# انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

# عنوان

# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

# باب 17

# ترتیب اور تسلسل

اس باب میں مخلوط اور حقیقی ترتیب اور تسلسل کے بنیادی تصورات پیش کیے جائیں گے۔

## 17.1 ترتیب

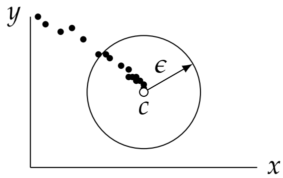
تسلسل، بالخصوص طاقتی تسلسل مخلوط تجزیہ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ان کو متعارف کرنے کی خاطر ہم پہلے ترتیب اور اس سے متعلقہ تصورات کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ مخلوط ترتیب اور تسلسل کی زیادہ تر مسئلے اور تعریف، حقیقی ترتیب اور تسلسل کے مسائل اور تعریف کی مانند ہوں گے جنہیں حقیقی علم الاحصاء میں استعمال کیا جاتا ہے۔

اگر ہر مثبت عدد صحیح $n$ کو عدد $z_n$ مختص کی جائے تب ہم کہتے ہیں کہ اعداد

$$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$$

**لامتناہی ترتیب**[1] یا، مختصراً، **ترتیب** بناتے ہیں۔ان اعداد $z_n$ کو ترتیب کے **مقدار یا اجزاء**[2] کہتے ہیں۔

[1] infinite sequence
[2] terms




شکل 17.1: مرتکز مخلوط ترتیب

حقیقی اجزاء پر مبنی ترتیب کو **حقیقی ترتیب**[3] کہتے ہیں۔

بعض اوقات ہم ترتیب کے اجزاء کی گنتی $0$ یا $2$ یا کسی دیگر عدد صحیح سے شروع کرتے ہیں۔

ایک ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ اس صورت **مرکوز** یا **مرتکز** ہو گا جب ایسا عدد $c$ پایا جاتا ہو کہ کسی بھی مثبت (غیر صفر) حقیقی عدد $\epsilon$ (جو چاہے جتنا چھوٹا کیوں نہ ہو) کی صورت میں ہم ایسا عدد صحیح $N$ تلاش کر سکتے ہوں کہ تمام $n > N$ کے لئے درج ذیل درست ہو۔

$$|z_n - c| < \epsilon \qquad n > N \tag{17.1}$$

$c$ کو ترتیب کی **حد**[4] کہتے ہیں جس کو عموماً

$$z_n \to c \qquad (n \to \infty)$$

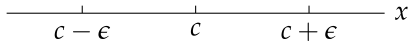
لکھا جاتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ ترتیب $c$ کو مرکوز ہے یا کہ ترتیب کی حد $c$ ہے۔

ایسا ترتیب جو مرتکز نہ ہو **منفرج**[5] کہلاتا ہے۔

مساوات 17.1 کا ایک سادہ جیومیٹریائی مطلب ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ $n > N$ کی صورت میں ہر جزو $z_n$ اس کھلے قرص میں پایا جاتا ہے جس کا رداس $\epsilon$ اور مرکز $c$ ہے (شکل 17.1) جبکہ قرص کا رداس $\epsilon$ کتنا ہی کم کیوں نہ کر دیا جائے اس قرص کے باہر اجزاء $z_n$ کی زیادہ سے زیادہ تعداد محدود ہو گی۔ظاہر ہے کہ $N$ کی قیمت عموماً $\epsilon$ پر منحصر ہو گی۔

حقیقی ترتیب کی صورت میں مساوات 17.1 جیومیٹریائی طور کہتی ہے کہ $n > N$ کی صورت میں جزو $z_n$ وقفہ $c - \epsilon$ تا $c + \epsilon$ پر پایا جائے گا (شکل 17.2) اور اس وقفہ سے باہر اجزاء کی زیادہ سے زیادہ تعداد محدود ہو گی۔

real sequence[3]
limit[4]
divergent[5]




شکل 17.2: حقیقی مرتکز ترتیب

**مثال 17.1: مرتکز اور منفرج ترتیب**

ترتیب $z_n = 1 + \frac{2}{n}$ کے اجزاء $3, 2, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \cdots$ ہیں۔یہ ترتیب مرتکز ہے اور اس کی حد $c = 1$ ہے۔در حقیقت مساوات 17.1 سے

$$z_n - c = 1 + \frac{2}{n} - 1 = \frac{2}{n}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\frac{2}{n} < \epsilon$ اس صورت ہو گا جب $\frac{n}{2} > \frac{1}{\epsilon}$ یا $n > \frac{2}{\epsilon}$ ہو۔مثلاً $\epsilon = 0.01$ منتخب کرتے ہوئے $\frac{2}{n} < 0.01$ تب ہو گا جب $n > 200$ ہو۔

ترتیب $1, 2, 3, \cdots$ اور $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \cdots$ منفرج ہیں۔

وہ ترتیب جس کے اجزاء

$$z_n = 2 - \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

یعنی

$$1 + i, \quad \frac{3}{2} + i2, \quad \frac{7}{4} + i\frac{3}{2}, \cdots$$

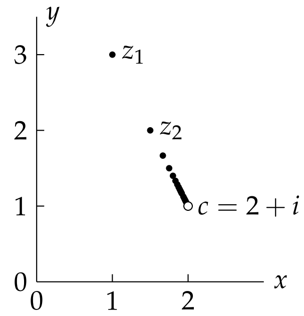
ہیں کو شکل 17.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں پہلے دو اجزاء $z_1 = 1 + i3$ اور $z_2 = \frac{3}{2} + i2$ کی نشاندہی کی گئی ہے۔یہ ترتیب مرتکز ہے اور اس کی حد $c = 2 + i$ ہے۔مساوات 17.1 سے

$$|z_n - c| = \left|\frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} - (2+i)\right| = \left|-\frac{1}{n} + i\frac{2}{n}\right| = \frac{\sqrt{5}}{n}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\frac{\sqrt{5}}{n} < \epsilon$ تب ہو گا جب $\frac{n}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\epsilon}$ یعنی $n > \frac{\sqrt{5}}{\epsilon}$ ہو۔مثال کے طور پر $\epsilon = \frac{1}{100}$ منتخب کرتے ہوئے $|z_n - c| < \epsilon$ تب ہو گا جب $n > 223.6$ یعنی $n = 224$ یا $n = 225$ ، وغیرہ ہو۔ □

مخلوط ترتیب $z_1, z_2, z_3, \cdots$ کی صورت میں $z_n = x_n + iy_n$ لکھ کر ہم حقیقی حصوں کی ترتیب اور خیالی حصوں کی ترتیب

$$x_1, x_2, x_3, \cdots \qquad \text{اور} \qquad y_1, y_2, y_3, \cdots$$




شکل 17.3: مثال 17.1 میں آخری ترتیب

پر علیحدہ علیحدہ غور کر سکتے ہیں۔ مثلاً مثال 17.1 کی آخری ترتیب کے دو علیحدہ علیحدہ ترتیب درج ذیل ہوں گی۔

