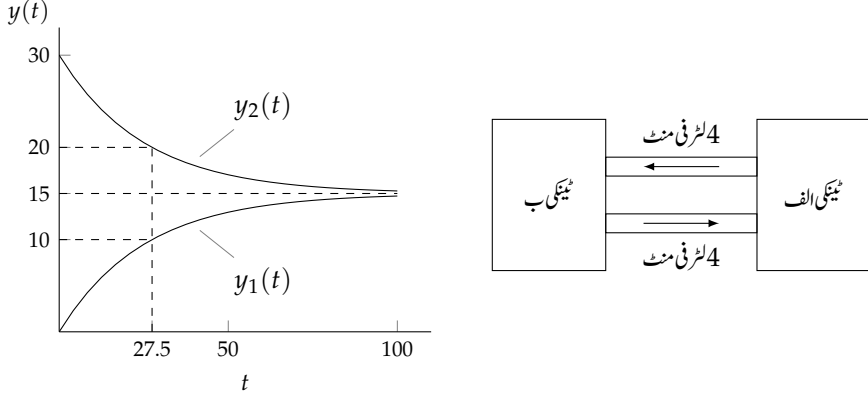
□ ہوگا۔ جیسا پہلے ذکر کیا گیا، امتیازی سمتیات کو کسی بھی غیر صفر عدد سے ضرب دیا جاسکتا ہے۔

4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

اس حصے میں ہم تفرقی مساوات کے نظام کی عملاً اہمیت دیکھیں گے۔ ہم پہلے دیکھتے ہیں کہ ایسے نظام مختلف عملی مسائل میں کیسے کردار ادا کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی تفرقی مساوات کو کیسے تفرقی مساوات کے نظام میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 4.2: دو ٹینکیوں کا نظام

ایک ٹینکی کو استعمال کرتے ہوئے مرکب بنانے کے عمل پر صفحہ 26 مثال 1.10 میں غور کیا گیا جہاں مسئلے کو ایک عدد تفرقی مساوات سے ظاہر کیا گیا۔ اس مثال کو ایک مرتبہ دیکھ لیں چونکہ وہی معلومات یہاں بھی استعمال کی جائیں گی۔



شکل 4.1: ٹینکیوں کا نظام۔

شکل 4.1 میں دو ٹینکیاں دکھائی گئی ہیں جن میں یک برابر دو سو (200) لٹر پانی موجود ہے۔ ٹینکی الف میں خالص پانی ہے جبکہ ٹینکی ب کی پانی میں تیس (30) کلو گرام کا نمک ملا یا گیا ہے۔ ٹینکیوں میں پانی کو مسلسل ہلایا جاتا ہے تاکہ ان میں ہر جگہ محلول یکساں رہے۔ ٹینکیوں میں پانی چار (4) لٹر فی منٹ سے چکر کاٹتی ہے جس کی وجہ سے ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار $y_2(t)$ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔ کتنی دیر کے بعد ٹینکی الف میں نمک کی مقدار، ٹینکی ب میں نمک کی مقدار کا نصف ہو گا؟

حل: پہلا قدم: نظام کی نمونہ کشی کرتے ہیں۔ ایک ٹینکی کی طرح، ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ میں تبدیلی کی شرح $y_1'(t)$ نمک کی درآمدی اور برآمدی شرح میں فرق کے برابر ہوگی۔ یہی کچھ $y_2'(t)$ کے لئے بھی کہا جاسکتا ہے لہذا

$$\begin{aligned} y_1' &= 4 \frac{y_2}{200} - 4 \frac{y_1}{200} \\ y_2' &= 4 \frac{y_1}{200} - 4 \frac{y_2}{200} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.02y_1 + 0.02y_2 \\ y_2' &= 0.02y_1 - 0.02y_2 \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس نظام کو

$$(4.20) \quad y' = Ay$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

ہیں۔

دوسرا قدم: عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح یہاں بھی حل کو قوت نمائی تفاعل

$$(4.21) \quad y = x e^{\lambda t}$$

فرض کرتے ہیں۔ مساوات 4.20 میں اس فرضی تفاعل اور اس کے تفرق کو پر کرتے ہیں۔

$$y' = \lambda x e^{\lambda t} = A x e^{\lambda t}$$

دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے دونوں اطراف کو بدل کر لکھتے ہیں۔

$$A x = \lambda x$$

ہمیں اس مساوات کے غیر صفر اہم حل درکار ہیں لہذا ہمیں A کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کرنے ہوں گے۔ امتیازی اقدار امتیازی مساوات

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.02 - \lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.02 - \lambda)^2 - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0$$

کے حل $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ ہوں گے۔ (یہاں دھیان رہے کہ ہمیں غیر صفر امتیازی سمتیات درکار ہیں۔ امتیازی اقدار صفر ہو سکتے ہیں۔) امتیازی سمتیات مساوات 4.18 کے پہلے یا دوسرے مساوات سے حاصل ہوں گے۔ مساوات 4.18 کی پہلے مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے لئے

$$-0.02x_1 + 0.02x_2 = 0, \quad (-0.02 + 0.04)x_1 + 0.02x_2 = 0$$

لکھے جائیں گے جن سے $x_1 = x_2$ اور $x_1 = -x_2$ ملتے ہیں۔ ہم $x_1 = x_2 = 1$ اور $x_1 = -x_2 = 1$ چنتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے مطابقتی امتیازی سمتیات

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 4.21 اور مسئلہ خطی میل (جو خطی متجانس تفرقی مساوات کے نظام پر بھی لاگو ہوتا ہے) کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$(4.22) \quad \mathbf{y} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

تیسرا قدم: ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ (یعنی ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر کوئی نمک نہیں پایا جاتا) اور $y_2(0) = 30$ (یعنی ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر تیس کلو گرام نمک پایا جاتا ہے) ہیں۔ مساوات 4.22 میں $t = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہیں۔

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

درج بالا مساوات کی جزوی صورت $c_1 + c_2 = 0$ اور $c_1 - c_2 = 30$ ہے جس کا حل $c_1 = 15$ اور $c_2 = -15$ ہے۔ یوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہوا حل

$$\mathbf{y} = 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

یعنی

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t}$$

$$y_2(t) = 15 + 15e^{-0.04t}$$

ہو گا۔ اس حل کو شکل 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

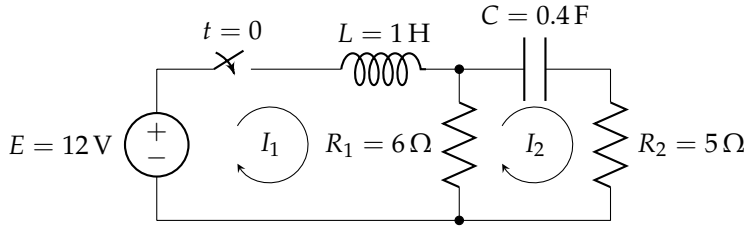
چوتھا قدم: ٹینکی الف میں اس وقت ٹینکی ب کا آدھا نمک ہو گا جب اس میں $\frac{30}{3} = 10$ کلو گرام نمک ہو۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t} = 10, \quad t = -\frac{1}{0.04} \ln \frac{1}{3} = 27.5 \text{ min}$$

□

مثال 4.3: برقی جال

شکل 4.2 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو ہوتا ہے۔ برقی رو $I_1(t)$ اور $I_2(t)$ دریافت کریں۔ ابتدائی رو اور ابتدائی برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر ہیں۔



شکل 4.2: مثال 4.3 کا برقی جال۔

حل: پہلا قدم نظام کی نمونہ کشی ہے۔ امالہ میں رو I_1 ہے لہذا اس پر برقی دباؤ $v_L = L \frac{dI_1}{dt}$ ہو گا۔ برق گیر میں رو I_2 ہے لہذا اس پر دباؤ $v_C = \frac{1}{C} \int I_2 dt$ ہو گا۔ مزاحمت R_2 پر دباؤ $v_{R2} = I_2 R_2$ ہو گا جبکہ مزاحمت R_1 میں کل رو $I_1 - I_2$ ہے لہذا اس پر دباؤ $v_{R1} = (I_1 - I_2) R_1$ ہو گا۔ کرخوف قانون دباؤ کے تحت کسی بھی بند دائرے میں کل دباؤ کا اضافہ اس دائرے میں کل دباؤ کے گٹھاؤ کے برابر ہو گا۔ یوں بائیں دائرے کے لئے

$$E = L \frac{dI_1}{dt} + (I_1 - I_2) R_1$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $E = 12$ ، $L = 1$ اور $R_1 = 6$ پر کرتے ہوئے

$$(4.23) \quad I_1' = -6I_1 + 6I_2 + 12$$

ملتا ہے۔ اسی طرح دائیں دائرے کے لئے

$$0 = \frac{1}{C} \int I_2 dt + I_2 R_2 + (I_2 - I_1) R_1$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $C = 0.4$ اور $R_2 = 5$ پر کرتے ہوئے تفرق لینے سے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4I_1' = 0$$

ملتا ہے۔ اس میں مساوات 4.23 سے I_1' کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4(-6I_1 + 6I_2 + 12) = 0$$

یعنی

$$(4.24) \quad I_2' = -\frac{36}{11}I_1 + \frac{67}{22}I_2 + \frac{72}{11}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.23 اور مساوات 4.24 کو

$$(4.25) \quad J' = AJ + g$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$J = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 12 \\ \frac{72}{11} \end{bmatrix}$$

ہیں۔ I_1' اور I_2' کے سمتیہ قطار کو J اس لئے لکھا گیا ہے کہ اس باب میں I اکائی قالب کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

دوسرا قدم نظام کا حل تلاش کرنا ہے۔ g کی موجودگی غیر متجانس سادہ تفرقی نظام کو ظاہر کرتی ہے لہذا ہم ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح پہلے متجانس مطابقتی نظام $J' = AJ$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ ہم $J = xe^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے متجانس نظام میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$J' = \lambda xe^{\lambda t} = Axe^{\lambda t} \implies Ax = \lambda x$$

غیر صفر اہم حل کے حصول کے لئے A کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات درکار ہوں گے۔ امتیازی اقدار امتیازی مساوات

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{65}{22}\lambda - \frac{15}{11} = 0$$

سے $\lambda_1 = -2.38209$ اور $\lambda_2 = -0.57245$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان امتیازی اقدار کی مطابقتی امتیازی سمتیات مساوات 4.18 سے حاصل ہوں گے۔ مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_1 پر کرتے ہوئے

$$(-6 + 2.38209)x_1 + 6x_2 = 0, \implies x_1 = 1.658416x_2$$

ملتا ہے۔ یوں $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_1 = 1.658416$ ملتا ہے جس سے $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.658416 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل

ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_2 پر کرتے ہوئے

$$(-6 + 0.57245)x_1 + 6x_2 = 0, \implies x_1 = 1.105471x_2$$

ملتا ہے۔ یوں $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_1 = 1.105471$ ملتا ہے جس سے $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.105471 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل

ہوتا ہے۔ یوں متجانس نظام کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$(4.26) \quad J = c_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

مساوات 4.25 کے غیر متجانس نظام کا جبری تفاعل g مستقل مقدار ہے لہذا اس نظام کا مخصوص حل مستقل سمتیہ قطار $J_p = a$ فرض کرتے ہیں جس کے ارکان a_1 اور a_2 ہیں۔ یوں $J' = 0$ ہو گا۔ مساوات 4.25 میں فرض کردہ مخصوص حل پر کرتے ہوئے $Aa + g = 0$ ملتا ہے جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} -6a_1 + 6a_2 + 12 &= 0 \\ -\frac{36}{11}a_1 + \frac{67}{22}a_2 + \frac{72}{11} &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے $a_1 = 2$ اور $a_2 = 0$ ملتا ہے لہذا $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ہو گا۔ یوں عمومی حل

$$J = J_h + J_p = c_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t} + a$$

ہو گا جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} I_1 &= 1.658416c_1 e^{-2.38209t} + 1.105471c_2 e^{-0.57245t} + 2 \\ I_2 &= c_1 e^{-2.38209t} + c_2 e^{-0.57245t} \end{aligned}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $I_1(0) = 0$ اور $I_2(0) = 0$ ہے۔ انہیں درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} 1.658416c_1 + 1.105471c_2 + 2 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -3.61699$ اور $c_2 = 3.61699$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مخصوص حل

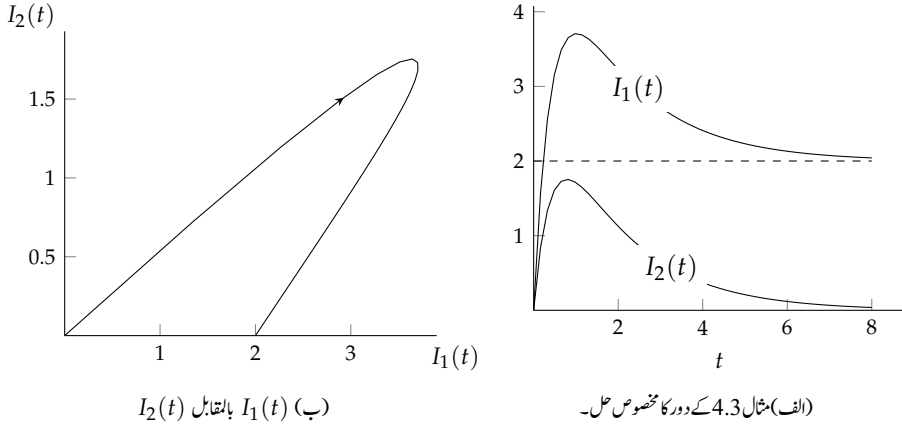
$$J = -3.617x^{(1)} e^{-2.38t} + 3.617x^{(2)} e^{-0.57t} + a$$

یعنی

$$\begin{aligned} I_1 &= -5.998e^{-2.38t} + 3.998e^{-0.57t} + 2 \\ I_2 &= -3.617e^{-2.38t} + 3.617e^{-0.57t} \end{aligned}$$

ہو گا جسے شکل 4.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.3-ب میں $I_1(t)$ بالقابل $I_2(t)$ کو $I_1 I_2$ سطح پر دکھایا گیا ہے جس میں t مقدار معلوم ہے۔ مقدار معلوم کے بڑھنے کی سمت کو منحنی پر تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے۔ سطح $I_1 I_2$ کو نظام کی سطح مرحلہ³³ کہتے



شکل 4.3: مثال 4.3 کے منحنی۔

ہیں جبکہ شکل 4.3-ب کی منحنی کو خط حرکت³⁴ کہتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ سطح مرحلہ اشکال، سادہ شکل 4.3-الف طرز کے اشکال سے زیادہ اہم ثابت ہوتے ہیں۔ یہ خطوط کی نسل کے بارے میں بہتر کیفی معلومات فراہم کرتے ہیں۔ □

صفحہ 26 مثال 1.10 میں ایک عدد ٹینکی کی مثال پر غور کیا گیا جس کی نمونہ کشی ایک عدد سادہ تفرقی مساوات سے کی گئی۔ مثال 4.2 میں دو ٹینکیوں پر مبنی نظام کی نمونہ کشی دو عدد تفرقی مساوات سے کی گئی۔ اسی طرح مثال 4.3 میں دو عدد نامعلوم رو کی بنا دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ بڑے نظام کی نمونہ کشی زیادہ تعداد کی تفرقی مساوات سے کی جائے گی۔

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے تفرقی مساوات کے نظام کا حصول

درج ذیل مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے کہ n درجی سادہ تفرقی مساوات 4.27 سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جاسکتا ہے۔

trajectory³⁴

مسئلہ 4.1: تفرقی مساوات کا مبادلہ
سادہ n درجی تفرقی مساوات

$$(4.27) \quad y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

میں

$$(4.28) \quad y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

لے کر اس کو n عدد سادہ ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$\vdots$$

$$(4.29)$$

$$y_{n-1}' = y_n$$

$$y_n' = F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

ثبوت: مساوات 4.28 کے تفرق سے نظام کے پہلے $n - 1$ عدد تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 4.28 سے $y_n' = y^{(n)}$ بھی حاصل ہوتا ہے لہذا مساوات 4.27 سے مساوات 4.29 کی آخری مساوات بھی حاصل ہوتی ہے۔

□

مثال 4.4: ہم اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ ارتعاش کے مسئلے پر غور کر چکے ہیں جس کی تفرقی مساوات صفحہ 118 پر مساوات 2.45

$$(4.30) \quad my'' + cy' + ky = 0 \quad \implies \quad y'' = -\frac{k}{m}y - \frac{c}{m}y'$$

دیتی ہے جس کے لئے مساوات 4.29 کا نظام

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$$

متجانس اور خطی ہے۔ قالب کا استعمال کرتے ہوئے $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ لکھتے ہوئے اس نظام کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(4.31) \quad y' = Ay = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

جس سے امتیازی مساوات لکھتے ہیں۔

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

اب مثلاً $m = 1$ ، $c = 1.4$ اور $k = 0.24$ ہوں تب

$$\lambda^2 + 1.4\lambda + 0.24 = (\lambda + 0.2)(\lambda + 1.2) = 0$$

ہو گا جس سے امتیازی اقدار $\lambda_1 = -0.2$ اور $\lambda_2 = -1.2$ حاصل ہوتے ہیں۔ امتیازی سمتیات $A - \lambda I = 0$ کی پہلی مساوات $-\lambda x_1 + x_2$ سے حاصل کرتے ہیں۔ امتیازی قدر $\lambda_1 = -0.2$ پر کرتے ہوئے $0.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -0.2x_1$ ملتا ہے لہذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -0.2$ ہو گا۔ اسی طرح $\lambda_2 = -1.2$ پر کرتے ہوئے $1.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -1.2x_1$ ملتا ہے لہذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1.2$ ہو گا۔ یوں درج ذیل امتیازی سمتیات حاصل ہوتی ہیں

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} e^{-0.2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix} e^{-1.2t}$$

سمتیہ حل لکھا جائے گا۔ اس نظام کی پہلی مساوات

$$y = y_1 = c_1 e^{-0.2t} + c_2 e^{-1.2t}$$

درکار حل ہے جبکہ نظام کی دوسری مساوات حل کی تفرق ہے۔

$$y_2 = y_1' = y' = -0.2c_1 e^{-0.2t} - 1.2c_2 e^{-1.2t}$$

□

سوالات

سوال 4.1 تا سوال 4.5 میں دیے گئے قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کریں۔

سوال 4.1: الیکٹران کی ایک خاصیت چکر³⁵ کہلاتی ہے جس کی مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ یا $\frac{\hbar}{2}$ ہو سکتی ہے جہاں $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ہے اور $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$ مستقل پلانک³⁶ ہے۔ چکر سمتیہ مقدار ہے۔ مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا چکر یا ہمہ میدان (مقناطیسی میدان کی سمت میں) رہتا ہے اور یا مخالف میدان (میدان کی الٹ سمت میں) رہتا ہے۔ ہمہ میدان صورت میں الیکٹران کو اوپر چکر³⁷ الیکٹران کہتے ہیں جبکہ مخالف چکر کی صورت میں الیکٹران کو نیچے چکر³⁸ الیکٹران کہتے ہیں۔ z سمت میں مقناطیسی میدان میں موجود الیکٹران کی خاصیت S_z قالب چکر³⁹ سے معلوم کی جاسکتی ہے۔ z میدان میں اوپر چکر الیکٹران کو امتیازی سمتیہ χ_+^z اور نیچے چکر الیکٹران کو امتیازی سمتیہ χ_-^z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل S_z قالب کے امتیازی اقدار (یعنی الیکٹران کا چکر) حاصل کرتے ہوئے امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$S_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}$$

$$\chi_+^z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi_-^z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_+ = \frac{\hbar}{2}, \quad \lambda_- = -\frac{\hbar}{2} \quad \text{جوابات:}$$

سوال 4.2: مقناطیسی میدان میں الیکٹران کی زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع S^2 قالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس قالب کی امتیازی قدر زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع ہو گا۔ قالب کی امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$S^2 = \begin{bmatrix} \frac{3\hbar}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3\hbar}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3\hbar^2}{4} \quad \text{جوابات:}$$

³⁵ spin
³⁶ Plank's constant
³⁷ spin up
³⁸ spin down
³⁹ spin matrix

سوال 4.3: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $x^{(1)} = x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

سوال 4.4: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$ ، $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

سوال 4.5: $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$

جوابات: $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = \frac{4}{5}$ ، $\lambda_1 = \frac{3}{5}$

سوال 4.6 اور سوال 4.7 ٹینکیوں کے سوالات ہیں۔

سوال 4.6: اگر مثال 4.2 میں ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر چار سو (400) لٹر پانی موجود ہو تب جوابات کیا ہوں گے؟

جوابات: $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = 0$ ، $\lambda_1 = -0.03$ ، $A = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.02 \\ 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}$

23.1 min ، $c_2 = 20$ ، $c_1 = -20$ ، $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

سوال 4.7: مثال 4.2 میں ٹینکی الف کے ساتھ دو سو (200) لٹر کی ٹینکی پ دو نالیوں کے ذریعہ جوڑی جاتی ہے۔ ان کے مابین بھی چار لٹری منٹ کی شرح سے پانی کا تبادلہ ہوتا ہے۔ ٹینکی پ میں ابتدائی طور پر دو سو لٹر کا خالص پانی پایا جاتا ہے۔ اس نظام کے تفرقی مساوات لکھ کر A حاصل کریں۔ نظام کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کرتے ہوئے مخصوص حل دریافت کریں۔

جوابات: $A = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\lambda_2 = -0.02$ ، $\lambda_1 = -0.06$ ،

$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

$y = -10x^{(1)}e^{-0.06t} + 15x^{(-0.02t)} + 10x^{(3)}$

سوال 4.8 تا سوال 4.10 برقی جال پر مبنی ہیں۔

سوال 4.8: اگر مثال 4.3 میں ابتدائی برقی رو $I_1(0) = 0$ اور $I_2 = 2A$ ہوں تب حل کیا ہوگا؟

جواب: $I_2 = 9.62e^{-0.57t} - 7.62e^{-2.38t}$ ، $I_1 = 10.63e^{-0.57t} - 12.63e^{-2.38t} + 2$

سوال 4.9: اگر مثال 4.3 میں $L = 0.5H$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہوگا؟

جواب: $I_2 = 2.83e^{-0.529t} - 2.83e^{-5.153t}$ ، $I_1 = 2.96e^{-0.529t} - 4.96e^{-5.153t} + 2$

سوال 4.10: اگر مثال 4.3 میں $L = 2H$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہوگا؟

جواب: $I_2 = 14.77e^{-\frac{35}{44}t} \sin(0.22t)$ ، $I_1 = 2 + e^{-\frac{35}{44}t} [19.9 \cos(0.22t) - 2 \sin(0.22t)]$

سوال 4.11 تا سوال 4.11 میں تفرقی مساوات کو نظام میں تبدیل کرتے ہوئے A قالب حاصل کریں۔ اس قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔ مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کو جوں کا توں بھی حل کریں۔

سوال 4.11: $y'' + 5y' + 6y = 0$

جوابات: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = -2$ ، $\lambda_1 = -3$ ، $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$ ،

سوال 4.12: $12y'' - y' - 6y = 0$ جوابات: $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ ، $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ ، $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} e^{\frac{3}{4}t}$$

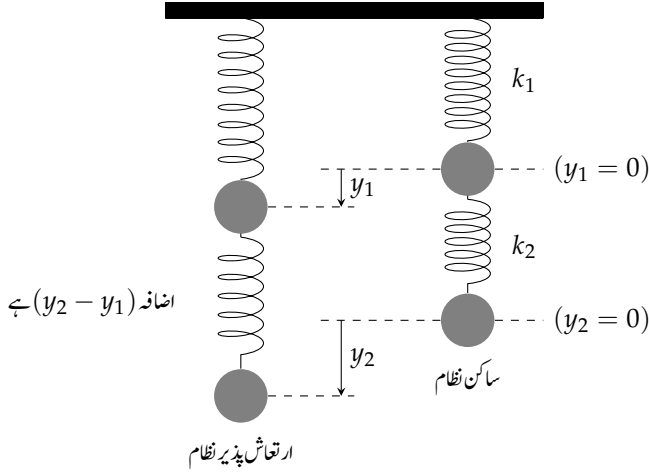
سوال 4.13: $y''' - y' = 0$ جوابات: $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\lambda_2 = 1$ ، $\lambda_1 = -1$ ، $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سوال 4.14: $y'' + 9y' + 14y = 0$ جوابات: $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_2 = -7$ ، $\lambda_1 = -2$ ، $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14 & -9 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} e^{-7t} , \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

سوال 4.15: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام شکل 4.4 میں دکھایا گیا ہے جس میں $k_1 = 3$ ، $m_1 = m_2 = 1$ اور $k_2 = 4$ ہیں۔ اس نظام کے تفرقی مساوات لکھیں۔ $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t}$ تصور کرتے ہوئے، جہاں $\omega^2 = \lambda$ ہے، ان کا حل دریافت کریں۔جوابات: $y_1 = A \cos(1.109t) + B \sin(1.109t) + C \cos(3.126t) + D \sin(3.126t)$
 $y_2 = A^* \cos(1.109t) + B^* \sin(1.109t) + C^* \cos(3.126t) + D^* \sin(3.126t)$



شکل 4.4: دو اسپرنگ اور دو کیت کا نظام۔

4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور روشنی

گزشتہ حصے کے ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام، درج ذیل عمومی نظام کی مخصوص صورت ہے۔

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\
 y_2 &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\
 &\vdots \\
 y_n &= f_n(t, y_1, \dots, y_n)
 \end{aligned}
 \implies \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

(4.32)

نظام کو سمتیہ کی صورت میں سمتیہ قطار $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ اور سمتیہ قطار $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ (یہاں T سے مراد تبدیلی محل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے سمتیہ قطار کو افقی لکھ کر جگہ بچائی گئی ہے) کی استعمال سے لکھا گیا ہے۔ درج بالا نظام عملی استعمال کے تقریباً تمام صورتوں کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں $n = 1$ کی صورت میں یہ $y_1' = f_1(t, y_1)$ یعنی $y' = f(t, y)$ کو ظاہر کرے گی جسے ہم باب 1 سے جانتے ہیں۔

کسی کھلے وقفہ $a < t < b$ پر مساوات 4.32 کا حل، وقفہ $a < t < b$ پر قابل تفرق، n عدد تفاعل کا سلسلہ

$$y_1 = h_1(t), \quad y_2 = h_2(t), \quad \dots, \quad y_n = h_n(t)$$

ہو گا جو پورے وقفے پر مساوات 4.32 پر پورا اترتا ہو۔ حل سمتیہ⁴⁰ کو قطار سمتیہ $h = [h_1(t), \dots, h_n(t)]^T$ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = h(t)$$

اس نظام پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 4.32 اور n عدد ابتدائی شرائط

$$(4.33) \quad y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = K_n$$

پر مبنی ہو گا۔ ان ابتدائی شرائط کو سمتیہ کی صورت میں $y(t_0) = K$ لکھا جاسکتا ہے جہاں t_0 دیے گئے وقفے پر پایا جاتا ہے اور سمتیہ قطار $K = [K_1, \dots, K_n]^T$ کے ارکان دیے گئے مستقل مقدار ہیں۔ مساوات 4.32 اور مساوات 4.33 کے ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کی وجودیت اور یکتائی کے لئے معقول شرائط درج ذیل مسئلہ بیان کرتی ہے جو حصہ 1.7 میں دیے گئے مسئلے کو وسعت دیتی ہے۔ اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسئلہ 4.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی تصور کریں کہ $ty_1y_2 \dots y_n$ میدان عمل⁴¹ پر تفاعل f_1 تا f_n اور ان کے تفرق $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_1}$ استمراری ہیں اور اس میدان عمل پر نقطہ (t_0, K_1, \dots, K_n) پایا جاتا ہو تب کچھ وقفہ $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ پر مساوات 4.32 کا ایسا حل موجود ہے جو مساوات 4.33 کے ابتدائی شرائط پر پورا اترتا ہو اور یہ حل یکتا ہے۔

4.3.1 خطی نظام

سادہ تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہم مساوات 4.32 کو اس صورت خطی نظام⁴² کہیں گے جب اس کو

$$(4.34) \quad \begin{aligned} y'_1 &= a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ y'_2 &= a_{21}(t)y_1 + \dots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ y'_n &= a_{n1}(t)y_1 + \dots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \implies y' = Ay + g$$

solution vector⁴⁰
domain⁴¹
linear system⁴²

لکھنا ممکن ہو جہاں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 4.34 میں y'_1 تا y'_n کا y_1 تا y_n کے ساتھ خطی تعلق ہے۔ اگر $g = 0$ ہو تب نظام 4.34

$$(4.35) \quad y' = Ay$$

صورت اختیار کرتا ہے جو متجانس نظام ہے جبکہ $g \neq 0$ کی صورت میں نظام 4.34 کو غیر متجانس کہلاتا ہے۔ یوں مثال 4.2 اور مثال 4.4 متجانس نظام ہیں جبکہ مثال 4.3 غیر متجانس نظام ہے۔

خطی نظام میں $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = a_{11}(t)$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n} = a_{nn}(t)$ ہیں لہذا مسئلہ 4.2 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.3: خطی نظام کا مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ کھلے وقفہ $\alpha < t < \beta$ جس پر نقطہ t_0 پایا جاتا ہو، پر نظام 4.34 کے تمام a_{jk} اور g_j استمراری ہیں۔ ایسی صورت میں نظام 4.34 کا ایسا حل y موجود ہے جو ابتدائی شرائط مساوات 4.33 پر پورا اترتا ہے اور یہ حل یکتا ہے۔

ایک عدد متجانس سادہ تفرقی مساوات کی طرح مسئلہ خطی میل متجانس نظام کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ خطی میل
اگر $y^{(1)}$ اور $y^{(2)}$ کسی کھلے وقفے پر متجانس خطی نظام 4.35 کے حل ہوں تب ان کا کوئی بھی خطی میل $y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}$ بھی اس نظام کا حل ہو گا۔

ثبوت: خطی میل کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 4.35 کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= [c_1 \mathbf{y}^{(1)} + c_2 \mathbf{y}^{(2)}]' \\ &= c_1 \mathbf{y}^{(1)'} + c_2 \mathbf{y}^{(2)'} \\ &= c_1 \mathbf{A} \mathbf{y}^{(1)} + c_2 \mathbf{A} \mathbf{y}^{(2)} \\ &= \mathbf{A}(c_1 \mathbf{y}^{(1)} + c_2 \mathbf{y}^{(2)}) = \mathbf{A} \mathbf{y} \end{aligned}$$

□

خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا نظریہ، ایک عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظریے سے بہت مشابہت رکھتا ہے جس پر حصہ 2.6 اور حصہ 2.7 میں غور کیا گیا ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر ہم بالکل بنیادی تصورات اور حقائق پر غور کرتے ہیں۔

اساس، عمومی حل اور ورنسکی

متجانس نظام 4.35 کا کھلے وقفہ J پر حل کی اساس یعنی بنیادی نظام⁴³ سے مراد n عدد، J پر خطی طور غیر تابع حل، $\mathbf{y}^{(1)}$ تا $\mathbf{y}^{(n)}$ کا سلسلہ ہے۔ (یہاں کھلے وقفے کو J کہا گیا ہے چونکہ I اکائی قالب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔) ان حل کے خطی میل

$$(4.36) \quad \mathbf{y} = c_1 \mathbf{y}^{(1)} + \dots + c_n \mathbf{y}^{(n)}$$

کو J پر مساوات 4.35 کا عمومی حل کہا جاتا ہے جہاں c_1 تا c_n اختیاری مستقل ہیں۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر مساوات 4.35 میں تمام a_{jk} کھلے وقفے پر استمراری ہوں تب اس وقفے پر مساوات 4.35 کے حل کی اساس موجود ہے لہذا اس کا عمومی حل موجود ہے جس میں، کھلے وقفے پر، تمام حل شامل ہیں۔

ہم کھلے وقفے پر n عدد حل کو $n \times n$ قالب کی قطاروں کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(4.37) \quad \mathbf{Y} = [\mathbf{y}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{y}^{(n)}]$$

⁴³ fundamental system

Y کے مقطع کو $y^{(1)}$ تا $y^{(n)}$ کا ورونسکی کہتے ہیں۔

$$(4.38) \quad W(y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \dots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

درج بالا ورونسکی میں قطار $y^{(1)}$ تا $y^{(n)}$ حل کی اساس ہیں جنہیں اجزاء کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یہ حل صرف اور صرف اس صورت حل کی اساس ہوں گے جب ان کا ورونسکی کھلے وقفہ I پر کسی بھی نقطہ t_1 پر صفر کے برابر نہ ہو۔ کھلے وقفے پر W یا تو کہیں بھی صفر کے برابر نہیں ہو گا اور یا یہ کھلے وقفے پر مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ (یہ بالکل مسئلہ 2.3 اور مسئلہ 3.3 کی طرح ہے۔)

اگر مساوات 4.36 میں دیے حل اساس یعنی بنیادی نظام ہوں تب قالب 4.37 بنیادی قالب⁴⁴ کہلاتا ہے۔ سمتیہ قطار $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T$ کی مدد سے مساوات 4.36 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.39) \quad y = Yc$$

آئیں مساوات 4.38 کا حصہ 2.6 کے ساتھ تعلق جوڑیں۔ فرض کریں کہ متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل y اور z ہیں۔ یوں ورونسکی

$$W(y, z) = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

ہو گا۔ اس سادہ دو درجی مساوات کو تفرقی مساوات کی نظام کی صورت میں لکھنے کی خاطر، حصہ 4.1 کے تحت، $y = y_1$ ، $y' = y'_1 = y_2$ ، $z = z_1$ اور $z' = z'_1 = z_2$ لکھنا ہو گا۔ ایسا کرتے ہوئے ورونسکی درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے

$$W(y_1, z_1) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

جو، علامتوں میں فرق کے علاوہ، ہو بہو مساوات 4.38 ہے۔

4.4 مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب

فرض کریں کہ متجانس خطی نظام

$$(4.40) \quad y' = Ay$$

کے عددی سر مستقل مقدار ہیں لہذا $n \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کے ارکان t پر منحصر نہیں ہوں گے۔ ہم مساوات 4.40 کو حل کرنا چاہتے ہیں۔ اب ہم جانتے ہیں کہ ایک عدد سادہ تفرقی مساوات $y' = ky$ کا حل $y = Ce^{kt}$ ہے لہذا ہم مساوات 4.40 کا حل

$$(4.41) \quad y = xe^{\lambda t}$$

تصور کرتے ہیں۔ تصوراتی حل اور اس کے تفرق $y' = \lambda xe^{\lambda t}$ کو مساوات 4.40 میں پر کرتے ہوئے ہمیں $y' = \lambda xe^{\lambda t} = Axe^{\lambda t}$ ملتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے امتیازی قدر مسئلہ

$$(4.42) \quad Ax = \lambda x$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 4.40 کے غیر صفر اہم حل مساوات 4.41 کی صورت رکھتے ہیں جہاں λ قالب A کے امتیازی قدر اور x اس کے مطابقتی امتیازی سمتیات ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ A کا n عدد خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہے۔ عموماً مسائل میں ایسا ہی ہوتا ہے بالخصوص اگر A تشاکل⁴⁵ ہو $(a_{kj} = a_{jk})$ یا منحرف تشاکل⁴⁶ $(a_{kj} = -a_{jk})$ ہو اور یا اگر اس کے n عدد منفرد امتیازی اقدار پائے جاتے ہوں۔

ان خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کے سلسلے کو $x^{(1)}$ تا $x^{(n)}$ لکھتے ہیں جو امتیازی اقدار λ_1 تا λ_n کے مطابقتی سمتیات ہیں (جو منفرد ہو سکتے ہیں یا ان میں سے چند یا تمام یکساں ہو سکتے ہیں)۔ یوں مساوات 4.41 طرز کے مطابقتی حل درج ذیل ہوں گے۔

$$(4.43) \quad y^{(1)} = x^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \dots, y^{(n)} = x^{(n)}e^{\lambda_n t}$$

⁴⁵symmetric
⁴⁶skew-symmetric

مساوات 4.38 کی مدد سے ان کی وروئسی $W(y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ لکھتے ہیں۔

$$W(y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \dots & x_1^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ x_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \dots & x_2^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_n^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \dots & x_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \quad (4.44)$$

$$= e^{\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

اب نا قوت نمائی تفاعل کبھی بھی صفر نہیں ہوتا اور درج بالا مساوات میں آخری مقطع کے قطار، خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات ہیں، لہذا یہ مقطع بھی غیر صفر ہے۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: عمومی حل

اگر مساوات 4.40 میں دیے نظام کے مستقل قیمت قالب A کے n عدد منفرد امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہو تب مساوات 4.43 میں دیے گئے حل $y^{(1)}$ تا $y^{(n)}$ مساوات 4.40 کے حل کی اساس ہوں گے جن سے درج ذیل عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = c_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n x^{(n)} e^{\lambda_n t} \quad (4.45)$$

تشاکل یا منحرف تشاکل A کی صورت میں اور یا اگر A کے n عدد منفرد امتیازی سمتیات پائے جاتے ہوں تب A کے منفرد امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جائے گا اور درج بالا مسئلے کا فرض کردہ شرط پورا ہو گا۔

سطح مرحلہ پر حل منحنی کا اظہار

ہم اب دو عدد مستقل عددی سروالے متجانس سادہ تفرقی مساوات کے نظام کی صورت میں مساوات 4.40 پر غور کرتے ہیں۔

$$y' = Ay \quad \implies \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

ہم عموماً مساوات 4.46 کے دونوں حل بالمتقابل t کو علیحدہ علیحدہ (شکل 4.3-الف کی طرح) کھینچتے ہیں۔ ہم انہیں حل

$$(4.47) \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

کو ایک ہی خط کی صورت میں (شکل 4.3-ب کی طرح) سطح مرحلہ پر بھی کھینچ سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے t کو بطور مقدار معلوم تصور کیا جاتا ہے لہذا ایسے خط کو منحنی مقدار معلوم⁴⁷ بھی کہتے ہیں۔ ایسے منحنی کو مساوات 4.46 کا خط حرکت کہا جاتا ہے جبکہ $y - 1y_2$ سطح کو سطح مرحلہ کہتے ہیں۔ سطح مرحلہ کو مساوات 4.46 کے خطوط حرکت سے بھرنے سے مساوات 4.46 کا پیکر مرحلہ⁴⁸ حاصل ہوتا ہے۔

کمپیوٹر کے استعمال نے سطح مرحلہ پر حل کے خط حرکت کو اہمیت بخشی ہے۔ پیکر مرحلہ تمام حل کی خفی تجزیہ میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔ آئیں پیکر مرحلہ کی ایک مثال دیکھیں۔

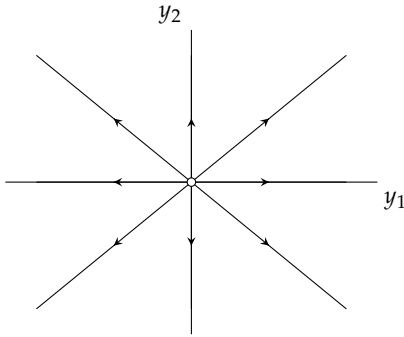
مثال 4.5: سطح مرحلہ پر خط حرکت
درج ذیل نظام کے حل کی منحنی کھینچیں۔

$$(4.48) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} \implies \begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

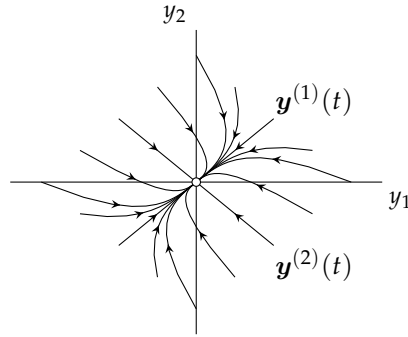
حل: $\mathbf{y} = x e^{\lambda t}$ اور $\mathbf{y}' = \lambda x e^{\lambda t}$ پر کر کے قوت نمائی تفاعل سے تقسیم کرتے ہوئے $\mathbf{A}x = \lambda x$ ملتا ہے۔ امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$$

ہے۔ یوں امتیازی اقدار $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -3$ حاصل ہوتے ہیں۔ امتیازی سمتیات $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})x = 0$ کے پہلے صف $(-2 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$ سے حاصل کرتے ہیں جس میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے $x_2 = x_1$ ملتا ہے۔ یوں x_1 چنتے ہوئے $x_2 = 1$ حاصل ہو گا جس سے امتیازی سمتیہ $\mathbf{x}^{(1)} = [1 \ 1]^T$ ملتا ہے لہذا $x_2 = -x_1$ ملتا ہے لہذا $x_1 = 1$ چنتے



(ب) نظام 4.50 کے خط حرکت۔ (مناسب جوڑ)



(الف) نظام 4.48 کے خط حرکت۔ (غیر مناسب جوڑ)

شکل 4.5: غیر مناسب جوڑ اور مناسب جوڑ۔

ہوئے $x_2 = -1$ حاصل ہو گا اور یوں $x^{(2)} = [1 \ -1]^T$ ہو گا۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں جس کے مختلف خط حرکت (یعنی پیکر حرکت) شکل 4.5-الف میں دکھائے گئے ہیں۔

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{y}^{(1)} + c_2 \mathbf{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

□

نظام کا نقطہ فاصل

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ نظام 4.46 کے تمام خط حرکت نقطہ $y = 0$ سے گزرتے ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ ایسا کیوں ہے۔ علم الاحصاء سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(4.49) \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y'_2 dt}{y'_1 dt} = \frac{y'_2}{y'_1} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$

یوں ماسوائے نقطہ $P_0 : (0, 0)$ کے، ہر نقطہ $P : (y_1, y_2)$ کے ساتھ خط حرکت کا مماس $\frac{dy_2}{dy_1}$ منسلک کیا جا سکتا ہے۔ نقطہ P_0 پر مساوات 4.49 کا دایاں ہاتھ نا قابل معلوم قیمت $\frac{0}{0}$ ہو گا۔ ایسا نقطہ P_0 جس پر $\frac{dy_2}{dy_1}$ کی قیمت نا قابل معلوم ہو کو نظام 4.46 کا نقطہ فاصل⁴⁹ کہتے ہیں۔

critical point⁴⁹

نقطہ فاصل کے پانچ اقسام

نقطہ فاصل کے قریب، خط حرکت کی جیومیٹریائی صورت کو دیکھ کر نقطہ فاصل کی پانچ اقسام بیان کیے جاسکتے ہیں جنہیں غیر مناسب جوڑ⁵⁰، مناسب جوڑ⁵¹، نقطہ زین⁵²، وسط⁵³ اور نقطہ مرغولہ⁵⁴ کہتے ہیں۔ ان کی وضاحت درج ذیل پانچ مثالوں میں کی گئی ہے جہاں ان کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔

مثال 4.6: غیر مناسب جوڑ

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر، دو خط حرکت کے علاوہ، تمام خط حرکت کی مماس کی ایک جیسی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو غیر مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔ دو مختلف خط حرکت کا بھی نقطہ P_0 پر تحدیدی سمت پایا جاتا ہے البتہ یہ تحدیدی سمت مختلف ہو گا۔

نظام 4.48 کا 0 پر غیر مناسب جوڑ پایا جاتا ہے۔ چونکہ e^{-t} کی نسبت سے e^{-3t} زیادہ تیزی سے گھٹتی ہے لہذا غیر مناسب جوڑ پر مشترکہ تحدیدی سمت، $x^{(1)} = [1 \quad 1]^T$ کی سمت ہے۔ دو غیر معمولی خط حرکت کی سمت $x^{(2)} = [1 \quad -1]^T$ اور $-x^{(2)} = [-1 \quad 1]^T$ کی سمتیں ہیں۔ □

مثال 4.7: مناسب جوڑ

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر ہر خط حرکت کی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔ مناسب جوڑ پر ایسا خط حرکت ضرور ہو گا جس کی تحدیدی سمت d ہو جہاں d کوئی بھی سمت ہو سکتی ہے۔

نظام

$$(4.50) \quad y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y'_1 &= y_1 \\ y'_2 &= y_2 \end{aligned}$$

کا مناسب جوڑ مبدا پر پایا جاتا ہے۔ اس میں فرضی حل $y = xe^{\lambda t}$ اور اس کا تفرق $y' = \lambda xe^{\lambda t}$ پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $Ax = \lambda x$ یعنی $(A - \lambda I)x = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی امتیازی قدر، $x \neq 0$ کی صورت میں، امتیازی مساوات $(1 - \lambda)^2 = 0$ سے $\lambda = 1$ حاصل ہوتی ہے۔ مساوات $(A - \lambda I)x = 0$ کے اجزاء $(1 - \lambda)x_1 = 0$ اور $(1 - \lambda)x_2 = 0$ میں حاصل امتیازی قدر پر

- improper node⁵⁰
- proper node⁵¹
- saddle point⁵²
- center⁵³
- spiral point⁵⁴

کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $x \neq 0$ کے علاوہ امتیازی سمتیہ x کی کوئی بھی قیمت چننی جاسکتی ہے۔ یوں $[1 \ 0]^T$ اور $[0 \ 1]^T$ چنتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \implies \begin{matrix} y_1 = c_1 e^t \\ y_2 = c_2 e^t \end{matrix} \implies c_1 y_2 = c_2 y_1$$

□

شکل 4.5-ب میں سطح حرکت پر پیکر مرحلہ اور مناسب جوڑ دکھائے گئے ہیں۔

مثال 4.8: نقطہ زین

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر دو عدد آمدی اور دو عدد رخصتی خط حرکت پائے جاتے ہوں نقطہ زین⁵⁵ کہلاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے قریب بقایا تمام خط حرکت اس نقطے کو نہیں چھوتے۔

نظام

$$(4.51) \quad y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y \implies \begin{matrix} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = -y_2 \end{matrix}$$

کا نقطہ زین مبدا پر پایا جاتا ہے۔ اس نظام کے امتیازی مساوات $(-1 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = 1$ اور $\lambda_2 = -1$ ہیں۔ جذر λ_1 کے لئے $(A - \lambda I)x = 0$ کے دوسرے صف $0x_1(1 - 1)x_2 = 0$ میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 0$ ملتا ہے جس سے امتیازی سمتیہ $[1 \ 0]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ جذر λ_2 کے لئے پہلے صف سے امتیازی سمتیہ $[0 \ 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(4.52) \quad y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \implies \begin{matrix} y_1 = c_1 e^t \\ y_2 = c_2 e^{-t} \end{matrix} \implies y_1 y_2 = c$$

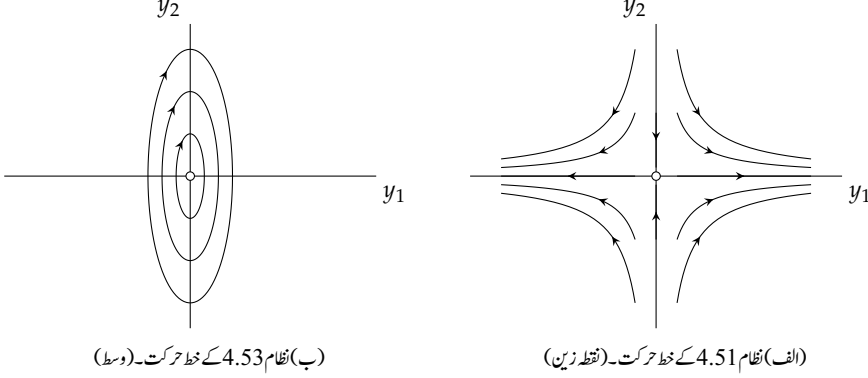
□

عمومی حل ہڈلولی⁵⁶ ہے جس کو شکل 4.6-الف میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.9: وسط

ایسا نقطہ فاصل جسے لامتناہی بند خط حرکت گھیرتے ہوں وسط کہلاتا ہے۔

⁵⁵نقطہ زین کے خط کی شکل عموماً گھوڑے کی زین سے مشابہت رکھتی ہے۔ اسی سے اس نقطے کو نقطہ زین کہتے ہیں۔
⁵⁶hyperbolic



شکل 4.6: نقطہ زین اور وسط۔

نظام

$$(4.53) \quad y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} y \implies \begin{aligned} y_1' &= y_2 \quad (\text{الف}) \\ y_2' &= -9y_1 \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

میں $y = xe^{\lambda t}$ حل تصور کرتے ہوئے y اور y' کو درج بالا میں پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $(A - \lambda I)x = 0$ ملتا ہے۔ اس سے $x \neq 0$ کی صورت میں امتیازی مساوات $\lambda^2 + 9 = 0$ حاصل ہو گا جس کے امتیازی اقدار $\lambda_1 = 3i$ اور $\lambda_2 = -3i$ ہیں۔ مساوات $(A - \lambda I)x = 0$ کے پہلے صف میں λ_1 پر کرتے ہوئے $x_2 = 3ix_1$ ملتا ہے۔ یوں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 3i$ حاصل ہو گا جس سے امتیازی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \ 3i]^T$ ملتا ہے۔ اسی طرح λ_2 کی مطابقتی امتیازی سمتیہ $x^{(2)} = [1 \ -3i]^T$ حاصل ہو گا۔ یوں مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(4.54) \quad y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \end{bmatrix} e^{3it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix} e^{-3it} \implies \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{3it} + c_2 e^{-3it} \\ y_2 &= 3ic_1 e^{3it} - 3ic_2 e^{-3it} \end{aligned}$$

حقیقی حل یولر مساوات⁵⁷ سے

$$\begin{aligned} y_1 &= A \cos 3t + B \sin 3t \\ y_2 &= 3B \cos 3t - 3A \sin 3t \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

⁵⁷ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

حقیقی حل کو مساوات 4.53 سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر مساوات 4.53-الف کے بائیں ہاتھ اور مساوات ب-کے دائیں ہاتھ کو ضرب دیا جائے تو $-9y_1y_1' - 9y_2y_2' = y_2y_2' - y_1y_1'$ حاصل ہو گا جو مساوات-ب کے بائیں ہاتھ اور مساوات-الف کے دائیں ہاتھ کے حاصل ضرب y_2y_2' کے برابر $-9y_1y_1' = y_2y_2' - y_1y_1'$ ہو گا۔ اس کا مکمل

$$(4.55) \quad \frac{9}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = c$$

ہے جو t سے پاک حقیقی حل ہے۔ یہ توخیم⁵⁸ کی نسل کی مساوات ہے جس کو شکل 4.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 4.10: نقطہ مرغولہ

ایسا نقطہ فاصل جس کے گرد خط حرکت گھومتے ہوئے نقطہ فاصل تک آن پہنچنے کی کوشش کرے یا نقطہ فاصل سے نکل کر اس نقطے کے گرد گھومتے ہوئے دور ہٹتا جائے⁵⁹ کہلاتا ہے۔ پہلی صورت میں لمحہ $t \rightarrow \infty$ پر خط حرکت نقطہ مرغولہ تک آن پہنچے گا۔

نظام

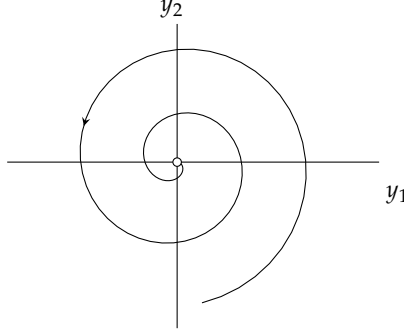
$$(4.56) \quad y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} y \implies \begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \quad (\text{الف}) \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

کا نقطہ مرغولہ مبدا پر پایا جاتا ہے۔ امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ سے امتیازی اقدار $\lambda_1 = -1 + i$ اور $\lambda_2 = -1 - i$ حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات $(-1 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$ میں امتیازی قدر λ_1 پر کرتے ہوئے $-ix_1 + x_2 = 0$ ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = i$ حاصل ہوتا ہے اور یوں λ_1 کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \ i]^T$ ہو گا۔ اسی طرح λ_2 کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $x^{(2)} = [1 \ -i]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$$

مخلوط عمومی حل سے حقیقی حل حاصل کو یولر مساوات کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔ ہم گزشتہ مثال کی طرح نسبتاً آسان طریقہ استعمال کرتے ہوئے حقیقی حل حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 4.56-الف کو y_1 اور مساوات 4.56-ب کو y_2 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_1y_1' + y_2y_2' = -(y_1^2 + y_2^2)$$



شکل 4.7: نظام 4.56 کے خط حرکت۔ (نقطہ مرغولہ)

اب ہم نکلی محدود r اور t زیر استعمال لاتے ہیں جہاں $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ ہے۔ r کا t کے ساتھ تفرق

$$2rr' = 2y_1y_1' + 2y_2y_2'$$

ہو گا لہذا درج بالا مساوات سے

$$rr' = -r^2, \implies \frac{dr}{r} = -dt, \implies r = ce^{-t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ c کی کسی بھی قیمت کے لئے یہ مرغولی خط کی مساوات ہے جس کو شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے۔ \square

مثال 4.11: انخطاطی جوڑ
بعض اوقات نظام کی امتیازی حل کی اساس نہیں پائی جاتی۔ ایسے صورت میں انخطاطی جوڑ⁶⁰ پایا جاتا ہے۔ انخطاطی جوڑ، مثال 4.6 تا مثال 4.8 کی طرح تشاکلی A (جس میں $a_{kj} = a_{jk}$ ہوتا ہے) کی صورت میں نہیں پایا جائے گا اور نا ہی یہ منحرف تشاکلی (جس میں $a_{kj} = -a_{jk}$ اور $a_{jj} = 0$ ہوتا ہے) صورت میں پایا جائے گا۔ ان کے علاوہ، مثال 4.9 اور مثال 4.10 کی طرح، کئی دیگر صورتوں میں بھی انخطاطی جوڑ نہیں پایا جاتا ہے۔ انخطاطی جوڑ کی صورت میں جو ترکیب استعمال کی جاتی ہے اس کو درج ذیل نظام کی عمومی حل کے حصول کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

$$(4.57) \quad y' = Ay = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} y$$

حل: A منحرف تشاکلی نہیں ہے۔ ہم اس کا حل $y = xe^{\lambda t}$ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں y اور y' کو درج بالا میں پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $(A - \lambda I)x = 0$ ملتا ہے۔ اس کی امتیازی

⁶⁰ degenerate node

مساوات

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

سے دوہرا امتیازی قدر $\lambda = 3$ حاصل ہوتا ہے۔ مساوات $(A - \lambda I)x = 0$ کے پہلے صف میں $\lambda = 3$ پر کرتے ہوئے

$$(4 - \lambda)x_1 + x_2 = 0, \quad \implies \quad x_1 + x_2 = 0$$

ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چنے سے $x_2 = -1$ اور یوں امتیازی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا حل

$$y^{(2)} = xte^{\lambda t} + ue^{\lambda t}$$

فرض کرتے ہیں جہاں $x = x^{(1)}$ ، $\lambda = -3$ جبکہ $u = [u_1 \quad u_2]^T$ مستقل ہے۔ (اگر یہاں حصہ 2.2 کی طرح دوسرا حل صرف $xte^{\lambda t}$ پر کیا جائے تو بات نہیں بنتی۔ آپ ایسا کر کے تسلی کر لیں۔) فرض کردہ حل اور اس کے تفرق کو مساوات 4.57 میں پر کرتے ہیں۔

$$y^{(2)'} = xe^{\lambda t} + \lambda xte^{\lambda t} + \lambda ue^{\lambda t} = Ay^{(2)} = Axe^{\lambda t} + Aue^{\lambda t}$$

دائیں ہاتھ $Ax = \lambda x$ ہے لہذا دونوں اطراف $\lambda xte^{\lambda t}$ کٹ جائے گا۔ بقایا مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

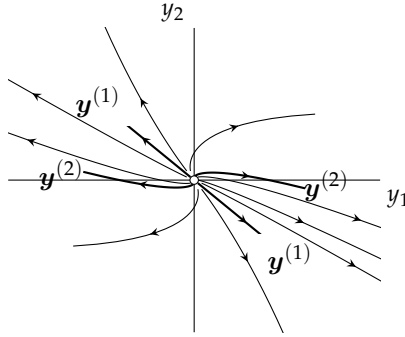
$$x + \lambda u = Au \quad \implies \quad (A - \lambda I)u = x$$

ملتا ہے۔ اس میں $x = x^{(1)}$ اور $\lambda = -3$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 - 3 & 1 \\ -1 & 2 - 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 \\ -u_1 - u_2 &= -1 \end{aligned}$$

انہیں حل کرتے ہوئے کہتا u حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔ یوں $u_1 = 0$ چنے سے $u_2 = 1$ لہذا $u = [0 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح دوسرا حل جو $x^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ سے خطی طور غیر تابع ہو حاصل ہوتا ہے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$(4.58) \quad y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$$



شکل 4.8: نظام 4.57 کے خط حرکت۔ (انخطاطی جوڑ)

ان حل کو شکل 4.8 میں دکھایا گیا ہے جہاں $y^{(1)}$ اور $y^{(2)}$ کو موٹی لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں مبدا پر واقع نقطہ فاصل کو عموماً انخطاطی جوڑ⁶¹ کہا جاتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ، تین یا تین سے زائد تفرقی مساوات کے نظام جس کے سہ گنا امتیازی قدر اور ایک عدد خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ پایا جاتا ہو کا دوسرا خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ مثال 4.11 کی طرح حاصل کیا جائے گا جبکہ اس کا تیسرا خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ درج ذیل فرض کرتے ہوئے حاصل ہو گا

$$(4.59) \quad y^{(3)} = \frac{1}{2}xt^2e^{\lambda t} + ute^{\lambda t} + ve^{\lambda t}$$

جہاں v کو

$$(4.60) \quad u + \lambda v = Av$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یہاں u دوسرے خطی طور امتیازی سمتیہ سے لیا جائے گا۔

سوالات

سوال 4.16 تا سوال 4.25 کے حل دریافت کریں۔

سوال 4.16:

$$y_1' = -y_1 + y_2$$

$$y_2' = 3y_1 + y_2$$

$$\text{جوابات: } y_1 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}, \quad y_2 = -c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{2t}$$

سوال 4.17:

$$y_1' = 6y_1 + y_2$$

$$y_2' = -6y_1 + y_2$$

$$\text{جوابات: } y_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t}, \quad y_2 = -3c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{4t}$$

سوال 4.18:

$$y_1' = y_1 + y_2$$

$$y_2' = 2y_1 + 2y_2$$

$$\text{جوابات: } y_1 = c_1 + c_2 e^{3t}, \quad y_2 = -c_1 + 2c_2 e^{3t}$$

سوال 4.19:

$$y_1' = -y_1 + 2y_2$$

$$y_2' = -2y_1 + 3y_2$$

$$\text{جواب: } y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} e^t \quad \text{جہاں } u_1 = 1 \text{ چننا گیا ہے۔}$$

سوال 4.20:

$$y_1' = 3y_1 + 3y_2$$

$$y_2' = -\frac{4}{3}y_1 - 2y_2$$

$$\text{جوابات: } y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}, \quad y_2 = -\frac{1}{3}c_1 e^{2t} - \frac{4}{3}c_2 e^{-t}$$

سوال 4.21:

$$y_1' = -12y_1 - 5y_2$$

$$y_2' = \frac{56}{3}y_1 + 3y_2$$

جوابات: $y_2 = -\frac{7}{5}c_1e^{-5t} - \frac{8}{5}c_2e^{-4t}$ ، $y_1 = c_1e^{-5t} + c_2e^{-4t}$

سوال 4.22:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -9y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

جوابات:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1-i) \end{bmatrix} e^{(2-i3)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1+i) \end{bmatrix} e^{(2+i3)t}$$

جس سے یولر مساوات کی مدد سے درج ذیل حقیقی حل لکھا جاسکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = -i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2t}(A \cos 3t + B \sin 3t) \\ y_2 &= \frac{3}{2}e^{2t}[(B + A) \cos 3t + (B - A) \sin 3t] \end{aligned}$$

سوال 4.23:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 3y_3 \\ y_3' &= -y_2 \end{aligned}$$

جوابات:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-i\sqrt{5}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{i\sqrt{5}t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

سوال 4.24:

$$\begin{aligned} y_1' &= 11y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -4y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_2 = -c_1e^{9t} - 2c_2e^{7t}$ ، $y_1 = c_1e^{9t} + c_2e^{7t}$

سوال 4.25:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - 10y_2 - 14y_3 \\y_2' &= -10y_1 + 10y_2 - 4y_3 \\y_3' &= -14y_1 - 4y_2 - 2y_3\end{aligned}$$

جوابات:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{18t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{9t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-18t}$$

سوال 4.26 تا سوال 4.31 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 4.26:

$$\begin{aligned}y_1' &= -6y_1 + 2y_2 \\y_2' &= -12y_1 + 5y_2 \\y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = 1\end{aligned}$$

$$\text{جوابات: } y_2 = \frac{21}{5}e^{-3t} - \frac{16}{5}e^{2t}, \quad y_1 = \frac{14}{5}e^{-3t} - \frac{4}{5}e^{2t}$$

سوال 4.27:

$$\begin{aligned}y_1' &= -\frac{11}{3}y_1 + y_2 \\y_2' &= -\frac{32}{3}y_1 + 3y_2 \\y_1(0) &= -10, \quad y_2(0) = 2\end{aligned}$$

$$\text{جوابات: } y_2 = 86e^{\frac{t}{3}} - 84e^{-t}, \quad y_1 = \frac{43}{2}e^{\frac{t}{3}} - \frac{63}{2}e^{-t}$$

سوال 4.28:

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 - 3y_2 \\y_2' &= \frac{5}{3}y_1 + 5y_2 \\y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = -1\end{aligned}$$

جوابات: $y_2 = -\frac{5}{12}e^{4t} - \frac{7}{12}$ ، $y_1 = \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{7}{4}$

سوال 4.29:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 \\ y_1(0) &= -1, \quad y_2(0) = 2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_2 = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}$ ، $y_1 = \frac{1}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t}$

سوال 4.30:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \\ y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = -1 \end{aligned}$$

جوابات: $y_2 = -\cos t$ ، $y_1 = \sin t$

سوال 4.31:

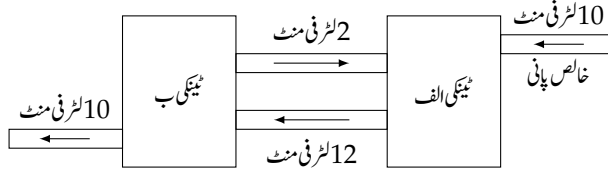
$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 \\ y_1(0) &= -2, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

جوابات: $y_2 = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$ ، $y_1 = -\frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$

سوال 4.32 تا سوال 4.33 میں تفرقی مساوات تبدیل کرنے کو کہا گیا ہے۔ ان میں y_1 کی عمومی مساوات دریافت کریں۔

سوال 4.32: آپ نے گزارش ہے کہ سوال 4.16 کے نظام سے دو درجی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔ حاصل دو درجی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: پہلی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے $y_1'' = -y_1' + y_2'$ ملتا ہے جس میں y_2' کی جگہ دوسری مساوات پر کرتے ہوئے $y_1'' = -y_1' + (3y_1 + y_2)$ حاصل ہوتا ہے۔ اب پہلی مساوات سے y_2 اس میں پر کریں۔ یوں $y_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}$ اس کا عمومی حل ملتا ہے۔ $y_1'' = 4y_1$ یعنی $y_1'' = -y_1' + 3y_1 + (y_1' + y_1)$ ہے۔



شکل 4.9: سوال 4.34 میں ٹینکیوں کا نظام۔

سوال 4.33: یہاں سوال 4.31 کے نظام سے دو درجی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔ حاصل دو درجی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1'' + 2y_1' = 0$ ، $y_1 = c_1 + c_2 e^{-2t}$

سوال 4.34: ٹینکیوں میں محلول کی تیاری دو عدد ٹینکیاں شکل 4.9 میں دکھائی گئی ہیں۔ ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں پچاس (50) کلو گرام نمک حل کی گئی ہے۔ ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر خالص پانی پایا جاتا ہے۔ پانی کے نظام کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ٹینکی الف میں نمک کی مقدار y_1 اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار y_2 کے لئے تفرقی مساوات کا نظام لکھیں۔ اس نظام کو حل کریں۔

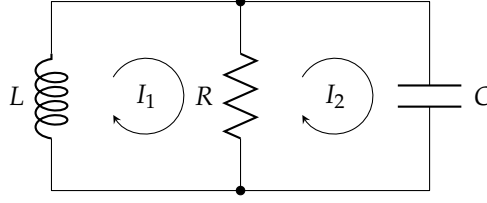
جوابات: $y_1' = -\frac{12}{200}y_1 + \frac{2}{200}y_2$ ، $y_2' = \frac{12}{200}y_1 - \frac{12}{200}y_2$ ،
 $y_2 = 50\sqrt{6}e^{-\frac{3}{50}t} \sinh \frac{\sqrt{6}t}{100}$ ، $y_1 = 50e^{-\frac{3}{50}t} \cosh \frac{\sqrt{6}t}{100}$

سوال 4.35: مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو شکل 4.10 میں متوازی جڑا دکھایا گیا ہے۔ اس کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کریں۔ $L = 2H$ ، $R = 1\Omega$ اور $C = 0.5F$ کی صورت میں I_1 اور I_2 کا عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات:

$$LI_1' + (I_1 - I_2)R = 0$$

$$\frac{1}{C} \int I_2 dt + (I_2 - I_1)R = 0$$



شکل 4.10: سوال 4.35 کا دورہ۔

پہلی مساوات سے نظام کی ایک مساوات $I_1' = -\frac{R}{L}I_1 + \frac{R}{L}I_2$ ملتی ہے۔ دوسری مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ترتیب دے کر آخر میں پہلی مساوات سے I_1' پر کرتے ہیں

$$\frac{I_2}{C} + (I_2' - I_1')R = 0 \implies I_2' = I_1' - \frac{I_2}{RC} \implies I_2' = \frac{R}{L}(-I_1 + I_2) - \frac{I_2}{RC}$$

جس سے تفرقی مساوات کے نظام کی دوسری مساوات $I_2' = -\frac{R}{L}I_1 + (\frac{R}{L} - \frac{1}{RC})I_2$ حاصل ہوتی ہے۔ دی گئی قیمتیں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام

$$I_1' = -0.5I_1 + 0.5I_2$$

$$I_2' = -0.5I_1 - 1.5I_2$$

ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1$ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ ہے۔ یوں مثال 4.11 کی طرز پر حل کرتے ہوئے $u_1 = 1$ چننے سے $u_2 = 1$ حاصل ہوتا ہے لہذا درج ذیل اساس حاصل کرتے ہیں

$$\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

جس سے عمومی حل $\mathbf{I} = c_1 \mathbf{y}^{(1)} + c_2 \mathbf{y}^{(2)}$ لکھا جائے گا۔

4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام

ہم مستقل عددی سروالے متجانس خطی نظام 4.61 پر گفتگو جاری رکھتے ہیں۔

$$(4.61) \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

اب تک حصہ 4.4 میں ہم نے دیکھا کہ نسل حل $\mathbf{y} = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$ کے خطوط کو y_1y_2 سطح حرکت پر کھینچتے ہوئے عمومی جائزہ لیا جاسکتا ہے۔ اس سطح پر منحنی کو نظام 4.61 کا خط حرکت کہتے ہیں۔ تمام خط حرکت کو ملا کر پیکر مرحلہ حاصل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے کہ $\mathbf{y} = x e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے مساوات 4.61 میں پر کرتے ہوئے

$$\mathbf{y}' = \lambda x e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{A} x e^{\lambda t}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(4.62) \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

ملتا ہے۔ یوں λ قالب \mathbf{A} کا امتیازی قدر اور \mathbf{x} مطابقتی امتیازی سمتیہ ہونے کی صورت میں $\mathbf{y}(t)$ مساوات 4.61 کا (غیر صفر) حل ہو گا۔

گزشتہ حصے کے مثالوں سے واضح ہے کہ پیکر مرحلہ کی صورت کا دارومدار بڑی حد تک نظام 4.61 کی نقطہ فاصل کی قسم پر منحصر ہے جہاں نقطہ فاصل سے مراد ایسا نقطہ ہے جہاں $\frac{dy_1}{dy_2}$ ناقابل معلوم قیمت $\frac{0}{0}$ ہو۔ [مساوات 4.49 دیکھیں۔]

$$(4.63) \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_2' dt}{y_1' dt} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$

حصہ 4.4 سے ہم یہ بھی جانتے ہیں نقطہ فاصل کے کئی اقسام پائے جاتے ہیں۔

موجودہ حصے میں ہم دیکھیں گے کہ نقطہ فاصل کی قسم کا تعلق امتیازی قدر سے ہے جو امتیازی مساوات

$$(4.64)$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

جدول 4.1: امتیازی قدر سے نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

نام	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	λ_1 اور λ_2 پر تبصرہ
(الف) جوڑ		$q > 0$	$\Delta \geq 0$	حقیقی۔ یکساں علامتیں
(ب) نقطہ زین		$q < 0$		حقیقی۔ آپس میں الٹ علامتیں
(پ) وسط	$p = 0$	$q > 0$		خالص خیالی عدد (حقیقی جزو صفر ہے)
(ت) نقطہ مرغولہ	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	مخلوط عدد (حقیقی اور خیالی اجزاء غیر صفر ہیں)

کے حل λ_1 اور λ_2 ہیں۔ امتیازی مساوات دو درجی مساوات $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ ہے جس کے عددی سر p ، q اور ممیز Δ درج ذیل ہیں۔

$$(4.65) \quad p = a_{11} + a_{22}, \quad q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta = p^2 - 4q$$

دو درجی مساوات کے حل الجبرا کی مدد سے $\lambda = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ یعنی

$$(4.66) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(p + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(p - \sqrt{\Delta})$$

لکھتے ہیں۔ ان امتیازی اقدار کو استعمال کرتے ہوئے امتیازی مساوات کو اجزائے ضربی کی صورت

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ p امتیازی اقدار کا مجموعہ ہے جبکہ q ان کا حاصل ضرب ہے۔ اسی طرح مساوات 4.66 کی مدد سے $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ لکھا جاسکتا ہے۔

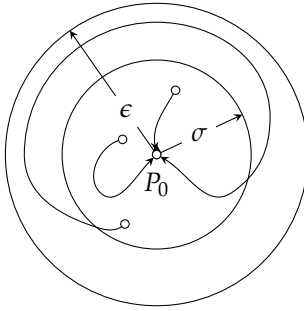
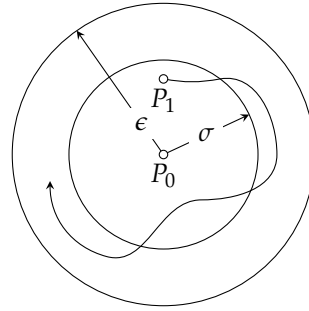
$$(4.67) \quad p = \lambda_1 + \lambda_2, \quad q = \lambda_1 \lambda_2, \quad \Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

ان نتائج سے نقطہ فاصل کی جانچ کے اصول طے کئے جاسکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ ان اصولوں کو اسی حصے میں اخذ کیا جائے گا۔

استحکام

نقطہ فاصل کی درجہ بندی ان کی استحکام⁶³ کی بنیاد پر بھی کی جاسکتی ہے۔ انجینئری کے علاوہ دیگر شعبوں میں بھی استحکام نہایت اہم تصور ہے۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی یا خلل سے بعد کے تمام لمحات پر معمولی خلل ہی پایا جاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل تصورات اہم ہیں۔

discriminant⁶²
stability⁶³

(ب) مستحکم اور جاذب نقطہ فاصل P_0 -(الف) مستحکم نقطہ فاصل P_0 کی صورت میں خط حرکت D_ϵ میں رہتی ہے۔

شکل 4.11: نظام 4.61 کے نقطہ فاصل۔

تعریف: مستحکم، غیر مستحکم، مستحکم اور جاذب
اگر نظام 4.61 کے نقطہ فاصل P_0 کے قریب تمام خط حرکت مستقبل میں بھی P_0 کے قریب رہیں تب P_0 مستحکم⁶⁴ کہلائے گا۔ یوں اگر کسی بھی رداس ϵ کی ٹکیا D_ϵ کے لئے رداس σ کی ایسی ٹکیا D_σ موجود ہو، جہاں دونوں ٹکیوں کا وسط P_0 ہے، کہ ٹکیا D_σ میں (لمحہ $t = t_1$ کا مطابقتی) نقطہ P_1 پر پائے جانے والا، نظام 4.61 کا ہر خط حرکت، مستقبل میں ٹکیا D_ϵ میں رہتا ہو، تب P_0 کا نقطہ فاصل مستحکم⁶⁵ کہلائے گا۔ [شکل 4.11-الف دیکھیں]

اگر P_0 مستحکم نہ ہو تب یہ غیر مستحکم⁶⁷ کہلاتا ہے۔

ایسا مستحکم P_0 جہاں وہ تمام خط حرکت جن کا کوئی بھی نقطہ، D_σ پر پایا جاتا ہو، آخر کار $(t \rightarrow \infty)$ P_0 کے قریب تر پہنچے مستحکم اور جاذب⁶⁸ کہلاتا ہے۔ [شکل 4.11-ب دیکھیں]

استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی جدول 4.2 میں دی گئی ہے۔

⁶⁴stable

⁶⁵stable

⁶⁶روسی ریاضی دان اسکندر میکال لیاپونوف [1857-1918] کا مستحکم تفرقی مساوات پر کام بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔ استحکام کی یہ تعریف انہوں نے ہی پیش کی۔

⁶⁷unstable

⁶⁸stable and attractive

جدول 4.2: استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

استحکام کی قسم	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$
(الف) مستحکم اور جاذب	$p < 0$	$q > 0$
(ب) مستحکم	$p \leq 0$	$q > 0$
(پ) غیر مستحکم	$p > 0$ یا $q < 0$	

آئیں جدول 4.1 اور جدول 4.2 کو حاصل کریں۔ اگر $q = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ ہو تب دونوں امتیازی اقدار مثبت ہوں گے یا دونوں امتیازی اقدار منفی ہوں گے اور یا امتیازی اقدار جوڑی دار مخلوط ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ہو تب دونوں امتیازی اقدار منفی ہوں گے یا (مخلوط جوڑی دار صورت میں) ان کا حقیقی جزو منفی ہو گا لہذا P_0 مستحکم اور جاذب ہو گا۔ جدول 4.2 کے بقایا دو نتائج کو آپ خود اسی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

$\Delta < 0$ کی صورت میں امتیازی قدر جوڑی دار مخلوط $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ اور $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha < 0$ ہو تب مستحکم، جاذب نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس $p = 2\alpha > 0$ کی صورت میں غیر مستحکم نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔

$p = 0$ کی صورت میں $\lambda_2 = -\lambda_1$ ہو گا اور یوں $q = \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda_1^2$ ہو گا۔ اب اگر $q > 0$ ہو تب $\lambda_1^2 = -q < 0$ ہو گا لہذا λ_1 اور λ_2 خالص خیالی ہوں گے جن سے دوری حل⁶⁹ حاصل ہو گا۔ دوری حل کا خط حرکت ایسا بند دائرہ ہے جس کا وسط P_0 ہے۔

مثال 4.12: جدول 4.1 اور جدول 4.2 کا عملی استعمال

گزشتہ حصے کے مثال 4.6 میں نظام 4.48 یعنی $y' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y$ کی بات کی گئی جہاں $p = -4$ ، $q = 3$ اور $\Delta = 4$ ہیں۔ یوں جدول 4.1-الف کے تحت نقطہ فاصل ایک جوڑ ہو گا۔ جدول 4.2-الف کے تحت یہ جوڑ مستحکم اور جاذب ہے۔ □

مثال 4.13: اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ حرکت

اسپرنگ اور کمیت [حصہ 2.4 دیکھیں] کے نظام $my'' + cy' + ky = 0$ کا نقطہ فاصل دریافت کریں۔

حل: تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے کی خاطر m سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$ لکھتے ہیں۔ دو درجی مساوات سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر [حصہ 4.1 دیکھیں] ہم $y_1 = y$ اور $y_2 = y'$ لیتے ہیں۔ یوں $y_2' = y'' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$ ہو گا۔ اس طرح

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} y, \quad |A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے $p = -\frac{c}{m}$ ، $q = \frac{k}{m}$ اور $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$ ملتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے جدول 4.1 اور جدول 4.2 سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جہاں Δ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

• [بلا تقصیر] $c = 0$ ، $p = 0$ اور $q > 0$ وسط دیتا ہے۔

• [کم مقصور] $c^2 < 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ مستحکم جاذب نقطہ مرغولہ دیتا ہے۔

• [فاصل تقصیر] $c^2 = 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta = 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔

• [زیادہ مقصور] $c^2 > 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔

□

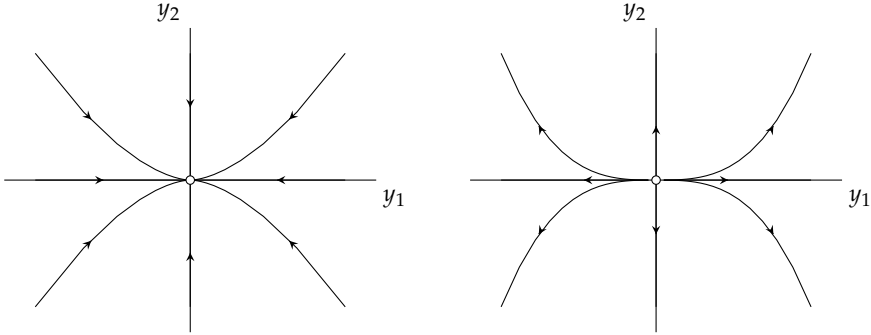
سوالات

سوال 4.36 تا سوال 4.45 کے نقطہ فاصل کی قسم جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔ ان کے حقیقی عمومی حل حاصل کریں اور ان کے خط حرکت کمپیوٹر کی مدد سے کھینچیں۔ [پہلے چار جوابات کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔]

سوال 4.36:

$$y_1' = y_1$$

$$y_2' = 3y_2$$



(ب) سوال 4.37 مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔

(الف) سوال 4.36 غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔

شکل 4.12: سوال 4.36 اور سوال 4.37 کے اشکال۔

جوابات: غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔ $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ یعنی $y_1 = c_1 e^t$ ، $y_2 = c_2 e^{3t}$ ؛ شکل 4.12-الف۔

سوال 4.37:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 \\ y_2' &= -5y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔ $y_1 = c_1 e^{-3t}$ ، $y_2 = c_2 e^{-5t}$ ؛ شکل 4.12-ب۔

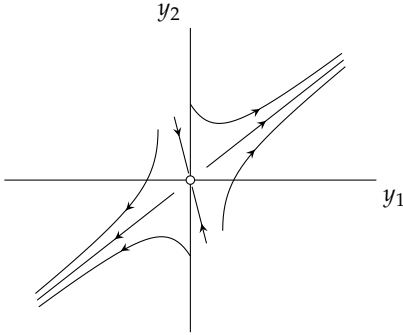
سوال 4.38:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -16y_1 \end{aligned}$$

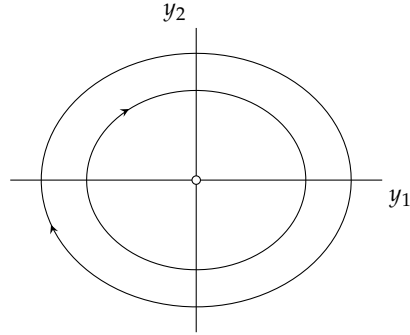
جوابات: مستحکم وسط۔ $y_1 = A \cos 4t + B \sin 4t$ ، $y_2 = 4B \cos 4t - 4A \sin 4t$ ؛ شکل 4.13-الف۔

سوال 4.39:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2y_1 + y_2 \\ y_2 &= 5y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$



(ب) سوال 4.39 غیر مستحکم، نقطہ زین۔



(الف) سوال 4.38 مستحکم وسط۔

شکل 4.13: سوال 4.38 اور سوال 4.39 کے اشکال۔

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}$ ، $y_2 = -5c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}$ ؛ شکل 4.13-ب۔

سوال 4.40:

$$y_1 = -2y_1 - 2y_2$$

$$y_2 = 2y_1 - 2y_2$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-2t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-2t}(-B \cos 2t + A \sin 2t)$

سوال 4.41:

$$y_1 = -10y_1 + 2y_2$$

$$y_2 = -15y_1 + y_2$$

جوابات: مستحکم اور جاذب جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-4t}$ ، $y_2 = \frac{5}{2}c_1 e^{-5t} + 3c_2 e^{-4t}$

سوال 4.42:

$$y_1 = -y_1 + y_2$$

$$y_2 = 2y_2$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ ، $y_2 = 3c_2 e^{2t}$

سوال 4.43:

$$y_1 = -y_1 + 2y_2$$

$$y_2 = 6y_1 + 3y_2$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{5t}$ ، $y_2 = -c_1 e^{-3t} + 3c_2 e^{5t}$

سوال 4.44:

$$y_1 = 13y_1 - 3y_2$$

$$y_2 = 18y_1 - 2y_2$$

جوابات: غیر مستحکم جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{7t} + c_2 e^{4t}$ ، $y_2 = 2c_1 e^{7t} + 3c_2 e^{4t}$

سوال 4.45:

$$y_1 = y_2$$

$$y_2 = -5y_1 - 2y_2$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$ ،
 $y_2 = e^{-t}[-(A + 2B) \cos 2t - (2A + B) \sin 2t]$

سوال 4.46 تا سوال 4.46 خط حرکت، دو درجی سادہ تفرقی مساوات اور نقطہ فاصل کے بارے میں ہیں۔

سوال 4.46: قسری ارتعاش

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \text{ کو حل کریں۔ امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟}$$

جواب: $y = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t)$ ؛ مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ۔

سوال 4.47: ہارمونی ارتعاش

$$y'' + 4y = 0 = 0 \text{ کو حل کریں۔ امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟}$$

جواب: $y = A \cos 2t + B \sin 2t$ ؛ مستحکم وسط۔

4.6. کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

سوال 4.48: مقدار معلوم کا تبادلہ
مثال 4.12 میں متغیر $\tau = -t$ متعارف کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پڑے گا؟

جواب: اب $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو گا لہذا غیر مستحکم جوڑ پایا جائے گا۔

سوال 4.49: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں A کو تبدیل کرتے ہوئے $A - 0.12I$ کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ I اکائی قالب ہے۔

جواب: اب $p = -0.2 \neq 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ہیں لہذا غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے گا۔

سوال 4.50: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں تمام a_{jk} کی جگہ $a_{jk} + b$ پر کریں۔ (الف) b کی ایسی قیمت دریافت کریں کہ نقطہ زین حاصل ہو۔ اسی طرح b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں جن پر (ب) مستحکم اور جاذب جوڑ، (پ) مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ اور (ت) غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے۔

جواب: مثلاً (الف) $b = -2$ ، (ب) $b = -1$ ، (پ) $b = -0.2$ ، (ت) $b = 15$

4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

کیفی تراکیب⁷⁰ سے مسئلے کو حل کئے بغیر حل کے بارے میں کیفی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ ایسے مسائل جن کا تحلیلی حل مشکل یا ناقابل حصول ہو، کے لئے یہ ترکیب خاص طور پر کارآمد ہے۔ عملاً اہم کئی غیر خطی نظام

$$(4.68) \quad y' = f(y) \implies \begin{aligned} y_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

کے لئے یہ درست ہے۔

گزشتہ حصے میں سطح مرحلہ کی ترکیب خطی نظام کے لئے استعمال کیا گیا۔ اس حصے میں اس ترکیب کو وسعت دے کر غیر خطی نظام کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 4.68 خود مختار⁷¹ ہے یعنی اس میں غیر تابع متغیر t صریحاً نہیں پایا جاتا۔ (اس حصے میں تمام مثال خود مختار ہیں۔) ہم یہاں بھی حل کی نسل پیش کریں گے۔ اعدادی ترکیب سے ایک وقت میں صرف ایک (تقریباً درست) حل حاصل ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے سطح مرحلہ کی ترکیب زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

گزشتہ حصے کے چند تصورات اس حصے میں بھی درکار ہیں۔ ان میں سطح حرکت (y_1, y_2) سطح، خط حرکت (مساوات 4.68 کا y_1, y_2 سطح پر حل)، مساوات 4.68 کا پیکر مرحلہ (تمام خط حرکت کا مجموعہ)، اور مساوات 4.68 کا نقطہ فاصل (ایسا نقطہ (y_1, y_2) جہاں $f_1(y_1, y_2)$ اور $f_2(y_1, y_2)$ دونوں صفر کے برابر ہوں۔) کے تصورات شامل ہیں۔

مساوات 4.68 کے کئی نقطہ فاصل ہو سکتے ہیں۔ ان پر باری باری بات کی جائے گی۔ مبدا سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل پر غور کرنے سے پہلے، تکنیکی آسانی کی خاطر، ایسے نقطہ فاصل کو گھمائے بغیر مبدا پر منتقل کیا جائے گا۔ مبدا $(0, 0)$ سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل $P_0 : (a, b)$ کو گھمائے بغیر مبدا $(0, 0)$ پر درج ذیل عمل سے منتقل کیا جاتا ہے۔

$$\tilde{y}_1 = y_1 - a, \quad \tilde{y}_2 = y_2 - b$$

اس عمل کے بعد نقطہ فاصل P_0 مبدا $(0, 0)$ پر پایا جائے گا۔ یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہاں دیے گئے تمام مثالوں میں نقطہ فاصل کو مبدا پر منتقل کیا گیا ہے اور \tilde{y}_1 ، \tilde{y}_2 کی جگہ ہم y_1 اور y_2 ہی لکھیں گے۔ ہم یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ نقطہ فاصل تنہا⁷² ہے یعنی ایسے کسی بھی معقول حد تک چھوٹی تکیا جس کا وسط مبدا پر پایا جاتا ہو میں مساوات 4.68 کا صرف ایک عدد نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ اگر مساوات 4.68 کے محدود تعداد میں نقطہ فاصل پائے جاتے ہوں تب ایسے تمام نقطہ فاصل خود بخود تنہا ہوں گے۔

غیر خطی نظام کو خطی بنانا

عموماً نظام 4.68 کو نقطہ فاصل $P_0 : (0, 0)$ کے قریب خطی تصور کرتے ہوئے نظام کی استحکام کی نوعیت دریافت کی جاسکتی ہے۔ نظام 4.68 کو $y' = Ay + h(y)$ لکھ کر $h(y)$ رد کرنے سے خطی نظام حاصل کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو تفصیلاً دیکھتے ہیں۔

autonomous⁷¹
isolated⁷²

ہم اگلے باب میں دیکھیں گے کہ عموماً تفاعل کو تسلسل $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح ایک سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل کے تسلسل بھی لکھے جاسکتے ہیں۔ انہیں ایسے ہی چند تفاعل مثلاً

$$f_a(x) = 2x^2 + 5x, \quad f_b(x, y) = 2x^3 - y^2 + xy, \quad f_c(x, y) = 2x^2 - 3y + 5$$

میں آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کریں۔ ایسا کرنے سے $f_a(0) = 0$ ، $f_b(0, 0) = 0$ اور $f_c(0, 0) = 5$ ملتا ہے۔ آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کرنے سے صرف اس تفاعل کی قیمت غیر صفر حاصل ہوگی جس میں c_0 طرز کا بالکل علیحدہ مستقل پایا جاتا ہو جو متغیرات کے ساتھ ضرب نہ ہو۔

اب چونکہ P_0 نقطہ فاصل ہے لہذا $f_1(0, 0) = 0$ اور $f_2(0, 0) = 0$ ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ ان تفاعل میں c_0 طرز کا علیحدہ مستقل نہیں پایا جاتا لہذا ان کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں h_1 اور h_2 غیر خطی تفاعل ہیں۔

$$(4.69) \quad y' = Ay + h(y) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h_1(y_1, y_2) \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + h_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

چونکہ نظام 4.68 خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] تفاعل ہے لہذا A مستقل مقدار ہو گا۔ اب خطی بنانے کا مسئلہ⁷³ پیش کرتے ہیں جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسئلہ 4.6: خطی بنانا

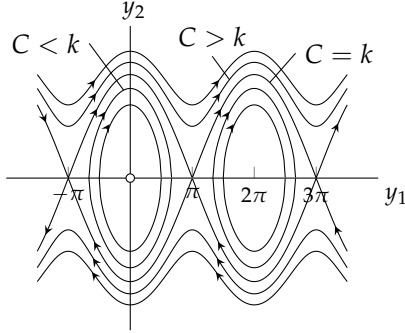
اگر نظام 4.68 کے نقطہ فاصل $P_0 : (0, 0)$ کی پڑوس میں f_1 ، f_2 اور ان کے جزوی تفرق استمراری ہوں، اور مساوات 4.69 میں مقطع A غیر صفر ($|A| \neq 0$) ہو تب نظام 4.68 کے نقطہ فاصل کی قسم اور استحکام وہی ہوگی جو درج ذیل خطی کردہ نظام کی ہوگی

$$(4.70) \quad y' = Ay \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$$

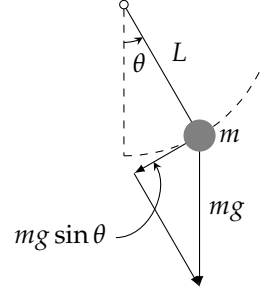
البتہ A کے خالص خیالی یا برابر امتیازی قدر ہونے کی صورت میں نظام 4.68 کا نقطہ فاصل نظام 4.70 کے نقطہ فاصل کی قسم کا ہو سکتا ہے یا وہ نقطہ مرغولہ ہو سکتا ہے۔

مثال 4.14: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کیت کی آزادانہ ارتعاش۔ خطی بنانا

ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کیت کو شکل 4.14-الف میں دکھایا گیا ہے۔ ڈنڈے کی کیت اور ہوا کی رکاوٹی قوت کو نظر انداز



(ب) پیکر مرحلہ۔



(الف) ہلکے ڈنڈے سے لگی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔

شکل 4.14: مثال 4.14 کے اشکال۔ [C کی تفصیل مثال 4.17 میں دی جائے گی۔]

کرتے ہوئے نقطہ فاصل کا مقام اور اس کی نوعیت دریافت کریں۔ حل: پہلا قدم نمونہ کشی ہے۔ متوازن مقام سے گھڑی کے الٹ رخ زاویائی فاصلہ θ ناپتے ہیں۔ قوت ثقل mg کمیت پر نیچے رخ عمل کرتا ہے جس کی وجہ سے حرکت کی مماسی، بحالی قوت $mg \sin \theta$ پیدا ہوتی ہے جہاں $g = 0.8 \text{ ms}^{-2}$ ثقلی اسراع ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت بحالی قوت اور اسراع قوت $mL\theta''$ جہاں $L\theta''$ اسراع ہے، ہر لمحہ برابر ہوں گے۔ یوں ان دونوں قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔

$$mL\theta'' + mg \sin \theta = 0$$

دونوں اطراف کو mL سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(4.71) \quad \theta'' + k \sin \theta = 0, \quad \left(k = \frac{g}{L}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ نہایت کم θ کی صورت میں $\sin \theta \approx \theta$ ہوتا ہے لہذا ایسی صورت میں درج بالا مساوات کو $\theta'' + k\theta = 0$ لکھ کر حل $\theta = A \cos \sqrt{k}t + B \sin \sqrt{k}t$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ کم θ کی صورت میں تقریباً درست جواب ہے البتہ بالکل درست جواب بنیادی تفاعل⁷⁴ کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

دوسرا قدم نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $(\pm 2\pi, 0)$ ، $(\pm 4\pi, 0)$ ، ... کا حصول اور مسئلے کو خطی بنانا ہے۔ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر ہم $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہیں۔ یوں مساوات 4.71

linearization theorem⁷³
elementary function⁷⁴

سے درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے جو نظام 4.68 کے طرز کا ہے۔

$$(4.72) \quad \begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = -k \sin y_1 \end{aligned}$$

جہاں دونوں دائیں اطراف ایک وقت صفر کے برابر ہوں $y_2 = 0$ اور $\sin y_1 = 0$ وہاں نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ یوں لامحدود تعداد میں نقطہ فاصل $(n\pi, 0)$ پائے جاتے ہیں جہاں $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ہے۔ انہیں نقطہ فاصل $(0, 0)$ پر غور کریں جہاں مکلا رن تسلسل⁷⁵ سے

$$\sin y_1 = y_1 - \frac{y_1^3}{6} + \dots \approx y_1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں نقطہ فاصل کی پڑوس میں $h = -\frac{y_1^3}{6} + \dots$ کو رد کرتے ہوئے نظام 4.72 کی خطی صورت

$$(4.73) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2 &= -ky_1 \end{aligned} \implies \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

حاصل ہوتی ہے۔ $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = |A| = k = \frac{\xi}{L} (> 0)$ اور $\Delta = p^2 - 4q = -4k$ لکھتے ہوئے نقطہ فاصل کی قسم اور اس کا استحکام جانتے ہیں۔ یوں جدول 4.1-پ کے تحت $(0, 0)$ وسط ہے اور جدول 4.2 کے تحت یہ مستحکم ہے۔ چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \pm 2, \pm 4, \dots$ بھی مستحکم وسط ہیں۔

تیسرا قدم نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ ، $(3\pi, 0)$ ، $(5\pi, 0)$ کا حصول اور مسئلے کو خطی بنانا ہے۔ ہم نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کرتے ہیں۔ یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ لیتے اور مکلا رن تسلسل

$$\sin(\theta) = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 = -y_1 + \frac{y_1^3}{6} + \dots \approx -y_1$$

کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(\pi, 0)$ پر نظام 4.72 کی خطی کردہ صورت

$$(4.74) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1 \end{aligned} \implies \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اب $p = 0$ ، $q = -k$ اور $\Delta = -4q = 4k$ ہیں جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ $\sin y_1$ دوری تعامل ہے لہذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \pm 1, \pm 3, \dots$ ہے، غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔ یہ نتائج شکل 4.14-ب کے عین مطابق ہیں۔ \square

مثال 4.15: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کیت کی تقصیری ارتعاش۔ خطی بنانا
نقطہ فاصل پر غور کی ترکیب کو مزید بہتر جاننے کی خاطر مثال 4.14 میں زاویائی رفتار کے راست متناسب قوت روک $c\theta'$ کا اثر شامل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 4.71 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جس میں $c = 0$ سے مساوات 4.71 ہی ملتا ہے۔

$$(4.75) \quad \theta'' + c\theta' + k \sin \theta = 0, \quad (k > 0), \quad (c \geq 0)$$

پہلے کی طرح $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہوئے غیر خطی نظام

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -k \sin \theta - cy_2$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\theta'' = y_2'$ لکھا گیا ہے۔ اب بھی نقطہ فاصل $(0, 0)$ ، $(\pm\pi, 0)$ ، $(\pm 2\pi, 0)$ ، ... پر پائے جاتے ہیں۔ انہیں نقطہ $(0, 0)$ پر غور کریں۔ یہاں بھی $\sin y_1 \approx y_1$ لکھ کر $(0, 0)$ پر خطی نظام

$$(4.76) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1 - cy_2 \end{aligned} \implies \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

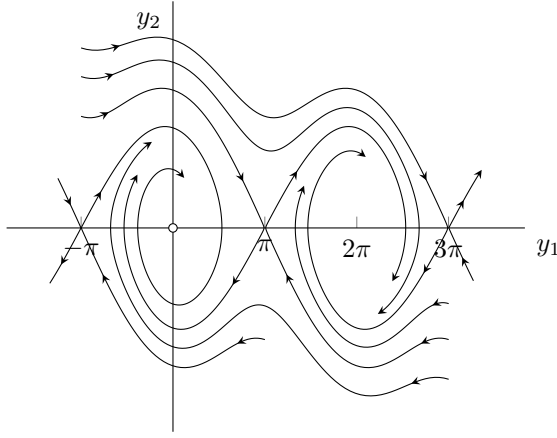
حاصل کرتے ہیں۔ یہ بالکل مثال 4.13 کی طرح ہے ماسوائے (مثبت) m کی موجودگی کے (اور ماسوائے y_1 کے مطلب میں فرق کے)۔ اس طرح بلا تقصیر $(c = 0)$ صورت میں وسط حاصل ہوتا ہے جسے شکل 4.14 میں دکھایا گیا ہے جبکہ کم تقصیری صورت میں نقطہ مرغولہ حاصل ہوتا ہے ، اور اسی طرح آپ تمام صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔

انہیں اب نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کریں۔ یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ کے علاوہ

$$\sin \theta = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 \approx -y_1$$

لکھ کر $(\pi, 0)$ پر خطی نظام

$$(4.77) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1 - cy_2 \end{aligned} \implies \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -c \end{bmatrix} \mathbf{y}$$



شکل 4.15: تقصیری ارتعاش۔ مثال 4.15

حاصل کرتے ہیں۔ گزشتہ حصے میں نقطہ فاصل کے جانچ کے مسلمہ معیار دیے گئے جن کے لئے

$$p = a_{11} + a_{22} = -c, \quad q = |A| = -k, \quad \Delta = p^4 - 4q = c^2 + 4k$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $(\pi, 0)$ پر پائے جانے والے نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

• بلا تقصیر $c = 0$ ، $p = 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ نقطہ زین دیگا۔ [شکل 4.14-ب دیکھیں۔]

• تقصیری $c > 0$ ، $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ نقطہ زین دیگا۔

چونکہ $\sin y_1$ دوری عرصہ 2π کا دوری تفاعل ہے لہذا $(\pm 2\pi, 0)$ ، $(\pm 4\pi, 0)$ ، ... پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(0, 0)$ پر پایا جاتا ہے اور اسی طرح $(-\pi, 0)$ ، $(\pm 3\pi, 0)$ ، ... پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(\pi, 0)$ پر پایا جاتا ہے۔

شکل 4.15 میں نظام 4.75 کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔ چونکہ قصری نظام میں توانائی کا ضیاع پایا جاتا ہے لہذا شکل 4.14 کے بند دائروں کی بجائے شکل 4.15 کے مرغولی خطوط حاصل ہوتے ہیں جو ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید یہ کہ دوری لہری خطوط بھی کسی نہ کسی مقام پر نقطہ فاصل کے گرد گھومنا شروع کر دیتے ہیں۔ اس کے علاوہ اب قصری نظام میں نقطہ زین کو ملانے والے خط نہیں پائے جاتے۔ □

مثال 4.16: آبادی شکار اور شکاری۔ [مسئلہ لوٹکا-ولٹیرا]
یہاں لومڑی (شکاری) اور خرگوش (شکار) کی آبادی کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: ہم فرض کرتے ہیں کہ خرگوش کو جتنی خوراک چاہیے دستیاب ہے۔ یوں لومڑی کی غیر موجودگی میں ان کی تعداد $y_1' = ay_1$ کے تحت قوت نمائی طور پر بڑھے گی۔ لومڑی کی موجودگی میں (اتفاقی آنے سامنے سے) خرگوش کی تعداد میں y_1y_2 کے راست متناسب کمی پیدا ہوگی۔ یوں خرگوش کی تعداد $y_1' = ay_1 - by_1y_2$ سے حاصل ہوگی جہاں مستقل $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔ اسی طرح خرگوش کی غیر موجودگی میں لومڑی کی تعداد $y_2' = -ly_2$ کے تحت قوت نمائی طور پر گھٹے گی۔ خرگوش کی موجودگی میں (اتفاقی آنے سامنے سے) لومڑی کی تعداد y_1y_2 کے راست متناسب بڑھے گی۔ یوں خرگوش کی موجودگی میں $y_2' = -ly_2 + ky_1y_2$ لومڑی کی تعداد دے گا جہاں مستقل $l > 0$ اور $k > 0$ ہیں۔

یوں غیر خطی مسئلہ لوٹکا-ولٹیرا⁷⁶

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = ay_1 - by_1y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = ky_1y_2 - ly_2 \end{aligned} \quad (4.78)$$

حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(0, 0)$ کا حصول ہے۔ مساوات 4.78 کو دیکھ کر نقطہ فاصل مساوات

$$(4.79) \quad f_1(y_1, y_2) = y_1(a - by_2) = 0, \quad f_2(y_1, y_2) = y_2(ky_1 - l) = 0$$

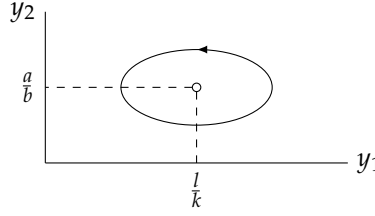
کے حل سے $(y_1, y_2) = (0, 0)$ اور $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ حاصل ہوتے ہیں۔ انہیں $(0, 0)$ پر غور کریں۔ نقطہ $(0, 0)$ کی پڑوس میں مساوات 4.78 میں $-by_1y_2$ اور ky_1y_2 کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$y' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -l \end{bmatrix} y$$

حاصل ہوتا ہے جس کی امتیازی اقدار $\lambda_1 = a > 0$ اور $\lambda_2 = -l < 0$ کی علامتیں آپس میں الٹ ہیں لہذا $(0, 0)$ پر نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

تیسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ کا حصول ہے۔ دوسرا نقطہ فاصل $(y_1, y_2) = (\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر پایا جاتا ہے۔ اس نقطے کو $(0, 0)$ منتقل کرنے کی خاطر ہم $y_1 = \tilde{y}_1 + \frac{l}{k}$ اور $y_2 = \tilde{y}_2 + \frac{a}{b}$ چنتے

⁷⁶ امریکی ماہر حیاتی طبیعیات الفرڈ جیمز لوٹکا [1880-1949] اور اطالوی ریاضی دان ویٹو ولٹیرا [1860-1940] نے شکار اور شکاری کے مسئلے کو پیش کیا۔



شکل 4.16: شکار اور شکاری کی آبادی: ماحولیاتی توازن۔

ہیں۔ یوں نقطہ فاصل $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0, 0)$ لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ $y_1 = \tilde{y}_1$ اور $y_2 = \tilde{y}_2$ ہیں لہذا نظام 4.78 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1' &= \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right) \left[a - b \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)\right] = \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right) (-b\tilde{y}_2) \\ \tilde{y}_2' &= \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right) \left[k \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right) - l\right] = \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right) k\tilde{y}_1\end{aligned}$$

نقطہ $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0, 0)$ کی پڑوس میں $-b\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ اور $k\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1' &= -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2 \quad (\text{الف}) \\ \tilde{y}_2' &= \frac{ak}{b}\tilde{y}_1 \quad (\text{ب})\end{aligned}\tag{4.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.80-الف کا بائیں ہاتھ ضرب مساوات-ب کا دایاں ہاتھ برابر ہوگا الف کا دایاں ضرب ب کا بائیں،

$$\frac{ak}{b}\tilde{y}_1'\tilde{y}_1 = -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2'\tilde{y}_2 \implies \frac{ak}{b}\tilde{y}_1^2 + \frac{bl}{k}\tilde{y}_2^2 = C$$

جس کا مکمل لیتے ہوئے \tilde{y}_1 بالقابل \tilde{y}_2 کا ترخیمی⁷⁷ تعلق حاصل کیا گیا ہے۔ یوں $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر شکل 4.16 میں دکھایا گیا وسط پایا جاتا ہے۔

نسبتاً شکل تجزیے سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ غیر خطی نظام 4.78 کا $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر وسط پایا جاتا ہے البتہ خط حرکت اس نقطے کے گرد غیر ترخیمی بند دائرہ بناتا ہے۔

elliptic⁷⁷

شکل 4.16 کے دائیں کنارے پر خرگوش کی تعداد y_1 زیادہ سے زیادہ ہے جس کی وجہ سے لومڑی کی تعداد y_2 میں اضافے کی شرح بھی زیادہ سے زیادہ ہے۔ اس خط پر گھڑی کی الٹی سمت چلتے ہوئے لومڑی کی زیادہ سے زیادہ آبادی حاصل ہوتی ہے۔ اس مقام پر خرگوش کی تعداد اتنی کم ہو چکی ہوتی ہے کہ لومڑی کی بڑھتی تعداد کو خوراک پورا نہیں ہو پایا لہذا لومڑی کی آبادی گٹھنے شروع ہو جاتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں جانوروں کی دوری تعداد حالات کے مطابق مسلسل تبدیل ہوتی ہے۔

□

شکار اور شکاری کی دیگر مثالیں ملخ اور گھاس، ببر شیر اور زبرا ہیں۔

4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ

سطح حرکت کی دوسری ترکیب خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] دو درجی سادہ تفرقی مساوات

$$F(y, y', y'') = 0$$

میں $y = y_1$ کو آزاد متغیر اور $y' = y_2$ لے کر y'' کو زنجیری تفرق سے

$$y'' = y'_2 = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$$

لکھ کر ایک درجی مساوات

$$(4.81) \quad F\left(y_1, y_2, \frac{dy_2}{dy_1} y_2\right) = 0$$

میں تبدیل کرنے پر مبنی ہے۔ اس ایک درجی مساوات کو یا تو حل کرنا ممکن ہوتا ہے اور یا میدان ڈھال کی مدد سے اس پر غور ممکن ہوتا ہے۔ آئیں مثال 4.14 پر اس ترکیب کی مدد سے غور کریں۔

مثال 4.17: بلا تقصیر ارتعاشی نظام کی ایک درجی تفرقی مساوات۔

مساوات 4.71 میں $\theta'' + k \sin \theta = 0$ ہے جس میں $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ (زاویائی رفتار) لیتے ہوئے

$$\theta'' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$$

لکھ کر $\frac{dy_2}{dy_1} y_2 = -k \sin y_1$ ملتا ہے جس کو علیحدگی متغیرات سے $y_2 dy_2 = -k \sin y_1 dy_1$ لکھا جا سکتا ہے جس کا مکمل

$$(4.82) \quad \frac{1}{2} y_2^2 = k \cos y_1 + C$$

دیتا ہے جہاں C مکمل کا مستقل ہے۔ اس کو mL^2 سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2} m (Ly_2)^2 - mL^2 k \cos y_1 = mL^2 C$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تینوں اجزاء توانائی⁷⁸ کو ظاہر کرتے ہیں۔ چونکہ y_2 زاویائی رفتار ہے لہذا Ly_2 لمحاتی رفتار اور $\frac{1}{2} m (Ly_2)^2$ حرکی توانائی⁷⁹ ہے۔ درج بالا مساوات کا دوسرا جزو (مجموع منفی علامت) مخفی توانائی⁸⁰ ہے جبکہ مساوات کا دایاں ہاتھ $mL^2 C$ کل توانائی ہے۔ بلا تقصیر نظام میں توانائی کا ضیاع نہیں پایا جاتا لہذا حزب توقع کل توانائی مستقل مقدار ہے۔ انہیں دیکھیں کہ حرکت کی نوعیت کل توانائی پر کیسے منحصر ہے۔

شکل 4.14-ب مختلف C کے لئے خط حرکت دیتی ہے۔ ان خطوط کا دوری عرصہ 2π ہے۔ ان میں تریخی بند دائرے اور لہر نما خطوط شامل ہیں جن کے مابین نقطہ زین $(n\pi, 0)$ جہاں $n = \pm 1, \pm 3, \dots$ ہے [سے گزرتے ہوئے دو عدد خط حرکت پائے جاتے ہیں۔ مساوات 4.82 کے تحت C کی کم سے کم قیمت $C = -k$ ہے جس پر $y_2 = 0$ اور $\cos y_1 = 1$ ہوں گے جو ساکن کمیت کو ظاہر کرتی ہے۔ جس نقطے پر $y_2 = \theta' = 0$ ہو اس نقطے پر حرکت کی سمت تبدیل ہو کر الٹ ہو جائے گی لہذا مساوات 4.82 میں $y_2 = 0$ پر کرتے ہوئے $C = k \cos y_1 + C = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر $y_1 = \pi$ ہو تب $\cos y_1 = -1$ اور یوں $C = k$ ہو گا۔ اس طرح اگر $-k < C < k$ ہو تب $|y_1| = |\theta| < \pi$ کی صورت میں کمیت کی حرکت کی سمت الٹ ہو گی اور C کی ان قیمتوں ($|C| < k$) کے لئے کمیت ارتعاش پذیر ہو گا۔ تریخی بند دائرے اس ارتعاشی حرکت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس کے برعکس $C > k$ کی صورت میں $y_2 = 0$ ممکن نہیں ہے لہذا کمیت کی حرکت کی سمت الٹ نہیں ہو گی لہذا کمیت مبدا کے گرد گھومتا رہے گا جس کو لہری خط حرکت ظاہر کرتی ہیں۔ ان دو صورتوں کے مابین $C = k$ پایا جاتا ہے جس کے خطوط نقطہ زین سے گزرتے ہیں۔ انہیں شکل 4.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔

□

دو درجی مساوات کے تبادلے سے سطح حرکت پر (مثال 4.17 کی طرح) قابل حل ایک درجی مساوات کے علاوہ نا

energy⁷⁸
kinetic energy⁷⁹
potential energy⁸⁰

قابل حل مساوات بھی اہمیت کے حامل ہے۔ ایسی صورت میں میدان ڈھال [حصہ 1.2 دیکھیں۔] کے ذریعہ نظام کے بارے میں معلومات حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ اس عمل کو ایک مشہور مثال کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 4.18: منحصر بہ خود ارتعاش۔ مساوات ون در پول

ایسی طبعی نظام پائے جاتے ہیں جن میں معمولی ارتعاش کی صورت میں نظام کو توانائی فراہم ہوتی ہے جبکہ وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام سے توانائی کا اخراج ہوتا ہے۔ یوں وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام قسری صورت اختیار کرتا ہے جبکہ کم ارتعاش کی صورت میں نظام میں منفی تقصیر (نظام کو توانائی کی فراہمی) پائی جاتی ہے۔ ہم طبعی وجوہات کی بنا توقع کرتے ہیں کہ ایسا نظام دوری طرز عمل رکھے گا، جو سطح حرکت پر بند دائرے کی صورت اختیار کرے گا جسے تحدیدی دائرہ⁸¹ کہتے ہیں۔ ایسی ارتعاش کو مساوات ون در پول⁸²

$$(4.83) \quad y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0 \quad (\mu > 0)$$

ظاہر کرتی ہے جہاں μ مثبت مستقل ہے۔ یہ مساوات پہلی مرتبہ خلا نلکی⁸³ والے برقی ادوار پر غور کے دوران رو پذیر ہوئی۔ یہ مساوات $\mu = 0$ کی صورت میں ہارمونی ارتعاش کی تفرقی مساوات $y'' + y = 0$ ہے۔ ون در پول مساوات میں قسری جزو $-\mu(1 - y^2)$ ہے جہاں $\mu > 0$ ہے۔ یوں $y^2 < 1$ کی صورت میں منفی تقصیری، $y^2 = 1$ کی صورت میں بلا تقصیر جبکہ $y^2 > 1$ کی صورت میں مثبت تقصیری (جس میں توانائی کا ضیاع ہو گا) نظام پایا جائے گا۔ نہایت کم μ کی صورت میں مساوات ون در پول اور $y'' + y = 0$ میں بہت کم فرق پایا جائے گا لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ سطح حرکت پر تحدیدی دائرہ تقریباً گول دائرہ ہو گا۔ اگر μ کی قیمت زیادہ ہو تب تحدیدی دائرہ کی شکل غالباً مختلف ہو گی۔

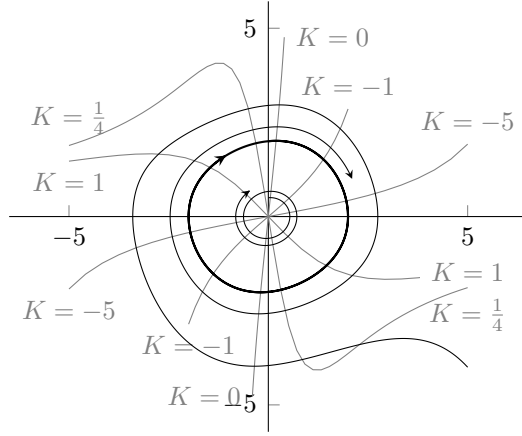
اس مساوات کو ایک درجی مساوات میں تبدیل کرنے کی خاطر $y = y_1$ ، $y' = y_2$ اور $y'' = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$ لکھتے ہوئے ون در پول مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(4.84) \quad \frac{dy_2}{dy_1} y_2 - \mu(1 - y_1^2)y_2 + y_1 = 0$$

سطح حرکت (y_1, y_2) (سطح) پر ہم میلان⁸⁴ خط $\frac{dy_2}{dy_1} = K$ ہیں جہاں K مستقل مقدار ہے۔ یوں ہم میلان خطوط درج ذیل ہوں گے

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \mu(1 - y_1^2) - \frac{y_1}{y_2} = K$$

limit cycle⁸¹
van der Pol equation⁸²
vacuum tube⁸³
isoclines⁸⁴



شکل 4.17: دن ڈرپول مساوات؛ $\mu = 0.1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

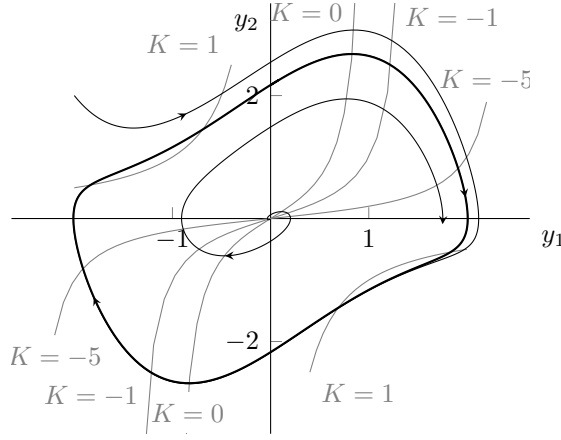
جن سے

$$(4.85) \quad y_2 = \frac{y_1}{\mu(1 - y_1^2) - K} \quad (\text{شکل 4.17 اور شکل 4.18 دیکھیں۔})$$

حاصل ہوتا ہے۔

شکل 4.17 میں μ کی کم قیمت ($\mu = 0.1$) کے لئے چند ہم میلان خطوط کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے علاوہ تحدیدی دائرے کو موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تحدیدی دائرہ تقریباً گول ہے۔ ایک خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے باہر ہے، اور دوسرا خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے اندر ہے، کو تحدیدی دائرے تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔ تحدیدی دائرہ اور نقطہ فاصل کے گرد بند دائرہ (وسط) میں فرق یہ ہے کہ تحدیدی دائرے تک خط حرکت پہنچتی ہے جبکہ وسط کا خط اسی دائرے پر پایا جاتا ہے۔ μ کی زیادہ قیمت پر تحدیدی دائرہ گول صورت نہیں رکھتا۔ شکل 4.18 میں μ کی زیادہ قیمت ($\mu = 1$) کے لئے تمام صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں تحدیدی دائرہ گول نہیں ہے۔ □

مثال 4.19: تفرقی مساوات $y'' + y - y^3 = 0$ سے نظام حاصل کریں۔ اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔



شکل 4.18: دن ڈر پول مساوات؛ $\mu = 1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

حل: $y = y_1$ اور $y' = y'_1 = y_2$ لیتے ہوئے اور $y'' = y'_2$ لکھتے ہوئے دیے گئے دو درجی مساوات سے نظام

$$(4.86) \quad \begin{aligned} y'_1 &= f_1 = y_2 \\ y'_2 &= f_2 = -y_1 + y_1^3 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے حاصل ہوں گے۔ $f_1 = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جبکہ $f_2 = y_1(-1 + y_1^2) = 0$ سے $y_1 = 0$ اور $y_1 = \pm 1$ ملتے ہیں۔ یوں نقطہ فاصل $(0, 0)$ ، $(-1, 0)$ اور $(1, 0)$ ہیں۔ نقطہ فاصل $(0, 0)$ مبداء پر پایا جاتا ہے لہذا اس پر پہلے غور کرتے ہیں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت جاننے کی خاطر نظام کو خطی بناتے ہیں۔ ایسا کوئی بھی جزو جو y^m یا $y_1^n y_2^q$ کی صورت میں لکھا گیا ہو، جہاں $m \neq 1$ جبکہ n اور q کوئی بھی مستقل ہو سکتے ہیں، غیر خطی ہو گا۔ ان غیر خطی اجزاء کو رد کرنے سے خطی نظام حاصل ہوتا ہے۔ یوں y'_2 کی مساوات میں y_1^3 کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -y_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y$$

حاصل ہو گا جس سے $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = 1 > 0$ اور $\Delta = -4 < 0$ ملتے ہیں لہذا نقطہ $(0, 0)$ مستحکم وسط ہے۔

آئیں اب نقطہ $(-1, 0)$ پر غور کریں۔ اس کو مبداء پر منتقل کرنے کی خاطر نظام 4.86 میں $\tilde{y}_1 = y_1 + 1$ یعنی

$y_1 = \tilde{y}_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= -(\tilde{y}_1 - 1) + (\tilde{y}_1 - 1)^3 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= 2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ماتا ہے۔ غیر خطی اجزاء \tilde{y}_1^2 اور \tilde{y}_1^3 کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\mathbf{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}$$

ماتا ہے۔ اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہذا نقطہ $(-1, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

نقطہ $(1, 0)$ پر غور کرنے کی خاطر اس کو مبدا پر منتقل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ چنتے ہیں۔ یوں نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ماتا ہے جس میں غیر خطی اجزاء \tilde{y}_1^2 اور \tilde{y}_1^3 رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\mathbf{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}$$

ماتا ہے۔ اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہذا نقطہ $(1, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔
□

سوالات

سوال 4.51 تا سوال 4.55 کو خطی بناتے ہوئے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 4.51: $y_1' = 4y_1 - y_1^2, \quad y_2' = y_2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0,0)$ اور $(4,0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ مسئلے کو $(0,0)$ پر خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لکھا جاتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہذا نقطہ $(0,0)$ غیر مستحکم جوڑ ہے۔ نقطہ $(4,0)$ کو مبدا پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 4$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو $(-\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2)$ خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جو $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ دیتا ہے جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 4.52: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1 + \frac{2}{3}y_1^2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0,0)$ اور $(\frac{3}{2}, 0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ $(0,0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p = 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ملتے ہیں لہذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔ نقطہ $(\frac{3}{2}, 0)$ کو مبدا پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - \frac{3}{2}$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو $(\frac{2}{3}\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2)$ خطی بنانے سے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے لہذا $(\frac{2}{3}, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.53: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -2y_1 - y_1^2$

جوابات: مستحکم وسط $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.54: $y_1' = -y_1 + y_2 + y_1^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$

جوابات: $(0,0)$ پر مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.55: $y_1' = -y_1 + y_2 - y_2^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$

جوابات: $(0,0)$ پر جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.56 تا سوال 4.60 میں تفرقی مساوات سے نظام حاصل کریں۔ اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نظام کو خطی بناتے ہوئے نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

سوال 4.56: $y'' - 4y + y^3 = 0$

جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین، $(-2,0)$ مستحکم وسط اور $(2,0)$ مستحکم وسط ہیں۔

سوال 4.57: $y'' + 4y - y^3 = 0$

جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ مستحکم وسط، $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین اور $(2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔

سوال 4.58: $y'' + 4y + y^2 = 0$

جوابات: $(0,0)$ مستحکم وسط اور $(-4,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.59: $y'' + \sin y = 0$

جوابات: $(0,0)$ اور $(\mp n2\pi, 0)$ مستحکم وسط ہیں جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہو سکتا ہے۔ نقطہ $(\mp m\pi, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے جہاں $m = 1, 3, 5, \dots$ ہو سکتا ہے۔

سوال 4.60: $y'' + \cos y = 0$

جوابات: نقطہ $(\frac{\pi}{2} \mp n2\pi, 0)$ غیر مستحکم نقطہ نیز جبکہ $(-\frac{\pi}{2} \mp n2\pi, 0)$ وسط ہیں جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہو سکتا ہے۔ آپ کو $\approx \mp \tilde{y}_1 = \sin(\mp \tilde{y}_1) = \cos(\mp \frac{\pi}{2} + \tilde{y}_1)$ کی مدد لے سکتے ہیں۔

سوال 4.61: ریلے مساوات

$Y'' - \mu(1 - \frac{1}{3}Y'^2)Y' + Y = 0$ جہاں $\mu > 0$ ہے، ریلے مساوات⁸⁵ کہلاتی ہے۔ اس میں $y = Y'$ پر کرتے ہوئے تفرق لے کر ون در پول مساوات حاصل کریں۔

سوال 4.62: ڈفنگ مساوات

اسپرنگ اور کمیت کی مساوات $y'' + \omega_0^2 = 0$ میں غیر خطی قوت بحالی کی صورت میں ڈفنگ مساوات⁸⁷ $y'' + \omega_0^2 y + \beta y^3 = 0$ حاصل ہوتی ہے جہاں $|\beta|$ عموماً چھوٹی مقدار ہوتی ہے۔ $\beta > 0$ کو سخت اسپرنگ اور $\beta < 0$ کو نرم اسپرنگ کی صورت پکارا جاتا ہے۔ سطح حرکت پر خط حرکت کی مساوات دریافت کریں۔

جواب: $2y_2^2 + 2\omega_0^2 y_1^2 + \beta y_1^4 = K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

⁸⁵ Rayleigh equation

⁸⁶ لارڈ ریلے، جن کا اصل نام جان ولیم سٹریٹ ہے انگلستان کے ماہر طبیعیات اور ریاضی دان تھے۔

⁸⁷ Duffing equation

سوال 4.63: خط حرکت
سادہ تفرقی مساوات $y'' - 9y + y^3 = 0$ کو نظام کی صورت میں لکھیں جس کو حل کرتے ہوئے y_2 بالمقابل y_1 کی مساوات حاصل کریں۔ حاصل مساوات سے سطح حرکت پر چند خط حرکت کھینچیں۔

جواب: $2y_2^2 = 18y_1^2 - y_1^4 + K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام

اس حصے میں غیر متجانس نظام

$$(4.87) \quad y' = Ay + g \quad (\text{حصہ 4.3 دیکھیں})$$

جہاں g غیر صفر سمتیہ ہے، کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $g(t)$ اور $n \times n$ قالب $A(t)$ کے ارکان، محور t کے کھلے وقفہ J پر استمراری ہیں۔ وقفہ J پر متجانس مساوات $y' = Ay$ کے عمومی حل $y^{(h)}(t)$ اور J پر مساوات 4.87 کے کسی بھی مخصوص حل $y^{(p)}(t)$ [جس میں کوئی مستقل نہیں پایا جاتا] سے مساوات 4.87 کا J پر عمومی حل

$$(4.88) \quad y = y^{(h)} + y^{(p)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مسئلہ 4.3 کے تحت عمومی حل y میں J پر مساوات 4.87 کے تمام ممکنہ حل شامل ہیں۔

متجانس مساوات کے حل پر ہم گزشتہ حصوں میں غور کر چکے ہیں۔ اس حصے میں غیر متجانس مساوات کے مخصوص حل کے حصول پر غور کرتے ہیں۔ نا معلوم عددی سر کی ترکیب اور مقدار معلوم بدلنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں جنہیں ہم حصہ 2.7 اور حصہ 2.10 سے جانتے ہیں۔

4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب

ایک عدد سادہ تفرقی مساوات کے حل میں استعمال ہونے کی طرح اب بھی یہ ترکیب اس صورت قابل استعمال ہوگی جب A کے ارکان مستقل مقدار ہوں جبکہ مستقل مقدار، t^m (جہاں m مثبت اعداد ہیں)، قوت نمائی، سائن اور کوسائن تفاعل کا کوئی بھی مجموعہ g ہو۔ ایسی صورت میں مخصوص حل کو g کی طرح تصور کیا جاتا ہے لہذا $g = t^2$ ہونے کی صورت میں $y^{(p)} = u + vt + wt^2$ فرض کیا جائے گا۔ مساوات 4.87 میں $y^{(p)}$ پر کرتے ہوئے u ، v اور w حاصل کیے جاتے ہیں۔ یہ حصہ 2.7 کی طرح ہے البتہ یہاں ترمیمی قاعدہ قدر مختلف ہے۔ آئیں ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کا استعمال دیکھیں۔

مثال 4.20: نامعلوم عددی سر کی ترکیب۔ ترمیمی قاعدہ درج ذیل مساوات کی عمومی حل حاصل کریں۔

$$(4.89) \quad y' = Ay + g = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

حل: ہم صفحہ 250 پر مثال 4.5 میں مطابقتی متجانس مساوات کا حل

$$(4.90) \quad y^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

حاصل کر چکے ہیں۔ چونکہ A کا $\lambda = -3$ امتیازی قدر ہے اور مساوات 4.89 میں دائیں جانب e^{-3t} پایا جاتا ہے لہذا اس جزو کو t سے ضرب دیتے ہوئے $y^{(p)}$ میں شامل کرتے ہیں۔

$$(4.91) \quad y^{(p)} = ute^{-3t} + ve^{-3t}$$

$y^{(p)}$ میں بائیں ہاتھ کا پہلا جزو حصہ 2.7 کا مماسی ترمیمی قاعدہ ہے، جو یہاں ناکافی ہے۔ [آپ کو شش کر کے دیکھ سکتے ہیں]۔ مساوات 4.91 کو مساوات 4.89 میں پر کرتے ہیں۔

$$y^{(p)'} = ue^{-3t} - 3ute^{-3t} - 3ve^{-3t} = Aute^{-3t} + Ave^{-3t} + g$$

دونوں جانب te^{-3t} والے اجزاء کے عددی سر برابر ہوں گے لہذا $-3u = Au$ ہو گا۔ یوں A قالب کے امتیازی قدر $\lambda = -3$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ u ہو گا۔ اس طرح $u = a[1 \quad -1]^T$ لکھا جاسکتا ہے جہاں a کوئی بھی غیر صفر مستقل ہو سکتا ہے۔ بقایا اجزاء کے عددی سر برابر لکھ کر

$$u - 3v = Av + g \implies \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 \\ v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= a + 4 \\ v_1 + v_2 &= -a - 3 \end{aligned}$$

دوسری مساوات کو پہلی سے منفی کرتے ہوئے $2a + 7 = 0$ یعنی $a = -\frac{7}{2}$ ملتا ہے۔ یوں درج بالا میں پہلی مساوات $v_1 + v_2 = -\frac{7}{2} + 4 = \frac{1}{2}$ ہوگی جس میں $v_1 = k$ لیتے ہوئے $v_2 = \frac{1}{2} - k$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $v = [k \quad \frac{1}{2} - k]^T$ ہو گا۔ ہم $k = 0$ چن سکتے ہیں۔ ایسا ہی کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

(4.92)

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t}$$

k کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے دیگر حل لکھے جاسکتے ہیں مثلاً $k = 1$ لیتے ہوئے $v = [1 \quad -\frac{1}{2}]^T$ حاصل ہو گا جس سے درج ذیل عمومی حل ملتا ہے۔

(4.93)

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t e^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t}$$

□

مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب
اس ترکیب سے غیر متجانس نظام

(4.94)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t) + \mathbf{g}(t)$$

کو حل کیا جاسکتا ہے جہاں $\mathbf{A}(t)$ متغیر مقدار ہیں اور $\mathbf{g}(t)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے۔ اگر t محور کے کسی کھلے وقفے J پر مطابقتی متجانس نظام کا عمومی حل $\mathbf{y}^{(h)}$ معلوم ہو تب اس ترکیب کی مدد سے اس وقفے پر نظام 4.94 کا مخصوص حل $\mathbf{y}^{(p)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں مثال 4.20 کو اس ترکیب سے حل کریں۔

مثال 4.21: مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے حل
گزشتہ مثال کے نظام 4.89 کو مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب سے حل کریں۔

$$(4.95) \quad y' = Ay + g = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

حل: متجانس مساوات کی امتیازی اقدار $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -3$ ہیں جن کے بالترتیب مطابقتی امتیازی سمتیات $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ ہیں لہذا اساس $\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \end{bmatrix}^T$ ، $\begin{bmatrix} e^{-3t} & -e^{-3t} \end{bmatrix}^T$ ہے جس سے متجانس مساوات کا حل $y^{(h)}$ لکھتے ہیں۔

$$(4.96) \quad y^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = Y(t)c$$

یہاں $Y(t) = [y^{(1)} \ y^{(2)}]^T$ بنیادی قالب [حصہ 4.3 دیکھیں] ہے۔ حصہ 2.10 کی طرح ہم مستقل سمتیہ c کی جگہ متغیر سمتیہ u پر کرتے ہوئے مخصوص حل $y^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$(4.97) \quad y^{(p)} = Y(t)u(t)$$

نظام 4.89 میں $y^{(p)}$ پر کرتے ہیں۔

$$(4.98) \quad Y'u + Yu' = AYu + g$$

اب چونکہ $y^{(1)}$ اور $y^{(2)}$ متجانس نظام کا حل ہے لہذا $y^{(1)'} = Ay^{(1)}$ اور $y^{(2)'} = Ay^{(2)}$ یعنی $Y' = AY$ ہو گا۔ یوں $Y'u = AYu$ لکھ کر مساوات 4.98 سے $Yu' = g$ حاصل ہوتا ہے (اور چونکہ Y کا امتیازی مقطع دراصل وروئسکی [حصہ 4.1 دیکھیں] W ہے جو اساس کی صورت میں غیر صفر ہوتا ہے لہذا Y^{-1} حاصل کیا جاسکتا ہے) لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.99) \quad u' = Y^{-1}g$$

معکوس قالب کو مساوات 4.12 کی مدد سے حاصل کر کے

$$Y^{-1} = \frac{1}{-2e^{-4t}} \begin{bmatrix} -e^{-3t} & -e^{-3t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t & e^t \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

g سے ضرب دیتے ہوئے u' لکھتے ہیں۔

$$u' = Y^{-1}g = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t & e^t \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

u حاصل کرنے کی خاطر مکمل لیتے ہیں۔ تفرق کی طرح ہر جزو کا علیحدہ مکمل لیا جاتا ہے۔

$$u(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix}$$

یوں مساوات 4.96 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y^{(p)} = Yu &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{7}{2}te^{-3t} \\ \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{2}te^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{7}{2}t \\ \frac{1}{4} + \frac{7}{2}t \end{bmatrix} e^{-3t} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

گزشتہ مثال کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں مختلف مخصوص حل $y^{(p)}$ حاصل ہوا ہے۔ یوں عمومی حل $y = y^{(h)} + y^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

ہم $c_1 - \frac{1}{4} = c^*$ لیتے ہوئے آخری جزو کو $y^{(h)}$ میں ضم کر سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

(4.100)

$$y = y^{(h)} + y^{(p)} = c_1^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t}$$

□

سوالات

سوال 4.64: ثابت کریں کہ مساوات 4.87 کے تمام حل مساوات 4.88 دیتا ہے۔

سوال 4.65 تا سوال 4.70 میں عمومی حل دریافت کریں۔ جواب کو دیے گئے نظام میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔ آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔

سوال 4.65:

$$y_1' = y_1 + y_2 + 2e^{-t}$$

$$y_2' = 3y_1 - y_2 + 5e^{-t}$$

$$\text{جوابات: } y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{11}{12} e^{2t} + \frac{3}{4} e^{-2t} - \frac{5}{3} e^{-t}$$

$$y_2 = c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t} + \frac{11}{12} e^{2t} - \frac{9}{4} e^{-2t} - \frac{4}{3} e^{-t}$$

سوال 4.66:

$$y_1' = y_1 + y_2 + e^{-2t}$$

$$y_2' = 3y_1 - y_2 + 3e^{-2t}$$

$$\text{جوابات: } y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{8} e^{2t} - \frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{3}{8} e^{-2t}$$

$$y_2 = c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-2t} + \frac{3}{8} e^{2t} + \frac{3}{2} t e^{-2t} - \frac{3}{8} e^{-2t}$$

سوال 4.67:

$$y_1' = y_2 + \sin(t)$$

$$y_2' = -5y_1 - 6y_2 + \cos(t)$$

$$\text{جوابات: } y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{26} e^{-5t} + \frac{9}{13} \sin t - \frac{7}{13} \cos t$$

$$y_2 = -c_1 e^{-t} - 5c_2 e^{-5t} - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{5}{26} e^{-5t} - \frac{6}{13} \sin t + \frac{9}{13} \cos t$$

سوال 4.68:

$$y_1' = 4y_1 + y_2 + 2t$$

$$y_2' = -1y_1 + 2y_2 + t$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1(t+1)e^{3t} + c_2te^{3t} + \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{t}{3} \\ y_2 &= -c_1te^{3t} + c_2(1-t)e^{3t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

سوال 4.69:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 + 2t^2 + 3 \\ y_2' &= 3y_1 + y_2 + t - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{7}{16}e^{2t} - \frac{27}{16}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{5}{4} \\ y_2 &= 3c_1e^{2t} - c_2e^{-2t} + \frac{21}{16}e^{2t} + \frac{27}{16}e^{-2t} - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - 3 \end{aligned}$$

سوال 4.70:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 11t + 15 \\ y_2' &= 5y_1 + 6y_2 + 3e^{-t} - 15t - 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2t} + c_2e^t + 10e^{2t} - 4e^t - 2e^{-t} - 3t - 4 \\ y_2 &= -\frac{5}{4}c_1e^{2t} - c_2e^t - \frac{25}{2}e^{2t} + 4e^t + e^{-t} + 5t + \frac{15}{2} \end{aligned}$$

سوال 4.71 تا سوال 4.76 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 4.71:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + \sin t \\ y_2' &= 3y_1 - 3y_2 \\ y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-t} \left(\frac{32}{53\sqrt{7}} \sinh \sqrt{7}t + \frac{13}{53} \cosh \sqrt{7}t \right) - \frac{19}{53} \sin t - \frac{13}{53} \cos t \\ y_2 &= e^{-t} \left(\frac{27}{53\sqrt{7}} \sinh \sqrt{7}t + \frac{6}{53} \cosh \sqrt{7}t \right) - \frac{21}{53} \sin t - \frac{6}{53} \cos t \end{aligned}$$

سوال 4.72:

$$\begin{aligned} y_1 &= -y_1 + y_2 + e^{-t} \\ y_2 &= 3y_1 + y_2 + t \\ y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

$$y_2 = \frac{19}{16}e^{2t} - e^{-t} + \frac{17}{16}e^{-2t} - \frac{t}{4} - \frac{1}{4}, \quad y_1 = \frac{19}{48}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{17}{16}e^{-2t} - \frac{t}{4} \quad \text{جوابات:}$$

سوال 4.73:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 2t^2 - t + 1 \\ y_2' &= 5y_1 + 6y_2 - t^2 + 2t \\ y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = -1 \end{aligned}$$

$$y_2 = 5e^{2t} - 21e^t + \frac{7}{2}t^2 + 10t + 15, \quad y_1 = -4e^{2t} + 21e^t - 4t^2 - 11t - 16 \quad \text{جوابات:}$$

سوال 4.74:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + 6e^{3t} \\ y_2' &= -y_1 - e^{3t} \\ y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = 3 \end{aligned}$$

$$y_2 = -0.9e^{3t} + 3.9 \cos t - 0.3 \sin t, \quad y_1 = 1.7e^{3t} + 0.3 \cos t + 3.9 \sin t \quad \text{جوابات:}$$

سوال 4.75:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_2 - 4 \cos 5t \\ y_2' &= 3y_1 + 3 \sin 5t \\ y_1(0) &= -2, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

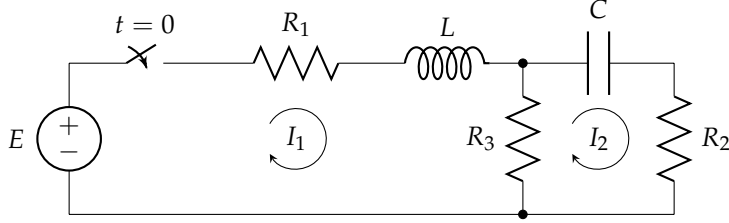
$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{11}{16} \sin 5t - \frac{19}{16} \sin 3t - 2 \cos 3t \\ y_2 &= -\frac{3}{16} \cos 5t - 2 \sin 3t + \frac{19}{16} \cos 3t \end{aligned} \quad \text{جوابات:}$$

سوال 4.76:

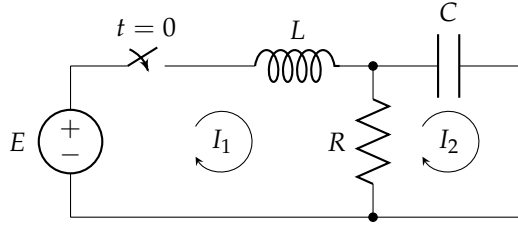
$$\begin{aligned} y_1 &= -9y_2 + e^t \\ y_2 &= y_1 + e^{-t} \\ y_1(0) &= -1, \quad y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$y_2 = -\frac{1}{15} \sin 3t + \frac{1}{10}e^t - \frac{1}{10}e^{-t}, \quad y_1 = -\frac{1}{5} \cos 3t + \frac{1}{10}e^t - \frac{9}{10}e^{-t} \quad \text{جوابات:}$$

سوال 4.77: امالہ، برق گیر اور مزاحمتوں پر مبنی دور شکل 4.19 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر $E = 10 \text{ V}$ ، $R_1 = 2 \Omega$ ، $R_2 = 4 \Omega$ ، $R_3 = 6 \Omega$ ، $L = 2 \text{ H}$ اور $C = 0.25 \text{ F}$ ہوں اور لمحہ $t = 0$ پر منقطع سوئچ کو چالو کیا جائے تب I_1 اور I_2 کیا ہوں گے؟ ابتدائی رو اور ابتدائی ذخیرہ برقی بار صفر ہیں۔



شکل 4.19: مثال 4.77 اور مثال 4.78 کا برقی دور۔



شکل 4.20: مثال 4.79 اور مثال 4.80 کا برقی دور۔

جوابات: $I_2(t) = 5e^{-t} - 5e^{-\frac{8}{5}t}$ ، $I_1(t) = 5e^{-t} - \frac{25}{4}e^{-\frac{8}{5}t} + \frac{5}{4}$

سوال 4.78: اگر سوال 4.77 میں $E = 10 \sin 5t$ وولٹ ہو تب I_1 اور I_2 کیا ہوں گے؟

جوابات: $I_1(t) = 0.388 \sin 5t - 0.853 \cos 5t - 0.962e^{-t} + 1.814e^{-\frac{8}{5}t}$ ،

$I_2(t) = 0.272 \sin 5t - 0.49 \cos 5t - 0.962e^{-t} + 1.451e^{-\frac{8}{5}t}$

سوال 4.79: شکل 4.20 میں $E = 20 \text{ V}$ ، $R = 1 \Omega$ ، $L = 4 \text{ H}$ اور $C = 0.2 \text{ F}$ ہیں۔ ابتدائی رو اور ابتدائی ذخیرہ برقی بار صفر ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ رو دریافت کریں۔

جوابات: $I_1(t) = \frac{1}{4}e^{-\frac{5}{2}t}(-36\sqrt{5} \sinh \sqrt{5}t - 80 \cosh \sqrt{5}t) + 20$ ،

$I_2(t) = \sqrt{5}e^{-\frac{5}{2}t} \sinh \sqrt{5}t$

سوال 4.80: اگر سوال 4.79 میں $E = 20 \sin 2t$ ہو تب رو کیا ہوں گے؟

جوابات: $I_1(t) = e^{-\frac{5}{2}t}(2.625 \sinh 2.236t + 2.58 \cosh 2.236t) + 0.291 \sin 2t - 2.58 \cos 2t$ ،

$I_2(t) = e^{-\frac{5}{2}t}(-0.546 \sinh 2.236t + 0.256 \cosh 2.236t) + 0.93 \sin 2t - 0.256 \cos 2t$

باب 5

طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

گزشتہ ابواب میں مستقل عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو بنیادی تفاعل تھے۔ بنیاد تفاعل مثلاً $\sin 3t$ ، t^6 اور e^{2t} کو آپ علم الاحصاء¹ سے جانتے ہیں۔ متغیر عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ لیڈانڈر، بیسل اور بیش ہندسی مساوات اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔ یہ مساوات اور ان کے حل لیڈانڈر تفاعل، بیسل تفاعل اور بیش ہندسی تفاعل انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف ترکیبوں پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل طاقتی تسلسل² $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہذا اس کو ترکیب طاقتی تسلسل³ کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو $\ln x$ یا کسری طاقت x^r سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو ترکیب فروبنیوس⁴ کہلاتی ہے۔ جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کار آمد ثابت ہوتا ہے لہذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلیٰ حل جنہیں آپ علم الاحصاء سے نہیں جانتے اعلیٰ تفاعل⁵ کہلاتے ہیں۔

¹calculus

²power series

³power series method

⁴Frobenius method

⁵higher functions or special functions

5.1 ترکیب طاقی تسلسل

متغیر عددی سروالے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً ترکیب طاقی تسلسل سے حل کرتے ہوئے طاقی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طاقی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے، حل کا خط کھینچا جاسکتا ہے، کلیات ثابت کیے جاسکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس حصے میں طاقی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ $x - x_0$ کا طاقی تسلسل درج ذیل ہے

$$(5.1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

جس میں x متغیر ہے جبکہ a_0, a_1, a_2, \dots تسلسل کے عددی سر⁶ کہلاتے ہیں اور x_0 مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا وسط⁷ کہلاتا ہے۔ جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً علامت مجموعہ⁸ (\sum) کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں اشاریہ⁹ مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔ درج بالا مساوات میں m بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔ علامت مجموعہ کے نیچے $m = 0$ اور اس کے اوپر ∞ مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔ تسلسل کا وسط صفر ($x_0 = 0$) ہونے کی صورت میں x کا طاقی تسلسل

$$(5.2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کی تسلسل ہے جس میں $x - x_0$ (یا x) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

coefficients⁶
center⁷
summation⁸
index⁹

مثال 5.1: مکلازن تسلسل در حقیقت میں طاقی تسلسل ہیں

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1, \text{ ہندسی تسلسل})$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

□

ترکیب طاقی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقی تسلسل دیکھے۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقی تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقی تسلسل حل
تفرقی مساوات $y' + y = 0$ کو ترکیب طاقی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلی قدم میں حل کو طاقی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$(5.3) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

تسلسل کا جزو با جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$(5.4) \quad y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) = 0$$

x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \dots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تفاعل e^{-x} کی مکمل تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots) = a_0e^{-x}$$

یہاں آپ $y'' + y = 0$ کو ترکیب طاقی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ حاصل کریں۔
□

اب اس ترکیب کی عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلے مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں ہم خطی سادہ تفرقی مساوات

$$(5.5) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

میں $p(x)$ اور $q(x)$ کو x کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ از خود کثیر دکنی ہوں تب پہلی قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسری قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح y' اور درج ذیل y'' لکھتے ہوئے

$$(5.6) \quad y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_mx^{m-2}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔ تیسری قدم میں x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری x^1 ، x^2 ، ... کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔ یوں تمام عددی سر کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیٹرانڈر مساوات
درج ذیل مساوات کروئی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حل: مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} (1 - x^2)(2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + 6 \cdot 5a_6x^4 \dots) \\ - 2x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots) \\ + 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} (2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + 6 \cdot 5a_6x^4 \dots) \\ + (-2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 3a_4x^4 - 5 \cdot 4a_5x^5 - \dots) \\ + (-2a_1x - 2 \cdot 2a_2x^2 - 3 \cdot 2a_3x^3 - 4 \cdot 2a_4x^4 - \dots) \\ + (2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3 + 2a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (2a_2 + 2a_0) + (3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + 2a_1)x \\ + (4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 2a_2)x^2 \\ + (5 \cdot 4a_5 - 3 \cdot 2a_3 - 3 \cdot 2a_3 + 2a_3)x^3 \\ + (6 \cdot 5a_6 - 4 \cdot 3a_4 - 4 \cdot 2a_4 + 2a_4)x^4 + \dots = 0 \end{aligned}$$

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری x ، x^2 ، x^3 ، ... کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے

ہوئے بالترتیب a_2 ، a_3 ، a_4 ، \dots کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$a_2 = -a_0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{2} = 0 \quad (\text{چونکہ } a_3 = 0 \text{ ہے})$$

$$a_6 = \frac{3}{5}a_4 = -\frac{a_0}{5}$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \dots)$$

جس میں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔ یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل x اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \dots$ پر مشتمل ہے جو لیژانڈر کثیر رکھی $P_n(x)$ ¹⁰ اور لیژانڈر تفاعل $Q_n(x)$ ¹¹ کے رکن ہیں۔ یہاں $x = P_1(x)$ اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \dots = -Q_1(x)$ لیژانڈر کثیر رکھی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ ¹² کہلاتا ہے۔ یہاں $n = 1$ ہے لہذا لیژانڈر کثیر رکھی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔ □

نظریہ طاقی تسلسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ $s_n(x)$ لکھتے ہیں جس کو n جزوی مجموعہ ¹³ کہتے ہیں۔

$$(5.7) \quad s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

یہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ممکن ہے۔ مساوات 5.1 سے $s_n(x)$ منفی کرنے سے بقیہ $R_n(x)$ حاصل ہوتا ہے جس کو $a_n(x - x_0)^n$ کے بعد مساوات 5.1 کا بقیہ ¹⁴ کہتے ہیں۔

$$(5.8) \quad R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \dots$$

Legendre polynomials¹⁰

Legendre function¹¹

order¹²

nth partial sum¹³

remainder¹⁴

یوں ہندسی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

کے جزوی مجموعے اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \dots \\ s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \dots \end{aligned}$$

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔ اگر کسی $x = x_1$ کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرکوز ہو مثلاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر تسلسل 5.1 مرکوز¹⁵ ہے جبکہ $s(x_1)$ کو تسلسل 5.1 کی قیمت¹⁶ یا مجموعہ کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_1 - x_0)^m$$

اس طرح کسی بھی n کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

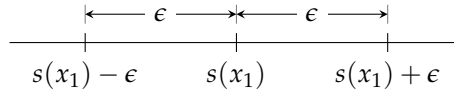
$$(5.9) \quad s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1)$$

اس کے برعکس اگر $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر مساوات 5.1 منفرج¹⁷ ہے۔

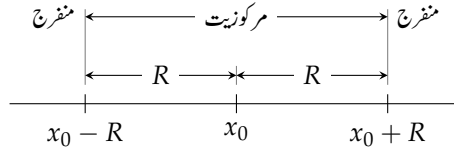
مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت ϵ کے لئے ایسا N (جس کی قیمت ϵ پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام $n > N$ کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(5.10) \quad |R_n(x_1)| = |s(x_1) - s_n(x_1)| < \epsilon \quad n > N$$

جیومیٹریائی طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ جہاں $n > N$ ہے $s(x_1) - \epsilon$ اور $s(x_1) + \epsilon$ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں x_1 پر مساوات



شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔

شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.11 جس کا وسط x_0 ہے۔

5.1 کا مجموعہ $s(x_1)$ تقریباً $s_n(x_1)$ کے برابر ہو گا۔ مزید یہ کہ $s(x_1)$ اور $s_n(x_1)$ میں فرق کو ہم n بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

طاقی تسلسل کہاں مرکوز ہوتی ہے؟ تسلسل 5.1 میں $x = x_0$ پر a_0 کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہذا تسلسل کی قیمت a_0 ہو گی۔ یوں $x = x_0$ پر تسلسل a_0 پر مرکوز ہوتی ہے۔ کبھی کبھار x کی واحد اسی قیمت پر تسلسل مرکوز ہو گا۔ اگر x کے دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرکوز ہو تب x کی یہ قیمتیں ارتکازی وقفہ¹⁸ کہلاتا ہے۔ یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔ محدود وقفہ جس کا وسط x_0 ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں طاقی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام x پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے x پر تسلسل مرکوز ہو گا

$$(5.11) \quad |x - x_0| < R$$

جبکہ $|x - x_0| > R$ پر تسلسل منفرج ہو گا۔ ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طاقی تسلسل x کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں R رداس ارتکاز¹⁹ کہلاتا ہے۔ (مخلوط طاقی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول نکلیا ہوتا ہے جس کا رداس R ہو گا)۔ اگر تسلسل تمام x پر مرکوز ہو تب ہم $R = \infty$ یعنی $\frac{1}{R} = 0$ لکھتے ہیں۔

¹⁵ converge¹⁶ value or sum¹⁷ divergent¹⁸ convergence interval¹⁹ convergence radius

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جاسکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد (lim) موجود اور غیر صفر ہو۔ اگر یہ حد لاقتناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط x_0 پر مرکوز ہو گا۔

$$(5.12) \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}}$$

$$(5.13) \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|}$$

مثال 5.4: رداس ارتکاز ∞ ، 1 اور 0 تینوں تسلسل میں $m \rightarrow \infty$ لیتے ہوئے رداس ارتکاز R دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{1}{1} \right| = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!x^m = 1 + x + 2x^2 + \dots, \quad \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{(m+1)!}{m!} \right| = m+1 \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow 0$$

لاقتناہی رداس ارتکاز $R \rightarrow \infty$ سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ $R = 0$ بے کار صورت ہے۔ عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔ □

درج بالا مثال میں $\frac{1}{1-x}$ کے طاقی تسلسل کا رداس ارتکاز $R = 1$ حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط $x_0 = 0$ ہے۔ مساوات 5.11 کے تحت $|x| < 1$ کے لئے طاقی تسلسل تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کو ظاہر کرتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔ نقطہ $x = 0.2$ پر تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-0.2} = 1.25$ ہے جبکہ اس کے تسلسل میں $x = 0.2$ پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$1 = 1 \quad \text{ایک رکن}$$

$$1 + 0.2 = 1.2$$

$$1 + 0.2 + 0.2^2 = 1.24$$

$$1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 = 1.248$$

$$1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 + 0.2^4 = 1.2496 \quad \text{پانچ ارکان}$$

طاقی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کے اصل قیمت کے $\frac{1.2496}{1.25} \times 100 = 99.968$ فی صد ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔ بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی x پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جاسکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرد ہے۔ آئیں رداس ارتکاز کے باہر $x = 1.2$ پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل کریں۔ تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-1.2} = -5$ حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$1 = 1$$

$$1 + 1.2 = 2.2$$

$$1 + 1.2 + 1.2^2 = 3.64$$

$$1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 = 5.368$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔ یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ x پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرد ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔ طاقی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہوگی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$(5.14) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

میں $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کے طاقی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ ایسا تفاعل $f(x)$ جس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا مثبت رداس ارتکاز پایا جاتا ہو، x_0 پر تحلیلی²⁰ کہلاتا ہے ورنہ اس نقطے کو غیر تحلیلی کہیں گے (مثال 5.5 دیکھیں)۔ اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 معیاری صورت میں ہے یعنی یہ y'' سے شروع ہوتا ہے۔ اگر دو درجی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پایا جاتا ہو، یعنی اس میں $h(x)y''$ پایا جاتا ہو تب مساوات کو $h(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

analytic²⁰

مسئلہ 5.1: طاقی تسلسل حل کی وجودیت

اگر مساوات 5.14 میں p ، q اور r نقطہ $x = x_0$ پر تخلیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل $x = x_0$ پر تخلیلی ہو گا اور اس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رداس ارتکاز $R > 0$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔ (دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ x محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رداس ارتکاز کی لمبائی x_0 سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں p ، q اور r میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تخلیلی ہو۔

مثال 5.5: تفاعل غیر تخلیلی ہونے کے کئی وجوہات ممکن ہیں۔ اس کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

- تفاعل غیر معین ہو سکتا ہے مثلاً $f(x) = \frac{1}{x-x_0}$ جس کی قیمت $x = x_0$ پر غیر معین ہے۔
- تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

- تفاعل استمراری ہونے کے باوجود غیر ہموار²¹ ہو سکتا ہے۔ ایسا تفاعل جس کے تمام تفرق $x = x_0$ پر پائے جاتے ہوں ہموار کہلاتا ہے۔ درج ذیل تفاعل کا دو درجی تفرق $x = x_0$ پر نہیں پایا جاتا۔

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 & x \geq x_0 \\ -(x - x_0)^2 & x < x_0 \end{cases}$$

تفاعل ہموار ہونے کے باوجود اس کی ٹیلر تسلسل نقطہ $x = x_0$ پر منفرد ہو سکتی مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

اس ہموار تفاعل کے تمام تفرق نقطہ $x = 0$ پر صفر کے برابر ہیں لہذا اس کی ٹیلر تسلسل صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے جو تفاعل کو ظاہر نہیں کر سکتی۔

□

²¹not smooth

طاقی تسلسل پر مختلف عمل

طاقی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقی تسلسل کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح) x کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔ یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جاسکتا ہے۔ اگر طاقی تسلسل

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

پر مرکوز ہو، جہاں $R < 0$ ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی انہیں x پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان x پر تفرق y' کو ظاہر کرے گا۔

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \quad (|x - x_0| < R)$$

اسی طرح دو درجی، تین درجی اور بلند درجی تفرقات بھی حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر طاقی تسلسل

$$(5.15) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) (x - x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ $f(x) + g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقی تسلسل کو رکن بارکن ضرب دیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور

$g(x)$ ہیں۔ اب پہلی تسلسل کے ہر رکن کو دوسری تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے $x - x_0$ کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x - x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (a_0b_m + a_1b_{m-1} + \dots + a_mb_0)(x - x_0)^m$$

مركز ہو گا اور $f(x)g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ارتکاز دریافت کریں۔

سوال 5.1: $\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)mx^m$: جواب: $R = 1$

سوال 5.2: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{k^m}$: جواب: $R = k$

سوال 5.3: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$: جواب: $R = \infty$

سوال 5.4: $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m x^m$: جواب: $R = \frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقتی تسلسل حل کریں۔

باب 5. ط متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرق

سوال 5.5: $y' = -2xy$
جواب: $y = a_0(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots) = a_0 e^{-x^2}$

سوال 5.6: $y'' + y = 0$
جواب: $y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{a_1}{6} x^3 + \dots = a_0 \cos x + a_1 \sin x$

سوال 5.7: $(1-x)y' = y$
جواب: $y = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = -\frac{a_0}{1-x}$

سوال 5.8: جہاں k مستقل مقدار ہے $xy' - 3y = k$
جواب: $y = cx^3 - \frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاتی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔ تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لامحدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں x کے صرف طاق یا صرف جفت طاق پائیں جاتے ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9: $y'' - y' + xy = 0$
جواب: $y = a_0(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{240} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} - \dots)$

سوال 5.10: $y'' - y' - xy = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{144} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} + \dots)$

سوال 5.11: $y'' - y' - x^2 y = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \dots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots)$

سوال 5.12: $y'' - xy' - x^2 y = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \dots) + a_1(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots)$

سوال 5.13: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$
جواب: $y = a_0(1 - 3x^2) + a_1(x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \dots)$ ؛ جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
کے پہلے جزو کی نشاندہی $s = 0$ کرتا ہے۔ اس مجموعے میں $k = s + 1$ پر کرتے ہوئے نیا

مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر x^m پایا جاتا ہو۔ اس عمل کو منتقلی اشاریہ²² کہتے ہیں۔ حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی $k = 1$ کرتا ہے۔

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی مجموعہ $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{p+2}{(p+1)!} x^{p+3}$ میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر x^m ہو۔

جواب: $\sum_{m=5}^{\infty} \frac{m-1}{(m-2)!} x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.19 کو ترکیب طاقی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں x^3 تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل a_0 (اور a_1) دریافت کریں۔ دیے گئے نقطہ x_1 پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔ جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں تک جواب لکھیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

$$\text{جوابات: } y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \dots$$

$$y(1) = -514, \quad a_0 = 6$$

سوال 5.17:

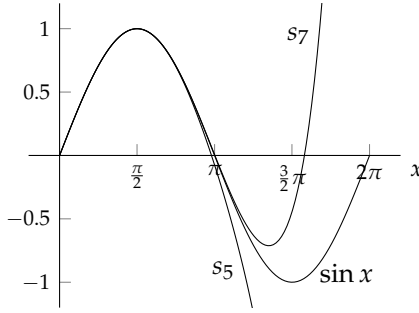
$$y'' + 4xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad x_1 = 0.1$$

$$\text{جوابات: } y = a_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \dots) + a_1(x - \frac{5x^3}{6} + \dots)$$

$$y(0.1) = 1.094, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 1$$

سوال 5.18:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = 0.5$$



شکل 5.3: سوال 5.20 کا خط۔ $\sin x$ کے علاوہ جزوی مجموعہ S_5 اور S_7 دکھائے گئے ہیں۔

جوابات: $y = a_0(1 - 6x^2 + 3x^4 + \dots) + a_1(x - \frac{5x^3}{3})$ ،
 $y(0.5) = -0.437$ ، $a_1 = -\frac{3}{2}$ ، $a_0 = 0$

سوال 5.19:

$$(x - 4)y' = xy, \quad y(1) = 5, \quad x_1 = 2$$

جوابات: $y(2) = 2.307$ ، $a_0 = 5.827$ ، $y = a_0(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{256} + \dots)$

سوال 5.20: کمپیوٹر کا استعمال
 طاقی تسلسل سے تفاعل کی قیمت جزوی تسلسل سے حاصل کی جاتی ہے۔ تفاعل $\sin x$ کی تسلسل سے بذریعہ کمپیوٹر، تسلسل میں اجزاء کی تعداد مختلف لیتے ہوئے سائن کا خط کھینچیں۔ آپ دیکھیں گے کہ کم اجزاء لینے سے اصل تفاعل (یعنی $\sin x$) اور تسلسل میں فرق بہت جلد واضح ہوتا ہے جبکہ زیادہ تعداد میں اجزاء لینے سے یہ فرق دیر بعد نمودار ہوتا ہے۔

جوابات: شکل 5.3 میں $\sin x$ کا جزوی مجموعہ S_5 اور S_7 کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

5.2 لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کشیر رکنی

لیٹنڈر تفرقی مساوات²⁴²³

$$(5.16) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (n \text{ مستقل ہے})$$

طبیعیات کے اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک ہے جو متعدد مسائل، بالخصوص کرہ کے سرحدی قیمت مسئلوں، میں سامنے آتی ہے۔

مساوات میں مقدار معلوم n کی قیمت اصل مسئلے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے لہذا مساوات 5.16 درحقیقت سادہ تفرقی مساوات کی نسل کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم نے لیٹنڈر مساوات، جس میں $n = 1$ تھا، کو مثال 5.3 میں حل کیا (جس کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ مساوات 5.16 کے کسی بھی حل کو لیٹنڈر تفاعل²⁵ کہتے ہیں۔ لیٹنڈر تفاعل اور ایسے دیگر اعلیٰ تفاعل، جو علم الاحصاء میں نہیں پائے جاتے، کے مطالعہ کو نظریہ اعلیٰ تفاعل²⁶ کہتے ہیں۔ دیگر اعلیٰ تفاعل اگلے حصوں میں سامنے آئیں گے۔

مساوات 5.16 کو $1 - x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ نقطہ $x = 0$ پر تحلیلی تفاعل ہیں [مثال 5.6 دیکھیں] لہذا لیٹنڈر مساوات پر مسئلہ 5.1 کا اطلاق ہوتا ہے اور اس کا حل طاقی تسلسل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ طاقی تسلسل

$$(5.17) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

اور اس کے تفرقات کو مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے مستقل $n(n+1)$ کو k لکھتے ہوئے

$$(1 - x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m = 0$$

²³فرائسی ریاضی دان اڈریان مری لیٹنڈر [1752-1833] نے اعلیٰ تفاعل، بیضوی شکل اور اعدادی نظریہ پر کام کیا۔

²⁴Legendre's equation

²⁵Legendre function

²⁶special functions theory

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں آپ مثال 5.3 کی طرح مجموعوں کے چند ابتدائی ارکان لکھ کر آگے بڑھ سکتے ہیں یا پھر درج ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ تمام مجموعوں کو x کی یکساں طاقت کی صورت (x^s) میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $s = m - 2$ یعنی $m = s + 2$ پر کرتے ہیں جبکہ بقایا تین مجموعوں میں m کی جگہ s پر کرتے ہیں۔ یوں پہلے مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ اب $s = 0$ ہو گا اور a_m کی جگہ a_{s+2} لکھا جائے گا۔

$$(5.18) \quad \sum_{s=0}^{\infty} (s+2)(s+1)a_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_sx^s - \sum_{s=1}^{\infty} 2sa_sx^s + \sum_{s=0}^{\infty} ka_sx^s = 0$$

درج بالا مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہذا مساوات کا باایاں ہاتھ بھی صفر کے برابر ہو گا اور یوں x کے ہر طاقت کے عددی سروں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔ یوں x^0 کے عددی سر سے شروع کرتے ہوئے باری باری x^1 ، x^2 ، ... کے عددی سر صفر کے برابر لکھتے ہیں۔ مساوات 5.18 کا دوسرا مجموعہ x^2 اور تیسرا مجموعہ x^1 سے شروع ہوتا ہے لہذا ان میں x^0 نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں پہلے اور چوتھے مجموعوں سے x^0 کے عددی سر جمع کرتے ہوئے صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$$(5.19) \quad 2 \cdot 1a_2 + n(n+1)a_0 = 0$$

جہاں k کی جگہ واپس $n(n+1)$ لکھا گیا ہے۔ اسی طرح x^1 پہلے، تیسرے اور چوتھے مجموعوں میں پایا جاتا ہے جن سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(5.20) \quad 3 \cdot 2a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0$$

بلند طاقتی اجزاء x^2 ، x^3 ، ... تمام مجموعوں میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کے لئے x^s کے عددی سروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$(5.21) \quad (s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0$$

چکور قوسین [...] کے اندر قوسین کو کھول کر ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} -s(s-1) - 2s + n(n+1) &= -s^2 + s - 2s + n^2 + n = n^2 - s^2 + n - s \\ &= (n-s)(n+s) + n - s \\ &= (n-s)(n+s+1) \end{aligned}$$

لہذا مساوات 5.21 سے

$$(5.22) \quad a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \quad (s = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتا ہے جو کلیہ توانی²⁷ کہلاتا ہے۔ کلیہ توانی کی مدد سے، a_0 اور a_1 کے علاوہ، بقایا تمام عددی سر، دو قدم پچھلی عددی سر استعمال کرتے ہوئے دریافت کیے جاتے ہیں۔ یوں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔ کلیہ توانی کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 & a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1 \\ a_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3}a_2 & a_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4}a_3 \\ &= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 & &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں مساوات 5.17 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$(5.23) \quad y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

جہاں

$$(5.24) \quad y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \dots$$

اور

$$(5.25) \quad y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \dots$$

ہیں۔ یہ تسلسل $|x| < 1$ کے لئے مرکوز ہیں۔ بعض اوقات تسلسل کا کوئی عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں کلیہ توانی کے تحت اگلے تمام عددی سر بھی صفر ہوں گے اور یوں تسلسل محدود ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ چونکہ مساوات 5.24 میں x کے جفت طاقت پائے جاتے ہیں جبکہ مساوات 5.25 میں x کے طاق طاقت پائے جاتے ہیں لہذا $\frac{y_1}{y_2}$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا ہے اور یوں y_1 اور y_2 آپس میں خطی تعلق نہیں رکھتے لہذا یہ خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ یوں مساوات 5.23 کھلے وقفہ $-1 < x < 1$ پر عمومی حل ہے۔

دھیان رہے کہ $x = \pm 1$ پر $1 - x^2 = 0$ ہو گا لہذا سادہ تفرقی مساوات کی معیاری صورت میں عددی سر غیر تخلیلی ہوں گے۔ یوں حیرانی کی بات نہیں ہے کہ تسلسل 5.24 اور تسلسل 5.24 کا ارتکازی وقفہ وسیع نہیں ہے مساوائے اس صورت میں جب اجزاء کی تعداد محدود ہونے کی بنا تسلسل کشیر رکنی کی صورت اختیار کرے۔

کثیر رکنی حل۔ لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$

طابق تسلسل کے تخفیف سے کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے جس کا حل، ارتکازی شرط کے قید سے آزاد، تمام x کے لئے پایا جاتا ہے۔ ایسے اعلیٰ تفاعل جو سادہ تفرقی مساوات کے حل ہوتے ہیں میں یہ صورت عموماً پائی جاتی ہے جن سے مختلف نسل کے اہم کثیر رکنی حاصل ہوتے ہیں۔ لیژانڈر مساوات میں n کی قیمت غیر منفی عدد صحیح ہونے کی صورت میں $s = n$ پر مساوات 5.22 صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا $a_{n+2} = 0$ ہو گا اور یوں $a_{n+4} = 0$ ، $a_{n+6} = 0$ ہوں گے۔ جفت n کی صورت میں y_1 کثیر رکنی ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں y_2 کثیر رکنی ہو گا۔ ان کثیر رکنی کو مستقل مقدار سے ضرب دیتے ہوئے لیژانڈر کثیر رکنی²⁸ حاصل ہوتی ہیں جنہیں $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ روایتی طور پر اس مستقل مقدار کو درج ذیل طریقے سے چنا جاتا ہے۔

تسلسل میں x^n کے عددی سر a_n کو

$$(5.26) \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \quad n \text{ مثبت عدد ہے}$$

چنا [مثال 5.7 دیکھیں] جاتا ہے (جبکہ $n = 0$ کی صورت میں $a_n = 1$ چنا جاتا ہے)۔ مساوات 5.22 کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے دیگر عددی سر حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(5.27) \quad a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \quad (s \leq n-2)$$

کثیر رکنی میں x کی بلند تر طاقت کے عددی سر a_n کو مساوات 5.26 کے تحت چننے سے $x = 1$ پر تمام P_n کی قیمت اکائی $[P_n(1) = 1]$ حاصل ہوتی ہے [شکل 5.4 دیکھیں]۔ یہی a_n یوں چننے کی وجہ ہے۔ مساوات 5.27 میں $s+2 = n$ یعنی $s = n-2$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.26 سے a_n پر کرتے ہیں۔

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

شمار کنندہ میں $(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)!$ اور نسب نما میں $(n!)^2$ کو $n!n!$ لکھ کر اس میں $n! = n(n-1)!$ اور $n! = n(n-1)!$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!} \end{aligned}$$

ماتا ہے جہاں $n(n-1)2n(2n-1)$ کٹ جاتے ہیں۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} \end{aligned}$$

اور دیگر عددی سر حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یوں درج ذیل عمومی کلیہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.28) \quad a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \quad (n-2m \geq 0)$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفرقی مساوات 5.16 کا کثیر رکنی حل

$$\begin{aligned} (5.29) \quad P_n(x) &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

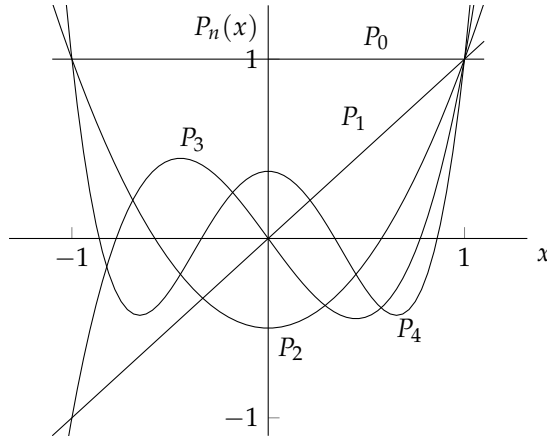
حاصل ہوتا ہے۔ اب $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ عدد صحیح ہو گا اور M اس عدد صحیح کے برابر ہو گا [مثال 5.8 دیکھیں]۔ درج بالا n درجی لیژانڈر کثیر رکنی²⁹ کہلاتا ہے اور اس کو $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند پہلے لیژانڈر کثیر رکنی جنہیں شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} (5.30) \quad P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر آپس میں قائمہ الزاویہ³⁰ ہیں۔ یہ خصوصیت فوریر لیژانڈر تسلسل کے لئے ضروری ہے جن پر اسی باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال 5.6: لیژانڈر مساوات 5.16 $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت میں لکھتے ہوئے ثابت کریں کی اس کے عددی سر $x=0$ پر تحلیل ہیں۔

Legendre polynomial²⁹
orthogonal³⁰



شکل 5.4: لیٹنڈر کثیر رکنی۔

حل: لیٹنڈر مساوات کو $1 - x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ ہیں جن کی مکمل درج ذیل ہیں۔

$$\frac{n(n+1)}{1-x^2} = n(n+1)(1+x^2+x^4+\dots)$$

$$\frac{-2x}{1-x^2} = -2(x+x^3+x^5+\dots)$$

پہلی تسلسل کا $\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$ ہیں لہذا اس کا رداس ارتکاز $R = 1$ ہے۔ دوسری تسلسل کا بھی $\frac{a_{m+1}}{a_m} = 1$ اور $R = 1$ ہیں۔ یوں دونوں تسلسل تحلیلی ہیں۔ □

مثال 5.7: درج ذیل مساوات کے بائیں ہاتھ سے اس کا دایاں ہاتھ حاصل کریں۔

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$$

حل: پہلے $n = 3$ کے لئے حل کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں شمار کنندہ میں طاق اعداد (جو طاق مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو ایک طرف اور جفت اعداد (جو جفت مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو دوسری طرف منتقل

کرتے ہوئے ہر جفت عدد سے 2 کا ہندسہ نکالا گیا ہے۔

$$\frac{(2 \cdot 3)!}{2^3(3!)^2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3(3 \cdot 2 \cdot 1)^2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3(3!)^2} = \frac{2^3(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3(3!)^2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{3!}$$

شمار کنندہ میں اعداد کو ترتیب دیتے ہوئے اور اس میں سب سے بڑے عدد 5 کو $2 \cdot 3 - 1$ لکھتے ہوئے $\frac{1 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3 - 1)}{3!}$ لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں یہی سب کچھ عمومی عددی صحیح n کے لئے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5) \cdots 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\ &= \frac{2n(2n-2)(2n-4) \cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\ &= \frac{2^n n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n(n!)^2} \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{n!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \end{aligned}$$

□

مثال 5.8: لیٹنڈر کشیر رکنی مجموعہ [مساوات 5.29] کی بالائی حد M ہے۔ M کی قیمت دریافت کریں۔

حل: مساوات 5.22 لیٹنڈر کشیر رکنی کے عددی سر دیتی ہے جس کے تحت $s = n$ پر عددی سر صفر $(a_{n+2} = 0)$ کے برابر ہو گا اور یوں بقایا عددی سر a_{n+4} ، a_{n+6} ، ... بھی صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں کشیر رکنی میں x کی زیادہ سے زیادہ طاقت n ہو گی۔ اس طرح $n = 5$ کی صورت میں $a_1 x^1$ اور $a_3 x^3$ ، $a_5 x^5$ پایا جائے گا جبکہ $n = 8$ کی صورت میں $a_8 x^8$ ، $a_6 x^6$ ، $a_4 x^4$ ، $a_2 x^2$ اور a_0 پائے جائیں گے۔ آپ نے دیکھا کہ طاق n کی صورت میں کشیر رکنی میں کل $\frac{n-1}{2}$ پائے گئے جبکہ جفت n کی صورت میں ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ تھی۔ یوں طاق n کی صورت میں $M = \frac{n-1}{2}$ اور جفت n کی صورت میں $M = \frac{n}{2}$ ہو گا جہاں M عدد صحیح ہے۔

□

مثال 5.9: (کلیہ روڈریگیس)

تفاعل $(x^2 - 1)^n$ کو الکراجی کے مسئلہ ثنائی³¹ سے پھیلا کر اس کا n درجی تفرق لیں۔ حاصل جواب کا

³¹binomial theorem ابو بکر ابن محمد ابن الحسن ابن کرامی [1029-953] ایرانی ریاضی دان۔

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسیر

مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل کریں جس کو کلیہ روڈریگیس³² کہتے ہیں۔

$$(5.31) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

حل: $(x^2 - 1)^n$ کو مسئلہ الکرانجی سے پھیلاتے ہوئے $n + 1$ ارکان ملتے ہیں۔

$$(5.32) \quad y = (x^2 - 1)^n = (x^2)^n + \frac{n}{1!} (x^2)^{n-1} (-1)^1 + \frac{n(n-1)}{2!} (x^2)^{n-2} (-1)^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1)}{2!} (x^2)^2 (-1)^{n-2} + \frac{n}{1!} (x^2) (-1)^{n-1} + (-1)^n$$

اس مساوات کا آخری رکن مستقل مقدار $(-1)^n$ ہے جبکہ اس رکن سے ایک پہلے رکن میں x^2 پایا جاتا ہے۔ یوں y' لینے سے آخری رکن صفر ہو جائے گا لہذا y' میں n ارکان رہ جائیں گے۔ y' کے آخری رکن میں x^1 پایا جائے گا۔ y'' لینے سے یہ رکن مستقل مقدار ہو جائے گا جبکہ ارکان کی تعداد میں مزید کمی رونما نہیں ہوگی۔ اسی طرح y''' لینے سے ایک اور رکن کم ہو جائے گا اور $n - 1$ ارکان رہ جائیں گے۔ y'''' لینے سے ارکان کی تعداد میں کمی پیدا نہیں ہوگی۔ یوں ہر دو مرتبہ تفرق لینے سے تعداد اکائی کمی پیدا ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ n درجی تفرق $y^{(n)}$ لینے کے بعد ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ ہوگی جس کو ہم M سے ظاہر کرتے ہیں اور جو صحیح عدد ہو گا۔

مساوات 5.32 کو مجموعے کی صورت میں لکھتے ہیں جس میں $m = 0$ تا $m = n$ ارکان یعنی $n + 1$ ارکان ہیں۔

$$(5.33) \quad y = \sum_{m=0}^n \frac{n! (x^2)^{n-m} (-1)^m}{(n-m)! m!} = \sum_{m=0}^n \frac{n! (-1)^m}{(n-m)! m!} x^{2n-2m}$$

³² Rodrigues' formula فرانسسی ریاضی دان بنجامن اولانڈے روڈریگیس [1794-1851]

اب $z = x^{2n-2m}$ پر نظر رکھیں۔ اس کے تفرق لیتے ہیں۔

$$z' = (2n - 2m)x^{2n-2m-1} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - 1)!} x^{2n-2m-1}$$

$$z'' = (2n - 2m)(2n - 2m - 1)x^{2n-2m-2} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - 2)!} x^{2n-2m-2}$$

$$z''' = (2n - 2m)(2n - 2m - 1)(2n - 2m - 2)x^{2n-2m-3} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - 3)!} x^{2n-2m-3}$$

⋮

$$z^{(k)} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - k)!} x^{2n-2m-k}$$

$$z^{(n)} = \frac{(2n - 2m)!}{(2n - 2m - n)!} x^{2n-2m-n} = \frac{(2n - 2m)!}{(n - 2m)!} x^{n-2m}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.33 کا n درجی تفرق لکھتے ہیں

$$y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] = \sum_{m=0}^n \frac{n!(-1)^m}{(n - m)!m!} \frac{(2n - 2m)!}{(n - 2m)!} x^{n-2m}$$

جس کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

□

مثال 5.10: روڈریگیس مساوات 5.31 استعمال کرتے ہوئے n مرتبہ تکمیل بالخصوص لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

حل: فرض کریں کہ $y = (x - 1)^3$ ہے۔ یوں $y' = 3(x - 1)^2$ ، $y'' = 3 \cdot 2(x - 1)$ ، $y''' = 3 \cdot 2 \cdot 1$ اور $y^{(4)} = 0$ ہوں گے جن سے $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ ، $y''(1) = 0$ ،

باب 5. ط متقی تسلسل سے سادہ تعریفی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسیر

$y_1'''(1) = 3!$ اور $y_1^{(4)}(1) = 0$ حاصل ہوتے ہیں۔ اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $y_1 = (x-1)^n$ کی صورت میں

$$(5.34) \quad y_1 = (x-1)^n, \quad y_1^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!} (x-1)^{n-m}, \quad y_1^{(m)}(1) = n! \delta_{n,m}$$

اور $y_2 = (x+1)^n$ کی صورت میں

$$(5.35) \quad y_2 = (x+1)^n, \quad y_2^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!} (x+1)^{n-m}, \quad y_2^{(m)}(-1) = n! \delta_{n,m}$$

ہو گا جہاں $\delta_{n,m}$ کی تعریف درج ذیل ہے (یعنی $m = n$ کی صورت میں $\delta = 1$ جبکہ $m \neq n$ کی صورت میں $\delta = 0$ ہے)۔

$$(5.36) \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $y_1 = (x-1)^n$ کے تمام تفرقات کی قیمت $x = 1$ پر صفر ہوگی ماسوائے n درجی تفرق، جس کی قیمت $n!$ ہوگی۔ مساوات 5.35 یہی کچھ $y_2 = (x+1)^n$ کے بارے میں $x = -1$ پر کہتی ہے۔

اب اگر $X = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n (x+1)^n = y_1 y_2$ ہو تب کلیہ لیبنٹز³³ سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{d^m X}{dx^m} = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \overbrace{\frac{d^{m-s} y_1}{dx^{m-s}}}^M \cdot \overbrace{\frac{d^s y_2}{dx^s}}^N$$

اگر $m \neq n$ ہو، اور بالخصوص اگر $m < n$ ہو، تب مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $M(x=1) = 0$ ہو گا جبکہ مساوات 5.35 کہتی ہے کہ تب $N(x=-1) = 0$ ہو گا۔ ان نتائج کی بنا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.37) \quad \frac{d^m X}{dx^m} = 0$$

مساوات 5.31 کو استعمال کرتے ہوئے $\frac{d^n X}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2-1)^n]}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n X}{dx^n}$ لکھا جاسکتا ہے لہذا

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2 dx &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^n X}{dx^n} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \left[\frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} dx \end{aligned}$$

ہو گا جہاں تکمیل بالخصص استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 5.37 کے تحت $\left. \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \right|_1 = \left. \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} \right|_{-1} = 0$ ہے لہذا آخری قدم پر تکمیل کے باہر تمام حصہ صفر کے برابر ہے اور یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2 dx &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} dx \\ &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \left[\left. \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-2} X}{dx^{n-2}} \right|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} \cdot \frac{d^{n-2} X}{dx^{n-2}} dx \right] \end{aligned}$$

جہاں دوبارہ تکمیل بالخصص لیا گیا ہے۔ پہلی کی طرح اب بھی تکمیل کا باہر والا حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار تکمیل بالخصص لیتے ہوئے ہر بار بیرونی حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ یوں s مرتبہ تکمیل لیتے اور بیرونی حصے کو صفر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^s}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+s} X}{dx^{n+s}} \cdot \frac{d^{n-s} X}{dx^{n-s}} dx$$

آخر کار $s = n$ ہو گا اور یوں درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $\frac{d^0 X}{dx^0} = X$ لکھا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+n} X}{dx^{n+n}} \cdot \frac{d^{n-n} X}{dx^{n-n}} dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{2n} X}{dx^{2n}} \cdot X dx$$

$X = (x^2 - 1)^n$ کا انکراجی ثنائی تسلسل مساوات 5.32 دیتی ہے جس کا $2n$ درجی تفرق لینے سے، پہلے رکن کے علاوہ، تمام ارکان صفر کے برابر ہو جاتے ہیں۔ یوں اس کا $2n$ درجی تفرق $(2n)!$ ہو گا جس سے درج بالا تکمیل یوں

$$(5.38) \quad \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 X dx$$

لکھا جاتا ہے۔ آئیں $\int X dx$ کو تکمیل بالخصص کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 X dx &= \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx \\ &= (x-1)^n \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 n(x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} dx \end{aligned}$$

تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار تکمل بالخصص لیتے ہوئے ہر مرتبہ تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ s مرتبہ تکمل بالخصص لیتے ہوئے اور تکمل کے باہر حصے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 X dx &= (-1)^s \int_{-1}^1 [n(n-2) \cdots (n-s+1)] (x-1)^{n-s} \frac{(x+1)^{n+s}}{(n+1)(n+2) \cdots (n+s)} dx \\ &= (-1)^s \int_{-1}^1 \frac{n!(x-1)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{n!(x+1)^{n+s}}{(n+s)!}\end{aligned}$$

آخر کار $s = n$ ہو گا جس پر درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 X dx &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{n!(x-1)^{n-n}}{(n-n)!} \frac{n!(x+1)^{n+n}}{(n+n)!} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

جہاں $0! = 1$ (مساوات 5.94) پر کیا گیا ہے۔ درج بالا نتیجے کو مساوات 5.38 میں پر کرتے ہیں

$$(5.39) \quad \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

□

جہاں منفی ایک کا جفت طاقت اکائی کے برابر $[(-1)^{2n} = 1]$ ہے۔

مثال 5.11: درج ذیل ثابت کریں جہاں $n \neq m$ ہے۔

$$(5.40) \quad \int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0 \quad (n \neq m)$$

حل: فرض کریں کہ $X = (x^2 - 1)^n$ اور $Y = (x^2 - 1)^m$ ہیں۔ یوں مساوات 5.31 کے تحت
 $P_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m Y}{dx^m}$ اور $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n X}{dx^n}$ ہوں گے لہذا

$$\int_{-1}^1 P_n P_m dx = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 \frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^m Y}{dx^m} dx$$

ہو گا۔ چونکہ n اور m برابر نہیں ہیں لہذا ان میں ایک کی قیمت دوسرے سے کم ہو گی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $n < m$ ہے۔ گزشتہ مثال کی طرح، درج بالا کو بار بار مکمل بالخصوص سے حل کرتے ہوئے، ہر بار مکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور آخر کار درج ذیل ملتا ہے۔ مساوات 5.36 کے تحت Y کا صرف اور صرف m درجی تفرق غیر صفر ہے درج ذیل صفر کے برابر ہے۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n P_m dx &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{d^{m-n} Y}{dx^{m-n}} dx \\ &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{d^{m-n+1} Y}{dx^{m-n+1}} \Big|_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

□

مثال 5.12: پیدا کار تفاعل

الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ کا تسلسل لکھ کر اس میں $v = 2xu - u^2$ پر کریں۔ ان میں u^0 ارکان کا مجموعہ حاصل کریں۔ اسی طرح u^1 ارکان کا مجموعہ، اور u^2 ارکان کا مجموعہ، ... حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان مجموعوں کا عددی سر بالترتیب P_0 ، P_1 ، P_2 ، ... ہو گا یعنی

$$(5.41) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n$$

حل: آئیں P_0 ، P_1 اور P_2 کے لئے حل کریں۔ دیے تفاعل کا الکراجی ثنائی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 v^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 v^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 v^4}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

چونکہ u^2 کا عدد سر P_2 ہو گا اور درج بالا تسلسل کے پہلے تین ارکان میں کے بعد u کے زیادہ بلند طاقت پائے جاتے ہیں لہذا ہم تسلسل کے پہلے تین ارکان پر نظر رکھتے ہیں۔ اس تسلسل میں $v = 2xu - u^2$ پر کرتے ہوئے درکار نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (1-v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(2xu - u^2)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 (2xu - u^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots \\ &= 1 + \left(xu - \frac{u^2}{2}\right) + \frac{3}{8} (4x^2 u^2 + u^4 - 4xu^3) + \dots \\ &= \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{(x)}_{P_1} u + \underbrace{\left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}\right)}_{P_2} u^2 + \dots \end{aligned}$$

