

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کثی	
13	1.2 $y = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ وروئسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کثی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

214 . . . . .	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
217 . . . . .	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
225	4	نظام تفرقی مساوات
226 . . . . .	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
235 . . . . .	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
250 . . . . .	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی
251 . . . . .	4.3.1	خطی نظام
254 . . . . .	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
272 . . . . .	4.5	نقطہ حاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام
281 . . . . .	4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام
290 . . . . .	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادل
298 . . . . .	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
299 . . . . .	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
309	5	طابق تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
310 . . . . .	5.1	ترکیب طاقی تسلسل
325 . . . . .	5.2	لیمنڈر مساوات۔ لیمنڈر کثیر رکنی
343 . . . . .	5.3	مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
348 . . . . .	5.3.1	عملی استعمال
362 . . . . .	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
377 . . . . .	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
385	6	لاپلاس متبادل
386 . . . . .	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
395 . . . . .	6.2	تفرقات اور نکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
408 . . . . .	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
429 . . . . .	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
447 . . . . .	6.5	الچھاؤ
456 . . . . .	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
465 . . . . .	6.7	تفرقی مساوات کے نظام
473 . . . . .	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی یکے
477	7	خطی الجبرا۔ سمتیات
478 . . . . .	7.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
488 . . . . .	7.2	قابلی ضرب
495 . . . . .	7.2.1	تبدیلی محل

7.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی استقاط . . . . . 508

7.3.1 صف زینہ دار صورت . . . . . 519

7.4 خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا . . . . . 527

ا اضافی ثبوت 377

ب منید معلومات 381

1.ب ا علی تفاعل کے مساوات . . . . . 381



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 7

### خطی الجبرا۔ سمتیات

خطی الجبرا وسیع مضمون ہے جس میں قالب اور سمتیات، مقطع قالب، خطی مساوات کے نظام، سمتی فضا اور خطی تبادلہ، آنگنی قیمت مسائل، اور دیگر موضوعات شامل ہیں۔ اس کا استعمال انجینئری، طبیعیات، جیومیٹری، کمپیوٹر سائنس، معاشیات اور دیگر میدانوں میں پایا جاتا ہے۔

متعدد اعداد و شمار یا متعدد تفاعل کو مربوط طریقے سے قالب<sup>1</sup> اور سمتیات<sup>2</sup> کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب اور سمتیات ہی خطی الجبرا کی زبان ہیں۔

---

matrices<sup>1</sup>  
vectors<sup>2</sup>

## 7.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

مستطیلی ترتیب وار فہرست کو قالب کہتے ہیں۔ درج ذیل قالب کی مثال ہیں۔ قالب میں درج اعداد یا تفاعل کو قالب کے اندراجات یا قالب کے ارکان<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

$$(7.1) \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -2 & 1.2 \\ -6 & 0 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ln x & -e^x \\ e^{3x} & 3.2x^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3.22 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

بالائی بائیں ہاتھ قالب کے ارکان 0.1، -2، 1.2، -6، 0 اور 23 ہیں۔ اس قالب کے دو صف<sup>4</sup> اور تین قطار<sup>5</sup> ہیں۔ افقی اندراجات کی لکیر کو صف اور عمودی اندراجات کی لکیر کو قطار کہتے ہیں۔ بالائی درمیانی قالب میں 3 صف اور 3 قطار پائے جاتے ہیں۔ ایسا قالب جس میں صفوں کی تعداد، قطاروں کی تعداد کے برابر ہو مربع قالب<sup>6</sup> کہلاتا ہے۔ یوں بالائی دائیں ہاتھ قالب بھی مربع قالب ہے۔ بالائی درمیانی قالب میں ارکان کو  $a_{mn}$  سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں دو عدد اشاریہ  $m$  اور  $n$  بالترتیب اس صف اور قطار کو ظاہر کرتے ہیں جہاں یہ رکن پایا جاتا ہو۔ قالب میں اندراجات کے مقام کی وضاحت اسی معیاری ترکیب سے کی جاتی ہے۔ یوں  $a_{23}$  رکن دوسرے صف اور تیسرے قطار میں پایا جاتا ہے۔

ایسا قالب جو صرف ایک عدد صف یا صرف ایک عدد قطار پر مشتمل ہو، سمتیہ<sup>7</sup> کہلاتا ہے۔ یوں نچلے دائیں ہاتھ دو ارکان پر مشتمل سمتیہ قطار<sup>8</sup> پایا جاتا ہے جبکہ نچلے بائیں ہاتھ سمتیہ صف<sup>9</sup> پایا جاتا ہے۔ چونکہ سمتیہ قطار میں کوئی صف نہیں پایا جاتا لہذا اس میں ارکان کے مقام کو صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح سمتیہ صف میں بھی ارکان کا مقام صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں سمتیہ قطار میں  $a_1 = 3.22$  اور  $a_2 = -\frac{4}{5}$  ہیں۔

عملی استعمال میں مواد کے ذخیرہ اور اس پر عمل کرنے میں قالب کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔ درج ذیل مثال دیکھیں

elements<sup>3</sup>  
rows<sup>4</sup>  
columns<sup>5</sup>  
square matrix<sup>6</sup>  
vector<sup>7</sup>  
column vector<sup>8</sup>  
row vector<sup>9</sup>

مثال 7.1: خطی نظام

درج ذیل خطی نظام میں  $x_1$ ،  $x_2$  اور  $x_3$  نامعلوم متغیرات ہیں۔

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 15$$

$$5x_1 + 3x_3 = 11$$

آئیں درج بالا نظام میں  $x_1$ ،  $x_2$  اور  $x_3$  کے عددی سروں سے عددی سر قالب  $A^{10}$  لکھیں۔  $A$  قالب میں ہر رکن کا مقام عین خطی مساوات کے مطابق ہو گا۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

چونکہ تیسری مساوات میں  $x_2$  نہیں پایا جاتا لہذا اس کا عددی سر صفر کے برابر ہو گا اور یوں  $A$  میں  $a_{32} = 0$  درج کیا گیا ہے۔ عددی سر قالب  $A$  میں مساوات کے دائیں ہاتھ کی معلومات کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب  $\tilde{A}^{11}$  ملتا ہے۔

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 15 \\ 5 & 0 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

چونکہ افزودہ قالب  $\tilde{A}$  سے تینوں مساوات لکھ جاسکتے ہیں لہذا دیے گئے خطی نظام کو  $\tilde{A}$  مکمل طور ظاہر کرتا ہے۔ یوں ہم  $\tilde{A}$  کو حل کرتے ہوئے نامعلوم متغیرات  $x_1$ ،  $x_2$  اور  $x_3$  حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنا جلد سمجھایا جائے گا۔ فی الحال تسلی کر لیں کہ اس نظام کا حل  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = -2$  اور  $x_3 = 2$  ہے۔

نامعلوم متغیرات کو  $x_1$ ،  $x_2$  اور  $x_3$  سے ظاہر کرنے کی بجائے دیگر علامتوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے مثلاً  $x$ ،  $y$  اور  $z$ ۔

coefficient matrix<sup>10</sup>  
augmented matrix<sup>11</sup>

مثال 7.2: فروخت کھانا

$$A = \begin{bmatrix} \text{ہفتہ} & \text{اتوار} & \text{پیر} & \text{منگل} & \text{بدھ} & \text{جمعرات} & \text{جمع} \\ \text{الف} & 20 & 19 & 18 & 13 & 23 & 32 \\ \text{ب} & 25 & 17 & 5 & 14 & 12 & 10 \\ \text{پ} & 17 & 14 & 9 & 18 & 16 & 29 \end{bmatrix}$$

ایک دکان کی تین اشیاء کی ہفتہ وار فروخت درج بالا قالب میں دی گئی ہے۔ ہر ہفتے کی فروخت کو اسی طرح قالبوں میں لکھا جاسکتا ہے۔ مہینے کے آخر میں تمام قالبوں کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لینے سے ہر دن، تینوں اشیاء کی کل فروخت کی فہرست حاصل ہوگی۔

عمومی تصورات اور علامت نویسی

آئیں اب تک پیش کیے گئے تصورات کو باضابطہ دستوری صورت دیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے بڑے حروف سے قالب کو ظاہر کریں گے مثلاً  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، ...، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً  $A = [a_{jk}]$  وغیرہ۔ ایسا قالب جس میں  $m$  صف اور  $n$  قطار ہوں،  $m \times n$  (اس کو  $m$  ضرب  $n$  پڑھیں) قالب کہلاتا ہے (پہلے صف اور بعد میں قطار آئے گا) اور  $m \times n$  قالب کی جسامت<sup>12</sup> کہلاتی ہے۔ یوں  $m \times n$  قالب درج ذیل صورت کا ہوگا۔

$$(7.2) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مساوات 7.1 میں بالائی بائیں قالب  $2 \times 3$  جسامت کا ہے جبکہ نیچلا بائیں قالب  $1 \times 3$  جسامت کا ہے۔

7.2 میں ہر رکن کو دو عدد اشاریہ سے پہچانا جاتا ہے جہاں پہلا اشاریہ صف اور دوسرا اشاریہ قطار ہے۔ یوں  $a_{23}$  دوسرے صف اور تیسرے قطار پر موجود اندراج ہے۔

ایسا قالب جس میں  $m = n$  ہو  $n \times n$  چکور قالب کہلاتا ہے۔ چکور قالب کا وہ وتر جس پر  $a_{11}$  ،  $a_{22}$  ،  $a_{33}$  ،  $\dots$  ،  $a_{nn}$  پائے جاتے ہیں، قالب کا مرکزی وتر<sup>13</sup> کہلاتا ہے۔ مساوات 7.1 میں ایک چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان  $a_{11}$  ،  $a_{22}$  اور  $a_{33}$  ہیں جبکہ دوسرے چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان  $\ln x$  اور  $3.2x^2$  ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے، چکور قالب نہایت اہم ہیں۔

ایسا قالب جس میں  $m \neq n$  ہو  $m \times n$  مستطیل<sup>14</sup> قالب کہلاتا ہے۔ مستطیل قالب کی ایک مخصوص قسم چکور قالب ہے۔

### سمتیات

صرف ایک صف یا ایک قطار پر مبنی قالب کو سمتیہ کہتے ہیں۔ سمتیہ کے اندراج کو سمتیہ کے اجزاء<sup>15</sup> کہتے ہیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے چھوٹے حروف سے سمتیہ کو ظاہر کریں گے مثلاً  $a$  ،  $b$  ،  $c$  ،  $\dots$  اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً  $a = [a_j]$  وغیرہ۔ سمتیہ صف کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4.2 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

اسی طرح سمتیہ قطار کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

$m \times n$  جسامت کے قالب 7.2 کو  $n$  جسامت کا سمتیہ صف

$$(7.3) \quad A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

main diagonal<sup>13</sup>  
rectangular matrix<sup>14</sup>  
components<sup>15</sup>

تصور کیا جاسکتا ہے جہاں  $b_1$  تا  $b_n$  از خود  $m$  جسامت کے سمتیہ قطار

$$(7.4) \quad b_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, b_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

ہیں۔ اسی طرح  $A$  کو  $m$  جسامت کا سمتیہ قطار

$$(7.5) \quad A = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

تصور کیا جاسکتا ہے جہاں  $c_1$  تا  $c_m$  از خود  $n$  جسامت کے سمتیہ صف ہیں۔

$$(7.6) \quad \begin{aligned} c_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ c_2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ c_m &= \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

آئیں قالب مساوی ہونے کی تصور جانتے ہیں۔

تعریف: دو قالب  $A$  اور  $B$  اس صورت مساوی ہوں گے جب دونوں قالب کی جسامت برابر ہو اور ان کے نظیری ارکان آپس میں برابر ہوں یعنی  $a_{11} = b_{11}$ ،  $a_{12} = b_{12}$ ،  $\dots$  ہوں۔ غیر مساوی قالب مختلف<sup>16</sup> کہلاتے ہیں۔ یوں مختلف جسامت کے قالب ہر صورت مختلف ہوں گے۔ مساوات کا تعلق  $A = B$  لکھا جاتا ہے۔

مثال 7.3: قالبوں کی مساوات  
اگر درج ذیل قالب مساوی ہوں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

تب  $a_{11} = 2$  ،  $a_{12} = -3$  ،  $a_{21} = 0$  اور  $a_{22} = 3.2$  ہوں گے اور ہم  $A = B$  لکھ سکتے ہیں۔ درج ذیل تمام قالب آپس میں مختلف ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تعریف: قالبوں کا مجموعہ

دو یکساں جسامت کے قالب  $A = [a_{jk}]$  اور  $B = [b_{jk}]$  کا مجموعہ  $A + B$  لکھا جائے گا جس کے اندراجات  $a_{jk} + b_{jk}$  کو  $A$  اور  $B$  کے نظیری ارکان کے مجموعے سے حاصل کیا جائے گا۔ دو مختلف جسامت کے قالبوں کا مجموعہ حاصل کرنا ناممکن ہے۔

