انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 15

محافظ زاویہ نقشہ کشی

اگر z سطح میں دائرہ کار D میں مخلوط تفاعل $w = f(z)$ معین ہو، تب D میں ہر نقطہ کا مطابقتی نقطہ w سطح میں پایا جاتا ہے۔یوں D کا مطابقتی، $f(z)$ کے حلقہ کا نقشہ، w سطح پر حاصل ہو گا۔جیومیٹریائی نقشہ ذہن میں تفاعل کی تصویر قائم کرتا ہے۔مختلف منحنیات اور خطوں کے نقوش دیکھ کر مخلوط تفاعل سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔

جیسا ہم دیکھیں گے، اگر $f(z)$ **تحلیلی** ہو تب $f(z)$ سے حاصل نقشے میں زاویے تبدیل نہیں ہوں گے ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f'(z) = 0$ ہو۔ایسا نقشہ **محافظ زاویہ نقشہ**[1] کہلاتا ہے۔

محافظ زاویہ نقشہ گشی[2] کے ذریعہ دیے گیے پیچیدہ خطے کا تبادل سادہ خطے میں کرتے ہوئے نظریہ مخفی قوہ کی دو بعدی سرحدی مسائل حل کیے جاتے ہیں۔اسی وجہ سے محافظ زاویہ نقشہ گشی انجینئری میں اہمیت رکھتی ہے۔

ہم نقشہ گشی کی تعریف پیش کرنے کے بعد نقشہ گشی کا عمل سکھائیں گے۔اس کے بعد کئی بنیادی تحلیلی تفاعل کے نقوش پیش کریں گے۔

---

[1] conformal map
[2] conformal mapping

15.1 نقشہ گشی

حقیقی متغیرہ x کے حقیقی تفاعل $y = f(x)$ کی منحنی کو کارتیسی xy سطح پر کھینچا جا سکتا ہے۔اس خط کو تفاعل کی ترسیم کہتے ہیں۔چونکہ مخلوط متغیرہ z کو جیومیٹریائی طور پر مخلوط سطح میں نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہی کچھ w کے لئے بھی درست ہے لہٰذا مخلوط تفاعل

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (z = x + iy) \tag{15.1}$$

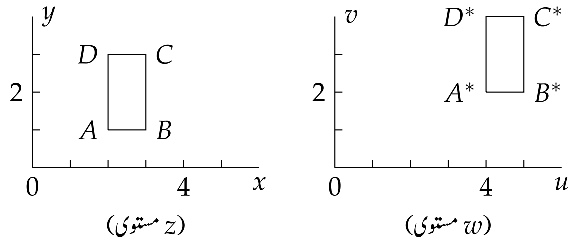
کی صورت حال زیادہ پیچیدہ ہے۔اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم ان دو متغیرات کے لئے دو علیحدہ علیحدہ مخلوط سطحیں استعمال کریں۔ایک z سطح جس میں $z = x + iy$ دکھایا جائے اور دوسری w سطح جس میں مطابقتی $w = u + iv$ دکھایا جائے۔یوں $f(z)$ کی دائرہ کار D میں ہر z کے لئے تفاعل $f(z)$ سطح w میں قیمت $w = f(z)$ مختص کرے گا۔اس معین تعلق کو f کی دائرہ کار کی سطح w میں[3] **نقشہ گشی**[4] **(یا تبادل)** کہتے ہیں، یا f کی دائرہ کار کا f کے حلقہ پر[5] نقشہ کشی کہتے ہیں۔

$w_0 = f(z_0)$ جو نقطہ z_0 کا مطابقتی نقطہ ہے، $f(z)$ کے لحاظ سے نقشے میں، z_0 کا **عکس نقطہ**[6] یا **عکس**[7] کہلاتا ہے۔ اگر z کسی منحنی پر حرکت کرے اور $f(z)$ استمراری (نا کہ مستقل) ہو تب مطابقتی نقطہ $w = f(z)$ عمومی طور پر سطح w میں منحنی C^* پر حرکت کرے گا۔اس منحنی کو منحنی C کا عکس کہیں گے۔لفظ "عکس" کسی بھی نقطوں کے سلسلے اور خطہ کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ ایسی نقشہ کشی کی خواص کی تفتیش، z سطح میں منحنیات اور خطے اور w سطح میں ان کے عکس پر غور اور w سطح میں منحنیات اور خطے اور z سطح میں ان کے عکس پر غور کرنے سے کی جا سکتی ہے۔ اس طرح انفرادی نقطوں پر غور کرنے سے حاصل معلومات سے زیادہ معلومات حاصل ہو گی۔

اگرچہ w اور z کو دو علیحدہ علیحدہ سطحوں سے ظاہر کیا جاتا ہے، بعض اوقات یوں سوچنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے کہ اصل اور نقش ایک ہی سطح پر پائے جاتے ہوں اور عمومی اصطلاحات مثلاً "گھومنا" اور "مستقیم حرکت" استعمال کرنا۔یوں $w = z + 3$ مستقیم حرکت کہلائے گی جو z سطح میں ہر نقطہ کو دائیں جانب تین اکائیاں منتقل کرتی ہے۔

[3] into
[4] mapping
[5] onto
[6] image point
[7] image



شکل 15.1: مستقیم حرکت $w = z + 2 + i$

تحلیلی تفاعل $w = u + iv = f(z)$ جس نقشہ کو ظاہر کرتا ہو، کی کسی مخصوص خاصیت جاننے کے لئے ہم z سطح میں سیدھے لکیروں $x =$ مستقل اور $y =$ مستقل کا w سطح میں عکس پر غور کر سکتے ہیں۔اسی طرح ہم دائرہ $|z| =$ مستقل یا مبدا سے گزرتی سیدھی لکیروں کی عکس پر غور کر سکتے ہیں۔اس کے علاوہ ہم $u(x, y) =$ مستقل اور $v(x, y) =$ مستقل منحنیات پر z سطح میں غور کر سکتے ہیں۔ان منحنیات کو u اور v کی **ہموار منحنیات**[8] کہتے ہیں۔ ہم سادہ اشکال مثلاً چکور، تکون، مستطیل وغیرہ اور ان کے عکس پر بھی غور کر سکتے ہیں۔

آئیں چند مثالوں کی مدد سے ان حقائق کو بہتر سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مثال 15.1: **خطی تبادل** $w = ax + b$
درج ذیل نقش **مستقیم حرکت** کو ظاہر کرتا ہے۔

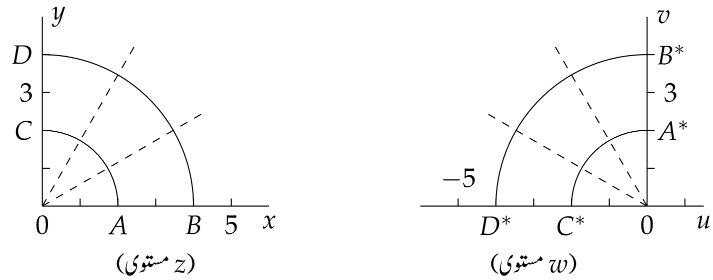
$$w = z + b \tag{15.2}$$

شکل 15.1 میں مساوات 15.2 کو $w = z + 2 + i$ کے لئے دکھایا گیا ہے جہاں مستطیل اور اس کا عکس دکھائے گئے ہیں جو یکساں ہیں (کیوں؟)۔ A کا عکس A^* ، وغیرہ۔زیادہ پیچیدہ اشکال میں نقطوں کو اس طرح ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مساوات 15.2 میں $b = 0$ پر کرنے سے **مماثل تبادل**[9]

$$w = z$$

حاصل ہوتا ہے جو ہر نقطے کو اپنے آپ پر نقش کرتا ہے۔

level curves[8]
identity transformation[9]



شکل 15.2: گھڑی کی الٹ رخ گھومنے کا زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

درج ذیل تبادل

$$w = az \qquad (|a| = 1)$$

مقررہ زاویہ $\angle a$ سے گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.2 میں $w = iz$ یعنی گھڑی کی سوئیوں کی گھومنے کی الٹ رخ $\frac{\pi}{2}$ زاویہ سے گھومنا دکھایا گیا ہے۔

درج ذیل تبادل

$$w = az \qquad (\text{مثبت حقیقی } a)$$

میں $a > 1$ اتساع جبکہ $0 < a < 1$ سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح

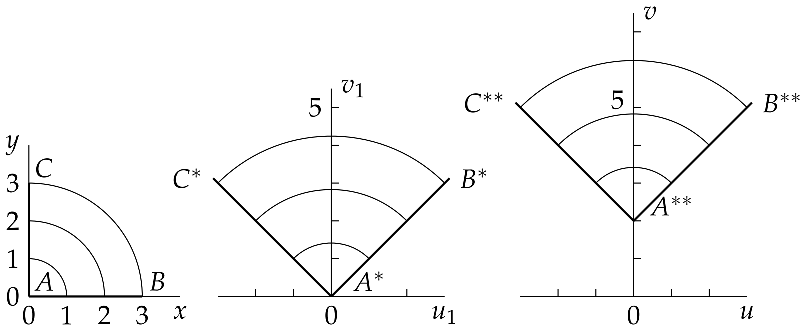
$$w = az \qquad (\text{اختیاری } a) \tag{15.3}$$

زاویہ $\angle a$ سے گھومنے کو اور ساتھ ہی یکساں اتساع یا سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ درج ذیل تبادل

$$w = az + b \tag{15.4}$$

خطی تبادل[10] کہلاتا ہے جو گھومنے کے ساتھ اتساع یا سکڑاو $w_1 = az$ کے ساتھ ساتھ مستقیم حرکت $w = w_1 + b$ کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.3 میں $w = (1+i)z + 2i$ تبادل دکھایا گیا ہے جو گھڑی کی الٹ رخ $\frac{\pi}{4}$ زاویے کے گھومنے اور $|1+i| = \sqrt{2}$ تناسب کی اتساع کے بعد اوپر کی رخ مستقیم حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔
□

linear transformation[10]



$z = x + iy$ (مستوی z) $w_1 = u_1 + iv_1$ (مستوی w_1) $w = u + iv$ (مستوی w)

شکل 15.3: خطی تبادل $w = (1+i)z + 2i$ جس میں گھومنا، اتساع $w_1 = (1+i)z$ اور مستقیم حرکت $w = w_1 + 2i$ شامل ہے۔

مثال 15.2: **نقش** $w = z^2$

ہم درج ذیل نقش پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$w = z^2 \tag{15.5}$$

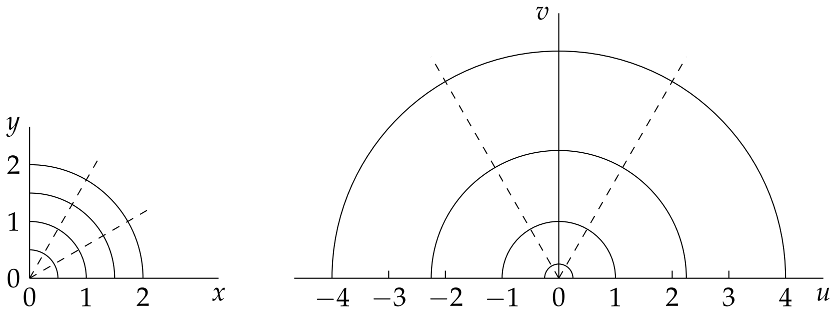
یہاں قطبی محدد استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ یوں $z = e^{i\theta}$ اور $w = Re^{i\phi}$ لیتے ہوئے مساوات 15.5 $Re^{i\phi} = r^2e^{i2\theta}$ لکھی جائے گی جس سے

$$R = r^2, \quad \phi = 2\theta$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں دائروں $r = r_0 =$ مستقل کا نقش دائرے $R = r_0^2 =$ مستقل ہوں گے جبکہ مبدا سے گزرتی سیدھی لکیروں $\theta = \theta_0 =$ مستقل کا نقش دگنی زاویہ پر لکیریں $\phi = 2\theta_0 =$ مستقل ہوں گی۔ خاص کر z سطح میں مثبت حقیقی محور $(\theta = 0)$ کا نقش w سطح میں مثبت حقیقی محور ہو گا جبکہ z سطح میں مثبت خیالی محور $\theta = \frac{\pi}{2}$ کا نقش w سطح میں منفی حقیقی محور ہو گا۔ یہ نقش مبدا پر ہر زاویہ کو دگنا کرتا ہے۔ ربع اول $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ کا نقش بالائی نصف w سطح ہو گی (شکل 15.4)۔