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots \qquad \text{اور} \qquad 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \cdots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی اور خیالی ترتیب کے حد بالترتیب 2 اور 1 ہیں (شکل 17.3) جو اصل مخلوط ترتیب کی حقیقی اور خیالی حصوں کی حد ہیں۔ عموماً ایسا ہی ہوتا ہے جو درج ذیل کی ایک مثال ہے۔

**مسئلہ 17.1: (حقیقی اور خیالی اجزاء کی ترتیب)**
مخلوط اعداد $(n = 1, 2, \cdots)$ $z_n = x_n + iy_n$ کی ترتیب $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ صرف اور صرف اس صورت حد $c = a + ib$ پر مرکوز ہو گا جب حقیقی حصوں کی ترتیب $x_1, x_2, \cdots$ نقطہ $a$ پر مرتکز ہو اور خیالی حصوں کی ترتیب $y_1, y_2, \cdots$ نقطہ $b$ پر مرتکز ہو۔

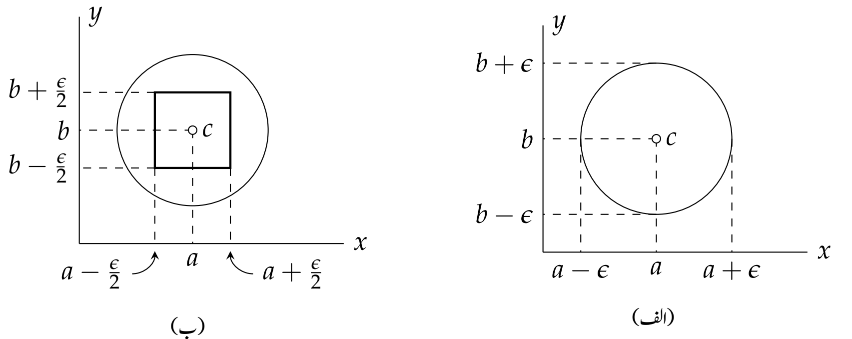
**ثبوت:** اگر $|z_n - c| < \epsilon$ ہو تب $z_n = x_n + iy_n$ اس دائرہ کے اندر پایا جائے گا جس کا رداس $\epsilon$ اور مرکز $c = a + ib$ ہوں۔ یوں لازماً

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |y_n - b| < \epsilon$$

ہو گا (شکل 17.4-الف)۔ یوں $n \to \infty$ کی صورت میں مرکوزیت $z_n \to c$ سے مراد مرکوزیت $x_n \to a$ اور مرکوزیت $y_n \to b$ ہے۔

اس کی الٹ چلتے ہوئے، اگر $n \to \infty$ کی صورت میں $x_n \to a$ اور $y_n \to b$ ہوں تب کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم ایسا $N$ اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$




شکل 17.4: مسئلہ 17.1 کا ثبوت

ہو۔ان دو عدم مساوات کہتی ہیں کہ $z_n = x_n + iy_n$ اس چکور کے اندر پایا جائے گا جس کے اطراف کی لمبائی $\epsilon$ اور مرکز $c$ ہو (شکل 17.4-ب)۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلہ کی باعث حقیقی حصہ اور خیالی حصہ کی ترتیب پر غور کرتے ہوئے مخلوط ترتیب کی مرکوزیت کو حقیقی ترتیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر ایسا مثبت عدد $K$ پایا جاتا ہو کہ مرکز پر رداس $K$ کے دائرے میں ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ کے تمام اجزاء پائے جاتے ہوں یعنی

$$|z_n| < K \qquad \text{تمام } n$$

تب یہ ترتیب **محدود**[6] کہلاتا ہے۔ایسا ترتیب جو محدود نہ ہو غیر **محدود**[7] کہلاتا ہے۔

اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے انفراج کو عموماً درج ذیل سادہ مسئلہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 17.2: ہر مرتکز ترتیب محدود ہو گی۔یوں اگر ایک ترتیب غیر محدود ہو تب یہ منفرج ہو گی۔

---

[6] bounded
[7] unbounded

ثبوت: فرض کریں کہ ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ مرکوز ہے اور اس کی حد $c$ ہے۔ تب ہم $\epsilon > 0$ منتخب کرتے ہوئے ایسا مطابقتی $N$ تلاش کر سکتے ہیں کہ $n > N$ کے لئے ہر $z_n$ رداس $\epsilon$ کے قرص، جس کا مرکز $c$ ہو، میں پائے جائیں گے اور وہ $z_n$ جو اس قرص کے باہر ہوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد محدود ہو گی۔ اب ظاہر ہے کہ ہم مرکز پر اتنے بڑی رداس $K$ کا دائرہ منتخب کر سکتے ہیں کہ یہ قرص اور قرص کے باہر تمام $z_n$ اس دائرے میں پائیں جاتے ہوں۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ یہ ترتیب محدود ہے۔

$\square$

یہاں دہان رہے کہ محدود ہونا مرکوزیت کے لئے کافی نہیں ہے۔ مثلاً ترتیب $1, 0, 1, 0, \cdots$ محدود لیکن منفرج ہے۔ (کیوں؟) غیر محدود ترتیب کی مثالیں درج ذیل ہیں

$$\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots \quad \text{اور} \quad 1, 2, 3, 4, \cdots$$

جو مسئلہ 17.2 کے تحت منفرج ترتیب ہیں۔

### سوالات

سوال 17.1 تا سوال 17.6 میں دیے ترتیب کے ابتدائی چند اجزاء لکھ کر ترسیم کریں۔

سوال 17.1: $\frac{n}{n+3}$
جواب: $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \cdots$

سوال 17.2: $\frac{2n}{n^2+1}$
جواب: $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}, \cdots$

سوال 17.3: $\frac{i^n}{n^2}$
جواب: $i, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{9}, \frac{1}{16}, \frac{i}{25}, \cdots$

سوال 17.4: $\frac{in}{n+1}$
جواب: $\frac{i}{2}, \frac{i2}{3}, \frac{i3}{4}, \frac{i4}{5}, \frac{i5}{6}, \cdots$

سوال 17.5: $\frac{i^n n^2}{n+i}$
جواب: $\frac{1}{2}(1+i), \frac{4}{5}(-2+i), \frac{9}{10}(-1-i3), \frac{16}{17}(4-i), \frac{25}{26}(1+i5), \cdots$

سوال 17.6: $(-1)^n + i2\pi n$
جواب: $-1+i2\pi, 1+i4\pi, -1+i6\pi, 1+i8\pi, -1+i10\pi, \cdots$

