

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

214	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
217	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
225	4	نظام تفرقی مساوات
226	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
235	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
250	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی
251	4.3.1	خطی نظام
254	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
272	4.5	نقطہ حاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام
281	4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام
290	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادل
298	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
299	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
309	5	طابق تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
310	5.1	ترکیب طاقی تسلسل
325	5.2	لیمنڈر مساوات۔ لیمنڈر کثیر رکنی
343	5.3	مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
348	5.3.1	عملی استعمال
362	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
377	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
385	6	لاپلاس متبادل
386	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
395	6.2	تفرقات اور نکملات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
408	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
429	6.4	ڈیراک ڈیلٹا تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
447	6.5	الچھاؤ
456	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
465	6.7	تفرقی مساوات کے نظام
473	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی یکے
477	7	خطی الجبرا۔ سمتیات
478	7.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
488	7.2	قابلی ضرب
494	7.2.1	تبدیلی محل

507 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی حذف 7.3

377 اضافی ثبوت ا

381 مفید معلومات ب

381 1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 7

خطی الجبرا۔ سمتیات

خطی الجبرا وسیع مضمون ہے جس میں قالب اور سمتیات، مقطع قالب، خطی مساوات کے نظام، سمتی فضا اور خطی تبادلہ، آنگنی قیمت مسائل، اور دیگر موضوعات شامل ہیں۔ اس کا استعمال انجینئری، طبیعیات، جیومیٹری، کمپیوٹر سائنس، معاشیات اور دیگر میدانوں میں پایا جاتا ہے۔

متعدد اعداد و شمار یا متعدد تفاعل کو مربوط طریقے سے قالب¹ اور سمتیات² کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب اور سمتیات ہی خطی الجبرا کی زبان ہیں۔

matrices¹
vectors²

7.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

مستطیلی ترتیب وار فہرست کو قالب کہتے ہیں۔ درج ذیل قالب کی مثال ہیں۔ قالب میں درج اعداد یا تفاعل کو قالب کے اندراجات یا قالب کے ارکان³ کہتے ہیں۔

$$(7.1) \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -2 & 1.2 \\ -6 & 0 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ln x & -e^x \\ e^{3x} & 3.2x^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3.22 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

بالائی بائیں ہاتھ قالب کے ارکان 0.1، -2، 1.2، -6، 0 اور 23 ہیں۔ اس قالب کے دو صف⁴ اور تین قطار⁵ ہیں۔ افقی اندراجات کی لکیر کو صف اور عمودی اندراجات کی لکیر کو قطار کہتے ہیں۔ بالائی درمیانی قالب میں 3 صف اور 3 قطار پائے جاتے ہیں۔ ایسا قالب جس میں صفوں کی تعداد، قطاروں کی تعداد کے برابر ہو مربع قالب⁶ کہلاتا ہے۔ یوں بالائی دائیں ہاتھ قالب بھی مربع قالب ہے۔ بالائی درمیانی قالب میں ارکان کو a_{mn} سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں دو عدد اشاریہ m اور n بالترتیب اس صف اور قطار کو ظاہر کرتے ہیں جہاں یہ رکن پایا جاتا ہو۔ قالب میں اندراجات کے مقام کی وضاحت اسی معیاری ترکیب سے کی جاتی ہے۔ یوں a_{23} رکن دوسرے صف اور تیسرے قطار میں پایا جاتا ہے۔

ایسا قالب جو صرف ایک عدد صف یا صرف ایک عدد قطار پر مشتمل ہو، سمتیہ⁷ کہلاتا ہے۔ یوں نچلے دائیں ہاتھ دو ارکان پر مشتمل سمتیہ قطار⁸ پایا جاتا ہے جبکہ نچلے بائیں ہاتھ سمتیہ صف⁹ پایا جاتا ہے۔ چونکہ سمتیہ قطار میں کوئی صف نہیں پایا جاتا لہذا اس میں ارکان کے مقام کو صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح سمتیہ صف میں بھی ارکان کا مقام صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں سمتیہ قطار میں $a_1 = 3.22$ اور $a_2 = -\frac{4}{5}$ ہیں۔

عملی استعمال میں مواد کے ذخیرہ اور اس پر عمل کرنے میں قالب کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔ درج ذیل مثال دیکھیں

elements³
rows⁴
columns⁵
square matrix⁶
vector⁷
column vector⁸
row vector⁹

مثال 7.1: خطی نظام

درج ذیل خطی نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 نامعلوم متغیرات ہیں۔

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 15$$

$$5x_1 + 3x_3 = 11$$

آئیں درج بالا نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 کے عددی سروں سے عددی سر قالب A^{10} لکھیں۔ A قالب میں ہر رکن کا مقام عین خطی مساوات کے مطابق ہو گا۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

چونکہ تیسری مساوات میں x_2 نہیں پایا جاتا لہذا اس کا عددی سر صفر کے برابر ہو گا اور یوں A میں $a_{32} = 0$ درج کیا گیا ہے۔ عددی سر قالب A میں مساوات کے دائیں ہاتھ کی معلومات کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب \tilde{A}^{11} ملتا ہے۔

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 15 \\ 5 & 0 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