□

سوالات

سوال 5.21 تا سوال 5.26 لیٹنڈر کثیر رکنی اور تفاعل پر مبنی ہیں۔

سوال 5.21: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 0$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیٹنڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقت کے x پائے جاتے ہیں لہذا $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 0$ پر کرتے اور مساوات 5.94 کی مدد سے $0! = 1$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ ملتا ہے۔

سوال 5.22: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 1$ لیتے ہوئے $P_1(x)$ حاصل کریں۔

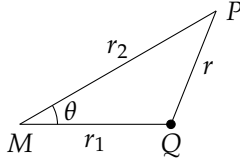
جواب: چونکہ لیٹنڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقتی x پائے جاتے ہیں لہذا $n = 1$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے $P_1(x) = x$ ملتا ہے۔

سوال 5.23: لیٹنڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 سے $P_3(x)$ تا $P_5(x)$ حاصل کریں جنہیں مساوات 5.30 میں پیش کیا گیا ہے۔

سوال 5.24: $P_0(x)$ کو لیٹنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیٹنڈر مساوات کا حل ہے۔

جواب: $n = 0$ کی صورت میں لیٹنڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$ ہوگی اور $y = P_0 = 1$ ، $y' = P'_0 = 0$ اور $y'' = P''_0 = 0$ ہوں گے۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1 - x^2)(0) - 2x(0) = 0$ یعنی حاصل ہوتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.25: $P_1(x)$ کو لیٹنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیٹنڈر مساوات کا حل ہے۔



شکل 5.5: نقطہ برقی بار کا برقی میدان [سوال 5.27]۔

جوابات: $n = 1$ کی صورت میں لیٹنڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ہوگی جبکہ $y = P_1 = x$ ، $y' = P_1' = 1$ اور $y'' = P_1'' = 0$ ہیں۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے دائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1 - x^2)(0) - 2x(1) + 2(x) = 0$ ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.26: $P_3(x)$ کو لیٹنڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیٹنڈر مساوات کے حل ہیں۔

جوابات: $n = 3$ کی صورت میں لیٹنڈر مساوات 5.16 کی صورت $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ ہوگی جبکہ $y = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ، $y' = \frac{1}{2}(15x^2 - 3)$ اور $y'' = 15x$ ہیں جنہیں مساوات کے دائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے

$$(1 - x^2)(15x) - 2x[\frac{1}{2}(15x^2 - 3)] + 12[\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)]$$

یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.27: نظریہ مخفی توانائی

آپ نقطہ برقی بار کے برقی میدان سے بخوبی واقف ہیں۔ شکل 5.5 میں محدود کے مہدا M سے ہٹ کر نقطہ بار Q پایا جاتا ہے جس کا عمومی مقام P پر برقی دہاو $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}}$ ہے۔ $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon}$ کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.41 کی استعمال سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$(5.42) \quad \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}} = \frac{1}{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos \theta) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m$$

جواب: $u = \frac{r_1}{r_2}$ لکھتے ہوئے $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta = r_2^2[1 - 2\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cos \theta + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2]$ اور $x = \cos \theta$ لیتے ہوئے حل کریں۔

باب 5.5 متقی تسلسلے سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسر

سوال 5.28: درج ذیل ثابت کریں۔ مساوات 5.41 کو استعمال کریں۔

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

سوال 5.29: بونٹ کلیہ توانی

مساوات 5.41 کا u تفرق لے کر دوبارہ مساوات 5.41 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل بونٹ کلیہ توانی³⁴ حاصل کریں³⁵۔

$$(5.43) \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

جواب: مساوات 5.41 کا ایک درجی تفرق $\frac{d}{du}$ لیتے ہوئے دوبارہ مساوات 5.41 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} & \frac{-\frac{1}{2}(-2x+2u)}{(1-2xu+u^2)\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum nP_n u^{n-1} \\ \Rightarrow & \frac{x-u}{1-2xu+u^2} \sum P_n u^n = \sum nP_n u^{n-1} \\ \Rightarrow & x \sum P_n u^n - \sum P_n u^{n+1} = \sum nP_n u^{n-1} - 2x \sum nP_n u^n + \sum nP_n u^{n+1} \end{aligned}$$

اب دونوں جانب u^n کے عددی سر برابر لیتے ہیں۔

$$xP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1}$$

اس کو ترتیب دے کر درکار نتیجہ $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.30: شریک لیڈانڈر تفاعل
درج ذیل مساوات

$$(5.44) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

میں $y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u(x)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔

$$(5.45) \quad (1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

³⁴Bonnet's recursion

³⁵اوسیاں بونٹ [1849-1917] فرانسس ریاضی دان۔

صفحہ 111 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے لیژنڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق $\frac{d^m P_n}{dx^m}$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ درج بالا مساوات کا حل

$$u = \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

ہے جس کے شریک $y(x)$ کو $P_n^m(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو شریک لیژنڈر تفاعل³⁶ کہتے ہیں۔

$$(5.46) \quad P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

شریک لیژنڈر تفاعل کوانٹم میکانیات³⁷ میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

جواب: مساوات 5.44 میں $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u$ پر کرنے سے مساوات 5.45 حاصل ہوتا ہے۔ بقایا حصے کو اب حل کرتے ہیں۔ لیژنڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق صفحہ 111 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں $D^m[y] = D^{m-1}[y']$ ، $D^{m+2}[y] = D^m[y'']$ ، ہوگا۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ کو

$$D^m[(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] = -D^m[(x^2-1)y''] - 2D^m[xy'] + n(n+1)D^m[y]$$

لکھتے ہیں جس میں

$$\begin{aligned} D^m[(x^2-1)y''] &= (x^2-1)D^m[y''] + 2mx D^{m-1}[y''] + m(m-1)D^{m-2}[y''] \\ &= (x^2-1)D^{m+2}[y] + 2mx D^{m+1}[y] + m(m-1)D^m[y] \\ D^m[xy'] &= xD^m[y'] + mD^{m-1}[y'] = xD^{m+1}[y] + mD^m[y] \\ D^m[y] &= D^m[y] \end{aligned}$$

پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)D^{m+2}[y] - 2(m+1)x D^{m+1}[y] + [n(n+1) - m(m+1)]D^m[y]$$

ملتا ہے جس میں $D^m[y] = y^m = u$ ، $D^{m+1}[y] = y^{m+1} = u'$ اور $D^{m+2}[y] = y^{m+2} = u''$ لیتے ہوئے

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

باب 5. طاقی تسلسلے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

حاصل ہوتا ہے جہاں ابتدائی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر تھا۔ اس مساوات کا حل $u = y^m$ ہے جہاں y از خود لیٹنڈر مساوات کا حل ہے یعنی $u = \frac{d^m P_n}{dx^m}$ ہے۔

سوال 5.31: گزشتہ سوال میں شریک لیٹنڈر تفاعل کا حل P_n^m حاصل کیا گیا۔ مساوات 5.31 کی مدد سے اس کو لکھیں۔

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x^2 - 1)^n] \quad \text{جواب:}$$

5.3 مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس

کئی نہایت اہم دو درجی سادہ تفرقی مساوات، مثلاً بیسل تفاعل (جس پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا)، کے عددی سرتحلیلی [حصہ 5.1 میں تعریف دی گئی ہے] نہیں ہیں۔ اس کے باوجود انہیں تسلسل (طاقی تسلسل ضرب لوگار تھم یا طاقی تسلسل ضرب x کی کسری طاقت، ...) سے حل کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو ترکیب فروبنیوس³⁸ کہتے ہیں۔ درج ذیل مسئلہ طاقی ترکیب کو وسعت دیتے ہوئے ترکیب فروبنیوس کا استعمال ممکن بناتا ہے۔

مسئلہ 5.2: ترکیب فروبنیوس

$x = 0$ پر تحلیلی $b(x)$ اور $c(x)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0 \quad (5.47)$$

کا کم از کم ایک عدد حل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad (a_0 \neq 0) \quad (5.48)$$

جہاں r حقیقی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے اور $a_0 \neq 0$ ہے۔

³⁸Frobenius method
³⁹جرمن ریاضی دان فرڈینانڈ گیوگ فروبنیوس [1849-1917]

مساوات 5.47 کا (خطی طور غیر تابع) دوسرا حل بھی پایا جاتا ہے جو مساوات 5.48 کی طرز کا ہو سکتا ہے (جس میں r مختلف ہو گا اور تسلسل کے عددی سر بھی مختلف ہوں گے) اور یا اس میں لوگار تھمی جزو پایا جائے گا۔

اس مسئلے میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں x_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ مسئلے میں $a \neq 0$ کا مطلب ہے کہ بذریعہ تجزی قوسین سے x کی بلند تر ممکنہ طاقت بذریعہ تجزی باہر نکالی جاتی ہے۔

بیسل تفاعل کو مساوات 5.47 کی طرز پر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2}y = 0 \quad (v \text{ مقدار معلوم ہے})$$

جس میں $b(x) = 1$ اور $c(x) = x^2 - v^2$ دونوں $x = 0$ پر تحلیل ہیں لہذا اس پر درج بالا مسئلہ لاگو ہو گا۔ سادہ طاقتی تسلسل سے بیسل تفاعل کا حل ممکن نہیں ہے۔

مساوات 5.48 میں طاقتی تسلسل کو x کی ایسی طاقت سے ضرب دیا گیا ہے جو منفی یا کسری ہو سکتا ہے۔ یاد رہے کہ غیر منفی طاقت کے x پر مبنی تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔

مسئلہ فروبنیوس کے ثبوت کے لئے اعلیٰ درجہ مخلوط تجزیہ⁴⁰ درکار ہے لہذا اسے پیش نہیں کیا جائے گا۔

اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے p اور q تحلیل ہوں تب x_0 غیر نادر نقطہ⁴¹ کہلائے گا۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

اگر $x = x_0$ درج بالا مساوات کا نادر نقطہ ہو اور $(x - x_0)p$ اور $(x - x_0)^2q$ نقطہ $x = x_0$ پر تحلیل ہوں تب x_0 منظم نادر نقطہ⁴² کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر منظم نادر نقطہ⁴³ کہتے ہیں۔

advanced complex analysis⁴⁰

regular point⁴¹

regular singular point⁴²

irregular singular point⁴³

باب 5. مل متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرقی

اسی طرح اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے h ، p اور q تحلیلی ہوں اور $h \neq 0$ ہو (تا کہ ہم تفرقی مساوات کو h سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کر سکیں) تب x_0 منظم نقطہ⁴⁴ کہلائے گا ورنہ اسے نادر نقطہ⁴⁵ کہیں گے۔

$$\tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = 0$$

مثال 5.13: مساوات $(x+1)y'' + 2xy' - 3y = 0$ کو $x+1$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $p = \frac{2x}{x+1}$ اور $q = -\frac{3}{x+1}$ ملتے ہیں جو $x = -1$ پر غیر تحلیلی ہیں۔ یوں $x = -1$ مساوات کا نادر نقطہ ہے۔ اب $(x+1)p = 2x$ اور $(x+1)^2q = -3(x+1)$ دونوں $x = -1$ پر تحلیلی ہیں لہذا $x = -1$ منظم نادر نقطہ ہے۔ □

اشاری مساوات حل ظاہر کرتی ہے

آئیں مساوات 5.47 کو ترکیب فروبنیوس سے حل کریں۔ مساوات 5.47 کو x^2 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(5.49) \quad x^2 y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0$$

چونکہ $b(x)$ اور $c(x)$ تحلیلی ہیں لہذا انہیں طاقی تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots, \quad c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

اور اگر b یا c (اور) c کثیر رکنی ہوں تب b یا c کو جوں کا توں رہنے دیا جاتا ہے۔ مساوات 5.48 کا جزو در جزو تفرق لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.50) \quad \begin{aligned} y &= a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \dots \\ y' &= ra_0x^{r-1} + (r+1)a_1x^r + (r+2)a_2x^{r+1} + \dots \\ y'' &= r(r-1)a_0x^{r-2} + (r+1)(r)a_1x^{r-1} + (r+2)(r+1)a_2x^r + \dots \end{aligned}$$

مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کا مساوات 5.50 سے موازنہ کریں۔ طاقی تسلسل $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے تفرق $y' = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}$ کا پہلا رکن $m = 1$ اور اس کے دودرجی تفرق کا پہلا رکن $m = 2$ ہے جبکہ موجودہ دونوں تفرقی تسلسل کا پہلا رکن $m = 0$ ہے۔

درج بالا تفرقات کو نہایت خوش اسلوبی کے ساتھ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

(5.51)

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} = x^{r-1} [r a_0 + (r+1) a_1 x + \dots]$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2} = x^{r-2} [r(r-1) a_0 + (r+1) r a_1 x + \dots]$$

ان تمام کو مساوات 5.49 میں پر کرتے ہیں۔

$$(5.52) \quad x^r [r(r-1) a_0 + \dots] + (b_0 + b_1 x + \dots) x^r (r a_0 + \dots) + (c_0 + c_1 x + \dots) x^r (a_0 + a_1 x + \dots) = 0$$

اب ہم x^r ، x^{r+1} ، x^{r+2} ، ... کے عددی مجموعوں کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔ سب سے کم طاقت x^r ہے جس کا عددی سر درج ذیل ہے۔

$$[r(r-1) + b_0 r + c_0] a_0 = 0$$

چونکہ مسئلہ فروبنیوس کے تحت $a_0 \neq 0$ ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(5.53) \quad r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0 \quad (\text{اشاری مساوات})$$

اس دودرجی الجبرائی مساوات کو سادہ تفرقی مساوات 5.47 کی اشاری مساوات⁴⁶ کہتے ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے تفرقی مساوات کے حل کی اساس حاصل ہوتی ہے جن میں ایک حل مساوات 5.48 کی طرز کا ہو گا جس میں r کی قیمت درج بالا اشاری مساوات کا جذر ہو گا۔ دوسرے حل کی تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں جنہیں اشاری مساوات سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

- پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر نہیں ہے۔

- دوسری صورت: اشاری مساوات کے دو یکساں جذر پائے جاتے ہیں۔
- تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر ہے۔

پہلی صورت میں جوڑی دار مخلوط جذر $r_1 = a + ib$ اور $r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$ شامل ہیں چونکہ ان کا فرق $r_1 - r_2 = i2b$ خیالی عدد ہے جو حقیقی عدد صحیح نہیں ہے۔ مسئلہ 5.3 (جسے ضمیمے میں ثابت کیا گیا ہے) اساس کی صورت دیتی ہے جہاں ارتکاز کا عمومی ثبوت نہیں دیا گیا ہے۔ ہاں انفرادی تسلل کی مرکزیت عام طریقے سے ثابت کی جاسکتی ہے۔ دوسری صورت میں لوگار تھمی جزو کا ہونا لازم ہے جبکہ تیسری صورت میں ہو سکتا ہے کہ لوگار تھمی جزو پایا جاتا ہو یا نہ پایا جاتا ہو۔

مسئلہ 5.3: ترکیب فروبنیوس۔ حل کی اساس۔ تین صورتیں۔
فرض کریں کہ سادہ تفرقی مساوات 5.47 مسئلہ 5.2 پر پورا اترتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 کے جذر r_1 اور r_2 ہیں تب تین صورتیں پائی جاتی ہیں۔

پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر نہیں ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$(5.54) \quad y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

اور

$$(5.55) \quad y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots)$$

ہو گی جہاں عددی سر مساوات 5.52 میں $r = r_1$ اور $r = r_2$ پر کرتے ہوئے حاصل کیے جائیں گے۔

دوسری صورت: یکساں جذر $r_1 = r_2 = r$ کی صورت میں حل کی اساس

$$(5.56) \quad y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \quad \left[r = \frac{1}{2}(1 - b_0)\right]$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$(5.57) \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^r(A_1x + A_2x^2 + \dots) \quad (x > 0)$$

ہو گی۔

تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1، 2، 3، ...) کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$(5.58) \quad y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$(5.59) \quad y_2(x) = Ky_1(x) \ln x = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots) \quad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)]$$

ہے جہاں جذریوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو (یعنی زیادہ قیمت کے جذر کو r_1 کہتے ہیں) اور K کی قیمت صفر بھی ہو سکتی ہے۔ اگر $K = 0$ ہو تب دوسرا حل بھی پہلی حل کی طرح لکھنا ممکن ہو گا (مثال 5.17 دیکھیں)۔ بعض اوقات r_2 استعمال کرتے ہوئے حل y_2^* کے دو حصے پائے جائیں گے۔ اس کا ایک حصہ درحقیقت r_1 سے حاصل حل y_1 ہی ہو گا جبکہ دوسرا حصہ نیا حل ہو گا یعنی $y_2^* = y_2 + ky_1$ لہذا اساس لکھتے ہوئے y_1 اور y_2 لیا جائے گا (سوال 5.36 کا جواب دیکھیں)۔

5.3.1 عملی استعمال

اشاری مساوات 5.53 کے جذر دریافت کرنے کے بعد ترکیب فروبنیوس بالکل طاقتی ترکیب کی طرح ہے۔ مساوات 5.54 تا مساوات 5.59 محض حل کی صورت دیتے ہیں جبکہ دوسرا حل عموماً تخفیف درجہ (حصہ 2.1) کی ترکیب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔

اشاری مساوات کے جذر حاصل کرنے کے بعد (زیادہ قیمت کی جذر) r_1 سے پہلا حل $y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کریں۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی 1, 2, 3, ...) کے برابر نہ ہونے کی صورت میں دوسرا حل (کم قیمت کی جذر) r_2 کو استعمال کرتے ہوئے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا۔

$r_1 = r_2$ کی صورت میں دوسرے حل میں لوگار تھی جزو پایا جائے گا۔ ایسی صورت میں دوسرا حل $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل نہیں ہو گا لہذا دوسرا حل تخفیف درجہ کی مدد سے حاصل کیا جائے گا۔

$y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ (یعنی $1, 2, 3, \dots$) کے برابر ہونے کی صورت میں کبھی کبھار $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا ورنہ اس میں لوگار تھمی جزو پایا جائے گا اور اس حل کو بذریعہ تخفیف درجہ حاصل کیا جائے گا۔ آپ پہلے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ ہی استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔

$y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کرتے ہوئے تین ممکنہ صورتیں پیدا ہوتی ہیں (اس حصے کے سوالات کے جوابات دیکھیں)۔ پہلی صورت میں ایسی تسلسل y_2 حاصل ہوتی ہے جس میں صرف ایک عدد اختیاری مستقل پایا جاتا ہو لہذا عمومی حل y_1 اور y_2 کا مجموعہ ہو گا۔ دوسری صورت میں تسلسل کو $ay_1 + by_2^*$ لکھنا ممکن ہو گا جہاں a اور b اختیاری مستقل ہوں گے لہذا اس حل میں y_1 بھی شامل ہے۔ اس طرح عمومی حل $ay_1 + by_2^*$ ہو گا۔ تیسری صورت میں $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے عددی سر حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دوسرے حل میں لوگار تھمی جزو پایا جاتا ہے لہذا تخفیف درجہ سے حل حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.14: پولر کوشی مساوات۔ پہلی، دوسری اور تیسری صورتیں۔ بلا لوگار تھمی جزو مساوات پولر کوشی (حصہ 2.5)

$$x^2 y'' + b_0 x y' + c_0 y = 0 \quad (c_0 \text{ اور } b_0 \text{ مستقل ہیں})$$

میں $y = x^r$ پر کرنے سے درج ذیل ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0$$

جو اشاری مساوات ہے [اور $y = x^r$ مساوات 5.48 کی ایک صورت ہے]۔ دو منفرد جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^{r_1}$ ، $y_2 = x^{r_2}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ دوہری جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^r$ ، $y_2 = x^r \ln x$ حاصل ہوتی ہے۔ مساوات پولر کوشی کی صورت میں تیسری صورت نہیں پائی جاتی۔ □

مثال 5.15: دوسری صورت۔ (دوہرا جذر)
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(5.60) \quad x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

(یہ بیش ہندسی⁴⁷ مساوات کی ایک مخصوص صورت ہے۔)

حل دیے گئے مساوات کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 کے شرائط پر پورا اترتی ہے۔ یوں مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.60 میں پر کرتے ہیں۔

$$(5.61) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} \\ + 3 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

x کی کمتر طاقت x^{r-1} ، جو دوسرے اور چوتھے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$[-r(r-1) - r]a_0 = 0 \quad \implies \quad r^2 = 0$$

اشاری مساوات کا دوہرا جذر $r = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.61 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے x^s کی عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$s(s-1)a_s - (s+1)sa_{s+1} + 3sa_s - (s+1)a_{s+1} + a_s = 0$$

ملتا ہے۔ یوں $a_0 = a_1 = a_2 = \dots$ ہو گا لہذا $a_0 = 1$ چنتے ہوئے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

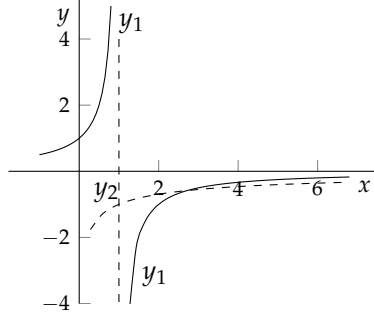
$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

دوسرا حل: دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ (حصہ 2.1) حاصل کرتے ہیں۔ یوں $y_2 = uy_1$ اور اس کے تفرقات کو مساوات میں پر کرتے ہوئے (صفحہ 91 پر) مساوات 2.15 ملتا ہے جس کو یہاں استعمال کرتے ہیں۔ یہاں $p = \frac{3x-1}{x(x-1)}$ ہے لہذا

$$\int p dx = \int \frac{3x-1}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} \right) dx = 2 \ln(x-1) + \ln x$$

ہو گا اور یوں مساوات 2.15 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u' = v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 x} = \frac{1}{x}, \quad u = \ln x, \quad y_2 = uy_1 = \frac{\ln x}{1-x}$$



شکل 5.6: مثال 5.15 کے حل۔

y_1 اور y_2 جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے وقفہ $0 < x < 1$ اور $1 < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں لہذا اس وقفے پر یہ حل کی اساس ہیں۔ □

مثال 5.16: لوگار تھمی جزو والا دوسرا حل درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(5.62) \quad (x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$$

حل: مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.62 میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} - x \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

x^2 اور x کو مجموعوں کے اندر لے جاتے ہوئے اور x کی یکساں طاقتوں کا اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(5.63) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)^2 a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} = 0$$

x کی کم تر طاقت x^{r-1} ، جو $m=0$ پر کرنے سے دوسرے مجموعے سے ملتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرنے سے

$$r(r-1) = 1$$

یعنی $r_1 = 1$ اور $r_2 = 0$ ملتے ہیں (جذریوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو۔) جن میں فرق عدد صحیح کے برابر ہے لہذا یہ تیسری صورت ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.63 کو یکساں طاقت کی صورت میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $m = s$ اور دوسرے مجموعے میں $s = m - 1$ یعنی $m = s + 1$ پر کرتے ہیں۔

$$(5.64) \quad \sum_{s=0}^{\infty} (s+r-1)^2 a_s x^{s+r} - \sum_{s=-1}^{\infty} (s+r+1)(s+r) a_{s+1} x^{s+r} = 0$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1} = \frac{(s+r-1)^2}{(s+r+1)(s+r)} a_s$$

ملتا ہے جس میں $r = 1$ پر کرتے ہوئے

$$(5.65) \quad a_{s+1} = \frac{s^2}{(s+2)(s+1)} a_s \quad (s = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $a_1 = 0$ ، $a_2 = 0$ ، ... حاصل ہوتے ہیں۔ یوں $a_0 = 1$ چنتے ہوئے پہلا حل $y_1 = a_0 x^{r_1} = x$ ملتا ہے۔

دوسرا حل: ترکیب تخفیف درجہ (حصہ 2.1) استعمال کرتے ہوئے $y_2 = u y_1 = x u$ لیتے ہیں۔ اس طرح $y_2' = u + u'x$ اور $y_2'' = x u'' + 2u'$ ہوں گے۔ انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x)(x u'' + 2u') - x(x u' + u) + x u = 0$$

اس میں $x u$ کٹ جاتا ہے۔ بقایا مساوات کو x سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0$$

اس کو جزوی کسری پھیلاؤ کی مدد سے لکھتے ہوئے مکمل لیتے ہیں۔ (مکمل کا مستقل صفر چننا گیا ہے۔)

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x-2}{x^2-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad \ln u' = \ln \left| \frac{x-1}{x^2} \right|$$

اس کو قوت نمائی طور پر لکھتے ہوئے مکمل لیتے ہیں۔ (مکمل کا مستقل صفر چنتے ہیں۔)

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad u = \ln x + \frac{1}{x}, \quad y_2 = u y_1 = x \ln x + 1$$

باب 5. ط. متقی تسلسل سے سادہ تفریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفریق

y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں اور y_2 میں لوگار تھمی جزو پایا جاتا ہے۔ یوں مثبت x پر یہ حل کی اساس ہیں۔ □

ترکیب فروبنیوس سے بیش ہندسی مساوات حل ہوتا ہے جس کے حل میں کئی اہم تفاعل شامل ہیں۔ بعض اوقات دیے گئے مساوات کو مساوات 5.47 کی صورت میں لانے میں دشواری پیش آتی ہے۔ یوں

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جس کے آخری جزو کو $\frac{x}{x}$ سے ضرب دیتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{x}{x^2(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جو درکار صورت ہے جس میں $p = \frac{3x-1}{x-1}$ اور $q = \frac{x}{x-1}$ ہیں۔

ترکیب فروبنیوس کو استعمال کرتے ہوئے عموماً اتنا کافی ہوتا ہے کہ مساوات کو $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ شکل میں لایا جائے۔ درج ذیل سوالات حل کرتے ہوئے ایسا ہی کریں۔

مسئلہ 5.2 میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی ممکن ہے جہاں x_0 مساوات کا نادر نقطہ ہے۔ یوں عمومی تفریقی مساوات

$$(5.66) \quad (x - x_0)^2 \alpha(x) y'' + (x - x_0) \beta(x) y' + \gamma(x) y = 0$$

جس میں $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ اور $\gamma(x)$ تجلیلی ہوں (لہذا انہیں درج لکھا جاسکتا ہے)

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 x + \dots, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots$$

کو ترکیب فروبنیوس سے حل کرتے ہوئے اشاری مساوات

$$(5.67) \quad \alpha_0 r^2 + (\beta_0 - \alpha_0) r + \gamma_0 = 0$$

حاصل ہوگی۔ مساوات 5.66 کو $\alpha(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.47 طرز کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.66 میں $x_0 = 0$ پر کرنے سے مساوات 5.47 حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 5.66 کا حل

$$(5.68) \quad y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m$$

لکھ کر حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.17: تیسری صورت میں بعض اوقات r_2 سے حل نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں کبھی کبھار دوسرا حل $y_2 = x^{r_2} \sum c_m x^m$ نہیں لکھا جاسکتا ہے۔ اس مثال میں اس بات کی وضاحت ہوگی۔ آئیں درج ذیل مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$2xy'' - 4y' - y = 0$$

اس مساوات میں $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ اور اس کے تفرقات

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}, \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2}$$

پر کرتے ہوئے

$$2x \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2} - 4 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

ملتا ہے۔ تینوں مجموعوں سے x^{r-1} باہر نکالتے ہوئے کاٹتے ہیں۔

$$x^{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1) c_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r) c_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} = 0$$

پہلے اور دوسرے مجموعے میں $s = m$ اور تیسرے مجموعے میں $s = m+1$ پر کرتے ہیں تاکہ x کے تمام طاقت یکساں لکھیں جائیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2(s+r)(s+r-1) c_s x^s - \sum_{s=0}^{\infty} 4(s+r) c_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^s = 0$$

آپ نے دیکھا کہ تیسرے مجموعے کا پہلا رکن اب $s = 1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ پہلے دو مجموعوں کا پہلا رکن مجموعے کے باہر لکھتے ہیں تاکہ تمام مجموعوں کا پہلا رکن ایک ہی جگہ سے شروع ہو۔

$$2(0+r)(0+r-1) c_0 x^0 + \sum_{s=1}^{\infty} 2(s+r)(s+r-1) c_s x^s - 4(0+r) c_0 x^0 - \sum_{s=1}^{\infty} 4(s+r) c_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^s = 0$$

باب 5. ط متقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تنفس

یوں تمام مجموعوں کا پہلا رکن $s = 1$ ظاہر کرے گا۔ تینوں مجموعوں کو اکٹھا لکھتے ہیں

$$(5.69) \quad \underbrace{[2r(r-1) - 4r]}_{2r(r-3)} c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [2(s+r)(s+r-1)c_s - 4(s+r)c_s - c_{s-1}] x^s = 0$$

جہاں پہلا رکن اشاری مساوات $2r(r-3) = 0$ دیتا ہے جس کے جذر $r_1 = 3$ اور $r_2 = 0$ ہیں۔ (یاد رہے کہ بڑی مقدار کے جذر کو r_1 لکھا جاتا ہے اور اسی کی مدد سے پہلا حل حاصل کیا جاتا ہے۔)

مساوات 5.69 میں $r = r_1 = 3$ پر کرتے ہوئے

$$[2 \cdot 3(3-1) - 4 \cdot 3] c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [2(s+3)(s+3-1)c_s - 4(s+3)c_s - c_{s-1}] x^s = 0$$

یعنی

$$\sum_{s=1}^{\infty} [2s(s+3)c_s - c_{s-1}] x^s = 0$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل کلیہ تواری لکھی جاسکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2s(s+3)} c_{s-1} \quad (s \geq 1)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2 \cdot 1(1+3)} c_0 = \frac{1}{2 \cdot 1(4)} c_0 \\ c_2 &= \frac{1}{2 \cdot 2(2+3)} c_1 = \frac{1}{2 \cdot 2(2+3)} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1(4)} c_0 = \frac{1}{2^2(2 \cdot 1)(5 \cdot 4)} c_0 \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2(2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} c_0 = \frac{6}{2^2(2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} c_0 \\ c_3 &= \frac{1}{2 \cdot 3(3+3)} c_2 = \frac{1}{2 \cdot 3(6)} \cdot \frac{6}{2^2(2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} c_0 \\ &= \frac{6}{2^3(3 \cdot 2 \cdot 1)(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} c_0 \\ &\vdots \\ c_s &= \frac{6}{2^s s!(s+3)!} c_0 \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ آخری کلیہ $s = 0$ اور $s = 1$ کے لئے بھی کار آمد ہے لہذا ہم عمومی کلیہ تواری

$$c_s = \frac{6}{2^s s! (s+3)!} c_0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

اور پہلا حل

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{6}{2^m m! (m+3)!} c_0 x^m = c_0 x^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{6}{2^m m! (m+3)!} x^m$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $r = r_2 = 0$ کو استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 5.69 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے

$$[2 \cdot 0(0-1) - 4 \cdot 0]c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [2(s+0)(s+0-1)c_s - 4(s+0)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

ملتا ہے جس میں c_0 کا عددی سر صفر کے برابر ہے جبکہ x_s کے عددی سر سے درج ذیل کلیہ تواری لکھا جاسکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2s(s-3)} c_{s-1}$$

اس کلیہ تواری کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$c_1 = \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0$$

$$c_2 = \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} c_1 = \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0$$

$$c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3 \underbrace{(3-3)}_{=0}} c_2 = \frac{1}{2 \cdot 3(3-3)} \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0 = \frac{c_0}{0}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $c_0 \neq 0$ کی صورت میں $c_3 = \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ c_0 صفر نہیں ہو سکتا۔ ایسا ہونے سے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جو $y_2 = 0$ دیگا۔ اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں ہر بار ایک عددی سر $\frac{c_0}{0}$ حاصل ہوگا جس کی بنا چھوٹا جذر استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

□

سوالات

سوال 5.32 تا سوال 5.44 کی اساس کو ترکیب فروبنیوس سے حاصل کریں۔ حاصل تسلسل کو بطور تفاعل پہچاننے کی کوشش کریں۔

سوال 5.32: $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$
 جواب: $y_2 = x^{-1}(x - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{360} - + \dots)$ ، $y_1 = x^{-1}(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots)$

سوال 5.33: $xy'' + 2y' + xy = 0$
 جواب: $y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \dots = \frac{\cos x}{x}$ ، $y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots = \frac{\sin x}{x}$

سوال 5.34: $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$
 جواب: اس طرز کے مساوات میں بہتر ہوتا ہے کہ $X = x - x_0 = x - 1$ اور $Y(X)$ استعمال کیا جائے جس سے درج بالا مساوات $X^2Y'' - 2XY' + 2Y = 0$ لکھی جاتی ہے۔ حل کرنے کے بعد واپس x کا استعمال کریں۔ $r_1 = 2$ ، $r_2 = 1$ ہیں۔ $r = r_1 = 2$ استعمال کرتے ہوئے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جبکہ $r = r_2 = 1$ استعمال کرتے ہوئے حل $y = (x-1)^1[c_0 + c_1(x-1)]$ ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل ہیں لہذا یہ عمومی حل ہے۔ یوں اساس $y_1 = x - 1$ اور $y_2 = (x-1)^2$ ہے۔

سوال 5.35: $y'' + xy' + (1 - \frac{2}{x^2})y = 0$
 جواب: $r_1 = 0$ ، $r_2 = -3$ ہیں جن میں عددی صحیح فرق پایا جاتا ہے جو تیسری صورت ہے۔ یوں r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = c_2(x^2 - \frac{3}{10}x^4 + \frac{3}{56}x^6 - \frac{1}{144}x^8 + \dots)$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 استعمال کرتے ہوئے $y_2 = c_2x^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.36: $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$
 جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -2$ ہیں۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_1 = x^0(1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^8 + \dots) = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

ملتا ہے جبکہ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_2^* = c_0(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{24} + \dots) + c_2(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{120} - \dots)$$

ملتا ہے جہاں آخری توسین در حقیقت y_1 ہی ہے لہذا اساس لکھتے ہوئے اس حصے کو رد کیا جاتا ہے۔ اس طرح اساس درج ذیل ہو گا۔

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^8 + \dots = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^6 + \dots = \frac{\cos x^2}{x^2}$$

سوال 5.37: $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ جواب: $r_1 = r_2 = 3$ ہے جو دوسری صورت ہے۔ یوں پہلا حل $y_1 = x^3$ ملتا ہے جبکہ دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ ($y_2 = x^3u$ پر کرتے ہوئے) $y_2 = x^3 \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.38: $xy'' + y' - xy = 0$ جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ملتا ہے۔ $y_1 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \dots$ ،

$$y_2 = y_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{8 \cdot 16} - \dots$$

سوال 5.39: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ جواب: $r_1 = 2$ ، $r_2 = -2$ میں فرق عدد صحیح ہے۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے $y_1 = x^2$ ملتا ہے۔ اگر آپ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے y_1 کی طرز کا حل حاصل کرنا چاہیں تو آپ کو $y_2 = x^{-2}(c_0 + c_4x^4) = c_0x^{-2} + c_4x^2$ ملتا ہے جس میں x^2 در حقیقت y_1 ہے جسے رد کرتے ہوئے اساس میں $y_2 = \frac{1}{x^2}$ لکھا جائے گا۔

سوال 5.40: $x^2y'' + 6xy' + (6 - 4x^2)y = 0$ جواب: $r_1 = -2$ ، $r_2 = -3$ ہیں۔ r_1 سے $y_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{15}x^2 + \dots = \frac{\sinh 2x}{2x^3}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 سے $y_2 = c_0(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \dots) + c_1y_1$ ملتا ہے لہذا $y = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \dots$ لکھا جائے گا یعنی $y_2 = \frac{\cosh 2x}{x^3}$ ہے۔

سوال 5.41: $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$ جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ہے جو دوسری صورت ہے۔ اساس $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x$ اور $y_2 = e^x \ln x$ ہیں۔

سوال 5.42: $xy'' + (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$ جواب: $r_1 = r_2 = 0$ جبکہ $y_1 = e^{-x}$ اور $y_2 = e^{-x} \ln x$ ہیں۔

سوال 5.43: $y'' + (x - 1)y = 0$ جواب: $r_1 = -1$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 سے ایسا تسلسل ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل پائے جاتے

باب 5. مل متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرقی

ہیں لہذا اس تسلسل کو دو عدد تفاعل میں لکھتے ہوئے اساس $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{30} + \dots$ اور $y_2 = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} - \dots$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 5.44: $xy'' + (2 - 2x)y' + (x - 2)y = 0$ جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ استعمال کرتے ہوئے $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = e^x$ ملتا ہے۔ دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لکھ کر تخفیف درجی کے استعمال سے $y_2 = \frac{e^x}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.45: گاوس بیش ہندسی مساوات درج ذیل تفرقی مساوات

$$(5.70) \quad x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

جہاں a, b اور c مستقل ہیں گاوس بیش ہندسی مساوات⁴⁸ کہلاتی ہے۔ ثابت کریں کہ اس کی اشاری مساوات کے جذر $r_1 = 0$ اور $r_2 = 1 - c$ ہیں۔ ثابت کریں کہ $r = r_1 = 0$ کے لئے ترکیب فرونیوس کے استعمال سے درج ذیل حل ملتا ہے جہاں $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ہے۔

(5.71)

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

یہ تسلسل بیش ہندسی تسلسل⁴⁹ کہلاتی ہے جس کا مجموعہ عموماً $F(a, b, c; x)$ لکھا اور بیش ہندسی تفاعل⁵⁰ پکارا جاتا ہے۔

سوال 5.46: ثابت کریں کہ $|x| < 1$ کے لئے تسلسل 5.71 مرتکز ہے۔

جواب: $1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+m)(b+m)}{(m+1)(c+m)} \frac{m!(c+m-1)}{(1+m-1)(b+m-1)} \right|$ لہذا $R < 1$ ہو گا۔

سوال 5.47: بیش ہندسی تفرقی مساوات کا حل مساوات 5.71 مستقل a اور b کی کن قیمتوں پر کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے گا۔

جواب: $a = 0, -1, -2, \dots$ اور $b = 0, -1, -2, \dots$

⁴⁸Gauss' hypergeometric equation
⁴⁹hypergeometric series
⁵⁰hypergeometric function

سوال 5.48: $a = b = c = 1$ کی صورت میں تسلسل 5.71 سے ہندسی تسلسل⁵¹ حاصل کریں۔

جواب: $F(1, 1, 1; x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$

سوال 5.49: ثابت کریں کہ $F(1, 1, 1; x) = F(1, b, b; x) = F(a, 1, a; x)$ یعنی ہندسی تسلسل ہے۔ اسی سے تفاعل $F(a, b, c; x)$ کا نام بیش ہندسی تفاعل نکلا ہے۔

سوال 5.50: ثابت کریں کہ سوال 5.45 میں $r_2 = 1 - c$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.70 کا دوسرا حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے جہاں $c \neq 2, 3, 4, 7, \dots$ ہے۔

$$(5.72) \quad y_2(x) = x^{1-c} \left(1 + \frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)}x + \frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)}x^2 + \dots \right)$$

سوال 5.51: ثابت کریں کہ مساوات 5.72 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.73) \quad y_2(x) = x^{1-c} F(a-c+a, b-c+1, 2-c; x)$$

سوال 5.52: ثابت کریں کہ $c \neq 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$ کی صورت میں مساوات 5.70 کے حل کی اساس مساوات 5.71 اور مساوات 5.72 ہیں۔

سوال 5.53: درج ذیل ثابت کریں۔

$$(1+x)^n = F(-n, b, b; -x)$$

$$(1-x^n) = 1 - nx F(1-n, 1, 2; x)$$

$$\tan^{-1} x = x F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right)$$

$$\sin^{-1} x = x F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right)$$

$$\ln(1+x) = x F(1, 1, 2; -x)$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right)$$

باب 5. ط. متقی تسلسل سے سادہ تفریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسیر

سوال 5.54: درج ذیل مساوات میں A ، B ، C ، D اور K مستقل ہیں، y سے مراد $\frac{dy}{dt}$ ہے اور $t^2 + At + B$ کے منفرد جذر t_1 اور t_2 ہیں۔

$$(5.74) \quad (t^2 + At + B)y'' + (Ct + D)y' + Ky = 0$$

اس مساوات میں نیا متغیر $x = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ پر کرتے ہوئے بیش ہندسی مساوات حاصل کریں جس میں

$$Ct_1 + D = -c(t_2 - t_1), \quad C = a + b + 1, \quad K = ab$$

ہوں گے۔

جواب: چونکہ $t^2 + At + B$ کے منفرد ($t_2 \neq t_1$) جذر t_1 اور t_2 ہیں لہذا $t^2 + At + B = (t - t_1)(t - t_2)$ لکھا جا سکتا ہے۔ اب نیا متغیر $x = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ لیتے ہوئے $t = (t_2 - t_1)x + t_1$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$t - t_1 = (t_2 - t_1)x, \quad t - t_2 = (t_2 - t_1)(x - 1),$$

$$(t - t_1)(t - t_2) = (t_2 - t_1)^2 x(x - 1), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \frac{d^2y}{dx^2}$$

ہوں گے جنہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(5.75) \quad x(1-x)y'' - \left(\frac{Ct_1 + D}{t_2 - t_1} + Cx \right) y' - Ky = 0$$

ملتا ہے۔

سوال 5.55 تا سوال 5.57 کے عمومی حل بیش ہندسی تفاعل کی صورت میں دریافت کریں۔

$$\text{سوال 5.55: } 2x(1-x)y'' - (1+5x)y' - y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; x\right) + c_2 x^{\frac{3}{2}} F\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}; x\right)$$

$$\text{سوال 5.56: } 4(t^2 - 3t + 2)y'' - 2y' + y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t-1\right) + c_2 (t-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{سوال 5.57: } 2(t^2 - 5t + 6)y'' + (2t-3)y' - 8y = 0$$

$$\text{جواب: } y = c_1 F\left(2, -2, -\frac{1}{2}; t-2\right) + c_2 (t-2)^{\frac{3}{2}} F\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; t-2\right)$$

5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاضل

اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک بیسل مساوات⁵²

$$(5.76) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

ہے جہاں ν ⁵³ حقیقی مستقل ہے جس کی قیمت صفر یا مثبت ہوگی۔ یہ مساوات عموماً نکی تشاکلی مسائل میں سامنے آتی ہے۔ بیسل مساوات کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (\frac{x^2 - \nu^2}{x^2})y = 0$ حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 پر پورا اترتی ہے۔ یوں بیسل مساوات کے حل کو ترکیب فروبنیوس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.77) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \quad (a_0 \neq 0)$$

مساوات 5.77 اور اس کے ایک درجی اور دو درجی تفرقات کو مساوات 5.76 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m+r)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} \\ - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \end{aligned}$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہوئے c_0, c_1, \dots حاصل کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x^{s+r} پہلے، دوسرے اور تیسرے مجموعوں میں $m = s$ پر کرنے اور تیسرے مجموعے میں $m = s-2$ پر کرنے سے ملتے ہیں۔ یوں $s = 0$ اور $s = 1$ کی صورت میں تیسرا مجموعہ کوئی حصہ نہیں ڈالے گا جبکہ $s = 2$ کی صورت میں چاروں مجموعے حصہ ڈالیں گے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.78) \quad \begin{aligned} r(r-1)a_0 + ra_0 - \nu^2 a_0 &= 0 & (s=0) \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \nu^2 a_1 &= 0 & (s=1) \\ (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - \nu^2 a_s &= 0 & (s=2, 3, \dots) \end{aligned}$$

چونکہ $a_0 \neq 0$ ہے لہذا مساوات 5.78 کی پہلی مساوات سے اشاری مساوات

$$(5.79) \quad (r+\nu)(r-\nu) = 0$$

حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $r_1 = \nu (\geq 0)$ اور $r_2 = -\nu$ ہیں۔

⁵²Bessel's equation

⁵³ ν یونانی حرف تھی ہے۔

توالی عددی سر؛ $r = r_1 = v$

دوسری مساوات 5.78 میں $r = v$ پر کرتے ہوئے $(2v + 1)a_1 = 0$ ملتا ہے۔ اب چونکہ v غیر منفی ہے لہذا $2v + 1$ صفر کے برابر نہیں ہو سکتا اور یوں $a_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ تیسری مساوات 5.78 میں $r = v$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(5.80) \quad (s + 2v)sa_s + a_{s-2} = 0$$

چونکہ $a_1 = 0$ اور $v \geq 0$ ہے لہذا مساوات 5.80 سے $s_3 = 0$ ، $s_5 = 0$ ، ... حاصل ہوتے ہیں۔ یوں تمام طاق عددی سر صفر کے برابر ہیں۔ جفت عددی سر حاصل کرنے کی خاطر مساوات 5.80 میں $s = 2m$ پر کرتے ہوئے

$$(2m + 2v)2ma_{2m} + a_{2m-2} = 0$$

یعنی

$$(5.81) \quad a_{2m} - \frac{1}{2^2 m(v+m)} a_{2m-2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

ملتا ہے۔ مساوات 5.81 سے c_2 ، c_4 ، ... لکھتے ہیں

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(v+2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(v+1)(v+2)}$$

اور یوں عمومی کلیہ

$$(5.82) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(v+1)(v+2) \dots (v+m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔

عددی صحیح $v = n$ کی صورت میں بیسل تفاعل $J_n(x)$

ν کی عدد صحیح قیمت کو روایتی طور پر n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.82 درج ذیل لکھی جائے گی

$$(5.83) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! (n+1)(n+2) \cdots (n+m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

جس میں a_0 اختیاری مستقل ہے۔ مساوات 5.83 پر مبنی تسلسل میں بھی اختیاری مستقل a_0 پایا جائے گا۔ ہم اختیاری مستقل کی قیمت $a_0 = 1$ چن سکتے ہیں البتہ اس سے بہتر قیمت

$$(5.84) \quad a_0 = \frac{1}{2^n n!}$$

ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! n! (n+1)(n+2) \cdots (n+m)}$$

یعنی

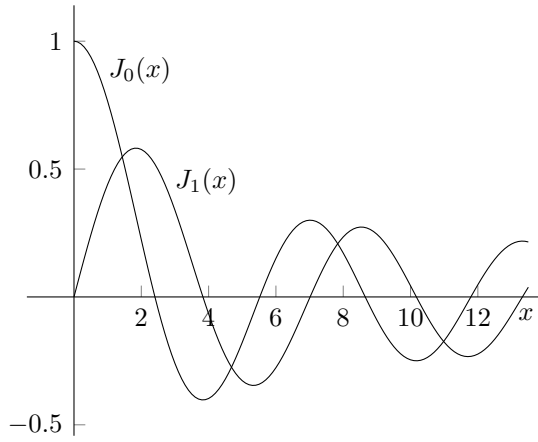
$$(5.85) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! (n+m)!}, \quad m = 1, 2, \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چننے سے بڑھتی ضربیہ $(n+1)(n+2) \cdots (n+m)$ کو نہایت عمدگی کے ساتھ عدد ضربیہ $54 (n+m)!$ میں ضم کیا گیا ہے۔ درج بالا عددی سر کو تسلسل 5.77 میں پر کرتے ہوئے، اور یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $c_1 = 0$ ، $c_3 = 0$ ، \dots ہیں، بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل $J_n(x)$

$$(5.86) \quad J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n+m)!} \quad (n \geq 0)$$

ملتا ہے جو درجہ n بیسل تفاعل کی پہلی قسم⁵⁵ کہلاتی ہے۔ بیسل تفاعل 5.86 تمام x کے لئے مرکب ہے یعنی (جیسا آپ عددی سر کی شرح $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ سے ثابت کر سکتے ہیں) اس کا رداس ارتکاز لامتناہی $R = \infty$ ہے۔ یوں $J_n(x)$ تمام x کے لئے معین ہے۔ عددی سر کے نسب نما میں عدد ضربیہ $(n+m)!$ کی بنا تسلسل بہت تیزی سے مرکب ہوتی ہے۔

⁵⁴factorial
Bessel function of the first kind of order n ⁵⁵



شکل 5.7: بیسل تفاعل کی پہلی قسم - J_0 ، J_1

مثال 5.18: بیسل تفاعل $J_0(x)$ اور $J_1(x)$

مساوات 5.86 میں $n = 0$ پر کرتے ہوئے درجہ 0 کا بیسل تفاعل $J_0(x)$

$$(5.87) \quad J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \dots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو کوسائن تفاعل کی مانند ہے۔ اسی طرح مساوات 5.86 میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے درجہ 1 کا بیسل تفاعل $J_1(x)$

$$(5.88) \quad J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)!} = x - \frac{x^3}{2^3 1! 2!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} - \frac{x^7}{2^7 3! 4!} + \dots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو سائن تفاعل کی مانند ہے لیکن جیسا آپ دیکھیں گے بیسل تفاعل کے صفر یکساں فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں اور x بڑھانے سے تفاعل کا حیظ کم ہوتا جاتا ہے۔ مساوات 5.76 کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{y^2}{x^2})y = 0$ ملتی ہے جس پر توجہ دیں۔ x کی زیادہ قیمت پر $\frac{1}{x}$ اور $\frac{y^2}{x^2}$ کو رد کرتے ہوئے بیسل مساوات سے $y'' + y = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے حل $\sin x$ اور $\cos x$ ہیں۔ آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{y'}{x}$ بطور تقریری مستقل کردار ادا کرتے ہوئے بیسل تفاعل کا حیظ گھٹانے میں مدد دے گی۔ زیادہ x کی صورت میں درج ذیل ثابت کیا جاسکتا ہے

$$(5.89) \quad J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

جہاں \sim کو متقاربی بوابہ⁵⁶ پڑھیں اور جس کا مطلب ہے کہ کسی بھی قطعی n پر دونوں اطراف کی شرح، $x \rightarrow \infty$ پر اکائی کے برابر ہوگی۔

مساوات 5.89 کم $x(> 0)$ کی صورت میں بھی بہترین ثابت ہوتی ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے $J_0(x)$ کے ابتدائی تین صفر 2.356، 5.498 اور 8.639 حاصل ہوتے ہیں جبکہ ان کی حقیقی قیمتیں بالترتیب 2.405، 5.520 اور 8.654 ہیں۔ دونوں جوابات میں فرق 0.049، 0.022 اور 0.015 ہے۔ □

بیسل تفاعل جہاں $\nu \geq 0$ کوئی بھی قیمت ہو سکتی ہے۔ گیمما تفاعل

گزشتہ حصے میں ہم نے عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل مساوات کا ایک حل دریافت کیا۔ آئیں اب کسی بھی قیمت کے $\nu > 0$ کے لئے بیسل تفاعل کا عمومی حل تلاش کریں۔ مساوات 5.84 میں ہم نے $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چنا جبکہ موجودہ صورت میں ہم

$$(5.90) \quad a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$$

چنتے ہیں جہاں گیمما تفاعل⁵⁷ Γ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(5.91) \quad \Gamma(\nu + 1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu dt \quad (\nu > -1)$$

دھیان رہے کہ بائیں ہاتھ $\nu + 1$ جبکہ دائیں ہاتھ مکمل کے اندر ν لکھا گیا ہے۔ مکمل بالخصوص سے

$$\Gamma(\nu + 1) = -e^{-t} t^\nu \Big|_0^\infty + \nu \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt = 0 + \nu \Gamma(\nu)$$

یعنی گیمما تفاعل کا بنیادی تعلق

$$(5.92) \quad \Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.91 میں $\nu = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

asymptotically equal⁵⁶
gamma function⁵⁷

باب 5. ملتی تسلسل سے سادہ تفسیقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسعل

ملتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.92 سے $\Gamma(1) = 1!$ ، $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$ ، $\Gamma(3) = 3\Gamma(2) = 2!$ اور یوں

$$(5.93) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ عدد ضربی درحقیقت گیمیا تفاعل کی ایک مخصوص صورت ہے۔ یوں عدد صحیح $n = \nu$ کی صورت میں مساوات 5.90 سے مساوات 5.84 ہی حاصل ہوتی ہے۔

گیمیا تفاعل سے $0!$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $\Gamma(n+1) = n!$ ہے لہذا

$$(5.94) \quad 0! = \Gamma(1) = 1$$

کے برابر ہے۔

مساوات 5.90 استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو لکھتے ہیں۔

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (n+1)(n+2) \cdots (n+m) 2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

اب مساوات 5.92 کے تحت $(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2)$ ، $(\nu+2)\Gamma(\nu+2) = \Gamma(\nu+3)$ وغیرہ لکھے جاسکتے ہیں اور یوں

$$(\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+m) \Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+m+1)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$(5.95) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $r = r_1 = \nu$ کی صورت میں بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.96) \quad J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

$J_\nu(x)$ کو درجہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم⁵⁸ کہتے ہیں۔

جیسا آپ شرح عدد سر کی ترکیب سے ثابت کر سکتے ہیں، مساوات 5.96 تمام x پر مرتکز ہے۔

مثال 5.19: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (5.97)$$

حل: مساوات 5.91 میں $v = -\frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

ملتا ہے جس میں متغیر تبدیل کرتے ہوئے $t = u^2$ استعمال کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

اب ہم ایک ترکیب استعمال کرتے ہیں (جس کو ذہن نشین کرنا سودمند ثابت ہوگا)۔ درج بالا میں u کی جگہ w بھی لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-w^2} dw$$

ملتا ہے۔ درج بالا دو مساوات کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_0^\infty e^{-w^2} dw = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+w^2)} du dw$$

یہ مکمل کارتیسی محور کے ربع اول پر حاصل کیا گیا ہے۔ اس مکمل کو نکلی محور r اور θ استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں $u = r \cos \theta$ اور $w = r \sin \theta$ لیتے ہیں۔ چھوٹا رقبہ $du dw = r dr d\theta$ لکھا جائے گا۔ ربع اول میں r کے حدود 0 تا ∞ اور θ کے حدود 0 تا $\frac{\pi}{2}$ ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty d\theta = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \pi$$

□

ملتا ہے۔ دونوں اطراف کا جذر لینے سے $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ملتا ہے۔

خواص بیل تقاعل

بیل تقاعل انتہائی زیادہ تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔ آئیں درج ذیل تعلقات کو بیل تسلسل سے اخذ کریں۔

$$(5.98) \quad [x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$(5.99) \quad [x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$(5.100) \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$(5.101) \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

مساوات 5.98 ثابت کرتے ہیں۔ مساوات 5.96 کو x^ν سے ضرب دیتے ہوئے

$$x^\nu J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

تفرق لے کر مساوات 5.92 سے $\Gamma(\nu+m+1) = (\nu+m)\Gamma(\nu+m)$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [x^\nu J_\nu(x)]' &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+2\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(m+\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m! (\nu+m) \Gamma(\nu+m)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu+m)} = x^\nu x^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu+m)} = x^\nu J_{\nu-1}(x) \end{aligned}$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu-1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

آئیں اب مساوات 5.99 ثابت کریں۔ مساوات 5.96 کو $x^{-\nu}$ سے ضرب دینے سے $x^{-\nu}$ کٹ جاتا ہے۔

$$x^{-\nu} J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

تفرق لے کر $m! = m(m-1)!$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [x^{-\nu} J_\nu(x)]' &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu} m(m-1)! \Gamma(\nu+m+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu-1} (m-1)! \Gamma(\nu+m+1)} \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ تفرق کے بعد تسلسل کا پہلا رکن $m = 1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ (آپ $x^{-\nu} J_{\nu}$ کے تسلسل کو پھیلا کر لکھ کر تفرق لیتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ پہلا رکن $m = 1$ ہے)۔ درج بالا تسلسل میں $s = m - 1$ یعنی $m = s + 1$ پر کرتے ہیں۔

$$[x^{-\nu} J_{\nu}(x)]' = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} x^{2s+1}}{2^{2s+\nu+1} s! \Gamma(\nu + s + 2)} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu + 1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

اب مساوات 5.100 اور مساوات 5.100 ثابت کرتے ہیں۔ مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \nu x^{\nu-1} J_{\nu} + x^{\nu} J_{\nu}' &= x^{\nu} J_{\nu-1} \\ -\nu x^{-\nu-1} J_{\nu} + x^{-\nu} J_{\nu}' &= -x^{-\nu} J_{\nu+1} \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو x^{ν} اور دوسری مساوات کو $x^{-\nu}$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nu x^{-1} J_{\nu} + J_{\nu}' &= J_{\nu-1} \\ -\nu x^{-1} J_{\nu} + J_{\nu}' &= -J_{\nu+1} \end{aligned}$$

ان کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل (درکار) مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2J_{\nu}' &= J_{\nu-1} - J_{\nu+1} \\ \frac{2\nu}{x} J_{\nu} &= J_{\nu-1} + J_{\nu+1} \end{aligned}$$

مثال 5.20: مساوات 5.98 تا مساوات 5.101 کا استعمال
درج ذیل کو J_0 اور J_1 کی صورت میں حاصل کریں۔

$$\int_1^2 x^{-3} J_4(x) dx$$

حل: مساوات 5.99 میں $\nu = 3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I = \int_1^2 x^{-3} J_4(x) dx = -x^{-3} J_3(x) \Big|_1^2$$

باب 5. مل متقی تسل سے سادہ تصرفی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تنفس

مساوات 5.100 میں $v = 2$ پر کرتے ہوئے $J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1$ اور $v = 1$ پر کرتے ہوئے $J_2 = \frac{2}{x}J_1 - J_0$ لکھا جاسکتا ہے لہذا $J_3 = \frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1 - J_0) - J_1$ یوں مکمل کی قیمت

$$I = -x^{-3}[4x^{-1}(2x^{-1}J_1 - J_0) - J_0]_1^2 = -\frac{1}{8}J_1(2) + \frac{1}{4}J_0(2) + 7J_1(1) - 4J_0(1)$$

□

ہوگی۔

مثال 5.21: درج ذیل (شکل 5.8) ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \end{aligned} \quad (5.102)$$

حل: میل تسلسل 5.96 میں $v = \frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے ہیں۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\frac{1}{2}} m! \Gamma(\frac{1}{2} + m + 1)} = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m! \Gamma(m + \frac{3}{2})}$$

نسب نما میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 5.97 استعمال کیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} 2^m m! &= 2m(2m-2)(2m-4) \cdots 4 \cdot 2 \\ 2^{m+1} \Gamma(m + \frac{3}{2}) &= 2^{m+1} (m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= (2m+1)(2m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے نسب نما میں

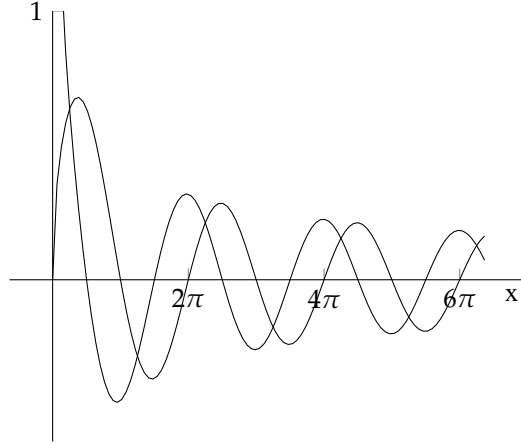
$$2^{2m+1} m! \Gamma(m + \frac{3}{2}) = (2m+1)2m(2m-1)(2m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi} = (2m+1)! \sqrt{\pi}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

مساوات 5.98 استعمال کرتے ہوئے

$$[\sqrt{x} J_{\frac{1}{2}}(x)]' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x = \sqrt{x} J_{-\frac{1}{2}}(x)$$



شکل 5.8: بیسل تفرع $J_{\frac{1}{2}}(x)$ اور $J_{-\frac{1}{2}}(x)$

لکھا جاسکتا ہے جس میں دائیں ہاتھ کے مساوات کو لیتے ہوئے \sqrt{x} سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.102 کی دوسری مساوات ملتی ہے۔

□

عمومی حل۔ خطی طور تابعیت

بیسل مساوات 5.76 کے عمومی حل کے لئے $J_\nu(x)$ کے علاوہ خطی طور غیر تابع دوسرا حل بھی درکار ہے۔ غیر عدد صحیح ν کی صورت میں دوسرا حل $r_2 = -\nu$ (اشاری مساوات 5.79) استعمال کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔ یوں دوسرا خطی طور غیر تابع حل مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $-\nu$ پر کرنے سے حاصل ہو گا۔

$$(5.103) \quad J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m - \nu + 1)}$$

ν غیر عدد صحیح ہونے کی صورت میں J_ν اور $J_{-\nu}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔ یوں غیر عدد صحیح ν کی صورت میں $x \neq 0$ پر مساوات بیسل کا عمومی حل

$$(5.104) \quad y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

ہو گا۔

v عدد صحیح ہونے کی صورت میں $J_n(x)$ اور $J_{-n}(x)$ کا تعلق

$$(5.105) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ہے لہذا یہ خطی طور تابع ہیں اور ان سے عمومی حل نہیں لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں مساوات 5.105 کو ثابت کریں۔

ثبوت : مساوات 5.103 میں v کی قیمت کو عدد صحیح کے قریب تر لانے سے گیما تفاعل کی قیمت (صفحہ 1066 پر شکل 5.ب) لامتناہی کی طرف بڑھتی ہے۔ یوں $v = n$ کی صورت میں مساوات 5.103 کے ابتدائی n ارکان کے عددی سر، گیما تفاعل کی قیمت لامتناہی ہونے کی بنا، صفر ہوں گے اور یوں تسلسل $m = n$ سے شروع ہو گا۔ مساوات 5.93 کے تحت $\Gamma(m - n + 1) = (m - n)!$ ہے لہذا درج ذیل لکھا جائے گا

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! (m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{2s+n} (n+s)! s!} \quad (m = n + s)$$

جو $(-1)^n J_n(x)$ ہے۔

□

اگلے حصے میں $v = n$ کی صورت میں مساوات بیسل کا عمومی حل، بیسل تفاعل کی دوسری قسم Y_v کی مدد سے، حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 5.58: ثابت کریں کہ $J_n(x)$ تمام x کے لئے مرکب ہے۔

جواب: $\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|_{m \rightarrow \infty} = 0$ ہے لہذا $\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{2^{2m+n} m! (n+m)!}{2^{2m+2+n} (m+1)! (n+m+1)!} = \frac{1}{2^2 (m+1) (n+m+1)}$ اور یوں $R \rightarrow \infty$ ہو گا۔

سوال 5.59 تا سوال 5.68 کے عمومی حل، جہاں ممکن ہو، J_v اور J_{-v} استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔ جہاں اضافی معلومات دی گئی ہوں، وہاں اس کو استعمال کرتے ہوئے بیسل مساوات کی صورت حاصل کریں۔

سوال 5.59: $x^2 y'' + xy'(x^2 - \frac{4}{9})y = 0$ جواب: چونکہ $\nu = \frac{2}{3}$ ہے جو غیر عدد صحیح ہے لہذا عمومی حل $y = c_1 J_{\frac{2}{3}} + c_2 J_{-\frac{2}{3}}$ ہے۔

سوال 5.60: $xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$ ($z = \sqrt{x}$) جواب: $y = c_1 J_0(\sqrt{x})$

سوال 5.61: $xy'' + y' + \frac{x}{4}y = 0$ ($z = \frac{x}{2}$) جواب: $y = c_1 J_0(\frac{x}{2})$

سوال 5.62: $x^2 y'' + xy'(\frac{x^2}{9} - \frac{1}{9})y = 0$ ($z = \frac{x}{3}$) جواب: $y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{3}) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(\frac{x}{3})$

سوال 5.63: $y'' + (e^{2x} - 16)y = 0$, ($z = e^x$) جواب: $y = c_1 J_4(e^x)$

سوال 5.64: $x^2 y'' + xy'(\lambda^2 x^2 - \nu^2)y = 0$, ($z = \lambda x$) جواب: $y = c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 J_{-\nu}(\lambda x)$ جہاں $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

سوال 5.65: $x^2 y'' + xy' + (9x^2 - 1)y = 0$, ($z = 3x$) جواب: $y = c_1 J_1(3x)$

سوال 5.66: $(x - \frac{1}{2})^2 y'' + (x - \frac{1}{2})y' + 4x(x - 1)y = 0$ ($z = 2x - 1$) جواب: $y = c_1 J_1(2x - 1)$

سوال 5.67: $xy'' + (2\nu + 1)y' + xy = 0$, ($y = x^{-\nu}u$) جواب: $y = x^{-\nu}(c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x))$ جہاں $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

سوال 5.68: $x^2 y'' + \frac{1}{4}(x + \frac{3}{4})y = 0$, ($y = u\sqrt{x}$, $z = \sqrt{x}$) جواب: $y = c_1 \sqrt{x} J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) + c_2 \sqrt{x} J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$

سوال 5.69: مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$(5.106) \quad J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right)$$

باب 5. متفرقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفرقی

سوال 5.70: کیا آپ مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے اخذ کر سکتے ہیں کہ $v = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots$ کی صورت میں $J_v(x)$ بنیادی تفاعل ہیں۔

جواب: جی ہاں۔

سوال 5.71: باہم پیچاں صفر

مساوات 5.98، مساوات 5.99 اور مسئلہ رول⁵⁹ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $J_n(x)$ کے کسی بھی دو متواتر صفروں کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

جواب: مسئلہ رول کہتا ہے کہ کسی بھی حقیقی قابل تفرق تفاعل کے دو متواتر برابر قیمت نقطوں کے مابین کم از کم ایک ایسا نقطہ (نقطہ فاصل) پایا جاتا ہے جس پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔ اگر $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 پر پائے جاتے ہوں تب ہم $x_1^{-n} J_n(x_1) = x_2^{-n} J_n(x_2) = 0$ لکھ سکتے ہیں۔ یوں مسئلہ رول کے تحت x_1 اور x_2 کے مابین کسی نقطے پر تفاعل $x^{-n} J_n(x)$ کا تفرق صفر $[x^{-n} J_n(x)]' = 0$ ہو گا جو مساوات 5.99 کے استعمال سے ایسے نقطے پر $x^{-n} J_{n+1}(x) = 0$ یعنی $J_{n+1}(x) = 0$ دیتا ہے۔ اسی طرح اگر $J_{n+1}(x)$ کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 پر پائے جاتے ہوں تب $J_{n+1}(x_3) = J_{n+1}(x_4) = 0$ اور $x_3^{n+1} J_{n+1}(x_3) = x_4^{n+1} J_{n+1}(x_4) = 0$ اور x_4 کے مابین کسی نقطے پر $[x^{n+1} J_{n+1}(x)]' = 0$ ہو گا جس سے مساوات 5.98 کے تحت ایسے نقطے پر $x^{n+1} J_n(x) = 0$ یعنی $J_n(x) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ثابت ہوا کہ J_{n+1} کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 کے مابین $J_n(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 5.72: تفرقی مساوات سے ایک درجی تفرق کا اخراج

درج ذیل تفرقی مساوات میں $y(x) = u(x)v(x)$ پر کرتے ہوئے ایسا $v(x)$ دریافت کریں کہ حاصل تفرقی مساوات میں پہلے درجے کا تفرق نہ پایا جاتا ہو۔ حاصل تفرقی مساوات بھی حاصل کریں۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جوابات: $v = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$ اور مساوات $u'' + [q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p']u = 0$ میں u' نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 5.73: گزشتہ سوال میں تفرقی مساوات سے ایک درجی تفرق کا اخراج کیا گیا۔ ثابت کریں کہ مساوات بیسل 5.76 سے ایک درجی تفرق کا اخراج $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ پر کرتے ہوئے ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوگی۔

$$(5.107) \quad x^2 u'' + (x^2 + \frac{1}{4} - v^2)u = 0$$

سوال 5.74: مساوات 5.107 کا عمومی حل $v = \frac{1}{2}$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $u = A \cos x + B \sin x$ ہے لہذا $y = \frac{u}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(A \cos x + B \sin x)$ ہو گا۔

سوال 5.75 تا سوال 5.80 مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کی مدد سے حل ہوں گے۔

$$\text{سوال 5.75: ثابت کریں} \quad J_0'(x) = -J_1(x), \quad J_1'(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad J_2'(x) = \frac{1}{2}[J_1(x) - J_3(x)]$$

سوال 5.76: بیسل مساوات 5.76 کو مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 سے حاصل کریں۔

سوال 5.77: درج ذیل ثابت کریں

$$\begin{aligned} \int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx &= x^\nu J_\nu(x) + c \\ \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx &= -x^{-\nu} J_\nu(x) + c \\ \int J_{\nu+1}(x) dx &= \int J_{\nu-1}(x) dx - 2J_\nu(x) \end{aligned}$$

سوال 5.78: $\int J_3(x) dx$

جواب: مساوات 5.101 میں $v = 2$ پر کر کے مکمل $\int J_3 dx = \int J_1 dx - 2J_2$ ہو گا اور مساوات 5.99

میں $v = 0$ پر کرتے ہوئے مکمل $\int J_1 dx = -J_0$ دیتا ہے لہذا $\int J_3 dx = -J_0 - 2J_2 + c$

سوال 5.79: مکمل بالخصوص استعمال کرتے ہوئے حل کریں۔ $\int x^3 J_0(x) dx$

$$\text{جواب:} \quad \int x^3 J_0 dx = \int x^2(x J_0) dx = x^2(x J_1) - 2 \int x^2 J_1 dx = x^3 J_1 - 2x^2 J_2 + c$$

سوال 5.80: مکمل بالخصوص سے حل کریں۔ $\int x^2 J_0 dx$

جواب: $\int x^2 J_0 dx = x^2 J_1 + x J_0 - \int J_0 dx$ جہاں $\int J_0 dx$ کسی بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں

لکھا جاسکتا ہے بلکہ اس کی قیمت جدول کی مدد سے لکھی جاتی ہے۔

5.5. بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل

بیسل مساوات 5.76 کا کسی بھی v کے لئے عمومی حل حاصل کرنے کی خاطر بیسل تفاعل کی دوسری قسم⁶⁰ $Y_v(x)$ حاصل کرتے ہیں۔ شروع $v = n = 0$ سے کرتے ہیں۔

$n = 0$ کی صورت میں مساوات بیسل کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (5.108)$$

لکھا جاسکتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 سے دوہرا جذر $r = 0$ ملتا ہے جو صفحہ 336 پر مسئلہ فروبنیوس میں بتلائی گئی دوسری صورت کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں مساوات 5.108 کا ایک حل $J_0(x)$ ہو گا جبکہ اس کا دوسرا حل مساوات 5.57 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m \quad (5.109)$$

لکھا جائے گا۔ مساوات 5.109 اور اس کے تفرقات

$$y_2' = J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = J_0'' \ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-2}$$

کو مساوات 5.108 میں پر کرتے ہیں (اگرچہ آخری مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ لکھنا چاہیے، البتہ $m = 1$ پر دیا گیا مجموعہ صفر دیتا ہے لہذا مجموعے کا پہلا رکن $m = 1$ لکھنا ممکن ہے)۔ اب چونکہ J_0 تفرقی مساوات کا حل ہے لہذا تین لوگار تھمی ارکان کا مجموعہ $(xJ_0'' + J_0' + xJ_0) \ln x$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں بقایا درج ذیل ہو گا۔

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$$

اس میں پہلے اور دوسرے مجموعوں کو جمع کرتے ہوئے $\sum m^2 A_m x^{m-1}$ لکھا کر جبکہ J_0' کی طاقی تسلسل کو مساوات 5.87 کا جزو در جزو تفرق لیتے اور $\frac{m!}{m} = (m-1)!$ استعمال کرتے ہوئے

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m} (m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m! (m-1)!}$$

لکھ کر درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.110) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m! (m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$$

اس مساوات میں x^0 کمتر طاقت، جو صرف دوسرے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $A_1 = 0$ ملتا ہے۔ اب x^{2s} کے عددی سروں، جو پہلے تسلسل میں نہیں پایا جاتا، کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہیں۔

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots)$$

اب چونکہ $A_1 = 0$ ہے لہذا $A_3 = 0$ ، $A_5 = 0$ ، \dots ہوں گے۔

x^{2s+1} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $s = 0$ کے لئے

$$-1 + 4A_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{1}{4}$$

جبکہ بقایا s پر

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots)$$

لکھا جائے گا۔ اس سے $s = 1$ کے لئے

$$\frac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 = -\frac{3}{128}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ عمومی طور پر

$$(5.111) \quad A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right), \quad (m = 1, 2, \dots)$$

ملتا ہے۔ قوسین میں بند قیمت کو h_m لکھ کر،

$$(5.112) \quad h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

باب 5. ط متقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسیر

مساوات 5.111 اور $A_1 = A_3 = \dots = 0$ کو مساوات 5.109 میں پر کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \\ (5.113) \quad &= J_0(x) \ln x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{128} x^4 + \frac{11}{13824} x^6 - + \dots \end{aligned}$$

چونکہ J_0 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہذا یہ مساوات بمیل 5.76 کی حل کی اساس ہیں۔ ہم J_0 اور y_2 سے کوئی بھی مخصوص حل، $a(y_2 + bJ_0)$ جہاں $a \neq 0$ اور b مستقل ہیں، لکھتے ہوئے اساس کی مختلف صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ روایتی طور پر $a = \frac{2}{\pi}$ اور $b = \gamma - \ln 2$ چنے جاتے ہیں جہاں $\gamma = 0.57721566490 \dots$ مستقل یولر⁶¹ کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے جہاں s کی قیمت لامتناہی کو چھونے کی کوشش کرتی ہے۔

$$(5.114) \quad \gamma = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} - \ln s$$

اس طرح لکھا گیا دوسرا حل درجہ صفر بیسل تفاعل کی دوسری قسم⁶² (شکل 5.9) یا درجہ صفر نیومن تفاعل⁶³ کہلاتا⁶⁴ اور $Y_0(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$(5.115) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right]$$

لکھا جائے گا جہاں h_m کی قیمت مساوات 5.112 دیتی ہے۔ جیسا شکل 5.9 میں دکھایا گیا ہے کم قیمت کی مثبت x پر Y_0 کی صورت $\ln x$ کی طرح ہے اور $x \rightarrow \infty$ پر $Y_0(x) \rightarrow \infty$ ہو گا۔

کیا جاتا ہے۔ ان میں بھی لوگار تھمی جزو پایا جاتا ہے۔

دوسرے حل کا دارومدار اس حقیقت پر ہے کہ آیا v کا درجہ عدد صحیح ہے یا نہیں۔ اس پیچیدگی سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر دوسرے حل کو درج ذیل بیان کیا جاتا ہے جو تمام v کے لئے قابل استعمال ہے۔

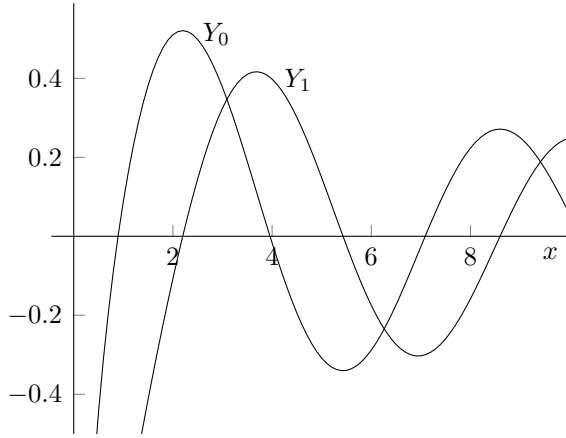
$$\begin{aligned} Y_\nu(x) &= \frac{1}{\sin \nu \pi} [J_\nu(x) \cos \nu x - J_{-\nu}(x)] \quad (\text{الف}) \\ (5.116) \quad Y_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

⁶¹Euler constant

⁶²Bessel function of the second kind of order zero

⁶³Neumann's function of order zero

⁶⁴کارل نیومن [1832-1925] جرمنی کے ریاضی دان اور ماہر طبیعیات۔



شکل 5.9: بیسل تفاعل کے دوسرے اقسام۔

درج بالا تفاعل کو درجہ ν بیسل تفاعل کی دوسری قسم⁶⁵ یا درجہ ν نیومن تفاعل کہتے ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ J_ν اور Y_ν تمام ν اور تمام $x (> 0)$ کے لئے خطی طور غیر تابع ہیں۔

غیر عددی صحیح درجہ ν کے لئے چونکہ $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ بیسل مساوات کے حل ہیں لہذا $Y_\nu(x)$ بھی بیسل مساوات کا حل ہے۔ اب چونکہ ایسی ν کے لئے $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ خطی طور غیر تابع ہیں اور $Y_\nu(x)$ میں $J_{-\nu}(x)$ پایا جاتا ہے لہذا $J_\nu(x)$ اور $Y_\nu(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ مزید یہ کہ مساوات 5.116 ب کو ثابت کیا جاسکتا ہے لہذا عدد صحیح درجہ کے لئے $Y_n(x)$ بیسل مساوات کا حل ہے۔ آپ دیکھیں گے کہ $Y_n(x)$ کی تسلسل میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے لہذا $J_n(x)$ اور $Y_n(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ $Y_n(x)$ کی تسلسل لکھنے کی خاطر $J_\nu(x)$ کی تسلسل 5.96 اور $J_{-\nu}(x)$ کی تسلسل 5.103 کو مساوات 5.116 الف میں پر کرتے ہوئے $\nu \rightarrow n$ کرتے ہیں۔

$$(5.117) \quad Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{x^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n} m! (m+n)!} x^{2m} \\ - \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n} m!} x^{2m}$$

Bessel function of the second kind of order ν^{65}

لکھا جا سکتا ھے جہاں $x > 0$ اور $n = 0, 1, \dots$ جبکہ

$$h_0 = 0, \quad h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s} \quad (s = 1, 2, \dots)$$

ہیں اور $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.117 میں آخری مجموعے کی جگہ صفر لکھا جاتا ھے۔ درجہ صفر $n = 0$ پر مساوات 5.117 عین مساوات 5.115 کی صورت اختیار کرتی ھے۔ اس کے علاوہ درج ذیل ثابت کیا جا سکتا ھے۔

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad (5.118)$$

ان نتائج کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 5.4: مساوات بیسل کا عمومی حل تمام ν کے لئے مساوات بیسل کا عمومی حل درج ذیل ھے۔

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x) \quad (5.119)$$

بعض اوقات حقیقی x کے لئے مساوات بیسل کے مخلوط حل درکار ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں درج ذیل خطی طور غیر تابع مخلوط حل استعمال کیے جاتے ہیں جنہیں درجہ ν بیسل تفاعل کی تیسری قسم⁶⁶ یا درجہ ν پہلی اور دوسری ہینکل تفاعل⁶⁷ کہا جاتا ھے۔

$$\begin{aligned} H_\nu^1(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x) \\ H_\nu^2(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x) \end{aligned} \quad (5.120)$$

سوالات

سوال 5.81 تا سوال 5.89 کا عمومی حل J_ν اور Y_ν کی صورت میں حاصل کریں۔ بتلائیں کہ کن سوالات میں Y_ν کی جگہ $J_{-\nu}$ استعمال کرنا ممکن ھے۔ دی گئی اضافی معلومات استعمال کریں۔

⁶⁶Bessel function of the third kind of order ν

⁶⁷Hankel functions

⁶⁸ہرمنڈسکل [1839-1873] جرمنی کے ریاضی دان۔

سوال 5.81: $x^2y'' + xy' + (x^2 - 25)y = 0$ جواب: $y = c_1J_5(x) + c_2Y_5(x)$ ؛ چونکہ v عدد صحیح ہے لہذا $J_{-5}(x)$ قابل استعمال نہیں ہے۔

سوال 5.82: $x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)y = 0$ جواب: $y = c_1J_{\sqrt{3}}(x) + c_2Y_{\sqrt{3}}(x)$ ؛ چونکہ v عدد صحیح نہیں ہے لہذا $J_{-\sqrt{3}}(x)$ قابل استعمال ہے۔

سوال 5.83: $9x^2y'' + 9xy' + (z^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{4})y = 0, \quad x = z^3$ جواب: $y = c_1J_{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{3}}) + c_2Y_{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{3}})$

سوال 5.84: $x^2y'' + xy' + (4x^4 - \frac{16}{9})y = 0, \quad z = x^2$ جواب: $y = c_1J_{\frac{2}{3}}(x^2) + c_2Y_{\frac{2}{3}}(x^2)$

سوال 5.85: $9x^2y'' + 9xy' + (4x^{\frac{4}{3}} - 25)y = 0, \quad z = x^{\frac{2}{3}}$ جواب: $y = c_1J_{\frac{5}{2}}(x^{\frac{2}{3}}) + c_2Y_{\frac{5}{2}}(x^{\frac{2}{3}})$

سوال 5.86: $y'' + k^2x^2y = 0, \quad (y = u\sqrt{x}, \quad z = \frac{kx^2}{2})$ جواب: $y = \sqrt{x}[c_1J_{\frac{1}{4}}(\frac{kx^2}{2}) + c_2Y_{\frac{1}{4}}(\frac{kx^2}{2})]$

سوال 5.87: $xy'' - 5y' + xy = 0, \quad y = x^3u$ جواب: $y = x^3[c_1J_3(x) + c_2Y_3(x)]$

سوال 5.88: $xy'' - y' + xy = 0, \quad y = xu$ جواب: $y = x[c_1J_1(x) + c_2Y_1(x)]$

سوال 5.89: $xy'' + 5y' + xy = 0, \quad y = \frac{u}{x^2}$ جواب: $y = \frac{1}{x^2}[c_1J_2(x) + c_2Y_2(x)]$

سوال 5.90: ترمیم شدہ درجہ v بیسل تفاعل کی پہلی قسم
ترمیم شدہ درجہ v بیسل تفاعل کی پہلی قسم کی تعریف $I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix)$ ہے جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ ثابت کریں کہ $I_\nu(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہے۔

$$(5.121) \quad x^2y'' + xy' - (x^2 + v^2)y = 0$$

باب 5. مل متق تسلسل س ساد تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

جواب: $I_\nu(x)$ کو دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ حاصل کریں۔ یہی ثبوت ہے۔

سوال 5.91: ترمیم شدہ بیسل تفاعل $I_\nu(x)$ کی درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$(5.122) \quad I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m + \nu + 1)}$$

سوال 5.92: $I_\nu(x)$ حقیقی ہے
ثابت کریں کہ حقیقی x اور حقیقی ν کے لئے $I_\nu(x)$ حقیقی ہے۔ ثابت کریں کہ $x \neq 0$ ہوتے ہوئے
 $I_\nu(x) \neq 0$ ہو گا۔ ثابت کریں کہ $I_{-n}(x) = I_n(x)$ کے برابر ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 5.93: ترمیم شدہ بیسل تفاعل
ثابت کریں کہ تفاعل $K_\nu(x)$ ، جسے ترمیم شدہ بیسل تفاعل کی تیسری (بعض اوقات دوسری) قسم کہتے ہیں،

$$(5.123) \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]$$

تفرقی مساوات 5.121 کا حل ہے۔

سوال 5.94: مینکل تفاعل
ثابت کریں کہ مینکل تفاعل 5.120 مساوات بیسل کے حل کی اساس ہیں۔

5.6 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ

لیٹنڈر تفاعل (حصہ 5.2) اور بیسل تفاعل کی ایک خاصیت جسے قائمیت⁶⁹ کہتے ہیں انجینیری حساب میں نمایاں کردار ادا کرتی ہے۔ اس حصے میں قائمیت سے وابستہ تصورات اور علامت نویسی سیکھتے ہیں۔ اگلے حصے میں ایسی سرحدی قیمت

orthogonality⁶⁹

مسائل (سٹیورم لیوویل مسائل) پر غور کیا جائے گا جن کے حل قائم الزاویہ تفاعل کا سلسلہ دیتے ہیں۔ ان مسائل پر غور کے دوران حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے لیٹنڈر تفاعل اور بیسل تفاعل پر غور کیا جائے گا۔

آئیں پہلے تفاعل کی قائمیت کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر حقیقی قیمت تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ معین ہیں اور اس وقفے پر ان تفاعل کے حاصل ضرب $g_m(x)g_n(x)$ کا مکمل موجود ہے۔ اس مکمل کو روایتی طور پر (g_m, g_n) لکھا جاتا ہے۔

$$(5.124) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx$$

اگر درج بالا مکمل صفر کے برابر ہو تب تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر قائم الزاویہ⁷⁰ کہلاتے ہیں۔

$$(5.125) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

حقیقی قیمت تفاعل کا سلسلہ $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، ... اس صورت وقفہ $a \leq x \leq b$ پر قائم الزاویہ سلسلہ⁷¹ کہلائے گا جب اس وقفے پر یہ تمام تفاعل معین اور تمام مکمل (g_m, g_n) موجود ہوں اور اس سلسلے میں تمام ممکنہ منفرد جوڑیوں کے یہ مکمل صفر کے برابر ہوں۔

(g_m, g_m) کے غیر صفر جذر کو g_m کا معیار⁷² کہتے ہیں جسے عموماً $\|g_m\|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(5.126) \quad \|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x) dx}$$

ہم پوری بحث کے دوران درج ذیل فرض کریں گے۔

عمومی مفروضہ: تمام تفاعل جن پر غور کیا جا رہا ہو محدود ہیں، جن مکمل پر غور کیا جا رہا ہو وہ موجود ہیں اور معیار غیر صفر ہیں۔

ظاہر ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر ایسے قائم الزاویہ سلسلہ g_1 ، g_2 ، ... جن میں ہر تفاعل کا معیار اکائی (1) ہو درج ذیل تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(5.127) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

orthogonal⁷⁰
orthogonal set⁷¹
norm⁷²

ایسے سلسلے کو وقفہ $a \leq x \leq b$ پر معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ⁷³ کہتے ہیں۔

کسی بھی قائمہ الزاویہ سلسلے کے ہر تفاعل کو، زیر غور وقفہ پر، اس تفاعل کی معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 5.22: تفاعل $g_m(x) = \sin mx$ جہاں $m = 1, 2, \dots$ کا سلسلہ وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے کیونکہ ان تفاعل کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (ضمیمہ ب میں مساوات 11.ب)۔

$$(5.128) \quad \begin{aligned} (g_m, g_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx \quad (m \neq n) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \, dx = 0 \end{aligned}$$

ان تفاعل کا معیار $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$ ہے۔

$$\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi \quad (m = 1, 2, \dots)$$

یوں اس سلسلے سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}$$

□

مثال 5.23: کوسائن تفاعل $\cos mx$ کے سلسلے کو بھی مثال 5.22 کی طرح قائمہ الزاویہ ثابت کیا جاسکتا ہے۔ مزید تمام $m, n = 0, 1, \dots$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \, dx = 0$$

یوں ظاہر ہے کہ درج ذیل سلسلہ وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots$$

جس سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots$$

□

قائمہ الزاویہ سلسلہ استعمال کرتے ہوئے مختلف تغیر کو تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ وقفہ $1 \leq x \leq b$ پر $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، ... کوئی بھی قائمہ الزاویہ سلسلہ ہے۔ اب فرض کریں کہ $f(x)$ کوئی بھی تغیر ہے جس کو ان $g(x)$ کی ایسی تسلسل

$$(5.129) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots$$

لکھنا ممکن ہو جو مرکوز ہو۔ اس تسلسل کو $f(x)$ کی عمومی فوریر تسلسل⁷⁴ کہتے ہیں جبکہ c_1 ، c_2 ، ... کو ان قائمہ الزاویہ سلسلے کے لحاظ سے تسلسل کے فوریر مستقل⁷⁵ کہتے ہیں۔

قائمیت کی بنا ان مستقل کو نہایت آسانی سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 5.129 کے دونوں اطراف کو $g_m(x)$ (معیّن m) سے ضرب دیتے ہوئے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر مکمل لینے سے درج ذیل ملتا ہے جہاں فرض کیا گیا ہے کہ جزو در جزو مکمل لیا جاسکتا ہے۔

$$(f, g_m) = \int_a^b f g_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (g_n, g_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n g_m dx$$

بائیں ہاتھ جن نکلمات میں $n = m$ ہو، وہ $(g_n, g_m) = \|g_m\|^2$ کے برابر ہوں گے جبکہ قائمیت کی بنا باقی تمام نکلمات صفر کے برابر ہوں گے لہذا

$$(5.130) \quad (f, g_m) = c_m \|g_m\|^2$$

ہو گا اور یوں فوریر مستقل کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.131) \quad c_m = \frac{(f, g_m)}{\|g_m\|^2} = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b f(x) g_m(x) dx \quad (m = 1, 2, \dots)$$

مثال 5.24: فوریر تسلسل

مساوات 5.129 کو مثال 5.23 کے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ کی صورت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(5.132) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

اور مساوات 5.131 اب درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.133)$$

اب اگر تسلسل 5.132 مرکوز ہو تب یہ $f(x)$ کی فوریئر تسلسل کہلائے گا اور a_0 ، a_n ، b_n اس کے فوریئر عددی سر⁷⁶ کہلائیں گے۔ کلیات 5.133 کو ان عددی سر کے یولر کلیات⁷⁷ کہتے ہیں۔ □

ایسے کئی اہم سلسلے پائے جاتے ہیں جو از خود قائمہ الزاویہ نہیں ہیں البتہ ان کے حقیقی تفاعل g_1 ، g_2 ، ... درج ذیل پر پورا اترتے ہیں جہاں $p(x)$ کوئی غیر صفر تفاعل ہے۔

$$\int_a^b p(x) g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (5.134)$$

ہم کہتے ہیں کہ ایسا سلسلہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل قدر⁷⁸ $p(x)$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ ہے۔ g_m کے معیار کی تعریف اب درج ذیل ہے۔

$$\|g_m\| = \sqrt{\int_a^b p(x) g_m^2 dx} \quad (5.135)$$

اگر سلسلے کے ہر تفاعل g_m کا معیار اکائی (1) ہو تب وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے یہ سلسلہ معیاری قائمہ الزاویہ کہلائے گا۔

ہم $h_m = \sqrt{p} g_m$ اور $h_n = \sqrt{p} g_n$ لکھ کر مساوات 5.134 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\int_a^b h_m(x) h_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

اور یوں ظاہر ہے کہ h_m تفاعل قائمہ الزاویہ ہیں۔

Fourier coefficients⁷⁶
Euler formulae⁷⁷
weight function⁷⁸

اگر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے، وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تفاعل $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، ... قائمہ الزاویہ ہوں اور اگر کسی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل عمومی فوریر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو (مساوات 5.129 دیکھیں)

$$(5.136) \quad f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots$$

تب اس سلسلے کے لحاظ سے فوریر مستقل c_1 ، c_2 ، ... کو بھی پہلی کی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے بس فرق اتنا ہے کہ اب مساوات 5.136 کے دونوں اطراف کو (g_m کی بجائے) pg_m سے ضرب دے کر آگے بڑھا جائے گا۔ باقی سب کچھ پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں تفاعل کا معیار اب مساوات 5.135 دے گا۔

$$(5.137) \quad c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b p(x) f(x) g_m(x) dx \quad (m = 1, 2, \dots)$$

سوالات

سوال 5.95 تا سوال 5.104 میں ثابت کریں کہ دیے گئے وقفے پر دیا گیا سلسلہ قائمہ الزاویہ ہے۔ معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ بھی دریافت کریں۔

سوال 5.95: $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}$

سوال 5.96: $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$ ، $0 \leq x \leq \pi$
جوابات: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 3x, \dots$

سوال 5.97: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \dots$ ، $-1 \leq x \leq 1$
جوابات: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \dots$

سوال 5.98: $1, \cos 2x, \cos 4x, \cos 6x, \dots$ ، $0 \leq x \leq \pi$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 6x, \dots$

سوال 5.99: $1, \cos \frac{2n\pi}{T} x, \dots$ ، $(n = 1, 2, \dots)$ ، $0 \leq x \leq T$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2n\pi}{T} x, \dots$

باب 5. ط متقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسیر

$$\text{سوال 5.100: } \sin \frac{2n\pi}{T}x, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad 0 \leq x \leq T$$

جوابت: $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2n\pi}{T}x$

$$\text{سوال 5.101: } (\text{حصہ 5.2 کے لیٹنڈر تفاعل}) \quad -1 \leq x \leq 1$$

جوابت: $\frac{P_0}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}P_1, \sqrt{\frac{5}{2}}P_2, \sqrt{\frac{7}{2}}P_3$

$$\text{سوال 5.102: } \text{ایسے } a_0, b_0, \dots, c_2 \text{ دریافت کریں کہ وقفہ } -1 \leq x \leq 1 \text{ پر } g_2, g_1 \text{ اور } g_3 \text{ معیاری قائمہ الزاویہ ہوں۔ حاصل جواب کا لیٹنڈر تفاعل کے ساتھ موازنہ کریں۔}$$

$$g_1 = a_0, g_2 = b_0 + b_1x, g_3 = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

$$\text{سوال 5.103: ثابت کریں کہ اگر وقفہ } a \leq x \leq b \text{ پر تفاعل } g_1(x), g_2(x), \dots \text{ قائمہ الزاویہ ہوں تب وقفہ } \frac{a-k}{c} \leq t \leq \frac{b-k}{c} \text{ پر تفاعل } g_1(ct+k), g_2(ct+k), \dots \text{ قائمہ الزاویہ ہوں گے۔}$$

سوال 5.104: سوال 5.103 کے نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے سوال 5.95 سے سوال 5.99 کا نتیجہ حاصل کریں۔

5.7 مسئلہ سیورم لیوویل

انجینئری حساب میں کئی اہم قائمہ الزاویہ سلسلوں کے تفاعل وقفہ $a \leq x \leq b$ پر بطور درج ذیل دو درجی تفرقی مساوات کے حل سامنے آتے ہیں

$$(5.138) \quad [r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0$$

جو درج ذیل شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

$$(5.139) \quad \begin{aligned} (الف) \quad k_1 y(a) + k_2 y'(a) &= 0 & (k_1 \text{ اور } k_2 \text{ بیکوقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \\ (ب) \quad l_1 y(b) + l_2 y'(b) &= 0 & (l_1 \text{ اور } l_2 \text{ بیکوقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \end{aligned}$$

یہاں λ مقدار معلوم ہے جبکہ k_1, k_2, l_1, l_2 حقیقی مستقل ہیں۔

مساوات 5.138 کو مساوات سٹیورم لیوویل⁷⁹ کہتے ہیں۔ مساوات 5.139 وقفے کے آخری سروں a اور b سے تعلق رکھتے ہیں لہذا انہیں سرحدی شرائط کہتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ لیٹنڈر، بیمل اور دیگر مساوات کو مساوات 5.138 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات اور سرحدی شرائط مل کر سرحدی مسئلہ⁸⁰ دیتے ہیں۔ مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 کے سرحدی مسئلے کو سٹیورم لیوویل مسئلہ⁸¹ کہتے ہیں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ λ کی کسی بھی قیمت کے لئے سٹیورم لیوویل مسئلے کا غیر اہم صفر حل $y \equiv 0$ پایا جاتا ہے جو پورے وقفے پر $y(x) = 0$ دیتا ہے۔ اگر غیر صفر اہم حل $y \not\equiv 0$ موجود ہوں تو انہیں امتیازی تفاعل یا امتیازی تفاعل⁸² کہتے ہیں اور λ کی ان قیمتوں جن کے لئے مسئلے کا حل موجود ہو کو امتیازی قدر یا آنگنی قدر⁸³ کہتے ہیں۔

مثال 5.25: درج ذیل سٹیورم لیوویل مسئلے کے امتیازی قدر اور امتیازی تفاعل دریافت کریں۔

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

حل: λ کی منفی قیمتوں $\lambda = -v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = c_1 e^{vx} + c_2 e^{-vx}$$

دیے گئے سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے $c_1 = c_2 = 0$ اور $y \equiv 0$ ملتا ہے جو امتیازی تفاعل نہیں ہے۔ $\lambda = 0$ کی صورت میں بھی یہی صورت حال پائی جاتی ہے۔ مثبت $\lambda = v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = A \cos vx + B \sin vx$$

پہلی سرحدی شرط سے $y(0) = A = 0$ ملتا ہے۔ دوسری سرحدی شرط سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$y(\pi) = B \sin v\pi = 0 \implies v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$v = 0$ سے $y \equiv 0$ ملتا ہے جبکہ $B = 1$ لیتے ہوئے $\lambda = v^2 = 1, 4, 9, \dots$ کے لئے

$$y(x) = \sin vx \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

⁷⁹ Sturm-Liouville equation

⁸⁰ boundary problem

⁸¹ سونڈر لینڈ کے ریاضی دان جیکوبس چارلس فرائگھٹس سٹیورم [1803-1882] اور فرانسیسی ریاضی دان یوسف لیوویل [1809-1882]

⁸² eigenfunctions

⁸³ eigenvalue

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تصریقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

ملتا ہے۔ یوں اس مسئلے کے امتیازی اقدار $\lambda = v^2$ ہیں جہاں $v = 1, 2, \dots$ ہیں اور ان کے مطابقتی امتیازی تفاعل $y(x) = \sin vx$ ہیں۔

□

سٹیورم لیوویل مسئلہ درج ذیل قائمیت کی خاصیت رکھتا ہے۔

مسئلہ 5.5: امتیازی تفاعل کی قائمیت

فرض کریں کہ مساوات 5.138 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلے میں p, q, r اور r' حقیقی قیمت تفاعل ہیں جو وقفہ $a \leq x \leq b$ پر استمراری ہیں۔ فرض کریں کہ دو منفرد امتیازی قدر λ_m اور λ_n کے لئے مساوات 5.138 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلے کے مطابقتی حل $y_m(x)$ اور $y_n(x)$ ہیں۔ اس وقفے پر تفاعل قدر p کے لحاظ سے y_m اور y_n قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

اگر $r(a) = 0$ ہو تب مساوات 5.139-الف کی ضرورت نہیں ہوگی لہذا اس کو مسئلے سے نکالا جاسکتا ہے۔ اسی طرح اگر $r(b) = 0$ تب مساوات 5.139-ب کی ضرورت نہیں ہوگی لہذا اس کو مسئلے سے نکالا جاسکتا ہے۔ اگر $r(a) = r(b)$ ہو تب مساوات 5.139 کی جگہ درج ذیل شرط لکھی جاسکتی ہے۔

$$(5.140) \quad y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

ثبوت: چونکہ y_m اور y_n اس مسئلے کے حل ہیں لہذا یہ مساوات 5.138 پر پورا اترتے ہیں اور یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(ry'_m)' + (q + \lambda_m p)y_m = 0$$

$$(ry'_n)' + (q + \lambda_n p)y_n = 0$$

پہلی مساوات کو y_n اور دوسری مساوات کو $-y_m$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعے لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n)py_my_n &= y_m(ry'_n)' - y_n(ry'_m)' \\ &= [(ry'_n)y_m - (ry'_m)y_n]' \end{aligned}$$

آپ آخری مساوات $[(ry'_n)y_m - (ry'_m)y_n]'$ کو کھول کر پہلی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کر سکتے ہیں۔ چونکہ قیاس کے تحت r اور r' استمراری ہیں جبکہ y_m اور y_n مسئلے کے حل ہیں لہذا $[(ry'_n)y_m - (ry'_m)y_n]'$ استمراری ہے۔ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر اس کا مکمل لیتے ہیں

$$(5.141) \quad (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b py_my_n dx = [r(y'_ny_m - y'_my_n)]_a^b$$

جہاں دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہے۔

$$(5.142) \quad r(b)[y'_n(b)y_m(b) - y'_m(b)y_n(b)] - r(a)[y'_n(a)y_m(a) - y'_m(a)y_n(a)]$$

پہلی صورت: اگر $r(a) = 0$ اور $r(b) = 0$ ہوں تب مساوات 5.142 صفر کے برابر ہو گا لہذا مساوات 5.141 کا بائیں ہاتھ بھی صفر ہو گا اور چونکہ y_m اور y_n منفرد ہیں ہمیں مساوات 5.139 میں دیے گئے سرحدی شرائط کے استعمال کے بغیر درج ذیل قائمیت ملتی ہے۔

$$(5.143) \quad \int_a^b p y_m y_n dx = 0 \quad (m \neq n)$$

دوسری صورت: اگر $r(b) = 0$ لیکن $r(a) \neq 0$ ہو تب مساوات 5.142 کا بائیں حصہ صفر کے برابر ہو گا۔ آئیں مساوات 5.142 کے دائیں حصے پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 5.139-الف کے تحت

$$\begin{aligned} k_1 y_n(a) + k_2 y'_n(a) &= 0 \\ k_1 y_m(a) + k_2 y'_m(a) &= 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ فرض کریں کہ $k_2 \neq 0$ ہے۔ یوں پہلی مساوات کو $y_m(a)$ اور دوسری مساوات کو $-y_n(a)$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_2[y'_n(a)y_m(a) - y'_m(a)y_n(a)] = 0$$

اب چونکہ $k_2 \neq 0$ ہے لہذا قوسین میں بند تفاعل صفر کے برابر ہو گا۔ اب قوسین میں بند تفاعل عین مساوات 5.142 کے دائیں حصے میں قوسین میں بند حصہ ہے لہذا مساوات 5.142 صفر کے برابر ہو گا اور یوں مساوات 5.141 سے مساوات 5.143 ملتی ہے۔

تیسری صورت: اگر $r(a) = 0$ لیکن $r(b) \neq 0$ ہو تب بالکل دوسری صورت کی طرح مساوات 5.143 حاصل کی جاسکتی ہے۔

چوتھی صورت: اگر $r(a) \neq 0$ اور $r(b) \neq 0$ ہوں تب مساوات 5.139 کے دونوں شرائط استعمال کرتے ہوئے دوسری اور تیسری صورت کی طرز پر مساوات 5.143 حاصل ہو گی۔

پانچویں صورت: اگر $r(a) = r(b)$ ہو تب مساوات 5.142 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$r(b)[y'_n(b)y_m(b) - y'_m(b)y_n(b) - y'_n(a)y_m(a) + y'_m(a)y_n(a)]$$

جو پہلی کی طرح مساوات 5.139 کے استعمال سے صفر کے برابر ثابت ہوتا ہے۔ یہاں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.140 کی مدد سے بھی درج بالا صفر کے برابر ثابت ہوتی ہے لہذا ہم مساوات 5.139 کی جگہ مساوات 5.140 کی شرط استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں مساوات 5.141 سے مساوات 5.143 ملتی ہے اور مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 5.26: مثال 5.25 کے تفرقی مساوات کو مساوات 5.138 کے طرز پر لکھتے ہوئے $r = 1$ ، $q = 0$ اور $p = 1$ ملتے ہیں۔ مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $0 \leq x \leq \pi$ پر اس کے امتیازی تفاعل قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ □

مثال 5.27: فوریر تسلسل

آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ مثال 5.24 میں پائے جانے والے درج ذیل تفاعل

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

درج ذیل سیورم لیوویل مسئلے کے امتیازی تفاعل ہیں

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi)$$

لہذا مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر یہ آپس میں قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں۔ اس مثال کے سرحدی شرائط مساوات 5.140 کی طرز کے ہیں۔ □

ایسی عمومی فوریر تسلسل جس میں (قائمہ الزاویہ) امتیازی تفاعل کا سلسلہ استعمال ہو امتیازی تفاعل پھیلاؤ⁸⁴ کہلاتی ہے۔

مسئلہ 5.6: حقیقی امتیازی اقدار

اگر سیورم لیوویل مسئلہ جسے مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 میں پیش کیا گیا ہے، مسئلہ 5.5 کے شرائط پر پورا اترتا ہو اور پورے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر مثبت ہو (یا اس پورے وقفے پر p منفی ہو) تب اس سیورم لیوویل مسئلے کے تمام امتیازی اقدار حقیقی ہوں گی۔

ثبوت: فرض کریں کہ اس سیورم لیوویل مسئلے کا $\lambda = \alpha + i\beta$ امتیازی قدر ہے جس کا مطابقتی امتیازی تفاعل درج ذیل ہے جہاں α ، β ، u اور v حقیقی ہیں۔

$$(5.144) \quad y(x) = u(x) + iv(x)$$

اس کو مساوات 5.138 میں پر کرتے ہوئے

$$(ru' + irv')' + (q + \alpha p + i\beta p)(u + iv) = 0$$

ملتا ہے جس کے حقیقی اور خیالی حصوں کو علیحدہ علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل دو مساوات ملتے ہیں۔

$$(ru')' + (q + \alpha p)u - \beta pv = 0$$

$$(rv')' + (q + \alpha p)v - \beta pu = 0$$

پہلی مساوات کو v اور دوسری مساوات کو $-u$ سے ضرب دے کر مجموعہ لیتے ہیں

$$\begin{aligned} -\beta(u^2 + v^2)p &= u(rv')' - v(ru')' \\ &= [(rv')u - (ru')v]' \end{aligned}$$

جس کا $x = a$ تا $x = b$ تکمل درج ذیل ہے۔

$$-\beta \int_a^b (u^2 + v^2)p \, dx = [r(uv' - u'v)]_a^b$$

مسئلہ 5.5 کی ثبوت کی طرز پر، سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے دایاں ہاتھ صفر کے برابر ملتا ہے۔ چونکہ y امتیازی تفاعل ہے لہذا $u^2 + v^2 \neq 0$ ہو گا۔ اب y اور p استمراری ہیں اور پورے وقفے پر $p > 0$ ہے (یا پورے وقفے پر $p < 0$ ہے) لہذا مکمل کا بایاں ہاتھ صفر نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں $\beta = 0$ ہو گا لہذا $\lambda = \alpha$ حقیقی ہو گا۔ یوں مسئلے کا ثبوت پورا ہوتا ہے۔

□

مثال 5.26 اور مثال 5.27 کے امتیازی اقدار مسئلہ 5.6 کے تحت حقیقی ہیں۔

سوالات

سوال 5.105: مثال 5.25 کے لئے مسئلہ 5.5 ثابت کریں۔

سوال 5.106: مسئلہ 5.5 میں تیسری اور چوتھی صورت کا ثبوت مکمل کریں۔

سوال 5.107: اگر مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 میں دیے گئے مسئلے کی امتیازی قدر λ_0 اور مطابقتی امتیازی تفاعل $y = y_0$ ہوں تب ثابت کریں کہ λ_0 کا مطابقتی امتیازی تفاعل $y = \alpha y_0$ بھی ہو گا جہاں α غیر صفر اختیاری مستقل ہے۔ (اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے ایسے امتیازی تفاعل دریافت کئے جاسکتے ہیں جن کا معیار اکائی ہو۔)

سوال 5.108 تا سوال 5.115 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلوں کے امتیازی قدر اور امتیازی تفاعل دریافت کریں۔

سوال 5.108: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(l) = 0$ جوابات: $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad y_n = \sin \frac{n \pi x}{l}$ جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہیں۔ چونکہ $n = 0$ سے $y = 0$ ملتا ہے جو امتیازی تفاعل نہیں ہے لہذا $n = 0$ جواب میں شامل نہیں کیا جائے گا۔

سوال 5.109: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y'(l) = 0$ جوابات: $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]^2, \quad y_n = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہیں۔

سوال 5.110: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y(l) = 0$ جوابات: $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]^2, \quad y_n = \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہیں۔

سوال 5.111: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(l) = 0$ جوابات: $\lambda = \left[\frac{n(2n+1)\pi}{l} \right]^2, \quad y_n = \cos \frac{n \pi x}{l}$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہیں۔

سوال 5.112: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$ جوابات: $\lambda = n^2, \quad y_n = \cos nx$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہیں۔

سوال 5.113: $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \quad y(1) = 0, y(e) = 0$ جوابات: $\lambda = n^2 \pi^2, \quad y_n = \sin(n \pi \ln|x|)$ جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہے۔

سوال 5.114: $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$
 جوابات: $y_n = e^{-x} \sin nx$ ، $\lambda = n^2$ ، جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہے۔

سوال 5.115: ثابت کریں کہ مسئلہ سٹیورم لیوویل

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$$

کے حل مساوات $\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ اس مساوات کے کتنے حل ممکن ہیں۔

جواب: لا تعداد

سوال 5.116: ایسا سٹیورم لیوویل مسئلہ دریافت کریں جس کے امتیازی تفاعل درج ذیل ہوں۔

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x \dots$$

جواب: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$

5.8 قائمیت لیٹنڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل

لیٹنڈر مساوات (مساوات 5.16) کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(5.145) \quad [(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n + 1)$$

لہذا یہ مساوات سٹیورم لیوویل (حصہ 5.7) ہے جہاں $r = 1 - x^2$ ، $q = 0$ اور $p = 1$ ہیں۔ چونکہ $x = \pm 1$ پر $r = 0$ ہے لہذا سرحدی شرائط کے بغیر وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر اس سے مسئلہ سٹیورم لیوویل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $n = 0, 1, 2, \dots$ پر اس مسئلے کے حل لیٹنڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ ہیں لہذا یہ امتیازی تفاعل ہیں جو مسئلہ 5.5 کے تحت قائمہ الزاویہ ہوں گے یعنی

$$(5.146) \quad \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

باب 5. متقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل

اور ان امتیازی تفاعل کا معیار مساوات 5.39 دیتی ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(5.147) \quad \|P_m\| = \sqrt{\int_{-1}^1 P_m^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \quad m = 0, 1, \dots$$

بیسل تفاعل (حصہ 5.4) جو مساوات بیسل (مساوات 5.76) پر پورا اترتے ہیں کے اہم انجینئری استعمال پائے جاتے ہیں مثلاً دائری سطح کی ارتعاش جس پر اس کتاب میں غور کیا جائے گا۔ مساوات بیسل کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$s^2 \ddot{J}_n + s \dot{J}_n + (s^2 - n^2) J_n = 0$$

جہاں تفاعل کا s کے ساتھ تفرق کو نقطہ ظاہر کرتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ n غیر منفی عدد صحیح ہے۔
 $s = \lambda x$ لیتے ہوئے جہاں λ غیر صفر مستقل ہے ہم $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda}$ اور زنجیری تفرق سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں ' سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\dot{J}_n = \frac{J'_n}{\lambda}, \quad \ddot{J}_n = \frac{J''_n}{\lambda^2}$$

انہیں مساوات بیسل میں پر کر کے

$$x^2 J''_n(\lambda x) + x J'_n(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda x) = 0$$

ملتا ہے جس کو x سے تقسیم کر کے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(5.148) \quad [x J'_n(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x \right) J_n(\lambda x) = 0$$

جو n کی ہر معین قیمت کے لئے ایک مساوات سٹیورم لیوویل دیتا ہے جہاں مقدار معلوم کو λ کی بجائے λ^2 لکھا گیا ہے اور

$$p(x) = x, \quad q(x) = -\frac{n^2}{x}, \quad r(x) = x$$

ہیں۔ چونکہ $x = 0$ پر $r(x) = 0$ ہے لہذا مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $0 \leq x \leq R$ پر مساوات 5.148 کے وہ حل جو درج ذیل سرحدی شرط پر پورا اترتے ہوں تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیں گے۔ (یہاں دھیان رہے کہ $n \neq 0$ کی صورت میں تفاعل q نقطہ $x = 0$ پر غیر استمراری ہے البتہ اس کا مسئلہ 5.5 کے ثبوت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔)

$$(5.149) \quad J_n(\lambda R) = 0$$

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $J_n(s)$ کے لامحدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ $J_n(s)$ کے مثبت صفروں کو $\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \alpha_{3n} \dots$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں مساوات 5.149 کی شرط تب پوری ہوگی جب

$$(5.150) \quad \lambda R = \alpha_{mn} \implies \lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

ہو جس سے درج ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 5.7: بیسل تفاعل کی قائمیت

بیسل تفاعل $J_n(\lambda_{1n}x)$ ، $J_n(\lambda_{2n}x)$ ، $J_n(\lambda_{3n}x)$ ، \dots جہاں مساوات 5.150 λ_{mn} دیتی ہے، وقفہ $0 \leq x \leq R$ پر تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے ہر معین $n = 0, 1, \dots$ کے لئے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں یعنی:

$$(5.151) \quad \int_0^R x J_n(\lambda_{mn}x) J_n(\lambda_{kn}x) dx = 0, \quad (k \neq m)$$

یوں ہمیں لامحدود تعداد کے قائمہ الزاویہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں جہاں n کی ہر معین قیمت ایک منفرد سلسلہ دیتی ہے۔

چونکہ $p(x) = x$ ہے لہذا مساوات 5.135 تا مساوات 5.137 کے تحت اگر کسی ایک ایسے سلسلے کے امتیازی تفاعل کی فوریر تسلسل کی صورت میں کسی تفاعل $f(x)$ کو لکھنا ممکن ہو تو یہ فوریر تسلسل درج ذیل ہوگا۔

$$(5.152) \quad f(x) = c_1 J_n(\lambda_{1n}x) + c_2 J_n(\lambda_{2n}x) + \dots$$

اس کو فوریر بیسل تسلسل⁸⁵ کہتے ہیں۔ ہم اب درج ذیل ثابت کرتے ہیں جہاں $\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ ہے۔

$$(5.153) \quad \|J_n(\lambda_{mn}x)\|^2 = \int_0^R x J_n^2(\lambda_{mn}x) dx = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R)$$

یوں مساوات 5.152 کے عددی سر c_m مساوات 5.137 سے درج ذیل اخذ ہوتے ہیں۔

$$(5.154) \quad c_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R x f(x) J_n(\lambda_{mn}x) dx \quad m = 1, 2, \dots$$

اب مساوات 5.153 ثابت کرتے ہیں۔ مساوات 5.148 کو $2x J_n'(\lambda x)$ سے ضرب دے کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\{[x J_n'(\lambda x)]^2\}' + (\lambda^2 x^2 - n^2) \{J_n^2(\lambda x)\}' = 0$$

جس کا $0 \leq R$ مکمل لیتے ہیں۔

$$(5.155) \quad [xJ'_n(\lambda x)]^2 \Big|_0^R = - \int_0^R (\lambda^2 x^2 - n^2) \{J_n^2(\lambda x)\}' dx$$

مساوات 5.99 میں x اور v کی جگہ بالترتیب s اور n لکھتے ہوئے اور s کے ساتھ تفرق کو نقطہ سے ظاہر کرتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$-ns^{-n-1}J_n(s) + s^{-n}J_n(s) = -s^{-n}J_{n+1}(s)$$

اس کو s^{n+1} سے ضرب دے کر اور $s = \lambda x$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں ' سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\lambda x J'_n(\lambda x) \frac{1}{\lambda} = n J_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)$$

اس طرح مساوات 5.155 کا بائیں ہاتھ

$$\left[[n J_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)]^2 \right]_{x=0}^R$$

کے برابر ہو گا۔ اب $\lambda = \lambda_{mn}$ کی صورت میں $J_n(\lambda R) = 0$ ہو گا اور $n = 1, 2, \dots$ کی صورت میں $J_n(0) = 0$ ہو گا لہذا بائیں ہاتھ درج ذیل ملتا ہے۔

$$(5.156) \quad \lambda_{mn}^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn} R)$$

مساوات 5.155 کے دائیں ہاتھ کا مکمل بالخصوص درج ذیل دیتا ہے۔

$$(5.157) \quad - \left[(\lambda^2 x^2 - n^2) J_n^2(\lambda x) \right]_0^R + 2\lambda^2 \int_0^R x J_n^2(\lambda x) dx$$

$\lambda = \lambda_{mn}$ کی صورت میں اس کا پہلا حصہ $x = R$ پر صفر کے برابر ہے۔ چونکہ $n = x = 0$ پر $\lambda^2 x^2 - n^2 = 0$ ہے جبکہ $x = 0$ اور $n = 1, 2, \dots$ کی صورت میں $J_n(\lambda x) = 0$ ہے لہذا یہ حصہ $x = 0$ پر بھی صفر کے برابر ہو گا۔ اس نتیجے اور مساوات 5.156 سے مساوات 5.153 اخذ ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 5.117 تا سوال 5.120 میں دیے گئے کثیر رکنی کو لیٹنڈر کثیر رکنی کو صورت میں لکھیں۔ (مساوات 5.30 کی مدد لیں۔)

سوال 5.117: $1, x, x^2, x^3, x^4$
جواب:

$$1 = P_0(x), x = P_1(x), x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x), x^3 = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x),$$

$$x^4 = \frac{1}{5}P_0(x) + \frac{4}{7}P_2(x) + \frac{8}{35}P_4(x)$$

سوال 5.118: $3x^2 + 2x$
جواب: $2P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$

سوال 5.119: $5x^3 + 6x^2 - x - 1$
جواب: $2P_3(x) + 4P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$

سوال 5.120: $35x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 2x - 10$
جواب: $8P_4(x) - 6P_3(x) + 42P_2(x) - 11P_1(x) - P_0(x)$

سوال 5.121 تا سوال 5.123 میں دیے گئے تفاعل کی لیٹنڈر فوریزر تسلسل وقفہ $-1 < x < 1$ پر دریافت کریں۔

سوال 5.121:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

جواب: مساوات 5.136 میں g_m کی جگہ P_n اور $p = 1$ پر کرتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی لیٹنڈر فوریزر تسلسل $f = c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + \dots$ لکھی جائے گی۔ مساوات 5.39 اور مساوات 5.30 استعمال کرتے ہوئے یوں مساوات 5.137 سے تسلسل کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$c_0 = \frac{1}{\|P_0\|^2} \int_0^1 P_0(x) \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 \cdot x \, dx = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$c_1 = \frac{1}{\|P_1\|^2} \int_0^1 P_1(x) \cdot x \, dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x \cdot x \, dx = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{\|P_2\|^2} \int_0^1 P_2(x) \cdot x \, dx = \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} (3x^2 - 1)x \, dx = \frac{5}{16}$$

یوں لیٹنڈر فوریزر تسلسل $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \dots$ ہو گا۔

سوال 5.122:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \dots \text{ جواب:}$$

سوال 5.123:

$$f(x) = |x| \quad -1 < x < 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) + \dots \text{ جواب:}$$

سوال 5.124: ثابت کریں کہ تفاعل قدر $\sin \theta$ کے لحاظ سے $n = 0, 1, \dots$ کی صورت میں $P_n(\cos \theta)$ وقفہ $0 < \theta < \pi$ پر قائمہ الزاویہ تفاعل ہوں گے۔

سوال 5.125 تا سوال 5.130 ہر مائٹ کثیر رکنی He_n^{86} سے متعلق سوالات ہیں جن کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(5.158) \quad \text{He}_0 = 1, \quad \text{He}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}}), \quad n = 1, 2, \dots$$

توجہ رہے کہ دیگر اعلیٰ تفاعل کی طرح ہر مائٹ کثیر رکنی He_n^{86} کو بھی کئی طریقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے لہذا طبعیات کے میدان میں ہر مائٹ کثیر رکنی H_n^* کی تعریف درج ذیل دی جاتی ہے۔

$$\text{H}_0^* = 1, \quad \text{H}_n^* = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

سوال 5.125: ہر مائٹ کثیر رکنی کی درج بالا تعریف سے درج ذیل لکھیں۔

$$\text{He}_1(x) = x, \quad \text{He}_2(x) = x^2 - 1, \quad \text{He}_3(x) = x^3 - 3x, \quad \text{He}_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

سوال 5.126: ثابت کریں کہ مکملان تسلسل

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) t^n$$

⁸⁶فرانسیسی ریاضی دان چارلس ہرماٹ [1822-1901]
Hermite polynomials⁸⁷

کے عددی سر اور ہرمانٹ کثیر رکنی کا تعلق $\text{He}_n(x) = n! a_n(x)$ ہے۔ (آپ $tx - \frac{t^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}$ لکھ سکتے ہیں۔) درج بالا کا بایاں ہاتھ یعنی $e^{tx - \frac{t^2}{2}}$ ہرمانٹ کثیر رکنی کا پیدا کار تفاعل کہلاتا ہے۔

سوال 5.127: ثابت کریں کہ ہرمانٹ کثیر رکنی درج ذیل تعلق پر پورا اترتے ہیں۔ (اشارہ۔ ہرمانٹ کثیر رکنی کی تعریف مساوات 5.158 کا تفرق لیں۔)

$$\text{He}_{n+1}(x) = x \text{He}_n(x) - \text{He}'_n(x)$$

سوال 5.128: ہرمانٹ کثیر رکنی کے پیدا کار تفاعل (سوال 5.126) کا x کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\text{He}'_n(x) = n \text{He}_{n-1}(x)$$

اس کلیے کے ساتھ سوال 5.127 میں دیے گئے کلیہ میں n کی جگہ $n-1$ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\text{He}_n(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

$$y'' - xy' + ny = 0$$

سوال 5.129: سوال 5.128 میں دیا گیا تفرقی مساوات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $w = e^{-\frac{x^2}{4}} \text{He}_n(x)$ درج ذیل مساوات ویبر⁸⁸ کا حل ہے۔

$$w'' + (n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)w = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

سوال 5.130: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty < x < \infty$ (محور) پر تفاعل قدر $p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ کے لحاظ سے ہرمانٹ کثیر رکنی قائمہ الزاویہ ہیں۔ (اشارہ۔ سوال 5.128 میں دیے گئے کلیے کا تکمل بالخصص لیں۔)

سوال 5.131 تا سوال 5.135 لاگینگ کثیر رکنی⁸⁹ پر مبنی ہیں۔ لاگینگ کثیر رکنی⁹⁰ درج ذیل تفاعل کو کہتے ہیں۔

$$L_0 = 1, \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

⁸⁸جرمن ریاضی دان ہائزک ویبر [1842-1913]

Laguerre polynomials⁸⁹

⁹⁰فرانسیسی ریاضی دان ایڈمنڈ نیولس لاگینگ [1834-1886]

سوال 5.131: لاڱيڻ ڪثير رڪني كى درج بالا تعريف س درج ذيل لکھيں۔

$$L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2, \quad L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

سوال 5.132: درج ذيل ثابت ڪريں۔

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n}{m} x^m = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

سوال 5.133: لاڱيڻ تفاعل $L_n(x)$ درج ذيل تفرفق مساوات ٻر ٻورا اترتے هيں۔

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

ڪے لئے اس حقيقت كى تصديق ڪريں۔ $n = 0, 1, 2, 3$

سوال 5.134: ڪمئل ليته هوءَ ثابت ڪريں ڪه ثبت x محور يعني وقفه $0 \leq x < \infty$ ٻر تفاعل قدر $p(x) = e^{-x}$ ڪے لحاظ س L_0 ، $L_1(x)$ اور $L_2(x)$ قائمه الزاويه هيں۔

سوال 5.135: ثابت ڪريں ڪه ثبت x محور يعني وقفه $0 \leq x < \infty$ ٻر تفاعل قدر $p(x) = e^{-x}$ ڪے لحاظ س تمام لاڱيڻ تفاعل قائمه الزاويه هيں۔ (اشاره۔ وقفه $0 \leq x < \infty$ ٻر تفاعل $e^{-x}L_m(x)L_n(x)$ ڪے ڪمئل ٻر غور ڪريں جهاں $m < n$ هے۔ چونڪه L_m ميں بلند تر طاقت والا جزو x^m هے لهندا اس س اخذ ڪريں ڪه اتنا ڪافي هوكا ڪه وقفه $0 \leq x < \infty$ ٻر $e^{-x}x^kL_n(x)$ ڪا ڪمئل صفر ڪے برابر ثابت ڪيا جائے، جهاں $k < n$ هے۔ بار بار ڪمئل بالخصوص س ايسا ثابت ڪريں۔

جواب:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n(x) dx &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx \\ &= -\frac{k}{n!} \int_0^\infty x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx \\ &= \dots = (-1)^k \frac{k!}{n!} \int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) dx \\ &= 0 \quad \text{اگر } (n > k) \end{aligned}$$

سوال 5.136 تا سوال 5.138 چبیشف کنڈر رکنی⁹¹ پر مبنی ہیں جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

(5.159)

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \quad U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \cos^{-1} x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad n = 0, 1, \dots$$

$T_n(x)$ چبیشف کنڈر رکنی⁹² کی پہلی قسم اور $U_n(x)$ اس کی دوسری قسم کہلاتے ہیں۔

سوال 5.136: چبیشف تفاعل (مساوات 5.159) سے درج ذیل لکھیں۔

$$T_0 = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ U_0 = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

سوال 5.137: ثابت کریں کہ چبیشف تفاعل $T_n(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$$

جواب: $v(\theta) = \cos n\theta$ تفرقی مساوات $\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2v = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ $x = \cos \theta$ کا استعمال کریں۔

سوال 5.138: ثابت کریں کہ چبیشف تفاعل T_n وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر تفاعل قدر $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ ہیں۔ (اشارہ۔ مکمل لیتے ہوئے $\cos^{-1} x = \theta$ لکھیں۔)

سوال 5.139 تا سوال 5.144 میں دیے گئے تفاعل $f(x)$ کا وقفہ $0 < x < R$ پر درج ذیل صورت کی فوریر بیسل تسلسل دریافت کریں۔

$$f(x) = c_0 J_0(\lambda_{10}x) + c_0 J_0(\lambda_{20}x) + c_0 J_0(\lambda_{30}x) + \dots$$

سوال 5.139:

اشارہ۔ مساوات 5.98 کا استعمال کریں $f(x) = 1$

⁹¹ روسی ریاضی دان پنٹونی لودوچ چبیشف [1821-1894]

⁹² 'Tchebichef polynomials', first and second kind

باب 5. ط متقی تسلسل سے سادہ تفسیقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفسعل

جواب: مساوات 5.154 سے عددی سر لکھ کر $v = 1$ لیتے ہوئے مساوات 5.98 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_{m0})} \int_0^R x J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{R} x\right) dx = \frac{2}{\alpha_{m0}^2 J_1^2(\alpha_{m0})} \int_0^{\alpha_{m0}} w J_0(w) dw \\ &= \frac{2}{\alpha_{m0} J_1(\alpha_{m0})} \\ f(x) &= 2 \left(\frac{J_0(\lambda_{10})x}{\alpha_{10} J_1(\alpha_{10})} + \frac{J_0(\lambda_{20})x}{\alpha_{20} J_1(\alpha_{20})} + \dots \right) \end{aligned}$$

سوال 5.140:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & a < x < R \end{cases}$$

$$c_m = \frac{2ak J_1\left(\frac{\alpha_{m0}}{R} a\right)}{\alpha_{m0} R J_1^2(\alpha_{m0})} \text{ جواب:}$$

سوال 5.141:

اشارہ۔ مساوات 5.98 استعمال کرتے ہوئے مکمل بالخصص لیں $f(x) = 1 - x^2$, $(R = 1)$

$$c_m = \frac{4J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}^2 J_1^2(\alpha_{m0})} \text{ جواب:}$$

سوال 5.142:

$$f(x) = x^2$$

$$c_m = \frac{2R^2}{\alpha_{m0} J_1(\alpha_{m0})} \left[1 - \frac{2J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0} J_1(\alpha_{m0})} \right] \text{ جواب:}$$

سوال 5.143: ثابت کریں کہ $f(x) = x^n$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہے کو وقفہ $0 < x < 1$ پر درج ذیل فوریز۔ میل تسلسل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$x^n = \frac{2J_n(\alpha_{1n}x)}{\alpha_{1n} J_{n+1}(\alpha_{1n})} + \frac{2J_n(\alpha_{2n}x)}{\alpha_{2n} J_{n+1}(\alpha_{2n})} + \dots$$

سوال 5.144: تفاعل $f(x) = x^3$ کو وقفہ $0 < x < 2$ پر J_3 کی فوریز۔ میل تسلسل سے ظاہر کریں۔

$$x^3 = 16 \left[\frac{J_3\left(\frac{\alpha_{13}}{2} x\right)}{\alpha_{13} J_4(\alpha_{13})} + \frac{J_3\left(\frac{\alpha_{23}}{2} x\right)}{\alpha_{23} J_4(\alpha_{23})} + \dots \right] \text{ جواب:}$$

باب 6

لاپلاس تبادلہ

لاپلاس بدل کی ترکیب سے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات حل کیے جاتے ہیں۔ یہ ترکیب تین قدم پر مشتمل ہے۔

- پہلا قدم: ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے سادہ ضمنی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔

- دوسرا قدم: ضمنی مساوات کو خالصتاً الجبرائی طور پر حل کیا جاتا ہے۔

- تیسرا قدم: ضمنی مساوات کے حل کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے اصل حل حاصل کیا جاتا ہے۔

یوں لاپلاس بدل تفرقی مساوات کے مسئلے کو سادہ الجبرائی مسئلہ میں تبدیل کرتا ہے۔ تیسرے قدم پر الٹ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے عموماً ایسی جدول کا سہارا لیا جاتا ہے جس میں تفاعل اور تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل درج ہوں۔ اس باب کے آخر میں ایسا جدول (جدول 6.2) دکھایا گیا ہے۔

انجینئری میں لاپلاس بدل کی ترکیب اہم کردار ادا کرتی ہے، بالخصوص ان مسائل میں جہاں جبری تفاعل غیر استمراری ہو، مثلاً جب جبری تفاعل کچھ وقفے کے لئے کارآمد ہو یا جبری تفاعل غیر سائن نما دہراتا تفاعل ہو۔

اب تک غیر متجانس مساوات کا عمومی حل حاصل کرتے ہوئے پہلے مطابقتی متجانس مساوات کا حل اور پھر غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل حاصل کیا جاتا رہا۔ لاپلاس بدل کی ترکیب میں عمومی حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) مسائل کے حل میں عمومی حل حاصل کرنے کے بعد ابتدائی (سرحدی) شرائط پر کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی چونکہ حل یہ شرائط شامل ہوتے ہیں۔

6.1 لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت

فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر معین ہے۔ ہم $f(t)$ کو e^{-st} سے ضرب دیتے ہوئے، t کے ساتھ، 0 تا ∞ تکمل لیتے ہیں۔ اگر ایسا تکمل موجود ہو تو یہ s پر منحصر ہو گا لہذا اس کو $F(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$(6.1) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

تفاعل $F(s)$ کو تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل¹ کہا جاتا ہے اور اس کو $\mathcal{L}(f)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(6.2) \quad F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$f(t)$ سے $F(s)$ کے حصول کو لاپلاس تبدل² کہتے ہیں۔

اسی طرح $f(t)$ کو $F(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل³ کہتے ہیں جسے $\mathcal{L}^{-1}(F)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(6.3) \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$$

علامت نویسی

اصل تفاعل کو چھوٹے لاطینی حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ لاپلاس بدل کو اسی حرف تہجی کی بڑی صورت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $f(t)$ کا بدل $F(s)$ ہو گا اور $g(t)$ کا لاپلاس بدل $G(s)$ ہو گا۔

مثال 6.1: تفاعل $f(t) = 1$ ، جہاں $t \geq 0$ ہے، کا لاپلاس بدل مساوات 6.2 سے بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

ہو گا جو $s > 0$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

Laplace transform¹
Laplace transformation²
inverse Laplace transform³

تکمل 6.2 کی علامت پر آسائش ضرور ہے لیکن اس پر مزید غور کی ضرورت ہے۔ اس تکمل کا وقفہ لامتناہی ہے۔ ایسے تکمل کو غیر مناسب تکمل⁴ کہتے ہیں اور حزب تعریف، اس کی قیمت درج ذیل اصول کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

یوں اس مثال میں اس آسائش علامت کا مطلب درج ذیل ہے۔

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^0 \right] = \frac{1}{s}, \quad (s > 0)$$

□

اس پورے باب میں تکمل کی یہی علامت استعمال کی جائے گی۔

مثال 6.2: تفاعل $f(t) = e^{at}$ جہاں $t \geq 0$ اور a مستقل ہے کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دریافت کریں۔
حل: مساوات 6.2 سے

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty}$$

ملتا ہے۔ اب اگر $s - a > 0$ ہو (یعنی s کی قیمت a سے زیادہ چھنی گئی ہو) تب درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

□

اگرچہ ہم بالکل اسی طرز پر دیگر تفاعل کے لاپلاس بدل بذریعہ تکمل حاصل کر سکتے ہیں، حقیقت میں لاپلاس تبادلہ کے ایسی کئی خواص ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے دیگر لاپلاس بدل نہایت عمدگی کے ساتھ حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ لاپلاس تبادلہ کی ایک خاصیت خطیت ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

مسئلہ 6.1: لاپلاس تبادلہ کی خطیت

لاپلاس تبادلہ خطی عمل ہے۔ یوں ایسے تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$ ، جن کے لاپلاس بدل موجود ہوں، کے عمومی مجموعے کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

ثبوت : لاپلاس تبدل کی تعریف سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} [af(t) + bg(t)] dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]\end{aligned}$$

□

مثال 6.3: آئیں تفاعل $f(t) = \cosh at$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.1 اور مثال 6.2 کی مدد سے لکھیں۔ چونکہ $\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$ ہے لہذا

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

□

ہو گا جہاں $s > a \geq 0$ چننا گیا ہے۔

مثال 6.4: آئیں تفاعل $\sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ چونکہ $\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$ ہے لہذا مسئلہ خطیت سے تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

□

مثال 6.5: $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: نہیں $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ اور $\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) - \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

جدول 6.1: چند بنیادی تفاعل $f(t)$ اور ان کے لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$

$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$	شمار	$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$	شمار
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	7	$\frac{1}{s}$	1	1
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	8	$\frac{1}{s^2}$	t	2
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$	9	$\frac{2!}{s^3}$	t^2	3
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$	10	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n ($n = 1, 2, \dots$)	4
$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$	11	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	t^a ($a > 0$)	5
$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \sin \omega t$	12	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	6

□

جدول 6.1 میں چند اہم بنیادی تفاعل اور ان کے لاپلاس بدل دیے گئے ہیں (اس باب کے آخر میں جدول 6.2 میں مزید لاپلاس جوڑیاں پیش کی گئی ہیں)۔ اس جدول میں دیے لاپلاس بدل جاننے کے بعد ہم تقریباً ان تمام تفاعل کے بدل، لاپلاسی خواص سے حاصل کر پائیں گے، جو ہمیں درکار ہوں گے۔

جدول 6.1 میں پہلا، دوسرا اور تیسرا کلیہ چوتھے کلیے سے اخذ کیے جاسکتے ہیں جبکہ چوتھا کلیہ از خود پانچویں کلیہ میں مساوات 5.93 استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(n+1) = n!$ لکھ کر حاصل کیا جاسکتا ہے، جہاں n غیر منفی $n \geq 0$ عدد صحیح ہے۔ پانچواں کلیہ، لاپلاس بدل کی تعریف مساوات 6.2

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt$$

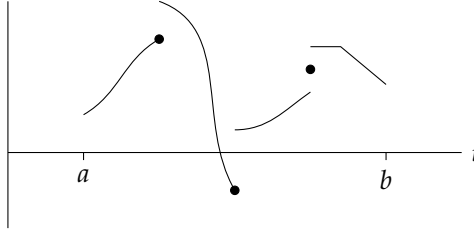
میں $st = x$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.91 کے استعمال سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^a dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad (s > 0)$$

لاپلاس بدل کی وجودیت اور یکسانی

اگر تمام $t \geq 0$ کے لئے، کسی مستقل k اور M پر تفاعل f بڑھنے کی پابندی

$$(6.4) \quad |f(t)| \leq M e^{kt}$$



شکل 6.1: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$ ۔ غیر استمراری مقام پر تفاعل کی قیمت کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

پر پورا اترتا ہو، تب اس کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔ ہم کہتے ہیں کہ نہایت تیزی سے نہ بڑھنے والے تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔

$f(t)$ کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے البتہ اس کا ٹکڑوں میں استمراری⁵ ہونا لازم ہے۔ اگر محدود وقفہ $a \leq t \leq b$ جس پر $f(t)$ معین ہو، کو کئی ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے پر $f(t)$ استمراری ہو اور t کا اندرون ٹکڑے سے ٹکڑے کے (دونوں) سروں تک پہنچنے پر $f(t)$ کی قیمت کا حد⁶ محدود حاصل ہو تب $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری کہلائے گا۔ ایسی صورت میں، جیسا شکل 6.1 میں دکھایا گیا ہے، محدود چھلانگ⁷ پائے جائیں گے جو غیر استمراری صورت کی واحد وجہ ہو گی۔ عموماً عملی مسائل اسی نوعیت کے ہوتے ہیں۔ درج ذیل مسئلہ بھی اسی نوعیت کا ہے۔

مسئلہ 6.2: مسئلہ وجودیت لاپلاس بدل

اگر نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر تفاعل $f(t)$ معین اور ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.4 پر، تمام $t \geq 0$ اور کسی مستقل M اور k کے لئے، پورا اترتا ہو تب لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ تمام $s > k$ کے لئے موجود ہو گا۔

ثبوت: چونکہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے لہذا t محور کے کسی بھی محدود وقفے پر $e^{-st}f(t)$ قابل مکمل ہے۔ مساوات 6.4 کو دیکھ کر، $s > k$ تصور کرتے ہوئے (جو درج ذیل آخری مکمل میں درکار ہے)، لاپلاس بدل کی وجودیت کا ثبوت حاصل کرتے ہیں۔

$$|\mathcal{L}(f)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt \leq \int_0^\infty M e^{kt} e^{-st} dt = \frac{M}{s-k}$$

piecewise continuous⁵
limit⁶
jumps⁷



کسی بھی تفاعل کا مساوات 6.4 میں دیے گئے شرط پر پورا اترنے کو با آسانی دیکھا جاسکتا ہے، مثلاً $\cosh t < e^t$ یا $t^n < n!e^t$ (چونکہ $\frac{t^n}{n!}$ مکملارن تسلسل کا ایک رکن ہے)۔ ایسا تفاعل جو مساوات 6.4 پر پورا نہ اترتا ہو کی مثال e^{t^2} ہے۔ آپ سوال 6.15 میں دیکھیں گے کہ مسئلہ 6.2 میں دیے گئے شرائط لاپلاس بدل کی وجودیت کے لئے کافی ہیں تاکہ لازمی ہیں۔

یکتاگی

اگر کسی تفاعل کا لاپلاس بدل موجود ہو تو یہ بدل یکتا ہو گا۔ اسی طرح اگر (حقیقی مثبت محور پر معین) دو تفاعل کے لاپلاس بدل یکساں ہوں تب یہ تفاعل، کسی بھی مثبت لمبائی کے وقفے پر، آپس میں مختلف نہیں ہو سکتے ہیں، البتہ تنہا نقطوں پر ان کی قیمت غیر یکساں ہو سکتی ہے۔ یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ الٹ لاپلاس بدل یکتا ہے۔ بالخصوص دو ایسے استمراری تفاعل جن کا لاپلاس بدل یکساں ہو، آپس میں مکمل طور پر یکساں ہوں گے۔

سوالات

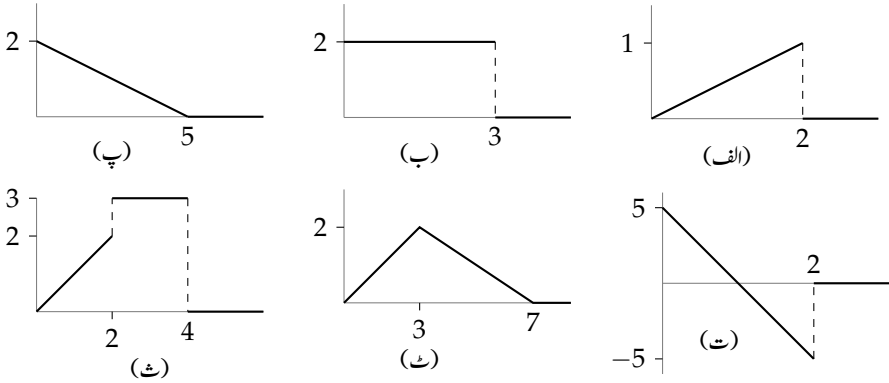
سوال 6.1 تا سوال 6.8 میں لاپلاس بدل حاصل کریں۔ a اور b کو مستقل تصور کریں۔

سوال 6.1: $2t - 3$
جواب: $\frac{2}{s^2} - \frac{3}{s}$

سوال 6.2: $(at + b)^2$
جواب: $a(\frac{b}{s^2} + \frac{2a}{s^3}) + b(\frac{b}{s} + \frac{a}{s^2})$

سوال 6.3: $\sin 2\pi t$
جواب: $\frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2}$

سوال 6.4: $\sin^2 2\pi t$
جواب: $\frac{8\pi^2}{s(s^2 + 16\pi^2)}$



شکل 6.2: سوال 6.9 تا سوال 6.9 کے اشکال۔

سوال 6.5: $e^{-3t} \sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

سوال 6.6: $e^{2t} \cos 3t$
جواب: $\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

سوال 6.7: $\cos(2t - \frac{\pi}{3})$
جواب: $\frac{\frac{s}{2} + \sqrt{3}}{s^2+4}$

سوال 6.8: $2 \sin(5t + \pi)$
جواب: $\frac{-10}{s^2+25}$

سوال 6.9: شکل 6.2-الف میں ٹکڑوں میں استمراری تفاعل دکھایا گیا ہے۔ تمام ٹکڑوں کی ریاضی مساوات حاصل کریں۔ مکمل 6.2 کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1-e^{-2s}(2s+1)}{2s^2}$

سوال 6.10: شکل 6.2-ب میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2}{s}(1 - e^{-3s})$

سوال 6.11: شکل 6.2-پ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2e^{-5s}+10s-2}{5s^2}$

سوال 6.12: شکل 6.2-ت میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{5(s+1)e^{-2s}+5(s-1)}{s^2}$

سوال 6.13: شکل 6.2-ٹ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{4-7e^{-3s}+3e^{-7s}}{6s^2}$

سوال 6.14: شکل 6.2-ث میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1+(s-1)e^{-2s}-3se^{-4s}}{s^2}$

سوال 6.15: وجودیت
تفاعل $\frac{1}{\sqrt{t}}$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ ایسا کرتے ہوئے $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (مساوات 5.97) کا استعمال کریں۔
اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ مسئلہ 6.2 میں دیے شرائط کافی ہیں ناکہ لازمی۔

جواب: $\frac{\sqrt{\pi}}{s}$

سوال 6.16: e^{at} کا لاپلاس بدل $\cosh at$ اور $\sinh at$ کے لاپلاس بدل سے حاصل کریں۔

جواب: $e^{at} = \sinh at + \cosh at$ لکھ کر جواب $\frac{1}{s-a}$ ملتا ہے۔

سوال 6.17: پیمائشی فیتہ میں ردوبدل
ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{F(\frac{s}{c})}{c}$ ہو گا جہاں c مستقل ہے۔ اس کے لیے
کو استعمال کرتے ہوئے $\mathcal{L}(\cos t)$ سے $\mathcal{L}(\cos \omega t)$ حاصل کریں۔

جواب: مساوات 6.2 استعمال کرتے ہوئے کلیہ ثابت ہو گا۔

سوال 6.18: الٹ لاپلاس بدل کی خطیت
 \mathcal{L} کی خطیت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ \mathcal{L}^{-1} خطی ہے۔

سوال 6.19 تا سوال 6.26 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.19: $\frac{0.5s+1.3}{s^2+1.69}$
 جواب: $\sin(1.3t) + 0.5 \cos(1.3t)$

سوال 6.20: $\frac{4s+1}{s^2-16}$
 جواب: $\frac{1}{8}(17e^{4t} + 15e^{-4t})$

سوال 6.21: $\frac{s}{m^2s^2+n^2}$
 جواب: $\frac{\cos \frac{nt}{m}}{m^2}$

سوال 6.22: $\frac{1}{(s+3)(s-2)}$
 جواب: $\frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})$

سوال 6.23: $\frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^5}$
 جواب: $t^2 + \frac{t^4}{8}$

سوال 6.24: $\frac{3s+8}{s^2-9}$
 جواب: $\frac{1}{6}(17e^{3t} + e^{-3t})$

سوال 6.25: $\frac{s-1}{s^2-s-6}$
 جواب: $\frac{1}{5}(2e^{3t} + 3e^{-2t})$

سوال 6.26: $\frac{1}{(s-a)(s+b)}$
 جواب: $\frac{1}{a+b}(e^{at} - e^{-bt})$

6.2 تفرقات اور تفرقی مساوات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات

لاپلاس بدل کو استعمال کرتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل حل کیے جاتے ہیں۔ لاپلاس بدل کے استعمال سے احصائی اعمال کی جگہ الجبرائی اعمال استعمال کیے جاتے ہیں۔ یوں $f(t)$ کا تفرق، $F(s)$ کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہو گا جبکہ $f(t)$ کا مکمل، $F(s)$ کو s سے تقسیم کرنے کے مترادف ہو گا۔

مسئلہ 6.3: $f(t)$ کی تفرق کا لاپلاس بدل

اگر $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہو، مساوات 6.4 پر پورا اترتا ہو اور $f'(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو تب، $s > k$ کی صورت میں، $f'(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(6.5) \quad \mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) \quad (s > k)$$

ثبوت: ہم یہ فرض کرتے ہوئے کہ f' بھی استمراری ہے مساوات 6.5 ثابت کرتے ہیں۔ یوں لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) اور مکمل بالخصوص سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = f(0) + sF(s)$$

چونکہ $f(t)$ مساوات 6.4 پر پورا اترتی ہے لہذا $s > k$ کی صورت میں $t = \infty$ پر $e^{-st} f(t)$ صفر دیگا جبکہ $t = 0$ پر یہ $f(0)$ دیگا۔ آخری مکمل $\mathcal{L}(f) = F(s)$ کے برابر ہے جس کا حل، $s > k$ کی صورت میں، مسئلہ 6.2 کے تحت موجود ہے۔ یوں $\mathcal{L}(f')$ کا حل موجود ہے۔

اگر f' ٹکڑوں میں استمراری ہو تب بالا ثبوت میں مکمل کو ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے (وقفے) پر f' استمراری ہو۔ سوال 6.40 میں اس پر غور کیا گیا ہے۔

□

f'' پر مساوات 6.5 لاگو کر کے حاصل جواب میں مساوات 6.5 پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

(6.6)

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

اسی ترکیب کو f''' پر لاگو کرتے ہوئے

(6.7)

$$\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

ملتا ہے۔ اس ترکیب کو بار بار استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 6.4: بلند درجی تفرق f^n

اگر $f(t)$ اور اس کے تفرقات $f'(t)$ ، $f''(t)$ ، \dots ، $f^{(n-1)}(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہوں، مساوات 6.4 پر پورا اترتے ہوں اور $f^{(n)}(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو تب، $s > k$ کی صورت میں، $f^{(n)}(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(6.8) \quad \mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

مثال 6.6: تفاعل $f(t) = t^2$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f' = 2t$ اور $f'' = 2$ ہیں۔ یوں $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 0$ اور $f''(0) = 2$ ملتے ہیں۔ اب $\mathcal{L}(2) = \frac{2}{s}$ ہے لہذا مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو جدول 6.1 کے عین مطابق ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = \mathcal{L}(2) = \frac{2}{s} = s^2\mathcal{L}(f), \quad \implies \quad \mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

□

عموماً کسی بھی تفاعل کا لاپلاس بدل کئی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔

مثال 6.7: تفاعل $f(t) = \sin^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0) = 0$ ہے جبکہ $f' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 6.5 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2 + 4} = s\mathcal{L}(f) \quad \implies \quad \mathcal{L}(f) = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

□

مثال 6.8: تفاعل $f(t) = t \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0) = 0$ ہے جبکہ

$$f'(t) = \sin \omega t - \omega t \cos \omega t, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(t) = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 f(t)$$

ہیں۔ یوں مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(f'') = 2\omega \mathcal{L}(\cos \omega t) - \omega^2 \mathcal{L}(f) = s^2 \mathcal{L}(f)$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل پر کرتے

$$(s^2 + \omega^2) \mathcal{L}(f) = 2\omega \mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{2\omega s}{s^2 + \omega^2}$$

ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t \sin \omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

□

مثال 6.9: تفاعل $f(t) = t \cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(t) = t \cos \omega t, \quad f(0) = 0$$

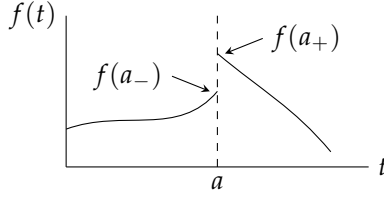
$$f'(t) = \cos \omega t - \omega t \sin \omega t, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -2\omega \sin \omega t - \omega^2 f(t)$$

یوں مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - sf'(0)$$

$$= s^2 \mathcal{L}(f) - 1$$



شکل 6.3: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$ (مثال 6.10)

ساتھ ہی ساتھ f'' کی مساوات کا لاپلاس بدل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= \mathcal{L}[-2\omega \sin \omega t - \omega^2 f(t)] \\ &= -\frac{2\omega^2}{s^2 + \omega^2} - \omega^2 F(s)\end{aligned}$$

ان دونوں جوابات کو برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(6.9) \quad F(s) = \mathcal{L}[t \cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

□

مثال 6.10: استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.3 دیتی ہے۔ آئیں ٹکڑوں میں استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ شکل 6.3 کے تفاعل میں $t = a (> 0)$ پر تفاعل غیر استمراری ہے جبکہ بقایا تمام شرائط وہی ہیں جو مسئلہ 6.3 میں تھے۔ اس تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

شکل 6.3 میں دکھایا گیا تفاعل $t = a$ غیر استمراری ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $t = a$ پر تفاعل چھلانگ⁸ لگاتا ہے یا کہ تفاعل میں $t = 0$ پر چھلانگ پائی جاتی ہے۔ نقطہ چھلانگ تک بائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد⁹ کو $f(a_-)$ لکھا جاتا ہے جبکہ نقطہ چھلانگ تک دائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد کو $f(a_+)$ لکھا جاتا ہے۔ یوں $t = a$ پر تفاعل کی چھلانگ $f(a_+) - f(a_-)$ ہوگی۔

لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں مکمل کو ایسے ٹکڑوں (وقفوں) میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ہر وقفے پر $f(t)$ استمراری ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_{a_+}^{\infty} e^{-st} f' dt + \int_0^{a_-} e^{-st} f' dt$$

jump⁸
limit⁹

پہلے مکمل کا ابتدائی حد a_+ ہے جو $t = a$ کے دائیں طرف کو ظاہر کرتی ہے جہاں تفاعل کی قیمت $f(a_+)$ ہے۔ اسی طرح دوسری مکمل کا اختتامی حد a_- ہے جس پر تفاعل کی قیمت $f(a_-)$ ہے۔ انہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ مکمل بالخصوص سے

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f') &= e^{-st}f(t)\Big|_{a_+}^{\infty} + s \int_{a_+}^{\infty} e^{-st}f(t) dt + e^{-st}f(t)\Big|_0^{a_-} + s \int_0^{a_-} e^{-st}f(t) dt \\ &= -e^{-sa}f(a_+) + s \int_{a_+}^{\infty} e^{-st}f(t) dt + e^{-sa}f(a_-) - f(0) + s \int_0^{a_-} e^{-st}f(t) dt \\ &= s \int_0^{\infty} e^{-st}f(t) dt - f(0) - e^{-sa}[f(a_+) - f(a_-)] \\ &= sF(s) - f(0) - e^{-sa}[f(a_+) - f(a_-)]\end{aligned}$$

□ حاصل ہوتا ہے جہاں e^{-st} استمراری ہونے کی بدولت $e^{-sa_+} = s^{-sa_-} = s^{-sa}$ ہے۔

مثال 6.11: تفرقی مساوات
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

حل: پہلا قدم ضمنی مساوات کا حصول ہے۔ تا معلوم تفاعل $y(t)$ کا لاپلاس بدل $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ لکھ کر مساوات 6.5 اور مساوات 6.6 میں دیے گئے ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y') &= sY - y(0) = sY - 2 \\ \mathcal{L}(y'') &= s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2s + 1\end{aligned}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔ Y کی مساوات کو ضمنی مساوات¹⁰ کہتے ہیں۔

$$s^2Y + 3sY + 2Y = 2s + 5$$

دوسرا قدم ضمنی مساوات کا الجبرائی حل ہے۔ موجودہ ضمنی مساوات کو

$$(s + 1)(s + 2)Y = 2s + 5$$

¹⁰ subsidiary equation

لکھ کر جزوی کسری پھیلاؤ کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Y = \frac{2s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

تیسرا قدم الٹ لاپلاس بدل حاصل کرنا ہے۔ جدول 6.1 سے

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{s+1} \right] = 3e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] = e^{-2t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں خطیت (مسئلہ 6.1) استعمال کرتے ہوئے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے کا حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = 3e^{-t} - e^{-2t}$$

□

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ لاپلاس بدل سے تفرقی مساوات کے حل میں شروع سے ابتدائی قیمتیں مسئلے کا حصہ بنتی ہیں۔

تفاعل کے مکمل کا لاپلاس بدل

ہم نے دیکھا کہ تفاعل کے تفرق کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہے۔ چونکہ مکمل اور تفرق آپس میں الٹ اعمال ہیں لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تفاعل کے مکمل کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل تقسیم s ہو گا۔

مسئلہ 6.5: $f(t)$ کی مکمل کا لاپلاس بدل

اگر $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.4 پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$(6.10) \quad \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] \quad (s > 0, s > k)$$

ثبوت: فرض کریں کہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے اور مساوات 6.4 پر پورا اترتی ہے۔ اب اگر منفی k کے لئے مساوات 6.4 کی شرط پوری ہوتی ہو تب مثبت k کے لئے بھی یہ شرط پوری ہوگی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ k مثبت ہے لہذا مکمل

$$(6.11) \quad g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

استمراری ہو گا اور مساوات 6.4 کے استعمال سے

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq M \int_0^t e^{k\tau} d\tau = \frac{M}{k} (e^{kt} - 1) \quad (k > 0)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مزید ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f(t)$ غیر استمراری ہو، $g'(t) = f(t)$ ہو گا۔ اس طرح $g'(t)$ ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو گا لہذا مسئلہ 6.3 کے تحت

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \quad (s > 0)$$

ہو گا۔ اب مساوات 6.11 سے $g(0) = 0$ ملتا ہے لہذا $\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(g)$ ہو گا جو مساوات 6.10 ہی ہے۔

□

مساوات 6.10 میں $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ لکھ کر اور اطراف بدل کر، الٹ لاپلاس بدل لینے سے

$$(6.12) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{s} \right] = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 6.10 کی جڑواں مساوات ہے۔

مثال 6.12: $\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$ کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے تفاعل $f(t)$ حاصل کریں۔

حل: جدول 6.1

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

دیتی ہے۔ یوں مسئلہ 6.5 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right) \right] = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega \tau d\tau = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

حاصل ہو گا۔ مسئلہ 6.5 ایک مرتبہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right) \right] = \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (1 - \cos \omega \tau) d\tau = \frac{1}{\omega^2} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

□

سوالات

سوال 6.27: $\sin^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.7 میں حاصل کیا گیا۔ یہاں $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ لکھ کر لاپلاس بدل دوبارہ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right] = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$

سوال 6.28: $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.7 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$

سوال 6.29: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ لکھ کر $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$

سوال 6.30: ہم نے مثال 6.12 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کیا۔ اسی کو درج ذیل لکھ کر دوبارہ الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right)$$

سوال 6.31: مسئلہ 6.3 استعمال کرتے ہوئے $\sin \omega t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.32: تفاعل $f(t) = \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.6 حاصل کریں۔

جواب: $f(0) = 0$ ہے جبکہ $f' = \omega \cos \omega t$ اور $f'' = -\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 f$ ہیں۔ یوں $f'(0) = \omega$ ملتا ہے۔ مساوات 6.6 سے $\mathcal{L}(f'') = -\omega^2 \mathcal{L}(f) = s^2 \mathcal{L}(f) - s(0) - \omega$ لکھا جائے گا جس سے جدول 6.1 میں دیا گیا جواب $\mathcal{L}(f) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ ملتا ہے۔

سوال 6.33: تفاعل $f(t) = \cos \omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.6 حاصل کریں۔ جدول سے جواب دیکھیں۔

سوال 6.34: مسئلہ 6.4 استعمال کرتے ہوئے $f(t) = t^n$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں جہاں t عدد صحیح ہے۔

جواب: چونکہ $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 0$ ، \dots ، $f^{(n-1)}(0) = 0$ ہیں جبکہ $f^n = n!$ ہے لہذا مسئلہ 6.4 سے $\mathcal{L}(f^n) = s^n F(s)$ لکھا جائے گا جبکہ $\mathcal{L}(f^n) = \mathcal{L}(n!) = \frac{n!}{s}$ ہے۔ یوں $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.35: ہم نے مثال 6.9 میں $t \cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا۔ اسی طرز پر $t \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

سوال 6.36: $t \sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$

سوال 6.37: $t \cosh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$

سوال 6.38: مثال 6.9 اور سوال 6.35 میں بالترتیب $t \cos \omega t$ اور $t \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا گیا۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$(6.13) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

جواب: $t \sin \omega t$ کے بدل سے $\mathcal{L}^{-1} \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} = t \sin \omega t$ لکھا جاسکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 6.5 سے $\mathcal{L}^{-1} \frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} = \int_0^t \tau \sin \omega \tau d\tau$ ملتا ہے۔ دائیں ہاتھ مکمل بالخص سے $\frac{\sin \omega t}{\omega^3} - \frac{t \cos \omega t}{\omega^2}$ ملتا ہے۔ ان نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.39: درج ذیل ثابت کریں۔ سوال 6.38 کی طرز پر حل کریں۔

$$(6.14) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

سوال 6.40: $f'(t)$ میں محدود چھلانگ نقطہ t_1, t_2, \dots, t_n پر پائے جاتے ہیں جبکہ $f(t)$ استمراری ہے۔ $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ لیتے ہوئے مسئلہ 6.3 ثابت کریں۔

جواب:

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^{t_1-} e^{-st} f' dt + \int_{t_1+}^{t_2-} e^{-st} f' dt + \int_{t_2+}^{t_3-} e^{-st} f' dt + \dots + \int_{t_n+}^{\infty} e^{-st} f' dt$$

لکھ کر مکمل بالخص حاصل کرتے ہیں۔

(6.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f') &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1-} + s \int_0^{t_1-} e^{-st} f(t) dt + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1+}^{t_2-} + s \int_{t_1+}^{t_2-} e^{-st} f(t) dt \\ &+ e^{-st} f(t) \Big|_{t_2+}^{t_3-} + s \int_{t_2+}^{t_3-} e^{-st} f(t) dt + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n+}^{\infty} + s \int_{t_n+}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \end{aligned}$$

اب $f(t)$ استمراری ہے لہذا مساوات 6.15 میں متعدد ترمیمات کو یکجا کیا جاسکتا ہے

$$s \int_0^{t_1-} e^{-st} f(t) dt + s \int_{t_1+}^{t_2-} e^{-st} f(t) dt + \dots + s \int_{t_n+}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

جبکہ بقایا اجزاء سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} &e^{(-st_1-)} f(t_{1-}) - f(0) + e^{(-st_2-)} f(t_{2-}) - e^{(-st_1+)} f(t_{1+}) + e^{(-st_3-)} f(t_{3-}) \\ &- e^{(-st_2+)} f(t_{2+}) + \dots + e^{(-\infty)} f(\infty) - e^{(-st_{n+})} f(t_{n+}) \end{aligned}$$

چونکہ $f(t)$ استمراری ہے لہذا $e^{(-st_m)} f(t_m) = e^{(-st_{m+})} f(t_{m+}) = e^{(-st_m)} f(t_m)$ اور $e^{(-st_{1-})} f(t_{1-}) = e^{(-st_{1+})} f(t_{1+})$ آپس میں کٹ جائیں گے۔ اسی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔ پہلے دو اجزاء میں سے $f(0)$ بچتا ہے جبکہ $f(t)$ محدود و تقابل ہونے کی بنا پر $e^{-\infty} f(\infty) = 0$ ہو گا۔ اس طرح مسئلہ 6.3 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوال 6.41 تا سوال 6.51 کو مسئلہ 6.5 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 6.41: $\frac{1}{s^2+s}$
جواب: $1 - e^{-t}$

سوال 6.42: $\frac{6}{s^2+4s}$
جواب: $\frac{3}{2}(1 - e^{-4t})$

سوال 6.43: $\frac{3}{s^2-9s}$
جواب: $\frac{1}{3}(e^{9t} - 1)$

سوال 6.44: $\frac{9}{s^3+9s}$
جواب: $1 - \cos 3t$

سوال 6.45: $\frac{4}{s^2(s+2)}$
جواب: $e^{-2t} + 2t - 1$

سوال 6.46: $\frac{4}{s^3(s+2)}$
جواب: $-\frac{e^{-2t}}{2} + t^2 - t + \frac{1}{2}$

سوال 6.47: $\frac{12}{s(s^2+4)}$
جواب: $3 - 3 \cos 2t$

سوال 6.48: $\frac{12}{s^2(s^2+4)}$
جواب: $3t - \frac{3}{2} \sin 2t$

سوال 6.49: $\frac{32}{s(s^2-16)}$
جواب: $2 \cosh 4t - 2$

سوال 6.50: $\frac{32}{s^2(s^2-16)}$
 جواب: $\frac{1}{2} \sinh 4t - 2t$

سوال 6.51: $\frac{6}{s^4(s^2+1)}$
 جواب: $6 \sin t + t^3 - 6t$

لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت سوالات 6.52 تا 6.58 حل کریں۔

سوال 6.52: $y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
 جواب: $y = \cos \pi t$

سوال 6.53: $y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, y'(0) = B$
 جواب: $y = A \cos \omega t + \frac{B}{\omega} \sin \omega t$

سوال 6.54: $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$
 جواب: $y = 4e^{2t} - 3e^{3t}$

سوال 6.55: $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$
 جواب: $y = e^{2t} + e^{-t}$

سوال 6.56: $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$
 جواب: $y = (2 - t)e^t$

سوال 6.57: $y'' - ky' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = k, k > 0$
 جواب: $y = 1 + e^{kt}$

سوال 6.58: $y'' + ky' - 2k^2 y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 2k$
 جواب: $y = 2e^{kt}$

سوال 6.59: جبری، بلا تقصیر ارتعاش
 ثابت کریں کہ درج ذیل

$$y'' + \omega^2 y = r(t)$$

کے ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے جہاں $r(t)$ کا لاپلاس بدل $R(s)$ ہے۔ ω مستقل ہے اور $r(t)$ جبری تفاعل ہے۔

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

دھیان رہے کہ جواب کا پہلا جزو صرف اور صرف ابتدائی معلومات پر منحصر ہے جبکہ جواب کے دوسرے جزو پر ابتدائی معلومات کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل

اب تک ہم لاپلاس بدل کے کئی خواص جان چکے ہیں۔ اس حصے میں دو مزید خصوصیات پیش کیے جائیں گے جنہیں s محور پر منتقلی (مسئلہ 6.6) اور t محور پر منتقلی (مسئلہ 6.7) کہتے ہیں۔

مسئلہ 6.6: s محور پر منتقلی؛ منتقلی کا پہلا مسئلہ
اگر $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو جہاں $s > k$ ہے، تب $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s-a)$ ہو گا جہاں $s-a > k$ ہے۔ یوں اگر

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

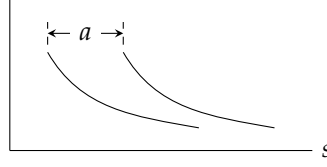
ہو تب

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

ہو گا۔ یوں اصل تفاعل کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ پر کرنے کے مترادف ہے یعنی لاپلاس بدل s محور پر اپنی جگہ سے سرک کر نئی جگہ منتقل ہو جاتا ہے (شکل 6.4 دیکھیں)۔

ثبوت: لاپلاس بدل کی تعریف

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$



شکل 6.4: منتقلی کا پہلا مسئلہ، s محور پر منتقلی

استعمال کرتے ہوئے s کی جگہ $s - a$ پر کرتے ہیں۔

□

$$F(s - a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [e^{at} f(t)] dt = \mathcal{L}[e^{at} f(t)]$$

مثال 6.13: قصری ارتعاش

جدول 6.1 میں $\sin \omega t$ اور $\cos \omega t$ کے بدل کو استعمال کرتے ہوئے جدول میں گیارہ اور بارہ شمار پر دیے گئے لاپلاس بدل کو مسئلہ 6.6 کی مدد سے فوراً لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

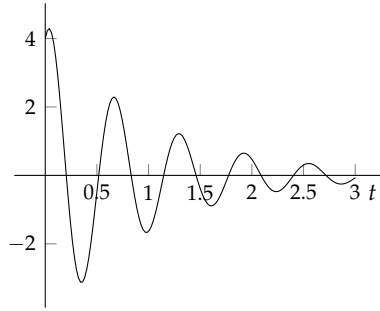
$$\mathcal{L}(f) = \frac{4s + 24}{s^2 + 2s + 101}$$

حل: اس کو درکار صورت

$$f = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4(s + 1) + 2(10)}{(s + 1)^2 + 10^2} \right] = 4\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 10^2} \right] + 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10}{(s + 1)^2 + 10^2} \right]$$

میں لاتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f = e^{-t}(4 \cos 10t + 2 \sin 10t)$$



شکل 6.5: قصری ارتعاش (مثال 6.13)

□

جسے شکل 6.5 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ قصری ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال 6.14: منتقلی کا پہلا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے جدول 6.1 میں درج تفاعل $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ ، t^n کو e^{at} سے ضرب دے کر لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[e^{at} t^n] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

□

مثال 6.15: قصری آزاد ارتعاش

چھت سے لنگی لچکدار اسپرنگ کے نچلے سرے سے کمیت $m = 3$ لٹکائی گئی ہے۔ اسپرنگ کا ینگ مقیاس لچک $k = 6$ ہے۔ کمیت کے ساکن مقام سے فاصلہ $y(t)$ ہے۔ کمیت کو ابتدائی طور پر $y(0) = 4$ پر رکھ کر اس کو ابتدائی رفتار $y'(0) = -3$ دی جاتی ہے۔ فرض کریں کہ کمیت کی رفتار کے راست متناسب قصری قوت عمل کرتی ہے جہاں قصری مستقل $c = 12$ کے برابر ہے۔ کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: کمیت کی حرکت کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ بیان کرتا ہے

$$y'' + 2y' + 4y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3$$

جس کا ضمنی مساوات

$$s^2Y - 4s + 3 + 2(sY - 4) + 4Y = 0$$

ہے۔ ضمنی مساوات کا حل لکھتے ہیں۔

$$Y = \frac{4s + 5}{s^2 + 2s + 4} = \frac{4(s + 1)}{(s + 1)^2 + 3} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 3}$$

اب ہم جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 3}\right) = \cos \sqrt{3}t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2 + 3}\right) = \sin \sqrt{3}t$$

ہیں لہذا مسئلہ 6.6 کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t}(4 \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t)$$

□

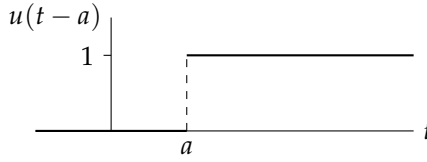
t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تعامل

منتقلی کے پہلے مسئلے میں ہم نے دیکھا کہ تعامل $f(t)$ کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s - a$ لکھنے کے مترادف ہے۔ اب ہم منتقلی کا دوسرا مسئلہ (مسئلہ 6.7) پیش کرتے ہیں جس کے تحت تعامل $f(t)$ میں t کی جگہ $t - a$ پر کرنا، لاپلاس بدل $F(s)$ کو (تقریباً) e^{-as} سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔

مسئلہ 6.7: t محور پر منتقلی؛ منتقلی کا دوسرا مسئلہ

اگر تعامل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو تب $e^{-as}F(s)$ ، جہاں $a > 0$ ہے، درج ذیل تعامل کا لاپلاس بدل ہو گا۔

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t - a) & t > a \end{cases}$$

شکل 6.6: اکائی سیڑھی تفاعل $u(t-a)$

ہیوی سائیڈ سیڑھی تفاعل¹¹، جسے شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے، کی تعریف¹² درج ذیل ہے۔ ہیوی سائیڈ سیڑھی تفاعل کو اکائی سیڑھی تفاعل¹³ بھی کہتے ہیں۔

$$(6.16) \quad u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

$t < a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل کی قیمت صفر ہے جبکہ $t > a$ پر اس کی قیمت اکائی ہے۔ عین $t = a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل غیر معین¹⁴ ہے اور یہاں اس میں اکائی کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔

اکائی سیڑھی تفاعل کو زیر استعمال لاتے ہوئے ہم $\tilde{f}(t)$ کو $f(t-a)u(t-a)$ لکھ سکتے ہیں جس کی مثال شکل 6.7 میں دکھائی گئی ہے۔ اس طرح مسئلہ 6.7 کہتا ہے کہ

$$(6.17) \quad e^{-as}F(s) = \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]$$

جسے الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(6.18) \quad \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)u(t-a)$$

ثبوت: مسئلہ 6.7 کا ثبوت
لاپلاس بدل کی تعریف سے

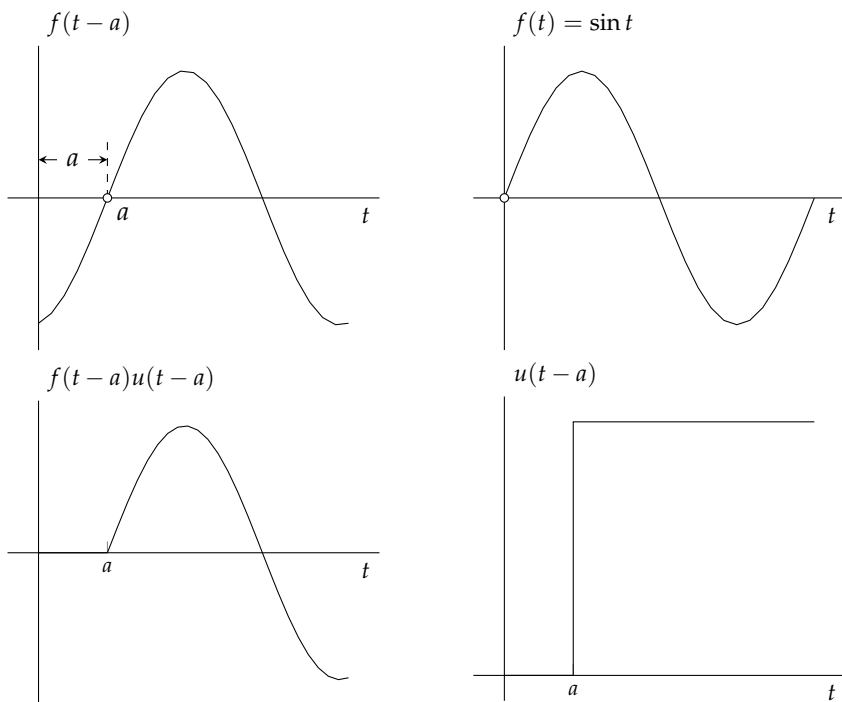
$$e^{-as}F(s) = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau$$

¹¹ Heaviside step function

¹² ایور ہیوی سائیڈ [1850-1925] خود لکھ چڑھ کر برقی مہندس، ریاضی دان اور ماہر طبیعیات بنے۔ یہ انگلستانی تھے۔

¹³ unit step function

¹⁴ undefined



مثال 6.7: $f(t-a)u(t-a)$ جہاں $f(t) = \sin t$ ہے۔

6.3. s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفعل

لکھا جاسکتا ہے جس میں $t = a + \tau$ پر کرتے ہوئے

$$e^{-as}F(s) = \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)dt$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر اندرون مکمل مقدار کی قیمت وقفہ $t = 0$ تا $t = a$ کے درمیان صفر کے برابر ہو تب اس مکمل کے حدود کو 0 تا ∞ لکھا جاسکتا ہے۔ یہی کچھ اندرون مکمل کو $u(t-a)$ سے ضرب دیتے ہوئے کرنا ممکن ہے لہذا درج بالا کو

$$e^{-as}F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt = \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اکائی سیڑھی تفعل نہایت اہم تفعل ہے۔ آئیں اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t-a)dt = \int_0^a e^{-st}0dt + \int_a^{\infty} e^{-st}1dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^{\infty}$$

لکھتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے جہاں $s > 0$ ہے۔

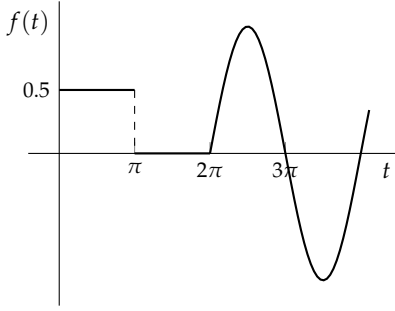
$$(6.19) \quad \mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $a = 0$ کی صورت میں $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ ملتا ہے۔

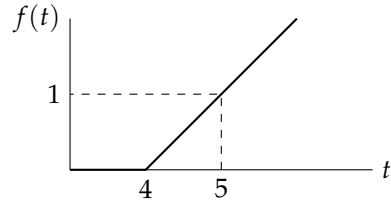
لاپلاس بدل کی عملی استعمال

لاپلاس بدل کے بارے میں اب ہم اتنا جانتے ہیں کہ اس کو استعمال کرتے ہوئے ایسے مشکل مسائل (مثلاً مثال 6.18، مثال 6.19 اور مثال 6.20) حل کریں جنہیں دیگر طریقوں سے حل کرنا نسبتاً زیادہ دشوار ہو گا۔

مثال 6.16: تفعل $\frac{e^{-4s}}{s^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل دریافت کریں۔



(ب) مثال 6.17 کا تفاعل۔



(الف) مثال 6.16 کا تفاعل۔

شکل 6.8: مثال 6.16 اور مثال 6.17 کے تفاعل۔

حل: چونکہ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$ ہے لہذا مسئلہ 6.7 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔ شکل 6.8-الف دیکھیں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^2}\right) = (t-4)u(t-4)$$

□

مثال 6.17: شکل 6.8-ب میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے۔ اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0.5 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$

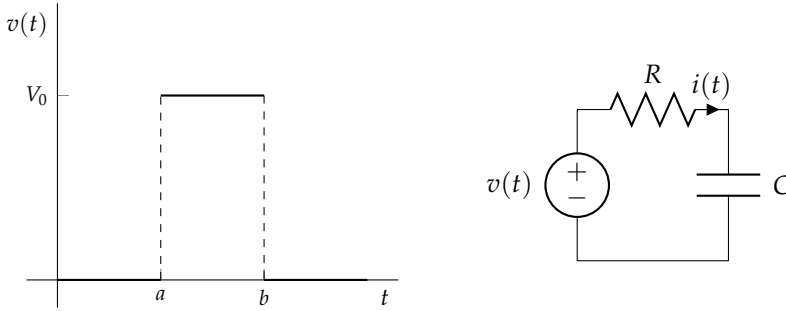
حل: اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے دیے گئے تفاعل کو لکھتے ہیں

$$f(t) = 0.5u(t) - 0.5u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t$$

جہاں $\sin(t-2\pi) = \sin t$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 6.19، مساوات 6.17 اور جدول 6.1 کی مدد سے لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

□



شکل 6.9: مثال 6.18 کا دور اور داخلی دباؤ۔

مثال 6.18: ایک عدد چکور موج پر RC دور کا رد عمل
مزاہمت اور برق گیر کا سلسلہ وار دور شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو ایک عدد چکور موج $v(t)$ مہیا کی جاتی ہے۔ دور
میں برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ شکل 6.9 سے رجوع کریں۔

حل: کرخوف مساوات دباؤ سے

$$i(t)R + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں داخلی دباؤ کو دو عدد اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے

$$v(t) = V_0(u(t-a) - u(t-b))$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 6.19 اور مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

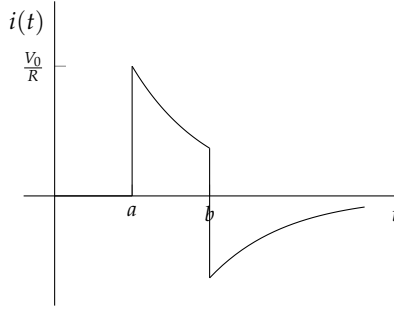
$$I(s)R + \frac{I(s)}{sC} = \frac{V_0}{s} [e^{-as} - e^{-bs}]$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$I(s) = \left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \right) [e^{-as} - e^{-bs}]$$

اب ہم جدول 6.1 سے جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \right) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

شکل 6.10: مثال 6.18 کی رو $i(t)$

کے برابر ہے لہذا اصل حل مسئلہ 6.7 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}(I) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-bs}F(s)] \\ &= \frac{V_0}{R} [e^{-\frac{(t-a)}{RC}} u(t-a) - e^{-\frac{(t-b)}{RC}} u(t-b)] \end{aligned}$$

جس کو یوں

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ K_1 e^{-\frac{t}{RC}} & a < t < b \\ (K_1 - K_2) e^{-\frac{t}{RC}} & t > b \end{cases}$$

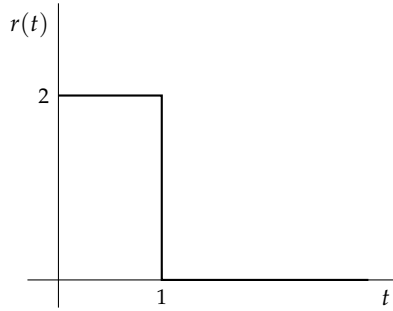
بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں $K_1 = \frac{V_0}{R} e^{\frac{a}{RC}}$ اور $K_2 = \frac{V_0}{R} e^{\frac{b}{RC}}$ ہیں۔ برقی رو $i(t)$ کو شکل 6.10 میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 6.19: بلا تقصیر نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور داخلی موج درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y'' + 4y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

حل: داخلی جبری قوت کو $r(t) = 2[u(t) - u(t-1)]$ لکھا جاسکتا ہے۔ دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$s^2 Y + 4Y = \frac{2}{s} (1 - e^{-s})$$



شکل 6.11: مثال 6.19 اور مثال 6.20 کا داخلی تعامل۔

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$Y = \frac{2}{s(s^2 + 4)}(1 - e^{-s})$$

اب جدول 6.1 کے تحت $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \sin 2t$ ہے لہذا مساوات 6.12 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2 + 4)}\right] = \int_0^t \sin 2\tau \, d\tau = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

اب مسئلہ 6.7 زیر استعمال لاتے ہوئے اصل جواب لکھتے ہیں

$$y(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] - \frac{1}{2}[1 - \cos 2(t-1)]u(t-1)$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ رد عمل دو مختلف ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}[\cos 2(t-1) - \cos 2t] & t > 1 \end{cases}$$

□

مثال 6.20: قصری نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور موج

درج ذیل قصری ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.11 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y'' + 4y' + 3y = r(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

حل: ضمنی مساوات لکھ کر

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{2}{s}(1 - e^{-s})$$

حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$Y = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}(1 - e^{-s})$$

$$F(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+3)} \text{ کا جزوی کسری پھیلاؤ}$$

$$F(s) = \frac{2}{3s} + \frac{1}{3(s+3)} - \frac{1}{s+1}$$

ہے لہذا

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t}$$

ہو گا۔ یوں مسئلہ 6.7 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s}) = f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{e^{-3(t-1)}}{3} - e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے اصل حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = f(t) - f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t} & 0 < t < 1 \\ (1 - e^3)\frac{e^{-3t}}{3} - (1 - e)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

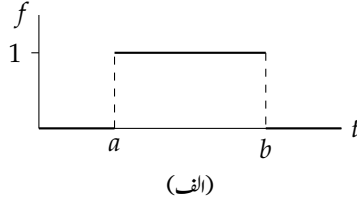
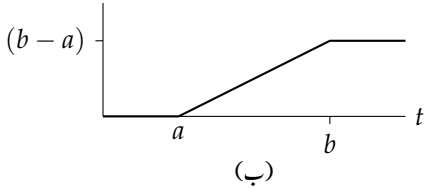
□

مثال 6.21: شکل 6.12-الف میں تفاعل $f(t)$ اور شکل-ب میں اس کا مکمل دکھایا گیا ہے۔ $f(t)$ کے بدل سے شکل-ب کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: شکل 6.12-الف کا لاپلاس بدل $F = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$ ہے لہذا شکل-ب کا بدل $\frac{F}{s} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s^2}$ ہو گا۔

□

6.3. s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیریز ہی فنکشن



شکل 6.12: مثال 6.21 کے اشکال۔

سوالات

سوال 6.60 تا سوال 6.75 منتقلی s پر مبنی ہیں۔ سوال 6.60 تا سوال 6.67 میں لاپلاس بدل جبکہ سوال 6.68 تا سوال 6.75 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.60: $e^{-3t} \sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

سوال 6.61: $e^{-t} \cos(\omega t - \theta)$
جواب: $\frac{(s+1) \cos \theta + \omega \sin \theta}{(s+1)^2 + \omega^2}$

سوال 6.62: $e^{-at} (A \sin \omega t + B \cos \omega t)$
جواب: $\frac{\omega A + (s+a)B}{(s+a)^2 + \omega^2}$

سوال 6.63: $e^{2t} (3t - 4t^2)$
جواب: $\frac{3}{(s-2)^2} - \frac{8}{(s-2)^3}$

سوال 6.64: te^{2t}
جواب: $\frac{1}{(s-2)^2}$

سوال 6.65: $e^{-3t} \sin 5t$
جواب: $\frac{5}{(s+3)^2+5^2}$

سوال 6.66: $0.25e^{-1.5t} \cos(3\pi t)$
جواب: $\frac{0.25(s+1.5)}{(s+1.5)^2+(3\pi)^2}$

سوال 6.67: $\sinh t \sin \omega t$
 جواب: $\frac{1}{2} \left[\frac{\omega}{(s-1)^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{(s+1)^2 + \omega^2} \right]$

سوال 6.68: $\frac{m}{(s+n)^2}$
 جواب: mte^{-nt}

سوال 6.69: $\frac{3}{(s+5)^4}$
 جواب: $\frac{t^3 e^{-5t}}{2}$

سوال 6.70: $\frac{3}{(s+\sqrt{5})^3}$
 جواب: $\frac{3t^2 e^{-\sqrt{5}t}}{2}$

سوال 6.71: $\frac{4}{s^2 + 2s + 5}$
 جواب: $2e^{-t} \sin 2t$

سوال 6.72: $\frac{\pi}{s^2 + 8\pi s + 17\pi^2}$
 جواب: $e^{-4\pi t} \sin \pi t$

سوال 6.73: $\frac{3s+22}{s^2+8s+41}$
 جواب: $e^{-4t} (2 \sin 5t + 3 \cos 5t)$

سوال 6.74: $\frac{s+a+b}{(s+a)^2 + b^2}$
 جواب: $e^{-at} (\cos bt + \sin bt)$

سوال 6.75: $\frac{a}{s+c} + \frac{b}{(s+c)^2}$
 جواب: $(a + bt)e^{-ct}$

سوال 6.76 تا سوال 6.79 میں بذلولی سائن اور بذلولی کوسائن کو قوت نمائی تفاعل کی صورت میں لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.76: $e^{-at} \sinh \omega t$
 جواب: $\frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$

سوال 6.77: $\sinh at \sin at$
 جواب: $\frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$

6.3. s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیریز ہی تفہم

سوال 6.78: $\sinh at \sin \omega t$
جواب: $\frac{\omega}{2[(s-a)^2 + \omega^2]} - \frac{\omega}{2[(s+a)^2 + \omega^2]}$

سوال 6.79: $t \cosh at$
جواب: $\frac{1}{2(s-a)^2} + \frac{1}{2(s+a)^2}$

سوال 6.80 تا سوال 6.83 میں \mathcal{L}^{-1} دریافت کریں۔

سوال 6.80: $\frac{s+4}{(s+1)^2+9}$
جواب: $e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t)$

