انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 12

فوریئر تسلسل

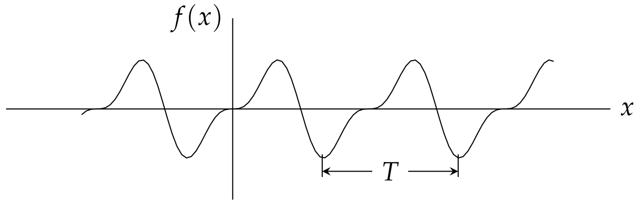
انجینئری مسائل میں دوری تفاعل عموماً پائے جاتے ہیں جن کو سادہ دوری تفاعل مثلاً $\sin$ اور $\cos$ کی روپ میں لکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔اسی عمل سے فوریئر تسلسل[1] ابھر کر سامنے آتی ہے جو سادہ تفرقی مساوات اور جزوی تفرقی مساوات کے حل میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

فوریئر تسلسل کا نظریہ پیچیدہ ہے جبکہ اس کا استعمال نہایت آسان ہے۔چونکہ بہت سارے غیر استمراری تفاعل کا فوریئر تسلسل حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ ان کا ٹیلر تسلسل نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا فوریئر تسلسل کو ٹیلر تسلسل کی عالمگیر صورت تصور کیا جا سکتا ہے۔

اس باب میں فوریئر تسلسل سے وابستہ تصورات، حقائق اور تکنیکی تراکیب پر غور کیا جائے گا۔اس کے علاوہ ان کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں ان کا استعمال دکھایا جائے گا۔

اس باب کی آخری حصے میں فوریئر تکمل پر غور کیا جائے گا جنہیں اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں استعمال کیا جائے گا۔

[1] فرانسیسی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات جین بپٹسٹ یوسف فوریئر [1768-1830]



شکل 12.1: دوری تفاعل

12.1 دوری تفاعل، تکونیاتی تسلسل

تفاعل $f(x)$ اس صورت **دوری**[2] کہلاتا ہے کہ جب پورے حقیقی x پر $f(x)$ معین ہو اور ایسا مثبت عدد T پایا جاتا ہو کہ تمام x پر درج ذیل درست ہو۔

$$f(x+T)=f(x) \qquad \text{تمام } x \text{ کے لئے} \tag{12.1}$$

عددی T کو $f(x)$ کا **دوری عرصہ**[3] کہتے[4] ہیں۔ T کے برابر $f(x)$ کے کسی بھی وقفے کا ترسیم دہراتے ہوئے ایسے تفاعل کا ترسیم حاصل کیا جاتا ہے (شکل 12.1)۔ عملی استعمال میں عموماً دوری اعمال اور تفاعل پائے جاتے ہیں۔

دوری تفاعل کی مثالیں $\sin x$ اور $\cos x$ ہیں۔اس کے علاوہ مستقل $f=c=$ بھی دوری تفاعل کی تعریف (مساوات 12.1 پر ہر مثبت T کے لئے) پورا اترنے کی بنا دوری تفاعل ہے۔

مساوات 12.1 سے ظاہر ہے کہ عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

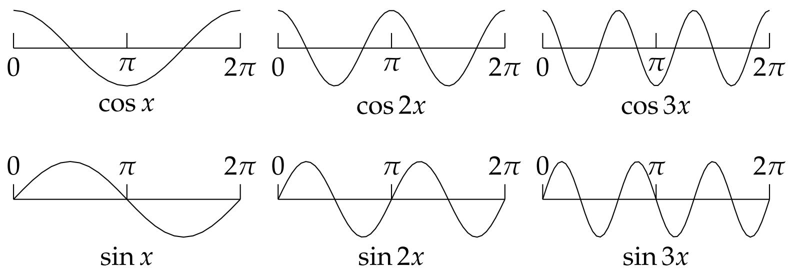
$$f(x+nT)=f(x) \qquad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