چونکہ افزودہ قالب \tilde{A} سے تینوں مساوات لکھ جاسکتے ہیں لہذا دیے گئے خطی نظام کو \tilde{A} مکمل طور ظاہر کرتا ہے۔ یوں ہم \tilde{A} کو حل کرتے ہوئے نامعلوم متغیرات x_1 ، x_2 اور x_3 حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنا جلد سمجھایا جائے گا۔ فی الحال تسلی کر لیں کہ اس نظام کا حل $x_1 = 1$ ، $x_2 = -2$ اور $x_3 = 2$ ہے۔

نامعلوم متغیرات کو x_1 ، x_2 اور x_3 سے ظاہر کرنے کی بجائے دیگر علامتوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے مثلاً x ، y اور z ۔

coefficient matrix¹⁰
augmented matrix¹¹

مثال 7.2: فروخت کھانا

$$A = \begin{bmatrix} \text{ہفتہ} & \text{اتوار} & \text{پیر} & \text{منگل} & \text{بدھ} & \text{جمعرات} & \text{جمع} \\ \text{الف} & 20 & 19 & 18 & 13 & 23 & 32 \\ \text{ب} & 25 & 17 & 5 & 14 & 12 & 10 \\ \text{پ} & 17 & 14 & 9 & 18 & 16 & 29 \end{bmatrix}$$

ایک دکان کی تین اشیاء کی ہفتہ وار فروخت درج بالا قالب میں دی گئی ہے۔ ہر ہفتے کی فروخت کو اسی طرح قالبوں میں لکھا جاسکتا ہے۔ مہینے کے آخر میں تمام قالبوں کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لینے سے ہر دن، تینوں اشیاء کی کل فروخت کی فہرست حاصل ہوگی۔

عمومی تصورات اور علامت نویسی

آئیں اب تک پیش کیے گئے تصورات کو باضابطہ دستوری صورت دیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے بڑے حروف سے قالب کو ظاہر کریں گے مثلاً A ، B ، C ، ...، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $A = [a_{jk}]$ وغیرہ۔ ایسا قالب جس میں m صف اور n قطار ہوں، $m \times n$ (اس کو m ضرب n پڑھیں) قالب کہلاتا ہے (پہلے صف اور بعد میں قطار آئے گا) اور $m \times n$ قالب کی جسامت¹² کہلاتی ہے۔ یوں $m \times n$ قالب درج ذیل صورت کا ہوگا۔

$$(7.2) \quad A = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مساوات 7.1 میں بالائی بائیں قالب 2×3 جسامت کا ہے جبکہ نیچلا بائیں قالب 1×3 جسامت کا ہے۔

مساوات 7.2 میں ہر رکن کو دو عدد اشاریہ سے پہچانا جاتا ہے جہاں پہلا اشاریہ صف اور دوسرا اشاریہ قطار ہے۔ یوں a_{23} دوسرے صف اور تیسرے قطار پر موجود اندراج ہے۔

ایسا قالب جس میں $m = n$ ہو $n \times n$ چکور قالب کہلاتا ہے۔ چکور قالب کا وہ وتر جس پر a_{11} ، a_{22} ، \dots ، a_{nn} پائے جاتے ہیں، قالب کا مرکزی وتر¹³ کہلاتا ہے۔ مساوات 7.1 میں ایک چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان a_{11} ، a_{22} اور a_{33} ہیں جبکہ دوسرے چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان $\ln x$ اور $3.2x^2$ ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے، چکور قالب نہایت اہم ہیں۔

ایسا قالب جس میں $m \neq n$ ہو $m \times n$ مستطیل¹⁴ قالب کہلاتا ہے۔ مستطیل قالب کی ایک مخصوص قسم چکور قالب ہے۔

سمتیات

صرف ایک صف یا ایک قطار پر مبنی قالب کو سمتیہ کہتے ہیں۔ سمتیہ کے اندراج کو سمتیہ کے اجزاء¹⁵ کہتے ہیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے چھوٹے حروف سے سمتیہ کو ظاہر کریں گے مثلاً a ، b ، c ، \dots اور یا اس کو چکور توسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $a = [a_j]$ وغیرہ۔ سمتیہ صف کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4.2 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

اسی طرح سمتیہ قطار کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

main diagonal¹³
rectangular matrix¹⁴
components¹⁵

مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

آئیں پہلے مساوات کا تصور جانتے ہیں۔

تعریف: دو قالب A اور B اس صورت مساوی ہوں گے جب دونوں قالب کی جسامت برابر ہو اور ان کے نظیری ارکان آپس میں برابر ہوں یعنی $a_{11} = b_{11}$ ، $a_{12} = b_{12}$ ، ... ہوں۔ غیر مساوی قالب مختلف¹⁶ کہلاتے ہیں۔ یوں مختلف جسامت کے قالب ہر صورت مختلف ہوں گے۔ مساوات کا تعلق $A = B$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 7.3: قالبوں کی مساوات
اگر درج ذیل قالب مساوی ہوں

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

تب $a_{11} = 2$ ، $a_{12} = -3$ ، $a_{21} = 0$ اور $a_{22} = 3.2$ ہوں گے اور ہم $A = B$ لکھ سکتے ہیں۔ درج ذیل تمام قالب آپس میں مختلف ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تعریف: قالبوں کا مجموعہ
دو یکساں جسامت کے قالب $A = [a_{jk}]$ اور $B = [b_{jk}]$ کا مجموعہ $A + B$ لکھا جائے گا جس کے اندراجات $a_{jk} + b_{jk}$ کو A اور B کے نظیری ارکان کے مجموعے سے حاصل کیا جائے گا۔ دو مختلف جسامت کے قالبوں کا مجموعہ حاصل کرنا ناممکن ہے۔