سوال 6.81: $\frac{s-2}{s^2+4s+8}$
جواب: $e^{-2t}(\cos 2t - 2 \sin 2t)$

سوال 6.82: $\frac{2}{(s+1)^3} - \frac{6}{(s+1)^4}$
جواب: $e^{-t}(t^2 + t^3)$

سوال 6.83: $\frac{as+b}{(s-c)^2+\omega}$
جواب: $e^{ct} \left[\frac{(ac+b)}{\omega} \sin \omega t + a \cos \omega t \right]$

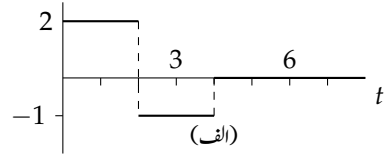
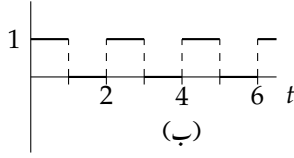
سوال 6.84 تا سوال 6.87 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں لاپلاس بدل کی استعمال سے حل کریں۔

سوال 6.84: $y'' + 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 1$
جواب: $y = -e^{-t}(2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t)$

سوال 6.85: $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$
جواب: $y = (1-t)e^{3t}$

سوال 6.86: $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$
جواب: $y = e^t(\sin 2t - \cos 2t)$

سوال 6.87: $y'' + 10y' + 25 = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$
جواب: $y = (9t + 2)e^{-5t}$



شکل 6.13: سوال 6.88 اور سوال 6.89 کے اشکال۔

اکائی سیڑھی تفاعل استعمال کرتے ہوئے سوال 6.88 تا سوال 6.93 میں دیے گئے خطوط کو لکھ کر ان کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.88: شکل 6.13-الف میں دکھائے گئے خط بتایا تمام t پر صفر کے برابر ہے۔

جواب: $\frac{1}{s}(2 - 3e^{-2s} + e^{-4s})$

سوال 6.89: شکل 6.13-ب مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$f(t) = u(t) - u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) + u(t-4) - u(t-5) + \dots$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s} + \dots)$$

$$= \frac{1}{s} \left[\frac{1 - (-e^{-s})^n}{1 + e^{-s}} \right] = \frac{1}{s(1 + e^{-s})} \quad \text{ہو گا } e^{-sn} \rightarrow 0 \text{ پر } s > 0, n \rightarrow \infty$$

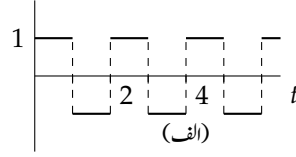
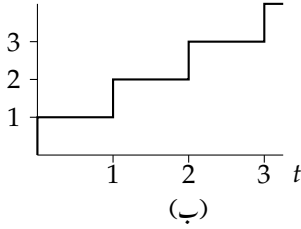
سوال 6.90: شکل 6.14-الف مسلسل موج ہے۔

جواب:

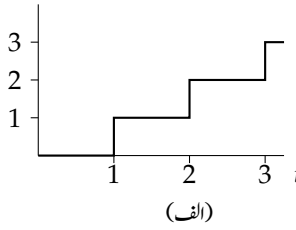
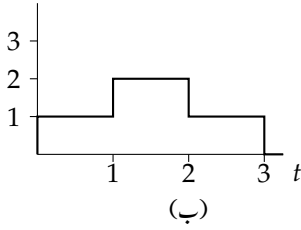
$$f(t) = u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) + 2u(t-4) - 2u(t-5) + \dots$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-4s}}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + \dots$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{2}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-4s}}{s} - \dots = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s(1 + e^{-s})}$$



شکل 6.14: سوال 6.90 اور سوال 6.91 کے اشکال۔



شکل 6.15: سوال 6.92 اور سوال 6.93 کے اشکال۔

سوال 6.91: شکل 6.14-ب مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$f(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + \dots$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \dots = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

سوال 6.92: شکل 6.15-الف مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$f(t) = u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + \dots$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \dots = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

سوال 6.93: شکل 6.15-ب غیر مسلسل موج ہے۔ بقایا تمام t پر موج صفر کے برابر ہے۔

جواب: $\frac{1}{s}(1 + e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s})$

سوال 6.94 تا سوال 6.97 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.94: $\frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$

جواب: $f = u(t-2) - u(t-3)$ یعنی $2 < t < 3$ کے لئے $f = 1$ ہے جبکہ بقیہ اوقات $f = 0$ ہے۔

سوال 6.95: $\frac{e^{-s}}{s^2}$

جواب: $(t-1)u(t-1)$

سوال 6.96: $\frac{e^{-s} + 2e^{-2s} - 4e^{-3s}}{s^2}$

جواب: $t < 1$ ، $1 < t < 2$ ، $2 < t < 3$ اور $3 < t$ پر $f = 0$ ، $f = t-1$ ، $f = 3t-5$ اور $f = -t+11$ ہیں۔

سوال 6.97: $\frac{6(e^{-2s} - e^{-3s})}{s^3}$

جواب: $t < 2$ ، $2 < t < 3$ اور $3 < t$ کے لئے $f = 0$ ، $f = (t-2)^2$ اور $f = 2t-5$ ہے۔

سوال 6.98 تا سوال 6.102 کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.98: $(t-3)u(t-3)$

جواب: $\frac{e^{-3s}}{s^2}$

سوال 6.99: $tu(t)$

جواب: $\frac{1}{s^2}$

سوال 6.100: $u(t-\pi) \sin t$

جواب: $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

سوال 6.101: $u(t - \frac{2\pi}{\omega}) \sin \omega t$

جواب: $\frac{\omega(1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}})}{s^2 + \omega^2}$

سوال 6.102: $t^2 u(t-1)$

جواب: $\frac{(s^2+2s+2)e^{-s}}{s^3}$

6.3. s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیرجی تف عمل

سوال 6.103 تا سوال 6.105 کے تفاعل دیے گئے وقفے کے باہر صفر کے برابر ہیں۔ ان کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.103: $A \sin \omega t$ ($0 < t < \frac{\pi}{\omega}$)
جواب: $\frac{A}{s^2 + \omega^2} (1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}})$

سوال 6.104: $A \cos \omega t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2\omega}$)
جواب: $\frac{A}{s^2 + \omega^2} (s + \omega e^{-\frac{\pi s}{2\omega}})$

سوال 6.105: t^2 ($0 < t < 1$)
جواب: $\frac{2 - (s^2 + 2s + 2)e^{-s}}{s^3}$

سوال 6.106 تا سوال 6.111 کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.106: $\frac{e^{-3s}}{s}$
جواب: $u(t - 3)$

سوال 6.107: $\frac{e^{-4s}}{s^2}$
جواب: $(t - 4)u(t - 4)$

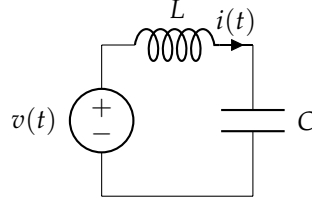
سوال 6.108: $\frac{e^{-3s}}{s - 4}$
جواب: $e^{4(t-3)}u(t - 3)$

سوال 6.109: $\frac{\omega e^{-2s}}{s^2 + \omega^2}$
جواب: $\sin[\omega(t - 2)]u(t - 2)$

سوال 6.110: $\frac{1 - e^{-2s}}{s^2 + 9}$
جواب: $\frac{1}{3} \sin 3tu(t) - \frac{1}{3} \sin[3(t - 2)]u(t - 2)$

سوال 6.111: $\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$
جواب: وقفہ $t > \pi$ پر تفاعل $f = -e^{(\pi-t)} \sin(t - \pi)u(t - \pi)$ ہے۔ بتایا اوقات تفاعل صفر کے برابر ہے۔

سوال 6.112 تا سوال 6.113 میں $L = 1H$ اور $C = 1F$ لیتے ہوئے برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ داخلی دباؤ $v(t)$ سوال میں دیا گیا ہے۔



شکل 6.16: سوال 6.112 تا سوال 6.113 کا دور۔

سوال 6.112: $0 < t < a$ داخلی دباؤ $v(t) = t$ ہے۔ بقایا اوقات $v(t) = 0$ ہے۔
جواب:

$$Li' + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = t[1 - u(t-a)] = t - (t-a)u(t-a) - au(t-a)$$

$$i = \begin{cases} 1 - \cos t & 0 < t < a \\ \cos(t-a) - a \sin(t-a) - \cos t & t > a \end{cases}$$

سوال 6.113: $0 < t < \pi$ $v(t) = 1 - e^{-t}$ ہے جبکہ بقایا اوقات $v(t) = 0$ ہے۔
جواب:

$$i = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t) & 0 < t < a \\ -\frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}) \cos t + \frac{1}{2}(3 - e^{-\pi}) \sin t & t > \pi \end{cases}$$

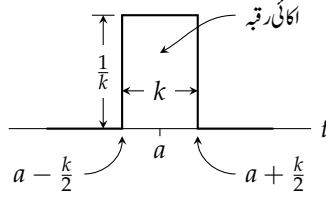
سوال 6.114: ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{F(\frac{s}{a})}{a}$ ہو گا۔ اس کیلئے استعمال کرتے ہوئے $\cos t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.115: ثابت کریں کہ مساوات 6.17 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو عملاً زیادہ بہتر صورت ہے۔

$$(6.20) \quad e^{-as} \mathcal{L}[f(t+a)] = \mathcal{L}[f(t)u(t-a)]$$

جواب: نیا تفاعل $\tilde{f}(t) = f(t+a)$ جہاں $\tilde{f}(t)$ ہے زیر استعمال لاتے ہیں۔ یوں $f(t) = \tilde{f}(t-a)$ ہو گا۔ یوں مساوات 6.17 سے درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-a)] = \mathcal{L}[\tilde{f}(t-a)u(t-a)] = e^{-as} \mathcal{L}[\tilde{f}(t)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(t+a)]$$



شکل 6.17: ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔

6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ

الیکٹران کی کمیت کو نقطہ کمیت تصور کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح اس کی برقی بار کو نقطہ بار تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں کارٹیزی محور کے مبدا پر موجود الیکٹران کی کمیت مبدا پر پائی جائے گی جبکہ مبدا سے ہٹ کر کسی بھی نقطے پر کمیت صفر کے برابر ہوگی۔ نقطہ کمیت یا نقطہ بار کو ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل¹⁵ سے ظاہر¹⁶ کیا جاتا ہے۔ اسی طرح گیند کو پلے سے مارتے ہوئے یا بندوق سے گولی چلاتے وقت انتہائی کم دورانیے کے لئے قوت عمل میں آتی ہے۔ ایسی قوت کو بھی ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایسی برقی یا میکانی قوت (یا عمل) جو انتہائی کم دورانیے کے لئے کارآمد ہو کو ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلے کو لاپلاس بدل کی مدد سے نہایت عمدگی کے ساتھ حل کیا جاسکتا ہے۔

ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل کو شکل 6.17 کی مدد سے سمجھتے ہیں جس میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے، جہاں k مثبت اور چھوٹی قیمت ہے۔

$$(6.21) \quad f_k(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{k} & a - \frac{k}{2} < t < a + \frac{k}{2} \\ 0 & \text{بقایا} \end{cases}$$

یہ تفاعل کسی ایسی قوت کو ظاہر کر سکتی ہے جس کی مقدار $\frac{1}{k}$ ہو اور جو لمحہ $t = a - \frac{k}{2}$ تا $t = a + \frac{k}{2}$ عمل پیرا ہو۔ میکانیات میں ایسی قوت کا، لمحہ $t = a - \frac{k}{2}$ تا $t = a + \frac{k}{2}$ ، مکمل میکانی ضرب¹⁷ کہلاتی ہے۔ برقی

¹⁵ Dirac delta function

¹⁶ ماہر طبیعیات، پال ڈیرین مارش ڈیراک [1902-1984] (جرمنی کے اردن روڈالف یوسف شرودنگر کے ساتھ مشترک) نوبل انعام یافتہ [1933]، انگلستان کے رہائشی (جن کا تعلق سوئٹزرلینڈ سے تھا) نے کوانٹم میکانیات میں کلیدی کردار ادا کیا۔
¹⁷ impulse

میدان میں ایسے برقی دباؤ کو برقی ضرب کہا جاتا ہے۔ شکل 6.17 میں ضرب درج ذیل ہے۔

$$(6.22) \quad I_k = \int_0^{\infty} f_k(t-a) dt = \int_{a-\frac{k}{2}}^{a+\frac{k}{2}} \frac{1}{k} dt = 1$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ k کی قیمت کم سے کم کرنے سے ضرب کی قیمت پر کیا اثر پڑتا ہے۔ ہم f_k کی قیمت کی حد $0 \rightarrow k$ پر حاصل کرتے ہیں جہاں $k > 0$ ہے۔ اس حد کو ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل یا اکائی ضرب تفاعل¹⁸ پکارا اور $\delta(t-a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(6.23) \quad \delta(t-a) = \lim_{k \rightarrow 0} f_k(t-a)$$

$\delta(t-a)$ کو، علم الاحصاء میں سادہ تفاعل کی رسمی مطلب کے تحت تفاعل نہیں سمجھا جاسکتا ہے البتہ اسے عمومی تفاعل¹⁹ کے تحت تفاعل سمجھا جاسکتا ہے۔ یہ حقیقت سمجھنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ f_k کا I_k اکائی (1) ہے لہذا مساوات 6.21 اور مساوات 6.22 میں $k \rightarrow 0$ پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$(6.24) \quad \delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases} \quad \int_0^{\infty} \delta(t-a) dt = 1$$

جبکہ علم الاحصاء کے تحت، ایسے تفاعل کا مکمل صفر کے برابر ہوگا جس کی قیمت، ماسوائے کسی ایک نقطہ پر، صفر کے برابر ہو۔ اس کے باوجود ضرب تفاعل استعمال کرتے ہوئے، اپنی آسانی کی خاطر، ہم $\delta(t-a)$ کو سادہ تفاعل تصور کرتے ہیں۔ بالخصوص $\delta(t-a)$ کی چننے²⁰ کی خاصیت استعمال کرتے ہوئے استمراری تفاعل $g(t)$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int_0^{\infty} g(t) \delta(t-a) dt = \int_0^{a-} g(t) \delta(t-a) dt + \int_{a-}^{a+} g(t) \delta(t-a) dt + \int_{a+}^{\infty} g(t) \delta(t-a) dt$$

چونکہ $t \neq a$ پر $\delta(t-a) = 0$ ہے لہذا درج بالا دائیں ہاتھ پہلا اور تیسرا مکمل صفر کے برابر ہیں۔ یوں

$$(6.25) \quad \int_0^{\infty} g(t) \delta(t-a) dt = \int_{a-}^{a+} g(t) \delta(t-a) dt = g(a) \int_{a-}^{a+} \delta(t-a) dt = g(a)$$

¹⁸ unit impulse function

¹⁹ روسی ریاضی دان سرگی لودچ سوپولو [1908-1989] نے عمومی تفاعل کے نظریے کی بنیاد رکھی۔

²⁰ sifting property

حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ a لامتناہی کم وسعت کا ہو گا جس پر $g(t)$ کی قیمت میں تبدیلی کو رد کیا جاسکتا ہے۔ یوں اس نقطے پر $g(t)$ کی قیمت، مستقل مقدار $g(a)$ ہو گی۔ اس مستقل مقدار $g(a)$ کو مکمل کے باہر لے جایا گیا ہے جبکہ $\delta(t-a)$ کا مکمل اکائی کے برابر ہے۔

$\delta(t-a)$ کا لاپلاس بدل حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$f_k(t-a) = \frac{1}{k} u[t - (a - \frac{k}{2})] - \frac{1}{k} u[t - (a + \frac{k}{2})]$$

لہذا

$$\mathcal{L}(f_k) = \frac{e^{-(a-\frac{k}{2})s}}{ks} - \frac{e^{-(a+\frac{k}{2})s}}{ks} = e^{-as} \left(\frac{e^{\frac{ks}{2}} - e^{-\frac{ks}{2}}}{ks} \right)$$

ہو گا۔ اب $k \rightarrow 0$ پر درج بالا $\mathcal{L}[\delta(t-a)]$ دے گا۔ ہم $e^{\mp x} = 1 \mp x + \frac{x^2}{2!} \mp \dots$ استعمال کرتے ہوئے قوسین کو پھیلا کر لکھتے ہیں۔

$$\frac{e^{\frac{ks}{2}} - e^{-\frac{ks}{2}}}{ks} = \frac{(1 + \frac{ks}{2} + \frac{(\frac{ks}{2})^2}{2!} + \dots) - (1 - \frac{ks}{2} + \frac{(\frac{ks}{2})^2}{2!} - \dots)}{ks} = \frac{ks + \frac{1}{3}(\frac{ks}{2})^3 + \dots}{ks}$$

یوں $k \rightarrow 0$ پر قوسین کی حد درج ذیل ہو گی

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{ks + \frac{1}{3}(\frac{ks}{2})^3 + \dots}{ks} = 1$$

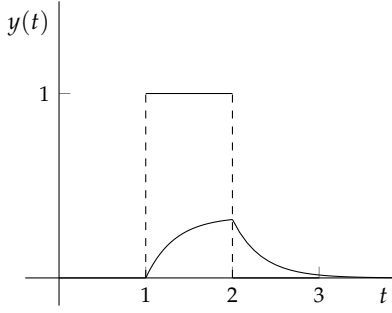
لہذا ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$(6.26) \quad \mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$$

اکائی سیڑھی تفاعل اور اکائی ضرب تفاعل کے لاپلاس بدل جانتے ہوئے، آئیں اب سادہ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے لاپلاس بدل کی طاقت دیکھیں۔ آپ مثال 6.22، مثال 6.23 اور مثال 6.27 کو دیگر طریقوں سے حل کر کے تسلی کر سکتے ہیں کہ لاپلاس بدل کا طریقہ نہایت عمدہ ہے۔

مثال 6.22: درج ذیل اسپرنگ اور کمیت کی قسری نظام (حصہ 2.8) کا رد عمل، شکل 6.18 میں دکھائے گئے، اکائی چکور جبری قوت کی صورت میں حاصل کریں۔

$$(6.27) \quad y'' + 4y' + 3y = r(t) = u(t-1) - u(t-2) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$



شکل 6.18: اسپرنگ اور کیت کا قسری نظام (مثال 6.22)۔

حل: دیے گئے تفرقی مساوات سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔ ایسا مساوات 6.5، مساوات 6.6 اور مساوات 6.19 کی مدد سے کیا جائے گا۔

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

ضمنی مساوات کا حل

$$Y = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)}(e^{-s} - e^{-2s}) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}(e^{-s} - e^{-2s})$$

ہے جس کا جزوی کسری پھیلاؤ درج ذیل ہے۔

$$Y = \left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)} \right] (e^{-s} - e^{-2s})$$

چکور قوسین کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)} \right] = \frac{1}{3} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{6}$$

مسئلہ 6.7 کی مدد سے حل $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)(e^{-s} - e^{-2s})]$ لکھتے ہیں جسے شکل 6.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s}) - \mathcal{L}^{-1}(Fe^{-2s}) = f(t-1)u(t-1) - f(t-2)u(t-2)$$

$$= \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{e^{-3(t-1)}}{6} & 1 < t < 2 \\ -\frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{e^{-(t-2)}}{2} + \frac{e^{-3(t-1)}}{6} - \frac{e^{-3(t-2)}}{6} & t > 2 \end{cases}$$

□

مثال 6.23: گزشتہ مثال میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر اکائی چکور قوت لاگو کی گئی۔ موجودہ مثال میں اسپرنگ اور کمیت کی اسی نظام کو لمحہ $t = 1$ پر ہتھوڑی سے اکائی ضرب لگایا جاتا ہے۔ نظام کا رد عمل دریافت کریں۔

حل: نظام کی مساوات درج ذیل ہوگی

$$y'' + 4y' + 3y = r(t) = \delta(t - 1) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

جس کی ضمنی مساوات

$$s^2Y + 4sY + 3Y = e^{-s}$$

کا حل لکھتے ہیں۔

$$Y = \frac{1}{(s+1)(s+3)} e^{-s} = \left[\frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} \right] e^{-s}$$

چکور قوسین کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} \right] = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{2}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ حاصل کرتے ہیں جسے شکل 6.19 میں دکھایا گیا ہے۔

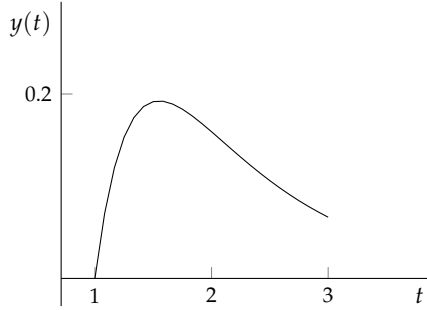
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Fe^{-s}] = f(t-1)u(t-1) \\ = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{e^{-(t-1)}}{2} - \frac{e^{-3(t-1)}}{2} & t > 1 \end{cases}$$

□

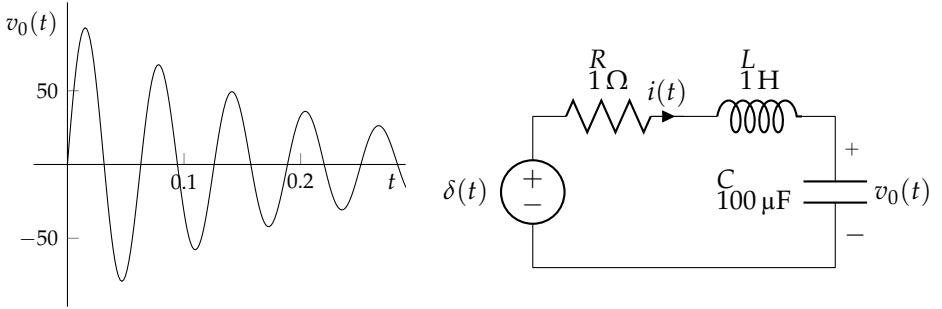
مثال 6.24: سلسلہ وار جڑے مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو لمحہ $t = 0$ پر اکائی ضرب دباؤ مہیا کیا جاتا ہے۔ اس برقی دور کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔ برق گیر پر دباؤ $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: مسئلے کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = \delta(t)$$



شکل 6.19: اکائی ضرب پراسپرنگ اور کیفیت کے نظام کا رد عمل (مثال 6.23)۔



شکل 6.20: سلسلہ وار دور (مثال 6.24)۔

جس کی ضمنی مساوات درج ذیل ہے جہاں برقی پوزوں کی قیمتیں بھی پر کی گئی ہیں۔

$$(s^2 + 10s + 10000)Q = 1$$

ضمنی مساوات کا حل

$$Q = \frac{1}{(s+5)^2 + 9975} \approx \frac{1}{(s+5)^2 + 99.87^2}$$

ہے جس کے الٹ لاپلاس بدل سے q حاصل کرتے ہوئے $v_0 = \frac{q}{C}$ دریافت کرتے ہیں۔

$$q(t) = \frac{e^{-5t}}{99.87} \sin 99.87t \implies v_0(t) = \frac{q(t)}{C} = 100.13e^{-5t} \sin 99.87t$$

□

جزوی کسری پھیلاؤ پر مزید تبصرہ

ہم نے دیکھا کہ عموماً ضمنی مساوات کی صورت $Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$ ہوتی ہے جہاں $F(s)$ اور $G(s)$ کثیر رکنی ہوتے ہیں۔ الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے حل $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ حاصل کیا جاتا ہے۔ الٹ لاپلاس بدل لینے سے پہلے کسر کو جزوی کسری پھیلاؤ کی مدد سے ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے کا الٹ لاپلاس بدل با آسانی حاصل کرنا ممکن ہو۔

$G(s)$ میں غیر دہراتے جزو $s - a$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $W(s)$ بقیہ حصے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(6.28) \quad Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{()() \cdots ()}{(s-a)() \cdots ()} = \frac{A}{s-a} + W(s)$$

یوں $s - a$ سے حاصل رکن $\frac{A}{s-a}$ کا الٹ لاپلاس بدل Ae^{at} ہے۔ اسی طرح بلند درجی اجزاء $(s-a)^2$ اور $(s-a)^3$ درج ذیل ارکان دیتے ہیں

$$(6.29) \quad \frac{A_1}{(s-a)} + \frac{A_2}{(s-a)^2} \quad \text{اور} \quad \frac{A_1}{s-1} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{A_3}{(s-a)^3}$$

جن کے الٹ لاپلاس بدل $(A_1 + A_2t)e^{at}$ اور $(A_1 + A_2t + \frac{1}{2}A_3t^2)e^{at}$ ہیں۔

دہراتے جزو $(s-a)^m$ کی صورت میں جزوی کسری پھیلاؤ درج ذیل ہوگا

$$(6.30) \quad \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \frac{A_m}{(s-a)^m} + W(s)$$

جس کے دونوں اطراف کو $(s-a)^m$ سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

(6.31)

$$(s-a)^m \frac{F(s)}{G(s)} = A_1(s-a)^{m-1} + A_2(s-a)^{m-2} + \cdots + A_{m-1}(s-a) + A_m$$

یوں $s = a$ پر کرتے ہوئے

$$(6.32) \quad A_m = \left. \frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)} \right|_{s=a}$$

ملتا ہے۔ مساوات 6.31 کا k درجی تفرق لے کر $s = a$ پر کرنے سے A_k ملتا ہے۔

$$(6.33) \quad A_k = \frac{1}{(m-k)!} \left. \frac{d^{m-k} Q(s)}{ds^{m-k}} \right|_{s=a} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

$G(s)$ میں غیر دہراتے مخلوط جوڑی $(s-a)(s-\bar{a})$ جہاں $a = \alpha + i\beta$ اور $\bar{a} = \alpha - i\beta$ ہیں سے درج ذیل جزوی کسری رکن حاصل ہوتا ہے

$$\frac{As + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$$

جبکہ دہراتے مخلوط جوڑی مثلاً $[(s-a)(s-\bar{a})]^2$ سے درج ذیل ارکان ملتے ہیں۔ دہراتا مخلوط جوڑی مک کو ظاہر کرتی ہے جس پر مثال 6.37 میں بذریعہ الجھاؤ توجہ دی گئی ہے۔

$$\frac{As + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{Cs + D}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2}$$

مثال 6.25: جزوی کسری پھیلاؤ استعمال کرتے ہوئے $\frac{3s-2}{s^2-s}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: نسب نما میں s اور $s-1$ غیر دہراتے جزو ہیں۔ یوں دیے گئے تفاعل کو $\frac{A}{s}$ اور $\frac{B}{s-1}$ کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{3s-2}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1}$$

جس میں A اور B معلوم کرنا باقی ہے۔ دونوں اطراف کو $s(s-1)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$3s-2 = A(s-1) + Bs$$

ملتا ہے۔ اس مساوات میں $s=0$ پر کرتے ہوئے A حاصل ہوگا جبکہ $s=1$ پر کرتے ہوئے B حاصل ہوگا۔ یوں

$$3(0)-2 = A(0-1) + B(0) \implies A = 2$$

اور

$$3(1)-2 = A(1-1) + B(1) \implies B = 1$$

ملتے ہیں لہذا دیے گئے تفاعل کو

$$\frac{3s-2}{s(s-1)} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = 2 + e^t$$

□

مثال 6.26: جزوی کسری پھیلاؤ استعمال کرتے ہوئے $F(s) = \frac{s^2-4s}{(s+2)^3}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں $s+2$ دہراتا جزو ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جس میں A ، B اور C معلوم کرنا باقی ہے۔

$$\frac{s^2-4s}{(s+2)^3} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{(s+2)^3}$$

دونوں اطراف کو $(s+2)^3$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$s^2 - 4s = A(s+2)^2 + B(s+2) + C$$

$s = -2$ پر کرتے ہوئے $C = 12$ ملتا ہے۔ مساوات کا ایک درجی تفرق لے کر $s = -2$ پر کرنے سے B حاصل ہوگا جبکہ دو درجی تفرق لے کر $s = -2$ پر کرنے سے A حاصل ہوگا۔ یوں

$$2s - 4 = 2A(s+2) + B \implies 2(-2) - 4 = 2A(-2+2) + B \implies B = -8$$

$$2 = 2A \implies A = 1$$

ملتے ہیں۔ یوں دیے گئے تفاعل کا جزوی کسری پھیلاؤ اور اس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہیں۔

$$F(s) = \frac{s^2 - 4s}{(s+2)^3} = \frac{1}{s+2} - \frac{8}{(s+2)^2} + \frac{12}{(s+2)^3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = e^{-2t}(1 - 8t + 6t^2)$$

□

مثال 6.27: غیر دہراتے مخلوط جزو۔ قسری جبری ارتعاش
درج ذیل اسپرنگ اور کمیت کا ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔ جبری قوت $0 < t < \pi$ دورانے کے لئے عمل پیرا ہے۔

$$y'' + 2y' + 10y = r(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6, \quad r(t) = \begin{cases} 85 \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

حل: مسئلے کو اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے لکھتے ہیں

$$y'' + 2y' + 10y = 85 \sin t [u(t) - u(t - \pi)]$$

$$= 85 \sin t u(t) + 85 \sin(t - \pi) u(t - \pi)$$

جہاں دائیں جزو میں $\sin t = -\sin(t - \pi)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $f(t - a)u(t - a)$ صورت میں لکھا گیا ہے۔ منتقلی کا دوسرا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے اس کا ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔

$$[s^2 Y - s(1) + 6] + 2[sY - 1] + 10Y = 85 \frac{1}{s^2 + 1} (1 + e^{-\pi s})$$

جسے Y کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$(6.34) \quad Y = \frac{85}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 10)} + \frac{85}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 10)} e^{-\pi s} + \frac{s - 4}{s^2 + 2s + 10}$$

منتقلی کے پہلے مسئلے سے مساوات 6.34 کے آخری جزو کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$(6.35) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s-4}{s^2+2s+10} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(s+1)-5}{(s+1)^2+3^2} \right] = e^{-t} (\cos 3t - \frac{5}{3} \sin 3t)$$

مساوات 6.34 کے پہلے جزو میں غیر دہراتے مخلوط جذر پائے جاتے ہیں لہذا اس کا جزوی کسری پھیلاؤ درج ذیل ہو گا جہاں A ، B ، C اور D معلوم کرنا باقی ہے۔

$$\frac{85}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+10}$$

دونوں اطراف کو $(s^2+1)(s^2+2s+10)$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$85 = (As+B)(s^2+2s+10) + (Cs+D)(s^2+1)$$

ہر s کے دونوں اطراف کے عددی سروں کو آپس میں برابر لکھتے

$$\begin{aligned} s^3: \quad A+C &= 0, & s^2: \quad 2A+B+D &= 0 \\ s^1: \quad 10A+2B+C &= 0, & s^0: \quad 10B+D &= 85 \end{aligned}$$

ہوئے چار عدد ہمزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں جن کا حل $A = -2$ ، $B = 9$ ، $C = 2$ اور $D = -5$ ہے۔ یوں مساوات 6.34 کے پہلے جزو کا جزوی کسری پھیلاؤ درج ذیل ہو گا

$$\frac{-2s+9}{s^2+1} + \frac{2(s+1)-7}{(s+1)^2+9}$$

جس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

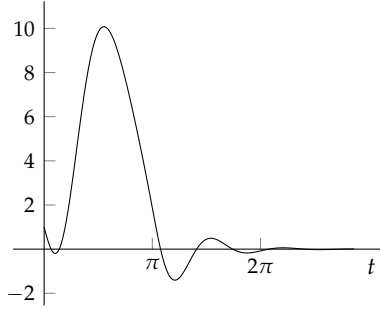
$$(6.36) \quad -2 \cos t + 9 \sin t + e^{-t} (2 \cos 3t - \frac{7}{3} \sin 3t)$$

مساوات 6.35 اور مساوات 6.36 کا مجموعہ $0 < t < \pi$ دورانیے کا حل ہے۔

$$(6.37) \quad y(t) = e^{-t} (3 \cos 3t - 4 \sin 3t) - 2 \cos t + 9 \sin t \quad 0 < t < \pi$$

مساوات 6.34 کے دوسرے جزو میں $e^{-\pi s}$ پایا جاتا ہے لہذا مساوات 6.36 اور منتقلی کے دوسرے مسئلے سے $t > \pi$ کے لئے اس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا

$$-2 \cos(t-\pi) + 9 \sin(t-\pi) + e^{-(t-\pi)} [2 \cos 3(t-\pi) - \frac{7}{3} \sin 3(t-\pi)]$$



شکل 6.21: اسپرنگ اور کمیت کا جبری ارتعاش (مثال 6.27)۔

جس میں $\cos(t - \pi) = -\cos t$ اور $\cos(3t - 3\pi) = -\cos 3t$ استعمال کرتے ہوئے

$$2 \cos t - 9 \sin t + e^{-(t-\pi)} \left[-2 \cos 3t + \frac{7}{3} \sin 3t \right]$$

ملتا ہے۔ اس کو مساوات 6.37 کے ساتھ جمع کرنے سے $t > \pi$ پر مسئلے کا حل ملتا ہے۔

$$(6.38) \quad y(t) = e^{-t}(3 \cos 3t - 4 \sin 3t) + e^{-(t-\pi)} \left(-2 \cos 3t + \frac{7}{3} \sin 3t \right) \quad t > \pi$$

□

شکل 6.21 میں مسئلے کا حل دکھایا گیا ہے۔

دہرائتا تفاعل

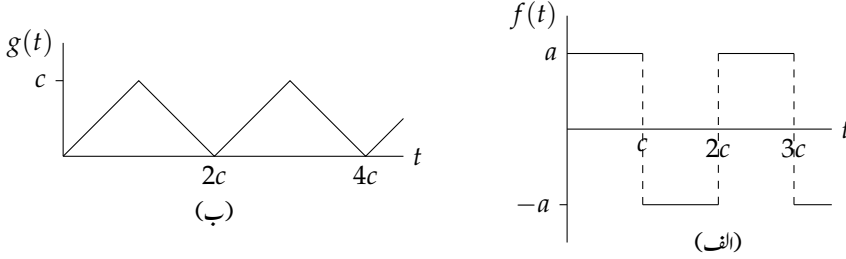
عملی استعمال میں عموماً دہرائتے تفاعل پائے جاتے ہیں جو سادہ سائن نما تفاعل سے زیادہ پیچیدہ ہوتے ہیں۔ آئیں ان پر غور کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ دہرائتے تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ $p (> 0)$ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(6.39) \quad f(t+p) = f(t) \quad (t > 0)$$

اگر p پر $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہو تب اس لاپلاس بدل موجود ہو گا۔ اس تفاعل کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ لکھتے ہوئے مکمل کو دوری عرصے کے برابر ٹکڑوں میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \int_{2p}^{3p} e^{-st} f(t) dt + \dots$$



شکل 6.22: دہراتا چکور موج اور دہراتا تکیونی موج۔ (مثال 6.28 اور مثال 6.29)

دوسرے مکمل میں $t = \tau + p$ پر کرتے ہوئے مکمل کے حدود 0 تا p لکھے جائیں گے۔ اسی طرح تیسرے مکمل میں $t = \tau + 2p$ اور n مکمل میں $t = \tau + (n-1)p$ پر کرتے ہوئے ان مکمل کے حدود بھی 0 تا p لکھے جائیں گے۔ یوں درج بالا کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+p)} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+2p)} f(\tau) d\tau + \dots$$

جہاں $f(\tau + p) = f(\tau)$ ، $f(\tau + 2p) = f(\tau)$ نقطے لکھا گیا ہے۔ درج بالا کو

$$\mathcal{L}(f) = [1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \dots] \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب چکور قوسین کے اندر مجموعہ ہندی تسلسل ہے جو $\frac{1}{1-e^{-ps}}$ کے برابر ہے لہذا درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 6.8: p دوری عرصے کا تفاعل $f(t)$ جو ٹکڑوں میں استمراری ہو کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$(6.40) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f dt \quad (s > 0)$$

مثال 6.28: دہراتا چکور موج
دہراتا چکور موج شکل 6.22-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں $p = 2c$ ہے لہذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{1 - e^{-2cs}} \left[\int_0^c e^{-st} a \, dt + \int_c^{2c} e^{-st} (-a) \, dt \right] \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-cs})(1 + e^{-cs})} \left[\frac{a}{s} (1 - e^{-cs}) - \frac{a}{s} (e^{-cs} - e^{-2cs}) \right] \\ &= \frac{a}{s} \left(\frac{1 - e^{-cs}}{1 + e^{-cs}} \right) = \frac{a}{s} \left(\frac{e^{\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}}{e^{\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}} \right) = \frac{a}{s} \tanh \frac{cs}{2}\end{aligned}$$

اسی جواب کو زیادہ کارآمد صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{a}{s} \left(\frac{1 - e^{-cs}}{1 + e^{-cs}} \right) = \frac{a}{s} \left(1 - \frac{2e^{-cs}}{1 + e^{-cs}} \right) = \frac{a}{s} \left(1 - \frac{2}{e^{cs} + 1} \right)$$

□

مثال 6.29: دہراتا تکونی موج

دہراتا تکونی موج شکل 6.22-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: پیکور موج کا مکمل، تکونی موج ہوتا ہے۔ یوں شکل-الف میں $a = 1$ لے کر مکمل لینے سے شکل-ب حاصل ہو گی لہذا مثال 6.28 کے جواب سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s} \mathcal{L}f = \frac{1}{s^2} \tanh \frac{cs}{2}$$

□

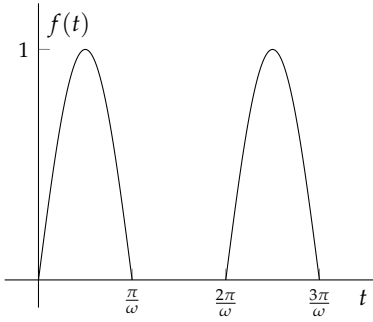
مثال 6.30: مکمل لہر سمت کار

مکمل لہر سمت کار²¹ بدلتی سمت سائن نما موج سے یک سمتی موج بناتی ہے جسے شکل 6.23-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس لہر کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

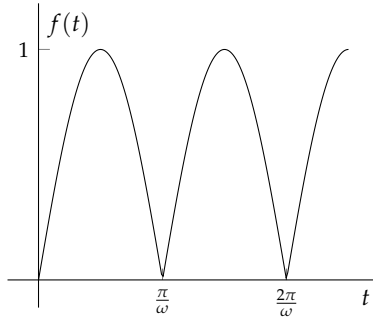
حل: نصف لہر سمت کار کی موج کا $p = \frac{2\pi}{\omega}$ ہے لہذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں

$$(6.41) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \sin \omega t \, dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}} \right)$$

²¹ full wave rectifier



(ب)



(الف)

شکل 6.23: مکمل لہر اور نصف لہر سمت کار کے امواج (مثال 6.30 اور مثال 6.31)۔

جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(\frac{e^{\frac{\pi s}{2\omega}} + e^{-\frac{\pi s}{2\omega}}}{e^{\frac{\pi s}{2\omega}} - e^{-\frac{\pi s}{2\omega}}} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega}$$

□

مثال 6.31: نصف لہر سمت کار
نصف لہر سمت کار²² بدلتی سمت سائن نما موج سے ایک سمتی موج بناتی ہے جسے شکل 6.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس لہر کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

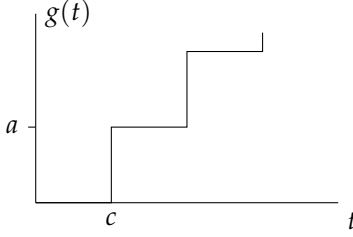
حل: مکمل لہر سمت کار کی موج کا $p = \frac{2\pi}{\omega}$ ہے لہذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$(6.42) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \sin \omega t \, dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \right)$$

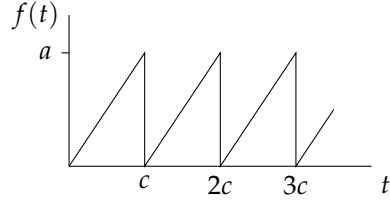
□

مثال 6.32: دندان موج
دندان موج²³ کو شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

half wave rectifier²²
saw-tooth wave²³



(ب) سیڑھی موج۔



(الف) دندان موج

شکل 6.24: دندان موج (مثال 6.32) اور سیڑھی موج (مثال 6.33)۔

حل: دندان موج کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(t) = \frac{a}{c}t, \quad (0 < t < c) \quad \text{اور} \quad f(t+c) = f(t)$$

یوں مکمل بالخصوص سے

$$\begin{aligned} \int_0^c e^{-st} t \, dt &= -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^c + \frac{1}{s} \int_0^c e^{-st} \, dt \\ &= -\frac{c}{s} e^{-cs} - \frac{1}{s^2} (e^{-cs} - 1) \end{aligned}$$

حاصل کرتے ہوئے مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$(6.43) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{a}{cs^2} - \frac{ae^{-cs}}{s(1-e^{-cs})}$$

□

مثال 6.33: سیڑھی موج
سیڑھی موج²⁴ کو شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: سیڑھی موج (مثال 6.33) کو الجبرائی طور پر لکھتے ہیں

$$g(t) = na \quad (nc < t < (n+1)c \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

²⁴stair case

جو مسلسل بڑھتے متنازل $h(t) = \frac{a}{c}t$ اور دندان موج $f(t)$ کے فرق $g(t) = h(t) - f(t)$ کے برابر ہے۔ اب $\mathcal{L}\left(\frac{at}{c}\right) = \frac{a}{cs^2}$ ہے جبکہ مساوات 6.43 لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دیتی ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(6.44) \quad \mathcal{L}(g) = \frac{a}{cs^2} - \left[\frac{a}{cs^2} - \frac{ae^{-cs}}{s(1 - e^{-cs})} \right] = \frac{ae^{-cs}}{s(1 - e^{-cs})}$$

□

سوالات

سوال 6.116 تا سوال 6.116 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 6.116: $y'' + y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$ جواب: $y = 4 \cos t - u(t - \pi) \sin t$ ؛ اکائی ضرب عین $t = \pi$ پر عمل کرتی ہے۔ ابتدائی معلومات صرف اس صورت ممکن ہیں کہ اکائی ضرب سے پہلے بھی نظام ارتعاش پذیر ہو۔ جواب میں $4 \cos t$ اسی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 6.117: $y'' + y = 2\delta(t - 3\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ جواب: $y = \cos t - 2u(t - 3\pi) \sin t$

سوال 6.118: $y'' + 4y = 3\delta(t - 2\pi)$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$ جواب: $y = 2 \cos 2t + 0.5 \sin 2t + 1.5u(t - 2\pi) \sin t$

سوال 6.119: $y'' + 9y = 2\delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ جواب: $y = -\frac{1}{3} \sin 3t - \frac{2}{3}u(t - \pi) \sin 3t - \frac{1}{3}u(t - 2\pi) \sin 3t$

سوال 6.120: $y'' + 6y' + 10y = \delta(t - 1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ جواب: $y = 2e^{-3t} \sin t + e^{-3(t-1)}u(t - 1) \sin(t - 1)$

سوال 6.121: $2y'' + 3y' + y = 2e^{-t} + \delta(t - 1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ جواب: $y = 6e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}(6 + 2t) + 4u(t - 1)[e^{-\frac{1}{2}(t-1)} - e^{-(t-1)}]$

سوال 6.122: $y'' + 3y' + 3y = 5 \sin t + 20\delta(t-1), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
 جواب: $y = \sin t - 3 \cos t + 8e^{-t} - 4e^{-2t} + [e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}]u(t-1)$

سوال 6.123: $y'' + 4y' + 5y = [u(t) - u(t-2)]e^t - 6\delta(t-3), y(0) = 0, y'(0) = 1$
 دائیں ہاتھ پہلا جزو درج ذیل لکھتے ہوئے آگے چلیں۔

$$[u(t) - u(t-2)]e^t = u(t)e^t - e^2u(t-2)e^{(t-2)}$$

یوں جواب درج ذیل ملتا ہے۔

$$y = \frac{1}{5}e^{-2t}(3 \sin t - \cos t) + \frac{1}{5} + \frac{e^2e^{-2(t-2)}}{5}[2 \sin(t-2) + \cos(t-2)]u(t-2) \\ - \frac{e^2}{5}u(t-2) - 6e^{-2(t-3)} \sin(t-3)u(t-3)$$

سوال 6.124: $y'' + 2y' + 5y = 5t - 10\delta(t-\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$
 جواب: $y = \frac{1}{5}e^{-t}(6 \sin 2t + 7 \cos 2t) + t - \frac{2}{5} - 5u(t-\pi)e^{-(t-\pi)} \sin 2t$

6.5 الجھاؤ

تفاعل $F(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $f(t)$ اور $G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $g(t)$ جانتے ہوئے ہم تفاعل $H(s) = F(s)G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ درج ذیل مسئلے کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔ تفاعل $h(t)$ کو $(f * g)(t)$ لکھا جاتا ہے جس کو f اور g کی الجھاؤ²⁵ کہتے ہیں۔

مسئلہ 6.9: مسئلہ الجھاؤ
 اگر $F(s)$ اور $G(s)$ کے الٹ لاپلاس بدل بالترتیب $f(t)$ اور $g(t)$ ہوں، جو مسئلہ وجودیت (مسئلہ 6.2) کے شرط پر پورا اترتے ہوں، تب حاصل ضرب $H(s) = F(s)G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$ کی الجھاؤ ہوگا جس کو $(f * g)(t)$ لکھا جاتا ہے اور جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(6.45) \quad h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

ثبوت: $G(s)$ کی تعریف اور منتقلی کے پہلے مسئلے سے، $\tau (\tau \geq 0)$ کی ہر معین قیمت کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(6.46) \quad e^{-s\tau} G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t - \tau) u(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-st} g(t - \tau) dt$$

جہاں $s > \gamma$ ہے۔ اب $F(s)$ کی تعریف سے

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) G(s) d\tau$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں مساوات 6.46 استعمال کرتے ہوئے

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-st} g(t - \tau) dt d\tau$$

ملتا ہے، جہاں $s > \gamma$ ہے۔ یوں پہلے t پر τ تا ∞ تکمل لیا جاتا ہے اور پھر τ پر 0 تا ∞ تکمل لیا جاتا ہے۔ سطحی تکمل کا پیچر نمائندہ، جو $t\tau$ سطح پر لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے، کو شکل 6.25 میں گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ تفاعل f اور g یوں چننے گئے ہیں کہ تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے پہلے τ اور بعد میں t پر تکمل لیا جاسکتا ہے (سطحی تکمل میں ترتیب الٹ کرنے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا)۔ یوں ہم پہلے τ پر 0 تا t اور بعد میں t پر 0 تا ∞ تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt = \mathcal{L}(h) \end{aligned}$$

جہاں مساوات 6.45 تفاعل h دیتی ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوا۔

□

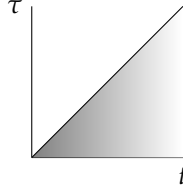
الجھاو کی تعریف (مساوات 6.45) استعمال کرتے ہوئے الجھاو کے درج ذیل خصوصیات ثابت کیے جاسکتے ہیں

$$f * g = g * f \quad (\text{قانون تبادل})$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (\text{قانون جزئی تقسیم})$$

$$(f * g) * v = f * (g * v) \quad (\text{قانون تلازمی})$$

$$f * 0 = 0 * f = 0$$



شکل 6.25: سطح $t\tau$ پر مکمل کا خطہ (ثبوت مسئلہ 6.9)۔

جو اعداد کو ضرب دینے کے کلیات ہیں۔ البتہ عموماً $1 * g \neq g$ ہو گا مثلاً $g(t) = t$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(1 * g)(t) = \int_0^\infty 1 \cdot (t - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2}$$

جو t کے برابر نہیں ہے۔ اسی طرح الجھاؤ کی ایک اور انوکھی خاصیت (مثال 6.36 دیکھیں) یہ ہے کہ بعض اوقات $(f * f)(t) \geq 0$ درست نہیں ہو گا۔

آئیں اب الجھاؤ استعمال کرتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں اور تفرقی مساوات حل کریں۔

مثال 6.34: تفاعل $H(s) = \frac{1}{s(s-a)}$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ مسئلہ الجھاؤ کی مدد سے حاصل کریں۔

حل: $F = \frac{1}{s-a}$ اور $G = \frac{1}{s}$ لیتے ہیں جن کے الٹ لاپلاس بدل بالترتیب $f(t) = e^{at}$ اور $g(t) = 1$ ہیں۔ یوں $f(\tau) = e^{a\tau}$ اور $g(t - \tau) = 1$ ہوں گے لہذا مسئلہ الجھاؤ کی مدد سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

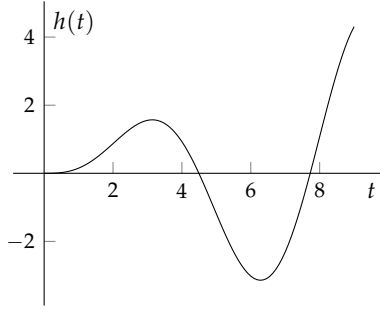
$$h(t) = e^{at} * 1 = \int_0^t e^{a\tau} \cdot 1 d\tau = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

ہم دوبارہ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا جواب درست ہے۔

$$\mathcal{L}(h) = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s} = \mathcal{L}(e^{at}) \mathcal{L}(1)$$

□

مثال 6.35: تفاعل $H(s) = \frac{\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل بذریعہ الجھاؤ حاصل کریں۔



شکل 6.26: مثال 6.36

حل: ہم $F = G = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ لیتے ہیں جس کا الٹ لاپلاس بدل $\sin \omega t$ ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} h(t) &= \sin \omega t * \sin \omega t = \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(2\omega\tau - \omega t) - \cos \omega t] d\tau \\ &= \frac{\sin(2\omega\tau - \omega t)}{4\omega} - \frac{\tau \cos \omega t}{2} \Big|_0^t \\ &= \frac{\sin \omega t}{2\omega} - \frac{t \cos \omega t}{2} \end{aligned}$$

□

ہو گا۔

مثال 6.36: $(f * f)(t) > 0$ درست نہیں ہے
گزشتہ مثال (مثال 6.35) میں $\omega = 1$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جس کو شکل 6.26 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کی قیمت منفی ممکن ہے۔

$$h(t) = \sin t * \sin t = \frac{\sin t}{2} - \frac{t \cos t}{2}$$

□

جزوی کسری پھیلاؤ کے آخر میں جوڑی دار مخلوط جزو کا ذکر کیا گیا جس پر اگلے مثال میں غور کرتے ہیں۔

مثال 6.37: گمک، دہراتا مخلوط جزو
اسپرنگ اور کمیت کے نظام کا درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں F_0 مستقل ہے۔

$$my'' + ky = F_0 \sin ct, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

حل: دونوں اطراف کو m سے تقسیم کرتے ہوئے $K = \frac{F_0}{m}$ اور $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ لکھتے ہوئے

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin \alpha t$$

ملتا ہے جس سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔

$$s^2 Y + \omega_0^2 Y = K \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے۔

$$Y = \frac{K\alpha}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \alpha^2)}$$

اب

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \right] = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \alpha^2} \right] = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t$$

استعمال کرتے ہوئے مسئلہ الجھاؤ کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$y(t) = \frac{K\alpha}{\omega_0 \alpha} \sin \omega_0 t * \sin \alpha t = \frac{K}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 \tau \sin(\alpha t - \alpha \tau) d\tau$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل کے اندر مقدار کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(6.47) \quad \frac{1}{2} [-\cos[\alpha t + (\omega_0 \tau - \alpha \tau)] + \cos[\alpha t - (\omega_0 \tau + \alpha \tau)]]$$

یہاں دو مختلف صورتیں پائی جاتی ہیں۔ پہلی صورت میں $\omega_0 \neq \alpha$ ہو گا جو بلا گمک صورت ہے۔

بلا گمک صورت میں $\omega_0 \neq \alpha$ ہو گا لہذا مکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{2\omega_0} \left[-\frac{\sin[\alpha t + (\omega_0 \tau - \alpha \tau)]}{\omega_0 - \alpha} + \frac{\sin[\alpha t - (\omega_0 \tau + \alpha \tau)]}{-\omega_0 - \alpha} \right]_0^t \\ &= \frac{K}{2\omega_0} \left[\frac{\sin \alpha t - \sin \omega_0 t}{\omega_0 - \alpha} + \frac{\sin \alpha t + \sin \omega_0 t}{\omega_0 + \alpha} \right] \\ &= \frac{K}{\alpha^2 - \omega_0^2} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \sin \alpha t \right) \end{aligned}$$

جو دو ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔ ان میں سے ایک ہارمونی ارتعاش کی تعدد نظام کی قدرتی تعدد ω_0 ہے جبکہ دوسری ہارمونی ارتعاش کی تعدد لاگو کردہ جبری قوت کی تعدد α ہے۔

گمک دوسری صورت ہے جہاں $\omega_0 = \alpha$ ہو گا۔ گمک کی صورت میں مساوات 6.47 درج ذیل دیگا۔

$$\frac{1}{2} [-\cos \omega_0 t + \cos(\omega_0 t - 2\omega_0 \tau)]$$

یوں مکمل سے

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{2\omega_0} \left[-\tau \cos \omega_0 t - \frac{1}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t - 2\omega_0 \tau) \right]_0^t \\ &= \frac{K}{2\omega_0^2} [\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t] \end{aligned}$$

□

حاصل ہوتا ہے جو مسلسل بڑھتی ارتعاش یعنی گمک²⁶ کو ظاہر کرتی ہے۔

تکملی مساوات

الجھاو کی مدد سے بعض تکملی مساوات حل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ تکملی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم مقدار $y(t)$ تکمل کے اندر (اور ممکن ہے کہ تکمل کے باہر بھی) پایا جاتا ہو۔ ان مساوات میں الجھاو کی طرز کا تکمل پایا جاتا ہے۔ انہیں اس ترکیب کو ایک مثال کی مدد سے سیکھیں۔

مثال 6.38: درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

$$y(t) - \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = t$$

حل: اس مساوات میں مکمل کو $y(t)$ اور $\sin t$ کی الجھاؤ $y * \sin t$ لکھ کر

$$y(t) - y * \sin t = t$$

لاپلاس بدل لیتے ہیں جہاں $\mathcal{L}(y) = Y$ ہے۔

$$Y - Y \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2}$$

ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$Y = \frac{s^2 + 1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

جس کا الٹ لاپلاس بدل درکار حل ہے۔

$$y(t) = t + \frac{t^3}{6}$$

□

سوالات

سوال 6.125 تا سوال 6.136 میں الجھاؤ کو بذریعہ مکمل حاصل کریں۔

سوال 6.125: $1 * 1$
جواب: t

سوال 6.126: $1 * t$
جواب: $\frac{t^2}{2}$

سوال 6.127: $t * t$
جواب: $\frac{t^3}{6}$

سوال 6.128: $t * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{\omega}(t - \sin \omega t)$

سوال 6.129: $1 * \cos \omega t$
جواب: $\frac{\sin \omega t}{\omega}$

سوال 6.130: $1 * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{\omega}(1 - \cos \omega t)$

سوال 6.131: $e^t * e^{-t}$
جواب: te^t

سوال 6.132: $\sin \omega t * \cos \omega t$
جواب: $\frac{t \sin \omega t}{2}$

سوال 6.133: $\cos \omega t * \cos \omega t$
جواب: $\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$

سوال 6.134: $e^{\omega t} * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{2\omega}(e^{\omega t} - \sin \omega t - \cos \omega t)$

سوال 6.135: $e^{at} * t$
جواب: $\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$

سوال 6.136: $e^{at} * e^{bt}$ $a \neq b$
جواب: $\frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}$

سوال 6.137 تا سوال 6.142 تکمیلی مساوات ہیں۔ انہیں الجھاو کی مدد سے حل کریں۔

سوال 6.137: $y(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau = 1$
جواب: $y(t) = e^t$

سوال 6.138: $y(t) + 9 \int_0^t y(\tau)(t - \tau) d\tau = 3t$
جواب: $y(t) = \sin 3t$

سوال 6.139: $y(t) + 4 \int_0^t (t - \tau)y(\tau) d\tau = 1$
جواب: $y(t) = \cos 2t$

سوال 6.140: $y(t) + \int_0^t y(\tau) \sin(2t - 2\tau) d\tau = \sin 2t$
جواب: $y(t) = \frac{2}{3} \sin \sqrt{6}t$

سوال 6.141: $y(t) + 3e^t \int_0^t y(\tau)e^{-\tau} d\tau = te^t$
جواب: $\frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$

سوال 6.142: $y(t) + \int_0^t y(\tau)(t - \tau) d\tau = 4 + \frac{t^2}{2}$
جواب: $y(t) = 1 + 3 \cos t$

سوال 6.143: ثابت کریں کہ ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + \omega y = r(t), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

جہاں $r(t)$ نامعلوم جبری تفاعل ہے کا حل الجھاؤ کی صورت میں درج ذیل ہے۔

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t * r(t) + A \cos \omega t + \frac{B}{\omega} \sin \omega t$$

سوال 6.144 تا سوال 6.151 میں دیے گئے تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل بذریعہ الجھاؤ حاصل کریں۔

سوال 6.144: $\frac{1}{s(s+1)}$
جواب: $1 - e^{-t}$

سوال 6.145: $\frac{1}{s^2}$
جواب: t

سوال 6.146: $\frac{5}{(s+2)(s-3)}$
جواب: $e^{3t} - e^{-2t}$

سوال 6.147: $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$
جواب: $t \sin 2t$

سوال 6.148: $\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$
جواب: $\omega t - \sin \omega t$

6.6. لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات

سوال 6.149: $\frac{4}{s(s^2-4)}$
جواب: $\cosh 2t - 1$

سوال 6.150: $\frac{24}{(s^2+1)(s^2+9)}$
جواب: $3 \sin t - \sin 3t$

سوال 6.151: $\frac{30}{(s^2+1)(s^2-9)}$
جواب: $\sinh 3t - 3 \sin t$

6.6 لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات

ہم تفاعل $f(t)$ کی تفرق $\frac{df}{dt}$ کا لاپلاس بدل اور اس کی مکمل $\int f dt$ کا لاپلاس بدل حاصل کر چکے ہیں۔ اس حصے میں لاپلاس بدل $F(s)$ کی تفرق $\frac{dF}{ds}$ کا الٹ لاپلاس بدل اور اس کی مکمل $\int F ds$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کیا جائے گا۔

لاپلاس بدل کی تفرق

اگر تفاعل $f(t)$ مسئلہ 6.2 کے شرائط پر پورا اترتا ہو تب یہ ثابت (ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا) کیا جاسکتا ہے کہ تفاعل $\mathcal{L}(f) = F(s)$ کا تفرق $F'(s) = \frac{dF}{ds}$ ، مکمل کے اندر s کے ساتھ تفرق لینے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ہو تب

$$F'(s) = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt$$

ہوگا۔ اس طرح اگر $\mathcal{L}(f) = F(s)$ ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$(6.48) \quad \mathcal{L}[(tf(t))] = -F'(s) \quad \text{اور} \quad \mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -tf(t)$$

یوں تفاعل کی بدل کا تفرق لینا، تفاعل کو $-t$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔
مثال 6.39: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}\left(\frac{t \sin \omega t}{2\omega}\right) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

حل: $\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(t \sin \omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

□

دونوں اطراف کو 2ω سے تقسیم کرتے ہوئے ثبوت پورا ہوتا ہے۔

مثال 6.40: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

حل: $\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(t \cos \omega t) = -\frac{1(s^2 + \omega^2) - s(2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{2\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے

$$t \cos \omega t = \frac{1}{\omega} \sin \omega t - 2\omega^2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}\right]$$

□

ملتا ہے جس کو ترتیب دیتے ہوئے ثبوت پورا ہوتا ہے۔

مثال 6.41: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}\left[\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

6.6. لاپلاس بدل کی مکمل اور تفریق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفریقی مساوات

حل: شمار کنندہ میں ω^2 جمع اور منفی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

گزشتہ دو مثالوں میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ درج بالا کے دائیں ہاتھ کے اجزاء کے الٹ لاپلاس بدل $t \cos \omega t$ اور $\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$ ہیں۔ یوں ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

لاپلاس بدل کی مکمل

اگر $f(t)$ مسئلہ 6.2 کے شرائط پر پورا اترتا ہو اور $\frac{f(t)}{t}$ کی حد موجود ہو، جہاں t صفر تک دائیں جانب سے آئے تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $s > \gamma$ ہے۔

$$(6.49) \quad \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad \text{یعنی} \quad \mathcal{L} \left[\int_s^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s} \right] = \frac{f(t)}{t}$$

یوں تفاعل $f(t)$ کے لاپلاس بدل کا مکمل لینا $f(t)$ کو t سے تقسیم کرنے کے مترادف ہے۔

لاپلاس بدل کی تعریف استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\int_s^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\tilde{s}t} f(t) dt \right] d\tilde{s}$$

اور یہ ثابت (یہ ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔) کیا جاسکتا ہے کہ درج بالا شرائط کے بعد درج بالا مکمل میں مکمل کی ترتیب الٹ کی جاسکتی ہے۔ یوں

$$\int_s^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t} f(t) d\tilde{s} \right] dt = \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t} d\tilde{s} \right] dt$$

ملتا ہے جس میں $s > \gamma$ کی صورت میں \tilde{s} پر مکمل $\frac{e^{-\tilde{s}t}}{t}$ کے برابر ہے لہذا

$$\int_s^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] \quad (s > \gamma)$$

ہو گا جو مساوات 6.49 ہے۔

مثال 6.42: تفاعل $\ln\left(\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right)$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: دیے گئے تفاعل کا تفرق لیتے ہوئے

$$-\frac{d}{ds} \ln\left(\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right) = -\frac{2\omega^2}{s(s^2-\omega^2)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو ہم $F(s)$ تصور کرتے ہیں۔ جدول 6.1 کی مدد سے اس کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right) = 2 - e^{\omega t} - e^{-\omega t}$$

جو مساوات 6.49 کے لئے درکار شرائط پر پورا اترتا تفاعل ہے۔ یوں

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right] = \int_s^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s} = \frac{f(t)}{t}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے درج ذیل جواب ملتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right] = \frac{1}{t} (2 - e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

□

متغیر عددی سروالے مخصوص سادہ تفرقی مساوات

تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $Y(s)$ لیتے ہوئے مساوات 6.5 اور مساوات 6.6 کے تحت

$$\mathcal{L}(f') = sY - sy(0), \quad \mathcal{L}(f'') = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(tf') &= -\frac{d}{ds}[sY - sy(0)] = -Y - s\frac{dY}{ds} \\ \mathcal{L}(tf'') &= -\frac{d}{ds}[s^2Y - sy(0) - y'(0)] = -2sY - s^2\frac{dY}{ds} + y(0) \end{aligned} \quad (6.50)$$

اگر سادہ تفرقی مساوات کے عددی سر $at + b$ طرز کے ہوں تب اس کا ضمنی مساوات Y کا ایک درجی مساوات ہو گا جو بعض اوقات دیے گئے دو درجی مساوات سے زیادہ آسان ہوتا ہے۔ البتہ $at^2 + bt + c$ طرز کے عددی سر کی صورت میں ضمنی مساوات Y کا دو درجی مساوات ہو گا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ترکیب صرف $at + b$ طرز کی عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات کے لئے سودمند ہو گا۔ درج ذیل مثال میں ایک اہم سادہ تفرقی مساوات کو اس ترکیب سے حل کیا گیا ہے۔

مثال 6.43: لاگینگ مساوات، لاگینگ کثیر رکنی
درج ذیل لاگینگ سادہ تفرقی²⁷ مساوات²⁸ کہلاتی ہے۔

$$(6.51) \quad ty'' + (1-t)y' + ny = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

حل: مساوات 6.50 کی مدد سے لاگینگ مساوات کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$[-2sY - s^2 \frac{dY}{ds} + y(0)] + (1-t)[-Y - s \frac{dY}{ds}] + nY = 0$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{n+1-s}{s-s^2} ds = (\frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}) ds$$

ملتا ہے۔ اس کا حل درج ذیل ہے۔

$$(6.52) \quad Y = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

ہم $l_n = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ لکھ کر کلیہ روڈریکیس²⁹

$$(6.53) \quad l_0 = 1, \quad l_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad n = 1, 2, \dots$$

ثابت کرتے ہیں۔ اس کلیے میں تفرق لینے کے بعد قوت نمائی تفاعل آپس میں کٹ جاتے ہیں لہذا کلیے سے روڈریکیس کثیر رکنی³⁰ ملتے ہیں۔

²⁷Laguerre's equation

²⁸فرانسیسی ریاضی دان ایڈمنڈ نیلوں لاگینگ [1834-1886]

²⁹Rodrigues's formula

³⁰Rodrigues's polynomials

مساوات 6.53 کو ثابت کرتے ہیں۔ جدول 6.1 اور منتقلی کے پہلے مسئلہ (s منتقلی) سے

$$(6.54) \quad \mathcal{L}(t^n e^{-t}) = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$$

لکھ کر مساوات 6.8 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \right] = \frac{n! s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

ملتا ہے۔ درج بالا لکھتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کیا گیا ہے کہ درجہ $n-1$ تک تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ درج بالا کو $n!$ سے تقسیم کرتے ہوئے اور منتقلی کا مسئلہ مزید ایک مرتبہ استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(l_n) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} = Y$$

لکھا جاسکتا ہے (مساوات 6.53 دیکھیں)۔ یوں l_n دیے گئے سادہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

مساوات 6.51 کا ایک حل $l_n(t)$ ہے۔ اس دو درجی تفرقی مساوات کے عمومی حل کے لئے کل دو عدد حل درکار ہیں۔ دوسرے حل کا لاپلاس بدل موجود نہیں ہے۔ یوں $l_n(t)$ مساوات 6.51 کا مخصوص حل ہے ناکہ اس کا عمومی حل۔ □

سوالات

سوال 6.152 تا سوال 6.158 کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.48 دریافت کریں۔

سوال 6.152: $4te^{-2t}$
جواب: $\frac{4}{(s+2)^2}$

سوال 6.153: $t \cos \omega t$
جواب: $\frac{2s^2}{(s^2+\omega^2)^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2}$

سوال 6.154: $t \sin 5t$
جواب: $\frac{10s}{(s^2+25)^2}$

سوال 6.155: $t^2 \sin 5t$
 جواب: گزشتہ سوال میں $f(t) = t \sin 5t$ کا بدل حاصل کیا گیا ہے۔ موجودہ سوال میں $\mathcal{L}[tf(t)]$ درکار ہے
 یعنی $\frac{40s^2}{(s^2+25)^3} - \frac{10}{(s^2+25)^2}$

سوال 6.156: $te^{-t} \sin t$
 جواب: $\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}$

سوال 6.157: $t^n e^{at}$
 جواب: $f = e^{at}$ کا بدل $F = \frac{1}{s-a}$ ہے۔ بالترتیب $\mathcal{L}[tf], \mathcal{L}[t^2F], \dots, \mathcal{L}[t^n f]$ لیتے ہوئے
 ملتا ہے۔ $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

سوال 6.158: $t^2 \cos t$
 جواب: $\frac{8s^3}{(s^2+1)^3} - \frac{4s}{(s^2+1)^2}$

سوال 6.159 تا سوال 6.162 کلیہ روڈریکیس پر مبنی ہیں۔ سوال 6.159: n کی قیمت 1 تا 3 لیتے ہوئے
 مساوات 6.53 میں تفریق لے کر لاگت کثیر رکنی لکھیں۔

جواب: $n = 1$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$l_1(t) = \frac{e^t}{1} \frac{d}{dt}(te^{-t}) = e^t[e^{-t} - te^{-t}] = 1 - t$$

اسی طرح $l_2(t) = 1 - 2t + \frac{t^2}{2}$ اور $l_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$ ملتے ہیں۔

سوال 6.160: گزشتہ سوال میں $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ دریافت کیے گئے۔ ثابت کریں کہ یہ تفاعل مساوات 6.51 پر
 پورا اترتے ہیں۔

جواب: $l_1(t) = 1 - t$ اور اس کے کے تفرقات $l_1'(t) = 1$ اور $l_1''(t) = 0$ کو مساوات میں پر کرتے
 ہوئے

$$t(0) + (1-t)(1) + 1(1-t) = 0 \implies 0 = 0$$

ملتا ہے جو درکار ثبوت ہے۔ بقایا ثبوت بھی اسی طرح حاصل کیے جائیں گے۔

سوال 6.161: درج ذیل ثابت کریں اور اس کیلئے سے $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ حاصل کریں۔

$$(6.55) \quad l_n(t) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \frac{n!}{m!(n-m)!} t^m$$

سوال 6.162: درج ذیل لاگینج کثیر رکنی کی پیداکار تفاعل³¹ ہے۔ اس کو پھیلا کر لکھتے ہوئے دونوں اطراف x کے یکساں طاقت کے عددی سر کو برابر پر کرتے ہوئے لاگینج کثیر رکنی حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ ایسا ہی کرتے ہوئے $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ حاصل کریں۔

$$(6.56) \quad \sum_{n=0}^{\infty} l_n(t) x^n = (1-x)^{-1} e^{\frac{tx}{x-1}}$$

مسئلہ الجھاؤ، بدل کی تفرق یا بدل کی مکمل کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے سوال 6.163 تا سوال 6.168 کے الٹ لاپلاس بدل دریافت کریں۔

سوال 6.163: $\frac{6s}{(s^2+9)^2}$
جواب: $t \sin 3t$

سوال 6.164: $\frac{2s}{(s^2-1)^2}$
جواب: $t \sinh t$

سوال 6.165: $\frac{2s+4}{(s^2+4s+5)^2}$
جواب: $te^{-2t} \sin t$

سوال 6.166: $\ln \left(\frac{s}{s-1} \right)$

جواب: تفاعل کو $\ln s - \ln(s-1)$ لکھ کر اس کا تفرق لیں۔ تفرق کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے مساوات 6.49 سے $\frac{-1+e^t}{t}$ حاصل ہو گا۔

سوال 6.167: $\ln \left(\frac{s^2+1}{(s-1)^2} \right)$

تفاعل کو $\ln(s^2+1) - 2\ln(s-1)$ لکھ کر تفرق لیں۔ تفرق کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے مساوات 6.49 سے $\frac{2}{t}(-\cos te^t)$ حاصل ہو گا۔

سوال 6.168: $\ln \left(\frac{s+a}{s+b} \right)$

جواب: $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$

6.7 تفرقی مساوات کے نظام

لاپلاس بدل سے سادہ تفرقی مساوات کا نظام بھی حل کیا جاسکتا ہے۔ اس ترکیب کو چند مثالوں کی مدد سے دیکھتے ہیں۔ انہیں سب سے پہلے مستقل عددی سروالے خطی، ایک درجی سادہ تفرقی مساوات [حصہ 4.1 دیکھیں۔] کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(t) \end{aligned} \quad (6.57)$$

پر غور کریں۔ $\mathcal{L}(y_1) = Y_1$ ، $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$ ، $\mathcal{L}(g_1) = G_1$ اور $\mathcal{L}(g_2) = G_2$ لکھتے ہوئے ضمنی نظام

$$\begin{aligned} sY_1 - y_1(0) &= a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + G_1(s) \\ sY_2 - y_2(0) &= a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + G_2(s) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)Y_1 + a_{12}Y_2 &= -y_1(0) - G_1(s) \\ a_{21}Y_1 + (a_{22} - s)Y_2 &= -y_2(0) - G_2(s) \end{aligned} \quad (6.58)$$

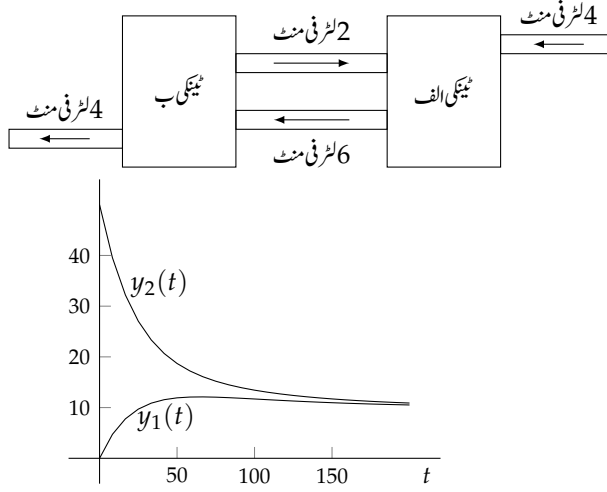
اس نظام کو الجبرائی طور پر حل کر کے Y_1 اور Y_2 حاصل ہوں گے جن سے $y_1 = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)]$ اور $y_2 = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$ ملتا ہے جو نظام کا حل ہے۔

نظام 6.58 اور نظام 6.58 کو سمتیہ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$ ، $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ ، $\mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2]^T$ اور $\mathbf{G} = [g_1 \ g_2]^T$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} \quad \text{اور} \quad (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{y} = -\mathbf{y}(0) - \mathbf{G}$$

مثال 6.44: مرکب تیار کرنے والا دو ٹینکیوں کا نظام

شکل 6.27 میں دو ٹینکیوں کا نظام دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی طور پر ٹینکی-الف میں دو سو لٹر (2001) خالص پانی جبکہ ٹینکی-ب میں پچاس کلو گرام (50 kg) نمک ملا دو سو لٹر پانی پایا جاتا ہے۔ نظام کے باہر سے ٹینکی-الف میں پانی کا داخلی بہاؤ چار لٹر فی منٹ ہے جس میں نمک کی شرح $\frac{1}{20}$ کلو گرام فی لٹر (0.05 kg l^{-1}) ہے۔ ٹینکیوں میں نمک کی مقدار بالمقابل وقت $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ دریافت کریں۔



شکل 6.27: مثال 6.44 میں ٹینکیوں کا نظام۔

حل: نظام کا نمونہ درج ذیل مساوات سے لکھا جائے گا (حصہ 4.1 دیکھیں)۔

خارجی بہاؤ فی منٹ - داخلی بہاؤ فی منٹ = تبدیلی کی شرح

یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ اور $y_2(0) = 50$ ہیں۔

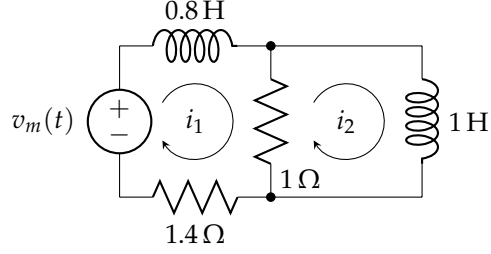
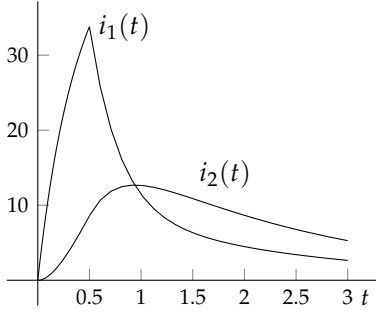
$$y_1' = -\frac{6}{200}y_1 + \frac{2}{200}y_2 + 4(0.05) \quad y_2' = \frac{6}{200}y_1 - \frac{2}{200}y_2 - \frac{4}{200}y_2$$

اس طرح ضمنی نظام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} -(0.03 + s)Y_1 + 0.01Y_2 &= -\frac{0.2}{s} \\ 0.03Y_1 - (0.03 + s)Y_2 &= -50 \end{aligned}$$

ضمنی نظام کے دو عدد ہمزاد مساوات کو الجبرائی طور پر حل کرتے ہوئے Y_1 اور Y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{3500s + 30}{5000s^2 + 300s + 3} = \frac{10}{s} + \frac{6.56}{s + 0.0127} - \frac{16.56}{s + 0.0473} \\ Y_2 &= \frac{250000s^2 + 7500s + 30}{5000s^2 + 300s + 3} = \frac{10}{s} + \frac{11.33}{s + 0.0127} + \frac{28.67}{s + 0.0473} \end{aligned}$$



شکل 6.28: مثال 6.45 کا دور اور اس کی برقی رو۔

ان کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں جو نظام کا حل ہے۔

$$y_1(t) = 10 + 6.56e^{-0.0127t} - 16.56e^{-0.0473t}$$

$$y_2(t) = 10 + 11.33e^{-0.0127t} + 28.67e^{-0.0473t}$$

□

مثال 6.45: برقی دور
برقی دور کو شکل 6.28 میں دکھایا گیا ہے۔ منبع کا دباؤ $v_m(t)$ وقت $t = 0$ تا $t = 0.5$ سیکنڈ کے لئے 100 وولٹ ہے جبکہ بقایا اوقات اس کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ رو $i_1(t)$ اور $i_2(t)$ دریافت کریں۔

حل: کرخوف قانون دباؤ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$0.8i_1' + 1(i_1 - i_2) + 1.4i_1 = 100[1 - u(t - 1)]$$

$$1(i_2 - i_1) + 1i_2' = 0$$

ابتدائی معلومات $i_1(0) = 0$ اور $i_2(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.5 اور منتقلی کے دوسرے مسئلے کی مدد سے ضمنی نظام حاصل کرتے ہیں

$$(s + 3)I_1 - 1.25I_2 = \frac{125}{s}(1 - e^{-\frac{s}{2}})$$

$$-I_1 + (s + 1)I_2 = 0$$

جس کا الجبرائی حل درج ذیل ہے۔

$$I_1 = \frac{125(s+1)}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1-e^{-\frac{s}{2}})$$

$$I_2 = \frac{125}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1-e^{-\frac{s}{2}})$$

دائیں اطراف جزو $1 - e^{-\frac{1}{2}t}$ کے علاوہ حصے کے جزوی کسری پھیلاؤ درج ذیل ہیں

$$\frac{500}{7s} - \frac{125}{3(s+\frac{1}{2})} - \frac{625}{21(s+\frac{7}{2})}$$

$$\frac{500}{7s} - \frac{250}{3(s+\frac{1}{2})} + \frac{250}{21(s+\frac{7}{2})}$$

جن کا الٹ لاپلاس بدل $t = 0$ تا $t = \frac{1}{2}$ کا حل دیتے ہیں۔

$$i_1(t) = \frac{500}{7} - \frac{125}{3}e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{625}{21}e^{-\frac{7}{2}t}$$

$$i_2(t) = \frac{500}{7} - \frac{250}{3}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{250}{21}e^{-\frac{7}{2}t} \quad (0 \leq t \leq \frac{1}{2})$$

منتقلی کے دوسرے مسئلے کے تحت $t < \frac{1}{2}$ کے لئے حل درج ذیل ہو گا۔ رو کو شکل 6.28 میں دکھایا گیا ہے۔

$$i_1(t) = -\frac{125}{3}(1-e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}} - \frac{625}{21}(1-e^{\frac{7}{4}})e^{-\frac{7}{2}t}$$

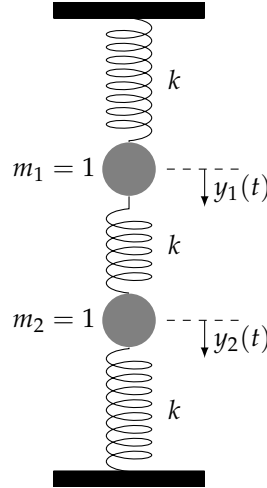
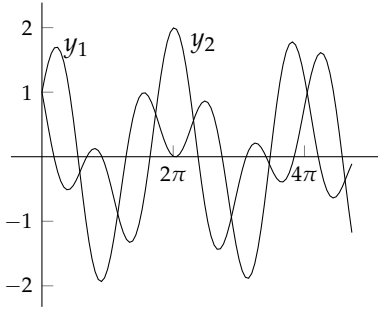
$$i_2(t) = -\frac{250}{3}(1-e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}} + \frac{250}{21}(1-e^{\frac{7}{4}})e^{-\frac{7}{2}t} \quad (t > \frac{1}{2})$$

□

کیا آپ بتلا سکتے ہیں کہ آخر کار دونوں رو صفر کیوں ہو گی؟

بلند درجی تفرقی مساوات کے نظام کو بھی اسی طرح لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔ آئیں اسپرنگ اور کمیت کا ایک ایسا نظام حل کریں۔

مثال 6.46: دو عدد کمیت اور تین عدد اسپرنگ کا نظام شکل 6.29 میں دکھایا گیا ہے۔ قسری قوت صفر کے برابر ہے۔ ساکن حال سے نیچے کی جانب فاصلہ $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ مثبت تصور کیا گیا ہے۔ ابتدائی معلومات $y_1(0) = 1$ ، $y_2(0) = 1$ ، $y_1'(0) = \sqrt{3k}$ اور $y_2'(0) = -\sqrt{3k}$ ہیں۔ مسئلہ حل کریں۔



شکل 6.29: اسپرنگ اور کمیت کا نظام (مثال 6.46)۔

حل: نیوٹن کا کلیہ کہتا ہے کہ کمیت ضرب اسراع برابر ہے قوت کے۔ یوں بالائی اور نیچے کمیت کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y_1'' &= -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\ y_2'' &= -k(y_2 - y_1) - ky_2 \end{aligned}$$

کمیت m_1 پر بالائی اسپرنگ کی بنا $-ky_1$ قوت عمل کرتا ہے جبکہ درمیانی اسپرنگ کی بنا اس پر $k(y_2 - y_1)$ قوت عمل کرتا ہے۔ درمیانی اسپرنگ کی لمبائی میں کل اضافہ $y_2 - y_1$ کے برابر ہے۔ کمیت m_2 پر درمیانی اسپرنگ کی بنا $-k(y_2 - y_1)$ قوت عمل کرتا ہے جبکہ نیچلی اسپرنگ کی بنا اس پر $-ky_2$ قوت عمل کرتا ہے۔

لکھتے ہوئے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.6 کی مدد سے $\mathcal{L}(y_1) = Y_1$ اور $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$ ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} s^2 Y_1 - s - \sqrt{3k} &= -kY_1 + k(Y_2 - Y_1) \\ s^2 Y_2 - s + \sqrt{3k} &= -k(Y_2 - Y_1) - kY_2 \end{aligned}$$

جن کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (s^2 + 2k)Y_1 - kY_2 &= s + \sqrt{3k} \\ -kY_1 + (s^2 + 2k)Y_2 &= s - \sqrt{3k} \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کا الجبرائی حل لکھتے ہیں۔

$$Y_1 = \frac{(s + \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s - \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{s}{s^2 + k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}$$

$$Y_2 = \frac{(s - \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s + \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{s}{s^2 + k} - \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں

$$y_1(t) = \cos \sqrt{k}t + \sin \sqrt{3k}t$$

$$y_2(t) = \cos \sqrt{k}t - \sin \sqrt{3k}t$$

جس کو شکل 6.29 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حرکت دو ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

□

سوالات

سوال 6.169 تا سوال 6.178 میں سادہ تفرقی مساوات کا نظام دیا گیا ہے۔ اس کو لاپلاس سے حل کریں۔

سوال 6.169: $y_1' + y_2 = 0, \quad y_1 + y_2' = 1, \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$
جوابات: $y_2(t) = e^t$ اور $y_1(t) = 1 - e^t$

سوال 6.170: $y_1' + y_2 = 0, \quad y_1 + y_2' = \sin t, \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$
جوابات: $y_2 = \frac{1}{2}(-\cos t + 3 \cosh t)$ اور $y_1 = \frac{1}{2}(\sin t - 3 \sinh t)$

سوال 6.171: $y_1' + y_1 - 2y_2 = 0, \quad y_2' - y_1 + 2y_2 = 0, \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 1$
جوابات: $y_2 = \frac{1}{3}(2 + e^{-3t})$ اور $y_1 = \frac{1}{3}(4 - e^{-3t})$

سوال 6.172: $y_1' = y_2 - 4 \cos 4t, \quad y_2' = -3y_1 - 9 \sin 4t, \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$
جوابات: $y_2 = \frac{24}{13}(\cos 4t - \cos \sqrt{3}t)$ اور $y_1 = -\frac{1}{13}(8\sqrt{3} \sin \sqrt{3}t + 7 \sin 4t)$

سوال 6.173:

$$y_1' = y_2 + 1 - u(t-1), \quad y_2' = -y_1 + 1 - u(t-1), \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$$

جوابات:

$$y_1 = -\cos t + \sin t + 1 + u(t-1)[-1 + \cos(t-1) - \sin(t-1)]$$

$$y_2 = \cos t + \sin t - 1 + u(t-1)[1 - \cos(t-1) - \sin(t-1)]$$

سوال 6.174:

$$y_1' = 2y_1 - 4y_2 + u(t-1)e^t$$

$$y_2 = y_1 - 3y_2 + u(t-1)e^t, \quad y_1(0) = 3, y_2(0) = 0$$

جوابات:

$$y_1 = -e^{-2t} + 4e^t + \frac{1}{3}u(t-1)(e^t - e^{3-2t})$$

$$y_2 = -e^{-2t} + e^t + \frac{1}{3}u(t-1)(e^t - e^{3-2t})$$

سوال 6.175:

$$y_1' = 4y_1 + y_2$$

$$y_2 = -y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 3, y_2(0) = 1$$

$$y_2(1-4t)e^{3t} \text{ اور } y_1 = (3+4t)e^{3t} \text{ : جوابات}$$

سوال 6.176:

$$y_1'' = y_1 + 3y_2, \quad y_2'' = 4y_1 - 4e^t$$

$$y_1(0) = 2, y_1'(0) = 3, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 2$$

$$y_2 = e^{2t} \text{ اور } y_1 = e^t + e^{2t} \text{ : جوابات}$$

سوال 6.177:

$$y_1'' = -y_2 - 101 \sin 10t, \quad y_2'' = -y_1 + 101 \sin 10t$$

$$y_1(0) = 0, y_1'(0) = 6, y_2(0) = 8, y_2'(0) = -6$$

جوابات:

$$y_1 = -4e^t + \sin 10t + 4 \cos 10t$$

$$y_2 = 4e^t - \sin 10t + 4 \cos 4t$$

سوال 6.178:

$$y_1' + y_2' = 2 \sinh t$$

$$y_2' + y_3' = e^t$$

$$y_3' + y_1' = 2e^t - e^{-t}, \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$$

جوابات: $y_1 = e^t$ ، $y_2 = e^{-t}$ اور $y_3 = e^t - e^{-t}$

6.8 لاپلاس بدل کے عمومی کلیے

تعریف

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

الٹ لاپلاس بدل

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

خطیت

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

تفاعل کا تفرق

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

تفاعل کا مکمل

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$$

بدل کا تفرق

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$$

بدل کا مکمل

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^t F(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

الجبوا

$$\mathcal{L}(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

منتقلی کا پہلا مسئلہ، s منتقلی

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a), \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s - a)] = e^{at}f(t)$$

منتقلی کا دوسرا مسئلہ، t منتقلی

$$\mathcal{L}[f(t - a)u(t - a)] = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t - a)u(t - a)$$

دہرائتا تفاعل

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$$

جدول 6.2: لاپلاس بدل کا وسیع جدول

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	نمبر
1	$\frac{1}{s}$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	2
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$	3
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	4
$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$	5
$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\frac{1}{s^a} \quad (a > 0)$	6
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	7
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	8
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$	9
$\frac{t^{k-1}e^{at}}{\Gamma(k)}$	$\frac{1}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	10
$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	11
$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	12
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	13
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	14
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	15
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	16
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	17
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	18
$\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	19
$\frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	20
$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	21
$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	22
$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	23
$\frac{1}{b^2 - a^2}(\cos at - \cos bt)$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	24

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	نمبر
$\frac{1}{4k^3}(\sin kt \cosh kt - \cos kt \sinh kt)$	$\frac{1}{s^4 + 4k^4}$	25
$\frac{1}{2k^2} \sin kt \sinh kt$	$\frac{s}{s^4 + 4k^4}$	26
$\frac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$	$\frac{1}{s^4 - k^4}$	27
$\frac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$	$\frac{s}{s^4 - k^4}$	28
$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	29
$e^{-\frac{(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$	$\frac{1}{\sqrt{(s+a)}\sqrt{s+b}}$	30
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	31
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1 + 2at)$	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	32
$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k} \quad (k > 0)$	33
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	34
$\delta(t-a)$	e^{-as}	35
$J_0(2\sqrt{kt})$	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}$	36
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	37
$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sinh 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{k}{s}}$	38
$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$	$e^{-k\sqrt{s}} \quad (k > 0)$	39
$-\ln t - \gamma \quad (\gamma \approx 0.5772)$	$\frac{1}{s} \ln s$	40
$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	41
$\frac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$	$\ln \frac{s^2 + \omega^2}{s^2}$	42
$\frac{2}{t}(1 - \cosh at)$	$\ln \frac{s^2 - a^2}{s^2}$	43
$\frac{1}{t} \sin \omega t$	$\tan^{-1} \frac{\omega}{s}$	44
$\text{Si}(t)$	$\frac{1}{s} \cot^{-1} s$	45

باب 7

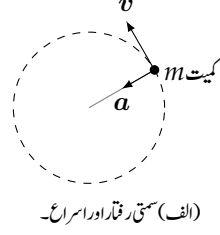
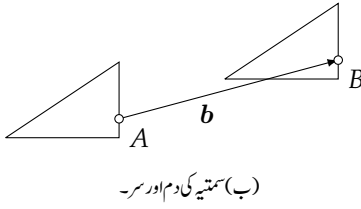
خطی الجبرا: سمتیات

7.1 غیر سمتیات اور سمتیات

طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جنہیں ان کی مقدار سے مکمل طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً کمیت، درجہ حرارت، برقی بار، وقت، رقبہ، حجم، فاصلہ، برقی دباؤ وغیرہ۔ ان میں سے ہر ایک کو (مقدار کی موزوں اکائی چن کر) ایک عدد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایسی تمام مقداروں کو غیر سمتیات¹ کہتے ہیں۔ غیر سمتی مقدار کی قیمت پر چنی گئی محدود کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔

اس کے برعکس طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں بھی پائی جاتی ہیں جن کی مکمل اظہار کے لئے ان کی قیمت کے علاوہ ان کی سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ ان کی ایک مثال میکانیکی قوت ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ قوت کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں تیر کی سمت، قوت کی سمت اور تیر کی لمبائی (کسی پیمائش کے تحت) قوت کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ شکل 7.1-الف میں ہلکے دھاگے سے بندھی ہوئی کمیت m کی دائری حرکت دکھائی گئی ہے۔ کمیت کی لمبائی سمتی رفتار v کو تیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس تیر کی سمت، کمیت کی لمبائی سمتی رفتار دیتی ہے جبکہ تیر کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمبائی سمتی رفتار کی قیمت دیتی ہے۔ شکل میں کمیت کی اسراع a بھی دکھائی گئی ہے جہاں a کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمبائی اسراع کی قیمت دیتی ہے۔

¹ scalars



شکل 7.1: سمتیہ کی تفصیل۔

سطح مستوی میں تکون کی (بلا گھومے) منتقلی شکل 7.1-ب میں دکھائی گئی ہے۔ اس حرکت کو (تکون کے ہر نقطے کی) طے فاصلے کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ تکون پر کسی نقطے کی ابتدائی مقام A سے اختتامی مقام B تک سمتی خط سے اس حرکت کو ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یوں سمتی خط b ، تکون کے ایک نقطہ کی A سے B منتقلی دکھاتی ہے۔ تکون کے ہر نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک سمتی خطوط کھینچ کر ہمیں سمتی خطوط کی نسل ملتی ہے جس میں تمام سمتی خطوط کی لمبائی ایک جیسی اور سمت ایک جیسی ہو گی (یعنی یہ آپس میں متوازی ہوں گے)۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک سمتی خط، تکون کے ایک نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک منتقلی کو ظاہر کرتی ہے۔

اس سے سمتیہ کی درج ذیل تعریف بیان کی جاسکتی ہے۔

تعریف: سمتیہ

سمتی خط کو سمتیہ² کہتے ہیں۔ اس کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی اور سمت کو سمتیہ کی سمت کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب ان کی لمبائی ایک جیسی ہو اور ان کی سمت ایک جیسی ہو۔

سمتیہ کی لمبائی کو سمتیہ کی اقلیدسی معیار³ (یا معیار) اور سمتیہ کی مقدار⁴ بھی کہتے ہیں۔

سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو سمتیہ کی دم⁵ اور اختتامی نقطے کو سمتیہ کا سر⁶ کہتے ہیں۔ یوں شکل 7.1-ب میں نقطہ B سمتیہ b کی دم ہے جبکہ نقطہ A اس کا سر ہے۔

vector²
Euclidean norm³
magnitude⁴
tail⁵
head⁶

ہم سمتیات کو موٹی لکھائی میں چھوٹی حروف تہجی مثلاً a ، b ، v ، وغیرہ، سے ظاہر کرتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں اسراع کو \vec{a} یا \vec{a} لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ a کی مقدار کو $|a|$ لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ہم سمتیہ کو بغیر گھمائے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کر سکتے ہیں⁷ یعنی ہم سمتیہ کی دم کہیں پر بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ سمتیہ کی دم کا مقام مقرر کرنے سے اس کے سر کا مقام بھی مقرر ہو گا۔

اگر دو سمتیات a اور b ایک دوسرے کے برابر ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں

(7.1)

$$a = b$$

اور اگر یہ آپس میں برابر نہ ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

(7.2)

$$a \neq b$$

کسی بھی سمتیہ کو تریسی طور پر موزوں لمبائی اور سمت کی سمتی خط سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔
ایسا سمتیہ جس کی لمبائی اکائی (1) ہو اکائی سمتیہ⁸ کہلاتا ہے۔

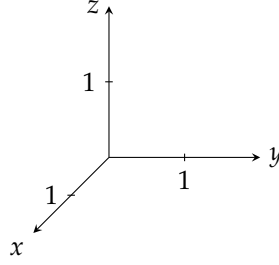
7.2 سمتیہ کے اجزاء

تین بُعدی فضا میں نقطہ ایک جیومیٹریائی چیز ہے جس کو محدودی نظام میں تین مرتب اعداد (تصور کیا جا سکتا ہے یا) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی انداز میں پیش کی، جسے محدودی نظام کی استعمال سے الجبرائی انداز میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

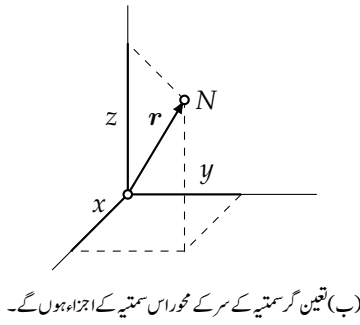
نظام محدود کے محدود⁹، آپس میں عمودی تین متقاطع سیدھے خطوط ہوں گے۔ ان کے مقام انقطاع کو محدودی نظام کا مبدا¹⁰ کہتے ہیں۔ ہم تینوں محور پر پیمائشی ناپ ایک جیسی چنتے ہیں لہذا محور پر مبدا سے اکائی فاصلے پر $(1, 0, 0)$ ،

⁷ یہاں یہ بتانا ضروری ہے کہ طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی صورتیں پائی جاتی ہیں جہاں سمتیہ کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ آپ میکانیات سے جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر یکجہ دار مادے پر قوت کا اطلاق، قوت کی سمت میں کلیہ پر رہتے ہوئے، کسی بھی نقطہ پر کیا جا سکتا ہے۔ اس سے قابل منتقلی سمتیہ کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ اس کے برعکس، یکجہ دار مادے پر قوت کے اطلاق کا نقطہ تبدیل کرنے سے نتائج تبدیل ہوں گے جو ناقابل قبول بات ہے۔ یہ حقیقت مقید سمتیہ کی تصور کو جنم دیتی ہے۔ اس کتاب میں صرف قابل منتقلی سمتیات پر بات کی جائے گی۔

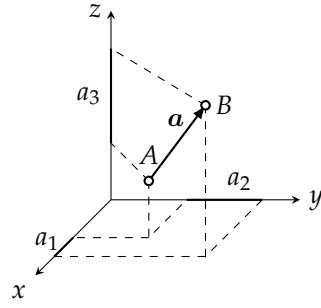
⁸ unit vector
⁹ coordinates
¹⁰ origin



شکل 7.2: کارتیسی نظام محددی



(ب) تعین کر سمتیہ کے سر کے محور اس سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔



(الف) اجزاء سمتیہ

شکل 7.3: سمتیہ کے اجزاء اور تعین کر سمتیہ۔

نقطے پائے جائیں گے۔ اس محددی نظام کو فضا میں کارتیسی نظام محدد¹¹ (شکل 7.2) $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ سے رجوع کریں (کہتے ہیں)۔

ہم اب ابتدائی نقطہ A سے اختتامی نقطہ B تک سمتیہ a پر غور کرتے ہیں (شکل 7.3-الف)۔ اگر نقطہ A کے محور (x_1, y_1, z_1) اور نقطہ B کے محور (x_2, y_2, z_2) ہوں تب درج ذیل اعداد، اس کارتیسی محددی نظام کے لحاظ سے، سمتیہ a کے اجزاء¹² کہلاتے ہیں۔

$$(7.3) \quad a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1$$

سمتیہ کی تعریف کے تحت a کی لمبائی سے مراد A سے B تک کی لمبائی \overline{AB} ہے جو مساوات 7.3 میں

Cartesian coordinate system¹¹
components¹²

دیے گئے اجزاء کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$(7.4) \quad |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

مثال 7.1: سمتیہ کے اجزاء اور اس کی لمبائی
سمتیہ a کی دم $(-2, 3, 1)$ اور سر $(5, -2, 7)$ ہیں۔ اس سمتیہ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی دریافت کریں۔

حل: اجزاء $a_1 = 5 - (-2) = 7$, $a_2 = -2 - 3 = -5$, $a_3 = 7 - 1 = 6$ اور لمبائی

$$|a| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{110}$$

ہے۔ اگر ہم سمتیہ a کی دم کو نقطہ $(4, 1, 3)$ پر منتقل کریں تب اس کا سر $(11, -4, 9)$ پر ہو گا۔

مساوات 7.3 میں دیے گئے اجزاء کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر a کی دم کو کارٹیزی محدود کی مبدا پر منتقل کیا جائے تب a کے اجزاء اس کی سر کے محور ہوں گے۔ ایسا سمتیہ جس کو شکل 7.3-ب میں دکھایا گیا ہے تعین کر سمتیہ¹³ کہلاتا ہے اور اس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ □

a کی دم کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے سمتیہ کا سر بھی اتنا ہی اپنی جگہ سے ہلتا ہے لہذا مساوات 7.3 سے ظاہر ہے کہ سمتیہ a کے اجزاء a_1 , a_2 اور a_3 کی قیمت پر a کی ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں کسی بھی معین کارٹیزی محدودی نظام کے حوالے سے سمتیہ کو مکمل طور پر تین (محوری) اعداد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

وہ سمتیہ جس کے اجزاء $0, 0, 0$ ہوں معدوم سمتیہ¹⁴ یا صفر سمتیہ¹⁵ 0 کہلاتا ہے۔ یوں کوئی بھی تین اعداد بہ شمول $0, 0, 0$ سمتیہ کے اجزاء ہو سکتے ہیں۔

معین نظام محدود کی صورت میں ہر مرتبہ تین اعداد ایک منفرد سمتیہ کو ظاہر کریں گے۔ یہ تین اعداد سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔ اسی طرح معین نظام محدود میں ہر سمتیہ کے اجزاء سے سمتیہ کو تین مرتبہ اعداد کی صورت میں لکھا جا

position vector¹³
null vector¹⁴
zero vector¹⁵

سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی نقطہ نظر سے کی گئی۔ ہم اب تین مرتب حقیقی اعداد (جو سمتیہ کے اجزاء کہلاتے ہیں) کو سمتیہ کی تعریف کہہ سکتے ہیں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتیہ کی جیومیٹریائی صورت حاصل کر سکتے ہیں۔

یوں دو سمتیات a اور b صرف اور صرف اس صورت ایک جیسے ہوں گے جب ان کے تین مطابقتی اجزاء ایک جیسے ہوں۔ لہذا درج ذیل سمتی مساوات

$$a = b$$

سے مراد درج ذیل تین مساوات ہیں جہاں a_1, a_2, a_3 اور b_1, b_2, b_3 ایک ہی کارتیسی نظام محدود میں بالترتیب a اور b کے مطابقتی اجزاء ہیں۔

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

ظاہر ہے کہ اگر ایک سمتیہ کوئی حقیقی یا جیومیٹریائی چیز ہو تب اس کی لمبائی اور سمت پر چننی گئی نظام محدود کا کوئی اثر نہیں ہونا چاہیے۔

اگلے باب میں سمتیہ کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہر مرتب n اعداد کو سمتیہ تصور کیا جائے گا، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے۔

سوالات

سوال 7.1 تا سوال 7.10 میں سمتیہ u کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ سمتیہ u کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی $|u|$ حاصل کریں۔ u کا خط کھینچیں۔

$$\text{سوال 7.1: } A : (2, 3, 0), \quad B : (-4, 6, 0)$$

$$\text{جوابات: } |u| = 3\sqrt{5}, \quad u_1 = -6, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 0$$

$$\text{سوال 7.2: } A : (5, 3, 1), \quad B : (1, 7, 2)$$

$$\text{جوابات: } |u| = \sqrt{33}, \quad u_1 = -4, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 1$$

سوال 7.3: $A : (1.2, -1, 2.5), \quad B : (2.4, 1.6, -3.2)$

جوابات: $|u| = 6.38$ ، $u_1 = 1.2$ ، $u_2 = 2.6$ ، $u_3 = -5.7$

سوال 7.4: $A : (0, 0, 3), \quad B : (4, 0, 0)$

جوابات: $|u| = 5$ ، $u_1 = 4$ ، $u_2 = 0$ ، $u_3 = -3$

سوال 7.5: $A : (3, 3, 3), \quad B : (1, 1, 1)$

جوابات: $|u| = 2\sqrt{3}$ ، $u_1 = -2$ ، $u_2 = -2$ ، $u_3 = -2$

سوال 7.6: $A : (1, 1, 1), \quad B : (3, 3, 3)$

جوابات: $|u| = 2\sqrt{3}$ ، $u_1 = 2$ ، $u_2 = 2$ ، $u_3 = 2$

سوال 7.7: $A : (2, 2, 2), \quad B : (2, 2, 0)$

جوابات: $|u| = 0$ ، $u_1 = 0$ ، $u_2 = 0$ ، $u_3 = 0$ ؛ یہ صفر سمتیہ ہے۔

سوال 7.8: $A : (0, 7, 8), \quad B : (-3, 1, 8)$

جوابات: $|u| = 3\sqrt{5}$ ، $u_1 = -3$ ، $u_2 = 6$ ، $u_3 = 0$

سوال 7.9: $A : (100, 200, 300), \quad B : (100, 204, 303)$

جوابات: $|u| = 5$ ، $u_1 = 0$ ، $u_2 = 4$ ، $u_3 = 3$

سوال 7.10: $A : (-5, -6, -2), \quad B : (-8, -6, -4)$

جوابات: $|u| = \sqrt{13}$ ، $u_1 = -3$ ، $u_2 = 0$ ، $u_3 = -2$

سوال 7.11 تا سوال 7.20 میں ابتدائی نقطہ A اور سمتیہ کے اجزاء دیے گئے ہیں۔ سمتیہ کا اختتامی نقطہ دریافت کریں۔

سوال 7.11: $A : (-2, 3, 1); \quad 3, 1, 4$
جواب: $1, 4, 5$

سوال 7.12: $A : (0,0,0); \quad 5,1,7$
جواب: $5,1,7$

سوال 7.13: $A : (5,2,-6); \quad 0,0,0$
جواب: $5,2,-6$

سوال 7.14: $A : (3,6,1); \quad -5,-7,2$
جواب: $-2,-1,3$

سوال 7.15: $A : (4,4,4); \quad 4,4,4$
جواب: $8,8,8$

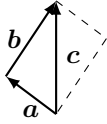
سوال 7.16: $A : (7,7,7); \quad -7,-7,-7$
جواب: $0,0,0$

سوال 7.17: $A : (-3,-4,-5); \quad 3,4,5$
جواب: $0,0,0$

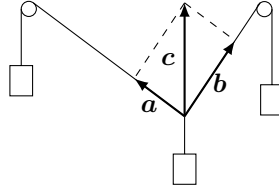
سوال 7.18: $A : (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}); \quad -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 1$
جواب: $-1, 1, \frac{4}{3}$

سوال 7.19: $A : (0.2, -0.1, 0.5); \quad 1.1, -0.4, -0.3$
جواب: $1.3, -0.5, 0.2$

سوال 7.20: $A : (11.3, -10, -15.8); \quad 12.6, 9, -14$
جواب: $23.9, -1, -29.8$



(ب) سمتیوں کا مجموعہ بذریعہ متوازی الاضلاع



(الف) قوتوں کا مجموعہ بذریعہ تجربہ

شکل 7.4: تجربہ سے قوتوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کے مجموعے کا حصول ہوتا ہے۔

7.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب

چونکہ ہم سمتیات کو حساب کتاب کے لئے استعمال کرنا چاہتے ہیں لہذا سمتیات کے دو عدد الجبرائی اعمال پیش کرتے ہیں جنہیں سمتیات کا مجموعہ اور سمتیات کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کہتے ہیں۔

تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ دو قوتوں کا حاصل، متوازی الاضلاع (شکل 7.4) سے ملتا ہے۔ اس سے سمتیات کے مجموعے کی درج ذیل تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: سمتیات کا مجموعہ

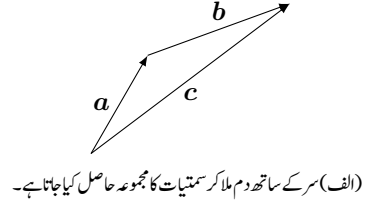
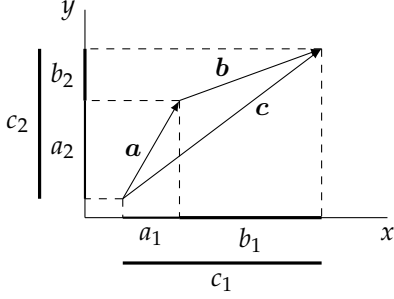
دو سمتیات a اور b کو لیتے ہوئے a کے سر کے ساتھ b کی دم ملائیں۔ اب a اور b کی مجموعے کی تعریف وہ سمتیہ c ہے جو a کی دم سے b کے سر تک کھینچی جائے گی (شکل 7.5-الف)۔ اس عمل کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(7.5) \quad c = a + b$$

سمتیات کی مجموعے کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر کسی معین کارتیسی نظام محدود میں a کے اجزاء a_1, a_2 اور a_3 جبکہ b کے اجزاء b_1, b_2 اور b_3 ہوں تب حاصل جمع سمتیہ c کے اجزاء c_1, c_2 اور c_3 درج ذیل ہوں گے۔

$$(7.6) \quad c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3$$

شکل 7.5-ب میں اس عمل کو سطح پر دکھایا گیا ہے، اور فضا میں بھی بالکل ایسا ہی ہو گا۔



(الف) سر کے ساتھ دم ملا کر سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ب) سمتیات کے مطابق اجزاء کو جمع کرتے ہوئے حاصل جمع سمتیہ کے اجزاء حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 7.5: مجموعہ سمتیات۔

مجموعہ کی تعریف یا مساوات 7.6 سے مجموعہ سمتیات کی درج ذیل خصوصیات ملتی ہیں جہاں $-a$ سے مراد ایسا سمتیہ ہے جس کی لمبائی $|a|$ اور سمت a کے الٹ ہو۔

$$(الف) \quad a + b = b + a \quad \text{قانون تبادلہ}$$

$$(ب) \quad (u + v) + w = u + (v + w) \quad \text{قانون تلازم}$$

(7.7)

$$(پ) \quad a + 0 = 0 + a$$

$$(ت) \quad a + (-a) = 0$$

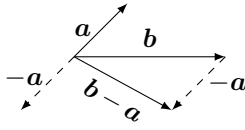
مساوات 7.7-ب میں ہم $u + v + w$ لکھ سکتے ہیں اور یہی طریقہ زیادہ اعداد کے سمتیات کا مجموعہ لکھنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مجموعہ $a + a$ کی جگہ $2a$ لکھا جاتا ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ ان سے $-a$ کے استعمال سے ہم سمتیات کا دوسرا الجبرائی عمل بیان کرتے ہیں۔

سمتیات کا غیر سمتیات (اعداد) کے ساتھ ضرب

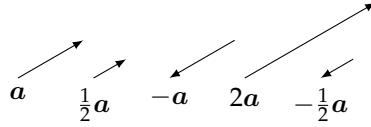
اگر a ایک سمتیہ اور q کوئی حقیقی عدد ہو تب سمتیہ qa کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$qa \text{ کی لمبائی } |q||a| \text{ ہے۔}$$

اگر $a \neq 0$ ہو اور $q > 0$ ہو تب qa کی سمت وہی ہوگی جو a کی تھی۔



(ب) سمتیات کا فرق



(الف) سمتیات کا غیر سمتیات کے ساتھ ضرب۔

شکل 7.6: سمتیات کا غیر سمتیہ کے ساتھ ضرب اور سمتیات کا فرق۔

اگر $a \neq 0$ ہو اور $q < 0$ ہو تب qa کی سمت a کی سمت کے الٹ ہو گی۔

اگر $a = 0$ یا $q = 0$ ہو (اور یا دونوں صفر ہوں) تب $qa = 0$ ہو گا۔

ان قواعد کی سادہ مثالیں شکل 7.6-الف میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر a کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں تب اسی نظام محدود میں qa کے اجزاء qa_1 ، qa_2 اور qa_3 ہوں گے۔ اسی طرح سمتیہ کی تعریف سے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 q(a + b) &= qa + qb \\
 (c + k)a &= ca + ka \\
 c(ka) &= (ck)a \quad \text{جس کو } cka \text{ لکھا جاتا ہے} \\
 1a &= a
 \end{aligned}
 \tag{7.8}$$

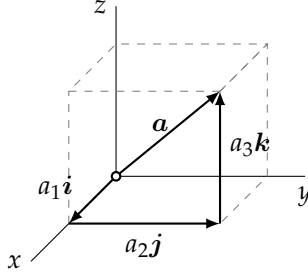
مساوات 7.7 اور مساوات 7.8 سے درج ذیل اخذ کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 0a &= 0 \\
 (-1)a &= -a
 \end{aligned}
 \tag{7.9}$$

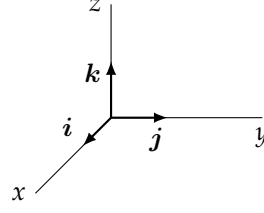
ہم $b - a$ کی جگہ $b - a$ لکھ سکتے ہیں (شکل 7.6-ب)۔

کسی بھی ایک کارتیسی نظام محدود کو استعمال کرتے ہوئے، ہم سمتیہ a جس کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں کو تین ایسی سمتیات کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں جو اس کارتیسی نظام کے تین محور کے متوازی ہوں۔ ہم اس کارتیسی نظام کے ساتھ تین ایسے اکائی سمتیات، جنہیں ہم i ، j اور k کہیں گے، وابستہ کرتے ہیں جن کی مثبت سمت اس کارتیسی نظام کے محور کی مثبت سمت ہو۔ یوں a کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (شکل 7.7)۔

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k
 \tag{7.10}$$



(ب) سمتیہ کا تین اکائی سمتیات کی مدد سے اظہار



(الف) اکائی سمتیات i, j اور k

شکل 7.7: اکائی سمتیات اور ان کا استعمال۔

شکل 7.7-الف میں اکائی سمتیات i ، j اور k کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کی دم کو کارتیسی نظام کے مبدا پر رکھا گیا ہے۔ یہ اکائی سمتیات آپس میں عمودی یا قاعہ¹⁶ ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ i ، j اور k اس نظام محدود کی ثلاثہ اکائی قاعہ سمتیات ہیں۔

کسی بھی سمتیہ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کرتے ہوئے اسی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔ یوں a کی سمت میں اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(7.11) \quad \text{اکائی سمتیہ} = \frac{a}{|a|}$$

مثال 7.2: کسی کارتیسی نظام میں اگر $a = 3i - 2k$ اور $b = -5i + 4j + 2k$ ہوں، تب درج ذیل ہوں گے۔

$$3a = 9i - 6k, \quad -b = 5i - 4j - 2k, \quad 1.2a - 0.5b = 6.1i - 2j - 3.4k$$

□

مثال 7.3: کسی سمتیہ a کی دم A پر ہے جبکہ اس کا سر B پر ہے۔ اسی سمت میں کسی بھی سمتیہ کو la لکھا جا سکتا ہے جہاں l غیر سستی مستقل ہے۔ اب اگر la سمتیہ کی دم A پر ہو تب $l = 0$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر نقطہ A پر ہو گا جبکہ $l = 1$ کی صورت میں اس کا سر نقطہ B پر ہو گا۔ اسی طرح $l = \frac{1}{2}$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر a کے عین وسط پر ہو گا۔

¹⁶orthogonal

□

مثال 7.4: اکائی سمتیہ $a = 2i - 5j + 3k$ کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔ اسی سمت میں ایسا سمتیہ حاصل کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔

حل: a کی لمبائی $|a| = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38}$ ہے۔ یوں مساوات 7.11 کے تحت a کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\frac{a}{|a|} = \frac{2i - 5j + 3k}{\sqrt{38}}$$

ہو گا۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کو غیر سمتی l سے ضرب دینے سے اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل ہوتا ہے لہذا درکار سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$7 \frac{a}{|a|} = \frac{14i - 35j + 21k}{\sqrt{38}} = 2.27i - 6.68j + 3.41k$$

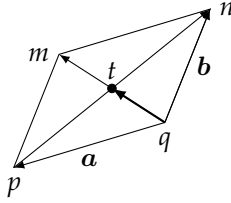
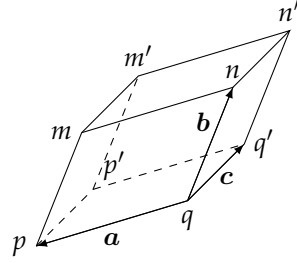
□

مثال 7.5: a ، b اور c شکل 7.8-الف میں دکھائے گئے چپٹا ڈبے کے تین قریبی کنارے ہیں۔ ڈبے کی سامنے سطح $mnpq$ کا وتر v_{mq} اور v_{np} دریافت کریں جہاں وتر v_{mq} کی دم q اور سر m ہیں۔ جیسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے، وتری سمتیات v_{mq} اور v_{np} ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ t دریافت کرتے ہوئے ثابت کریں کہ دونوں وتر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

حل: شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$r_{mq} = a + c, \quad r_{np} = -a + c$$

شکل 7.8-ب سے ظاہر ہے کہ q کو ابتدائی نقطہ تصور کرتے ہوئے t تک کئی راستوں سے پہنچا جا سکتا ہے۔ چونکہ t وتر v_{mq} پر پایا جاتا ہے لہذا q سے t تک سمتیہ کو $v_{tq} = l_1 v_{mq}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_1 < 1$ ممکن ہے۔ اسی طرح q سے پہلے p اور یہاں سے v_{np} کی سمت میں چلتے ہوئے بھی نقطہ

(ب) وتر نقطہ t پر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

(الف) چٹاؤ با۔

شکل 7.8: سمتیات کا استعمال۔ مثال 7.5

t تک پہنچنا ممکن ہے۔ ایسا کرتے ہوئے $v_{tq} = a + l_2 v_{np}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں $0 < l_2 < 1$ ممکن ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا

$$(7.12) \quad v_{tq} = l_1 v_{mq} = a + l_2 v_{np} \implies l_1(a + c) = a + l_2(-a + c)$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$a(l_1 - 1 + l_2) + c(l_1 - l_2) = 0$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ a اور b غیر صفر ہیں اور ان کی سمتیں بھی مختلف ہیں لہذا درج بالا مساوات صرف اور صرف اس صورت ممکن ہوگا جب دونوں قوسین صفر ہوں یعنی:

$$l_1 - 1 + l_2 = 0$$

$$l_1 - l_2 = 0$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔ اب $l_1 = \frac{1}{2}$ کی صورت میں مساوات 7.12 سے $v_{tq} = \frac{1}{2} v_{mq}$ ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ نقطہ t عین mq کے وسط میں پایا جاتا ہے۔ مساوات 7.12 کے اگلے حصے سے اسی طرح ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ t عین np کے وسط میں پایا جاتا ہے۔

□

سوالات

سوال 7.21 تا سوال 7.30 میں $a = 2i - j + k$ ، $b = -3i - 2j + 4k$ اور $c = -2k$ لیں۔

7.3. سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب

سوال 7.21: $-4a, \frac{1}{4}a, 4a$
 جوابات: $-4a = -8i + 4j - 4k, \frac{1}{4}a = \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}j + \frac{1}{4}k, 4a = 8i - 4j + 4k$

سوال 7.22: $a + b, b + a$
 جوابات: $-i - 3j + 5k$

سوال 7.23: $a - b, b - a, a - b - c$
 جوابات: $a - b = 5i + j - 3k, b - a = -5i - j + 3k, a - b - c = 5i + j - k$

سوال 7.24: $|a - b|, |b - a|, |a - b - c|$
 جوابات: $\sqrt{35}, \sqrt{35}, 3\frac{3}{2}$

سوال 7.25: $|a + b|, |a| + |b|$
 جوابات: $5.916, 7.835$

سوال 7.26: $|a - b|, |a| - |b|$
 جوابات: $5.916, -2.936$

سوال 7.27: $\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}, \frac{c}{|c|}$
 جوابات: $0.82i - 0.41j + 0.41k, -0.56i - 0.31j + 0.74k, -k$

سوال 7.28: $\frac{a+c}{|a+c|}, \frac{b-c}{|b-c|}, \frac{a+b+c}{|a+b+c|}$
 جوابات: $-0.17i - 0.51j + 0.85k, -0.43i - 0.29j + 0.86k, -0.23i - 0.69j + 0.69k$

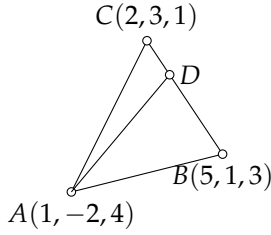
سوال 7.29: $(a + b) + c, a + (b + c)$
 جوابات: $-i - 3j + 3k$

سوال 7.30: $4(a - b), 4a - 4b$
 جوابات: $20i + 4j - 12k$

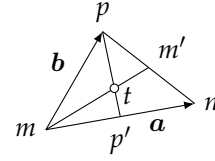
سوال 7.31: قوت $n = 2i - j - 3k$ اور $p = -3i - 2j + 7k$ ہیں۔ ایسی قوت m دریافت کریں کہ m, n اور p توازن میں ہوں۔

جواب: $m = i + 3j - 4k$

سوال 7.32: ثابت کریں کہ شکل 7.8 میں وتر $m'q$ اور $n'p$ ایک دونوں کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔



(ب) سوال 7.34 کی شکل۔



(الف) سوال 7.33 کی شکل۔

شکل 7.9: سمتیات کا استعمال۔

جواب: $v_{m'q} = a + b + c$ اور $v_{n'p} = -a + b + c$ ہیں۔ اب $v_{tq} = l_1 v_{m'q}$ اور اسی طرح $v_{tq} = a + l_2 v_{n'p}$ لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں برابر پر کرتے ہوئے

$$l_1(a + b + c) = a + l_2(-a + b + c)$$

یعنی $a(l_1 - 1 + l_2) + b(l_1 - l_2) + c(l_1 - l_2) = 0$ تو سین صفر ہوں گے۔ یوں حاصل ہمزاد مساوات $l_1 - 1 + l_2 = 0$ اور $l_1 - l_2 = 0$ حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔

سوال 7.33: تینوں کی تین کونوں سے سامنے اطراف کی وسط کو ملانے والے خط ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔ t کے دونوں اطراف، خط کی لمبائی کا نسبت دریافت کریں۔

جواب: تینوں کو شکل 7.9-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں mn کی وسط پر نقطہ p' اور pn کی وسط پر نقطہ m' دکھائے گئے ہیں۔ یوں سمتیہ $v_{m'n}$ جس کی دم نقطہ n پر ہے کو $v_{m'n} = \frac{1}{2}(b - a)$ لکھا جاسکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $v_{m'm} = a + v_{m'n}$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $v_{p'p} = \frac{1}{2}a - b$ لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے $v_{tm} = l_2 v_{m'm}$ اور $v_{tm} = b + l_1 v_{p'p}$ لکھے جاسکتے ہیں۔ انہیں حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{2}{3}$ ملتا ہے۔ یوں $m'm$ خط کے دو حصوں کا تناسب $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ یعنی $2:1$ ہو گا۔

سوال 7.34: تینوں کے کونے $A(1, -2, 4)$ ، $B(5, 1, 3)$ اور $C(2, 3, 1)$ ہیں۔ BC پر D پایا جاتا ہے جہاں $\overline{BD} = 2\overline{CD}$ ہے۔ اس کو شکل 7.34-ب میں دکھایا گیا ہے۔ خط AD کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب: $v_{BA} = 4i + 3j - k$ اور $v_{CB} = -3i + 2j - 2k$ ہیں۔ اب دی گئی معلومات کے تحت $v_{DB} = \frac{2}{3}v_{CB}$ ہے۔ یوں $v_{DA} = v_{BA} + v_{DB}$ یعنی $v_{DA} = 2i + \frac{13}{3}j - \frac{7}{3}k$ ہو گا جس کی لمبائی $\frac{\sqrt{254}}{3}$ ہے۔

سوال 7.35: ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے ایک کونے سے سامنے والی طرف کی وسط تک لکیر، وتر کو 1 : 2 تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

سوال 7.36 تا سوال 7.38 میں a کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل کریں۔ ظاہر ہے کہ اکائی سمتیہ کو -1 سے ضرب دے کر الٹ سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔

سوال 7.36: $a = 4j, l = 5$
جوابات: $j, 5j$

سوال 7.37: $a = -2i + j + 3k, l = 2$
جوابات: $-3.74i + 1.87j + 5.61k, -0.535i + 0.267j + 0.802k$

سوال 7.38: $a = b + 2c, b = 3i + 2k, c = 2i - j - k, l = 10$
جوابات: $9.61i - 2.74j, 0.96i - 0.27j$

7.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے تمام سمتیات کا سلسلہ V جو سمتی مجموعہ (مساوات 7.7) اور سمتی ضرب (مساوات 7.8) کے الجبرائی قواعد پر پورا اترتا ہو کو سمتی فضا¹⁷ یا خطی فضا¹⁸ کہتے ہیں۔ سمتی فضا کا تصور اس لئے اہم ہے کہ عملی دلچسپی کے دیگر سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادل وغیرہ پر مبنی ہوں پائے جاتے ہیں جن کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب کی بالکل ایسی ہی فطری تعریف کی جاسکتی ہے۔

مسئلہ 7.1: حقیقی سمتی فضا
اگر سلسلہ V کے ارکان a, b, \dots درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے ہیں) پر پورا اترتے ہوں تب V حقیقی سمتی فضا¹⁹ یا حقیقی خطی فضا کہلاتا ہے اور یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) سمتیات کہلاتے ہیں۔

¹⁷ vector space

¹⁸ linear space

¹⁹ real vector space

(الف) سمتی جمع V کے ہر دو سمتیات a اور b کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو a اور b کا مجموعہ کہلاتا اور $a + b$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) قانون تبادلہ۔ V کے ہر دو ارکان a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(7.13) \quad a + b = b + a$$

(الف-2) قانون تلازم۔ V کے ہر تین ارکان a ، b اور c کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(7.14) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{جو } a + b + c \text{ لکھا جاتا ہے})$$

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو صفر سمتیہ کہلاتا اور 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(7.15) \quad a + 0 = a$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ a کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-a$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$(7.16) \quad a + (-a) = 0$$

(ب) غیر سمتی ضرب۔ حقیقی اعداد غیر سمتی کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ a کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو a اور c کا حاصل ضرب کہلاتا اور ca (یا ac) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(ب-1) قانون جزئی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(7.17) \quad c(a + b) = ca + cb$$

(ب-2) قانون جزئی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(7.18) \quad (c + k)a = ca + ka$$

(ب-3) قانون وابستگی۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(7.19) \quad c(ka) = (ck)a \quad (\text{جو } cka \text{ لکھا جاتا ہے})$$

(ب-4) V میں ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(7.20) \quad 1 \cdot a = a$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے مخلوط سمتی فضا کی مسلکی تعریف حاصل ہو گی۔

سمتی فضا پر مزید بحث حصہ 8.9 میں کی جائے گی۔ انہیں اب سمتی فضا کی چند اہم خصوصیات پر غور کریں۔

فرض کریں کہ $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ سلسلہ V کے ارکان ہیں۔ ان کے خطی مجموعے²⁰ سے مراد درج ذیل ہے جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔

$$c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \dots + c_m a_{(m)}$$

سمتی فضا کی تعریف کے تحت درج بالا از خود V کا رکن سمتیہ ہو گا۔ اس طرز کی تمام مجموعوں کا سلسلہ S ، ان سمتیات کا احاطہ²¹ کہلاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ یہ سمتیات S کے پیدا کار²² ہیں۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔

خطی مجموعے کو استعمال کرتے ہوئے ہم خطی تابعت اور خطی غیر تابعت متعارف کرتے ہیں۔

سمتیات $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ اس صورت خطی طور غیر تابع سلسلہ پیدا کرتے ہیں جب درج ذیل

$$(7.21) \quad c_1 a_{(1)} + \dots + c_m a_{(m)} = 0$$

سے مراد $c_1 = 0, \dots, c_m = 0$ ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.84 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ خطی طور تابع²³ کہلاتے ہیں۔

linear combination²⁰

span²¹

generator²²

linearly dependent²³

$m = 1$ کی صورت میں مساوات 8.84 سے $ca = 0$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ a اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $a \neq 0$ ہو۔

مثال 7.6: خطی طور تابع اور خطی طور غیر تابع سمتیات کے سلسلے
سمتیات $a = i + 2j + k$ ، $b = 3k$ اور $c = 2i + 4j$ خطی طور تابع ہیں چونکہ $6a - 2b - 3c = 0$ لکھ کر $a = \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c$ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے برعکس i ، j اور k خطی طور غیر تابع ہیں۔
□

اگر V میں غیر تابع سمتیات کی تعداد n ہو جبکہ V میں موجود n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا بُعد n ہو گا اور V کو n بُعدی کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو V کی اساس²⁴ کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ منفرد ہو گا۔

اس کی مثال فضا کے تمام سمتیات (حصہ 7.1) کی سمتی فضا ہے۔ اس سمتی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عدد سمتیات i ، j اور k (حصہ 7.3) کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ فضا سہ بُعدی ہے۔

اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$(7.22) \quad c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \cdots + c_m a_{(m)} = 0$$

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 7.22 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $0 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 7.22 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات خطی طور غیر تابع²⁵ کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات کا خطی طور غیر تابع سلسلہ²⁶ ہے۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 7.22 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات خطی طور تابع²⁷ کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 7.22 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$a_{(1)} = k_2 a_{(2)} + \cdots + k_m a_{(m)} \quad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

²⁴basis

²⁵linear independent

²⁶linearly independent set

²⁷linearly dependent

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($a_{(1)} = 0$) کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں۔ اگر $m = 1$ ہو تب مساوات 7.22 کو ہم $c_1 a_{(1)} = 0$ لکھیں گے جس میں $k_1 \neq 0$ اس صورت ہو سکتا ہے جب $a_{(1)} = 0$ ہو جو خطی تابعت کی تعریف کے تحت خطی طور تابعت ہے۔

خطی طور تابعت سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابعت سلسلہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 7.2: خطی طور تابعت

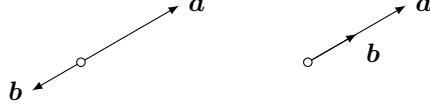
اگر مساوات 7.22 صرف اور صرف اس صورت درست ہو جب تمام c_1 تا c_m صفر ہوں تب $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ خطی طور تابعت ہوں گے۔

درج بالا لازم اور معقول (کافی) شرط کو ہی عموماً تابعت کی تعریف تصور کی جاتی ہے۔

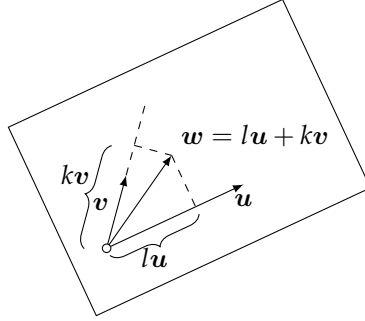
اگر ان میں کوئی ایک سمتیہ بھی صفر سمتیہ ہو تب $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ خطی طور غیر تابعت ہوں گے، مثلاً $a_{(1)} = 0$ کی صورت میں مساوات 7.22 میں $k_1 \neq 0$ اور $k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0$ ہو سکتا ہے۔

سہ بُعدی فضا میں دو عدد خطی طور تابعت سمتیات ہم خطی²⁸ ہوں گے (شکل 7.10) یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ ایک ہی سیدھی خط پر واقع ہوں گے۔ ایسے تین سمتیات u ، v اور w جو خطی طور تابعت سلسلہ پیدا کرتے ہوں ہم سطحی²⁹ کہلاتے ہیں، یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ سمتیات ایک ہی سطح مستوی پر واقع ہوں گے (شکل 7.11)۔ درحقیقت خطی تابعت کا مطلب یہ ہے کہ ایک سمتیہ کو بقایا سمتیات کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ سہ بُعدی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عددی سمتیات i ، j اور k کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے لہذا سہ بُعدی فضا میں چار یا چار سے زیادہ سمتیات خطی طور تابعت ہوں گے۔

collinear²⁸
coplanar²⁹



شکل 7.10: ہم خطی سمتیات۔



شکل 7.11: ہم سطحی سمتیات۔

سوالات

ثابت کریں کہ سوال 7.39 تا سوال 7.42 میں دیے گئے سمتیات کا سلسلہ سمتی فضا پیدا کرتا ہے۔ اس فضا کی بُعد اور اساس دریافت کریں۔

سوال 7.39: سہ بُعدی فضا وہ تمام سمتیات جن کا پہلا جزو صفر ہے۔

جوابات: 2 ؛ j ، k

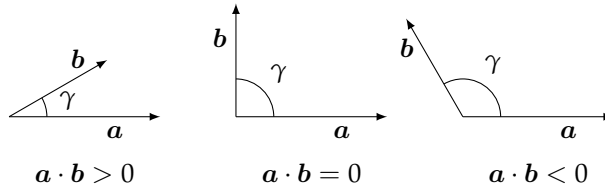
سوال 7.40: ایسے تمام سمتیات جنہیں $bi + k(j + k)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں b اور k کوئی بھی غیر سمتی ہو سکتے ہیں۔

جوابات: 2 ؛ i ، $j + k$

سوال 7.41: ایسے تمام n مرتب اعداد (a_1, \dots, a_n) کا سلسلہ جن کے مجموعے کی تعریف اور غیر سمتی کے ساتھ ضرب کی تعریف درج ذیل ہو۔

$$(a_n, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$c(a_n, \dots, a_n) = (ca_n, \dots, ca_n)$$



شکل 7.12: سمتیات کے مابین زاویہ۔

جوابات: n ؛ $(1, 0, \dots, 0)$ ، $(0, 1, \dots, 0)$ ، \dots ، $(0, 0, \dots, 1)$

سوال 7.42: ایسے تمام تفاعل جنہیں $y(x) = a \cos x + b \sin x$ لکھا جاسکتا ہے جہاں a اور b اختیاری مستقل ہیں۔ ان تفاعل کے مجموعے اور غیر سمتیات کے ساتھ ضرب عمومی قواعد کے تحت ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\sin x$ ، $\cos x$

7.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)

سہ بُعدی فضا میں سمتیات a اور b کی اندرونی ضرب³⁰ جس کو $a \cdot b$ لکھا جاتا ہے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\gamma (0 \leq \gamma \leq \pi)$ سمتیات a اور b کے مابین زاویہ ہے (جو دونوں سمتیات کی دم ایک ہی نقطے پر رکھ کر ناپا جاتا ہے)۔ (شکل 7.12)

$$(7.23) \quad \begin{aligned} a \cdot b &= |a||b| \cos \gamma & (a \neq 0, b \neq 0) \\ a \cdot b &= 0 & (a = 0 \text{ یا } b = 0 \text{ یا } a = b = 0) \end{aligned}$$

اندرونی ضرب کو ضرب نقطہ³¹ بھی کہتے ہیں۔ اندرونی ضرب کا حاصل غیر سمتی (حقیقی عدد) ہوتا ہے اور یوں اندرونی ضرب کو غیر سمتی ضرب³² بھی کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 7.23 میں $\cos \gamma$ کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی

³⁰ inner product

³¹ dot product

³² scalar product

ہے (شکل 7.12) لہذا اندرونی ضرب کی قیمت بھی مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے۔ زاویہ 0 تا π کے درمیان صرف $\gamma = \frac{\pi}{2}$ پر $\cos \gamma = 0$ ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 7.3: قائمیت³³

دو عدد غیر صفر سمتیات آپس میں صرف اور صرف اس صورت قائم الزاویہ (عمودی) ہوں گے جب ان کا اندرونی ضرب کے برابر ہو۔

مساوات 7.23 میں $b = a$ پر کرنے سے $a \cdot a = |a|^2$ حاصل ہوتا ہے اور یوں سمتیہ کی لمبائی (اقلیدسی معیار) کو اندرونی ضرب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(7.24) \quad |a| = \sqrt{a \cdot a} \quad (\geq 0)$$

درج بالا اور مساوات 7.23 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.25) \quad \cos \gamma = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a \cdot a} \sqrt{b \cdot b}}$$

اندرونی ضرب کی تعریف سے درج ذیل خصوصیات اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

$$(7.26) \quad \left. \begin{array}{l} \text{(الف)} \quad [q_1 a + q_2 b] \cdot c = q_1 a \cdot c + q_2 b \cdot c \quad (\text{خطیت}) \\ \text{(ب)} \quad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{تثاکل}) \\ \text{(پ)} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot a \geq 0 \\ a \cdot a = 0 \text{ اگر } a = 0 \end{array} \right\} \text{ یقینی مثبت} \end{array} \right\}$$

یوں ضرب نقطہ استبدالی اور سمتیات کی جمع کے لئے جزیقی تقسیمی ہے۔ مساوات 7.26 میں $q_1 = 1$ اور $q_2 = 1$ لینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(7.27) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{جزیقی تقسیم})$$

مساوات 7.23 اور $\cos \gamma \leq 1$ سے درج ذیل شوارز عدم مساوات^{34 35} ملتی ہے۔

$$(7.28) \quad |a \cdot b| \leq |a||b| \quad (\text{شوارز عدم مساوات})$$

orthogonality³³

Schwarz inequality³⁴

³⁵جرمن ریاضی دان ہرمن امندس شوارز [1843-1921]

درج بالا اور مساوات 7.24 استعمال کرتے ہوئے آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

$$(7.29) \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{تکوینی عدم مساوات})$$

مساوات 7.24 کی مدد سے

$$|a + b|^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$|a - b|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

لکھ کر دونوں مساوات جمع کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(7.30) \quad |a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \quad (\text{متوازی الاضلاع مساوات})$$

سمتیات کو اجزاء کی صورت میں لکھ کر

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

ان کا غیر سمتی ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$$a \cdot b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

$$= a_1 b_1 i \cdot i + a_1 b_2 i \cdot j + a_1 b_3 i \cdot k + a_2 b_1 j \cdot i + a_2 b_2 j \cdot j + a_2 b_3 j \cdot k$$

$$+ a_3 b_1 k \cdot i + a_3 b_2 k \cdot j + a_3 b_3 k \cdot k$$

اب چونکہ i اور j آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں لہذا مساوات 7.23 میں $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ہو گا اور یوں $i \cdot j = 0$ ہو گا۔ اسی طرح چونکہ i اور j ایک ہی سمت میں ہیں لہذا مساوات 7.23 میں $\gamma = 0$ ہو گا اور یوں $i \cdot i = 1$ ہو گا۔ اسی عمل سے آپ درج ذیل غیر سمتی ضرب کے تعلقات لکھ سکتے ہیں جنہیں درج بالا میں

$$(7.31) \quad i \cdot i = 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1$$

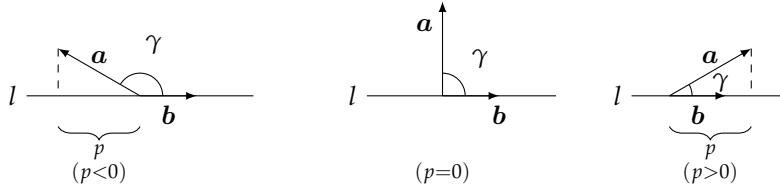
$$(7.32) \quad i \cdot j = 0, \quad j \cdot k = 0, \quad k \cdot i = 0$$

پر پڑھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(7.33) \quad a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

اگر a اور b ($b \neq 0$) سمتیات کے مابین زاویہ γ ہو تب درج ذیل حقیقی عدد

$$p = |a| \cos \gamma$$

شکل 7.13: b کی سمت میں a کا جزو۔

b کی سمت میں a کا جزو یا عمودی سایہ³⁶ ہو گا۔ اگر $a = 0$ ہو تب γ غیر معین (بے معنی) ہو گا اور ہم $p = 0$ لیں گے۔

یوں b کی سمت میں خط l پر a کے عمودی سائے کی لمبائی $|p|$ ہو گی۔ p کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 7.13)۔

یوں کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات i ، j اور k کی سمت میں سمتیہ $a = a_1i + a_2j + a_3k$ کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں گے۔

مساوات 7.25 کی مدد سے درج ذیل ہو گا

$$(7.34) \quad p = a \cos \gamma = \frac{a \cdot b}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

اور اگر b اکائی سمتیہ ہو تب اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(7.35) \quad p = a \cdot b$$

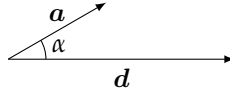
مثال 7.7: قوت اور کام

فرض کریں کہ قوت a کسی چیز کو اپنی جگہ سے ہٹا کر سمتی فاصلہ d منتقل کرتا ہے۔ d کی سمت میں قوت کا جزو ضرب $|d|$ کام W کی تعریف ہے یعنی

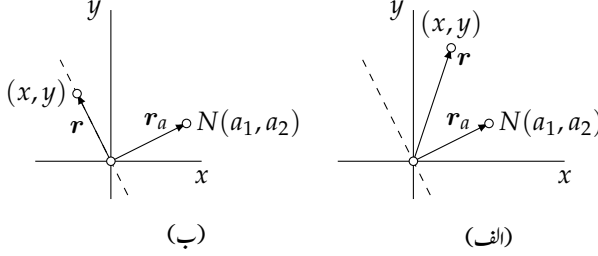
$$(7.36) \quad W = |a||d| \cos \alpha = a \cdot b$$

جہاں a اور d کے درمیان زاویہ α ہے۔ (شکل 7.14)

³⁶projection



شکل 7.14: قوت اور کام (مثال 7.7)



شکل 7.15: سیدھے خط کی مساوات۔

□ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ a کی سمت میں d کا جزو ضرب $|a|$ بھی کام کی تعریف ہے۔

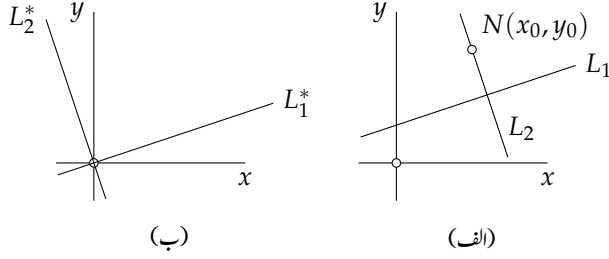
کارٹیزی نظام کی xy سطح پر کسی بھی نقطے کا ہٹاؤ سمتیہ $r = xi + yj$ لکھا جاتا ہے۔ $x = a_1$ اور $y = a_2$ کی صورت میں یہ سمتیہ $r_a = a_1i + a_2j$ صورت اختیار کرتا ہے جو کارٹیزی نظام کی مبدا سے نقطہ $N(a_1, a_2)$ کی ہٹاؤ ظاہر کرے گا (شکل 7.15-الف)۔

شکل 7.15-الف میں نقطہ دار لکیر دکھائی گئی ہے جو r_a کے عمودی ہے۔ اگر x اور y کو اس نقطہ دار لکیر پر رہنے پر پابند کیا جائے تب r اور r_a آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ شکل 7.15-ب میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔ یوں شکل-ب میں مسئلہ 7.3 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$(7.37) \quad r \cdot r_a = 0 \implies (xi + yj) \cdot (a_1i + a_2j) = a_1x + a_2y = 0$$

درج بالا مساوات ($a_1x + a_2y = 0$) میں x اور y نقطہ دار خط پر رہتے ہیں لہذا یہ نقطہ دار خط کی مساوات ہے۔

آپ نے دیکھا کہ سیدھے خط کی مساوات دو سمتیہ کی اندرونی ضرب $r \cdot r_a = 0$ کی صورت میں لکھی جاسکتی ہے جہاں r_a ایسا ہٹاؤ سمتیہ ہے جو اس سیدھے خط کے ساتھ قائمہ الزاویہ ہو۔



شکل 7.16: قائمہ الزاویہ خطوط۔

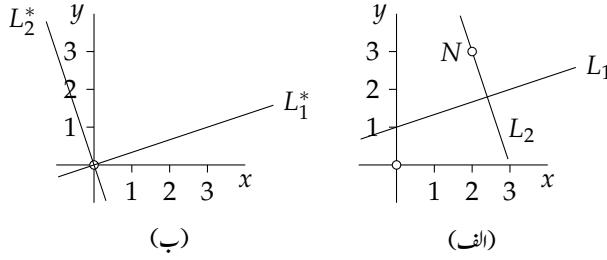
ہم شکل 7.16-الف میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے ایسے خط L_2 کی مساوات جاننا چاہتے ہیں جو L_1 کے قائمہ الزاویہ ہو۔ L_1 کی مساوات ہمیں معلوم ہے۔

کارٹینیسی نظام میں xy سطح پر کسی بھی سیدھے خط کو $y = mx + c$ لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں ڈھلوان m کو $\frac{a_2}{a_1}$ لکھتے ہوئے $a_1x + a_2y = ca_1 = c'$ حاصل ہوتا ہے۔ ایسا ایک خط L_1 ، شکل 7.16-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس مساوات میں $c = 0$ پر کرنے سے خط L_1^* حاصل ہوگا جو کارٹینیسی نظام کے مبدا $(0,0)$ سے گزرتا ہے جس کو شکل 7.16-ب میں دکھایا گیا ہے۔ خط L_1 اور L_1^* کی ایک جیسی ڈھلوان ہے یعنی یہ آپس میں متوازی ہیں۔ ہم L_2 کو بھی اسی طرح مبدا پر منتقل کرتے ہوئے L_2^* حاصل کرتے ہیں۔ اب اگر L_1 اور L_2 قائمہ الزاویہ ہوں تب L_1^* اور L_2^* بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ آئیں پہلے L_1^* کی مساوات سے L_2^* کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ بعد میں حاصل L_2^* کی مساوات سے L_2 کی مساوات حاصل کریں گے۔

L_1^* کی مساوات $a_1x + a_2y = 0$ کو مساوات 7.37 کی طرح سمتیہ $r = xi + yj$ اور سمتیہ $r_a = a_1i + a_2j$ کی اندرونی ضرب $r \cdot r_a = a_1x + a_2y = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔ L_2^* کی مساوات کو بھی اسی طرح $r = xi + yj$ اور سمتیہ $r_b = b_1i + b_2j$ کی اندرونی ضرب $r \cdot r_b = b_1x + b_2y = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔

اب خط L_1 کے عمودی ہے جبکہ خط L_2 کے عمودی ہے۔ یوں اگر L_1^* اور L_2^* قائمہ الزاویہ ہوں تب r_a اور r_b بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے اور یوں مسئلہ 7.3 کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$r_a \cdot r_b = (a_1i + a_2j) \cdot (b_1i + b_2j) = a_1b_1 + a_2b_2 = 0, \quad \implies \quad b_2 = -\frac{a_1}{a_2}b_1$$



شکل 7.17: قائمہ الزاویہ خطوط (مثال 7.8)۔

یوں L_2^* کی مساوات $r \cdot r_b = b_1(x - \frac{a_1}{a_2}y) = 0$ ہوگی جس کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.38) \quad a_2x - a_1y = 0 \quad (L_2^*)$$

L_2^* کی مساوات کا L_1^* کی مساوات $(a_1x + a_2y = 0)$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

L_2^* کی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے L_2 کی مساوات $a_2x - a_1y = c'$ لکھی جاسکتی ہے۔ چونکہ L_2 نقطہ N سے گزرتی ہے لہذا (x_0, y_0) کو L_2 کی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c' = a_2x_0 - a_1y_0$ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں L_2 کی مساوات مکمل ہوتی ہے۔

مثال 7.8: سطح مستوی میں واقع قائمہ الزاویہ سیدھے خطوط
کارٹیزی نظام کی xy سطح پر ایک خط L_1 کی مساوات $x - 3y - 3 = 0$ ہے۔ نقطہ $N(2, 3)$ سے گزرتا ایسے خط (L_2) کی مساوات دریافت کریں جو L_1 کے عمودی ہو۔

حل: شکل 7.17-الف میں ان خطوط کو دکھایا گیا ہے۔ L_1 کو مبدا پر منتقل کرتے ہوئے L_1^* حاصل ہوگا جس کی مساوات $x - 3y = 0$ ہوگی جس کو سمتیات $r = xi + yj$ اور $r_a = i - 3j$ کا اندرونی ضرب $r \cdot r_a = (xi + yj) \cdot (i - 3j) = x - 3y$ لکھا جاسکتا ہے۔ مبدا سے گزرتی کسی بھی سیدھے خط کی مساوات کی طرح L_2^* کے خط کی مساوات $b_1x + b_2y = 0$ لکھی جاسکتی ہے جس کو سمتیات $r = xi + yj$ اور $r_b = b_1i + b_2j$ کا اندرونی ضرب $r \cdot r_b = (xi + yj) \cdot (b_1i + b_2j) = b_1x + b_2y$ لکھا جاسکتا ہے۔

چونکہ L_1 اور L_2 آپس میں عمودی ہیں لہذا r_b اور r_a بھی آپس میں عمودی ہوں گے۔ یوں مسئلہ 7.3 کے تحت $(i - 3j) \cdot (b_1i + b_2j) = b_1 - 3b_2 = 0$ ہوگا جس سے $b_1 = 3b_2$ ملتا ہے۔ اس

طرح L_2^* کی مساوات $3b_2x + b_2y = 0$ یا $3x + y = 0$ ہو گی جس سے L_2 کی مساوات $3x + y = c'$ لکھی جاسکتی ہے۔ L_2 نقطہ $N(2,3)$ سے گزرتا ہے لہذا حاصل مساوات میں یہ نقطہ پر کرتے ہوئے $c' = 3(2) + 3 = 9$ ملتا ہے جس سے L_2 کی مساوات $3x + y = 9$ ملتی ہے۔ □

مثال 7.9: سطح کے ساتھ قائمہ الزاویہ سمتیہ
ایک سطح کی مساوات $2x - 4y + 6z = 3$ ہے۔ ایسا اکائی سمتیہ دریافت کریں جو اس سطح کے ساتھ قائمہ الزاویہ ہو۔

حل: شکل 7.18 سے رجوع کریں۔ سطح مستوی کی عمومی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(7.39) \quad a_1x + a_2y + a_3z = c$$

اس سطح پر کسی بھی نقطے کا ہٹاؤ سمتیہ $r = xi + yj + zk$ ہو گا۔ یہاں ہم سمتیہ $a = a_1i + a_2j + a_3k$ متعارف کرتے ہوئے مساوات 7.39 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(7.40) \quad a \cdot r = c$$

a غیر صفر ($a \neq 0$) ہے اور اس کی سمت میں اکائی سمتیہ n درج ذیل ہو گا۔

$$n = \frac{a}{|a|}$$

مساوات 7.40 کو $|a|$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

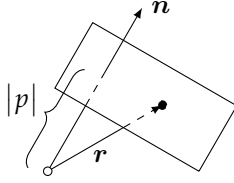
$$(7.41) \quad n \cdot r = p, \quad p = \frac{c}{|a|}$$

مساوات 7.35 کی مدد سے ہم دیکھتے ہیں کہ n کی سمت میں r کا سایہ p ہے۔

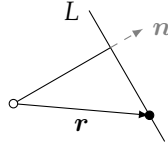
اب $|p|$ غیر متغیر مقدار ہے جبکہ سمتیہ r سطح پر کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔ شکل کو دیکھ کر ظاہر ہے کہ p صرف اور صرف اس صورت غیر متغیر ہو سکتا ہے جب n سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو۔ یوں a بھی سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔ شکل یہ یہ بھی ظاہر ہے کہ مبدا سے سطح کے قریب ترین نقطے کا فاصلہ $|p|$ ہو گا۔

یوں سطح $2x - 4y + 6z = 3$ کا قائمہ الزاویہ سمتیہ $2i - 4j + 6k$ ہو گا اور سطح کا مبدا سے فاصلہ $\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ ہو گا۔ سطح کا اکائی قائمہ الزاویہ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$n = \frac{a}{|a|} = \frac{2i - 4j + 6k}{\sqrt{56}}$$



شکل 7.18: سطح مستوی کا عمودی سمتیہ۔



شکل 7.19: سیدھے خط کا مبدا سے فاصلہ مثال 7.10۔

□ چونکہ کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں لہذا $-n$ بھی اس سطح کا اکائی قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔

مثال 7.10: کارتیسی نظام کے xy سطح پر کسی بھی سیدھے خط L کو $a_1x + a_2y = c$ لکھا جاسکتا ہے۔ مبدا سے اس خط کا فاصلہ دریافت کریں۔ خط کا قائمہ الزاویہ اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

حل: شکل 7.19 سے رجوع کریں۔ کارتیسی نظام کی xy سطح پر کسی بھی نقطے کو $r = xi + yj$ لکھا جاسکتا ہے۔ سمتیہ $a = a_1i + a_2j$ متعارف کرتے ہوئے دیے گئے سیدھے خط کی مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a \cdot r = c$$

اس مساوات کو $|a|$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$n \cdot r = p, \quad n = \frac{a}{|a|}, \quad p = \frac{c}{|a|}$$

اب $|p|$ غیر متغیر مقدار ہے جبکہ سمتیہ r خط پر کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔ شکل کو دیکھ کر ظاہر ہے کہ p صرف اور صرف اس صورت غیر متغیر ہو سکتا ہے جب n سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو۔ یوں a بھی سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔ شکل یہ یہ بھی ظاہر ہے کہ مبدا سے سطح کے قریب ترین نقطے کا فاصلہ $|p|$ ہو گا۔

یوں مبدا سے خط تک قائمہ الزاویہ خط $a = a_1i + a_2j$ اور مبدا سے خط تک کم سے کم فاصلہ $|p| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ہو گا۔ یوں خط کے اکائی قائمہ الزاویہ سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$n = \mp \left(\frac{a_1i + a_2j}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)$$

□

سوالات

سوال 7.43 تا سوال 7.49 میں $a = 2i + 4j + k$ ، $b = 3i - k$ اور $c = i + 2j - 4k$ ہیں۔

سوال 7.43: $a \cdot b, b \cdot a$

جوابات: 5 ، 5

سوال 7.44: $|a|, |b|, |c|$

جوابات: $|a| = \sqrt{21}$ ، $|b| = \sqrt{10}$ ، $|c| = \sqrt{21}$

سوال 7.45: $(a - b) \cdot c, c \cdot a - c \cdot b$

جوابات: -1

سوال 7.46: $(b - c) \cdot a, (c - b) \cdot a$

جوابات: $(b - c) \cdot a = 1$ ، $(c - b) \cdot a = -1$

سوال 7.47: $|a + b|, |a - b|$

7.5. اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)

جوابات: $\sqrt{41}$ ، $|a + b| = \sqrt{41}$ ، $\sqrt{21}$

سوال 7.48: $2a \cdot 4c, 5b \cdot a$

جوابات: 25 ، $2a \cdot 4c = 40$

سوال 7.49: $|a + c|, |a| + |c|$

جوابات: $2\sqrt{21}$ ، $|a + c| = 3\sqrt{6}$

سوال 7.50 تا سوال 7.54 میں ایک چیز کو قوت f نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتی ہے۔ قوت کتنا کام کرتا ہے؟ کام کی تعریف $f \cdot r_{BA}$ ہے۔

سوال 7.50: $f = i + j - k, A(0, 0, 0), B(5, 0, 0)$ جواب: 5 J

سوال 7.51: $f = 2i - 3j + k, A(2, 5, 0), B(0, 0, 0)$ جواب: 11 J

سوال 7.52: $f = 3i + j - 2k, A(-5, 2, 1), B(2, -3, -6)$ جواب: 30 J

سوال 7.53: $f = 5i + 2j + 3k, A(5, 5, 6), B(7, 6, 2)$ جواب: 0 J

سوال 7.54: $f = 2i + j + 3k, A(3, 4, 2), B(4, 2, 1)$ جواب: -3 J

سوال 7.55: سوال 7.53 میں کام صفر کیوں ہے؟

جواب: چونکہ قوت اور ہٹاؤ سمتیہ قائمہ الزاویہ ہیں۔

سوال 7.56: سوال 7.53 میں کام منفی کیوں ہے؟

جواب: چونکہ قوت اور ہٹاؤ سمتیہ آپس میں الٹ رخ ہیں۔

سوال 7.57: سمتیہ $4i - 2j + ck$ میں c کی قیمت کیا ہونے سے یہ سمتیہ $2i + 3j - 3k$ کے عمودی ہو گا۔

جواب: 2

سوال 7.58: xy سطح میں $4i - 2j$ کا عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\frac{i+2j}{\sqrt{5}}$ اور $\frac{-i-2j}{\sqrt{5}}$

سوال 7.59: ایک چیز کو قوت f_1 اور قوت f_2 مل کر نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتی ہے۔ ثابت کریں کہ کل کام دونوں قوتوں کے کاموں کا مجموعہ ہو گا۔

سوال 7.60: سمتیات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ اگر مستطیل کے وتر آپس میں عمودی ہوں تب یہ مستطیل دراصل میں چکور ہو گا۔

سوال 7.61: سمتیات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مکعب کے بالکل الٹ کونوں کو ملاتے ہوئے وتر آپس میں عمودی ہوں گے۔

سوال 7.62: ثابت کریں کہ سطح $7x + y + 3z = 22$ اور سطح $x - y - 2z = -5$ قائمہ الزاویہ ہیں۔

جواب: ان کے عمودی سمتیات $7i + j + 3k$ اور $i - j - 2k$ کا اندرونی ضرب صفر ہے لہذا یہ آپس میں عمودی ہیں اور یوں سطحیں بھی عمودی ہوں گی۔

سوال 7.63: سطح $3x - 2y + z = -2$ اور $x - 4y - 2z = 3$ کے مابین زاویہ دریافت کریں۔

جواب: 1.0182 ریڈین یعنی 58.33°

سوال 7.64: نکتوں کے تین کونے $A(2, -4, 6)$ ، $B(5, 2, 4)$ اور $C(-2, -1, -4)$ ہیں۔ اس نکتوں کے زاویے دریافت کریں۔

جوابات: 74.61° ، 42.98° ، 62.4°

سوال 7.65 تا سوال 7.67 میں $a = 2i - 4j + k$ ، $b = i + j$ اور $c = j + 2k$ ہیں۔ دی گئی جوڑی سمتیات کے مابین زاویہ دریافت کریں۔

سوال 7.65: a, b
جواب: 107.98°

سوال 7.66: $a - b, b + c$
جواب: 116.68°

سوال 7.67: $a, 2a - 3b + 4c$
جواب: 44.54°

درج ذیل چار سوالات میں a کی سمت میں b کا جزو دریافت کریں۔

سوال 7.68: $a = i + j + k, b = 3i - 7k$
جواب: a کی سمت میں b کی لمبائی $a \cdot b = -4$ ہے۔ اب چونکہ a کی سمت میں اکائی سمتیہ $\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ ہے لہذا a کی سمت میں b کا جزو $\frac{-4}{\sqrt{3}}(i + j + k)$ ہو گا۔

سوال 7.69: $a = i + j - 2k, b = 2i + j - 2k$
جواب: $-1.22i + 1.22j - 2.45k$

سوال 7.70: $a = 3j + 4k, b = 3i + 4j$
جواب: $7.2j + 9.6k$

سوال 7.71: $a = -2i + 3j - 4k, b = 3i - 4j - 6k$
جواب: $-2.23i + 3.34j - 4.46k$

سوال 7.72: ثابت کریں کہ $i + j + k$ تینوں اکائی سمتیات i, j اور k کے ساتھ یکساں زاویہ بناتا ہے۔

جواب: 54.73°

7.6 اندرونی ضرب فضا

تین بعدی فضا میں، مجموعہ سمتیات اور سمتیہ کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کے بنیادی قواعد استعمال کرتے ہوئے حصہ 7.4 میں سمتی فضا کا تصور متعارف کرایا گیا۔ ہم اسی طرح اندرونی ضرب (حصہ 7.5) کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی اندرونی ضرب فضا³⁷ کا تصور حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا حقیقی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب مساوات 7.26 کے شرائط پر پورا اترتا ہو حقیقی اندرونی ضرب فضا کہلاتا ہے۔

تعریف: اندرونی ضرب فضا
ایسی حقیقی سمتی فضا V جو درج ذیل خصوصیت رکھتی ہو حقیقی اندرونی ضرب فضا کہلاتی ہے۔

V میں ہر دو عدد سمتیات a اور b کے ساتھ ایک ایسا حقیقی عدد وابستہ ہے، جس کو (a, b) سے ظاہر کیا جاتا ہے اور جو a اور b کا اندرونی ضرب کہلاتا ہے، کہ درج ذیل مساوات پورا ہوتے ہوں۔

• (الف) کسی بھی غیر سمتیات q_1 اور q_2 اور V میں تمام سمتیات a ، b ، c کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(q_1 a + q_2 b, c) = q_1 (a, c) + q_2 (b, c) \quad (\text{خطیت}) \quad (\text{الف})$$

• (ب) V میں تمام سمتیات a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(a, b) = (b, a) \quad (\text{تشاکل})$$

• (پ) V میں ہر a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left. \begin{aligned} (a, a) &\geq 0 \\ (a, a) &= 0 \quad \text{اگر} \quad a = 0 \end{aligned} \right\} \text{ یقینی مثبت}$$

تعریف: قائمیت
اگر اندرونی ضرب فضا V میں دو سمتیت a اور b کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو تب یہ سمتیت آپس میں قائم الزاویہ ہوں گے۔

$$(a, b) = 0 \quad (\text{قائم الزاویہ})$$

اندرونی ضرب کو استعمال کرتے ہوئے ہم اندرونی ضرب فضا V میں ہر a کے ساتھ عدد $\|a\|$ وابستہ کرتے ہیں جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)} \quad (\geq 0)$$

اور جو a کی معیار³⁸ کہلاتا ہے۔ مساوات 7.24 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ معیار درحقیقت لمبائی کی عمومی تعریف ہے۔ حقیقت میں ضرب نقطہ اور موجودہ اندرونی ضرب یکساں ہیں یعنی

$$(a, b) = a \cdot b$$

اور ہماری موجودہ تعریف کے تحت مساوات 7.24 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\|a\| = |a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a \cdot a}$$

مسلما اندرونی ضرب اور معیار کی تعریف سے مساوات 7.28 تا مساوات 7.30 اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

$$|(a, b)| \leq \|a\| \|b\| \quad ((\text{شوارز عدم مساوات}))$$

درج بالا سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (\text{تکوئی عدم مساوات})$$

اور سادہ الجبرائی حساب سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad (\text{متوازی الاضلاع مساوات})$$

اندرونی ضرب فضا کا تصور عمومی ہے جس کی دو مثالیں (بغیر ثبوت) پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال n اجزاء پر مشتمل سمتیات $a = (a_1, \dots, a_n)$ اور $b = (b_1, \dots, b_n)$ کا اندرونی ضرب ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(7.42) \quad (a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

اندرونی ضرب فضا کی دوسری مثال، وقفہ $\alpha \leq x \leq \beta$ پر استمراری تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی اندرونی ضرب ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(7.43) \quad (f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$$

7.7 سمتی ضرب

کئی عملی مسائل سے سمتیات کی ایسی ضرب کی ضرورت پیش ہوتی ہے جس کا حاصل ضرب v بھی سمتیہ ہو۔ a اور b سمتیات کا ایسا ضرب جو یعنی ضرب³⁹ یا صلیبی ضرب⁴⁰ کہلاتا اور $a \times b$ لکھا جاتا ہے

$$v = a \times b$$

کی تعریف درج ذیل ہے۔

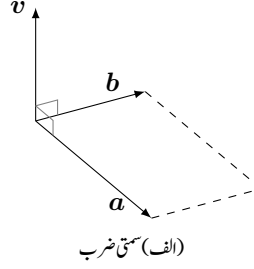
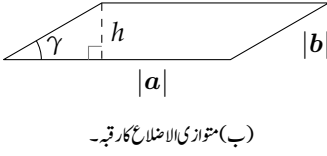
تعریف: سمتی ضرب

اگر a اور b کے رخ ایک جیسے یا آپس میں الٹ ہوں اور یا ان سمتیات میں سے ایک (یا دونوں) صفر سمتیہ ہوں تب $v = a \times b = 0$ ہو گا۔

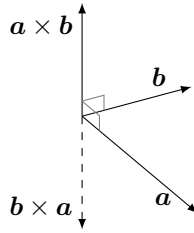
اس کے علاوہ $v = a \times b$ ایسا سمتیہ ہو گا جس کی لمبائی اس متوازی الاضلاع کے رقبے کے برابر ہو گی جس کے قریبی اطراف a اور b ہوں اور جس کی سمت a اور b دونوں کے عمودی ہو گی۔ مزید v کی سمت یوں ہو گی کہ a ، b اور v (اسی ترتیب سے) دائیں ہاتھ کی ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں (شکل 7.20-الف)۔

سمتی ضرب کی تعریف میں ثلاثہ قائمہ سمتیات کی بات کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کا ذکر کیا گیا جس کا مطلب ہے کہ اگر دائیں ہاتھ کا انگوٹھا سمتیہ a کی سمت میں اور انگلی شہادت سمتیہ b کی سمت میں رکھتے ہوئے درمیانی انگلی کو ان انگلیوں کے عمودی رکھا جائے تب درمیانی انگلی سمتیہ v کی مقام کو ظاہر کرے گی۔

vector product³⁹
cross product⁴⁰



شکل 7.20: سمتی ضرب کی تعریف



شکل 7.21: سمتی ضرب مخالف تبادلی ہے

ایسا متوازی الاضلاع (شکل 7.20-ب) جس کے قریبی اطراف a اور b ہوں کا رقبہ $h|a| = |a||b| \sin \gamma$ ہو گا جہاں a اور b کے مابین زاویہ γ ہے۔

$$(7.44) \quad |v| = |a||b| \sin \gamma$$

اگر $v = a \times b$ اور $w = b \times a$ ہوں تب سمتی ضرب کی تعریف کے تحت $|v| = |w|$ ہو گا۔ اب a ، b اور w اس صورت داکیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں گے جب $w = -v$ (شکل 7.21) ہو لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(7.45) \quad b \times a = -a \times b$$

جس کے تحت سمتی ضرب مخالف تبادلی ہے۔ یوں سمتی ضرب میں اجزاء کی ترتیب نہایت اہم ہے جس کو تبدیل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

کسی بھی غیر سمتیہ k کے لئے سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.46) \quad (ka) \times b = k(a \times b) = a \times (kb)$$

سمتی جمع کی نقطہ نظر سے سمتی ضرب جزیئی تقسیمی ہے یعنی:

$$(7.47) \quad \begin{aligned} a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\ (a + b) \times c &= (a \times c) + (b \times c) \end{aligned}$$

درج بالا کا ثبوت اگلے حصے میں پیش کیا جائے گا۔ ہم یہاں بتلانا چاہتے ہیں کہ سمتی ضرب قانون تلازم پر عموماً پورا نہیں اترتا یعنی:

$$a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$$

مساوات 7.23 اور مساوات 7.44 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$|v|^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \gamma = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \gamma) = (a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے حاصل سمتی ضرب کی لمبائی کا درج ذیل قلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(7.48) \quad |a \times b| = \sqrt{(a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2}$$

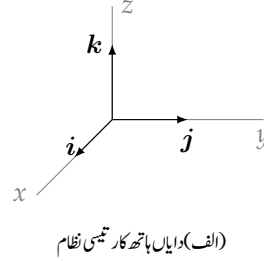
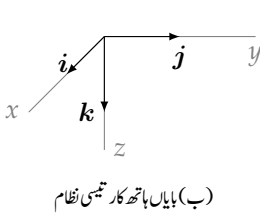
7.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب

اس حصے میں ہم سمتی ضرب کے اجزاء کو کار تیمیسی نظام میں لکھتے ہیں۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ دو قسم کے کار تیمیسی نظام ممکن ہیں۔ پہلا قسم دائیں ہاتھ⁴¹ کا نظام کہلاتا ہے۔ دائیں ہاتھ کار تیمیسی نظام میں محور کی مثبت سمت میں اکائی سمتیات i ، j اور k دائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں گے (شکل 7.22-الف)۔ اگر نظام کے اکائی سمتیات بائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں تب اس کو بائیں ہاتھ کار تیمیسی نظام کہا جائے گا۔ اس کتاب میں دائیں ہاتھ کار تیمیسی نظام استعمال کیا گیا ہے۔ عام استعمال میں بھی دائیں ہاتھ کا نظام استعمال کیا جاتا ہے۔

اب دائیں یا بائیں ہاتھ کے نظام میں اگر a اور b کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 ہوں تب سمتی ضرب

$$a \times b$$

⁴¹right handed



شکل 7.22: کار ریتیسی نظام کے دو اقسام

کے اجزاء کو انہیں کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ ہمیں صرف اس صورت پر غور کرنا ہے جب $v \neq 0$ ہو۔ چونکہ v دونوں سمتیات a اور b کے عمودی ہے لہذا مسئلہ 7.3 کے تحت $a \cdot v = 0$ اور $b \cdot v = 0$ ہوں گے لہذا مساوات 7.33 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.49) \quad \begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 &= 0 \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو b_3 اور دوسری کو a_3 سے ضرب دے کر ان کا فرق حاصل کرتے ہیں۔

$$(a_3 b_1 - a_1 b_3) v_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) v_2$$

اسی طرح مساوات 7.49 کی پہلی مساوات کو b_1 اور دوسری کو a_1 سے ضرب دے کر ان کا فرق لکھتے ہیں۔

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) v_2 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) v_3$$

آپ با آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا دو مساوات پر درج ذیل پورا اترتے ہیں جہاں c مستقل ہے۔

$$(7.50) \quad v_1 = c(a_2 b_3 - a_3 b_2), \quad v_2 = c(a_3 b_1 - a_1 b_3), \quad v_3 = c(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

مساوات 7.50 کو مساوات 7.49 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا مساوات 7.49 پر بھی پورا اترتا ہے۔ اب مساوات 7.49 میں بالائی مساوات $v_1 v_2 v_3$ فضا کی مبدا سے گزرتی ایک سطح مستوی کو ظاہر کرتی ہے جبکہ نچلی مساوات مبدا سے گزرتی دوسری سطح مستوی کو ظاہر کرتی ہے۔ a اور b ان سطحوں کے عمودی سمتیات ہیں (مثال 7.9)۔ اب چونکہ $v \neq 0$ ہے لہذا یہ سمتیات متوازی نہیں ہیں اور یہ سطحیں، ہم سطحی نہیں ہیں۔ یوں یہ سطحیں ایک دونوں کو مبدا سے گزرتی سیدھے خط L پر قطع کرتی ہیں۔ چونکہ مساوات 7.50 میں c کی قیمت تبدیل کرنے سے سیدھا خط حاصل ہوتا ہے لہذا یہ خط مساوات 7.49 پر بھی پورا اترتا ہے اور یوں مساوات

7.50، L کی مساوات دیتا ہے اور مساوات 7.49 کا ہر حل مساوات 7.50 کی صورت کا ہو گا۔ بالخصوص v کے اجزاء بھی اسی صورت کے ہوں گے جن میں c کی قیمت دریافت کرنا باقی ہے۔ مساوات 7.50 سے درج ذیل ملتا ہے

$$|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = c^2[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2]$$

جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$|v|^2 = c^2[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2]$$

مساوات 7.33 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل ملتا ہے

$$|v|^2 = c^2[(a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2]$$

جس کا مساوات 7.48 سے موازنہ کرنے سے $c = \pm 1$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں سے آگے یہ جاننا ضروری ہو گا کہ دایاں یا بایاں ہاتھ کار تیسری نظام استعمال کیا جا رہا ہے۔ آئیں دائیں ہاتھ کا نظام استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ اس نظام میں $c = +1$ ہو گا۔

اگر ہم اور کی لمبائیاں یوں مسلسل تبدیل کریں کہ آخر کار $a = i$ اور $b = j$ ہو (شکل 7.22) تب v کی لمبائی یوں تبدیل ہو گی کہ آخر کار $v = i \times j = k$ ہو گا۔ ظاہر ہے کہ ہم یہ تبدیلی یوں پیدا کر سکتے ہیں کہ a اور b کبھی بھی صفر نہ ہوں اور نا ہی یہ کبھی متوازی ہوں۔ یوں v کبھی بھی صفر نہیں ہو گا اور چونکہ یہ تبدیلی مسلسل ہے اور c کی قیمت صرف $+1$ یا -1 ہو سکتی ہے لہذا اختتامی c کی قیمت وہی ہو گی جو ابتدائی c کی تھی۔ اب چونکہ آخر پر $a = i$ ، $b = j$ اور $v = k$ ہیں لہذا $a_1 = 1$ ، $b_2 = 1$ اور $v_3 = 1$ ہیں جبکہ باقی اجزاء صفر ہیں۔ یوں مساوات 7.50 سے $v_3 = c = +1$ ملتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 7.50 میں قوسین میں دیے گئے مقدار کو دو درجی مقطع لکھا جاسکتا ہے لہذا اس نتیجے کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کار تیسری نظام میں

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو مقطع کی صورت میں

$$(7.51) \quad a \times b = i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں a_1, a_2, a_3 اور b_1, b_2, b_3 بالترتیب a اور b کے اجزاء ہیں۔ یاد رکھنے کی خاطر درج بالا کو درج ذیل مقطع تصور کیا جاسکتا ہے

$$(7.52) \quad a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{دائیں ہاتھ کا نظام})$$

جہاں مقطع کو پہلی صف سے پھیلا کر حاصل کیا جائے گا۔ یہ مقطع خصوصی مقطع ہے جس کی پہلی صف کا ارکان سمتیات ہیں۔

بائیں ہاتھ کا رتیبی نظام میں بالکل درج بالا بحث کے تحت $c = -1$ حاصل ہو گا اور یوں اس نظام میں درج ذیل ہو گا۔

$$(7.53) \quad a \times b = - \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{بائیں ہاتھ کا نظام})$$

مثال 7.11: دائیں ہاتھ کے کارتیبی نظام میں $a = 2i - j + 6k$ اور $b = -5i + 3j - 2k$ ہیں۔ ان کا سمتی ضرب $a \times b$ دریافت کریں۔

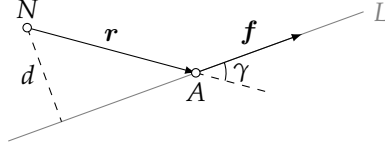
حل:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 6 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -16i - 26j + k$$

□

آئیں اب مساوات 7.47 کو ثابت کریں۔ مساوات 7.51 کے تحت $a \times (b + c)$ کا پہلا

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} &= a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$



شکل 7.23: قوت کا معیار اثر (مثال 7.12)۔

ہو گا۔ درج بالا کا دایاں ہاتھ $a \times b + a \times c$ کا پہلا جزو ہے۔ باقی دو اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ یوں مساوات 7.47 میں بالائی تعلق ثابت ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح اس میں دیا گیا نچلا تعلق بھی ثابت ہو گا۔ آپ درج ذیل مسئلہ خود ثابت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 7.4: دو سمتیات اس صورت خطی طور تابع سلسلہ بنائیں گے جب ان کا سمتی ضرب صفر سمتیہ کے برابر ہو۔

سمتی ضرب کئی عملی مسائل میں پیش آتا ہے۔ درج ذیل دو مثال ایسے عملی مسئلے ہیں۔

مثال 7.12: قوت کا معیار اثر

میکانیات میں قوت f کا نقطہ N پر معیار اثر m سے مراد $m = |f|d$ ہے جہاں N سے قوت کی ہم خطی لکیر L تک عمودی فاصلہ d ہے (شکل 7.23)۔

اگر N سے L پر کسی بھی نقطہ A تک سمتیہ r ہو تب $d = |r| \sin \gamma$ ہو گا (شکل 7.23) لہذا

$$m = |r||f| \sin \gamma$$

ہو گا۔ چونکہ r اور f کے مابین زاویہ γ ہے لہذا اس کو مساوات 7.44 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$m = |r \times f|$$

اور سمتیہ m یعنی

$$(7.54) \quad m = r \times f$$

قوت f کا معیار اثر سمتیہ⁴² کہلاتا ہے جس کی مقدار m اور سمت N سے گزرتی اس محور کی سمت ہے جس کے گرد f گھمانے کی کوشش کرتا ہے۔

⁴²moment vector



شکل 7.24: گھومتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار (مثال 7.13)۔

اگر دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو r کی سمت سے f کی سمت میں گھماتے ہوئے ایک تصوراتی سلاخ کے گرد گھمایا جائے اور انگوٹھے کو اس تصوراتی سلاخ کی سمت میں رکھا جائے تب انگوٹھے کی سمت m کی سمت ہوگی۔ □

مثال 7.13: گھومتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار

خلا میں کسی بھی ٹھوس جسم B کے گھومنے کو سمتیہ ω سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جس کو زاویائی سمتی رفتار⁴³ کہتے ہیں۔ اگر گھومنے کی محور پر دائیں ہاتھ کا انگوٹھا رکھتے ہوئے باقی چار انگلیوں کو گھومنے کی سمت میں محور کے گرد پلٹا جائے تو انگوٹھا ω کی سمت دے گا (شکل 7.24)۔ ω کی لمبائی زاویائی رفتار⁴⁴ $\omega (> 0)$ کے برابر ہوگی۔

فرض کریں کہ ٹھوس جسم B پر N کوئی نقطہ ہے جس کا محور سے فاصلہ d ہے۔ اس نقطے کی رفتار ωd ہوگی۔ فرض کریں کہ اس نقطے کی ہٹاؤ سمتیہ r ہے جہاں کارتیسی نظام کا مبدا M جسم کے محور پر رکھا گیا ہے۔ یوں $d = |r| \sin \gamma$ ہوگا جہاں ω اور r کے مابین زاویہ γ ہے۔ اس طرح

$$\omega d = |\omega| |r| \sin \gamma = |\omega \times r|$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سمتی ضرب کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتی رفتار v درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(7.55) \quad v = \omega \times r$$

□

اس کلیے سے جسم B پر کسی بھی نقطہ N کی سمتی رفتار حاصل کی جاسکتی ہے۔

angular velocity⁴³
angular speed⁴⁴

سوالات

دایاں ہاتھ کارتیسی نظام میں $a = 2i - j + 4k$ ، $b = i + 2j$ اور $c = -i + j$ لیتے ہوئے سوال 7.73 تا سوال 7.81 میں دیے گئے تفاعل دریافت کریں۔

سوال 7.73: $a \times b, b \times a$
جوابات: $b \times a = 8i - 4j - 5k$ ، $a \times b = -8i + 4j + 5k$

سوال 7.74: $a \times a, b \times b, c \times c$
جوابات: 0

سوال 7.75: $b \times c, |b \times c|, |c \times b|$
جوابات: $|c \times b| = 3$ ، $|b \times c| = 3$ ، $b \times c = 3k$

سوال 7.76: $(a + b) \times c, a \times c + b \times c$
جوابات: $-4i - 4j + 4k$

سوال 7.77: $(4a + 2b) \times c, (2a + b) \times 2c$
جوابات: $-16i - 16j + 10k$

سوال 7.78: $(3b - 2c) \times c, 3b \times c$
جوابات: $9k$

سوال 7.79: $(3c - 5b) \times 2a, 6c \times a + 10a \times b$
جوابات: $-56i + 64j + 44k$

سوال 7.80: $(c \times b) \times a, c \times (b \times a)$
جوابات: $(c \times b) \times a = -3i - 6j$ ، $c \times (b \times a) = -5i - 5j - 4k$

سوال 7.81: $(2b \times 4a) \times 5c, 2b \times (4a \times 5c)$
جوابات: $2b \times 4a \times 5c = 200i + 200j + 160k$ ، $2b \times (4a \times 5c) = 80i - 40j + 160k$

سوال 7.82: $i \times (j \times k), (i \times j) \times k$
جوابات: 0

سوال 7.83 تا سوال 7.86 میں متوازی الاضلاع کے دو قریبی اطراف دیے گئے ہیں۔ متوازی الاضلاع کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 7.83: $i - j, i + j$
جواب: 2

سوال 7.84: $i - 3j + 2k, -2i + j - k$
جواب: $\sqrt{35}$

سوال 7.85: $4i - j - k, i + 2j$
جواب: $\sqrt{86}$

سوال 7.86: $i + 3j - 2k, 2i - j - k$
جواب: $\sqrt{83}$

سوال 7.87 تا سوال 7.90 میں دایاں ہاتھ کارٹیزیسی نظام کے xy سطح پر متوازی الاضلاع کے کونے دیے گئے ہیں۔ سمتیات استعمال کرتے ہوئے اس کا رقبہ دریافت کریں۔ قریبی اطراف جاننے کے لئے قلم و کاغذ سے جلد متوازی الاضلاع کی شکل بنائیں۔

سوال 7.87: $(0, 0), (2, 2), (-1, 1), (1, 3)$
جواب: 4

سوال 7.88: $(0, 0), (2, 0), (4, 3), (2, 3)$
جواب: 6

سوال 7.89: $(-1, 1), (-3, 1), (2, 0), (-6, 0)$
جواب: 8

سوال 7.90: $(-5, 1), (-1, 2), (-2, 4), (-4, -1)$
جواب: 9

سوال 7.91 تا سوال 7.94 میں متوازی الاضلاع کے کونے دیے گئے ہیں۔ سمتیات استعمال کرتے ہوئے اس کا رقبہ دریافت کریں۔ قریبی اطراف جاننے کے لئے قلم و کاغذ سے جلد متوازی الاضلاع کی شکل بنائیں۔

سوال 7.91: $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, 2, 4), (0, 1, 4)$
جواب: $4\sqrt{2}$

سوال 7.92: $(1, 3, 8), (1, 2, 1), (3, 1, 2), (-1, 4, 7)$
جواب: $2\sqrt{66}$

سوال 7.93: $(-1, -2, -1), (1, -1, 1), (-2, 0, 4), (-4, -1, 2)$
جواب: $\sqrt{170}$

سوال 7.94: $(1, 0, 0), (-1, 1, 1), (-3, 4, 5), (-1, 3, 4)$
جواب: $\sqrt{53}$

سوال 7.95 تا سوال 7.98 میں نکتوں کے کونے دیے گئے ہیں۔ نکتوں کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 7.95: $(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 0)$
جواب: 1

سوال 7.96: $(1, 3, 2), (2, -1, 3), (5, 7, -1)$
جواب: $\frac{3\sqrt{57}}{2}$

سوال 7.97: $(-1, -2, -3), (1, 2, 4), (0, 3, 2)$
جواب: $\frac{3\sqrt{30}}{2}$

سوال 7.98: $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 4, 7)$
جواب: $\frac{\sqrt{26}}{2}$

سوال 7.99 تا سوال 7.102 میں $|a \times b|$ کو مساوات 7.48 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 7.99: $a = 2i + j, b = i - 3k$
جواب: $\sqrt{46}$

سوال 7.100: $a = -3i + 2j + k, b = i + j - k$
جواب: $\sqrt{38}$

سوال 7.101: $a = 5i - 2j + 3k, b = -i - 2j - 2k$
جواب: $\sqrt{293}$

سوال 7.102: $a = 2i + 2j - 3k, b = i + 2j - k$
جواب: $\sqrt{21}$

سوال 7.103 تا سوال 7.106 مىن كىا ءىء كئى ستمىات عموءى ىا متوازى هئى؟

سوال 7.103: $2i - 3j, 5k$
ءواب: عموءى

سوال 7.104: $3i - 2j + k, 6i - 4j + 2k$
ءواب: متوازى

سوال 7.105: $i - j, i + j$
ءواب: عموءى

سوال 7.106: $i - 2j + 3k, 3i + j$
ءواب: نه عموءى اور نه متوازى۔

سوال 7.107 تا سوال 7.110 مىن ءو ستمىات ءىء كئى هئى۔ ان كى عموءى ءو اكائى ستمىات ءرىافت كرىں۔

سوال 7.107: i, j
ءوابات: $\mp k$

سوال 7.108: $i - j + 2k, 2i + 3k$
ءوابات: $\mp \frac{1}{\sqrt{14}}(3i - j - 2k)$

سوال 7.109: $i + j - 2k, i + 2j - 3k$
ءوابات: $\mp \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$

سوال 7.110: $-3i + 2j - 3k, 2i - 2j + 3k$
ءوابات: $\mp \frac{1}{\sqrt{13}}(3j + 2k)$

سوال 7.111 تا سوال 7.114 مىن تىن نطءى ءىء كئى هئى جن سى سطم مستوى كزرتى هى۔ اس سطم كا عموءى اكائى ستمىءى ءرىافت كرىں۔

سوال 7.111: $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$
ءواب: $\mp k$

سوال 7.112: $(2, 0, 3), (1, 3, 2), (1, 1, 2)$
ءواب: $\mp \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + k)$

سوال 7.113: $(2, -1, -3), (1, -3, 2), (-1, 1, -2)$
 جواب: $\mp \frac{1}{\sqrt{101}}(6i + 7j + 4k)$

سوال 7.114: $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
 جواب: $\mp \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$

سوال 7.115: سطح $2x + 3y - 2z = 9$ اور سطح $x - 2y + 3z = -22$ ایک دونوں کو سیدھی لکیر پر قطع کرتے ہیں۔ اس لکیر کے متوازی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\mp \frac{1}{\sqrt{138}}(5i - 8j - 7k)$

سوال 7.116: سطح $x + y + z = 5$ کے متوازی اور خط $x = 0$ ، $z = y$ کے عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\mp \frac{1}{\sqrt{6}}(2i - j - k)$

سوال 7.117 تا سوال 7.120 میں قوت f ، نقطہ A سے گزرتی ہوئی لکیر کی سمت میں عمل کرتا ہے۔ اس قوت کا معیار اثر m نقطہ N پر کیا ہو گا۔

سوال 7.117: $f = 2i - 3j$, $A(4, 5, 6)$, $N(-2, 4, -5)$
 جواب: $33i + 22j - 20k$

سوال 7.118: $f = 2i + 3j + 2k$, $A(4, -5, 3)$, $N(2, 5, -4)$
 جواب: $-41i + 10j + 26k$

