

# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	1.1
14	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	1.2
23	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	1.3
39	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	1.4
51	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	1.5
68	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	1.6
72	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	1.7
79	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
79	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	2.1
95	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	2.2
110	2.3 تفرقی عامل	2.3
114	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	2.4
130	2.5 پولر کوئی مساوات	2.5
138	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ ورنسکی	2.6
147	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	2.7
159	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	2.8
165	2.8.1 برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک	2.8.1
169	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	2.9
180	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	2.10

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی عملی علم الا حصاء۔ مکمل کے مسئلے
782	11.1	خطی مکمل
787	11.2	خطی مکمل کا حل
796	11.3	دوہرا مکمل
810	11.4	دوہرا مکمل کا خطی مکمل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی مکمل
845	11.8	تہرا مکمل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سنوکس
866	11.11	مسئلہ سنوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی مکمل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	انصف حلقہ اتساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر مکمل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر مکمل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیغ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987		اضافی ثبوت



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔



کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 13

# جزوی تفرقی مساوات

مختلف طبعی اور جیومیٹریائی مسائل جہاں دو یا دو سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل پایا جاتے ہوں، جزوی تفرقی مساوات کو جنم دیتے ہیں۔ یہ متغیرات وقت اور خلا کے محدود ہو سکتے ہیں۔ اس باب میں انجینئری نقطہ نظر سے اہم مسائل پر غور کیا جائے گا۔ ان مساوات کو طبعی نظام کی نمونہ کے طور پر حاصل کرنے کے بعد ابتدائی قیمت اور سرحدی قیمت مسائل حل کرنے کی تراسیب پر غور کیا جائے گا، یعنی ان مساوات کو دی گئی طبعی شرائط کے مطابق حل کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کو لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جاسکتا ہے۔

### 13.1 بنیادی تصورات

دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کی نامعلوم تفاعل اور اس کی ایک یا ایک سے زیادہ تفرقات پر مبنی مساوات کو جزوی تفرقی مساوات<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ بلند تر تفرق کا درجہ مساوات کا درجہ<sup>2</sup> کہلاتا ہے۔

سادہ تفرقی مساوات کی طرح اگر جزوی تفرقی مساوات میں تابع متغیر (نامعلوم تفاعل) اور اس کے تفرق کی طاقت اکائی ہو تب یہ تفرقی مساوات خطی<sup>3</sup> کہلائے گی۔ اگر مساوات کا ہر رکن، تابع متغیر یا تابع متغیرہ کی تفرقات میں سے کوئی ایک تفرق ہو تب اس کو ہم جنسی<sup>4</sup> کہیں گے ورنہ یہ غیر ہم جنسی<sup>5</sup> کہلائے گی۔

partial differential equation<sup>1</sup>  
order<sup>2</sup>  
linear<sup>3</sup>  
homogeneous<sup>4</sup>  
non homogeneous<sup>5</sup>

مثال 13.1: اہم خطی دو درجی جزوی تفرقی مساوات

$$(13.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ایک بعدی مساوات موج}$$

$$(13.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ایک بعدی مساوات حرارت}$$

$$(13.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{دو بعدی لاپلاس مساوات}$$

$$(13.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{دو بعدی پوئسن مساوات}$$

$$(13.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{تین بعدی لاپلاس مساوات}$$

یہاں  $c$  مستقل ہے،  $t$  وقت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ  $x$ ،  $y$ ،  $z$  کارتیسی محدود ہیں۔ مساوات 13.4 میں اگر  $f(x, y) \neq 0$  ہو تب یہ غیر ہم جنسی ہوگی۔ باقی تمام مساوات ہم جنسی ہیں۔  $\square$

فضا میں غیر تابع متغیرہ کی کسی خطہ  $R$  میں جزوی تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو خود اور جس کے وہ تمام تفرقات جو اس مساوات میں پائے جاتے ہوں کسی ایسے خطے میں موجود ہوں جس کا  $R$  حصہ ہو اور یہ تمام حل کر پورے خطہ  $R$  میں اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔ (عموماً  $R$  کی سرحد پر اس تفاعل کا استمراری ہونا اور درکار تفرقات کا خطہ کے اندرون معین ہونے کے ساتھ ساتھ خطہ کے اندرون مساوات کو مطمئن کرنا درکار ہوگا۔)

عموماً جزوی تفرقی مساوات کے تمام حل کی تعداد بہت زیادہ ہوگی۔ مثلاً جیسا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل

$$(13.6) \quad u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2)$$

جو ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں مساوات 13.3 کے حل ہیں۔ ہم بعد میں دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کا کیتا حل حاصل کرنے کی خاطر مزید معلومات درکار ہوگی جو طبعی حالت سے حاصل ہوگی۔ مثال کے طور پر کبھی کبھار سرحد کے کسی حصے پر درکار حل کی قیمت معلوم ہوگی (سرحدی شرائط<sup>6</sup>) جب کہ بعض اوقات ابتدائی لمحہ  $t = 0$  پر حل کی قیمت معلوم ہوگی (ابتدائی شرائط<sup>7</sup>)۔

boundary conditions<sup>6</sup>  
initial conditions<sup>7</sup>

ہم جانتے ہیں کہ اگر سادہ تفرقی مساوات خطی اور ہم جنسی ہو تب اس کی معلوم حل سے مزید حل بذریعہ خطی میل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ جزوی تفرقی مساوات کے لئے بھی ایسا کرنا ممکن ہے جیسا درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 13.1: بنیادی مسئلہ  
اگر کسی خطہ  $R$  میں خطی ہم جنسی جزوی تفرقی مساوات کے دو حل  $u_1$  اور  $u_2$  ہوں تب

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

جہاں  $c_1$  اور  $c_2$  کوئی مستقل ہیں، بھی اس خطے میں اس مساوات کا حل ہو گا۔

اس مسئلے کا ثبوت نہایت آسان اور مسئلہ 2.1 کی ثبوت سے ملتا جلتا ہے لہذا یہ آپ پر چھوڑا جاتا ہے۔

### سوالات

سوال 13.1: مسئلہ 13.1 کو دو اور تین متغیرات کی دو درجی جزوی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔

سوال 13.2: تصدیق کریں کہ مساوات 13.6 میں دیے گئے تمام تفاعل مساوات 13.3 کے حل ہیں۔  
جواب:  $u = x^2 + y^2$  لیتے ہیں۔ یوں  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$  اور  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$  ہو گا۔ انہیں مساوات 13.3 میں پر کرتے ہوئے  $0 = 0$  ملتا ہے۔ یوں  $u$  تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3 تا سوال 13.8 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل لاپلاس مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = 2xy \quad \text{سوال 13.3}$$

$$u = e^x \sin y \quad \text{سوال 13.4}$$

$$u = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{سوال 13.5}$$

$$u = x^3 - 3xy^2 \quad \text{سوال 13.6}$$

$$u = \sin x \sinh y \quad \text{سوال 13.7}$$

$$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \text{سوال 13.8}$$

سوال 13.9 تا سوال 13.11 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل حراری مساوات 13.2 کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = e^{-2t} \cos x \quad \text{سوال 13.9}$$

$$u = e^{-t} \sin 3x \quad \text{سوال 13.10}$$

$$u = e^{-4t} \cos \omega x \quad \text{سوال 13.11}$$

سوال 13.12 تا سوال 13.14 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔

$$u = x^2 + 4t^2 \quad \text{سوال 13.12}$$

$$u = x^3 + 3xt^2 \quad \text{سوال 13.13}$$

$$u = \sin \omega ct \sin \omega x \quad \text{سوال 13.14}$$

سوال 13.15: تصدیق کریں کہ  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  تین بعدی لاپلاس مساوات 13.5 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.16: تصدیق کریں کہ  $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$  دو بعدی لاپلاس مساوات 13.3 کا حل ہے۔ دی گئی سرحدی شرائط کے تحت دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  پر  $u = 0$  اور دائرہ  $x^2 + y^2 = 9$  پر  $u = 5$  ہے۔ مستقل  $a$  اور  $b$  کی ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ  $u$  ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرے۔ حاصل  $u$  کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.17: تصدیق کریں کہ  $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$  موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔ یہاں  $u$  اور  $v$  دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل ہیں۔

اگر جزوی تفرقی مساوات میں صرف ایک متغیر کے ساتھ تفرقات پائے جاتے ہوں تب اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کر کے حل کیا جاسکتا ہے جہاں باقی متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔ سوال 13.18 تا سوال 13.21 کو حل کریں جہاں  $u$  کے متغیرات  $x$  اور  $y$  ہیں۔

$$u_{xx} - u = 0 \quad \text{سوال 13.18}$$

$$u = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x} \quad \text{جواب}$$

سوال 13.19:  $u_y + yu = 0$

جواب:  $u = c(x)e^{-\frac{y^2}{2}}$

سوال 13.20:  $u_{yy} + 9u = 0$

جواب:  $u = c_1(y) \cos 3x + c_2(y) \sin 3x$

سوال 13.21:  $u_x + 2xyu = 0$

جواب:  $u = c(y)e^{-x^2y}$

سوال 13.22 تا سوال 13.25 میں  $u_x = p$  لیتے ہوئے حل تلاش کریں۔

سوال 13.22:  $u_{xy} = 0$

جواب:  $u = v(x) + w(y)$

سوال 13.23:  $u_{xy} = u_x$

سوال 13.24:  $u_{xy} + u_x = 0$

جواب:  $u = v(x)e^{-y} + w(y)$

سوال 13.25:  $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$

سوال 13.26 تا سوال 13.29 میں دیے گئے تفرقی مساوات کی نظام کے حل تلاش کریں۔

سوال 13.26:  $u_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0$

جواب:  $u = axy + bx + cy + k$

سوال 13.27:  $u_x = 0, \quad u_y = 0$

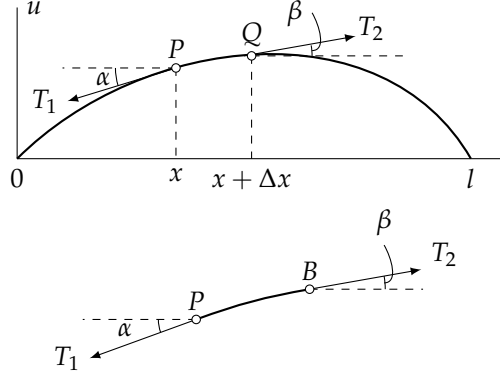
سوال 13.28:  $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0$

