انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

درج ذیل مثال عملاً اہم قیاس کے پرکھ کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 24.23: (معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ)
فرض کریں کہ X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے۔نمونی جسامت $n = 10$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = \mu_0 = 24$ کو درج ذیل تین متبادل کے بالمقابل پرکھیں۔

$$\text{(الف)}\ \mu > \mu_0 \quad \text{(ب)}\ \mu < \mu_0 \quad \text{(پ)}\ \mu \neq \mu_0$$

حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 0.05$ منتخب کرتے ہیں۔اوسط کی اندازاً قیمت درج ذیل سے حاصل ہو گی۔

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots, X_n)$$

اگر قیاس درست ہو تب X عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 24$ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n} = 0.9$ ہو گی (مسئلہ 24.20)۔لہٰذا ہم فاصل قیمت c کو ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے حاصل کر سکتے ہیں۔
صورت الف: ہم $P(\overline{X} \leq c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$ سے c تعین کرتے ہیں۔

$$P(\overline{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{c-24}{\sqrt{0.9}} = 1.645$ یعنی $c = 25.56$ حاصل ہوتا ہے جو μ_0 سے بڑی قیمت ہے (اور جو شکل 24.20 میں سب سے اوپر دکھائی گئی صورت ہے)۔ اگر $\overline{x} \leq 25.56$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جائے گا۔ اگر $\overline{x} > 25.56$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جائے گا۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\eta(\mu) &= P(\overline{X} > 25.56)_\mu = 1 - P(\overline{X} \leq 25.56)_\mu \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{25.56-\mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu)\end{aligned} \tag{24.139}$$

صورت ب: فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$P(\overline{X} \leq c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $c = 24 - 1.56 = 22.24$ ملتا ہے۔اگر $\overline{x} \geq 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔اگر $\overline{x} < 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\eta(\mu) = P(\overline{X} \leq 22.44)_\mu = \Phi\Big(\frac{22.44 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = \Phi(23.65 - 1.05\mu) \tag{24.140}$$

صورت پ: چونکہ عمومی تقسیم تشاکلی ہے، ہم $\mu = 24$ سے c_1 اور c_2 کو ایک جیسے فاصلے پر چن کر، مثلاً $c_1 = 24 - k$ اور $c_2 = 24 + k$ ، مستقل k کو درج ذیل سے تعین کرتے ہیں۔

$$P(24 - k \leq \overline{X} \leq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے $\frac{k}{\sqrt{0.9}} = 1.960$ یعنی $k = 1.86$ حاصل ہو گا۔یوں $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$ اور $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$ ہوں گے۔اگر $\overline{x}$ کی قیمت c_1 سے چھوٹی نہ ہو اور c_2 سے بڑی نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔اس کے علاوہ ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\eta(\mu) &= P(\overline{X} < 22.14)_\mu + P(\overline{X} > 25.86)_\mu \\ &= P(\overline{X} < 22.14)_\mu + 1 - P(\overline{X} \leq 25.86)_\mu \\ &= 1 + \Phi\Big(\frac{22.14 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{25.86 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) \\ &= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu)\end{aligned} \tag{24.141}$$

نتیجتاً خاصیت کارکردگی $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$ درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Phi\Big(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) \\ &= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu)\end{aligned}$$

شکل سے ظاہر ہے کہ $n = 10$ کی خاصیت کارکردگی کی مطابقتی منحنی کی ڈھلوان زیادہ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ n بڑھانے سے بہتر پرکھ حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی عملی استعمال میں n کو کم سے کم لیکن اتنا زیادہ رکھا جاتا ہے کہ پرکھ μ اور μ_0 میں انحراف، جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں، کو واضح کرے۔ مثال کے طور پر اگر انحراف ہماری دلچسپی ∓ 2 اکائی ہو، ہم شکل سے دیکھتے ہیں کہ $n = 10$ بہت کم ہو گا چونکہ جب $\mu = 24 - 2 = 22$ یا $\mu = 24 + 2 = 26$ ہو تب β تقریباً 50 % ہو گا۔اس کے برعکس ، $n = 100$ اس صورت کافی ہو گا۔ □

مثال 24.24: **نا معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ**
رسی کی تنشی مضبوطی $n = 16$ کا نمونہ لے کر ناپی گئی۔ نمونی اوسط $\overline{x} = 4482\,\mathrm{kg}$ اور نمونی معیاری انحراف $s = 115\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوئے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تنشی مضبوطی عمومی بلا منصوبہ متغیر ہے۔ قیاس $\mu_0 = 4500\,\mathrm{kg}$ کو متبادل $\mu_1 = 4400\,\mathrm{kg}$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ یہاں μ_0 وہ قیمت ہو سکتی ہے جو پیداکار نے فراہم کی ہو جبکہ μ_1 سابقہ تجربات کا نتیجہ ہو سکتا ہے۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو تب مسئلہ 24.21 کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n}\ \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} = 4\ \frac{\overline{X} - 4500}{S}$$

کا t تقسیم $n - 1 = 15$ درجہ آزادی کا ہو گا۔ فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول 6.ج سے $c = -1.75$ حاصل ہو گا۔ نمونہ سے T کی مشاہدہ سے حاصل قیمت $t = \frac{4(4482-4500)}{115} = -0.626$ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $t > c$ ہے لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہمیں مزید جدول بند قیمتیں درکار ہوں گی جن پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔ □

مثال 24.25: **(عمومی تقسیم کی تغیریت کی پرکھ)**
عمومی آبادی کے $n = 15$ جسامت اور نمونی تغیریت $s^2 = 13$ کے نمونہ سے قیاس $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$ کو متبادل $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$ میں مقابلے میں پرکھیں۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر قیاس درست ہو تب

$$Y = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} = 14\frac{S^2}{10} = 1.4S^2$$

کا مربع خا تقسیم $n - 1 = 14$ درجہ آزادی کا ہو گا (مسئلہ 24.22)۔ ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل سے 14 درجہ آزادی کے لئے $c = 23.68$ حاصل ہو گا

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05 \quad \implies \quad P(Y \le c) = 0.95$$

جو Y کی فاصل قیمت ہے۔یوں $S^2 = \frac{\sigma_0^2 Y}{n-1} = 0.714Y$ کا **مطابقتی فاصل قیمت** $c^* = 0.714 \cdot 23.68 = 16.91$ ہو گا۔چونکہ $s^2 < c^*$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں،

اگر متبادل درست ہو تب متغیر

$$Y_1 = 14\frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7S^2$$

کے مربع خا تقسیم کا درجہ آزادی 14 ہو گا۔یوں ہمارے پرکھ کی طاقت

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \le 11.84)_{\sigma^2 20} \approx 62\,\%$$

ہو گی اور ہم دیکھتے ہیں قسم دوم غلطی کا امکان (جو $38\,\%$ ہے) بہت زیادہ ہے جس کو کم کرنے کے لئے نمونی جسامت بڑھانی ضروری ہے۔ □

مثال 24.26: دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا آپس میں موازنہ

نا معلوم اوسط μ_1 کی عمومی تقسیم کا نمونہ $x_1, \cdots, x_{n1}$ اور دوسری عمومی تقسیم جس کی اوسط μ_2 نا معلوم ہو کا نمونہ $y_1, \cdots, y_{n2}$ استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل مثلاً $\mu_1 > \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھنا چاہتے ہیں۔تغیرات جاننا ضروری نہیں ہے لیکن انہیں ایک جیسا[163] تصور کیا جاتا ہے۔دو صورتیں عملاً اہم ہیں۔