سوال 7.119: $f = -5i + 3j + 4k$, $A(0, 0, 0)$, $N(4, 4, 4)$
 جواب: $-4i + 36j - 32k$

سوال 7.120: $f = i + j + k$, $A(1, 0, 0)$, $N(0, 0, 1)$
 جواب: $i - 2j + k$

7.9 غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب

تین یا تین سے زائد سمتیات کا ضرب عملی استعمال میں عموماً پیش آتے ہیں۔ ان میں سب سے زیادہ اہم غیر سمتی سہ ضرب⁴⁵ $a \cdot (b \times c)$ ہے۔ دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$a = a_1i + a_2j + a_3k, \quad b = b_1i + b_2j + b_3k, \quad c = c_1i + c_2j + c_3k$$

مساوات 7.52 استعمال کرتے ہوئے

$$a \cdot (b \times c) = (a_1i + a_2j + a_3k) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو مساوات 7.33 کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(7.56) \quad a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

غیر سمتی سہ ضرب $a \cdot (b \times c)$ کو (abc) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چونکہ مقطع قالب کے دو صف کی جگہ آپس میں بدلنے سے مقطع کی قیمت منفی اکائی (-1) سے ضرب ہوتی ہے لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(7.57) \quad (abc) = -(bac), \quad \text{وغیرہ}$$

دو مرتبہ صف بدلنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(7.58) \quad (abc) = (bca) = (cab)$$

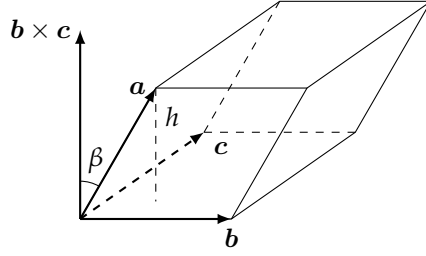
اب غیر سمتی سہ ضرب کی تعریف کے تحت

$$(abc) = a \cdot (b \times c), \quad (cab) = c \cdot (a \times b)$$

ہیں اور چونکہ غیر سمتی ضرب قابل تبادل ہے لہذا $c \cdot (a \times b) = (a \times b) \cdot c$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(7.59) \quad a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$$

⁴⁵ scalar triple product, mixed triple product



شکل 7.25: غیر سمتی سہ ضرب کی جیومیٹریائی معنی۔

مزید مستقل k کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$(7.60) \quad (kab c) = k(a b c)$$

غیر سمتی سہ ضرب کی حتمی قیمت سادہ معنی رکھتی ہے۔ یہ ایسی مسدسی متوازی السطوح P^{46} کی حجم ہے جس کے قریبی اطراف a ، b اور c ہوں (شکل 7.25)۔

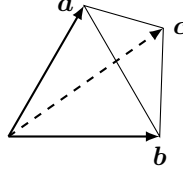
یقیناً مساوات 7.23 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(7.61) \quad (a b c) = a \cdot (b \times c) = |a| |b \times c| \cos \beta \quad (\text{مسدسی متوازی السطوح کا حجم})$$

جہاں a اور سمتیہ $b \times c$ کے مابین زاویہ β ہے۔ اب P کی چلی سطح کا رقبہ $|b \times c|$ ہے اور P کی اونچائی $h = |a| \cos \beta$ ہے لہذا P کا حجم درج بالا ہو گا۔

ہم نے دیکھا کہ غیر سمتی سہ ضرب در حقیقت مسدسی متوازی السطوح کا حجم دیتا ہے۔ اب کسی چیز کا حجم ایک مستقل ہے جو چنے گئے دائیں ہاتھ کارتیسی نظام پر منحصر نہیں ہو گا لہذا غیر سمتی سہ ضرب کا دارومدار بھی زیر استعمال دائیں ہاتھ کارتیسی نظام پر نہیں ہو گا۔ البتہ یاد رہے کہ بائیں ہاتھ کارتیسی نظام کی صورت میں مساوات 7.52 کی جگہ مساوات 7.53 استعمال ہو گا جس سے مساوات 7.56 میں مقطع کے سامنے 1- نمودار ہو گا۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ مقطع کی قیمت ایک دائیں ہاتھ نظام کی جگہ دوسرا دائیں ہاتھ کا نظام استعمال کرنے سے تبدیل نہیں ہو گا اور نا ہی یہ ایک بائیں ہاتھ نظام کی جگہ دوسرا بائیں ہاتھ نظام استعمال کرنے سے تبدیل ہو گا البتہ دائیں ہاتھ نظام کی جگہ بائیں ہاتھ نظام یا بائیں ہاتھ نظام کی جگہ دائیں ہاتھ نظام استعمال کرنے سے مقطع کی قیمت 1- سے ضرب ہو گی۔

⁴⁶hexagonal parallelepiped



شکل 7.26: غیر سمتی سہ ضرب سے چو سطح کے حجم کا حصول (مثال 7.14)۔

مثال 7.14: چو سطح
دائیں ہاتھ کا ریتیسی نظام میں چو سطح کے قریبی اطراف درج ذیل ہیں۔ اس چو سطح کا حجم دریافت کریں (شکل 7.26)۔

$$a = i + j, \quad b = 2i + 3j + 4k, \quad c = 3i + 5j + 2k$$

حل: مسدسی متوازی السطوح کا حجم درج ذیل مقطع سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

یوں مسدسی متوازی السطوح کا حجم $V = 6$ ہے۔ مقطع کی قیمت منفی ہے جس کا مطلب ہے کہ a ، b ، c سمتیات اسی ترتیب میں بائیں ہاتھ ثلاثہ سمتیات ہیں۔ چو سطح کا حجم مسدسی متوازی السطوح کے حجم کا $\frac{1}{8}$ ہے لہذا اس کا حجم $\frac{3}{4}$ ہو گا۔

□

غیر سمتی سہ ضرب کی چو میٹرانی معنی سے ہمیں تین سمتیات کی خطی طور تابعیت اور غیر تابعیت کا اصول بھی ملتا ہے۔ یہ سمتیات صرف اور صرف ہم سطحی ہونے کی صورت میں خطی طور تابع ہوں گے [جس میں (حصہ 7.4 میں دیا گیا) خطی طور تابع تین سمتیات کے ہم خطی ہونے کا شرط بھی شامل ہے]۔

مسئلہ 7.5: خطی تابعیت

تین سمتیات صرف اور صرف اس صورت خطی طور تابع ہوں گے جب ان کا غیر سمتی سہ ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

عملی استعمال میں درپیش دیگر متعدد ضرب کو نقطہ ضرب، صلیبی ضرب اور غیر سمتی سہ ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے میں درج ذیل کلیہ (جس کا ثبوت جلد پیش کیا جائے گا) اہم کردار ادا کرتا ہے

$$(7.62) \quad b \times (c \times d) = (b \cdot d)c - (b \cdot c)d$$

جس سے مراد درج ذیل لیگرینج مماثل⁴⁷

$$(7.63) \quad (a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

اور

$$(7.64) \quad (a \times b) \times (c \times d) = (abd)c - (abc)d$$

ہے، جن کے ثبوت آپ سے بالترتیب سوال 7.159 اور سوال 7.160 میں مانگے گئے ہیں۔ مساوات 7.62 کے ثبوت سے پہلے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 7.62 سے مراد درج ذیل بھی ہے۔

$$(b \times c) \times d = -d \times (b \times c) = (d \cdot b)c - (d \cdot c)b$$

اس سے ظاہر ہے کہ عموماً $b \times (c \times d)$ اور $(b \times c) \times d$ مختلف ہوں گے یعنی سمتی ضرب، قانون تلازم پر پورا نہیں اترتا لہذا مساوات 7.62 میں قوسین لکھنا لازمی ہے اور انہیں ہٹایا نہیں جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر دائیں ہاتھ کے نظام میں درج ذیل ہو گا۔

$$(i \times j) \times j = k \times j = -i \quad \text{لیکن} \quad i \times (j \times j) = 0$$

ثبوت: برائے مساوات 7.62 ہم دائیں ہاتھ کارتیسی محدود یوں چنتے ہیں کہ x محور کی سمت d ہو اور xy سطح میں c پایا جاتا ہو۔ یوں مساوات 7.62 کے سمتیات درج ذیل لکھے جائیں گے

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k, \quad c = c_1 i + c_2 j, \quad d = d_1 i$$

لہذا $c \times d = -c_2 d_1 k$ ہو گا جس کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$b \times (c \times d) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -c_2 d_1 \end{vmatrix} = -b_2 c_2 d_1 i + b_1 c_2 d_1 j$$

7.9. غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب

ساتھ ہی ساتھ ہم درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$(b \cdot d)c - (b \cdot c)d = b_1d_1(c_1i + c_2j) - (b_1c_1 + b_2c_2)d_1i = b_1c_2d_1j - b_2c_2d_1i$$

یوں ہماری مخصوص کارتیسی نظام میں مساوات 7.62 ثابت ہوتا ہے۔ اب سمتیہ کی لمبائی، سمتیہ کا رخ، سمتی ضرب اور غیر سمتی ضرب کی قیمت کا دار و مدار چنے گئے نظام پر ہر گز نہیں ہوتا۔ مزید دہرا سمتی ضرب کی بنا $b \times (c \times d)$ کو دائیں ہاتھ یا بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں i ، j ، k کی صورت میں لکھنے سے یکساں جواب ملتا ہے۔ یوں مساوات 7.62 کسی بھی کارتیسی نظام کے لئے درست ہے۔

□

سوالات

سوال 7.121 تا سوال 7.130 میں دائیں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا گیا ہے۔ ان سوالات میں دیے گئے تین سمتیات کا غیر سمتی سہ ضرب $a \cdot (b \times c)$ دریافت کریں۔

سوال 7.121: $a = i, b = j, c = k$
جواب: 1

سوال 7.122: $a = j, b = k, c = i$
جواب: 1

سوال 7.123: $a = i, b = k, c = j$
جواب: -1

سوال 7.124: $a = 3i, b = j - k, c = 4j + 3k$
جواب: 28

سوال 7.125: $a = 5j, b = j + k, c = 2i + 3k$
جواب: 10

سوال 7.126: $a = i - 2j + 3k, b = -i + j + 3k, c = 2i - 3j + 3k$
جواب: -3

سوال 7.127: $a = 2i + k, b = -i + j, c = 3j + 2k$
جواب: 1

سوال 7.128: $a = 2i - 4j + k, b = j, c = 2i - 5j + 7k$
جواب: 12

سوال 7.129: $a = i + 4j - k, b = -i, c = -2i + 7j + 3k$
جواب: 19

سوال 7.130: $a = 5i - j - k, b = k, c = 7j + 3k$
جواب: -35

کیا سوال 7.131 تا سوال 7.138 کے سمتیات خطی طور تابع یا خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 7.131: i, j
جواب: غیر تابع

سوال 7.132: $i - 6j + 2k, 2j + 7k, -2i + 12j - 4k$
جواب: تابع

سوال 7.133: $2i + 6j - 2k, 2j + 3k, -2i + 2j - k$
جواب: غیر تابع

سوال 7.134: $-3i + 6j + 2k, 4i + 3j, 2i - 2j + k$
جواب: غیر تابع

سوال 7.135: $4i + 5j, i + 2j, -i + 3j$
جواب: تابع

سوال 7.136: $i + k, 3i - 5k, 8k$
جواب: تابع

سوال 7.137: $i + j, 3i - 5k, 2i$
جواب: غیر تابع

سوال 7.138: $j - k, i - k, j$
جواب: غیر تابع

سوال 7.139: λ کی وہ قیمت دریافت کریں جس سے درج ذیل تینوں سمتیات ہم خطی ہوں گے۔
 $i + 6j - 8k, 2i - j - k, \lambda i + j + k$
 جواب: $\lambda = -2$

سوال 7.140: کیا درج ذیل چار نقطے ہم سطحی ہیں؟

$$(4, -2, 1), (5, 1, 6), (2, 2, -5), (3, 5, 0)$$

جواب: غیر ہم سطحی

سوال 7.141: درج ذیل میں α اور β کی وہ قیمتیں دریافت کریں جو تینوں نقطوں کو ہم خطی بناتے ہیں۔

$$(-1, 3, 2), (-4, 2, -2), (5, \alpha, \beta)$$

جوابات: $\alpha = 5$ ، $\beta = 10$

سوال 7.142: تین متغیرات پر مبنی تین مساوات کی متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب نظام کی عددی سر قالب کا مقطع صفر ہو۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 7.5 ثابت کریں۔

سوال 7.143 تا سوال 7.148 میں متوازی شہ پہلو کے قریبی اطراف دیے گئے ہیں۔ متوازی شہ پہلو کا حجم دریافت کریں۔

سوال 7.143: $i, j, -k$
 جواب: 1

سوال 7.144: $i - j, j - k, i + k$
 جواب: 2

سوال 7.145: $2i + j + 3k, i + j - k, i - 2j + k$
 جواب: 13

سوال 7.146: $3i - 2j + 3k, i - 2j - 3k, i - 4j + k$
 جواب: 40

سوال 7.147: $3i + 2j + 3k, i + 2j + 3k, i + 4j + k$
 جواب: 20

سوال 7.148: $3i + 3j + 4k, 2i + 3j + k, i + 3j + 2k$
جواب: 12

سوال 7.149 تا سوال 7.152 میں جو سطح کے کونے دیے گئے ہیں۔ اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 7.149: $(0, 0, 0), (2, 4, 0), (0, 2, 4), (3, 5, 6)$
جواب: 4

سوال 7.150: $(3, 4, 2), (1, -2, 3), (2, 2, 2), (6, 3, 5)$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 7.151: $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 7.152: $(-3, 2, -1), (1, 2, 5), (-2, 1, 3), (4, -1, 1)$
جواب: 8

سوال 7.153 تا سوال 7.158 میں $c = -3i - 4j + 5k$ ، $b = i + 2j + 2k$ ، $a = 2i - j + 3k$ اور $d = 4i + j - k$ لیں۔

سوال 7.153: $(a \times b) \times c, a \times (b \times c)$
جوابات: $(a \times b) \times c = 15i + 25j + 29k, a \times (b \times c) = 31i + 50j - 4k$

سوال 7.154: $(b \times c) \times d, d \times (b \times c)$
جوابات: $(b \times c) \times d = 9i + 26j + 62k, d \times (b \times c) = -9i - 26j - 64k$

سوال 7.155: $(a \times c) \times d, a \times (d \times c)$
جوابات: $(a \times c) \times d = 30i - 37j + 83k, a \times (d \times c) = 64i + 29j - 33k$

سوال 7.156: $(a \times a) \times d, a \times (a \times d)$
جوابات: $(a \times a) \times d = 0, a \times (a \times d) = -48i - 18j + 26k$

سوال 7.157: $(a \times b) \times (c \times d)$
جوابات: $-98i + 99j - 137k$

سوال 7.158: $(a \times b) \cdot (c \times d) \cdot (c \times a) \cdot (d \times b)$
جوابات: -6832

سوال 7.159: مساوات 7.63 ثابت کریں۔

سوال 7.160: مساوات 7.64 ثابت کریں۔

باب 8

خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

خطی الجبرا وسیع مضمون ہے جس میں قالب اور سمتیات، مقطع قالب، خطی مساوات کے نظام، سمتی فضا اور خطی تبادلہ، قدر مسائل، اور دیگر موضوعات شامل ہیں۔ اس کا استعمال انجینئری، طبیعیات، جیومیٹری، کمپیوٹر سائنس، معاشیات اور دیگر میدانوں میں پایا جاتا ہے۔

متعدد اعداد و شمار یا متعدد تفاعل کو مربوط طریقے سے قالب¹ اور سمتیات² کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب اور سمتیات ہی خطی الجبرا کی زبان ہیں۔

matrices¹
vectors²

8.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

مستطیلی ترتیب وار فہرست کو قالب کہتے ہیں۔ درج ذیل قالب کی مثال ہیں۔ قالب میں درج اعداد یا تفاعل کو قالب کے اندراجات یا قالب کے ارکان³ کہتے ہیں۔

$$(8.1) \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -2 & 1.2 \\ -6 & 0 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ln x & -e^x \\ e^{3x} & 3.2x^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3.22 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

بالائی بائیں ہاتھ قالب کے ارکان 0.1، -2، 1.2، -6، 0 اور 23 ہیں۔ اس قالب کے دو صف⁴ اور تین قطار⁵ ہیں۔ افقی اندراجات کی لکیر کو صف اور عمودی اندراجات کی لکیر کو قطار کہتے ہیں۔ بالائی درمیانی قالب میں 3 صف اور 3 قطار پائے جاتے ہیں۔ ایسا قالب جس میں صفوں کی تعداد، قطاروں کی تعداد کے برابر ہو مربع قالب⁶ کہلاتا ہے۔ یوں بالائی دائیں ہاتھ قالب بھی مربع قالب ہے۔ بالائی درمیانی قالب میں ارکان کو a_{mn} سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں دو عدد اشاریہ m اور n بالترتیب اس صف اور قطار کو ظاہر کرتے ہیں جہاں یہ رکن پایا جاتا ہو۔ قالب میں اندراجات کے مقام کی وضاحت اسی معیاری ترکیب سے کی جاتی ہے۔ یوں a_{23} رکن دوسرے صف اور تیسرے قطار میں پایا جاتا ہے۔

ایسا قالب جو صرف ایک عدد صف یا صرف ایک عدد قطار پر مشتمل ہو، سمتیہ⁷ کہلاتا ہے۔ یوں نچلے دائیں ہاتھ دو ارکان پر مشتمل سمتیہ قطار⁸ پایا جاتا ہے جبکہ نچلے بائیں ہاتھ سمتیہ صف⁹ پایا جاتا ہے۔ چونکہ سمتیہ قطار میں کوئی صف نہیں پایا جاتا لہذا اس میں ارکان کے مقام کو صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح سمتیہ صف میں بھی ارکان کا مقام صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں سمتیہ قطار میں $a_1 = 3.22$ اور $a_2 = -\frac{4}{5}$ ہیں۔

عملی استعمال میں مواد کے ذخیرہ اور اس پر عمل کرنے میں قالب کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔ درج ذیل مثال دیکھیں

elements³
rows⁴
columns⁵
square matrix⁶
vector⁷
column vector⁸
row vector⁹

مثال 8.1: خطی نظام

درج ذیل خطی نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 نامعلوم متغیرات ہیں۔

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 15$$

$$5x_1 + 3x_3 = 11$$

آئیں درج بالا نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 کے عددی سروں سے عددی سر قالب¹⁰ A لکھیں۔ A قالب میں ہر رکن کا مقام عین خطی مساوات کے مطابق ہو گا۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

چونکہ تیسری مساوات میں x_2 نہیں پایا جاتا لہذا اس کا عددی سر صفر کے برابر ہو گا اور یوں A میں $a_{32} = 0$ درج کیا گیا ہے۔ عددی سر قالب A میں مساوات کے دائیں ہاتھ کی معلومات کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب¹¹ \tilde{A} ملتا ہے۔

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 15 \\ 5 & 0 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

چونکہ افزودہ قالب \tilde{A} سے تینوں مساوات لکھے جاسکتے ہیں لہذا دیے گئے خطی نظام کو \tilde{A} مکمل طور ظاہر کرتا ہے۔ یوں ہم \tilde{A} کو حل کرتے ہوئے نامعلوم متغیرات x_1 ، x_2 اور x_3 حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنا جلد سمجھایا جائے گا۔ فی الحال تسلی کر لیں کہ اس نظام کا حل $x_1 = 1$ ، $x_2 = -2$ اور $x_3 = 2$ ہے۔

نامعلوم متغیرات کو x_1 ، x_2 اور x_3 سے ظاہر کرنے کی بجائے دیگر علامتوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے مثلاً x ، y اور z ۔ □

مثال 8.2: فروخت کھاتا

¹⁰coefficient matrix
¹¹augmented matrix

$$A = \begin{bmatrix} \text{جمع} & \text{بدھ} & \text{منگل} & \text{پیر} & \text{اتوار} & \text{ہفتہ} \\ 32 & 23 & 13 & 18 & 11 & 19 \\ 10 & 12 & 14 & 5 & 0 & 17 \\ 29 & 16 & 32 & 18 & 9 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{matrix}$$

ایک دکان کی تین اشیاء کی ہفتہ وار فروخت درج بالا قالب میں دی گئی ہے۔ ہر ہفتے کی فروخت کو اسی طرح قالبوں میں لکھا جاسکتا ہے۔ مہینے کے آخر میں تمام قالبوں کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لینے سے ہر دن، تینوں اشیاء کی کل فروخت کی فہرست حاصل ہوگی۔ □

عمومی تصورات اور علامت نویسی

آئیں اب تک پیش کیے گئے تصورات کو باضابطہ دستوری صورت دیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے بڑے حروف سے قالب کو ظاہر کریں گے مثلاً A ، B ، C ، ...، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $A = [a_{jk}]$ وغیرہ۔ ایسا قالب جس میں m صف اور n قطار ہوں، $m \times n$ (اس کو m ضرب n پڑھیں) قالب کہلاتا ہے (پہلے صف اور بعد میں قطار آئے گا) اور $m \times n$ قالب کی جسامت¹² کہلاتی ہے۔ یوں $m \times n$ قالب درج ذیل صورت کا ہوگا۔

$$(8.2) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مساوات 8.1 میں بالائی بائیں قالب 2×3 جسامت کا ہے جبکہ نچلا بائیں قالب 1×3 جسامت کا ہے۔

مساوات 8.2 میں ہر رکن کو دو عدد اشاریہ سے پہچانا جاتا ہے جہاں پہلا اشاریہ صف اور دوسرا اشاریہ قطار ہے۔ یوں a_{23} دوسرے صف اور تیسرے قطار پر موجود اندراج ہے۔

ایسا قالب جس میں $m = n$ ہو $n \times n$ چکور قالب کہلاتا ہے۔ چکور قالب کا وہ وتر جس پر a_{11} ، a_{22} ، ...، a_{nn} پائے جاتے ہیں، قالب کا مرکزی وتر¹³ کہلاتا ہے۔ مساوات 8.1 میں ایک چکور قالب کے مرکزی

¹²size
main diagonal¹³

وتر کے ارکان a_{11} ، a_{22} اور a_{33} ہیں جبکہ دوسرے چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان $\ln x$ اور $3.2x^2$ ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے، چکور قالب نہایت اہم ہیں۔

ایسا قالب جس میں $m \neq n$ ہو $m \times n$ مستطیل¹⁴ قالب کہلاتا ہے۔ مستطیل قالب کی ایک مخصوص قسم چکور قالب ہے۔

سمتیات

صرف ایک صف یا ایک قطار پر مبنی قالب کو سمتیہ کہتے ہیں۔ سمتیہ کے اندراج کو سمتیہ کے اجزاء¹⁵ کہتے ہیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے چھوٹے حروف سے سمتیہ کو ظاہر کریں گے مثلاً a ، b ، c ، ... اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $a = [a_j]$ وغیرہ۔ سمتیہ صف کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4.2 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

اسی طرح سمتیہ قطار کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

$m \times n$ جسامت کے قالب 8.2 کو n جسامت کا سمتیہ صف

$$(8.3) \quad A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

تصور کیا جاسکتا ہے جہاں b_1 تا b_n از خود m جسامت کے سمتیہ قطار

$$(8.4) \quad b_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad b_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

rectangular matrix¹⁴
components¹⁵

ہیں۔ اسی طرح A کو m جسامت کا سمتیہ قطار

$$(8.5) \quad A = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

تصور کیا جاسکتا ہے جہاں c_1 تا c_m از خود n جسامت کے سمتیہ صف ہیں۔

$$(8.6) \quad \begin{aligned} c_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ c_2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ c_m &= \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

آئیں قالب مساوی ہونے کی تصور جانتے ہیں۔

تعریف: دو قالب A اور B اس صورت مساوی ہوں گے جب دونوں قالب کی جسامت برابر ہو اور ان کے نظیری ارکان آپس میں برابر ہوں یعنی $a_{11} = b_{11}$ ، $a_{12} = b_{12}$ ، \dots ہوں۔ غیر مساوی قالب مختلف¹⁶ کہلاتے ہیں۔ یوں مختلف جسامت کے قالب ہر صورت مختلف ہوں گے۔ مساوات کا تعلق $A = B$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 8.3: قالبوں کی مساوات
اگر درج ذیل قالب مساوی ہوں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

تب $a_{11} = 2$ ، $a_{12} = -3$ ، $a_{21} = 0$ اور $a_{22} = 3.2$ ہوں گے اور ہم $A = B$ لکھ سکتے ہیں۔ درج ذیل تمام قالب آپس میں مختلف ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

تعریف : قالبوں کا مجموعہ

دو یکساں جسامت کے قالب $A = [a_{jk}]$ اور $B = [b_{jk}]$ کا مجموعہ $A + B$ لکھا جائے گا جس کے اندراجات $a_{jk} + b_{jk}$ کو A اور B کے نظیری ارکان کے مجموعے سے حاصل کیا جائے گا۔ دو مختلف جسامت کے قالبوں کا مجموعہ حاصل کرنا ناممکن ہے۔

مثال 8.4: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہوں تب $A + B$ ، $a + b$ اور $0A + b$ حاصل کریں۔

حل: چونکہ A اور B کی یکساں جسامت ہے لہذا انہیں جمع کیا جاسکتا ہے۔ مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+7 & -1+3 & 3+0 \\ 1+1 & 0+2 & -2+1 \\ 3+2 & 2-1 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

اسی طرح چونکہ a اور b کی جسامت یکساں ہے لہذا انہیں جمع کیا جاسکتا ہے۔ ان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$a + b = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 3+2 \\ -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

□

چونکہ A اور b کی جسامت یکساں نہیں ہے لہذا $0A + b$ حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

تعریف: غیر سمتی ضرب
 کسی بھی $m \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ اور کسی بھی غیر سمتی مقدار (عدد) c کا حاصل ضرب cA لکھا جاتا ہے جو ایسا $m \times n$ قالب $cA = [ca_{jk}]$ ہے جس کا ہر رکن A کے نظیری رکن کو c سے ضرب دیتے حاصل کیا جاتا ہے۔

ہم $(-1)A$ کو $-A$ لکھتے ہیں اور اس کو A کا نفی کہتے ہیں۔ اسی طرح $(-k)A$ کو $-kA$ لکھا جاتا ہے۔ $A + (-B)$ کو $A - B$ لکھا جاتا ہے جو A اور B کا فرق¹⁷ کہلاتا ہے (فرق صرف یکساں جسامت کے قالب کا حاصل کیا جاسکتا ہے)۔

مثال 8.5: غیر سمتی ضرب
 اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.3 \\ 0.6 & -1.5 \\ 0 & 6.0 \end{bmatrix}$$

ہو تب درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$-A = \begin{bmatrix} -1.2 & -3.3 \\ -0.6 & 1.5 \\ 0 & -6.0 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{3}A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -5 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad 0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر قالب B میں مختلف اشیاء کی کلوگرام کمیت درج ہو تب $1000B$ قالب انہیں اشیاء کی کمیت گرام میں دے گا۔
 □

مجموعہ قالب اور غیر سمتی ضرب کے قواعد

مجموعہ اعداد کے قواعد سے یکساں جسامت $m \times n$ کے قالبوں کے مجموعے کے درج ذیل قاعدے حاصل ہوتے ہیں۔

$$(8.7) \quad \begin{aligned} & \text{(الف)} \quad A + B = B + A \\ & \text{(ب)} \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{یعنی } A + B + C) \\ & \text{(پ)} \quad A + 0 = A \\ & \text{(ت)} \quad A - A = 0 \end{aligned}$$

درج بالا موٹی لکھائی میں صفر 0 ایسے $m \times n$ صفر قالب¹⁸ کو ظاہر کرتی ہے جس کے تمام ارکان صفر 0 کے برابر ہوں۔ اگر $m = 1$ یا $n = 1$ ہو تب اس کو صفر سمتیہ¹⁹ کہیں گے۔

یوں مجموعہ قالب قانون تبادل اور قانون تلازم پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح غیر سمتی ضرب درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$(8.8) \quad \begin{aligned} & \text{(الف)} \quad c(A + B) = cA + cB \\ & \text{(ب)} \quad (c + k)A = cA + kA \\ & \text{(پ)} \quad c(kA) = (ck)A \quad (\text{یعنی } ckA) \\ & \text{(ت)} \quad 1A = A \end{aligned}$$

سوالات

سوال 8.1 تا سوال 8.3 عمومی سوالات ہیں۔ سوال 8.1: $A = [a_{jk}]$ لکھتے ہوئے مثال 8.2 میں $[a_{12}]$ اور $[a_{25}]$ کیا ہیں۔

جوابات: $[a_{12}] = 23$ اور $[a_{25}] = 0$

سوال 8.2: مثال 8.2 میں دیے گئے قالب کی جسامت لکھیں۔

¹⁸ zero matrix
¹⁹ zero vector

جواب: 3×7 سوال 8.3: مثال 8.4 میں قالب A کی مرکزی وتر لکھیں۔

جواب: 2، 0 اور 1

سوال 8.4 تا سوال 8.10 میں قالبوں کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب حاصل کرنے ہوں گے۔ ان سوالات میں درکار قالب درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.4: $-2u$ ، $0.2B$ ، $0.5A$

جوابات:

$$0.5A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1.0 \\ 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.2B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad -2u = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.5: $3A + 2B$ ، $2C - E$ ، $-3u + v - 2w$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 7 & 1 & 9 \\ 6 & 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9.5 \\ -5.7 \\ -6.4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.6: $(3 \cdot 6)B$ ، $6(3)B$ ، $5A - 3A$
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.7: $3(2C + 5D), \quad 0.2(0.1E - 0.3D)$
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 66 & 18 \\ 9 & 57 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.08 & -0.24 \\ 0.12 & -0.2 \\ 0.22 & -0.1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.8: $E + (D + C), \quad (D + E) + C, \quad A + C, \quad 0B + D$
جوابات: چونکہ A اور C کی جسامت یکساں نہیں ہے لہذا انہیں جمع نہیں کیا جاسکتا ہے۔ غیر یکساں جسامت کی بنا $0B + D$ بھی حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$$E + (D + C) = (D + E) + C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 20 & -4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

سوال 8.9: u, v اور w کو خلاء میں قوت کے اجزاء تصور کرتے ہوئے ان کے مجموعے سے کل قوت دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{bmatrix} 5.3 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.10: متوازن صورت
تمام قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہونے کی صورت کو متوازن²⁰ حال کہتے ہیں۔

ایسا قوت x دریافت کریں کہ u, v, w اور x متوازن حال میں ہوں۔

$$x = \begin{bmatrix} -5.3 \\ -3.1 \\ -3.2 \end{bmatrix}$$

8.2 قالبی ضرب

قالبی ضرب سے مراد دو عدد قالبوں کا آپس میں ضرب ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ چند مثالیں حل کرتے ہوئے قالبی ضرب کو اچھی طرح سمجھیں۔ قالبی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: قالبی ضرب

$A = [a_{jk}]$ قالب $m \times n$ اور $B = [b_{jk}]$ قالب $r \times p$ کا (اسی ترتیب سے) حاصل ضرب $C = AB$ صرف $r = n$ کی صورت میں ممکن ہو گا اور یہ $m \times p$ قالب $C = [c_{jk}]$ ہو گا جس کے اندراجات درج ذیل ہوں گے۔

(8.9)

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}, \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

یوں پہلے جزو A میں قطاروں کی تعداد n دوسرے جزو B کی صفوں کی تعداد r کے برابر ہونا لازمی ہے۔ مساوات 8.9 میں c_{jk} کو A کے j صف کے ہر رکن کو B کے k قطار کے نظیری رکن سے ضرب دیتے ہوئے تمام n حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں صف ضرب قطار سے قالبی ضرب حاصل کیا جاتا ہے۔ قالبی ضرب $n = 3$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

جہاں A کی پہلی صف کے ارکان کو B کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{11} حاصل ہو گا۔ اسی طرح A کی پہلی صف کے ارکان کو B کی دوسری قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{12} حاصل ہو گا اور A کی دوسری صف کے ارکان کو B کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{21} حاصل ہو گا۔ اس عمل کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

چونکہ سمتیہ درحقیقت قالب کی مخصوص صورت ہے لہذا قالب اور سمتیہ کا ضرب بھی بالکل اسی طرح حاصل کیا جائے گا۔ قالبی ضرب کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال 8.6: قالبی ضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 10 \\ 4 \cdot 9 + 6 \cdot 8 & 4 \cdot 7 + 6 \cdot 10 \\ 5 \cdot 9 + 2 \cdot 8 & 5 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 37 \\ 84 & 88 \\ 61 & 55 \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.7: قالب اور سمتیہ کا ضرب

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{جبکہ} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{نا ممکن}$$

درج بالا میں قالب اور سمتیہ کی جگہ تبدیل کرنے سے پہلے جزو کی قطاروں اور دوسرے جزو کی صفوں کی تعداد یکساں نہیں رہتی لہذا ایسا ضرب ناممکن ہے۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ AB اور BA برابر ہوں اور یہ کہ دونوں ضرب کا حصول ممکن ہو۔

□

سوال 8.11:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ سمتیات کی جگہ تبدیل کرنے سے حاصل ضرب تبدیل ہوتا ہے یعنی قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا۔

مثال 8.8: قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا لہذا عموماً $AB \neq BA$ ہو گا

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 & 199 \\ -199 & -199 \end{bmatrix}$$

□

آپ نے دیکھا کہ قالبی ضرب میں اجزاء کی جگہ تبدیل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کے علاوہ قالبی ضرب، عام اعدادی ضرب کے درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned} (الف) \quad (kA)B &= k(AB) = A(kB) \quad (kAB \text{ یا } AkB) \\ (ب) \quad A(BC) &= (AB)C \quad (\text{یعنی } ABC) \\ (8.10) \quad (پ) \quad (A+B)C &= AC + BC \\ (ت) \quad C(A+B) &= CA + CB \end{aligned}$$

درج بالا میں k کوئی عدد ہے اور یہ قواعد اس صورت درست ہوں گے کہ بائیں ہاتھ کے قالب، قالبی ضرب کی تعریف پر پورا اترتے ہوں۔ درج بالا میں مساوات-ب قانون تلازم²¹ کہلاتا ہے جبکہ مساوات-پ اور مساوات-ت قانون جزئی تقسیم²² کہلاتا ہے۔

چونکہ قالبی ضرب صف ضرب قطار کو کہتے ہیں لہذا مساوات 8.9 کو زیادہ خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(8.11) \quad c_{jk} = a_j b_k, \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

جہاں a_j قالب A کا صف j اور b_k قالب B کا قطار k ہے۔

$$a_j b_k = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \dots + a_{jn}b_{nk} \end{bmatrix}$$

associative law²¹
distributive law²²

مثال 8.9: صف اور قطار سمتیہ کی صورت میں ضرب ارکان 3×3 قلاب $A = [a_{jk}]$ اور 3×4 قلاب $B = [b_{jk}]$ کو ضرب دینے سے درج لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.12) \quad AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.10: 3×3 قلاب $A = [a_{jk}]$ اور 3×4 قلاب $B = [b_{jk}]$ درج ذیل ہیں۔ مساوات 8.12 سے AB حاصل کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: یہاں $a_1 = [1 \ 0 \ 2]$ ، $a_2 = [2 \ 1 \ 1]$ اور $a_3 = [3 \ 2 \ 1]$ ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1b_1 = [1 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 4 = 6$$

اسی طرح بقایا ارکان حاصل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 10 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

□

قلابی ضرب بذریعہ کمپیوٹر

مساوات 8.12 کو ذرہ مختلف طریقے سے لکھتے ہیں۔ A کو جوں کا توں جبکہ B کو سمتیہ قطار کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.13) \quad AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix}$$

باب 8. خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

متعدد متوازی جڑے کمپیوٹر کو علیحدہ علیحدہ b_1, b_2, \dots, b_p یا انہیں کئی کئی علیحدہ سمتیہ قطار فراہم کیے جاتے ہیں اور ساتھ ہی تمام کو A بھی فراہم کیا جاتا ہے۔ یوں قالبی ضرب کے اجزاء Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_p بہ یک وقت (نسبتاً بہت کم وقت میں) حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 8.11: درج ذیل کو مساوات 8.13 کی مدد سے حل کریں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 8.13 سے قالبی ضرب کے قطار حاصل کرتے ہیں جنہیں ایک ہی قالب میں یکجا کرتے ہوئے درج بالا جواب ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

□

خطی تبادل اور قالبی ضرب

دو متغیرات پر مبنی خطی تبادل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad (8.14)$$

جس کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

اب اگر x_1, x_2 نظام از خود w_1, w_2 پر مبنی ہو یعنی

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned} \quad (8.16)$$

یا

$$(8.17) \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Bw = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{bmatrix}$$

تب $y_1 y_2$ نظام بالواسطہ $w_1 w_2$ پر مبنی ہو گا۔ آئیں اس تعلق کو جائیں۔

مساوات 8.14 میں مساوات 8.16 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2 \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$(8.18) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں

$$(8.19) \quad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

لیا گیا ہے۔ اس تعلق کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(8.20) \quad y = Cw = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{bmatrix}$$

آئیں قالمی ضرب AB حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $C = AB$ ہے۔

$$(8.21) \quad AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = C$$

بڑے جسامت کے قالموں کے لئے بھی $C = AB$ بالکل اسی طرح ثابت کیا جاتا ہے۔ یوں x ، y اور w متغیرات کی تعداد بالترتیب m ، n اور p کی صورت میں A ، B اور C قالموں کی جسامت بالترتیب $m \times p$ ، $n \times p$ اور $m \times n$ ہو گی جہاں $C = AB$ ہے۔ قالمی ضرب (مساوات 8.9) کی تعریف مساوات 8.21 کی بدولت ہے۔

8.2.1 تبدیلی محل

قالب کے صفوں کو بطور قطار (یعنی قطاروں کو بطور صف) لکھ کر تبدیل محل قالب²³ حاصل ہوتا ہے اور اس عمل کو²⁴ کہتے ہیں۔ سمتیہ کی تبدیلی محل بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔ اس طرح قالب کا صف، تبدیل محل قالب کا قطار ہو گا اور یونہی قالب کا قطار، تبدیل محل قالب کا صف ہو گا۔ چکور قالب کے ارکان کا مرکزی وتر میں "عکس" لینے سے بھی تبدیل محل قالب حاصل ہو گا۔ مرکزی وتر کے دونوں اطراف یکساں مقامات پر ارکان کی آپس میں جگہ تبدیل کرنے سے ان کا "عکس" حاصل ہو گا۔ یوں a_{12} اور a_{21} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، a_{13} اور a_{31} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ قالب A سے حاصل تبدیل محل قالب کو A^T سے ظاہر کیا جائے گا۔ درج ذیل مثال دیکھیں۔

مثال 8.12: تبدیل محل قالب
قالب A کا تبدیل محل A^T درج ذیل ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

درج بالا کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

چکور قالب اور اس کا تبدیل محل درج ذیل ہیں۔ چکور قالب اور اس کے تبدیل محل قالب میں مرکزی وتر کے ارکان جگہ تبدیل نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل، سمتیہ قطار ہو گا اور یونہی سمتیہ قطار کا تبدیل محل، سمتیہ صف ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

²³transpose matrix
²⁴transposition

تبدیل محل کا تبدیل محل اصل قالب ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

□

تعریف: قالب اور سمتیہ کا تبدیل محل $A = [a_{jk}]$ کا تبدیل محل $n \times m$ قالب A^T ہے جس کا پہلا صف، A کا پہلا قطار، اس کا دوسرا صف A کا دوسرا قطار، وغیرہ وغیرہ ہوں گے۔ یوں مساوات 8.2 میں دیے گئے A کا تبدیل محل A^T درج ذیل ہو گا۔

$$(8.22) \quad A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل سمتیہ قطار ہو گا جبکہ سمتیہ قطار کا تبدیل محل سمتیہ صف ہو گا۔

بعض اوقات قالب اور بعض اوقات تبدیل محل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ تبدیلی محل کے قواعد درج ذیل ہیں۔

$$(8.23) \quad \begin{aligned} (\text{الف}) \quad & (A^T)^T = A \\ (\text{ب}) \quad & (A + B)^T = A^T + B^T \\ (\text{پ}) \quad & (cA)^T = cA^T \\ (\text{ت}) \quad & (AB)^T = B^T A^T \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ مساوات 8.23-ت میں دائیں ہاتھ قالبوں کی ترتیب بائیں ہاتھ کی ترتیب کے الٹ ہے۔ سوال 8.25 میں آپ کو درج بالا تعلقات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 8.13: درج ذیل قالب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.23-ت ثابت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

حل: پہلے مساوات 8.23-ت کا بائیں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ قالبی ضرب AB لینے کے بعد

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

اس کا تبدیل محل حاصل کرتے ہیں۔

$$(8.24) \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

آئیں اب مساوات 8.23-ت کا دایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ یوں B^T اور A^T حاصل کرنے کے بعد

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ان کا قالبی ضرب لیتے ہیں۔

$$(8.25) \quad B^T A^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

چونکہ $a_{11}b_{11} = b_{11}a_{11}$ ، $a_{12}b_{21} = b_{21}a_{12}$ ، ... ہیں لہذا مساوات 8.24 اور مساوات 8.25 کے دائیں ہاتھ آپس میں برابر ہیں لہذا ان کے بائیں ہاتھ بھی آپس میں برابر ہوں گے۔ اس طرح مساوات 8.23-ت ثابت ہوا۔ □

مخصوص قالب

چند اقسام کے قالب عملی استعمال کے لحاظ سے زیادہ اہم ہیں۔ ان پر غور کرتے ہیں۔

تشاکلی قالم اور منحرف تشاکلی قالم

ایسا چکور قالم جو اپنے تبدیل محل قالم کے برابر $A = A^T$ ہو تشاکلی²⁵ قالم کہلاتا ہے۔ ایسا قالم جو اپنے تبدیل محل قالم کے نفی کے برابر $A = -A^T$ ہو منحرف تشاکلی²⁶ قالم کہلاتا ہے۔

$$(8.26) \quad \begin{aligned} \text{تشاکلی} \quad A &= A^T, \quad (a_{jk} = a_{kj}) \\ \text{منحرف تشاکلی} \quad A &= -A^T, \quad (a_{jk} = -a_{kj} \text{ اور } a_{jj} = 0) \end{aligned}$$

مثال 8.14: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالم
 A تشاکلی قالم ہے، B منحرف تشاکلی قالم ہے جبکہ C نہ تشاکلی اور نہ منحرف تشاکلی ہے۔

$$\begin{aligned} \text{تشاکلی} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{منحرف تشاکلی} \quad B &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

تکوئی قالم

بالائی تکوئی قالم²⁷ اس چکور قالم کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور اس سے بالائی جانب پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر سے نیچے کی طرف تمام ارکان صفر ہوں۔ اسی طرح نچلا تکوئی قالم²⁸ اس چکور

²⁵ symmetric
²⁶ skew-symmetric
²⁷ upper triangular matrix
²⁸ lower triangular matrix

قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے نیچے پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر کے بالائی جانب تمام ارکان صفر کے برابر ہوں۔

مثال 8.15: بالائی ٹکونی اور نیچلا ٹکونی قالب

$$\begin{aligned} \text{بالائی ٹکونی قالب} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{نیچلا ٹکونی قالب} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

وتری قالب

ایسا چکور قالب جس میں غیر صفر ارکان صرف مرکزی وتر پر پائے جاتے ہوں وتری قالب²⁹ کہلاتا ہے۔ مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر ہوں گے۔

اگر وتری قالب S کے تمام ارکان یکساں، مثلاً c کے برابر ہوں، تب S غیر سمتی قالب³⁰ کہلائے گا۔ کسی بھی چکور قالب A جس کی جسامت S کی جسامت کے برابر ہو، کا S کے ساتھ قالبی ضرب کا حاصل، غیر سمتی مقدار c اور A کے حاصل ضرب کے برابر ہوگا۔

$$(8.27) \quad AS = SA = cA$$

ایسا غیر سمتی قالب جس کے ارکان اکائی (1) کے برابر ہوں اکائی قالب³¹ کہلاتا ہے جسے I_n یا I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اکائی قالب کی صورت میں درج بالا مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(8.28) \quad AI = IA = A$$

diagonal matrix²⁹
scalar matrix³⁰
unit matrix³¹

مثال 8.16: وتری قالب D ، غیر سمتی قالب S اور اکائی قالب I

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.17: کارخانے کے اخراجات

ایک کارخانے میں تین اقسام کے کھلونے (الف، ب اور پ) تیار ہوتے ہیں۔ ایک کھلونا تیار کرنے کے اخراجات قالب A میں دیے گئے ہیں۔ قالب B ایک ہفتے کی پیداوار دیتا ہے۔ جمع اور جمع رات کے دن تعطیل ہوتی ہے۔ ایسا قالب C حاصل کریں جو اس ایک ہفتے میں پیدا کیے گئے کھلونوں پر خرچ اخراجات پیش کرے۔

$A = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 50 \\ 15 & 12 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	<p>خام مال مزدوری اضافی اخراجات</p>	$B = \begin{bmatrix} 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 2.0 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 & 0.9 \end{bmatrix}$	<p>ہفتہ اتوار پیر منگل بدھ</p>	<p>الف ب پ</p>
---	---	--	--	------------------------

حل:

$C = AB = \begin{bmatrix} 2840.0 & 3865.0 & 2480.0 & 4065.0 & 4265.0 \\ 227.0 & 305.4 & 202.6 & 321.2 & 335.4 \\ 74.6 & 100.6 & 66.2 & 105.6 & 110.6 \end{bmatrix}$	<p>خام مال مزدوری اضافی اخراجات</p>
---	---

□

مثال 8.18: امکانی شمارياتی قالب۔ طاقت قالب
ایک شہر کے رقبے کا استعمال 2018 میں درج ذیل ہے۔

$$S = 15\% \text{ صنعتی}, \quad T = 25\% \text{ تجارتی}, \quad R = 60\% \text{ رہائشی}$$

پانچ سالوں میں رقبے کا استعمال تبدیل ہو گا۔ اس تبدیلی کو درج ذیل امکانی شمارياتی قالب A ³² دیتا ہے جو سالہ سال اس شہر کے لئے قابل استعمال ہے۔

³²stochastic matrix

$$A = \begin{array}{ccc|l} & \text{رہائشی سے} & \text{تجارتی سے} & \text{صنعتی سے} \\ \hline & 0.8 & 0.1 & 0 \\ & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ & 0 & 0.2 & 0.9 \end{array} \begin{array}{l} \text{رہائشی کو منتقل} \\ \text{تجارتی کو منتقل} \\ \text{صنعتی کو منتقل} \end{array}$$

درج بالا امکانی شاریاتی قالب A کے تمام ارکان مثبت ہیں جبکہ ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی کے برابر ہے (چونکہ تمام ممکنہ امکانات کا مجموعہ اکائی کے برابر ہوتا ہے)۔ پانچ سال بعد 2023 میں رقبے کی تقسیم درج ذیل ہو گی۔

$$y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 \\ 0.2 \cdot 60 + 0.7 \cdot 25 + 0.1 \cdot 15 \\ 0.6 \cdot 60 + 0.2 \cdot 25 + 0.9 \cdot 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.5 \\ 31.0 \\ 18.5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{رہائشی} \\ \text{تجارتی} \\ \text{صنعتی} \end{array}$$

اس عمل کو A کی مدد سے سمجھتے ہیں۔ پانچ سالوں میں 0.8 امکان ہے کہ رہائشی رقبہ، رہائشی ہی رہے گا جبکہ 0.1 امکان ہے کہ تجارتی رقبہ پر رہائش ہوگی اور 0 امکان ہے کہ صنعتی رقبہ پر رہائش ہوگی۔ یوں 2023 میں رہائشی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 50.5\%$$

اس پورے عمل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$y = Ax = A \begin{bmatrix} 60 & 25 & 15 \end{bmatrix}^T$$

جہاں x سمتیہ حال³³ ہے جو 2018 میں رقبے کی تقسیم بیان کرتا ہے۔ اسی طرح 2028 اور 2033 میں صورت حال بالترتیب درج ذیل ہوگی۔

$$z = Ay = A(Ax) = A^2x = \begin{bmatrix} 43.50 \\ 33.65 \\ 22.85 \end{bmatrix}$$

$$u = Az = A(A^2x) = A^3x = \begin{bmatrix} 38.165 \\ 34.540 \\ 27.295 \end{bmatrix}$$

یوں 2033 میں % 38.165 علاقہ رہائشی، % 34.54 تجارتی اور % 27.295 صنعتی ہو گا۔ یاد رہے کہ رقبہ مستقل قیمت ہے۔

□

سوالات

سوال 8.12: چکور قالم
ایسا چکور قالم جو تشاکلی اور منحرف تشاکلی ہو، کی صورت کیا ہو گی۔

حل: صفر قالم

سوال 8.13 تا سوال 8.25 میں درج ذیل قالم استعمال کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.13: A^T, B^T, a^T, b^T

$$A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad a^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 8.14: AB, BA

$$AB = \begin{bmatrix} -17 & -14 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 20 \\ 12 & -9 & -18 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 8.15: $(AB)^T, B^T A^T, A^T B^T$

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -6 \\ -14 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad A^T B^T = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 20 & -18 & 10 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 8.16: AA^T, A^2

$$AA^T = \begin{bmatrix} 29 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 13 \\ 20 & 13 & 38 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 17 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 22 & 39 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 8.17: BB^T, B^2

$$BB^T = \begin{bmatrix} 25 & -16 & 0 \\ -16 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ -8 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 8.18: CC^T, BC

$$CC^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, BC = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -13 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 8.19: $2A - 3B, (2A - 3B)^T, 2A^T - 3B^T$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} -15 & -8 & 8 \\ 12 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}, (2A - 3B)^T = 2A^T - 3B^T = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 8.20: Ba, Ba^T, Bb, Bb^T

$$Ba = Ba^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}, Bb^T = Bb = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 8.21: Aa, Aa^T, Ab, Ab^T

$$Aa = Aa^T = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, Ab = Ab^T = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 8.22: $(Ab)^T, b^T A^T$

$$(Ab)^T = b^T A^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 8.23: ABC, ABa, ABb

$$\begin{bmatrix} -49 & -36 \\ -5 & -6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -75 \\ -15 \\ -11 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 8.24: ab, ba, aB, Bb

جوابات: $\begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

سوال 8.25: $a + b, a^T + b, a + b^T$

جوابات: $a + b$ ممکن نہیں ہے اور $a + b^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $a^T + b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

سوال 8.26: AB کو سوال 8.13 میں حاصل کیا گیا ہے۔ اسی کو دوبارہ A کے قطار اور B کے صف استعمال کرتے ہوئے دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 8.27: مساوات 8.23 کو عمومی 2×2 قالب کے لئے ثابت کریں۔

سوال 8.28: قانون تبادل

ایسا 2×2 قالب B دریافت کریں کہ $AB = BA$ ہو جہاں $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہے۔

جواب: $B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

سوال 8.29: ثابت کریں کہ کسی بھی پکور قالب C کے لئے $\frac{1}{2}(C + C^T)$ تشاکلی ہے جبکہ $\frac{1}{2}(C - C^T)$ منخرف تشاکلی ہیں۔

سوال 8.30: درج بالا سوال کے تحت $T = \frac{1}{2}(C + C^T)$ اور $M = \frac{1}{2}(C - C^T)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں T تشاکلی اور M منخرف تشاکلی قالب ہیں۔ کسی بھی قالب کو تشاکلی قالب اور منخرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سوال 8.13 تا سوال 8.25 میں استعمال کیے گئے A کو تشاکلی اور منخرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ ان قالبوں کو دریافت کریں۔

جوابات: $T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2.5 \\ 3 & 2.5 & 5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

سوال 8.31: قابل تبادل

ثابت کریں کہ تشاکلی A اور تشاکلی B کا قالبی ضرب AB اس صورت تشاکلی ہو گا جب A اور B آپس میں (ضرب میں) قابل تبادل³⁴ ہوں یعنی جب $AB = BA$ ہو۔

$$\text{جواب: } AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

سوال 8.32: کن صورتوں میں منحرف تشاکلی قالبوں کا قالبی ضرب منحرف تشاکلی قالب دے گا؟

$$\text{جواب: } AB = -BA$$

سوال 8.33: امکانی شریاتی عمل

ایک مشین اگر آج ٹھیک ہو تب 0.9 امکان ہے کہ وہ ایک دن بعد (کل) بھی ٹھیک ہو گا۔ یوں 0.1 امکان ہے کہ وہ کل خراب ہو گا۔ اسی طرح اگر مشین آج خراب ہو تب 0.4 امکان ہے کہ وہ کل بھی خراب ہو گا۔ یوں 0.6 امکان ہے کہ وہ کل ٹھیک ہو گا۔ آج ٹھیک اور خراب کو بالترتیب t اور k سے ظاہر کریں جبکہ ایک دن بعد انہیں T اور K سے ظاہر کریں۔ اس پیش گوئی سے امکانی شریاتی قالب A لکھیں۔ اگر آج مشین ٹھیک ہو تب دو دن بعد (پرسوں) مشین ٹھیک ہونے کا کتنا فی صد امکان ہے۔

$$\text{جوابات: دو دن بعد } 87\% \text{ امکان ہے کہ مشین ٹھیک ہو گی۔}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} T \\ K \end{matrix}$$

سوال 8.34: امکانی شریاتی عمل

ایک شہر کی آبادی 20000 ہے۔ ایک بینک میں آج کھاتے دار کا 90% امکان ہے کہ وہ اگلے سال بھی اسی بینک کا کھاتے دار ہو گا جبکہ یہاں کھاتا نہ رکھنے والے کا 1% امکان ہے کہ وہ اگلے سال یہاں کا کھاتا دار ہو گا۔ اگر آج 1000 افراد اس بینک کے کھاتے دار ہوں تب ایک سال، دو سال اور تین سال بعد کتنے افراد یہاں کے کھاتے دار ہوں گے؟

جوابات: 1090 ، 1170 ، 1241

سوال 8.35: ایک کارخانہ لاہور، پشاور اور کراچی میں تین اشیاء الف، ب اور پ فروخت کرتا ہے۔ فی کلو گرام منافع بالترتیب 8 ، 10 اور 6 روپیہ ہے۔ ایک دن کی فروخت درج ذیل ہے۔

2000	3000	1800	لاہور
2200	2800	1500	پشاور
3200	4200	2700	کراچی

ایسا "سمتیہ منافع" m دریافت کریں کہ $y = Am$ ہر شہر میں روزانہ کمائی دے۔

جواب: $m = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}^T$

سوال 8.36: خطی تبادلہ۔ گھومنا
کار تیشی محدود کی xy سطح پر گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ گھومنے کو $y = Ax$ ظاہر کرتی ہے
جہاں y ، A اور x درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ثابت کریں کہ $y = Ax$ کسی بھی سطح پر x_1x_2 کار تیشی محدود کے نظام کو، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں
کی گھومنے کی الٹ رخ، θ زاویہ گھما کر نیا کار تیشی محدود y_1y_2 دیتا ہے۔

سوال 8.37: خطی تبادلہ۔ گھومنا
درج بالا سوال میں θ زاویہ گھومنا دیکھا گیا۔ ثابت کریں کہ درج ذیل قالب، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کے
گھومنے کی الٹ رخ، $n\theta$ زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

سوال 8.38: خطی تبادلہ۔ گھومنا
درج بالا دو سوالات کو دیکھیں۔ درج ذیل قالب، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، α اور
 β زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

یوں باری باری α اور β گھومنے کو AB ظاہر کرے گا۔ یوں درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

سوال 8.39: خطی تبادلہ۔ گھومنا

خلا میں گھومنا $y = Ax$ دیتا ہے جہاں $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ، $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ ہیں جبکہ A درج ذیل ہو سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

کیا آپ ذہن میں اس عمل کو دیکھ پاتے ہیں؟

8.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط

قالب کا ایک اہم استعمال، خطی تفرقی مساوات کے نظام کا حل ہے۔ ہم یہاں گاوسی اسقاط³⁵ کی ترکیب سیکھتے ہیں جو خطی الجبرا میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ اس ترکیب کو اچھی طرح سمجھیں۔

خطی تفرقی مساوات کے نظام کا نام چھوٹا کرتے ہوئے اس کو خطی نظام³⁶ بھی کہتے ہیں۔ انجینئری، معاشیات، شاریات، اور دیگر شعبوں کے کئی مسائل کی نمونہ کشی خطی نظام کی مدد سے کی جاتی ہے مثلاً برقی ادوار اور گاڑیوں کی آمد و رفت کا نظام۔

خطی نظام، عددی سر قالب اور افزودہ قالب

n متغیرات پر مبنی n مساوات کا نظام درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (8.29)$$

³⁵Gauss elimination
linear system³⁶

چونکہ اس نظام میں تمام متغیرات کی طاقت اکائی (1) ہے لہذا یہ نظام خطی کہلاتا ہے (سیدھے خط کی طرح جس کی مساوات $y = mx + c$ میں x اور y کی طاقت 1 ہے)۔ ان مساوات میں a_{11} تا a_{mn} مستقل قیمتیں ہیں جنہیں نظام کے عددی سر³⁷ کہتے ہیں۔ b_1 تا b_m بھی مستقل قیمتیں ہیں۔ تمام b_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں 8.29 کا نظام ہم جنسی³⁸ نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ غیر ہم جنسی³⁹ نظام کہلاتا ہے۔

نظام 8.29 کے حل سے مراد x_1 تا x_n کی وہ قیمتیں ہیں جو اس نظام کے تمام مساواتوں پر پورا اترتے ہوں۔ نظام کے حل سمیت⁴⁰ کے ارکان نظام 8.29 کے حل x_1 تا x_m ہیں۔ ہم جنسی نظام کا ہر صورت میں ایک حل $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ ہو گا جو غیر اہم صفر حل⁴¹ کہلاتا ہے۔

نظام 8.29 کی قالبی صورت

قالبی ضرب کے استعمال سے نظام 8.29 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

(8.30)

$$Ax = b$$

جہاں A ، x اور b درج ذیل ہیں۔ A عددی سر قالب⁴² کہلاتا ہے۔

$$(8.31) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

x اور b سمتیہ قطار ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ a_{jk} تمام صفر نہیں ہیں لہذا A صفر قالب نہیں ہو گا۔ دھیان رہے کہ x کے n ارکان جبکہ b کے m ارکان ہیں۔ A اور b کو ایک ہی قالب میں لکھ کر

coefficients³⁷
homogeneous³⁸
nonhomogeneous³⁹
solution vector⁴⁰
trivial solution⁴¹
coefficient matrix⁴²

افزودہ قالب A^{43} ملتا ہے۔

$$(8.32) \quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

افزودہ قالب میں عمودی لکیر کو ہٹایا جاسکتا ہے۔ ہم بھی ایسا ہی کریں گے، بس یاد رہے کہ A کے ساتھ آخری قطار b کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب \tilde{A} حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ افزودہ قالب میں نظام 8.29 کے تمام معلومات شامل ہیں لہذا افزودہ قالب اس نظام کو مکمل طور پر ظاہر کرتا ہے۔

مثال 8.19: حل کی وجودیت اور یکتائی۔ جیومیٹریائی نقطہ نظر
 $m = n = 2$ کی صورت میں نظام دو عدد متغیرات x_1 ، x_2 اور دو عدد مساوات پر مبنی ہو گا۔

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

اگر ہم x_1 اور x_2 کو سطح x_1x_2 پر محور فرض کریں تب درج بالا مساوات اس سطح پر سیدھے خطوط کے مساوات ہوں گے۔ ان مساوات کا صرف اس صورت حل (x_1, x_2) ہو گا جب نقطہ P جس کے محور x_1 اور x_2 ہوں، ان دونوں خطوط پر پایا جاتا ہو۔ یوں تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 8.1 دیکھیں۔

• اگر خطوط ایک دونوں کو قطع کرتے ہوں تب یکتا حل پایا جائے گا۔

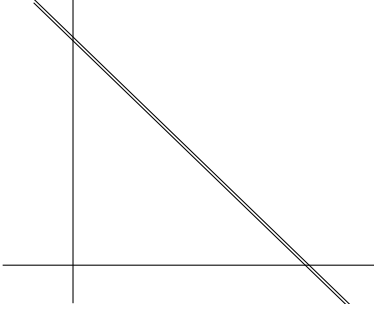
• ہم مکان خطوط کی صورت میں لامتناہی تعداد کے حل ہوں گے۔

• متوازی اور ایک دونوں سے ہٹ کر خطوط کی صورت میں کوئی حل ممکن نہیں ہو گا۔

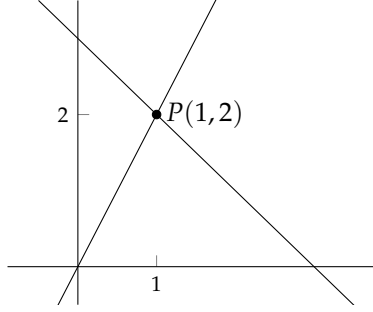
دو متغیرات اور دو مساوات کے نظام کو ہم نے دیکھا۔ تین متغیرات اور تین مساوات کے نظام کو بھی جیومیٹریائی نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ اب خطوط کی بجائے نظام کے تین مساوات تین سطحوں کو ظاہر کریں گی۔ شکل 8.2 میں اس نظام کے حل دکھائے گئے ہیں۔

□

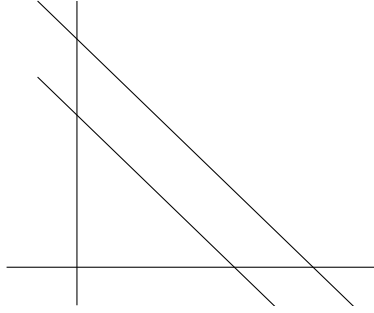
مثال 8.19 میں ہم نے دیکھا کہ عین ممکن ہے کہ نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو۔ یوں کسی بھی نظام کے بارے میں ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا حل موجود ہے اور آیا ایسا حل یکتا ہے۔ انہیں اب خطی نظام کو حل کرنے کا منظم طریقہ سیکھیں۔



(ب) دونوں خطوط (جنہیں ایک دونوں سے ذرہ ہٹ کر دکھایا گیا ہے درحقیقت) ہم مکانی ہیں لہذا ان کے لامتناہی تعداد کے حل ممکن ہیں۔

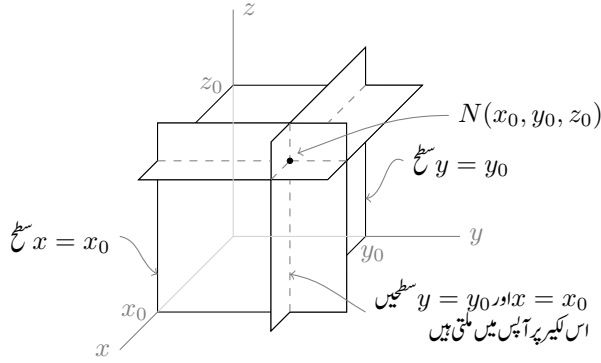


(الف) نقطہ P جہاں دونوں خط ملتے ہیں، ان مساوات کا حل ہے۔



(پ) متوازی خطوط ایک دونوں کو کہیں نہیں چھوتے ہیں لہذا ان کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 8.1: حل کی وجودیت اور یکتا۔ مثال 8.19 کے اشکال۔



شکل 8.2: آپس میں غیر متوازی سطحیں ایک نقطے پر ملتی ہیں

گاوسی اسقاط

ہم درج ذیل خطی نظام پر غور کرتے ہیں۔

$$2x_1 + x_2 = 7$$

$$4x_2 = 12$$

اس نظام کے عددی سر قالب میں غیر صفر قیمتیں، مرکزی وتر اور اس سے اوپر ہیں لہذا یہ بالائی تکنیکی نظام ہے۔ اس نظام کی نچلی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = \frac{12}{4} = 3$ ملتا ہے جس کو پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_1 = \frac{7-x_2}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ تکنیکی نظام کو با آسانی حل کیا جاسکتا ہے۔ یوں ہم کسی بھی نظام کو تکنیکی صورت میں لکھنا چاہیں گے۔

کسی بھی نظام کو تکنیکی صورت میں لانے کے عمل کو درج ذیل نظام کی مدد سے سیکھتے ہیں جس کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔ افزودہ قالب کی پہلی صف کو S_1 اور دوسری صف کو S_2 کہا گیا ہے۔

$$\begin{array}{ccc|c} S_1 & 2 & 3 & 12 \\ S_2 & 4 & -2 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 4x_1 - 2x_2 = 8 \end{array}$$

اس کو تکنیکی صورت میں لکھنے کی خاطر نچلی مساوات سے x_1 حذف کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے کے لئے بالائی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر $4x_1 + 6x_2 = 24$ حاصل کرتے ہوئے اس کو نچلی مساوات سے منفی کرتے ہیں جس سے $-8x_2 = -16$ ملتا ہے۔ یوں درج بالا نظام درج ذیل لکھا جائے گا جو بالائی تکنیکی صورت ہے۔ افزودہ قالب پر بھی یہی عمل کیا گیا ہے جہاں نچلی صف کے ساتھ الجبرائی عمل $(S_2 - 2S_1)$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{array}{ccc|c} & 2 & 3 & 12 \\ & 4 & -2 & 8 \\ S_2 - 2S_1 & 0 & -8 & -16 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 4x_1 - 2x_2 = 8 \\ -8x_2 = -16 \end{array}$$

تکنیکی صورت حاصل کرنے کی اس عمل کو گاوسی اسقاط⁴⁴ کہتے ہیں۔ گاوسی اسقاط کی ترکیب وسیع تر نظام پر قابل استعمال ہے۔ یوں نچلی مساوات سے $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہوئے پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_1 = 3$ ملتا ہے۔

مثال 8.20: گاوسی اسقاط

درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے بالائی تکتونی صورت میں لائیں۔ نظام کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

حل: بالائی تکتونی صورت کے لئے درمیانی مساوات سے x_1 حذف کرنا ہوگا جبکہ نیچلی مساوات سے x_1 اور x_2 حذف کرنے ہوں گے۔

پہلی قدم میں ہم بالائی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے نیچلی دونوں مساواتوں سے x_1 حذف کرتے ہیں۔ پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کرنے سے دوسری مساوات سے x_1 حذف ہوگا۔ اسی طرح پہلی مساوات کو تیسری مساوات کے ساتھ جمع کرتے ہوئے تیسری مساوات سے x_1 حذف ہوتا ہے۔ اس عمل کو افزودہ قالب کے لئے بیان کرتے ہیں۔ ہم ہر قدم پر گزشتہ قالب کی پہلی صف کو S_1 ، دوسری کو S_2 اور تیسری کو S_3 کہیں گے۔ یوں درج ذیل میں S_1 سے مراد درج بالا قالب کی پہلی صف $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ہے۔

پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے دوسری صف سے منفی کریں یعنی $S_2 - 2S_1$
پہلی صف کو تیسری صف کے ساتھ جمع کریں یعنی $S_3 + S_1$

ان عمل صف (یعنی $S_2 - 2S_1$ اور $S_3 + S_1$) کو درج ذیل قالب کے دائیں جانب مطابقتی صف کے سامنے لکھا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} S_2 - 2S_1 \\ S_3 + S_1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -10 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

صف پر عمل کو الجبرائی صورت میں قالب کے دائیں جانب لکھا گیا ہے جہاں S_1 ، S_2 ، ... گزشتہ قالب کے صف ہیں۔ درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب ہے۔

دوسری قدم میں (درج بالا حاصل کردہ کی) نیچلی مساوات سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

تبدیل شدہ افزودہ قالب کی دوسری صف کو $\frac{4}{7}$ سے ضرب دیتے ہوئے اسی قالب کی تیسری صف کے ساتھ جمع $(S_3 + \frac{4}{7}S_2)$ کریں۔ یہاں S_2 اور S_3 سے مراد درج بالا قالب کی دوسری اور تیسری صف ہے۔ یوں S_2 سے مراد $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 & -10 \end{bmatrix}$ ہے۔

$$(8.33) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & -\frac{26}{7} \end{bmatrix} S_3 + \frac{4}{7}S_2 \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -10 \\ \frac{26}{7}x_3 &= -\frac{26}{7} \end{aligned}$$

تکنونی قالب کے حصول کے بعد حل حاصل کرتے ہیں۔ نظام 8.33 کی چلی مساوات سے $x_3 = -1$ ملتا ہے جس کو نظام 8.33 کی درمیانی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_2 = 1$ ملتا ہے۔ ان دونوں جوابات کو پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 2$ ملتا ہے۔

اگر دوسری قدم پر آپ پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر تیسری مساوات سے منفی کریں تو حاصل مساوات میں x_1 دوبارہ حاضر ہو جائے گا جو پہلی قدم کی محنت کو ضائع کر دے گا۔ ہم ایسا نہیں چاہتے ہیں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی جسامت کی نظام کو حل کرتے ہوئے پہلی قدم پر، نظام کی پہلی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساوات سے x_1 حذف کیا جاتا ہے۔ دوسری قدم پر، پہلی قدم کی حاصل نظام کی دوسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے x_2 حذف کیا جاتا ہے۔ اسی طرح تیسری قدم پر، تیسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے x_3 حذف کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ آخر تک دہرایا جائے گا۔

اس نظام کو افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے حل کیا جاسکتا تھا۔ بار بار مکمل مساوات لکھنے کی کوئی ضرورت نہیں تھی۔ ہم عموماً ایسا ہی کرتے ہوئے، نظام کو افزودہ قالب کی صورت میں لکھ کر، اس کی تکنونی صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کریں گے۔ □

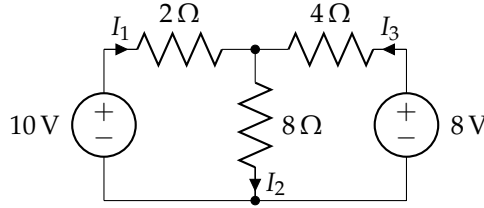
مثال 8.21: برقی دور کو شکل 8.3 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔ حل: کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$2I_1 + 8I_3 = 10$$

$$4I_3 + 8I_2 = 8$$

جبکہ کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$I_1 + I_3 = I_2$$



شکل 8.3: برقی دور۔ مثال 8.21

ان تینوں مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے ایک ساتھ لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی بائیں جانب اس نظام کا انفرودہ قالب بھی لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2I_1 + 8I_3 &= 10 \\ 8I_2 + 4I_3 &= 8 \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned}$$

پہلا قدم: چونکہ دوسری صف کا پہلا رکن صفر ہے لہذا اس کو کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے البتہ تیسرے صف کے پہلے رکن I_1 کو حذف کرنا ہو گا۔

پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔ درج ذیل میں S_3 سے مراد درج بالا قالب کی تیسری صف $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2I_1 + 8I_3 &= 10 \\ 8I_2 + 4I_3 &= 8 \\ S_3 - \frac{1}{2}S_1 & \quad -I_2 - 3I_3 = -5 \end{aligned}$$

دوسرا قدم: درج بالا کے تیسرے صف سے I_2 حذف کرتے ہیں۔

دوسرے صف کو $\frac{1}{8}$ سے ضرب دے کر تیسرے صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

درج ذیل لکھتے ہوئے S_3 سے مراد گزشتہ (درج بالا) قالب کی تیسری صف $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2I_1 + 8I_3 &= 10 \\ 8I_2 + 4I_3 &= 8 \\ S_3 + \frac{1}{8}S_2 & \quad -\frac{5}{2}I_3 = -4 \end{aligned}$$

تیسرا قدم: آخری صف یا آخری مساوات سے $I_3 = \frac{8}{5}$ ملتا ہے۔ اس قیمت کو درج بالا پہلی اور درمیانی مساوات میں پر کرتے ہوئے بقایا برقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$2I_1 + 8\left(\frac{8}{5}\right) = 10 \implies I_1 = -\frac{7}{5}$$

$$8I_2 + 4\left(\frac{8}{5}\right) = 8 \implies I_2 = \frac{1}{5}$$

□

مثال 8.22: درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

حل: پہلی قدم میں دوسری، تیسری اور چوتھی صف سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

دوسری قدم میں تیسری اور چوتھی مساوات سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{3}x_3 &= -\frac{14}{3} \\ -\frac{4}{3}x_3 &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

ہم تیسرے قدم پر تیسری یا چوتھی مساوات سے $x_3 = 2$ حاصل کرتے ہیں جس کو دوسری مساوات میں پر کرتے

□

ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے۔ انہیں پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 1$ ملتا ہے۔

بنیادی اعمال صف

قالب کی صفوں پر درج ذیل تین عمل سے نظام تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ گاوسی اسقاط پہلی دو اعمال سے حاصل ہوتا ہے۔

- دو صفوں کا آپس میں تبادلہ
 - صف کو کسی مستقل قیمت سے ضرب دے کر کسی دوسرے (یا اسی) صف کے ساتھ جمع کرنا
 - کسی صف کو غیر صفر مستقل قیمت c کے ساتھ ضرب دینا
- دھیان رہے کہ یہ اعمال افزودہ قالب کے صفوں پر قابل اطلاق ہیں نہ کہ قطاروں پر۔ یہ اعمال، نظام کی مساوات پر درج ذیل کے مترادف ہیں۔
- دو مساواتوں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنا۔
 - ایک مساوات کو کسی مستقل سے ضرب دے کر دوسری (یا اسی) مساوات کے ساتھ جمع کرنا۔
 - نظام کی مساوات کو غیر صفر مستقل c سے ضرب دینا۔

اب ظاہر ہے کہ ہزار مساواتوں کو آگے پیچھے لکھنے سے ان کا حاصل حل تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح کسی مساوات کو مستقل قیمت سے ضرب دے کر دوسری مساوات کے ساتھ جمع کرنے سے بھی حل تبدیل نہیں ہوتا اور نہ ہی کسی مساوات کو غیر صفر مستقل سے ضرب دینے سے حل تبدیل ہوتا ہے۔ (کسی مساوات کو صفر سے ضرب دینے سے مساواتوں کی تعداد کم ہوگی جس سے عین ممکن ہے کہ ان کا حل ممکن نہ رہے۔)

دو عدد خطی نظام N_1 اور N_2 اس صورت صف برابر⁴⁵ کہلاتے ہیں جب N_1 پر محدود عمل صف کے ذریعہ N_2 حاصل کرنا ممکن ہو۔ یہ حقیقت جسے درج ذیل طور پر بیان کیا جاسکتا ہے، گاوسی اسقاط کی جواز ہے۔

مسئلہ 8.1: صف برابر نظام
صف برابر خطی نظام کے سلسلہ حل⁴⁶ یکساں ہوں گے۔

⁴⁵row equivalent
⁴⁶solution set

اس مسئلے کی بنا اگر ایک نظام کا سلسلہ حل دوسرے نظام کے سلسلہ حل کے عین مطابق ہو، تب انہیں صف برابر نظام کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ یہاں عمل صف کی بات کی جا رہی ہے۔ افزودہ قالب کے قطار تبدیل کرنے سے نظام تبدیل ہو گا اور اس کا حل بھی تبدیل ہو گا لہذا افزودہ قالب پر کسی بھی عمل قطار کی اجازت نہیں ہے۔

ایسا نظام جس کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد زیادہ ہو زائد معلوم⁴⁷ کہلاتا ہے۔ نظام کی نا معلوم متغیرات اور مساواتوں کی تعداد برابر ہونے کی صورت میں اس کو معلوم⁴⁸ کہتے ہیں جبکہ نظام کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد کم ہونے کی صورت میں اس کو کم معلوم⁴⁹ کہتے ہیں۔

ایسا نظام جس کا کوئی حل نہ ہو متضاد⁵⁰ نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نظام جس کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہوں بلا تضاد⁵¹ نظام کہلاتا ہے۔

گاوسی اسقاط۔ نظام کی تین ممکنہ صورتیں

یکتا حل کا نظام مثال 8.20 میں دیکھا گیا۔ آئیں اب لامتناہی تعداد کے حل والے نظام (مثال 8.23) کو اور بغیر کسی حل والے نظام (مثال 8.24) کو گاوسی اسقاط سے حل کرنے کی کوشش کریں۔

مثال 8.23: لامتناہی تعداد کے حل والا نظام
درج ذیل نظام جو تین مساوات پر مبنی ہے میں چار متغیرات پائے جاتے ہیں۔ اس کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

حل: پہلی قدم میں خلی دو مساواتوں سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

overdetermined⁴⁷
determined⁴⁸
underdetermined⁴⁹
inconsistent⁵⁰
consistent⁵¹

پہلی صف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے دوسری صف سے منفی $(S_2 - 2S_1)$ کریں۔
پہلی صف کو 4 سے ضرب کرتے ہوئے تیسری صف سے منفی $(S_3 - 4S_1)$ کریں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & -8 & -6 & 8 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 4S_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ -4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -10 \\ -8x_2 - 6x_3 + 8x_4 = -20 \end{matrix}$$

دوسری قدم میں درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے، دوسرے صف کی مدد سے تیسری صف سے x_2 حذف کرتے ہیں۔ دوسری صف کو دو سے ضرب دیتے ہوئے تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_3 - 2S_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ -4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -10 \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

دوسری مساوات سے $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_3 + x_4$ اور یوں پہلی مساوات سے $x_1 = \frac{7}{4} - \frac{5}{8}x_3$ ملتا ہے۔ اب x_3 اور x_4 کی لامحدود مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے x_1 اور x_2 حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

عموماً اختیاری مستقل کو t_1 ، t_2 ، ... لکھا جاتا ہے۔ یوں x_3 اور x_4 کو بالترتیب t_1 اور t_2 لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{4} - \frac{5}{8}t_1 \\ x_2 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{4}t_1 + t_2 \end{aligned}$$

□

مثال 8.24: گاوسی اسقاط۔ بلا حل نظام

ایسا نظام جس کا حل ممکن نہ ہو کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے تضاد کی صورت حاصل ہوگی۔ آئیں درج ذیل نظام حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -2 & 16 & -10 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -2x_1 + 16x_2 - 10x_3 = 14 \end{matrix}$$

دوسری اور تیسری مساوات سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر دوسری صف سے منفی کرتے ہیں۔
پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 15 & -9 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_3 + \frac{1}{2}S_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ 15x_2 - 9x_3 = 17 \end{matrix}$$

آخری صف سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_3 - 3S_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ 0 = 8 \end{matrix}$$

آخری مساوات کے تحت $0 = 8$ ہے جو تضاد کی صورت ہے۔ بلا حل نظام کی گاوسی اسقاط تضاد کی صورت دے گی۔
□

8.3.1 صف زینہ دار صورت

گاوسی اسقاط کے بعد حاصل عددی سر قالب، افزودہ قالب اور نظام صف زینہ دار⁵² کہلاتے ہیں جن میں صفر کے صف، اگر موجود ہوں تو یہ، آخر پر پائے جاتے ہیں اور صف میں بائیں جانب پہلی غیر صفر اندراج، ہر اگلے صف میں، مزید دور ہوگی۔ مثال 8.24 میں عددی سر قالب اور افزودہ قالب کی زینہ دار صورت درج ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ ہم بائیں ترین اندراج کو اکائی (1) کی صورت میں لانے کی کوشش نہیں کرتے ہیں چونکہ اس سے کوئی فائدہ حاصل نہیں ہوگا۔ (سادہ زینہ دار صورت⁵³ جس میں بائیں ترین اندراج اکائی ہوگی پر بعد میں بحث کی جائے گی۔)

⁵² echelon form
⁵³ reduced echelon form

m مساوات اور n متغیرات کے نظام کا افزودہ قالب $[A|b]$ ہے جس سے زینہ دار صورت $[R|f]$ حاصل کی جاتی ہے۔ نظام $ax = b$ اور $Rx = f$ ایک ہی نظام کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔ اگر ان میں کسی ایک نظام کا حل موجود ہو، تب یہی حل دوسرے نظام کا بھی حل ہو گا۔

گاوسی اسقاط سے زینہ دار افزودہ قالب کی درج ذیل عمومی صورت حاصل ہو گی۔

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & \cdots & r_{1n} & f_1 \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & \cdots & r_{2n} & f_2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & r_{rr} & \cdots & r_{rn} & f_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_m \end{bmatrix}$$

درج بالا زینہ دار افزودہ قالب میں $m \leq r$ ، جبکہ $r_{rr} \neq 0$ تا f_{r+1} تا f_m اندراج والے صف میں تمام $r_{ij} = 0$ ہوں گے۔

زینہ دار عددی سر قالب R میں غیر صفر صفوں کی تعداد r کو A کا درجہ⁵⁴ کہتے ہیں جو A کا بھی درجہ ہو گا۔ یہ جاننا کہ نظام $Ax = b$ کا حل موجود ہے یا نہیں اور اس حل کو حاصل کرنا درج ذیل طریقے سے ممکن ہے۔

• (الف) بلا حل: اگر $r < m$ ہو (جس کا مطلب ہے کہ R میں کم از کم ایک صف ایسا ہے جس کے تمام اندراجات صفر (0) ہیں) اور f_{r+1} تا f_m میں سے کم از کم ایک مقدار غیر صفر ہو تب $Rx = f$ متضاد نظام ہو گا جس کا کوئی حل ممکن نہیں ہے۔ یوں $Ax = b$ بھی متضاد نظام ہو گا جس کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

بلا تضاد نظام (جس میں یا $r = m$ ہو اور یا $r < m$ کے ساتھ ساتھ f_{r+1} تا f_m صفر کے برابر ہوں) تب نظام کا حل درج ذیل ہو گا۔

• (ب) یکتا حل: اگر $r = n$ ہو تب نظام کا حل یکتا ہو گا جس کو گاوسی اسقاط سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ (مثال 8.20 کی طرح)۔

• (پ) بے انتہا تعداد کے حل: ایسی صورت میں x_{r+1} تا x_n کی قیمتیں چن کر x_1 تا x_{r-1} حاصل کریں۔ (مثال 8.23 کی طرح)۔

⁵⁴rank of matrix

سوالات

سوال 8.40 تا سوال 8.53 کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

سوال 8.40:

$$2x - 3y = -4$$

$$x + y = 3$$

جوابات: $x = 1, y = 2$

سوال 8.41:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = -1, x_2 = 1$

سوال 8.42:

$$x - 2y + z = -1$$

$$y - z = -1$$

$$2x + y + z = 1$$

جوابات: $x = -1, y = 1, z = 2$

سوال 8.43:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$

سوال 8.44:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = 2, x_2 = 1$

سوال 8.45:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & -5 & -21 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_3 = 4, x_2 = t, x_1 = 2t + 1$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.46:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_3 = t, x_2 = \frac{t}{2}, x_1 = -\frac{3}{2}t$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.47:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y + z &= -1 \\ 2x - y &= 6 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 2, y = -2, z = 1$

سوال 8.48:

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= -1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

جوابات: $z = t, y = 3 - 5t, x = 4t - 2$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.49:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x = \frac{1}{3}(7 - t), y = -\frac{1}{3}(4t + 2), z = t$ جہاں t اختیاری ہے۔

سوال 8.50:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_4 = t, x_3 = -\frac{4}{7}t, x_2 = \frac{5}{7}t, x_1 = -\frac{8}{7}t$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.51:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = -\frac{10}{7}(t+1), x_2 = \frac{1}{7}(5t+12), x_3 = -\frac{1}{7}(8t+15)$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔ بالائی صف کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے حل کریں اور یا پچھلی تکنیکی صورت حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 8.52:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -2$

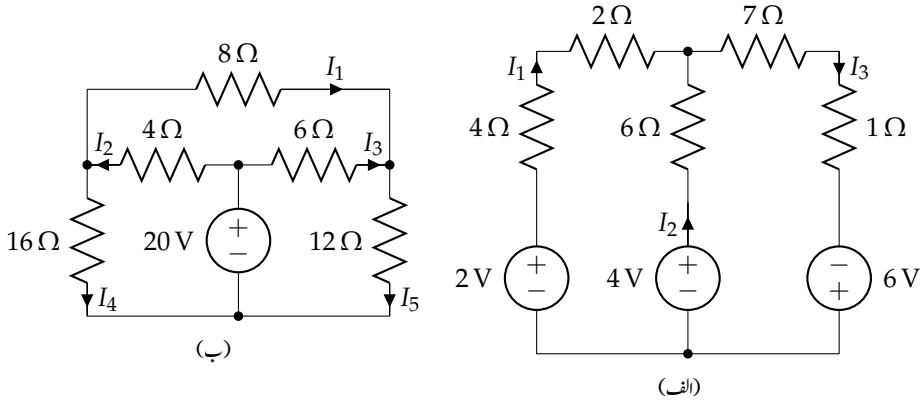
سوال 8.53:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & -4 & 6 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

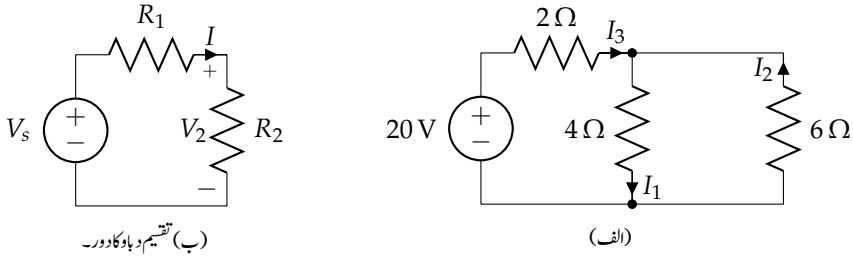
جوابات: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 1$

سوال 8.54 تا سوال 8.58 برقی ادوار کے نظام ہیں۔

سوال 8.54: شکل 8.4-الف میں برقی دور دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔



شکل 8.4: برقی دور۔ سوال 8.54 اور سوال 8.55



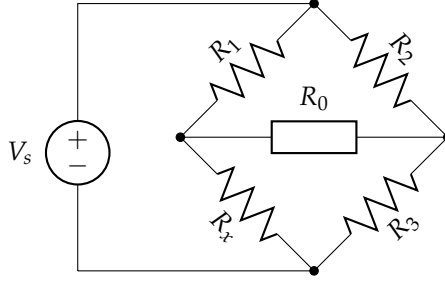
شکل 8.5: او دار برائے سوال 8.56 اور سوال 8.57

$$\text{جوابات: } I_3 = \frac{9}{11} \text{ A} , I_2 = \frac{19}{33} \text{ A} , I_1 = \frac{8}{33} \text{ A}$$

سوال 8.55: شکل 8.4-ب میں دکھائے گئے دور کو حل کریں۔

$$\text{جوابات: } I_5 = \frac{200}{171} \text{ A} , I_4 = \frac{55}{57} \text{ A} , I_3 = \frac{170}{171} \text{ A} , I_2 = \frac{65}{57} \text{ A} , I_1 = \frac{10}{57} \text{ A}$$

سوال 8.56: شکل 8.5-الف میں تینوں برقی رو دریافت کریں۔ برقی رو I_2 کی قیمت منفی ہے۔ اس کا کیا مطلب ہے؟ جوابات: $I_3 = \frac{50}{11} \text{ A} , I_2 = -\frac{20}{11} \text{ A} , I_1 = \frac{30}{11} \text{ A}$ منفی برقی رو کا مطلب ہے کہ رو کی سمت دکھائی گئی سمت کے الٹ ہے۔



شکل 8.6: ویٹسٹون پل۔ سوال 8.58

سوال 8.57: تقسیم دباؤ کا دور شکل 8.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ کرخوف قانون دباؤ سے V_s ، I ، R_1 اور R_2 کا تعلق لکھیں۔ اسی طرح V_2 اور I کا تعلق لکھیں۔ اس نظام کو حل کرتے ہوئے V_2 حاصل کریں۔ حاصل کلیہ تقسیم دباؤ⁵⁵ کا کلیہ کہلاتا ہے۔ جواب: $V_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_s$

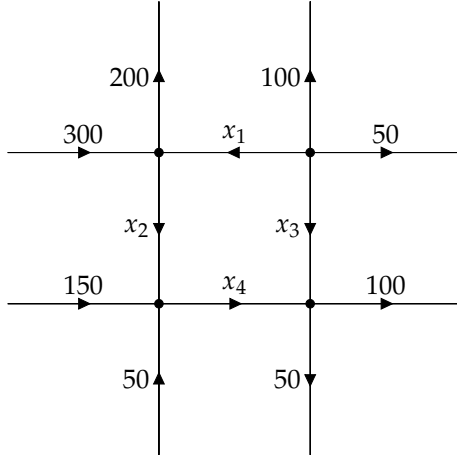
سوال 8.58: ویٹسٹون پل مزاحمتوں کی پیمائش کے لئے استعمال ہونے والا⁵⁶ ویٹسٹون پل⁵⁷ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ایک ہاتھ R_1 اور R_x نسب ہیں اور دوسرے ہاتھ R_2 اور R_3 نسب ہیں۔ دونوں ہاتھ آپس میں متوازی جڑے ہیں۔ ایک ہاتھ کے درمیانے نقطے سے دوسرے ہاتھ کے درمیانے نقطے تک ایمپیٹر پیما⁵⁸ بطور پل⁵⁹ نسب کیا گیا ہے جس کی مزاحمت R_0 ہے۔ ویٹسٹون پل سے نامعلوم مزاحمت R_x ناپی جاتی ہے۔ متغیر مزاحمت R_3 کو تبدیل کیا جاتا ہے حتیٰ کہ ایمپیٹر پیمہ $I_0 = 0$ ناپے۔ اس حالت میں ثابت کریں کہ $R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$ ہو گا۔ جواب: ایمپیٹر پیمہ اس صورت صفر برقی روناپے گی جب R_0 کے دونوں اطراف برقی دباؤ کی قیمت عین برابر ہو۔ اگر R_0 میں برقی رو صفر کے برابر ہو تب R_0 کو دور سے ہٹانے سے دور پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ ہم ایسا ہی کرتے ہوئے R_0 کو ہٹاتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ سوال 8.57 کے تحت R_x پر دباؤ $V_x = \left(\frac{R_x}{R_1 + R_x} \right) V_s$ اور R_3 پر دباؤ $V_3 = \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) V_s$ ہو گا۔ چونکہ یہ دونوں دباؤ برابر ہیں لہذا $V_s = \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) V_s = \left(\frac{R_x}{R_1 + R_x} \right) V_s$ ہو گا جس سے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 8.59: آمدورفت برقی ادوار حل کرنے کے طریقے دیگر شعبوں میں بھی استعمال کیے جاسکتے ہیں۔ شکل 8.7 میں شہر کی سڑکوں پر فی

voltage division formula⁵⁵

برطانوی سائنسدان چارلس ویٹسٹون [1802-1875] سے اس دور کا نام منسوب ہے۔

wheatstone bridge⁵⁷ammeter⁵⁸bridge⁵⁹



شکل 8.7: آمد و رفت۔ سوال 8.59

گھنٹہ گاڑیوں کی آمد و رفت دکھائی گئی ہے۔ کرخوف قانون رو کی مماثل استعمال کرتے ہوئے فی گھنٹہ نامعلوم آمد و رفت x_1 تا x_4 حاصل کریں۔ کیا حل یکتا حل ہے؟ جوابات: $x_2 = x_1 + 100$ ، $x_3 = -x_1 - 150$ اور $x_4 = x_1 + 300$ ؛ حل یکتا نہیں ہے۔

سوال 8.60: منڈی کی رسد و طلب

اشیاء کی مانگ، قیمت اور دستیابی کو بالترتیب M ، Q اور D سے ظاہر کرتے ہیں۔ دو شہروں میں رسد و طلبی کی متوازن مساوات ($M_1 = D_1$ ، $M_2 = D_2$) کا حل درج ذیل خطی تعلقات سے حاصل کریں، جہاں زیر نوشت میں 1 پہلے شہر اور 2 دوسرے شہر کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$M_1 = 30 - 3Q_1 - 2Q_2, \quad D_1 = 5Q_1 - 2Q_2 + 6$$

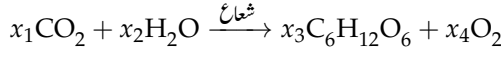
$$M_2 = 4Q_1 - Q_2 + 10, \quad D_2 = 3Q_2 - 6$$

جوابات: $Q_2 = 7$ ، $Q_1 = 3$ ، $M_2 = D_2 = 15$ ، $M_1 = D_1 = 7$

سوال 8.61: ضیائی تالیف

روشنی کی توانائی استعمال کرتے ہوئے پودے، پانی H_2O اور کاربن ڈائی آکسائیڈ CO_2 سے آکسیجن O_2 اور گلوکوز $C_6H_{12}O_6$ حاصل کرتے ہیں۔ یہ عمل، جسے درج ذیل کیمیائی مساوات میں پیش کیا گیا ہے، ضیائی

تالیف⁶⁰ کہلاتی ہے۔



کیمیائی مساوات متوازن کرنے سے مراد x_1 ، x_2 ، ... کی ایسی کمتر قیمتیں دریافت کرنا ہے کہ مساوات کے بائیں ہاتھ ہر قسم کی ایٹم کی تعداد دائیں ہاتھ اسی ایٹم کی تعداد کے برابر ہو۔ ضیائی تالیف کی مساوات کو متوازن کریں۔

جوابات: $x_1 = 6$ ، $x_2 = 6$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 6$

8.4 خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا

ہم خطی نظام کے خصوصیات کو مکمل طور پر حل کی موجودگی اور یکتائی کی نقطہ نظر سے دیکھنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم خطی الجبرا کے نئے اور بنیادی تصورات متعارف کرتے ہیں۔ ان میں خطی غیر تابعیت اور درجہ قالب زیادہ اہم ہیں۔ یاد رہے کہ گاوسی اسقاط انہیں پر منحصر ہے۔

سمتیات کی خطی تابعیت اور غیر تابعیت

m عدد سمتیات $a_{(1)}$ ، \dots ، $a_{(m)}$ (جن میں ارکان کی تعداد یکساں ہے) کی خطی مجموعہ⁶¹ درج ذیل مساوات دیتی ہے،

$$c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \dots + c_m a_{(m)}$$

جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔ اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$(8.34) \quad c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \dots + c_m a_{(m)} = 0$$

photosynthesis⁶⁰
linear combination⁶¹

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 8.34 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $0 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 8.34 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات خطی طور غیر تابع⁶² کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات کا خطی طور غیر تابع سلسلہ⁶³ ہے۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.34 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات خطی طور تابع⁶⁴ کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 8.34 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$a_{(1)} = k_2 a_{(2)} + \cdots - k_m a_{(m)} \quad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($a_{(1)} = 0$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ خطی طور غیر تابع سمتیات کا سلسلہ وہ کمتر تعداد کے سمتیات ہیں جن کے ساتھ ہم کام کر سکتے ہیں۔

مثال 8.25: خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع سمتیات
درج ذیل سمتیات

$$a_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a_{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$a_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

خطی طور تابع ہیں چونکہ انہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.34 کی طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$2a_{(1)} - a_{(2)} + 2a_{(3)} = 0$$

درج بالا کو با آسانی الجبرا سے ثابت کیا جاسکتا ہے البتہ اس تعلق کو حاصل کرنے اتنا آسان نہیں ہے۔ تابعیت ثابت کرنے کا منظم طریقہ نیچے دیا گیا ہے۔

□

اس مثال کے پہلے دو عدد سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔

linear independent⁶²

linearly independent set⁶³

linearly dependent⁶⁴

قالب کا درجہ

تعریف: قالب A میں خطی طور غیر تابع صفوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کو A کا درجہ⁶⁵ کہتے ہیں۔

قالبوں اور خطی مساوات کے نظاموں کی عمومی خصوصیات سمجھنے میں درجہ قالب کا تصور کار آمد ثابت ہو گا۔

مثال 8.26: درجہ قالب

جیسا گزشتہ مثال میں دیکھا گیا، درجہ قالب میں دو عدد صف خطی طور غیر تابع ہیں لہذا اس قالب کا درجہ 2 ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ درجہ A اس صورت 0 ہو گا جب $A = 0$ ہو۔ یہ حقیقت درجہ قالب کی تعریف سے اخذ ہوتی ہے۔ □

دو عدد قالب A_1 اور A_2 اس صورت صف برابر⁶⁶ کہلاتے ہیں جب A_1 پر محدود عمل صف کے ذریعہ A_2 حاصل کرنا ممکن ہو۔

اب قالب میں خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد، صفوں کی جگہ تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتی اور نا ہی کسی صف کو غیر صفر قیمت c سے ضرب دینے اور نہ ہی صفوں کے خطی ملاپ سے ہوتی ہے۔ یوں اعمال صف کی صورت میں کسی بھی قالب کا درجہ مستقل قیمت ہو گا۔

مسئلہ 8.2: صف برابر قالب

صف برابر قالبوں کا درجہ ایک جیسا ہو گا۔

⁶⁵rank
⁶⁶row equivalent

یوں گاوسی استقاط (حصہ 8.3) سے تکونی قالب حاصل کرتے ہوئے درجہ قالب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ تکونی قالب میں غیر صفر صفوں کی تعداد درجہ قالب ہوگی۔

مثال 8.27: مثال 8.26 میں دیے گئے قالب کا درجہ، اس کی تکونی قالب کی مدد سے دریافت کرتے ہیں۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 ، ... گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری، ... صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 - 4S_1 \\ S_3 - S_1 \end{matrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_3 - \frac{1}{2}S_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

آخری قالب تکونی ہے جس کے آخری صف کے تمام اندراجات صفر کے برابر ہیں لہذا یہ صفر صف ہے۔ غیر صفر صفوں کی تعداد 2 ہے لہذا A کا درجہ بھی 2 ہے۔ \square

مثال 8.25 تا مثال 8.27 میں $p = 3$ ، $n = 3$ اور درجہ قالب 2 لیتے ہوئے درجہ ذیل مسئلے کو پڑھیں۔

مسئلہ 8.3: سمتیات کی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے p عدد سمتیات جن میں ہر سمتیہ کے n عدد ارکان ہوں کو بطور قالب کے صف لکھیں۔ اگر حاصل قالب کا درجہ p ہو تب یہ سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ اس کے برعکس اگر اس قالب کا درجہ p سے کم ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

دیگر اہم خصوصیات درجہ ذیل مسئلے سے حاصل ہوں گے۔

مسئلہ 8.4: سمتیات قطار کی صورت میں درجہ قالب

قالب A کا درجہ r ، اس قالب میں غیر تابع سمتیہ قطار کی تعداد کے برابر ہوگا۔

یوں قالب A اور تبدیل محل قالب A^T کا درجہ ایک دونوں کے برابر ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ $m \times n$ قالب A کا درجہ r ہے۔ درجہ قالب کی تعریف سے یوں A کے r عدد خطی طور غیر تابع صف ہوں گے جنہیں ہم $v_{(1)}, \dots, v_{(r)}$ کہتے ہیں اور A کے تمام صف $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ کو ان خطی طور غیر تابع کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_{(1)} = c_{11}v_{(1)} + c_{12}v_{(2)} + \dots + c_{1r}v_{(r)}$$

$$a_{(2)} = c_{21}v_{(1)} + c_{22}v_{(2)} + \dots + c_{2r}v_{(r)}$$

$$\vdots$$

$$a_{(m)} = c_{m1}v_{(1)} + c_{m2}v_{(2)} + \dots + c_{mr}v_{(r)}$$

یہ مساوات سمتیات ہیں جن میں سے ہر n عدد مساوات پر مشتمل ہے۔ $v_{(1)}$ کے ارکان کو v_{11}, \dots, v_{1n} لکھتے ہوئے اور اسی طرح بائیں ہاتھ کے سمتیات کے ارکان کو بھی لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں $k = 1, \dots, n$ ہے۔

$$a_{1k} = c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \dots + c_{1r}v_{rk}$$

$$a_{2k} = c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \dots + c_{2r}v_{rk}$$

$$\vdots$$

$$a_{mk} = c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \dots + c_{mr}v_{rk}$$

اس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = v_{1k} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + v_{2k} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \dots + v_{rk} \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix}$$

بائیں ہاتھ سمتیہ A قالب کا k شمار پر قطار ہے۔ یوں درج بالا مساوات کے تحت A کا ہر قطار، دائیں ہاتھ کے r عدد سمتیات کا خطی مجموعہ ہے لہذا A کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد r سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے جو خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد ہے۔

اب یہی کچھ تبدیل محل قالب A^T کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے۔ چونکہ A^T کے سمتیات صف A کے سمتیات قطار، اور A^T کے سمتیات قطار A کے سمتیات صف ہیں، لہذا (درج بالا نتیجے کے تحت) A

کی خطی طور غیر تابع صف سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد (جو r کے برابر ہے)، A کی خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے۔ اس طرح یہ تعداد r ہی ممکن ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 8.27 میں قالب A کا درجہ 2 ہے۔ یوں A کے دو قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ بائیں جانب سے پہلی اور دوسری قطار کو خطی طور غیر تابع لیتے ہوئے تیسرے اور چوتھے قطار کو درجہ ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

مسئلہ 8.3 اور مسئلہ 8.4 کی مدد سے درجہ ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.5: سمتیات کی خطی طور تابعیت

فرض کریں کہ p سمتیات کا ہر رکن n ارکان پر مشتمل ہے۔ اگر $n < p$ ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

ثبوت: ایسا قالب A جس کے صف یہی p سمتیات ہوں اور جس کی قطاروں کی تعداد n (جہاں $n < p$ ہے) ہو کا مسئلہ 8.4 کے تحت

$$A \leq n < p \text{ درجہ}$$

ہو گا جو مسئلہ 8.3 کے تحت خطی تابعیت کو ظاہر کرتی ہے۔

□

سمتی فضا

فرض کریں کہ V سمتیات کا ایسا غیر خالی سلسلہ⁶⁷ ہے جس کے تمام سمتیات میں ارکان کی تعداد یکساں ہے۔ اگر V میں موجود کسی بھی دو سمتیات a اور b کے تمام ممکنہ مجموعے $\alpha a + \beta b$ (جہاں α اور β حقیقی اعداد ہیں۔) بھی V کے ارکان ہوں، اور مزید یہ کہ، a اور b مساوات 8.7-الف، پ، ت اور مساوات 8.8 پر پورا اترتے ہوں، اور V میں کوئی بھی سمتیات a ، b ، c مساوات 8.7-ب پر پورا اترتے ہوں، تب V سمتی فضا⁶⁸ کہلائے گا۔

V میں خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد کو V کی بعد⁶⁹ کہتے ہیں۔ یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ V کی بعد محدود ہے۔ لامتناہی بعد کے سلسلے پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

V میں موجود خطی طور غیر تابع سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد پر مبنی سلسلے کو V کا اساس⁷⁰ کہتے ہیں۔ اس (اساسی) سلسلے میں کسی بھی ایک یا ایک سے زیادہ سمتیات کو شامل کرنے سے یہ سلسلہ خطی طور تابع ہو جائے گا۔ یوں V کی اساس میں سمتیات کی تعداد، V کی بعد کے برابر ہوگی۔

کسی بھی دیے گئے، یکساں تعداد کے ارکان والے سمتیات $a_{(1)}, \dots, a_{(p)}$ کے تمام ممکنہ مجموعوں کا سلسلہ، ان سمتیات کا احاطہ⁷¹ کہلاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔ اگر $a_{(1)}, \dots, a_{(p)}$ خطی طور غیر تابع ہوں تب اس سمتی فضا کی اساس یہی سمتیات ہوں گے۔

اس سے اساس کی نئی تعریف ملتی ہے۔ سمتیات کا سلسلہ اس صورت سمتی فضا V کا اساس ہو گا (الف) اگر اس سلسلے میں سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں اور (ب) اگر V میں کسی بھی سمتیہ کو سلسلے کے سمتیات کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن ہو۔

سمتی فضا کی ذیلی فضا⁷² سے مراد V کا وہ غیر خالی ذیلی سلسلہ⁷³ ہے (جو پورے V پر بھی مشتمل ہو سکتا ہے۔) جو V کی سمتیات پر لاگو جمع اور غیر سمتی ضرب کے قواعد پر پورا اترتا ہو اس سمتی فضا ہو۔

nonempty set⁶⁷
vector space⁶⁸
dimension⁶⁹
basis⁷⁰
span⁷¹
subspace⁷²
subset⁷³

مثال 8.28: سمتی فضا، بُعد، اساس
 مثال 8.25 کے تین سمتیات کے احاطے کی بُعد 2 ہے۔ اس سمتی فضا کی اساس ان میں سے کسی بھی دو سمتیات پر مشتمل ہو گا مثلاً $a_{(1)}$ اور $a_{(2)}$ یا $a_{(1)}$ اور $a_{(3)}$ اور یا $a_{(2)}$ اور $a_{(3)}$ ۔
 □

مسئلہ 8.6: سمتی فضا R^n
 n سمتیات (حقیقی اعداد) پر مشتمل سمتی فضا R^n کی بُعد n ہو گی۔

ثبوت: n سمتیات کی اساس درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} a_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ a_{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ a_{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

قالب A کے سمتیات صف کے احاطے کو A کا صف فضا⁷⁴ کہتے ہیں۔ اسی طرح قالب A کے سمتیات قطار کے احاطے کو A کا قطار فضا⁷⁵ کہتے ہیں۔

اب مسئلہ 8.4 کے تحت قالب کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد اس کے خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد کے برابر ہوتی ہے۔ بُعد کی تعریف کے تحت، یہ عدد صف فضا یا قطار فضا کی بُعد ہو گا۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.7: صف فضا اور قطار فضا
 قالب A کی قطار فضا کی بُعد، اس کی صف فضا کی بُعد اور درجہ A عین برابر ہوں گے۔

⁷⁴ row space
⁷⁵ column space

آخر میں کسی بھی قالب A کی غیر متجانس مساوات $Ax = 0$ کا سلسلہ حل، سمتی فضا ہو گا جس کو A کی معدوم فضا⁷⁶ کہتے ہیں، اور جس کی بُعد کو A کی معدومیت⁷⁷ کہتے ہیں۔ اگلے حصے میں درج ذیل بنیادی تعلق کو ثابت کیا جائے گا۔

$$(8.35) \quad A \text{ کی تعداد قطار} = \text{معدومیت } A = \text{درجہ } A$$

سوالات

سوال 8.62 تا سوال 8.71 کی تکنیکی صورت گاوسی اسقاط سے حاصل کرتے ہوئے درجہ قالب حاصل کریں۔ صف فضا اور قطار فضا کی اساس بھی حاصل کریں۔

سوال 8.62:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

جوابات: درجہ $= 1$ ؛ $[6 \ -2 \ 8]$ ؛ $[2 \ -1]^T$ - آخری سمتیہ کو $[6 \ -3]^T$ کی جگہ $[2 \ -1]^T$ لکھا گیا ہے۔ بقایا سوالات کے جوابات میں بھی بعض اوقات سمتیہ کی سادہ ترین صورت دی گئی ہے۔

سوال 8.63:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3؛ $[0 \ 0 \ 1]^T$ ، $[0 \ 1 \ 1]^T$ ، $[1 \ 2 \ 0]^T$ ؛ $[0 \ 0 \ 1]$ ، $[0 \ 1 \ 2]$ ، $[1 \ 2 \ 0]$ ؛

سوال 8.64:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

⁷⁶ null set
⁷⁷ nullity

8.4. خطی غیر تابعیت در حـب قالبـ سـتی نصف

$$\text{جوابات: } 2؛ [0 \ 1 \ 0]^T، [8 \ 0 \ 4]^T؛ [0 \ 1 \ 0 \ 2]، [8 \ 0 \ 4 \ 0]$$

سوال 8.65:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } 3؛ [0 \ 0 \ 1 \ -1]^T، [0 \ 2 \ -1 \ 3]^T، [2 \ 0 \ 1 \ 1]^T؛ [0 \ 0 \ 1 \ 0]، [0 \ 1 \ -1 \ 1]، [2 \ 0 \ 4 \ 0]$$

سوال 8.66:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } 3؛ [0 \ 0 \ 1]، [0 \ 9 \ 2]، [1 \ 2 \ 0]^T؛ [0 \ 0 \ 1]، [0 \ 9 \ -1]، [3 \ 0 \ 2]$$

سوال 8.67:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } 2؛ [0 \ a^2 - b^2]^T، [a \ b]^T؛ [0 \ a^2 - b^2]، [a \ b]$$

سوال 8.68:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & -1 & 16 & -4 \\ 8 & 1 & 32 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } 2؛ [0 \ 1 \ 3 \ 5]^T، [1 \ 2 \ 4 \ 8]^T؛ [0 \ 1 \ 0 \ 4]، [1 \ 2 \ 4 \ 8]$$

سوال 8.69:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 8 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $[8 \ 4 \ 8 \ 2]$ ، $[0 \ 56 \ 48 \ 28]$ ، $[0 \ 0 \ 1 \ 0]$ ، $[8 \ 16 \ 8 \ 2]^T$ ، $[0 \ 2 \ 2 \ -1]^T$ ، $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

سوال 8.70:

$$A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (a_{jk} = j + k)$$

جوابات: 2 ؛ $[2 \ 3 \ 4 \ 5]^T$ ، $[0 \ 1 \ 2 \ 3]$ ، $[2 \ 3 \ 4 \ 5]$ ، $[0 \ 1 \ 2 \ 3]^T$

سوال 8.71:

$$A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (a_{jk} = j + k - 1)$$

جوابات: 2 ؛ $[1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$ ، $[1 \ 2 \ 3 \ 4]$ ، $[0 \ 1 \ 2 \ 3]$ ، $[1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$

سوال 8.72: قالب $A = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = j + k - 1$ کے برابر ہے، کا درجہ n کے برابر ہے۔ اس حقیقت کو $n = 5$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔ سوال 8.71 میں $n = 4$ کے لئے اس حقیقت کو ثابت کیا گیا ہے۔

سوال 8.73: قالب $A = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = j + k + c$ کے برابر ہے (c مثبت عدد ہے)، کا درجہ n کے برابر ہے۔ اس حقیقت کو $n = 4$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔

سوال 8.74: قالب $A = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = 2^{j+k-2}$ کے برابر ہے، کا درجہ 1 کے برابر ہے۔ اس حقیقت کو $n = 3$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔

سوال 8.75 تا سوال 8.79 میں قالبوں کی عمومی خصوصیات پر غور کیا گیا ہے۔ دیے گئے تعلق ثابت کریں۔

سوال 8.75:

$$AB \text{ درجہ } = B^T A^T \text{ درجہ}$$

سوال 8.76: اگر A درجہ B ہو تب ضروری نہیں ہے کہ $A^2 = B^2$ ہو گا۔

سوال 8.77: غیر چکور قالب A کے یا تو صف خطی طور غیر تابع ہوں گے اور یا اس کے قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

سوال 8.78: اگر چکور قالب کے صف خطی طور غیر تابع ہوں، تب اس کے قطار بھی خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ اسی طرح اگر اس قالب کے قطر خطی طور غیر تابع ہوں، تب اس کے صف بھی خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

سوال 8.79: مثال دے کر ثابت کریں درجہ AB کسی صورت درجہ A یا درجہ B سے زیادہ نہیں ہوگا۔

سوال 8.80 تا سوال 8.88 میں ثابت کریں کہ آیا دیے گئے سمتیات خطی طور تابع ہیں یا خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 8.80:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.81:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع۔ سمتیات کو بطور قالب کے صف سمتیہ لکھتے ہوئے گاوسی اسقاط سے قالب کا درجہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کی تابعیت یا غیر تابعیت دریافت کی جاسکتی ہے۔

سوال 8.82:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.83:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.84:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.85:

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.86:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.4 & 0.0 & 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.87:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{17}{6} \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.88:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.89: خطی طور غیر تابع ذیلی سلسلہ درج ذیل سمتیات کے دائیں ترین سمتیہ $\begin{bmatrix} 10 & -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ سے شروع کرتے ہوئے باری باری ایک ایک سمتیہ کم کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع ذیلی سلسلہ دریافت کریں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

جوابات: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

سوال 8.90 تا سوال 8.90: کیا دیے گئے سمتیات، سمتی فضا ہیں۔ سمتی فضا ہونے کی صورت میں اس کی بُعد اور اساس (v_1, v_2, \dots) دریافت کریں۔

سوال 8.90: R^3 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$ ہے۔

جوابات: 2: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

سوال 8.91: R^2 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 \geq v_2$ ہے۔

جواب: سمتی فضا نہیں ہے۔

سوال 8.92: R^5 کے تمام مثبت ارکان۔

جواب: سمتی فضا نہیں ہے۔

سوال 8.93: R^3 کے تمام ارکان جہاں $3v_1 - v_3 = 0$ اور $2v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0$ ہے۔

جوابات: 1: حل $\begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} & 3 \end{bmatrix}$ اور اساس $\begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} & 3 \end{bmatrix}$

سوال 8.94: R^4 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 = 2v_2 = 3v_3 = 4v_4$ ہے۔

جوابات: 1: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$

8.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی

خطی نظام کے حل کی وجودیت، یکتائی اور عمومی ساخت کی مکمل معلومات اس کی درجہ سے حاصل ہوتی ہے۔ اس پر غور کرتے ہیں۔

اگر n متغیرات پر مبنی مساوات کے خطی نظام کی عددی سر قالب اور افزودہ قالب کا درجہ یکساں n کے برابر ہو تب اس نظام کا حل یکتا ہو گا۔ البتہ اگر ان کا یکساں درجہ n سے کم ہو تب نظام کے لامتناہی تعداد میں حل ممکن ہوں گے۔ اگر ان قالبوں کے درجہ آپس میں مختلف ہوں تب نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو گا۔

اس حقیقت کو ثابت کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم A کا ذیلی قالب⁷⁸ بروئے کار لائیں گے۔ A سے چند صف یا چند قطار (یا دونوں) خارج کرتے ہوئے اس کا ذیلی قالب حاصل ہوتا ہے۔ A سے صفر صف اور صفر قطار خارج کرتے ہوئے بھی اس کا ذیلی قالب حاصل کیا جاسکتا ہے جو ظاہر ہے کہ A ہی ہو گا۔

مسئلہ 8.8: خطی نظام کا بنیادی مسئلہ

(الف) وجودیت⁷⁹۔ ایسا خطی نظام جو n متغیرات x_1, \dots, x_n کے درج ذیل m مساوات پر مبنی ہو،

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (8.36)$$

صرف اور صرف اس صورت بلا تضاد ہو گا، یعنی اس کے حل ممکن ہوں گے، جب نظام کے عددی سر قالب A کا درجہ اس نظام کے افزودہ قالب \tilde{A} کے درجے کے برابر ہو۔ عددی سر قالب اور افزودہ قالب درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

⁷⁸submatrix
⁷⁹existence

(ب) یکتائی⁸⁰ - نظام 8.36 کا حل اس صورت یکتا ہو گا جب A کا درجہ اور \tilde{A} کا درجہ، n کے برابر ہو۔

(پ) لامتناہی تعداد کے حل۔ اگر A اور \tilde{A} کا یکساں درجہ r ، نامعلوم متغیرات کی تعداد n سے کم ہو تب نظام 8.36 کے لامتناہی تعداد میں حل ممکن ہوں گے۔ ایسے تمام حل، r موزوں متغیرات (جس کے ذیلی عددی سر قالب کا درجہ لازمی طور پر r ہو) کو بقایا $n - r$ اختیاری متغیرات کی صورت میں معلوم کرتے ہوئے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ اختیاری متغیرات کی قیمتیں چنتے ہوئے مختلف حل حاصل ہوں گے۔ (مثال 8.23 دیکھیں)۔

(ت) گاوسی اسقاط (حصہ 8.3)۔ گاوسی اسقاط سے تمام حل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ (جیسا حصہ 8.3 میں بتلایا گیا ہے، گاوسی اسقاط سے خود بخود حل کی موجودگی کا پتہ لگے گا)۔

ثبوت :

(الف) نظام 8.36 کو سمتی مساوات $Ax = b$ یا A کی سمتیات قطار $c_{(1)}, \dots, c_{(n)}$ کی مدد سے

$$(8.37) \quad c_{(1)}x_1 + c_{(2)}x_2 + \dots + c_{(n)}x_n = b$$

لکھا جاسکتا ہے۔ A کے ساتھ b کی قطار شامل کرتے ہوئے افزودہ قالب \tilde{A} حاصل ہوتا ہے۔ مسئلہ 8.4 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\text{درجہ } \tilde{A} = 1 + \text{درجہ } A \quad \text{یا} \quad \text{درجہ } \tilde{A} = \text{درجہ } A$$

اب اگر نظام 8.36 کا حل x ہو تب مساوات 8.37 کے تحت b کو قطار $c_{(1)}, \dots, c_{(n)}$ کی صورت میں بطور خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے (یعنی b خطی طور غیر تابع نہیں ہو گا) لہذا \tilde{A} اور A میں خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد ایک جیسی ہوگی اور یوں ان قالبوں کا درجہ بھی ایک جیسا ہو گا۔

ساتھ ہی ساتھ اگر $\text{درجہ } A = \text{درجہ } \tilde{A}$ ہو تب b لازماً A کے سمتیات قطار کا خطی مجموعہ ہو گا یعنی

$$(8.38) \quad b = \alpha_1 c_{(1)} + \dots + \alpha_n c_{(n)}$$

ورنہ

$$\text{درجہ } \tilde{A} = 1 + \text{درجہ } A$$

ہو گا۔ اب مساوات 8.38 کا مطلب ہے کہ نظام 8.36 کا حل موجود ہے یعنی $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ جو مساوات 8.37 اور مساوات 8.38 کو دیکھ کر لکھا جاسکتا ہے۔

(ب) اگر درجہ $n = A$ ہو تب مسئلہ 8.4 کے تحت مساوات 8.37 کے n عدد سمتیات قطار، خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ مساوات 8.37 میں b کا دیا گیا تعلق یکتا ہے ورنہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا

$$c_{(1)}x_1 + c_{(2)}x_2 + \cdots + c_{(n)}x_n = c_{(1)}\tilde{x}_1 + c_{(2)}\tilde{x}_2 + \cdots + c_{(n)}\tilde{x}_n$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$(x_1 - \tilde{x}_1)c_{(1)} + (x_2 - \tilde{x}_2)c_{(2)} + \cdots + (x_n - \tilde{x}_n)c_{(n)} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے اور خطی طور غیر تابعیت کی بنا اس سے مراد $x_1 - \tilde{x}_1 = 0, \dots, x_n - \tilde{x}_n = 0$ ہے۔ لیکن اس کا مطلب ہے کہ مساوات 8.37 میں x_1 تا x_n غیر سمتی مقدار یکتا ہیں اور یوں نظام 8.36 کا حل یکتا ہو گا۔

(پ) اگر درجہ $\tilde{A} = A$ درجہ $n > r = A$ ہو تب مسئلہ 8.4 کے تحت A کے ایسے r عدد قطاروں پر مشتمل سلسلہ K پایا جاتا ہے جن کی خطی مجموعے کی صورت میں A کے بقایا $n - r$ قطاروں کو لکھا جاسکتا ہے۔ ہم قطاروں اور متغیرات کو نئی علامتوں سے ظاہر کرتے ہیں جہاں نئی علامتوں پر \wedge کا نشان ہو گا۔ یوں سلسلہ K کی خطی طور غیر تابع قطاروں کو اب $\hat{c}_{(1)}, \dots, \hat{c}_{(r)}$ لکھا جائے گا۔ مساوات 8.37 اب درج ذیل لکھی جائے گی

$$\hat{c}_{(1)}\hat{x}_1 + \cdots + \hat{c}_{(r)}\hat{x}_r + \hat{c}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1} + \cdots + \hat{c}_{(n)}\hat{x}_n = b$$

جہاں $\hat{c}_{(r+1)}, \dots, \hat{c}_{(n)}$ کو K کے قطاروں کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے اور اسی طرح $\hat{c}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}, \dots, \hat{c}_{(n)}\hat{x}_n$ کو بھی K کے قطاروں کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے انہیں K کی قطاروں کے مجموعے لکھتے ہوئے اجزاء اکٹھے کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$(8.39) \quad \hat{c}_{(1)}y_1 + \cdots + \hat{c}_{(r)}y_r = b$$

جہاں $y_j = x_j + \beta_j$ ہو گا اور β_j از خود $n - r$ اجزاء $\hat{c}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}, \dots, \hat{c}_{(n)}\hat{x}_n$ سے حاصل ہوں گے۔ یہاں $j = 1, \dots, r$ ہے۔ چونکہ اس نظام کا حل موجود ہے لہذا ایسے y_1 تا y_r موجود ہیں جو مساوات 8.39 پر پورا اترتے ہیں۔ چونکہ K خطی طور غیر تابع ہے لہذا غیر سمتی مقدار y_1 تا y_r یکتا ہیں۔ \hat{x}_{r+1} تا \hat{x}_n کی قیمتیں چننے سے β_j اور مطابقتی $\hat{x}_j = y_j - \beta_j$ کی قیمتیں قطعی طور تعین ہوتی ہیں، جہاں $j = 1, \dots, r$ ہے۔

(ت) حصہ 8.3 میں اس پر بحث کی گئی ہے لہذا اس پر دوبارہ بات نہیں کی جائے گی۔



درج بالا مسئلے کا استعمال حصہ 8.3 میں کیا گیا ہے جہاں مثال 8.22 کے آخر میں $S_4'' - \frac{4}{7}S_3''$ کے عمل سے آخری صف، صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں درجہ قالب 3 حاصل ہوتا ہے جو نظام میں متغیرات کی تعداد کے برابر ہے ($n = 3 = \text{درجہ } A = \text{درجہ } \tilde{A}$) لہذا نظام کا یکتا حل پایا گیا۔

مثال 8.23 میں ($n = 4 < \text{درجہ } A = \text{درجہ } \tilde{A}$) ہے لہذا اس مثال کی نظام کے یوں لامتناہی تعداد میں حل ممکن ہیں۔ x_3 اور x_4 اختیاری متغیرات کی قیمتیں چنتے ہوئے x_1 اور x_2 حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 8.24 میں ($n = 3 = \text{درجہ } \tilde{A} < \text{درجہ } A$) ہے لہذا اس نظام کا کوئی بھی حل ممکن نہیں ہے۔

متجانس خطی نظام

جیسا حصہ 8.3 میں بتلایا گیا ہے، نظام 8.36 میں تمام b_j صفر ہونے کی صورت میں یہ متجانس کہلائے گا۔ اگر ایک یا ایک سے زیادہ b_j غیر صفر ہوں تب یہ غیر متجانس نظام کہلائے گا۔ مسئلہ 8.8 سے متجانس نظام کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.9: متجانس خطی نظام
متجانس نظام

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (8.40)$$

کا ہر صورت ایک عدد غیر اہم صفر حل $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ ہو گا۔ غیر صفر اہم حل صرف اور صرف اس صورت موجود ہوں گے جب درجہ $n > A$ ہو۔ اگر درجہ $n > r = A$ ہو تب، یہ حل اور غیر اہم حل مل کر $n - r$ بعد کی سمتی فضا (حصہ 8.4 دیکھیں) بناتے ہیں جو نظام 8.40 کی حل فضا⁸¹ کہلاتا ہے۔

⁸¹solution space

خاص کر اگر $x_{(1)}$ اور $x_{(2)}$ نظام 8.40 کے حل سمتیات ہوں تب $x = c_1 x_{(1)} + c_2 x_{(2)}$ ، جہاں c_1 اور c_2 کوئی بھی غیر سستی مقدار ہیں، بھی نظام 8.40 کا حل سمتیہ ہو گا۔ (دھیان رہے کہ یہ غیر متجانس نظام کے لئے درست نہیں ہے۔ مزید یہ کہ حل فضا کی اصطلاح صرف متجانس نظام کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔)

ثبوت: پہلا دعویٰ نظام کو دیکھ کر سمجھا جاسکتا ہے۔ یہ اس حقیقت کے عین مطابق ہے کہ $b = 0$ سے مراد درجہ $A = A$ درجہ \bar{A} ہے لہذا متجانس نظام ہر صورت بلا تضاد ہو گا۔ اگر درجہ $n = A$ ہو تب مسئلہ 8.8-ب کے تحت غیر اہم صفر حل اس نظام کا یکتا حل ہو گا۔ اگر درجہ $n > A$ ہو تب مسئلہ 8.8-پ کے تحت غیر صفر اہم حل موجود ہوں گے۔ یہ حل مل کر حل فضا بناتے ہیں چونکہ اگر $x_{(1)}$ اور $x_{(2)}$ ان میں سے کوئی دو عدد حل ہوں تب $Ax_{(1)} = 0$ اور $Ax_{(2)} = 0$ ہو گا جس سے مراد

$$A(x_{(1)} + x_{(2)}) = Ax_{(1)} + Ax_{(2)} = 0 \quad \text{اور} \quad A(cx_{(1)}) = cAx_{(1)} = 0$$

ہے جہاں c اختیاری مستقل ہے۔ اگر درجہ $r = A$ ہو تب مسئلہ 8.8-پ کے تحت ہم کسی بھی ترتیب سے $n - r$ موزوں متغیرات، جنہیں ہم x_{r+1}, \dots, x_n کہتے ہیں، چن کر ان کی قیمتیں مقرر کرتے ہوئے ہر حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں نظام 8.40 کے حل فضا کی اساس، جس کو ہم مختصراً اساس حل کہیں گے، $y_{(1)}, \dots, y_{(n-r)}$ ہوں گے جہاں $x_{r+j} = 1$ اور x_{r+1} تا x_n میں بقایا کو صفر چنتے ہوئے اساسی سمتیہ $y_{(j)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں اس حل سمتیہ کے پہلے r مطابقتی ارکان حاصل ہوتے ہیں۔ یوں نظام 8.40 کے اساس حل کی بعد $n - r$ ہو گی جس سے مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

چونکہ نظام 8.40 کی حل فضا میں ہر x کے لئے $Ax = 0$ ہے لہذا نظام 8.40 کے حل فضا کو معدوم فضا⁸² بھی کہتے ہیں اور اس کی بعد کو A کی معدومیت⁸³ کہتے ہیں۔ یوں مسئلہ 8.9 درج ذیل کہتا ہے

$$(8.41) \quad \text{معدومیت } A + \text{درجہ } A = n$$

جہاں نامعلوم متغیرات کی تعداد (A میں قطاروں کی تعداد) n ہے۔

مزید تعریف درجہ کے تحت نظام 8.40 کا درجہ $A \geq m$ ہو گا۔ یوں $m < n$ کی صورت میں درجہ $n > A$ ہو گا۔ اس طرح مسئلہ 8.9 سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

null space⁸²
nullity⁸³

مسئلہ 8.10: متغیرات کی تعداد سے کم مساوات کا متجانس نظام ایسا متجانس نظام جس میں مساوات کی تعداد، متغیرات کی تعداد سے کم ہو کے ہر صورت غیر صفر اہم حل موجود ہوں گے۔

غیر متجانس خطی نظام

نظام 8.36 کے تمام حل درج ذیل ہوں گے۔

مسئلہ 8.11: غیر متجانس خطی نظام اگر غیر متجانس نظام 8.36 بلا تضاد ہو تب اس کے تمام حل درج ذیل ہوں گے

$$(8.42) \quad x = x_0 + x_h$$

جہاں x_0 نظام 8.36 کا کوئی بھی (معیّن) حل ہے جبکہ x_h ، مطابقتی متجانس نظام 8.40 کا، باری باری ہر حل ہو گا۔

ثبوت: چونکہ $Ax_h = A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$ ہے لہذا نظام 8.36 کے کسی بھی دو عدد حل کا فرق $x_h = x - x_0$ مطابقتی نظام 8.40 کا بھی حل ہو گا۔ چونکہ x نظام 8.36 کا کوئی بھی حل ہو سکتا ہے لہذا ہم مساوات 8.5 میں نظام 8.36 کا کوئی بھی حل x_0 اور نظام 8.40 کے تمام حل باری باری لیتے ہوئے نظام 8.36 کے تمام حل حاصل کر سکتے ہیں۔

□

8.6 دو درجی اور تین درجی مقطع قالب

دو درجی مقطع قالب⁸⁴ درج ذیل ہے۔

$$(8.43) \quad D = A \text{ مقطع} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

دھیان رہے کہ قالب چکور قوسین میں لکھا جاتا ہے جبکہ مقطع کو سیدھی عمودی لکیروں میں لپیٹ کر لکھا جاتا ہے۔ مقطع A کو $|A|$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

قاعدہ کریمبرائے دو مساوات کا خطی نظام

دو عدد متجانس مساوات

$$(8.44) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \text{(ب)} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}$$

کا حل

$$D \neq 0$$

کی صورت میں بذریعہ قاعدہ کریمبر⁸⁵ درج ذیل ہے

$$(8.45) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D} \end{aligned}$$

جہاں مساوات 8.43 مقطع D دیتی ہے۔ غیر صفر اہم حل والے متجانس نظام کی صورت میں $D = 0$ پایا جاتا ہے۔

⁸⁴determinant
⁸⁵Cramer's rule

ثبوت : ہم مساوات 8.45 کو ثابت کرتے ہیں۔ x_2 حذف کرنے کی خاطر مساوات 8.44-الف کو a_{22} اور مساوات 8.44-ب کو $-a_{12}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

اسی طرح x_1 حذف کرنے کی خاطر مساوات 8.44-الف کو $-a_{21}$ اور مساوات 8.44-ب کو a_{11} سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

اب $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D \neq 0$ کی صورت میں درج بالا دونوں مساوات کو $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ سے تقسیم کرتے ہوئے، دائیں اطراف کو قابلوں کی صورت میں لکھ کر، مساوات 8.45 حاصل ہوتے ہیں۔

□

مثال 8.29: درج ذیل کو قاعدہ کریمر کی مدد سے حل کریں۔

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 5$$

حل: قاعدہ کریمر سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-5}{-2-1} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{10-1}{-2-1} = -3$$

□

تین درجی مقطع

تین درجی مقطع قالب کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(8.46) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

درج بالا میں دائیں ہاتھ علامتوں کی ترتیب $+-+$ ہے۔ دائیں ہاتھ مقطع کے عددی سر بالترتیب بائیں ہاتھ مقطع کی پہلی قطار کے ارکان (ضرب $+-+$) ہیں۔ بائیں ہاتھ مقطع سے پہلی صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے دائیں ہاتھ کا پہلا مقطع ملتا ہے۔ اسی طرح دوسری صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے دوسرا مقطع ملتا ہے اور تیسری صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے تیسرا مقطع ملتا ہے۔ دائیں ہاتھ کے تین مقطع بالترتیب D میں a_{21} ، a_{11} اور a_{31} کے اصغر⁸⁶ کہلاتے ہیں۔ اصغر کو M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مساوات 8.46 میں دائیں ہاتھ اصغر کو پھیلا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.47) \quad D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

قاعدہ کریمر برائے تین مساوات کا خطی نظام

تین مساوات کے خطی نظام

$$(8.48) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

کا حل بذریعہ قاعدہ کریمر درج ذیل ہے

$$(8.49) \quad x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad (D \neq 0)$$

جہاں مساوات 8.46 اور مساوات 8.47 نظام کا مقطع D دیتے ہیں جبکہ

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

ہیں۔ دھیان رہے کہ D کی پہلی، دوسری اور تیسری قطار کی جگہ مساوات 8.48 کا دایاں ہاتھ پر کرنے سے بالترتیب D_1 ، D_2 اور D_3 ملتے ہیں۔

درج بالا قاعدہ کریمر کو بھی اسقاط کی ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مسئلہ 8.15 سے بھی اس کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔

8.7. مقطع۔ قاعدہ کریمر

ابتدائی طور پر مقطع قالب، خطی نظام کے حل کے لئے استعمال کیا جاتا رہا۔ اب یہ انجینئری کے دیگر مسائل، مثلاً امتیازی مسائل (آگنی مسائل)، تفرقی مساوات اور سمتی الجبرا، میں بھی اہم کردار ادا کرتا ہے۔ اس کو کئی طریقوں سے متعارف کرایا جاسکتا ہے۔ ہم اس کو خطی نظام کے نقطہ نظر سے متعارف کرتے ہیں۔

درجہ n مقطع قالب سے مراد ایسی غیر سمتی مقدار ہے جو $n \times n$ (چکور) قالب $A = [a_{jk}]$ سے منسوب ہے اور جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(8.50) \quad D = A^{\text{مقطع}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n = 1$ کے لئے مقطع قالب کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(8.51) \quad D = a_{11}$$

$n \geq 2$ کے لئے مقطع کی تعریف

$$(8.52) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad D &= a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \quad (j = 1 \text{ یا } 2 \cdots n) \\ \text{یا} \\ \text{(ب)} \quad D &= a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1 \text{ یا } 2 \cdots n) \end{aligned}$$

ہے جہاں

$$(8.53) \quad C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$$

ہے اور M_{jk} از خود درجہ $n-1$ مقطع قالب ہے، جو A سے a_{jk} رکن کا صف اور قطار، یعنی j صف اور k قطار، حذف کرتے ہوئے حاصل ذیلی قالب کا مقطع ہے۔

یوں D کی تعریف n عدد، درجہ $n-1$ مقطع کے ذریعہ کی جاتی ہے، جہاں ہر درجہ $n-1$ مقطع کی تعریف از خود $n-1$ عدد درجہ $n-2$ مقطع کے ذریعہ کی جاتی ہے، اور یہی سلسلہ چلتا رہتا ہے حتیٰ کہ آخر کار درجہ 1 ذیلی قالب آن پہنچے جس کا مقطع، قالب کا واحد رکن ہو گا۔

مقطع کی تعریف کے تحت ہم D کو کسی بھی صف یا قطار سے پھیلا سکتے ہیں۔ یوں D کو پہلی قطار سے پھیلانے کی خاطر مساوات 8.52-الف میں $j = 1$ لیا جائے گا۔ اسی طرح تیسری قطار سے D کو پھیلانے کی خاطر مساوات 8.52-ب میں $k = 3$ لیا جائے گا۔ ہر C_{jk} کو بھی بالکل اسی طرح کسی صف یا قطار سے پھیلا یا جاسکتا ہے۔

مقطع کی یہ تعریف غیر مبہم ہے (ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ ۱ میں پیش کیا گیا ہے)۔ کسی بھی صف یا قطار سے D کو پھیلا کر ایک جیسا جواب حاصل ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ بڑے جسامت کے مقطع کو صف یا قطار سے پھیلا کر حاصل کرنا عملاً ناقابل استعمال ہے۔ یہ سمجھنے کی خاطر سوال 8.101 دیکھیں۔

مقطع کی بات کرتے ہوئے، قالب کی اصطلاحات ہی استعمال کی جاتی ہیں۔ یوں ہم کہیں گے کہ D میں n^2 ارکان a_{jk} پائے جاتے ہیں، اس کے j صف اور k قطار ہیں اور اس کی مرکزی ورت پر a_{11}, \dots, a_{nn} ارکان ہیں۔ دو نئے اصطلاحات درج ذیل ہیں۔

M_{jk} کو D میں a_{jk} کا اصغر⁸⁷ کہتے ہیں اور C_{jk} کو D میں a_{jk} کا ہم ضربی⁸⁸ کہتے ہیں۔

مساوات 8.52 کو اصغر کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.54) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad D &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \quad (j = 1 \text{ یا } 2 \dots n) \\ \text{(ب)} \quad D &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \quad (k = 1 \text{ یا } 2 \dots n) \end{aligned}$$

مثال 8.30: تین درجی مقطع کے اصغر اور ہم ضربی
مساوات 8.46 میں مقطع کو پہلی قطار سے پھیلا یا گیا ہے۔ ہم یہاں دوسری صف کے ارکان کے اصغر اور ہم ضربی لکھتے ہیں۔ اصغر درج ذیل ہیں

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

جبکہ ہم ضربی $C_{21} = -M_{21}$ ، $C_{22} = M_{22}$ اور $C_{23} = -M_{23}$ ہیں۔ بقایا تمام ارکان کے اصغر اور ہم ضربی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ درج ذیل خانہ دار نقش پیدا ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

□

مثال 8.31: تین درجی مقطع
ایک ہی تین درجی مقطع کو پہلی صف اور دوسری صف سے حاصل کرتے ہیں۔

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ = 2(2 - 20) - 0(1 - 15) - 3(4 - 6) = -30$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ = -1(0 + 12) + 2(2 + 9) - 5(8 - 0) = -30$$

□

مثال 8.32: تکلونی قالب کا مقطع

$$(8.55) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

□

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ تکلونی قالب کا مقطع، مرکزی وتر کے تمام اجزاء کا حاصل ضرب ہے۔

مقطع کی عمومی خصوصیات

مقطع کی تعریف (مساوات 8.52) استعمال کرتے ہوئے مقطع حاصل کرنا نہایت لمبا کام ہے۔ اعمال صف سے نہایت عمدگی کے ساتھ مقطع حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اعمال صف سے بالائی ٹکوئی مقطع کی صورت حاصل کی جاتی ہے، جس کے مرکزی وتر کے اندراجات کا حاصل ضرب درکار مقطع ہو گا۔ یہ ترکیب قالب پر لاگو اعمال صف کی طرح ضرور ہے لیکن بالکل اس کی طرح ہرگز نہیں ہے۔ بالخصوص، مقطع کے دو صف کی جگہ آپس میں تبدیل کرنے سے مقطع کی قیمت منفی اکائی (-1) سے ضرب ہوگی۔ تفصیل درج ذیل ہے۔

مسئلہ 8.12: بنیادی اعمال صف اور مقطع کی خصوصیات

- (الف) دو صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہوگی۔
- (ب) ایک صف کے مضرب کو دوسرے صف کے ساتھ جمع کرنے سے مقطع کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی۔
- (پ) کسی صف کو غیر صفر مستقل c سے ضرب دینے سے مقطع کی قیمت c سے ضرب ہوگی۔ (یہ $c = 0$ کے لئے بھی درست ہے لیکن ایسا کرنا بنیادی عمل صف نہ ہو گا۔)

ثبوت:

(الف) ہم اس حقیقت کو الکرانجی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔ دو درجی $(n = 2)$ مقطع کے لئے (الف) درست ہے یعنی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

ہم اب الکرانجی ماخوذ کا قیاس کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ درجہ $n - 1 \geq 2$ مقطع کے لئے بھی (الف) درست ہے اور اس کو درجہ n مقطع کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ D درجہ n مقطع ہے اور اس کے دو صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے E مقطع حاصل ہوتا ہے۔ D اور E کو کسی ایسی صف سے پھیلائیں جس کی جگہ تبدیل نہ کی گئی ہو۔ اس کو ہم j صف کہتے ہیں۔ مساوات 8.54-الف سے درج ذیل لکھا جائے گا

$$(8.56) \quad D = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk}, \quad E = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} N_{jk}$$

جہاں E میں a_{jk} کے اصغر کو N_{jk} لکھا گیا ہے۔ اب چونکہ M_{jk} اور N_{jk} درجہ $n-1$ کے اصغر ہیں لہذا ہمارے قیاس کے تحت درجہ $n-1$ کے مقطع کے لئے (الف) درست ہے لہذا $N_{jk} = -M_{jk}$ ہو گا اور یوں مساوات 8.56 کے تحت $E = -D$ ہو گا۔

(ب) صف i کو c سے ضرب کرتے ہوئے صف j کے ساتھ جمع کرنے سے نیا مقطع حاصل کرتے ہیں جس کو ہم \bar{D} سے ظاہر کرتے ہیں۔ \bar{D} کے صف j کے اندراجات $a_{jk} + ca_{ik}$ ہوں گے۔ \bar{D} کو j صف سے پھیلا کر $\bar{D} = D_1 + cD_2$ ملتا ہے جہاں $D_1 = D$ کے صف j میں a_{jk} اندراجات ہیں جبکہ D_2 کے صف j میں D کے صف i والے اندراجات a_{ik} ہیں جبکہ اس کے صف i میں بھی یہی a_{ik} اندراجات ہیں۔ یوں D_2 کے i اور j صفوں میں ایک جیسے اندراجات ہیں۔ D_2 کے i اور j صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے دوبارہ D_2 ہی ملتا ہے جبکہ (الف) کے تحت ایسا کرنے سے مقطع -1 سے ضرب ہو گا۔ یوں $D_2 = -D_2$ ہو گا جس سے $D_2 = 0$ ملتا ہے۔ اس طرح $\bar{D} = D_1 = D$ ہو گا۔

(پ) مقطع اس صف سے پھیلا کر حاصل کریں جس کو c سے ضرب دیا گیا ہے۔

خبردار! $n \times n$ قالب کو c سے ضرب دینے سے مقطع c^n سے ضرب ہو گا۔

□

مثال 8.33: تکنونی صورت حاصل کرتے ہوئے مقطع کا حصول
تکنونی صورت حاصل کرتے ہوئے۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 ، S_3 اور

S_4 گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری، تیسری اور چوتھی صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} S_2 - 2S_1 \\ S_4 - S_1 \end{matrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \end{vmatrix} \begin{matrix} S_3 + \frac{1}{10}S_2 \\ S_4 - \frac{1}{5}S_2 \end{matrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{57}{16} \end{vmatrix} S_4 + \frac{1}{8}S_3
 \end{aligned}$$

اب مثال 8.32 کی طرح، مرکزی وتر کے اندراجات کا حاصل ضرب، مقطع ہو گا۔

$$D = (2)(-10) \left(\frac{8}{5} \right) \left(\frac{57}{16} \right) = -114$$

□

مسئلہ 8.13: n درجی مقطع کے دیگر خصوصیات

- (الف، ب، پ) مسئلہ 8.12 کے شق-الف، ب اور پ قطاروں کے لئے بھی درست ہے۔
- (ت) تبدیلی محل سے مقطع تبدیل نہیں ہو گا۔
- (ٹ) صفر صف یا قطار کی صورت میں مقطع صفر ہو گا۔

- (ث) راست تناسب صف یا قطار کی صورت میں مقطع صفر کے برابر ہو گا۔ بالخصوص دو ایک جیسے صف یا قطار کی صورت میں مقطع کی قیمت صفر ہو گی۔

ثبوت: (الف تا ث) یہ تمام شق اس حقیقت سے اخذ کیے جاسکتے ہیں کہ مقطع کو کسی بھی صف یا کسی بھی قطار سے پھیلا کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مقطع کی تبدیلی محل بالکل قالب کی تبدیلی محل کی طرح ہو گی۔ یوں مقطع کا j صف تبدیل محل کا j قطار ہو گا۔

(ث) اگر صف i ضرب c برابر ہو صف j کے تب $D = cD_1$ ہو گا جہاں D_1 کے صف i اور j ایک جیسے ہوں گے۔ یوں D_1 کے صف i اور j کا آپس میں تبادلہ کرنے سے دوبارہ D_1 حاصل ہوتا ہے جبکہ مسئلہ 8.12-الف کے تحت اس کی قیمت $-D_1$ ہو گی۔ یوں $D_1 = D = cD_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرز کا ثبوت راست تناسب قطاروں کے لئے بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

□

یہ قابل توجہ ہے کہ درجہ قالب، جو قالب میں زیادہ سے زیادہ خطی طور غیر تابع صفوں یا قطاروں کی تعداد ہے (حصہ 8.4 دیکھیں)، اور مقطع کے مابین تعلق پایا جاتا ہے۔ چونکہ صرف صفر قالب کا درجہ صفر کے برابر ہوتا ہے (حصہ 8.4 دیکھیں) لہذا ہم یہاں فرض کر سکتے ہیں کہ درجہ $A > 0$ ہے۔

مسئلہ 8.14: درجہ قالب بذریعہ مقطع
 $m \times n$ جسامت کے قالب $A = [a_{jk}]$ کا صرف اور صرف اس صورت (غیر صفر) درجہ، r کے برابر ہو گا جب A کا ایسا ذیلی $r \times r$ قالب پایا جاتا ہو جس کا مقطع غیر صفر ہو، جبکہ ایسے ہر ذیلی قالب جس میں $r + 1$ یا اس سے زیادہ صف ہوں کا مقطع صفر ہو۔

بالخصوص $n \times n$ چکور قالب A کا درجہ صرف اور صرف اس صورت n ہو گا جب مقطع $A \neq 0$ ہو۔

ثبوت: بنیادی اعمال صف (حصہ 8.3) درجہ قالب پر اثر انداز نہیں ہوتے (مسئلہ 8.2) اور نا ہی مقطع قالب کے غیر صفر ہونے پر اثر انداز ہوتے ہیں (مسئلہ 8.13)۔ A کی زینہ دار صورت (حصہ 8.3) کو \tilde{A} سے ظاہر کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ \tilde{A} کے (پہلے) r صف، صرف اور صرف اس صورت غیر صفر ہوں گے جب درجہ $r = A$ ہو۔ فرض کریں کہ \tilde{A} کے بالائی بائیں کونے کا $r \times r$ ذیلی قالب \tilde{R} ہے (یوں \tilde{A} کے پہلے r صف اور

پہلے r قطار پر \bar{R} مشتمل ہوگا۔ چونکہ \bar{R} تکنونی ہے اور اس کے مرکزی وتر پر تمام اندراجات غیر صفر ہیں لہذا مقطع $\bar{R} \neq 0$ ہوگا۔ چونکہ A سے حاصل کردہ، مطابقتی $r \times r$ ذیلی قالب R سے بنیادی اعمال صف کے ذریعہ \bar{R} حاصل کیا گیا ہے لہذا مقطع $R \neq 0$ ہوگا۔ اسی طرح چونکہ \bar{A} کے بالائی بائیں $r+1$ (یا اس سے زیادہ ممکنہ) صف اور قالب کے چکور ذیلی قالب \bar{S} میں کم از کم ایک عدد صفر صف ہوگا (ورنہ درجہ $r+1 \leq A$ ہوتا) لہذا مقطع $\bar{S} = 0$ ہوگا (مسئلہ 8.13) اور چونکہ A سے حاصل کردہ مطابقتی S ذیلی قالب سے بذریعہ بنیادی اعمال صف، \bar{S} کو حاصل کیا گیا ہے لہذا مقطع $S = 0$ ہوگا۔ یوں مسئلے میں $m \times n$ قالب کی شق کا ثابت مکمل ہوا۔

اگر A چکور $n \times n$ قالب ہو تب درج بالا ثبوت کے تحت درجہ $n = A$ صرف اور صرف اس صورت ہوگا جب A کا ایسا $n \times n$ ذیلی قالب پایا جاتا ہو جس کا درجہ غیر صفر ہو یعنی جب مقطع $A \neq 0$ ہو (چونکہ A کا $n \times n$ ذیلی قالب A ہی ہوگا)۔

□

قاعدہ کریمر

اس مسئلے کو استعمال کرتے ہوئے ہم قاعدہ کریمر⁸⁹ حاصل کرتے ہیں جو خطی نظام کے حل کو مقطع کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ اگرچہ عملاً قاعدہ کریمر⁹⁰ زیادہ مقبول نہیں ہے، اس کی اہمیت تفرقی مساوات کی نظام اور انجینئری کے دیگر مسائل میں پائی جاتی ہے۔

مسئلہ 8.15: مسئلہ کریمر (خطی نظام کا حل بذریعہ مقطع)

(الف) اگر n عدد مساوات اور n متغیرات x_1, \dots, x_n کے نظام

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

(8.57)

⁸⁹Cramer's rule

⁹⁰سوزر لینڈ کارپاسی، جرنل کریمر [1704-1752]

کے عددی سر قالب کا غیر صفر مقطع $D = A$ ہو تب اس نظام کا واحد ایک حل ہو گا۔ یہ حل درج ذیل مساوات دیتے ہیں

$$(8.58) \quad x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D} \quad \text{قاعدہ کریمر}$$

جہاں D_k وہ مقطع ہے جو D میں قطار k کی جگہ b_1, \dots, b_n پر کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔

(ب) یوں اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D \neq 0$ ہو تب اس نظام کا صرف غیر اہم صفر حل $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ ہو گا۔ البتہ $D = 0$ کی صورت میں نظام کے غیر صفر اہم حل بھی پائے جائیں گے۔

ثبوت: افزودہ قالب \bar{A} کی جسامت $n \times (n+1)$ ہے لہذا اس کا درجہ زیادہ سے زیادہ n ممکن ہے۔ اب اگر

$$(8.59) \quad D = A^{\text{مقطع}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

ہو تب مسئلہ 8.14 کے تحت درجہ $n = A$ ہو گا۔ یوں درجہ $\bar{A} = A$ درجہ $n = A$ ہو گا۔ اس طرح مسئلہ 8.8 کے تحت نظام 8.57 کا حل یکتا ہو گا۔

آئیں اب مساوات 8.58 کو ثابت کریں۔ D کو قطار k سے پھیلاتے ہیں

$$(8.60) \quad D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \dots + a_{nk}C_{nk}$$

جہاں D میں a_{ik} کا ہم ضربی C_{ik} ہے۔ اگر D میں قطار k کی جگہ کوئی اور اعداد بھر دیے جائیں تو ہمیں نیا مقطع ملے گا جس کو ہم \hat{D} کہہ سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ \hat{D} کو اس k قطار سے پھیلانے سے مساوات 8.60 کی طرز کی مساوات ملے گی جس میں a_{1k}, \dots, a_{nk} کی جگہ یہی نئے اعداد ہوں گے جبکہ C_{ik} پہلے والے ہی ہوں گے۔ بالخصوص اگر ہم D کے قطار l (جہاں $l \neq k$) کے اندراجات a_{1l}, \dots, a_{nl} کو ہی بطور نئے اعداد منتخب کریں تب نئے مقطع \hat{D} میں قطار $[a_{1l} \dots a_{nl}]^T$ دو مرتبہ پایا جائے گا، پہلی بار بطور قطار l اور دوسری مرتبہ بطور قطار k جس کی جگہ یہ اعداد پر کیے گئے۔ یوں مسئلہ 8.13-ث کے تحت

باب 8. خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

$\hat{D} = 0$ ہو گا۔ یوں \hat{D} کو قطار k (جس میں a_{n1}, \dots, a_{nl} پر کیے گئے ہیں) سے پھیلا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.61) \quad a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \dots + a_{nl}C_{nk} = 0 \quad (l \neq k)$$

اب ہم نظام 8.57 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف کو C_{1k} ، دوسری مساوات کے دونوں اطراف کو C_{2k} ، اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری مساوات کے دونوں اطراف کو C_{nk} سے ضرب دیتے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(8.62) \quad C_{1k}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + C_{nk}(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) \\ = b_1C_{1k} + \dots + b_nC_{nk}$$

ایک جیسے x_j کے عددی سر اکٹھے کرتے ہوئے اس کے بائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$x_1(a_{11}C_{1k} + a_{21}C_{2k} + \dots + a_{n1}C_{nk}) + \dots + x_n(a_{1n}C_{1k} + a_{2n}C_{2k} + \dots + a_{nn}C_{nk})$$

مساوات 8.60 کے تحت درج بالا میں a_k کا جزو ضربی D کے برابر ہے جبکہ x_l (جہاں $l \neq k$) کا جزو ضربی صفر کے برابر ہے لہذا مساوات 8.62 کا بائیں ہاتھ $x_k D$ کے برابر ہے اور یوں اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x_l D = b_1C_{1k} + \dots + b_nC_{nk}$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ، قطار k سے پھیلا یا گیا D_k ہے (D_k کی تعریف اس مسئلے میں دی گئی ہے)۔ یوں درج بالا کے دونوں اطراف کو D سے تقسیم کرتے ہوئے قاعدہ کریبر حاصل ہوتا ہے۔

اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D \neq 0$ ہو تب ہر D_k میں (b_n, \dots, b_1 پر مبنی) قطار صفر کے برابر ہو گا لہذا (مسئلہ 8.13-ٹ کے تحت) تمام D_k صفر ہوں گے اور مساوات 8.58 غیر اہم صفر حل دے گا۔

آخر میں اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D = 0$ ہو تب مسئلہ 8.14 کے تحت درجہ $n > A$ ہو گا لہذا مسئلہ 8.9 کے تحت اس کا غیر صفر اہم حل پایا جائے گا۔

□

مثال 8.34: قاعدہ کریبر (مسئلہ 8.15) درج ذیل خطی نظام کو قاعدہ کریبر سے حل کریں۔

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 3$$

حل:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-4} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-4} = 1$$

□

سوالات

سوال 8.95 تا سوال 8.102 عمومی نوعیت کے ہیں۔

سوال 8.95: مسئلہ 8.12

A کے دو قطاروں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنے سے قالب B حاصل کیا گیا ہے۔ اسی طرح B میں دو قالب کا آپس میں تبادلہ کرتے ہوئے C حاصل کیا گیا ہے۔ A میں دو مرتبہ تبادلہ سے بھی C حاصل ہو گا۔ مسئلہ 8.12 استعمال کیے بغیر ان کا مقطع حاصل کریں۔

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

جوابات: $|A| = 6$ ، $B = -6$ ، $C = (-1)(-1)6 = 6$

باب 8. خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

سوال 8.96: مسئلہ 8.12
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔ پہلی صف کے ساتھ دوسری صف جمع کرتے ہوئے نیا قالب حاصل کریں۔ مسئلہ 8.12 استعمال کیے بغیر، اس نئے قالب کا مقطع حاصل کریں۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

جوابات: -7 ، -7

سوال 8.97: مسئلہ 8.12
A کی پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے B حاصل ہوتا ہے جس کے تیسری قطار کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے C حاصل ہوتا ہے۔ ان کے مقطع حاصل کریں۔

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

جوابات: -23 ، -46 ، -138

سوال 8.98: مسئلہ 8.13
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad A^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

جوابات: -50 ، -50

سوال 8.99: مسئلہ 8.13
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

جوابات: 0 ، 0 ، 0

سوال 8.100: درج ذیل قالب کا مقطع، باری باری، پہلی صف، دوسری صف، پہلی قطار اور دوسری قطار سے پھیلا کر حاصل کریں۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب: 10-

سوال 8.101: پھیلا کر مقطع حاصل کرنا عملاً نا قابل استعمال ہے
ثابت کریں کہ درجہ n مقطع کے لئے $n!$ ضرب درکار ہوں گے۔ یوں اگر ایک ضرب حاصل کرنے کے لئے 10^{-9} سیکنڈ درکار ہوں تب درجہ ذیل وقت درکار ہوں گے۔

n	10	15	20	25
وقت	0.004 سیکنڈ	22 منٹ	77 سال	0.5×10^9 سال

سوال 8.102: قالب ضرب غیر سمتی مقدار
ثابت کریں کہ درجہ $(kA) = \text{درجہ } k^n \times A$ ہوگا (نہ کہ درجہ $k \times A$)۔ یہاں k غیر سمتی مقدار ہے۔

سوال 8.103 تا سوال 8.110 میں مقطع دریافت کریں۔

سوال 8.103:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

جواب: $\cos(\alpha + \beta)$

سوال 8.104:

$$\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$$

جواب: 1

سوال 8.105:

$$\begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix}$$

جواب: 1

سوال 8.106:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

جوابات: -1 ، 2 ، -3

سوال 8.107:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

جوابات: 1 ، 1 ، 1

سوال 8.108:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

جواب: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

سوال 8.109:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب: -1

سوال 8.110:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب: 15

سوال 8.111 تا سوال 8.114 متجانس مساوات کی غیر صفر اہم حل کے سوالات ہیں۔

سوال 8.111: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔ سیدھا خط
 متجانس نظام کا $D = 0$ کی صورت میں غیر صفر اہم حل پایا جائے گا۔ سیدھے خط کی عمومی مساوات $ax + by = c$ ہے۔ آئیں نقطہ $(1, -2)$ اور $(4, 3)$ سے گزرتے خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس مسئلے کو بطور درج ذیل نظام لکھا جاسکتا ہے۔

$$xa + yb - c \cdot 1 = 0$$

$$a - 2b - c \cdot 1 = 0$$

$$4a + 3b - c \cdot 1 = 0$$

a ، b اور c کا عددی سر مقطع صفر کے برابر ٹھہرا کر اس سیدھے خط کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $5x - 3y = 11$

سوال 8.112: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔ سطح مستوی
 سطح مستوی کی عمومی مساوات $ax + by + cz = p$ ہے۔ نقطہ $(1, 1, 1)$ ، $(3, 0, 2)$ اور $(0, 5, 4)$ سے گزرتی سطح کا نظام لکھیں۔ a ، b ، c اور p کا عددی سر مقطع D لکھیں۔ یوں $D = 0$ سے سطح کی مساوات دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{aligned} xa + yb + zc - p &= 0 \\ a + b + c - p &= 0 \\ 3a + 2c - p &= 0' \\ 5b + 4c - p &= 0 \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} x & y & z & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \quad x + y - z = -1$$

سوال 8.113: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔ دائرہ
 ثابت کریں کہ xy سطح پر دائرے کی عمومی مساوات $x^2 + y^2 + ax + by = c$ ہے۔ نقطہ $(1, 2)$ ،

باب 8. خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

(3, 2) اور (5, -1) سے گزرتے ہوئے دائرے کا نظام لکھیں۔ اس نظام کے عددی سر مقطع سے دائری کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: دائرے کی عمومی مساوات $(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2$ کو پھیلا کر $x^2 + y^2 + 2x + by = c$ ملتا ہے۔ نظام، عددی سر قالب اور دائرے کی مساوات درج ذیل ہیں۔

$$x^2 + y^2 + xa + yb - c = 0$$

$$5 + a + 2b - c = 0$$

$$13 + 3a + 2b - c = 0$$

$$26 + 5a - b - c = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & -1 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ 13 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad 6x^2 + 6y^2 - 24x + 10y = 26$$

سوال 8.114: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔ کروی سطح

کروی سطح کی عمومی مساوات $(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2$ ہے۔ نقطہ $(0, 0, -2)$ ، $(0, 0, 7)$ ، $(2, 0, 5)$ اور $(0, 2, 5)$ سے گزرتی کروی سطح کی مساوات دریافت کریں۔

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10z = -21 \quad \text{جواب:}$$

سوال 8.115 تا سوال 8.119 کو قاعدہ کریبر سے حل کریں۔

سوال 8.115:

$$3x_1 - 2x_2 = 8$$

$$2x_1 + x_2 = 3$$

جوابات: $x_1 = 2$ ، $x_2 = -1$

سوال 8.116:

$$0.8x_1 - 1.2x_2 = 1.76$$

$$0.6x_1 + 0.2x_2 = 0.88$$

$$x_2 = -0.4, \quad x_1 = 1.6 \quad \text{جوابات:}$$

سوال 8.117:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -4$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7$$

$$x_3 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = -2 \quad \text{جوابات:}$$

سوال 8.118:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 6$$

$$2x_2 + x_3 = -7$$

$$x_1 + 3x_3 = -8$$

$$x_3 = -3, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 1 \quad \text{جوابات:}$$

سوال 8.119:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_3 = -6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$$

$$x_4 = 2, \quad x_3 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 0 \quad \text{جوابات:}$$

8.8 معکوس قالب۔ گاوس جبرڈن اسقاط

اس حصے میں صرف چکور قالبوں پر غور کیا جائے گا۔

$n \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کے معکوس⁹¹ جس کو A^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے سے مراد ایسا $n \times n$ قالب ہے جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (8.63)$$

جہاں I اکائی $n \times n$ قالب ہے (حصہ 8.2 دیکھیں)۔

ایسا A جس کا معکوس پایا جاتا ہو غیر نادر قالب⁹² کہلاتا ہے جبکہ ایسا A جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو نادر قالب⁹³ کہلاتا ہے۔

اگر A کا معکوس اگر پایا جاتا ہو، یہ معکوس یکتا ہو گا۔

یقیناً اگر B اور C دونوں A کے معکوس ہوں تب $AB = I$ اور $CA = I$ ہوں گے جن سے یکتائی کا درج ذیل ثبوت ملتا ہے۔

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ A کا معکوس > صرف اور صرف > اس صورت میں پایا جائے گا جب A کا درجہ n ہو، جو زیادہ سے زیادہ ممکنہ درجہ ہے۔ اسی ثبوت سے ظاہر ہو گا کہ اگر A^{-1} موجود ہو تب $Ax = b$ سے مراد $x = A^{-1}b$ ہے۔ یہ ہمیں معکوس کی افادیت اور اس کا خطی نظام سے تعلق دکھلائے گا۔ (البتہ جیسا سوال 8.101 سے صاف ظاہر ہوتا ہے، اس سے ہمیں خطی نظام حل کرنے کا بہتر طریقہ میسر نہیں ہو گا۔)

مسئلہ 8.16: معکوس کی موجودگی

$n \times n$ قالب A کا معکوس A^{-1} صرف اور صرف اس صورت میں موجود ہو گا جب درجہ $n = A$ ہو، یعنی (مسئلہ 8.14 کے تحت) صرف اور صرف اس صورت جب مقطع $A \neq 0$ ہو۔ یوں درجہ $n = A$ کی صورت میں A غیر نادر ہو گا جبکہ درجہ $n > A$ کی صورت میں A نادر ہو گا۔

ثبوت: $n \times n$ قالب A اور درج ذیل نظام

$$Ax = b \quad (8.64)$$

پر غور کریں۔ اگر معکوس A^{-1} موجود ہو تب درج بالا کے بائیں جانب کو A^{-1} سے ضرب دیتے ہوئے، مساوات 8.63 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$A^{-1}Ax = x = A^{-1}b \quad (8.65)$$

nonsingular matrix⁹²
singular matrix⁹³

جو نظام 8.64 کا حل x دیتا ہے۔ اگر دوسرا حل u ہو تب $Au = b$ ہو گا جس سے $u = A^{-1}b = x$ ملتا ہے لہذا x یکتا حل ہے۔ یوں مسئلہ 8.8 کے تحت درجہ $n = A$ ہو گا۔

الٹ چلتے ہوئے، اگر درجہ $n = A$ ہو تب مسئلہ 8.8 کے تحت کسی بھی b کے لئے نظام 8.64 کا حل یکتا ہو گا۔ گاوسی اسقاط کے بعد قیمتیں واپس پر کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ x کے ارکان x_j از خود b کے ارکان کے خطی مجموعے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(8.66) \quad x = Bb$$

جہاں B حاصل کرنا باقی ہے۔ مساوات 8.64 میں پر کرنے سے، کسی بھی b کے لئے، درج ذیل ملتا ہے

$$Ax = A(Bb) = (AB)b = Cb \quad (C = AB)$$

لہذا $C = AB = I$ یعنی اکائی قالب ہو گا۔ اسی طرح مساوات 8.64 کو مساوات 8.66 میں پر کرنے سے، کسی بھی x کے لئے،

$$x = Bb = B(Ax) = (BA)x$$

ملتا ہے لہذا BAI ہو گا۔ ان نتائج کو ملا کر ثابت ہوتا ہے کہ معکوس $B = A^{-1}$ موجود ہے۔

□

گاوس جارڈن اسقاط سے معکوس کا حصول

غیر نادر $n \times n$ قالب A کا معکوس A^{-1} حاصل کرنے کی خاطر تبدیل شدہ گاوسی اسقاط کی ترکیب استعمال کی جاسکتی ہے جس کو گاوس جارڈن اسقاط⁹⁴ کہتے⁹⁵ ہیں۔ اس ترکیب کی تفصیل درج ذیل ہے۔

A استعمال کرتے ہوئے ہم n عدد خطی مساوات

$$Ax_{(1)} = e_{(1)}, \quad \dots, \quad Ax_{(n)} = e_{(n)}$$

⁹⁴Gauss-Jordan elimination

⁹⁵ولیم ہارڈن [1842-1899] جرمنی کے ریاضی دان۔

لکھتے ہیں جہاں $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ اکائی $n \times n$ قالب I کے قطار ہیں یعنی:

$$e_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T, e_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T, \dots, e_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$$

ان n عدد سمتی مساوات کے نامعلوم سمتیات $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ ہیں۔ ان تمام مساوات کو ایک ہی قالبی مساوات $AX = I$ میں لکھا جاتا ہے جہاں نامعلوم قالب X کے قطار $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ n عدد افزودہ قالب $\begin{bmatrix} A & e_{(1)} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A & e_{(n)} \end{bmatrix}$ کو ملا کر ایک ہی $n \times 2n$ بڑے "افزودہ قالب" $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ میں لکھا جاتا ہے۔ اب $AX = I$ کے بائیں جانب کو A^{-1} سے ضرب دے کر $X = A^{-1}I = A^{-1}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $AX = I$ کو X کے لئے حل کرنے کی خاطر ہم $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ پر گاوسی اسقاط لاگو کر سکتے ہیں۔ اس سے $\begin{bmatrix} U & H \end{bmatrix}$ حاصل ہو گا جہاں گاوسی اسقاط کی بنا U بالائی ٹکنونی ہو گا۔ مزید اعمال کے ذریعہ گاوس جارڈن ترکیب U کو ایسی وتری صورت میں لے آتی ہے جس کے تمام وتری ارکان اکائی (1) ہوں۔ U کے وتر کے بالائی جانب ارکان کو حذف کر کے وتری صورت حاصل ہو گی جبکہ وتری ارکان کو موزوں قیمتوں سے ضرب (یا تقسیم) کرتے ہوئے وتر پر اکائی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں (مثال 8.35 سے رجوع کریں)۔ چونکہ یہ ترکیب پورے $\begin{bmatrix} U & H \end{bmatrix}$ پر لاگو ہو گی لہذا H سے K حاصل ہو گا اور یوں $\begin{bmatrix} U & H \end{bmatrix}$ سے $\begin{bmatrix} I & K \end{bmatrix}$ حاصل ہو گا جو $IX = K$ کا "افزودہ قالب" ہو گا۔ اب جیسا پہلے بتلایا گیا، $IX = X = A^{-1}$ ہے لہذا موازنہ کرتے ہوئے $K = A^{-1}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں A^{-1} کو $\begin{bmatrix} I & K \end{bmatrix}$ سے پڑھا جاسکتا ہے۔

درج ذیل مثال میں گاوس جارڈن کی ترکیب استعمال کی گئی ہے۔

مثال 8.35: گاوس جارڈن کی ترکیب سے قالب کے معکوس کا حصول
درج ذیل قالب A کا معکوس A^{-1} دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: درج ذیل "افزودہ قالب" پر گاوسی اسقاط کی ترکیب لاگو کرتے ہوئے $\begin{bmatrix} U & H \end{bmatrix}$ حاصل کرتے ہیں۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1, S_2 اور S_3 گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری اور

تیسری صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$[A \ I] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 + S_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{7}S_2 \end{matrix}$$

حاصل $[U \ H]$ پر گاوس جارڈن اسقاط لاگو کرتے ہیں۔ پہلے U کے وتر پر اکائی حاصل کی گئی ہے اور بعد میں اس وتر کے بالائی جانب U کے ارکان کو صفر کیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{14}S_2 \\ \frac{7}{37}S_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -\frac{43}{37} & \frac{2}{37} & \frac{14}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 + 2S_3 \\ S_2 + \frac{9}{14}S_3 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 - 4S_2 \\ \\ \end{matrix}$$

آخری تین قطار معکوس A^{-1} ہو گا یعنی:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix}$$

آپ اس کو درج ذیل سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یوں $A^{-1}A = I$ ہے اور اسی طرح $AA^{-1} = I$ ہو گا۔ □

معکوس کے کلیات

چونکہ معکوس کا حصول درحقیقت میں خطی مساوات کے نظام کا حل معلوم کرنا ہے لہذا قاعدہ کریمر (مسئلہ 8.15) یہاں قابل استعمال ہو گا۔ یہاں بھی قاعدہ کریمر نظریاتی مطالعہ کے لئے مفید ثابت ہوتا ہے مگر اس سے (مسئلہ 8.17 کی مدد سے) 2×2 سے زیادہ جسامت کے قالب کی معکوس حاصل کرنا زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتا۔

مسئلہ 8.17: معکوس بذریعہ مقطع
 $n \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کا معکوس درج ذیل ہے

$$(8.67) \quad A^{-1} = \frac{1}{A^{\text{مقطع}}} [C_{jk}]^T = \frac{1}{A^{\text{مقطع}}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

جہاں مقطع A میں a_{jk} کا ہم ضربی C_{jk} ہے (حصہ 8.7 سے رجوع کریں)۔ (یہاں دھیان رہے کہ A^{-1} میں، C_{jk} کی جگہ وہ ہے جو A میں a_{kj} (نہ کہ a_{jk}) کی جگہ ہے)۔ بالخصوص 2×2 قالب اور اس کے معکوس درج ذیل ہیں۔

$$(8.68) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{A^{\text{مقطع}}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ثبوت : ہم مساوات 8.67 کے دائیں ہاتھ کو B لکھ کر ثابت کرتے ہیں کہ $BA = I$ ہے۔ ہم درج ذیل لکھ کر

$$(8.69) \quad BA = G = [g_{kl}]$$

ثابت کرتے ہیں کہ $G = I$ ہے۔ قالبی ضرب کی تعریف اور مساوات 8.67 میں B کی صورت سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.70) \quad g_{kl} = \sum_{s=1}^n \frac{C_{sk}}{A^{\text{مقطع}}} a_{sl} = \frac{1}{A^{\text{مقطع}}} (a_{1l}C_{1k} + \cdots + a_{nl}C_{nk})$$

اب مساوات 8.60 اور مساوات 8.61 کے تحت $l = k$ کی صورت میں درج بالا کے دائیں ہاتھ میں قوسین $D = A^{\text{مقطع}}$ ہو گا جبکہ $l \neq k$ کی صورت میں یہ صفر ہو گا لہذا:

$$g_{kk} = \frac{1}{A^{\text{مقطع}}} (A^{\text{مقطع}}) = 1$$

$$g_{kl} = 0 \quad (l \neq k)$$

بالخصوص $n = 2$ کی صورت میں مساوات 8.68 حاصل ہوتی ہے۔

□

جیومیٹری میں $n = 2$ کی صورت عموماً پائی جاتی ہے لہذا مساوات 8.68 کو یاد رکھنا مفید ثابت ہو گا۔

مثال 8.36: 2×2 قالب کا معکوس
درج ذیل قالب کا معکوس دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 8.68 سے معکوس لکھتے ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.37: 3×3 قالب کا معکوس
درج ذیل قالب کا معکوس مساوات 8.67 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: پہلی قطار سے پھیلا کر C_{jk} ملتا ہے جبکہ C_{jk} درج ذیل ہیں

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3, & C_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6, & C_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \\ C_{21} &= -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 18, & C_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -12, & C_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -18 \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3, & C_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, & C_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \end{aligned}$$

لہذا معکوس درج ذیل ہو گا۔

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & 18 & 3 \\ -6 & -12 & 6 \\ 3 & -18 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

□

آپ قالبی ضرب سے $A^{-1}A = I$ ثابت کر سکتے ہیں۔

وتری قالب $A = [a_{jk}]$ جہاں $l \neq k$ کی صورت میں $a_{jk} = 0$ ہے کا معکوس صرف اس صورت میں موجود ہو گا جب تمام $a_{jj} \neq 0$ ہوں۔ ایسی صورت میں معکوس A^{-1} بھی وتری ہو گا جس کے وتری اندراجات $\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}$ ہوں گے۔

ثبوت: وتری قالب کے لئے مساوات 8.67 میں درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{C_{11}}{D} = \frac{a_{22} \cdots a_{nn}}{a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}} = \frac{1}{a_{11}}, \quad \dots$$

□

مثال 8.38: وتری قالب کا معکوس
درج ذیل وتری قالب کا معکوس دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix}$$

حل: ہر وتری اندراج کا معکوس لکھتے ہوئے قالب کا معکوس حاصل ہو گا لہذا پہلی اندارج 2 کی جگہ $\frac{1}{2} = 0.5$ لکھا جائے گا۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.625 \end{bmatrix}$$

□

دو قالبوں کے حاصل ضرب کا معکوس لیتے ہوئے ہر قالب کا انفرادی معکوس لیتے ہوئے ان کے حاصل ضرب الٹ ترتیب سے حاصل کریں یعنی:

$$(8.71) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

اسی طرح دو سے زیادہ قالبوں کے حاصل ضرب کا معکوس درج ذیل ہو گا۔

$$(8.72) \quad (AB \cdots MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} \cdots B^{-1}A^{-1}$$

ثبوت: ہم مساوات 8.63 کو A کی بجائے AB کے لئے لکھتے ہیں۔

$$AB(AB)^{-1} = I$$

دونوں اطراف کے بائیں جانب کو A^{-1} سے ضرب دیتے ہیں

$$A^{-1}AB(AB)^{-1} = IB(AB)^{-1} = B(AB)^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}$$

باب 8. خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

جہاں $A^{-1}A = I$ اور $IB = B$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ اب حاصل $B(AB)^{-1} = A^{-1}$ کے دونوں اطراف کے بائیں جانب کو B^{-1} سے ضرب دے کر مساوات 8.71 حاصل کرتے ہیں۔

$$B^{-1}B(AB)^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

اس سے مساوات 8.72 بذریعہ الکرانجی مانخوذ حاصل ہوتا ہے۔

□

قالب A کے معکوس کا معکوس وہی قالب A ہو گا۔

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (8.73)$$

قالبی ضرب کے غیر معمولی خصوصیات۔ قواعد تنسیخ

قالبی ضرب اور اعداد کے ضرب کے قواعد میں درج ذیل نمایاں فرق پائے جاتے ہیں۔ انہیں سمجھنا ضروری ہے۔ شق ب اور پ قالبی ضرب کے قواعد تنسیخ ہیں۔

• (الف) قالبی ضرب قابل تبادل نہیں ہے یعنی عموماً درج ذیل ہو گا۔

$$AB \neq BA \quad (8.74)$$

• (ب) $AB = 0$ سے مراد $A = 0$ یا $B = 0$ اور یا $BA = 0$ نہیں لیا جاسکتا ہے، مثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

میں $A \neq 0$ ہے۔

• (پ) $AB = AC$ سے مراد $B = C$ (اگر $A \neq 0$ ہو تب بھی) نہیں لیا جاسکتا ہے۔

شق ب اور پ کی تفصیل درج ذیل مسئلے میں پیش کی گئی ہے۔

مسئلہ 8.18: قواعد تنسیخ
فرض کریں کہ A ، B اور C قابلوں کی جسامت $n \times n$ ہے۔

• (الف) اگر درجہ $A = n$ اور $AB = AC$ ہوں تب $B = C$ ہو گا۔

• (ب) اگر درجہ $A = n$ ہو تب $AB = 0$ سے مراد $B = 0$ ہے۔ یوں اگر $AB = 0$ لیکن $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہوں تب درجہ $A > n$ اور درجہ $B > n$ ہوں گے۔

• (پ) اگر A نادر ہو تب AB اور BA بھی نادر ہوں گے۔

ثبوت: (الف) مسئلہ 8.16 کے تحت A کا معکوس موجود ہے۔ یوں بائیں طرف کو A^{-1} سے ضرب دے کر $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ سے $B = C$ حاصل ہوتا ہے۔

(ب) فرض کریں کہ درجہ $A = n$ ہے لہذا A^{-1} موجود ہے۔ یوں $AB = 0$ سے مراد $A^{-1}AB = 0$ ہے۔ اسی طرح درجہ $B = n$ کی صورت میں B^{-1} موجود ہو گا اور $AB = 0$ سے مراد $ABB^{-1} = A = 0$ ہے جہاں دونوں اطراف کے دائیں جانب کو B^{-1} سے ضرب دیا گیا ہے۔

(پ-1) مسئلہ 8.16 کے تحت درجہ $A > n$ ہو گا۔ یوں مسئلہ 8.9 کے تحت $Ax = 0$ کے غیر صفر اہم حل موجود ہوں گے۔ اس متجانس مساوات کو B سے ضرب دے کر ثابت ہوتا ہے کہ یہی حل $Bx = 0$ کے بھی حل ہوں گے لہذا مسئلہ 8.9 کے تحت درجہ $BA > n$ ہو گا اور مسئلہ 8.16 کے تحت BA نادر ہو گا۔

(پ-2) مسئلہ 8.13-ت کے تحت A^T نادر ہو گا۔ یوں ثبوت پ-1 کے تحت $B^T A^T$ نادر اور مساوات 8.23-ت کے تحت $(AB)^T$ کے برابر ہو گا۔ یوں مسئلہ 8.13-ت کے تحت AB نادر ہو گا۔

□

حاصل قالبی ضرب کا مقطع

اگرچہ عموماً $AB \neq BA$ ہو گا البتہ یہ دلچسپ بات ہے کہ مقطع $(BA) = \text{مقطع}(AB)$ ہو گا۔ قالبی حاصل ضرب کا مقطع درج ذیل مسئلہ دیتا ہے۔

مسئلہ 8.19: حاصل قالبی ضرب کا مقطع
 $n \times n$ قالب A اور B کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.75) \quad (\text{مقطع}(B))(\text{مقطع}(A)) = (\text{مقطع}(BA)) = (\text{مقطع}(AB))$$

ثبوت: اگر A یا B نادر ہوں تب مسئلہ 8.18 کے تحت AB اور BA بھی نادر ہوں گے اور مساوات 8.75 کی صورت مسئلہ 8.14 کے تحت $0 = 0$ ہو گی۔

اب فرض کریں کہ A اور B غیر نادر ہیں۔ یوں ہم A کو گاوس جارڈن ترکیب سے وتری صورت $\hat{A} = [a_{jk}]$ میں لا سکتے ہیں۔ مسئلہ 8.12-الف اور ب اعمال صف سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہونے کے علاوہ تبدیل نہیں ہوتی جبکہ مسئلہ 8.12-پ گاوس جارڈن ترکیب استعمال کرتے ہوئے وتری صورت حاصل کرنے میں استعمال نہیں ہوتا ہے۔ اب یہی اعمال صف AB کو \hat{AB} میں تبدیل کرتے ہوئے مقطع AB پر ویسا ہی اثر کریں گے۔ یوں اگر \hat{AB} کے لئے مساوات 8.75 درست ہو تب یہ AB کے لئے بھی درست ہو گا۔ \hat{AB} کو پھیلا کر لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \hat{AB} &= \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اب ہم مقطع $\hat{A}B$ لیتے ہیں۔

$$(\hat{A}B) \text{ مقطع} = \begin{vmatrix} \hat{a}_{11}b_{11} & \hat{a}_{11}b_{12} & \cdots & \hat{a}_{11}b_{1n} \\ \hat{a}_{22}b_{21} & \hat{a}_{22}b_{22} & \cdots & \hat{a}_{22}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{nn}b_{n1} & \hat{a}_{nn}b_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}$$

دائیں ہاتھ ہم پہلی صف سے \hat{a}_{11} ، دوسری صف سے \hat{a}_{22} اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری صف سے \hat{a}_{nn} باہر لکھ سکتے ہیں۔

$$(\hat{A}B) \text{ مقطع} = \hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\cdots\hat{a}_{nn} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

اب $\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\cdots\hat{a}_{nn}$ وتری قالب \hat{A} کا مقطع ہے جبکہ بقایا مقطع B ہے۔ یوں مقطع AB کے لئے مساوات 8.75 ثابت ہوا۔ اسی طرح مقطع BA کے لئے بھی مساوات 8.75 ثابت کیا جاسکتا ہے۔

□

سوالات

سوال 8.120 تا سوال 8.124 میں A اور اس کا معکوس A^{-1} دیے گئے ہیں۔ گاوس جارڈن اسقاط کی مدد سے A سے A^{-1} یا A^{-1} سے A دریافت کریں۔

سوال 8.120:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

سوال 8.121:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

سوال 8.122:

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0.4 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -105 & 40 & -20 \\ 250 & -95 & 50 \\ -50 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$

سوال 8.123:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{4}{3} & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -7 & -\frac{8}{3} & -2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.124:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

سوال 8.125 تا سوال 8.129 میں A اور اس کا معکوس A^{-1} دیے گئے ہیں۔ مساوات 8.67 یا مساوات 8.68 کی مدد سے A سے A^{-1} یا A^{-1} سے A دریافت کریں۔

سوال 8.125:

$$A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

سوال 8.126:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

سوال 8.127:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.128:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.129:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.130: سوال 8.120 میں AA^{-1} حاصل کریں۔جواب: I سوال 8.131: سوال 8.125 میں AA^{-1} حاصل کریں۔جواب: I

سوال 8.132 تا سوال 8.137 عمومی نوعیت کے سوالات ہیں۔

سوال 8.132: سوال 8.125 میں دیے گئے A کے لئے ثابت کریں کہ $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ ہے۔

سوال 8.133: سوال 8.132 میں دیے گئے کلیے کا عمومی ثبوت پیش کریں۔

سوال 8.134: سوال 8.125 میں دیے گئے A کے لئے ثابت کریں کہ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ہے۔

سوال 8.135: سوال 8.134 میں دیے گئے کلیے کا عمومی ثبوت پیش کریں۔

سوال 8.136: ثابت کریں: $(A^{-1})^{-1} = A$

سوال 8.137: زاویائی تبادلہ
سوال 8.125 میں A گھڑی کی ایک رخ اور A^{-1} گھڑی کی دوسری رخ گھومنے کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کو سمجھ کر آپ معکوس کا مطلب بہتر سمجھ سکیں گے۔

8.9 سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ

ہم حصہ 8.4 میں سمتی فضا کی لب لباب سمجھ چکے ہیں۔ وہاں ہم نے قالب اور خطی نظام میں قدرتی طور پر پائے جانے والے مخصوص سمتی فضا کی بات کی۔ ان سمتی فضا کے ارکان، جنہیں سمتیات کہتے ہیں، مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 میں دیے گئے قواعد (جو اعداد کے قواعد کی طرح ہیں) پر پورا اترتے ہیں۔ ان خصوصی سمتی فضا کو احاطے جنم دیتے ہیں، یعنی محدود تعداد کے سمتیات کے خطی مجموعے۔ مزید، ہر سمتیہ کے ارکان n اعداد ہیں۔

ہم اس تصور کو عمومی جامہ پہناتے ہوئے، n عدد ارکان پر مشتمل تمام سمتیات کو لے کر حقیقی n بُعدی سمتی فضا R^n حاصل کرتے ہیں۔ سمتیات کو "حقیقی سمتیات" کہیں گے۔ یوں R^n میں ہر سمتیہ n عدد منظم اعداد پر مشتمل ہوگا۔

اب ہم n کی مخصوص قیمتیں لیتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں $n = 2$ کے لئے R^2 ملتا ہے جو تمام منظم اعدادی جوڑیوں پر مشتمل ہے۔ یہ اعدادی جوڑیاں سطح پر سمتیات کو ظاہر کرتی ہیں۔ اسی طرح $n = 3$ سے R^3 ملتا ہے جو تمام منظم سہ اعدادی جوڑیوں پر مشتمل ہے۔ یہ سہ اعدادی جوڑیاں تین بُعدی خلا میں سمتیات کو ظاہر کرتی ہیں۔ یہ سمتیات میکانات، طبیعیات، جیومیٹری اور علم الاحصاء میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

اسی طرح اگر ہم n عدد مخلوط اعداد کے تمام جوڑیاں لیں، اور ان مخلوط اعداد کو حقیقی تصور کریں، تو ہمیں مخلوط سمتی فضا C^n ملے گا۔

ان کے علاوہ عملی دلچسپی کے دیگر سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادول وغیرہ پر مبنی ہوں، پائے جاتے ہیں۔ ان کے جمع اور غیر سمتی ضرب کی بالکل قدرتی تعریف کی جاسکتی ہے لہذا یہ بھی سمتی فضا بناتے ہیں۔