مستطیل محدد میں تبادل $w = z^2$ درج ذیل دے گا۔

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$$



شکل 15.4: نقش $w = z^2$

حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \tag{15.6}$$

ملتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ u اور v کی **ہموار سطحات متساوی الاضلاع قطع زائد** ہوں گے جن کی متقارب لکیریں[11] $y = \mp x$ اور محدد کی محور ہیں۔ہم دیکھتے ہیں مساوات 15.6 میں دیے گئے خطوط ایک دوسرے کی عمودی مطقاطع خطوط (حصہ 1.6) ہیں۔ شکل 15.5 میں z سطح میں دو خطے w سطح میں مستطیل پر نقش ہوں گے۔ظاہر ہے کہ ہر نقطہ $w \neq 0$ سطح z میں ٹھیک دو نقطوں کا عکس ہو گا۔

ہم مساوات 15.6 استعمال کرتے ہوئے سیدھی خطوط مستقل $= x$ اور مستقل $= y$ کا عکس تلاش کر سکتے ہیں۔خط مستقل $= c = x$ کا عکس

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy$$

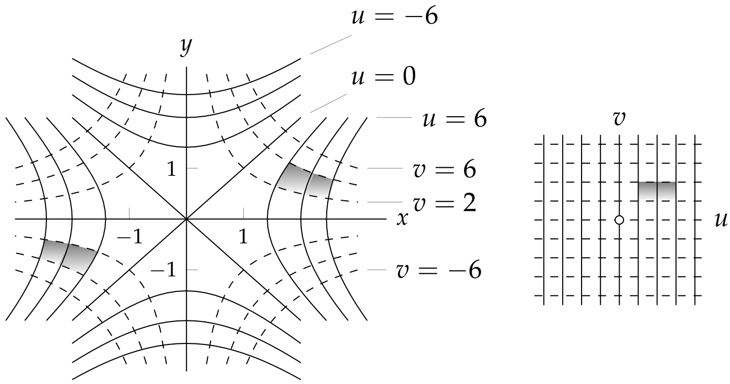
سے y حذف کرتے ہوئے

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

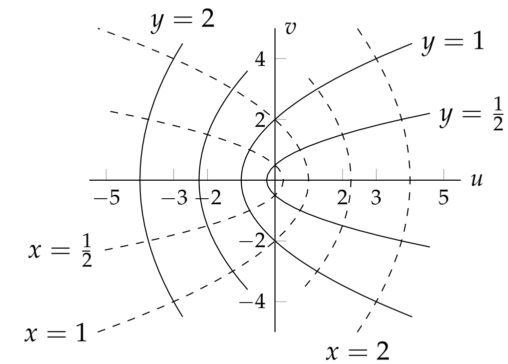
حاصل ہوتا ہے جو قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے جو بائیں رخ کھلتا ہے۔مبدا اس قطع مکافی کا ماسکہ ہو گا۔اسی طرح مستقل $= k = y$ کا عکس

$$v^2 = 4k^2(k^2 + u)$$

ہو گا جو دائیں کو کھلتا ہوا قطع مکافی ہے جس کا ماسکہ عین مبدا پر ہے (شکل 15.6)۔ □



شکل 15.5: نقش $w = z^2$ کی صورت میں u اور v کی ہموار سطحیں



شکل 15.6: نقش $w = z^2$ میں سیدھے خطوط $x = c$ اور $y = c^*$ کے عکس

شکل 15.7: نقش $w = z^n$

باقی طاقت

$$w = z^n, \quad n = 3, 4, \cdots \tag{15.7}$$

پر بھی اسی طرح غور کیا جا سکتا ہے۔ظاہر ہے کہ ان کی ہموار سطحات کی مساوات مزید پیچیدہ ہوں گی۔زاویائی خطہ $0 \le \underline{/z} \le \frac{\pi}{n}$ بالائی نصف w سطح پر نقش ہو گا (شکل 15.7)۔

منفی طاقت کی نقش $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \cdots$ پر بھی قطبی محدد کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔عملاً اہم ترین صورت درج ذیل مثال میں دی گئی ہے۔

مثال 15.3: **نقش $w = \frac{1}{z}$۔ الٹ جانا**
ہم درج ذیل نقش پر غور کرتے ہیں۔

$$w = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0 \tag{15.8}$$

قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے $z = re^{i\theta}$ اور $w = Re^{i\phi}$ لکھتے ہیں۔یوں مساوات 15.8 سے

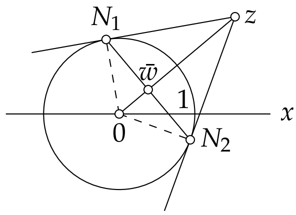
$$R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta \qquad (r \neq 0) \tag{15.9}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $w = \frac{1}{z}\ (z \neq 0)$ ، مبدا سے نکلتی سیدھی لکیر جو $\bar{z}$ سے گزرتی ہو پر واقع ہے۔مبدا سے اس نقطے کا فاصلہ $\frac{1}{\lvert z \rvert}$ ہے۔

جیومیٹریائی طور پر z کو اکائی دائرے میں الٹاتے ہوئے اس کا x محور میں عکس لینے سے $w = \frac{1}{z}$ حاصل ہو گا۔آپ تشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے اس حقیقت کو ثابت کر سکتے ہیں (شکل 15.8)۔

شکل 15.9 میں دکھایا گیا ہے کہ $w = \frac{1}{z}$ نقش، افقی اور کھڑی سیدھی لکیروں کو دائروں یا سیدھی لکیروں پر عکس کرتی ہے۔یہاں تک کہ درج ذیل جملہ ہر صورت درست ہو گا۔

[11]asymptotes



شکل 15.8: z سے $w = \frac{1}{z}$ کا جیومیٹریائی حصول۔ نقطہ z سے اکائی دائرے تک مماس، دائرے کو N_1 اور N_2 پر چھوتے ہیں۔ مبدا سے z تک لکیر اور N_1 سے N_2 تک لکیر نقطہ $\bar{w}$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

$w = \frac{1}{z}$ ہر سیدھی لکیر یا دائرے کو دائرے یا سیدھے لکیر پر نقش کرتا ہے۔

ثبوت: z سطح میں ہر سیدھی لکیر یا دائرہ کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے۔

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (A, B, C, D \text{ حقیقی})$$

$A = 0$ سیدھی لکیر دیتی ہے جبکہ $A \neq 0$ دائرہ دیتی ہے۔ z اور $\bar{z}$ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{i2} + D = 0$$

چونکہ $w = \frac{1}{z}$ ہے لہٰذا اس میں $z = \frac{1}{w}$ پر کرتے ہوئے $w\bar{w}$ سے ضرب دینے سے

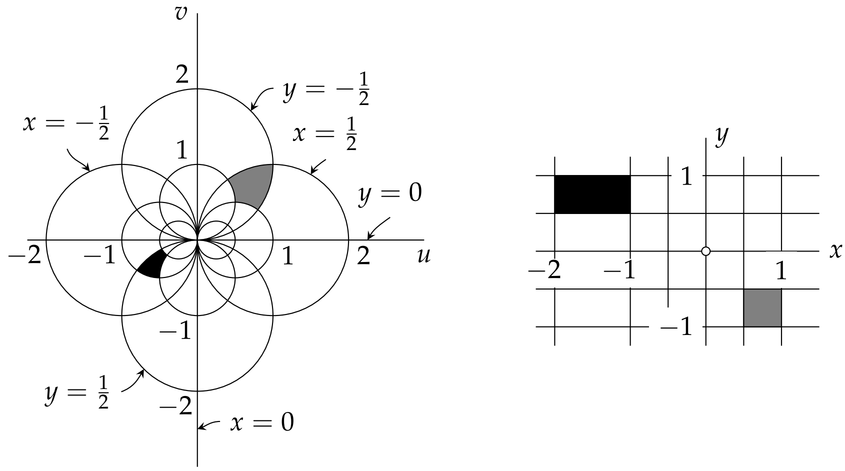
$$A + B\frac{w + \bar{w}}{2} + C\frac{\bar{w} - w}{i2} + Dw\bar{w} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو u اور v کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو $D \neq 0$ کی صورت میں دائرہ ہو گا جبکہ $D = 0$ کی صورت میں w سطح میں سیدھی لکیر ہو گی۔

$\square$



شکل 15.9: نقش $w=\frac{1}{z}$

سوالات

سوال 15.1 تا سوال 15.3 میں زیر نقش $w=(1-i)z+2$ دیے گئے منحنیات یا خطوں کا عکس تلاش کریں۔ عکس کو w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.1: $x=0,1,2,3$
جواب: $v=u-2-2x,\quad v=u-2,u-4,u-6,u-8$

سوال 15.2: $y=0,-1,-2,-3$
جواب: $v=-u+2+2y,\quad v=-u+2,-u,-u-2,-u-4$

سوال 15.3: $\lvert z+2\rvert\le 2$
جواب: $\lvert w-i2\rvert\le 2\sqrt{2}$

سوال 15.4 تا سوال 15.9 میں نقش $w=u+iv=z^2$ ہے۔ دیے گئے منحنیات کا عکس تلاش کرتے ہوئے انہیں w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.4: $y=x$
جواب: $u=0,v\ge 0$

سوال 15.5: $y = 0, 1, 2, 3$
جواب: $v = 2y\sqrt{u + y^2}, \quad v = 0, \mp 2\sqrt{u+1}, \mp 4\sqrt{u+4}, \mp 6\sqrt{u+9}$

سوال 15.6: $x = 0, 1, 2, 3$
جواب: $x = 0$ پر $v = 0, u < 0$ ہو گا جبکہ عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$v = 2x\sqrt{x^2 - u}, v = 0, \mp 2\sqrt{1-u}, \mp 4\sqrt{4-u}, \mp 6\sqrt{9-u}$$

سوال 15.7: $y = 1 + x$
جواب: $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ میں $y = 1 + x$ پر کرنے سے $u = -1 - 2x, v = 2x(1 + x)$ ملتا ہے۔ یوں $x = -\frac{1}{2}(1 + u)$ حاصل کرتے ہوئے $v = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$ حاصل ہو گا۔

سوال 15.8: $y = 1 - x$
جواب: $v = \frac{1}{2}(u + 1)(u + 3)$

سوال 15.9: $y^2 = 1 + x^2$
جواب: $u = -1$

سوال 15.10 تا سوال 15.15 میں نقش $w = z^2$ ہے۔ دیا گیا خطہ w سطح میں حاصل کرتے ہوئے w سطح میں دکھائیں۔

سوال 15.10: $|z| \geq 3$
جواب: $|w| \geq 9$

سوال 15.11: $|z| < 2$
جواب: $|w| < 4$

سوال 15.12: $\underline{/z} < \frac{\pi}{3}$
جواب: $\underline{/w} < \frac{2\pi}{3}$

سوال 15.13: $1 < x < 2$
جواب: قطع مکافی $v^2 = 4(1 - u)$ اور $v^2 = 16(4 - x)$ کے درمیان خطہ۔

سوال 15.14: $0 \le y \le 1$
جواب: قطع مکافی $v^2 = 4(1+u)$ اور مثبت u محور اور ان دونوں کے درمیان خطہ۔

سوال 15.15: $-\frac{\pi}{4} < \underline{/z} < \frac{\pi}{2}$
جواب: $-\frac{\pi}{2} < \underline{/w} < \pi$

سوال 15.16 تا سوال 15.21 میں دیے سیدھی لکیروں اور دائروں کا زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ عکس دریافت کریں۔

سوال 15.16: $|z| = 1$
جواب: $|w| = 1$

سوال 15.17: $|z+1| = 1$
جواب:

$$|z+1| = 1, \quad \left|\frac{1}{w} + 1\right| = 1, \quad |1+w| = |w|, |u+iv+1| = |u+iv|$$
$$(u+1)^2 + v^2 = u^2 + v^2, \quad u = -\frac{1}{2}$$

سوال 15.18: $|z+1| = 1$
جواب: $u = \frac{1}{2}$

سوال 15.19: $|z-i2| = 2$
جواب: $v = -\frac{1}{4}$

سوال 15.20: $y = x - 1$
جواب: $z = x + iy$ سے $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ اور $y = \frac{1}{i2}(z-\bar{z})$ لکھتے ہوئے $y = x - 1$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $z = \frac{1}{w}$ اور $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ کا استعمال کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $i2$ سے ضرب دیا گیا ہے۔

$$\frac{1}{i2}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) - 1, \quad z - \bar{z} = i(z+\bar{z}) - i2$$

