انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 4

نظامِ تفرقی مساوات

گزشتہ باب میں آپ نے بلند درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔اس باب میں سادہ تفرقی مساوات حل کرنے کا نیا طریقہ دکھایا جائے گا جس میں n درجی سادہ تفرقی مساوات سے n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جائے گا۔اس نظام کو حل کرنا بھی سکھایا جائے گا۔ تفرقی مساوات کے نظام کو قالب اور سمتیہ کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے لہٰذا حصہ 4.1 میں قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق پر غور کیا جائے گا۔

اسی باب میں تفرقی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بجائے تمام مساوات کی مجموعی طرز عمل پر غور کیا جائے گا جس سے نظام کے حل کی توازن[1] کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہے۔انجینئری میں متوازن نظام اہمیت رکھتے ہیں۔متوازن نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی، بعد کے لمحات پر معمولی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔اس ترکیب سے مساوات کا اصل حل دریافت نہیں ہوتا لہٰذا اس کو **کیفی ترکیب**[2] کہتے ہیں۔جس ترکیب سے نظام کا اصل حل حاصل ہوتا ہو اس کو **مقداری ترکیب**[3] کہتے ہیں۔

---

[1] stability
[2] qualitative method
[3] quantitative method

4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق

تفرقی مساوات کے نظام پر غور کے دوران قالب اور سمتیات استعمال کئے جائیں گے۔

دو عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 7y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

میں دو عدد نا معلوم تفاعل $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ پائے جاتے ہیں۔ان مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل $g_1(t)$ اور $g_2(t)$ بھی موجود ہو سکتے ہیں۔اسی طرح n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر مبنی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

میں $y_1(t)$ تا $y_n(t)$ نا معلوم تفاعل پائے جائیں گے۔درج بالا ہر مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل بھی پائے جا سکتے ہیں۔

تکنیکی اصطلاحات

قالب

نظام 4.1 کے عددی سر (جو مستقل یا متغیرات ممکن ہیں) کو 2×2 **قالب**[4] $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

[4] matrix

اسی طرح نظام 4.2 کے عددی سر کو $n \times n$ قالب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

قالب میں درج a_{11} ، a_{12} ، a_{21} وغیرہ کو ارکان[5] کہتے ہیں۔ افقی لکیروں کو صف[6] جبکہ عمودی لکیروں کو قطار[7] کہتے ہیں۔ قالب 4.3 میں پہلا صف $[a_{11} \;\; a_{12}]$ یا $[2 \;\; 3]$ جبکہ دوسرا صف $[a_{21} \;\; a_{22}]$ یا $[\frac{2}{3} \;\; 1-]$ $[-1 \;\; \frac{2}{3}]$ ہے۔اسی طرح پہلا قطار درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ارکان کی علامتی اظہار میں دوگنا زیر نوشت کا پہلا عدد صف کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دوسرا عدد قطار کو ظاہر کرتا ہے۔یوں a_{21} دوسری صف اور پہلی قطار کا رکن ہے۔ قالب 4.3 کا مرکزی وتر[8] a_{11} اور a_{22} پر مبنی ہے جبکہ قالب 4.4 کا مرکزی وتر a_{11} ، a_{22} ، $\cdots$ ، a_{nn} پر مبنی ہے۔ہمیں یہاں صرف مربع قالب[9] درکار ہوں گے۔مربع قالب سے مراد ایسی قالب ہے جس میں صفوں کی تعداد قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ قالب 4.3 اور قالب 4.4 مربع قالب ہیں۔

سمتیہ۔ ایک قطار اور n ارکان کا سمتیہ قطار[10] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اسی طرح ایک صف اور n ارکان کا سمتیہ صف[11] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

entry[5]
row[6]
column[7]
main diagonal[8]
square matrix[9]
column vector[10]
row vector[11]

قالب اور سمتیات کا حساب

برابری مساوات

دو عدد $n \times n$ قالب صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے تمام نظیری[12] ارکان برابر ہوں۔ظاہر ہے کہ دو قالب کی برابری کے لئے لازم ہے کہ ان میں صفوں کی تعداد یکساں ہو اور ان میں قطاروں کی تعداد یکساں ہو۔یوں $n = 2$ کی صورت میں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

صرف اور صرف اس صورت برابر $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B})$ ہوں گے جب

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, \quad a_{12} = b_{12} \\ a_{21} &= b_{21}, \quad a_{22} = b_{22} \end{aligned}$$

ہوں۔دو عدد سمتیہ صف (یا دو عدد سمتیہ قطار) صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب دونوں میں ارکان کی تعداد n برابر ہو اور ان کے تمام نظیری ارکان برابر ہوں ۔یوں

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

کی صورت میں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ صرف اور صرف تب ہو گا جب

$$v_1 = x_1 \quad \text{اور} \quad v_2 = x_2$$

ہوں۔

مجموعہ

مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر دونوں قالب کے نظیری ارکان کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔دونوں قالب یکساں $m \times n$ ہونا لازم ہے۔اسی طرح دونوں سمتیہ صف (یا دونوں سمتیہ قطار) میں برابر ارکان ہونا لازم ہے۔یوں 2×2 قالب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{bb} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

[12] corresponding

غیر سمتی ضرب

[13] غیر سمتی ضرب یعنی مستقل c سے قالب کا ضرب حاصل کرنے کی خاطر قالب کے تمام ارکان کو c سے ضرب دیا جاتا ہے۔ مثلاً

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{bmatrix},\quad -4\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-8 & 12\\ -20 & -4\end{bmatrix}$$

اور

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}9\\ -4\end{bmatrix},\quad 3\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}27\\ -12\end{bmatrix}$$

قالب ضرب قالب

دو عدد $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ اور $\boldsymbol{B}=[b_{jk}]$ کا حاصل ضرب $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ ، (اسی ترتیب میں) $n\times n$ قالب $\boldsymbol{C}=[c_{jk}]$ ہو گا جس کے ارکان

$$c_{jk}=\sum_{m=1}^{n} a_{jm}b_{mk}\qquad j=1,\cdots,n,\qquad k=1,\cdots,n \tag{4.6}$$

ہوں گے یعنی $\boldsymbol{A}$ قالب کے j صف کے ہر رکن کو $\boldsymbol{B}$ قالب کے j قطار کے نظیری رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے n حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔ہم کہتے ہیں کہ قالب کے ضرب سے مراد **صف ضرب قطار** ہے۔ مثلاً

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 7+1\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot(-4)\\ (-3)\cdot 7+0\cdot 2 & (-3)\cdot 1+0\cdot(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -2\\ -21 & -3\end{bmatrix}$$

یہاں دھیان رہے کہ ضرب قالب **غیر مستبدل**[14] ہے لہٰذا عموماً $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ ہو گا۔ یوں دو قالب کو آپس میں ضرب دیتے ہوئے قالبوں کی ترتیب تبدیل نہیں کی جا سکتی۔اس حقیقت کی وضاحت کی خاطر درج بالا مثال میں قالبوں کی ترتیب بدلتے ہوئے ان کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\cdot 2+1\cdot(-3) & 7\cdot 1+1\cdot 0\\ 2\cdot 2+(-4)\cdot(-3) & 2\cdot 1+(-4)\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 7\\ 16 & 2\end{bmatrix}$$

---

[13] scalar product
[14] non commutative

$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کو n ارکان کی سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ سے ضرب بھی اسی قاعدے کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کے n عدد ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$v_j = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} x_m \qquad j = 1, \cdots, n \tag{4.7}$$

یوں

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔

سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا اظہار بذریعہ سمتیات

تفرق

قالب یا سمتیہ کا تفرق، تمام ارکان کا تفرق حاصل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t^3 \\ 6\cos 2t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15t^2 \\ -12\sin 2t \end{bmatrix}$$

قالب کی تفرق اور ضرب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 4.1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

اسی طرح مساوات 4.2 کو درج ذیل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

مزید اعمال اور اصطلاحات

تبدیل محل

تبدیلی محل[15] کے عمل سے قالب کے قطاروں کو صفوں کی جگہ لکھا جاتا ہے۔یوں 2×2 قالب $\boldsymbol{A}$ سے **تبدیلی محل**[16] کے ذریعہ **تبدیلی محل قالب**[17] $\boldsymbol{A}^T$ حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف $\boldsymbol{x}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{x}^T$ سمتیہ قطار ہو گا۔اسی طرح سمتیہ قطار $\boldsymbol{v}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{v}^T$ سمتیہ صف ہو گا۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

قالب کا معکوس

ایسا $n \times n$ قالب جس کے مرکزی وتر کے تمام ارکان اکائی (1) اور بقایا ارکان صفر ہوں کو **اکائی قالب**[18] $\boldsymbol{I}$ کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