سوال 17.7: ترتیب $z_1 = 1$ ، $z_2 = \frac{i}{2}$ ، $z_n = iz_{n-2}z_{n-1}$ $(n = 3, 4, \cdots)$ کے ابتدائی چند اجزاء لکھیں۔اس ترتیب کی حد تلاش کریں۔
جواب: $1, \frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \cdots$

سوال 17.8 تا سوال 17.13 میں دریافت کریں کہ آیا دی گئی ترتیب محدود ہے؟ کیا یہ ترتیب مرکوز ہے؟ مرکوزیت کی صورت میں ترتیب کی حد تلاش کریں۔

سوال 17.8: $z_n = i^n$
جواب: محدود، منفرج

سوال 17.9: $z_n = \frac{i^n}{n}$
جواب: محدود، مرکوز، حد 0

سوال 17.10: $z_n = \frac{in}{n+1}$
جواب: محدود، مرکوز، حد $i$

سوال 17.11: $z_n = \frac{n^2}{n+i}$
جواب: غیر محدود، منفرج

سوال 17.12: $z_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$
جواب: محدود، مرکوز، حد 0

سوال 17.13: $z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$
جواب: محدود، منفرج

سوال 17.14: **حد کی یکتائی**
دکھائیں کہ اگر ایک ترتیب مرتکز ہو تب اس کا حد یکتا ہو گا۔

سوال 17.15: ثابت کریں (مثال 17.1 کی طرح) کہ $\frac{i^n}{n^3}$ مرکوز ہے۔

سوال 17.16: ایک ترتیب کے اجزاء درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔اس ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 17.1 کی تصدیق کریں۔

$$z_n = \frac{n^2-1}{2n^2+1} + i\frac{n}{n+2}$$

سوال 17.17: دکھائیں کہ مخلوط ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ اس صورت محدود ہو گی جب اس کے حقیقی حصہ اور خیالی حصہ کے مطابقتی ترتیب محدود ہوں۔

سوال 17.18: اگر ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ مرکوز ہو اور اس کا حد $0$ ہو، اور ترتیب $b_1, b_2, \cdots$ کسی مقررہ $K > 0$ اور تمام $n$ کے لئے $|b_n| \le K|z_n|$ کو مطمئن کرتا ہو تب دکھائیں کہ ترتیب $b_1, b_2, \cdots$ مرکوز ہے اور اس کا حد $0$ ہے۔

سوال 17.19: اگر ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ مرکوز ہو اور اس کا حد $l$ ہو اور ترتیب $z_1^*, z_2^*, \cdots$ مرکوز ہو اور اس کا حد $l^*$ ہو تب دکھائیں کہ ترتیب $z_1 + z_1^*, z_2 + z_2^*, \cdots$ مرکوز ہو گا اور اس کا حد $l + l^*$ ہو گا۔

سوال 17.20: سوال 17.19 کے مفروضوں کے ساتھ دکھائیں کہ ترتیب $z_1 z_1^*, z_2 z_2^*, \cdots$ مرکوز ہو گا اور اس کا حد $ll^*$ ہو گا۔

## 17.2 تسلسل

فرض کریں کہ $w_1, w_2, \cdots, w_m, \cdots$ حقیقی یا مخلوط اعداد کی ترتیب ہے۔تب ہم درج ذیل **لامتناہی تسلسل** یا، مختصراً، **تسلسل**[8] پر غور کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots \tag{17.2}$$

[8] series

$w_m$ کو ترتیب کی مقدار یا **اجزاء**[9] کہتے ہیں۔ابتدائی $n$ اجزاء کے مجموعہ

$$s_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n \tag{17.3}$$

کو تسلسل 17.2 کا $n$ واں **جزوی مجموعہ**[10] کہتے ہیں۔ تسلسل 17.2 سے $s_n$ ترک کرنے سے

$$R_n = w_{n+1} + w_{n+2} + w_{n+3} + \cdots \tag{17.4}$$

باقی رہ جاتا ہے جس کو تسلسل 17.2 کا، $n$ اجزاء کے بعد، **باقی**[11] کہتے ہیں۔

اس طرح ہم تسلسل 17.2 کے ساتھ اس کے جزوی مجموعوں $s_1, s_2, s_3, \cdots$ کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔اگر یہ ترتیب مرتکز ہو، مثلاً،

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل 17.2 **مرکوز**[12] یا **مرتکز** ہے اور عدد $s$ اس کی **قیمت**[13] یا **مجموعہ** کہلاتا ہے اور ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

اگر جزوی مجموعوں کی ترتیب منفرج ہو تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل 17.2 **منفرج**[14] ہے۔

اگر تسلسل 17.2 مرکوز ہو اور اس کی قیمت $s$ ہو تب

$$s = s_n + R_n \qquad \implies \qquad R_n = s - s_n \tag{17.5}$$

ہو گا۔مرکوزیت کی تعریف کے تحت $n$ کو کافی بڑا لیتے ہوئے ہم $|R_n|$ کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ بہت سی صورتوں میں مرکوز تسلسل کا مجموعہ $s$ تلاش کرنا ناممکن ہو گا۔تب حساب کی خاطر ہم اس کے جزوی مجموعہ $s_n$ کو $s$ کی تقریب تصور کریں گے اور $R_n$ کا تخمینہ لگا کر تقریب کی درستگی کا جائزہ لیں گے۔

---

terms[9]
partial sum[10]
remainder[11]
convergent[12]
value[13]
divergent[14]

**مثال 17.2: مرتکز اور منفرج تسلسل**
تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

مرکوز ہے اور چونکہ

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad \implies \qquad \lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

ہے لہٰذا تسلسل کی قیمت $1$ ہے۔اس کے برعکس تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = 1 + 2 + 3 + \cdots$$

منفرج ہے اور تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = 1 - 1 + 1 - + \cdots$$

منفرج ہے چونکہ

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 - 1 = 0, \quad s_2 = 1 - 1 + 1 = 1, \cdots$$

ہے اور ترتیب $1, 0, 1, 0, \cdots$ منفرج ہے۔

**ہارمونی تسلسل**[15]

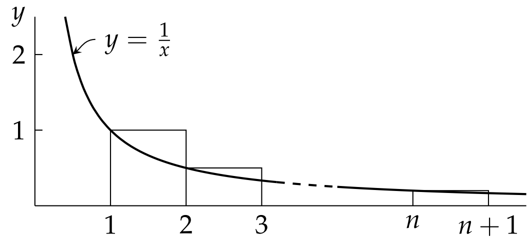
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

منفرج ہے۔در حقیقت جزوی مجموعہ $s_n$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