یوں $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، $\cdots$ بھی تفاعل $f(x)$ کے دوری عرصے ہیں۔مزید اگر تفاعل $f(x)$ کا اور $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب درج ذیل تفاعل

$$h(x)=af(x)+bg(x) \qquad \text{مستقل } a\text{،}b$$

---

[2] periodic
[3] period
[4] تفاعل $f(x)$ کا کم تر دوری عرصہ $T(>0)$، اگر موجود ہو، $f(x)$ کا اوّلی دوری عرصہ کہلاتا ہے۔ مثلاً $\sin x$ اور $\sin 2x$ کا بالترتیب اوّلی دوری عرصہ 2π اور π ہے جبکہ مستقل $= f$ کا کوئی دوری عرصہ نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 12.2: سائن اور کوسائن تفاعل جن کا دوری عرصہ 2π ہے

کا دوری عرصہ بھی T ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

اس باب کی شروع میں ہم ایسے مختلف تفاعل جن کا دوری عرصہ 2π ہو کو درج ذیل سادہ تفاعل کی روپ میں ظاہر کرنا سیکھیں گے

$$1, \quad \cos x, \sin x, \quad \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \quad \cos nx, \sin nx, \cdots$$

جن کا دوری عرصہ 2π ہے (شکل 12.2)۔ہم دیکھیں گے کہ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل طرز کی تسلسل حاصل ہو گی

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots \tag{12.2}$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\cdots$ ، b_1 ، b_2 ، $\cdots$ حقیقی مستقل ہوں گے۔اس تسلسل کو **تکونیاتی تسلسل**[5] کہتے ہیں جبکہ a_n اور b_n تسلسل کی **عددی سر**[6] کہلاتے ہیں۔چونکہ اس تسلسل کے ہر رکن کا دوری عرصہ 2π ہے لہٰذا اگر یہ تسلسل مرکوز ہو تب یہ ایسا تفاعل ہو گا جس کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔

انجینئری میں واقع تفاعل پیچیدہ ہوتے ہیں جنہیں سادہ دوری تفاعل کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ عملی استعمال، مثلاً ارتعاش، میں پائے جانے والا تقریباً ہر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو فوریئر تسلسل کی روپ میں لکھنا ممکن ہو گا۔ہم مساوات 12.2 کے عددی سر حاصل کرنے کے ایسے کلیات دریافت کریں گے جو $f(x)$ پر منحصر ہوں گے اور جنہیں استعمال کرتے ہوئے حاصل تسلسل مرکوز ہو گا جس کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا۔اس کے بعد ہم حاصل کلیات کو عمومی شکل دیتے ہوئے ان کو کسی بھی دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے قابل استعمال بنائیں گے۔ایسا کرنا نہایت آسان ثابت ہو گا۔

[5] trigonometric series
[6] coefficients

سوالات

سوال 12.1: دیے گئے تفاعل کا کم تر دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos \pi x,\ \sin \pi x,\ \cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x$$

جوابات: $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$

سوال 12.2: اگر تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب ثابت کریں کہ nT جہاں $n = 2, 3, \cdots$ ہے بھی اس تفاعل کا دوری عرصہ ہو گا۔

سوال 12.3: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کا اور تفاعل $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب تفاعل $h(x) = af(x) + bg(x)$ کا دوری عرصہ بھی T ہو گا، جہاں a اور b مستقل ہیں۔یوں دوری عرصہ T رکھنے والے تمام تفاعل سمتی فضا پیدا کرتے ہیں۔

سوال 12.4: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x) =$ مستقل ایسا دوری تفاعل ہے جس کا دوری عرصہ T کوئی بھی مثبت عدد ہو سکتا ہے۔

سوال 12.5: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہونے کی صورت میں x کے دوری تفاعل $f(ax), a \neq 0$ کا دوری عرصہ $\frac{T}{a}$ ہو گا جبکہ x کے دوری تفاعل $f(\frac{x}{b}), b \neq 0$ کا دوری عرصہ bT ہو گا۔ان نتائج کی تصدیق $f(x) = \cos x,\ a = b = 2$ کے لئے کریں۔

سوال 12.6 تا سوال 12.12 میں دیے گئے تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.6: $\sin x, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$

سوال 12.7: $f(x + 2\pi) = f(x)$ اور

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ہے۔سوال 12.6 کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.8:

$$\sin 2\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x + \frac{1}{5}\sin 10\pi x$$

