

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیاچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

| | | |
|-----|---|-------|
| 1 | درجہ اول سادہ تفرقی مساوات | 1 |
| 2 | 1.1 نمونہ کشی | 1.1 |
| 14 | 1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔ | 1.2 |
| 23 | 1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات | 1.3 |
| 39 | 1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل | 1.4 |
| 51 | 1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی | 1.5 |
| 68 | 1.6 عمودی خطوط کی نسلیں | 1.6 |
| 72 | 1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت | 1.7 |
| 79 | 2 درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات | 2 |
| 79 | 2.1 متجانس خطی دو درجہ تفرقی مساوات | 2.1 |
| 95 | 2.2 مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات | 2.2 |
| 110 | 2.3 تفرقی عامل | 2.3 |
| 114 | 2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش | 2.4 |
| 130 | 2.5 پولر کوئی مساوات | 2.5 |
| 138 | 2.6 حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی | 2.6 |
| 147 | 2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات | 2.7 |
| 159 | 2.8 جبری ارتعاش۔ گمک | 2.8 |
| 165 | 2.8.1 برقرار حال حل کا حیط۔ عملی گمک | 2.8.1 |
| 169 | 2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی | 2.9 |
| 180 | 2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل | 2.10 |

| | | |
|-----|-------|--|
| 187 | 3 | بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات |
| 187 | 3.1 | متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات |
| 198 | 3.2 | مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات |
| 207 | 3.3 | غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات |
| 210 | 3.4 | مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل |
| 219 | 4 | نظام تفرقی مساوات |
| 220 | 4.1 | قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق |
| 229 | 4.2 | سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے |
| 243 | 4.3 | نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی |
| 244 | 4.3.1 | خطی نظام |
| 248 | 4.4 | مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب |
| 265 | 4.5 | نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام |
| 273 | 4.6 | کافی تراکیب برائے غیر خطی نظام |
| 282 | 4.6.1 | سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ |
| 290 | 4.7 | سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام |
| 291 | 4.7.1 | نامعلوم عددی سر کی ترکیب |
| 299 | 5 | طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل |
| 300 | 5.1 | ترکیب طافقی تسلسل |
| 315 | 5.2 | لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی |
| 332 | 5.3 | مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس |
| 337 | 5.3.1 | عملی استعمال |
| 351 | 5.4 | مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل |
| 366 | 5.5 | بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل |
| 372 | 5.6 | قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ |
| 378 | 5.7 | مسئلہ شیورم لیوویل |
| 385 | 5.8 | قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل |
| 395 | 6 | لاپلاس متبادلہ |
| 396 | 6.1 | لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت |
| 405 | 6.2 | تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات |
| 417 | 6.3 | s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل |
| 437 | 6.4 | ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ |
| 454 | 6.5 | الچھاؤ |
| 463 | 6.6 | لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات |
| 471 | 6.7 | تفرقی مساوات کے نظام |

| | | |
|-----|-------|--|
| 479 | 6.8 | لاپلاس بدل کے عمومی کیلے |
| 483 | 7 | خطی الجبرا: سمتیات |
| 483 | 7.1 | غیر سمتیات اور سمتیات |
| 485 | 7.2 | سمتیہ کے اجزاء |
| 491 | 7.3 | سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب |
| 499 | 7.4 | سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت |
| 505 | 7.5 | اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) |
| 518 | 7.6 | اندرونی ضرب فضا |
| 520 | 7.7 | سمتی ضرب |
| 522 | 7.8 | اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب |
| 533 | 7.9 | غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب |
| 541 | 8 | خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام |
| 542 | 8.1 | قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب |
| 552 | 8.2 | قابلی ضرب |
| 558 | 8.2.1 | تبدیلی محل |
| 570 | 8.3 | خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط |
| 582 | 8.3.1 | صف زینہ دار صورت |
| 590 | 8.4 | خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا |
| 604 | 8.5 | خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا |
| 610 | 8.6 | دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب |
| 613 | 8.7 | مقطع۔ قاعدہ کریبر |
| 629 | 8.8 | معکوس قالب۔ گاوس جارجن اسقاط |
| 644 | 8.9 | سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ |
| 661 | 9 | خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب |
| 662 | 9.1 | امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول |
| 672 | 9.2 | امتیازی مسائل کے چند استعمال |
| 680 | 9.3 | تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب |
| 687 | 9.4 | امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت |
| 700 | 9.5 | مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں |
| 711 | 10 | سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل |
| 711 | 10.1 | غیر سمتی میدان اور سمتی میدان |
| 713 | 10.2 | سمتی علم الاحصاء |
| 720 | 10.3 | منحنی |
| 726 | 10.4 | لمبائی قوس |
| 733 | 10.5 | مماس، انحناء اور مروڑ |
| 738 | 10.6 | سمتی رفتار اور اسراع |