شکل 17.2 میں $n$ عدد مستطیل کے نیچے رقبہ کے برابر ہے۔یہ رقبہ قوس $y = \frac{1}{x}$ کے نیچے مطابقتی رقبہ $A_n$ سے زیادہ ہے۔اب

$$A_n = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(n+1) \to \infty \qquad (n \to \infty)$$




شکل 17.5: شکل برائے مثال 17.2

ہے اور چونکہ $s_n > A_n$ ہے لہٰذا $n \to \infty$ کرنے سے $s_n \to \infty$ حاصل ہو گا جو انفراج کی تعریف ہے۔
□

مسئلہ 17.1 سے فوری طور پر تسلسل کے لئے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

**مسئلہ 17.3: حقیقی اور خیالی حصوں کی تسلسل**
فرض کریں کہ $w_m = u_m + iv_m$ ہے۔تب تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

کی قیمت صرف اور صرف اس صورت $s = a + jb$ ہو گی جب حقیقی حصہ کی تسلسل اور خیالی حصہ کی تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad \sum_{m=1}^{\infty} v_m = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

مرکوز ہوں اور حقیقی حصے کی تسلسل کی قیمت $a$ اور خیالی حصے کی تسلسل کی قیمت $b$ ہو۔

یہ مسئلہ حقیقی اور مخلوط تسلسل کے درمیان تعلق دیتا ہے۔اس سے زیادہ اہم تعلق درج ذیل تصور پر مبنی ہے۔

تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ اس صورت **حتمی مرتکز**[16] کہلاتا ہے جب مطابقتی تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} |w_m| = |w_1| + |w_2| + \cdots \tag{17.6}$$

---

[15] harmonic series
[16] absolutely convergent

(جس کے اجزاء حقیقی اور غیر منفی ہیں) مرتکز ہو۔

اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مرکوز ہو جبکہ تسلسل 17.6 منفرج ہو تب تسلسل **مشروط مرتکز**[17] کہلاتا ہے۔

**مثال 17.3: حتمی اور مشروط مرکوز تسلسل**
تسلسل

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + - \cdots$$

حتمی مرتکز ہے چونکہ مطابقتی تسلسل 17.6 مرکوز ہے (مثال 17.2)۔اس کے برعکس تسلسل

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

مشروط مرکوز ہے چونکہ تسلسل از خود (معیار لیبنٹز کے تحت) مرتکز ہے لیکن مطابقتی تسلسل 17.6 ہارمونی ہے جو منفرج ہے (مثال 17.2)۔ □

حتمی مرتکز تسلسل کی درج ذیل خاصیت بالکل واضح ہے۔

مسئلہ 17.4: اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ حتمی مرتکز ہو تب یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

ہم اگلے حصے کی آخر میں کوشی اصول مرکوزیت کی مدد سے مسئلہ 17.9 میں اس مسئلے کا سادہ ثبوت پیش کریں گے ۔

ہم آخر میں ایک سادہ مسئلہ پیش کرتے ہیں جو عموماً کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 17.5: اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مرتکز ہو تب

$$\lim_{m \to \infty} w_m = 0 \tag{17.7}$$

ہو گا۔یوں وہ تسلسل جو مساوات 17.7 کو مطمئن نہ کرتا ہو منفرج ہو گا۔

[17] conditional convergent

ثبوت: فرض کریں کہ $w_1 + w_2 + \cdots$ مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ $s$ ہے۔ تب

$$w_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

اور

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

ہو گا۔

□

یاد رہے کہ مساوات 17.7 مرکوزیت کے لئے لازمی لیکن ناکافی شرط ہے۔ مثلاً مثال 17.2 کی ہارمونی تسلسل مساوات 17.7 کو مطمئن کرتے ہوئے بھی منفرج ہے۔ مساوات 17.7 میں دوسری اور تیسری تسلسل مساوات 17.7 کو مطمئن نہیں کرتے ہیں لہٰذا وہ منفرج ہیں۔

## 17.3 کوشی اصول مرکوزیت برائے ترتیب اور تسلسل

کسی بھی ترتیب یا تسلسل کو استعمال کرنے سے پہلے ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا وہ مرتکز ہے یا نہیں۔ چونکہ ہمیں پہلے سے حد معلوم نہیں ہوتا ہے لہٰذا مرکوزیت کی تعریف سے ایسا فیصلہ کرنا عموماً ممکن نہیں ہو گا۔ کوشی اصول مرکوزیت سے، حد جانے بغیر مرکوزیت دریافت کرتا ہے۔

کوشی اصول مرکوزیت میں ہم مسئلہ بُلزانو وائشسٹراس زیر استعمال لائیں گے۔ مسئلہ بُلزانو وائشسٹراس کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصور کی ضرورت ہو گی۔

نقطہ $a$ اس صورت ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ کا **تحدیدی نقطہ**[18] کہلائے گا جب کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ (جو جتنا چاہیں چھوٹا کیوں نا ہو) کے لئے درج ذیل درست ہو۔

$$|z_n - a| < \epsilon \qquad \text{(جہاں } n \text{ لامتناہی تعداد ہے)} \tag{17.8}$$

---

[18] limit point

جدول 17.1: تحدیدی نقطے، مرکوزیت، محدود ہونا (مثال 17.4)

| ترتیب | تحدیدی نقطہ | مرتکز یا منفرج | محدود یا غیر محدود |
|---|---|---|---|
| $1, 2, 3, \cdots$ | (کوئی نہیں) | منفرج | غیر محدود |
| $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ | 1 | مرتکز | محدود |
| $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots$ | 0 | منفرج | غیر محدود |
| $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \cdots$ | 0 اور 1 | منفرج | محدود |

جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ $\epsilon$ کو جتنا بھی چھوٹا کیوں نہ منتخب کیا جائے، رداس $\epsilon$ کا دائرہ جس کا مرکز $a$ ہو، میں تسلسل کے نقطوں کی لامتناہی تعداد پائی جائے گی۔

دھیان رہے کہ مساوات 17.8 مطمئن ہونے کے باوجود دائرے کے باہر نقطوں کی تعداد لامتناہی ہو سکتی ہے اور ترتیب منفرج ہو سکتا ہے۔ در حقیقت مرتکز ترتیب کا حد ہی تحدیدی نقطہ ہو گا (کیوں؟) اور یہ ترتیب کا واحد تحدیدی نقطہ ہو گا۔ اگر کسی ترتیب کا ایک سے زیادہ تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو تب یہ ترتیب منفرج ہو گا۔

مزید، اگر ایک نقطہ لامتناہی بار کسی ترتیب میں پایا جاتا ہو تب تحدیدی نقطہ کی تعریف کے تحت یہی نقطہ اس ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہو گا۔

