انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

انجینئری حساب دو جلدوں پر مشتمل ہے۔جلد اول میں تقریباً 1351 سوالات بمع جوابات اور 221 اشکال پائے جاتے ہیں۔

اس کتاب کے پہلے چار ابواب میں بالترتیب ایک درجی سادہ تفرقی مساوات، دو درجی سادہ تفرقی مساوات، بلند درجی سادہ تفرقی مساوات اور سادہ تفرقی مساوات کے نظام پر بحث کی گئی ہے۔ سادہ تفرقی مساوات عملی انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

اس کے بعد ایک باب طاقتی تسلسل اور ایک باب لاپلاس بدل پر غور کرتا ہے جہاں سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کرنا سکھایا گیا ہے۔

خطی الجبرا پر تین ابواب ہیں۔پہلا باب میں سمتیات پر غور کیا گیا ہے جبکہ دوسرے باب میں قالب اور تیسرے باب میں امتیازی قدر مسائل قالب پر غور کیا گیا ہے۔

آخری باب سمتی میدان اور ان کے خواص پر غور کرتا ہے۔

کتاب کے آخر میں فرہنگ دیا گیا ہے۔کتاب میں کسی بھی موضوع تک جلد پہنچنے کے لئے فرہنگ کو استعمال کریں۔اردو کے علاوہ انگریزی زبان میں بھی فرہنگ دیا گیا ہے۔

یہ کتاب Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دی گئی جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima کی مدد سے حاصل کئے گئے ہیں۔

یہ کتاب درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے ہوئے لکھی گئی ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org

- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

18 مئی 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

عموماً طبعی تعلقات کو تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح عموماً انجنیئر نگ مسائل تفرقی مساوات کی صورت میں پیش آتے ہیں۔اسی لئے اس کتاب کی ابتدا تفرقی مساوات اور ان کے حل سے کی جاتی ہے۔

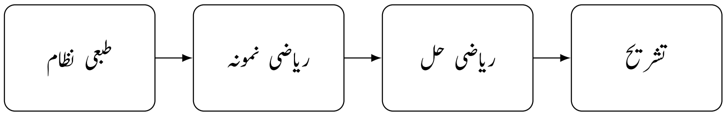
سادہ تفرقی مساوات[1] سے مراد ایسی تفرقی مساوات ہے جس میں ایک عدد آزاد متغیرہ پایا جاتا ہو۔اس کے بر عکس **جزوی تفرقی مساوات**[2] ایک سے زائد آزاد متغیرات پر منحصر ہوتی ہے۔جزوی تفرقی مساوات کا حل نسبتاً مشکل ثابت ہوتا ہے۔

کسی بھی حقیقی صورت حال یا مشاہدے کی نقشہ کشی کرتے ہوئے اس کا **ریاضی نمونہ**[3] حاصل کیا جا سکتا ہے۔سائنس کے مختلف میدان مثلاً انجنیئر نگ، طبعیات، علم کیمیا، حیاتیات، کمپیوٹر وغیرہ میں درپیش مسائل کی صحیح تفرقی مساوات کا حصول اور ان کے حل پر تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

سادہ تفرقی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر کو علیحدہ باب میں پیش کیا جائے گا۔یہ باب بقایا کتاب سے مکمل طور پر علیحدہ رکھا گیا ہے۔یوں کتاب کے پہلے دو باب کے بعد اس باب کو پڑھا جا سکتا ہے۔

پہلی باب کا آغاز درجہ اول کے سادہ تفرقی مساوات کے حصول، مساوات کے حل اور حل کی تشریح سے کیا جاتا ہے۔پہلی درجے کی سادہ تفرقی مساوات میں صرف ایک عدد نا معلوم تفاعل کا ایک درجی تفرق پایا جاتا ہے۔ایسی

[1] ordinary differential equation
[2] partial differential equation
[3] mathematical model



شکل 1.1: نمونہ کشی، حل اور تشریح۔

مساوات میں ایک سے زیادہ درجے کا تفرق نہیں پایا جاتا۔نا معلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیرہ t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔باب کے اختتام میں تفرقی مساوات کے حل کی **وجودیت**[4] اور **یکتائی**[5] پر غور کیا جائے گا۔

تفرقی مساوات سمجھنے کی خاطر ضروری ہے کہ انہیں کاغذ اور قلم سے حل کیا جائے البتہ کمپیوٹر کی مدد سے آپ حاصل جواب کی درستگی دیکھنا چاہیں تو اس میں کوئی حرج نہیں ہے۔

1.1 نمونہ کشی

شکل 1.1 کو دیکھیے۔ انجنیئرنگ مسئلے کا حل تلاش کرنے میں پہلا قدم مسئلے کو مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔مسئلے کو مختلف متغیرات اور تفاعل کے تعلقات کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔اس مساوات کو **ریاضی نمونہ**[6] کہا جاتا ہے۔ریاضی نمونے کا حصول، نمونے کا ریاضیاتی حل اور حل کی تشریح کے عمل کو **نمونہ کشی**[7] کہا جاتا ہے۔ نمونہ کشی کی صلاحیت تجربے سے حاصل ہوتی ہے۔کسی بھی نمونہ کی حل میں کمپیوٹر مدد کر سکتا ہے البتہ نمونہ کشی میں کمپیوٹر عموماً کوئی مدد فراہم نہیں کر پاتا۔

عموماً طبعی مقدار مثلاً اسراع اور رفتار درحقیقت میں تفرق کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا بیشتر ریاضی نمونے مختلف متغیرات اور تفاعل کے تفرق پر مشتمل ہوتے ہیں جنہیں **تفرقی مساوات**[8] کہا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو اس تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہو۔ تفرقی مساوات کا حل جانتے ہوئے مساوات میں موجود متغیرات اور تفاعل کے ترسیم کھینچے جا سکتا ہے اور ان پر غور کیا جا سکتا ہے۔ تفرقی مساوات پر غور سے پہلے چند بنیادی تصورات تشکیل دیتے ہیں جو اس باب میں استعمال کی جائیں گی۔

---

[4] existence
[5] uniqueness
[6] mathematical model
[7] modeling
[8] differential equation

سادہ تفرق مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم تفاعل کی ایک درجی یا بلند درجی تفرق پائے جاتے ہوں۔نا معلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔اس مساوات میں نا معلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیرہ x (یا t) کے تفاعل بھی پائے جا سکتے ہیں۔درج ذیل چند سادہ تفرقی مساوات ہیں

$$y' = \sin x \tag{1.1}$$

$$y' + \frac{6}{7}y = 4e^{-\frac{3}{2}x} \tag{1.2}$$

$$y''' + 2y' - 11y'^2 = 0 \tag{1.3}$$

جہاں $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ، $y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ ، وغیرہ ہیں۔

دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل کے تفرق پر مشتمل مساوات کو جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ان کا حل سادہ تفرقی مساوات سے زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔جزوی تفرقی مساوات پر بعد میں غور کیا جائے گا۔غیر تابع متغیرات x اور y پر منحصر تابع تفاعل $u(x,y)$ کی جزوی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \tag{1.4}$$

n درجی تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم تفاعل y کی بلند تر تفرق n درجے کی ہو۔یوں مساوات 1.1 اول درجے کی مساوات ہے، مساوات 1.2 دوسرے درجے جبکہ مساوات 1.3 تیسرے درجے کی مساوات ہے۔

اس باب میں پہلے درجے کی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ایسی مساوات میں اکائی درجہ تفرق y' کے علاوہ نا معلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیرہ کا کوئی بھی تفاعل پایا جا سکتا ہے۔ایک درجے کی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(y, y', x) = 0 \tag{1.5}$$

یا

$$y' = f(x, y) \tag{1.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 1.5 **خفی**[9] صورت کہلاتی ہے جبکہ مساوات 1.6 **صریح**[10] صورت کہلاتی ہے۔یوں خفی مساوات $x^2y' - 2y^3 = 0$ کی صریح صورت $y' = 2\frac{y^3}{x^2}$ ہے۔

[9] implicit
[10] explicit

حل کا تصور

ایک تفاعل

$$y = h(x) \tag{1.7}$$

جو کھلے وقفہ[11] $a \le x \le b$ پر معین[12] ہو اور پورے وقفے پر اس کا تفرق پایا جاتا ہو، اس صورت مساوات 1.5 کا حل ہو گا جب $h(x)$ اور $h'(x)$ کو مساوات 1.5 میں بالترتیب $y(x)$ اور $y'(x)$ کی جگہ پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر ہوں۔ تفاعل $h(x)$ کا خط **منحنی حل**[13] کہلائے گا۔

یہاں کھلے وقفے سے مراد ایسا وقفہ ہے جس کے آخری سر a اور b وقفے کا حصہ نہ ہوں۔ کھلا وقفہ لامتناہی ہو سکتا ہے مثلاً $-\infty \le x \le b$ یا $a \le x \le \infty$ اور یا $-\infty \le x \le \infty$ یعنی حقیقی محور۔

مثال 1.1: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty \le x \le \infty$ پر تفاعل $y = cx$ تفرقی مساوات $y = y'x$ کا حل ہے جہاں c ایک **اختیاری مستقل**[14] ہے۔

حل: پورے وقفے پر $y = cx$ معین ہے۔ اسی طرح اس کا تفرق $y' = c$ بھی پورے وقفے پر پایا جاتا ہے۔ ان بنیادی شرائط پر پورا اترنے کے بعد تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

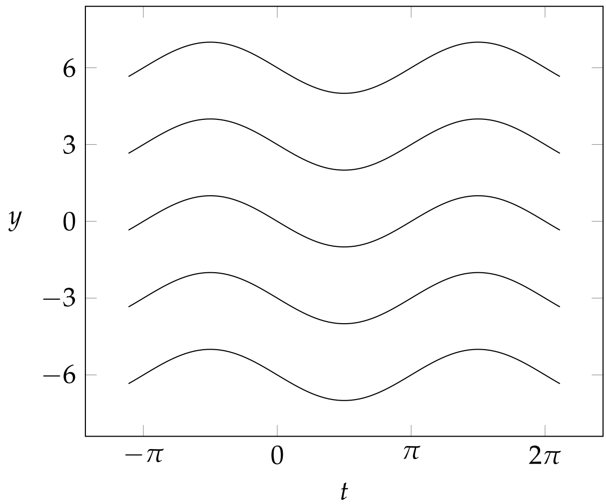
$$y = cx \implies (cx) = (c)x$$

مساوات کے دونوں اطراف برابر ہیں لہٰذا $y = cx$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔ □

مثال 1.2: حل بذریعہ تکمل: مساوات $y' = \cos t$ کا حل بذریعہ تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی $y = \int \cos t$ جس سے $y = c - \sin t$ حاصل ہوتا ہے جو **نسلِ حل**[15] ہے۔ حاصل حل میں c اختیاری مستقل ہے۔ اختیاری مستقل کی ہر انفرادی قیمت تفرقی مساوات کا ایک منفرد حل دیتا ہے۔ یوں $c = 3.24$ پر کرتے ہوئے $y = 3.24 - \sin t$ حل حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.2 میں $c = -6, -3, 0, 3, 6$ سے حاصل حل دکھائے گئے ہیں۔ □

---

[11] open interval
[12] defined
[13] solution curve
[14] arbitrary constant
[15] solution family



شکل 1.2: مثال 1.2 کے خط۔

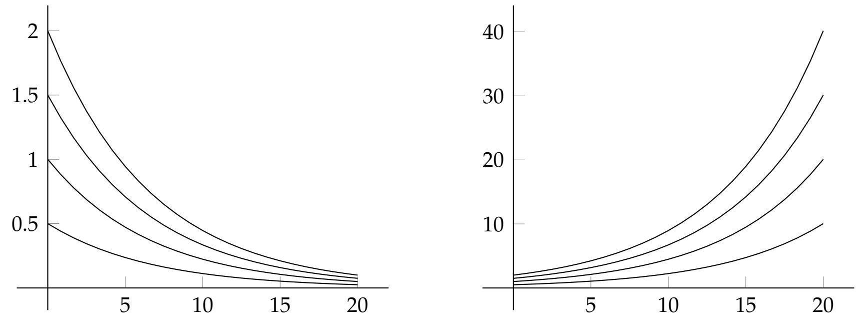
مثال 1.3: مساوات مالتھس
قوت نمائی تفاعل $y = ce^{kt}$ کے تفرق سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kce^{kt} = ky \tag{1.8}$$

یوں $y' = ky$ تفرقی مساوات کا حل $y = ce^{kt}$ ہے۔ مثبت k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی اضافے کی نمونہ کشی کرتی ہے۔ جرسوموں کی تعداد اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے۔ وسیع رقبے کے ملک میں کم انسانی آبادی اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے جہاں اس کو قانون مالتُھس[16] کہا[17] جاتا ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = 0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

منفی k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی گھٹاو مثلاً تابکاری تحلیل[18] کو ظاہر کرتی ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = -0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 1.5 میں تابکاری تحلیل کے مسئلے پر مزید غور کیا گیا ہے۔ □

[16] Malthus' law
[17] یہ قانون انگلستانی ماہر معاشیات طامس روبرٹ مالتُھس (1766-1834) کے نام ہے۔
[18] radioactive decay



(الف) قوت نمائی گھٹاو۔ مساوات $y' = -0.15y$ کا حل۔

(الف) قوت نمائی اضافہ۔ مساوات $y' = 0.15y$ کا حل۔

شکل 1.3: قوت نمائی تفرقی مساوات کی نسل حل۔

درج بالا مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے حل میں ایک عدد اختیاری مستقل c پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کا ایسا حل جس میں اختیاری مستقل c پایا جاتا ہو **عمومی حل**[19] کہلاتا ہے۔

(بعض اوقات c مکمل طور اختیاری مستقل نہیں ہوتا بلکہ اس کی قیمت کو کسی وقفے پر محدود کرنا لازم ہوتا ہے۔)

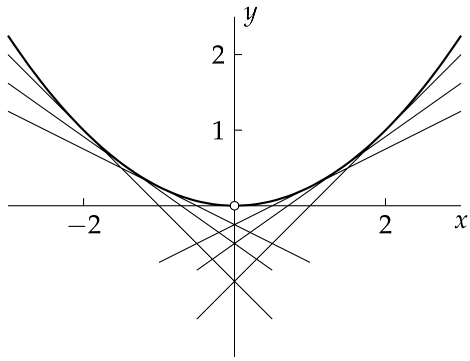
ہم **یکتا**[20] عمومی حل حاصل کرنے کی تراکیب سیکھیں گے۔

جیومیٹریائی طور پر سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل لامتناہی حل کے خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جہاں c کی ہر انفرادی قیمت منفرد خط دیتی ہے۔ عمومی حل میں c کی کوئی مخصوص قیمت مثلاً $c = -3.501$ یا $c = 0$ پر کرنے سے ہمیں **مخصوص حل**[21] ملتا ہے۔ مخصوص حل میں کوئی اختیاری مستقل نہیں پایا جاتا۔

عام طور عمومی حل قابل حصول ہوتا ہے جس میں c کی مخصوص قیمت پر کرتے ہوئے درکار مخصوص حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بعض اوقات تفرقی مساوات ایسا حل بھی رکھتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ ایسے حل کو **نادر**[22] حل کہتے ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفرقی مساوات

$$y'^2 - xy' + y = 0 \tag{1.9}$$

[19] general solution
[20] unique
[21] particular solution
[22] singular solution



شکل 1.4: نادر حل اور مخصوص حل (تفرقی مساوات 1.9)

کا عمومی حل

$$y = cx - c^2$$

ہے جو سیدھے خطوط کی نسل ظاہر کرتی ہے جہاں ہر خط c کی مخصوص قیمت پر کرنے سے حاصل ہو گا۔اسی تفرقی مساوات کا دوسرا حل

$$y = \frac{x^2}{4}$$

ہے جس کو c میں مستقل قیمت پر کرنے سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا یہ نادر حل ہے۔جیسا کہ شکل 1.4 میں دکھایا گیا ہے، ہر مخصوص حل، اس نادر حل کا مماس ہے۔

انجینئری مسائل میں نادر حل شاذ و نادر استعمال ہوتا ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

عام طور پر عمومی حل میں ابتدائی قیمتیں[23] x_0 اور y_0 پر کرنے سے مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جہاں $y(x_0) = y_0$ ہے۔جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ خط حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہے۔سادہ تفرقی

[23] initial values

مساوات اور مساوات کے ابتدائی قیمتوں کو ابتدائی قیمت سوال[24] کہا جاتا ہے۔یوں صریح سادہ تفرقی مساوات کی صورت میں ابتدائی قیمت سوال درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.10}$$

مثال 1.4: ابتدائی قیمت سوال: درج ذیل ابتدائی قیمت سوال کو حل کریں۔

$$y' = 5y, \qquad y(0) = 3.2$$

حل: تفرقی مساوات کو $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 5\,\mathrm{d}x$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمل لینے سے $y = ce^{5x}$ عمومی حل حاصل ہوتا ہے جس میں $x = 0$ پر $y = 3.2$ پر کرنے سے $y(0) = ce^0 = 3.2$ لکھا جائے گا جس سے $c = 3.2$ ملتا ہے۔یوں ابتدائی قیمت سوال کا مخصوص حل $y = 3.2e^{5x}$ ہے۔ □

نمونہ کشی پر مزید بحث

نمونہ کشی کو مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے پہلی قدم پر مسئلے کو تفرقی مساوات کا جامہ پہنایا جائے گا۔دوسری قدم پر تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کیا جائے گا۔تیسرے قدم پر ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل حاصل کیا جائے گا۔آخر میں چوتھا قدم حاصل جواب کی تشریح ہو گی۔

مثال 1.5: تابکار مادے کی موجودہ کمیت $2\,\mathrm{mg}$ ہے۔اس کی کمیت مستقبل میں دریافت کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ کسی بھی لمحے پر تابکاری تحلیل کی شرح اس لمحے پر موجود تابکار مادے کی کمیت کے راست تناسب ہے۔

---

[24] initial value problem

(الف) پہلا قدم: نمونہ کشی: کمیت کو y سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں کسی بھی لمحے پر تابکاری کی شرح سے مراد $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہٰذا تجربے سے حاصل معلومات کو درج ذیل تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جائے گا جہاں تناسبی مستقل k مثبت قیمت ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \tag{1.11}$$

مثال 1.3 میں آپ نے دیکھا کہ تفرقی مساوات میں منفی کی علامت سے تفرقی مساوات کا قوت نمائی گھٹتا ہوا حل حاصل ہوتا ہے۔چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی گئی ہے۔تابکار اشیاء کے مستقل k کی قیمتیں تجربے سے حاصل کئے جاتے ہیں مثلاً ریڈیم[25] یعنی $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ کا $k = 1.4 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}$ ہے۔

ابتدائی کمیت $2\,\mathrm{mg}$ ہے۔ابتدائی وقت کو $t = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی معلومات $y(0) = 2\,\mathrm{mg}$ لکھی جائے گی۔(غیر تابع متغیر وقت t کی بجائے کچھ اور مثلاً x ہونے کی صورت میں بھی (x_0, y_0) یا $y(x_0) = y_0$ کو ابتدائی معلومات ہی کہا جاتا ہے۔اسی طرح تابع متغیرہ y کی قیمت $t \neq 0$ پر معلوم ہو سکتی ہے مثلاً $y(x_n) = y_n$ اور ایسی صورت میں (x_n, y_n) ابتدائی معلومات کہلاتی ہے۔یوں دیے مسئلے سے درج ذیل ابتدائی قیمت سوال حاصل ہوتا ہے۔

$$y' = -ky, \qquad y(0) = 2\,\mathrm{mg} \tag{1.12}$$

(ب) دوسرا قدم: عمومی حل: ابتدائی قیمت سوال کا عمومی حل درج ذیل ہے جہاں c اختیاری مستقل جبکہ k کی قیمت تابکار مادے پر منحصر ہے۔

$$y = c^{-kt} \tag{1.13}$$

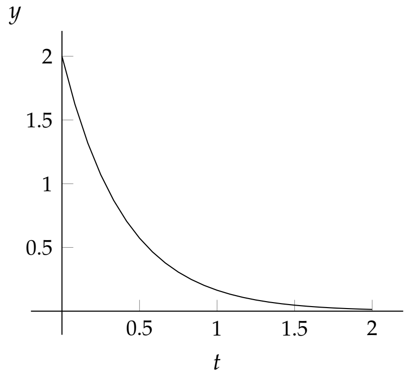
ابتدائی معلومات کے تحت $t = 0$ پر $y = 2\,\mathrm{mg}$ ہے جس کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 2$ حاصل ہوتا ہے۔یوں درج ذیل مخصوص حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = 2e^{-kt} \qquad (k > 0) \tag{1.14}$$

مخصوص حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ حاصل حل درست ہے۔اسی طرح مخصوص حل سے ابتدائی معلومات حاصل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -kce^{-kt} = -ky, \quad y(0) = 2e^{-0} = 2$$

radium[25]



شکل 1.5: مثال 1.5 کی منحنی۔ تابکاری تحلیل $y = 2e^{-kt}$ جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔

(پ) حاصل مخصوص حل کی تشریح: مساوات 1.14 کو شکل 1.5 میں دکھایا گیا ہے جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر یہ مساوات تابکار مادے کی درست کمیت دیتا ہے۔ لمحہ لامتناہی پر تابکار مادے کی کمیت $y(\infty) = 2e^{-k\infty} = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

□

سوالات

سوالات 1.1 تا 1.8 کے جوابات بذریعہ تکمل حاصل کریں یا کسی تفاعل کی تفرق سے جواب حاصل کریں۔

سوال 1.1: $y' + 3\sin 2\pi x = 0$

جواب: $y = \frac{3}{2\pi}\cos 2\pi x + c$

سوال 1.2: $y' + xe^{-x^2} = 0$

جواب: $y = \frac{e^{-x^2}}{2} + c$

سوال 1.3: $y' = 4e^{-x}\cos x$

جواب: $y = 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + c$

سوال 1.4: $y' = y$

جواب: $y = ce^{x}$

سوال 1.5: $y' = -y$

جواب: $y = ce^{-x}$

سوال 1.6: $y' = 2.2y$

جواب: $y = ce^{2.2x}$

سوال 1.7: $y' = 1.5 \sinh 3.2x$

جواب: $y = \frac{15}{32} \cosh 3.2x + c$

سوال 1.8: $y'' = -y$

جواب: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

سوال 1.9 تا سوال 1.15 ابتدائی قیمت سوالات ہیں جن کے عمومی حل دیے گئے ہیں۔انہیں تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہی عمومی جوابات ہیں۔عمومی جواب سے مخصوص جواب حاصل کریں۔مخصوص جواب کا خط کھینچیں۔

سوال 1.9: $y' + 2y = 0.8, \quad y = ce^{-2x} + 0.4, \quad y(0) = 1.2$

جواب: $y = 0.8e^{-2x} + 0.4$

سوال 1.10: $y' + x + y = 0, \quad y = ce^{-x} - x + 1, \quad y(0) = \pi$

جواب: $y = \pi e^{-x} - e^{-x} - x + 1$

سوال 1.11: $y' = 2x + e^{x}, \quad y = e^{x} + x^2 + c, \quad y(0) = 1$

جواب: $y = e^{x} + x^2$

سوال 1.12: $y' + 4xy = 0, \quad y = ce^{-2x^2}, \quad y(0) = 2$

جواب: $y = 2e^{-2x^2}$

سوال 1.13: $yy' = 2x, \quad y^2 = 2x^2 + c, \quad y(1) = 6$

جواب: $y^2 = 2x^2 + 34$

سوال 1.14: $y' = y + y^2, \quad y = \frac{c}{e^{-x} - c}, \quad y(0) = 0.1$

جواب: $y = \frac{1}{e^{(-x+23.98)} - 1}$

سوال 1.15: $y' \tan x = y - 4, \quad y = c \sin x + 4, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$

جواب: $y = 4 - 4 \sin x$

سوال 1.16: نادر حل: بعض اوقات سادہ تفرقی مساوات کا ایسا حل بھی پایا جاتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ایسے حل کو نادر حل[26] کہا جاتا ہے۔مساوات $y'^2 - xy' + y = 0$ کا عمومی حل $y = cx - c^2$ ہے جبکہ اس کا نادر حل $y = \frac{x^2}{4}$ ہے۔ ان حل کا تفرق لیتے ہوئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

سوال 1.17 تا سوال 1.21 نقشہ کشی کے سوالات ہیں۔

سوال 1.17: تابکار مادے کی نصف زندگی $t_{\frac{1}{2}}$ سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں تابکار مادے کی کمیت نصف ہو جاتی ہے۔مثال 1.5 میں ریڈیم $^{266}_{88}\text{Ra}$ کی نصف زندگی دریافت کریں۔

جواب: تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0 e^{-kt}$ میں لمحہ $t = 0$ پر (ابتدائی) کمیت y_0 ہے جبکہ مستقبل میں لمحہ t پر کمیت y ہے۔ہم وہ دورانیہ جاننا چاہتے ہیں جس میں کمیت نصف رہ جائے یعنی جب $y = \frac{y_0}{2}$ رہ جائے۔تابکاری مساوات میں $y = \frac{y_0}{2}$ پر کرتے ہوئے $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kt}$ لکھا جائے گا جس سے $t_{\frac{1}{2}} =$

---

[26] singular solution

$4.95 \times 10^{10}\,\mathrm{s}$ یعنی 1569.6 سال حاصل ہوتا ہے۔یوں ریڈیم کی مقدار 1569.6 سالوں میں نصف رہ جائے گی۔

سوال 1.18: ریڈیم ہم جا[27] $^{224}_{88}\mathrm{Ra}$ کی نصف زندگی تقریباً 3.6 دن ہے۔دو گرام $(2\,\mathrm{g})$ ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک دن بعد کتنی رہ جائے گی۔دو گرام ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک سال بعد کتنی رہ جائے گی۔

جوابات: $1.65\,\mathrm{g}$ ، $6 \times 10^{-31}\,\mathrm{g}$

سوال 1.19: ایک جہاز کی رفتار مستقل اسراع a سے مسلسل بڑھ رہی ہے۔رفتار کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ کو اسراع کہتے ہیں۔ان معلومات سے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے لمحہ t پر رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔اگر $t = 0$ پر ابتدائی رفتار u ہو تب v کی مساوات کیا ہو گی؟

جوابات: $v = at + c$ ، $v = u + at$

سوال 1.20: رفتار سے مراد وقت کے ساتھ فاصلے کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ہے۔سوال 1.19 میں رفتار کی مساوات $v = u + at$ حاصل کی گئی جسے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے برابر پر کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی فاصلہ $x = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی قیمت سوال کو حل کرتے ہوئے x کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $x = ut + \frac{1}{2}at^2$

سوال 1.21: آواز سے کم رفتار پر پرواز کرنے والے جہاز کی کارگزاری ہوا کے دباو پر منحصر ہوتی ہے۔ان کی کارگزاری $10\,500\,\mathrm{m}$ تا $12\,000\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر بہترین حاصل ہوتی ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ $10\,500\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباو دریافت کریں۔طبعی معلومات:اونچائی کے ساتھ دباو میں تبدیلی کی شرح y' ہوا کے دباو y کے راست تناسب ہوتی ہے۔تقریباً $5500\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباو سمندر کی سطح پر ہوا کے دباو y_0 کی نصف ہوتا ہے۔

جواب: $0.27y_0$ یعنی تقریباً ایک چوتھائی

[27] isotope

1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات

$$y' = f(x, y) \tag{1.15}$$

سادہ معنی رکھتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ y' سے مراد y کی ڈھلوان ہے۔یوں مساوات 1.15 کا وہ حل جو نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہو کا اس نقطے پر ڈھلوان $y'(x_0)$ ہو گا کو درج بالا مساوات کے تحت اس نقطے پر f کی قیمت کے برابر ہو گا۔

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 1.15 کو حل کرنے کے **ترسیمی**[28] یا **اعدادی**[29] طریقے دریافت کر سکتے ہیں۔تفرقی مساوات کو حل کرنے کے ترسیمی اور اعدادی طریقے اس لئے بھی اہم ہیں کہ کئی تفرقی مساوات کا کوئی **تحلیلی**[30] حل نہیں پایا جاتا جبکہ ہر قسم کے تفرقی مساوات کا ترسیمی اور اعدادی حل حاصل کرنا ممکن ہے۔

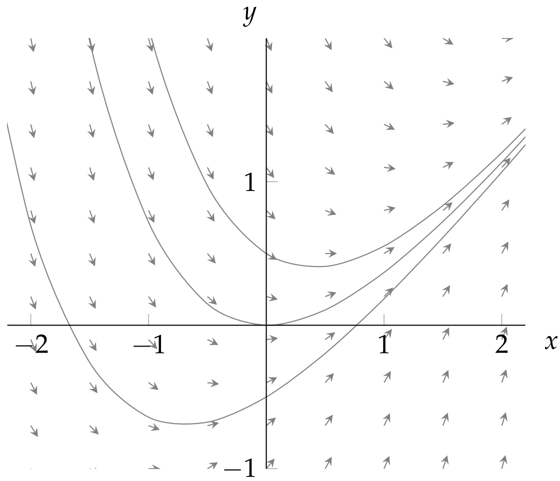
میدان کی سمت: ترسیمی طریقہ

ہم xy سطح پر جگہ جگہ مساوات 1.15 سے حاصل ڈھلوان کی چھوٹی لمبائی کی سیدھی لکیریں کھینچ سکتے ہیں۔ہر نقطے پر ایسی لکیر اس نقطے پر میدان کی سمت دیتی ہے۔اس **میدانِ سمت**[31] یا **میدانِ ڈھال**[32] میں تفرقی مساوات کا **منحنی حل**[33] کھینچا جا سکتا ہے۔

منحنی حل کو کھینچنے کی ترکیب کچھ یوں ہے۔کسی بھی نقطے پر ڈھلوان کی سمت میں چھوٹی لکیر کھینچیں۔اس لکیر کو آہستہ آہستہ یوں موڑیں کہ لکیر کے اختتامی نقطے پر لکیر کی ڈھلوان عین اس نقطے کی ڈھلوان برابر ہو۔اسی طرح آگے بڑھتے رہیں۔ڈھال میدان میں نقطے جتنے قریب قریب ہوں تفرقی مساوات کا منحنی حل اتنا درست ہو گا۔

شکل 1.6 میں

$$y' = x - y \tag{1.16}$$



شکل1.6: درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = x - y$ کا ڈھال میدان اور منحنی حل۔

کا ڈھال میدان دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ چند منحنی حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

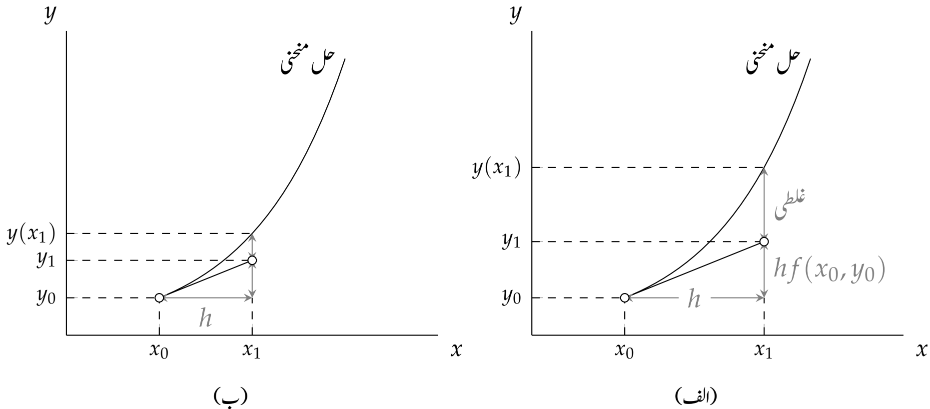
آئیں اب اعدادی طریقہ سیکھیں۔سادہ ترین اعدادی طریقہ **ترکیب یولر** کہلاتا ہے۔پہلے اسی پر بحث کرتے ہیں۔

یولر کی اعدادی ترکیب

درجہ اول تفرقی مساوات $y' = f(x,y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو استعمال کرتے ہوئے **ترکیب یولر**[34] ہم فاصلہ نقطوں x_0 ، $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $\cdots$ پر تقریباً درست قیمتیں دیتا ہے یعنی

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0)\\
y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1)\\
y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2)
\end{aligned}
$$

graphical[28]
numerical[29]
analytic[30]
direction field[31]
slope field[32]
solution curve[33]
Euler's method[34]



شکل 1.7: ترکیب یولر کا پہلا قدم۔

یا

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \tag{1.17}$$

h کو قدم کہتے ہیں۔ شکل 1.7-الف میں y_1 کا حصول دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی نقطہ y_0 اور ترکیب یولر سے حاصل کردہ y_1 کو چھوٹے دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں h کی قیمت کم کرنے کا اثر دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹا قدم لینے سے اصل حل $y(x_1)$ اور یولر سے حاصل y_1 میں فرق (غلطی) کم ہو جاتا ہے۔ یوں قدم کو چھوٹا سے چھوٹا کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ درست حل دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.16 کا عمومی حل $y = ce^{-x} + x - 1$ ہے جس سے نقطہ $(0,0)$ سے گزرتا حل $y = e^{-x} + x - 1$ ملتا ہے۔ اس طرح کے حل ہم جلد حاصل کر پائیں گے۔ اس وقت صرف اتنا ضروری ہے کہ آپ دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکیں کہ یہی درست حل ہے۔

جدول 1.1 میں قدم $h = 0.1$ لیتے ہوئے نقطہ $(0,0)$ سے گزرتا ہوا مساوات 1.16 کا ترکیب یولر (مساوات 1.17) سے حل حاصل کیا گیا ہے۔ آئیں اس جدول کو حاصل کریں۔

ابتدائی نقطہ $(x_0, y_0) = (0,0)$ ہے جس کا اندراج جدول 1.1 کے پہلے صف میں کیا گیا ہے۔ ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے (x_1, y_1) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 0 + 0.1(0 - 0) = 0$$

جدول 1.1: ترکیب یولر۔

غلطی	$y(x)$	y_n	x_n	n
0	0	0	0	0
0.00484	0.00484	0.0	0.1	1
0.00873	0.01873	0.01	0.2	2
0.01182	0.04082	0.029	0.3	3
0.01422	0.07032	0.0561	0.4	4

جدول 1.1 کے دوسرے صف میں ان قیمتوں کا اندراج کیا گیا ہے جن سے (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں۔

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0 + 0.1(0.1 - 0) = 0.01$$

یہ قیمتیں بھی جدول میں درج ہیں۔اسی طرح (x_3, y_3) حاصل کرتے ہوئے جدول میں درج کئے گئے ہیں۔

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.01 + 0.1(0.2 - 0.01) = 0.029$$

جدول کی آخری صف حاصل کرتے ہیں۔

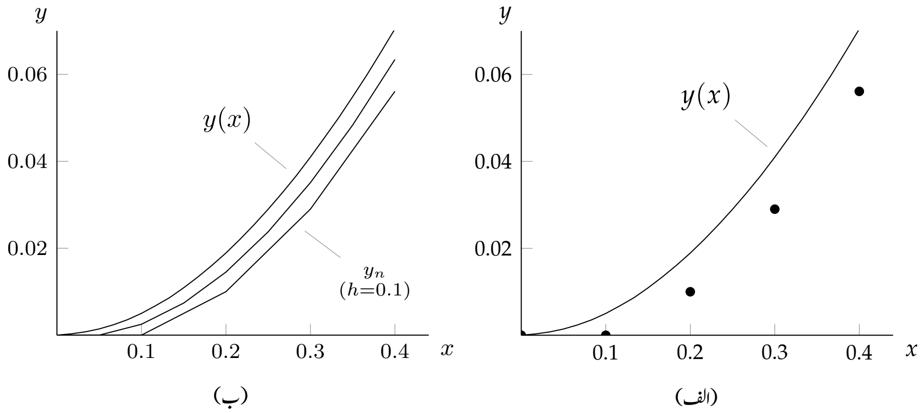
$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.029 + 0.1(0.3 - 0.029) = 0.0561$$

شکل 1.8-الف میں ترکیب یولر سے حاصل حل اور ریاضیاتی حل $y(x)$ کا موازنہ کیا گیا ہے۔شکل-الف میں یولر حل سے حاصل نقطوں کو سیدھی لکیروں سے ملاتے ہوئے مسلسل حل حاصل کیا جا سکتا ہے جسے شکل-ب میں y_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔شکل-ب میں $y(x)$ بھی دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ $h = 0.05$ استعمال کرتے ہوئے حاصل یولر حل کو بھی دکھایا گیا ہے جو $y(x)$ اور y_n کے بیچ میں پایا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ h کی قیمت کم کرنے سے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 1.22 تا سوال 1.28 کے میدان ڈھال کو قلم و کاغذ سے کھینچتے ہوئے دیے ابتدائی نقطوں سے گزرتے منحنی حل حاصل کریں۔چند ڈھال میدان شکل 1.9 اور شکل 1.10 میں دیے گئے ہیں۔

سوالات

سوال 1.22: $y' = 1 + y^2, \quad (\frac{\pi}{4}, 1)$



شکل 1.8: ترکیب یولر سے حاصل حل کا ریاضیاتی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

سوال 1.23: $y' = 1 - y^2, \quad (0,0)$

سوال 1.24: $yy' + 8x = 0, \quad (1,1)$

سوال 1.25: $y' = y - y^2, \quad (1,0)$

سوال 1.26: $y' = x + \frac{1}{y}, \quad (0,1)$

سوال 1.27: $y' = \sin^2 x, \quad (0,1)$

سوال 1.28: $y' = \sin^2 y, \quad (0,0)$

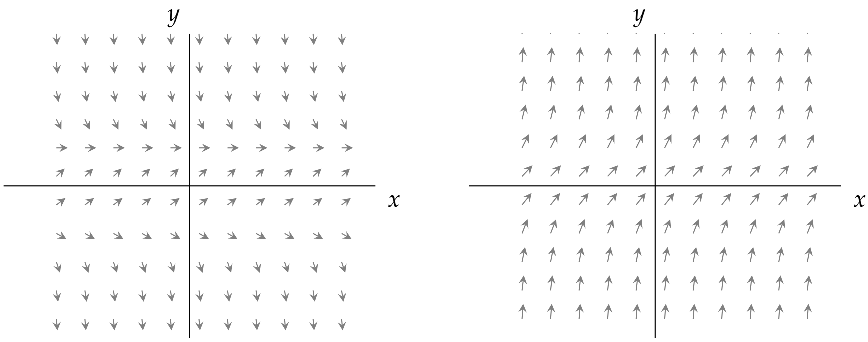
ڈھال میدان کے استعمال سے تفرقی مساوات کے تمام حل سامنے آ جاتے ہیں۔ بعض اوقات تفرقی مساوات کا تحلیلی حل حاصل کرنا ممکن ہی نہیں ہوتا۔ درج ذیل دو سوالات میں ڈھال میدان سے اخذ حل اور دیے گئے تحلیلی حل کا موازنہ کرتے ہوئے ڈھال میدان سے حاصل حل کی درستگی کا اندازہ لگایا جا سکتا ہے۔

سوال 1.29: $y' = \sin x, \quad (\frac{\pi}{2}, 0), \quad y = -\cos x$

سوال 1.30: $y' = 3x^2, \quad (0,0), \quad y = x^3$

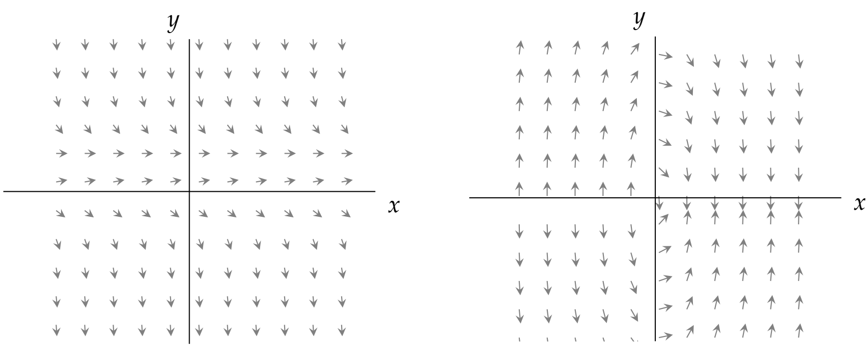
سوال 1.31: سوال 1.23، سوال 1.25 اور سوال 1.28 میں بے قابو متغیرہ x صریحاً ظاہر نہیں کیا گیا ہے۔ ایسی مساوات جن میں بے قابو متغیرہ کو صریحاً ظاہر نہ کیا جائے **خود مختار**[35] **سادہ تفرقی مساوات** کہلاتے ہیں۔ خود مختار

[35] autonomous ordinary differential equations



(الف) $y' = 1 + y^2$ (ب) $y' = 1 - y^2$

شکل 1.9: سوال 1.22 اور سوال 1.23 کے ڈھال میدان۔



(الف) $y' = -\frac{8x}{y}$ (ب) $y' = y - y^2$

شکل 1.10: سوال 1.24 اور سوال 1.25 کے ڈھال میدان۔

سادہ تفرقی مساوات کے ہم میلان[36] حل $f(x,y)=c$ کی شکل و صورت کیا ہو گی؟

جواب: چونکہ y' کا دارومدار x پر نہیں ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے y کا میلان تبدیل نہیں ہو گا اور $f(x,y)=c$ افقی محور کے متوازی خط ہوں گے۔

ایک جسم y محدد پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر نقطہ $y=0$ سے جسم کا فاصلہ $y(t)$ ہے۔ سوالات 1.32 تا سوال 1.34 میں دئے شرائط کے مطابق جسم کی رفتار کی نمونہ کشی کریں۔ ریاضی نمونے کی ڈھال میدان بناتے ہوئے دیے گئے ابتدائی معلومات پر پورا اترتا منحنی خط کھینچیں۔

سوال 1.32: جسم کی رفتار ضرب فاصلہ $y(t)$ مستقل ہے جو 4 کے برابر ہے جبکہ $y(0)=4$ کے برابر ہے۔

جوابات: $yy'=4$ ، $y=8t+16$

سوال 1.33: رفتار ضرب وقت فاصلے کے برابر ہے۔ لمحہ $t=1$ پر فاصلہ $y(1)=2$ ہے۔

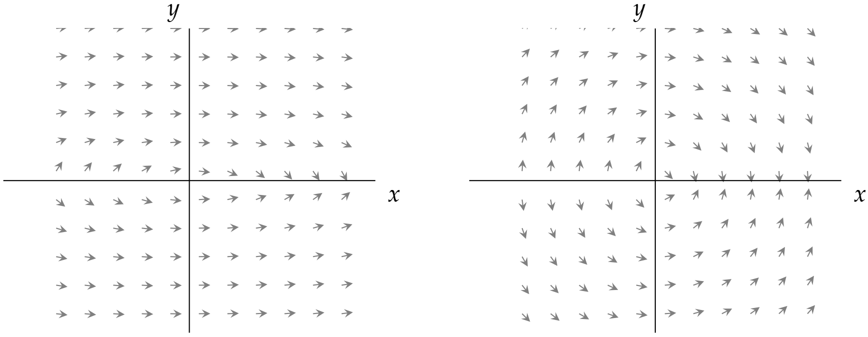
جوابات: $y=y't$ ، $y=2t$

سوال 1.34: مربع رفتار منفی مربع فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔ ابتدائی فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔

جوابات: $y'=\sqrt{1+y^2}$ ، $\sinh^{-1} y = t+\sinh^{-1} 1$

سوال 1.35: ہوائی جہاز سے چھلانگ لگا کر زمین تک خیریت سے بذریعہ چھتری اترا جا سکتا ہے۔ گرتے ہوئے شخص پر آپس میں الٹ، دو عدد قوتیں عمل کرتی ہیں۔ پہلی قوت زمینی کشش $F_1=mg$ ہے جہاں m اس شخص کی کمیت اور $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع ہے۔ یہ قوت انسان کو زمین کی طرف اسراع دیتی ہے۔ دوسری قوت چھتری پر ہوا کے رگڑ سے پیدا قوت ہے جو اس شخص کی رفتار کو بڑھنے سے روکتی ہے۔ چھتری پر ہوا کے رگڑ سے رفتار کے مربع کے متناسب قوت $F_2=cv^2$ پیدا ہوتی ہے۔ نیوٹن کی مساوات حرکت کہتی ہے کہ کسی بھی جسم پر قوت، اس جسم کی کمیت ضرب اسراع کے برابر ہوتی ہے۔ چھتری سے زمین پر اترتے شخص کی نمونہ کشی کرتے ہوئے رفتار v کی سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ کمیت کو $m=1$ اور مستقل کو $c=1$ لیتے ہوئے ڈھال

[36] isoclines



(الف) تفرقی مساوات $y' = -\frac{x}{y}$ کی ڈھال میدان۔

(ب) تفرقی مساوات $y' = -\frac{x}{9y}$ کی ڈھال میدان۔

شکل 1.11: سوال 1.36 کی ڈھال میدان۔

میدان کھینچیں۔ تصور کریں کہ چھتری اس لمحہ کھلتی ہے جب شخص کی رفتار $v = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو۔ایسی صورت میں منحنی حل حاصل کریں۔اس شخص کی اختتامی رفتار کیا ہو گی؟ کیا چھتری پر قوت رفتار کے راست متناسب ہونے کی صورت میں بھی چھتری کے ذریعہ ہوائی جہاز سے زمین تک خیریت سے چھلانگ لگائی جا سکتی ہے؟

جوابات: $mg - cv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ؛ گرنے کی رفتار اس قیمت پر رہتی ہے جہاں نیچے جانب قوت mg اور چھتری کی رکاوٹی اوپر جانب قوت cv^2 برابر ہوں۔ایسی صورت میں گرتے شخص کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی یعنی $y' = 0$ ہوتا ہے۔تفرقی مساوات میں $y' = 0$ پر کرتے اور $m = c = 1$ لیتے ہوئے اختتامی رفتار $v(t = \infty) = 3.13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 1.36: گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ ہے۔رداس r کو مستقل تصور کرتے ہوئے دائرے کی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ڈھال میدان کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ڈھال میدان کھینچیں۔کیا آپ ڈھال میدان کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ منحنی حل گول دائرے ہیں؟ اسی طرح $x^2 + 9y^2 = c$ کا تفرق لیتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کی ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا ڈھال میدان کو دیکھ کر کہا جا سکتا ہے کہ منحنی حل بیضوی ہو گا؟

جوابات: $y' = -\frac{x}{y}$ ، $y' = -\frac{x}{9y}$

سوال 1.37 تا سوال 1.40 کو ترکیب یولر سے حل کریں۔کل پانچ ہم فاصلہ نقطوں پر حل حاصل کریں۔ایک ہی کارتیسی محدد پر حاصل y_1 تا y_5 اور سوال میں دئے گئے حل $y(x)$ کا خط کھینچیں۔ سوال 1.37:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1, \quad y(x) = e^{-x}$$

جوابات: $y_1 = 0.9$ ، $y_2 = 0.81$ ، $y_3 = 0.729$ ، $y_4 = 0.6561$ ، $y_5 = 0.59049$

سوال 1.38:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{-x}$$

جوابات: $y_1 = 0.99$ ، $y_2 = 0.9801$ ، $y_3 = 0.9703$ ، $y_4 = 0.9606$ ، $y_5 = 0.95099$

سوال 1.39:

$$y' = 1 + 3x^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1, \quad y(x) = x^3 + x$$

جوابات: $y_1 = 2.1$ ، $y_2 = 2.203$ ، $y_3 = 2.315$ ، $y_4 = 2.442$ ، $y_5 = 2.59$

سوال 1.40:

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{x^2-4}$$

جوابات: $y_1 = 1.04$ ، $y_2 = 1.0818$ ، $y_3 = 1.1255$ ، $y_4 = 1.1712$ ، $y_5 = 1.2190$

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات

متعدد اہم سادہ تفرقی مساوات کو الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$g(y)y' = f(x) \tag{1.18}$$

جس کو مزید یوں

$$g(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

یعنی

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کے بائیں جانب صرف y متغیرہ اور دائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے لہٰذا اس کا تکمل لیا جا سکتا ہے۔

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c \tag{1.19}$$

اگر $g(y)$ اور $f(x)$ قابل تکمل تفاعل ہوں تب مساوات 1.19 سے مساوات 1.18 کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب کو **ترکیب علیحدگی متغیرات**[37] کہتے ہیں۔ مساوات 1.18 کو **قابل علیحدگی مساوات**[38] کہتے ہیں۔

مثال 1.6: مساوات $y' = 1 + y^2$ قابل علیحدگی مساوات ہے چونکہ اس کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \mathrm{d}x$$

لکھا جا سکتا ہے جس کے دونوں اطراف کا تکمل لیتے ہوئے

$$\tan^{-1} y = x + c$$

یعنی

$$y = \tan(x + c)$$

[37] variable separation technique
[38] separable equation

حاصل ہوتا ہے جو تفرقی مساوات کا درکار حل ہے۔حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ یہی صحیح حل ہے۔ □

مثال 1.7: قابل علیحدگی تفرقی مساوات $y' = xe^{-x}y^3$ کو علیحدہ کرتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y^{-3}\,\mathrm{d}y &= xe^{-x}\,\mathrm{d}x \\
\frac{y^{-2}}{-2} &= c-(x+1)e^{-x} && \text{تکمل لیا گیا ہے} \\
y^2 &= \frac{1}{2(x+1)e^{-x}-2c}
\end{aligned}$$

□

مثال 1.8: درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1$$

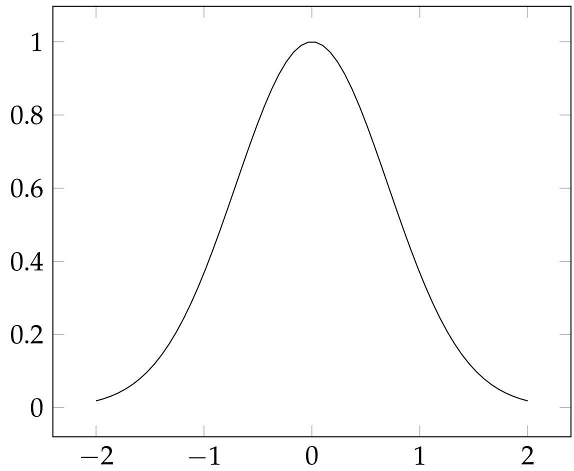
حل: مساوات کے متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 2x\,\mathrm{d}x + c \\
\ln y &= -x^2 + c_1 \\
y &= ce^{-x^2}
\end{aligned}$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = 0$ یعنی $c = e^{c_1} = 1$ ملتا ہے لہٰذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y = e^{-x^2}$ ہے جسے شکل 1.12 میں دکھایا گیا ہے اور جو گھنٹی نما[39] ہے۔ □

مثال 1.9: کاربن سے عمر دریافت کرنے کا طریقہ
طبعی معلومات: کائناتی شعاعیں[40] فضا میں تابکار کاربن $^{14}_{6}\mathrm{C}$ بناتی ہیں۔یہ عمل زمین کی پیدائش سے اب تک ہوتا آ

[39] bell shaped
[40] cosmic rays



شکل 1.12: مثال 1.8 کا **گھنٹی نما** حل۔

رہا ہے۔وقت کے ساتھ فضا میں $^{14}_{6}\mathrm{C}$ اور $^{12}_{6}\mathrm{C}$ **ہم جا**[41] کی تناسب ایک مخصوص قیمت حاصل کر چکی ہے۔کوئی بھی جاندار سانس لے کر یا خوراک کے ذریعہ فضا سے کاربن جذب کرتا ہے۔یوں جب تک جانور زندہ رہے اس کی جسم میں دونوں ہم جا کاربن کی تناسب وہی ہو گی جو فضا میں ان کی تناسب ہے۔البتہ مرنے کے بعد جسم میں تابکار کاربن کی مقدار تابکاری تحلیل کی بنا گھٹتی ہے جبکہ غیر تابکار کاربن کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔تابکار کاربن $^{14}_{6}\mathrm{C}$ کی نصف زندگی 5715 سال ہے۔

اہرام مصر میں دفن مومیائی ہوئی فرعون کی لاش میں $^{14}_{6}\mathrm{C}$ اور $^{12}_{6}\mathrm{C}$ کا تناسب فضا کے تناسب کا $56.95\,\%$ ہے۔لاش کی عمر دریافت کریں۔

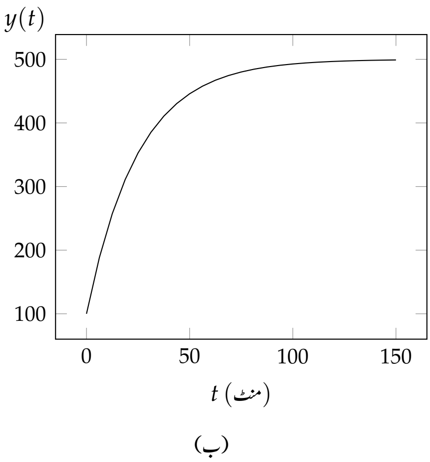
حل:تابکار کاربن کی نصف زندگی سے تابکاری تحلیل کا **مستقل** k دریافت کرتے ہیں۔

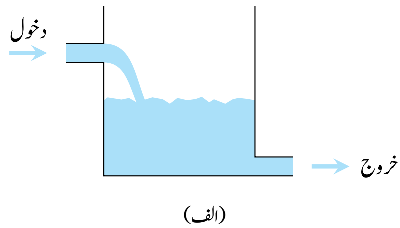
$$y_0 e^{-k(5715)} = \frac{y_0}{2}, \quad e^{-k(5715)} = \frac{1}{2}, \quad -k = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{5715}, \quad k = 0.0001213$$

لاش میں ہم جا کاربن کی تناسب سے لاش کی عمر حاصل کرتے ہیں۔

$$e^{-0.0001213t} = 0.5695, \quad -0.0001213t = \ln 0.5695, \quad t = 4641$$

[41]isotopes





شکل 1.13: مثال 1.10 میں مرکب بنانے کا عمل۔

یوں فرعون کی لاش 4641 سال پرانی ہے۔

$\square$

مثال 1.10: مرکب بنانے کا عمل
کیمیائی صنعت میں مرکب بنانے کا عمل عام ہے۔شکل 1.13-الف میں پانی کی ٹینکی دکھائی گئی ہے جس میں ابتدائی طور پر 1000 لٹر پانی پایا جاتا ہے۔اس پانی میں کل $100\,\mathrm{kg}$ نمک ملایا گیا ہے۔پانی کو مسلسل ہلانے سے ٹینکی میں کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ٹینکی میں 40 لٹر فی منٹ کی شرح سے نمکین پانی شامل کیا جاتا ہے۔اس پانی میں نمک کی مقدار $0.5\,\mathrm{kg\,l^{-1}}$ ہے۔ٹینکی سے نمکین پانی کا انخلا 40 لٹر فی منٹ ہے۔ٹینکی میں نمک کی کل مقدار بالمقابل وقت دریافت کریں۔

حل: چونکہ ٹینکی میں پانی شامل ہونے کی شرح اور پانی خارج ہونے کی شرح برابر ہے لہٰذا ٹینکی میں پانی کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ٹینکی میں داخل ہونے والا ایک لٹر کا نمکین پانی $0.5\,\mathrm{kg}$ نمک ٹینکی میں شامل کرتا ہے۔یوں 40 لٹر فی منٹ سے داخل ہوتا پانی $40 \times 0.5 = 20\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$ سے نمک شامل کرتا ہے۔کسی بھی لمحہ ٹینکی میں کل نمک کو y کلوگرام لکھتے ہوئے ٹینکی میں نمک کی کثافت کو $\frac{y}{1000}$ کلوگرام فی لٹر لکھا جا سکتا ہے۔یوں

خارج ہوتا پانی $\frac{y}{1000} \times 40$ کلو گرام فی منٹ نمک خارج کرتا ہے۔اس طرح نمک میں اضافے کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کو

$$\begin{aligned} y' &= \text{نمک شامل ہونے کی شرح} - \text{نمک خارج ہونے کی شرح} \qquad \text{(متوازن مساوات)} \\ &= 20 - \frac{40y}{1000} \end{aligned}$$

یعنی

$$y' = 0.04(500 - y) \tag{1.20}$$

لکھا جا سکتا ہے جو قابل علیحدگی مساوات ہے لٰہذا اس میں متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{y-500} = -0.04\,\mathrm{d}t, \quad \ln\left|y-500\right| = -0.04t + c_1, \quad y = 500 + ce^{-0.04t}$$

ٹینکی میں ابتدائی نمک کی کل مقدار $100\,\mathrm{kg}$ ہے۔اس معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے مساوات کا مستقل c حاصل کرتے ہیں۔

$$100 = 500 + c^{-0.04(0)}, \quad c = -400$$

یوں کسی بھی لمحے ٹینکی میں کل نمک کی مقدار درج ذیل ہے جس کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$y(t) = 500 - 400e^{-0.04t}$$

شکل-ب کے مطابق ٹینکی میں آخر کار کل $500\,\mathrm{kg}$ نمک پایا جائے گا۔ یہی جواب بغیر کسی مساوات لکھے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر ٹینکی میں لگاتار نمکین پانی شامل کیا جائے اور اس سے پرانا پانی خارج کیا جائے تو آخر کار ٹینکی میں صرف نیا شامل کردہ پانی ہی پایا جائے گا۔چونکہ شامل کردہ پانی میں 0.5 کلو گرام فی لٹر نمک پایا جاتا ہے لٰہذا 1000 لٹر کی ٹینکی میں کل نمک $1000 \times 0.5 = 500\,\mathrm{kg}$ ہو گا۔ □

مثال 1.11: نیوٹن قانون ٹھنڈک گرمیوں میں ایک دفتر کا درجہ حرارت ایئر کنڈیشنر کی مدد سے $21\,^{\circ}\mathrm{C}$ پر رکھا جاتا ہے۔ صبح سات بجے ایئر کنڈیشنر چالو کیا جاتا ہے اور شام نو بجے اس کو بند کر دیا جاتا ہے۔ایک مخصوص دن کو شام نو بجے بیرونی درجہ حرارت $40\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہوتا ہے جبکہ صبح سات بجے بیرونی درجہ حرارت $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ تک گر چکا ہوتا ہے۔دفتر کے اندر رات دو بجے درجہ حرارت $26\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ صبح سات بجے دفتر کے اندر درجہ حرارت معلوم کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ حرارتی توانائی کو با آسانی منتقل کرتے جسم (مثلاً لوہا) کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح جسم اور اس کے گرد ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست تناسب ہوتا ہے۔اس کو نیوٹن کا قانون ٹھنڈک[42] کہا جاتا ہے۔

حل: پہلا قدم: نمونہ کشی
دفتر کے اندرونی حرارت کو T سے ظاہر کرتے ہیں جبکہ بیرونی حرارت کو T_b سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں نیوٹن کا قانون ٹھنڈک کی ریاضیاتی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_b) \tag{1.21}$$

دوسرا قدم: عمومی حل کی تلاش
اگرچہ دفتر کی دیواریں اور چھت حرارتی توانائی با آسانی منتقل نہیں کرتی ہم اسی کلیے کا سہارا لیتے ہوئے مسئلہ حل کریں گے۔یہاں بیرونی درجہ حرارت مستقل قیمت نہیں ہے لہٰذا درج بالا مساوات کو حل کرنا مشکل ہو گا۔انجنیئرنگ کے شعبے میں عموماً ایسی ہی مشکلات کا سامنہ کرنا ہوتا ہے۔ہمیں مسئلے کی سادہ صورت حل کرنا ہو گی۔اگر ہم تصور کریں کہ T_b مستقل قیمت ہے تب درج بالا مساوات کے متغیرات علیحدہ کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ بیرونی درجہ حرارت $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ تا $40\,^{\circ}\mathrm{C}$ رہا ہے لہٰذا ہم اس کی اوسط قیمت یعنی $35\,^{\circ}\mathrm{C}$ کو بیرونی درجہ حرارت تصور کرتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔مساوات کے متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے تکمل لے کر اس کو حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}T}{T-35} = k\,\mathrm{d}t, \quad \ln|T-35| = kt + c_1, \quad T - 35 = ce^{kt}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل کا حصول
اگر شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا جائے اور وقت کو گھنٹوں میں ناپا جائے تب $T(0) = 21$ لکھا جائے گا جسے درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = -14$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل

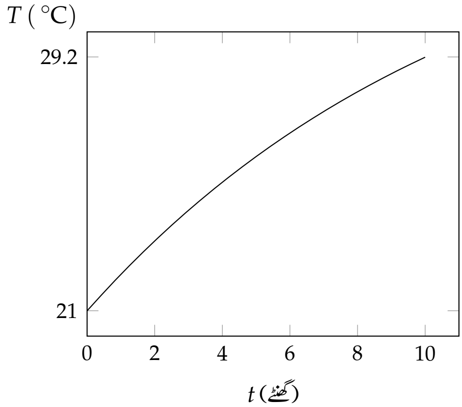
$$T = 35 - 14e^{kt}$$

چوتھا قدم: مستقل k کا حصول
ہم جانتے ہیں کہ رات دو بجے اندرونی درجہ حرارت $26\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہے۔یاد رہے کہ شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا گیا لہٰذا رات دو بجے $t = 5$ ہو گا۔یوں $T(5) = 26$ لکھا جائے گا۔ان معلومات کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے k حاصل کرتے ہوئے مکمل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$26 = 35 - 14e^{5k}, \quad k = -0.088, \quad T = 35 - 14e^{-0.088t}$$

---

[42] Newton's law of cooling



شکل 1.14: مثال 1.11: دفتر کا اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت۔

آخری قدم:
صبح سات بجے اندرونی درجہ حرارت کا تخمینہ لگاتے ہیں یعنی $t = 10$ پر درجہ حرارت درکار ہے۔

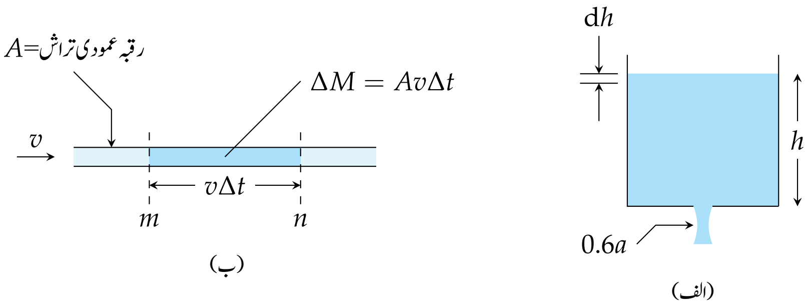
$$T = 35 - 14e^{-0.088(10)} = 29.2\ ^\circ\mathrm{C}$$

پوری رات میں اندرونی درجہ حرارت $8.2\ ^\circ\mathrm{C}$ بڑھ گیا ہے۔ شکل 1.14 میں اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 1.12: پانی کا انخلا: پانی کی ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش $B = 2\,\mathrm{m^2}$ ہے۔ ٹینکی کی تہہ میں $r = 0.5\,\mathrm{cm}$ رداس کا گول سوراخ ہے جس سے پانی نکل رہا ہے۔ ٹینکی میں پانی کی ابتدائی گہرائی $h_1 = 1.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی۔

طبعی معلومات: پانی کی سطح پر m کمیت پانی کی مخفی توانائی mgh ہے جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع اور h پانی کی گہرائی ہے۔ سوراخ سے خارج ہوتے وقت یہ مخفی توانائی حرکی توانائی $\frac{mv^2}{2}$ میں تبدیل ہو جاتی ہے جہاں v رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔ مخفی توانائی اور حرکی توانائی کو برابر لکھتے ہوئے v کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad v = \sqrt{2gh}$$



شکل 1.15: مثال 1.12: پانی کا انخلا اور پانی کے دھار کا سکڑنا۔

شکل 1.15-الف میں پانی کی دھار دکھائی گئی ہے۔جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں دھار سوراخ کے قریب سکڑتا ہے۔اگر سوراخ کا رقبہ a ہو تب سکڑے ہوئے مقام پر دھار کا رقبہ عمودی تراش $0.6a$ ہوتا ہے۔یوں سوراخ سے نکلا تمام پانی رقبہ $0.6a$ سے گزرتا ہے اور یہی وہ مقام ہے جہاں پانی کا ہر ذرہ ایک ہی سمت میں رفتار v سے حرکت کرتا ہے۔

شکل 1.15-ب میں ایک نالی دکھائی گئی ہے جس میں پانی کی رفتار v ہے۔نالی کا رقبہ عمودی تراش A ہے۔لمحہ $t = 0$ پر مقام m پر موجود پانی کا ذرہ وقت Δt میں $v\Delta$ فاصلہ طے کرتے ہوئے مقام n تک پہنچ جائے گا۔یوں Δt کے دوران مقام m سے گزرا ہوا پانی نالی کو m تا n بھرے گا۔اس پانی کی مقدار $\Delta M = Av\Delta t$ ہو گی۔اسی کلیے کو استعمال کرتے ہوئے شکل 1.15-الف میں $\mathrm{d}t$ دورانیے میں کل $\mathrm{d}M = 0.6av\,\mathrm{d}t$ پانی خارج ہو گا۔یوں پانی کی شرح انخلا درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0.6a\sqrt{2gh} \tag{1.22}$$

اس مساوات کو قانون ٹاری سلی[43] کہتے ہیں۔

حل: دورانیہ $\mathrm{d}t$ میں پانی کی انخلا کے بنا ٹینکی میں پانی کی گہرائی $\mathrm{d}h$ کم ہو گی جو $B\,\mathrm{d}h$ حجم کی کمی کو ظاہر کرتی ہے جہاں B ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش ہے۔چونکہ پانی کے انخلا سے ٹینکی میں پانی کم ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو دیے گئے مسئلے کا تفرقی مساوات ہے۔

$$0.6a\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t = -B\,\mathrm{d}h \tag{1.23}$$

[43] Torricelli's law

متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}\,\mathrm{d}t, \quad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + c$$

ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر پانی کی گہرائی h_1 ہے۔ان معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = 2h_1$ ملتا ہے لہٰذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل درج ذیل ہے۔

$$2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + 2\sqrt{h_1} \tag{1.24}$$

خالی ٹینکی سے مراد $h = 0$ ہے۔مخصوص حل میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے ٹینکی خالی کرنے کے لئے درکار وقت حاصل کرتے ہیں۔

$$2\sqrt{0} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + 2\sqrt{h_1}, \quad t = \frac{2\sqrt{h_1}B}{0.6a\sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{1.5}\times 2}{0.6\pi 0.005^2\sqrt{2\times 9.8}} = 23\,482\,\mathrm{s} \approx 6.52\,\mathrm{h}$$

مساوات 1.24 کو شکل 1.16 میں دکھایا گیا ہے۔یاد رہے کہ $23\,482\,\mathrm{s}$ میں ٹینکی خالی ہو جاتی ہے لہٰذا ترسیم کو اتنے وقت کے لئے ہی کھینچا گیا ہے۔ □

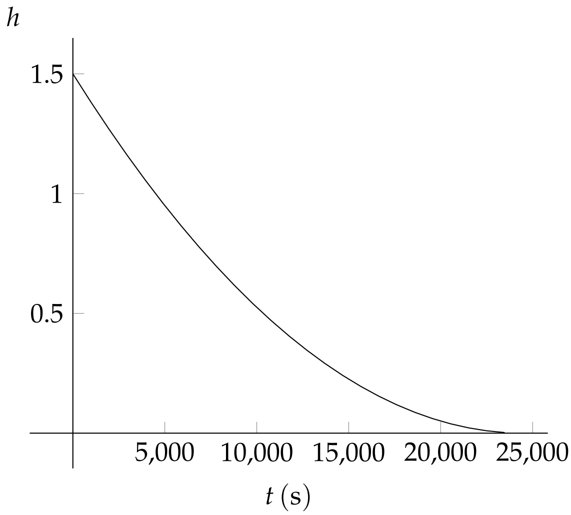
علیحدگی متغیرات کی جامع ترکیب

بعض اوقات نا قابل علیحدگی تفرقی مساوات کے متغیرات کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات کو قابل علیحدگی بنایا جا سکتا ہے۔اس ترکیب کو درج ذیل عملاً اہم قسم کی مساوات کے لئے سیکھتے ہیں جہاں $f(\frac{y}{x})$ قابل تفرق تفاعل ہے مثلاً $\cos\frac{y}{x}$ ، $e^{(y/x)}$ وغیرہ۔

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.25}$$

مساوات کی صورت دیکھتے ہوئے $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y = ux, \quad y' = u + xu' \tag{1.26}$$



شکل 1.16: مثال 1.12: ٹینکی خالی ہونے کا عمل۔

جنہیں $y' = f(\frac{y}{x})$ میں پر کرتے ہوئے $u + xu' = f(u)$ یعنی $xu' = f(u) - u$ ملتا ہے۔ اگر $f(u) - u \neq 0$ ہو تب متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{1.27}$$

مثال 1.13: تفاعل $xy' - y = 2x$ کو حل کریں۔

حل: تفاعل کو $y' = \frac{y}{x} + 2$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہوئے مساوات 1.26 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u + xu' = u + 2, \quad \mathrm{d}u = 2\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad u = 2\ln|x| + c$$

اس میں u کی جگہ واپس $\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے جواب حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y}{x} = 2\ln|x| + c, \quad y = 2x\ln|x| + cx$$

$\square$

سوالات

سوال 1.41 تا سوال 1.49 کے عمومی حل حاصل کریں۔حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 1.41: $y^2y' + x^2 = 0$

جواب: $x^3 + y^3 = c$

سوال 1.42: $yy' + x = 0$

جواب: $x^2 + y^2 = c$

سوال 1.43: $y' = \sec^2 y$

جواب: $y = \tan x + c$

سوال 1.44: $y' \cos x = y \sin x$

جواب: $y = c \sec x$

سوال 1.45: $y' = ye^{x-1}$

جواب: $\ln\lvert y\rvert = e^{x-1} + c$

سوال 1.46: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y + x^2 \sin^2 \frac{y}{x}$ کو حل کریں۔

جواب: $\frac{\cos \frac{y}{x} - 1}{\cos \frac{y}{x} + 1} = ce^{2x}$

سوال 1.47: $y' = (2x + y)^2$ کو حل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر $u = 2x + y$ پر کرنا ہو گا۔

جواب: $y = -2x + \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x + c)$

سوال 1.48: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y^2 + y$ کو حل کریں۔

جواب: $y=-\frac{x}{x+c}$

سوال 1.49: $u=\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy'=x-y$ کو حل کریں۔

جواب: $xy-x^2=c$

ابتدائی قیمت سوال 1.50 تا سوال 1.56 کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.50:

$$xy'+y=0, \quad y(2)=8$$

جواب: $y=\frac{16}{x}$

سوال 1.51:

$$y'=1+9y^2, \quad y(1)=0$$

جواب: $y=\frac{1}{3}\tan[3(x-1)]$

سوال 1.52:

$$y'\cos^2 x=\sin^2 y, \quad y(0)=\frac{\pi}{4}$$

جواب: $\tan y=\frac{1}{1-\tan x}$

سوال 1.53:

$$y'=-4xy, \quad y(0)=5$$

جواب: $y=5e^{-2x^2}$

سوال 1.54:

$$y' = -\frac{2x}{y}, \quad y(1) = 2$$

جواب: $2x^2 + y^2 = 6$

سوال 1.55:

$$y' = (x + y - 4)^2, \quad y(0) = 5$$

جواب: $x + y - 4 = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

سوال 1.56:

$$xy' = y + 3x^4 \cos^2 \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0$$

جواب:اس میں $u = \frac{y}{x}$ پر کرنے سے $\tan \frac{y}{x} = x^3 - 1$ ملتا ہے۔

سوال 1.57: کسی بھی لمحے پر جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح، اس لمحے موجود جرثوموں کی تعداد کے راست تناسب ہے۔اگر ان کی تعداد دو گھنٹوں میں دگنی ہو جائے تب چار گھنٹوں بعد ان کی تعداد کتنی ہو گی؟ چوبیس گھنٹوں بعد کتنی ہو گی؟

جوابات: $y = y_0 e^{0.34657t}$ ، $4y_0$ ، $4095y_0$

سوال 1.58: جرثوموں کی شرح پیدائش موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ان کی شرح اموات بھی موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟ تعداد بالمقابل وقت کیا ہو گا؟ تعداد کہاں متوازن صورت اختیار کرے گی؟

جوابات: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha y - \beta y$ جہاں α اور β بالترتیب پیدائشی اور امواتی راست تناسب کے مستقل ہیں۔ تعداد بالمقابل وقت کی مساوات $y = y_0 e^{(\alpha-\beta)t}$ ہے۔اگر $\alpha > \beta$ ہو تب تعداد بڑھتی رہے گی۔اس کے برعکس اگر $\alpha < \beta$ ہو تب تعداد گھٹتی رہے گی حتیٰ کہ جراثیم فنا ہو جائیں اور $\alpha = \beta$ کی صورت میں تعداد وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو گی۔

سوال 1.59: عموماً جاندار مرنے کے بعد مکمل طور پر خاک میں مل جاتے ہیں اور ان کا نشان تک نہیں رہتا البتہ بعض اوقات حالات یوں ہوتے ہیں کہ ان کا جسم پتھر میں بدل جاتا ہے۔اس پتھریلی جسم میں موجود $^{14}_{6}\mathrm{C}$ اور $^{12}_{6}\mathrm{C}$ ہم جا کے تناسب سے اس کی عمر کا تخمینہ لگایا جا سکتا ہے۔ دو ہزار سال پرانی پتھریلی مچھلی میں کاربن کا تناسب، ابتدائی تناسب کے کتنا گنا ہو گا؟

جواب: $69.5\,\%$

سوال 1.60: طبیعیات میں بار بردار[44] ذروں کو مسرع خطی[45] کے ذریعہ اسراع دی جاتی ہے۔تصور کریں کہ مسرع خطی میں $^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$ داخل ہوتا ہے جس کی رفتار مستقل اسراع کے ساتھ $1.2\,\mathrm{ms}$ دورانیے میں $10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے بڑھا کر $1.6 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کر دی جاتی ہے۔اسراع دریافت کریں۔اس دورانیے میں ذرہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

جوابات: $1.25 \times 10^7\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $10.2\,\mathrm{m}$

سوال 1.61: ایک ٹینکی میں 2000 لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں $150\,\mathrm{kg}$ نمک ملایا گیا ہے۔پانی کو مسلسل ہلانے سے کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ٹینکی میں 10 لٹر فی منٹ تازہ پانی شامل کیا جاتا ہے۔ٹینکی سے پانی کا اخراج بھی 10 لٹر فی منٹ ہے۔ایک گھنٹہ بعد ٹینکی میں کل کتنا نمک پایا جائے گا؟

جوابات: $y = 150e^{-\frac{t}{200}}$ ، $y = 111\,\mathrm{kg}$

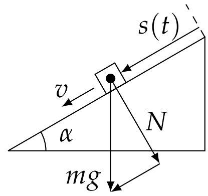
سوال 1.62: مریض کے زبان کے نیچے تھرمامیٹر رکھ کر اس کا درجہ حرارت ناپا جاتا ہے۔کمرے اور مریض کے درجہ حرارت بالترتیب $25\,^{\circ}\mathrm{C}$ اور $40\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہیں۔زبان کے نیچے رکھنے کے ایک منٹ بعد تھرمامیٹر کا پارہ $35\,^{\circ}\mathrm{C}$ تک پہنچتا ہے۔ تھرمامیٹر کتنی دیر میں اصل درجہ حرارت کے قریب (مثلاً $39.9\,^{\circ}\mathrm{C}$) پہنچ پائے گا؟

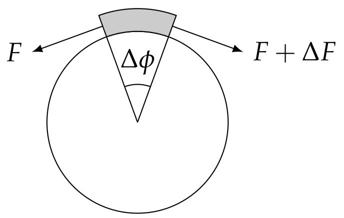
جواب: $T = 40 - 15e^{-1.204t}$ ، $t = 4.16\,\mathrm{min}$

سوال 1.63: سرطان[46] کی مہلک بیماری میرے خاندان کے کئی افراد کی جان لے چکی ہے۔سن 1960 میں اینا کین لائرڈ[47] سرطان کی رسولی کی افزائش کو ٹھیک طرح گامپرٹز تفاعل[48] سے ظاہر کرنے میں کامیاب ہوئے۔

---

[44] charged
[45] linear accelerator
[46] cancer
[47] Anna Kane Laird
[48] Benjamin Gompertz





شکل 1.17: سوال 1.65 اور سوال 1.66 کے اشکال۔

سرطانی رسولی میں جسم کا نظام تباہ ہو جاتا ہے۔یوں رسولی میں موجود خلیوں تک آکسیجن اور خوراک کا پہنچنا ممکن نہیں رہتا۔رسولی کے اندرونی خلیے آکسیجن اور خوراک کی کمی کی بنا مر جاتے ہیں۔ان حقائق کی نمونہ کشی درج ذیل گامپرٹز تفرقی مساوات کرتی ہے جہاں y رسولی کی کمیت ہے۔

$$y' = -Ay\ln y, \quad A > 0 \tag{1.28}$$

جواب: $\ln y = ce^{-At}$

سوال 1.64: دھوپ میں کپڑے کی نمی خشک ہونی کی شرح کپڑے میں موجود نمی کے راست تناسب ہوتی ہے۔اگر پہلے پندرہ منٹ میں نصف پانی خشک ہو جائے تب $99.9\,\%$ پانی کتنی دیر میں خشک ہو گا؟ ہم $99.9\,\%$ خشک کو مکمل خشک تصور کر سکتے ہیں۔

جواب: $y = y_0e^{-0.0462t}$ ، $49.8\,\text{min}$

سوال 1.65: رگڑ

دو سطحوں کو آپس میں رگڑنے سے قوت رگڑ پیدا ہوتی ہے جو اس حرکت کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔خشک سطحوں پر پیدا قوت $|F| = \mu|N|$ سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں N دونوں سطحوں پر عمودی قوت، μ **حرکی رگڑ کا مستقل**[49] اور F رگڑ سے پیدا قوت ہے۔

شکل 1.17-الف میں α زاویہ کی سطح پر m کمیت کا جسم دکھایا گیا ہے۔اس پر ثقلی قوت (وزن) mg عمل کرتا ہے۔اس قوت کو دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلا حصہ N ہے جو سطح کے عمودی ہے۔دوسرا حصہ

[49] coefficient of kinetic friction

سطح کے متوازی ہے جو جسم کو اسراع دیتا ہے۔ کمیت $10\,\mathrm{kg}$ ، ثقلی اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، رگڑ کا مستقل $\mu = 0.25$ اور زاویہ $\alpha = 30$ ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔ یہ جسم کتنی دیر میں کل $15\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرے گا؟

جواب: $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ، $v = 3.93t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $2.76\,\mathrm{s}$

سوال 1.66: شکل 1.17-ب میں گول جسم کے گرد لپیٹی گئی رسی کا چھوٹا حصہ دکھایا گیا ہے۔ تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ رسی کے چھوٹے حصے کے سروں پر قوت میں فرق زاویہ $\Delta\phi$ اور قوت F کے راست متناسب ہوتا ہے۔ رسی کو جسم کے گرد کتنی مرتبہ لپیٹنے سے ایک شخص 500 گنا زیادہ قوت کے گاڑی کو روک سکتا ہے؟

جوابات: $F = F_0 e^{\phi}$ ، $\phi = 6.21\,\mathrm{rad}$ یعنی 1.98 مرتبہ لپیٹنا ضروری ہے۔

سوال 1.67: کارتیسی محدد کے محور پر گول دائرے $x^2 + y^2 = r^2$ کا تفرقی مساوات y_1' حاصل کریں۔ اسی طرح محور سے گزرتے ہوئے سیدھے خط کا تفرقی مساوات y_2' حاصل کریں۔ دونوں تفرقی مساوات کا حاصل ضرب کیا ہو گا؟ اس حاصل ضرب سے آپ کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

جواب: $y_1' y_2' = -1$ ؛ آپس میں عمودی ہیں۔

سوال 1.68: آپ کو ایسے تفاعل سے ضرور واسطہ پڑیگا جس کا تحلیلی تکمل حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ ایسا ایک تفاعل e^{x^2} ہے۔ اس تفاعل کی **مکلارن تسلسل**[50] کے پہلے چار ارکان کا تکمل حاصل کریں۔

جواب: $\int e^{x^2} \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{36} + \cdots$

سوال 1.69: قانون ٹاری سلی
کروی ٹینکی کا رداس R ہے۔ اس کی تہہ میں چھوٹا سوراخ ہے جس کا رداس r ہے۔ پوری طرح بھری ہوئی ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی۔ اگر $R = 1\,\mathrm{m}$ اور $r = 1\,\mathrm{cm}$ ہو تب ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی؟

جواب: $0.6\pi r^2\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t = -\pi[R^2 + (h-R)^2]\,\mathrm{d}h$ ،
$t + c = -\frac{\sqrt{2gh}}{9gr^2}(30R^2 - 10hR + 3h^2)$ ، $t_{\text{خالی}} = \frac{44R^2\sqrt{gR}}{9gr^2}$ ،
دیے رداس کی ٹینکی $4.34\,\mathrm{h}$ یعنی چار گھنٹے اور بیس منٹ میں خالی ہو گی۔

[50] Maclaurin's series

1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل

ایسا تفاعل $u(x,y)$ جس کے **استمراری**[51] (یعنی بلا جوڑ) جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کا (مکمل) تفرق درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{1.29}$$

یوں اگر $u(x,y) = c$ ہو تب $\mathrm{d}u = 0$ ہو گا۔

مثال کے طور پر $u = xy + 2(x-y) = 7$ کا تفرق

$$\mathrm{d}u = (y+2)\,\mathrm{d}x + (x-2)\,\mathrm{d}y = 0$$

ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y+2}{x-2}$$

الٹ چلتے ہوئے اس تفرقی مساوات کو ہم حل کر سکتے ہیں۔ اس مثال سے ایک ترکیب جنم دیتی ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔

درجہ اول سادہ تفرقی مساوات $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ یعنی

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.30}$$

کو اس صورت **قطعی تفرقی مساوات**[52] کہتے ہیں جب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو جہاں $u(x,y)$ کوئی تفاعل ہے۔

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.31}$$

یوں مساوات 1.30 کو

$$\mathrm{d}u = 0 \tag{1.32}$$

---

[51] continuous partial differential

[52] exact differential equation

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے تفرقی مساوات کا **عمومی خفی حل**[53]

$$u(x,y)=c \tag{1.33}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.30 اور مساوات 1.31 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 1.30 تب قطعی تفرقی مساوات ہو گا جب ایسا $u(x,y)$ پایا جاتا ہو کہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو۔

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N \tag{1.35}$$

ان سے ہم تفرقی مساوات کے قطعی ہونے کا شرط اخذ کرتے ہیں۔

سطح xy پر ایسا خطہ جس کا سرحد بند منحنی ہو اور یہ منحنی اپنے آپ کو نہ کاٹتا ہو پر تصور کریں کہ M اور N ایسے **استمراری**[54] (یعنی بلا جوڑ) تفاعل ہیں جن کے درجہ اول تفرق بھی اس خطے پر بے جوڑ ہیں۔تب مساوات 1.34 کے تفرق درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial N}{\partial x}&=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\end{aligned}$$

استمراری شرط کی بنا $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ برابر ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\quad \text{شرط قطعیت} \tag{1.36}$$

مساوات 1.30 کا قطعی تفرقی مساوات ہونے کے لئے مساوات 1.36 پر پورا اترنا **لازمی**[55] اور **معقول**[56] شرط[57] ہے۔

---

[53] implicit solution
[54] continuous
[55] necessary condition
[56] sufficient condition
[57] اس حقیقت کو حصہ 11.12 میں ثابت کیا جائے گا۔

قطعی تفرقی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 1.34 کا x تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u = \int M \, \mathrm{d}x + k(y) \tag{1.37}$$

جہاں تکمل کا مستقل از خود y کا تفاعل ہو سکتا ہے۔تکمل کا مستقل $k(y)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.37 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial y}$ لیتے ہوئے مساوات 1.35 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل کرتے ہیں جس کا y تکمل لینے سے k حاصل ہو گا۔(مثال 1.14 دیکھیں۔)

اسی طرح مساوات 1.35 کا y تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u = \int N \, \mathrm{d}y + m(x) \tag{1.38}$$

جہاں تکمل کا مستقل از خود x کا تفاعل ہو سکتا ہے۔تکمل کا مستقل $m(x)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.38 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial x}$ لیتے ہوئے مساوات 1.34 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} =$ حاصل کرتے ہیں جس کا x تکمل لینے سے m حاصل ہو گا۔

مثال 1.14: قطعی تفرقی مساوات
درج ذیل کو حل کریں۔

$$(1 + 2xy^3) \, \mathrm{d}x + (2y + 3x^2y^2) \, \mathrm{d}y = 0 \tag{1.39}$$

حل: پہلے ثابت کرتے ہیں کہ یہ مساوات **قطعی** ہے۔یہ مساوات 1.30 کی طرح ہے جہاں

$$\begin{aligned} M &= 1 + 2xy^3 \\ N &= 2y + 3x^2y^2 \end{aligned}$$

ہیں۔ $\frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\frac{\partial N}{\partial y}$ لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 6xy^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 6xy^2 \end{aligned}$$

جو مساوات 1.36 پر پورا اترتے ہیں لہٰذا دی گئی مساوات قطعی تفرقی مساوات ہے۔آئیں اب اس کو حل کرتے ہیں۔

مساوات 1.37 کو استعمال کرتے ہیں۔

$$u=\int(1+2xy^3)\,\mathrm{d}x+k(y)=x+x^2y^3+k(y) \tag{1.40}$$

اس کا y جزوی تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.35 کا استعمال کرتے

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}=N=2y+3x^2y^2$$

ہوئے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}=2y$$

اس کا y تکمل لیتے ہوئے k حاصل کرتے ہیں

$$k=\int 2y\,\mathrm{d}y=y^2+c_1 \tag{1.41}$$

جہاں c_1 تکمل کا مستقل ہے۔چونکہ k صرف y پر منحصر ہے لہٰذا c_1 مستقل x پر منحصر نہیں ہو سکتا۔یوں مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 سے قطعی تفرقی مساوات کا حاصل ہوتا ہے۔

$$u(x,y)=x+x^2y^3+y^2+c_1=0 \tag{1.42}$$

آخر میں مساوات 1.42 کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.39 حاصل کر کے حاصل حل کی درستگی ثابت کرتے ہیں۔

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y=(1+2xy^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y^2+2y)\,\mathrm{d}y$$

□

مثال 1.15: مخصوص حل
$N=2y+3x^2y^2$ لیتے ہوئے مساوات 1.39 کو حل کریں جہاں $x=1$ پر $y=2$ ہے۔

حل: $\frac{\partial u}{\partial y}=N=2y+3x^2y^2$ کا y تکمل

$$u=\int(2y+3x^2y^2)\,\mathrm{d}y+m(x)=y^2+x^2y^3+m(x) \tag{1.43}$$

لے کر اس سے $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$$

جو M کے برابر ہو گا

$$2xy^3+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}=M=1+2xy^3$$

جس سے

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}=1, \quad m=x+c_2$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو مساوات 1.43 میں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا حل ملتا ہے۔

$$u=y^2+x^2y^3+x+c_2=0$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$2^2+(1^2)(2^3)+1+c_2=0, \quad c=-13$$

ملتا ہے جس سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y^2+x^2y^3+x-13=0$$

□

مثال 1.16: غیر قطعی مساوات

مساوات $-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=0$ میں $M=-y$ اور $N=x$ ہیں لہٰذا $\frac{\partial M}{\partial y}=-1$ لیکن $\frac{\partial N}{\partial x}=1$ ہے۔یوں دیا گیا مساوات **غیر قطعی**[58] ہے۔یوں قطعی مساوات کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے۔آئیں قطعی مساوات کی ترکیب استعمال کرنے کی کوشش کریں۔مساوات 1.37 سے

$$u=\int -y\,\mathrm{d}x+k(y)=-xy+k(y)$$

ملتا ہے جس کا y تفرق $\frac{\partial u}{\partial y}=-x+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ ہے جسے N یعنی x کے برابر پر کرنے سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}=2x$ ملتا ہے جس کا تکمل $k=2xy+c$ ہے۔اب مستقل k صرف y پر منحصر ہو سکتا ہے جبکہ حاصل k اس شرط

[58] non exact

پر پورا نہیں اترتا لہٰذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔یوں قطعی تفرقی مساوات کی ترکیب اس مثال میں دیے تفرقی مساوات کے حل کے لئے نا قابل استعمال ہے۔آپ N سے شروع کرتے ہوئے حل کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔آپ اس راستے سے بھی حل حاصل نہیں کر پائیں گے۔ $\square$

تخفیف بذریعہ جزو تکمل

مثال 1.16 میں تفاعل $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ غیر قطعی تھا البتہ اس کو $\frac{1}{x^2}$ سے ضرب دینے سے $-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = 0$ حاصل ہوتا ہے جو قطعی مساوات ہے۔آپ مساوات 1.36 استعمال کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ واقعی قطعی مساوات ہے۔حاصل قطعی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔

$$-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c \tag{1.44}$$

اس ترکیب کو عمومی بناتے ہوئے ہم کہتے ہیں کہ غیر قطعی مساوات مثلاً

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.45}$$

کو ایک مخصوص تفاعل F سے ضرب دینے سے قطعی مساوات

$$FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.46}$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔تفاعل F **جزو تکمل**[59] کہلاتا ہے اور یہ عموماً x اور y پر منحصر ہو گا۔حاصل قطعی مساوات کو حل کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

مثال 1.17: جزو تکمل
مساوات 1.44 میں جزو تکمل $\frac{1}{x^2}$ تھا لہٰذا اس کا حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c$$

---

[59] integrating factor

مساوات $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ کے مزید جزو تکمل $\frac{1}{y^2}$ ، $\frac{1}{xy}$ اور $\frac{1}{x^2+y^2}$ ہیں جن سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{y^2} &= \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad \frac{x}{y} = c \\
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{xy} &= -\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right), \quad \ln\frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = x \\
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \mathrm{d}\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right), \quad \tan^{-1}\frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = c
\end{aligned}
$$

□

جزو تکمل کا حصول

مساوات $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0$ کی قطعیت کا شرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ مساوات 1.36 ہے۔مساوات $FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = 0$ کے لئے اس شرط کو درج ذیل لکھا جائے گا

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \tag{1.47}$$

جس کو زنجیری طریقہ تفرق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت تفرق کو ظاہر کرتی ہے (یعنی $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$)۔

$$F_yP + FP_y = F_xQ + FQ_x \tag{1.48}$$

یہ مساوات عموماً پیچیدہ ہو گا لہٰذا ہم اس پر مزید وقت ضائع نہیں کرتے۔ہم ایسے جزو تکمل تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو صرف x یا صرف y پر منحصر ہو۔صرف x پر منحصر جزو تکمل کی صورت میں $F = F(x)$ لکھا جائے گا اور $F_y = 0$ ہو گا جبکہ $F_x == F' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ ہو گا۔یوں مساوات 1.47 درج ذیل صورت اختیار کر لیگا

$$FP_y = F'Q + FQ_x \tag{1.49}$$

جسے FQ سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] \tag{1.50}$$

اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 1.1: اگر مساوات 1.45 سے مساوات 1.50 میں حاصل کردہ R صرف x پر منحصر ہو تب مساوات 1.45 کا جزو تکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.50 کا تکمل لے کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$F(x) = e^{\int R(x)\,\mathrm{d}x} \tag{1.51}$$

اسی طرح $F = F(y)$ کی صورت میں مساوات 1.50 کی جگہ درج ذیل ملتا ہے

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \tag{1.52}$$

جس سے درج بالا مسئلے کی جوڑی ملتی ہے۔

مسئلہ 1.2: اگر مساوات 1.45 سے مساوات 1.52 میں حاصل کردہ R صرف y پر منحصر ہو تب مساوات 1.45 کا جزو تکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.52 کا تکمل لے کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$F(y) = e^{\int R(y)\,\mathrm{d}y} \tag{1.53}$$

مثال 1.18: جزو تکمل

دیے مساوات کا جزو تکمل حاصل کرتے ہوئے اس کا عمومی حل حاصل کریں۔ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ سے مخصوص حل حاصل کریں۔

$$(e^{x+y} + ye^{y})\,\mathrm{d}x + (xe^{y} - 1)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.54}$$

حل: پہلا قدم: غیر قطعیت ثابت کرتے ہیں۔مساوات 1.36 پر درج ذیل پورا نہیں اترتا لٰہذا غیر قطعیت ثابت ہوتی ہے۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^{y} + ye^{y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

دوسرا قدم: جزو تکمل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 1.50 سے حاصل R کی قیمت x اور y دونوں پر منحصر ہے

$$R = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = \frac{1}{xe^{y} - 1}(e^{x+y} + e^{y} + ye^{y} - e^{y})$$

لٰہذا مسئلہ 1.1 قابل استعمال نہیں ہے۔آئیں مسئلہ 1.2 استعمال کر کے دیکھیں۔ R کو مساوات 1.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] = \frac{1}{e^{x+y} + ye^{y}}(e^{y} - e^{x+y} - e^{-y} - ye^{y}) = -1$$

مساوات 1.53 سے جزو تکمل $F(y) = e^{-y}$ حاصل ہوتا ہے۔مساوات 1.54 کو F سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل قطعی مساوات ملتی ہے۔اس کو قطعیت کے لئے پرکھ کر دیکھیں۔آپ کو شرط قطعیت کے دونوں اطراف اکائی حاصل ہو گا۔

$$(e^{x} + y)\,\mathrm{d}x + (x - e^{-y})\,\mathrm{d}y = 0$$

مساوات 1.37 استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں۔

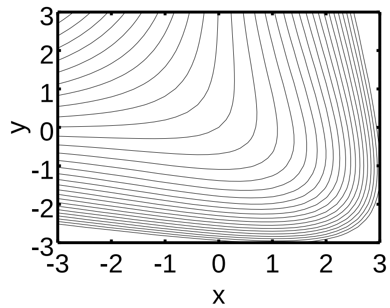
$$u = \int (e^{x} + y)\,\mathrm{d}x + k(y) = e^{x} + xy + k(y)$$

اس کا y تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.35 کے استعمال سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل کرتے ہیں جس کا تکمل k ہو گا۔

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = x - e^{-y}, \quad \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = N = -e^{-y}, \quad k = e^{-y} + c_1$$

یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$$u(x, y) = e^{x} + xy + e^{-y} = c \tag{1.55}$$



شکل 1.18: مثال 1.18

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے مستقل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$e^0 + (0)(-2) + e^{-(-2)} = c, \quad c = e^2$$

یوں مخصوص حل $e^x + xy + e^{-y} = e^2 = 7.389$ ہے۔

چھوتا قدم: عمومی حل اور مخصوص حل کو واپس دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔
□

سوالات

سوال 1.70 تا سوال 1.81 کو قطعیت کے لئے پرکھیں اور حل کریں۔ غیر قطعی صورت میں دیا گیا جزو تکمل استعمال کریں یا اس کو بھی حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہو، وہاں مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.70:

$$2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $y = \frac{c}{x^2}$

سوال 1.71:

$$x^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $2x^3 + 3y^2 = c$

سوال 1.72:

$$[\sin x + (x + y^3)\cos x]\,\mathrm{d}x + 3y^2 \sin x\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $\sin x(x + y^3)$

سوال 1.73:

$$(y+1)\,\mathrm{d}x + (x+1)\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $x + xy + y = c$

سوال 1.74:

$$(e^y + ye^x + y)\,\mathrm{d}x + (xe^y + e^x + x)\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $xe^y + xy + ye^x$

سوال 1.75:

$$\frac{y^2 + 4x}{x}\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0$$

جواب: $F = x$ ، $u = (2x + y^2)x = c$

سوال 1.76:

$$ye^x(2x+1+2y^2)\,\mathrm{d}x+e^x(x+2y)\,\mathrm{d}y=0$$

جواب: $F=e^x$ ، $ye^{2x}(x+y)=c$

سوال 1.77:

$$(2y^2+2xy+y)\,\mathrm{d}x+(2y+x)\,\mathrm{d}y=0$$

جواب: $F=e^{2x}$ ، $e^{2x}(y^2+xy)=c$

سوال 1.78:

$$y\,\mathrm{d}x+(2xy-e^{-2y})\,\mathrm{d}x=0,\quad y(1)=1$$

جواب: $F=\frac{e^{2y}}{y}$ ، $xe^{2y}-\ln y=e^2$

سوال 1.79:

$$3(y+1)\,\mathrm{d}x=2x\,\mathrm{d}y,\quad y(1)=3,\quad F=\frac{y+1}{x^4}$$

جواب: $y+1=4x^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.80:

$$y\,\mathrm{d}x+[y+\tan(x+y)]\,\mathrm{d}y=0,\quad y(0)=\tfrac{\pi}{2},\quad F=\cos(x+y)$$

جواب: $y\sin(x+y)=\frac{\pi}{2}$

سوال 1.81:

$$(a+1)y\,\mathrm{d}x+(b+1)x\,\mathrm{d}y=0,\quad y(1)=1,\quad F=x^ay^b$$

جواب: $x^{a+1}y^{b+1} = 0$

سوال 1.82: جزو تکمل کو مزید بہتر سمجھنے کی خاطر کسی بھی تفاعل مثلاً $u = e^{2x}(y^2 + xy) = c$ کے مکمل تفرق کو $M\,\mathrm{d}+N\,\mathrm{d}y = 0$ صورت میں لکھیں یعنی $e^{2x}(2y^2 + 2xy + y)\,\mathrm{d}x + e^{2x}(2y + x)\,\mathrm{d}y = 0$ جو قطعی مساوات ہے۔تفرقی مساوات کو e^{2x} سے تقسیم کرنے سے غیر قطعی مساوات $(2y^2 + 2xy + y)\,\mathrm{d}x + (2y + x)\,\mathrm{d}y = 0$ ملتا ہے۔۔اس غیر قطعی مساوات کو e^{2x} سے ضرب دیتے ہوئے قطعی بنایا جا سکتا ہے لہٰذا e^{2x} اس غیر قطعی مساوات کا جزو تکمل ہے۔

1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔مساوات برنولی

ایسے سادہ درجہ اول تفرقی مساوات جنہیں درج ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہو خطی[60] کہلاتے ہیں

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{1.56}$$

جبکہ ایسے مساوات جنہیں الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر خطی کہلاتے ہیں۔

خطی مساوات 1.56 کی بنیادی خاصیت یہ ہے کہ اس میں تابع متغیرہ y اور تابع متغیرہ کا تفرق y' دونوں خطی ہیں جبکہ $p(x)$ اور $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔اگر غیر تابع متغیرہ وقت ہو تب x کی جگہ t لکھا جاتا ہے۔

مساوات 1.56 خطی مساوات کی معیاری صورت ہے جس کے پہلے رکن y' کا جزو ضربی اکائی ہے۔ایسی مساوات جس میں y' کی بجائے $f(x)y'$ پایا جاتا ہو کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے، اس کی معیاری صورت حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں خطی مساوات $(x + \sqrt{x})y' + y\sec x = e^x$ کو $(x + \sqrt{x})$ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے معیاری صورت $y' + \frac{\sec x}{x+\sqrt{x}}y = \frac{e^x}{x+\sqrt{x}}$ میں لکھا جا سکتا ہے۔

---

[60] linear

دائیں ہاتھ $r(x)$ **قوت**[61] کو ظاہر کر سکتی ہے جبکہ مساوات کا حل $y(x)$ **ہٹاو**[62] ہو سکتا ہے۔اسی طرح $r(x)$ **برقی دباو**[63] ہو سکتا ہے جبکہ $y(x)$ **برقی رو**[64] ہو سکتی ہے۔ انجینئری میں $r(x)$ کو عموماً **درآیدہ**[65] یا **جبری تفاعل**[66] کہتے ہیں جبکہ $y(x)$ کو **ماحصل**[67] یا **رد عمل**[68] کہتے ہیں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم مساوات 1.56 کو خطہ $a<x<b$ میں حل کرنا چاہتے ہیں۔اس خطے کو J کہا جائے گا۔پہلے اس مساوات کی سادہ صورت حل کرتے ہیں جس میں J پر تمام x کے لئے $r(x)$ صفر کے برابر ہو۔ (اس کو بعض اوقات $r(x)\equiv 0$ لکھا جاتا ہے۔) ایسی صورت میں مساوات 1.56 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$y'+p(x)y=0 \tag{1.57}$$

جس کو **متجانس**[69] مساوات کہتے ہیں۔متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\,\mathrm{d}x,\quad \ln|y|=-\int p(x)\,\mathrm{d}x+c_1$$

دونوں اطراف کا قوت نمائی لیتے ہوئے متجانس خطی مساوات 1.57 کا حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y(x)=ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},\quad (c=\mp e^{c_1} \quad \text{جب} \quad y\lessgtr 0) \tag{1.58}$$

یہاں $c=0$ بھی چنا جا سکتا ہے جو **غیر اہم حل**[70] (**یعنی صفر حل**) $y(x)=0$ دیتا ہے۔

---

force[61]
displacement[62]
voltage[63]
current[64]
input[65]
forcing function[66]
output[67]
response[68]
homogeneous[69]
trivial solution[70]

غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب مساوات 1.56 کو اس صورت میں حل کرتے ہیں جب $r(x) \not\equiv 0$ ہو یعنی J پر کہیں کہیں یا پورے خطے پر $r(x)$ غیر صفر ہو۔ایسی صورت میں مساوات 1.56 غیر متجانس[71] کہلاتا ہے۔غیر متجانس مساوات کی خوشگوار خاصیت یہ ہے کہ اس کا جزو تکمل $F(x)$ صرف x پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس کو مسئلہ 1.1 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔جزو تکمل کو حاصل کرتے ہیں۔غیر قطعی مساوات 1.56 کو ترتیب دے کر F سے ضرب دیتے ہوئے قطعی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$(py - r)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0, \quad F(py - r)\,\mathrm{d}x + F\,\mathrm{d}y = 0$$

جس سے مساوات 1.36 کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(py - r)] = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{یعنی} \quad Fp = \frac{\partial F}{\partial x}$$

متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے تکمل لیتے ہوئے F حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = p\,\mathrm{d}x, \quad \ln|F| = h(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{لہٰذا} \quad F = e^h$$

مساوات 1.56 کو جزو تکمل F سے ضرب دیتے اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = p$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$e^h y' + e^h h' y = e^h r \quad \text{یعنی} \quad \left(e^h y\right)' = e^h r$$

جس کا تکمل لیتے ہیں۔

$$e^h y = \int e^h r\,\mathrm{d}x + c$$

دونوں اطراف کو e^h سے تقسیم کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات 1.56 کا حل ملتا ہے۔

$$y = e^{-h}\left(\int e^h r\,\mathrm{d}x + c\right), \quad h = \int p(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.59}$$

---

[71] heterogeneous

یوں مساوات 1.56 کا حل درج بالا تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو نسبتاً آسان ثابت ہوتا ہے۔اگر درج بالا تکمل بھی مشکل ثابت ہو تب تفرقی مساوات کا حل اعدادی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہاں بتلاتا چلوں (سوال 1.83 دیکھیں) کہ h کے حصول میں تکمل کا مستقل کوئی کردار ادا نہیں کرتا للہذا اسے صفر تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.59 کا تکمل درآیدہ $r(x)$ پر منحصر ہے جبکہ ابتدائی معلومات تکمل کا مستقل c تعین کرتی ہیں۔اس مساوات کو درج ذیل لکھتے ہوئے

$$y = e^{-h} \int e^h r \, \mathrm{d}x + ce^{-h} \tag{1.60}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ابتدائی معلومات سے پیدا رد عمل} + \text{درآیدہ سے پیدا رد عمل} = \text{کل ماحصل} \tag{1.61}$$

مثال 1.19: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' + y \cot x = 2x \operatorname{cosec} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حل: یہاں $p = \cot x$ اور $r = \operatorname{cosec} x$ ہیں۔

$$h(x) = \int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x|$$

یوں مساوات 1.59 میں

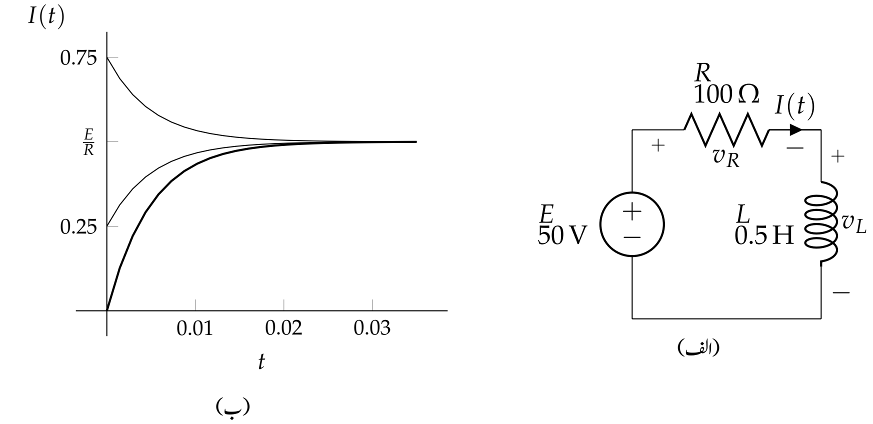
$$e^h = \sin x, \quad e^{-h} = \operatorname{cosec} x, \quad e^h r = (\sin x)(2x \operatorname{cosec} x) = 2x$$