جواب:  $u = cx + g(y)$

سوال 13.29:  $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = 0$

سوال 13.30: تصدیق کریں کہ اگر سطح  $z = z(x, y)$  پر منحنی  $z = c$  محور  $x$  کے متوازی سیدھے خطوط ہوں، جہاں  $c$  مستقل ہے، تب  $z$  تفرقی مساوات  $z_x = 0$  کا حل ہو گا۔ ایسی ایک مثال بھی پیش کریں۔

سوال 13.31: تصدیق کریں کہ  $yz_x - xz_y = 0$  کا حل  $z = z(x, y)$  سطح گردش ہے۔ اس کی مثال پیش کریں۔ (اشارہ:  $x = r \cos \theta$  اور  $y = r \sin \theta$  لے کر تفرقی مساوات کو  $z_\theta = 0$  میں تبدیل کریں۔)



شکل 13.1: ارتعاش پذیر تار

### 13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج

ایک چمک دار تار کو لمبائی 1 تک کھینچ کر سروں سے باندھا جاتا ہے۔ ساکن تار کو  $x$  محور پر تصور کریں۔ اس تار کو کسی نقطہ یا نقاط سے کھینچ کر لمحہ  $t = 0$  پر چھوڑا دیا جاتا ہے تاکہ یہ ارتعاش کر سکے۔ ہم تار کی ارتعاش معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی لمحہ  $t > 0$  پر ساکن حالت سے تار کی نقطہ  $x$  کا انحراف  $u(x, t)$  جاننا چاہتے ہیں (شکل 13.1)۔ کسی بھی نظام کا ریاضی نمونہ اخذ کرتے وقت کئی ترسیلی مفروضے فرض کیے جاتے ہیں تاکہ حاصل مساوات ضرورت سے زیادہ پیچیدہ نہ ہوں۔ ہم سادہ تفرقی مساوات کی طرح جزوی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہوئے بھی ایسا کریں گے۔

موجودہ مسئلے میں ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

- (الف) تار کی کمیت فی اکائی لمبائی یکساں ہے (ہم جنسی تار)۔ تار مکمل طور پر لچکدار ہے لہذا یہ مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے۔
- (ب) تار کو اتنا تان کر باندھا گیا ہے کہ اس میں تناؤ، ثقلی قوت سے بہت زیادہ ہو۔ یوں ثقلی قوت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔
- (پ) تار سیدھی کھڑی سطح میں حرکت کرتا ہے۔ تار پر کوئی بھی نقطہ اپنے ساکن مقام سے بہت کم انحراف کرتا ہے لہذا ہر نقطے پر تار کی انحراف اور ڈھلوان کی حتمی قیمتیں قلیل ہوں گی۔

ہم توقع کر سکتے ہیں کہ یوں حاصل جزوی تفرقی مساوات کا حل  $u(x, t)$ ، "غیر کامل" ہم جنسی تار جس میں ثقلی میدان سے بہت زیادہ تناؤ ہو کا صحیح نقش پیش کرے گا۔

مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر غور کرتے ہیں جس میں تناؤ  $T$  پایا جاتا ہے (شکل 13.1)۔ چونکہ مڑنے کے خلاف تار مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے لہذا ہر نقطے پر تار میں تناؤ اس نقطے پر تار کا مماسی ہو گا۔ فرض کریں کہ تار کے ٹکڑے کی سروں  $P$  اور  $Q$  پر تناؤ  $T_1$  اور  $T_2$  ہے۔ چونکہ تار افقی حرکت نہیں کرتا ہے لہذا اس ٹکڑے پر تناؤ کا کل افقی جزو صفر کے برابر ہو گا۔ یوں شکل 13.1 کو دیکھ کر

$$T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0$$

یا

$$(13.7) \quad T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{مستقل}$$

لکھا جاسکتا ہے یعنی ہر ایسے ٹکڑے پر بائیں اور دائیں رخ یکساں (مستقل  $T$ ) تناؤ ہو گا۔ انتصابی رخ میں  $T_1$  اور  $T_2$  کے اجزاء  $-T_1 \sin \alpha$  اور  $T_2 \sin \beta$  ہیں جہاں اوپر رخ تناؤ کو مثبت تصور کیا گیا ہے۔ نیوٹن کی دوسری قانون کے تحت ان دو قوتوں کا مجموعہ تار کے ٹکڑے کی کمیت  $\rho \Delta x$  ضرب اسراع  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  کے برابر ہو گا جہاں اسراع،  $x$  اور  $x + \Delta x$  کے مابین کسی نقطے کی اسراع ہو گی۔ تار کی کمیت فی اکائی لمبائی  $\rho$  ہے جبکہ تار کے ٹکڑے کی لمبائی  $\Delta x$  ہے۔ یوں

$$(13.8) \quad T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ہو گا۔ اس کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(13.9) \quad \frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_2 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

آپ تسلی کر لیں کہ چونکہ مساوات 13.7 میں  $T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T$  ہے لہذا مساوات 13.8 کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہوئے کہیں  $T_2 \cos \beta$ ، کہیں  $T_1 \cos \alpha$  اور کہیں  $T$  سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

اب  $\tan \alpha$  اور  $\tan \beta$  تار کی  $x$  اور  $x + \Delta x$  پر مماس ہے یعنی

$$\tan \alpha = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \quad \text{اور} \quad \tan \beta = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$



جہاں جزوی تفرق اس لئے استعمال کیے گئے ہیں کہ  $u$  متغیر  $t$  کا بھی تابع ہے۔ یوں مساوات 13.9 کو  $\Delta x$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں  $\Delta x$  کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے

$$(13.10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو یک بعدی مساوات موج<sup>8</sup> کہتے ہیں۔ مساوات 13.10 ہمارے مسئلے کی درکار جزوی تفرقی مساوات ہے جو ہم جنسی اور دو درجی ہے۔ مساوات میں مستقل  $\frac{T}{\rho}$  کو  $c$  کی بجائے  $c^2$  سے ظاہر کیا گیا ہے تا کہ واضح رہے کہ یہ مثبت مستقل ہے۔ اس مساوات کا حل اگلے حصے میں حاصل کیا جائے گا۔

### 13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ چلک دار تار کی ارتعاش کو جزوی تفرقی مساوات

$$(13.11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{مساوات موج}$$

بیان کرتی ہے جہاں  $u(x, t)$  تار کی انحراف ہے۔ تار کی حرکت جاننے کی خاطر اس مساوات کا حل درکار ہو گا بلکہ ہمیں مساوات 13.11 کا ایسا حل  $u(x, t)$  درکار ہے جو نظام پر لاگو شرائط کو بھی مطمئن کرے۔ چونکہ تار کے دونوں سر غیر تغیر پذیر ہیں لہذا تمام  $t$  کے لئے  $x = 0$  اور  $x = l$  پر سرحدی شرائط

$$(13.12) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

لاگو ہیں۔ تار کی حرکت ابتدائی انحراف (لمحہ  $t = 0$  پر انحراف) اور ابتدائی رفتار (لمحہ  $t = 0$  پر رفتار) پر منحصر ہوگی۔ ابتدائی انحراف کو  $f(x)$  اور ابتدائی رفتار کو  $g(x)$  سے ظاہر کرتے ہوئے ابتدائی شرائط<sup>9</sup>

$$(13.13) \quad u(x, 0) = f(x)$$

$$(13.14) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

<sup>8</sup> one dimensional wave equation  
<sup>9</sup> initial conditions

لکھی جائیں گی۔ ہمیں اب مساوات 13.12 کا ایسا حل چاہیے جو سرحدی شرائط مساوات اور ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرے۔ ہم درج ذیل اقدام کے ذریعہ ایسا حل تلاش کریں گے۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے ہم جزوی تفرقی مساوات سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔

دوسرا قدم۔ ہم ان سادہ تفرقی مساوات کے ایسے حل تلاش کریں گے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔

تیسرا قدم۔ حاصل حل سے ایسے حل حاصل کیے جائیں گے جو ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتے ہوں۔

ان اقدام کی تفصیل درج ذیل ہے۔

پہلا قدم۔ ترکیب ضرب مساوات 13.11 کے حل دو عدد تفاعل کا حاصل ضرب

$$(13.15) \quad u(x, t) = F(x)G(t)$$

کی روپ میں دیتا ہے جہاں ہر ایک تفاعل صرف ایک متغیر  $x$  یا  $t$  کا تابع ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں اس ترکیب کے کئی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مساوات 13.15 کے تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

ملتا ہے جہاں  $(\cdot)$  سے مراد  $x$  کے ساتھ تفرق اور  $(\ddot{\cdot})$  سے مراد  $t$  کے ساتھ تفرق ہے۔ انہیں مساوات 13.11 میں پر کر کے