| | | |
|---------------|-------|--|
| 745 | 10.7 | زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ |
| 751 | 10.8 | سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان |
| 764 | 10.9 | تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات |
| 769 | 10.10 | سمتی میدان کی پھیلاؤ |
| 777 | 10.11 | سمتی تفاعل کی گردش |
| 781 | 11 | سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے |
| 782 | 11.1 | خطی تکمیل |
| 787 | 11.2 | خطی تکمیل کا حل |
| 796 | 11.3 | دوہرہ تکمیل |
| 810 | 11.4 | دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ |
| 820 | 11.5 | سطحیں |
| 825 | 11.6 | مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ |
| 837 | 11.7 | سطحی تکمیل |
| 845 | 11.8 | تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ |
| 850 | 11.9 | مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال |
| 861 | 11.10 | مسئلہ سٹوکس |
| 866 | 11.11 | مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال |
| 869 | 11.12 | راہ سے آزاد خطی تکمیل |
| 883 | 12 | فوریئر تسلسل |
| 884 | 12.1 | دوری تفاعل، تکوینی تسلسل |
| 889 | 12.2 | فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات |
| 902 | 12.3 | اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل |
| 907 | 12.4 | جفت اور طاق تفاعل |
| 916 | 12.5 | نصف حلقہ الساع |
| 923 | 12.6 | فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول |
| 931 | 12.7 | جبری ارتعاش |
| 936 | 12.8 | تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل |
| 940 | 12.9 | فوریئر تکمیل |
| 953 | 13 | جزوی تفرقی مساوات |
| 953 | 13.1 | بنیادی تصورات |
| 958 | 13.2 | نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج |
| 960 | 13.3 | علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب) |
| 973 | 13.4 | مساوات موج کا دالو بیچ حل |
| 979 | 13.5 | یک بعدی بہاؤ حرارت |
| 987 | 13.6 | لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت |

| | |
|----------------|---|
| 993 | 13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج |
| 996 | 13.8 مستطیل جھلی |
| 1006 | 13.9 قطبی محدود میں لاپلاس |
| 1010 | 13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل |
| 1018 | 13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ |
| 1024 | 13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر |
| 1030 | 13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات |
| 1037 | 14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل |
| 1038 | 14.1 مخلوط اعداد |
| 1047 | 14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات |
| 1054 | 14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے |
| 1059 | 14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل |
| 1067 | 14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات |
| 1078 | 14.6 ناطق تفاعل۔ جذر |
| 1084 | 14.7 قوت نمائی تفاعل |
| 1089 | 14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل |
| 1095 | 14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت |
| 1103 | 15 محافظ زاویہ نقشہ کشی |
| 1104 | 15.1 نقشہ کشی |
| 1116 | 15.2 محافظ زاویہ نقشہ |
| 1125 | 15.3 خطی کسری تبادلہ |
| 1129 | 15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ |
| 1138 | 15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل |
| 1149 | 15.6 ریمان سطحیں |
| 1157 | 16 مخلوط مکملات |
| 1157 | 16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل |
| 1168 | 16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص |
| 1172 | 16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل |
| 1184 | 16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل |
| 1189 | 16.5 کوشی کا کلیہ مکمل |
| 1194 | 16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق |
| 1201 | 17 ترتیب اور تسلسل |
| 1201 | 17.1 ترتیب |
| 1208 | 17.2 تسلسل |
| 1213 | 17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل |

| | | |
|----------------|------|---|
| 1220 | 17.4 | یک سر حقیقی ترتیب۔ لیسنز آزمائش برائے حقیقی تسلسل |
| 1225 | 17.5 | تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں |
| 1236 | 17.6 | تسلسل پر اعمال |

| | | |
|----------------|------|---|
| 1243 | 18 | 18 طاقی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوغوں تسلسل |
| 1243 | 18.1 | طاقی تسلسل |
| 1256 | 18.2 | طاقی تسلسل کی روپ میں تفاعل |
| 1263 | 18.3 | ٹیلر تسلسل |
| 1268 | 18.4 | بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل |
| 1274 | 18.5 | طاقی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب |
| 1281 | 18.6 | یکساں استرار |
| 1293 | 18.7 | لوغوں تسلسل |
| 1303 | 18.8 | لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور قدرت |

| | | |
|----------------|------|-----------------------------|
| 1315 | 19 | 19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ |
| 1315 | 19.1 | بقیہ |
| 1322 | 19.2 | مسئلہ بقیہ |
| 1327 | 19.3 | حقیقی عمل بذریعہ مسئلہ بقیہ |
| 1335 | 19.4 | حقیقی عمل کے دیگر اقسام |

| | | |
|----------------|------|---|
| 1343 | 20 | 20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ |
| 1344 | 20.1 | ساکن برقی سکون |
| 1350 | 20.2 | دو بعدی بہاوسیال |

| | | |
|----------------|---|------------|
| 1357 | ا | اضافی ثبوت |
|----------------|---|------------|

| | | |
|----------------|-----|-----------------------|
| 1361 | ب | ب مفید معلومات |
| 1361 | 1.ب | اعلیٰ تفاعل کے مساوات |

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 20

مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوه

مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ انجینئری حساب میں اہم ترین جزوی تفرقی مساوات میں سے ایک ہے چونکہ یہ ثقلى میدان (حصہ 10.8)، ساکن برقی میدان (حصہ 13.11)، برقرار حال ایصال حرارت (حصہ 15.5)، داب نا پذیر بہاؤ سیال، وغیرہ کے مسئلوں میں پایا جاتا ہے۔ اس مساوات کے حل کو نظریہ مخفی قوه¹ کہتے ہیں۔

دو بعدی صورت جہاں u کارتیسی محدود کے دو محور x اور y کے تابع ہو میں لاپلاس مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ تب اس کے حل مخلوط تحلیلی تفاعل (حصہ 14.5) کے ساتھ گہرا تعلق رکھتے² ہیں۔ ہم اس تعلق پر اب تفصیلاً غور کرتے ہیں اور ماقوا حرکیات اور برقی سکون سے چند مثال بھی پیش کریں گے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ تحلیلی تفاعل کے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے ہارمونی تفاعل کی مختلف عمومی خواص بیان کی جاسکتی ہیں۔ آخر میں ہم دائری قرص پر مساوات لاپلاس کے سرحدی مسائل کے حل کا ایک اہم عمومی کلیہ (پوسوں تکمیلی کلیہ) اخذ کریں گے۔