مثال 7.4: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہوں تب $A + B$ ، $a + b$ اور $0A + b$ حاصل کریں۔حل: چونکہ A اور B کی یکساں جسامت ہے لہذا انہیں جمع کیا جاسکتا ہے۔ مجموعہ درج ذیل ہوگا۔

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+7 & -1+3 & 3+0 \\ 1+1 & 0+2 & -2+1 \\ 3+2 & 2-1 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

اسی طرح چونکہ a اور b کی جسامت یکساں ہے لہذا انہیں جمع کیا جاسکتا ہے۔ ان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$a + b = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 3+2 \\ -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

چونکہ A اور b کی جسامت یکساں نہیں ہے لہذا $0A + b$ حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

تعریف: غیر سمتی ضرب

کسی بھی $m \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ اور کسی بھی غیر سمتی مقدار (عدد) c کا حاصل ضرب cA لکھا جاتا ہے جو ایسا $m \times n$ قالب $cA = [ca_{jk}]$ ہے جس کا ہر رکن A کے نظیری رکن کو c سے ضرب دیتے حاصل کیا جاتا ہے۔

ہم $A(-1)$ کو $-A$ لکھتے ہیں اور اس کو A کا نفی کہتے ہیں۔ اسی طرح $A(-k)$ کو $-kA$ لکھا جاتا ہے۔ $A + (-B)$ کو $A - B$ لکھا جاتا ہے جو A اور B کا فرق¹⁷ کہلاتا ہے (فرق صرف یکساں جسامت کے قالب کا حاصل کیا جاسکتا ہے)۔

مثال 7.5: غیر سمتی ضرب
اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.3 \\ 0.6 & -1.5 \\ 0 & 6.0 \end{bmatrix}$$

ہو تب درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$-A = \begin{bmatrix} -1.2 & -3.3 \\ -0.6 & 1.5 \\ 0 & -6.0 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{3}A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -5 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad 0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر قالب B میں مختلف اشیاء کی کلوگرام کمیت درج ہو تب $1000B$ قالب انہیں اشیاء کی کمیت گرام میں دے گا۔

مجموعہ قالب اور غیر سمتی ضرب کے قواعد

مجموعہ اعداد کے قواعد سے یکساں جسامت $m \times n$ کے قالبوں کے مجموعے کے درج ذیل قواعد حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \quad (\text{یعنی } A + B + C) \\ A + 0 &= A \\ A - A &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

درج بالا موٹی لکھائی میں صفر 0 ایسے $m \times n$ صفر قالب¹⁸ کو ظاہر کرتی ہے جس کے تمام ارکان صفر 0 کے برابر ہوں۔ اگر $m = 1$ یا $n = 1$ ہو تب اس کو صفر سمتیہ¹⁹ کہیں گے۔

یوں مجموعہ قالب قانون تبادل اور قانون تلازم پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح غیر سمتی ضرب درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 c(A + B) &= cA + cB \\
 (c + k)A &= cA + kA \\
 c(kA) &= (ck)A \quad (\text{یعنی } ckA) \\
 1A &= A
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

سوالات

سوال 7.1 تا سوال 7.3 عمومی سوالات ہیں۔ سوال 7.1: $A = [a_{jk}]$ لکھتے ہوئے مثال 7.2 میں $[a_{12}]$ اور $[a_{25}]$ کیا ہیں۔

جوابات: $[a_{12}] = 23$ اور $[a_{25}] = 0$

سوال 7.2: مثال 7.2 میں دیے گئے قالب کی جسامت لکھیں۔

جواب: 3×7

سوال 7.3: مثال 7.4 میں قالب A کی مرکزی وتر لکھیں۔

جواب: 2، 0 اور 1

¹⁸ zero matrix
¹⁹ zero vector

سوال 7.4 تا سوال 7.10 میں قابلوں کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب حاصل کرنے ہوں گے۔ ان سوالات میں درکار قالب درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.4: $0.5A$ ، $0.2B$ ، $-2u$

جوابات:

$$0.5A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1.0 \\ 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.2B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad -2u = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سوال 7.5: $3A + 2B$ ، $2C - E$ ، $-3u + v - 2w$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 7 & 1 & 9 \\ 6 & 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9.5 \\ -5.7 \\ -6.4 \end{bmatrix}$$

سوال 7.6: $5A - 3A$ ، $6(3)B$ ، $(3 \cdot 6)B$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 7.7: $3(2C + 5D), \quad 0.2(0.1E - 0.3D)$
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 66 & 18 \\ 9 & 57 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.08 & -0.24 \\ 0.12 & -0.2 \\ 0.22 & -0.1 \end{bmatrix}$$

سوال 7.8: $E + (D + C), \quad (D + E) + C, \quad A + C, \quad 0B + D$
جوابات: چونکہ A اور C کی جسامت یکساں نہیں ہے لہذا انہیں جمع نہیں کیا جاسکتا ہے۔ غیر یکساں جسامت کی بنا $0B + D$ بھی حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$$E + (D + C) = (D + E) + C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 20 & -4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

