انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 9

قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ

لیژانڈر تفاعل (حصہ 5.2) اور بیسل تفاعل کی ایک خاصیت جسے قائمیت[1] کہتے ہیں انجینئری حساب میں نمایاں کردار ادا کرتی ہے۔اس حصے میں قائمیت سے وابستہ تصورات اور علامت نویسی سیکھتے ہیں۔اگلے حصے میں ایسی سرحدی قیمت مسائل (سٹیورم لیوویل مسائل) پر غور کیا جائے گا جن کے حل قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ دیتے ہیں۔ان مسائل پر غور کے دوران حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفاعل اور بیسل تفاعل پر غور کیا جائے گا۔

آئیں پہلے تفاعل کی قائمیت کی تعریف پیش کرتے ہیں۔فرض کریں کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر حقیقی قیمت تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ معین ہیں اور اس وقفے پر ان تفاعل کے حاصل ضرب $g_m(x)g_n(x)$ کا تکمل موجود ہے۔اس تکمل کو روایتی طور پر (g_m, g_n) لکھا جاتا ہے۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) \, \mathrm{d}x \tag{9.1}$$

اگر درج بالا تکمل صفر کے برابر ہو تب تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ وقفہ $a \le x \le b$ پر **قائمہ الزاویہ**[2] کہلاتے ہیں۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (m \ne n) \tag{9.2}$$

---

orthogonality[1]
orthogonal[2]

حقیقی قیمت تفاعل کا سلسلہ $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، $\cdots$ اس صورت وقفہ $a \le x \le b$ پر **قائمہ الزاویہ سلسلہ**[3] کہلائے گا جب اس وقفے پر یہ تمام تفاعل معین اور تمام تکمل (g_m, g_n) موجود ہوں اور اس سلسلے میں تمام ممکنہ منفرد جوڑیوں کے یہ تکمل صفر کے برابر ہوں۔

(g_m, g_m) کے غیر صفر جذر کو g_m کا **معیار**[4] کہتے ہیں جسے عموماً $\|g_m\|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x)\,\mathrm{d}x} \tag{9.3}$$

ہم پوری بحث کے دوران درج ذیل فرض کریں گے۔

عمومی مفروضہ: تمام تفاعل جن پر غور کیا جا رہا ہو محدود ہیں، جن تکمل پر غور کیا جا رہا ہو وہ موجود ہیں اور معیار غیر صفر ہیں۔

ظاہر ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر ایسے قائمہ الزاویہ سلسلہ g_1 ، g_2 ، $\cdots$ جن میں ہر تفاعل کا معیار اکائی (1) ہو درج ذیل تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \ne n \quad (m = 1, 2, \cdots) \\ 1 & m = n \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{9.4}$$

ایسے سلسلے کو وقفہ $a \le x \le b$ پر **معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ**[5] کہتے ہیں۔

کسی بھی قائمہ الزاویہ سلسلے کے ہر تفاعل کو، زیر غور وقفے پر، اس تفاعل کی معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 9.1: تفاعل $g_m(x) = \sin mx$ جہاں $m = 1, 2, \cdots$ کا سلسلہ وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے کیونکہ ان تفاعل کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (ضمیمہ ب)۔

$$\begin{aligned} (g_m, g_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x \quad (m \ne n) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

---

[3] orthogonal set
[4] norm
[5] orthonormal set

ان تفاعل کا معیار $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$ ہے۔

$$\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, \mathrm{d}x = \pi \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

یوں اس سلسلے سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}$$

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1.ب اعلی تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل[1] e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

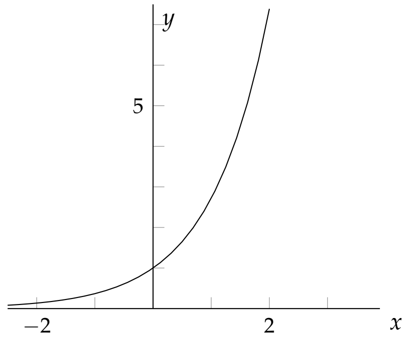
$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

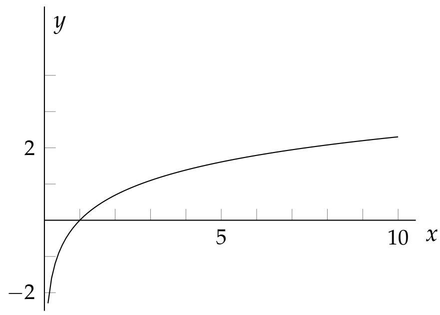
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

[1] exponential function



(الف) قوت نمائی تفاعل e^x



(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ **یا** $\log x$

$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $x = 10^{\log x}$ اور $\frac{1}{x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = 10^{-\log x}$ ہیں۔

