

# انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کشی	
13	1.2 $y = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ وروئسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجہ خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

214 . . . . .	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
217 . . . . .	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
225	4	نظام تفرقی مساوات
226 . . . . .	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
235 . . . . .	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
250 . . . . .	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی
251 . . . . .	4.3.1	خطی نظام
254 . . . . .	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
272 . . . . .	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام
281 . . . . .	4.6	کئی تراکیب برائے غیر خطی نظام
290 . . . . .	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
298 . . . . .	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
299 . . . . .	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
309	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
310 . . . . .	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
325 . . . . .	5.2	لیٹنڈر مساوات۔ لیٹنڈر کثیر رکنی
343 . . . . .	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
348 . . . . .	5.3.1	عملی استعمال
362 . . . . .	5.4	مساوات۔ میل اور میل تفاعل
377 . . . . .	5.5	میل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
385	6	لاپلاس متبادلہ
386 . . . . .	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
395 . . . . .	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
408 . . . . .	6.3	$s$ محور پر منتقلی، $t$ محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
429 . . . . .	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
447 . . . . .	6.5	الچھاؤ
456 . . . . .	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
465 . . . . .	6.7	تفرقی مساوات کے نظام
473 . . . . .	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے
477	7	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
478 . . . . .	7.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
488 . . . . .	7.2	قابلی ضرب
495 . . . . .	7.2.1	تبدیلی محل

508 . . . . .	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط	7.3
521 . . . . .	7.3.1 صف زینہ دار صورت	
529 . . . . .	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا	7.4
543 . . . . .	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی	7.5
548 . . . . .	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب	7.6
551 . . . . .	مقطع۔ قاعدہ کریمر	7.7
568 . . . . .	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط	7.8
583 . . . . .	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی متبادلہ	7.9

601	سمتیات عارضی باب	8
601 . . . . .	غیر سمتیات اور سمتیات	8.1
603 . . . . .	سمتیہ کے اجزاء	8.2
609 . . . . .	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب	8.3

561	اضافی ثبوت	ا
-----	------------	---

565	مفید معلومات	ب
565 . . . . .	1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات	



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 8

### سمتیت عارضی باب

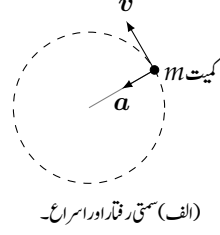
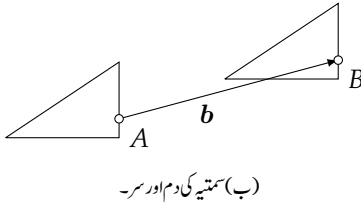
beginning very the at it palce shall i addition. latest the of 9.4 to 9.1 sec is this  
issues. the all resolves chapter. this 7th my of

#### 8.1 غیر سمتیت اور سمتیت

طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جنہیں ان کی مقدار سے مکمل طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً کمیت، درجہ حرارت، برقی بار، وقت، رقبہ، حجم، فاصلہ، برقی دباؤ وغیرہ۔ ان میں سے ہر ایک کو (مقدار کی موزوں اکائی چن کر) ایک عدد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ایسی تمام مقداروں کو غیر سمتیت<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ غیر سمتی مقدار کی قیمت پر چننی گئی محدود کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔

اس کے برعکس طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں بھی پائی جاتی ہیں جن کی مکمل اظہار کے لئے ان کی قیمت کے علاوہ ان کی سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ ان کی ایک مثال میکانی قوت ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ قوت کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں تیر کی سمت، قوت کی سمت اور تیر کی لمبائی (کسی پیمائش کے تحت) قوت کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ شکل 8.1-الف میں ہلکے دھاگے سے بندھی ہوئی کمیت  $m$  کی دائری حرکت دکھائی گئی ہے۔ کمیت کی