ہیں للہذا عمومی حل

$$y = \operatorname{cosec} x \left(\int 2x \, \mathrm{d}x + c \right) = \operatorname{cosec} x (x^2 + c)$$

ہو گا۔ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = -\frac{\pi^2}{4}$ ملتا ہے للہذا مخصوص حل درج ذیل ہے

$$y = \operatorname{cosec} x \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right)$$



شکل 1.19: مثال 1.20 کا سلسلہ وار برقی دور۔

جس میں $x^2 \operatorname{cosec} x$ درآیدہ کا پیدا کردہ رد عمل ہے جبکہ $-\frac{\pi^2}{4} \operatorname{cosec} x$ ابتدائی معلومات کا پیدا کردہ رد عمل ہے۔ □

مثال 1.20: برقی دور

شکل 1.19 میں **مزاحمت**[72] R اور **امالہ**[73] L سلسلہ وار جڑے ہیں۔اس دور کو **سلسلہ وار**[74] RL دور کہتے ہیں۔لمحہ $t = 0$ پر **برقی دباو**[75] E برقی دور پر لاگو کیا جاتا ہے جو دور میں **برقی رو**[76] $I(t)$ کو جنم دیتا ہے۔ابتدائی رو صفر $I(0) = 0$ کے برابر ہے۔

طبعی معلومات: مزاحمت کی اکائی **اوہم**[77] Ω اور امالہ کی اکائی **ہینری**[78] H ہے۔**قانون اوہم**[79] کے تحت مزاحمت R میں رو I اور دباو v_R کا تعلق $v_R = IR$ ہے۔اسی طرح امالہ میں رو اور دباو v_L کا تعلق $v_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ ہے۔**کرخوف قانون دباو**[80] کے تحت ان برقی دباو کا مجموعہ درآیدہ دباو E کے برابر ہو گا۔

---

resistance[72]
inductor[73]
series circuit[74]
electric voltage[75]
electric current[76]
Ohm[77]
Henry[78]
Ohm's law[79]
Kirchoff's voltage law[80]

حل: یہاں غیر تابع متغیرہ وقت t ہے جبکہ تابع متغیرہ رو $I(t)$ ہے۔ کرخوف کے قانون کے تحت

$$v_L + v_R = E, \quad LI' + RI = E, \quad I' + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

لکھا جائے گا جہاں آخری قدم پر L سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے۔اس کو مساوات 1.59 کی مدد سے حل کرتے ہیں جہاں x کی جگہ t اور y کی جگہ I استعمال ہو گا۔یہاں $p = \frac{R}{L}$ اور $r = \frac{E}{L}$ ہیں لہٰذا $h = \frac{R}{L}t$ ہو گا اور عمومی حل

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{E}{L}\,\mathrm{d}x + c\right)$$

لکھا جائے گا۔تکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} + c\right) = \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t} \tag{1.62}$$

شکل 1.19-الف میں پرزوں کی قیمتیں دی گئی ہیں جن سے $\frac{E}{R} = \frac{50}{100} = 0.5$ اور $\frac{R}{L} = \frac{100}{0.5} = 200$ ملتا ہے لہٰذا عمومی حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = 0.5 + ce^{-200t} \tag{1.63}$$

مساوات 1.62 میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات میں $ce^{-\frac{R}{L}t}$ جزو $t \to \infty$ پر صفر کے برابر ہو گا لہٰذا کافی دیر بعد رو پہلے جزو $\frac{E}{R}$ کے برابر ہو گی جسے رو کی **برقرار حال**[81] قیمت کہتے ہیں۔یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کافی دیر بعد رو کی قیمت کا دارومدار ابتدائی معلومات پر منحصر نہیں ہے۔رو کتنی جلدی برقرار حال قیمت اختیار کرتی ہے، اس کا دارومدار $\frac{R}{L}$ کی قیمت پر ہے۔

مساوات 1.62 میں ابتدائی معلومات $I(0) = 0$ پر کرتے $0 = 0.5 + ce^0$ ہوئے $c = -0.5$ ملتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.19-ب میں موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔شکل میں ابتدائی قیمت $I(0) = 0.25$ اور $I(0) = 0.75$ سے حاصل مخصوص حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

$$I(t) = 0.5(1 - e^{-200t}) \tag{1.64}$$

□

[81] steady state

مثال 1.21: جسم میں ہارمونز کی مقدار

جسم میں موجود **غدود**[82] یعنی گلٹی، خون میں مختلف مرکبات (**ہارمونز**)[83] خارج کرتے ہوئے مختلف نظام کو قابو کرتے ہیں۔تصور کریں کہ خون سے ایک مخصوص ہارمون مسلسل ہٹایا جاتا ہے۔ہٹانے کی شرح اس لمحے موجود ہارمون کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ساتھ ہی ساتھ تصور کریں کہ روزانہ غدود اس ہارمون کو خون میں ایک مخصوص انداز سے خارج کرتی ہے۔خون میں موجود ہارمون کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ صبح چھ بجے خون میں ہارمون کی مقدار y_0 لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔

حل:پہلا قدم: نمونہ کشی: چوبیس گھنٹوں میں خارج ہونے کے عمل کو $a+b\sin(\frac{2\pi t}{24})$ سے ظاہر کرتے ہیں۔چونکہ خون میں ہارمون خارج ہونے سے خون میں ہارمون کی مقدار بڑھتی ہے لہٰذا $a \ge b$ ہو گا۔یوں خارج کردہ ہارمون کی مقدار مثبت ہو گی۔کسی بھی لمحے خون میں ہارمون کی مقدار کی تبدیلی کی شرح، اس لمحے خون میں ہارمون کے داخل ہونے کی مقدار اور اس کی ہٹائی جانے والی مقدار میں فرق کے برابر ہو گا۔یوں مسئلے کا تفرقی مساوات درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = a + b\sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right) - ky(t) \quad \text{یعنی} \quad y' - ky = a + b\sin\omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{24} \tag{1.65}$$

دوسرا قدم: عمومی حل: یہاں $p = k$ ہے لہٰذا $h = \int k\,\mathrm{d}t = kt$ ہو گا۔اسی طرح $r = a + b\sin\omega t$ ہے لہٰذا مساوات 1.59 سے عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو **تکمل بالحصص**[84] حل کیا گیا ہے

$$\begin{aligned}
y &= e^{-kt}\int e^{kt}(a + b\sin\omega t)\,\mathrm{d}t + ce^{-kt}\\
&= e-kte^{kt}\left[\frac{a}{k} + \frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t + \omega\sin\omega t)\right] + ce^{-kt}\\
&= \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + ce^{-kt}
\end{aligned}$$

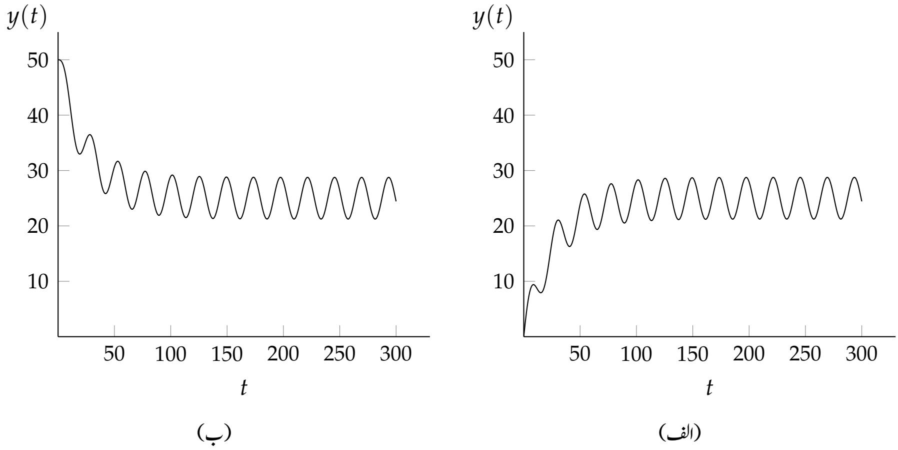
عمومی حل کا آخری جزو وقت بڑھنے سے آخر کار صفر ہو جاتا ہے۔یوں **برقرار حل**[85] بقایا اجزاء پر مشتمل ہے۔

آخر قدم: مخصوص حل: صبح چھ بجے کو لمحہ $t = 0$ تصور کرتے ہوئے ابتدائی معلومات کو $y(0) = y_0$ لکھا جا سکتا ہے۔ان قیمتوں کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$y_0 = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos 0 + \omega\sin 0) + ce^0, \quad \text{یعنی} \quad c = y_0 - \frac{a}{k} - \frac{bk}{k^2+\omega^2}$$

---

gland[82]
hormones[83]
integration by parts[84]
steady state response[85]



شکل 1.20: مثال 1.21: خون میں ہارمون کی مقدار بالمقابل وقت۔

اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔ مخصوص حل کو $a = 1$ ، $b = 1$ ، $k = 0.04$ اور $y_0 = 0$ لیتے ہوئے جسے شکل 1.20 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y_0 = 50$ لیا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خون میں ہارمون کی مقدار بہت جلد ایک مخصوص اوسط قیمت پر پہنچ پاتی ہے۔

$$y = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + (y_0 - \frac{a}{k} - \frac{b k}{k^2+\omega^2})e^{-kt}$$

□

حصول خطی مساوات بذریعہ تخفیف۔ برنولی مساوات

ایسے بہت سارے نظام ہیں جن کے غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کو خطی بنایا جا سکتا ہے۔ان میں **برنولی مساوات**[86]

$$y' + p(x)y = g(x)y^a, \quad \text{حقیقی عدد ہے } a \tag{1.66}$$

Bernoulli equation[86]

انتہائی اہم[87] ہے۔برنولی مساوات $a = 0$ اور $a = 1$ کی صورت میں خطی ہے۔اس کے علاوہ یہ غیر خطی ہے۔آئیں اس کو تبدیل کرتے ہوئے خطی مساوات حاصل کریں۔ہم

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}$$

کا تفرق لیتے ہوئے اس میں مساوات 1.66 سے y' پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u' &= (1-a)y^{-a}y' \\ &= (1-a)y^{-a}(gy^a - py) \\ &= (1-a)g - (1-a)py^{1-a} \\ &= (1-a)g - (1-a)pu \end{aligned}$$

یوں خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u + (1-a)u' = (1-a)g \tag{1.67}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 1.22: ورہلسٹ مساوات برائے نمو آبادی درج ذیل برنولی مساوات کو ورہلسٹ[88] مساوات کہتے ہیں جو نمو آبادی[89] کی تفرقی مساوات ہے۔اس کو حل کریں۔ (سوال 1.109 کو بھی دیکھیں۔)

$$y' = ay - by^2 \tag{1.68}$$

حل:اس کو مساوات 1.66 کی صورت $y' - ay = -by^2$ میں لکھ کر $a = 2$ ملتا ہے۔یوں ہم $u = y^{1-a} = y^{-1}$ کے تفرق میں مساوات 1.68 سے y' پر کرتے ہیں

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(ay - by^2) = -ay^{-1} + b = -ua + b$$

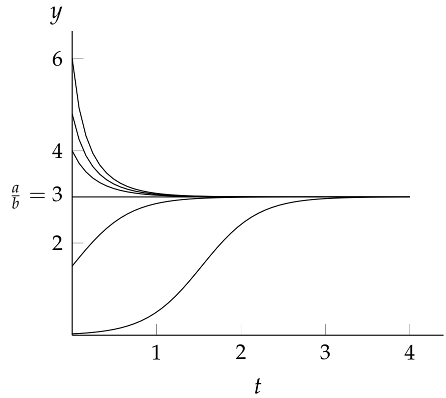
جس سے خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u' + au = b$$

[87] یعقوب برنولی (1654-1705): سوئزرلینڈ کے برنولی خاندان نے دنیا کو کئی اہم ریاضی داں دیے۔یعقوب برنولی ان میں سر فہرست ہے۔انہوں نے علم الامکانیات میں بہت کام کیا۔قوت نمائی کا مستقل e بھی انہوں نے دریافت کیا۔

[88] Pierre Francois Verhulst

[89] population growth



شکل 1.21: مثال 1.22: نمو آبادی کا خط۔

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.59 سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$u=\frac{b}{a}+ce^{-at}$$

چونکہ $u=y^{-1}$ ہے لہٰذا اس سے درج ذیل ملتا ہے جس کو شکل 1.21 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y=\frac{1}{u}=\frac{1}{\frac{b}{a}+ce^{-at}} \tag{1.69}$$

مساوات 1.68 کو دیکھ کر $y(t)=0$ حل بھی لکھا جا سکتا ہے۔ □

مثال 1.23: مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ

مساوات 1.59 کو ایک دلچسپ ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے جسے **مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ**[90] کہتے ہیں۔ متجانس مساوات $y'+p(x)y=0$ کا حل $y_1=ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ مساوات 1.58 دیتا ہے جس کو $y_1=ce^{-h}$ لکھتے ہیں۔ تصور کریں کہ غیر متجانس مساوات $y'+p(x)y=e(x)$ کا حل $y_2=uy_1$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $y_2'=u'y_1+uy_1'$ ہو گا۔ غیر متجانس مساوات میں y_2 اور y_2' پر کرتے ہیں۔

$$u'y_1+uy_1'+puy_1=r,\quad u'y_1+u(y_1'+py_1)=r,\quad u'y_1=r$$

---

[90] variation of parameter

چونکہ y_1 متجانس مساوات کا حل ہے لٰہذا آخری قدم پر $y' + py = 0$ پر کرتے ہوئے $u'y_1 = r$ حاصل کیا گیا ہے۔اس سے u بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہوئے y_2 لکھتے ہیں جو مساوات 1.59 ہے۔

$$u = \int \frac{r}{y_1}\,\mathrm{d}x, \quad u = \int re^h\,\mathrm{d}x + c, \quad \text{لٰہذا} \quad y_2 = uy_1 = e^{-h}\left[\int re^h\,\mathrm{d}x + c\right]$$

□

نمو آبادی

ورہلسٹ مساوات پودوں، جانوروں اور انسانی آبادی کی نمو کو ظاہر کرتی ہے۔اس مساوات میں $b = 0$ پر کرنے سے مالتھس مساوات 1.8 ملتی ہے جو آبادی کی بے روک نمو دیتی ہے۔ورہلسٹ مساوات میں جزو $-by^2$ آبادی بے قابو بڑھنے سے روکتی ہے۔ورہلسٹ مساوات کو $y' = ay(1 - \frac{b}{a}y)$ لکھ کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{b}{a}y < 1$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل بڑھے گی جب تک بڑھے گی جبکہ $\frac{b}{a}y < 1$ ہو، $\frac{b}{a}y > 1$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل گھٹے گی جب تک $\frac{b}{a}y < 1$ ہو گا۔دونوں صورتوں میں عین $\frac{b}{a}y = 1$ یعنی $y = \frac{a}{b}$ پر آبادی میں تبدیلی رک جائے گی۔شکل 1.21 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

ورہلسٹ نمو آبادی کی مساوات میں غیر تابع متغیرہ t صریحاً نہیں پایا جاتا لٰہذا یہ **خود مختار مساوات** ہے۔خود مختار مساوات

$$y' = f(y) \tag{1.70}$$

کے مستقل حل پائے جاتے ہیں جنہیں **متوازن حل**[91] یا **متوازن نقطے**[92] کہا جاتا ہے۔خود مختار مساوات میں تفاعل $f(y)$ کے صفر (f(y)=0) پر $y' = 0$ ہو گا جس کا حل $y = c$ ہے جہاں c تکمل کا مستقل ہے۔تفاعل کے صفر کو مساوات 1.70 کے **فاصل نقطے**[93] کہتے ہیں۔مساوات 1.68 کے فاصل نقطے $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔یوں اس مساوات کے مستقل حل $y = 0$ اور $y = \frac{a}{b}$ ہیں۔متوازن حل کو دو گروہ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں **مستحکم**[94] اور **غیر مستحکم**[95] حل کہتے ہیں۔ ان کو شکل 1.21 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے جہاں $y = \frac{a}{b} = 3$ مستحکم حل ہے جبکہ $y = 0$ غیر مستحکم حل ہیں۔

---

[91] equilibrium solution
[92] equilibrium points
[93] critical points
[94] stable
[95] unstable

سوالات

سوال 1.83: مساوات 1.59 میں h کے حصول میں تکمل کا مستقل صفر لیا جا سکتا ہے۔ایسا کیوں ممکن ہے؟

سوال 1.84: ثابت کریں:

$$e^{\ln x} = x, \quad e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, \quad e^{-\ln \sec x} = \cos x$$

سوال 1.85 تا سوال 1.95 کے عمومی حل تلاش کریں۔ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل حاصل کریں اور اس کا خط کھینچیں۔

سوال 1.85:

$$y' - y = 2$$

جواب: $y = ce^{x} - 2$

سوال 1.86:

$$y' - 4y = 2x$$

جواب: $y = ce^{4x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}$

سوال 1.87:

$$y' + 5y = e^{5x}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $y = \frac{e^{5x}}{10} + \frac{19}{10}e^{-5x}$

سوال 1.88:

$$y' + 6y = 4\sin 4x, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 6$$

جواب: $y=\frac{9}{13}\sin 4x-\frac{6}{13}\cos 4x+\frac{69}{13}e^{\frac{3\pi}{4}-6x}$

سوال 1.89:

$$y'+2xy=2x, \quad y(0)=3$$

جواب: $y=1+2e^{-x^2}$

سوال 1.90:

$$xy'=2y+x^3e^x$$

جواب: $y=x^2e^x+cx^2$

سوال 1.91:

$$y'+y\tan x=\sin x$$

جواب: $y=c\cos x-\cos x\ln\cos x$

سوال 1.92:

$$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$$

جواب: $y=xe^{-\sin x}+ce^{-\sin x}$

سوال 1.93:

$$\cos xy'+(4y-2)\sec x=0$$

جواب: $y=\frac{1}{2}+ce^{-4\tan x}$

سوال 1.94:

$$y'=(y-4)\tan x, \quad y(0)=3$$

جواب: $y = 4 - \sec x$

سوال 1.95:

$$xy' + 6y = 5x^3, \quad y(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{5}{9}x^3 + \frac{4}{9x^6}$

سوال 1.96 تا سوال 1.100 میں خطی سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات زیر بحث لائیں جائیں گے۔انہیں خصوصیات کی بنا انہیں غیر خطی سادہ تفرقی مساوات پر فوقیت حاصل ہے جو یہ خصوصیات نہیں رکھتے۔نمونہ کشی کرتے ہوئے انہیں وجوہات کی وجہ سے خطی مساوات حاصل کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ان سوالات میں آپ کو متجانس اور غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے خصوصیات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

سوال 1.96: متجانس مساوات 1.57 کے حل y_1 اور y_2 کا عمومی مجموعہ $ay_1 + by_2$ بھی اس کا حل ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ثابت کریں کہ غیر متجانس مساوات 1.56 یہ خصوصیات نہیں رکھتا۔

سوال 1.97: مساوات 1.57 کا غیر اہم حل (یعنی صفر حل) $y \equiv 0$ [یعنی x کی ہر قیمت کے لئے $y(x) = 0$ ہے] پایا جاتا ہے جبکہ غیر متجانس مساوات 1.56 [جس میں $r(x) \neq 0$ ہو] کا ایسا حل نہیں پایا جاتا۔

سوال 1.98: مساوات 1.57 کے حل y_1 اور مساوات 1.56 کے حل y_2 کا مجموعہ $y_1 + y_2$ بھی مساوات 1.56 کا حل ہے۔

سوال 1.99: مساوات 1.56 کے دو عدد حل y_1 اور y_2 کا فرق $y_1 - y_2$ مساوات 1.57 کا حل ہے۔

سوال 1.100: اگر $y' + p(x)y = r_a(x)$ کا حل y_1 اور $y' + p(x)y = r_b(x)$ کا حل y_2 ہو جہاں دونوں مساوات کے $p(x)$ یکساں ہیں تو آپ $y_1 + y_2$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

اس حصے میں سیکھے گئے ترکیب یا علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہوئے سوال 1.101 تا سوال 1.106 کے عمومی حل حاصل کریں۔جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہوں وہاں مخصوص حل بھی حاصل کریں۔

سوال 1.101:

$$y' + y = y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

جواب: $\frac{y-1}{y} = e^x$

سوال 1.102:

$$y' + xy = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $(y-1)(y+1) = 3^{-x^2}$

سوال 1.103:

$$y' + y = \frac{x}{y}$$

جواب: $2y^2 + 1 - 2x = ce^{-2x}$

سوال 1.104:

$$y' = 5y - 15y^2$$

جواب: $\frac{3y-1}{y} = ce^{-5x}$

سوال 1.105:

$$y' = \frac{\cot y}{x+1}, \quad y(0) = 1$$

جواب: $(x+1)\cos y = 2$

سوال 1.106:

$$2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x, \quad (y^2 = z \text{ پر کریں})$$

جواب: $\frac{2e^x y^2 - xe^{2x}}{2x} = c$

سوال 1.107: پانی کو چولہے پر برتن میں گرم کیا جاتا ہے۔برتن کو آگ سے اتارتے وقت پانی کا درجہ حرارت $99\ ^\circ\mathrm{C}$ ہے جبکہ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت $90\ ^\circ\mathrm{C}$ ہے۔فضا کا درجہ حرارت $32\ ^\circ\mathrm{C}$ ہے۔پانی کتنی دیر میں تقریباً فضا کے درجہ حرارت (مثلاً $33\ ^\circ\mathrm{C}$) پر پہنچے گا؟

جواب: تقریباً چار گھنٹے اور پچاس منٹ۔

سوال 1.108: مریض کو قطرہ قطرہ نمکیات کا محلول بذریعہ شریان دیا جاتا ہے جس میں دوائی حل کی گئی ہے۔لمحہ $t = 0$ سے مریض کو مسلسل a گرام فی منٹ دوائی دی جاتی ہے جبکہ جسم کا نظام دوائی کو مسلسل خون سے نکال کر خارج کرتا ہے۔خون سے دوائی ہٹانے کی شرح خون میں کل دوائی کی مقدار کے راست تناسب ہے۔اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کریں اور مساوات کو حل کریں۔

جوابات: $y' = a - ky$ اور لمحہ $t = 0$ پر خون میں دوائی کی مقدار صفر ہے، $y = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt})$

سوال 1.109: وبائی بیماری کا پھیلاو
وبائی بیماری ایک شخص سے دوسرے شخص کو منتقل ہوتے ہوئے بڑھتی ہے۔تصور کریں کہ ایک مخصوص وبا کی پھیلاو سانس کے ذریعہ ہوتی ہے جو دو اشخاص کے قریب ہونے سے ممکن ہے۔یوں وبا میں اضافے کی شرح مریض اور صحت مند شخص کے قریب آنے کے راست تناسب ہے۔تصور کریں شہر میں کل آبادی a ہے جبکہ لمحہ t پر بیماروں کی تعداد $y(t)$ ہے۔تصور کریں کہ تمام لاگ مکمل آزادی کے ساتھ آپس میں ملتے جلتے ہیں۔اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے مسئلے کا تفرقی مساوات حاصل کریں۔مساوات کو حل کریں۔

حل: کسی بھی لمحے y لوگ بیمار اور بقایا یعنی $a - y$ لوگ صحت مند ہیں۔اگر $\mathrm{d}t$ دورانیے میں ایک بیمار شخص کسی ایک شخص سے ملے تو $\frac{a-y}{a}$ امکان ہے کہ وہ صحت مند شخص سے ملا ہو گا۔اسی دورانیے میں بقایا بیمار بھی کسی سے ملے ہوں گے لہٰذا بیمار اور صحت مند کے ملنے کا امکان $y\left(\frac{a-y}{a}\right)$ ہو گا۔اس طرح بیماری میں اضافے کی شرح کو $y' = ky\left(\frac{a-y}{a}\right)$ لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 1.68 ہے۔لمحہ $t = 0$ پر ایک شخص بیمار تصور کرتے ہوئے اس کا حل $\frac{y}{y-a} = \frac{e^t}{1-a}$ ملتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \to \infty$ پر $y \to a$ ہو گا یعنی آخر کار وبا پورے شہر میں پھیل جائے گی۔

سوال 1.110: ایک جھیل میں $200 \times 10^6\,\mathrm{m}^3$ پانی پایا جاتا ہے جس میں ماہی گیروں کی غفلت سے گندگی کی مقدار $5\,\%$ تک بڑھ جاتی ہے جس سے ماہی گیری متاثر ہو رہی ہے۔ جھیل سے سالانہ $20 \times 10^6\,\mathrm{m}^3$ پانی خارج ہوتا ہے اور اتنا ہی تازہ پانی اس میں داخلی ہوتا ہے۔تازہ پانی میں $0.6\,\%$ گندگی پائی جاتی ہے۔ جھیل کو صاف کرنے کی غرض سے اس میں ماہی گیری ممنوع کر دی جاتی ہے۔ جھیل میں گندگی کی مقدار کتنی مدت میں $2\,\%$ رہ جائے گی؟

جوابات: جھیل میں کل گندگی کو $y(t)$ لکھتے ہوئے $y' = 120000 - 0.1y$ ملتا ہے جس کا عمومی حل $y = (1.2 + 8.8e^{-0.1t}) \times 10^6$ ہے۔ جھیل کو درکار حد تک صفائی کے لئے 11.45 سال درکار ہوں گے۔

سوال 1.111 سے سوال 1.114 میں ماہی گیری کو مثال بنایا گیا ہے۔یہی حقائق ملک میں پالتو مال مویشی پر بھی لاگو ہوتا ہے۔

سوال 1.111: ایسا جھیل جس میں ماہی گیری منع ہو میں مچھلی کی تعداد مساوات دیتی ہے۔ماہی گھیری کی اجازت کے بعد مساوات کیا ہو گی؟ تصور کریں کہ مچھلی پکڑنے کی شرح مچھلی کی لمحاتی تعداد کے راست تناسب ہے۔

حل: مچھلی پکڑنے کی شرح کو py لکھتے ہوئے نئی مساوات $y' = ay - by^2 - py$ ہو گی۔

سوال 1.112: سوال 1.111 میں مچھلی پکڑنے کی شرح اس قدر ہے کہ مچھلی کی تعداد تبدیل نہیں ہوتی۔ مچھلی کی تعداد کیا ہو گی؟

حل: مچھلی کی تعداد تبدیل نہ ہونے سے مراد $y' = 0$ ہے لہٰذا $y' = ay - by^2 - py = 0$ لکھتے ہوئے $y = 0$ اور $y = \frac{a-p}{b}$ ملتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جھیل سے مسلسل $p\left(\frac{a-p}{b}\right)$ پیداوار لی جا سکتی ہے۔

سوال 1.113: سوال 1.111 میں $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔ اس شرح سے پیداوار لیتے ہوئے ماہی گیری کی مستقبل کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

جواب: $y = \frac{0.9}{1-e^{-0.9t-0.198}}$ ؛اس شرح سے $t \to \infty$ پر $y \to 0$ ہو گا اور ماہی گیری ممکن نہ رہ پائے گی۔

سوال 1.114: ماہی گیری کے شعبے کو برقرار رکھنے کی خاطر سوال 1.111 میں دو سال ماہی گیری کے بعد دو سال کا وقفہ دیا جاتا ہے جس میں ماہی گیری ممنوع ہوتی ہے اور جس دوران جھیل میں مچھلی کی آبادی دوبارہ بڑھتی ہے۔اس

مسئلے کو آٹھ سال کے لئے حل کرتے ہوئے حل کا خط کھینچیں۔ $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیں۔

سوال 1.115: جنگل میں بھیڑیا کی آبادی میں شرح موت لحاتی آبادی کے راست تناسب ہے جبکہ شرح پیدائش بھیڑیوں کی جوڑی کی اتفاقی ملاپ کے راست تناسب ہے۔اس مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔غیر تغیر آبادی دریافت کریں۔

حل: بھیڑیا کی کل آبادی y میں آدھے نر اور آدھے مادہ ہوں گے۔دورانیہ $\mathrm{d}t$ میں ایک جوڑی کے ملاپ کا امکان $\frac{y}{2}$ کے راست تناسب ہے۔یوں $\frac{y}{2}$ جوڑیوں کے ملاپ کا امکان $\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right)$ ہو گا۔ یوں شرح تبدیلی $y' = ay^2 - by$ لکھی جائے گی جہاں $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔غیر تغیر آبادی سے مراد $y' = 0$ ہے جس سے $y = 0$ اور $y = \frac{b}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y > \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا جس کی بنا آبادی مسلسل بڑھے گی۔اس کے برعکس $y < \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی مسلسل گھٹے گی۔

سوال 1.116: شہروں کے بند مکانوں میں باہر فضا کی نسبت زیادہ آلودگی پائی جاتی ہے۔گھر کے اندر جانور یا پودوں سے یہ مسئلہ مزید سنگین صورت اختیار کر لیتا ہے۔ قابل رہائش ہونے کے لئے لازم ہے کہ مکان میں ہوا کا بہاو پایا جاتا ہو۔ایک عمارت کا حجم $1500\,\mathrm{m}^3$ ہے۔لمحہ $t = 0$ پر تمام کھڑکیاں کھول دی جاتی ہیں جس کے بعد $200\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$ تازہ ہوا مسلسل عمارت میں ایک رخ سے داخل ہوتی ہے اور اتنی ہی ہوا دوسری جانب خارج ہوتی ہے۔عمارت میں پنکھے ہوا کو مسلسل حرکت میں رکھتے ہیں۔ کتنی دیر بعد $90\,\%$ ہوا تازہ ہو گی؟

جواب: 17 گھنٹے اور 16 منٹ۔

1.6 عمودی خطوط کی نسلیں

ایک نسل کے خطوط کے عمودی مطقاطع خطوط معلوم کرنا طبیعیات کے اہم مسائل میں سے ایک ہے۔حاصل خطوط کو دیے گئے خطوط کے **عمودی مطقاطع خطوط**[96] کہتے ہیں اور اسی طرح دیے گئے خطوط کو حاصل کردہ خطوط کے عمودی مطقاطع خطوط کہتے ہیں۔

زاویہ تقاطع[97] سے مراد نقطہ تقاطع پر دو خطوط کے مماس کے مابین زاویہ ہے۔

---

[96] orthogonal trajectories
[97] angle of intersection

عمودی خطوط کو عموماً تفرقی مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر $G(x, y, c) = 0$ ایک ہی نسل کے خطوط کو ظاہر کرتی ہو تب مستقل c کی ہر انفرادی قیمت نسل کے ایک منفرد خط کو ظاہر کرتی ہے۔چونکہ اس مساوات میں ایک عدد مستقل (c) پایا جاتا ہے لہٰذا ان خطوط کو ایک عدد **مقدار معلوم**[98] کے خطوط کی نسل کہا جاتا ہے۔

آئیں درج ذیل خطوط کو مثال بناتے ہوئے اس ترکیب کو سیکھیں۔

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = c \tag{1.71}$$

مماس کی ڈھلوان y' کو تفرق کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{2x}{4} + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{4y} \tag{1.72}$$

تفرقی مساوات میں c نہیں پایا جا سکتا۔آپس میں عمودی خطوط کے ڈھلوان کا حاصل ضرب منفی اکائی (-1) کے برابر ہو گا۔یوں درکار خطوط کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \frac{4y}{x} \tag{1.73}$$

علیحدگی متغیرات کرتے ہوئے تکمل سے عمودی خطوط حاصل کرتے ہیں۔

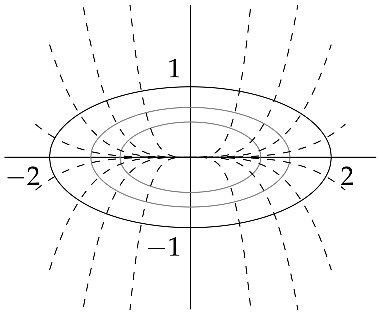
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 4\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad y = c_1 x^4 \tag{1.74}$$

اس مساوات کے مستقل کو c_1 لکھا گیا ہے جس کا ہر انفرادی قیمت نسل کی منفرد خط دیتا ہے۔شکل 1.22 میں $c = 1$ لیتے ہوئے مساوات 1.71 کو گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے۔اسی طرح ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیروں سے مختلف c سے حاصل نسل کے دیگر خطوط دکھائے گئے ہیں۔مساوات 1.74 کو شکل میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔مستقل c_1 کے مثبت اور منفی قیمتیں لے کر ان خطوط کو کھینچا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ٹھوس خطوط کی نسل اور نقطہ دار خطوط کی نسل ایک دونوں کو عمودی قطع کرتے ہیں۔

سوالات

سوال 1.117 تا سوال 1.122 کے عمودی تقاطع خطوط دریافت کریں۔

[98] parameter



شکل 1.22: عمودی خطوط کی نسلیں۔

سوال 1.117:

$$y = 2x + c$$

جواب: $y = -\frac{x}{2} + c_1$

سوال 1.118:

$$3y = -2x + c$$

جواب: $y = \frac{3x}{2} + c_1$

سوال 1.119:

$$y^2 = 3x + c$$

جواب: $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x}$

سوال 1.120:

$$y = x^2 + c$$

جواب: $y = \ln \frac{c_1}{\sqrt{|x|}}$

سوال 1.121:

$$G(x, y, c) = e^x \cos y = c$$

جواب: $\sin y = c_1 e^{-x}$

سوال 1.122:

$$2y = \frac{3}{x} + c$$

جواب: $y = \frac{2x^3}{9} + c_1$

سوال 1.123 تا سوال 1.125 عملی استعمال کے چند سوالات ہیں۔

سوال 1.123: ہم قوہ خطوط اور ثقلی قوت
ثقلی قوت کی سمت زمین کی محور کو ہے۔کارتیسی محدد پر اس قوت کی سمت کو $y = cx$ لکھا جا سکتا ہے۔ان کی عمودی خطوط حاصل کریں جو **ہم قوہ خطوط**[99] کہلاتے ہیں۔

جواب: ہم جانتے ہیں کہ y' کی مساوات c سے پاک ہونا لازمی ہے لہٰذا $y' = c$ میں دی گئی مساوات سے $c = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $y' = \frac{y}{x}$ حاصل کرتے ہیں۔اس طرح عمودی خطوط کی ڈھلوان $y' = -\frac{x}{y}$ ہو گی جس کا تکمل $x^2 + y^2 = c_1$ دیتا ہے۔

سوال 1.124: ہم محوری تار
حساس برقی اشارات کی ترسیل عموماً **ہم محوری تار**[100] کے ذریعہ کی جاتی ہے۔موصل نلکی کے محور پر موصل تار رکھنے سے ہم محوری تار حاصل ہوتی ہے۔ہم محوری تار کو کارتیسی z محور پر رکھتے ہوئے دونوں موصل تاروں کے درمیانی خطے میں ہم قوہ خطوط کی مساوات $u(x, y) = x^2 + y^2 = c$ حاصل ہوتی ہے جو z محور پر پڑی نلکی سطحوں کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم قوہ خطوط کے عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں جو **برقی میدان**[101] کو ظاہر کرتی ہیں۔

---

[99] equipotential lines
[100] coaxial cable
[101] electric field

جواب: $y=c_1x$

سوال 1.125: ہم حرارت خطوط

درجہ حرارت میں فرق، حرارتی توانائی کی منتقلی کا سبب ہے لہٰذا حرارتی توانائی کی منتقلی **ہم حرارت خطوط**[102] کے عمودی ہو گی۔ کسی خطے میں ہم حرارتی خطوط کو $2x^2+5y^2=c$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ان کی عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں۔

جواب: $y^2=c_1x^5$

1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت

کسی بھی متغیرہ کی حتمی قیمت صفر یا مثبت $|k|\geq 0$ ہوتی ہے لہٰذا درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا کوئی حل نہیں پایا جاتا۔ اس تفرقی مساوات کا واحد حل $y=0$ ہے جو ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اترتا۔

$$2\left|y'\right|+3\left|y\right|=0,\quad y(0)=2$$

اس کے برعکس درج ذیل مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل یعنی $y=x^3+2$ پایا جاتا ہے۔

$$y'=3x^2,\quad y(0)=2$$

درج ذیل تفرقی مساوات کے لامتناہی حل $y=-1+cx$ پائے چونکہ $x=0$ پر c کی کسی بھی قیمت کے لئے $y=-1$ ہی ہے۔

$$xy'=y+1,\quad y(0)=-1$$

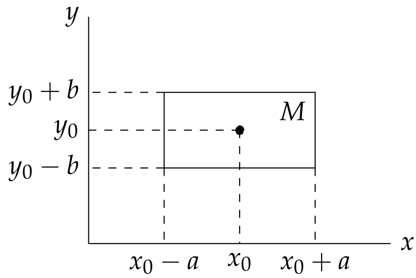
یوں ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{1.75}$$

کے حل کے بارے میں درج ذیل دو اہم سوالات اٹھتے ہیں۔

---

[102] isotherms



شکل 1.23: وجودیت اور یکتائی کے مسئلوں کا مستطیل۔

وجودیت حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.75 کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہے۔

یکتائی حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.75 کا زیادہ سے زیادہ ایک حل ممکن ہے۔(یوں ایک سے زیادہ حل رد کئے جاتے ہیں۔)

قبل از حل یہ جاننا کہ آیا ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا حل پایا جاتا ہے اور آیا کہ اس کا حل یکتا ہے انتہائی اہم معلومات ہیں جنہیں **مسئلہ وجودیت**[103] اور **مسئلہ یکتائی**[104] سے جاننا ممکن ہے۔ ان مسئلوں پر غور کرتے ہیں۔

مسئلہ 1.3: مسئلہ وجودیت
ابتدائی نقطہ (x_0, y_0) کو مرکز بناتے ہوئے شکل 1.23 میں مستطیل خطہ M دکھایا گیا ہے۔

$$M: |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b \tag{1.76}$$

تصور کریں کہ اس مستطیل خطے کے تمام نقطوں (x, y) پر ابتدائی قیمت سادہ تفرقی مساوات

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.77}$$

کا دایاں ہاتھ $f(x, y)$ **استمراری تفاعل**[105] (یعنی بلا جوڑ تفاعل) ہے۔مزید اس خطے میں تفاعل کی قیمت **محدود**[106] ہے یعنی

$$|f(x, y)| \le K \quad \text{مستطیل کے تمام نقطوں } (x, y) \text{ پر} \tag{1.78}$$

existence theorem[103]
uniqueness theorem[104]
continuous function[105]
bounded[106]

جہاں K محدود قیمت کا مستقل ہے۔ایسی صورت میں ابتدائی قیمت مساوات 1.77 کا کم از کم ایک حل موجود ہے۔ یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔ α کی قیمت a اور $\frac{b}{K}$ کی قیمتوں میں سے کم قیمت کے برابر ہے۔

مثال 1.24: تفاعل $f(x,y) = 2x + y^2$ خطہ $1 > |x|$ ، $1 > |y|$ میں محدود تفاعل ہے جس کی زیادہ سے زیادہ حتمی قیمت $K = 3$ ہے۔اس کے برعکس تفاعل $\tan x$ خطہ $|x| < \frac{\pi}{5}$ میں غیر محدود ہے چونکہ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ اسی خطے میں پایا جاتا ہے جہاں $\tan\frac{\pi}{2} \to \infty$ ہے۔ □

مسئلہ 1.4: مسئلہ یکتائی
تصور کریں کہ شکل 1.23 کے مستطیل میں تمام نقطوں (x,y) پر $f(x,y)$ اور $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ استمراری اور محدود تفاعل ہیں یعنی

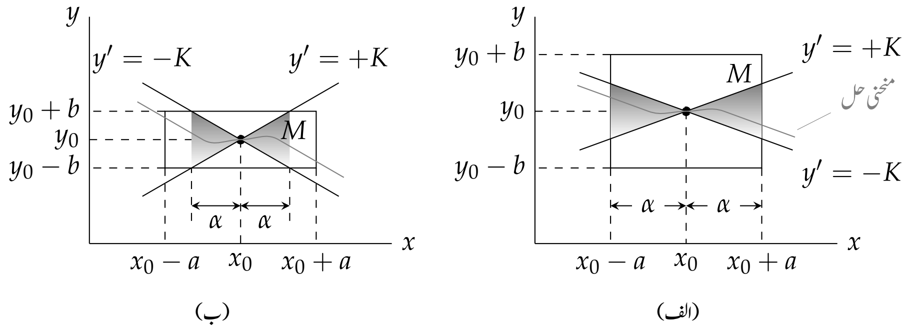
$$|f(x,y)| < K_a \tag{1.79}$$

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < K_b \tag{1.80}$$

ایسی صورت میں مساوات 1.77 کا زیادہ سے زیادہ ایک عدد حل موجود ہے۔یوں مسئلہ 1.3 کے تحت تفرقی مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل موجود ہے اور یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جاتا ہے جو $|x - x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔

درج بالا دو مسئلوں کے ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیے جائیں گے۔البتہ انہیں شکل 1.24 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے جہاں ابتدائی نقطہ (x_0, y_0) مستطیل M کا مرکز ہے۔ مخصوص حل ابتدائی نقطے سے گزرتا ہے۔مساوات 1.78 کے تحت $f(x,y)$ یعنی y' کی قیمت کم سے کم $-K$ اور زیادہ سے زیادہ $+K$ ممکن ہے یعنی مساوات 1.78 کے منحنی حل کی ڈھلوان $-K$ تا $+K$ ممکن ہے۔شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا $y' = \mp K$ ڈھلوان کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔یوں (x_0, y_0) سے گزرتا ہوا منحنی حل کسی صورت سایہ دار[107] خطہ $y' = \mp K$ سے باہر نہیں نکل سکتا۔شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا منحنی حل ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

[107] shaded



شکل 1.24: مساوات 1.78 میں دی گئی شرط اور α۔

شکل 1.24-الف میں منحنی حل کو دیکھیے۔سائے دار خطے میں رہتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ حل $|x-x_0|<\alpha$ پر پایا جائے گا جہاں $\alpha=a$ کے برابر ہے۔شکل-ب میں منحنی حل مستطیل M سے باہر نکل جاتا ہے۔چونکہ مستطیل کے باہر $f(x,y)$ اور $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ کے بارے میں کچھ نہیں کہا جا سکتا ہے لہٰذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $|x-x_0|<\alpha$ پر حل پایا جاتا ہے جہاں $\alpha=\frac{b}{K}$ کے برابر ہے۔

مثال 1.25: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y'=1+y^2,\quad y(0)=0$$

اور خطہ $|x|<4$ ، $|y|<5$ لیتے ہیں۔یوں $a=4$ ، $b=5$ اور

$$\left|f(x,y)\right|=\left|1+y^2\right|\le K_a=26$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y\le K_b=10$$
$$\alpha=\frac{b}{K_a}=\frac{5}{26}<a$$

ہوں گے۔ہم جانتے ہیں کہ اس تفرقی مساوات کا حل $y=\tan x$ ہے جس میں $x=\mp\frac{\pi}{2}>\alpha$ پر جوڑ پایا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستطیل کے پورے x پر مسلسل حل نہیں پایا جاتا۔ □

تفرقی مساوات کے حل کے لئے درج بالا دو مسئلوں میں **معقول شرائط نا کہ لازم شرائط** دیے گئے ہیں۔ ان شرائط

کو ہلکا بنایا جا سکتا ہے۔**احصاء تفرقیات**[108] کے **مسئلہ اوسط قیمت**[109] کے تحت

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) = (y_2 - y_1) \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|_{y=y_i}$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 خطہ M میں پائے جاتے ہیں اور y_i ان کے درمیان کوئی موزوں قیمت ہے۔مساوات 1.80 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) \leq (y_2 - y_1)K_b \tag{1.81}$$

مساوات 1.80 کی جگہ مساوات 1.81 استعمال کیا جا سکتا ہے جو نسبتاً ہلکا شرط ہے۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے یکتا حل کے لئے $f(x,y)$ کا **مسلسل تفاعل** ہونا غیر معقول (یعنی ناکافی) شرط ہے۔درج ذیل مثال اس حقیقت کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 1.26: غیر یکتائی
ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

کے دو حل پائے جاتے ہیں

$$y = 0 \quad \text{اور} \quad y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases}$$

اگرچہ $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ **مسلسل تفاعل** ہے۔مساوات 1.81 کی شرط لکیر $y = 0$ پر پوری نہیں ہوتی چونکہ $y_1 = 0$ اور y_2 کو مثبت لیتے ہوئے

$$\frac{|f(x,y_2) - f(x,y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}, \quad (\sqrt{y_2} > 0)$$

ملتا ہے جس کی قیمت y_2 کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے لامتناہی بڑھائی جا سکتی ہے جبکہ مساوات 1.81 کہتا ہے کہ یہ قیمت کسی مخصوص مستقل قیمت K_b سے کم ہونا لازمی ہے۔

□

[108] differential calculus
[109] mean value theorem

مثال 1.27: تصور کریں کہ $|x-x_0| \le a$ فاصلے پر مساوات $y' + p(x)y = r(x)$ میں $p(x)$ اور $r(x)$ استمراری ہیں۔ثابت کریں کہ یہ مساوات مسئلہ وجودیت اور مسئلہ یکتائی کے شرائط پر پورا اترتا ہے لٰہذا ابتدائی معلومات کی صورت میں اس تفرقی مساوات کا یکتا حل پایا جاتا ہے۔

جواب: $f(x,y) = r - py$ ہے لٰہذا $\frac{\partial f}{\partial y} = -p$ ہو گا۔چونکہ p استمراری ہے لٰہذا $\frac{\partial f}{\partial y}$ استمراری اور دیے فاصلے پر محدود ہو گا۔ $\square$

سوالات

سوال 1.126: خطی سادہ تفرقی مساوات
ثابت کریں کہ اگر تفرقی مساوات $y' + p(x)y = r(x)$ میں $p(x)$ اور $r(x)$ وقفہ $|x-x_0| \le a$ میں تمام x کے لئے استمراری ہو تب اس تفرقی مساوات کا $f(x,y)$ مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 کے شرائط پر پورا اترتا ہے لٰہذا اس تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل یکتا ہو گا۔

جواب: $y' = f(x,y) = r(x) - p(x)y$ ہے لٰہذا $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$ استمراری ہو گا۔یکتا حل بند وقفہ $|x-x_0| \le a$ میں محدود ہو گا۔

سوال 1.127: لامحدود پٹی
اگر مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 کے شرائط صرف مستطیل کی بجائے لامحدود پٹی $|x-x_0| < a$ پر پورا اترتے ہوں تب مساوات 1.75 کا حل کس وقفہ میں موجود ہو گا؟

جواب: $\alpha = \frac{b}{K}$ میں b کی قیمت بڑی لیں یعنی $b = \alpha K$ لٰہذا حل وقفہ $|x-x_0| < a$ میں موجود ہو گا۔

سوال 1.128: x وقفے کی لمبائی
عموماً مساوات 1.75 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے کا حل مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 میں دیے گئے وقفے سے زیادہ لمبائی پر پر موجود ہوتا ہے۔ a کی بہترین قیمت (اور b کی اچھی قیمت) چنتے ہوئے اس حقیقت کو $y' = 2y^2, \quad y(1) = 1$ کے لئے ثابت کریں۔

جواب: R کے اطراف $2a$ اور $2b$ ہیں اور چونکہ $y(1)=1$ ہے لہٰذا اس کا وسط $(1,1)$ ہے۔ R میں

$$f=2y^2\le 2(b+1)^2=K,\ \alpha=\frac{b}{K}=\frac{b}{2(b+1)^2},\ \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}b}=0\implies b=1$$

سے $\alpha_{\text{بہترین}}=\frac{b}{K}=\frac{1}{8}$ حاصل ہو گا۔ تفرقی مساوات کا حل $\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=2\,\mathrm{d}x$ کے تکمل سے $y=\frac{1}{3-2x}$ ملتا ہے۔

سوال 1.129: کیا کسی ایک ہی تفرقی مساوات کے دو مختلف حل، مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 میں دیے گئے شرائط پر پورا اترتے ہوئے، مستطیل میں ایک ہی نقطے سے گزر سکتے ہیں۔

جواب: ایسا ممکن نہیں ہو گا چونکہ اگر ایسا ہو تب اس مشترک نقطہ (x_1,y_1) پر دونوں حل ابتدائی معلومات $y(x_1)=y_1$ پر پورا اتریں گے جو یکتائی کی خلاف ورزی ہے۔

باب 2

درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو درجی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ خطی دو درجی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتا ہے۔ چونکہ دو درجی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہٰذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگلے باب کا موضوع تین درجی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات حل کرنے کے کئی عمدہ ترکیب پائے جاتے ہیں۔ اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

2.1 متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات

یک درجی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔ اس باب میں دو درجی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش[1]، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

[1] oscillations

ایسا دو درجی تفرقی مساوات جس کو

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.1}$$

صورت میں لکھا جا سکے **خطی**[2] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر خطی**[3] کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں y ، y' اور y'' کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔دو درجی مساوات کا پہلا جزو $f(x)y''$ ہونے کی صورت میں مساوات کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی **معیاری صورت**[4] میں لکھیں جہاں y'' پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو درجی مساوات کی تعریف ہو بہو ایک درجی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔یقیناً $r \equiv 0$ [جہاں زیر غور تمام x پر $r(x) = 0$ ہو؛ اس کو **مکمل صفر**[5] پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.2}$$

جو **متجانس** ہے۔اگر $r(x) \not\equiv 0$ ہو تب مساوات 2.1 **غیر متجانس**[6] کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$\left(y''\right)^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

---

[2] linear
[3] nonlinear
[4] standard form
[5] identically zero
[6] nonhomogenous

تفاعل p اور q مساوات 2.2 کے **عددی سر**[7] کہلاتے ہیں۔

دو درجی مساوات کے حل کی تعریف عین ایک درجی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل $y = h(x)$ کو کھلے وقفہ I پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دو درجی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر $h(x)$ ، h' اور h'' پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں y کی جگہ h ، y' کی جگہ h' اور y'' کی جگہ h'' پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔ چند مثال جلد پیش کرتے ہیں۔

متجانس خطی تفرقی مساوات: خطی میل

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائے جاتے ہیں۔ متجانس مساوات کے حل میں **اصول خطیت**[8] یا **اصول خطی میل**[9] کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.1: خطی میل
تمام x پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں۔

$$y'' + 4y = 0 \tag{2.3}$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہیں۔ پہلے $y_1 = \cos 2x$ کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ $(\cos 2x)'' = -4\cos 2x$ کے برابر ہے لٰہذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$$

ملتا ہے۔ اسی طرح $y_2 = \sin 2x$ کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$$

---

[7] coefficients
[8] linearity principle
[9] superposition principle

ملتا ہے۔ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔یوں ہم $\cos 2x$ کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور $\sin 2x$ کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x$$

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x)'' + 4(2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x) \\ &= 4(-2.73\cos 2x + 1.25\sin 2x) + 4(2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل y_1 اور y_2 سے نیا حل

$$y_3 = c_1y_1 + c_2y_2, \quad (\text{اور } c_1 \; c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں}) \tag{2.4}$$

حاصل کیا۔ اس کو y_1 اور y_2 کا **خطی میل**[10] کہتے ہیں۔اس مثال سے ہم **مسئلہ خطی میل** بیان کرتے ہیں جسے عموماً **اصول خطیت** یا **اصول خطی میل** کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ دو درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات 2.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت : تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل y_1 اور y_2 پائے جاتے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= 0 \\ y_2'' + y_2' + qy_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

ہو گا۔ خطی میل سے نیا حل $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ حاصل کرتے ہیں۔اس کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} y_3' &= c_1y_1' + c_2y_2' \\ y_3'' &= c_1y_1'' + c_2y_2'' \end{aligned}$$

[10] linear combination

y_3 ، y'_3 اور y''_3 کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
y''_3 + py'_3 + qy_3 &= (c_1y''_1 + c_2y''_2) + p(c_1y'_1 + c_2y'_2) + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + c_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔یوں مساوات کا بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہٰذا ثابت ہوتا ہے کہ y_3 بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

□

انتباہ: یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل مقدار ہیں۔

حل: y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہٰذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned}
y''_1 + py'_1 + qy_1 &= r \\
y''_2 + py'_2 + qy_2 &= r
\end{aligned} \tag{2.6}$$

y_3 کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
y''_3 + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= (c_1y''_1 + c_2y''_2) + p(c_1y'_1 + c_2y'_2) + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + c_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) \\
&= (c_1 + c_2)r
\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔اس سے $(c_1 + c_2)r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ r کے برابر ہے لہٰذا y_3 متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔یوں y_3 متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔ □

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات
درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں $y = 2 - \cos x$ اور $y = 2 - \sin x$ کو پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔اسی طرح ثابت کریں کہ $3(2 - \cos x)$ یا $-7(2 - \sin x)$ بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں $y = 1$ اور $y = x^3$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی $y = -x^3$ حل ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو -1 سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

ابتدائی قیمت مسائل۔اساس۔عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔درجہ اول سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل c حاصل کرتے ہوئے مخصوص یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔اسی تصور کو دو درجی سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو درجی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{2.7}$$

K_0 اور K_1 کھلے وقفہ پر نقطہ x_0 پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{2.8}$$

کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔یہاں y_1 اور y_2 مساوات 2.7 کے حل ہیں۔یوں مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ (x_0, K_0) سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر K_1 ہوتی ہے۔

مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل: پہلا قدم: اس مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہٰذا اس کا موزوں عمومی حل

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \tag{2.9}$$

ہو گا۔ (موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)

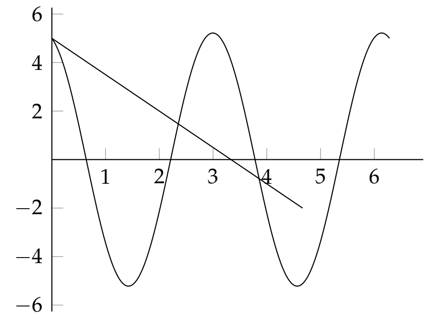
دوسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرتے ہیں۔عمومی حل کا تفرق $y' = -2\sin 2x + 2c_2 \cos x$ ہے۔ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 5 \\ y'(0) &= -2\sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مخصوص حل

$$y = 5\cos 2x - 1.5 \sin 2x$$

ہو گا۔شکل 2.1 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔نقطہ $x = 0$ پر اس کی قیمت $y(0) = 5$ ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس) $y'(0) = 0.5$ ہے۔مماس x محور کو $x = \frac{5}{3} = 3.33$ پر قطع کرتا ہے۔ □



شکل 2.1: مثال 2.3 کا مخصوص حل۔

درج بالا مثال میں y_1 اور y_2 ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔آئیں اب دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = k\cos 2x$ لیتے ہوئے

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 k \cos 2x = (c_1 + c_2 k)\cos 2x = c_3 \cos 2x$$

عمومی حل لکھتے ہیں۔اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل c_3 پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل y_1 اور y_2 انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل کے تعریف
کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔فاصلہ I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کی **اساس**[11] حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا مخصوص حل مساوات 2.9 میں c_1 اور c_2 کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

[11] basis

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔ y_1 اور y_2 اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے I پر

$$(a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1 \tag{2.10}$$

ہو، جہاں k اور l اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔(یہاں توجہ رکھیں: a اس صورت b کے مترادف ہے جب $k \neq 0$ ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت **خطی طور غیر تابع**[12] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.11}$$

سے مراد

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \tag{2.12}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 **خطی طور تابع**[13] کہلاتے ہیں۔اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.11 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$y_1 = ky_2, \quad y_2 = ly_1 \qquad \text{پورے کھلے وقفے } I \text{ پر} \tag{2.13}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.11 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا(اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔)اس طرح اساس کی (درج ذیل) قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف : اساس کی قدر مختلف تعریف
کھلے وقفے I پر مساوات 2.11 کا خطی طور غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

---

[12] linearly independent
[13] linearly dependent

اگر کسی کھلے وقفے I پر مساوات کے عددی سر p اور q استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کا عمومی حل موجود ہے۔ مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔ وقفہ I پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات کا کوئی نادر[14] حل موجود نہیں ہے (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور مخصوص حل
$\cos 2x$ اور $\sin 2x$ تمام x پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات $y'' + 4y = 0$ کے حل کی اساس ہیں۔ ایسا اس لئے ہے کہ $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq c$ اور $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \neq 0$ ہیں جہاں c مستقل ہے۔ اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے مخصوص حل $y = 5\cos 2x - 1.5\sin 2x$ حاصل کیا گیا تھا۔ □

مثال 2.5: پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ سادہ تفرقی مساوات $y'' - 4y = 0$ کے حل ہیں۔ یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$$

حل: چونکہ $y_1'' - 4y_1 = (e^{2x})'' - 4e^{2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ اور $y_2'' - 4y_2 = (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ ہیں لہٰذا y_1 اور y_2 دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ چونکہ $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} \neq c$ ہے جہاں c مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں e^{2x} اور e^{-2x} پورے x پر حل کا اساس ہے۔ اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2, \quad y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}, \quad y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1$$

دو عدد **ہمزاد مساوات**[15] $c_1 + c_2 = 2$ اور $2c_1 - 2c_2 = 1$ کو آپس میں حل کرتے ہوئے $c_1 = \frac{3}{4}$ اور $c_2 = \frac{5}{4}$ ملتے ہیں جس سے مخصوص حل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

□

singular solution[14]
simultaneous equations[15]

ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف درجہ

بعض اوقات ایک حل با آسانی حاصل ہو جاتا ہے۔دوسرا خطی طور غیر تابع حل یک درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کو **تخفیف درجہ**[16] کی ترکیب[17] کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی مثال دیکھنے کے بعد اس کی عمومی اطلاق پر غور کرتے ہیں۔

مثال 2.6: ایک حل جانتے ہوئے تخفیف درجہ۔اساس
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات کے اساس حل دریافت کریں۔

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

حل:دیے گئے مساوات کے معائنے سے ایک حل $y_1 = x$ لکھا جا سکتا ہے چونکہ یوں $y_1'' = 0$ ہو گا لہٰذا تفرقی مساوات کا پہلا جزو صفر ہو جاتا ہے اور $y_1' = 1$ ہو گا جس سے مساوات کے دوسرے اور تیسرے اجزاء کا مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس ترکیب میں دوسرے حل کو $y_2 = uy_1$ لکھ کر دیے گئے تفرقی مساوات میں

$$y_2 = uy_1 = ux, \quad y_2' = u'x + u, \quad y_2'' = u''x + 2u'$$

پر کرتے ہیں۔

$$x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$

درج بالا کو ترتیب دیتے ہوئے xu اور $-xu$ آپس میں کٹ جاتے ہیں اور $x^3u'' + x^2u' = 0$ رہ جاتا ہے جس کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xu'' + u' = 0$$

ملتا ہے۔اس میں $u' = v$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہیں۔

$$xv' + v = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad v = \frac{1}{x}$$

---

[16] reduction of order
[17] یہ ترکیب یوسف لوئی لیگرینج (1736-1813) نے دریافت کی۔

اس میں واپس $v = u'$ پر کرتے ہوئے تکمل سے u حاصل کرتے ہیں۔

$$v = u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x|$$

یوں $y_2 = x\ln|x|$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ y_1 اور y_2 کا **حاصل تقسیم** مستقل نہیں ہے لہٰذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں اساس حل $y_1 = x$ ، $y_2 = x\ln|x|$ ہے۔دونوں بار تکمل لیتے ہوئے تکمل کا مستقل نہیں لکھا گیا چونکہ ہمیں اساس درکار ہے۔عمومی مساوات لکھتے وقت مستقل لکھنا ضروری ہو گا۔ □

اس مثال میں ہم نے **تخفیف درجہ** کی ترکیب متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.14}$$

پر استعمال کی۔درج بالا مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں پہلا جزو y'' ہے جس کا عددی سر اکائی کے برابر ہے۔نیچے اخذ کلیات مساوات کی معیاری صورت کے لئے حاصل کئے گئے ہیں۔تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر ہمیں مساوات 2.14 کا ایک عدد حل y_1 معلوم ہے اور ہم حل کا اساس جاننا چاہتے ہیں۔ اس کی خاطر ہمیں I پر خطی طور غیر تابع دوسرا حل y_2 درکار ہے۔ دوسرا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$y = y_2 = uy_1, \quad y' = y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

کو مساوات 2.14 میں پر کرتے ہوئے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0$$

u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

چونکہ y_1 مساوات 2.14 کا حل ہے لہٰذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $u' = v$ پر کرنے سے **تخفیف شدہ**[18] ایک درجی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)v = 0$$

---

[18] reduced

علیحدگی متغیرات کے بعد تکمل لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)\mathrm{d}x, \quad \ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p\,\mathrm{d}x$$

یعنی

$$v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,\mathrm{d}x} \tag{2.15}$$

ملتا ہے۔چونکہ $v = u'$ کے برابر ہے لٰہذا دوسرا حل

$$y_2 = y_1 u = y_1 \int v\,\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

ہو گا۔حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = u = \int p\,\mathrm{d}x$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا چونکہ $v > 0$ ہے لٰہذا y_1 اور y_2 اساس حل ہیں۔

متجانس خطی دو درجی مساوات سے ایک درجی مساوات کا حصول ہم دیکھ چکے۔آئیں تخفیف درجہ کے دو مثال دیکھیں جو خطی مساوات اور غیر خطی مساوات پر لاگو کی جا سکتی ہیں۔

مثال 2.7: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں y صریحاً نہیں پایا جاتا۔اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل:چونکہ y صریحاً نہیں پایا جاتا لٰہذا اس کو $F(x, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں جس میں $z = y'$ پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(x, z, z')$ حاصل ہوتی ہے۔ایک درجی مساوات کے حل کے تکمل سے y حاصل ہو گا۔ □

مثال 2.8: دو درجی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں x صریحاً نہیں پایا جاتا۔اس سے ایک درجی مساوات حاصل کریں۔

حل:چونکہ x صریحاً نہیں پایا جاتا لٰہذا اس کو $F(y, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں۔ہم $z = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ لیتے ہیں۔یوں زنجیری تفرق[19] سے

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y''}{z}$$

---

[19] chain rule of differentiation

یعنی

$$y'' = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ z اور z_y کو دیے مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک درجی مساوات $F(y, z, z_y)$ ملتی ہے جس کا آزاد متغیرہ y ہے۔ □

سوالات

سوال 2.1 تا سوال 2.7 سے ایک درجی مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.1:

$$y'' - y' = 0$$

جواب: $y = c_1 e^x + c_2$

سوال 2.2:

$$xy'' + y' = 0$$

جواب: $y = c_1 \ln|x| + c_2$

سوال 2.3:

$$xy'' - 2y' = 0$$

جواب: $y = c_1 x^3 + c_2$

سوال 2.4:

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

جواب: $y=c_2e^{c_1x}$

سوال 2.5:

$$y''-(y')^3\cos y=0$$

جواب: $\cos y+c_1y=x+c_2$

سوال 2.6:

$$y''-(y')^2\cos y=1$$

جواب: $y=\ln\sec(x+c_1)+c_2$

سوال 2.7:

$$x^2y''-2xy'+2y=0,\quad y_1=x^2$$

جواب: $y=c_1x^2+c_2x$

قابل تخفیف سادہ تفرقی مساوات کے استعمال سوالات 2.8 تا سوال 2.11 دیتے ہیں۔

سوال 2.8: منحنی
کارتیسی محدد کے مبدا سے گزرتی منحنی $y''+y'=0$ کی مبدا پر ڈھلوان اکائی کے برابر ہے۔ منحنی کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $y=1-e^{-x}$

سوال 2.9: لیزم
دو مقررہ نقاط سے لٹکی ہوئی زنجیری ڈوری سے بننے والا خم لیزم[20] کہلاتا ہے جسے مساوات $y''=k\sqrt{1+y'^2}$ کے حل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مستقل k کی قیمت ڈوری کی تناو اور کمیت پر منحصر ہے۔ ڈوری نقطہ $(1,0)$ اور $(-1,0)$ سے لٹکی ہوئی ہے۔ $k=1$ تصور کرتے ہوئے لیزم کی مساوات حاصل کریں۔

[20] catenary

جواب: زنجیر کے وسط یعنی $x=0$ پر ڈھلوان صفر کے برابر ہے۔یوں $y=-1+\cosh x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 2.10: حرکت
ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع اور رفتار میں فرق ایک مثبت مستقل k کے برابر رہتی ہے۔فاصلہ $y(t)$ ابتدائی رفتار u اور ابتدائی فاصلہ y_0 پر کس طرح منحصر ہے؟

جواب: $y=(k+u)e^t+(y_0-u)-k(t+1)$

سوال 2.11: حرکت
ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کی اسراع کی قیمت رفتار کی قیمت کے مربع کے برابر رہتی ہے۔فاصلے کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $t=c_1-\ln(t+c_2)$

سوال 2.12 تا سوال 2.15 میں ثابت کریں کہ دیے گئے تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں یہ حل کی اساس ہیں۔ان ابتدائی قیمت سوالات کے حل لکھیں۔

سوال 2.12:

$$y''+9y=0, \quad y(0)=5, \quad y'(0)=-2; \quad \cos 3x \;\sin 3x$$

جواب: $y=5\cos 3x-\frac{2}{3}\sin 3x$

سوال 2.13:

$$y''-2y'+y=0, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=1; \quad e^x,\, xe^x$$

جواب: $y=e^{x-1}(x-1)$

سوال 2.14:

$$x^2y''-xy'+y=0, \quad y(1)=3.2, \quad y'(1)=-1.5; \quad x,\, x\ln x$$

جواب: $y=\frac{16}{5}x-\frac{47}{10}x\ln x$

سوال 2.15:

$$y''+2y'+3y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=-3; \quad e^{-x}\cos\sqrt{2}x,\; e^{-x}\sin\sqrt{2}x$$

جواب: $y=e^{-x}(2\cos\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x)$

2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب ایسے دو درجی متجانس تفرقی مساوات پر بات کرتے ہیں جن کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہیں۔

$$y'' + ay' + b = 0 \tag{2.17}$$

یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔قوت نمائی تفاعل $y = e^{-kx}$ کے تفرق سے $y' = -ke^{-kx} = -ky$ یعنی $y' + ky = 0$ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔یوں $y' + ky = 0$ کا حل $y = e^{-kx}$ ہے۔اس کو دیکھتے ہوئے ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ آیا مساوات 2.17 کا حل

$$y = e^{\lambda x} \tag{2.18}$$

ممکن ہے یا نہیں۔یہ جاننے کی خاطر $y = e^{\lambda x}$ اور اس کے تفرق

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

کو مساوات 2.17 میں پر کرتے ہیں۔

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

کسی بھی محدود قیمت کے λ اور x کے لئے $e^{\lambda x}$ صفر نہیں ہو گا لہٰذا اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب λ **امتیازی مساوات**[21]

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.19}$$

کا جذر ہو۔اس **دو درجی الجبرائی مساوات**[22] کو حل کرتے ہیں۔

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{2.20}$$

یوں مساوات 2.17 کے حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.21}$$

ہوں گے۔انہیں مساوات 2.17 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہی تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

دو درجی الجبرائی مساوات 2.19 کے جذر کی تین ممکنہ قیمتیں ہیں جو $a^2 - 4b$ کی علامت $(\mp)$ پر منحصر ہیں۔

---

[21] characteristic equation

[22] quadratic equation

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر $\quad a^2 - 4c > 0$

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر $\quad a^2 - 4c = 0$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر $\quad a^2 - 4c < 0$

آئیں ان تین صورتوں پر باری باری غور کریں۔

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر

اس صورت میں، چونکہ y_1 اور y_2 کسی بھی وقفے I پر معین ہیں (اور حقیقی ہیں) اور ان کا حاصل تقسیم مستقل قیمت نہیں ہے لہٰذا کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.22}$$

ہو گا۔یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{2.23}$$

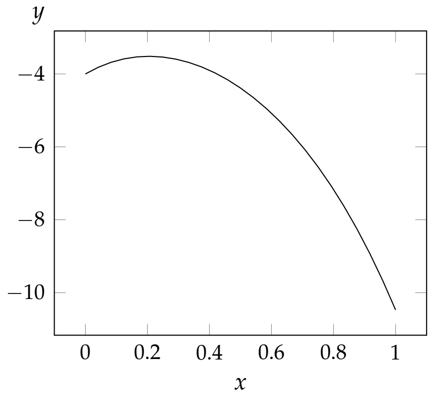
مثال 2.9: دو حقیقی منفرد جذر
مساوات $y'' - 4y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔اس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 - 4 = 0$ ہے جس کے جذر $\lambda_1 = +2$ اور $\lambda_2 = -2$ دو منفرد قیمتیں ہیں۔یوں حل کا اساس $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ ہے جن سے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ لکھا جا سکتا ہے۔ □

مثال 2.10: ابتدائی قیمت مسئلہ۔دو حقیقی منفرد جذر
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + y' - 6 = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$$

حل: امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$



شکل 2.2: مثال 2.10 کا مخصوص حل۔

جس کے جذر

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{1+24}}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{1+24}}{2} = -3,$$

ہیں۔ان سے اساس حل $y_1 = e^{2x}$ ، $y_2 = e^{-3x}$ ملتا ہے جس سے عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = -4 \\ y'(0) &= 2c_1 - 3c_2 = 5 \end{aligned}$$

لکھا جائے گا۔ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{7}{5}$ اور $c_2 = -\frac{13}{5}$ ملتا ہے جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = -\frac{7}{5} e^{2x} - \frac{13}{5} e^{-3x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے جو ابتدائی قیمتوں پر پورا اترتا ہے۔ □

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر

اگر $a^2 - 4c = 0$ ہو تب مساوات 2.20 سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ ملتا ہے جو واحد حل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$$

دیتا ہے۔ ہمیں اساس کے لئے دو حل درکار ہیں۔دوسرا حل **تخفیف درجہ** کی ترکیب سے حاصل کیا جائے گا۔اس ترکیب پر بحث ہو چکی ہے۔یوں ہم دوسرا حل $y_2 = uy_1$ تصور کرتے ہیں۔مساوات 2.17 میں

$$y_2 = uy_1, \quad y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \tag{2.24}$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے۔اب پہلی قوسین پر غور کرتے ہیں۔چونکہ $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ لہٰذا $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$ ہو گا۔ان قیمتوں کو پہلی قوسین میں پر کرتے

$$2y_1' + ay_1 = 2(-\frac{a}{2}y_1) + ay_1 = 0$$

ہوئے یہ قوسین بھی صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 2.24 سے $u''y_1 = 0$ یعنی $u'' = 0$ حاصل ہوتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لیتے ہوئے $u = c_1x + c_2$ ملتا ہے۔دوسرا خطی طور غیر تابع حل $y_2 = uy_1$ حاصل کرتے ہوئے ہم $c_1 = 1$ اور $c_2 = 0$ چن سکتے ہیں جن سے $u = x$ اور $y_2 = xy_1$ حاصل ہوتے ہیں۔چونکہ y_1 اور حاصل کردہ $y_2 = xy_1$ کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا یہ دونوں خطی طور غیر تابع ہیں اور انہیں اساس لیا جا سکتا ہے۔یوں دوہرے جذر کی صورت میں کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

اور عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{a}{2}x} \tag{2.25}$$

مثال 2.11: دوہرے جذر کی صورت میں عمومی حل
سادہ تفرقی مساوات $y'' + 10y' + 25 = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ ہے جس کو $(\lambda + 5)^2 = 0$ لکھ کر دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات کے حل کا اساس $y_1 = e^{-5x}$ ، $y_2 = xe^{-5x}$ اور اس کا عمومی حل $y = (c_1 + c_2x)e^{-5x}$ ہے۔

□

مثال 2.12: دوہرے جذر کی صورت میں مخصوص حل کا حصول
دیے گئے تفرقی مساوات کا مخصوص حل دریافت کریں۔

$$y'' + 0.2y' + 0.01y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = -4$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.01 = 0$ یعنی $(\lambda + 0.1)^2 = 0$ سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.1$ دوہرا جذر حاصل ہوتا ہے جس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل کا جذر لکھتے ہیں جو مخصوص حل کے حصول میں درکار ہے۔

$$y' = c_2e^{-0.1x} - 0.1(c_1 + c_2x)e^{-0.1x}$$

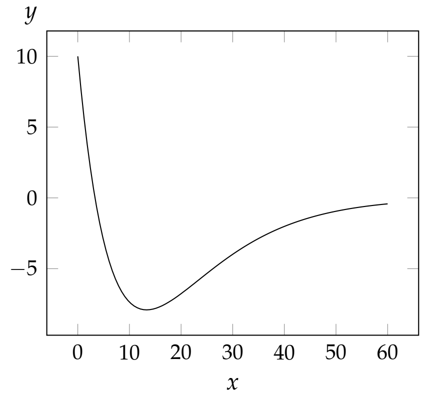
عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 10 \\ y'(0) &= c_2 - 0.1c_1 = -4, \quad c_2 = -3 \end{aligned}$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (10 - 3x)e^{-0.1x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے۔ □



شکل 2.3: مثال 2.12 کا مخصوص حل۔

تیسری صورت: مخلوط جوڑی دار جذر

امتیازی مساوات 2.19 میں a^2-4c کی قیمت منفی ہونے کی صورت میں مخلوط جوڑی دار جذر $\lambda=-\frac{a}{2}\mp i\omega$ ملتے ہیں جہاں $\omega^2=b-\frac{a^2}{4}$ کے برابر ہے۔ان سے مخلوط اساس لکھتے ہیں۔

$$y_{m1}=e^{(-\frac{a}{2}+i\omega)x},\quad y_{m2}=e^{(-\frac{a}{2}-i\omega)x} \tag{2.26}$$

اس مخلوط اساس سے حقیقی اساس حاصل کیا جائے گا۔ایسا کرنے کی خاطر ریاضی کے چند کلیات پر غور کرتے ہیں۔تفاعل e^z ، جہاں $z=x+iy$ مخلوط عدد ہے جبکہ x اور y حقیقی اعداد ہیں، کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}$$

e^{iy} کی **مکلارن تسلسل**[23] لکھ کر حقیقی اجزاء اور خیالی اجزاء کو علیحدہ علیحدہ قوسین میں اکٹھے کرتے ہیں۔یہاں $i^2=-1$ ، $i^3=-i$ ، $i^4=1$ لئے گئے ہیں۔

$$\begin{aligned}
e^{iy}&=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\frac{(iy)^5}{5!}\cdots\\
&=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-+\cdots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-+\cdots\right)\\
&=\cos y+i\sin y
\end{aligned}$$

---

[23] Maclaurin series

آخری قدم پر آپ تسلی کر لیں کہ پہلی قوسین $\cos y$ کی مکلارن تسلسل دیتی ہے جبکہ دوسری قوسین $\sin y$ کی مکلارن تسلسل دیتی ہے۔ آپ اس کتاب میں آگے پڑھیں گے کہ درج بالا تسلسل میں اجزاء کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔یوں ہم **یولر مساوات**[24]

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{2.27}$$

حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y \tag{2.28}$$

مساوات 2.27 اور مساوات 2.28 کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{2.29}$$

ہو گا۔یہ سب جاننے کے بعد آئیں مساوات 2.26 میں دیے مخلوط اساس پر دوبارہ غور کریں۔

$$\begin{aligned} y_{m1} &= e^{(-\frac{a}{2}+i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos \omega x + i \sin \omega x) \\ y_{m2} &= e^{(-\frac{a}{2}-i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x} e^{-i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos \omega x - i \sin \omega x) \end{aligned}$$

چونکہ اساس کے اجزاء کو مستقل (حقیقی یا خیالی یا مخلوط) سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے نیا حل حاصل کیا جا سکتا ہے لہٰذا ہم درج بالا دونوں اجزاء کو مستقل $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے ایک نیا اور حقیقی حل y_1 دریافت کرتے ہیں۔

$$y_1 = \frac{1}{2} y_{m1} + \frac{1}{2} y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x$$

اسی طرح مخلوط اساس کے پہلے جزو کو مستقل $\frac{1}{2i}$ اور دوسرے جزو کو مستقل $-\frac{1}{2i}$ سے ضرب دیتے ہوئے جمع کر کے نیا اور حقیقی حل y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y_2 = \frac{1}{2i} y_{m1} - \frac{1}{2i} y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$$

درج بالا حاصل کردہ حقیقی تفاعل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x \quad y_2 = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x \tag{2.30}$$

---

[24] Euler equation

کو از خود حل کا اساس تصور کیا جا سکتا ہے۔ یہاں غور کریں کہ ہم نے مخلوط جذر $\lambda = (-\frac{a}{2} \mp i\omega)x$ سے حقیقی اساس (مساوات 2.30) حاصل کیا ہے۔ اس حقیقی اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) \tag{2.31}$$

مثال 2.13: مخلوط جذر، ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + 0.36y' + 9.0324y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.36\lambda + 9.0324 = 0$ کے مخلوط جذر $\lambda = -0.18 + \mp i3$ ہیں لہٰذا عمومی حل

$$y = e^{-0.18x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

ہو گا۔ مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر c_1 اور c_2 درکار ہیں جنہیں عمومی مساوات میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ پہلے ابتدائی معلومات سے

$$y(0) = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 0, \quad c_1 = 0$$

ملتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق

$$y' = -0.5e^{-0.5x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-0.5x}(-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x)$$

میں دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

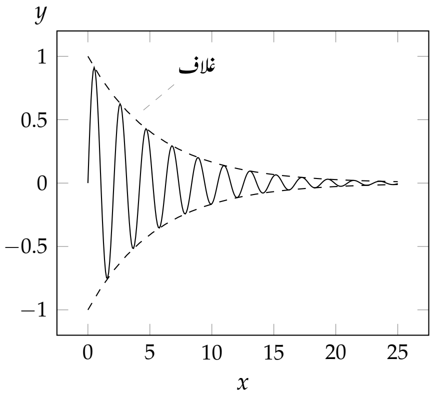
$$y' = -0.5e^0(0 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^0(0 \sin 0 + 3c_2 \cos 0) = 3, \quad c_2 = 1$$

ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-0.18x} \sin 3x$$

شکل 2.4 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ، نقطہ دار لکیروں سے، سائن نما منحنی کے مثبت چوٹیوں کو چھوتا ہوا **غلاف**[25] $e^{-0.18x}$ اور منفی چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف $-e^{-0.18x}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ مخصوص حل (x کو t لیتے ہوئے) **قصری ارتعاش**[26] کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر y فاصلے کو ظاہر کرتی ہو تب یہ میکانی قصری ارتعاش ہو گی اور اگر y برقی رو یا برقی دباو ہو تب یہ برقی قصری ارتعاش ہو گی۔

[25] envelope
[26] damped oscillations



شکل 2.4: مثال 2.13 کا مخصوص حل۔

جدول 2.1: تین صورتوں کی تفصیل

صورت	مساوات 2.19 کے جذر	مساوات 2.17 کی اساس	مساوات 2.17 کا عمومی حل
پہلی	منفرد حقیقی λ_1 ، λ_2	$e^{\lambda_1 x}$ ، $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
دوسری	دوہرا جذر $\lambda = -\frac{a}{2}$	$e^{-\frac{a}{2}x}$ ، $xe^{-\frac{a}{2}x}$	$y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$
تیسری	جوڑی دار مخلوط $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$	$e^{-\frac{a}{2}x}\cos\omega x$ ، $e^{-\frac{a}{2}x}\sin\omega x$	$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1\cos\omega x + c_2 \sin\omega x)$

□

مثال 2.14: مخلوط جذر
سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad (\omega \text{ غیر صفر مستقل ہے})$$

کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$$

□

جدول 2.1 میں درج بالا تین صورتوں کی تفصیل اکٹھی کی گئی ہے۔یہ تین اقسام میکانی ارتعاش یا برقی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہیں۔آپ تفرقی مساوات کی قوت یہاں سے جان سکتے ہیں۔آپس میں بالکل مختلف میدانوں (مثلاً میکانی اور برقی) کے مسائل ایک طرز کی تفرقی مساوات سے ظاہر کئے جا سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.16 تا سوال 2.24 کے عمومی حل حاصل کریں۔انہیں واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ان کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 2.16:

$$y'' + 4y = 0$$

جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

سوال 2.17:

$$4y'' - 9y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.18:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

سوال 2.19:

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{-\pi x}$

سوال 2.20:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$

سوال 2.21:

$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3}{2}x}$

سوال 2.22:

$$4y'' + 4y' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.23:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

سوال 2.24:

$$9y'' - 30y' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{5}{3}x}$

سوال 2.25 تا سوال 2.29 میں اساس سے تفرقی مساوات $y'' + ay' + by = 0$ حاصل کریں۔

سوال 2.25:

$$e^{0.2x}, \quad e^{-0.5x}$$

جواب: $y'' + 0.3y' - 0.1y = 0$

سوال 2.26:

$$e^{-0.66x}, \quad e^{-0.32x}$$

جواب: $y'' + 0.98y' + 0.2112y = 0$

سوال 2.27:

$$\cos(4\pi x), \quad \sin(4\pi x)$$

جواب: $y'' + 16\pi^2 y = 0$

سوال 2.28:

$$e^{(-2+i3)x}, \quad e^{(-2-i3)x}$$

جواب: $y'' + 4y'' + 13y = 0$

سوال 2.29:

$$e^{-1.7x}\cos 6.2x, \quad e^{-1.7x}\sin 6.2x$$

جواب: $y'' + 3.4y'' + 41.33y = 0$

سوال 2.30 تا سوال 2.37 ابتدائی قیمت سوالات ہیں۔ان کے مخصوص حل دریافت کریں۔

سوال 2.30:

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$$

جواب: $y = 5\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x$

سوال 2.31:

$$y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

جواب: $y = 0.7e^{5x} + 1.3e^{-5x}$

سوال 2.32:

$$y'' - y'' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

جواب: $y = \frac{1}{5}(e^{3x} - e^{-2x})$

سوال 2.33:

$$4y'' + 4y'' + 37y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

جواب: $y = e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x$

سوال 2.34:

$$9y'' + 12y'' + 49y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

جواب: $y = e^{-\frac{2}{3}x}(2\cos\sqrt{5}x + \frac{1}{3\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}x)$

سوال 2.35:

$$y'' - 6y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$$

جواب: $y = \frac{1}{40}e^{3x}\sin 4x$

سوال 2.36:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

جواب: $y = \cos x + \sin x$

سوال 2.37:

$$8y'' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = 2.2, \quad y'(0) = 3.4$$

جواب: $y = \frac{79}{15}e^{\frac{x}{2}} - \frac{46}{15}e^{-\frac{x}{4}}$

عمومی حل کے حصول میں خطی طور غیر تابع تفاعل نہایت اہم ہیں۔ صرف ایسے تفاعل سے اساس حاصل ہوتا ہے۔ دیے وقفے پر سوال 2.38 تا سوال 2.42 میں دیے تفاعل میں خطی طور تابع اور غیر تابع کی نشاندہی کریں۔

سوال 2.38:

$$\cos kx, \quad \sin kx, \quad -\infty < x < \infty$$

جواب: چونکہ $\frac{\sin kx}{\cos kx}$ کی قیمت x تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتی ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 2.39:

$$e^{kx}, \quad e^{-kx} \quad -\infty < x < \infty$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.40:

$$x, \quad x^2 \quad x > 1$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.41:

$$x \ln x, \quad x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.42:

$$x \ln x, \quad x \ln x^2 \ln x \quad x > 1$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 2.43: غیر مستحکم صورت حال
ابتدائی قیمت مسئلہ $y'' - 4y = 0$ میں ابتدائی قیمتیں $y(0) = 1$ اور $y'(0) = -2$ لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔ مخصوص حل کو دوبارہ ابتدائی معلومات $y(0) = 1.001$ اور $y'(0) = -1.998$ کے لئے حاصل کریں۔

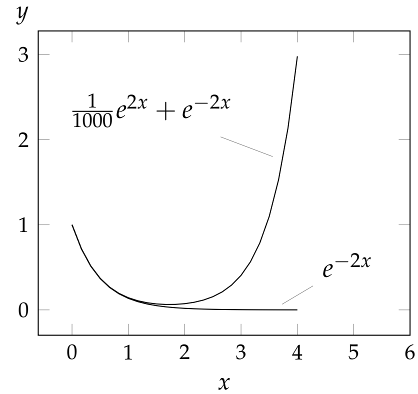
جوابات: $y = e^{-2x}$ اور $y = \frac{1}{1000}e^{2x} + e^{-2x}$ ؛ شکل 2.5 میں دونوں حل دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ابتدائی قیمتوں میں انتہائی کم فرق حل پر بہت زیادہ اثر ڈالتی ہیں۔یہ **غیر مستحکم**[27] صورت کو ظاہر کرتی ہے۔زلزلے میں غیر مستحکم عمارتیں انہیں وجوہات پر ڈھیر ہوتی ہیں۔فضا میں ہوا کا دباو، درجہ حرارت اور نمی کی تناسب بھی غیر مستحکم صورت پیدا کرتے ہوئے تباہ کن آندھیوں کا سبب بنتی ہیں۔

سوال 2.44: استمراری مساوات کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = 3$ ہیں۔مساوات 2.17 حاصل کریں۔

جواب: $y'' - y' - 6y = 0$

---

[27] instability



شکل 2.5: سوال 2.43 کے منحنی حل۔

سوال 2.45: استمراری مساوات کے جذر λ_1 اور λ_2 ہیں۔ مساوات 2.17 میں a اور b حاصل کریں۔ یوں جذر جانتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔

جواب: $a=-\lambda_1-\lambda_2$ ، $b=\lambda_1\lambda_2$

سوال 2.46: تفرقی مساوات $y''+ky'=0$ کو موجودہ طریقے سے حل کریں۔ اسی کو تخفیف درجہ کی ترکیب سے بھی حل کریں۔ دونوں جواب کیوں یکساں ہونا ضروری ہے۔

جواب: $y=c_1+c_2e^{-kx}$ ؛ یکتائیت۔

سوال 2.47: دوہرا جذر کو منفرد λ_1 اور λ_2 کی وہ صورت تصور کی جا سکتی ہے جب $\lambda_2\to\lambda_1$ ہو۔ $\lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda$ لیتے اور ایک حل $e^{\lambda_1 x}=$ لیتے ہوئے اساس کا دوسرا رکن $xe^{\lambda_1 x}$ تلاش کریں۔

حل: دوسرا حل $e^{\lambda_2 x}=e^{(\lambda_1+\Delta\lambda)x}=e^{\lambda_1 x}e^{\Delta\lambda x}$ ہے۔ $e^{\Delta\lambda x}$ کا مکلارن تسلسل لیتے ہوئے $\Delta\lambda\to 0$ کی بنا صرف پہلے دو ارکان لیتے ہیں۔ یوں $e^{\Delta\lambda x}=1+\frac{\Delta\lambda x}{1!}+\frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!}+\cdots\approx 1+\Delta\lambda x$ ہو گا اور $e^{\lambda_2 x}=e^{\lambda_1 x}+\Delta\lambda x e^{\lambda_1 x}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اب چونکہ $e^{\lambda_1 x}$ پہلے سے اساس کا حصہ ہے لہٰذا اساس کا دوسرا رکن $xe^{\lambda_1 x}$ ہو گا جہاں $\Delta\lambda$ کو مستقل تصور کرتے ہوئے رد کیا جاتا ہے

2.3 تفرقی عامل

آپ $y = \sin x$ یا $y = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ کے عمل سے بخوبی واقف ہیں۔پہلی مثال میں کسی مقدار یا تفاعل x پر عامل $\sin$ عمل کرتے ہوئے ایک نیا تفاعل دیتا ہے۔یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ **عامل**[28] $\sin$ تفاعل x کے نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ سے مبدل تفاعل y کا نقطہ $y = 1$ دیتا ہے۔اسی طرح **عامل** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ تفاعل x^3 پر عمل کرتے ہوئے تفاعل $3x^2$ دیتا ہے۔

یہ بتلاتا چلوں کہ ریاضیات اور طبیعیات میں عامل کا استعمال نہایت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ یہاں بالخصوص **کوانٹم میکانیات**[29] کا ذکر کرنا لازم جہاں عامل کا استعمال کثرت سے کیا جاتا ہے۔

اس کتاب میں ہم صرف **تفرقی عامل**[30] D پر بحث کریں گے جہاں $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ہے۔ یوں ایک درجی تفرق

$$Dy = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2.32}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح دو درجی تفرق $D^2y = D(Dy) = y''$ اور تین درجی تفرق $D^3y = y'''$ لکھا جائے گا۔اس طرح $D\sin x = \cos x$ اور $D^2\sin x = -\sin x$ ہو گا۔

خطی متجانس مساوات $y'' + ay' + by = 0$ جہاں a اور b مستقل مقدار ہیں میں **دو درجی تفرقی عامل**

$$L = P(D) = D^2 + aD + bI$$

متعارف کرتے ہیں جہاں I **مماثلی عامل**[31] ہے جس کی تعریف $Iy = y$ ہے۔اس طرح دیے گئے تفرقی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Ly = P(D)y = (D^2 + aD + bI)y = 0 \tag{2.33}$$

L خطی عامل اور P کثیر رکنی[32] ہے۔یوں اگر Lw اور Ly پائے جاتے ہوں (یعنی w اور y دو مرتبہ قابل تفرق ہوں) تب $L(cy + kw)$ بھی پایا جاتا ہے جہاں c اور k کوئی مستقل ہیں۔مزید درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L(cy + kw) = cLy + kLw \tag{2.34}$$

---

[28] operator
[29] quantum mechanics
[30] differential operator
[31] identity operator
[32] polynomial

چونکہ $De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ اور $D^2e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} Le^{\lambda x} &= (D^2 + aD + bI)e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

ہو گا۔ حصہ 2.2 میں بھی ہم نے یہی نتیجہ اخذ کیا تھا کہ $e^{\lambda x}$ صرف اور صرف اس صورت اس تفرقی مساوات کا حل ہو گا اگر λ امتیازی مساوات $P(\lambda) = 0$ کا جذر ہو۔

یہاں دلچسپ بات یہ ہے کہ $P(\lambda)$ عام الجبرائی کثیر رکنی ہے جس کی تجزی[33] کی جا سکتی ہے۔ λ کی جگہ D پر کرنے سے کثیر رکنی عامل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.15: تفرقی مساوات کا حل بذریعہ تجزی
کثیر رکنی $P(D) = D^2 + 4D - 21I$ کی تجزی سے $P(D) = 0$ کو حل کریں۔

حل: $I^2 = 1$ لیتے ہوئے $D^2 + 4D - 21I = (D - 3)(D + 7)$ لکھا جا سکتا ہے۔اب $(D - 3)y = y' - 3y = 0$ کا حل $y_1 = e^{3x}$ اور $()y = y' + 7y = 0$ کا حل $y_2 = e^{-7x}$ ہے۔یہ جوابات کسی بھی وقفے پر حل کی اساس ہیں۔آئیں تفرقی مساوات حاصل کریں۔

$$(D - 3)(D + 7)y = (D - 3)(y' + 7y) = y'' + 7y' - 3y' - 21y = y'' + 4y' - 21y = 0$$

□

مساوات 2.33 میں کثیر رکنی کے عددی سر مستقل مقدار ہیں۔ایسی صورت میں تفرقی عامل کے استعمال سے تفرقی مساوات حل کرنا نہایت آسان ثابت ہوتا ہے۔عددی سر مستقل نہ ہونے کی صورت میں تفرقی عامل کا استعمال نہایت پیچیدہ ثابت ہوتا ہے جس پر اس کتاب میں تبصرہ نہیں کیا جائے گا۔

اب تین اہم کلیات

$$\begin{aligned} D^s(xf) &= xD^s f + sD^{s-1} f \\ D^s(x^2 f) &= x^2 D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f \\ D^s[(x^2 - 1)f] &= (x^2 - 1)D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f \end{aligned} \tag{2.36}$$

حاصل کرتے ہیں جن کی ضرورت باب 5 میں پیش آئے گی۔

[33] factorization

درج ذیل کو دیکھ کر

(2.37)
$$
\begin{aligned}
&D^1(xf) = xD^1f + f\\
&D^2(xf) = D^1[D^1(xf)] = D^1[xD^1f + f] = xD^2f + D^1f + D^1f = xD^2f + 2D^1f\\
&D^3(xf) = D^1[D^2(xf)] = D^1[xD^2f + 2D^1f] = xD^3f + D^2f + 2D^2f = xD^3 + 3D^2f
\end{aligned}
$$

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ درج ذیل درست ہو گا۔

$$D^s(xf) = xD^sf + sD^{s-1}f \tag{2.38}$$

اس کلیے کو **الکراجی ماخوذ**[34] کے ذریعہ ثابت کرتے ہیں۔ہم نے مساوات 2.37 میں دیکھا کہ $s = 1$ اور $s = 2$ کے لئے یہ کلیہ درست ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ کلیہ $s - 1$ کے لئے بھی درست ہے لہٰذا

$$D^{s-1}(xf) = xD^{s-1}f + (s-1)D^{s-2}f \tag{2.39}$$

لکھنا درست ہو گا۔اس پر D^1 کا اطلاق کرنے سے $D^s(xf)$ لکھتے ہوئے مساوات 2.36 میں دیے پہلے کلیے کو ثابت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
D^s(xf) = D^1[D^{s-1}(xf)] &= D^1[xD^{s-1}f + (s-1)D^{s-2}f]\\
&= xD^sf + D^{s-1}f + (s-1)D^{s-1}f\\
&= xD^sf + sD^{s-1}f
\end{aligned}
$$

اب مساوات 2.36 میں دیا ہوا دوسرا کلیہ ثابت کرتے ہیں۔مساوات 2.36 کے پہلی کلیہ سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$D^s(xg) = xD^sg + sD^{s-1}g$$

جس میں $g = xf$ پر کرتے ہوئے کلیے کو ثابت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
D^s(x\cdot xf) &= xD^s[xf] + sD^{s-1}[xf]\\
&= x[xD^sf + sD^{s-1}f] + sD^{s-1}[xf]\\
&= x[xD^sf + sD^{s-1}f] + s[D^{s-1}f + (s-1)D^{s-2}f]\\
&= x^2D^sf + 2sxD^{s-1}f + s(s-1)D^{s-2}f
\end{aligned}
$$

آخر میں مساوات 2.36 کا تیسرا کلیہ ثابت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
D^s[(x^2-1)f] &= D^s[x^2f] - D^s[f]\\
&= x^2D^sf + 2sxD^{s-1}f + s(s-1)D^{s-2}f - D^sf\\
&= (x^2-1)D^sf + 2sxD^{s-1}f + s(s-1)D^{s-2}f
\end{aligned}
$$

[34] induction

سوالات

سوال 2.48 تا سوال 2.52 دیے تفاعل پر دیا تفرقی عامل لاگو کریں۔

سوال 2.48:

$$D + 2I; \quad x^3, \quad \cos 5x, \quad e^{-kx}, \quad \cosh x$$

جوابات: $3x^2 + 2x^3$ ، $-5\sin 5x + 2\cos 5x$ ، $(2-k)e^{-kx}$ ، $\sinh x + 2\cosh x$

سوال 2.49:

$$D^2 - 3D; \quad 2x^4 - x, \quad 2\sinh 2x - \cos 5x$$

جوابات: $24x^2 - 24x^3 + 3$ ، $-15\sin 5x - 12\cosh 2x + 25\cos 5x + \sinh 2x$

سوال 2.50:

$$(D + 2I)^2; \quad e^{3x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $25e^{3x}$ ، $(12x + 8)e^{2x}$

سوال 2.51:

$$(D - 3I)^2; \quad e^{2x}, \quad xe^{3x}$$

جوابات: e^{2x} ، 0

سوال 2.52:

$$(D + I)(D - 2I); \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}$$

جوابات: $-2e^{2x}$ ، $2(1-x)e^{2x}$

سوال 2.53 تا سوال 2.57 کی تجزی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.53:

$$(D^2 - 9I)y = 0$$

جواب: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$

سوال 2.54:

$$(D^2+4D+4I)y=0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے لہٰذا دوسرا حل xe^{2x} لیتے ہوئے $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$ ملتا ہے۔

سوال 2.55:

$$(D^2+4D+13I)y=0$$

جواب: $y=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$

سوال 2.56:

$$(4D^2+4D-17I)y=0$$

جواب: $y=e^{\frac{x}{2}}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

سوال 2.57:

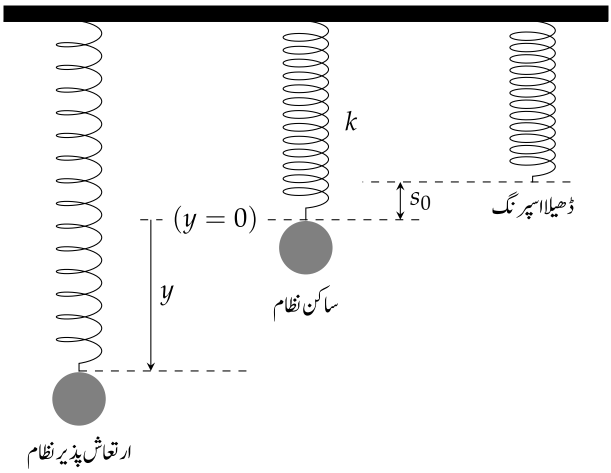
$$(9D^2+12D+4I)y=0$$

جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے۔ $y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{2}{3}x}$

2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش

مستقل قیمت کے عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات میکانی ارتعاش میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔اس حصے میں اسپرنگ سے جڑی کمیت کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔اس نظام کو اسپرنگ اور کمیت کا نظام کہا جائے گا جسے شکل 2.6 میں دکھایا گیا ہے۔

ایک عام اسپرنگ جو لمبائی میں اضافہ اور کمی کو روکتا ہو کو شکل 2.6 میں مستحکم سلاخ سے لٹکایا ہوا دکھایا گیا ہے۔اس کی نچلی سر سے کمیت m کی لوہے کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اس ساکن



شکل 2.6: اسپرنگ اور کمیت کا غیر قصری نظام۔

نظام میں اسپرنگ کے نچلے سر کو $y = 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ہم نیچے رخ کو مثبت رخ تصور کرتے ہیں۔یوں نیچے رخ قوت کو مثبت اور اوپر رخ قوت کو منفی تصور کیا جائے گا۔اسی طرح مقام $y = 0$ سے نیچے رخ فاصلہ y مثبت ہو گا۔مزید اسپرنگ کی کمیت کو گیند کی کمیت سے اتنا کم تصور کیا جاتا ہے کہ اسپرنگ کی کمیت کو درج ذیل تبصرے میں رد کیا جا سکتا ہے۔

ساکن حالت میں اسپرنگ پر نیچے رخ قوت mg عمل کرتا ہے جس سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ یہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع اور mg گیند کا وزن ہے۔اسپرنگ کی لمبائی میں اضافے کی وجہ سے، **قانون ہک**[35] کے تحت[36]، اسپرنگ اوپر رخ **بحالی قوت**[37] $F_0 = -ks_0$ پیدا کرتا ہے جہاں k **اسپرنگ مستقلہ**[38] ہے جس کو $\mathrm{kg\,s^{-2}}$ یعنی $\mathrm{N\,m^{-1}}$ میں ناپا جاتا ہے۔بحالی قوت اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتا ہے۔قوت mg مثبت رخ ہے لہٰذا اس کو مثبت لکھا گیا ہے جبکہ قوت $-ks_0$ منفی رخ ہے لہٰذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔ان قوتوں کا مجموعہ صفر $mg - ks_0 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔اگر ان قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر نہ ہوتا تو گیند ساکن نہ ہوتا بلکہ نیوٹن کے قانون $F = my''$ کے تحت حرکت کرتا۔طاقتور اسپرنگ کے مستقلہ k کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ان دونوں قوتوں کی مقدار گیند کی حرکت سے تبدیل نہیں ہوتی

[35] Hooke's law
[36] رابرٹ ہک (1635-1703) انگلستان کے ماہر طبیعیات تھے۔
[37] restoring force
[38] spring constant

لہٰذا ان کا مجموعہ ہر وقت صفر کے برابر ہو گا۔یوں گیند کی حرکت میں ان دونوں قوتوں کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا ان پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

فرض کریں کہ گیند کو نیچے رخ کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔شکل 2.6 میں گیند کو ساکن مقام سے لمحاتی طور y فاصلے پر دکھایا گیا ہے۔اس لمحہ اسپرنگ اضافی بحالی قوت $F_1 = -ky$ پیدا کرتا ہے جس کے تحت گیند نیوٹن کے قانون

$$F_1 = ma = my'' \tag{2.40}$$

کے تحت حرکت کرے گا جہاں $y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}$ ہے۔

بلا تقصیر حرکت کی سادہ تفرقی مساوات

ہر نظام تقصیری ہوتا ہے ورنہ حرکت کبھی بھی نہ رکتی۔ نہایت کم تقصیری نظام جس کے حرکت کا مطالعہ نسبتاً کم دورانیے کے لئے کیا جائے میں تقصیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں اس کو بلا تقصیر تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 2.6 کا نظام بلا تقصیر نظام کی عمدہ مثال ہے۔نیوٹن کے قانون کو بروئے کار لیتے ہوئے اس نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$my'' + ky = 0 \tag{2.41}$$

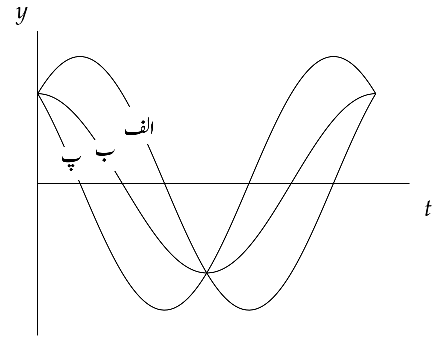
یہ مستقل عددی سر والا خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ہے۔امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $\lambda = \mp i\sqrt{\frac{k}{m}} = \mp i\omega_0$ ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.42}$$

اس حرکت کو **ہارمونی ارتعاش**[39] کہتے ہیں جس کی **تعدد**[40] $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ **ہرٹز**[41] ہے[42]۔تعدد f_0 کو نظام کی **قدرتی تعدد**[43] کہتے ہیں۔چونکہ ایک سیکنڈ میں f_0 چکر (پھیرے) پورے ہوتے ہیں لہٰذا ایک چکر $\frac{1}{f_0}$ عرصے

---

[39] harmonic oscillation
[40] frequency
[41] Hertz
[42] ہائنرک ہرٹز (1857-1894) جرمنی کے ماہر طبیعیات تھے جنہوں نے برقناطیسی امواج دریافت کئے۔
[43] natural frequency



شکل 2.7: مساوات 2.42 کے عمومی اشکال۔

میں پورا ہو گا۔اس دورانیے کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو **دوری عرصہ**[44] کہتے ہیں۔

$$T=\frac{1}{f_0} \tag{2.43}$$

$C=\sqrt{A^2+B^2}$ اور $\delta=\tan^{-1}\frac{B}{A}$ لیتے ہوئے مساوات 2.42 کو

$$y=C\cos(\omega_0 t-\delta) \tag{2.44}$$

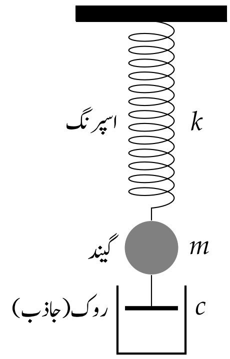
لکھا جا سکتا ہے جہاں C **حیطہ**[45] اور δ **زاویائی فرق**[46] کہلاتے ہیں۔

مساوات 2.42 (یعنی مساوات 2.44) کو شکل 2.7 میں دکھایا گیا ہے۔دکھائے گئے تینوں منحنی میں ابتدائی فاصلہ $y(0)=A$ ہے جبکہ ابتدائی رفتار $y'(0)=\omega_0 B$ خط الف میں مثبت، ب میں صفر اور پ میں منفی ہے۔