¹potential theory
²تین بعدی صورت میں ایسا گہرا تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

20.1 ساکن برقی سکون

بار بردار ذرات کے مابین قوت کشش یا دفع کو کلیہ کولمب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہ قوت تفاعل u جس کو برقی ساکن مخفی قوت³ کہتے ہیں کی ڈھلوان ہے، اور بار سے پاک نقطوں پر u مساوات لاپلاس (حصہ 13.11)

$$\nabla^2 u = 0$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ سطحیں مستقل u کو ہم قوتہ سطحیں⁴ کہتے ہیں۔ ہر نقطہ N پر u کی ڈھلوان نقطہ N پر سطح مستقل u کی قائمہ ہوگی، یعنی برقی قوت اور ہم قوتہ سطح آپس میں قائمہ ہوں گے۔

مثال 20.1: متوازی چادروں کے درمیان خطہ میں مخفی قوت
دو لائینائی وسعت کی متوازی موصل چادر جنہیں بالترتیب U_1 اور U_2 برقی دباؤ پر رکھا گیا ہے کے درمیان مخفی قوت تلاش کریں (شکل 20.1-الف)۔ چادروں کی شکل سے ظاہر ہے کہ u صرف x کا تابع ہوگا لہذا مساوات لاپلاس $u'' = 0$ صورت اختیار کرتی ہے۔ دو مرتبہ تکمیل لے کر $u = ax + b$ حاصل ہوتا ہے جہاں مستقل a اور b کو چادروں پر برقی دباؤ u کی سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر چادر $x = -1$ اور $x = 1$ پر واقع ہوں تب حل

$$u(x) = \frac{1}{2}(U_2 - U_1)x + \frac{1}{2}(U_2 + U_1)$$

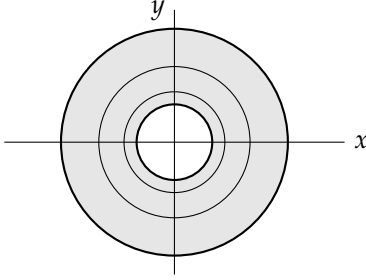
□

ہوگا۔ ہم قوتہ سطحیں چادروں کے متوازی سطحیں ہوں گی۔

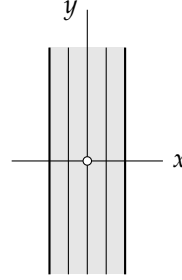
مثال 20.2: ہم محور نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوت
دو لائینائی لمبائی کی ہم محور موصل نلکیاں جنہیں بالترتیب U_1 اور U_2 مخفی قوتہ پر رکھا گیا ہو کے درمیان مخفی قوت تلاش کریں (شکل 20.1-ب)۔ یہاں تشاکل کی بنا u صرف $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا تابع ہوگا اور مساوات لاپلاس

$$ru'' + u' = 0 \quad (\text{مساوات 13.96 دیکھیں})$$

electrostatic potential³
equipotential surfaces⁴



(ب) ہم محور موصل نلکیوں کے درمیان مخفی قوتہ



(الف) متوازی چادروں کے درمیان مخفی قوتہ

شکل 20.1: 20.1 کے برائے مثال 20.1 اور مثال 20.2

صورت اختیار کرتی ہے۔ علیحدگی متغیرات کے بعد مکمل لینے سے

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{r}, \quad \ln u' = -\ln r + \tilde{a}, \quad u' = \frac{a}{r}, \quad u = a \ln r + b$$

حاصل ہو گا جہاں مستقل a اور b کو ہم محوری نلکیوں پر u کی دی گئی قیمتوں سے حاصل کیا جائے گا۔ اگرچہ لامتناہی لمبائی کی موصل نلکی کہیں نہیں پائی جاتے ہے، ہماری حاصل کردہ مخفی قوتہ کسی بھی لمبی موصل نلکی کے اندر، نلکی کی سروں سے دور، اصل مخفی قوتہ کے بہت قریب مخفی قوتہ دے گی۔ □

اگر مخفی قوتہ صرف دو کارتیسی محدود x اور y پر منحصر ہو تب مساوات لاپلاس درج ذیل ہو گی۔

$$(20.1) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

مستوی xy میں ہم قوتہ سطحیں مستقل u بطور ہم قوتہ خطوط نظر آئیں گی۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $u(x, y)$ ہارمونی ہے یعنی اس کے دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ اب اگر $u(x, y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x, y)$ ہو (حصہ 14.5) تب تفاعل

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

متغیر $z = x + iy$ کا تحلیلی تفاعل ہو گا۔ اس تفاعل کو حقیقی مخفی قوتہ u کا مطابقتی مخلوط مخفی قوتہ⁵ کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ u کا جوڑی دار، ماسوائے جمعی حقیقی جزو کے، یکتا ہو گا۔

چونکہ خطوط مستقل $v =$ ہم قوت خطوط مستقل $u =$ کو قائمہ الزاویہ قطع کرتی ہیں [ما سوائے ان نقطوں پر جہاں $F'(z) = 0$ ہو] لہذا ان کی سمت اور برقی قوت کی سمت ایک ہوگی۔ اسی لئے مستقل $v =$ کو خطوط قوت⁶ کہتے ہیں۔