اس میں $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $w\bar{w}$ سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = i\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) - i2, \quad \bar{w} - w = i(\bar{w} + w) - i2w\bar{w},$$
$$-i2v = i2u - i2w\bar{w}, \quad u^2 - u + v^2 - v = 0,$$
$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \left|w - \frac{1}{2}(1+i)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.21: $x=1$
جواب: $z=x+iy$ سے $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ لکھتے ہوئے $x=1$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $z=\frac{1}{w}$ اور $\bar{z}=\frac{1}{\bar{w}}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\frac{z+\bar{z}}{2}=1,\quad \frac{1}{w}+\frac{1}{\bar{w}}=2,\quad \bar{w}+w=2w\bar{w},\quad 2u=2(u^2+v^2),$$
$$u^2-u+v^2=0,\quad (u-\tfrac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4},\quad \left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

سوال 15.22: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ خطہ $-2<x<1, -1<y<1$ کا عکس تلاش کریں۔
جواب: وہ خطہ جس کے حدود $\left|w+\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ ، $\left|w+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ، $\left|w-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ اور $\left|w+\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ دائرے ہوں۔

سوال 15.23: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ خطہ $1<x<2$ کا عکس تلاش کریں۔
جواب: دائرہ $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ اور دائرہ $\left|w-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ کے درمیان خطہ۔

سوال 15.24: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ کن سیدھی لکیروں کا عکس سیدھی لکیریں اور کن کا عکس دائرے ہیں۔اسی طرح کن دائروں کا عکس دائرے اور کن کا عکس سیدھی لکیریں ہیں؟
جواب: اگر سیدھی لکیر $Bx+Cy+D=0$ میں $D=0$ ہو تب عکس سیدھی لکیر ہو گی ورنہ عکس دائرہ ہو گا۔اسی طرح اگر دائرہ $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ میں $D=0$ ہو تب عکس سیدھی لکیر ہو گی ورنہ عکس دائرہ ہو گا۔

سوال 15.25: دکھائیں کہ زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ دائرہ اور منعکس دائرہ عموماً ہم مرکز نہیں ہوں گے۔
جواب: دائرہ $|z-z_0|=r$ کا مرکز $z_0=x_0+iy_0$ ہے۔زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ اس دائرے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں تیسری قدم پر $|w_0-w|=|w-w_0|$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\left|\frac{1}{w}-\frac{1}{w_0}\right|=r,\quad \left|\frac{w_0-w}{ww_0}\right|=r,\quad |w-w_0|=r|ww_0|$$

اس دائرے کا مرکز $w_0=\frac{1}{z_0}$ ہے جو اصل دائرے کی مرکز z_0 سے مختلف ہے۔($z_0=1$ کی صورت میں $w_0=1$ ہو گا لہٰذا دائرہ اور عکس ہم مرکز ہوں گے۔)

سوال 15.26: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ نقطہ $3+i4$ کا عکس $\frac{1}{3+i4}$ جیومیٹریائی طریقے سے دریافت کریں۔

سوال 15.27: زاویائی خطہ $0 \le \underline{/z} \le \frac{\pi}{4}$ کا زیر نقش $w=z$ ، $w=iz$ ، $w=-iz$ ، $w=z^2$ ، $w=-z^2$ ، $w=-iz^2$ اور $w=z^3$ عکس دریافت کریں اور انہیں w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.28: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ ، $w=\frac{i}{z}$ ، $w=\frac{1}{z^2}$ اور $w=\frac{i}{z^2}$ سوال 15.27 میں دیے گئے خطے کا عکس تلاش کریں۔

سوال 15.29: ایسا نقش $w=u+iv=f(z)$ دریافت کریں جو آدھی سطح $x \ge 0$ کو خطہ $u \ge 2$ پر عکس کرے اور ساتھ ہی ساتھ نقطہ $z=0$ کو نقطہ $w=2+i$ پر عکس کرے۔
جواب: $w=z+2+i$

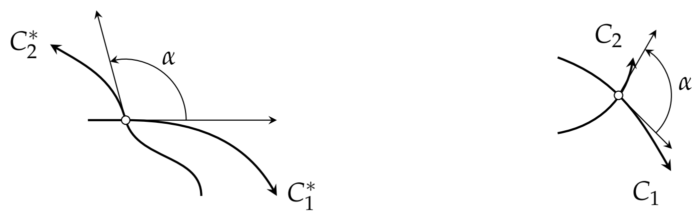
سوال 15.30: ایسا نقش $w=u+iv=f(z)$ تلاش کریں جو زاویائی خطہ $0<\underline{/z}<\frac{\pi}{3}$ کو خطہ $u<1$ پر عکس کرتا ہو۔
جواب: $w=iz^3$

15.2 محافظ زاویہ نقش

ہم اب تحلیلی تفاعل کی نقش کی اہم ترین خاصیت یعنی **محافظت زاویہ**[12] پر تبصرہ کرتے ہیں۔

سطح میں ایسا نقش جو سمت بند منحنیات کے درمیان زاویوں کی مقدار اور ان زاویوں کی مثبت سمت برقرار رکھتا ہو **محافظ زاویہ نقش**[13] کہلاتا ہے، یعنی دو سمت بند منحنیات کا زاویہ تقاطع اور اس زاویہ کی مثبت سمت، عکس کی (مطابقتی سمت بن) منحنیات کا زاویہ تقاطع اور اس زاویہ کی مثبت سمت ایک جیسے ہوں گے۔ یہاں دو منحنیات کے مابین زاویہ سے مراد ان کی نقطہ تقاطع پر مماثل کے مابین زاویہ $\alpha\ (0 \le \alpha \le \pi)$ ہے (شکل 15.10)۔

[12] conformality
[13] conformal



شکل 15.10: منحنیات C_1 اور C_2 کا محافظ زاویہ نقش میں عکس بالترتیب C_1^* اور C_2^* ہے۔

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ نقش $w = f(z)$ ان تمام نقطوں پر محافظ زاویہ ہے جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے، ماسوائے ان نقطوں پر جہاں تفرق $f'(z)$ کی قیمت صفر ہے۔ایسے نقطہ کو **نقطہ فاصل**[14] کہتے ہیں۔مثلاً $f(z) = z^2$ کی صورت میں $z = 0$ پر $f'(z) = 2z = 0$ ہے لہٰذا $z = 0$ پر نقش محافظ زاویہ نہیں ہے اور اس نقطہ پر زاویہ دگنا ہوتا ہے (مثال 15.2)۔

اس مقصد کے لئے ہمیں منحنیات اور ان کی عکس پر غور کرنا ہو گا۔مخلوط سطح z میں منحنی C کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$z(t) = x(t) + iy(t) \tag{15.10}$$

جہاں t حقیقی مقدار معلوم ہے۔مثال کے طور پر تفاعل

$$z(t) = r\cos t + ir\sin t$$

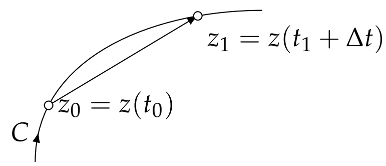
دائرہ $|z| = r$ کو ظاہر کرتا ہے جبکہ تفاعل

$$z(t) = t + it^2$$

قطع مکافی $y = x^2$ کو ظاہر کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔مساوات 15.10 میں بڑھتے t سے حاصل رخ کو منحنی پر **مثبت سمت**[15] کہتے ہیں۔یوں مساوات 15.10 منحنی C پر سمت بندی تعین کرتی ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 15.10 میں $z(t)$ قابل تفرق ہے اور تفرق $\dot{z}(t)$ استمراری اور ہر نقطے پر غیر صفر ہے۔تب C کے ہر نقطہ پر یکتا مماس پایا جائے گا اور C **ہموار منحنی**[16] کہلائے گی۔ C پر مثبت سمت کا مماس پر مطابقتی سمت اس مماس پر **مثبت سمت** کہلاتی ہے اور ایسا مماس **سمت بند** کہلاتا ہے۔

---

[14] critical point
[15] positive sense
[16] smooth curve



شکل 15.11: مساوات 15.11 کی استنباط

C پر $z_0 = z(t_0)$ اور $z_1 = z(t_1 + \Delta t)$ نقطوں سے گزرتی وہ تحدیدی سیدھی لکیر جو $\Delta z \to 0$ کرنے سے حاصل ہو، نقطہ z_0 پر C کی مماس کہلاتی ہے (حصہ 10.5 دیکھیں)۔ اب عدد $z_1 - z_0$ کو z_0 سے z_1 تک سمتیہ (شکل 15.11) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے اور $\frac{z_1 - z_0}{\Delta t}$ ، جہاں $\Delta t > 0$ ہے، کی مطابقتی سمتیہ کی وہی سمت ہو گی جو اس سمتیہ کی ہے۔یوں درج ذیل کا مطابقتی سمتیہ

$$\dot{z}(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \tag{15.11}$$

نقطہ z_0 پر C کا مماس ہو گا اور اس سمتیہ اور مثبت x محور کے مابین زاویہ $\underline{/\dot{z}(t_0)}$ ہو گا۔

اب ایسے غیر مستقل تحلیلی تفاعل $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ کی نقش پر غور کریں جو اس دائرہ کار میں معین ہو جس میں C پایا جاتا ہو۔اس نقش میں C کا عکس، سطح w میں منحنی C^* ہو گی یعنی:

$$w(t) = f[z(t)]$$

C^* پر نقطہ $w(t_0)$ کا مطابقتی نقطہ $z_0 = z(t_0)$ ہے اور $\dot{w}(t_0)$ اس نقطہ پر C^* کی مماسی سمتیہ ہے۔اب زنجیری قاعدہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{15.12}$$

لہٰذا $f'(z_0) \neq 0$ کی صورت میں ہم دیکھتے ہیں کہ $\dot{w}(t_0) \neq 0$ ہو گا اور $w(t_0)$ پر C^* کا یکتا مماس موجود ہو گا جو مثبت u محور کے ساتھ $\underline{/\dot{w}(t_0)}$ زاویہ بنائے گا۔چونکہ حاصل ضرب کی دلیل جزو ضربی کی دلیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے لہٰذا مساوات 15.12 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\underline{/\dot{w}(t_0)} = \underline{/f'(z_0)} + \underline{/\dot{z}(t_0)}$$

یوں زیر نقش نقطہ z_0 پر C کا سمتی مماس زاویہ

$$\underline{/\dot{w}(t_0)} - \underline{/\dot{z}(t_0)} = \underline{/f'(z_0)} \tag{15.13}$$

سے گھوم جائے گا جو C اور C^* کی مماسوں کے مابین زاویہ کے برابر ہے۔چونکہ مساوات 15.13 کا دایاں ہاتھ C کے غیر تابع ہے لٰہذا یہ زاویہ بھی C کی انتخاب کے تابع نہیں ہو گا۔یوں تبادل $w = f(z)$ نقطہ z_0 سے گزرتی ہوئی تمام منحنیات کی مماس کو ایک ہی زاویہ $\underline{/f'(z_0)}$ سے گھومائے گی۔اس طرح نقطہ z_0 سے گزرتی ایسی دو منحنیات جن کی مماس کے مابین ایک مخصوص زاویہ ہو کی عکس کی منحنیات کی مماس کے مابین بھی، نقطہ z_0 کے مطابقتی نقطہ w_0 پر، مقدار اور سمت دونوں میں، یہی مخصوص زاویہ ہو گا۔ اس سے درج ذیل بنیادی نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.1: **محافظ زاویہ نقش**
تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا نقش **محافظ** زاویہ ہے، ماسوائے ان نقطوں پر جہاں تفرق $f'(z)$ صفر کے برابر ہو۔

مثال 15.4: **محافظت زاویہ زیر** $w = z^2$
نقش $w = z^2$ محافظ زاویہ ہے ماسوائے نقطہ $z = 0$ پر جہاں $w' = 2z = 0$ ہے۔ شکل 15.4 اور شکل 15.6 میں دکھایا گیا ہے کہ عکسی منحنیات ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں ماسوائے $z = 0$ پر جہاں زاویے دگنا ہو جاتے ہیں یعنی اس نقطے پر سیدھے خط $\underline{/z} = c$ کا عکس سیدھا خط $\underline{/w} = 2c$ ہو گا (شکل 15.4)۔
□

مزید تفرق کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \left|f'(z_0)\right|$$