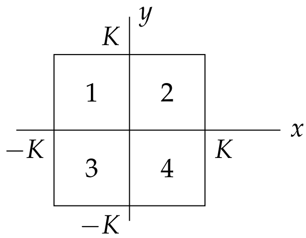
آئیں صورت حال کو سمجھنے کے لئے مثال 17.4 دیکھتے ہیں۔ یاد رہے کہ حصہ 17.1 کے آخر کے قریب محدود ہونے کی تعریف پیش کی گئی۔

**مثال 17.4: تحدیدی نقطہ، مرکوزیت اور محدود ہونا**
جدول 17.1 میں مختلف ممکنہ صورت حال دکھائے گئے ہیں۔ □

اس مثال میں دو محدود ترتیب کے تحدیدی نقطے پائے گئے جو درج ذیل اہم مسئلہ کے عین مطابق ہے۔

**مسئلہ 17.6: بُلزانو[19] اور وائشسٹراس[20]**
مخلوط مستوی میں محدود لامتناہی ترتیب $z_1, z_2, z_3, \cdots$ کا کم از کم ایک عدد تحدیدی نقطہ ہو گا۔

[19] جرمن ریاضی دان برنارت بُلزانو [1781-1848]
[20] جرمن ریاضی دان کارل وائشسٹراس [1815-1897]




شکل 17.6: مسئلہ 17.6 کا ثبوت

ثبوت : صاف ظاہر ہے کہ ہمیں دونوں شرائط کی ضرورت ہو گی: ایک متناہی ترتیب کا کوئی تحدیدی نقطہ نہیں ہو گا، اور ترتیب $1, 2, 3, \cdots$ جو لامتناہی لیکن غیر محدود ہے کا کوئی تحدیدی نقطہ نہیں ہے۔اس مسئلے کو ثابت کرنے کی خاطر محدود لامتناہی ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ پر غور کرتے ہیں جہاں تمام $n$ کے لئے $K$ ایسا عدد ہے جو $|z_n| < K$ کو مطمئن کرتا ہو۔اگر $z_n$ کی قیمتوں میں متناہی تعداد قیمتیں آپس میں مختلف ہوں، تب، چونکہ ترتیب لامتناہی ہے لہٰذا کوئی عدد $z$ ترتیب میں ضرور لامتناہی بار پایا جائے گا، جو تحدیدی نقطہ کی تعریف کے تحت، اس ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہو گا۔

آئیں اب اس صورت پر غور کرتے ہیں جب ترتیب میں لامتناہی تعداد کی مختلف قیمتیں پائی جاتی ہوں۔ہم ایک بڑا چکور $Q_0$ بناتے ہیں (شکل 17.6) جس میں تمام $z_n$ پائے جاتے ہیں۔ہم اس چکور کو چار مماثل چکوروں میں تقسیم کرتے ہیں۔ظاہر ہے کہ ان میں سے کم از کم ایک چکور (بشمول چکور کی مکمل سرحد) میں ترتیب کے لامتناہی تعداد کے اجزاء پائے جائیں گے۔ ایسے چکور کو ہم $Q_1$ سے ظاہر کرتے ہیں۔یہ پہلا قدم ہے۔دوسرے قدم میں ہم $Q_1$ کو چار مماثل چکوروں میں تقسیم کرتے ہوئے اسی قاعدہ کے تحت چکور $Q_2$ منتخب کرتے ہیں۔اسی طرح چلتے ہوئے ہمیں چکوروں کی ترتیب $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots$ یوں حاصل ہوتی ہے کہ $n \to \infty$ کرتے ہوئے چکور $Q_n$ کے طرف کی لمبائی صفر کو پہنچتی ہے اور $n > m$ کی صورت میں $Q_m$ میں تمام $Q_n$ شامل ہوں گے۔یہاں صاف ظاہر ہے کہ وہ عدد (جس کو ہم $z = a$ کہتے ہیں) جو ان تمام چکوروں میں پایا جاتا ہو[21] ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہو گا۔درحقیقت کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم $N$ اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ چکور $Q_N$ کے طرف کی لمبائی $\epsilon$ سے چھوٹی ہو، اور چونکہ $Q_N$ میں لامتناہی تعداد کے $z_n$ پائے جاتے ہیں لہٰذا لامتناہی تعداد کے $z_n$ کے لئے $|z_n - a| < \epsilon$ ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

[21] ایسے یکتا عدد $z = a$ کی موجودگی صاف واضح ہے لیکن حقیقتاً حقیقی اعداد کے نظام کی ایک مسلمہ سے یہ حقیقت حاصل ہوتی ہے جس کو مسلمہ کانتور اور دے دے کند کہتے ہیں۔اگلے حصے میں حاشیہ دیکھیں۔

ہم اب اس حصے کی مرکزی مسئلہ کو پیش کرنے کے قابل ہیں۔

مسئلہ 17.7: **(کوشی اصول مرکوزیت برائے ترتیب)**
ترتیب $z_1, z_2, z_3, \cdots$ صرف اور صرف اس صورت مرکوز ہو گی جب ہر مثبت عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا عدد $N$ (جو $\epsilon$ پر منحصر ہو سکتا ہے) تلاش کر سکیں کہ $m > N$ اور $n > N$ کے لئے

$$|z_m - z_n| < \epsilon \qquad m > N, n > N \tag{17.9}$$

ہو؛ (یعنی $m > N, n > N$ کی صورت میں دو اجزاء $z_m, z_n$ کا ایک دوسرے سے فاصلہ $\epsilon$ سے کم ہو)۔

ثبوت: **(الف)** فرض کریں کہ ترتیب $z, z_2, \cdots$ مرکوز ہے اور اس کا حد $c$ ہے۔ تب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $N$ تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو گا۔

$$|z_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{ہر } n > N$$

یوں جب $m > N, n > N$ ہوں تب تکونی عدم مساوات کے تحت

$$|z_m - z_n| = \left|(z_m - c) - (z_n - c)\right| \le |z_m - c| + |z_n - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ہو گا یعنی اگر ترتیب مرکوز ہو تب مساوات 17.9 مطمئن ہو گی۔

**(ب)** اب الٹ چلتے ہوئے دوسرا ثبوت پیش کرتے ہیں۔ ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ جو مساوات 17.9 کو مطمئن کرتا ہو پر غور کرتے ہیں۔ ہم پہلے دکھاتے ہیں کہ یہ ترتیب محدود ہے۔ مساوات 17.9 میں ایک مقررہ $\epsilon$ اور ایک مقررہ $n = n_0 > N$ منتخب کریں۔ تب مساوات 17.9 کہتی ہے کہ ہر $m > N$ کے لئے ہر $z_m$، رداس $\epsilon$ کے قرص جس کا مرکز $z_{n_0}$ ہو میں پایا جائے گا، اور ترتیب کے اجزاء کی متناہی تعداد قرص کے باہر پائی جائے گی۔ اب ظاہر ہے کہ ہم مبدا پر اتنا بڑا دائرہ لے سکتے ہیں کہ قرص اور $z_n$ کے متناہی تعداد کے وہ اجزاء جو قرص کے باہر ہیں، اس دائرے کے اندر پائے جائیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ یہ ترتیب محدود ہے، اور مسئلہ بُلزانو اور وائشٹراس (مسئلہ 17.6) کے تحت اس ترتیب کا کم از کم ایک تحدیدی نقطہ ہو گا، جس کو ہم $L$ کہتے ہیں۔