سوال 7.9: u, v اور w کو خلاء میں قوت کے اجزاء تصور کرتے ہوئے ان کے مجموعے سے کل قوت دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{bmatrix} 5.3 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.10: متوازن صورت
تمام قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہونے کی صورت کو متوازن²⁰ حال کہتے ہیں۔

ایسا قوت x دریافت کریں کہ u, v, w اور x متوازن حال میں ہوں۔

$$x = \begin{bmatrix} -5.3 \\ -3.1 \\ -3.2 \end{bmatrix}$$

7.2 قلابی ضرب

قلابی ضرب سے مراد دو عدد قلابوں کا آپس میں ضرب ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ چند مثالیں حل کرتے ہوئے قلابی ضرب کو اچھی طرح سمجھیں۔ قلابی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: قلابی ضرب

$A = [a_{jk}]$ قلاب $m \times n$ اور $B = [b_{jk}]$ قلاب $r \times p$ کا (اسی ترتیب سے) حاصل ضرب $C = AB$ صرف $r = n$ کی صورت میں ممکن ہو گا اور یہ $m \times p$ قلاب $C = [c_{jk}]$ ہو گا جس کے اندراجات درج ذیل ہوں گے۔

(7.5)

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}, \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

یوں پہلے جزو A میں قطاروں کی تعداد n دوسرے جزو B کی صفوں کی تعداد r کے برابر ہونا لازمی ہے۔ مساوات 7.5 میں c_{jk} کو A کے j صف کے ہر رکن کو B کے k قطار کے نظیری رکن سے ضرب دیتے ہوئے تمام n حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں صف ضرب قطار سے قلابی ضرب حاصل کیا جاتا ہے۔ قلابی ضرب $n = 3$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

جہاں A کی پہلی صف کے ارکان کو B کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{11} حاصل ہو گا۔ اسی طرح A کی پہلی صف کے ارکان کو B کی دوسری قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{12} حاصل ہو گا اور A کی دوسری صف کے ارکان کو B کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{21} حاصل ہو گا۔ اس عمل کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

چونکہ سمتیہ در حقیقت قالم کی مخصوص صورت ہے لہذا قالم اور سمتیہ کا ضرب بھی بالکل اسی طرح حاصل کیا جائے گا۔ قالمی ضرب کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال 7.6: قالمی ضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 10 \\ 4 \cdot 9 + 6 \cdot 8 & 4 \cdot 7 + 6 \cdot 10 \\ 5 \cdot 9 + 2 \cdot 8 & 5 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 37 \\ 84 & 88 \\ 61 & 55 \end{bmatrix}$$

مثال 7.7: قالم اور سمتیہ کا ضرب

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{جبکہ} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{ناممکن}$$

درج بالا میں قالم اور سمتیہ کی جگہ تبدیل کرنے سے پہلے جزو کی قطاروں اور دوسرے جزو کی صفوں کی تعداد یکساں نہیں رہتی لہذا ایسا ضرب ناممکن ہے۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ AB اور BA برابر ہوں اور یہ کہ دونوں ضرب کا حصول ممکن ہو۔

سوال 7.11:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ سمتیات کی جگہ تبدیل کرنے سے حاصل ضرب تبدیل ہوتا ہے یعنی قلبی ضرب قانون تبادلہ پر پورا نہیں اترتا۔

مثال 7.8: قلبی ضرب قانون تبادلہ پر پورا نہیں اترتا لہذا عموماً $AB \neq BA$ ہوگا

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 & 199 \\ -199 & -199 \end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ قلبی ضرب میں اجزاء کی جگہ تبدیل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کے علاوہ قلبی ضرب، عام اعدادی ضرب کے درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned} & \text{(الف)} \quad (kA)B = k(AB) = A(kB) \quad (kAB \text{ یا } AkB) \\ & \text{(ب)} \quad A(BC) = (AB)C \quad (\text{یعنی } ABC) \\ & \text{(پ)} \quad (A+B)C = AC + BC \\ & \text{(ت)} \quad C(A+B) = CA + CB \end{aligned} \quad (7.6)$$

درج بالا میں k کوئی عدد ہے اور یہ قواعد اس صورت درست ہوں گے کہ بائیں ہاتھ کے قالب، قلبی ضرب کی تعریف پر پورا اترتے ہوں۔ درج بالا میں مساوات-ب قانون تلازم²¹ کہلاتا ہے جبکہ مساوات-پ اور مساوات-ت قانون تقسیم²² کہلاتا ہے۔

چونکہ قلبی ضرب صف ضرب قطار کو کہتے ہیں لہذا مساوات 7.5 کو زیادہ خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(7.7) \quad c_{jk} = a_j b_k, \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

associative law²¹
distributive law²²

جہاں a_j قالب A کا صف j اور b_k قالب B کا قطار k ہے۔

$$a_j b_k = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = [a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}]$$

مثال 7.9: صف اور قطار سمتیہ کی صورت میں ضرب ارکان
 3×3 قالب $A = [a_{jk}]$ اور 3×4 قالب $B = [b_{jk}]$ کو ضرب دینے سے درج لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.8) \quad AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 \end{bmatrix}$$