یوں نقش $w = f(z)$ چھوٹے قطعات کی لمبائی کو تقریباً $|f'(z_0)|$ گنا بڑھاتا ہے۔ کسی چھوٹے شکل کا عکس تقریباً اصل صورت برقرار رکھے گا۔چونکہ $f'(z_0)$ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر تبدیل ہوتا ہے لٰہذا وسیع شکل کا عکس عموماً اصل سے بہت مختلف ہو گا۔

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 14.40 اور کوشی ریمان مساوات سے

$$\left|f'(z)\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right| = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{15.14}$$

یعنی

$$\left|f'(z)\right|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \tag{15.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نقش $w = f(z)$ کی حقیقی روپ

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$$

استعمال کرتے ہوئے مقطع، **یعقوبی**[17] (حصہ 11.3) کو ظاہر کرتا ہے۔یوں شرط $f'(z_0) \neq 0$ سے مراد ہے کہ z_0 پر یعقوبی غیر صفر ہے۔اس شرط کی بنا نقش $w = f(z)$ کو کافی چھوٹی پڑوس میں محدود کرنے سے **ایک ایک مطابقتی**[18] نقش حاصل ہوتی ہے یعنی ہر انفرادی نقطے کا منفرد عکس پایا جاتا ہے۔اس حقیقت کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 15.5: نقش $w = z^2$ ماسوائے $z = 0$ کے، کافی چھوٹی پڑوس میں ایک ایک مطابقت رکھتا ہے۔نقطہ $z = 0$ کی پڑوس میں یہ نقش ایک ایک مطابقت نہیں رکھتا ہے۔پوری z سطح یوں w سطح پر نقش ہوتی ہے کہ w سطح کا ہر نقطہ $w \neq 0$ سطح z کی دو نقطوں کا عکس ہوتا ہے۔مثلاً $z = 1$ اور $z = -1$ دونوں $w = 1$ پر عکس ہوتے ہیں بلکہ z_1 اور $-z_1$ کا ایک ہی عکس $w = z_1^2$ ہو گا۔ □

محافظ زاویہ نقش کی عملی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ دو حقیقی متغیرات کی ہارمونی تفاعل محافظ زاویہ تبادل کے بعد نئی متغیرات کے لحاظ سے ہارمونی رہتا ہے (مسئلہ 15.2)۔ اس کے دور رس اثرات ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ہمیں دو بعدی نظریہ مخفی قوہ میں سرحدی مسئلہ حل کرنا ہو یعنی ہمیں دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل دائرہ کار D میں درکار ہو جو D کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ایسے موقع پر عین ممکن ہے کہ ہم ایسا محافظ زاویہ نقش استعمال کر پائیں جو D کو ایک سادہ خطہ D^* ، جیسے آدھی سطح یا دائری قرص، پر عکس کر سکے۔ ہم مساوات لاپلاس کے D^* کے لحاظ سے حل کا اسی نقش کے ذریعہ الٹ حاصل کرتے ہوئے اصل مسئلے کا حل تلاش کر پائیں گے۔یہ انتہائی طاقتور ترکیب درج ذیل مسئلہ کے تحت ممکن ہے۔

مسئلہ 15.2: **ہارمونی تفاعل اور محافظ زاویہ نقش**
تحلیلی تفاعل $w = f(z)$ کی، ایک ایک مطابقتی، محافظ زاویہ تبادل سے ہارمونی تفاعل $h(x,y)$ ، تبدیل شدہ متغیرات کے لحاظ سے ہارمونی رہتا ہے۔

---

[17] Jacobian
[18] one to one

ثبوت : **پہلا ثبوت جوڑی دار ہارمونی تفاعل کی موجودگی فرض کرتا ہے**
فرض کریں کہ دائرہ کار D میں ہارمونی تفاعل $h(x,y)$ ہے اور D میں $h(x,y)$ کا جوڑی دار[19] ہارمونی تفاعل $g(x,y)$ ہے، نتیجتاً $h+ig$ دائرہ کار D میں $z=x+iy$ کا تحلیلی تفاعل $H(z)$ ہو گا۔ ہم فرض کر چکے ہیں کہ نقش $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ایک ایک مطابقتی اور محافظ زاویہ ہے لہٰذا D کا عکس D^* دائرہ کار ہے؛ ساتھ ہی D میں $f'(z)\neq 0$ ہے اور الٹ تفاعل $z=F(w)$ جو D^* کو واپس D پر عکس کرتا ہو موجود ہے۔ D^* میں $F(w)$ تحلیلی ہے: یقیناً اس کا تفرق درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}=\frac{1}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}z}$$

اس کلیہ کا ثبوت حقیقی علم الاحصاء کی طرح ہے۔یوں $H[F(w)]$ دائرہ کار D^* میں w کا تحلیلی تفاعل ہو گا۔اس کا حقیقی جزو $h[x(u,v),y(u,v)]$ ہو گا جو D^* میں u اور v کا ہارمونی تفاعل ہے۔

□

ثبوت : **دوسرا ثبوت بلا جوڑی دار ہارمونی تفاعل**
فرض کریں کہ D میں $h(x,y)$ ہارمونی ہے۔پہلے کی طرح ہم اب بھی $z=x+iy=F(w)$ استعمال کرتے ہوئے $h[x(u,v),y(u,v)]$ حاصل کرتے ہیں۔ہم اپنی آسانی کی خاطر، اس تفاعل، جو u اور v کا تابع ہے، کو دوبارہ h سے ہی ظاہر کرتے ہیں اور دکھاتے ہیں کہ D^* میں یہ ہارمونی ہے جہاں D^* زیر نقش $w=f(z)$ دائرہ کار D کا عکس ہے۔ہم زنجیری قاعدہ بروئے کار لاتے ہیں

$$h_x=h_uu_x+h_vv_x$$

جہاں زیر نوشت میں x اور y تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔ہم زنجیری قاعدہ ایک بار دوبارہ استعمال کرتے ہیں اور ان ارکان کے نیچے خط کھینچتے ہیں جو $h_{xx}+h_{yy}$ مجموعہ حاصل کرتے وقت آپس میں کٹ جائیں گے۔

$$h_{xx}=\underline{h_uu_{xx}}+(h_{uu}u_x+\underline{h_{uv}v_x})u_x+\underline{h_vv_{xx}}+(\underline{h_{vu}u_x}+h_{vv}v_x)v_x$$

بالکل اسی طرح ہم h_{yy} حاصل کر سکتے ہیں جو درج بالا میں x کی جگہ y اور y کی جگہ x لکھنے سے حاصل ہو گا۔ان دونوں کا مجموعہ $h_{xx}+h_{yy}$ ہمیں درکار ہے۔اب چونکہ $w=u+iv$ تحلیلی ہے لہٰذا مسئلہ 14.3 کے تحت

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=0$$

[19] حصہ 14.5 دیکھیں۔ہم بغیر ثبوت دیے بتانا چاہتے ہیں کہ اگر D سادہ تعلق (تعریف حصہ 11.12) والا خطہ ہو تب جوڑی دار ہارمونی تفاعل موجود ہو گا۔

ہو گا اور ساتھ ہی مجموعہ میں $h_{vu} = h_{uv}$ کو

$$u_x v_x + u_y v_y$$

ضرب کرتا ہے جو مساوات کوشی ریمان کے تحت صفر کے برابر ہے۔یوں مجموعہ

$$h_{xx} + h_{yy} = h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(v_x^2 + v_y^2)$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات کوشی ریمان کی مدد سے

$$(h_{uu} + h_{vv})(u_x^2 + v_x^2)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 15.14 استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left| f'(z) \right|^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right) \tag{15.16}$$

حاصل ہوتا ہے۔محافظت زاویہ کی وجہ سے $f'(z) \neq 0$ ہے اور ہم فرض کر چکے ہیں کہ D میں بایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا قوسین میں بند حصہ D^* میں لازماً صفر کے برابر ہو گا۔

□

نظریہ مخفی قوہ میں محافظ زاویہ نقش کی ترکیب استعمال کرنے میں سب سے مشکل قدم اس نقش کا جاننا ہے جو دیے گئے خطہ کو سادہ خطہ پر نقش کرتا ہو۔اس کے لئے ہمیں تجربہ درکار ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ بنیادی تحلیلی تفاعل کی خواص نقش کی گہری سمجھ ضروری ہو گی۔اس ضرورت کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم اہم ترین بنیادی تحلیلی تفاعل پر غور کریں گے۔

سوالات

سوال 15.31: تحلیلی تفاعل کی نقش میں منحنیات $c =$ مستقل $= |z|$ اور $c^* =$ مستقل $= \underline{/z}$ کیوں ایک دوسرے کو $90°$ درجہ پر قطع کرتی ہیں؟

جواب: چونکہ محافظ زاویہ نقش میں زاویے تبدیل نہیں ہوتے ہیں۔

سوال 15.32: ایسا نقطہ جہاں $f'(z) \neq 0$ ہو پر تحلیلی تفاعل $w = u + iv = f(z)$ کی ہموار منحنیات $u = $ مستقل $= c$ اور $v = $ مستقل $= c^*$ کیوں ایک دوسرے کو $90°$ پر قطع کرتی ہیں؟

سوال 15.33: کیا نقش $w = \bar{z} = x - iy$ زاویوں کی مقدار اور مثبت سمت برقرار رکھتا ہے؟
جواب: نہیں۔مقدار برقرار رہتا ہے لیکن مثبت سمت الٹ ہوتی ہے۔

سوال 15.34 تا سوال 15.39 میں دیے منحنیات کو z سطح $(z = x + iy)$ میں $z = z(t)$ روپ میں لکھیں۔

سوال 15.34: $x^2 + y^2 = 4$
جواب: $z(t) = 2\cos t + i2\sin 2$

سوال 15.35: $y = \frac{1}{x}$
جواب: $z(t) = t + \frac{i}{t}$

سوال 15.36: $y = 3x^2$
جواب: $z(t) = t + i3t^2$

سوال 15.37: $x^2 - y^2 2 = 1$
جواب: $z(t) = \cosh t + i\sinh t$

سوال 15.38: $y = ax + b$
جواب: $z(t) = t + i(at + b)$

سوال 15.39: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
جواب: $z(t) = -2 + 4\cos t + i(3 + 4\sin t)$

سوال 15.40 تا سوال 15.45 میں ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں نقش $w = f(z)$ محافظ زاویہ نہیں ہے۔ $f(z)$ سوال میں دیا گیا ہے۔

سوال 15.40: z^3
جواب: $z = 0$

سوال 15.41: $\cos z$
جواب: $z = n\pi, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$

سوال 15.42: $(z \neq 0) \quad z + \frac{1}{z}$
جواب: $z = \mp 1$

سوال 15.43: e^{z^2}
جواب: $z = 0$

سوال 15.44: $z^3 - z^2$
جواب: $z = 0, \frac{2}{3}$

سوال 15.45: $az^2 + bz + c$
جواب: $z = -\frac{b}{2a}$

سوال 15.46 تا سوال 15.49 میں درج ذیل تفاعل $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ کے لئے مساوات 15.15 کی تصدیق کریں۔

سوال 15.46: e^z

سوال 15.47: $\sin z$

سوال 15.48: $\cos z$

سوال 15.49: $z^2 - 4z$

سوال 15.50: مسئلہ 15.2 کی دوسری ثبوت میں ہر مساوات کو تفصیلاً لکھیں۔

سوال 15.51: مسئلہ 15.2 کی تصدیق $f(z) = 2z + 1$، $h(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ کے لئے کریں۔

15.3 خطی کسری تبادل

خطی کسری تبادل[20] **یا موبیوس تبادل**[21] سے مراد درج ذیل روپ کی تبادل ہے

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc \neq 0) \tag{15.17}$$

جہاں مستقل a ، b ، c ، d حقیقی یا مخلوط اعداد ہو سکتے ہیں۔شرط $ad-bc \neq 0$ سمجھنے کی خاطر مساوات 15.17 کا تفرق

$$w' = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

لیتے ہیں۔اب $ad-bc \neq 0$ سے مراد $w' \neq 0$ ہے جو محافظ زاویہ نقش دے گا جبکہ $ad-bc = 0$ غیر دلچسپ صورت $w' \equiv 0$ یا $c =$ مستقل $= w$ دے گا جس پر مزید کوئی بحث نہیں کی جائے گی۔