سوال 12.9:

$$\begin{gathered}\sin x, \quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x, \\ f(x) = \frac{x}{2}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)\end{gathered}$$

سوال 12.10:

$$\begin{gathered}-\cos x, \quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x, \quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x, \\ f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)\end{gathered}$$

سوال 12.11: $f(x) = x^2, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

سوال 12.12: $f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

سوال 12.13 تا سوال 12.16 میں دوری تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔اس کی ترسیم کھینچیں۔وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ کے لئے $f(x)$ دیا گیا ہے۔

سوال 12.13:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi \le x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.14:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ \cos x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.15:

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x & -\pi\le x\le 0\\ \pi-x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

سوال 12.16:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x\le 0\\ \sin\frac{x}{2} & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

سوال 12.17 تا سوال 12.25 میں دیے گئے تکمل ہمیں آگے درکار ہوں گے۔ان تکمل میں $n=0,1,2,\cdots$ ہے۔تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 12.17: $\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

سوال 12.18: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos nx\,\mathrm{d}x$

سوال 12.19: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$

سوال 12.20: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,\mathrm{d}x$

سوال 12.21: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\,\mathrm{d}x$

سوال 12.22: $\int\limits_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$

سوال 12.23: $\int\limits_{-\pi}^{0}e^x\sin nx\,\mathrm{d}x$

سوال 12.24: $\int\limits_0^{\pi}e^x\cos nx\,\mathrm{d}x$

سوال 12.25: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x$

12.2 فوریئر تسلسل۔یولر کلیات

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کو درج ذیل تکونیاتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12.3}$$

ہم دیے گئے تفاعل $f(x)$ کی تکونیاتی تسلسل (مساوات 12.3) کے عددی سر a_n ، اور b_n جاننا چاہتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے a_0 دریافت کرتے ہیں۔مساوات 12.3 کے دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \mathrm{d}x$$

اگر تسلسل کے ارکان کا جزو با جزو تکمل لینا جائز ہو[7]، تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x\right)$$

دائیں ہاتھ پہلا رکن $2\pi a_0$ کے برابر ہے۔بائیں ہاتھ باقی تمام ارکان صفر کے برابر ہیں، جیسا کہ تکمل لے کر ثابت کیا جا سکتا ہے۔یوں پہلا کلیہ درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x \tag{12.4}$$

ہم اب a_1 ، a_2 ، . . . اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔ہم مساوات 12.3 کو $\cos mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مقررہ مثبت عدد صحیح ہے، دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \cos mx \, \mathrm{d}x \tag{12.5}$$

---

[7] ایسا جائز ہے، مثلاً، استمراری مرتکز صورت میں۔

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \; \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx \; \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \cos mx \; \mathrm{d}x \right]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔ضمیمہ-ب میں دیا گیا مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \; \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \; \mathrm{d}x$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \cos mx \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x \; \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x \; \mathrm{d}x$$

تکمل لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ بالائی دائیں جزو کے علاوہ تمام تکمل صفر کے برابر ہیں۔بالائی دایاں جزو $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔چونکہ مساوات 12.5 میں اس جزو کو a_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا a_m لکھا جا سکتا ہے) لہٰذا مساوات 12.5 کا دایاں ہاتھ $a_m \pi$ کے برابر ہو گا۔یوں دوسرا کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \; \mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{12.6}$$

ہم آخر میں b_1 ، b_2 ، $\cdots$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 12.3 کو $\sin mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مثبت مقررہ عدد صحیح ہے، $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \; \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \; \mathrm{d}x \tag{12.7}$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دایاں ہاتھ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \; \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \sin mx \; \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin mx \; \mathrm{d}x \right]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔دوسرے تکمل کی طرز کی تکمل پر ہم غور کر چکے ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ تمام $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے اس کی قیمت صفر ہے۔آخری تکمل کو ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin mx \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m) \; \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m) \; \mathrm{d}x$$