مثال 7.4: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہوں تب  $A + B$  ،  $a + b$  اور  $0A + b$  حاصل کریں۔



حل: چونکہ  $A$  اور  $B$  کی یکساں جسامت ہے لہذا انہیں جمع کیا جاسکتا ہے۔ مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+7 & -1+3 & 3+0 \\ 1+1 & 0+2 & -2+1 \\ 3+2 & 2-1 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

اسی طرح چونکہ  $a$  اور  $b$  کی جسامت یکساں ہے لہذا انہیں جمع کیا جاسکتا ہے۔ ان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$a + b = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 3+2 \\ -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

چونکہ  $A$  اور  $b$  کی جسامت یکساں نہیں ہے لہذا  $0A + b$  حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

تعریف: غیر سمتی ضرب

کسی بھی  $m \times n$  قالب  $A = [a_{jk}]$  اور کسی بھی غیر سمتی مقدار (عدد)  $c$  کا حاصل ضرب  $cA$  لکھا جاتا ہے جو ایسا  $m \times n$  قالب  $cA = [ca_{jk}]$  ہے جس کا ہر رکن  $A$  کے نظیری رکن کو  $c$  سے ضرب دیتے حاصل کیا جاتا ہے۔

ہم  $(-1)A$  کو  $-A$  لکھتے ہیں اور اس کو  $A$  کا نفی کہتے ہیں۔ اسی طرح  $(-k)A$  کو  $-kA$  لکھا جاتا ہے۔  $A + (-B)$  کو  $A - B$  لکھا جاتا ہے جو  $A$  اور  $B$  کا فرق<sup>17</sup> کہلاتا ہے (فرق صرف یکساں جسامت کے قالب کا حاصل کیا جاسکتا ہے)۔

مثال 7.5: غیر سمتی ضرب  
اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.3 \\ 0.6 & -1.5 \\ 0 & 6.0 \end{bmatrix}$$

ہو تب درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$-A = \begin{bmatrix} -1.2 & -3.3 \\ -0.6 & 1.5 \\ 0 & -6.0 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{3}A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -5 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad 0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر قالب  $B$  میں مختلف اشیاء کی کلوگرام کمیت درج ہو تب  $1000B$  قالب انہیں اشیاء کی کمیت گرام میں دے گا۔

مجموعہ قالب اور غیر سمتی ضرب کے قواعد

مجموعہ اعداد کے قواعد سے یکساں جسامت  $m \times n$  کے قالبوں کے مجموعے کے درج ذیل قاعدے حاصل ہوتے ہیں۔

$$(الف) \quad A + B = B + A$$

$$(7.7) \quad (ب) \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad (یعنی \quad A + B + C)$$

$$(پ) \quad A + 0 = A$$

$$(ت) \quad A - A = 0$$

درج بالا موٹی لکھائی میں صفر  $0$  ایسے  $m \times n$  صفر قالب<sup>18</sup> کو ظاہر کرتی ہے جس کے تمام ارکان صفر  $0$  کے برابر ہوں۔ اگر  $m = 1$  یا  $n = 1$  ہو تب اس کو صفر سمتیہ<sup>19</sup> کہیں گے۔

یوں مجموعہ قالب قانون تبادُل اور قانون تلازم پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح غیر سمتی ضرب درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$(الف) \quad c(A + B) = cA + cB$$

$$(7.8) \quad (ب) \quad (c + k)A = cA + kA$$

$$(پ) \quad c(kA) = (ck)A \quad (یعنی \quad ckA)$$

$$(ت) \quad 1A = A$$

zero matrix<sup>18</sup>  
zero vector<sup>19</sup>

## سوالات

سوال 7.1 تا سوال 7.3 عمومی سوالات ہیں۔ سوال 7.1:  $A = [a_{jk}]$  لکھتے ہوئے مثال 7.2 میں  $[a_{12}]$  اور  $[a_{25}]$  کیا ہیں۔

جوابات:  $[a_{12}] = 23$  اور  $[a_{25}] = 0$

سوال 7.2: مثال 7.2 میں دیے گئے قالب کی جسامت لکھیں۔

جواب:  $3 \times 7$

سوال 7.3: مثال 7.4 میں قالب  $A$  کی مرکزی وتر لکھیں۔

جواب: 2 ، 0 اور 1

سوال 7.4 تا سوال 7.10 میں قالبوں کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب حاصل کرنے ہوں گے۔ ان سوالات میں درکار قالب درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.4:  $0.5A$  ،  $0.2B$  ،  $-2u$

جوابات:

$$0.5A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1.0 \\ 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.2B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad -2u = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سوال 7.5:  $3A + 2B$  ،  $2C - E$  ،  $-3u + v - 2w$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 7 & 1 & 9 \\ 6 & 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9.5 \\ -5.7 \\ -6.4 \end{bmatrix}$$

سوال 7.6:  $5A - 3A$ ,  $6(3)B$ ,  $(3 \cdot 6)B$   
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 7.7:  $3(2C + 5D)$ ,  $0.2(0.1E - 0.3D)$   
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 66 & 18 \\ 9 & 57 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.08 & -0.24 \\ 0.12 & -0.2 \\ 0.22 & -0.1 \end{bmatrix}$$

سوال 7.8:  $E + (D + C)$ ,  $(D + E) + C$ ,  $A + C$ ,  $0B + D$   
جوابات: چونکہ  $A$  اور  $C$  کی جسامت یکساں نہیں ہے لہذا انہیں جمع نہیں کیا جاسکتا ہے۔ غیر یکساں جسامت کی بنا  $0B + D$  بھی حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$$E + (D + C) = (D + E) + C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 20 & -4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

سوال 7.9:  $u$ ,  $v$  اور  $w$  کو خلاء میں قوت کے اجزاء تصور کرتے ہوئے ان کے مجموعے سے کل قوت دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{bmatrix} 5.3 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.10: متوازن صورت تمام قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہونے کی صورت کو متوازن<sup>20</sup> حال کہتے ہیں۔

ایسا قوت  $x$  دریافت کریں کہ  $u$ ،  $v$ ،  $w$  اور  $x$  متوازن حال میں ہوں۔

$$x = \begin{bmatrix} -5.3 \\ -3.1 \\ -3.2 \end{bmatrix}$$

## 7.2 قالبی ضرب

قالبی ضرب سے مراد دو عدد قالبوں کا آپس میں ضرب ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ چند مثالیں حل کرتے ہوئے قالبی ضرب کو اچھی طرح سمجھیں۔ قالبی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: قالبی ضرب

$m \times n$  قالب  $A = [a_{jk}]$  اور  $r \times p$  قالب  $B = [b_{jk}]$  کا (ای ترتیب سے) حاصل ضرب  $C = AB$  صرف  $r = n$  کی صورت میں ممکن ہوگا اور یہ  $m \times p$  قالب  $C = [c_{jk}]$  ہوگا جس کے اندراجات درج ذیل ہوں گے۔

(7.9)

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}, \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

یوں پہلے جزو  $A$  میں قطاروں کی تعداد  $n$  دوسرے جزو  $B$  کی صفوں کی تعداد  $r$  کے برابر ہونا لازمی ہے۔ مساوات 7.9 میں  $c_{jk}$  کو  $A$  کے  $j$  صف کے ہر رکن کو  $B$  کے  $k$  قطار کے نظیری رکن سے ضرب

<sup>20</sup>equilibrium

دیتے ہوئے تمام  $n$  حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں صف ضرب قطار سے قالبی ضرب حاصل کیا جاتا ہے۔ قالبی ضرب  $n = 3$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

جہاں  $A$  کی پہلی صف کے ارکان کو  $B$  کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے  $c_{11}$  حاصل ہو گا۔ اسی طرح  $A$  کی پہلی صف کے ارکان کو  $B$  کی دوسری قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے  $c_{12}$  حاصل ہو گا اور  $A$  کی دوسری صف کے ارکان کو  $B$  کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے  $c_{21}$  حاصل ہو گا۔ اس عمل کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{aligned}$$

چونکہ سمتیہ درحقیقت قالب کی مخصوص صورت ہے لہذا قالب اور سمتیہ کا ضرب بھی بالکل اسی طرح حاصل کیا جائے گا۔ قالبی ضرب کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال 7.6: قالبی ضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 10 \\ 4 \cdot 9 + 6 \cdot 8 & 4 \cdot 7 + 6 \cdot 10 \\ 5 \cdot 9 + 2 \cdot 8 & 5 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 37 \\ 84 & 88 \\ 61 & 55 \end{bmatrix}$$

مثال 7.7: قالب اور سمتیہ کا ضرب

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{جبکہ} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{نا ممکن}$$

درج بالا میں قالب اور سمتیہ کی جگہ تبدیل کرنے سے پہلے جزو کی قطاروں اور دوسرے جزو کی صفوں کی تعداد یکساں نہیں رہتی لہذا ایسا ضرب نا ممکن ہے۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ  $AB$  اور  $BA$  برابر ہوں اور یہ کہ دونوں ضرب کا حصول ممکن ہو۔

سوال 7.11:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ سمتیات کی جگہ تبدیل کرنے سے حاصل ضرب تبدیل ہوتا ہے یعنی قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا۔

مثال 7.8: قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا لہذا عموماً  $AB \neq BA$  ہوگا

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 & 199 \\ -199 & -199 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ قابلی ضرب میں اجزاء کی جگہ تبدیل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کے علاوہ قابلی ضرب، عام اعدادی ضرب کے درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$(7.10) \quad \begin{aligned} & \text{(الف)} \quad (kA)B = k(AB) = A(kB) \quad (kAB \text{ یا } AkB) \\ & \text{(ب)} \quad A(BC) = (AB)C \quad (\text{یعنی } ABC) \\ & \text{(پ)} \quad (A+B)C = AC + BC \\ & \text{(ت)} \quad C(A+B) = CA + CB \end{aligned}$$

درج بالا میں  $k$  کوئی عدد ہے اور یہ قواعد اس صورت درست ہوں گے کہ بائیں ہاتھ کے قالب، قابلی ضرب کی تعریف پر پورا اترتے ہوں۔ درج بالا میں مساوات-ب قانون تلازم<sup>21</sup> کہلاتا ہے جبکہ مساوات-پ اور مساوات-ت قانون تقسیم<sup>22</sup> کہلاتا ہے۔

چونکہ قابلی ضرب صف ضرب قطار کو کہتے ہیں لہذا مساوات 7.9 کو زیادہ خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(7.11) \quad c_{jk} = a_j b_k, \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

جہاں  $a_j$  قالب  $A$  کا صف  $j$  اور  $b_k$  قالب  $B$  کا قطار  $k$  ہے۔

$$a_j b_k = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = [a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \dots + a_{jn}b_{nk}]$$

مثال 7.9: صف اور قطار سمتیہ کی صورت میں ضرب ارکان  
 $3 \times 3$  قالب  $A = [a_{jk}]$  اور  $3 \times 4$  قالب  $B = [b_{jk}]$  کو ضرب دینے سے درج لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.12) \quad AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \end{bmatrix}$$

associative law<sup>21</sup>  
 distributive law<sup>22</sup>



مثال 7.10:  $3 \times 3$  قالب  $A = [a_{jk}]$  اور  $3 \times 4$  قالب  $B = [b_{jk}]$  درج ذیل ہیں۔ مساوات 7.12 سے  $AB$  حاصل کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: یہاں  $a_1 = [1 \ 0 \ 2]$ ،  $a_2 = [2 \ 1 \ 1]$  اور  $a_3 = [3 \ 2 \ 1]$  ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1 b_1 = [1 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 4 = 6$$

اسی طرح بقایا ارکان حاصل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 10 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

قالبی ضرب بذریعہ کمپیوٹر

مساوات 7.12 کو ذرہ مختلف طریقے سے لکھتے ہیں۔  $A$  کو جوں کا توں جبکہ  $B$  کو سمتیہ قطار کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(7.13) \quad AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix}$$

متعدد متوازی جڑے کمپیوٹر کو علیحدہ علیحدہ  $b_1$  ،  $b_2$  ،  $\dots$  ،  $b_p$  یا انہیں کئی کئی علیحدہ سمتیہ قطار فراہم کیے جاتے ہیں اور ساتھ ہی تمام کو  $A$  بھی فراہم کیا جاتا ہے۔ یوں قابلی ضرب کے اجزاء  $Ab_1$  ،  $Ab_2$  ،  $\dots$  ،  $Ab_p$  بہ یک وقت (نسبتاً بہت کم وقت میں) حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 7.11: درج ذیل کو مساوات 7.13 کی مدد سے حل کریں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 7.13 سے قابلی ضرب کے قطار حاصل کرتے ہیں جنہیں ایک ہی قالب میں یکجا کرتے ہوئے درج بالا جواب ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

خطی تبادل اور قابلی ضرب

دو متغیرات پر مبنی خطی تبادل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$(7.14) \quad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

جس کو سمتیت کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.15) \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