آئیں اب مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 میں دیے گئے بنیادی خصوصیات کو لے کر حقیقی سمتی فضا V کی تعریف بیان کریں۔

مسئلہ 8.20: حقیقی سمتی فضا

a, b, \dots ارکان پر مشتمل غیر خالی سلسلہ V حقیقی سمتی فضا⁹⁶ یا حقیقی خطی فضا کہلاتا ہے اور اگر V میں درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے ہیں) موجود ہوں تب یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) سمتیات کہلاتے ہیں۔

(الف) سمتی جمع V کے ہر دو سمتیات a اور b کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو a اور b کا مجموعہ کہلاتا اور $a + b$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) قانون تبادول۔ V کے ہر دو ارکان a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.76) \quad a + b = b + a$$

(الف-2) قانون تلازم۔ V کے ہر تین ارکان a, b اور c کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.77) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{جو } a + b + c \text{ لکھا جاتا ہے})$$

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو صفر سمتیہ کہلاتا اور 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.78) \quad a + 0 = a$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ a کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-a$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$(8.79) \quad a + (-a) = 0$$

(ب) غیر سمتی ضرب۔ حقیقی اعداد غیر سمتی کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ a کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو a اور c کا حاصل ضرب کہلاتا اور ca (یا ac) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

(ب-1) قانون جزئی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.80) \quad c(a + b) = ca + cb$$

(ب-2) قانون جزئی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.81) \quad (c + k)a = ca + ka$$

(ب-3) قانون وابستگی۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.82) \quad c(ka) = (ck)a \quad (\text{جو } cka \text{ لکھا جاتا ہے})$$

(ب-4) V میں ہر سمتیہ a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(8.83) \quad 1 \cdot a = a$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے مخلوط سمتی فضا کی مسلکی تعریف حاصل ہو گی۔

درج بالا میں ہر مسلمہ V کی ایک خصوصیت بیان کرتا ہے۔ یہ تمام مساوات مل کر V کے تمام خصوصیات بیان کرتے ہیں۔

درج ذیل تصورات جو سمتی فضا سے تعلق رکھتے ہیں بالکل حصہ 8.4 میں بیان کیے گئے تصورات کی طرح ہیں۔ یوں V میں موجود سمتیات $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ کے خطی مجموعہ سے مراد درج ذیل ہے۔

$$c_1 a_{(1)} + \dots + c_m a_{(m)} \quad (c_m, \dots, c_1 \text{ کوئی بھی غیر سمتی ہیں})$$

یہ سمتیات اس صورت خطی طور غیر تابع سلسلہ بناتے ہیں جب درج ذیل

$$(8.84) \quad c_1 a_{(1)} + \cdots + c_m a_{(m)} = 0$$

سے مراد $c_1 = 0, \dots, c_m = 0$ ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.84 درست ہو تب $a_{(1)}$ تا $a_{(m)}$ سمتیات خطی طور تابع⁹⁷ کہلاتے ہیں۔

$m = 1$ کی صورت میں مساوات 8.84 سے $ca = 0$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ a اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $a \neq 0$ ہو۔

اگر V میں n عدد غیر تابع سمتیات ہوں اور V میں n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا بُعد n ہو گا اور V کو n بُعدی کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو V کی اساس⁹⁸ کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ منفرد ہو گا (مثال 8.39 سے رجوع کریں)۔

مثال 8.39: یکتائی

سمتیہ v کو اساس $a_{(1)}, \dots, a_{(n)}$ کا خطی مجموعہ $v = c_1 a_{(1)} + \cdots + c_n a_{(n)}$ لکھا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ v کو $v = c'_1 a_{(1)} + \cdots + c'_n a_{(n)}$ بھی لکھنا ممکن ہے۔ ان کے فرق $v - v = 0$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v - v = (c_1 - c'_1) a_{(1)} + \cdots + (c_n - c'_n) a_{(n)} = 0$$

مساوات 8.84 کے تحت اساس (یعنی خطی طور غیر تابع سمتیات) کے لئے درج بالا صرف اس صورت لکھا جاسکتا ہے جب $c_1 - c'_1 = 0, \dots, c_n - c'_n = 0$ ہوں یعنی جب $c'_1 = c_1, \dots, c'_n = c_n$ ہوں، لیکن ایسا ہونے سے دونوں مجموعے بالکل یکساں حاصل ہوں گے۔ یوں کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کرنے والا خطی مجموعہ منفرد ہو گا۔ □

مثال 8.40: قالب کا سمتی فضا

حقیقی 2×2 قالبوں کی چار بُعدی حقیقی سمتی فضا ہو گی۔ اس کی اساس درج ذیل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے

$$(8.85) \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

linearly dependent⁹⁷
basis⁹⁸

باب 8. خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

کسی بھی 2×2 قالب $A = [a_{jk}]$ کو $A = c_{11}B_{11} + c_{12}B_{12} + c_{21}B_{21} + c_{22}B_{22}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح حقیقی $m \times n$ حقیقی قالبوں (جہاں m اور n معین قیمتیں ہیں) کی mn بُعدی سمتی فضا ہوگی۔ □

مثال 8.41: کثیر رکنی کی سمتی فضا
درجہ دو تک کے تمام کثیر رکنی یعنی a ، $bx + c$ اور $dx^2 + ex + f$ کے سمتی فضا کا بُعد 3 ہے جس کی اساس $\{1, x, x^2\}$ ہے۔ □

اگر سمتی فضا V میں n خطی طور غیر تابع سمتیات ہوں جہاں n کتنا بھی بڑا عدد ہو، تب V لامتناہی بُعدی⁹⁹ کہلائے گا۔ لامتناہی بعد کی سمتی فضا کی مثال x محور کے کسی وقفے $[a, b]$ پر تمام استمراری تفاعل کی فضا ہے۔

اندرونی ضرب فضا

R^n میں موجود قطاری سمتیات a اور b کا ضرب $a^T b$ ، جسامت 1×1 کا قالب ہو گا جس کا واحد اعدادی رکن a اور b کا اندرونی ضرب¹⁰⁰ کہلاتا ہے۔ اندرونی ضرب کو (a, b) اور $a \cdot b$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے اور یوں اس کو ضرب نقطہ¹⁰¹ بھی کہتے ہیں۔ اس طرح درج ذیل ہو گا۔

(8.86)

$$a^T b = (a, b) = a \cdot b = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

آئیں اب اندرونی ضرب کے اس تصور کو وسعت دے کر، (a, b) کی بنیادی خصوصیات کو لیتے ہوئے، عمومی سمتی فضا کی "تصوراتی اندرونی ضرب" (a, b) حاصل کرتے ہیں، یعنی:

⁹⁹infinite dimensional
¹⁰⁰inner product
¹⁰¹dot product

مسئلہ 8.21: حقیقی اندرونی ضرب فضا
حقیقی سمتی فضا V اس صورت حقیقی اندرونی ضرب فضا (یا حقیقی قبل از بلبرٹ¹⁰² فضا) کہلاتا ہے جب وہ درج ذیل خصوصیت رکھتا ہو۔

V میں ہر a اور b سمتیات کے ساتھ ایسا حقیقی عدد وابستہ ہے، جو a اور b کا اندرونی ضرب کہلاتا اور (a, b) سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہے۔

• (الف) ہر غیر سمتیات q_1 ، q_2 اور V میں موجود ہر سمتیات a ، b اور c کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(q_1 a + q_2 b, c) = q_1 (a, c) + q_2 (b, c) \quad (\text{خطیت})$$

• (ب) V میں ہر سمتیات a اور b کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(a, b) = (b, a) \quad (\text{تشاکل})$$

• (پ) V میں ہر a کے لئے

$$(a, a) \geq 0 \quad (\text{قطعی مثبت})$$

ہو گا جبکہ $(a, a) = 0$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $a = 0$ ہو۔

ایسے سمتیات جن کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو عمودی¹⁰³ کہلاتے ہیں۔

V میں موجود سمتیہ a کی لمبائی یا معیار¹⁰⁴ $\|a\|$ سے مراد درج ذیل ہے۔

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)} \quad (\geq 0) \quad \text{معیار} \quad (8.87)$$

ایسا سمتیہ جس کا معیار اکائی (1) ہو اکائی سمتیہ¹⁰⁵ کہلاتا ہے۔

¹⁰² جرمن ریاضی دان داؤڈ بلبرٹ [1862-1943]۔ تئہائی بُندی V کو بلبرٹ فضا کہتے ہیں۔

¹⁰³ orthogonal

¹⁰⁴ norm

¹⁰⁵ unit vector

ان مسلمات اور مساوات 8.87 سے درج ذیل بنیادی کوشی شوارز¹⁰⁶ عدم مساوات¹⁰⁷ حاصل ہوتی ہے۔

$$(8.88) \quad |(a, b)| \leq \|a\| \|b\| \quad (\text{کوشی شوارز عدم مساوات})$$

اس سے تکنونی عدم مساوات¹⁰⁸

$$(8.89) \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (\text{تکنونی عدم مساوات})$$

درج ذیل متوازی الاضلاع مساوات¹⁰⁹ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$(8.90) \quad \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad (\text{متوازی الاضلاع مساوات})$$

مثال 8.42: n بُعدی اقلیدسی فضا¹¹⁰ R^n میں سمتیت قطار a اور b کا اندرونی ضرب درج ذیل ہو گا

$$(8.91) \quad (a, b) = a^T b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

جو مسئلہ 8.21 کے شق الف، ب اور پ پر پورا اترتا ہے۔ مساوات 8.87 استعمال کرتے ہوئے اقلیدسی معیار درج ذیل ہو گا۔

$$(8.92) \quad \|a\| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a^T a} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

□

اقلیدسی فضا کو عموماً E^n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 8.43: تفاعل کی اندرونی ضرب وقفہ $\alpha \leq x \leq \beta$ پر حقیقی قیمت والے تمام استمراری تفاعل $f(x)$ ، $g(x)$ ، کا سلسلہ، مجموعہ تفاعل اور غیر سمتی سے ضرب کے اصولوں کے تحت، حقیقی سمتی فضا ہو گا۔ اس "تفاعل فضا" پر اندرونی ضرب سے مراد درج ذیل مکمل ہے

$$(8.93) \quad (f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$$

¹⁰⁶ جرمن ریاضی دان ہرمن امندرس شوارز [1843-1921]

¹⁰⁷ Cauchy-Schwarz inequality

¹⁰⁸ triangle inequality

¹⁰⁹ parallelogram equality

¹¹⁰ Euclidean space

جو مسئلہ 8.21 کے شق الف، ب اور پ پر پورا اترتا ہے۔ مساوات 8.87 معیار دیتا ہے۔

$$(8.94) \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx}$$

□

خطی تبدلہ

فرض کریں کہ X اور Y سمتی فضا ہیں۔ X میں ہر سمتیہ x کے ساتھ ہم Y کا منفرد سمتیہ y وابستہ کرتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ X کا Y پر تبدلہ کیا گیا ہے، یا کہ X کی Y پر نقشہ کشی کی گئی ہے اور یا کہ X سے Y کا عامل¹¹¹ دیا گیا ہے۔ ایسی نقشہ کشی کو بڑے حرف مثلاً F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ Y کے سمتیہ y ، جسے X کے سمتیہ x کے ساتھ وابستہ کیا گیا ہے، F میں x کا عکس¹¹² کہلاتا اور $F(x)$ [یا بغیر توسین Fx] سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

F کو اس صورت خطی نقشہ کشی¹¹³ یا خطی تبدلہ¹¹⁴ کہتے ہیں جب تمام غیر سمتی c اور X میں موجود تمام سمتیات v اور x درج ذیل پر پورا اترتے ہوں۔

$$(8.95) \quad \begin{aligned} F(v + x) &= F(v) + F(x) \\ F(cx) &= cF(x) \end{aligned}$$

فضا R^n کا فضا R^m پر خطی تبدلہ

ہم $X = R^n$ اور $Y = R^m$ لیتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں کوئی بھی $m \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ فضا R^n کا فضا R^m پر تبدلہ کر سکتا ہے، یعنی:

$$(8.96) \quad y = Ax$$

operator¹¹¹

image¹¹²

linear mapping¹¹³

linear transformation¹¹⁴

اب چونکہ $A(u + x) = Au + Ax$ اور $A(cx) = cAx$ ہیں لہذا درج بالا خطی متبادلہ ہے۔

اب الٹ چلتے ہوئے، ہم ثابت کرتے ہیں کہ R^n کے R^m پر ہر متبادلہ F کو، R^n کی اساس اور R^m کی اساس چننے کے بعد، $m \times n$ قالب A سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

فرض کریں کہ R^n کی کوئی اساس $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ ہے۔ یوں R^n میں موجود ہر x کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$x = x_1 e_{(1)} + \dots + x_n e_{(n)}$$

چونکہ F خطی ہے لہذا x کا عکس $F(x)$ درج ذیل ہو گا۔

$$F(x) = F(x_1 e_{(1)} + \dots + x_n e_{(n)}) = x_1 F(e_{(1)}) + \dots + x_n F(e_{(n)})$$

یوں R^n کی اساس $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ کا عکس F کو یکساں طور پر تعین کرتا ہے۔ ہم اب R^n کی درج ذیل "معیاری اساس" چنتے ہیں جہاں $e_{(j)}$ کا j عدد رکن 1 کے برابر جبکہ بقایا تمام ارکان 0 کے برابر ہیں۔

$$(8.97) \quad e_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہم ثابت کرتے ہیں کہ ہم ایسا $m \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ تعین کر سکتے ہیں کہ R^n میں ہر x اور Y میں اس کے عکس y کا درج ذیل تعلق ہو گا۔

$$(8.98) \quad y = F(x) = Ax$$

یقیناً $e_{(1)}$ کے عکس $y^{(1)} = F(e_{(1)})$ سے درج ذیل ملتا ہے

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

جس سے A کی پہلی قطار $a_{11} = y_1^{(1)}$ ، $a_{21} = y_2^{(1)}$ ، \dots ، $a_{m1} = y_m^{(1)}$ حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح $e_{(2)}$ کے عکس سے A کی دوسری قطار حاصل ہوگی اور آخر کار $e_{(m)}$ کے عکس سے A کی آخری قطار حاصل ہوگی۔ یوں ثبوت پورا ہوتا ہے۔

ہم کہتے ہیں کہ R^n اور R^m کے چننے گئے اساس کے لحاظ سے A کو F ظاہر کرتا ہے یا کہ F ، A کا اظہار ہے۔ ہم ایسی شے، جس کے خصوصیات غیر واضح ہوں، کو ایسی شے سے ظاہر کرتے ہیں جس کے خصوصیات نسبتاً زیادہ واضح ہوں۔

تین بُعدي اقلیدسی فضا E^3 کی معیاری اساس کو عموماً $e_{(1)} = i$ ، $e_{(2)} = j$ اور $e_{(3)} = k$ لکھا جاتا ہے یعنی

$$(8.99) \quad i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جو فضا میں کارٹیزیسی نظام محدد¹¹⁵ کے، محور کی مثبت سمت میں، تین آپس میں عمودی اکائی سمتیت ہیں۔

مثال 8.44: تبدلہ

فضا میں کارٹیزیسی نظام کے محور کا تبدلہ درج ذیل قالب دیتے ہیں۔ یہ تبدلے کیا کام سرانجام دیتے ہیں؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جوابات: A : خط $x_2 = x_1$ میں انعکاس ہے۔ B : خط x_1 میں انعکاس ہے۔ C : مبدا میں انعکاس ہے جبکہ D محور x_1 کی سمت میں لمبائی میں اضافہ ($a > 1$) یا کمی ($a < 1$) پیدا کرتی ہے۔ □

مثال 8.45: خطی تبدلہ

ایسی خطی تبدلہ دریافت کریں جو (x_1, x_2) کا نقش $(5x_1 - 3x_2, -3x_1 + 7x_2)$ دے۔

حل: ظاہر ہے کہ ہمیں درج ذیل تعلق چاہیے ہے

$$\begin{aligned} y_1 &= 5x_1 - 3x_2 \\ y_2 &= -3x_1 + 7x_2 \end{aligned}$$

جس سے ہمیں درج ذیل قالب A ملتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

□

اگر مساوات 8.96 میں A چکور $n \times n$ قالب ہو تب یہ R^n کا نقش R^n دے گا۔ اگر یہ A غیر نادر قالب (حصہ 8.8 سے رجوع کریں) ہو تب مساوات 8.96 کے دونوں اطراف کے بائیں جانب کو A^{-1} سے ضرب دے کر $A^{-1}A = I$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل الٹ بدل¹¹⁶ ملتا ہے۔

$$(8.100) \quad x = A^{-1}y$$

یوں مساوات 8.96 جس x_0 کا نقش y_0 دیتا ہے، مساوات 8.100 اس y_0 کا نقش وہی x_0 دیتا ہے۔ خطی مبدل کا الٹ، مساوات 8.100 دے گا لہذا یہ بھی خطی ہو گا۔

نظم خطی تبادلہ

فرض کریں کہ X ، Y اور W عمومی سمتی فضا ہیں۔ پہلے کی طرح X کو Y پر F نقش کرتا ہے جبکہ W کو X پر نقش G کرتا ہے۔ اب پہلے G اور بعد میں F ، بالکل اسی ترتیب سے، لاگو کرتے ہوئے تبادلہ H کی نظم¹¹⁷ حاصل ہوتا ہے۔

$$H = F \circ G = FG = F(G)$$

یوں اگر فضا W میں سمتیہ w ہو تب سمتیہ $G(w)$ ، فضا X میں ہو گا جبکہ سمتیہ $F(G(w))$ ، فضا Y میں ہو گا۔ یوں W کا Y پر نقش، تبادلہ H دے گا جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(8.101) \quad H(w) = (F \circ G)(w) = (FG)(w) = F(G(w))$$

عمومی فضا میں درج بالا خطی تبادلہ کے نظم کی تعریف ہے۔ نظم کی خطیت کو مثال 8.46 میں ثابت کیا گیا ہے۔

inverse transform¹¹⁶
composition¹¹⁷

مثال 8.46: خطی نظام کا نظم خطی ہوگا

H کی خطیت ثابت کرنے کی خاطر ہمیں ثابت کرنا ہوگا کہ H مساوات 8.95 پر پورا اترتا ہے۔ فضا W میں دو عدد سمتیات w_1 اور w_2 کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 H(w_1 + w_2) &= (F \circ H)(w_1 + w_2) \\
 &= (FG)(w_1 + w_2) \\
 &= F(G(w_1 + w_2)) \\
 &= F(G(w_1) + G(w_2)) \quad \text{G کی خطیت} \\
 &= F(G(w_1)) + F(G(w_2)) \quad \text{H کی خطیت} \\
 &= (F \circ G)(w_1) + (F \circ G)(w_2) \quad \text{مساوات 8.101 کے تحت} \\
 &= H(w_1) + H(w_2) \quad \text{H کی تعریف}
 \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 H(cw_2) &= (F \circ G)(cw_2) = F(G(cw_2)) = F(cG(w_2)) \\
 &= cF(G(w_2)) = c(F \circ G)(w_2) = cH(w_2)
 \end{aligned}$$

□

یوں ثابت ہوا کہ H خطی ہے۔

ہم نے عمومی سمتی فضا میں خطی تبدلہ کے کی تعریف بیان کی اور ثابت کیا کہ خطی تبدلہ کا نظم خطی ہے۔

اب ہم خطی تبدلہ کے نظم کا قلبی ضرب کے ساتھ تعلق جاننا چاہیں گے۔

ایسا کرنے کی خاطر ہم $X = R^n$ ، $Y = R^m$ اور $W = R^p$ لکھتے ہیں۔ فضا کی یہ مخصوص صورتیں چنتے ہوئے ہم خطی تبدلہ کو قلبی صورت میں لکھ کر مساوات 8.96 کے طرز کی قلبی مساوات لکھ پاتے ہیں۔ اس طرح F کو $m \times n$ عمومی قالب $A = [a_{jk}]$ اور G کو $n \times p$ عمومی قالب $B = [b_{jk}]$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یوں ہم F کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں سمتیہ قطار x کے n رکن اور سمتیہ y کے m رکن ہوں گے۔

(8.102)

$$y = Ax$$

اسی طرح G کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں سمتیہ قطار w کے p رکن ہوں گے۔

$$(8.103) \quad x = Bw$$

مساوات 8.103 کو مساوات 8.102 میں پر کرتے ہیں۔

$$(8.104) \quad y = Ax = A(Bw) = (AB)(w) = ABw = Cw \quad (C = AB)$$

درج بالا 8.101 کی قالبی صورت ہے۔ یوں تبدلہ کی نظم کو قالبی ضرب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ درج بالا مساوات میں حقیقی $m \times p$ قالب C خطی تبدلہ H کو ظاہر کرتی ہے جو R^p کا نقش R^n دیتی ہے اور سمتیہ w کے p رکن ہیں۔

مثال 8.47: خطی تبدلہ۔ نظم

ہم یہاں مثال 8.44 کے A اور D قالب دوبارہ استعمال کرتے ہیں جہاں $a = 2$ لیا جائے گا۔ سمتیہ $[w_1, w_2]^T$ پر D لاگو کرنے سے سمتیہ کا پہلا رکن x_1 سمت میں بڑھ کر $2w_1$ ہو جائے گا۔ حاصل سمتیہ $[2w_1, w_2]^T$ ہو گا جس پر A لاگو کرنے سے خط $x_2 = x_1$ میں عکس $[w_2, 2w_1]^T$ حاصل ہو گا۔ اب یہی عمل تبدلہ H ، جسے قالب A ظاہر کرتا ہے، اور تبدلہ G ، جسے قالب D ظاہر کرتا ہے، کا نظم $H = F \circ G$ دے گا۔ آئیں اس عمل کو قالبی ضرب سے حاصل کریں۔

$$AD = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

اب مساوات 8.104 کی طرح درج ذیل ہو گا

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ 2w_1 \end{bmatrix}$$

جو وہی پہلا جواب ہے۔ آپ نے دیکھا کہ یقیناً $C = AD$ لکھ کر خطی تبدلہ کے نظم کو خطی تبدلہ C سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جس میں انفرادی تبدلہ کی ترتیب برقرار رکھنا ضروری ہے۔ آپ ایسا نہ کرتے ہوئے $C = DA$ لے کر تسلی کر لیں کہ حاصل جواب درست نہ ہو گا۔ □

سوالات

سوال 8.138: R^2 کے ممکنہ تین مختلف اساس لکھیں۔

$$\text{جواب: } [1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T; \quad [1 \ 0]^T, [0 \ -1]^T; \quad [1 \ 1]^T, [-1 \ 1]^T;$$

سوال 8.139 تا سوال 8.142 میں خطی تبدلہ دیا گیا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ الٹ خطی تبدلہ دریافت کریں۔

سوال 8.139:

$$y_1 = 0.5x_1 - 1.5x_2$$

$$y_2 = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{جواب: } x_2 = -2y_1 - y_2, \quad x_1 = -4y_1 - 3y_2$$

سوال 8.140:

$$y_1 = -2x_1 + 3x_2$$

$$y_2 = 3x_1 - 2x_2$$

$$\text{جواب: } x_2 = 0.6y_1 + 0.4y_2, \quad x_1 = 0.4y_1 + 0.6y_2$$

سوال 8.141:

$$y_1 = -2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$y_2 = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3$$

$$y_3 = x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{جواب: } x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3, \quad x_2 = \frac{5}{8}y_1 + \frac{3}{8}y_2 + \frac{1}{8}y_3, \quad x_3 = \frac{1}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2 + \frac{5}{8}y_3$$

سوال 8.142:

$$y_1 = x_1 + x_3$$

$$y_2 = -2x_3$$

$$y_3 = x_1 - x_2$$

$$\text{جواب: } x_1 = y_1 + 0.5y_2, \quad x_2 = y_1 + 0.5y_2 - y_3, \quad x_3 = -0.5y_2$$

سوال 8.143 تا سوال 8.147 کی اقلیدسی معیار حاصل کریں۔

سوال 8.143:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$$

جواب: $\sqrt{14}$

سوال 8.144:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

جواب: $\sqrt{14}$

سوال 8.145:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

جواب: $2\sqrt{5}$

سوال 8.146:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$$

جواب: $\frac{\sqrt{61}}{6}$

سوال 8.147:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & -0.5 \end{bmatrix}^T$$

جواب: $\sqrt{0.3}$

سوال 8.148 تا سوال 8.151 اندرونی ضرب اور عمودیت کے سوالات ہیں۔

سوال 8.148: a کی کس قیمت کے لئے $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix} -1 & 1 & a & 2 \end{bmatrix}^T$ آپس میں عمودی ہیں۔جواب: $a = -3$

سوال 8.149: کوشی شوارز عدم مساوات

سوال 8.148: a کی کس قیمت کے لئے $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix} -1 & 1 & a & 2 \end{bmatrix}^T$ آپس میں عمودی ہیں۔جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$ ، $\|b\| = \sqrt{38}$ ہیں جن سے $\|a\|\|b\| = 23.065$ ملتا ہے جبکہ $|a \cdot b| = 23$ ہیں لہذا مساوات 8.88 کی تصدیق ہوتی ہے۔

سوال 8.150: تکونی عدم مساوات

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T \text{ اور } b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T \text{ کے لئے مساوات 8.89 کی تصدیق کریں۔}$$

جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$ ، $\|b\| = \sqrt{38}$ اور $\|a + b\| = 7\sqrt{2}$ ہیں لہذا مساوات 8.89 کی تصدیق ہوتی ہے۔

سوال 8.151: متوازی الاضلاع مساوات

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T \text{ اور } b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T \text{ کے لئے مساوات 8.90 کی تصدیق کریں۔}$$

جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$ ، $\|b\| = \sqrt{38}$ ، $\|a + b\|^2 = 98$ اور $\|a - b\|^2 = 6$ ہیں لہذا $104 = 104$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 8.90 کی تصدیق کرتی ہے۔

باب 9

خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب

امتیازی قدر مسائل درج ذیل سمتی مساوات پر مبنی ہیں جہاں A چکور قالب، x نامعلوم سمتیہ اور λ نامعلوم غیر سمتیہ ہے۔

$$(9.1) \quad Ax = \lambda x$$

امتیازی قدر مسائل میں ہمیں وہ λ اور x درکار ہیں جو درج بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔ λ کی ہر قیمت کے لئے $x = 0$ مساوات 9.1 کا غیر اہم صفر حل ہے۔ ہم اس غیر اہم صفر حل میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہذا ہم غیر صفر حل $x \neq 0$ جاننا چاہیں گے۔

λ کی وہ قیمتیں جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں A کے امتیازی اقدار یا امتیازی اقدار¹ کہلاتے ہیں اور وہ x جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں A کے امتیازی سمتیات یا امتیازی تفاعل² کہلاتے ہیں۔

اس معصوم نظر آنے والا سمتی مساوات کے اندر حیران کن تفصیل چھپی ہے۔ امتیازی قدر مسائل انجینئری، طبیعیات، ریاضی، حیاتیات، ماحولیاتی سائنس، شہری منصوبہ بندی، معاشیات، نفسیات اور دیگر شعبوں میں عموماً درپیش آتے ہیں۔ آپ کو یقیناً ان سے زندگی میں واسطہ پڑے گا۔

eigenvalues¹
eigenfunctions²

9.1 امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول

درج ذیل پر غور کریں جہاں غیر صفر سمتیہ اور چکور قالب کے ضرب دکھائے گئے ہیں۔

$$(9.2) \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

بائیں ہاتھ کی ضرب میں ہمیں مکمل طور پر نیا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جس کی لمبائی اور سمت ابتدائی سمتیہ کی لمبائی اور سمت سے مختلف ہیں۔ عموماً سمتیہ کو چکور قالب سے ضرب دینے سے مکمل طور پر مختلف سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کی ضرب میں حاصل سمتیہ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

یعنی حاصل سمتیہ اور ابتدائی سمتیہ کی سمتیں ایک جیسی ہیں جبکہ حاصل سمتیہ کی لمبائی ابتدائی سمتیہ کی لمبائی کے دس گنا ہے جس کو $\lambda = 10$ لکھا جائے گا۔ چکور قالب A کے لحاظ سے ایسے λ اور غیر صفر سمتیات کا حصول اس باب کا مرکزی مضمون ہے۔

آئیں درج بالا مشاہدے کو دستوری شکل دیں۔ فرض کریں کہ $A = [a_{jk}]$ غیر صفر $n \times n$ جسامت کا چکور قالب ہے۔ اب درج ذیل سمتی مساوات پر غور کریں۔

$$(9.3) \quad Ax = \lambda x$$

ان λ اور غیر صفر x کے حصول کے مسئلے کو، جو مساوات 9.3 پر پورا اترے ہوں، امتیازی قدر مسئلہ کہتے ہیں۔

یہاں توجہ دیں کہ A دیا گیا چکور قالب ہے جبکہ λ نامعلوم غیر سمتیہ اور x نامعلوم سمتیہ ہے۔ ہم وہ λ اور x حاصل کرنا چاہتے ہیں جو مساوات 9.3 پر پورا اترتے ہوں۔ جیومیٹریکی طور پر ہم وہ سمتیات x حاصل کرنا چاہتے ہیں جنہیں A سے ضرب دینا ایسا ہی ہے جیسے ان سمتیوں کو غیر سمتی λ سے ضرب دیا جائے یعنی کہ Ax اور x راست تناسب ہوں۔ یوں مثبت λ کی صورت میں ابتدائی اور حاصل سمتیات کی سمتیں ایک جیسی ہوں گی جبکہ منفی λ کی صورت میں ان کی سمتیں آپس میں الٹ ہوں گی۔ (باب کی شروع میں سادہ مثال سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔)

λ کی وہ مخصوص قیمت جس کے لئے مساوات 9.3 کے غیر صفر $x \neq 0$ حل موجود ہوں A کی امتیازی قدر³ کہلاتی ہے اور مطابقتی سمتیات x ، اس λ کے لحاظ سے قالب A کے امتیازی سمتیات⁴ یا امتیازی سمتیات⁵ کہلاتے ہیں۔ A کے تمام امتیازی اقدار کو A کا طیف⁶ کہتے ہیں۔ طیف میں کم سے کم ایک عدد امتیازی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔ امتیازی اقدار کی سب سے زیادہ حتی قیمت کو A کا رداس طیف⁷ کہتے ہیں۔

امتیازی قدر مسئلے کا حل چند مثالوں کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 9.1: امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات قدم بہ قدم دریافت کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

پہلے امتیازی اقدار دریافت کیے جاتے ہیں۔ مساوات 9.3 درج ذیل ہو گا۔

$$Ax = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

تمام اجزاء کو ایک طرف منتقل کرتے ہوئے

$$(9.4) \quad \begin{aligned} (-5 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

قابلی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(A - \lambda I)x = 0$$

مسئلہ 8.15 کے تحت اس متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل $x \neq 0$ (قالب A کا امتیازی سمتیہ جس کی ہمیں تلاش ہے) اس صورت ممکن ہو گا جب عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو گا۔

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

eigenvalue³
eigenvectors⁴
characteristic vectors⁵
spectrum⁶
spectral radius⁷

ہم $D(\lambda)$ کو A کی امتیازی مقطع جبکہ اس کی پھیلی ہوئی صورت کو امتیازی کثیر رکنی اور $D(\lambda) = 0$ کو امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ اس دو درجی الجبرائی مساوات کے حل $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -6$ ہیں جو A کے امتیازی اقدار ہیں۔

$\lambda_1 = -1$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5 - (-1)]x_1 + 2x_2 &= 0 & \Rightarrow & -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + [-2 - (-1)]x_2 &= 0 & \Rightarrow & 2x_2 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = 2x_1$ ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے متعدد متوازی امتیازی سمتیات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یوں x_1 (یا x_2) کی کوئی بھی قیمت چن کر x_2 (x_1) حاصل کرتے ہوئے امتیازی سمتیہ حاصل ہو گا۔ ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہیں اور یوں $x_1 = [1 \ 2]^T$ ہو گا۔ اس جواب کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)x_1 = \lambda_1 x_1$$

$\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -6$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5 - (-6)]x_1 + 2x_2 &= 0 & \Rightarrow & x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + [-2 - (-6)]x_2 &= 0 & \Rightarrow & 2x_2 + 4x_2 = 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$ ملتا ہے۔ یوں $x_1 = 2$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے لہذا $\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $x_2 = [2 \ -1]^T$ ہو گا۔ اس کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = (-6)x_2 = \lambda_2 x_2$$

آپ حصہ 9.1 کے آغاز میں مساوات 9.2 میں دیے گئے مثال کو حل کرتے ہوئے امتیازی اقدار 10، 3 اور \square مطابقتی امتیازی سمتیات $[3 \ 4]^T$ ، $[-1 \ 1]^T$ حاصل کریں۔

درج بالا مثال میں استعمال کی گئی ترکیب کی عمومی صورت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 9.3 کو اجزاء کی صورت میں

درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \quad (9.5)$$

تمام اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

اس کو قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (9.7)$$

مسئلہ کریبر (مسئلہ 8.15) کے تحت درج بالا متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9.8)$$

$A - \lambda I$ کو A کا امتیازی قالب جبکہ $D(\lambda)$ کو A کا امتیازی مقطع کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو A کی امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو پھیلا کر A کی امتیازی کثیر رکنی حاصل ہوگی۔

مساوات 9.8 کو پھیلا کر حاصل کثیر رکنی میں λ^n بلند تر طاقت ہے لہذا اس سے زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار حاصل ہو سکتے ہیں۔

مسئلہ 9.1: امتیازی اقدار

چکور قالب A کے امتیازی اقدار A کے امتیازی مساوات 9.8 سے حاصل ہوں گے۔
یوں $n \times n$ قالب کی کم سے کم ایک عدد امتیازی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔

n کی بڑی قیمت کی صورت میں امتیازی اقدار عموماً ترکیب نیوٹن یا کسی اور اعدادی ترکیب سے حاصل کئے جائیں گے۔

امتیازی اقدار پہلے حاصل کیے جاتے ہیں۔ باری باری ان امتیازی قدر کو مساوات 9.6 کے نظام میں پر کرتے ہوئے مطابقتی امتیازی سمتیہ (گاوسی اسقاط کی مدد سے) حاصل کیا جاتا ہے۔

امتیازی سمتیات درج ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

مسئلہ 9.2: امتیازی سمتیات اور امتیازی فضا

اگر قالب A کے کسی ایک امتیازی قدر λ کے مطابقتی امتیازی سمتیات w اور x ہوں تب $w + x$ (بشرطیکہ $w \neq -x$ ہو) اور kx جہاں $k \neq 0$ ہے بھی اس λ کے مطابقتی بھی امتیازی سمتیات ہوں گے۔

یوں کسی ایک امتیازی قدر کے مطابقتی امتیازی سمتیات اور 0 سمتیہ مل کر فضا بناتے ہیں جس کو اس λ کے لئے A کی مطابقتی امتیازی فضا کہتے ہیں۔

ثبوت: $Ax = \lambda x$ اور $Aw = \lambda w$ سے مراد درج ذیل ہے

$$A(w + x) = Aw + Ax = \lambda w + \lambda x = \lambda(w + x)$$

اور $A(kw + lx) = \lambda(kw + lx)$ ہے لہذا $A(kw) = k(Aw) = k(\lambda w) = \lambda(kw)$ گا۔

□

امتیازی سمتیہ کو معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری امتیازی سمتیہ یعنی اکائی امتیازی سمتیہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً مثال 9.1 میں $x_1 = [1 \ 2]^T$ کی لمبائی $\|x_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ہے جس سے معیاری امتیازی سمتیہ (اکائی امتیازی سمتیہ) $\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \ \frac{2}{\sqrt{5}}\right]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: متعدد امتیازی سمتیات

درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: اس قالب کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

جس سے A کے جذر $\lambda_1 = 5$ اور $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ ملتے ہیں۔ (بلند درجی مساوات کا خط کھینچ کر اس کے جذر با آسانی حاصل کیے جاتے ہیں)۔ نظام $(A - \lambda I)x = 0$ میں $\lambda = \lambda_1 = 5$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مطابقتی امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے

$$A - \lambda I = A - 5I = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جس کا درجہ دو (2) ہے۔ یوں $-\frac{24}{7}x_2 - \frac{48}{7}x_3 = 0$ میں $x_3 = -1$ چنتے ہوئے $x_2 = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو $-7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 1$ ملتا ہے۔ یوں $x_1 = [1 \ 2 \ -1]^T$ قالب A کا امتیازی قدر $\lambda = 5$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ ہے۔

$\lambda = -3$ سے درج ذیل امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے۔

$$A - \lambda I = A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ سے $x_1 = -2x_2 + 3x_3$ لکھا جاسکتا ہے۔ $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_3 = 0$ ملتا ہے جبکہ $x_2 = 0$ چنتے ہوئے $x_3 = 1$ ملتا ہے۔ اس طرح (مساوات 8.41 میں $n = 3$ اور درجہ $A = 2$ ہے لہذا) $\lambda = -3$ کے مطابقتی خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

امتیازی کثیر رکنی کے جذر λ کے درجے کو λ کی الجبرائی کثرت⁸ کہا اور M_λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کسی λ کے مطابقتی خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کی تعداد کو جیومیٹریائی کثرت⁹ کہا اور m_λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں λ کے مطابقتی امتیازی فضا کی بُعد m_λ ہوگی۔

چونکہ امتیازی کثیر رکنی کا درجہ n ہے لہذا تمام الجبرائی کثرت کا مجموعہ n ہوگا۔ مثال 9.2 میں $\lambda = -3$ کے لئے $m_\lambda = M_\lambda = 2$ ہے۔ عموماً $m_\lambda \leq M_\lambda$ ہوگا۔ M_λ اور m_λ کے فرق $\Delta_\lambda = M_\lambda - m_\lambda$ کو λ کی خامی¹⁰ کہتے ہیں۔ یوں مثال 9.2 میں $\Delta_{-3} = 0$ ہے۔ مثبت خامی کا پایا جانا عمومی بات ہے۔

مثال 9.3: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی
قالب A کے امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

یوں $\lambda = 0$ امتیازی قدر ہے جس کی الجبرائی کثرت $M_0 = 2$ ہے۔ $0x_1 + 2x_2 = 0$ سے $x_2 = 0$ حاصل کرتے ہوئے $\lambda = 0$ کے مطابقتی امتیازی سمتیہ کی صورت $[x_1 \ 0]^T$ ملتی ہے لہذا λ کی جیومیٹریائی کثرت $m_0 = 1$ ہے۔ یوں $\lambda = 0$ کی خامی $\Delta_0 = 2 - 1 = 1$ ہے۔ □

مثال 9.4: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی
قالب A کے امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$$

algebraic multiplicity⁸
geometric multiplicity⁹
defect¹⁰

یوں $\lambda = 3$ کی الجبرائی کثرت $M_3 = 2$ ہے۔ $0x_1 + 2x_2 = 0$ سے $x_2 = 0$ حاصل کرتے ہوئے مطابقتی امتیازی سمتیے کی صورت $[x_1 \ 0]^T$ ملتی ہے لہذا λ_3 کی جیومیٹریائی کثرت $3 = 1$ ہے خامی $\Delta_3 = 2 - 1 = 1$ ہے۔ □

مثال 9.5: حقیقی قالب کے مخلوط امتیازی اقدار اور مخلوط امتیازی سمتیات چونکہ حقیقی کثیر رکنی کے مخلوط جذر ممکن ہیں (جو جوڑیوں کی صورت میں پائے جاتے ہیں) لہذا حقیقی قالب کے مخلوط امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات ممکن ہیں۔ درج ذیل منحرف تشاکلی قالب A کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

یوں $\lambda_1 = i = (\sqrt{-1})$ اور $\lambda_2 = -i$ ملتے ہیں جن کے مطابقتی امتیازی سمتیات بالترتیب $-ix_1 + x_2 = 0$ اور $ix_1 + x_2 = 0$ سے حاصل ہوں گے۔ ہم $x_1 = 1$ چنتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

□

اگلے حصے میں درج ذیل مسئلے کی ضرورت پیش آئے گی۔

مسئلہ 9.3: تبدیل محل قالب کے امتیازی سمتیات چکور قالب A کے تبدیل محل قالب A^T کے امتیازی سمتیات وہی ہوں گے جو A کے ہیں۔

ثبوت: صفحہ 618 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت تبدیلی محل سے امتیازی قالب کا مقطع تبدیل نہیں ہوتا ہے۔

□

سوالات

سوال 9.1 تا سوال 9.15 میں دیے قالب کے امتیازی اقدار اور ان کے مطابقتی امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

سوال 9.1: $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
 جوابات: $2, [0 \ 1]^T$; $4, [1 \ 0]^T$

سوال 9.2: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 جوابات: $0, 0, [1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T$

سوال 9.3: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
 جوابات: $3, [1 \ 1]^T$; $1, [1 \ -1]^T$

سوال 9.4: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
 جوابات: $2 - \sqrt{3}, [1 \ -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T$; $2 + \sqrt{3}, [1 \ \frac{1}{\sqrt{3}}]^T$

سوال 9.5: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
 جوابات: $2 - i\sqrt{3}, [1 \ -\frac{i}{\sqrt{3}}]^T$; $2 + i\sqrt{3}, [1 \ \frac{i}{\sqrt{3}}]^T$

سوال 9.6: $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
 جوابات: $-4, [1 \ -1]^T$; $4, [1 \ 1]^T$

سوال 9.7: $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
 جوابات: $-4i, [1 \ i]^T$; $4i, [1 \ -i]^T$

سوال 9.8: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$
 جوابات: $a - ib, [1 \ -i]^T$; $a + ib, [1 \ i]^T$

سوال 9.9: $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

جوابات: $-\frac{i}{\sqrt{5}}, [1 \quad -\frac{i\sqrt{5}+2}{3}]^T$; $\frac{i}{\sqrt{5}}, [1 \quad \frac{i\sqrt{5}-2}{3}]^T$

سوال 9.10: $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

جوابات: $\cos \theta - i \sin \theta, [1 \quad i]^T$; $\cos \theta + i \sin \theta, [1 \quad -i]^T$

سوال 9.11: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $-1, [1 \quad -3 \quad 2]^T$; $0, [0 \quad 1 \quad 0]^T$; $1, [1 \quad 1 \quad 0]^T$

سوال 9.12: $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $1, [1 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}]^T$; $2, [1 \quad 0 \quad 0]^T$; $4, [1 \quad \frac{2}{5} \quad 0]^T$

سوال 9.13: $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

جوابات: $9, [1 \quad -1 \quad \frac{1}{2}]^T$

سوال 9.14: $\lambda = -1$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ دریافت کریں۔

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

جوابات: $[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.15: $\lambda = 3$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ دریافت کریں۔

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

جوابات: $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

سوال 9.16 تا سوال 9.17 میں درکار تبادل $y = Ax$ کے لئے A حاصل کریں جہاں $x = [x_1 \ x_2]^T$ ہے۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں اور ان کی جیومیٹریکی اہمیت بیان کریں۔

سوال 9.16: R^2 میں گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ، کارٹیزی محدود کی مبداء کے گرد $\frac{\pi}{2}$ زاویہ گھومنا۔

جوابات: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ امتیازی اقدار i اور $-i$ ہیں۔ ان کے مطابقتی امتیازی سمتیات مخلوط ہیں لہذا گھمانے والے تبادلے میں کوئی سمت برقرار نہیں رہتی ہے۔

سوال 9.17: R^2 کا x_2 محور پر تظلیل قائمہ۔

جوابات: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; 0 ; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; 1 ، محور x_2 اپنے آپ پر ہی گرتی ہے جبکہ x_1 مبداء پر گرتی ہے۔

9.2 امتیازی مسائل کے چند استعمال

مثال 9.6: لچکدار جھلی کا تاننا

x_1x_2 سطح میں دائری سرحد $x_1^2 + x_2^2 = 1$ کی لچکدار جھلی (شکل 9.6) کو یوں کھینچ کر پھیلا یا جاتا ہے کہ نقطہ $N(x_1, x_2)$ اپنی جگہ سے نقطہ $Q(y_1, y_2)$ کو منتقل ہوتا ہے جہاں اس نقطے کی ابتدائی اور اختتامی مقام کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = Ax = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

وہ صدر محور¹¹ دریافت کریں جن پر N کی تعین کر سمتیہ اور Q کی تعین کر سمتیہ ایک ہی رخ یا الٹ رخ ہوں۔ تبدیلی کے بعد جھلی کا سرحد کس صورت کا ہو گا؟

¹¹ principal axis

حل: ہمیں سمتیہ x اور سمتیہ $y = \lambda x$ درکار ہیں۔ اب چونکہ $y = Ax$ ہے لہذا $Ax = \lambda x$ ہو گا جو امتیازی مسئلہ بیان کرتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$Ax = \lambda x \implies \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} (4 - \lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

اس کی امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

جس کے جذر $\lambda_1 = 6$ اور $\lambda_2 = 2$ ہمارے مسئلے کے امتیازی اقدار ہیں۔ امتیازی قدر $\lambda_1 = 6$ کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

جس سے $x_2 = x_1$ ملتا ہے جہاں x_1 اختیاری مستقل ہے۔ ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 1$ حاصل کرتے ہیں جس سے $\lambda_1 = 6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $[1 \ 1]^T$ ملتا ہے۔ امتیازی قدر $\lambda_2 = 2$ کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

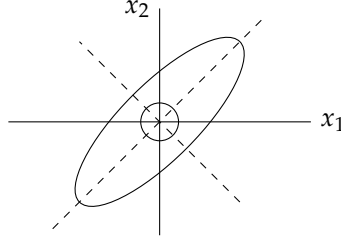
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

جس سے $x_2 = -x_1$ ملتا ہے جہاں x_1 اختیاری مستقل ہے۔ ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = -1$ حاصل کرتے ہیں جس سے $\lambda_2 = 2$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $[1 \ -1]^T$ ملتا ہے۔

یہ امتیازی سمتیات مثبت x_1 محور کے ساتھ 45° اور -45° زاویہ بناتے ہیں۔ صدر محور کے رخ اور ان امتیازی سمتیات کے رخ ایک جیسے ہیں۔ امتیازی اقدار کے تحت ان صدر محور کی سمت میں جھلی بالترتیب 6 اور 2 گنا پھیل گئی ہے۔ شکل 9.6 میں صدر محور کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اب اگر ہم صدر محور کو نئی کارٹیسی نظام $u_1 u_2$ کے محور یوں چنیں کہ $x_1 x_2$ نظام کی پہلی ربع میں مثبت u_1 اور اس کی دوسری ربع میں مثبت u_2 پایا جاتا ہو تب جھلی پر کسی بھی نقطے کو $u_2 = r \sin \phi$ ، $u_1 = r \cos \phi$ لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح جھلی کی سرحد ابتدائی طور پر $(\cos \phi, \sin \phi)$ ہو گا۔ کھینچنے کے بعد درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 = 6 \cos \phi, \quad z_2 = 2 \sin \phi$$



شکل 9.1: صدر محور کو نقطہ دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ (مثال 9.6)

اب چونکہ $\cos \phi + \sin \phi = 1$ کے برابر ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔ یوں کھینچی گئی جہلی کا سرحد ترخیمی ہو گا۔

$$\frac{z_1^2}{6^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$

□

مثال 9.7: امکانی شماریتی عمل

صفحہ 563 پر مثال 8.18 میں شہری رقبے کی استعمال کی تقسیم پر غور کیا گیا۔ یہ عمل آخر کار تحدیدی حال¹² تک پہنچ جائے گا جس کے بعد اس میں مزید تبدیلی رو نما نہیں ہو گی۔ یوں امکانی شماریتی قالب $Ax = x$ پر پورا اترے گا۔ اس مساوات کی امتیازی قدر اکائی ہے جبکہ امتیازی سمتیہ x درکار رقبے کی حتمی تقسیم ہے۔ یوں ہم A سے رو نما ہونے والے عمل کی طویل مدتی اثرات جان سکتے ہیں۔

اس مثال میں

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

ہے جس کے امتیازی اقدار $\frac{7+\sqrt{2}}{10}$ ، $\frac{7-\sqrt{2}}{10}$ اور 1 ہیں۔ ہمیں اکائی امتیازی قدر $\lambda = 1$ سے غرض ہے جو $[1 \ 2 \ 4]^T$ ہے۔ یوں شہر میں آخر کار رہائشی، تجارتی اور صنعتی تقسیم رقبہ بالترتیب 1، 2 اور 4 تناسب سے ہو گی۔

□

مثال 9.8: نمو آبادی کا لولی نمونہ

لولی نمونہ¹³ جو عمر کے لحاظ سے آبادی میں اضافہ بتاتا ہے پر غور کرتے ہیں۔ لولی نمونے میں عمر کے لحاظ سے آبادی کی گروہ بندی کی جاتی ہے اور نظر عموماً صرف مادہ جانور پر رکھی جاتی ہے۔ فرض کریں کہ کسی جانور کی آبادی میں مادہ جانور کی زیادہ سے زیادہ عمر 12 سال ہے۔ ہم مادہ آبادی کو چار سال کے برابر وقفے سے تین گروہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ لولی قالب درج ذیل ہے۔

$$L = [l_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

لولی قالب میں l_{1k} سے مراد k گروہ میں رہتے ہوئے ایک مادہ سے پیدا ہونے والی بیٹیوں کی اوسط تعداد ہے جبکہ گروہ $j-1$ سے گروہ j تک زندہ پہنچنے والی مادہ کی تناسب کو $l_{j,j-1}$ ($j = 2, 3$) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پہلی چار سال کی عمر میں کم عمری کی بنا مادہ بچہ نہیں دیتی لہذا $l_{11} = 0$ ہے۔ اسی طرح پانچ تا آٹھ سال کی عمر میں جوان مادہ زیادہ سے زیادہ (اوسطاً 2.3) بچے دیتی ہے جبکہ ضعیفی میں مادہ اوسطاً 0.4 بچے دیتی ہے۔ اسی طرح بچوں کا 0.6 حصہ یعنی 60% جوانی تک پہنچ پاتا ہے جبکہ جوان جانوروں کا 0.3 حصہ یعنی 30% بڑھاپے تک پہنچتا ہے۔

(الف) اگر ہر گروہ کی ابتدائی مادہ آبادی 2600 ہو تب 4، 8 اور 12 سال بعد ان گروہوں کی مادہ آبادی کیا ہو گی؟ (ب) ان گروہوں کی ابتدائی آبادی کیا ہونے سے تمام گروہوں میں تبدیلی کی تناسب برابر ہو گی؟ یہ تناسب کیا ہو گی؟

حل: (الف) ابتدائی طور پر $x_0 = [2600, 2600, 2600]^T$ ہے۔ چار سال بعد گروہ بندی درج ذیل ہو گی۔

$$x_4 = Lx_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2600 \\ 2600 \\ 2600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7020 \\ 1560 \\ 780 \end{bmatrix}$$

اسی طرح آٹھ سال بعد آبادی $x_8 = Lx_4 = L^2x_0 = [3900, 4212, 468]^T$ اور بارہ سال بعد آبادی $x_{12} = Lx_8 = L^3x_0 = [9875, 2340, 1264]^T$ ہو گی۔

(ب) تناسب تبدیلی آبادی دریافت کرنے کی خاطر ہمیں ایسا امتیازی سمتیہ x درکار ہے جو $Lx = \lambda x$ پر پورا اترتا ہو جہاں $\lambda > 1$ آبادی میں اضافے کے تناسب اور $\lambda < 1$ آبادی میں کمی کے تناسب کو ظاہر کرے

گا۔ امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.38\lambda + 0.072 = 0$$

جس کے امتیازی اقدار $\frac{6}{5}$ ، $-\frac{\sqrt{30}+6}{10}$ اور $\frac{\sqrt{30}-6}{10}$ ہیں جنہیں کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ امتیازی قدر $\lambda = \frac{6}{5} = 1.2$ آبادی میں اضافے کو ظاہر کرتی ہے جس کا مطابقتی امتیازی سمتیہ درج ذیل ہے

$$Lx - \lambda x = \begin{bmatrix} -1.2 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies x = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جہاں $x_3 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 4$ اور $x_1 = 8$ حاصل کیا گیا ہے۔ ابتدائی کل آبادی $3 \times 2600 = 7800$ حاصل کرنے کی خاطر ہم اس امتیازی سمتیہ کو $\frac{7800}{8+4+1} = 600$ سے ضرب دیتے ہوئے ابتدائی آبادی درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$600[8 \ 4 \ 1]^T = [4800 \ 2400 \ 600]^T$$

□

آبادی میں تبدیلی کا تناسب 1.2 فی چار سال ہو گا۔

سوالات

سوال 9.18 تا سوال 9.23 میں تبدیلی شکل $y = Ax$ کا قالب A دیا گیا ہے۔ صدر سمتیں اور ان کی مطابقتی سکڑاو یا پھیلاؤ کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.18: $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ جوابات: $7, [1 \ 1]^T, 45^\circ$; $3, [1 \ -1]^T, -45^\circ$;

سوال 9.19: $\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ جوابات: $14.23, [1 \ 0.654]^T, 33.2^\circ$; $-3.23, [1 \ -1.529]^T, -56.8^\circ$;

$$\text{سوال 9.20: } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } 1 - 2\sqrt{2}, [1 - \sqrt{2}]^T, -54.7^\circ; \quad 1 + 2\sqrt{2}, [1 + \sqrt{2}]^T, 54.7^\circ$$

$$\text{سوال 9.21: } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 43 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } 7 - \sqrt{34}, [1 - \frac{5-\sqrt{34}}{3}]^T, -15.5^\circ; \quad 7 + \sqrt{34}, [1 + \frac{5+\sqrt{34}}{3}]^T, 74.5^\circ$$

$$\text{سوال 9.22: } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } 2, [1 - 1]^T, -45^\circ; \quad 8, [1 + 5]^T, 78.7^\circ$$

$$\text{سوال 9.23: } \begin{bmatrix} 1.25 & 0.45 \\ 0.75 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } 1.02, [1 - 0.507]^T, -26.9^\circ; \quad 2.73, [1 + 3.285]^T, 73.1^\circ$$

سوال 9.24 تا سوال 9.26 میں دیے گئے امکانی شماریاتی عمل کا تحدیدی حال دریافت کریں۔

$$\text{سوال 9.24: } \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 5 & 8 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.25: } \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.26: } \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 29 & 27 & 49 \end{bmatrix}^T$$

سوال 9.27 اور سوال 9.28 میں لزی نمونے کا قالب L دیا گیا ہے (مثال 9.8)۔ نمو آبادی کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.31: آزاد لیونٹف نمونے میں پیداوار کا کچھ حصہ یہی صنعت استعمال کرتے ہیں جبکہ باقی حصہ فروخت کیا جاتا ہے۔ یوں $Ax = x$ (سوال 9.29) کی بجائے، $x - Ax = y$ ہو گا جہاں x پیداوار ہے جبکہ Ax وہ حصہ ہے جو یہی صنعتیں خود استعمال کرتی ہیں لہذا y وہ حصہ ہے جس کو فروخت کیا جاسکتا ہے۔

قالب مانگ $y = [0.1 \ 0.3 \ 0.1]^T$ کو پورا کرنے کے لئے قالب پیداوار x دریافت کریں جہاں قالب صرف درج ذیل ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$x = (I - A)^{-1}y = [0.6747 \ 0.7128 \ 0.7543]^T \text{ جواب}$$

سوال 9.32 تا سوال 9.35 امتیازی قدر مسائل کے عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں جنہیں آپ نے ثابت کرنا ہے۔ ان مسائل میں فرض کریں کہ $n \times n$ قالب A کے امتیازی اقدار λ_1 تا λ_n ہیں جو غیر منفرد ہو سکتے ہیں۔ سوال 9.32: مرکزی وتر کے ارکان کا مجموعہ اور امتیازی اقدار کا مجموعہ برابر ہیں۔

سوال 9.33: طیفی منتقلی $A - kI$ کے امتیازی اقدار $\lambda_1 - k$ تا $\lambda_n - k$ ہیں جبکہ اس کے امتیازی سمتیات وہی ہیں جو A کے امتیازی سمتیات ہیں۔

سوال 9.34: غیر سمتی مضرب، طاقت kA کے امتیازی اقدار $k\lambda_1$ تا $k\lambda_n$ ہیں جبکہ A^m جہاں $m = 1, 2, \dots$ ہے کے امتیازی اقدار λ_1^m تا λ_n^m ہیں۔ دونوں صورتوں میں امتیازی سمتیات وہی ہیں جو A کے امتیازی سمتیات ہیں۔

سوال 9.35: کثیر رکنی $p(A) = k_m A^m + k_{m-1} A^{m-1} + \dots + k_1 A + k_0 I$ کے امتیازی اقدار درج ذیل ہیں

$$p(\lambda_j) = k_j \lambda_j^m + k_{m-1} \lambda_j^{m-1} + \dots + k_1 \lambda_j + k_0$$

جہاں $j = 1, 2, \dots$ ہے جبکہ اس کثیر رکنی کے امتیازی سمتیات وہی ہیں جو A کے امتیازی سمتیات ہیں۔ (سوال 9.34 کے نتائج استعمال کریں۔)

9.3 تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب

حقیقی چکور قالب کی تین اقسام پر یہاں غور کیا جائے گا جن کی غیر معمولی خصوصیات پائی جاتی ہیں۔ تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا حصہ 8.2 میں ذکر ہو چکا ہے۔

تعریف: تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب ایسا حقیقی چکور قالب $A = [a_{jk}]$ جو تبدیلی محل سے تبدیل نہیں ہوتا تشاکلی¹⁸ قالب کہلاتا ہے۔

$$(9.9) \quad A^T = A \implies [a_{kj}] = [a_{jk}]$$

ایسا حقیقی چکور قالب $A = [a_{jk}]$ جس کا تبدیل محل اس قالب کا منفی ہو منحرف تشاکلی¹⁹ قالب کہلاتا ہے۔

$$(9.10) \quad A^T = -A \implies [a_{kj}] = -[a_{jk}]$$

ایسا حقیقی چکور قالب $A = [a_{jk}]$ جس کا تبدیل محل اس قالب کا معکوس ہو قائمہ الزاویہ²⁰ قالب کہلاتا ہے۔

$$(9.11) \quad A^T = A^{-1}$$

مثال 9.9: تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل میں تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب کی پہچان کریں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

□

کیا آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر منحرف تشاکلی قالب کے مرکزی وتر کے تمام اجزاء صفر ہوں گے؟

symmetric¹⁸
skew-symmetric¹⁹
orthogonal²⁰

کسی بھی حقیقی چکور قالب کو تشاکی قالب R اور منحرف تشاکی قالب S کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے جہاں تشاکی قالب اور منحرف تشاکی قالب درج ذیل ہیں۔

$$(9.12) \quad R = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad S = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

مثال 9.10: قالب بطور تشاکی اور منحرف تشاکی قالب کا مجموعہ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = R + S = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

مسئلہ 9.4: تشاکی اور منحرف تشاکی قالب کے امتیازی اقدار
(الف) تشاکی قالب کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔
(ب) منحرف تشاکی قالب کے امتیازی اقدار خیالی یا صفر ہوں گے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت مسئلہ 9.14 میں پیش کیا جائے گا۔

مثال 9.11: تشاکی اور منحرف تشاکی قالب کے امتیازی اقدار
درج ذیل تشاکی قالب R کے امتیازی اقدار -2 اور 4 ہیں جبکہ منحرف تشاکی قالب S کے امتیازی اقدار $-3i$ اور $3i$ ہیں۔ قالب C ناتشاکی اور نامنحرف تشاکی ہے جبکہ اس کے امتیازی اقدار 0 اور 4 ہیں۔ مسئلہ 9.4 ایسے قالب کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے۔

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

□

قائمہ الزاویہ تبادلے اور قائمہ الزاویہ قالب

قائمہ الزاویہ تبادلے سے مراد درج ذیل ہے جہاں A قائمہ الزاویہ قالب ہے۔

$$(9.13) \quad y = Ax$$

قائمہ الزاویہ تبادلہ R^n میں ہر سمتیہ x کی جگہ R^n میں سمتیہ y مقرر کرتا ہے۔ مثال کے طور پر سطح میں گھومنا، قائمہ الزاویہ تبادلہ ہے یعنی:

$$(9.14) \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے سطح یا تین بعدی فضا میں قائمہ الزاویہ تبادلہ گھومنے کو ظاہر کرتا ہے (اور ساتھ ہی بالترتیب کسی خط یا سطح میں انعکاس بھی ممکن ہے)۔

قائمہ الزاویہ قالب کی اہمیت درج ذیل کی بنا ہے۔

مسئلہ 9.5: اندرونی ضرب کی عدم تغیر

R^n میں سمتیات a اور b کے اندرونی ضرب کی قیمت کو قائمہ الزاویہ تبادلہ برقرار رکھتا ہے جہاں اندرونی ضرب درج ذیل ہے۔

$$(9.15) \quad a \cdot b = a^T b = [a_1 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

یوں $n \times n$ قائمہ الزاویہ قالب A اور R^n میں کسی بھی a ، b اور $u = Aa$ ، $v = Ab$ کی صورت میں $u \cdot v = a \cdot b$ ہوگا۔

اس طرح R^n میں ہر سمتیہ a کی لمبائی یا معیار کو قائمہ الزاویہ تبادلہ برقرار رکھتا ہے جہاں سمتیہ کی لمبائی یا معیار درج ذیل ہے۔

$$(9.16) \quad \|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^T a}$$

ثبوت: فرض کریں کہ A قائم الزاویہ ہے اور $u = Aa$ ، $v = Ab$ ہیں۔ اب صفحہ 559 پر مساوات 8.23-ت کے تحت $(Aa)^T = a^T A^T$ ہو گا جبکہ مساوات 9.11 کے تحت $A^T A = A^{-1} A = I$ ہو گا۔ اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(9.17) \quad u \cdot v = u^T v = (Aa)^T Ab = a^T A^T Ab = a^T Ib = a^T b = a \cdot b$$

اس میں $b = a$ پر کرنے سے $\|a\|$ عدم تغیر ثابت ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 9.6: صف اور قطار کی معیاری قائمیت

حقیقی پیکور قالب صرف اور صرف اس صورت قائم الزاویہ ہو گا جب اس کے سمتیات قطار a_1 تا a_n (اور سمتیات صف) معیاری قائم الزاویہ ہوں یعنی:

$$(9.18) \quad a_j \cdot a_k = a^T a_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ A قائم الزاویہ ہے۔ یوں $A^{-1} A = A^T A = I$ ہو گا جس کو سمتیات قطار a_1 تا a_n کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(9.19) \quad I = A^{-1} A = A^T A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} [a_1 \cdots a_n] = \begin{bmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{bmatrix}$$

چونکہ $n \times n$ اکائی قالب I کا مرکزی وتر اکائی جبکہ باقی تمام اجزاء صفر ہوتے ہیں لہذا مساوات 9.19 کا دائیں ہاتھ مساوات 9.18 دیتا ہے۔ مساوات 9.11 کے تحت قائم الزاویہ قالب کا معکوس بھی قائم الزاویہ ہو گا۔ اب $A^{-1} (= A^T)$ کے سمتیات قطار A کے سمتیات صف ہیں لہذا A کے سمتیات صف بھی قائم الزاویہ ہوں گے۔

(ب) اس کے برعکس اگر A کے سمتیات قطار مساوات 9.18 پر پورا اترتے ہوں تب مساوات 9.19 دائیں ہاتھ قالب کے مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر (0) ہوں گے جبکہ وتری ارکان اکائی (1) ہوں گے لہذا $A^T A = I$ ہو گا۔ اسی طرح $AA^T = I$ ہو گا۔ اس سے مراد $A^T = A^{-1}$ ہے چونکہ

آخر کی طرح A کے سمتیات قطار بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔
 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ ہے جبکہ A^{-1} یکتا ہے۔ یوں A قائمہ الزاویہ ہو گا۔ ثبوت کے حصہ -الف کے

□

مسئلہ 9.7: قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع
 قائمہ الزاویہ قالب کی مقطع کی قیمت $+1$ یا -1 ہو گی۔

ثبوت: صفحہ 640 پر مسئلہ 8.19 کے تحت درج ذیل ہے

$$(AB) \text{ مقطع} = (A \text{ مقطع})(B \text{ مقطع})$$

جبکہ صفحہ 618 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت $A^T \text{ مقطع} = A \text{ مقطع}$ ہے لہذا قائمہ الزاویہ قالب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(9.20) \quad 1 = I \text{ مقطع} = (AA^{-1}) \text{ مقطع} = (AA^T) \text{ مقطع} = (A \text{ مقطع})(A^T \text{ مقطع}) = (A \text{ مقطع})^2$$

□

مثال 9.12: مسئلہ 9.7
 مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع -1 ہے جبکہ مساوات 9.14 کے قالب کا مقطع $+1$ ہے۔ □

مسئلہ 9.8: قائمہ الزاویہ قالب کے امتیازی اقدار
 قائمہ الزاویہ قالب کے امتیازی اقدار حقیقی یا جوڑی دار مخلوط ہوں گے جن کی حتمی قیمت اکائی ہو گی۔

ثبوت: چونکہ حقیقی قالب کی امتیازی کثیر رکنی کے عددی سر حقیقی ہوتے ہیں لہذا اس کے امتیازی اقدار (یعنی صفر) مسئلے کے تحت ہوں گے۔ یوں مسئلے کا پہلا حصہ کسی بھی حقیقی قالب کے لئے درست ہے۔ امتیازی قدر کی حتمی قیمت اکائی کے برابر $|\lambda| = 1$ ہونے کا ثبوت مسئلہ 9.14 میں پیش کیا جائے گا۔

□

مثال 9.13: مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کی امتیازی کثیر رکنی درج ذیل ہے۔

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

چونکہ مخلوط جذر صرف جوڑی دار ممکن ہیں لہذا اس کثیر رکنی کا ایک جذر حقیقی ہو گا جو مسئلہ 9.7 کے تحت $+1$ یا -1 ہو گا۔ ان قیمتوں کو کثیر رکنی میں پر کرتے ہوئے پہلا جذر یعنی امتیازی اقدار $\lambda = -1$ ملتا ہے۔ کثیر رکنی کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $0 = (\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + 1)$ ملتا ہے جس کے جذر $\frac{5+i\sqrt{11}}{6}$ اور $\frac{5-i\sqrt{11}}{6}$ ہیں جن کی حتمی قیمت 1 ہے۔ □

سوالات

سوال 9.36 تا سوال 9.44 میں قالب تشاکی، منحرف تشاکی یا قائمہ الزاویہ ہیں؟ ان کا طیف دریافت کریں جو مسئلہ 9.4 اور مسئلہ 9.8 پر پورا اتریں گے۔ امتیازی سمتیات بھی معلوم کریں۔

سوال 9.36: $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $\frac{4-i3}{5}$, $[1 \quad -i]^T$; $\frac{4+i3}{5}$, $[1 \quad i]^T$

سوال 9.37: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے، $2+i3$, $[1 \quad i]^T$; $2-i3$, $[1 \quad -i]^T$

سوال 9.38: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے، $a+ib$, $[1 \quad i]^T$; $a-ib$, $[1 \quad -i]^T$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.39:}$$

جوابات: تشاکلی، $4, [1 \ 0 \ 0]^T$; $1, [0 \ 1 \ \frac{1}{2}]^T$; $6, [0 \ 1 \ -2]^T$;

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.40:}$$

جوابات: تشاکلی، $[0 \ 1 \ -1]^T$; $a - b, [1 \ 0 \ -1]^T$; $a + 2b, [1 \ 1 \ 1]^T$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.41:}$$

جوابات: منحرف تشاکلی، $[0 \ \frac{3}{5} \ \frac{9}{20}]^T$; $0, [0 \ \frac{3}{5} \ \frac{9}{20}]^T$; $\pm 25i, [1 \ \pm \frac{16+i15}{15} \ \pm \frac{12-i20}{15}]^T$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.42:}$$

جوابات: تینوں نہیں، $1, [1 \ 0 \ 0]^T$; $\sin \theta \pm i \cos \theta, [0 \ 1 \ \pm i]^T$;

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.43:}$$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $1, [1 \ 1 \ -3]^T$; $\frac{7 \pm i5\sqrt{11}}{18}, [1 \ \frac{-1 \pm i3\sqrt{11}}{10} \ \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{10}]^T$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{سوال 9.44:}$$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $1, [0 \ 1 \ 0]^T$; $\pm i, [1 \ 0 \ \pm i]^T$;

سوال 9.45 تا سوال 9.48 عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں۔

سوال 9.45: مجموعہ $A + B$ کے امتیازی اقدار A اور B کے امتیازی اقدار کا مجموعہ ہوں گے۔

جواب: نہیں

سوال 9.46: ثبوت

ثابت کریں کہ تشاکلی قالب کے منفرد امتیازی اقدار کے مطابقتی امتیازی سمتیات قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ مثال دیں۔

سوال 9.47: منحرف تشاکلی قالب

ثابت کریں کہ منحرف تشاکلی قالب کا معکوس بھی منحرف تشاکلی قالب ہو گا۔

$$\text{جواب: } A^{-1} = (-A^T)^{-1} = -(A^{-1})^T$$

سوال 9.48: قائمہ الزاویہ قالب

کیا 3×3 منحرف تشاکلی قائمہ الزاویہ قالب موجود ہیں؟

9.4 امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجی صورت

اب تک امتیازی اقدار کی خصوصیات پر غور کیا گیا۔ آئیں اب امتیازی سمتیات کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔ $n \times n$ قالب A کے امتیازی سمتیات کبھی کبھار فضا R^n کی اساس ہوتے ہیں لہذا R^n میں کسی بھی سمتیہ x کو ان امتیازی سمتیات x_1, \dots, x_n کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے مثلاً:

$$(9.21) \quad x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

ان امتیازی سمتیات کے مطابقتی امتیازی اقدار (جو ضروری نہیں کہ منفرد ہوں) کو λ_1 تا λ_n سے ظاہر کرتے ہوئے $Ax_j = \lambda_j x_j$ لکھا جاسکتا ہے لہذا تبادلہ $y = Ax$ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} (9.22) \quad y = Ax &= A(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n) \\ &= c_1 Ax_1 + c_2 Ax_2 + \dots + c_n Ax_n \\ &= c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \dots + c_n \lambda_n x_n \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ A کا کسی بھی سمتیہ x پر پیچیدہ عمل اساس کی مدد سے غیر سمتی ضرب کی سادہ عمل میں تبدیل ہو گیا ہے۔ یہی امتیازی اساس کی افادیت ہے۔

اگر تمام امتیازی اقدار منفرد ہوں تب امتیازی سمتیات ضرور امتیازی اساس ہوں گے۔

مسئلہ 9.9: امتیازی سمتیات کی اساس

اگر $n \times n$ قالب A کے n منفرد امتیازی اقدار ہوں تب R^n کی اساس A کے امتیازی سمتیات x_1 تا x_n ہوں گے۔

ثبوت: ہمیں صرف اتنا ثابت کرنا ہے کہ x_1 تا x_n خطی طور غیر تابع ہیں۔ فرض کریں کہ ایسا نہیں ہے اور صرف r عدد امتیازی سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔ یوں $r < n$ ہو گا اور سمتیات $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$ کا سلسلہ خطی طور تابع ہو گا۔ یوں ایسے غیر سمتی مستقل c_1 تا c_{r+1} (جن میں سے کم از کم ایک مستقل غیر صفر ہو) موجود ہوں گے جو درج ذیل مساوات پر پورا اتریں گے (حصہ 8.4)۔

$$(9.23) \quad c_1 x_1 + \dots + c_{r+1} x_{r+1} = 0$$

دونوں اطراف کو A سے ضرب دے کر $Ax_j = \lambda_j x_j$ استعمال کرتے ہیں۔

$$(9.24) \quad A(c_1 x_1 + \dots + c_{r+1} x_{r+1}) = c_1 \lambda_1 x_1 + \dots + c_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1} = A0 = 0$$

درج بالا میں آخری رکن کو ہٹانے کی خاطر مساوات 9.23 کو λ_{r+1} سے ضرب دیتے ہوئے مساوات 9.24 سے منفی کرتے ہیں۔

$$(9.25) \quad c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})x_1 + \dots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})x_r = 0$$

اب چونکہ x_1 تا x_r خطی طور غیر تابع ہیں لہذا مساوات 9.25 صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر صفر ہوں یعنی $c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = 0$ تا $c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$ ہوں۔ اب چونکہ تمام امتیازی اقدار منفرد ہیں لہذا اس سے $c_1 = 0$ تا $c_r = 0$ ملتے ہیں۔ اس حقیقت کے تحت مساوات 9.23 سے $c_{r+1}x_{r+1} = 0$ ملتا ہے اور چونکہ امتیازی سمتیہ صفر نہیں ہو سکتا لہذا $c_{r+1} = 0$ ہو گا۔ اب مساوات 9.23 لکھتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ اس میں کم از کم ایک مستقل غیر صفر ہے جبکہ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ تمام مستقل صفر ہیں۔ یہ تضاد صرف اس صورت دور کیا جاسکتا ہے جب تمام امتیازی سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں۔

□

مثال 9.14: امتیازی اساس۔ غیر منفرد امتیازی اقدار۔ عدم موجودگی

قالب $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ کے امتیازی اقدار 6 اور 2 اور مطابقتی امتیازی سمتیات کی اساس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ہیں۔

لبض اوقات غير منفرد امتیازی اقدار بھی امتیازی سمتیات کی اساس دیتے ہیں مثلاً مثال 9.2۔

اس کے برعکس عین ممکن ہے کہ قالب کی خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد اتنی نہ ہو کہ یہ اساس دیں۔ مثلاً $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ کا صرف ایک عدد امتیازی سمتیہ $[k \ 0]^T$ پایا جاتا ہے جہاں k غیر صفر اختیاری ہے اور ایک عدد سمتیہ ناکافی ہے۔ □

حقیقت میں امتیازی اساس مسئلہ 9.9 سے نرم شرائط کی صورتوں میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔ درج ذیل ایسی ایک صورت ہے۔

مسئلہ 9.10: تشاکلی قالب
تشاکلی قالب کے امتیازی سمتیات R^n کی معیاری قائمہ الزاویہ اساس ہے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 9.15: مثال 9.14 میں پہلے قالب کی معیاری امتیازی سمتیات کی اساس $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$ ہے۔ □

قالبوں کی تشابہت۔ وترى بنانا

امتیازی اساس کی مدد سے قالب A کی تخفیف سے ایسا وترى قالب حاصل کیا جاسکتا ہے جس کے وترى اجزاء قالب A کے امتیازی اقدار ہوں۔ ایسا درج ذیل متشابہت تبادلہ کے ذریعہ سے کیا جاتا ہے۔

تعریف: متشابہ قالب۔ متشابہت تبادلہ
ایسا $n \times n$ قالب \hat{A} جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو، $n \times n$ قالب A کا متشابہ قالب²¹ کہلاتا ہے۔

$$(9.26) \quad \hat{A} = P^{-1}AP$$

یہاں $n \times n$ قالب P کوئی غیر نادر قالب ہے۔ A سے \hat{A} حاصل کرنے کے اس عمل کو متشابہت تبادلہ²² کہتے ہیں۔

similar matrix²¹
similarity transformation²²

متشابہت تبادله کی خاصیت ہے کہ یہ قالب A کے امتیازی اقدار برقرار رکھتا ہے۔

مسئلہ 9.11: متشابہ قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات A کے امتیازی اقدار ہی اس کے متشابہ قالب \hat{A} کے امتیازی اقدار ہوں گے۔ مزید اگر A کا امتیازی سمتیہ x ہو تب \hat{A} کا اسی امتیازی قدر کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $y = P^{-1}x$ ہو گا۔

ثبوت: $Ax = \lambda x$ ($x \neq 0$ اور λ امتیازی قدر ہے) سے $P^{-1}Ax = \lambda P^{-1}x$ ملتا ہے جس میں $I = PP^{-1}$ پر کرتے ہوئے درج حاصل ہوتا ہے۔

$$P^{-1}Ax = P^{-1}AIX = P^{-1}APP^{-1}x = (P^{-1}AP)P^{-1}x = \hat{A}(P^{-1}x) = \lambda P^{-1}x$$

یوں \hat{A} کا امتیازی قدر λ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ $P^{-1}x$ ہے۔ درحقیقت $P^{-1}x \neq 0$ ہے کیوں کہ $P^{-1}x = 0$ سے $x = IX = PP^{-1}x = P0 = 0$ لکھا جاسکتا ہے جو تضاد ہے چونکہ $x \neq 0$ ہے۔

□

مثال 9.16: متشابہ قالبوں کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات فرض کریں کہ A اور P درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

یوں \hat{A} درج ذیل ہو گا جہاں $-7 = \text{مقطع } P$ لیتے ہوئے P^{-1} کو مساوات 8.68 کی مدد سے حاصل کیا گیا ہے۔

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\hat{A} کی امتیازی مساوات $(8 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$ سے اس کے امتیازی اقدار $\lambda_1 = 8$ اور $\lambda_2 = 1$ ملتے ہیں۔ A کی امتیازی مساوات $\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0$ سے بھی امتیازی اقدار $\lambda_1 = 8$ اور $\lambda_2 = 1$ ملتے ہیں جو مسئلہ 9.11 کے پہلے حصے کے عین مطابق ہے۔

$(A - \lambda I) = 0$ کے پہلے حصے $(3 - \lambda)x_1 + 5x_2 = 0$ میں $\lambda = \lambda_1 = 8$ پر کرنے سے $-5x_1 + 5x_2 = 0$ یعنی $x_2 = x_1$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 1$ ملتا ہے لہذا $x_1 = [1 \ 1]^T$ ہو گا۔ اسی طرح $\lambda_2 = 1$ پر کرنے سے $2x_1 + 5x_2 = 0$ حاصل ہو گا جس میں $x_1 = 5$ چنتے ہوئے $x_2 = -2$ یعنی $x_2 = [5 \ -2]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے \hat{A} کے امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$y_1 = P^{-1}x_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = P^{-1}x_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

آپ تسلی کر لیں کہ یہی \hat{A} کے امتیازی سمتیات ہیں۔

درج بالا مثال میں P کے قطار، A کے امتیازی سمتیات ہیں جس سے حاصل وتری قالب \hat{A} کے ارکان، A کے امتیازی اقدار ہیں۔ یوں ہم کسی بھی قالب A کو موزوں متناہت تبادلے سے ایسے وتری قالب میں تبدیل کر سکتے ہیں جس کے وتری ارکان، A کے امتیازی اقدار ہوں۔

مسئلہ 9.12: قالب کو وتری بنانا

اگر $n \times n$ قالب A کے امتیازی سمتیات کی اساس ہو تب

$$(9.27) \quad D = X^{-1}AX$$

وتری ہو گا جس کے مرکزی وتر کے ارکان A کے امتیازی اقدار ہوں گے۔ یہاں X ایسا قالب ہے جس کے قطار A کے امتیازی سمتیات ہیں۔ مزید درج ذیل بھی ہو گا۔

$$(9.28) \quad D^m = X^{-1}A^mX \quad (m = 2, 3, \dots)$$

ثبوت: فرض کریں کہ A کے امتیازی سمتیات x_1, \dots, x_n فضا R^n کی اساس ہیں اور ان کے مطابق $Ax_1 = \lambda_1 x_1, \dots, Ax_n = \lambda_n x_n$ ہو گا۔ یوں

گا۔ ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ درج ذیل درست ہے
 $X = [x_1, \dots, x_n]$ کا درجہ مسئلہ 8.4 کے تحت n ہو گا لہذا مسئلہ 8.16 کے تحت X^{-1} موجود ہو

$$(9.29) \quad AX = A[x_1, \dots, x_n] = [Ax_1, \dots, Ax_n] = [\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n] = XD$$

جہاں D کو مساوات 9.27 پیش کرتی ہے۔ ہم بائیں ہاتھ دوسری مساوات کو $n = 2$ کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} AX = A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تیسری مساوات $Ax_k = \lambda_k x_k$ سے حاصل ہوتی ہے۔ آپ اسی طرح پہلے $n = 2$ اور بعد میں عمومی n کے لئے چوتھی مساوات کو ثابت کر سکتے ہیں۔

مساوات 9.29 کو دائیں X^{-1} سے ضرب کرتے ہوئے مساوات 9.27 حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ مساوات 9.27 متناہت تبادلہ ہے لہذا مسئلہ 9.11 کے تحت A کے امتیازی اقدار ہی D کے امتیازی اقدار ہوں گے۔ مساوات 9.28 کو $m = 2$ کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D^2 &= DD = (X^{-1}AX)(X^{-1}AX) = X^{-1}A(XX^{-1})AX \\ &= X^{-1}AAX = X^{-1}A^2X \end{aligned}$$

□

مثال 9.17: قالب کو وتری بنانا
 درج ذیل قالب کو وتری بنائیں۔

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A کی امتیازی مقطع سے اس کی امتیازی کثیر رکنی $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 27\lambda - 90 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $\lambda_1 = 6$ ، $\lambda_2 = 3$ اور $\lambda_3 = -5$ ہیں۔ مساوات $(A - \lambda I)x = 0$ میں باری باری

λ_1 ، λ_2 اور λ_3 پر کرتے ہوئے گاوسی اسقاط سے حل کر کے درج ذیل امتیازی سمتیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ان امتیازی سمتیات سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 16 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{33} & 0 & \frac{2}{33} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} \end{bmatrix}$$

AX حاصل کر کے بائیں X^{-1} سے ضرب دے کر D حاصل کرتے ہیں۔

$$D = X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \frac{1}{33} & 0 & \frac{2}{33} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 36 & -\frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ 96 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

□

آثار قالب

چکور $n \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کے مرکزی وتر کے اجزاء کے مجموعے کو آثار A کہتے²³ ہیں۔

$$A \text{ آثار} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{j=1}^n a_{jj}$$

دو قالبوں کے حاصل ضرب کے آثار کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

(9.30)

$$(AB) \text{ آثار} = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (AB)_{jj} = (BA) \text{ آثار}$$

trace²³

لہذا ضرب میں قالبوں کی ترتیب کا آثار پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

A اور اس کے متشابہ قالب $\hat{A} = P^{-1}AP$ کا آثار ایک جیسا ہو گا یعنی:

$$(9.31) \quad \text{آثار } (P^{-1}AP) = \text{آثار } (P^{-1}(AP)) = \text{آثار } ((AP)P^{-1}) = \text{آثار } (APP^{-1}) = \text{آثار } (A)$$

چونکہ متشابہ قالب \hat{A} کے مرکزی ارکان، A کے امتیازی اقدار ہوتے ہیں لہذا درج بالا کے تحت آثار A امتیازی اقدار کا مجموعہ ہو گا۔

دو درجی صورتیں۔ صدر محوروں پر تبادلہ

سمتیہ x کی دو درجی صورت²⁴ Q سے مراد x_1, \dots, x_n اجزاء کی n^2 ارکان پر مشتمل درج ذیل مجموعہ ہے۔

$$(9.32) \quad \begin{aligned} Q = x^T A x &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$A = [a_{jk}]$ کو اس صورت کا عددی سر قالب کہتے ہیں۔ چونکہ ہم وتر سے ہٹ کر ارکان کے جوڑیوں کے مجموعے کو دو برابر اجزاء کی صورت میں لکھ سکتے ہیں لہذا ہم A کو تشاکلی فرض کر سکتے ہیں (درج ذیل مثال میں اس بات کی وضاحت کی گئی ہے)۔

مثال 9.18: فرض کریں کہ درج ذیل ہے۔

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_1 + 7x_2^2 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

quadratic form²⁴

درج بالا میں درمیانے دو ارکان کے عددی سر کا مجموعہ $6 + 2 = 8$ ہے جس کو $4 + 4$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں A کی جگہ مطابقتی تشاکلی قالب C استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$x^T C x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 7x_2^2 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

□

مسئلہ 9.10 کے تحت مساوات 9.32 میں تشاکلی عددی سر قالب A کے امتیازی سمتیات، معیاری قائمہ الزاویہ اساس ہیں۔ انہیں سمتیہ قطار لیتے ہوئے ہمیں ایسا قالب X ملتا ہے جو قائمہ الزاویہ ہو گا لہذا $A^{-1} = A^T$ ہو گا۔ یوں مساوات 9.27 کو بائیں سے X اور دائیں سے X^{-1} کے ساتھ ضرب دینے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$A = XDX^{-1} = XDX^T$$

اس کو مساوات 9.32 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(9.33) \quad Q = x^T XDX^T x$$

اگر ہم $x^T x = y$ لیں تب $X^T = X^{-1}$ کی بنا $X^{-1}x = y$ ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(9.34) \quad x = Xy$$

مساوات 9.33 میں $x^T X = (X^T x)^T = y^T$ اور $X^T x = y$ ہو گا لہذا Q کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(9.35) \quad Q = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

اس سے مسئلہ صدر محور²⁵ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.13: مسئلہ صدر محور
دو درجى صورت

$$(9.36) \quad Q = x^T A x = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k \quad (a_{kj} = a_{jk})$$

میں مساوات 9.34 پر کرنے سے مساوات 9.35 میں دی گئی صدر محوری صورت یا با ضابطہ صورت²⁶ حاصل ہوتی ہے جہاں $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ تشاکلی قالب A کے امتیازی اقدار ہیں (جو غیر منفرد بھی ہو سکتے ہیں) اور X ایسا قائمہ الزاویہ قالب ہے جس کے سمتیہ قطار مطابقتی (بالترتیب) امتیازی سمتیات x_1, \dots, x_n ہیں۔

مثال 9.19: صدر محور پر تبادلہ۔ مخروطی حصے
درج ذیل دو درجی صورت کس مخروطی حصے کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کا صدر محور پر تبادلہ کریں۔

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

حل: ہم $Q = x^T A x$ لکھ سکتے ہیں جہاں A اور x درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

اس سے امتیازی مساوات $(17 - \lambda)^2 - 15^2 = 0$ ملتا ہے جس کے جذر $\lambda_1 = 2$ اور $\lambda_2 = 32$ ہیں لہذا مساوات 9.36 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Q = 2y_1^2 + 32y_2^2$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $Q = 128$ ترخیم $2y_1^2 + 32y_2^2 - 128 = 0$ کو ظاہر کرتا ہے یعنی:

$$\frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1$$

x_1x_2 محد میں صدر محور جاننے کی خاطر ہمیں $\lambda = \lambda_1 = 2$ اور $\lambda = \lambda_2 = 8$ لیتے ہوئے $(A - \lambda I)x = 0$ سے معیاری امتیازی سمتیات حاصل کر کے مساوات 9.34 کا استعمال کرنا ہو گا۔ یوں

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

سے

$$x = Xy = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{aligned}$$

□

ملتا ہے۔ یہ 45° گھومنے کو ظاہر کرتی ہے۔

سوالات

سوال 9.49 تا سوال 9.54 میں A اور P دیے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ قالب A اور متناہ قالب \hat{A} کے ایک جیسے امتیازی اقدار ہیں۔ مزید اگر \hat{A} کا امتیازی سمتیہ y ہو تب ثابت کریں کہ A کا امتیازی سمتیہ $x = Py$ ہو گا۔

$$\text{سوال 9.49: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = -1, 1; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}^T; \quad x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.50: } A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = 3, 2; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{11}{32} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.51: } A = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = -2, -1; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{33}{16} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T; \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.52: } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = 2, -1, 1; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{سوال 9.53: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{جوابات: } \lambda = -1, 1, 0; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^T$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

سوال 9.54: مساوات 9.31 کے تحت کسی بھی قالب کا آثار اس قالب کے امتیازی اقدار کا مجموعہ ہو گا۔ سوال 9.49 تا سوال 9.54 میں دیے گئے A کے امتیازی اقدار اور آثار کا موازنہ کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ ایسا ہی ہے۔

سوال 9.55 تا سوال 9.62 میں امتیازی اساس (امتیازی سمتیات کی اساس) دریافت کرتے ہوئے قالب کو وتری بنائیں۔

سوال 9.55: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

جوابات: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

سوال 9.56: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $X = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.57: $\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

جوابات: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

سوال 9.58: $\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 30 & 13 \end{bmatrix}$

جوابات: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

سوال 9.59: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

سوال 9.60: $\lambda_1 = 2$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$ ،

جوابات: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.61: $\lambda_1 = 5$ ، $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -9 & -7 & -15 \\ 6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$ ،

جوابات: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.62: $\lambda_1 = 3$ ، $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ،

جوابات: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

سوال 9.63 تا سوال 9.63 میں صدر محور پر منتقل کریں۔ مثال 9.19 کی طرح x کو نئے محور y کی صورت میں لکھیں۔

سوال 9.63: $5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 10$

جوابات: $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\frac{3}{5}y_1^2 + \frac{2}{5}y_2^2 = 1$ ، $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

سوال 9.64: $-9x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2 = 30$

جوابات: $C = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$ ، $-\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} = 1$ ، $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

سوال 9.65: $7x_1^2 - 2x_1x_2 + 7x_2^2 = 0$

جوابات: $C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $6y_1^2 + 8y_2^2 = 0$ ، $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

سوال 9.66: $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 16$ جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\frac{y_1^2}{8} + \frac{y_2^2}{2} = 1$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ترخیم

سوال 9.67: $31x_1^2 - 24x_1x_2 + 21x_2^2 = 13$ جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $3y_1^2 + y_2^2 = 1$, $C = \begin{bmatrix} 31 & -12 \\ -12 & 21 \end{bmatrix}$ ترخیم

سوال 9.68: $4x_1^2 + 12x_1x_2 + 13x_2^2 = 32$ جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\frac{y_1^2}{32} + \frac{y_2^2}{2} = 1$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$ ترخیم

9.5 مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں

تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالبوں پر حصہ 9.3 میں غور کیا گیا۔ ان قالبوں کی مخلوط صورتیں بھی پائی جاتی ہیں جو کوانٹم میکانیات²⁷ میں استعمال ہوتی ہیں۔

مخلوط قالب $A = [a_{jk}]$ کے ہر رکن $a_{jk} = \alpha + i\beta$ (جہاں α اور β حقیقی ہیں) کی جگہ اس کا جوڑی دار مخلوط $\bar{A} = [\bar{a}_{jk}]$ لیتے ہوئے جوڑی دار مخلوط قالب $\bar{A} = [\bar{a}_{jk}]$ ملتا ہے۔ اسی طرح A^T کا مخلوط جوڑی دار اور A کا مخلوط تبدیل محل $\bar{A}^T = [\bar{a}_{kj}]$ ہو گا۔

مثال 9.20: قالب A کا مخلوط جوڑی دار \bar{A} اور مخلوط تبدیل محل \bar{A}^T

$$A = \begin{bmatrix} -2 + i3 & 1 - i2 \\ 4 & 3 + i \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} -2 - i3 & 1 + i2 \\ 4 & 3 - i \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^T = \begin{bmatrix} -2 - i3 & 4 \\ 1 + i2 & 3 - i \end{bmatrix}$$

□

تعریف: ہرمشی قالب²⁸، منحرف ہرمشی قالب اور اکہرا قالب

$$A = [a_{jk}] \text{ چکور قالب}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ہرمشی}^{29} \text{ کہلائے گا اگر} & \bar{A}^T = A \text{ یعنی} \\ \text{منحرف ہرمشی}^{30} \text{ کہلائے گا اگر} & \bar{A}^T = -A \text{ یعنی} \\ \text{اکہرا}^{31} \text{ کہلائے گا اگر} & \bar{A}^T = A^{-1} \text{ ہو۔} \end{array}$$

درج بالا تعریف سے ظاہر ہے کہ ہرمشی قالب کے مرکزی وتری ارکان $\bar{a}_{jj} = a_{jj}$ پر پورا اتریں گے لہذا یہ ارکان حقیقی ہوں گے۔ منحرف ہرمشی قالب کے مرکزی وتری ارکان $\bar{a}_{jj} = -a_{jj}$ پر پورا اتریں گے۔ یوں اگر $a_{ij} = \alpha + i\beta$ ہو تب $\alpha - i\beta = -(\alpha + i\beta)$ ہو گا جس سے $\alpha = 0$ ملتا ہے۔ یوں منحرف ہرمشی قالب کے مرکزی وتر کے ارکان خالص خیالی یا صفر (0) ہوں گے۔

مثال 9.21: ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب
درج ذیل میں A ہرمشی، B منحرف ہرمشی اور C اکہرا قالب ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4+i5 \\ -4-i5 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} i3 & 2+i \\ -2+i & -i7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} i\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & i\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

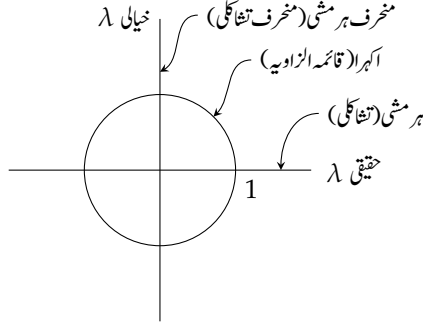
□

حقیقی ہرمشی قالب $\bar{A} = A^T = A$ پر پورا اترے گا لہذا حقیقی ہرمشی قالب تشاکلی ہو گا۔ اسی طرح حقیقی منحرف ہرمشی قالب $\bar{A} = A^T = -A$ پر پورا اترے گا لہذا حقیقی منحرف ہرمشی قالب تشاکلی ہو گا۔ آخر میں حقیقی اکہرا قالب $\bar{A} = A^T = A^{-1}$ پر پورا اترے گا لہذا حقیقی اکہرا قالب قائمہ الزاویہ ہو گا۔
اس سے ظاہر ہے کہ ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب درحقیقت میں تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب کی بالترتیب عمومی صورتیں ہیں۔

امتیازی اقدار

ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالبوں کے طیف (امتیازی اقدار) کا مخلوط λ سطح پر مقام شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔

²⁸ یہ قالب چارلس ہرمائٹ کے نام ہے۔
Hermitian²⁹
skew Hermitian³⁰
Unitary³¹



شکل 9.2: مخلوط λ سطح پر ہر مشی، مخرف ہر مشی اور اکہرا قالبوں کے امتیازی اقدار کا مقام۔

مسئلہ 9.14: امتیازی اقدار

- (الف) ہر مشی قالب (اور تشاکلی قالب) کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔
 (ب) مخرف ہر مشی قالب (اور مخرف تشاکلی قالب) کے امتیازی اقدار خالص خیالی یا صفر (0) ہوں گے۔
 (پ) اکہرا قالب (اور قائمہ الزاویہ قالب) کے امتیازی اقدار کی حقیقی قیمت اکائی (1) ہوگی۔

ثبوت: فرض کریں کہ A کا امتیازی قدر λ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ x ہیں۔ یوں $Ax = \lambda x$ کو بائیں \bar{x}^T سے ضرب دیتے ہوئے $\bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x$ حاصل ہو گا۔ اس کو $\bar{x}^T x$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(9.37) \quad \lambda = \frac{\bar{x}^T Ax}{\bar{x}^T x}$$

$\bar{x}^T x$ سے تقسیم کرنا اس لئے ممکن ہے کہ $x \neq 0$ ہے لہذا درج ذیل حقیقی اور غیر صفر ہو گا۔

$$\bar{x}^T x = \bar{x}_1 x_1 + \cdots + \bar{x}_n x_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

(الف) اگر A ہر مشی ہو تب $\bar{A}^T = A$ یعنی $A^T = \bar{A}$ ہو گا۔ چونکہ $\bar{x}^T Ax$ حقیقی ہے لہذا اس کا تبدیل محل لینے سے اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.38) \quad \bar{x}^T Ax = (\bar{x}^T Ax)^T = x^T A^T \bar{x} = x^T \bar{A} \bar{x} = \overline{(\bar{x}^T Ax)}$$

یوں $\bar{x}^T Ax$ اپنے جوڑی دار مخلوط کے برابر ہے لہذا $\bar{x}^T Ax$ حقیقی ہو گا ($\alpha + i\beta = \alpha - i\beta$ سے مراد $\beta = 0$ ہے)۔ یوں مساوات 9.37 سے λ حقیقی حاصل ہوتا ہے۔

(ب) اگر A منحرف ہر مشی ہو تب $A^T = -\bar{A}$ ہو گا اور مساوات 9.38 کی جگہ

$$(9.39) \quad \bar{x}^T A x = -(\bar{x}^T A x)$$

حاصل ہو گا لہذا $\bar{x}^T A x$ خالص خیالی یا صفر (0) ہو گا $[\alpha + i\beta = -(\alpha - i\beta)]$ سے مراد $\alpha = 0$ ہے۔ یوں مساوات 9.37 سے λ خالص خیالی یا صفر (0) حاصل ہوتا ہے۔

(پ) فرض کریں کہ A اکہرا قالب ہے۔ اب $Ax = \lambda x$ اور اس کے جوڑی دار مخلوط تبدیل محل $(\bar{A}\bar{x})^T = (\bar{\lambda}\bar{x})^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$ کے بائیں اطراف آپس میں ضرب کرتے ہوئے اور ان کے دائیں اطراف آپس میں ضرب کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\bar{A}\bar{x})^T A x = \bar{\lambda}\lambda\bar{x}^T x = |\lambda|^2 \bar{x}^T x$$

اب A اکہرا ہے لہذا $\bar{A}^T = A^{-1}$ ہو گا اور یوں بائیں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا۔

$$(\bar{A}\bar{x})^T A x = \bar{x}^T \bar{A}^T A x = \bar{x}^T A^{-1} A x = \bar{x}^T I x = \bar{x}^T x$$

اس طرح $\bar{x}^T x = |\lambda|^2 \bar{x}^T x$ ہو گا جس کو $\bar{x}^T x (\neq 0)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $|\lambda|^2 = 1$ ملتا ہے۔

یوں موجودہ مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مسئلہ 9.4 اور مسئلہ 9.8 کا ثبوت بھی مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 9.22: ہر مشی، منحرف ہر مشی اور اکہرا قالب مثال 9.21 میں دیے گئے ہیں۔ ان کے امتیازی اقدار درج ذیل ہیں۔

اندراج	قالب	امتیازی مساوات	امتیازی اقدار
(الف)	ہر مشی	$\lambda^2 + 4\lambda - 62 = 0$	$-2 + \sqrt{66}, -2 - \sqrt{66}$
(ب)	منحرف ہر مشی	$\lambda^2 + i4\lambda + 26 = 0$	$i(-2 - \sqrt{30}), i(-2 + \sqrt{30})$
(پ)	اکہرا	$\lambda^2 - i\lambda - 1 = 0$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

□

$$\text{اور } \left| \frac{1}{2}(i \mp \sqrt{3}) \right| = \frac{1}{4}(1+3) = 1 \text{ ہے۔}$$

قائمہ الزاویہ قالب کے بنیادی خصوصیات (مثلاً اندرونی ضرب کی عدم تغیر، صفوں اور قطاروں کی معیاری قائمیت) اکہرا قالب میں بھی پائے جاتے ہیں۔

یہ دیکھنے کی خاطر R^n کی جگہ مخلوط سمتی فضا C^n لیتے ہیں۔ ایسے مخلوط سمتیات کی اندرونی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے (مخلوط جوڑی دار پر لکیر ہے)۔

$$(9.40) \quad a \cdot b = \bar{a}^T b$$

ایسے مخلوط سمتیہ کی لمبائی یا معیار (جس کی تعریف درج ذیل ہے) حقیقی عدد ہو گا۔

$$(9.41) \quad \|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\bar{a}^T a} = \sqrt{\bar{a}_1 a_1 + \cdots + \bar{a}_n a_n} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

مسئلہ 9.15: اندرونی ضرب کی عدم تغیر
اکہرا تبادلہ $y = Ax$ جہاں A اکہرا قالب ہے، اندرونی ضرب (مساوات 9.40) کی قیمت برقرار رکھتا ہے
لہذا یہ معیار (مساوات 9.41) کی قیمت بھی برقرار رکھتا ہے۔

ثبوت: یہ مسئلہ حصہ 9.3 میں دیے گئے مسئلہ 9.5 کی عمومی صورت ہے۔ یوں اس مسئلے کا ثبوت بالکل مسئلہ 9.5 کی ثبوت کی طرح ہے یعنی:

$$u \cdot v = \bar{u}^T v = (\bar{A}\bar{a})^T Ab = \bar{a}^T \bar{A}^T Ab = \bar{a}^T Ib = a \cdot b$$

□

حقیقی سمتیات کے معیاری قائمہ الزاویہ نظام کی مماثل معیاری مخلوط نظام کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اکہرا نظام
اکہرا نظام سے مراد ایسے مخلوط سمتیات کا نظام ہے جو درج ذیل پر پورا اترتے ہوں۔

$$(9.42) \quad a_j \cdot a_k = \bar{a}_j^T a_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

مسئلہ 9.6 کی مخلوط صورت درج ذیل ہے۔

مسئلہ 9.16: سمتیات صف اور سمتیات قطار کا اکہرا نظام مخلوط چکور قالب اور صرف اس صورت اکہرا ہو گا جب اس کے سمتیات صف (اور سمتیات قطار) اکہرا نظام بناتے ہوں۔

ثبوت: اس کا ثبوت مسئلہ 9.6 کی ثبوت کی طرح ہے بس یہاں جوڑی دار مخلوط سمتیات پر لکیر لگائی جائے گی۔ یوں $\bar{A}^T = A^{-1}$ لکھا جائے گا جیسے مساوات 9.40 اور مساوات 9.42 میں لگائے گئے ہیں۔

□

مسئلہ 9.17: مقطع اکہرا قالب A کے مقطع کی حتمی قیمت اکائی (1) ہو گی یعنی $1 = \text{مقطع } A$ ہو گا۔

ثبوت: اس کا ثبوت مسئلہ 9.7 کی ثبوت کی طرح ہے۔

$$\begin{aligned} (9.43) \quad 1 &= (AA^{-1}) \text{ مقطع} = (A\bar{A}^T) \text{ مقطع} = (A \text{ مقطع}) (\bar{A}^T \text{ مقطع}) \\ &= (A \text{ مقطع}) (\bar{A} \text{ مقطع}) = (A \text{ مقطع}) (\overline{A \text{ مقطع}}) = |A \text{ مقطع}|^2 \\ \text{یوں } 1 &= |A \text{ مقطع}| \text{ ہو گا جہاں } A \text{ اب مخلوط ہو سکتا ہے۔} \end{aligned}$$

□

تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کی امتیازی اساس کو موجودگی مسئلہ 9.10 بیان کرتی ہے جس کا مماثل مسئلہ درج ذیل ہے۔

مسئلہ 9.18: امتیازی سمتیات کی اساس ہر مٹی، منحرف ہر مٹی اور اکہرا قالب کے امتیازی سمتیات C^n کی اساس ہے۔ یہ امتیازی سمتیات اکہرا نظام بناتے ہیں۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہر مشی اور منحرف ہر مشی صورتیں

دو درجی صورت (حصہ 9.4) کے تصور کو وسعت دے کر اس کو مخلوط کے لئے بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔ ہم مساوات 9.37 میں شمار کنندہ $\bar{x}^T A x$ کو x کے ارکان x_1, \dots, x_n ، جو اب مخلوط بھی ہو سکتے ہیں، کی صورت کہتے ہیں۔ یہ صورت (درج ذیل) n^2 ارکان پر مشتمل ہوگی۔

$$\begin{aligned} \bar{x}^T A x &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \bar{x}_j x_k \\ &= a_{11} \bar{x}_1 x_1 + a_{12} \bar{x}_1 x_2 + \dots + a_{1n} \bar{x}_1 x_n \\ &\quad + a_{21} \bar{x}_2 x_1 + a_{22} \bar{x}_2 x_2 + \dots + a_{2n} \bar{x}_2 x_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n1} \bar{x}_n x_1 + a_{n2} \bar{x}_n x_2 + \dots + a_{nn} \bar{x}_n x_n \end{aligned} \quad (9.44)$$

A کو عددی سر قالب کہتے ہیں۔ اگر A ہر مشی ہو تب اس صورت کو ہر مشی صورت کہیں گے اور اگر A منحرف ہر مشی ہو تب اس کو منحرف ہر مشی صورت کہیں گے۔ ہر مشی صورت کا قدر حقیقی ہو گا جبکہ منحرف ہر مشی کا قدر خالص خیالی یا صفر (0) ہو گا۔ یہ حقائق مساوات 9.38 اور مساوات 9.39 سے ظاہر ہیں جو طبیعیات کے میدان میں ان صورتوں کی اہمیت کا باعث بنتے ہیں۔ دھیان رہے کہ مساوات 9.38 اور مساوات 9.39 کسی بھی سمتیات کے لئے درست ہیں چونکہ ان کے ثبوت میں ہم نے x کو امتیازی سمتیہ تصور نہیں کیا تھا بلکہ صرف اتنا فرض کیا تھا کہ $\bar{x}^T c$ حقیقی اور غیر صفر ہے۔

مثال 9.23: ہر مشی صورت

فرض کریں کہ $x = [1 - i \quad i4]^T$ ہے اور مثال 9.21 کا A استعمال کرتے ہیں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x}^T A x = [1 + i \quad -i4] \begin{bmatrix} 3 & -4 + i5 \\ -4 - i5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - i \\ i4 \end{bmatrix} = [1 + i \quad -i4] \begin{bmatrix} -17 - i19 \\ -9 - i29 \end{bmatrix} = -114$$

□

ظاہر ہے کہ اگر A اور x حقیقی ہوں تب مساوات 9.44 دو درجی صورت دے گا۔

سوالات

سوال 9.69 تا سوال 9.73 میں دریافت کریں کہ آیا دیا گیا قالب ہر مشی، منحرف ہر مشی یا اکہرا ہے۔ ان کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات بھی دریافت کریں۔

سوال 9.69: $\begin{bmatrix} 3 & i2 \\ -i2 & 6 \end{bmatrix}$
 جوابات: ہر مشی، $2, [1 \quad \frac{i}{2}]^T$; $7, [1 \quad -i2]^T$

سوال 9.70: $\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}$
 جوابات: منحرف ہر مشی، $-i, [1 \quad 1-i]^T$; $i2, [1 \quad -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}]^T$

سوال 9.71: $\begin{bmatrix} i\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & i\frac{4}{5} \end{bmatrix}$
 جوابات: اکہرا، $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}, [1 \quad 1]^T$; $-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}, [1 \quad -1]^T$

سوال 9.72: $\begin{bmatrix} 0 & i3 \\ i3 & i0 \end{bmatrix}$
 جوابات: منحرف ہر مشی، $i3, [1 \quad 1]^T$; $-i3, [1 \quad -1]^T$

سوال 9.73: $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & -i2 \end{bmatrix}$
 جوابات: منحرف ہر مشی، $i(-\sqrt{2}-1), [0 \quad 1 \quad -\sqrt{2}-1]^T$; $i(\sqrt{2}-1), [0 \quad 1 \quad \sqrt{2}-1]^T$; $i, [1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.74: پالی قالب چکر
 درج ذیل پالی قالب چکر³² کہلاتے ہیں۔

$$(9.45) \quad S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

پالی قالب چکر³³ کے درج ذیل تعلقات ثابت کریں۔

$$(9.46) \quad S_x S_y = i S_z, \quad S_y S_x = -i S_z, \quad S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = I^2$$

$$S_x S_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = i S_z: \text{جواب}$$

$$S_x^2 = S_x S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

سوال 9.75: امتیازی سمتیات

مثال 9.21 میں دیے گئے قالب A ، B اور C کے امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$\text{جوابات: } A: [1 \ 1.28 + i1.6]^T, [1 \ -0.305 - i0.381]^T$$

$$C: [1 \ -1]^T, [1 \ 1]^T \quad B: [1 \ -2.09 - i4.19]^T, [1 \ -0.09 + i0.19]^T$$

سوال 9.76 تا سوال 9.79 مخلوط صورتوں کے سوالات ہیں۔ کیا ان میں A ہر مشی ہے یا منحرف ہر مشی ہے؟
ان سوالات میں $\bar{x}^T A x$ حاصل کریں۔

$$\text{سوال 9.76: } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 - i2 \\ 2 + i2 & -4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i2 \\ -4 + i2 \end{bmatrix}^T$$

جوابات: ہر مشی، -20

$$\text{سوال 9.77: } A = \begin{bmatrix} 0 & -3 + i2 \\ 3 + i2 & i \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ i3 \end{bmatrix}^T$$

جوابات: منحرف ہر مشی، -i27

$$\text{سوال 9.78: } A = \begin{bmatrix} i2 & 1 & 4 + i3 \\ -1 & 0 & i5 \\ -4 + i3 & i5 & -i \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}^T$$

جوابات: منحرف ہر مشی، -i7

³³آسٹریا کے ماہر طبیعیات اور نوبل انعام یافتہ ولفگ انگسٹ پالی [1900-1958]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 5 \\ -i & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}^T \quad \text{سوال 9.79:}$$

جوابت: ہر مشی، 4

سوال 9.80 تا سوال 9.85 عمومی سوالات ہیں۔

سوال 9.80: ضرب

کسی بھی $n \times n$ ہر مشی A ، منحرف ہر مشی B اور اکہرا C کے لئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$(\overline{ABC})^T = -C^{-1}BA$$

$$(\overline{ABC})^T = \bar{C}^T \bar{B}^T \bar{A} = C^{-1}(-B)A \quad \text{جواب:}$$

سوال 9.81: ضرب

کسی بھی $n \times n$ ہر مشی A اور منحرف ہر مشی B کے لئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$(\overline{AB})^T = -BA$$

$$(\overline{AB})^T = \bar{B}^T \bar{A} = -BA \quad \text{جواب:}$$

سوال 9.82: ثابت کریں کہ کسی بھی قالب A کو ہر مشی قالب H اور منحرف ہر مشی قالب S کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$H = \frac{1}{2}(A + \bar{A}^T), \quad S = \frac{1}{2}(A - \bar{A}^T), \quad A = H + S \quad \text{جواب:}$$

سوال 9.83: اکہرا قالب

ثابت کریں کہ $n \times n$ جسامت کے دو اکہرا قالبوں کا حاصل ضرب بھی اکہرا قالب ہوگا۔

$$(AB)(\overline{AB})^T = AB\bar{B}^T \bar{A}^T = AB\bar{B}^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \quad \text{جواب:}$$

سوال 9.84: اکہرا قالب

اکہرا قالب کا طاقت استعمال میں بہت آسان ثابت ہوتا ہے۔ ثابت کریں کہ $C^5 = I$ ہوگا۔

جواب: سوال 9.83 کے نتیجے کے بار بار استعمال اور $A = B = C$ لیتے ہوئے ثابت ہوگا۔

سوال 9.85: ثابت کریں کہ ہر مشی، منحرف ہر مشی اور اکہرا قالب $AA^T = \bar{A}^T A$ پر پورا اترتے ہیں۔

$$(\bar{A}^T)A = AA = A(\bar{A}^T) \quad \text{جواب: ہر مشی کے لئے ثابت کرتے ہیں۔}$$

باب 10

سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل

10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان

غیر سمتی تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو فضا میں کسی سلسلہ نقاط کے ہر نقطے پر معین ہو اور جہاں تفاعل کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں جن کا دار و مدار صرف فضا میں نقطوں پر ہو نہ کہ چنی گئی محوری نظام پر۔ ان نقطوں کے سلسلے کو تفاعل کا دائرہ کار¹ کہتے ہیں۔ عملی استعمال میں تفاعل f کا دائرہ کار D عموماً منحنی یا سطح یا فضا میں تین بُعدی خطہ ہو گا۔ تفاعل f دائرہ کار D کے ہر نقطے کے ساتھ ایک غیر سمتی حقیقی عدد وابستہ کرتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ D میں غیر سمتی میدان² دیا گیا ہے۔

x ، y ، z متعارف کرنے سے تفاعل f کو ان محدود کی مدد سے $f(x, y, z)$ لکھا جاسکتا ہے، پس اتنا یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ P پر تفاعل f کی قیمت، چنی گئی محدودی نظام پر ہر گز منحصر نہیں ہوگی۔ اس حقیقت کو ظاہر کرنے کی خاطر $f(x, y, z)$ کی جگہ عموماً $f(P)$ لکھا جاتا ہے۔ تفاعل f وقت پر بھی منحصر ہو سکتا ہے۔

مثال 10.1: غیر سمتی تفاعل

غیر تغیر پذیر نقطہ P_0 سے کسی نقطہ P کا فضا میں فاصلہ غیر سمتی تفاعل ہے جس کا دائرہ کار D پوری فضا

¹ domain
² scalar field

ہے۔ $f(P)$ فضا میں غیر سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر کارتیسی نظام محدود میں P_0 کے محدود x_0 ، y_0 ، z_0 اور P کے محدود x ، y ، z ہوں تب f درج ذیل ہوگا۔

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

نظام محدود تبدیل کرنے سے عموماً P_0 اور P کے محدود تبدیل ہوں گے لیکن $f(P)$ کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی لہذا $f(P)$ غیر سمتی تفاعل ہے۔ □

مثال 10.2: غیر سمتی میدان

کسی جسم کے اندر درجہ حرارت T غیر سمتی تفاعل ہے جو غیر سمتی میدان (یعنی جسم میں درجہ حرارت) تعین کرتا ہے۔ □

اگر فضا میں سلسلہ نقاط کے ہر نقطے P کے ساتھ سمتیہ $v(P)$ وابستہ کیا جائے تب ہم کہتے ہیں کہ ان نقاط پر سمتی میدان³ دیا گیا ہے اور $v(P)$ سمتی تفاعل⁴ کہلاتا ہے۔ یہ سلسلہ نقاط کسی منحنی یا سطح یا حجم میں پایا جاسکتا ہے۔

کارتیسی نظام محدود میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(x, y, z) = v_1(x, y, z)i + v_2(x, y, z)j + v_3(x, y, z)k$$

یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر v کی قیمت اس نقطے پر منحصر ہے ناکہ نظام محدود پر۔

مثال 10.3: سمتی میدان (سمتی میدان رفتار)

گھومتے ہوئے جسم B کی سمتی رفتار $v(P)$ کو سمتی میدان رفتار کہتے ہیں۔ گھومتے جسم کی محور پر کارتیسی محدود کا مبدارکتے ہوئے جسم پر کسی نقطہ N کی سمتی رفتار کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (صفحہ 527 پر مثال 7.13 دیکھیں)

$$(10.1) \quad v(x, y, z) = \omega \times (xi + yj + zk)$$

جہاں لمحہ غور پر نقطہ N کے محدود x ، y ، z ہیں۔ اگر کارتیسی z محور عین جسم کی محور پر واقع ہو اور ω مثبت z محور کے رخ ہو تب $\omega = \omega k$ لکھا جائے گا۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.2) \quad v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{bmatrix} = \omega(-yi + xj)$$

□

مثال 10.4: سمتی میدان (میدان قوت)

فرض کریں کہ کمیت M مستقل طور پر فضا میں نقطہ N_0 پر موجود ہے جبکہ کمیت m فضا میں کسی بھی نقطہ N پر موجود ہو سکتا ہے۔ اب نیوٹن قانون تجاذب کے تحت m پر قوت کشش

$$(10.3) \quad |f| = \frac{GMm}{r^2}$$

عمل کرے گی جہاں $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ تجاذبی مستقل ہے اور r ان جسموں کے مابین فاصلہ ہے۔ یہاں v فضا میں سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر ہم کارتیسی محدود کو یوں چنیں کہ N_0 کے محدود x_0 ، y_0 ، z_0 ہوں اور N کے محدود x ، y ، z ہوں تب مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (r \geq 0)$$

ہو گا۔ اب $r > 0$ فرض کرتے ہوئے سمتیہ

$$(10.4) \quad \mathbf{r} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

متعارف کرتے ہوئے $r = |\mathbf{r}|$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں f کی سمت میں اکائی سمتیہ $-\frac{\mathbf{r}}{r}$ ہو گا جہاں منفی کی علامت اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ قوت کشش N_0 سے N کی رخ کو ہے۔ یوں درج ذیل لکھ جاسکتا ہے۔

$$(10.5) \quad \mathbf{f} = |f| \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -GMm \left[\frac{x - x_0}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y - y_0}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z - z_0}{r^3} \mathbf{k} \right]$$

□

یہ سمتی تفاعل m پر قوت کشش دیتا ہے۔

10.2 سمتی علم الاحصاء

علم الاحصاء کے بنیادی تصورات مثلاً ارتکاز، استمراریت اور تفرق پذیری کو بالکل فطری طور پر سمتی علم الاحصاء کے لئے بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔ آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

سمتیت $a_{(n)}$ ، جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہے، کا لائنائی تسلسل اس صورت مرکوز تصور کیا جاتا ہے جب ایسا سمتیہ a موجود ہو کہ درج ذیل درست ہو۔

$$(10.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{(n)} - a| = 0$$

a کو اس تسلسل کا تحدیدی سمتیہ⁵ کہتے ہیں جسے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(10.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{(n)} = a$$

کار تینیسی نظام محدود استعمال کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ سمتیت کا تسلسل اس صورت سمتیہ a پر مرکوز ہو گا جب تسلسل کے تین کار تینیسی ارکان کا تسلسل بالترتیب a کے تین کار تینیسی ارکان پر مرکوز ہوں۔

اسی طرح اگر حقیقی متغیر t پر مبنی سمتی تفاعل $u(t)$ نقطہ t_0 کی پڑوس⁶ میں معین ہو (جبکہ t_0 پر یہ غیر معین ہو سکتا ہے) تب t کا t_0 کے قریب تر ہونے سے تفاعل کی حد⁷ l سے مراد درج ذیل ہے

$$(10.8) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} |u(t) - l| = 0$$

جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$(10.9) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l$$

سمتی تفاعل $u(t)$ اس صورت $t = t_0$ پر استمراری تصور کیا جاتا ہے جب یہ t_0 کی پڑوس میں معین ہو اور درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$(10.10) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u(t_0)$$

کار تینیسی نظام محدود میں تفاعل $u(t)$ درج لکھا جائے گا

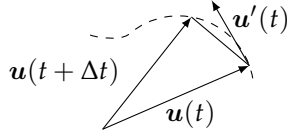
$$(10.11) \quad u(t) = u_1(t)i + u_2(t)j + u_3(t)k$$

اور t_0 پر $u(t)$ اس صورت استمراری ہو گا جب اس کے تینوں کار تینیسی اجزاء t_0 پر استمراری ہوں۔

⁵ limit vector

⁶ پڑوس سے مراد t محور پر ایسا نقطہ ہے جس کے اندر t_0 پایا جاتا ہو۔

⁷ limit



شکل 10.1: سمتی تفاعل کا تفرق

تفاعل $u(t)$ نقطہ t پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب درج ذیل حد موجود ہو۔

$$(10.12) \quad u'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

$u'(t)$ کو $u(t)$ کا تفرق⁸ کہتے ہیں (شکل 10.1)۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر سمتیہ $u(t)$ کی نوک کو آزاد متغیر t کے لئے وقفہ t تا $t + \Delta t$ ظاہر کرتی ہے۔

کار تیزی نظام محدود استعمال کرتے ہوئے نقطہ t پر $u(t)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس نقطے پر درج ذیل تینوں تفرق موجود ہوں۔

$$u'_m(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_m(t + \Delta t) - u_m(t)}{\Delta t} \quad (m = 1, 2, 3)$$

یوں سمتیہ تفاعل کا تفرق لینا اس کے تینوں ارکان کا علیحدہ علیحدہ تفرق لینے کے مترادف ہے یعنی:

$$(10.13) \quad u'(t) = u'_1(t)i + u'_2(t)j + u'_3(t)k$$

تفرق کے جانی پہچانی اصولوں کے مطابقتی اصول سمتیہ تفاعل کے تفرق کے لئے بھی حاصل کیے جاسکتے ہیں مثلاً

$$(10.14) \quad (cu)' = cu' \text{ (مستقل } c \text{)}, \quad (u + v)' = u' + v'$$

اور

$$(10.15) \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(10.16) \quad (u \times v)' = u \times v' + u' \times v$$

$$(10.17) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$(10.18) \quad (uvw)' = (u'vw) + (uv'w) + (uvw')$$

چونکہ سمتی ضرب غیر قابل تبادل ہے لہذا مساوات 10.16 میں سمتیات کی ترتیب برقرار رکھنا لازم ہے۔

مثال 10.5: مستقل لمبائی کے تفاعل کا تفرق

اگر تفاعل $u(t)$ کی لمبائی مستقل ہو یعنی $|u(t)| = c$ تب $|u|^2 = u \cdot u = c^2$ ہو گا اور مساوات 10.15 کی مدد سے $(u \cdot u)' = 2u \cdot u' = 0$ حاصل ہو گا جس کے تحت مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل کا تفرق یا صفر سمتیہ ہو گا اور یا یہ $u(t)$ کے قائمہ الزاویہ ہو گا۔
□

درج بالا گفتگو سے سمتی تفاعل کی جزوی تفرق کے اصول حاصل کرتے ہیں۔ اگر کسی سمتی تفاعل u

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

کے اجزاء n عدد متغیرات t_1, \dots, t_n کے ساتھ قابل تفرق ہوں تب t_1 کے ساتھ u کے جزوی تفرق کو $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ سے ظاہر کیا جائے گا جو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1} i + \frac{\partial u_2}{\partial t_1} j + \frac{\partial u_3}{\partial t_1} k$$

اسی طرح دیگر جزوی تفرقات لکھے جاسکتے ہیں مثلاً:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_m \partial t_n} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_m \partial t_n} i + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_m \partial t_n} j + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t_m \partial t_n} k$$

مثال 10.6: جزوی تفرق

سمتی تفاعل $r(t_1, t_2) = a \cos \omega t_1 i + a \sin \omega t_1 j + t_2 k$ کے جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\partial r}{\partial t_1} = a\omega(-\sin \omega t_1 i + \cos \omega t_1 j), \quad \frac{\partial r}{\partial t_2} = k$$

□

تفاعل r ایسی ٹکلی سطح کو ظاہر کرتا ہے جس کا رداس a ہے اور محور z محور ہے۔

سوالات

سوال 10.1 تا سوال 10.5 میں برابر سطح $f = c$ کیا ہو گا جہاں c مستقل ہے۔

سوال 10.1: $f = x + y + z$

جواب: متوازی سطحیں

سوال 10.2: $f = x^2 + y^2 + z^2$

جواب: ہم مرکز کرہ

سوال 10.3: $f = x^2 + y^2$

جواب: کارٹیزی z کے ہم محوری تنگی سطحیں

سوال 10.4: $f = 4x^2 + 5y^2$

جواب: کارٹیزی z کے ہم محوری تنگی ترخیم سطحیں

سوال 10.5: $f = x^2 + y^2 - z$

جواب: قطع مکانی نما سطحیں

xy سطح پر سمتیہ v سوال 10.6 تا سوال 10.9 میں دیا گیا ہے۔ وہ سطح دریافت کریں جس پر v کی لمبائی

مستقل ہو۔ وہ سطح دریافت کریں جس پر v کی یکساں سمت ہو۔

سوال 10.6: $v = 2xi + 3yj$

جوابات: مستقل، $\frac{y}{x}$ ، مستقل $4x^2 + 9y^2$

سوال 10.7: $v = x^2i + \sqrt{y}j$

جوابات: مستقل، $\frac{\sqrt{y}}{x^2}$ ، مستقل $x^4 + y$

سوال 10.8: $v = (x^2 - y^2)i + 2xyj$

جوابات: مستقل، $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$ ، مستقل $x^2 + y^2$

سوال 10.9: $v = (x + y)i + (x - y)j$

جوابات: مستقل، $\frac{x - y}{x + y}$ ، مستقل $x^2 + y^2$

سوال 10.10 تا سوال 10.18 میں u دیا گیا ہے۔ آپ سے التماس ہے کہ u' اور u'' دریافت کریں۔

سوال 10.10: $a + bt^2$

جوابات: $u' = 2bt$, $u'' = 2b$

سوال 10.11: $ti + (t^2 + 2)j$
جوابات: $u' = i + 2tj, u'' = 2j$

سوال 10.12: $4 \cos t i + 2 \sin t j$
جوابات: $u' = -4 \sin t i + 2 \cos t j, u'' = -4 \cos t i - 2 \sin t j = -u$

سوال 10.13: $4 \cos t i + 2 \sin t j - 3t k$
جوابات: $u' = -4 \sin t i + 2 \cos t j - 3k, u'' = -4 \cos t i - 2 \sin t j$

سوال 10.14: $t^2 i + 2j + 4tk$
جوابات: $u' = 2ti + 4k, u'' = 2i$

سوال 10.15: $\cos 2t i - 3 \sin 2t j + t^2 k$
جوابات: $u' = -2 \sin 2t i - 6 \cos 2t j + 2t k, u'' = -4 \cos 2t i + 12 \sin 2t j + 2k$

سوال 10.16: $e^t i - 2e^{-3t} j$
جوابات: $u' = e^t i + 6e^{-3t} j, u'' = e^t i - 18e^{-3t} j$

سوال 10.17: $e^{-t}(\cos t i - \sin t j)$
جوابات: $u' = e^{-t}[-(\cos t + \sin t) i - (\cos t - \sin t) j], u'' = e^{-t}(2 \sin t i + 2 \cos t j)$

سوال 10.18: $t^2(2i - 5j)$
جوابات: $u' = 2t(2i - 5j), u'' = 2(2i - 5j)$

سوال 10.19 تا سوال 10.23 میں $u = ti + t^3 k$ ، $v = t^2 j + tk$ اور $w = 2i + tj - t^2 k$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 10.19: $(u \cdot v)'$
جواب: $4t^3$

سوال 10.20: $(u \times v)'$
جواب: $-t^4 i - 2tj + 3t^2 k$

سوال 10.21: $[u \times (v \times w)]'$
جواب: $-8t^3 i - (7t^6 + 5t^4 - 6t^2)j + 4tk$

سوال 10.22: $[(u \times v) \times w]'$
جواب: $(6t^2 - 7t^6)j + (4t - 6t^5)k$

سوال 10.23: $[(u \times v) \cdot w]'$
جواب: $-15t^4 - 3t^2$

سوال 10.24 تا سوال 10.29 میں دیے گئے سمتی تفاعل u کا x ، y اور z کے ساتھ جزوی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.24: $xi + 3yk$
جوابات: $i, 3k, 0$

سوال 10.25: $(x^2 - y^2)i + 2xyj$
جوابات: $2xi + 2yj, -2yi + 2xj, 0$

سوال 10.26: $x^2i - 3y^2j + 2z^2k$
جوابات: $2xi, -6yj, 4zk$

سوال 10.27: $xyi + yzj + zxk$
جوابات: $yi + zk, xi + zj, yj + xk$

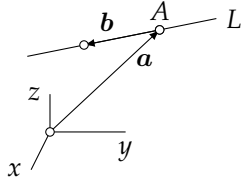
سوال 10.28: $(x + y)i + (y + z)j + (z + x)k$
جوابات: $i + k, i + j, j + k$

سوال 10.29: $x^2yi + y^2zj + z^2xk$
جوابات: $2xyi + z^2k, x^2i + 2yzj, y^2j + 2xzk$

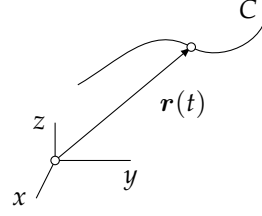
سوال 10.30: $(u \cdot v)''$ اور $(u \times v)''$ کے لئے مساوات 10.15 اور مساوات 10.16 کی طرز کے کلیات دریافت کریں۔

جوابات: $(u \cdot v)'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$
 $(u \times v)'' = u'' \times v + 2u' \times v' + u \times v''$

سوال 10.31: ثابت کریں کہ $\left(\frac{u}{|u|}\right)' = \frac{u'(u \cdot u) - u(u \cdot u')}{(u \cdot u)^{\frac{3}{2}}}$
جواب: $\left(\frac{u}{\sqrt{u \cdot u}}\right)' = \left(\frac{u}{\sqrt{u \cdot u}}\right)'$ لکھتے ہوئے مساوات 10.17 کا استعمال کریں۔



(ب) سیدھی لکیر کا مقدار معلوم خط



(الف) منحنی مقدار معلوم

شکل 10.2: سیدھی لکیر اور منحنی کے مقدار معلوم خطوط۔

10.3 منحنی

کار تیزی نظام میں منحنی C کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے (شکل 10.2-الف)۔

$$(10.19) \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

آزاد حقیقی متغیرہ t کی ہر قیمت t_0 کا C پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کے محدود $x(t_0)$ ، $y(t_0)$ اور $z(t_0)$ تعین کر سکتے ہیں۔ مساوات 10.19 کو C کی منحنی مقدار معلوم⁹ کہتے ہیں جبکہ t کو مقدار معلوم کہتے ہیں۔ منحنی مقدار معلوم کی طرز پر منحنی کا اظہار نہایت عمدہ ثابت ہوتا ہے۔

فضا میں منحنی ظاہر کرنے کے دیگر طریقے

$$(10.20) \quad y = f(x), \quad z = g(x)$$

اور

$$(10.21) \quad F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

ہیں۔ مساوات 10.20 میں $x = t$ پر کرتے ہوئے اس کو مساوات 10.19 کی طرح لکھ سکتے ہیں یعنی:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j} + g(t)\mathbf{k}$$

مساوات 10.21 میں دو سطحوں کے مساوات دیے گئے ہیں جن کا ملاپ منحنی دیتا ہے۔

⁹ parametric representation

مستوی منحنی¹⁰ سے مراد ایسی منحنی ہے جو فضا میں کسی سطح مستوی پر پائی جاتی ہو۔ غیر مستوی منحنی کو خم دار منحنی¹¹ کہتے ہیں۔

مثال 10.7: سیدھا خط

کسی بھی سیدھی لکیر L کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں a اور b مستقل سمتیات ہیں (شکل 10.2-ب)۔

$$(10.22) \quad r(t) = a + tb = (a_1 + tb_1)i + (a_2 + tb_2)j + (a_3 + tb_3)k$$

L نقطہ A سے گزرتی ہے جس کا تعین گر سمتیہ a ہے جبکہ b کے رخ L ہو گا۔ اگر b اکائی سمتیہ ہو تب اس کے ارکان کو سائن رخ¹² ہوں گے اور L پر کسی بھی نقطے کا A سے فاصلہ $|t|$ ہو گا۔ □

مثال 10.8: ترخیم، دائرہ

درج ذیل سمتی تقابل xy سطح میں ترخیم کو ظاہر کرتا ہے جس کا مرکز کارتیسی نظام کے مبدا اور صدر محور x اور y محور پر ہیں۔

$$(10.23) \quad r(t) = a \cos t i + b \sin t j$$

لیتے ہوئے $x = a \cos t$ اور $y = b \sin t$ کے استعمال سے

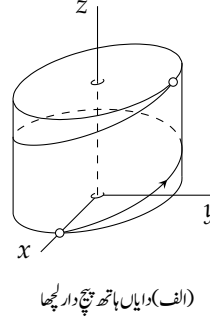
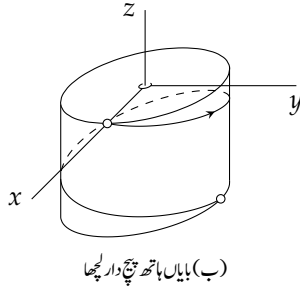
$$(10.24) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

ملتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔ اگر $a = b$ ہو تب مساوات 10.23 رداس a کی دائرے کی مساوات ہو گی۔ □

سوال 10.32: مبدا سے ہٹ کر دائرہ

xy سطح میں رداس r کا ایسا دائرہ جس کا مرکز نقطہ (x_0, y_0) پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1$$



شکل 10.3: پیچ دار لچھے (مثال 10.33)۔

لیتے ہوئے $x = x_0 + r \cos t$ اور $y = y_0 + r \sin t$ لکھا جائے گا کہ $\frac{y-y_0}{r} = \sin t$ اور $\frac{x-x_0}{r} = \cos t$ لہذا اس دائرے کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(10.25) \quad \mathbf{r}(t) = (x_0 + r \cos t)\mathbf{i} + (y_0 + r \sin t)\mathbf{j}$$

سوال 10.33: پیچ دار لچھا
پیچ دار لچھے¹³ کو

$$(10.26) \quad \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k} \quad (c \neq 0)$$

ظاہر کرتا ہے۔ اس خم دار منحنی کو $c > 0$ (دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) اور $c < 0$ (بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کے لئے شکل 10.3 میں دکھایا گیا ہے۔

منحنی کے کچھ حصے کو عموماً قوس¹⁴ کہتے ہیں۔ اس کتاب میں ہم عموماً قوس کو بھی منحنی کہیں گے۔

ہم قطع منحنی اپنی آپ کو قطع کرتی ہے۔ نقطہ قطع کو منحنی کا متعدد نقطہ¹⁵ کہتے ہیں (شکل 10.4)۔ ایسی منحنی جس کے متعدد نقطے نہ پائے جاتے ہوں سادہ منحنی¹⁶ کہلاتی ہے۔

circular helix¹³

arc¹⁴

multiple point¹⁵

simple curve¹⁶



شکل 10.4: دوہرا نقطوں والے منحنی

مثال 10.9: سادہ اور غیر سادہ منحنی
ترخیم اور پیچ دار لچھے سادہ ترخیم کی مثالیں ہیں۔ درج ذیل $t = 1$ اور $t = -1$ پر مبداء سے دو مرتبہ گزرتی ہے لہذا یہ غیر سادہ منحنی کی مثال ہے۔

$$r(t) = (t^2 - 1)i + (t^3 - 1)j$$

□

آخر میں بتانا چلوں کہ کسی بھی منحنی C کو کئی سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے مثلاً اگر C کو مساوات 10.19 ظاہر کرے تب ہم $t = h(t^*)$ لیتے ہوئے، جہاں مساوات 10.19 میں استعمال t کی تمام قیمتوں کے لئے $h(t^*)$ بھی پائے جاتے ہوں، C کو نئی سمتی تفاعل $\tilde{r}(t^*) = r[h(t^*)]$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثال 10.10: مقدار معلوم کی تبدیلی

xy سطح میں قطع مکانی $y = x^2$ کو درج ذیل سمتی تفاعل ظاہر کرتی ہے۔

$$(10.27) \quad r = ti + t^2j \quad (-\infty < t < \infty)$$

ہم $t = -2t^*$ لیتے ہوئے اس قطع مکانی کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\tilde{r}(t^*) = r(-2t^*) = -2t^*i + 4t^{*2}j$$

اگر ہم $t = t^{*2}$ لیں تب ہمیں درج ذیل نیا سمتی تفاعل ملتا ہے

$$\tilde{r}(t^*) = t^{*2}i + t^{*4}j$$

□

لیکن $t^{*2} > 0$ کی بنا یہ تفاعل قطع مکانی کو صرف ربع اول میں ظاہر کرتا ہے۔

سوالات

سوال 10.34 تا سوال 10.37 میں نقطہ A سے گزرتی ہوئی سمتیہ b کے رخ سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.34: $A : (0, 0, 0), \quad b = i - j$
جواب: $r = ti - tj$

سوال 10.35: $A : (2, -3, 1), \quad b = i + 2j$
جواب: $r = (t + 2)i + (2t - 3)j + k$

سوال 10.36: $A : (2, 0, -3), \quad b = -j + 3k$
جواب: $r = 2i - tj + 3(t - 1)k$

سوال 10.37: $A : (-3, 2, 6), \quad b = 5i + 3j - 7k$
جواب: $r = (5t - 3)i + (3t + 2)j + (6 - 7t)k$

سوال 10.38 تا سوال 10.41 میں نقطہ A اور نقطہ B سے گزرتی ہوئی سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.38: $A : (0, 0, 0), \quad B : (1, 1, 1)$
جواب: $r = ti + tj + tk$

سوال 10.39: $A : (-3, 7, -5), \quad B : (2, 0, 3)$
جواب: $r = (5t - 3)i + 7(1 - t)j + (8t - 5)k$

سوال 10.40: $A : (1, 2, -3), \quad B : (7, 2, -3)$
جواب: $r = (6t + 1)i + 2j - 3k$

سوال 10.41: $A : (3, 2, 0), \quad B : (0, 0, 0)$
جواب: $r = 3(1 - t)i + 2(1 - t)j$ جس میں $t^* = 1 - t$ چنتے ہوئے $\vec{r} = 3t^*i + 2t^*j$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 10.42 تا سوال 10.46 میں دیے سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.42: $y = x, \quad z = 0$
جواب: $r = ti + tj$

سوال 10.43: $y = -3x, \quad z = 2x$
جواب: $r = ti - 3tj + 2tk$

سوال 10.44: $2y = 5x, \quad z = x - 3y$
جواب: $r = ti + \frac{5}{2}j - \frac{13}{2}k$ یا $r = 2ti + 5tj - 13tk$ جہاں t^* کی جگہ t ہی لکھا گیا ہے۔

سوال 10.45: $4x - y + z = 3, \quad -3x + 2y + 3z = 19$
جواب: y اور z حاصل کرتے ہوئے $r = ti + (3t + 2)j + (5 - t)k$

سوال 10.46: $x - y = 2, \quad 2x + z = 3$
جواب: $r = ti + (t - 2)j + (3 - 2t)k$

سوال 10.47 تا سوال 10.55 میں دیے خطوط کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.47: $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$
جواب: $r = \cos ti + \sin tj$

سوال 10.48: $y = x^3, \quad z = 0$
جواب: $r = ti + t^3j$

سوال 10.49: $y = 2x^3, \quad z = -3x^2$
جواب: $r = ti + 2t^3j - 3t^2k$

سوال 10.50: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -9, \quad z = 0$
جواب: نقطہ $(2, -3)$ پر رداس 2 کا دائرہ $r = (2 + 2 \cos t)i + (-3 + 2 \sin t)j$

سوال 10.51: $4(x + 1)^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$
جواب: $r = (-1 + 2 \cos t)i + 2 \sin tj$

سوال 10.52: $x = -5y^2, \quad z = 2y^3$
جواب: $r = -5t^2i + tj + 2t^3k$

سوال 10.53: $y = \sqrt{x}$, $z = y - 2$,
جواب: $r = t^2 i + t j + (t - 2) k$

سوال 10.54: xy سطح میں درج ذیل ترخیم کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

جواب: $r = (x_0 + a \cos t) i + (y_0 + b \sin t) j$

سوال 10.55: $x^2 + y^2 = 4$, $z = e^{-x}$
جواب: $r = 2 \cos t i + 2 \sin t j + e^{-t} k$

سوال 10.56: پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کا xy ، xz اور yz سطحوں پر عمودی سایہ کیا ہوگا؟

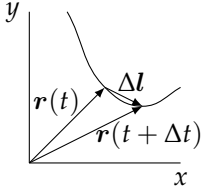
جوابات: xy میں دائرہ، xz میں کوسائن موج اور yz میں سائن موج

10.4 لمبائی قوس

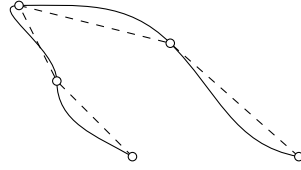
سادہ منحنی C کی لمبائی کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ ہم C (شکل 10.5-الف) کے دونوں سروں کے مابین متواتر (اختیاری) نقطوں کو n عدد (نقطہ دار) خط مستقیم سے یوں جوڑتے ہیں کہ $n \rightarrow \infty$ کی صورت میں لمبی ترین خط مستقیم کی لمبائی صفر کے قریب تر ہوگی۔ تمام خط مستقیم کی لمبائیوں (جنہیں مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کیا جاسکتا ہے) کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اگر n کی بتدریج بڑھتی تعداد n_1 ، n_2 ، ... لیتے ہوئے مطابقتی خط مستقیم کی لمبائیوں کے مجموعے کی ترتیب l_1 ، l_2 ، ... مرکوز ہو جس کی حد l ہو تب ہم کہتے ہیں کہ C قابل تصحیح¹⁷ ہے اور l کو C کی لمبائی¹⁸ کہتے ہیں۔

اگر C از خود سادہ منحنی نہ ہو لیکن یہ محدود تعداد کے قابل تصحیح سادہ منحنیات پر مشتمل ہو تب C کی لمبائی سے مراد ان تمام منحنیات کی لمبائیوں کا مجموعہ ہوگا۔

¹⁷rectifiable
¹⁸length



(ب) استمراری قابل تفرق تفاعل کی لمبائی۔



(الف) لمبائی کی تعریف۔

شکل 10.5: لمبائی قوس

اگر C کو استمراری¹⁹ قابل تفرق سمتی تفاعل

$$(10.28) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب $\Delta \mathbf{l} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{r}$ ہو گا (شکل 10.5-ب) جس کو Δt سے تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\Delta \mathbf{l}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\Delta t \rightarrow 0$ کی صورت میں درج ہو گا۔

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

کسی بھی سمتیہ کی طرح $\dot{\mathbf{r}}$ کی لمبائی $\sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}$ ہو گی جس کو dt سے ضرب دیتے ہوئے مکمل لینے سے منحنی کی کل لمبائی حاصل ہو گی۔

$$(10.29) \quad l = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt \quad (\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt})$$

مساوات 10.29 سے حاصل لمبائی منحنی پر محدودی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اگر ہم مکمل کی بالائی حد کو مستقل b کی جگہ متغیر t رکھیں تب حاصل مکمل از خود t کا تابع تفاعل ہو گا مثلاً $s(t)$ ۔ یوں مکمل کے متغیر کو t^* لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$(10.30) \quad s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt^* \quad (\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt^*})$$

تفاعل $s(t)$ کو C کا لمبائی قوس تفاعل یا C کی لمبائی قوس²⁰ کہتے ہیں۔

¹⁹ استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا تفرق موجود ہے اور یہ تفرق استمراری ہے۔ اسی طرح دوہرا استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا دوہرا تفرق موجود ہے اور یہ دوہرا تفرق استمراری ہے، وغیرہ وغیرہ
²⁰ arc length

اب تک کے بحث سے ظاہر ہے کہ جیومیٹریائی طور پر کسی مستقل $t = t_0 \geq a$ کے لئے $s(t_0)$ نقطہ $t = a$ اور نقطہ $t = t_0$ کے درمیان حصے کی لمبائی دیتا ہے۔ یوں $t = t_0 < a$ کی صورت میں $s(t_0) < 0$ ہو گا لہذا لمبائی $-s(t_0)$ ہو گی۔

منحنی کی مقدار معلوم مساوات میں s بطور مقدار معلوم کردار ادا کر سکتا ہے اور جیسا ہم دیکھیں گے اس سے کئی کلیات سادہ صورت اختیار کرتے ہیں۔

مساوات 10.30 میں ابتدائی نقطہ a کی جگہ کوئی دوسرا مستقل لیا جا سکتا ہے یعنی نقطہ $s = 0$ کو ہم خود مختاری کے ساتھ چن سکتے ہیں۔ C پر جس طرف چلنے سے s بڑھتا ہے اس طرف کو C کی مثبت دائری سمت²¹ کہتے ہیں۔ یوں منحنی کی سمت بندی²² کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ کسی بھی C کی سمت بندی دو طریقوں سے کی جاسکتی ہے۔ مقدار معلوم کا اس طرح تبادلہ کہ اس کا تفرق منفی حاصل ہو سے دوسری سمت بندی حاصل ہو گی۔

مساوات 10.30 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(10.31) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

روایتی طور پر عموماً

$$dr = dx i + dy j + dz k$$

اور

$$(10.32) \quad ds^2 = dr \cdot dr = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

لکھا جاتا ہے جہاں ds کو C کا خطی جزو²³ کہتے ہیں۔

مثال 10.11: لمبائی قوس بطور مقدار معلوم دائرے کی صورت میں

$$r(t) = a \cos t i + a \sin t j, \quad \dot{r} = -a \sin t i + a \cos t j, \quad \dot{r} \cdot \dot{r} = a^2$$

positive sense²¹
orientation²²
linear element²³

ہو گا لہذا لمبائی قوس درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$s(t) = \int_0^t a \, dt^* = at$$

یوں t کو s کا تفاعل $t(s) = \frac{s}{a}$ لکھتے ہوئے دائرے کی ایسی مساوات لکھتے ہیں جس میں s بطور مقدار معلوم ہو۔

$$r\left(\frac{s}{a}\right) = a \cos \frac{s}{a} i + a \sin \frac{s}{a} j \quad \text{گھڑی کی الٹ رخ}$$

اس مساوات میں $s = 0$ پر کرتے ہوئے $r = ai + 0j$ ملتا ہے جو نقطہ $(a, 0)$ کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح s کی قیمت بڑھا کر $s = \frac{\pi a}{2}$ کرنے سے $r = 0i + aj$ حاصل ہوتا ہے جو نقطہ $(0, a)$ کو ظاہر کرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ s کی قیمت بڑھانے سے نقطہ دائرے پر رہتے ہوئے مبداء کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ یوں اس دائرے کی سمت بندی گھڑی کی الٹ رخ ہے۔ ہم $s = -\tilde{s}$ پر کرتے ہوئے دائرے کی سمت بندی گھڑی کے رخ رکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \text{اور} \quad \sin(\alpha) = -\sin \alpha$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$r\left(-\frac{\tilde{s}}{a}\right) = a \cos \frac{\tilde{s}}{a} i - a \sin \frac{\tilde{s}}{a} j \quad \text{گھڑی کی رخ}$$

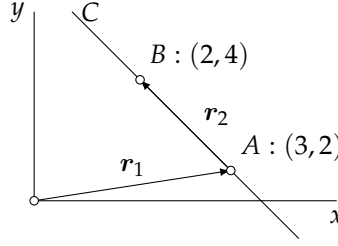
□ چونکہ $\frac{ds}{d\tilde{s}} = -1 < 0$ ہے لہذا درج بالا میں گھڑی کے رخ چلتے ہوئے بڑھتا \tilde{s} حاصل ہو گا۔

مثال 10.12: اکائی رداس کے دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم

$$r = ti + \sqrt{1-t^2}j$$

لکھ سکتے ہیں جہاں جذر کی مثبت قیمت لی گئی ہے۔ اس میں $t = 0$ پر کرنے سے $r = 0i + j$ یعنی نقطہ $(0, 1)$ ملتا ہے جبکہ $t = 1$ پر کرنے سے $r = i + 0j$ یعنی نقطہ $(1, 0)$ ملتا ہے۔ یوں t کی قیمت بڑھانے سے نقطہ دائرے پر گھڑی کی رخ گھومتا ہے لہذا یہ مساوات ایسے دائرے کی مساوات ہے جس کی سمت گھڑی کی رخ ہے۔ یہ دائرے کی بالائی حصے (جہاں y مثبت ہے) کی مساوات ہے۔ اسی دائرے کی نچلی حصے کی مساوات

$$r = t^*i - \sqrt{1-t^{*2}}j$$



شکل 10.6: خط مستوی کی سمتی مساوات (مثال 10.14)۔

□

ہوگی جو $t^* = 0$ پر $(1, 0)$ اور $t^* = 1$ پر $(0, -1)$ دیتی ہے۔

مثال 10.13: قوس مکانی $y = x^2$ کو

$$r(t) = ti + t^2j$$

لکھا جاسکتا ہے جو $t = 0$ پر $r = 0i + 0j$ یعنی نقطہ $(0, 0)$ اور $t = 1$ پر $r = i + j$ یعنی نقطہ $(1, 1)$ دیتی ہے۔ یوں درج بالا ایسی قوس مکانی کی مساوات ہے جس کی سمت گھڑی کی الٹ رخ ہے۔ اس میں $t = -t^*$ پر گھڑی کی رخ قوس مکانی کی مساوات

$$r(t) = -t^*i + t^{*2}j$$

ملتی ہے جو $t^* = 0$ پر $(0, 0)$ اور $t^* = 1$ پر $(-1, 1)$ دیتی ہے لہذا یہ گھڑی کی رخ قوس مکانی کی مساوات ہے۔ □

مثال 10.14: خط مستوی C کو شکل 10.14 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کی دو ممکنہ سمتیں ہیں۔ آئیں بڑھتی y رخ میں اس خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ C پر کوئی ابتدائی نقطہ A چنتے ہیں جس کا تعین گر سمتیہ $r_1 = 3i + 2j$ ہے۔ ابتدائی نقطے سے بڑھتی y رخ میں C پر کوئی دوسرا نقطہ B چنتے ہیں۔ A سے B تک سمتیہ $r_2 = (2 - 3)i + (4 - 2)j = -i + 2j$ ہے۔ یوں بڑھتی y رخ C کی مساوات

$$r(t) = r_1 + tr_2 = (3 - t)i + 2(1 + t)j$$

ہوگی جو $t = 0$ پر ابتدائی نقطہ $(3, 2)$ دیتی ہے۔

اس مساوات میں $t = -t^*$ پر کرتے ہوئے گھٹی y رخ C کی مساوات

$$r(t^*) = (3 + t^*)i + 2(1 - t^*)j$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $t^* = -1$ پر کرنے سے نقطہ B حاصل ہو گا۔ □

سوالات

تمام سوالات میں لمبائی قوس دریافت کریں۔ دیے تفاعل کا خط کھینچیں۔

سوال 10.57: لیزم: $x = 0$ سے $x = 1$ تک $z = 0$, $y = \cosh x$,
جواب: $\sinh 1$

سوال 10.58: پیچ دار لچھا: $(a, 0, 0)$ سے $(a, 0, 2\pi c)$ تک $y = a \cos ti + a \sin tj + ctk$,
جواب: $2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$

سوال 10.59: قطع مکانی: $(0, 0, 0)$ سے $(2, 4, 0)$ تک $z = 0$, $y = x^2$,
جواب: $\frac{\operatorname{arcsinh}(8)}{4} + 2\sqrt{65}$

سوال 10.60: چار دندان مستدیر: پوری لمبائی $r = a \cos^3 ti + a \sin^3 tj$,
جواب: اس کو چار سادہ قابل تصحیح ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے $6a$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.61: $(1, 0, 0)$ سے $(-1, \pi, 0)$ تک $r = (\cos t + t \sin t)i + (\sin t - t \cos t)j$,
جواب: $\frac{\pi^2}{2}$

سوال 10.62: $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ $r = e^t \cos t i + e^t \sin t j$,
جواب: $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

سوال 10.63: ثابت کریں کہ $x = a$ تا $x = b$ منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔ (مساوات 10.29 کی مدد لیں۔)

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (y' = \frac{df}{dx}) \quad (10.33)$$

جواب: $r = ti + f(t)j$ سے $\dot{r} = i + f'j$ اور $\sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} = \sqrt{1 + f'^2}$ لکھ کر جواب حاصل کریں۔
سوال 10.64: درج بالا مساوات (سوال 10.63) کی مساوات استعمال کرتے ہوئے رداس r کے دائرے کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب: x محور کے بالائی جانب قوس کی مثبت دائری سمت بائیں سے دائیں ہے جبکہ محور کے نیچے جانب مثبت دائری سمت دائیں سے بائیں ہے۔ یوں ایک بار $x = -1$ تا $x = 1$ اور دوسری بار $x = 1$ تا $x = -1$ تک مکمل لیں۔ کل لمبائی $2\pi r$ حاصل ہوگی۔

سوال 10.65: اگر منحنی کو کروی محدود میں $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ سے ظاہر کیا جائے تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$$

جواب: $x = \rho \cos \phi$ اور $y = \rho \sin \phi$ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi \implies dx = \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi \implies dy = \sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi$$

جنہیں مساوات 10.32 میں پر کرنے سے درکار نتیجہ ملتا ہے۔

سوال 10.65 میں دیا گیا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 10.66 تا سوال 10.70 میں لمبائی قوس دریافت کریں۔

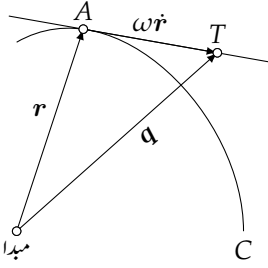
سوال 10.66: رداس r کے دائرے کی کل لمبائی۔
جواب: $2\pi r$

سوال 10.67: $\rho = e^\phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$
جواب: $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

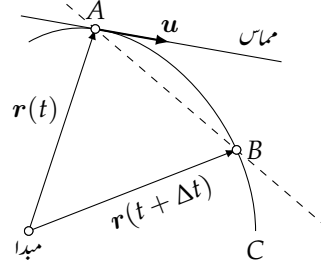
سوال 10.68: $\rho = \phi^2$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{(\pi^2 + 16)^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{8}{3}$

سوال 10.69: قلب نما $\rho = a(1 - \cos \theta)$ (اس کا خط جو قلب نما ہے کو کھینچیں)۔
جواب: $8a$

سوال 10.70: $\rho = a(1 + \cos \theta)$
جواب: $8a$



(ب) مماس الجبرائی اظہار



(الف) منحنی کا مماس

شکل 10.7: مماس اور اس کا اظہار

10.5 مماس، انحناء اور مروڑ

نقطہ A پر منحنی C کے مماس سے مراد A اور منحنی پر دوسرا نقطہ B سے گزرتے ہوا وہ سیدھا خط ہے جو B کو A کے قریب تر کرنے سے حاصل ہو گا (شکل 10.7-الف)۔

فرض کریں کہ C کو استمراری قابل تفرق تفاعل $r(t)$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں t کوئی بھی مقدار معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کریں کہ t اور $t + \Delta t$ بالترتیب A اور B دیتے ہیں۔ ان نقطوں سے گزرتا ہوا سیدھا خط L درج ذیل سمتیہ کے رخ ہو گا۔

$$\frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

یوں اگر سمتیہ

$$(10.34) \quad \dot{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

صفر سمتیہ نہ ہو تب اس کی سمت ہی نقطہ A پر مماس کی سمت ہو گی۔ یہ سمتیہ بڑھتے t کے رخ ہے۔ \dot{r} کو نقطہ A پر C کا مماس²⁴ کہتے ہیں جس کا مطابقتی اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا جس کو A پر C کا اکائی سمتیہ مماس²⁵ کہتے ہیں۔

$$(10.35) \quad u = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}$$

²⁴tangent
²⁵unit tangent vector

اب اگر C کو $r(s)$ سے ظاہر کیا جائے، جہاں s لمبائی قوس ہے، تب مساوات 10.31 کے تحت $\frac{dr}{ds}$ اکائی سمتیہ ہو گا لہذا مساوات 10.35 درج ذیل دے گی۔

$$(10.36) \quad u = r' = \frac{dr}{ds}$$

شکل 10.7-ب سے ظاہر ہے کہ مماس پر کسی بھی نقطہ T کا تعین گر سمتیہ، A کے تعین گر سمتیہ اور A سے مماس کی سمت میں سمتیہ کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$(10.37) \quad q(\omega) = r + \omega r'$$

جہاں ω حقیقی متغیر ہے۔

فرض کریں کہ منحنی C کو تین گنا استمراری قابل تفرق تفاعل²⁶ $r(s)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں s لمبائی قوس ہے۔ تب درج ذیل کو C کی انحناء²⁷ کہتے ہیں۔

$$(10.38) \quad \kappa(s) = |u'(s)| = |r''(s)| \quad (\kappa \geq 0)$$

اگر $\kappa \neq 0$ ہو تب $u'(s)$ کی سمت میں اکائی سمتیہ p درج ذیل ہو گا جس کو C کا اکائی صدر عمودی سمتیہ²⁸ کہتے ہیں۔

$$(10.39) \quad p = \frac{u'}{\kappa} \quad (\kappa > 0)$$

صفحہ 716 پر مثال 10.5 کے نتیجے کے تحت p اور u قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ درج ذیل کو C کا دوہرا عمودی اکائی سمتیہ²⁹ کہتے ہیں۔

$$(10.40) \quad b = u \times p \quad (\kappa > 0)$$

سمتی ضرب کی تعریف کے تحت u ، p اور b دائیں ہاتھ تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات ہوں گے (حصہ 7.3 اور حصہ 7.7)۔ ان تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات کو نقطہ غور پر C کا سه سطحی مجسم³⁰ کہتے ہیں۔ اس نقطے سے گزرتے ہوئے تین سیدھے خطوط جو u ، p اور b کے رخ ہوں کو بالترتیب C کا مماس، صدر عمود اور دوہرا عمود کہتے ہیں۔

²⁶ صفحہ 727 کے آخر پر حاشیہ دیکھیں

²⁷ curvature

²⁸ unit principal normal vector

²⁹ unit binormal vector

³⁰ trihedron

اگر تفرق b' صفر نہ ہو تب مثال 10.5 کے تحت یہ b کے عمودی ہو گا۔ ساتھ ہی ساتھ یہ u کے بھی عمودی ہے۔ درحقیقت اگر ہم $b \cdot u = 0$ کا تفرق لیں تو ہمیں $b' \cdot u + b \cdot u' = 0$ ملتا ہے۔ اب چونکہ $b \cdot u' = 0$ ہے لہذا $b' \cdot u = 0$ ہو گا۔ یوں b' کی صورت $b' = \alpha p$ ہو گی جہاں α غیر سمتی ہے۔ روایتی طور پر $\alpha = -\tau$ لیا جاتا ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.41) \quad b' = -\tau p \quad (\kappa > 0)$$

غیر سمتی تقابل τ کو C کی مروڑ³¹ کہتے ہیں۔ مساوات 10.41 کے دونوں اطراف کو p سے ضرب دینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.42) \quad \tau(s) = -p(s) \cdot b'(s)$$

درج بالا تصورات منحنیات کے استعمال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

مثال 10.15: پیچ دار لچھا

پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کی لمبائی $s = t\sqrt{a^2 + c^2}$ حاصل ہوتی ہے لہذا پیچ دار لچھے کو

$$r(s) = a \cos \frac{s}{K} i + a \sin \frac{s}{K} j + c \frac{s}{K} k, \quad K = \sqrt{a^2 + c^2}$$

لکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$u(s) = r'(s) = -\frac{a}{K} \sin \frac{s}{K} i + \frac{a}{K} \cos \frac{s}{K} j + \frac{c}{K} k$$

$$r''(s) = -\frac{a}{K^2} \cos \frac{s}{K} i - \frac{a}{K^2} \sin \frac{s}{K} j$$

$$\kappa = |r''| = \sqrt{r'' \cdot r''} = \frac{a}{K^2} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

$$p(s) = \frac{r''(s)}{\kappa(s)} = -\cos \frac{s}{K} i - \sin \frac{s}{K} j$$

$$b(s) = u(s) \times p(s) = \frac{c}{K} \sin \frac{s}{K} i - \frac{c}{K} \cos \frac{s}{K} j + \frac{a}{K} k$$

$$b'(s) = \frac{c}{K^2} \cos \frac{s}{K} i + \frac{c}{K^2} \sin \frac{s}{K} j$$

$$\tau(s) = -p(s) \cdot b'(s) = \frac{c}{K^2} = \frac{c}{a^2 + c^2}$$

اس طرح پچ دار لچھے میں مستقل انخا اور مستقل مروڑ پایا جائے گا۔ اگر $c > 0$ (شکل 10.3-الف) دایاں ہاتھ پچ دار لچھا) ہو تب $\tau > 0$ ہو گا جبکہ $c < 0$ (شکل 10.3-ب) دایاں ہاتھ پچ دار لچھا) کی صورت میں $\tau < 0$ ہو گا۔ یوں \square

چونکہ u ، p اور b غیر تابع سمتیات ہیں لہذا فضا میں کسی بھی سمتیہ کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اگر u' ، p' اور b' موجود ہوں تب انہیں بھی ان غیر تابع سمتیات کی مدد سے (درج ذیل) لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.43) \quad \begin{array}{ll} \text{(الف)} & u = \kappa p \\ \text{(ب)} & p' = -\kappa u + \tau b \\ \text{(پ)} & b' = -\tau p \end{array}$$

مساوات 10.43-الف کو مساوات 10.39 سے حاصل کیا جاسکتا ہے جبکہ مساوات 10.43-پ درحقیقت مساوات 10.41 ہے۔ سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$p = b \times u, \quad p \times u = -b, \quad b \times p = -u$$

ان میں دایاں کلیہ کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 10.43-الف اور مساوات 10.43-پ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو مساوات 10.43-ب ہے۔

$$p' = b' \times u + b \times u' = -\tau p \times u + b \times \kappa p = -\tau(-b) + \kappa(-u)$$

سوالات

سوال 10.71 تا سوال 10.74 میں نقطہ N پر دیے گئے تفاعل کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.71: $r(t) = \cos t i + \sin t j$, $N : (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
جواب: $q(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \omega)i + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \omega)j$

سوال 10.72: $r(t) = ti - t^3 j + t^2 k$, $N : (1, -1, 1)$
جواب: $q(\omega) = (1 + \omega)i - (1 + 3\omega)j + (1 + 2\omega)k$

سوال 10.73: $r(t) = \cos t i + \sin t j + 3t k$, $N : (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\pi)$
جواب: $q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \omega)i + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \omega)j + (\frac{3}{4}\pi + 3\omega)k$

سوال 10.74: $N : (\sqrt{3}, -1)$ $r(t) = 2 \cos t i - 2 \sin t j$,
جواب: $q(\omega) = (\sqrt{3} - \omega)i - (1 + \sqrt{3}\omega)j$

سوال 10.75: ثابت کریں کہ مثال 10.15 میں دیے گئے پیچ دار لچھے کی u اور z محور کے مابین زاویہ مستقل مقدار ہے۔

جواب: مستقل $\cos \alpha = u \cdot k = \frac{c}{a^2 + c^2}$

سوال 10.76: ثابت کریں کہ صرف سیدھے خطوط واحد منحنی ہیں جن کے اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہیں۔

جواب: اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہونے کی صورت میں $r' = ai + cj + ek$ ہو گا جہاں a ، c اور e مستقل قیمتیں ہیں۔ مکمل لینے سے منحنی کی عمومی مساوات $r = (at + b)i + (ct + d)j + (et + f)k$ حاصل ہوتی ہے جو سیدھے خط کی عمومی مساوات ہے اور جہاں b ، d اور f مکمل کے مستقل ہیں۔

سوال 10.77: ثابت کریں کہ سیدھے خطوط کی انحناء مکمل صفر ہو گی۔

جواب: سیدھے خطوط کی عمومی مساوات کو سوال 10.76 کی جواب میں پیش کیا گیا ہے جس کا دو درجی تفرق صفر کے برابر ہے۔

سوال 10.78: ثابت کریں کہ منحنی $r(t)$ کی انحناء درج ذیل ہے، جہاں t مقدار معلوم ہے۔

$$(10.44) \quad \kappa = \frac{\sqrt{(\dot{r} \cdot \dot{r})(\ddot{r} \cdot \ddot{r}) - (\dot{r} \cdot \ddot{r})^2}}{(\dot{r} \cdot \dot{r})^{\frac{3}{2}}}$$

سوال 10.79: ثابت کریں کہ رداس a کے دائرے کی انحناء $\frac{1}{a}$ کے برابر ہے۔

جواب: ایسے دائرے کی مساوات $r(s) = a \cos \frac{s}{a} i + a \sin \frac{s}{a} j$ ہے جہاں لمبائی قوس کو بطور مقدار معلوم استعمال کیا گیا ہے۔ اس سے $|r''| = \frac{1}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.80: ثابت کریں کہ xy سطح میں منحنی $y = y(x)$ کی انحناء $\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ہو گی۔ مساوات

10.44 استعمال کریں۔

باب 10. سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفعل

سوال 10.81: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل (غیر سمتی سہ ضرب) ثابت کریں۔

$$(10.45) \quad \tau = (u p p')$$

جواب: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\tau = -p \cdot (u \times p)' = -p \cdot (u' \times p + u \times p') = -(p u' p) - (p u p')$$

صفحہ 533 پر مساوات 7.58 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $p \times p = |p||p| \sin 0^\circ = 0$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$(p u' p) = (u' p p) = u \cdot (p \times p) = 0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = -(p u p') = -(u p' p) = (u p p')$$

سوال 10.82: ثابت کریں کہ مساوات 10.39 کی مدد سے مساوات 10.45 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.46) \quad \tau = \frac{(r' r'' r''')}{\kappa^2}$$

10.6 سمتی رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ فضا میں متحرک جسم J کا تعین گر سمتیہ $r(t)$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $r(t)$ جسم J کا راستہ C دے گا۔ گزشتہ حصے سے ظاہر ہے کہ سمتیہ

$$(10.47) \quad v = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

راستہ C کا مماس ہو گا لہذا یہ J کی لمبائی حرکت کے رخ ہو گا۔ مساوات 10.31 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں s لمبائی قوس ہے۔ C پر کسی مقررہ نقطے ($s = 0$) سے لمبائی قوس s کو ناپا جاتا ہے۔

$$|v| = \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} = \frac{ds}{dt} \quad (10.48)$$

یوں $\frac{ds}{dt}$ جسم J کی رفتار³² ہو گی اور سمتیہ v جسم J کی سمتی رفتار³³ سمتیہ³⁴ ہو گا جس کو عموماً سمتی رفتار³⁴ کہتے ہیں۔

سمتی رفتار کی تفرق کو سمتیہ اسراع³⁵ یا اسراع³⁶ کہتے ہیں اور اس کو a سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t) \quad (10.49)$$

مثال 10.16: مرکز مائل اسراع اور مرکز مائل قوت
 xy سطح میں مبدا پر واقع، رداس R کے دائرے C پر گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ کمیت m کی حرکت (شکل 10.8-الف) کو درج ذیل سمتیہ ظاہر کرتا ہے

$$r(t) = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j} \quad (\omega > 0)$$

جس کا تفرق سمتی رفتار دے گا جو C کا مماس ہو گا۔

$$v = \dot{r} = -\omega R \sin \omega t \mathbf{i} + \omega R \cos \omega t \mathbf{j}$$

اس سے رفتار حاصل کرتے ہیں

$$|v| = \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} = \omega R$$

جو مستقل مقدار ہے۔ رفتار کو (دائرے کے مرکز سے فاصلہ) R سے تقسیم کرنے سے زاویائی رفتار³⁷ ω حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ اسراع درج ذیل ہو گا

$$a = \dot{v} = \ddot{r} = -\omega^2 R \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 R \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 r \quad (10.50)$$

³² speed

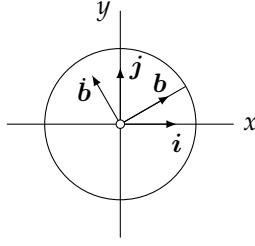
³³ velocity vector

³⁴ velocity

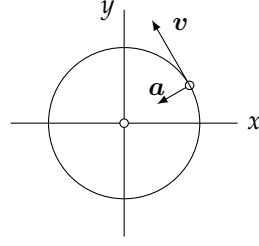
³⁵ acceleration vector

³⁶ acceleration

³⁷ angular speed



(ب) قرص پر حرکت (مثال 10.17)۔



(الف) مرکز نائل اسراع (مثال 10.16)

شکل 10.8: مرکز نائل اسراع

جو دائرے کی مرکز کے رخ ہے لہذا اس کو مرکز مائل اسراع³⁸ کہتے ہیں۔ اسراع کی قیمت $|a| = \omega^2 R$ ہے۔ کمیت m پر مرکز مائل قوت³⁹ ma عمل کرے گا۔ اس کا مخالف قوت $-ma$ ہو گا جس کو مرکز گریز قوت⁴⁰ کہتے ہیں۔

□

ظاہر ہے کہ v کے وقتی تفرق کو a کہتے ہیں۔ مثال 10.16 میں $|v|$ مستقل مقدار ہے لیکن $a \neq 0$ ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ a کی مقدار عموماً $|v|$ کے تفرق کے برابر نہیں ہوتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ a عموماً راہ C کا مماس نہیں ہوتا ہے۔ آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔ زنجیری تفرق سے

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = r' \frac{ds}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(10.51) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r' \frac{ds}{dt} \right) = r'' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + r' \frac{d^2 s}{dt^2}$$

چونکہ r' راہ C کا اکائی مماس سمتیہ u ہے (مساوات 10.36) جس کا تفرق $u' = r''$ سمتیہ u کے عمودی ہے (حصہ 10.5) لہذا مساوات 10.51 اسراع کو مماسی اسراع $r' \ddot{s}$ اور عمودی اسراع $r'' \dot{s}^2$ کے مجموعے کے طور پر پیش کرتی ہے۔ اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ رفتار کا تفرق صفر ہونے کی صورت $\frac{d^2 s}{dt^2}$ میں بھی اسراع ہو گی۔

³⁸ centripetal acceleration
³⁹ centripetal force
⁴⁰ centrifugal force

مثال 10.17: کوریولس اسراع
ایک قرص (شکل 10.8-ب) جو اپنی مرکز کے گرد مستقل زاویائی رفتار ω سے، گھڑی کی سوئیوں کے مخالف رخ، گھوم رہا ہے پر جسم J رداس کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔ اس حرکت کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں b ایسا اکائی سمتیہ ہے جو قرص کے ساتھ ساتھ گھومتا ہے۔

$$r(t) = tb \quad (10.52)$$

J کی اسراع دریافت کریں۔

حل: b کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$b(t) = \cos \omega t i + \sin \omega t j \quad (10.53)$$

مساوات 10.52 کا تفرق سمتی رفتار

$$v = \dot{r} = b + t\dot{b} \quad (10.54)$$

دیتا ہے۔ ظاہر ہے کہ قرص کے لحاظ سے J کی رفتار b ہے جبکہ کے گھومنے کی وجہ سے اضافی رفتار $t\dot{b}$ پایا جاتا ہے۔ دوبارہ تفرق سے اسراع

$$a = \dot{v} = 2\dot{b} + t\ddot{b} \quad (10.55)$$

حاصل ہوگی۔ مساوات 10.55 کے آخری جزو میں (مساوات 10.53 کے دو درجی تفرق سے) $\ddot{b} = -\omega^2 b$ ہو گا لہذا $t\ddot{b}$ مرکز مائل اسراع ہوگی۔

مساوات 10.55 میں زیادہ دلچسپ جزو $2\dot{b}$ ہے جس کو کوریولس اسراع⁴¹ کہتے ہیں جو قرص کے گھومنے اور قرص پر J کی حرکت کے باہمی عمل سے پیدا ہوتا ہے۔ اس کا رخ \dot{b} دیتا ہے جو قرص کے کنارے کا مماس ہے اور جو مقررہ xy کارٹیسین نظام میں گھومنے کی رخ ہوگا۔ یوں اگر کمیت m کا شخص قرص پر رداسی سمت میں چل رہا ہو تب اس پر قوت $-2m\dot{b}$ عمل کرے گا جو گھومنے کی مخالف رخ ہوگا۔ □

مثال 10.18: دو گھومتے حرکت کا خطی میل
کرہ کے نصف النہار⁴² N پر جسم J (کرہ کے لحاظ سے) مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہے جبکہ کرہ از خود مستقل زاویائی رفتار $\omega (> 0)$ سے گھوم رہا ہے (شکل 10.9)۔ J کی اسراع دریافت کریں۔

⁴¹ Coriolis acceleration
⁴² meridian

حل: N پر J کی حرکت کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں کرہ کی رداس R ہے، N پر J کی زاویائی رفتار $\gamma (> 0)$ ہے، N کی سطح میں b افقی اکائی سمتیہ ہے اور k فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیہ ہے۔

$$(10.56) \quad \mathbf{r}(t) = R \cos \gamma t \mathbf{b} + R \sin \gamma t \mathbf{k}$$

چونکہ b کرہ کے ساتھ گھومتا ہے لہذا اس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں i اور j فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیات ہیں۔

$$(10.57) \quad \mathbf{b} = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}$$

مساوات 10.56 کا تفرق لے کر سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$(10.58) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = R \cos \gamma t \dot{\mathbf{b}} - \gamma R \sin \gamma t \mathbf{b} + \gamma R \cos \gamma t \mathbf{k}$$

سمتی رفتار کا تفرق لے کر اسراع حاصل کرتے ہیں۔

$$(10.59) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = R \cos \gamma t \ddot{\mathbf{b}} - 2\gamma R \sin \gamma t \dot{\mathbf{b}} - \gamma^2 R \cos \gamma t \mathbf{b} - \gamma^2 R \sin \gamma t \mathbf{k}$$

اب مساوات 10.57 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\dot{\mathbf{b}} = -\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\ddot{\mathbf{b}} = -\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{b}$$

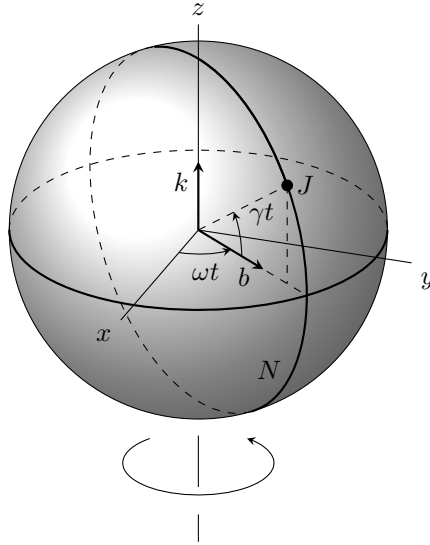
مساوات 10.56 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 10.59 کے آخری دو ارکان کا مجموعہ $-\gamma^2 \mathbf{r}$ کے برابر ہے لہذا مساوات 10.59 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.60) \quad \mathbf{a} = -\omega^2 R \cos \gamma t \mathbf{b} - 2\gamma R \sin \gamma t \dot{\mathbf{b}} - \gamma^2 \mathbf{r}$$

مساوات 10.60 کے دائیں ہاتھ پہلا جزو کرہ کے گھومنے سے پیدا مرکز مائل اسراع ہے جبکہ مساوات کا آخری جزو N پر J کے گھومنے سے پیدا مرکز مائل اسراع ہے۔ مساوات کا درمیانہ جزو کوریولس اسراع a_c ہے۔

$$(10.61) \quad a_c = -2\gamma R \sin \gamma t \dot{\mathbf{b}}$$

شمالی نیم کرہ پر $\sin \gamma t > 0$ ہے لہذا مساوات 10.61 میں منفی کی علامت کی بنا کوریولس اسراع \mathbf{b} کی مخالف رخ ہو گا یعنی کرہ کی سطح کی مماسی، N کے عمودی اور کرہ کی گردش کی مخالف رخ۔ اس کی حتمی مقدار



شکل 10.9: دو گومتے حرکت کا خطی میل (مثال 10.18)

کی قیمت شمالی قطب پر زیادہ سے زیادہ ہوگی اور ارضی خط استوا⁴⁴ پر اس کی قیمت صفر ہو گی۔ یوں شمال کی رخ اڑنے والا ایسا پرندہ جس کی کمیت m ہو پر قوت $ma - c$ کے مخالف رخ قوت ma_c عمل کرے گا جو مثال 10.17 میں محسوس کی گئی قوت کی طرح ہے۔ اس قوت کی وجہ سے پرندہ N کے دائیں جانب بھٹک جائے گا۔ اس کے برعکس ارضی خط استوا سے جنوب کی رخ اڑنے والا پرندہ، N کے بائیں جانب بھٹک جائے گا۔ یہی اثرات جہاز اور منازل⁴⁵ کے اڑنے پر بھی اثر انداز ہوتے ہیں۔ کرہ ارض پر ہوا کی حرکت پر بھی ان قوتوں کا اثر پایا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 10.83 تا سوال 10.90 میں حرکت کرتی جسم کا تعین گرمتمیہ $r(t)$ ہے جہاں $t > 0$ وقت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس راہ کی شکل بیان کریں۔ سمتیہ رفتار، رفتار اور اسراع دریافت کریں۔

equator⁴⁴
missile⁴⁵

سوال 10.83: $r = tj$
 جوابات: $v = j, |v| = 1, a = 0$

سوال 10.84: $r = t^3 j$
 جوابات: $v = 3t^2 j, |v| = 3t^2, a = 6t j$

سوال 10.85: $r = (t^2 - 3t)j$
 جوابات: $v = (2t - 3)j, |v| = |2t - 3|, a = 2j$

سوال 10.86: $r = t^2 i - tj$
 جوابات: $v = 2ti - j, |v| = \sqrt{4t^2 + 1}, a = 2i$

سوال 10.87: $r = \cos t i$
 جوابات: $v = -\sin t j, |v| = |\sin t|, a = -\cos t j$

سوال 10.88: $r = 2 \cos 5t i - 4 \sin 3t j$
 جوابات: $v = -10 \sin 5t i - 12 \cos 3t j, |v| = \sqrt{100 \sin^2 5t + 144 \cos^2 3t}$
 $a = -50 \cos 5t i + 36 \sin 3t j$

سوال 10.89: $r = 3 \cos t^2 i + 2 \sin t^2 j$
 جوابات: $v = -6t \sin t^2 i + 4t \cos t^2 j, |v| = \sqrt{36t^2 \sin^2 t^2 + 16t^2 \cos^2 t^2}$
 $a = (-6 \sin t^2 - 12t^2 \cos t^2) i + (4 \cos t^2 - 8t^2 \sin t^2) j$

سوال 10.90: $r = 5t^2 i + 3t j + t^3 k$
 جوابات: $v = 10t i + 3j + 3t^2 k, |v| = \sqrt{9t^4 + 100t^2 + 9}$
 $a = 10i + 6tk$

سوال 10.91: زمین سے چاند تک کا فاصلہ $3.85 \times 10^8 \text{ m}$ ہے اور زمین کے گرد چاند 27.322 دن یعنی $2.36 \times 10^6 \text{ s}$ میں ایک چکر پورا کرتا ہے۔ زمین کے رخ چاند کی مرکز مائل اسراع دریافت کریں۔

جواب: $|a| = 0.0027 \text{ m s}^{-2}$ جو سطح زمین پر اسراع $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ سے 3593 گنا کم ہے۔

سوال 10.92: وہ حرکت دریافت کریں جس کی اسراع مستقل قیمت ہو۔

جواب: $r(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$ جہاں a_0, v_0 اور x_0 مستقل قیمتیں ہیں۔

سوال 10.93: $\omega = \omega k$ اور $r = R \cos \omega t i + R \sin \omega t j$ لیتے ہوئے مساوات 7.55 کے تفرق سے مساوات 10.50 حاصل کریں۔

سوال 10.94: اگر ایک جسم کی حرکت $r(t)$ سے ظاہر کی جائے جہاں t وقت ہے تب $t = \phi \bar{t}$ تبادلے سے کیا مراد ہو گا؟

جواب: راہ تبدیل نہیں ہوگی البتہ راہ پر حرکت کی نوعیت تبدیل ہوگی۔

10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ

ہم متعدد متغیرات پر مبنی تفاعل کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔ ہم دو متغیرات کے تفاعل کو استعمال کرتے ہوئے نتائج حاصل کریں گے جو زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی درست ہوں گے۔

نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل $f(x, y)$ اس صورت استمراری⁴⁶ ہو گا جب اس نقطے کی پڑوس⁴⁷ میں f معین ہو اور کسی بھی مثبت عدد ϵ (جو غیر صفر اور کتنا ہی چھوٹا کیوں نا ہو) کے لئے ہم ایسا مثبت عدد σ تلاش کر سکتے ہیں کہ اس کے نقطے کی پڑوس قرص

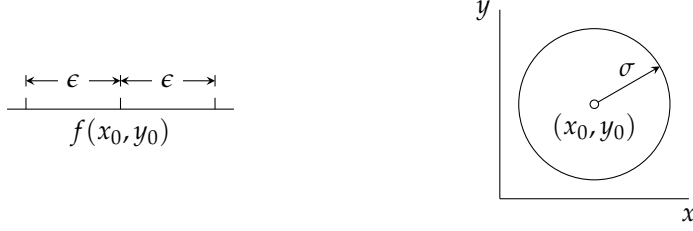
$$(10.62) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \sigma^2$$

میں تمام (x, y) پر درج ذیل ہو۔

$$(10.63) \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$

جیومیٹریائی طور پر (x_0, y_0) پر $f(x, y)$ کے استمراری ہونے سے مراد یہ ہے کہ $f(x_0, y_0)$ کو قطع 2ϵ کا وسط لیتے ہوئے ہم غیر صفر رداس σ کا ایسا قرص تلاش کر سکتے ہیں جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو اور اس قرص پر تمام (x, y) کا مطابقتی $f(x, y)$ اس قطع پر پایا جاتا ہو (شکل 10.10)۔

⁴⁶continuous
⁴⁷پڑوس سے مراد xy سطحیں قرص $r^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ ہے جہاں $r > 0$ ہے۔



شکل 10.10: دو متغیرات کے تفاعل کی استرار

ہم ابتدائی علم الاحصاء سے جانتے ہیں کہ اگر w متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور x از خود t کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جس کو تفرق کا زنجیری قاعدہ کہتے ہیں۔

$$(10.64) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}$$

درج ذیل مسئلہ تفرق کی زنجیری قاعدے کو عمومی بناتا ہے۔

مسئلہ 10.1: (زنجیری قاعدہ)

فرض کریں کہ xy سطح میں دائرہ کار⁴⁸ D میں تفاعل $w = f(x, y)$ استراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ کسی وقفہ T میں $x = x(t)$ اور $y = y(t)$ قابل تفرق تفاعل ہیں جہاں T میں ہر t کا مطابقتی نقطہ $[x(t), y(t)]$ ، دائرہ کار D میں پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں T میں تمام t کے لئے $w = f[x(t), y(t)]$ قابل تفرق ہو گا یعنی:

$$(10.65) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ثبوت: ہم T میں t پر Δt اتنا چھوٹا چنتے ہیں کہ $t + \Delta t$ بھی T کا حصہ ہو۔ مزید ہم

$$(10.66) \quad \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

اور

$$(10.67) \quad \Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

⁴⁸domain

⁴⁹دائرہ کار D جڑی ہوئے نقطوں کا کھلا سلسلہ ہے، جہاں جڑا ہونے سے مراد یہ ہے کہ D کے کسی بھی دو نقطوں کو متناہی تعداد کے ایسے سیدھے قطعات سے ملایا جاسکتا ہے جن کے تمام نقطے D کا حصہ ہوں، اور کھلا سے مراد یہ ہے کہ D میں ہر نقطے کی پڑوس کے تمام نقطے بھی D کا حصہ ہیں۔ مثلاً کسی مستطیل یا دائرے کا اندرونی حصہ دائرہ کار ہو گا۔

لیتے ہیں۔ مساوات 10.67 میں $f(x, y + \Delta y)$ جمع اور منفی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Delta w = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

درج بالا مساوات کے قوسین پر باری باری ایک متغیر کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ لاگو کرتے ہوئے

$$(10.68) \quad \Delta w = \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_1, y + \Delta y} + \Delta y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x, y_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں x اور $x + \Delta x$ کے درمیان کہیں x_1 پایا جاتا ہے، y اور $y + \Delta y$ کے درمیان کہیں y_1 پایا جاتا ہے۔ مساوات 10.68 کے دونوں اطراف کو Δt سے تقسیم کرتے اور $\Delta t \rightarrow 0$ لیتے ہوئے، اور چونکہ $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ کو استمراری تصور کیا گیا ہے، مساوات 10.66 حاصل ہوتا ہے۔

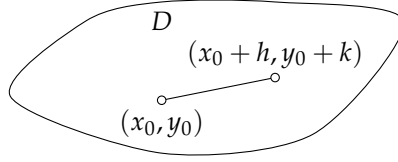
□

درج بالا مسئلے کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 10.2: فرض کریں کہ xy سطح میں دائرہ کار D پر تفاعل $w = f(x, y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ uv سطح میں کسی وقفہ B میں $x = x(u, v)$ اور $y = y(u, v)$ قابل جزوی تفرق تفاعل ہیں جہاں B میں ہر (u, v) کا مطابقتی نقطہ $[x(u, v), y(u, v)]$ ، دائرہ کار D میں پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں B میں تفاعل $w = f[x(u, v), y(u, v)]$ معین ہوگا اور B میں تمام u اور v کے لئے اس تفاعل کے جزوی تفرقات درج ذیل ہوں گے۔

$$(10.69) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

u یا v کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ 10.1 کے اطلاق سے درج بالا مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔



شکل 10.11: مسئلہ اوسط قیمت

ابتدائی علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں x_0 اور $x_0 + h$ کے درمیان موزوں نقطے پر تفرق لیا جاتا ہے۔

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \frac{df}{dx}$$

اس کو احصاء تفرقیات کا مسئلہ اوسط قیمت کہتے ہیں جس کو وسعت دے کر دو متغیرات کے تفاعل پر لاگو کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 10.3: (مسئلہ اوسط قیمت)

فرض کریں کہ دائرہ کار D میں تفاعل $f(x, y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ (x_0, y_0) اور $(x_0 + h, y_0 + k)$ دائرہ کار D میں پائے جانے والے ایسے نقطے ہیں کہ انہیں جوڑنے والا سیدھا قطع بھی D میں پائی جاتی ہو (شکل 10.11)۔ ایسی صورت میں

$$(10.70) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں جزوی تفرقات کو اس قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: درج ذیل

$$x = x_0 + th, \quad y = y_0 + tk \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

سے

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = F(1), \quad f(x_0, y_0) = F(0)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ایک متغیر تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت 0 اور 1 کے درمیان ایسی قیمت t_1 پائی جاتی ہے جس کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.71) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) = F'(t_1)$$

اب چونکہ $\frac{dx}{dt} = h$ اور $\frac{dy}{dt} = k$ ہیں لہذا مسئلہ 10.1 کے تحت

$$(10.72) \quad F' = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k$$

ہو گا جہاں دائیں ہاتھ تفرقات کو نقطہ $(x_0 + t_1h, y_0 + t_1k)$ پر حاصل کیا جائے گا جو اس قطع پر واقع ہے جس کے سر (x_0, y_0) اور $(x_0 + h, y_0 + k)$ ہیں۔ مساوات 10.72 کو مساوات 10.71 میں پر کرنے سے مساوات 10.70 حاصل ہوتا ہے۔

□

تین متغیرات کے تفاعل $f(x, y, z)$ جو مسئلہ 10.3 میں دیے گئے شرائط کے مماثل شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے بالکل اسی مسئلے کی طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.73) \quad f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + l \frac{\partial f}{\partial z}$$

جہاں جزوی تفرقات کو (x_0, y_0, z_0) تا $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 10.95 تا سوال 10.98 میں مساوات 10.65 کی مدد سے $\frac{dw}{dt}$ دریافت کریں۔

سوال 10.95: $w = x - y, \quad x = t, \quad y = \ln t$
جواب: $1 - \frac{1}{t}$

سوال 10.96: $w = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{-t}, \quad y = e^t$
جواب: $\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$

سوال 10.97: $w = \frac{x}{y}, \quad x = g(t), \quad y = ht$
جواب: $\frac{g'h - gh'}{h^2}$

سوال 10.98: $w = \frac{x}{y}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$
جواب: $-\operatorname{cosec}^2 t$

سوال 10.99: فرض کریں کہ $w = f(x, y, z)$ ہے جہاں x ، y اور z از خود t کے تفاعل ہیں۔ ثابت کریں کہ مسئلہ 10.1 کی طرز کے شرائط کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(10.74) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

سوال 10.100 اور سوال 10.101 میں مساوات 10.74 کی مدد سے $\frac{dw}{dt}$ دریافت کریں۔

سوال 10.100: $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = t^2$, $y = \ln t$, $z = e^t$
جواب: $\frac{2}{t} \ln t + 2e^{2t} + 4t^3$

سوال 10.101: $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$
جواب: $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

سوال 10.102: مسئلہ 10.2 کو ثابت کریں۔

سوال 10.103 تا سوال 10.105 میں $\frac{\partial w}{\partial u}$ اور $\frac{\partial w}{\partial v}$ دریافت کریں۔

سوال 10.103: $w = \ln(x^2 + y^2)$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$
جواب: $2, 0$

سوال 10.104: $w = xy$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$
جواب: $e^{2u} \sin 2v$, $e^{2u} \cos 2v$

سوال 10.105: $w = x^2 - y^2$, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$
جواب: $4u(u^2 - 3v^2)$, $4v(v^2 - 3u^2)$

سوال 10.106: مساوات 10.73 حاصل کریں۔

سوال 10.107: فرض کریں کہ $w = f(x, y)$ ہے جہاں $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ ہیں۔ درج ذیل ثابت کریں۔

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

جواب: درج ذیل استعمال کرتے ہوئے با آسانی ثابت ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial y} r \cos \theta\end{aligned}$$

سوال 10.108: فرض کریں کہ $w = f(v, z)$ ہے جہاں $v = x + ct$ اور $z = x - ct$ ہیں جبکہ c مستقل قیمت ہے۔ درج ذیل ثابت کریں جہاں تمام تفرقات کو ممکن تصور کریں۔ w_{xx} سے مراد $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ہے۔

$$c^2 w_{xx} - w_{tt} = 4c^2 w_{vz}$$

سوال 10.109: فرض کریں کہ $w = f(x, y)$ ہے جہاں $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ ہیں۔ درج ذیل ثابت کریں۔

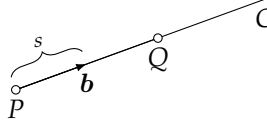
$$w_{xx} + w_{yy} = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta}$$

جواب: $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ اور $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ سے درج ذیل حاصل کرتے ہوئے ثابت ہو گا۔

$$\begin{aligned}r_x &= \frac{x}{r}, \quad \theta_x = -\frac{y}{r^2}, \quad r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \text{وغیرہ} \\ w_{xx} &= x^2 r^{-2} w_{rr} - 2xy r^{-3} w_{r\theta} + y^2 r^{-4} w_{\theta\theta} + y^2 r^{-3} w_r + 2xy r^{-4} w_\theta, \quad \text{وغیرہ}\end{aligned}$$

10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان

ہم فضا میں غیر سمتی میدان $f(P) = f(x, y, z)$ پر غور کرتے ہیں (حصہ 10.1)۔ ہم جانتے ہیں کہ x ، y اور z رخ میں تفاعل کی تبدیلی کی شرح بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہے۔ آئیں کسی بھی رخ میں تفاعل کی تبدیلی کی شرح یعنی سمتی تفرق حاصل کریں۔



شکل 10.12: سمتی تفرق

ہم فضا میں کوئی نقطہ P اور اس نقطے پر کوئی رخ چنتے ہیں۔ اس رخ کو اکائی سمتیہ b سے ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ P سے s فاصلے پر b کی رخ سیدھے خط C پر نقطہ Q پایا جاتا ہے (شکل 10.12)۔ اگر درج ذیل حد

$$(10.75) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

موجود ہو تب اس کو P پر b کی رخ f کی سمتی تفرق⁵⁰ کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ $\frac{\partial f}{\partial s}$ درحقیقت P پر b کی رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

یوں P پر f کے لامتناہی تعداد میں سمتی تفرقات پائے جاتے ہیں۔ اگر P کا تعین گر سمتیہ a ہو تب C کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.76) \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} = \mathbf{a} + s\mathbf{b} \quad (s \geq 0)$$

اور $\frac{\partial f}{\partial s}$ سے مراد C پر $f[x(s), y(s), z(s)]$ کا لمبائی s کے ساتھ تفرق ہے۔ اب اگر f کے استمراری جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں تب زنجیری قاعدے (مسئلہ 10.1) کے تحت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(10.77) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'$$

جہاں $x' = \frac{dx}{ds}$ کو $s = 0$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اب مساوات 10.76 سے

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = \mathbf{b}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو دیکھ کر خیال آتا ہے کہ سمتیہ

$$(10.78) \quad f_{\text{ڈھلوان}} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

⁵⁰directional derivative

متعارف کرنے سے مساوات 10.77 کو اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.79) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_{\text{ڈھلوان}} \quad (|\mathbf{b}| = 1)$$

سمتیہ ڈھلوان f کو غیر سمتی تفاعل f کی ڈھلوان⁵¹ کہتے ہیں۔

تفرقی عامل ∇ ⁵²

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

متعارف کرتے ہوئے مساوات 10.78 کو

$$(10.80) \quad \mathbf{f}_{\text{ڈھلوان}} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

اور مساوات 10.79 کو

$$(10.81) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot \nabla f \quad (|\mathbf{b}| = 1)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اگر \mathbf{b} کارتیسی x محور کی رخ ہو تب $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ ہو گا اور f کا سمتی تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

اسی طرح مثبت y اور مثبت z محور کی رخ سمتی تفرق بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہوں گے۔

مثال 10.19: سمتی تفرق

غیر سمتی تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^3$ کا نقطہ $P : (-2, 1, 3)$ پر $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ کی رخ سمتی تفرق دریافت کریں۔

حل: چونکہ $|\mathbf{a}| = 5$ ہے لہذا \mathbf{a} کی رخ اکائی سمتیہ $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ ہو گا۔ f کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3z^2\mathbf{k} \implies \nabla f(P) = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 27\mathbf{k}$$

⁵¹ gradient
⁵² ∇ یونانی حرف تھی ہے جو نیلا کہلاتا ہے۔

یوں نقطہ P پر a کی رخ سمتی تفرق درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot \nabla f = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot (-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 27\mathbf{k}) = -4$$

□

حاصل جواب منفی ہے جس کا مطلب ہے کہ a کی رخ f گھٹتا ہے۔

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ ∇f کی قیمت اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 10.78 سمتی تفرق دیتا ہے جو کسی دوسرے کارتیسی نظام میں درج ذیل لکھا جائے گا

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \frac{\partial f}{\partial x^*} i^* + \frac{\partial f}{\partial y^*} j^* + \frac{\partial f}{\partial z^*} k^*$$

جہاں x^* ، y^* اور z^* دوسرے نظام کے محور جبکہ i^* ، j^* اور k^* اس کے مطابقتی اکائی سمتیت ہیں۔ ان مساوات میں جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں اور یہ کہنا مشکل ہو گا کہ دونوں مساوات سے یکساں ڈھلوان حاصل ہو گا۔

اب غیر سمتی تفاعل کی تعریف کے تحت نقطہ P پر f کی قیمت کا دارومدار P پر ہے ناکہ چنے گئے کارتیسی نظام پر۔ اسی طرح C پر لمبائی s پر بھی چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں $\frac{\partial f}{\partial s}$ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ اب مساوات 10.81 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial s} = |\mathbf{b}| |\nabla f| \cos \gamma = |\nabla f| \cos \gamma$$

جہاں \mathbf{b} اور ∇f کے مابین زاویہ γ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\cos \gamma = 1$ یعنی $\gamma = 0$ پر $\frac{\partial f}{\partial s}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $|\nabla f| = \frac{\partial f}{\partial s}$ پائی جاتی ہے۔ اب چونکہ $\frac{\partial f}{\partial s}$ غیر متغیر ہے لہذا ∇f کی قیمت اور سمت پر کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ اس سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.4: ڈھلوان

ایسا غیر سمتی تفاعل $f(P) = f(x, y, z)$ جس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں کی ڈھلوان موجود ہے جس کی لمبائی اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام محدود کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ اگر نقطہ P پر f کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب P پر f کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی ڈھلوان کی رخ ہوگی۔

ڈھلوان کی دوسری جیومیٹریائی خصلت جانتے ہیں۔ فضا میں قابل تفرق غیر سمتی تفاعل $f(x, y, z)$ پر غور کرتے ہیں۔ ہر مستقل c کے لئے مساوات

$$(10.82) \quad f(x, y, z) = c = \text{مستقل}$$

سطح S کو ظاہر کرتا ہے۔ c کے تمام قیمتیں لیتے ہوئے ہمیں نسل سطح ملتا ہے جنہیں f کی ہموار سطحیں⁵³ کہتے ہیں۔ تفاعل کی تعریف کے تحت، فضا میں کسی بھی نقطے پر f کی قیمت منفرد ہوگی لہذا فضا میں ہر نقطے سے f کی صرف اور صرف ایک ہموار سطح گزرے گی۔ ہم جانتے ہیں کہ فضا میں کسی بھی منحنی C کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (حصہ 10.4)۔

$$(10.83) \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

اب اگر C کو S پر رہنے کا پابند بنایا جائے تب مساوات 10.83 میں تفاعل $x(t)$ ، $y(t)$ اور $z(t)$ کو مساوات 10.82 پر پورا اترنا ہو گا یعنی:

$$(10.84) \quad f[x(t), y(t), z(t)] = c$$

زنجیری تفرق (مسئلہ 10.1) استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.84 کا t کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$(10.85) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = (\nabla f) \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

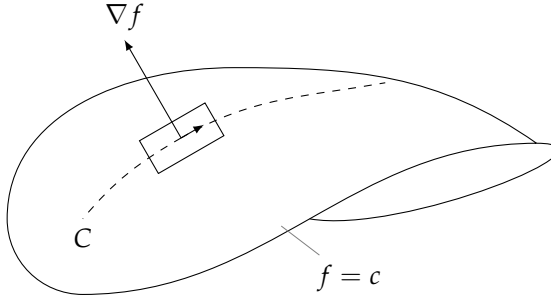
جہاں سمتیہ

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

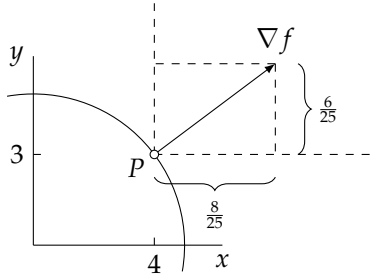
منحنی C کا مماس ہے (حصہ 10.5)۔ S پر مختلف سمتوں میں نقطہ P سے گزرتی منحنی کے مماس، P پر S کو چھوتی سطح مستوی سے گزریں گے۔ اس سطح مستوی کو P پر S کی مماسی سطح⁵⁴ کہتے ہیں۔ مماسی سطح کے عمودی، نقطہ P سے گزرتا خط، P پر S کا عمود⁵⁵ کہلاتا ہے (شکل 10.13)۔ صفحہ 506 پر مسئلہ 7.3 کی مدد سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.5: ڈھلوان اور سطح کی عمود
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D پر غیر سمتی تفاعل f معین اور قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ دائرہ

level surfaces⁵³
tangent plane⁵⁴
normal⁵⁵



شکل 10.13: ہموار سطح اور ڈھلوان



شکل 10.14: دائرے کا عمود

کار D میں P کوئی نقطہ ہے جو f کی ہموار سطح S پر پایا جاتا ہے۔ اب اگر P پر f کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب یہ ڈھلوان نقطہ P پر S کے عمودی ہو گا۔

مثال 10.20: ہموار منحنی کا عمود
تفاعل $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ کے ہموار سطحیں $f = c$ مبداء پر ہم مرکز دائرے ہیں۔ ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

کی سمت ان دائروں کے عمودی ہے جو f کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کی سمت ہے۔ مثلاً نقطہ $P : (4, 3)$ پر
□ $\nabla f = \frac{8}{25} \mathbf{i} + \frac{6}{25} \mathbf{j}$ ہے (شکل 10.14)۔

مثال 10.21: سطح کا عمود

مخروط $z^2 = 2(x^2 + y^2)$ کا نقطہ $P : (1, 0, 3)$ پر اکائی عمودی سمتیہ دریافت کریں۔ ہم مخروط کو ہموار سطح $f = 0$ تصور کر سکتے ہیں جہاں $f(x, y, z) = 2(x^2 + y^2) - z^2$ ہو گا۔ یوں

$$\nabla f = 4xi + 4yj - 2zk \implies \nabla f(P) = 4i - 6k$$

ہو گا۔ مسئلہ 10.5 سے اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ملتا ہے۔ دوسرا اکائی عمودی سمتیہ $-n$ ہو گا۔

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{4}{\sqrt{52}}i - \frac{6}{\sqrt{52}}k$$

□

طبیعیات کے میدان میں کئی ایسے سمتی تفاعل پائے جاتے ہیں جو کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سے حاصل ہوتے ہیں۔ ایسے غیر سمتی تفاعل کو مخفی تفاعل⁵⁶ کہتے ہیں۔ مخفی تفاعل کے استعمال سے سمتی تفاعل کا تجزیہ نہایت آسان ہو جاتا ہے۔ آئیں مخفی تفاعل کے استعمال کی مثال دیکھیں۔

مثال 10.22: ثقلی میدان۔ لاپلاس مساوات

ثقلی میدان پر مثال 10.4 میں غور کیا گیا جہاں درج ذیل مساوات حاصل کی گئی

(10.86)

$$\mathbf{f} = |\mathbf{f}| \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -GMm \left[\frac{x - x_0}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y - y_0}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z - z_0}{r^3} \mathbf{k} \right]$$

جہاں

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

کمیت M اور m کے درمیان فاصلہ ہے۔ یہاں غور کرنے سے

$$(10.87) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{2(x - x_0)}{2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x - x_0}{r^3}$$

$$(10.88) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{2(y - y_0)}{2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y - y_0}{r^3}$$

$$(10.89) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{2(z - z_0)}{2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{z - z_0}{r^3}$$

potential function⁵⁶

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں f کو درج ذیل غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان لکھا جاسکتا ہے

$$(10.90) \quad h(x, y, z) = \frac{GMm}{r} \quad (r > 0)$$

لہذا سمتی تفاعل f کا مخفی تفاعل h ہے۔

تفرق لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x_0)^2}{r^5}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y - y_0)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z - z_0)^2}{r^5} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہے لہذا تفاعل $h = \frac{GMm}{r}$ درج ذیل پر پورا اترتا ہے۔

$$(10.91) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

مساوات 10.91 انتہائی اہم جزوی تفرقی مساوات ہے جس کو لاپلاس مساوات⁵⁷ کہتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ کو f کا لاپلاسی⁵⁸ کہتے ہیں اور اس کو $\nabla^2 h$ یا Δh سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تفرقی عامل

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(جو مربع نیلا پڑھا جاتا ہے) کو لاپلاسی عامل⁵⁹ کہتے ہیں۔ لاپلاسی عامل استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.91 کو نہایت عمدگی سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.92) \quad \nabla^2 h = 0$$

یہ ثابت کرنا ممکن ہے کہ کمیت کی کسی بھی طرز کی تقسیم سے حاصل قوت کو ایسے سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جو کسی غیر سمتی تفاعل h کا ڈھلوان ہو گا جہاں h مساوات 10.91 پر ہر اس مقام پر پورا اترتا ہے جہاں کمیت موجود نہ ہو۔

Laplace equation⁵⁷
Laplacian⁵⁸
Laplacian operator⁵⁹

طبیعیات میں کئی قاعدے نیوٹن کے کشش ثقل کے قانون کی طرز رکھتے ہیں مثلاً فضا میں Q_1 اور Q_2 بار کی باہمی قوت درج ذیل ہے

$$f = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{r}{r^3} \quad \text{کولمب کا قانون}$$

جہاں ϵ برقی مستقل ہے۔ یوں f کو مخفی تفاعل $h = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r}$ کا ڈھلوان لکھا جاسکتا ہے جہاں $r > 0$ کی صورت میں h مساوات 10.91 پر پورا اترتا ہے۔ □

اگر غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سمتی تفاعل دیتا ہو تب ایسی میدان کو بقائی میدان⁶⁰ کہتے ہیں۔ جیسا کہ ہم حصہ 11.12 میں دیکھیں گے، بقائی میدان میں کسی بھی ذرہ کو نقطہ N_1 سے نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی صرف اور صرف N_1 اور N_2 پر منحصر ہے ناکہ اس راستے پر جو ذرہ منتقل کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہو۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر میدان بقائی نہیں ہوتا۔

سوالات

سوال 10.110 تا سوال 10.121 میں ڈھلوان ∇f دریافت کریں۔

سوال 10.110: $f = 3x + 2y + 4$
جواب: $\nabla f = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

سوال 10.111: $f = e^y \sin x$
جواب: $\nabla f = e^y (\cos x \mathbf{i} + \sin x \mathbf{j})$

سوال 10.112: $f = \ln(x^2 + y^2)$
جواب: $\nabla f = \frac{2x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$

سوال 10.113: $f = x^2 + y^2$
جواب: $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$

سوال 10.114: $f = \sin^{-1} \frac{y}{x}$
 جواب: $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \left(-\frac{y}{x} \mathbf{i} + \mathbf{j} \right)$

سوال 10.115: $f = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
 جواب: $\nabla f = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$

سوال 10.116: $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 جواب: $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$

سوال 10.117: $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$
 جواب: $\nabla f = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$

سوال 10.118: $f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
 جواب: $\nabla f = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$

سوال 10.119: $f = x^2 y z^3$
 جواب: $\nabla f = 2x y z^3 \mathbf{i} + x^2 z^3 \mathbf{j} + 3x^2 y z^2 \mathbf{k}$

سوال 10.120: $f = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$
 جواب: $\nabla f = 2 \cos(x^2 + y^2 + z^2) (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$

سوال 10.121: $f = e^{xyz}$
 جواب: $\nabla f = e^{xyz} (yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k})$

سوال 10.122 تا سوال 10.127 میں ∇f دریافت کریں۔ کئی مقامات پر ہموار سطح $f = c$ کی ڈھلوان ∇f کو تیر سے ظاہر کریں۔

سوال 10.122: $f = x - 2y$
 جواب: $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

سوال 10.123: $f = \frac{y}{x}$
 جواب: $\frac{1}{x^2} (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$

سوال 10.124: $f = \frac{x}{y}$
 جواب: $\frac{1}{y^2} (y \mathbf{i} - x \mathbf{j})$

سوال 10.125: $f = xy$
جواب: $yi + xj$

سوال 10.126: $f = x^3y^2$
جواب: $3x^2y^2i + 2x^3yj$

سوال 10.127: $f = 4x^2 + 3y^2$
جواب: $8xi + 6yj$

سوال 10.128 تا سوال 10.134 میں نقطہ $N : (x, y)$ پر مستوی منحنی کا عمودی سمتیہ کھینچیں۔

سوال 10.128: $y = x, \quad N : (2, 2)$
جواب: $i - j$

سوال 10.129: $y = x^2, \quad N : (3, 9)$
جواب: $6i - j$

سوال 10.130: $y = 2x + 7, \quad N : (-1, 5)$
جواب: $2i - j$

سوال 10.131: $y^2 = 3x + 3, \quad N : (2, 3)$
جواب: $3i - 6j$

سوال 10.132: $x^2 + y^2 = 36, \quad N : (4, 3)$
جواب: $8i + 6j$

سوال 10.133: $y^3 = x^2, \quad N : (4, 8)$
جواب: $16i - 48j$

سوال 10.134: $x^2 - y^2 = 1, \quad N : (1, 0)$
جواب: $2i$

سوال 10.135 تا سوال 10.140 میں نقطہ $N : (x, y, z)$ پر سطح کا عمودی سمتیہ دریافت کریں۔

سوال 10.135: $x + y + z = 0, \quad N : (1, 1, -2)$
جواب: $i + j + k$

سوال 10.136: $3x - y + 2z = 1, \quad N : (1, -4, 1)$
جواب: $3i - j + 2k$

سوال 10.137: $z = x^2 + y^2, \quad N : (2, 3, 13)$
جواب: $4i + 6j - k$

سوال 10.138: $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad N : (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$
جواب: $2\sqrt{3}(i + j + k)$

سوال 10.139: $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6, \quad N : (1, -1, 1)$
جواب: $4i - 6j + 2k$

سوال 10.140: $z = xy^2, \quad N : (2, 1, 2)$
جواب: $i + 4j - k$

سوال 10.141 تا سوال 10.146 ایسا f دریافت کریں کہ $v = \nabla f$ ہو۔

سوال 10.141: $v = i + j - k$
جواب: v کو دیکھ کر $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ اور $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$ لکھا جاسکتا ہے۔ $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ کا مکمل
 $f = x + c$ ہوگا جہاں c از خود y اور z پر منحصر ہو سکتا ہے۔ اسی طرح $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ سے $f = y + c'$
جبکہ $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$ سے $f = -z + c''$ ملتا ہے۔ تینوں جوابات کو اکٹھے کرتے ہوئے $f = x + y - z$
لکھا جاسکتا ہے۔

سوال 10.142: $v = xi + j + zk$
جواب: $\frac{x^2}{2} + y + \frac{z^2}{2}$

سوال 10.143: $v = 2xi + 3y^2j + k$
جواب: $x^2 + y^3 + z$

سوال 10.144: $v = yzi + xzj + xyk$
جواب: xyz

سوال 10.145: $v = \frac{2x}{x^2+y^2}i + \frac{2y}{x^2+y^2}j$
جواب: $\ln(x^2 + y^2)$

سوال 10.146: $v = e^x \cos y i - e^x \sin y j$
جواب: $e^x \cos y$

سوال 10.147: تفاعل $f = x^2 + y^2$ کا نقطہ $N : (3, 3)$ پر i ، $i + j$ ، j اور $-i + j$ کی سمت میں سمتی تفرق دریافت کریں۔

جواب: $6, 6\sqrt{2}, 6, 0$

سوال 10.148 تا سوال 10.153 میں a کی سمت میں N پر f کی سمتی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.148: $f = 3x - 2y$ ، $N : (1, 1)$ ، $a = i + j$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

سوال 10.149: $f = 2x^2 - 3y^2$ ، $N : (2, 3)$ ، $a = 3i + 2j$
جواب: $-\frac{12}{\sqrt{13}}$

سوال 10.150: $f = x^2 - y^2$ ، $N : (-1, 1)$ ، $a = -i + j$
جواب: 0

سوال 10.151: $f = \frac{y}{x}$ ، $N : (3, 2)$ ، $a = -2i - j$
جواب: $\frac{1}{9\sqrt{5}}$

سوال 10.152: $f = 3x - 2y + 4z$ ، $N : (3, 2, 1)$ ، $a = i - j - k$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

سوال 10.153: $f = x^2 + y^2 + z^2$ ، $N : (4, 0, 5)$ ، $a = -i + j - k$
جواب: $-6\sqrt{3}$

سوال 10.154: مستقل نقطہ $N : (x_0, y_0, z_0)$ سے متغیر نقطہ $Q : (x, y, z)$ تک فاصلہ r ہے۔ ثابت کریں کہ N سے Q کے رخ اکائی سمتیہ ∇r ہے۔

سوال 10.155: ثابت کریں کہ سوال 10.110 تا سوال 10.112 کے تفاعل لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

سوال 10.156 تا سوال 10.159 میں دیے گئے تمام تفرقات ممکن تصور کرتے ہوئے دیے گیا تعلق ثابت کریں۔

سوال 10.156: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

سوال 10.157: $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$

سوال 10.158: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

سوال 10.159: $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$

10.9 متبادل محدودی نظام اور متبادل ارکان سمتیات

اس حصے میں ایسے متبادلے پر غور کیا جائے گا جو ایک کارتیسی محدودی نظام کو دوسرے کارتیسی محدودی نظام پر منتقل کرتا ہے۔ ہم سمتیات کے ارکان پر ایسے متبادلے کے اثرات پر بھی غور کریں گے۔ یہ مسئلہ نظریاتی اور عملی استعمال کے اعتبار سے بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

فرض کریں کہ x, y, z اور x^*, y^*, z^* کوئی دو کارتیسی محدودی نظام ہیں۔ مزید فرض کریں کہ کسی سمتیہ v کو ان محدودی نظام میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

(10.93)

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

(10.94)

$$v = v_1^* i^* + v_2^* j^* + v_3^* k^*$$

جہاں i, j, k اور i^*, j^*, k^* بالترتیب مثبت x, y, z اور x^*, y^*, z^* رخ اکائی سمتیات ہیں۔ ہم v_1^*, v_2^*, v_3^* ارکان کو v_1, v_2, v_3 کی صورت میں لکھنا چاہتے ہیں۔ اسی طرح ہم v_1, v_2, v_3 ارکان کو v_1^*, v_2^*, v_3^* کی صورت میں لکھنا چاہتے ہیں۔

مساوات 10.93 سے درج ذیل ملتا ہے۔

(10.95)

$$i^* \cdot v = v_1 i^* \cdot i + v_2 i^* \cdot j + v_3 i^* \cdot k$$

اسی طرح مساوات 10.94 کا i^* کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

(10.96)

$$i^* \cdot v = v_1^* i^* \cdot i^* + v_2^* i^* \cdot j^* + v_3^* i^* \cdot k^*$$

اب چونکہ دائیں ہاتھ پہلا غیر سمتی ضرب اکائی کے برابر ہے جبکہ باقی دو غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہیں لہذا درج بالا کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

(10.97)

$$i^* \cdot v = v_1^*$$

مساوات 10.97 اور مساوات 10.95 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_1^* = i^* \cdot i v_1 + i^* \cdot j v_2 + i^* \cdot k v_3$$

$$v_2^* = j^* \cdot i v_1 + j^* \cdot j v_2 + j^* \cdot k v_3 \quad \text{بالکل اسی طرح}$$

$$v_3^* = k^* \cdot i v_1 + k^* \cdot j v_2 + k^* \cdot k v_3$$

یوں سمتیہ v کے کسی ایک کارتیسی نظام میں لکھے گئے ارکان کو کسی دوسرے کارتیسی نظام میں لکھے گئے ارکان کا خطی مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

اس تبادلی کو سادہ صورت میں لکھنے کی خاطر ہم

$$(10.98) \quad \begin{aligned} i^* \cdot i &= c_{11} & i^* \cdot j &= c_{12} & i^* \cdot k &= c_{13} \\ j^* \cdot i &= c_{21} & j^* \cdot j &= c_{22} & j^* \cdot k &= c_{23} \\ k^* \cdot i &= c_{31} & k^* \cdot j &= c_{32} & k^* \cdot k &= c_{33} \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتے ہیں۔

$$(10.99) \quad \begin{aligned} v_1^* &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 \\ v_2^* &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\ v_3^* &= c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3 \end{aligned}$$

علامت جمع استعمال کرتے ہوئے اس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.100) \quad v_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{kl}v_l \quad k = 1, 2, 3$$

اسی طرح الٹ تبادلی کا کلیہ

$$(10.101) \quad \begin{aligned} v_1 &= c_{11}v_1^* + c_{21}v_2^* + c_{31}v_3^* \\ v_2 &= c_{12}v_1^* + c_{22}v_2^* + c_{32}v_3^* \\ v_3 &= c_{13}v_1^* + c_{23}v_2^* + c_{33}v_3^* \end{aligned}$$

بھی حاصل کیا جاسکتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.102) \quad v_l = \sum_{m=1}^3 c_{ml}v_m^* \quad l = 1, 2, 3$$

یہاں غور کریں کہ مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 میں یکساں عددی سر c_{kl} استعمال ہوتے ہیں البتہ c_{11} ، c_{22} اور c_{33} کے علاوہ تمام عددی سر کے مقامات دونوں تبادلی میں مختلف ہیں۔

عددی سروں c_{kl} سادہ جیومیٹریائی مطلب رکھتے ہیں۔ چونکہ i اور i^* اکائی سمتیات ہیں لہذا صفحہ 505 پر مساوات 7.23 کے تحت $c_{11} = i^* \cdot i$ درحقیقت مثبت x اور مثبت x^* محور کے مابین زاویے کا کوسائن

باب 10. سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاسل

\cos ہے۔ اسی طرح $i^* \cdot j = c_{12}$ مثبت x^* اور مثبت y محور کے مابین زاویے کا کوسائن ہے۔ یہی کچھ باقی عددی سروں کے لئے بھی درست ہے۔

عددی سر c_{kl} چند اہم تعلقات پر پورا اترے ہیں جنہیں اب حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 10.102 کو مساوات 10.100 میں پر کرنے سے

$$(10.103) \quad v_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{kl} v_l = \sum_{l=1}^3 c_{kl} \sum_{m=1}^3 c_{ml} v_m^* = \sum_{m=1}^3 v_m^* \left(\sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} \right)$$

ملتا ہے جہاں $k = 1, 2, 3$ ہے۔ مثلاً $k = 1$ کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$v_1^* = v_1^* \left(\sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{1l} \right) + v_2^* \left(\sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{2l} \right) + v_3^* \left(\sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{3l} \right)$$

ہر سمتیہ $v = v_1^* i^* + v_2^* j^* + v_3^* k^*$ پر پورا اترنے کی خاطر درج بالا میں پہلا مجموعہ اکائی کے برابر ہونا ہو گا جبکہ باقی دو مجموعوں کو صفر کے برابر ہونا ہو گا۔ اسی طرح $k = 2$ اور $k = 3$ کے لئے بھی شرائط حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یوں مساوات 10.103 صرف اور صرف اس صورت ہر سمتیہ کے لئے درست ہو گا جب یہ درج ذیل شرط پر پورا اترتا ہو۔

$$(10.104) \quad \sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases}$$

اس شرط کو کرونیگر ضرب⁶¹ (کرونیگر ڈیلٹا)⁶²

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(10.105) \quad \sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} = \delta_{km} \quad (k, m = 1, 2, 3)$$

ایسے تین عدد سمتیات جن کے اجزاء درج ذیل ہوں

$$c_{11}, c_{12}, c_{13} \quad c_{21}, c_{22}, c_{23} \quad c_{31}, c_{32}, c_{33}$$

⁶¹ Kronecker delta

⁶² جرمنی کے ریاضی دان لیوپولڈ کرونیگر [1823-1891]

میں دو عدد سمتیات کا غیر سمتی ضرب مساوات 10.105 کا بائیں ہاتھ دیتا ہے۔ مزید مساوات 10.105 سے یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ یہ سمتیات اکائی قائمہ الزاویہ سمتیات ہیں۔ یوں ان کے غیر سمتی ضرب کی قیمت +1 یا -1 ہوگی یعنی:

$$(10.106) \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \mp 1$$

یہاں ثبوت دیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اگر دونوں محددی نظام دائیں ہاتھ کے نظام ہوں (یا دونوں محددی نظام بائیں ہاتھ کے نظام ہوں) تب درج بالا مقطع کی قیمت +1 ہوگی۔ اس کے برعکس اگر ایک محددی نظام دائیں ہاتھ کا نظام ہو اور دوسرا بائیں ہاتھ کا نظام ہو تب درج بالا مقطع کی قیمت -1 ہوگی۔ ہم اپنے نتیجے کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 10.6: (سمتیات کے ارکان کے تبادلے کا قاعدہ)

دو عدد کارتیسی محددی نظام میں کسی بھی سمتیہ v کے ارکان v_1, v_2, v_3 اور v_1^*, v_2^*, v_3^* کو ایک دوسرے سے مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں مساوات 10.98 عددی سر c_{kl} دیتا ہے جو مساوات 10.104 اور مساوات 10.106 پر پورا اترتے ہیں۔

ہم اب کسی ایک کارتیسی محددی نظام کا کسی دوسرے کارتیسی نظام میں تبادلے کے لئے درکار کلیات حاصل کرتے ہیں۔ اگر xyz اور $x^*y^*z^*$ کارتیسی محددی نظام کے مبدا ایک ہی نقطے پر پائے جاتے ہوں تب v کی دم کو مبدا پر رکھتے ہوئے v کو نقطہ Q کا تعین کر سکتے ہیں جہاں v کا اختتامی نقطہ Q ہے۔ اگر ان کارتیسی محددی نظام میں Q کے محدد (x, y, z) اور (x^*, y^*, z^*) ہوں تب مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 میں درج ذیل ہوگا۔

$$v_1 = x, v_2 = y, v_3 = z \quad v_1^* = x^*, v_2^* = y^*, v_3^* = z^*$$

یوں مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 کو v_1, v_2, v_3 اور v_1^*, v_2^*, v_3^* کی بجائے x, y, z اور x^*, y^*, z^* استعمال کرتے ہوئے ہم مبدا محددی نظام کے تبادلے کے باہمی تعلقات حاصل ہوتے ہیں۔

اگر محددی نظام ہم مبدا نہ ہوں تب ان کے مابین تبادلے کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ پہلے حصے میں درج بالا تبادلہ کیا جائے گا جبکہ دوسرے حصے میں مستقیم حرکت کی جائے گی۔ مستقیم حرکت میں دونوں کارتیسی نظام کے ارکان میں صرف مستقل قیمت کا فرق ہوتا ہے۔ یوں عمومی تبادلے کا درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 10.7: (کار تہیسی محدودی نظاموں کے تبادلے کا قاعدہ) کسی ایک کار تہیسی محدودی نظام xyz سے کوئی دوسرا کار تہیسی محدودی نظام $x^*y^*z^*$ درج ذیل کلیے کی مدد سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} x^* &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + b_1 \\ y^* &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + b_2 \\ z^* &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + b_3 \end{aligned} \quad (10.107)$$

جبکہ $x^*y^*z^*$ سے xyz درج ذیل کلیات کی مدد سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x^* + c_{21}y^* + c_{31}z^* + \tilde{b}_1 \\ y &= c_{12}x^* + c_{22}y^* + c_{32}z^* + \tilde{b}_2 \\ z &= c_{13}x^* + c_{23}y^* + c_{33}z^* + \tilde{b}_3 \end{aligned} \quad (10.108)$$

جہاں عددی سر c_{kl} ، مساوات 10.98 سے حاصل ہوں گے جو مساوات 10.104 اور مساوات 10.106 پر پورا اترتے ہیں جبکہ $b_1, b_2, b_3, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ مستقل قیمتیں ہیں۔

سوالات

سوال 10.160: مساوات 10.102 میں دیے گئے تمام عددی سر کی جیومیٹریائی معنی پر غور کریں۔

سوال 10.161 تا سوال 10.166 میں c_{kl} اور b_k دریافت کریں۔

سوال 10.161: ایسا مستقیم حرکت جو مبداء کو $(5, 1, -4)$ پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1, b_1 = 5, b_2 = 1, b_3 = -4$ جبکہ بقایا تمام عددی سر صفر ہیں۔

سوال 10.162: ایسا مستقیم حرکت جو $(1, 0, 3)$ کو $(3, 2, 1)$ پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1, b_1 = 2, b_2 = 2, b_3 = -2$ جبکہ بقایا تمام عددی سر صفر ہیں۔

سوال 10.163: سطح xz میں عکس۔

جواب: $c_{11} = 1, c_{22} = -1, c_{33} = 1$ جبکہ بقایا تمام مستقل سر صفر ہیں۔

سوال 10.164: سطح $y = x$ میں عکس۔

جواب: $c_{12} = 1, c_{21} = 1, c_{33} = 1$ جبکہ بقایا تمام مستقل سر صفر ہیں۔

سوال 10.165: z محور کے گرد θ زاویہ گھومنا۔

جواب:

سوال 10.166: ایسا مستوی حرکت جو مثبت x, y, z کو بالترتیب مثبت x^*, y^*, z^* پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{13} = c_{21} = c_{32} = 1$ جبکہ باقی تمام مستقل صفر ہیں۔

سوال 10.167: مساوات 10.106 کا مقطع سوال 10.161 تا سوال 10.164 میں کیا ہو گا۔

جواب: سوال 10.161 کا مقطع $+1$ ہے۔ باقی مقطع بالترتیب $-1, 0$ اور 0 ہیں۔

سوال 10.168: مساوات 10.101 حاصل کریں۔

10.10 سمتی میدان کی پھیلاؤ

فرض کریں کہ $v(x, y, z)$ قابل تفرق سمتی تفاعل ہے جس کے ارکان v_1, v_2, v_3 ہیں جہاں x, y, z فضا میں کارتیسی محدد ہیں۔ ایسی صورت میں درج ذیل تفاعل v کی پھیلاؤ⁶³ کہلاتا ہے۔

$$(10.109) \quad v_{\text{پھیلاؤ}} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

v کی پھیلاؤ کو عموماً $\nabla \cdot v$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot v &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (v_1 i + v_2 j + v_3 k) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}$$

جہاں غیر سمتی ضرب $(\frac{\partial}{\partial x})v_1$ سے مراد جزوی تفرق $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ لیا جاتا ہے (جو محض بہتر علامت نویسی کے علاوہ کوئی معنی نہیں رکھتی)۔ یاد رہے کہ ∇v سے مراد غیر سمتی پھیلاؤ v ہے جبکہ ∇f سے مراد حصہ 10.8 میں بیان کی گئی سمتی ڈھلوان f ہے۔

مثال کے طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$v = 2xyi - 5yzj + 2x^2yk \implies \nabla \cdot v = 2y - 5z$$

ہم جلد دیکھیں گے کہ پھیلاؤ اہم طبعی معنی رکھتا ہے۔ اب ظاہر ہے کہ ایسے تفاعل کی قیمت جو طبعی یا جیومیٹریائی معنی رکھتی ہو پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے، یعنی ایسی قیمت محدودی نظام بدلنے سے تبدیل نہیں ہوتی۔

مسئلہ 10.8: (محدودی نظام کے لحاظ سے پھیلاؤ کی عدم تغیر)

پھیلاؤ $\nabla \cdot v$ کی قیمت صرف فضا میں نقطے (اور v) پر منحصر ہے جبکہ چنے گئے محدودی نظام کا مساوات 10.109 میں دی گئی پھیلاؤ کی قیمت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں کسی دوسرے کارتیسی محدود x^* ، y^* ، z^* اور v کے مطابقتی ارکان v_1^* ، v_2^* ، v_3^* کی صورت میں $\nabla \cdot v$ درج ذیل ہو گا۔

$$(10.110) \quad \nabla \cdot v = \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial z^*}$$

ثبوت: ہم مساوات 10.110 کو مساوات 10.109 سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل استعمال کرتے ہوئے

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad \text{اور} \quad x_1^* = x^*, \quad x_2^* = y^*, \quad x_3^* = z^*$$

10.107 مساوات کو مجموعے کی علامت کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$(10.111) \quad x_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{kl} x_l + b_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

حصہ 10.7 میں دی گئی متعدد متغیرات پر مبنی، تفاعل کے زنجیری قاعدے کے تحت

$$(10.112) \quad \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} \frac{\partial x_k^*}{\partial x_l}$$

ہو گا۔ اس مجموعے میں مساوات 10.111 کے تحت $\frac{\partial x_k^*}{\partial x_l} = c_{kl}$ ہو گا۔ مساوات 10.102 کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$v_l = \sum_{m=1}^3 c_{ml} v_m^*$$

جس کے تفرق

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = \sum_{m=1}^3 c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}$$

کو مساوات 10.112 میں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} c_{kl} \quad (l = 1, 2, 3)$$

درج بالا میں باری باری $l = 1, 2, 3$ پر کرتے ہوئے حاصل تین تفاعل کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}$$

جو مساوات 10.105 کی بنا گھٹ کر درج ذیل دیگا۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

$$(10.113) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \delta_{km} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*}$$

□

اگر $f(x, y, z)$ دو مرتبہ قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

ہو گا لہذا مساوات 10.109 کے تحت

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ہو گا جس کا دایاں ہاتھ، حصہ 10.8 میں دیا گیا، f کا لاپلاس ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \quad (10.114)$$

مثال 10.23: کشش ثقل

ثقلی میدان پر مثال 10.22 میں غور کیا گیا۔ ثقلی قوت f غیر سمتی تفاعل $h(x, y, z) = \frac{GMm}{r}$ کی ڈھلوان ہے جو لاپلاس کی مساوات $\nabla^2 h = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ یوں مساوات 10.114 کے تحت $\nabla \cdot f = 0$ ہو گا (جہاں $r > 0$ ہے)۔ □

درج ذیل مثال ماقوا حرکیات⁶⁴ سے لی گئی ہے۔ یہ مثال پھیلاؤ کی طبعی اہمیت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 10.24: داب پذیر سیال کی حرکت

ہم ایسے خطہ R میں سیال⁶⁵ کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس میں ناسیال داخل ہوتا اور ناہی خطے سے سیال کی نکاسی ہوتی ہو۔ مائع اور گیس دونوں کو سیال تصور کیا جاتا ہے۔ مائع کی داب پذیری انتہائی کم ہوتی ہے جس کو عموماً نظر انداز کیا جاسکتا ہے البتہ گیس کی داب پذیری کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا ہے۔ یوں گیس کی کثافت ρ (یعنی کثیت فی اکائی حجم) کا دارومدار فضا میں x ، y ، z (اور ممکن ہے کہ وقت) پر ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمارا سیال داب پذیر ہے۔

ہم ایسے مستطیلی متوازی السطوح⁶⁶ W میں سیال کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس کے اطراف کی لمبائیاں Δx ، Δy ، Δz ہیں۔ W کے کنارے محدودی محور کے متوازی ہیں (شکل 10.15)۔ یوں W کا حجم $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ہو گا۔ اب فرض کریں کہ سمتی رفتار سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} \quad (10.115)$$

hydrodynamics⁶⁴

fluid⁶⁵

rectangular parallelepiped⁶⁶

ہم درج ذیل لکھ کر آگے بڑھتے ہیں

$$(10.116) \quad \mathbf{u} = \rho \mathbf{v} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

اور فرض کرتے ہیں کہ \mathbf{u} اور \mathbf{v} سمتیات x ، y اور z کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ آئیں W کی سطحوں پر سیال کی حرکت سے W میں سیال کی کمیت کی تبدیلی کی شرح پر غور کرتے ہیں۔ کسی بھی سطح پر اندر جانب حرکت سے کمیت بڑھے گی جبکہ باہر جانب حرکت سے کمیت گھٹے گی۔ ہم W سے اکائی وقت میں کمیت کی اخراج حاصل کرتے ہیں۔ W کی بائیں ہاتھ سطح جس کا رقبہ $\Delta x \Delta z$ ہے پر نظر رکھیں۔ v کے ارکان v_1 اور v_3 اس سطح کے متوازی ہیں لہذا ان کا اخراج پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں بائیں ہاتھ سطح سے چھوٹے وقفہ Δt میں کمیت کا دخول

$$(\rho v_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t = (u_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں y بائیں ہاتھ سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اسی دورانیے میں دائیں ہاتھ سطح سے کمیت کا اخراج تقریباً

$$(u_2)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں $y + \Delta y$ دائیں ہاتھ سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ ان کا فرق

$$\Delta u_2 \Delta x \Delta z \Delta t = \frac{\Delta u_2}{\Delta y} \Delta V \Delta t \quad [\Delta u_2 = (u_2)_{y+\Delta y} - (u_2)_y]$$

تقریباً کل اخراج ہو گا۔ W کے باقی جڑواں سطحوں سے بالکل اسی طرح اخراج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں تمام سطحوں سے کل اخراج تقریباً

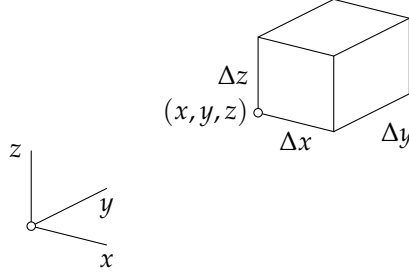
$$(10.117) \quad \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z} \right) \Delta V \Delta t$$

ہو گا جہاں

$$\Delta u_1 = (u_1)_{x+\Delta x} - (u_1)_x \quad \text{اور} \quad \Delta u_3 = (u_3)_{z+\Delta z} - (u_3)_z$$

ہیں۔ وقت کے ساتھ W میں کثافت کی تبدیلی کی شرح کی بنا درج بالا اخراج ممکن ہو گا لہذا کل اخراج تقریباً

$$(10.118) \quad -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V \Delta t$$



شکل 10.15: مستطیلی متوازی السطوح (مثال 10.24)

ہو گا جہاں منفی کی علامت کثافت کے گھٹنے کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 10.117 اور مساوات 10.118 کو آپس میں برابر پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $\Delta V \Delta t$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

یا

$$(10.119) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو داب پذیر سیال کے حرکت کی استمراری مساوات⁶⁷ کہتے ہیں۔

وقت کے ساتھ نا تبدیل ہونے والے حرکت، جسے برقرار حرکت کہتے ہیں، کی صورت میں $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو گا لہذا ایسی صورت میں استمراری مساوات درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$(10.120) \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

غیر داب پذیر سیال کی صورت میں کثافت ρ مستقل قیمت ہو گی اور برقرار حرکت کی استمراری مساوات

$$(10.121) \quad \nabla \cdot (\mathbf{v}) = 0$$

ہو گی جو غیر داب پذیری کا شرط کہلاتا ہے جس کے تحت کمیت کا دخول ہر لمحے کمیت کے اخراج کے برابر ہو گا۔

□

سوالات

سوال 10.169 تا سوال 10.176 میں پھیلاؤ دریافت کریں۔

سوال 10.169: $xi + yj + zk$
جواب: 3

سوال 10.170: $x^2i + y^2j + z^2k$
جواب: $2x + 2y + 2z$

سوال 10.171: $3x^2i - 5y^2j + z^2k$
جواب: $6x - 10y + 2z$

سوال 10.172: $x^2yz^3(i + j + k)$
جواب: $2xyz^3 + x^2z^3 + 3x^2yz^2$

سوال 10.173: $2xi - yj - zk$
جواب: 0

سوال 10.174: $yz i + xz j + xy k$
جواب: 0

سوال 10.175: $\tan \frac{y}{z} i + yj + z^2k$
جواب: $1 + 2z$

سوال 10.176: $\frac{xi+yj+zk}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
جواب: 0

سوال 10.177 تا سوال 10.180 میں دیے گئے تعلق ثابت کریں۔

سوال 10.177: $\nabla \cdot (kv) = k \nabla \cdot v$ جہاں k مستقل ہے۔

سوال 10.178: $\nabla \cdot (fv) = f \nabla \cdot v + v \cdot \nabla f$ جہاں f تفاعل ہے۔

سوال 10.179: $\nabla \cdot (f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$ جہاں f اور g تفاعل ہیں۔

سوال 10.180: $\nabla \cdot (f \nabla g) - \nabla \cdot (g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$ جہاں f اور g تفاعل ہیں۔

سوال 10.181: ثابت کریں کہ استمراری مساوات 10.119 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

سوال 10.182 اور سوال 10.183 میں پھیلاؤ دریافت کریں۔ سوال 10.178 میں دیا گیا کلیہ استعمال کریں۔

سوال 10.182: $e^x (\sin yj + \cos yj)$ جواب: 0

سوال 10.183: $\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ جواب: 0

سوال 10.184: سیال کے ایسے حرکت پر غور کریں جس کا $\mathbf{v} = y\mathbf{i}$ ہے۔ اس کے درج ذیل خواص ثابت کریں۔
سیال کا بہاؤ غیر داب پذیر ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر وہ ذرات جو ایسے مکعب میں موجود ہوں جس کے اطراف $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ ، $z = 0$ ، $z = 1$ ہوں، کا حجم لمحہ $t = 1$ پر اکائی ہو گا۔

سوال 10.185: سیال کے ایسے حرکت پر غور کرتے ہیں جس کی حرکت $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$ ہو۔ ثابت کریں کہ انفرادی ذرے کا تعین گر سمتیہ $\mathbf{r}(t) = c_1 e^t \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$ ہو گا جہاں c_1 ، c_2 ، c_3 مستقل ہیں۔ ثابت کریں کہ سیال کی بہاؤ داب پذیر ہے۔ ثابت کریں کہ لمحہ $t = 0$ پر وہ ذرات جو ایسے مکعب میں موجود ہوں جس کے اطراف $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ ، $z = 0$ ، $z = 1$ ہوں، کا حجم لمحہ $t = 1$ پر e ہو گا۔

سوال 10.186: نقطہ $N : (4, 2, 4)$ پر کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ کے باہر رخ عمود کی سمت میں تفاعل $\mathbf{u} = x^4 \mathbf{i} + y^4 \mathbf{j} + z^4 \mathbf{k}$ کے پھیلاؤ کا سمتی تفرق دریافت کریں۔

جواب: 272

سوال 10.187: نقطہ $N : (4, 2, 4)$ پر کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ کے باہر رخ عمود کی سمت میں تفاعل $\mathbf{u} = xz\mathbf{i} + yx\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ کے پھیلاؤ کا سمتی تفرق دریافت کریں۔

جواب: $\frac{5}{3}$

10.11 سمتی تفاعل کی گردش

فرض کریں کہ فضا میں x ، y ، z دائیں ہاتھ کارتیسی نظام محدود ہے اور

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

قابل تفرق سمتیہ ہے۔ ایسی صورت میں درج ذیل تفاعل کو سمتیہ \mathbf{v} کی گردش⁶⁸ کہتے ہیں۔

$$(10.122) \quad \mathbf{v}_{\text{گردش}} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں درج بالا مساوات کے ساتھ منفی کی علامت ہو گی۔

مسئلہ 10.9: گردش کی عدم تغیر

گردش کی لمبائی اور سمت پر چنے گئے محدودی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

گردش کے تصور کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے کرتے ہیں۔

مثال 10.25: ٹھوس جسم کا گھومنا

ہم صفحہ 527 پر مثال 7.13 میں دیکھ چکے ہیں کہ مستحکم محور کے گرد ٹھوس جسم کے گھومنے کو محور کی رخ سمتیہ ω سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جس کی مقدار ω ہے۔ ہم $\omega (> 0)$ کو زاویائی رفتار کہتے ہیں۔ ω محور کی اس رخ ہو گا جس کی سمت میں دیکھتے ہوئے جسم کی حرکت گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی سمت میں نظر آتی ہے۔ مساوات 7.55 کے تحت ٹھوس جسم پر نقطہ N کی سمتی رفتار

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

ہو گی جہاں ٹھوس جسم پر نقطہ N کا تعین گر سمتیہ r ہے اور محدود کا مبداء گھومنے کے محور پر پایا جاتا ہے۔ ہم دائیں ہاتھ کارتیسی نظام یوں چنتے ہیں کہ $\omega = \omega k$ لکھا جاسکتا ہو یعنی گھومنے کا محور مثبت z کی رخ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (مثال 10.3 دیکھیں)

$$v = \omega \times r = -\omega y i + \omega x j$$

لہذا

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega k$$

یعنی

$$(10.123) \quad \nabla \times v = 2\omega$$

ہو گا۔ یوں ٹھوس جسم کے گھومنے کی صورت میں سمتی رفتار کی گردش، گھومنے کی محور کے رخ ہو گا جبکہ اس کی مقدار زاویائی رفتار کی دگنا ہو گی۔

□

یہاں غور کریں کہ یہ نتیجہ چنے گئے کارتیسی نظام پر منحصر نہیں ہے۔

کسی بھی دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل f کے لئے درج ذیل ہو گا

$$(10.124) \quad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

جس کو با آسانی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر کوئی سمتیہ کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان ہو تب اس کی گردش صفر کے برابر ہو گی۔ چونکہ گردش گھومنے کو ظاہر کرتی ہے لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ڈھلوان میدان غیر گردش ⁶⁹ حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔ (ایسا کوئی بھی میدان، جو سمتی رفتار کا میدان نہ ہو، کو بقائی میدان ⁷⁰ (حصہ 10.8 کا آخر دیکھیں) کہتے ہیں۔)

مثال 10.26: ثقلی میدان جس پر مثال 10.22 میں غور کیا گیا کا $\nabla \times f = 0$ ہے جو غیر گردش میدان ہے۔
مثال 10.25 کا میدان غیر گردش نہیں ہے۔

□

سوالات

سوال 10.188 تا سوال 10.193 میں دائیں ہاتھ کا تیزی نظام کے لحاظ سے v کی گردش دریافت کریں۔

سوال 10.188: $v = yj - xj$
جواب: $-2k$

سوال 10.189: $v = yi + zj + xk$
جواب: $-i - j - k$

سوال 10.190: $v = x^2i + y^2j + z^2k$
جواب: 0

سوال 10.191: $v = y^2i + z^2j + x^2k$
جواب: $-2zi - 2xj - 2yk$

سوال 10.192: $v = yzi + xzj + xyk$
جواب: 0

سوال 10.193: $v = \frac{xi+yj+zk}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
جواب: 0

سوال 10.194 تا سوال 10.195 میں سمتیہ حرکت v دیا گیا ہے۔ کیا سیال داب پذیر ہے؟ ذرات کی راہ دریافت کریں۔

سوال 10.194: $v = xi + yj$
جواب: $\nabla \times v = 0$ ہے۔ چونکہ $\nabla \cdot v = 2$ ہے لہذا سیال داب پذیر ہے۔ $r = c_1e^ti + c_2e^tj + c_3k$

سوال 10.195: $v = y^3i$
جواب: $\nabla \times v = -3y^2k$ ہے۔ چونکہ $\nabla \cdot v = 0$ ہے لہذا سیال غیر داب پذیر ہے۔

سوال 10.196 تا سوال 10.201 میں دیے گئے تعلق ثابت کریں۔ فرض کریں کہ تفاعل درکار حد تک قابل تفرق ہے۔

سوال 10.196: $\nabla \times (u + v) = \nabla \times u + \nabla \times v$

$$\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0 \quad \text{سوال 10.197}$$

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f \nabla \times v \quad \text{سوال 10.198}$$

$$\nabla \times (\nabla v) = 0 \quad \text{سوال 10.199}$$

$$\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot \nabla \times u - u \cdot \nabla \times v \quad \text{سوال 10.200}$$

$$\nabla \cdot (g \nabla f \times f \nabla g) = 0 \quad \text{سوال 10.201}$$

سوال 10.202 اور سوال 10.203 میں $u = yi + zj + xk$ اور $v = xyi + yzj + xzk$ لیتے ہوئے
دائیں ہاتھ کارتیسی نظام کے لحاظ سے حل کریں۔

$$\begin{aligned} \nabla \times (u \times v), \quad \nabla \cdot (u \times v) \quad & \text{سوال 10.202} \\ \text{جوابات: } \nabla \times (u \times v) = (-2yz - xz + xy)i + (yz + 2xz - xy)j + (-yz + xz + 2xy)k \\ \nabla \cdot (u \times v) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \times \nabla \times v, \quad v \times \nabla \times u \quad & \text{سوال 10.203} \\ \text{جوابات: } u \times \nabla \times v = 0, \quad v \times \nabla \times u = (xz - yz)i + (xy - xz)j + (yz - xy)k \end{aligned}$$

باب 11

سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے

تکمل سے آپ بخوبی واقف ہیں جس کو سمتی تکملی علم الاحصاء¹ وسعت دیتا ہے۔ یوں منحنی پر تکمل، جسے خطی تکمل² کہتے ہیں، سطح پر تکمل جسے سطحی تکمل³ کہتے ہیں اور حجم پر تکمل جسے حجمی تکمل⁴ کہتے ہیں، حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مزید ایک قسم کی تکمل کا دوسری قسم کی تکمل میں تبادلہ کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے بعض اوقات نسبتاً آسان تکمل حاصل ہوتا ہے۔ یوں سطح میں مسئلہ گرین⁵ کی مدد سے خطی تکمل کو دو درجی تکمل میں یا دو درجی تکمل کو خطی تکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ گاوسی مسئلہ ارتکاز⁶ کی مدد سے حجمی تکمل کو سطحی تکمل یا سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ مسئلہ سٹوکس⁷ کی مدد سے تین درجی تکمل کو خطی تکمل یا خطی تکمل کو تین درجی تکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

سمتی تکملی الاحصاء کا انجینئری، طبیعیات، ٹھوس میکانیات، سیالی میکانیات اور دیگر میدان میں اہم کردار پایا جاتا ہے۔

vector calculus¹

line integral²

surface integral³

volume integral⁴

Green's theorem⁵

Gauss's convergence theorem⁶

Stoke's theorem⁷

11.1 خطی تکمیل

درج ذیل تفاعل f کی x محور پر $x = a$ تا $x = b$ قطعی تکمیل ہے

$$(11.1) \quad \int_a^b f(x) dx$$

جہاں وقفہ a اور b کے درمیان ہر نقطے پر f معین ہے۔ خطی تکمیل میں f کا تکمیل سطح میں (یا فضا میں) منحنی C پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں C کے ہر نقطے پر f معین ہے۔

خطی تکمیل کی تعریف عین قطعی تکمیل کی تعریف کی مانند ہے۔ خطی تکمیل کچھ یوں ہے۔

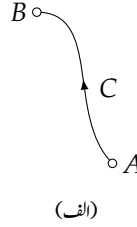
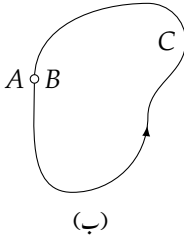
ہم فضا میں منحنی C لیتے ہیں اور اس پر ایک رخ کو مثبت سمت کہتے ہیں۔ یوں منحنی پر الٹ چلتے ہوئے منفی سمت حاصل ہوگی۔ مثبت سمت میں چلتے ہوئے منحنی پر ابتدائی نقطے کو A اور اختتامی نقطے کو B کہتے ہیں۔ جیسا شکل 11.1-ب میں دکھایا گیا ہے ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ ہم مقام ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں C بند راہ کہلاتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ C سادہ منحنی (حصہ 10.3) ہے جس کو

$$(11.2) \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad (a \leq s \leq b)$$

ظاہر کرتی ہے [جہاں s منحنی کی لمبائی قوس ہے (حصہ 10.4)] اور پورے C پر $\mathbf{r}(s)$ استمراری ہے جس کا (پورے C پر) تفرق \mathbf{r}' موجود ہے اور یہ تفرق غیر صفر سمتیہ ہے۔ اس طرح C بھوار منحنی⁸ کہلائے گی یعنی C کے ہر نقطے پر C کا منفرد مماس پایا جاتا ہے اور منحنی پر چلنے سے مماس کی سمت میں تبدیلی استمراری ہوتی ہے۔

فرض کریں کہ $f(x, y, z)$ متغیر s کا ایسا استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کے ہر نقطے پر معین ہے۔ ہم C کو بے قاعدہ طریقے سے n عدد ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.2)۔ یوں ہر ٹکڑے کی لمبائی مختلف ہو سکتی ہے۔ ہم ابتدائی سر سے شروع کرتے ہوئے ان ٹکڑوں کے سروں کو $P_0 (= A)$ ، P_1 ، P_2 ، ...، $P_n (= B)$ سے اور s کی مطابقتی قیمتوں کو

$$s_0 (= a) < s_1 < s_2 < \dots < s_n (= b)$$



شکل 11.1: سمت بند منحنی

سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم ہر ٹکڑے پر بے قاعدگی سے کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً P_0 اور P_1 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_1 چنتے ہیں، P_1 اور P_2 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_2 چنتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ یوں ہر ٹکڑے پر نقطہ باقی ٹکڑوں پر نقطوں سے ضروری نہیں کہ کوئی مشابہت رکھتا ہو۔ ان نقطوں پر f کی قیمتوں کو لیتے ہوئے ہم مجموعہ

$$(11.3) \quad J_n = \sum_{m=1}^n f(x_m, y_m, z_m) \Delta s_m$$

لیتے ہیں جہاں x_m, y_m, z_m نقطہ Q_m کے محدد ہیں اور Δs_m اس ٹکڑے کی لمبائی ہے جس پر Q_m واقع ہے۔

$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}$$

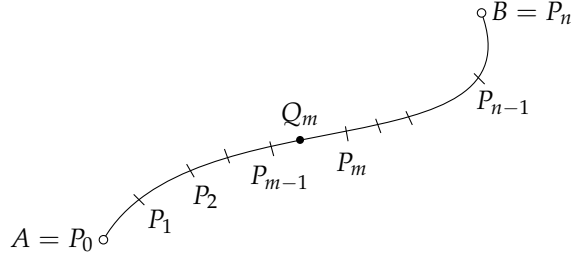
ہم اس طرح کے مجموعے مکمل بے قاعدگی سے $n = 2, 3, \dots$ کے لئے یوں حاصل کرتے ہیں کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی تک پہنچے، Δs کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں مجموعوں کا تسلسل J_2, J_3, \dots ملتا ہے۔ اس تسلسل کی حد کو C پر A تا B تفاعل f کی خطی تکمیل⁹ کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z) ds$$

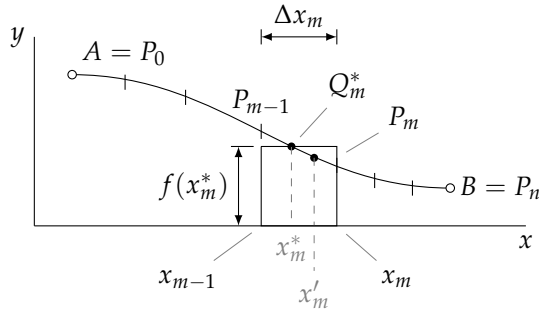
منحنی C کو تکمیل کی راہ کہتے ہیں جبکہ $f(x, y, z)$ کو متکمل¹⁰ کہتے ہیں۔

چونکہ f کو استمراری فرض کیا گیا اور C ہموار ہے لہذا یہ حد موجود ہو گا جس کی قیمت پر ٹکڑوں کی چنناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کی چنناؤ کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ C پر کسی بھی نقطہ P کا تعین لمبائی قوس s سے کیا جاتا ہے۔ یوں

line integral⁹
integrand¹⁰



شکل 11.2: C کی ٹکڑوں میں تقسیم



شکل 11.3: رقبہ اور عمل (مثال 11.1)

A اور B کا تعین مطابقتی $s = a$ اور $s = b$ سے کیا جائے گا لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(11.4) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds$$

جو قطعی تکمیل ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمیل بھی تسلسل J_2, J_3, \dots کی حد کو کہتے ہیں جس کی قیمت پر نا تو ٹکڑوں کی تقسیم اور نا ہی ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر پایا جاتا ہے۔ مثال 11.1 میں مزید تفصیل دی گئی ہے۔

مثال 11.1: تکمیل کی قیمت پر ٹکڑوں کی چنناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کے چنناؤ کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے
 آئیں دیکھتے ہیں کہ تکمیل کی قیمت پر راہ کی ٹکڑوں میں تقسیم اور ان ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر کیوں نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 11.3 میں تفاعل $y = f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ ان نقطوں کے درمیان تفاعل کو بے قاعدہ ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ وقفہ P_{m-1} تا P_m کے مابین تفاعل

کے نیچے چھوٹا رقبہ ΔS_m ہے۔ شکل 11.3 میں ایک مستطیل دکھایا گیا ہے جو نقطہ Q_m^* سے گزرتا ہے۔ Q_m^* یوں چنا گیا ہے کہ مستطیل کا رقبہ عین ΔS_m کے برابر ہو۔

$$\Delta S_m = f(x_m^*)\Delta x_m \quad (\Delta x_m = x_m - x_{m-1})$$

اس وقفے پر بغیر کسی قاعدہ دوسرا نقطہ Q_m بھی چنا گیا ہے۔ اس نقطے سے گزرتی مستطیل کا رقبہ $f(x'_m)\Delta x_m$ ہو گا جہاں Q_m کا x محدود x'_m ہے۔

اب استمراری تفاعل سے مراد یہ ہے کہ ہم کسی بھی نقطہ پر Δx اتنی کم لے سکتے ہیں کہ Δx وقفے پر تفاعل میں کل تبدیلی زیادہ سے زیادہ ϵ ہو جہاں ϵ جتنی بھی چھوٹی قیمت کیوں نہ ہو۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$|f(x'_m) - f(x_m^*)| \leq \epsilon$$

جس کو

$$f(x'_m) = f_m^* + t\epsilon \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں t ایسا متغیر ہے جس کی قیمت منفی اکائی سے مثبت اکائی تک ممکن ہے۔ یوں Q'_m سے گزرتی مستطیل کا رقبہ

$$f(x'_m)\Delta x_m = (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m$$

ہو گا۔ یہ رقبہ اس صورت کم سے کم ہو گا جب $t = -1$ ہو اور اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $t = 1$ ہو۔ ان دونوں صورتوں میں مستطیل کا رقبہ اصل تفاعل کے نیچے رقبے سے مختلف ہو گا۔ تمام ٹکڑوں پر بے قاعدگی سے نقطے چنتے ہوئے تمام مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^n (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{m=1}^n f_m^*\Delta x_m + \epsilon \sum_{m=1}^n t\Delta x_m$$

اب چونکہ $|t| \leq 1$ ہے لہذا دائیں جانب مجموعے کے اندر قیمت کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت $t = 1$ پر حاصل ہو گی۔ (حقیقت میں چونکہ ضروری نہیں ہے کہ t کی قیمت ہر مرتبہ اکائی ہی ہو لہذا اس مجموعے کی قیمت $b - a$ سے کم ہو گی۔) اب چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں لہذا ہم اسے اتنا کم رکھتے ہیں کہ $\epsilon(b - a)$ قابل نظر انداز ہو۔ درج بالا میں پہلا مجموعہ ان مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ ہے جن کا رقبہ عین تفاعل کے نیچے رقبے کے برابر رکھا گیا تھا لہذا Δx_m کی ہر قیمت پر یہ مجموعہ اصل رقبے کے برابر ہی ہو گا۔ یوں درج بالا سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{m=1}^n (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{i=m}^n f_m^*\Delta x_m$$

جو $x = a$ تا $x = b$ تقابل کے نیچے کل رقبہ ہے۔

یوں آپ نے دیکھا کہ ہر ٹکڑے پر Q_m بالکل بے قاعدگی سے چلتے ہوئے تقابل کے نیچے اصل رقبہ حاصل ہوتا ہے۔ □

عمومی مفروضہ

اس کتاب میں فرض کیا جائے گا کہ خطی تکمل کی ہر راہ ٹکڑوں میں بھوار¹¹ ہے، یعنی کہ راہ کو محدود تعداد کی بھوار ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

بدن راہ پر خطی تکمل کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\oint_C \quad \left(\int_C \text{ کی جگہ} \right)$$

خطی تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے کہ قطعی تکمل کی درج ذیل جانی پہچانی خصوصیات خطی تکمل کے لئے بھی درست ہیں

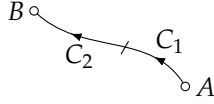
$$(الف) \quad \int_C k f \, ds = k \int_C f \, ds \quad (k \text{ مستقل})$$

$$(11.5) \quad (ب) \quad \int_C (f + g) \, ds = \int_C f \, ds + \int_C g \, ds$$

$$(پ) \quad \int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds$$

جہاں مساوات 11.5-پ میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ان ٹکڑوں کی سمت بندی عین C کی طرح ہے (شکل 11.4)۔ راہ پر تکمل لیتے ہوئے دائری سمت تبدیل کرنے سے حاصل قیمت 1- سے ضرب ہوگی۔

¹¹ piecewise smooth



شکل 11.4: تکمل کی راہ کو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

11.2 خطی تکمل کا حل

خطی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے اس کو حل کیا جاتا ہے۔ ایسا تکمل کی راہ C کی روپ کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ آئیں اس عمل کو دیکھتے ہیں۔

اگر C کی روپ

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad a \leq s \leq b$$

ہو (جہاں s راہ C کی لمبائی قوس ہے) تب ہم مساوات 11.4 کی مدد سے درج ذیل استعمال کرتے ہیں۔

$$(11.6) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds$$

اگر C کی روپ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

ہو (جہاں t کوئی مقدار معلوم ہے) تب ہم

$$(11.7) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} dt$$

استعمال کرتے ہیں جہاں مساوات 10.31 سے

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

ہے اور گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی فرض کیا گیا ہے کہ $\mathbf{r}(t)$ اور $\dot{\mathbf{r}}(t)$ دونوں استمراری ہیں اور $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ ہے۔

آئیں مساوات 11.7 حاصل کرتے ہیں۔ ہم r کی جگہ

$$\tilde{r}(t) = \tilde{x}(t)i + \tilde{y}(t)j + \tilde{z}(t)k$$

لکھ کر قوس لمبائی $s(t)$ حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد $r(s(t)) = \tilde{r}(t)$ یعنی $x(s(t)) = \tilde{x}(t)$ ،
وغیرہ لکھ کر مساوات 11.6 کے دائیں ہاتھ میں قطعی مکمل کے قاعدے کے تحت

$$\int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds = \int_{t_0}^{t_1} f[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)] \frac{ds}{dt} dt$$

حاصل کرتے ہیں جو (استعمال کی گئی علامتوں میں تبدیل کے علاوہ) عین مساوات 11.7 ہے۔

چونکہ عموماً $r(t)$ معلوم یا قابل معلوم ہو گا لہذا مساوات 11.7 عملی مسائل کی تقریباً تمام صورتوں کو حل کر پاتا ہے۔

مثال 11.2: برائے مساوات 11.6
تفاعل $f(x, y) = x^3y$ کا شکل 11.5 میں دکھائی گئی گول قوس

$$r(s) = \cos s i + \sin s j \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$$

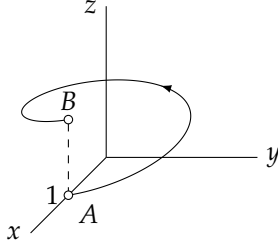
پر مکمل حاصل کریں۔

حل: چونکہ $x(s) = \cos s$ اور $y(s) = \sin s$ ہیں لہذا مساوات 11.5 سے درج ذیل ملتا ہے۔

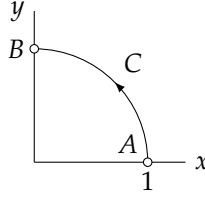
$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \int_C x^3y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 s \sin s ds \\ &= \int_1^0 -u^3 du = \frac{1}{4} \quad (u = \sin s) \end{aligned}$$

□

مثال 11.3: برائے مساوات 11.7
 xy مستوی میں نقطہ $A : (-1, 1, 0)$ سے نقطہ $B : (1, 5, 0)$ تک راہ $y = 2x + 3$ پر $\int_C x^2y ds$ کی قیمت دریافت کریں۔



(ب) فضائیں خطی مکمل کی راہ (مثال 11.4)



(الف) سطح میں مکمل کی راہ (مثال 11.2)

شکل 11.5: سطح میں راہ اور فضائیں راہ۔

حل: ہم C کو درج ذیل مقدار معلوم روپ¹² میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t + 3)\mathbf{j} \quad -1 \leq t \leq 1$$

یوں

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{5}$$

ہو گا۔ راہ پر رہتے ہوئے $x^2y = t^2(2t + 3) = 2t^3 + 3t^2$ ہو گا لہذا مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C x^2y \, ds = \sqrt{5} \int_{-1}^1 (2t^3 + 3t^2) \, dt = 2\sqrt{5}$$

□

مثال 11.4: فضا میں راہ پر خطی مکمل

پتچ دار راہ کو شکل 11.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, ds$ دریافت کریں۔

حل: پتچ دار راہ کی مساوات

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

¹² ظاہر ہے کہ ہم $t = x$ لیتے ہوئے راہ کو $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + (2x + 3)\mathbf{j}$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ہے لہذا

$$\dot{\mathbf{r}} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{2}$$

ہو گا۔ اس راہ پر چلتے ہوئے

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^2 = (1 + t^2)^2$$

ہو گا اور یوں مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 ds &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)^2 dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{2(2\pi)^3}{3} + 2\pi \right] \approx 3013 \end{aligned}$$

□

ایسا خطی تکمل جس کا متکمل تجربی تفاعل ہو یا جو پیچیدہ قطعی تکمل دیتا ہو کو تکمل کے اعدادی طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔

کئی معاملوں میں خطی تکمل کے متکمل درج ذیل روپ رکھتے ہیں

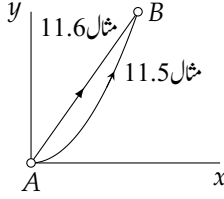
$$(11.8) \quad g(x, y, z) \frac{dx}{ds}, \quad g(x, y, z) \frac{dy}{ds}, \quad g(x, y, z) \frac{dz}{ds}$$

جہاں $\frac{dx}{ds}$ ، $\frac{dy}{ds}$ اور $\frac{dz}{ds}$ تکمل کی راہ کی مقدار معلوم روپ میں موجود تفاعل کے تفرق ہیں۔ ایسی صورت میں ہم

$$(11.9) \quad \int_C g(x, y, z) \frac{dx}{ds} ds = \int_C g(x, y, z) dx$$

لکھتے ہیں۔ باقی دو صورتوں کے لئے بھی ایسا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی راہ C پر ان طرز کے تکمل کے مجموعے کو درج ذیل سادہ صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$(11.10) \quad \int_C f dx + \int_C g dy + \int_C h dz = \int_C (f dx + g dy + h dz)$$



شکل 11.6: تکمل کے دو مختلف راہ (مثال 11.5 اور مثال 11.6)

راہ C کی روپ استعمال کرتے ہوئے تین میں سے دو آزاد متغیرات کو حذف کرتے ہوئے حاصل قطعی تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ تیسرا آزاد متغیر اس قطعی تکمل کا متغیر ہو گا۔

مثال 11.5: برائے مساوات 11.9 اور مساوات 11.10
خطی تکمل $\int_C [x^2 y^2 dx + (x - y + z) dy + xz dz]$ کی قیمت دریافت کریں۔ تکمل کی راہ سطح $z = 5$ میں قوس مکانی $y = x^2$ میں نقطہ $A : (0, 0, 5)$ تا نقطہ $B : (1, 1, 5)$ ہے (شکل 11.6-الف)۔

حل: چونکہ $y = x^2$ ہے لہذا $\frac{dy}{dx} = 2x$ یا $dy = 2x dx$ ہو گا۔ چونکہ $z = 5$ غیر متغیر ہے لہذا تکمل کے آخری جزو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^1 [x^2 x^4 dx + (x - x^2 + 5)2x dx] = \int_0^1 (x^6 - 2x^3 + 2x^2 + 10x) dx = \frac{223}{42} \approx 5.31$$

□

مثال 11.6: درج بالا مثال کے تکمل کو انہیں دو نقطوں کے درمیان سطح $z = 5$ میں راہ $y = x$ پر حاصل کریں (شکل 11.6-ب)۔

حل: اب $dy = dx$ ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 [x^2 x^2 dx + (x - x + 5)x dx] = \int_0^1 (x^4 + 5) dx = \frac{26}{5} = 5.2$$

□

مثال 11.5 اور مثال 11.6 میں ایک جیسے مکمل، ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ پائے گئے البتہ ان مثالوں میں راہ مختلف تھی۔ کمل کے جوابات بھی مختلف تھے۔ اس نتیجے کے مطابق کمل کی قیمت ابتدائی نقطہ، اختتامی نقطہ اور مکمل کے علاوہ راہ پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ اس بنیادی حقیقت پر مزید غور اسی باب میں کیا جائے گا۔

بعض اوقات مساوات 11.10 کے f ، g ، h سمتیہ v کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 ہوں گے

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k = f i + g j + h k$$

لہذا

$$v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = \left(v_1 \frac{dx}{ds} + v_2 \frac{dy}{ds} + v_3 \frac{dz}{ds} \right) ds$$

ہو گا جہاں قوسین میں بند حصہ سمتیہ v اور اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k \quad (\text{حصہ 10.5 دیکھیں})$$

کا اندرونی ضرب ہے۔ r کمل کی راہ C ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$(11.11) \quad \int_C (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = \int -C v \cdot \frac{dr}{ds} ds$$

جس کو عموماً

$$\int_C v \cdot \frac{dr}{ds} ds = \int_C v \cdot dr$$

لکھا جاتا ہے جہاں

$$(11.12) \quad dr = dx i + dy j + dz k$$

ہے۔

مثال 11.7: قوت اور کام
ایک ذرہ پر متغیر قوت f عمل کرتی ہے جو ذرے کو راہ C پر ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک منتقل کرتی ہے۔ اس قوت سے سرزد کام¹³ درج ذیل خطی کمل دیتی ہے

$$(11.13) \quad W = \int_C f \cdot dr$$

جہاں تکمل کو راہ پر منتقلی کی سمت میں حاصل کیا جاتا ہے۔ مثال 7.7 میں کام کی تعریف اور تکمل کی تعریف بطور مجموعہ استعمال کرتے ہوئے درج بالا خطی تکمل لکھا گیا ہے۔

ہم وقت t کو تکمل کا متغیر چنتے ہیں۔ یوں

$$dr = \frac{dr}{dt} dt = dv dt$$

ہو گا جہاں v سمتی رفتار سمتیہ ہے۔ یوں مساوات 11.13 درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.14) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt$$

جہاں ابتدائی لمحہ t_0 اور اختتامی لمحہ t_1 ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت

$$(11.15) \quad \mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}}$$

ہو گا لہذا مساوات 11.14 سے درج ذیل ملتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) dt = \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \Big|_{t_0}^{t_1}$$

□ جس کے تحت ذرے کی میکانی توانائی میں اضافہ عین کام کے برابر ہے۔ یہ میکانات کا بنیادی قاعدہ ہے۔

سوالات

11.1 راہ کی مثبت سمت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے کی رخ رکھتے ہوئے $\int_C (x^2 + y^2) ds$ کی قیمت سوال 11.1 تا سوال 11.8 میں دریافت کریں۔

سوال 11.1: سیدھے خط $y = -4x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1, -4)$ -

جواب: $\frac{17\sqrt{17}}{3}$

سوال 11.2: سیدھے خط $y = 3x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(2,6)$ -

جواب: $\frac{80\sqrt{10}}{3}$ سوال 11.3: سیدھے خط پر نقطہ $(1, 2)$ تا نقطہ $(3, 0)$ -جواب: $\frac{34\sqrt{2}}{3}$ سوال 11.4: سیدھے خط پر نقطہ $(3, 0)$ تا نقطہ $(1, 2)$ -جواب: $-\frac{34\sqrt{2}}{3}$ سوال 11.5: گھڑی کی الٹ رخ دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ پر نقطہ $(3, 0)$ تا نقطہ $(0, 3)$ -جواب: $\frac{27\pi}{2}$ سوال 11.6: x محور پر $(0, 0)$ تا $(2, 0)$ اور یہاں سے y محور کے متوازی $(2, 2)$ تک۔جواب: $\frac{40}{3}$ سوال 11.7: y محور پر $(0, 0)$ تا $(0, 2)$ اور یہاں سے x محور کے متوازی $(2, 2)$ تک۔جواب: $\frac{40}{3}$ سوال 11.8: نقطہ $(0, 0)$ سے سیدھے خط پر نقطہ $(2, 2)$ تک۔جواب: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ سوال 11.9: مکمل $\int_C (x+z)y \, ds$ کی قیمت کو دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ ، $z = 2$ پر نقطہ $(0, 0, 2)$ تا نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ دریافت کریں (گھڑی کی الٹ رخ)۔جواب: $\frac{9}{4} - \sqrt{2}$ مکمل $\int_C (3y^2 \, dx - x^2 \, dy)$ کی قیمت کو سوال 11.10 تا سوال 11.12 میں دیے راہ پر دریافت کریں۔

سوال 11.10: سیدھے خط پر نقطہ $(0,1)$ تا نقطہ $(1,0)$ -

جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 11.11: قوس مکانی $y = x^2$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1,1)$ -

جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 11.12: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ نقطہ $(1,0)$ تا نقطہ $(1,1)$ -

جواب: $-\frac{8}{3}$

سوال 11.13 تا سوال 11.18 میں دی گئی راہ پر قوت $f = 2xi + zj - yk$ کا کام دریافت کریں۔

سوال 11.13: x محور پر $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$ -

جواب: 1

سوال 11.14: $z = 2$ سطح میں y محور پر $(0,0,2)$ تا $(0,1,2)$ -

جواب: 2

سوال 11.15: سطح مکانی $y = x^2$ ، $z = 1$ پر $(0,0,1)$ تا $(1,1,1)$ -

جواب: 2

سوال 11.16: سطح مکانی $y = z^4$ ، $x = 2$ پر $(0,2,0)$ تا $(1,2,1)$ -

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.17: سیدھے خط $y = x$ ، $z = 2x$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ -

جواب: 1

سوال 11.18: سیدھے خط $y = x^2$ ، $z = 2x^3$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ -

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.19: مان لیں کہ قوس C کے تمام نقطوں پر p معین ہے اور کہ $|p|$ محدود ہے یعنی C پر $|p| < M$ ہے جہاں M کوئی مثبت عدد ہے۔ ثابت کریں کہ

$$(11.16) \quad \left| \int_C p \cdot dr \right| < Ml$$

ہو گا جہاں C کی لمبائی l ہے۔

جواب: اندرونی ضرب کے تحت $p \cdot dr = |p| |dr| \cos \theta$ ہو گا۔ چونکہ $|p| < M$ ہے اور $\cos \theta \leq 1$ ہے لہذا $|p| \cos \theta < M$ ہو گا۔ خطی تکمل کی تعریف مساوات 11.3 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $|dr| = \Delta s$ لکھی گئی ہے۔

$$J_n = \sum_{m=1}^n |p| \cos \theta \Delta s_m < \sum_{m=1}^n M \Delta s_m = M \sum_{m=1}^n \Delta s_m = Ml$$

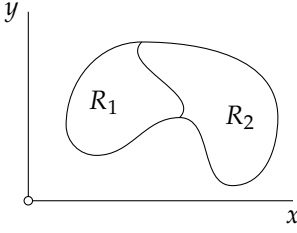
11.3 دوہرا تکمل

وقفہ $a \leq x \leq b$ کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x)$ کا x محور پر a تا b قطعی تکمل

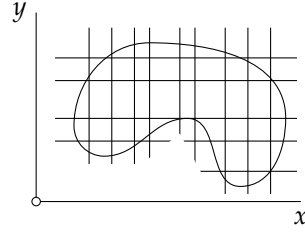
$$\int_a^b f(x) dx$$

لکھا جاتا ہے۔ دوہرا تکمل کی صورت میں xy سطح میں بند محدود¹⁴ خطہ R کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x, y)$ متکمل ہو گا۔

¹⁴ "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو معقول وسعت کے دائرے میں گھیرا جاسکتا ہے۔



(ب) خطے کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔



(الف) R کے متعدد ٹکڑے

شکل 11.7: دوہرا تکمیل کی تعریف اور خواص

دوہرا تکمیل کی تعریف قطعی تکمیل کی تعریف سے مشابہت رکھتی ہے۔ ہم x اور y محور کے متوازی خطوط کھینچ کر خطہ R کو ٹکڑے کرتے ہیں (شکل 11.7-الف)۔ ہم R کے ٹکڑوں کو 1 تا n سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہر ٹکڑے میں کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً k مستطیلی ٹکڑے میں نقطہ (x_k, y_k) ہو گا۔ تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k \quad (11.17)$$

لیتے ہیں جہاں k مستطیلی ٹکڑے کا رقبہ A_k ہے۔ ہم مثبت عدد صحیح n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1}, J_{n2}, \dots کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ R میں $f(x, y)$ استمراری ہے اور R کو J_{n1}, J_{n2}, \dots حقیقی اعداد کی ہموار منحنیات گھیرتی ہیں۔ ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1}, J_{n2}, \dots کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x, y_k) کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو خطہ R پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکمیل¹⁵ کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

دوہرا تکمیل کی تعریف سے ظاہر ہے یہ قطعی تکمیل کی طرح کئی خواص رکھتا ہے۔ فرض کریں کہ خطہ R میں متعین

double integral¹⁵

اور استمراری f اور g تفاعل کے متغیرات x اور y ہیں۔ تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\iint_R k f \, dx \, dy = k \iint_R f \, dx \, dy \quad (k \text{ مستقل ہے})$$

$$(11.18) \quad \iint_R (f + g) \, dx \, dy = \iint_R f \, dx \, dy + \iint_R g \, dx \, dy$$

$$\iint_R f \, dx \, dy = \iint_{R_1} f \, dx \, dy + \iint_{R_2} f \, dx \, dy \quad (\text{شکل 11.7-ب})$$

مزید R میں کم از کم ایک ایسا نقطہ (x_0, y_0) ضرور پایا جاتا ہے کہ درج ذیل تعلق درست ثابت ہو

$$(11.19) \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = f(x_0, y_0) A$$

جہاں خطہ R کا رقبہ A ہے۔ یہ تعلق دوہرا نکلات کا اوسط قیمت مسئلہ¹⁶ کہلاتا ہے۔

خطہ R پر دوہرا نکلات کو یکے بعد دیگرے دو عدد مکمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ انہیں اس ترکیب کو سمجھیں۔

فرض کریں کہ R کو درج ذیل غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے (شکل 11.8-الف)

$$a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x)$$

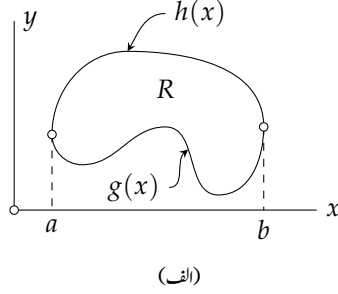
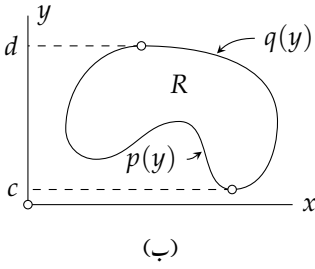
تب $y = g(x)$ اور $y = h(x)$ خطہ R کی سرحد کو ظاہر کریں گے اور

$$(11.20) \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right] dx$$

ہو گا۔ ہم پہلے (چکور قوسین میں بند) اندرونی مکمل

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy$$

کی قیمت حاصل کرتے ہیں جہاں x بطور مقدار معلوم کردار ادا کرتا ہے لہذا اس مکمل کا حاصل x کا تفاعل $F(x)$ ہو گا۔ اس کے بعد x محور پر $F(x)$ کا مکمل a تا b حاصل کرتے ہوئے دوہرا مکمل (مساوات 11.20) کی قیمت حاصل ہو گی۔



شکل 11.8: تجزیہ دوہرا تکامل

اسی طرح اگر R کو درج ذیل غیر مساوات (شکل 11.8-ب)

$$c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y)$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب درج ذیل ہو گا

$$(11.21) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

جہاں اندرونی تکامل کا حاصل y کا تفاعل ہو گا جس کو y محور پر c تا d تکامل کرتے ہوئے دوہرا تکامل کی قیمت حاصل ہو گی۔

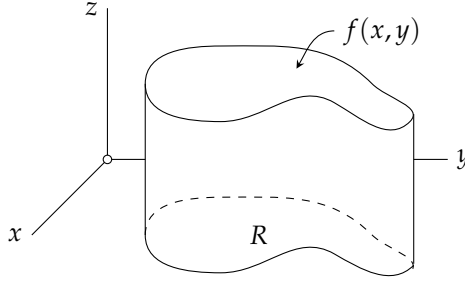
اگر R کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن نہ ہو لیکن R کو ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب علیحدہ علیحدہ ہر ٹکڑے پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکامل حاصل کرتے ہوئے تمام کا مجموعہ لیتے ہوئے R پر $f(x, y)$ کے دوہرا تکامل کی قیمت حاصل ہو گی۔

دوہرا تکامل کے عملی استعمال

دوہرا تکامل کے کئی عملی جیومیٹریائی اور طبعی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مثلاً R کا رقبہ A ¹⁷ درج ذیل ہے۔

$$A = \iint_R dx dy$$

area¹⁷



شکل 11.9: دوہرا کمل بطور حجم

چونکہ مساوات 11.17 میں جزو $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ سے مراد اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم ہے جس کے بنیاد کا رقبہ A_k اور قد $f(x_k, y_k)$ ہے (شکل 11.9) لہذا خطہ R کے اوپر سطح $z = f(x, y) (> 0)$ کے نیچے حجم H درج ذیل ہے۔

$$H = \iint_R f(x, y) dx dy$$

فرض کریں کہ مستوی xy میں پھیلے کیت کی کثافت (کیت فی اکائی رقبہ) کو $f(x, y)$ ظاہر کرتی ہے۔ تب R میں کل کیت M درج ذیل ہوگی۔

$$M = \iint_R f(x, y) dx dy$$

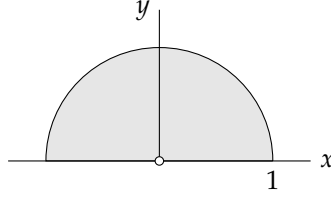
R میں موجود کیت کی مرکز ثقل¹⁸ کے محدد

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x f(x, y) dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y f(x, y) dx dy$$

ہوں گے۔ خطہ R میں موجود کیت کے x اور y محور کے گرد جمودی معیار اثر¹⁹ بالترتیب I_x اور I_y ہوں گے

$$I_x = \iint_R y^2 f(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_R x^2 f(x, y) dx dy$$

¹⁸ center of gravity
¹⁹ moment of inertia



شکل 11.10: کثافت کیت (مثال 11.8)

جبکہ مبدا کے گرد اس کی قطبی جمودی معیار اثر I_0 ہوگی۔

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy$$

مثال 11.8: عملی دوہرا کٹل

خطہ $R: 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$ میں کثافت کیت $f(x, y) = 1$ ہے (شکل 11.10)۔ مرکز ثقل اور جمودی معیار اثر I_0 ، I_y ، I_x دریافت کریں۔

حل: R میں کل کیت M درج ذیل ہے (جہاں آخری قدم پر مکمل میں $x = \sin \theta$ پر کیا گیا ہے)۔

$$M = \iint_R 1 dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

چونکہ $f(x, y) = 1$ ہے لہذا کل کیت عین نصف دائرے کے رقبے کے برابر ہے۔ مرکز ثقل کے محدود

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2}{\pi} \iint_R x dx dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy \right] dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^0 z^2 dz = 0 \quad (\sqrt{1-x^2} = z) \end{aligned}$$

اور

$$\bar{y} = \frac{2}{\pi} \iint_R y dx dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right] dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{4\pi}{3}$$

polar moment of inertia²⁰

ہیں۔ مزید

$$I_x = \iint_R y^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{8}$$

اور

$$I_y = \iint_R x^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right] dx = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{8}$$

سے قطبی جمودی معیار اثر I_0 درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{4}$$

□

مثال 11.9 میں I_x کو نسبتاً آسان ترکیب سے حاصل کیا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ قطعی مکمل

$$\int_a^b f(x) dx$$

میں

$$x = x(u)$$

پر کرتے ہوئے نیا متغیر u متعارف کیا جاتا ہے، جہاں کسی وقفہ $\alpha \leq u \leq \beta$ پر تفاعل $x(u)$ اور اس کا تفرق استمراری اور $x(\alpha) = a$ ، $x(\beta) = b$ [یا $x(\alpha) = b$ ، $x(\beta) = a$] ہیں اور جیسے جیسے $x(u)$ وقفہ a تا b پر تبدیل ہوتا ہو ویسے ویسے وقفہ α تا β پر u تبدیل ہوتا ہو۔ یوں

$$(11.22) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(u)] \frac{dx}{du} du$$

لکھا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ کی صورت میں $x = \sin u$ پر کرتے ہوئے

$$f[x(u)] = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u, \quad \frac{dx}{du} = \cos u, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

ہوں گے جن سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{\pi}{4}$$

دوہرا مکمل

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

کی صورت میں ہم نئے متغیرات u ، v متعارف کرنے کی خاطر

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

لکھتے ہیں، جہاں uv سطح میں کسی خطہ R^* پر تفاعل $x(u, v)$ ، $y(u, v)$ اور ان کے ایک درجی جزوی تفرق استمراری ہوں تاکہ R^* میں ہر نقطہ (u_0, v_0) کا خطہ R میں مطابقتی نقطہ $[x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)]$ پایا جائے اور مزید پورے R^* پر یعقوبی J^{21}

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثبت اور یا پورے R^* پر یعقوبی J^{22} منفی ہو۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$(11.23) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

یوں مسئلہ کو u ، v کی صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ $dx dy$ کی جگہ $du dv$ ضرب یعقوبی J کی حتمی قیمت لکھی جاتی ہے۔

مثال کے طور پر قطبی محدد r^{23} اور θ متعارف کرنے کی خاطر ہم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Jacobian²¹

²² جرمن ریاضی دان [1804-1851] کارل گسٹاف یقوب یعقوبی

polar coordinates²³

لکھتے ہیں لہذا

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

ہو گا اور یوں

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f[r \cos \theta, r \sin \theta] r dr d\theta$$

لکھا جائے گا جہاں xy سطح میں خطہ R کا سطح $r\theta$ میں مطابقتی خطہ R^* ہے۔

مثال 11.9: مساوات 11.23 استعمال کرتے ہوئے مثال 11.8 کی I_x دوبارہ دریافت کریں۔

حل:

$$I_x = \iint_R y^2 dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

□

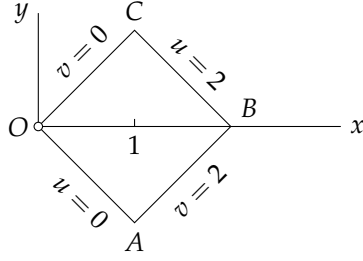
مثال 11.10: درج ذیل دوہرا کمل حل کریں

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

جہاں R کو شکل 11.11 میں دکھایا گیا ہے۔

حل: چکور R کے اطراف کو محور (u, v) لینے سے مسئلے کا حل نسبتاً آسان ہو جاتا ہے۔ انہیں اس تبادلاً پر غور کرتے ہیں جو (x, y) کو (u, v) میں بدلے۔ چکور کے کونوں کو دونوں محدد میں جدول 11.1 میں لکھا گیا ہے۔ (x, y) محدد سے (u, v) کے تبادلاً کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



شکل 11.11: مثال 11.10 میں مکمل کا خطہ

جدول 11.1: متبادل محور (مثال 11.10)

(u, v)	(x, y)	
$(0, 2)$	$(1, -1)$	A
$(2, 2)$	$(2, 0)$	B
$(2, 0)$	$(1, 1)$	C

جس میں کونا A پر کرنے سے

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a - b &= 0 \\ c - d &= 2 \end{aligned}$$

ملتا ہے اور کونا B پر کرنے سے

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ یوں $b = 1$ اور $d = -1$ ہوں گے۔ یوں درکار متبادل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

یوں $x + y = u$ اور $x - y = v$ متبادل یعنی $x = \frac{1}{2}(u + v)$ اور $y = \frac{1}{2}(u - v)$ ہو گا اور یقینی درج ذیل ہو گا۔

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

باب 11. سمتی تکلی عمل الاحصاء تکمل کے مسئلے

R کا مطابقتی چکور $0 \leq u \leq 2$ ، $0 \leq v \leq 2$ ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{8}{3}$$

□

سوالات

سوال 11.20 تا سوال 11.26 حل کریں۔ تکمل کا خطہ بیان کریں۔

سوال 11.20: $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y^2) dx dy$ جواب: $\frac{10}{3}$

سوال 11.21: $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$ جواب: $\frac{\pi}{8}$

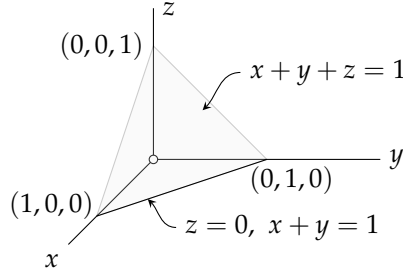
سوال 11.22: $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$ جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.23: $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy dy dx$ جواب: $\frac{1}{24}$

سوال 11.24: $\int_0^2 \int_0^{4-2x} (x + y) dy dx$ جواب: $\frac{8}{3}$

سوال 11.25: $\int_0^2 \int_{1+x}^{5-x} (1 + xy) dy dx$ جواب: $\frac{12}{5}$

سوال 11.26: $\int_0^1 \int_{1+x}^{5-x} (1 - xy) dy dx$ جواب: -1



شکل 11.12: سطح $x + y + z = 1$ کے نیچے ربع اول میں چو سطح۔

سوال 11.27 تا سوال 11.30 میں فضا میں خطہ دیا گیا ہے۔ اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 11.27: کارتیسی نظام کے ربع اول میں سطح $x + y + z = 1$ کے نیچے چو سطح۔

جواب: شکل 11.12 میں سطح $x + y + z = 1$ کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے جو x ، y اور z محور کو بالترتیب $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ پر چھوتی ہے۔ ربع اول میں چو سطحی کے کونے $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ ہیں۔ مستوی xy پر $z = 0$ ہو گا لہذا دی گئی سطح xy مستوی کو خط $x + y = 1$ یعنی $x = 1 - y$ پر قطع کرتی ہے۔ یوں ربع اول میں $x = 0$ اور $x = 1 - y$ کے مابین خطہ R ہو گا۔ R کے کونے $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ اور $(0, 1, 0)$ ہیں۔ اس طرح ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_0^{1-y} z \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1 - x - y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_0^{1-y} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (y^2 - 2y + 1) \, dy = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

سوال 11.28: وہ چو سطح جس کو سطح $2x + 6y + z = 12$ ربع اول سے کاٹی ہے۔
جواب: 216

سوال 11.29: وہ حجم جس کو ہلکی $x^2 + y^2 = 1$ اور نکلی $y^2 + z^2 = 1$ گھیرتی ہیں۔
جواب: ہلکی $y^2 + z^2 = 1$ سے حجم کی بالائی سطح $z = \sqrt{1 - y^2}$ اور نچلی سطح $z = -\sqrt{1 - y^2}$ ملتے

باب 11. سمتی تکلی عمل الا حصاء۔ تکمل کے مسئلے

ہیں۔ مشابہت سے ہم تکمل کو بالائی سطح اور xy مستوی کے درمیان حاصل کرتے ہوئے حاصل جواب کو 2 سے ضرب دے سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا جہاں $x^2 + y^2 = 1$ سے x کے حدود $-\sqrt{1-y^2}$ اور $\sqrt{1-y^2}$ لکھے گئے ہیں۔

$$H = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z \, dx \, dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \, dx \, dy = \frac{16}{3}$$

سوال 11.30: سطح $z = x^2$ اور سطح $x = z^2$ کے درمیان $y = 0$ تا $y = 2$ جواب: یہ سطحیں $x = 0$ اور $x = 1$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ بالائی سطح $z = \sqrt{x}$ ہے (تسلی کر لیں)۔ یوں xy مستوی اور بالائی سطح کے مابین حجم معلوم کرتے ہوئے اس سے xy مستوی اور نیچلی سطح کے مابین حجم منفی کرتے ہیں۔

$$H = \int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx \, dy = \frac{2}{3}$$

سوال 11.31 تا سوال 11.34 میں کمیت کے مرکز ثقل کے محدد \bar{x} ، \bar{y} معلوم کریں۔ خطہ R اور اس میں کمیت کی کثافت $f(x, y)$ دی گئی ہے۔

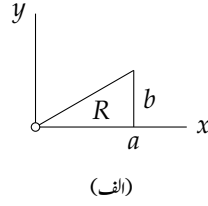
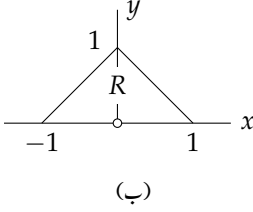
سوال 11.31: $f(x, y) = 1$, $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ جوابات: $\bar{x} = 1, \bar{y} = \frac{3}{2}$

سوال 11.32: ربع اول $R : x^2 + y^2 \leq 1$, $f(x, y) = 1$ جوابات: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4\pi}{3}$

سوال 11.33: $f(x, y) = x + y$, $R : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$ جوابات: $\bar{x} = \frac{12}{7}, \bar{y} = \frac{50}{21}$

سوال 11.34: ربع اول $R : y \leq 4 - 3x$, $f(x, y) = xy$ جوابات: $\bar{x} = \frac{8}{15}, \bar{y} = \frac{8}{5}$

سوال 11.35: شکل 11.13 میں دکھائے گئے خطہ R میں کمیتی کثافت $f(x, y) = 1$ پایا جاتا ہے۔ جمودی معیار اثر I_x , I_y , I_z دریافت کریں۔



شکل 11.13: خطہ کشاف (سوال 11.35)

جوابات:

(الف) $I_x = \frac{ab^3}{12}, I_y = \frac{a^3b}{4}, I_0 = I_x + I_y$

(ب) $I_x = I_y = \frac{1}{6}, I_0 = \frac{1}{3}$

قطبی محدود استعمال کرتے ہوئے سوال 11.36 تا سوال 11.39 میں $\iint_R f(x, y) dx dy$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.36: $f = x + y, R : x^2 + y^2 < 4, y \geq 0$
جواب: $\frac{11}{3}$

سوال 11.37: $f = \sqrt{x^2 + y^2}, R : x^2 + y^2 \leq a, y \geq 0, x \geq 0$
جواب: $\frac{a^3\pi}{6}$

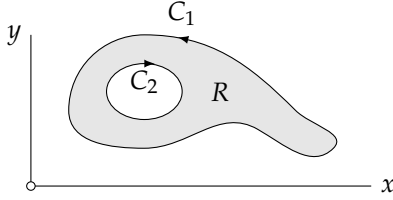
سوال 11.38: $f = x^2 + y^2, R : x^2 + y^2 \leq a$
جواب: $\frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.39: $f = e^{-x^2-y^2}, R : x^2 + y^2 = 9$ اور $x^2 + y^2 = 16$ کے درمیان چھلا
جواب: $\pi(e^{-9} - e^{-16})$

سوال 11.40 تا سوال 11.41 میں یقینی دریافت کریں۔ حاصل جواب کی جیومیٹریائی وجہ بیان کریں۔ (اشارہ: (x, y) سے (u, v) تبادیل کے لئے مثال 11.10 دیکھیں۔)

سوال 11.40: مستقیم حرکت $x = u + a, y = v + b$
جواب: 1

سوال 11.41: مرکز کے گرد گھومنا $x = u \cos \phi - v \sin \phi, y = u \sin \phi + v \cos \phi$
جواب: 1



شکل 11.14: خطہ R کی سرحد کے دو حصے C1 اور C2 ہیں۔ C1 پر گھڑی کی الٹ رخ جبکہ C2 پر گھڑی کی رخ چلتے ہوئے خطی تکمیل حاصل کیا جائے گا۔

11.4 دوہرا تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ

سطح میں کسی خطے پر دوہرا تکمیل کو اس خطے کے سرحد پر خطی تکمیل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ بعض اوقات ایسا کرنے سے آسانی سے حل ہونے والا تکمیل حاصل ہوتا ہے۔ تکمیل پر نظریاتی غور و فکر کے دوران یہ تبادلہ سودمند ثابت ہوتا ہے۔ یہ تبادلہ درج ذیل مسئلے کے تحت ممکن ہے۔

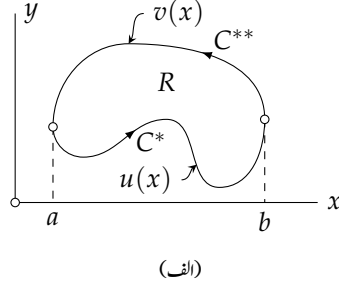
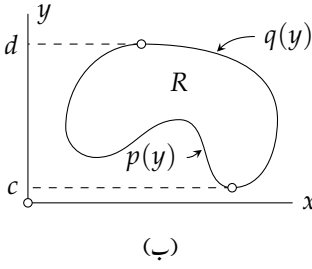
مسئلہ 11.1: سطح میں مسئلہ گرین²⁴ (دوہرا تکمیل سے خطی تکمیل اور خطی تکمیل سے دوہرا تکمیل کا حصول) فرض کریں کہ مستوی xy میں R ایک ایسا بند اور محدود خطہ ہے کہ جس کی سرحد C ، محدود تعداد کی ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہے۔ مزید فرض کریں کہ کسی ایسے پورے خطے میں، جس کا R حصہ ہو، تفاعل $f(x, y)$ اور $g(x, y)$ اور ان کے جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ استمراری ہوں۔ تب درج ذیل ہوگا

$$(11.24) \quad \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (f dx + g dy)$$

جہاں خطی تکمیل R کی پوری سرحد C پر یوں حاصل کیا جاتا ہے کہ تکمیل لینے کی رخ C پر چلتے ہوئے R بائیں ہاتھ کو ہو (شکل 11.14)۔

ثبوت: ہم مسئلہ گرین²⁵ کو پہلے ایسے خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل دونوں صورتوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو (شکل 11.15)۔

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & a \leq x \leq b, \quad u(x) \leq y \leq v(x), \\ \text{(ب)} \quad & c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y) \end{aligned}$$



شکل 11.15: مخصوص قسم کا خطہ (مسئلہ گرین)

مساوات 11.20 استعمال کرتے ہوئے

$$(11.25) \quad \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dx$$

لکھ کر (جہاں مکمل $\frac{\partial f}{\partial y}$ ہے) اندرونی مکمل

$$\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(x, y)|_{u(x)}^{v(x)} = f[x, v(x)] - f[x, u(x)]$$

حاصل کر کے مساوات 11.25 میں پر کرتے ہیں۔

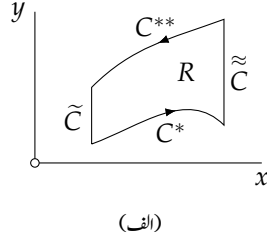
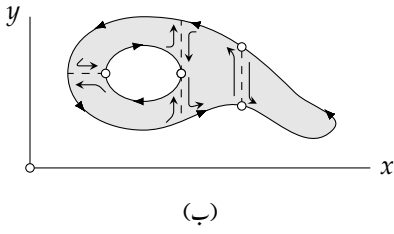
$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_a^b f[x, v(x)] dx - \int_a^b f[x, u(x)] dx \\ &= - \int_a^b f[x, u(x)] dx - \int_b^a f[x, v(x)] dx \end{aligned}$$

چونکہ $y = u(x)$ شکل 11.15-الف میں سمت بند منحنی C^* کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $y = v(x)$ منحنی C^{**} کو ظاہر کرتی ہے لہذا بائیں ہاتھ کے کلمات کو C^* اور C^{**} پر خطی کلمات

$$(11.26) \quad \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dy = - \int_{C^*} f(x, y) dx - \int_{C^{**}} f(x, y) dx = - \int_C f(x, y) dx$$

Green's theorem²⁴

²⁵ برطانوی ریاضی دان جارج گرین [1793-1841]



شکل 11.16: مسئلہ گرین کا ثبوت

لکھا جاسکتا ہے۔ آخری قدم پر سرحد C^* اور سرحد C^{**} پر حاصل تكميلات کو پوری سرحد C پر حاصل تکمیل لکھا گیا ہے۔

اگر C کے کچھ حصے y محور کے متوازی ہوں (جیسے شکل 11.16-الف میں \tilde{C} اور $\tilde{\tilde{C}}$ ہیں) تب بھی مساوات 11.26 درست ہو گا۔ ایسا اس لئے ہو گا کہ y محور کے متوازی حصوں پر تکمیل کی قیمت صفر ہوگی لہذا سرحد کی ان حصوں (یعنی \tilde{C} اور $\tilde{\tilde{C}}$) پر تکمیل کو بھی مساوات 11.26 میں شامل کرتے ہوئے R کی پوری سرحد پر تکمیل لکھا جاسکتا ہے۔

اسی طرح مساوات 11.21 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{\partial g}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial g}{\partial x} dx \right] dy \\
 &= \int_c^d g[q(y), y] dy + \int_d^c g[p(y), y] dy \\
 &= \int_C g(x, y) dy
 \end{aligned}
 \tag{11.27}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 11.26 اور مساوات 11.27 ملا کر مخصوص خطے کے لئے مساوات 11.24 ثابت ہوتی ہے۔

اب ہم مسئلے کو ایسی خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جو از خود مخصوص خطہ نہیں ہے لیکن اس کو محدود تعداد کی مخصوص خطوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے (شکل 11.16-ب)۔ ایسی صورت میں ہم تمام ضمنی مخصوص خطوں پر مسئلہ لاگو کرتے ہوئے جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں۔ بائیں ہاتھ کے ارکان کا مجموعہ R پر تکمیل دیگا جبکہ دائیں ہاتھ کے ارکان سرحد C پر خطی تکمیل جمع اضافی پیدا کردہ سرحدوں پر تکمیل دیگا۔ ہر اضافی سرحد پر خطی تکمیل دو مرتبہ آپس میں الٹ سمتوں

میں حاصل کیا جائے گا۔ آپس میں الٹ سمتوں میں خطی مکمل کا مجموعہ صفر ہوتا ہے لہذا تمام اضافی سرحدوں پر حاصل خطی مکملوں کا مجموعہ صفر ہو گا۔ اس طرح دائیں ہاتھ ارکان کا مجموعہ R کی سرحد C پر خطی مکمل کے برابر ہو گا۔ مسئلہ کو ایسی عمومی خطہ R جو شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم R کو تخمیناً ایسی خطوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔

□

مسئلہ گرین انتہائی اہم مسئلہ ہے جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔ انہیں اس کی استعمال کی چند مثالیں دیکھیں۔

مثال 11.11: مستوی کا رقبہ بطور سرحد پر خطی مکمل
مسئلہ گرین یعنی مساوات 11.24 میں $f = 0$ اور $g = x$ پر کرنے سے

$$A = \iint_R dx dy = \int_C x dy$$

ملتا ہے جس کا بائیں ہاتھ R کا رقبہ A دیتا ہے۔ اسی طرح اگر ہم مساوات 11.24 میں $f = -y$ اور $g = 0$ پر کریں تب

$$A = \iint_R dx dy = - \int_C y dx$$

ملتا ہے۔ ان دونوں جوابات سے

$$(11.28) \quad A = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)$$

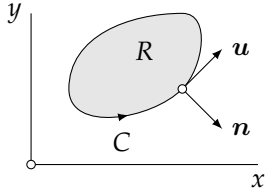
لکھا جاسکتا ہے جہاں خطی مکمل کو مسئلہ گرین میں دیے گئے رخ حاصل کیا جائے گا۔ یہ مکمل مستوی xy پر رقبہ کو بطور اسی رقبہ کی سرحد پر خطی مکمل پیش کرتا ہے۔ کئی سطح پیماس²⁶ اسی لیے پر مبنی ہیں۔

□

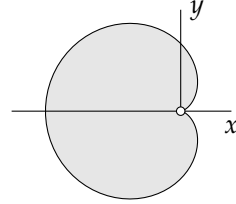
مثال 11.12: قطبی محد میں مستوی سطح کا رقبہ

قطبی محد r اور θ ہیں جہاں $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ ہیں۔ یوں

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$



(ب) منحنی برائے مثال 11.14



(الف) منحنی قلب نما

شکل 11.17: اشکال منحنیات برائے مثال 11.13 اور مثال 11.14

ہو گا جنہیں مساوات 11.28 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

(11.29)

$$A = \frac{1}{2} \int_C r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) = \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta$$

□

مثال 11.13: مساوات 11.29 کی مدد سے قلب نما منحنی $r = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ کا رقبہ دریافت کرتے ہیں (شکل 11.17-الف)۔

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$

□

مثال 11.14: لاپلاسی تفاعل کے دوہرا کمل سے تفاعل کی عمودی مماس کے خطی کمل کا تبادلہ فرض کریں کہ xy مستوی میں مسئلہ گرین میں بیان کردہ خطے میں تفاعل $w(x, y)$ اور اس کا ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ ہم $f = -\frac{\partial w}{\partial y}$ اور $g = \frac{\partial w}{\partial x}$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ خطہ میں استمراری ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا جو w کا لاپلاسی ہے (حصہ 10.8)۔

$$(11.30) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w$$

دی گئی f اور g استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.31) \quad \int_C (f dx + g dy) = \int_C \left(f \frac{dx}{ds} + g \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds$$

جہاں s سرحد C کی لمبائی ہے جس کی سمت بندی شکل 11.13-ب میں دکھائی گئی ہے۔ دائیں ہاتھ آخری متکمل کو درج ذیل دو سمتیات

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}$$

کا اندرونی ضرب

$$(11.32) \quad -\frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} = (\nabla w) \cdot \mathbf{n}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ درج ذیل سمتیہ \mathbf{u} سرحد C کا مماس ہے (حصہ 10.5)

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}$$

اور چونکہ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ہے لہذا \mathbf{n} سرحد C کا قائمہ سمتیہ ہے۔ مزید \mathbf{n} کا رخ خطہ R کی باہر کو ہے۔ اس نتیجے اور مساوات 10.79 سے ظاہر ہے کہ مساوات 11.32 کا دایاں ہاتھ C کی بیرونی رخ قائمہ سمتیہ کی سمت میں w کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{dw}{dn}$ لکھتے ہوئے اور مساوات 11.30، مساوات 11.31 اور مساوات 11.32 کو مد نظر رکھتے ہوئے مسئلہ گرین سے درج ذیل کلیہ ثابت ہوتا ہے۔

$$(11.33) \quad \iint_R \nabla^2 w \, dx \, dy = \int_C \frac{\partial w}{\partial n} \, ds$$

□

اسی باب میں مسئلہ گرین کی استعمال اور اس سے حاصل مزید نتائج پر غور کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 11.42 تا سوال 11.48 کو پہلے جوں کا توں حل کریں۔ بعد میں اس کو مسئلہ گرین کی مدد سے حل کریں۔

سوال 11.42: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y^2 \, dx - x^2 \, dy), \quad C: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

جواب: 0

سوال 11.43: راہ C، گھڑی کی الٹ رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y \, dx + x \, dy), \quad C: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

جواب: 0

سوال 11.44: راہ C، گھڑی کی رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y \, dx - x \, dy), \quad C: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

جواب: 8

سوال 11.45: راہ C، گھڑی کی رخ، تکتوں کی سرحد ہے۔ تکتوں کے کونے دیے گئے ہیں۔

$$\int_C [(x^2 - y) \, dx + y^2 \, dy], \quad (0,0), (3,0), (0,1)$$

جواب: $-\frac{3}{2}$

سوال 11.46: راہ C، گھڑی کی الٹ رخ، دو قوسین میں بند خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [y^2 \, dx + (x^3 + 2xy) \, dy], \quad y = x^2, y = x$$

جواب: $-\frac{3}{20}$ سوال 11.47: راہ C، گھڑی کی رخ، دو قوسین میں بند $0 \leq x \leq 2$ خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [y^3 \, dx + (x^3 + 3y^2x) \, dy], \quad y = x^3, y = 4x$$

جواب: 16

سوال 11.48: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ ربع اول میں قوس $y = 1 - x^2$ اور محدود کے محوروں کے درمیان بند خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [-xy^2 dx + x^2y dy]$$

جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 11.49 تا سوال 11.55 میں $f dx + g dy$ دیا گیا ہے۔ خطے کے گرد گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے، مسئلہ گرین کی مدد سے $\int_C (f dx + g dy)$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.49: مستطیل خطہ۔ $(x + 2y) dx - x^2 dy$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$
جواب: -8

سوال 11.50: تکونی خطے کے کونے دیے گئے ہیں۔ $(x^2 - 2y) dx + 2x^2 dy$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$
جواب: $\frac{5}{3}$

سوال 11.51: مستطیل خطہ۔ $(x^2 + y) dx + (2x + \sin y) dy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.52: گول دائرے میں بند خطہ۔ $(e^{2x} + 3y) dx + (2e^y + 4x) dy$, $C: x^2 + y^2 = 1$
جواب: π

سوال 11.53: گول دائرے میں بند خطہ۔ $-\frac{y^3}{3} dx + \frac{x^3}{3} dy$, $C: x^2 + y^2 = 1$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.54: مستطیل خطہ۔ $(x + \sinh y) dx + (y^2 + \sin x) dy$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$
جواب: $-\pi \sinh 1$

سوال 11.55: قوسین میں بند خطہ۔ $\frac{e^y}{x} dx + (e^y \ln x + x) dy$, $y = 5$, $y = 1 + x^2$
جواب: $\frac{64}{3}$

سوال 11.56 تا سوال 11.58 میں دیے مستوی خطہ کا رقبہ مثال 11.11 کی کلیات استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

سوال 11.56: اندرون ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ جواب: $ab\pi$

سوال 11.57: ربع اول میں تین قوسین میں بند خطہ۔ $y = x, y = \frac{x}{4}, y = \frac{1}{x}$ جواب: $\ln 2$

سوال 11.58: قوسین میں بند خطہ۔ $y = 2x + 3, y = x^2$ جواب: $\frac{32}{3}$

سوال 11.59 تا سوال 11.61 میں $\int_C \frac{\partial w}{\partial n} ds$ کی قیمت کو مساوات 11.33 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.59: $w = 3y^2 - x^2, C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ جواب: 72π

سوال 11.60: مستطیل خطہ۔ $w = 3x^2y - y^3, C: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ جواب: 0

سوال 11.61: مستطیل خطہ۔ $w = e^x + 2xy, C: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ جواب: $3(e^2 - 1)$

سوال 11.62: اگر تفاعل $w(x, y)$ کسی خطہ R میں لاپلاس مساوات $\nabla^2 w = 0$ پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ثابت کریں۔ (اشارہ: مثال 11.14 کی طرز پر ثابت کریں۔)

$$(11.34) \quad \iint_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int_C w \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

جواب: مسئلہ گرین میں $f = -ww_y$ اور $g = ww_x$ لیں جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں۔ یوں $g_x - f_y = w_x^2 + w_y^2$ ہو گا جہاں $w_{xx} + w_{yy} = 0$ استعمال کیا گیا ہے۔ مزید درج ذیل ہو گا جہاں ' سے مراد s کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\begin{aligned} f dx + g dy &= (-ww_y x' + ww_x y') ds = w(\nabla w) \cdot (y' i - x' j) ds \\ &= w(\nabla w) \cdot \mathbf{n} ds = w \frac{\partial w}{\partial n} ds \end{aligned}$$

سوال 11.63 تا سوال 11.64 میں $\int_C w \frac{\partial w}{\partial n} ds$ کی قیمت کو مساوات 11.34 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.63: مستطیل خطہ۔ $w = x + y$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 5$
جواب: 40

سوال 11.64: مستطیل خطہ۔ $w = e^x \cos y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$
جواب: $e^2 - 1$

سوال 11.65: سمتیہ $v = gi - fj$ متعارف کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مسئلہ گرین کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(11.35) \quad \iint_R \nabla \cdot v \, dx \, dy = \int_C v \cdot n \, ds$$

جہاں n سرحد کی باہر رخ قائمہ اکائی سمتیہ ہے (شکل 11.17-ب) اور s راہ C کی لمبائی قوس ہے۔

سوال 11.66: مسئلہ گرین کی دوسری صورت یعنی مساوات 11.35 کو $v = xi + yj$ اور دائرہ $C : x^2 + y^2 = 1$ کے لئے درست ثابت کریں۔

جواب: 2π

سوال 11.67: ثابت کریں کہ مسئلہ گرین کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(11.36) \quad \iint_R (\nabla \times v) \cdot k \, dx \, dy = \int_C v \cdot u \, ds$$

جہاں k مستوی xy کا قائمہ اکائی سمتیہ ہے، u راہ C کی اکائی مماس سمتیہ ہے اور s راہ C کی لمبائی قوس ہے۔

سوال 11.68: مسئلہ گرین کی تیسری صورت یعنی مساوات 11.36 کو $v = -yi + xj$ کے لئے ایسی تکتوں پر ثابت کریں جس کے کونے $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(1,1)$ ہیں۔

جواب: 1

11.5 سطحیں

ہم سطحی تکمل پر آگے غور کریں گے۔ اس لئے ضروری ہے کہ ہمیں سطحوں سے واقفیت ہو۔ آئیں انہیں پر غور کرتے ہیں۔

سطح S کو

$$(11.37) \quad f(x, y, z) = 0$$

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں x ، y ، z فضا میں کارتیسی محدود ہیں اور یوں f کی ڈھلوان سطح S کو عمودی ہوگا (مسئلہ 10.5)، بشرطیکہ $\nabla f \neq 0$ ہو۔ نتیجتاً S کے ہر نقطہ پر یکتا عمود، جس کی سمت سطح پر حرکت کرنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہو، کے لئے لازم ہے کہ f کی استمراری ایک درجی جزوی تفرق موجود ہوں اور ہر نقطے پر ان تین میں سے کم از کم ایک جزوی تفرق غیر صفر ہو۔ تب درج ذیل سمتیہ

$$(11.38) \quad n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

سطح S کا اکائی عمودی سمتیہ ہوگا (اور $-n$ اس کا دوسرا اکائی عمودی سمتیہ ہوگا)۔

مثال 11.15: اکائی عمودی سمتیہ

کہہ $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ کا اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ہے۔

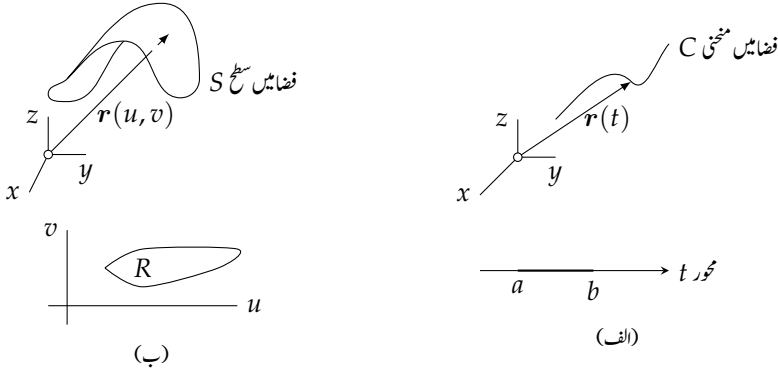
$$n(x, y, z) = \frac{x}{a}i + \frac{y}{a}j + \frac{z}{a}k$$

□

بعض اوقات سطح کی صریح روپ

$$(11.39) \quad z = g(x, y)$$

استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اس کو $z - g(x, y) = 0$ لکھ کر مساوات 11.37 طرز کی خفی روپ حاصل ہوتی ہے۔



شکل 11.18: منحنی اور سطح کی مقدار معلوم روپ

سطح S کو مقدار معلوم روپ

$$(11.40) \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں u اور v غیر تابع حقیقی متغیرات ہیں جنہیں اس روپ کی مقدار معلوم کہتے ہیں۔ $\mathbf{r}(u, v)$ آزاد متغیرات u اور v کا تابع تفاعل ہے۔ سطح S پر نقاط کا تعین گر سمتیہ $\mathbf{r}(u, v)$ ہے۔ مستوی uv میں کسی خطہ R پر (u, v) تبدیل کرنے سے اس سمتیہ کی نوک سطح S پر حرکت کرے گی۔ R میں ہر نقطہ (u_0, v_0) کا سطح S پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کا تعین گر سمتیہ $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ ہے۔ یوں مستوی uv میں خطہ R کا عکس سطح S ہے (شکل 11.18)۔ یہ منحنی C کی مقدار معلوم روپ $\mathbf{r}(t)$ کی طرح ہے جس پر حصہ 10.3 میں غور کیا گیا جہاں t محور پر کسی وقفہ کا عکس منحنی C ہے (شکل 11.18)۔ پس فرق اتنا ہے کہ سطح کی صورت میں دو عدد مقدار معلوم ہوں گے جبکہ منحنی کی صورت میں ایک عدد مقدار معلوم ہو گا۔

سطحوں کی جیومیٹریائی خواص بھی ہو سکتے ہیں جن کو یقینی بنانے کی خاطر ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

مفروضہ

مستوی uv میں کسی خطہ میں، جس کا R حصہ ہے، (مساوات 11.40 میں دیا گیا) سمتی تفاعل $\mathbf{r}(u, v)$ استمراری ہے اور اس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات r_u اور r_v پائے جاتے ہیں، اور R سادہ

باب 11. سمتی تکلی عمل الا حصاء۔ مکمل کے مسئلے

تعلق²⁷ کا محدود²⁸ خطہ ہے۔ مزید پورے R پر درج ذیل ہو گا۔

$$(11.41) \quad r_u \times r_v \neq 0$$

ہموار سطح S کی تعریف کے تحت، سطح کا منفرد عمود پایا جاتا ہے جس کی سمت S پر نقطہ بدلنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہے۔

ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے کہ درج بالا مفروضہ پر پوری اترتی سطح $r(u, v)$ ہموار سطح ہو گی۔

ٹکڑوں میں ہموار سطح²⁹ سے مراد ایسی سطح ہے جس کو محدود تعداد کی ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے کہ ہر ٹکڑا ہموار سطح ہو۔ مثلاً کرہ ہموار سطح ہے جبکہ مکعب کی سرحدی سطح ٹکڑوں میں ہموار ہے۔

مثال 11.16: کرہ کی مقدار معلوم روپ
رداس a کی کرہ کی مقدار معلوم روپ

$$(11.42) \quad r(u, v) = a \cos v \cos u \, i + a \cos v \sin u \, j + a \sin v \, k$$

ہے جہاں $0 \leq u \leq 2\pi$ اور $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ ہیں (شکل 11.19)۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$x = a \cos v \cos u, \quad y = a \cos v \sin u, \quad z = a \sin v$$

مستقل ہیں، بالترتیب خطوط طول بلد³⁰ اور خطوط عرض بلد³¹ کو ظاہر کرتے ہیں۔ مساوات 11.41 کی شرط قطبین $v = -\frac{\pi}{2}$ اور $v = \frac{\pi}{2}$ کے علاوہ کرہ کی ہر نقطہ پر پورا ہوتا ہے۔ مساوات 11.42 کو استعمال کرتے ہوئے زمین کی سطح پر نقطہ کے خط طول بلد اور خط عرض بلد دریافت کیے جاتے ہیں (شکل 11.19)۔ □

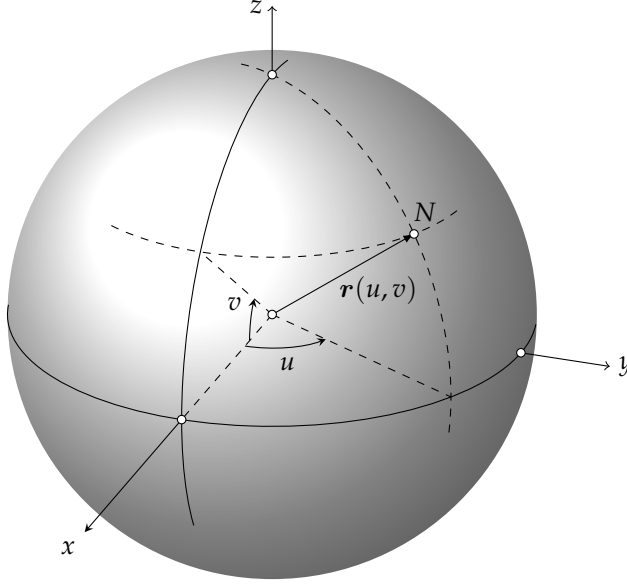
²⁷ simply connected

²⁸ سادہ تعلق کے خطے سے مراد ہے کہ اس خطے میں کسی بھی بند مغزی کو، اس خطے میں رہتے ہوئے، گھٹا کر نقطہ مانند بنایا جاسکتا ہے۔ محدود سے مراد ہے کہ اس خطے کو معقول رداس کے دائرے میں بند کیا جاسکتا ہے۔

²⁹ piecewise smooth surface

³⁰ longitude

³¹ latitude



شکل 11.19: کرہ کی مقدار معلوم روپ

سوالات

سوال 11.69 تا سوال 11.76 میں کس سطح کی مقدار معلوم روپ دی گئی ہے؟ ان میں محدودی منحنی³² $u =$ مستقل اور $v =$ مستقل کیا ہوں گی۔

سوال 11.69: $r = ui + vj$ مستوی xy کے متوازی خطوط اور y کے متوازی خطوط۔

سوال 11.70: $r = u \cos v i + u \sin v j$ رداس u کی دائری سطحیں جن کا مرکز مبدا پر ہے۔ یہ درحقیقت xy مستوی ہے؛ رداس u کے دائرے اور زاویہ v پر مبدا سے گزرتی سیدھے خطوط۔

سوال 11.71: $r = \cos u i + \sin u j + vk$ محور پر z $x^2 + y^2 = 1$ ہیلن؛ گول دائرہ؛ سیدھا خط۔

³²coordinate curves

سوال 11.72: $r = ui + vj + uk$: جوابات: $z = xy$ ؛ $z = x$ اور $z = y$ خط۔

سوال 11.73: $r = 3 \cos ui + \sin uj + vk$: جوابات: z محور پر $x^2 + y^2 = 1$ ؛ z محور کے متوازی خط۔

سوال 11.74: $r = ui + vj + (u + v)k$: جوابات: $z = x + y$ ؛ سطح؛ سیدھے خط۔

سوال 11.75: $r = u \cos vi + u \sin vj + uk$: جوابات: $z^2 = x^2 + y^2$ ؛ سیدھے خط۔

سوال 11.76: $r = u \cos vi + u \sin vj + u^2 k$: جوابات: $z = x^2 + y^2$ ؛ دائرے؛ $z = x^2 = y^2$

سوال 11.77 تا سوال 11.82 میں مقدار معلوم روپ کیا ہے؟

سوال 11.77: yz مستوی۔
جواب: $r = uj + vk$

سوال 11.78: $z = y$ سطح۔
جواب: $r = uj + uk$

سوال 11.79: $x + y + z = 2$ سطح
جواب: $r = ui + vj + (2 - u - v)k$

سوال 11.80: $x^2 + z^2 = a^2$ دائری بیلن
جواب: $r = a \cos ui + vj + a \sin uk$

سوال 11.81: $z = y^2$ قطع مکافی بیلن۔
جواب: $r = ui + vj + v^2 k$

سوال 11.82: $4y^2 + z^2 = 4$ ترخمی بیلن۔
جواب: $r = ui + \cos vj + 2 \sin vk$

سوال 11.83 تا سوال 11.86 میں دیے گئی سطحوں کو مساوات 11.37 کی طرز میں لکھیں۔

سوال 11.83: $r = a \cos v \sin ui + b \cos v \sin uj + c \sin vk$
 جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

سوال 11.84: $r = au \cos vi + bu \sin vj + u^2 k$
 جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

سوال 11.85: $r = au \cosh vi + bu \sinh vj + u^2 k$
 جواب: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

سوال 11.86: $r = a \sinh u \cos vi + b \sinh u \sin vj + c \cosh uk$
 جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$

سوال 11.87: درج ذیل کی اکائی قائمہ سمتیہ دریافت کریں۔ $r = ui + vj + uvk$
 جواب: $\frac{vi+uj-k}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$

سوال 11.88: کرہ پر مثال 11.16 میں غور کیا گیا۔ دریافت کریں کہ کرہ کی مقدار معلوم روپ کہاں مساوات 11.41 کی مفروضہ پر پورا نہیں اترتی۔
 جوابات: $v = \mp \frac{\pi}{2}$

11.6 مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ

اگر سطح S کو $r = r(u, v)$ سے ظاہر کیا جائے تب S پر منحنی کو حقیقی مقدار معلوم t کے درج ذیل دو عدد استمراری تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$(11.43) \quad u = g(t), \quad v = h(t)$$

مثال 11.17: سمتی تفاعل $r(u, v) = a \cos ui + a \sin uj + vk$ رداس a کی بیلن S کو ظاہر کرتا ہے۔ مساوات $u = t$ اور $v = ct$ سطح S پر پیچ دار لچھے کو ظاہر کرتے ہیں۔ ان مساوات کو S کی مساوات میں پر کرنے سے

$$r[u(t), v(t)] = a \cos ti + a \sin tj + ct k$$

ماتا ہے (مثال 10.15)۔

□

فرض کریں کہ سمتی تفاعل $r(u, v)$ ہموار سطح S کو ظاہر کرتی ہے اور S میں منحنی C کو مساوات 11.43 کی طرز سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تب فضا میں منحنی C کو درج ذیل سمتی تفاعل ظاہر کرے گا۔

$$(11.44) \quad r(t) = r[u(t), v(t)]$$

فرض کریں کہ مساوات 11.43 میں دیے دونوں تفاعل کے ایک درجی تفرق پائے جاتے ہوں اور ہر t پر ان میں سے کم از کم ایک تفرق غیر صفر ہو۔ تب C کے ہر نقطے پر C کا ایسا مماس پایا جائے گا جس کی سمت نقطہ تبدیل کرنے سے استمراری تبدیل ہوگی اور C کا مماسی سمتیہ درج ذیل ہوگا۔

$$\dot{r}(t) = \frac{dr}{dt} = r_u \dot{u} + r_v \dot{v}$$

یوں مساوات 11.41 کے تحت سمتیات $r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$ اور $r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$ خطی طور غیر تابع ہوں گے اور ایک سطح تعین کریں گے۔ اس سطح کو نقطہ N پر S کی مماسی سطح³³ کہتے ہیں۔ مماسی سطح کو $T(N)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ $T(N)$ سطح S کو نقطہ N پر چھوتی ہے۔ مساوات 11.44 سے ظاہر ہے کہ نقطہ N پر سطح S کا ہر مماس نقطہ N پر سطح کی مماسی سطح $T(N)$ میں پایا جائے گا (حصہ 10.8)۔

نقطہ N سے گزرتا وہ سیدھا خط جو $T(N)$ کو عمودی ہو نقطہ N پر S کا عمود³⁴ کہلاتا ہے۔ چونکہ r_u اور r_v سطح $T(N)$ میں پائے جاتے ہیں لہذا اکائی سمتیہ

$$(11.45) \quad n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

$T(N)$ کو عمودی ہوگا (شکل 11.20)۔ اس سمتیہ کو N پر S کا اکائی عمودی سمتیہ³⁵ کہتے ہیں۔ n کی سمت u اور v کی انتخاب پر منحصر ہے۔ تبادلہ $u = -\bar{u}$ ، $v = \bar{v}$ یا کوئی اور ایسی تبادلہ جس کی یعقوبی (حصہ 11.3) کی قیمت منفی ہو سے n کی سمت الٹ ہوگی۔

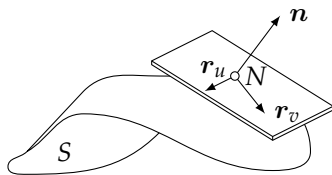
ہم اب سطح S جس کو $r(u, v)$ لکھا گیا ہے، پر منحنی C جس کو مساوات 11.43 کی طرز پر لکھا گیا ہے، کا خطی جزو دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 10.32 اور

$$dr = r_u du + r_v dv$$

³³tangent plane

³⁴normal

³⁵unit normal vector



شکل 11.20: مماسی سطح اور عمودی سمتیہ

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr \cdot dr = (r_u du + r_v dv) \cdot (r_u du + r_v dv) \\ &= r_u \cdot r_u du^2 + 2r_u \cdot r_v du dv + r_v \cdot r_v dv^2 \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ معیاری علامتیں

$$(11.46) \quad E = r_u \cdot r_u, \quad F = r_u \cdot r_v, \quad G = r_v \cdot r_v$$

ہوئے اس کو

$$(11.47) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس دو درجی تفرقی مساوات کو S کی بنیادی صورت اول³⁶ کہتے ہیں۔مثال 11.18: قطبی محدود میں بنیادی صورت اول
درج ذیل سمتی تفاعل

$$r(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j}$$

xy مستوی کو ظاہر کرتی ہے جہاں u اور v قطبی محدود ہیں۔ ان کا تفرق لینے سے

$$r_u = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j}, \quad r_v = -u \sin v \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j}$$

ملتا ہے لہذا $E = 1$ ، $F = 0$ اور $G = v^2$ ہوں گے۔ یوں قطبی محدود $u = \rho$ اور $v = \theta$ استعمال کرتے ہوئے بنیادی صورت اول درج ذیل ہوگی۔

$$(11.48) \quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

□

ہم اب دیکھیں گے کہ اول بنیادی صورت اس لئے اہم ہے کہ اس کی مدد سے لمبائیاں، قوسین کے مابین زاویے اور مطابقتی سطح S پر رقبہ حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

first fundamental form³⁶

لمبائی

مساوات 10.29، مساوات 10.32 اور مساوات 11.47 کو استعمال کرتے ہوئے سطح $S : r(u, v)$ پر منحنی
 $C : u(t), v(t), \quad a \leq t \leq b$

کی لمبائی درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$(11.49) \quad l = \int_a^b \sqrt{\dot{r} \cdot \dot{r}} dt = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt$$

زاویہ

سطح $S : r(u, v)$ میں درج ذیل دو عدد منحنیات پر غور کریں

$$C_1 : u = g(t), v = h(t) \quad \text{اور} \quad C_2 : u = p(t), v = q(t)$$

جو S پر نقطہ N پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ نقطہ N پر درج ذیل سمتیات

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \mathbf{r}[g(t), h(t)] = \mathbf{r}_u \dot{g} + \mathbf{r}_v \dot{h} \\ \mathbf{b} &= \frac{d}{dt} \mathbf{r}[p(t), q(t)] = \mathbf{r}_u \dot{p} + \mathbf{r}_v \dot{q} \end{aligned}$$

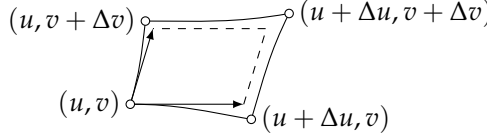
بالترتیب C_1 اور C_2 کو مماسی ہیں۔ N پر C_1 اور C_2 کا متقاطع زاویے سے مراد \mathbf{a} اور \mathbf{b} کے مابین زاویہ γ ہے۔ صفحہ 506 پر مساوات 7.25 کے تحت

$$(11.50) \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

ہو گا جہاں

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{r}_u \dot{g} + \mathbf{r}_v \dot{h}) \cdot (\mathbf{r}_u \dot{p} + \mathbf{r}_v \dot{q}) = E\dot{g}\dot{p} + F(\dot{g}\dot{q} + \dot{h}\dot{p}) + G\dot{h}\dot{q} \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{E\dot{g}^2 + 2F\dot{g}\dot{h} + G\dot{h}^2} \\ |\mathbf{b}| &= \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{E\dot{p}^2 + 2F\dot{p}\dot{q} + G\dot{q}^2} \end{aligned}$$

ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی سطح پر متقاطع منحنیات کے درمیان زاویے کو E ، F ، G اور منحنیات کو ظاہر کرنے والی تفاعل کی نقطہ قطع پر تفرق سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔



شکل 11.21: چھوٹا رقبہ

رقبہ

سطح $S: r(u, v)$ کے رقبہ A سے مراد uv سطح پر S کے مطابقتی خطہ R پر درج ذیل دوہرا تکمل ہے

$$(11.51) \quad A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv$$

جہاں

$$(11.52) \quad dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv$$

رکن رقبہ³⁷ کہلاتا ہے۔

مساوات 11.51 کو شکل 11.21 سے یوں اخذ کیا جاسکتا ہے کہ سمتی ضرب کی تعریف کے تحت اس چھوٹے متوازی الاضلاع کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta A = |\mathbf{r}_u \Delta u \times \mathbf{r}_v \Delta v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

مساوات 11.51 کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر S کو S_1, \dots, S_n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر S_k کے رقبہ کو S_k میں کسی نقطے پر مماسی سطح کے کچھ رقبے کے لگ بھگ فرض کرتے ہوئے تمام چھوٹے رقبوں کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ ایسا مجموعہ ہر $n = 1, 2, \dots$ کے لئے یوں حاصل کیا جاتا ہے کہ n کی قیمت لاتناہی تک پہنچنے سے سب سے بڑے S_k کے اطراف کی لمبائی صفر تک پہنچے۔ ان مجموعوں کی حد مساوات 11.51 کا تکمل ہو گا۔

ہم مساوات 11.51 کو E, F, G کی صورت میں لکھ کر اول بنیادی صورت سے رقبہ حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.48 اور مساوات 11.46 سے

$$(11.53) \quad |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2$$

element of area³⁷

لکھ کر مساوات 11.51 کو

$$(11.54) \quad A = \iint_R \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

اور مساوات 11.52 کو

$$(11.55) \quad dA = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 11.19: اندر سے کسی محور کے گرد بند قوس (عموماً دائرے) کو (محور قطع کیے بغیر) گھمانے سے اندر سے³⁸ حاصل ہوتا ہے (آپ نے پچپن میں اندر سے ضرور کھائے ہوں گے)۔ شکل 11.22-الف میں دائرہ C کو z محور کے گرد گمانے سے اندر سے حاصل کیا گیا ہے جس کی سطح کی سمتی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v) \cos u \, \mathbf{i} + (a + b \cos v) \sin u \, \mathbf{j} + b \sin v \, \mathbf{k} \quad (a > b > 0)$$

مساوات 11.46 سے

$$E = (a + b \cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = b^2$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 = b^2(a + b \cos v)^2$$

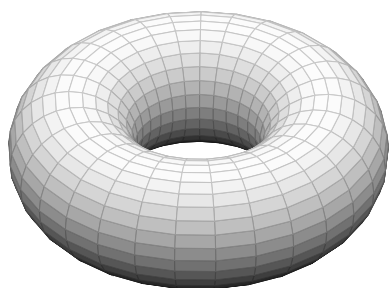
ہوگا جس سے اندر سے کی سطح کا رقبہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos v) \, du \, dv = 4ab\pi^2$$

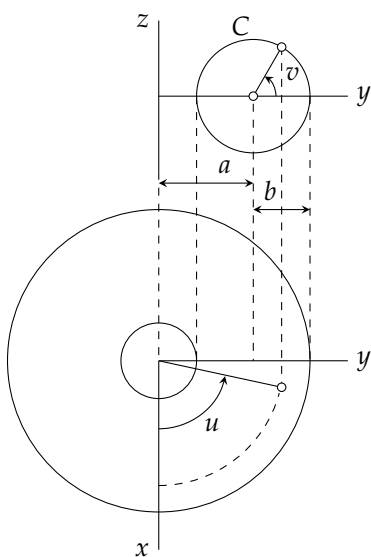
□

فرض کریں کہ کسی سطح کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(11.56) \quad z = g(x, y)$$



(ب)



(الف)

شکل 11.22: اندر سه

اس میں $x = u$ اور $y = v$ پر کرتے ہوئے مقدار معلوم روپ

$$(11.57) \quad \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + g(u, v)\mathbf{k}$$

میں لکھا جاسکتا ہے جس کے u اور v کے ساتھ جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$(11.58) \quad \mathbf{r}_u = \mathbf{i} + g_u\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + g_v\mathbf{k}$$

اس طرح اول بنیادی صورت کے عددی سر

$$E = 1 + g_u^2, \quad F = g_u g_v, \quad G = 1 + g_v^2$$

ہوں گے لہذا

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 = 1 + g_u^2 + g_v^2$$

ہو گا۔ اب چونکہ $u = x$ اور $v = y$ ہیں لہذا رقبہ درج ذیل ہو گا

$$(11.59) \quad A = \iint_{\bar{S}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

جہاں سطح S کا xy مستوی پر عمودی سایہ \bar{S} ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ

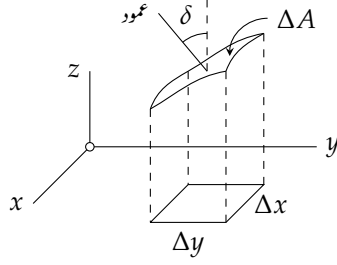
$$(11.60) \quad dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

ہو گا۔ بعد میں استعمال کی خاطر ہم ثابت کرتے ہیں کہ اس کو

$$(11.61) \quad dA = \sec \delta dx dy$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں S کی (غیر سمتی) عمود اور z محور کے درمیان زاویہ حادہ δ ہے۔ شکل 11.23 سے اس کی جیومیٹریائی وجہ ظاہر ہے جہاں چھوٹا رقبہ ΔA کا xy مستوی پر عمودی عکس $\Delta A \cos \delta$ ہو گا جو $\Delta x \Delta y$ کے برابر ہو گا جس کو $\overline{\Delta A}$ لکھا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta A = \overline{\Delta A} \sec \delta = \sec \delta \Delta x \Delta y$$



شکل 11.23: مساوات 11.61 کا ثبوت

مساوات 11.61 کی اب تجلیلی ثبوت پیش کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ $\mathbf{a} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ ہے۔ یہ جانتے ہوئے کہ $u = x$ اور $v = y$ ہیں اور مساوات 11.58 کو استعمال کرتے ہوئے سمتی ضرب کی تعریف سے

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 1$ ہو گا۔ اب اندرونی ضرب کی تعریف سے $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{a}| \cos \delta^*$ ہو گا جہاں \mathbf{a} اور مثبت z محور کے درمیان زاویہ δ^* ہے۔ ان کو ملا کر $|\mathbf{a}| \cos \delta^* = 1$ ملتا ہے جس سے $\cos \delta^* > 0$ اخذ ہوتا ہے لہذا $\delta^* < \frac{\pi}{2}$ ہو گا یعنی δ^* زاویہ حادہ ہے اور یوں $\delta^* = \delta$ ہے۔ اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جس سے مساوات 11.61 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

$$|\mathbf{a}| \cos \delta = 1, \quad \implies \quad \sec \delta = |\mathbf{a}| \quad \left(\delta < \frac{\pi}{2} \right)$$

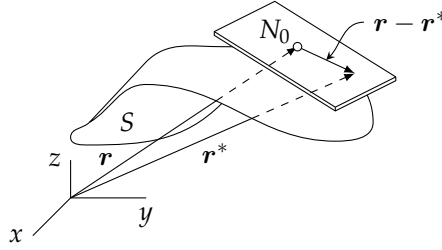
سوالات

سوال 11.89: ثابت کریں کہ نقطہ N پر سطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ کی مماسی سطح کو

$$(11.62) \quad \mathbf{r}^*(p, q) = \mathbf{r} + p\mathbf{r}_u + q\mathbf{r}_v$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ کی قیمتیں نقطہ N کے لحاظ سے ہیں۔ مزید ثابت کریں کہ اس کو درج ذیل غیر سمتی سہ ضرب لکھا جاسکتا ہے۔

$$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_u \quad \mathbf{r}_v) = 0$$



شکل 11.24: مماسی سطح کی مساوات (سوال 11.89 اور سوال 11.90)

جواب: شکل 11.20 میں مماسی سطح پر نقطہ N سے کسی بھی نقطے تک سمتیہ کو خطی طور غیر تابع سمتیات r_u اور r_v سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یوں شکل 11.24 میں تعین گر سمتیہ r^* کو مساوات 11.62 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

سوال 11.90: سطح $f(x, y, z) = 0$ کا نقطہ N_0 پر مماسی سطح کی مساوات دریافت کریں۔ اس نقطے پر اس کا اکائی عمودی سمتیہ بھی دریافت کریں۔

جوابات: اگر نقطہ N_0 کا تعین گر سمتیہ r جبکہ مماسی سطح پر عمومی نقطے کا تعین گر سمتیہ r^* ہو (شکل 11.24) تب سمتیہ $r^* - r$ نقطہ N_0 پر سطح کا مماس ہو گا۔ چونکہ ∇f سطح کا عمود ہے لہذا مماسی سطح کی مساوات $(r^* - r) \cdot \nabla f = 0$ ہو گی۔ اکائی عمودی سمتیہ $n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ ہو گا۔

سوال 11.91: سطح $z = g(x, y)$ کا نقطہ N_0 پر مماسی سطح کی مساوات دریافت کریں۔ مزید اس نقطے پر اکائی عمودی سمتیہ بھی دریافت کریں۔

جوابات: $xg_x + yg_y - z = x_0g_x + y_0g_y - g(x_0, y_0), \quad n = \frac{g_x i + g_y j - k}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$

سوال 11.92: اگر سطح $S: r(u, v)$ کا اکائی عمودی سمتیہ n ہو (مساوات 11.45) تب $u = -\tilde{u}$ ، $v = \tilde{v}$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $r^*(\tilde{u}, \tilde{v})$ کا اکائی عمودی سمتیہ $-n$ ہو گا۔
جواب: مساوات 11.45 کے تحت $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ ہے۔ $r^*(\tilde{u}, \tilde{v})$ استعمال کرتے ہوئے

$$r_u^*(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\partial r}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} = -r_u, \quad r_v^*(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\partial r}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} = r_v$$

سے اکائی عمودی سمتیہ $-\frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ حاصل ہوتا ہے جو $-n$ کے برابر ہے۔

سوال 11.93 تا سوال 11.98 میں نقطہ $N_0 : (x_0, y_0, z_0)$ پر سطح کی مماسی سطح کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 11.93 : $N_0 : (3, 2, 6)$: $z = xy$,
 جواب: $f = xy - z = 0$ لکھتے ہوئے $\nabla f = yi + xj - k$ ملتا ہے جس کی N_0 پر قیمت
 $\nabla f_N = 2i + 3j - k$ ہے۔ ہم N_0 کا تعین کر سمتیہ $r = 3i + 2j + 6k$ اور مماسی سطح پر عمومی نقطے کا
 تعین کر سمتیہ $r^* = xi + yj + zk$ لکھتے ہیں۔ یوں $r - r^* = (x - 3)i + (y - 2)j + (z - 6)k$
 ہو گا۔ اس طرح $(r - r^*) \cdot \nabla f_N = 0$ سے مماسی سطح کی مساوات $2x + 3y - z = 6$ حاصل ہوتی
 ہے۔

سوال 11.94 : $N_0 : (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$,
 جواب: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 3z = 13$

سوال 11.95 : $N_0 : (2, 4, 3)$: $y = x^2$,
 جواب: $4x - y = 4$

سوال 11.96 : $N_0 : (2, 2, 3)$: $x^2 + y^2 = 8$,
 جواب: $x + y = 4$

سوال 11.97 : $N_0 : (2, 3, 13)$: $z = x^2 + y^2$,
 جواب: $4x + 6y - z = 13$

سوال 11.98 : $N_0 : (1, 2, 1)$: $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$,
 جواب: $2x + 2y - 3z = 3$

سوال 11.99 تا سوال 11.104 میں اول بنیادی صورت دریافت کریں۔

سوال 11.99 : $r = ui + vj$
 جواب: $du^2 + dv^2$

سوال 11.100 : $r = ui + vj + uvk$
 جواب: $(v^2 + 1) du^2 + 2uv du dv + (u^2 + 1) dv^2$

سوال 11.101 : $r = a \cos v \cos ui + a \cos v \sin uj + a \sin vk$ کرہ
 جواب: $a^2 \cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$

باب 11. سمتی کملی عمل الا حصاء۔ کمل کے مسئلے

سوال 11.102: اندر سے $(a > b > 0)$
 $r = (a + b \cos v) \cos ui + (a + b \cos v) \sin uj + b \sin vk$,
 جواب: $(a^2 + 2ab \cos v + b^2 \cos^2 v) du^2 + b^2 dv^2$

سوال 11.103: $r = ui + vj + v^2 k$
 جواب: $du^2 + (1 + 4v^2) dv^2$

سوال 11.104: بیلن $r = a \cos ui + a \sin uj + vk$
 جواب: $a^2 du^2 + dv^2$

سوال 11.105: ثابت کریں کہ سطح $r = r(u, v)$ پر محدودی منحنیات $u = c_1$ اور $v = c_2$ صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتی ہیں جب $F = r_u \cdot r_v = 0$ ہو۔ یہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔
 جواب: r_u اور r_v ان منحنیات کو مماسی ہیں۔ یوں اندرونی ضرب کی تعریف سے ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوال 11.106 تا سوال 11.109 میں دیے گئے سطحوں کا رقبہ مساوات 11.51 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.106: $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq b$
 جواب: $2\pi ab$

سوال 11.107: کرہ $r = a \cos v \cos ui + a \cos v \sin uj + a \sin vk$
 جواب: $4\pi a^2$

سوال 11.108: $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$
 جواب: $\frac{\pi}{6}(\sqrt{125} - 1)$

سوال 11.109: $z^2 = x^2 + y^2, -1 \leq z \leq 1$
 جواب: $2\sqrt{2} \pi$

11.7 سطحی تکمل

دوہرا تکمل (حصہ 11.3) کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے سطحی تکمل کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ سطحی تکمل کی تعریف عین دوہرا تکمل کی طرز پر ہے۔

فرض کریں کہ S کسی سطح کا محدود حصہ ہے اور تفاعل $f(x, y, z)$ سطح S پر معین اور استمراری ہے۔ ہم مکمل بے قاعدگی سے S کو S_1, \dots, S_n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کے رقبے بالترتیب $\Delta A_1, \dots, \Delta A_n$ ہیں۔ ہم مکمل بے قاعدگی سے ہر S_k میں کوئی نقطہ N_k منتخب کرتے ہیں جس کے محدد x_k, y_k, z_k ہوں گے۔ اب ہم درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta A_k \quad (11.63)$$

ہم ایسے مجموعے $n = 1, 2, \dots$ کے لئے مکمل بے قاعدگی کے ساتھ یوں حاصل کرتے ہیں کہ n کی قیمت لانتناہی کے قریب کرنے سے سب سے بڑا حصہ S_k نقطہ مانند ہوتا ہو۔ یوں حاصل اعداد J_1, J_2, \dots کا ایک حد پایا جاتا ہے جس کی قیمت پر نانو حصوں کی انتخاب اور ناہی ہر حصے میں نقطہ کی انتخاب کا کوئی اثر پایا جاتا ہے (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو S پر تفاعل $f(x, y, z)$ کی سطحی تکمل³⁹ کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_S f(x, y, z) dA \quad (11.64)$$

سطحی تکمل (مساوات 11.64) کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہمیں اس کو دوہرا تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

اگر S کی مقدار معلوم روپ $r(u, v)$ ہو تب $dA = |r_u \times r_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv$ ہوگا (مساوات 11.52 اور مساوات 11.55) لہذا

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dA &= \iint_R f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] |r_u \times r_v| du dv \\ &= \iint_R f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} du dv \end{aligned} \quad (11.65)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں uv سطح میں R سطح S کا مطابقتی خطہ ہے۔

اسی طرح اگر S کو $z = g(x, y)$ سے ظاہر کیا گیا ہو تب مساوات 11.60 کی مدد سے درج ذیل ہو گا۔

$$(11.66) \quad \iint_S f(x, y, z) dA = \iint_{\bar{S}} f[x, y, g(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

مثال 11.20: جمودی معیار اثر

کروی یکساں خاصیت کی جھلی $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ جس کی کیت M ہے کا z محور کے لحاظ سے جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

اگر کیت سطح S پر یوں پھیلا ہو کہ کیت کی سطحی کثافت $\mu(x, y, z)$ ہو تب کسی محور L کے لحاظ سے جمودی معیار اثر

$$(11.67) \quad I = \iint_S \mu D^2 dA$$

ہو گا جہاں L سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ $D(x, y, z)$ ہے۔

چونکہ موجودہ مثال میں جھلی یکساں خاصیت رکھتی ہے لہذا μ ایک مستقل ہو گا۔ کروی جھلی کا رقبہ $A = 4\pi a^2$ ہے لہذا

$$\mu = \frac{M}{A} = \frac{M}{4\pi a^2}$$

ہو گا۔ کرہ کو مساوات 11.42 سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 11.46 سے

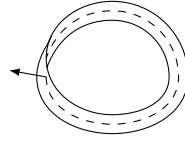
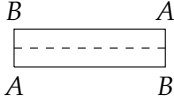
$$E = a^2 \cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2$$

حاصل ہوتا ہے لہذا

$$dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv = a^2 \cos v du dv$$

ہو گا۔ مزید z محور سے کسی نقطہ (x, y, z) کا فاصلہ $D = \sqrt{x^2 + y^2} = a \cos v$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$I = \iint_S \mu D^2 dA = \frac{M}{4\pi a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^4 \cos^3 v du dv = \frac{2Ma^2}{3}$$



(I) موبیوس پٹی

□

کئی عملی سطحی مکمل میں سطح کی سمت بندی اہمیت رکھتی ہے لہذا ہموار سطح (حصہ 11.5) سے شروع کرتے ہوئے سطح کی سمت بندی پر غور کرتے ہیں۔

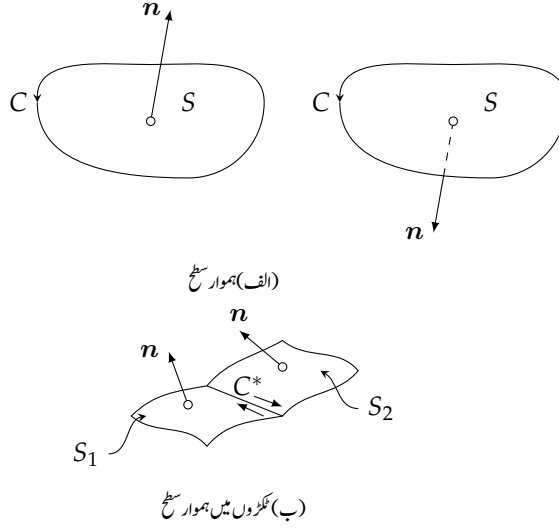
فرض کریں کہ S ایک ہموار سطح ہے جس پر N کوئی نقطہ ہے۔ ہم N پر S کا اکائی عمودی سمتیہ n منتخب کر سکتے ہیں۔ یوں n کی سمت N پر S کی مثبت عمودی سمت ہوگی۔ ظاہر ہے کہ n کو دو ہی طریقوں سے (آپس میں الٹ رخ) چنا جاسکتا ہے۔

ایک ہموار سطح اس صورت قابل سمت بند 40 کہلاتی ہے جب اس سطح پر کسی نقطہ N_0 پر دی گئی مثبت سمت کو پوری سطح پر یکساں اور استمراری طور پر جاری رکھنا ممکن ہو۔

یوں سطح S اس صورت قابل سمت بند ہوگی جب اس پر نقطہ N_0 سے گزرتی کوئی ایسی سطح C نہ پائی جاتی ہو جس پر منتخب کردہ مثبت سمت کو C پر مسلسل ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے کے بعد واپس N_0 لانے سے سمت الٹ ہوتی ہو۔

ہموار سطح کا (حسب ضرورت) چھوٹا حصہ ہر صورت قابل سمت بند ہوتا ہے۔ البتہ وسیع سطح کے لئے ایسا نہیں کہا جاسکتا ہے۔ غیر قابل سمت بند سطحیں پائی جاتی ہیں جن کی مشہور مثال موبیوس پٹی 41 کو شکل 11.25 میں دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں نقطہ N_0 پر عمودی سمتیہ کو نقطہ دار لکیر پر حرکت دے کر واپس N_0 پہنچانے سے عمودی سمتیہ کا رخ الٹ ہو جائے گا۔ کاغذ کی لمبی مستطیل پٹی کو بل دے کر چھوٹے اطراف کو آپس میں یوں جوڑنے سے کہ A اور A آپس میں ملیں اور B اور B آپس میں ملیں، موبیوس پٹی 42 بنائی جاسکتی ہے۔ اگر S قابل سمت بند ہو تب ہم n کی دو میں سے ایک ممکنہ رخ کو مثبت سمت کہتے ہوئے S کو سمت بند بنا سکتے ہیں۔

⁴⁰ orientable⁴¹ Möbius strip⁴² جرمن ریاضی دان اگست فرڈینانڈ موبیوس [1790-1868]



شکل 11.26: سطح کی سمت بندی

اگر S کی سرحد C سادہ بند منحنی ہو تب ہم n کے لحاظ سے C کو سمت بند بنا سکتے ہیں۔ یہ عمل شکل 11.26-الف میں دونوں ممکنہ عمودی سمتیات کے لحاظ سے دکھایا گیا ہے۔ ہم اب سمت بندی کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے اس کو ٹکڑوں میں ہموار سطحوں کے لئے بیان کرتے ہیں۔ ٹکڑوں میں ہموار سطح S اس صورت قابل سمت بند ہوگی جب ایسا ممکن ہو کہ ہر دو ٹکڑوں S_1 اور S_2 کے مابین مشترکہ سرحدی منحنی C^* کی مثبت سمت S_1 اور S_2 کے لحاظ سے آپس میں الٹ ہوں۔ شکل 11.26-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

فرض کریں کہ S ٹکڑوں میں قابل سمت بند سطح ہے۔ ہم اکائی عمودی سمتیہ n چنتے ہوئے S کو سمت بند کرتے ہیں۔ n اور مثبت x ، y ، z محور کے درمیان زاویوں کو α ، β ، γ سے ظاہر کرتے ہوئے

$$(11.68) \quad n = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ تفاعل $u_1(x, y, z)$ ، $u_2(x, y, z)$ ، $u_3(x, y, z)$ سطح S کے ہر نقطہ پر معین اور استمراری ہیں۔ ہمیں عموماً درج ذیل کمالات حل کرنے ہوں گے۔

$$\iint_S u_1 dy dz, \quad \iint_S u_2 dx dz, \quad \iint_S u_3 dx dy$$

کمل کی تعریف کے تحت ان سے مراد درج ذیل ہے (شکل 11.23 سے رجوع کریں)۔

$$\begin{aligned}
 \iint_S u_1 dy dz &= \iint_S u_1 \cos \alpha dA \\
 \iint_S u_2 dx dz &= \iint_S u_2 \cos \beta dA \\
 \iint_S u_3 dx dy &= \iint_S u_3 \cos \gamma dA
 \end{aligned}
 \tag{11.69}$$

صاف ظاہر کہ ان کملات کی قیمت کا دار و مدار n کی انتخاب یعنی S کی سمت بندی پر ہو گا۔ S کی سمت بندی الٹ کرنے سے n کے اجزاء $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، $\cos \gamma$ منفی اکائی سے ضرب ہوں گے لہذا کمل کی قیمت بھی منفی ایک (-1) سے ضرب ہو گی۔

اس طرح کے تین عدد کملات کو سمتیہ کی استعمال سے نہایت سادہ طرز میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سمتیہ

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

متعارف کرتے ہوئے مساوات 11.69 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 \iint_S (u_1 dy dz + u_2 dx dz + u_3 dx dy) \\
 = \iint_S (u_1 \cos \alpha + u_2 \cos \beta + u_3 \cos \gamma) dA = \iint_S u \cdot n dA
 \end{aligned}
 \tag{11.70}$$

مساوات 11.69 کے کملات حل کرنے کی خاطر انہیں مستوی سطح پر دوہرا کملات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ اس عمل پر غور کرتے ہیں۔

اگر S کو $z = h(x, y)$ سے ظاہر کیا گیا ہو اور اس کی سمت بندی یوں ہو کہ n اوپر کی رخ ہو تب γ زاویہ حادہ ہو گا لہذا مساوات 11.61 میں $\delta = \gamma$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 11.69

$$\iint_S u_3(x, y, z) dx dy = + \iint_{\bar{R}} u_3[x, y, h(x, y)] dx dy
 \tag{11.71}$$

باب 11. سمتی کملی علم الاحصاء۔ کمل کے مسئلے

حاصل ہو گا جہاں S کا قائمہ الزاویہ سایہ xy مستوی پر \bar{R} ہے۔ اگر n کا رخ نیچے کو ہو تب γ زاویہ منفرد ہو گا اور ہمیں درج ذیل ملے گا۔

$$(11.72) \quad \iint_S u_3(x, y, z) dx dy = - \iint_{\bar{R}} u_3[x, y, h(x, y)] dx dy$$

مساوات 11.69 کے باقی دو عدد کمل کو بھی اسی طرح دہرا کمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

اگر S کو مقدار معلوم روپ

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

سے ظاہر کیا گیا ہو تب S کی دو ممکنہ عمودی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$(11.73) \quad \text{(الف)} \quad \mathbf{n} = + \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad \text{(ب)} \quad \mathbf{n} = - \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

اب مساوات 11.68 کے دونوں اطراف کا \mathbf{k} کے ساتھ اندرونی ضرب لینے سے $\cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$ ملتا ہے جبکہ مساوات 11.52 کے تحت $dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$ ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} \cos \gamma dA &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dA = \mp \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv = \mp \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv \\ &= \mp \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر یقینی پایا جاتا ہے (حصہ 11.3)۔ اس طرح مساوات 11.69 میں

$$(11.74) \quad \iint_S u_3(x, y, z) dx dy = \mp \iint_R u_3[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

ہو گا جہاں مثبت علامت مساوات 11.73-الف اور منفی علامت مساوات 11.73-ب کی صورت میں استعمال ہو گا۔ یہاں S کا مطابق خطہ uv مستوی میں R ہے۔

سوالات

سوال 11.110 تا سوال 11.117 میں S کو مقدار معلوم روپ میں لکھ کر مساوات 11.65 استعمال کرتے ہوئے $\iint_S f(x, y, z) dA$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.110: $f = 2x - 1$, $S : x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 4$
جواب: -8π

سوال 11.111: $f = 2x$, $S : z = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$
جواب: $\frac{2}{3}(17\sqrt{17} - 1)$

سوال 11.112: $f = xy$, $S : z = xy$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$
جواب: 0

سوال 11.113: $f = 3x^3 \cos y$, $S : z = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{10\sqrt{10}-1}{18}$

سوال 11.114: $f = xy$, $S : x^2 + y^2 = 9$, $-1 \leq z \leq 2$
جواب: 0

سوال 11.115: $f = 2x - y + z$, $S : x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$
جواب: π

سوال 11.116: ربع اول میں $S : x + y + z = 1$
جواب: $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

سوال 11.117: $f = 2x + 3y$, $S : z = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$
جواب: $\frac{7\sqrt{5}-1 \sinh^{-1} 2}{4}$

سوال 11.118: فضا میں سطح S کی کثافت کمیت (کمیت فی اکائی رقبہ) $\sigma(x, y, z)$ ہے۔ کل کمیت M اور مرکز ثقل $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ کی درج ذیل کلیات درست ہونے کا جواز پیش کریں۔

$$M = \iint_S \sigma \, dA, \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x \sigma \, dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S y \sigma \, dA, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iint_S z \sigma \, dA$$

سوال 11.119: فضا میں سطح S کی کثافت کمیت (کمیت فی اکائی رقبہ) $\sigma(x, y, z)$ ہے۔ درج ذیل کلیات x ، y ، z محور کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_z دیتے ہیں۔ ان کی درست ہونے کا جواز پیش کریں۔

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \sigma \, dA, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \sigma \, dA, \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \sigma \, dA$$

باب 11. سمتی عملی علم الاحصاء۔ مکمل کے مسئلے

سوال 11.120 تا سوال 11.124 میں دیے محور کے لحاظ سے جھلی S کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔ کثافت $\sigma = 1$ ہے۔

سوال 11.120 : $S : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq h, \quad z$ محور
جواب: $2\pi h$

سوال 11.121 : $S : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq h, \quad z$ محور
جواب: $\frac{\sqrt{2}h\sqrt{1-h^2}}{3}(2h^2 + 1) + \sqrt{2} \sinh^{-1} h$

سوال 11.122 : اندر سے $r = (a + b \cos v) \cos ui + (a + b \cos v) \sin uj + b \sin vk,$
($a > b > 0$)
جواب: $2\pi^2 ab(2a^2 + 3b^2)$

سوال 11.123 : اندر سے (سوال 11.122) جبکہ محور xz مستوی میں خط $x = a$ ہے۔
جواب: $2\pi^2 ab(4a^2 + 3b^2)$

سوال 11.124 : اندر سے (سوال 11.122) جبکہ محور xz مستوی میں خط $x = a - b$ ہے۔
جواب: $2\pi^2 ab(4a^2 - 4ab + 5b^2)$

سوال 11.125 : (مسئلہ سٹائنر⁴³) اگر کل کمیت M کے مرکز ثقل سے گزرتی محور A کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر I_A ہو تب ثابت کریں کہ A کے متوازی اور اس سے k فاصلہ پر محور B کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر I_B درج ذیل ہوگی۔

$$I_B = I_A + k^2 M$$

سوال 11.126 : مسئلہ سٹائنر⁴⁴ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.122 کی جواب سے سوال 11.123 اور سوال 11.124 کے جوابات حاصل کریں۔

سوال 11.127 : موہوس پٹی کو نقطہ دار لکیر پر کھینچی سے کاٹ کر دیکھیں کیا ملتا ہے؟

⁴³Steiner's theorem
⁴⁴سٹائنر لینڈ کے یعقوب سٹائنر [1796-1863]

11.8 تہرا مکمل۔ گاوس کا مسئلہ پھیلاؤ

دہرا مکمل (حصہ 11.3) کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے تہرا مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ فضا کے کسی بند محدود⁴⁵ خطہ T میں تفاعل $f(x, y, z)$ معین ہے۔ ہم تینوں محور کے متوازی سطحوں سے T کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہم T کے متوازی السطوح ٹکڑوں کو ہم 1 تا n سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایسے ہر ٹکڑے کے اندر ہم بے قاعدگی سے کوئی نقطہ منتخب کرتے ہیں، مثلاً ٹکڑا k میں نقطہ (x_k, y_k, z_k) چنا جاتا ہے، اور درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta H$$

جہاں ٹکڑا k کی حجم ΔH_k ہے۔ ہم مثبت عدد صحیح n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، ... کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے خطہ میں، جس کا T حصہ ہو، $f(x, y, z)$ استمراری ہے اور T کو لامتناہی تعداد کی ہموار سطحیں گھیرتی ہیں۔ ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، ... کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چٹائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x, y_k, z_k) کی چٹائی سے بالکل آزاد ہو گا (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو خطہ T پر $f(x, y, z)$ کا تہرا مکمل⁴⁶ کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{یا} \quad \iiint_T f(x, y, z) dH$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ ایسا استمراری سمتی تفاعل u جس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کی پھیلاؤ کا فضا میں خطہ T پر تہرا مکمل کا متبادل T کی سطح پر u کے عمودی جزو کی سطحی مکمل میں کیا جاسکتا ہے۔ ایسا مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے کیا جاتا ہے جو دو بعدی مسئلہ گرین کا تین بعدی مماثل ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کئی نظریاتی اور عملی مسائل میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔

⁴⁵ "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو معقول وسعت کی کرہ میں گھیرا جاسکتا ہے۔
triple integral⁴⁶

مسئلہ 11.2: گاوس کا مسئلہ پھیلاؤ (حجمی تکمیل سے سطحی تکمیل اور سطحی تکمیل سے حجمی تکمیل کا حصول) فرض کریں کہ فضا میں بند محدود خطہ T کی سرحد S ٹکڑوں میں ہموار (حصہ 11.5) اور قابل سمت بند ہے۔ مزید فرض کریں کہ خطہ T میں $u(x, y, z)$ ایک استمراری سمتی تفاعل ہے جس کے T میں استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ تب درج ذیل ہوگا

$$(11.75) \quad \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV = \iint_S u_n \, dA$$

جہاں T کی لحاظ سے سطح S پر \mathbf{u} کا باہر رخ عمودی جزو

$$(11.76) \quad u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

ہے اور \mathbf{n} سطح S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ ہے۔

ثبوت: ہم \mathbf{u} اور \mathbf{n} کو ارکان کی صورت میں لکھتے ہیں

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} \quad \mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

جہاں \mathbf{n} اور مثبت x ، y ، z محور کے مابین زاویے بالترتیب α ، β ، γ ہیں۔ یوں مساوات 11.75 درج ذیل لکھی جاسکتی ہے

$$(11.77) \quad \iiint_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_S (u_1 \cos \alpha + u_2 \cos \beta + u_3 \cos \gamma) \, dA$$

جسے مساوات 11.70 کی مدد سے درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

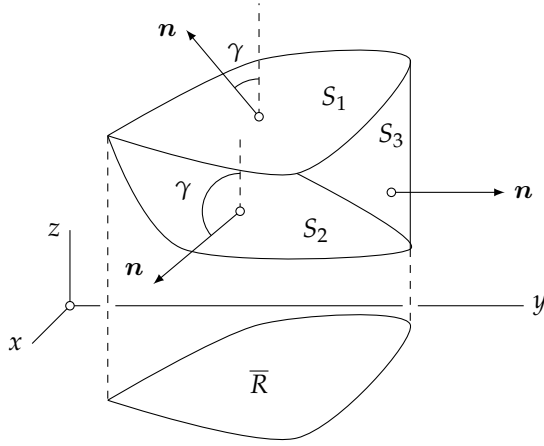
$$(11.78) \quad \iiint_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_S (u_1 \, dy \, dz + u_2 \, dx \, dz + u_3 \, dx \, dy)$$

اب ظاہر ہے کہ اگر درج ذیل تین تعلقات یک وقت درست ہوں تب مساوات 11.77 درست ہوگا۔

$$(11.79) \quad \iiint_T \frac{\partial u_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \iint_S u_1 \cos \alpha \, dA$$

$$(11.80) \quad \iiint_T \frac{\partial u_2}{\partial y} \, dx \, dy \, dz = \iint_S u_2 \cos \beta \, dA$$

$$(11.81) \quad \iiint_T \frac{\partial u_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_S u_3 \cos \gamma \, dA$$



شکل 11.27: مخصوص خط

ہم مساوات 11.81 کو ایک خصوصی خط T کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کی سرحد ٹکڑوں میں ہموار قابل سمت بند سطح S ہے۔ اس مخصوص T کی خاصیت ہے کہ x ، y یا z محور کے متوازی کوئی بھی خط جو T کو قطع کرتی ہو، کا زیادہ سے زیادہ صرف ایک حصہ (یا صرف ایک نقطہ) T کے ساتھ مشترک ہو گا۔ اس خاصیت کا مطلب ہے کہ T کو درج ذیل روپ میں لکھا جاسکتا ہے

$$(11.82) \quad g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$$

جہاں xy مستوی پر T کے قائمہ الزاویہ سائے \bar{R} میں نقطہ (x, y) ہو گا۔ ظاہر ہے کہ سطح $g(x, y)$ کی نچلی سطح S_2 کو ظاہر کرتی ہے جبکہ سطح $h(x, y)$ کی بالائی سطح S_1 کو ظاہر کرتی ہے (شکل 11.27)۔ عین ممکن ہے کہ S کا کوئی کھڑا حصہ S_3 بھی پایا جاتا ہو۔ (حصہ S_3 کی انخطاطی شکل ایک منحنی ہو سکتی ہے مثلاً کروی T کی صورت میں S_3 ایک گول دائرہ ہو گا۔)

مساوات 11.81 کو مساوات 11.82 کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ کسی خط جس کا T حصہ ہے میں u استمراری قابل تفرق ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(11.83) \quad \iiint_T \frac{\partial u_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\bar{R}} \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial u_3}{\partial z} dz \right] dx dy$$

اس میں اندرونی کمل لیتے ہیں۔

$$\int_g^h \frac{\partial u_3}{\partial z} dz = u_3(x, y, h) - u_3(x, y, g)$$

یوں مساوات 11.83 کا بائیں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا۔

$$(11.84) \quad \iint_{\bar{R}} u_3[x, y, h(x, y)] dx dy - \iint_{\bar{R}} u_3[x, y, g(x, y)] dx dy$$

آئیں اب ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.81 کا دایاں ہاتھ بھی اسی کے برابر ہے۔ چونکہ S_3 پر $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ہے لہذا $\cos \gamma = 0$ ہو گا اور یوں مساوات 11.83 کے دائیں ہاتھ S_3 پر سطحی کمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$\iint_S u_3 \cos \gamma dA = \iint_{S_1} u_3 \cos \gamma dA + \iint_{S_2} u_3 \cos \gamma dA$$

S_1 پر γ زاویہ حادہ ہے لہذا $\sigma = \gamma$ لیتے ہوئے مساوات 11.61 سے $dA = \sec \gamma dx dy$ ملتا ہے۔ چونکہ $\cos \gamma \sec \gamma = 1$ کے برابر ہے لہذا یوں

$$\iint_{S_1} u_3 \cos \gamma dA = \iint_{\bar{R}} u_3[x, y, h(x, y)] dx dy$$

حاصل ہو گا جو مساوات 11.84 میں پہلی دوہرا کمل کے برابر ہے۔ اسی طرح S_2 پر γ زاویہ منفرجہ ہے لہذا $\pi - \gamma$ مساوات 11.61 میں زاویہ حادہ σ کے مترادف ہو گا۔ یوں

$$dA = \sec(\pi - \gamma) dx dy = -\sec \gamma dx dy$$

لکھتے ہوئے

$$(11.85) \quad \iint_{S_2} u_3 \cos \gamma dA = - \iint_{\bar{R}} u_3[x, y, g(x, y)] dx dy$$

ہو گا جو عین 11.61 میں دوسرے دوہرا کمل کے برابر ہے۔ یوں مساوات 11.81 ثابت ہوا۔

مساوات 11.79 اور مساوات 11.80 کو بالکل اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے جہاں مساوات 11.82 کی طرح T کو درج ذیل سے ظاہر کیا جائے گا۔

$$\tilde{g}(y, z) \leq x \leq \tilde{h}(y, z) \quad \text{اور} \quad g^*(x, z) \leq y \leq h^*(x, z)$$

اس طرح مسئلہ پھیلاؤ کا مخصوص خطے میں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ایسا خطہ T جس کو اضافی سطحوں کی مدد سے محدود تعداد کی مخصوص ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کے ہر ٹکڑے پر مسئلہ پھیلاؤ لاگو کرتے ہوئے تمام جوابات کو مجموعہ لینے سے پوری خطے پر مسئلہ ثابت ہو گا۔ اس ترکیب بالکل مسئلہ گرین میں استعمال کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔ ہر اضافی سطح پر دو مرتبہ حاصل سطحی مکمل کے جوابات کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا جبکہ باقی سطحوں پر سطحی مکمل T کی پوری سطح S پر سطحی مکمل ہی ہو گا۔ T کے تمام ٹکڑوں کے حجمی مکملات کا مجموعہ T کے حجمی مکمل کے برابر ہو گا۔

یوں کسی بھی عملی استعمال کے محدود خطہ T کے لئے مسئلہ پھیلاؤ کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مسئلہ کو ایسی عمومی خطہ T جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم T کو تخمیناً ایسی خطوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ یہ ترکیب مسئلہ گرین کی ثبوت میں اختیار کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔

□

مسئلہ گرین خطی مکمل کے حل میں کارآمد ثابت ہوتا ہے۔ اسی طرح مسئلہ پھیلاؤ سطحی مکمل کے حل میں کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

مثال 11.21: سطحی مکمل کا حصول بذریعہ مسئلہ پھیلاؤ

درج ذیل کو تہرا مکمل میں تبدیل کرتے ہوئے حل کریں جہاں S بیلن $x^2 + y^2 = a^2$ ($0 \leq z \leq b$) اور اس کے دونوں اطراف کی ڈھکنوں کی سطح ہے۔

$$I = \iiint_S (x^3 dy dz + x^2 y dx dz + x^2 z dx dy)$$

حل: یہاں مساوات 11.77 اور مساوات 11.78 میں $u_1 = x^3$ ، $u_2 = x^2 y$ ، $u_3 = x^2 z$ ہیں۔ یوں خطہ T کی تشاکل کو دیکھ کر ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\iiint_T (3x^2 + x^2 + x^2) dx dy dz = 4 \cdot 5 \int_0^b \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} x^2 dx dy dz$$

اندرونی تکمل $\frac{1}{3}(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$ کے برابر ہے۔ یوں $y = a \cos t$ چنتے ہوئے

$$dy = -a \sin t dt, \quad (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} = a^3 \sin^3 t$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب y پر تکمل

$$\frac{1}{3} \int_0^a (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy = -\frac{1}{3} a^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t dt = \frac{\pi a^4}{16}$$

ہوگا اور آخر میں z پر تکمل جزو b دیتا ہے لہذا جواب درج ذیل ہوگا۔

$$I = 4 \cdot 5 \frac{\pi a^4}{16} b = \frac{5}{4} \pi a^4 b$$

□

11.9 مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال

مسئلہ پھیلاؤ کی عملی استعمال اور اس کے چند اہم نتائج کی مثالیں اس حصے میں پیش کی جائیں گی۔ ان مثالوں میں فرض کیا جاتا ہے کہ تعامل اور خطہ مسئلہ پھیلاؤ کے شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ مزید کہ سطح S پر خطہ T کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ n ہے۔

مثال 11.22: محدود سے آزاد پھیلاؤ

مسئلہ پھیلاؤ کی (مساوات 11.75) کے دونوں اطراف کو خطہ T کی حجم $H(T)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(11.86) \quad \frac{1}{H(T)} \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{u} dH = \frac{1}{H(T)} \iint_{S(T)} u_n dA$$