آخری جزو صفر کے برابر ہے۔دائیں ہاتھ پہلا جزو $n \neq m$ کی صورت میں صفر جبکہ $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 12.7 میں اس جزو کو b_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا b_m لکھا جا سکتا ہے) لہٰذا مساوات 12.7 کا دایاں ہاتھ $b_m \pi$ کے برابر ہو گا۔یوں آخری کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx \,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{12.8}$$

اب m کی جگہ n لکھتے ہوئے ان کلیات کو، جنہیں **یولر کلیات**[8] کہتے، ایک جگہ اکٹھا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&(\text{ب}) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots \\
&(\text{پ}) \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{12.9}$$

چونکہ متکمل دوری ہیں لہٰذا مساوات 12.9 میں وقفہ تکمل کو 2π کے برابر کسی بھی وقفہ، مثلاً $0 \leq x \leq 2\pi$ ، سے بدلا جا سکتا ہے۔

دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.9 کی مدد سے عددی سر a_n اور b_n حاصل کر کے ہم درج ذیل تکونیاتی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots \tag{12.10}$$

اس تسلسل کو $f(x)$ کی **فوریئر تسلسل**[9] کہتے ہیں جبکہ مساوات 12.9 سے حاصل عددی سر a_n ، b_n کو $f(x)$ کے **فوریئر عددی سر**[10] کہتے ہیں۔

قطعی تکمل کی تعریف سے واضح ہے کہ اگر $f(x)$ استمراری یا ٹکڑوں میں استمراری (جہاں وقفہ تکمل پر $f(x)$ میں محدود تعداد کے چھلانگ پائے جاتے ہوں) ہو تب مساوات 12.9 میں دیے گئے تکملات موجود ہوں گے لہٰذا ہم $f(x)$ کے فوریئر عددی سروں کو مساوات 12.9 کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا اس طرح حاصل کیا گیا فوریئر تسلسل مرکوز ہو گا اور آیا تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا؟ ان سوالات پر اسی حصے میں آگے جا کر غور کیا جائے گا۔

---

[8] Euler formulas
[9] Fourier series
[10] Fourier coefficients

آئیں مساوات 12.9 کی استعمال کو ایک سادہ مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 12.1: چکور موج
چکور موج کے فوریئر عددی سر کو مساوات 12.9 سے حاصل کریں۔چکور موج کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔چکور موج کی تحلیلی روپ درج ذیل ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{جہاں} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

اس طرز کے تفاعل میکانی نظام میں بطور بیرونی قوت یا برقی ادوار میں بطور داخلی دباو پائے جا سکتے ہیں، وغیرہ۔

حل: مساوات 12.9-الف سے $a_0 = 0$ ملتا ہے۔یہ نتیجہ بغیر تکمل کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے کہ چکور موج کا رقبہ $-\pi$ تا π صفر ہے۔مساوات 12.9-ب سے

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\cos nx \, \mathrm{d}x\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں تمام $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے $-\pi$ ، 0 اور π پر $\sin nx = 0$ پر کیا گیا ہے۔اسی طرح مساوات 12.9-پ سے

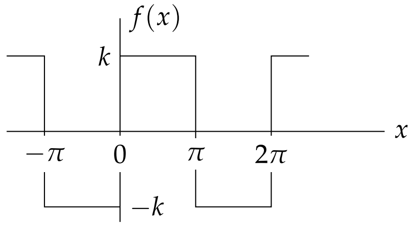
$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\sin nx \, \mathrm{d}x\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} -k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi} \right] \end{aligned}$$

ملتا ہے۔چونکہ $\cos 0 = 1$ اور $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ہوتا ہے لہٰذا اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

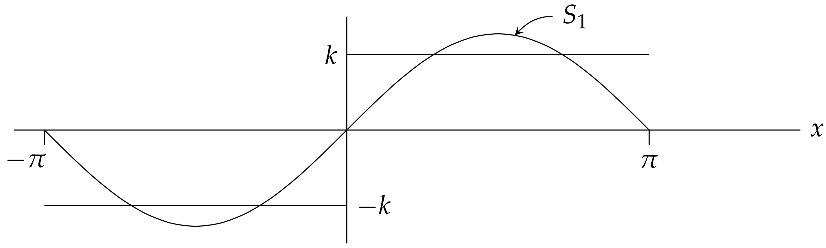
$$b_n = \frac{k}{n\pi}[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