مثال 2.16: ایک اسپرنگ سے $2\,\mathrm{kg}$ کمیت لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں $61.25\,\mathrm{cm}$ کا اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اس اسپرنگ سے کتنی کمیت لٹکانے سے ایک ہرٹز $1\,\mathrm{Hz}$ کا ارتعاش حاصل کیا جا سکتا ہے؟ ساکن حالت سے کمیت کو $10\,\mathrm{cm}$ نیچے کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قانون ہک کے تحت $mg=0.6125k$ سے $k=\frac{2\times9.8}{0.6125}=32\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے۔ایک ہرٹز کی تعدد کے لئے $2\pi f_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ سے $m=\frac{k}{(2\pi f_0)^2}=\frac{32}{(2\pi\times1)^2}=0.811\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتا ہے۔

---
[44] time period
[45] amplitude
[46] phase angle



شکل 2.8: اسپرنگ اور کمیت کا قصری نظام۔

مساوات 2.42 میں $y(0) = 0.10\,\text{m}$ اور $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $A = 0.1$ اور $B = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا حرکت کی مساوات $y = 0.1\cos 2\pi t$ ہو گی۔ y کی قیمت میٹر میں ہو گی۔ □

قصری نظام کا سادہ تفرقی مساوات

شکل 2.8 میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک $F_3 = -cy'$ کا اضافہ کیا گیا ہے جو ہر لمحہ حرکت کے الٹ رخ عمل کرتی ہے۔یوں $my'' = -ky - cy'$ لکھا جائے گا جس سے قصری نظام کی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{2.45}$$

حاصل ہوتی ہے۔گیند کے ساتھ چادر منسلک کی گئی ہے جو ایک طرف سے بند نلکی میں حرکت کرتے ہوئے توانائی کا ضیاع اور یوں قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ اس حصے کو (توانائی کا) جاذب[47] بھی کہا جاتا ہے۔اس سے قوت روک پیدا ہوتا ہے۔تجربے سے دیکھا گیا ہے کہ کم رفتار پر ایسی قوت رفتار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ c **قصری مستقل**[48] کہلاتا ہے۔قصری مستقل از خود مثبت مستقل ہے۔یوں نیچے رخ رفتار، یعنی مثبت رفتار، کی صورت میں قصری قوت منفی، یعنی اوپر رخ، ہو گی۔

---

[47] absorber
[48] damping constant

قصری نظام کی مساوات خطی متجانس ہے جس سے امتیازی مساوات (m سے تقسیم شدہ) لکھتے ہیں۔

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کے جذر لکھتے ہیں۔

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta \quad \text{جہاں} \quad \alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{2.46}$$

تقصیر کی مقدار پر $c^2 - 4mk$ کی قیمت منحصر ہے جو تین مختلف صورتیں پیدا کرتی ہے۔

پہلی صورت: **زیادہ تقصیر**[49] دو منفرد حقیقی جذر $c^2 > 4mk$

دوسری صورت: **فاصل تقصیر**[50] دوہرا حقیقی جذر $c^2 = 4mk$

تیسری صورت: **کم تقصیر**[51] جوڑی دار مخلوط جذر $c^2 < 4mk$

اس قسم کی تین صورتیں ہم صفحہ 95 پر پہلے دیکھ چکے ہیں۔

تین صورتوں کے حل

پہلی صورت

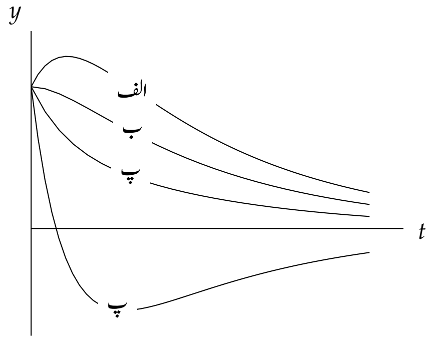
زیادہ تقصیر

پہلی صورت میں قصری قوت اتنا زیادہ ہے کہ $c^2 > 4mk$ ہے جس سے دو منفرد حقیقی جذر λ_1 اور λ_2 حاصل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

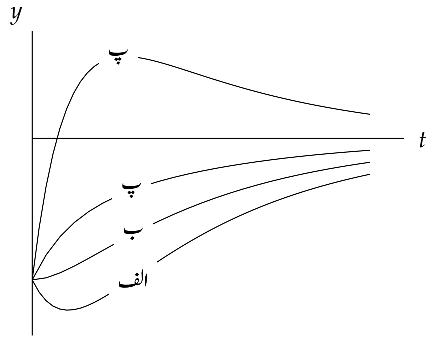
$$y = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \tag{2.47}$$

---

[49] over damping
[50] critical damping
[51] under damping



(الف)ابتدائی فاصلہ مثبت ہے۔



(ب)ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔

شکل 2.9: تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

چونکہ $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ اور $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$ ہیں لہٰذا $\alpha - \beta$ اور $\alpha + \beta$ دونوں مثبت مقدار ہیں۔یوں مساوات 2.47 میں دونوں قوت نمائی تفاعل کی طاقت منفی ہو گی اور دونوں تفاعل کی قیمتیں نہایت تیزی سے گھٹے گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \to \infty$ پر $y(\infty) \to 0$ ہو گا یعنی گیند ساکن ہو گا۔زیادہ قصری نظام میں قصری قوت اس تیزی سے نظام سے توانائی خارج کرتا ہے کہ نظام ارتعاش کرنے کے قابل نہیں رہتا۔

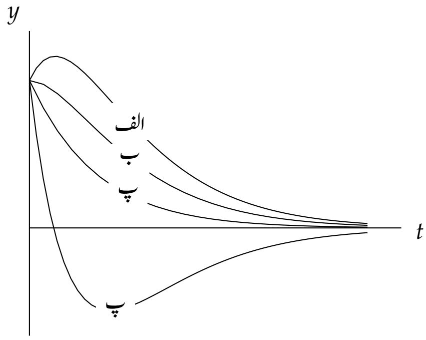
مساوات 2.47 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں ابتدائی فاصلہ مثبت ہے جبکہ شکل-ب میں ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔شکل-الف میں خط الف مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔شکل-ب میں خط الف منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تقصیری نظام میں ارتعاش ممکن نہیں ہے اور نظام میں حرکت بہت جلد ختم ہو جاتی ہے۔

دوسری صورت

فاصل تقصیر

زیادہ تقصیر اور کم تقصیر کے درمیان فاصل تقصیر کی صورت پائی جاتی ہے جہاں $c^2 = 4mk$ ہوتا ہے۔یوں $\beta = 0$ اور امتیازی مساوات کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ پایا جاتا ہے۔یوں مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t} \tag{2.48}$$



شکل 2.10: فاصل تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

یہ مساوات ساکن مقام $y = 0$ سے صرف ایک مرتبہ گزر سکتی ہے۔اس کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ $e^{-\alpha t}$ کبھی صفر یا منفی نہیں ہو سکتا جبکہ $c_1 + c_2 t$ صرف ایک صفر دیتا ہے۔اگر c_1 اور c_2 دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $c_1 + c_2 t$ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اور y صفر سے کبھی نہیں گزرے گا۔

شکل 2.10 میں مساوات 2.48 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ابتدائی فاصلہ مثبت لیا گیا ہے، خط الف میں ابتدائی رفتار مثبت، خط ب میں صفر اور دو عدد خط پ میں ابتدائی رفتار منفی لی گئی ہے۔یہ خطوط شکل 2.9-الف سے مشابہت رکھتے ہیں۔ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ موجودہ صورت منفرد حقیقی جذر کی وہ مخصوص صورت ہے جہاں دونوں جذر عین برابر ہوں۔

تیسری صورت

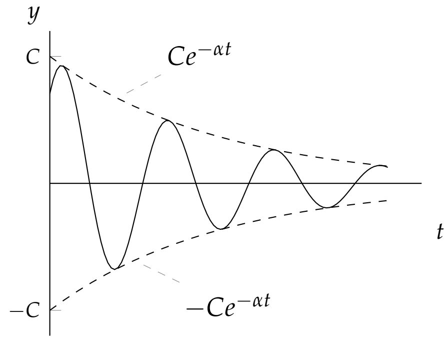
کم تقصیر

یہ سب سے زیادہ دلچسپ صورت ہے جہاں تقصیری مستقل کی قیمت اتنی کم ہے کہ $c^2 - 4mk < 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 2.46 میں β خیالی عدد ہو گا۔

$$\beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = i\omega \qquad (\omega > 0) \tag{2.49}$$

امتیازی مساوات کے جذر جوڑی دار مخلوط اعداد ہوں گے

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega \tag{2.50}$$



شکل 2.11: قصری ارتعاش۔

اور مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$y = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta) \tag{2.51}$$

جہاں $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$ ہیں۔

یہ قصری ارتعاش[52] کو ظاہر کرتی ہے جس کو شکل 2.11 میں دکھایا گیا ہے۔اس منحنی کی چوٹیاں، نقطہ دار لکیر سے دکھائی گئیں، تفاعل $y = Ce^{-\alpha t}$ اور $y = -Ce^{-\alpha t}$ کے منحنی کو چھوتی ہے۔ارتعاش کی تعدد $\frac{\omega}{2\pi}$ ہے جو قصری مستقل c کم کرنے سے بڑھتی ہے۔قصری مستقل کی قیمت صفر کرنے سے مساوات 2.44 کی ہارمونی ارتعاش حاصل ہوتی ہے جس کی قدرتی تعدد $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ہو گی۔

مثال 2.17: تقصیری حرکت کے تین صورتیں
ایک اسپرنگ جس کا مستقل $k = 32\,\mathrm{N\,kg^{-1}}$ ہے سے $m = 2\,\mathrm{kg}$ کا گیند لٹکایا گیا ہے۔اس نظام میں باری باری $c = 20\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ، $c = 16\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ اور $c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ تقصیری اثر شامل کیا جاتا ہے۔ابتدائی معلومات $y(0) = 4\,\mathrm{cm}$ اور $y'(0) = 0$ ہیں۔گیند کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قوت روک نظام میں توانائی کے ضیاع کو ظاہر کرتی ہے جس سے مسلسل گھٹتی ارتعاش (پہلی صورت) یا غیر ارتعاشی حرکت (دوسری اور تیسری صورت) پیدا ہوتی ہے۔

پہلی صورت: $m = 2$ ، $k = 32$ اور $c = 20$ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے

$$2y'' + 20y' + 32y = 0, \quad y(0) = 0.04\,\mathrm{m}, \quad y'(0) = 0$$

damped oscillations[52]

جس کا امتیازی مساوات $2\lambda^2+20\lambda+32=0$ ہے۔ امتیازی مساوات $2(\lambda+8)(\lambda+2)=0$ کے جذر $\lambda_1=-2$ اور $\lambda_2=-8$ ہیں جن سے عمومی حل اور حل کا یک درجی تفرق لکھتے ہیں۔

$$y=c_1e^{-2t}+c_2e^{-8t},\quad y'=-2c_1e^{-2t}-8e^{-8t}$$

ان میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے $c_1+c_2=0.04$ اور $-2c_1-8c_2=0$ ملتا ہے جنہیں حل کرنے سے $c_1=\frac{4}{75}$ اور $c_2=-\frac{1}{75}$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح حرکت کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$y=\frac{4}{75}e^{-2t}-\frac{1}{75}e^{-8t}$$

یہ مسلسل گھٹتی ارتعاش ہے جو آخر کار $t\to\infty$ پر $y\to 0$ ہو گی یعنی بہت دیر بعد گیند ساکن ہو گا۔

دوسری صورت: $c=16$ کی صورت میں امتیازی مساوات $2\lambda^2+16\lambda+32=0$ یعنی $2(\lambda+4)^2=0$ ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda_1=\lambda_2=4$ ہے۔یوں حرکت کی عمومی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y=(c_1+c_2x)e^{-4t}$$

جس میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c_1=0.04$ اور $c_2=0.16$ حاصل ہوتے ہیں جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y=(0.04+0.16t)e^{-4t}$$

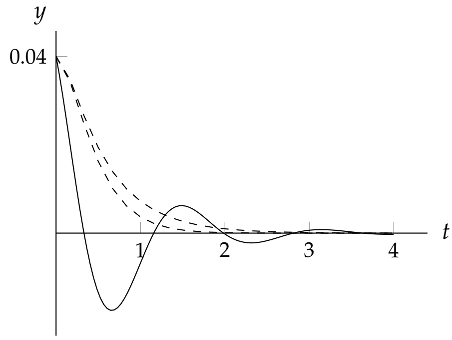
تیسری صورت: تقصیری مستقل $c=5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات $2y''+5y'+32y=0$ ہو گا جس سے امتیازی مساوات $2\lambda^2+5\lambda+32=0$ حاصل ہوتی ہے۔امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $-1.25\mp 3.8i$ ہیں جن سے عمومی مساوات اور عمومی مساوات کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y=e^{-1.25t}\left(A\cos 3.8t+B\sin 3.8t\right)$$
$$y'=-1.25e^{-1.25t}\left(A\cos 3.8t+B\sin 3.8t\right)+3.8e^{-1.25t}\left(-A\sin 3.8t+B\cos 3.8t\right)$$

ابتدائی معلومات کو y کی مساوات میں پر کرنے سے $A=0.04$ حاصل ہوتا ہے جبکہ انہیں y' کی مساوات میں پر کرنے سے $-1.25A+3.8B=0$ یعنی $B=-0.013$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y=e^{-1.25t}\left(0.04\cos 3.8t-0.013\sin 3.8t\right)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلا تقصیری نظام کی قدرتی ارتعاش $\omega_0=\sqrt{\frac{32}{2}}=4$ سے موجودہ تعدد $\omega=3.8$ کم ہے۔شکل 2.12 میں اس مثال کی تینوں صورتوں کو دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.12: مثال 2.17 کی آزاد حرکت کی تین صورتیں۔

□

اس حصے میں بیرونی قوتوں سے پاک اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی آزاد **حرکت**[53] پر غور کیا گیا۔ایسے نظام کو **متجانس** خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔ہم اسی باب میں بیرونی جبری قوتوں کی موجودگی میں پائی جانے والی **جبری حرکت**[54] پر بھی غور کریں گے۔ایسے نظام کو **غیر متجانس** خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

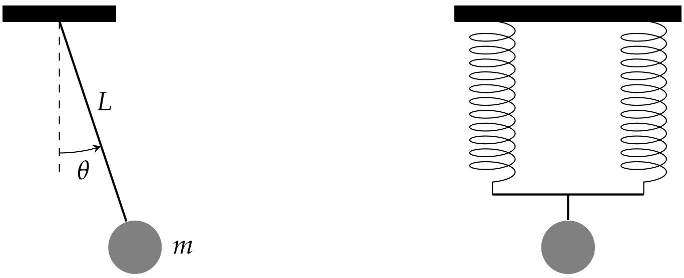
سوالات

سوال 2.58 تا سوال 2.68 بلا تقصیر، ہارمونی ارتعاش کے سوالات ہیں۔

سوال 2.58: ابتدائی قیمت مسئلہ
بلا تقصیر ارتعاش کو مساوات 2.42 ظاہر کرتی ہے۔ابتدائی فاصلہ $y(0)=y_0$ اور ابتدائی رفتار $y'(0)=v_0$ کی صورت میں مخصوص حل لکھیں۔

جواب: $y=y_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

free motion[53]
forced motion[54]



(الف) سوال 2.62 کا نظام۔ (ب) سوال 2.64 کا نظام۔

شکل 2.13: متوازی اسپرنگ اور جھولا کے سوالات۔

سوال 2.59: تعدد

ایک اسپرنگ کی لمبائی $75\,\mathrm{cm}$ ہے۔اس سے $0.25\,\mathrm{kg}$ کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی $85\,\mathrm{cm}$ ہو جاتی ہے۔اس نظام کی تعدد f_0 اور دوری عرصہ T کیا ہوں گے؟

جوابات: $f_0 = 1.58\,\mathrm{Hz}$ ، $T = 0.63\,\mathrm{s}$

سوال 2.60: تعدد

اسپرنگ اور کمیت کی نظام میں کمیت چار گنّا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔مستقلہ اسپرنگ کی قیمت چار گنّا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔

جوابات: کمیت چار گنّا کرنے سے تعدد آدھی ہوتی ہے۔مستقلہ اسپرنگ چار گنّا کرنے سے تعدد دگنی ہوتی ہے۔

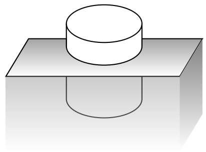
سوال 2.61: ابتدائی رفتار

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں ابتدائی رفتار صفر نہ ہونے کی صورت میں نظام کے تعدد اور رفتار پر کیا اثر ہو گا؟

جواب: نظام کی تعدد پر کوئی اثر نہیں ہو گا البتہ اس سے رفتار بڑھے گی۔

سوال 2.62: متوازی اسپرنگ

چار کلو گرام کی گیند کو $k_1 = 16\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جاتا ہے۔نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ اگر اسی گیند کو $k_2 = 32\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جائے تب نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ دونوں کی لمبائی برابر ہے۔ ان دونوں اسپرنگ کو متوازی جوڑا جاتا ہے۔ایسی صورت میں نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ شکل 2.13-الف کو دیکھیے۔



شکل 2.14: آرشمیدسی اصول؛ سوال 2.65

جوابات: $0.32\,\mathrm{Hz}$ ، $0.45\,\mathrm{Hz}$ ، $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = 0.55\,\mathrm{Hz}$

سوال 2.63: سلسلہ وار اسپرنگ
گزشتہ سوال کے دونوں اسپرنگ کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تعدد حاصل کریں۔

جوابات: $my'' + \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}y = 0$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}} = 0.26\,\mathrm{Hz}$

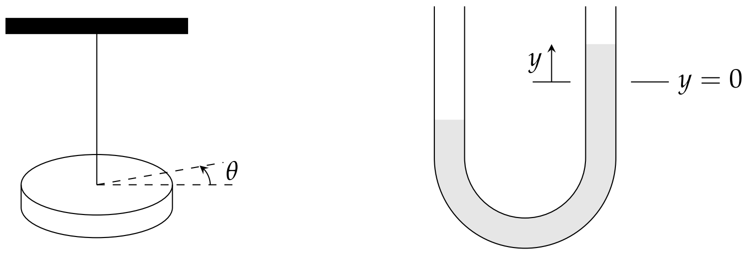
سوال 2.64: جھولا
ایک ہلکے دھاگے سے m کمیت کا گیند لٹکایا شکل 2.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس نظام کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔نہایت چھوٹے زاویے کی صورت میں $\sin\theta \approx \theta$ لکھتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں جس کو حل کرتے ہوئے نظام کی تعدد حاصل کریں۔

حل: گیند کا وزن mg ہے جو نیچے رخ قوت ہے۔اس کا مماس $mg\sin\theta$ ہے جو اسراع پیدا کرتا ہے۔
$L\theta'' = g\sin\theta$ ، $L\theta'' = g\theta$ ، $\theta = \cos\sqrt{\frac{g}{L}}t$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

سوال 2.65: اصول آرشمیدس
اصول آرشمیدس[55] کے تحت جب کسی جسم کو مائع میں ڈبویا جائے تو اس پر قوت اچھال عمل کرتی ہے جس کی مقدار، جسم کے ڈبویے گئے حجم کے برابر، مائع کے وزن جتنی ہوتی ہے۔

ایک بیلن کو سیدھا پانی میں کھڑا کرنے سے اس کا کچھ حصہ پانی میں ڈوب جاتا ہے۔شکل 2.14 میں اس کو ساکن حالت میں دکھایا گیا ہے۔بیلن کا رداس $r = 20\,\mathrm{cm}$ ہے۔اگر بیلن کو نیچے دھکیل کر چھوڑا جائے تو یہ دو سیکنڈ کے دوری عرصے سے اوپر نیچے ارتعاشی حرکت کرتا ہے۔بیلن کی کمیت M دریافت کریں۔پانی کی کثافت $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ ہے۔

[55] Archimedean principle



(ب) مروڑی ارتعاش۔ (الف) نالی میں پانی کا ارتعاش۔

شکل 2.15: سوال 2.67 اور سوال 2.68 کے اشکال۔

جوابات: $M = g\rho\pi r^2 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.8 \times 1000\pi 0.2^2 \left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 124.8\,\mathrm{kg}$

سوال 2.66: زنجیر کا میز سے پھسلنا

ایک پھسلنی میز پر زنجیر سیدھا پڑا ہوا ہے۔ ان کے مابین قوت رگڑ قابل نظر انداز ہے۔ اگر زنجیر کے ایک سر کو میز سے لٹکایا جائے تو پورا زنجیر پھسلتے پھسلتے نیچے گر پڑتا ہے۔ زنجیر کی کل لمبائی L اور کمیت m کلوگرام فی میٹر لیتے ہوئے اس مسئلے کا تفرقی مساوات لکھیں۔ اگر $y(0) = 0$ اور $y'(0) = v_0$ ہو تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جوابات: $mLy'' = mgy$ ، $y = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right)$

سوال 2.67: نالی میں پانی کی ارتعاش

شکل 2.15-الف میں $M = 9\,\mathrm{kg}$ پانی زیر ثقلی قوت نالی میں ارتعاش کرتا ہے۔ نالی کا اندرونی رداس $r = 1.5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ ارتعاش کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

جوابات: $My'' = -2\pi r^2 \rho g y$ ، $T = 5.06\,\mathrm{s}$

سوال 2.68: باریک غیر لچکدار تار سے I_0 **جمودی معیار اثر**[56] کی ٹکی لٹکائی جاتی ہے جو مروڑی ارتعاش کرتی ہے۔ شکل 2.15-ب کو دیکھیے۔ اس نظام کو $I_0\theta'' + k\theta = 0$ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے جہاں θ کو متوازن حال سے ناپا جاتا ہے۔ k مروڑی مستقل (یا اسپرنگ مستقلہ) ہے جس کو $\mathrm{N\,m\,rad^{-1}}$ نیوٹن میٹر فی ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ ابتدائی زاویہ $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ریڈیئن یعنی 45° اور ابتدائی رفتار صفر ہے۔ اس مساوات کو

[56] moment of inertia

$\frac{k}{I_0} = 9\,\mathrm{s}^{-2}$ لیتے ہوئے حل کریں۔تعدد کا کلیہ دریافت کریں۔اس تجربے کو باریک تار کی مروڑی مستقل k حاصل کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ٹکی کا جمودی معیار اثر جانتے ہوئے اور قدرتی تعدد ناپ کر باریک تار کا مروڑی مستقل دریافت کیا جا سکتا ہے۔

جواب: $\theta = \frac{\pi}{4}\cos 3t$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I_0}}$

سوالات 2.69 تا سوال 2.69 میں قصری حرکت پایا جاتا ہے۔

سوال 2.69: زیادہ تقصیر

زیادہ تقصیری صورت میں مساوات 2.47 حل دیتی ہے۔ابتدائی معلومات $y(0) = y_0$ اور $y'(0) = v_0$ ہونے کی صورت میں c_1 اور c_2 دریافت کریں۔

جوابات: $c_1 = \frac{1}{2}[(1+\frac{\alpha}{\beta})y_0 + \frac{v_0}{\beta}]$ ، $c_2 = \frac{1}{2}[(1-\frac{\alpha}{\beta})y_0 - \frac{v_0}{\beta}]$

سوال 2.70: زیادہ تقصیر

زیادہ تقصیری صورت میں ثابت کریں کہ y زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ $y = 0$ سے گزر سکتا ہے۔

سوال 2.71: دھچکا روک

گاڑیوں میں **دھچکا روک**[57] نسب ہوتے ہیں جو گاڑی کی حرکت کو یقینی طور پر غیر ارتعاشی رکھتے ہیں۔صفحہ 118 پر شکل 2.8 دھچکا روک کو ظاہر کرتی ہے۔سوار کو دھچکوں سے پاک سواری اسپرنگ مہیا کرتا ہے جبکہ جاذب ان دھچکوں کی توانائی کو جذب کرتا ہے۔گاڑی بمع سواری کی کمیت کو m ظاہر کرتی ہے۔

کمیت $1300\,\mathrm{kg}$ اور اسپرنگ مستقل $80\,000\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$ ہونے کی صورت میں تقصیری مستقل کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر یقین طور غیر ارتعاشی سواری حاصل ہو گی۔

جواب: $c \geq 20\,396\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

سوال 2.72: تعدد

کم قصری صورت کی ارتعاش کا تعدد ω مساوات 2.49 دیتا ہے۔اس مساوات پر مسئلہ ثنائی کا اطلاق کرتے ہوئے

[57] shock absorber

پہلے دو اجزاء لیں اور مثال 2.17 کی کم قصری حرکت $(c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}})$ کی تعدد ارتعاش حاصل کریں۔موجودہ جواب اور مثال میں حاصل کردہ جوابات میں کتنے فی صد فرق پایا جاتا ہے۔

جوابات: $\omega = \omega_0(1 - \frac{c^2}{8mk})$ ، $\omega = 3.8046$ لہٰذا دونوں جوابات میں $0.13\,\%$ فرق پایا جاتا ہے۔(مثال 2.17 میں تعدد کی بالکل ٹھیک قیمت $\omega = 3.79967$ ہے جسے مثال میں $\omega = 3.8$ لکھا گیا ہے۔)

سوال 2.73: بلا تقصیر نظام کے قدرتی تعدد اور کم تقصیری نظام ($5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$) کے تعدد ارتعاش میں فرق مثال 2.17 کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $4.88\,\%$ ؛ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگرچہ قوت روک تعدد ارتعاش پر فرق ڈالتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔

سوال 2.74: کم قصری ارتعاش کی مثبت چوٹیاں یکساں وقفوں پر پائی جاتی ہیں۔اس وقفے کو دریافت کریں۔

جواب: مساوات 2.51 کی مثبت چوٹیاں $\omega t - \delta = 2n\pi$ پر پائی جاتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2 \cdots$ ہے۔یوں دو چوٹیوں کے درمیان وقفہ $\frac{2\pi}{\omega}$ یعنی $T = \frac{1}{f}$ ہو گا۔

سوال 2.75: لوگارتھمی گھٹاو

کم قصری نظام میں دو قریبی چوٹیوں کی قیمتوں کی شرح ایک مستقل قیمت ہوتی ہے جس کے لوگارتھم کو لوگارتھمی گھٹاو[58] کہتے ہیں۔لوگارتھمی گھٹاو Δ حاصل کریں۔

جواب: $\Delta = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$

سوال 2.76: تقصیری مستقل

ایک کم تقصیری نظام میں $m = 0.25\,\mathrm{kg}$ ہے اور ارتعاش کا دوری عرصہ $5\,\mathrm{s}$ ہے۔بیس چکروں میں چوٹی گھٹ کر $\frac{1}{4}$ گنّا رہ جاتی ہے۔نظام کے تقصیری مستقل کا تخمینہ لگائیں۔

جواب: $\alpha = 0.01386$

---

[58] logarithmic decrement

2.5 یولر کوشی مساوات

سادہ تفرقی مساوات[59]

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{2.52}$$

یولر کوشی مساوات[60] کہلاتا ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔اس میں

$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

پر کرنے سے

$$x^2m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

ملتا ہے جس کو مشترک جزو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے **ذیلی مساوات**[61] $m(m-1) + am + b = 0$ یعنی

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \tag{2.53}$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں $y = x^m$ مساوات 2.52 کا حل اس صورت ہو گا جب m مساوات 2.53 کا جذر ہو۔مساوات 2.53 کے جذر

$$m_1 = \frac{1}{2}(1-a) + \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b}, \quad m_2 = \frac{1}{2}(1-a) - \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b} \tag{2.54}$$

ہیں۔

پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر کی صورت میں دو منفرد حل

$$y_1 = x^{m_1}, \quad y_2 = x^{m_2}$$

ملتے ہیں۔چونکہ ان حل کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں۔اس طرح یہ حل کی اساس ہیں اور انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2} \tag{2.55}$$

[59] لیون آرڈ یولر (1707-1783) سوئزر لینڈ کا رہائشی اور ماہر حساب تھا۔آگستن لوئی کوشی (1789-1857) فرانسیسی ماہر حساب تھا جنہوں نے جدید تجزیے کی بنیاد ڈالی۔

[60] Euler-Cauchy equation

[61] auxiliary equation

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔یہ حل تمام x کے لئے درست ہے۔

مثال 2.18: یولر کوشی مساوات $x^2y'' + 0.5xy' - 1.5y = 0$ سے $m^2 - 0.5m - 1.5m = 0$ ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $m_1 = 1.5$ اور $m_2 = -1$ ہیں۔ان سے اساس $y_1 = x^{\frac{3}{2}}$ ، $y_2 = x^{-1}$ لکھی جا سکتی ہے۔اساس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 x\sqrt{x} + \frac{c_2}{x}$$

□

دوسری صورت: حقیقی دوہرا جذر $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}(1-a)$ اس صورت پایا جاتا ہے جب $b = \frac{1}{4}(1-a)^2$ ہو۔ایسی صورت میں مساوات 2.52 درج ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے

$$x^2y'' + axy' + \frac{1}{4}(1-a)^2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0 \tag{2.56}$$

جس کا ایک حل $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے۔

دوسرا خطی طور غیر تابع حل تخفیف درجہ کی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب پر حصہ 2.1 میں غور کیا گیا ہے۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے پہلا حل y_1 اور دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لیتے ہیں۔یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ اور $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ ہوں گے جنہیں معیاری تفرقی مساوات 2.56 میں پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + \frac{1}{x}(u'y_1 + uy_1') + \frac{(1-a)^2}{4x^2}(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے جزو ضرب اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) + u[y_1'' + \frac{a}{x}y_1' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y_1] = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں دایاں قوسین صفر کے برابر ہو گا اور یوں

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$u'' + u'\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{x}\right) = 0$$

اب چونکہ $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے لہٰذا $y_1' = \frac{1-a}{2}x^{\left(\frac{1-a}{2}-1\right)} = \frac{1-a}{2}\frac{y_1}{x}$ اور $\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1-a}{2x}$ ہو گا جس کو درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$u'' + u'\left[2\left(\frac{1-a}{2x}\right) + \frac{a}{x}\right] = 0 \qquad \implies \qquad u'' + \frac{u'}{x} = 0$$

اس میں $u' = v$ لیتے ہوئے $v' + \frac{v}{x} = 0$ ملتا ہے جس کا حل $v = \frac{1}{x}$ ہے۔یوں $v = u' = \frac{1}{x}$ لکھتے ہوئے تکمل لے کر $u = \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح خطی طور غیر تابع دوسرا حل $y_2 = uy_1 = y_1 \ln x$ ہو گا۔ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^m \qquad m = \frac{1-a}{2} \tag{2.57}$$

مثال 2.19: دوہرا جذر

یولر کوشی مساوات $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ کا ذیلی مساوات $m^2 - 8m + 16 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $m_1 = m_2 = 4$ ہے۔یوں تمام مثبت x کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^4$$

□

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر کی صورت انجینئری نقطہ نظر سے زیادہ اہم نہیں ہے لہٰذا اس کی ایک عدد مثال ہی دیکھتے ہیں۔

مثال 2.20: یولر کوشی مساوات $x^2y'' + 0.8xy' + 9.01y = 0$ کی ذیلی $m^2 - 0.2m + 9.01 = 0$ مساوات ہے جس کے جوڑی دار مخلوط جذر $m_1 = 0.1 + 3i$ اور $m_2 = 0.1 - 3i$ ہیں جہاں $i = \sqrt{-1}$

ہے۔یہاں ایک چال چلاتے ہیں جس کے ذریعہ خیالی عدد i سے چھٹکارا حاصل ہو گا کرتے ہیں یعنی ہم $x = e^{\ln x}$ لکھتے ہیں۔یوں

$$x^{m_1} = x^{0.1+3i} = x^{0.1}\left(e^{\ln x}\right)^{3i} = x^{0.1}e^{(3\ln x)i}$$
$$x^{m_2} = x^{0.1-3i} = x^{0.1}\left(e^{\ln x}\right)^{-3i} = x^{0.1}e^{-(3\ln x)i}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اب صفحہ 101 پر یولر مساوات 2.27 استعمال کرتے ہیں۔

$$x^{m_1} = x^{0.1}e^{(3\ln x)i} = x^{0.2}[\cos(3\ln x) + i\sin(3\ln x)]$$
$$x^{m_2} = x^{0.1}e^{-(3\ln x)i} = x^{0.2}[\cos(3\ln x) - i\sin(3\ln x)]$$

اب دونوں کا مجموعہ لیتے ہوئے دو (2) سے تقسیم کرتے ہیں۔اسی طرح پہلی سے دوسری مساوات منفی کرتے ہوئے $-2i$ سے تقسیم کرتے ہیں۔یوں درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$x^{0.1}\cos(3\ln x), \quad x^{0.1}\sin(3\ln x)$$

ان کا حاصل تقسیم $\tan(3\ln x)$ ہے جو مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا درج بالا دونوں خطی طور غیر تابع ہیں۔اس طرح یہ حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = x^{0.1}[c_1\cos(3\ln x) + c_2\sin(3\ln x)]$$

□

شکل 2.16 میں یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کی تینوں صورتوں کے حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 2.21: دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں ساکن برقی میدان؛ سرحدی قیمت مسئلہ

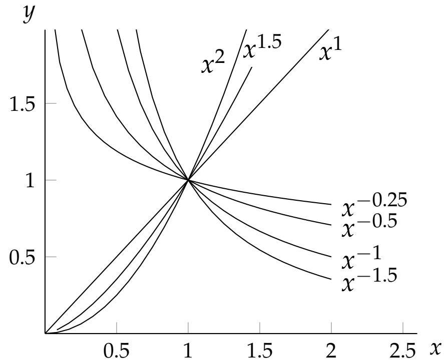
دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں برقی دباو تفرقی مساوات $\rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} = 0$ دیتی ہے۔نلکی کے رداس $\rho_1 = 2\,\mathrm{cm}$ اور $\rho_2 = 5\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ ان پر برقی دباو[62] $v_1 = 50\,\mathrm{V}$ اور $v_2 = 0\,\mathrm{V}$ ہے۔درمیانی خطے کی برقی دباو حاصل کریں۔

حل: یولر کوشی مساوات میں $a = 1$ اور $b = 0$ موجودہ تفرقی مساوات دیتا ہے۔دیے مساوات میں $v = \rho^m$ پر کرتے ہوئے ذیلی مساوات $m^2 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کا دوہرا جذر $m = 0$ ہے۔یوں عمومی حل $v = c_1 + c_2\ln x$ ہو گا۔دیے گئے سرحدی شرائط حل میں پر کرتے

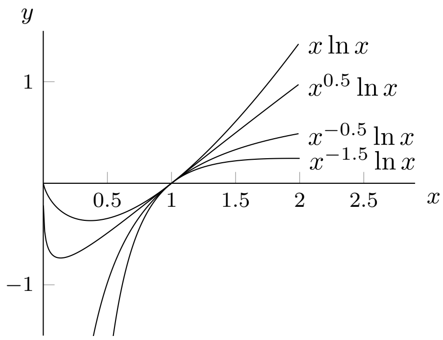
$$50 = c_1 + c_2\ln 0.02, \quad 0 = c_1 + c_2\ln 0.05$$

---

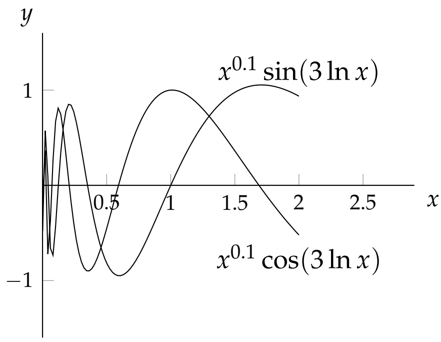
[62] electric voltage



(الف) پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر۔

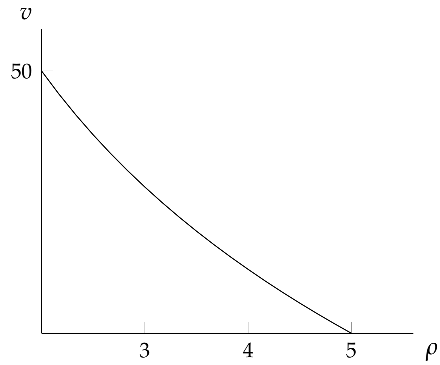


(ب) دوسری صورت: دوہرا جذر۔



(پ) جوڑی دار مخلوط جذر۔

شکل 2.16: یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل۔



شکل 2.17: مثال 2.21 کا حل۔

ہوئے $c_1=-163.471$ اور $c_2=-54.568$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مخصوص حل $y=-163.471-54.568\ln\rho$ ہو گا جسے شکل 2.17 میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 2.22: یولر کوشی مساوات 2.52 میں $x=e^t$ پر کرتے ہوئے اس کو مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات میں تبدیل کریں۔

حل: ہم $y(x)$ کو $y[x(t)]$ یعنی $y(t)$ تصور کرتے ہیں۔یوں زنجیری تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{x^2}$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

انہیں مساوات 2.52 میں پر کرتے

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+ax\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+by=0$$

ہوئے مستقل عددی سر والا سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں $\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\ddot{y}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ ہیں۔

$$\ddot{y}+(a-1)\dot{y}+by=0 \tag{2.58}$$

□

سوالات

سوال 2.77 تا سوال 2.85 حل کریں۔

سوال 2.77:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

جواب: $y = c_1x + c_2x^2$

سوال 2.78:

$$x^2y'' - 6y = 0$$

جواب: $y = c_1x^3 + c_2x^{-2}$

سوال 2.79:

$$x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$$

جواب: $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4}$

سوال 2.80:

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^3$

سوال 2.81:

$$x^2y'' + 11xy' + 25y = 0$$

جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-5}$

سوال 2.82:

$$10x^2y'' + 11xy' - 3y = 0$$

جواب: $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^{-\frac{3}{5}}$

سوال 2.83:

$$x^2y'' + 0.44xy' + 0.0748y = 0$$

جواب: $y = c_1 x^{0.22} + c_2 x^{0.34}$

سوال 2.84:

$$x^2y'' + 0.4xy' + 0.73y = 0$$

جواب: $y = x^{0.3}[c_1 \cos(0.8 \ln x) + c_2 \sin(0.8 \ln x)]$

سوال 2.85:

$$x^2y'' + 2xy' + 4.25y = 0$$

جواب: $y = x^{-0.5}[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)]$

سوال 2.86 تا سوال 2.91 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 2.86:

$$x^2y'' - 0.4xy' + 0.45y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$$

جواب: $y = 7\sqrt{x} - 5x^{0.9}$

سوال 2.87:

$$x^2y'' + 1.08xy' - 0.01713y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$$

جواب: $y = \frac{23}{18}x^{0.23} - \frac{41}{18}x^{-0.31}$

سوال 2.88:

$$35x^2y'' + 57xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -5$$

جواب: $y = \frac{77}{4}x^{-\frac{3}{7}} - \frac{65}{4}x^{-\frac{1}{5}}$

سوال 2.89:

$$6x^2y'' + 19xy' + 6y = 0, \quad y(1) = -3, \quad y'(1) = 1$$

جواب: $y=\frac{6}{5}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{21}{5}x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 2.90:

$$25x^2y''-15xy'+16y=0,\quad y(2)=0,\quad y'(2)=1$$

جواب: $y=2^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}(\ln x-\ln 2)$

سوال 2.91:

$$49x^2y''+77xy'+4y=0,\quad y(2)=3,\quad y'(2)=0$$

جواب: $y=x^{-\frac{2}{7}}(2.93+1.04\ln x)$

2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی

اس حصے میں متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات،

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{2.59}$$

جس کے عددی سر $p(x)$ اور $q(x)$ کوئی بھی **استمراری تفاعل** ہو سکتے ہیں، کے **عمومی حل کی وجودیت**[63] پر غور کیا جائے گا۔ ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.59 اور ابتدائی معلومات

$$y(x_0)=K_0,\quad y'(x_0)=K_1 \tag{2.60}$$

کے ابتدائی قیمت مسئلہ کی مخصوص حل کی یکتائی[64] پر بحث کی جائے گی۔

مسئلہ 2.2 کہتا ہے کہ اس ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل پایا جاتا ہے جو یکتا ہو گا اور مساوات 2.59 کے عمومی حل

$$y=c_1y_1+c_2y_2\qquad c_1, c_2 \text{ اختیاری} \tag{2.61}$$

[63]existence
[64]uniqueness

میں تمام حل شامل ہیں۔ یوں استمراری عددی سر والے متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا۔ نادر حل اس حل کو کہتے ہیں جسے عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

ہمیں مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات یا یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت اور یکتائی جاننے کی ضرورت پیش نہیں آئی چونکہ ان کے حل کے دوران ہی ایسی تمام معلومات سامنے آ جاتی ہیں۔

مسئلہ 2.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت تفرقی مساوات
اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کسی کھلے وقفے I پر استمراری ہوں اور x_0 اس وقفے پر پایا جاتا ہو، تب مساوات 2.59 اور مساوات 2.60 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا مخصوص حل $y(x)$ موجود ہے۔

وجودیت حل کی ثبوت کے لئے وہی بنیادی شرائط درکار ہیں جو صفحہ 73 پر مسئلہ 1.3 کے لئے درکار تھے۔ اس کتاب میں ان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ اگرچہ یکتائی کا ثبوت عموماً آسان ہوتا ہے لیکن موجودہ مسئلہ 2.2 کے یکتائی حل کا ثبوت اتنا آسان نہیں ہے لہٰذا اس کو کتاب کے آخر میں بطور ضمیمہ ا شامل کیا گیا ہے۔

خطی طور غیر تابع حل

آپ کو حصہ 2.4 سے یاد ہو گا کہ کھلے وقفہ I پر عمومی حل **اساس** y_1 ، y_2 پر مشتمل ہوتا ہے جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفے I پر خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت **خطی طور غیر تابع**[65] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.62}$$

سے مراد

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \tag{2.63}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.62 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 **خطی طور تابع**[66] کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.62 کو

[65] linearly independent
[66] linearly dependent

k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\text{(الف)} \quad y_1 = ky_2, \quad \text{(ب)} \quad y_2 = ly_1 \qquad \text{پورے } I \text{ پر} \tag{2.64}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.62 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔(درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا(اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔) خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع حل کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 2.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل

کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 2.62 کے I پر دو حل y_1 اور y_2 اس صورت **خطی طور تابع** ہوں گے جب ان کے **ورونسکی**[67] [68]

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' \tag{2.65}$$

کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W **مکمل صفر**[69] ہو گا۔یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب y_1 اور y_2 **خطی طور غیر تابع** ہوں گے۔

ثبوت :

(الف) y_1 اور y_2 کو I پر خطی طور غیر تابع تصور کریں۔یوں مساوات 2.64-الف یا ب میں سے ایک درست ہو گا۔اگر مساوات 2.64-الف درست ہو تب

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = ky_2y_2' - y_2ky_2' = 0$$

ہو گا۔اسی طرح مساوات 2.64-ب کی صورت میں بھی $W = 0$ ملتا ہے۔

(ب) اس کے الٹ چلتے ہوئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی x_0 پر $W(y_1, y_2) = 0$ سے مراد y_1 اور y_2 کا I پر خطی طور تابع ہونا ہے۔درج ذیل مساوات پر غور کریں جہاں k_1 اور k_2 کو نا معلوم

[67] Wronskian
[68] یوسف ماریاہون[1778-1853] جنہوں نے اپنا نام تبدیل کرتے ہوئے ورونسکی رکھا
[69] identically zero

متغیرات تصور کریں۔

$$k_1y_1(x_0)+k_2y_2(x_0)=0 \\ k_1y_1'(x_0)+k_2y_2'(x_0)=0 \tag{2.66}$$

k_2 حذف کرنے کی نیت سے پہلی مساوات کو $y_2'(x_0)$ اور دوسری کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_1y_1(x_0)y_2'(x_0)-k_1y_1'(x_0)y_2(x_0)=k_1W(y_1(x_0),y_2(x_0))=0 \tag{2.67}$$

اسی طرح k_1 حذف کرنے کے لئے پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں مساوات کا مجموعہ

$$k_2y_1(x_0)y_2'(x_0)-k_2y_2(x_0)y_1'(x_0)=k_2W(y_1(x_0),y_2(x_0))=0 \tag{2.68}$$

لیتے ہیں۔اب اگر x_0 پر W صفر نہ ہوتا تب ہم مساوات 2.67 اور مساوات 2.68 کو W سے تقسیم کرتے ہوئے $k_1=k_2=0$ حاصل کرتے البتہ x_0 پر $W(y_1(x_0),y_2(x_0))=0$ ہے لہٰذا ہم ان مساوات کو W سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔ یوں ہمزاد مساوات 2.66 کا حل k_1 اور k_2 پایا جاتا ہے جہاں k_1 اور k_2 دونوں غیر صفر ہو سکتے ہیں۔ اب ان اعداد k_1 اور k_2 کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل

$$y(x)=k_1y_1(x)+k_2y_2(x) \tag{2.69}$$

لیتے ہیں۔چونکہ مساوات 2.59 متجانس خطی ہے لہٰذا مسئلہ 2.1 (مسئلہ خطی میل) کے تحت یہ تفاعل بھی مساوات 2.59 کا حل ہو گا۔مساوات 2.66 سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل ابتدائی معلومات $y(x_0)=0$ اور $y'(x_0)=0$ پر پورا اترتا ہے۔اب تصور کریں کہ مساوات 2.59 کا دوسرا حل جو انہیں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہو $y^*(x)=0$ ہے۔اب چونکہ مساوات 2.59 میں $p(x)$ اور $q(x)$ استمراری ہیں لہٰذا مسئلہ 2.2 کے تحت اس کا مخصوص حل یکتا ہو گا۔یوں $y(x)$ اور $y^*(x)$ مختلف نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا $y^*(x)=y(x)=0$ یعنی

$$k_1y_1+k_2y_2\equiv 0 \qquad \text{پورے } I \text{ پر} \tag{2.70}$$

ہو گا۔چونکہ k_1 اور k_2 میں کم از کم ایک صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا مساوات 2.70 کہتا ہے کہ I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں۔

(پ) ہم مسئلے کا آخری نقطہ ثابت کرتے ہیں۔اگر کھلے وقفے I پر نقطہ x_0 پر $W(x_0)=0$ ہو تب ثبوت (ب) کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں لہٰذا ثبوت (الف) کے تحت $W\equiv 0$ ہو

گا۔یوں خطی طور تابعیت کی صورت میں ایسا نہیں ہو سکتا ہے کہ $W(x_1) \neq 0$ ہو جہاں x_1 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔اگر ایسا ممکن ہو تب اس سے مراد خطی طور غیر تابعیت ہو گی جیسا کہ دعویٰ کیا گیا ہے۔

□

حساب کی نقطہ نظر سے مساوات 2.65 سے درج ذیل زیادہ آسان مساوات ہے۔

$$W(y_1, y_2) = \begin{cases} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 & (y_1 \neq 0) \\ -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' y_2^2 & (y_2 \neq 0) \end{cases} \tag{2.71}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ورونسکی کو قالب کی مقطع کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جس کو **ورونسکی مقطع**[70] یا حل y_1 اور y_2 کی ورونسکی کہتے ہیں۔

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \tag{2.72}$$

مثال 2.23: مسئلہ 2.3 کا اطلاق
تفرقی مساوات $y'' + \omega^2 y = 0$ کے حل $y_1 = \cos\omega x$ اور $y_2 = \sin\omega x$ ہیں۔ان کی ورونسکی

$$W(\cos\omega x, \sin\omega x) = \begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & -\omega\cos\omega x \end{vmatrix} = \omega\cos^2\omega x + \omega\sin^2\omega x = \omega$$

ہے۔مسئلہ 2.3 کے تحت یہ حل صرف اس صورت میں خطی طور غیر تابع ہوں گے جب $\omega \neq 0$ ہو۔یہی دونوں حل کے حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = \tan\omega x$ سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے جہاں $\omega = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور تابع صورت ظاہر کرتی ہے۔

□

مثال 2.24: دوہرا جذر کی صورت میں مسئلہ 2.3 کا اطلاق
تفرقی مساوات $y'' - 6y' + 9y = 0$ کا (ثابت کریں کہ) عمومی حل $y = (c_1 + c_2x)e^{3x}$ ہے جس کا ورونسکی صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا e^{3x} اور xe^{3x} تمام x پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3xe^{6x} = e^{6x} \neq 0$$

---

[70] Wronskian determinant

□

مساوات 2.59 کے عمومی حل میں تمام حل کی شمولیت

اس حصے کو مساوات 2.59 کے عمومی حل کی وجودیت سے شروع کرتے ہیں۔

مسئلہ 2.4: **وجودیت عمومی حل**
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں مساوات 2.59 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: مسئلہ 2.2 کے تحت I پر مساوات 2.59 کا، ابتدائی معلومات

$$y_1(x_0)=1,\quad y_1'(x_0)=0$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_1(x)$ موجود ہے۔اسی طرح ابتدائی معلومات

$$y_2(x_0)=0,\quad y_2'(x_0)=1$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_2(x)$ بھی موجود ہے۔نقطہ x_0 پر ان کا ورونسکی

$$W(y_1(x_0),y_2(x_0))=y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_2(x_0)y_1'(x_0)=1$$

ہے۔مسئلہ 2.3 کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ مساوات 2.59 کے حل کی اساس ہیں۔اس طرح ثابت ہوا کہ I پر مساوات 2.59 کا عمومی حل $y=c_1y_1+c_2y_2$ ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

□

آئیں اب ثابت کریں کہ عمومی حل اتنا عمومی ہے جتنا کوئی حل عمومی ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 2.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلا وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.59 کے ہر حل $y=Y(x)$ کو

$$Y(x)=C_1y_1+C_2y_2 \tag{2.73}$$

لکھا جا سکتا ہے، جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.59 کی کوئی بھی اساس اور C_1 ، C_2 مناسب مستقل ہیں۔

یوں مساوات 2.59 کا کوئی نادر حل موجود نہیں ہے۔(نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔)

ثبوت: تصور کریں کہ I پر مساوات 2.59 کا $y = Y(x)$ کوئی حل ہے۔اب مسئلہ 2.4 کے تحت I پر تفرقی مساوات 2.59 کا عمومی حل

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{2.74}$$

موجود ہے۔ہم c_1 اور c_2 کی وہ قیمتیں دریافت کرنا چاہتے ہیں جن سے I پر $y(x) = Y(x)$ حاصل ہوتا ہو۔ہم I پر کوئی بھی x_0 چنتے ہوئے پہلے ثابت کرتے ہیں کہ c_1 اور c_2 کی ایسی قیمتیں دریافت کی جا سکتی ہیں کہ x_0 پر $y(x_0) = Y(x_0)$ اور $y'(x_0) = Y'(x_0)$ ہوں۔اس کو مساوات 2.74 کے استعمال سے

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0) \tag{2.75}$$
$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0) \tag{2.76}$$

لکھ سکتے ہیں۔ان ہمزاد مساوات سے c_1 اور c_2 معلوم کرتے ہیں۔مساوات 2.75 کو $y_2'(x_0)$ اور مساوات 2.76 کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لینے سے c_1 حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے مساوات 2.77 ملتی ہے۔اسی طرح c_2 حاصل کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لیتے ہوئے مساوات 2.78 حاصل ہوتی ہے۔ان مساوات میں y_1 ، y_1' ، y_2 ، y_2' ، Y اور Y' کی قیمتیں نقطہ x_0 پر لی گئی ہیں۔

$$c_1 y_1 y_2' - c_1 y_2 y_1' = c_1 W(y_1, y_2) = Y y_2' - y_2 Y \tag{2.77}$$
$$c_2 y_1 y_2' - c_2 y_2 y_1' = c_2 W(y_1, y_2) = y_1 Y - Y y_1' \tag{2.78}$$

اب چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہٰذا ورونسکی کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا ان مساوات سے c_1 اور c_2 حاصل کیے جا سکتے ہیں

$$c_1 = \frac{Y y_2' - y_2 Y}{W} = C_1, \quad c_2 = \frac{y_1 Y - Y y_1'}{W} = C_2$$

جہاں ان منفرد قیمتوں کو C_1 اور C_2 لکھا گیا ہے۔ انہیں مساوات 2.74 میں پر کرتے ہوئے مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ C_1 اور C_2 مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل ہیں لہٰذا ہم ان مساوات سے دیکھتے ہیں کہ

$$y^*(x_0) = Y(x_0), \quad y^{*\prime}(x_0) = Y'(x_0)$$

مسئلہ 2.2 میں جس یکتائی کا ذکر کیا گیا ہے اس کے تحت y^* اور Y تمام I پر ہر جگہ برابر ہوں گے۔

$\square$

سوالات

سوال 2.92: مساوات 2.71 سے مساوات 2.65 حاصل کریں۔

سوال 2.93 تا سوال 2.99 کی ورونسکی حاصل کریں۔حاصل تقسیم سے ثابت کریں کہ یہ خطی طور غیر تابع ہیں اور مسئلہ 2.3 سے بھی اس بات کی تصدیق کریں

سوال 2.93: $e^{2x}, e^{-1.2x}$
جوابات: $\frac{e^{2x}}{e^{-1.2x}} = e^{3.2x} \neq c$ ، $W = -3.2e^{0.8x} \neq 0$

سوال 2.94: $e^{2.4x}, e^{1.1x}$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = e^{1.3x} \neq c$ ، $W = -1.3e^{3.5x} \neq 0$

سوال 2.95: $x, \frac{1}{x}$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = x^2 \neq c$ ، $W = -2x^{-2} \neq 0$

سوال 2.96: x, x^3
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = x^{-2} \neq c$ ، $W = 2x^3 \neq 0$

سوال 2.97: $e^{-0.2x}\sin 3x, e^{-0.2x}\cos 3x$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2}=\tan 3x\neq c$ ، $W=3e^{-0.4x}\neq 0$

سوال 2.98: $e^{-ax}\sinh kx, e^{-ax}\cosh kx$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2}=\tanh kx\neq c$ ، $W=-ke^{-2ax}\neq 0$

سوال 2.99: $x^a\sin(k\ln x), x^a\cos(k\ln x)$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2}=\tan(k\ln x)\neq c$ ، $W=-kx^{2a-1}\neq 0$

سوال 2.100 تا سوال 2.106 میں تفرقی مساوات کے حل دیے گئے ہیں۔ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ ورونسکی کی مدد سے ثابت کریں کہ دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں اور ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.100: $\sin 3x,\ \cos 3x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-3$
جوابات: $y''+9y=0$ ، $W=-3\neq 0$ ، $y=2\cos 3x-\sin 3x$

سوال 2.101: $x^3,\ x^{-4},\quad y(1)=-1,\quad y'(1)=2$
جوابات: $x^2y''+2xy'-12y=0$ ، $W=-\frac{7}{x^2}\neq 0$ ، $y=-\frac{2x^3}{7}-\frac{5x^{-4}}{7}$

سوال 2.102: $e^{-1.2x}\sin 0.8x,\ e^{-1.2x}\cos 0.8x,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=7$
جوابات: $y''+2.4y'+2.08y=0$ ، $W=-0.8e^{-2.4x}\neq 0$ ،
$y=e^{-\frac{6}{5}x}(\frac{65}{4}\sin\frac{4x}{5}+5\cos\frac{4x}{5})$

سوال 2.103: $x^3,\ x^3\ln x,\quad y(1)=2,\quad y'(1)=8$
جوابات: $x^2y''-5xy'+9y=0$ ، $W=x^5\neq 0$ ، $y=2x^3(1+\ln x)$

سوال 2.104: $1,\ e^{3x},\quad y(0)=1.5,\quad y'(0)=-2.5$
جوابات: $y''-3y'=0$ ، $W=3e^{3x}\neq 0$ ، $y=\frac{8}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}$

سوال 2.105: $e^{-kx}\sin\pi x,\ e^{-kx}\cos\pi x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-k-\pi$
جوابات: $y''+2ky'+(k^2+\pi^2)y=0$ ، $W=-\pi e^{-2kx}\neq 0$ ،
$y=e^{-kx}(\sin\pi x-\cos\pi x)$

سوال 2.106: $\sinh 1.8x,\ \cosh 1.8x,\quad y(0)=14.2,\quad y'(0)=16.38$
جوابات: $y''-3.24y=0$ ، $W=-1.8\neq 0$ ،
$y=9.1\sinh 1.8x+14.2\cosh 1.8x$

سوال 2.107: تفرقی مساوات $y'' - y = 0$ کا عمومی حل قوت نمائی تفاعل اور بذلولی[71] تفاعل کی صورت میں لکھیں۔دونوں صورتوں کے مستقل کا تعلق کیا ہے؟

جوابات: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ، $y = c_a \sinh x + c_b \cosh x$ ، $c_a = c_1 - c_2$ ، $c_b = c_1 + c_2$

2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات

اس باب میں اب تک متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔یہاں سے باب کے اختتام تک غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔درج ذیل غیر متجانس خطی تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جہاں $r \not\equiv 0$ ہے۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.79}$$

ہم دیکھیں گے کہ مساوات 2.79 کا عمومی حل، مطابقتی متجانس مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.80}$$

کے عمومی حل اور مساوات 2.80 کے ایک مخصوص حل کا مجموعہ ہو گا۔ مساوات 2.79 کے عمومی حل اور مخصوص حل کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف : عمومی حل اور مخصوص حل
کھلے وقفہ I پر غیر متجانس مساوات 2.79 کا عمومی حل

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{2.81}$$

ہو گا جہاں I پر $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ متجانس مساوات 2.80 کا عمومی حل ہے اور I پر y_p مساوات 2.79 کا کوئی بھی حل ہے جس میں مستقل نہیں پایا جاتا۔

مساوات 2.79 کا مخصوص حل، مساوات 2.81 کے c_1 اور c_2 میں خصوصی قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔

[71] hyperbolic

اب ہمیں حل کی ان تعریف کا جواز پیش کرنا ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.79 کا حل y_p حاصل کرنا ہو گا۔پس ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 2.81 کا عمومی حل مساوات 2.79 پر پورا اترتا ہے اور یہ کہ مساوات 2.79 اور مساوات 2.80 کے حل کا آپس میں سادہ تعلق ہے۔

مسئلہ 2.6: مساوات 2.79 اور مساوات 2.80 کے حل کا آپس میں تعلق

(الف) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے حل y اور اسی وقفے پر مساوات 2.80 کے حل $\tilde{y}$ کا مجموعہ I پر مساوات 2.79 کا حل ہے۔بالخصوص مساوات 2.81 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کا حل ہو گا۔

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے دو حل کا فرق I پر مساوات 2.80 کا حل ہے۔

ثبوت:

(الف) مساوات 2.79 کے بائیں ہاتھ کو $L[y]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں I پر مساوات 2.79 کے کسی بھی حل y اور مساوات 2.80 کے کسی بھی حل $\tilde{y}$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L[y+\tilde{y}] = L[y] + L[\tilde{y}] = r + 0 = r$$

(ب) کھلے وقفے I پر مساوات 2.79 کے کسی بھی حل y اور y^* کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L[y-y^*] = L[y] - L[y^*] = r - r = 0$$

□

ہم جانتے ہیں کہ متجانس مساوات 2.80 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہوتے ہیں۔اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متجانس مساوات 2.79 کے عمومی حل میں اس کے تمام حل شامل ہیں۔

مسئلہ 2.7: غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.79 کا ہر حل، مساوات

2.81 میں دیے گئے عمومی حل کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر y^*، مساوات 2.79 کا کوئی حل ہے جبکہ x_0 اس وقفے پر کوئی x ہے۔اسی طرح مساوات 2.81 کھلے وقفے پر مساوات 2.79 کا کوئی عمومی حل ہے۔یہ حل موجود ہے۔یقیناً $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ مسئلہ 2.4 کے تحت موجود ہے جبکہ y_p کی وجودیت حصہ 2.10 میں دکھائی جائے گی۔اب مسئلہ 2.6-ب کے تحت $Y = y^* - y_p$ کھلے وقفے پر مساوات 2.80 کا حل ہے۔نقطہ x_0 پر

$$Y(x_0) = y^*(x_0) - y_p(x_0), \quad Y'(x_0) = y^{*\prime}(x_0) - y_p'(x_0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔کھلے وقفے I پر، مسئلہ 2.2 کے مطابق، کسی بھی ابتدائی معلومات کی طرح، ان معلومات پر پورا اترتا ہوا، مساوات 2.80 کا مخصوص حل موجود ہے جسے y_h میں c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے $y^* = Y + y_p$ سے مسئلہ کا دعویٰ ثابت ہوتا ہے۔

□

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

آپ نے دیکھا کہ مساوات 2.79 یا اس پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 2.80 کو حل کرنا ہو گا اور مساوات 2.79 کا کوئی بھی حل y_p تلاش کرنا ہو گا۔اس طرح عمومی حل 2.81 حاصل ہو گا۔

مساوات 2.79 کا حل y_p حاصل کرنے کی ایک ترکیب کو **نا معلوم عددی سر کی ترکیب**[72] کہتے ہیں۔یہ ترکیب نہایت آسان ہے۔ اس ترکیب سے ارتعاشی نظام عمدگی سے حل ہوتے ہیں لہٰذا اسے انجینئری شعبے میں مقبولیت حاصل ہے۔اس باب کے آخری حصے میں عمومی ترکیب پر غور کیا جائے گا جو نسبتاً مشکل ترکیب ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب ان خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{2.82}$$

[72] method of undetermined coefficients

کے حل کے لئے موزوں ہے جس کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہوں اور $r(x)$ قوت نمائی تفاعل ہو یا x کی طاقت ہو یا سائن نما تفاعل ہو اور یا ان تفاعل کا مجموعہ یا حاصل ضرب ہو۔ایسی تفاعل کی تفرقات بھی یہی تفاعل ہوتی ہیں۔مثلاً x^3 کے تفرقات $3x^2$ ، $6x$ اور 6 ہیں جو از خود x کی طاقت ہیں۔اسی طرح $\sin \omega x$ کا ایک درجی تفرق $\omega \cos \omega x$ جبکہ دو درجی تفرق $-\omega^2 \sin \omega x$ ہے۔یہ دونوں تفرقات از خود سائن نما تفاعل ہیں۔

اس ترکیب میں y_p کو $r(x)$ اور اس کے تمام تفرقات کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔مجموعہ لکھتے ہوئے ہر رکن کو نا معلوم مستقل سے ضرب دیا جاتا ہے۔ y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.82 میں پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کے یکساں اجزاء کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے نا معلوم مستقل دریافت کئے جاتے ہیں۔تفاعل $r(x)$ سے y_p جدول 2.2 کے تحت لکھی جاتی ہے۔تفاعل $r(x)$ سے y_p درج ذیل قواعد کے تحت لکھی جاتی ہے۔

بنیادی قاعدہ: اگر مساوات 2.82 کا $r(x)$ جدول 2.2 کے دائیں قطار میں دیا گیا ہو تب اس تفاعل کے صف سے $y_p(x)$ حاصل کریں۔حاصل y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.2 میں پر کرتے ہوئے نا معلوم عددی سر کی قیمت دریافت کریں۔

ترمیمی قاعدہ: اگر y_p کا کوئی رکن تفاعل مساوات 2.82 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل ہو تب اس رکن کو x سے ضرب دے کر y_p میں شامل کریں۔(اگر یہ حل مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل کیا گیا ہو تب اس رکن کو x^2 سے ضرب دیں۔)

مجموعے کا قاعدہ: اگر $r(x)$ جدول 2.2 کے دوسرے قالب کے اجزاء کا مجموعہ ہو تب $y_p(x)$ کو جدول کے تیسرے قالب سے ان اجزاء کے مطابقتی تفاعل کے مجموعے کی صورت میں لکھا جائے گا۔

$r(x)$ صرف ایک رکن پر مشتمل ہونے کی صورت میں بنیادی قاعدہ استعال ہو گا۔ترمیمی قاعدہ استعال کرنے سے پہلے متجانس مساوات حل کرنا ہو گا۔اگر $r = r_1$ کی صورت میں مساوات 2.82 کا حل y_{p1} ہو اور $r = r_2$ کی صورت میں اس کا حل y_{p2} ہو تب $r = r_1 + r_2$ کی صورت میں اس کا حل $y_{p1} + y_{p2}$ ہو گا۔یہ حقیقت مجموعے کا قاعدہ دیتی ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب خود اصلاحی ہے۔یوں y_p چنتے ہوئے کم اجزاء لینے سے تضاد پیدا ہو گا اور عددی سر حاصل کرنا ممکن نہ ہو گا۔زیادہ اجزاء لینے سے زائد ارکان کے عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوں گے۔

جدول 2.2: نامعلوم عددی سر کی ترکیب

$r(x)$ کے ارکان	$y_p(x)$ کے ارکان
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \quad (n = 0, 1, \cdots)$	$k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$
$k \cos \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$k \sin \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$ke^{\alpha x} \cos \omega x$	$e^{\alpha x}(K \cos \omega x + M \sin \omega x)$
$ke^{\alpha x} \sin \omega x$	$e^{\alpha x}(K \cos \omega x + M \sin \omega x)$

آئیں مثال 2.25 تا مثال 2.27 کی مدد سے اس ترکیب کو مزید سمجھیں۔

مثال 2.25: بنیادی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تلاش کریں۔

$$y'' + 9y = 0.2x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 9y = 0$ کا حل y_h درج ذیل ہے۔

$$y_h = A \cos 3x + B \sin 3x$$

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: اگر ہم $y_p = Kx^2$ چننے تب $y'_p = 2Kx$ اور $y'' = 2K$ ہو گے جنہیں دیے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے $2K + 9Kx^2 = 0.2x^2$ ملتا ہے۔یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت تمام x کے لئے درست ہو سکتی ہے کہ دونوں جانب x^2 کے عددی سر برابر ہوں۔اسی طرح x^1 یا x^0 کے عددی سر بھی دونوں اطراف برابر ہونا ضروری ہے۔ اس کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہوئے $2K = 0$ اور $9K = 0.2$ لکھا جائے گا جس سے $K = 0$ اور $K = \frac{0.2}{9}$ حاصل ہوتا ہے جو تضاد کی صورت حال ہے۔یوں اس y_p کو رد کیا جاتا ہے۔

آئیں اب دیے گئے قواعد کے تحت جدول 2.2 سے y_p لکھیں۔جدول کی دوسری صف کے تحت درج ذیل لکھا جائے گا

$$y_p = K_2 x^2 + K_1 x + K_0$$

جس کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(2K_2) + 9(K_2 x^2 + K_1 x + K_0) = 0.2x^2 \implies 9K_2 x^2 + 9K_1 x + 2K_2 + 9K_0 = 0.2x^2$$

اس مساوات کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔یوں بائیں جانب x^2 کا عددی سر $9K_2$ ہے جبکہ دائیں جانب یہ 0.2 کے برابر ہے۔انہیں آپس میں برابر پر کیا جاتا ہے۔اسی طرح بائیں جانب x^1 کا عددی سر $9K_1$ ہے جبکہ دائیں جانب ایسا کوئی رکن نہیں پایا جاتا لہٰذا دائیں جانب x^1 کا عددی سر صفر کے برابر ہے۔اسی طرح x^0 کا عددی سر بائیں جانب $2K_2 + 9K_0$ اور دائیں جانب صفر ہے۔

$$9K_2 = 0.2, \quad 9K_1 = 0, \quad 2K_2 + 9K_0 = 0$$

ان تین ہمزاد مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے $K_2 = \frac{1}{45}$ ، $K_1 = 0$ اور $K_0 = -\frac{2}{405}$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $y_p = \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = y_h + y_p = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

ہو گا۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ پر $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $1 = A - \frac{2}{405}$ لکھا جائے گا جس سے $A = \frac{407}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $y'(0) = -5$ کو استعمال کرتے ہوئے $3B = -6$ لکھا جائے گا جس سے $B = -2$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

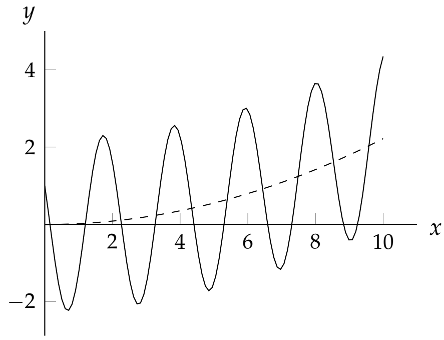
$$y = \frac{407}{405}\cos 3x - 2\sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

مخصوص حل کو شکل 2.18 میں دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر y_p کو ظاہر کرتی ہے۔مخصوص حل y_p کے دونوں اطراف ارتعاش کر رہی ہے۔ □

مثال 2.26: ترمیمی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 2.4y' + 1.44y = -5e^{-1.2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2.4\lambda + 1.44 = 0$ یعنی $(\lambda + 1.2)^2 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1.2$ ہے جس سے $y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے۔



شکل 2.18: مثال 2.25 کا مخصوص حل۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: تفرقی مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل $e^{-1.2x}$ سے عام طور جدول 2.2 کو دیکھ کر $y_p = Ce^{-1.2x}$ لکھا جاتا البتہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تفاعل متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل حل ہے۔یوں ترمیمی قاعدے کے تحت منتخب تفاعل کو x^2 سے ضرب دینا ہو گا۔یوں درج ذیل چننا جائے گا

$$y_p = Cx^2e^{-1.2x}$$

جس کے تفرقات $y_p' = (2x - 1.2x^2)Ce^{-1.2x}$ اور $y_p'' = (1.44x^2 - 4.8x + 2)Ce^{-1.2x}$ ہیں۔ان تمام کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں جہاں دونوں اطراف $e^{-1.2x}$ کو حذف کیا گیا ہے۔

$$(1.44x^2 - 4.8x + 2)C + 2.4(2x - 1.2x^2)C + 1.44Cx^2 = -5$$

دونوں اطراف x^2 ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھے ہوئے $0 = 0$ ، $0 = 0$ اور $2C = -5$ لکھا جاتا ہے جس سے $C = -2.5$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $y_p = -2.5x^2e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

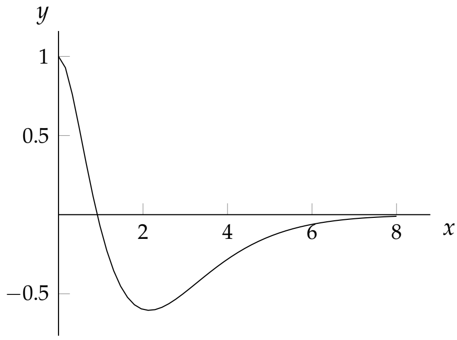
$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x} - 2.5x^2e^{-1.2x}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ ، $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $c_1 = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ y کے تفرق

$$y' = [3x^2 - (1.2c_2 + 5)x + c_2 - 1.2c_1]e^{-1.2x}$$

میں $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $0 = 2c_2 - 1.2c_1$ یعنی $c_2 = 1.2$ ملتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y = (1 + 1.2x - 2.5x^2)e^{-1.2x}$$



شکل 2.19: مثال 2.26 کا مخصوص حل۔

مخصوص حل کو شکل 2.19 میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 2.27: مجموعے کا قاعدہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y''3y' + 2y = 0.2\cos x + 0.1x - 0.4, \quad y(0) = -2.1, \quad y'(0) = 3.2$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 3y' + 2y = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ یعنی $(\lambda+2)(\lambda+1) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -2$ ہیں جن سے $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: غیر متجانس مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل کے تحت جدول 2.2 سے $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ لکھتے ہیں جہاں

$$y_{p1} = K\cos x + M\sin x, \quad y_{p2} = K_1x + K_0$$

کے برابر ہیں۔ یوں $y_p = K\cos x + M\sin x + K_1x + K_0$ اور اس کے تفرقات

$$y_p' = -K\sin x + M\cos x + K_1, \quad y_p'' = -K\cos x - M\sin x$$

کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
&(-K\cos x - M\sin x) + 3(-K\sin x + M\cos x + K_1)\\
&\qquad + 2(K\cos x + M\sin x + K_1 x + K_0) = 0.2\cos x + 0.1x - 0.4
\end{aligned}
$$

دونوں اطراف $\cos x$ ، $\sin x$ ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھتے

$$
-K + 3M + 2K = 0.2, \quad -M - 3K + 2M = 0, \quad 2K_1 = 0.1, \quad 3K_1 + 2K_0 = -0.4
$$

ہوئے حل کرنے سے $K_0 = -\frac{11}{40}$ ، $K_1 = \frac{1}{20}$ ، $M = \frac{3}{50}$ اور $K = \frac{1}{50}$ ملتے ہیں لہٰذا

$$
y_p = \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}
$$

لکھا جائے گا جس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$
y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: y اور y' میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$
c_1 + c_2 + \frac{1}{50} - \frac{11}{40} = -2.1, \quad -c_1 - 2c_2 + \frac{3}{50} + \frac{1}{20} = 3.2
$$

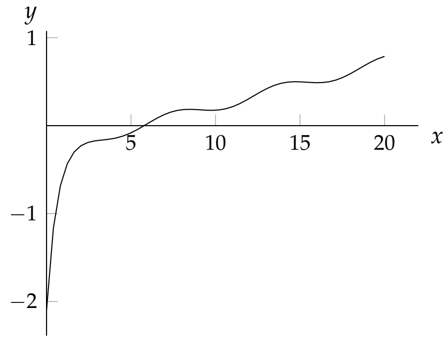
جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{3}{5}$ اور $c_2 = -\frac{249}{200}$ ملتے ہیں۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$
y = -\frac{3}{5}e^{-x} - \frac{249}{200}e^{-2x} + \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}
$$

مخصوص حل کو شکل 2.20 میں دکھایا گیا ہے۔ □

استحکام

کسی بھی انجینئری نظام کا مستحکم ہونا نہایت اہم ہوتا ہے۔مساوات 2.82 کے مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دونوں جذر منفی یا دونوں جذر کے حقیقی حصے منفی ہونے کی صورت میں نظام اور تفرقی مساوات کو



شکل 2.20: مثال 2.27 کا مخصوص حل۔

مستحکم[73] کہتے ہیں۔ایسی صورت میں $t \to \infty$ پر $y_h \to 0$ ہو گا لہٰذا عارضی حل $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حل y_p کے قریب ہو گا۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں نظام **غیر مستحکم**[74] کہلاتا ہے۔چونکہ مثال 2.25 میں امتیازی مساوات کے جذر کے حقیقی حصے منفی مقدار نہیں ہیں لہٰذا یہ غیر مستحکم نظام کو ظاہر کرتا ہے۔

اگلے دو حصوں میں ان مساوات کا استعمال ہو گا۔

سوالات

سوال 2.108 تا سوال 2.117 میں دیے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کے حقیقی عمومی حل دریافت کریں۔

سوال 2.108: $y'' - y' - 6y = e^{-1.5x}$
جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{4}{9} e^{-1.5x}$

سوال 2.109: $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$
جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} - (1+x) e^{-3x}$

سوال 2.110: $4y'' + 12y' + 9y = 4^{-1.5x}$
جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{-1.5x} + \frac{x^2}{2} e^{-1.5x}$

---

[73] stable
[74] unstable

سوال 2.111: $4y'' + 2y' + 3y = 4\cos 3x$
جواب: $y = c_1 e^{-0.5x} + c_2 e^{-1.5x} + \frac{32}{555}\sin 3x - \frac{44}{555}\cos 3x$

سوال 2.112: $y'' + 4y = \sin 2x$
جواب: $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - 0.5x\cos 2x$

سوال 2.113: $9y'' + 4y = e^{-2x}\sin\frac{2x}{3}$
جواب: $y = c_1 \cos\frac{2x}{3} + c_2 \sin\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2x}}{156}(2\cos\frac{2x}{3} + 3\sin\frac{2x}{3})$

سوال 2.114: $y'' + 3y' + 2y = x^2$
جواب: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{2x^2 - 6x + 7}{4}$

سوال 2.115: $y'' + 9y = 3\sin x + \sin 3x$
جواب: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{3}{8}\sin x - \frac{x}{6}\cos 3x$

سوال 2.116: $y'' + 8y' + 15y = 0.5x$
جواب: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-5x} + \frac{15x - 8}{450}$

سوال 2.117: $y'' + 2y' + y = x\cos x$
جواب: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + 0.5\cos x + 0.5(x-1)\sin x$

سوال 2.118 تا سوال 2.130 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلوں کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.118: $y'' + 5y' + 6y = 0.2e^{-1.5x}, \quad y(0) = 1.2, \quad y'(0) = -0.5$
جواب: $y = -\frac{4}{15}e^{-1.5x} + \frac{27}{10}e^{-2x} - \frac{53}{30}e^{-3x}$

سوال 2.119: $y'' + 2.7y' + 1.8y = 3.4e^{-1.2x}, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -3$
جواب: $y = (\frac{102x - 340}{9})e^{-1.2x} - 20e^{-1.2x} + \frac{302}{9}e^{-1.5x}$

سوال 2.120: $y'' + 6y' + 9y = 1.1e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
جواب: $y = 1.1e^{-2x} + (0.9x - 0.1)e^{-3x}$

سوال 2.121: $y'' + 8y' + 16y = 0.7e^{-4x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = \frac{7}{20}x^2 e^{-4x} + (6x + 2)e^{-4x}$

سوال 2.122: $4y'' + 8y' + 3y = 24x^2, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = -101e^{-0.5x} + \frac{59}{9}e^{-1.5x} + \frac{72x^2-384x+832}{9}$

سوال 2.123: $4y'' + 8y' + 3y = 2.4e^{-0.5x} + 8x^2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = (\frac{3x}{5} - \frac{301}{10})e^{-0.5x} + \frac{617}{270}e^{-1.5x} + \frac{8x^2}{3} - \frac{128x}{9} + \frac{832}{27}$

سوال 2.124: $6y'' + 29y' + 35y = 6\cos x, \quad y(0) = 0.5, \quad y'(0) = -0.2$
جواب: $y = \frac{3}{29}\cos x + \frac{3}{29}\sin x + \frac{1197}{290}e^{-\frac{7}{3}x} - \frac{541}{145}e^{-\frac{5}{2}x}$

سوال 2.125: $y'' + 9y = \cos 3x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.3$
جواب: $y = \frac{1}{5}\cos 3x + (\frac{x}{6} + \frac{1}{10})\sin 3x$

سوال 2.126: $8y'' - 6y' + y = 6\sinh x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.1$
جواب: $y = e^x - \frac{19}{5}e^{0.5x} + \frac{16}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.127: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 3\ln x - 4, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y_p = \ln x$
جواب: $y = \frac{1}{3}\ln x + \frac{4}{9} + \frac{5x^3}{9} - x$

سوال 2.128: $y'' + 2y' + 10y = 17\sin x - 37\sin 3x, \quad y(0) = 6.6, \quad y'(0) = -2.2$
جواب: $y = e^{-x}\cos 3x - \sin 3x + 6\cos 3x + \frac{9}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$

سوال 2.129: $8y'' - 6y' + y = 6\sinh x, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0.05$
جواب: $y = e^x - 4e^{0.5x} + \frac{17}{5}e^{0.25x} - \frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.130: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.5$
جواب: $y = (1 + x - 0.25\sin 2x)e^{-2x}$

2.8 جبری ارتعاش۔ گمک

ہم اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر حصہ 2.4 میں غور کر چکے ہیں جہاں اس نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{2.83}$$

سے ظاہر کیا گیا جہاں، ساکن حالت میں گیند کے مقام سے، حرکت کی صورت میں گیند کا فاصلہ $y(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حصہ 2.4 میں نظام پر کوئی بیرونی قوت لاگو نہیں کیا گیا۔نظام کی حرکت صرف اور صرف نظام کی اندرونی قوتوں کی بنا تھی۔قوت جمود my'' ، قوت بحالی ky اور قوت روک cy' نظام کی اندرونی قوتیں تھیں۔

آگے بڑھتے ہوئے اس نظام میں بیرونی قوت $r(t)$ کا اضافہ کرتے ہیں۔شکل 2.21 میں ایسا نظام دکھایا گیا ہے۔بیرونی قوت $r(t)$ انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔اس نظام کی نمونہ کشی درج ذیل تفرقی مساوات کرتی ہے۔

$$my'' + cy' + ky = r(t) \tag{2.84}$$

میکانی طور پر اس مساوات کا مطلب ہے کہ ہر لمحہ t پر اندرونی قوتوں کا مجموعہ بیرونی قوت $r(t)$ کے برابر ہے۔اس نظام میں گیند کی حرکت کو جبری حرکت[75] کہتے ہیں جبکہ بیرونی قوت کو **جبری قوت**[76] یا **داخلی قوت**[77] کہتے ہیں۔گیند کی حرکت کو نظام کا **رد عمل**[78] یا نظام کا **ماحصل**[79] بھی کہا جاتا ہے۔

ہمیں **دوری**[80] بیرونی قوتوں میں زیادہ دلچسپی ہے لہٰذا ہم

$$r(t) = F_0 \cos \omega t \qquad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

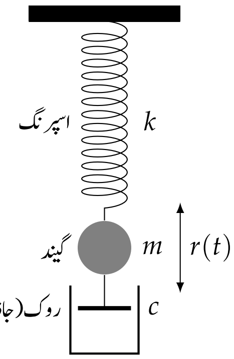
طرز کے قوتوں پر توجہ دیں گے۔یوں غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t \tag{2.85}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے حل سے بنیادی اہمیت کے حقائق حاصل ہوں گے جن سے **گمک**[81] کی نمونہ کشی ممکن ہو گی۔

---

[75] forced motion
[76] forcing function
[77] input force
[78] response
[79] output
[80] periodic
[81] resonance



شکل 2.21: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

غیر متجانس مساوات کا حل

ہم نے حصہ 2.7 میں دیکھا کہ غیر متجانس مساوات 2.85 کا عمومی حل متجانس مساوات 2.83 کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.85 کے کوئی بھی حل y_p کا مجموعہ ہے۔ہم y_p کو حصہ 2.7 کے نا معلوم عدد سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔یوں

$$y_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{2.86}$$

اور اس کے تفرقات

$$y_p'(t) = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t, \quad y_p''(t) = -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t$$

کو مساوات 2.85 میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} m(-\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t) + c(-\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t) \\ + k(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = F_0\cos\omega t \end{aligned}$$

دونوں اطراف کے $\cos\omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے اور دونوں اطراف $\sin\omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے ہمزاد مساوات

$$(k - m\omega^2)a + c\omega b = F_0, \quad -c\omega a + (k - m\omega^2)b = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان ہمزاد مساوات کو a اور b کے لئے حل کرتے ہیں۔ b حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $-c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(k - m\omega^2)^2 a + c^2\omega^2 a = F_0(k - m\omega^2)$$

اسی طرح a حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$c^2\omega^2 b + (k - m\omega^2)^2 b = F_0 c\omega$$

ان مساوات میں جزو $c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2$ صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا دونوں مساوات کو اس جزو سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے a اور b حاصل کرتے ہیں۔

$$a = F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

اگر حصہ 2.4 کی طرح $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ لکھا جائے تب $k = m\omega_0^2$ ہو گا اور

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2} \tag{2.87}$$

ہوں گے۔

اس طرح غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 2.85 کا عمومی حل

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{2.88}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y_h(t)$ متجانس مساوات 2.83 کا عمومی حل ہے اور $y_p(t)$ مساوات 2.86 میں دیا گیا ہے جس میں a اور b کی قیمتیں مساوات 2.87 سے پر کی گئی ہیں۔

آئیں اب اس میکانی نظام کی دو بالکل مختلف صورتوں پر غور کریں۔پہلی صورت $c = 0$ غیر قصری ہے جبکہ دوسری صورت $c > 0$ تقصیری ہے۔

پہلی صورت: بلا تقصیر جبری ارتعاش۔گمک

اگر نظام میں قوت روک اتنا کم ہو کہ دورانیہ غور کے دوران اس کا اثر قابل نظر انداز ہو تب $c = 0$ لیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 2.87 سے $a = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ اور $b = 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مساوات 2.86

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos\omega t = \frac{F_0}{k[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]} \cos\omega t \tag{2.89}$$

لکھا جائے گا جہاں $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یہاں ضروری ہے کہ $\omega \neq \omega_0$ فرض کیا جائے جس کا مطلب ہے کہ جبری قوت کی تعدد $f = \frac{\omega}{2\pi}$ بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ سے مختلف فرض کی گئی ہے۔(بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد کے لئے مساوات 2.42 دیکھیں۔) یوں مساوات 2.89 اور مساوات 2.44 کی مدد سے بلا تقصیر نظام کی عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t \tag{2.90}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ نظام کا رد عمل دو مختلف تعدد کے ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

گمک

مساوات 2.89 کا حیطہ

$$a = \frac{F_0}{k}\rho, \quad \rho = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{2.91}$$

ω اور ω_0 پر منحصر ہے۔ $\omega \to \omega_0$ کرنے سے $\rho \to \infty$ اور $a \to \infty$ ہو گا۔ داخلی جبری قوت کی تعدد کو نظام کی قدرتی تعدد کے برابر $(\omega = \omega_0)$ کرنے سے انتہائی زیادہ حیطے کی پیدا ارتعاش کو گمک[82] کہتے ہیں۔ ρ کو گمکی جزو[83] کہتے ہیں جسے شکل 2.22 میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 2.91 سے $\frac{\rho}{k} = \frac{a_0}{F_0}$ لکھا جا سکتا ہے جو مخصوص حل y_p اور داخلی جبری قوت کے حیطوں کا تناسب ہے۔ہم جلد دیکھیں گے کہ ارتعاشی نظام میں گمک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ گمک کی صورت میں غیر متجانس مساوات 2.85 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

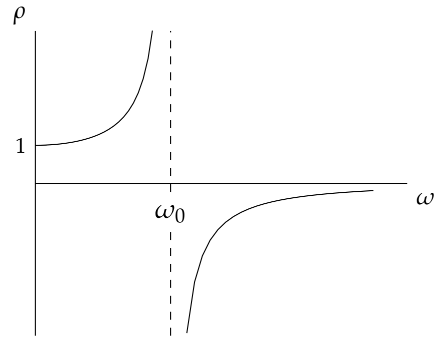
$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{2.92}$$

جس کا حل مساوات 2.89 نہیں دیتی۔مساوات 2.92 کا مخصوص حل y_p ، صفحہ 150 پر دیے گئے ترمیمی قاعدہ کے تحت

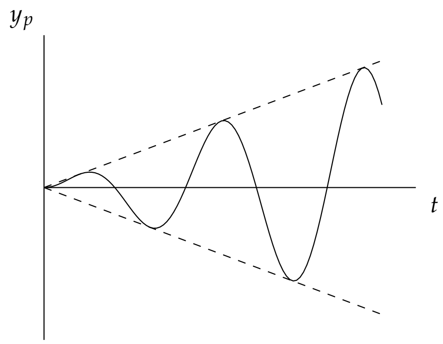
$$y_p(t) = t(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t)$$

---

[82] resonance
[83] resonance factor



شکل 2.22: گمکی جزو $\rho(\omega)$



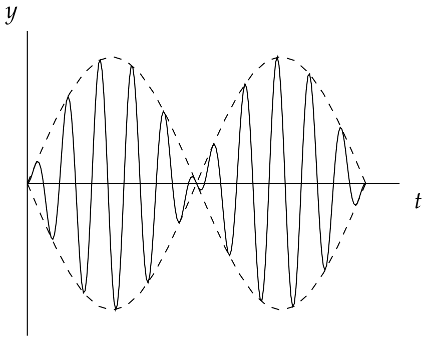
شکل 2.23: گمک کی صورت میں مخصوص حل۔

ہو گا جس کو مساوات 2.92 میں پر کرتے ہوئے $a = 0$ اور $b = \frac{F_0}{2m\omega_0}$ ملتے ہیں لہٰذا مخصوص حل

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \tag{2.93}$$

ہو گا جسے شکل 2.23 میں دکھایا گیا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ جزو t کی وجہ سے ارتعاش کا حیطہ مسلسل بڑھتا ہے۔عملاً اس کا مطلب ہے کہ کم قصری نظام زیادہ جھولے گا۔ نہایت کم تقصیر کی صورت میں نظام جھولنے سے تباہ ہو سکتا ہے۔

تھاپ



شکل 2.24: قریبی سر تھاپ پیدا کرتے ہیں۔

ω اور ω_0 قریب قریب ہونے کی صورت میں ایک دلچسپ صورت پیدا ہوتی ہے۔اسے سمجھنے کی خاطر مساوات 2.90 میں $C=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ اور $\delta=0$ لکھتے ہیں۔

$$y(t)=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega_0 t+\cos\omega t)\qquad(\omega\neq\omega_0)\tag{2.94}$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$y(t)=\frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\tag{2.95}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ ω_0 اور ω نہایت قریب ہیں لہٰذا $\frac{\omega_0-\omega}{2}$ چھوٹی مقدار ہو گی اور یوں دائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ زیادہ ہو گا۔اس کے برعکس $\frac{\omega_0+\omega}{2}$ بڑی مقدار ہو گی لہٰذا بائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ کم ہو گا۔ شکل 2.24 میں اس مساوات کو دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر دائیں سائن تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔اس شکل کے تفاعل کی آواز میں بلند تعدد کے ساتھ ساتھ کم تعدد بھی سنائی دیتی ہے جنہیں تھاپ[84] کہتے ہیں۔موسیقار تھاپ پر دھیان دیتے ہوئے موسیقی آلے کی تعدد درست کرتا ہے۔

دوسری صورت: قصری جبری ارتعاش

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک قابل نظر انداز نہ ہونے کی صورت میں $c>0$ ہو گا اور (جیسا ہم حصہ 2.4 میں دیکھ چکے ہیں) متجانس مساوات 2.83 کا حل y_h وقت گزرتے گھٹے گا حتیٰ کہ $t\to\infty$ پر

[84] beats

$y_h \to 0$ ہو گا۔ عملاً کافی دیر بعد y_h صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مساوات 2.85 کا **عارضی حل**[85] مساوات 2.88 یعنی $y = y_h + y_p$ آخر کار **برقرار حال حل**[86] y_p کے برابر ہو گا۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 2.8: برقرار حال حل
سائن نما جبری قوت کی موجودگی میں قصری ارتعاشی نظام کافی دیر کے بعد عملاً ہارمونی ارتعاش کرے گا جس کی تعدد داخلی تعدد کے برابر ہو گی۔

2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک

بلا تقصیر نظام میں $\omega \to \omega_0$ کرنے سے y_p کا حیطہ لامتناہی ہو گا۔قصری نظام میں ایسا نہیں ہوتا اور y_p کا حیطہ محدود رہتا ہے۔ہاں کسی مخصوص ω پر حیطہ زیادہ سے زیادہ ہو سکتا ہے جس کا دارومدار c کی قیمت پر ہو گا۔ایسی صورت کو **عملی گمک** کہہ سکتے ہیں۔ عملی گمک اس لئے اہم ہے کہ اگر c کی قیمت زیادہ نہ ہو تب عین ممکن ہے کہ داخلی جبری قوت نظام میں نقصان دہ یا تباہ کن حیطے کی ارتعاش پیدا کر سکے۔جس زمانے میں انسان کو گمک کی سمجھ نہ تھی اس زمانے میں اس کو ایسے نقصان اٹھانے پڑتے تھے۔مشین، جہاز ، گاڑی، پل اور بلند عمارتیں وہ میکانی نظام ہیں جن میں ارتعاش پایا جاتا ہے۔زلزلہ یا آندھی بطور جبری قوت بلند عمارت میں تباہ کن گمک پیدا کرتے ہوئے اسے ملبے کا ڈھیر بنا سکتی ہے۔بعض اوقات گمک سے پاک نظام کی تخلیق نا ممکن ہوتی ہے۔

y_p کا حیطہ بالمقابل ω پر غور کی خاطر مساوات 2.86 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta) \tag{2.96}$$

جہاں

$$\begin{aligned} C^*(\omega) &= \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \\ \eta(\omega) &= \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned} \tag{2.97}$$

---

[85] transient solution
[86] steady state solution

ہیں۔انہیں شکل 2.25 میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ C^* ردعمل y_p کا **حیطہ**[87] اور η اس کا **زاویائی فاصلہ**[88] ہے۔داخلی جبری تفاعل اور y_p میں زاویائی فرق η کے برابر ہو گا۔مثبت η کی صورت میں مساوات 2.96 کے تحت داخلی قوت سے y_p **پیچھے**[89] ہے۔

حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کرنے کی خاطر C^* کے تفرق کو صفر کے برابر $(\frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}\omega}=0)$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}\omega}=-\frac{F_0[2m^2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+2c^2\omega]}{2[m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+c^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}}=0$$

کسر کا شمار کنندہ صفر ہونے کی صورت میں درج بالا صفر کے برابر ہو گا جس سے

$$c^2=2m^2(\omega_0^2-\omega^2) \qquad (\omega_0^2=\frac{k}{m}) \tag{2.98}$$

یعنی

$$2m^2\omega^2=2m^2\omega_0^2-c^2=2mk-c^2 \tag{2.99}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے $c^2>2mk$ کی صورت میں خیالی تعدد $\omega=\mp i\sqrt{\frac{c^2-2mk}{2m^2}}$ حاصل ہوتا ہے۔خیالی تعدد حساب کے نقطہ نظر سے درست جواب ہے لیکن عملی دنیا میں تعدد کی قیمت صرف حقیقی قیمت ممکن ہے۔ایسی صورت میں ω کی قیمت بڑھانے سے C^* کی قیمت گھٹتی ہے۔اس کے برعکس $c^2<2mk$ کی صورت میں مساوات 2.99 سے حقیقی تعدد $\omega_{\text{بلندتر}}$

$$\omega^2_{\text{بلندتر}}=\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2} \tag{2.100}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 2.100 سے ظاہر ہے کہ c کی قیمت کم کرنے سے $\omega_{\text{بلندتر}}$ کی قیمت ω_0 بڑھتی ہے حتیٰ کہ $c\to 0$ کی صورت میں $\omega_{\text{بلندتر}}\to 0$ حاصل ہوتا ہے۔

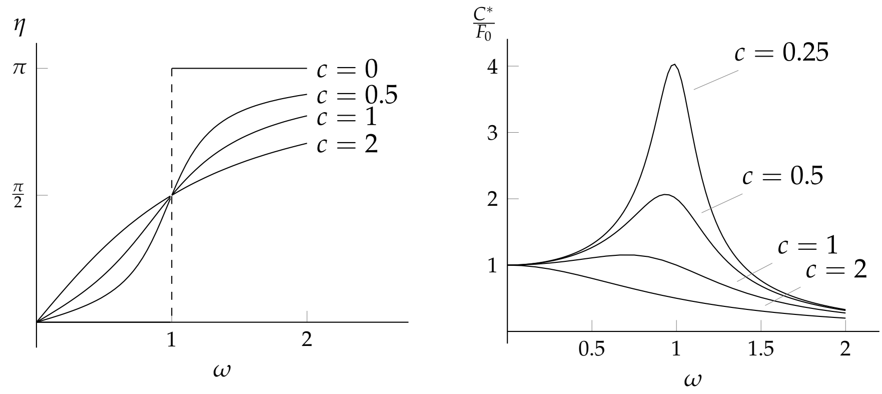
$\omega_{\text{بلندتر}}$ کو مساوات 2.97 میں پر کرنے سے $C^*(\omega_{\text{بلندتر}})$ حاصل کرتے ہیں۔

$$C^*(\omega_{\text{بلندتر}})=\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2})^2+c^2(\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2})}}=\frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2-c^2}} \tag{2.101}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $c\to 0$ کرنے سے $C^*\to\infty$ حاصل ہو گا یعنی بلا تقصیر صورت میں لامتناہی حیطہ پایا جائے گا۔

---

[87] amplitude
[88] phase angle
[89] lagging



(الف) $k = 1$ ، $m = 1$ ، $\omega_0 = 1$ رکھتے ہوئے مختلف c کے لئے $\frac{C^*}{F_0}$ بالمقابل ω

(ب) $k = 1$ ، $m = 1$ ، $\omega_0 = 1$ رکھتے ہوئے مختلف c کے لئے η بالمقابل ω

شکل 2.25: مساوات 2.97 کا حیطہ اور زاویائی فاصلہ۔

سوالات

سوال 2.131 تا سوال 2.134 اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی تفرقی مساوات ہیں۔ان کے برقرار حال حل دریافت کریں۔

سوال 2.131: $y'' + 7y' + 10y = 4\cos 3t$
جواب: $y = \frac{2}{221}\cos 3t + \frac{42}{221}\sin 3t$

سوال 2.132: $y'' + 4y' + 3y = 2\sin 6t$
جواب: $y = \frac{16}{555}\cos 6t - \frac{22}{555}\sin 6t$

سوال 2.133: $10y'' + 11y' + 3y = 20 + 15\cos 3t - 5\sin 2t$
جواب: $y = 6.67 + 0.057\sin 3t - 0.151\cos 3t + 0.0998\sin 2t + 0.059\cos 2t$

سوال 2.134: $2y'' + 3y' + y = 0.8 + \sin 2t$
جواب: $y = 0.8 - 0.08\sin 2t - 0.07\cos 2t$

سوال 2.135 تا سوال 2.143 کے عارضی حل دریافت کریں۔

سوال 2.135: $6y'' + 7y' + 2y = 3\sin(3.5t)$
جواب: $y = Ae^{-\frac{1}{2}t} = k - 2e^{-\frac{2}{3}t} - 0.037\sin(3.5t) - 0.013\cos(3.5t)$

سوال 2.136: $y'' + 2y' + 2y = 2\sin 2t$
جواب: $y = e^{-t}(A\cos t + B\sin 2t) - 0.4\cos 2t - 0.2\sin 2t$

سوال 2.137: $y'' + 9y = 4\cos 3t$
جواب: $y = A\cos 3t + B\sin 3t + \frac{2}{3}t\sin 3t + \frac{2}{9}\cos 3t$

سوال 2.138: $y'' + 3y = \cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t$
جواب: $y = A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t + \frac{t}{2\sqrt{3}}(\cos\sqrt{3}t + \sin\sqrt{3}t) + \frac{1}{6}\cos\sqrt{3}t$

سوال 2.139: $y'' + 2y' + 5y = 3\cos 2t + 2\sin 2t$
جواب: $y = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) - \frac{10}{17}\cos 2t + \frac{11}{17}\sin 2t$

سوال 2.140: $y'' + y = 5\sin\omega t \qquad (\omega^2 \neq 1)$
جواب: $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{5}{\omega^2 - 1}\sin\omega t$

سوال 2.141: $y'' + 4y = 3\cos 2t$
جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{3}{4}t\sin 2t + \frac{3}{8}\cos 2t$

سوال 2.142: $y'' + 4y = e^{-2t}\cos 2t$
جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{e^{-2t}}{20}(\cos 2t - 2\sin 2t)$

سوال 2.143: $y'' + 4y' + 5y = 2\cos t + 3\sin t$
جواب: $y = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) - \frac{1}{8}\cos t + \frac{5}{8}\sin t$

سوال 2.144 تا سوال 2.149 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 2.144: $y'' + 4y = 5\cos t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$
جواب: $y = \frac{5}{3}\cos t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{2}{3}\cos 2t$

سوال 2.145: $y'' + 9y = \sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{5}$
جواب: $y = \frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{10}\sin 2t + \frac{1}{168}\sin 3t - \frac{1}{28}\sin 4t$

سوال 2.146: $y''+4y'+8y=4\cos(0.5t), \quad y(0)=4, \quad y'(0)=-2$
جواب: $y=0.125\sin(0.5t)+0.484\cos(0.5t)+e^{-2t}[3.516\cos 2t+2.485\sin 2t]$

سوال 2.147: $y''+4y'+5y=e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$
جواب: $y=\frac{e^{-2t}}{15}(8\sin t-4\cos t)+\frac{e^{-0.5t}}{15}[4\cos(0.5t)+2\sin(0.5t)]$

سوال 2.148: $y''+36y=\cos\pi t-\sin\pi t, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$
جواب: $y=\frac{1}{\pi^2-36}(\sin\pi t-\cos\pi t+\cos 6t+\frac{\pi^2-\pi-36}{6}\sin 6t)$

سوال 2.149: تھاپ $y''+36y=\cos(5.9t), \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$
جواب: $y=\frac{19}{119}\cos 6t+\frac{100}{119}\cos(5.9t)$

سوال 2.150: خود کار بندوق
خود کار بندوق[90] کے چلنے سے گولی پر نہایت کم دورانیے کے لئے قوت عمل کرتا ہے اور اتنا ہی قوت بندوق کی نالی پر الٹ سمت میں عمل کرتا ہے۔نالی کا جھٹکا اسپرنگ برداشت کرتا ہے۔اس قوت کو تفاعل $1-\frac{t^2}{\pi^2}$ سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل تفرقی مساوات حل کریں جس میں $y(0)=0$ اور $y'(0)=0$ ہوں گے۔لمحہ $t=\pi$ پر y اور y' دونوں استمراری ہیں۔

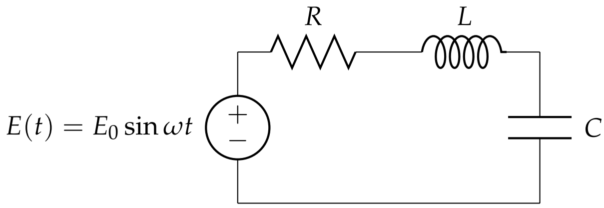
$$y''+y=\begin{cases}1-\frac{t^2}{\pi^2} & 0\le t\le\pi\\ 0 & t<0,\, t>\pi\end{cases}$$

جواب: $y=(1+\frac{2}{\pi^2})(1-\cos t)-\frac{t^2}{\pi^2}$

2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی

شکل 2.26 میں مزاحمت R ، امالہ L اور برق گیر[91] C کو منبع دباو کے ساتھ سلسلہ وار جوڑا گیا ہے۔اس دور کو سلسلہ وار RLC دور کہتے ہیں۔ہم صفحہ 55 پر مثال 1.20 میں مزاحمت اور امالہ کا سلسلہ وار RL دور دیکھ چکے ہیں جہاں مزاحمت پر دباو $v_R=IR$ اور امالہ پر دباو $v_L=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ کے مجموعے کو کرخوف کے قانون برائے

[90] automatic gun
[91] capacitor



شکل 2.26: مزاحمت، امالہ اور برق گیر سلسلہ وار منبع دباو کے ساتھ جڑے ہیں۔

دباو کے تحت درآیدہ دباو E کے برابر پر کیا گیا۔ موجودہ RLC میں v_R اور v_L کے ساتھ برق گیر کا دباو v_C بھی جمع کیا جائے گا۔ برق گیر پر دباو v_C اور اس میں ذخیرہ بار[92] Q کا تعلق $Q = Cv_C$ ہے۔ برق گیر کی اکائی فیراڈ[93] F جبکہ بار کی اکائی کولمب[94] C ہے۔ برقی بار اور برقی رو کا تعلق $Q = \int I \, \mathrm{d}t$ استعمال کرتے ہوئے برق گیر کے رو اور دباو کا تعلق

$$v_C = \frac{1}{C} \int I(t) \, \mathrm{d}t \tag{2.102}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یوں کرخوف مساوات دباو

$$LI' + RI + \frac{1}{C} \int I \, \mathrm{d}t = E_0 \sin \omega t \, \mathrm{d}t \tag{2.103}$$

ہو گی جو تکمل و تفرقی مساوات ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے تکمل سے پاک تفرقی مساوات

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t \tag{2.104}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مستقل عددی سر والی غیر متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا حل $I(t)$ دے گا۔ مساوات 2.103 میں تکمل Q کے برابر ہے جبکہ $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ لکھا جا سکتا ہے جن سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے جس کا حل $Q(t)$ دے گا۔

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t) = E_0 \sin \omega t \tag{2.105}$$

---

[92] charge
[93] Farad
[94] Coulomb

سلسلہ وار دور میں رو کا حصول

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.104 کا حل $I = I_h + I_p$ ہو گا جہاں I_h مطابقتی متجانس مساوات کا عمومی حل اور I_p غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل ہے۔ہم I_p کو نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 2.104 میں

$$\begin{aligned} I_p &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ I_p' &= -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t \\ I_p'' &= -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t \end{aligned} \tag{2.106}$$

پر کرتے ہوئے دونوں اطراف $\cos\omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں اور اسی طرح دونوں اطراف $\sin\omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)a + \omega R b &= \omega E_0 \\ -\omega R a + \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)b &= 0 \end{aligned}$$

ان مساوات کو ω سے تقسیم کرتے ہوئے

$$S = \omega L - \tfrac{1}{\omega C} \tag{2.107}$$

لکھتے ہیں جہاں S کو **متعاملیت**[95] کہتے ہیں۔یوں درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -Sa + Rb &= E_0 \\ -Ra - Sb &= 0 \end{aligned}$$

b حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو S اور دوسری کو R سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔
a حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو R اور دوسری کو $-S$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$-(S^2 + R^2)a = E_0 S, \quad (R^2 + S^2)b = E_0 R \tag{2.108}$$