پہلی صورت: نمونوں کی جسامت ایک جیسی ہے۔مزید پہلے نمونہ کی ہر قیمت کا دوسرے نمونہ میں مطابقتی ٹھیک ایک قیمت پایا جاتا ہے، چونکہ مطابقتی قیمتیں ایک ہی انسان یا چیز کی بدولت پائی جاتی ہیں (**جوڑی دار موازنہ**[164])؛مثال کے طور پر ایک ہی چیز کی دو مختلف طریقوں سے ناپ، یا ایک ہی جانور کی دو آنکھوں کی ناپ، یا زیادہ عمومی طور پر جہاں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نمونوں کی جوڑی قیمتیں ایک جیسے انسانوں یا چیزوں (مثلاً جڑواں بھائی، گاڑھی کے اگلے ٹائر، وغیرہ) سے حاصل کی گئی ہوں۔تب ہم مطابقتی قیمتوں کا فرق لے کر، مثال 24.24 میں دی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، اس قیاس کو پرکھیں گے کہ ان فرق کی مطابقتی آبادی کی اوسط 0 ہے۔اگر ممکن ہو تب ہم اسی ترکیب کو استعمال کریں گے ورنہ ہمیں درج ذیل ترکیب استعمال کرنی ہو گی۔

دوسری صورت: دونوں نمونے غیر تابع ہیں اور ان کی جسامت مختلف ہو سکتی ہے۔تب ہم درج ذیل طریقے سے بڑھتے ہیں۔فرض کریں کہ متبادل $\mu_1 > \mu_2$ ہے۔ہم معنی خیز سطح α منتخب کرتے ہیں۔ہم نمونی اوسط $\overline{x}$ ،

---

[163] اگر اگلے مثال کا پرکھ واضح کرے کہ تغیرات میں واضح فرق پایا جاتا ہے تب ایک جیسے $n_1 = n_2 = n$ ، مثلاً $n > 30$ منتخب کرتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ مساوات تخمیناً عمومی بلا منصوبہ متغیر، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے، کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے، اور مثال 24.23 کی طرز پر حل کریں۔

[164] paired comparison

$\overline{y}$ اور $(n_1-1)s_1^2$ ، $(n-1)s_2^2$ کا حساب کرتے ہیں جہاں s_1^2 اور s_2^2 نمونی تغیریت ہیں۔ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں n_1+n_2-2 درجہ آزادی لیتے ہوئے ہم c کو

$$P(T \le c) = 1-\alpha \tag{24.142}$$

سے تعین کرتے ہیں۔آخر میں ہم درج ذیل کا حساب کرتے ہیں۔

$$t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\ \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}} \tag{24.143}$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر قیاس درست ہو تب یہ t تقسیم کے n_1+n_2-2 درجہ آزادی کے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے۔اگر $t_0 \le c$ ہو تب قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔اگر $t_0 > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے۔

اگر متبادل $\mu_1 \ne \mu_2$ ہو تب مساوات 24.142 کی جگہ درج ذیل استعمال کیا جائے گا۔

$$P(T \le c_1) = 0.5\alpha, \quad P(T \le c_2) = 1-0.5\alpha \tag{24.142*}$$

دھیان رہے کہ ایک جیسی نمونی جسامت $n_1=n_2=n$ کے لئے مساوات 24.143 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$t_0 = \sqrt{n}\ \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_1^2-s_2^2}} \tag{24.144}$$

اس کی وضاحت کے لئے آئیں درج ذیل دو نمونوں پر غور کرتے ہیں جو ایک ہی کام میں دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی ہے۔

105	108	86	103	103	107	124	105
89	92	84	97	103	107	111	97

فرض کریں کہ مطابقتی آبادی عمومی ہے اور ان کی تغیریت ایک جیسی ہے۔آئیں قیاس $\mu_1=\mu_2$ کو متبادل $\mu_1 \ne \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ (تغیریت کی ایک جیسا ہونے کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔)

حل: ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\overline{x} = 105.125, \quad \overline{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000$$

ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔مساوات 24.142* میں $0.5\alpha = 2.5\,\%$ ، $1 - 0.5\alpha = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں 14 درجہ آزادی سے $c_1 = -2.15$ اور $c_2 = 2.15$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 24.144 میں $n = 8$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$t_0 = \frac{\sqrt{8} \cdot 7.625}{\sqrt{190.125}} = 1.56$$

چونکہ $c_1 \le t_0 \le c_2$ ہے ہم دونوں صورتوں میں ایک جیسی اوسط کے قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو نامنظور نہیں کرتے ہیں۔

پہلی صورت اس مثال پر لاگو ہوتی ہے چونکہ پہلی دونوں نمونوں کی پہلی نمونی قیمت ایک قسم کے کام کے لئے حاصل کی گئی۔اسی طرح دونوں نمونوں کی دوسری نمونی قیمت کسی دوسرے کام کے لئے حاصل کی گئی، وغیرہ۔یوں ہم ان نمونی قیمتوں کا مطابقتی فرق

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

اور مثال 24.24 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0$ پرکھ سکتے ہیں جہاں μ اس فرق کی اوسط ہے۔ہم اس کا منطقی متبادل $\mu \neq 0$ لیتے ہیں۔نمونی اوسط $\bar{d} = 7.625$ اور نمونی تغیریت $s^2 = 45.696$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$t = \frac{\sqrt{8}(7.625 - 0)}{\sqrt{45.696}} = 3.19$$

$P(T \le c_1) = 2.5\,\%$ ، $P(T \le c_2) = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 6.ج میں $n - 1 = 7$ درجہ آزادی سے $c_1 = -2.37$ اور $c_2 = 2.37$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم قیاس کو نامنظور کرتے ہیں چونکہ $t = 3.19$ معلوم شدہ c_1 اور c_2 کے بیچ نہیں پایا جاتا ہے۔اس طرح ہمارا موجودہ پرکھ، جو اسی نمونوں پر مبنی ہے لیکن زیادہ معلومات کو استعمال کرتا ہے، دکھاتا ہے کہ نتائج میں فرق کافی ہے۔ □

مثال 24.27: **(دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا موازنہ)**
گزشتہ مثال کے دو نمونے استعمال کرتے ہوئے قیاس $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو پرکھیں۔فرض کریں کہ مطابقتی آبادیاں عمومی ہیں اور تجربہ کی نوعیت سے متبادل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ہو گا۔
حل: ہم $s_1^2 = 106.125$ اور $s_2^2 = 84.000$ حاصل کرتے ہیں۔ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔ $P(V \le c) = 1 - \alpha = 95\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول 8.ج میں $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$

درجہ آزادی سے $c = 3.79$ تعین ہوتا ہے۔ہم آخر میں $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.26$ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $v_0 \leq c$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔اگر $v_0 > c$ ہوتا ہم اس کو نا منظور کرتے۔

قیاس درست ہونے کی صورت میں v_0 ایسے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے جس کی تقسیم درجہ آزادی $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ کی F **تقسیم**[165] ہے۔ (m, n) درجہ آزادی کے F تقسیم[166] کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہے

$$F(z) = \begin{cases} K_{mn} \int_0^z t^{\frac{m-2}{2}} (mt+n)^{-\frac{m+n}{2}} \,\mathrm{d}t & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \tag{24.145}$$

جہاں $K_{mn} = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$ ہے۔ □

سوالات

سوال 24.201: صفحہ 1554 پر جدول 24.6 میں امجد کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ سکہ منصفانہ ہے، یعنی خط اور شیر کا احتمال ایک جیسا ہے۔ $\alpha = 5\%$ منتخب کریں۔
جواب: اگر قیاس $p = 0.5$ درست ہو تب 4040 کوششوں میں خط کی تعداد $= X$ تقریباً عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 2020$ اور تغیریت $\sigma^2 = 1010$ ہو گی (حصہ 24.10)۔
$P(X \leq c) = \Phi(\frac{c-2020}{\sqrt{1010}}) = 0.95, \quad c = 2072 > 2048$ ہے لہذا قیاس نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.202: مشرف کا مواد استعمال کرتے ہوئے سوال 24.201 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.203: عمومیت تصور کرتے ہوئے اور $\sigma^2 = 4$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = 15.0$ کو متبادل (الف) $\mu = 12.0$ اور (ب) $\mu = 15.8$ کے بالمقابل پرکھیں۔نمونی جسامت 10 اور نمونی اوسط $\overline{x} = 14$ لیں جبکہ $\alpha = 5\%$ منتخب کریں۔
جواب: (الف) $c = 13.96 > 12.00$ ہے۔ قیاس کو نا منظور کریں۔
(ب) $c = 16.04 > 15.80$ ہے۔قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