مساوات 15.17 کی مخصوص صورتیں مثلاً مستقیم حرکت

$$w = z+b \tag{15.18}$$

گھومنا اور پھیلاو یا سکڑاو

$$w = az \tag{15.19}$$

الٹ جانے کے بعد x محور میں انعکاس

$$w = \frac{1}{z} \tag{15.20}$$

اور خطی تبادل

$$w = az+b \tag{15.21}$$

پر ہم بحث کر چکے ہیں۔

مبسوط مخلوط سطح۔ یہ ایک اہم معاملہ ہے جس کو مساوات 15.17 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے۔مساوات 15.17 کے تحت $cz+d \neq 0$ کی صورت میں ہر z کا مطابقتی یکتا مخلوط عدد $w = az+b$ ہو گا۔فرض کریں کہ

[20] linear fractional transformation
[21] Mobius transformation

$c \neq 0$ ہے۔تب $z = -\frac{d}{c}$، جس کے لئے $cz + d = 0$ ہے، کا مطابقتی کوئی عدد w نہیں ہو گا۔اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم w سطح کے ساتھ ایک "غیر مناسب نقطہ" منسلک کریں۔ اس نقطہ کو **لامتناہی پر نقطہ**[22] کہتے ہیں جس کو ∞ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مخلوط سطح بشمول ∞ کو **مبسوط مخلوط سطح**[23] کہتے ہیں۔لامتناہی پر نقطہ کے بغیر مخلوط سطح کو **متناہی مخلوط سطح**[24] کہتے ہیں۔ہم اب $w = \infty$ کو زیر نقش مساوات 15.17 نقطہ $z = -\frac{d}{c}$ $(d \neq 0)$ کا عکس تصور کرتے ہیں۔اگر مساوات 15.17 میں $c = 0$ ہو تب $a \neq 0$ اور $d \neq 0$ (کیوں؟[25]) کی صورت میں $w = \infty$ کو مبسوط مخلوط z سطح کی غیر مناسب نقطہ $z = \infty$ کا عکس تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 15.17 کا الٹ نقش حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.17 کو z کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \tag{15.22}$$

جب $c \neq 0$ ہو تب $cw - a = 0$ نقطہ $w = \frac{a}{c}$ پر ہو گا، اور ہم $w = \frac{a}{c}$ کو $z = \infty$ کا مطابقتی نقطہ تصور کریں گے۔اس کے برعکس اگر $c = 0$ ہو تب $a \neq 0$ ، $d \neq 0$ ہوں گے[26] اور ہم $w = \infty$ کو نقطہ $z = \infty$ کا عکس تصور کریں گے۔اس طرح مساوات 15.17 مبسوط z سطح کی ایک ایک مطابقتی عکس مبسوط w سطح دے گی؛ ہم کہتے ہیں کہ ہر خطی کسری تبادل مساوات 15.17 مبسوط سطح کو ایک ایک مطابقت کے ساتھ اپنے آپ پر عکس کرتی ہے۔

ہماری موجودہ گفتگو سے درج ذیل کہا جا سکتا ہے۔

عمومی رائے۔ $z = \infty$ کی صورت میں مساوات 15.17 بے معنی صورت $\frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d}$ اختیار کرتی ہے۔ہم $c \neq 0$ کی صورت میں اس کو $w = \frac{a}{c}$ تصور کرتے ہیں جبکہ $c = 0$ کی صورت میں ہم اس کو $w = \infty$ تصور کرتے ہیں۔

مقررہ نقطہ۔ نقش $w = f(z)$ کے **مقررہ نقطہ**[27] سے مراد ایسا نقطہ ہے جس کا عکس یہی مخلوط عدد ہو۔یوں مقررہ نقطہ کو درج ذیل مساوات

$$w = f(z) = z$$

[22] point at infinity
[23] extended complex plane
[24] finite complex plane
[25] اس لئے کہ اگر $c = 0$ ہو تب صرف $a \neq 0$ اور $d \neq 0$ کی صورت میں مساوات 15.17 محافظ زاویہ نقش دیتی ہے۔
[26] چونکہ حافظ زاویہ نقش صرف انہیں شرائط کو پورا کرنے سے حاصل ہو گا۔
[27] fixed point

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 15.17 کا مقررہ نقطہ

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

یعنی

$$cz^2 - (a-d)z - d = 0 \tag{15.23}$$

سے

$$z = \frac{a-d \mp \sqrt{(a-d)^2+4b}}{2}$$

حاصل ہوں گے البتہ $a = d \neq 0$ ، $b = c$ کی صورت میں درج بالا دو درجی مساوات (نا قابل حل ہو گا اور اس) کے تمام عددی سر صفر ہوں گے، اور مساوات 15.17 مماثل تبادل $w = z$ دے گی۔اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.3: **مقررہ نقطہ**
ایک خطی کسری تبادل، نا کہ مماثل تبادل، کے زیادہ سے زیادہ دو مقررہ نقطے ہوں گے۔ایسا خطی کسری تبادل جس کے تین یا تین سے زائد مقررہ نقطے ہوں لازماً مماثل تبادل ہو گا۔

عملاً اہم مخصوص خطی کسری تبادل اور خطی کسری تبادل کی مزید عمومی خصوصیات پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 15.52 تا سوال 15.61 میں دیے نقش کے مقررہ نقطے تلاش کریں۔

سوال 15.52: $w = iz$
جواب: $iz = z, \quad z(i-1) = 0, \quad z = 0$

سوال 15.53: $w = iz - 3$
جواب: $z = -\frac{3}{2}(1+i)$

سوال 15.54: $w=z^2$
جواب: $z=0,1$

سوال 15.55: $w=(z+1+i)^2$
جواب: $z=-1,-i2$

سوال 15.56: $w=z^3$
جواب: $z=0,\mp 1$

سوال 15.57: $w=-z^3$
جواب: $z=0,\mp i$

سوال 15.58: $w=-iz^2$
جواب: $z=0,i$

سوال 15.59: $w=\frac{2z-1}{z+2}$
جواب: $z=\mp i$

سوال 15.60: $w=\frac{5z+4}{z+5}$
جواب: $z=\mp 2$

سوال 15.61: $w=\frac{i3z-1}{z+i3}$
جواب: $z=\mp i$

سوال 15.62 تا سوال 15.64 میں ایسا نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے سوال میں دیے گئے ہیں۔

سوال 15.62: $i,-i$
جواب: $w=\frac{az+b}{a-bz}$ ملتا ہے جس میں $a=0$ پر کرنے سے درکار جواب $w=-\frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔آپ تسلی کر لیں کہ $b=0$ پر کرنے سے $w=z$ ملتا ہے جو مماثل نقش ہے یعنی ہر نقطہ اس کا مقررہ نقطہ ہے۔

سوال 15.63: $1,-1$
جواب: $w=\frac{az+b}{bz+a}$ ملتا ہے جس میں $a=0$ پر کرنے سے $w=\frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.64: 1
جواب: $a+b=c+d$ میں $b=c=0,\ a=d=1$ پر کرنے سے $w=z$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.65: ایسے تمام نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے $z = i, -i$ ہوں۔
جواب: $w = \frac{az+b}{a-bz}$

سوال 15.66: ایسے تمام نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے $z = 1, -1$ ہوں۔
جواب: $w = \frac{az+b}{bz+a}$

سوال 15.67: ایسا نقش تلاش کریں جس کا متناہی سطح میں کوئی بھی مقررہ نقطہ نہ ہو۔(اشارہ: مساوات 15.23 استعمال کریں۔)
جواب: تمام مستقیم حرکت

15.4 مخصوص خطی کسری تبادل

اس حصے میں چند سادہ دائرہ کار کو دوسرے دائرہ کار پر عکس کرنے کے لئے درکار خطی کسری تبادل

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0) \tag{15.24}$$

کے حصول پر غور کیا جائے گا اور مساوات 15.24 کی خصوصیات پر بحث کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔ ایسا درج ذیل کی مدد سے ممکن ہو گا۔

مسئلہ 15.4: **دائرے اور سیدھی لکیریں**
ہر خطی کسری تبادل مساوات 15.24 z سطح کی تمام دائروں اور سیدھی لکیروں کو w سطح کی تمام دائروں اور سیدھی لکیروں پر عکس کرتا ہے۔

ثبوت: مستقیم حرکت اور گھومنے سے کوئی شکل تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا ثبوت کی ضرورت نہیں ہے، یکساں پھیلاو یا سکڑاو کی صورت میں بھی صاف ظاہر ہے کہ دائرے اور سیدھی لکیریں اپنی شکلیں بر قرار رکھیں گی لہٰذا ثبوت کی ضرورت نہیں ہے۔ نقش $w = \frac{1}{z}$ کو ہم مثال 15.3 میں دیکھ سکے ہیں۔ان تمام کی مرکب کے لئے بھی ایسا ہی ہو

گا۔یوں $c \neq 0$ کی صورت میں یہ مساوات 15.24 کے لئے درست ہو گا چونکہ تب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا

$$w = K\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c} \qquad (K = -\frac{ad-bc}{c}) \tag{15.25}$$

جس میں درج ذیل

$$w_1 = cz, \quad w_2 = w_1 + d, \quad w_3 = \frac{1}{w_2}, \quad w_4 = Kw3$$

پر کرتے ہوئے $w = w_4 \frac{a}{c}$ لکھا جا سکتا ہے۔اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ مساوات 15.24 درحقیقت مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 میں دیے گئے مخصوص تبادل کا مرکب ہے۔

□

خطی کسری تبادل مساوات 15.24 حقیقتاً صرف تین مستقل، یعنی a ، b ، c ، d میں سے کسی ایک کا باقی تینوں کے ساتھ نسبت، پر منحصر ہے۔اس ضرورت کی کہ، z سطح میں کسی تین منفرد نقطوں کا w سطح میں مخصوص عکس ہوں، سے یکتا خطی کسری تبادل حاصل ہوتا ہے یعنی:

مسئلہ 15.5: تین نقطے جن کا عکس دیا گیا ہو
تین منفرد نقطوں z_1 ، z_2 ، z_3 کو تین منفرد نقطوں w_1 ، w_2 ، w_3 پر صرف اور صرف ایک عدد خطی کسری تبادل $w = f(z)$ کے ذریعہ عکس کیا جا سکتا ہے۔یہ تبادل درج ذیل خفی مساوات دیتی ہے۔

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \tag{15.26}$$

(اگر ان میں سے ایک نقطہ ∞ ہو تب ان دو فرق کا کسر جن میں یہ نقطہ پایا جاتا ہو کی جگہ 1 لکھا جائے گا۔)

ثبوت: مساوات 15.26 کی روپ $F(w) = G(z)$ ہے جہاں F اور G متعلقہ متغیرات کے خطی کسری تبادل ہیں۔اس سے ہم $w = f(z) = F^{-1}[G(z)]$ لکھ سکتے ہیں جہاں F^{-1} سے مراد F کا الٹ تبادل ہے۔چونکہ خطی کسری تبادل اور خطی کسری تبادلوں کا مرکب بھی خطی کسری تبادل ہوتے ہیں (سوال 15.70) لہٰذا $w = f(z)$ خطی کسری تبادل ہو گا۔مزید مساوات 15.26 سے درج ذیل ملتے ہیں۔

$$F(w_1) = 0, \quad F(w_2) = 1, \quad F(w_3) = \infty$$
$$G(z_1) = 0, \quad G(z_2) = 1, \quad G(z_3) = \infty$$

یوں $w_1 = f(z_1)$ ، $w_2 = f(z_2)$ ، $w_3 = f(z_3)$ ہوں گے۔اس سے ایسے تبادل $w = f(z)$ کی موجودگی ثابت ہوتی ہے جو z_1 ، z_2 ، z_3 کو بالترتیب w_1 ، w_2 ، w_3 پر عکس کرتا ہو۔

ہم ثابت کرتے ہیں کہ نقش $w = f(z)$ یکتا ہے۔فرض کریں کہ $w = g(z)$ دوسرا خطی کسری تبادل ہے جو z_1 ، z_2 ، z_3 کو بالترتیب w_1 ، w_2 ، w_3 پر عکس کرتا ہے۔ تب اس کا الٹ $g^{-1}(w)$ نقاط w_1 ، w_2 ، w_3 کو بالترتیب z_1 ، z_2 ، z_3 پر عکس کرے گا لہٰذا مرکب تبادل $H = g^{-1}[f(z)]$ نقاط z_1 ، z_2 ، z_3 کو اپنے آپ پر عکس کرے گا۔اس طرح اس کے تین مقررہ نقطے ہوں گے۔یوں مسئلہ 15.3 کے تحت H مماثلی نقش ہو گا لہٰذا $g(z) \equiv f(z)$ ہو گا۔