اب اگر  $x_1x_2$  نظام از خود  $w_1w_2$  پر مبنی ہو یعنی

$$(7.16) \quad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned}$$

یا

$$(7.17) \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Bw = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{bmatrix}$$

تب  $y_1y_2$  نظام بالواسطہ  $w_1w_2$  پر مبنی ہو گا۔ آئیں اس تعلق کو جانیں۔

مساوات 7.14 میں مساوات 7.16 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2 \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$(7.18) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں

$$(7.19) \quad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

لیا گیا ہے۔ اس تعلق کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.20) \quad y = Cw = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{bmatrix}$$

آئیں قالمی ضرب  $AB$  حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ  $C = AB$  ہے۔

$$(7.21) \quad AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = C$$

بڑے جسامت کے قالموں کے لئے بھی  $C = AB$  بالکل اسی طرح ثابت کیا جاتا ہے۔ یوں  $x$ ،  $y$  اور  $w$  متغیرات کی تعداد بالترتیب  $m$ ،  $n$  اور  $p$  کی صورت میں  $A$ ،  $B$  اور  $C$  قالموں کی جسامت بالترتیب  $m \times n$ ،  $n \times p$  اور  $m \times p$  ہوگی جہاں  $C = AB$  ہے۔ قالمی ضرب (مساوات 7.9) کی تعریف مساوات 7.21 کی بدولت ہے۔

## 7.2.1 تبدیلی محل

قالب کے صفوں کو بطور قطار (یعنی قطاروں کو بطور صف) لکھ کر تبدیل محل قالب<sup>23</sup> حاصل ہوتا ہے اور اس عمل کو<sup>24</sup> کہتے ہیں۔ سمتیہ کی تبدیلی محل بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔ اس طرح قالب کا صف، تبدیل محل قالب کا قطار ہو گا اور یونہی قالب کا قطار، تبدیل محل قالب کا صف ہو گا۔ چکور قالب کے ارکان کا مرکزی وتر میں "عکس" لینے سے بھی تبدیل محل قالب حاصل ہو گا۔ مرکزی وتر کے دونوں اطراف یکساں مقامات پر ارکان کی آپس میں جگہ تبدیل کرنے سے ان کا "عکس" حاصل ہو گا۔ یوں  $a_{12}$  اور  $a_{21}$  آپس میں جگہ تبدیل کریں گے،  $a_{13}$  اور  $a_{31}$  آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ قالب  $A$  سے حاصل تبدیل محل قالب کو  $A^T$  سے ظاہر کیا جائے گا۔ درج ذیل مثال دیکھیں۔

مثال 7.12: تبدیل محل قالب  
قالب  $A$  کا تبدیل محل  $A^T$  درج ذیل ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

درج بالا کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

چکور قالب اور اس کا تبدیل محل درج ذیل ہیں۔ چکور قالب اور اس کے تبدیل محل قالب میں مرکزی وتر کے ارکان جگہ تبدیل نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

<sup>23</sup>transpose matrix  
<sup>24</sup>transposition

سمتیہ صف کا تبدیل محل، سمتیہ قطار ہو گا اور یونہی سمتیہ قطار کا تبدیل محل، سمتیہ صف ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

تبدیل محل کا تبدیل محل اصل قالب ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

تعریف: قالب اور سمتیہ کا تبدیل محل  
 $A = [a_{jk}]$  قالب  $m \times n$  کا تبدیل محل  $n \times m$  قالب  $A^T$  ہے جس کا پہلا صف،  $A$  کا پہلا قطار، اس کا دوسرا صف  $A$  کا دوسرا قطار، وغیرہ وغیرہ ہوں گے۔ یوں مساوات 7.2 میں دیے گئے  $A$  کا تبدیل محل  $A^T$  درج ذیل ہو گا۔

$$(7.22) \quad A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل سمتیہ قطار ہو گا جبکہ سمتیہ قطار کا تبدیل محل سمتیہ صف ہو گا۔

بعض اوقات قالب اور بعض اوقات تبدیل محل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ تبدیلی محل کے قواعد درج ذیل ہیں۔

$$(7.23) \quad \begin{aligned} (الف) \quad & (A^T)^T = A \\ (ب) \quad & (A + B)^T = A^T + B^T \\ (پ) \quad & (cA)^T = cA^T \\ (ت) \quad & (AB)^T = B^T A^T \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ مساوات 7.23-ت میں دائیں ہاتھ قلابوں کی ترتیب بائیں ہاتھ کی ترتیب کے الٹ ہے۔ سوال 7.25 میں آپ کو درج بالا تعلقات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 7.13: درج ذیل قالب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.23-ت ثابت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

حل: پہلے مساوات 7.23-ت کا بائیں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ قلابی ضرب  $AB$  لینے کے بعد

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

اس کا تبدیل محل حاصل کرتے ہیں۔

$$(7.24) \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

آئیں اب مساوات 7.23-ت کا دایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ یوں  $B^T$  اور  $A^T$  حاصل کرنے کے بعد

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ان کا قلابی ضرب لیتے ہیں۔

$$(7.25) \quad B^T A^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

چونکہ  $a_{11}b_{11} = b_{11}a_{11}$ ،  $a_{12}b_{21} = b_{21}a_{12}$ ، ... ہیں لہذا مساوات 7.24 اور مساوات 7.25 کے دائیں ہاتھ آپس میں برابر ہیں لہذا ان کے بائیں ہاتھ بھی آپس میں برابر ہوں گے۔ اس طرح مساوات 7.23-ت ثابت ہوا۔

## مخصوص قالب

چند اقسام کے قالب عملی استعمال کے لحاظ سے زیادہ اہم ہیں۔ ان پر غور کرتے ہیں۔

## تثاقلی قالب اور منحرف تثاقلی قالب

ایسا چکور قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے برابر  $A = A^T$  ہو تثاقلی<sup>25</sup> قالب کہلاتا ہے۔ ایسا قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے نفی کے برابر  $A = -A^T$  ہو منحرف تثاقلی<sup>26</sup> قالب کہلاتا ہے۔

$$(7.26) \quad \begin{aligned} \text{تثاقلی} \quad A &= A^T, \quad (a_{jk} = a_{kj}) \\ \text{منحرف تثاقلی} \quad A &= -A^T, \quad (a_{jk} = -a_{kj} \text{ اور } a_{jj} = 0) \end{aligned}$$

مثال 7.14: تثاقلی اور منحرف تثاقلی قالب  
 $A$  تثاقلی قالب ہے،  $B$  منحرف تثاقلی قالب ہے جبکہ  $C$  نہ تثاقلی اور نہ منحرف تثاقلی ہے۔

$$\begin{aligned} \text{تثاقلی} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{منحرف تثاقلی} \quad B &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>25</sup>symmetric  
<sup>26</sup>skew-symmetric

## تکونی قلب

بالائی تکونی قلب<sup>27</sup> اس چکور قلب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور اس سے بالائی جانب پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر سے نیچے کی طرف تمام ارکان صفر ہوں۔ اسی طرح نچلا تکونی قلب<sup>28</sup> اس چکور قلب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے نیچے پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر کے بالائی جانب تمام ارکان صفر کے برابر ہوں۔

مثال 7.15: بالائی تکونی اور نچلا تکونی قلب

$$\begin{aligned} \text{بالائی تکونی قلب} \quad & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{نچلا تکونی قلب} \quad & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## وتری قلب

ایسا چکور قلب جس میں غیر صفر ارکان صرف مرکزی وتر پر پائے جاتے ہوں وتری قلب<sup>29</sup> کہلاتا ہے۔ مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر ہوں گے۔

اگر وتری قلب  $S$  کے تمام ارکان یکساں، مثلاً  $c$  کے برابر ہوں، تب  $S$  غیر سمی قلب<sup>30</sup> کہلائے گا۔ کسی بھی چکور قلب  $A$  جس کی جسامت  $S$  کی جسامت کے برابر ہو، کا  $S$  کے ساتھ قلبی ضرب کا حاصل، غیر سمی مقدار  $c$  اور  $A$  کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔

$$(7.27) \quad AS = SA = cA$$

ایسا غیر سمی قلب جس کے ارکان اکائی (1) کے برابر ہوں اکائی قلب<sup>31</sup> کہلاتا ہے جسے  $I_n$  یا  $I$  سے ظاہر کیا

<sup>27</sup>upper triangular matrix  
<sup>28</sup>lower triangular matrix  
<sup>29</sup>diagonal matrix  
<sup>30</sup>scalar matrix  
<sup>31</sup>unit matrix



جاتا ہے۔ اکائی قالب کی صورت میں درج بالا مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$AI = IA = A \quad (7.28)$$

مثال 7.16: وتری قالب  $D$ ، غیر سمتی قالب  $S$  اور اکائی قالب  $I$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 7.17: کارخانے کے اخراجات

ایک کارخانے میں تین اقسام کے کھلونے (الف، ب اور پ) تیار ہوتے ہیں۔ ایک کھلونا تیار کرنے کے اخراجات قالب  $A$  میں دیے گئے ہیں۔ قالب  $B$  ایک ہفتے کی پیداوار دیتا ہے۔ جمع اور جمع رات کے دن تعطیل ہوتی ہے۔ ایسا قالب  $C$  حاصل کریں جو اس ایک ہفتے میں پیدا کیے گئے کھلونوں پر خرچ اخراجات پیش کرے۔

$A = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 50 \\ 15 & 12 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	<p>پ      ب      الف</p> <p>خام مال</p> <p>مزدوری</p> <p>اضافی اخراجات</p>	$B = \begin{bmatrix} 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 2.0 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 & 0.9 \end{bmatrix}$	<p>ہفتہ    اتوار    پیر    منگل    بدھ</p> <p>الف</p> <p>ب</p> <p>پ</p>
---	--	--	---

حل:

$C = AB = \begin{bmatrix} 2840.0 & 3865.0 & 2480.0 & 4065.0 & 4265.0 \\ 227.0 & 305.4 & 202.6 & 321.2 & 335.4 \\ 74.6 & 100.6 & 66.2 & 105.6 & 110.6 \end{bmatrix}$	<p>بدھ      منگل      پیر      اتوار      ہفتہ</p> <p>خام مال</p> <p>مزدوری</p> <p>اضافی اخراجات</p>
---	--

مثال 7.18: امکانی شمارائی قالب  
ایک شہر کے رقبے کا استعمال 2018 میں درج ذیل ہے۔

$$S = 15\% \text{ صنعتی}, T = 25\% \text{ تجارتی}, R = 60\% \text{ رہائشی}$$

پانچ سالوں میں رقبے کا استعمال تبدیل ہو گا۔ اس تبدیلی کو درج ذیل امکانی شمارائی قالب  $A$  دیتا ہے جو سالہ سال اس شہر کے لئے قابل استعمال ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} \text{رہائشی سے} & \text{تجارتی سے} & \text{صنعتی سے} \\ \text{رہائشی کو منتقل} & 0.8 & 0.1 \\ \text{تجارتی کو منتقل} & 0.2 & 0.7 \\ \text{صنعتی کو منتقل} & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

درج بالا امکانی شمارائی قالب  $A$  کے تمام ارکان مثبت ہیں جبکہ ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی کے برابر ہے (چونکہ تمام ممکنہ امکانات کا مجموعہ اکائی کے برابر ہوتا ہے)۔ پانچ سال بعد 2023 میں رقبے کی تقسیم درج ذیل ہو گی۔

$$y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 \\ 0.2 \cdot 60 + 0.7 \cdot 25 + 0.1 \cdot 15 \\ 0.6 \cdot 60 + 0.2 \cdot 25 + 0.9 \cdot 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.5 \\ 31.0 \\ 18.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{رہائشی} \\ \text{تجارتی} \\ \text{صنعتی} \end{matrix}$$

اس عمل کو  $A$  کی مدد سے سمجھتے ہیں۔ پانچ سالوں میں 0.8 امکان ہے کہ رہائشی رقبہ، رہائشی ہی رہے گا جبکہ 0.1 امکان ہے کہ تجارتی رقبہ پر رہائش ہو گی اور 0 امکان ہے کہ صنعتی رقبہ پر رہائش ہو گی۔ یوں 2023 میں رہائشی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 50.5\%$$

اس پورے عمل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y = Ax = A \begin{bmatrix} 60 & 25 & 15 \end{bmatrix}^T$$

جہاں  $x$  سمتیہ حال<sup>33</sup> ہے جو 2018 میں رقبے کی تقسیم بیان کرتا ہے۔ اسی طرح 2028 اور 2033 میں صورت حال بالترتیب درج ذیل ہوگی۔

$$z = Ay = A(Ax) = A^2x = \begin{bmatrix} 43.50 \\ 33.65 \\ 22.85 \end{bmatrix}$$

$$u = Az = A(A^2x) = A^3x = \begin{bmatrix} 38.165 \\ 34.540 \\ 27.295 \end{bmatrix}$$