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

دونوں اطراف کو  $c^2 FG$  سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا دایاں ہاتھ صرف متغیر  $x$  پر منحصر ہے جبکہ اس کا بایاں ہاتھ صرف متغیر  $t$  پر منحصر ہے۔ اب  $t$  تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن اس مساوات کے تحت دونوں اطراف برابر ہیں اور دایاں ہاتھ  $t$  تبدیل کرنے سے ہرگز تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $t$  تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اسی طرح  $x$  تبدیل کرنے سے صرف دایاں ہاتھ کا تبدیل ہونا ممکن ہے لیکن

دونوں اطراف برابر ہیں اور  $x$  کی تبدیلی ہے بایاں ہاتھ ہرگز تبدیل نہیں ہوتا ہے لہذا  $x$  تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ یوں اس مساوات کے دونوں اطراف غیر تغیر پذیر ہیں لہذا انہیں مستقل  $k$  کے برابر لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

جس سے درج ذیل دو عدد مساوات علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہے جہاں  $k$  نا معلوم مستقل ہے۔

$$(13.16) \quad F'' - kF = 0$$

$$(13.17) \quad \ddot{G} - c^2 k G = 0$$

دوسرا قدم۔ ہم مساوات 13.16 اور مساوات 13.17 کے حل  $F$  اور  $G$  حاصل کرتے ہوئے ایسا  $u = FG$  دریافت کرتے ہیں جو تمام  $t$  کے لئے سرحدی شرائط مساوات 13.12 کو مطمئن کرتا ہو یعنی:

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0$$

اب اگر درج بالا میں  $G \equiv 0$  ہو تب  $u \equiv 0$  ہو گا جس میں ہم کوئی دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہذا  $G \neq 0$  ہو گا۔ یوں درج بالا سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(13.18) \quad \text{(الف)} \quad F(0) = 0, \quad \text{(ب)} \quad F(l) = 0$$

اگر مساوات 13.16 میں  $k = 0$  ہو تب اس مساوات کا عمومی حل  $F = ax + b$  ہو گا جو مساوات 13.18 کی استعمال سے  $a = 0$ ،  $b = 0$  یعنی  $F \equiv 0$  یا  $u \equiv 0$  دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔ مثبت  $k = \mu^2$  کے لئے مساوات 13.16 کا عمومی حل

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

ہے جو مساوات 13.18 کی استعمال سے  $A = 0$ ،  $B = 0$  یعنی  $F \equiv 0$  یا  $u \equiv 0$  دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔ یوں ہمارے پاس منفی  $k = -p^2$  لینا رہ جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.16 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$F'' + p^2 F = 0$$

اس کا عمومی حل

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

ہے جو مساوات 13.18-الف کی مدد سے

$$F(0) = A = 0$$

لہذا  $F = B \sin px$  ہو گا جو مساوات 13.18-ب کے ساتھ مل کر

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

دیتی ہے۔ اب اگر  $B = 0$  ہو تب  $F \equiv 0$  یعنی  $u \equiv 0$  ہو گا جو غیر دلچسپ حل ہے لہذا  $B \neq 0$  ہے۔ اس طرح  $\sin pl = 0$  ہو گا۔ ہم جانتے ہیں کہ  $\sin n\pi = 0$  ہوتا ہے لہذا یوں درج ذیل ملتا ہے جہاں  $n$  عدد صحیح ہے۔

$$(13.19) \quad pl = n\pi \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l}$$

ہم  $B = 1$  منتخب کرتے ہوئے لامحدود تعداد کے حل  $F(x) = F_n(x)$  یعنی

$$(13.20) \quad F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, \dots$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.18 میں دیے گئے سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ چونکہ  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  ہوتا ہے لہذا منفی عدد صحیح  $n = -1, -2, \dots$  لینے سے یہی حل منفی علامت کے ساتھ دوبارہ ملتے ہیں۔

اب مساوات 13.19 کے تحت  $k$  کی قیمت صرف  $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{l})^2$  ممکن ہے۔  $k$  کی ان قیمتوں کے ساتھ مساوات 13.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

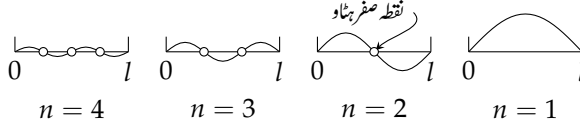
$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t$$

ہے۔ یوں تفاعل  $u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t)$

$$(13.21) \quad u_n(x, t) = (B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, \dots)$$



شکل 13.2: تار کے قائمہ انداز اور نقطہ صفر ہٹاؤ۔

مساوات 13.17 کے ایسے حل ہیں جو مساوات 13.18 میں دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان تفاعل کو ارتعاش پذیر تار کے آنگنی تفاعل<sup>10</sup> یا امتیازی تفاعل<sup>11</sup> کہتے ہیں جبکہ  $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$  کی قیمتوں کو ارتعاش پذیر تار کے آنگنی اقدار<sup>12</sup> یا امتیازی اقدار<sup>13</sup> کہتے ہیں۔ مزید  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  کا سلسلہ طیف<sup>14</sup> کہلاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک  $u_n$  ایک مخصوص ہارمونی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے جس کی تعدد  $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2l}$  چکر فی اکائی وقت ہے۔ اس حرکت کو تار کی  $n$  ویں قائمہ انداز<sup>15</sup> کہتے ہیں۔ پہلا قائمہ انداز جس کا  $n = 1$  ہو گا بنیادی انداز<sup>16</sup> کہلاتا ہے جبکہ باقی کو  $n$  ویں ہارمونی انداز<sup>17</sup> کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 13.21 میں

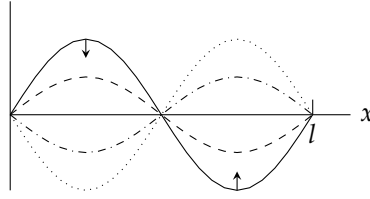
$$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \implies x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}l$$

ہے لہذا  $n$  ویں قائمہ انداز کے  $n-1$  نقطہ صفر ہٹاؤ<sup>18</sup> پائے جائیں گے۔ ان نقطوں پر تار ساکن رہتی ہے (شکل 13.2)۔

شکل 13.3 میں دوسرا قائمہ انداز مختلف لمحات  $t$  پر دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی لمحہ پر تار کی شکل سائن تفاعل کی ہو گی۔ جب تار کا بایاں آدھا حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت تار کا دایاں آدھا حصہ اوپر کی طرف حرکت کرے گا۔ اسی طرح جب بایاں حصہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت دایاں حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔ تار کا درمیانہ نقطہ حرکت نہیں کرتا ہے لہذا یہ نقطہ صفر ہٹاؤ ہے۔ باقی انداز بھی اسی طرح کی خاصیت رکھتے ہیں۔

تیسرا قدم۔ ظاہر ہے کہ ایک عدد حل  $u_n(x, t)$  عموماً ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے۔ اب چونکہ مساوات 13.11 خطی اور ہم جنسی ہے لہذا بنیادی مسئلہ 13.1 کے تحت مساوات

- eigenfunctions<sup>10</sup>
- characteristic functions<sup>11</sup>
- eigenvalues<sup>12</sup>
- characteristic values<sup>13</sup>
- spectrum<sup>14</sup>
- normal mode<sup>15</sup>
- fundamental mode<sup>16</sup>
- harmonics<sup>17</sup>
- node<sup>18</sup>



شکل 13.3: مختلف  $t$  پر دو سراقائمہ انداز

13.11 کی محدود تعداد کے حلوں  $u_n$  کا مجموعہ بھی مساوات 13.11 کا حل ہو گا۔ اس طرح ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم لامتناہی تسلسل

$$(13.22) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 13.22 اور ابتدائی شرط مساوات 13.13 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(13.23) \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.13 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر  $B_n$  اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ  $u(x, 0)$  تقابل  $f(x)$  کی فوریر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$(13.24) \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.22 کا  $t$  کے ساتھ تفرق لے کر اور ابتدائی شرط مساوات 13.14 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x) \end{aligned}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.14 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر  $B_n^*$  اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ  $t = 0$  پر  $\frac{\partial u}{\partial t}$  تقابل  $g(x)$  کی فوریر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

اور چونکہ  $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$  ہے لہذا

$$(13.25) \quad B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 13.24 اور مساوات 13.25 میں حاصل کیے گئے عددی سر کو مساوات 13.22 میں پر کرنے سے حاصل تسلسل  $u(x, t)$ ، مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرے گا بشرطیکہ حاصل  $u(x, t)$  مرتکز ہو اور اس کی  $x$  اور  $t$  کے ساتھ جزو در جزو دو درجی تفرق لینے سے حاصل تسلسل مرتکز ہو اور ان کے مجموعے بالترتیب  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  اور  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  کے برابر ہوں جو استمراری ہیں۔

اب تک مساوات 13.22 محض ریاضی حل کے طور پر سامنے آیا ہے۔ آئیں اس کی اصل حقیقت کو قائم کریں۔ ہم اپنی آسانی کی خاطر ابتدائی رفتار  $g(x)$  صفر لیتے ہیں۔ یوں  $B_n^* = 0$  ہوں گے لہذا مساوات 13.22 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$(13.26) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ہم ضمیمہ ب کا کلیہ 11. ب استعمال کرتے ہوئے

$$\cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{2} \left[ \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x - ct) \right\} + \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\} \right]$$