اب $\cos\pi = -1$ ، $\cos 2\pi = 1$ ، $\cos 3\pi = -1$ ، وغیرہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

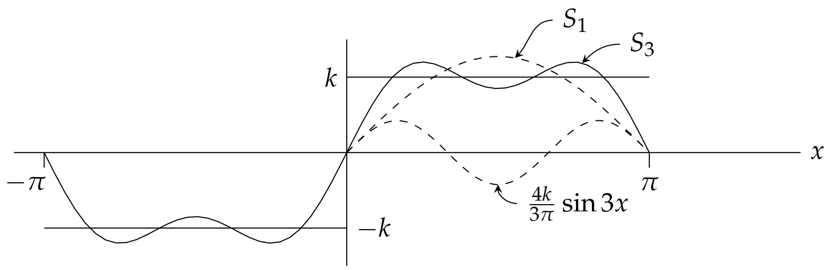
$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & n \text{ طاق} \\ 1 & n \text{ جفت} \end{cases} \implies 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases}$$



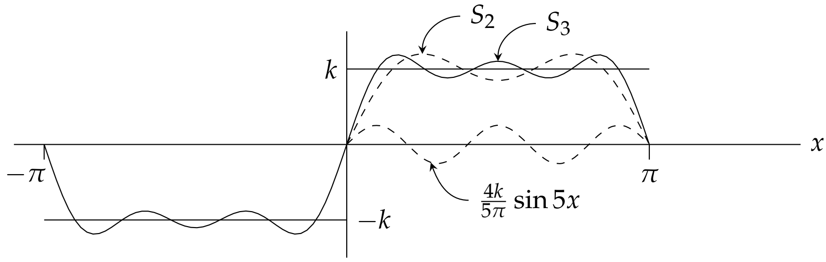
(الف) دیا گیا دوری چکور تفاعل $f(x)$



(ب)



(پ)



(ت)

شکل 12.3: چکور موج اور فوریئر تسلسل سے حاصل امواج (مثال 12.1)

یوں b_n درج ذیل ہوں گے۔

$$b_1=\frac{4k}{\pi},\quad b_2=0,\quad b_3=\frac{4k}{3\pi},\quad b_4=0,\quad b_5=\frac{4k}{5\pi},\cdots$$

چونکہ $a_n=0$ ہیں لہٰذا دی گئی چکور تفاعل کی فوریئر تسلسل

$$\frac{4k}{\pi}\Big(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\Big) \tag{12.11}$$

ہو گی جس کے جزوی مجموعے درج ذیل ہیں۔

$$S_1=\frac{4k}{\pi}\sin x,\quad S_2=\frac{4k}{\pi}\Big(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\Big),\cdots$$

شکل 12.3 میں جزوی مجموعہ میں ارکان کی تعداد بتدریج بڑھاتے ہوئے تسلسل کا ترسیم کھینچا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ تسلسل کے زیادہ ارکان استعمال کرنے سے ترسیم کی شکل اصل تفاعل (چکور موج) کی زیادہ قریب ہوتی ہے۔ چکور موج $-\pi$ ، 0 ، π ، وغیرہ پر غیر استمراری ہے یعنی یہاں تفاعل میں چھلانگ پائی جاتی ہے۔یوں ہم نہیں کہہ سکتے کہ آیا $x=0$ پر چکور تفاعل کی قیمت $-k$ ہے یا k ہے یا کہ ان دونوں قیمتوں کے مابین ہے۔اس کے برعکس فوریئر تسلسل کے تمام جزوی مجموعے ان نقطوں پر صفر کے برابر ہیں جو $-k$ اور k کی اوسط قیمت ہے۔

مزید فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہے۔شکل 12.3-الف سے ظاہر ہے کہ $x=\frac{\pi}{2}$ پر چکور تفاعل کی قیمت k کے برابر ہے۔یوں $x=\frac{\pi}{2}$ پر کرتے ہوئے

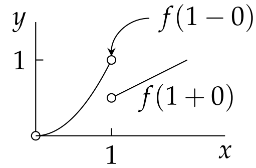
$$f(\frac{\pi}{2})=k\frac{4k}{\pi}\Big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\Big)$$