مسئلے کا آخری جملہ گزشتہ حصے میں عمومی رائے کی بنا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

نصف سطحوں کا اقراص پر نقش۔ یہ عملاً اہم نقش ہے جو مخفی قوہ کے مسائل کے علاوہ دیگر جگہوں پر کام آتا ہے۔آئیں بالائی نصف سطح $y \geq 0$ کو اکائی قرص $|w| \leq 1$ پر نقش کریں۔ x محور بالائی سطح کی سرحد ہے اور ظاہر ہے کہ اس کو اکائی دائرہ $|z| = 1$ پر نقش کرنا ہو گا۔اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم x محور پر تین نقطے منتخب کرتے ہوئے انہیں اکائی دائرے پر اپنی مرضی کے تین نقطوں پر نقش کریں اور مسئلہ 15.5 کا اطلاق کریں۔پس دھیان کرنا ہو گا کہ نصف سطح $y \geq 0$ اکائی دائرے کے اندر نا کہ باہر نقش ہو۔

مثال 15.6: نصف سطح کا اکائی قرص پر نقش

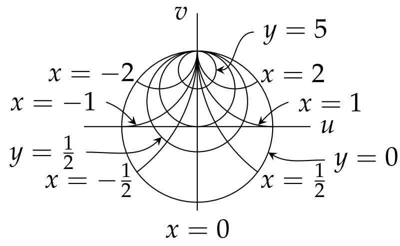
ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو $z_1 = -1$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = 1$ کو بالترتیب $w_1 = -1$ ، $w_2 = -i$ ، $w_3 = 1$ پر عکس کرتا ہو۔

حل: مساوات 15.26 سے

$$\frac{w-(-1)}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-1-(-1)} = \frac{z-(-1)}{z-1} \cdot \frac{0-1}{0-(-1)}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل نقش حاصل ہوتا ہے۔

$$w = \frac{z-i}{-iz+1} \tag{15.27}$$



شکل 15.12: خطی کسری نقش برائے مثال 15.6

آئیں دیکھتے ہیں کہ اس نقش کے مخصوص خصوصیات بغیر زیادہ کوشش دریافت کیے جا سکتا ہے۔سیدھی لکیریں مستقل $= x$ اور مستقل $= y$ کے نقش حاصل کرتے ہیں۔ اب $z = i$ نقطہ $w = 0$ کا مطابقتی نقطہ ہے جبکہ $z = \infty$ کا مطابقتی نقطہ $w = i$ ہے۔اب اگر $z = iy$ ہو تب $w = \frac{i(y-1)}{y+1}$ ہو گا؛ یعنی مثبت خیالی محور کا عکس $u = 0, \ -1 \geq v \geq 1$ ہو گا۔اب چونکہ نقش محافظ زاویہ ہے اور سیدھی لکیروں کو عکس سیدھی لکیریں یا دائرے ہوں گے لہٰذا لکیر مستقل $= y$ کا نقش نقطہ $z = \infty$ سے گزرتا دائرے ہوں گی یعنی $w = i$ سے گزرتے ہوئے دائرے جن کا مرکز v محور پر ہو گا۔ اسی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا لکیریں مستقل $= x$ ایسی دائروں پر نقش ہوں گی جو مستقل $= y$ کی عکس کی عمودی ہوں (شکل 15.12)۔نچلا نصف سطح اکائی دائرہ $|w| = 1$ کی باہر ہو گا۔ □

مثال 15.7: **نقطہ ∞**

ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو $z_1 = 0$ ، $z_2 = 1$ ، $z_3 = \infty$ کو بالترتیب $w_1 = -1$ ، $w_2 = -i$ ، $w_3 = 1$ پر عکس کرتا ہو۔

حل: مساوات 15.26 سے

$$\frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{i+1} = \frac{z-0}{z-\infty} \cdot \frac{1-\infty}{1-0} = \frac{1-\infty}{z-\infty} \cdot \frac{z-0}{1-0}$$

لکھ کر $\frac{1-\infty}{z-\infty}$ کی جگہ 1 پر کرتے ہوئے

$$\frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{i+1} = 1 \cdot \frac{z-0}{1-0}$$

حاصل کرتے ہیں جس سے درج ذیل نقش ملتا ہے۔

$$w = \frac{z-i}{z+i} \tag{15.28}$$

□

نصف سطحات کا نصف سطحات پر نقش۔ عملی اہمیت کا یہ دوسرا نقش ہے جس پر غور کرتے ہیں۔ہم بالائی نصف سطح $y \geq 0$ کو بالائی نصف سطح $v \geq 0$ پر عکس کرتے ہیں۔یوں x محور کو u محور پر نقش کیا جائے گا۔

مثال 15.8: **نصف سطح کا نصف سطح پر نقش**
ایسا خطہ کسری نقش تلاش کریں جو $z_1 = -2$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = 2$ کو بالترتیب $w_1 = \infty$ ، $w_2 = \frac{1}{4}$ ، $w_3 = \frac{3}{8}$ پر نقش کرے۔
حل: جیسا آپ خود معلوم کر سکتے ہیں درکار نقش درج ذیل ہے۔ x محور کا عکس کیا ہو گا؟

$$w = \frac{z+1}{2z+4} \tag{15.29}$$

□

اقراص کا اقراص پر نقش۔ عملی استعمال کے نقش کی یہ تیسری قسم ہے۔ہم z سطح میں اکائی قرص کو w سطح میں اکائی قرص پر نقش کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا جو نقطہ z_0 کو اکائی قرص کی مرکز $w = 0$ پر نقش کرتا ہے (سوال 15.72)۔

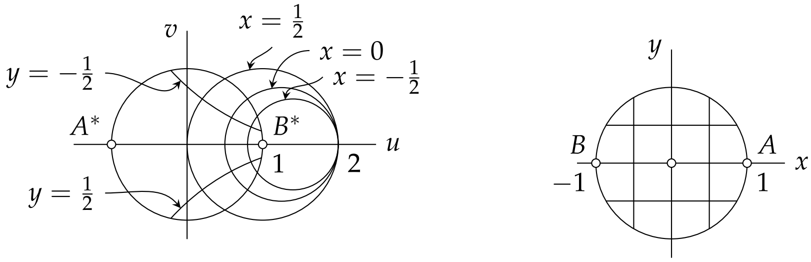
$$w = \frac{z - z_0}{cz - 1}, \quad c = \bar{z}_0, \quad |z_0| < 1 \tag{15.30}$$

مثال 15.9: **اکائی قرص کا اکائی قرص پر عکس**
فرض کریں کہ $z_0 = \frac{1}{2}$ ہے۔یوں مساوات 15.30 سے

$$w = \frac{2z-1}{z-2}$$

حاصل ہو گا۔ حقیقی محور کا نقش حقیقی محور ہی ہے۔بالخصوص

$$w(-1) = 1, \quad w(0) = \frac{1}{2}, \quad w(1) = -1$$



شکل 15.13: نقش برائے مثال 15.9

ہیں۔چونکہ نقش محافظ زاویہ ہے اور سیدھی لکیروں کا نقش سیدھی لکیریں یا دائرے ہوں گی اور $w(\infty) = 2$ ہے لہٰذا مستقل $= x$ لکیروں کے عکس نقطہ $w = 2$ سے گزرتی دائرے ہوں گی جن کے مراکز u محور پر ہوں گے۔ مستقل $= y$ کے نقش متذکرہ بالا کی عمودی ہوں گی (شکل 15.13)۔ □

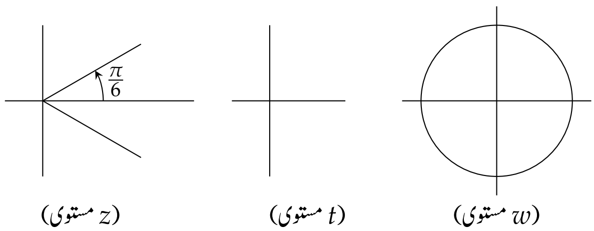
زاویائی خطہ کا اکائی قرص پر نقش حاصل کرنے کی خاطر خطی کسری نقش کے ساتھ $w = z^n$ روپ کا تبادل استعمال کرنا ہو گا جہاں $n > 1$ ہو گا۔

مثال 15.10: زاویائی خطہ کا اکائی قرص پر نقش
زاویائی خطہ $D : -\frac{\pi}{6} \le \angle z \le \frac{\pi}{6}$ کا اکائی قرص $|w| \le 1$ پر نقش تلاش کریں۔
حل: ہم پہلے نقش $t = z^3$ کے ذریعہ دیے گئے زاویائی خطے کو دایاں نصف t سطح پر نقش کرتے ہیں۔اس کے بعد خطی کسری نقش مثلاً

$$w = i\frac{t-1}{t+1}$$

کی مدد سے اس نصف سطح کو اکائی قرص پر نقش کرتے ہیں۔درج بالا میں $t = z^3$ پر کرتے ہوئے درکار نقش

$$w = i\frac{z^3-1}{z^3+1}$$



شکل 15.14: نقش برائے مثال 15.10

حاصل ہوتی ہے (شکل 15.14)۔ □

سوالات

سوال 15.68: نقش $w=\frac{z+i}{iz+4}$ کو مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 کے مرکب کے طور پر لکھیں۔
جواب: مساوات 15.25 سے $K=-\frac{5}{i}=i5$ اور $w=\frac{i5}{iz+4}+\frac{1}{i}$ لکھ کر درج ذیل ملتا ہے۔
$w_1=iz,\, w_2=w_1+4,\, w_3=\frac{1}{w_2},\, w_4=i5w_3,\, w=w_4+\frac{1}{i}=w_4-i$

سوال 15.69: مسئلہ 15.4 کو $w=az,\ a\neq 0$ کے لئے ثابت کریں۔

سوال 15.70: دکھائیں کہ دو خطی کسری تبادل کا مجموعہ بھی خطی کسری تبادل ہو گا۔

سوال 15.71: مساوات 15.28 میں دیے نقش کو مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 کے مرکب کے طور پر لکھیں۔
جواب: $w=-i2\frac{1}{z+i}+1$

سوال 15.72: مسئلہ 15.5 سے مساوات 15.30 حاصل کریں۔

سوال 15.73: ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو $|z|\leq 1$ کو $|w|\leq 1$ پر اور نقطہ $z=\frac{i}{4}$ کو $w=0$ پر نقش کرتا ہو۔ سیدھی لکیریں $x=$ مستقل اور $y=$ مستقل کی عکس کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: $w=\frac{4z-i}{-iz-4}$

سوال 15.74: مساوات 15.27 کا الٹ دریافت کریں۔ دکھائیں کہ مساوات 15.27 سیدھی $x =$ مستقل لکیروں کو ایسی دائروں پر نقش کرتا ہے جن کا مرکز $v = 1$ پر ہوتا ہے۔

سوال 15.75 تا سوال 15.84 میں ایسا نقش تلاش کریں جو

سوال 15.75: $z : 0, 1, \infty$ کو بالترتیب $w : \infty, 1, 0$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{1}{z}$

سوال 15.76: $z : 0, 1, i$ کو بالترتیب $w : 2, 3, 2+i$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = z + 2$

سوال 15.77: $z : 0, 1, 2$ کو بالترتیب $w : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{4-z}{2z+4}$

سوال 15.78: $z : -1, 0, 1$ کو بالترتیب $w : 0, 1, \infty$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{z+1}{1-z}$

سوال 15.79: $z : 0, i, i2$ کو بالترتیب $w : \infty, -1, 1$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{3z-i4}{z}$

سوال 15.80: $z : 0, 1, 2$ کو بالترتیب $w : -1, -i, 1$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = -\frac{z-1-i}{iz-1-i}$

سوال 15.81: $z : -i, 0, i$ کو بالترتیب $w : \infty, -1, 1$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{3z-i}{z+i}$

سوال 15.82: $z : -1, 0, i$ کو بالترتیب $w : -1, 1, 1+i$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{z(3+i2)+2+i}{z+2+i}$

سوال 15.83: $z : -1, 0, -i$ کو بالترتیب $w : 1, 0, i$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = -z$

سوال 15.84: $z : 0, 1, \infty$ کو بالترتیب $w : \infty, 1+i, 2$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{2z-1+i}{z}$

سوال 15.85 تا سوال 15.87 میں ایسے تمام خطی کسری نقش تلاش کریں جن کی خاصیت دی گئی ہے۔

