

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1 نمونہ کثی
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
113	2.3 تفرقی عامل
117	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
132	2.5 یولر کوئی مساوات
141	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ ورونسکی
150	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
162	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک
168	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک
172	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کثی
183	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
191	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
191	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
203	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

212	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
215	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

223	4	نظام تفرقی مساوات
224	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
233	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
248	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی
249	4.3.1	خطی نظام
252	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
270	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام
279	4.6	کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام
289	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ

سطح حرکت کی دوسری ترکیب خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] دو درجی سادہ تفرقی مساوات

$$F(y, y', y'') = 0$$

میں $y = y_1$ کو آزاد متغیر اور $y' = y_2$ لے کر y'' کو زنجیری تفرق سے

$$y'' = y_2' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$$

لکھ کر ایک درجی مساوات

$$(4.81) \quad F\left(y_1, y_2, \frac{dy_2}{dy_1} y_2\right) = 0$$

میں تبدیل کرنے پر مبنی ہے۔ اس ایک درجی مساوات کو یا تو حل کرنا ممکن ہوتا ہے اور یا میدان ڈھال کی مدد سے اس پر غور ممکن ہوتا ہے۔ آئیں مثال 4.14 پر اس ترکیب کی مدد سے غور کریں۔

مثال 4.17: بلا تقصیر ارتعاشی نظام کی ایک درجی تفرقی مساوات۔
مساوات 4.71 میں $\theta'' + k \sin \theta = 0$ ہے جس میں $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ (زاویائی رفتار) لیتے ہوئے

$$\theta'' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$$

لکھ کر $\frac{dy_2}{dy_1} y_2 = -k \sin y_1$ ملتا ہے جس کو علیحدگی متغیرات سے $y_2 dy_2 = -k \sin y_1 dy_1$ لکھا جا سکتا ہے جس کا مکمل

$$(4.82) \quad \frac{1}{2} y_2^2 = k \cos y_1 + C$$

دیتا ہے جہاں C مکمل کا مستقل ہے۔ اس کو mL^2 سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2} m (Ly_2)^2 - mL^2 k \cos y_1 = mL^2 C$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تینوں اجزاء توانائی⁷⁷ کو ظاہر کرتے ہیں۔ چونکہ y_2 زاویائی رفتار ہے لہذا Ly_2 لمبائی رفتار اور $\frac{1}{2}m(Ly_2)^2$ حوکی توانائی⁷⁸ ہے۔ درج بالا مساوات کا دوسرا جزو (جمع منفی علامت) مخفی توانائی⁷⁹ ہے جبکہ مساوات کا دایاں ہاتھ mL^2C کل توانائی ہے۔ بلا تقصیر نظام میں توانائی کا ضیاع نہیں پایا جاتا لہذا حزب توقع کل توانائی مستقل مقدار ہے۔ آئیں دیکھیں کہ حرکت کی نوعیت کل توانائی پر کیسے منحصر ہے۔

شکل 4.14-ب مختلف C کے لئے خط حرکت دیتی ہے۔ ان خطوط کا دوری عرصہ 2π ہے۔ ان میں ترخیمی بند دائرے اور لہر نما خطوط شامل ہیں جن کے مابین نقطہ زین $(n\pi, 0)$ جہاں $n = \pm 1, \pm 3, \dots$ ہے] سے گزرتے ہوئے دو عدد خط حرکت پائے جاتے ہیں۔ مساوات 4.82 کے تحت C کی کم سے کم قیمت $C = -k$ ہے جس پر $y_2 = 0$ اور $\cos y_1 = 1$ ہوں گے جو ساکن کمیت کو ظاہر کرتی ہے۔ جس نقطے پر $y_2 = \theta' = 0$ ہو اس نقطے پر حرت کی سمت تبدیل ہو کر الٹ ہو جائے گی لہذا مساوات 4.82 میں $y_2 = 0$ پر کرتے ہوئے $k \cos y_1 + C = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر $y_1 = \pi$ ہو تب $\cos y_1 = -1$ اور یوں $C = k$ ہو گا۔ اس طرح اگر $-k < C < k$ ہو تب $|y_1| = |\theta| < \pi$ کی صورت میں کمیت کی حرکت کی سمت الٹ ہو گی اور C کی ان قیمتوں ($|C| < k$) کے لئے کمیت ارتعاش پذیر ہو گا۔ ترخیمی بند دائرے اس ارتعاشی حرکت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس کے برعکس $C > k$ کی صورت میں $y_2 = 0$ ممکن نہیں ہے لہذا کمیت کی حرکت کی سمت الٹ نہیں ہو گی لہذا کمیت مرکز کے گرد گھومتا رہے گا جس کو لہری خط حرکت ظاہر کرتی ہیں۔ ان دو صورتوں کے مابین $C = k$ پایا جاتا ہے جس کے خطوط نقطہ زین سے گزرتے ہیں۔ انہیں شکل 4.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔

دو درجی مساوات کے تبادلے سے سطح حرکت پر (مثال 4.17 کی طرح) قابل حل ایک درجی مساوات کے علاوہ نا قابل حل مساوات بھی اہمیت کے حامل ہے۔ ایسی صورت میں میدان ڈھال [حصہ 1.2 دیکھیں۔] کے ذریعہ نظام کے بارے میں معلومات حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ اس عمل کو ایک مشہور مثال کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 4.18: منحصر بہ خود ارتعاش۔ مساوات ون در پول

ایسی طبعی نظام پائے جاتے ہیں جن میں معمولی ارتعاش کی صورت میں نظام کو توانائی فراہم ہوتی ہے جبکہ وسیع ارتعاش

⁷⁷ energy
⁷⁸ kinetic energy
⁷⁹ potential energy

کی صورت میں نظام سے توانائی کا اخراج ہوتا ہے۔ یوں وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام قسری صورت اختیار کرتا ہے جبکہ کم ارتعاش کی صورت میں نظام میں منفی تقصیر (نظام کو توانائی کی فراہمی) پائی جاتی ہے۔ ہم طبعی وجوہات کی بنا توقع کرتے ہیں کہ ایسا نظام دوری طرز عمل رکھے گا، جو سطح حرکت پر بند دائرے کی صورت اختیار کرے گا جسے تحدیدی دائرہ⁸⁰ کہتے ہیں۔ ایسی ارتعاش کو مساوات ون در پول⁸¹

$$(4.83) \quad y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0 \quad (\mu > 0)$$

ظاہر کرتی ہے جہاں μ مثبت مستقل ہے۔ یہ مساوات پہلی مرتبہ خلا نلکی⁸² والے برقی ادوار پر غور کے دوران روپذیر ہوئی۔ یہ مساوات $\mu = 0$ کی صورت میں ہارمونی ارتعاش کی تفرقی مساوات $y'' + y = 0$ ہے۔ ون در پول مساوات میں قسری جزو $-\mu(1 - y^2)$ ہے جہاں $\mu > 0$ ہے۔ یوں $y^2 < 1$ کی صورت میں منفی تقصیری، $y^2 = 1$ کی صورت میں بلا تقصیر جبکہ $y^2 > 1$ کی صورت میں مثبت تقصیری (جس میں توانائی کا ضیاع ہوگا) نظام پایا جائے گا۔ نہایت کم μ کی صورت میں مساوات ون در پول اور $y'' + y = 0$ میں بہت کم فرق پایا جائے گا لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ سطح حرکت پر تحدیدی دائرہ تقریباً گول دائرہ ہوگا۔ اگر μ کی قیمت زیادہ ہو تب تحدیدی دائرہ کی شکل غالباً مختلف ہوگی۔

اس مساوات کو ایک درجی مساوات میں تبدیل کرنے کی خاطر $y = y_1$ ، $y' = y_2$ اور $y'' = \frac{dy_2}{dy_1} y_2$ لکھتے ہوئے ون در پول مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(4.84) \quad \frac{dy_2}{dy_1} y_2 - \mu(1 - y_1^2)y_2 + y_1 = 0$$

سطح حرکت (سطح $y_1 y_2$) پر ہم میلان⁸³ خط $\frac{dy_2}{dy_1} = K$ ہیں جہاں K مستقل مقدار ہے۔ یوں ہم میلان خطوط درج ذیل ہوں گے