مثال 20.3: مخلوط مخفی قوت

مثال 20.1 میں u کا جوڑی دار $v = ay$ ہے۔ یوں مخلوط مخفی قوت

$$F(z) = az + b = ax + b + iay$$

ہوگا اور خطوط قوت x محور کے متوازی سیدھی لکیریں ہوں گی۔ □

مثال 20.4: مخلوط مخفی قوت

مثال 20.2 میں

$$u = a \ln r + b = a \ln|z| + b$$

ہے جس کا جوڑی دار $v = \frac{a}{z}$ ہے۔ یوں مخلوط مخفی قوت $F(z) = a \ln z + b$ ہوگا اور قوت کے خطوط مبدا سے گزرتی سیدھی لکیریں ہوں گی۔ $F(z)$ کو ایسی منبع لکیر کا مخلوط مخفی قوت تصور کیا جاسکتا ہے جس کا xy مستوی میں عکس مبدا ہو۔ □

عموماً خطی میل کی مدد سے زیادہ پیچیدہ مخفی قوت حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ایسا کیا گیا ہے۔

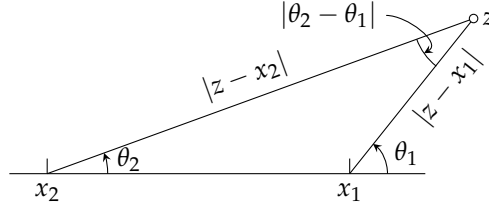
مثال 20.5: جوڑی منبع لکیروں کی مخلوط مخفی قوت

$z = x_1$ اور $z = x_2$ پر یکساں لیکن مخالف علامت کی بار بردار منبع لکیریں پائی جاتی ہیں۔ ان کا مخلوط مخفی قوت تلاش کریں۔ مثال 20.2 اور مثال 20.2 سے ان منبع لکیروں کی مخفی قوت

$$u_1 = -c \ln|z - x_1|, \quad u_2 = c \ln|z - x_2|$$

ہوں گی جو درج ذیل مخلوط مخفی قوت کے حقیقی اجزاء ہیں۔

$$F_1(z) = -c \ln(z - x_1), \quad F_2(z) = c \ln(z - x_2)$$



شکل 20.2: شکل برائے مثال 20.5

یوں دونوں منبع لکیریوں کا مجموعی مخلوط مخفی قوتہ

$$(20.2) \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z) = c \ln \frac{z - x_2}{z - x_1}$$

ہو گا۔ ہم قوتہ خطوط درج ذیل منحنیات

$$u = F(z) \text{ حقیقی} = c \ln \frac{|z - x_2|}{|z - x_1|} = \text{مستقل}$$

ہوں گی جو دائرے ہیں۔ قوت کی لکیریں درج ذیل منحنیات

$$v = F(z) \text{ خیالی} = c \left[\frac{z - x_2}{z - x_1} \right] = \text{مستقل}$$

یعنی

$$v = c(\theta_2 - \theta_1) = \text{مستقل}$$

ہوں گی (شکل 20.2)۔ اب درحقیقت $|\theta_2 - \theta_1|$ نقطہ z سے x_1 اور x_2 تک لکیریوں کے مابین زاویہ ہے۔ یوں قوت کی لکیریں ایسی منحنیات ہوں گی جن پر قطع $x_1 x_2$ کا زاویہ تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ مساوات 20.2 میں دیے گئے تفاعل کو ایسی غیر ہم محور نکلی برق گیر کے اندر کا مخلوط مخفی قوتہ تصور کیا جاسکتا ہے جس کے دونوں نلکیوں کے محور متوازی ہوں۔

□

سوالات

سوال 20.1 تا سوال 20.4 میں لائنناہی لمبائی کے دو ہم محور نلکیوں کے رداس r_1 اور r_2 ($r_2 > r_1$) ہیں جنہیں بالترتیب برقی دباؤ U_1 اور U_2 پر رکھا جاتا ہے۔ ان نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوتہ u تلاش کریں۔

سوال 20.1: $r_1 = 1, r_2 = 5, U_1 = 0, U_2 = 100 \text{ V}$
 جواب: $u = \frac{100}{\ln 5} \ln r = 62.13 \ln r$

سوال 20.2: $r_1 = 0.5, r_2 = 2, U_1 = -110, U_2 = 110 \text{ V}$
 جواب: $u = \frac{220}{\ln 4} \ln r$

سوال 20.3: $r_1 = 2, r_2 = 20, U_1 = 100, U_2 = 200 \text{ V}$
 جواب: $u = \frac{100}{\ln 10} (\ln r + \ln 5)$

سوال 20.4: $r_1 = 3, r_2 = 6, U_1 = 100, U_2 = 50 \text{ V}$
 جواب: $u = -\frac{50}{\ln 2} (\ln r - 50 \ln 12)$

سوال 20.5: مخلوط مخفی قوه $F(z) = \frac{1}{z}$ کی ہم قوه خطوط تلاش کریں اور ان کی ترسیم کھینچیں۔
 جواب: $(x - \frac{1}{2c})^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$

سوال 20.6: نقطہ $z = a$ اور $z = -a$ پر آپس میں الٹ علامتی بار سے بار بردار منبع کی لکیریں پائی جاتی ہیں۔ ہم قوه خطوط کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 20.7: نقطہ $z = a$ اور $z = -a$ پر یکساں علامتی بار سے بار بردار منبع کی لکیریں پائی جاتی ہیں۔ ہم قوه خطوط تلاش کریں۔
 جواب: $u = c \ln(z^2 - a^2) = c \ln|z^2 - a^2|$ حقیقی