یوں 2033 میں % 38.165 علاقہ رہائشی، % 34.54 تجارتی اور % 27.295 صنعتی ہو گا۔ یاد رہے کہ رقبہ مستقل قیمت ہے۔

### سوالات

سوال 7.12: چکور قالب  
ایسا چکور قالب جو تشاکلی اور منحرف تشاکلی ہو، کی صورت کیا ہوگی۔

حل: صفر قالب

سوال 7.13 تا سوال 7.25 میں درج ذیل قالب استعمال کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.13:  $A^T, B^T, a^T, b^T$ 

$$A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, a^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, b^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.14:  $AB, BA$ 

$$AB = \begin{bmatrix} -17 & -14 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 20 \\ 12 & -9 & -18 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.15:  $(AB)^T, B^T A^T, A^T B^T$ 

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -6 \\ -14 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}, A^T B^T = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 20 & -18 & 10 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.16:  $AA^T, A^2$ 

$$AA^T = \begin{bmatrix} 29 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 13 \\ 20 & 13 & 38 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 17 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 22 & 39 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.17:  $BB^T, B^2$ 

$$BB^T = \begin{bmatrix} 25 & -16 & 0 \\ -16 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ -8 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.18:  $CC^T, BC$ 

$$CC^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, BC = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -13 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.19:  $2A - 3B, (2A - 3B)^T, 2A^T - 3B^T$ 

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} -15 & -8 & 8 \\ 12 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}, (2A - 3B)^T = 2A^T - 3B^T = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.20:  $Ba, Ba^T, Bb, Bb^T$

جوابات:  $Ba = Ba^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}, Bb^T = Bb = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$

سوال 7.21:  $Aa, Aa^T, Ab, Ab^T$

جوابات:  $Aa = Aa^T = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, Ab = Ab^T = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

سوال 7.22:  $(Ab)^T, b^T A^T$

جوابات:  $(Ab)^T = b^T A^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

سوال 7.23:  $ABC, ABa, ABb$

جوابات:  $\begin{bmatrix} -49 & -36 \\ -5 & -6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -75 \\ -15 \\ -11 \end{bmatrix}$

سوال 7.24:  $ab, ba, aB, Bb$

جوابات:  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}, [-1]$

سوال 7.25:  $a + b, a^T + b, a + b^T$

جوابات:  $a + b$  ممکن نہیں ہے اور  $a + b^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, a^T + b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

سوال 7.26:  $AB$  کو سوال 7.13 میں حاصل کیا گیا ہے۔ اسی کو دوبارہ  $A$  کے قطار اور  $B$  کے صف استعمال کرتے ہوئے دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 7.27: مساوات 7.23 کو عمومی  $2 \times 2$  قالب کے لئے ثابت کریں۔

سوال 7.28: قانون تبادل

ایسا  $2 \times 2$  قالب  $B$  دریافت کریں کہ  $AB = BA$  ہو جہاں  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ہے۔

جواب:  $B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

سوال 7.29: ثابت کریں کہ کسی بھی چکور قالب  $C$  کے لئے  $\frac{1}{2}(C + C^T)$  تشاکلی ہے جبکہ  $\frac{1}{2}(C - C^T)$  منخرف تشاکلی ہیں۔

سوال 7.30: درج بالا سوال کے تحت  $T = \frac{1}{2}(C + C^T)$  اور  $M = \frac{1}{2}(C - C^T)$  لکھا جاسکتا ہے جہاں  $T$  تشاکلی اور  $M$  منخرف تشاکلی قالب ہیں۔ کسی بھی قالب کو تشاکل قالب اور منخرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سوال 7.13 تا سوال 7.25 میں استعمال کیے گئے  $A$  کو تشاکلی اور منخرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ ان قالبوں کو دریافت کریں۔

جوابات:  $T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2.5 \\ 3 & 2.5 & 5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

سوال 7.31: قابل تبادل ثابت کریں کہ تشاکلی  $A$  اور تشاکلی  $B$  کا قالمی ضرب  $AB$  اس صورت تشاکلی ہو گا جب  $A$  اور  $B$  آپس میں (ضرب میں) قابل تبادل<sup>34</sup> ہوں یعنی جب  $AB = BA$  ہو۔

جواب:  $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$

سوال 7.32: کن صورتوں میں منخرف تشاکلی قالبوں کا قالمی ضرب منخرف تشاکلی قالب دے گا؟

جواب:  $AB = -BA$

سوال 7.33: امکانی شماریاتی عمل ایک مشین اگر آج ٹھیک ہو تب 0.9 امکان ہے کہ وہ ایک دن بعد (کل) بھی ٹھیک ہو گا۔ یوں 0.1 امکان ہے کہ وہ کل خراب ہو گا۔ اسی طرح اگر مشین آج خراب ہو تب 0.4 امکان ہے کہ وہ کل بھی خراب ہو گا۔ یوں 0.6 امکان ہے کہ وہ کل ٹھیک ہو گا۔ آج ٹھیک اور خراب کو بالترتیب  $t$  اور  $k$  سے ظاہر کریں جبکہ ایک دن بعد انہیں  $T$  اور  $K$  سے ظاہر کریں۔ اس پیش گوئی سے امکانی شماریاتی قالب  $A$  لکھیں۔ اگر آج مشین ٹھیک ہو تب دو دن بعد (پرسوں) مشین ٹھیک ہونے کا کتنا فی صد امکان ہے۔

<sup>34</sup>commutative

$$A = \begin{bmatrix} t & k \\ 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} T \\ K \end{matrix} \quad \text{جوابات: دو دن بعد 87\% امکان ہے کہ مشین ٹھیک ہوگی۔}$$

سوال 7.34: امکانی شماریاتی عمل  
ایک شہر کی آبادی 20000 ہے۔ ایک بینک میں آج کھاتے دار کا 90% امکان ہے کہ وہ اگلے سال بھی اسی بینک کا کھاتے دار ہو گا جبکہ یہاں کھاتا نہ رکھنے والے کا 1% امکان ہے کہ وہ اگلے سال یہاں کا کھاتا دار ہو گا۔ اگر آج 1000 افراد اس بینک کے کھاتے دار ہوں تب ایک سال، دو سال اور تین سال بعد کتنے افراد یہاں کے کھاتے دار ہوں گے؟

جوابات: 1090 ، 1170 ، 1241

سوال 7.35: ایک کارخانہ لاہور، پشاور اور کراچی میں تین اشیاء الف، ب اور پ فروخت کرتا ہے۔ فی کلو گرام منافع بالترتیب 8 ، 10 اور 6 روپیہ ہے۔ ایک دن کی فروخت درج ذیل ہے۔

پ	ب	الف
لاہور	2000	3000
پشاور	2200	2800
کراچی	3200	4200

ایسا "سمتیہ منافع"  $m$  دریافت کریں کہ  $y = Am$  ہر شہر میں روزانہ کمائی دے۔

$$m = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}^T \quad \text{جواب:}$$

سوال 7.36: خطی تبادلہ۔ گھومنا  
کار تیشی محدود کی  $xy$  سطح پر گھڑی کے سوئوں کے گھومنے کی الٹ رخ گھومنے کو  $y = Ax$  ظاہر کرتی ہے جہاں  $A$  ،  $y$  اور  $x$  درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ثابت کریں کہ  $y = Ax$  کسی بھی سطح پر  $x_1x_2$  کار تیشی محدود کے نظام کو، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ،  $\theta$  زاویہ گھما کر نیا کار تیشی محدود  $y_1y_2$  دیتا ہے۔

سوال 7.37: خطی تبادلہ۔ گھومنا  
درج بالا سوال میں زاویہ گھومنا دیکھا گیا۔ ثابت کریں کہ درج ذیل قالب، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ،  
 $n\theta$  زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

سوال 7.38: خطی تبادلہ۔ گھومنا  
درج بالا دو سوالات کو دیکھیں۔ درج ذیل قالب، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ،  $\alpha$  اور  $\beta$  زاویہ گھومنے کو  
ظاہر کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

یوں باری باری  $\alpha$  اور  $\beta$  گھومنے کو  $AB$  ظاہر کرے گا۔ یوں درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

سوال 7.39: خطی تبادلہ۔ گھومنا  
خلا میں گھومنا  $y = Ax$  دیتا ہے جہاں  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ ،  $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$  ہیں جبکہ  
 $A$  درج ذیل ہو سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

کیا آپ ذہن میں اس عمل کو دیکھ پاتے ہیں؟



## 7.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط

قالب کا ایک اہم استعمال، خطی تفرقی مساوات کے نظام کا حل ہے۔ ہم یہاں گاوسی اسقاط<sup>35</sup> کی ترکیب سیکھتے ہیں جو خطی الجبرا میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ اس ترکیب کو اچھی طرح سمجھیں۔

خطی تفرقی مساوات کے نظام کا نام چھوٹا کرتے ہوئے اس کو خطی نظام<sup>36</sup> بھی کہتے ہیں۔ انجینئری، معاشیات، شماریات، اور دیگر شعبوں کے کئی مسائل کی نمونہ کشی خطی نظام کی مدد سے کی جاتی ہے مثلاً برقی ادوار اور گاڑیوں کی آمد و رفت کا نظام۔

خطی نظام، عددی سر قالب اور افزودہ قالب

$n$  متغیرات پر مبنی  $n$  مساوات کا نظام درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (7.29)$$

چونکہ اس نظام میں تمام متغیرات کی طاقت اکائی (1) ہے لہذا یہ نظام خطی کہلاتا ہے (سیدھے خط کی طرح جس کی مساوات  $y = mx + c$  میں  $x$  اور  $y$  کی طاقت 1 ہے)۔ ان مساوات میں  $a_{11}$  تا  $a_{mn}$  مستقل قیمتیں ہیں جنہیں نظام کے عددی سر<sup>37</sup> کہتے ہیں۔  $b_1$  تا  $b_m$  بھی مستقل قیمتیں ہیں۔ تمام  $b_j$  کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں 7.29 کا نظام ہم جنسی<sup>38</sup> نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ غیر ہم جنسی<sup>39</sup> نظام کہلاتا ہے۔

Gauss elimination<sup>35</sup>  
linear system<sup>36</sup>  
coefficients<sup>37</sup>  
homogeneous<sup>38</sup>  
nonhomogeneous<sup>39</sup>

نظام 7.29 کے حل سے مراد  $x_1$  تا  $x_n$  کی وہ قیمتیں ہیں جو اس نظام کے تمام مساواتوں پر پورا اترتے ہوں۔ نظام کے حل سمیتہ<sup>40</sup> کے ارکان نظام 7.29 کے حل  $x_1$  تا  $x_m$  ہیں۔ ہم جنسی نظام کا ہر صورت میں ایک حل  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  ہو گا جو غیر اہم صفر حل<sup>41</sup> کہلاتا ہے۔

نظام 7.29 کی قالبی صورت

قالبی ضرب کے استعمال سے نظام 7.29 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

(7.30)

$$Ax = b$$

جہاں  $A$ ،  $x$  اور  $b$  درج ذیل ہیں۔  $A$  عددی سر قالب<sup>42</sup> کہلاتا ہے۔

$$(7.31) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$x$  اور  $b$  سمتیہ قطار ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام صفر نہیں ہیں لہذا  $A$  صفر قالب نہیں ہو گا۔ دھیان رہے کہ  $x$  کے  $n$  ارکان جبکہ  $b$  کے  $m$  ارکان ہیں۔  $A$  اور  $b$  کو ایک ہی قالب میں لکھ کر افزودہ قالب<sup>43</sup>  $\tilde{A}$  ملتا ہے۔

$$(7.32) \quad \tilde{A} = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

افزودہ قالب میں عمودی لکیر کو ہٹایا جاسکتا ہے۔ ہم بھی ایسا ہی کریں گے، بس یاد رہے کہ  $A$  کے ساتھ آخری قطار  $b$  کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب  $\tilde{A}$  حاصل ہوتا ہے۔

<sup>40</sup>solution vector

<sup>41</sup>trivial solution

<sup>42</sup>coefficient matrix

<sup>43</sup>augmented matrix

چونکہ افزودہ قالب میں نظام 7.29 کے تمام معلومات شامل ہیں لہذا افزودہ قالب اس نظام کو مکمل طور پر ظاہر کرتا ہے۔

مثال 7.19: حل کی وجودیت اور یکتائی۔ جیومیٹریائی نقطہ نظر  
 $m = n = 2$  کی صورت میں نظام دو عدد متغیرات  $x_1$ ،  $x_2$  اور دو عدد مساوات پر مبنی ہو گا۔

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

اگر ہم  $x_1$  اور  $x_2$  کو سطح  $x_1x_2$  پر محور فرض کریں تب درج بالا مساوات اس سطح پر سیدھے خطوط کے مساوات ہوں گے۔ ان مساوات کا صرف اس صورت حل  $(x_1, x_2)$  ہو گا جب نقطہ  $P$  جس کے محور  $x_1$  اور  $x_2$  ہوں، ان دونوں خطوط پر پایا جاتا ہو۔ یوں تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 7.1 دیکھیں۔