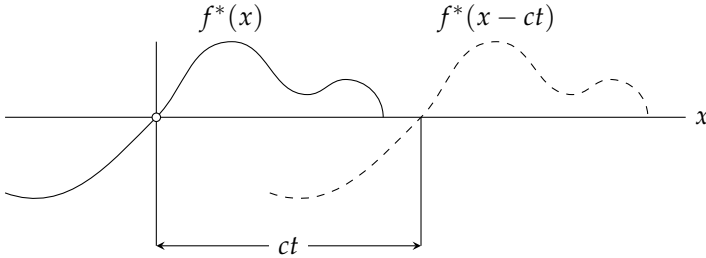
لکھ سکتے ہیں جس کو مساوات 13.26 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x - ct) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 13.23 میں  $x$  کی جگہ  $x - ct$  اور  $x + ct$  پر کرنے سے یہی دو تسلسل حاصل ہوتے ہیں لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$(13.27) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]$$

جہاں  $f$  کی طاق دوری توسیع جس کا دوری عرصہ  $2l$  ہو تفاعل  $f^*$  ہے (شکل 13.4)۔ چونکہ وقفہ  $0 \leq x \leq l$  پر ابتدائی انحراف  $f(x)$  استمراری ہے جبکہ  $x = 0$  اور  $x = l$  پر انحراف صفر ہے لہذا مساوات

شکل 13.4:  $f(x)$  کی طاق توسیع

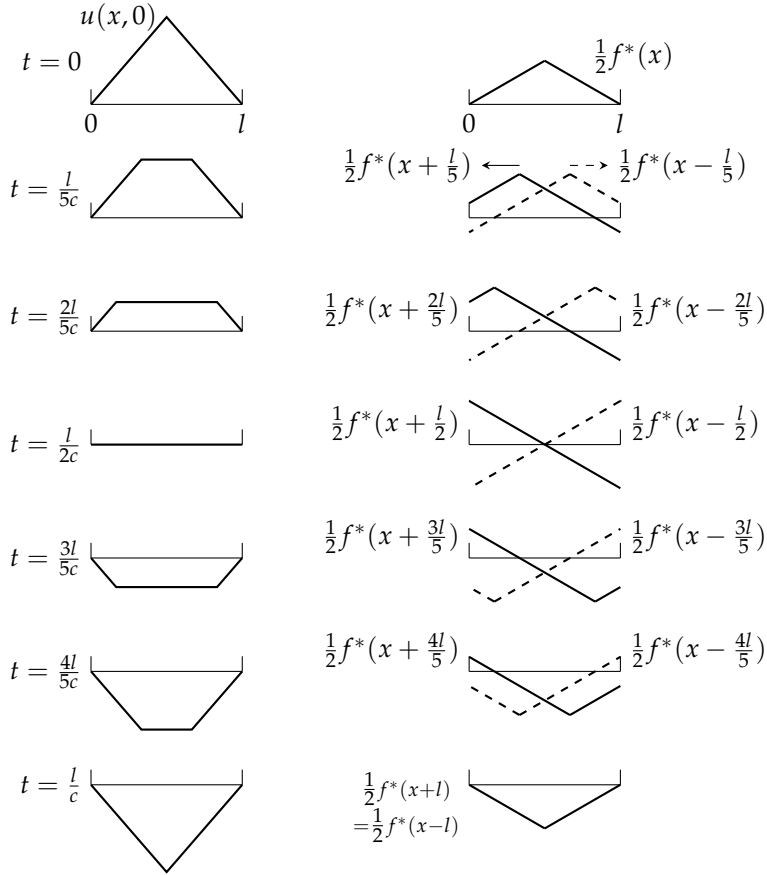
شکل 13.5: مساوات 13.27 کی معنی

13.27 سے ظاہر ہے کہ  $u(x, t)$  دونوں متغیرات  $x$  اور  $t$  کی تمام قیمتوں پر استمراری ہو گا۔ مساوات 13.27 کا تفرق لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 13.11 کا حل ہے بشرطیکہ وقفہ  $0 < x < l$  پر  $f(x)$  دو مرتبہ قابل تفرق ہو اور  $x = 0$  اور  $x = l$  پر اس کے یک طرفہ دو درجی تفرق پائے جاتے ہوں جن کی قیمت صفر کے برابر ہو۔ اس طرح یہ حقیقت قائم ہوتی ہے کہ ان شرائط پر پورا اترتا ہوا تسلسل  $u(x, t)$  مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

اگر  $f'(x)$  اور  $f''(x)$  محض ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہوں، یا اگر وقفہ کے سروں پر یک طرفہ تفرقات غیر صفر ہوں تب ہر ایک  $t$  کے لئے محدود تعداد کی  $x$  قیمتوں پر مساوات 13.11 کے  $u$  کی دو درجی تفرقات غیر معین ہوں گے۔ ان نقطوں کے علاوہ باقی تمام نقطوں پر  $u$  مساوات موج کو مطمئن کرے گی لہذا ہم  $u(x, t)$  کو وسیع معنوں میں مسئلے کا حل تصور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تکنیکی ابتدائی انحراف کی صورت میں حاصل حل اس نوعیت کا ہو گا۔

آئیں مساوات 13.27 کی طبعی معنی سمجھتے ہیں۔ جیسا شکل 13.5 میں دکھایا گیا ہے،  $f^*(x)$  کی ترسیم کو  $ct$  اکائیاں دائیں منتقل کرنے سے  $f^*(x - ct)$  کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $f^*(x - ct)$ ،  $(c > 0)$  ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے  $t$  کے ساتھ دائیں جانب کو حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح  $f^*(x + ct)$ ،  $(c > 0)$  ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے  $t$  کے ساتھ بائیں جانب کو حرکت کرتی ہے اور  $u(x, t)$  ان دونوں کا مجموعہ ہے۔





شکل 13.6: مثال 13.2 کا مختلف لمحات پر دائیں کو اور بائیں کو حرکت کرتے اجزاء اور ان کا مجموعہ حل  $u(x, t)$

مثال 13.2: تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں تار کی ارتعاش

مساوات موج 13.11 کا حل تکونی ابتدائی انحراف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

اور ابتدائی رفتار صفر  $g(x) = 0$  کی صورت میں حاصل کریں۔

حل: چونکہ  $g(x) \equiv 0$  ہے لہذا مساوات 13.26 میں  $B_n^* = 0$  ہو گا جبکہ  $B_n$  کو صفحہ 919 پر مساوات

12.35 دے گی۔ یوں مساوات 13.26 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2} \left[ \frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi c}{l} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} x \cos \frac{3\pi c}{l} t + \dots \right]$$

اس حل کی ترسیم کھینچنے کی خاطر ہم  $u(x, 0) = f(x)$  سے شروع کرتے ہوئے مساوات 13.27 کی مدد لیتے

□

ہیں۔ یوں شکل 13.6 حاصل ہوتی ہے۔

### سوالات

سوال 13.32 تا سوال 13.40 میں تار کی لمبائی  $l = \pi$  اور  $c^2 = \frac{T}{\rho} = 1$  ہے۔ تار کے سرے ٹھوس نقطوں

کے ساتھ باندھے گئے ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف  $f(x)$  سوال میں دی گئی ہے۔ ارتعاش پذیر تار کا

انحراف  $u(x, t)$  دریافت کریں۔

سوال 13.32:  $0.02 \sin x$

جواب:  $u = 0.02 \cos t \sin x$

سوال 13.33:  $k \sin 2x$

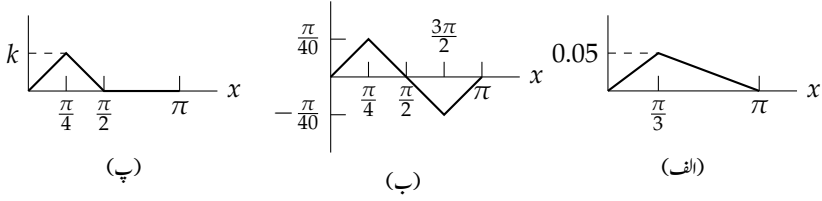
جواب:  $u = k \cos 2t \sin 2x$

سوال 13.34:  $k(\sin x - \sin 2x)$

جواب:  $u = k(\cos t \sin x - \cos 2t \sin 2x)$

سوال 13.35: شکل 13.7-الف

جواب:  $\frac{9\sqrt{3}k}{2\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} \cos t \sin x + \frac{1}{2^2} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{4^2} \cos 4t \sin 4x \dots \right)$



شکل 13.7: اشکال برائے سوالات 13.35، 13.36 اور 13.37

سوال 13.36: شکل 13.7-ب  
جواب:  $\frac{4}{5\pi} \left( \frac{1}{2^2} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{6^2} \cos 6t \sin 6x + \frac{1}{10^2} \cos 10t \sin 10x \cdots \right)$

سوال 13.37: شکل 13.7-پ  
جواب:  $\frac{4k}{\pi^2} \left[ 2(\sqrt{2} - 1) \cos t \sin x + \cos 2t \sin 2x - 2(\sqrt{2} - \frac{1}{9}) \cos 3t \sin 3x \cdots \right]$

سوال 13.38:  $kx(x - \pi)$   
جواب:  $\frac{8k}{\pi} \left( \frac{1}{1^2} \cos t \sin x - \frac{1}{3^2} \cos 3t \sin 3x - \frac{1}{5^2} \cos 5t \sin 5x \cdots \right)$

سوال 13.39:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ k(x - \pi)^2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب:  $4k \left[ \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos t \sin x - \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) \cos 3t \sin 3x \cdots \right]$