مثال 7.10: 3×3 قالب $A = [a_{jk}]$ اور 3×4 قالب $B = [b_{jk}]$ درج ذیل ہیں۔ مساوات 7.8 سے AB حاصل کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: یہاں $a_1 = [1 \ 0 \ 2]$ ، $a_2 = [2 \ 1 \ 1]$ اور $a_3 = [3 \ 2 \ 1]$ ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1 b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 4 = 6$$

اسی طرح بقایا ارکان حاصل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 10 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

قالبی ضرب بذریعہ کمپیوٹر

مساوات 7.8 کو ذرہ مختلف طریقے سے لکھتے ہیں۔ A کو جوں کا توں جبکہ B کو سمتیہ قطار کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(7.9) \quad AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix}$$

متعدد متوازی جڑے کمپیوٹر کو علیحدہ علیحدہ b_1, b_2, \dots, b_p یا انہیں کئی کئی علیحدہ سمتیہ قطار فراہم کیے جاتے ہیں اور ساتھ ہی تمام کو A بھی فراہم کیا جاتا ہے۔ یوں قالبی ضرب کے اجزاء Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_p بہ یک وقت (نسبتاً بہت کم وقت میں) حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 7.11: درج ذیل کو مساوات 7.9 کی مدد سے حل کریں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 7.9 سے قالبی ضرب کے قطار حاصل کرتے ہیں جنہیں ایک ہی قالب میں یکجا کرتے ہوئے درج بالا جواب ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

خطی تبادل اور قابل ضرب

دو متغیرات پر مبنی خطی تبادل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$(7.10) \quad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

جس کو سمتیت کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.11) \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

اب اگر x_1x_2 نظام از خود w_1w_2 پر مبنی ہو یعنی

$$(7.12) \quad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned}$$

یا

$$(7.13) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{bmatrix}$$

تب y_1y_2 نظام بالواسطہ w_1w_2 پر مبنی ہو گا۔ آئیں اس تعلق کو جانیں۔

مساوات 7.10 میں مساوات 7.12 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2 \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$(7.14) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں

$$(7.15) \quad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

لیا گیا ہے۔ اس تعلق کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.16) \quad y = Cw = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{bmatrix}$$

آئیں قلبی ضرب AB حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $C = AB$ ہے۔

$$(7.17) \quad AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = C$$

بڑے جسامت کے قابلوں کے لئے بھی $C = AB$ بالکل اسی طرح ثابت کیا جاتا ہے۔ یوں y ، x اور w متغیرات کی تعداد بالترتیب m ، n اور p کی صورت میں A ، B اور C قابلوں کی جسامت بالترتیب $m \times n$ ، $n \times p$ اور $m \times p$ ہوگی جہاں $C = AB$ ہے۔ قلبی ضرب (مساوات 7.5) کی تعریف مساوات 7.17 کی بدولت ہے۔

7.2.1 تبدیلی محل

قالب کے صفوں کو بطور قطار (یعنی قطاروں کو بطور صف) لکھ کر تبدیل محل قالب²³ حاصل ہوتا ہے اور اس عمل کو²⁴ کہتے ہیں۔ سمتیہ کی تبدیلی محل بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔ اس طرح قالب کا صف، تبدیل محل قالب کا قطار ہوگا اور یونہی قالب کا قطار، تبدیل محل قالب کا صف ہوگا۔ چکور قالب کے ارکان کا مرکزی وتر میں "عکس" لینے سے بھی تبدیل محل قالب حاصل ہوگا۔ مرکزی وتر کے دونوں اطراف یکساں مقامات پر ارکان کی آپس میں جگہ تبدیل کرنے سے ان کا "عکس" حاصل ہوگا۔ یوں a_{12} اور a_{21} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، a_{13} اور a_{31} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ قالب A سے حاصل تبدیل محل قالب کو A^T سے ظاہر کیا جائے گا۔ درج ذیل مثال دیکھیں۔

مثال 7.12: تبدیل محل قالب
قالب A کا تبدیل محل A^T درج ذیل ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

²³transpose matrix
²⁴transposition

درج بالا کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

چکور قالب اور اس کا تبدیل محل درج ذیل ہیں۔ چکور قالب اور اس کے تبدیل محل قالب میں مرکزی وتر کے ارکان جگہ تبدیل نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل، سمتیہ قطار ہو گا اور یونی سمتیہ قطار کا تبدیل محل، سمتیہ صف ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

تبدیل محل کا تبدیل محل اصل قالب ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

تعریف: قالب اور سمتیہ کا تبدیل محل

$m \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کا تبدیل محل $n \times m$ قالب A^T ہے جس کا پہلا صف، A کا پہلا قطار، اس کا دوسرا صف A کا دوسرا قطار، وغیرہ وغیرہ ہوں گے۔ یوں مساوات 7.2 میں دیے گئے A کا تبدیل محل A^T درج ذیل ہو گا۔

$$(7.18) \quad A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل سمتیہ قطار ہو گا جبکہ سمتیہ قطار کا تبدیل محل سمتیہ صف ہو گا۔