ان سے درج ذیل عددی سر حاصل ہوتے ہیں

$$a = -\frac{E_0 S}{S^2 + R^2}, \quad b = \frac{E_0 R}{S^2 + R^2} \tag{2.109}$$

---

[95] reactance

جنہیں استعمال کرتے ہوئے I_p لکھتے ہیں۔

$$I_p(t) = -\frac{E_0 S}{S^2+R^2}\cos\omega t + \frac{E_0 R}{S^2+R^2}\sin\omega t \tag{2.110}$$

اس کو

$$I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \theta) \tag{2.111}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$I_0 = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{E_0}{\sqrt{S^2+R^2}}, \quad \tan\theta = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R} \tag{2.112}$$

ہیں۔ I_0 کو رو کا حیطہ اور θ کو رو کا زاویہ کہتے ہیں۔داخلی دباو سے رو θ زاویے کے فاصلے پر ہے۔درج بالا مساوات میں $\sqrt{S^2+R^2}$ لکھا جا سکتا ہے جو قانون اوہم سے مشابہت رکھتا ہے لہٰذا $\frac{E_0}{I_0} = \sqrt{S^2+R^2}$ کو برقی رکاوٹ[96] کہا جاتا ہے۔

مساوات 2.104 کے مطابقتی متجانس مساوات کی امتیازی مساوات

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

کے جذر

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ہیں جن میں $\alpha = \frac{R}{2L}$ اور $\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ لکھتے ہوئے

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں I_h درج ذیل ہو گا۔

$$I_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

کسی بھی حقیقی دور میں R کبھی بھی صفر کے برابر نہیں ہوتا۔یوں $R > 0$ اور $\alpha > 0$ ہوں گے۔اس طرح $t \to \infty$ پر $I_h \to 0$ ہو گا لہٰذا RLC دور کا عمومی حل آخر کار I_p کے برابر ہو گا جو داخلی دباو کے تعدد ω پر ہارمونی ارتعاش کرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔

[96] impedance

مثال 2.28: سلسلہ وار RLC دور میں سو اوہم کی مزاحمت $R = 100\,\Omega$ ، آدھا ہینری امالہ $L = 0.5\,\mathrm{H}$ ، بیس ملی فیراڈ برق گیر $C = 20\,\mathrm{mF}$ اور داخلی دباو $E(t) = 310\sin(2\pi 50t)$ وولٹ ہیں۔لمحہ $t = 0$ پر رو اور برق گیر میں ذخیرہ بار صفر کے برابر ہیں۔دور میں رو $I(t)$ حاصل کریں۔

حل:مساوات 2.104 میں دی گئی معلومات پر کرتے ہوئے

$$0.5I'' + 100I' + 50I = (100\pi)(310)\cos(100\pi t)$$

ملتا ہے جس سے متجانس مساوات $0.5I'' + 100I' + 50I = 0$ لکھ کر امتیازی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$0.5\lambda^2 + 100\lambda + 50 = 0$$

امتیازی مساوات کے جذر $\lambda_1 = -199.5$ اور $\lambda_2 = -0.5$ ہیں لہٰذا

$$I_h(t) = c_1 e^{-199.5t} + c_2 e^{-0.5t}$$

ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو گا۔

دور کی متعاملیت $S = 100\pi 0.5 - \frac{1}{100\pi 0.02} = 156.92$ لیتے ہوئے

$$I_p(t) = a\cos(100\pi t) + b\sin(100\pi t)$$

کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$a = -\frac{310 \times 156.92}{156.92^2 + 100^2} = -1.4049, \quad b = \frac{310 \times 100}{156.92^2 + 100^2} = 0.8953$$

یوں

$$I_p(t) = -1.4049\cos(100\pi t) + 0.8953\sin(100\pi t) = 1.422\sin(100\pi t - 1.003) \tag{2.113}$$

ہو گا لہٰذا عمومی حل

$$I(t) = I_h + I_p = c_1 e^{-199.5t} + c_2 e^{-0.5t} + 1.422\sin(100\pi t - 1.003)$$

ہو گا۔ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے c_1 اور c_2 دریافت کرتے ہیں۔عمومی حل میں $t = 0$ پر $I(0) = 0$ پر کرنے سے

$$c_1 + c_2 - 1.4049 = 0, \implies c_1 = 1.4049 - c_2 \tag{2.114}$$

ملتا ہے۔مساوات 2.103 میں تکمل کی قیمت بار کے برابر ہے یعنی $\int I \, \mathrm{d}t = Q$ لہٰذا $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $Q(0) = 0$ اور $I(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.103 سے

$$LI'(0) + RI(0) = E_0 \sin 0 \qquad \implies I' = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔عمومی حل کے تفرق میں $I'(0) = 0$ پر کرنے سے

$$I'(0) = -199.5c_1 - 0.5c_2 + 0.8953(2\pi 50) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 2.114 کی مدد سے حل کرتے ہوئے $c_1 = 1.4099$ اور $c_2 = -0.00497$ ملتے ہیں۔یوں مخصوص حل یعنی دور میں رو درج ذیل ہو گی۔

$$I(t) = 1.4099e^{-199.5t} - 0.00497e^{-0.5t} + 1.422\sin(100\pi t - 1.003)$$

شکل 2.27-الف میں $I(t)$ کو نقطہ دار لکیر جبکہ I_p کو ٹھوس لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔چونکہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو جاتا ہے لہٰذا I اور I_p میں صرف شروع میں فرق پایا جاتا ہے۔شکل-ب میں $E(t)$ اور $I_p(t)$ کو دکھایا گیا ہے۔ان دونوں میں زاویائی فاصلہ 1.003 ریڈیئن یعنی $57.5°$ ہے جو شکل میں صاف واضح ہے۔ہم کہتے ہیں کہ دباو سے رو $57.5°$ پیچھے[97] ہے۔آپ یہاں خود تسلی کر سکتے ہیں کہ $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو سے رو پیچھے ہو گی جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو سے رو آگے ہو گی۔ $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو اور رو ہم زاویہ[98] ہوں گے یعنی ان میں زاویائی فاصلہ نہیں پایا جاتا۔ □

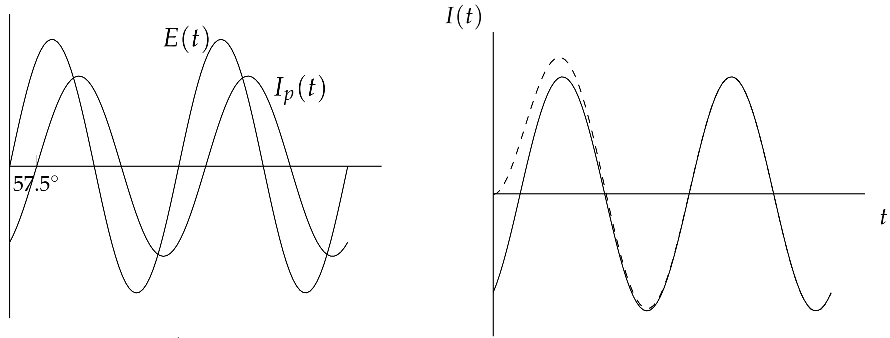
برقی اور میکانی مقدار کی مماثلت

دو بالکل مختلف نظام کی ایک ہی تفرقی مساوات ہو سکتی ہے۔اسپرنگ اور کمیت کی تفرقی مساوات 2.85 اور سلسلہ وار RLC کی مساوات 2.104 کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t, \qquad LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میکانی نظام میں کمیت اور برقی نظام میں امالہ تفرقی مساوات میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔کمیت کی جمود کی طرح امالہ برقی دور کی رو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔اسی طرح c اور R تفرقی مساوات

[97] lagging
[98] in-phase



(الف) قصری دور میں عمومی حل آخر کار I_p کے برابر ہو گا۔

(ب) دباو سے رو پیچھے ہے۔

شکل 2.27: مثال 2.28 کی رو کے خطوط۔

جدول 2.3: میکانی اور برقی نظام میں یکساں عناصر۔

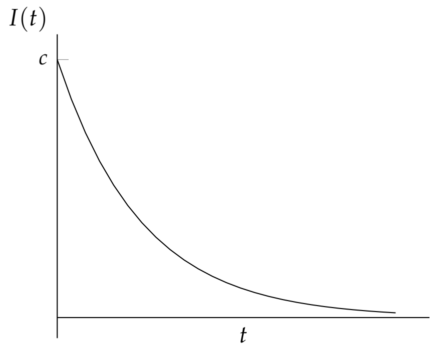
برقی نظام	میکانی نظام
امالہ L	کمیت m
مزاحمت R	قصری مستقل c
برق گیر کا بالعکس $\frac{1}{C}$	اسپرنگ مستقلہ k
داخلی دباو کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$	جبری قوت $F_0 \cos \omega t$
برقی رو $I(t)$	ہٹاو $y(t)$

میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں اور نظام میں توانائی کی ضیاع کا باعث بنتے ہیں۔ اسپرنگ کا مستقل k اور برق گیر کا بالعکس متناسب $\frac{1}{C}$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔میکانی جبری قوت $F_0 \cos \omega t$ اور برقی داخلی دباو کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔میکانی اور برقی نظام کی یکسانیت کو جدول 2.3 میں پیش کیا گیا ہے۔

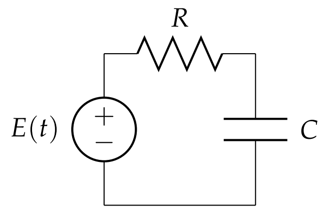
میکانی اور برقی نظام میں یکسانیت صحیح معنوں میں صرف مقداری نوعیت کی ہے۔یوں ہم میکانی نظام کے مطابق ایسا برقی دور تخلیق دے سکتے ہیں جس میں رو بالمقابل وقت میکانی نظام میں ہٹاو بالمقابل وقت کے بالکل برابر ہو گی۔یہ ایک انتہائی اہم نتیجہ ہے کیونکہ میکانی نظام مثلاً پل یا بلند عمارت کا برقی نمونہ انتہائی آسانی اور سستے دام بناتے ہوئے اس کی کارکردگی پر تفصیلاً غور کیا جا سکتا ہے۔ مزید، برقی متغیرات مثلاً رو یا دباو انتہائی آسانی سے ٹھیک ٹھیک ناپے جا سکتے ہیں جبکہ میکانی متغیرات اتنے آسانی سے اور ٹھیک ٹھیک ناپنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔

میکانی متغیرات کو برقی متغیرات میں تبدیل کرنے والے کئی مبدل[99] اسی مشابہت پر کام کرتے ہیں۔

---
[99] transducer



(ب) سلسلہ وار RC کی رو بالمقابل وقت۔



(الف) سلسلہ وار RC دور۔

شکل 2.28: سلسلہ وار RC دور اور اس کی رو۔

سوالات

سوال 2.151 تا سوال 2.157 خصوصی سلسلہ وار RLC ادوار ہیں۔

سوال 2.151: سلسلہ وار RC دور شکل 2.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں داخلی دباو مستقل مقدار $E(t)=E_0$ ہے۔دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

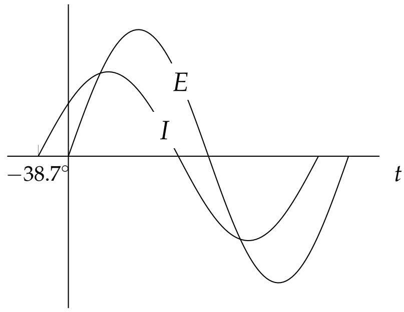
جوابات: $RI'+\frac{I}{C}=0$ ، رو $I=ce^{-\frac{t}{RC}}$ کو شکل 2.28-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 2.152: شکل 2.28-الف کو سائن نما برقی دباو $E(t)=E_0\sin\omega t$ کے لئے حل کریں۔

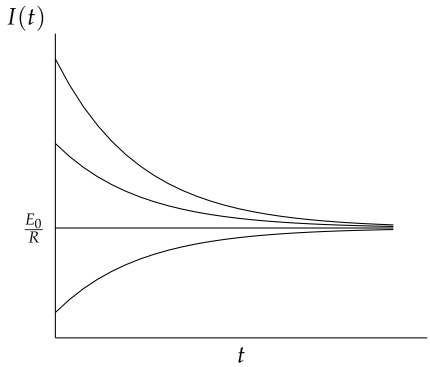
جواب: $RI'+\frac{I}{C}=\omega E_0\cos\omega t$ ، $I=ce^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\omega CE_0}{1+\omega^2R^2C^2}(\cos\omega t+\omega RC\sin\omega t)$

سوال 2.153: شکل 2.28-الف میں $R=50\,\Omega$ ، $C=0.25\,\mathrm{mF}$ اور $E(t)=20\sin 100t$ لیتے ہوئے برقرار حال رو دریافت کریں۔دباو کو حوالہ لیتے ہوئے برقرار حل رو کا زاویہ کتنا ہے؟ $E(t)$ اور $I(t)$ کے خط اکٹھے کھینچیں۔

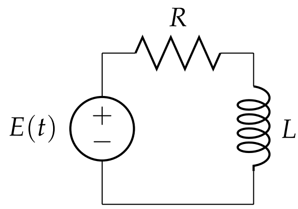
جواب: $I_p=\frac{2}{\sqrt{41}}\sin(100t+0.6747)$ ؛ دباو سے رو 38.7° زاویہ آگے ہے۔ RC دور میں داخلی دباو سے رو 0° تا 90° آگے ہی رہتی ہے۔شکل 2.29 میں دباو اور رو کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کے حیطے ٹھیک تناسب سے نہیں دکھائے گئے ہیں۔



شکل 2.29: RC دور میں دباو سے برقرار رو آگے رہتی ہے۔



سلسلہ وار RL کی رو بالمقابل وقت۔ داخلی دباو مستقل مقدار ہے۔



(الف) سلسلہ وار RL دور۔

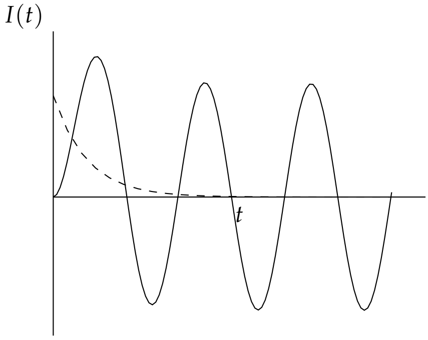
شکل 2.30: سلسلہ وار RL دور اور اس کی رو۔

سوال 2.154: سلسلہ وار RL دور شکل 2.30-الف میں دکھایا گیا ہے۔ داخلی دباو مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔ دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

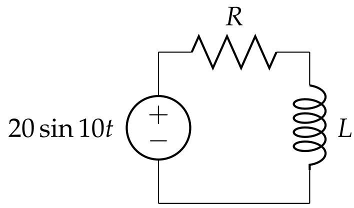
جوابات: $LI' + RI = E_0$ ، $I = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}$ کو شکل 2.30-ب میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔

سوال 2.155: شکل 2.31-الف میں $R = 5\,\Omega$ اور $L = 1\,\mathrm{H}$ لیں۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $I(0) = 0$ لیتے ہوئے $I(t)$ حاصل کریں۔ رو کا خط کھینچیں۔

جواب: $LI' + RI = E_0 \sin \omega t$ ، $I = \frac{8}{5}e^{-5t} + \frac{4}{5}\sin 10t - \frac{8}{5}\cos 10t$

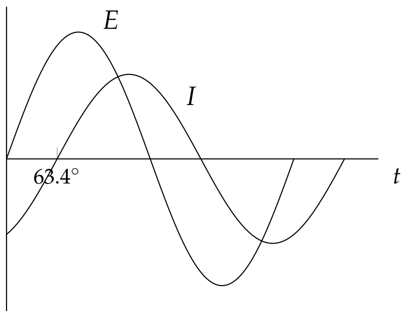


سلسلہ وار RL کی رو بالمقابل وقت۔ داخلی دباو مستقل مقدار ہے۔



(الف) سلسلہ وار RL دور۔

شکل 2.31: سوال 2.155 کا دور۔



شکل 2.32: RL دور میں دباو سے برقرار رو پیچھے رہتی ہے۔

سوال 2.156: شکل 2.31-الف میں $R = 10\,\Omega$ اور $L = 2\,\mathrm{H}$ لیں۔ برقرار حل رو دریافت کریں۔ دباو کے حوالے سے رو کا زاویہ کتنا ہے۔ داخلی دباو اور برقرار رو کے خط کھینچیں۔

جواب: $I = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(10t - 1.107)$ ؛ داخلی دباو سے رو $63.4°$ زاویہ پیچھے ہے۔ RL دور میں داخلی دباو سے رو $0°$ تا $90°$ پیچھے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.32 میں دونوں خطوط دکھائے گئے ہیں۔

سوال 2.157: سلسلہ وار LC دور میں $L = 2\,\mathrm{H}$ اور $C = 0.02\,\mathrm{F}$ ہیں۔ $R = 0$ ہونے کی ناطے دور بلا تقصیر ہو گا۔ یوں LC نظام بلا تقصیر اسپرنگ اور کمیت کی نظام کی طرح ہے۔ اس دور کا داخلی دباو $E(t) = \sin 5t$ ہے۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر رو اور برق گیر میں ذخیرہ بار دونوں صفر کے برابر ہیں۔ رو کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $I(t) = \cos 5t - \cos 100t$

سوال 2.158 تا سوال 2.165 شکل 2.26 کے سلسلہ وار RLC دور پر مبنی ہیں۔ان کی برقرار حال رو دریافت کریں۔

سوال 2.158: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\text{H}, \quad C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 100\sin 2t\,\text{V}$
جواب: $I = 13.65\sin(2t + 0.611)\ \text{A}$

سوال 2.159: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\text{H}, \quad C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 100\,\text{V}$
جواب: $I = 0\,\text{A}$

سوال 2.160: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\text{H}, \quad C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 100\sin 5t\,\text{V}$
جواب: $I = \frac{50}{3}\sin 5t\ \text{A}$

سوال 2.161: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\text{H}, \quad C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 100\sin 7t\,\text{V}$
جواب: $I = 16.25\sin(7t - 0.225)\ \text{A}$

سوال 2.162: $R = 2\,\Omega, \quad L = 0.8\,\text{H}, \quad C = 1.2\,\text{F}, \quad E = 50\cos 10t\,\text{V}$
جواب: $I = 5.9\sin 10t + 1.5\cos 10t\ \text{A}$

سوال 2.163: $R = 1\,\Omega, \quad L = 0.5\,\text{H}, \quad C = 1.5\,\text{F}, \quad E = 10\cos t\,\text{V}$
جواب: $I = -1.6\sin t + 9.7\cos t\ \text{A}$

سوال 2.164: $R = 0.1\,\Omega, L = 0.2\,\text{H}, C = 0.01\,\text{F}, \quad E = 20\sin 10t + 10\sin 100t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.003\sin 100t - 0.526\cos 100t + 0.031\sin 10t + 2.5\cos 10t\ \text{A}$

سوال 2.165: اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں کم قصری، فاصل قصری اور زیادہ قصری صورت پائے گئے۔سلسلہ وار RLC دور میں کم قصری، فاصل قصری اور زیادہ قصری صورت کے شرائط معلوم کریں۔

جوابات: کم قصری صورت $R^2 < \frac{4L}{C}$ دیتی ہے، جبکہ فاصل قصری صورت میں $R^2 = \frac{4L}{C}$ اور زیادہ قصری صورت میں $R^2 > \frac{4L}{C}$ ہو گا۔

سوال 2.166 تا سوال 2.168 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں جن میں ابتدائی رو اور برق گیر میں ذخیرہ ابتدائی بار صفر ہیں۔ان کی مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.166: $R = 0.1\,\Omega,\ L = 0.22\,\text{H},\ C = 0.1\,\text{F},\quad E = 36\sin 15t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.52\sin 15t - 13.65\cos 15t + e^{-\frac{5}{22}t}(-0.69\sin 6.74t + 13.65\cos 6.74t)\ \text{A}$

سوال 2.167: $R = 2\,\Omega,\ L = 0.1\,\text{H},\ C = 0.1\,\text{F},\quad E = 10\sin 100t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.196\sin 100t - 0.97\cos 100t + e^{-10t}(0.97 - 9.9t)\ \text{A}$

سوال 2.168: $R = 4\,\Omega,\ L = 0.4\,\text{H},\ C = 0.2\,\text{F},\quad E = 5\sin 25t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.179\sin 25t - 0.437\cos 25t - 0.103e^{-1.46t} + 0.541e^{-8.54t}\ \text{A}$

2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

پہلے باب میں صفحہ 60 پر مثال 1.23 میں ہم نے مقدار معلوم بدلنے کے طریقے[100] سے تفرقی مساوات کا حل نکالا۔ اس ترکیب[101] سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.115}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں کھلے وقفے I پر $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ استمراری تفاعل ہیں۔ اس مساوات کو معیاری صورت میں لکھنا ضروری ہے جہاں y'' کا عددی سر اکائی (1) کے برابر ہے۔حصہ 2.6 میں ہم نے دیکھا کہ مساوات 2.115 کے مطابقتی متجانس مساوات کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.115 کے کسی بھی مخصوص حل y_p کا مجموعہ اس غیر متجانس مساوات کا عمومی حل دیتا ہے۔سادہ $r(x)$ کی صورت میں **نا معلوم عددی سر کی ترکیب** استعمال کرتے ہوئے y_p حاصل کی جا سکتی ہے۔اس ترکیب پر حصہ 2.7 میں غور کیا گیا جبکہ حصہ 2.8 اور حصہ 2.9 میں اس کا استعمال کیا گیا۔

[100] variation of parameter
[101] یہ ترکیب یوسف لوئی لیگرینج سے منسوب ہے۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب ان $r(x)$ کے لئے قابل استعمال ہے جن کے تفرق، اصل تفاعل کی صورت رکھتے ہوں مثلاً سائن نما تفاعل، قوت نمائی تفاعل اور x^n تفاعل۔اس کے برعکس **مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ** زیادہ مشکل تفاعل کے لئے کار آمد ہے۔اس ترکیب کے تحت مساوات 2.115 کا مخصوص حل

$$y_p(t) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} \,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} \,\mathrm{d}x \tag{2.116}$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 ،مطابقتی متجانس مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.117}$$

کے حل کی اساس ہیں اور W ان کی **ورونسکی** [حصہ 2.6 دیکھیں] ہے۔

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \tag{2.118}$$

مساوات 2.115 میں متغیر عددی سر کی صورت میں مساوات 2.116 کے تکملات عموماً مشکلات پیش کرتے ہیں لہٰذا جہاں ممکن ہو وہاں نا معلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کریں۔مساوات 2.116 کے حصول سے پہلے ایک مثال دیکھتے ہیں جہاں نا معلوم عددی سر کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے لہٰذا موجودہ ترکیب ہی استعمال کی جائے گی۔

مثال 2.29: درج ذیل غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل دریافت کریں۔

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x$$

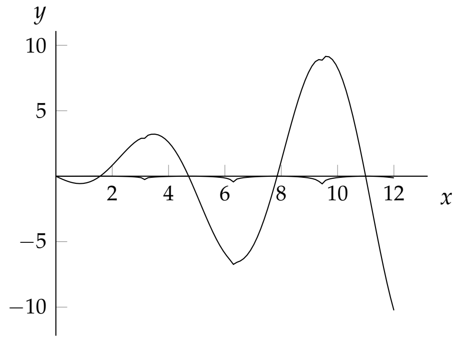
حل: کسی بھی کھلے وقفے پر متجانس سادہ تفرقی مساوات کی اساس $y_1 = \cos x$ اور $y_2 = \sin x$ ہیں جن سے ورونسکی لکھتے ہیں۔

$$W = \cos^2 x - \sin x(\sin x) = 1$$

مساوات 2.116 سے y_p حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \sin x \ln\lvert\sin x\rvert \end{aligned} \tag{2.119}$$

جہاں تکمل کے مستقل صفر چنے گئے ہیں۔



شکل 2.33: مثال 2.29 کے خطوط۔

شکل 2.33 میں y_p اور اس کا دوسرا جزو دکھائے گئے ہیں۔ y_p کا دوسرا جزو اتنا کم ہے کہ حقیقتاً پہلا جزو $-x \cos x$ ہی y_p کی قیمت تعین کرتا ہے۔ غیر متجانس تفرقی مساوات کا عمومی حل $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ اور y_p کا مجموعہ ہو گا۔

$$y = y_h + y_p = (c_1 - x)\cos x + (c_2 + \ln|\sin x|)\sin x \tag{2.120}$$

مساوات 2.119 میں تکمل لیتے ہوئے تکمل کے مستقل a اور b بھی شامل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x (x + a) + \sin x (\ln|\sin x| + b) \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ مساوات 2.120 کے ساتھ موازنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ از خود عمومی حل ہے۔

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.115 کا عمومی حل مساوات 2.116 میں تکملات کے مستقل شامل کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

□

مقدار معلوم بدلنے کے طریقے کا حصول

اس ترکیب میں متجانس تفرقی مساوات کے حل

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

میں مستقل (یعنی مقدار معلوم) c_1 اور c_2 کی جگہ نا معلوم تفاعل $u(x)$ اور $v(x)$ پر کئے جاتے ہیں۔اسی لئے اس کو مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ کہتے ہیں۔ $u(x)$ اور $v(x)$ کی ایسی قیمتیں چننی جاتی ہیں کہ

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \tag{2.121}$$

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.115 کا مخصوص حل ہو۔حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.4 کے تحت کھلے وقفہ I پر استمراری p اور q کی صورت میں اس وقفے پر y_h موجود ہو گا۔جبری تفاعل r کے استمراری ہونے کی ضرورت جلد پیش آئے گی۔

مساوات 2.121 اور اس کے تفرق کو مساوات 2.115 میں پر کرتے ہوئے u اور v دریافت کرتے ہیں۔مساوات 2.121 کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y_p' = u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'$$

ہم ایسی u اور v دریافت کر سکتے ہیں کہ y_p غیر متجانس تفرق مساوات پر پورا اترتا ہو جبکہ u اور v درج ذیل مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{2.122}$$

یوں y_p' نسبتاً آسان صورت اختیار کرتی ہے

$$y_p' = uy_1' + vy_2' \tag{2.123}$$

جس کا تفرق لیتے ہوئے y_p'' کی مسوات ملتی ہے۔

$$y_p'' = u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'' \tag{2.124}$$

مساوات 2.121، مساوات 2.123 اور مساوات 2.124 کو مساوات 2.115 میں پر کرتے ہوئے

$$(u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'') + p(uy_1' + vy_2') + q(uy_1 + vy_2) = r$$

u ،اور v کے عددی سر اکھٹے کرتے ہیں۔

$$u(y_1'' + py_1' + qy_1) + v(y_2'' + py_2' + qy_2) + u'y_1' + v'y_2' = r$$

چونکہ y_1 اور y_2 متجانس مساوات 2.117 کے حل ہیں لہٰذا دونوں قوسین صفر کے برابر ہیں اور درج بالا مساوات نسبتاً سادہ صورت اختیار کر لیتی ہے۔

$$u'y_1' + v'y_2' = r \tag{2.125}$$

یہاں مساوات 2.122 کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{2.126}$$

مساوات 2.125 اور مساوات 2.126 دو ہمزاد مساوات ہیں جنہیں حل کرتے ہوئے u اور v حاصل کرتے ہیں۔ v' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_2$ سے اور دوسری مساوات کو y_2' سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں

$$u'(y_1y_2' - y_2y_1') = -y_2r \quad \implies \quad u'W = -y_2r$$

جہاں W مساوات 2.118 ہے۔اسی طرح u' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو y_1 اور دوسری کو $-y_1'$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$v'(y_1y_2' - y_2y_1') = y_1r \quad \implies \quad v'W = y_1r$$

چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہٰذا حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.3 کے تحت $W \neq 0$ ہو گا۔اس طرح درج بالا مساوات کو W سے تقسیم کیا جا سکتا ہے جس سے

$$u' = -\frac{y_2r}{W}, \quad v' = \frac{y_1r}{W}$$

ملتے ہیں۔تکمل لیتے ہوئے u اور v حاصل ہوتے ہیں۔

$$u = -\int \frac{y_2r}{W}\,\mathrm{d}x, \quad v = \int \frac{y_1r}{W}\,\mathrm{d}x$$

چونکہ کھلے وقفہ I پر r استمراری تفاعل ہے لہٰذا درج بالا تکملات موجود ہیں۔ حاصل u اور v کو مساوات 2.121 میں پر کرتے ہوئے مساوات 2.116 حاصل ہوتا ہے۔

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1r}{W}\,\mathrm{d}x$$

سوالات

مساوات 2.169 تا مساوات 2.169 کو مقدار معلوم بدلنے کے طریقے یا نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حل کریں۔

سوال 2.169: $y'' + 4y = \sec 2x$

جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x|$

سوال 2.170: $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln\lvert\sin 2x\rvert$

سوال 2.171: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3\cos x$
جواب: $y_p = c_1x^2 + c_2x - x\cos x$

سوال 2.172: $y'' - 2y' + 2y = e^x\operatorname{cosec} x$
جواب: $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x) - xe^x\cos x + e^x\sin x\ln\lvert\sin x\rvert$

سوال 2.173: $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}(1-2x)\cos 2x$

سوال 2.174: $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-3x} - e^{-3x}(1+\ln x)$

سوال 2.175: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} - xe^{-x}(1-\ln x)$

سوال 2.176: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} - e^{-x}(1+\ln x)$

سوال 2.177: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^3}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} + \frac{e^{-x}}{2x}$

سوال 2.178: $y'' + 4y = \sinh 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{8}\sinh 2x$

سوال 2.179: $y'' - 2y' + y = 28x^{\frac{1}{3}}e^x$
جواب: $y_p = (ax+b)e^x + 9x^{\frac{7}{3}}e^x$

سوال 2.180: $y'' + 2y' + y = e^{-x}\operatorname{cosec}^3 x$
جواب: $y_p = \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{cosec} x[(A + B\sin 2x) + (1-A)\cos 2x]$

سوال 2.181: $x^2y'' + 6xy' + 6y = x$
جواب: $y_p = \frac{x}{12} + c_1x^{-2} + c_2x^{-3}$

سوال 2.182: $x^2y'' + 7xy' + 9y = 25x^2$
جواب: $y_p = x^2 + c_1x^{-3} + c_2x^{-2}\ln\lvert x\rvert$

باب 3

بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات

دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے طریقے بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی صورت میں مساوات زیادہ پیچیدہ ہوں گے، امتیازی مساوات کے جذر بھی تعداد میں زیادہ اور حصول میں نسبتاً مشکل ہوں گے اور ورونسکی زیادہ اہم کردار ادا کرے گا۔

3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم متغیرہ $y(x)$ کا $y^n = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ سب سے بلند درجی تفرق ہو۔ایسی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں y اور کم درجی تفرق موجود یا غیر موجود ہو سکتے ہیں۔ایسی مساوات کو خطی کہتے ہیں اگر اس کو

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \tag{3.1}$$

لکھنا ممکن ہو۔صفحہ 80 پر دو درجی خطی سادہ تفرقی مساوات کی بات کی گئی۔موجودہ مساوات میں $n = 2$ ، $p_1 = p$ اور $p_0 = q$ پر کرنے سے دو درجی مساوات حاصل ہو گی۔عددی سر $p_0(x)$ تا $p_n(x)$ اور جبری تفاعل $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں جبکہ $y(x)$ نا معلوم متغیرہ ہے۔خطی مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں $y^{(n)}$ کا عددی سر اکائی 1 ہے۔ تفرقی مساوات میں $p_n(x)y^{(n)}$ موجود ہونے کی صورت میں پوری مساوات کو $p_n(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کریں۔جو تفرقی مساوات درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو **غیر خطی** کہلاتی ہے۔

کسی کھلے وقفے I پر $r(x)$ **مکمل صفر** $r \equiv 0$ ہونے کی صورت میں مساوات 3.1 سے **متجانس مساوات**

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{3.2}$$

حاصل ہوتی ہے۔کھلے وقفے پر $r(x)$ کے مکمل صفر ہونے سے مراد یہ ہے کہ اس وقفے پر ہر x کے لئے $r(x)$ کی قیمت صفر کے برابر ہے۔دو درجی تفرقی مساوات کی طرح اگر $r(x)$ مکمل صفر نہ ہو تب مساوات **غیر متجانس** کہلائے گی۔

کھلے وقفہ I پر n درجی خطی یا غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل $y = h(x)$ سے مراد ایسا تفاعل ہے جو I پر معین ہو، کھلے وقفے پر اس کا n درجی تفرق موجود ہو اور تفرقی مساوات میں y اور اس کے تفرقات کی جگہ h اور اس کے تفرقات پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں حاصل ہوں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات: خطی میل اور عمومی حل

خطی میل یا اصول خطیت جس کا ذکر صفحہ 82 مسئلہ 2.1 میں کیا گیا بلند درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی درست ہے۔

مسئلہ 3.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ بلند درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی بلند درجی تفرقی مساوات 3.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔(یہ اصول غیر خطی اور غیر متجانس مساوات پر لاگو نہیں ہوتا۔)

اس کا ثبوت گزشتہ باب میں دئے گئے ثبوت کی طرح ہے جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہماری بقایا گفتگو ہو بہو دو درجی تفرقی مساوات کی طرح ہو گی لہٰذا یہاں بلند درجی خطی متجانس مساوات کی عمومی حل کی بات کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر n عدد تفاعل کی **خطی طور غیر تابع** ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل
کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کا **عمومی حل**

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x) \tag{3.3}$$

ہے جہاں $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ حل کی اساس اور c_1 تا c_2 اختیاری مستقل ہیں۔یوں y_1 تا y_n کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

عمومی حل کے مستقل کی قیمتیں مقرر کرنے سے **مخصوص حل** حاصل ہو گا۔

تعریف: خطی طور تابع تفاعل اور خطی طور غیر تابع تفاعل
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر n عدد تفاعل $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ معین ہیں۔

وقفہ I پر معین y_1 تا y_n ، اس وقفے پر اس صورت **خطی طور غیر تابع**[1] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0 \tag{3.4}$$

سے مراد

$$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

ہو۔ k_1 تا k_n میں کم از کم ایک کی قیمت صفر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 3.4 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 تا y_n **خطی طور تابع**[2] کہلاتے ہیں۔

---

[1] linearly independent
[2] linearly dependent

y_1 تا y_n میں (کم از کم ایک) تفاعل کو اس صورت بقایا تفاعل کے **خطی میل** کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جب اس وقفے پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہوں۔ یوں اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 3.4 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$y_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2y_2 + k_3y_3 + \cdots + k_ny_n)$$

لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ y_1 کو بقایا تفاعل کے خطی میل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی کو خطی طور تابع کہتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 2$ کی صورت میں ہمیں حصہ 2.6 میں بیان کئے گئے تصورات ملتے ہیں۔

مثال 3.1: خطی طور تابع

ثابت کریں کہ تفاعل $y_1 = 2\sin x$ ، $y_2 = 1.5x^2$ ، $y_3 = 5\cos x + \sin x$ اور $y_4 = 4\cos x$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور تابع ہیں۔

حل:ہم $y_3 = \frac{1}{2}y_1 + 0y_2 + \frac{5}{4}y_4$ لکھ سکتے ہیں لہٰذا y_1 تا y_4 خطی طور تابع تفاعل ہیں۔ □

مثال 3.2: خطی طور غیر تابع

ثابت کریں کہ $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ اور $y = x^4$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل:ہم مساوات $k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 = 0$ میں مختلف x کی قیمتیں پر کرتے ہوئے k_1 تا k_3 دریافت کرتے ہیں۔کھلے وقفے پر نقطہ $x = 1$ ، $x = -1$ اور $x = 2$ چنتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
k_1 + k_2 + k_3 &= 0\\
-k_1 - k_2 + k_3 &= 0\\
2k_1 + 8k_2 + 16k_3 &= 0
\end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $k_1 = 0$ ، $k_2 = 0$ اور $k_3 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور غیر تابع ہونے کا ثبوت ہے۔ □

مثال 3.3: اساس۔عمومی حل

تین درجی سادہ تفرقی مساوات $y^{(3)} - y' = 0$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ $y^{(3)}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ ہے۔

حل: حصہ 2.2 کی طرح ہم اس متجانس مساوات کا حل $y = e^{\lambda x}$ تصور کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔اس کو $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ لکھتے ہوئے $\lambda = 0$ اور $\lambda = \mp 1$ ملتے ہیں جن سے اساس $y_1 = c$ ، $y_2 = e^x$ اور $y_3 = e^{-x}$ ملتا ہے۔جیسا مثال 3.5 میں ثابت کیا جائے گا، یہ اساس کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا کسی بھی کھلے وقفے پر عمومی حل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

ہو گا۔ □

ابتدائی قیمت مسئلہ۔وجودیت اور یکتائی

مساوات 3.2 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.2 اور درج ذیل n ابتدائی شرائط پر مشتمل ہو گا

$$y(x_0) = K_0, y'(x_0) = K_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} \tag{3.5}$$

جہاں x_0 کھلے وقفے I پر ایک نقطہ اور K_0 تا K_{n-1} اس نقطے پر دیے گئے مقدار ہیں۔

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 کو وسعت دیتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

مسئلہ 3.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت بلند درجی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر مساوات 3.2 کے عددی سر p_0 تا p_{n-1} استمراری ہونے کی صورت میں اگر x_0 کھلے وقفے پر پایا جاتا ہو تب مساوات 3.2 اور مساوات 3.5 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا حل $y(x)$ موجود ہے۔

حل کی موجودگی کا ثبوت اس کتاب میں نہیں دیا جائے گا۔کتاب کے آخر میں ضمیمہ ا میں حل کی یکتائی کے ثبوت میں معمولی رد بدل سے یکتائی ثابت کی جا سکتی ہے۔

مثال 3.4: تین درجی یولر کوشی مساوات کا ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$x^3 y''' - 5x^2 y'' + 12xy' - 12y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 0$$

حل: ہم تفرقی مساوات میں آزمائشی تفاعل $y = x^m$ پر کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$m^3 - 8m^2 + 19m - 12 = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس کے جذر $m = 1$ ، $m = 3$ اور $m = 4$ ہیں۔جذر کو مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ یہاں جذر حاصل کرنے پر بحث نہیں کی جائے گی۔ یوں حل کی اساس $y_1 = x$ ، $y_2 = x^3$ اور $y_3 = x^4$ ہیں جنہیں مثال 3.2 میں خطی طور غیر تابع ثابت کیا گیا۔اس طرح عمومی حل

$$y = c_1x + c_2x^3 + c_3x^4$$

ہو گا۔دیے گئے تفرقی مساوات کو x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے y''' کا عددی سر اکائی حاصل کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے۔معیاری صورت میں مساوات کے دیگر عددی سر $x = 0$ پر غیر استمراری ہیں۔اس کے باوجود درج بالا عمومی حل تمام x بشمول $x = 0$ کے لئے درست ہے۔

عمومی حل اور اس کے تفرقات $y' = c_1 + 3c_2x^2 + 4c_3x^3$ اور $y'' = 6c_2x + 12c_3x^2$ میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ c_1 + 3c_2 + 4c_3 &= -1 \\ 6c_2 + 12c_3 &= 0 \end{aligned}$$

جن کا حل $c_1 = 3$ ، $c_2 = -4$ اور $c_3 = 2$ ہے۔اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = 3x - 4x^3 + 2x^4$$

□

خطی طور غیر تابع حل۔ ورونسکی

عمومی حل کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ حل خطی طور غیر تابع ہوں۔اگرچہ عموماً حل کو دیکھ کر ہی اندازہ ہو جاتا ہے کہ وہ خطی طور غیر تابع ہیں یا نہیں ہیں، البتہ ایسا معلوم کرنے کا منظم طریقہ زیادہ بہتر ہو گا۔صفحہ 140 پر

مسئلہ 2.3 دو درجی $n = 2$ مساوات کے علاوہ بلند درجی مساوات کے لئے بھی درست ہے۔ بلند درجی مساوات کی صورت میں ورونسکی درج ذیل ہو گی۔

$$W(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

ورونسکی تفرقی مساوات کے حل y_1 تا y_n پر مبنی ہے جو از خود x پر مبنی ہیں۔ورونسکی غیر صفر ہونے کی صورت میں y_1 تا y_n خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

مسئلہ 3.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات 3.2 کے I پر حل y_1 تا y_n اس صورت **خطی طور تابع** ہوں گے جب ان کے **ورونسکی**[3] کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W **مکمل صفر**[4] ہو گا۔یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب I پر y_1 تا y_n **خطی طور غیر تابع** ہوں گے اور یہ حل کی اساس ہوں گے۔

ثبوت:

(الف) تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر y_1 تا y_n مساوات 3.2 کے حل ہیں۔یوں خطی طور غیر تابع کی تعریف سے

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n = 0 \tag{3.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ I پر اس مساوات کی $n-1$ تفرقات لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} k_1y_1' + \cdots + k_ny_n' &= 0 \\ k_1y_1'' + \cdots + k_ny_n'' &= 0 \\ &\vdots \\ k_1y_1^{(n-1)} + \cdots + k_ny_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

[3] Wronskian
[4] identically zero

مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 n عدد خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کا نظام ہے جس کا **غیر صفر حل**[5] k_1 تا k_n ہے لہٰذا I پر تمام x کے لئے، اس نظام کی عددی سر قالب کا **مقطع**[6]، **مسئلہ کریمر**[7] (مسئلہ 8.15) کے تحت، صفر کے برابر ہو گی۔اب قالب کا مقطع ہی ورونسکی ہے لہٰذا I پر تمام x کے لئے W صفر کے برابر ہے۔

(ب) مسئلہ کریمر کو استعمال کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ $W = 0$ کی صورت میں مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کے نظام کا $x = x_0$ پر غیر صفر حل k_1^* تا k_n^* پایا جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے، I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y^* = k_1^* y_1 + \cdots + k_n^* y_n$ لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 کے تحت y^* ابتدائی شرائط $y^*(x_0) = 0$ تا $y^{*(n-1)}(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔انہیں ابتدائی شرائط پر حل $y \equiv 0$ بھی پورا اترتا ہے اور یوں مسئلہ 3.2 کے تحت، چونکہ مساوات 3.7 کے عددی سر I پر استمراری ہیں، لہٰذا $y^* = y$ ہو گا۔اس طرح $y^* = k_1^* y_1 + \cdots + k_n^* y_n \equiv 0$ پورے I پر ہو گا جس کا مطلب ہے کہ I پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہیں۔

(پ) اگر W کی قیمت x_0 پر صفر ہو جہاں x_0 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہو، تب ثبوت (ب) کے تحت خطی طور تابع ہونا ثابت ہوتا ہے اور یوں ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہو گا۔اس طرح اگر I پر نقطہ x_1 پر W صفر نہ ہو تب y_1 تا y_n کھلے وقفہ I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

□

مثال 3.5: اساس۔ ورونسکی
ثابت کریں کہ مثال 3.3 میں حاصل کردہ حل $y_1 = c$ ، $y_2 = e^x$ اور $y_3 = e^{-x}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: مساوات 3.6 کے طرز پر ورونسکی لکھ کر

$$W = \begin{vmatrix} c & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^x \end{vmatrix} = ce^x e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2c$$

---

[5] non trivial solution
[6] determinant
[7] Cramer's theorem

حل کیا گیا ہے جہاں پہلی قطار سے c ، دوسری قطار سے e^x اور تیسری قطار سے e^{-x} باہر نکال کر قالب کی سادہ صورت حاصل کی گئی اور اس کے بعد پہلی قطار سے قالب کو پھیلا کر اس کا **مقطع** حاصل کی گئی ہے۔چونکہ x کی کسی بھی قیمت کے لئے $W \neq 0$ ہے لہٰذا کسی بھی کھلے وقفے پر y_1 تا y_3 خطی طور غیر تابع ہیں۔ $\square$

مساوات 3.2 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

پہلے عمومی حل کی وجودیت پر بات کرتے ہیں۔ صفحہ 143 پر دیا گیا مسئلہ 2.4 بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی کار آمد ہے۔

مسئلہ 3.4: وجودیت عمومی حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ اور $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں مساوات 3.2 کا عمومی حل I پر موجود ہے۔

ثبوت: ہم I پر کوئی نقطہ x_0 لیتے ہیں۔مسئلہ 3.2 کے تحت مساوات 3.2 کے n عدد حل y_1 تا y_n پائے جاتے ہیں جو مساوات 3.5 میں دیے گئے ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ہم ابتدائی شرائط یوں چنتے ہیں کہ $K_{j-1} = 1$ ہوں جبکہ بقایا K صفر کے برابر ہوں۔اس طرح x_0 پر حل کی ورونسکی کی قیمت اکائی (1) ہو گی۔مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $y_1(x_0) = 1$ ، $y_2'(x_0) = 1$ اور $y_3''(x_0) = 1$ ہوں گے جبکہ بقایا تمام ابتدائی قیمتیں صفر کے برابر ہوں گی۔اس طرح ورونسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0), y_3(x_3)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

اکائی ہو گی۔یوں کسی بھی n کے لئے حل y_1 تا y_n مسئلہ 3.3 کے تحت I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔یہ حل اساس ہیں لہٰذا I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ ہو گا۔

$\square$

اب ہم اس قابل ہیں کہ ثابت کریں کہ مساوات 3.2 کے عمومی حل میں مساوات 3.2 کے تمام حل شامل ہیں۔مساوات 3.2 کے عمومی حل کے اختیاری مستقل میں موزوں قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل حاصل کیا

جا سکتا ہے۔یوں n درجی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی **نادر حل** نہیں پایا جاتا ہے۔نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.5: **عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں**
کھلے وقفے I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 3.2 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_nY_n(x) \tag{3.9}$$

لکھا جس سکتا ہے جہاں y_1 تا y_n کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کے حل کی اساس ہیں جبکہ C_1 تا C_n موزوں مستقل ہیں۔

ثبوت: فرض کریں کہ I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ ہے جبکہ Y مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل ہے۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر کسی بھی نقطہ x_0 پر ایسے c_1 تا c_n دریافت کیے جا سکتے ہیں کہ x_0 پر y اور اس کے پہلے $n-1$ درجی تفرقات اسی نقطے پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ درجہ تفرقات کے برابر ہوں۔ اس طرح x_0 پر

$$\begin{aligned} c_1y_1 \cdots + c_ny_n &= Y \\ c_1y_1' + \cdots + c_ny_n' &= Y' \\ &\vdots \\ c_1y_1^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} &= Y^{(n-1)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

ہو گا جو الجبرائی مساوات کا خطی نظام ہے، جس کے نا معلوم متغیرات c_1 تا c_n جبکہ اس کا عددی سر قالب، x_0 پر حل y_1 تا y_n کا، ورونسکی ہے۔چونکہ y_1 تا y_n اساس ہیں لہٰذا مسئلہ 3.3 کے تحت اس کی ورونسکی غیر صفر ہے۔یوں باب-7 میں دیے گئے **قاعدہ کریمر**[8] کے تحت مساوات 3.10 کا یکتا حل $c_1 = C_1$ تا $c_n = C_n$ پایا جاتا ہے۔عمومی حل میں اختیاری مستقل کی جگہ ان قیمتوں کو پر کرتے ہوئے I پر مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

ملتا ہے۔ مساوات 3.10 کے تحت x_0 پر y^* اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات، x_0 پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات کے برابر ہیں یعنی x_0 پر y^* اور Y یکساں ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔یوں مسئلہ 3.2 کے تحت I پر $y^* \equiv Y$ ہو گا جو درکار ثبوت ہے۔

---

[8] Cramer's rule

$\square$

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر ہماری بحث یہاں اختتام پذیر ہوتی ہے۔حزب توقع $n=2$ کے لئے یہ بحث ہو بہو حصہ 2.6 کی طرز اختیار کر لیتی ہے۔

سوالات

سوال 3.1 تا سوال 3.6 میں دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ورونسکی استعمال کرتے ہوئے، ثابت کریں کہ کسی بھی کھلے وقفے پر، دیے حل خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ حل کی اساس ہیں۔ سوال 3.1: $y'''=0, \quad 1,\, x,\, x^2$
جواب: $W=2$

سوال 3.2: $y'''-2y''-y'+2y=0, \quad e^x,\, e^{-x},\, e^{2x}$
جواب: $W=-6e^{2x}$

سوال 3.3: $y^{(4)}+2y''+y=0, \quad \cos x,\, \sin x,\, x\cos x,\, x\sin x$
جواب: $W=4$

سوال 3.4: $y^{(4)}+12y^{(3)}+54y^{(2)}+108y^{(1)}+81y=0, \quad e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}$
جواب: $W=12e^{-12x}$

سوال 3.5: $y'''+4y''+13y'=0, \quad 1,\, e^{-2x}\cos 3x,\, e^{-2x}\sin 3x$
جواب: $W=39e^{-4x}$

سوال 3.6: $x^2y''-3xy''+3y'=0, \quad 1,\, x^2,\, x^4$
میں کھلا وقفہ $x>0$ ہے۔ثابت کریں کہ دیے گئے حل درست اور اساس ہیں۔

جواب: $W=16x^3$ صرف $x=0$ پر صفر کے برابر ہے لیکن یہ نقطہ کھلے وقفے میں شامل نہیں ہے لہٰذا کھلے وقفے پر $W\neq 0$ ہے۔

سوال 3.7 تا سوال 3.10: کیا دیے گئے تفاعل کھلے وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 3.7: $\sin x, \cos x, 1$
جواب: $W = -1$ ہے لہٰذا یہ خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.8: $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$
جواب: $W = 2e^{-3x}$ ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.9: $\sinh x, \cosh x, e^x$
جواب: $W = 0$ ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور تابع ہیں۔

سوال 3.10: $\sin x, \cos x, e^x$
جواب: $W = -2e^x$ ہے لہٰذا تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم حصہ 2.2 کے طرز پر چلتے ہوئے، مستقل عددی سر والے متجانس خطی n درجی سادہ تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{3.11}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ اور a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار ہیں۔ حصہ 2.2 کی طرح ہم اس مساوات میں $y = e^{\lambda}$ پر کرتے ہوئے اس کی **امتیازی مساوات**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.12}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اگر λ مساوات 3.12 کا جذر ہو تب $y = e^{\lambda}$ مساوات 3.11 کا حل ہو گا۔ مساوات 3.12 کے جذر کو **اعدادی طریقوں**[9] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بلند درجی $(n > 2)$ تفرقی مساوات کے حل میں زیادہ ممکنات پائے جاتے ہیں۔ آئیں انہیں چند مثالوں کی مدد سے دیکھیں۔

---

[9] numerical methods

منفرد جذر

اگر مساوات 3.12 کے n جذر λ_1 تا λ_n منفرد اور حقیقی ہوں تب حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x} \tag{3.13}$$

کسی بھی x کے لئے حل کی اساس ہوں گے جن سے مساوات 3.11 کا عمومی حل

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \tag{3.14}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم درج ذیل مثال کے بعد دیکھیں گے کہ مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔

مثال 3.6: تفرقی مساوات $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ کا حل تلاش کریں۔

حل:اس کا امتیازی مساوات $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ہے جس کے جذر -1 ، 1 اور -2 ہیں۔اگر آپ کسی طرح امتیازی مساوات کا ایک جذر حاصل کر لیں تو بقایا دو جذر با آسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔یوں اگر $\lambda = -1$ دریافت کر لیا جائے تو امتیازی مساوات کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ حاصل کر کے اس کے جذر 1 اور -2 نسبتاً آسانی سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔یوں دیے گئے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$ ہو گا۔ □

مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں

ہم مساوات 3.13 میں دیے گئے حل کی ورونسکی لکھ کر، قالب کی پہلی قطار سے $e^{\lambda_1 x}$ ، دوسری قطار سے $e^{\lambda_2 x}$ اور اسی طرح چلتے ہوئے n قطار سے $e^{\lambda_n x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $E = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x}$ باہر نکال کر نسبتاً آسان قالب حاصل کرتے ہیں۔

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

اب قوت نمائی تفاعل E کسی بھی صورت صفر کے برابر نہیں ہو سکتا لہٰذا $W = 0$ صرف اس صورت ہو گا جب دائیں قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو۔دائیں قالب کے مقطع کو **کوشی مقطع**[10] کہتے ہیں جس کی قیمت

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V \tag{3.16}$$

کے برابر ثابت کی جا سکتی ہے۔ V تمام $(\lambda_j - \lambda_k)$ کا حاصل ضرب ہے جہاں $j < k (\leq n)$ ہے مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $V = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو جذر یکساں ہونے کی صورت میں $V = 0$ اور یوں $W = 0$ ہو گا۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ ورونسکی صرف اس صورت میں صفر کے برابر نہیں ہو گا جب مساوات 3.12 کے تمام جذر ایک دونوں سے مختلف ہوں۔اس سے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 3.6: اساس
مساوات 3.11 کے حل $e^{\lambda_1 x}$ تا $e^{\lambda_n x}$ ، جہاں λ حقیقی یا مخلوط ہو سکتا ہے، صرف اس صورت کھلے وقفے پر مساوات 3.11 کے حل کی اساس ہو سکتے ہیں جب مساوات 3.12 کے تمام n جذر منفرد (یعنی ایک دونوں سے مختلف) ہوں۔

حقیقت میں مسئلہ 3.6، مساوات 3.15 اور مساوات 3.16 سے حاصل عمومی نتیجہ (مسئلہ 3.7) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

مسئلہ 3.7: خطی طور غیر تابعیت
مساوات 3.11 کے $e^{\lambda x}$ طرز کے حل، جن کی تعداد کچھ بھی ہو سکتی ہے، I پر اس صورت خطی طور غیر تابع ہوں گے جب ان حل کے λ منفرد ہوں۔

---

[10] Cauchy determinant

سادہ مخلوط جذر

چونکہ مساوات 3.11 کے عددی سر حقیقی مقدار ہیں لہٰذا مخلوط جذر صرف اور صرف جوڑی دار مخلوط ممکن ہیں۔یوں اگر مساوات 3.12 کا ایک ایک سادہ جذر $\lambda = \gamma + i\omega$ ہو تب $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ بھی اس کا جذر ہو گا اور یوں تفرقی مساوات کے دو عدد خطی طور غیر تابع حل [حصہ 2.2 دیکھیں] درج ذیل ہوں گے۔

$$y_1 = e^{\gamma x}\cos\omega x, \quad y_2 = e^{\gamma x}\sin\omega x$$

مثال 3.7: سادہ مخلوط جذر۔ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - y'' + 225y' - 225y = 0, \quad y(0) = 3.2, \quad y'(0) = 46.2, \quad y''(0) = -448.8$$

حل:امتیازی مساوات $\lambda^3 - \lambda^2 + 225\lambda - 225 = 0$ کا ایک جذر $\lambda_1 = 1$ ہے۔امتیازی مساوات کو $\lambda - 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے بقایا جذر $\lambda_2 = 15i$ اور $\lambda_3 = -15i$ حاصل ہوتے ہیں۔ان سے عمومی حل اور عمومی حل کے تفرقات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= ce^x + A\cos 15x + B\sin 15x\\
y' &= ce^x - 15A\sin 15x + 15B\cos 15x\\
y'' &= ce^x - 225A\cos 15x - 225B\sin 15x
\end{aligned}$$

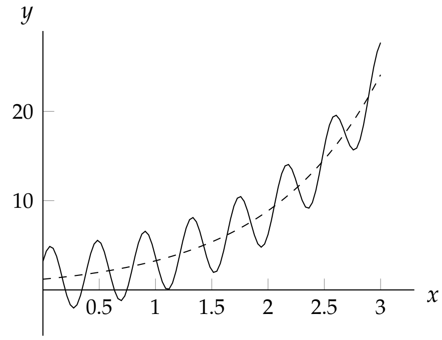
ان مساوات میں $x = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$3.2 = c + A, \quad 46.2 = c + 15B, \quad -448.8 = c - 225A$$

ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔پہلی مساوات کو تیسری مساوات سے منفی کرنے سے $-452 = -226A$ یعنی $A = 2$ حاصل ہوتا ہے جسے پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 1.2$ ملتا ہے۔دوسری مساوات میں $c = 1.2$ پر کرتے ہوئے $B = 3$ ملتا ہے۔اس طرح مخصوص حل

$$y = 1.2e^x + 2\cos 15x + 3\sin 15x$$

حاصل ہوتا ہے جسے شکل 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔مخصوص حل نقطہ دار لکیر سے دکھائے گئے $y = 1.2e^x$ کے گرد ارتعاش کرتا ہے۔ □



شکل 3.1: مثال 3.7 کا مخصوص حل۔

متعدد حقیقی جذر

امتیازی مساوات کا دوہرا منفرد جذر $\lambda_1 = \lambda_2$ ہونے کی صورت میں، صفحہ 103 پر جدول 2.1 کے تحت، تفرقی مساوات کے خطی طور غیر تابع حل $y = y_1$ اور $y_2 = xy_1$ ہوں گے۔

اسی حقیقت کے تحت اگر امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ پایا جائے تب تفرقی مساوات کے m عدد خطی طور غیر تابع حل

$$e^{\lambda x}, \; xe^{\lambda x}, \; x^2 e^{\lambda x}, \cdots, x^{m-1}e^{\lambda x} \tag{3.17}$$

ہوں گے۔ایک مثال دیکھنے کے بعد درج بالا حل کو ثابت کرتے ہیں۔

مثال 3.8: حقیقی دہرا اور سہ گنا جذر
درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 25y''' - 38y'' + 28y' - 8y = 0$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^5 - 8\lambda^4 + 25\lambda^3 - 38\lambda^2 + 28\lambda - 8 = 0$ کے جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ اور $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2$ ہیں۔یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2)e^{2x}$$

ہو گا۔ $\square$

آئیں اب مساوات 3.17 کو ثابت کریں۔ مساوات 3.11 کے بائیں ہاتھ کو

$$L[y]=y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y$$

لکھ کر اس میں $y=e^{\lambda x}$ پر کرتے ہوئے تفرق لیتے ہیں۔

$$L[e^{\lambda x}]=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0)e^{\lambda x}$$

اب تصور کریں کہ امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ_1 پایا جاتا ہے (جہاں $m<n$ ہے) جبکہ بقایا، λ_1 سے مختلف، جذر λ_{m+1} تا λ_n ہیں۔ یوں کثیر رکنی کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

(3.18)
$$L[e^{\lambda x}]=(\lambda-\lambda_1)^m(\lambda-\lambda_{m+1})(\lambda-\lambda_{m+2})\cdots(\lambda-\lambda_n)e^{\lambda x}=(\lambda-\lambda_1)^m h(\lambda)e^{\lambda x}$$

جہاں $m=n$ کی صورت میں $h(\lambda)=1$ ہو گا۔ دونوں ہاتھ λ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L[e^{\lambda x}]=m(\lambda-\lambda_1)^{m-1}h(\lambda)e^{\lambda x}+(\lambda-\lambda_1)^m\frac{\partial}{\partial\lambda}[h(\lambda)e^{\lambda x}] \tag{3.19}$$

اب چونکہ x تفرق اور λ تفرق غیر تابع اور حاصل تفرق استمراری ہیں لہٰذا بائیں ہاتھ ان کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L[e^{\lambda x}]=L\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda x}\right]=L[xe^{\lambda x}] \tag{3.20}$$

چونکہ λ_1 جذر m گنا ہے، جہاں $m\geq 2$ ہے، لہٰذا $\lambda=\lambda_1$ پر مساوات 3.19 کے دائیں ہاتھ کی قیمت جزو $(\lambda-\lambda_1)$ کی بنا صفر ہو گی۔ اس طرح مساوات 3.19 اور مساوات 3.20 کو ملا کر $L[xe^{\lambda x}]=0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ثابت ہوا کہ $xe^{\lambda x}$ مساوات 3.11 کا حل ہے۔

اسی ترتیب کو دہراتے ہوئے مساوات 3.18 کا دو درجی تفرق لیتے ہوئے $L[x^2e^{\lambda x}]=0$ لکھا جا سکتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^2e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔ اس ترکیب کو بار بار دہراتے ہوئے آخر کار $m-1$ درجی تفرق لیتے ہیں۔

(3.21)
$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}L[e^{\lambda x}]=L[x^{m-1}e^{\lambda x}]&=m(m-1)(m-2)\cdots(3)(2)(\lambda-\lambda_1)^1h(\lambda)e^{\lambda x}\\&\quad+(\lambda-\lambda_1)^m\frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}[h(\lambda)e^{\lambda x}]\end{aligned}$$

مساوات کا دایاں ہاتھ $\lambda - \lambda_1$ کی بنا $\lambda = \lambda_1$ پر صفر کے برابر ہے لہٰذا اس سے $L[x^{m-1}e^{\lambda x}] = 0$ حاصل ہوتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^{m-1}e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔

مساوات 3.18 کا m درجی تفرق لینے کے لئے مساوات 3.21 کا تفرق لے سکتے ہیں جس سے

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L[e^{\lambda x}] = L[x^m e^{\lambda x}] = m(m-1)(m-2)\cdots(3)(2)(1)h(\lambda)e^{\lambda x} + (\lambda-\lambda_1)^m \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}[h(\lambda)e^{\lambda x}]$$

ملتا ہے۔ مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو میں $\lambda - \lambda_1$ کا جزو نہیں پایا جاتا لہٰذا $\lambda = \lambda_1$ پر اس کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہو گی۔یوں $L[x^m e^{\lambda x}] \neq 0$ ہو گا لہٰذا $x^m e^{\lambda x}$ تفرقی مساوات 3.11 کا حل نہیں ہو گا۔یوں مساوات 3.17 ثابت ہوتی ہے۔

آئیں اب ثابت کریں کہ مساوات 3.17 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔مخصوص m کے لئے ان حل کا ورونسکی غیر صفر حاصل ہوتا ہے جس سے حل کی خطی طور غیر تابع ہونا ثابت ہوتا ہے۔کسی بھی m کی صورت میں ورونسکی کی m عدد قالب سے $e^{\lambda x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $e^{m\lambda x}$ باہر نکالا جائے گا۔بقایا قالب میں مختلف صف آپس میں جمع اور منفی کرتے ہوئے قالب کا مقطع 1 ، x ، $\ldots$ x^{m-1} کی ورونسکی کے برابر ثابت کیا جا سکتا ہے جو غیر صفر مقدار ہے۔یہ تفاعل تفرقی مساوات $y^{(m)} = 0$ کے حل ہیں لہٰذا مسئلہ 3.3 کے تحت یہ حل خطی طور غیر تابع ثابت ہوتے ہیں۔

متعدد مخلوط جذر

مخلوط جذر کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔یوں دوہرے مخلوط جذر کی صورت میں $\lambda = \gamma + i\omega$ اور $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ دو مرتبہ پائے جائیں گے جن سے

$$e^{\gamma x + i\omega x}, \quad xe^{\gamma x + i\omega x}, \quad e^{\gamma x - i\omega x}, \quad xe^{\gamma x - i\omega x}$$

حل لکھے جا سکتے ہیں۔ان سے حقیقی حل لکھتے ہیں۔

$$e^{\gamma x}\cos\omega x, \quad e^{\gamma x}\sin\omega x, \quad xe^{\gamma x}\cos\omega x, \quad xe^{\gamma x}\sin\omega x \tag{3.22}$$

بائیں جانب کے دو عدد حل $e^{\gamma x+i\omega x}$ اور $e^{\gamma x-i\omega x}$ جبکہ بقایا دو حل $xe^{\gamma x+i\omega x}$ اور $xe^{\gamma x-i\omega x}$ سے حاصل کیے گئے ہیں۔ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y=e^{\gamma x}[(A_1+A_2x)\cos\omega x+(B_1+B_2x)\sin\omega x] \tag{3.23}$$

مخلوط سہ گنا جذر (جو حقیقی مسائل میں شاذ و نادر پایا جاتا ہے) کی صورت میں درج ذیل حقیقی حل حاصل ہوں گے۔

$$e^{\gamma x}\cos\omega x,\ e^{\gamma x}\sin\omega x,\ xe^{\gamma x}\cos\omega x,\ xe^{\gamma x}\sin\omega x,\ x^2e^{\gamma x}\cos\omega x,\ x^2e^{\gamma x}\sin\omega x$$

اسی طرح آپ زیادہ تعداد میں پائے جانے والے مخلوط جذر سے بھی حل لکھ سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 3.11 تا سوال 3.17 کے عمومی حل لکھیں۔

سوال 3.11: $y'''+4y'=0$
جواب: $y=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$

سوال 3.12: $y^{(4)}+8y''+16y=0$
جواب: $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3x\cos 2x+c_4x\sin 2x$

سوال 3.13: $y^{(4)}-y=0$
جواب: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$

سوال 3.14: $y^{(4)}+9y''=0$
جواب: $y=c_1+c_2x+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x$

سوال 3.15: $y^{(5)}+y'''=0$
جواب: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos x+c_5\sin x$

سوال 3.16: $y^{(5)}-y^{(4)}-6y'''+14y''-11y'+3y=0$
جواب: $y=c_0e^{-3x}+c_1e^x+c_2xe^x+c3x^2e^x+c_4x^3e^x$

سوال 3.17: $y^{(5)}-2y^{(4)}-y'+2y=0$
جواب: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4\cos x+c_5\sin x$

سوال 3.18 تا سوال 3.23 ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل دریافت کریں۔ جذر حاصل کرنے کی خاطر کمپیوٹر استعمال کیا جا سکتا ہے۔

سوال 3.18: $y''' - 2.7y'' - 4.6y' + 9.6y = 0, \quad y(0) = 1.5, y'(0) = 2, y''(0) = -3$
جواب: $y = 2.521e^{1.5x} - 0.286e^{-2x} - 0.735e^{3.2x}$

سوال 3.19:

$$\begin{gathered} y''' + 10.06y'' - 94.82y' - 670.8766y = 0, \\ y(0) = -1.2, y'(0) = 5.2, y''(0) = -2.8 \end{gathered}$$

جواب: $y = 0.229e^{-13.4x} - 1.447e^{-5.6x} + 0.018e^{8.94x}$

سوال 3.20: $y''' + 5y'' + 49y' + 245y = 0, \quad y(0) = 10, y'(0) = -5, y''(0) = 1$
جواب: $y = 6.635e^{-5x} + 3.365\cos 7x + 4.025\sin 7x$

سوال 3.21: $y''' + 8y'' + 21y' + 18y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = -0.5$
جواب: $y = 23.5e^{-2x} - 21.5e^{-3x} - 16.5xe^{-3x}$

سوال 3.22:

$$\begin{gathered} y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1 \end{gathered}$$

جواب: $y = \cos 2x + 0.3125\sin 2x - 0.125x\cos 2x + 0.875x\sin 2x$

سوال 3.23:

$$\begin{gathered} y^{(5)} - 4y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 4y' = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1, y^{(4)} = 2 \end{gathered}$$

جواب: $y = 0.5 + 0.5e^{x}\cos x + 0.75e^{x}\sin x - 0.75xe^{x}\cos x - 0.25xe^{x}\sin x$

سوال 3.24: تخفیف درجہ
آپ تخفیف درجہ کے ذریعہ مثال 2.6 میں دو درجی مساوات سے کم درجی تفرقی مساوات حاصل کر چکے ہیں۔ مستقل

عددی سر والے خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا ایک حل λ_1 جانتے ہوئے کم درجی مساوات کیسے حاصل کی جا سکتی ہے؟

جوابات: امتیازی مساوات کو $\lambda - \lambda_1$ سے تقسیم کرتے ہوئے کم درجی تفرقی مساوات کی امتیازی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جس سے کم درجی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

سوال 3.25: تخفیف درجہ
متغیر عددی سر والے خطی متجانس مساوات

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

کا ایک حل y_1 جانتے ہوئے دوسرے حل کو $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ لکھ کر، جہاں $u(x) = \int z(x)\,\mathrm{d}x$ ہے، درج بالا میں پر کرتے ہوئے کم درجی مساوات

$$y_1 z'' + (3y_1' + p_2 y_1)z' + (3y_1'' + 2p_2 y_1' + p_1 y_1)z = 0$$

حاصل کریں ہے۔

سوال 3.26: تخفیف درجہ
تفرقی مساوات

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + (6x - x^3)y' - (6 - x^2)y = 0$$

کا ایک حل $y_1 = x$ ہے۔ تخفیف درجہ سے دو درجی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $z'' - z = 0$

3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

آئیں اب معیاری صورت میں لکھی گئی، n درجی غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \tag{3.24}$$

پر غور کریں جہاں $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ اور $r(x) \not\equiv 0$ ہیں۔کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کا عمومی حل

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{3.25}$$

ہو گا جہاں $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots c_ny_n(x)$ مطابقتی متجانس خطی تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{3.26}$$

کا I پر عمومی حل ہے۔ $y_p(x)$ مساوات 3.24 کا I پر ایسا کوئی بھی حل ہے جس میں اختیاری مستقل نہ پایا جاتا ہو۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کے استمراری عددی سر اور استمراری $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 3.24 کا عمومی حل موجود ہے جس میں مساوات 3.24 کے تمام حل موجود ہیں۔یوں مساوات 3.24 کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 3.24 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.24 اور درج ذیل $n-1$ ابتدائی شرائط پر مبنی ہو گا جہاں x_0 کھلے وقفے x_0 پر پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے عددی سر اور r کھلے وقفے پر استمراری ہونے کی صورت میں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل یکتا ہو گا۔ حل کے یکتائی کو حصہ 2.7 میں دو درجی تفرقی مساوات کے یکتا حل کے ثبوت کے نمونے پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} \tag{3.27}$$

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

غیر متجانس تفرقی مساوات 3.24 کے عمومی حل کے لئے مساوات 3.24 کا مخصوص حل درکار ہو گا۔ مستقل عددی سر والی تفرقی مساوات،

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x) \tag{3.28}$$

جہاں a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار اور $r(x)$ ، حصہ 2.7 کی طرح، خاص نوعیت کا تفاعل ہو، کا مخصوص حل حصہ 2.7 کی طرح، بذریعہ **نا معلوم عددی سر کی ترکیب** حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مخصوص حل y_p کو جبری تفاعل r سے درج ذیل قواعد کے تحت لکھا جاتا ہے۔

بنیادی قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

ترمیمی قاعدہ: اگر r کو دیکھ کر چنے گئے y_p کا کوئی رکن مساوات 3.28 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_k ہو تب اس رکن کی جگہ $x^k y_k$ کو y_p میں شامل کریں، جہاں k ایسا کم سے کم قیمت کا مثبت عدد ہے کہ تفاعل $x^k y_k$ مطابقتی متجانس مساوات کا حل نہ ہو۔

مجموعے کا قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

موجودہ ترکیب میں $k = 1$ یا $k = 2$ سے حصہ 2.7 کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔آئیں مثال کی مدد سے موجودہ ترکیب کا ترمیمی قاعدہ استعمال کرنا سیکھیں۔

مثال 3.9: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ ترمیمی قاعدہ۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = -5$$

حل:پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ ہے جس کو $(\lambda - 1)^3 = 0$ لکھا جا سکتا ہے جس سے سہ گنا جذر $\lambda = 1$ ملتا ہے۔یوں متجانس مساوات کو عمومی حل

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم: اب اگر ہم دیے گئے غیر متجانس مساوات کے جبری تفاعل کو دیکھ کر $y_p = Ce^x$ چنتے ہوئے y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے مساوات میں پر کریں تو $C - 3C + 3C - C = 1$ ملتا ہے جس سے C کی قیمت حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔اس کا مطلب ہے کہ چنا گیا y_p دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتا لہٰذا اس y_p کو رد کرنا ہو گا۔آپ $y_p = Cxe^x$ یا $y_p = Cx^2 e^x$ چن کر دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل بھی دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتے۔یوں ہم اوپر دیے گئے ترمیمی قاعدے کے تحت $y_p = Cx^3 e^x$ چنتے ہیں جس کے تفرقات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
y' &= Ce^x(x^3 + 3x^2) \\
y'' &= Ce^x(x^3 + 6x^2 + 6x) \\
y''' &= Ce^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)
\end{aligned}$$

y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے

$$Ce^x(x^3+9x^2+18x+6)-3Ce^x(x^3+6x^2+6x)+3Ce^x(x^3+3x^2)-Cx^3e^x=e^x$$

ہوئے $C=\frac{1}{6}$ ملتا ہے۔یوں دیے گئے غیر متجانس تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y_p=\frac{1}{6}x^3e^x$ ہے لہٰذا اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+\frac{1}{6}x^3e^x$$

تیسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر عمومی حل کے مستقل حاصل کرنے ہوں گے۔عمومی حل میں پہلی ابتدائی معلومات $y(0)=8$ پر کرتے ہوئے $c_1=8$ ملتا ہے۔اس قیمت کو y میں پر کرتے ہوئے y' لے کر دوسری ابتدائی معلومات $y'(0)=-2$ سے c_2 حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح y''' لیتے ہوئے اس میں $y'''(0)=-5$ پر کرتے ہوئے c_3 کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2+\frac{1}{6}x^3)e^x,\quad y(0)=8,\quad y(0)=8=c_1$$
$$y'=(c_1+c_2+c_2x+c_3x^2+2c_3x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2})e^x,\quad y'(0)=-2,\quad c_2=-10$$
$$y''=(c_1+2c_2+2c_3+c_2x+4c_3x+c_3x^2+\frac{x^3}{6}+\frac{5}{6}x^2+x)e^x,\ y''(0)=-5,\ c_3=\frac{7}{2}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y=\left(8-10x+\frac{7}{2}x^2+\frac{x^3}{6}\right)e^x$$

□

3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ (حصہ 2.10 دیکھیں) بلند درجی تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔یوں معیاری صورت میں لکھے گئے خطی غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 3.24، جس کے عددی سر اور $r(x)$ کھلے وقفہ

I پر استمراری ہوں، کا I پر مخصوص حل y_p درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)} r(x)\,\mathrm{d}x \\
&= y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + y_n(x) \int \frac{W_n(x)}{W(x)} r(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

مساوات 3.29 میں y_1 تا y_n مطابقتی متجانس مساوات 3.26 کے حل کی اساس ہیں جبکہ ورونسکی W کے k قطار میں $[0\ 0\ \cdots\ 0\ 1]^T$ پر کرتے ہوئے W_k حاصل کی جاتی ہے۔یوں $n=2$ کی صورت میں W ، W_1 اور W_2 درج ذیل ہوں گے۔

$$
W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = -y_2, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} = y_1
$$

مساوات 3.29 کو صفحہ 181 پر دیے گئے مساوات 2.116 کی ثبوت کی طرز پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.10: مقدار معلوم کی تبدیلی۔یولر کوشی غیر متجانس مساوات
درج ذیل غیر متجانس یولر کوشی مساوات کو حل کریں۔

$$
x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x, \quad (x > 0)
$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات میں $y = x^m$ اور اس کے تفرقات پر کرتے ہوئے

$$
[m(m-1)(m-1) - 3m(m-1) + 6m - 6]x^m = 0
$$

ملتا ہے جس کو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے جذر 1 ، 2 اور 3 حاصل ہوتے ہیں۔ان جذر سے اساس

$$
y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3
$$

لکھتے ہیں۔یوں متجانس یولر کوشی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$
y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3
$$

دوسرا قدم: مساوات 3.29 میں درکار قالب کا **مقطع** حاصل کرتے ہیں۔

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4$$
$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

تیسرا قدم: مساوات 3.29 کے تکمل میں $r(x)$ بھی درکار ہے جو دیے گئے یولر کوشی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے سے ملتا ہے۔دیے گئے مساوات کو y''' کے عددی سر x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $r = x \ln x$ ملتا ہے۔مساوات 3.29 میں $\frac{W_1}{W} = \frac{x}{2}$ ، $\frac{W_2}{W} = -1$ اور $\frac{W_3}{W} = \frac{1}{2x}$ ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} y_p &= x \int \frac{x}{2} x \ln x \, \mathrm{d}x - x^2 \int x \ln x \, \mathrm{d}x + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right) - x^2 \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) + \frac{x^3}{2} \left(x \ln x - x \right) \\ &= \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right) \end{aligned}$$

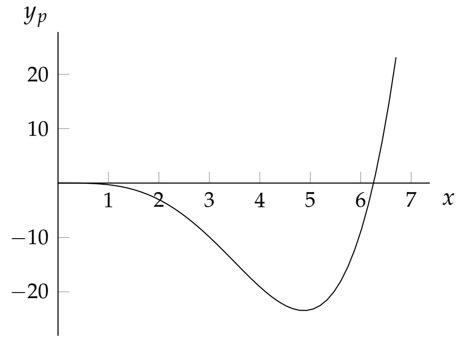
ہو گا۔یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا۔ y_p کو شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)$$

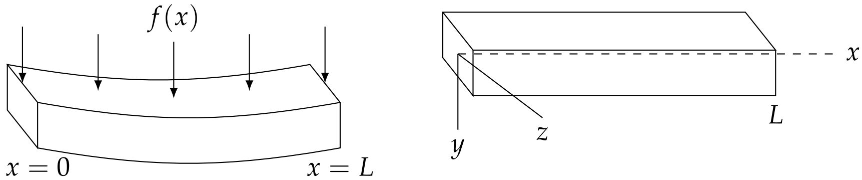
□

عملی استعمال۔لچکدار شہتیر

دو درجی تفرقی مساوات کا عملی انجینئری میں بہت زیادہ استعمال پایا جاتا ہے البتہ بلند درجی تفرقی مساوات عملی انجینئری کے بہت کم مسائل میں کام آتے ہیں۔ انجینئری کا ایک انتہائی اہم مسئلہ لچکدار شہتیر کا جھکاو ہے جس کی نمونہ کشی



شکل 3.2: مثال 3.10 کا y_p



(الف) مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر جس کی لمبائی L ہے۔

(ب) بوجھ شہتیر کو جھکا دیتی ہے۔

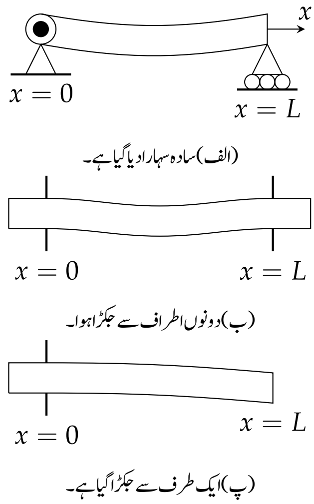
شکل 3.3: مثال 3.11 کا شہتیر۔

چہارم درجی تفرقی مساوات کرتی ہے۔ کسی بھی عمارت یا پل میں شہتیر کلیدی کردار ادا کرتے ہیں جو لکڑی یا لوہے کے ہو سکتے ہیں۔

مثال 3.11: شکل 3.3-الف میں، یکساں لچک کے مادے سے بنا ہوا، **مستطیل** رقبہ عمودی تراش کا شہتیر دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L ہے۔ شہتیر کی اپنی وزن سے شہتیر کے جھکاو کو رد کیا جا سکتا ہے۔ شکل-ب میں شہتیر کے x محور پر عمودی بیرونی بوجھ $f(x)$ ڈالا گیا ہے جس کی وجہ سے شہتیر میں جھکاو پیدا ہوا ہے۔ بیرونی بوجھ اور شہتیر کی جھکاو کا تعلق، علم لچک کے تحت، درج ذیل ہے جہاں E **ینگ کا مقیاس لچک**[11] کہلاتا ہے جبکہ I مستطیل کا z محور پر **جمودی معیار اثر**[12] ہے۔ شہتیر کی فی اکائی لمبائی پر بیرونی قوت کو بوجھ $f(x)$ لکھا گیا ہے۔

$$EIy^{(4)} = f(x) \tag{3.30}$$

[11] Young's modulus of elasticity
[12] moment of inertia



شکل 3.4: شہتیر جکڑنے کے عمومی طریقے۔

شہتیر کو عموماً شکل 3.4 میں دکھائے گئے تین طریقوں سے نصب کیا جاتا ہے جو درج ذیل سرحدی شرائط کو جنم دیتے ہیں۔

(الف) سادہ سہارا $\quad y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0$

(ب) دونوں اطراف جکڑے گئے ہیں $\quad y(0) = y(L) = y'(0) = y'(L) = 0$

(پ) ایک طرف جکڑا گیا ہے $\quad y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$

سرحدی شرط $y = 0$ سے مراد صفر ہٹاو ہے، $y' = 0$ سے مراد افقی مماس ہے، $y'' = 0$ سے مراد صفر **خماو کا معیار اثر**[13] ہے جبکہ $y''' = 0$ سے مراد **صفر جزی قوت**[14] ہے۔

آئیں سادہ سہارے والی شہتیر کے مسئلے کو حل کریں جسے شکل 3.4-الف میں دکھایا گیا ہے۔ یکساں بیرونی بوجھ کی صورت میں $f(x) = f_0$ ہو گا اور مساوات 3.30 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$y^{(4)} = k, \quad k = \frac{f_0}{EI} \tag{3.31}$$

---

[13] bending moment
[14] shearing force

جس کو تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔دو مرتبہ تکمل لیتے ہیں۔

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

$y''(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $c_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے بعد $y''(L) = 0$ پر کرنے سے $c_1 - \frac{kL}{2}$ ملتا ہے۔یوں

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 - \frac{kL}{2}x$$

ہو گا جس کا دو مرتبہ تکمل لینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{L}{6}x^3 + c_3 x + c_4\right)$$

$y(0) = 0$ پر کرنے سے $c_4 = 0$ ملتا ہے جس کے بعد $y(L) = 0$ پر کرتے ہوئے c_3 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(L) = \frac{kL}{2}\left(\frac{L^3}{12} - \frac{L^3}{6} + c_3\right) = 0, \quad c_3 = \frac{L^3}{12}$$

یوں $k = \frac{f_0}{EI}$ لکھتے ہوئے شہتیر کی لچک بالمقابل لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$y(x) = \frac{f_0}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x)$$

ہم توقع رکھتے ہیں کہ شہتیر کے درمیان سے دونوں اطراف یکساں جھکاو پایا جائے گا یعنی $y(x) = y(L - x)$ ہو گا۔زیادہ سے زیادہ جھکاو $y(\frac{L}{2}) = \frac{5f_0L^4}{16\times 24EI}$ ہے جو $x = \frac{L}{2}$ پر پایا جاتا ہے۔یاد رہے کہ شکل 3.3 میں مثبت y نیچے کی طرف کو ہے۔ □

سوالات

سوال 3.27 تا سوال 3.34 کو حل کریں۔

سوال 3.27: $y^{(4)} + 3y''' - 4y = 0$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

سوال 3.28: $y''' + 16y'' + 13y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 e^{-3x} \cos 2x + c_3 e^{-3x} \sin 2x$

سوال 3.29: $y''' + 3y'' - y' - 3y = 5e^{2x}$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{2x}$

سوال 3.30: $y^{(4)} + 8y'' - 9y = \cosh 2x$
جواب: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x + \frac{5}{39} \cosh 2x$

سوال 3.31: $x^2 y''' + 3xy'' - 2y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2 x^{\sqrt{3}} + c_3 x^{-\sqrt{3}}$

سوال 3.32: $y''' + 2.25y'' + 1.6875y' + 0.421875y = 0$
جواب: $y = c_1 e^{-0.75x} + c_2 x e^{-0.75x} + c_3 x^2 e^{-0.75x}$

سوال 3.33: $y''' - y' = \frac{3}{40} \sinh \frac{x}{2}$
جواب: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 2 \cosh \frac{x}{2}$

سوال 3.34: $y''' + 9y'' + 27y' + 27 = 2x^2$
جواب: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + c_3 x^2 e^{-3x} + \frac{2}{27} x^2 - \frac{4}{27} x + \frac{8}{81}$

سوال 3.35 تا سوال 3.39 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 3.35:

$$y^{(4)} - 10y'' + 9y = 4e^{-2x}$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -0.5, \quad y'''(0) = 0.2$$

جواب: $y = -\frac{2}{15} e^{-2x} + \frac{1}{1440} (127e^x + 1383e^{-x} - 119e^{3x} - 271e^{-3x})$

سوال 3.36:

$$y^{(4)} + y'' - 2y = 0.5 \sin 2x$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$$

جواب: $y=0.05\sin 2x+3\cos x-0.358\sin x-\cos\sqrt{2}x-0.424\sin\sqrt{2}x$

سوال 3.37: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W ، W_1 ، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔(یاد رہے تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھتے ہوئے $r=x$ حاصل ہو گا)

$$x^3y'''-5x^2y''+12xy'-12y=x^4,\quad y(1)=1,\, y'(1)=-1,\, y''(1)=2$$

جوابات: $y_h=c_1x+c_2x^3+c_3x^4$ ، $W=6x^5$ ، $W_1=x^6$ ، $W_2=-3x^4$ ، $W_3=2x^3$
$y=\frac{59}{18}x-\frac{9}{2}x^3+\frac{8}{3}x^4+\frac{x^4}{3}\ln x-\frac{4}{9}x^4$

سوال 3.38: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W ، W_1 ، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔

$$x^3y'''+5x^2y''+2xy'-2y=x^2,\quad y(1)=2,\, y'(1)=1,\, y''(1)=-1$$

جوابات: $y_h=c_1x^{-1}+c_2x+c_3x^{-2}$ ، $W=6x^{-5}$ ، $W_1=-3x^{-2}$ ، $W_2=x^{-4}$ ، $W_3=2x^{-1}$ ، $y=\frac{5}{3x}+x-\frac{3}{4x^2}+\frac{x^2}{12}$

سوال 3.39:

$$y'''+9y''+27y'+27y=27x^2,\quad y(0)=2,\, y'(0)=-1,\, y''(0)=-1$$

جواب: $y=\frac{2}{3}e^{-3x}+3xe^{-3x}+\frac{9}{2}x^2e^{-3x}+x^2-2x+\frac{4}{3}$

باب 4

نظامِ تفرقی مساوات

گزشتہ باب میں آپ نے بلند درجی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔اس باب میں سادہ تفرقی مساوات حل کرنے کا نیا طریقہ دکھایا جائے گا جس میں n درجی سادہ تفرقی مساوات سے n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جائے گا۔اس نظام کو حل کرنا بھی سکھایا جائے گا۔ تفرقی مساوات کے نظام کو قالب اور سمتیہ کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے لہٰذا حصہ 4.1 میں قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق پر غور کیا جائے گا۔

اسی باب میں تفرقی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بجائے تمام مساوات کی مجموعی طرز عمل پر غور کیا جائے گا جس سے نظام کے حل کی **استحکام**[1] کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہے۔انجینئری میں مستحکم نظام اہمیت رکھتے ہیں۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی، مستقبل کے لمحات پر معمولی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔اس ترکیب سے مساوات کا اصل حل دریافت نہیں ہوتا لہٰذا اس کو **کیفی ترکیب**[2] کہتے ہیں۔ جس ترکیب سے نظام کا اصل حل حاصل ہوتا ہو اس کو **مقداری ترکیب**[3] کہتے ہیں۔

stability[1]
qualitative method[2]
quantitative method[3]

4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق

تفرقی مساوات کے نظام پر غور کے دوران قالب اور سمتیات استعمال کئے جائیں گے۔

دو عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2
\end{aligned}
\quad \text{یا} \quad
\begin{aligned}
y_1' &= 2y_1 - 7y_2 \\
y_2' &= 5y_1 + y_2
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

میں دو عدد نا معلوم تفاعل $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ پائے جاتے ہیں۔ان مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل $g_1(t)$ اور $g_2(t)$ بھی موجود ہو سکتے ہیں۔اسی طرح n عدد درجہ اول سادہ تفرقی مساوات پر مبنی نظام

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{2n}y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

میں $y_1(t)$ تا $y_n(t)$ نا معلوم تفاعل پائے جائیں گے۔درج بالا ہر مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل بھی پائے جا سکتے ہیں۔

تکنیکی اصطلاحات

قالب

نظام 4.1 کے عددی سر (جو مستقل یا متغیرات ممکن ہیں) کو 2×2 قالب[4] $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}
\tag{4.3}
$$

[4] matrix

اسی طرح نظام 4.2 کے عددی سر کو $n \times n$ قالب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

قالب میں درج a_{11} ، a_{12} ، a_{21} وغیرہ کو ارکان[5] کہتے ہیں۔ افقی لکیروں کو صف[6] جبکہ عمودی لکیروں کو قطار[7] کہتے ہیں۔ قالب 4.3 میں پہلا صف $[a_{11} \;\; a_{12}]$ یا $[3 \;\; 2]$ جبکہ دوسرا صف $[a_{21} \;\; a_{22}]$ یا $[-1 \;\; \frac{2}{3}]$ ہے۔اسی طرح پہلا قطار درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ارکان کی علامتی اظہار میں دوگنا زیر نوشت کا پہلا عدد صف کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دوسرا عدد قطار کو ظاہر کرتا ہے۔یوں a_{21} دوسری صف اور پہلی قطار کا رکن ہے۔ قالب 4.3 کا مرکزی وتر[8] a_{11} اور a_{22} پر مبنی ہے جبکہ قالب 4.4 کا مرکزی وتر a_{11} ، a_{22} ، $\cdots$ ، a_{nn} پر مبنی ہے۔ہمیں یہاں صرف مربع قالب[9] درکار ہوں گے۔مربع قالب سے مراد ایسی قالب ہے جس میں صفوں کی تعداد قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ قالب 4.3 اور قالب 4.4 مربع قالب ہیں۔

سمتیہ۔ ایک قطار اور n ارکان کا سمتیہ قطار[10] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اسی طرح ایک صف اور n ارکان کا سمتیہ صف[11] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

entry[5]
row[6]
column[7]
main diagonal[8]
square matrix[9]
column vector[10]
row vector[11]

قالب اور سمتیات کا حساب

برابری مساوات

دو عدد $n \times n$ قالب صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے تمام **مطابقتی**[12] ارکان برابر ہوں۔ظاہر ہے کہ دو قالب کی برابری کے لئے لازم ہے کہ ان میں صفوں کی تعداد یکساں ہو اور ان میں قطاروں کی تعداد یکساں ہو۔یوں $n = 2$ کی صورت میں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

صرف اور صرف اس صورت برابر $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B})$ ہوں گے جب

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, \quad a_{12} = b_{12} \\ a_{21} &= b_{21}, \quad a_{22} = b_{22} \end{aligned}$$

ہوں۔دو عدد سمتیہ صف (یا دو عدد سمتیہ قطار) صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب دونوں میں ارکان کی تعداد n برابر ہو اور ان کے تمام مطابقتی ارکان برابر ہوں ۔یوں

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

کی صورت میں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ صرف اور صرف تب ہو گا جب

$$v_1 = x_1 \quad \text{اور} \quad v_2 = x_2$$

ہوں۔

مجموعہ

مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر دونوں قالب کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔دونوں قالب یکساں $m \times n$ ہونا لازم ہے۔اسی طرح دونوں سمتیہ صف (یا دونوں سمتیہ قطار) میں برابر ارکان ہونا لازم ہے۔یوں 2×2 قالب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{bb} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

[12] corresponding

غیر سمتی ضرب

غیر سمتی ضرب[13] یعنی مستقل c سے قالب کا ضرب حاصل کرنے کی خاطر قالب کے تمام ارکان کو c سے ضرب دیا جاتا ہے۔ مثلاً

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{bmatrix},\quad -4\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-8 & 12\\ -20 & -4\end{bmatrix}$$

اور

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}9\\ -4\end{bmatrix},\quad 3\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}27\\ -12\end{bmatrix}$$

قالب ضرب قالب

دو عدد $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ اور $\boldsymbol{B}=[b_{jk}]$ کا حاصل ضرب $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ ، (اسی ترتیب میں) $n\times n$ قالب $\boldsymbol{C}=[c_{jk}]$ ہو گا جس کے ارکان

$$c_{jk}=\sum_{m=1}^{n} a_{jm}b_{mk}\qquad j=1,\cdots,n,\qquad k=1,\cdots,n \tag{4.6}$$

ہوں گے یعنی $\boldsymbol{A}$ قالب کے j صف کے ہر رکن کو $\boldsymbol{B}$ قالب کے j قطار کے مطابقتی رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے n حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔ ہم کہتے ہیں کہ قالب کے ضرب سے مراد **صف ضرب قطار** ہے۔ مثلاً

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot7+1\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot(-4)\\ (-3)\cdot7+0\cdot2 & (-3)\cdot1+0\cdot(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -2\\ -21 & -3\end{bmatrix}$$

یہاں دھیان رہے کہ ضرب قالب **غیر مستبدل**[14] ہے لہٰذا عموماً $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ ہو گا۔ یوں دو قالب کو آپس میں ضرب دیتے ہوئے قالبوں کی ترتیب تبدیل نہیں کی جا سکتی۔ اس حقیقت کی وضاحت کی خاطر درج بالا مثال میں قالبوں کی ترتیب بدلتے ہوئے ان کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\cdot2+1\cdot(-3) & 7\cdot1+1\cdot0\\ 2\cdot2+(-4)\cdot(-3) & 2\cdot1+(-4)\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 7\\ 16 & 2\end{bmatrix}$$

---

[13] scalar product
[14] non commutative

$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کو n ارکان کی سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ سے ضرب بھی اسی قاعدے کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کے n عدد ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$v_j = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} x_m \qquad j = 1, \cdots, n \tag{4.7}$$

یوں

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔

سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا اظہار بذریعہ سمتیات

تفرق

قالب یا سمتیہ کا تفرق، تمام ارکان کا تفرق حاصل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t^3 \\ 6\cos 2t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15t^2 \\ -12\sin 2t \end{bmatrix}$$

قالب کی تفرق اور ضرب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 4.1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

اسی طرح مساوات 4.2 کو درج ذیل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

مزید اعمال اور اصطلاحات

تبدیل محل

تبدیلی محل[15] کے عمل سے قالب کے قطاروں کو صفوں کی جگہ لکھا جاتا ہے۔یوں 2×2 قالب $\boldsymbol{A}$ سے **تبدیلی محل**[16] کے ذریعہ **تبدیلی محل قالب**[17] $\boldsymbol{A}^T$ حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف $\boldsymbol{x}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{x}^T$ سمتیہ قطار ہو گا۔اسی طرح سمتیہ قطار $\boldsymbol{v}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{v}^T$ سمتیہ صف ہو گا۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

قالب کا معکوس

ایسا $n \times n$ قالب جس کے مرکزی وتر کے تمام ارکان اکائی (1) اور بقایا ارکان صفر ہوں کو **اکائی قالب**[18] $\boldsymbol{I}$ کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

[15] transposition
[16] transposition
[17] transpose matrix
[18] unit matrix

ایسا $\boldsymbol{B}$ قالب، جس کا $\boldsymbol{A}$ قالب کے ساتھ حاصل ضرب اکائی قالب ہو $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ ، قالب $\boldsymbol{A}$ کا **معکوس قالب**[19] کہلاتا ہے جسے $\boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{A}$ **غیر نادر قالب**[20] کہلاتا ہے۔یہاں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں $n \times n$ قالب ہیں۔

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{4.11}$$

قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس تب پایا جاتا ہے جب $\boldsymbol{A}$ کا **مقطع** غیر صفر $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ہو۔اگر $\boldsymbol{A}$ کا معکوس نہ پایا جاتا ہو تب $\boldsymbol{A}$ **نادر**[21] قالب کہلاتا ہے۔ مربع 2×2 قالب کا معکوس

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ کا مقطع $|\boldsymbol{A}|$ درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{4.13}$$

خطی طور تابعیت

r عدد سمتیات $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ جہاں ہر سمتیہ n ارکان پر مشتمل ہو، اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[22] یا **خطی طور غیر تابع** کہلاتے ہیں جب

$$c_1\boldsymbol{v}^{(1)} + \cdots + c_r\boldsymbol{v}^{(r)} = \boldsymbol{0} \tag{4.14}$$

سے مراد c_1 تا c_r کی قیمتیں صفر ہو۔درج بالا مساوات میں $\boldsymbol{0}$ **صفر سمتیہ**[23] ہے جس کے تمام n ارکان صفر کے برابر ہیں۔اگر مساوات 4.14 میں c_1 تا c_r کوئی ایک یا ایک سے زائد مستقل غیر صفر ہوں تب $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ **خطی طور تابع سلسلہ**[24] یا **خطی طور تابع** کہلائیں گے چونکہ ایسی صورت میں کم از کم ایک سمتیہ کو

---

inverse matrix[19]
non singular matrix[20]
singular[21]
linearly independent set[22]
zero vector[23]
linearly dependent vector[24]

بقایا سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے، مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.14 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$v^{(1)} = -\frac{1}{c_1}\left[c_2 v^{(2)} + \cdots + c_r v^{(r)}\right]$$

لکھا جا سکتا ہے۔

امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات

امتیازی اقدار[25] اور امتیازی سمتیات[26] انتہائی اہم ہیں جو کوانٹم میکانیات[27] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ مساوات

$$Ax = \lambda x \tag{4.15}$$

میں $A = [a_{jk}]$ معلوم $n \times n$ قالب ہے جبکہ λ نامعلوم مستقل (جو حقیقی یا مخلوط مقدار ہو سکتا ہے) اور x نامعلوم سمتیہ ہے جنہیں حاصل کرنا درکار ہے۔ کسی بھی λ کے لئے مساوات 4.15 کا ایک حل $x = 0$ ممکن ہے۔ ایسی غیر سمتی[28] λ جو $x \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.15 پر پورا اترتی ہو، A کی امتیازی قدر[29] کہلاتی ہے جبکہ، اس λ کی مطابقتی، x کو A کی امتیازی سمتیہ[30] کہتے ہیں۔

ہم مساوات 4.15 کو $Ax - \lambda x = 0$ یا

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{4.16}$$

لکھ سکتے ہیں جو n عدد خطی الجبرائی مساوات کو ظاہر کرتی ہے جس کے نامعلوم متغیرات x_1 تا x_n ، سمتیہ x کے ارکان ہیں۔ اس مساوات کے غیر صفر حل $x \neq 0$ کے لئے ضروری ہے کہ $A - I$ کے عددی سر قالب کا مقطع صفر ہو۔ اس کا ثبوت خطی الجبرا میں بطور بنیادی حقیقت پیش کیا جاتا ہے [مسئلہ 8.15]۔ اس باب میں ہمیں $n = 2$ سے دلچسپی ہے لہذا مساوات 4.16 کو

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

---

[25] Eigenvalues, characteristic values
[26] Eigenvectors
[27] quantum mechanics
[28] scalar
[29] Eigenvalue
[30] Eigenvector

لکھتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2&=0\end{aligned}\tag{4.18}$$

اب نادر قالب کا مقطع صفر ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ اس صورت نادر قالب ہو گا جب اس قالب کا مقطع (جسے $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مقطع**[31] کہتے ہیں) صفر ہو۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|&=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(a_{12}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}\\ &=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0\end{aligned}\tag{4.19}$$

اس دو درجی مساوات کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مساوات**[32] کہتے ہیں۔اس کے حل λ_1 اور λ_2 ، قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی قدر یا امتیازی اقدار ہیں۔پہلے امتیازی قدر حاصل کریں۔اس کے بعد λ_1 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_1 کی مطابقتی، $\boldsymbol{A}$ کی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ دریافت کریں۔اسی طرح λ_2 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_2 کی مطابقتی، $\boldsymbol{A}$ کی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)}$ دریافت کریں۔یاد رہے کہ اگر $\boldsymbol{x}$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی سمتیہ ہو تب $k\boldsymbol{x}$ بھی $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی سمتیہ ہو گا جہاں $k\neq 0$ ہے۔

مثال 4.1: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ -0.8 & 0.4\end{bmatrix}$$

حل:امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 3\\ -0.8 & 0.4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2.6\lambda+1.2=0$$

سے $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی قدر $\lambda_1=-0.6$ اور $\lambda_2=-2$ ملتے ہیں۔امتیازی قدر $\lambda=\lambda_1=-0.6$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(-3+0.6)x_1+3x_2&=0\\ -0.8x_1+(0.4+0.6)x_2&=0\end{aligned}$$

---

[31] characteristic determinant
[32] characteristic equation

پہلی مساوات کو $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔دوسری مساوات کو بھی $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_1 = 1$ چننا جائے تو $x_2 = 0.8$ ہو گا لہٰذا، $\lambda_1 = -0.6$ کی مطابقتی، $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی سمتیہ

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -2$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (-3+2)x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -0.8x_1 + (0.4+2)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان دونوں مساوات کو $x_1 = 3x_2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_2 = 1$ چننا جائے تو $x_1 = 3$ حاصل ہو گا لہٰذا، $\lambda_2 = -2$ کی مطابقتی، $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی سمتیہ

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

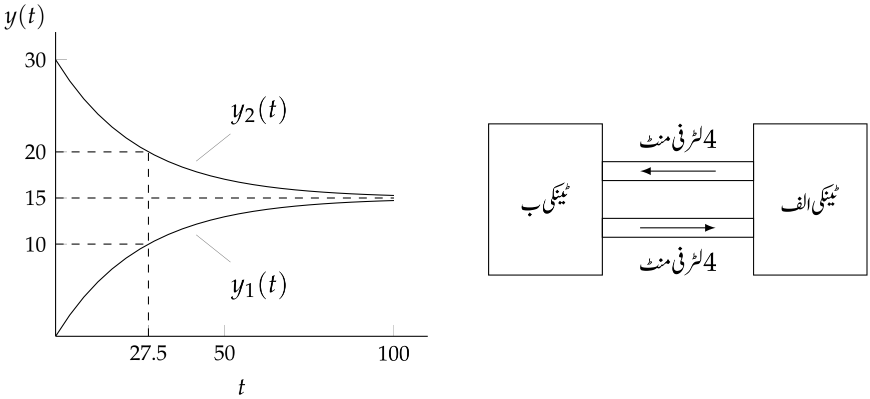
ہو گا۔جیسا پہلے ذکر کیا گیا، امتیازی سمتیات کو کسی بھی غیر صفر عدد سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔ □

4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

اس حصے میں ہم تفرقی مساوات کے نظام کی عملاً اہمیت دیکھیں گے۔ ہم پہلے دیکھتے ہیں کہ ایسے نظام مختلف عملی مسائل میں کیسے کردار ادا کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھیں گے کہ بلند درجی تفرقی مساوات کو کیسے تفرقی مساوات کے نظام میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 4.2: دو ٹینکیوں کا نظام

ایک ٹینکی کو استعمال کرتے ہوئے مرکب بنانے کے عمل پر صفحہ 26 مثال 1.10 میں غور کیا گیا جہاں مسئلے کو ایک عدد تفرقی مساوات سے ظاہر کیا گیا۔اس مثال کو ایک مرتبہ دیکھ لیں چونکہ وہی معلومات یہاں بھی استعمال کی جائیں گی۔



شکل 4.1: ٹینکیوں کا نظام۔

شکل 4.1 میں دو ٹینکیاں دکھائی گئی ہیں جن میں یک برابر دو سو (200) لٹر پانی موجود ہے۔ ٹینکی الف میں خالص پانی ہے جبکہ ٹینکی ب کی پانی میں تیس (30) کلو گرام کا نمک ملایا گیا ہے۔ ٹینکیوں میں پانی کو مسلسل ہلایا جاتا ہے تا کہ ان میں ہر جگہ محلول یکساں رہے۔ ٹینکیوں میں پانی چار (4) لٹر فی منٹ سے چکر کاٹتی ہے جس کی وجہ سے ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار $y_2(t)$ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔ کتنی دیر کے بعد ٹینکی الف میں نمک کی مقدار، ٹینکی ب میں نمک کی مقدار کا نصف ہو گا؟

حل: پہلا قدم: نظام کی نمونہ کشی کرتے ہیں۔ ایک ٹینکی کی طرح، ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ میں تبدیلی کی شرح $y_1'(t)$ نمک کی در آمدی اور بر آمدی شرح میں فرق کے برابر ہو گی۔ یہی کچھ $y_2'(t)$ کے لئے بھی کہا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} y_1' &= 4\frac{y_2}{200} - 4\frac{y_1}{200} \\ y_2' &= 4\frac{y_1}{200} - 4\frac{y_2}{200} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.02y_1 + 0.02y_2 \\ y_2' &= 0.02y_1 - 0.02y_2 \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس نظام کو

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.20}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

ہیں۔

دوسرا قدم: عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح یہاں بھی حل کو قوت نمائی تفاعل

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t} \tag{4.21}$$

فرض کرتے ہیں۔ مساوات 4.20 میں اس فرضی تفاعل اور اس کے تفرق کو پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$$

دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے دونوں اطراف کو بدل کر لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

ہمیں اس مساوات کے غیر صفر اہم حل درکار ہیں لہٰذا ہمیں $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کرنے ہوں گے۔ امتیازی اقدار امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -0.02 - \lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.02 - \lambda) - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0$$