سوال 13.40:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -k(x - \pi)^2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب:  $k \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right) \cos 2t \sin 2x + \frac{k\pi}{4} \cos 4t \sin 4x + k \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2}{27\pi} \right) \cos 6t \sin 6x \cdots$

سوال 13.41 تا سوال 13.43 میں  $c^2 = 1$  ہے، تار کی لمبائی  $l = \pi$  ہے اور تار کے سرے ٹھوس نقطوں سے بندھے ہیں۔ ابتدائی رفتار  $g(x)$  اور ابتدائی انحراف  $f(x)$  ہیں۔ ارتعاش پذیر تار کی انحراف  $u(x, t)$  دریافت کریں۔

سوال 13.41:  $f = 0, \quad g = kx \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \quad g(x) = k(\pi - x) \quad (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi)$

جواب:  $\frac{4k}{\pi} (\frac{1}{1^3} \sin t \sin x - \frac{1}{3^3} \sin 3t \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5t \sin 5x \cdots)$

سوال 13.42:  $f = 0, \quad g = k \sin 3x$   
جواب:  $\frac{k}{3} \sin 3t \sin 3x$

سوال 13.43:  $f = k \sin 2x, \quad g = -k \sin 2x$   
جواب:  $-\frac{k}{2} \sin 2t \sin 2x$

سوال 13.44: تناو  $T$  چارگنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟  
جواب: چونکہ  $c^2 = \frac{T}{\rho}$  ہے لہذا  $T$  چارگنا کرنے سے  $c$  دگنا ہو گا جس سے بنیادی انداز کی تعدد دگنی ہو گی۔

سوال 13.45: تار کی لمبائی چارگنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟  
جواب: بنیادی انداز کی تعدد چارگنا کم ہو گی۔

سوال 13.46 تا سوال 13.53 میں دیے گئے جزوی تفرقی مساوات کو علیحدگی متغیرات کے طریقہ سے حل کریں۔

سوال 13.46:  $u_x + u_y = 0$   
جواب:  $u = ce^{k(x+y)}$

سوال 13.47:  $u_x - u_y = 0$   
جواب:  $u = ce^{k(x-y)}$

سوال 13.48:  $xu_x - yu_y = 0$   
جواب:  $u = kxy$

سوال 13.49:  $u_x - yu_y = 0$   
جواب:  $u = cy^k e^{kx}$

سوال 13.50:  $yu_x - xu_y = 0$   
جواب:  $u = ce^{k(x^2+y^2)}$

سوال 13.51:  $u_x + u_y = 2(x + y)u$   
 جواب:  $u = ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$

سوال 13.52:  $u_{xx} + u_{yy} = 0$   
 جواب:  $u = (A \cos kx + B \sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$

سوال 13.53:  $u_{xy} - u = 0$   
 جواب:  $u = ce^{x+y}$

سوال 13.54 تا سوال 13.58 چمکدار تار کی جبری ارتعاش پر مبنی ہیں۔

سوال 13.54: پلک دار تار کی جبری ارتعاش کا الجبرائی نمونہ درج ذیل جزوی تفرقی مساوات ہے جہاں اکائی لمبائی پر بیرونی قوت  $P(x, t)$  تار کے عمودی عمل کرتا ہے۔

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho} \quad (13.28)$$

دیے گئے مسئلے سے اس جزوی تفرقی مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 13.55: سائن نما بیرونی قوت  $P = A\rho \sin \omega t$  کی صورت میں درج ذیل ثابت کریں

$$\frac{P}{\rho} = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

جہاں  $k_n(t) = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t$  ہے۔ یوں جفت  $n$  کی صورت میں  $k_n = 0$  اور طاق  $n$  کی صورت میں  $k_n = \frac{4A}{n\pi} \sin \omega t$  ہو گا۔ مزید ثابت کریں کہ مساوات 13.11 میں

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

سوال 13.56: ثابت کریں کہ سوال 13.55 کے  $\frac{P}{\rho}$  اور  $u$  کو مساوات 13.28 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ثابت کریں کہ  $\lambda_n^2 \neq \omega^2$  کی صورت میں اس کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t + \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

سوال 13.57: ایسے  $B_n$  اور  $B_n^*$  دریافت کریں کہ  $u$  ابتدائی شرائط  $u(x, 0) = f(x)$  اور  $u_t(x, 0) = 0$  کو مطمئن کرے (سوال 13.56)۔

سوال 13.58: ثابت کریں کہ گمک  $\lambda_n = \omega$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \sin \omega t - \frac{A}{n\pi\omega} (1 - \cos n\pi) t \cos \omega t$$

## 13.4 مساوات موج کا دالو بیخ حل

گزشتہ حصہ میں مساوات موج

$$(13.29) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

کا حل مساوات 13.27 حاصل کیا گیا۔ یہی حل نہایت آسانی سے مساوات 13.29 کا موزوں بدل لیتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں نئے غیر تابع متغیرات<sup>19</sup>

$$(13.30) \quad v = x + ct, \quad z = x - ct$$

متعارف کرتے ہوئے  $u$  کو متغیرات  $v$  اور  $z$  کا تفاعل لکھتے ہیں۔ اس طرح مساوات 13.29 میں تفرقات اب  $v$  اور  $z$  کے لحاظ سے زنجیری ترکیب (حصہ 10.7) کی مدد سے لکھے جائیں گے۔ جزوی تفرق کو زیر نوشت سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 13.30 سے  $v_x = 1$  اور  $z_x = 1$  لکھے جائیں گے۔ ہم اپنی آسانی کے لئے ہم  $v$  اور  $z$  متغیرات کے تفاعل کو بھی  $u$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

<sup>19</sup> یہاں بتانا چلوں کہ جزوی تفرقی مساوات کا عمومی نظریہ اس طرح کے متبادل حاصل کرنے کی قدم باقدم ترکیب پیش کرتی ہے۔

دائیں ہاتھ پر زنجیری ترکیب لاگو کرتے ہوئے اور  $v_x = 1$  اور  $z_x = 1$  پر کرتے ہوئے

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

ملتا ہے۔ مساوات 13.29 کی دوسری تفرق کو بھی اسی طرح لکھتے ہیں۔

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

ان نتائج کو مساوات 13.29 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(13.31) \quad u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

آپ نے دیکھا کہ نئے متغیرات متعارف کرنے سے حاصل مساوات 13.31 نہایت آسانی سے دو مرتبہ مکمل لینے سے حل ہو سکتی ہے۔ ایک مرتبہ  $z$  کے ساتھ مکمل لینے سے

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

حاصل ہو گا جہاں نا معلوم تفاعل  $h(v)$  متغیر  $v$  کے تابع ہو سکتا ہے۔ اس کا مکمل  $v$  کے ساتھ لیتے ہیں

$$u = \int h(v) dv + \psi(z)$$

جہاں  $\psi(z)$  متغیر  $z$  کا نا معلوم تفاعل ہے۔ درج بالا میں مکمل کا حاصل از خود  $v$  کا تفاعل ہو گا جس کو نا معلوم تفاعل  $\phi(v)$  لکھتے ہوئے مساوات 13.31 کی مدد سے

$$(13.32) \quad u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو موج کی مساوات 13.29 کا دالومبیغ حل<sup>20</sup> کہتے ہیں۔

تفاعل  $\phi$  اور  $\psi$  کو ابتدائی معلومات سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ آئیں صفر ابتدائی رفتار اور ابتدائی انحراف  $u(x, 0) = f(x)$  کے لئے ان تفاعل کو حاصل کریں۔

مساوات 13.32 کا تفرق لیتے ہیں

$$(13.33) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct)$$

<sup>20</sup>d'Alembert solution

<sup>21</sup>فرانسیسی ریاضی دان ڈان ڈانیس ڈالومبیغ [1717-1783]

جہاں (') سے مراد قوسین میں بند پوری دلیل  $x + ct$  اور  $x - ct$  کے لحاظ سے بالترتیب تفرق ہے۔ مساوات 13.32، مساوات 13.33 اور ابتدائی معلومات سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0$$

آخری مساوات یعنی  $\psi' = \phi'$  سے  $\psi = \phi + k$  حاصل ہوتا ہے جس کو پہلی مساوات کے ساتھ ملا کر  $2\phi + k = f$  یا  $\phi = \frac{f-k}{2}$  حاصل ہوتا ہے۔ ان حاصل کردہ  $\phi$  اور  $\psi$  کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.32 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(13.34) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)]$$

جو عین مساوات 13.27 ہے۔ آپ یہاں تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات 13.27 پر لاگو ابتدائی سرحدی شرائط مساوات 13.12 کی بنا  $f$  طاق ہوگا اور اس کا دوری عرصہ  $2l$  ہوگا۔

ہمارے اس نتیجہ کے تحت دو عدد ابتدائی شرائط اور سرحدی شرائط مل کر مساوات موج کا حل یکتا طور پر تعین کرتی ہیں۔

### سوالات

سوال 13.59: مساوات 13.30 دیکھ کر  $x$  اور  $t$  کو  $v$  اور  $z$  کی صورت میں لکھتے ہوئے مساوات 13.31 سے مساوات 13.29 حاصل کریں۔