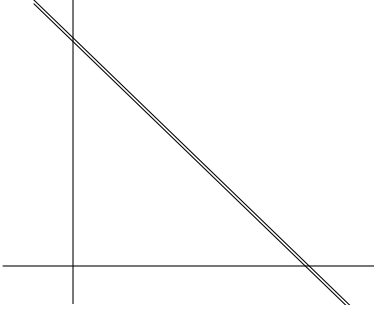
• اگر خطوط ایک دونوں کو قطع کرتے ہوں تب یکتا حل پایا جائے گا۔

• ہم مکان خطوط کی صورت میں لامتناہی تعداد کے حل ہوں گے۔

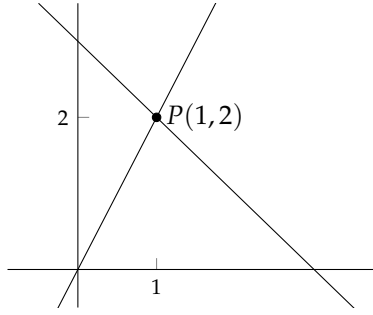
• متوازی اور ایک دونوں سے ہٹ کر خطوط کی صورت میں کوئی حل ممکن نہیں ہو گا۔

دو متغیرات اور دو مساوات کے نظام کو ہم نے دیکھا۔ تین متغیرات اور تین مساوات کے نظام کو بھی جیومیٹریائی نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ اب خطوط کی بجائے نظام کے تین مساوات تین سطحوں کو ظاہر کریں گی۔ شکل میں اس نظام کے حل دکھائے گئے ہیں۔

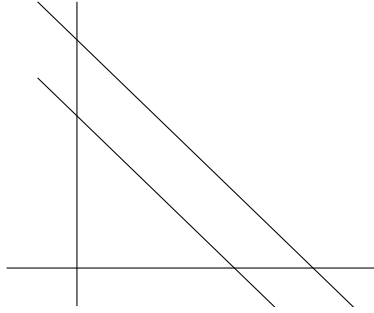
مثال 7.19 میں ہم نے دیکھا کہ عین ممکن ہے کہ نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو۔ یوں کسی بھی نظام کے بارے میں ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا حل موجود ہے اور آیا ایسا حل یکتا ہے۔ آئیں اب خطی نظام کو حل کرنے کا منظم طریقہ سیکھیں۔



(ب) دونوں خطوط (جنہیں ایک دونوں سے ذرہ ہٹ کر دکھایا گیا ہے درحقیقت) ہم مکانی ہیں لہذا ان کے لامتناہی تعداد کے حل ممکن ہیں۔



(الف) نقطہ  $P$  جہاں دونوں خط ملتے ہیں، ان مساوات کا حل ہے۔



(پ) متوازی خطوط ایک دونوں کو کہیں نہیں چھوتے ہیں لہذا ان کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 7.1: حل کی وجوہیت اور یکتاگی۔ مثال 7.19 کے اشکال۔

گاوسی اسقاط

ہم درج ذیل خطی نظام پر غور کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ 4x_2 &= 12 \end{aligned}$$

اس نظام کے عددی سر قالب میں غیر صفر قیمتیں، مرکزی وتر اور اس سے اوپر ہیں لہذا یہ بالائی تکنیکی نظام ہے۔ اس نظام کی نچلی مساوات کو حل کرتے ہوئے  $x_2 = \frac{12}{4} = 3$  ملتا ہے جس کو پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے  $x_1 = \frac{7-x_2}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$  حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ تکنیکی نظام کو با آسانی حل کیا جاسکتا ہے۔ یوں ہم کسی بھی نظام کو تکنیکی صورت میں لکھنا چاہیں گے۔

کسی بھی نظام کو تکنیکی صورت میں لانے کے عمل کو درج ذیل نظام کی مدد سے سیکھتے ہیں جس کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔ افزودہ قالب کی پہلی صف کو  $S_1$  اور دوسری صف کو  $S_2$  کہا گیا ہے۔

$$\begin{array}{ccc|c} S_1 & 2 & 3 & 12 \\ S_2 & 4 & -2 & 8 \end{array} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

اس کو تکنیکی صورت میں لکھنے کی خاطر نچلی مساوات سے  $x_1$  حذف کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے کے لئے بالائی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر  $4x_1 + 6x_2 = 24$  حاصل کرتے ہوئے اس کو نچلی مساوات سے منفی کرتے ہیں جس سے  $-8x_2 = -16$  ملتا ہے۔ یوں درج بالا نظام درج ذیل لکھا جائے گا جو بالائی تکنیکی صورت ہے۔ افزودہ قالب پر بھی یہی عمل کیا گیا ہے جہاں نچلی صف کے ساتھ الجبرائی عمل  $(S_2 - 2S_1)$  لکھا گیا ہے۔

$$\begin{array}{ccc|c} & 2 & 3 & 12 \\ & 0 & -8 & -16 \end{array} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ S_2 - 2S_1 & -8x_2 = -16 \end{aligned}$$

تکنیکی صورت حاصل کرنے کی اس عمل کو گاوسی اسقاط<sup>44</sup> کہتے ہیں۔ گاوسی اسقاط کی ترکیب وسیع تر نظام پر قابل استعمال ہے۔ یوں نچلی مساوات سے  $x_2 = 2$  حاصل کرتے ہوئے پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے  $x_1 = 3$  ملتا ہے۔

مثال 7.20: گاوسی اسقاط

درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے بالائی تکتونی صورت میں لائیں۔ نظام کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔ پہلی صف کو  $S_1$ ، دوسری صف کو  $S_2$  اور تیسری صف کو  $S_3$  کہا گیا ہے اور یہ نام قالب کا بائیں جانب لکھے گئے ہیں۔

$$\begin{array}{l} S_1 \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{array} \end{array}$$

حل: بالائی تکتونی صورت کے لئے درمیانی مساوات سے  $x_1$  حذف کرنا ہوگا جبکہ نیچلی مساوات سے  $x_1$  اور  $x_2$  حذف کرنے ہوں گے۔

پہلی قدم میں ہم بالائی مساوات  $S_1$  کو استعمال کرتے ہوئے نیچلی دونوں مساواتوں سے  $x_1$  حذف کرتے ہیں۔ پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کرنے سے دوسری مساوات سے  $x_1$  حذف ہوگا۔ اسی طرح پہلی مساوات کو تیسری مساوات کے ساتھ جمع کرتے ہوئے تیسری مساوات سے  $x_1$  حذف ہوتا ہے۔ اس عمل کو افزودہ قالب کے لئے بیان کرتے ہیں۔

پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے دوسری صف سے منفی کریں۔  
پہلی صف کو تیسری صف کے ساتھ جمع کریں۔

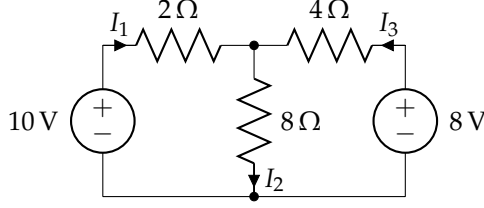
$$\begin{array}{l} S'_1 \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} S_2 - 2S_1 \\ S_3 + S_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ -7x_2 + 3x_3 = -10 \\ 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{array} \end{array}$$

صف پر عمل کو الجبرائی صورت میں قالب کے دائیں جانب لکھا گیا ہے۔ درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب ہے جس کی پہلی صف  $S'_1$ ، دوسری صف  $S'_2$  اور تیسری صف  $S'_3$  ہے۔

دوسری قدم میں نیچلی مساوات سے  $x_2$  حذف کرتے ہیں۔

تبدیل شدہ افزودہ قالب کی دوسری صف کو  $\frac{4}{7}$  سے ضرب دیتے ہوئے اسی قالب کی تیسری صف کے ساتھ جمع کریں۔

$$(7.33) \quad \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & -\frac{26}{7} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} S'_3 + \frac{4}{7}S'_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ -7x_2 + 3x_3 = -10 \\ \frac{26}{7}x_3 = -\frac{26}{7} \end{array} \end{array}$$



شکل 7.2: برقی دور۔ مثال 7.21

تکونی قالب کے حصول کے بعد حل حاصل کرتے ہیں۔ نظام 7.33 کی نچلی مساوات سے  $x_3 = -1$  ملتا ہے جس کو نظام 7.33 کی درمیانی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے  $x_2 = 1$  ملتا ہے۔ ان دونوں جوابات کو پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے  $x_1 = 2$  ملتا ہے۔

اگر دوسری قدم پر آپ پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر تیسری مساوات سے منفی کریں تو حاصل مساوات میں  $x_1$  دوبارہ حاضر ہو جائے گا جو پہلی قدم کی محنت کو ضائع کر دے گا۔ ہم ایسا نہیں چاہتے ہیں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی جسامت کی نظام کو حل کرتے ہوئے پہلی قدم پر، نظام کی پہلی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساوات سے  $x_1$  حذف کیا جاتا ہے۔ دوسری قدم پر، پہلی قدم کی حاصل نظام کی دوسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے  $x_2$  حذف کیا جاتا ہے۔ اسی طرح تیسری قدم پر، تیسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے  $x_3$  حذف کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ آخر تک دہرایا جائے گا۔

اس نظام کو افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے حل کیا جاسکتا تھا۔ بار بار مکمل مساوات لکھنے کی کوئی ضرورت نہیں تھی۔ ہم عموماً ایسا ہی کرتے ہوئے، نظام کو افزودہ قالب کی صورت میں لکھ کر، اس کی تکونی صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کریں گے۔

مثال 7.21: برقی دور کو شکل 7.2 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔ حل: کرخوف قانون دباؤ سے درج ذیل لکھا

جاسکتا ہے

$$2I_1 + 8I_3 = 10$$

$$4I_3 + 8I_2 = 8$$

جبکہ کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$I_1 + I_3 = I_2$$

ان تینوں مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے ایک ساتھ لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی بائیں جانب اس نظام کا افزودہ قالب بھی لکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{l} S_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \end{bmatrix} \\ S_2 \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix} \\ S_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2I_1 + 8I_3 = 10 \\ 8I_2 + 4I_3 = 8 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{array}$$

پہلا قدم: چونکہ دوسری صف کا پہلا رکن صفر ہے لہذا اس کو کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے البتہ تیسرے صف کے پہلے رکن  $I_1$  کو حذف کرنا ہو گا۔

پہلی صف کو  $\frac{1}{2}$  سے ضرب دے کر تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{l} S'_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \end{bmatrix} \\ S'_2 \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix} \\ S'_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2I_1 + 8I_3 = 10 \\ 8I_2 + 4I_3 = 8 \\ S_3 - \frac{1}{2}S_1 \end{array}$$

دوسرا قدم: تیسرے صف سے  $I_2$  حذف کرتے ہیں۔

دوسرے صف کو  $\frac{1}{8}$  سے ضرب دے کر تیسرے صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{l} S''_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \end{bmatrix} \\ S''_2 \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix} \\ S''_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -4 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2I_1 + 8I_3 = 10 \\ 8I_2 + 4I_3 = 8 \\ S'_3 + \frac{1}{8}S'_2 \end{array}$$

تیسرا قدم: آخری صف یا آخری مساوات سے  $I_3 = \frac{8}{5}$  ملتا ہے۔ اس قیمت کو پہلی اور (یعنی صف  $S''_1$ ) اور درمیانی مساوات (یعنی صف  $S''_2$ ) میں پر کرتے ہوئے بقایا برقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$2I_1 + 8\left(\frac{8}{5}\right) = 10 \implies I_1 = -\frac{7}{5}$$

$$8I_2 + 4\left(\frac{8}{5}\right) = 8 \implies I_2 = \frac{1}{5}$$



## بنیادی اعمال صف

قالب کی صفوں پر درج ذیل تین عمل سے نظام تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ گاوسی اسقاط پہلی دو اعمال سے حاصل ہوتا ہے۔

- دو صفوں کا آپس میں تبادلہ
  - صف کو کسی مستقل قیمت سے ضرب دے کر کسی دوسرے (یا اسی) صف کے ساتھ جمع کرنا
  - کسی صف کو غیر صفر مستقل قیمت  $c$  کے ساتھ ضرب دینا
- دھیان رہے کہ یہ اعمال افزودہ قالب کے صفوں پر قابل اطلاق ہیں نہ کہ قطاروں پر۔ یہ اعمال، نظام کی مساوات پر درج ذیل کے مترادف ہیں۔
- دو مساواتوں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنا۔
  - ایک مساوات کو کسی مستقل سے ضرب دے کر دوسری (یا اسی) مساوات کے ساتھ جمع کرنا۔
  - نظام کی مساوات کو غیر صفر مستقل  $c$  سے ضرب دینا۔