کے حل $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ ہوں گے۔ (یہاں دھیان رہے کہ ہمیں غیر صفر امتیازی سمتیات درکار ہیں۔ امتیازی اقدار صفر ہو سکتے ہیں۔) امتیازی سمتیات مساوات 4.18 کے پہلے یا دوسرے مساوات سے حاصل ہوں گے۔ مساوات 4.18 کی پہلے مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے لئے

$$-0.02x_1 + 0.02x_2 = 0, \quad (-0.02 + 0.04)x_1 + 0.02x_2 = 0$$

لکھے جائیں گے جن سے $x_1 = x_2$ اور $x_1 = -x_2$ ملتے ہیں۔ ہم $x_1 = x_2 = 1$ اور $x_1 = -x_2 = 1$ چنتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے مطابقتی امتیازی سمتیات

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 4.21 اور مسئلہ خطی میل (جو خطی متجانس تفرقی مساوات کے نظام پر بھی لاگو ہوتا ہے) کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \boldsymbol{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t} \tag{4.22}$$

تیسرا قدم: ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ (یعنی ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر کوئی نمک نہیں پایا جاتا) اور $y_2(0) = 30$ (یعنی ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر تیس کلو گرام نمک پایا جاتا ہے) ہیں۔مساوات 4.22 میں $t = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

درج بالا مساوات کی جزوی صورت $c_1 + c_2 = 0$ اور $c_1 - c_2 = 30$ ہے جس کا حل $c_1 = 15$ اور $c_2 = -15$ ہے۔یوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہوا حل

$$\boldsymbol{y} = 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 15 - 15e^{-0.04t} \\ y_2(t) &= 15 + 15e^{-0.04t} \end{aligned}$$

ہو گا۔اس حل کو شکل 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

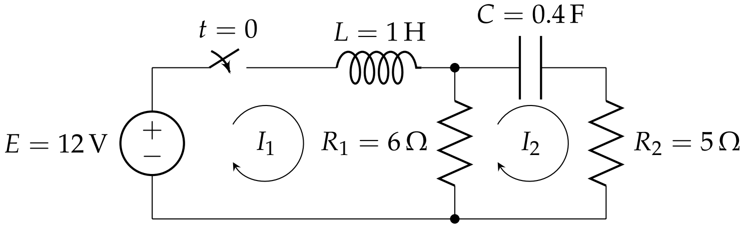
چوتھا قدم: ٹینکی الف میں اس وقت ٹینکی ب کا آدھا نمک ہو گا جب اس میں $\frac{30}{3} = 10$ کلو گرام نمک ہو۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t} = 10, \quad t = -\frac{1}{0.04} \ln \frac{1}{3} = 27.5 \,\text{min}$$

□

مثال 4.3: برقی جال

شکل 4.2 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو ہوتا ہے۔برقی رو $I_1(t)$ اور $I_2(t)$ دریافت کریں۔ابتدائی رو اور ابتدائی برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر ہیں۔



شکل 4.2: مثال 4.3 کا برقی جال۔

حل: پہلا قدم نظام کی نمونہ کشی ہے۔ امالہ میں رو I_1 ہے لہٰذا اس پر برقی دباو $v_L = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔ برق گیر میں رو I_2 ہے لہٰذا اس پر دباو $v_C = \frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ مزاحمت R_2 پر دباو $v_{R2} = I_2R_2$ ہو گا جبکہ مزاحمت R_1 میں کل رو $I_1 - I_2$ ہے لہٰذا اس پر دباو $v_{R1} = (I_1 - I_2)R_1$ ہو گا۔ کرخوف قانون دباو کے تحت کسی بھی بند دائرے میں کل دباو کا اضافہ اس دائرے میں کل دباو کے گھٹاو کے برابر ہو گا۔ یوں بائیں دائرے کے لئے

$$E = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + (I_1 - I_2)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E = 12$ ، $L = 1$ اور $R_1 = 6$ پر کرتے ہوئے

$$I_1' = -6I_1 + 6I_2 + 12 \tag{4.23}$$

ملتا ہے۔ اسی طرح دائیں دائرے کے لئے

$$0 = \frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t + I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $C = 0.4$ اور $R_2 = 5$ پر کرتے ہوئے تفرق لینے سے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4I_1' = 0$$

ملتا ہے۔ اس میں مساوات 4.23 سے I_1' کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4(-6I_1 + 6I_2 + 12) = 0$$

یعنی

$$I_2' = -\frac{36}{11}I_1 + \frac{67}{22}I_2 + \frac{72}{11} \tag{4.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.23 اور مساوات 4.24 کو

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{g} \tag{4.25}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 12 \\ \frac{72}{11} \end{bmatrix}$$

ہیں۔ I_1' اور I_2' کے سمتیہ قطار کو $\boldsymbol{J}$ اس لئے لکھا گیا ہے کہ اس باب میں $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

دوسرا قدم نظام کا حل تلاش کرنا ہے۔ $\boldsymbol{g}$ کی موجودگی **غیر متجانس سادہ تفرقی نظام** کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہم ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح پہلے متجانس مطابقتی نظام $\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ ہم $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے متجانس نظام میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{J}' = \lambda \boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t} \quad \implies \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

غیر صفر اہم حل کے حصول کے لئے $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات درکار ہوں گے۔ امتیازی اقدار امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{65}{22}\lambda - \frac{15}{11} = 0$$

سے $\lambda_1 = -2.38209$ اور $\lambda_2 = -0.57245$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان امتیازی اقدار کی مطابقتی امتیازی سمتیات مساوات 4.18 سے حاصل ہوں گے۔ مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_1 پر کرتے ہوئے

$$(-6 + 2.38209)x_1 + 6x_2 = 0, \quad \implies x_1 = 1.658416x_2$$

ملتا ہے۔ یوں $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_1 = 1.658416$ ملتا ہے جس سے $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.658416 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_2 پر کرتے ہوئے

$$(-6 + 0.57245)x_1 + 6x_2 = 0, \quad \implies x_1 = 1.105471x_2$$

ملتا ہے۔ یوں $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_1 = 1.105471$ ملتا ہے جس سے $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.105471 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں متجانس نظام کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{J} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} \tag{4.26}$$

مساوات 4.25 کے غیر متجانس نظام کا جبری تفاعل $\boldsymbol{g}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اس نظام کا مخصوص حل مستقل سمتیہ قطار $\boldsymbol{J}_p = \boldsymbol{a}$ فرض کرتے ہیں جس کے ارکان a_1 اور a_2 ہیں۔ یوں $\boldsymbol{J}' = 0$ ہو گا۔ مساوات 4.25 میں فرض کردہ مخصوص حل پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{g} = 0$ ملتا ہے جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
-6a_1 + 6a_2 + 12 &= 0 \\
-\frac{36}{11}a_1 + \frac{67}{22}a_2 + \frac{72}{11} &= 0
\end{aligned}
$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے $a_1 = 2$ اور $a_2 = 0$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ہو گا۔ یوں عمومی حل

$$
\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_h + \boldsymbol{J}_p = c_1 \boldsymbol{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \boldsymbol{a}
$$

ہو گا جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 1.658416 c_1 e^{-2.38209t} + 1.105471 c_2 e^{-0.57245t} + 2 \\
I_2 &= c_1 e^{-2.38209t} + c_2 e^{-0.57245t}
\end{aligned}
$$

ابتدائی معلومات کے تحت $I_1(0) = 0$ اور $I_2(0) = 0$ ہے۔ انہیں درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
1.658416 c_1 + 1.105471 c_2 + 2 &= 0 \\
c_1 + c_2 &= 0
\end{aligned}
$$

ملتا ہے جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -3.61699$ اور $c_2 = 3.61699$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مخصوص حل

$$
\boldsymbol{J} = -3.617 \boldsymbol{x}^{(1)} e^{-2.38t} + 3.617 \boldsymbol{x}^{(2)} e^{-0.57t} + \boldsymbol{a}
$$

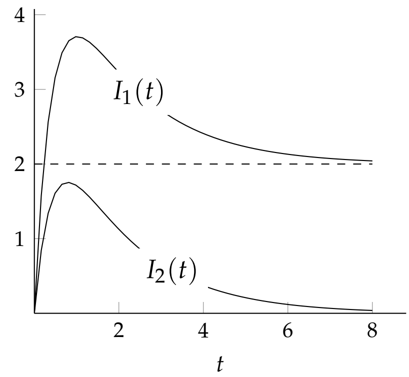
یعنی

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -5.998 e^{-2.38t} + 3.998 e^{-0.57t} + 2 \\
I_2 &= -3.617 e^{-2.38t} + 3.617 e^{-0.57t}
\end{aligned}
$$

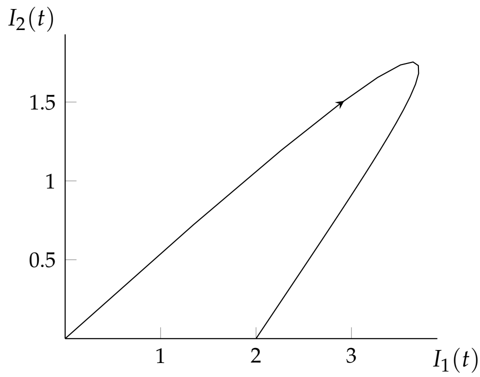
ہو گا جسے شکل 4.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.3-ب میں $I_1(t)$ بالمقابل $I_2(t)$ کو $I_1 I_2$ سطح پر دکھایا گیا ہے جس میں t مقدار معلوم ہے۔ مقدار معلوم کے بڑھنے کی سمت کو منحنی پر تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے۔ سطح $I_1 I_2$ کو نظام کی **سطح مرحلہ**[33] کہتے

[33] phase plane



(الف) مثال 4.3 کے دور کا مخصوص حل۔



(ب) $I_1(t)$ بالمقابل $I_2(t)$

شکل 4.3: مثال 4.3 کے منحنی۔

ہیں جبکہ شکل 4.3-ب کی منحنی کو **خط حرکت**[34] کہتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ **سطح مرحلہ اشکال**، سادہ شکل 4.3-الف طرز کے اشکال سے زیادہ اہم ثابت ہوتے ہیں۔یہ خطوط کی نسل کے بارے میں بہتر کیفی معلومات فراہم کرتے ہیں۔ □

صفحہ 26 مثال 1.10 میں ایک عدد ٹینکی کی مثال پر غور کیا گیا جس کی نمونہ کشی ایک عدد سادہ تفرقی مساوات سے کی گئی۔ مثال 4.2 میں دو ٹینکیوں پر مبنی نظام کی نمونہ کشی دو عدد تفرقی مساوات سے کی گئی۔ اسی طرح مثال 4.3 میں دو عدد نا معلوم رو کی بنا دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ بڑے نظام کی نمونہ کشی زیادہ تعداد کی تفرقی مساوات سے کی جائے گی۔

n درجی سادہ تفرقی مساوات سے تفرقی مساوات کے نظام کا حصول

درج ذیل مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے کہ n درجی سادہ تفرقی مساوات 4.27 سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جا سکتا ہے۔

---

[34] trajectory

مسئلہ 4.1: تفرقی مساوات کا مبادلہ
سادہ n درجی تفرقی مساوات

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{4.27}$$

میں

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \tag{4.28}$$

لے کر اس کو n عدد سادہ ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned} \tag{4.29}$$

میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

ثبوت: مساوات 4.28 کے تفرق سے نظام کے پہلے $n-1$ عدد تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 4.28 سے $y_n' = y^{(n)}$ بھی حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 4.27 سے مساوات 4.29 کی آخری مساوات بھی حاصل ہوتی ہے۔

□

مثال 4.4: ہم اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ ارتعاش کے مسئلے پر غور کر چکے ہیں جس کی تفرقی مساوات صفحہ 118 پر مساوات 2.45

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \implies \quad y'' = -\frac{k}{m}y - \frac{c}{m}y' \tag{4.30}$$

دیتی ہے جس کے لئے مساوات 4.29 کا نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{aligned}$$

متجانس اور خطی ہے۔ قالب کا استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ لکھتے ہوئے اس نظام کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

جس سے امتیازی مساوات لکھتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

اب مثلاً $m = 1$ ، $c = 1.4$ اور $k = 0.24$ ہوں تب

$$\lambda^2 + 1.4\lambda + 0.24 = (\lambda + 0.2)(\lambda + 1.2) = 0$$

ہو گا جس سے امتیازی اقدار $\lambda_1 = -0.2$ اور $\lambda_2 = -1.2$ حاصل ہوتے ہیں۔امتیازی سمتیات $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ کی پہلی مساوات $-\lambda x_1 + x_2$ سے حاصل کرتے ہیں۔امتیازی قدر $\lambda_1 = -0.2$ پر کرتے ہوئے $0.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -0.2x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -0.2$ ہو گا۔اسی طرح $\lambda_2 = -1.2$ پر کرتے ہوئے $1.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -1.2x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1.2$ ہو گا۔یوں درج ذیل امتیازی سمتیات حاصل ہوتی ہیں

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} e^{-0.2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix} e^{-1.2t}$$

سمتیہ حل لکھا جائے گا۔اس نظام کی پہلی مساوات

$$y = y_1 = c_1 e^{-0.2t} + c_2 e^{-1.2t}$$

درکار حل ہے جبکہ نظام کی دوسری مساوات حل کی تفرق ہے۔

$$y_2 = y_1' = y' = -0.2c_1 e^{-0.2t} - 1.2c_2 e^{-1.2t}$$

□

سوالات

سوال 4.1 تا سوال 4.5 میں دیے گئے قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کریں۔

سوال 4.1: الیکٹران کی ایک خاصیت **چکر**[35] کہلاتی ہے جس کی مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ یا $\frac{\hbar}{2}$ ہو سکتی ہے جہاں $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ہے اور $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{m^2 kg/s}$ **مستقل پلانک**[36] ہے۔چکر سمتیہ مقدار ہے۔مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا چکر یا ہمہ میدان (مقناطیسی میدان کی سمت میں) رہتا ہے اور یا مخالف میدان (میدان کی الٹ سمت میں) رہتا ہے۔ہمہ میدان صورت میں الیکٹران کو **اوپر چکر**[37] الیکٹران کہتے ہیں جبکہ میدان مخالف چکر کی صورت میں الیکٹران کو **نیچے چکر**[38] الیکٹران کہتے ہیں۔ z سمت میں مقناطیسی میدان میں موجود الیکٹران کی خاصیت $\boldsymbol{S}_z$ **قالب چکر**[39] سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ z میدان میں اوپر چکر الیکٹران کو امتیازی سمتیہ χ_+^z اور نیچے چکر الیکٹران کو امتیازی سمتیہ χ_-^z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔درج ذیل $\boldsymbol{S}_z$ قالب کے امتیازی اقدار (یعنی الیکٹران کا چکر) حاصل کرتے ہوئے امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{S}_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda_- = -\frac{\hbar}{2}$ ، $\lambda_+ = \frac{\hbar}{2}$ ، $\chi_-^z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\chi_+^z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.2: مقناطیسی میدان میں الیکٹران کی زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع $\boldsymbol{S}^2$ قالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس قالب کی امتیازی قدر زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع ہو گا۔قالب کی امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{S}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3\hbar}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3\hbar}{4} \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3\hbar^2}{4}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

[35] spin
[36] Plank's constant
[37] spin up
[38] spin down
[39] spin matrix

سوال 4.3: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1=\lambda_2=1$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

سوال 4.4: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{bmatrix}$

سوال 4.5: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.6\\ -0.4 & 1.2\end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1=\frac{3}{5}$ ، $\lambda_2=\frac{4}{5}$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

سوال 4.6 اور سوال 4.7 ٹینکیوں کے سوالات ہیں۔

سوال 4.6: اگر مثال 4.2 میں ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر چار سو (400) لٹر پانی موجود ہو تب جوابات کیا ہوں گے؟

جوابات: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.01 & 0.02\\ 0.01 & -0.02\end{bmatrix}$ ، $\lambda_1=-0.03$ ، $\lambda_2=0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}$ ، $c_1=-20$ ، $c_2=20$ ، $23.1\,\text{min}$

سوال 4.7: مثال 4.2 میں ٹینکی الف کے ساتھ دو سو (200) لٹر کی ٹینکی پ دو نالیوں کے ذریعہ جوڑی جاتی ہے۔ان کے مابین بھی چار لٹر فی منٹ کی شرح سے پانی کا تبادلہ ہوتا ہے۔ٹینکی پ میں ابتدائی طور پر دو سو لٹر کا خالص پانی پایا جاتا ہے۔اس نظام کے تفرقی مساوات لکھ کر $\boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔نظام کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کرتے ہوئے مخصوص حل دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.04 & 0.02 & 0.02\\ 0.02 & -0.02 & 0\\ 0.02 & 0 & -0.02\end{bmatrix}$ ، $\lambda_1=-0.06$ ، $\lambda_2=-0.02$ ، $\lambda_3=0$ ،
$\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\-0.5\\-0.5\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ ،
$\boldsymbol{y}=-10\boldsymbol{x}^{(1)}e^{-0.06t}+15\boldsymbol{x}^{(-0.02t)}+10\boldsymbol{x}^{(3)}$

سوال 4.8 تا سوال 4.10 برقی جال پر مبنی ہیں۔

سوال 4.8: اگر مثال 4.3 میں ابتدائی برقی رو $I_1(0)=0$ اور $I_2=2\,\mathrm{A}$ ہوں تب حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1=10.63e^{-0.57t}-12.63e^{-2.38t}+2$ ، $I_2=9.62e^{-0.57t}-7.62e^{-2.38t}$

سوال 4.9: اگر مثال 4.3 میں $L=0.5\,\mathrm{H}$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1=2.96e^{-0.529t}-4.96e^{-5.153t}+2$ ، $I_2=2.83e^{-0.529t}-2.83e^{-5.153t}$

سوال 4.10: اگر مثال 4.3 میں $L=2\,\mathrm{H}$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1=2+e^{-\frac{35}{44}t}[19.9\cos(0.22t)-2\sin(0.22t)]$ ، $I_2=14.77e^{-\frac{35}{44}t}\sin(0.22t)$

سوال 4.11 تا سوال 4.11 میں تفرقی مساوات کو نظام میں تبدیل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ قالب حاصل کریں۔اس قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کو جوں کا توں بھی حل کریں۔

سوال 4.11: $y''+5y'+6y=0$

جوابات: $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}$ ، $\lambda_1=-3$ ، $\lambda_2=-2$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}e^{-3t}+c_2\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}e^{-2t}$ ،

سوال 4.12: $12y'' - y' - 6y = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ ، $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ،

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} e^{\frac{3}{4}t}$$

سوال 4.13: $y''' - y' = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = 1$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ،

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

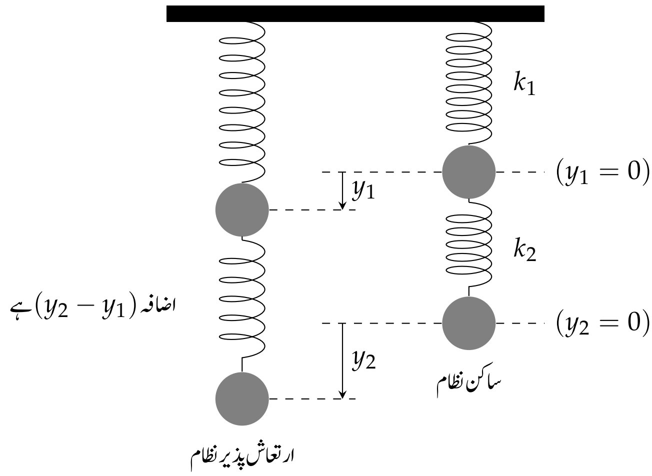
سوال 4.14: $y'' + 9y' + 14y = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14 & -9 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = -7$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ،

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} e^{-7t}$$

سوال 4.15: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام شکل 4.4 میں دکھایا گیا ہے جس میں $m_1 = m_2 = 1$ ، $k_1 = 3$ اور $k_2 = 4$ ہیں۔اس نظام کے تفرقی مساوات لکھیں۔ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\omega t}$ تصور کرتے ہوئے، جہاں $\omega^2 = \lambda$ ہے، ان کا حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1 = A\cos(1.109t) + B\sin(1.109t) + C\cos(3.126t) + D\sin(3.126t)$ ،
$y_2 = A^*\cos(1.109t) + B^*\sin(1.109t) + C^*\cos(3.126t) + D^*\sin(3.126t)$



شکل 4.4: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام۔

4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور وورونسکی

گزشتہ حصے کے ایک درجی تفرقی مساوات کے نظام، درج ذیل عمومی نظام کی مخصوص صورت ہے۔

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\
y_2 &= f_2(t, y_1, \cdots, y_n) \\
&\vdots \\
y_n &= f_n(t, y_1, \cdots, y_n)
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \tag{4.32}
$$

نظام کو سمتیہ کی صورت میں سمتیہ قطار $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ اور سمتیہ قطار $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \cdots, f_n]^T$ (یہاں T سے مراد تبدیلی محل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے سمتیہ قطار کو افقی لکھ کر جگہ بچائی گئی ہے) کی استعمال سے لکھا گیا ہے۔درج بالا نظام عملی استعمال کے تقریباً تمام صورتوں کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $n = 1$ کی صورت میں یہ $y_1' = f_1(t, y_1)$ یعنی $y' = f(t, y)$ کو ظاہر کرے گی جسے ہم باب 1 سے جانتے ہیں۔

کسی کھلے وقفہ $a < t < b$ پر مساوات 4.32 کا حل، وقفہ $a < t < b$ پر قابل تفرق، n عدد تفاعل کا سلسلہ

$$y_1 = h_1(t), \quad y_2 = h_2(t), \quad \cdots, \quad y_n = h_n(t)$$

ہو گا جو پورے وقفے پر مساوات 4.32 پر پورا اترتا ہو۔ **حل سمتیہ**[40] کو قطار سمتیہ $\boldsymbol{h} = [h_1(t), \cdots, h_n(t)]^T$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t)$$

اس نظام پر مبنی **ابتدائی قیمت مسئلہ** مساوات 4.32 اور n عدد **ابتدائی شرائط**

$$y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \cdots, \quad y_n(t_0) = K_n \tag{4.33}$$

پر مبنی ہو گا۔ ان ابتدائی شرائط کو سمتیہ کی صورت میں $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں t_0 دیے گئے وقفے پر پایا جاتا ہے اور سمتیہ قطار $\boldsymbol{K} = [K_1, \cdots, K_n]^T$ کے ارکان دیے گئے مستقل مقدار ہیں۔ مساوات 4.32 اور مساوات 4.33 کے ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کی **وجودیت** اور **یکتائی** کے لئے **معقول شرائط** درج ذیل مسئلہ بیان کرتی ہے جو حصہ 1.7 میں دیے گئے مسئلے کو وسعت دیتی ہے۔ اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسئلہ 4.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ $ty_1y_2\cdots y_n$ **میدان عمل**[41] پر تفاعل f_1 تا f_n اور ان کے تفرق $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ تا $\frac{\partial f_1}{\partial y_n}$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ استمراری ہیں اور اس میدان عمل پر نقطہ $(t_0, K_1, \cdots, K_n)$ پایا جاتا ہو تب کچھ وقفہ $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ پر مساوات 4.32 کا ایسا حل موجود ہے جو مساوات 4.33 کے ابتدائی شرائط پر پورا اترتا ہو اور یہ حل یکتا ہے۔

4.3.1 خطی نظام

سادہ تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہم مساوات 4.32 کو اس صورت **خطی نظام**[42] کہیں گے جب اس کو

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}(t)y_1 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \quad \implies \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \tag{4.34}$$

[40] solution vector
[41] domain
[42] linear system

لکھنا ممکن ہو جہاں

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}$$

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 4.34 میں y_1' تا y_n' کا y_1 تا y_n کے ساتھ **خطی** تعلق ہے۔اگر $\boldsymbol{g}=0$ ہو تب نظام 4.34

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.35}$$

صورت اختیار کرتا ہے جو **متجانس** نظام ہے جبکہ $\boldsymbol{g}\neq 0$ کی صورت میں نظام 4.34 کو **غیر متجانس** کہلاتا ہے۔یوں مثال 4.2 اور مثال 4.4 متجانس نظام ہیں جبکہ مثال 4.3 غیر متجانس نظام ہے۔

خطی نظام میں $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=a_{11}(t)$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n}=a_{nn}(t)$ ہیں لہٰذا مسئلہ 4.2 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.3: خطی نظام کا مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ کھلے وقفہ $\alpha<t<\beta$ جس پر نقطہ t_0 پایا جاتا ہو، پر نظام 4.34 کے تمام a_{jk} اور g_j استمراری ہیں۔ایسی صورت میں نظام 4.34 کا ایسا حل $\boldsymbol{y}$ موجود ہے جو ابتدائی شرائط مساوات 4.33 پر پورا اترتا ہے اور یہ حل یکتا ہے۔

ایک عدد متجانس سادہ تفرقی مساوات کی طرح مسئلہ خطی میل متجانس نظام کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ خطی میل
اگر $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ کسی کھلے وقفے پر متجانس خطی نظام 4.35 کے حل ہوں تب ان کا کوئی بھی خطی میل $\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{y}^{(1)}+c_2\boldsymbol{y}^{(2)}$ بھی اس نظام کا حل ہو گا۔

ثبوت : خطی میل کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 4.35 کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}' &= [c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}]' \\
&= c_1\boldsymbol{y}^{(1)'} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)'} \\
&= c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)} \\
&= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

□

خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا نظریہ، ایک عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظریے سے بہت مشابہت رکھتا ہے جس پر حصہ 2.6 اور حصہ 2.7 میں غور کیا گیا ہے۔یہ دیکھنے کی خاطر ہم بالکل بنیادی تصورات اور حقائق پر غور کرتے ہیں۔

اساس، عمومی حل اور ورونسکی

متجانس نظام 4.35 کا کھلے وقفہ J پر حل کی اساس یعنی **بنیادی نظام**[43] سے مراد n عدد، J پر خطی طور غیر تابع حل، $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ کا سلسلہ ہے۔(یہاں کھلے وقفے کو J کہا گیا ہے چونکہ I اکائی قالب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔) ان حل کے خطی میل

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + \cdots + c_n\boldsymbol{y}^{(n)} \tag{4.36}$$

کو J پر مساوات 4.35 کا عمومی حل کہا جاتا ہے جہاں c_1 تا c_n **اختیاری مستقل** ہیں۔یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر مساوات 4.35 میں تمام a_{jk} کھلے وقفے پر استمراری ہوں تب اس وقفے پر مساوات 4.35 کے حل کی اساس موجود ہے لہٰذا اس کا **عمومی حل** موجود ہے جس میں، کھلے وقفے پر، تمام حل شامل ہیں۔

ہم کھلے وقفے پر n عدد حل کو $n \times n$ قالب کی قطاروں کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{y}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}^{(n)}] \tag{4.37}$$

---

[43] fundamental system

$\boldsymbol{Y}$ کے مقطع کو $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ کا ورونسکی کہتے ہیں۔

$$W(\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n)})=\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)} \\ & \vdots & & \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{4.38}$$

درج بالا ورونسکی میں قطار $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ حل کی اساس ہیں جنہیں اجزاء کی صورت میں لکھا گیا ہے۔یہ حل صرف اور صرف اس صورت حل کی اساس ہوں گے جب ان کا ورونسکی کھلے وقفہ J پر کسی بھی نقطہ t_1 پر صفر کے برابر نہ ہو۔کھلے وقفے پر W یا تو کہیں بھی صفر کے برابر نہیں ہو گا اور یا یہ کھلے وقفے پر **مکمل صفر** کے برابر ہو گا۔(یہ بالکل مسئلہ 2.3 اور مسئلہ 3.3 کی طرح ہے۔)

اگر مساوات 4.36 میں دیے حل اساس یعنی **بنیادی نظام** ہوں تب قالب 4.37 **بنیادی قالب**[44] کہلاتا ہے۔سمتیہ قطار $\boldsymbol{c}=[c_1\ c_2\cdots c_n]^T$ کی مدد سے مساوات 4.36 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{c} \tag{4.39}$$

آئیں مساوات 4.38 کا حصہ 2.6 کے ساتھ تعلق جوڑیں۔فرض کریں کہ متجانس دو درجی سادہ تفرقی مساوات کے حل y اور z ہیں۔یوں ورونسکی

$$W(y,z)=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

ہو گا۔اس سادہ دو درجی مساوات کو تفرقی مساوات کی نظام کی صورت میں لکھنے کی خاطر، حصہ 4.1 کے تحت، $y=y_1$ ، $y'=y_1'=y_2$ ، $z=z_1$ اور $z'=z_1'=z_2$ لکھنا ہو گا۔ایسا کرتے ہوئے **ورونسکی** درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے

$$W(y_1,z_1)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

جو، علامتوں میں فرق کے علاوہ، ہو بہو مساوات 4.38 ہے۔

---

[44] fundamental matrix

4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب

فرض کریں کہ متجانس خطی نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.40}$$

کے عددی سر **مستقل مقدار** ہیں لہٰذا $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کے ارکان t پر منحصر نہیں ہوں گے۔ہم مساوات 4.40 کو حل کرنا چاہتے ہیں۔اب ہم جانتے ہیں کہ ایک عدد سادہ تفرقی مساوات $y' = ky$ کا حل $y = Ce^{kt}$ ہے لہٰذا ہم مساوات 4.40 کا حل

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t} \tag{4.41}$$

تصور کرتے ہیں۔تصوراتی حل اور اس کے تفرق $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t}$ کو مساوات 4.40 میں پر کرتے ہوئے ہمیں $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ ملتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے امتیازی قدر مسئلہ

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{4.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 4.40 کے غیر صفر اہم حل مساوات 4.41 کی صورت رکھتے ہیں جہاں λ قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی قدر اور $\boldsymbol{x}$ اس کے مطابقتی امتیازی سمتیات ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{A}$ کا n عدد خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہے۔عموماً مسائل میں ایسا ہی ہوتا ہے بالخصوص اگر $\boldsymbol{A}$ **تشاکل**[45] $(a_{kj} = a_{jk})$ ہو یا **منحرف تشاکل**[46] $(a_{kj} = -a_{jk})$ ہو اور یا اگر اس کے n عدد **منفرد** امتیازی اقدار پائے جاتے ہوں۔

ان خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کے سلسلے کو $\boldsymbol{x}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{x}^{(n)}$ لکھتے ہیں جو امتیازی اقدار λ_1 تا λ_n کے مطابقتی سمتیات ہیں (جو منفرد ہو سکتے ہیں یا ان میں سے چند یا تمام یکساں ہو سکتے ہیں)۔یوں مساوات 4.41 طرز کے مطابقتی حل درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n)}e^{\lambda_n t} \tag{4.43}$$

---

[45] symmetric
[46] skew-symmetric

مساوات 4.38 کی مدد سے ان کی ورونسکی $W(\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n)})$ لکھتے ہیں۔

$$W(\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n)})=\begin{vmatrix} x_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_1^{(2)}e^{\lambda_t} & \cdots & x_1^{(n)}e^{\lambda_n t}\\ x_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_2^{(n)}e^{\lambda_n t}\\ & & \vdots & \\ x_n^{(1)}e^{\lambda_1 t} & x_n^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_n^{(n)}e^{\lambda_n t}\end{vmatrix}$$

$$= e^{\lambda_1 t+\cdots+\lambda_n t}\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)}\\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)}\\ & & \vdots & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)}\end{vmatrix} \tag{4.44}$$

اب نا قوت نمائی تفاعل کبھی بھی صفر نہیں ہوتا اور درج بالا مساوات میں آخری مقطع کے قطار، خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات ہیں، لہٰذا یہ مقطع بھی غیر صفر ہے۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: عمومی حل
اگر مساوات 4.40 میں دیے نظام کے مستقل قیمت قالب $\boldsymbol{A}$ کے n عدد منفرد امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہو تب مساوات 4.43 میں دیے گئے حل $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ مساوات 4.40 کے حل کی اساس ہوں گے جن سے درج ذیل عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+\cdots+c_n\boldsymbol{x}^{(n)}e^{\lambda_n t} \tag{4.45}$$

تشاکل یا منحرف تشاکل $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں اور یا اگر $\boldsymbol{A}$ کے n عدد منفرد امتیازی سمتیات پائے جاتے ہوں تب $\boldsymbol{A}$ کے منفرد امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جائے گا اور درج بالا مسئلے کا فرض کردہ شرط پورا ہو گا۔

سطح مرحلہ پر حل منحنی کا اظہار

ہم اب دو عدد مستقل عددی سر والے متجانس سادہ تفرقی مساوات کے نظام کی صورت میں مساوات 4.40 پر غور کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad\implies\quad \begin{aligned} y_1'&=a_{11}y_1+a_{12}y_2\\ y_2'&=a_{21}y_1+a_{22}y_2\end{aligned} \tag{4.46}$$

ہم عموماً مساوات 4.46 کے دونوں حل بالمقابل t کو علیحدہ علیحدہ (شکل 4.3-الف کی طرح) کھینچتے ہیں۔ ہم انہیں حل

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} \tag{4.47}$$

کو ایک ہی خط کی صورت میں (شکل 4.3-ب کی طرح) سطح مرحلہ پر بھی کھینچ سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے t کو بطور مقدار معلوم تصور کیا جاتا ہے لہٰذا ایسے خط کو **منحنی مقدار معلوم**[47] بھی کہتے ہیں۔ایسے منحنی کو مساوات 4.46 کا **خط حرکت** کہا جاتا ہے جبکہ $y_1 - y_2$ سطح کو **سطح مرحلہ** کہتے ہیں۔ سطح مرحلہ کو مساوات 4.46 کے خطوط حرکت سے بھرنے سے مساوات 4.46 کا **پیکر مرحلہ**[48] حاصل ہوتا ہے۔

کمپیوٹر کے استعمال نے سطح مرحلہ پر حل کے خط حرکت کو اہمیت بخشی ہے۔پیکر مرحلہ تمام حل کی خفی تجزیہ میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔آئیں پیکر مرحلہ کی ایک مثال دیکھیں۔

مثال 4.5: سطح مرحلہ پر خط حرکت
درج ذیل نظام کے حل کی منحنی کھینچیں۔

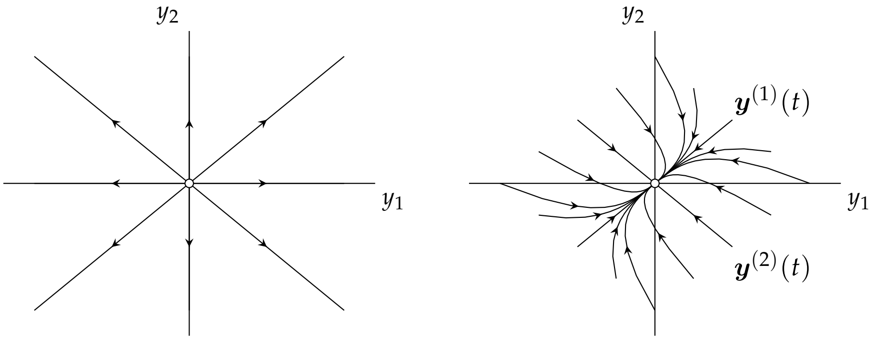
$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{y} \quad\implies\quad \begin{aligned} y_1' &= -2y_1+y_2\\ y_2' &= y_1-2y_2\end{aligned} \tag{4.48}$$

حل: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ اور $\boldsymbol{y}'=\lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ پر کر کے قوت نمائی تفاعل سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ ملتا ہے۔امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$$

ہے۔یوں امتیازی اقدار $\lambda_1=-1$ اور $\lambda_2=-3$ حاصل ہوتے ہیں۔امتیازی سمتیات $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ کے پہلے صف $(-2-\lambda)x_1+x_2=0$ سے حاصل کرتے ہیں جس میں $\lambda=\lambda_1=-1$ پر کرتے ہوئے $x_2=x_1$ ملتا ہے۔یوں x_1 چنتے ہوئے $x_2=1$ حاصل ہو گا جس سے امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)}=[1 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $\lambda=\lambda_2=-3$ پر کرتے ہوئے $x_2=-x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1=1$ چنتے

parametric curve[47]
phase portrait[48]



(الف) نظام 4.48 کے خط حرکت۔ (غیر مناسب جوڑ)

(ب) نظام 4.50 کے خط حرکت۔ (مناسب جوڑ)

شکل 4.5: غیر مناسب جوڑ اور مناسب جوڑ۔

ہوئے $x_2 = -1$ حاصل ہو گا اور یوں $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ ہو گا۔ان سے **عمومی حل** لکھتے ہیں جس کے مختلف خط حرکت (یعنی پیکر حرکت) شکل 4.5-الف میں دکھائے گئے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \boldsymbol{y}^{(1)} + c_2 \boldsymbol{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

□

نظام کا نقطہ فاصل

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ نظام 4.46 کے تمام **خط حرکت** نقطہ $\boldsymbol{y} = 0$ سے گزرتے ہیں۔آئیں دیکھیں کہ ایسا کیوں ہے۔علم الاحصاء سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{y_2' \,\mathrm{d}t}{y_1' \,\mathrm{d}t} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2} \tag{4.49}$$

یوں ماسوائے نقطہ $P_0 : (0,0)$ کے، ہر نقطہ $P : (y_1, y_2)$ کے ساتھ خط حرکت کا مماس $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}$ منسلک کیا جا سکتا ہے۔نقطہ P_0 پر مساوات 4.49 کا دایاں ہاتھ **نا قابل معلوم قیمت** $\frac{0}{0}$ ہو گا۔ایسا نقطہ P_0 جس پر $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}$ کی قیمت نا قابل معلوم ہو کو نظام 4.46 کا **نقطہ فاصل**[49] کہتے ہیں۔

[49]critical point

نقطہ فاصل کے پانچ اقسام

نقطہ فاصل کے قریب، خط حرکت کی جیومیٹریائی صورت کو دیکھ کر **نقطہ فاصل** کی پانچ اقسام بیان کیے جا سکتے ہیں جنہیں **غیر مناسب جوڑ**[50]، **مناسب جوڑ**[51]، **نقطہ زین**[52]، **وسط**[53] اور **نقطہ مرغولہ**[54] کہتے ہیں۔ان کی وضاحت درج ذیل پانچ مثالوں میں کی گئی ہے جہاں ان کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔

مثال 4.6: غیر مناسب جوڑ
ایسا **نقطہ فاصل** P_0 جس پر، دو **خط حرکت** کے علاوہ، تمام خط حرکت کی مماس کی ایک جیسی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو **غیر مناسب جوڑ** کہلاتا ہے۔دو مختلف خط حرکت کا بھی نقطہ P_0 پر تحدیدی سمت پایا جاتا ہے البتہ یہ تحدیدی سمت مختلف ہو گا۔

نظام 4.48 کا $\boldsymbol{0}$ پر غیر مناسب جوڑ پایا جاتا ہے۔چونکہ e^{-t} کی نسبت سے e^{-3t} زیادہ تیزی سے گھٹتی ہے لہٰذا غیر مناسب جوڑ پر مشترکہ تحدیدی سمت، $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 1]^T$ کی سمت ہے۔ دو غیر معمولی خط حرکت کی سمت $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -1]^T$ اور $-\boldsymbol{x}^{(2)} = [-1 \quad 1]^T$ کی سمتیں ہیں۔ □

مثال 4.7: مناسب جوڑ
ایسا **نقطہ فاصل** P_0 جس پر ہر خط حرکت کی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو مناسب جوڑ کہلاتا ہے۔مناسب جوڑ پر ایسا خط حرکت ضرور ہو گا جس کی تحدیدی سمت $\boldsymbol{d}$ ہو جہاں $\boldsymbol{d}$ کوئی بھی سمت ہو سکتی ہے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned} \tag{4.50}$$

کا مناسب جوڑ مبدا پر پایا جاتا ہے۔اس میں فرضی حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ اور اس کا تفرق $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ یعنی $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی امتیازی قدر، $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کی صورت میں، امتیازی مساوات $(1-\lambda)^2 = 0$ سے $\lambda = 1$ حاصل ہوتی ہے۔مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے اجزاء $(1-\lambda)x_1 = 0$ اور $(1-\lambda)x_2 = 0$ میں حاصل امتیازی قدر پر

improper node[50]
proper node[51]
saddle point[52]
center[53]
spiral point[54]

کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کے علاوہ امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی کوئی بھی قیمت چننی جا سکتی ہے۔ یوں $[1 \quad 0]^T$ اور $[0 \quad 1]^T$ چنتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^t \end{aligned} \quad \implies \quad c_1 y_2 = c_2 y_1$$

شکل 4.5-ب میں سطح حرکت پر پیکر مرحلہ اور مناسب جوڑ دکھائے گئے ہیں۔ □

مثال 4.8: نقطہ زین

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر دو عدد آمدی اور دو عدد رخصتی خط حرکت پائے جاتے ہوں **نقطہ زین**[55] کہلاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے قریب بقایا تمام خط حرکت اس نقطے کو نہیں چھوتے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= -y_2 \end{aligned} \tag{4.51}$$

کا نقطہ زین مبدا پر پایا جاتا ہے۔ اس نظام کے امتیازی مساوات $(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = 1$ اور $\lambda_2 = -1$ ہیں۔ جذر λ_1 کے لئے $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے دوسرے صف $0x_1(1-1)x_2 = 0$ میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 0$ ملتا ہے جس سے امتیازی سمتیہ $[1 \quad 0]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ جذر λ_2 کے لئے پہلے صف سے امتیازی سمتیہ $[0 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^{-t} \end{aligned} \quad \implies \quad y_1 y_2 = c \tag{4.52}$$

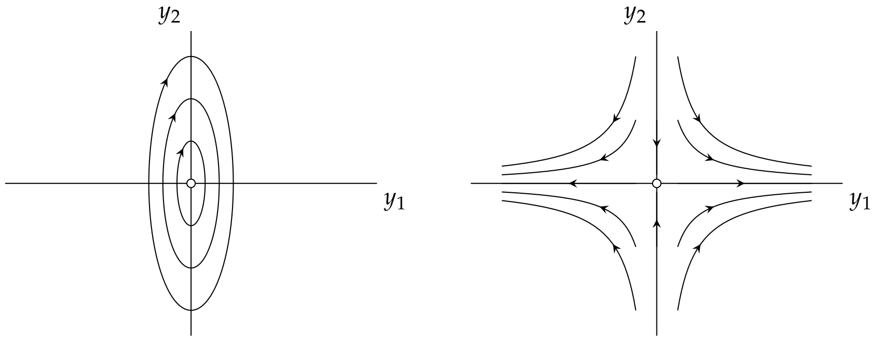
عمومی حل ہذلولی[56] ہے جس کو شکل 4.6-الف میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 4.9: وسط

ایسا نقطہ فاصل جسے لامتناہی بند خط حرکت گھیرتے ہوں **وسط** کہلاتا ہے۔

---

[55] نقطہ زین کے خط کی شکل عموماً گھوڑے کی زین سے مشابہت رکھتی ہے۔ اسی سے اس نقطے کو نقطہ زین کہتے ہیں۔
[56] hyperbolic



(الف) نظام 4.51 کے خط حرکت۔(نقطہ زین)

(ب) نظام 4.53 کے خط حرکت۔(وسط)

شکل 4.6: نقطہ زین اور وسط۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \quad (\text{الف}) \\ y_2' &= -9y_1 \quad (\text{ب}) \end{aligned} \tag{4.53}$$

میں $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ حل تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{y}$ اور $\boldsymbol{y}'$ کو درج بالا میں پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ملتا ہے۔اس سے $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کی صورت میں امتیازی مساوات $\lambda^2 + 9 = 0$ حاصل ہو گا جس کے امتیازی اقدار $\lambda_1 = 3i$ اور $\lambda_2 = -3i$ ہیں۔ مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے پہلے صف میں λ_1 پر کرتے ہوئے $x_2 = 3ix_1$ ملتا ہے۔یوں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 3i$ حاصل ہو گا جس سے امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 3i]^T$ ملتا ہے۔اسی طرح λ_2 کی مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -3i]^T$ حاصل ہو گا۔یوں مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \end{bmatrix} e^{3it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix} e^{-3it} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{3it} + c_2 e^{-3it} \\ y_2 &= 3ic_1 e^{3it} - 3ic_2 e^{-3it} \end{aligned} \tag{4.54}$$

حقیقی حل یولر مساوات[57] سے

$$\begin{aligned} y_1 &= A \cos 3t + B \sin 3t \\ y_2 &= 3B \cos 3t - 3A \sin 3t \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

[57] $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

حقیقی حل کو مساوات 4.53 سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں اگر مساوات 4.53-الف کے بائیں ہاتھ اور مساوات-ب کے دائیں ہاتھ کو ضرب دیا جائے تو $-9y_1y_1'$ حاصل ہو گا جو مساوات-ب کے بائیں ہاتھ اور مساوات-الف کے دائیں ہاتھ کے حاصل ضرب y_2y_2' کے برابر $-9y_1y_1' = y_2y_2'$ ہو گا۔اس کا تکمل

$$\frac{9}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = c \tag{4.55}$$

ہے جو t سے پاک حقیقی حل ہے۔یہ ترخیم[58] کی نسل کی مساوات ہے جس کو شکل 4.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔
□

مثال 4.10: نقطہ مرغولہ
ایسا نقطہ فاصل جس کے گرد خط حرکت گھومتے ہوئے نقطہ فاصل تک آن پہنچنے کی کوشش کرے یا نقطہ فاصل سے نکل کر اس نقطے کے گرد گھومتے ہوئے دور ہٹتا جائے [59] کہلاتا ہے۔پہلی صورت میں لمحہ $t \to \infty$ پر خط حرکت نقطہ مرغولہ تک آن پہنچے گا۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \quad (\text{الف}) \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \quad (\text{ب}) \end{aligned} \tag{4.56}$$

کا نقطہ مرغولہ مبدا پر پایا جاتا ہے۔امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ سے امتیازی اقدار $\lambda_1 = -1 + i$ اور $\lambda_2 = -1 - i$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات $(-1-\lambda)x_1 + x_2 = 0$ میں امتیازی قدر λ_1 پر کرتے ہوئے $-ix_1 + x_2 = 0$ ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = i$ حاصل ہوتا ہے اور یوں λ_1 کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad i]^T$ ہو گا۔اسی طرح λ_2 کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -i]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ان سے مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

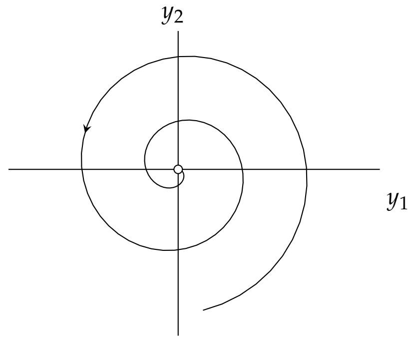
$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$$

مخلوط عمومی حل سے حقیقی حل حاصل کو یولر مساوات کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔ہم گزشتہ مثال کی طرح نسبتاً آسان طریقہ استعمال کرتے ہوئے حقیقی حل حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 4.56-الف کو y_1 اور مساوات 4.56-ب کو y_2 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_1y_1' + y_2y_2' = -(y_1^2 + y_2^2)$$

---

[58] ellipse
[59] spiral point



شکل 4.7: نظام 4.56 کے خط حرکت۔(نقطہ مرغولہ)

اب ہم نلکی محدد r اور t زیر استعمال لاتے ہیں جہاں $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ ہے۔ r کا t کے ساتھ تفرق $2rr' = 2y_1y_1' + 2y_2y_2'$ ہو گا لہٰذا درج بالا مساوات سے

$$rr' = -r^2, \implies \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\,\mathrm{d}t, \implies r = ce^{-t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ c کی کسی بھی قیمت کے لئے یہ مرغولی خط کی مساوات ہے جس کو شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے۔
□

مثال 4.11: انحطاطی جوڑ
بعض اوقات نظام کی امتیازی حل کی اساس نہیں پائی جاتی۔ایسے صورت میں **انحطاطی جوڑ**[60] پایا جاتا ہے۔انحطاطی جوڑ، مثال 4.6 تا مثال 4.8 کی طرح تشاکلی A (جس میں $a_{kj} = a_{jk}$ ہوتا ہے) کی صورت میں نہیں پایا جائے گا اور نا ہی یہ منحرف تشاکلی (جس میں $a_{kj} = -a_{jk}$ اور $a_{jj} = 0$ ہوتا ہے)صورت میں پایا جائے گا۔ان کے علاوہ، مثال 4.9 اور مثال 4.10 کی طرح، کئی دیگر صورتوں میں بھی انحطاطی جوڑ نہیں پایا جاتا ہے۔انحطاطی جوڑ کی صورت میں جو ترکیب استعمال کی جاتی ہے اس کو درج ذیل نظام کی عمومی حل کے حصول کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.57}$$

حل: $\boldsymbol{A}$ منحرف تشاکلی نہیں ہے۔ہم اس کا حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{y}$ اور $\boldsymbol{y}'$ کو درج بالا میں پر کر کے e^{λ} سے تقسیم کرتے ہوئے $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ ملتا ہے۔اس کی امتیازی

[60] degenerate node

مساوات

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 = 0$$

سے دوہرا امتیازی قدر $\lambda = 3$ حاصل ہوتا ہے۔مساوات $(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے پہلے صف میں $\lambda = 3$ پر کرتے ہوئے

$$(4-\lambda)x_1 + x_2 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 + x_2 = 0$$

ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چننے سے $x_2 = -1$ اور یوں امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا حل

$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{x}te^{\lambda t} + \boldsymbol{u}e^{\lambda t}$$

فرض کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)}$ ، $\lambda = -3$ جبکہ $\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2]^T$ مستقل ہے۔(اگر یہاں حصہ 2.2 کی طرح دوسرا حل صرف $\boldsymbol{x}te^{\lambda t}$ پر کیا جائے تو بات نہیں بنتی۔آپ ایسا کر کے تسلی کر لیں۔) فرض کردہ حل اور اس کے تفرق کو مساوات 4.57 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(2)\prime} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t} + \lambda \boldsymbol{x}te^{\lambda t} + \lambda \boldsymbol{u}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}te^{\lambda t} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}e^{\lambda t}$$

دائیں ہاتھ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ہے لہٰذا دونوں اطراف $\lambda\boldsymbol{x}te^{\lambda t}$ کٹ جائے گا۔بقایا مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

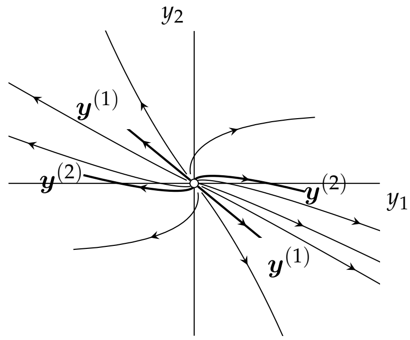
$$\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \qquad \Longrightarrow \qquad (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$$

ملتا ہے۔اس میں $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)}$ اور $\lambda = -3$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 \\ -u_1 - u_2 &= -1 \end{aligned}$$

انہیں حل کرتے ہوئے یکتا $\boldsymbol{u}$ حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔یوں $u_1 = 0$ چننے سے $u_2 = 1$ لہٰذا $\boldsymbol{u} = [0 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح دوسرا حل جو $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ سے خطی طور غیر تابع ہو حاصل ہوتا ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t} \tag{4.58}$$



شکل 4.8: نظام 4.57 کے خط حرکت۔(انحطاطی جوڑ)

ان حل کو شکل 4.8 میں دکھایا گیا ہے جہاں $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ کو موٹی لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔یہاں مبدا پر واقع نقطہ فاصل کو عموماً **انحطاطی جوڑ**[61] کہا جاتا ہے۔ □

یہاں بتلاتا چلوں کہ، تین یا تین سے زائد تفرقی مساوات کے نظام جس کے سہ گنّا امتیازی قدر اور ایک عدد خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ پایا جاتا ہو کا دوسرا خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ مثال 4.11 کی طرح حاصل کیا جائے گا جبکہ اس کا تیسرا خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ درج ذیل فرض کرتے ہوئے حاصل ہو گا

$$\boldsymbol{y}^{(3)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}t^2e^{\lambda t} + \boldsymbol{u}te^{\lambda t} + \boldsymbol{v}e^{\lambda t} \tag{4.59}$$

جہاں $\boldsymbol{v}$ کو

$$\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \tag{4.60}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔یہاں $\boldsymbol{u}$ دوسرے خطی طور امتیازی سمتیہ سے لیا جائے گا۔

سوالات

سوال 4.16 تا سوال 4.25 کے حل دریافت کریں۔

---

[61] degenerate node

سوال 4.16:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + y_2 \\
y_2' &= 3y_1 + y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$ ، $y_2 = -c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{2t}$

سوال 4.17:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 6y_1 + y_2 \\
y_2' &= -6y_1 + y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t}$ ، $y_2 = -3c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{4t}$

سوال 4.18:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 \\
y_2' &= 2y_1 + 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1 + c_2 e^{3t}$ ، $y_2 = -c_1 + 2c_2 e^{3t}$

سوال 4.19:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\
y_2' &= -2y_1 + 3y_2
\end{aligned}
$$

جواب: $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} e^t$ جہاں $u_1 = 1$ چنا گیا ہے۔

سوال 4.20:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 3y_1 + 3y_2 \\
y_2' &= -\frac{4}{3} y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$ ، $y_2 = -\frac{1}{3} c_1 e^{2t} - \frac{4}{3} c_2 e^{-t}$

سوال 4.21:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -12y_1 - 5y_2 \\
y_2' &= \frac{56}{3} y_1 + 3y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-4t}$ ، $y_2 = -\frac{7}{5} c_1 e^{-5t} - \frac{8}{5} c_2 e^{-4t}$

سوال 4.22:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -9y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

جوابات:

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1-i) \end{bmatrix} e^{(2-i3)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1+i) \end{bmatrix} e^{(2+i3)t}$$

جس سے یولر مساوات کی مدد سے درج ذیل حقیقی حل لکھا جا سکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = -i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2t}(A\cos 3t + B\sin 3t) \\ y_2 &= \tfrac{3}{2} e^{2t}[(B+A)\cos 3t + (B-A)\sin 3t] \end{aligned}$$

سوال 4.23:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 3y_3 \\ y_3' &= -y_2 \end{aligned}$$

جوابات:

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-i\sqrt{5}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{i\sqrt{5}t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

سوال 4.24:

$$\begin{aligned} y_1' &= 11y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -4y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{9t} + c_2 e^{7t}$ ، $y_2 = -c_1 e^{9t} - 2c_2 e^{7t}$

سوال 4.25:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 - 10y_2 - 14y_3 \\
y_2' &= -10y_1 + 10y_2 - 4y_3 \\
y_3 &= -14y_1 - 4y_2 - 2y_3
\end{aligned}
$$

جوابات:

$$
\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{18t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{9t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-18t}
$$

سوال 4.26 تا سوال 4.31 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 4.26:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -6y_1 + 2y_2 \\
y_2' &= -12y_1 + 5y_2 \\
y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = 1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = \frac{14}{5}e^{-3t} - \frac{4}{5}e^{2t}$ ، $y_2 = \frac{21}{5}e^{-3t} - \frac{16}{5}e^{2t}$

سوال 4.27:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -\frac{11}{3}y_1 + y_2 \\
y_2' &= -\frac{32}{3}y_1 + 3y_2 \\
y_1(0) &= -10, \quad y_2(0) = 2
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = \frac{43}{2}e^{\frac{t}{3}} - \frac{63}{2}e^{-t}$ ، $y_2 = 86e^{\frac{t}{3}} - 84e^{-t}$

سوال 4.28:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 - 3y_2 \\
y_2' &= \frac{5}{3}y_1 + 5y_2 \\
y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = -1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{7}{4}$ ، $y_2 = -\frac{5}{12}e^{4t} - \frac{7}{12}$

سوال 4.29:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 \\ y_1(0) &= -1, \quad y_2(0) = 2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t}$ ، $y_2 = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t}$

سوال 4.30:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \\ y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = -1 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = \sin t$ ، $y_2 = -\cos t$

سوال 4.31:

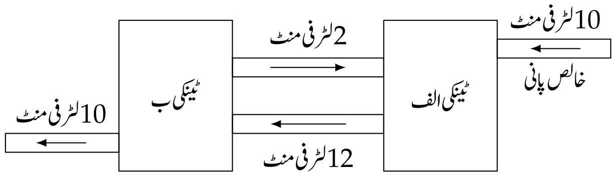
$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 \\ y_1(0) &= -2, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = -\frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$ ، $y_2 = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$

سوال 4.32 تا سوال 4.33 میں تفرقی مساوات تبدیل کرنے کو کہا گیا ہے۔ان میں y_1 کی عمومی مساوات دریافت کریں۔

سوال 4.32: آپ نے گزارش ہے کہ سوال 4.16 کے نظام سے دو درجی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔حاصل دو درجی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: پہلی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے $y_1'' = -y_1' + y_2'$ ملتا ہے جس میں y_2' کی جگہ دوسری مساوات پر کرتے ہوئے $y_1'' = -y_1' + (3y_1 + y_2)$ حاصل ہوتا ہے۔اب پہلی مساوات سے y_2 اس میں پر کریں۔یوں $y_1'' = -y_1' + 3y_1 + (y_1' + y_1)$ یعنی $y_1'' = 4y_1$ ملتا ہے۔اس کا عمومی حل $y_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}$ ہے۔



شکل 4.9: سوال 4.34 میں ٹینکیوں کا نظام۔

سوال 4.33: یہاں سوال 4.31 کے نظام سے دو درجی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔حاصل دو درجی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1'' + 2y_1' = 0$ ، $y_1 = c_1 + c_2 e^{-2t}$

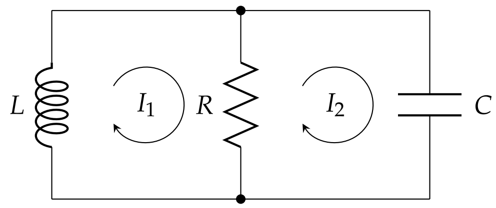
سوال 4.34: ٹینکیوں میں محلول کی تیاری
دو عدد ٹینکیاں شکل 4.9 میں دکھائی گئی ہیں۔ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں پچاس (50) کلو گرام نمک حل کی گئی ہے۔ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر خالص پانی پایا جاتا ہے۔پانی کے نظام کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ٹینکی الف میں نمک کی مقدار y_1 اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار y_2 کے لئے تفرقی مساوات کا نظام لکھیں۔اس نظام کو حل کریں۔

جوابات: $y_1' = -\frac{12}{200}y_1 + \frac{2}{200}y_2$ ، $y_2' = \frac{12}{200}y_1 - \frac{12}{200}y_2$ ،
$y_1 = 50e^{-\frac{3}{50}t}\cosh\frac{\sqrt{6}t}{100}$ ، $y_2 = 50\sqrt{6}e^{-\frac{3}{50}t}\sinh\frac{\sqrt{6}t}{100}$

سوال 4.35: مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو شکل 4.10 میں متوازی جڑا دکھایا گیا ہے۔اس کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کریں۔ $L = 2\,\mathrm{H}$ ، $R = 1\,\Omega$ اور $C = 0.5\,\mathrm{F}$ کی صورت میں I_1 اور I_2 کا عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات:

$$LI_1' + (I_1 - I_2)R = 0$$
$$\frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t + (I_2 - I_1)R = 0$$



شکل 4.10: سوال 4.35 کا دور۔

پہلی مساوات سے نظام کی ایک مساوات $I_1' = -\frac{R}{L}I_1 + \frac{R}{L}I_2$ ملتی ہے۔دوسری مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ترتیب دے کر آخر میں پہلی مساوات سے I_1' پر کرتے ہیں

$$\frac{I_2}{C} + (I_2' - I_1')R = 0 \implies I_2' = I_1' - \frac{I_2}{RC} \implies I_2' = \frac{R}{L}(-I_1 + I_2) - \frac{I_2}{RC}$$

جس سے تفرقی مساوات کے نظام کی دوسری مساوات $I_2' = -\frac{R}{L}I_1 + (\frac{R}{L} - \frac{1}{RC})I_2$ حاصل ہوتی ہے۔دی گئی قیمتیں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام

$$\begin{aligned} I_1' &= -0.5I_1 + 0.5I_2 \\ I_2' &= -0.5I_1 - 1.5I_2 \end{aligned}$$

ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1$ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ ہے۔یوں مثال 4.11 کی طرز پر حل کرتے ہوئے $u_1 = 1$ چننے سے $u_2 = 1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل اساس حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} \\ \boldsymbol{y}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

جس سے عمومی حل $\boldsymbol{I} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}$ لکھا جائے گا۔

4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔استحکام

ہم مستقل عددی سر والے متجانس خطی نظام 4.61 پر گفتگو جاری رکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1' + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.61}$$

اب تک حصہ 4.4 میں ہم نے دیکھا کہ نسل حل $\boldsymbol{y} = [y_1(t) \quad y_2(t)]^T$ کے خطوط کو y_1y_2 **سطح حرکت** پر کھینچتے ہوئے عمومی جائزہ لیا جا سکتا ہے۔ اس سطح پر منحنی کو نظام 4.61 کا **خط حرکت** کہتے ہیں۔ تمام خط حرکت کو ملا کر **پیکر مرحلہ** حاصل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے کہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے مساوات 4.61 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{4.62}$$

ملتا ہے۔یوں λ قالب $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر اور $\boldsymbol{x}$ مطابقتی امتیازی سمتیہ ہونے کی صورت میں $\boldsymbol{y}(t)$ مساوات 4.61 کا (غیر صفر) حل ہو گا۔

گزشتہ حصے کے مثالوں سے واضح ہے کہ پیکر مرحلہ کی صورت کا دارومدار بڑی حد تک نظام 4.61 کی **نقطہ فاصل** کی قسم پر منحصر ہے جہاں نقطہ فاصل سے مراد ایسا نقطہ ہے جہاں $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y_2}$ **نا قابل معلوم قیمت** $\frac{0}{0}$ ہو۔[مساوات 4.49 دیکھیں۔]

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{y_2'\,\mathrm{d}t}{y_1'\,\mathrm{d}t} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2} \tag{4.63}$$

حصہ 4.4 سے ہم یہ بھی جانتے ہیں نقطہ فاصل کے کئی اقسام پائے جاتے ہیں۔

موجودہ حصے میں ہم دیکھیں گے کہ نقطہ فاصل کی قسم کا تعلق امتیازی قدر سے ہے جو امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{4.64}$$

جدول 4.1: امتیازی قدر سے نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

λ_1 اور λ_2 پر تبصرہ	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	$q = \lambda_1\lambda_2$	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	نام
حقیقی۔یکساں علامتیں	$\Delta \geq 0$	$q > 0$		(الف)جوڑ
حقیقی۔آپس میں الٹ علامتیں		$q < 0$		(ب)نقطہ زین
خالص خیالی عدد (حقیقی جزو صفر ہے)		$q > 0$	$p = 0$	(پ)وسط
مخلوط عدد (حقیقی اور خیالی اجزاء غیر صفر ہیں)	$\Delta < 0$		$p \neq 0$	(ت)نقطہ مرغولہ

کے حل λ_1 اور λ_2 ہیں۔امتیازی مساوات دو درجی مساوات $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ ہے جس کے عددی سر p ، q اور ممیز[62] Δ درج ذیل ہیں۔

$$p = a_{11} + a_{22}, \quad q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta = p^2 - 4q \tag{4.65}$$

دو درجی مساوات کے حل الجبرا کی مدد سے $\lambda = \frac{1}{2}(p + \mp\sqrt{p^2 - 4q})$ یعنی

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(p + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(p - \sqrt{\Delta}) \tag{4.66}$$

لکھتے ہیں۔ان امتیازی اقدار کو استعمال کرتے ہوئے امتیازی مساوات کو اجزائے ضربی کی صورت

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ p امتیازی اقدار کا مجموعہ ہے جبکہ q ان کا حاصل ضرب ہے۔اسی طرح مساوات 4.66 کی مدد سے $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ لکھا جا سکتا ہے۔

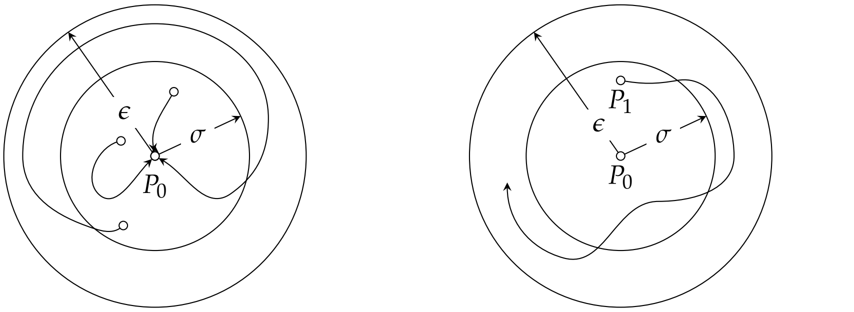
$$p = \lambda_1 + \lambda_2, \quad q = \lambda_1\lambda_2, \quad \Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \tag{4.67}$$

ان نتائج سے نقطہ فاصل کی جانچ کے اصول طے کئے جا سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ان اصولوں کو اسی حصے میں اخذ کیا جائے گا۔

استحکام

نقطہ فاصل کی درجہ بندی ان کی **استحکام**[63] کی بنیاد پر بھی کی جا سکتی ہے۔انجینئری کے علاوہ دیگر شعبوں میں بھی استحکام نہایت اہم تصور ہے۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی یا خلل سے بعد کے تمام لمحات پر معمولی خلل ہی پایا جاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل تصورات اہم ہیں۔

[62] discriminant
[63] stability



(الف) مستحکم نقطہ فاصل P_0 کی صورت میں خط حرکت D_ϵ میں رہتی ہے۔ (ب) مستحکم اور جاذب نقطہ فاصل P_0۔

شکل 4.11: نظام 4.61 کے نقطہ فاصل۔

تعریف : مستحکم، غیر مستحکم، مستحکم اور جاذب
اگر نظام 4.61 کے نقطہ فاصل P_0 کے قریب تمام خط حرکت مستقبل میں بھی P_0 کے قریب رہیں تب P_0 **مستحکم**[64] کہلائے گا۔ یوں اگر کسی بھی رداس ϵ کی ٹکیا D_ϵ کے لئے رداس σ کی ایسی ٹکیا D_σ موجود ہو، جہاں دونوں ٹکیوں کا وسط P_0 ہے، کہ ٹکیا D_σ میں (لمحہ $t = t_1$ کا مطابقتی) نقطہ P_1 پر پائے جانے والا، نظام 4.61 کا ہر خط حرکت، مستقبل میں ٹکیا D_ϵ میں رہتا ہو، تب P_0 کا نقطہ فاصل **مستحکم**[65] [66] کہلائے گا۔[شکل 4.11-الف دیکھیں]

اگر P_0 مستحکم نہ ہو تب یہ **غیر مستحکم**[67] کہلاتا ہے۔

ایسا مستحکم P_0 جہاں وہ تمام خط حرکت جن کا کوئی بھی نقطہ، D_σ پر پایا جاتا ہو، آخر کار ($t \to \infty$) P_0 کے قریب تر پہنچے **مستحکم اور جاذب**[68] کہلاتا ہے۔[شکل 4.11-ب دیکھیں۔]

استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی جدول 4.2 میں دی گئی ہے۔

[64] stable
[65] stable
[66] روسی ریاضی دان سکندر میکائل لیاپونو [1857-1918] کا مستحکم تفرقی مساوات پر کام بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔استحکام کی یہ تعریف انہوں نے ہی پیش کی۔
[67] unstable
[68] stable and attractive

جدول 4.2: استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

استحکام کی قسم	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$
(الف) مستحکم اور جاذب	$p < 0$	$q > 0$
(ب) مستحکم	$p \le 0$	$q > 0$
(پ) غیر مستحکم	$p > 0$ یا	$q < 0$

آئیں جدول 4.1 اور جدول 4.2 کو حاصل کریں۔ اگر $q = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ ہو تب دونوں امتیازی اقدار مثبت ہوں گے یا دونوں امتیازی اقدار منفی ہوں گے اور یا امتیازی اقدار جوڑی دار مخلوط ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ہو تب دونوں امتیازی اقدار منفی ہوں گے یا (مخلوط جوڑی دار صورت میں) ان کا حقیقی جزو منفی ہو گا لہٰذا P_0 مستحکم اور جاذب ہو گا۔ جدول 4.2 کے بقایا دو نتائج کو آپ خود اسی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

$\Delta < 0$ کی صورت میں امتیازی قدر جوڑی دار مخلوط $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ اور $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha < 0$ ہو تب مستحکم، جاذب نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس $p = 2\alpha > 0$ کی صورت میں غیر مستحکم نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔

$p = 0$ کی صورت میں $\lambda_2 = -\lambda_1$ ہو گا اور یوں $q = \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda_1^2$ ہو گا۔ اب اگر $q > 0$ ہو تب $\lambda_1^2 = -q < 0$ ہو گا لہٰذا λ_1 اور λ_2 خالص خیالی ہوں گے جن سے **دوری حل**[69] حاصل ہو گا۔ دوری حل کا خط حرکت ایسا بند دائرہ ہے جس کا وسط P_0 ہے۔

مثال 4.12: جدول 4.1 اور جدول 4.2 کا عملی استعمال

گزشتہ حصے کے مثال 4.6 میں نظام 4.48 یعنی $\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$ کی بات کی گئی جہاں $p = -4$ ، $q = 3$ اور $\Delta = 4$ ہیں۔ یوں جدول 4.1-الف کے تحت نقطہ فاصل ایک جوڑ ہو گا۔ جدول 4.2-الف کے تحت یہ جوڑ مستحکم اور جاذب ہے۔ □

مثال 4.13: اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ حرکت

اسپرنگ اور کمیت [حصہ 2.4 دیکھیں] کے نظام $my'' + cy' + ky = 0$ کا نقطہ فاصل دریافت کریں۔

---

[69] periodic solutions

حل: تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے کی خاطر m سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$ لکھتے ہیں۔دو درجی مساوات سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر [حصہ 4.1 دیکھیں] ہم $y_1 = y$ اور $y_2 = y'$ لیتے ہیں۔یوں $y_2' = y'' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$ ہو گا۔اس طرح

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے $p = -\frac{c}{m}$ ، $q = \frac{k}{m}$ اور $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$ ملتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے جدول 4.1 اور جدول 4.2 سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جہاں Δ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

- [بلا تقصیر] $c = 0$ ، $p = 0$ اور $q > 0$ وسط دیتا ہے۔
- [کم مقصور] $c^2 < 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ مستحکم جاذب نقطہ مرغولہ دیتا ہے۔
- [فاصل تقصیر] $c^2 = 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta = 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔
- [زیادہ مقصور] $c^2 > 4mk$ ، $p < 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔

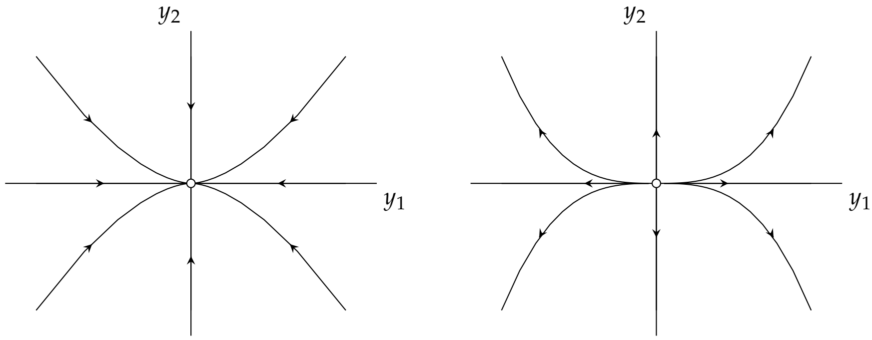
□

سوالات

سوال 4.36 تا سوال 4.45 کے نقطہ فاصل کی قسم جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔ان کے حقیقی عمومی حل حاصل کریں اور ان کے خط حرکت کمپیوٹر کی مدد سے کھینچیں۔[پہلے چار جوابات کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔]

سوال 4.36:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 3y_2 \end{aligned}$$



(الف) سوال 4.36 غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔ (ب) سوال 4.37 مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔

شکل 4.12: سوال 4.36 اور سوال 4.37 کے اشکال۔

جوابات: غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔ $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ یعنی $y_1 = c_1 e^t$ ، $y_2 = c_2 e^{3t}$ ؛ شکل 4.12-الف۔

سوال 4.37:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 \\ y_2' &= -5y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔ $y_1 = c_1 e^{-3t}$، $y_2 = c_2 e^{-5t}$ ؛ شکل 4.12-ب۔

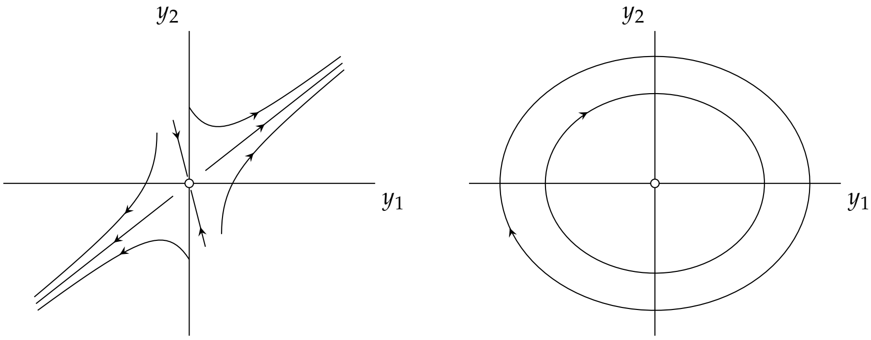
سوال 4.38:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -16y_1 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم وسط۔ $y_1 = A\cos 4t + B\sin 4t$ ، $y_2 = 4B\cos 4t - 4A\sin 4t$ ؛ شکل 4.13-الف۔

سوال 4.39:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2y_1 + y_2 \\ y_2 &= 5y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$



(ب)سوال 4.39 غیر مستحکم، نقطہ زین۔ (الف)سوال 4.38 مستحکم وسط۔

شکل 4.13: سوال 4.38 اور سوال 4.39 کے اشکال۔

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$ ، $y_2 = -5c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$ ؛شکل 4.13-ب۔

سوال 4.40:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2y_1 - 2y_2 \\ y_2 &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-2t}(-B\cos 2t + A\sin 2t)$

سوال 4.41:

$$\begin{aligned} y_1 &= -10y_1 + 2y_2 \\ y_2 &= -15y_1 + y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم اور جاذب جوڑ؛ $y_1 = c_1e^{-5t} + c_2e^{-4t}$ ، $y_2 = \frac{5}{2}c_1e^{-5t} + 3c_2e^{-4t}$

سوال 4.42:

$$\begin{aligned} y_1 &= -y_1 + y_2 \\ y_2 &= 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$ ، $y_2 = 3c_2e^{2t}$

سوال 4.43:

$$\begin{aligned} y_1 &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2 &= 6y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{5t}$ ، $y_2 = -c_1 e^{-3t} + 3c_2 e^{5t}$

سوال 4.44:

$$\begin{aligned} y_1 &= 13y_1 - 3y_2 \\ y_2 &= 18y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم جوڑ؛ $y_1 = c_1 e^{7t} + c_2 e^{4t}$ ، $y_2 = 2c_1 e^{7t} + 3c_2 e^{4t}$

سوال 4.45:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ y_2 &= -5y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-t}[-(A+2B)\cos 2t - (2A+B)\sin 2t]$

سوال 4.46 تا سوال 4.46 خط حرکت، دو درجی سادہ تفرقی مساوات اور نقطہ فاصل کے بارے میں ہیں۔

سوال 4.46: قصری ارتعاش
$y'' + 4y' + 5y = 0$ کو حل کریں۔امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$ ؛ مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ۔

سوال 4.47: ہارمونی ارتعاش
$y'' + 4y = 0 = 0$ کو حل کریں۔امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t$ ؛ مستحکم وسط۔

سوال 4.48: مقدار معلوم کا تبادلہ
مثال 4.12 میں متغیرہ $\tau = -t$ متعارف کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پڑے گا؟

جواب: اب $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو گا لہٰذا غیر مستحکم جوڑ پایا جائے گا۔

سوال 4.49: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں A کو تبدیل کرتے ہوئے $A - 0.12I$ کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ I اکائی قالب ہے۔

جواب: اب $p = -0.2 = \neq 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ہیں لہٰذا غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے گا۔

سوال 4.50: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں تمام a_{jk} کی جگہ $a_{jk} + b$ پر کریں۔ (الف) b کی ایسی قیمت دریافت کریں کہ نقطہ زین حاصل ہو۔اسی طرح b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں جن پر (ب) مستحکم اور جاذب جوڑ، (پ) مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ اور (ت) غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے۔

جواب: مثلاً (الف) $b = -2$ ، (ب) $b = -1$ ، (پ) $b = -0.2$ ، (ت) $b = 15$

4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

کیفی تراکیب[70] سے مسئلے کو حل کئے بغیر حل کے بارے میں کیفی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ایسے مسائل جن کا تحلیلی حل مشکل یا نا قابل حصول ہو، کے لئے یہ ترکیب خاص طور پر کار آمد ہے۔عملاً اہم کئی غیر خطی نظام

$$y' = f(y) \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{4.68}$$

کے لئے یہ درست ہے۔

[70] qualitative methods

گزشتہ حصے میں **سطح مرحلہ** کی ترکیب خطی نظام کے لئے استعمال کیا گیا۔اس حصے میں اس ترکیب کو وسعت دے کر غیر خطی نظام کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 4.68 **خود مختار**[71] ہے یعنی اس میں غیر تابع متغیرہ t صریحاً نہیں پایا جاتا۔(اس حصے میں تمام مثال خود مختار ہیں۔) ہم یہاں بھی حل کی نسل پیش کریں گے۔اعدادی ترکیب سے ایک وقت میں صرف ایک (تقریباً درست) حل حاصل ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے سطح مرحلہ کی ترکیب زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

گزشتہ حصے کے چند تصورات اس حصے میں بھی درکار ہیں۔ان میں **سطح حرکت** (y_1y_2 سطح)، **خط حرکت** (مساوات 4.68 کا y_1y_2 سطح پر حل)، مساوات 4.68 کا **پیکر مرحلہ** (تمام خط حرکت کا مجموعہ)، اور مساوات 4.68 کا **نقطہ فاصل** (ایسا نقطہ (y_1, y_2) جہاں $f_1(y_1, y_2)$ اور $f_2(y_1, y_2)$ دونوں صفر کے برابر ہوں۔) کے تصورات شامل ہیں۔

مساوات 4.68 کے کئی نقطہ فاصل ہو سکتے ہیں۔ ان پر باری باری بات کی جائے گی۔مبدا سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل پر غور کرنے سے پہلے، تکنیکی آسانی کی خاطر، ایسے نقطہ فاصل کو گھمائے بغیر مبدا پر منتقل کیا جائے گا۔مبدا $(0, 0)$ سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل $P_0 : (a, b)$ کو گھمائے بغیر مبدا $(0, 0)$ پر درج ذیل عمل سے منتقل کیا جاتا ہے۔

$$\tilde{y}_1 = y_1 - a, \quad \tilde{y}_2 = y_2 - b$$

اس عمل کے بعد نقطہ فاصل P_0 مبدا $(0, 0)$ پر پایا جائے گا۔یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہاں دیے گئے تمام مثالوں میں نقطہ فاصل کو مبدا پر منتقل کیا گیا ہے اور $\tilde{y}_1$ ، $\tilde{y}_2$ کی جگہ ہم y_1 اور y_2 ہی لکھیں گے۔ہم یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ نقطہ فاصل تنہا[72] ہے یعنی ایسے کسی بھی معقول حد تک چھوٹی ٹکیا جس کا وسط مبدا پر پایا جاتا ہو میں مساوات 4.68 کا صرف ایک عدد نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ اگر مساوات 4.68 کے محدود تعداد میں نقطہ فاصل پائے جاتے ہوں تب ایسے تمام نقطہ فاصل خود بخود تنہا ہوں گے۔

غیر خطی نظام کو خطی بنانا

عموماً نظام 4.68 کو نقطہ فاصل $P_0 : (0, 0)$ کے قریب خطی تصور کرتے ہوئے نظام کی **استحکام** کی نوعیت دریافت کی جا سکتی ہے۔نظام 4.68 کو $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ لکھ کر $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ رد کرنے سے خطی نظام حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو تفصیلاً دیکھتے ہیں۔

---

[71] autonomous
[72] isolated

ہم اگلے باب میں دیکھیں گے کہ عموماً تفاعل کو تسلسل $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح ایک سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل کے تسلسل بھی لکھے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسے ہی چند تفاعل مثلاً

$$f_a(x) = 2x^2 + 5x, \quad f_b(x, y) = 2x^3 - y^2 + xy, \quad f_c(x, y) = 2x^2 - 3y + 5$$

میں آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کریں۔ ایسا کرنے سے $f_a(0) = 0$ ، $f_b(0, 0) = 0$ اور $f_c(0, 0) = 5$ ملتا ہے۔آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کرنے سے صرف اس تفاعل کی قیمت غیر صفر حاصل ہو گی جس میں c_0 طرز کا بالکل علیحدہ مستقل پایا جاتا ہو جو متغیرات کے ساتھ ضرب نہ ہو۔

اب چونکہ P_0 نقطہ فاصل ہے لہٰذا $f_1(0, 0) = 0$ اور $f_2(0, 0) = 0$ ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ ان تفاعل میں c_0 طرز کا علیحدہ مستقل نہیں پایا جاتا لہٰذا ان کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں h_1 اور h_2 غیر خطی تفاعل ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + h_2(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{4.69}$$

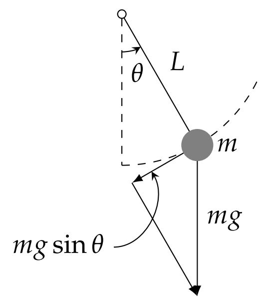
چونکہ نظام 4.68 **خود مختار** [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] تفاعل ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ مستقل مقدار ہو گا۔ اب **خطی بنانے کا مسئلہ**[73] پیش کرتے ہیں جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسئلہ 4.6: خطی بنانا
اگر نظام 4.68 کے نقطہ فاصل $P_0 : (0, 0)$ کی پڑوس میں f_1 ، f_2 اور ان کے جزوی تفرق استمراری ہوں، اور مساوات 4.69 میں مقطع $\boldsymbol{A}$ غیر صفر $(|\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0})$ ہو تب نظام 4.68 کے نقطہ فاصل کی قسم اور استحکام وہی ہو گی جو درج ذیل **خطی کردہ** نظام کی ہو گی

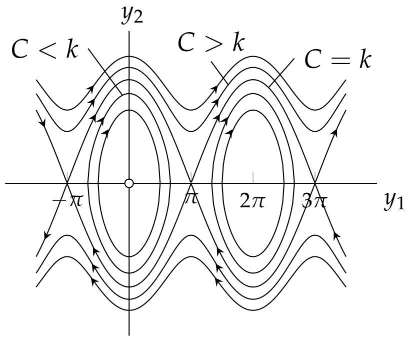
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.70}$$

البتہ $\boldsymbol{A}$ کے خالص خیالی یا برابر امتیازی قدر ہونے کی صورت میں نظام 4.68 کا نقطہ فاصل نظام 4.70 کے نقطہ فاصل کی قسم کا ہو سکتا ہے یا وہ نقطہ مرغولہ ہو سکتا ہے۔

مثال 4.14: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔ خطی بنانا
ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کو شکل 4.14-الف میں دکھایا گیا ہے۔ڈنڈے کی کمیت اور ہوا کی رکاوٹی قوت کو نظر انداز



(الف) ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔



(ب) پیکر مرحلہ۔

شکل 4.14: مثال 4.14 کے اشکال۔ [C کی تفصیل مثال 4.17 میں دی جائے گی۔]

کرتے ہوئے نقطہ فاصل کا مقام اور اس کی نوعیت دریافت کریں۔ حل: **پہلا قدم نمونہ کشی ہے۔** متوازن مقام سے گھڑی کے الٹ رخ زاویائی فاصلہ θ ناپتے ہیں۔ قوت ثقل mg کمیت پر نیچے رخ عمل کرتا ہے جس کی وجہ سے حرکت کی مماسی، بحالی قوت $mg\sin\theta$ پیدا ہوتی ہے جہاں $g = 0.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت بحالی قوت اور اسراعی قوت $mL\theta''$ جہاں $L\theta''$ اسراع ہے، ہر لمحہ برابر ہوں گے۔ یوں ان دونوں قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔

$$mL\theta'' + mg\sin\theta = 0$$

دونوں اطراف کو mL سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\theta'' + k\sin\theta = 0, \qquad \left(k = \frac{g}{L}\right) \tag{4.71}$$

حاصل ہوتا ہے۔ نہایت کم θ کی صورت میں $\sin\theta \approx \theta$ ہوتا ہے لہٰذا ایسی صورت میں درج بالا مساوات کو $\theta'' + k\theta = 0$ لکھ کر حل $\theta = A\cos\sqrt{k}t + B\sin\sqrt{k}t$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ کم θ کی صورت میں تقریباً درست جواب ہے البتہ بالکل درست جواب بنیادی تفاعل[74] کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $(\mp 2\pi, 0)$ ، $(\mp 4\pi, 0)$ ، $\cdots$ **کا حصول اور مسئلے کو خطی بنانا ہے۔** تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر ہم $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہیں۔ یوں مساوات 4.71

---

linearization theorem[73]
elementary function[74]

سے درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے جو نظام 4.68 کے طرز کا ہے۔

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(y_1, y_2) = y_2 \\
y_2' &= f_2(y_1, y_2) = -k \sin y_1
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

جہاں دونوں دائیں اطراف بیک وقت صفر کے برابر ہوں $y_2 = 0$ اور $\sin y_1 = 0$ وہاں نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔یوں لامحدود تعداد میں نقطہ فاصل $(n\pi, 0)$ پائے جاتے ہیں جہاں $n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$ ہے۔آئیں نقطہ فاصل $(0,0)$ پر غور کریں جہاں **مکلارن تسلسل**[75] سے

$$\sin y_1 = y_1 - \frac{y_1^3}{6} + - \cdots \approx y_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں نقطہ فاصل کی پڑوس میں $h = -\frac{y_1^3}{6} + - \cdots$ کو رد کرتے ہوئے نظام 4.72 کی خطی صورت

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2 &= -k y_1
\end{aligned}
\implies \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}
\tag{4.73}
$$

حاصل ہوتی ہے۔ $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = |\boldsymbol{A}| = k = \frac{g}{L} (> 0)$ اور $\Delta = p^2 - 4q = -4k$ لکھتے ہوئے نقطہ فاصل کی قسم اور اس کا استحکام جانتے ہیں ۔یوں جدول 4.1-پ کے تحت $(0,0)$ **وسط** ہے اور جدول 4.2 کے تحت یہ **مستحکم** ہے۔چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہٰذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \mp 2, \mp 4, \cdots$ ہے، بھی مستحکم وسط ہیں۔

تیسرا قدم نقطہ فاصل $(\mp\pi, 0)$ ، $(\mp 3\pi, 0)$ ، $(\mp 5\pi, 0)$ $\cdots$ کا حصول اور **مسئلے کو خطی بنانا** ہے۔ہم نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کرتے ہیں۔یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ لیتے اور مکلارن تسلسل

$$\sin(\theta) = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 = -y_1 + \frac{y_1^3}{6} + - \cdots \approx -y_1$$

کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(\pi, 0)$ پر نظام 4.72 کی خطی کردہ صورت

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= k y_1
\end{aligned}
\implies \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}
\tag{4.74}
$$

---

[75] Maclaurin series

حاصل ہوتی ہے۔اب $p = 0$ ، $q = -k$ اور $\Delta = -4q = 4k$ ہیں جو **غیر مستحکم نقطہ زین** کو ظاہر کرتی ہے۔چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے للہذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \mp 1, \mp 3, \cdots$ ہے، غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔یہ نتائج شکل 4.14-ب کے عین مطابق ہیں۔ □

مثال 4.15: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی تقصیری ارتعاش۔ خطی بنانا
نقطہ فاصل پر غور کی ترکیب کو مزید بہتر جاننے کی خاطر مثال 4.14 میں زاویائی رفتار کے راست متناسب قوت روک $c\theta'$ کا اثر شامل کرتے ہیں۔یوں مساوات 4.71 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جس میں $c = 0$ سے مساوات 4.71 ہی ملتا ہے۔

$$\theta'' + c\theta' + k\sin\theta = 0, \qquad (k > 0), \quad (c \geq 0) \tag{4.75}$$

پہلے کی طرح $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہوئے غیر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -k\sin\theta - cy_2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\theta'' = y_2'$ لکھا گیا ہے۔اب بھی نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $(\mp\pi, 0)$ ، $\mp 2\pi, 0$ ، $\cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔آئیں نقطہ $(0,0)$ پر غور کریں۔یہاں بھی $\sin y_1 \approx y_1$ لکھ کر $(0,0)$ پر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1 - cy_2 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.76}$$

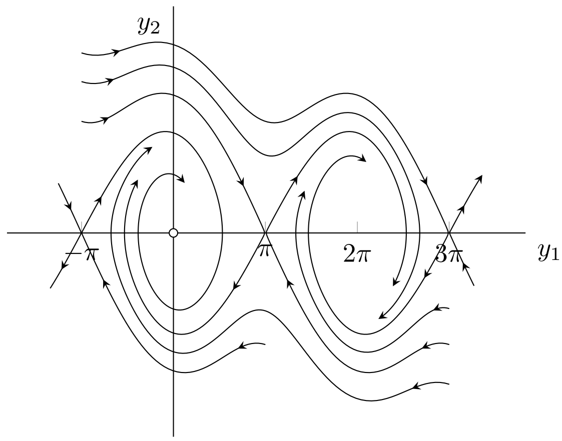
حاصل کرتے ہیں۔ یہ بالکل مثال 4.13 کی طرح ہے ماسوائے (مثبت) m کی موجودگی کے (اور ماسوائے y_1 کے مطلب میں فرق کے)۔ اس طرح بلا تقصیر $(c = 0)$ صورت میں **وسط** حاصل ہوتا ہے جسے شکل 4.14 میں دکھایا گیا ہے جبکہ کم تقصیری صورت میں **نقطہ مرغولہ** حاصل ہوتا ہے ، اور اسی طرح آپ تمام صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں اب نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کریں۔یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ کے علاوہ

$$\sin\theta = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 \approx -y_1$$

لکھ کر $(\pi, 0)$ پر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1 - cy_2 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -c \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.77}$$



شکل 4.15: تقصیری ارتعاش۔ مثال 4.15

حاصل کرتے ہیں۔ گزشتہ حصے میں نقطہ فاصل کے جانچ کے مسلمہ معیار دیے گئے جن کے لئے

$$p = a_{11} + a_{22} = -c, \quad q = |\boldsymbol{A}| = -k, \quad \Delta = p^4 - 4q = c^2 + 4k$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $(\pi, 0)$ پر پائے جانے والے نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

- بلا تقصیر $c = 0$ ، $p = 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ نقطہ زین دیگا۔[شکل 4.14-ب دیکھیں۔]
- تقصیری $c > 0$ ، $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ نقطہ زین دیگا۔

چونکہ $\sin y_1$ دوری عرصہ 2π کا دوری تفاعل ہے لہٰذا $(\mp 2\pi, 0)$ ، $(\mp 4\pi, 0)$ ، $\cdots$ پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(0, 0)$ پر پایا جاتا ہے اور اسی طرح $(-\pi, 0)$ ، $(\mp 3\pi, 0)$ ، $\cdots$ پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(\pi, 0)$ پر پایا جاتا ہے۔

شکل 4.15 میں نظام 4.75 کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔ چونکہ قصری نظام میں توانائی کا ضیاع پایا جاتا ہے لہٰذا شکل 4.14 کے بند دائروں کی بجائے شکل 4.15 کے مرغولی خطوط حاصل ہوتے ہیں جو ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید یہ کہ دوری لہری خطوط بھی کسی نہ کسی مقام پر نقطہ فاصل کے گرد گھومنا شروع کر دیتے ہیں۔ اس کے علاوہ اب قصری نظام میں نقطہ زین کو ملانے والے خط نہیں پائے جاتے۔ □

مثال 4.16: آبادی شکار اور شکاری۔ [مسئلہ لوٹکا-ولٹیرا]
یہاں لومڑی (شکاری) اور خرگوش (شکار) کی آبادی کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: ہم فرض کرتے ہیں کہ خرگوش کو جتنی خوراک چاہیے دستیاب ہے۔ یوں لومڑی کی غیر موجودگی میں ان کی تعداد $y_1' = ay_1$ کے تحت قوت نمائی طور پر بڑھے گی۔ لومڑی کی موجودگی میں (اتفاقی آمنے سامنے سے) خرگوش کی تعداد میں y_1y_2 کے راست متناسب کمی پیدا ہو گی۔یوں خرگوش کی تعداد $y_1' = ay_1 - by_1y_2$ سے حاصل ہو گی جہاں مستقل $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔اسی طرح خرگوش کی غیر موجودگی میں لومڑی کی تعداد $y_2' = -ly_2$ کے تحت قوت نمائی طور پر گھٹے گی۔ خرگوش کی موجودگی میں (اتفاقی آمنے سامنے سے) لومڑی کی تعداد y_1y_2 کے راست متناسب بڑھے گی۔یوں خرگوش کی موجودگی میں $y_2' = -ly_2 + ky_1y_2$ لومڑی کی تعداد دے گا جہاں مستقل $l > 0$ اور $k > 0$ ہیں۔

یوں غیر خطی مسئلہ لوٹکا۔ولٹیرا[76]

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = ay_1 - by_1y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = ky_1y_2 - ly_2 \end{aligned} \tag{4.78}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(0, 0)$ کا حصول ہے۔مساوات 4.78 کو دیکھ کر نقطہ فاصل مساوات

$$f_1(y_1, y_2) = y_1(a - by_2) = 0, \quad f_2(y_1, y_2) = y_2(ky_1 - l) = 0 \tag{4.79}$$

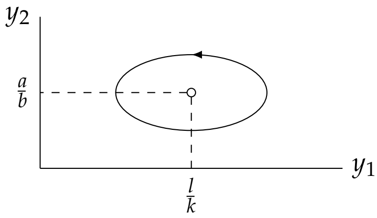
کے حل سے $(y_1, y_2) = (0, 0)$ اور $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ حاصل ہوتے ہیں۔آئیں $(0, 0)$ پر غور کریں۔ نقطہ $(0, 0)$ کی پڑوس میں مساوات 4.78 میں $-by_1y_2$ اور ky_1y_2 کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -l \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی امتیازی اقدار $\lambda_1 = a > 0$ اور $\lambda_2 = -l < 0$ کی علامتیں آپس میں الٹ ہیں لہٰذا $(0, 0)$ پر نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

تیسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ کا حصول ہے۔دوسرا نقطہ فاصل $(y_1, y_2) = (\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر پایا جاتا ہے۔اس نقطے کو $(0, 0)$ منتقل کرنے کی خاطر ہم $y_1 = \tilde{y}_1 + \frac{l}{k}$ اور $y_2 = \tilde{y}_2 + \frac{a}{b}$ چنتے

[76] امریکی ماہر حیاتی طبیعیات الفرڈ جیمز لوٹکا [1880-1949] اور اطالوی ریاضی دان ویٹو ولٹیرا [1860-1940] نے شکار اور شکاری کے مسئلے کو پیش کیا۔



شکل 4.16: شکار اور شکاری کی آبادی: ماحولیاتی توازن۔

ہیں۔یوں نقطہ فاصل $(0,0)$ $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0,0)$ لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ $y_1 = \tilde{y}_1'$ اور $y_2' = \tilde{y}_2'$ ہیں لہٰذا نظام 4.78 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\tilde{y}_1' = \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right)\left[a - b\left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)\right] = \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right)(-b\tilde{y}_2)$$
$$\tilde{y}_2' = \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)\left[k\left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right) - l\right] = \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)k\tilde{y}_1$$

نقطہ $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0,0)$ کی پڑوس میں $-b\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ اور $k\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$\tilde{y}_1' = -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2 \qquad \text{(الف)}$$
$$\tilde{y}_2' = \frac{ak}{b}\tilde{y}_1 \qquad \text{(ب)} \tag{4.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 4.80-الف کا بایاں ہاتھ ضرب مساوات-ب کا دایاں ہاتھ برابر ہو گا الف کا دایاں ضرب ب کا بایاں،

$$\frac{ak}{b}\tilde{y}_1'\tilde{y}_1 = -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2'\tilde{y}_2 \implies \frac{ak}{b}\tilde{y}_1^2 + \frac{bl}{k}\tilde{y}_2^2 = C$$

جس کا تکمل لیتے ہوئے $\tilde{y}_1$ بالمقابل $\tilde{y}_2$ کا ترخیمی[77] تعلق حاصل کیا گیا ہے۔یوں $\left(\frac{l}{k}, \frac{a}{b}\right)$ پر شکل 4.16 میں دکھایا گیا وسط پایا جاتا ہے۔

نسبتاً مشکل تجزیے سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ غیر خطی نظام 4.78 کا $\left(\frac{l}{k}, \frac{a}{b}\right)$ پر وسط پایا جاتا ہے البتہ خط حرکت اس نقطے کے گرد غیر ترخیمی بند دائرہ بناتا ہے۔

---

elliptic[77]

شکل 4.16 کے دائیں کنارے پر خرگوش کی تعداد y_1 زیادہ سے زیادہ ہے جس کی وجہ سے لومڑی کی تعداد y_2 میں اضافے کی شرح بھی زیادہ سے زیادہ ہے۔اس خط پر گھڑی کی الٹی سمت چلتے ہوئے لومڑی کی زیادہ سے زیادہ آبادی حاصل ہوتی ہے۔اس مقام پر خرگوش کی تعداد اتنی کم ہو چکی ہوتی ہے کہ لومڑی کی بڑھتی تعداد کو خوراک پورا نہیں ہو پایا لہٰذا لومڑی کی آبادی گھٹنے شروع ہو جاتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں جانوروں کی دوری تعداد حالات کے مطابق مسلسل تبدیل ہوتی ہے۔

شکار اور شکاری کی دیگر مثالیں ملخ اور گھاس، ببر شیر اور زیبرا ہیں۔ □

4.6.1 سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں تبادلہ

سطح حرکت کی دوسری ترکیب خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] دو درجی سادہ تفرقی مساوات

$$F(y, y', y'') = 0$$

میں $y = y_1$ کو آزاد متغیرہ اور $y' = y_2$ لے کر y'' کو زنجیری تفرق سے

$$y'' = y_2' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$$

لکھ کر ایک درجی مساوات

$$F\left(y_1, y_2, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2\right) = 0 \tag{4.81}$$

میں تبدیل کرنے پر مبنی ہے۔اس ایک درجی مساوات کو یا تو حل کرنا ممکن ہوتا ہے اور یا میدان ڈھال کی مدد سے اس پر غور ممکن ہوتا ہے۔ آئیں مثال 4.14 پر اس ترکیب کی مدد سے غور کریں۔

مثال 4.17: بلا تقصیر ارتعاشی نظام کی ایک درجی تفرقی مساوات۔
مساوات 4.71 میں $\theta'' + k\sin\theta = 0$ ہے جس میں $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ (زاویائی رفتار) لیتے ہوئے

$$\theta'' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$$

لکھ کر $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2 = -k\sin y_1$ ملتا ہے جس کو علیحدگی متغیرات سے $y_2\,\mathrm{d}y_2 = -k\sin y_1\,\mathrm{d}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\frac{1}{2}y_2^2 = k\cos y_1 + C \tag{4.82}$$

دیتا ہے جہاں C تکمل کا مستقل ہے۔اس کو mL^2 سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2}m(Ly_2)^2 - mL^2k\cos y_1 = mL^2C$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تینوں اجزاء توانائی[78] کو ظاہر کرتے ہیں۔چونکہ y_2 زاویائی رفتار ہے لہٰذا Ly_2 لمحاتی رفتار اور $\frac{1}{2}m(Ly_2)^2$ **حرکی توانائی**[79] ہے۔درج بالا مساوات کا دوسرا جزو (بمع منفی علامت) **مخفی توانائی**[80] ہے جبکہ مساوات کا دایاں ہاتھ mL^2C کل توانائی ہے۔بلا تقصیر نظام میں توانائی کا ضیاع نہیں پایا جاتا لہٰذا حسب توقع کل توانائی مستقل مقدار ہے۔آئیں دیکھیں کہ حرکت کی نوعیت کل توانائی پر کیسے منحصر ہے۔

شکل 4.14-ب مختلف C کے لئے خط حرکت دیتی ہے۔ان خطوط کا دوری عرصہ 2π ہے۔ان میں ترخیمی بند دائرے اور لہر نما خطوط شامل ہیں جن کے مابین نقطہ زین $(n\pi, 0)$ [جہاں $n = \mp1, \mp3, \cdots$ ہے] سے گزرتے ہوئے دو عدد خط حرکت پائے جاتے ہیں۔مساوات 4.82 کے تحت C کی کم سے کم قیمت $C = -k$ ہے جس پر $y_2 = 0$ اور $\cos y_1 = 1$ ہوں گے جو ساکن کمیت کو ظاہر کرتی ہے۔جس نقطے پر $y_2 = \theta' = 0$ ہو اس نقطے پر حرت کی سمت تبدیل ہو کر الٹ ہو جائے گی لہٰذا مساوات 4.82 میں $y_2 = 0$ پر کرتے ہوئے $k\cos y_1 + C = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اب اگر $y_1 = \pi$ ہو تب $\cos y_1 = -1$ اور یوں $C = k$ ہو گا۔اس طرح اگر $-k < C < k$ ہو تب $|y_1| = |\theta| < \pi$ کی صورت میں کمیت کی حرکت کی سمت الٹ ہو گی اور C کی ان قیمتوں $(|C| < k)$ کے لئے کمیت ارتعاش پذیر ہو گا۔ترخیمی بند دائرے اس ارتعاشی حرکت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کے برعکس $C > k$ کی صورت میں $y_2 = 0$ ممکن نہیں ہے لہٰذا کمیت کی حرکت کی سمت الٹ نہیں ہو گی لہٰذا کمیت مبدا کے گرد گھومتا رہے گا جس کو لہری خط حرکت ظاہر کرتی ہیں۔ان دو صورتوں کے مابین $C = k$ پایا جاتا ہے جس کے خطوط نقطہ زین سے گزرتے ہیں۔انہیں شکل 4.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔ □

دو درجی مساوات کے تبادلے سے سطح حرکت پر (مثال 4.17 کی طرح) قابل حل ایک درجی مساوات کے علاوہ نا

[78] energy
[79] kinetic energy
[80] potential energy

قابل حل مساوات بھی اہمیت کے حامل ہے۔ایسی صورت میں میدان ڈھال [حصہ 1.2 دیکھیں۔] کے ذریعہ نظام کے بارے میں معلومات حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔اس عمل کو ایک مشہور مثال کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 4.18: منحصر بہ خود ارتعاش۔ مساوات ون در پول

ایسی طبعی نظام پائے جاتے ہیں جن میں معمولی ارتعاش کی صورت میں نظام کو توانائی فراہم ہوتی ہے جبکہ وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام سے توانائی کا اخراج ہوتا ہے۔یوں وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام قصری صورت اختیار کرتا ہے جبکہ کم ارتعاش کی صورت میں نظام میں **منفی تقصیر** (نظام کو توانائی کی فراہمی) پائی جاتی ہے۔ ہم طبعی وجوہات کی بنا توقع کرتے ہیں کہ ایسا نظام دوری طرز عمل رکھے گا، جو سطح حرکت پر بند دائرے کی صورت اختیار کرے گا جسے **تحدیدی دائرہ**[81] کہتے ہیں۔ایسی ارتعاش کو **مساوات ون در پول**[82]

$$y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0 \qquad (\mu > 0) \tag{4.83}$$

ظاہر کرتی ہے جہاں μ مثبت مستقل ہے۔یہ مساوات پہلی مرتبہ **خلا نلکی**[83] والے برقی ادوار پر غور کے دوران رو پذیر ہوئی۔یہ مساوات $\mu = 0$ کی صورت میں ہارمونی ارتعاش کی تفرقی مساوات $y'' + y = 0$ ہے۔ون در پول مساوات میں قصری جزو $-\mu(1-y^2)$ ہے جہاں $\mu > 0$ ہے۔یوں $y^2 < 1$ کی صورت میں منفی تقصیری، $y^2 = 1$ کی صورت میں بلا تقصیر جبکہ $y^2 > 1$ کی صورت میں مثبت تقصیری (جس میں توانائی کا ضیاع ہو گا) نظام پایا جائے گا۔ نہایت کم μ کی صورت میں مساوات ون در پول اور $y'' + y = 0$ میں بہت کم فرق پایا جائے گا لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ سطح حرکت پر تحدیدی دائرہ تقریباً گول دائرہ ہو گا۔اگر μ کی قیمت زیادہ ہو تب تحدیدی دائرہ کی شکل غالباً مختلف ہو گی۔