سوال 15.85: $z_1 = 0$ مقررہ نقطہ ہے۔
جواب: $w = \frac{az}{cz+d}$

سوال 15.86: $z_1 = 0$ اور $z_2 = \infty$ مقررہ نقطے ہیں۔
جواب: z_1 کے لئے حل کرتے ہوئے $b = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ z_2 کے لئے $\infty = \frac{a\infty}{c\infty+d}$ لکھا جائے گا۔ صفحہ 1126 پر عمومی رائے استعمال کرتے ہوئے $c = 0$ چنتے ہوئے $\infty = \infty$ لکھا جائے گا جس سے مزید کوئی معلومات فراہم نہیں ہوتی۔ یوں $b = 0$ اور $c = 0$ استعمال کرتے ہوئے درکار نقش $w = \frac{az}{d} = a^*z$ ملتا ہے۔ اگر ہم $c \neq 0$ لیتے تب عمومی رائے سے $\frac{a}{c} = \infty$ لکھا جاتا جو $c = 0$ دیتا ہے۔

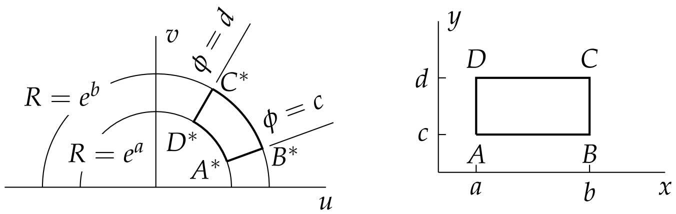
سوال 15.87: x محور کا عکس u محور ہے۔
جواب: تمام چار عددی سر حقیقی ہیں۔ (تمام عددی سر میں یکساں مخلوط جزو ضربی بھی ممکن ہے۔)

سوال 15.88: ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے -1 اور 1 ہوں اور جو 0 کو ip پر نقش کرتا ہو جہاں p حقیقی ہے۔ بتلائیں کہ $p = 0$ اور $p - 1$ کی صورتوں میں کیسے نقش حاصل ہوں گے۔
جواب: $w = \frac{z+ip}{ipz+1}$ جو $p = 0$ کی صورت میں مماثل نقش $w = z$ دیتا ہے جبکہ $p = 1$ کی صورت میں $w = \frac{z+i}{iz+1}$ دیتا ہے جو نصف سطح کو اکائی دائرے کے اندر عکس کرتا ہے۔

سوال 15.89: ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو ربع دوم کو w سطح میں اکائی دائرے کی اندرون پر عکس کرتا ہو۔
جواب: $w = -\frac{z^2+1}{iz^2+1}$

سوال 15.90: ایسا خطی کسری نقش $w = f(z)$ تلاش کریں جو $2 \le y \le x + 1$ کی پٹی کو اکائی قرص $|w| \le 1$ پر عکس کرتا ہو۔

سوال 15.91: ایسا خطی کسری نقش $w = f(z)$ تلاش کریں جو زاویائی خطہ $0 \le \angle z \le \frac{\pi}{4}$ کو اکائی قرص $|w| \le 1$ پر عکس کرتا ہو۔
جواب: $w_3 = \frac{z^4-i}{-iz^4+1}$



شکل 15.15: نقش $w = e^z$

15.5 نقش زیر دیگر تفاعل

ہم اب دیگر خصوصی تفاعل کی نقش پر غور کرتے ہیں۔

قوت نمائی تفاعل (حصہ 14.7)

$$w = e^z \tag{15.31}$$

کی تفرق کہیں پر بھی صفر کے برابر نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہ تفاعل ہر نقطہ پر محافظ زاویہ ہو گا۔ $w = Re^{i\phi}$ لکھتے ہوئے

$$Re^{i\phi} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 15.31 کو

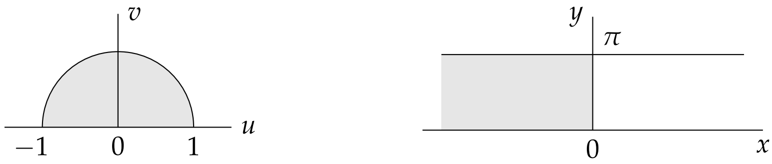
$$R = e^x, \quad \phi = y \tag{15.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ مستقل $x = a =$ لکیروں کا نقش دائرے $R = e^a$ ہوں گے جبکہ $y = c$ کے نقش مبدا سے نکلتی $\phi = c$ لکیریں ہوں گی۔چونکہ تمام z پر $e^z \neq 0$ ہے لہٰذا $w = 0$ کسی بھی نقطہ z کا عکس نہیں ہو گا۔مستطیل خطہ مثلاً $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ کا عکس خطہ

$$e^a \leq R \leq e^b, \quad c \leq \phi \leq d$$

ہو گا (شکل 15.15)۔

بنیادی پٹی $-\pi < y \leq \pi$ پوری w سطح (جو منفی حقیقی محور پر کٹی ہوئی ہوئی ہو گی) پر عکس ہو گی۔مزید ہر $y = c$ اور $y = c + 2\pi$ لکیروں کے درمیان افقی پٹی پوری w سطح پر عکس ہو گی۔یہ e^z کی دوریت کی بدولت ہے جس کا خیالی دوری عرصہ $i2\pi$ ہے۔



شکل 15.16: نقش $w = e^z$

مساوات 15.32 کے تحت، افقی پٹی $0 \le y \le \pi$ بالائی نصف w سطح پر عکس ہوتی ہے۔ سرحد $y = 0$ مثبت u محور پر عکس ہوتی ہے جبکہ لکیر $y = \pi$ منفی u محور پر عکس ہوتی ہے۔ قطع 0 تا $i\pi$ کا عکس نصف دائرہ $|w| = 1, v \ge 0$ ہو گا۔ پٹی کی بائیں نصف $(x \le 0)$ حصے کا عکس $|w| \le 1, v \ge 0$ اور دائیں نصف $(x \ge 0)$ حصہ اس نصف دائرہ $|w| = 1$ کی بیرون پر بالائی نصف w مستوی پر عکس ہو گا (شکل 15.16)۔

چونکہ قوت نمائی تفاعل کا الٹ **تعلق قدرتی لوگارتھم** $w = u + iv = \ln z$ ہے لہٰذا قدرتی لوگارتھم کی محافظ زاویہ نقش کی خواص، متذکرہ بالا میں z اور w سطحوں کی کردار الٹ کرنے سے قوت نمائی تفاعل کی خواص سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یوں صدر قیمت $w = \operatorname{Ln} z$، (منفی حقیقی محور پر کٹی ہوئی) z مستوی کو w مستوی کی افقی پٹی $-\pi < v \le \pi$ پر عکس کرتی ہے۔ مزید خواص پر اگلے حصے کی دوسری مثال میں غور کیا جائے گا۔

سائن تفاعل (حصہ 14.8)

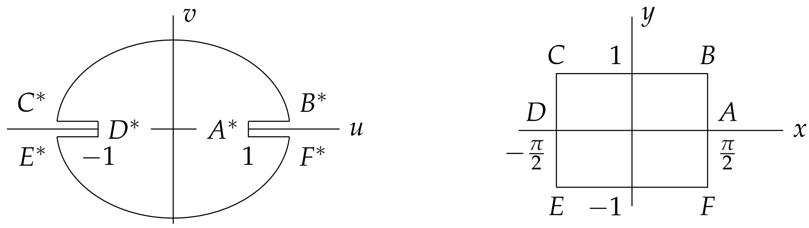
$$w = u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \tag{15.33}$$

جہاں

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y \tag{15.34}$$

دوری ہیں۔ یوں پوری xy مستوی پر مساوات 15.34 ہر گز ایک ایک مطابقتی نہیں ہے۔ ہمیں z کو لامتناہی نصف پٹی $S : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کے اندر رہنے کا پابند کرنا ہو گا۔ چونکہ $f'(z) = \cos z$ نقطہ $z = \mp\frac{\pi}{2}$ پر صفر کے برابر ہے لہٰذا نقش ان دو نقطوں پر محافظ زاویہ نہیں ہو گا۔ مساوات 15.34 سے ہم دیکھتے ہیں کہ S کی سرحد u محور میں عکس ہو گی۔ x محور کا قطع $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ محور u کی قطع $-1 \le u \le 1$ پر عکس ہو گا، لکیر $x = -\frac{\pi}{2}$ کا عکس $u \le -1,\ v = 0$ اور لکیر $x = \frac{\pi}{2}$ کا عکس $u \ge 1,\ v = 0$ ہو گا۔ قطع $y = c > 0, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کا عکس بالائی نصف w مستوی کی قطع مکافی

$$u = \cosh c \sin x, \quad v = \sinh c \cos x$$



شکل 15.17: نقش $w = \sin z$

یعنی

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \tag{15.35}$$

پر ہو گا۔ قطع $y = -c, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\ (c > 0)$ قطع مکافی مساوات 15.35 کی نچلی نصف حصے پر عکس ہو گی۔ قطع مکافی کے ماسکہ جو c کے تابع نہیں ہیں $w = \mp 1$ پر پائے جائیں گے۔یوں c تبدیل کرنے سے ہمیں ہم ماسکہ قطع مکافی حاصل ہوں گے۔مستطیل خطہ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -c < y < c$ یوں قطع مکافی مساوات 15.35 کی اندرون پر عکس ہو گا؛ البتہ دھیان رہے کہ جیسا شکل 15.17 میں دکھایا گیا ہے، مستطیل کی سرحد کا عکس قطع مکافی اور u محور کے دو قطعات ہوں گے (جہاں $c = 1$ ہے)۔مستطیل کی سرحد کی انتصابی حصوں پر نقطوں کے عکس جوڑیوں میں ہم مکان نقطے ہوں گے۔ بالخصوص $B^* = F^*$ اور $C^* = E^*$ ہوں گے۔

مستطیل خطہ $-\pi < x < \pi, c < y < d\ (c > 0)$ کا نقش قطع مکافی جھلی ہو گی جو منفی v محور پر کٹی ہو گی (شکل 15.18)۔سیدھی لکیریں $x = c$ جہاں $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$ ہے کے نقش ہم ماسکہ قطع زائد ہوں گی جو متذکرہ بالا قطع مکافی کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں گی۔

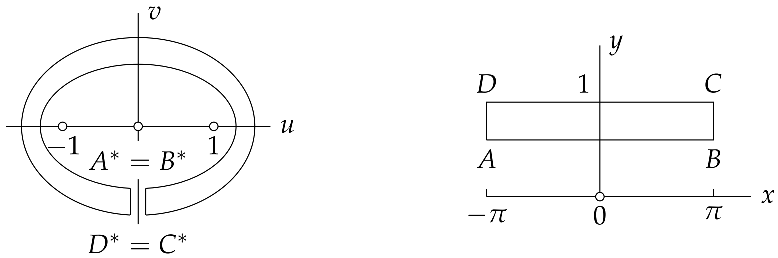
z کی $\frac{\pi}{2}$ اکائیاں دائیں مستقیم حرکت کے بعد سائن تفاعل لینے سے **کوسائن تفاعل**

$$w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \tag{15.36}$$

کا نقش حاصل ہوتا ہے۔

ہذلولی تفاعل

$$w = \sinh z = -i \sin(iz) \tag{15.37}$$



شکل 15.18: نقش $w = \sin z$

لکھی جا سکتی ہے۔یوں گھڑی کی سمت میں $\frac{\pi}{2}$ زاویہ گھمانے $t = iz$ کے بعد نقش $p = \sin t$ لے کر اس کو گھڑی کی الٹ سمت $w = -ip$ گھمانے سے درکار ہذلولی نقش حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح درج ذیل تبادل

$$w = \cosh z = \cos(iz) \tag{15.38}$$

گھمانے $t = iz$ کے بعد نقش $w = \cos t$ کے مترادف ہے۔

مثال 15.11: نصف لامتناہی پٹی کا نصف سطح پر نقش

نصف لامتناہی پٹی $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$ (شکل 15.19) کا عکس مساوات 15.38 میں دیے گئے نقش کی صورت میں دریافت کریں۔