ہم اب دکھائیں گے کہ یہ ترتیب مرکوز ہے اور اس کا حد $L$ ہے۔ تحدیدی نقطہ کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں لامتناہی تعداد کی $n$ کے لئے $|z_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ ہو گا۔ چونکہ مساوات 17.9 کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے درست ہے، جب کوئی $\epsilon > 0$ دیا گیا ہو ہم ایسا $N^*$ تلاش کر سکتے ہیں کہ

کسی بھی $n > N^*$ یوں منتخب کریں کہ $|z_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ ہو اور فرض کریں کہ $m$ ایسا عدد صحیح ہے جو $N^*$ سے بڑا ہو۔تب تکونی عدم مساوات سے $m > N^*, n > N^*$ کے لئے $|z_m - z_n| < \frac{\epsilon}{2}$ ہو۔ایک مقررہ $N^*$ 

$$|z_m - L| = \left|(z_m - z_n) + (z_n - L)\right| \leq |z_m - z_n| + |z_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ہو گا، یعنی، تمام $m > N^*$ کے لئے $|z_m - L| < \epsilon$ ہو گا، جو مرکوزیت کی تعریف ہے۔یوں یہ ترتیب مرکوز ہے اور اس کا حد $L$ ہے۔

□

کسی بھی دیے گئے تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ کے جزوی مجموعوں $s_n$ کی ترتیب پر ہم موجودہ مسئلے کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ یوں عدم مساوات 17.9 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$|s_m - s_n| < \epsilon \qquad (m > N, n > N)$$

یا اگر ہم $m = n + p$ لکھیں تب

$$\left|s_{n+p} - s_n\right| < \epsilon \qquad (n > N, p = 1, 2, \cdots)$$

صورت اختیار کرے گی۔اب جزوی مجموعہ کی تعریف سے درج ذیل ہو گا۔

$$s_{n+p} - s_n = w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+p}$$

اس سے درج ذیل بنیادی مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

**مسئلہ 17.8: (کوشی اصول مرکوزیت برائے تسلسل)**
تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب ہر دیے گئے $\epsilon > 0$ (جو جتنا کم کیوں نہ ہو) کے لئے ہم ایسا $N$ (جو عموماً $\epsilon$ پر منحصر ہو گا) تلاش کر سکیں کہ ہر $n > N$ اور $p = 1, 2, \cdots$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\left|w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+p}\right| < \epsilon \qquad n > N, \; p = 1, 2, \cdots$$

اس اہم مسئلے کی پہلی استعمال کے طور پر ہم مسئلہ 17.4 کو ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 17.9: اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ حتمی مرتکز ہو تب یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

ثبوت: عمومی عدم مساوات 14.26 سے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|w_{n+1} + \cdots + w_{n+p}\right| \le |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots + \left|w_{n+p}\right| \tag{17.10}$$

چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ تسلسل $|w_1| + |w_2| + \cdots$ مرتکز ہے لہٰذا مسئلہ 17.8 کے تحت مساوات 17.10 کا دایاں ہاتھ ہر $n > N$ (جہاں $N$ کافی بڑا ہے) اور $p = 1, 2, \cdots$ کے لئے کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ سے چھوٹا ہو گا۔ یوں یہی کچھ مساوات 17.10 کے بائیں ہاتھ کے لئے بھی درست ہو گا لہٰذا، اسی مسئلہ کے تحت، تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مرتکز ہو گا۔

□

سوالات

کیا سوال 17.21 تا سوال 17.35 میں دیے گئے ترتیب $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ محدود ہیں؟ مرتکز ہیں؟ ان کے تحدیدی نقطے تلاش کریں۔

سوال 17.21: $z_n = (i2)^n$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.22: $z_n = 1 + i^n$
جواب: محدود، منفرج، $0, 2, 1 + i, 1 - i$

سوال 17.23: $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n}$
جواب: محدود، منفرج، $1, -1$

سوال 17.24: $z_n = e^{\frac{in\pi}{2}}$
جواب: محدود، منفرج، $1, -1, i, -i$

سوال 17.25: $z_n = i^n \cos n\pi$
جواب: محدود، منفرج، $1, -1, i, -i$

سوال 17.26: $z_n = i^n \cosh n\pi$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.27: $z_n = (1-i)^n$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.28: $z_n = (1+i)^{2n}$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.29: $z_n = \frac{(3+i4)^n}{n!}$
جواب: محدود، مرتکز، $0$

سوال 17.30: $z_n = i\pi + \sin n\pi$
جواب: محدود، مرتکز، $i\pi$

سوال 17.31: $z_n = \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$
جواب: محدود، مرتکز، $0$

سوال 17.32: $z_n = i^n n^2$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.33: $(n = 4, 5, \cdots) \quad z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3, z_n = z_{n-3} - z_{n-2} + z_{n-1}$
جواب: محدود، منفرج، $1, 2, 3$

سوال 17.34: $(n = 3, 4, \cdots) \quad z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = \frac{1}{4}, z_n = \frac{z_{n-2}}{z_{n-1}}$
جواب: غیر محدود، منفرج، $0$

سوال 17.35: $(n = 3, 2, \cdots) \quad z_1 = 1, z_2 = i, z_n = z_{n-2} z_{n-1}$
جواب: محدود، منفرج، $1, -1, i, -i$

## 17.4 یک سر حقیقی ترتیب۔ معیار لیبنٹز برائے حقیقی تسلسل

اس حصے میں حقیقی ترتیب اور تسلسل کے دو مسئلے پیش کیے گئے ہیں جن کا مخلوط ترتیب اور تسلسل کا مماثل مسئلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ دونوں مسئلے عملاً بہت اہم ہیں۔

ایسی حقیقی ترتیب $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ جس میں

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots$$

ہو **یک سر بڑھتی**[22] کہلاتی ہے۔ اسی طرح اگر

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \cdots$$

ہو تب یہ **یک سر گھٹتی**[23] کہلائے گی۔ یک سر بڑھتی یا یک سر گھٹتی ترتیب کو **یک سر ترتیب**[24] کہتے ہیں۔