اس مساوات کو ایک درجی مساوات میں تبدیل کرنے کی خاطر $y = y_1$ ، $y' = y_2$ اور $y'' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$ لکھتے ہوئے ون در پول مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

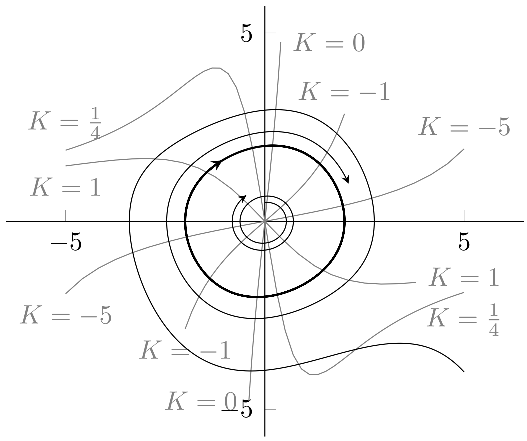
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2 - \mu(1-y_1^2)y_2 + y_1 = 0 \tag{4.84}$$

سطح حرکت (y_1y_2 سطح) پر ہم **میلان**[84] خط $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = K$ ہیں جہاں K مستقل مقدار ہے۔یوں ہم میلان خطوط درج ذیل ہوں گے

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \mu(1-y_1^2) - \frac{y_1}{y_2} = K$$

---

[81] limit cycle
[82] van del Pol equation
[83] vacuum tube
[84] isoclines



شکل 4.17: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu=0.1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

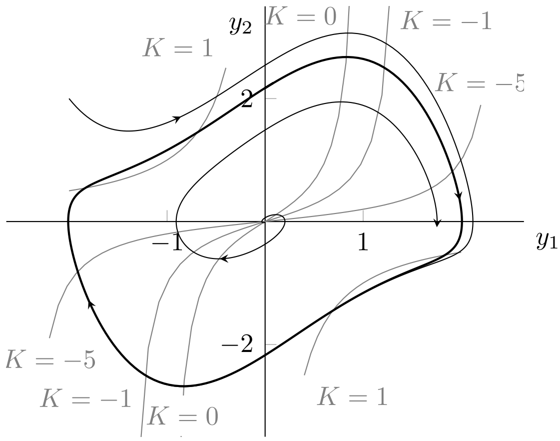
جن سے

$$y_2=\frac{y_1}{\mu(1-y_1^2)-K} \qquad \text{(شکل 4.17 اور شکل 4.18 دیکھیں۔)} \tag{4.85}$$

حاصل ہوتا ہے۔

شکل 4.17 میں μ کی کم قیمت $(\mu=0.1)$ کے لئے چند ہم میلان خطوط کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔اس کے علاوہ تحدیدی دائرے کو موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تحدیدی دائرہ تقریباً گول ہے۔ ایک خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے باہر ہے، اور دوسرا خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے اندر ہے، کو تحدیدی دائرے تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔ تحدیدی دائرہ اور نقطہ فاصل کے گرد بند دائرہ (وسط) میں فرق یہ ہے کہ تحدیدی دائرے تک خط حرکت پہنچتی ہے جبکہ وسط کا خط اسی دائرے پر پایا جاتا ہے۔ μ کی زیادہ قیمت پر تحدیدی دائرہ گول صورت نہیں رکھتا۔ شکل 4.18 میں μ کی زیادہ قیمت $(\mu=1)$ کے لئے تمام صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں تحدیدی دائرہ گول نہیں ہے۔ □

مثال 4.19: تفرقی مساوات $y''+y-y^3=0$ سے نظام حاصل کریں۔اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔



شکل 4.18: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu=1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

حل: $y=y_1$ اور $y'=y_1'=y_2$ لیتے ہوئے اور $y''=y_2'$ لکھتے ہوئے دیے گئے دو درجی مساوات سے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1 = y_2 \\ y_2' &= f_2 = -y_1 + y_1^3 \end{aligned} \tag{4.86}$$

حاصل ہوتا ہے۔نقطہ فاصل $f_1=f_2=0$ سے حاصل ہوں گے۔ $f_1=0$ سے $y_2=0$ ملتا ہے جبکہ $f_2=y_1(-1+y_1^2)=0$ سے $y_1=0$ اور $y_1=\mp 1$ ملتے ہیں۔یوں نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $-1,0$ اور $1,0$ ہیں۔نقطہ فاصل $(0,0)$ مبدا پر پایا جاتا ہے لہٰذا اس پر پہلے غور کرتے ہیں۔نقطہ فاصل کی نوعیت جاننے کی خاطر نظام کو خطی بناتے ہیں۔ایسا کوئی بھی جزو جو y^m یا $y_1^n y_2^q$ کی صورت میں لکھا گیا ہو، جہاں $m\neq 1$ جبکہ n اور q کوئی بھی مستقل ہو سکتے ہیں، غیر خطی ہو گا۔ان غیر خطی اجزاء کو رد کرنے سے خطی نظام حاصل ہوتا ہے۔یوں y_2' کی مساوات میں y_1^3 کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned} \qquad \implies \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

حاصل ہو گا جس سے $p=a_{11}+a_{22}=0$ ، $q=1>0$ اور $\Delta=-4<0$ ملتے ہیں لہٰذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔

آئیں اب نقطہ $(-1,0)$ پر غور کریں۔اس کو مبدا پر منتقل کرنے کی خاطر نظام 4.86 میں $\tilde{y}_1=y_1+1$ یعنی

$y_1 = \tilde{y}_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= -(\tilde{y}_1 - 1) + (\tilde{y}_1 - 1)^3 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ غیر خطی اجزاء $\tilde{y}_1^2$ اور $\tilde{y}_1^3$ کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\boldsymbol{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}$$

ملتا ہے۔اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا نقطہ $(-1,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

نقطہ $(1,0)$ پر غور کرنے کی خاطر اس کو مبدا پر منتقل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ چنتے ہیں۔یوں نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ملتا ہے جس میں غیر خطی اجزاء $\tilde{y}_1^2$ اور $\tilde{y}_1^3$ رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\boldsymbol{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}$$

ملتا ہے۔اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا نقطہ $(1,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔ $\square$

سوالات

سوال 4.51 تا سوال 4.55 کو خطی بناتے ہوئے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 4.51: $y_1' = 4y_1 - y_1^2, \quad y_2' = y_2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0,0)$ اور $(4,0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ مسئلے کو $(0,0)$ پر خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لکھا جاتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہٰذا نقطہ $(0,0)$ غیر مستحکم جوڑ ہے۔ نقطہ $(4,0)$ کو مبدا پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 4$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو ($-\tilde{y}_1^2$ رد کرتے ہوئے) خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جو $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ دیتا ہے جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 4.52: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1 + \frac{2}{3}y_1^2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0,0)$ اور $(\frac{3}{2},0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ $(0,0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p = 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ملتے ہیں لہٰذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔ نقطہ $(\frac{3}{2},0)$ کو مبدا پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - \frac{3}{2}$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو ($\frac{2}{3}\tilde{y}_1^2$ رد کرتے ہوئے) خطی بنانے سے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $(\frac{2}{3},0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.53: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -2y_1 - y_1^2$

جوابات: مستحکم وسط $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.54: $y_1' = -y_1 + y_2 + y_1^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$

جوابات: $(0,0)$ پر مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(2,-2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.55: $y_1' = -y_1 + y_2 - y_2^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$

جوابات: $(0,0)$ پر جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.56 تا سوال 4.60 میں تفرقی مساوات سے نظام حاصل کریں۔ اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نظام کو خطی بناتے ہوئے نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

سوال 4.56: $y'' - 4y + y^3 = 0$
جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین، $(-2,0)$ مستحکم وسط اور $(2,0)$ مستحکم وسط ہیں۔

سوال 4.57: $y'' + 4y - y^3 = 0$
جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ مستحکم وسط، $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین اور $(2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔

سوال 4.58: $y'' + 4y + y^2 = 0$
جوابات: $(0,0)$ مستحکم وسط اور $(-4,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.59: $y'' + \sin y = 0$
جوابات: $(0,0)$ اور $(\mp n2\pi,0)$ مستحکم وسط ہیں جہاں $n = 1,2,3,\cdots$ ہو سکتا ہے۔نقطہ $(\mp m\pi,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے جہاں $m = 1,3,5,\cdots$ ہو سکتا ہے۔

سوال 4.60: $y'' + \cos y = 0$
جوابات: نقطہ $(\frac{\pi}{2} \mp n2\pi,0)$ غیر مستحکم نقطہ نیز جبکہ $(-\frac{\pi}{2} \mp n2\pi,0)$ وسط ہیں جہاں $n = 1,2,3,\cdots$ ہو سکتا ہے۔آپ کو $-\cos(\mp\frac{\pi}{2} + \tilde{y}_1) = \sin(\mp\tilde{y}_1) \approx \mp\tilde{y}_1$ کی مدد لے سکتے ہیں۔

سوال 4.61: ریلے مساوات
$Y'' - \mu(1 - \frac{1}{3}Y'^2)Y' + Y = 0$ جہاں $\mu > 0$ ہے، **ریلے مساوات**[85] کہلاتی[86] ہے۔اس میں $y = Y'$ پر کرتے ہوئے تفرق لے کر **ون در پول مساوات** حاصل کریں۔

سوال 4.62: ڈفنگ مساوات
اسپرنگ اور کمیت کی مساوات $y'' + \omega_0^2 = 0$ میں غیر خطی قوت بحالی کی صورت میں ڈفنگ مساوات[87] $y'' + \omega_0^2 y + \beta y^3 = 0$ حاصل ہوتی ہے جہاں $|\beta|$ عموماً چھوٹی مقدار ہوتی ہے۔ $\beta > 0$ کو سخت اسپرنگ اور $\beta < 0$ کو نرم اسپرنگ کی صورت پکارا جاتا ہے۔ سطح حرکت پر خط حرکت کی مساوات دریافت کریں۔

جواب: $2y_2^2 + 2\omega_0^2 y_1^2 + \beta y_1^4 = K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

---

[85] Rayleigh equation
[86] لارڈ ریلے، جن کا اصل نام جان ولیم سٹرٹ ہے انگلستان کے ماہر طبیعیات اور ریاضی دان تھے۔
[87] Duffing equation

سوال 4.63: خط حرکت
سادہ تفرقی مساوات $y'' - 9y + y^3 = 0$ کو نظام کی صورت میں لکھیں جس کو حل کرتے ہوئے y_2 بالمقابل y_1 کی مساوات حاصل کریں۔حاصل مساوات سے سطح حرکت پر چند خط حرکت کھینچیں۔

جواب: $2y_2^2 = 18y_1^2 - y_1^4 + K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام

اس حصے میں غیر متجانس نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \qquad \text{(حصہ 4.3 دیکھیں)} \tag{4.87}$$

جہاں $\boldsymbol{g}$ غیر صفر سمتیہ ہے، کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{g}(t)$ اور $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}(t)$ کے ارکان، محور t کے کھلے وقفہ J پر استمراری ہیں۔وقفہ J پر متجانس مساوات $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ کے عمومی حل $\boldsymbol{y}^{(h)}(t)$ اور J پر مساوات 4.87 کے کسی بھی **مخصوص حل** $\boldsymbol{y}^{(p)}(t)$ [جس میں کوئی مستقل نہیں پایا جاتا] سے مساوات 4.87 کا J پر **عمومی حل**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} \tag{4.88}$$

حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ 4.3 کے تحت عمومی حل $\boldsymbol{y}$ میں J پر مساوات 4.87 کے تمام ممکنہ حل شامل ہیں۔

متجانس مساوات کے حل پر ہم گزشتہ حصوں میں غور کر چکے ہیں۔اس حصے میں غیر متجانس مساوات کے مخصوص حل کے حصول پر غور کرتے ہیں۔نا معلوم عددی سر کی ترکیب اور مقدار معلوم بدلنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں جنہیں ہم حصہ 2.7 اور حصہ 2.10 سے جانتے ہیں۔

4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب

ایک عدد سادہ تفرقی مساوات کے حل میں استعمال ہونے کی طرح اب بھی یہ ترکیب اس صورت قابل استعمال ہو گی جب $\boldsymbol{A}$ کے ارکان مستقل مقدار ہوں جبکہ مستقل مقدار، t^m (جہاں m مثبت اعداد ہیں)، قوت نمائی، سائن اور کوسائن تفاعل کا کوئی بھی مجموعہ $\boldsymbol{g}$ ہو۔ایسی صورت میں مخصوص حل کو $\boldsymbol{g}$ کی طرح تصور کیا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{g} = t^2$ ہونے کی صورت میں $\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{w}t^2$ فرض کیا جائے گا۔ مساوات 4.87 میں $\boldsymbol{y}^{(p)}$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ حاصل کیے جاتے ہیں۔یہ حصہ 2.7 کی طرح ہے البتہ یہاں ترمیمی قاعدہ قدر مختلف ہے۔ آئیں ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کا استعمال دیکھیں۔

مثال 4.20: نامعلوم عددی سر کی ترکیب۔ترمیمی قاعدہ
درج ذیل مساوات کی عمومی حل حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.89}$$

حل:ہم صفحہ 250 پر مثال 4.5 میں مطابقتی متجانس مساوات کا حل

$$\boldsymbol{y}^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.90}$$

حاصل کر چکے ہیں۔چونکہ $\boldsymbol{A}$ کا $\lambda = -3$ امتیازی قدر ہے اور مساوات 4.89 میں دائیں جانب e^{-3t} پایا جاتا ہے لہٰذا اس جزو کو t سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{y}^{(p)}$ میں شامل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{u}te^{-3t} + \boldsymbol{v}e^{-3t} \tag{4.91}$$

$\boldsymbol{y}^{(p)}$ میں بائیں ہاتھ کا پہلا جزو حصہ 2.7 کا مماثل ترمیمی قاعدہ ہے، جو یہاں ناکافی ہے۔[آپ کوشش کر کے دیکھ سکتے ہیں]۔ مساوات 4.91 کو مساوات 4.89 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)\prime} = \boldsymbol{u}e^{-3t} - 3\boldsymbol{u}te^{-3t} - 3\boldsymbol{v}e^{-3t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}te^{-3t} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}e^{-3t} + \boldsymbol{g}$$

دونوں جانب te^{-3t} والے اجزاء کے عددی سر برابر ہوں گے لہٰذا $-3\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{A}$ قالب کے امتیازی قدر $\lambda = -3$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ ہو گا۔اس طرح $\boldsymbol{u} = a[1 \quad -1]^T$ لکھا جا سکتا ہے جہاں a کوئی بھی غیر صفر مستقل ہو سکتا ہے۔بقایا اجزاء کے عددی سر برابر لکھ کر

$$\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} \implies \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 \\ v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ترتیب دیتے ہیں۔

$$v_1 + v_2 = a + 4$$
$$v_1 + v_2 = -a - 3$$

دوسری مساوات کو پہلی سے منفی کرتے ہوئے $2a + 7 = 0$ یعنی $a = -\frac{7}{2}$ ملتا ہے۔یوں درج بالا میں پہلی مساوات $v_1 + v_2 = -\frac{7}{2} + 4 = \frac{1}{2}$ ہو گی جس میں $v_1 = k$ لیتے ہوئے $v_2 = \frac{1}{2} - k$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $\boldsymbol{v} = [k \quad \frac{1}{2} - k]^T$ ہو گا۔ہم $k = 0$ چن سکتے ہیں۔ایسا ہی کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.92}$$

k کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے دیگر حل لکھے جا سکتے ہیں مثلاً $k = 1$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{v} = [1 \quad -\frac{1}{2}]^T$ حاصل ہو گا جس سے درج ذیل عمومی حل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.93}$$

□

مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب

اس ترکیب سے غیر متجانس نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{g}(t) \tag{4.94}$$

کو حل کیا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{A}(t)$ متغیر مقدار ہیں اور $\boldsymbol{g}(t)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے۔اگر t محور کے کسی کھلے وقفے J پر مطابقتی متجانس نظام کا عمومی حل $\boldsymbol{y}^{(h)}$ معلوم ہو تب اس ترکیب کی مدد سے اس وقفے پر نظام 4.94 کا مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں مثال 4.20 کو اس ترکیب سے حل کریں۔

مثال 4.21: مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے حل
گزشتہ مثال کے نظام 4.89 کو مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب سے حل کریں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.95}$$

حل: متجانس مساوات کی امتیازی اقدار -1 $= \lambda_1$ اور -3 $= \lambda_2$ ہیں جن کے بالترتیب مطابقتی امتیازی سمتیات $[1 \quad 1]^T$ اور $[1 \quad -1]^T$ ہیں لہٰذا اساس $[e^{-t} \quad e^{-t}]^T$ ، $[e^{-3t} \quad -e^{-3t}]^T$ ہے جس سے متجانس مساوات کا حل $\boldsymbol{y}^{(h)}$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c} \tag{4.96}$$

یہاں $\boldsymbol{Y}(t) = [\boldsymbol{y}^{(1)} \quad \boldsymbol{y}^{(2)}]^T$ بنیادی قالب [حصہ 4.3 دیکھیں] ہے۔ حصہ 2.10 کی طرح ہم مستقل سمتیہ $\boldsymbol{c}$ کی جگہ متغیر سمتیہ $\boldsymbol{u}$ پر کرتے ہوئے مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{4.97}$$

نظام 4.89 میں $\boldsymbol{y}^{(p)}$ پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} \tag{4.98}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ متجانس نظام کا حل ہے لہٰذا $\boldsymbol{y}^{(1)\prime} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)\prime} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)}$ یعنی $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}$ لکھ کر مساوات 4.98 سے $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{g}$ حاصل ہوتا ہے (اور چونکہ $\boldsymbol{Y}$ کا امتیازی مقطع دراصل ورونسکی [حصہ 4.1 دیکھیں] W ہے جو اساس کی صورت میں غیر صفر ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{Y}^{-1}$ حاصل کیا جا سکتا ہے) لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{g} \tag{4.99}$$

معکوس قالب کو مساوات 4.12 کی مدد سے حاصل کر کے

$$\boldsymbol{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-4t}} \begin{bmatrix} -e^{-3t} & -e^{-3t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{g}$ سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{u}'$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{g} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}$ حاصل کرنے کی خاطر تکمل لیتے ہیں۔ تفرق کی طرح ہر جزو کا علیحدہ تکمل لیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t}-1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix}$$

یوں مساوات 4.96 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t}-1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{7}{2}te^{-3t} \\ \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{2}te^{-3t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{7}{2}t \\ \frac{1}{4} + \frac{7}{2}t \end{bmatrix} e^{-3t} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} e^{-t}$$

گزشتہ مثال کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں مختلف مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ حاصل ہوا ہے۔ یوں عمومی حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

ہم $c_1 - \frac{1}{4} = c^*$ لیتے ہوئے آخری جزو کو $\boldsymbol{y}^{(h)}$ میں ضم کر سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1^*\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} \tag{4.100}$$

□

سوالات

سوال 4.64: ثابت کریں کہ مساوات 4.87 کے تمام حل مساوات 4.88 دیتا ہے۔

سوال 4.65 تا سوال 4.70 میں عمومی حل دریافت کریں۔جواب کو دیے گئے نظام میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔

سوال 4.65:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + 2e^{-t} \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 + 5e^{-t} \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{11}{12}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-t}$ ، $y_2 = c_1e^{2t} - 3c_2e^{-2t} + \frac{11}{12}e^{2t} - \frac{9}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t}$

سوال 4.66:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + e^{-2t} \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 + 3e^{-2t} \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-2t}$ ، $y_2 = c_1e^{2t} + 3c_2e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{3}{2}te^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-2t}$

سوال 4.67:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \sin(t) \\ y_2 &= -5y_1 - 6y_2 + \cos(t) \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{26}e^{-5t} + \frac{9}{13}\sin t - \frac{7}{13}\cos t$
$y_2 = -c_1e^{-t} - 5c_2e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{26}e^{-5t} - \frac{6}{13}\sin t + \frac{9}{13}\cos t$

سوال 4.68:

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 + 2t \\ y_2' &= -1y_1 + 2y_2 + t \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1(t+1)e^{3t} + c_2te^{3t} + \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{t}{3}$
$y_2 = -c_1te^{3t} + c_2(1-t)e^{3t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}$

سوال 4.69:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + y_2 + 2t^2 + 3 \\
y_2' &= 3y_1 + y_2 + t - 1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{7}{16}e^{2t} - \frac{27}{16}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{5}{4}$
$y_2 = 3c_1e^{2t} - c_2e^{-2t} + \frac{21}{16}e^{2t} + \frac{27}{16}e^{-2t} - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - 3$

سوال 4.70:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 11t + 15 \\
y_2' &= 5y_1 + 6y_2 + 3e^{-t} - 15t - 20
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{t} + 10e^{2t} - 4e^{t} - 2e^{-t} - 3t - 4$
$y_2 = -\frac{5}{4}c_1e^{2t} - c_2e^{t} - \frac{25}{2}e^{2t} + 4e^{t} + e^{-t} + 5t + \frac{15}{2}$

سوال 4.71 تا سوال 4.76 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 4.71:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 + \sin t \\
y_2' &= 3y_1 - 3y_2 \\
y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = e^{-t}(\frac{32}{53\sqrt{7}}\sinh\sqrt{7}t + \frac{13}{53}\cosh\sqrt{7}t) - \frac{19}{53}\sin t - \frac{13}{53}\cos t$
$y_2 = e^{-t}(\frac{27}{53\sqrt{7}}\sinh\sqrt{7}t + \frac{6}{53}\cosh\sqrt{7}t) - \frac{21}{53}\sin t - \frac{6}{53}\cos t$

سوال 4.72:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -y_1 + y_2 + e^{-t} \\
y_2 &= 3y_1 + y_2 + t \\
y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = \frac{19}{48}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{17}{16}e^{-2t} - \frac{t}{4}$ ، $y_2 = \frac{19}{16}e^{2t} - e^{-t} + \frac{17}{16}e^{-2t} - \frac{t}{4} - \frac{1}{4}$

سوال 4.73:

$$\begin{gathered} y_1' = -3y_1 - 4y_2 + 2t^2 - t + 1 \\ y_2' = 5y_1 + 6y_2 - t^2 + 2t \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1 \end{gathered}$$

جوابات: $y_1 = -4e^{2t} + 21e^{t} - 4t^2 - 11t - 16$ ، $y_2 = 5e^{2t} - 21e^{t} + \frac{7}{2}t^2 + 10t + 15$

سوال 4.74:

$$\begin{gathered} y_1' = y_2 + 6e^{3t} \\ y_2' = -y_1 - e^{3t} \\ y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 3 \end{gathered}$$

جوابات: $y_1 = 1.7e^{3t} + 0.3\cos t + 3.9\sin t$ ، $y_2 = -0.9e^{3t} + 3.9\cos t - 0.3\sin t$

سوال 4.75:

$$\begin{gathered} y_1' = -3y_2 - 4\cos 5t \\ y_2' = 3y_1 + 3\sin 5t \\ y_1(0) = -2, \quad y_2(0) = 1 \end{gathered}$$

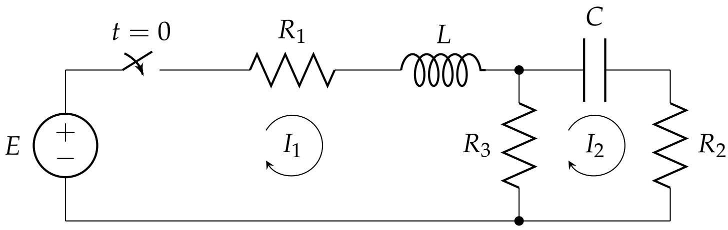
جوابات: $y_1 = -\frac{11}{16}\sin 5t - \frac{19}{16}\sin 3t - 2\cos 3t$ ، $y_2 = -\frac{3}{16}\cos 5t - 2\sin 3t + \frac{19}{16}\cos 3t$

سوال 4.76:

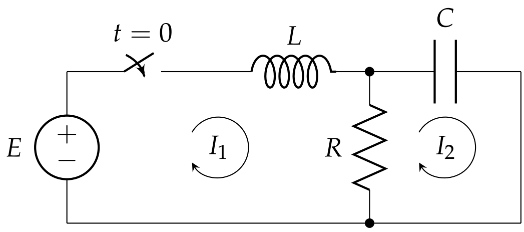
$$\begin{gathered} y_1 = -9y_2 + e^{t} \\ y_2 = y_1 + e^{-t} \\ y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 0 \end{gathered}$$

جوابات: $y_1 = -\frac{1}{5}\cos 3t + \frac{1}{10}e^{t} - \frac{9}{10}e^{-t}$ ، $y_2 = -\frac{1}{15}\sin 3t + \frac{1}{10}e^{t} - \frac{1}{10}e^{-t}$

سوال 4.77: امالہ، برق گیر اور مزاحمتوں پر مبنی دور شکل 4.19 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر $E = 10\,\mathrm{V}$ ، $R_1 = 2\,\Omega$ ، $R_2 = 4\,\Omega$ ، $R_3 = 6\,\Omega$ ، $L = 2\,\mathrm{H}$ اور $C = 0.25\,\mathrm{F}$ ہوں اور لمحہ $t = 0$ پر منقطع سوئچ کو چالو کیا جائے تب I_1 اور I_2 کیا ہوں گے؟ ابتدائی رو اور ابتدائی ذخیرہ برقی بار صفر ہیں۔



شکل 4.19: مثال 4.77 اور مثال 4.78 کا برقی دور۔



شکل 4.20: مثال 4.79 اور مثال 4.80 کا برقی دور۔

جوابات: $I_1(t)=5e^{-t}-\frac{25}{4}e^{-\frac{8}{5}t}+\frac{5}{4}$ ، $I_2(t)=5e^{-t}-5e^{-\frac{8}{5}t}$

سوال 4.78: اگر سوال 4.77 میں $E=10\sin 5t$ وولٹ ہو تب I_1 اور I_2 کیا ہوں گے؟

جوابات: $I_1(t)=0.388\sin 5t-0.853\cos 5t-0.962e^{-t}+1.814e^{-\frac{8}{5}t}$ ،
$I_2(t)=0.272\sin 5t-0.49\cos 5t-0.962e^{-t}+1.451e^{-\frac{8}{5}t}$

سوال 4.79: شکل 4.20 میں $E=20\,\mathrm{V}$ ، $R=1\,\Omega$ ، $L=4\,\mathrm{H}$ اور $C=0.2\,\mathrm{F}$ ہیں۔ابتدائی رو اور ابتدائی ذخیرہ برقی بار صفر ہیں۔لمحہ $t=0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ رو دریافت کریں۔

جوابات: $I_1(t)=\frac{1}{4}e^{-\frac{5}{2}t}(-36\sqrt{5}\sinh\sqrt{5}t-80\cosh\sqrt{5}t)+20$ ،
$I_2(t)=\sqrt{5}e^{-\frac{5}{2}t}\sinh\sqrt{5}t$

سوال 4.80: اگر سوال 4.79 میں $E=20\sin 2t$ ہو تب رو کیا ہوں گے؟

جوابات: $I_1(t)=e^{-\frac{5}{2}t}(2.625\sinh 2.236t+2.58\cosh 2.236t)+0.291\sin 2t-2.58\cos 2t$ ،
$I_2(t)=e^{-\frac{5}{2}t}(-0.546\sinh 2.236t+0.256\cosh 2.236t)+0.93\sin 2t-0.256\cos 2t$

باب 5

طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔اعلیٰ تفاعل

گزشتہ ابواب میں **مستقل عددی سر** والے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو **بنیادی تفاعل** تھے۔بنیاد تفاعل مثلاً $\sin 3t$ ، t^6 اور e^{2t} کو آپ **علم الاحصاء**[1] سے جانتے ہیں۔**متغیر عددی سر** والے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ **لیژانڈر، بیسل** اور **بیش ہندسی** مساوات اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔یہ مساوات اور ان کے حل **لیژانڈر تفاعل، بیسل تفاعل** اور **بیش ہندسی تفاعل** انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہٰذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف ترکیبوں پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل **طاقتی تسلسل**[2] $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا اس کو **ترکیب طاقتی تسلسل**[3] کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو $\ln x$ یا کسری طاقت x^r سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو **ترکیب فروبنیوس**[4] کہلاتی ہے۔جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کار آمد ثابت ہوتا ہے لہٰذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلیٰ حل جنہیں آپ علم الاحصاء سے نہیں جانتے **اعلیٰ تفاعل**[5] کہلاتے ہیں۔

---

calculus[1]
power series[2]
power series method[3]
Frobenius method[4]
higher functions or special functions[5]

5.1 ترکیب طاقتی تسلسل

متغیر عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً **ترکیب طاقتی تسلسل** سے حل کرتے ہوئے طاقتی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔اس طاقتی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے، حل کا خط کھینچا جا سکتا ہے، کلیات ثابت کیے جا سکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جا سکتی ہے۔اس حصے میں طاقتی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ $x - x_0$ کا طاقتی تسلسل درج ذیل ہے

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots \tag{5.1}$$

جس میں x متغیر ہے جبکہ a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... تسلسل کے **عددی سر**[6] کہلاتے ہیں اور x_0 مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا **وسط**[7] کہلاتا ہے۔جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً **علامت مجموعہ**[8] ($\sum$) کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں **اشاریہ**[9] مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔درج بالا مساوات میں m بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔علامت مجموعہ کے نیچے $m = 0$ اور اس کے اوپر ∞ مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔ تسلسل کا وسط صفر $(x_0 = 0)$ ہونے کی صورت میں x کا طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{5.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقتی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کی تسلسل ہے جس میں $x - x_0$ (یا x) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

[6] coefficients
[7] center
[8] summation
[9] index

مثال 5.1: مکلارن تسلسل درحقیقت میں طاقتی تسلسل ہیں

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1, \text{ ہندسی تسلسل})\\
e^x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\\
\sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\\
\cos x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots
\end{aligned}
$$

□

ترکیب طاقتی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقتی تسلسل دیکھے۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقتی تسلسل حل
تفرقی مساوات $y' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلی قدم میں حل کو طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.3}$$

تسلسل کا جزو با جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} \tag{5.4}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots) = 0$$

x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تفاعل e^{-x} کی مکلارن تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots) = a_0e^{-x}$$

یہاں آپ $y'' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ حاصل کریں۔ □

اب اس ترکیب کی عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلے مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔پہلی قدم میں ہم خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.5}$$

میں $p(x)$ اور $q(x)$ کو x کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ از خود کثیر رکنی ہوں تب پہلی قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسری قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح y' اور درج ذیل y'' لکھتے ہوئے

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_mx^{m-2} \tag{5.6}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔ تیسری قدم میں x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری x^1 ، x^2 ، . . . کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔ یوں تمام عددی سر کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیژانڈر مساوات

درج ذیل مساوات کروی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$$

حل: مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}(1-x^2)(2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+6\cdot 5a_6x^4\cdots)\\ -2x(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots)\\ +2(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots)=0\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}(2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+6\cdot 5a_6x^4\cdots)\\ +(-2a_2x^2-3\cdot 2a_3x^3-4\cdot 3a_4x^4-5\cdot 4a_5x^5-\cdots)\\ +(-2a_1x-2\cdot 2a_2x^2-3\cdot 2a_3x^3-4\cdot 2a_4x^4-\cdots)\\ +(2a_0+2a_1x+2a_2x^2+2a_3x^3+2a_4x^4+\cdots)=0\end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(2a_2+2a_0)+(3\cdot 2a_3-2a_1+2a_1)x\\ +(4\cdot 3a_4-2a_2-2\cdot 2a_2+2a_2)x^2\\ +(5\cdot 4a_5-3\cdot 2a_3-3\cdot 2a_3+2a_3)x^3\\ +(6\cdot 5a_6-4\cdot 3a_4-4\cdot 2a_4+2a_4)x^4+\cdots=0\end{aligned}$$

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری x ، x^2 ، x^3 ، . . . کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے

ہوئے بالترتیب a_2 ، a_3 ، a_4 ، $\cdots$ کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3} \\
a_5 &= \frac{a_3}{2} = 0 \quad (\text{چونکہ } a_3 = 0 \text{ ہے}) \\
a_6 &= \frac{3}{5}a_4 = -\frac{a_0}{5}
\end{aligned}$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1 x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots)$$

جس میں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل x اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \cdots$ پر مشتمل ہے جو **لیژانڈر کثیر رکنی**[10] $P_n(x)$ اور **لیژانڈر تفاعل**[11] $Q_n(x)$ کے رکن ہیں۔یہاں $x = P_1(x)$ اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots = -Q_1(x)$ ہیں جہاں منفی علامت روایتی ہے۔ n لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا **درجہ**[12] کہلاتا ہے۔یہاں $n = 1$ ہے لہٰذا لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔ □

نظریہ طاقتی تسلسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ $s_n(x)$ لکھتے ہیں جس کو n **جزوی مجموعہ**[13] کہتے ہیں۔

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{5.7}$$

یہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔مساوات 5.1 سے $s_n(x)$ منفی کرنے سے بقایا $R_n(x)$ حاصل ہوتا ہے جس کو $a_n(x - x_0)^n$ کے بعد مساوات 5.1 کا **بقایا**[14] کہتے ہیں۔

$$R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \cdots \tag{5.8}$$

---

[10] Legendre polynomials
[11] Legendre function
[12] order
[13] nth partial sum
[14] remainder

یوں ہندسی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

کے **جزوی مجموعے** اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \cdots \\ s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \end{aligned}$$

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ $\cdots$ کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔اگر کسی $x = x_1$ کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرتکز ہو مثلاً

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر تسلسل 5.1 **مرکوز**[15] ہے جبکہ $s(x_1)$ کو تسلسل 5.1 کی **قیمت**[16] یا **مجموعہ** کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x_1 - x_0)^m$$

اس طرح کسی بھی n کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

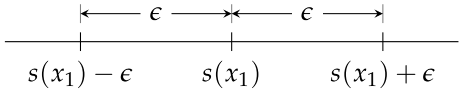
$$s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1) \tag{5.9}$$

اس کے برعکس اگر $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ ، $\cdots$ کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر مساوات 5.1 **منفرج**[17] ہے۔

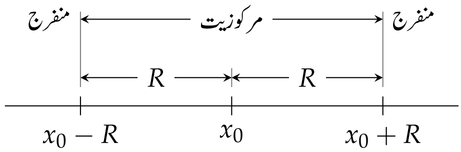
مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت ϵ کے لئے ایسا N (جس کی قیمت ϵ پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام $n > N$ کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\left|R_n(x_1)\right| = \left|s(x_1) - s_n(x_1)\right| < \epsilon \qquad n > N \text{ تمام} \tag{5.10}$$

جیومیٹریائی طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ $s_n(x_1)$ جہاں $n > N$ ہے $s(x_1) - \epsilon$ اور $s(x_1) + \epsilon$ کے درمیان پایا جاتا ہے۔عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں x_1 پر مساوات



شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔



شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.11 جس کا وسط x_0 ہے۔

5.1 کا مجموعہ $s(x_1)$ تقریباً $s_n(x_1)$ کے برابر ہو گا۔مزید یہ کہ $s(x_1)$ اور $s_n(x_1)$ میں فرق کو ہم n بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کہاں مرکوز ہوتی ہے؟ تسلسل 5.1 میں $x = x_0$ پر a_0 کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا تسلسل کی قیمت a_0 ہو گی۔یوں $x = x_0$ پر تسلسل a_0 پر مرکوز ہوتی ہے۔ کبھی کبھار x کی واحد اسی قیمت پر تسلسل مرتکز ہو گا۔ اگر x کے دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرتکز ہو تب x کی یہ قیمتیں ارتکازی وقفہ[18] کہلاتا ہے۔ یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔ محدود وقفہ جس کا وسط x_0 ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔یوں طاقتی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام x پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے x پر تسلسل مرکوز ہو گا

$$|x - x_0| < R \tag{5.11}$$

جبکہ $|x - x_0| > R$ پر تسلسل منفرج ہو گا۔ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طاقتی تسلسل x کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں R رداس ارتکاز[19] کہلاتا ہے۔(مخلوط طاقتی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول ٹکیا ہوتا ہے جس کا رداس R ہو گا)۔ اگر تسلسل تمام x پر مرکوز ہو تب ہم $R = \infty$ یعنی $\frac{1}{R} = 0$ لکھتے ہیں۔

[15] converge
[16] value or sum
[17] divergent
[18] convergence interval
[19] convergence radius

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جا سکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد (lim) موجود اور غیر صفر ہو۔ اگر یہ حد لامتناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط x_0 پر مرکوز ہو گا۔

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{\lvert a_m\rvert}} \tag{5.12}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \left\lvert \frac{a_{m+1}}{a_m} \right\rvert} \tag{5.13}$$

مثال 5.4: رداس ارتکاز ∞ ، 1 اور 0

تینوں تسلسل میں $m \to \infty$ لیتے ہوئے رداس ارتکاز R دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad \left\lvert \frac{a_{m+1}}{a_m} \right\rvert = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \to 0, \quad R \to \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad \left\lvert \frac{a_{m+1}}{a_m} \right\rvert = \left\lvert \frac{1}{1} \right\rvert = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! x^m = 1 + x + 2x^2 + \cdots, \quad \left\lvert \frac{a_{m+1}}{a_m} \right\rvert = \left\lvert \frac{(m+1)!}{m!} \right\rvert = m + 1 \to \infty, \quad R \to 0$$

لامتناہی رداس ارتکاس $R \to \infty$ سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ $R = 0$ بے کار صورت ہے۔ عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔ □

درج بالا مثال میں $\frac{1}{1-x}$ کے طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز $R = 1$ حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط $x_0 = 0$ ہے۔ مساوات 5.11 کے تحت $\lvert x\rvert < 1$ کے لئے طاقتی تسلسل تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کو ظاہر کرتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔ نقطہ $x = 0.2$ پر تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-0.2} = 1.25$ ہے جبکہ اس کے تسلسل میں $x = 0.2$ پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1 &= 1 && \text{ایک رکن} \\ 1 + 0.2 &= 1.2 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 &= 1.24 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 &= 1.248 \\ 1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 + 0.2^4 &= 1.2496 && \text{پانچ ارکان} \end{aligned}$$

طاقتی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کے اصل قیمت کے $\frac{1.2496}{1.25} \times 100 = 99.968$ فی صد ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی x پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جا سکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرج ہے۔آئیں رداس ارتکاز کے باہر $x = 1.2$ پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل کریں۔تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-1.2} = -5$ حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+1.2 &= 2.2\\
1+1.2+1.2^2 &= 3.64\\
1+1.2+1.2^2+1.2^3 &= 5.368
\end{aligned}
$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ x پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرج ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔طاقتی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہو گی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \tag{5.14}$$

میں $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کے طاقتی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقتی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ایسا تفاعل $f(x)$ جس کو $x-x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا مثبت رداس ارتکاز پایا جاتا ہو، x_0 پر **تحلیلی**[20] کہلاتا ہے ورنہ اس نقطے کو غیر تحلیلی کہیں گے (مثال 5.5 دیکھیں)۔اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 **معیاری صورت** میں ہے یعنی یہ y'' سے شروع ہوتا ہے۔اگر دو درجی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پایا جاتا ہو، یعنی اس میں $h(x)y''$ پایا جاتا ہو تب مساوات کو $h(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

---

[20] analytic

مسئلہ 5.1: طاقتی تسلسل حل کی وجودیت
اگر مساوات 5.14 میں p ، q اور r نقطہ $x = x_0$ پر تحلیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل $x = x_0$ پر تحلیلی ہو گا اور اس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رداس ارتکاز $R > 0$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔(دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ x محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رداس ارتکاز کی لمبائی x_0 سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں p ، q اور r میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تحلیلی ہو۔

مثال 5.5: تفاعل غیر تحلیلی ہونے کے کئی وجوہات ممکن ہیں۔اس کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

- تفاعل غیر معین ہو سکتا ہے مثلاً $f(x) = \frac{1}{x - x_0}$ جس کی قیمت $x = x_0$ پر غیر معین ہے۔
- تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

- تفاعل استمراری ہونے کے باوجود غیر ہموار[21] ہو سکتا ہے۔ایسا تفاعل جس کے تمام تفرق $x = x_0$ پر پائے جاتے ہوں ہموار کہلاتا ہے۔درج ذیل تفاعل کا دو درجی تفرق $x = x_0$ پر نہیں پایا جاتا۔

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 & x \geq x_0 \\ -(x - x_0)^2 & x < x_0 \end{cases}$$

تفاعل ہموار ہونے کے باوجود اس کی ٹیلر تسلسل نقطہ $x = x_0$ پر منفرج ہو سکتی مثلاً

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

اس ہموار تفاعل کے تمام تفرق نقطہ $x = 0$ پر صفر کے برابر ہیں لہٰذا اس کی ٹیلر تسلسل صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے جو تفاعل کو ظاہر نہیں کر سکتی۔

□

[21] not smooth

طاقتی تسلسل پر مختلف عمل

طاقتی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقتی تسلسل کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح) x کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقتی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقتی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

$|x - x_0| < R$ پر مرکوز ہو، جہاں $R < 0$ ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی انہیں x پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان x پر تفرق y' کو ظاہر کرے گا۔

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \qquad (|x - x_0| < R)$$

اسی طرح دو درجی، تین درجی اور بلند درجی تفرقات بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقتی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m \tag{5.15}$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m)(x - x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ $f(x) + g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقتی تسلسل کو رکن با رکن ضرب دیا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور

$g(x)$ ہیں۔اب پہلی تسلسل کے ہر رکن کو دوسری تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے $x - x_0$ کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$\begin{aligned} a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x - x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x - x_0)^2 + \cdots \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_mb_0)(x - x_0)^m \end{aligned}$$

مرکوز ہو گا اور $f(x)g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ارتکاز دریافت کریں۔

سوال 5.1: $\sum_{\infty}^{m=0}(m+1)mx^m$
جواب: $R = 1$

سوال 5.2: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{k^m}$
جواب: $R = k$

سوال 5.3: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
جواب: $R = \infty$

سوال 5.4: $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m x^m$
جواب: $R = \frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقتی تسلسل حل کریں۔

سوال 5.5: $y' = -2xy$
جواب: $y = a_0(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + - \cdots) = a_0 e^{-x^2}$

سوال 5.6: $y'' + y = 0$
جواب: $y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{6}x^3 + - \cdots = a_0 \cos x + a_1 \sin x$

سوال 5.7: $(1-x)y' = y$
جواب: $y = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = -\frac{a_0}{1-x}$

سوال 5.8: $xy' - 3y = k$ جہاں k مستقل مقدار ہے
جواب: $y = cx^3 - \frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاقتی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔ تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لامحدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں x کے صرف طاق یا صرف جفت طاقت پائیں جاتے ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9: $y'' - y' + xy = 0$
جواب: $y = a_0(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{240} + \cdots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} - \cdots)$

سوال 5.10: $y'' - y' - xy = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{144} + \cdots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} + \cdots)$

سوال 5.11: $y'' - y' - x^2 y = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \cdots) + a_1(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots)$

سوال 5.12: $y'' - xy' - x^2 y = 0$
جواب: $y = a_0(1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \cdots) + a_1(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots)$

سوال 5.13: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$
جواب: $y = a_0(1 - 3x^2) + a_1(x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \cdots)$ ؛ جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{s}{s+1} x^{s+1}$ کے پہلے جزو کی نشاندہی $s = 0$ کرتا ہے۔اس مجموعے میں $k = s + 1$ پر کرتے ہوئے نیا

مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر x^m پایا جاتا ہو۔اس عمل کو منتقلی اشاریہ[22] کہتے ہیں۔حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی $k=1$ کرتا ہے۔

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
مجموعہ $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{p+2}{(p+1)!} x^{p+3}$ میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر x^m ہو۔

جواب: $\sum_{m=5}^{\infty} \frac{m-1}{(m-2)!} x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.19 کو ترکیب طاقتی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں x^3 تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل a_0 (اور a_1) دریافت کریں۔دیے گئے نقطہ x_1 پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں تک جواب لکھیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

جوابات: $y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \cdots$ ، $a_0 = 6$ ، $y(1) = -514$

سوال 5.17:

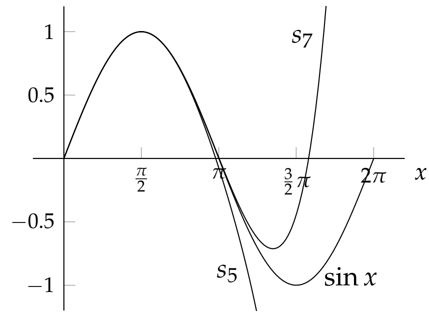
$$y'' + 4xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad x_1 = 0.1$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{6} + \cdots)$ ، $a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$ ، $y(0.1) = 1.094$

سوال 5.18:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = 0.5$$

[22] shifting index



شکل 5.3: سوال 5.20 کا خط۔ $\sin x$ کے علاوہ جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 دکھائے گئے ہیں۔

جوابات: $y = a_0(1 - 6x^2 + 3x^4 + \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{3})$ ، $a_0 = 0$ ، $a_1 = -\frac{3}{2}$ ، $y(0.5) = -0.437$

سوال 5.19:

$$(x-4)y' = xy, \quad y(1) = 5, \quad x_1 = 2$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{256} + \cdots)$ ، $a_0 = 5.827$ ، $y(2) = 2.307$

سوال 5.20: کمپیوٹر کا استعمال
طاقتی تسلسل سے تفاعل کی قیمت جزوی تسلسل سے حاصل کی جاتی ہے۔تفاعل $\sin x$ کی تسلسل سے بذریعہ کمپیوٹر، تسلسل میں اجزاء کی تعداد مختلف لیتے ہوئے سائن کا خط کھینچیں۔آپ دیکھیں گے کے کم اجزاء لینے سے اصل تفاعل (یعنی $\sin x$)اور تسلسل میں فرق بہت جلد واضح ہوتا ہے جبکہ زیادہ تعداد میں اجزاء لینے سے یہ فرق دیر بعد نمودار ہوتا ہے۔

جوابات: شکل 5.3 میں $\sin x$ کا جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

5.2 لیژانڈر مساوات۔ لیژانڈر کثیر رکنی

لیژانڈر تفرقی مساوات[23][24]

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (n \text{ مستقل ہے}) \tag{5.16}$$

طبیعیات کے اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک ہے جو متعدد مسائل، بالخصوص کرہ کے سرحدی قیمت مسئلوں، میں سامنے آتی ہے۔

مساوات میں مقدار معلوم n کی قیمت اصل مسئلے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے لہٰذا مساوات 5.16 درحقیقت سادہ تفرقی مساوات کی نسل کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم نے لیژانڈر مساوات، جس میں $n=1$ تھا، کو مثال 5.3 میں حل کیا (جس کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ مساوات 5.16 کے کسی بھی حل کو **لیژانڈر تفاعل**[25] کہتے ہیں۔ لیژانڈر تفاعل اور ایسے دیگر اعلیٰ تفاعل، جو علم الاحصاء میں نہیں پائے جاتے، کے مطالعہ کو **نظریہ اعلیٰ تفاعل**[26] کہتے ہیں۔ دیگر اعلیٰ تفاعل اگلے حصوں میں سامنے آئیں گے۔

مساوات 5.16 کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ نقطہ $x=0$ پر تحلیلی تفاعل ہیں [مثال 5.6 دیکھیں] لہٰذا لیژانڈر مساوات پر مسئلہ 5.1 کا اطلاق ہوتا ہے اور اس کا حل طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ طاقتی تسلسل

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.17}$$

اور اس کے تفرقات کو مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے مستقل $n(n+1)$ کو k لکھتے ہوئے

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}-2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}+k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m=0$$

یعنی

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}-\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m-\sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m=0$$

---

[23] فرانسیسی ریاضی دان اڈریان مری لیژانڈر [1752-1833] نے اعلیٰ تفاعل، بیضوی تکمل اور اعدادی نظریہ پر کام کیا۔

[24] Legendre's equation

[25] Legendre function

[26] special functions theory

حاصل ہوتا ہے۔یہاں آپ مثال 5.3 کی طرح مجموعوں کے چند ابتدائی ارکان لکھ کر آگے بڑھ سکتے ہیں یا پھر درج ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ تمام مجموعوں کو x کی یکساں طاقت کی صورت (x^s) میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $s = m - 2$ یعنی $m = s + 2$ پر کرتے ہیں جبکہ بقایا تین مجموعوں میں m کی جگہ s پر کرتے ہیں۔یوں پہلے مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ اب $s = 0$ ہو گا اور a_m کی جگہ a_{s+2} لکھا جائے گا۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty}s(s-1)a_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty}2sa_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty}ka_s x^s = 0 \tag{5.18}$$

درج بالا مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا مساوات کا بایاں ہاتھ بھی صفر کے برابر ہو گا اور یوں x کے ہر طاقت کے عددی سروں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔یوں x^0 کے عددی سر سے شروع کرتے ہوئے باری باری x^1 ، x^2 ، $\cdots$ کے عددی سر صفر کے برابر لکھتے ہیں۔مساوات 5.18 کا دوسرا مجموعہ x^2 اور تیسرا مجموعہ x^1 سے شروع ہوتا ہے لہٰذا ان میں x^0 نہیں پایا جاتا ہے۔یوں پہلے اور چوتھے مجموعوں سے x^0 کے عددی سر جمع کرتے ہوئے صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$$2 \cdot 1a_2 + n(n+1)a_0 = 0 \tag{5.19}$$

جہاں k کی جگہ واپس $n(n+1)$ لکھا گیا ہے۔اسی طرح x^1 پہلے، تیسرے اور چوتھے مجموعوں میں پایا جاتا ہے جن سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$3 \cdot 2a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0 \tag{5.20}$$

بلند طاقتی اجزاء x^2 ، x^3 ، $\cdots$ تمام مجموعوں میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے لئے x^s کے عددی سروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$(s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0 \tag{5.21}$$

چکور قوسین $[\cdots]$ کے اندر قوسین کو کھول کر ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} -s(s-1) - 2s + n(n+1) &= -s^2 + s - 2s + n^2 + n = n^2 - s^2 + n - s \\ &= (n-s)(n+s) + n - s \\ &= (n-s)(n+s+1) \end{aligned}$$

لہٰذا مساوات 5.21 سے

$$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots) \tag{5.22}$$

حاصل ہوتا ہے جو کلیہ توالی[27] کہلاتا ہے۔ کلیہ توالی کی مدد سے، a_0 اور a_1 کے علاوہ، بقایا تمام عددی سر، دو قدم پچھلی عددی سر استعمال کرتے ہوئے دریافت کیے جاتے ہیں۔ یوں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔ کلیہ توالی کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 & a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1 \\
a_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}a_2 & a_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}a_3 \\
&= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 & &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 5.17 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$
y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \tag{5.23}
$$

جہاں

$$
y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \cdots \tag{5.24}
$$

اور

$$
y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \cdots \tag{5.25}
$$

ہیں۔ یہ تسلسل $|x| < 1$ کے لئے مرکوز ہیں۔ بعض اوقات تسلسل کا کوئی عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں کلیہ توالی کے تحت اگلے تمام عددی سر بھی صفر ہوں گے اور یوں تسلسل محدود ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ چونکہ مساوات 5.24 میں x کے جفت طاقت پائے جاتے ہیں جبکہ مساوات 5.25 میں x کے طاق طاقت پائے جاتے ہیں لہٰذا $\frac{y_1}{y_2}$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا ہے اور یوں y_1 اور y_2 آپس میں خطی تعلق نہیں رکھتے لہٰذا یہ خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ یوں مساوات 5.23 کھلے وقفہ $-1 < x < 1$ پر عمومی حل ہے۔

دھیان رہے کہ $x = \mp 1$ پر $1 - x^2 = 0$ ہو گا لہٰذا سادہ تفرقی مساوات کی معیاری صورت میں عددی سر غیر تحلیلی ہوں گے۔ یوں حیرانی کی بات نہیں ہے کہ تسلسل 5.24 اور تسلسل 5.24 کا ارتکازی وقفہ وسیع نہیں ہے ماسوائے اس صورت میں جب اجزاء کی تعداد محدود ہونے کی بنا تسلسل کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے۔

[27] recurrence relation, recursion formula

کثیر رکنی حل۔لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$

طاقتی تسلسل کے تخفیف سے کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے جس کا حل، ارتکازی شرط کے قید سے آزاد، تمام x کے لئے پایا جاتا ہے۔ایسے اعلٰی تفاعل جو سادہ تفرقی مساوات کے حل ہوتے ہیں میں یہ صورت عموماً پائی جاتی ہے جن سے مختلف نسل کے اہم کثیر رکنی حاصل ہوتے ہیں۔لیژانڈر مساوات میں n کی قیمت غیر منفی عدد صحیح ہونے کی صورت میں $s=n$ پر مساوات 5.22 صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا $a_{n+2}=0$ ہو گا اور یوں $a_{n+4}=0$ ، $a_{n+6}=0$ ، ...ہوں گے۔جفت n کی صورت میں y_1 کثیر رکنی ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں y_2 کثیر رکنی ہو گا۔ان کثیر رکنی کو مستقل مقدار سے ضرب دیتے ہوئے لیژانڈر کثیر رکنی[28] حاصل ہوتی ہیں جنہیں $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔روایتی طور پر اس مستقل مقدار کو درج ذیل طریقے سے چنا جاتا ہے۔

تسلسل میں x^n کے عددی سر a_n کو

$$a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!} \qquad n \text{ مثبت عدد ہے} \tag{5.26}$$

چنا [مثال 5.7 دیکھیں] جاتا ہے (جبکہ $n=0$ کی صورت میں $a_n=1$ چنا جاتا ہے)۔ مساوات 5.22 کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے دیگر عددی سر حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$a_s=-\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)}a_{s+2} \qquad (s\le n-2) \tag{5.27}$$

کثیر رکنی میں x کی بلند تر طاقت کے عددی سر a_n کو مساوات 5.26 کے تحت چننے سے $x=1$ پر تمام P_n کی قیمت اکائی $[P_n(1)=1]$ حاصل ہوتی ہے [شکل 5.4 دیکھیں]۔یہی a_n یوں چننے کی وجہ ہے۔مساوات 5.27 میں $s+2=n$ یعنی $s=n-2$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.26 سے a_n پر کرتے ہیں۔

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

شمار کنندہ میں $(2n)!=2n(2n-1)(2n-2)!$ اور نسب نما میں $(n!)^2$ کو $n!n!$ لکھ کر اس میں $n!=n(n-1)!$ اور $n!=n(n-1)(n-2)!$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}a_{n-2}&=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!}\\&=-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}\end{aligned}$$

---

[28] Legendre polynomial

ملتا ہے جہاں $n(n-1)2n(2n-1)$ کٹ جاتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned} a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} \end{aligned}$$

اور دیگر عددی سر حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں درج ذیل عمومی کلیہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \qquad (n-2m \geq 0) \tag{5.28}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفرقی مساوات 5.16 کا کثیر رکنی حل

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + - \cdots \end{aligned} \tag{5.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ عدد صحیح ہو گا اور M اس عدد صحیح کے برابر ہو گا [مثال 5.8 دیکھیں]۔درج بالا n درجی لیژانڈر کثیر رکنی[29] کہلاتا ہے اور اس کو $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند پہلے لیژانڈر کثیر رکنی جنہیں شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہیں۔

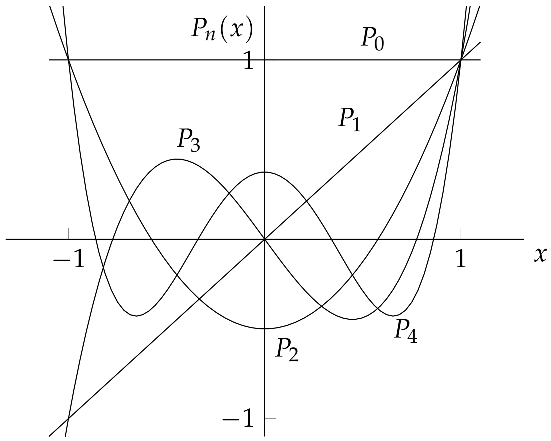
$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) \end{aligned} \tag{5.30}$$

لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر آپس میں قائمہ الزاویہ[30] ہیں۔یہ خصوصیت فوریئر لیژانڈر تسلسل کے لئے ضروری ہے جن پر اسی باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال 5.6: لیژانڈر مساوات 5.16 کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت میں لکھتے ہوئے ثابت کریں کی اس کے عددی سر $x=0$ پر تحلیلی ہیں۔

---

[29] Legendre polynomial
[30] orthogonal



شکل 5.4: لیژانڈر کثیر رکنی۔

حل: لیژانڈر مساوات کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}=0$ حاصل ہوتا ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ ہیں جن کی مکلارن تسلسل درج ذیل ہیں۔

$$\frac{n(n+1)}{1-x^2}=n(n+1)(1+x^2+x^4+\cdots)$$
$$\frac{-2x}{1-x^2}=-2(x+x^3+x^5+\cdots)$$

پہلی تسلسل کا $\frac{a_{m+1}}{a_m}=1$ ہیں لہٰذا اس کا رداس ارتکاز $R=1$ ہے۔دوسری تسلسل کا بھی $\frac{a_{m+1}}{a_m}=1$ اور $R=1$ ہیں۔یوں دونوں تسلسل تحلیلی ہیں۔ □

مثال 5.7: درج ذیل مساوات کے بائیں ہاتھ سے اس کا دایاں ہاتھ حاصل کریں۔

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}$$

حل: پہلے $n=3$ کے لئے حل کرتے ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں شمار کنندہ میں طاق اعداد (جو طاق مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو ایک طرف اور جفت اعداد (جو جفت مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو دوسری طرف منتقل

کرتے ہوئے ہر جفت عدد سے 2 کا ہندسہ نکالا گیا ہے۔

$$\frac{(2\cdot 3)!}{2^3(3!)^2}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^3(3\cdot 2\cdot 1)^2}=\frac{6\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^3(3!)^2}=\frac{2^3(3\cdot 2\cdot 1)\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^3(3!)^2}=\frac{5\cdot 3\cdot 1}{3!}$$

شمار کنندہ میں اعداد کو ترتیب دیتے ہوئے اور اس میں سب سے بڑے عدد 5 کو $2\cdot 3-1$ لکھتے ہوئے $\frac{1\cdot 3\cdot(2\cdot 3-1)}{3!}$ لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں یہی سب کچھ عمومی عددی صحیح n کے لئے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}&=\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\&=\frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\&=\frac{2^n n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\&=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{n!}\\&=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\end{aligned}$$

□

مثال 5.8: لیژانڈر کثیر رکنی مجموعہ [مساوات 5.29] کی بالائی حد M ہے۔ M کی قیمت دریافت کریں۔

حل: مساوات 5.22 لیژانڈر کثیر رکنی کے عددی سر دیتی ہے جس کے تحت $s=n$ پر عددی سر صفر ($a_{n+2}=0$) کے برابر ہو گا اور یوں بقایا عددی سر a_{n+4} ، a_{n+6} ، ... بھی صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں کثیر رکنی میں x کی زیادہ سے زیادہ طاقت n ہو گی۔ اس طرح $n=5$ کی صورت میں a_5x^5 ، a_3x^3 اور a_1x^1 پایا جائے گا جبکہ $n=8$ کی صورت میں a_8x^8 ، a_6x^6 ، a_4x^4 ، a_2x^2 اور a_0 پائے جائیں گے۔ آپ نے دیکھا کہ طاق n کی صورت میں کثیر رکنی میں کل $\frac{n-1}{2}$ پائے گئے جبکہ جفت n کی صورت میں ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ تھی۔ یوں طاق n کی صورت میں $M=\frac{n-1}{2}$ اور جفت n کی صورت میں $M=\frac{n}{2}$ ہو گا جہاں M عدد صحیح ہے۔ □

مثال 5.9: (کلیہ روڈریگیس)

تفاعل $(x^2-1)^n$ کو الکراجی کے مسئلہ ثنائی[31] سے پھیلا کر اس کا n درجی تفرق لیں۔ حاصل جواب کا

[31] binomial theorem ابو بکر ابن محمد ابن الحسین الکراجی [953-1029] ایرانی ریاضی دان۔

مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل کریں جس کو کلیہ روڈریگیس[32] کہتے ہیں۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \tag{5.31}$$

حل: $(x^2-1)^n$ کو مسئلہ الکراجی سے پھیلاتے ہوئے $n+1$ ارکان ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y = (x^2-1)^n &= (x^2)^n + \frac{n}{1!}(x^2)^{n-1}(-1)^1 + \frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^{n-2}(-1)^2 + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^2(-1)^{n-2} + \frac{n}{1!}(x^2)(-1)^{n-1} + (-1)^n \end{aligned} \tag{5.32}$$

اس مساوات کا آخری رکن مستقل مقدار $(-1)^n$ ہے جبکہ اس رکن سے ایک پہلے رکن میں x^2 پایا جاتا ہے۔یوں y' لینے سے آخری رکن صفر ہو جائے گا لہٰذا y' میں n ارکان رہ جائیں گے۔ y' کے آخری رکن میں x^1 پایا جائے گا۔ y'' لینے سے یہ رکن مستقل مقدار ہو جائے گا جبکہ ارکان کی تعداد میں مزید کمی رو نما نہیں ہو گی۔اسی طرح y''' لینے سے ایک اور رکن کم ہو جائے گا اور $n-1$ ارکان رہ جائیں گے۔ y'''' لینے سے ارکان کی تعداد میں کمی پیدا نہیں ہو گی۔یوں ہر دو مرتبہ تفرق لینے سے تعداد اکائی کمی پیدا ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ n درجی تفرق $y^{(n)}$ لینے کے بعد ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ ہو گی جس کو ہم M سے ظاہر کرتے ہیں اور جو صحیح عدد ہو گا۔

مساوات 5.32 کو مجموعے کی صورت میں لکھتے ہیں جس میں $m=0$ تا $m=n$ ارکان یعنی $n+1$ ارکان ہیں۔

$$y = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!(x^2)^{n-m}(-1)^m}{(n-m)!m!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!} x^{2n-2m} \tag{5.33}$$

[32] Rodrigues' formula فرانسیسی ریاضی دان بنجامن اولانڈے روڈریگیس [1794-1851]

اب $z = x^{2n-2m}$ پر نظر رکھیں۔اس کے تفرق لیتے ہیں۔

$$z' = (2n-2m)x^{2n-2m-1} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-1)!}x^{2n-2m-1}$$
$$z'' = (2n-2m)(2n-2m-1)x^{2n-2m-2} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-2)!}x^{2n-2m-2}$$
$$z''' = (2n-2m)(2n-2m-1)(2n-2m-2)x^{2n-2m-3} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-3)!}x^{2n-2m-3}$$
$$\vdots$$
$$z^{(k)} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-k)!}x^{2n-2m-k}$$
$$z^{(n)} = \frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-n)!}x^{2n-2m-n} = \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.33 کا n درجی تفرق لکھتے ہیں

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] = \sum_{m=0}^{M} \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!}\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}$$

جس کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

□

مثال 5.10: روڈریگیس مساوات 5.31 استعمال کرتے ہوئے n مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

حل: فرض کریں کہ $y = (x-1)^3$ ہے۔یوں $y' = 3(x-1)^2$ ، $y'' = 3\cdot 2(x-1)$ ، $y''' = 3\cdot 2\cdot 1$ اور $y^{(4)} = 0$ ہوں گے جن سے $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ ، $y''(1) = 0$ ،

$y'''(1) = 3!$ اور $y(1)^{(4)} = 0$ حاصل ہوتے ہیں۔اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $y_1 = (x-1)^n$ کی صورت میں

$$y_1 = (x-1)^n, \quad y_1^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x-1)^{n-m}, \quad y_1^{(m)}(1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.34}$$

اور $y_2 = (x+1)^n$ کی صورت میں

$$y_2 = (x-1)^n, \quad y_2^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x+1)^{n-m}, \quad y_2^{(m)}(-1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.35}$$

ہو گا جہاں $\delta_{n,m}$ کی تعریف درج ذیل ہے (یعنی $m = n$ کی صورت میں $\delta = 1$ جبکہ $m \neq n$ کی صورت میں $\delta = 0$ ہے)۔

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{5.36}$$

مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $y_1 = (x-1)^n$ کے تمام تفرقات کی قیمت $x = 1$ پر صفر ہو گی ماسوائے n درجی تفرق، جس کی قیمت $n!$ ہو گی۔ مساوات 5.35 یہی کچھ $y_2 = (x+1)^n$ کے بارے میں $x = -1$ پر کہتی ہے۔

اب اگر $X = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n = y_1 y_2$ ہو تب کلیہ لیبنٹز[33] سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \overbrace{\frac{\mathrm{d}^{m-s} y_1}{\mathrm{d}x^{m-s}}}^{M} \cdot \overbrace{\frac{\mathrm{d}^s y_2}{\mathrm{d}x^s}}^{N}$$

اگر $m \neq n$ ہو، اور بالخصوص اگر $m < n$ ہو، تب مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $M(x = 1) = 0$ ہو گا جبکہ مساوات 5.35 کہتی ہے کہ تب $N(x = -1) = 0$ ہو گا۔ان نتائج کی بنا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = 0 \tag{5.37}$$

مساوات 5.31 کو استعمال کرتے ہوئے $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n[(x^2-1)^n]}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ لکھا جا سکتا ہے لٰہذا

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n} \cdot \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\left.\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

---

[33] Leibnitz formula

ہو گا جہاں تکمل بالحصص استعمال کیا گیا ہے۔مساوات 5.37 کے تحت $0 = \left.\frac{\mathrm{d}^{n-1}X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{-1} = \left.\frac{\mathrm{d}^{n-1}X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{1}$ ہے لہٰذا آخری قدم پر تکمل کے باہر تمام حصہ صفر کے برابر ہے اور یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+1}X}{\mathrm{d}x^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1}X}{\mathrm{d}x^{n-1}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2} \left[\left. \frac{\mathrm{d}^{n+1}X}{\mathrm{d}x^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-2}X}{\mathrm{d}x^{n-2}} \right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+2}X}{\mathrm{d}x^{n+2}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-2}X}{\mathrm{d}x^{n-2}} \,\mathrm{d}x \right]
\end{aligned}$$

جہاں دوبارہ تکمل بالحصص لیا گیا ہے۔پہلی کی طرح اب بھی تکمل کا باہر والا حصہ صفر کے برابر ہے۔اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر بار بیرونی حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔یوں s مرتبہ تکمل لیتے اور بیرونی حصے کو صفر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^s}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+s}X}{\mathrm{d}x^{n+s}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-s}X}{\mathrm{d}x^{n-s}} \,\mathrm{d}x$$

آخر کار $s = n$ ہو گا اور یوں درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}^0 X}{\mathrm{d}x^0} = X$ لکھا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+n}X}{\mathrm{d}x^{n+n}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-n}X}{\mathrm{d}x^{n-n}} \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{2n}X}{\mathrm{d}x^{2n}} \cdot X \,\mathrm{d}x$$

$X = (x^2-1)^n$ کا الکراجی ثنائی تسلسل مساوات 5.32 دیتی ہے جس کا $2n$ درجی تفرق لینے سے، پہلے رکن کے علاوہ، تمام ارکان صفر کے برابر ہو جاتے ہیں۔یوں اس کا $2n$ درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}^{2n}X}{\mathrm{d}x^{2n}} = (2n)!$ ہو گا جس سے درج بالا تکمل یوں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x \tag{5.38}$$

لکھا جاتا ہے۔آئیں $\int X \,\mathrm{d}x$ کو تکمل بالحصص کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n \,\mathrm{d}x \\
&= \left. (x-1)^n \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n(x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر ہے۔اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر مرتبہ تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ s مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے اور تکمل کے باہر حصے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= (-1)^s \int_{-1}^{1} [n(n-2)\cdots(n-s+1)](x-1)^{n-s} \frac{(x+1)^{n+s}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+s)} \,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^s \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{n!(x+1)^{n+s}}{(n+s)!}\end{aligned}$$

آخر کار $s = n$ ہو گا جس پر درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-n}}{(n-n)!} \frac{n!(x+1)^{n+n}}{(n+n)!} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \left.\frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1}\right|_{-1}^{1} \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

جہاں $0! = 1$ (مساوات 5.94) پر کیا گیا ہے۔درج بالا نتیجے کو مساوات 5.38 میں پر کرتے ہیں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \tag{5.39}$$

جہاں منفی ایک کا جفت طاقت اکائی کے برابر $[(-1)^{2n} = 1]$ ہے۔ □

مثال 5.11: درج ذیل ثابت کریں جہاں $n \neq m$ ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \neq m) \tag{5.40}$$

حل: فرض کریں کہ $X = (x^2-1)^n$ اور $Y = (x^2-1)^m$ ہیں۔ یوں مساوات 5.31 کے تحت $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ اور $P_m = \frac{1}{2^m m!} \frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m}$ ہوں گے لہٰذا

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n} \cdot \frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m} \,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔چونکہ n اور m برابر نہیں ہیں لہٰذا ان میں ایک کی قیمت دوسرے سے کم ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $n < m$ ہے۔گزشتہ مثال کی طرح، درج بالا کو بار بار تکمل بالحصص سے حل کرتے ہوئے، ہر بار تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور آخر کار درج ذیل ملتا ہے۔ مساوات 5.36 کے تحت Y کا صرف اور صرف m درجی تفرق غیر صفر ہے درج ذیل صفر کے برابر ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n P_m \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{\mathrm{d}^{m-n} Y}{\mathrm{d}x^{m-n}} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{(n!)^2}{(m-n)!} \frac{\mathrm{d}^{m-n+1} Y}{\mathrm{d}x^{m-n+1}} \bigg|_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

□

مثال 5.12: پیداکار تفاعل

الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ کا تسلسل لکھ کر اس میں $v = 2xu - u^2$ پر کریں۔ ان میں u^0 ارکان کا مجموعہ حاصل کریں۔اسی طرح u^1 ارکان کا مجموعہ،اور u^2 ارکان کا مجموعہ، ... حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ ان مجموعوں کا عددی سر بالترتیب P_0 ، P_1 ، P_2 ، ... ہو گا یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n \tag{5.41}$$

حل:آئیں P_0 ، P_1 اور P_2 کے لئے حل کریں۔ دیے تفاعل کا الکراجی ثنائی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3v^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5v^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7v^4}{2^4 \cdot 4!} + \cdots$$

چونکہ u^2 کا عدد سر P_2 ہو گا اور درج بالا تسلسل کے پہلے تین ارکان میں کے بعد u کے زیادہ بلند طاقت پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم تسلسل کے پہلے تین ارکان پر نظر رکھتے ہیں۔اس تسلسل میں $v = 2xu - u^2$ پر کرتے ہوئے درکار نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(1-v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(2xu-u^2)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3(2xu-u^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \cdots \\ &= 1 + (xu - \frac{u^2}{2}) + \frac{3}{8}(4x^2u^2 + u^4 - 4xu^3) + \cdots \\ &= \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{(x)}_{P_1} u + \underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)}_{P_2} u^2 + \cdots\end{aligned}$$

□

سوالات

سوال 5.21 تا سوال 5.26 لیژانڈر کثیر رکنی اور تفاعل پر مبنی ہیں۔

سوال 5.21: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 0$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقت کے x پائے جاتے ہیں لہٰذا $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 0$ پر کرتے اور مساوات 5.94 کی مدد سے $0! = 1$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ ملتا ہے۔

سوال 5.22: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 1$ لیتے ہوئے $P_1(x)$ حاصل کریں۔

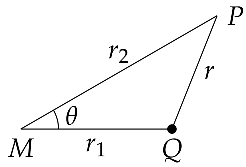
جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقتی x پائے جاتے ہیں لہٰذا $n = 1$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے $P_1(x) = x$ ملتا ہے۔

سوال 5.23: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 سے $P_3(x)$ تا $P_5(x)$ حاصل کریں جنہیں مساوات 5.30 میں پیش کیا گیا ہے۔

سوال 5.24: $P_0(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n = 0$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$ ہو گی اور $y = P_0 = 1$ ، $y' = P_0' = 0$ اور $y'' = P_0'' = 0$ ہوں گے۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1 - x^2)(0) - 2x(0)$ یعنی 0 حاصل ہوتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.25: $P_1(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔



شکل 5.5: نقطہ برقی بار کا برقی میدان [سوال 5.27]۔

جوابات: $n=1$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ ہو گی جبکہ $y=P_1=x$ ، $y'=P_1'=1$ اور $y''=P_1''=0$ ہیں۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1-x^2)(0)-2x(1)+2(x)$ یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.26: $P_3(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کے حل ہیں۔

جوابات: $n=3$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی صورت $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ ہو گی جبکہ $y=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ ، $y'=\frac{1}{2}(15x^2-3)$ اور $y''=15x$ ہیں جنہیں مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)(15x)-2x[\tfrac{1}{2}(15x^2-3)]+12[\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)]$$

یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔ یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.27: **نظریہ مخفی توانائی**

آپ نقطہ برقی بار کے برقی میدان سے بخوبی واقف ہیں۔ شکل 5.5 میں محدد کے مبدا M سے ہٹ کر نقطہ بار Q پایا جاتا ہے جس کا عمومی مقام P پر برقی دباو $V=\frac{Q}{4\pi\epsilon r}=\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}$ ہے۔ $\frac{Q}{4\pi\epsilon}$ کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.41 کی استعمال سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}=\frac{1}{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m \tag{5.42}$$

جواب: $r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=r_2^2[1-2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cos\theta+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2]$ لکھتے ہوئے $u=\frac{r_1}{r_2}$ اور $x=\cos\theta$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 5.28: درج ذیل ثابت کریں۔مساوات 5.41 کو استعمال کریں۔

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

سوال 5.29: بونٹ کلیہ توالی
مساوات 5.41 کا u تفرق لے کر دوبارہ مساوات 5.41 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل بونٹ کلیہ توالی[34] حاصل کریں[35]۔

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{5.43}$$

جواب: مساوات 5.41 کا ایک درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$ لیتے ہوئے دوبارہ مساوات 5.41 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\frac{-\frac{1}{2}(-2x+2u)}{(1-2xu+u^2)\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum nP_n u^{n-1} \\
\implies &\frac{x-u}{1-2xu+u^2}\sum P_n u^n = \sum nP_n u^{n-1} \\
\implies &x\sum P_n u^n - \sum P_n u^{n+1} = \sum nP_n u^{n-1} - 2x\sum nP_n u^n + \sum nP_n u^{n+1}
\end{aligned}$$

اب دونوں جانب u^n کے عددی سر برابر لیتے ہیں۔

$$xP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1}$$

اس کو ترتیب دے کر درکار نتیجہ $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.30: **شریک لیژانڈر تفاعل**
درج ذیل مساوات

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \tag{5.44}$$

میں $y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0 \tag{5.45}$$

---

[34] Bonnet's recursion

[35] اوسیاں بونٹ [1849-1917] فرانسیسی ریاضی دان۔

صفحہ 111 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق $\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ درج بالا مساوات کا حل

$$u = \frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$$

ہے جس کے شریک $y(x)$ کو $P_n^m(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو **شریک لیژانڈر تفاعل**[36] کہتے ہیں۔

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} \tag{5.46}$$

شریک لیژانڈر تفاعل **کوانٹم میکانیات**[37] میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

جواب: مساوات 5.44 میں $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u$ پر کرنے سے مساوات 5.45 حاصل ہوتا ہے۔ بقایا حصے کو اب حل کرتے ہیں۔ لیژانڈر مساوات 5.16 کا m درجی تفرق صفحہ 111 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں $D^m[y] = D^{m-1}[y']$ ، $D^m[y''] = D^{m+2}[y]$ ، ... ہو گا۔ یوں مساوات کا بائیں ہاتھ کو

$$D^m[(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] = -D^m[(x^2-1)y''] - 2D^m[xy'] + n(n+1)D^m[y]$$

لکھتے ہیں جس میں

$$\begin{aligned}
D^m[(x^2-1)y''] &= (x^2-1)D^m[y''] + 2mxD^{m-1}[y''] + m(m-1)D^{m-2}[y''] \\
&= (x^2-1)D^{m+2}[y] + 2mxD^{m+1}[y] + m(m-1)D^m[y] \\
D^m[xy'] &= xD^m[y'] + mD^{m-1}[y'] = xD^{m+1}[y] + mD^m[y] \\
D^m[y] &= D^m[y]
\end{aligned}$$

پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)D^{m+2}[y] - 2(m+1)xD^{m+1}[y] + [n(n+1) - m(m+1)]D^m[y]$$

ملتا ہے جس میں $D^m[y] = y^m = u$ ، $D^{m+1} = y^{m+1} = u'$ اور $D^{m+2} = y^{m+2} = u''$ لیتے ہوئے

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

---

[36] associated Legendre's functions
[37] quantum mechanics

حاصل ہوتا ہے جہاں ابتدائی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر تھا۔ اس مساوات کا حل $u = y^m$ ہے جہاں y از خود لیژانڈر مساوات کا حل ہے یعنی $u = \frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ ہے۔

سوال 5.31: گزشتہ سوال میں شریک لیژانڈر تفاعل کا حل P_n^m حاصل کیا گیا۔مساوات 5.31 کی مدد سے اس کو لکھیں۔

جواب: $P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n]$

5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ترکیب فروبنیوس

کئی نہایت اہم دو درجی سادہ تفرقی مساوات، مثلاً **بیسل تفاعل** (جس پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا)، کے عددی سر تحلیلی [حصہ 5.1 میں تعریف دی گئی ہے] نہیں ہیں ۔اس کے باوجود انہیں تسلسل (طاقتی تسلسل ضرب لوگارتھم یا طاقتی تسلسل ضرب x کی کسری طاقت، . . .) سے حل کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو **ترکیب فروبنیوس**[38] کہتے ہیں[39]۔ درج ذیل مسئلہ طاقتی ترکیب کو وسعت دیتے ہوئے ترکیب فروبنیوس کا استعمال ممکن بناتا ہے۔

مسئلہ 5.2: ترکیب فروبنیوس

$x = 0$ پر تحلیلی $b(x)$ اور $c(x)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0 \tag{5.47}$$

کا کم از کم ایک عدد حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5.48}$$

جہاں r حقیقی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے اور $a_0 \neq 0$ ہے۔

[38] Frobenius method

[39] جرمن ریاضی دان فرڈینانڈ گیوگ فروبنیوس [1849-1917]

مساوات 5.47 کا (خطی طور غیر تابع) دوسرا حل بھی پایا جاتا ہے جو مساوات 5.48 کی طرز کا ہو سکتا ہے (جس میں r مختلف ہو گا اور تسلسل کے عددی سر بھی مختلف ہوں گے) اور یا اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔

اس مسئلے میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں x_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ مسئلے میں $a \neq 0$ کا مطلب ہے کہ بذریعہ تجزی قوسین سے x کی بلند تر ممکنہ طاقت بذریعہ تجزی باہر نکالی جاتی ہے۔

بیسل تفاعل کو مساوات 5.47 کی طرز پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2}y = 0 \qquad (\text{مقدار معلوم ہے } v)$$

جس میں $b(x) = 1$ اور $c(x) = x^2 - v^2$ دونوں $x = 0$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا اس پر درج بالا مسئلہ لاگو ہو گا۔ سادہ طاقتی تسلسل سے بیسل تفاعل کا حل ممکن نہیں ہے۔

مساوات 5.48 میں طاقتی تسلسل کو x کی ایسی طاقت سے ضرب دیا گیا ہے جو منفی یا کسری ہو سکتا ہے۔ یاد رہے کہ غیر منفی طاقت کے x پر مبنی تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔

مسئلہ فروبنیوس کے ثبوت کے لئے اعلیٰ درجہ مخلوط تجزیہ[40] درکار ہے لہٰذا اسے پیش نہیں کیا جائے گا۔

اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے p اور q تحلیلی ہوں تب x_0 **غیر نادر نقطہ**[41] کہلائے گا۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

اگر $x = x_0$ درج بالا مساوات کا نادر نقطہ ہو اور $(x - x_0)p$ اور $(x - x_0)^2 q$ نقطہ $x = x_0$ پر تحلیلی ہوں تب x_0 **منظم نادر نقطہ**[42] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر منظم نادر نقطہ**[43] کہتے ہیں۔

[40] advanced complex analysis
[41] regular point
[42] regular singular point
[43] irregular singular point

اسی طرح اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے h ، p اور q تحلیلی ہوں اور $h \neq 0$ ہو (تا کہ ہم تفرقی مساوات کو h سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کر سکیں) تب x_0 **منظم نقطہ**[44] کہلائے گا ورنہ اسے **نادر نقطہ**[45] کہیں گے۔

$$\tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = 0$$

مثال 5.13: مساوات $(x+1)y'' + 2xy' - 3y = 0$ کو $x+1$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $p = \frac{2x}{x+1}$ اور $q = -\frac{3}{x+1}$ ملتے ہیں جو $x = -1$ پر غیر تحلیلی ہیں۔یوں $x = -1$ مساوات کا نادر نقطہ ہے۔اب $(x+1)p = 2x$ اور $(x+1)^2 q = -3(x+1)$ دونوں $x = -1$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا $x = -1$ منظم نادر نقطہ ہے۔ □

اشاری مساوات حل ظاہر کرتی ہے

آئیں مساوات 5.47 کو ترکیب فروبنیوس سے حل کریں۔ مساوات 5.47 کو x^2 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0 \tag{5.49}$$

چونکہ $b(x)$ اور $c(x)$ تحلیلی ہیں لہٰذا انہیں طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \quad c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

اور اگر b یا(اور) c کثیر رکنی ہوں تب b یا(اور) c کو جوں کا توں رہنے دیا جاتا ہے۔ مساوات 5.48 کا جزو در جزو تفرق لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
y &= a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots \\
y' &= ra_0x^{r-1} + (r+1)a_1x^r + (r+2)a_2x^{r+1} + \cdots \\
y'' &= r(r-1)a_0x^{r-2} + (r+1)(r)a_1x^{r-1} + (r+2)(r+1)a_2x^r + \cdots
\end{aligned} \tag{5.50}$$

---

[44] regular point
[45] singular point

مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کا مساوات 5.50 سے موازنہ کریں۔ طاقتی تسلسل $y=\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے تفرق $y'=\sum_{m=1}^{\infty} mc_m x^{m-1}$ کا پہلا رکن $m=1$ اور اس کے دو درجی تفرق کا پہلا رکن $m=2$ ہے جبکہ موجودہ دونوں تفرقی تسلسل کا پہلا رکن $m=0$ ہے۔

درج بالا تفرقات کو نہایت خوش اسلوبی کے ساتھ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
y' &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} = x^{r-1}[ra_0+(r+1)a_1x+\cdots] \\
y'' &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} = x^{r-2}[r(r-1)a_0+(r+1)ra_1x+\cdots]
\end{aligned} \tag{5.51}
$$

ان تمام کو مساوات 5.49 میں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^r[r(r-1)a_0+\cdots]+(b_0+b_1x+\cdots)x^r(ra_0+\cdots) \\
+(c_0+c_1x+\cdots)x^r(a_0+a_1x+\cdots)=0
\end{aligned} \tag{5.52}
$$

اب ہم x^r ، x^{r+1} ، x^{r+2} ، ... کے عددی مجموعوں کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔ سب سے کم طاقت x^r ہے جس کا عددی سر درج ذیل ہے۔

$$[r(r-1)+b_0r+c_0]a_0=0$$

چونکہ مسئلہ فروبنیوس کے تحت $a_0\neq 0$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$r(r-1)+b_0r+c_0=0 \qquad \text{(اشاری مساوات)} \tag{5.53}$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کو سادہ تفرقی مساوات 5.47 کی **اشاری مساوات**[46] کہتے ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے تفرقی مساوات کے حل کی اساس حاصل ہوتی ہے جن میں ایک حل مساوات 5.48 کی طرز کا ہو گا جس میں r کی قیمت درج بالا اشاری مساوات کا جذر ہو گا۔ دوسرے حل کی تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں جنہیں اشاری مساوات سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

- پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، ...) کے برابر نہیں ہے۔

---

[46] indicial equation

- دوسری صورت:اشاری مساوات کے دو یکساں جذر پائے جاتے ہیں۔

- تیسری صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ،...) کے برابر ہے۔

پہلی صورت میں جوڑی دار مخلوط جذر $r_1 = a + ib$ اور $r_2 = \bar{r_1} = a - ib$ شامل ہیں چونکہ ان کا فرق $r_1 - r_2 = i2b$ خیالی عدد ہے جو حقیقی عدد صحیح نہیں ہے۔ مسئلہ 5.3 (جسے ضمیمہ میں ثابت کیا گیا ہے) اساس کی صورت دیتی ہے جہاں ارتکاز کا عمومی ثبوت نہیں دیا گیا ہے۔ہاں انفرادی تسلسل کی مرکوزیت عام طریقے سے ثابت کی جا سکتی ہے۔ دوسری صورت میں لوگارتھمی جزو کا ہونا لازم ہے جبکہ تیسری صورت میں ہو سکتا ہے کہ لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہو یا نہ پایا جاتا ہو۔

مسئلہ 5.3: ترکیب فروبنیوس۔ حل کی اساس۔ تین صورتیں۔
فرض کریں کہ سادہ تفرقی مساوات 5.47 مسئلہ 5.2 پر پورا اترتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 کے جذر r_1 اور r_2 ہیں تب تین صورتیں پائی جاتی ہیں۔

پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ،...) کے برابر نہیں ہے۔ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \tag{5.54}$$

اور

$$y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots) \tag{5.55}$$

ہو گی جہاں عددی سر مساوات 5.52 میں $r = r_1$ اور $r = r_2$ پر کرتے ہوئے حاصل کیے جائیں گے۔

دوسری صورت: یکساں جذر $r_1 = r_2 = r$ کی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.56}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^r(A_1x + A_2x^2 + \cdots) \qquad (x > 0) \tag{5.57}$$

ہو گی۔

تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو عدد منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، ...) کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{5.58}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = K y_1(x) \ln x = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.59}$$

ہے جہاں جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو (یعنی زیادہ قیمت کے جذر کو r_1 کہتے ہیں) اور K کی قیمت صفر بھی ہو سکتی ہے۔اگر $K = 0$ ہو تب دوسرا حل بھی پہلی حل کی طرح لکھنا ممکن ہو گا (مثال 5.17 دیکھیں)۔ بعض اوقات r_2 استعمال کرتے ہوئے حل y_2^* کے دو حصے پائے جائیں گے۔اس کا ایک حصہ درحقیقت r_1 سے حاصل حل y_1 ہی ہو گا جبکہ دوسرا حصہ نیا حل ہو گا یعنی $y_2^* = y_2 + k y_1$ لہٰذا اساس لکھتے ہوئے y_1 اور y_2 لیا جائے گا (سوال 5.36 کا جواب دیکھیں)۔

5.3.1 عملی استعمال

اشاری مساوات 5.53 کے جذر دریافت کرنے کے بعد ترکیب فروبنیوس بالکل طاقتی ترکیب کی طرح ہے۔ مساوات 5.54 تا مساوات 5.59 محض حل کی صورت دیتے ہیں جبکہ دوسرا حل عموماً **تخفیف درجہ** (حصہ 2.1) کی ترکیب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔

اشاری مساوات کے جذر حاصل کرنے کے بعد (زیادہ قیمت کی جذر) r_1 سے پہلا حل $y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کریں۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \cdots$) کے برابر نہ ہونے کی صورت میں دوسرا حل (کم قیمت کی جذر) r_2 کو استعمال کرتے ہوئے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا۔

$r_1 = r_2$ کی صورت میں دوسرے حل میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔ایسی صورت میں دوسرا حل $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل نہیں ہو گا لہٰذا دوسرا حل تخفیف درجہ کی مدد سے حاصل کیا جائے گا۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \cdots$) کے برابر ہونے کی صورت میں کبھی کبھار $y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا ورنہ اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا اور اس حل کو بذریعہ تخفیف درجہ حاصل کیا جائے گا۔آپ پہلے $y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ ہی استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔

$y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کرتے ہوئے تین ممکنہ صورتیں پیدا ہوتی ہیں (اس حصے کے سوالات کے جوابات دیکھیں)۔پہلی صورت میں ایسی تسلسل y_2 حاصل ہوتی ہے جس میں صرف ایک عدد اختیاری مستقل پایا جاتا ہو لہٰذا عمومی حل y_1 اور y_2 کا مجموعہ ہو گا۔دوسری صورت میں تسلسل کو $ay_1 + by_2^*$ لکھنا ممکن ہو گا جہاں a اور b اختیاری مستقل ہوں گے لہٰذا اس حل میں y_1 بھی شامل ہے۔اس طرح عمومی حل $ay_1 + by_2^*$ ہو گا۔تیسری صورت میں $y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے عددی سر حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ دوسرے حل میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے لہٰذا تخفیف درجہ سے حل حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.14: یولر کوشی مساوات۔پہلی، دوسری اور تیسری صورتیں۔ بلا لوگارتھمی جزو
مساوات یولر کوشی (حصہ 2.5)

$$x^2y'' + b_0xy' + c_0y = 0 \qquad (\text{مستقل ہیں } c_0 \text{ اور } b_0)$$

میں $y = x^r$ پر کرنے سے درج ذیل ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$r(r-1) + b_0r + c_0 = 0$$

جو اشاری مساوات ہے [اور $y = x^r$ مساوات 5.48 کی ایک صورت ہے]۔ دو منفرد جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^{r_1}$ ، $y_2 = x^{r_2}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ دوہری جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^r$ ، $y_2 = x^r \ln x$ حاصل ہوتی ہے۔مساوات یولر کوشی کی صورت میں تیسری صورت نہیں پائی جاتی۔ □

مثال 5.15: دوسری صورت۔ (دوہرا جذر)
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0 \tag{5.60}$$

(یہ بیش ہندسی[47] مساوات کی ایک مخصوص صورت ہے۔)

---

[47] hypergeometric equation

حل دیے گئے مساوات کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 کے شرائط پر پورا اترتی ہے۔یوں مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.60 میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} \\ +3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0 \tag{5.61}$$

x کی کمتر طاقت x^{r-1} ، جو دوسرے اور چوتھے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$[-r(r-1)-r]a_0=0 \quad\implies\quad r^2=0$$

اشاری مساوات کا دوہرا جذر $r=0$ حاصل ہوتا ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.61 میں $r=0$ پر کرتے ہوئے x^s کی عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$s(s-1)a_s-(s+1)sa_{s+1}+3sa_s-(s+1)a_{s+1}+a_s=0$$

$a_{s+1}=a_s$ ملتا ہے۔یوں $a_0=a_1=a_2=\cdots$ ہو گا لہٰذا $a_0=1$ چنتے ہوئے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

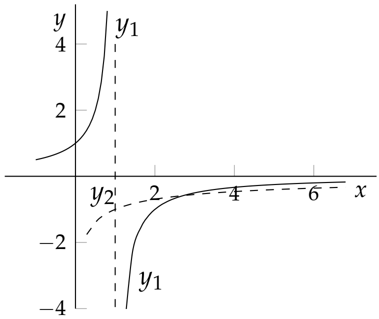
$$y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1)$$

دوسرا حل: دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ (حصہ 2.1) حاصل کرتے ہیں۔یوں $y_2=uy_1$ اور اس کے تفرقات کو مساوات میں پر کرتے ہوئے (صفحہ 91 پر) مساوات 2.15 ملتا ہے جس کو یہاں استعمال کرتے ہیں۔یہاں $p=\frac{3x-1}{x(x-1)}$ ہے لہٰذا

$$\int p\,\mathrm{d}x=\int\frac{3x-1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=2\ln(x-1)+\ln x$$

ہو گا اور یوں مساوات 2.15 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u'=v=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,\mathrm{d}x}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2x}=\frac{1}{x}, \quad u=\ln x, \quad y_2=uy_1=\frac{\ln x}{1-x}$$



شکل 5.6: مثال 5.15 کے حل۔

y_1 اور y_2 جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے وقفہ $0 < x < 1$ اور $1 < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا اس وقفے پر یہ حل کی اساس ہیں۔ □

مثال 5.16: لوگارتھمی جزو والا دوسرا حل

درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0 \tag{5.62}$$

حل: مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.62 میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} - x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

x^2 اور x کو مجموعوں کے اندر لے جاتے ہوئے اور x کی یکساں طاقتوں کا اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2 a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} = 0 \tag{5.63}$$

x کی کم تر طاقت x^{r-1} ، جو $m = 0$ پر کرنے سے دوسرے مجموعے سے ملتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرنے سے

$$r(r-1) = 1$$

یعنی $r_1 = 1$ اور $r_2 = 0$ ملتے ہیں (جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو۔) جن میں فرق عدد صحیح کے برابر ہے لہٰذا یہ تیسری صورت ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.63 کو یکساں طاقت کی صورت میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $m = s$ اور دوسرے مجموعے میں $s = m - 1$ یعنی $m = s + 1$ پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+r-1)^2 a_s x^{s+r} - \sum_{s=-1}^{\infty}(s+r+1)(s+r)a_{s+1}x^{s+r} = 0 \tag{5.64}$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1} = \frac{(s+r-1)^2}{(s+r+1)(s+r)}a_s$$

ملتا ہے جس میں $r = 1$ پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1} = \frac{s^2}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots) \tag{5.65}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $a_1 = 0$ ، $a_2 = 0$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔یوں $a_0 = 1$ چنتے ہوئے پہلا حل $y_1 = a_0 x^{r_1} = x$ ملتا ہے۔

دوسرا حل: ترکیب تخفیف درجہ (حصہ 2.1) استعمال کرتے ہوئے $y_2 = uy_1 = xu$ لیتے ہیں۔اس طرح $y_2' = u + u'x$ اور $y_2'' = xu'' + 2u'$ ہوں گے۔انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x)(xu'' + 2u') - x(xu' + u) + xu = 0$$

اس میں xu کٹ جاتا ہے۔بقایا مساوات کو x سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0$$

اس کو جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنا گیا ہے۔)

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x-2}{x^2-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad \ln u' = \ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right|$$

اس کو قوت نمائی طور پر لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنتے ہیں۔)

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad u = \ln x + \frac{1}{x}, \quad y_2 = uy_1 = x\ln x + 1$$

y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں اور y_2 میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے۔یوں مثبت x پر یہ حل کی اساس ہیں۔
$\square$

ترکیب فروبنیوس سے بیش ہندسی مساوات حل ہوتا ہے جس کے حل میں کئی اہم تفاعل شامل ہیں۔بعض اوقات دیے گئے مساوات کو مساوات 5.47 کی صورت میں لانے میں دشواری پیش آتی ہے۔یوں

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جس کے آخری جزو کو $\frac{x}{x}$ سے ضرب دیتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{x}{x^2(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جو درکار صورت ہے جس میں $p = \frac{3x-1}{x-1}$ اور $q = \frac{x}{x-1}$ ہیں۔

ترکیب فروبنیوس کو استعمال کرتے ہوئے عموماً اتنا کافی ہوتا ہے کہ مساوات کو $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ شکل میں لایا جائے۔ درج ذیل سوالات حل کرتے ہوئے ایسا ہی کریں۔

مسئلہ 5.2 میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی ممکن ہے جہاں x_0 مساوات کا نادر نقطہ ہے۔یوں عمومی تفرقی مساوات

$$(x-x_0)^2\alpha(x)y'' + (x-x_0)\beta(x)y' + \gamma(x)y = 0 \tag{5.66}$$

جس میں $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ اور $\gamma(x)$ تحلیلی ہوں (لہٰذا انہیں درج لکھا جا سکتا ہے)

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots$$

کو ترکیب فروبنیوس سے حل کرتے ہوئے اشاری مساوات

$$\alpha_0 r^2 + (\beta_0 - \alpha_0)r + \gamma_0 = 0 \tag{5.67}$$

حاصل ہو گی۔مساوات 5.66 کو $\alpha(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.47 طرز کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.66 میں $x_0 = 0$ پر کرنے سے مساوات 5.47 حاصل ہوتی ہے۔مساوات 5.66 کا حل

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-x_0)^m \tag{5.68}$$

لکھ کر حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.17: تیسری صورت میں بعض اوقات r_2 سے حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔
اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں کبھی کبھار دوسرا حل $y_2 = x^{r_2}\sum c_m x^m$ نہیں لکھا جا سکتا ہے۔اس مثال میں اس بات کی وضاحت ہو گی۔آئیں درج ذیل مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$2xy'' - 4y' - y = 0$$

اس مساوات میں $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ اور اس کے تفرقات

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}, \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

پر کرتے ہوئے

$$2x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2} - 4\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=0}^{\infty}2(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty}4(m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

ملتا ہے۔تینوں مجموعوں سے x^{r-1} باہر نکالتے ہوئے کاٹتے ہیں۔

$$x^{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}2(m+r)(m+r-1)c_m x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty}4(m+r)c_m x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} = 0$$

پہلے اور دوسرے مجموعے میں $s = m$ اور تیسرے مجموعے میں $s = m+1$ پر کرتے ہیں تا کہ x کے تمام طاقت یکساں لکھیں جائیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}2(s+r)(s+r-1)c_s x^{s} - \sum_{s=0}^{\infty}4(s+r)c_s x^{s} - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^{s} = 0$$

آپ نے دیکھا کہ تیسرے مجموعے کا پہلا رکن اب $s = 1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔پہلے دو مجموعوں کا پہلا پہلا رکن مجموعے کے باہر لکھتے ہیں تا کہ تمام مجموعوں کا پہلا رکن ایک ہی جگہ سے شروع ہو۔

$$\begin{aligned}2(0+r)(0+r-1)c_0x^0 &+ \sum_{s=1}^{\infty}2(s+r)(s+r-1)c_s x^{s}\\ &- 4(0+r)c_0x^0 - \sum_{s=1}^{\infty}4(s+r)c_s x^{s} - \sum_{s=1}^{\infty} c_{s-1} x^{s} = 0\end{aligned}$$

یوں تمام مجموعوں کا پہلا رکن $s=1$ ظاہر کرے گا۔تینوں مجموعوں کو اکٹھا لکھتے ہیں

$$\underbrace{[2r(r-1)-4r]}_{2r(r-3)}c_0+\sum_{s=1}^{\infty}[2(s+r)(s+r-1)c_s-4(s+r)c_s-c_{s-1}]x^s=0 \tag{5.69}$$

جہاں پہلا رکن اشاری مساوات $2r(r-3)=0$ دیتا ہے جس کے جذر $r_1=3$ اور $r_2=0$ ہیں۔(یاد رہے کہ بڑی مقدار کے جذر کو r_1 لکھا جاتا ہے اور اسی کی مدد سے پہلا حل حاصل کیا جاتا ہے۔)

مساوات 5.69 میں $r=r_1=3$ پر کرتے ہوئے

$$[2\cdot3(3-1)-4\cdot3]c_0+\sum_{s=1}^{\infty}[2(s+3)(s+3-1)c_s-4(s+3)c_s-c_{s-1}]x^s=0$$

یعنی

$$\sum_{s=1}^{\infty}[2s(s+3)c_s-c_{s-1}]x^s=0$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل کلیہ توالی لکھی جا سکتا ہے۔

$$c_s=\frac{1}{2s(s+3)}c_{s-1}\qquad(s\geq1)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_1&=\frac{1}{2\cdot1(1+3)}c_0=\frac{1}{2\cdot1(4)}c_0\\
c_2&=\frac{1}{2\cdot2(2+3)}c_1=\frac{1}{2\cdot2(2+3)}\cdot\frac{1}{2\cdot1(4)}c_0=\frac{1}{2^2(2\cdot1)(5\cdot4)}c_0\\
&=\frac{3\cdot2\cdot1}{2^2(2\cdot1)(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}c_0=\frac{6}{2^2(2\cdot1)(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}c_0\\
c_3&=\frac{1}{2\cdot3(3+3)}c_2=\frac{1}{2\cdot3(6)}\cdot\frac{6}{2^2(2\cdot1)(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}c_0\\
&=\frac{6}{2^3(3\cdot2\cdot1)(6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}c_0\\
&\vdots\\
c_s&=\frac{6}{2^s s!(s+3)!}c_0
\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ آخری کلیہ $s=0$ اور $s=1$ کے لئے بھی کار آمد ہے لہٰذا ہم عمومی کلیہ توالی

$$c_s = \frac{6}{2^s s!(s+3)!}c_0 \qquad (s=0,1,2,\cdots)$$

اور پہلا حل

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{6}{2^m m!(m+3)!}c_0 x^m = c_0 x^3 \sum_{m=0}^{\infty}\frac{6}{2^m m!(m+3)!}x^m$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $r=r_2=0$ کو استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 5.69 میں $r=0$ پر کرتے ہوئے

$$[2\cdot 0(0-1)-4\cdot 0]c_0 + \sum_{s=1}^{\infty}[2(s+0)(s+0-1)c_s - 4(s+0)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

ملتا ہے جس میں c_0 کا عددی سر صفر کے برابر ہے جبکہ x_s کے عددی سر سے درج ذیل کلیہ توالی لکھا جا سکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2s(s-3)}c_{s-1}$$

اس کلیہ توالی کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0\\
c_2 &= \frac{1}{2\cdot 2(2-3)}c_1 = \frac{1}{2\cdot 2(2-3)}\frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0\\
c_3 &= \frac{1}{2\cdot 3\underbrace{(3-3)}_{=0}}c_2 = \frac{1}{2\cdot 3(3-3)}\frac{1}{2\cdot 2(2-3)}\frac{1}{2\cdot 1(1-3)}c_0 = \frac{c_0}{0}
\end{aligned}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $c_0 \neq 0$ کی صورت میں $c_3=\infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ c_0 صفر نہیں ہو سکتا۔ایسا ہونے سے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جو $y_2=0$ دیگا۔اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں ہر بار ایک عددی سر $\frac{c_0}{0}$ حاصل ہو گا جس کی بنا چھوٹا جذر استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ □

سوالات

سوال 5.32 تا سوال 5.44 کی اساس کو ترکیب فروبنیوس سے حاصل کریں۔ حاصل تسلسل کو بطور تفاعل پہچاننے کی کوشش کریں۔

سوال 5.32: $x^2y'' + 4xy' + (x^2+2)y = 0$
جواب: $y_1 = x^{-1}(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \cdots)$ ، $y_2 = x^{-1}(x - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{360} - + \cdots)$

سوال 5.33: $xy'' + 2y' + xy = 0$
جواب: $y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \cdots = \frac{\sin x}{x}$ ، $y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \cdots = \frac{\cos x}{x}$

سوال 5.34: $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$
جواب:اس طرز کے مساوات میں بہتر ہوتا ہے کہ $X = x - x_0 = x - 1$ اور $Y(X)$ استعمال کیا جائے جس سے درج بالا مساوات $X^2Y'' - 2XY' + 2Y = 0$ لکھی جاتی ہے۔حل کرنے کے بعد واپس x کا استعمال کریں۔ $r_1 = 2$ ، $r_2 = 1$ ہیں۔ $r = r_1 = 2$ استعمال کرتے ہوئے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جبکہ $r = r_2 = 1$ استعمال کرتے ہوئے حل $y = (x-1)^1[c_0 + c_1(x-1)]$ ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل ہیں لہٰذا یہ عمومی حل ہے۔یوں اساس $y_1 = x - 1$ اور $y_2 = (x-1)^2$ ہے۔

سوال 5.35: $y'' + xy' + (1 - \frac{2}{x^2})y = 0$
جواب: $r_1 = 0$ $r_2 = -3$ ہیں جن میں عددی صحیح فرق پایا جاتا ہے جو تیسری صورت ہے۔یوں r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = c_2(x^2 - \frac{3}{10}x^4 + \frac{3}{56}x^6 - \frac{1}{144}x^8 + \cdots)$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 استعمال کرتے ہوئے $y_2 = c_2x^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.36: $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$
جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -2$ ہیں۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_1 = x^0(1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^8 + \cdots) = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

ملتا ہے جبکہ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_2^* = c_0(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{24} + \cdots) + c_2(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{120} - \cdots)$$