بعض اوقات قالب اور بعض اوقات تبدیل محل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ تبدیلی محل کے قواعد درج ذیل ہیں۔

$$(7.19) \quad \begin{aligned} \text{(الف)} \quad & (A^T)^T = A \\ \text{(ب)} \quad & (A + B)^T = A^T + B^T \\ \text{(پ)} \quad & (cA)^T = cA^T \\ \text{(ت)} \quad & (AB)^T = B^T A^T \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ مساوات 7.19-ت میں دائیں ہاتھ قابلوں کی ترتیب بائیں ہاتھ کی ترتیب کے الٹ ہے۔ سوال 7.25 میں آپ کو درج بالا تعلقات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 7.13: درج ذیل قالب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.19-ت ثابت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

حل: پہلے مساوات 7.19-ت کا بائیں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ قالبی ضرب AB لینے کے بعد

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

اس کا تبدیل محل حاصل کرتے ہیں۔

$$(7.20) \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

آئیں اب مساوات 7.19-ت کا دایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ یوں B^T اور A^T حاصل کرنے کے بعد

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ان کا قابلی ضرب لیتے ہیں۔

$$(7.21) \quad B^T A^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

چونکہ $a_{11}b_{11} = b_{11}a_{11}$ ، $a_{12}b_{21} = b_{21}a_{12}$ ، ہیں لہذا مساوات 7.20 اور مساوات 7.21 کے دائیں ہاتھ آپس میں برابر ہیں لہذا ان کے بائیں ہاتھ بھی آپس میں برابر ہوں گے۔ اس طرح مساوات 7.19-ت ثابت ہوا۔

مخصوص قالب

چند اقسام کے قالب عملی استعمال کے لحاظ سے زیادہ اہم ہیں۔ ان پر غور کرتے ہیں۔

تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب

ایسا چکور قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے برابر $A = A^T$ ہو تشاکلی²⁵ قالب کہلاتا ہے۔ ایسا قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے نفی کے برابر $A = -A^T$ ہو منحرف تشاکلی²⁶ قالب کہلاتا ہے۔

$$(7.22) \quad \begin{array}{ll} \text{تشاکلی} & A = A^T, \quad (a_{jk} = a_{kj}) \\ \text{منحرف تشاکلی} & A = -A^T, \quad (a_{jk} = -a_{kj} \text{ اور } a_{jj} = 0) \end{array}$$

²⁵symmetric
²⁶skew-symmetric

مثال 7.14: تشاکی اور منحرف تشاکی قالب
 A تشاکی قالب ہے، B منحرف تشاکی قالب ہے جبکہ C نہ تشاکی اور نہ منحرف تشاکی ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ تشاکی}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ منحرف تشاکی}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

تکوئی قالب

بالائی تکوئی قالب²⁷ اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور اس سے بالائی جانب پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر سے نیچے کی طرف تمام ارکان صفر ہوں۔ اسی طرح نچلا تکوئی قالب²⁸ اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے نیچے پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر کے بالائی جانب تمام ارکان صفر کے برابر ہوں۔

مثال 7.15: بالائی تکوئی اور نچلا تکوئی قالب

$$\text{بالائی تکوئی قالب} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{نچلا تکوئی قالب} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

²⁷upper triangular matrix
²⁸lower triangular matrix

وتری قلب

ایسا چکور قلب جس میں غیر صفر ارکان صرف مرکزی وتر پر پائے جاتے ہوں وتری قلب²⁹ کہلاتا ہے۔ مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر ہوں گے۔

اگر وتری قلب S کے تمام ارکان یکساں، مثلاً c کے برابر ہوں، تب S غیر سمی قلب³⁰ کہلائے گا۔ کسی بھی چکور قلب A جس کی جسامت S کی جسامت کے برابر ہو، کا S کے ساتھ قلبی ضرب کا حاصل، غیر سمی مقدار c اور A کے حاصل ضرب کے برابر ہوگا۔

$$(7.23) \quad AS = SA = cA$$

ایسا غیر سمی قلب جس کے ارکان اکائی (1) کے برابر ہوں اکائی قلب³¹ کہلاتا ہے جسے I_n یا I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اکائی قلب کی صورت میں درج بالا مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(7.24) \quad AI = IA = A$$

مثال 7.16: وتری قلب D ، غیر سمی قلب S اور اکائی قلب I

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal matrix²⁹

scalar matrix³⁰

unit matrix³¹

مثال 7.17: کارخانے کے اخراجات
ایک کارخانے میں تین اقسام کے کھلونے (الف، ب اور پ) تیار ہوتے ہیں۔ ایک کھلونا تیار کرنے کے اخراجات قالب A میں دیے گئے ہیں۔ قالب B ایک ہفتے کی پیداوار دیتا ہے۔ جمع اور جمع رات کے دن تعطیل ہوتی ہے۔ ایسا قالب C حاصل کریں جو اس ایک ہفتے میں پیدا کیے گئے کھلونوں پر خرچ اخراجات پیش کرے۔

$$A = \begin{bmatrix} \text{الف} & \text{ب} & \text{پ} \\ 200 & 100 & 50 \\ 15 & 12 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \text{ہفتہ} & \text{اتوار} & \text{پیر} & \text{منگل} & \text{بدھ} \\ 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 2.0 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{matrix}$$

حل:

$$C = AB = \begin{bmatrix} \text{ہفتہ} & \text{اتوار} & \text{پیر} & \text{منگل} & \text{بدھ} \\ 2840.0 & 3865.0 & 2480.0 & 4065.0 & 4265.0 \\ 227.0 & 305.4 & 202.6 & 321.2 & 335.4 \\ 74.6 & 100.6 & 66.2 & 105.6 & 110.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{matrix}$$