مثلاً منفرج ترتیب $1, 2, 3, \cdots$ یک سر اور غیر محدود ہے۔ مرتکز ترتیب $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ یک سر اور محدود ہے، اور ہم ثابت کریں گے کہ یہ دو خواص مرکوزیت کے لئے کافی ہیں:

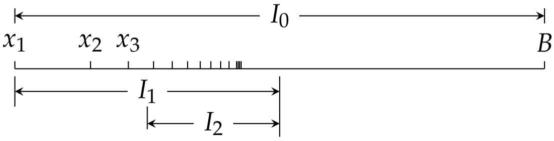
مسئلہ 17.10: **(حقیقی ترتیب کی مرکوزیت)**
محدود اور یک سر حقیقی ترتیب مرکوز ہو گی۔

ثبوت: فرض کریں کہ $x_1, x_2, \cdots$ محدود یک سر ترتیب ہے۔ تب اس کے اجزاء کسی عدد $B$ سے چھوٹے ہوں گے اور، چونکہ، تمام $n$ کے لئے $x_1 \le x_n$ ہے لہٰذا تمام اجزاء وقفہ $x_1 \le x_n \le B$ میں پائے جائیں گے جس کو ہم $I_0$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقفہ $I_0$ کو دو برابر لمبائی کے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اگر $I_0$ کے دائیں نصف (بشمول اس کے دونوں سر) میں ترتیب کے اجزاء پائے جاتے ہوں تب اس ٹکڑے کو ہم $I_1$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر اس میں ترتیب کے اجزاء نہ پائے جاتے ہوں تب ہم $I_0$ کے بائیں نصف (بشمول اس کے دونوں سر) کو ہم $I_1$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ پہلا قدم ہے (شکل 17.7)۔

دوسرے قدم پر ہم $I_1$ کو برابر لمبائی کے دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے اسے اصول کے تحت $I_2$ منتخب کرتے ہیں۔

---

[22] monotone increasing
[23] monotone decreasing
[24] monotone sequence




شکل 17.7: شکل برائے ثبوت مسئلہ 17.10

اسی طرح چلتے ہوئے ہمیں بتدریج چھوٹے وقفے $I_0, I_1, I_2, \cdots$ ملتے ہیں جن کے خواص کچھ یوں ہیں: $n > m$ کی صورت میں $I_m$ میں تمام $I_n$ شامل ہیں۔ ترتیب کا کوئی جزو $I_m$ کے دائیں جانب نہیں پایا جاتا ہے اور چونکہ ترتیب یک سر بڑھتی ہے، کسی عدد $N$ (جو عموماً $m$ پر منحصر ہو گا) سے زیادہ تمام $n$ کے لئے $x_n$ وقفہ $I_m$ میں پائے جاتے ہیں۔ جیسے جیسے $m$ لامتناہی تک پہنچتا ہو ویسے ویسے $I_m$ کی لمبائی صفر کو پہنچتی ہے۔ یوں واحد ایک عدد ایسا ہو گا جو ان تمام وقفوں میں پایا جائے گا۔ اس عدد کو ہم $L$ کہتے ہیں۔ ہم اب با آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ ترتیب مرتکز ہے اور اس کا حد $L$ ہے۔

ہم ایسا $m$ منتخب کرتے ہیں کہ $I_m$ کی لمبائی کسی بھی دیے عدد $\epsilon > 0$ سے کم ہو۔ یوں $L$ اور تمام $x_n$، جہاں $n > N(m)$ ہے، $I_m$ میں پائے جائیں گے، اور، یوں ان تمام $n$ کے لئے $|x_n - L| < \epsilon$ ہو گا۔ یوں بڑھتی ترتیب کے لئے ثبوت مکمل ہوتا ہے۔ گھٹتی ترتیب کے لئے ثبوت بالکل ایسا ہی ہے پس وقفوں کی انتخاب کے دوران دائیں کی جگہ بائیں اور بائیں کی جگہ دائیں کا لفظ استعمال کریں۔

□

ہم ایسے حقیقی تسلسل کے ایک اہم مسئلہ کو اب ثابت کرتے ہیں جس کے اجزاء کی علامت متواتر بدلتی ہے اور جس کے اجزاء کی حتمی قیمت بتدریج گھٹتی ہے۔ یہ مسئلے مرکوزیت کے لئے درکار کافی شرائط پیش کرتا ہے اور تسلسل کے باقی کا تخمینہ لگانے میں مدد دیتا ہے۔

مسئلہ 17.11: **معیار لیبنٹز برائے حقیقی تسلسل**

# ضمیمہ ا

# اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے $I$ پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ $I$ پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا $I$ پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ $y_1$ اور $y_2$ دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا $y$ درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو $z'$ میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ $y$ اور $y'$ حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8ا اور مساوات 1.9ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ $F_1$ اور $F_2$ مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 10.ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $I$ پر $zF_1$ بڑھ نہیں رہا اور $zF_2$ گھٹ نہیں رہا۔مساوات 2.ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں $F_1$ اور $F_2$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ $I$ پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں $I$ پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

# ضمیمہ ب

# مفید معلومات

## 1.ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

**قوت نمائی تفاعل** $e^x$ (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

**قدرتی لوگارتھم** (شکل 1.ب-ب)

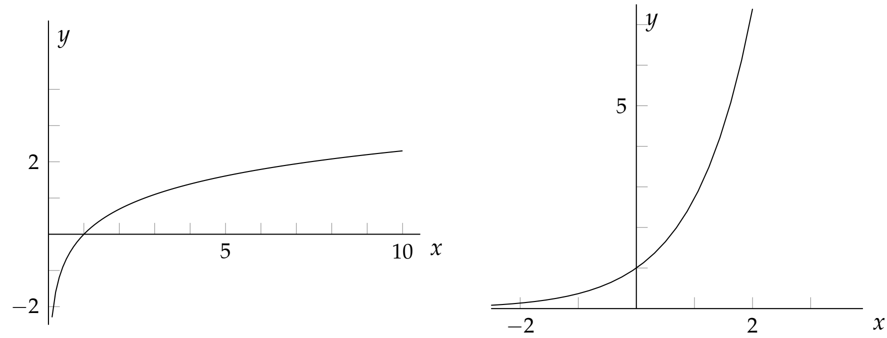
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