[165] F-distribution
[166] انگلستانی ماہر جینیات رونلڈ ایلمر فشر [1890-1962]

سوال 24.204: اگر بڑی نمونی جسامت، مثلاً 100 ، استعمال کی جائے تب سوال 24.203 میں باقی مواد ($\overline{x} = 14$ ، $\alpha = 5\,\%$ ، وغیرہ) تبدیل کیے بغیر نتیجے میں کیا تبدیلی پیدا ہو گی؟

سوال 24.205: دو طرفہ پرکھ، $5\,\%$ سطح پر استعمال کرتے ہوئے سوال 24.203 میں خطہ نا منظوری تلاش کریں؟
جواب: $\mu < 13.76$ یا $\mu > 16.24$

سوال 24.206: سوال 24.203-الف میں پرکھ کی طاقت تلاش کریں۔

سوال 24.207: مثال 24.23-الف اور ب کی خاصیت کارکردگی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.208: دکھائیں کہ عمومی تقسیم میں قیاس $H_0 : \mu = \mu_0$ اور متبادل $H_1 : \mu = \mu_1$ کی پرکھ میں دو اقسام کی غلطیوں کو نمونی جسامت کافی بڑھا کر جتنا چاہیں کم (ما سوائے صفر کرنے کے) کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.209: $\mu = 0$ کو $\mu > 0$ کے بالمقابل سطح $\alpha = 5\,\%$ پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونہ $1, -1, 1, 3, -8, 6, 0$ لیں جو مصنوعی سیارہ ٹلسٹار کی 143 ویں گردش میں مدار سے مضرب 0.01 ریڈیئن انحراف ہے۔
جواب: $t = \sqrt{7}\frac{0.286-0}{4.31} = 0.18 < c = 1.94$ ہے لہٰذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.210: مثال 24.1 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0.80\,\text{cm}$ (ڈبے پر درج لمبائی) کو متبادل $\mu \neq 0.80\,\text{cm}$ کے مقابل پرکھیں۔ (عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ لیں۔)

سوال 24.211: ایک مشین ڈبوں میں فی ڈبہ $1000\,\text{g}$ تیل بھرتی ہے۔ آپ جاننا چاہتے ہیں کہ آیا $\alpha = 5\,\%$ سطح پر اوسط کی درکار کمیت $1000\,\text{g}$ سے تجاوز زیادہ ہے۔ اگر ایسا ہو تب مشین میں مطابقت پیدا کرنی ہو گی۔ ایک قیاس اور متبادل بنائیں اور انہیں پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونی جسامت 20 جس کی اوسط $996\,\text{g}$ اور معیاری انحراف $5\,\text{g}$ ہو استعمال کریں۔
جواب: متبادل $\mu \neq 1000$ ، $t = \sqrt{20}\frac{996-1000}{5} = -3.58 < c = -2.09$ (ضمیمہ ج جدول 6.ج درجہ آزادی 19)۔ قیاس $\mu = 1000\,\text{g}$ کو نا منظور کریں۔

سوال 24.212: ایک مخصوص ٹائر کی اوسط زندگی $32\,000\,\text{km}$ اور معیاری انحراف $4000\,\text{km}$ ہے۔ کیا ٹائر کا پیداکار یہ دعویٰ کر سکتا ہے کہ اس کے بنائے ہوئے ٹائروں کی اوسط زندگی $30\,000\,\text{km}$ سے زیادہ ہے۔ متبادل قیاس بناتے ہوئے اس کو $5\,\%$ سطح پر پرکھیں۔

سوال 24.213: برقی دباو کو بیک وقت دو عدد وولٹ پیما سے ناپا جاتا ہے۔ ان کے نتائج میں فرق

$$0.8, 0.2, -0.3, 0.1, 0.0, 0.5, 0.2$$

وولٹ ہے۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے کیا ہم $5\,\%$ سطح کے لحاظ سے کہہ سکتے ہیں کہ دونوں وولٹ پیما کی پیمانہ بندی[167] میں کوئی معنی خیز فرق نہیں پایا جاتا ہے۔

جواب: $\mu = 0$ کو متبادل $\mu \neq 0$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ $t = 2.11 < c = 2.37$ (درجہ آزادی 7)۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.214: ایک معیاری دوائی ایک مخصوص مرض میں مبتلا $70\,\%$ مریضوں کو صحتیاب کرتی ہے اور ایک نئی دوائی پہلے 200 مریضوں میں سے 148 کو صحتیاب کرتی ہے۔ کیا $\alpha = 5\,\%$ لیتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نئی دوائی زیادہ بہتر ہے؟

سوال 24.215: ماضی میں ایک مشین جو فی ڈبہ $25\,\mathrm{kg}$ چینی بھرتی تھی کا معیاری انحراف $0.4\,\mathrm{kg}$ تھا۔ قیاس $H_0 : \sigma = 0.4$ کو متبادل $H_1 : \sigma > 0.4$ کے بالمقابل پرکھیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے نمونی جسامت 10 جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.4$ ہو لیں اور $\alpha = 5\,\%$ منتخب کریں۔

جواب: $\alpha = 5\,\%, c = 16.92 > \frac{9 \cdot 0.5^2}{0.4^2} = 14.06$ ہے۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.216: فرض کریں کہ معیاری انحراف کسی مخصوص حد سے کم، مثلاً، 5 گھنٹوں سے کم، ہونے کی صورت میں بیٹری سے چلنے والی مشینوں میں تمام بیٹریوں کو مخصوص مدت کے بعد بیک وقت تبدیل کرنا کم مہنگا پڑتا ہے بہ نسبت ہر بیٹری کو اس وقت تبدیل کرنے کے جب وہ خراب ہو جائے۔ ایک موزوں پرکھ بنا کر اس قیاس کو پرکھیں۔ عرصہ زندگی کے 28 قیمتیں جن کا معیاری انحراف $s = 3.5$ گھنٹے ہو استعمال کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ لیں۔ عمومیت تصور کریں۔

سوال 24.217: تیل کی قسم A کو 9 ایک جیسی گاڑیوں میں ایک جیسے حالات میں استعمال کیا گیا جنہوں نے اوسط 20.2 کلومیٹر فی لٹر اور معیاری انحراف 0.5 دیا۔ انہیں حالات میں تیل کی بہتر قسم B کو اس جیسی 10 گاڑیوں میں استعمال کیا گیا جن سے اوسط 21.8 اور معیاری انحراف 0.6 حاصل ہوا۔ کیا B بہت بہتر نتائج دیتا ہے؟ اس قیاس کو $\alpha = 5\,\%$ پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کریں۔

جواب: $t_0 = \sqrt{\frac{10 \cdot 9 \cdot 17}{19}} \frac{21.8 - 20.2}{\sqrt{9 \cdot 0.6^2 + 8 \cdot 0.5^2}} = 6.3 > c = 1.74$ (درجہ آزادی 17 ہے۔)

---

[167] calibration

سوال 24.218: ماسوائے عرصہ زندگی، بلب A اور B ایک جیسے ہیں۔ایک خریدار دونوں قسم کے 100 بلب کو پرکھتا ہے۔قسم A کی اوسط عرصہ زندگی $1120\,\mathrm{h}$ اور معیاری انحراف $75\,\mathrm{h}$ جبکہ B کی اوسط $1064\,\mathrm{h}$ اور معیاری انحراف $82\,\mathrm{h}$ حاصل ہوتے ہیں۔ کیا عرصہ زندگی میں معنی خیز فرق پایا جاتا ہے؟ (عمومیت فرض کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ سطح پر پرکھیں۔)