<sup>1</sup> scalars



شکل 8.1: سمتیہ کی تفصیل۔

لمحاتی سمتی رفتار  $v$  کو تیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس تیر کی سمت، کمیت کی لمحاتی سمتی رفتار دیتی ہے جبکہ تیر کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی سمتی رفتار کی قیمت دیتی ہے۔ شکل میں کمیت کی اسراع  $a$  بھی دکھائی گئی ہے جہاں  $a$  کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی اسراع کی قیمت دیتی ہے۔

سیدھی سطح میں تکون کی (بلا گھومے) منتقلی شکل 8.1-ب میں دکھائی گئی ہے۔ اس حرکت کو (تکون کے ہر نقطے کی) طے فاصلے کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ تکون پر کسی نقطے کی ابتدائی مقام  $A$  سے اختتامی مقام  $B$  تک سمتی خط سے اس حرکت کو ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یوں سمتی خط  $b$ ، تکون کے ایک نقطے کی  $A$  سے  $B$  منتقلی دکھاتی ہے۔ تکون کے ہر نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک سمتی خطوط کھینچ کر ہمیں سمتی خطوط کی نسل ملتی ہے جس میں تمام سمتی خطوط کی لمبائی ایک جیسی اور سمت ایک جیسی ہو گی (یعنی یہ آپس میں متوازی ہوں گے)۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک سمتی خط، تکون کے ایک نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک منتقلی کو ظاہر کرتی ہے۔

اس سے سمتیہ کی درج ذیل تعریف بیان کی جاسکتی ہے۔ تعریف: سمتیہ سمتی خط کو سمتیہ<sup>2</sup> کہتے ہیں۔ اس کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی اور سمت کو سمتیہ کی سمت کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب ان کی لمبائی ایک جیسی ہو اور ان کی سمت ایک جیسی ہو۔

سمتیہ کی لمبائی کو سمتیہ کی اقلیدسی معیار<sup>3</sup> (یا معیار) اور سمتیہ کی مقدار<sup>4</sup> بھی کہتے ہیں۔

vector<sup>2</sup>  
Euclidean norm<sup>3</sup>  
magnitude<sup>4</sup>

سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو سمتیہ کی دم<sup>5</sup> اور اختتامی نقطے کو سمتیہ کا سر<sup>6</sup> کہتے ہیں۔ یوں شکل 8.1-ب میں نقطہ  $B$  سمتیہ  $b$  کی دم ہے جبکہ نقطہ  $A$  اس کا سر ہے۔

ہم سمتیات کو موٹی لکھائی میں چھوٹی حروف تہجی مثلاً  $a$ ،  $b$ ،  $v$ ، وغیرہ، سے ظاہر کرتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں اسراع کو  $\vec{a}$  یا  $\vec{a}$  لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ  $a$  کی مقدار کو  $|a|$  لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ہم سمتیہ کو بغیر گھمائے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کر سکتے ہیں<sup>7</sup> یعنی ہم سمتیہ کی دم کہیں پر بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ سمتیہ کی دم کا مقام مقرر کرنے سے اس کی سر کا مقام بھی مقرر ہو گا۔

اگر دو سمتیات  $a$  اور  $b$  ایک دوسرے کے برابر ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں

(8.1)

$$a = b$$

اور اگر یہ آپس میں برابر نہ ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

(8.2)

$$a \neq b$$

کسی بھی سمتیہ کو ترسیعی طور پر موزوں لمبائی اور سمت کی سمتی خط سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

