

انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات	1
2	1.1 نمونہ کثی	
13	1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔	
22	1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات	
40	1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل	
52	1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی	
70	1.6 عمودی خطوط کی نسلیں	
74	1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت	
81	2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات	2
81	2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات	
98	2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
113	2.3 تفرقی عامل	
118	2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش	
134	2.5 پولر کوئی مساوات	
143	2.6 حل کی وجودیت اور یکنائیت؛ وروئسکی	
152	2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات	
164	2.8 جبری ارتعاش۔ گمک	
170	2.8.1 برقرار حال حل کا جیٹ۔ عملی گمک	
174	2.9 برقی ادوار کی نمونہ کثی	
185	2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	
193	3 بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات	3
193	3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	
205	3.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	

3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات	214
3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل	217
4	نظام تفرقی مساوات	225
4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق	226
4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے	235
4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورنسکی	250
4.3.1	خطی نظام	251
4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب	254
4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔ استحکام	272
4.6	کیفی ترکیب برائے غیر خطی نظام	281
4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ	290
4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام	298
4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب	299
5	طاقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل	309
5.1	ترکیب طاقی تسلسل	310
5.2	لیمنڈر مساوات۔ لیمنڈر کثیر رکنی	325
5.3	مبسوط طاقی تسلسل۔ ترکیب فروبنیوس	343
5.3.1	عملی استعمال	348
5.4	مساوات بیسل اور بیسل تفاعل	362
5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل	377
6	لاپلاس متبادلہ	385
6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت	386
6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات	395
6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیزھی تفاعل	408
6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ	429
6.5	الچھاؤ	447
6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرقی۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات	456
6.7	تفرقی مساوات کے نظام	465
6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کلیے	473
7	سمتیات عارضی باب	477
7.1	غیر سمتیات اور سمتیات	477
7.2	سمتیہ کے اجزاء	479
7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب	485

494	سمتی فضا۔ خطی تابعت اور غیر تابعت	7.4
500	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)	7.5
513	اندرونی ضرب فضا	7.6
515	سمتی ضرب	7.7
517	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب	7.8
528	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب	7.9

537	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام	8
538	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب	8.1
548	قالبی ضرب	8.2
555	8.2.1 تبدیلی محل	
568	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط	8.3
581	8.3.1 صف زینہ دار صورت	
589	خطی غیر تابعت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا	8.4
603	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی	8.5
608	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب	8.6
611	مقطع۔ قاعدہ کریمر	8.7
628	معکوس قالب۔ گاوس جارجون اسقاط	8.8
643	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ	8.9

661	9 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ	
-----	--------------------------------	--

561	ا اضافی ثبوت	
-----	--------------	--

565	ب مفید معلومات	
565	1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات	

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 9

قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ

لیٹنڈر تفاعل (حصہ 5.2) اور بیسل تفاعل کی ایک خاصیت جسے قائمیت¹ کہتے ہیں انجینئری حساب میں نمایاں کردار ادا کرتی ہے۔ اس حصے میں قائمیت سے وابستہ تصورات اور علامت نویسی سیکھتے ہیں۔ اگلے حصے میں ایسی سرحدی قیمت مسائل (سٹیورم لیوویل مسائل) پر غور کیا جائے گا جن کے حل قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ دیتے ہیں۔ ان مسائل پر غور کے دوران حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے لیٹنڈر تفاعل اور بیسل تفاعل پر غور کیا جائے گا۔

آئیں پہلے تفاعل کی قائمیت کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر حقیقی قیمت تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ معین ہیں اور اس وقفے پر ان تفاعل کے حاصل ضرب $g_m(x)g_n(x)$ کا مکمل موجود ہے۔ اس مکمل کو روایتی طور پر (g_m, g_n) لکھا جاتا ہے۔

$$(9.1) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx$$

اگر درج بالا مکمل صفر کے برابر ہو تب تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر قائمہ الزاویہ² کہلاتے ہیں۔

$$(9.2) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

orthogonality¹
orthogonal²

حقیقی قیمت تفاعل کا سلسلہ $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، ... اس صورت وقفہ $a \leq x \leq b$ پر قائم الزاویہ سلسلہ³ کہلائے گا جب اس وقفے پر یہ تمام تفاعل معین اور تمام مکمل (g_m, g_n) موجود ہوں اور اس سلسلے میں تمام ممکنہ منفرد جوڑیوں کے یہ مکمل صفر کے برابر ہوں۔

(g_m, g_m) کے غیر صفر جذر کو g_m کا معیار⁴ کہتے ہیں جسے عموماً $\|g_m\|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(9.3) \quad \|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x) dx}$$

ہم پوری بحث کے دوران درج ذیل فرض کریں گے۔

عمومی مفروضہ: تمام تفاعل جن پر غور کیا جا رہا ہو محدود ہیں، جن مکمل پر غور کیا جا رہا ہو وہ موجود ہیں اور معیار غیر صفر ہیں۔

ظاہر ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر ایسے قائم الزاویہ سلسلہ g_1 ، g_2 ، ... جن میں ہر تفاعل کا معیار اکائی (1) ہو درج ذیل تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(9.4) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad (m = 1, 2, \dots) \\ 1 & m = n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

ایسے سلسلے کو وقفہ $a \leq x \leq b$ پر معیاری قائم الزاویہ سلسلہ⁵ کہتے ہیں۔

کسی بھی قائم الزاویہ سلسلے کے ہر تفاعل کو، زیر غور وقفے پر، اس تفاعل کی معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری قائم الزاویہ سلسلہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 9.1:

orthogonal set³
norm⁴
orthonormal set⁵

- [1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.
- [2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.