سوال 24.219: نمونی جسامت 10 اور 16 اور تغیریت $s_1^2 = 50$ اور $s_2^2 = 30$ لیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ سطح پر قیاس $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو متبادل $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ کے بالمقابل پرکھیں۔
جواب: $v_0 = \frac{50}{30} = 1.67 < c = 2.59$ [درجہ آزادی $(9, 15)$ ہے۔] قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.220: دو نمونے $50, 90, 100, 90, 110, 80$ اور $110, 110, 120, 110, 130, 110, 120$ لوہے کی ڈھلائی کے دوران دو مختلف بالٹیوں میں دو مختلف وقتوں پر درجہ حرارت $(^\circ\mathrm{C})$ میں فرق دیتی ہیں۔ کیا پہلے نمونہ کی تغیریت دوسرے سے زیادہ ہے؟ عمومیت فرض کریں اور $\alpha = 5\,\%$ لیں۔

24.16 ضبط معیار

پیداوار کا کوئی بھی عمل اتنا ٹھیک نہیں ہوتا ہے کہ تمام پیداوار مکمل طور پر ایک جیسی ہو۔ بہت ساری معمولی، غیر قابو وجوہات کی بنا ان میں ہر صورت معمولی فرق پایا جاتا ہے جس کو امکانی فرق تصور کیا جا سکتا ہے۔یہ ضروری ہے کہ پیداوار کی درکار خاصیت کی قیمت درست ہو (مثلاً لمبائی، مضبوطی، یا جو بھی خاصیت کسی مخصوص صورت میں درکار ہو)۔ اس مقصد کے لئے اس قیاس کو پرکھا جاتا ہے کہ پیداوار درکار خاصیت، مثلاً $\mu = \mu_0$ ، رکھتے ہیں جہاں μ_0 درکار قیمت ہے۔اگر ایسا پوری کھیپ کی پیداوار (مثلاً، 100000 پیچوں کی کھیپ) کے بعد کیا جائے تب پرکھ ہمیں بتائے گا کہ پیداوار کتنی اچھی یا کتنی خراب ہے لیکن ظاہر ہے کہ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کوئی بہتری نہیں لا سکتے ہیں۔بہتری لانے کے لئے ضروری ہے کہ پرکھ دوران پیداوار کیا جائے۔ایسا عموماً مقررہ دورانیہ (مثلاً ہر 30 منٹ یا ہر گھنٹہ) بعد جاتا ہے اور اس کو **ضبط معیار**[168] کہتے ہیں۔ہر مرتبہ ایک جیسی جسامت (عملاً 3 یا 10 اجزاء) کا نمونہ لیا جاتا ہے۔قیاس نا منظور ہونے کی صورت میں عمل پیداوار روک کر اس وجہ کو تلاش کیا جاتا ہے جس کی بنا انحراف پیدا ہوا ہے۔

[168] quality control

اگر ہم عمل پیدا وار کو روک دیں اگرچہ سب ٹھیک چل رہا ہو تب ہم غلطی قسم اول کر رہے ہوں گے۔اگر خرابی کے باوجود ہم عمل پیداوار کو نا روکیں تب ہم غلطی قسم دوم کر رہے ہوں گے (حصہ 24.15)۔

ہر پرکھ کا نتیجہ کو ترسیمی صورت میں **نقشہ ضبط**[169] پر ظاہر[170] کیا جاتا ہے۔

اوسط کا نقشہ ضبط

شکل 24.22 میں نقشہ ضبط کی مثال دکھائی گئی ہے۔اوسط کے نقشہ ضبط پر **نچلی حد ضبط**[171] LCL ، **وسطی خط ضبط**[172] CL اور **بالائی حد ضبط**[173] UCL دکھائے گئے ہیں۔ یہ حدود مثال 24.23-پ میں فاصل قیمتوں c_1 اور c_2 کے مطابقتی ہیں۔جیسے ہم نمونی اوسط نچلی حد ضبط یا بالائی حد ضبط سے تجاوز کر جائے ہم قیاس کو نامنظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ عمل پیداوار "بے قابو" ہے، یعنی، ہم کہتے ہیں کہ عمل پیداوار میں تبدیلی رو نما ہوئی ہے۔جب بھی کوئی نقطہ حدود ضبط سے تجاوز کرے عمل پیداوار میں مداخلت کی ضرورت ہو گی۔

اگر ہم حدود ضبط ڈھیلے رکھیں تب ہم عمل پیداوار میں ناپسندیدہ تبدیلی کو پکڑ نہیں پائیں گے۔اس کے برعکس حدود ضبط بہت سخت رکھنے سے ہم بار بار عمل پیداوار کو روک کر ناپسندیدہ تبدیلی کی غیر موجود وجہ تلاش کرتے رہیں گے جس سے پیداوار بری طرح متاثر ہو گی۔عموماً معنی خیز سطح $\alpha = 1\,\%$ منتخب کی جاتی ہے۔صفحہ 1628 پر مسئلہ 24.20 اور ضمیمہ ج کی جدول 4.ج سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کی صورت میں اوسط کے مطابقتی حد ضبط

$$\text{LCL} = \mu_0 - 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{اور} \quad \text{UCL} = \mu_0 + 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{24.146}$$

ہوں گے۔یہاں فرض کیا گیا ہے کہ ہمیں σ معلوم ہے۔اگر σ نامعلوم ہو تب پہلی 20 یا 30 نمونوں کی معیاری انحراف حاصل کر کے ان کی اوسط کو σ کی تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل 24.22 میں اوسط کو لکیر سے جوڑا جاتا ہے جو محض نتائج کو واضح کرنے میں مدد دیتی ہے۔

---

[169] control chart
[170] امریکی ماہر شماریات والٹر انڈر و شوہارٹ [1891-1967] نے یہ نقشہ 1924 میں تجویز کیا جو معیار کو قابو کرنے میں انتہائی موثر ثابت ہوا ہے۔
[171] lower control limit (LCL)
[172] central control line (CL)
[173] upper control limit (UCL)

تغیریت کا نقشہ ضبط

اوسط کے ساتھ ساتھ عموماً تغیریت، معیاری انحراف یا سعت کو بھی قابو رکھا جاتا ہے۔عمومی تقسیم کی صورت میں معیاری انحراف کا نقشہ ضبط بناتے ہوئے مثال 24.25 میں استعمال ترکیب بروئے کار لاتے ہوئے حدود ضبط تعین کیے جا سکتے ہیں۔روایتی طور پر صرف بالائی حد ضبط استعمال کیا جاتا ہے۔مثال 24.25 سے یہ حد

$$\text{UCL} = \frac{\sigma^{2}c}{n-1} \tag{24.147}$$

ہو گا جہاں c کو مساوات

$$P(Y > c) = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad P(Y \le c) = 1 - \alpha$$

اور ضمیمہ ج کی جدول 7.ج (مربع خا تقسیم) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کیا جاتا ہے؛ یہاں نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ S^2 کی حاصل قیمت s^2 کا بالائی حد ضبط سے تجاوز کا احتمال α (5% یا 1%) ہے۔

اگر ہم تغیریت کے نقشہ ضبط میں نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط استعمال کرنا چاہیں تب یہ حدود

$$\text{LCL} = \frac{\sigma^2 c_1}{n-1}, \quad \text{UCL} = \frac{\sigma^2 c_2}{n-1} \tag{24.148}$$

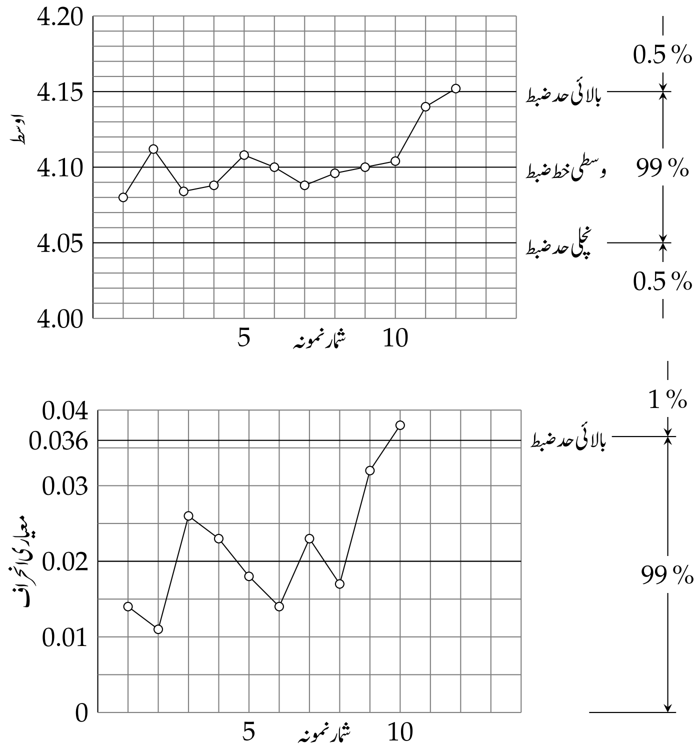
ہوں گے جہاں c_1 اور c_2 کو $n-1$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(Y \le c_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(Y \le c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \tag{24.149}$$

