

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

214	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
217	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
225	4	نظام تفرقی مساوات
226	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
235	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
250	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی
251	4.3.1	خطی نظام
254	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
272	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام
281	4.6	کئی تراکیب برائے غیر خطی نظام
290	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
298	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
299	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
309	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
310	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
325	5.2	لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کثیر رکنی
343	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
348	5.3.1	عملی استعمال
362	5.4	مساوات۔ میل اور میل تفاعل
377	5.5	میل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
385	6	لاپلاس متبادلہ
386	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
395	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
408	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
429	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
447	6.5	الچھاو
456	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
465	6.7	تفرقی مساوات کے نظام
473	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے
477	7	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
478	7.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
488	7.2	قابلی ضرب
495	7.2.1	تبدیلی محل

508	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط	7.3
521	7.3.1 صف زینہ دار صورت	
529	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا	7.4
543	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی	7.5
548	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب	7.6
551	مقطع۔ قاعدہ کریمر	7.7
568	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط	7.8
583	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی متبادلہ	7.9

601	سمتیات عارضی باب	8
601	غیر سمتیات اور سمتیات	8.1
603	سمتیہ کے اجزاء	8.2

561	اضافی ثبوت	ا
-----	------------	---

565	مفید معلومات	ب
565	1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات	

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 8

سمتیت عارضی باب

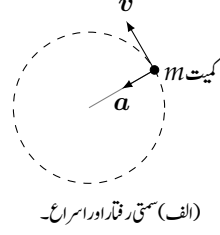
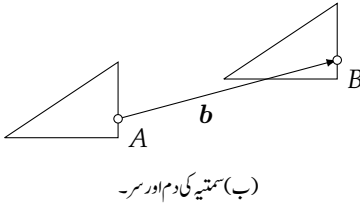
beginning very the at it palce shall i addition. latest the of 9.4 to 9.1 sec is this
issues. the all resolves chapter. this 7th my of

8.1 غیر سمتیت اور سمتیت

طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جنہیں ان کی مقدار سے مکمل طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً کمیت، درجہ حرارت، برقی بار، وقت، رقبہ، حجم، فاصلہ، برقی دباؤ وغیرہ۔ ان میں سے ہر ایک کو (مقدار کی موزوں اکائی چن کر) ایک عدد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایسی تمام مقداروں کو غیر سمتیت¹ کہتے ہیں۔ غیر سمتی مقدار کی قیمت پر چننی گئی محدود کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔

اس کے برعکس طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں بھی پائی جاتی ہیں جن کی مکمل اظہار کے لئے ان کی قیمت کے علاوہ ان کی سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ ان کی ایک مثال میکانی قوت ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ قوت کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں تیر کی سمت، قوت کی سمت اور تیر کی لمبائی (کسی پیمائش کے تحت) قوت کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ شکل 8.1-الف میں ہلکے دھاگے سے بندھی ہوئی کمیت m کی دائری حرکت دکھائی گئی ہے۔ کمیت کی

¹ scalars



شکل 8.1: سمتیہ کی تفصیل۔

لمحاتی سمتی رفتار v کو تیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس تیر کی سمت، کمیت کی لمحاتی سمتی رفتار دیتی ہے جبکہ تیر کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی سمتی رفتار کی قیمت دیتی ہے۔ شکل میں کمیت کی اسراع a بھی دکھائی گئی ہے جہاں a کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی اسراع کی قیمت دیتی ہے۔

شکل 8.1-ب میں سیدھی سطح پر رہتے ہوئے تکون کی (بلا گھومے) منتقلی دکھائی گئی ہے۔ اس حرکت کو (تکون کے ہر نقطے کی) طے فاصلے کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ تکون پر کسی نقطے کی ابتدائی مقام A سے اختتامی مقام B تک تیر کی نشان سے اس حرکت کو ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

اس سے سمتیہ کی درج ذیل تعریف بیان کی جاسکتی ہے۔ تعریف: سمتیہ سمتی خط کو سمیتہ² کہتے ہیں۔ اس کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی اور سمت کو سمتیہ کی سمت کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب ان کی لمبائی ایک جیسی ہو اور ان کی سمت ایک جیسی ہو۔

سمتیہ کی لمبائی کو سمتیہ کی اقلیدسی معیار³ (یا معیار) اور سمتیہ کی مقدار⁴ بھی کہتے ہیں۔

سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو سمتیہ کی دم⁵ اور اختتامی نقطے کو سمتیہ کا سر⁶ کہتے ہیں۔ یوں شکل 8.1-ب میں نقطہ B سمتیہ b کی دم ہے جبکہ نقطہ A اس کا سر ہے۔

vector²
Euclidean norm³
magnitude⁴
tail⁵
head⁶

ہم سمتیات کو موٹی لکھائی میں چھوٹی حروف تہجی مثلاً a ، b ، v ، وغیرہ، سے ظاہر کرتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں اسراع کو \vec{a} یا \vec{a} لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ a کی مقدار کو $|a|$ لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ہم سمتیہ کو بغیر گھمائے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کر سکتے ہیں⁷ یعنی ہم سمتیہ کی دم کہیں پر بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ سمتیہ کی دم کا مقام مقرر کرنے سے اس کی سر کا مقام بھی مقرر ہو گا۔

اگر دو سمتیات a اور b ایک دوسرے کے برابر ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں

(8.1)

$$a = b$$

اور اگر یہ آپس میں برابر نہ ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

(8.2)

$$a \neq b$$

کسی بھی سمتیہ کو ترسیعی طور پر موزوں لمبائی اور سمت کی سمتی خط سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

ایسا سمتیہ جس کی لمبائی اکائی (1) ہو اکائی سمتیہ⁸ کہلاتا ہے۔

8.2 سمتیہ کے اجزاء

⁷ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ طبیعیات اور جیو میٹری میں ایسی صورتیں پائی جاتی ہیں جہاں سمتیہ کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ آپ مباحثات سے جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر یکجہ ارمادے پر قوت کا اطلاق، قوت کی سمت میں کبیر پر رہتے ہوئے، کسی بھی نقطے پر کیا جاسکتا ہے۔ اس سے قابل منتقلی سمتیہ کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ اس کے برعکس، یکجہ ارمادے پر قوت کے اطلاق کا نقطہ تبدیل کرنے سے نتائج تبدیل ہوں گے جو ناقابل قبول بات ہے۔ یہ حقیقت مقید سمتیہ کی تصور کو جنم دیتی ہے۔ اس کتاب میں صرف قابل منتقلی سمتیات پر بات کی جائے گی۔

⁸ unit vector

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.