اب ظاہر ہے کہ ہمزاد مساواتوں کو آگے پیچھے لکھنے سے ان کا حاصل حل تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح کسی مساوات کو مستقل قیمت سے ضرب دے کر دوسری مساوات کے ساتھ جمع کرنے سے بھی حل تبدیل نہیں ہوتا اور نہ ہی کسی مساوات کو غیر صفر مستقل سے ضرب دینے سے حل تبدیل ہوتا ہے۔ (کسی مساوات کو صفر سے ضرب دینے سے مساواتوں کی تعداد کم ہوگی جس سے عین ممکن ہے کہ ان کا حل ممکن نہ رہے۔)

دو عدد خطی نظام  $N_1$  اور  $N_2$  اس صورت صف برابر<sup>45</sup> کہلاتے ہیں جب  $N_1$  پر محدود عمل صف کے ذریعہ  $N_2$  حاصل کرنا ممکن ہو۔ یہ حقیقت جسے درج ذیل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے، گاوسی اسقاط کی جواز ہے۔

<sup>45</sup> row equivalent

مسئلہ 7.1: صف برابر نظام  
صف برابر خطی نظام کے سلسلہ حل<sup>46</sup> یکساں ہوں گے۔

اس مسئلے کی بنا اگر ایک نظام کا سلسلہ حل دوسرے نظام کے سلسلہ حل کے عین مطابق ہو، تب انہیں صف برابر نظام کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ یہاں عمل صف کی بات کی جا رہی ہے۔ افزودہ قالب کے قطار تبدیل کرنے سے نظام تبدیل ہو گا اور اس کا حل بھی تبدیل ہو گا لہذا افزودہ قالب پر کسی بھی عمل قطار کی اجازت نہیں ہے۔

ایسا نظام جس کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد زیادہ ہو زائد معلوم<sup>47</sup> کہلاتا ہے۔ نظام کی نا معلوم متغیرات اور مساواتوں کی تعداد برابر ہونے کی صورت میں اس کو معلوم<sup>48</sup> کہتے ہیں جبکہ نظام کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد کم ہونے کی صورت میں اس کو کم معلوم<sup>49</sup> کہتے ہیں۔

ایسا نظام جس کا کوئی حل نہ ہو متضاد<sup>50</sup> نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نظام جس کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہوں بلا تضاد<sup>51</sup> نظام کہلاتا ہے۔

گاوسی اسقاط۔ نظام کی تین ممکنہ صورتیں

یکتا حل کا نظام مثال 7.20 میں دیکھا گیا۔ آئیں اب لامتناہی تعداد کے حل والے نظام (مثال 7.22) کو اور بغیر کسی حل والے نظام (مثال 7.23) کو گاوسی اسقاط سے حل کرنے کی کوشش کریں۔

---

solution set<sup>46</sup>

overdetermined<sup>47</sup>

determined<sup>48</sup>

underdetermined<sup>49</sup>

inconsistent<sup>50</sup>

consistent<sup>51</sup>

مثال 7.22: لامتناہی تعداد کے حل والا نظام  
درج ذیل نظام جو تین مساوات پر مبنی ہے میں چار متغیرات پائے جاتے ہیں۔ اس کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$\begin{array}{l} S_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \end{array} \end{array}$$

حل: پہلی قدم میں چکی دو مساواتوں سے  $x_1$  حذف کرتے ہیں۔

پہلی صف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے دوسری صف سے منفی کریں۔  
پہلی صف کو 4 سے ضرب کرتے ہوئے تیسری صف سے منفی کریں۔

$$\begin{array}{l} S'_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & -8 & -6 & 8 & -20 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ S_2 - 2S_1 \quad -4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -10 \\ S_3 - 4S_1 \quad -8x_2 - 6x_3 + 8x_4 = -20 \end{array} \end{array}$$

دوسری قدم میں درج بالا تبدیل شدہ افزوہ قالب استعمال کرتے ہوئے، دوسرے صف کی مدد سے تیسری صف سے  $x_2$  حذف کرتے ہیں۔ دوسری صف کو دو سے ضرب دیتے ہوئے تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ -4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -10 \\ S'_3 - 2S'_2 \quad 0 = 0 \end{array} \end{array}$$

دوسری مساوات سے  $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_3 + x_4$  اور یوں پہلی مساوات سے  $x_1 = \frac{7}{4} - \frac{5}{8}x_3$  ملتا ہے۔ اب  $x_3$  اور  $x_4$  کی لامحدود مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے  $x_1$  اور  $x_2$  حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

عموماً اختیاری مستقل کو  $t_1$ ،  $t_2$ ، ... لکھا جاتا ہے۔ یوں  $x_3$  اور  $x_4$  کو بالترتیب  $t_1$  اور  $t_2$  لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{4} - \frac{5}{8}t_1 \\ x_2 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{4}t_1 + t_2 \end{aligned}$$

مثال 7.23: گاوسی اسقاط۔ بلا حل نظام

ایسا نظام جس کا حل ممکن نہ ہو کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے تضاد کی صورت حاصل ہو گی۔ آئیں درج ذیل نظام حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{l} S_1 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -2 & 16 & -10 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -2x_1 + 16x_2 - 10x_3 = 14 \end{array} \end{array}$$

دوسری اور تیسری مساوات سے  $x_1$  حذف کرتے ہیں۔

پہلی صف کو  $\frac{1}{2}$  سے ضرب دے کر دوسری صف سے منفی کرتے ہیں۔  
پہلی صف کو  $\frac{1}{2}$  سے ضرب دے کر تیسری صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{l} S'_1 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 15 & -9 & 17 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ S_2 - \frac{1}{2}S_1 \quad 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ S_3 + \frac{1}{2}S_1 \quad 15x_2 - 9x_3 = 17 \end{array} \end{array}$$

آخری صف سے  $x_2$  حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} S'_3 - 3S'_2 \quad \begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ 0 = 8 \end{array} \end{array}$$

آخری مساوات کے تحت  $0 = 8$  ہے جو تضاد کی صورت ہے۔ بلا حل نظام کی گاوسی اسقاط تضاد کی صورت دے گی۔

### 7.3.1 صف زینہ دار صورت

گاوسی اسقاط کے بعد حاصل عددی سر قالب، افزودہ قالب اور نظام صف زینہ دار<sup>52</sup> کہلاتے ہیں جن میں صفر کے صف، اگر موجود ہوں تو یہ، آخر پر پائے جاتے ہیں اور صف میں بائیں جانب پہلی غیر صفر اندراج، ہر اگلے صف میں،

<sup>52</sup>echelon form

مزید دور ہو گی۔ مثال 7.23 میں عددی سر قالب اور افزودہ قالب کی زینہ دار صورت درج ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ ہم بائیں ترین اندراج کو اکائی (1) کی صورت میں لانے کی کوشش نہیں کرتے ہیں چونکہ اس سے کوئی فائدہ حاصل نہیں ہو گا۔ (سادہ زینہ دار صورت<sup>53</sup> جس میں بائیں ترین اندراج اکائی ہو گی پر بعد میں بحث کی جائے گی۔)

$m$  مساوات اور  $n$  متغیرات کے نظام کا افزودہ قالب  $[A|b]$  ہے جس سے زینہ دار صورت  $[R|f]$  حاصل کی جاتی ہے۔ نظام  $ax = b$  اور  $Rx = f$  ایک ہی نظام کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔ اگر ان میں کسی ایک نظام کا حل موجود ہو، تب یہی حل دوسرے نظام کا بھی حل ہو گا۔

گواہی اسقاط سے زینہ دار افزودہ قالب کی درج ذیل عمومی صورت حاصل ہو گی۔

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & \cdots & r_{1n} & f_1 \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & \cdots & r_{2n} & f_2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & r_{rr} & \cdots & r_{rn} & f_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_m \end{bmatrix}$$

درج بالا زینہ دار افزودہ قالب میں  $r \leq m$ ،  $r_{rr} \neq 0$  جبکہ  $f_{r+1}$  تا  $f_m$  اندراج والے صف میں تمام  $r_{ij} = 0$  ہوں گے۔

زینہ دار عددی سر قالب  $R$  میں غیر صفر صفوں کی تعداد  $r$  کو  $A$  کا درجہ<sup>54</sup> کہتے ہیں جو  $A$  کا بھی درجہ ہو گا۔ یہ جاننا کہ نظام  $Ax = b$  کا حل موجود ہے یا نہیں اور اس حل کو حاصل کرنا درج ذیل طریقے سے ممکن ہے۔

reduced echelon form<sup>53</sup>  
rank of matrix<sup>54</sup>

• (الف) بلا حل: اگر  $r < m$  ہو (جس کا مطلب ہے کہ  $R$  میں کم از کم ایک صف ایسا ہے جس کے تمام اندراجات صفر (0) ہیں) اور  $f_{r+1}$  تا  $f_m$  میں سے کم از کم ایک مقدار غیر صفر ہو تب  $Rx = f$  متضاد نظام ہو گا جس کا کوئی حل ممکن نہیں ہے۔ یوں  $Ax = b$  بھی متضاد نظام ہو گا جس کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

بلا تضاد نظام (جس میں یا  $r = m$  ہو اور یا  $r < m$  کے ساتھ ساتھ  $f_{r+1}$  تا  $f_m$  صفر کے برابر ہوں) تب نظام کا حل درج ذیل ہو گا۔

• (ب) یکتا حل: اگر  $r = n$  ہو تب نظام کا حل یکتا ہو گا جس کو گاوسی اسقاط سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ (مثال 7.20 کی طرح۔)

• (پ) بے انتہا تعداد کے حل: ایسی صورت میں  $x_{r+1}$  تا  $x_n$  کی قیمتیں چن کر  $x_1$  تا  $x_{r-1}$  حاصل کریں۔ (مثال 7.22 کی طرح۔)

### سوالات

سوال 7.40 تا سوال 7.53 کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

سوال 7.40:

$$2x - 3y = -4$$

$$x + y = 3$$

جوابات:  $x = 1, y = 2$

سوال 7.41:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات:  $x_1 = -1, x_2 = 1$

سوال 7.42:

$$x - 2y + z = -1$$

$$y - z = -1$$

$$2x + y + z = 1$$

جوابات:  $x = -1, y = 1, z = 2$ 

سوال 7.43:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

جوابات:  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ 

سوال 7.44:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات:  $x_1 = 2, x_2 = 1$ 

سوال 7.45:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & -5 & -21 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

جوابات:  $x_3 = 4, x_2 = t, x_1 = 2t + 1$  جہاں  $t$  اختیاری مستقل ہے۔

سوال 7.46:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات:  $x_3 = t, x_2 = \frac{t}{2}, x_1 = -\frac{3}{2}t$  جہاں  $t$  اختیاری مستقل ہے۔

سوال 7.47:

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\y + z &= -1 \\2x - y &= 6\end{aligned}$$

جوابات:  $x = 2, y = -2, z = 1$ 

سوال 7.48:

$$\begin{aligned}2x + y - 3z &= -1 \\x + y + z &= 1\end{aligned}$$

جوابات:  $x = 4t - 2, y = 3 - 5t, z = t$  جہاں  $t$  اختیاری مستقل ہے۔

سوال 7.49:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات:  $x = \frac{1}{3}(7 - t), y = -\frac{1}{3}(4t + 2), z = t$  جہاں  $t$  اختیاری ہے۔

سوال 7.50:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

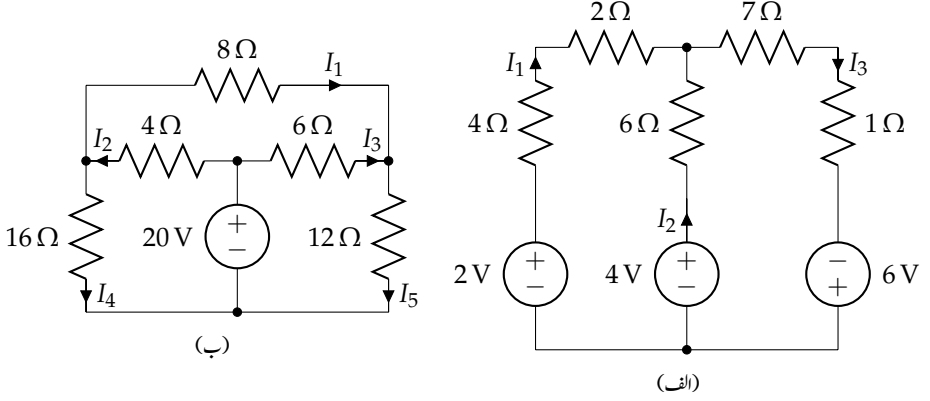
جوابات:  $x_1 = -\frac{8}{7}t, x_2 = \frac{5}{7}t, x_3 = -\frac{4}{7}t, x_4 = t$  جہاں  $t$  اختیاری مستقل ہے۔

سوال 7.51:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات:  $x_1 = -\frac{10}{7}(t + 1), x_2 = \frac{1}{7}(5t + 12), x_3 = -\frac{1}{7}(8t + 15)$  جہاں  $t$  اختیاری مستقل ہے۔ بالائی صف کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے حل کریں اور یا پھر نیچے تکنیکی صورت حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔





شکل 7.3: برقی دور۔ سوال 7.54 اور سوال 7.55

سوال 7.52:

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7$$

جوابات:  $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -2$

سوال 7.53:

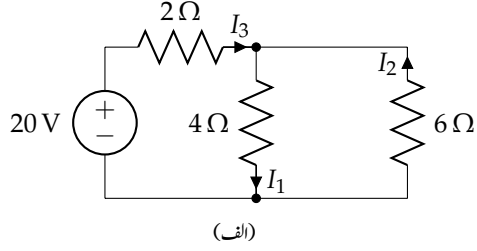
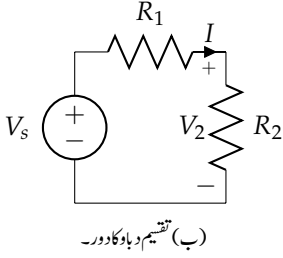
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & -4 & 6 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

جوابات:  $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 1$

سوال 7.54 تا سوال 7.58 برقی ادوار کے نظام ہیں۔

سوال 7.54: شکل 7.3-الف میں برقی دور دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔

جوابات:  $I_3 = \frac{9}{11} \text{ A}$  ،  $I_2 = \frac{19}{33} \text{ A}$  ،  $I_1 = \frac{8}{33} \text{ A}$



شکل 7.4: او دار برائے سوال 7.56 اور سوال 7.57

سوال 7.55: شکل 7.3-ب میں دکھائے گئے دور کو حل کریں۔

جوابات:  $I_5 = \frac{200}{171} \text{ A}$  ،  $I_4 = \frac{55}{57} \text{ A}$  ،  $I_3 = \frac{170}{171} \text{ A}$  ،  $I_2 = \frac{65}{57} \text{ A}$  ،  $I_1 = \frac{10}{57} \text{ A}$

سوال 7.56: شکل 7.4-الف میں تینوں برقی رو دریافت کریں۔ برقی رو  $I_2$  کی قیمت منفی ہے۔ اس کا کیا مطلب ہے؟ جوابات:  $I_3 = \frac{50}{11} \text{ A}$  ،  $I_2 = -\frac{20}{11} \text{ A}$  ،  $I_1 = \frac{30}{11} \text{ A}$  منفی برقی رو کا مطلب ہے کہ رو کی سمت دکھائی گئی سمت کے الٹ ہے۔

سوال 7.57: تقسیم دباؤ کا دور شکل 7.4-ب میں دکھایا گیا ہے۔ کرخوف قانون دباؤ سے  $V_s$  ،  $I$  ،  $R_1$  اور  $R_2$  کا تعلق لکھیں۔ اسی طرح  $V_2$  اور  $I$  کا تعلق لکھیں۔ اس نظام کو حل کرتے ہوئے  $V_2$  حاصل کریں۔ حاصل کلیہ تقسیم دباؤ<sup>55</sup> کا کلیہ کہلاتا ہے۔ جواب:  $V_2 = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_s$

سوال 7.58: ویٹ سٹون پل  
مزاحمتوں کی پیمائش کے لئے استعمال ہونے والا<sup>56</sup> ویٹ سٹون پل<sup>57</sup> شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ایک ہاتھ  $R_1$  اور  $R_x$  نسب ہیں اور دوسرے ہاتھ  $R_2$  اور  $R_3$  نسب ہیں۔ دونوں ہاتھ آپس میں متوازی جڑے ہیں۔ ایک ہاتھ کے درمیانے نقطے سے دوسرے ہاتھ کے درمیانے نقطے تک ایمپیئر پیما<sup>58</sup> بطور پل<sup>59</sup> نسب کیا گیا ہے جس کی مزاحمت  $R_0$  ہے۔ ویٹ سٹون پل سے نامعلوم مزاحمت  $R_x$  ناپی جاتی ہے۔ متغیر مزاحمت  $R_3$  کو تبدیل کیا جاتا ہے حتیٰ کہ ایمپیئر پیما  $I_0 = 0$  ناپے۔ اس حالت میں ثابت کریں کہ  $R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$  ہو گا۔ جواب: ایمپیئر پیما اس

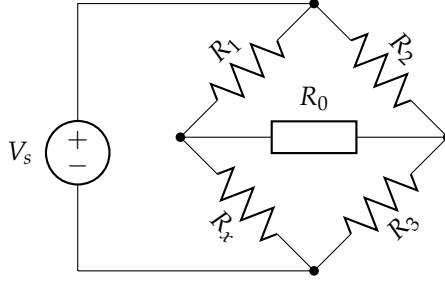
<sup>55</sup> voltage division formula

<sup>56</sup> برطانوی سائنسدان چارلس ویٹ سٹون [1802-1875] سے اس دور کا نام منسوب ہے۔

<sup>57</sup> wheatstone bridge

<sup>58</sup> ammeter

<sup>59</sup> bridge



شکل 7.5: ویٹ سٹون پیل۔ سوال 7.58

صورت صفر برقی رو ناپے گی جب  $R_0$  کے دونوں اطراف برقی دباؤ کی قیمت عین برابر ہو۔ اگر  $R_0$  میں برقی رو صفر کے برابر ہو تب  $R_0$  کو دور سے ہٹانے سے دور پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ ہم ایسا ہی کرتے ہوئے  $R_0$  کو ہٹاتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ سوال 7.57 کے تحت  $R_x$  پر دباؤ  $V_x = \left( \frac{R_x}{R_1 + R_x} \right) V_s$  اور  $R_3$  پر دباؤ  $V_3 = \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) V_s$  ہو گا۔ چونکہ یہ دونوں دباؤ برابر ہیں لہذا  $V_s = \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) V_s = \left( \frac{R_x}{R_1 + R_x} \right) V_s$  ہو گا جس سے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 7.59: آمد و رفت برقی ادوار حل کرنے کے طریقے دیگر شعبوں میں بھی استعمال کیے جاسکتے ہیں۔ شکل 7.6 میں شہر کی سڑکوں پر فی گھنٹہ گاڑیوں کی آمد و رفت دکھائی گئی ہے۔ کرخوف قانون رو کی مماثل استعمال کرتے ہوئے فی گھنٹہ نامعلوم آمد و رفت  $x_1$  تا  $x_4$  حاصل کریں۔ کیا حل یکتا حل ہے؟ جوابات:  $x_2 = x_1 + 100$  ،  $x_3 = -x_1 - 150$  اور  $x_4 = x_1 + 300$  ؛ حل یکتا نہیں ہے۔

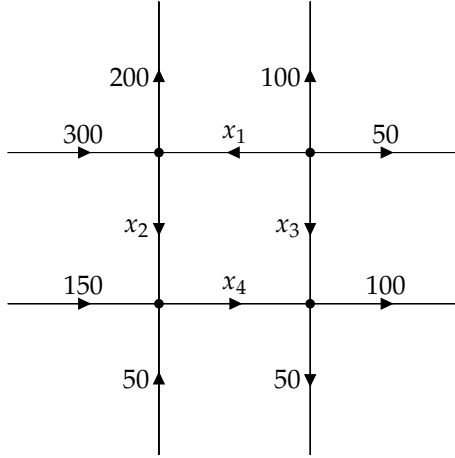
سوال 7.60: منڈی کی رسد و طلب اشیاء کی مانگ، قیمت اور دستیابی کو بالترتیب  $M$  ،  $Q$  اور  $D$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ دو شہروں میں رسد و طلبی کی متوازن مساوات  $(M_1 = D_1, M_2 = D_2)$  کا حل درج ذیل خطی تعلقات سے حاصل کریں، جہاں زیر نوشت میں 1 پہلے شہر اور 2 دوسرے شہر کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$M_1 = 30 - 3Q_1 - 2Q_2, \quad D_1 = 5Q_1 - 2Q_2 + 6$$

$$M_2 = 4Q_1 - Q_2 + 10, \quad D_2 = 3Q_2 - 6$$

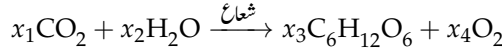
$$\text{جوابات: } Q_2 = 7, \quad Q_1 = 3, \quad M_2 = D_2 = 15, \quad M_1 = D_1 = 7$$

سوال 7.61: ضیائی تالیف روشنی کی توانائی استعمال کرتے ہوئے پودے، پانی  $H_2O$  اور کاربن ڈائی آکسائیڈ  $CO_2$  سے آکسیجن  $O_2$



شکل 7.6: آمدورفت۔ سوال 7.59

اور گلوکوز  $C_6H_{12}O_6$  حاصل کرتے ہیں۔ یہ عمل، جسے ذیل کیمیائی مساوات میں پیش کیا گیا ہے، ضیائی تالیف<sup>60</sup> کہلاتی ہے۔



کیمیائی مساوات متوازن کرنے سے مراد  $x_1$ ،  $x_2$ ، ... کی ایسی کمتر قیمتیں دریافت کرنا ہے کہ مساوات کے بائیں ہاتھ ہر قسم کی ایٹم کی تعداد دائیں ہاتھ اسی ایٹم کی تعداد کے برابر ہو۔ ضیائی تالیف کی مساوات کو متوازن کریں۔

جوابات:  $x_1 = 6$ ،  $x_2 = 6$ ،  $x_3 = 1$ ،  $x_4 = 6$

#### 7.4 خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا

ہم خطی نظام کے خصوصیات کو مکمل طور پر حل کی موجودگی اور یکسانی کی نقطہ نظر سے دیکھنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم خطی الجبرا کے نئے اور بنیادی تصورات متعارف کرتے ہیں۔ ان میں خطی غیر تابعیت اور درجہ قالب زیادہ اہم ہیں۔ یاد رہے کہ گاوسی اسقاط انہیں پر منحصر ہے۔

<sup>60</sup>photosynthesis

سمتیات کی خطی تابعت اور غیر تابعت

$m$  عدد سمتیات  $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$  (جن میں ارکان کی تعداد یکساں ہے) کی خطی مجموعہ<sup>61</sup> درج ذیل مساوات دیتی ہے،

$$c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \dots + c_m a_{(m)}$$

جہاں  $c_1$  تا  $c_m$  غیر سمتی قیمتیں ہیں۔ اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$(7.34) \quad c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \dots + c_m a_{(m)} = 0$$

ظاہر ہے کہ تمام  $c_j$  کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 7.34 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں  $0 = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ اگر  $m$  عدد  $c_j$  کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 7.34 درست ہو تب  $a_{(1)}$  تا  $a_{(m)}$  سمتیات خطی طور غیر تابع<sup>62</sup> کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ  $a_{(1)}$  تا  $a_{(m)}$  سمتیات کا خطی طور غیر تابع سلسلہ<sup>63</sup> ہے۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ  $c_j$  کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 7.34 درست ہو تب  $a_{(1)}$  تا  $a_{(m)}$  سمتیات خطی طور تابع<sup>64</sup> کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے مثلاً  $c_1 \neq 0$  کی صورت میں ہم مساوات 7.34 کو  $c_1$  سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$a_{(1)} = k_2 a_{(2)} + \dots + k_m a_{(m)} \quad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

جہاں چند  $k_j$  صفر ہو سکتے ہیں ( $a_{(1)} = 0$  کی صورت میں تمام  $k_j$  صفر ہو سکتے ہیں)۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ خطی طور غیر تابع سمتیات کا سلسلہ وہ کمتر تعداد کے سمتیات ہیں جن کے ساتھ ہم کام کر سکتے ہیں۔

<sup>61</sup> linear combination

<sup>62</sup> linear independent

<sup>63</sup> linearly independent set

<sup>64</sup> linearly dependent

مثال 7.24: خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع سمتیات درج ذیل سمتیات

$$a_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a_{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$a_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

خطی طور تابع ہیں چونکہ انہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.34 کی طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$2a_{(1)} - a_{(2)} + 2a_{(3)} = 0$$

درج بالا کو با آسانی الجبرا سے ثابت کیا جاسکتا ہے البتہ اس تعلق کو حاصل کرنے اتنا آسان نہیں ہے۔ تابعیت ثابت کرنے کا منظم طریقہ نیچے دیا گیا ہے۔

اس مثال کے پہلے دو عدد سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔

قالب کا درجہ

تعریف: قالب  $A$  میں خطی طور غیر تابع صفوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کو  $A$  کا درجہ<sup>65</sup> کہتے ہیں۔

قالبوں اور خطی مساوات کے نظاموں کی عمومی خصوصیات سمجھنے میں درجہ قالب کا تصور کار آمد ثابت ہو گا۔

مثال 7.25: درجہ قالب

جیسا گزشتہ مثال میں دیکھا گیا، درج ذیل قالب میں دو عدد صف خطی طور غیر تابع ہیں لہذا اس قالب کا درجہ 2 ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ درج  $A$  اس صورت 0 ہو گا جب  $A = 0$  ہو۔ یہ حقیقت درجہ قالب کی تعریف سے اخذ ہوتی ہے۔