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط

تغیریت کے نقشہ ضبط کی طرح ہمیں بالائی حد ضبط

$$\text{UCL} = \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{n-1}} \tag{24.150}$$



شکل 24.22: اوسط اور معیاری انحراف کے نقشہ ضبط برائے جدول 24.12

جدول 24.12: بارہ نمونے جہاں ہر نمونہ 5 قیمتوں (چھوٹی نلکیوں کے ملی میٹروں میں قطر) پر مشتمل ہے

نمونی شمار	نمونی قیمتیں					$\overline{x}$	s	R
1	4.06	4.08	4.08	4.08	4.10	4.080	0.014	0.04
2	4.10	4.10	4.12	4.12	4.12	4.112	0.011	0.02
3	4.06	4.06	4.08	4.10	4.12	4.084	0.026	0.06
4	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
5	4.08	4.10	4.12	4.12	4.12	4.108	0.018	0.04
6	4.08	4.10	4.10	4.10	4.12	4.100	0.014	0.04
7	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
8	4.08	4.08	4.10	4.10	4.12	4.096	0.017	0.04
9	4.06	4.08	4.10	4.12	4.14	4.100	0.032	0.08
10	4.06	4.08	4.10	4.12	4.16	4.104	0.038	0.10
11	4.12	4.14	4.14	4.14	4.16	4.140	0.014	0.04
12	4.14	4.14	4.16	4.16	4.16	4.152	0.011	0.02

درکار ہو گا جس کو مساوات 24.147 سے حاصل کیا گیا ہے۔مثال کے طور پر جدول 24.12 میں $n = 5$ ہے۔مطابقتی آبادی کو عمومی تصور کرتے ہوئے جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.02$ ہو، $\alpha = 1\,\%$ منتخب کرتے ہوئے 4 درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول 7.ج اور مساوات

$$P(Y \le c) = 1 - \alpha = 99\,\%$$

سے فاصل قیمت $c = 13.28$ حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 24.150 سے

$$\text{UCL} = \frac{0.02\sqrt{13.28}}{\sqrt{4}} = 0.0365$$

حاصل ہو گا جس کو شکل 24.22 کے نچلے حصے میں دکھایا گیا ہے۔

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط جس میں بالائی حد ضبط اور نچلا حد ضبط پائے جاتے ہوں کو مساوات 24.148 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سعت کا نقشہ ضبط

اگر ہم σ^2 یا σ کو قابو رکھتے ہوں تب ہمیں بالترتیب s^2 یا s کا حساب کرنا ہو گا۔ایسا کرنا غیر تربیت یافتہ شخص کے لئے مشکل ہوتا ہے لہٰذا ہم تغیریت یا معیاری انحراف کی حد ضبط کی جگہ سعت $R =$ (نمونہ کی زیادہ

سے زیادہ قیمت منفی نمونہ کی کم سے کم قیمت) استعمال کرنا چاہیں گے۔ عمومی تقسیم کی صورت میں یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ معیاری انحراف σ کی قیمت بلا منصوبہ متغیر R^* کی توقع کے راست متناسب ہے جس کی مشاہدے سے حاصل قیمت R ہو، یعنی $\sigma = \lambda_n E(R^*)$ ، جہاں جزو λ_n کی قیمت نمونی جسامت پر منحصر ہے اور اس کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.89	0.59	0.49	0.43	0.40	0.37	0.35	0.34	0.32

n	12	14	16	18	20	30	40	50
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.31	0.29	0.28	0.28	0.27	0.25	0.23	0.22

چونکہ R صرف دو نمونی قیمتوں پر منحصر ہے لہٰذا یہ نمونے کے بارے میں s کے لحاظ سے کم معلومات فراہم کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ نمونی جسامت n جتنی بڑی ہو گی، s کی جگہ R استعمال کرنے سے، اتنی زیادہ معلومات ہم ضائع کریں گے۔ عملاً اگر n کی قیمت 10 سے زائد ہو تب s استعمال کیا جاتا ہے۔

دھیان رہے کہ سعت سے معیاری انحراف کا جلدی سے اندازہ لگانا عملی استعمال میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 24.221: ایک مشین چکنا تیل کو ٹین کی بوتل میں یوں بھرتی ہے کہ عمومی آبادی حاصل ہو جس کی اوسط 1 لٹر اور معیاری انحراف 0.03 لٹر ہو۔ اوسط کے لئے شکل 24.22 کی طرح نقشہ درکار ہے۔ نمونی جسامت 6 فرض کرتے ہوئے نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط تلاش کریں۔
جواب: نچلی حد ضبط $\text{LCL} = 1 - \frac{2.58 \cdot 0.03}{\sqrt{6}} = 0.968$ جبکہ بالائی حد ضبط $\text{UCL} = 1.032$

سوال 24.222: سوال 24.221 میں دکھائیں کہ $\alpha = 0.3\,\%$ سطح سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔ ان کی اعدادی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{LCL} = \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{UCL} = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

سوال 24.223: معنی خیز سطح تبدیل کیے بغیر ہمیں سوال 24.221 میں نمونی جسامت کتنی رکھنی ہو گی تا کہ بالائی اور نچلی حد ضبط قریب قریب ہوں، مثلاً $\text{UCL} - \text{LCL} = 0.05$
جواب: $n = 10$

سوال 24.224: اگر ہم غیر عمومی آبادی کے لئے مساوات 24.146 کے حدود ضبط والا نقشہ ضبط استعمال کریں تب ان حدود کا کیا مطلب ہو گا؟

سوال 24.225: عمومی آبادی کی اوسط قابو کرتے ہوئے $\text{UCL} - \text{LCL}$ کو نصف کرنے کی خاطر نمونی جسامت کو کس طرح تبدیل کرنا ہو گا؟
جواب: نمونی جسامت کو 4 گنا بڑھانا ہو گا۔

سوال 24.226: قابلوں کی پیداوار میں سے 2 جسامت کے 10 نمونے لئے گئے۔ان کی لمبائی ملی میٹروں میں درج ذیل ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لمبائی	27.4	27.4	27.5	27.3	27.9	27.6	27.6	27.8	27.5	27.3
	27.6	27.4	27.7	27.4	27.5	27.5	27.4	27.3	27.4	27.7

فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 27.5 اور تغیریت 0.024 ہے۔مساوات 24.146 استعمال کرتے ہوئے اوسط کے لئے نقش ضبط بنائیں اور نمونی اوسط اس پر ترسیم کریں۔
جواب: $\frac{2.58\sqrt{0.024}}{\sqrt{2}} = 0.283, \text{UCL} = 27.783, \text{LCL} = 27.217$

سوال 24.227: لوہے کی چادر موٹائی کے درج ذیل نمومے 30 منٹ کے وقفوں پر حاصل کیے گئے۔ان کی اوسط کو نقش ضبط پر ترسیم کریں۔فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 5 اور معیاری انحراف 1.55 ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
نمونی قیمتیں	3	3	5	7	7	4	5	6	5	5
	4	6	2	5	3	4	6	4	5	2
	8	6	5	4	6	3	4	6	6	5
	4	8	6	4	5	6	6	4	4	3