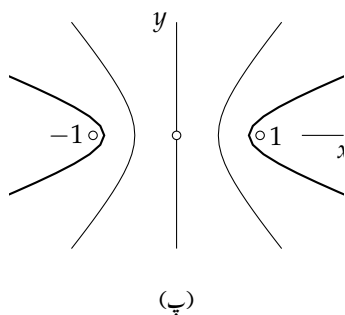
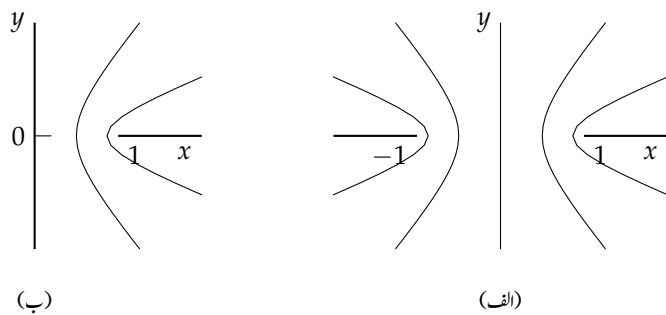
سوال 20.8: دکھائیں کہ $F(z) = \cos^{-1} z$ کو شکل 20.3 میں دکھائی گئی تینوں شکل کی موصل چادروں کی مخلوط مخفی قوه تصور کیا جاسکتا ہے۔

سوال 20.9: دکھائیں کہ $F(z) = \cosh^{-1} z$ کو دو ہم ماسکہ ترخیمی نلکیوں کا مخلوط مخفی قوه تصور کیا جاسکتا ہے۔
 جواب:

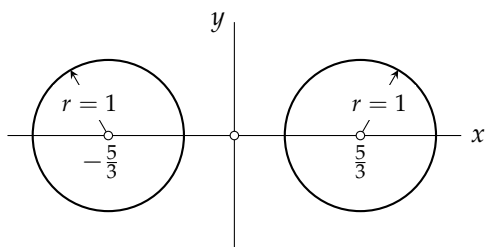
$$z = x + iy = \cosh(u + iv) = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v, \quad \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1$$

یوں ہم قوه خطوط مستقل u ہم ماسکہ ترخیم ہیں۔

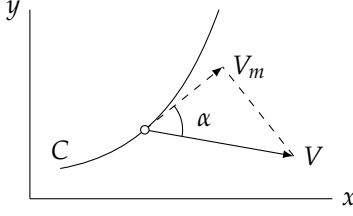
سوال 20.10: شکل 20.4 میں لاتناہی لبائی کے دو نلکیاں دکھائی گئی ہیں۔ بایاں نلکی پر $u = -1$ اور دایاں نلکی پر $u = 1$ ہے۔ نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوه u تلاش کریں۔ اشارہ۔ سوال 20.6 کا نتیجہ استعمال کریں۔



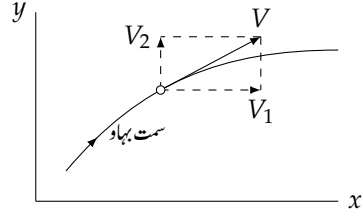
شکل 20.3: شکل برائے سوال 20.8



شکل 20.4: شکل برائے سوال 20.10



(ب) مخفی C کو سمتی رفتار کا مماسی جزو



(الف) سمتی رفتار

شکل 20.5: سمت بہاؤ اور سمتی رفتار

20.2 دو بعدی بہاؤ سیال

ہارمونی تعامل بہاؤ سیال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ انہیں غیر چپچپا سیال کا دو بعدی برقرار بہاؤ پر غور کرتے ہیں۔ یہاں "دو بعدی" کا مطلب ہے کہ xy مستوی کے متوازی تمام سطحوں میں سیال کی حرکت یکساں ہے اور حرکت ان سطحوں کے متوازی ہے۔ ایسی صورت میں صفر xy سطح میں حرکت پر غور کرنا کافی ہو گا۔ "برقرار" کا مطلب ہے کہ سمتی رفتار وقت کا تابع نہیں ہے۔

کسی بھی نقطہ (x, y) پر بہاؤ کی سمتی رفتار پائی جائے گی جس کو اس کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جاسکتا ہے لہذا سمتی رفتار ایک سمتیہ ہو گا۔ چونکہ مخلوط سطح میں کوئی بھی عدد a ایک سمتیہ کو ظاہر کرتا ہے (جو مبدا سے عدد a کی مطابقتی مقام تک کا سمتیہ ہو گا) لہذا ہم بہاؤ کی سمتی رفتار کو مخلوط متغیرہ سے ظاہر کر سکتے ہیں مثلاً

$$(20.3) \quad V = V_1 + iV_2$$

جہاں مخلوط سطح پر سمتی رفتار کے x اور y سمت میں اجزاء بالترتیب V_1 اور V_2 ہوں گے اور V حرکت کرتے ذرات کی راہ کو مماسی ہو گا۔ ایسی راہ کو سمت بہاؤ⁷ کہتے ہیں (شکل 20.5-الف)۔

اب کسی ایک ہموار مخفی C پر غور کریں جس کی لمبائی قوس کو ہم s سے ظاہر کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ C کو مماسی سمتی رفتار V کا جزو حقیقی متغیرہ V_m ہے (شکل 20.5-ب) تب C پر s کی بڑھتی رخ خطی مکمل

$$(20.4) \quad \int_C V_m ds$$

کو C پر سیال کی دائری بہاؤ⁸ کہتے ہیں۔ دائری بہاؤ کو C کی لمبائی سے تقسیم کرنے سے منحنی C پر اوسط سمتی رفتار⁹ حاصل ہوتی ہے۔ اب شکل 20.5 سے

$$V_m = |V| \cos \alpha$$

لکھا جاسکتا ہے۔ نتیجتاً C کے اکائی مماسی سمتیہ (حصہ 15.2)

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}$$

اور V کا اندرونی ضرب (حصہ 7.5) V_m ہوگا جہاں C کو $z(s) = x(s) + iy(s)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ اس طرح $V_m ds$ کو

$$V_m ds = V \cdot dz = V_1 dx + V_2 dy \quad (dz = dx + i dy)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ (یہاں اچھی طرح سمجھ لیں کہ یہ دو سمتیات کے مابین غیر سمتی ضرب ہے ناکہ مخلوط ضرب۔)