---

[15] transposition
[16] transposition
[17] transpose matrix
[18] unit matrix

ایسا $\boldsymbol{B}$ قالب، جس کا $\boldsymbol{A}$ قالب کے ساتھ حاصل ضرب اکائی قالب ہو $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ ، قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس قالب کہلاتا ہے جسے $\boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{A}$ **غیر نادر قالب**[19] کہلاتا ہے۔ یہاں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں $n \times n$ قالب ہیں۔

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{4.11}$$

قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس تب پایا جاتا ہے جب $\boldsymbol{A}$ کا مقطع غیر صفر $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ہو۔ اگر $\boldsymbol{A}$ کا معکوس نہ پایا جاتا ہو تب $\boldsymbol{A}$ **نادر**[20] قالب کہلاتا ہے۔ مربع 2×2 قالب کا معکوس

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ کا مقطع $|\boldsymbol{A}|$ درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{4.13}$$

خطی طور تابعیت

r عدد سمتیات $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ جہاں ہر سمتیہ n ارکان پر مشتمل ہو، اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[21] یا **خطی طور غیر تابع** کہلاتے ہیں جب

$$c_1\boldsymbol{v}^{(1)} + \cdots + c_r\boldsymbol{v}^{(r)} = \mathbf{0} \tag{4.14}$$

سے مراد c_1 تا c_r کی قیمتیں صفر ہو۔ درج بالا مساوات میں $\mathbf{0}$ **صفر سمتیہ**[22] ہے جس کے تمام n ارکان صفر کے برابر ہیں۔ اگر مساوات 4.14 میں c_1 تا c_r کوئی ایک یا ایک سے زائد مستقل غیر صفر ہوں تب $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ **خطی طور تابع سلسلہ**[23] یا **خطی طور تابع** کہلائیں گے چونکہ ایسی صورت میں کم از کم ایک سمتیہ کو

---
[19] non singular matrix
[20] singular
[21] linearly independent set
[22] zero vector
[23] linearly dependent vector

بقایا سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے، مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.14 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = -\frac{1}{c_1}\left[c_2\boldsymbol{v}^{(2)} + \cdots + c_r\boldsymbol{v}^{(r)}\right]$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات

آئگنی قدر[24] اور **آئگنی سمتیات**[25] انتہائی اہم ہیں جو کوانٹم **میکانیات**[26] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ مساوات

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{4.15}$$

میں $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ معلوم $n \times n$ قالب ہے جبکہ λ نا معلوم مستقل (جو حقیقی یا مخلوط مقدار ہو سکتا ہے) اور $\boldsymbol{x}$ نا معلوم سمتیہ ہے جنہیں حاصل کرنا درکار ہے۔ کسی بھی λ کے لئے مساوات 4.15 کا ایک حل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ممکن ہے۔ ایسی غیر سمتی[27] λ جو $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کی صورت میں مساوات 4.15 پر پورا اترتی ہو، $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی قدر[28] کہلاتی ہے جبکہ، اس λ کی نظیری، $\boldsymbol{x}$ کو $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی سمتیہ[29] کہتے ہیں۔

ہم مساوات 4.15 کو $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = 0$ یا

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{4.16}$$

لکھ سکتے ہیں جو n عدد خطی الجبرائی مساوات کو ظاہر کرتی ہے جس کے نا معلوم متغیرات x_1 تا x_n، سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کے ارکان ہیں۔ اس مساوات کے غیر صفر حل $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کے لئے ضروری ہے کہ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ کے عددی سر قالب کا مقطع صفر ہو۔ (یہ خطی الجبرا کی بنیادی حقیقت ہے)۔ اس باب میں ہمیں $n = 2$ سے دلچسپی ہے لہٰذا مساوات 4.16 کو

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Eigenvalues[24]
Eigenvectors[25]
quantum mechanics[26]
scalar[27]
Eigenvalue[28]
Eigenvector[29]

لکھتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2&=0\end{aligned} \tag{4.18}$$

اب نادر قالب کا مقطع صفر ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ اس صورت نادر قالب ہو گا جب اس قالب کا مقطع (جسے $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مقطع**[30] کہتے ہیں) صفر ہو۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|&=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(a_{12}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}\\ &=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0\end{aligned} \tag{4.19}$$

اس دو درجی مساوات کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مساوات**[31] کہتے ہیں۔اس کے حل λ_1 اور λ_2 ، قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر یا آئگنی قیمتیں ہیں۔پہلے آئگنی قدر حاصل کریں۔اس کے بعد λ_1 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_1 کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ دریافت کریں۔اسی طرح λ_2 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_2 کی نظیری، $\boldsymbol{A}$ کی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)}$ دریافت کریں۔یاد رہے کہ اگر $\boldsymbol{x}$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ ہو تب $k\boldsymbol{x}$ بھی $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ ہو گا جہاں $k\neq 0$ ہے۔

مثال 4.1: درج ذیل قالب کی آئگنی قیمتیں اور آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ -0.8 & 0.4\end{bmatrix}$$

حل:امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 3\\ -0.8 & 0.4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2.6\lambda+1.2=0$$

[30] characteristic determinant
[31] characteristic equation

سے A کے آئگنی قدر $\lambda_1 = -0.6$ اور $\lambda_2 = -2$ ملتے ہیں۔آئگنی قیمت $\lambda = \lambda_1 = -0.6$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(-3+0.6)x_1 + 3x_2 &= 0\\ -0.8x_1 + (0.4+0.6)x_2 &= 0\end{aligned}$$

پہلی مساوات کو $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔دوسری مساوات کو بھی $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_1 = 1$ چنا جائے تو $x_2 = 0.8$ ہو گا لہٰذا، $\lambda_1 = -0.6$ کی نظیری، A کا آئگنی سمتیہ

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1\\ 0.8\end{bmatrix}$$

ہو گا۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -2$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(-3+2)x_1 + 3x_2 &= 0\\ -0.8x_1 + (0.4+2)x_2 &= 0\end{aligned}$$

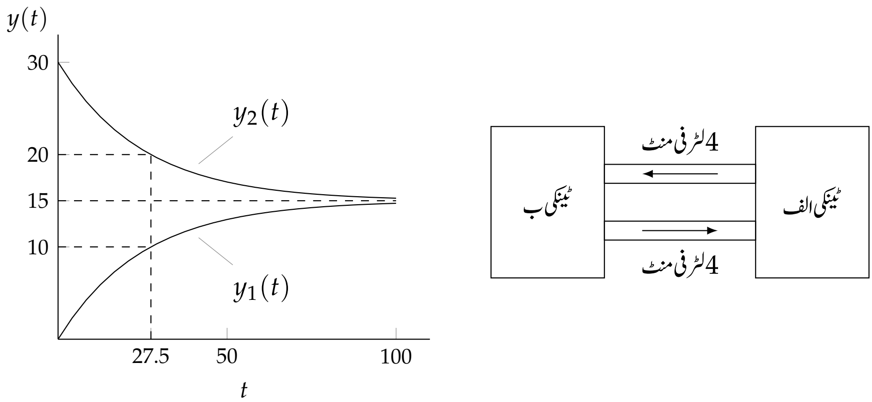
ان دونوں مساوات کو $x_1 = 3x_2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_2 = 1$ چنا جائے تو $x_1 = 3$ حاصل ہو گا لہٰذا، $\lambda_2 = -2$ کی نظیری، A کا آئگنی سمتیہ

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3\\ 1\end{bmatrix}$$

ہو گا۔جیسا پہلے ذکر کیا گیا، آئگنی سمتیات کو کسی بھی غیر صفر عدد سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔

4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

اس حصے میں ہم تفرقی مساوات کے نظام کی عملاً اہمیت دیکھیں گے۔ ہم پہلے دیکھتے ہیں کہ ایسے نظام مختلف عملی مسائل میں کیسے کردار ادا کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی تفرقی مساوات کو کیسے تفرقی مساوات کے نظام میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 4.1: ٹینکیوں کا نظام۔

مثال 4.2: دو ٹینکیوں کا نظام

ایک ٹینکی کو استعمال کرتے ہوئے مرکب بنانے کے عمل پر صفحہ 26 مثال 1.10 میں غور کیا گیا جہاں مسئلے کو ایک عدد تفرقی مساوات سے ظاہر کیا گیا۔اس مثال کو ایک مرتبہ دیکھ لیں چونکہ وہی معلومات یہاں بھی استعمال کی جائیں گی۔

شکل 4.1 میں دو ٹینکیاں دکھائی گئی ہیں جن میں یک برابر دو سو (200) لٹر پانی موجود ہے۔ٹینکی الف میں خالص پانی ہے جبکہ ٹینکی ب کی پانی میں تیس (30) کلو گرام کا نمک ملایا گیا ہے۔ ٹینکیوں میں پانی کو مسلسل ہلایا جاتا ہے تا کہ ان میں ہر جگہ محلول یکساں رہے۔ٹینکیوں میں پانی کو چار (4) لٹر فی منٹ سے گردش دینے سے ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار $y_2(t)$ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔کتنی دیر کے بعد ٹینکی الف میں نمک کی مقدار، ٹینکی ب میں نمک کی مقدار کا نصف ہو گا؟