مثال 7.18: امکانی شماریاتی قالب
ایک شہر کے رقبے کا استعمال 2018 میں درج ذیل ہے۔

$$S = 15\% \text{ صنعتی}, \quad T = 25\% \text{ تجارتی}, \quad R = 60\% \text{ رہائشی}$$

پانچ سالوں میں رقبے کا استعمال تبدیل ہو گا۔ اس تبدیلی کو درج ذیل امکانی شماریاتی قالب A دیتا ہے جو سالہا سال اس شہر کے لئے قابل استعمال ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} \text{صنعتی سے} & \text{تجارتی سے} & \text{رہائشی سے} \\ 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.9 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{رہائشی کو منتقل} \\ \text{تجارتی کو منتقل} \\ \text{صنعتی کو منتقل} \end{matrix}$$

درج بالا امکائی شماریاتی قالب A کے تمام ارکان مثبت ہیں جبکہ ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی کے برابر ہے (چونکہ تمام ممکنہ امکانات کا مجموعہ اکائی کے برابر ہوتا ہے)۔ پانچ سال بعد 2023 میں رقبے کی تقسیم درج ذیل ہو گی۔

$$y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 \\ 0.2 \cdot 60 + 0.7 \cdot 25 + 0.1 \cdot 15 \\ 0.6 \cdot 60 + 0.2 \cdot 25 + 0.9 \cdot 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.5 \\ 31.0 \\ 18.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{رہائشی} \\ \text{تجارتی} \\ \text{صنعتی} \end{matrix}$$

اس عمل کو A کی مدد سے سمجھتے ہیں۔ پانچ سالوں میں 0.8 امکان ہے کہ رہائشی رقبہ، رہائشی ہی رہے گا جبکہ 0.1 امکان ہے کہ تجارتی رقبہ پر رہائش ہوگی اور 0 امکان ہے کہ صنعتی رقبہ پر رہائش ہوگی۔ یوں 2023 میں رہائشی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 50.5 \%$$

اس پورے عمل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$y = Ax = A \begin{bmatrix} 60 & 25 & 15 \end{bmatrix}^T$$

جہاں x سمتیہ حال³³ ہے جو 2018 میں رقبے کی تقسیم بیان کرتا ہے۔ اسی طرح 2028 اور 2033 میں صورت حال بالترتیب درج ذیل ہوگی۔

$$z = Ay = A(Ax) = A^2x = \begin{bmatrix} 43.50 \\ 33.65 \\ 22.85 \end{bmatrix}$$

$$u = Az = A(A^2x) = A^3x = \begin{bmatrix} 38.165 \\ 34.540 \\ 27.295 \end{bmatrix}$$

یوں 2033 میں 38.165 % علاقہ رہائشی، 34.54 % تجارتی اور 27.295 % صنعتی ہو گا۔ یاد رہے کہ رقبہ مستقل قیمت ہے۔

state vector³³

سوالات

سوال 7.12: چکور قالب
ایسا چکور قالب جو تشاکلی اور منحرف تشاکلی ہو، کی صورت کیا ہوگی۔

حل: صفر قالب

سوال 7.13 تا سوال 7.25 میں درج ذیل قالب استعمال کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

سوال 7.13: A^T, B^T, a^T, b^T

$$A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad a^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.14: AB, BA

$$AB = \begin{bmatrix} -17 & -14 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 20 \\ 12 & -9 & -18 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.15: $(AB)^T, B^T A^T, A^T B^T$

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -6 \\ -14 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad A^T B^T = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 20 & -18 & 10 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.16: AA^T, A^2

$$AA^T = \begin{bmatrix} 29 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 13 \\ 20 & 13 & 38 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 17 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 22 & 39 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.17: BB^T, B^2

$$BB^T = \begin{bmatrix} 25 & -16 & 0 \\ -16 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ -8 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.18: CC^T, BC

$$CC^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, BC = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -13 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.19: $2A - 3B, (2A - 3B)^T, 2A^T - 3B^T$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} -15 & -8 & 8 \\ 12 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}, (2A - 3B)^T = 2A^T - 3B^T = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.20: Ba, Ba^T, Bb, Bb^T

$$Ba = Ba^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}, Bb^T = Bb = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.21: Aa, Aa^T, Ab, Ab^T

$$Aa = Aa^T = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, Ab = Ab^T = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.22: $(Ab)^T, b^T A^T$

$$(Ab)^T = b^T A^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.23: ABC, ABa, ABb

$$\begin{bmatrix} -49 & -36 \\ -5 & -6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -75 \\ -15 \\ -11 \end{bmatrix}$$

جوابات:

سوال 7.24: ab, ba, aB, Bb

$$\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

جوابات:

$$a + b, a^T + b, a + b^T \quad \text{سوال 7.25}$$

$$a^T + b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, a + b^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ ممکن نہیں ہے اور } a + b$$

سوال 7.26: AB کو سوال 7.13 میں حاصل کیا گیا ہے۔ اسی کو دوبارہ A کے قطار اور B کے صف استعمال کرتے ہوئے دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 7.27: مساوات 7.19 کو عمومی 2×2 قالب کے لئے ثابت کریں۔