اب فرض کریں کہ C ایک بند منحنی ہے یعنی سادہ تعلق دائرہ کار D کا سرحد۔ تب اگر ایسا دائرہ کار جس میں D اور C شامل ہوں میں V کے استمراری جزوی تفرق پائے جاتے ہوں تب مسئلہ گرین (حصہ 11.4) کے تحت C پر دائری بہاؤ کو دوہرا مکمل

$$(20.5) \quad \int_C (V_1 dx + V_2 dy) = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy$$

کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ دائیں ہاتھ مکمل کے اندر تفاعل کا ایک سادہ طبعی مطلب ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ C ایک دائرہ ہے جس کا رداس r ہے۔ تب دائری بہاؤ کو $2\pi r$ سے تقسیم کرنے سے سیال کی C پر اوسط سمتی رفتار حاصل ہوگی جس کو r سے تقسیم کرتے ہوئے دائرے کی محور پر سیال کی زوایائی سمتی رفتار ω_0 حاصل ہوتی ہے۔

$$(20.6) \quad \omega_0 = \frac{1}{\pi r^2} \iint_D \frac{1}{2} \left(\frac{dV_2}{dx} - \frac{dV_1}{dy} \right) dx dy$$

circulation⁸

⁹ اوسط قیمتوں کی تعریفیں درج ذیل ہیں۔

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{دفعہ } a \leq x \leq b \text{ پر } f \text{ کی اوسط قیمت ہے۔}$$

$$C = \frac{1}{l} \int_C f(s) ds \quad \text{پر } f \text{ کی اوسط قیمت ہے جہاں } C \text{ کی لمبائی } l \text{ ہے۔}$$

$$D = \frac{1}{A} \iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{میں } f \text{ کی اوسط قیمت ہے جہاں } D \text{ کا رقبہ } A \text{ ہے۔}$$

دایاں ہاتھ قرص D جس کی سرحد C ہے پر درج ذیل تفاعل کی اوسط قیمت¹⁰ ہے۔

$$(20.7) \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{dV_2}{dx} - \frac{dV_1}{dy} \right)$$

تفاعل ω گھومنا¹¹ کہلاتا ہے جبکہ 2ω کو حرکت کی گردابیت¹² کہتے ہیں۔ اگر $r \rightarrow 0$ ہو تب مساوات 20.6 کے دایاں ہاتھ کی حد، C کی مرکز پر ω کی قیمت دے گی۔ یوں اگر دائرہ C سکڑ کر نقطہ (x, y) مانند رہ جائے تب سیال کے دائری ٹکڑے کی زاویائی سمتی رفتار کی تحدیدی قیمت $w(x, y)$ ہو گی۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر سیال کا کروی ٹکڑا ایک دم ٹھوس صورت اختیار کرے اور ساتھ ہی باقی تمام سیال ہٹا دیا جائے تب اس ٹکڑے کی زاویائی سمتی رفتار ω ہو گی (حصہ 10.11 دیکھیں)۔

ہم صرف ناگھومتے¹³ سیال پر غور کرتے ہیں یعنی ایسا سیال جس کا ω پورے خطہ D پر صفر کے برابر ہو،

$$\frac{dV_2}{dx} - \frac{dV_1}{dy} = 0$$

جہاں تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کی گئی ہے۔

ہم مزید فرض کرتے ہیں کہ سیال داب ناپذیر ہے۔ تب ہر اس خطہ میں جہاں سے سیال کی نکاسی نہ ہوتی ہو اور نا ہی سیال یہاں داخل ہوتا ہو، مساوات 10.121 کے تحت

$$(20.8) \quad \frac{dV_1}{dx} + \frac{dV_2}{dy} = 0$$

ہو گا۔

اگر D سادہ تعلق خطہ ہو اور بہاؤ ناگھومنے والی ہو تب مسئلہ 11.9 کے تحت خطی مکمل

$$(20.9) \quad \int_C (V_1 dx + V_2 dy)$$

D میں راہ کا تابع نہیں ہو گا۔ یوں D میں مقررہ نقطہ (a, b) سے D میں متغیر نقطہ (x, y) تک مکمل حاصل کرنے سے نقطہ (x, y) کا تابع تفاعل مثلاً $\Phi(x, y)$ حاصل ہو گا:

$$(20.10) \quad \Phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} (V_1 dx + V_2 dy)$$

¹⁰ اوسط کی تعریف کے لئے گردش حاشیہ دیکھیں

rotation¹¹

vorticity¹²

irrotational¹³

تفاعل $\Phi(x, y)$ کو حرکت کی سمتی رفتار مخفی قوہ¹⁴ کہتے ہیں۔ اب چونکہ درج بالا مکمل راہ کا تابع نہیں ہے لہذا قطعی تفرق (حصہ 11.12) ہو گا یعنی یہ تفاعل $\Phi(x, y)$ کا تفرق ہو گا:

$$(20.11) \quad V_1 dx + V_2 dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

یوں

$$(20.12) \quad V_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ہو گا لہذا سمتی رفتار سمتیہ تفاعل $\Phi(x, y)$ کی ڈھلوان (حصہ 10.8) ہو گا۔

$$(20.13) \quad V = V_1 + iV_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

منحنی مستقل $\Phi(x, y) = \text{constant}$ کو ہم قوہ خط¹⁵ کہتے ہیں۔ چونکہ Φ کی ڈھلوان V ہے لہذا $V \neq 0$ کی صورت میں) ہر نقطہ پر V اور اس نقطہ سے گزرتا ہم قوہ خط آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