حل: پہلا قدم: نظام کی نمونہ کشی کرتے ہیں۔ ایک ٹینکی کی طرح، ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ میں تبدیلی کی شرح $y_1'(t)$ نمک کی در آمدی اور بر آمدی شرح میں فرق کے برابر ہو گی۔ یہی کچھ $y_2'(t)$ کے لئے

بھی کہا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} y_1' &= 4\frac{y_2}{200} - 4\frac{y_1}{200} \\ y_2' &= 4\frac{y_1}{200} - 4\frac{y_2}{200} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.02y_1 + 0.02y_2 \\ y_2' &= 0.02y_1 - 0.02y_2 \end{aligned}$$

ہو گا۔اس نظام کو

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.20}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

ہیں۔

دوسرا قدم: عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح یہاں بھی حل کو قوت نمائی تفاعل

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t} \tag{4.21}$$

فرض کرتے ہیں۔مساوات 4.20 میں اس فرضی تفاعل اور اس کے تفرق کو پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$$

دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے دونوں اطراف کو بدل کر لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

ہمیں اس مساوات کے غیر صفر اہم حل درکار ہیں لہٰذا ہمیں $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات حاصل کرنے ہوں گے۔آئگنی قدر امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -0.02 - \lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.02 - \lambda) - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0$$

کے حل $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ ہوں گے۔(یہاں دھیان رہے کہ ہمیں غیر صفر آئگنی سمتیات درکار ہیں۔آئگنی قدر صفر ہو سکتے ہیں۔) آئگنی سمتیات مساوات 4.18 کے پہلے یا دوسرے مساوات سے حاصل ہوں گے۔مساوات 4.18 کی پہلے مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے لئے

$$-0.02x_1 + 0.02x_2 = 0, \quad (-0.02 + 0.04)x_1 + 0.02x_2 = 0$$

لکھے جائیں گے جن سے $x_1 = x_2$ اور $x_1 = -x_2$ ملتے ہیں۔ہم $x_1 = x_2 = 1$ اور $x_1 = -x_2 = 1$ چنتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے نظیری آئگنی سمتیات

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 4.21 اور مسئلہ خطی میل (جو خطی متجانس تفرقی مساوات کے نظام پر بھی لاگو ہوتا ہے) کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t} \tag{4.22}$$

تیسرا قدم: ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ (یعنی ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر کوئی نمک نہیں پایا جاتا) اور $y_2(0) = 30$ (یعنی ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر تیس کلو گرام نمک پایا جاتا ہے) ہیں۔مساوات 4.22 میں $t = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہیں۔

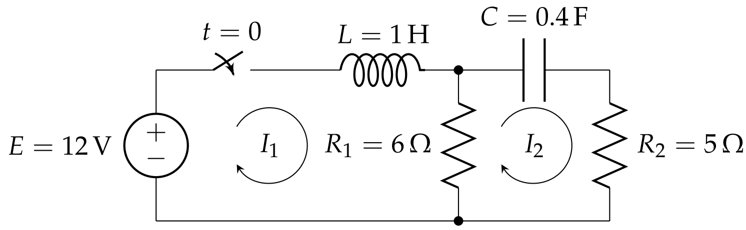
$$\boldsymbol{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

درج بالا مساوات کی جزوی صورت $c_1 + c_2 = 0$ اور $c_1 - c_2 = 30$ ہے جس کا حل $c_1 = 15$ اور $c_2 = -15$ ہے۔یوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہوا حل

$$\boldsymbol{y} = 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

یعنی

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t}$$
$$y_2(t) = 15 + 15e^{-0.04t}$$



شکل 4.2: مثال 4.3 کا برقی جال۔

ہو گا۔ اس حل کو شکل 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

چوتھا قدم: ٹینکی الف میں اس وقت ٹینکی ب کا آدھا نمک ہو گا جب اس میں $10 = \frac{30}{3}$ کلو گرام نمک ہو۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t} = 10, \quad t = -\frac{1}{0.04}\ln\frac{1}{3} = 27.5\,\mathrm{min}$$

مثال 4.3: برقی جال

شکل 4.2 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو ہوتا ہے۔ برقی رو $I_1(t)$ اور $I_2(t)$ دریافت کریں۔ ابتدائی رو اور ابتدائی برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر ہیں۔

حل: **پہلا قدم** نظام کی نمونہ کشی ہے۔ امالہ میں رو I_1 ہے لہٰذا اس پر برقی دباو $v_L = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔ برق گیر میں رو I_2 ہے لہٰذا اس پر دباو $v_C = \frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ مزاحمت R_2 پر دباو $v_{R2} = I_2R_2$ ہو گا جبکہ مزاحمت R_1 میں کل رو $I_1 - I_2$ ہے لہٰذا اس پر دباو $v_{R1} = (I_1 - I_2)R_1$ ہو گا۔ کرخوف قانون دباو کے تحت کسی بھی بند دائرے میں کل دباو کا اضافہ اس دائرے میں کل دباو کے گھٹاو کے برابر ہو گا۔ یوں بائیں دائرے کے لئے

$$E = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + (I_1 - I_2)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E = 12$ ، $L = 1$ اور $R_1 = 6$ پر کرتے ہوئے

$$I_1' = -6I_1 + 6I_2 + 12 \tag{4.23}$$

ملتا ہے۔اسی طرح دائیں دائرے کے لئے

$$0 = \frac{1}{C}\int I_2 \,\mathrm{d}t + I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $C = 0.4$ اور $R_2 = 5$ پر کرتے ہوئے تفرق لینے سے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4I_1' = 0$$

ملتا ہے۔اس میں مساوات 4.23 سے I_1' کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4(-6I_1 + 6I_2 + 12) = 0$$

یعنی

$$I_2' = -\frac{36}{11}I_1 + \frac{67}{22}I_2 + \frac{72}{11} \tag{4.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.23 اور مساوات 4.24 کو

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{g} \tag{4.25}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 12 \\ \frac{72}{11} \end{bmatrix}$$

ہیں۔ I_1' اور I_2' کے سمتیہ قطار کو $\boldsymbol{J}$ اس لئے لکھا گیا ہے کہ اس باب میں $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

دوسرا قدم نظام کا حل تلاش کرنا ہے۔ $\boldsymbol{g}$ کی موجودگی **غیر متجانس سادہ تفرقی نظام** کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہم ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح پہلے متجانس مطابقتی نظام $\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ہم $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے متجانس نظام میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{J}' = \lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t} \quad \implies \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

غیر صفر اہم حل کے حصول کے لئے $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات درکار ہوں گے۔آئگنی قدر امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\frac{65}{22}\lambda-\frac{15}{11}=0$$

سے $\lambda_1=-2.38209$ اور $\lambda_2=-0.57245$ حاصل ہوتے ہیں۔ان آئگنی قدر کی نظیری آئگنی سمتیات مساوات 4.18 سے حاصل ہوں گے۔مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_1 پر کرتے ہوئے

$$(-6+2.38209)x_1+6x_2=0, \quad \implies x_1=1.658416x_2$$

ملتا ہے۔یوں $x_2=1$ چنتے ہوئے $x_1=1.658416$ ملتا ہے جس سے $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1.658416\\1\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_2 پر کرتے ہوئے

$$(-6+0.57245)x_1+6x_2=0, \quad \implies x_1=1.105471x_2$$

ملتا ہے۔یوں $x_2=1$ چنتے ہوئے $x_1=1.105471$ ملتا ہے جس سے $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1.105471\\1\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں متجانس نظام کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{J}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} \tag{4.26}$$

مساوات 4.25 کے غیر متجانس نظام کا جبری تفاعل $\boldsymbol{g}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اس نظام کا مخصوص حل مستقل سمتیہ قطار $\boldsymbol{J}_p=\boldsymbol{a}$ فرض کرتے ہیں جس کے ارکان a_1 اور a_2 ہیں۔یوں $\boldsymbol{J}'=0$ ہو گا۔ مساوات 4.25 میں فرض کردہ مخصوص حل پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{g}=0$ ملتا ہے جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