ملتا ہے جہاں آخری قوسین در حقیقت y_1 ہی ہے لہٰذا اساس لکھتے ہوئے اس حصے کو رد کیا جاتا ہے۔اس طرح اساس درج ذیل ہو گا۔

$$y_1 = 1 - \tfrac{1}{6}x^4 + \tfrac{1}{120}x^8 + \cdots = \tfrac{\sin x^2}{x^2}$$
$$y_2 = \frac{1}{x^2} - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^6 + \cdots = \tfrac{\cos x^2}{x^2}$$

سوال 5.37: $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 3$ ہے جو دوسری صورت ہے۔یوں پہلا حل $y_1 = x^3$ ملتا ہے جبکہ دوسرا حل بذریعہ تخفیف درجہ ($y_2 = x^3u$ پر کرتے ہوئے) $y_2 = x^3 \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.38: $xy'' + y' - xy = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ملتا ہے۔ $y_1 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \cdots$ ، $y_2 = y_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{8\cdot 16} - \cdots$

سوال 5.39: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
جواب: $r_1 = 2$ ، $r_2 = -2$ میں فرق عدد صحیح ہے۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے $y_1 = x^2$ ملتا ہے۔اگر آپ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے y_1 کی طرز کا حل حاصل کرنا چاہیں تو آپ کو $y_2 = x^{-2}(c_0 + c_4x^4) = c_0x^{-2} + c_4x^2$ ملتا ہے جس میں x^2 در حقیقت y_1 ہے جسے رد کرتے ہوئے اساس میں $y_2 = \frac{1}{x^2}$ لکھا جائے گا۔

سوال 5.40: $x^2y'' + 6xy' + (6 - 4x^2)y = 0$
جواب: $r_1 = -2$ ، $r_2 = -3$ ہیں۔ r_1 سے $y_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{15}x^2 + \cdots = \frac{\sinh 2x}{2x^3}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 سے $y = c_0(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \cdots) + c_1y_1$ ملتا ہے لہٰذا $y_2 = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \cdots$ لکھا جائے گا یعنی $y_2 = \frac{\cosh 2x}{x^3}$ ہے۔

سوال 5.41: $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ہے جو دوسری صورت ہے۔ اساس $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x$ اور $y_2 = e^x \ln x$ ہیں۔

سوال 5.42: $xy'' + (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 0$ جبکہ $y_1 = e^{-x}$ اور $y_2 = e^{-x} \ln x$ ہیں۔

سوال 5.43: $y'' + (x - 1)y = 0$
جواب: $r_1 =$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 سے ایسا تسلسل ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل پائے جاتے

ہیں لہٰذا اس تسلسل کو دو عدد تفاعل میں لکھتے ہوئے اساس $\cdots + \frac{x^5}{30} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 1 = y_1$ اور $y_2 = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} - \cdots$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 5.44: $xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = 0$

جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = e^x$ ملتا ہے۔دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لکھ کر تخفیف درجی کے استعمال سے $y_2 = \frac{e^x}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.45: **گاوس بیش ہندسی مساوات**

درج ذیل تفرقی مساوات

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{5.70}$$

جہاں a ، b اور c مستقل ہیں **گاوس بیش ہندسی مساوات**[48] کہلاتی ہے۔ثابت کریں کہ اس کی اشاری مساوات کے جذر $r_1 = 0$ اور $r_2 = 1 - c$ ہیں۔ثابت کریں کہ $r = r_1 = 0$ کے لئے ترکیب فروبنیوس کے استعمال سے درج ذیل حل ملتا ہے جہاں $c \neq 0, -1, -2, \cdots$ ہے۔

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots \tag{5.71}$$

یہ تسلسل **بیش ہندسی تسلسل**[49] کہلاتی ہے جس کا مجموعہ عموماً $F(a,b,c;x)$ لکھا اور **بیش ہندسی تفاعل**[50] پکارا جاتا ہے۔

سوال 5.46: ثابت کریں کہ $|x| < 1$ کے لئے تسلسل 5.71 مرتکز ہے۔

جواب: $\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(a+m)(b+m)}{(m+1)!(c+m)}\frac{m!(c+m-1)}{(1+m-1)(b+m-1)}\right| = 1$ ہے لہٰذا $R < 1$ ہو گا۔

سوال 5.47: بیش ہندسی تفرقی مساوات کا حل مساوات 5.71 مستقل a اور b کی کن قیمتوں پر کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے گا۔

جواب: $a = 0, -1, -2, -\cdots$ اور $b = 0, -1, -2, -\cdots$

---

[48] Gauss' hypergeometric equation
[49] hypergeometric series
[50] hypergeomitric function

سوال 5.48: $a = b = c = 1$ کی صورت میں تسلسل 5.71 سے **ہندسی تسلسل**[51] حاصل کریں۔

جواب: $F(1,1,1;x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

سوال 5.49: ثابت کریں کہ $F(1,1,1;x) = F(1,b,b;x) = F(a,1,a;x)$ یعنی ہندسی تسلسل ہے۔اسی سے تفاعل $F(a,b,c;x)$ کا نام بیش ہندسی تفاعل نکلا ہے۔

سوال 5.50: ثابت کریں کہ سوال 5.45 میں $r_2 = 1 - c$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.70 کا دوسرا حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے جہاں $c \neq 2, 3, 4, 7 \cdots$ ہے۔

$$
\begin{aligned}
y_2(x) = x^{1-c} \bigg(1 &+ \frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)} x \\
&+ \frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)} x^2 + \cdots \bigg)
\end{aligned} \tag{5.72}
$$

سوال 5.51: ثابت کریں کہ مساوات 5.72 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
y_2(x) = x^{1-c} F(a-c+a, b-c+1, 2-c; x) \tag{5.73}
$$

سوال 5.52: ثابت کریں کہ $c \neq 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3 \mp \cdots$ کی صورت میں مساوات 5.70 کے حل کی اساس مساوات 5.71 اور مساوات 5.72 ہیں۔

سوال 5.53: درج ذیل ثابت کریں۔

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= F(-n, b, b; -x) \\
(1-x^n) &= 1 - nxF(1-n, 1, 2; x) \\
\tan^{-1} x &= xF(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; -x^2) \\
\sin^{-1} x &= xF(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; x^2) \\
\ln(1+x) &= xF(1, 1, 2; -x) \\
\ln \frac{1+x}{1-x} &= 2xF(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; x^2)
\end{aligned}
$$

[51] geometric series

سوال 5.54: درج ذیل مساوات میں A ، B ، C ، D اور K مستقل ہیں، $\dot{y}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ہے اور t^2+At+B کے منفرد جذر t_1 اور t_2 ہیں۔

$$(t^2+At+B)\ddot{y}+(Ct+D)\dot{y}+Ky=0 \tag{5.74}$$

اس مساوات میں نیا متغیر $x=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ پر کرتے ہوئے بیش ہندسی مساوات حاصل کریں جس میں

$$Ct_1+D=-c(t_2-t_1), \quad C=a+b+1, \quad K=ab$$

ہوں گے۔

جواب: چونکہ t^2+At+B کے منفرد ($t_2\neq t_1$) جذر t_1 اور t_2 ہیں لہٰذا $t^2+At+B=(t-t_1)(t-t_2)$ لکھا جا سکتا ہے۔اب نیا متغیرہ $x=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ لیتے ہوئے $t=(t_2-t_1)x+t_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$t-t_1=(t_2-t_1)x, \quad t-t_2=(t_2-t_1)(x-1),$$
$$(t-t_1)(t-t_2)=(t_2-t_1)^2x(x-1), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t_2-t_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{(t_2-t_1)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

ہوں گے جنہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$x(1-x)y''-\left(\frac{Ct_1+D}{t_2-t_1}+Cx\right)y'-Ky=0 \tag{5.75}$$

ملتا ہے۔

سوال 5.55 تا سوال 5.57 کے عمومی حل بیش ہندسی تفاعل کی صورت میں دریافت کریں۔

سوال 5.55: $2x(1-x)y''-(1+5x)y'-y=0$

جواب: $y=c_1F(1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2};x)+c_2x^{\frac{3}{2}}F(\tfrac{5}{2},2,\tfrac{5}{2};x)$

سوال 5.56: $4(t^2-3t+2)\ddot{y}-2\dot{y}+y=0$

جواب: $y=c_1F(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};t-1)+c_2(t-1)^{\frac{1}{2}}$

سوال 5.57: $2(t^2-5t+6)\ddot{y}+(2t-3)\dot{y}-8y=0$

جواب: $y=c_1F(2,-2,-\tfrac{1}{2};t-2)+c_2(t-2)^{\frac{3}{2}}F(\tfrac{7}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{2};t-2)$

5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل

اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک **بیسل مساوات**[52]

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5.76}$$

ہے جہاں ν[53] حقیقی مستقل ہے جس کی قیمت صفر یا مثبت ہو گی۔یہ مساوات عموماً نلکی تشاکلی مسائل میں سامنے آتی ہے۔بیسل مساوات کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (\frac{x^2-\nu^2}{x^2})y = 0$ حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 پر پورا اترتی ہے۔یوں بیسل مساوات کے حل کو ترکیب فروبنیوس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5.77}$$

مساوات 5.77 اور اس کے ایک درجی اور دو درجی تفرقات کو مساوات 5.76 میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہوئے $c_0, c_1, \cdots$ حاصل کرتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x^{s+r} پہلے، دوسرے اور تیسرے مجموعوں میں $m = s$ پر کرنے اور تیسرے مجموعے میں $m = s-2$ پر کرنے سے ملتے ہیں۔یوں $s = 0$ اور $s = 1$ کی صورت میں تیسرا مجموعہ کوئی حصہ نہیں ڈالے گا جبکہ $s = 2$ کی صورت میں چاروں مجموعے حصہ ڈالیں گے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0 + ra_0 - \nu^2 a_0 &= 0 \qquad (s=0) \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \nu^2 a_1 &= 0 \qquad (s=1) \\ (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - \nu^2 a_s &= 0 \qquad (s=2,3,\cdots) \end{aligned} \tag{5.78}$$

چونکہ $a_0 \neq 0$ ہے لہٰذا مساوات 5.78 کی پہلی مساوات سے **اشاری مساوات**

$$(r+\nu)(r+\nu) = 0 \tag{5.79}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $r_1 = \nu(\geq 0)$ اور $r_2 = -\nu$ ہیں۔

---

[52] Bessel's equation

[53] ν یونانی حرف نیو ہے۔

توالی عددی سر؛ $r = r_1 = \nu$

دوسری مساوات 5.78 میں $r = \nu$ پر کرتے ہوئے $(2\nu+1)a_1 = 0$ ملتا ہے۔اب چونکہ ν غیر منفی ہے لہٰذا $2\nu + 1$ صفر کے برابر نہیں ہو سکتا اور یوں $a_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔تیسری مساوات 5.78 میں $r = \nu$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(s+2\nu)sa_s + a_{s-2} = 0 \tag{5.80}$$

چونکہ $a_1 = 0$ اور $\nu \geq 0$ ہے لہٰذا مساوات 5.80 سے $s_3 = 0$ ، $s_5 = 0$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔ یوں تمام طاق عددی سر صفر کے برابر ہیں۔جفت عددی سر حاصل کرنے کی خاطر مساوات 5.80 میں $s = 2m$ پر کرتے ہوئے

$$(2m+2\nu)2ma_{2m} + a_{2m-2} = 0$$

یعنی

$$a_{2m} - \frac{1}{2^2m(\nu+m)}a_{2m-2}, \qquad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.81}$$

ملتا ہے۔مساوات 5.81 سے c_2 ، c_4 ، $\cdots$ لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2^2 2(\nu+2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(\nu+1)(\nu+2)} \end{aligned}$$

اور یوں عمومی کلیہ

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔

عددی صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل تفاعل $J_n(x)$

ν کی عدد صحیح قیمت کو روایتی طور پر n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.82 درج ذیل لکھی جائے گی

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.83}$$

جس میں a_0 اختیاری مستقل ہے۔مساوات 5.83 پر مبنی تسلسل میں بھی اختیاری مستقل a_0 پایا جائے گا۔ہم اختیاری مستقل کی قیمت $a_0 = 1$ چن سکتے ہیں البتہ اس سے بہتر قیمت

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \tag{5.84}$$

ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! n!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

یعنی

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!(n+m)!}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.85}$$

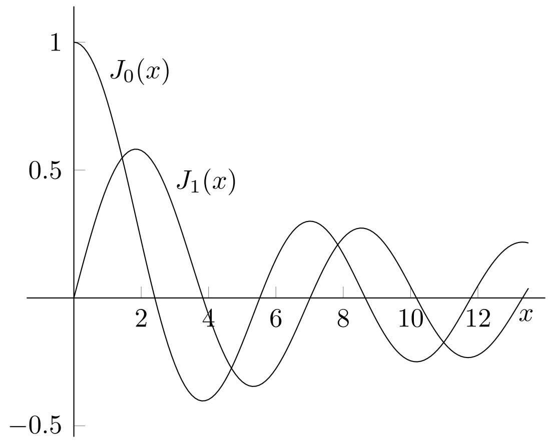
لکھا جا سکتا ہے۔آپ نے دیکھا کہ $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چننے سے بڑھتی ضربیہ $(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$ کو نہایت عمدگی کے ساتھ **عدد ضربیہ**[54] $(n+m)!$ میں ضم کیا گیا ہے۔درج بالا عددی سر کو تسلسل 5.77 میں پر کرتے ہوئے، اور یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $c_1 = 0$ ، $c_3 = 0$ ، $\cdots$ ہیں، بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل $J_n(x)$

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \qquad (n \geq 0) \tag{5.86}$$

ملتا ہے جو درجہ n **بیسل تفاعل کی پہلی قسم**[55] کہلاتی ہے۔بیسل تفاعل 5.86 تمام x کے لئے مرتکز ہے یعنی (جیسا آپ عددی سر کی شرح $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ سے ثابت کر سکتے ہیں) اس کا رداس ارتکاز لامتناہی $R = \infty$ ہے۔یوں $J_n(x)$ تمام x کے لئے معین ہے۔عددی سر کے نسب نما میں عدد ضربیہ $(n+m)!$ کی بنا تسلسل بہت تیزی سے مرکوز ہوتی ہے۔

---

[54] factorial
[55] Bessel function of the first kind of order n



شکل 5.7: بیسل تفاعل کی پہلی قسم۔ J_0 ، J_1

مثال 5.18: بیسل تفاعل $J_0(x)$ اور $J_1(x)$

مساوات 5.86 میں $n = 0$ پر کرتے ہوئے **درجہ 0 کا بیسل تفاعل $J_0(x)$**

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + - \cdots \tag{5.87}$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو کوسائن تفاعل کی مانند ہے۔اسی طرح مساوات 5.86 میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے **درجہ 1 کا بیسل تفاعل $J_1(x)$**

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!} = x - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + - \cdots \tag{5.88}$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو سائن تفاعل کی مانند ہے لیکن جیسا آپ دیکھیں گے بیسل تفاعل کے صفر یکساں فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں اور x بڑھانے سے تفاعل کا حیطہ کم ہوتا جاتا ہے۔ مساوات 5.76 کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$ ملتی ہے جس پر توجہ دیں۔ x کی زیادہ قیمت پر $\frac{1}{x}$ اور $\frac{\nu^2}{x^2}$ کو رد کرتے ہوئے بیسل مساوات سے $y'' + y = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے حل $\cos x$ اور $\sin x$ ہیں۔آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{y'}{x}$ بطور تقصیری مستقل کردار ادا کرتے ہوئے بیسل تفاعل کا حیطہ گھٹانے میں مدد دے گی۔ زیادہ x کی صورت میں درج ذیل ثابت کیا جا سکتا ہے

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \tag{5.89}$$

جہاں $\sim$ کو **متقاربی برابر**[56] پڑھیں اور جس کا مطلب ہے کہ کسی بھی قطعی n پر دونوں اطراف کی شرح، $x \to \infty$ پر اکائی کے برابر ہو گی۔

مساوات 5.89 کم $x(>0)$ کی صورت میں بھی بہترین ثابت ہوتی ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے $J_0(x)$ کے ابتدائی تین صفر 2.356 ، 5.498 اور 8.639 حاصل ہوتے ہیں جبکہ ان کی حقیقی قیمتیں بالترتیب 2.405 ، 5.520 اور 8.654 ہیں۔دونوں جوابات میں فرق 0.049 ، 0.022 اور 0.015 ہے۔ □

بیسل تفاعل جہاں $\nu \geq 0$ کوئی بھی قیمت ہو سکتی ہے۔گیما تفاعل

گزشتہ حصے میں ہم نے عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل مساوات کا ایک حل دریافت کیا۔آئیں اب کسی بھی قیمت کے $\nu > 0$ کے لئے بیسل تفاعل کا عمومی حل تلاش کریں۔مساوات 5.84 میں ہم نے $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چنا جبکہ موجودہ صورت میں ہم

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{5.90}$$

چنتے ہیں جہاں **گیما تفاعل**[57] Γ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu \,\mathrm{d}t \qquad (\nu > -1) \tag{5.91}$$

دھیان رہے کہ بائیں ہاتھ $\nu + 1$ جبکہ دائیں ہاتھ تکمل کے اندر ν لکھا گیا ہے۔تکمل بالحصص سے

$$\Gamma(\nu+1) = -e^{-t} t^\nu \Big|_0^\infty + \nu \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} \,\mathrm{d}t = 0 + \nu\Gamma(\nu)$$

یعنی گیما تفاعل کا بنیادی تعلق

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \tag{5.92}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.91 میں $\nu = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \,\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

---

[56] asymptotically equal
[57] gamma function

ملتا ہے۔اس طرح مساوات 5.92 سے $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$ ، $\Gamma(3) = 3\Gamma(2) = 2!$ اور یوں

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.93}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ عدد ضربی در حقیقت گیما تفاعل کی ایک مخصوص صورت ہے۔یوں عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.90 سے مساوات 5.84 ہی حاصل ہوتی ہے۔

گیما تفاعل سے $0!$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $\Gamma(n+1) = n!$ ہے لٰہذا

$$0! = \Gamma(1) = 1 \tag{5.94}$$

کے برابر ہے۔

مساوات 5.90 استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو لکھتے ہیں۔

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

اب مساوات 5.92 کے تحت $(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2)$ ، $(\nu+2)\Gamma(\nu+2) = \Gamma(\nu+3)$ وغیرہ لکھے جا سکتے ہیں اور یوں

$$(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+m+1)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.95}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $r = r_1 = \nu$ کی صورت میں بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$J_{\nu}(x) = x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.96}$$

$J_{\nu}(x)$ کو **درجہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم**[58] کہتے ہیں۔

جیسا آپ شرح عدد سر کی ترکیب سے ثابت کر سکتے ہیں، مساوات 5.96 تمام x پر مرتکز ہے۔

[58] Bessel function of order ν

مثال 5.19: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{5.97}$$

حل: مساوات 5.91 میں $\nu = -\frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t$$

ملتا ہے جس میں متغیرہ تبدیل کرتے ہوئے $t = u^2$ استعمال کرتے ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u$$

اب ہم ایک ترکیب استعمال کرتے ہیں (جس کو ذہن نشین کرنا سود مند ثابت ہو گا)۔ درج بالا میں u کی جگہ w بھی لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-w^2} \, \mathrm{d}w$$

ملتا ہے۔ درج بالا دو مساوات کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = 4 \int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \int_0^\infty e^{-w^2} \, \mathrm{d}w = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+w^2)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}w$$

یہ تکمل کارتیسی محور کے ربع اول پر حاصل کیا گیا ہے۔ اس تکمل کو نلکی محور r اور θ استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں $u = r\cos\theta$ اور $w = r\sin\theta$ لیتے ہیں۔ چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}u \, \mathrm{d}w = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$ لکھا جائے گا۔ ربع اول میں r کے حدود 0 تا ∞ اور θ کے حدود 0 تا $\frac{\pi}{2}$ ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \bigg|_0^\infty \mathrm{d}\theta = 4 \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \pi$$

ملتا ہے۔ دونوں اطراف کا جذر لینے سے $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ملتا ہے۔ □

خواص بیسل تفاعل

بیسل تفاعل انتہائی زیادہ تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔آئیں درج ذیل تعلقات کو بیسل تسلسل سے اخذ کریں۔

$$[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{5.98}$$

$$[x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{5.99}$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \tag{5.100}$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) \tag{5.101}$$

مساوات 5.98 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 5.96 کو x^ν سے ضرب دیتے ہوئے

$$x^\nu J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

تفرق لے کر مساوات 5.92 سے $\Gamma(\nu+m+1) = (\nu+m)\Gamma(\nu+m)$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
[x^\nu J_\nu(x)]' &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+2\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(m+\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m! (\nu+m)\Gamma(\nu+m)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu+m)} = x^\nu x^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu-1} m! \Gamma(\nu+m)} = x^\nu J_{\nu-1}(x)
\end{aligned}$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu - 1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

آئیں اب مساوات 5.99 ثابت کریں۔مساوات 5.96 کو $x^{-\nu}$ سے ضرب دینے سے x^ν کٹ جاتا ہے۔

$$x^{-\nu} J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

تفرق لے کر $m! = m(m-1)!$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
[x^{-\nu} J_\nu(x)]' &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu} m(m-1)! \Gamma(\nu+m+1)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu-1} (m-1)! \Gamma(\nu+m+1)}
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ تفرق کے بعد تسلسل کا پہلا رکن $m = 1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔(آپ $x^{-\nu} J_\nu$ کے تسلسل کو پھیلا کر لکھ کر تفرق لیتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ پہلا رکن $m = 1$ ہے)۔ درج بالا تسلسل میں $s = m - 1$ یعنی $m = s + 1$ پر کرتے ہیں۔

$$[x^{-\nu} J_\nu(x)]' = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} x^{2s+1}}{2^{2s+\nu+1} s! \Gamma(\nu + s + 2)} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu + 1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

اب مساوات 5.100 اور مساوات 5.100 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \nu x^{\nu-1} J_\nu + x^\nu J_\nu' &= x^\nu J_{\nu-1} \\ -\nu x^{-\nu-1} J_\nu + x^{-\nu} J_\nu' &= -x^{-\nu} J_{\nu+1} \end{aligned}$$

پہلی مساوات کو x^ν اور دوسری مساوات کو $x^{-\nu}$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nu x^{-1} J_\nu + J_\nu' &= J_{\nu-1} \\ -\nu x^{-1} J_\nu + J_\nu' &= -J_{\nu+1} \end{aligned}$$

ان کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل (درکار) مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2J_\nu' &= J_{\nu-1} - J_{\nu+1} \\ \frac{2\nu}{x} J_\nu &= J_{\nu-1} + J_{\nu+1} \end{aligned}$$

مثال 5.20: مساوات 5.98 تا مساوات 5.101 کا استعمال
درج ذیل کو J_0 اور J_1 کی صورت میں حاصل کریں۔

$$\int_1^2 x^{-3} J_4(x) \, \mathrm{d}x$$

حل: مساوات 5.99 میں $\nu = 3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I = \int_1^2 x^{-3} J_4(x) \, \mathrm{d}x = -x^{-3} J_3(x) \Big|_1^2$$

مساوات 5.100 میں $\nu = 2$ پر کرتے ہوئے $J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1$ اور $\nu = 1$ پر کرتے ہوئے $J_2 = \frac{2}{x}J_1 - J_0$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $J_3 = \frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1 - J_0) - J_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں تکمل کی قیمت

$$I = -x^{-3}[4x^{-1}(2x^{-1}J_1 - J_0) - J_0]\Big|_1^2 = -\frac{1}{8}J_1(2) + \frac{1}{4}J_0(2) + 7J_1(1) - 4J_0(1)$$

ہو گی۔ □

مثال 5.21: درج ذیل (شکل 5.8) ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \end{aligned} \tag{5.102}$$

حل: بیسل تسلسل 5.96 میں $\nu = \frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے ہیں۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\frac{1}{2}}m!\Gamma(\frac{1}{2}+m+1)} = \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!\Gamma(m+\frac{3}{2})}$$

نسب نما میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 5.97 استعمال کیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} 2^m m! &= 2m(2m-2)(2m-4)\cdots 4\cdot 2 \\ 2^{m+1}\Gamma(m+\tfrac{3}{2}) &= 2^{m+1}(m+\tfrac{1}{2})(m-\tfrac{1}{2})\cdots\tfrac{3}{2}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\ &= (2m+1)(2m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے نسب نما میں

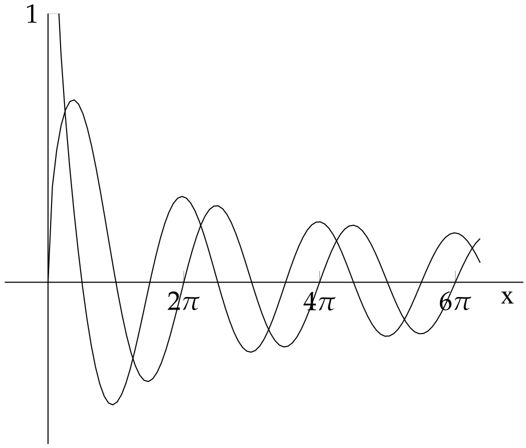
$$2^{2m+1}m!\Gamma(m+\tfrac{3}{2}) = (2m+1)2m(2m-1)(2m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\sqrt{\pi} = (2m+1)!\sqrt{\pi}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

مساوات 5.98 استعمال کرتے ہوئے

$$[\sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(x)]' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x = \sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)$$



شکل 5.8: بیسل تفاعل $J_{\frac{1}{2}}(x)$ اور $J_{-\frac{1}{2}}(x)$

لکھا جا سکتا ہے جس میں دائیں ہاتھ کے مساوات کو لیتے ہوئے $\sqrt{x}$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.102 کی دوسری مساوات ملتی ہے۔ □

عمومی حل۔ خطی طور تابعیت

بیسل مساوات 5.76 کے عمومی حل کے لئے $J_v(x)$ کے علاوہ خطی طور غیر تابع دوسرا حل بھی درکار ہے۔ غیر عدد صحیح ν کی صورت میں دوسرا حل $r_2 = -\nu$ (اشاری مساوات 5.79) استعمال کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔ یوں دوسرا خطی طور غیر تابع حل مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $-\nu$ پر کرنے سے حاصل ہو گا۔

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m-\nu+1)} \tag{5.103}$$

ν غیر عدد صحیح ہونے کی صورت میں J_ν اور $J_{-\nu}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔ یوں غیر عدد صحیح ν کی صورت میں $x \neq 0$ پر مساوات بیسل کا عمومی حل

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \tag{5.104}$$

ہو گا۔

ν عدد صحیح ہونے کی صورت میں $J_n(x)$ اور $J_{-n}(x)$ کا تعلق

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{5.105}$$

ہے لٰہذا یہ خطی طور تابع ہیں اور ان سے عمومی حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔آئیں مساوات 5.105 کو ثابت کریں۔

ثبوت: مساوات 5.103 میں ν کی قیمت کو عدد صحیح کے قریب تر لانے سے گیما تفاعل کی قیمت (صفحہ 1026 پر شکل 5.ب) لامتناہی کی طرف بڑھتی ہے۔یوں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.103 کے ابتدائی n ارکان کے عددی سر، گیما تفاعل کی قیمت لامتناہی ہونے کی بنا، صفر ہوں گے اور یوں تسلسل $m = n$ سے شروع ہو گا۔مساوات 5.93 کے تحت $\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$ ہے لٰہذا درج ذیل لکھا جائے گا

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m!(m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{2s+n}(n+s)!s!} \qquad (m = n+s)$$

جو $(-1)^n J_n(x)$ ہے۔

□

اگلے حصے میں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات بیسل کا عمومی حل، بیسل تفاعل کی دوسری قسم Y_ν کی مدد سے، حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 5.58: ثابت کریں کہ $J_n(x)$ تمام x کے لئے مرتکز ہے۔

جواب: $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{2^{2m+n} m!(n+m)!}{2^{2m+2+n}(m+1)!(n+m+1)!} = \frac{1}{2^2(m+1)(n+m+1)}$ ہے لٰہذا $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|_{m\to\infty} = 0$ اور یوں $R \to \infty$ ہو گا۔

سوال 5.59 تا سوال 5.68 کے عمومی حل، جہاں ممکن ہو، J_ν اور $J_{-\nu}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔جہاں اضافی معلومات دی گئی ہوں، وہاں اس کو استعمال کرتے ہوئے بیسل مساوات کی صورت حاصل کریں۔

سوال 5.59: $x^2y'' + xy'(x^2 - \frac{4}{9})y = 0$
جواب: چونکہ $\nu = \frac{2}{3}$ ہے جو غیر عدد صحیح ہے لہٰذا عمومی حل $y = c_1 J_{\frac{2}{3}} + c_2 J_{-\frac{2}{3}}$ ہے۔

سوال 5.60: $(z = \sqrt{x})$ $\quad xy'' + y' + \frac{1}{4}y$
جواب: $y = c_1 J_0(\sqrt{x})$

سوال 5.61: $(z = \frac{x}{2})$ $\quad xy'' + y' + \frac{x}{4}y = 0$
جواب: $y = c_1 J_0(\frac{x}{2})$

سوال 5.62: $(z = \frac{x}{3})$ $\quad x^2y'' + xy'(\frac{x^2}{9} - \frac{1}{9})y = 0$
جواب: $y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{3}) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(\frac{x}{3})$

سوال 5.63: $(z = e^x)$ $\quad y'' + (e^{2x} - 16)y = 0,$
جواب: $y = c_1 J_4(e^x)$

سوال 5.64: $(z = \lambda x)$ $\quad x^2y'' + xy'(\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0,$
جواب: $y = c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 J_{-\nu}(\lambda x)$ جہاں $\nu \neq 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$

سوال 5.65: $(z = 3x)$ $\quad x^2y'' + xy' + (9x^2 - 1)y = 0,$
جواب: $y = c_1 J_1(3x)$

سوال 5.66: $(z = 2x - 1)$ $\quad (x - \frac{1}{2})^2y'' + (x - \frac{1}{2})y' + 4x(x - 1)y = 0$
جواب: $y = c_1 J_1(2x - 1)$

سوال 5.67: $y = x^{-\nu}u$ $\quad xy'' + (2\nu + 1)y' + xy = 0,$
جواب: $y = x^{-\nu}(c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x))$ جہاں $\nu \neq 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$

سوال 5.68: $z = \sqrt{x}$, $\quad y = u\sqrt{x},$ $\quad x^2y'' + \frac{1}{4}(x + \frac{3}{4})y = 0,$
جواب: $y = c_1\sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) + c_2\sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$

سوال 5.69: مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \quad J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right) \tag{5.106}$$

سوال 5.70: کیا آپ مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے اخذ کر سکتے ہیں کہ $\nu = \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{3}{2}, \mp\frac{5}{2}, \cdots$ کی صورت میں $J_\nu(x)$ بنیادی تفاعل ہیں۔

جواب: جی ہاں۔

سوال 5.71: باہم پیچاں صفر
مساوات 5.98، مساوات 5.99 اور مسئلہ رول[59] استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $J_n(x)$ کے کسی بھی دو متواتر صفروں کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

جواب: مسئلہ رول کہتا ہے کہ کسی بھی حقیقی قابل تفرق تفاعل کے دو متواتر برابر قیمت نقطوں کے مابین کم از کم ایک ایسا نقطہ (نقطہ فاصل) پایا جاتا ہے جس پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔ اگر $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 پر پائے جاتے ہوں تب ہم $x_1^{-n}J_n(x_1) = x_2^{-n}J_n(x_2) = 0$ لکھ سکتے ہیں۔یوں مسئلہ رول کے تحت x_1 اور x_2 کے مابین کسی نقطے پر تفاعل $x^{-n}J_n(x)$ کا تفرق صفر $[x^{-n}J_n(x)]' = 0$ ہو گا جو مساوات 5.99 کے استعمال سے ایسے نقطے پر $x^{-n}J_{n+1}(x) = 0$ یعنی $J_{n+1}(x) = 0$ دیتا ہے۔اسی طرح اگر $J_{n+1}(x)$ کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 پر پائے جاتے ہوں تب $J_{n+1}(x_3) = J_{n+1}(x_4) = 0$ اور $x_3^{n+1}J_{n+1}(x_3) = x_4^{n+1}J_{n+1}(x_4) = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مسئلہ رول کے تحت x_3 اور x_4 کے مابین کسی نقطے پر $[x^{n+1}J_{n+1}(x)]' = 0$ ہو گا جس سے مساوات 5.98 کے تحت ایسے نقطے پر $x^{n+1}J_n(x) = 0$ یعنی $J_n(x) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں ثابت ہوا کہ J_{n+1} کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 کے مابین $J_n(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 5.72: تفرقی مساوات سے ایک درجی تفرق کا اخراج
درج ذیل تفرقی مساوات میں $y(x) = u(x)v(x)$ پر کرتے ہوئے ایسا $v(x)$ دریافت کریں کہ حاصل تفرقی مساوات میں پہلے درجے کا تفرق نہ پایا جاتا ہو۔حاصل تفرقی مساوات بھی حاصل کریں۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جوابات: $v = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ اور مساوات $u'' + [q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p']u = 0$ میں u' نہیں پایا جاتا ہے۔

[59] Rolle's theorem

سوال 5.73: گزشتہ سوال میں تفرقی مساوات سے ایک درجی تفرق کا اخراج کیا گیا۔ثابت کریں کہ مساوات بیسل 5.76 سے ایک درجی تفرق کا اخراج $y=\frac{u}{\sqrt{x}}$ پر کرتے ہوئے ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہو گی۔

$$x^2u''+(x^2+\tfrac{1}{4}-\nu^2)u=0 \tag{5.107}$$

سوال 5.74: مساوات 5.107 کا عمومی حل $\nu=\frac{1}{2}$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $u=A\cos x+B\sin x$ ہے لہٰذا $y=\frac{u}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}(A\cos x+B\sin x)$ ہو گا۔

سوال 5.75 تا سوال 5.80 مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کی مدد سے حل ہوں گے۔

سوال 5.75: ثابت کریں $J_0'(x)=-J_1(x),\quad J_1'(x)=J_0(x)-\frac{J_1(x)}{x},\quad J_2'(x)=\frac{1}{2}[J_1(x)-J_3(x)]$

سوال 5.76: بیسل مساوات 5.76 کو مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 سے حاصل کریں۔

سوال 5.77: درج ذیل ثابت کریں

$$\begin{aligned}
\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,\mathrm{d}x &= x^{\nu}J_{\nu}(x)+c\\
\int x^{-\nu}J_{\nu+1}\,\mathrm{d}x &= -x^{-\nu}J_{\nu}(x)+c\\
\int J_{\nu+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \int J_{\nu-1}(x)\,\mathrm{d}x-2J_{\nu}(x)
\end{aligned}$$

سوال 5.78: $\int J_3(x)\,\mathrm{d}x$

جواب: مساوات 5.101 میں $\nu=2$ پر کر کے تکمل $\int J_3\,\mathrm{d}x=\int J_1\,\mathrm{d}x-2J_2$ ہو گا اور مساوات 5.99 میں $\nu=0$ پر کرتے ہوئے تکمل $\int J_1\,\mathrm{d}x=-J_0$ دیتا ہے لہٰذا $\int J_3\,\mathrm{d}x=-J_0-2J_2+c$

سوال 5.79: تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے حل کریں۔ $\int x^3J_0(x)\,\mathrm{d}x$

جواب: $\int x^3J_0\,\mathrm{d}x=\int x^2(xJ_0)\,\mathrm{d}x=x^2(xJ_1)-2\int x^2J_1\,\mathrm{d}x=x^3J_1-2x^2J_2+c$

سوال 5.80: تکمل بالحصص سے حل کریں۔ $\int x^2J_0\,\mathrm{d}x$

جواب: $\int x^2J_0\,\mathrm{d}x=x^2J_1+xJ_0-\int J_0\,\mathrm{d}x$ ، جہاں $\int J_0\,\mathrm{d}x$ کسی بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے بلکہ اس کی قیمت جدول کی مدد سے لکھی جاتی ہے۔

5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔عمومی حل

بیسل مساوات 5.76 کا کسی بھی ν کے لئے عمومی حل حاصل کرنے کی خاطر **بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[60] $Y_\nu(x)$ حاصل کرتے ہیں۔شروع $\nu = n = 0$ سے کرتے ہیں۔

$n = 0$ کی صورت میں مساوات بیسل کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{5.108}$$

لکھا جا سکتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 سے دوہرا جذر $r = 0$ ملتا ہے جو صفحہ 336 پر مسئلہ فروبنیوس میں بتلائی گئی دوسری صورت کو ظاہر کرتی ہے۔یوں مساوات 5.108 کا ایک حل $J_0(x)$ ہو گا جبکہ اس کا دوسرا حل مساوات 5.57 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m \tag{5.109}$$

لکھا جائے گا۔مساوات 5.109 اور اس کے تفرقات

$$y_2' = J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1}$$
$$y_2'' = J_0'' \ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-2}$$

کو مساوات 5.108 میں پر کرتے ہیں (اگرچہ آخری مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ لکھنا چاہیے، البتہ $m = 1$ پر دیا گیا مجموعہ صفر دیتا ہے لہٰذا مجموعے کا پہلا رکن $m = 1$ لکھنا ممکن ہے)۔اب چونکہ J_0 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا تین لوگارتھمی ارکان کا مجموعہ $(xJ_0'' + J_0' + xJ_0)\ln x$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں بقایا درج ذیل ہو گا۔

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$$

اس میں پہلے اور دوسرے مجموعوں کو جمع کرتے ہوئے $\sum m^2 A_m x^{m-1}$ لکھ کر جبکہ J_0' کی طاقتی تسلسل کو مساوات 5.87 کا جزو در جزو تفرق لیتے اور $\frac{m!}{m} = (m-1)!$ استعمال کرتے ہوئے

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2mx^{2m-1}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1}m!(m-1)!}$$

---

[60] Bessel function of the second kind

لکھ کر درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m!(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0 \tag{5.110}$$

اس مساوات میں x^0 کمتر طاقت، جو صرف دوسرے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $A_1 = 0$ ملتا ہے۔اب x^{2s} کے عددی سروں، جو پہلے تسلسل میں نہیں پایا جاتا، کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہیں۔

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0, \qquad (s = 1, 2, \cdots)$$

اب چونکہ $A_1 = 0$ ہے لہٰذا $A_3 = 0$ ، $A_5 = 0$ ، $\cdots$ ہوں گے۔

x^{2s+1} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $s = 0$ کے لئے

$$-1 + 4A_2 = 0, \qquad \implies \qquad A_2 = \frac{1}{4}$$

جبکہ بقایا s پر

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0, \quad (s = 1, 2, \cdots)$$

لکھا جائے گا۔اس سے $s = 1$ کے لئے

$$\frac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \qquad \implies \qquad A_4 = -\frac{3}{128}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ عمومی طور پر

$$A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right), \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.111}$$

ملتا ہے۔قوسین میں بند قیمت کو h_m لکھ کر،

$$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \tag{5.112}$$

مساوات 5.111 اور $A_1 = A_3 = \cdots = 0$ کو مساوات 5.109 میں پر کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} \\
&= J_0(x)\ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + \frac{11}{13\,824}x^6 - + \cdots
\end{aligned} \tag{5.113}
$$

چونکہ J_0 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ مساوات بیسل 5.76 کی حل کی اساس ہیں۔ہم J_0 اور y_2 سے کوئی بھی مخصوص حل، $a(y_2 + bJ_0)$ جہاں $a(\neq 0)$ اور b مستقل ہیں، لکھتے ہوئے اساس کی مختلف صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔روایتی طور پر $a = \frac{2}{\pi}$ اور $b = \gamma - \ln 2$ چنے جاتے ہیں جہاں $\gamma = 0.577\,215\,664\,90\cdots$ **مستقل یولر**[61] کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے جہاں s کی قیمت لامتناہی کو چھونے کی کوشش کرتی ہے۔

$$
\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s} - \ln s \tag{5.114}
$$

اس طرح لکھا گیا دوسرا حل **درجہ صفر بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[62] (شکل 5.9) یا **درجہ صفر نیومن تفاعل**[63] کہلاتا[64] اور $Y_0(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں

$$
Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right] \tag{5.115}
$$

لکھا جائے گا جہاں h_m کی قیمت مساوات 5.112 دیتی ہے۔ جیسا شکل 5.9 میں دکھایا گیا ہے کم قیمت کی مثبت x پر Y_0 کی صورت $\ln x$ کی طرح ہے اور $x \to \infty$ پر $Y_0(x) \to \infty$ ہو گا۔

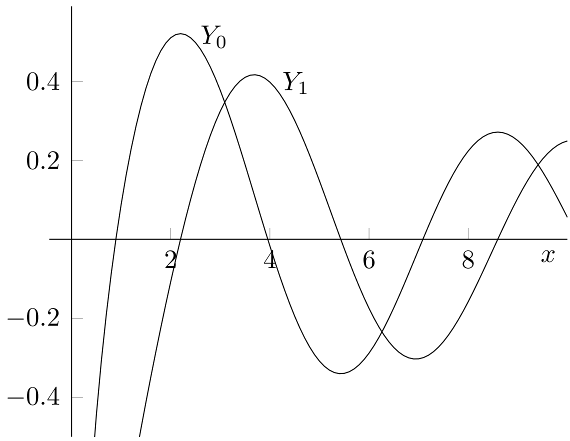
$\nu = n = 1, 2, \cdots$ کے لئے بھی بالکل اسی طرح، مساوات 5.59 سے شروع کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کیا جاتا ہے۔ان میں بھی لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے۔

دوسرے حل کا دارومدار اس حقیقت پر ہے کہ آیا ν کا درجہ عدد صحیح ہے یا نہیں۔اس پیچیدگی سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر دوسرے حل کو درج ذیل بیان کیا جاتا ہے جو تمام ν کے لئے قابل استعمال ہے۔

$$
\begin{aligned}
Y_\nu(x) &= \frac{1}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu x - J_{-\nu}(x)\right] && \text{(الف)} \\
Y_n(x) &= \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) && \text{(ب)}
\end{aligned} \tag{5.116}
$$

---

[61] Euler constant
[62] Bessel function of the second kind of order zero
[63] Neumann's function of order zero
[64] کارل نیومن [1832-1925] جرمنی کے ریاضی دان اور ماہر طبیعیات۔



شکل 5.9: بیسل تفاعل کے دوسرے اقسام۔

درج بالا تفاعل کو درجہ ν **بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[65] یا درجہ ν **نیومن تفاعل** کہتے ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ J_ν اور Y_ν تمام ν اور تمام $x(>0)$ کے لئے خطی طور غیر تابع ہیں۔

غیر عددی صحیح درجہ ν کے لئے چونکہ $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ بیسل مساوات کے حل ہیں لہٰذا $Y_\nu(x)$ بھی بیسل مساوات کا حل ہے۔اب چونکہ ایسی ν کے لئے $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ خطی طور غیر تابع ہیں اور $Y_\nu(x)$ میں $J_{-\nu}(x)$ پایا جاتا ہے لہٰذا $J_\nu(x)$ اور $Y_\nu(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔مزید یہ کہ مساوات 5.116-ب کو ثابت کیا جا سکتا ہے لہٰذا عدد صحیح درجہ کے لئے $Y_n(x)$ بیسل مساوات کا حل ہے۔آپ دیکھیں گے کہ $Y_n(x)$ کی تسلسل میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے لہٰذا $J_n(x)$ اور $Y_n(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ $Y_n(x)$ کی تسلسل لکھنے کی خاطر $J_\nu(x)$ کی تسلسل 5.96 اور $J_{-\nu}(x)$ کی تسلسل 5.103 کو مساوات 5.116-الف میں پر کرتے ہوئے $\nu \to n$ کرتے ہیں۔

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right) + \frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(h_m+h_{m+n})}{2^{2m+n}m!(m+n)!}x^{2m} - \frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m} \tag{5.117}$$

---

[65] Bessel function of the second kind of order ν

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x > 0$ اور $n = 0, 1, \cdots$ جبکہ

$$h_0 = 0, \quad h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s} \qquad (s = 1, 2, \cdots)$$

ہیں اور $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.117 میں آخری مجموعے کی جگہ صفر لکھا جاتا ہے۔ درجہ صفر $n = 0$ پر مساوات 5.117 عین مساوات 5.115 کی صورت اختیار کرتی ہے۔اس کے علاوہ درج ذیل ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \tag{5.118}$$

ان نتائج کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 5.4: مساوات بیسل کا عمومی حل
تمام ν کے لئے مساوات بیسل کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x) \tag{5.119}$$

بعض اوقات حقیقی x کے لئے مساوات بیسل کے مخلوط حل درکار ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں درج ذیل خطی طور غیر تابع مخلوط حل استعمال کیے جاتے ہیں جنہیں درجہ ν **بیسل تفاعل کی تیسری قسم**[66] یا درجہ ν پہلی اور دوسری **ہینکل تفاعل**[67] کہا[68] جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} H_\nu^1(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x) \\ H_\nu^2(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x) \end{aligned} \tag{5.120}$$

سوالات

سوال 5.81 تا سوال 5.89 کا عمومی حل J_ν اور Y_ν کی صورت میں حاصل کریں۔بتلائیں کہ کن سوالات میں Y_ν کی جگہ $J_{-\nu}$ استعمال کرنا ممکن ہے۔دی گئی اضافی معلومات استعمال کریں۔

---

[66] Bessel function of the third kind of order ν
[67] Hankel functions
[68] ہرمن ہینکل [1839-1873] جرمنی کے ریاضی دان۔

سوال 5.81: $x^2y'' + xy' + (x^2 - 25)y = 0$

جواب: $y = c_1 J_5(x) + c_2 Y_5(x)$ ؛ چونکہ ν عدد صحیح ہے لہٰذا $J_{-5}(x)$ قابل استعمال نہیں ہے۔

سوال 5.82: $x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)$

جواب: $y = c_1 J_{\sqrt{3}} + c_2 Y_{\sqrt{3}}(x)$ ؛ چونکہ ν عدد صحیح نہیں ہے لہٰذا $J_{-\sqrt{3}}(x)$ قابل استعمال ہے۔

سوال 5.83: $9x^2y'' + 9xy' + (z^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{4})y = 0, \qquad x = z^3$

جواب: $y = c_1 J_{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{3}}) + c_2 Y_{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{3}})$

سوال 5.84: $x^2y'' + xy' + (4x^4 - \frac{16}{9})y = 0, \qquad z = x^2$

جواب: $y = c_1 J_{\frac{2}{3}}(x^2) + c_2 Y_{\frac{2}{3}}(x^2)$

سوال 5.85: $9x^2y'' + 9xy' + (4x^{\frac{4}{3}} - 25)y = 0, \qquad z = x^{\frac{2}{3}}$

جواب: $y = c_1 J_{\frac{5}{2}}(x^{\frac{2}{3}}) + c_2 Y_{\frac{5}{2}}(x^{\frac{2}{3}})$

سوال 5.86: $y'' + k^2x^2y = 0, \qquad (y = u\sqrt{x}, \quad z = \frac{kx^2}{2})$

جواب: $y = \sqrt{x}[c_1 J_{\frac{1}{4}}(\frac{kx^2}{2}) + c_2 Y_{\frac{1}{4}}(\frac{kx^2}{2})]$

سوال 5.87: $xy'' - 5y' + xy = 0, \qquad y = x^3u$

جواب: $y = x^3[c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)]$

سوال 5.88: $xy'' - y' + xy = 0, \qquad y = xu$

جواب: $y = x[c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)]$

سوال 5.89: $xy'' + 5y' + xy = 0, \qquad y = \frac{u}{x^2}$

جواب: $y = \frac{1}{x^2}[c_1 J_2(x) + c_2 Y_2(x)]$

سوال 5.90: ترمیم شدہ درجہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم

ترمیم شدہ درجہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم کی تعریف $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ ہے جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ثابت کریں کہ $I_\nu(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہے۔

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \tag{5.121}$$

جواب: $I_\nu(x)$ کو دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ حاصل کریں۔یہی ثبوت ہے۔

سوال 5.91: ترمیم شدہ بیسل تفاعل
$I_\nu(x)$ کی درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m+\nu+1)} \tag{5.122}$$

سوال 5.92: $I_\nu(x)$ حقیقی ہے
ثابت کریں کہ حقیقی x اور حقیقی ν کے لئے $I_\nu(x)$ حقیقی ہے۔ثابت کریں کہ $x \neq 0$ ہوتے ہوئے $I_\nu(x) \neq 0$ ہو گا۔ثابت کریں کہ $I_{-n}(x) = I_n(x)$ کے برابر ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 5.93: ترمیم شدہ بیسل تفاعل
ثابت کریں کہ تفاعل $K_\nu(x)$ ، جسے ترمیم شدہ بیسل تفاعل کی تیسری (بعض اوقات دوسری) قسم کہتے ہیں،

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)] \tag{5.123}$$

تفرقی مساوات 5.121 کا حل ہے۔

سوال 5.94: ہینکل تفاعل
ثابت کریں کہ ہینکل تفاعل 5.120 مساوات بیسل کے حل کی اساس ہیں۔

5.6 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ

لیژانڈر تفاعل (حصہ 5.2) اور بیسل تفاعل کی ایک خاصیت جسے قائمیت[69] کہتے ہیں انجینئری حساب میں نمایاں کردار ادا کرتی ہے۔اس حصے میں قائمیت سے وابستہ تصورات اور علامت نویسی سیکھتے ہیں۔اگلے حصے میں ایسی سرحدی قیمت

[69] orthogonality

مسائل (سٹیورم لیوویل مسائل) پر غور کیا جائے گا جن کے حل قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ دیتے ہیں۔ان مسائل پر غور کے دوران حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفاعل اور بیسل تفاعل پر غور کیا جائے گا۔

آئیں پہلے تفاعل کی قائمیت کی تعریف پیش کرتے ہیں۔فرض کریں کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر حقیقی قیمت تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ معین ہیں اور اس وقفے پر ان تفاعل کے حاصل ضرب $g_m(x)g_n(x)$ کا تکمل موجود ہے۔اس تکمل کو روایتی طور پر (g_m, g_n) لکھا جاتا ہے۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.124}$$

اگر درج بالا تکمل صفر کے برابر ہو تب تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ وقفہ $a \le x \le b$ پر **قائمہ الزاویہ**[70] کہلاتے ہیں۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \ne n) \tag{5.125}$$

حقیقی قیمت تفاعل کا سلسلہ $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، $\cdots$اس صورت وقفہ $a \le x \le b$ پر **قائمہ الزاویہ سلسلہ**[71] کہلائے گا جب اس وقفے پر یہ تمام تفاعل معین اور تمام تکمل (g_m, g_n) موجود ہوں اور اس سلسلے میں تمام ممکنہ منفرد جوڑیوں کے یہ تکمل صفر کے برابر ہوں۔

(g_m, g_m) کے غیر صفر جذر کو g_m کا **معیار**[72] کہتے ہیں جسے عموماً $\|g_m\|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x)\,\mathrm{d}x} \tag{5.126}$$

ہم پوری بحث کے دوران درج ذیل فرض کریں گے۔

عمومی مفروضہ: تمام تفاعل جن پر غور کیا جا رہا ہو محدود ہیں، جن تکمل پر غور کیا جا رہا ہو وہ موجود ہیں اور معیار غیر صفر ہیں۔

ظاہر ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر ایسے قائمہ الزاویہ سلسلہ g_1 ، g_2 ، $\cdots$جن میں ہر تفاعل کا معیار اکائی (1) ہو درج ذیل تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \ne n \quad (m = 1, 2, \cdots) \\ 1 & m = n \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{5.127}$$

---

[70] orthogonal
[71] orthogonal set
[72] norm

ایسے سلسلے کو وقفہ $a \le x \le b$ پر **معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ**[73] کہتے ہیں۔

کسی بھی قائمہ الزاویہ سلسلے کے ہر تفاعل کو، زیر غور وقفے پر، اس تفاعل کی معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 5.22: تفاعل $g_m(x) = \sin mx$ جہاں $m = 1, 2, \cdots$ کا سلسلہ وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے کیونکہ ان تفاعل کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (ضمیمہ ب میں مساوات 11.ب)۔

$$
\begin{aligned}
(g_m, g_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x \qquad (m \neq n) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n) \, \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
\tag{5.128}
$$

ان تفاعل کا معیار $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$ ہے۔

$$
\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, \mathrm{d}x = \pi \qquad (m = 1, 2, \cdots)
$$

یوں اس سلسلے سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$
\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}
$$

□

مثال 5.23: کوسائن تفاعل $\cos mx$ کے سلسلے کو بھی مثال 5.22 کی طرح قائمہ الزاویہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔مزید تمام $m, n = 0, 1, \cdots$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \, \mathrm{d}x = 0
$$

یوں ظاہر ہے کہ درج ذیل سلسلہ وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے

$$
1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cdots
$$

جس سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots
$$

---

[73] orthonormal set

□

قائمہ الزاویہ سلسلہ استعمال کرتے ہوئے مختلف تفاعل کو تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ وقفہ $1 \leq x \leq b$ پر $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $\cdots$ کوئی بھی قائمہ الزاویہ سلسلہ ہے۔اب فرض کریں کہ $f(x)$ کوئی بھی تفاعل ہے جس کو ان $g(x)$ کی ایسی تسلسل

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots \tag{5.129}$$

لکھنا ممکن ہو جو مرکوز ہو۔اس تسلسل کو $f(x)$ کی **عمومی فوریئر تسلسل**[74] کہتے ہیں جبکہ c_1 ، c_2 ، $\cdots$ کو ان قائمہ الزاویہ سلسلے کے لحاظ سے تسلسل کے **فوریئر مستقل**[75] کہتے ہیں۔

قائمیت کی بنا ان مستقل کو نہایت آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 5.129 کے دونوں اطراف کو $g_m(x)$ (m معین) سے ضرب دیتے ہوئے وقفہ $a \leq x \leq b$ پر تکمل لینے سے درج ذیل ملتا ہے جہاں فرض کیا گیا ہے کہ جزو در جزو تکمل لیا جا سکتا ہے۔

$$(f, g_m) = \int_a^b f g_m \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (g_n, g_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n g_m \,\mathrm{d}x$$

بائیں ہاتھ جن تکملات میں $n = m$ ہو، وہ $(g_n, g_m) = \|g_m\|^2$ کے برابر ہوں گے جبکہ قائمیت کی بنا باقی تمام تکملات صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا

$$(f, g_m) = c_m \|g_m\|^2 \tag{5.130}$$

ہو گا اور یوں فوریئر مستقل کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$c_m = \frac{(f, g_m)}{\|g_m\|^2} = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b f(x) g_m(x) \,\mathrm{d}x \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.131}$$

مثال 5.24: فوریئر تسلسل
مساوات 5.129 کو مثال 5.23 کے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ کی صورت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5.132}$$

[74] generalized Fourier series
[75] Fourier constants

اور مساوات 5.131 اب درج ذیل دے گا۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, \cdots)
\end{aligned} \tag{5.133}
$$

اب اگر تسلسل 5.132 مرکوز ہو تب یہ $f(x)$ کی **فوریئر تسلسل** کہلائے گا اور a_0 ، a_n ، b_n اس کے **فوریئر عددی سر**[76] کہلائیں گے۔کلیات 5.133 کو ان عددی سر کے **یولر کلیات**[77] کہتے ہیں۔ □

ایسے کئی اہم سلسلے پائے جاتے ہیں جو از خود قائمہ الزاویہ نہیں ہیں البتہ ان کے حقیقی تفاعل g_1 ، g_2 ، $\cdots$ درج ذیل پر پورا اترتے ہیں جہاں $p(x)$ کوئی غیر صفر تفاعل ہے۔

$$
\int_a^b p(x)g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{5.134}
$$

ہم کہتے ہیں کہ ایسا سلسلہ وقفہ $a \le x \le b$ پر **تفاعل قدر**[78] $p(x)$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ ہے۔ g_m کے معیار کی تعریف اب درج ذیل ہے۔

$$
\|g_m\| = \sqrt{\int_a^b p(x)g_m^2\,\mathrm{d}x} \tag{5.135}
$$

اگر سلسلے کے ہر تفاعل g_m کا معیار اکائی (1) ہو تب وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے یہ سلسلہ معیاری قائمہ الزاویہ کہلائے گا۔

ہم $h_m = \sqrt{p}g_m$ اور $h_n = \sqrt{p}g_n$ لکھ کر مساوات 5.134 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$
\int_a^b h_m(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n)
$$

اور یوں ظاہر ہے کہ h_m تفاعل قائمہ الزاویہ ہیں۔

---

[76] Fourier coefficients
[77] Euler formulae
[78] weight function

اگر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے، وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، ... قائمہ الزاویہ ہوں اور اگر کسی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل عمومی فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو (مساوات 5.129 دیکھیں)

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots \tag{5.136}$$

تب اس سلسلے کے لحاظ سے فوریئر مستقل c_1 ، c_2 ، ... کو بھی پہلی کی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے بس فرق اتنا ہے کہ اب مساوات 5.136 کے دونوں اطراف کو (g_m کی بجائے) pg_m سے ضرب دے کر آگے بڑھا جائے گا۔ باقی سب کچھ پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں تفاعل کا معیار اب مساوات 5.135 دے گا۔

$$c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b p(x) f(x) g_m(x) \, \mathrm{d}x \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.137}$$

سوالات

سوال 5.95 تا سوال 5.104 میں ثابت کریں کہ دیے گئے وقفے پر دیا گیا سلسلہ قائمہ الزاویہ ہے۔ معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ بھی دریافت کریں۔

سوال 5.95: $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots, \qquad 0 \le x \le 2\pi$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}$

سوال 5.96: $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \qquad 0 \le x \le \pi$
جوابات: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 3x, \cdots$

سوال 5.97: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \cdots, \qquad -1 \le x \le 1$
جوابات: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \cdots$

سوال 5.98: $1, \cos 2x, \cos 4x, \cos 6x, \cdots, \qquad 0 \le x \le \pi$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 4x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 6x, \cdots$

سوال 5.99: $1, \cos \frac{2n\pi}{T} x, \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad 0 \le x \le T$
جوابات: $\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2n\pi}{T} x,$

سوال 5.100: $\quad 0 \le x \le T \qquad (n = 1, 2, \cdots), \qquad \sin \frac{2n\pi}{T} x,$
جوابات: $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2n\pi}{T} x,$

سوال 5.101: (حصہ 5.2 کے لیژانڈر تفاعل) $-1 \le x \le 1 \qquad P_0(x),\, P_1(x),\, P_2(x),\, \cdots,$
جوابات: $\frac{P_0}{\sqrt{2}},\, \sqrt{\frac{3}{2}} P_1,\, \sqrt{\frac{5}{2}} P_2,\, \sqrt{\frac{7}{2}} P_3$

سوال 5.102: ایسے a_0 ، b_0 ، $\cdots$ ، c_2 دریافت کریں کہ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر g_1 ، g_2 اور g_3 معیاری قائمہ الزاویہ ہوں۔ حاصل جواب کا لیژانڈر تفاعل کے ساتھ موازنہ کریں۔ $g_1 = a_0,\, g_2 = b_0 + b_1 x,\, g_3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

سوال 5.103: ثابت کریں کہ اگر وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $\cdots$ قائمہ الزاویہ ہوں تب وقفہ $\frac{a-k}{c} \le t \le \frac{b-k}{c}$ پر تفاعل $g_1(ct+k)$ ، $g_2(ct+k)$ ، $\cdots$ قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

سوال 5.104: سوال 5.103 کے نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے سوال 5.95 سے سوال 5.99 کا نتیجہ حاصل کریں۔

5.7 مسئلہ سٹیورم لیوویل

انجینئری حساب میں کئی اہم قائمہ الزاویہ سلسلوں کے تفاعل وقفہ $a \le x \le b$ پر بطور درج ذیل دو درجی تفرقی مساوات کے حل سامنے آتے ہیں

$$[r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0 \tag{5.138}$$

جو درج ذیل شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \qquad (k_1 \text{ اور } k_2 \text{ بیکوقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \\ &\text{(ب)} \quad l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \qquad (l_1 \text{ اور } l_2 \text{ بیکوقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \end{aligned} \tag{5.139}$$

یہاں λ مقدار معلوم ہے جبکہ k_1 ، k_2 ، l_1 اور l_2 حقیقی مستقل ہیں۔

مساوات 5.138 کو **مساوات سٹیورم لیوویل**[79] کہتے ہیں۔ مساوات 5.139 وقفے کے آخری سروں a اور b سے تعلق رکھتے ہیں لہٰذا انہیں **سرحدی شرائط** کہتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ لیژانڈر، بیسل اور دیگر مساوات کو مساوات 5.138 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ تفرقی مساوات اور سرحدی شرائط مل کر **سرحدی مسئلہ**[80] دیتے ہیں۔ مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 کے سرحدی مسئلے کو **سٹیورم لیوویل مسئلہ**[81] کہتے ہیں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ λ کی کسی بھی قیمت کے لئے سٹیورم لیوویل مسئلے کا غیر اہم صفر حل $y \equiv 0$ پایا جاتا ہے جو پورے وقفے پر $y(x) = 0$ دیتا ہے۔اگر غیر صفر اہم حل $y \not\equiv 0$ موجود ہوں تو انہیں **امتیازی تفاعل** یا **امتیازی تفاعل**[82] کہتے ہیں اور λ کی ان قیمتوں جن کے لئے مسئلے کا حل موجود ہو کو **امتیازی قدر** یا **آئگنی قدر**[83] کہتے ہیں۔

مثال 5.25: درج ذیل سٹیورم لیوویل مسئلے کے امتیازی قدر اور امتیازی تفاعل دریافت کریں۔

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$$

حل: λ کی منفی قیمتوں $\lambda = -v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = c_1 e^{vx} + c_2 e^{-vx}$$

دیے گئے سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے $c_1 = c_2 = 0$ اور $y \equiv 0$ ملتا ہے جو امتیازی تفاعل نہیں ہے۔ $\lambda = 0$ کی صورت میں بھی یہی صورت حال پائی جاتی ہے۔مثبت $\lambda = v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = A\cos vx + B\sin vx$$

پہلی سرحدی شرط سے $y(0) = A = 0$ ملتا ہے۔دوسری سرحدی شرط سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$y(\pi) = B\sin v\pi = 0 \quad \implies \quad v = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$$

$v = 0$ سے $y \equiv 0$ ملتا ہے جبکہ $B = 1$ لیتے ہوئے $\lambda = v^2 = 1, 4, 9, \cdots$ کے لئے

$$y(x) = \sin vx \qquad v = 1, 2, 3, \cdots$$

---

[79] Sturm-Liouville equation
[80] boundary problem
[81] سوئزرلینڈ کے ریاضی دان جیکویس چارلس فرانکوئس سٹیورم[1803-1882] اور فرانسیسی ریاضی دان یوسف لیوویل[1809-1882]
[82] eigenfunctions
[83] eigenvalue

ملتا ہے۔ یوں اس مسئلے کے امتیازی اقدار $\lambda = v^2$ ہیں جہاں $v = 1, 2, \cdots$ ہیں اور ان کے مطابقتی امتیازی تفاعل $y(x) = \sin vx$ ہیں۔

□

سٹیورم لیوویل مسئلہ درج ذیل قائمیت کی خاصیت رکھتا ہے۔

مسئلہ 5.5: **امتیازی تفاعل کی قائمیت**
فرض کریں کہ مساوات 5.138 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلے میں p ، q ، r اور r' حقیقی قیمت تفاعل ہیں جو وقفہ $a \le x \le b$ پر استمراری ہیں۔فرض کریں کہ دو منفرد امتیازی قدر λ_m اور λ_n کے لئے مساوات 5.138 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلے کے مطابقتی حل $y_m(x)$ اور $y_n(x)$ ہیں۔ اس وقفے پر تفاعل قدر p کے لحاظ سے y_m اور y_n قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

اگر $r(a) = 0$ ہو تب مساوات 5.139-الف کی ضرورت نہیں ہو گی لہٰذا اس کو مسئلے سے نکالا جا سکتا ہے۔ اسی طرح اگر $r(b) = 0$ تب مساوات 5.139-ب کی ضرورت نہیں ہو گی لہٰذا اس کو مسئلے سے نکالا جا سکتا ہے۔اگر $r(a) = r(b)$ ہو تب مساوات 5.139 کی جگہ درج ذیل شرط لکھی جا سکتی ہے۔

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b) \tag{5.140}$$

ثبوت : چونکہ y_m اور y_n اس مسئلے کے حل ہیں لہٰذا یہ مساوات 5.138 پر پورا اترتے ہیں اور یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}(ry_m')' + (q + \lambda_m p)y_m &= 0\\ (ry_n')' + (q + \lambda_n p)y_n &= 0\end{aligned}$$

پہلی مساوات کو y_n اور دوسری مساوات کو $-y_m$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)py_my_n &= y_m(ry_n')' - y_n(ry_m')'\\ &= [(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'\end{aligned}$$

آپ آخری مساوات $[(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'$ کو کھول کر پہلی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کر سکتے ہیں۔چونکہ قیاس کے تحت r اور r' استمراری ہیں جبکہ y_m اور y_n مسئلے کے حل ہیں لہٰذا $[(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'$ استمراری ہے۔وقفہ $a \le x \le b$ پر اس کا تکمل لیتے ہیں

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b py_my_n \,\mathrm{d}x = \Big[r(y_n'y_m - y_m'y_n)\Big]_a^b \tag{5.141}$$

جہاں دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہے۔

$$r(b)[y_n'(b)y_m(b)-y_m'(b)y_n(b)]-r(a)[y_n'(a)y_m(a)-y_m'(a)y_n(a)] \tag{5.142}$$

پہلی صورت: اگر $r(a)=0$ اور $r(b)=0$ ہوں تب مساوات 5.142 صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مساوات 5.141 کا بایاں ہاتھ بھی صفر ہو گا اور چونکہ y_m اور y_n منفرد ہیں ہمیں مساوات 5.139 میں دیے گئے سرحدی شرائط کے استعمال کے بغیر درج ذیل قائمیت ملتی ہے۔

$$\int_a^b p y_m y_n \,\mathrm{d}x=0 \qquad (m\neq n) \tag{5.143}$$

دوسری صورت: اگر $r(b)=0$ لیکن $r(a)\neq 0$ ہو تب مساوات 5.142 کا بایاں حصہ صفر کے برابر ہو گا۔آئیں مساوات 5.142 کے دائیں حصے پر غور کرتے ہیں۔مساوات 5.139-الف کے تحت

$$\begin{aligned}k_1y_n(a)+k_2y_n'(a)&=0\\k_1y_m(a)+k_2y_m'(a)&=0\end{aligned}$$

ہو گا۔فرض کریں کہ $k_2\neq 0$ ہے۔یوں پہلی مساوات کو $y_m(a)$ اور دوسری مساوات کو $-y_n(a)$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_2[y_n'(a)y_m(a)-y_m'(a)y_n(a)]=0$$

اب چونکہ $k_2\neq 0$ ہے لہٰذا قوسین میں بند تفاعل صفر کے برابر ہو گا۔اب قوسین میں بند تفاعل عین مساوات 5.142 کے دائیں حصے میں قوسین میں بند حصہ ہے لہٰذا مساوات 5.142 صفر کے برابر ہو گا اور یوں مساوات 5.141 سے مساوات 5.143 ملتی ہے۔

تیسری صورت: اگر $r(a)=0$ لیکن $r(b)\neq 0$ ہو تب بالکل دوسری صورت کی طرح مساوات 5.143 حاصل کی جا سکتی ہے۔

چوتھی صورت: اگر $r(a)\neq 0$ اور $r(b)\neq 0$ ہوں تب مساوات 5.139 کے دونوں شرائط استعمال کرتے ہوئے دوسری اور تیسری صورت کی طرز پر مساوات 5.143 حاصل ہو گی۔

پانچویں صورت: اگر $r(a)=r(b)$ ہو تب مساوات 5.142 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$r(b)[y_n'(b)y_m(b)-y_m'(b)y_n(b)-y_n'(a)y_m(a)+y_m'(a)y_n(a)]$$

جو پہلی کی طرح مساوات 5.139 کے استعمال سے صفر کے برابر ثابت ہوتا ہے۔یہاں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.140 کی مدد سے بھی درج بالا صفر کے برابر ثابت ہوتی ہے لہٰذا ہم مساوات 5.139 کی جگہ مساوات 5.140 کی شرط استعمال کر سکتے ہیں۔یوں مساوات 5.141 سے مساوات 5.143 ملتی ہے اور مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 5.26: مثال 5.25 کے تفرقی مساوات کو مساوات 5.138 کے طرز پر لکھتے ہوئے $r=1$ ، $q=0$ اور $p=1$ ملتے ہیں۔مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $0 \le x \le \pi$ پر اس کے امتیازی تفاعل قائمہ الزاویہ ہوں گے۔□

مثال 5.27: فوریئر تسلسل
آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ مثال 5.24 میں پائے جانے والے درج ذیل تفاعل

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

درج ذیل سٹیورم لیوویل مسئلے کے امتیازی تفاعل ہیں

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi)$$

لہٰذا مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر یہ آپس میں قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں۔اس مثال کے سرحدی شرائط مساوات 5.140 کی طرز کے ہیں۔ □

ایسی عمومی فوریئر تسلسل جس میں (قائمہ الزاویہ) امتیازی تفاعل کا سلسلہ استعمال ہو **امتیازی تفاعل پھیلاو**[84] کہلاتی ہے۔

مسئلہ 5.6: حقیقی امتیازی اقدار
اگر سٹیورم لیوویل مسئلہ جسے مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 میں پیش کیا گیا ہے، مسئلہ 5.5 کے شرائط پر پورا اترتا ہو اور پورے وقفہ $a \le x \le b$ پر p مثبت ہو (یا اس پورے وقفے پر p منفی ہو) تب اس سٹیورم لیوویل مسئلے کے تمام امتیازی اقدار حقیقی ہوں گی۔

---

[84] eigenfunction expansion

ثبوت : فرض کریں کہ اس سٹیورم لیوویل مسئلے کا $\lambda = \alpha + i\beta$ امتیازی قدر ہے جس کا مطابقتی امتیازی تفاعل درج ذیل ہے جہاں α ، β ، u اور v حقیقی ہیں۔

$$y(x) = u(x) + iv(x) \tag{5.144}$$

اس کو مساوات 5.138 میں پر کرتے ہوئے

$$(ru' + irv')' + (q + \alpha p + i\beta p)(u + iv) = 0$$

ملتا ہے جس کے حقیقی اور خیالی حصوں کو علیحدہ علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل دو مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(ru')' + (q + \alpha p)u - \beta pv = 0\\ (rv')' + (q + \alpha p)v - \beta pu = 0\end{aligned}$$

پہلی مساوات کو v اور دوسری مساوات کو $-u$ سے ضرب دے کر مجموعہ لیتے ہیں

$$\begin{aligned}-\beta(u^2 + v^2)p &= u(rv')' - v(ru')'\\ &= [(rv')u - (ru')v]'\end{aligned}$$

جس کا $x = a$ تا $x = b$ تکمل درج ذیل ہے۔

$$-\beta \int_a^b (u^2 + v^2)p \,\mathrm{d}x = \Big[r(uv' - u'v)\Big]_a^b$$

مسئلہ 5.5 کی ثبوت کی طرز پر، سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے دایاں ہاتھ صفر کے برابر ملتا ہے۔چونکہ y امتیازی تفاعل ہے لہٰذا $u^2 + v^2 \not\equiv 0$ ہو گا۔اب y اور p استمراری ہیں اور پورے وقفے پر $p > 0$ ہے (یا پورے وقفے پر $p < 0$ ہے) لہٰذا تکمل کا بایاں ہاتھ صفر نہیں ہو سکتا ہے۔یوں $\beta = 0$ ہو گا لہٰذا $\lambda = \alpha$ حقیقی ہو گا۔یوں مسئلے کا ثبوت پورا ہوتا ہے۔

□

مثال 5.26 اور مثال 5.27 کے امتیازی اقدار مسئلہ 5.6 کے تحت حقیقی ہیں۔

سوالات

سوال 5.105: مثال 5.25 کے لئے مسئلہ 5.5 ثابت کریں۔

سوال 5.106: مسئلہ 5.5 میں تیسری اور چوتھی صورت کا ثبوت مکمل کریں۔

سوال 5.107: اگر مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 میں دیے گئے مسئلے کی امتیازی قدر λ_0 اور مطابقتی امتیازی تفاعل $y = y_0$ ہوں تب ثابت کریں کہ λ_0 کا مطابقتی امتیازی تفاعل $y = \alpha y_0$ بھی ہو گا جہاں α غیر صفر اختیاری مستقل ہے۔(اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے ایسے امتیازی تفاعل دریافت کئے جا سکتے ہیں جن کا معیار اکائی ہو۔)

سوال 5.108 تا سوال 5.115 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلوں کے امتیازی قدر اور امتیازی تفاعل دریافت کریں۔

سوال 5.108: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(l) = 0$
جوابات: $y_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ، $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہیں۔چونکہ $n = 0$ سے $y = 0$ ملتا ہے جو امتیازی تفاعل نہیں ہے لہٰذا $n = 0$ جواب میں شامل نہیں کیا جائے گا۔

سوال 5.109: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y'(l) = 0$
جوابات: $y_n = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ ، $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 5.110: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y(l) = 0$
جوابات: $y_n = \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ ، $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 5.111: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(l) = 0$
جوابات: $y_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$ ، $\lambda = \left[\frac{n(2n+1)\pi}{l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 5.112: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$
جوابات: $y_n = \cos nx$ ، $\lambda = n^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 5.113: $(xy')' + \lambda x^{-1} y = 0, \quad y(1) = 0, y(e) = 0$
جوابات: $y_n = \sin(n\pi \ln|x|)$ ، $\lambda = n^2\pi^2$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔

سوال 5.114: $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda+1)y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$
جوابات: $y_n = e^{-x}\sin nx$ ، $\lambda = n^2$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔

سوال 5.115: ثابت کریں کہ مسئلہ سٹیورم لیوویل

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$$

کے حل مساوات $\sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔اس مساوات کے کتنے حل ممکن ہیں۔

جواب: لاتعداد

سوال 5.116: ایسا سٹیورم لیوویل مسئلہ دریافت کریں جس کے امتیازی تفاعل درج ذیل ہوں۔

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x \cdots$$

جواب: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$

5.8 قائمیت لیژانڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل

لیژانڈر مساوات (مساوات 5.16) کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1) \tag{5.145}$$

لہٰذا یہ مساوات سٹیورم لیوویل (حصہ 5.7) ہے جہاں $r = 1 - x^2$ ، $q = 0$ اور $p = 1$ ہیں۔ چونکہ $x = \mp 1$ پر $r = 0$ ہے لہٰذا سرحدی شرائط کے بغیر وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر اس سے مسئلہ سٹیورم لیوویل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $n = 0, 1, 2, \cdots$ پر اس مسئلے کے حل لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ ہیں لہٰذا یہ امتیازی تفاعل ہیں جو مسئلہ 5.5 کے تحت قائمہ الزاویہ ہوں گے یعنی

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{5.146}$$

اور ان امتیازی تفاعل کا معیار مساوات 5.39 دیتی ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\|P_m\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \qquad m = 0, 1, \cdots \tag{5.147}$$

بیسل تفاعل (حصہ 5.4) جو مساوات بیسل (مساوات 5.76) پر پورا اترتے ہیں کے اہم انجینئری استعمال پائے جاتے ہیں مثلاً دائری سطح کی ارتعاش جس پر اس کتاب میں غور کیا جائے گا۔ مساوات بیسل کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$s^2\ddot{J}_n + s\dot{J}_n + (s^2 - n^2)J_n = 0$$

جہاں تفاعل کا s کے ساتھ تفرق کو نقطہ ظاہر کرتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ n غیر منفی عدد صحیح ہے۔ $s = \lambda x$ لیتے ہوئے جہاں λ غیر صفر مستقل ہے ہم $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\lambda}$ اور زنجیری تفرق سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں $'$ سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\dot{J}_n = \frac{J_n'}{\lambda}, \quad \ddot{J}_n = \frac{J_n''}{\lambda^2}$$

انہیں مساوات بیسل میں پر کر کے

$$x^2 J_n''(\lambda x) + xJ_n'(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - n^2)J_n(\lambda x) = 0$$

ملتا ہے جس کو x سے تقسیم کر کے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$[xJ_n'(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) J_n(\lambda x) = 0 \tag{5.148}$$

جو n کی ہر معین قیمت کے لئے ایک مساوات سٹیورم لیوویل دیتا ہے جہاں مقدار معلوم کو λ کی بجائے λ^2 لکھا گیا ہے اور

$$p(x) = x, \quad q(x) = -\frac{n^2}{x}, \quad r(x) = x$$

ہیں۔چونکہ $x = 0$ پر $r(x) = 0$ ہے لٰہذا مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $0 \le x \le R$ پر مساوات 5.148 کے وہ حل جو درج ذیل سرحدی شرط پر پورا اترتے ہوں تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیں گے۔(یہاں دھیان رہے کہ $n \neq 0$ کی صورت میں تفاعل q نقطہ $x = 0$ پر غیر استمراری ہے البتہ اس کا مسئلہ 5.5 کے ثبوت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔)

$$J_n(\lambda R) = 0 \tag{5.149}$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $J_n(s)$ کے لامحدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ $J_n(s)$ کے مثبت صفروں کو $\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \alpha_{3n} \cdots$ ، سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں مساوات 5.149 کی شرط تب پوری ہو گی جب

$$\lambda R = \alpha_{mn} \quad \implies \quad \lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R} \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.150}$$

ہو جس سے درج ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 5.7: بیسل تفاعل کی قائمیت
بیسل تفاعل $J_n(\lambda_{1n}x)$ ، $J_n(\lambda_{2n}x)$ ، $J_n(\lambda_{3n}x)$ ، $\cdots$، جہاں مساوات 5.150 λ_{mn} دیتی ہے، وقفہ $0 \le x \le R$ پر تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے ہر معین $n = 0, 1, \cdots$ کے لئے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں یعنی:

$$\int_0^R x J_n(\lambda_{mn}x) J_n(\lambda_{kn}x) \, \mathrm{d}x = 0, \qquad (k \neq m) \tag{5.151}$$

یوں ہمیں لامحدود تعداد کے قائمہ الزاویہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں جہاں n کی ہر معین قیمت ایک منفرد سلسلہ دیتی ہے۔

چونکہ $p(x) = x$ ہے لہٰذا مساوات 5.135 تا مساوات 5.137 کے تحت اگر کسی ایک ایسے سلسلے کے امتیازی تفاعل کی فوریئر تسلسل کی صورت میں کسی تفاعل $f(x)$ کو لکھنا ممکن ہو تو یہ فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = c_1 J_n(\lambda_{1n}x) + c_2 J_n(\lambda_{2n}x) + \cdots \tag{5.152}$$

اس کو **فوریئر بیسل تسلسل**[85] کہتے ہیں۔ہم اب درج ذیل ثابت کرتے ہیں جہاں $\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ ہے۔

$$\|J_n(\lambda_{mn}x)\|^2 = \int_0^R x J_n^2(\lambda_{mn}x) \, \mathrm{d}x = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R) \tag{5.153}$$

یوں مساوات 5.152 کے عددی سر c_m مساوات 5.137 سے درج ذیل اخذ ہوتے ہیں۔

$$c_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R x f(x) J_n(\lambda_{mn}x) \, \mathrm{d}x \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.154}$$

اب مساوات 5.153 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 5.148 کو $2xJ_n'(\lambda x)$ سے ضرب دے کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\{[xJ_n'(\lambda x)]^2\}' + (\lambda^2 x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}' = 0$$

---

[85] Fourier Bessel series

جس کا 0 تا R تکمل لیتے ہیں۔

$$[xJ_n'(\lambda x)]^2\Big|_0^R = -\int_0^R (\lambda^2 x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}' \,\mathrm{d}x \tag{5.155}$$

مساوات 5.99 میں x اور ν کی جگہ بالترتیب s اور n لکھتے ہوئے اور s کے ساتھ تفرق کو نقطہ سے ظاہر کرتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$-ns^{-n-1}J_n(s) + s^{-n}\dot{J}_n(s) = -s^{-n}J_{n+1}(s)$$

اس کو s^{n+1} سے ضرب دے کر اور $s = \lambda x$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں $'$ سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\lambda x J_n'(\lambda x)\frac{1}{\lambda} = nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)$$

اس طرح مساوات 5.155 کا بایاں ہاتھ

$$\Big[[nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)]^2\Big]_{x=0}^R$$

کے برابر ہو گا۔اب $\lambda = \lambda_{mn}$ کی صورت میں $J_n(\lambda R) = 0$ ہو گا اور $n = 1, 2, \cdots$ کی صورت میں $J_n(0) = 0$ ہو گا لہٰذا بایاں ہاتھ درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lambda_{mn}^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn} R) \tag{5.156}$$

مساوات 5.155 کے دائیں ہاتھ کا تکمل بالحصص درج ذیل دیتا ہے۔

$$-\Big[(\lambda^2 x^2 - n^2)J_n^2(\lambda x)\Big]_0^R + 2\lambda^2 \int_0^R xJ_n^2(\lambda x)\,\mathrm{d}x \tag{5.157}$$

$\lambda = \lambda_{mn}$ کی صورت میں اس کا پہلا حصہ $x = R$ پر صفر کے برابر ہے۔چونکہ $n = x = 0$ پر $\lambda^2 x^2 - n^2 = 0$ ہے جبکہ $x = 0$ اور $n = 1, 2, \cdots$ کی صورت میں $J_n(\lambda x) = 0$ ہے لہٰذا یہ حصہ $x = 0$ پر بھی صفر کے برابر ہو گا۔اس نتیجے اور مساوات 5.156 سے مساوات 5.153 اخذ ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 5.117 تا سوال 5.120 میں دیے گئے کثیر رکنی کو لیژانڈر کثیر رکنی کو صورت میں لکھیں۔(مساوات 5.30 کی مدد لیں۔)

سوال 5.117: $1, x, x^2, x^3, x^4$
جوابات:

$$1 = P_0(x),\ x = P_1(x),\ x^2 = \tfrac{1}{3}P_0(x) + \tfrac{2}{3}P_2(x),\ x^3 = \tfrac{3}{5}P_1(x) + \tfrac{2}{5}P_3(x),$$
$$x^4 = \tfrac{1}{5}P_0(x) + \tfrac{4}{7}P_2(x) + \tfrac{8}{35}P_4(x)$$

سوال 5.118: $3x^2 + 2x$
جواب: $2P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$

سوال 5.119: $5x^3 + 6x^2 - x - 1$
جواب: $2P_3(x) + 4P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$

سوال 5.120: $35x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 2x - 10$
جواب: $8P_4(x) - 6P_3(x) + 42P_2(x) - 11P_1(x) - P_0(x)$

سوال 5.121 تا سوال 5.123 میں دیے گئے تفاعل کی لیژانڈر فوریئر تسلسل وقفہ $-1 < x < 1$ پر دریافت کریں۔

سوال 5.121:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

جواب: مساوات 5.136 میں g_m کی جگہ P_n اور $p = 1$ پر کرتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی لیژانڈر فوریئر تسلسل $f = c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots$ لکھی جائے گی۔ مساوات 5.39 اور مساوات 5.30 استعمال کرتے ہوئے یوں مساوات 5.137 سے تسلسل کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\|P_0\|^2}\int_0^1 P_0(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 1\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}\\
c_1 &= \frac{1}{\|P_1\|^2}\int_0^1 P_1(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}\\
c_2 &= \frac{1}{\|P_2\|^2}\int_0^1 P_2(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

یوں لیژانڈر فوریئر تسلسل $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \cdots$ ہو گا۔

سوال 5.122:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

جواب: $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \cdots$

سوال 5.123:

$$f(x) = |x| \qquad -1 < x < 1$$

جواب: $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) + \cdots$

سوال 5.124: ثابت کریں کہ تفاعل قدر $\sin\theta$ کے لحاظ سے $n = 0, 1, \cdots$ کی صورت میں $P_n(\cos\theta)$ وقفہ $0 < \theta < \pi$ پر قائمہ الزاویہ تفاعل ہوں گے۔

سوال 5.125 تا سوال 5.130 ہرمائٹ کثیر رکنی[86] He_n سے متعلق سوالات ہیں جن کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{He}_0 = 1, \quad \mathrm{He}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-\frac{x^2}{2}}), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{5.158}$$

توجہ رہے کہ دیگر اعلٰی تفاعل کی طرح ہرمائٹ کثیر رکنی[87] کو بھی کئی طریقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے لٰہذا طبیعیات کے میدان میں ہرمائٹ کثیر رکنی H_n^* کی تعریف درج ذیل دی جاتی ہے۔

$$\mathrm{H}_0^* = 1, \quad \mathrm{H}_n^* = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n\, e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^n}$$

سوال 5.125: ہرمائٹ کثیر رکنی کی درج بالا تعریف سے درج ذیل لکھیں۔

$$\mathrm{He}_1(x) = x, \ \mathrm{He}_2(x) = x^2 - 1, \ \mathrm{He}_3(x) = x^3 - 3x, \ \mathrm{He}_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

سوال 5.126: ثابت کریں کہ مکلارن تسلسل

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) t^n$$

[86] فرانسیسی ریاضی دان چارلس ہرمائٹ [1822-1901]
[87] Hermite polynomials

کے عددی سر اور ہرمائٹ کثیر رکنی کا تعلق $\mathrm{He}_n(x) = n! a_n(x)$ ہے۔(آپ $tx - \frac{t^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}$ لکھ سکتے ہیں۔) درج بالا کا بایاں ہاتھ یعنی $e^{tx-\frac{t^2}{2}}$ ہرمائٹ کثیر رکنی کا **پیدا کار تفاعل** کہلاتا ہے۔

سوال 5.127: ثابت کریں کہ ہرمائٹ کثیر رکنی درج ذیل تعلق پر پورا اترتے ہیں۔(اشارہ۔ ہرمائٹ کثیر رکنی کی تعریف مساوات 5.158 کا تفرق لیں۔)

$$\mathrm{He}_{n+1}(x) = x\,\mathrm{He}_n(x) - \mathrm{He}'_n(x)$$

سوال 5.128: ہرمائٹ کثیر رکنی کے پیدا کار تفاعل (سوال 5.126) کا x کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathrm{He}'_n(x) = n\,\mathrm{He}_{n-1}(x)$$

اس کلیے کے ساتھ سوال 5.127 میں دیے گئے کلیہ میں n کی جگہ $n-1$ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\mathrm{He}_n(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

$$y'' - xy' + ny = 0$$

سوال 5.129: سوال 5.128 میں دیا گیا تفرقی مساوات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $w = e^{-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{He}_n(x)$ درج ذیل **مساوات ویبر**[88] کا حل ہے۔

$$w'' + (n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)w = 0, \qquad n = 0, 1, \cdots$$

سوال 5.130: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty < x < \infty$ (x محور) پر تفاعل قدر $p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ کے لحاظ سے ہرمائٹ کثیر رکنی قائمہ الزاویہ ہیں۔(اشارہ۔ سوال 5.128 میں دیے گئے کلیے کا تکمل بالحصص لیں۔)

سوال 5.131 تا سوال 5.135 **لاگیغ کثیر رکنی**[89] پر مبنی ہیں۔لاگیغ کثیر رکنی[90] درج ذیل تفاعل کو کہتے ہیں۔

$$\mathrm{L}_0 = 1, \quad \mathrm{L}_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n(x^n e^{-x})}{\mathrm{d}x^n}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

---

[88] جرمن ریاضی دان ہائنرک ویبر [1842-1913]
[89] Laguerre polynomials
[90] فرانسیسی ریاضی دان ایڈمنڈ نیکولس لاگیغ [1834-1886]

سوال 5.131: لاگیغ کثیر رکنی کی درج بالا تعریف سے درج ذیل لکھیں۔

$$\mathrm{L}_1(x) = 1 - x,\ \mathrm{L}_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2,\ \mathrm{L}_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

سوال 5.132: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathrm{L}_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\binom{n}{m} x^m = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{4}x^2 - + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

سوال 5.133: لاگیغ تفاعل $\mathrm{L}_n(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

$n = 0, 1, 2, 3$ کے لئے اس حقیقت کی تصدیق کریں۔

سوال 5.134: تکمل لیتے ہوئے ثابت کریں کہ مثبت x محور یعنی وقفہ $0 \leq x < \infty$ پر تفاعل قدر $p(x) = e^{-x}$ کے لحاظ سے L_0 ، $\mathrm{L}_1(x)$ اور $\mathrm{L}_2(x)$ قائمہ الزاویہ ہیں۔

سوال 5.135: ثابت کریں کہ مثبت x محور یعنی وقفہ $0 \leq x < \infty$ پر تفاعل قدر $p(x) = e^{-x}$ کے لحاظ سے تمام لاگیغ تفاعل قائمہ الزاویہ ہیں۔(اشارہ۔ وقفہ $0 \leq x < \infty$ پر تفاعل $e^{-x}\mathrm{L}_m(x)\mathrm{L}_n(x)$ کے تکمل پر غور کریں جہاں $m < n$ ہے۔چونکہ L_m میں بلند تر طاقت والا جزو x^m ہے لہٰذا اس سے اخذ کریں کہ اتنا کافی ہو گا کہ وقفہ $0 \leq x < \infty$ پر $e^{-x}x^k\mathrm{L}_n(x)$ کا تکمل صفر کے برابر ثابت کیا جائے، جہاں $k < n$ ہے۔بار بار تکمل بالحصص سے ایسا ثابت کریں۔

جواب:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}x^k\mathrm{L}_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^k \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{k}{n!}\int_0^\infty x^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= \cdots = (-1)^k\frac{k!}{n!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= 0 \quad \text{اگر} \quad (n > k)
\end{aligned}$$

سوال 5.136 تا سوال 5.138 چبیشف کثیر رکنی[91] پر مبنی ہیں جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x), \quad \mathrm{U}_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}x]}{\sqrt{1-x^2}} \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{5.159}$$

$\mathrm{T}_n(x)$ چبیشف کثیر رکنی[92] کی پہلی قسم اور $\mathrm{U}_n(x)$ اس کی دوسری قسم کہلاتے ہیں۔

سوال 5.136: چبیشف تفاعل (مساوات 5.159) سے درج ذیل لکھیں۔

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1(x) = x,\ \mathrm{T}_2(x) = 2x^2 - 1,\ \mathrm{T}_3(x) = 4x^3 - 3x,\\
&\mathrm{U}_0 = 1,\ \mathrm{U}_1(x) = 2x,\ \mathrm{U}_2(x) = 4x^2 - 1,\ \mathrm{U}_3(x) = 8x^3 - 4x,
\end{aligned}$$

سوال 5.137: ثابت کریں کہ چبیشف تفاعل $\mathrm{T}_n(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(1 - x^2)\mathrm{T}_n'' - x\mathrm{T}_n' + n^2\mathrm{T}_n = 0$$

جواب: $v(\theta) = \cos n\theta$ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\theta^2} + n^2 v = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ $x = \cos\theta$ کا استعمال کریں۔

سوال 5.138: ثابت کریں کہ چبیشف تفاعل T_n وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر تفاعل قدر $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ ہیں۔ (اشارہ۔ تکمل لیتے ہوئے $\cos^{-1}x = \theta$ لکھیں۔)

سوال 5.139 تا سوال 5.144 میں دیے گئے تفاعل $f(x)$ کا وقفہ $0 < x < R$ پر درج ذیل صورت کی فوریئر بیسل تسلسل دریافت کریں۔

$$f(x) = c_0 J_0(\lambda_{10}x) + c_0 J_0(\lambda_{20}x) + c_0 J_0(\lambda_{30}x) + \cdots$$

سوال 5.139:

$f(x) = 1$ اشارہ۔ مساوات 5.98 کا استعمال کریں

[91] روسی ریاضی دان پفنوٹی لووچ چبیشف [1821-1894]
[92] Tchebichef polynomials', first and second kind

جواب: مساوات 5.154 سے عددی سر لکھ کر $\nu = 1$ لیتے ہوئے مساوات 5.98 استعمال کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
c_m &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_{m0})} \int_0^R x J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{R}x\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{\alpha_{m0}^2 J_1^2(\alpha_{m0})} \int_0^{\alpha_{m0}} w J_0(w) \,\mathrm{d}w \\
&= \frac{2}{\alpha_{m0} J_1(\alpha_{m0})} \\
f(x) &= 2\left(\frac{J_0(\lambda_{10})x}{\alpha_{10}J_1(\alpha_{10})} + \frac{J_0(\lambda_{20})x}{\alpha_{20}J_1(\alpha_{20})} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

سوال 5.140:

$$
f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & a < x < R \end{cases}
$$

جواب: $c_m = \frac{2akJ_1\left(\frac{\alpha_{m0}}{R}a\right)}{\alpha_{m0}RJ_1^2(\alpha_{m0})}$

سوال 5.141:

اشارہ۔ مساوات 5.98 استعمال کرتے ہوئے تکمل بالحصص لیں $\quad f(x) = 1 - x^2, \quad (R = 1)$

جواب: $c_m = \frac{4J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}^2 J_1^2(\alpha_{m0})}$

سوال 5.142:

$$
f(x) = x^2
$$

جواب: $c_m \frac{2R^2}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}\left[1 - \frac{2J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}\right]$

سوال 5.143: ثابت کریں کہ $f(x) = x^n$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہے کو وقفہ $0 < x < 1$ پر درج ذیل فوریئر بیسل تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$
x^n = \frac{2J_n(\alpha_{1n}x)}{\alpha_{1n}J_{n+1}(\alpha_{1n})} + \frac{2J_n(\alpha_{2n}x)}{\alpha_{2n}J_{n+1}(\alpha_{2n})} + \cdots
$$

سوال 5.144: تفاعل $f(x) = x^3$ کو وقفہ $0 < x < 2$ پر J_3 کی فوریئر بیسل تسلسل سے ظاہر کریں۔

جواب: $x^3 = 16\left[\frac{J_3(\frac{\alpha_{13}}{2}x)}{\alpha_{13}J_4(\alpha_{13})} + \frac{J_3(\frac{\alpha_{23}}{2}x)}{\alpha_{23}J_4(\alpha_{23})} + \cdots\right]$

باب 6

لاپلاس تبادلہ

لاپلاس بدل کی ترکیب سے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات حل کیے جاتے ہیں۔یہ ترکیب تین قدم پر مشتمل ہے۔

- پہلا قدم: ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے سادہ **ضمنی مساوات** حاصل کی جاتی ہے۔
- دوسرا قدم: ضمنی مساوات کو خالصتاً الجبرائی طور پر حل کیا جاتا ہے۔
- تیسرا قدم: ضمنی مساوات کے حل کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے اصل حل حاصل کیا جاتا ہے۔

یوں لاپلاس بدل تفرقی مساوات کے مسئلے کو سادہ الجبرائی مسئلہ میں تبدیل کرتا ہے۔تیسرے قدم پر الٹ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے عموماً ایسی جدول کا سہارا لیا جاتا ہے جس میں تفاعل اور تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل درج ہوں۔اس باب کے آخر میں ایسا جدول (جدول 6.2) دکھایا گیا ہے۔

انجینئری میں لاپلاس بدل کی ترکیب اہم کردار ادا کرتی ہے، بالخصوص ان مسائل میں جہاں جبری تفاعل غیر استمراری ہو، مثلاً جب جبری تفاعل کچھ وقفے کے لئے کار آمد ہو یا جبری تفاعل غیر سائن نما دہراتا تفاعل ہو۔

اب تک غیر متجانس مساوات کا عمومی حل حاصل کرتے ہوئے پہلے مطابقتی متجانس مساوات کا حل اور پھر غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل حاصل کیا جاتا رہا۔لاپلاس بدل کی ترکیب میں عمومی حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) مسائل کے حل میں عمومی حل حاصل کرنے کے بعد ابتدائی (سرحدی) شرائط پر کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی چونکہ حل یہ شرائط شامل ہوتے ہیں۔

6.1 لاپلاس بدل۔الٹ لاپلاس بدل۔خطیت

فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر معین ہے۔ ہم $f(t)$ کو e^{-st} سے ضرب دیتے ہوئے، t کے ساتھ، 0 تا ∞ ، تکمل لیتے ہیں۔ اگر ایسا تکمل موجود ہو تو یہ s پر منحصر ہو گا لہٰذا اس کو $F(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \tag{6.1}$$

تفاعل $F(s)$ کو تفاعل $f(t)$ کا **لاپلاس بدل**[1] کہا جاتا ہے اور اس کو $\mathcal{L}(f)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \tag{6.2}$$

$f(t)$ سے $F(s)$ کے حصول کو **لاپلاس تبادلہ**[2] کہتے ہیں۔

اسی طرح $f(t)$ کو $F(s)$ کا **الٹ لاپلاس بدل**[3] کہتے ہیں جسے $\mathcal{L}^{-1}(F)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) \tag{6.3}$$

علامت نویسی

اصل تفاعل کو چھوٹے لاطینی حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ لاپلاس بدل کو اسی حرف تہجی کی بڑی صورت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $f(t)$ کا بدل $F(s)$ ہو گا اور $g(t)$ کا لاپلاس بدل $G(s)$ ہو گا۔

مثال 6.1: تفاعل $f(t) = 1$ ، جہاں $t \geq 0$ ہے، کا لاپلاس بدل مساوات 6.2 سے بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

ہو گا جو $s > 0$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

---

[1] Laplace transform
[2] Laplace transformation
[3] inverse Laplace transform

تکمل 6.2 کی علامت پر آسائش ضرور ہے لیکن اس پر مزید غور کی ضرورت ہے۔اس تکمل کا وقفہ لامتناہی ہے۔ایسے تکمل کو **غیر مناسب تکمل**[4] کہتے ہیں اور حزب تعریف، اس کی قیمت درج ذیل اصول کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

یوں اس مثال میں اس آسائش علامت کا مطلب درج ذیل ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^0 \right] = \frac{1}{s}, \quad (s > 0)$$

اس پورے باب میں تکمل کی یہی علامت استعمال کی جائے گی۔ □

مثال 6.2: تفاعل $f(t) = e^{at}$ جہاں $t \geq 0$ اور a مستقل ہے کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دریافت کریں۔

حل: مساوات 6.2 سے

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,\mathrm{d}t = \left. \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \right|_0^\infty$$

ملتا ہے۔اب اگر $s - a > 0$ ہو (یعنی s کی قیمت a سے زیادہ چننی گئی ہو۔) تب درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

□

اگرچہ ہم بالکل اسی طرز پر دیگر تفاعل کے لاپلاس بدل بذریعہ تکمل حاصل کر سکتے ہیں، حقیقت میں لاپلاس تبادلہ کے ایسی کئی خواص ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے دیگر لاپلاس بدل نہایت عمدگی کے ساتھ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔لاپلاس تبادلہ کی ایک خاصیت خطیت ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

مسئلہ 6.1: لاپلاس تبادلہ کی خطیت

لاپلاس تبادلہ خطی عمل ہے۔یوں ایسے تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$ ، جن کے لاپلاس بدل موجود ہوں، کے عمومی مجموعے کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

[4] improper integral

ثبوت : لاپلاس تبادلہ کی تعریف سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]
\end{aligned}
$$

□

مثال 6.3: آئیں تفاعل $f(t) = \cosh at$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.1 اور مثال 6.2 کی مدد سے لکھیں۔ چونکہ $\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at}+e^{-at})$ ہے لہٰذا

$$
\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}
$$

ہو گا جہاں $s > a \geq 0$ چنا گیا ہے۔ □

مثال 6.4: آئیں تفاعل $\sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ چونکہ $\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})$ ہے لہٰذا مسئلہ خطیت سے تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$
\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}
$$

□

مثال 6.5: $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: انہیں $\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})$ اور $\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$ لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\cos\omega t) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}(\sin\omega t) &= \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) - \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

جدول 6.1: چند بنیادی تفاعل $f(t)$ اور ان کے لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$

شمار	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$	شمار	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$\frac{1}{s}$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
4	t^n $(n=1,2,\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
5	t^a $(a>0)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

□

جدول 6.1 میں چند اہم بنیادی تفاعل اور ان کے لاپلاس بدل دیے گئے ہیں (اس باب کے آخر میں جدول 6.2 میں مزید لاپلاس جوڑیاں پیش کی گئی ہیں)۔اس جدول میں دیے لاپلاس بدل جاننے کے بعد ہم تقریباً ان تمام تفاعل کے بدل، لاپلاسی خواص سے حاصل کر پائیں گے، جو ہمیں درکار ہوں گے۔

جدول 6.1 میں پہلا، دوسرا اور تیسرا کلیہ چوتھے کلیے سے اخذ کیے جا سکتے ہیں جبکہ چوتھا کلیہ از خود پانچویں کلیہ میں مساوات 5.93 استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(n+1) = n!$ لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے، جہاں n غیر منفی $n \geq 0$ عدد صحیح ہے۔ پانچواں کلیہ، لاپلاس بدل کی تعریف مساوات 6.2

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-st} t^a \,\mathrm{d}t$$

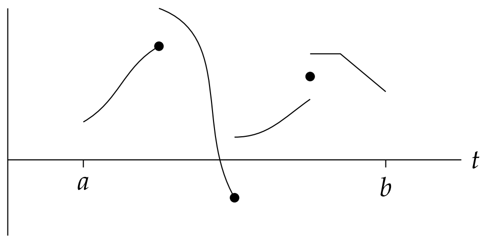
میں $st = x$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.91 کے استعمال سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{\mathrm{d}x}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^a \,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a+1)}{s+1}, \qquad (s>0)$$

لاپلاس بدل کی وجودیت اور یکتائی

اگر تمام $t \geq 0$ کے لئے، کسی مستقل k اور M پر تفاعل f بڑھنے کی پابندی

$$\left|f(t)\right| \leq M e^{kt} \tag{6.4}$$



شکل 6.1: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$۔ غیر استمراری مقام پر تفاعل کی قیمت کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

پر پورا اترتا ہو، تب اس کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔ ہم کہتے ہیں کہ نہایت تیزی سے نہ بڑھنے والے تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔

$f(t)$ کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے البتہ اس کا ٹکڑوں میں استمراری[5] ہونا لازم ہے۔ اگر محدود وقفہ $a \le t \le b$ جس پر $f(t)$ معین ہو، کو کئی ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے پر $f(t)$ استمراری ہو اور t کا اندرون ٹکڑے سے ٹکڑے کے (دونوں) سروں تک پہنچنے پر $f(t)$ کی قیمت کا حد[6] محدود حاصل ہو تب $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری کہلائے گا۔ ایسی صورت میں، جیسا شکل 6.1 میں دکھایا گیا ہے، محدود چھلانگ[7] پائے جائیں گے جو غیر استمراری صورت کی واحد وجہ ہو گی۔ عموماً عملی مسائل اسی نوعیت کے ہوتے ہیں۔ درج ذیل مسئلہ بھی اسی نوعیت کا ہے۔

مسئلہ 6.2: مسئلہ وجودیت لاپلاس بدل
اگر نصف محور $t \ge 0$ کے ہر محدود وقفے پر تفاعل $f(t)$ معین اور ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.4 پر، تمام $t \ge 0$ اور کسی مستقل M اور k کے لئے، پورا اترتا ہو تب لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ تمام $s > k$ کے لئے موجود ہو گا۔

ثبوت: چونکہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے لہٰذا t محور کے کسی بھی محدود وقفے پر $e^{-st}f(t)$ قابل تکمل ہے۔ مساوات 6.4 کو دیکھ کر، $s > k$ تصور کرتے ہوئے (جو درج ذیل آخری تکمل میں درکار ہے)، لاپلاس بدل کی وجودیت کا ثبوت حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|\mathcal{L}(f)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^\infty \left|f(t)\right| e^{-st}\,\mathrm{d}t \le \int_0^\infty M e^{kt} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s-k}$$

[5] piecewise continuous
[6] limit
[7] jumps

□

کسی بھی تفاعل کا مساوات 6.4 میں دیے گئے شرط پر پورا اترنے کو با آسانی دیکھا جا سکتا ہے، مثلاً $\cosh t < e^t$ یا $t^n < n!e^t$ (چونکہ $\frac{t^n}{n!}$ مکلارن تسلسل کا ایک رکن ہے)۔ ایسا تفاعل جو مساوات 6.4 پر پورا نہ اترتا ہو کی مثال e^{t^2} ہے۔آپ سوال 6.15 میں دیکھیں گے کہ مسئلہ 6.2 میں دیے گئے شرائط لاپلاس بدل کی وجودیت کے لئے کافی ہیں نا کہ لازمی ہیں۔