ملتا ہے جہاں T کی سرحدی سطح $S(T)$ ہے۔ دوہرا تکمل کی خصوصیات کو حصہ 11.3 میں بیان کیا گیا۔ تہرا تکمل بھی یہی خصوصیات رکھتا ہے۔ بالخصوص تہرا تکمل کا مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ خطہ T میں کسی بھی استمراری تعامل $f(x, y, z)$ کے لئے T میں ایسا نقطہ $Q: (x_0, y_0, z_0)$ پایا جائے گا کہ درج ذیل درست ہوگا۔

$$\iiint_T f(x, y, z) dH = f(x_0, y_0, z_0) H(T)$$

یوں $f = \nabla \cdot \mathbf{u}$ پر کرتے ہوئے مساوات 11.86 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(11.87) \quad \frac{1}{H(T)} \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{u} \, dH = \nabla \cdot \mathbf{u}(x_0, y_0, z_0)$$

فرض کریں کہ T میں $N : (x_1, y_1, z_1)$ کوئی مقررہ نقطہ ہے اور T نقطہ N کے گرد یوں سکڑتا ہے کہ N سے T کے دور ترین نقطے کا فاصلہ $d(T)$ صفر کے قریب پہنچے۔ اس طرح نقطہ Q نقطہ N کے قریب پہنچے گا اور مساوات 11.86 اور مساوات 11.87 سے ظاہر کہ کہ نقطہ N پر \mathbf{u} کی پھیلاؤ درج ذیل ہو گی۔

$$(11.88) \quad \nabla \cdot \mathbf{u}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} u_n \, dA$$

اس کلیہ کو بعض اوقات پھیلاؤ کی تعریف تصور کیا جاتا ہے۔ جہاں حصہ 10.10 میں پھیلاؤ کی تعریف میں x ، y ، z محدود پائے جاتے ہیں مساوات 11.88 میں دی گئی پھیلاؤ کی تعریف محدود سے پاک ہے۔ اس سے یک دم اخذ کیا جاسکتا ہے کہ پھیلاؤ کی قیمت پر محدودی نظام کی انتخاب کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ □

مثال 11.23: پھیلاؤ کا طبعی مفہوم

مسئلہ پھیلاؤ سے سمتیہ کی پھیلاؤ کا مفہوم سمجھا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرنے کی خاطر ہم اکائی کمیتی کثافت $\rho = 1$ کی داب نا پذیر سیال کی برقرار حال (وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا) بہاؤ پر غور کرتے ہیں (مثال 10.24 بھی دیکھیں)۔ کسی بھی نقطہ N پر ایسی بہاؤ کا تعین اس نقطہ پر سمتی رفتار سمتیہ $\mathbf{v}(N)$ سے کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ فضا میں خطہ T کی سرحدی سطح S ہے اور n باہر رخ S کا اکائی عمودی سمتیہ ہے۔ اس سطح کے چھوٹے حصہ ΔS جس کا رقبہ ΔA ہے سے، اندرون S سے بیرون S رخ، اکائی وقت میں کمیت کی اخراج $v_n \Delta A$ ⁴⁷ ہوگی جہاں $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ سمتیہ \mathbf{v} کا n رخ جزو ہے (یعنی S کا عمودی جزو ہے) اور n کو ΔS کے کسی موزوں نقطے پر لیا گیا ہے۔ یوں T سے کل اخراج جو S سے گزرتا ہے سطحی مکمل

$$\iint_S v_n \, dA$$

⁴⁷ کسی نقطہ پر v_n منفی ہو سکتا ہے لہذا یہ نقطے پر سیال S میں داخل ہوگا۔

سے حاصل ہو گا۔ یہ کھل T کا کل اخراج دیتا ہے۔ یوں T کی اوسط اخراج

$$(11.89) \quad \frac{1}{H} \iint_S v_n dA$$

ہو گی جہاں T کا حجم H ہے۔ چونکہ بہاو برقرار حال ہے اور سیال داب نا پذیر ہے لہذا T سے اخراج برابر کثیت T کو مہیا کی جاتی ہو گی۔ یوں اگر مساوات 11.89 کے کھل کی قیمت غیر صفر ہو تب T میں منبع⁴⁸ (مثبت منبع یا منفی منبع) پایا جاتا ہو گا جہاں سیال پیدا یا غائب ہوتا ہے۔

اگر ہم T کو ایک نقطہ N مانند کر دیں تب مساوات 11.89 ہمیں N پر شدت منبع⁴⁹ درگا (مساوات 11.88) کا دائیں ہاتھ جہاں v_n کی جگہ u_n لکھا گیا ہے)۔ اس سے ظاہر ہے کہ داب نا پذیر سیال کی برقرار حال سمتی رفتار سمتیہ v کا نقطہ N پر پھیلاؤ سے مراد N پر شدت منبع ہے۔ صرف اور صرف اس صورت T میں کوئی منبع نہ ہو گا جب $\nabla \cdot v \equiv 0$ ہو اور ایسی صورت میں میں کسی بھی بند سطح S^* کے لئے درج ذیل درست ہو گا۔

$$\iint_{S^*} v_n dA = 0$$

آپ نے دیکھا کہ کسی نقطہ سے سیال کی اخراج کو اس نقطہ پر v کی پھیلاؤ ظاہر کرتی ہے۔ ہم کہتے ہیں سیال اس نقطہ سے نکل کر پھیلتا ہے۔ اسی سے اس عمل کو پھیلاؤ کہتے ہیں۔ □

مثال 11.24: مساوات حرارت۔ حراری بہاو ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم میں حراری توانائی کا بہاو گرم سے سرد مقام کے رخ ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ حراری بہاو کی سمتی رفتار v درج طرز کی ہو گی

$$(11.90) \quad v = -K \nabla U$$

جہاں $U(x, y, z, t)$ لمحہ t پر نقطہ (x, y, z) کا درجہ حرارت ہے اور K جسم کی حراری موصلیت⁵⁰ ہے۔ عمومی طبعی حالات میں K ایک مستقل ہو گا۔

source⁴⁸
source intensity⁴⁹
thermal conductivity⁵⁰

فرض کریں کہ جسم میں R کوئی خطہ ہے جس کی سرحدی سطح S ہے۔ یوں اکائی وقت میں R سے کل حراری توانائی کا اخراج

$$\iint_S v_n dA$$

ہو گا جہاں $v_n = v \cdot n$ سرحد S پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ n کی رخ v کا جزو ہے۔ یہ تعلق گزشتہ مثال کی حاصل کیا گیا ہے۔ مساوات 11.90 اور مسئلہ پھیلاؤ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (مساوات 10.114)۔

$$(11.91) \quad \iint_S v_n dA = -K \iiint_R \nabla \cdot (\nabla U) dx dy dz = -K \iiint_R \nabla^2 U dx dy dz$$

R میں کل حراری توانائی W درج ذیل ہے

$$W = \iiint_R \sigma \rho U dx dy dz$$

جہاں σ جسم کے مواد کی خصوصی حراری استعداد⁵¹ ہے جبکہ ρ جسم کی کمیتی کثافت (کمیت فی اکائی حجم) ہے۔ یوں جسم میں حراری توانائی کی وقت کے ساتھ گھٹاؤ

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = - \iiint_R \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} dx dy dz$$

ہو گی جو عین R سے توانائی کی اخراج کے برابر ہو گا یعنی

$$- \iiint_R \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} dx dy dz = -K \iiint_R \nabla^2 U dx dy dz$$

یا:

$$\iiint_R \left(\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U \right) dx dy dz = 0$$

چونکہ یہ مساوات کسی بھی خطہ R کے لئے درست ہے لہذا مکمل (اگر استمراری ہو تب) تمام R میں صفر کے برابر ہو گا یعنی:

$$(11.92) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U \quad \left(c^2 = \frac{K}{\sigma \rho} \right)$$

□

یہ حراری مساوات⁵² کہلاتی ہے جو حراری بہاؤ کی بنیادی مساوات ہے۔

specific heat capacity⁵¹
heat equation⁵²

مثال 11.25: لاپلاسی مساوات کے حل کی بنیادی خصوصیت
مسئلہ پھیلاؤ کی مساوات

$$(11.93) \quad \iiint_T \nabla u \, dH = \iint_S u_n \, dA$$

پر غور کریں۔ فرض کریں کہ u کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان $u = \nabla f$ ہے۔ یوں

$$\nabla \cdot u = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

ہو گا (مساوات 10.114)۔ مزید

$$u_n = u \cdot n = n \cdot \nabla f$$

لکھا جائے گا جو مساوات 10.81 کے تحت S کے باہر رخ f کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{\partial f}{\partial n}$ سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 11.93 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.94) \quad \iiint_T \nabla^2 f \, dH = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dA$$

□

ظاہر ہے کہ یہ مساوات 11.33 کی تین بعدی مماثل ہے۔

مسئلہ پھیلاؤ کے لئے درکار شرائط کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 11.94 سے درج ذیل اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 11.3: (لاپلاسی مساوات کے حل کی خصوصیت)

فرض کریں کہ کسی دائرہ کار D میں تفاعل $f(x, y, z)$ لاپلاسی مساوات

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

کا حل ہے اور D میں f کے دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ تب D میں کسی بھی ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر f کے عمودی (سمتی) تفرق کا کمل صفر ہو گا۔

مثال 11.26: مسئلہ گرین

فرض کریں کہ f اور g ایسے غیر سمتی تقابل ہیں کہ کسی خطہ T میں $u = f \nabla g$ مسئلہ پھیلاؤ کی شرائط پر پورا اترتا ہو۔ تب درج ذیل ہوگا (سوال 10.179)۔

$$\nabla \cdot u = \nabla \cdot (f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

مزید

$$u \cdot n = n \cdot (f \nabla g) = f(n \cdot \nabla g)$$

ہوگا جہاں $n \cdot \nabla g$ سے مراد مسئلہ پھیلاؤ کی سطح S پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ n کی سمت میں g کا سمتی تفرق ہے۔ اس سمتی تفرق کو $\frac{\partial g}{\partial n}$ لکھنے سے مسئلہ پھیلاؤ کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$(11.95) \quad \iiint_T (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dH = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA$$

جس کو گرین کلیہ اول⁵³ یا (لاگو شرائط کو شامل کرتے ہوئے) مسئلہ گرین کی پہلی صورت کہتے ہیں۔

f اور g کو آپس میں بدلنے سے اسی طرح کی دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو مساوات 11.95 سے منفی کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$(11.96) \quad \iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dH = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA$$

جس کو گرین کلیہ دوم⁵⁴ یا (لاگو شرائط کو شامل کرتے ہوئے) مسئلہ گرین کی دوسری صورت کہتے ہیں۔ □

مثال 11.27: لاپلاس مساوات کی حل کی یکتائی

فرض کریں کہ f مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتا ہے اور D میں ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر ہر جگہ صفر کے برابر ہے۔ تب مساوات 11.95 میں $f = g$ پر کرتے ہوئے اور S کے اندرونی حصہ کو T سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\iiint_T \nabla f \cdot \nabla f dH = \iiint_T |\nabla f|^2 dH = 0$$

⁵³Green's first formula
⁵⁴Green's second formula

ماتنا ہے جہاں مسئلہ 11.3 میں دیے شرط کے مطابق $\nabla^2 f = 0$ لیا گیا ہے اور مساوات 11.95 کے دائیں ہاتھ چونکہ سطح S پر $f = 0$ ہے لہذا اس سطحی کمل کو صفر لیا گیا ہے۔ اب چونکہ ہمارے مفروضہ کے تحت T کے اندر اور S پر $|\nabla f|$ استمراری اور غیر منفی ہے لہذا یہ ضرور پورے T میں ہر جگہ صفر کے برابر ہو گا۔ یوں $f_x = f_y = f_z = 0$ ہو گا لہذا T میں f ایک مستقل ہو گا اور چونکہ f استمراری ہے لہذا T کے اندر اس کی قیمت وہی ہو گی جو S پر ہے یعنی $f = 0$ ہو گا۔ □

اس سے درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 11.4:

اگر تفاعل $f(x, y, z)$ مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتا ہے اور D میں ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر ہر جگہ صفر کے برابر ہے۔ تب S کے احاطہ خطہ T میں $f = 0$ ہو گا۔

اس مسئلہ کے اہم نتائج پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ تفاعل f_1 اور f_2 مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتے ہیں اور S پر دونوں یکساں ہوں۔ تب ان کا فرق $f_1 - f_2$ بھی ان شرائط پر پورا اترتا ہے اور پوری S پر اس کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ 11.4 کے تحت پوری T میں $f_1 - f_2 = 0$ ہو گا جس سے درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 11.5: (لاپلاس مساوات کی حل کی یکتائی)

فرض کریں کہ f لاپلاس مساوات کا حل ہے اور دائرہ کار D میں اس کے ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ مزید فرض کریں کہ D میں خطہ T مسئلہ پھیلاؤ کی شرائط پر پورا اترتا ہے۔ تب T میں f کی قیمت یکتا ہو گی اور یہ T کی سرحدی سطح S پر قیمت کے برابر ہو گی۔

سوالات

سوال 11.128 تا سوال 11.131 میں حجم بذریعہ تھرا کمل دریافت کریں۔

سوال 11.128: چو سطح جس کے کونے $A : (0, 0, 0)$ ، $B : (3, 0, 0)$ ، $C : (0, 2, 0)$ ، $D : (0, 0, 1)$ ہیں۔

جواب: یہ جو سطح ربع اول میں جس سطح کے نیچے پایا جاتا ہے پہلے اس (بالائی) سطح کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔
 B تا C سمتیہ $r_1 = -3i + 2j$ اور B تا D سمتیہ $r_2 = -3i + k$ دونوں جو سطح کی اس بالائی سطح پر پائے جاتے ہیں لہذا دونوں سطح کے مماسی سمتیات ہیں۔ ان سے بالائی سطح کی اکائی عمودی سمتیہ n حاصل کرتے ہیں۔

$$n = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|} = \frac{2i + 3j + 6k}{7}$$

یوں بالائی سطح کی مساوات $[(x-3)i + yj + zk] \cdot n = 0$ سے

$$2x + 3y + 6z = 6$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس طرح جو سطح کا حجم درج ذیل ہو گا (سوال 11.27 دیکھیں)۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} dz dy dx = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) dy dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) dx = 1 \end{aligned}$$

سوال 11.129: ربع اول میں وہ خطہ جس کی سرحدیں $y = x$ ، $y = x^2$ اور $z = 3 - 2x$ ہیں۔
 جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 11.130: سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ اور xy مستوی کے مابین خطہ۔
 جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.131: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترکہ حصہ۔
 جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 11.132 تا سوال 11.135 میں کمیتی کثافت σ دیا گیا ہے۔ خطہ T میں کل کمیت دریافت کریں۔

سوال 11.132: مکعب $T: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ، $\sigma = xy$ ،
 جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 11.133: جو سطح جس کے کونے $(0,0,0)$ ، $(3,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ ہیں اور
 $\sigma = x + y + z$ ہے۔
 جواب: $\frac{3}{2}$

باب 11. سمتی کھلی عملہ الا حصاء۔ مکمل کے مسئلے

سوال 11.134: چو سطح جس کے کونے $(0,0,0)$ ، $(3,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ ہیں اور
 $\sigma = xy$ ہے۔
 جواب: $\frac{3}{10}$

سوال 11.135: ربع اول میں $y = 1 - x^2$ اور $z = x$ کے درمیان T جہاں $\sigma = xy$ ہے۔
 جواب: $\frac{4}{105}$

سوال 11.136 تا سوال 11.140 میں خطہ T میں کمیٹی کثافت $\sigma = 1$ لیتے ہوئے z محور کے لحاظ سے
 جمودی معیار اثر $I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \sigma dx dy dz$ دریافت کریں۔

سوال 11.136: مکعب $0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq c, 0 \leq z \leq c$
 جواب: $\frac{2}{3}c^5$

سوال 11.137: بیکن $x^2 + y^2 \leq c^2, 0 \leq z \leq h$
 جواب: $\frac{1}{2}\pi c^4 h$

سوال 11.138: بیکن $x^2 + z^2 \leq c^2, 0 \leq y \leq h$
 جواب: $\frac{\pi c^2 h}{12}(4h^2 + 3c^2)$

سوال 11.139: مخروط $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h$
 جواب: $\frac{\pi h^5}{10}$

سوال 11.140: اندرون کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$
 جواب: $\frac{4}{15}\pi c^5$

سوال 11.141: مسئلہ پھیلاؤ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ خطہ T جس کی سرحد سطح S ہو کا حجم H
 درج ذیل ہے۔

$$H = \iiint_S x dy dz = \iiint_S y dx dz = \iiint_S z dx dy = \frac{1}{3} \iiint_S (x dy dz + y dx dz + z dx dy)$$

سوال 11.142: مکعب کا حجم سوال 11.141 کے کلیات کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.143: بیلن $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h$ کا حجم سوال 11.141 کے کلیات کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.144: $u = xi + yj + zk$ لیتے ہوئے مساوات 11.75 کی مدد سے ثابت کریں کہ خطہ T جس کی سرحدی سطح S ہو کا حجم درج ذیل ہے

$$H = \frac{1}{3} \iint_S r \cos \theta \, dA$$

جہاں S پر نقطہ $N : (x, y, z)$ کا مبدا O سے فاصلہ r ہے اور O سے N تک سمتی خط اور N پر باہر رخ عمودی سمتیہ کے مابین زاویہ θ ہے۔

سوال 11.145: رداس a کی کرہ کا حجم سوال 11.144 کے کلیے کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.146 تا سوال 11.152 میں S مسئلہ پھیلاؤ کی شرط کے مطابق سمت بند ہے۔ سطحی تکمل کو مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے حل کریں۔

سوال 11.146:

$$\iint_S [(x+z) \, dy \, dz + (y+z) \, dx \, dz + (x+y) \, dx \, dy], \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

جواب: $\frac{8\pi a^3}{3}$

$$\iint_S (x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy) \quad \text{سوال 11.132 سطح مکعب}$$

جواب: 3

$$\iint_S (x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy) \quad \text{سوال 11.137 سطح بیلن}$$

جواب: $\pi c^2 h^2$

$$\iint_S (yz^2 \, dy \, dz + xz \, dx \, dz + x^2 y^2 \, dx \, dy) \quad \text{سوال 11.146 سطح}$$

جواب: 0

باب 11. سمتی کھلی علم الاحصاء۔ مکمل کے مسئلے

سوال 11.150: متوازی الاسطوح $S: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4$ $\iint_S x(y+z) dy dz$ جواب: 72

سوال 11.151: سطح سوال 11.150 $\iint_S [x \cos y dy dz + (y - \sin y) dx dz]$ جواب: 24

سوال 11.152: سطح سوال 11.146 $\iint_S [(y \cos^2 x + y^3) dx dz + z(\sin^2 x - 3y^2) dx dy]$ جواب: $\frac{4}{3}\pi a^3$

سوال 11.153 تا سوال 11.157 میں T بند محدود خطہ ہے جس کی سرحدی سطح S ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ استعمال کرتے ہوئے دیے گئے فقرے ثابت کریں جہاں ہارمونی⁵⁵ سے مراد لاپلاس مساوات کا حل ہے جس کے T میں استمراری دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں۔

سوال 11.153: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S \frac{\partial g}{\partial n} dA = 0$$

جواب: مساوات 11.95 میں $f = 1$ پر کریں۔

سوال 11.154: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S g \frac{\partial g}{\partial n} dA = \iiint_T |\nabla g|^2 dH$$

جواب: مساوات 11.95 میں $f = g$ پر کریں۔

سوال 11.155: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو اور S پر $\frac{\partial g}{\partial n} = 0$ ہو تب T میں g ایک مستقل ہو گا۔
جواب: سوال 11.154 کو استعمال کریں۔

سوال 11.156: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g اور f ہارمونی ہوں اور S پر $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n}$ ہو تب T میں $f = g + c$ ہوگا جہاں c مستقل قیمت ہے۔

سوال 11.157: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g اور f ہارمونی ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA = 0$$

سوال 11.158: ثابت کریں کہ لاپلاسی کو محدود سے پاک صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\nabla^2 f = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{H(T)} \iint_{S(T)} \frac{\partial f}{\partial n} dA$$

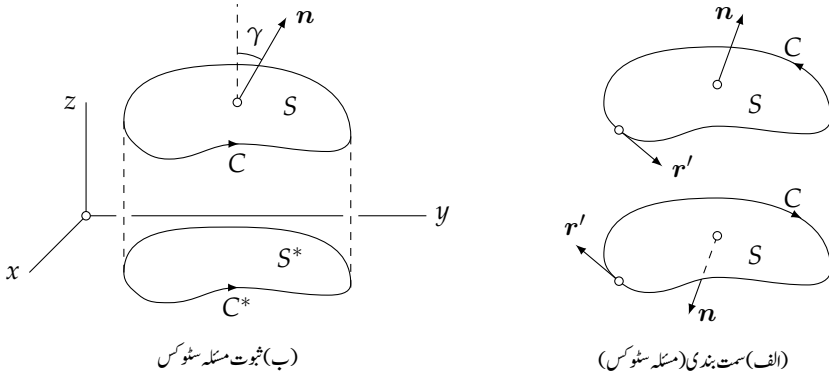
جہاں جس نقطے پر لاپلاسی درکار ہو، اس نقطے سے T میں دور ترین نقطے کا فاصلہ $d(T)$ ہے اور $H(T)$ خطہ T کا حجم ہے جس کی سرحدی سطح $S(T)$ ہے۔ (اشارہ: مساوات 11.88 میں $u = \nabla f$ پر کرتے ہوئے $b = n$ لیتے ہوئے مساوات 10.81 استعمال کریں جہاں n سطح S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ ہے۔)

11.10 مسئلہ سٹوکس

ہم نے حصہ 11.4 میں دیکھا کہ مستوی پر دوہرا تکمیل کو سطح کی سرحد پر خطی تکمیل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ آئیں اس نتیجے کو عمومی بناتے ہوئے سطحی تکمیل کے تبادل پر غور کریں۔

مسئلہ 11.6: مسئلہ سٹوکس⁵⁶ (سطحی تکمیل سے خطی تکمیل اور خطی تکمیل سے سطحی تکمیل کا حصول) فرض کریں کہ فضا میں ٹکڑوں میں ہموار سمت بند سطح S کی سرحد C ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی ہے۔ مزید

⁵⁶ آئرنسٹ ریاضی دان اور ماہر طبیعیات جارج ہرائٹل سٹوکس [1819-1903]



شکل 11.28: مسئلہ سٹوکس

فرض کریں کہ کسی ایسے خطے میں جس کا S حصہ ہو، $v(x, y, z)$ استمراری سمتی تقابل ہے اور اس خطے میں اس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ تب مسئلہ سٹوکس⁵⁷ کہتا ہے کہ

$$(11.97) \quad \iint_S (\nabla \times v)_n dA = \int_C v_t ds$$

ہو گا جہاں S کے اکائی عمودی سمتیہ n کی سمت میں $\nabla \times v$ کا جزو $(\nabla \times v)_n = (\nabla \times v) \cdot n$ ہے؛ C پر مکمل کا رخ شکل 11.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں C کی مماس r' (شکل 11.28-الف) کی سمت میں v کا جزو v_t ہے۔

ثبوت: ہم مسئلہ سٹوکس کو ایسی سطح S کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل تینوں طریقوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو

$$(11.98) \quad (الف) \quad z = f(x, y), \quad (ب) \quad y = g(x, z), \quad (پ) \quad x = h(y, z)$$

جہاں f ، g اور h اپنے آزاد متغیرات کے استمراری تقابل ہیں اور ان کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ S کا بالائی رخ اکائی عمودی سمتیہ n درج ذیل

$$(11.99) \quad n = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$$

ہے (شکل 11.28-ب) اور $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ ایک سمتی تفاعل ہے۔ اگر C کو $r = r(s)$ لکھا جائے جہاں قوس لمبائی s تکمیل کے رخ بڑھتی ہو تب اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k$$

ہو گا لہذا

$$v_t = v \cdot \frac{dr}{ds} = v_1 \frac{dx}{ds} + v_2 \frac{dy}{ds} + v_3 \frac{dz}{ds}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$v_t ds = v \cdot \frac{dr}{ds} ds = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

یوں گردش کو دائیں ہاتھ کارٹیزیسی نظام (حصہ 10.1) میں لکھتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کی مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

(11.100)

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dA \\ = \int_C (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) \end{aligned}$$

جہاں α ، β ، γ مساوات 11.99 میں بیان کیے گئے ہیں۔

ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.100 میں دونوں اطراف وہ تکمیل جن میں v_1 پایا جاتا ہے عین برابر ہیں یعنی:

$$(11.101) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial v_1}{\partial y} \cos \gamma \right) dA = \int_C v_1 dx$$

فرض کریں کہ xy مستوی پر S کا قائمہ سایہ S^* ہے جس کی سرحد C^* کی سمت بندی شکل 11.28-ب میں دکھائی گئی ہے۔ S کو مساوات 11.98-الف سے ظاہر کرتے ہوئے C پر خطی تکمیل کو C^* پر خطی تکمیل لکھتے ہیں۔

$$\int_C v_1(x, y, a) dx = \int_{C^*} v_1[x, y, f(x, y)] dx$$

باب 11. سمتی تکلی عمل الاحصاء تکمل کے مسئلے

اب مسئلہ گرین (حصہ 11.4) کو $[f \text{ اور } g \text{ کی بجائے}]$ $v_1[x, y, f(x, y)]$ اور 0 پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int_{C^*} v_1[x, y, f(x, y)] dx = - \iint_{S^*} \frac{\partial v_1}{\partial y} dx dy$$

دائیں ہاتھ تکمل میں

$$\frac{\partial v_1[x, y, f(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \quad [z = f(x, y)]$$

لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(11.102) \quad \int_C v_1(x, y, z) dx = - \iint_{S^*} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.101 کے بائیں ہاتھ کا تکمل مساوات 11.102 کے دائیں ہاتھ کے تکمل کے برابر ہے۔ ہم پہلے تکمل میں x اور y کو بطور متغیرات تکمل متعارف کرتے ہیں۔ مساوات 11.98-الف کو

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$$

لکھتے ہوئے

$$\nabla F = -\frac{\partial f}{\partial x} i - \frac{\partial f}{\partial y} j + k$$

ملتا ہے جس سے ڈھلوان F کی لمبائی a لکھتے ہیں۔

$$a = |\nabla F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

چونکہ ∇F سطح S کو عمودی ہے لہذا S کی اکائی عمودی سمتیات n درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$n = \mp \frac{\nabla F}{a}$$

اب مثبت z رخ میں n اور ∇F دونوں کے اجزاء مثبت ہیں لہذا

$$n = + \frac{\nabla F}{a}$$

ہوگا۔ xyz کارٹینیسی نظام میں n اور ∇F کی روپ سے یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\cos \alpha = -\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{a}$$

مزید مساوات 11.60 کے تحت مساوات 11.101 میں $dA = a \, dx \, dy$ ہوگا لہذا

$$\iint_S \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial v_1}{\partial y} \cos \gamma \right) dA = \iint_{S^*} \left[\frac{\partial v_1}{\partial z} \left(-\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{1}{a} \right] a \, dx \, dy$$

لکھا جاسکتا ہے جو مساوات 11.102 کے دائیں ہاتھ تکمل برابر ہے۔ یوں مساوات 11.101 ثابت ہوتی ہے۔

اگر $-n$ کو مثبت اکائی عمودی سمتیہ چنا جاتا تب C کی مثبت سمت الٹ رخ ہوتی لہذا حاصل جواب پر کوئی اثر نہ ہوتا۔ یوں مساوات 11.101 S کے دونوں مثبت اکائی عمودی سمتیات کے لئے درست ہے۔

مساوات 11.98-ب اور مساوات 11.98-پ میں دیے روپ استعمال کر کر بالکل اسی طرح درج ذیل ثابت ہوں گے۔

$$(11.103) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial v_2}{\partial z} \cos \alpha \right) dA = \int_C v_2 \, dy$$

$$(11.104) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial v_3}{\partial x} \cos \beta \right) dA = \int_C v_3 \, dz$$

مساوات 11.101، مساوات 11.103 اور مساوات 11.104 جمع کرتے ہوئے مساوات 11.97 ملتا ہے۔ اس طرح مسئلہ سٹوکس ایسی سطح S کے لئے ثابت ہوتا ہے جس کو بیک وقت مساوات 11.98-الف، مساوات 11.98-ب اور مساوات 11.98-پ کی روپ میں لکھنا ممکن ہو۔

مسئلہ پھیلاؤ کی طرح موجودہ ثبوت کو وسعت دیتے ہوئے اسے ایسی سطح پر لاگو کیا جاسکتا ہے جس کو محدود تعداد کے ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو مساوات 11.98 کی روپ میں لکھا جاسکے۔ عموماً عملاً استعمال کی سطحیں ایسی ہی ہوتی ہیں۔

مسئلہ کو ایسی عمومی سطح S جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم S کو تخمیناً ایسی سطحوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ یہ ترکیب مسئلہ گرین کی ثبوت میں اختیار کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔

□

11.11 مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال

مثال 11.28: سطح میں مسئلہ گرین درحقیقت مسئلہ سٹوکس کی خصوصی شکل ہے
فرض کریں کہ سمتی تفاعل $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ مستوی xy میں کسی ایسا خطہ میں استمراری قابل تفرق
ہے جس میں سادہ تعلق بند محدود خطہ S پایا جاتا ہے جس کی سرحد C ٹکڑوں میں ہموار بند سادہ منحنی ہے۔ تب
مساوات 10.122 کے تحت

$$(\nabla \times v)_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

ہو گا۔ مزید $v_t ds = v_1 dx + v_2 dy$ لیتے ہوئے مساوات 11.97 درج ذیل لکھا جائے گا

$$\iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dA = \int_C (v_1 dx + v_2 dy)$$

□

جو سطح میں مسئلہ گرین (حصہ 11.4) ہے۔

مثال 11.29: گردش کا طبعی مفہوم
فرض کریں کہ رداس r کے دائری قرص S_r کا مرکز N اور سرحد دائرہ C_r ہے (شکل 11.29)۔ مزید
فرض کریں کہ کسی خطہ جس کا S_r حصہ ہو میں $v(Q) = v(x, y, z)$ استمراری قابل تفرق سمتی تفاعل
ہے۔ تب مسئلہ سٹوکس اور سطحی مکمل کے اوسط قیمت مسئلہ کے تحت درج ذیل ہو گا

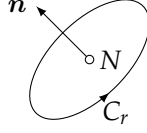
$$\int_{C_r} v_t ds = \iint_{S_r} (\nabla \times v)_n dA = [\nabla \times v(N^*)]_n A_r$$

جہاں S_r کا رقبہ A_r اور S_r میں N^* کوئی موزوں نقطہ ہے۔ اس کو یوں

$$[\nabla \times v(N^*)]_n = \frac{1}{A_r} \int_{C_r} v_t ds$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ سیال کی حرکت کی صورت میں مکمل

$$\int_{C_r} v_t ds$$



شکل 11.29: قرص (مثال 11.29)

C_r پر سیال کی دائری بہاؤ⁵⁸ کی ناپ ہے۔ اب r کو صفر مانند کرنے سے

$$(11.105) \quad [\nabla \times \mathbf{v}(N)]_n = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{A_r} \int_{C_r} v_t \, ds$$

□

ماتا ہے جس کو N پر فی اکائی رقبہ دائری بہاؤ کہا جاسکتا ہے۔

مثال 11.30: خطی تکمل کا حصول بذریعہ مسئلہ سٹوکس

تکمل $\int_C v_t \, ds$ حل کریں جہاں مبدا سے دیکھتے ہوئے دائیں ہاتھ کا رتیبی نظام میں دائرہ $C: x^2 + y^2 = 4, z = -3$ گھڑی کی الٹ رخ سمت بند ہے جبکہ \mathbf{v} درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{v} = y\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} - zy^3\mathbf{k}$$

ہم C کے احاطہ S کو مستوی دائری قرص $x^2 + y^2 \leq 4, z = -3$ لیتے ہیں۔ یوں مسئلہ سٹوکس میں n کی سمت مثبت z رخ ہوگی لہذا $n = \mathbf{k}$ ہوگا۔ یوں $(\nabla \times \mathbf{v})_n$ سے مراد مثبت z رخ میں $\nabla \times \mathbf{v}$ کا جزو۔ چونکہ $z = -3$ پر کرتے ہوئے \mathbf{v} کے اجزاء $v_1 = y$ ، $v_2 = -27x$ اور $v_3 = 3y^3$ ملتے ہیں لہذا

$$(\nabla \times \mathbf{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28$$

ہوگا۔ یوں مسئلہ سٹوکس میں تکمل کی قیمت قرص کا رقبہ ضرب -28 یعنی -112π ہوگی۔

یہاں مسئلہ سٹوکس کی افادیت جاننے کی خاطر آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ مسئلہ سٹوکس استعمال کیے بغیر اس تکمل کو حل کریں۔ □

سوالات

سوال 11.159 تا سوال 11.161 میں $\iint_S (\nabla \times v)_n dA$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.159: $v = xzi + xj$, S : مکعب $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1$: جواب: ∓ 1

سوال 11.160: $v = zi + xj + y^2k$, S : مکعب $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = -1$: جواب: ∓ 1

سوال 11.161: $v = -\frac{1}{3}y^3i + \frac{1}{3}x^3j$, S : دائری قرص $x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$: جواب: $\mp \frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.162: مسئلہ سٹوکس کا دوسرا ہاتھ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.159 حل کریں۔

سوال 11.163: مسئلہ سٹوکس کا دوسرا ہاتھ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.161 حل کریں۔

سوال 11.164: ثابت کریں کہ اگر v اور S مسئلہ سٹوکس کے شرائط پر پورا اترتے ہوں اور $v = \nabla f$ ہو تب $\int_C v_t ds = 0$ ہو گا جہاں S کی سرحد C ہے۔

سوال 11.165 تا سوال 11.169 میں $\int_C v_t ds$ کو مسئلہ سٹوکس سے حل کریں جہاں معلومات دائیں ہاتھ کار تیبی نظام کے لحاظ سے فراہم کی گئی ہیں۔

سوال 11.165: $v = 3yi + 2zj + 2yk$ جبکہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ اور $z = x + 2$ کا قطع C ہے جو مبدا سے دیکھتے ہوئے گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ سمت بند نظر آتا ہے۔ : جواب: $\frac{27\pi}{\sqrt{2}}$

سوال 11.166: $v = -yi + 2xj + 3zk$ جبکہ دائرہ $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, $z = 1$ ، $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ سرحد C ہے۔ : جواب: 3π

سوال 11.167: $v = y^2i + x^2j - (y + z)k$ جبکہ گھڑی کی الٹ رخ تکون کی سرحد C ہے۔ تکون کے کونے $(1, 3, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ ہیں۔ : جواب: -1

سوال 11.168: $v = 2zi - 2xj + xk$ جبکہ گھڑی کی الٹ رخ میلن $x^2 + y^2 = 1$ اور سطح $z = y + 3$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: -3π

سوال 11.169: $v = x^2i + y^2j + z^2k$ جبکہ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ اور مکانی $z = x^2 + y^2$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: 0

سوال 11.170 تا سوال 11.173 کو مساوات 11.100 کی مدد سے حل کریں۔ مبداء سے دیکھتے ہوئے C گھڑی کی رخ ہے۔

سوال 11.170: $v = yzi + xzj + xyk$ جبکہ $x^2 + y^2 = 1$ اور مکانی $z = y^2$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: 0

سوال 11.171: $v = zi + xj + yk$ تکتوں $(1, 0, 0)$ ، $(0, 2, 0)$ ، $(0, 0, 1)$ کا محیط C ہے۔
جواب: 5

سوال 11.172: $v = \sin zi - \cos xj + \sin yk$ مستطیل $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ ، $0 \leq y \leq 2$ ، $z = 2$ کا محیط C ہے۔
جواب: 2

سوال 11.173: $v = 2e^xi - 3yj + k$ دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ ، $z = 2$ کا محیط C ہے۔
جواب: 0

11.12 راہ سے آزاد خطی تکمل

ہم نے حصہ 11.2 میں دیکھا کہ خطی تکمل

$$(11.106) \quad \int_C (f dx + g dy + h dz)$$

کی قیمت عموماً راہ C اور اس کے سروں P اور Q پر منحصر ہوتی ہے؛ یعنی P تا Q تکمل کو مختلف راہوں پر حاصل کرنے سے عموماً مختلف جوابات حاصل ہوں گے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کن صورتوں میں تکمل کی قیمت راہ کی سروں پر ناکہ راہ پر منحصر ہوگی۔ یہ ایک اہم مسئلہ ہے۔ ہم پہلے درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ فضا کے دائرہ کار D میں تفاعل $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ اور $h(x, y, z)$ استمراری اور معین ہیں۔ تب مساوات 11.106 اس صورت D میں راہ سے آزاد⁵⁹ کہلاتی ہے جب D میں P اور Q سروں کی ہر جوڑی کے لئے مساوات 11.106 کی قیمت D میں P تا Q ہر C کے لئے یکساں ہو۔ تکمل کی یہ قیمت عموماً راہ کی سروں P اور Q پر منحصر ہوگی جبکہ ان نقطوں کو ملانے والی راہ کا تکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

یہاں یاد دہانی کرتا چلوں کہ واحد قیمت⁶⁰ تعلق کو تفاعل کہتے ہیں یعنی دائرہ کار D، جہاں تفاعل معین ہو، کے ہر نقطہ کے لئے تفاعل واحد ایک قیمت مختص کرتا ہے۔ یہ ہماری موجودہ بحث کے لئے ضروری ہے معلومات ہے۔

فضا کے دائرہ کار D میں معین تفاعل f ، g ، h کا تعلق

$$(11.107) \quad f dx + g dy + h dz$$

تین متغیرات کی ایک درجی تفرقی روپ⁶¹ کہلاتی ہے۔ اگر پورے D میں ہر جگہ یہ روپ قابل تفرق تفاعل $u(x, y, z)$ کا تفرق

$$(11.108) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

ہو تب یہ D میں قطعی تفرقی روپ یا قطعی⁶² کہلاتی ہے۔ یوں پورے D میں ہر جگہ درج ذیل ہوگا۔

$$(11.109) \quad f dx + g dy + h dz = du$$

مساوات 11.108 اور مساوات 11.109 کا موازنہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ D میں مساوات 11.107 صرف اور صرف اس صورت قطعی تفرقی ہوگا کہ ایسا تفاعل $u(x, y, z)$ پایا جاتا ہو کہ پورے D میں

$$(11.110) \quad f = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad h = \frac{\partial u}{\partial z}$$

independent of path⁵⁹

single valued⁶⁰

first order differential form⁶¹

exact⁶²

ہو۔ سمتی ریاضی کی زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ مساوات 11.107 صرف اور صرف اس صورت D میں قطعی تفرقی ہو گا کہ سمتی تفاعل

$$v = fi + gj + hk$$

تفاعل $u(x, y, z)$ کا D میں ڈھلوان ہو یعنی:

$$(11.111) \quad v = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ آزادی راہ کے لئے قطعیت کی شرط لازم اور کافی ہے۔

مسئلہ 11.7: (آزادی راہ اور قطعیت)

فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ اور $h(x, y, z)$ استمراری ہیں۔ تب مکمل

$$(11.112) \quad \int_C (f dx + g dy + h dz)$$

D میں صرف اور صرف اس صورت راہ سے آزاد ہو گا کہ مکمل کے اندر تفرقی صورت D میں قطعی تفرقی ہو۔

مساوات 11.112 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

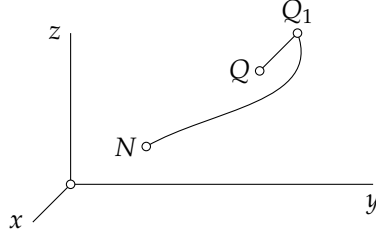
$$(11.113) \quad \int_C v \cdot dr$$

جہاں $v = fi + gj + hk$ اور $dr = dx i + dy j + dz k$ ہیں۔

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ دیا گیا مکمل D میں راہ سے آزاد ہے۔ ہم D میں کوئی مقررہ نقطہ N اور نقطہ Q منتخب کرتے ہیں۔ مزید ہم تفاعل $u(x, y, z)$ جس کی تعریف درج ذیل ہے لیتے ہیں

$$(11.114) \quad u(x, y, z) = u_0 + \int_N^Q (f dx^* + g dy^* + h dz^*)$$

جہاں u_0 مستقل ہے اور D میں N تا Q کسی بھی راہ پر مکمل لیا گیا ہے۔ اب چونکہ N غیر تغیر پذیر ہے اور مکمل راہ سے آزاد ہے لہذا مکمل کی قیمت Q کے محدود x ، y ، z پر منحصر ہو گی جو یقیناً



شکل 11.30: ثبوت مسئلہ 11.7

D میں تفاعل $u(x, y, z)$ کی تعریف ہے۔ اب مساوات 11.110 میں دیے گئے تعلقات، جو D میں $f dx + g dy + h dz$ کی قطعی تفرق ہونے کا ثبوت ہے، کو مساوات 11.114 سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم ان تین تعلقات میں سے ایک کو ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ کمل راہ سے آزاد ہے لہذا ہم N سے نقطہ Q_1 (x_1, y, z) تک کمل لینے کے بعد x محور کے متوازی Q_1 سے Q تک کمل لے سکتے ہیں۔ یہاں Q_1 کو اس طرح چنا جاتا ہے کہ پورا QQ_1 قطع D کے اندر ہو (شکل 11.30)۔ یوں

(11.115)

$$u(x, y, z) = u_0 + \int_N^{Q_1} (f dx^* + g dy^* + h dz^*) + \int_{Q_1}^Q (f dx^* + g dy^* + h dz^*)$$

ہو گا۔ ہم مساوات 11.115 کا x کے ساتھ جزوی تفرق لیتے ہیں۔ چونکہ N اور Q_1 دونوں x سے آزاد ہیں لہذا پہلی کمل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔ چونکہ قطع QQ_1 پر y اور z دونوں غیر تغیر پذیر ہیں لہذا آخری کمل کو قطعی کمل

$$\int_{x_1}^x f(x^*, y, z) dx^*$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا x کے ساتھ تفرق $f(x, y, z)$ ہے۔ یوں مساوات 11.115 کی تفرق سے

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f$$

حاصل ہوتا ہے لہذا مساوات 11.110 میں دیا گیا ایک تعلق ثابت ہوتا ہے۔

مساوات 11.110 میں دیے گئے باقی تعلقات کو بھی اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے۔

(ب) مذکورہ بالا کے برعکس فرض کریں کہ D میں $f dx + g dy + h dz$ قطعی تفرق ہے۔ تب D میں مساوات 11.110 تقابل $u(x, y, z)$ کے لئے درست ہوگی۔ فرض کریں کہ D میں N تا Q کوئی راہ C ہے جس کی مقدار معلوم روپ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

ہے جہاں $t = t_0$ نقطہ N اور $t = t_1$ نقطہ Q دیتا ہے۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} \int_N^Q (f dx + g dy + h dz) &= \int_N^Q \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{du}{dt} dt = u[x(t), y(t), z(t)] \Big|_{t_0}^{t_1} = u(Q) - u(N) \end{aligned}$$

جس کے تحت مکمل کی قیمت C کے سروں پر u کی قیمت کے فرق کے برابر ہے۔ یوں مکمل راہ سے آزاد ہے۔

□

مذکورہ بالا ثبوت میں آخری مساوات

$$(11.116) \quad \int_N^Q (f dx + g dy + h dz) = u(Q) - u(N)$$

درج ذیل قطعی مکمل کی مماثل ہے جو ہم بنیادی علم الاحصاء سے جانتے ہیں۔

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad [F'(x) = f(x)]$$

راہ سے آزاد مکمل کو حل کرنے کی خاطر مساوات 11.116 استعمال کی جاتی ہے۔ مثال 11.33 میں ایسا کیا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ تغیر پذیر قوت $\mathbf{p} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ کسی ذرہ کو راہ C پر منتقل کرتے ہوئے درج ذیل کام W سرانجام دیتی ہے

$$W = \int_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f dx + g dy + h dz)$$

باب 11. سمتی تکمیلی عمل الا حصاء۔ تکمیل کے مسئلے

جہاں راہ پر چلنے کی سمت میں تکمیل لیا جاتا ہے۔ مسئلہ 11.7 کے تحت کام اس صورت راہ سے آزاد ہو گا جب تکمیل کے اندر قطعی تفرقی روپ پایا جاتا ہو اور ایسا تب ہو گا جب قوت p کسی غیر سمتی تفاعل u کی ڈھلوان ہو۔ ایسی قوت کا میدان بقائی⁶³ کہلاتا ہے (حصہ 10.8 کا آخر دیکھیں)۔

مثال 11.31: متغیر قوت کا سرانجام کام
قوت $p = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ ایک ذرہ کو $N : (3, 2, 4)$ سے سیدھی راہ پر $Q : (5, 4, 6)$ منتقل کرتی ہے۔ اس کام کو

$$W = \int_C (yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz)$$

لکھا جاسکتا ہے جو مساوات 11.106 کی طرز کا تکمیل ہے جہاں

$$f = yz, \quad xz, \quad h = xy$$

ہیں جو $u = xyz$ لیتے ہوئے مساوات 11.110 پر پورا اترتے ہیں۔ یوں W تکمیل کی راہ سے آزاد ہے لہذا ہم مساوات 11.116 استعمال کر سکتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$W = u(Q) - u(N) = u(5, 4, 6) - u(3, 2, 4) = 120 - 24 = 96$$

□

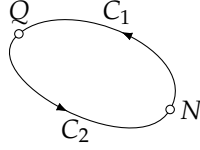
مسئلہ 11.7 سے درج ذیل اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 11.8: (راہ سے آزادی)

فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں f ، g ، h استمراری ہوں تب تکمیل

$$\int_C (f \, dx + g \, dy + h \, dz)$$

صرف اور صرف اس صورت D میں راہ سے آزاد ہو گا جب D میں ہر سادہ بند راہ پر تکمیل کی قیمت صفر کے برابر ہو۔



شکل 11.31: ثبوت مسئلہ 11.8

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ D میں C ایک سادہ بند راہ ہے اور مکمل راہ سے آزاد ہے۔ ہم C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.31)۔ یوں

(11.117)

$$\oint_C (f dx + g dy + h dz) = \int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) + \int_{C_2} (f dx + g dy + h dz)$$

ہو گا۔ راہ سے آزادی کی بنا

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (f dx + g dy + h dz) &= \int_{C_1^*} (f dx + g dy + h dz) \\ &= - \int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) \end{aligned}$$

ہو گا جہاں C_1 پر الٹ رخ چلنے کو C_1^* سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس سے مساوات 11.117 کا بائیں ہاتھ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ (ب) مذکورہ بالا کے برعکس فرض کریں کہ D میں ہر سادہ بند راہ پر دیا گیا مکمل صفر کے برابر ہے۔ مزید فرض کریں کہ N اور Q دائرہ کار D میں کوئی دو نقطے ہیں اور ان نقطوں کے مابین D میں C_1 اور C_2 دو ایسے راہ ہیں جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں (شکل 11.31)۔ C_1 اور C_2 مل کر سادہ بند راہ دیتے ہیں۔ یوں

$$\int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) + \int_{C_2} (f dx + g dy + h dz) = \oint_C (f dx + g dy + h dz) = 0$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (f dx + g dy + h dz) &= - \int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) \\ &= \int_{C_1^*} (f dx + g dy + h dz) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلہ کو فوری وسعت دیتے ہوئے، اپنی آپ کو محدود مرتبہ قطع کرتی ہوئی راہ پر لاگو کیا جاسکتا ہے۔

اس سادہ مسئلہ کو قابل استعمال بنانے کی خاطر ایسا اصول درکار ہو گا جس سے جاننا ممکن ہو کہ آیا کمل کے اندر قطعی تفرقی روپ پایا جاتا ہے یا نہیں۔ ایسا اصول مسئلہ 11.9 میں پیش کیا گیا ہے۔ اس مسئلے کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصور ضروری ہے۔

دائرہ کار D اس صورت سادہ تعلق⁶⁴ رکھتا ہے جب D میں رہتے ہوئے D میں ہر بند راہ کو مسلسل گھٹاتے ہوئے نقطہ مانند بنانا ممکن ہو۔

مثلاً کرہ یا مکعب کی اندرون، ایسی کرہ کا اندرون جس میں محدود تعداد کے نقطے شامل نہ ہوں، یا دو ہم مرکز کرہ کے مابین دائرہ کار سادہ تعلق رکھتے ہیں۔ اس کے برعکس اندر سے کی اندرون کا دائرہ کار سادہ تعلق نہیں رکھتا ہے۔

مسئلہ 11.9: (اصول قطعیت اور راہ سے آزادی)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں تفاعل $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ ، $h(x, y, z)$ اور ان کے ایک درجی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔ اگر خطی کمل

$$(11.118) \quad \int_C (f dx + g dy + h dz)$$

D میں راہ سے آزاد ہو (اور یوں D میں $f dx + g dy + h dz$ قطعی تفرق ہو) تب پورے D میں ہر جگہ

$$(11.119) \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

ہو گا جس کو سمتی ریاضی میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.120) \quad \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{v} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k})$$

اس کے برعکس اگر D سادہ تعلق رکھتا ہو اور D میں ہر جگہ مساوات 11.119 درست ہو تب مساوات 11.118 میں دیا گیا کمل D میں راہ سے آزاد ہو گا (اور نتیجتاً D میں $f dx + g dy + h dz$ قطعی تفرقی ہو گا)۔

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ مساوات 11.118 D میں راہ سے آزاد ہے۔ تب مسئلہ 11.7 کے تحت $f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ دائرہ کار D میں قطعی تفرق ہو گا اور مساوات 11.111 کے تحت درج ذیل ایسا تفاعل $u(x, y, z)$ پایا جائے گا کہ D میں درج ذیل ہو

$$\mathbf{v} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k} = \nabla u$$

لہذا مساوات 10.124 کی مدد سے درج ذیل ہو گا۔

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$$

(ب) اس کے برعکس فرض کریں کہ D سادہ تعلق رکھتا ہے اور پورے D میں ہر جگہ مساوات 11.120 درست ثابت ہوتی ہے۔ مزید فرض کریں کہ D میں C سادہ بند راہ ہے۔ چونکہ D سادہ تعلق رکھتا ہے لہذا ہم D میں ایسی سطح S دریافت کر سکتے ہیں جس کی تحدیدی سرحد C ہو۔ یہاں مسئلہ سٹوکس (مسئلہ 11.6) قابل استعمال ہے جس سے

$$\int_C (f dx + g dy + h dz) = \int_C v_t ds = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v})_n dA = 0$$

ملتا ہے جہاں C کی درست سمت کے لحاظ سے S کا اکائی عمودی سمتیہ \mathbf{n} استعمال کیا جائے گا۔ اس نتیجے کے ساتھ مسئلہ 11.8 ملاتے ہوئے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 11.118 کا مکمل D میں راہ سے آزاد ہے۔

□

ہم دیکھتے ہیں کہ xy مستوی میں خطی مکمل

$$\int_C (f dx + g dy)$$

کی صورت میں مساوات 11.119 سے درج ذیل ایک شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$(11.121) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

D کی سادہ تعلق رکھنے کا شرط لازم ہے جس کی وضاحت درج ذیل مثال میں ہوتی ہے۔

مثال 11.32: فرض کریں کہ درج ذیل ہو۔

$$f = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad g = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad h = 0$$

ان کا تفرق لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ xy مستوی میں مبدا کو نہ شامل کرتے ہوئے کسی بھی دائرہ کار پر یہ تفاعل مساوات 11.121 پر پورا اترتے ہیں مثلاً دائرہ کار $\frac{3}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{5}{2}$ میں (شکل 11.32)۔ ظاہر ہے کہ D سادہ تعلق نہیں رکھتا ہے۔ اگر کمل

$$I = \int_C (f dx + g dy) = \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

D میں راہ سے آزاد ہوتا تب D میں کسی بھی بند راہ مثلاً دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر $I = 0$ ہوتا۔ ہم $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ پر کرتے ہوئے اور راہ کو $r = 1$ لکھتے ہوئے

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ ایک مرتبہ گھومتے ہوئے کمل حاصل کیا گیا ہے۔ چونکہ D سادہ تعلق نہیں رکھتا لہذا مسئلہ 11.9 لاگو نہیں ہو گا اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ I راہ سے آزاد ہے۔ مزید درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f dx + g dy = du, \quad u = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \theta$$

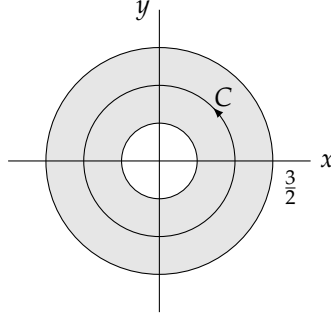
لیکن D میں u واحد قیمت نہیں ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم u کی "صدر قیمت" لیں جس کو $-\pi < u \leq \pi$ لیں تب منفی x محور پر u نا تو قابل تفرق ہے (اور نا ہی استمراری ہے) جو قطعیت کی بنیادی شرط ہے۔ □

اگر خطی کمل راہ سے آزاد ہوتا تب اس کو مساوات 11.116 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 11.33: راہ سے آزاد خطی کمل کا حل

درج ذیل خطی کمل کی قیمت $N : (0, 0, 1)$ تا $Q : (1, \frac{\pi}{4}, 2)$ کسی بھی راہ پر دریافت کرتے ہیں۔

$$I = \int_C [2xyz^2 dx + (x^2z^2 + z \cos yz) dy + (2x^2yz + y \cos yz) dz]$$



شکل 11.32: شکل برائے مثال 11.32

مسئلہ 11.9 کے تحت مکمل راہ سے آزاد ہے۔ چونکہ $f = 2xyz^2$ ہے لہذا مساوات 11.110 میں دیے پہلا تعلق سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(11.122) \quad u = \int f \, dx = x^2 y z^2 + a(y, z)$$

جس کو مساوات 11.110 کے دوسرے تعلق میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 z^2 + \frac{\partial a}{\partial y} = g = x^2 z^2 + z \cos yz$$

ماتا ہے جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\partial a}{\partial y} = z \cos yz, \quad \implies \quad a = \sin yz + c(z)$$

اس کو مساوات 11.110 کے تیسرے تعلق اور مساوات 11.122 کے ساتھ ملاتے ہوئے

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2 yz + y \cos yz + \frac{dc}{dz} = h = 2x^2 yz + y \cos yz$$

یعنی

$$\frac{dc}{dz} = 0$$

ماتا ہے جس سے مستقل c حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$u(x, y, z) = x^2 yz + a = x^2 yz^2 + \sin yz + c$$

باب 11. سمتی تکلی عمل الاحصاء تکمل کے مسئلے

ہو گا۔ آپ سے التماس ہے کہ تکمل کو دیکھ کر u لکھنے کی کوشش کریں۔ مساوات 11.116 استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$I = [x^2 y z^2 + \sin y z + c] \Big|_N^Q = \pi + \sin \frac{\pi}{2} = \pi + 1$$

□

سوالات

سوال 11.174 تا سوال 11.181 میں کیا قطعی تفرق دیا گیا ہے؟

سوال 11.174: $yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$ قطعی تفرق جواب:

سوال 11.175: $(y + z) \, dx + (x + z) \, dy + (x + y) \, dz$ قطعی تفرق جواب:

سوال 11.176: $(xy + z) \, dx + (x + yz) \, dy + (xz + y) \, dz$ غیر قطعی تفرق جواب:

سوال 11.177: $e^x \, dx + e^y \, dy + e^z \, dz$ قطعی تفرق جواب:

سوال 11.178: $e^y \, dx + e^z \, dy + e^x \, dz$ غیر قطعی تفرق جواب:

سوال 11.179: $\cos x \, dx - \sin y \, dy + dz$ قطعی تفرق جواب:

سوال 11.180: $x^2 \, dx + y^2 \, dy + z^2 \, dz$ قطعی تفرق جواب:

سوال 11.181: $y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$

جواب: غیر قطعی تفرق

سوال 11.182 تا سوال 11.187 میں ثابت کریں کہ قطعی تفرقی روپ دی گئی ہے۔ ایسا تفاعل u دریافت کریں کہ دیا گیا تفرق du لکھا جاسکے۔

سوال 11.182: $x dx - y dy - z dz$

جواب: $\frac{1}{2}(x^2 - y^2 - z^2)$

سوال 11.183: $dx - dy - dz$

جواب: $x - y - z$

سوال 11.184: $2xy^3z dx + 3x^2y^2z dy + x^2y^3 dz$

جواب: x^2y^3z

سوال 11.185: $-(yz + \sin x) dx + (\cos x - xz) dy + (\cos z - xy) dz$

جواب: $y \cos x - xyz + \sin z$

سوال 11.186: $(\cos z + e^{x+y}) dx + e^{x+y} dy - x \sin z dz$

جواب: $e^{x+y} + x \cos z$

سوال 11.187: $(2x \cos x \sin y - x^2 \sin x \sin y) dx + (z + x^2 \cos x \cos y) dy + y dz$

جواب: $x^2 \sin y \cos x + yz$

سوال 11.188 تا سوال 11.192 میں ثابت کریں کہ مکمل کے اندر قطعی تفرق دیا گیا ہے۔ مکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.188: $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x dx - y dy + z dz)$

جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 11.189: $\int_{(1,0,1)}^{(3,1,2)} [(y + z^2) dx + x dy + 2xz dz]$

جواب: 14

$$\int_{(0,0,1)}^{(2,\frac{\pi}{2},2)} (\sin y \, dx + x \cos y \, dy + e^z \, dz) \quad \text{سوال 11.190}$$

$$\text{جواب: } e^2 - e + 2$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(3,2,4)} [(y + \frac{1}{x}) \, dx + (x + \frac{1}{y}) \, dy + \frac{1}{z} \, dz] \quad \text{سوال 11.191}$$

$$\text{جواب: } 5 + \ln 24$$

$$\int_{(3,2,1)}^{(5,2,-1)} (\sqrt{y} \, dx + \frac{x}{2\sqrt{y}} \, dy) \quad \text{سوال 11.192}$$

$$\text{جواب: } 2\sqrt{2}$$

باب 12

فوریہ تسلسل

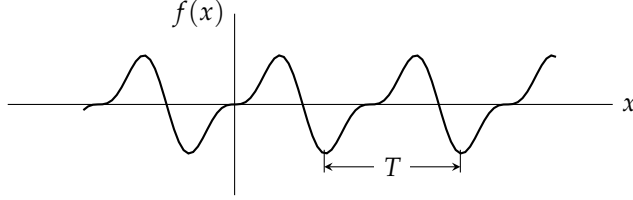
انجینئری مسائل میں دوری تفاعل عموماً پائے جاتے ہیں جن کو سادہ دوری تفاعل مثلاً \sin اور \cos کی روپ میں لکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اسی عمل سے فوریہ تسلسل¹ ابھر کر سامنے آتی ہے جو سادہ تفرقی مساوات اور جزوی تفرقی مساوات کے حل میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

فوریہ تسلسل کا نظریہ پیچیدہ ہے جبکہ اس کا استعمال نہایت آسان ہے۔ چونکہ بہت سارے غیر استمراری تفاعل کا فوریہ تسلسل حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ ان کا ٹیلر تسلسل نہیں پایا جاتا ہے لہذا فوریہ تسلسل کو ٹیلر تسلسل کی عالمگیر صورت تصور کیا جاسکتا ہے۔

اس باب میں فوریہ تسلسل سے وابستہ تصورات، حقائق اور تکنیکی تراکیب پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ ان کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں ان کا استعمال دکھایا جائے گا۔

اس باب کی آخری حصے میں فوریہ مکمل پر غور کیا جائے گا جنہیں اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں استعمال کیا جائے گا۔

¹ فرانسیسی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات ژاں باپتیسٹ یوسف فوریہ [1768-1830]



شکل 12.1: دوری تفاعل

12.1 دوری تفاعل، تگونیاتی تسلسل

تفاعل $f(x)$ اس صورت دودی² کہلاتا ہے کہ جب پورے حقیقی x پر $f(x)$ معین ہو اور ایسا مثبت عدد T پایا جاتا ہو کہ تمام x پر درج ذیل درست ہو۔

$$(12.1) \quad f(x+T) = f(x) \quad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

عددی T کو $f(x)$ کا دوری عرصہ³ کہتے⁴ ہیں۔ T کے برابر $f(x)$ کے کسی بھی وقفے کا ترسیم دہراتے ہوئے ایسے تفاعل کا ترسیم حاصل کیا جاتا ہے (شکل 12.1)۔ عملی استعمال میں عموماً دوری اعمال اور تفاعل پائے جاتے ہیں۔

دوری تفاعل کی مثالیں $\sin x$ اور $\cos x$ ہیں۔ اس کے علاوہ مستقل $f = c$ بھی دوری تفاعل کی تعریف (مساوات 12.1 پر ہر مثبت T کے لئے) پورا اترنے کی بنا دوری تفاعل ہے۔

مساوات 12.1 سے ظاہر ہے کہ عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

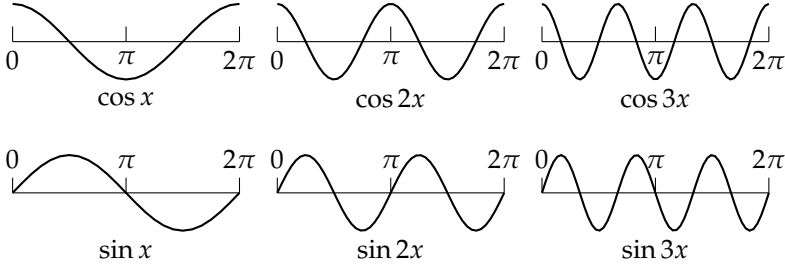
$$f(x+nT) = f(x) \quad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

یوں $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، ... بھی تفاعل $f(x)$ کے دوری عرصے ہیں۔ مزید اگر تفاعل $f(x)$ کا اور $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب درج ذیل تفاعل

$$h(x) = af(x) + bg(x) \quad \text{مستقل } a, b$$

periodic²
period³

⁴ تفاعل $f(x)$ کا کم تر دوری عرصہ $T (> 0)$ ، اگر موجود ہو، $f(x)$ کا اولی دوری عرصہ کہلاتا ہے۔ مثلاً $\sin x$ اور $\sin 2x$ کا بالترتیب اولی دوری عرصہ 2π اور π ہے جبکہ مستقل $f = c$ کا کوئی دوری عرصہ نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 12.2: سائن اور کوسائن تقابل جن کا دوری عرصہ 2π ہے

کا دوری عرصہ بھی T ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

اس باب کی شروع میں ہم ایسے مختلف تقابل جن کا دوری عرصہ 2π ہو کو درج ذیل سادہ تقابل کی روپ میں ظاہر کرنا سیکھیں گے

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

جن کا دوری عرصہ 2π ہے (شکل 12.2)۔ ہم دیکھیں گے کہ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل طرز کی تسلسل حاصل ہوگی

$$(12.2) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

جہاں $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ حقیقی مستقل ہوں گے۔ اس تسلسل کو تکنیاتی تسلسل⁵ کہتے ہیں جبکہ a_n اور b_n تسلسل کی عددی سر⁶ کہلاتے ہیں۔ چونکہ اس تسلسل کے ہر رکن کا دوری عرصہ 2π ہے لہذا اگر یہ تسلسل مرکوز ہو تب یہ ایسا تقابل ہو گا جس کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔

انجینئری میں واقع تقابل پیچیدہ ہوتے ہیں جنہیں سادہ دوری تقابل کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ عملی استعمال، مثلاً ارتعاش، میں پائے جانے والا تقریباً ہر دوری تقابل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو فوریزر تسلسل کی روپ میں لکھنا ممکن ہو گا۔ ہم مساوات 12.2 کے عددی سر حاصل کرنے کے ایسے کلیات دریافت کریں گے جو $f(x)$ پر منحصر ہوں گے اور جنہیں استعمال کرتے ہوئے حاصل تسلسل مرکوز ہو گا جس کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا۔ اس کے بعد ہم حاصل کلیات کو عمومی شکل دیتے ہوئے ان کو کسی بھی دوری عرصہ کے تقابل کے لئے قابل استعمال بنائیں گے۔ ایسا کرنا نہایت آسان ثابت ہو گا۔

trigonometric series⁵
coefficients⁶

سوالات

سوال 12.1: دیے گئے تفاعل کا کم تر دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x$$

جوابات: $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$

سوال 12.2: اگر تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب ثابت کریں کہ nT جہاں $n = 2, 3, \dots$ ہے بھی اس تفاعل کا دوری عرصہ ہو گا۔

سوال 12.3: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کا اور تفاعل $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب تفاعل $h(x) = af(x) + bg(x)$ کا دوری عرصہ بھی T ہو گا، جہاں a اور b مستقل ہیں۔ یوں دوری عرصہ T رکھنے والے تمام تفاعل سمتی فضا پیدا کرتے ہیں۔

سوال 12.4: ثابت کریں کہ تفاعل مستقل $f(x) = \cos x$ ایسا دوری تفاعل ہے جس کا دوری عرصہ T کوئی بھی مثبت عدد ہو سکتا ہے۔

سوال 12.5: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہونے کی صورت میں x کے دوری تفاعل $f(ax), a \neq 0$ کا دوری عرصہ $\frac{T}{a}$ ہو گا جبکہ x کے دوری تفاعل $f(\frac{x}{b}), b \neq 0$ کا دوری عرصہ bT ہو گا۔ ان نتائج کی تصدیق $f(x) = \cos x, a = b = 2$ کے لئے کریں۔

سوال 12.6 تا سوال 12.12 میں دیے گئے تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

$$\sin x, \quad \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x, \quad \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \quad \text{سوال 12.6}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{سوال 12.7 اور}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

ہے۔ سوال 12.6 کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.8:

$$\sin 2\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x + \frac{1}{5} \sin 10\pi x$$

سوال 12.9:

$$\sin x, \quad \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.10:

$$-\cos x, \quad -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x, \quad -\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x,$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{سوال 12.11}$$

$$f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{سوال 12.12}$$

سوال 12.13 تا سوال 12.16 میں دوری تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔ اس کی ترسیم کھینچیں۔ وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ کے لئے $f(x)$ دیا گیا ہے۔

سوال 12.13:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سوال 12.14:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سوال 12.15:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سوال 12.16:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سوال 12.17 تا سوال 12.25 میں دیے گئے تکرر ہمیں آگے درکار ہوں گے۔ ان تکرر میں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔ تکرر کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 12.17: $\int_0^{\pi} \sin nx \, dx$ جواب: n طاق n کے لئے $\frac{2}{n}$ اور جفت n کے لئے صفر۔

سوال 12.18: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos nx \, dx$ جواب: جفت n کے لئے صفر اور طاق n کے لئے $\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$

سوال 12.19: $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$ جواب: $(-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n}$

سوال 12.20: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx$ جواب: طاق n ، $\frac{2}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$ ، یعنی $(-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{2}{n^2}$ جبکہ جفت n ، $-\frac{\pi}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$ ، یعنی $(-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{\pi}{n}$

سوال 12.21: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx \, dx$ جواب: 0

سوال 12.22: $\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$
 جواب: $\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$

سوال 12.23: $\int_{-\pi}^0 e^x \sin nx \, dx$
 جواب: $\frac{n}{n^2+1} [(-1)^n e^{-\pi} - 1]$

سوال 12.24: $\int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx$
 جواب: $\frac{1}{n^2+1} [e^{\pi}(-1)^n - 1]$

سوال 12.25: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$
 جواب: $\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$

12.2 فوریر تسلسل۔ یولر کلیات

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کو درج ذیل ٹکونیاتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$(12.3) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ہم دیے گئے تفاعل $f(x)$ کی ٹکونیاتی تسلسل (مساوات 12.3) کے عددی سر a_n ، اور b_n جاننا چاہتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے a_0 دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 12.3 کے دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx$$

اگر تسلسل کے ارکان کا جزو با جزو مکمل لینا جائز ہو⁷، تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right)$$

دائیں ہاتھ پہلا رکن $2\pi a_0$ کے برابر ہے۔ بائیں ہاتھ باقی تمام ارکان صفر کے برابر ہیں، جیسا کہ مکمل لے کر ثابت کیا جاسکتا ہے۔ یوں پہلا کلیہ درج ذیل ملتا ہے۔

$$(12.4) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

ہم اب a_1 ، a_2 ، ... اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔ ہم مساوات 12.3 کو $\cos mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مقررہ مثبت عدد صحیح ہے، دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$(12.5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx dx$$

جزو در جزو مکمل لیتے ہوئے دائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right]$$

پہلا مکمل صفر کے برابر ہے۔ ضمیمہ-ب میں دیا گیا مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x dx \end{aligned}$$

تکمل لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ بالائی دائیں جزو کے علاوہ تمام تکمل صفر کے برابر ہیں۔ بالائی دایاں جزو $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 12.5 میں اس جزو کو a_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا a_m لکھا جاسکتا ہے) لہذا مساوات 12.5 کا دایاں ہاتھ $a_m \pi$ کے برابر ہو گا۔ یوں دوسرا کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(12.6) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

⁷ ایسا جائز ہے، مثلاً، استمراری مرکز صورت میں۔

ہم آخر میں b_1 ، b_2 ، ... حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 12.3 کو $\sin mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مثبت مقررہ عدد صحیح ہے، $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$(12.7) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \, dx$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دایاں ہاتھ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \right]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔ دوسرے تکمل کی طرز کی تکمل پر ہم غور کر چکے ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ تمام $n = 1, 2, \dots$ کے لئے اس کی قیمت صفر ہے۔ آخری تکمل کو ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m) \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m) \, dx$$

آخری جزو صفر کے برابر ہے۔ دایاں ہاتھ پہلا جزو $n \neq m$ کی صورت میں صفر جبکہ $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 12.7 میں اس جزو کو b_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا b_m لکھا جاسکتا ہے) لہذا مساوات 12.7 کا دایاں ہاتھ $b_m \pi$ کے برابر ہو گا۔ یوں آخری کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(12.8) \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

اب m کی جگہ n لکھتے ہوئے ان کلیات کو، جنہیں یولر کلیات⁸ کہتے، ایک جگہ اکٹھا کرتے ہیں۔

$$(الف) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$(12.9) \quad (ب) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(پ) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

چونکہ مکمل دوری ہیں لہذا مساوات 12.9 میں وقفہ مکمل کو 2π کے برابر کسی بھی وقفہ، مثلاً $0 \leq x \leq 2\pi$ سے بدلا جاسکتا ہے۔

دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.9 کی مدد سے عددی سر a_n اور b_n حاصل کر کے ہم درج ذیل تکنیکی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(12.10) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

اس تسلسل کو $f(x)$ کی فوریر تسلسل⁹ کہتے ہیں جبکہ مساوات 12.9 سے حاصل عددی سر a_n ، b_n کو $f(x)$ کے فوریر عددی سر¹⁰ کہتے ہیں۔

قطعی نکل کی تعریف سے واضح ہے کہ اگر $f(x)$ استمراری یا ٹکڑوں میں استمراری (جہاں وقفہ نکل پر $f(x)$ میں محدود تعداد کے چھلانگ پائے جاتے ہوں) ہو تب مساوات 12.9 میں دیے گئے نکلمات موجود ہوں گے لہذا ہم $f(x)$ کے فوریر عددی سروں کو مساوات 12.9 کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا اس طرح حاصل کیا گیا فوریر تسلسل مرکوز ہو گا اور آیا تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا؟ ان سوالات پر اسی حصے میں آگے جا کر غور کیا جائے گا۔

آئیں مساوات 12.9 کی استعمال کو ایک سادہ مثال کی مدد سے سمجھیں۔

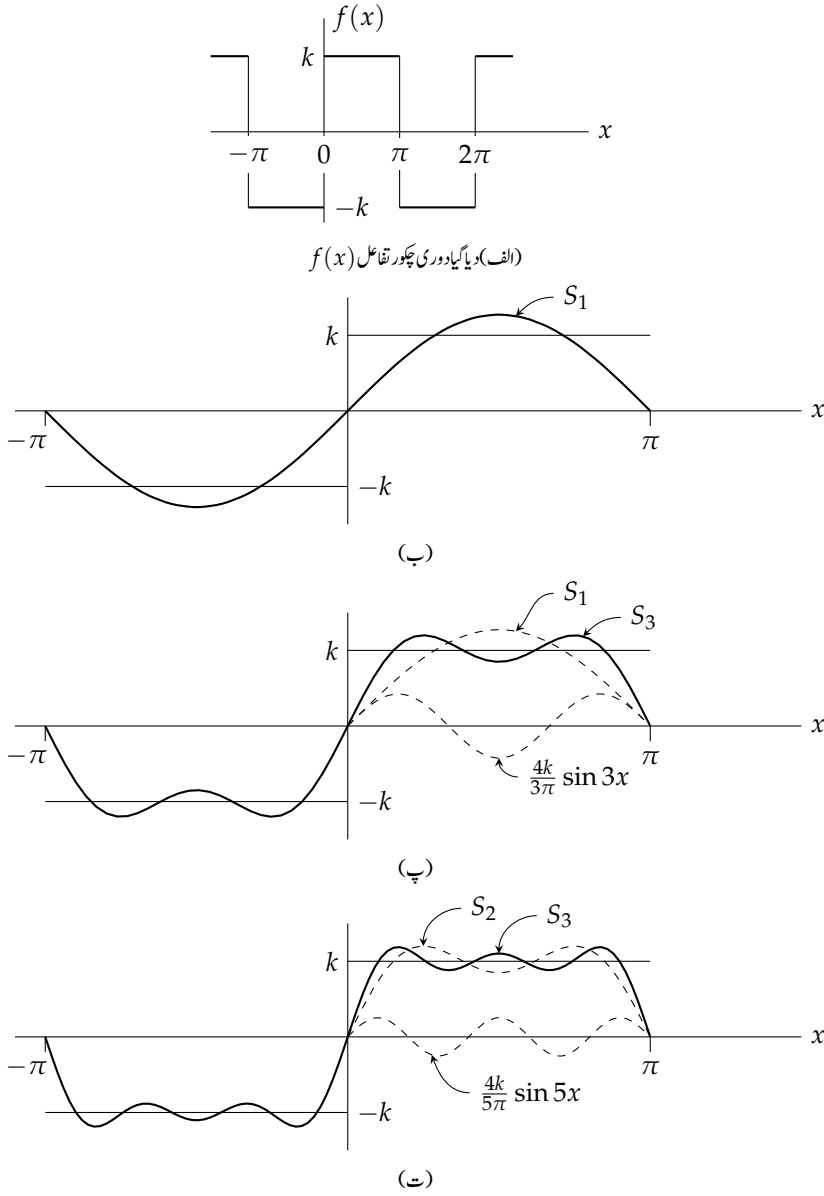
مثال 12.1: چکور موج
چکور موج کے فوریر عددی سر کو مساوات 12.9 سے حاصل کریں۔ چکور موج کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔ چکور موج کی تجلیی روپ درج ذیل ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{جہاں} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

اس طرز کے تفاعل میکانی نظام میں بطور بیرونی قوت یا برقی ادوار میں بطور داخلی دباؤ پائے جاسکتے ہیں، وغیرہ۔

حل: مساوات 12.9-الف سے $a_0 = 0$ ملتا ہے۔ یہ نتیجہ بغیر نکل کے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے کہ چکور موج کا رقبہ $-\pi$ تا π صفر ہے۔ مساوات 12.9-ب سے

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} k \cos nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$



شکل 12.3: فوریر تسلسل کی زیادہ ارکان لینے سے اصل تقابل پر بہتر بیٹھتی شکل حاصل ہوتی ہے (مثال 12.1)

میتا ہے جہاں تمام $n = 1, 2, \dots$ کے لئے $-\pi$ ، 0 اور π پر $\sin nx = 0$ پر کیا گیا ہے۔ اسی طرح مساوات 12.9-پ سے

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] \end{aligned}$$

میتا ہے۔ چونکہ $\cos 0 = 1$ اور $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ہوتا ہے لہذا اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_n = \frac{k}{n\pi} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

اب $\cos \pi = -1$ ، $\cos 2\pi = 1$ ، $\cos 3\pi = -1$ ، وغیرہ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & n \text{ طاق} \\ 1 & n \text{ جفت} \end{cases} \implies 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases}$$

یوں b_n درج ذیل ہوں گے۔

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \dots$$

چونکہ $a_n = 0$ ہیں لہذا دی گئی چکور تفاعل کی فوریئر تسلسل

$$(12.11) \quad \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

ہوگی جس کے جزوی مجموعے درج ذیل ہیں۔

$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right), \dots$$

شکل 12.3 میں جزوی مجموعہ میں ارکان کی تعداد بتدریج بڑھاتے ہوئے تسلسل کا ترسیم کھینچا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ تسلسل کے زیادہ ارکان استعمال کرنے سے ترسیم کی شکل اصل تفاعل (چکور موج) کی زیادہ قریب ہوتی ہے۔ چکور موج $-\pi$ ، 0 ، π ، وغیرہ پر غیر استمراری ہے یعنی یہاں تفاعل میں چھلانگ پائی جاتی ہے۔ یوں ہم نہیں کہہ سکتے کہ آیا $x = 0$ پر چکور تفاعل کی قیمت $-k$ ہے یا k ہے یا کہ ان دونوں قیمتوں کے مابین ہے۔ اس کے برعکس فوریئر تسلسل کے تمام جزوی مجموعے ان نقطوں پر صفر کے برابر ہیں جو $-k$ اور k کی اوسط قیمت ہے۔

مزید فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہے۔ شکل 12.3-الف سے ظاہر ہے کہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر چکور تفاعل کی قیمت k کے برابر ہے۔ یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots\right)$$

یعنی

$$(12.12) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots = \frac{\pi}{4}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مشہور نتیجہ لیبنٹز نے 1673 کے لگ بھگ جیومیٹریائی اصولوں سے حاصل کیا۔ اس سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل ارکان کی کئی تسلسل کی قیمت کو مختلف نقطوں پر فوریر تسلسل کی قیمت سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ □

ایسے تفاعل جنہیں فوریر تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کی تعداد غیر یقینی طور پر زیادہ ہے۔ انجینئری میں استعمال ہونے والی تقریباً ہر ممکن تفاعل کو فوریر تسلسل کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے درکار (کافی) شرائط درج ذیل مسئلہ 12.1 میں بیان کیے گئے ہیں۔ اس مسئلہ میں چند تصورات کی ضرورت ہے جن پر پہلے بات کرتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد¹¹ سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو x_0 تک بائیں ہاتھ سے پہنچتے ہوئے حاصل ہوگی۔ یوں بائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0 - 1)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے درج ذیل ہوگی

$$f(x_0 - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$$

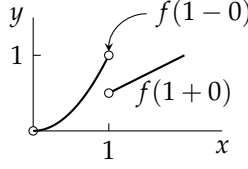
جہاں h مثبت قیمت ہے۔ اسی طرح x_0 پر $f(x)$ کی دائیں ہاتھ حد¹² سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو دائیں ہاتھ سے آکر x_0 تک پہنچتے ہوئے حاصل ہوگی۔ یوں دائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0 + 0)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$f(x_0 + 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$$

ہوگی جہاں h مثبت قیمت ہے۔ شکل 12.4 میں غیر استمراری تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ \frac{x}{2} & x > 1 \end{cases}$$

¹¹ left hand limit
¹² right hand limit



شکل 12.4: بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد، بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق

دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $x_0 = 1$ پر اس تفاعل کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد درج ذیل ہیں

$$f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = \frac{1}{2}$$

جن میں فرق $(1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2})$ کو چھلانگ¹³ کہتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر بائیں ہاتھ تفرق¹⁴ سے مراد

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}$$

اور دائیں ہاتھ تفرق¹⁵ سے مراد

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

ہے جہاں h مثبت قیمت ہے۔ ظاہر ہے کہ اگر نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ استمراری ہو تب $f(x_0 - 0)$ اور $f(x_0 + 0)$ دونوں $f(x_0)$ ہی کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 12.1: (تفاعل کا فوریرس تسلسل کی روپ میں اظہار)

اگر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو، وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ میں ٹکڑوں میں استمراری¹⁶ ہو اور اس وقفے کے ہر نقطے پر تفاعل کا دایاں ہاتھ تفرق اور پایاں ہاتھ تفرق موجود ہو تب تفاعل کی فوریرس تسلسل، مساوات 12.10، جس کی عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل کیے گئے ہوں، مرکب ہوگی۔ تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا ماسوائے نقطہ x_0 پر جہاں تفاعل غیر استمراری ہو۔ نقطہ x_0 پر تسلسل کی قیمت، نقطہ x_0 پر $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کی اوسط ہوگی۔

¹³ jump

¹⁴ left hand differential

¹⁵ right hand differential

¹⁶ ٹکڑوں میں استمراری کی تعریف حصہ 6.1 میں دی گئی ہے۔

دائے ذی: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریرس تسلسل مرکب ہو اور اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو (جیسا مسئلہ 12.1 میں بیان کیا گیا ہے) تب اس تسلسل کو $f(x)$ کی فوریرس تسلسل کہتے ہیں جس کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

اور ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کو یہ فوریرس تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ اب چونکہ کسی بھی مرکب تسلسل میں قوسین لگانے سے ایک نئی مرکب تسلسل ملتی ہے جس کا مجموعہ اصل تسلسل کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے لہذا ہم درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ثبوت: استمراری تفاعل $f(x)$ جس کا استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پایا جاتا ہو کی مرکزیت (مسئلہ 12.1) کا ثبوت۔

مساوات 12.9-ب کا مکمل بالخصوص لیتے ہوئے

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

ملتا ہے۔ دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے برابر ہے۔ دوبارہ مکمل بالخصوص لینے سے

$$a_n = \frac{f'(x) \cos nx}{n^2 \pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx$$

ملتا ہے۔ چونکہ $f'(x)$ دوری اور استمراری ہے لہذا دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر ہو گا۔ وقفہ مکمل میں $f''(x)$ استمراری ہے لہذا

$$|f''(x)| < M$$

ہو گا جہاں M ایک موزوں مستقل ہے۔ مزید $|\cos nx| < 1$ ہے۔ یوں

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx \right| < \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = \frac{2M}{n^2}$$

ہو گا۔ اسی طرح تمام n کے لئے $|b_n| < \frac{2M}{n^2}$ ہو گا۔ اس طرح فوریر تسلسل کی ہر رکن کی زیادہ سے زیادہ قیمت درج ذیل تسلسل کی مطابقتی رکن کی قیمت کے برابر ہو سکتی ہے جو مرکب تسلسل ہے۔

$$|a_0| + 2M \left(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

یوں فوریر تسلسل بھی مرکب ہو گی۔

نکڑوں میں استمراری تفاعل $f(x)$ کی صورت میں فوریر تسلسل کی مرکزیت اور مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

□

سوالات

سوال 12.26 تا سوال 12.42 میں دیے گئے دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کا فوریر تسلسل دریافت کریں۔ پہلے تین جزوی مجموعوں¹⁷ کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.26: تفاعل کو شکل 12.5-الف میں دیا گیا ہے۔

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - + \dots)$

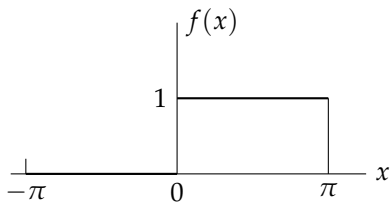
سوال 12.27: تفاعل کو شکل 12.5-ب میں دیا گیا ہے۔

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \dots)$

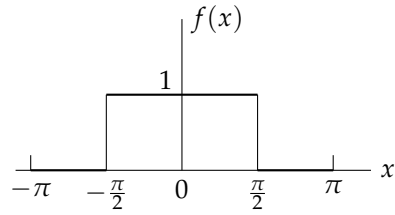
سوال 12.28: تفاعل کو شکل 12.5-پ میں دیا گیا ہے۔

جواب: $\frac{4}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$

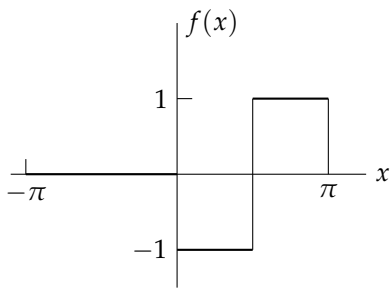
¹⁷یعنی $N = 1, 2, 3$ جہاں $a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ہے۔



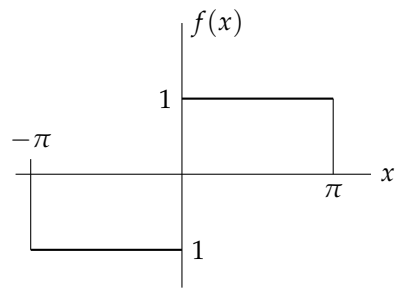
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

شکل 12.5: تفاعل برائے سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.29: تفاعل کو شکل 12.5-ت میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{2}{\pi}(-\cos x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x \dots)$

سوال 12.30:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \dots)$

سوال 12.31:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos x - \sin x - \sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x \dots)$

سوال 12.32:

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \frac{2}{1}\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x \dots$

سوال 12.33:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(-\cos x + \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x \dots)$

سوال 12.34:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x \dots$

سوال 12.35:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x \dots)$$

سوال 12.36:

$$f(x) = \begin{cases} \pi & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos x - \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{2}{9\pi} \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x \dots$$

سوال 12.37:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } 2 \sin x + \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{2}{5} \sin 5x \dots$$

سوال 12.38:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}(-\cos x + 3 \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \sin 3x \dots)$$

$$\text{سوال 12.39: } f(x) = x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi}{16} + \frac{1}{\pi}[(\frac{\pi}{2} - 1) \cos x + \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \dots]$$

$$\text{سوال 12.40: } f(x) = \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\sin x$

سوال 12.41: نصف لہر سمت کار

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{35} \cos 6x + \dots)$$

$$\text{سوال 12.42: } f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi \text{ مکمل لہر سمت کار}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{35} \cos 6x \dots)$$

سوال 12.43: مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کی سوال 12.26 کے لئے تصدیق کریں۔

سوال 12.44: سوال 12.26 کی حاصل تسلسل سے سوال 12.27 کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.45: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریر عددی سر a_n اور b_n ہوں تب ثابت کریں کہ تفاعل $kf(x)$ جہاں k مستقل ہے کے عددی سر ka_n اور kb_n ہوں گے۔

سوال 12.46: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کے عددی سر a_n ، b_n اور تفاعل $g(x)$ کے عددی سر a_n^* ، b_n^* ہوں تب تفاعل $f(x) + g(x)$ کے عددی سر $a_n + a_n^*$ ، $b_n + b_n^*$ ہوں گے۔

سوال 12.47: سوال 12.33 میں دیے گئے تفاعل کی فوریر تسلسل سوال 12.46 کو استعمال کرتے ہوئے شکل 12.5 کی نتائج سے حاصل کریں۔

12.3 اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل

عملی استعمال میں پائے جانے والے دوری تفاعل کا دوری عرصہ شاذ و نادر 2π ہوتا ہے۔ 2π دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے حاصل کی گئی کلیات کی x ناپ تبدیل کرتے ہوئے کسی بھی دوری عرصہ T کے تفاعل کی کلیات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔ ہم نیا متغیر x متعارف کرتے ہیں جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(12.13) \quad (الف) \quad t = \frac{T}{2\pi}x \quad (ب) \quad x = \frac{2\pi}{T}t$$

لہذا $x = \mp\pi$ کے مطابقتی قیمتیں $t = \mp\frac{T}{2}$ ہوں گی۔ اس طرح x کے تفاعل f کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ یوں اگر f کی فوریر تسلسل موجود ہو، اس کی صورت درج ذیل ہوگی

$$(12.14) \quad f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

جہاں یولر عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل ہوں گے یعنی:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \sin nx \, dx$$

ہم ان کلیات کو استعمال کر سکتے ہیں لیکن متغیر کو t میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوتی ہے۔ یوں

$$x = \frac{2\pi}{T}t, \quad dx = \frac{2\pi}{T} dt$$

استعمال کرتے ہوئے اور x محور پر $-\pi$ تا π تکمل کو t محور پر $-\frac{T}{2}$ تا $\frac{T}{2}$ تکمل لکھتے ہوئے یولر مساوات درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$(الف) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$(12.15) \quad (ب) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

$$(پ) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt$$

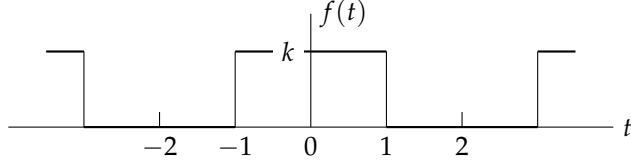
مزید مساوات 12.14 میں دی گئی فوریر تسلسل میں x متغیر کی جگہ t متغیر پر کرنے سے

$$(12.16) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t \right)$$

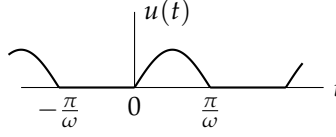
فوریر تسلسل حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ تقاعل $f(t)$ دوری ہے لہذا مساوات 12.15 میں تکمل کو $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ کی بجائے T کے برابر کسی بھی وقفہ مثلاً $0 \leq t \leq T$ پر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 12.2: درج ذیل چکور تقاعل (شکل 12.6)، جس کا دوری عرصہ $T = 4$ ہے، کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ k & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$



شکل 12.6: مثال 12.2



شکل 12.7: نصف لہر سمت کار (مثال 12.3)

حل: مساوات 12.15 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k dt = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \cos \frac{2n\pi}{4} t dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \cos \frac{n\pi}{2} t dt = \frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \sin \frac{2n\pi}{4} t dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \sin \frac{n\pi}{2} t dt = 0$$

یوں جفت n کے لئے $a_n = 0$ جبکہ $n = 1, 5, 9, \dots$ کے لئے $a_n = \frac{2k}{n\pi}$ اور $n = 3, 7, 11, \dots$ کے لئے $a_n = -\frac{2k}{n\pi}$ ہو گا جن سے درج ذیل فوریئر تسلسل ملتی ہے۔

$$f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} t + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} t - + \dots \right)$$

□

مثال 12.3: سائن نما برقی دباؤ $v = E \sin \omega t$ کو نصف لہر سمت کار سے گزارا جاتا ہے۔ نصف لہر سمت کار کی خارجی برقی دباؤ $u(t)$ (شکل 12.7) درج ذیل ہے۔

$$u(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ E \sin \omega t & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

حل: یہاں $T = \frac{2\pi}{\omega}$ کے برابر ہے۔ یوں مساوات 12.15-الف سے

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \, dt = \frac{E}{\pi}$$

ملتا ہے جبکہ مساوات 12.15-ب میں ضمیمہ ب کی مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \cos n\omega t \, dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t] \, dt$$

سے $n = 1$ کے لئے صفر جبکہ $n = 2, 3, \dots$ کے لئے

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega E}{2\pi} \left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= \frac{E}{2\pi} \left(\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n} \right) \end{aligned}$$

ملتی ہے جو طاق n کے لئے صفر اور جفت n کے لئے

$$a_n = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \quad (n = 2, 4, \dots)$$

دیتی ہے۔ اسی طرح مساوات 12.15-پ سے $b_1 = \frac{E}{2}$ جبکہ $n = 2, 3, \dots$ کے لئے $b_n = 0$ ملتے ہیں۔ اس طرح فوریر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \dots \right)$$

□

سوالات

سوال 12.48: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.16 میں تمام ارکان کا دوری عرصہ T ہے۔

سوال 12.49: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.15 میں T کے برابر کسی بھی وقفے پر مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سوال 12.50: مثال 12.3 کی چکور تفاعل کی تسلسل کو سوال 12.26 کی تسلسل سے سیدھ و سیدھ بذریعہ تبدیلی متغیر حاصل کریں۔

سوال 12.51: نصف لہر سمت کار کو $v = E \cos t$ داخلی دباؤ مہیا کی جاتی ہے۔ خارجی دباؤ کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t - + \dots \right)$$

سوال 12.52 تا سوال 12.62 میں تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔ اس کی فوریر تسلسل دریافت کریں۔ تفاعل $f(t)$ اور اس کی تسلسل کے اولین تین جزوی مجموعوں کے خط کھینچیں۔ آپ دیکھیں گے کہ تسلسل کی زیادہ ارکان استعمال کرنے سے اصل تفاعل سے زیادہ قریبی مشابہت رکھنے والا خط حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{سوال 12.52: } f(t) = -1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = 1 \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } \frac{4}{\pi} (\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots)$$

$$\text{سوال 12.53: } f(t) = 1 \quad (-1 < t < 2), \quad f(t) = 0 \quad (2 < t < 3), \quad T = 4$$

$$\text{جواب: } \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} (\cos \frac{\pi t}{2} + \sin \frac{\pi t}{2} - \sin \pi t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{2} \dots)$$

$$\text{سوال 12.54: } f(t) = 1 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 4$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} \dots)$$

$$\text{سوال 12.55: } f(t) = t \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{\pi} (2 \sin \pi t - \sin 2\pi t + \frac{2}{3} \sin 3\pi t - \frac{1}{2} \sin 4\pi t \dots)$$

$$\text{سوال 12.56: } f(t) = t^2 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} (-4 \cos \pi t + \cos 2\pi t - \frac{1}{9} \cos 3\pi t + \frac{1}{4} \cos 4\pi t \dots)$$

$$\text{سوال 12.57: } f(t) = -t \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = t \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} (\cos \pi t + \frac{1}{9} \cos 3\pi t + \frac{1}{25} \cos 5\pi t \dots)$$

$$\text{سوال 12.58: مکمل لہر سمت کار } f(t) = \sin \pi t \quad (0 < t < 1), \quad T = 1$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} (\frac{1}{3} \cos 2\pi t + \frac{1}{15} \cos 4\pi t + \frac{1}{35} \cos 6\pi t \dots)$$

$$\text{سوال 12.59: } f(t) = -1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = t \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$$

$$\text{جواب: } -\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{3}{\pi} \sin \pi t = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t - \frac{2}{9\pi^2} \cos 3\pi t \dots$$

سوال 12.60: $f(t) = 1 \quad (0 < t < 1), \quad f(t) = 2 \quad (1 < t < 2) \quad T = 3$
 جواب: $1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{3} + \frac{3}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{3} \dots$

سوال 12.61: $f(t) = -t \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = 2t \quad (0 < t < 1) \quad T = 2$
 جواب: $\frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{1}{\pi} \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t - \frac{2}{3\pi^2} \cos 3\pi t \dots$

سوال 12.62: $f(t) = \cos(\pi t) \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
 جواب: $\cos \pi t$

سوال 12.63: مکمل لہر سمت کار کی فوریئر تسلسل سوال 12.58 میں حاصل کی گئی۔ سوال 12.42 میں حاصل کی گئی تسلسل میں متغیر تبدیل کرتے ہوئے یہی جواب دوبارہ حاصل کریں۔

12.4 جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل کی صورت میں $b_n = 0$ جبکہ طاق تفاعل کی صورت میں $a_n = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں یہ جاننے سے کہ آیا تفاعل جفت یا طاق ہے، عددی سر دریافت کرنے کا کام نسبتاً کم ہو گا۔

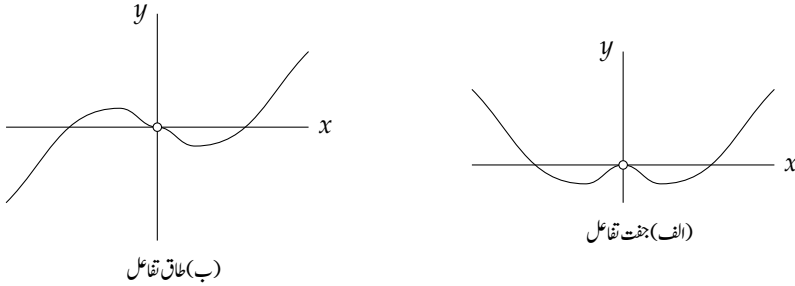
تمام x کے لئے درج ذیل خاصیت والے تفاعل $y = g(x)$ کو جفت¹⁸ تفاعل کہتے ہیں۔

$$(12.17) \quad g(-x) = g(x)$$

ایسا تفاعل y محور کی دونوں اطراف تشابہ (شکل 12.8-الف) ہو گا۔ اس کے برعکس تفاعل $y = h(x)$ جس کی خاصیت درج ذیل ہو طاق¹⁹ تفاعل کہلاتا ہے (شکل 12.8-ب)۔

$$(12.18) \quad h(-x) = -h(x)$$

even¹⁸
odd¹⁹



شکل 12.8: جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل $g(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہے (شکل 12.8-الف) لہذا $g(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

(12.19)

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^0 g(x) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} g(x) dx = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} g(x) dx \quad (g \text{ جفت})$$

طاق تفاعل $h(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ ضرب منفی اکائی کے برابر ہے (شکل 12.8-ب) لہذا $h(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.20) \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^0 h(x) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} h(x) dx = 0 \quad (h \text{ طاق})$$

جفت تفاعل $g(x)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کی حاصل ضرب $q = gh$ کے لئے

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -g(x)h(x) = -q(x)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا $q = gh$ طاق تفاعل ہو گا۔ یوں اگر $f(t)$ جفت تفاعل ہو تب مساوات 12.15-پ میں متکمل $f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہذا $b_n = 0$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $f(t)$ طاق ہو تب مساوات 12.15-ب میں $f \cos \frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہذا $a_n = 0$ ہو گا۔ ان نتائج سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.2: جفت اور طاق تفاعل کی فوریر سلسل
دوری عرصہ T کی جفت تفاعل $f(t)$ کی فوریر سلسل، فوریر کوسائن تسلسل²⁰

$$(12.21) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \quad (f \text{ جفت})$$

ہوگی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$(12.22) \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

دوری عرصہ T کی طاق تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل، فوریئر سائن تسلسل²¹

$$(12.23) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \quad (\text{طاق } f)$$

ہوگی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$(12.24) \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

اس مسئلہ کے تحت دوری عرصہ 2π کی جفت تفاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل درج ذیل فوریئر کوسائن تسلسل

$$(12.25) \quad f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \quad (\text{جفت } f)$$

ہوگی جس کے فوریئر عددی سر

$$(12.26) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

ہوں گے۔ اسی طرح دوری عرصہ 2π والی تفاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل

$$(12.27) \quad f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots \quad (\text{طاق } f)$$

پائی جائے گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$(12.28) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

مثال 12.2 میں دی گئی چکور تفاعل جفت ہے لہذا اس کی فوریئر کوسائن تسلسل پائی گئی۔

مزید آسانی درج ذیل مسئلہ سے حاصل ہوتی ہے۔

مسئلہ 12.3: (تفاعل کا مجموعہ) مجموعہ تفاعل $f_1 + f_2$ کی فوریر عددی سر، تفاعل f_1 اور تفاعل f_2 کی مطابقتی فوریر عددی سر کا مجموعہ ہو گا۔

کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(12.29) \quad f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = g(x) + h(x)$$

جہاں

$$(12.30) \quad \begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) &= \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{aligned}$$

ہیں۔ درج ذیل سے ثابت ہوتا ہے کہ $g(x)$ جفت اور $h(x)$ طاق ہیں (مساوات 12.17 اور مساوات 12.18)۔

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = g(x) \\ h(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -h(x) \end{aligned}$$

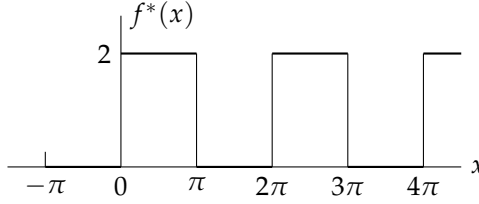
یوں کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو جفت تفاعل $g(h)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے جنہیں مساوات 12.30 سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 12.4: مستطیل دھڑکن

مستطیل دھڑکن $f^*(x)$ کو شکل 12.9 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوال 12.28 میں دکھائی گئی تفاعل $f(x)$ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے موجودہ تفاعل $f^*(x)$ حاصل ہو گی۔ یوں سوال 12.28 میں حاصل کیے گئے فوریر سلسل سے $f^*(x)$ کی فوریر سلسل سیدھ و سیدھ لکھتے ہیں۔

$$1 + \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$$

□



شکل 12.9: مستطیل دھڑکن (مثال 12.4)

مثال 12.5: دندان موج
دندان موج²³

$$f(x) = x + \pi, \quad (-\pi < x < \pi); \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

کو شکل 12.10-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس کی فوریئر تسلسل دریافت کریں۔ حل: دندان موج کی تقاعل کو

$$f = f_1 + f_2; \quad f_1 = x, \quad f_2 = \pi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ f_2 کی فوریئر عددی سر صفر کے برابر ہیں ماسوائے a_0 کے جو π کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ 12.3 کے تحت دندان موج کے عددی سر a_n ، b_n تقاعل f_1 کے عددی سر ہوں گے جبکہ اس کا $a_0 = \pi$ ہو گا (f_1 طاق ہے لہذا اس کا اپنا $a_0 = 0$ ہے)۔ یوں

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx$$

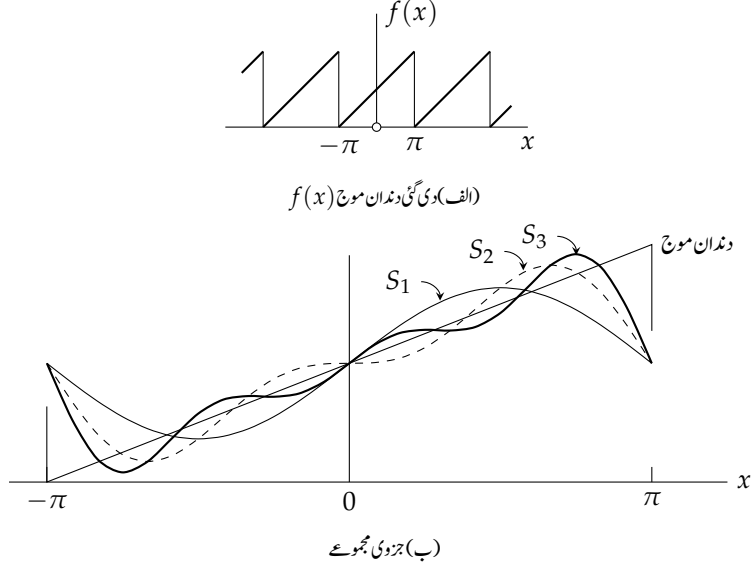
کا مکمل بالخصوص لینے سے

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{n} \cos n\pi$$

ملتا ہے جس سے $b_1 = 2$ ، $b_2 = -1$ ، $b_3 = \frac{2}{3}$ ، $b_4 = -\frac{1}{2}$ ، ... حاصل ہوتے ہیں لہذا دندان موج کی فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی (شکل 12.10-ب)۔

$$f(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - + \dots \right)$$

□



شکل 12.10: دندان موج اور اس کا فوریر سلسل (مثال 12.5)

سوالات

سوال 12.64: کیا درج ذیل تفاعل جفت، طاق یا ان میں سے دونوں نہیں (نہ طاق اور نہ ہی جفت) ہیں؟

$$e^x, e^{x^2}, \sin nx, x \sin nx, \frac{\cos x}{x}, \ln x, \sin x^2, \sin^2 x$$

جوابت: بائیں سے 4، 6 طاق، 3، 9 دونوں نہیں اور باقی تمام جفت ہیں۔

سوال 12.65 تا سوال 12.72 میں دوری تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ 2π ہے۔ کیا تفاعل جفت، طاق یا دونوں نہیں ہیں۔

سوال 12.65: $f(x) = |x|$, $(-\pi < x < \pi)$ جواب: جفت

سوال 12.66: $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$ جواب: طاق

سوال 12.67: $f(x) = x^2, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.68: $f(x) = x^3, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: طاق

سوال 12.69: $f(x) = e^x, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: نہ طاق اور نہ ہی جفت

سوال 12.70: $f(x) = e^{|x|}, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.71:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: طاق

سوال 12.72: $f(x) = 1, \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ جفت

سوال 12.73: ایسا تفاعل دریافت کریں جو جفت بھی ہو اور طاق بھی۔
جواب: $f(x) = 0$

سوال 12.74: مساوات 12.19 اور مساوات 12.20 ثابت کریں۔

سوال 12.75: مسئلہ 12.3 کو ثابت کریں۔

سوال 12.76 تا سوال 12.79 میں دیے گئے تفاعل کو ایک عدد جفت تفاعل اور ایک عدد طاق تفاعل کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 12.76: $\frac{1}{1-x}$
جواب: $\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}$

سوال 12.77: $\frac{1}{1-x^2}$
جواب: $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

سوال 12.78: e^x
جواب: $\cosh x + \sinh x$

سوال 12.79: $\cos x$
جواب: جفت تفاعل یا طاق تفاعل جوں کا توں لکھا جائے گا۔ $\cos x$

سوال 12.80: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا مجموعہ جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.81: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.82: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا مجموعہ طاق تفاعل ہو گا۔

سوال 12.83: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.84: ثابت کریں کہ جفت $f(x)$ کی صورت میں $|f(x)| + f^2(x)$ جفت ہو گا۔

سوال 12.85: ثابت کریں کہ طاق $f(x)$ کی صورت میں $|f(x)| + f^2(x)$ اور $f^3(x)$ جفت ہوں گے۔

سوال 12.86 تا سوال 12.91 میں دیے گئے تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔ ان تفاعل کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.86:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x \dots)$

سوال 12.87:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ \pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

جواب: $-\frac{4}{\pi} \cos x + 2 \sin x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{4}{25} \cos 5x + \frac{2}{5} \sin 5x \dots$

سوال 12.88:

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ -x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x \dots)$$

سوال 12.89:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x \dots)$$

$$\text{سوال 12.90: } f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 4x - + \dots$$

سوال 12.91:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}(\pi + 1) \cos x + \frac{1}{\pi}(-\pi^2 + \pi + 4) \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \dots$$

سوال 12.92 تا سوال 12.95 میں دی گئی تعلق کو ثابت کریں (مساوات 12.12 دیکھیں)۔

$$\text{سوال 12.92: } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (\text{سوال 12.86 یا سوال 12.90 استعمال کریں})$$

$$\text{سوال 12.93: } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{سوال 12.90 استعمال کریں})$$

$$\text{سوال 12.94: } 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad (\text{سوال 12.90 استعمال کریں})$$

$$\text{سوال 12.95: } 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{سوال 12.93 اور سوال 12.94 استعمال کریں})$$

12.5 نصف حلقہ اتساع

کئی انجینیری اور طبیعیاتی مسائل میں ایسے تفاعل $f(t)$ کی فوریر تسلسل درکار ہوگی جو کسی محدود وقفہ $0 \leq t \leq l$ پر معین ہو۔ ہم وقفہ $0 \leq t \leq l$ کو مکمل کا وقفہ $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ لیتے ہوئے مسئلہ 12.2 استعمال کرتے ہیں۔ یوں $l = \frac{T}{2}$ یعنی $T = 2l$ چنا گیا ہے۔ مساوات 12.22 استعمال کرتے ہوئے فوریر کوسائن تسلسل حاصل ہوتی ہے جو $T = 2l$ عددی عرصہ کی جفت تفاعل $f_1(t)$ کو ظاہر کرتی ہے۔ وقفہ $0 \leq t \leq l$ پر $f_1(t) = f(t)$ ہو گا۔ اسی لئے $f_1(t)$ کو $f(t)$ کی جفت دوری توسیع²⁴ کہتے ہیں۔ شکل 12.11-ب میں جفت دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔ مساوات 12.21 اور مساوات 12.22 میں $T = 2l$ لیتے ہوئے

$$(12.31) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t \quad (0 \leq t \leq l)$$

جفت فوریر تسلسل حاصل ہوگی جس کی عددی سر

$$(12.32) \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

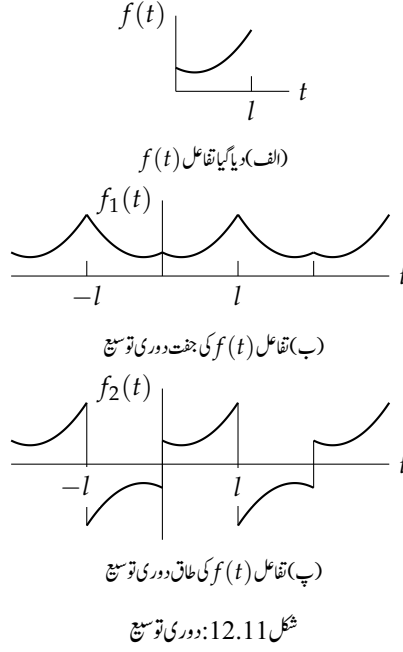
ہوں گے۔

ہم مسئلہ 12.2 کی مساوات 12.22 کی جگہ، پہلی کی طرح $T = 2l$ لیتے ہوئے، مساوات 12.24 استعمال کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے فوریر سائن تسلسل حاصل ہوگی جو دوری عرصہ $T = 2l$ کی دوری تفاعل $f_2(t)$ کو ظاہر کرے گی۔ وقفہ $0 \leq t \leq l$ پر $f_2(t) = f(t)$ ہو گا۔ $f_2(t)$ کو $f(t)$ کی طاق دوری توسیع²⁵ کہتے ہیں۔ شکل 12.11-پ میں طاق دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔ مساوات 12.23 اور مساوات 12.24 میں $T = 2l$ لیتے ہوئے

$$(12.33) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \quad (0 \leq t \leq l)$$

طاق فوریر تسلسل حاصل ہوگی جس کی عددی سر

$$(12.34) \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$



ہوں گے۔ مساوات 12.32 اور مساوات 12.34 میں دی گئی عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.31 اور مساوات 12.33 کو دی گئی تقابل $f(t)$ کی نصف حلقہ اتساع²⁶ کہتے ہیں۔

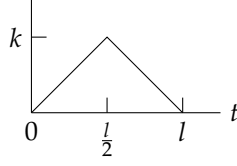
مثال 12.6: تکیونی دھڑکن
درج ذیل تکیونی دھڑکن کی نصف حلقہ اتساع کریں (شکل 12.12)۔

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l}t & 0 < t < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-t) & \frac{l}{2} < t < l \end{cases}$$

even periodic extension²⁴

odd periodic extension²⁵

half range expansion²⁶



شکل 12.12: ٹکونی دھڑکن (مثال 12.6)

حل: مساوات 12.32 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{l} \left[\frac{2k}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} t \, dt + \frac{2k}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-t) \, dt \right] = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \left[\frac{2k}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} t \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt + \frac{2k}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-t) \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt \right]$$

مکمل بالخصوص لیتے سے

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{l}{2}} t \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt &= \frac{lt}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} t \Big|_0^{\frac{l}{2}} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{l}{2}} \sin \frac{n\pi}{l} t \, dt \\ &= \frac{l^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} (\cos \frac{n\pi}{2} - 1) \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ اسی طرح مکمل بالخصوص سے

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-t) \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt = -\frac{l^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2})$$

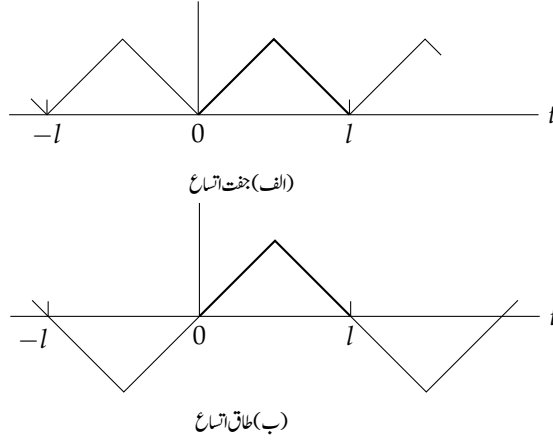
ملتا ہے۔ ان نتائج سے

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2} (2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1)$$

یعنی

$$a_2 = -\frac{16k}{2^2\pi^2}, \quad a_6 = -\frac{16k}{6^2\pi^2}, \quad a_{10} = -\frac{16k}{10^2\pi^2}, \dots$$

$$a_n = 0, \quad n \neq 2, 6, 10, 14, \dots$$

شکل 12.13: تقابل $f(t)$ کی دوری اتساع (مثال 12.6)

حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکنونی دھڑکن $f(t)$ کی پہلی نصف حلقہ اتساع درج ذیل ہوگی جو $f(t)$ کی دوری جفت توسیع ہے (شکل 12.13-الف)۔

$$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi}{l} t + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi}{l} t + \dots \right)$$

اسی طرح مساوات 12.34 سے

$$(12.35) \quad b_n = \frac{8k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

حاصل ہوگا جس سے $f(t)$ کی دوسری نصف حلقہ اتساع درج ذیل حاصل ہوگی جو $f(t)$ کی دوری طاق توسیع ہے (شکل 12.13-ب)۔

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{l} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} t + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{l} t - + \dots \right)$$

□

سوالات

سوال 12.96 تا سوال 12.103 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریر سائن تسلسل حاصل کریں اور مطابقتی دوری طاق تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.96: $f(t) = t, \quad (0 < t < \pi)$
 جواب: $2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t - \frac{1}{2} \sin 4t \dots$

سوال 12.97: $f(t) = k, \quad (0 < t < l)$
 جواب: $\frac{4k}{\pi} (\sin \frac{\pi t}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{l} \dots)$

سوال 12.98: $f(t) = 1 - t, \quad (0 < t < 1)$
 جواب: $\frac{1}{\pi} (2 \sin \pi t + \sin 2\pi t + \frac{2}{3} \sin 3\pi t \dots)$

سوال 12.99: $f(t) = \cos t, \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$
 جواب: $\frac{8}{\pi} (\frac{1}{3} \sin 2t + \frac{2}{15} \sin 4t + \frac{3}{35} \sin 6t \dots)$

سوال 12.100:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

جواب: $(1 + \frac{2}{\pi}) \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + (\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi}) \sin 3t \dots$

سوال 12.101:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi} [(1 + \frac{2}{\pi}) \sin \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi t + (\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi}) \sin \frac{3\pi}{2} t \dots]$

سوال 12.102:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} [3 \sin \frac{\pi t}{2} - \sin \pi t + \sin \frac{3\pi t}{2} \dots]$$

سوال 12.103:

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } (\frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}) \sin \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi t + (\frac{4}{3\pi} + \frac{4}{9\pi^2}) \sin \frac{3\pi t}{2} \dots$$

سوال 12.104 تا سوال 12.109 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریز کو سائن تسلسل دریافت کریں اور مطابقتی دوری جفت تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

$$\text{سوال 12.104: } f(t) = k, \quad (0 < t < l)$$

$$\text{جواب: } f(t) = k$$

$$\text{سوال 12.105: } f(t) = t, \quad (0 < t < l)$$

$$\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} (\cos \frac{\pi t}{l} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi t}{l} \dots)$$

$$\text{سوال 12.106: } f(t) = t^2, \quad (0 < t < l)$$

$$\frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{\pi^2} (4 \cos \frac{\pi t}{l} - \cos \frac{2\pi t}{l} + \frac{4}{9} \cos \frac{3\pi t}{l} \dots)$$

$$\text{سوال 12.107: } f(t) = \sin t, \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} (\frac{1}{3} \cos 2t + \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t \dots)$$

$$\text{سوال 12.108: } f(t) = \cos t, \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} (\frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t - \dots)$$

$$\text{سوال 12.109: } f(t) = e^t, \quad (0 < t < 1)$$

$$e - 1 - \frac{2}{\pi^2+1} (e+1) \cos \pi t + \frac{2}{4\pi^2+1} (e-1) \cos 2\pi t \dots$$

سوال 12.110: (فوریز تسلسل کی مخلوط صورت، مخلوط فوریز عددی سر)
 کلیہ یولر $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے فوریر تسلسل

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

کو

$$(12.36) \quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

لکھیں جہاں $c_0 = a_0$ ، $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ، $k_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ ، $n = 1, 2, \dots$ ہے۔ مساوات 12.9 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad k_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

علامت k_n کی جگہ علامت c_{-n} لکھتے ہوئے مساوات 12.36 کو درج ذیل صورت میں لکھیں۔

$$(12.37) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

اس کو مخلوط فوریر تسلسل²⁷ کہتے ہیں جہاں c_n کو $f(x)$ کی مخلوط فوریر عددی سر²⁸ کہتے ہیں۔

سوال 12.111: ثابت کریں کہ جفت تفاعل کی مخلوط فوریر عددی سر حقیقی ہوں گے جبکہ طاق تفاعل کی فوریر عددی سر خالص خیالی ہوں گے۔

سوال 12.112 تا سوال 12.115 میں دوری عرصہ 2π کی دی گئی تفاعل $f(x)$ کی مخلوط فوریر تسلسل دریافت کریں۔ مخلوط فوریر تسلسل سے حقیقی فوریر تسلسل حاصل کرتے ہوئے گزشتہ حاصل کردہ تسلسل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.112: (سوال 12.65) $f(x) = |x|$ ($-\pi < x < \pi$)

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{-2e^{inx}}{\pi n^2} \quad \text{جواب:}$$

سوال 12.113: (سوال 12.66) $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$
 جواب: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n e^{inx}}{n}$

سوال 12.114: (سوال 12.67) $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$
 جواب: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n e^{inx}}{n^2}$

سوال 12.115: (سوال 12.69) $f(x) = e^x \quad (-\pi < x < \pi)$
 جواب: $\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$

12.6 فوریز عددی سر کا بغیر مکمل حصول

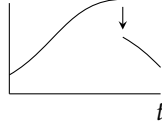
آپ نے دیکھا کہ بعض اوقات پیچیدہ تکرارات حل کرنے کے بعد نسبتاً سادہ فوریز عددی سر a_n اور b_n حاصل ہوتے ہیں۔ اس سے سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا عددی سر حاصل کرنے کا کوئی آسان طریقہ بھی ہے؟ جس کا جواب ہے، "جی ہاں"۔ ہم یہاں ثابت کرتے ہیں کہ دوری کثیر رکنی تفاعل کی فوریز عددی سر تفاعل کی اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگ سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔ یوں بغیر کوئی مکمل حل کرتے ہوئے a_n اور b_n حاصل کیے جائیں گے (ماسوائے a_0 ، جس کو اب بھی مکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $g(x)$ کی چھلانگ j^{29} سے مراد x_0 پر $g(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد میں فرق ہے (حصہ 12.2) یعنی:

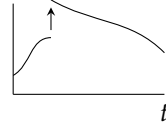
$$(12.38) \quad j = g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0)$$

یوں اوپر کو چھلانگ مثبت چھلانگ ہوگی جبکہ نیچے کو چھلانگ منفی چھلانگ ہوگی (شکل 12.14)۔

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا عددی عرصہ 2π ہے کو وقفہ $-\pi < x < \pi$ میں کثیر رکنی $p-1, \dots, p_m$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے (مثلاً شکل 12.15)۔

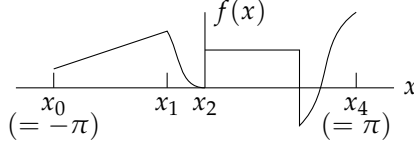


(ب) منفی چھلانگ



(الف) مثبت چھلانگ

شکل 12.14: تفاعل کی چھلانگ

شکل 12.15: کثیر رکنی روپ کی مثال (مساوات 12.39) جہاں $m = 4$ ہے

$$(12.39) \quad f(x) = \begin{cases} p_1(x) & x_0 < x < x_1, \quad (x_0 = -\pi) \\ p_2(x) & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \\ p_m(x) & x_{m-1} < x < x_m \quad (x_m = \pi) \end{cases}$$

یوں x_0, \dots, x_m پر تفاعل f کی چھلانگ اور اس کی تفرق f' ، f'' ، ... کی چھلانگ ہو سکتی ہیں جنہیں ہم درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

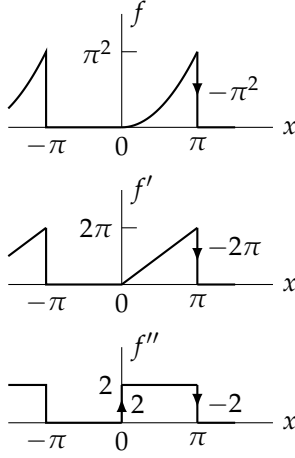
$$(12.40) \quad \begin{aligned} j_s &= f \text{ کی چھلانگ پر } x_s \\ j'_s &= f' \text{ کی چھلانگ پر } x_s \\ j''_s &= f'' \text{ کی چھلانگ پر } x_s \quad (s = 1, 2, \dots, m) \\ &\vdots \\ j_s^{(n)} &= f^{(n)} \text{ کی چھلانگ پر } x_s \end{aligned}$$

ظاہر ہے کہ اگر x_s پر f استمراری ہو تب x_s پر $j_s = 0$ ہو گا۔ ایسا ہی f' ، f'' ، ... کے لئے بھی کہا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 12.40 میں کئی j_s ، j'_s ، ... صفر قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

مثال 12.7: تفاعل کی چھلانگ اور اس کی تفرق کی چھلانگیں

جدول 12.1: مثال 12.7 کی چھلانگیں

$x_2 = \pi$ پر چھلانگ	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	
$j_2 = -\pi^2$	$j_1 = 0$	f
$j_2' = -2\pi$	$j_1' = 0$	f'
$j_2'' = -2$	$j_1'' = 2$	f''



شکل 12.16: تفاعل اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگیں (مثال 12.7)

تفاعل $f(x)$

$$f = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

اور اس کی تفرقات f' ، f'' ، ...

$$f' = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 2x & 0 < x < \pi \end{cases} \quad f'' = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad f''' = 0$$

کی ترسیم شکل 12.16 میں کھینچی گئی ہیں اور ان کی چھلانگیں جدول 12.1 میں دی گئی ہیں۔

یاد رہے کہ وقفہ کی ابتدا $x = -\pi$ پر چھلانگیں شمار نہیں کیے جاتے ہیں۔ انہیں دوری وقفہ کی اختتام $x = \pi$ پر شمار کیا جاتا ہے۔ ایک ہی وقفہ پر انہیں دو مرتبہ نہیں کیا جائے گا۔

□

مساوات 12.39 میں دی گئی تفاعل f کی فوریر عددی سر a_1 ، a_2 ، ... حاصل کرنے کی خاطر ہم پوکر مساوات 12.9-ب استعمال کرتے ہیں۔

$$(12.41) \quad \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx \, dx$$

چونکہ f کو مساوات 12.39 ظاہر کرتی ہے لہذا ہمیں m عدد تکمیل کا مجموعہ

$$(12.42) \quad \pi a_n = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} = \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, dx$$

لکھنا ہو گا جہاں $x_0 = -\pi$ اور $x_m = \pi$ ہیں۔ تکمیل بالخصوص لیتے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(12.43) \quad \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, dx = \left. \frac{f}{n} \sin nx \right|_{x_{s-1}}^{x_s} - \frac{1}{n} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx$$

اب بائیں ہاتھ پہلی جزو میں نقطہ x_s پر تفاعل $f(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ ایسا ہونے کی صورت میں x_s پر تفاعل کی بائیں ہاتھ حد $f(x_s - 0)$ لینی ہوگی۔ اسی طرح x_{s-1} پر غیر استمراری $f(x)$ کی صورت میں تفاعل کی دائیں ہاتھ حد $f(x_{s-1} + 0)$ لینی ہوگی۔ یوں مساوات 12.43 کا دائیں ہاتھ پہل جزو درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1}{n} [f(x_s - 0) \sin nx_s - f(x_{s-1} + 0) \sin nx_{s-1}]$$

اب مساوات 12.43 کو مساوات 12.42 میں پر کرتے ہوئے اور چھوٹی علامتیں $S_0 = \sin nx_0$ ، $S_1 = \sin nx_1$ ، ... استعمال کرتے ہوئے

$$(12.44) \quad \pi a_n = \frac{1}{n} [f(x_1 - 0)S_1 - f(x_0 + 0)S_0 + f(x_2 - 0)S_2 - f(x_1 + 0)S_1 \\ + \dots + f(x_m - 0)S_m - f(x_{m-1} + 0)S_{m-1}] \\ - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx$$

ملتا ہے۔ تو سین میں بند یکساں S کے ارکان اکٹھا کرتے ہوئے

$$(12.45) \quad -f(x_0 + 0)S_0 + [f(x_1 - 0) - f(x_1 + 0)]S_1 \\ + [f(x_2 - 0) - f(x_2 + 0)]S_2 + \dots + f(x_m - 0)S_m$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 12.45 میں ہر چکور توسین میں بند قیمت f کی چھلانگ ضرب -1 کے برابر ہے۔ مزید چونکہ f دوری ہے لہذا $S_0 = S_m$ اور $f(x_0) = f(x_m)$ ہوں گے لہذا مساوات 12.45 کے پہلے اور آخری رکن کو ملا کر $[f(x_m - 0) - f(x_m + 0)]S_m$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 12.45 درج ذیل ہو گا

$$-j_1 S_1 - j_2 S_2 - \cdots - j_m S_m$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.44 کو

$$(12.46) \quad \pi a_n = -\frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j_s \sin nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہی ترکیب دائیں ہاتھ کی مکمل پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(12.47) \quad \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j'_s \cos nx_s + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f'' \cos nx \, dx$$

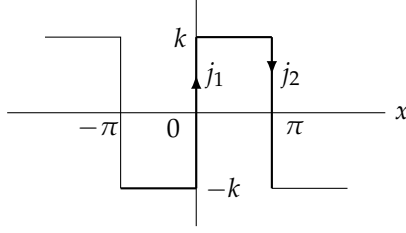
ایسا بار بار کرتے ہوئے ہمیں مکمل کے اندر f کا بتدریج زیادہ درجے کا تفرق حاصل ہو گا۔ اب چونکہ f کو کثیر رکنی ظاہر کرتی ہیں اور درجہ r کثیر رکنی کا درجہ $r+1$ تفرق صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا آخر کار کوئی مکمل باقی نہ رہے گا۔ مکمل پر محدود مرتبہ یہ عمل کرنے سے ایسا ہو گا۔ مساوات 12.47 اور اس عمل کے دہرانے سے حاصل نتائج کو مساوات 12.46 میں پر کرتے ہوئے درکار کلیہ

$$(12.48) \quad a_n = \frac{1}{n\pi} \left[-\sum_{s=1}^m j_s \sin nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j'_s \cos nx_s \right. \\ \left. + \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^m j''_s \sin nx_s + \frac{1}{n^3} \sum_{s=1}^m j'''_s \cos nx_s - - + + \cdots \right]$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 1, 2, \dots$ ہے (اور a_0 کو پہلی کی طرح مکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔ بالکل اسی طرح پولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے b_n کا کلیہ

$$(12.49) \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \left[\sum_{s=1}^m j_s \cos nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j'_s \sin nx_s \right. \\ \left. - \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^m j''_s \cos nx_s + \frac{1}{n^3} \sum_{s=1}^m j'''_s \sin nx_s - - + + \cdots \right]$$

حاصل ہو گا۔



شکل 12.17: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

غلطیوں سے بچنے کی خاطر $f(x)$ اور اس کی تفرقات کی ترسیم کھینچ کر چھلانگوں کو (مثال 12.7 کی طرح) جدول میں لکھنا سودمند ثابت ہوتا ہے۔

مثال 12.8: دوری چکور موج $f(x)$ کی فوریر عددی سر دریافت کریں (شکل 12.17)۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل: چونکہ $f' = 0$ ہے لہذا صرف f کی چھلانگیں پائی جاتی ہیں۔ یہ چھلانگیں جدول 12.2 میں دی گئی ہیں۔

جدول 12.2: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

$x_2 = \pi$ پر چھلانگ	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	
$j_2 = -2k$	$j_1 = 2k$	f

f طاق ہے لہذا مساوات 12.49 سے فوریر عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} [j_1 \cos nx_1 + j_2 \cos nx_2] = \frac{1}{n\pi} [2k \cos 0 - 2k \cos n\pi] \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases} \quad (\text{مثال 12.1 دیکھیں}) \end{aligned}$$

□

مثال 12.9: مثال 12.7 میں دی گئی تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔
حل: مکمل سے a_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

مساوات 12.48 سے

$$a_n = \frac{1}{n\pi} [\pi^2 \sin n\pi + \frac{2\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} (2 \sin 0 - 2 \sin n\pi)] = \frac{2}{n^2} \cos n\pi$$

یعنی $a_1 = -\frac{2}{1^2}$ ، $a_2 = \frac{2}{2^2}$ ، $a_3 = -\frac{2}{3^2}$ ، ... ملتے ہیں۔ مساوات 12.49 سے

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} [-\pi^2 \cos n\pi + \frac{2\pi}{n} \sin n\pi - \frac{1}{n^2} (2 \cos 0 - 2 \cos n\pi)] \\ &= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

یعنی

$$b_1 = \pi - \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad b_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3^2\pi}, \quad b_4 = -\frac{\pi}{4}, \dots$$

ملتے ہیں۔ یوں فوریئر تسلسل در ذیل ہو گی۔

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \cos x + (\pi - \frac{4}{\pi}) \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \dots$$

□

سوالات

سوال 12.116: مثال 12.9 کو عمومی طریقہ سے حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ عمومی طریقہ بہت لمبا ہو گا۔

سوال 12.117: یولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.49 حاصل کریں۔

سوال 12.118: ثابت کریں کہ T دوری عرصہ کی تفاعل کے لئے مساوات 12.48 اور مساوات 12.49 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$(12.50) \quad a_n = \frac{1}{n\pi} \left[- \sum_{s=1}^m j_s \sin K_n t_s - \frac{1}{K_n} \sum_{s=1}^m j'_s \cos K_n t_s \right. \\ \left. + \frac{1}{K_n^2} \sum_{s=1}^m j''_s \sin K_n t_s + \frac{1}{K_n^3} \sum_{s=1}^m j'''_s \cos K_n t_s - - + \dots \right] \quad (K_n = \frac{2n\pi}{T})$$

$$(12.51) \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \left[\sum_{s=1}^m j_s \cos K_n t_s - \frac{1}{K_n} \sum_{s=1}^m j'_s \sin K_n t_s \right. \\ \left. - \frac{1}{K_n^2} \sum_{s=1}^m j''_s \cos K_n t_s + \frac{1}{K_n^3} \sum_{s=1}^m j'''_s \sin K_n t_s + - - + \dots \right]$$

سوال 12.119 تا سوال 12.122 میں فوریرس تسلسل کو مساوات 12.48 تا مساوات 12.51 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.119: سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.120: سوال 12.32 تا سوال 12.35

سوال 12.121: سوال 12.54 تا سوال 12.57

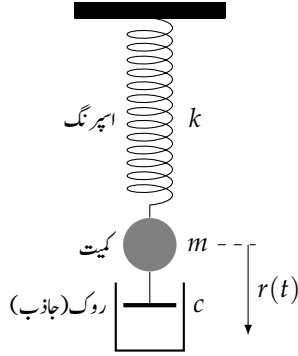
سوال 12.122: سوال 12.59 تا سوال 12.61

سوال 12.123 تا سوال 12.126 کی فوریرس سائن تسلسل کو مساوات 12.48 تا مساوات 12.51 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.123: $f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad (0 < x < \pi)$
جواب: $(2\pi - \frac{4}{\pi} + 4) \sin x - (2 + \pi) \sin 2x + (\frac{2}{3} + \frac{28}{27\pi} + \frac{4}{3}) \sin 3x \dots$

سوال 12.124: $f(x) = x^3 \quad (0 < x < 1)$
جواب: $\frac{2}{\pi^3} (\pi^2 - 6) \sin \pi x - \frac{(4\pi^2 - 6)}{4\pi^3} \sin 2\pi x + \frac{2(9\pi^2 - 6)}{27\pi^3} \sin 3\pi x \dots$

سوال 12.125: $f(x) = x(1 - x) \quad (0 < x < 1)$
جواب: $\frac{8}{\pi^3} (\sin \pi t + \frac{1}{3^3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5^3} \sin 5\pi t + \dots)$



شکل 12.18: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

سوال 12.126: $f(x) = x(x^2 - 1)$ ($0 < x < 1$)
 جواب: $\frac{1}{\pi^3} (-12 \sin \pi t + \frac{3}{2} \sin 2\pi t - \frac{4}{9} \sin 3\pi t + \frac{3}{16} \sin 4\pi t \dots)$

سوال 12.127: $f(x) = x^3$, ($0 < x < l$) کی فوریر کوسائن تسلسل کو مساوات 12.50 کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب: $\frac{l^3}{4} + l^3 (\frac{24}{\pi^4} - \frac{6}{\pi^2}) \cos \frac{\pi t}{l} + \frac{3l^3}{2\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{l} \dots$

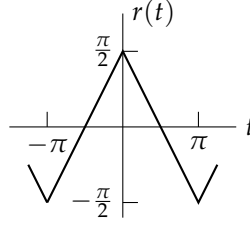
12.7 جبری ارتعاش

تفرقی مساوات میں فوریر تسلسل اہم ثابت ہوتے ہیں۔ آئیں ایک اہم عملی مسئلہ پر غور کریں جس کی سادہ تفرقی مساوات پائی جاتی ہے۔ (جزوی تفرقی مساوات والے مسائل پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔)

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ اسپرنگ کے ساتھ جڑی ہوئی کمیت m (شکل 12.18) کی جبری ارتعاش کی سادہ تفرقی مساوات

$$(12.52) \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t)$$

ہے جہاں c تقصیری مستقل اور k مقیاس پلک ہے۔ بیرونی قوت سائن یا کوسائن تفاعل ہونے اور غیر صفر تقصیری مستقل کی صورت میں برقرار حالت ہارمونی ارتعاش پیدا ہوگی جس کی تعدد بیرونی قوت کی تعدد ہوگی۔



شکل 12.19: ٹکونی قوت (مثال 12.10)

ایسی قوت $r(t)$ جو نہ خالص سائن تغاقل ہو اور نہ ہی خالص کوسائن تغاقل ہو بلکہ کسی اور شکل کی دوری تغاقل ہونے کی صورت میں ہم دیکھیں گے کہ برقرار حالت حل کئی ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہو گا جس میں $r(t)$ کی تعدد اور اس کی مضرب تعدد پائی جائیں گی۔ اگر ان تمام تعدد میں سے کوئی تعدد، نظام کی قدرتی تعدد کے قریب ہو تب عین ممکن ہے کہ، بیرونی قوت کی رد عمل میں، نظام کی حرکت میں اسی تعدد کا حصہ غالب ہو گا۔ ہارمونی ارتعاش اور گمک کے بارے میں نہ جانتے ہوئے یہ عمل حیرت انگیز ثابت ہو گا۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

مثال 12.10: غیر سائن نما جبری قوت سے پیدا ارتعاش
مسوات 12.52 میں $m = 1 \text{ kg}$ ، $k = 25 \text{ kg s}^{-2}$ ، $c = 0.02 \text{ kg s}^{-1}$ لینے سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $r(t)$ کی اکائی kg m s^{-2} ہو گی۔

$$(12.53) \quad \ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = r(t)$$

اب فرض کریں کہ جبری قوت $r(t)$ درج ذیل ہے جس کو شکل 12.19 میں دکھایا گیا ہے۔ برقرار حالت حل دریافت کریں۔

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases} \quad r(t + 2\pi) = r(t)$$

حل: ہم $r(t)$ کو فوریر کوسائن تسلسل

$$(12.54) \quad r(t) = \frac{4}{n^2\pi} \cos nt = \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right)$$

سے ظاہر کرتے ہیں۔ اب ہم درج ذیل تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جس کا دایاں ہاتھ فوریر تسلسل (مساوات 12.54) کا ایک رکن ہے۔

$$(12.55) \quad \ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = \frac{4}{n^2\pi} \cos nt \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ درج بالا تفرقی مساوات کا برقرار حالت حل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$(12.56) \quad y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

مساوات 12.56 کو مساوات 12.55 میں پر کرتے ہوئے

$$(12.57) \quad A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2 \pi D}, \quad B_n = \frac{0.08}{n \pi D}, \quad D = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2$$

ملتا ہے۔ چونکہ تفرقی مساوات 12.53 خطی ہے لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس کا برقرار حالت حل

$$(12.58) \quad y = y_1 + y_3 + y_5 + \dots$$

ہو گا جہاں مساوات 12.56 y_n دیتی ہے۔ درحقیقت آپ حاصل مساوات 12.58 کو مساوات 12.55 میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ تفرقی مساوات کا درست حل ہے۔

مساوات 12.57 سے مساوات 12.56 کا حیظ

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{A}{n^2 \pi \sqrt{D}}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی چند اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$C_1 = 0.0530$$

$$C_3 = 0.0088$$

$$C_5 = 0.5100$$

$$C_7 = 0.0011$$

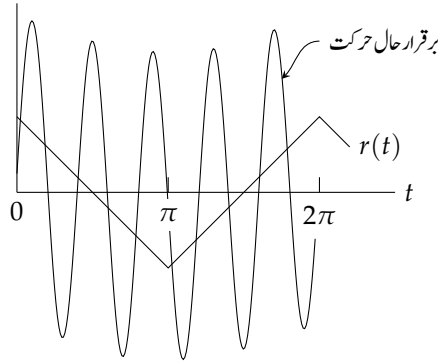
$$C_9 = 0.0003$$

$n = 5$ پر D کی قیمت نہایت کم ملتی ہے جس سے C_5 کی قیمت اتنی زیادہ حاصل ہوتی ہے کہ مساوات 12.58 میں y_5 غالب جزو ہے۔ یوں برقرار حالت حرکت تقریباً ہارمونی ہو گا جس کی تعدد جبری قوت کی تعدد کی پانچ گنا ہے (شکل 12.20)۔

□

سوالات

سوال 12.128 تا سوال 12.135 میں تفرقی مساوات $\ddot{y} + \omega^2 y = r(t)$ کی عمومی حل دریافت کریں۔



شکل 12.20: داخلی قوت اور برقرار حالت رد عمل (مثال 12.10)

سوال 12.128: $r(t) = \sin t$, $\omega = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10$
 جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A(\omega) \sin t$, $A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 1}$
 $A(0.5) = -1.33, A(0.7) = -0.2, A(0.9) = -5.3, A(1.1) = 4.8, A(1.5) = 0.8,$
 $A(2) = 0.33, A(10) = 0.01$

سوال 12.129: $r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t$, $(\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2)$
 جواب: $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{(\omega^2 - \alpha^2) \cos \beta t + (\omega^2 - \beta^2) \cos \alpha t}{\omega^4 - (\alpha^2 + \beta^2) \omega^2 + \alpha^2 \beta^2}$

سوال 12.130: $r(t) = \sin t + \sin 3t$, $\omega = 0.9, 2.9$
 جواب:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\sin t}{\omega^2 - 1^2} + \frac{\sin 3t}{\omega^2 - 3^2}$$

$$y_{(\omega=0.9)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - 5.26 \sin t - 0.122 \sin 3t$$

$$y_{(\omega=2.9)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + 0.135 \sin t - 0.164 \sin 3t$$

سوال 12.131: $r(t) = \sum_{s=1}^N a_n \cos nt$, $|\omega| \neq 1, 2, \dots, N$

جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt$

سوال 12.132: $r(t) = \sum_{s=1}^N b_n \sin nt$, $|\omega| \neq 1, 2, \dots, N$

جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{\omega^2 - n^2} \sin nt$

سوال 12.133:

$$r(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases} \quad r(t+2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 1, 3, 5, \dots$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{4 \sin t}{1\pi(\omega^2-1^2)} + \frac{4 \sin 3t}{3\pi(\omega^2-3^2)} + \frac{4 \sin 5t}{5\pi(\omega^2-5^2)} \dots \quad \text{جواب:}$$

$$r(t) = t, \quad (-\pi < t < \pi), r(t+2\pi) = r(t), |\omega| \neq 1, 2, 3, \dots \quad \text{سوال 12.134:}$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n(\omega^2-n^2)} \sin nt \quad \text{جواب:}$$

$$r(t) = t^2, \quad (-\pi < t < \pi), r(t+2\pi) = r(t), |\omega| \neq 0, 1, 2, \dots \quad \text{سوال 12.135:}$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2(\omega^2-n^2)} \cos nx \quad \text{جواب:}$$

سوال 12.136 تا سوال 12.140 میں $\ddot{y} + c\dot{y} + y = r(t)$ جہاں $c > 0$ ہے کی برقرار حالت حل دریافت کریں۔

$$r(t) = \cos t \quad \text{سوال 12.136:}$$

$$y = \frac{\sin t}{c} \quad \text{جواب:}$$

$$r(t) = \sin 3t \quad \text{سوال 12.137:}$$

$$y = -\frac{8}{9c^2+8^2} \sin 3t - \frac{3}{9c^2+8^2} \cos 3t \quad \text{جواب:}$$

$$r(t) = \cos nt \quad \text{سوال 12.138:}$$

$$y = \frac{nc \sin nt - (n^2-1) \cos nt}{(n^2-1)^2 + n^2 c^2} \quad \text{جواب:}$$

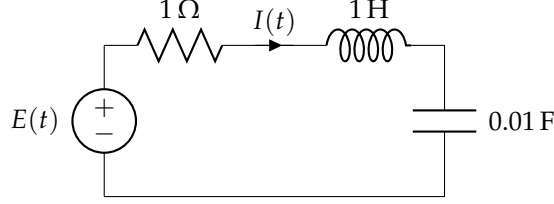
$$r(t) = \sin nt \quad \text{سوال 12.139:}$$

$$y = \frac{-nc \cos nt - (n^2-1) \sin nt}{(n^2-1)^2 + n^2 c^2} \quad \text{جواب:}$$

سوال 12.140:

$$r(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi < t < 0 \\ \pi - t & 0 < t < \pi \end{cases} \quad r(t+2\pi) = r(t)$$

$$y = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi [(n^2-1)^2 + n^2 c^2]} [nc \sin nt - (n^2-1) \cos nt] \quad \text{جواب:}$$



سوال 12.141: سلسلہ وار RLC دور کو $E(t)$ داخلی دباؤ مہیا کی جاتی ہے۔ اس دور میں برقی رو $I(t)$ دریافت کریں۔

$$E(t) = \begin{cases} -10 & -\pi < t < 0 \\ 10 & 0 < t < \pi \end{cases} \quad E(t + 2\pi) = E(t)$$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{\pi[n^4 - 199n^2 + 10^4]} [n \sin nt - (n^2 - 10^2) \cos nt] \quad \text{جواب:}$$

12.8 تقریب بذریعہ تکونی کثیر رکنی۔ مکعب خلل

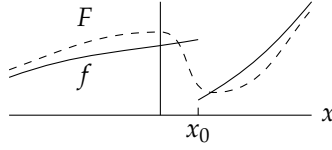
فرض کریں کہ 2π دوری عرصہ کی تفاعل $f(x)$ کو فوریر سلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہے۔ اس سلسل کی پہلی N ارکان کا جزوی مجموعہ، $f(x)$ کی تقریب ہوگی۔

$$(12.59) \quad f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

تکونی کثیر رکنی کی عددی سریوں منتخب کی جاسکتے ہیں کہ یہ تفاعل پر ٹھیک بیٹھے۔ یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا $f(x)$ کو تکونی کثیر رکنی

$$(12.60) \quad F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

سے ظاہر کرنے کی "بہترین" تقریب مساوات 12.59 دیتی ہے جہاں دونوں تقریب میں N یکساں ہے۔ بہترین تقریب میں کم سے کم "خلل" پایا جاتا ہے۔



شکل 12.21: تقریب کی خلل

ظاہر ہے کہ ہمیں پہلے فیصلہ کرنا ہو گا کہ، تقریب میں خلل، سے ہمارا کیا مراد ہے۔ ہم خلل کی ایسی تعریف منتخب کرتے ہیں جو پورے وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر f اور F کی ایک سا ہونے کی ناپ ہو۔ شکل 12.21 میں f کو F سے ظاہر کیا گیا ہے جو بہتر تقریب ہے لیکن نقطہ x_0 پر $|f - F|$ کی قیمت بہت زیادہ ہے۔ یوں ظاہر ہے کہ $|f - F|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کو خلل کہنا موزوں نہ ہو گا۔ ہم خلل کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں

$$(12.61) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx$$

جس وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر تفاعل F کی، تفاعل f کے لحاظ سے، کل مکعب خلل³⁰ کہلاتا ہے۔ چونکہ مکعب کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہذا $E \geq 0$ ہو گا۔

ہم مقررہ N کے لئے مساوات 12.60 کے ایسے عددی سر دریافت کرنا چاہتے ہیں کہ حاصل E کمترین ہو۔ ہم مساوات 12.61 کو درج ذیل صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(12.62) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} fF dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx$$

درج بالا کی آخری مکمل میں مساوات 12.60 پر کرتے ہوئے حاصل نکلات کو حصہ 12.2 کی طرح حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx = \pi(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_N^2)$$

مساوات 12.60 کو مساوات 12.62 کی دائیں ہاتھ دوسری مکمل میں پر کرنے سے یولر کلیات (مساوات 12.9) کے مکمل حاصل ہوتے ہیں جن سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF dx = \pi(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_N b_N)$$

total square error³⁰

یوں مساوات 12.62 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(12.63) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi \left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right] \\ + \pi \left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right]$$

مساوات 12.60 میں $\alpha_n = a_n$ اور $\beta_n = b_n$ لینے سے مساوات 12.63 سے حاصل کل مکعب خلل درج ذیل ملتا ہے۔

$$(12.64) \quad E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

مساوات 12.64 کو مساوات 12.63 سے منفی کرتے ہوئے

$$E - E^* = \pi \left\{ 2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] \right\}$$

ملتا ہے۔ چونکہ بائیں ہاتھ تمام قیمتیں مکعب ہیں جو کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتے ہیں لہذا

$$E - E^* \geq 0 \quad \implies \quad E \geq E^*$$

ہو گا اور $E = E^*$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\alpha_0 = a_0$ ، \dots ، $\beta_N = b_N$ ہوں۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.4: (کمترین مکعب خلل)

وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر تفاعل f کے لحاظ سے F [مساوات 12.60، مقررہ N] کی کل مکعب خلل صرف اور صرف اس صورت کم سے کم ہو گی جب مساوات 12.60 میں F کے عددی سر، f کی مطابقتی فوریر عددی سر ہوں۔ کل مکعب خلل کی کم سے کم قیمت مساوات 12.64 دے گی۔

ہم مساوات 12.64 سے دیکھتے ہیں کہ N بڑھانے سے E^* بڑھتا نہیں بلکہ گھٹ سکتا ہے۔ یوں زیادہ N لینے سے f کی فوریر تسلسل سے حاصل جزوی مجموعہ کا کل مکعب خلل کم ہو گا اور بہتر تقریب حاصل ہو گی۔

چونکہ $E^* \geq 0$ ہے اور مساوات 12.64 ہر N کے لئے درست ہے لہذا مساوات 12.64 سے

$$(12.65) \quad 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

لکھا جاسکتا ہے جو بیسل غیر مساوات³¹ کہلاتی³² ہے۔ مساوات 12.65 کسی بھی تفاعل f ، جس کے لئے درج بالا مکمل معین ہو، کی فوری عددی سر کے لئے درست ہوگا۔

سوالات

سوال 12.142: تفاعل $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$, $f(x + \pi) = f(x)$ کے لئے ایسا $F(x)$ (مساوات 12.60) دریافت کریں کہ کل مکعب خلل (مساوات 12.61) کمترین ہو۔

$$\text{جواب: } F(x) = \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - + \dots + \frac{2(-1)^{N+1}}{N} \sin Nx$$

سوال 12.143: $N = 1, 2, 3, 4$ کے لئے سوال 12.142 میں کمتر مکعب خلل دریافت کریں۔ ایسا N دریافت کریں کہ $E^* \leq 0.42$ ہو۔

$$\text{جواب: } E(1) = 8.104, E(2) = 4.96, E(3) = 3.57, E(4) = 2.78, N = 30$$

سوال 12.144: ثابت کریں کہ N کو بتدریج بڑھانے سے کل کمتر مکعب خلل (مساوات 12.64) بتدریج گھٹتی ہے۔

سوال 12.145: تفاعل $f(x) = x^2$, $(-\pi < x < \pi)$, $f(x + \pi) = f(x)$ کے لئے ایسا $F(x)$ (مساوات 12.60) دریافت کریں کہ کل مکعب خلل کمترین ہو۔ کمتر مکعب خلل کو $N = 1, 2, 3, 4$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب:

$$F = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{1}{1^2} \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N^2} \cos Nx \right]$$

$$E^* = \frac{2\pi^5}{5} - \pi \left(\frac{2\pi^4}{9} + 16 + 1 + \frac{16}{81} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

³¹Bessel inequality

³²یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ایسا تفاعل f کے لئے مساوات 12.65 میں برابری کی علامت لکھنا بھی درست ہوگا۔ مساوات 12.65 میں برابری کی علامت استعمال کرنے سے پارسیوال مماثل حاصل ہوگی۔

12.9 فوریر تکمیل

دوری تفاعل پر مبنی مسئلوں کو نمٹنے کے لئے فوریر تسلسل بہترین اوزار ہے۔ ہم چاہیں گے کہ اس کو عمومی شکل دیں تاکہ یہ غیر دوری تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہو۔

ہم ابتدا دو سادہ دوری تفاعل f_T سے کرتے ہیں۔ ہم $T \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے۔ اس کے بعد ہم دوری عرصہ T کی کسی بھی دوری تفاعل f_T پر غور کرتے ہوئے $T \rightarrow \infty$ کریں گے۔ ان کو جواز بناتے ہوئے ہم مسئلہ فوریر تکمیل پیش کریں گے۔

مثال 12.11: درج ذیل تفاعل پر غور کریں جس کا دوری عرصہ $T > 2$ ہے (شکل 12.22)۔

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

دوری عرصہ $T \rightarrow \infty$ کرنے سے درج ذیل تفاعل $f(x)$

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

□

حاصل ہوتا ہے جو غیر دوری ہے۔

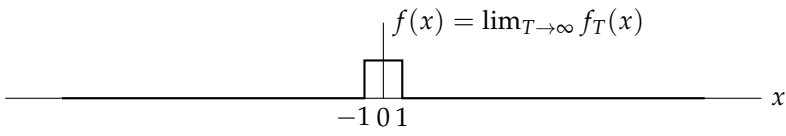
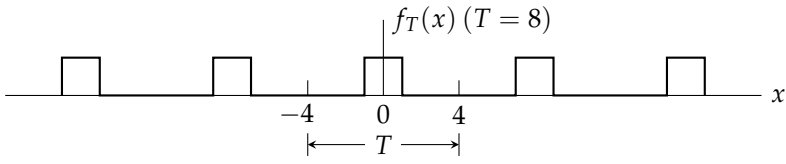
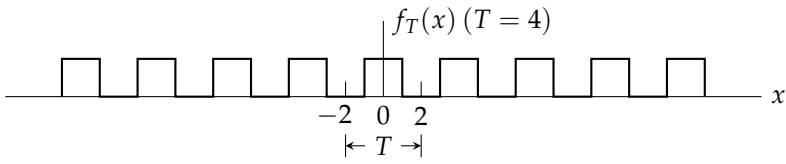
مثال 12.12: درج ذیل تفاعل کا دوری عرصہ T ہے (شکل 12.23)۔

$$f_T(x) = e^{-|x|} \quad \left(-\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2} \right), \quad f_T(x+T) = f_T(x)$$

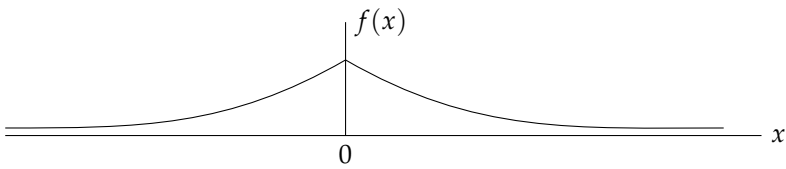
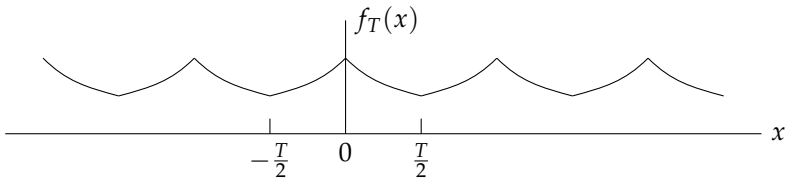
$T \rightarrow \infty$ کرنے سے تفاعل $f(x)$ حاصل ہوتا ہے جو غیر دوری ہے۔

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = e^{-|x|}$$

□



شکل 12.22: برائے مثال 12.11



شکل 12.23: برائے مثال 12.12

ہم اب فوریئر تسلسل سے قابل ظاہر کسی بھی تفاعل $f_T(x)$ جس کا دوری عرصہ T ہو لیتے ہیں۔ مختصر علامت

$$w_n = \frac{2n\pi}{T}$$

استعمال کرتے ہوئے $f_T(x)$ کی فوریئر تسلسل کو

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x)$$

لکھتے ہیں۔ ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ $T \rightarrow \infty$ کرنے سے کیا ہو گا۔

ہم یولر مساوات 12.9 میں دیے گئے a_n اور b_n استعمال کرتے ہیں اور تکمیل کی متغیر کو v لکھتے ہیں۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) dv + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \cos w_n v dv \right. \\ \left. + \sin w_n x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \sin w_n v dv \right]$$

اب

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

ہے جس کو ہم

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

لکھتے ہیں۔ یوں $\frac{2}{T} = \frac{\Delta w}{\pi}$ ہو گا لہذا یہ فوریئر تسلسل درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$(12.66) \quad f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(w_n x) \Delta x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \cos w_n v dv \right. \\ \left. + \sin(w_n x) \Delta w \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \sin w_n v dv \right]$$

یہ صورت کسی بھی مقررہ T کے لئے درست ہے جہاں T اختیاری وسیع لیکن محدود ہے۔

ہم اب $T \rightarrow \infty$ کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ حاصل غیر دوری تقابل

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x)$$

x محور پر قابل حتمی تکمل³³ ہے یعنی درج ذیل تکمل معین ہے۔

$$(12.67) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

اس طرح $\frac{1}{T} \rightarrow 0$ ہو گا لہذا مساوات 12.66 کی دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے قریب تر ہو گا۔ اس کے علاوہ $\Delta w = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ ہو گا لہذا بظاہر یوں معلوم ہوتا ہے کہ لامتناہی تسلسل مساوات 12.66 وقفہ 0 تا ∞ پر مکمل کی صورت اختیار کرے گی جو $f(x)$ کو ظاہر کرتی ہے، یعنی:

(12.68)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \right] dw$$

درج ذیل مختصر علامت متعارف کرتے ہوئے

$$(12.69) \quad A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv$$

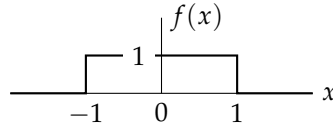
مساوات 12.68 کو

$$(12.70) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

لکھا جاسکتا ہے جس کو $f(x)$ کا فوریرس تکمل³⁴ کہتے ہیں۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 12.66 سے مساوات 12.68 لکھنے کے لئے جو جواز پیش کیا گیا وہ نا کافی ہے۔ درحقیقت فوریرس تسلسل میں $\Delta w \rightarrow 0$ لینا تکمل کی تعریف نہیں ہے لہذا ایسا کرنے سے مساوات 12.66 ہرگز حاصل نہیں ہو گا۔ البتہ اس پورے عمل سے گزرنے کے بعد فوریرس تکمل بظاہر معقول معلوم ہوتا ہے۔ فوریرس تکمل کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔ مساوات 12.70 درست ہونے کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتی ہے۔

absolutely integrable³³
Fourier integral³⁴



شکل 12.24: واحد دھڑکن (مثال 12.13)

مسئلہ 12.5: (فوریئر مکمل)
اگر $f(x)$ تمام محدود قطعات پر ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہو اور اس کا ہر نقطے پر دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق (حصہ 12.2) پائے جاتے ہوں اور مساوات 12.67 میں دیا گیا مکمل معین ہو تب $f(x)$ کو فوریئر مکمل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جس نقطے پر $f(x)$ غیر استمراری ہو وہاں فوریئر مکمل کی قیمت اس نقطے پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد (حصہ 6.1) کی اوسط کے برابر ہوگی۔

مثال 12.13: واحد دھڑکن، سائن مکمل
درج ذیل تفاعل کی فوریئر مکمل حاصل کریں (شکل 12.24)۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \end{cases}$$

حل: مساوات 12.69 سے

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv = \int_{-1}^1 \cos wv \, dv = \left. \frac{\sin wv}{w} \right|_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{w}$$

$$B(w) = \int_{-1}^1 \sin wv \, dv = 0$$

ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.70 سے درکار فوریئر مکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$(12.71) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw$$

نقطہ $x = 1$ پر $f(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد کا اوسط $\frac{(1+0)}{2} = \frac{1}{2}$ ہے۔ یوں مساوات 12.71

اور مسئلہ 12.5 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.72) \quad \int_0^\infty \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

اس نکل کو ڈرشلے غیر استمراری جزو³⁵ کہتے ہیں۔³⁶ آئیں $x = 0$ کی صورت پر غور کرتے ہیں جو خاص طور پر زیادہ اہم ہے۔ مساوات 12.72 میں $x = 0$ پر کرنے سے

$$(12.73) \quad \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}$$

ملتا ہے جو درج ذیل نکل جس کو سائن نکل³⁷ کہتے ہیں

$$(12.74) \quad \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w} dw$$

کی $z \rightarrow \infty$ پر حد ہے جہاں z حقیقی ہے۔ تفاعل $\text{Si}(z)$ کو شکل 12.25 میں دکھایا گیا ہے۔

فوریر تسلسل کی صورت میں جزوی مجموعوں کی ترسیم اس دوری تفاعل کی تقریب ہوتی ہے جس کو یہ تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ فوریر نکل (مساوات 12.71) کی صورت میں نکل کی بالائی حد ∞ کی جگہ عدد a لیتے ہوئے تفاعل کی تقریب حاصل کی جاتی ہیں۔ یوں درج ذیل نکل

$$(12.75) \quad \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$$

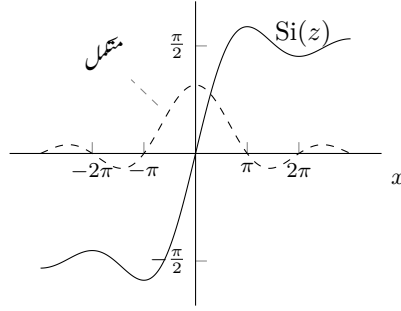
مساوات 12.71 اور تفاعل $f(x)$ کی تقریب ہے۔ مساوات 12.75 کی نکل میں غیر استمراری نقطہ کے قریب ارتعاش پایا جاتا ہے جس کو شکل 12.26 میں دکھایا گیا ہے۔

آپ نے شکل 12.3 میں دکھا کہ فوریر تسلسل کی زیادہ ارکان لینے سے اصل تفاعل $f(x)$ پر زیادہ بہتر بیٹھتی منحنی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح جیسا شکل 12.26 میں دکھایا گیا ہے، مساوات 12.75 کی نکل کی بالائی حد a کی قیمت زیادہ لینے سے اصل تفاعل $f(x)$ کی زیادہ یکساں شکل حاصل ہوتی ہے۔ یہاں نکل (مساوات 12.75) کو اعدادی طریقہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

³⁵Dirichlet's discontinuous factor

³⁶جرمن ریاضی دان یوہان پیٹر گسٹاف لیون ڈرشلے [1805-1859]

³⁷sine integral



شکل 12.25: سائن کمل

اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ a کی قیمت لامتناہی کرنے سے یہ ارتعاش ختم ہوگی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے بلکہ a کی قیمت بڑھانے سے ارتعاش نقطہ $x = \pm 1$ کے مزید قریب ہوتی ہیں۔ اس غیر متوقع کردار جو فوریر سلسل میں بھی پایا جاتا ہے کو مظہر گبس³⁸ کہتے ہیں۔ مظہر گبس³⁹ کو سمجھنے کی خاطر ضمیمہ ب میں مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.75 کو

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w + wx)}{w} dw + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w - wx)}{w} dw$$

لکھتے ہیں۔ دائیں ہاتھ پہلی کمل میں $w + wx = t$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{dw}{w} = \frac{dt}{t}$ اور $0 \leq w \leq a$ کا مطابقتی وقفہ $0 \leq t \leq (x+1)a$ ہو گا۔ آخری کمل میں $w - wx = t$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{dw}{w} = \frac{dt}{t}$ اور $0 \leq w \leq a$ کا مطابقتی وقفہ $0 \leq t \leq (x-1)a$ ہو گا۔ چونکہ $\sin(-t) = -\sin t$ ہوتا ہے لہذا

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t} dt$$

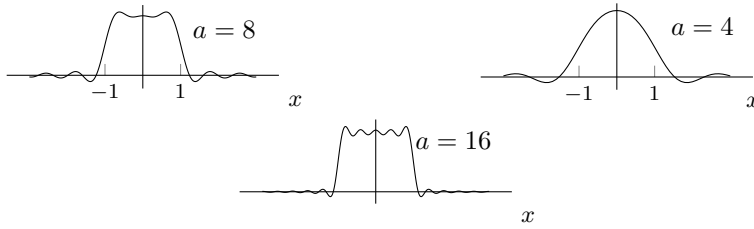
لکھا جائے گا۔ یوں مساوات 12.74 کی مدد سے

$$\frac{1}{\pi} \text{Si } a[x+1] - \frac{1}{\pi} \text{Si}(a[x-1])$$

حاصل ہو گا لہذا شکل 12.26 میں ارتعاش شکل 12.25 کی وجہ سے پائی جاتی ہیں۔ حد a بڑھانا، محور کی ناپ تبدیل کرنے کی مترادف ہے جس سے ارتعاش محور غیر استمراری نقطہ کے زیادہ قریب منتقل ہوتی ہیں۔ □

³⁸Gibbs phenomenon

³⁹جرمن ریاضی دان جو شیاو لارڈ گبس [1839-1903]



شکل 12.26: مساوات 12.75 کی تکمیل میں $a = 8, 4$ اور 16 لیا گیا ہے

جفت اور طاق تفاعل کی فوریر تکمیل

یہ جاننا سودمند ثابت ہوتا ہے کہ ایسا جفت یا طاق تفاعل جس کو فوریر تکمیل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کا فوریر تکمیل عمومی تفاعل کی فوریر تکمیل سے نسبتاً آسان ہو گا۔ یہ حقیقت گزشتہ کلیات سے اخذ ہوتا ہے۔

جفت تفاعل $f(x)$ کی صورت میں مساوات 12.69 کے تحت $B(w) = 0$ اور

$$(12.76) \quad A(w) = 2 \int_0^{\infty} f(v) \cos wv \, dv$$

ہو گا لہذا مساوات 12.70 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرے گی۔

$$(12.77) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw \quad (f \text{ جفت})$$

اسی طرح طاق تفاعل $f(x)$ کی صورت میں مساوات 12.69 کے تحت $A(w) = 0$ اور

$$(12.78) \quad B(w) = 2 \int_0^{\infty} f(v) \sin wv \, dv$$

ہو گا لہذا مساوات 12.70 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرے گی۔

$$(12.79) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(w) \sin wx \, dw \quad (f \text{ طاق})$$

یہ تسہیل جفت اور طاق تفاعل کی فوریر تسلسل کی تسہیل کی طرح ہے۔

تخمینہ مکمل

فوریر مکمل کی مدد سے کئی مکمل کی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ ہم اس ترکیب کو درج ذیل مثال سے سمجھاتے ہیں۔

مثال 12.14: لاپلاس مکمل

درج ذیل تفاعل کی فوریر مکمل وقفہ $x > 0$ پر حاصل کریں۔ (شکل 12.23 دیکھیں جہاں $k = 1$ ہے۔)

$$f(x) = e^{-kx}, \quad f(-x) = f(x)$$

حل: چونکہ f جفت ہے لہذا مساوات 12.76 سے

$$A(w) = 2 \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos wv \, dv$$

حاصل ہو گا۔ مکمل بالخصوص لیتے ہیں۔

$$\int e^{-kv} \cos wv \, dv = -\frac{k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right)$$

جب $v = 0$ ہو تب دایاں ہاتھ $-\frac{k}{k^2 + w^2}$ کے برابر ہو گا جبکہ $v \rightarrow \infty$ پر e^{-kv} جزو کی بنیاد صفر کے قریب تر ہو گا۔ یوں

$$A(w) = \frac{2k}{k^2 + w^2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 12.77 میں پر کرتے ہوئے دیے تفاعل کی فوریر مکمل لکھتے ہیں۔

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw \quad (x > 0, k > 0)$$

اس سے

$$(12.80) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 12.79 استعمال کرتے ہوئے وقفہ $x > 0$ پر طاق تفاعل

$$f(x) = e^{-kx}, \quad f(-x) = -f(x), \quad (k > 0)$$

کی فوریر مکمل سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(12.81) \quad \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

□

مساوات 12.80 اور مساوات 12.81 لاپلاس تکملات⁴⁰ کہلاتے ہیں۔

سوالات

سوال 12.146 تا سوال 12.152 میں دیے تعلق کو فوریرس نکل کی مدد سے ثابت کریں۔

سوال 12.146:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx + w \sin wx}{1 + w^2} dw = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

سوال 12.147:

$$\int_0^\infty \frac{w^3 \sin wx}{w^4 + 4} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \quad (x > 0)$$

سوال 12.148:

$$\int_0^\infty \frac{\sin w\pi \sin wx}{1 - w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

سوال 12.149:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos w\pi}{w} \sin wx dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

سوال 12.150:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad (x > 0)$$

سوال 12.151:

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

سوال 12.152:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \frac{w\pi}{2} \cos wx}{1-w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

سوال 12.153 تا سوال 12.158 میں $f(x)$ کو مساوات 12.77 کی روپ میں لکھیں۔

سوال 12.153:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} \cos wx \, dw$$

سوال 12.154:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sin w}{w} - \frac{2\sin 2w}{w^3} + \frac{2\cos 2w}{w^2} \right] \cos wx \, dw$$

سوال 12.155:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sin w}{w} - \frac{2\sin 2w}{w} + \frac{2\sin 3w}{w} \right] \cos wx \, dw$$

سوال 12.156:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2} \cos wx \, dw$$

سوال 12.157:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos 2w-w \sin 2w}{w^2} \cos wx \, dw$$

سوال 12.158:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

$$\text{جواب: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1+\cos w\pi}{1-w^2} \cos wx \, dw$$

سوال 12.159 تا سوال 12.160 میں دیے گئے تعلق کو ثابت کریں جہاں $f(x)$ کی روپ مساوات 12.77 ہے۔

$$\text{سوال 12.159: } f(ax) = \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right) \cos wx \, dw, \quad (a > 0)$$

جواب: مساوات 12.76 سے $A\left(\frac{w}{a}\right) = 2 \int_0^\infty f(v) \cos \frac{wv}{a} \, dv$ لکھا جاتا ہے جبکہ $f(ax)$ کے لئے $A^* = 2 \int_0^\infty f(\tau) \cos \frac{w\tau}{a} \frac{1}{a} \, d\tau$ لیتے ہوئے $\tau = at$ میں $A^* = 2 \int_0^\infty f(at) \cos wt \, dt$ ملتا ہے جن سے $A^* = \frac{1}{a} A\left(\frac{w}{a}\right)$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ثابت ہوا کہ $f(ax) = \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right) \cos wx \, dw$

$$\text{سوال 12.160: } x^2 f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A^*(w) \cos wx \, dw, \quad A^* = -\frac{d^2 A}{dw^2}$$

جواب: مساوات 12.76 کا دو درجی تفرق لے کر $f^*(v) = -2 \int_0^\infty f^*(v) \cos wv \, dv$ $\frac{d^2 A}{dw^2} = -2 \int_0^\infty f^*(v) \cos wv \, dv$ سے ثبوت حاصل ہو گا۔

سوال 12.161: درج بالا کلیہ (سوال 12.160) استعمال کرتے ہوئے سوال 12.153 کے نتیجہ سے سوال 12.154 حل کریں۔

سوال 12.162: ثابت کریں $x f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B^*(w) \sin wx \, dw$ جہاں $B^* = -\frac{dA}{dw}$ ہے اور A کو مساوات 12.76 ظاہر کرتی ہے۔

سوال 12.163: تقابل $f(x) = 1 \quad (0 < x < a)$ کے لئے سوال 12.162 کے کلیہ کی تصدیق کریں۔

سوال 12.164: تصدیق کریں کہ $f(x) = 1 \quad (0 < x < \infty)$ کو فوریر سیریکل سے ظاہر نہیں کیا جاسکتا ہے۔

سوال 12.165: (فوریئر تکمیل کی مخلوط صورت، فوریئر بدل) ضمیمہ ب کی مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.70 کو

$$(12.82) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ثابت کریں کہ مساوات 12.82 میں $-\infty$ تا ∞ تکمیل متغیرہ w کا جفت تفاعل ہے لہذا مساوات 12.82 کو

$$(12.83) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $\sin(wx - wv)$ متغیرہ w کا طاق تفاعل ہے لہذا درج ذیل ثابت کرتے ہوئے

$$(12.84) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wx - wv) dv \right] dw = 0$$

مساوات 12.83 اور مساوات 12.84 کا مجموعہ لے کر فوریئر تکمیل کی مخلوط صورت

$$(12.85) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iwx - wv} dv \right] dw$$

حاصل کریں۔ مساوات 12.85 سے

$$(12.86) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(w) e^{iwx} dw$$

حاصل کریں جہاں

$$(12.87) \quad C(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i w v} dv$$

ہے۔ مساوات 12.86 تفاعل $C(w)$ کا الٹ فوریئر بدل⁴¹ دیتی ہے جبکہ مساوات 12.87 تفاعل $f(x)$ کا فوریئر بدل⁴² دیتی ہے۔

inverse Fourier transform⁴¹
Fourier transform⁴²

باب 13

جزوی تفرقی مساوات

مختلف طبعی اور جیومیٹریائی مسائل جہاں دو یا دو سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل پایا جاتے ہوں، جزوی تفرقی مساوات کو جنم دیتے ہیں۔ یہ متغیرات وقت اور خلا کے محدود ہو سکتے ہیں۔ اس باب میں انجینئری نقطہ نظر سے اہم مسائل پر غور کیا جائے گا۔ ان مساوات کو طبعی نظام کی نمونہ کے طور پر حاصل کرنے کے بعد ابتدائی قیمت اور سرحدی قیمت مسائل حل کرنے کی تراسیب پر غور کیا جائے گا، یعنی ان مساوات کو دی گئی طبعی شرائط کے مطابق حل کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کو لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جاسکتا ہے۔

13.1 بنیادی تصورات

دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کی نامعلوم تفاعل اور اس کی ایک یا ایک سے زیادہ تفرقات پر مبنی مساوات کو جزوی تفرقی مساوات¹ کہتے ہیں۔ بلند تر تفرق کا درجہ مساوات کا درجہ² کہلاتا ہے۔

سادہ تفرقی مساوات کی طرح اگر جزوی تفرقی مساوات میں تابع متغیر (نامعلوم تفاعل) اور اس کے تفرق کی طاقت اکائی ہو تب یہ تفرقی مساوات خطی³ کہلائے گی۔ اگر مساوات کا ہر رکن، تابع متغیر یا تابع متغیرہ کی تفرقات میں سے کوئی ایک تفرق ہو تب اس کو ہم جنسی⁴ کہیں گے ورنہ یہ غیر ہم جنسی⁵ کہلائے گی۔

partial differential equation¹
order²
linear³
homogeneous⁴
non homogeneous⁵

مثال 13.1: اہم خطی دو درجی جزوی تفرقی مساوات

$$(13.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ایک بعدی مساوات موج}$$

$$(13.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ایک بعدی مساوات حرارت}$$

$$(13.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{دو بعدی لاپلاس مساوات}$$

$$(13.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{دو بعدی پوئسن مساوات}$$

$$(13.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{تین بعدی لاپلاس مساوات}$$

یہاں c مستقل ہے، t وقت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ x ، y ، z کارتیسی محدود ہیں۔ مساوات 13.4 میں اگر $f(x, y) \neq 0$ ہو تب یہ غیر ہم جنسی ہوگی۔ باقی تمام مساوات ہم جنسی ہیں۔ \square

فضا میں غیر تابع متغیرہ کی کسی خطہ R میں جزوی تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو خود اور جس کے وہ تمام تفرقات جو اس مساوات میں پائے جاتے ہوں کسی ایسے خطے میں موجود ہوں جس کا R حصہ ہو اور یہ تمام حل کر پورے خطہ R میں اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔ (عموماً R کی سرحد پر اس تفاعل کا استمراری ہونا اور درکار تفرقات کا خطہ کے اندرون معین ہونے کے ساتھ ساتھ خطہ کے اندرون مساوات کو مطمئن کرنا درکار ہوگا۔)

عموماً جزوی تفرقی مساوات کے تمام حل کی تعداد بہت زیادہ ہوگی۔ مثلاً جیسا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل

$$(13.6) \quad u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2)$$

جو ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں مساوات 13.3 کے حل ہیں۔ ہم بعد میں دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کا کیتا حل حاصل کرنے کی خاطر مزید معلومات درکار ہوگی جو طبعی حالت سے حاصل ہوگی۔ مثال کے طور پر کبھی کبھار سرحد کے کسی حصے پر درکار حل کی قیمت معلوم ہوگی (سرحدی شرائط⁶) جب کہ بعض اوقات ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر حل کی قیمت معلوم ہوگی (ابتدائی شرائط⁷)۔

boundary conditions⁶
initial conditions⁷

ہم جانتے ہیں کہ اگر سادہ تفرقی مساوات خطی اور ہم جنسی ہو تب اس کی معلوم حل سے مزید حل بذریعہ خطی میل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ جزوی تفرقی مساوات کے لئے بھی ایسا کرنا ممکن ہے جیسا درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 13.1: بنیادی مسئلہ
اگر کسی خطہ R میں خطی ہم جنسی جزوی تفرقی مساوات کے دو حل u_1 اور u_2 ہوں تب

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

جہاں c_1 اور c_2 کوئی مستقل ہیں، بھی اس خطے میں اس مساوات کا حل ہو گا۔

اس مسئلے کا ثبوت نہایت آسان اور مسئلہ 2.1 کی ثبوت سے ملتا جلتا ہے لہذا یہ آپ پر چھوڑا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 13.1: مسئلہ 13.1 کو دو اور تین متغیرات کی دو درجی جزوی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔

سوال 13.2: تصدیق کریں کہ مساوات 13.6 میں دیے گئے تمام تفاعل مساوات 13.3 کے حل ہیں۔
جواب: $u = x^2 + y^2$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$ ہو گا۔ انہیں مساوات 13.3 میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ ملتا ہے۔ یوں u تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3 تا سوال 13.8 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل لاپلاس مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = 2xy \quad \text{سوال 13.3}$$

$$u = e^x \sin y \quad \text{سوال 13.4}$$

$$u = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{سوال 13.5}$$

$$u = x^3 - 3xy^2 \quad \text{سوال 13.6}$$

$$u = \sin x \sinh y \quad \text{سوال 13.7}$$

$$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{سوال 13.8}$$

سوال 13.9 تا سوال 13.11 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل حراری مساوات 13.2 کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = e^{-2t} \cos x \quad \text{سوال 13.9}$$

$$u = e^{-t} \sin 3x \quad \text{سوال 13.10}$$

$$u = e^{-4t} \cos \omega x \quad \text{سوال 13.11}$$

سوال 13.12 تا سوال 13.14 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = x^2 + 4t^2 \quad \text{سوال 13.12}$$

$$u = x^3 + 3xt^2 \quad \text{سوال 13.13}$$

$$u = \sin \omega ct \sin \omega x \quad \text{سوال 13.14}$$

سوال 13.15: تصدیق کریں کہ $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ تین بعدی لاپلاس مساوات 13.5 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.16: تصدیق کریں کہ $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ دو بعدی لاپلاس مساوات 13.3 کا حل ہے۔ دی گئی سرحدی شرائط کے تحت دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر $u = 0$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ پر $u = 5$ ہے۔ مستقل a اور b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ u ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرے۔ حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.17: تصدیق کریں کہ $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$ موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔ یہاں u اور v دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل ہیں۔

اگر جزوی تفرقی مساوات میں صرف ایک متغیر کے ساتھ تفرقات پائے جاتے ہوں تب اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کر کے حل کیا جاسکتا ہے جہاں باقی متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔ سوال 13.18 تا سوال 13.21 کو حل کریں جہاں u کے متغیرات x اور y ہیں۔

$$u_{xx} - u = 0 \quad \text{سوال 13.18}$$

$$u = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x} \quad \text{جواب}$$

سوال 13.19: $u_y + yu = 0$

جواب: $u = c(x)e^{-\frac{y^2}{2}}$

سوال 13.20: $u_{yy} + 9u = 0$

جواب: $u = c_1(y) \cos 3x + c_2(y) \sin 3x$

سوال 13.21: $u_x + 2xyu = 0$

جواب: $u = c(y)e^{-x^2y}$

سوال 13.22 تا سوال 13.25 میں $u_x = p$ لیتے ہوئے حل تلاش کریں۔

سوال 13.22: $u_{xy} = 0$

جواب: $u = v(x) + w(y)$

سوال 13.23: $u_{xy} = u_x$

سوال 13.24: $u_{xy} + u_x = 0$

جواب: $u = v(x)e^{-y} + w(y)$

سوال 13.25: $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$

سوال 13.26 تا سوال 13.29 میں دیے گئے تفرقی مساوات کی نظام کے حل تلاش کریں۔

سوال 13.26: $u_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0$

جواب: $u = axy + bx + cy + k$

سوال 13.27: $u_x = 0, \quad u_y = 0$

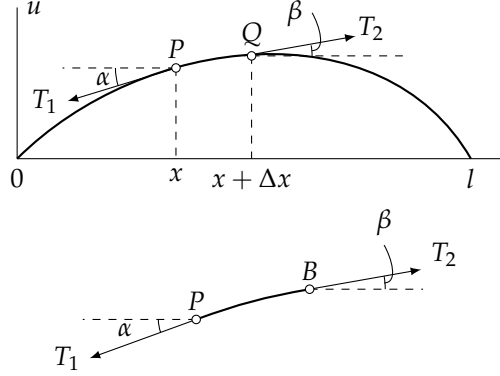
سوال 13.28: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0$

جواب: $u = cx + g(y)$

سوال 13.29: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = 0$

سوال 13.30: تصدیق کریں کہ اگر سطح $z = z(x, y)$ پر منحنی $z = c$ محور x کے متوازی سیدھے خطوط ہوں، جہاں c مستقل ہے، تب z تفرقی مساوات $z_x = 0$ کا حل ہو گا۔ ایسی ایک مثال بھی پیش کریں۔

سوال 13.31: تصدیق کریں کہ $yz_x - xz_y = 0$ کا حل $z = z(x, y)$ سطح گردش ہے۔ اس کی مثال پیش کریں۔ (اشارہ: $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ لے کر تفرقی مساوات کو $z_\theta = 0$ میں تبدیل کریں۔)



شکل 13.1: ارتعاش پذیر تار

13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج

ایک چمک دار تار کو لمبائی l تک کھینچ کر سروں سے باندھا جاتا ہے۔ ساکن تار کو x محور پر تصور کریں۔ اس تار کو کسی نقطہ یا نقاط سے کھینچ کر لمحہ $t = 0$ پر چھوڑا دیا جاتا ہے تاکہ یہ ارتعاش کر سکے۔ ہم تار کی ارتعاش معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی لمحہ $t > 0$ پر ساکن حالت سے تار کی نقطہ x کا انحراف $u(x, t)$ جاننا چاہتے ہیں (شکل 13.1)۔ کسی بھی نظام کا ریاضی نمونہ اخذ کرتے وقت کئی ترسیلی مفروضے فرض کیے جاتے ہیں تاکہ حاصل مساوات ضرورت سے زیادہ پیچیدہ نہ ہوں۔ ہم سادہ تفرقی مساوات کی طرح جزوی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہوئے بھی ایسا کریں گے۔

موجودہ مسئلے میں ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

- (الف) تار کی کمیت فی اکائی لمبائی یکساں ہے (ہم جنسی تار)۔ تار مکمل طور پر چمکدار ہے اور مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے۔
- (ب) تار کو اتنا تان کر باندھا گیا ہے کہ اس میں تناؤ، ثقلی قوت سے بہت زیادہ ہو۔ یوں ثقلی قوت کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔
- (پ) تار سیدھی کھڑی سطح میں حرکت کرتا ہے۔ تار پر کوئی بھی نقطہ اپنے ساکن مقام سے بہت کم انحراف کرتا ہے لہذا ہر نقطے پر تار کی انحراف اور ڈھلوان کی حتمی قیمتیں قلیل ہوں گی۔

ہم توقع کر سکتے ہیں کہ یوں حاصل جزوی تفرقی مساوات کا حل $u(x, t)$ ، "غیر کامل" ہم جنسی تار جس میں ثقلی میدان سے بہت زیادہ تناؤ ہو کا صحیح نقش پیش کرے گا۔

مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر غور کرتے ہیں جس میں تناؤ T پایا جاتا ہے (شکل 13.1)۔ چونکہ مڑنے کے خلاف تار مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے لہذا ہر نقطے پر تار میں تناؤ اس نقطے پر تار کا مماسی ہو گا۔ فرض کریں کہ تار کے ٹکڑے کی سروں P اور Q پر تناؤ T_1 اور T_2 ہے۔ چونکہ تار افقی حرکت نہیں کرتا ہے لہذا اس ٹکڑے پر تناؤ کا کل افقی جزو صفر کے برابر ہو گا۔ یوں شکل 13.1 کو دیکھ کر

$$T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0$$

یا

$$(13.7) \quad T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{مستقل}$$

لکھا جاسکتا ہے یعنی ہر ایسے ٹکڑے پر بائیں اور دائیں رخ یکساں (مستقل T) تناؤ ہو گا۔ انتصابی رخ میں T_1 اور T_2 کے اجزاء $-T_1 \sin \alpha$ اور $T_2 \sin \beta$ ہیں جہاں اوپر رخ تناؤ کو مثبت تصور کیا گیا ہے۔ نیوٹن کی دوسری قانون کے تحت ان دو قوتوں کا مجموعہ تار کے ٹکڑے کی کمیت $\rho \Delta x$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا جہاں اسراع، x اور $x + \Delta x$ کے مابین کسی نقطے کی اسراع ہو گی۔ تار کی کمیت فی اکائی لمبائی ρ ہے جبکہ تار کے ٹکڑے کی لمبائی Δx ہے۔ یوں

$$(13.8) \quad T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ہو گا۔ اس کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(13.9) \quad \frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_2 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

آپ تسلی کر لیں کہ چونکہ مساوات 13.7 میں $T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T$ ہے لہذا مساوات 13.8 کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہوئے کہیں $T_2 \cos \beta$ ، کہیں $T_1 \cos \alpha$ اور کہیں T سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

اب $\tan \alpha$ اور $\tan \beta$ تار کی x اور $x + \Delta x$ پر مماس ہے یعنی

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \quad \text{اور} \quad \tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