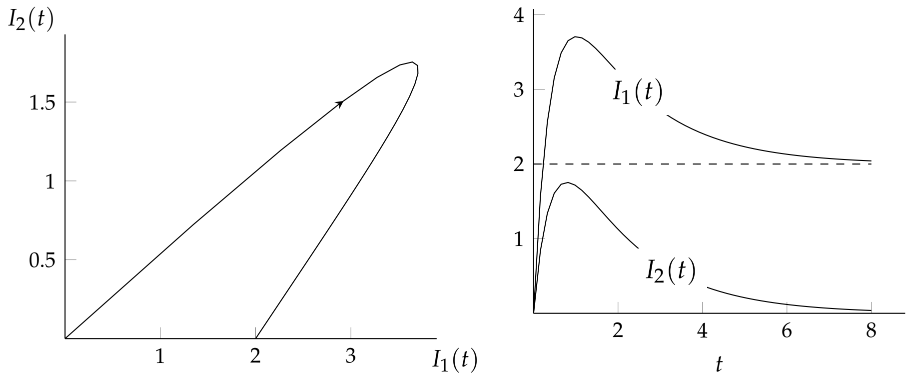
$$\begin{aligned}-6a_1+6a_2+12&=0\\ -\frac{36}{11}a_1+\frac{67}{22}a_2+\frac{72}{11}&=0\end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے $a_1=2$ اور $a_2=0$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ ہو گا۔یوں عمومی حل

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_h+\boldsymbol{J}_p=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t}+\boldsymbol{a}$$

ہو گا جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}I_1&=1.658416c_1e^{-2.38209t}+1.105471c_2e^{-0.57245t}+2\\ I_2&=c_1e^{-2.38209t}+c_2e^{-0.57245t}\end{aligned}$$



(ب) $I_1(t)$ بالمقابل $I_2(t)$

(الف) مثال 4.3 کے دور کا مخصوص حل۔

شکل 4.3: مثال 4.3 کے منحنی۔

ابتدائی معلومات کے تحت $I_1(0) = 0$ اور $I_2(0) = 0$ ہے۔انہیں درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
1.658416c_1 + 1.105471c_2 + 2 &= 0 \\
c_1 + c_2 &= 0
\end{aligned}
$$

ملتا ہے جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -3.61699$ اور $c_2 = 3.61699$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل

$$\boldsymbol{J} = -3.617\boldsymbol{x}^{(1)}e^{-2.38t} + 3.617\boldsymbol{x}^{(2)}e^{-0.57t} + \boldsymbol{a}$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -5.998e^{-2.38t} + 3.998e^{-0.57t} + 2 \\
I_2 &= -3.617e^{-2.38t} + 3.617e^{-0.57t}
\end{aligned}
$$

ہو گا جسے شکل 4.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.3-ب میں $I_1(t)$ بالمقابل $I_2(t)$ کو I_1I_2 سطح پر دکھایا گیا ہے جس میں t مقدار معلوم ہے۔مقدار معلوم کے بڑھنے کی سمت کو منحنی پر تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے۔ سطح I_1I_2 کو نظام کی **سطح مرحلہ**[32] کہتے ہیں جبکہ شکل 4.3-ب کی منحنی کو **خط حرکت**[33] کہتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ **سطح مرحلہ اشکال**، سادہ شکل

---

phase plane[32]
trajectory[33]

4.3-الف طرز کے اشکال سے زیادہ اہم ثابت ہوتے ہیں۔یہ خطوط کی نسل کے بارے میں بہتر کیفی معلومات فراہم کرتے ہیں۔

صفحہ 26 مثال 1.10 میں ایک عدد ٹینکی کی مثال پر غور کیا گیا جس کی نمونہ کشی ایک عدد سادہ تفرقی مساوات سے کی گئی۔ مثال 4.2 میں دو ٹینکیوں پر مبنی نظام کی نمونہ کشی دو عدد تفرقی مساوات سے کی گئی۔ اسی طرح مثال 4.3 میں دو عدد نا معلوم رو کی بنا دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ بڑے نظام کی نمونہ کشی زیادہ تعداد کی تفرقی مساوات سے کی جائے گی۔

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے تفرقی مساوات کے نظام کا حصول

درج ذیل مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے کہ n درجی سادہ تفرقی مساوات 4.27 سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 4.1: تفرقی مساوات کا مبادلہ
سادہ n درجی تفرقی مساوات

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{4.27}$$

میں

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \tag{4.28}$$

لے کر اس کو n عدد سادہ ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned} \tag{4.29}$$

میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

ثبوت : مساوات 4.28 کے تفرق سے نظام کے پہلے $n-1$ عدد تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 4.28 سے $y_n' = y^{(n)}$ بھی حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 4.27 سے مساوات 4.29 کی آخری مساوات بھی حاصل ہوتی ہے۔

مثال 4.4: ہم اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ ارتعاش کے مسئلے پر غور کر چکے ہیں جس کی تفرقی مساوات صفحہ 120 پر مساوات 2.41

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \implies \quad y'' = -\frac{k}{m}y - \frac{c}{m}y' \tag{4.30}$$

دیتی ہے جس کے لئے مساوات 4.29 کا نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{aligned}$$

متجانس اور خطی ہے۔ قالب کا استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ لکھتے ہوئے اس نظام کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

جس سے امتیازی مساوات لکھتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

با مثلاً $m = 1$ ، $c = 1.4$ اور $k = 0.24$ ہوں تب

$$\lambda^2 + 1.4\lambda + 0.24 = (\lambda + 0.2)(\lambda + 1.2) = 0$$

ہو گا جس سے آئگنی قدر $\lambda_1 = -0.2$ اور $\lambda_2 = -1.2$ حاصل ہوتے ہیں۔آئگنی سمتیات $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ کی پہلی مساوات $-\lambda x_1 + x_2$ سے حاصل کرتے ہیں۔آئگنی قدر $\lambda_1 = -0.2$ پر کرتے ہوئے $0.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -0.2x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -0.2$ ہو گا۔اسی طرح $\lambda_2 = -1.2$ پر کرتے ہوئے $1.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -1.2x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1.2$ ہو گا۔یوں درج ذیل آئگنی سمتیات حاصل ہوتی ہیں

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} e^{-0.2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix} e^{-1.2t}$$

سمتیہ حل لکھا جائے گا۔اس نظام کی پہلی مساوات

$$y = y_1 = c_1 e^{-0.2t} + c_2 e^{-1.2t}$$

درکار حل ہے جبکہ نظام کی دوسری مساوات حل کی تفرق ہے۔

$$y_2 = y_1' = y' = -0.2c_1 e^{-0.2t} - 1.2c_2 e^{-1.2t}$$

سوالات

سوال 4.1 تا سوال 4.5 میں دیے گئے قالب کے آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات حاصل کریں۔

سوال 4.1: الیکٹران کی ایک خاصیت **چکر**[34] کہلاتی ہے جس کی مقدار $\frac{\hbar}{2}$ یا $-\frac{\hbar}{2}$ ہو سکتی ہے جہاں $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ہے اور $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{m^2kg/s}$ **مستقل پلانک**[35] ہے۔چکر سمتیہ مقدار ہے۔مقناطیسی میدان

[34] spin
[35] Plank's constant

میں الیکٹران کا چکر یا ہمہ میدان (مقناطیسی میدان کی سمت میں) رہتا ہے اور یا مخالف میدان (میدان کی الٹ سمت میں) رہتا ہے۔ہمہ میدان صورت میں الیکٹران کو اوپر چکر[36] الیکٹران کہتے ہیں جبکہ میدان مخالف چکر کی صورت میں الیکٹران کو نیچے چکر[37] الیکٹران کہتے ہیں۔ z سمت میں مقناطیسی میدان میں موجود الیکٹران کی خاصیت $\boldsymbol{S}_z$ قالب چکر[38] سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ z میدان میں اوپر چکر الیکٹران کو آئگنی سمتیہ χ_+^z اور نیچے چکر الیکٹران کو آئگنی سمتیہ χ_-^z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل $\boldsymbol{S}_z$ قالب کے آئگنی قدر (یعنی الیکٹران کا چکر) حاصل کرتے ہوئے آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{S}_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda_- = -\frac{\hbar}{2}$ ، $\lambda_+ = \frac{\hbar}{2}$ ، $\chi_-^z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\chi_+^z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.2: مقناطیسی میدان میں الیکٹران کی زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع $\boldsymbol{S}^2$ قالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس قالب کی آئگنی قدر زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع ہو گا۔ قالب کی آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{S}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3\hbar}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3\hbar}{4} \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3\hbar^2}{4}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.3: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.4: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$

[36] spin up
[37] spin down
[38] spin matrix

سوال 4.5: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.6\\ -0.4 & 1.2\end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1=\frac{3}{5}$ ، $\lambda_2=\frac{4}{5}$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

سوال 4.6 اور سوال 4.7 ٹینکیوں کے سوالات ہیں۔

سوال 4.6: اگر مثال 4.2 میں ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر چار سو (400) لٹر پانی موجود ہو تب جوابات کیا ہوں گے؟

جوابات: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.01 & 0.02\\ 0.01 & -0.02\end{bmatrix}$ ، $\lambda_1=-0.03$ ، $\lambda_2=0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\end{bmatrix}$ ، $c_1=-20$ ، $c_2=20$ ، $23.1\,\text{min}$