مساوات 20.12 کو مساوات 20.8 میں پر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ Φ مساوات لاپلاس

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ فرض کریں کہ $\Phi(x, y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $\Psi(x, y)$ ہو، تب [(ماسوائے اس نقطہ پر جہاں (مساوات 20.14) میں دیا گیا) $F'(z) = 0$] ہر ایک نقطہ پر منحنیات

$$\Psi(x, y) = \text{مستقل}$$

اور ہم قوہ خطوط مستقل $\Phi(x, y) = \text{constant}$ آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گی۔ یوں منحنیات مستقل $\Psi(x, y) = \text{constant}$ کے مماس کی سمت اور سیال کی سمتی رفتار کی سمت ایک جیسی ہوں گی۔ نتیجتاً منحنیات مستقل $\Psi(x, y) = \text{constant}$ سیال کی سمت بہاؤ خط ہوں گے۔ تفاعل مستقل $\Psi(x, y) = \text{constant}$ کو بہاؤ کا تفاعل بہاؤ¹⁶ کہتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ Φ اور Ψ دونوں کے استمراری دوہرا جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ تب مخلوط تفاعل

$$(20.14) \quad F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

velocity potential¹⁴equipotential lines¹⁵stream function¹⁶

بہاو کے خطہ میں تحلیلی ہو گا۔ اس تفاعل کو بہاو کی مخلوط مخفی قوه¹⁷ کہتے ہیں۔ Φ اور Ψ کے ساتھ علیحدہ علیحدہ کام کرنے سے مخلوط مخفی قوه کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

مساوات 20.14 کا تفرق لے کر اور مساوات کو شئی ریمان استعمال کرتے ہوئے بہاو کی سمتی رفتار حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_1 - iV_2$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(20.15) \quad V = V_1 + iV_2 = \overline{F'(z)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اس طرح دو بعدی، ناگھومنے والی، داب نا پذیر سیال کی برقرار بہاو کو تحلیلی تفاعل کی صورت میں بیان کیا جاسکتا ہے اور مخلوط تجربہ کے تراکیب، مثلاً محافظ زاویہ نقش، استعمال کیے جاسکتے ہیں۔

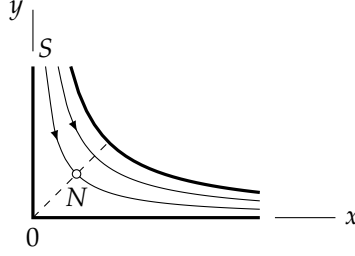
چونکہ وہ سرحد جس کو بہاو پار نہ کر سکتا ہو بہاو سمت ہو گا لہذا سرحدی شرائط مسائل میں بہاو سمت تفاعل Ψ نہایت اہم ثابت ہوتا ہے۔ زیر محافظ زاویہ نقش، بہاو سمت کا متبادل سطح عکس میں بہاو سمت پر ہو گا۔ پیچیدہ بہاو کے حصول اور ان پر غور کے لئے سادہ بہاو کا میل زیر استعمال لایا جاسکتا ہے۔ دو بہاو F_1 ، F_2 کا مجموعہ $F = F_1 + F_2$ دونوں بہاو کی سمتی رفتار کی سمتیات کا سمتی مجموعہ سے حاصل بہاو کا مخلوط مخفی قوه ہو گا۔ چونکہ مساوات لاپلاس خطی اور متجانس ہے لہذا دو ہارمونی تفاعل کا مجموعہ بھی ہارمونی ہو گا۔

دھیان رہے کہ اگرچہ برقی سکون میں دی گئی سرحدیں (موصول سطحیں) ہم قوه خطوط ہوں گی، ماقوا حرکیات میں یہ سرحدیں بہاو سمت ہوں گی اور ہم قوه خطوط کے قائمہ الزاویہ ہوں گی۔

آئیں ایک عمومی مثال کو دیکھیں۔ مزید مسائل سوالات میں پیش کیے گئے ہیں۔

مثال 20.6: کونے کے ساتھ بہاو
مخلوط مخفی قوه

$$(20.16) \quad F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$



شکل 20.6: کونے پر بہاؤ

ایسی بہاؤ کو ظاہر کرتا ہے جس کے ہم قوتہ خطوط درج ذیل قطع زائد

$$\Phi = x^2 - y^2 = \text{مستقل}$$

اور بہاؤ سمت درج ذیل قطع زائد

$$\Psi = 2xy = \text{مستقل}$$

ہوں گی۔ مساوات 20.15 سے درج ذیل سمتی رفتار سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$V = 2\bar{z} = 2(x - iy), \quad \Rightarrow \quad V_1 = 2x, \quad V_2 = -2y$$

رفتار (سمتیہ کی مقدار) درج ذیل ہو گی۔

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

اس بہاؤ کو ایسی ندی کی بہاؤ تصور کیا جاسکتا ہے جس کے اطراف کارتیسی محدود کے مثبت محور اور قطع زائد مثلاً $xy = 1$ (شکل 20.6) ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بہاؤ سمت S پر نقطہ N پر رفتار کم تر ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جہاں ندی کی عمودی تراش رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا۔

□

سوالات

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو z لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارتم (شکل 1. ب-ب)