سوال 13.60 تا سوال 13.65 میں مساوات 13.34 استعمال کرتے ہوئے شکل 13.6 کی طرح مختلف لمحات پر تار کی انحراف  $u(x, t)$  کی ترسیم کھینچیں۔ تار کی لمبائی اکائی (1) ہے اور اس کے دونوں سرے ہل نہیں سکتے ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر ہے جبکہ ابتدائی انحراف  $f(x)$  ہے۔  $k$  کی کوئی بھی چھوٹی قیمت مثلاً  $k = 0.01$  لیں۔

$$\text{سوال 13.60: } f(x) = k \sin 2\pi x$$

$$\text{سوال 13.61: } f(x) = kx(1 - x)$$

$$\text{سوال 13.62: } f(x) = k(x - x^3)$$



سوال 13.63:  $f(x) = k(x^2 - x^4)$

سوال 13.64:  $f(x) = k(x^3 - x^5)$

سوال 13.65:  $f(x) = k \sin^2 \pi x$

سوال 13.66 تا سوال 13.70 میں دیے گئے متبادل استعمال کرتے ہوئے جزوی تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 13.66:  $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x, z = xy)$

سوال 13.67:  $u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y)$   
جواب:  $u = f_1(x) + f_2(x + y)$

سوال 13.68:  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x - y)$

سوال 13.69:  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y)$   
جواب:  $u = xf_1(x + y) + f_2(x + y)$

سوال 13.70:  $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y, z = 2x - y)$

سوال 13.71: خطی جزوی تفرقی مساوات کی اقسام  
درج ذیل طرز کی مساوات

(13.35)  $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$

کو  $AC - B^2 > 0$  کی صورت میں بیضوی<sup>22</sup>،  $AC - B^2 = 0$  کی صورت میں قطع مکانی<sup>23</sup> اور  $AC - B^2 < 0$  کی صورت میں قطع زائد<sup>24</sup> کہتے ہیں۔ یہاں  $A$ ،  $B$  اور  $C$  از خود  $x$  اور  $y$  کے تفاعل ہو سکتے ہیں۔ مساوات 13.35 سطح  $xy$  کی مختلف حصوں میں مختلف قسم کا ہو سکتا ہے۔ تصدیق کریں کہ

لاپلاسی مساوات  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  بیضوی ہے

حراری مساوات  $u_t = c^2 u_{xx}$  قطع مکانی ہے

جبکہ مساوات موج  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  قطع زائد ہے۔

elliptic<sup>22</sup>  
parabolic<sup>23</sup>  
hyperbolic<sup>24</sup>

اس کے برعکس  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$  بالائی نصف سطح پر بیضوی،  $x$  محور پر قطع مکانی اور نیچے نصف سطح پر قطع زائد ہے۔

سوال 13.72: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع زائد ہو تب  $v = \phi(x, y)$  اور  $z = \psi(x, y)$  استعمال کرتے ہوئے اس کو  $R^*(v, z, u, u_v, u_z)$  صورت میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں  $\phi = c_1$  اور  $\psi = c_2$  (مستقل ہیں) مساوات  $Ay'^2 - 2By' + C = 0$  کے حل  $y = y(x)$  ہیں۔ تصدیق کریں کہ مساوات 13.29 کی صورت میں درج ذیل تبادل حاصل ہوں گے۔

$$\phi = x + ct, \quad \psi = x - ct$$

جواب: مساوات موج کو  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  لکھ کر  $A = 1$ ،  $B = 0$  اور  $C = -c^2$  ملتے ہیں۔ چونکہ ہمارے متغیرات  $t$  اور  $x$  ہیں لہذا مساوات 13.35 کو  $1u_{tt} + 0 - c^2 u_{xx} = 0$  لکھ سکتے ہیں۔ یوں ہمیں  $A(\frac{dx}{dt})^2 - 2B(\frac{dx}{dt}) - c^2 = 0$  یعنی  $(\frac{dx}{dt})^2 - c^2 = 0$  یا  $\frac{dx}{dt} = \mp c$  کے حل درکار ہیں جو  $x = \mp ct + k$  یعنی  $x \mp ct = k$  ہیں۔ یوں  $\phi = x + ct$  اور  $\psi = x - ct$  ملتے ہیں۔

سوال 13.73: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع مکانی ہو تب  $v = x$  اور  $z = \psi(x, y)$  استعمال کرتے ہوئے اس کو  $R^*(v, z, u, u_v, u_z)$  صورت میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں  $\psi$  حاصل کرنے کی ترکیب سوال 13.72 میں دی گئی ہے۔ اس حقیقت کو سوال 13.68 کی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔  
جواب:  $y'^2 - 2y' + 1 = (y' - 1)^2 = 0$  سے  $y = x + c$  یا  $\psi(x, y) = x - y$  ملتا ہے۔  
اور  $v = x$  اور  $z = x - y$  ہیں۔

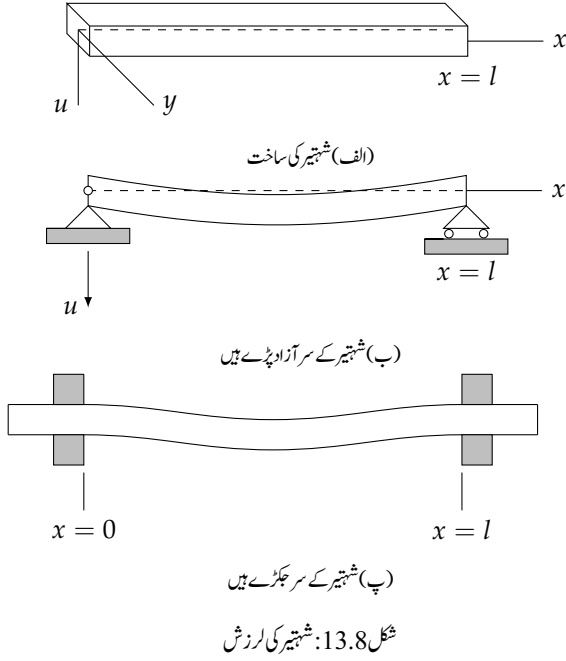
سوال 13.74 تا سوال 13.78 شہتیر کی لرزش میں مبنی ہیں۔

سوال 13.74: افقی شہتیر (شکل 13.8-الف) کی انتصابی لرزش درج ذیل جزوی تفرقی مساوات دیتی ہے

$$(13.36) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad c^2 = \frac{EI}{\rho A}$$

جہاں  $E$  ینگ مقیاس پک، محور  $y$  کے لحاظ سے  $I$  جمودی معیار اثر،  $\rho$  کثافت اور  $A$  رقبہ عمودی تراش ہیں۔ مساوات 13.36 میں  $u = F(x)G(t)$  پر کرتے ہوئے علیحدگی متغیرات سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{F^{(4)}}{F} &= -\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \beta^4 = \text{مستقل}, \\ F(x) &= A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x, \\ G(t) &= a \cos c\beta^2 t + b \sin c\beta^2 t \end{aligned}$$



سوال 13.75: ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے مساوات 13.36 کے وہ حل  $u_n = F_n(x)G_n(t)$  دریافت کریں جو درج ذیل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں (شکل 13.8-ب)۔

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{شہتیر کے دونوں سر دیوار پر آزاد رکھے گئے ہیں}$$

$$u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0 \quad \text{یوں سروں پر صفر معیار اثر لہذا صفر گولائی ہوگی}$$

جواب:

$$F_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad G_n = a_n \cos \frac{cn^2 \pi^2 t}{l^2}$$

سوال 13.76: مساوات 13.36 کا وہ حل جو سوال 13.75 کے شرائط کے ساتھ ابتدائی انحراف  $u(x, 0) = f(x) = x(l - x)$  کو مطمئن کرتا ہو حاصل کریں۔

سوال 13.77: شہتیر کے دونوں سروں سے جکڑنے سے کیا ابتدائی شرائط پیدا ہوں گے (شکل 13.8-پ)؟

جواب:  $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0$

سوال 13.78: تصدیق کریں کہ سوال 13.74 میں حاصل  $F(x)$  سوال 13.77 میں دی گئی شرائط کو اس صورت مطمئن کرتا ہے جب  $\beta l$  درج ذیل مساوات کے جذر ہوں۔

$$\cosh \beta l \cos \beta l = 1 \quad (13.37)$$

مساوات 13.37 کے چند حل کا تخمینہ لگائیں۔

### 13.5 یک بعدی بہاؤ حرارت

ہم جنسی مادہ میں حرارت کی بہاؤ حراری مساوات (حصہ 11.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

دیتی ہے جہاں  $u(x, y, z, t)$  جسم کا درجہ حرارت،  $K$  جسم کی حراری موصلیت،  $\sigma$  جسم کی مخصوص حراری استعداد اور  $\rho$  جسم کے مادہ کی کثافت ہے۔  $\nabla^2 u$  درجہ حرارت  $u$  کا لاپلاسی ہے جو کارتیسی نظام کی محدود  $x$ ،  $y$ ،  $z$  کے لحاظ سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

آئیں ایک لمبی سلاخ یا تار جو  $x$  محور پر رکھی گئی ہو میں درجہ حرارت پر غور کرتے ہیں (شکل 13.9)۔ یہ سلاخ ہم جنسی مادہ سے بنی ہے اور اس کا رقبہ عمودی تراش یکساں ہے۔ اس سلاخ کے اطراف کو مکمل طور پر غیر موصل سے گھیر کر عاجز شدہ کیا گیا ہے لہذا سلاخ میں حرارت کی بہاؤ صرف لمبائی کے رخ ممکن ہے۔ اس طرح  $u$  صرف  $x$  اور  $t$  پر منحصر ہو گا لہذا حراری مساوات درج ذیل ایک بعدی حراری مساوات<sup>25</sup> کی صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (13.38)$$