سوال 24.228: سعت کے نقشہ ضبط پر سوال 24.227 کے نمونی سعت کو ترسیم کریں۔

سوال 24.229: $\lambda_n = \frac{\sigma}{E(R^*)}$ بالمقابل n ترسیم کریں۔ λ_n متغیر n کا یک سر گھٹتا تفاعل ہے۔اس کی وجہ بیان کریں۔

سوال 24.230: حدود ضبط کے باہر اوسط کا نقطہ نظام میں خرابی کو ظاہر کرتی ہے۔اگر ہم (الف) 1σ حد، (ب) 2σ حد، منتخب کریں تب ہم کتنی بار نظام میں غیر موجود خرابی کو تلاش کرنے کی کوشش کریں گے۔(عمومیت فرض کریں۔)

جواب: تقریباً 30% (5%) صورتوں میں

سوال 24.231: ایک خود کار خراد کی مشین پر قابلے بنائے جاتے ہیں۔ مسلسل رگڑ سے پیدا تبدیلی، اوسط کی نقش ضبط پر کس طرح رونما ہو گی؟ خراد کی مشین میں یک دم تبدیلی کس طرح نقش ضبط پر نظر آئے گی؟

سوال 24.232: **(عیب داروں کی تعداد)** 3σ حدود ضبط کے لحاظ سے UCL ، CL اور LCL کے کلیات عیب دار کے نقشہ ضبط کے لئے تلاش کریں۔(فرض کریں کہ شماریاتی ضبط میں p عیب دار کو ظاہر کرتا ہے۔)

$$\text{UCL} = np + 3\sqrt{np(1-p)}, \text{CL} = np, \text{LCL} = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

سوال 24.233: **خاصیت کی نقش ضبط** برتنوں کی پیداوار سے جسامت 100 کے نمونے حاصل کیے گئے۔عیب دار (رستا برتنوں) کی تعداد (اسی ترتیب سے) درج ذیل تھی۔

3 7 6 1 4 5 4 9 7 0 5 6 13 4 9 0 2 1 12 8

گزشتہ تجربہ سے ہم جانتے ہیں کہ اگر عمل پیداوار میں خرابی نہ ہو تب عیب دار کی اوسط تعداد $p\%$ ہوتی ہے۔ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے عیب دار نقشہ ضبط (جس کو p نقشہ بھی کہتے ہیں) بنائیں، یعنی، $\text{LCL} = 0$ لیں اور 3σ حدود کے لئے حاصل عیب دار (فی صد) کو UCL لیں، جہاں بلا منصوبہ متغیر $\overline{X}$ = نمونہ میں فی صد عیب دار کی تغیریت σ^2 ہے۔کیا عمل پیداوار قابو میں ہے؟

سوال 24.234: **فی اکائی عیب دار کی تعداد** فی اکائی عیب دار کے نقشہ (جس کو c نقشہ بھی کہتے ہیں) کو فی اکائی عیب دار X (مثلاً 10 میٹر کاغذ میں عیبوں کی تعداد، جہاز کے ایک پر میں غیر موجود کیلوں کی تعداد، وغیرہ) کو قابو کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔(الف) X کی تقسیم کو پوئسن تقسیم تصور کرتے ہوئے $\mu \mp 3\sigma$ کے لحاظ سے CL ، LCL اور UCL کے کلیات بنائیں۔(ب) شیشے کی چادر میں عیب کے لئے **عمل قابو**[174] کے لئے CL ، LCL اور UCL تلاش کریں؛ فرض کریں کہ جب عمل پیداوار شماریاتی قابو میں ہو تب اوسطاً یہ عدد 2.5 فی چادر ہے۔

---

[174] control process

24.17 قبولیت نمونہ

بڑے پیمانہ پر پیداوار میں، جہاں پیداکار خریدار کو N اشیاء کی کھیپ مہیا کرتا ہے، قبولیت نمونہ لاگو کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں ہر کھیپ کو قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ کرنا ہو گا۔ کھیپ سے n جسامت کے نمونے کا معائنہ کرتے ہوئے **عیب دار اشیاء**، جنہیں مختصراً **عیب دار**[175] کہتے ہیں، کی تعداد کو مد نظر رکھ کر عموماً فیصلہ کیا جاتا ہے۔ جو اشیاء درکار تخصیص (بیان کردہ خواص، مثلاً جسامت، رنگ، مضبوطی، یا جو بھی اہمیت رکھتا ہو) پر پورا نہیں اترتے ہیں، انہیں عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔ اگر نمونہ میں عیب دار اشیاء کی تعداد x طے شدہ عدد $c\,(<n)$ سے زیادہ نہ ہو تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اگر $x>c$ ہو تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔ c کو عیب دار کی قابل قبول تعداد یا **تعداد قبولیت**[176] کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ پیدا کار اور خریدار کو **نمونی منصوبہ**[177] پر اتفاق کرنا ہو گا، یعنی، نمونی جسامت n کی قیمت اور تعداد قبولیت c کی قیمت۔چونکہ یہ ایک نمونہ پر منحصر ہے لہٰذا اس کو **واحد نمونی منصوبہ**[178] کہتے ہیں۔ **دوہرا نمونی منصوبہ** پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

فرض کریں کہ کھیپ قبول ہونے کا وقوعہ A ہے۔ظاہر ہے کہ مطابقتی احتمال $P(A)$ نا صرف n اور c بلکہ کھیپ میں عیب داروں کی تعداد M پر بھی منحصر ہے۔فرض کریں کہ نمونہ میں عیب داروں کی تعداد بلا منصوبہ متغیر X ہے اور ہم بغیر واپس رکھے نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ تب (حصہ 24.9)

$$P(A)=P(X\le c)=\sum_{x=0}^{c}\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{24.151}$$

ہو گا۔اگر $M=0$ (کھیپ میں کوئی عیب دار نہیں ہے) ہو تب X کی قیمت لازماً 0 ہو گی اور

$$P(A)=\frac{\binom{0}{0}\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}}=1$$

ہو گا۔مقررہ n اور c اور بڑھتے M کی صورت میں احتمال $P(M)$ گھٹتا ہے۔اگر $M=N$ (کھیپ میں تمام اشیاء عیب دار) ہو، تب X کی قیمت لازماً n ہو گی اور $P(A)=P(X\le c)=0$ ہو گا چونکہ $c<n$ ہے۔

---

[175] defectives
[176] acceptance number
[177] sampling plan
[178] single sampling plan

نسبت $\theta = \frac{M}{N}$ کو کھیپ میں **نسبت عیب دار**[179] کہتے ہیں۔دھیان رہے کہ $M = N\theta$ ہے اور مساوات 24.151 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P(A;\theta) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{N\theta}{x}\binom{N-N\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{24.152}$$

چونکہ θ کی قیمت $N+1$ قیمتوں $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, \frac{N}{N}$ میں سے ایک ہو سکتی ہے، احتمال $P(A)$ صرف ان قیمتوں کے لئے معین ہو گا۔مقررہ n اور c کے لئے ہم $P(A)$ بالمقابل θ ترسیم کر سکتے ہیں۔یہ $N+1$ نقطے ہوں گے۔ان نقطوں سے ہموار منحنی گزاری جا سکتی ہے جس کو مد نظر نمونی منصوبہ کی **منحنی خاصیت کارکردگی**[180] (OC) کہتے ہیں۔

مثال 24.28: ایک مخصوص قسم کی ورموں کو 20 فی ڈبیا بند کیا جاتا ہے اور مذکورہ زیر نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ 2 ورموں کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے اور دونوں ورمے غیر عیب دار ہونے کی صورت میں ڈبے کو قبول کیا جاتا ہے۔یہاں $N = 20$ ، $n = 2$ ، $c = 0$ ہیں لہٰذا مساوات 24.152 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$P(A;\theta) = \frac{\binom{20\theta}{0}\binom{20-20\theta}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{(20-20\theta)(19-20\theta)}{380}$$

اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

θ	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	$\cdots$
$P(A;\theta)$	1.00	0.90	0.81	0.72	0.63	$\cdots$