سوال 7.28: قانون تبادل

$$\text{ایسا } 2 \times 2 \text{ قالب } B \text{ دریافت کریں کہ } AB = BA \text{ ہو جہاں } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ہے۔}$$

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ جواب:}$$

سوال 7.29: ثابت کریں کہ کسی بھی چکور قالب C کے لئے $\frac{1}{2}(C + C^T)$ تشاکلی ہے جبکہ $\frac{1}{2}(C - C^T)$ منخرف تشاکلی ہیں۔

سوال 7.30: درج بالا سوال کے تحت $T = \frac{1}{2}(C + C^T)$ اور $M = \frac{1}{2}(C - C^T)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں T تشاکلی اور M منخرف تشاکلی قالب ہیں۔ کسی بھی قالب کو تشاکل قالب اور منخرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سوال 7.13 تا سوال 7.25 میں استعمال کیے گئے A کو تشاکلی اور منخرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ ان قالبوں کو دریافت کریں۔

$$T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2.5 \\ 3 & 2.5 & 5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \text{ جوابات:}$$

سوال 7.31: قابل تبادل

ثابت کریں کہ تشاکلی A اور تشاکلی B کا قلابی ضرب AB اس صورت تشاکلی ہو گا جب A اور B آپس میں (ضرب میں) قابل تبادل³⁴ ہوں یعنی جب $AB = BA$ ہو۔

commutative³⁴

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA: \text{جواب}$$

سوال 7.32: کن صورتوں میں منحرف تشاکلی قالموں کا قالمی ضرب منحرف تشاکلی قالم دے گا؟

$$AB = -BA: \text{جواب}$$

سوال 7.33: امکانی شماریتی عمل

ایک مشین اگر آج ٹھیک ہو تب 0.9 امکان ہے کہ وہ ایک دن بعد (کل) بھی ٹھیک ہو گا۔ یوں 0.1 امکان ہے کہ وہ کل خراب ہو گا۔ اسی طرح اگر مشین آج خراب ہو تب 0.4 امکان ہے کہ وہ کل بھی خراب ہو گا۔ یوں 0.6 امکان ہے کہ وہ کل ٹھیک ہو گا۔ آج ٹھیک اور خراب کو بالترتیب t اور k سے ظاہر کریں جبکہ ایک دن بعد انہیں T اور K سے ظاہر کریں۔ اس پیش گوئی سے امکانی شماریتی قالم A لکھیں۔ اگر آج مشین ٹھیک ہو تب دو دن بعد (پرسوں) مشین ٹھیک ہونے کا کتنا فی صد امکان ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} t & k \\ 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} T \\ K \end{matrix} \quad \text{جوابات: دو دن بعد } 87\% \text{ امکان ہے کہ مشین ٹھیک ہو گی۔}$$

سوال 7.34: امکانی شماریتی عمل

ایک شہر کی آبادی 20000 ہے۔ ایک بینک میں آج کھاتے دار کا 90% امکان ہے کہ وہ اگلے سال بھی اسی بینک کا کھاتے دار ہو گا جبکہ یہاں کھاتا نہ رکھنے والے کا 1% امکان ہے کہ وہ اگلے سال یہاں کا کھاتا دار ہو گا۔ اگر آج 1000 افراد اس بینک کے کھاتے دار ہوں تب ایک سال، دو سال اور تین سال بعد کتنے افراد یہاں کے کھاتے دار ہوں گے؟

جوابات: 1090 ، 1170 ، 1241

سوال 7.35: ایک کارخانہ لاہور، پشاور اور کراچی میں تین اشیاء الف، ب اور پ فروخت کرتا ہے۔ فی کلو گرام منافع بالترتیب 8 ، 10 اور 6 روپیہ ہے۔ ایک دن کی فروخت درج ذیل ہے۔

2000	3000	1800	لاہور
2200	2800	1500	پشاور
3200	4200	2700	کراچی

ایسا "سمتیہ منافع" m دریافت کریں کہ $y = Am$ ہر شہر میں روزانہ کمائی دے۔

$$m = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}^T: \text{جواب}$$

سوال 7.36: خطی متبادل۔ گھومنا

کارٹیزیی محدود کی xy سطح پر گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ گھومنے کو $y = Ax$ ظاہر کرتی ہے جہاں y ، A اور x درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ثابت کریں کہ $y = Ax$ کسی بھی سطح پر x_1x_2 کارٹیزیی محدود کے نظام کو، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ، θ زاویہ گھما کر نیا کارٹیزیی محدود y_1y_2 دیتا ہے۔

سوال 7.37: خطی متبادل۔ گھومنا

درج بالا سوال میں θ زاویہ گھومنا دیکھا گیا۔ ثابت کریں کہ درج ذیل قالب، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ، $n\theta$ زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

سوال 7.38: خطی متبادل۔ گھومنا

درج بالا دو سوالات کو دیکھیں۔ درج ذیل قالب، مرکز کے گرد، گھڑی کی الٹ رخ، α اور β زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

یوں باری باری α اور β گھومنے کو AB ظاہر کرے گا۔ یوں درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

سوال 7.39: خطی متبادل۔ گھومنا

خلائ میں گھومنا $y = Ax$ دیتا ہے جہاں $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ، $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ ہیں جبکہ A درج ذیل ہو سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.3. خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی حذف

کیا آپ ذہن میں اس عمل کو دیکھ پاتے ہیں؟

7.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی حذف

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.