یعنی

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مشہور نتیجہ لیبنٹز نے 1673 کے لگ بھگ جیومیٹریائی اصولوں سے حاصل کیا۔اس سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل ارکان کی کئی تسلسل کی قیمت کو مختلف نقطوں پر فوریئر تسلسل کی قیمت سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ $\square$

ایسے تفاعل جنہیں فوریئر تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کی تعداد غیر یقینی طور پر زیادہ ہے۔ انجینئری میں استعمال ہونے والی تقریباً ہر ممکن تفاعل کو فوریئر تسلسل کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے درکار (کافی) شرائط درج ذیل مسئلہ 12.1 میں بیان کیے گئے ہیں۔اس مسئلہ میں چند تصورات کی ضرورت ہے جن پر پہلے بات کرتے ہیں۔



شکل 12.4: بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد، بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق

نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ کی **بائیں ہاتھ حد**[11] سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو x_0 تک بائیں ہاتھ سے پہنچتے ہوئے حاصل ہو گی۔یوں بائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0-1)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے درج ذیل ہو گی

$$f(x_0-0)=\lim_{h\to 0} f(x_0-h)$$

جہاں h مثبت قیمت ہے۔اسی طرح x_0 پر $f(x)$ کی **دائیں ہاتھ حد**[12] سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو دائیں ہاتھ سے آ کر x_0 تک پہنچتے ہوئے حاصل ہو گی۔یوں دائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0+0)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$f(x_0+0)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)$$

ہو گی جہاں h مثبت قیمت ہے۔شکل 12.4 میں غیر استمراری تفاعل

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ \frac{x}{2} & x>1 \end{cases}$$

دکھایا گیا ہے۔نقطہ $x_0=1$ پر اس تفاعل کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد درج ذیل ہیں

$$f(1-0)=1, \quad f(1+0)=\frac{1}{2}$$

جن میں فرق $(1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2})$ کو **چھلانگ**[13] کہتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر **بائیں ہاتھ تفرق**[14] سے مراد

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h}$$

---

[11] left hand limit
[12] right hand limit
[13] jump
[14] left hand differential

اور دائیں ہاتھ تفرق[15] سے مراد

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$$

ہے جہاں h مثبت قیمت ہے۔ظاہر ہے کہ اگر نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ استمراری ہو تب $f(x_0-0)$ اور $f(x_0+0)$ دونوں $f(x_0)$ ہی کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 12.1: (تفاعل کا فوریئر تسلسل کی روپ میں اظہار)
اگر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو، وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ میں ٹکڑوں میں استمراری[16] ہو اور اس وقفے کے ہر نقطے پر تفاعل کا دایاں ہاتھ تفرق اور بایاں ہاتھ تفرق موجود ہو تب تفاعل کی فوریئر تسلسل، مساوات 12.10، جس کی عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل کیے گئے ہوں، مرتکز ہو گی۔تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا ماسوائے نقطہ x_0 پر جہاں تفاعل غیر استمراری ہو۔نقطہ x_0 پر تسلسل کی قیمت، نقطہ x_0 پر $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کی اوسط ہو گی۔

رائے زنی: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل مرتکز ہو اور اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو (جیسا مسئلہ 12.1 میں بیان کیا گیا ہے) تب اس تسلسل کو $f(x)$ کی فوریئر تسلسل کہتے ہیں جس کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots$$

اور ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کو یہ فوریئر تسلسل ظاہر کرتی ہے۔اب چونکہ کسی بھی مرتکز تسلسل میں قوسین لگانے سے ایک نئی مرتکز تسلسل ملتی ہے جس کا مجموعہ اصل تسلسل کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ہم درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ثبوت: استمراری تفاعل $f(x)$ جس کا استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پایا جاتا ہو کی مرکوزیت (مسئلہ 12.1) کا ثبوت۔
مساوات 12.9-ب کا تکمل بالحصص لیتے ہوئے

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\left.\frac{f(x)\sin nx}{n\pi}\right|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