سوال 4.7: مثال 4.2 میں ٹینکی الف کے ساتھ دو سو (200) لٹر کی ٹینکی پ دو نالیوں کے ذریعہ جوڑی جاتی ہے۔ان کے مابین بھی چار لٹر فی منٹ کی شرح سے پانی کا تبادلہ ہوتا ہے۔ٹینکی پ میں ابتدائی طور پر دو سو لٹر کا خالص پانی پایا جاتا ہے۔اس نظام کے تفرقی مساوات لکھ کر $\boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔نظام کی آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات دریافت کرتے ہوئے مخصوص حل دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.04 & 0.02 & 0.02\\ 0.02 & -0.02 & 0\\ 0.02 & 0 & -0.02\end{bmatrix}$ ، $\lambda_1=-0.06$ ، $\lambda_2=-0.02$ ، $\lambda_3=0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ -0.5\\ -0.5\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ ،

$$\boldsymbol{y}=-10\boldsymbol{x}^{(1)}e^{-0.06t}+15\boldsymbol{x}^{(-0.02t)}+10\boldsymbol{x}^{(3)}$$

سوال 4.8 تا سوال 4.10 برقی جال پر مبنی ہیں۔

سوال 4.8: اگر مثال 4.3 میں ابتدائی برقی رو $I_1(0)=0$ اور $I_2=2\,\text{A}$ ہوں تب حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 10.63e^{-0.57t} - 12.63e^{-2.38t} + 2$ ، $I_2 = 9.62e^{-0.57t} - 7.62e^{-2.38t}$

سوال 4.9: اگر مثال 4.3 میں $L = 0.5\,\mathrm{H}$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 2.96e^{-0.529t} - 4.96e^{-5.153t} + 2$ ، $I_2 = 2.83e^{-0.529t} - 2.83e^{-5.153t}$

سوال 4.10: اگر مثال 4.3 میں $L = 2\,\mathrm{H}$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 2 + e^{-\frac{35}{44}t}[19.9\cos(0.22t) - 2\sin(0.22t)]$ ، $I_2 = 14.77e^{-\frac{35}{44}t}\sin(0.22t)$

سوال 4.11 تا سوال 4.11 میں تفرقی مساوات کو نظام میں تبدیل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ قالب حاصل کریں۔اس قالب کی آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات دریافت کریں۔مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کو جوں کا توں بھی حل کریں۔

سوال 4.11: $y'' + 5y' + 6y = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -3$ ، $\lambda_2 = -2$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

سوال 4.12: $12y'' - y' - 6y = 0$

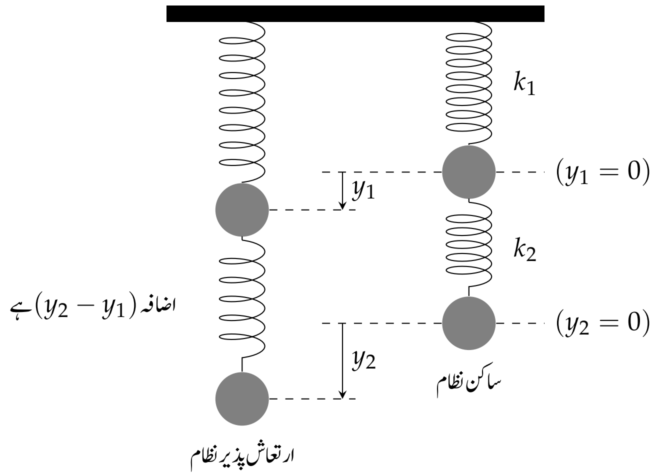
جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ ، $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ،

$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} e^{\frac{3}{4}t}$

سوال 4.13: $y''' - y' = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = 1$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ،

$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



شکل 4.4: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام۔

سوال 4.14: $y'' + 9y' + 14y = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14 & -9 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = -7$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} e^{-7t}$

سوال 4.15: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام شکل 4.4 میں دکھایا گیا ہے جس میں $m_1 = m_2 = 1$ ، $k_1 = 3$ اور $k_2 = 4$ ہیں۔اس نظام کے تفرقی مساوات لکھیں۔ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\omega t}$ تصور کرتے ہوئے، جہاں $\omega^2 = \lambda$ ہے، ان کا حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1 = A\cos(1.109t) + B\sin(1.109t) + C\cos(3.126t) + D\sin(3.126t)$ ، $y_2 = A * \cos(1.109t) + B * \sin(1.109t) + C * \cos(3.126t) + D * \sin(3.126t)$

4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی

گزشتہ حصے کے ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام، درج ذیل عمومی نظام کی مخصوص صورت ہے۔

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\ y_2 &= f_2(t, y_1, \cdots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(t, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \tag{4.32}$$

نظام کو سمتیہ کی صورت میں سمتیہ قطار $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ اور سمتیہ قطار $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \cdots, f_n]^T$ (یہاں T سے مراد تبدیلی محل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے سمتیہ قطار کو افقی لکھ کر جگہ بچائی گئی ہے) کی استعمال سے لکھا گیا ہے۔درج بالا نظام عملی استعمال کے تقریباً تمام صورتوں کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $n = 1$ کی صورت میں یہ $y_1' = f_1(t, y_1)$ یعنی $y' = f(t, y)$ کو ظاہر کرے گی جسے ہم باب 1 سے جانتے ہیں۔

کسی کھلے وقفہ $a < t < b$ پر مساوات 4.32 کا حل، وقفہ $a < t < b$ پر قابل تفرق، n عدد تفاعل کا سلسلہ

$$y_1 = h_1(t), \quad y_2 = h_2(t), \quad \cdots, \quad y_n = h_n(t)$$

ہو گا جو پورے وقفے پر مساوات 4.32 پر پورا اترتا ہو۔حل سمتیہ[39] کو قطار سمتیہ $\boldsymbol{h} = [h_1(t), \cdots, h_n(t)]^T$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t)$$

اس نظام پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 4.32 اور n عدد ابتدائی شرائط

$$y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \cdots, \quad y_n(t_0) = K_n \tag{4.33}$$

پر مبنی ہو گا۔ان ابتدائی شرائط کو سمتیہ کی صورت میں $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں t_0 دیے گئے وقفے پر پایا جاتا ہے اور سمتیہ قطار $\boldsymbol{K} = [K_1, \cdots, K_n]^T$ کے ارکان دیے گئے مستقل مقدار ہیں۔مساوات 4.32 اور مساوات 4.33 کے ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کی وجودیت اور یکتائی کے لئے **معقول شرائط** درج ذیل مسئلہ بیان کرتی ہے جو حصہ 1.7 میں دیے گئے مسئلے کو وسعت دیتی ہے۔اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

---

[39] solution vector

مسئلہ 4.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ $ty_1y_2\cdots y_n$ **میدان عمل**[40] پر تفاعل f_1 تا f_n اور ان کے تفرق $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ تا $\frac{\partial f_1}{\partial y_n}$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ استمراری ہیں اور اس میدان عمل پر نقطہ $(t_0, K_1, \cdots, K_n)$ پایا جاتا ہو تب کچھ وقفہ $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ پر مساوات 4.32 کا ایسا حل موجود ہے جو مساوات 4.33 کے ابتدائی شرائط پر پورا اترتا ہو اور یہ حل یکتا ہے۔

4.3.1 خطی نظام

سادہ تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہم مساوات 4.32 کو اس صورت **خطی نظام**[41] کہیں گے جب اس کو

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}(t)y_1 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \qquad \implies \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \tag{4.34}$$

لکھنا ممکن ہو جہاں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 4.34 میں y_1' تا y_n' کا y_1 تا y_n کے ساتھ **خطی تعلق** ہے۔اگر $\boldsymbol{g} = 0$ ہو تب نظام 4.34

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.35}$$

صورت اختیار کرتا ہے جو **متجانس** نظام ہے جبکہ $\boldsymbol{g} \neq 0$ کی صورت میں نظام 4.34 کو **غیر متجانس** کہلاتا ہے۔یوں مثال 4.2 اور مثال 4.4 متجانس نظام ہیں جبکہ مثال 4.3 غیر متجانس نظام ہے۔

---

[40] domain
[41] linear system

خطی نظام میں $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = a_{11}(t)$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n} = a_{nn}(t)$ ہیں لہٰذا مسئلہ 4.2 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.3: خطی نظام کا مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ کھلے وقفہ $\alpha < t < \beta$ جس پر نقطہ t_0 پایا جاتا ہو، پر نظام 4.34 کے تمام a_{jk} اور g_j استمراری ہیں۔ایسی صورت میں نظام 4.34 کا ایسا حل $\boldsymbol{y}$ موجود ہے جو ابتدائی شرائط مساوات 4.33 پر پورا اترتا ہے اور یہ حل یکتا ہے۔

ایک عدد متجانس سادہ تفرقی مساوات کی طرح مسئلہ خطی میل متجانس نظام کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ خطی میل
اگر $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ کسی کھلے وقفے پر متجانس خطی نظام 4.35 کے حل ہوں تب ان کا کوئی بھی خطی میل $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}$ بھی اس نظام کا حل ہو گا۔