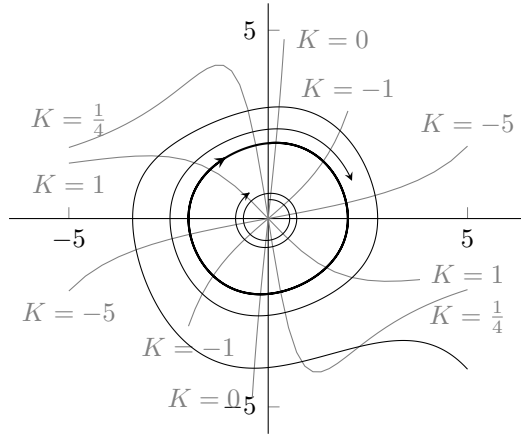
$$\frac{dy_2}{dy_1} = \mu(1 - y_1^2) - \frac{y_1}{y_2} = K$$

جن سے

$$(4.85) \quad y_2 = \frac{y_1}{\mu(1 - y_1^2) - K} \quad (\text{شکل 4.17 اور شکل 4.18 دیکھیں۔})$$

حاصل ہوتا ہے۔

limit cycle⁸⁰
van del Pol equation⁸¹
vacuum tube⁸²
isoclines⁸³



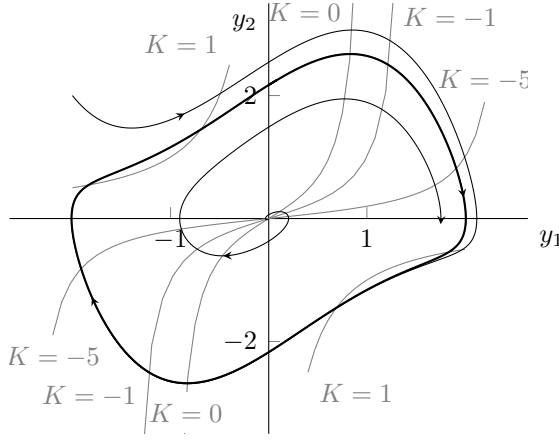
شکل 4.17: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu = 0.1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.17 میں μ کی کم قیمت ($\mu = 0.1$) کے لئے چند ہم میلان خطوط کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے علاوہ تحدیدی دائرے کو موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تحدیدی دائرہ تقریباً گول ہے۔ ایک خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے باہر ہے، اور دوسرا خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے اندر ہے، کو تحدیدی دائرے تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔ تحدیدی دائرہ اور نقطہ فاصل کے گرد بند دائرہ (وسط) میں فرق یہ ہے کہ تحدیدی دائرے تک خط حرکت پہنچتی ہے جبکہ وسط کا خط اسی دائرے پر پایا جاتا ہے۔ μ کی زیادہ قیمت پر تحدیدی دائرہ گول صورت نہیں رکھتا۔ شکل 4.18 میں μ کی زیادہ قیمت ($\mu = 1$) کے لئے تمام صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں تحدیدی دائرہ گول نہیں ہے۔

مثال 4.19: تفرقی مساوات $y'' + y - y^3 = 0$ سے نظام حاصل کریں۔ اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

حل: $y = y_1$ اور $y' = y'_1 = y_2$ لیتے ہوئے اور $y'' = y'_2$ لکھتے ہوئے دیے گئے دو درجی مساوات سے نظام

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1 = y_2 \\ y'_2 &= f_2 = -y_1 + y_1^3 \end{aligned} \quad (4.86)$$



شکل 4.18: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu = 1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے حاصل ہوں گے۔ $f_1 = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جبکہ $f_2 = y_1(-1 + y_1^2) = 0$ سے $y_1 = 0$ اور $y_1 = \pm 1$ ملتے ہیں۔ یوں نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $-1,0$ اور $1,0$ ہیں۔ نقطہ فاصل $(0,0)$ مرکز پر پایا جاتا ہے لہذا اس پر پہلے غور کرتے ہیں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت جاننے کی خاطر نظام کو خطی بناتے ہیں۔ ایسا کوئی بھی جزو جو y^m یا $y_1^m y_2^q$ کی صورت میں لکھا گیا ہو، جہاں $m \neq 1$ جبکہ n اور q کوئی بھی مستقل ہو سکتے ہیں، غیر خطی ہو گا۔ ان غیر خطی اجزاء کو رد کرنے سے خطی نظام حاصل ہوتا ہے۔ یوں y_2' کی مساوات میں y_1^3 کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned} \implies y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y$$