[15] right hand differential

[16] ٹکڑوں میں استمراری کی تعریف حصہ 6.1 میں دی گئی ہے۔

ملتا ہے۔دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے برابر ہے۔دوبارہ تکمل بالحصص لینے سے

$$a_n = \left.\frac{f'(x)\cos nx}{n^2\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx \, \mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔چونکہ $f'(x)$ دوری اور استمراری ہے لہٰذا دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر ہو گا۔ وقفہ تکمل میں $f''(x)$ استمراری ہے لہٰذا

$$\left|f''(x)\right| < M$$

ہو گا جہاں M ایک موزوں مستقل ہے۔مزید $|\cos nx| < 1$ ہے۔ یوں

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx \, \mathrm{d}x\right| < \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M \, \mathrm{d}x = \frac{2M}{n^2}$$

ہو گا۔اسی طرح تمام n کے لئے $|b_n| < \frac{2M}{n^2}$ ہو گا۔اس طرح فوریئر تسلسل کی ہر رکن کی زیادہ سے زیادہ قیمت درج ذیل تسلسل کی مطابقتی رکن کی قیمت کے برابر ہو سکتی ہے جو مرتکز تسلسل ہے۔

$$|a_0| + 2M\Big(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\Big)$$

یوں فوریئر تسلسل بھی مرتکز ہو گی۔

ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(x)$ کی صورت میں فوریئر تسلسل کی مرکوزیت اور مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

$\square$

سوالات

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

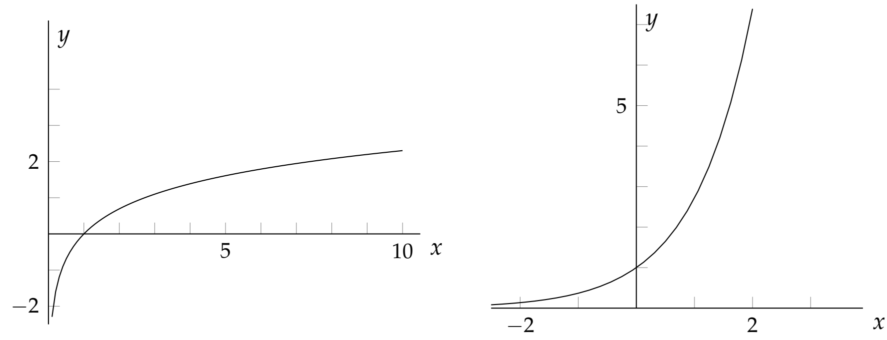
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

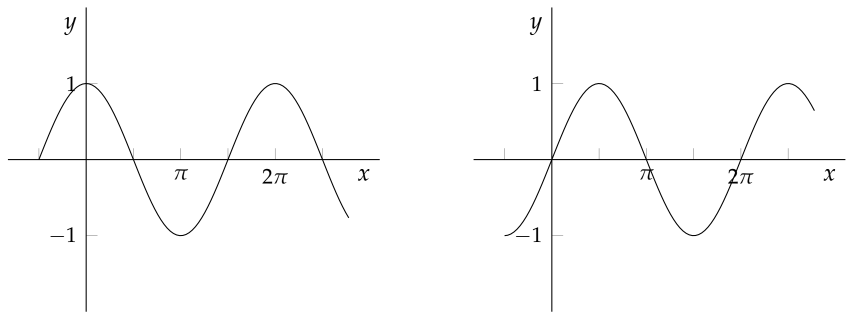
$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x (ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$ (ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x}=x$ اور $10^{-\log x}=10^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x)=-\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x)=\cos x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}1^\circ &= 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}\\ 1\,\text{radian} &= 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ\end{aligned}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

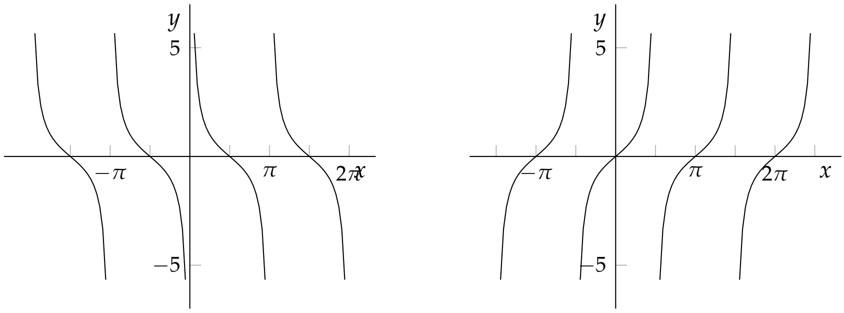
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