ثبوت : خطی میل کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 4.35 کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}' &= [c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}]' \\
&= c_1\boldsymbol{y}^{(1)'} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)'} \\
&= c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)} \\
&= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا نظریہ، ایک عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظریے سے بہت مشابہت رکھتا ہے جس پر حصہ 2.6 اور حصہ 2.7 میں غور کیا گیا ہے۔یہ دیکھنے کی خاطر ہم بالکل بنیادی تصورات اور حقائق پر غور کرتے ہیں۔

اساس، عمومی حل اور ورونسکی

متجانس نظام 4.35 کا کھلے وقفہ J پر حل کی اساس یعنی **بنیادی نظام**[42] سے مراد n عدد، J پر خطی طور غیر تابع حل، $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ کا سلسلہ ہے۔(یہاں کھلے وقفے کو J کہا گیا ہے چونکہ I اکائی قالب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔) ان حل کے خطی میل

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + \cdots + c_n\boldsymbol{y}^{(n)} \tag{4.36}$$

کو J پر مساوات 4.35 کا عمومی حل کہا جاتا ہے جہاں c_1 تا c_n اختیاری مستقل ہیں۔یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر مساوات 4.35 میں تمام a_{jk} کھلے وقفے پر استمراری ہوں تب اس وقفے پر مساوات 4.35 کے حل کی اساس موجود ہے لہٰذا اس کا **عمومی حل** موجود ہے جس میں، کھلے وقفے پر، تمام حل شامل ہیں۔

ہم کھلے وقفے پر n عدد حل کو $n \times n$ قالب کی قطاروں کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{y}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}^{(n)}] \tag{4.37}$$

$\boldsymbol{Y}$ کے مقطع کو $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ کا **ورونسکی** کہتے ہیں۔

$$W(\boldsymbol{y}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)} \\ & \vdots & & \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{4.38}$$

درج بالا **ورونسکی** میں قطار $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ حل کی اساس ہیں جنہیں اجزاء کی صورت میں لکھا گیا ہے۔یہ حل صرف اور صرف اس صورت حل کی اساس ہوں گے جب ان کا ورونسکی کھلے وقفہ J پر کسی بھی نقطہ t_1 پر صفر کے برابر نہ ہو۔کھلے وقفے پر W یا تو کہیں بھی صفر کے برابر نہیں ہو گا اور یا یہ کھلے وقفے پر **مکمل صفر** کے برابر ہو گا۔(یہ بالکل مسئلہ 2.3 اور مسئلہ 3.3 کی طرح ہے۔)

اگر مساوات 4.36 میں دیے حل اساس یعنی **بنیادی نظام** ہوں تب قالب 4.37 **بنیادی قالب**[43] کہلاتا ہے۔سمتیہ قطار $\boldsymbol{c} = [c_1 \; c_2 \cdots c_n]^T$ کی مدد سے مساوات 4.36 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{c} \tag{4.39}$$

---

[42] fundamental system
[43] fundamental matrix

آئیں مساوات 4.38 کا حصہ 2.6 کے ساتھ تعلق جوڑیں۔فرض کریں کہ متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل y اور z ہیں۔یوں ورونسکی

$$W(y,z)=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

ہو گا۔اس سادہ دو درجی مساوات کو تفرقی مساوات کی نظام کی صورت میں لکھنے کی خاطر، حصہ 4.1 کے تحت، $y=y_1$ ، $y'=y_1'=y_2$ ، $z=z_1$ اور $z'=z_1'=z_2$ لکھنا ہو گا۔ایسا کرتے ہوئے **ورونسکی** درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے

$$W(y_1,z_1)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

جو، علامتوں میں فرق کے علاوہ، ہو بہو مساوات 4.38 ہے۔

4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔سطح مرحلہ کی ترکیب

فرض کریں کہ متجانس خطی نظام

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.40}$$

کے عددی سر **مستقل مقدار** ہیں لہٰذا $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ کے ارکان t پر منحصر نہیں ہوں گے۔ہم مساوات 4.40 کو حل کرنا چاہتے ہیں۔اب ہم جانتے ہیں کہ ایک عدد سادہ تفرقی مساوات $y'=ky$ کا حل $y=Ce^{kt}$ ہے لہٰذا ہم مساوات 4.40 کا حل

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}e^{\lambda t} \tag{4.41}$$

تصور کرتے ہیں۔تصوراتی حل اور اس کے تفرق $\boldsymbol{y}'=\lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو مساوات 4.40 میں پر کرتے ہوئے ہمیں $\boldsymbol{y}'=\lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ ملتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے آئگنی قیمت مسئلہ

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \tag{4.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 4.40 کے غیر صفر اہم حل مساوات 4.41 کی صورت رکھتے ہیں جہاں λ قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر اور $\boldsymbol{x}$ اس کے نظیری آئگنی سمتیات ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{A}$ کا n عدد خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہے۔ عموماً مسائل میں ایسا ہی ہوتا ہے بالخصوص اگر $\boldsymbol{A}$ **تشاکل**[44] ہو $(a_{kj} = a_{jk})$ یا **منحرف تشاکل**[45] $(a_{kj} = -a_{jk})$ ہو اور یا اگر اس کے n عدد **منفرد** آئگنی قدر پائے جاتے ہوں۔

ان خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیات کے سلسلے کو $\boldsymbol{x}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{x}^{(n)}$ لکھتے ہیں جو آئگنی قدر λ_1 تا λ_n کے نظیری سمتیات ہیں (جو منفرد ہو سکتے ہیں یا ان میں سے چند یا تمام یکساں ہو سکتے ہیں)۔ یوں مساوات 4.41 طرز کے نظیری حل درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n)} e^{\lambda_n t} \tag{4.43}$$

مساوات 4.38 کی مدد سے ان کی ورونسکی $W(\boldsymbol{y}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)})$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{y}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}) &= \begin{vmatrix} x_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_1^{(2)} e^{\lambda_t} & \cdots & x_1^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ x_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_2^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ & \vdots & & \\ x_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_n^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ & \vdots & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.44}$$

اب نا قوت نمائی تفاعل کبھی بھی صفر نہیں ہوتا اور درج بالا مساوات میں آخری مقطع کے قطار، خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیات ہیں، لہٰذا یہ مقطع بھی غیر صفر ہے۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: عمومی حل
اگر مساوات 4.40 میں دیے نظام کے مستقل قیمت قالب $\boldsymbol{A}$ کے n عدد منفرد آئگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہو تب مساوات 4.43 میں دیے گئے حل $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ مساوات 4.40 کے حل کی اساس ہوں گے جن سے درج ذیل عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \boldsymbol{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \boldsymbol{x}^{(n)} e^{\lambda_n t} \tag{4.45}$$

[44] symmetric
[45] skew-symmetric

تشاکل یا منحرف تشاکل A کی صورت میں اور یا اگر A کے n عدد منفرد آئگنی سمتیات پائے جاتے ہوں تب A کے منفرد آئگنی سمتیات کا سلسلہ پایا جائے گا اور درج بالا مسئلے کا فرض کردہ شرط پورا ہو گا۔

سطح مرحلہ پر حل منحنی کا اظہار

ہم اب دو عدد مستقل عددی سر والے متجانس سادہ تفرقی مساوات کے نظام کی صورت میں مساوات 4.40 پر غور کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

ہم عموماً مساوات 4.46 کے دونوں حل بالمقابل t کو علیحدہ علیحدہ (شکل 4.3-الف کی طرح) کھینچتے ہیں۔ ہم انہیں حل

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

کو ایک ہی خط کی صورت میں (شکل 4.3-ب کی طرح) سطح مرحلہ پر بھی کھینچ سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے t کو بطور **مقدار معلوم** تصور کیا جاتا ہے لہٰذا ایسے خط کو **منحنی مقدار معلوم**[46] بھی کہتے ہیں۔ایسے منحنی کو مساوات 4.46 کا **خط حرکت** کہا جاتا ہے جبکہ $y - 1y_2$ سطح کو **سطح مرحلہ** کہتے ہیں۔ سطح مرحلہ کو مساوات 4.46 کے خطوط حرکت سے بھرنے سے مساوات 4.46 کا **پیکر مرحلہ**[47] حاصل ہوتا ہے۔

کمپیوٹر کے استعمال نے سطح مرحلہ پر حل کے خط حرکت کو اہمیت بخشی ہے۔پیکر مرحلہ تمام حل کی خفی تجزیہ میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔آئیں پیکر مرحلہ کی ایک مثال دیکھیں۔

---

[46] parametric curve
[47] phase portrait

مثال 4.5: سطح مرحلہ پر خط حرکت
درج ذیل نظام کے حل کی منحنی کھینچیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

حل: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ اور $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t}$ پر کر کے قوت نمائی تفاعل سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ ملتا ہے۔امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