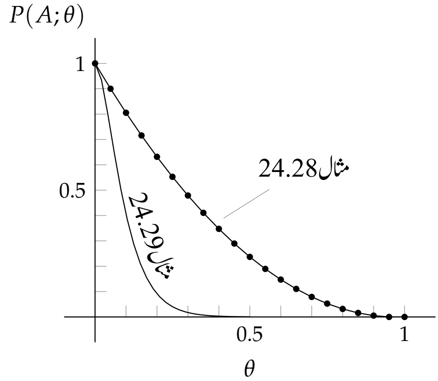
منحنی خاصیت کارکردگی کو شکل 24.23 میں دکھایا گیا ہے۔ □

عملی صورتوں میں عموماً θ چھوٹا ہو گا (10% سے کم)۔ عموماً صورتوں میں جسامت کھیپ N بہت بڑا (1000 ، 10000 ، وغیرہ) ہو گا لہٰذا ہم مساوات 24.151 اور مساوات 24.152 میں بیش ہندسی تقسیم کو تخمیناً ثنائی تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں جس میں $p = \theta$ لیا جائے گا۔اب اگر n ایسا ہو کہ $n\theta$ معتدل (مثلاً 20 سے کم) ہو، تب ہم اس تقسیم کو $\mu = np$ اوسط کی پوئسن تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں۔یوں مساوات 24.152 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(A;\theta) \sim e^{-\mu} \sum_{x=0}^{c} \frac{\mu^x}{x!} \qquad (\mu = n\theta) \tag{24.153}$$

---

fraction defective[179]
operating characteristic curve[180]



شکل24.23: منحنیات خاصیت کارکردگی برائے مثال24.28اور مثال24.29

مثال 24.29: فرض کریں کہ بری کھیپ کے لئے مذکورہ ذیل واحد نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ $n = 20$ نمونہ لیا جاتا ہے۔اگر اس میں 1 سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اگر نمونہ میں 2 یا اس سے زیادہ عیب دار ہوں تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔اس منصوبہ میں مساوات 24.153 درج ذیل دیتا ہے

$$P(A;\theta) \sim e^{-20\theta}(1+20\theta)$$

جس کی مطابقتی منحنی شکل 24.23 میں دکھائی گئی ہے۔ □

ہم اب قبولیت نمونہ میں دو اقسام کے غلطیوں پر غور کرتے ہیں اور n اور c منتخب کرنے کی تفصیل پیش کرتے ہیں۔قبولیت نمونہ میں پیداکار اور خریدار کے غرض مختلف ہوں گے۔پیداکار چاہے گا کہ "اچھی" یا "قابل قبول" کھیپ کی مسترد ہونے کا احتمال، جس کو ہم α سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ خریدار چاہے گا کہ "خراب" یا "نا قابل قبول" کھیپ کے قبول ہونے کا احتمال، جس کو ہم β سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ دونوں اس پر اتفاق کرتے ہیں کہ جس کھیپ کے لئے θ کی قیمت ایک مخصوص عدد θ_0 سے تجاوز نہ کرے تب کھیپ "قابل قبول" ہو گا جبکہ وہ کھیپ جس کے لئے θ کی قیمت ایک مخصوص عدد θ_1 کے برابر یا اس سے زیادہ ہو تب کھیپ "نا قابل قبول" ہو گا۔تب وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \leq \theta_0$ ہو کے مسترد ہونے کا احتمال α ہو گا جس کو **خطرہ پیداکار**[181] کہتے ہیں۔یہ قیاس کی پرکھ کی قسم اول غلطی کے مترادف ہے (حصہ 24.15)۔ وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \geq \theta_1$ ہو کے قبول ہونے کا احتمال β ہو گا جس کو **خطرہ خریدار**[182]

[181] producer's risk
[182] consumer's risk

جدول 24.13: پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ کا تعلق

معائنہ نمونہ	پرکھ قیاس
قابل قبول سطح معیار $\theta = \theta_0$	قیاس $\theta = \theta_0$
قابل مسترد سطح معیار $\theta = \theta_1$	متبادل $\theta = \theta_1$
عیب دار کی قابل قبول تعداد c	فاصل قیمت c
$\theta \leq \theta_0$ کھیپ مسترد ہونے کا احتمال α (خطرہ پیداکار)	قسم اول غلطی کا احتمال α (معنی خیز سطح)
$\theta \geq \theta_1$ کھیپ قبول ہونے کا احتمال β (خطرہ خریدار)	قسم دوم غلطی کا احتمال β

کہتے ہیں۔یہ حصہ 24.15 میں قسم دوم غلطی کے مترادف ہے۔شکل میں ان کی وضاحت کی گئی ہے۔ θ_0 کو **قابل قبول سطح معیار**[183] اور θ_1 کو **قابل مسترد سطح معیار**[184] کہتے ہیں جبکہ کھیپ $\theta_0 < \theta < \theta_1$ کو **لا تعلق کھیپ**[185] کہتے ہیں۔

شکل سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $(\theta_0, 1-\alpha)$ اور نقطہ (θ_1, β) منحنی خاصیت کارکردگی پر پائے جاتے ہیں۔یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ بڑی کھیپ کے لئے ہم θ_0 ، $\theta_1\,(>\theta_0)$ ، α ، β منتخب کرتے ہوئے n اور c یوں تعین کر سکتے ہیں کہ منحنی خاصیت کارکردگی ان نقطوں کے قریب سے گزرتی ہو۔متعین α ، β ، θ_0 اور θ_1 کے لئے نمونی منصوبے شائع کیے گئے ہیں۔

پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ میں قریبی تعلق پایا جاتا ہے جس کو جدول 24.13 میں دکھایا گیا ہے۔

نمونی عمل ازخود خریدار کو مکمل تحفظ فراہم نہیں کرتا ہے۔درحقیقت اگر پیداکار کو اجازت ہو کہ وہ خراب کھیپ کو دوبارہ قبول ہونے کے لئے پیش کرے تب آخر کار خراب کھیپ بھی قبول ہو جائیں گے۔خریدار کو اس صورت حال سے بچانے کی خاطر پیداکار اس بات سے اتفاق کر سکتا ہے کہ مسترد کھیپ کو **سدھارا**[186] جائے گا یعنی اس کا 100 % معائنہ کرتے ہوئے ہر جزو کو پرکھا جائے گا اور کھیپ میں تمام عیب دار اشیاء کی جگہ بے عیب اشیاء رکھے جائیں گے[187]۔ فرض کریں ایک کارخانہ $100\theta\%$ عیب دار اشیاء بناتا ہے اور مسترد کھیپ کو سدھارا جاتا ہے۔ تب N جسامت کے K کھیپ میں KN اشیاء ہوں گے جن میں سے $KN\theta$ عیب دار ہوں گے۔کھیپوں میں سے $KP(A;\theta)$ قبول کیے جائیں گے؛ ان میں کل $KPN\theta$ عیب دار اجزاء ہوں گے۔مسترد اور سدھارے گئے کھیپ میں کوئی عیب دار جزو نہیں پایا جاتا ہے۔یوں سدھارنے کے بعد K کھیپ میں عیب دار کی تناسب

[183] acceptable quality level
[184] rejectable quality level
[185] indifferent lot
[186] rectified
[187] ظاہر ہے کہ اگر معائنہ سے اشیاء تباہ ہوتے ہوں یا ہر جزو کا معائنہ کرنا اشیاء کی قیمت سے زیادہ مہنگا پڑتا ہو تب ہر جزو کے معائنے کی بجائے مسترد کھیپ کو کم دام فروخت کیا جائے گا۔