ایسا سمتیہ جس کی لمبائی اکائی (1) ہو اکائی سمتیہ<sup>8</sup> کہلاتا ہے۔

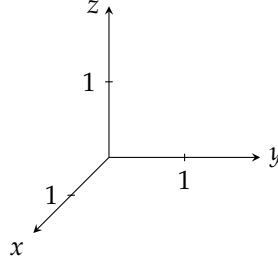
## 8.2 سمتیہ کے اجزاء

تین بُعدی فضا میں نقطہ ایک جیومیٹریائی چیز ہے جس کو محدودی نظام میں تین مرتب اعداد (تصور کیا جاسکتا ہے یا) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی انداز میں پیش کی، جسے محدودی نظام کی استعمال سے الجبرائی انداز میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

tail<sup>5</sup>  
head<sup>6</sup>

<sup>7</sup> یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی صورتیں پائی جاتی ہیں جہاں سمتیہ کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ آپ مکیانات سے جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر یکدرا مادیے پر قوت کا اطلاق، قوت کی سمت میں کبیر پر رہتے ہوئے، کسی بھی نقطے پر کیا جاسکتا ہے۔ اس سے قابل منتقلی سمتیہ کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ اس کے برعکس، یکدرا مادیے پر قوت کے اطلاق کا نقطہ تبدیل کرنے سے نتائج تبدیل ہوں گے جو ناقابل قبول بات ہے۔ یہ حقیقت مقید سمتیہ کی تصور کو جنم دیتی ہے۔ اس کتاب میں صرف قابل منتقلی سمتیات پر بات کی جائے گی۔

unit vector<sup>8</sup>



شکل 8.2: کارتیسی نظام محدودی

نظام محدود کے محور<sup>9</sup>، آپس میں عمودی تین متقاطع سیدھے خطوط ہوں گے۔ ان کے مقام انقطاع کو محدودی نظام کا مرکز<sup>10</sup> کہتے ہیں۔ ہم تینوں محور پر پیمائشی ناپ ایک جیسی چنتے ہیں لہذا محور پر مرکز سے اکائی فاصلے پر  $(1, 0, 0)$ ،  $(0, 1, 0)$  اور  $(0, 0, 1)$  نقطے پائے جائیں گے۔ اس محدودی نظام کو فضا میں کارتیسی نظام محدود<sup>11</sup> (شکل 8.2 سے رجوع کریں) کہتے ہیں۔

ہم اب ابتدائی نقطہ  $A$  سے اختتامی نقطہ  $B$  تک سمتیہ  $a$  پر غور کرتے ہیں (شکل 8.3-الف)۔ اگر نقطہ  $A$  کے محور  $(x_1, y_1, z_1)$  اور نقطہ  $B$  کے محور  $(x_2, y_2, z_2)$  ہوں تب درج ذیل اعداد، اس کارتیسی محدودی نظام کے لحاظ سے، سمتیہ  $a$  کے اجزاء<sup>12</sup> کہلاتے ہیں۔

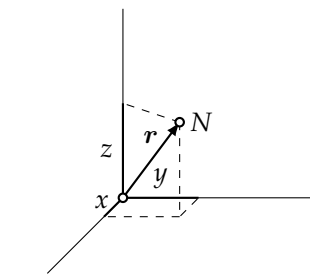
$$(8.3) \quad a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1$$

سمتیہ کی تعریف کے تحت  $a$  کی لمبائی سے مراد  $A$  سے  $B$  تک کی لمبائی  $\overline{AB}$  ہے جو مساوات 8.3 میں دیے گئے اجزاء کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کے تحت درج ذیل ہو گا۔

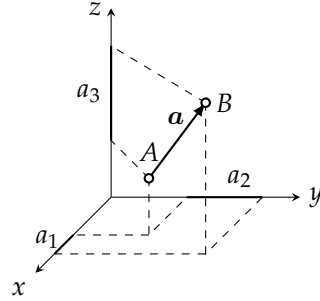
$$(8.4) \quad |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

مثال 8.1: سمتیہ کے اجزاء اور اس کی لمبائی  
سمتیہ  $a$  کی دم  $(-2, 3, 1)$  اور سر  $(5, -2, 7)$  ہیں۔ اس سمتیہ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی دریافت کریں۔

coordinates<sup>9</sup>origin<sup>10</sup>Cartesian coordinate system<sup>11</sup>components<sup>12</sup>



(ب) تعین کر سمتیہ کی سر کے محور اس سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔



(الف) اجزائے سمتیہ

شکل 8.3: سمتیہ کے اجزاء اور تعین کر سمتیہ۔

حل: اجزاء  $a_1 = 5 - (-2) = 7$ ,  $a_2 = -2 - 3 = -5$ ,  $a_3 = 7 - 1 = 6$  اور لمبائی

$$|a| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{110}$$

ہے۔ اگر ہم سمتیہ  $a$  کی دم کو نقطہ  $(4, 1, 3)$  پر منتقل کریں تب اس کا سر  $(11, -4, 9)$  پر ہو گا۔

مسوات 8.3 میں دیے گئے اجزاء کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر  $a$  کی دم کو کارتیسی محدود کی مرکز پر منتقل کیا جائے تب  $a$  کے اجزاء اس کی سر کے محور ہوں گے۔ ایسا سمتیہ جس کو شکل 8.3-ب میں دکھایا گیا ہے تعین کر سمتیہ<sup>13</sup> کہلاتی ہے اور اس کو  $r$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$a$  کی دم کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے سمتیہ کا سر بھی اتنا ہی اپنی جگہ سے ہلتا ہے لہذا مساوات 8.3 سے ظاہر ہے کہ سمتیہ  $a$  کے اجزاء  $a_1$ ,  $a_2$  اور  $a_3$  کی قیمت پر  $a$  کی ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں کسی بھی معین کارتیسی محدودی نظام کے حوالے سے سمتیہ کو مکمل طور پر تین (محوری) اعداد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

وہ سمتیہ ہے جس کے اجزاء  $0, 0, 0$  ہوں معدوم سمتیہ<sup>14</sup> یا صفر سمتیہ<sup>15</sup>  $0$  کہلاتی ہے۔ یوں کوئی بھی تین اعداد بہ شمول  $0, 0, 0$  سمتیہ کے اجزاء ہو سکتے ہیں۔

<sup>13</sup> position vector

<sup>14</sup> null vector

<sup>15</sup> zero vector

معین نظام محدود کی صورت میں ہر مرتبہ تین اعداد ایک منفرد سمتیہ کو ظاہر کرے گی۔ یہ تین اعداد سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔ اسی طرح معین نظام محدود میں ہر سمتیہ کے اجزاء سے سمتیہ کو تین مرتبہ اعداد کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی نقطہ نظر سے کی گئی۔ ہم اب تین مرتبہ حقیقی اعداد (جو سمتیہ کے اجزاء کہلاتے ہیں) کو سمتیہ کی تعریف کہہ سکتے ہیں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتیہ کی جیومیٹریائی صورت حاصل کر سکتے ہیں۔

یوں دو سمتیات  $a$  اور  $b$  صرف اور صرف اس صورت ایک جیسے ہوں گے جب ان کے تین مطابق اجزاء ایک جیسے ہوں۔ لہذا درج ذیل سمتی مساوات

$$a = b$$

سے مراد درج ذیل تین مساوات ہیں جہاں  $a_1$  ،  $a_2$  ،  $a_3$  اور  $b_1$  ،  $b_2$  ،  $b_3$  ایک ہی کارتیسی نظام محدود میں بالترتیب  $a$  اور  $b$  کے مطابق اجزاء ہیں۔

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

ظاہر ہے کہ اگر ایک سمتیہ کوئی حقیقی یا جیومیٹریائی چیز ہو تب اس کی لمبائی اور سمت پر چننی گئی نظام محدود کا کوئی اثر نہیں ہونا چاہیے۔ اجزائے سمتیہ کو ایک نظام محدود سے دوسری نظام محدود میں منتقل کرنے کے قواعد پر یہ حقیقت کچھ شرائط عائد کرتی ہے جن پر اگلے بابوں میں تبصرہ کیا جائے گا۔

اگلے باب میں سمتیہ کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہر مرتبہ  $n$  اعداد کو سمتیہ تصور کیا جائے گا، جہاں  $n$  کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے۔