دو عدد قالب  $A_1$  اور  $A_2$  اس صورت صف برابر<sup>66</sup> کہلاتے ہیں جب  $A_1$  پر محدود عمل صف کے ذریعہ  $A_2$  حاصل کرنا ممکن ہو۔

اب قالب میں خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد، صفوں کی جگہ تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتی اور نا ہی کسی صف کو غیر صفر قیمت  $c$  سے ضرب دینے اور نہ ہی صفوں کے خطی ملاپ سے ہوتی ہے۔ یوں اعمال صف کی صورت میں کسی بھی قالب کا درجہ مستقل قیمت ہو گا۔

مسئلہ 7.2: صف برابر قالب  
صف برابر قالبوں کا درجہ ایک دونوں کے برابر ہو گا۔

یوں گاوسی اسقاط (حصہ 7.3) سے تکنونی قالب حاصل کرتے ہوئے درجہ قالب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ تکنونی قالب میں غیر صفر صفوں کی تعداد درجہ قالب ہو گی۔

مثال 7.26: مثال 7.25 میں دیے گئے قالب کا درجہ، اس کی تکنونی قالب کی مدد سے دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{matrix} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 - 4S_1 \\ S_3 - S_1 \end{matrix} \\
 &= \begin{matrix} S''_1 \\ S''_2 \\ S''_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} S'_3 - \frac{1}{2}S'_2 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

row equivalent<sup>66</sup>

آخری قالب تکونی ہے جس کے آخری صف کے تمام اندراجات صفر کے برابر ہیں لہذا یہ صفر صف ہے۔ غیر صفر صفوں کی تعداد 2 ہے لہذا  $A$  کا درجہ بھی 2 ہے۔

مثال 7.24 تا مثال 7.26 میں  $p = 3$ ،  $n = 3$  اور درجی قالب 2 لیتے ہوئے درج ذیل مسئلے کو پڑھیں۔

مسئلہ 7.3: سمتیات کی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے  $p$  عدد سمتیات جن میں ہر سمتیہ کے  $n$  عدد ارکان ہوں کو بطور قالب کے صف لکھیں۔ اگر حاصل قالب کا درجہ  $p$  ہو تب یہ سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ اس کے برعکس اگر اس قالب کا درجہ  $p$  سے کم ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

دیگر اہم خصوصیات درج ذیل مسئلے سے حاصل ہوں گے۔

مسئلہ 7.4: سمتیات قطار کی صورت میں درجہ قالب

قالب  $A$  کا درجہ  $r$ ، اس قالب میں غیر تابع سمتیہ قطار کی تعداد کے برابر ہو گا۔

یوں قالب  $A$  اور تبدیل محل قالب  $A^T$  کا درجہ ایک دونوں کے برابر ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ  $m \times n$  قالب  $A$  کا درجہ  $r$  ہے۔ درجہ قالب کی تعریف سے یوں  $A$  کے  $r$  عدد خطی طور غیر تابع صف ہوں گے جنہیں ہم  $v_{(1)}, \dots, v_{(r)}$  کہتے ہیں اور  $A$  کے تمام صف  $a_{(1)}$  تا  $a_{(m)}$  کو ان خطی طور غیر تابع کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_{(1)} = c_{11}v_{(1)} + c_{12}v_{(2)} + \dots + c_{1r}v_{(r)}$$

$$a_{(2)} = c_{21}v_{(1)} + c_{22}v_{(2)} + \dots + c_{2r}v_{(r)}$$

$\vdots$

$$a_{(m)} = c_{m1}v_{(1)} + c_{m2}v_{(2)} + \dots + c_{mr}v_{(r)}$$



یہ مساوات سمتیات ہیں جن میں سے ہر  $n$  عدد مساوات پر مشتمل ہے۔  $v_{(1)}$  کے ارکان کو  $v_{11}, \dots, v_{1n}$  لکھتے ہوئے اور اسی طرح بائیں ہاتھ کے سمتیات کے ارکان کو بھی لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں  $k = 1, \dots, n$  ہے۔

$$a_{1k} = c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \dots + c_{1r}v_{rk}$$

$$a_{2k} = c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \dots + c_{2r}v_{rk}$$

$$\vdots$$

$$a_{mk} = c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \dots + c_{mr}v_{rk}$$

اس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = v_{1k} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + v_{2k} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \dots + v_{rk} \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix}$$

بائیں ہاتھ سمتیہ  $A$  قالب کا  $k$  شمار پر قطار ہے۔ یوں درج بالا مساوات کے تحت  $A$  کا ہر قطار، دائیں ہاتھ کے  $r$  عدد سمتیات کا خطی مجموعہ ہے لہذا  $A$  کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد  $r$  سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے جو خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد ہے۔

اب یہی کچھ تبدیل محل قالب  $A^T$  کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے۔ چونکہ  $A^T$  کے سمتیات صف  $A$  کے سمتیات قطار، اور  $A^T$  کے سمتیات قطار  $A$  کے سمتیات صف ہیں، لہذا (درج بالا نتیجے کے تحت)  $A$  کی خطی طور غیر تابع صف سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد (جو  $r$  کے برابر ہے)،  $A$  کی خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے۔ اس طرح یہ تعداد  $r$  ہی ممکن ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مثال 7.26 میں قالب  $A$  کا درجہ 2 ہے۔ یوں  $A$  کے دو قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ بائیں جانب سے پہلی اور دوسری قطار کو خطی طور غیر تابع لیتے ہوئے تیسرے اور چوتھے قطار کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

مسئلہ 7.3 اور مسئلہ 7.4 کی مدد سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔ مسئلہ 7.5: سمتیات کی خطی طور تابعیت فرض کریں کہ  $p$  سمتیات کا ہر رکن  $n$  ارکان پر مشتمل ہے۔ اگر  $n < p$  ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

ثبوت: ایسا قالب  $A$  جس کے صف یہی  $p$  سمتیات ہوں اور جس کی قطاروں کی تعداد  $n$  (جہاں  $n < p$  ہے) ہو کا مسئلہ 7.4 کے تحت

$$A \leq n < p \text{ درجہ}$$

ہو گا جو مسئلہ 7.3 کے تحت خطی تابعیت کو ظاہر کرتی ہے۔

### سمتی فضا

فرض کریں کہ  $V$  سمتیات کا ایسا غیر خالی سلسلہ<sup>67</sup> ہے جس کے تمام سمتیات میں ارکان کی تعداد یکساں ہے۔ اگر  $V$  میں موجود کسی بھی دو سمتیات  $a$  اور  $b$  کے تمام ممکنہ مجموعے  $\alpha a + \beta b$  (جہاں  $\alpha$  اور  $\beta$  حقیقی اعداد ہیں) بھی  $V$  کے ارکان ہوں، اور مزید یہ کہ،  $a$  اور  $b$  مساوات 7.7-الف، پ، ت اور مساوات 7.8 پر پورا اترتے ہوں، اور  $V$  میں کوئی بھی سمتیات  $a$ ،  $b$ ،  $c$  مساوات 7.7-ب پر پورا اترتے ہوں، تب  $V$  سمتی فضا<sup>68</sup> کہلائے گا۔

$V$  میں خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد کو  $V$  کی جسامت<sup>69</sup> کہتے ہیں۔ یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ  $V$  کی جسامت محدود ہے۔ لامتناہی جسامت کے سلسلے پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

$V$  میں موجود خطی طور غیر تابع سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد پر مبنی سلسلے کو  $V$  کا اساس<sup>70</sup> کہتے ہیں۔ اس (اساسی) سلسلے میں کسی بھی ایک یا ایک سے زیادہ سمتیات کو شامل کرنے سے یہ سلسلہ خطی طور تابع ہو جائے گا۔ یوں  $V$  کی اساس میں سمتیات کی تعداد،  $V$  کی جسامت کے برابر ہوگی۔

nonempty set<sup>67</sup>  
vector space<sup>68</sup>  
dimension<sup>69</sup>  
basis<sup>70</sup>

کسی بھی دیے گئے، یکساں تعداد کے ارکان والے سمتیات  $a_{(1)}, \dots, a_{(p)}$  کے تمام ممکنہ مجموعوں کا سلسلہ، ان سمتیات کا احاطہ<sup>71</sup> کہلاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔ اگر  $a_{(1)}, \dots, a_{(p)}$  خطی طور غیر تابع ہوں تب اس سمتی فضا کی اساس یہی سمتیات ہوں گے۔

اس سے اساس کی نئی تعریف ملتی ہے۔ سمتیات کا سلسلہ اس صورت سمتی فضا  $V$  کا اساس ہو گا (الف) اگر اس سلسلے میں سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں اور (ب) اگر  $V$  میں کسی بھی سمتیہ کو سلسلے کے سمتیات کا خطی مجموعے لکھنا ممکن ہو۔

سمتی فضا کی ذیلی فضا<sup>72</sup> سے مراد  $V$  کا وہ غیر خالی ذیلی سلسلہ<sup>73</sup> ہے (جو پورے  $V$  پر بھی مشتمل ہو سکتا ہے)۔ جو  $V$  کی سمتیات پر لاگو جمع اور غیر سمتی ضرب کے قواعد پر پورا اترتا ہو اس سمتی فضا ہو۔

مثال 7.27: سمتی فضا، جسامت، اساس  
مثال 7.24 کے تین سمتیات کے احاطے کی جسامت 2 ہے۔ اس سمتی فضا کی اساس ان میں سے کسی بھی دو سمتیات پر مشتمل ہو گا مثلاً  $a_{(1)}$  اور  $a_{(2)}$  یا  $a_{(1)}$  اور  $a_{(3)}$  اور یا  $a_{(2)}$  اور  $a_{(3)}$ ۔

مسئلہ 7.6: سمتی فضا  $R^n$   
 $n$  سمتیات (حقیقی اعداد) پر مشتمل سمتی فضا  $R^n$  کی جسامت  $n$  ہو گی۔

ثبوت:  $n$  سمتیات کی اساس درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} a_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ a_{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ a_{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

قالب  $A$  کے سمتیات صف کے احاطے کو  $A$  کا صف فضا<sup>74</sup> کہتے ہیں۔ اسی طرح قالب  $A$  کے سمتیات قطار کے احاطے کو  $A$  کا قطار فضا<sup>75</sup> کہتے ہیں۔

اب مسئلہ 7.4 کے تحت قلب کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد اس کے خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد کے برابر ہوتی ہے۔ جسامت کی تعریف کے تحت، یہ عدد صف فضا یا قطار فضا کی جسامت ہو گا۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 7.7: صف فضا اور قطار فضا  
قالب  $A$  کی قطار فضا کی جسامت، اس کی صف فضا کی جسامت اور درجہ  $A$  عین برابر ہوں گے۔

آخر میں کسی بھی قالب  $A$  کی غیر متجانس مساوات  $Ax = 0$  کا سلسلہ حل، سمتی فضا ہو گا جس کو  $A$  کی معدوم فضا<sup>76</sup> کہتے ہیں، اور جس کی جسامت کو  $A$  کی معدومیت<sup>77</sup> کہتے ہیں۔ اگلے حصے میں درج ذیل بنیادی تعلق کو ثابت کرتے ہیں۔

$$(7.35) \quad A \text{ میں تعداد قطار} = A \text{ معدومیت} + A \text{ درجہ}$$

### سوالات

سوال 7.62 تا سوال 7.62 کی تکنیکی صورت گاوسی اسقاط سے حاصل کرتے ہوئے درجہ قالب حاصل کریں۔ صف فضا اور قطار فضا کی اساس بھی حاصل کریں۔

سوال 7.62:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

<sup>74</sup>row space  
<sup>75</sup>column space  
<sup>76</sup>null set  
<sup>77</sup>nullity

جوابات: درجہ = 1 ؛  $[6 -2 8]$  ؛  $[2 -1]^T$  - آخری سمتیہ کو  $[6 -3]^T$  کی جگہ  $[2 -1]^T$  لکھا گیا ہے۔ بقایا جوابات میں بھی بعض اوقات سمتیہ کی سادہ ترین صورت دی گئی ہے۔

سوال 7.63:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛  $[1 2 0]^T$  ؛  $[0 0 1]^T$  ؛  $[0 1 2]^T$  ؛  $[0 0 1]^T$  ؛  $[0 1 1]^T$  ؛  $[0 0 1]^T$

سوال 7.64:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات: 2 ؛  $[8 0 4]^T$  ؛  $[0 1 0 2]^T$  ؛  $[8 0 4 0]^T$  ؛  $[0 1 0]^T$

سوال 7.65:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛  $[2 0 4 0]^T$  ؛  $[0 0 1 0]^T$  ؛  $[0 1 -1 1]^T$  ؛  $[2 0 4 0]^T$  ؛  $[0 2 -1 3]^T$  ؛  $[0 0 1 -1]^T$

سوال 7.66:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛  $[3 0 2]^T$  ؛  $[0 9 -1]^T$  ؛  $[0 0 1]^T$  ؛  $[1 2 0]^T$  ؛  $[0 9 2]^T$  ؛  $[0 0 1]^T$



- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.