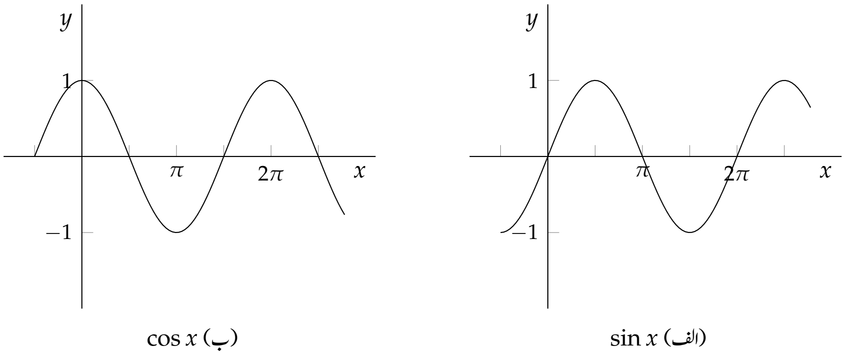
سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 0.017\,453\,292\,519\,943 \text{ rad} \\ 1 \text{ radian} &= 57^\circ\, 17'\, 44.80625'' = 57.2957795131^\circ \end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

$$\begin{aligned} \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \tag{ب.6}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{ب.7}$$



شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned} \tag{ب.8}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \tag{ب.9}$$

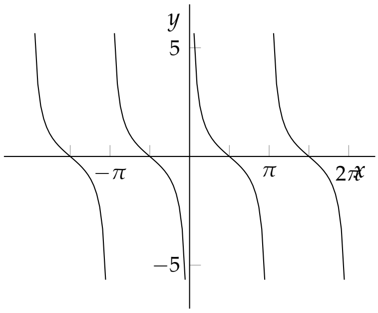
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{ب.10}$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned} \tag{ب.11}$$

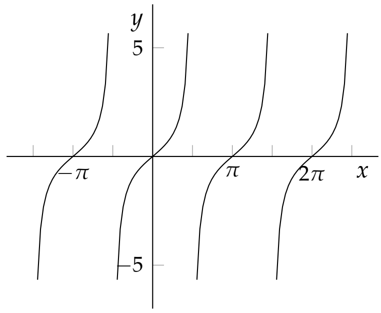
$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \\ \cos v - \cos u &= 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} \end{aligned} \tag{ب.12}$$

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A} \tag{ب.13}$$

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B} \tag{ب.14}$$



$\cot x$ (ب)



$\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ، (شکل 3.ب-الف، ب)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x} \tag{ب.15}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \tag{ب.16}$$

ہذلولی تفاعل[2] (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

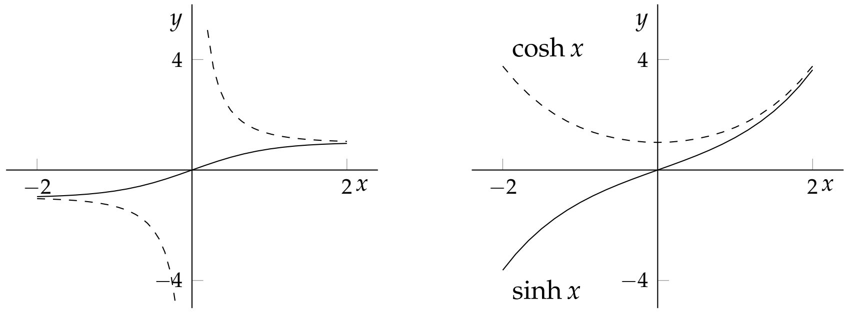
$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل[3] (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

---

[2] hyperbolic functions



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔ (ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

[3] Gamma function

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیح منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ[4] سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل[5]

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.31}$$

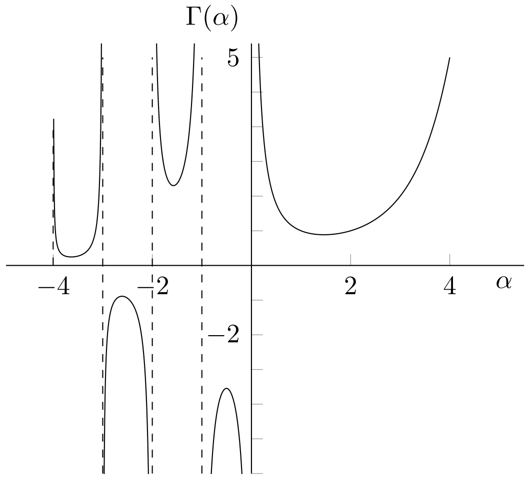
$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل[6]

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0, y > 0) \tag{ب.33}$$

---

[4] Stirling formula
[5] incomplete Gamma function
[6] Beta function



شکل 5.ب: گیما تفاعل

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل[7]

$$erf x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**[8]

$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات[9]

$$C(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\qquad S(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

error function[7]
complementary error function[8]
Fresnel integrals[9]

$S(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $C(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[10]

$$c(x)=\frac{\pi}{8}-C(x)=\int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$$s(x)=\frac{\pi}{8}-S(x)=\int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

تکمل سائن[11]

$$\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.41}$$

$\operatorname{Si}\infty=\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\operatorname{si}(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si}(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.42}$$

تکمل کوسائن[12]

$$\operatorname{si}(x)=\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی[13]

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی[14]

$$\operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$

[10] complementary functions
[11] Sine integral
[12] Cosine integral
[13] Exponential integral
[14] Logarithmic integral