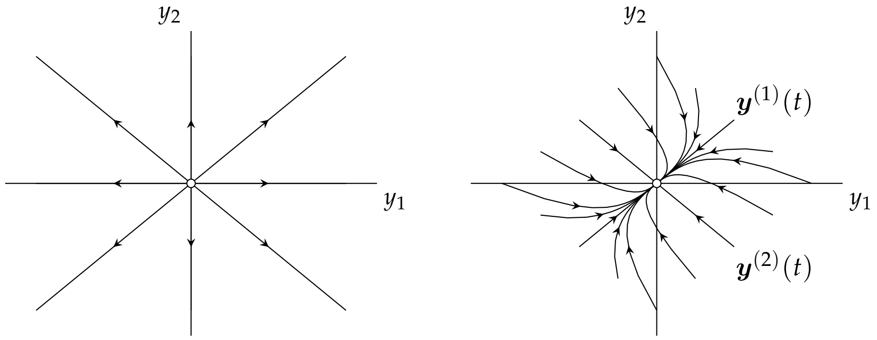
ہے۔یوں آئگنی قدر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -3$ حاصل ہوتے ہیں۔آئگنی سمتیات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ کے پہلے صف $(-2-\lambda)x_1 + x_2 = 0$ سے حاصل کرتے ہیں جس میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے $x_2 = x_1$ ملتا ہے۔یوں x_1 چنتے ہوئے $x_2 = 1$ حاصل ہو گا جس سے آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -3$ پر کرتے ہوئے $x_2 = -x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ حاصل ہو گا اور یوں $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -1]^T$ ہو گا۔ان سے عمومی حل لکھتے ہیں جس کے مختلف خط حرکت (یعنی پیکر حرکت) شکل 4.5-الف میں دکھائے گئے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \boldsymbol{y}^{(1)} + c_2 \boldsymbol{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

نظام کا نقطہ فاصل

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ نظام 4.46 کے تمام **خط حرکت** نقطہ $\boldsymbol{y} = 0$ سے گزرتے ہیں۔آئیں دیکھیں کہ ایسا کیوں ہے۔علم الاحصاء سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{y_2' \,\mathrm{d}t}{y_1' \,\mathrm{d}t} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2} \tag{4.49}$$



(الف) نظام 4.48 کے خط حرکت۔ (غیر مناسب جوڑ)

(ب) نظام 4.50 کے خط حرکت۔ (مناسب جوڑ)

شکل 4.5: غیر مناسب جوڑ اور مناسب جوڑ۔

یوں ماسوائے نقطہ $P_0:(0,0)$ کے، ہر نقطہ $P:(y_1,y_2)$ کے ساتھ خط حرکت کا **مماس** $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}$ منسلک کیا جا سکتا ہے۔ نقطہ P_0 پر مساوات 4.49 کا دایاں ہاتھ **نا قابل معلوم قیمت** $\frac{0}{0}$ ہو گا۔ ایسا نقطہ P_0 جس پر $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}$ کی قیمت **نا قابل معلوم** ہو کو نظام 4.46 کا **نقطہ فاصل**[48] کہتے ہیں۔

نقطہ فاصل کے پانچ اقسام

نقطہ فاصل کے قریب، خط حرکت کی جیومیٹریائی صورت کو دیکھ کر نقطہ فاصل کی پانچ اقسام بیان کیے جا سکتے ہیں جنہیں **غیر مناسب جوڑ**[49]، **مناسب جوڑ**[50]، **نقطہ زین**[51]، **وسط**[52] اور **نقطہ مرغولہ**[53] کہتے ہیں۔ ان کی وضاحت درج ذیل پانچ مثالوں میں کی گئی ہے جہاں ان کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔

مثال 4.6: غیر مناسب جوڑ

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر، دو خط حرکت کے علاوہ، تمام خط حرکت کی مماس کی ایک جیسی تحدیدی سمت پائی جاتی

critical point[48]
improper node[49]
proper node[50]
saddle point[51]
centre[52]
spiral point[53]

ہو غیر مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔دو مختلف خط حرکت کا بھی نقطہ P_0 پر تحدیدی سمت پایا جاتا ہے البتہ یہ تحدیدی سمت مختلف ہو گا۔

نظام 4.48 کا $\mathbf{0}$ پر غیر مناسب جوڑ پایا جاتا ہے۔چونکہ e^{-t} کی نسبت سے e^{-3t} زیادہ تیزی سے گھٹتی ہے لہٰذا غیر مناسب جوڑ پر مشترکہ تحدیدی سمت، $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 1]^T$ کی سمت ہے۔ دو غیر معمولی خط حرکت کی سمت $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -1]^T$ اور $-\boldsymbol{x}^{(2)} = [-1 \quad 1]^T$ کی سمتیں ہیں۔

مثال 4.7: مناسب جوڑ

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر ہر خط حرکت کی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔مناسب جوڑ پر ایسا خط حرکت ضرور ہو گا جس کی تحدیدی سمت $\boldsymbol{d}$ ہو جہاں $\boldsymbol{d}$ کوئی بھی سمت ہو سکتی ہے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned} \tag{4.50}$$

کا مناسب جوڑ مرکز پر پایا جاتا ہے۔اس میں فرضی حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ اور اس کا تفرق $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t}$ پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ یعنی $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی آنگنی قدر، $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ کی صورت میں، امتیازی مساوات $(1-\lambda)^2 = 0$ سے $\lambda = 1$ حاصل ہوتی ہے۔مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ کے اجزاء $(1-\lambda)x_1 = 0$ اور $(1-\lambda)x_2 = 0$ میں حاصل آنگنی قدر پر کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ کے علاوہ آنگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی کوئی بھی قیمت چننی جا سکتی ہے۔ یوں $[1 \quad 0]^T$ اور $[0 \quad 1]^T$ چنتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^t \end{aligned} \quad \implies \quad c_1 y_2 = c_2 y_1$$

شکل 4.5-ب میں سطح حرکت پر پیکر مرحلہ اور مناسب جوڑ دکھائے گئے ہیں۔

مثال 4.8: نقطہ زین

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر دو عدد آمدی اور دو عدد رخصتی خط حرکت پائے جاتے ہوں **نقطہ زین** کہلاتا ہے۔نقطہ فاصل کے قریب بقایا تمام خط حرکت اس نقطے کو نہیں چھوتے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= -y_2 \end{aligned} \tag{4.51}$$

کا نقطہ زین مرکز پر پایا جاتا ہے۔اس نظام کے امتیازی مساوات $0 = (1-\lambda)(-1-\lambda)$ کے جذر $\lambda_1 = 1$ اور $\lambda_2 = -1$ ہیں۔جذر λ_1 کے لئے $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے دوسرے صف $0x_1(1-1)x_2 = 0$ میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 0$ ملتا ہے جس سے آئگنی سمتیہ $[1 \quad 0]^T$ حاصل ہوتا ہے۔جذر λ_2 کے لئے پہلے صف سے آئگنی سمتیہ $[0 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^{-t} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad y_1 y_2 = c \tag{4.52}$$

عمومی حل **قطع زائد**[54] ہے جس کو شکل 4.6-الف میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.9: وسط

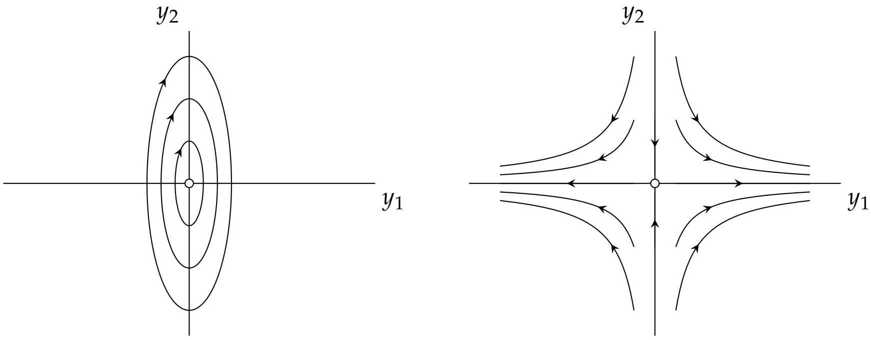
ایسا نقطہ فاصل جسے لامتناہی بند خط حرکت گھیرتے ہوں **وسط** کہلاتا ہے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \quad (\text{الف}) \\ y_2' &= -9y_1 \quad (\text{ب}) \end{aligned} \tag{4.53}$$

---

[54] hyperbolic



(ب) نظام 4.53 کے خط حرکت۔(وسط)

(الف) نظام 4.51 کے خط حرکت۔(نقطہ زین)