## سوالات

سوال 8.1 تا سوال 8.10 میں سمتیہ  $u$  کا ابتدائی نقطہ  $A$  اور اختتامی نقطہ  $B$  ہے۔ سمتیہ  $u$  کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی  $|u|$  حاصل کریں۔  $u$  کا خط کھینچیں۔

$$\text{سوال 8.1: } A : (2, 3, 0), \quad B : (-4, 6, 0)$$

$$\text{جوابات: } |u| = 3\sqrt{5}, \quad u_1 = -6, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 0$$

سوال 8.2:  $A : (5, 3, 1), \quad B : (1, 7, 2)$

جوابات:  $|u| = \sqrt{33} \quad , \quad u_1 = -4 \quad , \quad u_2 = 4 \quad , \quad u_3 = 1$

سوال 8.3:  $A : (1.2, -1, 2.5), \quad B : (2.4, 1.6, -3.2)$

جوابات:  $|u| = 6.38 \quad , \quad u_1 = 1.2 \quad , \quad u_2 = 2.6 \quad , \quad u_3 = -5.7$

سوال 8.4:  $A : (0, 0, 3), \quad B : (4, 0, 0)$

جوابات:  $|u| = 5 \quad , \quad u_1 = 4 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = -3$

سوال 8.5:  $A : (3, 3, 3), \quad B : (1, 1, 1)$

جوابات:  $|u| = 2\sqrt{3} \quad , \quad u_1 = -2 \quad , \quad u_2 = -2 \quad , \quad u_3 = -2$

سوال 8.6:  $A : (1, 1, 1), \quad B : (3, 3, 3)$

جوابات:  $|u| = 2\sqrt{3} \quad , \quad u_1 = 2 \quad , \quad u_2 = 2 \quad , \quad u_3 = 2$

سوال 8.7:  $A : (2, 2, 2), \quad B : (2, 2, 0)$

جوابات:  $|u| = 0 \quad , \quad u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = 0$ ؛ یہ صفر سمتیہ ہے۔

سوال 8.8:  $A : (0, 7, 8), \quad B : (-3, 1, 8)$

جوابات:  $|u| = 3\sqrt{5} \quad , \quad u_1 = -3 \quad , \quad u_2 = 6 \quad , \quad u_3 = 0$

سوال 8.9:  $A : (100, 200, 300), \quad B : (100, 204, 303)$

جوابات:  $|u| = 5 \quad , \quad u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 4 \quad , \quad u_3 = 3$

سوال 8.10:  $A : (-5, -6, -2), \quad B : (-8, -6, -4)$

جوابات:  $|u| = \sqrt{13} \quad , \quad u_1 = -3 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = -2$

سوال 8.11 تا سوال 8.20 میں ابتدائی نقطہ  $A$  اور سمتیہ کے اجزاء دیے گئے ہیں۔ سمتیہ کا اختتامی نقطہ دریافت کریں۔



سوال 8.11:  $A : (-2, 3, 1); \quad 3, 1, 4$   
جواب:  $1, 4, 5$

سوال 8.12:  $A : (0, 0, 0); \quad 5, 1, 7$   
جواب:  $5, 1, 7$

سوال 8.13:  $A : (5, 2, -6); \quad 0, 0, 0$   
جواب:  $5, 2, -6$

سوال 8.14:  $A : (3, 6, 1); \quad -5, -7, 2$   
جواب:  $-2, -1, 3$

سوال 8.15:  $A : (4, 4, 4); \quad 4, 4, 4$   
جواب:  $8, 8, 8$

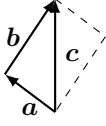
سوال 8.16:  $A : (7, 7, 7); \quad -7, -7, -7$   
جواب:  $0, 0, 0$