ہم مساوات 13.38 کو کئی اہم سرحدی شرائط اور ابتدائی شرائط کے لئے حل کرتے ہیں۔ ہم ایک بعدی حراری مساوات کو مساوات موج کی طرح حل کرتے ہوئے دیکھیں گے کہ اس کا حل مکمل طور پر مساوات موج کے حل سے مختلف



شکل 13.9: لمبی سلاخ

ہو گا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ حراری مساوات میں  $\frac{\partial u}{\partial t}$  جبکہ مساوات موج میں  $\frac{\partial u}{\partial t^2}$  پایا جاتا ہے۔ (یوں سوال 13.71 میں جزوی تفرقی مساوات کی درجہ بندی یقیناً نہایت اہمیت کے حامل ہے۔)

آئیں پہلے اس صورت کو دیکھیں جہاں سلاخ کے سر  $x = 0$  اور  $x = l$  صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہوں۔ اس طرح سرحدی شرائط تمام  $t$  کے لئے

$$(13.39) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

ہوں گے جو ہو بہو مساوات 13.12 کی طرح ہیں۔ فرض کریں کہ سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت  $f(x)$  ہے۔ یوں ابتدائی شرط

$$(13.40) \quad u(x, 0) = f(x)$$

ہو گی۔ ہم مساوات 13.38 کا ایسا حل  $u(x, t)$  دریافت کرتے ہیں جو مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

پہلا قدم۔ ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.38 کا ایسا حل حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.39 کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں درج ذیل سے شروع کرتے ہیں۔

$$(13.41) \quad u(x, t) = F(x)G(t)$$

مساوات 13.41 اور اس کے تفرق کو مساوات 13.38 میں پر کرتے ہوئے

$$FG = c^2 F''G$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $(')$  سے مراد  $x$  کے ساتھ تفرق اور  $(\cdot)$  سے مراد  $t$  کے ساتھ تفرق ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو  $c^2 FG$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(13.42) \quad \frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا بائیں ہاتھ صرف  $t$  اور دایاں ہاتھ صرف  $x$  پر منحصر ہے لہذا حصہ 13.3 کی طرح ہم اخذ کرتے ہیں کہ مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کسی مستقل مثلاً  $k$  کے برابر ہوں گے۔ آپ خود تسلی کر سکتے ہیں کہ

$k \geq 0$  سے حاصل حل  $u = FG$  جو مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا ہو  $u \equiv 0$  ہے (جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے ہیں)۔ اس طرح مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کو منفی  $k = -p^2$  کے برابر پر کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$(13.43) \quad F'' + p^2 F = 0$$

$$(13.44) \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

دوسرا قدم۔ مساوات 13.43 کا عمومی حل

$$(13.45) \quad F(x) = A \cos px + B \sin px$$

ہے لہذا مساوات 13.39 کے تحت

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0$$

ہو گا۔ اب  $G(t) \equiv 0$  کی صورت میں  $u \equiv 0$  حاصل ہو گا لہذا ہم  $F(0) = 0$  اور  $F(l) = 0$  چنتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں مساوات 13.45 سے  $F(0) = A = 0$  اور

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

ملتے ہیں جہاں  $B = 0$  لینے سے  $u \equiv 0$  حاصل ہو گا لہذا  $B \neq 0$  اور

$$\sin px = 0 \implies p = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ہوں گے۔ اس طرح  $B = 1$  منتخب کرتے ہوئے مساوات 13.42 کو مطمئن کرنے والا مساوات 13.43 کا درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

یہاں بھی حصہ 13.3 کی طرح  $n = -1, -2, \dots$  لینے کی ضرورت نہیں ہے۔

ہم اب مساوات 13.44 پر غور کرتے ہیں جو  $p = \frac{n\pi}{l}$  کی صورت میں درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

اس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

ہے جہاں  $B_n$  مستقل ہے۔ اس طرح مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا مساوات 13.38 کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$(13.46) \quad u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو مساوات 13.40 کو بھی مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں

$$(13.47) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \quad \left( \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \right)$$

جو مساوات 13.40 کے ساتھ مل کر

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

دیتی ہے۔ یوں اگر مساوات 13.47 نے مساوات 13.40 کو مطمئن کرنا ہو تب  $B_n$  یوں منتخب کرنے ہوں گے کہ  $u(x, 0)$  تقابل  $f(x)$  کی طاق دوری توسیع کی تسلسل یعنی فوریئر سائن تسلسل ہو جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے (مساوات 12.34)۔

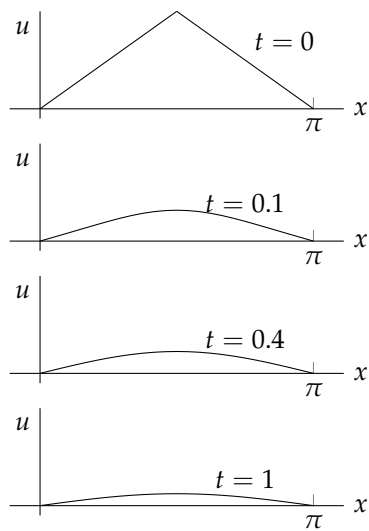
$$(13.48) \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ وقفہ  $0 \leq x \leq l$  پر تقابل  $f(x)$  ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہے اور اس وقفہ کے تمام اندرونی نقطوں پر اس کے یک طرفہ تفرق (شکل 12.4) پائے جاتے ہیں۔ ان شرائط کے ساتھ مساوات 13.47 میں دی گیا تسلسل، جس کے عددی سر مساوات 13.48 دیتی ہے، ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔

حاصل حل میں قوت نمائی جزو کی بنا جیسے جیسے  $t$  لامتناہی کے قریب تر پہنچے مساوات 13.47 کے تمام ارکان ویسے ویسے صفر کے قریب تر پہنچتے ہیں۔ تنزل کی شرح  $n$  پر منحصر ہو گی۔

مثال 13.3: ابتدائی درجہ حرارت

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ l - x & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$



شکل 13.10: مختلف لمحات پر مثال 13.3 کا حل

اور  $l = \pi$  کی صورت میں مساوات 13.48 سے

$$(13.49) \quad B_n = \frac{2}{l} \left( \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right)$$

ملتا ہے جو طاق  $n$  کی صورت میں  $B_n = 0$  اور جفت  $n$  کی صورت میں

$$B_n = \frac{4}{n^2\pi} \quad (n = 1, 5, 9, \dots)$$

$$B_n = -\frac{4}{n^2\pi} \quad (n = 3, 7, 11, \dots)$$

دیتا ہے۔ یوں حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 13.10 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x e^{-c^2 t} - \frac{1}{9} \sin 3x e^{-9c^2 t} + \dots \right]$$

□



## سوالات

سوال 13.79: شکل 13.10 کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔ دونوں میں کیا اہم فرق پایا جاتا ہے۔  
جواب: شکل 13.10 غیر ارتعاشی ہے جبکہ مساوات موج کا حل ارتعاشی ہے

سوال 13.80: مساوات 13.46 میں کسی مخصوص  $n$  کے لئے  $K$ ،  $\sigma$  اور  $\rho$  کا تنزل پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟  
جواب:  $K$  بڑھنے سے تنزل بڑھتی ہے جبکہ  $\sigma$  اور  $\rho$  کے بڑھنے سے تنزل گھٹتی ہے۔

سوال 13.81:  $u_1$ ،  $u_2$  اور  $u_3$  کا ترسیم  $B_n = 1$ ،  $c = 1$  اور  $l = \pi$  لیتے ہوئے  $t = 0$ ،  $t = 1$  اور  $t = 2$  کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.82: ایک سلاخ جس کے اطراف مکمل طور حجاز شدہ ہیں کے سر برقرار  $u(0, t) = U_1$  اور  $u(0, l) = U_2$  پر رکھے گئے ہیں۔ سلاخ کی لمبائی  $l$  ہے۔ بہت دیر بعد (یعنی  $t \rightarrow \infty$  پر) سلاخ میں درجہ حرارت  $u(x)$  دریافت کریں۔  
جواب:  $u = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l}$

سوال 13.83 تا سوال 13.88 میں لوہے کی سلاخ کا درجہ حرارت  $u(x, t)$  دریافت کریں۔ سلاخ کی لمبائی  $L = 1$  m ہے جبکہ لوہے کے مستقل  $K = 73 \text{ W m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ،  $\sigma = 444 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  اور  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$  ہیں۔ سلاخ کا رقبہ عمودی تراش  $1 \text{ cm}^2$  ہے جبکہ اس کے سر  $0^\circ\text{C}$  پر برقرار رکھے گئے ہیں۔ ابتدائی درجہ حرارت  $f(x)$  ہے۔ سلاخ کے اطراف حجاز شدہ ہیں۔

سوال 13.83:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$u = \frac{4}{\pi^2} (e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{1}{9} e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x + \dots) \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$\text{سوال 13.84: } f(x) = \sin \pi x \quad u = e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

سوال 13.85:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$u = \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^3}\right)e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + \left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{\pi^3}\right)e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x(L - x) \quad \text{سوال 13.86}$$

$$u = \frac{8}{\pi^3}(e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x + \dots) \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x(L - x^2) \quad \text{سوال 13.87}$$

$$u = \frac{12}{\pi^3}e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{3}{2\pi^3}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

$$f(x) = x \sin \pi x \quad \text{سوال 13.88}$$

$$u = \frac{1}{2}e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{16}{9\pi^2}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \dots \quad \lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840} \quad \text{جواب:}$$