$\frac{KPN\theta}{KN} = \theta P(A;\theta)$ ہو گا۔ θ کی اس تفاعل کو **اوسط خارجی معیار**[188] کہتے ہیں جس کو $\mathrm{AOQ}(\theta)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، یعنی:

$$\mathrm{AOQ}(\theta) = \theta P(A;\theta) \tag{24.154}$$

اگر نمونی منصوبہ دیا گیا ہو تب یہ تفاعل اور منحنی اوسط خارجی معیار کو $P(A;\theta)$ اور منحنی خاصیت کارکردگی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس کی مثال شکل میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ $\mathrm{AOQ}(0) = 0$ ہو گا۔چونکہ $P(A;1) = 0$ ہے لہٰذا $\mathrm{AOQ}(1) = 0$ ہو گا۔اس سے اور $\mathrm{AOQ}(\theta) \geq 0$ سے ہم یہ نتیجہ حاصل کرتے ہیں کہ کسی $\theta = \theta^*$ پر اس تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جس کی مطابقتی قیمت $\mathrm{AOQ}(\theta^*)$ کو **اوسط خارجی حد معیار**[189] کہتے ہیں۔ یہ خراب ترین معیار ہے جو سدھارنے کے عمل کے ساتھ قابل قبول ہو گا۔

average outgoing quality[188]
average outgoing quality limit[189]

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات 1.ا کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات 3.ا کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.ا-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.ا کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 5.ا کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\,z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات 7.ا-الف کو مساوات 5.ا کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\,y'^2 + |q|\,z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.ا اور مساوات 7.ا سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\,z + |q|\,z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8ا اور مساوات 1.9ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 10.ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 2.ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلی تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

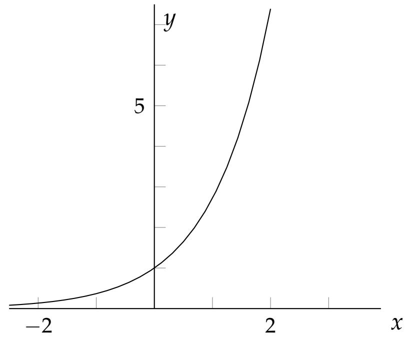
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

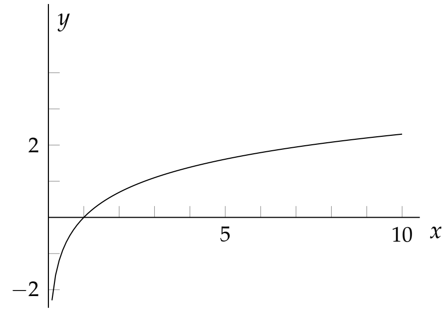
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

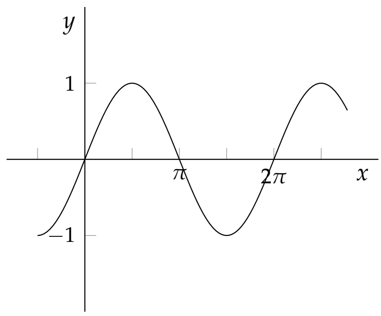


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

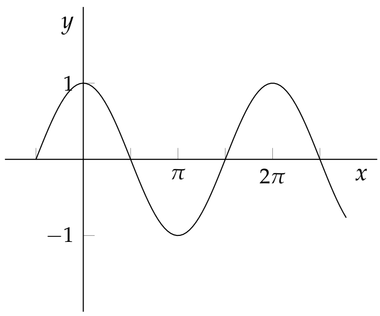


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$



(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{(ب.5)}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

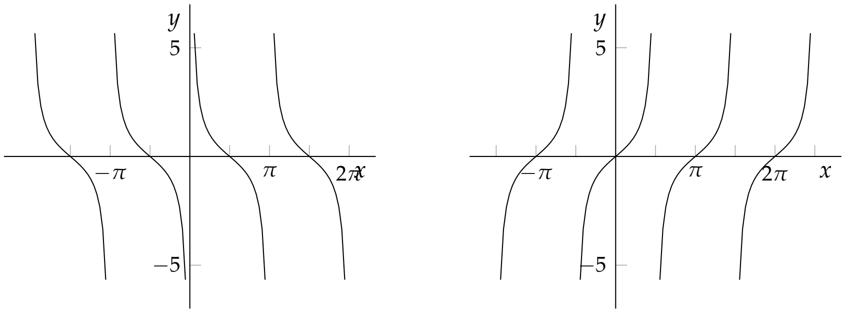
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$
\begin{gathered}
\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\
\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}
\end{gathered} \tag{ب.17}
$$

$$
\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}
$$

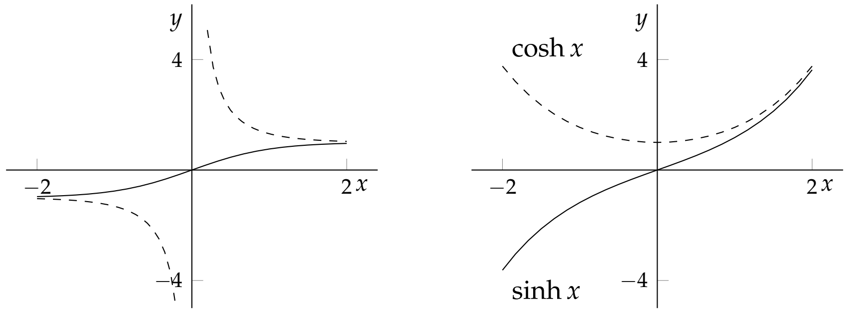
$$
\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y
\end{aligned} \tag{ب.20}
$$

$$
\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}
$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$
\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}
$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

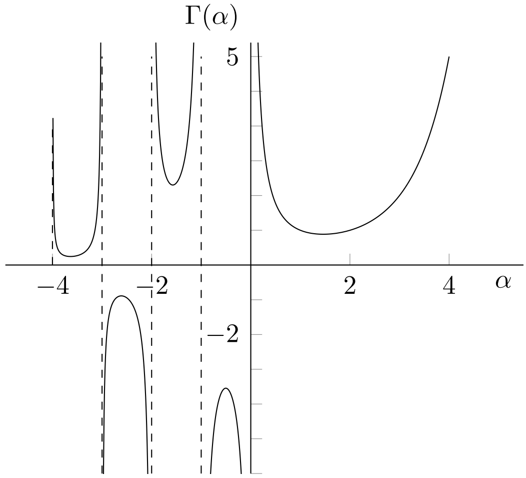
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

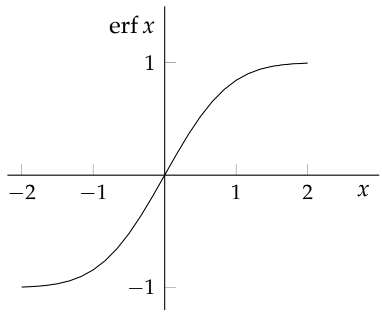
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

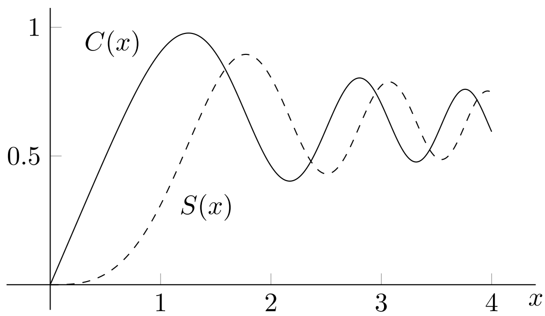
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{37.ب}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{38.ب}$$

تکمل سائن (شکل 8.ب)

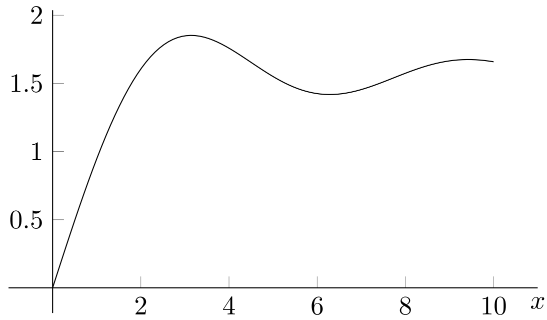
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{39.ب}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{40.ب}$$

---

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

ضمیمہ ج

جدول

جدول 1.ج: ثنائی تقسیم

جدول 2.ج: پوئسن تقسیم

جدول 3.ج: عمومی تقسیم

جدول 4.ج: عمومی تقسیم

جدول 5.ج: شبلا منصوبہ اعداد

جدول 6.ج: t تقسیم

جدول 7.ج: مربع خا تقسیم

جدول 8.ج: مربع ایف تقسیم