حاصل ہو گا جس سے $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = 1 > 0$ اور $\Delta = -4 < 0$ ملتے ہیں لہذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔

آئیں اب نقطہ $(-1,0)$ پر غور کریں۔ اس کو مرکز منتقل کرنے کی خاطر نظام 4.86 میں $\tilde{y}_1 = y_1 + 1$ یعنی $y_1 = \tilde{y}_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= -(\tilde{y}_1 - 1) + (\tilde{y}_1 - 1)^3 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ماتا ہے۔ غیر خطی اجزاء \tilde{y}_1^2 اور \tilde{y}_1^3 کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\mathbf{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}$$

ماتا ہے۔ اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہذا نقطہ $(-1, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

نقطہ $(1, 0)$ پر غور کرنے کی خاطر اس کو مرکز منتقل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ چنتے ہیں۔ یوں نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ماتا ہے جس میں غیر خطی اجزاء \tilde{y}_1^2 اور \tilde{y}_1^3 رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\mathbf{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}$$

ماتا ہے۔ اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہذا نقطہ $(1, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوالات

سوال 4.51 تا سوال 4.55 کو خطی بناتے ہوئے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 4.51: $y_1' = 4y_1 - y_1^2$, $y_2' = y_2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0, 0)$ اور $(4, 0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ مسئلے کو $(0, 0)$ پر خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لکھا جاتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہذا نقطہ $(0, 0)$ غیر مستحکم جوڑ ہے۔ نقطہ $(4, 0)$ کو مرکز پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 4$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو $(-\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2)$ رد کرتے ہوئے خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جو $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ دیتا ہے جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 4.52: $y'_1 = y_2$ ، $y'_2 = -y_1 + \frac{2}{3}y_1^2$ سے $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0, 0)$ اور $(\frac{3}{2}, 0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p = 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ملتے ہیں لہذا نقطہ $(0, 0)$ مستحکم وسط ہے۔ نقطہ $(\frac{3}{2}, 0)$ کو مرکز پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - \frac{3}{2}$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو $(\frac{2}{3}\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2)$ رد کرتے ہوئے خطی بنانے سے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے لہذا $(\frac{2}{3}, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.53: $y'_1 = y_2$ ، $y'_2 = -2y_1 - y_1^2$ سے $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0, 0)$ اور $(-2, 0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہذا نقطہ $(0, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.54: $y'_1 = -y_1 + y_2 + y_1^2$ ، $y'_2 = -y_1 - y_2$ سے $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0, 0)$ اور $(-2, 2)$ حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہذا نقطہ $(0, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.55: $y'_1 = -y_1 + y_2 - y_2^2$ ، $y'_2 = -y_1 - y_2$ سے $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0, 0)$ اور $(-2, 2)$ حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہذا نقطہ $(0, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.56 تا 4.59 میں تفرقی مساوات سے نظام حاصل کریں۔ اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نظام کو خطی بناتے ہوئے نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

سوال 4.56: $y'' - 4y + y^3 = 0$

جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین، $(-2, 0)$ مستحکم وسط اور $(2, 0)$ مستحکم وسط ہیں۔

سوال 4.57: $y'' + 4y - y^3 = 0$

جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0, 0)$ مستحکم وسط، $(-2, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین اور $(2, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔

سوال 4.58: $y'' + \sin y = 0$

جوابات: $(0, 0)$ اور $(\pm n2\pi, 0)$ مستحکم وسط ہیں جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہو سکتا ہے۔ نقطہ $(\pm m\pi, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے جہاں $m = 1, 3, 5, \dots$ ہو سکتا ہے۔

سوال 4.59: $y'' + \cos y = 0$

جوابات: نقطہ $(\frac{\pi}{2} \pm n2\pi, 0)$ غیر مستحکم نقطہ نیز جبکہ $(-\frac{\pi}{2} \pm n2\pi, 0)$ وسط ہیں جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہو سکتا ہے۔ آپ کو $\mp \tilde{y}_1$ $-\cos(\mp \frac{\pi}{2} + \tilde{y}_1) = \sin(\mp \tilde{y}_1) \approx \mp \tilde{y}_1$ کی مدد لے سکتے ہیں۔

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