$\cot x$ (ب)　　　　$\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

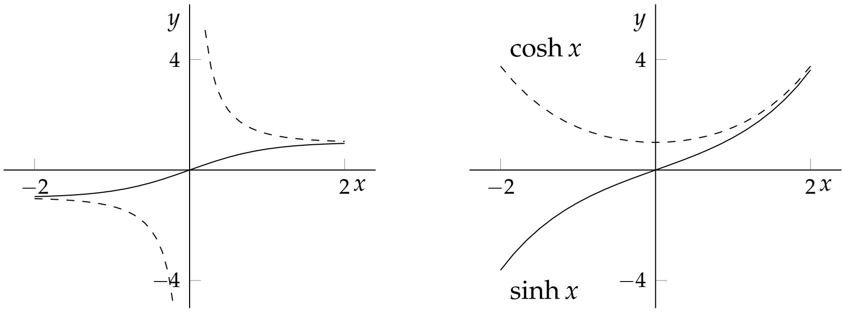
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{gathered}\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{gathered} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔ (ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1)=1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2)=1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3)=2\times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{ب.26}$$

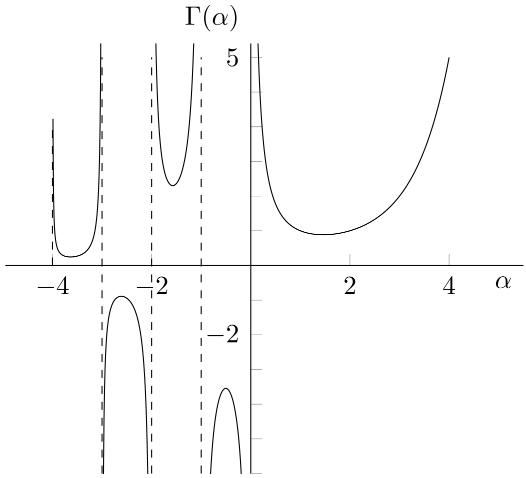
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha+k+1>0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

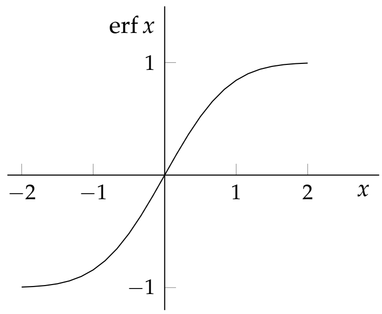
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

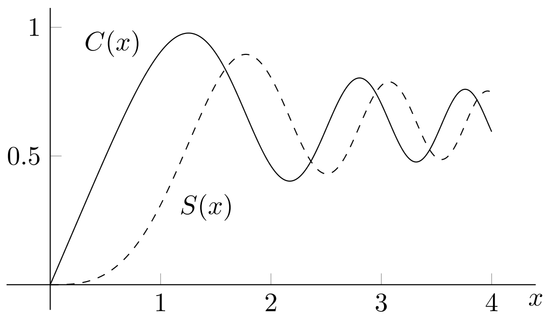
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

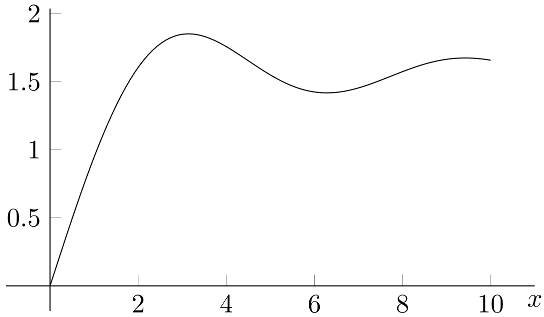
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.41}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$