حل: ہم $w = u + iv$ لیتے ہیں۔چونکہ $\cosh 0 = 1$ کے برابر ہے لہٰذا $z = 0$ کو عکس $w = 1$ ہو گا۔ حقیقی مثبت $z = x \geq 0$ کے لئے $\cosh z$ حقیقی ہے جو 1 سے شروع ہو کر، x بڑھانے سے، بتدریج بڑھتا ہے۔ یوں مثبت x محور u محور کے حصہ $u \geq 1$ پر عکس ہوتا ہے۔ خالص خیالی $z = iy$ کے لئے $\cosh iy = \cos y$ ہو گا لہٰذا پٹی کی بائیں سرحد $1 \geq u \geq -1$ پر عکس ہو گی۔نقطہ $z = i\pi$ کا عکس

$$w = \cosh i\pi = \cos \pi = -1$$

ہو گا۔پٹی کی بالائی سرحد پر $y = \pi$ ہے اور چونکہ $\sin \pi = 0$ کے برابر ہے لہٰذا سرحد کا یہ حصہ $u \leq -1$ پر عکس ہو گا۔یوں پٹی کی سرحد u محور پر عکس ہو گی۔یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ پٹی کی اندرون بالائی نصف w مستوی پر عکس ہو گی اور کہ یہ نقش ایک ایک مطابقتی ہے۔ □

شکل 15.19: نقش برائے مثال 15.11

شکل 15.20: سرحدی شرائط برائے مثال 15.12

مثال 15.12: سرحدی شرائط مسئلہ

مثال 15.11 میں دی گئی پٹی میں برقرار حال (وقت پر غیر منحصر) درجہ حرارت $T(x, y)$ پر غور کریں۔پٹی کی سرحد پر درجہ حرارت درج ذیل ہے۔

$$T = T_0 \quad \text{قطع } 0 \text{ تا } i\pi \text{ پر}$$
$$T = 0 \quad \text{بالائی اور نچلی سرحد پر}$$

حل: حراری مساوات برقرار حال کی صورت میں لاپلاس مساوات (حصہ 13.11)

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

کی صورت اختیار کرتی ہے۔ہمیں اس مساوات کا ایسا حل درکار ہے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

ہم پٹی کو مساوات 15.38 کی مدد سے بالائی نصف مستوی پر عکس کرتے ہیں۔چونکہ قطع $0 \le y \le \pi$ کا عکس $-1 \le u \le 1$ ہے لہٰذا سرحدی شرائط کو w مستوی میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل 15.20)۔

$$T = T_0 \quad \text{قطع } -1 \text{ تا } 1$$
$$T = 0 \quad \text{محور کا باقی حصہ}$$

تحلیلی تفاعل کے حقیقی اور خیالی اجزاء لاپلاس مساوات کے حل ہوتے ہیں۔ ہمیں ایسا ہی تفاعل $T(u,v)$ ، جو ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو، بالائی نصف w مستوی میں دریافت کرنا ہے۔ ہم درج ذیل تفاعل پر غور کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(w+1) &= \ln|w+1| + i\phi_1, \quad \phi_1 = \underline{/w+1} = \tan^{-1}\frac{v}{u+1}\\ \operatorname{Ln}(w-1) &= \ln|w-1| + i\phi_2, \quad \phi_2 = \underline{/w-1} = \tan^{-1}\frac{v}{u-1}\end{aligned} \tag{15.39}$$

چونکہ $\phi_1(u,v)$ اور $\phi_2(u,v)$ ہارمونی تفاعل ہیں لہٰذا $\phi_2 - \phi_1$ بھی ہارمونی تفاعل ہو گا۔ اگر $w = u$ حقیقی اور -1 سے چھوٹا ہو، تب $\phi_2 - \phi_1 = \pi - \pi = 0$ ہو گا۔ وقفہ $-1 < u < 1$ میں حقیقی $w = u$ کی صورت میں $\phi_2 - \phi_1 = \pi - 0 = \pi$ ہو گا، اور حقیقی $w = u > 1$ کی صورت میں $\phi_2 - \phi_1 = 0 - 0 = 0$ ہو گا۔ یوں بالائی نصف مستوی $v > 0$ میں تفاعل

$$T(u,v) = \frac{T_0}{\pi}(\phi_2 - \phi_1) \tag{15.40}$$

ہارمونی ہو گا اور یہ w سطح میں سرحدی شرائط کو مطمئن کرے گا۔ چونکہ $\tan\phi_1 = \frac{v}{u+1}$ اور $\tan\phi_2 = \frac{v}{u-1}$ ہیں لہٰذا

$$\tan(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1 + \tan\phi_1 \tan\phi_2} = \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 15.40 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$T(u,v) = \frac{T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \tag{15.41}$$

تفاعل $w = \cosh z$ اس پٹی کو نصف مستوی $v \geq 0$ پر نقش کرتا ہے اور ہمارے پاس

$$w = u + iv = \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

ہے جس کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ علیحدہ کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u = \cosh x \cos y, \quad v = \sinh x \sin y$$

ان u اور v کے ساتھ یوں مساوات 15.41 میں

$$u^2 + v^2 - 1 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y - 1 = \sinh^2 x - \sin^2 y$$

ہو گا۔ مساوات 15.41 میں درج بالا تعلق اور v کا تعلق پر کرنے سے

$$T^*(x,y) = \frac{T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{2\sinh x\sin y}{\sinh^2 x - \sin^2 y}$$

ملتا ہے۔ اب شمار کنندہ اور نسب نما بالترتیب تفاعل $(\sinh x + i\sin y)^2$ کے حقیقی اور خیالی حصے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$T^*(x,y) = \frac{T_0}{\pi}\angle[(\sinh x + i\sin y)^2] = \frac{2T_0}{\pi}\angle(\sinh x + i\sin y)$$

یوں ہمارے مسئلے کا حل

$$T^*(x,y) = \frac{2T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{\sin y}{\sinh x} \tag{15.42}$$

ہو گا۔ یہ تفاعل ہماری پٹی کی اندرون میں ہارمونی ہے (مسئلہ 15.2) اور یہ دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔ یقیناً $y = 0$ یا $y = \pi$ پر $T^* = 0$ ہے اور $x = 0$ پر $T^* = T_0$ ہے۔ ہم حرارت خط (جن پر یکساں حرارت ہو گی) درج ذیل خطوط ہوں گے۔

$$\frac{\sin y}{\sinh x} = \text{مستقل}$$

□

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$(\text{الف}) \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad (\text{ب}) \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

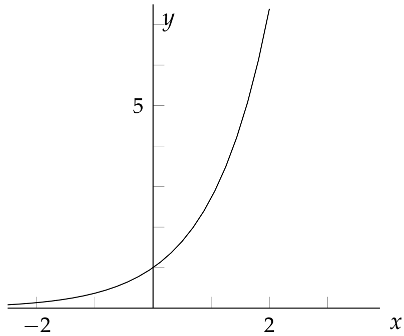
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

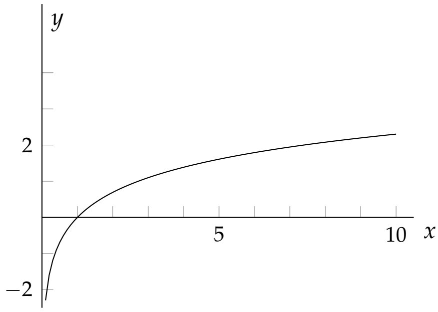
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

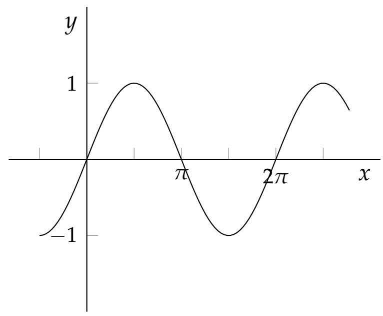


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

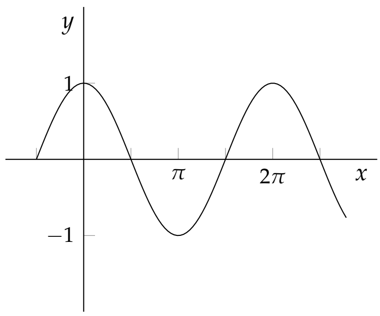


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



$\sin x$ (الف)



$\cos x$ (ب)

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

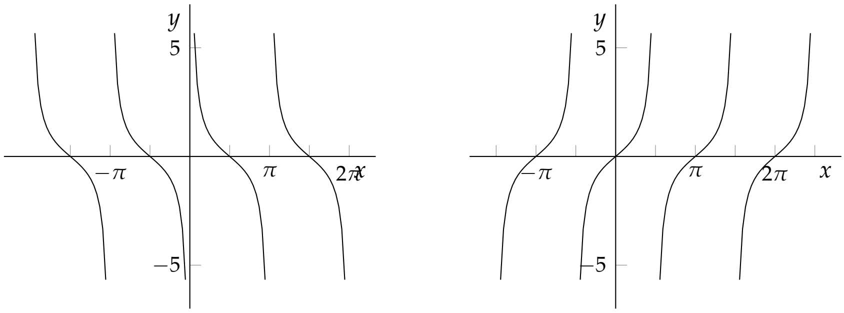
(ب.13)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



tan x (الف) cot x (ب)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.17}$$
$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

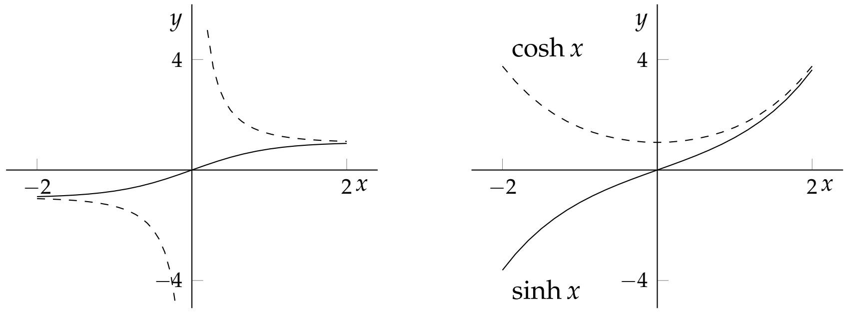
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y\\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

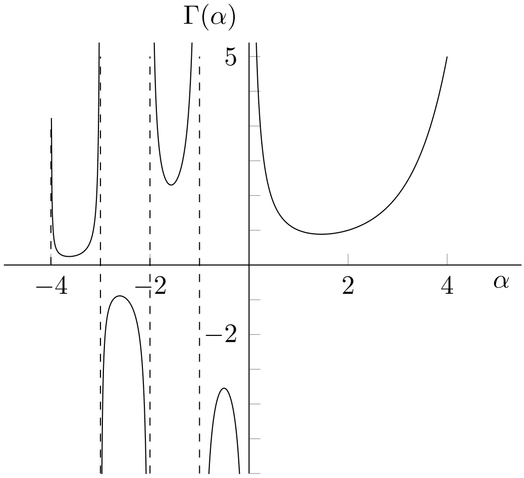
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\qquad(\alpha>0)\tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x)\tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\qquad(x>0,\,y>0)\tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\tag{ب.32}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

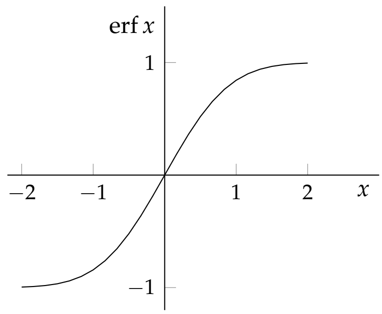
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)\tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

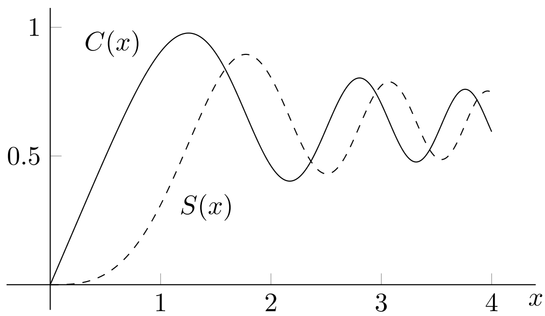
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\tag{ب.36}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{37.ب}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{38.ب}$$

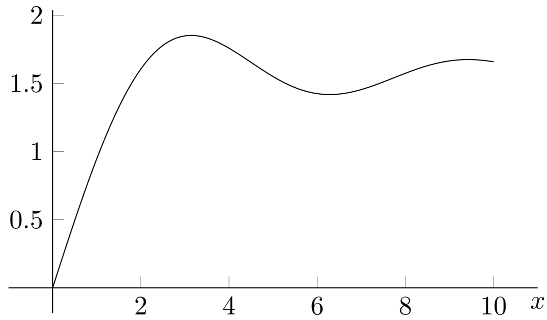
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{39.ب}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{40.ب}$$

---
[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\mathrm{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$