$e^x$ کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

**اساس دس کا لوگارتھم** $\log_{10} x$ یا $\log x$

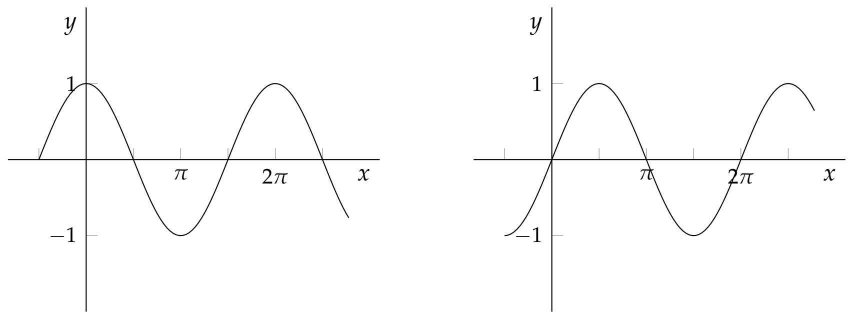
$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$




(الف) قوت نمائی تفاعل $e^x$ (ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل




(الف) $\sin x$ (ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

$10^x$ کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

**سائن اور کوسائن تفاعل** (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ $2\pi$ ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\, 17'\, 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (\text{ب}.5)$$

(ب.6)
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\sin(x-y)\quad=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[-\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u+\sin v=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v-\cos u=2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

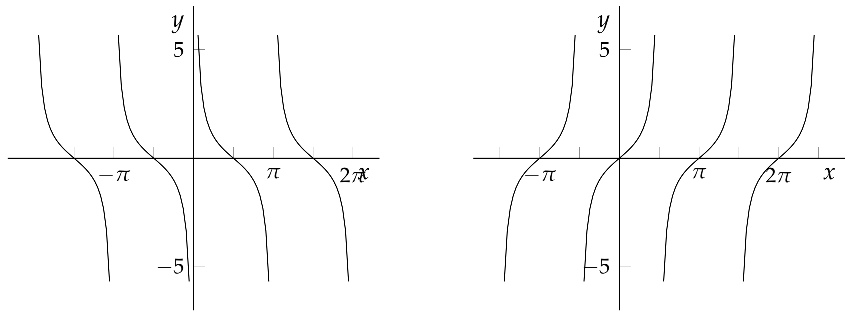
(ب.13)
$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\cos(x\mp\delta),\quad \tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x\mp\delta),\quad \tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\mp\frac{A}{B}$$

**ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)**

(ب.15)
$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc=\frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},\quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$




$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

**ہذلولی تفاعل** (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\begin{gathered}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}\end{gathered} \tag{ب.17}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

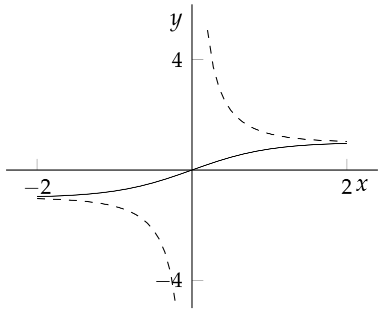
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y\end{aligned} \tag{ب.20}$$

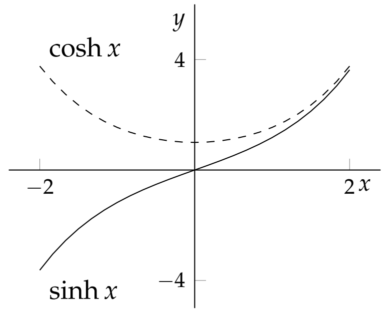
$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

**گیما تفاعل** (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$




(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔




(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ( $\alpha > 0$ ) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط $\alpha$ کی بات کریں تب یہ $\alpha$ کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات 22.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 23.ب استعمال کرتے ہوئے $\alpha$ کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت $k$ کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

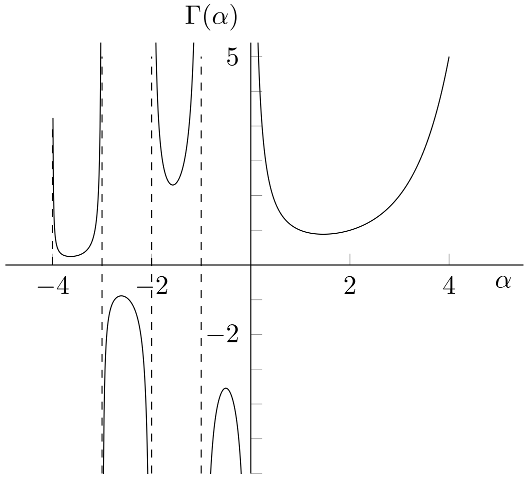
مساوات 23.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\alpha$ کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں $k$ کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 22.ب اور مساوات 25.ب مل کر $\alpha$ کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔




شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات 25.ب اور مساوات 26.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط $\alpha$ کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

$\alpha$ کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $e$ قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

**نا مکمل گیما تفاعل**

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.30}$$

**بیٹا تفاعل**

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\, y > 0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

**تفاعل خلل (شکل 6.ب)**

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات 33.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

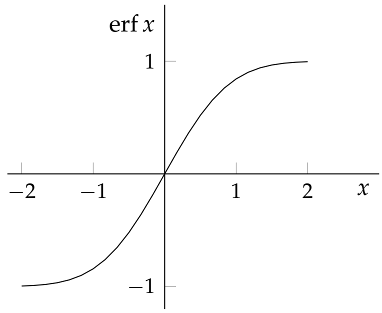
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

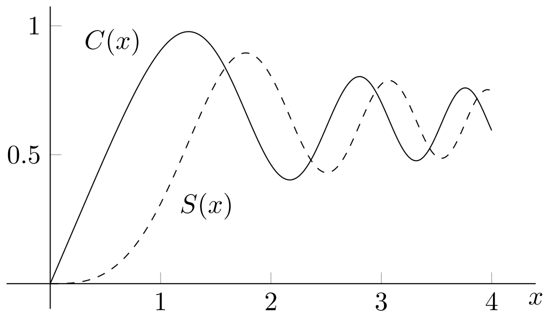
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

**فرسنل تکملات (شکل 7.ب)**

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$




شکل 6.ب: تفاعل خلل۔




شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$

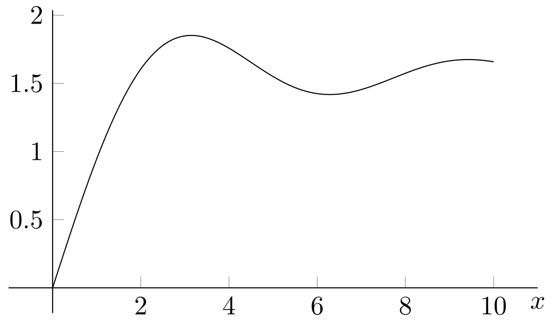
**تکمل سائن (شکل 8.ب)**

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

[1] complementary functions




شکل 8.ب: تکمل سائن

**تکمل کوسائن**

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

**تکمل قوت نمائی**

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

**تکمل لوگارتھمی**

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$