جہاں جزوی تفرق اس لئے استعمال کیے گئے ہیں کہ u متغیر t کا بھی تابع ہے۔ یوں مساوات 13.9 کو Δx سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں Δx کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے

$$(13.10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو ایک ایک بعدی مساوات موج⁸ کہتے ہیں۔ مساوات 13.10 ہمارے مسئلے کی درکار جزوی تفرقی مساوات ہے جو ہم جنسی اور دو درجی ہے۔ مساوات میں مستقل $\frac{T}{\rho}$ کو c کی بجائے c^2 سے ظاہر کیا گیا ہے تاکہ واضح رہے کہ یہ مثبت مستقل ہے۔ اس مساوات کا حل اگلے حصے میں حاصل کیا جائے گا۔

13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ چلک دار تار کی ارتعاش کو جزوی تفرقی مساوات

$$(13.11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{مساوات موج}$$

بیان کرتی ہے جہاں $u(x, t)$ تار کی انحراف ہے۔ تار کی حرکت جاننے کی خاطر اس مساوات کا حل درکار ہو گا بلکہ ہمیں مساوات 13.11 کا ایسا حل $u(x, t)$ درکار ہے جو نظام پر لاگو شرائط کو بھی مطمئن کرے۔ چونکہ تار کے دونوں سر غیر تغیر پذیر ہیں لہذا تمام t کے لئے $x = 0$ اور $x = l$ پر سرحدی شرائط

$$(13.12) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

لاگو ہیں۔ تار کی حرکت ابتدائی انحراف (لمحہ $t = 0$ پر انحراف) اور ابتدائی رفتار (لمحہ $t = 0$ پر رفتار) پر منحصر ہوگی۔ ابتدائی انحراف کو $f(x)$ اور ابتدائی رفتار کو $g(x)$ سے ظاہر کرتے ہوئے ابتدائی شرائط⁹

$$(13.13) \quad u(x, 0) = f(x)$$

$$(13.14) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

⁸ one dimensional wave equation
⁹ initial conditions

لکھی جائیں گی۔ ہمیں اب مساوات 13.12 کا ایسا حل چاہیے جو سرحدی شرائط مساوات اور ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرے۔ ہم درج ذیل اقدام کے ذریعہ ایسا حل تلاش کریں گے۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے ہم جزوی تفرقی مساوات سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔

دوسرا قدم۔ ہم ان سادہ تفرقی مساوات کے ایسے حل تلاش کریں گے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔

تیسرا قدم۔ حاصل حل سے ایسے حل حاصل کیے جائیں گے جو ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتے ہوں۔

ان اقدام کی تفصیل درج ذیل ہے۔

پہلا قدم۔ ترکیب ضرب مساوات 13.11 کے حل دو عدد تفاعل کا حاصل ضرب

$$(13.15) \quad u(x, t) = F(x)G(t)$$

کی روپ میں دیتا ہے جہاں ہر ایک تفاعل صرف ایک متغیر x یا t کا تابع ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں اس ترکیب کے کئی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مساوات 13.15 کے تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

ملتا ہے جہاں (\cdot) سے مراد x کے ساتھ تفرق اور $(\ddot{\cdot})$ سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ انہیں مساوات 13.11 میں پر کر کے

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

دونوں اطراف کو $c^2 FG$ سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا دایاں ہاتھ صرف متغیر x پر منحصر ہے جبکہ اس کا بائیں ہاتھ صرف متغیر t پر منحصر ہے۔ اب t تبدیل کرنے سے صرف بائیں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن اس مساوات کے تحت دونوں اطراف برابر ہیں اور دایاں ہاتھ t تبدیل کرنے سے ہرگز تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ t تبدیل کرنے سے بائیں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اسی طرح x تبدیل کرنے سے صرف دایاں ہاتھ کا تبدیل ہونا ممکن ہے لیکن

دونوں اطراف برابر ہیں اور x کی تبدیلی ہے بایاں ہاتھ ہرگز تبدیل نہیں ہوتا ہے لہذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ یوں اس مساوات کے دونوں اطراف غیر تغیر پذیر ہیں لہذا انہیں مستقل k کے برابر لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

جس سے درج ذیل دو عدد مساوات علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہے جہاں k نا معلوم مستقل ہے۔

$$(13.16) \quad F'' - kF = 0$$

$$(13.17) \quad \ddot{G} - c^2 k G = 0$$

دوسرا قدم۔ ہم مساوات 13.16 اور مساوات 13.17 کے حل F اور G حاصل کرتے ہوئے ایسا $u = FG$ دریافت کرتے ہیں جو تمام t کے لئے سرحدی شرائط مساوات 13.12 کو مطمئن کرتا ہو یعنی:

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0$$

اب اگر درج بالا میں $G \equiv 0$ ہو تب $u \equiv 0$ ہو گا جس میں ہم کوئی دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہذا $G \neq 0$ ہو گا۔ یوں درج بالا سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(13.18) \quad \text{(الف)} \quad F(0) = 0, \quad \text{(ب)} \quad F(l) = 0$$

اگر مساوات 13.16 میں $k = 0$ ہو تب اس مساوات کا عمومی حل $F = ax + b$ ہو گا جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $a = 0$ ، $b = 0$ یعنی $F \equiv 0$ یا $u \equiv 0$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔ مثبت $k = \mu^2$ کے لئے مساوات 13.16 کا عمومی حل

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

ہے جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $A = 0$ ، $B = 0$ یعنی $F \equiv 0$ یا $u \equiv 0$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔ یوں ہمارے پاس منفی $k = -p^2$ لینا رہ جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.16 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$F'' + p^2 F = 0$$

اس کا عمومی حل

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

ہے جو مساوات 13.18-الف کی مدد سے

$$F(0) = A = 0$$

لہذا $F = B \sin px$ ہو گا جو مساوات 13.18-ب کے ساتھ مل کر

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

دیتی ہے۔ اب اگر $B = 0$ ہو تب $F \equiv 0$ یعنی $u \equiv 0$ ہو گا جو غیر دلچسپ حل ہے لہذا $B \neq 0$ ہے۔ اس طرح $\sin pl = 0$ ہو گا۔ ہم جانتے ہیں کہ $\sin n\pi = 0$ ہوتا ہے لہذا یوں درج ذیل ملتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

$$(13.19) \quad pl = n\pi \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l}$$

ہم $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے لامحدود تعداد کے حل $F(x) = F_n(x)$ یعنی

$$(13.20) \quad F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, \dots$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.18 میں دیے گئے سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ چونکہ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ہوتا ہے لہذا منفی عدد صحیح $n = -1, -2, \dots$ لینے سے یہی حل منفی علامت کے ساتھ دوبارہ ملتے ہیں۔

اب مساوات 13.19 کے تحت k کی قیمت صرف $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{l})^2$ ممکن ہے۔ k کی ان قیمتوں کے ساتھ مساوات 13.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

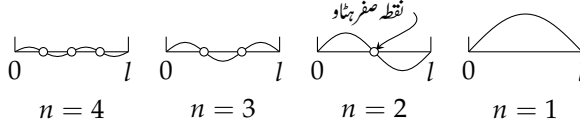
$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t$$

ہے۔ یوں تفاعل $u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t)$

$$(13.21) \quad u_n(x, t) = (B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, \dots)$$



شکل 13.2: تار کے قائمہ انداز اور نقطہ صفر ہٹاؤ۔

مساوات 13.17 کے ایسے حل ہیں جو مساوات 13.18 میں دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان تفاعل کو ارتعاش پذیر تار کے آنگنی تفاعل¹⁰ یا امتیازی تفاعل¹¹ کہتے ہیں جبکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ کی قیمتوں کو ارتعاش پذیر تار کے آنگنی اقدار¹² یا امتیازی اقدار¹³ کہتے ہیں۔ مزید $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ کا سلسلہ طیف¹⁴ کہلاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک u_n ایک مخصوص ہارمونی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے جس کی تعدد $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2l}$ چکر فی اکائی وقت ہے۔ اس حرکت کو تار کی n ویں قائمہ انداز¹⁵ کہتے ہیں۔ پہلا قائمہ انداز جس کا $n = 1$ ہو گا بنیادی انداز¹⁶ کہلاتا ہے جبکہ باقی کو n ویں ہارمونی انداز¹⁷ کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 13.21 میں

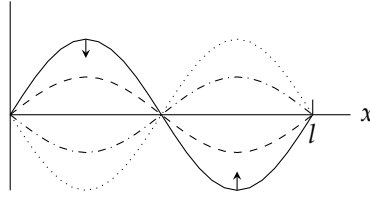
$$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \implies x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}l$$

ہے لہذا n ویں قائمہ انداز کے $n-1$ نقطہ صفر ہٹاؤ¹⁸ پائے جائیں گے۔ ان نقطوں پر تار ساکن رہتی ہے (شکل 13.2)۔

شکل 13.3 میں دوسرا قائمہ انداز مختلف لمحات t پر دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی لمحہ پر تار کی شکل سائن تفاعل کی ہو گی۔ جب تار کا بایاں آدھا حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت تار کا دایاں آدھا حصہ اوپر کی طرف حرکت کرے گا۔ اسی طرح جب بایاں حصہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت دایاں حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔ تار کا درمیانہ نقطہ حرکت نہیں کرتا ہے لہذا یہ نقطہ صفر ہٹاؤ ہے۔ باقی انداز بھی اسی طرح کی خاصیت رکھتے ہیں۔

تیسرا قدم۔ ظاہر ہے کہ ایک عدد حل $u_n(x, t)$ عموماً ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے۔ اب چونکہ مساوات 13.11 خطی اور ہم جنسی ہے لہذا بنیادی مسئلہ 13.1 کے تحت مساوات

- eigenfunctions¹⁰
- characteristic functions¹¹
- eigenvalues¹²
- characteristic values¹³
- spectrum¹⁴
- normal mode¹⁵
- fundamental mode¹⁶
- harmonics¹⁷
- node¹⁸



شکل 13.3: مختلف t پر دو سراقائمہ انداز

13.11 کی محدود تعداد کے حلوں u_n کا مجموعہ بھی مساوات 13.11 کا حل ہو گا۔ اس طرح ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم لامتناہی تسلسل

$$(13.22) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 13.22 اور ابتدائی شرط مساوات 13.13 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.23) \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.13 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x, 0)$ تقابل $f(x)$ کی فوریر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$(13.24) \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.22 کا t کے ساتھ تفرق لے کر اور ابتدائی شرط مساوات 13.14 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x) \end{aligned}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.14 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n^* اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $t = 0$ پر $\frac{\partial u}{\partial t}$ تقابل $g(x)$ کی فوریر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

اور چونکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ ہے لہذا

$$(13.25) \quad B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 13.24 اور مساوات 13.25 میں حاصل کیے گئے عددی سر کو مساوات 13.22 میں پر کرنے سے حاصل تسلسل $u(x, t)$ ، مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرے گا بشرطیکہ حاصل $u(x, t)$ مرتکز ہو اور اس کی x اور t کے ساتھ جزو در جزو دو درجی تفرق لینے سے حاصل تسلسل مرتکز ہو اور ان کے مجموعے بالترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہوں جو استمراری ہیں۔

اب تک مساوات 13.22 محض ریاضی حل کے طور پر سامنے آیا ہے۔ آئیں اس کی اصل حقیقت کو قائم کریں۔ ہم اپنی آسانی کی خاطر ابتدائی رفتار $g(x)$ صفر لیتے ہیں۔ یوں $B_n^* = 0$ ہوں گے لہذا مساوات 13.22 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$(13.26) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ہم ضمیمہ ب کا کلیہ 11. ب استعمال کرتے ہوئے

$$\cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{2} \left[\sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x - ct) \right\} + \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\} \right]$$

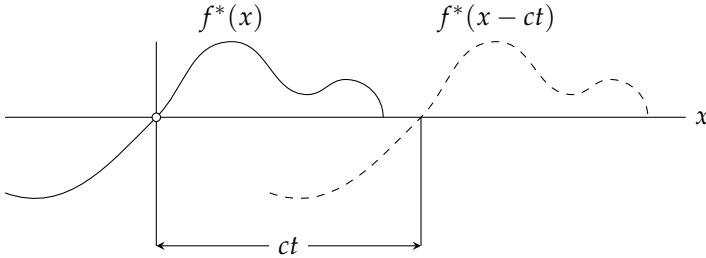
لکھ سکتے ہیں جس کو مساوات 13.26 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x - ct) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 13.23 میں x کی جگہ $x - ct$ اور $x + ct$ پر کرنے سے یہی دو تسلسل حاصل ہوتے ہیں لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(13.27) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]$$

جہاں f کی طاق دوری توسیع جس کا دوری عرصہ $2l$ ہو تفاعل f^* ہے (شکل 13.4)۔ چونکہ وقفہ $0 \leq x \leq l$ پر ابتدائی انحراف $f(x)$ استمراری ہے جبکہ $x = 0$ اور $x = l$ پر انحراف صفر ہے لہذا مساوات

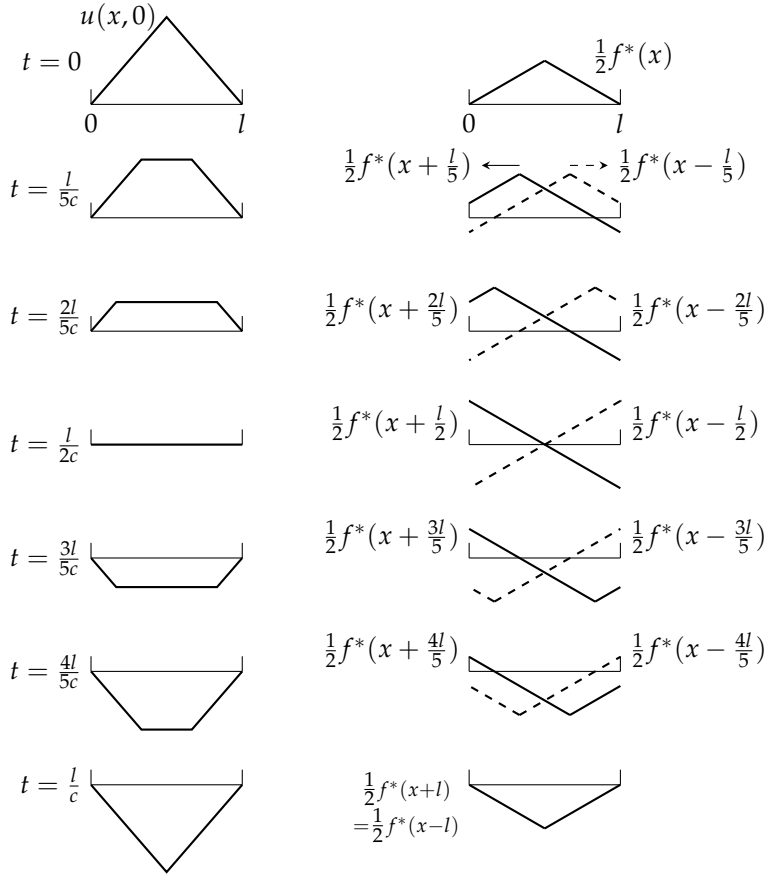
شکل 13.4: $f(x)$ کی طاق توسیع

شکل 13.5: مساوات 13.27 کی معنی

13.27 سے ظاہر ہے کہ $u(x, t)$ دونوں متغیرات x اور t کی تمام قیمتوں پر استمراری ہو گا۔ مساوات 13.27 کا تفرق لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 13.11 کا حل ہے بشرطیکہ وقفہ $0 < x < l$ پر $f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہو اور $x = 0$ اور $x = l$ پر اس کے یک طرفہ دو درجی تفرق پائے جاتے ہوں جن کی قیمت صفر کے برابر ہو۔ اس طرح یہ حقیقت قائم ہوتی ہے کہ ان شرائط پر پورا اترتا ہوا تسلسل $u(x, t)$ مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

اگر $f'(x)$ اور $f''(x)$ محض ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہوں، یا اگر وقفہ کے سروں پر یک طرفہ تفرقات غیر صفر ہوں تب ہر ایک t کے لئے محدود تعداد کی x قیمتوں پر مساوات 13.11 کے u کی دو درجی تفرقات غیر معین ہوں گے۔ ان نقطوں کے علاوہ باقی تمام نقطوں پر u مساوات موج کو مطمئن کرے گی لہذا ہم $u(x, t)$ کو وسیع معنوں میں مسئلے کا حل تصور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تکنیکی ابتدائی انحراف کی صورت میں حاصل حل اس نوعیت کا ہو گا۔

آئیں مساوات 13.27 کی طبعی معنی سمجھتے ہیں۔ جیسا شکل 13.5 میں دکھایا گیا ہے، $f^*(x)$ کی ترسیم کو ct اکائیاں دائیں منتقل کرنے سے $f^*(x - ct)$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $f^*(x - ct)$ ، $(c > 0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ دائیں جانب کو حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح $f^*(x + ct)$ ، $(c > 0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ بائیں جانب کو حرکت کرتی ہے اور $u(x, t)$ ان دونوں کا مجموعہ ہے۔



شکل 13.6: مثال 13.2 کا مختلف لمحات پر دائیں کو اور بائیں کو حرکت کرتے اجزاء اور ان کا مجموعہ حل $u(x, t)$

مثال 13.2: تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں تار کی ارتعاش مساوات موج 13.11 کا حل تکونی ابتدائی انحراف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

اور ابتدائی رفتار صفر $g(x) = 0$ کی صورت میں حاصل کریں۔
حل: چونکہ $g(x) \equiv 0$ ہے لہذا مساوات 13.26 میں $B_n^* = 0$ ہو گا جبکہ B_n کو صفحہ 919 پر مساوات 12.35 دے گی۔ یوں مساوات 13.26 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi c}{l} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} x \cos \frac{3\pi c}{l} t + \dots \right]$$

اس حل کی ترسیم کھینچنے کی خاطر ہم $u(x, 0) = f(x)$ سے شروع کرتے ہوئے مساوات 13.27 کی مدد لیتے ہیں۔ یوں شکل 13.6 حاصل ہوتی ہے۔
□

سوالات

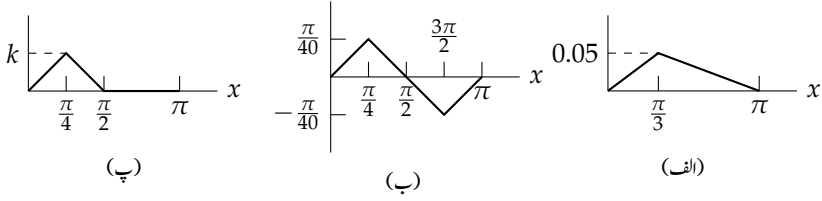
سوال 13.32 تا سوال 13.40 میں تار کی لمبائی $l = \pi$ اور $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$ ہے۔ تار کے سرے ٹھوس نقطوں کے ساتھ باندھے گئے ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ سوال میں دی گئی ہے۔ ارتعاش پذیر تار کا انحراف $u(x, t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.32: $0.02 \sin x$
جواب: $u = 0.02 \cos t \sin x$

سوال 13.33: $k \sin 2x$
جواب: $u = k \cos 2t \sin 2x$

سوال 13.34: $k(\sin x - \sin 2x)$
جواب: $u = k(\cos t \sin x - \cos 2t \sin 2x)$

سوال 13.35: شکل 13.7-الف
جواب: $\frac{9\sqrt{3}k}{2\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos t \sin x + \frac{1}{2^2} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{4^2} \cos 4t \sin 4x \dots \right)$



شکل 13.7: اشکال برائے سوالات 13.35، 13.36 اور 13.37

سوال 13.36: شکل 13.7-ب
جواب: $\frac{4}{5\pi} \left(\frac{1}{2^2} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{6^2} \cos 6t \sin 6x + \frac{1}{10^2} \cos 10t \sin 10x \cdots \right)$

سوال 13.37: شکل 13.7-پ
جواب: $\frac{4k}{\pi^2} \left[2(\sqrt{2} - 1) \cos t \sin x + \cos 2t \sin 2x - 2(\sqrt{2} - \frac{1}{9}) \cos 3t \sin 3x \cdots \right]$

سوال 13.38: $kx(x - \pi)$
جواب: $\frac{8k}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} \cos t \sin x - \frac{1}{3^2} \cos 3t \sin 3x - \frac{1}{5^2} \cos 5t \sin 5x \cdots \right)$

سوال 13.39:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ k(x - \pi)^2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $4k \left[\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos t \sin x - \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) \cos 3t \sin 3x \cdots \right]$

سوال 13.40:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -k(x - \pi)^2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $k \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right) \cos 2t \sin 2x + \frac{k\pi}{4} \cos 4t \sin 4x + k \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{27\pi} \right) \cos 6t \sin 6x \cdots$

سوال 13.41 تا سوال 13.43 میں $c^2 = 1$ ہے، تار کی لمبائی $l = \pi$ ہے اور تار کے سرے ٹھوس نقطوں سے بندھے ہیں۔ ابتدائی رفتار $g(x)$ اور ابتدائی انحراف $f(x)$ ہیں۔ ارتعاش پذیر تار کی انحراف $u(x, t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.41: $f = 0, \quad g = kx \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \quad g(x) = k(\pi - x) \quad (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi)$

جواب: $\frac{4k}{\pi} (\frac{1}{1^3} \sin t \sin x - \frac{1}{3^3} \sin 3t \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5t \sin 5x \cdots)$

سوال 13.42: $f = 0, \quad g = k \sin 3x$
جواب: $\frac{k}{3} \sin 3t \sin 3x$

سوال 13.43: $f = k \sin 2x, \quad g = -k \sin 2x$
جواب: $-\frac{k}{2} \sin 2t \sin 2x$

سوال 13.44: تناو T چارگنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ $c^2 = \frac{T}{\rho}$ ہے لہذا T چارگنا کرنے سے c دگنا ہو گا جس سے بنیادی انداز کی تعدد دگنی ہو گی۔

سوال 13.45: تار کی لمبائی چارگنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: بنیادی انداز کی تعدد چارگنا کم ہو گی۔

سوال 13.46 تا سوال 13.53 میں دیے گئے جزوی تفرقی مساوات کو علیحدگی متغیرات کے طریقہ سے حل کریں۔

سوال 13.46: $u_x + u_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x+y)}$

سوال 13.47: $u_x - u_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x-y)}$

سوال 13.48: $xu_x - yu_y = 0$
جواب: $u = kxy$

سوال 13.49: $u_x - yu_y = 0$
جواب: $u = cy^k e^{kx}$

سوال 13.50: $yu_x - xu_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x^2+y^2)}$

سوال 13.51: $u_x + u_y = 2(x + y)u$
 جواب: $u = ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$

سوال 13.52: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
 جواب: $u = (A \cos kx + B \sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$

سوال 13.53: $u_{xy} - u = 0$
 جواب: $u = ce^{x+y}$

سوال 13.54 تا سوال 13.58 چمکدار تار کی جبری ارتعاش پر مبنی ہیں۔

سوال 13.54: چمک دار تار کی جبری ارتعاش کا الجبرائی نمونہ درج ذیل جزوی تفرقی مساوات ہے جہاں اکائی لمبائی پر بیرونی قوت $P(x, t)$ تار کے عمودی عمل کرتا ہے۔

(13.28)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho}$$

دیے گئے مسئلے سے اس جزوی تفرقی مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 13.55: سائن نما بیرونی قوت $P = A\rho \sin \omega t$ کی صورت میں درج ذیل ثابت کریں

$$\frac{P}{\rho} = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

جہاں $k_n(t) = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t$ ہے۔ یوں جفت n کی صورت میں $k_n = 0$ اور طاق n کی صورت میں $k_n = \frac{4A}{n\pi} \sin \omega t$ ہو گا۔ مزید ثابت کریں کہ مساوات 13.11 میں

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

سوال 13.56: ثابت کریں کہ سوال 13.55 کے $\frac{P}{\rho}$ اور u کو مساوات 13.28 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ثابت کریں کہ $\lambda_n^2 \neq \omega^2$ کی صورت میں اس کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t + \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

سوال 13.57: ایسے B_n اور B_n^* دریافت کریں کہ u ابتدائی شرائط $u(x, 0) = f(x)$ اور $u_t(x, 0) = 0$ کو مطمئن کرے (سوال 13.56)۔

سوال 13.58: ثابت کریں کہ گمک $\lambda_n = \omega$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \sin \omega t - \frac{A}{n\pi\omega} (1 - \cos n\pi) t \cos \omega t$$

13.4 مساوات موج کا دالو بیخ حل

گزشتہ حصہ میں مساوات موج

$$(13.29) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

کا حل مساوات 13.27 حاصل کیا گیا۔ یہی حل نہایت آسانی سے مساوات 13.29 کا موزوں بدل لیتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں نئے غیر تابع متغیرات¹⁹

$$(13.30) \quad v = x + ct, \quad z = x - ct$$

متعارف کرتے ہوئے u کو متغیرات v اور z کا تفاعل لکھتے ہیں۔ اس طرح مساوات 13.29 میں تفرقات اب v اور z کے لحاظ سے زنجیری ترکیب (حصہ 10.7) کی مدد سے لکھے جائیں گے۔ جزوی تفرق کو زیر نوشت سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 13.30 سے $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ لکھے جائیں گے۔ ہم اپنی آسانی کے لئے ہم v اور z متغیرات کے تفاعل کو بھی u سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

¹⁹ یہاں بتانا چلوں کہ جزوی تفرقی مساوات کا عمومی نظریہ اس طرح کے متبادل حاصل کرنے کی قدم باقدم ترکیب پیش کرتی ہے۔

دائیں ہاتھ پر زنجیری ترکیب لاگو کرتے ہوئے اور $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ پر کرتے ہوئے

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

ملتا ہے۔ مساوات 13.29 کی دوسری تفرق کو بھی اسی طرح لکھتے ہیں۔

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

ان نتائج کو مساوات 13.29 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(13.31) \quad u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

آپ نے دیکھا کہ نئے متغیرات متعارف کرنے سے حاصل مساوات 13.31 نہایت آسانی سے دو مرتبہ مکمل لینے سے حل ہو سکتی ہے۔ ایک مرتبہ z کے ساتھ مکمل لینے سے

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

حاصل ہو گا جہاں نا معلوم تفاعل $h(v)$ متغیر v کے تابع ہو سکتا ہے۔ اس کا مکمل v کے ساتھ لیتے ہیں

$$u = \int h(v) dv + \psi(z)$$

جہاں $\psi(z)$ متغیر z کا نا معلوم تفاعل ہے۔ درج بالا میں مکمل کا حاصل از خود v کا تفاعل ہو گا جس کو نا معلوم تفاعل $\phi(v)$ لکھتے ہوئے مساوات 13.31 کی مدد سے

$$(13.32) \quad u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو موج کی مساوات 13.29 کا دالومبیغ حل²⁰ کہتے ہیں۔

تفاعل ϕ اور ψ کو ابتدائی معلومات سے دریافت کیا جاسکتا ہے۔ آئیں صفر ابتدائی رفتار اور ابتدائی انحراف $u(x, 0) = f(x)$ کے لئے ان تفاعل کو حاصل کریں۔

مساوات 13.32 کا تفرق لیتے ہیں

$$(13.33) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct)$$

²⁰d'Alembert solution

²¹فرانسیسی ریاضی دان ڈان ڈانیس ڈالومبیغ [1717-1783]

جہاں (') سے مراد قوسین میں بند پوری دلیل $x + ct$ اور $x - ct$ کے لحاظ سے بالترتیب تفرق ہے۔ مساوات 13.32، مساوات 13.33 اور ابتدائی معلومات سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0$$

آخری مساوات یعنی $\psi' = \phi'$ سے $\psi = \phi + k$ حاصل ہوتا ہے جس کو پہلی مساوات کے ساتھ ملا کر $2\phi + k = f$ یا $\phi = \frac{f-k}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ ان حاصل کردہ ϕ اور ψ کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.32 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(13.34) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)]$$

جو عین مساوات 13.27 ہے۔ آپ یہاں تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات 13.27 پر لاگو ابتدائی سرحدی شرائط مساوات 13.12 کی بنا f طاق ہوگا اور اس کا دوری عرصہ $2l$ ہوگا۔

ہمارے اس نتیجہ کے تحت دو عدد ابتدائی شرائط اور سرحدی شرائط مل کر مساوات موج کا حل یکتا طور پر تعین کرتی ہیں۔

سوالات

سوال 13.59: مساوات 13.30 دیکھ کر x اور t کو v اور z کی صورت میں لکھتے ہوئے مساوات 13.31 سے مساوات 13.29 حاصل کریں۔

سوال 13.60 تا سوال 13.65 میں مساوات 13.34 استعمال کرتے ہوئے شکل 13.6 کی طرح مختلف لمحات پر تار کی انحراف $u(x, t)$ کی ترسیم کھینچیں۔ تار کی لمبائی اکائی (1) ہے اور اس کے دونوں سرے ہل نہیں سکتے ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر ہے جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ ہے۔ k کی کوئی بھی چھوٹی قیمت مثلاً $k = 0.01$ لیں۔

$$\text{سوال 13.60: } f(x) = k \sin 2\pi x$$

$$\text{سوال 13.61: } f(x) = kx(1 - x)$$

$$\text{سوال 13.62: } f(x) = k(x - x^3)$$

سوال 13.63: $f(x) = k(x^2 - x^4)$

سوال 13.64: $f(x) = k(x^3 - x^5)$

سوال 13.65: $f(x) = k \sin^2 \pi x$

سوال 13.66 تا سوال 13.70 میں دیے گئے متبادل استعمال کرتے ہوئے جزوی تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 13.66: $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x, z = xy)$

سوال 13.67: $u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y)$
جواب: $u = f_1(x) + f_2(x + y)$

سوال 13.68: $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x - y)$

سوال 13.69: $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y)$
جواب: $u = xf_1(x + y) + f_2(x + y)$

سوال 13.70: $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y, z = 2x - y)$

سوال 13.71: خطی جزوی تفرقی مساوات کی اقسام
درج ذیل طرز کی مساوات

(13.35) $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$

کو $AC - B^2 > 0$ کی صورت میں بیضوی²²، $AC - B^2 = 0$ کی صورت میں قطع مکانی²³ اور $AC - B^2 < 0$ کی صورت میں قطع زائد²⁴ کہتے ہیں۔ یہاں A ، B اور C از خود x اور y کے تفاعل ہو سکتے ہیں۔ مساوات 13.35 سطح xy کی مختلف حصوں میں مختلف قسم کا ہو سکتا ہے۔ تصدیق کریں کہ

لاپلاسی مساوات $u_{xx} + u_{yy} = 0$ بیضوی ہے

حراری مساوات $u_t = c^2 u_{xx}$ قطع مکانی ہے

جبکہ مساوات موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ قطع زائد ہے۔

elliptic²²
parabolic²³
hyperbolic²⁴

اس کے برعکس $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ بالائی نصف سطح پر بیضوی، x محور پر قطع مکانی اور نیچے نصف سطح پر قطع زائد ہے۔

سوال 13.72: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع زائد ہو تب $v = \phi(x, y)$ اور $z = \psi(x, y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $R^*(v, z, u, u_v, u_z)$ صورت میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں $\phi = c_1$ اور $\psi = c_2$ (مستقل ہیں) مساوات $Ay'^2 - 2By' + C = 0$ کے حل $y = y(x)$ ہیں۔ تصدیق کریں کہ مساوات 13.29 کی صورت میں درج ذیل تبادل حاصل ہوں گے۔

$$\phi = x + ct, \quad \psi = x - ct$$

جواب: مساوات موج کو $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ لکھ کر $A = 1$ ، $B = 0$ اور $C = -c^2$ ملتے ہیں۔ چونکہ ہمارے متغیرات t اور x ہیں لہذا مساوات 13.35 کو $1u_{tt} + 0 - c^2 u_{xx} = 0$ لکھ سکتے ہیں۔ یوں ہمیں $A(\frac{dx}{dt})^2 - 2B(\frac{dx}{dt}) - c^2 = 0$ یعنی $(\frac{dx}{dt})^2 - c^2 = 0$ یا $\frac{dx}{dt} = \mp c$ کے حل درکار ہیں جو $x = \mp ct + k$ یعنی $x \mp ct = k$ ہیں۔ یوں $\phi = x + ct$ اور $\psi = x - ct$ ملتے ہیں۔

سوال 13.73: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع مکانی ہو تب $v = x$ اور $z = \psi(x, y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $R^*(v, z, u, u_v, u_z)$ صورت میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں ψ حاصل کرنے کی ترکیب سوال 13.72 میں دی گئی ہے۔ اس حقیقت کو سوال 13.68 کی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔
جواب: $y'^2 - 2y' + 1 = (y' - 1)^2 = 0$ سے $y = x + c$ یا $\psi(x, y) = x - y$ ملتا ہے۔
اور $v = x$ اور $z = x - y$ ہیں۔

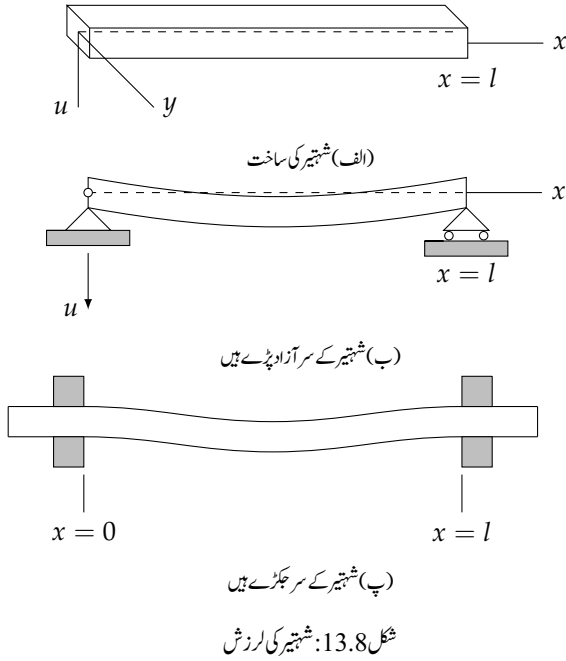
سوال 13.74 تا سوال 13.78 شہتیر کی لرزش میں مبنی ہیں۔

سوال 13.74: افقی شہتیر (شکل 13.8-الف) کی انتصابی لرزش درج ذیل جزوی تفرقی مساوات دیتی ہے

$$(13.36) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad c^2 = \frac{EI}{\rho A}$$

جہاں E ینگ مقیاس پک، محور y کے لحاظ سے I جمودی معیار اثر، ρ کثافت اور A رقبہ عمودی تراش ہیں۔ مساوات 13.36 میں $u = F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے علیحدگی متغیرات سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{F^{(4)}}{F} &= -\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \beta^4 = \text{مستقل}, \\ F(x) &= A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x, \\ G(t) &= a \cos c\beta^2 t + b \sin c\beta^2 t \end{aligned}$$



سوال 13.75: ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے مساوات 13.36 کے وہ حل $u_n = F_n(x)G_n(t)$ دریافت کریں جو درج ذیل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں (شکل 13.8-ب)۔

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{شہتیر کے دونوں سر دیوار پر آزاد رکھے گئے ہیں}$$

$$u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0 \quad \text{یوں سروں پر صفر معیار اثر لہذا صفر گولائی ہوگی}$$

جواب:

$$F_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad G_n = a_n \cos \frac{cn^2 \pi^2 t}{l^2}$$

سوال 13.76: مساوات 13.36 کا وہ حل جو سوال 13.75 کے شرائط کے ساتھ ابتدائی انحراف $u(x, 0) = f(x) = x(l - x)$ کو مطمئن کرتا ہو حاصل کریں۔

سوال 13.77: شہتیر کے دونوں سروں سے جکڑنے سے کیا ابتدائی شرائط پیدا ہوں گے (شکل 13.8-پ)؟

جواب: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0$

سوال 13.78: تصدیق کریں کہ سوال 13.74 میں حاصل $F(x)$ سوال 13.77 میں دی گئی شرائط کو اس صورت مطمئن کرتا ہے جب βl درج ذیل مساوات کے جذر ہوں۔

$$\cosh \beta l \cos \beta l = 1 \quad (13.37)$$

مساوات 13.37 کے چند حل کا تخمینہ لگائیں۔

13.5 یک بعدی بہاؤ حرارت

ہم جنسی مادہ میں حرارت کی بہاؤ حراری مساوات (حصہ 11.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

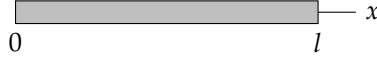
دیتی ہے جہاں $u(x, y, z, t)$ جسم کا درجہ حرارت، K جسم کی حراری موصلیت، σ جسم کی مخصوص حراری استعداد اور ρ جسم کے مادہ کی کثافت ہے۔ $\nabla^2 u$ درجہ حرارت u کا لاپلاسی ہے جو کارتیسی نظام کی محدود x ، y ، z کے لحاظ سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

آئیں ایک لمبی سلاخ یا تار جو x محور پر رکھی گئی ہو میں درجہ حرارت پر غور کرتے ہیں (شکل 13.9)۔ یہ سلاخ ہم جنسی مادہ سے بنی ہے اور اس کا رقبہ عمودی تراش یکساں ہے۔ اس سلاخ کے اطراف کو مکمل طور پر غیر موصل سے گھیر کر عاجز شدہ کیا گیا ہے لہذا سلاخ میں حرارت کی بہاؤ صرف لمبائی کے رخ ممکن ہے۔ اس طرح u صرف x اور t پر منحصر ہو گا لہذا حراری مساوات درج ذیل ایک بعدی حراری مساوات²⁵ کی صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (13.38)$$

ہم مساوات 13.38 کو کئی اہم سرحدی شرائط اور ابتدائی شرائط کے لئے حل کرتے ہیں۔ ہم ایک بعدی حراری مساوات کو مساوات موج کی طرح حل کرتے ہوئے دیکھیں گے کہ اس کا حل مکمل طور پر مساوات موج کے حل سے مختلف



شکل 13.9: لمبی سلاخ

ہو گا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ حراری مساوات میں $\frac{\partial u}{\partial t}$ جبکہ مساوات موج میں $\frac{\partial u}{\partial t^2}$ پایا جاتا ہے۔ (یوں سوال 13.71 میں جزوی تفرقی مساوات کی درجہ بندی یقیناً نہایت اہمیت کے حامل ہے۔)

آئیں پہلے اس صورت کو دیکھیں جہاں سلاخ کے سر $x = 0$ اور $x = l$ صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہوں۔ اس طرح سرحدی شرائط تمام t کے لئے

$$(13.39) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

ہوں گے جو ہو بہو مساوات 13.12 کی طرح ہیں۔ فرض کریں کہ سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ یوں ابتدائی شرط

$$(13.40) \quad u(x, 0) = f(x)$$

ہو گی۔ ہم مساوات 13.38 کا ایسا حل $u(x, t)$ دریافت کرتے ہیں جو مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

پہلا قدم۔ ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.38 کا ایسا حل حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.39 کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں درج ذیل سے شروع کرتے ہیں۔

$$(13.41) \quad u(x, t) = F(x)G(t)$$

مساوات 13.41 اور اس کے تفرق کو مساوات 13.38 میں پر کرتے ہوئے

$$FG = c^2 F'' G$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $(')$ سے مراد x کے ساتھ تفرق اور (\cdot) سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو $c^2 FG$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(13.42) \quad \frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا بائیں ہاتھ صرف t اور دایاں ہاتھ صرف x پر منحصر ہے لہذا حصہ 13.3 کی طرح ہم اخذ کرتے ہیں کہ مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کسی مستقل مثلاً k کے برابر ہوں گے۔ آپ خود تسلی کر سکتے ہیں کہ

$k \geq 0$ سے حاصل حل $u = FG$ جو مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا ہو $u \equiv 0$ ہے (جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے ہیں)۔ اس طرح مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کو منفی $k = -p^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$(13.43) \quad F'' + p^2 F = 0$$

$$(13.44) \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

دوسرا قدم۔ مساوات 13.43 کا عمومی حل

$$(13.45) \quad F(x) = A \cos px + B \sin px$$

ہے لہذا مساوات 13.39 کے تحت

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0$$

ہو گا۔ اب $G(t) \equiv 0$ کی صورت میں $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہذا ہم $F(0) = 0$ اور $F(l) = 0$ چنتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں مساوات 13.45 سے $F(0) = A = 0$ اور

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

ملتے ہیں جہاں $B = 0$ لینے سے $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہذا $B \neq 0$ اور

$$\sin px = 0 \implies p = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ہوں گے۔ اس طرح $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات 13.42 کو مطمئن کرنے والا مساوات 13.43 کا درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

یہاں بھی حصہ 13.3 کی طرح $n = -1, -2, \dots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے۔

ہم اب مساوات 13.44 پر غور کرتے ہیں جو $p = \frac{n\pi}{l}$ کی صورت میں درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

اس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

ہے جہاں B_n مستقل ہے۔ اس طرح مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا مساوات 13.38 کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$(13.46) \quad u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو مساوات 13.40 کو بھی مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں

$$(13.47) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \quad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \right)$$

جو مساوات 13.40 کے ساتھ مل کر

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

دیتی ہے۔ یوں اگر مساوات 13.47 نے مساوات 13.40 کو مطمئن کرنا ہو تب B_n یوں منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x, 0)$ تقابل $f(x)$ کی طاق دوری توسیع کی تسلسل یعنی فوریئر سائن تسلسل ہو جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے (مساوات 12.34)۔

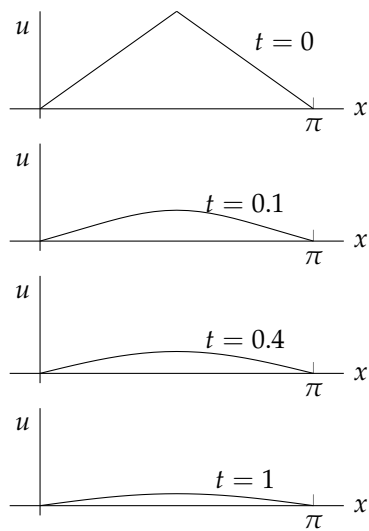
$$(13.48) \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ وقفہ $0 \leq x \leq l$ پر تقابل $f(x)$ ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہے اور اس وقفہ کے تمام اندرونی نقطوں پر اس کے یک طرفہ تفرق (شکل 12.4) پائے جاتے ہیں۔ ان شرائط کے ساتھ مساوات 13.47 میں دی گیا تسلسل، جس کے عددی سر مساوات 13.48 دیتی ہے، ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔

حاصل حل میں قوت نہائی جزو کی بنا جیسے جیسے t لامتناہی کے قریب تر پہنچے مساوات 13.47 کے تمام ارکان ویسے ویسے صفر کے قریب تر پہنچتے ہیں۔ تنزل کی شرح n پر منحصر ہو گی۔

مثال 13.3: ابتدائی درجہ حرارت

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ l - x & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$



شکل 13.10: مختلف لمحات پر مثال 13.3 کا حل

اور $l = \pi$ کی صورت میں مساوات 13.48 سے

$$(13.49) \quad B_n = \frac{2}{l} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right)$$

ملتا ہے جو طاق n کی صورت میں $B_n = 0$ اور جفت n کی صورت میں

$$B_n = \frac{4}{n^2\pi} \quad (n = 1, 5, 9, \dots)$$

$$B_n = -\frac{4}{n^2\pi} \quad (n = 3, 7, 11, \dots)$$

دیتا ہے۔ یوں حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 13.10 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x e^{-c^2 t} - \frac{1}{9} \sin 3x e^{-9c^2 t} + \dots \right]$$

□

سوالات

سوال 13.79: شکل 13.10 کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔ دونوں میں کیا اہم فرق پایا جاتا ہے۔
جواب: شکل 13.10 غیر ارتعاشی ہے جبکہ مساوات موج کا حل ارتعاشی ہے

سوال 13.80: مساوات 13.46 میں کسی مخصوص n کے لئے K ، σ اور ρ کا تنزل پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟
جواب: K بڑھنے سے تنزل بڑھتی ہے جبکہ σ اور ρ کے بڑھنے سے تنزل گھٹتی ہے۔

سوال 13.81: u_1 ، u_2 اور u_3 کا ترسیم $B_n = 1$ ، $c = 1$ اور $l = \pi$ لیتے ہوئے $t = 0$ ، $t = 1$ اور $t = 2$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.82: ایک سلاخ جس کے اطراف مکمل طور پر عاجز شدہ ہیں کے سر برقرار $u(0, t) = U_1$ اور $u(0, l) = U_2$ پر رکھے گئے ہیں۔ سلاخ کی لمبائی l ہے۔ بہت دیر بعد (یعنی $t \rightarrow \infty$ پر) سلاخ میں درجہ حرارت $u_I(x)$ دریافت کریں۔
جواب: $u_I = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l}$ جہاں $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.83 تا سوال 13.88 میں لوہے کی سلاخ کا درجہ حرارت $u(x, t)$ دریافت کریں۔ سلاخ کی لمبائی $L = 1\text{ m}$ ہے جبکہ لوہے کے مستقل $K = 73\text{ W m}^{-1}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ، $\sigma = 444\text{ J kg}^{-1}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ اور $\rho = 7860\text{ kg/m}^3$ ہیں۔ سلاخ کا رقبہ عمودی تراش 1 cm^2 ہے جبکہ اس کے سر 0°C پر برقرار رکھے گئے ہیں۔ ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ سلاخ کے اطراف عاجز شدہ ہیں۔

سوال 13.83:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $u = \frac{4}{\pi^2}(e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x + \dots)$

سوال 13.84: $f(x) = \sin \pi x$ $u = e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x$ $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ جواب:

سوال 13.85:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$u = \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^3}\right)e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + \left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{\pi^3}\right)e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x(L-x) \quad \text{سوال 13.86:}$$

$$u = \frac{8}{\pi^3}(e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x + \dots) \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x(L-x^2) \quad \text{سوال 13.87:}$$

$$u = \frac{12}{\pi^3}e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{3}{2\pi^3}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x \sin \pi x \quad \text{سوال 13.88:}$$

$$u = \frac{1}{2}e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{16}{9\pi^2}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

سوال 13.89: ایک سلاخ جس کی لمبائی L ہے ہر طرف سے (بشمول دونوں سر) عاجز شدہ ہے۔ ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ طبعی معلومات: سلاخ کے سر سے حراری توانائی کا اخراج سر پر $\frac{\partial u}{\partial x}$ کے راست تناسب ہو گا۔ تصدیق کریں کہ دی گئی معلومات درج ذیل کے مترادف ہے۔

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جہاں A_0 اور A_n مساوات 12.32 سے درج ذیل ہیں۔

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

سوال 13.90: سوال 13.89 میں $t \rightarrow \infty$ پر $u \rightarrow A_0$ ملتا ہے۔ کیا یہ آپ کے توقع کے مطابق ہے؟

سوال 13.91 تا سوال 13.95 کو سوال 13.89 میں دی گئی صورت حال کے لئے حل کریں جہاں $l = \pi$ اور $c = 1$ ہیں۔

سوال 13.91: $f(x) = 1$
جواب: $u(x, t) = 1$

سوال 13.92: $f(x) = x$
جواب: $u = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(e^{-t} \cos x + \frac{1}{9}e^{-9t} \cos 3x + \frac{1}{25}e^{-25t} \cos 5x \dots)$

سوال 13.93: $f(x) = x^2$
جواب: $u = \frac{\pi^2}{3} - 4(e^{-t} \cos x - \frac{1}{4}e^{-4t} \cos 2x + \frac{1}{9}e^{-9t} \cos 3x \dots)$

سوال 13.94:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $u = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}(e^{-4t} \cos 2x + \frac{1}{9}e^{-36t} \cos 6x + \frac{1}{25}e^{-100t} \cos 10x \dots)$

سوال 13.95:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -1 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $u = \frac{4}{\pi}(e^{-t} \cos x - \frac{1}{3}e^{-9t} \cos 3x + \frac{1}{5}e^{-25t} \cos 5x \dots)$

سوال 13.96: فرض کریں کہ سوال 13.82 میں ابتدائی درجہ حرارت $u(x, 0) = f(x)$ ہے۔ ثابت کریں کہ کسی بھی لمحے پر سلاخ میں درجہ حرارت $u(x, y) = u_I(x) + u_{II}(x, t)$ ہوگی جہاں u_I پہلی کی طرح ہے جبکہ u_{II} درج ذیل ہے

$$u_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

جہاں B_n درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - u_I(x)] \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{n\pi} [(-1)^n U_2 - U_1] \end{aligned}$$

13.6 لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں ہوا و حرارت

ہم اطراف سے عاجز شدہ ایسی سلاخ جو دونوں جانب لامتناہی تک لمبی ہو کی صورت میں حراری مساوات

$$(13.50) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

پر غور کریں گے۔ ایسی صورت میں ہمارے پاس کوئی سرحدی شرط نہیں ہے جبکہ ابتدائی معلومات درج ذیل ہے۔

$$(13.51) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

اس مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.50 میں $u(x, t) = F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$(13.52) \quad F'' + p^2 F = 0$$

$$(13.53) \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

جن کا موازنہ مساوات 13.43 اور مساوات 13.44 کے ساتھ کرتے ہوئے درج ذیل حل لکھے جاسکتے ہیں

$$F(x) = A \cos px + B \sin px \quad \text{اور} \quad G(t) = e^{-c^2 p^2 t}$$

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔ اس طرح مساوات 13.50 کا حل

$$(13.54) \quad u(x, t; p) = FG = (A \cos px + B \sin px)e^{-c^2 p^2 t}$$

ہو گا۔ [گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی علیحدگی کا مستقل k منفی لینا ہو گا یعنی $k = -p^2$ چونکہ مثبت k کی صورت میں مساوات 13.54 میں مسلسل بڑھتی قوت نمائی تفاعل پیدا ہوتا ہے جس کا کوئی طبعی مطلب ممکن نہیں ہے۔]

مساوات 13.54 کی تفاعل میں p کی قیمتوں کو کسی مستقل عدد کا ضربی لے کر ان تفاعل کی تسلسل لکھی جاسکتی ہے لیکن ایسی تسلسل لمحہ $t = 0$ پر x کے لحاظ سے دوری ہو گی لیکن $f(x)$ غیر دوری ہے۔ یوں فطری بات ہے کہ ہم فوریزر تسلسل کی بجائے فوریزر کھل کی طرف رجحان کریں۔

چونکہ مساوات 13.54 میں A اور B اختیاری مستقل ہیں لہذا ہم انہیں p کے تفاعل $A = A(p)$ اور $B = B(p)$ تصور کر سکتے ہیں۔ چونکہ حراری مساوات خطی اور ہم جنسی ہے لہذا

$$(13.55) \quad u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t; p) dp = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \sin px] e^{-c^2 p^2 t} dp$$

مساوات 13.50 کا حل ہو گا بشرطیکہ یہ مکمل موجود ہو اور یہ دو مرتبہ x کے ساتھ اور ایک مرتبہ t کے ساتھ قابل تفرق ہو۔

مساوات 13.55 اور ابتدائی معلومات مساوات 13.51 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.56) \quad u(x, 0) = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \sin px] dp = f(x)$$

مساوات 12.69 اور مساوات 12.70 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(13.57) \quad A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos pv \, dv, \quad B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \sin pv \, dv$$

صفحہ 952 پر مساوات 12.82 کے تحت اس مکمل کو

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(px - pv) \, dv \right] dp$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 13.55 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(px - pv) e^{-c^2 p^2 t} \, dv \right] dp$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس دوہرا مکمل کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے ہم اس کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(13.58) \quad u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \left[\int_0^\infty e^{-c^2 p^2 t} \cos(px - pv) \, dp \right] dv$$

اندرونی مکمل کو درج ذیل کلیہ کی مدد سے حل کیا جاسکتا ہے۔

$$(13.59) \quad \int_0^\infty e^{-s^2} \cos 2bs \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

مساوات 13.59 میں نیا متغیر p متعارف کرتے ہوئے $s = cp\sqrt{t}$ لکھ کر اور

$$b = \frac{x-v}{2c\sqrt{t}}$$

لیتے ہوئے مساوات 13.59 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\int_0^\infty e^{-c^2 p^2 t} \cos(px - pv) dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}}$$

جس کو مساوات 13.58 میں پر کرتے ہوئے

$$(13.60) \quad u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} dv$$

ملتا ہے۔ آخر میں ہم مکمل کا متغیر $z = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ متعارف کرتے ہوئے

$$(13.61) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} dz$$

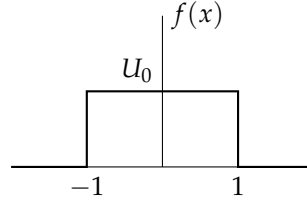
حاصل کرتے ہیں۔ تمام x کے لئے محدود $f(x)$ اور ہر محدود وقفہ پر قابل مکمل $f(x)$ کی صورت میں یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مساوات 13.60 اور مساوات 13.61 دونوں مساوات 13.50 اور مساوات 13.51 کو مطمئن کرتے ہیں لہذا یہ موجودہ مسئلے کا حل ہیں۔

مثال 13.4: لانتناہی لمبائی کی سلاخ میں درجہ حرارت
لانتناہی لمبائی کی سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت درج ذیل ہے (شکل 13.4)۔

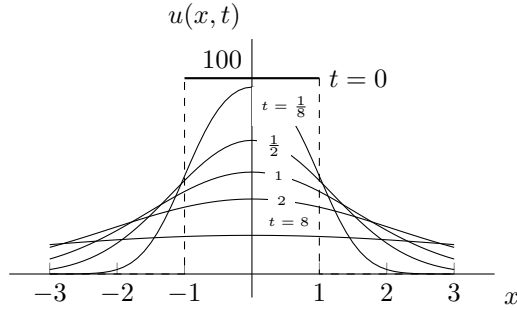
$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{مستقل} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

مساوات 13.60 سے

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} dv$$



شکل 13.11: ابتدائی درجہ حرارت (مثال 13.4)



شکل 13.12: حل $u(x, t)$ برائے مثال 13.4

لکھتے ہیں۔ تکمیل کا نیا متغیرہ $z = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ استعمال کرتے ہوئے -1 تا 1 پر v کا تکمیل $\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}$ تا $\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}$ پر z کے تکمیل میں تبدیل ہو گا یعنی؛

$$(13.62) \quad u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \quad (z > 0)$$

اس تکمیل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے البتہ اس کو تفاعل خلیہ²⁶ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 13.12 میں $u(x, t)$ کو $U_0 = 100^\circ\text{C}$ ، $c^2 = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ کے لئے لمحات $t = \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1, 2, 8$ پر دکھایا گیا ہے۔

□

سوالات

سوال 13.97: نقطہ $x = 0.5, 1, 1.5$ پر مثال 13.4 میں $U_0 = 100^\circ\text{C}$ اور $c^2 = 1\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$ لے کر حاصل کردہ درجہ حرارت $u(x, t)$ کی ترسیم مختلف لمحات پر کھینچیں۔ کیا جوابات آپ کی سوچ کے مطابق ہیں؟

تفاعل خلل درج ذیل مکمل کو کہتے ہیں

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw$$

جو انجینئری میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ اس سے واقفیت پیدا کرنے کی خاطر سوال 13.98 تا سوال 13.105 حل کریں۔

سوال 13.98: تصدیق کریں کہ تفاعل خلل طاق ہے۔

سوال 13.99: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_a^b e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a), \quad \int_{-b}^b e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} b$$

سوال 13.100: قلم و کاغذ سے مکمل e^{-w^2} کی قیمتوں کا جدول بناتے ہوئے اس کی ترسیم کھینچیں جو قوس جرس²⁷ کہلاتی ہے۔

سوال 13.101: قوس جرس (جس کو آپ نے سوال 13.100 میں حاصل کیا) کے نیچے رقبہ معلوم کرتے ہوئے

$\operatorname{erf} x$ کا جدول $x = 0, 0.2, 0.4, \dots, 1, 1.5, 2$ کے لئے حاصل کریں۔ قوس جرس پر افقی اور انتصابی لکیریں کھینچ کر قوس کے نیچے مکعب گن کر رقبہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

جوابات: نقطہ اعشاریہ کے بعد صرف دو اعداد لیتے ہوئے۔
0.00, 0.22, 0.43, 0.60, 0.74, 0.84, 0.97, 1.00

سوال 13.102: تفاعل خلل کی مکمل e^{-w^2} کی مکملارن تسلسل حاصل کریں۔ اس تسلسل کا مکمل لے کر

تفاعل خلل $\operatorname{erf} x$ کی مکملارن تسلسل دریافت کریں۔

جواب: $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} \dots \right)$

سوال 13.103: مساوات 13.62 سے درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{1-x}{2c\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{1+x}{2c\sqrt{t}} \right] \quad (t > 0)$$

سوال 13.104: اگر $x > 0$ کی صورت میں $f(x) = 1$ اور $x < 0$ کی صورت میں $f(x) = 0$ ہو تب تصدیق کریں کہ مساوات 13.61 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (t > 0)$$

سوال 13.105: چونکہ $\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے لہذا سوال 13.104 سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x}{2c\sqrt{t}}$$

سوال 13.106: نصف لامتناہی لمبی سلاخ (0 تا ∞) کے $x = 0$ پر سر کو صفر درجہ پر رکھا گیا ہے جبکہ اس کی ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ ثابت کریں کہ اس مسئلہ کا حل درج ذیل ہے جہاں $\tau = 2c\sqrt{t}$ ہے۔

$$(13.63) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(x + \tau w) e^{-w^2} dw - \int_{\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(-x + \tau w) e^{-w^2} dw \right]$$

سوال 13.107: $f(v)$ کو طاق تصور کرتے ہوئے مساوات 13.60 سے مساوات 13.63 حاصل کریں۔

سوال 13.108: $f(x) = 1$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ سوال 13.106 میں درج ذیل حل حاصل ہو گا۔

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\tau}} e^{-w^2} dw = \operatorname{erf} \frac{x}{2c\sqrt{t}} \quad (t > 0)$$

سوال 13.109: درج ذیل ابتدائی معلومات کی صورت میں مساوات 13.63 کیا صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & \text{باقی جگہوں پر} \end{cases} \quad (a > 0)$$

جواب:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a-x}{\tau}}^{\frac{b-x}{\tau}} e^{-w^2} dw - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a+x}{\tau}}^{\frac{b+x}{\tau}} e^{-w^2} dw$$

سوال 13.110: $f(x) = 1$ پر $x > 0$ اور $f(x) = -1$ پر $x < 0$ لیتے ہوئے مساوات 13.60 یا مساوات 13.61 کی استعمال سے سوال 13.108 کا نتیجہ حاصل کریں۔

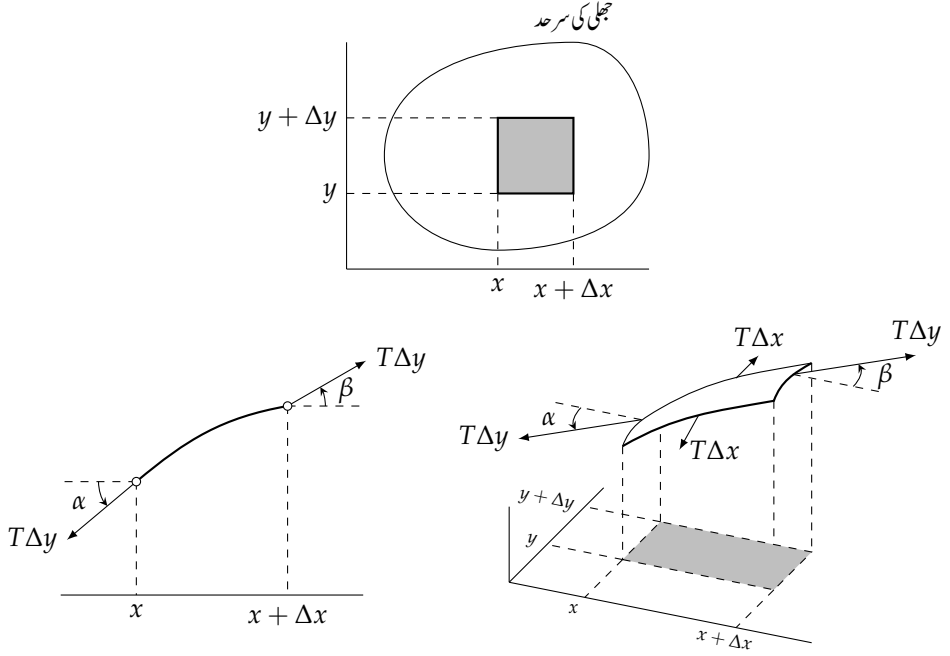
سوال 13.111: ثابت کریں کہ سوال 13.60 میں کوئی دو نقطے کا ایک ہی درجہ حرارت تک پہنچنے کے لئے درکار وقت ان نقطوں کا سرحد $x = 0$ سے فاصلہ کے مربع کے راست تناسب ہو گا۔

13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج

ارتعاش کی میدان میں ایک اور اہم مسئلے کے طور پر تنفی ہوئی جھلی، مثلاً طبل پر چڑھا ہوا چڑے کا پردہ، کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ موجودہ تجزیہ حصہ 13.2 میں ارتعاش تار کی مانند ہو گا۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

- (الف) اکائی رقبہ پر جھلی کی کیت یکساں ہے (ہم جنسی جھلی)۔ جھلی مکمل پلکدار اور اتنی باریک ہے کہ مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتی ہے۔
- (ب) جھلی کو تان کر، اس کی پوری سرحد سے xy مستوی میں باندھا گیا ہے۔ جھلی میں ہر نقطہ پر اور ہر رخ فی اکائی لمبائی تناو T یکساں ہے جو ارتعاش کے دوران تبدیل نہیں ہوتی۔
- (پ) حرکت کے دوران جھلی کی انحراف $u(x, y, t)$ ، جھلی کی جسامت کے لحاظ سے کم ہے اور تمام زاویہ میلان چھوٹے ہیں۔

اگرچہ حقیقت میں ان مفروضوں پر مکمل طور پورا اترنا ممکن نہیں ہے، تہی جھلی کی قلیل عرضی لرزش ان مفروضوں پر تقریباً پورا اترتی ہیں۔



شکل 13.13: ارتعاش پذیر جھلی

جھلی کی حرکت کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم جھلی کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرتے ہیں (شکل 13.13)۔ چونکہ جھلی کی انحراف اور زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہذا اس ٹکڑے کے اطراف کی لمبائی تقریباً Δx اور Δy ہوگی۔ اکائی لمبائی پر قوت کو تناؤ T کہتے ہیں لہذا اس ٹکڑے کے اطراف پر قوت $T\Delta x$ اور $T\Delta y$ عمل کرے گی۔ چونکہ جھلی مکمل یکساں ہے لہذا یہ قوتیں جھلی کی مماسی ہوں گی۔

ہم پہلے قوتوں کی افقی اجزاء پر غور کرتے ہیں۔ اطراف پر قوت کو زاویہ میلان کی کوسائن سے ضرب دینے سے ان کی افقی جزو حاصل ہوگی۔ چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہذا ان کی کوسائن تقریباً اکائی (1) کے برابر ہوں گے۔ یوں مخالف کناروں پر تقریباً برابر قوتیں پائی جائیں گی۔ یوں افقی رخ جھلی کی حرکت قابل نظر انداز ہوگی لہذا ہم جھلی کی حرکت کو عرضی حرکت تصور کرتے ہیں یعنی جھلی صرف اوپر نیچے حرکت کرتی ہے۔

اس ٹکڑے کی کناروں پر کھڑی رخ (yu سطح کی متوازی) قوتوں کے اجزاء²⁸

$$T\Delta y \sin \beta \quad \text{اور} \quad -T\Delta y \sin \alpha$$

ہوں گے جہاں منفی علامت نیچے رخ کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں ہم ان کے \sin کی جگہ ان کے \tan استعمال²⁹ کر سکتے ہیں۔ یوں ان دو عدد قوتوں کا مجموعہ

$$(13.64) \quad \begin{aligned} T\Delta y(\sin \beta - \sin \alpha) &\approx T\Delta y(\tan \beta - \tan \alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \end{aligned}$$

ہوگا جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں جبکہ y اور $y + \Delta y$ کے درمیان y_1 اور y_2 کوئی نقطے ہیں۔ اسی طرح ٹکڑے کے باقی دو کناروں پر قوتوں کے انتصابی اجزاء کا مجموعہ

$$(13.65) \quad T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

ہوگا جہاں x اور $x + \Delta x$ کے درمیان x_1 اور x_2 کوئی نقطے ہیں۔

نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت مساوات 13.64 اور مساوات 13.65 میں دی گئی قوتوں کا مجموعہ جھلی کے ٹکڑے کی کمیت $\rho \Delta A$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہوگا۔ یہاں بلا انحراف فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے جبکہ بلا انحراف ٹکڑے کا رقبہ $\Delta A = \Delta x \Delta y$ ہے۔ یوں

$$\rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

ہوگا جہاں بائیں ہاتھ تفرق ٹکڑے کے کسی موزوں نقطہ (\bar{x}, \bar{y}) پر حاصل کیا جائے گا۔ $\rho \Delta x \Delta y$ سے دونوں اطراف کو تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y} \right]$$

Δx اور Δy کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے درج ذیل جزوی تفرقی مساوات حاصل ہوگی

$$(13.66) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

²⁸ دھیان رہے کہ کنارے پر چلتے ہوئے زاویہ میلان تبدیل ہوگا۔ α اور β زیر غور کنارے کے کسی موزوں نقطہ پر زاویہ میلان ہوں گے۔
²⁹ چھوٹے زاویہ θ کا $\tan \theta \approx \sin \theta$ ہوتا ہے۔

جس کو دو ابعادی مساوات موج³⁰ کہتے ہیں۔ قوسین میں بند u کا لاپلاسی $\nabla^2 u$ ہے (حصہ 10.8) لہذا مساوات 13.66 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.67) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

13.8 مستطیل جہلی

ارتعاش پذیر جہلی کے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل دو ابعادی مساوات موج کا حل $u(x, y, t)$ تلاش کرنا ہوگا

$$(13.68) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

جو تمام $t \geq 0$ کے لئے پوری سرحد پر سرحدی شرط

$$(13.69) \quad u = 0$$

اور دو عدد ابتدائی شرائط

$$(13.70) \quad u(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{ابتدائی انحراف}$$

اور

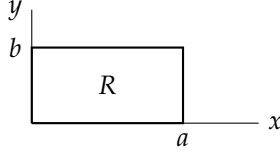
$$(13.71) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y) \quad \text{ابتدائی رفتار}$$

کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط ارتعاش پذیر تار کے شرائط کی مانند ہیں۔ انہیں شکل 13.14 میں دکھائی گئی مستطیل جہلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.68 کا ایسا حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.69 کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں

$$(13.72) \quad u(x, y, t) = F(x, y)G(t)$$

³⁰two dimensional wave equation



شکل 13.14: مستطیل جہلی

کو مساوات 13.68 میں پر کرتے ہیں

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

جہاں $(')$ جزوی تفرق اور (\cdot) وقت t کے ساتھ تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔ دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy})$$

ماتا ہے۔ اب بائیں ہاتھ تفاعل t پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر نہیں ہے لہذا دونوں اطراف کسی مستقل A کے برابر ہیں۔ آپ حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہوئے تسلی کر سکتے ہیں کہ A کے صرف منفی قیمتیں استعمال کرنے سے ایسا غیر صفر حل حاصل ہو گا جو مساوات 13.69 کی شرط کو مطمئن کرتا ہو۔ اس منفی مستقل کو $-v^2$ سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -v^2$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دو علیحدہ علیحدہ سادہ تفرقی مساوات

$$(13.73) \quad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \quad (\lambda = cv)$$

$$(13.74) \quad F_{xx} + F_{yy} + v^2 F = 0$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

ہم مساوات 13.74 کا حل تلاش کرتے ہیں جو جہلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہو گا۔ ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب دوبارہ لاگو کرتے ہوئے

$$(13.75) \quad F(x, y) = H(x)Q(y)$$

لیتے ہیں جو کو مساوات 13.74 میں پر کرنے سے

$$\frac{d^2 H}{dx^2} Q = - \left(H \frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 H Q \right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کے دونوں اطراف کو HQ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = - \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right)$$

ملتا ہے جہاں بائیں ہاتھ تفاعل صرف x پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف y پر منحصر ہے۔ یوں دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔ یہاں بھی صرف منفی قیمت کا مستقل مثلاً $-k^2$ غیر صفر حل دیتے ہیں۔ یوں

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = - \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right) = -k^2$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$(13.76) \quad \frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H = 0$$

$$(13.77) \quad \frac{d^2 Q}{dy^2} + p^2 Q = 0 \quad (p^2 = v^2 - k^2)$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ مساوات 13.76 اور مساوات 13.77 کے حل عمومی

$$H(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad \text{اور} \quad Q(y) = C \cos py + D \sin py$$

ہیں جہاں A ، B ، C اور D مستقل ہیں۔ یوں مساوات 13.72 اور مساوات 13.69 سے ظاہر ہے کہ جھلی کی سرحد پر $F = HQ$ صفر ہو گا۔ جیسا آپ شکل 13.14 سے دیکھ سکتے ہیں، جھلی کی سرحد $x = a$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ اور $y = b$ ہے۔ یوں درج ذیل شرائط لکھے جاسکتے ہیں۔

$$H(0) = 0, \quad H(a) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0$$

اس طرح $H(0) = A = 0$ ہو گا جبکہ

$$H(a) = B \sin ka = 0$$

میں $B = 0$ لینے سے (غیر دلچسپ حل) $H \equiv 0$ یعنی $F \equiv 0$ ملتا ہے لہذا ہم $B \neq 0$ فرض کرتے ہیں۔ یوں $\sin ka = 0$ ہو گا جس سے $ka = m\pi$ یعنی

$$(13.78) \quad k = \frac{m\pi}{a} \quad (m \text{ عدد صحیح})$$

حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح $C = 0$ جبکہ $D \neq 0$ سے $p = \frac{n\pi}{b}$ حاصل ہوتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔ یوں درج ذیل حل ملتے ہیں۔

$$H_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \text{اور} \quad Q_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

(ارتعاش پذیر تار کی طرح یہاں بھی $m, n = -1, -2, \dots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے چونکہ ایسا کرنے سے یہی حل ضرب -1 دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔) یوں $B = 1$ اور $D = 1$ چنتے ہوئے مساوات 13.74 کے حل درج ذیل ہوں گے

$$(13.79) \quad F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

جو جھلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہیں۔

چونکہ مساوات 13.77 میں $p^2 = v^2 - k^2$ ہے اور مساوات 13.73 میں $\lambda = cv$ ہے لہذا

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}$$

ہو گا۔ یوں $k = \frac{m\pi}{a}$ اور $p = \frac{n\pi}{b}$ کا مطابقتی λ مساوات 13.73 میں

$$(13.80) \quad \lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

ہو گا اور مساوات 13.73 کا مطابقتی عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_{mn}(t) = B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn}t$$

یوں مساوات 13.73 کے غیر صفر حل $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$ درج ذیل ہوں گے

$$(13.81) \quad u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

جن میں λ_{mn} مساوات 13.80 دے گی۔ تفاعل u_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے آنگنی تفاعل³¹ یا امتیازی تفاعل³² کہتے ہیں جبکہ λ_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے آنگنی اقدار³³ یا امتیازی اقدار³⁴ کہتے ہیں۔ تفاعل u_{mn} کی تعدد $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ ہوگی۔

a اور b کی مختلف قیمتیں ایک ہی امتیازی قدر دیتے ہوئے کئی مختلف تفاعل F_{mn} دے سکتی ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ جھلی میں ایک ہی تعدد کے کئی مختلف انداز کے ارتعاش ممکن ہیں جن کی صفر ہٹاؤ لکیریں³⁵ مختلف ہوں گی۔ ارتعاش پذیر جھلی پر وہ لکیریں جو حرکت نہیں کرتی ہیں صفر ہٹاؤ لکیریں کہلاتی ہیں۔ آئیں اس کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 13.5: مکعب جھلی

ایک مکعب جھلی کا $a = 1$ ، $b = 1$ ہے۔ مساوات 13.80 سے

(13.82)

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2}$$

لہذا

$$\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$$

ہوگا لیکن $m \neq n$ کے لئے مطابقتی تفاعل

$$F_{mn} = \sin m\pi x \sin n\pi y \quad \text{اور} \quad F_{nm} = \sin n\pi x \sin m\pi y$$

ہیں جو ایک جیسے نہیں ہیں۔ مثلاً $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ کے مطابقتی تفاعل

$$F_{12} = \sin \pi x \sin 2\pi y \quad \text{اور} \quad F_{21} = \sin 2\pi x \sin \pi y$$

ہوں گے۔ یوں مطابقتی حل

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^* \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{12}$$

$$u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^* \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$

³¹eigenfunctions

³²characteristic functions

³³eigenvalues

³⁴characteristic values

³⁵nodal lines

کی صفر ہٹاؤ لکیریں بالترتیب $y = \frac{1}{2}$ اور $x = \frac{1}{2}$ ہوں گی (شکل 13.15-الف)۔ اگر $B_{12} = 1$ اور $B_{12}^* = B_{21}^* = 0$ ہوں تب

$$(13.83) \quad u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t (F_{12} + B_{21}F_{21})$$

ہو گا جو ایک اور انداز ارتعاش ہے جس کی امتیازی قدر $c\pi\sqrt{5}$ ہے۔ اس تفاعل کی صفر ہٹاؤ لکیریں درج ذیل مساوات کے حل ہوں گی۔

$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \sin \pi x \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \sin \pi y = 0$$

اب $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استعمال کرتے ہوئے درج بالا کو

$$(13.84) \quad \sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi y + B_{21} \cos \pi x) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا حل B_{21} پر منحصر ہو گا (شکل 13.15-ب)۔

مساوات 13.82 سے ہم دیکھتے ہیں کہ λ_{mn} کے دو مزید مطابقتی تفاعل ممکن ہیں۔ مثلاً چار تفاعل F_{81} ، F_{18} ، F_{74} اور F_{47} کی $\lambda_{18} = \lambda_{81} = \lambda_{47} = \lambda_{74} = c\pi\sqrt{65}$ ہے چونکہ؛

$$1^1 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$$

ایسا اس لئے ممکن ہے کہ 65 کو دو اعداد صحیح کے مربع کا مجموعہ مختلف طریقوں سے لکھنا ممکن ہے۔ گاؤس کے ایک مسئلہ کے تحت ایسا ہر اس صورت ہو گا جہاں دو اعداد کے مربع کا مجموعہ کے اجزاء مفرد میں کم از کم دو مختلف $4n + 1$ صورت کے ہوں، جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔ یہاں دو اعداد کے مربع کے مجموعہ 65 کو

$$65 = 5 \cdot 13 = (4 + 1)(12 + 1)$$

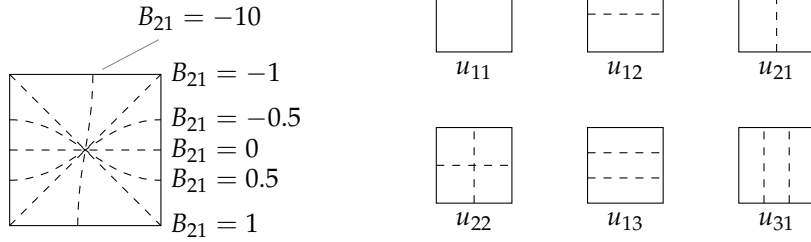
□

لکھنا ممکن ہے۔

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.70 اور مساوات 13.71 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہیں۔ ہم دوہرا تسلسل³⁶

$$(13.85) \quad \begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

³⁶ ہم حل کی یکتائی اور ارتعاش پر غور نہیں کریں گے۔



(الف) مکعب تجلی کے حل $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{13}, u_{31}$ کی صفر ہٹاؤ (ب) ایک ہی B_{21} کے لئے مساوات 13.83 میں دیے گئے حل کلیں۔

شکل 13.15: صفر ہٹاؤ کلیں (مثال 13.5)

کو لیتے ہیں جو مساوات 13.70 کے ساتھ درج ذیل دوہرا فوریر تسلسل ³⁷ دیتی ہے۔

$$(13.86) \quad u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x, y)$$

مستطیل R (شکل 13.14) میں f ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ استمراری ہونے کی صورت میں $f(x, y)$ کو اس دوہرا فوریر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا۔ اس دوہرا فوریر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل لے کر

$$(13.87) \quad K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

مساوات 13.86 کو

$$(13.88) \quad f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

لکھ سکتے ہیں جو مقررہ y کی صورت میں $f(x, y)$ کی فوریر سائن تسلسل ہے جس کا متغیر x ہو گا جس کے عددی سر صفحہ 916 پر مساوات 12.34 کے تحت

$$(13.89) \quad K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

ہوں گے۔ مزید مساوات 13.87 تفاعل $K_m(y)$ کی فوریز سائن تسلسل ہے لہذا اس کے عددی سر صفحہ 916 پر مساوات 12.34 کے تحت

$$(13.90) \quad B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

ہوں گے۔ مساوات 13.90 اور مساوات 13.89 کو ملا کر درج ذیل عمومی یولر کلیہ³⁸ حاصل ہوتا ہے

$$(13.91) \quad B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

جو دوہرا تسلسل (مساوات 13.86) میں تفاعل $f(x, y)$ کے عددی سر B_{mn} دیتی ہے۔

یوں مساوات 13.85 میں B_{mn} تفاعل $f(x, y)$ سے حاصل ہوتے ہیں۔ B_{mn}^* حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.85 کا t کے ساتھ جزوی تفرق لے کر ابتدائی شرط مساوات 13.71 استعمال کرتے ہوئے

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^* \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x, y)$$

حاصل کرتے ہیں۔ مستطیل R (شکل 13.14) میں g ، $\frac{\partial g}{\partial x}$ ، $\frac{\partial g}{\partial y}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ استمراری ہونے کی صورت میں $g(x, y)$ کو اس دوہرا فوریز تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں پہلی کی طرح بڑھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(13.92) \quad B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

یوں مساوات 13.91 اور مساوات 13.92 سے حاصل B_{mn} اور B_{mn}^* مساوات 13.85 میں پر کرتے ہوئے حاصل حل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرے گا۔

سوالات

سوال 13.112: جھلی میں تناؤ بڑھانے سے مساوات 13.81 میں دی گئی حل کی تعداد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ c بڑھتا ہے لہذا تعداد بھی بڑھے گی۔

سوال 13.113: مساوات 13.81 کی صفر ہٹاؤ لکیریں $a = b = 1$ لے کر $m = 1, 2, 3, 4$ اور $n = 1, 2, 3, 4$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.114: مساوات 13.81 کی صفر ہٹاؤ لکیریں $a = 2$ اور $b = 1$ لے کر $m = 1, 2, 3, 4$ اور $n = 1, 2, 3, 4$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.115: اکائی لمبائی کے اطراف والی مکعب جھلی کے مزید ایسے امتیازی اقدار حاصل کریں جن کے مطابقتی امتیازی تفاعل کی تعدد چار عدد ہو۔

سوال 13.116: مستطیل جھلی جس کے اطراف $a = 2$ اور $b = 1$ ہیں کے ایسے امتیازی اقدار حاصل کریں جن کے مطابقتی امتیازی تفاعل کی تعدد دو یا دو سے زیادہ ہو۔
جواب: $c\pi\sqrt{260}, (F_{4,16}, F_{16,14}), \dots$

سوال 13.117: تصدیق کریں کہ یکساں c والی تمام ممکنہ مستطیل جھلی جن کا رقبہ A ہو میں مکعب جھلی کی u_{11} (مساوات 13.81) کی تعدد کم تر ہوگی۔

سوال 13.118: مقررہ m, n اور A کے لئے سوال 13.117 کی طرح کم تر تعدد کی شرط اخذ کریں۔
جواب: مساوات 13.80 میں $a = \frac{A}{b}$ پر کرتے ہوئے حاصل λ کا a کے ساتھ تفرق، صفر کے برابر کرتے ہوئے

$$\lambda^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2 a^2}{A^2} \right), \implies 2\lambda \frac{d\lambda}{da} = c^2 \pi^2 \left(-\frac{2m^2}{a^3} + \frac{2n^2 a}{A^2} \right) = 0$$

کمتر λ کی شرط $\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$ حاصل کرتے ہیں۔

سوال 13.119 تا سوال 13.123 میں تفاعل $f(x, y)$ ($0 < x < a, 0 < y < b$) کا مساوات 13.86 کی طرز کا دوہرا فوریر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 13.119: $f = 1$
جواب: $B_{mn} = \frac{16}{mn\pi^2}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$

سوال 13.120: $f = x + y$
جواب: $B_{mn} = \frac{4}{mn\pi^2} [a(-1)^{m+n} - a(-1)^m + b(-1)^{m+n} - b(-1)^n]$

سوال 13.121: $f = xy$
 جواب: $B_{mn} = \frac{4ab(-1)^{m+n}}{mn\pi^2}$

سوال 13.122: $f = xy(a-x)(b-y)$
 جواب: $B_{mn} = \frac{64a^2b^2}{m^3n^3\pi^6}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$

سوال 13.123: $f = xy(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$
 جواب: $B_{mn} = \frac{144a^3b^3(-1)^{m+n}}{m^3n^3\pi^6}$

سوال 13.124: ثابت کریں کہ فی اکائی رقبہ بیرونی قوت $P(x, y, t)$ کی صورت میں xy مستوی میں جھلی کی ارتعاش درج ذیل مساوات دیتی ہے جہاں فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے۔ بیرونی قوت جھلی کی عمودی عمل کرتی ہے۔

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u + \frac{P}{\rho}$$

سوال 13.125 تا سوال 13.128 میں ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x, y)$ ہے۔ جھلی کی انحراف $u(x, y, t)$ دریافت کریں جہاں $c = 1$ اور $a = b = 1$ ہیں۔

سوال 13.125: $f = 0.1xy(1-x)(1-y)$
 جواب:

$$u(x, y, t) = \frac{6.4}{\pi^6} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ طاق}}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ طاق}}}^{\infty} \frac{1}{m^3n^3} \cos(\pi t \sqrt{m^2 + n^2}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

سوال 13.126: $f = kx(1-x^2)(1-y^2)$
 جواب:

$$\frac{24k}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^3n^3} [2(-1)^n - (n^2\pi^2 + 1)] \cos(\pi t \sqrt{m^2 + n^2}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

سوال 13.127: $f = k \sin \pi x \sin 2\pi y$
 جواب: $u(x, y, t) = k \cos \pi \sqrt{5}t \sin \pi x \sin 2\pi y$

سوال 13.128: $f = k \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y$
 جواب: $B_{2n} = B_{m2} = 0, B_{11} = \frac{64k}{9\pi^2}, B_{13} = -\frac{64k}{45\pi^2}, B_{31} = -\frac{64k}{45\pi^2}, B_{33} = \frac{64k}{225\pi^2} \dots$

سوال 13.129: باریک مکعب چادر کے اطراف صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہیں جبکہ اس کی دونوں سطحیں عاجز شدہ ہیں۔ چادر کی ایک طرف کی لمبائی π ہے۔ ابتدائی درجہ حرارت $u(x, y, 0) = f(x, y)$ ہے۔ دو ابعادی حراری مساوات $u_t = c^2 \nabla^2 u$ پر علیحدگی متغیرات کی ترکیب لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx \sin ny e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

جہاں B_{mn} درج ذیل ہے۔

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx \, dy$$

سوال 13.130: $f(x, y) = xy(\pi - x)(\pi - y)$ کی صورت میں سوال 13.129 میں دیے گئے چادر کا حل تلاش کریں۔
 جواب:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{m^3 n^3 \pi^2} \sin mx \sin ny e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

13.9 قطبی محدود میں لاپلاسی

سرحدی شرائط کی جزوی تفرقی مساوات کا حل تلاش کرتے ہوئے عموماً ایسا محدود استعمال کیا جاتا ہے جس کے لحاظ سے سرحد کی روپ سادہ ہو۔ اگلے حصے میں دائری جھلی پر غور کیا جائے گا جس کو حل کرنے کے لئے قطبی محدود³⁹ سود مند ثابت ہو گا جس کے متغیرات r اور θ کی تعریف درج ذیل ہیں۔

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

³⁹polar coordinates

قطبی محدود میں جہلی کی دائری سرحد کی مساوات $r =$ مستقل ہوگی۔

r اور θ استعمال کرتے ہوئے مساوات موج کی لاپلاسی

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

کا اظہار ان محدود میں کرنا ہوگا لہذا آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل کو غور سے پڑھیں۔

ہم حصہ 13.4 کی طرح زنجیری ترکیب استعمال کریں گے۔ اپنی آسانی کی خاطر ہم جزوی تفرق کو زیر نوشت میں x ، y یا t لکھ کر ظاہر کریں گے جبکہ متغیرات r, θ, t کے تفاعل $u(x, y, t)$ کو اسی حرف u سے ظاہر کریں گے۔

صفحہ 747 پر مساوات 10.69 کا زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

ملتا ہے۔ ایک بار دوبارہ x کے ساتھ تفرق لے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\ &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \end{aligned} \quad (13.93)$$

زنجیری قاعدہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x \quad \text{اور} \quad (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x$$

لکھا جاسکتا ہے۔ جزوی تفرق r_x اور θ_x حاصل کرنے کی خاطر ہمیں

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{اور} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

کا تفرق لینا ہوگا جس سے

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{r^2}$$

حاصل ہوگا۔ ان کا x تفرق لینے سے

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = -y \left(-\frac{2}{r^3} \right) r_x = \frac{2xy}{r^4}$$

ملتا ہے۔ ان تمام کو مساوات 13.93 میں پر کرتے ہیں۔ ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق کو استمراری تصور کرتے ہوئے $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ لکھ کر یوں درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوگی۔

$$(13.94) \quad u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2 \frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2 \frac{xy}{r^4} u_\theta$$

بالکل اسی طرح درج ذیل بھی حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(13.95) \quad u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2 \frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - 2 \frac{xy}{r^4} u_\theta$$

مساوات 13.94 اور مساوات 13.95 کا مجموعہ لے کر قطبی محد میں لاپلاسی حاصل کرتے ہیں۔

$$(13.96) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

سوالات

سوال 13.131: مساوات 13.96 کو درج ذیل صورت میں لکھ کر دکھائیں۔

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

سوال 13.132: اگر مساوات 13.96 میں لاپلاسی θ سے آزاد ہو تب $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{u_r}{r}$ لکھی جائے گی۔ u کو θ سے آزاد فرض کرتے ہوئے کارتیسی محد میں لاپلاسی سے سیدھا یہ نتیجہ حاصل کریں۔

سوال 13.133: مساوات 13.96 کو واپس کارتیسی محد میں لے جائیں۔

سوال 13.134: اگر x ، y کارتیسی محد ہوں تب دکھائیں کہ $x^* = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ اور $y^* = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ بھی کارتیسی محد ہیں۔ لاپلاسی کو کارتیسی محد x^* ، y^* میں حاصل کریں۔
جواب: $\nabla^2 u = u_{x^*x^*} + u_{y^*y^*}$

سوال 13.135: لاپلاسی $\nabla^2 u$ کو نئی محد $x^* = ax + b$ ، $y^* = cy + d$ میں لکھیں جہاں x ، y کارتیسی محد ہیں جبکہ a ، b ، c اور d مستقل ہیں۔
جواب: $\nabla^2 u = a^2 u_{x^*x^*} + c^2 u_{y^*y^*}$

سوال 13.136: نلکی محدد⁴⁰ میں لاپلاسی
 نلکی محدد ρ ، ϕ ، z کی تعریف درج ذیل ہے (شکل 13.20-الف)

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

جہاں x ، y ، z کارٹیزی محدد ہیں۔ لاپلاسی کو نلکی محدد میں لکھیں۔
 جواب:

$$(13.97) \quad \nabla^2 u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi} + u_{zz}$$

سوال 13.137: کروی محدد r ، θ ، ϕ کی تعریف درج ذیل ہے (شکل 13.20-ب)۔

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

اگر تفاعل $u(x, y, z)$ صرف محدد $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کا تابع ہو تب درج ذیل حاصل کریں۔

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r$$

جواب: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ سے آگے بڑھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r} \\ u_x &= u_r r_x = \frac{x}{r} u_r, \quad u_y = \frac{y}{r} u_r, \quad u_z = \frac{z}{r} u_r \\ u_{xx} &= \frac{1}{r} u_r - \frac{x}{r^2} r_x u_r + \frac{x}{r} u_{rr} r_x = \left(\frac{x}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) \\ u_{yy} &= \left(\frac{y}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right), \quad u_{zz} = \left(\frac{z}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \end{aligned}$$

سوال 13.138: کروی محدد⁴¹ میں لاپلاسی

کروی محدد r ، θ ، ϕ کی تعریف سوال 13.137 میں دی گئی ہے۔ لاپلاسی کو کروی محدد میں لکھیں۔
 جواب:

$$(13.98) \quad \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_{\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\phi\phi}$$

cylindrical coordinates⁴⁰
 spherical coordinates⁴¹

سوال 13.139: مساوات 13.98 میں دی گئی لاپلاسی کو درج ذیل صورت میں لکھیں۔

$$(13.99) \quad \nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right]$$

سوال 13.140: ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ کی سطح کو صفر درجہ حرارت پر رکھا گیا ہے جبکہ کرہ میں درجہ حرارت $f(r)$ ہے جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہے۔ ثابت کریں کہ کرہ میں درجہ حرارت درج ذیل مساوات کا وہ حل ہوگا

$$u_t = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$$

جو $u(R, t) = 0$, $u(r, 0) = f(r)$ شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

سوال 13.141: ثابت کریں کہ $v = ru$ لینے سے سوال 13.140 کا مسئلہ $v_t = c^2 v_{rr}$, $v(R, t) = 0$, $v(r, 0) = rf(r)$ اختیار کرتا ہے۔ اس کے ساتھ $v(0, t) = 0$ شامل کریں چونکہ $r = 0$ پر u کا محدود ہونا لازم ہے۔ اس مسئلے کو علیحدگی متغیرات سے حل کریں۔

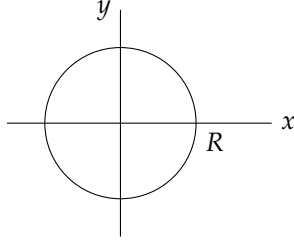
13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل

ہم اب رداس R کی دائری جھلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں (شکل 13.16)۔ قطبی محدود استعمال کرتے ہوئے $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ لکھے جائیں گے جبکہ مساوات 13.66 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے (مساوات 13.96)۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

اس حصہ میں ہم رداسی تشاکلی حل $u(r, t)$ حاصل کرتے ہیں جو θ پر منحصر نہیں ہوں گے۔ ایسی صورت میں مساوات موج درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$(13.100) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$



شکل 13.16: دائری جھلی

چونکہ جھلی کو سرحد $r = R$ سے باندھا گیا ہے لہذا سرحدی شرط درج ذیل ہو گا۔

$$(13.101) \quad u(R, t) = 0$$

θ سے آزاد حل اس صورت پائے جائیں گے جب ابتدائی حالت بھی θ سے آزاد ہو۔ یوں ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گے۔

$$(13.102) \quad u(r, 0) = f(r) \quad \text{ابتدائی انحراف}$$

$$(13.103) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(r) \quad \text{ابتدائی رفتار}$$

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.100 کے وہ حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.101 کو مطمئن کرتے ہوں۔ یوں

$$(13.104) \quad u(r, t) = W(r)G(t)$$

کے تفرقات کو مساوات 13.100 میں پر کرتے ہوئے حاصل مساوات کے دونوں اطراف کو c^2WG سے تقسیم کر کے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r}W \right)$$

حاصل کرتے ہیں جہاں (.) وقت t کے ساتھ تفرق جبکہ (') جزوی تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔ درج بالا کے دونوں اطراف کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔ سرحدی شرط مطمئن کرتے ہوئے غیر صفر حل کے لئے ضروری ہے کہ یہ مستقل منفی ہو مثلاً $-k^2$ لہذا درج بالا کو

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r}W \right) = -k^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$(13.105) \quad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0, \quad \lambda = ck$$

$$(13.106) \quad W'' + \frac{1}{r}W' + k^2W = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ ہم پہلے مساوات 13.106 پر غور کرتے ہیں جس میں نیا متغیر $s = kr$ متعارف کرتے ہوئے $\frac{1}{r} = \frac{k}{s}$ لکھ کر

$$W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds} k \quad W'' = \frac{d^2 W}{ds^2} k^2$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں مساوات 13.106 میں پر کر کے مشترکہ مستقل k^2 کر رد کرتے ہوئے

$$(13.107) \quad \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو حصہ 5.4 کا مساوات 5.76 ہے جس میں $\nu = 0$ ہے۔ اس کو مساوات بیسل⁴² کہتے ہیں جس کا عمومی حل (حصہ 5.5) درج ذیل ہے۔

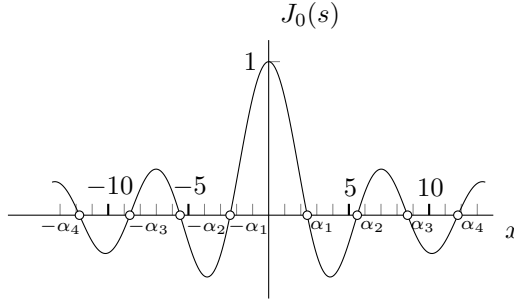
$$W = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s)$$

J_0 اور Y_0 بالترتیب صفر درجہ کے بیسل تفاعل کی پہلی قسم اور دوسری قسم کہلاتے ہیں۔ چونکہ جھلی کی انحراف ہر صورت محدود ہوگی جبکہ $s \rightarrow 0$ کرنے سے $Y_0 \rightarrow \infty$ ہوتا ہے لہذا ہمیں $C_2 = 0$ منتخب کرنا ہو گا۔ ظاہر ہے کہ غیر صفر حل حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ $C_1 \neq 0$ ہو۔ ہم $C_1 = 1$ چنتے ہیں جس سے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$(13.108) \quad W(r) = J_0(s) = J_0(kr)$$

جھلی کی سرحد $r = R$ پر $u(R, t) = W(R)G(t) = 0$ ہو گا جس میں $G(t) \equiv 0$ منتخب کرنے سے $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہذا

$$W(R) = J_0(kR) = 0$$

شکل 13.17: بیسل تفاعل $J_0(s)$

ہو گا۔ بیسل تفاعل J_0 کے لا محدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ ہم $J_0(s)$ کے مثبت صفروں کو $s = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 13.17)۔ ہم یہاں بتلاتے چلیں کہ J_0 کی چند صفروں کی (چار ہندسوں تک درست) اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\alpha_1 = 2.4048, \quad \alpha_2 = 5.5201, \quad \alpha_3 = 8.6537, \quad \alpha_4 = 11.7915, \quad \alpha_5 = 14.9309$$

ہم دیکھتے ہیں کہ بیسل تفاعل کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ مساوات 13.108 سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

$$(13.109) \quad kR = \alpha_m \implies k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}, \quad m = 1, 2, \dots$$

یوں تفاعل

$$(13.110) \quad W_m(r) = J_0(k_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) \quad m = 1, 2, \dots$$

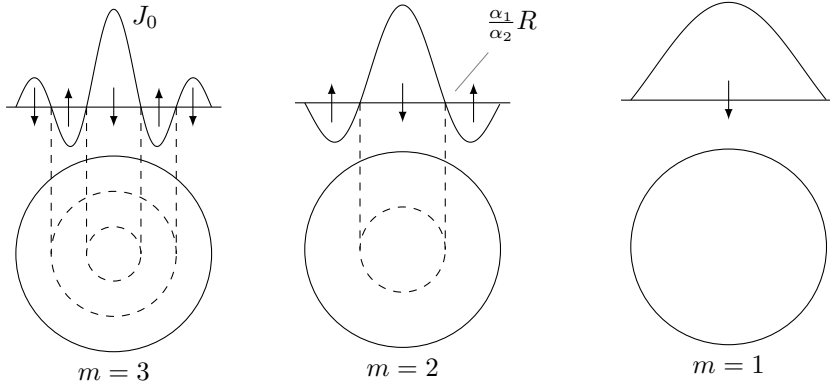
مساوات 13.106 کا وہ حل ہو گا جو جھلی کی سرحد پر صفر ہے۔

یوں $\lambda = \lambda_m = ck_m$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.105 کا مطابقتی حل

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + c_2 \sin \lambda_m t$$

ہو گا۔ اس طرح مساوات 13.100 کے ایسے حل جو سرحدی شرط مساوات 13.101 کو مطمئن کرتے ہوں درج ذیل ہوں گے جہاں $m = 1, 2, \dots$ ہے۔

$$(13.111) \quad u_m(r, t) = W_m(r) G_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + c_2 \sin \lambda_m t) J_0(k_m r)$$



شکل 13.18: زاویہ سے آزاد دائری جھلی کی عمودی انداز

$u_m(r, t)$ اس مسئلے کے امتیازی تفاعل ہیں جبکہ λ_m مسئلے کے امتیازی اقدار ہیں۔

ارتعاش کی u_m حصہ کو m ویں عمودی انداز⁴³ کہتے ہیں جس کی تعدد $\frac{\lambda_m}{2\pi}$ چکر فی اکائی وقت ہوگی۔ x محور پر سائن تفاعل کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ پایا جاتا ہے جبکہ J_0 کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ستار کی ترنگ اور طبلہ کی تھاپ مختلف ہیں۔ شکل میں دکھائے گئے جھلی کی عمودی انداز شکل 13.17 سے با آسانی حاصل کیے جاسکتے ہیں (شکل 13.18)۔ عمودی انداز $m = 1$ میں پوری جھلی بیک وقت اوپر (یا نیچے) حرکت کرتی ہے۔ $m = 2$ کے لئے تفاعل

$$W_2(r) = J_0\left(\frac{\alpha_2}{R}r\right)$$

ان نقطوں پر صفر ہوگا جہاں $\frac{\alpha_2 r}{R} = \alpha_1$ یعنی $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ ہو۔ یوں $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ صفر ہٹاؤ لکیر ہوگی جس کو شکل 13.18 میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اب جن لمحات پر جھلی کا وسطی خطہ اوپر حرکت کرتا ہے ان لمحات پر جھلی کا بیرونی خطہ $r > \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ نیچے کو حرکت کرے گا اور اسی طرح جب وسطی خطہ نیچے کو حرکت کرتا ہے تب بیرونی خطہ اوپر کو حرکت کرتا ہے۔ حل $u_m(r, t)$ کے $m - 1$ عدد صفر ہٹاؤ لکیریں ہوں گی (شکل 13.18) جو ہم مرکز دائرے ہوں گے۔

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.102 اور مساوات 13.103 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے

⁴³ m^{th} normal mode

کی خاطر ہم ارتعاش پذیر تار کے حل کی طرح آگے بڑھتے ہیں یعنی ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں۔⁴⁴

$$(13.112) \quad u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W(r) G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)$$

اس میں $t = 0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 13.102 استعمال کرتے ہوئے

$$(13.113) \quad u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = f(r)$$

ملتا ہے۔ یوں اگر مساوات 13.112 نے 13.102 کو مطمئن کرنا ہو تب a_m ، تفاعل $f(r)$ کی بیل تسلسل کے عددی سر ہوں گے۔ یہ تسلسل $J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)$ کی صورت میں ہوگی۔ یوں صفحہ 387 پر مساوات 5.154 کے تحت

$$(13.114) \quad a_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr \quad m = 1, 2,$$

ہوں گے۔ وقفہ $0 \leq r \leq R$ پر $f(r)$ کا قابل تفرق ہونا مساوات 13.113 کی صورت میں $f(r)$ کی تسلسل لکھنے کے لئے کافی شرط ہے۔ مساوات 13.112 میں عددی سر b_m کو مساوات 13.103 سے اسی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(13.115) \quad b_m = \frac{2}{c \alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr, \quad m = 1, 2, \dots$$

a_m اور b_m کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم J_0 اور J_1 کی قیمتوں کے جدول استعمال کرتے ہوئے مکمل کا تخمینہ لگائیں گے۔

سوالات

سوال 13.142: $R = 1$ لیتے ہوئے u_2 اور u_3 کی صفر ہٹاؤ دائروں کی رداس تلاش کریں (مساوات 13.111)۔

جواب: $r = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} R = 0.63788$, $r = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} R = 0.27789$, $u_2 : r = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} R = 0.43565$,

⁴⁴ ہم یکسانی اور درجہ کا ز کے مسئلہ پر یہاں غور نہیں کریں گے۔

سوال 13.143: $R = 1$ لیتے ہوئے u_4 کی صفر ہٹاؤ دائروں کی رداس تلاش کریں۔
جواب: 0.20394, 0.46814, 0.73389

سوال 13.144: شکل 13.18 کی طرح اشکال u_4 اور u_5 کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.145: جھلی میں تناؤ بڑھانے سے مختلف عمودی انداز (مساوات 13.111) کی تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے؟
جواب: تناؤ بڑھنے سے c بڑھتا ہے لہذا تعدد بڑھے گی۔

سوال 13.146: مساوات 13.115 حاصل کریں۔

سوال 13.147: کیا مقررہ c اور R کی صورت میں دو یا دو سے زیادہ تفاعل u_m (مساوات 13.111) جن کے صفر ہٹاؤ لکیریں مختلف ہوں کا ایک ہی امتیازی قدر ہو سکتا ہے؟

سوال 13.148: قطبی محدد کے (r, θ) پر منحصر ارتعاش مساوات موج

$$(13.116) \quad u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$$

میں $u = F(r, \theta)G(t)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$(13.117) \quad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0, \quad \lambda = ck$$

$$(13.118) \quad F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + k^2 F = 0$$

سوال 13.149: مساوات 13.118 میں $F = W(r)Q(\theta)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

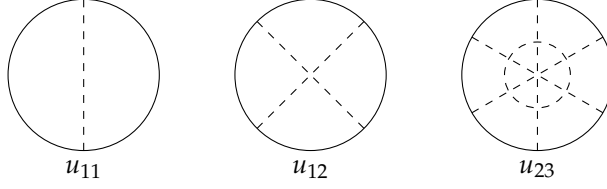
$$(13.119) \quad Q'' + n^2 Q = 0$$

$$(13.120) \quad r^2 W'' + r W' + (k^2 r^2 - n^2) W = 0$$

سوال 13.150: وضاحت کریں کہ $Q(\theta)$ دوری ہو گا جس کا دوری عرصہ 2π ہو گا لہذا مساوات 13.119 اور مساوات 13.120 میں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل حل حاصل کریں۔

$$(13.121) \quad Q_n = \cos n\theta, \quad Q_n^* = \sin n\theta$$

$$(13.122) \quad W_n = J_n(kr), \quad n = 0, 1, \dots$$



شکل 13.19: چند صفر ہٹاؤ لکیریں (سوال 13.157)

سوال 13.151: واضح کریں کہ سرحدی شرط

$$(13.123) \quad u(R, \theta, t) = 0$$

سے $k = k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ حاصل ہوتا ہے جہاں $s = \alpha_{mn}$ تفاعل $J_n(s)$ کا مثبت m والے جذر ہے۔

سوال 13.152: واضح کریں کہ مساوات 13.116 کے وہ حل جو مساوات 13.123 کو مطمئن کرتے ہوں درج ذیل ہیں۔

$$(13.124) \quad \begin{aligned} u_{mn} &= (A_{mn} \cos ck_{mn}t + B_{mn} \sin ck_{mn}t) J_n(k_{mn}r) \cos n\theta \\ u_{mn}^* &= (A_{mn}^* \cos ck_{mn}t + B_{mn}^* \sin ck_{mn}t) J_n(k_{mn}r) \sin n\theta \end{aligned}$$

سوال 13.153: واضح کریں کہ $u_{m0}^* \equiv 0$ اور u_{m0} عین مساوات 13.111 کے تحت ہیں۔سوال 13.154: واضح کریں کہ u_{mn} کی $m + n - 1$ صفر ہٹاؤ لکیریں ہوں گی۔

سوال 13.155 تا سوال 13.157 میں دیے گئے حل کی صفر ہٹاؤ لکیروں کی ترسیم کھینچیں۔

$$\text{سوال 13.155: } u_{3n}, \quad n = 1, 2, 3$$

$$\text{سوال 13.156: } u_{4n}, \quad n = 1, 2, 3$$

$$\text{سوال 13.157: } u_{mn}^*, \quad m, n = 1, 2, 3$$

جواب: صفر ہٹاؤ لکیریں شکل 13.19 میں دکھائی گئی ہیں۔

سوال 13.158: ابتدائی معلومات $u_t(r, \theta, 0)$ کی صورت میں مساوات 13.124 سے $B_{mn} = 0$ اور $B_{mn}^* = 0$ حاصل کریں۔

سوال 13.159 تا سوال 13.161 میں $c = 1$ ، $R = 1$ اور ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے، ابتدائی انحراف $f(r)$ کی صورت میں دائری جھلی کی انحراف $u(r, t)$ حاصل کریں۔ (اشارہ سوال 5.139 تا سوال 5.144 پر ایک مرتبہ دوبارہ نظر ڈالیں۔)

$$\text{سوال 13.159: } f = 0.1 J_0(\alpha_2 r)$$

$$\text{سوال 13.160: } f = k(1 - r^2) \\ \text{جواب: } u = 4k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1^2(\alpha_m)} \cos \alpha_m t J_0(\alpha_m r)$$

$$\text{سوال 13.161: } f = k(1 - r^4)$$

13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ مخفی قوہ

طبیعیات کی اہم ترین مساوات میں سے ایک درج ذیل مساوات لاپلاس ہے

$$(13.125) \quad \nabla^2 u = 0$$

جہاں u کا لاپلاسی $\nabla^2 u$ ہے۔ کارٹیزیی محدود x ، y ، z میں

$$(13.126) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ہو گا۔ مساوات لاپلاس کے نظریہ کو نظریہ مخفی قوہ⁴⁵ کہتے ہیں۔ مساوات 13.125 کے ایسے حل جن کے دو درجی تفرقات استمراری ہوں ہارمونی تفاعل⁴⁶ کہلاتے ہیں۔

دو ابعادی صورت جہاں u صرف دو عدد متغیرات کے تابع ہو کا مخلوط تجزیہ زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہذا اس پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔

انجینئری حساب میں مساوات لاپلاس کی اہمیت واضح کرنے کی خاطر چند مثالوں کا ذکر کرتے ہیں۔

potential theory⁴⁵
harmonic functions⁴⁶

مساوات لاپلاس ثقلی میدان کے مسائل میں سامنے آتی ہے۔ مثلاً صفحہ 757 پر مثال 10.22 میں ہم نے دیکھا کہ اگر ایک ذرہ A جس کی کمیت M ہو نقطہ (ξ, η, ζ) پر مستقل موجود ہو اور دوسرا ذرہ B جس کی کمیت m ہو نقطہ (x, y, z) پر موجود ہو تب A ذرہ B کو اپنی جانب کھینچے گا۔ یہ ثقلی قوت درج ذیل غیر سمتی تفاعل $u(x, y, z)$ کی ڈھلوان ہے۔

$$u(x, y, z) = \frac{GMm}{r}$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \quad (> 0)$$

تفاعل $u(x, y)$ کو ثقلی میدان کی مخفی قوہ کہتے ہیں اور یہ لاپلاس کی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

نقطہ کمیت کی مخفی قوہ اور قوت کی تصور کو مسلسل کمیت کے لئے بیان کرتے ہیں۔ اگر خطہ R میں کمیتی کثافت $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ پائی جاتی ہو تب نقطہ (x, y, z) جہاں کمیت موجود نہ ہو پر مخفی قوہ u درج ذیل ہو گی۔

$$(13.127) \quad u(x, y, z) = k \iiint_R \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (k > 0)$$

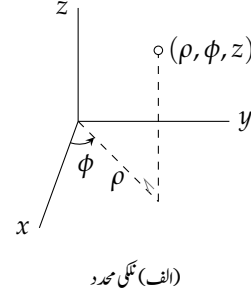
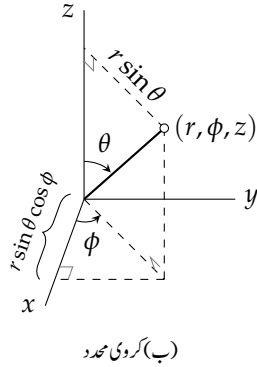
چونکہ $\frac{1}{r} (r > 0)$ مساوات 13.125 کا حل ہے لہذا $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ ہو گا اور کثافت ρ متغیرات x, y, z پر منحصر نہیں ہے لہذا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla^2 u = k \iiint_R \rho \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta = 0$$

یوں مساوات 13.127 میں دی گئی ثقلی مخفی قوہ مساوات لاپلاس کو ہر اس نقطہ پر مطمئن کرتی ہے جہاں پر کمیت موجود نہ ہو۔

برقی سکون کی میدان میں برقی بار کے مابین قوت کشش یا قوت دفع قانون کولمب دیتی ہے جس کی ریاضی شکل عین نیوٹن کے قانون ثقل کی طرح ہے۔ یوں ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ جس نقطہ پر برقی بار موجود نہ ہو اس نقطہ پر برقی مخفی قوہ کو ایسے تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جو برقی بار سے پاک نقطہ پر لاپلاس کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔

ہم بعد کے باب میں دیکھیں گے کہ غیر داب پذیر سیال کی بہاؤ پر غور کے دوران بھی لاپلاس مساوات سامنے آتی ہے۔



شکل 13.20: نکلی اور کردی محدود کی تعریف

مزید حرارت کے مسائل میں حراری مساوات

$$u_t = c^2 \nabla^2 u$$

بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔ اگر درجہ حرارت وقت t کے تابع نہ ہو (برقرار حالت) تب یہ لاپلاس مساوات کی صورت اختیار کرتی ہے۔

عموماً مسائل، جن میں لاپلاس مساوات حاصل ہو گی، میں سرحدی قیمت مسئلہ⁴⁷ حل کرنا ہو گا جہاں مساوات 13.125 کا ایسا حل درکار ہو گا جو کسی سرحد پر دیا گیا شرط مطمئن کرتا ہو۔ یوں خلا میں ایسے محدود متعارف کرنا ضروری ہو گا جن میں اس سرحد کو بیان کرنا آسان ہو۔ اس طرح مساوات 13.126 کے لاپلاسی کا تبادلہ ان محدود میں کرنا ہو گا۔ ہم حصہ 13.9 میں دو متغیرات کے تفاعل کی لاپلاسی کا تبادلہ کر چکے ہیں۔ ایک محدود سے دوسرے محدود میں لاپلاسی کا تبادلہ اسی طرح کیا جائے گا۔

نکلی محدود میں لاپلاسی صفحہ 1009 پر مساوات 13.97 دیتی ہے۔ نکلی محدود (شکل 13.20-الف) کی تعریف

$$(13.128) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z$$

اور اس میں لاپلاسی کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(13.129) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

⁴⁷ boundary value problem

صفحہ 1009 پر مساوات 13.98 کروئی محدود میں لاپلاسی دیتی ہے۔ کروئی محدود (شکل 13.20-ب) کی تعریف

$$(13.130) \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \sin \theta$$

اور اس میں لاپلاسی کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(13.131) \quad \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\phi\phi}$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.132) \quad \nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right]$$

سوالات

سوال 13.162: محدود $x^* = ax$ ، $y^* = by$ ، $z^* = cz$ میں لاپلاسی حاصل کریں جہاں x ، y ، z کارٹینیسی محدود ہیں۔

$$\text{جواب: } a^2 u_{x^* x^*} + b^2 u_{y^* y^*} + c^2 u_{z^* z^*}$$

سوال 13.163: مساوات 13.126 سے شروع کرتے ہوئے صفحہ 768 پر مساوات 10.107 اور مساوات 10.108 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\nabla^2 u = u_{x^* x^*} + u_{y^* y^*} + u_{z^* z^*}$$

تصدیق کریں کہ سوال 13.164 تا سوال 13.168 میں تفاعل $u = f(x, y)$ مساوات لاپلاس کو مطمئن کرتا ہے۔ چند ہم قہ خطوط $u = c$ جہاں c مستقل ہے کی ترسیم کھینچیں۔

$$\text{سوال 13.164: } x^2 - y^2$$

$$\text{سوال 13.165: } x^3 - 3xy^2$$

$$\text{سوال 13.166: } \frac{x}{x^2 + y^2}$$

سوال 13.167: $\frac{y}{x^2+y^2}$

سوال 13.168: $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

سوال 13.169: کار تیزی نظام محدود استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.130 میں کروی محدود کی تعریف بیان کی گئی ہے۔ ان مساوات کو استعمال کرتے ہوئے کار تیزی نظام کی تعریف کروی محدودی نظام میں کریں۔
جواب: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

سوال 13.170: مساوات 13.129 سے واپس کار تیزی محدود میں لاپلاسی حاصل کریں۔

سوال 13.171: تصدیق کریں کہ $u = \frac{c}{r}$ کروی محدود میں لاپلاسی کو مطمئن کرتا ہے جہاں c مستقل ہے۔

سوال 13.172: لاپلاس مساوات $\nabla^2 u = 0$ کا ایسا حل تلاش کریں جو صرف $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کا تابع ہو۔
جواب: اگر u صرف r کا تابع ہو تب مساوات 13.132 کی صورت $\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] = 0$ ہوگی جہاں جزوی تفرق کی جگہ تفرق لکھا گیا ہے۔ اس کا مکمل $r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = c$ ہوگا جس کو $du = \frac{c}{r^2} dr$ لکھ کر مکمل لینے سے درکار حل $u = k - \frac{c}{r}$ حاصل ہوگا جہاں c اور k مستقل ہیں۔

سوال 13.173: دو ہم مرکز کرہ کے رداس $r_1 = 15 \text{ cm}$ اور $r_2 = 1 \text{ cm}$ ہیں جبکہ ان پر برقی دباؤ بالترتیب $U_1 = 1000 \text{ V}$ اور $U_2 = 100 \text{ V}$ ہے۔ ہم مرکز کرہ کے درمیان خطہ میں ساکن برقی دباؤ u سوال 13.172 میں حاصل کی گئی۔ موجودہ معلومات کو استعمال کرتے ہوئے c اور k دریافت کریں اور حاصل کی ترسیم کھینچیں۔

جواب: $u = \frac{7450}{r} - \frac{135}{14r}$

سوال 13.174: دو ابعادی لاپلاس مساوات جو صرف $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے تابع ہو کا حل تلاش کریں۔
جواب: اگر u صرف ρ کا تابع ہو تب مساوات 13.129 کی صورت $\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} = 0$ ہوگی جہاں جزوی تفرق کی جگہ تفرق لکھا گیا ہے۔ اس میں $v = \frac{du}{d\rho}$ پر کرتے ہوئے $\frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho}$ یعنی $\frac{dv}{d\rho} + \frac{v}{\rho} = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کا مکمل $v\rho = c$ یعنی $\frac{du}{d\rho} = \frac{c}{\rho}$ دیتا ہے۔ درکار جواب مکمل لینے سے $u = k + c \ln \rho$ حاصل ہوتا ہے جہاں c اور k مستقل ہیں۔

سوال 13.175: دو ہم محور نلکیوں کا رداس $\rho_1 = 5 \text{ cm}$ اور $\rho_2 = 20 \text{ cm}$ ہے جبکہ ان پر برقی دباؤ بالترتیب $U_1 = 10 \text{ V}$ اور $U_2 = 60 \text{ V}$ ہے۔ سوال 13.174 میں حاصل حل استعمال کرتے ہوئے نلکیوں کے درمیان خطہ میں برقی دباؤ کی مساوات حاصل کریں۔ حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔ موجودہ ترسیم کا سوال 13.173 میں حاصل کردہ ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $u = 118.048 + 36.067 \ln \rho$

سوال 13.176: اگر کروی محدود میں $u(r, \theta, \phi)$ مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ کو مطمئن کرتا ہو تب ثابت کریں کہ $v(r, \theta, \phi) = r^{-1}u(r^{-1}, \theta, \phi)$ مساوات $\nabla^2 v = 0$ کو مطمئن کرے گا۔

سوال 13.177: مساوات موج $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ میں $u = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات ہلم ہولٹز⁴⁸ حاصل⁴⁹ کریں جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad k = \frac{\omega}{c}$$

سوال 13.178 تا سوال 13.178 میں برقرار حال (وقت کا غیر تابع) درجہ حرارت u تلاش کریں۔

سوال 13.178: دو متوازی چادر $x = x_0$ اور $x = x_1$ کے درمیان جنہیں بالترتیب u_0 اور u_1 درجہ حرارت پر برقرار رکھا گیا ہے۔
جواب: $u = \frac{(u_1 - u_0)x}{x_1 - x_0} + \frac{u_0 x_1 - u_1 x_0}{x_1 - x_0}$

سوال 13.179: دو ہم محور نلکیوں $\rho = \rho_1$ اور $\rho = \rho_2$ کے درمیان جنہیں بالترتیب u_0 اور u_1 درجہ حرارت پر برقرار رکھا گیا ہے۔
جواب: $u = \frac{u_1 - u_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}} \ln r + \frac{u_0 \ln r_1 - u_1 \ln r_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}}$

سوال 13.180: دو ہم مرکز کرہ $r = r_1$ اور $r = r_2$ کے درمیان جنہیں بالترتیب u_0 اور u_1 درجہ حرارت پر برقرار رکھا گیا ہے۔
جواب: $u = u_0 - \frac{r_1 r_0 (u_1 - u_0)}{(r_1 - r_0)r}$

⁴⁸Helmholtz equation

⁴⁹جرمن ماہر طبیعیات ہرمن لڈوگ فرڈینانڈون لہم ہولٹز [1821-1894]

13.12 کروئی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیٹنڈر

آئیں ایک ایسے مسئلے پر غور کرتے ہیں جس میں، کروئی محدود میں لکھی گئی، مساوات لاپلاس استعمال ہوگی۔ فرض کریں کہ کروئی محدود کی مرکز پر موجود رداس R کی کرہ S کی سطح کو برقی دباؤ

$$(13.133) \quad u(R, \theta, \phi) = f(\theta)$$

پر برقرار رکھا جاتا ہے جہاں r ، θ ، ϕ کروئی محدود ہیں جبکہ $f(\theta)$ دیا گیا تفاعل ہے۔ کروئی محدود کی تعریف گزشتہ حصے میں کی گئی ہے۔ ہم باقی پوری فضا، جہاں کوئی برقی بار نہیں پایا جاتا، میں برقی دباؤ u جاننا چاہتے ہیں۔ چونکہ S کی سطح پر برقی دباؤ ϕ سے آزاد ہے لہذا باقی فضا میں بھی برقی دباؤ ϕ سے آزاد ہوگا۔ یوں $\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$ ہوگا لہذا مساوات لاپلاس درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$(13.134) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0$$

جہاں مساوات 13.132 کا سہارا لیا گیا ہے۔ اب لامتناہی فاصلہ پر برقی دباؤ صفر ہو گا یعنی:

$$(13.135) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) = 0$$

ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات 13.133 کا ایسا حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرائط مساوات 13.133 اور مساوات 13.135 کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں مساوات 13.134 میں

$$(13.136) \quad u(r, \theta) = G(r)H(\theta)$$

اور اس کے تفرق پر کر کے GH سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = - \frac{1}{H \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right)$$

اب تک آپ جان چکے ہوں گے کہ ایسی صورت میں مساوات کے دونوں اطراف کسی ایک مستقل مثلاً k کے برابر ہوں گے۔ یوں درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں

$$(13.137) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + kH = 0$$

$$(13.138) \quad \frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = k$$

جہاں دوسری مساوات کو

$$r^2 G'' + 2rG' - kG = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جو مساوات کوشی ہے۔ ہم حصہ 2.5 سے جانتے ہیں کہ مساوات کوشی کے حل کا روپ $G = r^\alpha$ ہو گا۔ اگر ہم k کی جگہ مستقل کو $n(n+1)$ لکھیں تب ان حل کی صورت نہایت سادہ حاصل ہو گی۔ ایسا کرنے سے

$$(13.139) \quad r^2 G'' + 2rG' - n(n+1)G = 0$$

لکھا جائے گا جہاں n اختیاری مستقل ہے۔ اس میں $G = r^\alpha$ پر کرنے سے

$$[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - n(n+1)]r^\alpha = 0$$

ملتا ہے۔ تو سین میں بند حصے کے صفر $\alpha = n$ اور $\alpha = -n-1$ ہیں۔ یوں مساوات 13.139 کے حل

$$(13.140) \quad G_n(r) = r^n \quad \text{اور} \quad G_n^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}$$

ہوں گے۔

مساوات 13.137 میں $k = n(n+1)$ متعارف کر کے ہم

$$\cos \theta = w$$

لیتے ہیں۔ یوں $\sin^2 \theta = 1 - w^2$ اور

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dw} \frac{dw}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dw}$$

ہوں گے لہذا مساوات 13.137

$$(13.141) \quad \frac{d}{dw} \left[(1-w^2) \frac{dH}{dw} \right] + n(n+1)H = 0$$

یعنی

$$(13.142) \quad (1-w^2) \frac{d^2 H}{dw^2} - 2w \frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0$$

صورت اختیار کرے گی جو مساوات لیژانڈر ہے (حصہ 5.2)۔ مساوات لیژانڈر کے حل

$$H = P_n(w) = P_n(\cos \theta)$$

ہیں جہاں اختیاری مستقل کی قیمتیں $n = 0, 1, 2, \dots$ عدد صحیح⁵⁰ ہیں۔ اس طرح ہمیں لاپلاس مساوات 13.134 کے حل $u = GH$ کے دو عدد تسلسل

$$(13.143) \quad u_n(r, \theta) = A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad u_n^*(r, \theta) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $n = 0, 1, \dots$ جبکہ A_n اور B_n مستقل ہیں۔

اندرون کرہ مساوات 13.133 کو مطمئن کرنے والا مساوات 13.134 کا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم تسلسل⁵¹

$$(13.144) \quad u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

پر غور کرتے ہیں۔ [ہم $u^*(r, \theta)$ کو اس لئے حل کے لئے تصور نہیں کرتے ہیں کہ کرہ کی مرکز $r = 0$ پر u^* کی قیمت لامتناہی ہوگی جس کا ناممکن ہے۔] اگر مساوات 13.144 نے مساوات 13.133 کو مطمئن کرنا ہو تب

$$(13.145) \quad u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) = f(\theta)$$

ہوگا یعنی مساوات 13.145 تفاعل $f(\theta)$ کی فوریئر لیژانڈر تسلسل ہوگی جس کے ارکان لیژانڈر کثیر رکنی ہوں گے۔ یوں مساوات 5.129، مساوات 5.131 اور مساوات 5.147 سے

$$(13.146) \quad A_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں متغیر $w = \cos \theta$ کے تابع تفاعل $f(\theta)$ کو $\tilde{f}(w)$ لکھا گیا ہے۔ اب چونکہ $dw = -\sin \theta d\theta$ ہے اور مکمل کے حدود -1 اور 1 کے مطابقتی حدود بالترتیب π اور 0 ہیں لہذا درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.147) \quad A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad n = 0, 1, \dots$$

⁵⁰ اب تک k اختیاری مستقل تھا لہذا n بھی اختیاری مستقل تھا۔ یہاں n کو عدد صحیح ہونے کا پابند اس لئے بنایا گیا ہے تاکہ وقفہ $-1 \leq w \leq 1$ یعنی $0 \leq \theta \leq \pi$ مساوات 13.142 کے حل اور حل کے ایک درجی تفرق استمراری ہوں (جس کا ثبوت یہاں پیش نہیں کیا جائے گا)۔

⁵¹ یہاں مرکزیت پر غور نہیں کیا جائے گا۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر وقفہ $0 \leq \theta \leq \pi$ پر $f(\theta)$ اور $f'(\theta)$ کلاؤں میں استمراری ہوں تب مساوات 13.147 میں دیے گئے عددی سراستعمال کرتے ہوئے مساوات 13.144 کی تسلسل کا r اور θ کے ساتھ رکن بارکن دور درجی تفرق حاصل کیا جاسکتا ہے اور ایسا کرنے سے حاصل کردہ تسلسل مرتکز ہوں گی جو بالترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ کو ظاہر کریں گی۔ یوں مساوات 13.147 میں دیے گئے عددی سراستعمال کرتے ہوئے مساوات 13.144 کی تسلسل، کرہ کی اندر ہمارے مسئلے کا حل ہوگا۔

یوں مساوات 13.147 کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.144 کی تسلسل اندرون کرہ ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔

بیرون کرہ حل حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل $u(r, \theta)$ کو استعمال نہیں کر سکتے ہیں چونکہ یہ مساوات 13.135 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے البتہ ہم تفاعل $u^*(r, \theta)$ پر غور کر سکتے ہیں جو مساوات 13.135 کو مطمئن کر سکتا ہے۔ پہلے کی طرح بڑھتے ہوئے

$$(13.148) \quad u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (r \geq R)$$

حل حاصل ہو گا جس کے عدد سر درج ذیل ہیں۔

$$(13.149) \quad B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

سوالات

سوال 13.181: تصدیق کریں کہ مساوات 13.143 میں دیے گئے تفاعل $u_n(r, \theta)$ اور $u_n^*(r, \theta)$ جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہے مساوات 13.134 کے حل ہیں۔

سوال 13.182: وہ سطحیں دریافت کریں جن پر تفاعل u_1 ، u_2 ، u_3 صفر ہیں۔

سوال 13.183: تفاعل $P_n(\cos \theta)$ کا ترسیم $n = 0, 1, 2$ کے لئے کھینچیں (حصہ 5.2)۔

سوال 13.184: تفاعل $P_3(\cos \theta)$ اور $P_4(\cos \theta)$ کے ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.185 تا سوال 13.191 میں مساوات 13.147 یا کی مدد سے A_n حاصل کرتے ہوئے کرہ کے اندر حل $u(r, \theta)$ دریافت کریں۔ کرہ کا رداس اکائی $R = 1$ ہے جبکہ کرہ کے اندر کوئی برقی بار نہیں پایا جاتا ہے۔ کرہ کی سطح پر برقی دباؤ $f(\theta)$ ہے جہاں r ، θ ، ϕ کروی محدود (شکل 13.20-ب) ہیں۔ صفحہ 319 پر مساوات 5.30 چند P_n دیتی ہے جن کی ضرورت آپ کو ہو گی۔

سوال 13.185: $f(\theta) = 1$
جواب: $u = 1$

سوال 13.186: $f(\theta) = \cos \theta$
 جواب: $u = rP_1(\cos \theta) = r \cos \theta$

سوال 13.187: $f(\theta) = \cos^2 \theta$
 جواب: $u = \frac{2}{3}r^2P_2(\cos \theta) + \frac{1}{3} = r^2(\cos^2 \theta - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}$

سوال 13.188: $f(\theta) = \cos^3 \theta$
 جواب: $u = \frac{3}{5}rP_1(\cos \theta) + \frac{2}{5}r^3P_3(\cos \theta)$

سوال 13.189: $f(\theta) = \cos 2\theta$
 جواب: $u = -\frac{1}{3}P_0(\cos \theta) + \frac{4}{3}r^2P_2(\cos \theta)$

سوال 13.190: $f(\theta) = \cos 3\theta$
 جواب: $u = -\frac{3}{5}rP_1(\cos \theta) + \frac{8}{5}r^3P_3(\cos \theta)$

سوال 13.191: $f(\theta) = 10 \cos^3 \theta - 3 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta - 1$
 جواب: $u = -2P_0(\cos \theta) + rP_1(\cos \theta) - 2r^2P_2(\cos \theta) + 4r^3P_3(\cos \theta)$

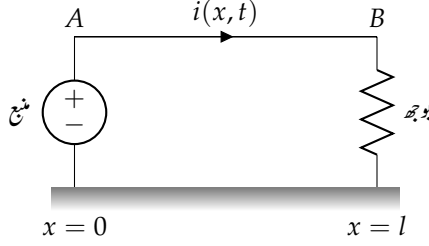
سوال 13.192: سوال 13.185 میں دکھائیں کہ کرہ کے باہر برقی دباؤ ویسا ہی ہو ہے جیسے کرہ کی مرکز پر نقطہ بار کا برقی دباؤ ہو گا۔

سوال 13.193: سوال 13.185 تا سوال 13.191 میں کرہ کے باہر برقی دباؤ حاصل کریں۔
 جواب: $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}P_1(\cos \theta), \frac{2}{3r^3}P_2(\cos \theta) + \frac{1}{3r}, \dots$

سوال 13.194: سوال 13.186 میں ہم قوتہ سطحوں اور xz مستوی کے تقاطع کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.195: سوال 13.187 میں حاصل کردہ حل کو مساوات 13.134 میں پر کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ یہ مساوات 13.134 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.196: مساوات ترمیمی تار ایک ناقص عاجز شدہ لمبی برقی تار یا ٹیلیفون کی تار جس کو شکل 13.21 میں دکھایا گیا ہے۔ ناقص حجم کی بدولت تار کی پوری لمبائی پر برقی رساؤ پائی جاتی ہے۔ اس نظام میں برقی رو $i(x, t)$ کا منبع نقطہ $x = 0$ پر جبکہ برقی بوجھ نقطہ $x = l$ پر ہے۔ برقی بوجھ کو مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ منبع سے مزاحمت تک برقی رو بالائی تار کے ذریعہ پہنچ کر واپس منبع تک زمین کے ذریعہ پہنچتی ہے۔ فرض کریں کہ فی اکائی



شکل 13.21: ترسیلی تار

لمبائی تار سے زمین تک مزاحمت⁵²، امالہ⁵³، برق گیر⁵⁴ اور ایصالیات⁵⁵ بالترتیب R ، L ، C اور G ہیں۔ درج ذیل مساوات حاصل کریں

$$(13.150) \quad -\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{ترسیلی تار کی پہلی مساوات})$$

جہاں تار پر برقی دباؤ $u(x, t)$ ہے۔ (اشارہ: تار کا چھوٹا ٹکڑا x تا $x + \Delta x$ لیں۔ کرخوف کے قانون برائے برقی دباؤ کے تحت اس ٹکڑے میں برقی دباؤ کی گھٹاؤ اس حصے کی مزاحمتی گھٹاؤ اور امالی گھٹاؤ کا مجموعہ ہو گا۔)

سوال 13.197: سوال 13.196 کی ترسیلی تار کے لئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔ (اشارہ: تار کا چھوٹا ٹکڑا x تا $x + \Delta x$ لیں۔ کرخوف کے قانون برائے برقی رو کے تحت x اور $x + \Delta x$ پر برقی رو میں فرق، تار سے زمین تک ایصالی رساؤ اور برق گیری رساؤ کا مجموعہ ہو گا۔)

$$(13.151) \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{ترسیلی تار کی دوسری مساوات})$$

سوال 13.198: ترسیلی تار کی پہلی اور دوسری مساوات سے i حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$(13.152) \quad u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RG u$$

سوال 13.199: مساوات ٹیلی گراف

آپ دوز تار کا G قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ استعمال ہونے والی تعدد نہایت کم ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں درج ذیل سادہ مساوات حاصل کریں۔

$$(13.153) \quad u_{xx} = RCu_t, \quad i_{xx} = RCi_t$$

resistance⁵²
inductance⁵³
capacitance⁵⁴
conductance⁵⁵

سوال 13.200: بلند تعددی مساوات تار
بلند تعدد $i(x, t)$ کی صورت میں مساوات 13.152 کی سادہ صورت اور ساتھ ہی برقی رو کی مماثل سادہ مساوات حاصل کریں۔
جوابات:

$$(13.154) \quad u_{xx} = LCu_{tt}, \quad i_{xx} = LCi_{tt}$$

13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات

لاپلاس تبادلہ (باب 6) کو جزوی تفرقی مساوات کے حل کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس حصہ میں دو مثالوں کی مدد سے اس ترکیب کی بنیادی تصور کو سمجھایا جائے گا۔ (زیادہ پیچیدہ مسائل مخلوط تجزیہ کی ترکیب سے قابل حل ہوں گے۔ بعض اوقات فوریر تبادلہ (حصہ 12.9) زیادہ سودمند ثابت ہوتا ہے۔)

ہم باب 12 سے جانتے ہیں کہ سادہ تفرقی مساوات کا لاپلاس تبادلہ الجبرائی مساوات ہوتی ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ دو متغیرات کی جزوی تفرقی مساوات کا لاپلاس بدل سادہ تفرقی مساوات ہوگی۔ ایسا اس لئے ہو گا کہ ہم لاپلاس بدل کسی ایک غیر تابع متغیر، عموماً t ، کے لحاظ سے لیں گے لہذا دوسرا غیر تابع متغیر جوں کا توں رہتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات دے گا۔ اگر دیے گئے جزوی مساوات کے عددی سر t پر منحصر نہ ہوں تب مسئلہ زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

مثال 13.6: ایک درجی مساوات
درج ذیل مسئلہ کو حل کریں۔

$$(13.155) \quad \frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = t \quad (t \geq 0)$$

ہم u کو اکائی سیڑھی تفاعل (حصہ 6.3) کے لئے استعمال کریں گے لہذا یہاں w استعمال کیا گیا ہے۔
حل: ہم مساوات 13.155 کا لاپلاس بدل t کے لحاظ سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 6.5 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(13.156) \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + x[s\mathcal{L}(w) - w(x, 0)] = 0$$

یہاں $w(x, 0) = 0$ ہے۔ ہم پہلے رکن میں فرض کرتے ہیں کہ مکمل اور تفرق کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔ یوں پہلا رکن

$$(13.157) \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial w}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}[w(x, t)];$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا $W(x, s) = \mathcal{L}[w(x, t)]$ لکھتے ہوئے مساوات 13.156 سے

$$\frac{\partial W}{\partial x} + xsW = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو سادہ ترقی مساوات ہے۔ اس سادہ تفرقی مساوات کا غیر تابع متغیر x ہے چونکہ مساوات میں s کے لحاظ سے کوئی تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کا عمومی حل (حصہ 1.5) درج ذیل ہے۔

$$W(x, s) = c(s)e^{-\frac{sx^2}{2}}$$

چونکہ $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ کے برابر ہے لہذا سرحدی شرط $w(0, t) = t$ سے $W(0, s) = \frac{1}{s^2}$ کی شرط حاصل ہوگی۔ یوں

$$W(0, s) = c(s) = \frac{1}{s^2}$$

اور

$$W(x, s) = \frac{1}{s^2} e^{-\frac{sx^2}{2}}$$

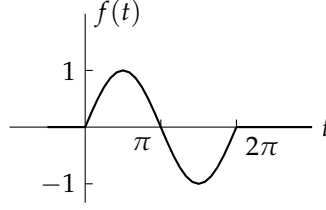
ہوں گے۔ اب $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$ ہے لہذا منتقلی کا دوسرا مسئلہ (مسئلہ 6.7) میں $a = \frac{x^2}{2}$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(13.158) \quad w(x, t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right) u_{\frac{x^2}{2}}(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{x^2}{2} \\ t - \frac{x^2}{2} & t > \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

آپ پر چھوڑا جاتا ہے کہ مساوات 13.158 کو مساوات 13.155 میں پر کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ یہ مسئلہ کا درست حل ہے۔ □

مثال 13.7: نصف لامتناہی تار

چکدر تار کی انحراف $w(x, t)$ درج ذیل صورتوں میں دریافت کریں۔ ہم u کو اکائی سیڑھی تفاعل (حصہ 6.3)



شکل 13.22: تار کے بائیں سر کی حرکت (مثال 13.7)

کے لئے استعمال کریں گے لہذا یہاں w استعمال کیا گیا ہے۔

- (الف) ابتدائی طور پر نصف لامتناہی تار x محور پر $x = 0$ تا $x = \infty$ ساکن ہے۔
 (ب) وقت $t > 0$ کے دوران تار کے بائیں سر کو درج ذیل طرح ہلایا جاتا ہے (شکل 13.22)۔

$$w(0, t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 & \text{باقی اوقات} \end{cases}$$

(پ) مزید تمام اوقات درج ذیل ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) = 0 \quad t \geq 0$$

ظاہر ہے کہ حقیقت میں لامتناہی تار نہیں پائی جاتی ہے لیکن یہ (قابل نظر انداز وزن کی) زیادہ لمبی تار جس کا دایاں سر x محور پر کسی دو نقطہ سے بندھا ہو کی نمونہ کشی کرتی ہے۔
 حل: ہمیں مساوات موج (حصہ 13.2)

$$(13.159) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

زیر سرحدی شرائط

$$(13.160) \quad w(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (t \geq 0)$$

اور ابتدائی شرائط

$$(13.161) \quad w(x, 0) = 0$$

$$(13.162) \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

حل کرنی ہے۔ ہم t کے لحاظ سے لاپلاس بدل لیتے ہیں۔ یوں مساوات 6.6 کی مدد سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = s^2 \mathcal{L}(w) - sw(x, 0) - \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = c^2 \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

مساوات 13.161 اور مساوات 13.162 کی بنیاد پر اجزاء حذف ہوں گے۔ دائیں ہاتھ ہم فرض کرتے ہیں کہ مکمل اور تفرق کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔ یوں

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}[w(x, t)]$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $W(x, s) = \mathcal{L}[w(x, t)]$ لکھتے ہوئے

$$s^2 W = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} W = 0$$

ملتا ہے۔ چونکہ اس مساوات میں صرف x کے ساتھ تفرق پایا جاتا ہے لہذا اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کیا جاتا ہے جس کا نامعلوم تفاعل $W(x, s)$ کے جو متغیر x کے تابع ہے۔ اس کا عمومی حل

$$(13.163) \quad W(x, s) = A(s)e^{\frac{sx}{c}} + B(s)e^{-\frac{sx}{c}}$$

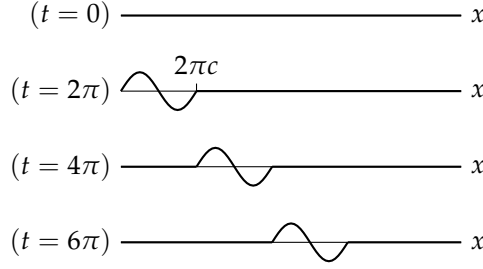
ہے۔ مساوات 13.160 سے $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ لکھتے ہوئے

$$W(0, s) = \mathcal{L}[w(0, t)] = \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

ملتا ہے۔ اب فرض کریں کہ مکمل اور تفرق کی ترتیب بدلی جاسکتی ہے۔ یوں

$$(13.164) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} W(x, s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) dt = 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ اب $c > 0$ ہے جبکہ مساوات 13.163 میں s کی کسی بھی مثبت قیمت کے لئے $x \rightarrow \infty$ کرنے سے $e^{\frac{sx}{c}} \rightarrow \infty$ ہو گا لہذا مساوات 13.164 کے تحت مساوات 13.163 میں $A(s) = 0$ ہو گا۔ چونکہ کسی معین



شکل 13.23: تار پر موج کی حرکت (مثال 13.7)

α سے زیادہ کسی بھی s کے لئے لاپلاس بدل موجود (حصہ 6.2) ہو گا لہذا ہم $s > 0$ فرض کر سکتے ہیں اور یوں

$$W(0, s) = B(s) = F(s)$$

ہو گا۔ اس طرح مساوات 13.163 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$W(x, s) = F(s)e^{-\frac{sx}{c}}$$

منتقلی کا دوسرا مسئلہ 6.7 میں $a = \frac{x}{c}$ لیتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل (شکل 13.23)

$$(13.165) \quad w(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)u_{\frac{x}{c}}(t)$$

یعنی

$$(13.166) \quad w(x, t) = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{x}{c}\right) & \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + 2\pi \text{ یا } ct > x > (t - 2\pi)c \\ 0 & \text{باقی اوقات} \end{cases}$$

حاصل کرتے ہیں جو رفتار c سے بائیں رخ حرکت کرتی واحد ایک موج ہے۔ یوں اگر موج بائیں سر سے لہجہ $t = 0$ پر روانہ ہو تب نقطہ x ، لہجہ $t = \frac{x}{c}$ تک ساکن رہتا ہے۔ وقت $t = \frac{x}{c}$ موج کو رفتار c پر چلتے ہوئے فاصلہ x طے کرنے کے لئے درکار وقت ہے۔ یہ تار یا رسی پر موج کی چال کی ہمارے مشاہدے کے عین مطابق ہے۔ آپ مساوات 13.165 کو مساوات 13.159 میں پر کرتے ہوئے تصدیق کر سکتے ہیں کہ یہی درست جواب ہے جو سرحدی اور ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

□

سوالات

سوال 13.201: $c = 1$ اور ٹکونی f کی صورت میں شکل 13.23 کی طرح موج کی حرکت دکھائیں۔

$$(13.167) \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{1}{2} \\ (1-x) & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

سوال 13.202: تار کی تناؤ اور کمیت کا مثال 13.7 میں موج کی رفتار پر کیا اثر ہوگا؟

سوال 13.203: مثال 13.7 میں حاصل کردہ حل کو مساوات موج میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی کی تصدیق کریں۔ اگر ہم لمحہ $t = 0$ پر تار کی بائیں سر پر نا ختم ہونے والی سائن موج دیں تب نتائج کیا ہوں گے؟

لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے سوال 13.204 تا سوال 13.206 حل کریں۔ حاصل حل کو واپس دی گئی جزوی تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے حل کی درستگی کی تصدیق کریں۔

$$\text{سوال 13.204: } \frac{\partial u}{\partial x} + 2x \frac{\partial u}{\partial t} = 2x, \quad u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = 1$$

سوال 13.205:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = xt, \quad \begin{matrix} u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{matrix}$$

جواب:

$$U(x, s) = \frac{c(s)}{x^s} + \frac{x}{s^2(s+1)}, \quad U(0, s) = 0, \quad c(s) = 0, \\ u(x, t) = x(t - 1 + e^{-t})$$

سوال 13.206: سوال 13.205 کو کسی دوسرے طریقہ سے حل کریں۔

نصف لائٹنابی، اطراف سے عاجز شدہ سلاخ x محور پر $x = 0$ تا $x = \infty$ پڑی ہے۔ سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت صفر ہے۔ مزید تمام معین $t \geq 0$ کے لئے $x \rightarrow \infty$ پر $w(x, t) \rightarrow 0$ جبکہ $w(0, t) = f(t)$ ہے۔ سلاخ میں درجہ حرارت $w(x, t)$ حاصل کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

سوال 13.207: مسئلہ کا ریاضی نمونہ حاصل کریں۔ اس نمونے کا لاپلاس بدل لے کر درج ذیل حاصل کریں۔

$$sW(x, s) = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad W = \mathcal{L}(w)$$

$$W(x, s) = F(s) e^{-\frac{\sqrt{s}x}{c}} \quad F = \mathcal{L}(f)$$

سوال 13.208: مسئلہ الجھاؤ کی اطلاق سوال 13.207 پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$w(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t - \tau) \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4c^2\tau}} d\tau$$

سوال 13.209: فرض کریں کہ $w(0, t) = f(t) = u_0(t)$ ہے (حصہ 6.3)۔ اس کے مطابقتی w ، W اور F کو بالترتیب w_0 ، W_0 اور F_0 سے ظاہر کریں۔ یوں دکھائیں کہ سوال 13.208 میں درج ذیل ہو گا

$$w_0(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4c^2\tau}} d\tau = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

جہاں تفاعل erf کی تعریف حصہ 13.6 کی سوالات میں دی گئی ہے۔

جواب: $\frac{x^2}{4c^2\tau} = z$ لے کر z کے ساتھ مکمل لیں اور $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ استعمال کریں۔

سوال 13.210: دکھائیں کہ سوال 13.209 میں درج ذیل ہو گا

$$W_0(x, s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}x}{c}}$$

جو مسئلہ الجھاؤ کی اطلاق سے درج ذیل دیتی ہے۔

$$w(x, t) = \int_0^t f(t - \tau) \frac{\partial w_0}{\partial \tau} d\tau$$

یہ کسی بھی تفاعل f کا حل، تفاعل $f(t) = u_0(t)$ کے حل w_0 کی صورت میں دیتی ہے۔

باب 14

مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیلی تفاعل

انجینئری کے کئی مسائل مخلوط تجزیہ سے با آسانی حل ہو پاتے ہیں۔ ان مسئلوں کو دو بڑے گروہوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ پہلی گروہ میں سادہ مسائل شامل ہیں جنہیں حل کرنے کے لئے کالج میں سیکھی گئی مخلوط اعداد کی الجبرا کافی ہے۔ برقی ادوار اور میکانیکی ارتعاش کے کئی مسائل اس نوعیت کے ہیں۔ دوسری گروہ کے لئے مخلوط تحلیلی تفاعل کا نظریہ اور اس میں استعمال کیے جانے والے انتہائی طاقتور اور شائستہ تراکیب تفصیلاً جاننا ضروری ہے۔ نظریہ حرارت، حرکیات سیال اور برقی سکون کے مسائل اس نوعیت کے ہیں۔

اس باب کے علاوہ اگلے کئی ابواب میں مخلوط تحلیلی تفاعل کے نظریہ کی بیشتر حصوں اور ان تفاعل کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں ان تفاعل کی اہمیت درج ذیل تین وجوہات کی بنا ہے۔

(الف) تحلیلی تفاعل کے حقیقی اور خیالی اجزاء، دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل ہوتے ہیں۔ یوں دو ابعادی مخفی قوہ مسائل پر تحلیلی تفاعل کے لئے بنائے گئے تراکیب کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مختلف مسائل میں درپیش کئی پیچیدہ حقیقی اور مخلوط کمالات کو مخلوط مکمل کی تراکیب سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

(پ) انجینئری حساب میں پائے جانے والے غیر بنیادی تفاعل کا بیشتر حصہ تحلیلی تفاعل پر مشتمل ہے۔ مخلوط غیر تابع متغیرات کے لئے ان تفاعل کے مشاہدہ سے تفاعل کی خواص کی مفصل اور گہری سمجھ پیدا ہوتی ہے۔

موجودہ باب میں ہم مخلوط اعداد اور تحلیلی تفاعل اور ان کے عمومی خواص پر غور کریں گے۔ باب کا دوسرا حصہ اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل کے لئے مختص ہے۔

14.1 مخلوط اعداد

تاریخی طور پر دیکھا گیا کہ کئی مساوات مثلاً

$$x^2 + 4 = 0, \quad x^2 + 2x + 5 = 0$$

کو کوئی بھی حقیقی عدد مطمئن نہیں کرتا ہے۔ مخلوط اعداد کا آغاز یہیں سے ہوا۔¹

تعریف: حقیقی اعداد x اور y کی مرتب جوڑی (x, y) کو مخلوط عدد z کہتے ہیں جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$z = (x, y)$$

ہم x کو z کا حقیقی حصہ³ اور y کو z کا خیالی حصہ⁴ کہتے ہیں جنہیں ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$x = z \text{ حقیقی}, \quad y = z \text{ خیالی}$$

یوں حقیقی $(-7, 2) = -7$ اور خیالی $(-7, 2) = 2i$ ہوں گے۔ مزید دو مخلوط اعداد $z_1 = (x_1, y_1)$ اور $z_2 = (x_2, y_2)$ کی برابری کی تعریف ہم یوں کرتے ہیں کہ یہ مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں۔

مخلوط اعداد $z_1 = (x_1, y_1)$ اور $z_2 = (x_2, y_2)$ کا مجموعہ درج ذیل قاعدہ دیتا ہے

$$(14.1) \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

جبکہ ان کا حاصل ضرب درج ذیل قاعدہ دے گا۔

$$(14.2) \quad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ان اعمال ریاضی پر مزید بحث آگے کی جائے گی۔

¹ اس مقصد کے لئے مخلوط اعداد سب سے پہلے اطالوی ریاضی دان جرولامو کوردانو [1501-1576] نے استعمال کیے جنہوں نے کئی مساوات کے حل کا کامیاب در یافت کیا۔ مخلوط اعداد کی منظم اور عام استعمال کی بنیاد جرمنی کے ریاضی دان یوہان کارل فرڈریش گاوس نے ڈالی۔

² complex number

³ real part

⁴ imaginary part

روپ $z = x + iy$ میں خیالی اعداد کا اظہار ایسا مخلوط عدد جس کا خیالی حصہ صفر کی روپ $(x, 0)$ ہوگی۔ اس طرز کے مخلوط اعداد کے لئے حقیقی اعداد کی طرح

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا $(x, 0)$ کو حقیقی عدد تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں حقیقی عددی نظام کی توسیعی حالت مخلوط عددی نظام ہے۔ مزید درج ذیل مخلوط عدد

$$i = (0, 1)$$

کو خیالی اکائی⁵ کہتے ہیں۔ مساوات 14.2 کے تحت ہر حقیقی y کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$$

جبکہ مساوات 14.1 کے تحت

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

ہوگا۔ یوں $(x, 0)$ کے لئے x اور $(0, y) = iy$ استعمال کرتے ہوئے

$$z = x + iy$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مخلوط اعداد کو عموماً اسی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ خیالی اکائی i کی ایک اہم خاصیت

$$i^2 = -1 \quad (14.3)$$

کو مساوات 14.2 سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی: $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

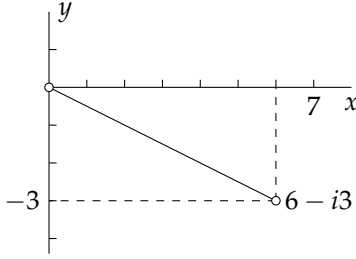
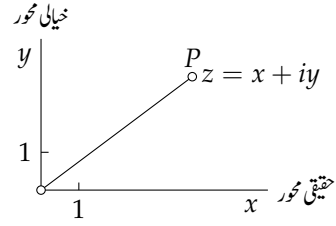
مخلوط سطح

مخلوط اعداد کو سطح پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنا نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ ہم دو عدد آپس میں عمودی محور چنتے ہیں۔ افقی x محور کو حقیقی محور⁶ جبکہ انتضابی y محور کو خیالی محور⁷ تصور کیا جاتا ہے۔ دونوں محوروں پر

imaginary unit⁵

real axis⁶

imaginary axis⁷

(ب) مخلوط سطح پر $6 - i3$ کا اظہار

(الف) مخلوط سطح

شکل 14.1: مخلوط سطح اور مخلوط سطح پر مخلوط عدد کا اظہار

یکساں اکائی لمبائی استعمال کی جاتی ہے (شکل 14.1-الف)۔ اس کو کارتیسی محدودی نظام کہتے ہیں۔ ہم اب مخلوط عدد $z = (x, y) = x + iy$ کو اس سطح پر بطور نقطہ P ظاہر کرتے ہیں جس کے محدود x اور y ہوں گے۔ ایسی سطح جس پر اس طرح مخلوط اعداد ظاہر کیے جاتے ہیں مخلوط سطح⁸ یا نقشہ اغگن⁹ کہلاتی¹⁰ ہے۔

"مخلوط سطح میں مخلوط عدد z " کہنے کی بجائے ہم "مخلوط سطح میں نقطہ z " کہیں گے۔ اس سے کوئی غلط فہمی پیدا نہیں ہوتی ہے۔

ریاضی اعمال

ہم اب مخلوط عدد کی روپ $z = x + iy$ اور مخلوط سطح کو استعمال کرتے ہیں۔

جمع۔ مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ $z_1 + z_2$ اب

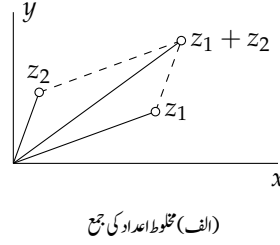
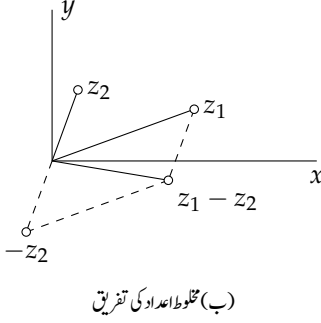
$$(14.4) \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط اعداد کی جمع، میکانیات میں قوتوں کا مجموعہ حاصل کرنے کے متوازی الاضلاع قاعدہ کے مطابق ہے (شکل 14.2-الف)۔

⁸ complex plane

⁹ Argand diagram

¹⁰ فرانسیسی ریاضی دان ژان فرانسوا غولگنگن [1768-1822]



شکل 14.2: مخلوط اعداد کی جمع اور تفریق

تفریق۔ یہ جمع کا الٹ عمل ہے۔ فرق $z_1 - z_2$ ایسے مخلوط عدد z کے برابر ہو گا کہ $z_1 = z + z_2$ ہو۔ یوں (شکل 14.2-ب) درج ذیل ہو گا۔

$$(14.5) \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

ضرب۔ مساوات 14.2 میں دی گئی ضرب $z_1 z_2$ کو اب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.6) \quad z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

چونکہ یہ نتیجہ حقیقی اعداد کی حساب کے قوانین اور مساوات 14.3 یعنی $i^2 = ii = -1$ کی استعمال سے حاصل ہوتا ہے لہذا اس کو یاد رکھنا آسان ہے۔

تقسیم۔ یہ ضرب کا الٹ عمل ہے۔ یوں حاصل تقسیم $z = \frac{z_1}{z_2}$ ایسا مخلوط عدد $z = x + iy$ ہو گا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$(14.7) \quad z_1 = z z_2 = (x + iy)(x_2 + iy_2) \quad (z_2 \neq 0)$$

ہم $z_2 \neq 0$ کی صورت میں حاصل تقسیم $z = x + iy = \frac{z_1}{z_2}$ کی درج ذیل صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$(14.8) \quad x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

عملاً مساوات 14.8 کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{z_1}{z_2}$ کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $x_2 - iy_2$ سے ضرب دے کر سادہ صورت حاصل کرتے ہیں یعنی:

$$(14.9) \quad z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال کے طور پر اگر $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہوں تب

$$\frac{3 - i2}{-4 + i} = \frac{(3 - i2)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-12 - i3 + i8 - 2}{16 + 1} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$$

ہو گا جس کی درستگی آپ درج ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$zz_2 = \left(-\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}\right)(-4 + i) = \frac{56}{17} - i\frac{14}{17} - i\frac{20}{17} - \frac{5}{17} = 3 - i2$$

مساوات 14.8 کا ثبوت کچھ یوں ہے۔ مساوات 14.6 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 14.7 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

مخلوط اعداد کی برابری کی تعریف کے مطابق دونوں مخلوط اعداد کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں گے اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$x_1 = x_2x - y_2y$$

$$y_1 = y_2x + x_2y$$

یہ دو دو خطی مساوات کا نظام ہے جس کے نامعلوم متغیرات x اور y ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ x_2 اور y_2 بیک وقت صفر نہیں ہیں (جس کو مختصراً $z \neq 0$ لکھا جاتا ہے) ہمیں مساوات 14.8 میں دیا گیا یکتا حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.1: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم

فرض کریں کہ $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہیں۔ تب

$$z_1 + z_2 = -1 - i, z_1 - z_2 = 7 - i3, z_1z_2 = -10 + i11$$

□

اور جیسے ہم حاصل کر سکے ہیں $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$ ہو گا۔

ریاضی اعمال کے خواص

حقیقی اعداد کے قواعد سے مخلوط اعداد z_1 اور z_2 کے لئے درج ذیل قواعد حاصل ہوتے ہیں

$$(14.10) \quad \left. \begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \end{aligned} \right\} \text{ (قانون تبادل)}$$

$$\left. \begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \end{aligned} \right\} \text{ قانون تلازم}$$

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 & \text{(قانون جزیئی تقسیم)} \\ 0 + z &= z + 0 = z \\ z + (-z) &= (-z) + z = 0 \\ z \cdot 1 &= z \end{aligned}$$

جہاں $0 = (0, 0)$ اور $-z = -x - iy$ ہیں۔

جوڑی دار مخلوط اعداد

فرض کریں کہ $z = x + iy$ کوئی مخلوط عدد ہے۔ تب $x - iy$ کو z کا جوڑی دار مخلوط کہا جائے گا اور z کے جوڑی دار مخلوط کو \bar{z} سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

ہوں گا۔ مثلاً $z = 5 + i2$ کا جوڑی دار مخلوط $\bar{z} = 5 - i2$ ہے (شکل 14.3)۔ مزید جمع اور تفریق سے

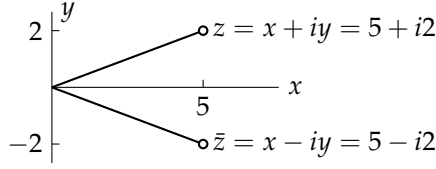
$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = i2y$$

حاصل ہوتے ہیں جو درج ذیل اہم کلیات کا سبب بنتے ہیں۔

$$(14.11) \quad \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = z \text{ حقیقی}, \quad \frac{1}{i2}(z - \bar{z}) = z \text{ خیالی}$$

حقیقی عدد $z = x$ کا مخلوط جوڑی دار عدد $\bar{z} = z$ ہو گا جبکہ $z = 0 + iy = iy$ کا جوڑی دار مخلوط عدد $\bar{z} = -z$ ہو گا۔ اس طرح کا عدد جس کا حقیقی حصہ صفر ہو خالص خیالی عدد¹¹ کہلاتا ہے جو خیالی محور پر کسی نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔

¹¹ pure imaginary number



شکل 14.3: جوڑی دار مختلط اعداد

اس کے علاوہ درج ذیل تعلق بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

$$(14.12) \quad \begin{aligned} \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{(z_1 - z_2)} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{aligned}$$

سوالات

سوال 14.1: خیالی اکائی کے طاقت درج ذیل ثابت کریں۔

$$(14.13) \quad \begin{aligned} i^2 &= -1, & i^3 &= -i, & i^4 &= 1, & i^5 &= i, \dots \\ \frac{1}{i} &= -i, & \frac{1}{i^2} &= -1, & \frac{1}{i^3} &= i, \dots \end{aligned}$$

فرض کریں کہ $z_1 = 4 + i3$ اور $z_2 = 2 - i5$ ہیں۔ سوال 14.2 تا سوال 14.5 کو حل کرتے ہوئے $x + iy$ روپ میں لکھیں۔

سوال 14.2: $(z_1 - z_2)^2$
جواب: $-60 + i32$

سوال 14.3: $\frac{z_1}{z_2}$
جواب: $-\frac{7}{29} + i\frac{26}{29}$

سوال 14.4: $\frac{1}{z_1^2}$
جواب: $\frac{7}{625} - i\frac{24}{625}$

سوال 14.5: $\frac{2z_1}{3z_2}$
 جواب: $-\frac{14}{87} + i\frac{52}{87}$

سوال 14.6 تا سوال 14.15 کو حل کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

سوال 14.6: خیالی $\frac{1}{1+i}$
 جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 14.7: حقیقی $\frac{1-i}{1+i}$
 جواب: 0

سوال 14.8: خیالی z^2
 جواب: $2xy$

سوال 14.9: حقیقی z^3
 جواب: $x^3 - 3xy^2$

سوال 14.10: خیالی z^4
 جواب: $4xy(x^2 - y^2)$

سوال 14.11: حقیقی $\frac{(-1+i)^2}{-5+i4}$
 جواب: $-\frac{8}{41}$

سوال 14.12: خیالی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
 جواب: 1

سوال 14.13: حقیقی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
 جواب: -1

سوال 14.14: خیالی $\frac{z}{\bar{z}}$
 جواب: $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

سوال 14.15: حقیقی $\frac{z}{\bar{z}}$
 جواب: $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

سوال 14.16: قانون تبادل ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.17: قانون تلازم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.18: قانون جزئیت تقسیم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.19: اگر دو مخلوط اعداد کا حاصل ضرب صفر کے برابر ہو تب ثابت کریں کہ ان میں سے کم از کم ایک مخلوط عدد صفر ہو گا۔

سوال 14.20 تا سوال 14.27 میں ثبوت پیش درکار ہیں۔

سوال 14.20: کسی بھی عدد کے جوڑی دار مخلوط کا جوڑی دار مخلوط اس عدد کے برابر ہو گا۔

$$\overline{iz} = -i\bar{z} \quad \text{سوال 14.21}$$

سوال 14.22: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی ہو گا جب $\bar{z} = z$ ہو۔

سوال 14.23: z صرف اور صرف اس صورت خالص خیالی ہو گا جب $\bar{z} = -z$ ہو۔

سوال 14.24: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی یا خالص خیالی ہو گا جب $(\bar{z})^2 = z^2$ ہو۔

سوال 14.25: مساوات 14.12 ثابت کریں۔

سوال 14.26: حقیقی $z = iz$ خیالی $-z$ ، حقیقی $iz = -z$ خیالی

سوال 14.27: حقیقی $-z = iz$ خیالی $-z$ ، حقیقی $iz = -z$ خیالی

14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات

ہم مخلوط سطح میں درج ذیل قطبی محدود r ، θ متعارف کرتے ہیں۔

$$(14.14) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

یوں کسی بھی مخلوط عدد $z = x + iy \neq 0$ کو

$$(14.15) \quad z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

لکھا جاسکتا ہے جو مخلوط عدد کی قطبی روپ¹² یا تکونیاتی روپ¹³ کہلاتی ہے۔ r کو مخلوط عدد z کی حتمی قیمت¹⁴ یا معیار¹⁵ کہتے ہیں جسے $|z|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہوگا (شکل 14.4-الف)۔

$$(14.16) \quad |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\geq 0)$$

مثبت x محور سے لکیر MN تک زاویہ کو z کی دلیل¹⁶ کہتے ہیں جس کو \angle سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ چلتے ہوئے زاویہ بڑھتا ہے۔ z کا زاویہ درج ذیل ہوگا۔

$$(14.17) \quad \angle z = \theta = \sin^{-1} \frac{y}{r} = \cos^{-1} \frac{x}{r} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

دھیان رہے کہ $z = 0$ کے لئے زاویہ θ غیر معین ہے۔ اسی لئے اوپر شرط $z \neq 0$ لاگو کی گئی ہے۔

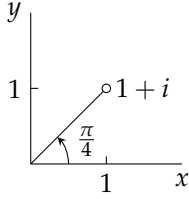
جیومیٹریائی طور پر مبدا M سے نقطہ z تک فاصلہ $|z|$ ہے (شکل 14.4-الف)۔ یوں

$$|z_1| > |z_2|$$

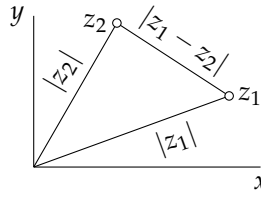
کا مطلب ہے کہ مبدا سے z_1 کا فاصلہ، مبدا سے z_2 کے فاصلے سے زیادہ ہے اور $|z_1 - z_2|$ سے مراد z_1 اور z_2 کے درمیان فاصلہ ہے (شکل 14.4-ب)۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی محور سے ہٹ کر مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات $z_1 < z_2$ یا $z_1 \geq z_2$ کوئی معنی نہیں رکھتی ہیں۔

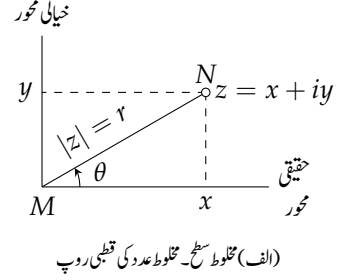
¹² polar form
¹³ trigonometric form
¹⁴ absolute value
¹⁵ modulus
¹⁶ argument



(پ) صدر زاویہ (مثال 14.2)



(ب) دو نقطوں کے مابین فاصلہ



(الف) مخلوط سطح۔ مخلوط عدد کی قطبی روپ

شکل 14.4: مخلوط سطح اور اس پر مخلوط نقطے۔

مخلوط عدد کے زاویہ θ کی وہ قیمت جو وقفہ

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

میں پائی جاتی ہو کہ z کے زاویے کی صدر قیمت¹⁷ کہتے ہیں جس کے ساتھ $\mp n\pi$ جمع کرنے سے z کے زاویے کی دیگر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔

مثال 14.2: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت
فرض کریں کہ $z = 1 + i$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \angle z = \frac{\pi}{4} \mp 2n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

□

z کے زاویہ کی صدر قیمت $\frac{\pi}{4}$ ہے (شکل 14.4-پ)۔

مثال 14.3: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت

فرض کریں کہ $z = -2 + i2\sqrt{3}$ ہے تب $z = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ ہو گا۔ z کی حتمی قیمت
□ $|z| = 4$ اور اس کا صدر زاویہ $\frac{2\pi}{3}$ ہو گا۔

مخلوط اعداد کی ضرب یا تقسیم میں مخلوط اعداد کی قطبی روپ نہایت مفید ثابت ہوتی ہے۔ فرض کریں کہ

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{اور} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

ہیں۔ مساوات 14.6 کے تحت

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)_i (\sin \theta_1 \cos \theta_2) + \cos \theta_1 \sin \theta_2]$$

یعنی

$$(14.18) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتائج

$$(14.19) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

اور

$$(14.20) \quad \angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2 \quad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح تقسیم کی تعریف سے

$$(14.21) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

اور

$$(14.22) \quad \angle \frac{z_1}{z_2} = \angle z_1 - \angle z_2 \quad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 14.4: کلیات ڈی مویرے ور
مساوات 14.19 اور مساوات 14.20 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$(14.23) \quad z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

جس سے کلیہ ڈی مویرے ور¹⁸

$$(14.24) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

□

حاصل ہوتا ہے۔

عدم مساوات

کسی بھی مخلوط عدد کے لئے درج ذیل تکنیکی عدم مساوات¹⁹ (شکل 14.5) درست ہوگی

$$(14.25) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔ نقطہ 0، z_1 اور z_2 شکل 14.5 میں تینوں کے کونے ہیں جس کے اطراف کی لمبائی $|z_1|$ ، $|z_2|$ اور $|z_1 + z_2|$ ہے۔ اب تینوں کا کوئی ایک طرف باقی دو کی مجموعی لمبائی سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے لہذا درج بالا عدم مساوات ثابت ہوتا ہے جس کا باضابطہ ثبوت آپ پر چھوڑا جاتا ہے (سوال 14.48)۔

مساوات 14.25 سے ہم زیادہ تعداد کی مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات

$$(14.26) \quad |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

اخذ کر سکتے ہیں، یعنی مجموعے کی حتمی قیمت تمام ارکان کی علیحدہ علیحدہ حتمی قیمتوں کے مجموعہ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے۔

کسی بھی $z = x + iy$ کے لئے

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم عدم مساوات

$$(14.27) \quad \left| \operatorname{Re}(z) \right| \leq |z|, \quad \left| \operatorname{Im}(z) \right| \leq |z|$$

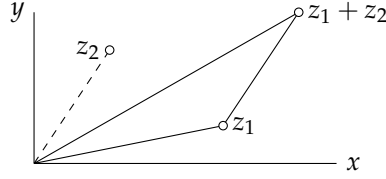
حاصل ہوتی ہیں۔

سوالات

سوال 14.28 تا سوال 14.34 کو حل کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

¹⁹ triangle inequality

14.2. مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات



شکل 14.5: تکونی عدم مساوات

سوال 14.28: $|1 - i|^2$
جواب: 2

سوال 14.29: $|-i7|$
جواب: 7

سوال 14.30: $|\cos \theta + i \sin \theta|$
جواب: 1

سوال 14.31: $\left| \frac{2+i5}{5-i2} \right|$
جواب: 1

سوال 14.32: $\left| \frac{z+1}{z-1} \right|$
جواب: $\sqrt{\frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}}$

سوال 14.33: $\left| \frac{(-2+i3)^2}{(3+i2)^2} \right|$
جواب: 1

سوال 14.34: $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right|$
جواب: 1

سوال 14.35 تا سوال 14.40 میں دلیل کی صدر قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.35: -9
جواب: π

سوال 14.36: 9
جواب: 0

سوال 14.37: $i5$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.38: $5 - i5$
جواب: $-\frac{\pi}{4}$

سوال 14.39: $-5 - i5$
جواب: $-\frac{3\pi}{4}$

سوال 14.40: $-i3$
جواب: $-\frac{\pi}{2}$

سوال 14.41 تا سوال 14.44 میں دیے گئے مخلوط عدد کو قطبی روپ میں لکھیں۔

سوال 14.41: $2 + i2$
جواب: $2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

سوال 14.42: -6
جواب: $6 \cos \pi$

سوال 14.43: $-i8$
جواب: $8 \sin(-\frac{\pi}{2})$

سوال 14.44: $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$
جواب: $\frac{1}{2}[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]$

سوال 14.45: تکنونی عدم مساوات کی تصدیق $z_1 = -1 - i2$ اور $z_2 = 3 - i2$ کے لئے کریں۔
جواب: $|z_1| = \sqrt{5} \approx 2.236$, $|z_2| = \sqrt{13} \approx 3.606$, $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \approx 4.472$
لہذا $4.472 < 2.236 + 3.606$ ہے۔

سوال 14.46: تکنونی عدم مساوات کی تصدیق $z_1 = 1 + i$ اور $z_2 = i4$ کے لئے کریں۔

سوال 14.47: تکونی عدم مساوات میں برابر کی علامت کس صورت استعمال ہوگی۔
جواب: جب مبدا اور دیے گئے دو مخلوط اعداد تکون کی بجائے سیدھی لکیر بناتے ہوں۔

سوال 14.48: تکونی عدم مساوات کا ریاضی ثبوت پیش کریں۔

سوال 14.49: تکونی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ ثابت کریں۔

سوال 14.50: ثابت کریں کہ $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$ ہو گا۔ اعدادی مثال پیش کریں۔

سوال 14.51: ثابت کریں کہ $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ہو گا۔

سوال 14.52: $z = (5 + i4)^2$ کے لئے مساوات 14.27 کی تصدیق کریں۔

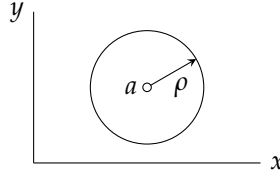
سوال 14.53: i کے ساتھ ضرب

عمومی مخلوط عدد $z = x + iy$ کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔ z کو i سے ضرب دینے سے $z_1 = -y + ix$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کو بھی اسی مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔ z سے z_1 تک زاویہ کیا ہو گا؟ جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.54: i کے ساتھ ضرب

ثابت کریں کہ کسی بھی مخلوط عدد کو i سے ضرب دینا مخلوط سطح پر اس نقطے کو گھڑی کی الٹ رخ $\frac{\pi}{2}$ زاویے سے گمانے کے مترادف ہے۔

سوال 14.55: قطبی روپ استعمال کرتے ہوئے دو مخلوط اعداد کے حاصل ضرب مثلاً $(1 + i)(1 + 2i)$ کا جیومیٹریائی طریقہ دریافت کریں۔



شکل 14.6: مخلوط سطح میں دائرہ

14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے

مخلوط سطح میں منحنیات اور خطوں کی ضرورت ہمیں بار بار ہو گی۔ اس لئے چند اہم منحنیات اور خطوں اور ان کی مساواتوں اور عدم مساواتوں پر غور کرتے ہیں۔

چونکہ دو اعداد z اور a کے درمیان فاصلہ $|z - a|$ ہے لہذا اس ρ کا ایسا دائرہ C جس کا مرکز نقطہ a پر ہو (شکل 14.6) کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.28) \quad |z - a| = \rho$$

نتیجتاً عدم مساوات

$$(14.29) \quad |z - a| < \rho$$

دائرہ C کے اندر کسی بھی نقطہ کے لئے درست ہے۔ یوں مساوات 14.29 دائرے کی اندرون کو ظاہر کرتی ہے۔ ایسے دائری قرص²⁰ کو کھلا قرص²¹ کہتے ہیں جبکہ خطہ

$$(14.30) \quad |z - a| \leq \rho$$

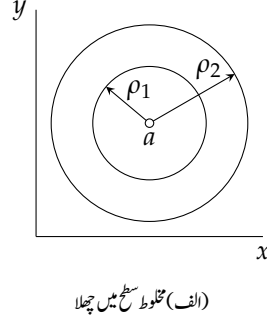
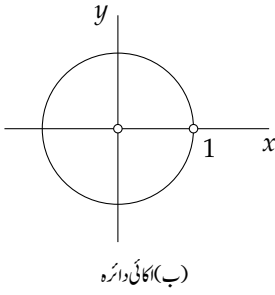
کو بند قرص²² کہتے ہیں جس میں دائرے کی اندرون کے ساتھ دائرے کی سرحد بھی شامل ہے۔ کھلا قرص (مساوات 14.29) کو نقطہ a کی پڑوس²³ بھی کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ a کی ایسی لامحدود تعداد کے پڑوس پائے جاتے ہیں جن کا $\rho (> 0)$ آپس میں مختلف ہو گا۔

circular disk²⁰

open disk²¹

closed disk²²

neighbourhood²³



شکل 14.7: مخلوط سطح میں چھلا اور اکائی دائرہ

اسی طرح عدم مساوات

$$(14.31) \quad |z - a| > \rho$$

دائرے کی بیرون کو ظاہر کرتی ہے۔ مزید رداں ρ_1 اور ρ_2 کے دو ہم مرکز دائروں (شکل 14.7-الف) کے درمیان خطے کو

$$(14.32) \quad \rho_1 < |z - a| < \rho_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں نقطہ a دائروں کا مرکز ہے۔ ایسا خطہ کھلا چھلا²⁴ کہلاتا ہے۔

درج ذیل مساوات اکائی دائرہ²⁵ (شکل 14.7-ب) کو ظاہر کرتی ہے۔ اکائی دائرے کا رداں اکائی اور مبدا اس کا مرکز ہو گا۔ اکائی دائرہ مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 14.5: دائری قرص

مخلوط سطح میں $|z - 2 + i4| \leq 9$ کی خطہ کو ظاہر کرتی ہے۔

حل: یہ عدم مساوات ان تمام z کو ظاہر کرتی ہے جن کا نقطہ $2 - i4$ سے فاصلہ، 9 سے زیادہ نہیں ہے۔ یوں یہ اس بند قرص کو ظاہر کرتی ہے جس کا مرکز $2 - i4$ ہے۔

□

مثال 14.6: اکائی دائرہ اور اکائی قرص

درج ذیل کن خطوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

open annulus²⁴
unit circle²⁵

$$(الف) \quad |z| < 1 \quad (ب) \quad |z| \leq 1 \quad (پ) \quad |z| > 1$$

حل: (الف) اکائی دائرے کی اندرون یعنی اکائی کھلا دائرہ۔

(ب) اکائی دائرہ اور اس کی سرحد یعنی اکائی بند دائرہ۔

(پ) اکائی دائرے کی بیرون۔

□

یہ ضروری ہے کہ طلبہ و طالبات مخلوط سطح پر منحنیوں اور خطوں کی اظہار کو اچھی طرح سمجھیں۔ اس لئے موجودہ حصے کی سوالات کو زیادہ غور سے حل کریں تاکہ آگے آپ کی مشکل کچھ آسان ہو سکے۔

ہم اب چند اصطلاحات کی تعریف بیان کرتے ہیں جو آگے استعمال کی جائیں گی۔

مخلوط سطح میں نقطوں کے سلسلہ²⁶ سے مراد محدود یا لامحدود تعداد کی نقطے ہیں۔ مثال کے طور پر دو درجی الجبرائی مساوات کے حل، کسی لکیر پر نقطوں کا سلسلہ، اور کسی دائرے کے اندر نقطوں کا سلسلہ۔

اگر سلسلہ S کے ہر نقطے کا ایسا پڑوس ہو جس کا ہر نقطہ بھی S کا حصہ ہو تب S کھلا²⁷ سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی دائرے یا کعب کے اندرون تمام نقطے مل کر کھلا سلسلہ بناتے ہیں۔ اسی طرح دایاں آدھی سطح $x > 0$ کے تمام نقطے کھلا سلسلہ ہیں۔ کسی دائرے کے اندر اور دائرے کی سرحد پر نقطے کھلا سلسلہ نہیں بناتے ہیں چونکہ دائرے کی سرحد پر نقطوں کا ایسا کوئی پڑوس نہیں پایا جاتا ہے جس کے تمام نقطے اس سلسلے کا حصہ ہوں۔

مخلوط سطح میں ایسا سلسلہ جس کا متمم کھلا سلسلہ ہو، بند سلسلہ²⁸ ہو گا۔ مخلوط سطح میں سلسلہ S کا متمم²⁹، مخلوط سطح میں ان تمام نقطوں کا سلسلہ ہو گا جو S کا حصہ نہ ہوں۔ مثال کے طور پر اکائی دائرے کے اندر اور اکائی دائرے پر نقطوں کا سلسلہ بند سلسلہ ہے۔

ایک سلسلہ جس کے تمام نقطے حسب ضرورت بڑے رداس کی دائرے میں پائے جاتے ہوں محدود³⁰ سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی کعب کے اندر نقطے محدود سلسلہ ہیں جبکہ کسی لکیر پر نقطے محدود سلسلہ نہیں ہیں۔

ایک سلسلہ S جس کے ہر دو نقطوں کو محدود تعداد کے ایسے قطعات سے آپس میں ملایا جاسکتا ہو جن کا ہر نقطہ S کا حصہ ہو، جڑا³¹ سلسلہ کہلاتا ہے۔

set of points²⁶

open²⁷

closed²⁸

complement²⁹

bounded³⁰

connected³¹

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 1.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 1.7-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات 1.7 کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 1.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 1.7-الف کو مساوات 1.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.5 اور مساوات 1.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

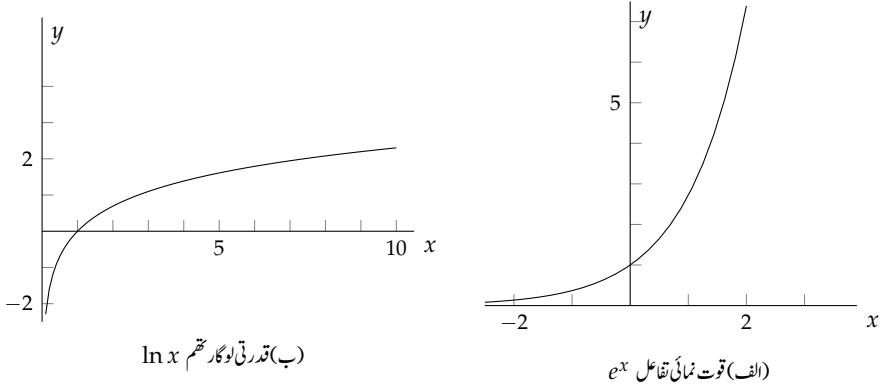
$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

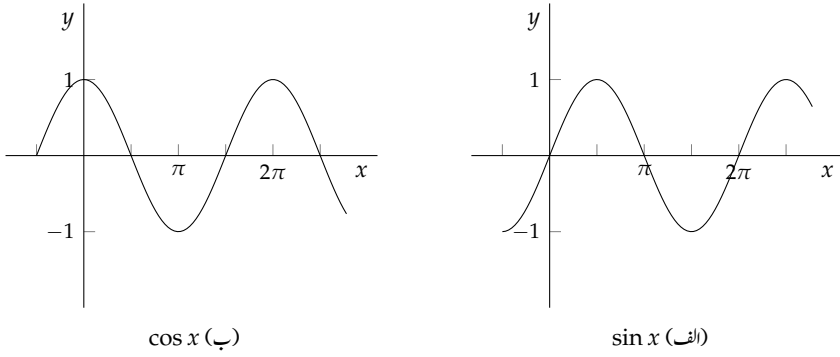
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

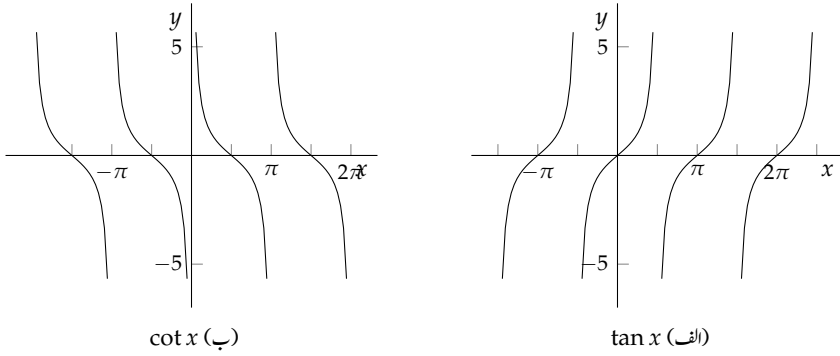
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

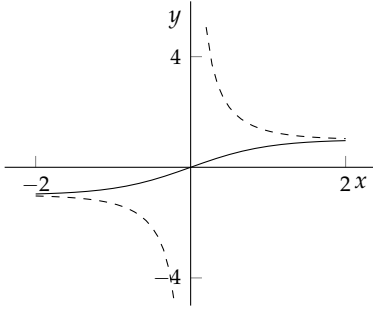
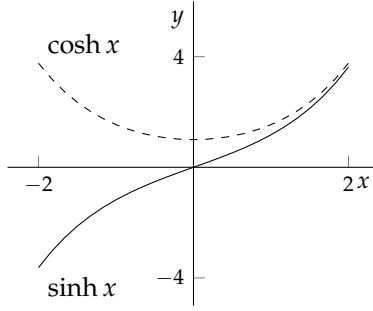
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

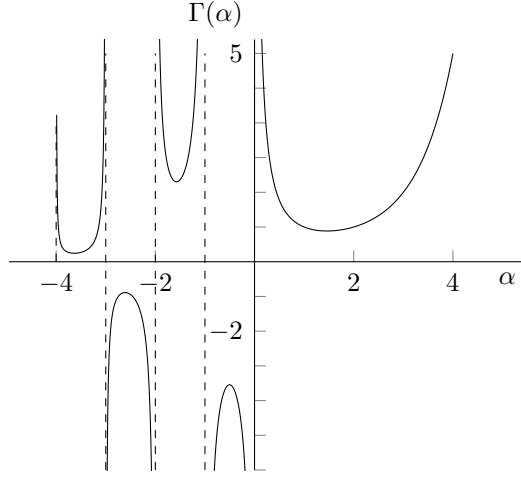
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

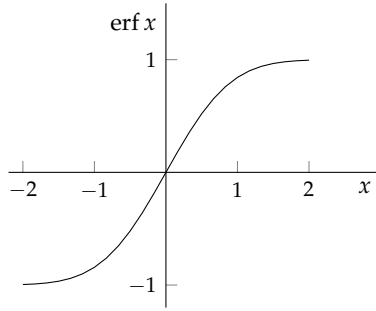
$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

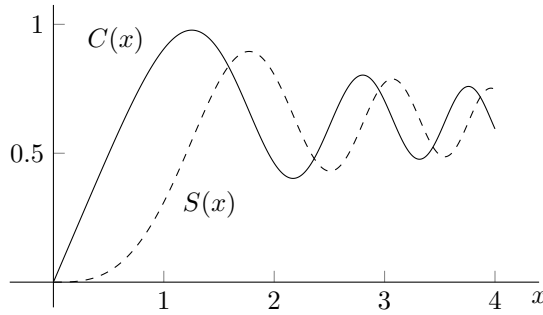
$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

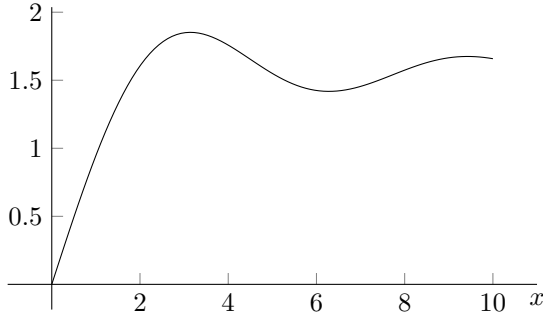
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Si $\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