سوال 13.89: ایک سلاخ جس کی لمبائی  $L$  ہے ہر طرف سے (بشمول دونوں سر) عاجز شدہ ہے۔ ابتدائی درجہ حرارت  $f(x)$  ہے۔ طبعی معلومات: سلاخ کے سر سے حراری توانائی کا اخراج سر پر  $\frac{\partial u}{\partial x}$  کے راست تناسب ہو گا۔ تصدیق کریں کہ دی گئی معلومات درج ذیل کے مترادف ہے۔

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جہاں  $A_0$  اور  $A_n$  مساوات 12.32 سے درج ذیل ہیں۔

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

سوال 13.90: سوال 13.89 میں  $t \rightarrow \infty$  پر  $u \rightarrow A_0$  ملتا ہے۔ کیا یہ آپ کے توقع کے مطابق ہے؟



## ضمیمہ ۱

### اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)  
تصور کریں کہ کھلے وقفے  $I$  پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل  $y_1(x)$  اور  $y_2(x)$  پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ  $I$  پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا  $I$  پر  $y(x)$  بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ  $y_1$  اور  $y_2$  دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا  $y$  درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو  $z'$  میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ  $y$  اور  $y'$  حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو  $-z \leq 2yy'$  لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو  $z$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ  $-p \leq |p|$  استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے  $2yy'$  جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ  $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$  ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں  $1 + |q| + |p| = h$  لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ  $h(x)$  استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ  $F_1$  اور  $F_2$  مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $zF_1$  بڑھ نہیں رہا اور  $zF_2$  گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت  $z(x_0) = 0$  ہے لہذا  $x \leq x_0$  کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح  $x \geq x_0$  کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں  $F_1$  اور  $F_2$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ  $I$  پر  $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$  ہے۔ یوں  $I$  پر  $y \equiv 0$  یعنی  $y_1 \equiv y_2$  ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□



## ضمیمہ ب

### مفید معلومات

#### ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل  $e^x$  (شکل 1.1-ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(ب.1) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1.1-ب-ب)

$$(ب.2) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

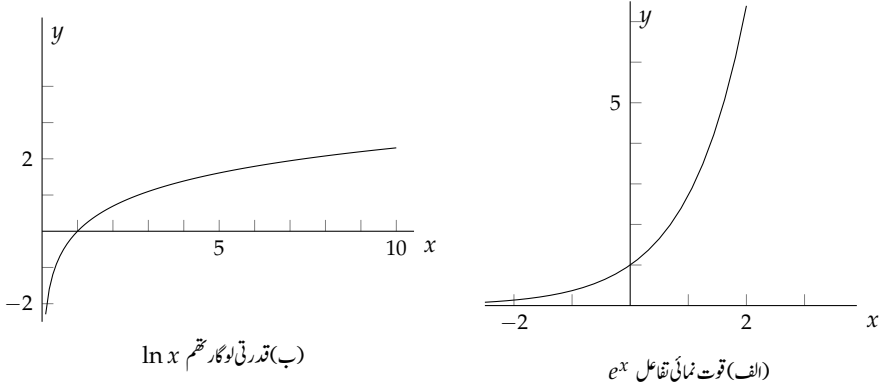
$e^x$  کا الٹ  $\ln x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $e^{\ln x} = x$  اور  $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

اساس دس کا لوگارٹھم  $\log_{10} x$  یا  $\log x$

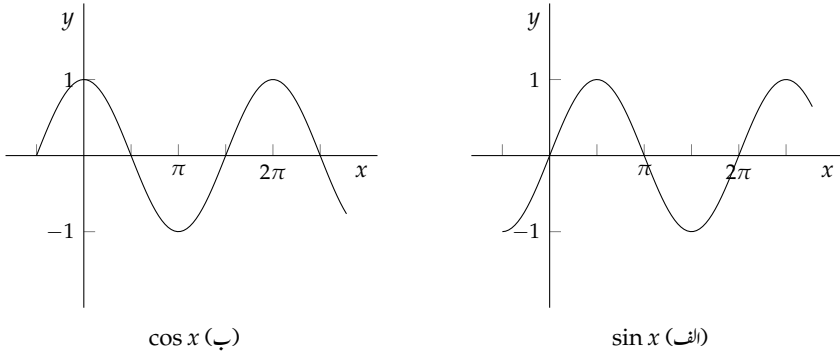
$$(ب.3) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(ب.4) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$





شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

$10^x$  کا الٹ  $\log x$  ہے۔ اس کے علاوہ  $10^{\log x} = x$  اور  $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$  ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں  $\sin x$  اور  $\cos x$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہو گا۔  $\sin x$  طاق ہے یعنی  $\sin(-x) = -\sin x$  ہو گا جبکہ  $\cos x$  جفت ہے یعنی  $\cos(-x) = \cos x$  ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

(ب.5)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

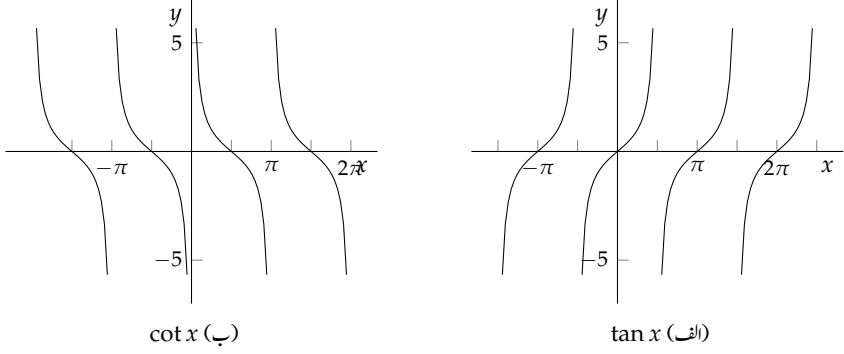
(ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ) (شکل 3. ب-الف، ب)

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن  $\sinh x$  وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$(ب.17) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(ب.18) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(ب.19) \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$(ب.20) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

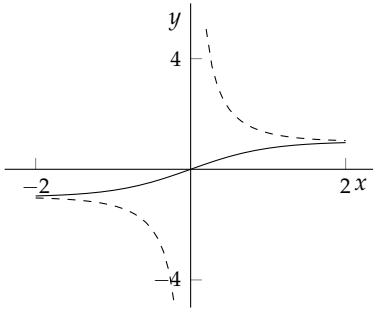
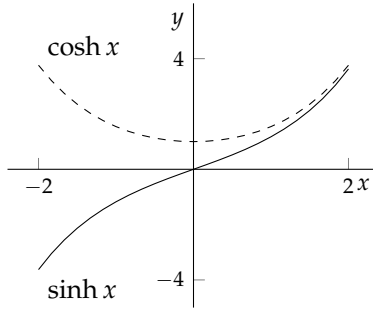
$$(ب.21) \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$(ب.22) \quad \begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

$$(ب.23) \quad \tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب)  $\Gamma(\alpha)$  کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$(ب.24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط  $\tanh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\coth x$  ہے۔(الف) ٹھوس خط  $\sinh x$  ہے جبکہ نقطہ دار خط  $\cosh x$  ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط  $\alpha$  کی بات کریں تب یہ  $\alpha$  کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (25. \text{ب})$$

مساوات 24. ب سے  $\Gamma(1) = 1$  ملتا ہے۔ یوں مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(2) = 1$  حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25. ب میں استعمال کرتے ہوئے  $\Gamma(3) = 2 \times 1$  ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 25. ب استعمال کرتے ہوئے  $\alpha$  کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت  $k$  کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26. \text{ب})$$

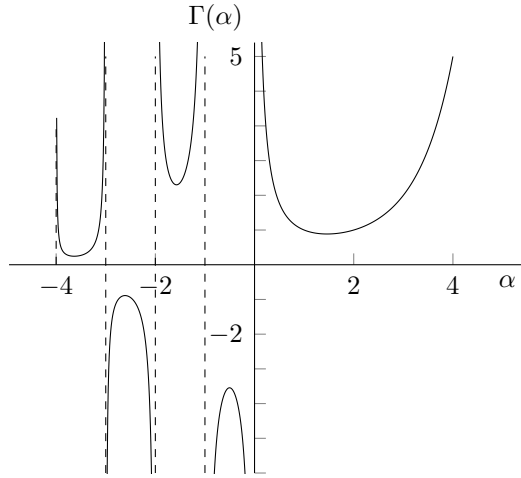
مساوات 25. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\alpha$  کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (27. \text{ب})$$

جہاں  $k$  کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ  $\alpha + k + 1 > 0$  ہو۔ مساوات 24. ب اور مساوات 27. ب مل کر  $\alpha$  کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.28) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 27. ب اور مساوات 28. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط  $\alpha$  کی صورت میں  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$  پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$  کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں  $e$  قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.29) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.30) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.31) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.32) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.33) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.34) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.35) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 35. ب کے تفرق  $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.36) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$  ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

$$(ب.37) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.38) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.39) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.40) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

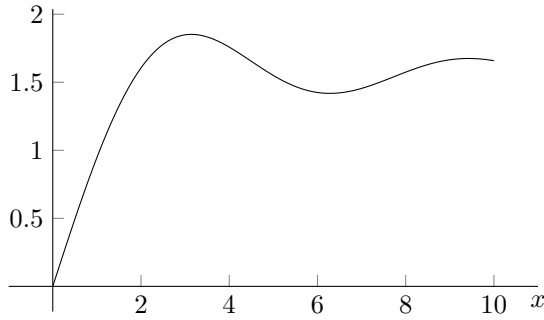
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.41) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Si  $\infty = \frac{\pi}{2}$  کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$(ب.42) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions<sup>1</sup>



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.43) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.44) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.45) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$