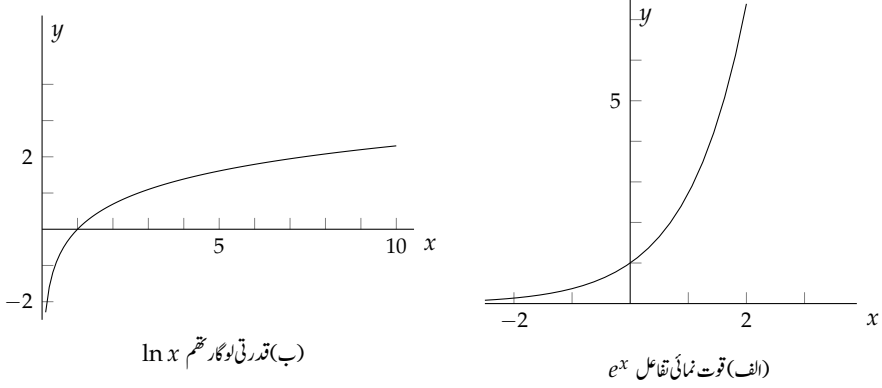
$$(2. ب) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

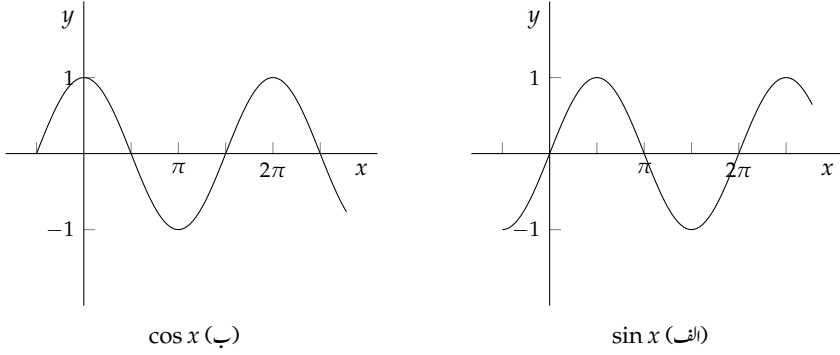
اساس دس کا لوگارتم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(3. ب) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

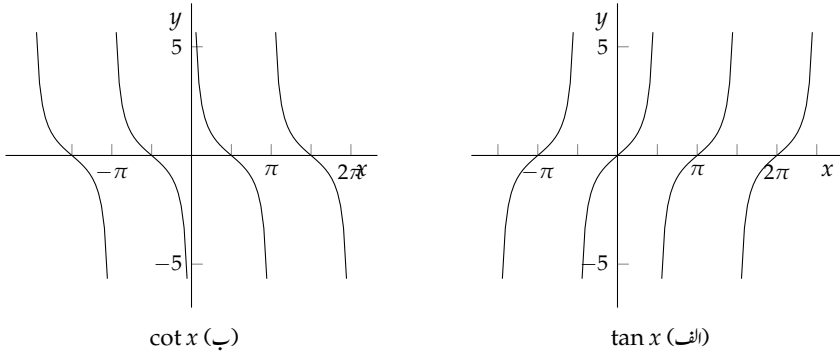
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

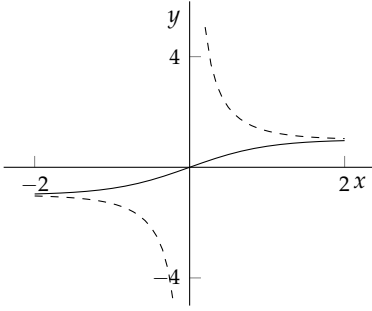
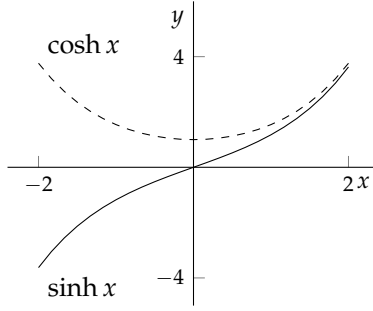
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈولی سائن، ہڈولی تافل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. \text{ب})$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. \text{ب})$$

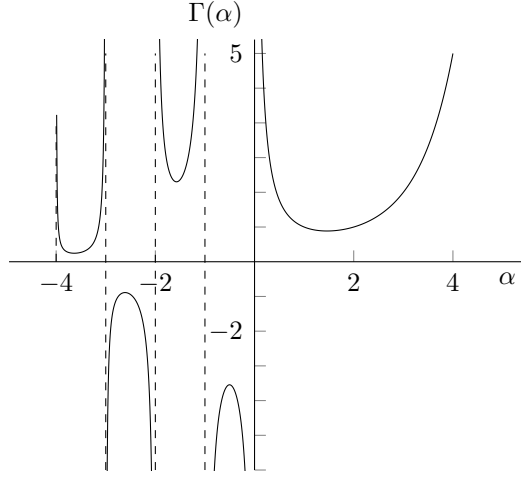
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. \text{ب})$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تافل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

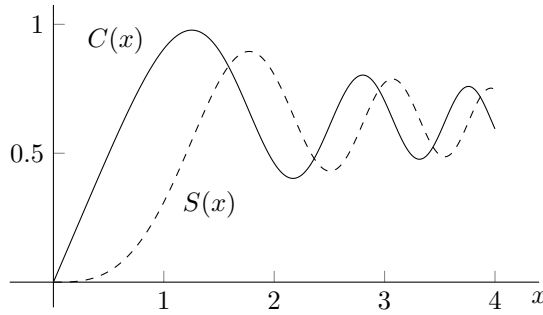
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

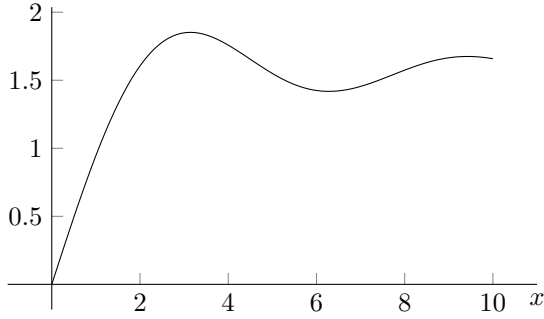
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

 $\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