شکل 4.6: نقطہ زین اور وسط۔

میں $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ حل تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{y}$ اور $\boldsymbol{y}'$ کو درج بالا میں پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ملتا ہے۔اس سے $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کی صورت میں امتیازی مساوات $\lambda^2 + 9 = 0$ حاصل ہو گا جس کے آئگنی قدر $\lambda_1 = 3i$ اور $\lambda_2 = -3i$ ہیں۔ مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے پہلے صف میں λ_1 پر کرتے ہوئے $x_2 = 3ix_1$ ملتا ہے۔یوں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 3i$ حاصل ہو گا جس سے آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 3i]^T$ ملتا ہے۔اسی طرح λ_2 کی مطابقتی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -3i]^T$ حاصل ہو گا۔یوں مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \end{bmatrix} e^{3it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix} e^{-3it} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{3it} + c_2 e^{-3it} \\ y_2 &= 3ic_1 e^{3it} - 3ic_2 e^{-3it} \end{aligned} \tag{4.54}$$

حقیقی حل یولر مساوات سے

$$\begin{aligned} y_1 &= A\cos 3t + B\sin 3t \\ y_2 &= 3B\cos 3t - 3A\sin 3t \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

حقیقی حل کو مساوات 4.53 سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں اگر مساوات 4.53-الف کے بائیں ہاتھ اور مساوات-ب کے دائیں ہاتھ کو ضرب دیا جائے تو $-9y_1y_1'$ حاصل ہو گا جو مساوات-ب کے بائیں ہاتھ اور مساوات-الف کے دائیں ہاتھ کے حاصل ضرب y_2y_2' کے برابر $-9y_1y_1' = y_2y_2'$ ہو گا۔اس کا تکمل

$$\frac{9}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = c \tag{4.55}$$

ہے جو t سے پاک حقیقی حل ہے۔یہ ترخیم[55] کی نسل کی مساوات ہے جس کو شکل 4.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.10: نقطہ مرغولہ

ایسا نقطہ فاصل جس کے گرد خط حرکت گھومتے ہوئے نقطہ فاصل تک آن پہنچنے کی کوشش کرے یا نقطہ فاصل سے نکل کر اس نقطے کے گرد گھومتے ہوئے دور ہٹتا جائے [56] کہلاتا ہے۔پہلی صورت میں لمحہ $t \to \infty$ پر خط حرکت نقطہ مرغولہ تک آن پہنچے گا۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \quad (\text{الف}) \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \quad (\text{ب}) \end{aligned} \tag{4.56}$$

کا نقطہ مرغولہ مرکز پر پایا جاتا ہے۔امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ سے آئگنی قدر $\lambda_1 = -1 + i$ اور $\lambda_2 = -1 - i$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات $(-1-\lambda)x_1 + x_2 = 0$ میں آئگنی قدر λ_1 پر کرتے ہوئے $-ix_1 + x_2 = 0$ ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = i$ حاصل ہوتا ہے اور یوں λ_1 کا نظیری آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad i]^T$ ہو گا۔اسی طرح λ_2 کا نظیری آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -i]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

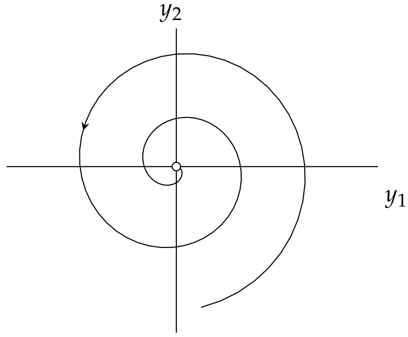
$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$$

مخلوط عمومی حل سے حقیقی حل حاصل کو یولر مساوات کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔ہم گزشتہ مثال کی طرح نسبتاً آسان طریقہ استعمال کرتے ہوئے حقیقی حل حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 4.56-الف کو y_1 اور مساوات 4.56-ب کو y_2 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_1 y_1' + y_2 y_2' = -(y_1^2 + y_2^2)$$

---

[55] ellipse
[56] spiral point



شکل 4.7: نظام 4.56 کے خط حرکت۔(نقطہ مرغولہ)

اب ہم نلکی محدد r اور t زیر استعمال لاتے ہیں جہاں $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ ہے۔ r کا t کے ساتھ تفرق $2rr' = 2y_1y_1' + 2y_2y_2'$ ہو گا لہٰذا درج بالا مساوات سے

$$rr' = -r^2, \implies \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\,\mathrm{d}t, \implies r = ce^{-t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ c کی کسی بھی قیمت کے لئے یہ مرغولی خط کی مساوات ہے جس کو شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.11: انحطاطی جوڑ

بعض اوقات نظام کی آئگنی حل کی اساس نہیں پائی جاتی۔ایسے صورت میں **انحطاطی جوڑ**[57] پایا جاتا ہے۔انحطاطی جوڑ، مثال 4.6 تا مثال 4.8 کی طرح تشاکلی A (جس میں $a_{kj} = a_{jk}$ ہوتا ہے) کی صورت میں نہیں پایا جائے گا اور نا ہی یہ منحرف تشاکلی (جس میں $a_{kj} = -a_{jk}$ اور $a_{jj} = 0$ ہوتا ہے)صورت میں پایا جائے گا۔ان کے علاوہ، مثال 4.9 اور مثال 4.10 کی طرح، کئی دیگر صورتوں میں بھی انحطاطی جوڑ نہیں پایا جاتا ہے۔انحطاطی جوڑ کی صورت میں جو ترکیب استعمال کی جاتی ہے اس کو درج ذیل نظام کی عمومی حل کے حصول کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.57}$$

---

[57] degenerate node

حل: $\boldsymbol{A}$ منحرف تشاکلی نہیں ہے۔ہم اس کا حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{y}$ اور $\boldsymbol{y}'$ کو درج بالا میں پر کر کے e^{λ} سے تقسیم کرتے ہوئے $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ ملتا ہے۔اس کی امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

سے دوہرا آئگنی قدر $\lambda = 3$ حاصل ہوتا ہے۔مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے پہلے صف میں $\lambda = 3$ پر کرتے ہوئے

$$(4-\lambda)x_1 + x_2 = 0, \quad\implies\quad x_1 + x_2 = 0$$

ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چننے سے $x_2 = -1$ اور یوں آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا حل

$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{x}te^{\lambda t} + \boldsymbol{u}e^{\lambda t}$$

فرض کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)}$ ، $\lambda = -3$ جبکہ $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}u_1 & u_2\end{bmatrix}^T$ مستقل ہے۔(اگر یہاں حصہ 2.2 کی طرح دوسرا حل صرف $\boldsymbol{x}te^{\lambda t}$ پر کیا جائے تو بات نہیں بنتی۔آپ ایسا کر کے تسلی کر لیں۔) فرض کردہ حل اور اس کے تفرق کو مساوات 4.57 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(2)'} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t} + \lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t} + \lambda\boldsymbol{u}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}te^{\lambda t} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}e^{\lambda t}$$

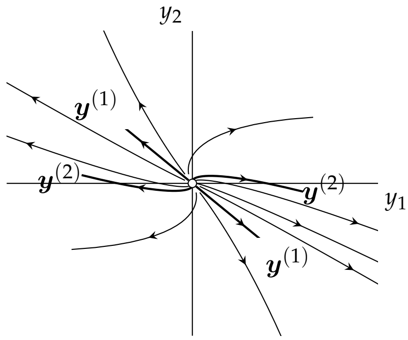
دائیں ہاتھ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ہے لہٰذا دونوں اطراف $\lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کٹ جائے گا۔بقایا مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \quad\implies\quad (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$$

ملتا ہے۔اس میں $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)}$ اور $\lambda = -3$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 \\ -u_1 - u_2 &= -1 \end{aligned}$$

یوں $u_1 = 0$ چننے سے $u_2 = 1$ لہٰذا $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح دوسرا حل جو $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ سے خطی طور غیر تابع ہو حاصل ہوتا ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے



شکل 4.8: نظام 4.57 کے خط حرکت۔(انحطاطی جوڑ)

ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t} \tag{4.58}$$

ان حل کو شکل 4.8 میں دکھایا گیا ہے جہاں $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ کو موٹی لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔یہاں مرکز پر واقع نقطہ فاصل کو عموماً **انحطاطی جوڑ**[58] کہا جاتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ، تین یا تین سے زائد تفرقی مساوات کے نظام جس کے سہ گنّا آئگنی قدر اور ایک عدد خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیہ پایا جاتا ہو کا دوسرا خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیہ مثال 4.11 کی طرح حاصل کیا جائے گا جبکہ اس کا تیسرا خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیہ درج ذیل فرض کرتے ہوئے حاصل ہو گا

$$\boldsymbol{y}^{(3)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}t^2e^{\lambda t} + \boldsymbol{u}te^{\lambda t} + \boldsymbol{v}e^{\lambda t} \tag{4.59}$$

جہاں $\boldsymbol{v}$ کو

$$\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \tag{4.60}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔یہاں $\boldsymbol{u}$ دوسرے خطی طور آئگنی سمتیہ سے لیا جائے گا۔

---

[58] degenerate node

سوالات