سوال 8.17:  $A : (-3, -4, -5); \quad 3, 4, 5$   
جواب:  $0, 0, 0$

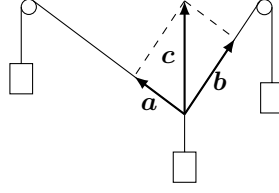
سوال 8.18:  $A : (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}); \quad -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 1$   
جواب:  $-1, 1, \frac{4}{3}$

سوال 8.19:  $A : (0.2, -0.1, 0.5); \quad 1.1, -0.4, -0.3$   
جواب:  $1.3, -0.5, 0.2$

سوال 8.20:  $A : (11.3, -10, -15.8); \quad 12.6, 9, -14$   
جواب:  $23.9, -1, -29.8$



(ب) سمتیوں کا مجموعہ بذریعہ متوازی الاضلاع



(الف) قوتوں کا مجموعہ بذریعہ تجربہ

شکل 8.4: تجربہ سے قوتوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کے مجموعے کا حصول حاصل ہوتا ہے۔

### 8.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب

چونکہ ہم سمتیات کو حساب کتاب کے لئے استعمال کرنا چاہتے ہیں لہذا سمتیات کے دو عدد الجبرائی اعمال پیش کرتے ہیں جنہیں سمتیات کا مجموعہ اور سمتیات کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کہتے ہیں۔

تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ دو قوتوں کا حاصل، متوازی الاضلاع (شکل 8.4) سے ملتا ہے۔ اس سے سمتیات کے مجموعے کی درج ذیل تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: سمتیات کا مجموعہ

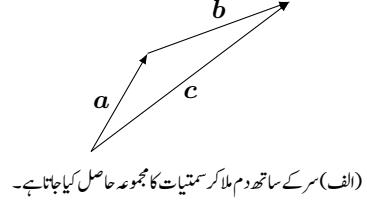
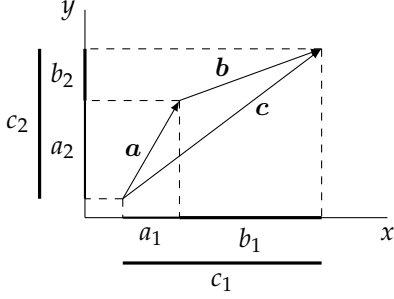
دو سمتیات  $a$  اور  $b$  کو لیتے ہوئے  $a$  کے سر کے ساتھ  $b$  کی دم ملائیں۔ اب  $a$  اور  $b$  کی مجموعے کی تعریف وہ سمتیہ  $c$  ہے جو  $a$  کی دم سے  $b$  کے سر تک کھینچی جائے گی (شکل 8.5-الف)۔ اس عمل کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(8.5) \quad c = a + b$$

سمتیات کی مجموعے کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر کسی معین کارتیسی نظام محدود میں  $a$  کے اجزاء  $a_1, a_2$  اور  $a_3$  جبکہ  $b$  کے اجزاء  $b_1, b_2$  اور  $b_3$  ہوں تب حاصل جمع سمتیہ  $c$  کے اجزاء  $c_1, c_2$  اور  $c_3$  درج ذیل ہوں گے۔

$$(8.6) \quad c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3$$

شکل 8.5-ب میں اس عمل کو سطح پر دکھایا گیا ہے، اور فضا میں بھی بالکل ایسا ہی ہو گا۔



(الف) سر کے ساتھ دم ملا کر سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ب) سمتیات کے مطابق اجزاء کو جمع کرتے ہوئے حاصل جمع سمتیہ کے اجزاء حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 8.5: مجموعہ سمتیات۔

مجموعہ کی تعریف یا مساوات 8.6 سے مجموعہ سمتیات کی درج ذیل خصوصیات ملتی ہیں جہاں  $-a$  سے مراد ایسا سمتیہ ہے جس کی لمبائی  $|a|$  اور سمت  $a$  کے الٹ ہو۔

(الف)  $a + b = b + a$  قانون تبادل

(ب)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  قانون تلازم

(8.7)

(پ)  $a + 0 = 0 + a$

(ت)  $a + (-a) = 0$



- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.