یکتائی

اگر کسی تفاعل کا لاپلاس بدل موجود ہو تو یہ بدل یکتا ہو گا۔اسی طرح اگر (حقیقی مثبت محور پر معین) دو تفاعل کے لاپلاس بدل یکساں ہوں تب یہ تفاعل، کسی بھی مثبت لمبائی کے وقفے پر، آپس میں مختلف نہیں ہو سکتے ہیں، البتہ تنہا نقطوں پر ان کی قیمت غیر یکساں ہو سکتی ہے۔یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ الٹ لاپلاس بدل یکتا ہے۔ بالخصوص دو ایسے استمراری تفاعل جن کا لاپلاس بدل یکساں ہو، آپس میں مکمل طور پر یکساں ہوں گے۔

سوالات

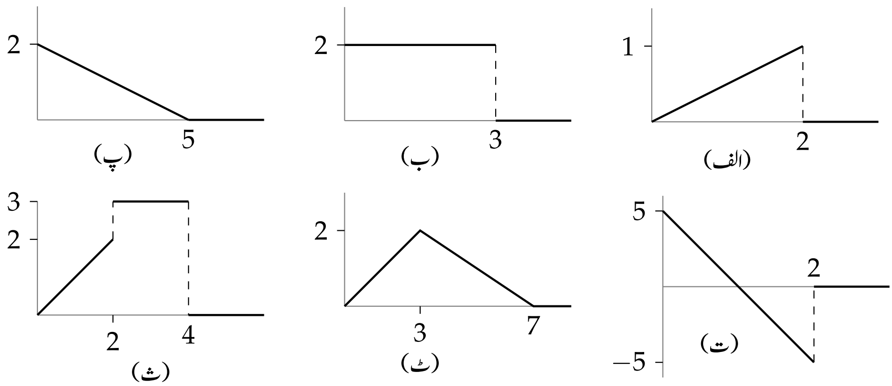
سوال 6.1 تا سوال 6.8 میں لاپلاس بدل حاصل کریں۔ a اور b کو مستقل تصور کریں۔

سوال 6.1: $2t-3$
جواب: $\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}$

سوال 6.2: $(at+b)^2$
جواب: $a(\frac{b}{s^2}+\frac{2a}{s^3})+b(\frac{b}{s}+\frac{a}{s^2})$

سوال 6.3: $\sin 2\pi t$
جواب: $\frac{2\pi}{s^2+4\pi^2}$

سوال 6.4: $\sin^2 2\pi t$
جواب: $\frac{8\pi^2}{s(s^2+16\pi^2)}$



شکل 6.2: سوال 6.9 تا سوال 6.9 کے اشکال۔

سوال 6.5: $e^{-3t}\sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

سوال 6.6: $e^{2t}\cos 3t$
جواب: $\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

سوال 6.7: $\cos(2t-\frac{\pi}{3})$
جواب: $\frac{\frac{s}{2}+\sqrt{3}}{s^2+4}$

سوال 6.8: $2\sin(5t+\pi)$
جواب: $\frac{-10}{s^2+25}$

سوال 6.9: شکل 6.2-الف میں ٹکڑوں میں استمراری تفاعل دکھایا گیا ہے۔تمام ٹکڑوں کی ریاضی مساوات حاصل کریں۔ تکمل 6.2 کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1-e^{-2s}(2s+1)}{2s^2}$

سوال 6.10: شکل 6.2-ب میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2}{s}(1-e^{-3s})$

سوال 6.11: شکل 6.2-پ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2e^{-5s}+10s-2}{5s^2}$

سوال 6.12: شکل 6.2-ت میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{5(s+1)e^{-2s}+5(s-1)}{s^2}$

سوال 6.13: شکل 6.2-ٹ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{4-7e^{-3s}+3e^{-7s}}{6s^2}$

سوال 6.14: شکل 6.2-ث میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1+(s-1)e^{-2s}-3se^{-4s}}{s^2}$

سوال 6.15: وجودیت
تفاعل $\frac{1}{\sqrt{t}}$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ایسا کرتے ہوئے $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ (مساوات 5.97) کا استعمال کریں۔ اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ مسئلہ 6.2 میں دیے شرائط کافی ہیں نا کہ لازمی۔

جواب: $\frac{\sqrt{\pi}}{s}$

سوال 6.16: e^{at} کا لاپلاس بدل $\cosh at$ اور $\sinh at$ کے لاپلاس بدل سے حاصل کریں۔

جواب: $e^{at}=\sinh at+\cosh at$ لکھ کر جواب $\frac{1}{s-a}$ ملتا ہے۔

سوال 6.17: پیمائشی فیتہ میں ردوبدل
ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(ct)]=\frac{F(\frac{s}{c})}{c}$ ہو گا جہاں c مستقل ہے۔اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے $\mathcal{L}(\cos t)$ سے $\mathcal{L}(\cos\omega t)$ حاصل کریں۔

جواب: مساوات 6.2 استعمال کرتے ہوئے کلیہ ثابت ہو گا۔

سوال 6.18: الٹ لاپلاس بدل کی خطیت
$\mathcal{L}$ کی خطیت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\mathcal{L}^{-1}$ خطی ہے۔

سوال 6.19 تا سوال 6.26 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.19: $\frac{0.5s+1.3}{s^2+1.69}$
جواب: $\sin(1.3t) + 0.5\cos(1.3t)$

سوال 6.20: $\frac{4s+1}{s^2-16}$
جواب: $\frac{1}{8}(17e^{4t} + 15e^{-4t})$

سوال 6.21: $\frac{s}{m^2s^2+n^2}$
جواب: $\frac{\cos\frac{nt}{m}}{m^2}$

سوال 6.22: $\frac{1}{(s+3)(s-2)}$
جواب: $\frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})$

سوال 6.23: $\frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^5}$
جواب: $t^2 + \frac{t^4}{8}$

سوال 6.24: $\frac{3s+8}{s^2-9}$
جواب: $\frac{1}{6}(17e^{3t} + e^{-3t})$

سوال 6.25: $\frac{s-1}{s^2-s-6}$
جواب: $\frac{1}{5}(2e^{3t} + 3e^{-2t})$

سوال 6.26: $\frac{1}{(s-a)(s+b)}$
جواب: $\frac{1}{a+b}(e^{at} - e^{-bt})$

6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔سادہ تفرقی مساوات

لاپلاس بدل کو استعمال کرتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل حل کیے جاتے ہیں۔لاپلاس بدل کے استعمال سے احصائی اعمال کی جگہ الجبرائی اعمال استعمال کیے جاتے ہیں۔یوں $f(t)$ کا تفرق، $F(s)$ کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہو گا جبکہ $f(t)$ کا تکمل، $F(s)$ کو s سے تقسیم کرنے کے مترادف ہو گا۔

مسئلہ 6.3: $f(t)$ کی تفرق کا لاپلاس بدل
اگر $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہو، مساوات 6.4 پر پورا اترتا ہو اور $f'(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو تب، $s > k$ کی صورت میں، $f'(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) \qquad (s > k) \tag{6.5}$$

ثبوت: ہم یہ فرض کرتے ہوئے کہ f' بھی استمراری ہے مساوات 6.5 ثابت کرتے ہیں۔یوں لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) اور تکمل بالحصص سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = f(0) + sF(s)$$

چونکہ $f(t)$ مساوات 6.4 پر پورا اترتی ہے لہٰذا $s > k$ کی صورت میں $t = \infty$ پر $e^{-st} f(t)$ صفر دیگا جبکہ $t = 0$ پر یہ $f(0)$ دیگا۔آخری تکمل $\mathcal{L}(f) = F(s)$ کے برابر ہے جس کا حل، $s > k$ کی صورت میں، مسئلہ 6.2 کے تحت موجود ہے۔یوں $\mathcal{L}(f')$ کا حل موجود ہے۔

اگر f' ٹکڑوں میں استمراری ہو تب درج بالا ثبوت میں تکمل کو ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے (وقفے) پر f' استمراری ہو۔ سوال 6.40 میں اس پر غور کیا گیا ہے۔

□

f'' پر مساوات 6.5 لاگو کر کے حاصل جواب میں مساوات 6.5 پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \tag{6.6}$$

اسی ترکیب کو f''' پر لاگو کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \tag{6.7}$$

ملتا ہے۔اس ترکیب کو بار بار استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 6.4: بلند درجی تفرق f^n

اگر $f(t)$ اور اس کے تفرقات $f'(t)$ ، $f''(t)$ ، $\cdots$ ، $f^{(n-1)}(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہوں، مساوت 6.4 پر پورا اترتے ہوں اور $f^{(n)}(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو تب، $s > k$ کی صورت میں، $f^{(n)}(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{6.8}$$

مثال 6.6: تفاعل $f(t) = t^2$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f' = 2t$ اور $f'' = 2$ ہیں۔یوں $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 0$ اور $f''(0) = 2$ ملتے ہیں۔اب $\mathcal{L}(2) = \frac{2}{s}$ ہے لہٰذا مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو جدول 6.1 کے عین مطابق ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = \mathcal{L}(2) = \frac{2}{s} = s^2\mathcal{L}(f), \quad \implies \quad \mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

عموماً کسی بھی تفاعل کا لاپلاس بدل کئی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ □

مثال 6.7: تفاعل $f(t) = \sin^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0) = 0$ ہے جبکہ $f' = 2\sin t\cos t = \sin 2t$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 6.5 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4} = s\mathcal{L}(f) \quad \implies \quad \mathcal{L}(f) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

□

مثال 6.8: تفاعل $f(t)=t\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0)=0$ ہے جبکہ

$$
\begin{aligned}
f'(t)&=\sin\omega t-\omega t\cos\omega t, \quad f'(0)=0,\\
f''(t)&=2\omega\cos\omega t-\omega^2 t\sin\omega t=2\omega\cos\omega t-\omega^2 f(t)
\end{aligned}
$$

ہیں۔یوں مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(f'')=2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t)-\omega^2\mathcal{L}(f)=s^2\mathcal{L}(f)$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل پر کرتے

$$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}(f)=2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t)=\frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}$$

ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t\sin\omega t)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

□

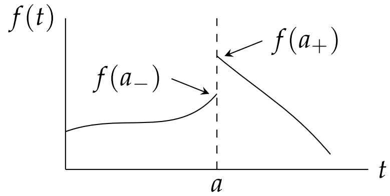
مثال 6.9: تفاعل $f(t)=t\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
f(t)&=t\cos\omega t, \quad f(0)=0\\
f'(t)&=\cos\omega t-\omega t\sin\omega t, \quad f'(0)=1\\
f''(t)&=-2\omega\sin\omega t-\omega^2 f(t)
\end{aligned}
$$

یوں مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'')&=s^2\mathcal{L}(f)-sf(0)-sf'(0)\\
&=s^2F(s)-1
\end{aligned}
$$



شکل 6.3: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$ (مثال 6.10)

ساتھ ہی ساتھ f'' کی مساوات کا لاپلاس بدل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= \mathcal{L}[-2\omega\sin\omega t-\omega^2 f(t)]\\ &= -\frac{2\omega^2}{s^2+\omega^2}-\omega^2F(s)\end{aligned}$$

ان دونوں جوابات کو برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$F(s)=\mathcal{L}[t\cos\omega t]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{6.9}$$

□

مثال 6.10: استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.3 دیتی ہے۔آئیں ٹکڑوں میں استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔شکل 6.3 کے تفاعل میں $t=a(>0)$ پر تفاعل غیر استمراری ہے جبکہ بقایا تمام شرائط وہی ہیں جو مسئلہ 6.3 میں تھے۔اس تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

شکل 6.3 میں دکھایا گیا تفاعل $t=a$ غیر استمراری ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $t=a$ پر تفاعل چھلانگ[8] لگاتا ہے یا کہ تفاعل میں $t=0$ پر چھلانگ پائی جاتی ہے۔نقطہ چھلانگ تک بائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد[9] کو $f(a_-)$ لکھا جاتا ہے جبکہ نقطہ چھلانگ تک دائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد کو $f(a_+)$ لکھا جاتا ہے۔یوں $t=a$ پر تفاعل کی چھلانگ $f(a_+)-f(a_-)$ ہو گی۔

لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو ایسے ٹکڑوں (وقفوں) میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ہر وقفے پر $f(t)$ استمراری ہے۔

$$\mathcal{L}(f')=\int_{a_+}^{\infty}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\int_0^{a_-}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t$$

---

[8] jump
[9] limit

پہلے تکمل کا ابتدائی حد a_+ ہے جو $t = a$ کے دائیں طرف کو ظاہر کرتی ہے جہاں تفاعل کی قیمت $f(a_+)$ ہے۔اسی طرح دوسری تکمل کا اختتامی حد a_- ہے جس پر تفاعل کی قیمت $f(a_-)$ ہے۔انہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ تکمل بالحصص سے

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f') &= e^{-st}f(t)\Big|_{a_+}^{\infty} + s\int_{a_+}^{\infty} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + e^{-st}f(t)\Big|_{0}^{a_-} + s\int_{0}^{a_-} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -e^{-sa}f(a_+) + s\int_{a_+}^{\infty} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + e^{-sa}f(a_-) - f(0) + s\int_{0}^{a_-} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= s\int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t - f(0) - e^{-sa}[f(a_+) - f(a_-)] \\
&= sF(s) - f(0) - e^{-sa}[f(a_+) - f(a_-)]
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں e^{-st} استمراری ہونے کی بدولت $e^{-sa_+} = s^{-sa_-} = s^{-sa}$ ہے۔ □

مثال 6.11: تفرقی مساوات

درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

حل: پہلا قدم ضمنی مساوات کا حصول ہے۔تا معلوم تفاعل $y(t)$ کا لاپلاس بدل $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ لکھ کر مساوات 6.5 اور مساوات 6.6 میں دیے گئے ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(y') &= sY - y(0) = sY - 2 \\
\mathcal{L}(y'') &= s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2s + 1
\end{aligned}
$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔ Y کی مساوات کو **ضمنی مساوات**[10] کہتے ہیں۔

$$s^2Y + 3sY + 2Y = 2s + 5$$

دوسرا قدم ضمنی مساوات کا الجبرائی حل ہے۔موجودہ ضمنی مساوات کو

$$(s+1)(s+2)Y = 2s + 5$$

---

[10] subsidiary equation

لکھ کر جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Y = \frac{2s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

تیسرا قدم الٹ لاپلاس بدل حاصل کرنا ہے۔جدول 6.1 سے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] = 3e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں خطیت (مسئلہ 6.1) استعمال کرتے ہوئے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے کا حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = 3e^{-t} - e^{-2t}$$

□

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ لاپلاس بدل سے تفرقی مساوات کے حل میں شروع سے ابتدائی قیمتیں مسئلے کا حصہ بنتی ہیں۔

تفاعل کے تکمل کا لاپلاس بدل

ہم نے دیکھا کہ تفاعل کے تفرق کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہے۔چونکہ تکمل اور تفرق آپس میں الٹ اعمال ہیں لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تفاعل کے تکمل کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل تقسیم s ہو گا۔

مسئلہ 6.5: $f(t)$ کی تکمل کا لاپلاس بدل
اگر $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.4 پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \qquad (s>0,\ s>k) \tag{6.10}$$

ثبوت : فرض کریں کہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے اور مساوات 6.4 پر پورا اترتی ہے۔اب گر منفی k کے لئے مساوات 6.4 کی شرط پوری ہوتی ہو تب مثبت k کے لئے بھی یہ شرط پوری ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ k مثبت ہے لہٰذا تکمل

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.11}$$

استمراری ہو گا اور مساوات 6.4 کے استعمال سے

$$\left|g(t)\right| \le \int_0^t \left|f(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \le M\int_0^t e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{M}{k}(e^{kt}-1) \qquad (k>0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔مزید ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f(t)$ غیر استمراری ہو، $g'(t) = f(t)$ ہو گا۔اس طرح $g'(t)$ ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو گا لہٰذا مسئلہ 6.3 کے تحت

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \qquad (s>k)$$

ہو گا۔اب مساوات 6.11 سے $g(0) = 0$ ملتا ہے لہٰذا $\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(g)$ ہو گا جو مساوات 6.10 ہی ہے۔

□

مساوات 6.10 میں $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ لکھ کر اور اطراف بدل کر، الٹ لاپلاس بدل لینے سے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.12}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 6.10 کی جڑواں مساوات ہے۔

مثال 6.12: $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے تفاعل $f(t)$ حاصل کریں۔

حل: جدول 6.1

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

دیتی ہے۔یوں مسئلہ 6.5 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right] = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

حاصل ہو گا۔ مسئلہ 6.5 ایک مرتبہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]=\frac{1}{\omega^2}\int_0^t(1-\cos\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

$\square$

سوالات

سوال 6.27: $\sin^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.7 میں حاصل کیا گیا۔ یہاں $\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$ لکھ کر لاپلاس بدل دوبارہ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{2}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}]=\frac{2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.28: $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.7 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.29: $\cos^2 t=1-\sin^2 t$ لکھ کر $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.30: ہم نے مثال 6.12 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کیا۔ اسی کو درج ذیل لکھ کر دوبارہ الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)$$

سوال 6.31: مسئلہ 6.3 استعمال کرتے ہوئے $\sin\omega t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.32: تفاعل $f(t)=\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.6 حاصل کریں۔

جواب: $f(0)=0$ ہے جبکہ $f'=\omega \cos \omega t$ اور $f''=-\omega^2 \sin \omega t=-\omega^2 f$ ہیں۔یوں $f'(0)=\omega$ ملتا ہے۔ مساوات 6.6 سے $\mathcal{L}(f'')=-\omega^2 \mathcal{L}(f)=s^2 \mathcal{L}(f)-s(0)-\omega$ لکھا جائے گا جس سے جدول 6.1 میں دیا گیا جواب $\mathcal{L}(f)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ملتا ہے۔

سوال 6.33: تفاعل $f(t)=\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.6 حاصل کریں۔جدول سے جواب دیکھیں۔

سوال 6.34: مسئلہ 6.4 استعمال کرتے ہوئے $f(t)=t^n$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں جہاں t عدد صحیح ہے۔

جواب: چونکہ $f(0)=0$ ، $f'(0)=0$ ، $\cdots$ ، $f^{(n-1)}(0)=0$ ہیں جبکہ $f^n=n!$ ہے لہٰذا مسئلہ 6.4 سے $\mathcal{L}(f^n)=s^n F(s)$ لکھا جائے گا جبکہ $\mathcal{L}(f^{(n)})=\mathcal{L}(n!)=\frac{n!}{s}$ ہے۔یوں $\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.35: ہم نے مثال 6.9 میں $t\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا۔اسی طرز پر $t \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

سوال 6.36: $t \sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$

سوال 6.37: $t\cosh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

سوال 6.38: مثال 6.9 اور سوال 6.35 میں بالترتیب $t\cos \omega t$ اور $t \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا گیا۔انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t-\omega t\cos \omega t) \tag{6.13}$$

جواب: $t\sin\omega t$ کے بدل سے $\mathcal{L}^{-1}\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} = t\sin\omega t$ لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 6.5 سے $\mathcal{L}^{-1}\frac{2\omega}{(s^2+\omega^2)^2} = \int_0^t \tau\sin\omega\tau \,\mathrm{d}\tau$ ملتا ہے۔دائیں ہاتھ تکمل بالحصص سے $\frac{\sin\omega t}{\omega^3} - \frac{t\cos\omega t}{\omega^2}$ ملتا ہے۔ان نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.39: درج ذیل ثابت کریں۔سوال 6.38 کی طرز پر حل کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t) \tag{6.14}$$

سوال 6.40: $f'(t)$ میں محدود چھلانگ نقطہ t_1 ، t_2 ، $\cdots$ ، t_n پر پائے جاتے ہیں جبکہ $f(t)$ استمراری ہے۔ $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ لیتے ہوئے مسئلہ 6.3 ثابت کریں۔

جواب:

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^{t_{1-}} e^{-st} f' \,\mathrm{d}t + \int_{t_{1+}}^{t_{2-}} e^{-st} f' \,\mathrm{d}t + \int_{t_{2+}}^{t_{3-}} e^{-st} f' \,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{t_{n+}}^{\infty} e^{-st} f' \,\mathrm{d}t$$

لکھ کر تکمل بالحصص حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f') = {} & e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_{1-}} + s\int_0^{t_{1-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + e^{-st} f(t)\Big|_{t_{1+}}^{t_{2-}} + s\int_{t_{1+}}^{t_{2-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\
& + e^{-st} f(t)\Big|_{t_{2+}}^{t_{3-}} + s\int_{t_{2+}}^{t_{3-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_{n+}}^{\infty} + s\int_{t_{n+}}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{6.15}$$

اب $f(t)$ استمراری ہے لہٰذا مساوات 6.15 میں متعدد تکملات کو یکجا کیا جا سکتا ہے

$$s\int_0^{t_{1-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + s\int_{t_{1+}}^{t_{2-}} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + s\int_{t_{n+}}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

جبکہ بقایا اجزاء سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}
e^{(-st_{1-})} f(t_{1-}) - f(0) + e^{(-st_{2-})} f(t_{2-}) - e^{(-st_{1+})} f(t_{1+}) + e^{(-st_{3-})} f(t_{3-}) \\
- e^{(-st_{2+})} f(t_{2+}) + \cdots + e^{(-\infty)} f(\infty) - e^{(-st_{n+})} f(t_{n+})
\end{aligned}$$

چونکہ $f(t)$ استمراری ہے لہٰذا $e^{(-st_{m-})}f(t_{m-})=e^{(-st_{m+})}f(t_{m+})=e^{(-st_m)}f(t_m)$ ہو گا۔یوں $e^{(-st_{1-})}f(t_{1-})$ اور $-e^{(-st_{1+})}f(t_{1+})$ آپس میں کٹ جائیں گے۔اسی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔پہلے دو اجزاء میں سے $f(0)$ بچتا ہے جبکہ $f(t)$ محدود تفاعل ہونے کی بنا $e^{-\infty}f(\infty)=0$ ہو گا۔اس طرح مسئلہ 6.3 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوال 6.41 تا سوال 6.51 کو مسئلہ 6.5 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 6.41: $\frac{1}{s^2+s}$
جواب: $1-e^{-t}$

سوال 6.42: $\frac{6}{s^2+4s}$
جواب: $\frac{3}{2}(1-e^{-4t})$

سوال 6.43: $\frac{3}{s^2-9s}$
جواب: $\frac{1}{3}(e^{9t}-1)$

سوال 6.44: $\frac{9}{s^3+9s}$
جواب: $1-\cos 3t$

سوال 6.45: $\frac{4}{s^2(s+2)}$
جواب: $e^{-2t}+2t-1$

سوال 6.46: $\frac{4}{s^3(s+2)}$
جواب: $-\frac{e^{-2t}}{2}+t^2-t+\frac{1}{2}$

سوال 6.47: $\frac{12}{s(s^2+4)}$
جواب: $3-3\cos 2t$

سوال 6.48: $\frac{12}{s^2(s^2+4)}$
جواب: $3t-\frac{3}{2}\sin 2t$

سوال 6.49: $\frac{32}{s(s^2-16)}$
جواب: $2\cosh 4t-2$

سوال 6.50: $\frac{32}{s^2(s^2-16)}$
جواب: $\frac{1}{2}\sinh 4t - 2t$

سوال 6.51: $\frac{6}{s^4(s^2+1)}$
جواب: $6\sin t + t^3 - 6t$

لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت سوالات 6.52 تا 6.58 حل کریں۔

سوال 6.52: $y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0$
جواب: $y = \cos \pi t$

سوال 6.53: $y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A,\, y'(0) = B$
جواب: $y = A\cos\omega t + \frac{B}{\omega}\sin\omega t$

سوال 6.54: $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = -1$
جواب: $y = 4e^{2t} - 3e^{3t}$

سوال 6.55: $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2,\, y'(0) = 1$
جواب: $y = e^{2t} + e^{-t}$

سوال 6.56: $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\, y'(0) = 1$
جواب: $y = (2-t)e^t$

سوال 6.57: $y'' - ky' = 0, \quad y(0) = 2,\, y'(0) = k,\, k > 0$
جواب: $y = 1 + e^{kt}$

سوال 6.58: $y'' + ky' - 2k^2 y = 0, \quad y(0) = 2,\, y'(0) = 2k$
جواب: $y = 2e^{kt}$

سوال 6.59: جبری، بلا تقصیر ارتعاش
ثابت کریں کہ درج ذیل

$$y'' + \omega^2 y = r(t)$$

کے ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے جہاں $r(t)$ کا لاپلاس بدل $R(s)$ ہے۔ ω مستقل ہے اور $r(t)$ جبری تفاعل ہے۔

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

دھیان رہے کہ جواب کا پہلا جزو صرف اور صرف ابتدائی معلومات پر منحصر ہے جبکہ جواب کے دوسرے جزو پر ابتدائی معلومات کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی،اکائی سیڑھی تفاعل

اب تک ہم لاپلاس بدل کے کئی خواص جان چکے ہیں۔ اس حصے میں دو مزید خصوصیات پیش کیے جائیں گے جنہیں s محور پر منتقلی (مسئلہ 6.6) اور t محور پر منتقلی (مسئلہ 6.7) کہتے ہیں۔

مسئلہ 6.6: s محور پر منتقلی؛ منتقلی کا پہلا مسئلہ
اگر $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو جہاں $s > k$ ہے، تب $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s-a)$ ہو گا جہاں $s - a > k$ ہے۔یوں اگر

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

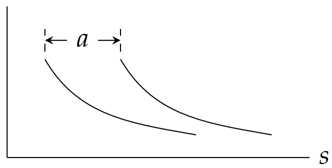
ہو تب

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

ہو گا۔یوں اصل تفاعل کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ پر کرنے کے مترادف ہے یعنی لاپلاس بدل s محور پر اپنی جگہ سے سرک کر نئی جگہ منتقل ہو جاتا ہے (شکل 6.4 دیکھیں)۔

ثبوت : لاپلاس بدل کی تعریف

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$



شکل 6.4: منتقلی کا پہلا مسئلہ، s محور پر منتقلی

استعمال کرتے ہوئے s کی جگہ $s-a$ پر کرتے ہیں۔

□

$$F(s-a)=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty} e^{-st}[e^{at}f(t)]\,\mathrm{d}t=\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$$

مثال 6.13: قصری ارتعاش
جدول 6.1 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے بدل کو استعمال کرتے ہوئے جدول میں گیارہ اور بارہ شمار پر دیے گئے لاپلاس بدل کو مسئلہ 6.6 کی مدد سے فوراً لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\qquad \mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

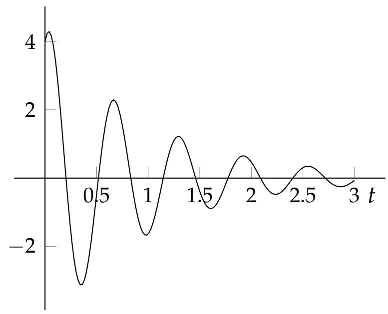
$$\mathcal{L}(f)=\frac{4s+24}{s^2+2s+101}$$

حل: اس کو درکار صورت

$$f=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s+1)+2(10)}{(s+1)^2+10^2}\right]=4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+10^2}\right]+2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)^2+10^2}\right]$$

میں لاتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f=e^{-t}(4\cos 10t+2\sin 10t)$$



شکل 6.5: قصری ارتعاش (مثال 6.13)

جیسے شکل 6.5 میں دکھایا گیا ہے۔یہ قصری ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔ □

مثال 6.14: منتقلی کا پہلا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے جدول 6.1 میں درج تفاعل t^n ، $\sin \omega t$ اور $\cos \omega t$ کو e^{at} سے ضرب دے کر لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}t^n] &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \\
\mathcal{L}[e^{at}\sin \omega t] &= \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}[e^{at}\cos \omega t] &= \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

□

مثال 6.15: قصری آزاد ارتعاش

چھت سے لٹکی لچکدار اسپرنگ کے نچلے سرے سے کمیت $m = 3$ لٹکائی گئی ہے۔اسپرنگ کا ینگ مقیاس لچک $k = 6$ ہے۔کمیت کے ساکن مقام سے فاصلہ $y(t)$ ہے۔کمیت کو ابتدائی طور پر $y(0) = 4$ پر رکھ کر اس کو ابتدائی رفتار $y'(0) = -3$ دی جاتی ہے۔فرض کریں کہ کمیت کی رفتار کے راست متناسب قصری قوت عمل کرتی ہے جہاں قصری مستقل $c = 12$ کے برابر ہے۔کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: کمیت کی حرکت کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ بیان کرتا ہے

$$y'' + 2y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = -3$$

جس کا ضمنی مساوات

$$s^2Y - 4s + 3 + 2(sY - 4) + 4Y = 0$$

ہے۔ ضمنی مساوات کا حل لکھتے ہیں۔

$$Y = \frac{4s+5}{s^2+2s+4} = \frac{4(s+1)}{(s+1)^2+3} + \frac{1}{(s+1)^2+3}$$

اب ہم جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3}\right) = \cos\sqrt{3}t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right) = \sin\sqrt{3}t$$

ہیں لہٰذا مسئلہ 6.6 کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t}(4\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t)$$

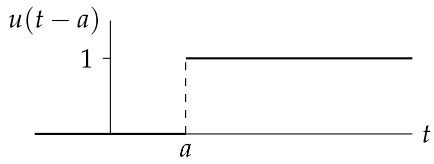
□

t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل

منتقلی کے پہلے مسئلے میں ہم نے دیکھا کہ تفاعل $f(t)$ کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ لکھنے کے مترادف ہے۔ اب ہم منتقلی کا دوسرا مسئلہ (مسئلہ 6.7) پیش کرتے ہیں جس کے تحت تفاعل $f(t)$ میں t کی جگہ $t-a$ پر کرنا، لاپلاس بدل $F(s)$ کو (تقریباً) e^{-as} سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔

مسئلہ 6.7: t محور پر منتقلی؛ منتقلی کا دوسرا مسئلہ
اگر تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو تب $e^{-as}F(s)$ ، جہاں $a > 0$ ہے، درج ذیل تفاعل کا لاپلاس بدل ہو گا۔

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t-a) & t > a \end{cases}$$



شکل 6.6: اکائی سیڑھی تفاعل $u(t-a)$

ہیوی سائیڈ سیڑھی تفاعل[11]، جسے شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے، کی تعریف[12] درج ذیل ہے۔ ہیوی سائیڈ سیڑھی تفاعل کو **اکائی سیڑھی تفاعل**[13] بھی کہتے ہیں۔

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases} \tag{6.16}$$

$t<a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل کی قیمت صفر ہے جبکہ $t>a$ پر اس کی قیمت اکائی ہے۔ عین $t=a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل **غیر معین**[14] ہے اور یہاں اس میں اکائی کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔

اکائی سیڑھی تفاعل کو زیر استعمال لاتے ہوئے ہم $\tilde{f}(t)$ کو $f(t-a)u(t-a)$ لکھ سکتے ہیں جس کی مثال شکل 6.7 میں دکھائی گئی ہے۔ اس طرح مسئلہ 6.7 کہتا ہے کہ

$$e^{-as}F(s)=\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] \tag{6.17}$$

جسے الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

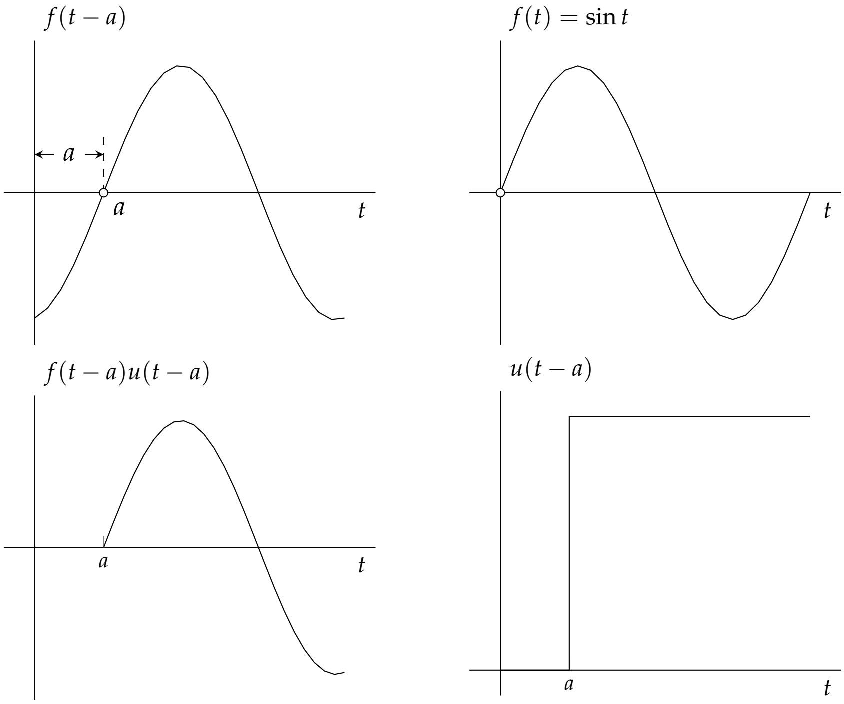
$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)u(t-a) \tag{6.18}$$

ثبوت: مسئلہ 6.7 کا ثبوت
لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

---

[11] Heaviside step function
[12] الیور ہیوی سائیڈ [1850-1925] خود لکھ پڑھ کر برقی مہندس، ریاضی دان اور ماہر طبیعیات بنے۔ یہ انگلستانی تھے۔
[13] unit step function
[14] undefined



شکل 6.7: $f(t-a)u(t-a)$ جہاں $f(t) = \sin t$ ہے۔

لکھا جا سکتا ہے جس میں $\tau + a = t$ پر کرتے ہوئے

$$e^{-as}F(s) = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر اندرون تکمل مقدار کی قیمت وقفہ $t = 0$ تا $t = a$ کے درمیان صفر کے برابر ہو تب اس تکمل کے حدود کو 0 تا ∞ لکھا جا سکتا ہے۔یہی کچھ اندرونِ تکمل کو $u(t-a)$ سے ضرب دیتے ہوئے کرنا ممکن ہے لہٰذا درج بالا کو

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اکائی سیڑھی تفاعل نہایت اہم تفاعل ہے۔آئیں اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_0^a e^{-st}0\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty e^{-st}1\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^\infty$$

لکھتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے جہاں $s > 0$ ہے۔

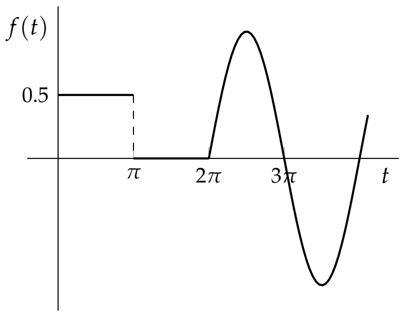
$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \qquad (s > 0) \tag{6.19}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $a = 0$ کی صورت میں $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ ملتا ہے۔

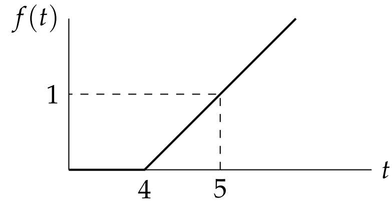
لاپلاس بدل کی عملی استعمال

لاپلاس بدل کے بارے میں اب ہم اتنا جانتے ہیں کہ اس کو استعمال کرتے ہوئے ایسے مشکل مسائل (مثلاً مثال 6.18، مثال 6.19 اور مثال 6.20) حل کریں جنہیں دیگر طریقوں سے حل کرنا نسبتاً زیادہ دشوار ہو گا۔

مثال 6.16: تفاعل $\frac{e^{-4s}}{s^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل دریافت کریں۔



(ب) مثال 6.17 کا تفاعل۔



(الف) مثال 6.16 کا تفاعل۔

شکل 6.8: مثال 6.16 اور مثال 6.17 کے تفاعل۔

حل: چونکہ $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t$ ہے لہٰذا مسئلہ 6.7 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔ شکل 6.8-الف دیکھیں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^2}\right) = (t-4)u(t-4)$$

□

مثال 6.17: شکل 6.8-ب میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0.5 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$

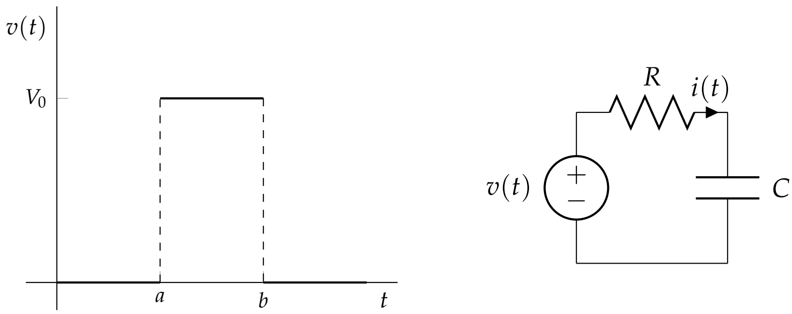
حل: اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے دیے گئے تفاعل کو لکھتے ہیں

$$f(t) = 0.5u(t) - 0.5u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t$$

جہاں $\sin(t-2\pi) = \sin t$ کا استعمال کیا گیا ہے۔مساوات 6.19، مساوات 6.17 اور جدول 6.1 کی مدد سے لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

□



شکل 6.9: مثال 6.18 کا دور اور داخلی دباو۔

مثال 6.18: ایک عدد چکور موج پر RC دور کا رد عمل
مزاحمت اور برق گیر کا سلسلہ وار دور شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس کو ایک عدد چکور موج $v(t)$ مہیا کی جاتی ہے۔دور میں برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ شکل 6.9 سے رجوع کریں۔

حل: کرخوف مساوات دباو سے

$$i(t)R+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau=v(t)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں داخلی دباو کو دو عدد اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے

$$v(t)=V_0(u(t-a)-u(t-b))$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 6.19 اور مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

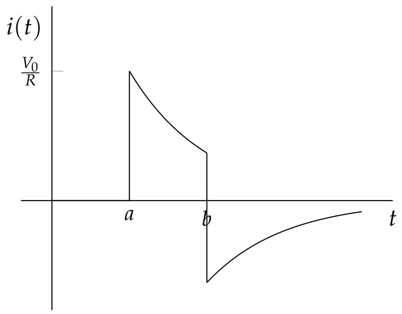
$$I(s)R+\frac{I(s)}{sC}=\frac{V_0}{s}[e^{-as}-e^{-bs}]$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$I(s)=\left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s+\frac{1}{RC}}\right)[e^{-as}-e^{-bs}]$$

اب ہم جدول 6.1 سے جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s+\frac{1}{RC}}\right)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$



شکل 6.10: مثال 6.18 کی رو $i(t)$

کے برابر ہے لہٰذا اصل حل مسئلہ 6.7 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \mathcal{L}^{-1}(I) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-bs}F(s)] \\
&= \frac{V_0}{R}[e^{-\frac{(t-a)}{RC}}u(t-a) - e^{-\frac{(t-b)}{RC}}u(t-b)]
\end{aligned}
$$

جس کو یوں

$$
i(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ K_1 e^{-\frac{t}{RC}} & a < t < b \\ (K_1 - K_2)e^{-\frac{t}{RC}} & t > b \end{cases}
$$

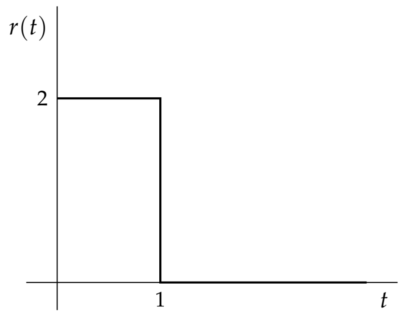
بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $K_1 = \frac{V_0}{R}e^{\frac{a}{RC}}$ اور $K_2 = \frac{V_0}{R}e^{\frac{b}{RC}}$ ہیں۔ برقی رو $i(t)$ کو شکل 6.10 میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 6.19: بلا تقصیر نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور داخلی موج
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔

$$
y'' + 4y = r(t), \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0
$$

حل: داخلی جبری قوت کو $r(t) = 2[u(t) - u(t-1)]$ لکھا جا سکتا ہے۔ دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$
s^2Y + 4Y = \frac{2}{s}(1 - e^{-s})
$$



شکل 6.11: مثال 6.19 اور مثال 6.20 کا داخلی تفاعل۔

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$Y=\frac{2}{s(s^2+4)}(1-e^{-s})$$

اب جدول 6.1 کے تحت $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4})=\sin 2t$ ہے لٰہذا مساوات 6.12 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+4)}\right]=\int_0^t \sin 2\tau \,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

اب مسئلہ 6.7 زیر استعمال لاتے ہوئے اصل جواب لکھتے ہیں

$$y(t)=\frac{1}{2}[1-\cos 2t]-\frac{1}{2}[1-\cos 2(t-1)]u(t-1)$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ رد عمل دو مختلف ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[1-\cos 2t] & 0<t<1\\ \frac{1}{2}[\cos 2(t-1)-\cos 2t] & t>1\end{cases}$$

□

مثال 6.20: قصری نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور موج
درج ذیل قصری ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.11 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y''+4y'+3y=r(t) \qquad y(0)=0,\; y'(0)=0$$

حل: ضمنی مساوات لکھ کر

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{2}{s}(1 - e^{-s})$$

حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$Y = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}(1 - e^{-s})$$

$F(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}$ کا جزوی کسری پھیلاو

$$F(s) = \frac{2}{3s} + \frac{1}{3(s+3)} - \frac{1}{s+1}$$

ہے لہٰذا

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t}$$

ہو گا۔یوں مسئلہ 6.7 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s}) = f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{e^{-3(t-1)}}{3} - e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

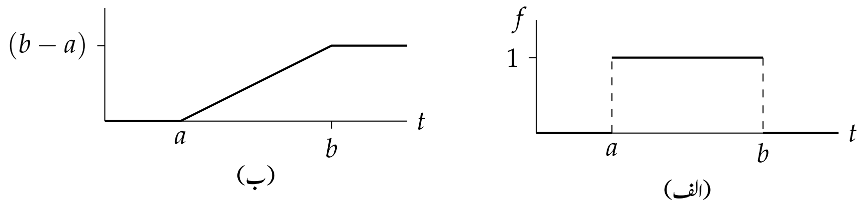
ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے اصل حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = f(t) - f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t} & 0 < t < 1 \\ (1-e^3)\frac{e^{-3t}}{3} - (1-e)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

□

مثال 6.21: شکل 6.12-الف میں تفاعل $f(t)$ اور شکل-ب میں اس کا تکمل دکھایا گیا ہے۔ $f(t)$ کے بدل سے شکل-ب کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: شکل 6.12-الف کا لاپلاس بدل $F = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$ ہے لہٰذا شکل-ب کا بدل $\frac{F}{s} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s^2}$ ہو گا۔ □



شکل 6.12: مثال 6.21 کے اشکال۔

سوالات

سوال 6.60 تا سوال 6.75 منتقلی s پر مبنی ہیں۔ سوال 6.60 تا سوال 6.67 میں لاپلاس بدل جبکہ سوال 6.68 تا سوال 6.75 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.60: $e^{-3t}\sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

سوال 6.61: $e^{-t}\cos(\omega t-\theta)$
جواب: $\frac{(s+1)\cos\theta+\omega\sin\theta}{(s+1)^2+\omega^2}$

سوال 6.62: $e^{-at}(A\sin\omega t+B\cos\omega t)$
جواب: $\frac{\omega A+(s+a)B}{(s+a)^2+\omega^2}$

سوال 6.63: $e^{2t}(3t-4t^2)$
جواب: $\frac{3}{(s-2)^2}-\frac{8}{(s-2)^3}$

سوال 6.64: te^{2t}
جواب: $\frac{1}{(s-2)^2}$

سوال 6.65: $e^{-3t}\sin 5t$
جواب: $\frac{5}{(s+3)^2+5^2}$

سوال 6.66: $0.25e^{-1.5t}\cos(3\pi t)$
جواب: $\frac{0.25(s+1.5)}{(s+1.5)^2+(3\pi)^2}$

سوال 6.67: $\sinh t \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{(s-1)^2+\omega^2}-\frac{\omega}{(s+1)^2+\omega^2}\right]$

سوال 6.68: $\frac{m}{(s+n)^2}$
جواب: mte^{-nt}

سوال 6.69: $\frac{3}{(s+5)^4}$
جواب: $\frac{t^3e^{-5t}}{2}$

سوال 6.70: $\frac{3}{(s+\sqrt{5})^3}$
جواب: $\frac{3t^2e^{-\sqrt{5}t}}{2}$

سوال 6.71: $\frac{4}{s^2+2s+5}$
جواب: $2e^{-t}\sin 2t$

سوال 6.72: $\frac{\pi}{s^2+8\pi s+17\pi^2}$
جواب: $e^{-4\pi t}\sin \pi t$

سوال 6.73: $\frac{3s+22}{s^2+8s+41}$
جواب: $e^{-4t}(2\sin 5t+3\cos 5t)$

سوال 6.74: $\frac{s+a+b}{(s+a)^2+b^2}$
جواب: $e^{-at}(\cos bt+\sin bt)$

سوال 6.75: $\frac{a}{s+c}+\frac{b}{(s+c)^2}$
جواب: $(a+bt)e^{-ct}$

سوال 6.76 تا سوال 6.79 میں بذلولی سائن اور بذلولی کوسائن کو قوت نمائی تفاعل کی صورت میں لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.76: $e^{-at}\sinh \omega t$
جواب: $\frac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2}$

سوال 6.77: $\sinh at \sin at$
جواب: $\frac{2a^2s}{s^4+4a^4}$

سوال 6.78: $\sinh at \sin \omega t$
جواب: $\frac{\omega}{2[(s-a)^2+\omega^2]} - \frac{\omega}{2[(s+a)^2+\omega^2]}$

سوال 6.79: $t \cosh at$
جواب: $\frac{1}{2(s-a)^2} + \frac{1}{2(s+a)^2}$

سوال 6.80 تا سوال 6.83 میں $\mathcal{L}^{-1}$ دریافت کریں۔

سوال 6.80: $\frac{s+4}{(s+1)^2+9}$
جواب: $e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t)$

سوال 6.81: $\frac{s-2}{s^2+4s+8}$
جواب: $e^{-2t}(\cos 2t - 2\sin 2t)$

سوال 6.82: $\frac{2}{(s+1)^3} - \frac{6}{(s+1)^4}$
جواب: $e^{-t}(t^2 + t^3)$

سوال 6.83: $\frac{as+b}{(s-c)^2+\omega}$
جواب: $e^{ct}[\frac{(ac+b)}{\omega} \sin \omega t + a \cos \omega t]$

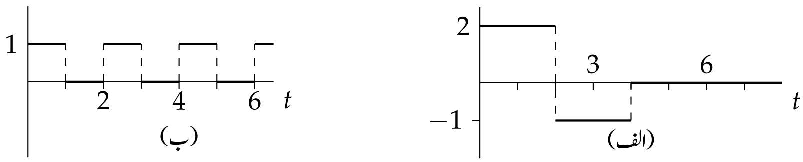
سوال 6.84 تا سوال 6.87 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں لاپلاس بدل کی استعمال سے حل کریں۔

سوال 6.84: $y'' + 2y' + 10y = 0, \qquad y(0) = -2,\ y'(0) = 1$
جواب: $y = -e^{-t}(2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t)$

سوال 6.85: $y'' - 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
جواب: $y = (1-t)e^{3t}$

سوال 6.86: $y'' - 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 1$
جواب: $y = e^{t}(\sin 2t - \cos 2t)$

سوال 6.87: $y'' + 10y' + 25 = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
جواب: $y = (9t+2)e^{-5t}$



شکل 6.13: سوال 6.88 اور سوال 6.89 کے اشکال۔

اکائی سیڑھی تفاعل استعمال کرتے ہوئے سوال 6.88 تا سوال 6.93 میں دیے گئے خطوط کو لکھ کر ان کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.88: شکل 6.13-الف میں دکھائے گئے خط بقایا تمام t پر صفر کے برابر ہے۔

جواب: $\frac{1}{s}(2-3e^{-2s}+e^{-4s})$

سوال 6.89: شکل 6.13-ب مسلسل موج ہے۔

جواب:

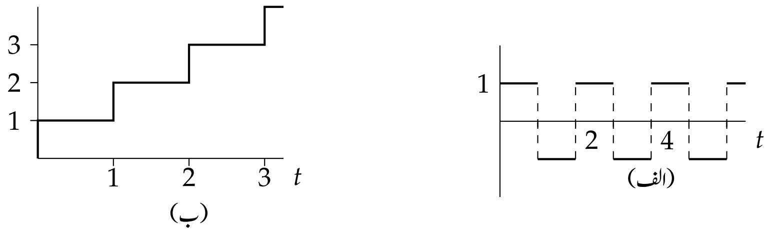
$$
\begin{aligned}
f(t)&=u(t)-u(t-1)+u(t-2)-u(t-3)+u(t-4)-u(t-5)+-\cdots\\
\mathcal{L}(f)&=\frac{1}{s}(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+e^{-4s}-e^{-5s}+-\cdots)\\
&=\frac{1}{s}\left[\frac{1-(-e^{-s})^n}{1+e^{-s}}\right]=\frac{1}{s(1+e^{-s})}
\end{aligned}
$$

$n\to\infty$ ، $s>0$ پر $e^{-sn}\to 0$ ہو گا۔

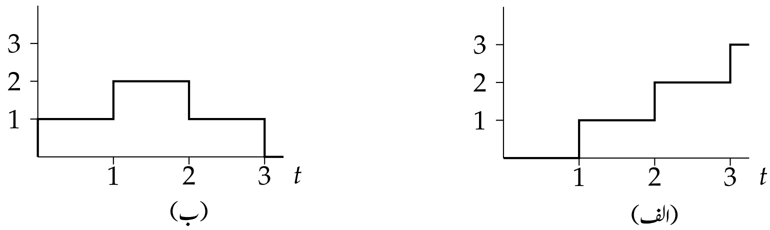
سوال 6.90: شکل 6.14-الف مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$
\begin{aligned}
f(t)&=u(t)-2u(t-1)+2u(t-2)-2u(t-3)+2u(t-4)-2u(t-5)+-\cdots\\
\mathcal{L}(f)&=\frac{1}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{2e^{-3s}}{s}+\frac{2e^{-4s}}{s}-\frac{2e^{-5s}}{s}+-\cdots\\
&=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{2e^{-3s}}{s}+\frac{2e^{-4s}}{s}-+\cdots=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s(1+e^{-s})}
\end{aligned}
$$



شکل 6.14: سوال 6.90 اور سوال 6.91 کے اشکال۔



شکل 6.15: سوال 6.92 اور سوال 6.93 کے اشکال۔

سوال 6.91: شکل 6.14-ب مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= u(t) + u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + \cdots \\
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots = \frac{1}{s(1-e^{-s})}
\end{aligned}
$$

سوال 6.92: شکل 6.15-الف مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + \cdots \\
\mathcal{L}(f) &= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}
\end{aligned}
$$

سوال 6.93: شکل 6.15-ب غیر مسلسل موج ہے۔بقایا تمام t پر موج صفر کے برابر ہے۔

جواب: $\frac{1}{s}(1 + e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s})$

سوال 6.94 تا سوال 6.97 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.94: $\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}$
جواب: $f = u(t-2) - u(t-3)$ یعنی $2 < t < 3$ کے لئے $f = 1$ ہے جبکہ بقایا اوقات $f = 0$ ہے۔

سوال 6.95: $\frac{e^{-s}}{s^2}$
جواب: $(t-1)u(t-1)$

سوال 6.96: $\frac{e^{-s}+2e^{-2s}-4e^{-3s}}{s^2}$
جواب: $t < 1$ ، $1 < t < 2$ ، $2 < t < 3$ اور $3 < t$ پر $f = 0$ ، $f = t - 1$ ، $f = 3t - 5$ اور $f = -t + 11$ ہیں۔

سوال 6.97: $\frac{6(e^{-2s}-e^{-3s})}{s^3}$
جواب: $t < 2$ ، $2 < t < 3$ اور $3 < t$ کے لئے $f = 0$ ، $f = (t-2)^2$ اور $f = 2t - 5$ ہے۔

سوال 6.98 تا سوال 6.102 کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.98: $(t-3)u(t-3)$
جواب: $\frac{e^{-3s}}{s^2}$

سوال 6.99: $tu(t)$
جواب: $\frac{1}{s^2}$

سوال 6.100: $u(t-\pi)\sin t$
جواب: $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

سوال 6.101: $u(t - \frac{2\pi}{\omega})\sin \omega t$
جواب: $\frac{\omega(1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}})}{s^2+\omega^2}$

سوال 6.102: $t^2 u(t-1)$
جواب: $\frac{(s^2+2s+2)e^{-s}}{s^3}$

سوال 6.103 تا سوال 6.105 کے تفاعل دیے گئے وقفے کے باہر صفر کے برابر ہیں۔ ان کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.103: $(0 < t < \frac{\pi}{\omega}) \qquad A\sin\omega t$
جواب: $\frac{A}{s^2+\omega^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}})$

سوال 6.104: $(0 < t < \frac{\pi}{2\omega}) \qquad A\cos\omega t$
جواب: $\frac{A}{s^2+\omega^2}(s+\omega e^{-\frac{\pi s}{2\omega}})$

سوال 6.105: $(0 < t < 1) \qquad t^2$
جواب: $\frac{2-(s^2+2s+2)e^{-s}}{s^3}$

سوال 6.106 تا سوال 6.111 کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.106: $\frac{e^{-3s}}{s}$
جواب: $u(t-3)$

سوال 6.107: $\frac{e^{-4s}}{s^2}$
جواب: $(t-4)u(t-4)$

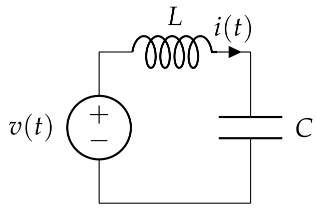
سوال 6.108: $\frac{e^{-3s}}{s-4}$
جواب: $e^{4(t-3)}u(t-3)$

سوال 6.109: $\frac{\omega e^{-2s}}{s^2+\omega^2}$
جواب: $\sin[\omega(t-2)]u(t-2)$

سوال 6.110: $\frac{1-e^{-2s}}{s^2+9}$
جواب: $\frac{1}{3}\sin 3tu(t) - \frac{1}{3}\sin[3(t-2)]u(t-2)$

سوال 6.111: $\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$
جواب: وقفہ $t > \pi$ پر تفاعل $f = -e^{(\pi-t)}\sin(t-\pi)u(t-\pi)$ ہے۔ بقایا اوقات تفاعل صفر کے برابر ہے۔

سوال 6.112 تا سوال 6.113 میں $L = 1\,\mathrm{H}$ اور $C = 1\,\mathrm{F}$ لیتے ہوئے برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ داخلی دباو $v(t)$ سوال میں دیا گیا ہے۔



شکل 6.16: سوال 6.112 تا سوال 6.113 کا دور۔

سوال 6.112: $0 < t < a$ داخلی دباو t $v(t) = t$ ہے۔ بقایا اوقات $v(t) = 0$ ہے۔

جواب:

$$Li' + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t = t[1-u(t-a)] = t-(t-a)u(t-a)-au(t-a)$$

$$i = \begin{cases} 1-\cos t & 0<t<a \\ \cos(t-a)-a\sin(t-a)-\cos t & t>a \end{cases}$$

سوال 6.113: $0 < t < \pi$ پر $v(t) = 1-e^{-t}$ ہے جبکہ بقایا اوقات $v(t) = 0$ ہے۔

جواب:

$$i = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t) & 0<t<a \\ -\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})\cos t+\frac{1}{2}(3-e^{-\pi})\sin t & t>\pi \end{cases}$$

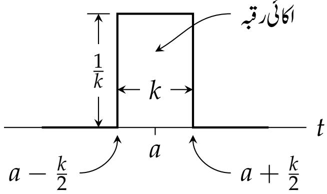
سوال 6.114: ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{F(\frac{s}{a})}{a}$ ہو گا۔ اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے $\cos t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.115: ثابت کریں کہ مساوات 6.17 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو عملاً زیادہ بہتر صورت ہے۔

$$e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)] = \mathcal{L}[f(t)u(t-a)] \tag{6.20}$$

جواب: نیا تفاعل $\tilde{f}(t)$ جہاں $\tilde{f}(t) = f(t+a)$ ہے زیر استعمال لاتے ہیں۔ یوں $f(t) = \tilde{f}(t-a)$ ہو گا۔ یوں مساوات 6.17 سے درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-a)] = \mathcal{L}[\tilde{f}(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[\tilde{f}(t)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)]$$



شکل 6.17: ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔

6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاو

الیکٹران کی کمیت کو نقطہ کمیت تصور کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح اس کی برقی بار کو نقطہ بار تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں کارتیسی محور کے مبدا پر موجود الیکٹران کی کمیت مبدا پر پائی جائے گی جبکہ مبدا سے ہٹ کر کسی بھی نقطے پر کمیت صفر کے برابر ہو گی۔نقطہ کمیت یا نقطہ بار کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل**[15] سے ظاہر[16] کیا جاتا ہے۔اسی طرح گیند کو بلے سے مارتے ہوئے یا بندوق سے گولی چلاتے وقت انتہائی کم دورانیے کے لئے قوت عمل میں آتی ہے۔ایسی قوت کو بھی ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایسی برقی یا میکانی قوت (یا عمل) جو انتہائی کم دورانیے کے لئے کار آمد ہو کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل** سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلے کو لاپلاس بدل کی مدد سے نہایت عمدگی کے ساتھ حل کیا جا سکتا ہے۔

ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل کو شکل 6.17 کی مدد سے سمجھتے ہیں جس میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے، جہاں k مثبت اور چھوٹی قیمت ہے۔

$$f_k(t-a)=\begin{cases}\frac{1}{k} & a-\frac{k}{2}<t<a+\frac{k}{2}\\ 0 & \text{بقایا } t\end{cases} \tag{6.21}$$

یہ تفاعل کسی ایسی قوت کو ظاہر کر سکتی ہے جس کی مقدار $\frac{1}{k}$ ہو اور جو لمحہ $t=a-\frac{k}{2}$ تا $t=a+\frac{k}{2}$ عمل پیرا ہو۔ میکانیات میں ایسی قوت کا، لمحہ $t=a-\frac{k}{2}$ تا $t=a+\frac{k}{2}$ ، **تکمل میکانی ضرب**[17] کہلاتی ہے۔برقی

[15] Dirac delta function

[16] ماہر طبیعیات، پال اڈرین مارث ڈیراک [1902-1984] (جرمنی کے ارون روڈالف یوسف شروڈنگر کے ساتھ مشترق) نوبل انعام یافتہ [1933]، انگلستان کے رہائشی (جن کا تعلق سوئزرلینڈ سے تھا) نے کوانٹم میکانیات میں کلیدی کردار ادا کیا۔

[17] impulse

میدان میں ایسے برقی دباو کو برقی ضرب کہا جاتا ہے۔ شکل 6.17 میں ضرب درج ذیل ہے۔

$$I_k = \int_0^\infty f_k(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_{a-\frac{k}{2}}^{a+\frac{k}{2}} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = 1 \tag{6.22}$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ k کی قیمت کم سے کم کرنے سے ضرب کی قیمت پر کیا اثر پڑتا ہے۔ہم f_k کی قیمت کی حد $k \to 0$ پر حاصل کرتے ہیں جہاں $k > 0$ ہے۔اس حد کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل** یا **اکائی ضرب تفاعل**[18] پکارا اور $\delta(t-a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta(t-a) = \lim_{k\to 0} f_k(t-a) \tag{6.23}$$

$\delta(t-a)$ کو، علم الاحصاء میں سادہ تفاعل کی رسمی مطلب کے تحت تفاعل نہیں سمجھا جا سکتا ہے البتہ اسے **عمومی تفاعل**[19] کے تحت تفاعل سمجھا جا سکتا ہے۔یہ حقیقت سمجھنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ f_k کا I_k اکائی (1) ہے لہٰذا مساوات 6.21 اور مساوات 6.22 میں $k \to 0$ پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases} \qquad \int_0^\infty \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{6.24}$$

جبکہ علم الاحصاء کے تحت، ایسے تفاعل کا تکمل صفر کے برابر ہو گا جس کی قیمت، ماسوائے کسی ایک نقطہ پر، صفر کے برابر ہو۔ اس کے باوجود ضرب تفاعل استعمال کرتے ہوئے، اپنی آسانی کی خاطر، ہم $\delta(t-a)$ کو سادہ تفاعل تصور کرتے ہیں۔ بالخصوص $\delta(t-a)$ کی چننے[20] کی خاصیت استعمال کرتے ہوئے استمراری تفاعل $g(t)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a_-} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t + \int_{a_-}^{a_+} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t \\ + \int_{a_+}^\infty g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

چونکہ $t \neq 0$ پر $\delta(t-a) = 0$ ہے لہٰذا درج بالا دائیں ہاتھ پہلا اور تیسرا تکمل صفر کے برابر ہیں۔یوں

$$\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_{a_-}^{a_+} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = g(a)\int_{a_-}^{a_+} \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = g(a) \tag{6.25}$$

---

[18] unit impulse function

[19] روسی ریاضی دان سرگی لووچ سوبولو [1908-1989] نے عمومی تفاعل کے نظریے کی بنیاد رکھی۔

[20] sifting property

حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a لامتناہی کم وسعت کا ہو گا جس پر $g(t)$ کی قیمت میں تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے۔یوں اس نقطے پر $g(t)$ کی قیمت، مستقل مقدار $g(a)$ ہو گی۔اس مستقل مقدار $g(a)$ کو تکمل کے باہر لے جایا گیا ہے جبکہ $\delta(t-a)$ کا تکمل اکائی کے برابر ہے۔

$\delta(t-a)$ کا لاپلاس بدل حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$f_k(t-a) = \frac{1}{k}u[t-(a-\tfrac{k}{2})] - \frac{1}{k}u[t-(a+\tfrac{k}{2})]$$

لہٰذا

$$\mathcal{L}(f_k) = \frac{e^{-(a-\frac{k}{2})s}}{ks} - \frac{e^{-(a+\frac{k}{2})s}}{ks} = e^{-as}\left(\frac{e^{\frac{ks}{2}} - e^{-\frac{ks}{2}}}{ks}\right)$$

ہو گا۔اب $k \to 0$ پر درج بالا $\mathcal{L}[\delta(t-a)]$ دے گا۔ہم $e^{\mp x} = 1 \mp x + \frac{x^2}{2!} \mp + \cdots$ استعمال کرتے ہوئے قوسین کو پھیلا کر لکھتے ہیں۔

$$\frac{e^{\frac{ks}{2}} - e^{-\frac{ks}{2}}}{ks} = \frac{(1+\frac{ks}{2}+\frac{(\frac{ks}{2})^2}{2!}+\cdots)-(1-\frac{ks}{2}+\frac{(\frac{ks}{2})^2}{2!}-\cdots)}{ks} = \frac{ks+\frac{1}{3}(\frac{ks}{2})^3+\cdots}{ks}$$

یوں $k \to 0$ پر قوسین کی حد درج ذیل ہو گی

$$\lim_{k\to 0}\frac{ks+\frac{1}{3}(\frac{ks}{2})^3+\cdots}{ks} = 1$$

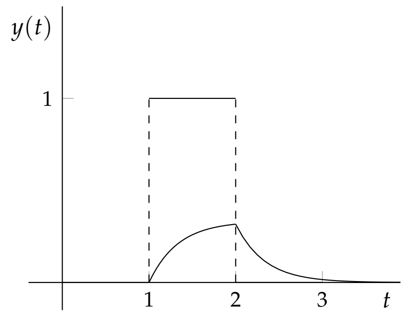
لہٰذا ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as} \tag{6.26}$$

اکائی سیڑھی تفاعل اور اکائی ضرب تفاعل کے لاپلاس بدل جانتے ہوئے، آئیں اب سادہ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے لاپلاس بدل کی طاقت دیکھیں۔آپ مثال 6.22، مثال 6.23 اور مثال 6.27 کو دیگر طریقوں سے حل کر کے تسلی کر سکتے ہیں کہ لاپلاس بدل کا طریقہ نہایت عمدہ ہے۔

مثال 6.22: درج ذیل اسپرنگ اور کمیت کی قصری نظام (حصہ 2.8) کا رد عمل، شکل 6.18 میں دکھائے گئے، اکائی چکور جبری قوت کی صورت میں حاصل کریں۔

$$y''+4y'+3y = r(t) = u(t-1)-u(t-2) \qquad y(0)=0,\ y'(0)=0 \tag{6.27}$$



شکل 6.18: اسپرنگ اور کمیت کا قصری نظام (مثال 6.22)۔

حل: دیے گئے تفرقی مساوات سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔ایسا مساوات 6.5، مساوات 6.6 اور مساوات 6.19 کی مدد سے کیا جائے گا۔

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

ضمنی مساوات کا حل

$$Y = \frac{1}{s(s^2+4s+3)}(e^{-s} - e^{-2s}) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}(e^{-s} - e^{-2s})$$

ہے جس کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہے۔

$$Y = \left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)}\right](e^{-s} - e^{-2s})$$

چکور قوسین کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)}\right] = \frac{1}{3} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{6}$$

مسئلہ 6.7 کی مدد سے حل $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)(e^{-s} - e^{-2s})]$ لکھتے ہیں جسے شکل 6.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s}) - \mathcal{L}(Fe^{-2s}) = f(t-1)u(t-1) - f(t-2)u(t-2) \\
&= \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{e^{-3(t-1)}}{6} & 1 < t < 2 \\ -\frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{e^{-(t-2)}}{2} + \frac{e^{-3(t-1)}}{6} - \frac{e^{-3(t-2)}}{6} & t > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

مثال 6.23: گزشتہ مثال میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر اکائی چکور قوت لاگو کی گئی۔موجودہ مثال میں اسپرنگ اور کمیت کی اسی نظام کو لمحہ $t = 1$ پر ہتھوڑی سے اکائی ضرب لگایا جاتا ہے۔نظام کا رد عمل دریافت کریں۔

حل: نظام کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y'' + 4y' + 3y = r(t) = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0,\, y'(0) = 0$$

جس کی ضمنی مساوات

$$s^2Y + 4sY + 3Y = e^{-s}$$

کا حل لکھتے ہیں۔

$$Y = \frac{1}{(s+1)(s+3)}e^{-s} = \left[\frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)}\right]e^{-s}$$

چکور قوسین کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)}\right] = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{2}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ حاصل کرتے ہیں جسے شکل 6.19 میں دکھایا گیا ہے۔

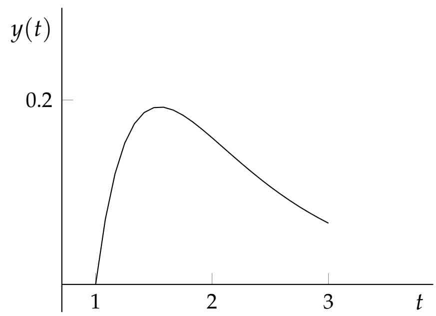
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Fe^{-s}] = f(t-1)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{e^{-(t-1)}}{2} - \frac{e^{-3(t-1)}}{2} & t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

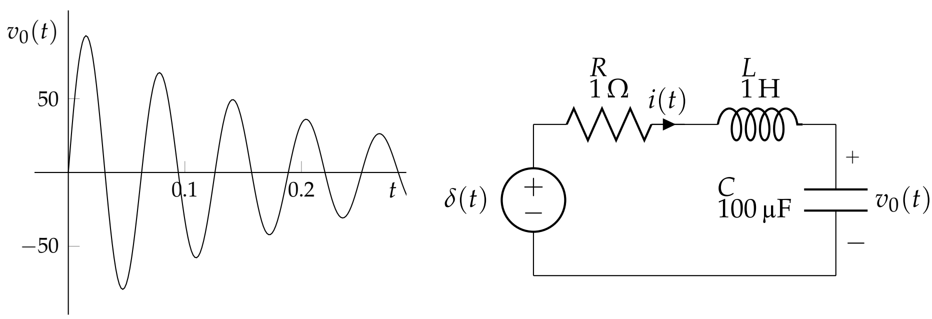
مثال 6.24: سلسلہ وار جڑے مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو لمحہ $t = 0$ پر اکائی ضرب دباو مہیا کیا جاتا ہے۔اس برقی دور کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔برق گیر پر دباو $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: مسئلے کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t = Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = \delta(t)$$



شکل 6.19: اکائی ضرب پر اسپرنگ اور کمیت کے نظام کا ردعمل (مثال 6.23)۔



شکل 6.20: سلسلہ وار دور (مثال 6.24)۔

جس کی ضمنی مساوات درج ذیل ہے جہاں برقی پرزوں کی قیمتیں بھی پر کی گئی ہیں۔

$$(s^2 + 10s + 10000)Q = 1$$

ضمنی مساوات کا حل

$$Q = \frac{1}{(s+5)^2 + 9975} \approx \frac{1}{(s+5)^2 + 99.87^2}$$

ہے جس کے الٹ لاپلاس بدل سے q حاصل کرتے ہوئے $v_0 = \frac{q}{C}$ دریافت کرتے ہیں۔

$$q(t) = \frac{e^{-5t}}{99.87} \sin 99.87t \qquad \implies \qquad v_0(t) = \frac{q(t)}{C} = 100.13 e^{-5t} \sin 99.87t$$

□

جزوی کسری پھیلاو پر مزید تبصرہ

ہم نے دیکھا کہ عموماً ضمنی مساوات کی صورت $Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$ ہوتی ہے جہاں $F(s)$ اور $G(s)$ کثیر رکنی ہوتے ہیں۔الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے حل $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ حاصل کیا جاتا ہے۔الٹ لاپلاس بدل لینے سے پہلے کسر کو جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے کا الٹ لاپلاس بدل با آسانی حاصل کرنا ممکن ہو۔

$G(s)$ میں غیر دہراتے جزو $s-a$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $W(s)$ بقایا حصے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{()()\cdots()}{(s-a)()\cdots()} = \frac{A}{s-a} + W(s) \tag{6.28}$$

یوں $s-a$ سے حاصل رکن $\frac{A}{s-a}$ کا الٹ لاپلاس بدل Ae^{at} ہے۔اسی طرح بلند درجی اجزاء $(s-a)^2$ اور $(s-a)^3$ درج ذیل ارکان دیتے ہیں

$$\frac{A_1}{(s-a)} + \frac{A_2}{(s-a)^2} \quad \text{اور} \quad \frac{A_1}{s-1} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{A_3}{(s-a)^3} \tag{6.29}$$

جن کے الٹ لاپلاس بدل $(A_1 + A_2t)e^{at}$ اور $(A_1 + A_2t + \frac{1}{2}A_3t^2)e^{at}$ ہیں۔

دہراتے جزو $(s-a)^m$ کی صورت میں جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گا

$$\frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \frac{A_m}{(s-a)^m} + W(s) \tag{6.30}$$

جس کے دونوں اطراف کو $(s-a)^m$ سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(s-a)^m\frac{F(s)}{G(s)} = A_1(s-a)^{m-1} + A_2(s-a)^{m-2} + \cdots + A_{m-1}(s-a) + A_m \tag{6.31}$$

یوں $s=a$ پر کرتے ہوئے

$$A_m = \left.\frac{(s-a)^mF(s)}{G(s)}\right|_{s=a} \tag{6.32}$$

ملتا ہے۔مساوات 6.31 کا k درجی تفرق لے کر $s=a$ پر کرنے سے A_k ملتا ہے۔

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!}\left.\frac{\mathrm{d}^{m-k}\,Q(s)}{\mathrm{d}s^{m-k}}\right|_{s=a} \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{6.33}$$

$G(s)$ میں غیر دہراتے مخلوط جوڑی $(s-a)(s-\bar{a})$ جہاں $a=\alpha+i\beta$ اور $\bar{a}=\alpha-i\beta$ ہیں سے درج ذیل جزوی کسری رکن حاصل ہوتا ہے

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

جبکہ دہراتے مخلوط جوڑی مثلاً $[(s-a)(s-\bar{a})]^2$ سے درج ذیل ارکان ملتے ہیں۔ دہراتا مخلوط جوڑی گمک کو ظاہر کرتی ہے جس پر مثال 6.37 میں بذریعہ الجھاو توجہ دی گئی ہے۔

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{Cs+D}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

مثال 6.25: جزوی کسری پھیلاو استعمال کرتے ہوئے $\frac{3s-2}{s^2-s}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: نسب نما میں s اور $s-1$ غیر دہراتے جزو ہیں۔یوں دیے گئے تفاعل کو $\frac{A}{s}$ اور $\frac{B}{s-1}$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{3s-2}{s(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}$$

جس میں A اور B معلوم کرنا باقی ہے۔دونوں اطراف کو $s(s-1)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$3s-2=A(s-1)+Bs$$

ملتا ہے۔اس مساوات میں $s=0$ پر کرتے ہوئے A حاصل ہو گا جبکہ $s=1$ پر کرتے ہوئے B حاصل ہو گا۔یوں

$$3(0)-2=A(0-1)+B(0) \implies A=2$$

اور

$$3(1)-2=A(1-1)+B(1) \implies B=1$$

ملتے ہیں لہٰذا دیے گئے تفاعل کو

$$\frac{3s-2}{s(s-1)}=\frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=2+e^t$$

□

مثال 6.26: جزوی کسری پھیلاو استعمال کرتے ہوئے $F(s)=\frac{s^2-4s}{(s+2)^3}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں $s+2$ دہراتا جزو ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس میں A ، B اور C معلوم کرنا باقی ہے۔

$$\frac{s^2-4s}{(s+2)^3}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{(s+2)^3}$$

دونوں اطراف کو $(s+2)^3$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$s^2 - 4s = A(s+2)^2 + B(s+2) + C$$

$s = -2$ پر کرتے ہوئے $C = 12$ ملتا ہے۔مساوات کا ایک درجی تفرق لے کر $s = -2$ پر کرنے سے B حاصل ہو گا جبکہ دو درجی تفرق لے کر $s = -2$ پر کرنے سے A حاصل ہو گا۔ یوں

$$\begin{aligned} &2s - 4 = 2A(s+2) + B \implies 2(-2) - 4 = 2A(-2+2) + B \implies B = -8 \\ &2 = 2A \implies A = 1 \end{aligned}$$

ملتے ہیں۔یوں دیے گئے تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو اور اس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2-4s}{(s+2)^3} = \frac{1}{s+2} - \frac{8}{(s+2)^2} + \frac{12}{(s+2)^3} \\ \mathcal{L}^{-1}(F) &= e^{-2t}(1 - 8t + 6t^2) \end{aligned}$$

□

مثال 6.27: غیر دہراتے مخلوط جزو۔قصری جبری ارتعاش

درج ذیل اسپرنگ اور کمیت کا ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔جبری قوت $0 < t < \pi$ دورانیے کے لئے عمل پیرا ہے۔

$$y'' + 2y' + 10y = r(t), \ y(0) = 1, \ y'(0) = -6, \quad r(t) = \begin{cases} 85 \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

حل:مسئلے کو اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 10y &= 85 \sin t \, [u(t) - u(t-\pi)] \\ &= 85 \sin t \, u(t) + 85 \sin(t-\pi) \, u(t-\pi) \end{aligned}$$

جہاں دائیں جزو میں $\sin t = -\sin(t-\pi)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $f(t-a)u(t-a)$ صورت میں لکھا گیا ہے۔منتقلی کا دوسرا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے اس کا ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔

$$[s^2Y - s(1) + 6] + 2[sY - 1] + 10Y = 85 \frac{1}{s^2+1}(1 + e^{-\pi s})$$

جسے Y کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$Y = \frac{85}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} + \frac{85}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} e^{-\pi s} + \frac{s-4}{s^2+2s+10} \tag{6.34}$$

منتقلی کے پہلے مسئلے سے مساوات 6.34 کے آخری جزو کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-4}{s^2+2s+10}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)-5}{(s+1)^2+3^2}\right]=e^{-t}(\cos 3t-\frac{5}{3}\sin 3t) \tag{6.35}$$

مساوات 6.34 کے پہلے جزو میں غیر دہراتے مخلوط جذر پائے جاتے ہیں للذا اس کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گا جہاں A ، B ، C اور D معلوم کرنا باقی ہے۔

$$\frac{85}{(s^2+1)(s^2+2s+10)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+10}$$

دونوں اطراف کو $(s^2+1)(s^2+2s+10)$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$85=(As+B)(s^2+2s+10)+(Cs+D)(s^2+1)$$

ہر s کے دونوں اطراف کے عددی سروں کو آپس میں برابر لکھتے

$$\begin{aligned} s^3:&\quad A+C=0, & s^2:&\quad 2A+B+D=0\\ s^1:&\quad 10A+2B+C=0, & s^0:&\quad 10B+D=85\end{aligned}$$

ہوئے چار عدد ہمزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں جن کا حل $A=-2$ ، $B=9$ ، $C=2$ اور $D=-5$ ہے۔یوں مساوات 6.34 کے پہلے جزو کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گا

$$\frac{-2s+9}{s^2+1}+\frac{2(s+1)-7}{(s+1)^2+9}$$

جس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

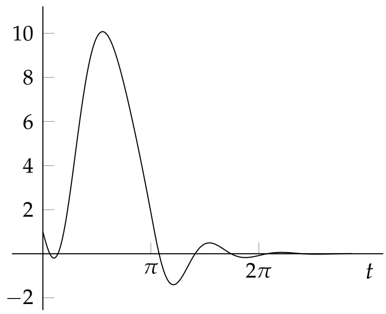
$$-2\cos t+9\sin t+e^{-t}(2\cos 3t-\frac{7}{3}\sin 3t) \tag{6.36}$$

مساوات 6.35 اور مساوات 6.36 کا مجموعہ $0<t<\pi$ دورانیے کا حل ہے۔

$$y(t)=e^{-t}(3\cos 3t-4\sin 3t)-2\cos t+9\sin t \quad 0<t<\pi \tag{6.37}$$

مساوات 6.34 کے دوسرے جزو میں $e^{-\pi s}$ پایا جاتا ہے للذا مساوات 6.36 اور منتقلی کے دوسرے مسئلے سے $t>\pi$ کے لئے اس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا

$$-2\cos(t-\pi)+9\sin(t-\pi)+e^{-(t-\pi)}[2\cos 3(t-\pi)-\frac{7}{3}\sin 3(t-\pi)]$$



شکل 6.21: اسپرنگ اور کمیت کا جبری ارتعاش (مثال 6.27)۔

جس میں $\cos t - = (t - \pi)\cos$ اور $\cos 3t - = (3t - 3\pi)\cos$، . . . استعمال کرتے ہوئے

$$2\cos t - 9\sin t + e^{-(t-\pi)}[-2\cos 3t + \frac{7}{3}\sin 3t]$$

ملتا ہے۔ اس کو مساوات 6.37 کے ساتھ جمع کرنے سے $t > \pi$ پر مسئلے کا حل ملتا ہے۔

$$y(t) = e^{-t}(3\cos 3t - 4\sin 3t) + e^{-(t-\pi)}(-2\cos 3t + \frac{7}{3}\sin 3t) \quad t > \pi \tag{6.38}$$

شکل 6.21 میں مسئلے کا حل دکھایا گیا ہے۔ □

دہراتا تفاعل

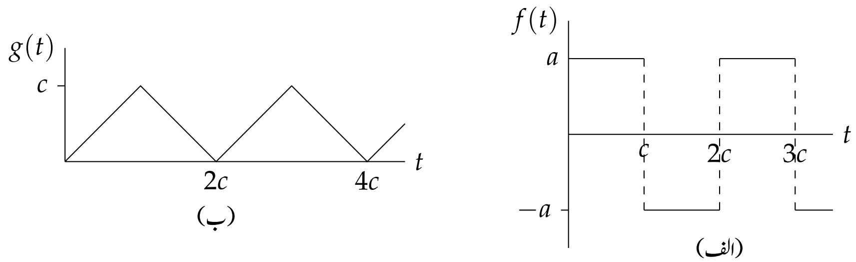
عملی استعمال میں عموماً دہراتے تفاعل پائے جاتے ہیں جو سادہ سائن نما تفاعل سے زیادہ پیچیدہ ہوتے ہیں۔ آئیں ان پر غور کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ دہراتے تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ $p\ (>0)$ ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$f(t+p) = f(t) \qquad (t > 0) \tag{6.39}$$

اگر $f(t)$ پر p ٹکڑوں میں استمراری ہو تب اس لاپلاس بدل موجود ہو گا۔ اس تفاعل کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ لکھتے ہوئے تکمل کو دوری عرصے کے برابر ٹکڑوں میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^p e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{20}^{3p} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots$$



شکل 6.22: دہراتا چکور موج اور دہراتا تکونی موج۔(مثال 6.28 اور مثال 6.29)

دوسرے تکمل میں $t = \tau + p$ پر کرتے ہوئے تکمل کے حدود 0 تا p لکھے جائیں گے۔اسی طرح تیسرے تکمل میں $t = \tau + 2p$ اور n تکمل میں $t = \tau + (n-1)p$ پر کرتے ہوئے ان تکمل کے حدود بھی 0 تا p لکھے جائیں گے۔یوں درج بالا کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}t + \int_0^p e^{-s(\tau+p)} f(\tau)\,\mathrm{d}t + \int_0^p e^{-s(\tau+2p)} f(\tau)\,\mathrm{d}t + \cdots$$

جہاں $f(\tau + p) = f(\tau)$ ، $f(\tau + 2p) = f(\tau)$ نقطے لکھا گیا ہے۔درج بالا کو

$$\mathcal{L}(f) = [1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \cdots] \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب چکور قوسین کے اندر مجموعہ ہندسی تسلسل ہے جو $\frac{1}{1-e^{-ps}}$ کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 6.8: p دوری عرصے کا تفاعل $f(t)$ جو ٹکڑوں میں استمراری ہو کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f\,\mathrm{d}t \qquad (s > 0) \tag{6.40}$$

مثال 6.28: دہراتا چکور موج

دہراتا چکور موج شکل 6.22-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں $p = 2c$ ہے لہٰذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-2cs}}\left[\int_0^c e^{-st}a\,\mathrm{d}t + \int_c^{2c} e^{-st}(-a)\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{(1-e^{-cs})(1+e^{-cs})}\left[\frac{a}{s}\left(1-e^{-cs}\right) - \frac{a}{s}\left(e^{-cs}-e^{-2cs}\right)\right]\\
&= \frac{a}{s}\left(\frac{1-e^{-cs}}{1+e^{-cs}}\right) = \frac{a}{s}\left(\frac{e^{\frac{cs}{2}}-e^{\frac{cs}{2}}}{e^{\frac{cs}{2}}+e^{\frac{cs}{2}}}\right) = \frac{a}{s}\tanh\frac{cs}{2}
\end{aligned}$$

اسی جواب کو زیادہ کارآمد صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{a}{s}\left(\frac{1-e^{-cs}}{1+e^{-cs}}\right) = \frac{a}{s}\left(1-\frac{2e^{-cs}}{1+e^{-cs}}\right) = \frac{a}{s}\left(1-\frac{2}{e^{cs}+1}\right)$$

□

مثال 6.29: دہراتا تکونی موج

دہراتا تکونی موج شکل 6.22-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: چکور موج کا تکمل، تکونی موج ہوتا ہے۔یوں شکل-الف میں $a = 1$ لے کر تکمل لینے سے شکل-ب حاصل ہو گی لہٰذا مثال 6.28 کے جواب سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s}\mathcal{L}f = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{cs}{2}$$

□

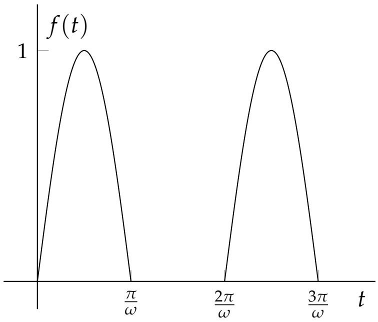
مثال 6.30: مکمل لہر سمت کار

مکمل لہر سمت کار[21] بدلتی سمت سائن نما موج سے یک سمتی موج بناتی ہے جسے شکل 6.23-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس لہر کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

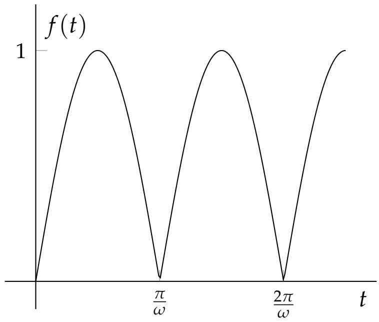
حل: نصف لہر سمت کار کی موج کا $p = \frac{2\pi}{\omega}$ ہے لہٰذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(\frac{1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}\right) \tag{6.41}$$

[21] full wave rectifier



(ب)



(الف)

شکل 6.23: مکمل لہر اور نصف لہر سمت کار کے امواج (مثال 6.30 اور مثال 6.31)۔

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(\frac{e^{\frac{\pi s}{2\omega}}+e^{-\frac{\pi s}{2\omega}}}{e^{\frac{\pi s}{2\omega}}-e^{-\frac{\pi s}{2\omega}}}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\coth\frac{\pi s}{2\omega}$$

□

مثال 6.31: نصف لہر سمت کار

نصف لہر سمت کار[22] بدلتی سمت سائن نما موج سے یک سمتی موج بناتی ہے جسے شکل 6.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس لہر کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: مکمل لہر سمت کار کی موج کا $p=\frac{2\pi}{\omega}$ ہے لہٰذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(\frac{1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}}\right) \tag{6.42}$$

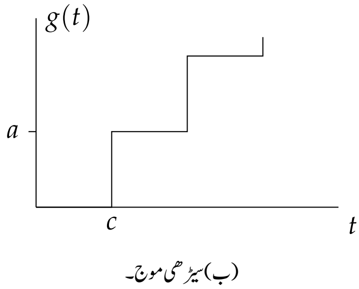
□

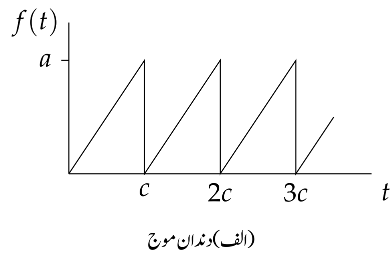
مثال 6.32: دندان موج

دندان موج[23] کو شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

---

half wave rectifier[22]
saw-tooth wave[23]





شکل 6.24: دندان موج (مثال 6.32) اور سیڑھی تفاعل (مثال 6.33)۔

حل: دندان موج کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(t) = \frac{a}{c}t, \quad (0 < t < c) \quad \text{اور} \quad f(t+c) = f(t)$$

یوں تکمل بالحصص سے

$$\begin{aligned} \int_0^c e^{-st} t \,\mathrm{d}t &= -\frac{t}{s}e^{-st}\bigg|_0^c + \frac{1}{s}\int_0^c e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{c}{s}e^{-cs} - \frac{1}{s^2}(e^{-cs} - 1) \end{aligned}$$

حاصل کرتے ہوئے مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{a}{cs^2} - \frac{ae^{-cs}}{s(1 - e^{-cs})} \tag{6.43}$$

□

مثال 6.33: سیڑھی موج

سیڑھی موج[24] کو شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: سیڑھی تفاعل کو الجبرائی طور پر لکھتے ہیں

$$g(t) = na \qquad (nc < t < (n+1)c \quad n = 0, 1, 2, \cdots)$$

[24] stair case

جو مسلسل بڑھتے تفاعل $h(t)=\frac{a}{c}t$ اور دندان موج $f(t)$ کے فرق $g(t)=h(t)-f(t)$ کے برابر ہے۔ اب $\mathcal{L}(\frac{at}{c})=\frac{a}{cs^2}$ ہے جبکہ مساوات 6.43 لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دیتی ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(g)=\frac{a}{cs^2}-\left[\frac{a}{cs^2}-\frac{ae^{-cs}}{s(1-e^{-cs})}\right]=\frac{ae^{-cs}}{s(1-e^{-cs})} \tag{6.44}$$

□

سوالات

سوال 6.116 تا سوال 6.116 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 6.116: $y''+y=\delta(t-\pi),\quad y(0)=4,\, y'(0)=0$

جواب: $y=4\cos t-u(t-\pi)\sin t$ ؛ اکائی ضرب عین $t=\pi$ پر عمل کرتی ہے۔ابتدائی معلومات صرف اس صورت ممکن ہیں کہ اکائی ضرب سے پہلے بھی نظام ارتعاش پذیر ہو۔جواب میں $4\cos t$ اسی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 6.117: $y''+y=2\delta(t-3\pi),\quad y(0)=1,\, y'(0)=0$

جواب: $y=\cos t-2u(t-3\pi)\sin t$

سوال 6.118: $y''+4y=3\delta(t-2\pi),\quad y(0)=-2,\, y'(0)=1$

جواب: $y=2\cos 2t+0.5\sin 2t+1.5u(t-2\pi)\sin t$

سوال 6.119: $y''+9y=2\delta(t-\pi)-\delta(t-2\pi),\quad y(0)=0,\, y'(0)=-1$

جواب: $y=-\frac{1}{3}\sin 3t-\frac{2}{3}u(t-\pi)\sin 3t-\frac{1}{3}u(t-2\pi)\sin 3t$

سوال 6.120: $y''+6y'+10y=\delta(t-1),\quad y(0)=0,\, y'(0)=2$

جواب: $y=2e^{-3t}\sin t+e^{-3(t-1)}u(t-1)\sin(t-1)$

سوال 6.121: $2y''+3y'+y=2e^{-t}+\delta(t-1),\quad y(0)=0,\, y'(0)=1$

جواب: $y=6e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}(6+2t)+4u(t-1)[e^{-\frac{1}{2}(t-1)}-e^{-(t-1)}]$

سوال 6.122: $y''+3y'+3y=5\sin t+20\delta(t-1), \quad y(0)=1,\, y'(0)=1$
جواب: $y=\sin t-3\cos t+8e^{-t}-4e^{-2t}+[e^{-(t-1)}-e^{-2(t-1)}]u(t-1)$

سوال 6.123: $y''+4y'+5y=[u(t)-u(t-2)]e^{t}-6\delta(t-3), y(0)=0, y'(0)=1$
دائیں ہاتھ پہلا جزو درج ذیل لکھتے ہوئے آگے چلیں۔

$$[u(t)-u(t-2)]e^{t}=u(t)e^{t}-e^{2}u(t-2)e^{(t-2)}$$

یوں جواب درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}y=\frac{1}{5}e^{-2t}(3\sin t-\cos t)+\frac{1}{5}+\frac{e^{2}e^{-2(t-2)}}{5}[2\sin(t-2)+\cos(t-2)]u(t-2)\\-\frac{e^{2}}{5}u(t-2)-6e^{-2(t-3)}\sin(t-3)u(t-3)\end{aligned}$$

سوال 6.124: $y''+2y'+5y=5t-10\delta(t-\pi), \quad y(0)=1, y'(0)=2$
جواب: $y=\frac{1}{5}e^{-t}(6\sin 2t+7\cos 2t)+t-\frac{2}{5}-5u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin 2t$

6.5 الجھاو

تفاعل $F(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $f(t)$ اور $G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $g(t)$ جانتے ہوئے ہم تفاعل $H(s)=F(s)G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ درج ذیل مسئلے کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔ تفاعل $h(t)$ کو $(f*g)(t)$ لکھا جاتا ہے جس کو f اور g کی **الجھاو**[25] کہتے ہیں۔

مسئلہ 6.9: مسئلہ الجھاو
اگر $F(s)$ اور $G(s)$ کے الٹ لاپلاس بدل بالترتیب $f(t)$ اور $g(t)$ ہوں، جو مسئلہ وجودیت (مسئلہ 6.2) کے شرط پر پورا اترتے ہوں، تب حاصل ضرب $H(s)=F(s)G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$ کی **الجھاو** ہو گا جس کو $(f*g)(t)$ لکھا جاتا ہے اور جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$h(t)=(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.45}$$

---
[25] convolution

ثبوت : $G(s)$ کی تعریف اور منتقلی کے پہلے مسئلے سے، $\tau(\tau \geq 0)$ کی ہر معین قیمت کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$e^{-s\tau}G(s) = \int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}t = \int_\infty^\tau e^{-st}g(t-\tau)\,\mathrm{d}t \tag{6.46}$$

جہاں $s > \gamma$ ہے۔اب $F(s)$ کی تعریف سے

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)G(s)\,\mathrm{d}\tau$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 6.46 استعمال کرتے ہوئے

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\int_\infty^\tau e^{-st}g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau$$

ملتا ہے، جہاں $s > \gamma$ ہے۔یوں پہلے t پر τ تا ∞ تکمل لیا جاتا ہے اور پھر τ پر 0 تا ∞ تکمل لیا جاتا ہے۔ سطحی تکمل کا پچر نما خطہ، جو $t\tau$ سطح پر لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے، کو شکل 6.25 میں گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ تفاعل f اور g یوں چنے گئے ہیں کہ تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے پہلے τ اور بعد میں t پر تکمل لیا جا سکتا ہے (سطحی تکمل میں ترتیب الٹ کرنے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا)۔ یوں ہم پہلے τ پر 0 تا t اور بعد میں t پر 0 تا ∞ تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

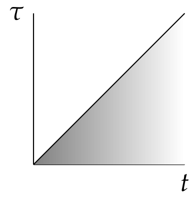
$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty e^{-st}h(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(h)\end{aligned}$$

جہاں مساوات 6.45 تفاعل h دیتی ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوا۔

$\square$

الجھاو کی تعریف (مساوات 6.45) استعمال کرتے ہوئے الجھاو کے درج ذیل خصوصیات ثابت کیے جا سکتے ہیں

$$\begin{aligned}f*g &= g*f && \text{(قانون تبادل)}\\ f*(g_1+g_2) &= f*g_1+f*g_2 && \text{(قانون جزئیتی تقسیم)}\\ (f*g)*v &= f*(g*v) && \text{(قانون تلازمی)}\\ f*0 &= 0*f = 0\end{aligned}$$



شکل 6.25: سطح $t\tau$ پر تکمل کا خطہ (ثبوت مسئلہ 6.9)۔

جو اعداد کو ضرب دینے کے کلیات ہیں۔ البتہ عموماً $1 * g \neq g$ ہو گا مثلاً $g(t) = t$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(1 * g)(t) = \int_0^\infty 1 \cdot (t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{t^2}{2}$$

جو t کے برابر نہیں ہے۔ اسی طرح الجھاو کی ایک اور انوکھی خاصیت (مثال 6.36 دیکھیں) یہ ہے کہ بعض اوقات $(f * f)(t) \geq 0$ درست نہیں ہو گا۔

آئیں اب الجھاو استعمال کرتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں اور تفرقی مساوات حل کریں۔

مثال 6.34: تفاعل $H(s) = \frac{1}{s(s-a)}$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ مسئلہ الجھاو کی مدد سے حاصل کریں۔

حل: $F = \frac{1}{s-a}$ اور $G = \frac{1}{s}$ لیتے ہیں جن کے الٹ لاپلاس بدل بالترتیب $f(t) = e^{at}$ اور $g(t) = 1$ ہیں۔ یوں $f(\tau) = e^{a\tau}$ اور $g(t - \tau) = 1$ ہوں گے لہٰذا مسئلہ الجھاو کی مدد سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

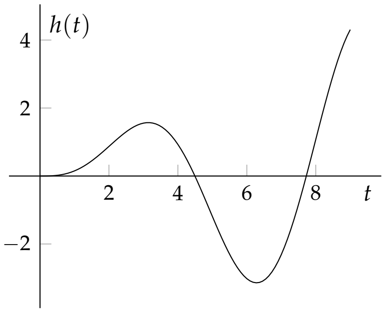
$$h(t) = e^{a\tau} * 1 = \int_0^t e^{a\tau} \cdot 1\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

ہم دوبارہ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا جواب درست ہے۔

$$\mathcal{L}(h) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s} = \mathcal{L}(e^{at})\mathcal{L}(1)$$

□

مثال 6.35: تفاعل $H(s) = \frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل بذریعہ الجھاو حاصل کریں۔



شکل 6.26: مثال 6.36

حل: ہم $F = G = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ لیتے ہیں جس کا الٹ لاپلاس بدل $\sin\omega t$ ہے۔ یوں

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \sin\omega t * \sin\omega t = \int_0^t \sin\omega\tau \sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \frac{1}{2}[\cos(2\omega\tau - \omega t) - \cos\omega t]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\sin(2\omega\tau - \omega t)}{4\omega} - \frac{\tau\cos\omega t}{2}\bigg|_0^t \\
&= \frac{\sin\omega t}{2\omega} - \frac{t\cos\omega t}{2}
\end{aligned}
$$

ہو گا۔ □

مثال 6.36: $(f*f)(t) > 0$ درست نہیں ہے

گزشتہ مثال (مثال 6.35) میں $\omega = 1$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس کو شکل 6.26 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کی قیمت منفی ممکن ہے۔

$$
h(t) = \sin t * \sin t = \frac{\sin t}{2} - \frac{t\cos t}{2}
$$

□

جزوی کسری پھیلاو کے آخر میں جوڑی دار مخلوط جزو کا ذکر کیا گیا جس پر اگلے مثال میں غور کرتے ہیں۔

مثال 6.37: گمک، دہراتا مخلوط جزو
اسپرنگ اور کمیت کے نظام کا درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں F_0 مستقل ہے۔

$$my'' + ky = F_0 \sin ct, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

حل: دونوں اطراف کو m سے تقسیم کرتے ہوئے $K = \frac{F_0}{m}$ اور $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ لکھتے ہوئے

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin \alpha t$$

ملتا ہے جس سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔

$$s^2 Y + \omega_0^2 Y = K \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے۔

$$Y = \frac{K\alpha}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \alpha^2)}$$

اب

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}\right] = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + \alpha^2}\right] = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t$$

استعمال کرتے ہوئے مسئلہ الجھاو کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$y(t) = \frac{K\alpha}{\omega_0 \alpha} \sin \omega_0 t * \sin \alpha t = \frac{K}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 \tau \sin(\alpha t - \alpha \tau) \, d\tau$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تکمل کے اندر مقدار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{2}[-\cos[\alpha t + (\omega_0 \tau - \alpha \tau)] + \cos[\alpha t - (\omega_0 \tau + \alpha \tau)]] \tag{6.47}$$

یہاں دو مختلف صورتیں پائی جاتی ہیں۔ پہلی صورت میں $\alpha \neq \omega_0$ ہو گا جو بلا گمک صورت ہے۔

بلا گمک صورت میں $\alpha \neq \omega_0$ ہو گا لہٰذا تکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{2\omega_0}\left[-\frac{\sin[\alpha t + (\omega_0\tau - \alpha\tau)]}{\omega_0 - \alpha} + \frac{\sin[\alpha t - (\omega_0\tau + \alpha\tau)]}{-\omega_0 - \alpha}\right]_0^t \\ &= \frac{K}{2\omega_0}\left[\frac{\sin\alpha t - \sin\omega_0 t}{\omega_0 - \alpha} + \frac{\sin\alpha t + \sin\omega_0 t}{\omega_0 + \alpha}\right] \\ &= \frac{K}{\alpha^2 - \omega_0^2}\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \sin\alpha t\right) \end{aligned}$$

جو دو ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔ان میں سے ایک ہارمونی ارتعاش کی تعدد نظام کی قدرتی تعدد ω_0 ہے جبکہ دوسری ہارمونی ارتعاش کی تعدد لاگو کردہ جبری قوت کی تعدد α ہے۔

گمک دوسری صورت ہے جہاں $\alpha = \omega_0$ ہو گا۔گمک کی صورت میں مساوات 6.47 درج ذیل دیگا۔

$$\frac{1}{2}[-\cos\omega_0 t + \cos(\omega_0 t - 2\omega_0\tau)]$$

یوں تکمل سے

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{2\omega_0}[-\tau\cos\omega_0 t - \frac{1}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t - 2\omega_0\tau)]\Big|_0^t \\ &= \frac{K}{2\omega_0^2}[\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t] \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو مسلسل بڑھتی ارتعاش یعنی **گمک**[26] کو ظاہر کرتی ہے۔ □

تکملی مساوات

الجھاو کی مدد سے بعض تکملی مساوات حل کرنا ممکن ہوتا ہے۔تکملی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم مقدار $y(t)$ تکمل کے اندر (اور ممکن ہے کہ تکمل کے باہر بھی) پایا جاتا ہو۔ان مساوات میں الجھاو کی طرز کا تکمل پایا جاتا ہے۔آئیں اس ترکیب کو ایک مثال کی مدد سے سیکھیں۔

[26] resonance

مثال 6.38: درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

$$y(t) - \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = t$$

حل: اس مساوات میں تکمل کو $y(t)$ اور $\sin t$ کی الجھاو $y * \sin t$ لکھ کر

$$y(t) - y * \sin t = t$$

لاپلاس بدل لیتے ہیں جہاں $\mathcal{L}(y) = Y$ ہے۔

$$Y - Y\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2}$$

ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$Y = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

جس کا الٹ لاپلاس بدل درکار حل ہے۔

$$y(t) = t + \frac{t^3}{6}$$

□

سوالات

سوال 6.125 تا سوال 6.136 میں الجھاو کو بذریعہ تکمل حاصل کریں۔

سوال 6.125: $1 * 1$
جواب: t

سوال 6.126: $1 * t$
جواب: $\frac{t^2}{2}$

سوال 6.127: $t * t$
جواب: $\frac{t^3}{6}$

سوال 6.128: $t * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{\omega}(t - \sin \omega t)$

سوال 6.129: $1 * \cos \omega t$
جواب: $\frac{\sin \omega t}{\omega}$

سوال 6.130: $1 * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{\omega}(1 - \cos \omega t)$

سوال 6.131: $e^t * e^{-t}$
جواب: te^t

سوال 6.132: $\sin \omega t * \cos \omega t$
جواب: $\frac{t \sin \omega t}{2}$

سوال 6.133: $\cos \omega t * \cos \omega t$
جواب: $\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$

سوال 6.134: $e^{\omega t} * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{2\omega}(e^{\omega t} - \sin \omega t - \cos \omega t)$

سوال 6.135: $e^{at} * t$
جواب: $\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$

سوال 6.136: $a \neq b$ $\quad e^{at} * e^{bt}$
جواب: $\frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}$

سوال 6.137 تا سوال 6.142 تکملی مساوات ہیں۔انہیں الجھاو کی مدد سے حل کریں۔

سوال 6.137: $y(t) - \int_0^t y(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$
جواب: $y(t) = e^t$

سوال 6.138: $y(t) + 9 \int_0^t y(\tau)(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = 3t$
جواب: $y(t) = \sin 3t$

سوال 6.139: $y(t) + 4\int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1$
جواب: $y(t) = \cos 2t$

سوال 6.140: $y(t) + \int_0^t y(\tau)\sin(2t-2\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sin 2t$
جواب: $y(t) = \frac{2}{3}\sin\sqrt{6}t$

سوال 6.141: $y(t) + 3e^t\int_0^t y(\tau)e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = te^t$
جواب: $\frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$

سوال 6.142: $y(t) + \int_0^t y(\tau)(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = 4 + \frac{t^2}{2}$
جواب: $y(t) = 1 + 3\cos t$

سوال 6.143: ثابت کریں کہ ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + \omega y = r(t), \quad y(0) = A,\, y'(0) = B$$

جہاں $r(t)$ نا معلوم جبری تفاعل ہے کا حل الجھاو کی صورت میں درج ذیل ہے۔

$$y(t) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t * r(t) + A\cos\omega t + \frac{B}{\omega}\sin\omega t$$

سوال 6.144 تا سوال 6.151 میں دیے گئے تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل بذریعہ الجھاو حاصل کریں۔

سوال 6.144: $\frac{1}{s(s+1)}$
جواب: $1 - e^{-t}$

سوال 6.145: $\frac{1}{s^2}$
جواب: t

سوال 6.146: $\frac{5}{(s+2)(s-3)}$
جواب: $e^{3t} - e^{-2t}$

سوال 6.147: $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$
جواب: $t\sin 2t$

سوال 6.148: $\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$
جواب: $\omega t - \sin\omega t$

سوال 6.149: $\frac{4}{s(s^2-4)}$
جواب: $\cosh 2t - 1$

سوال 6.150: $\frac{24}{(s^2+1)(s^2+9)}$
جواب: $3\sin t - \sin 3t$

سوال 6.151: $\frac{30}{(s^2+1)(s^2-9)}$
جواب: $\sinh 3t - 3\sin t$

6.6 لاپلاس بدل کی تکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات

ہم تفاعل $f(t)$ کی تفرق $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ کا لاپلاس بدل اور اس کی تکمل $\int f\,\mathrm{d}t$ کا لاپلاس بدل حاصل کر چکے ہیں۔ اس حصے میں لاپلاس بدل $F(s)$ کی تفرق $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$ کا الٹ لاپلاس بدل اور اس کی تکمل $\int F\,\mathrm{d}s$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کیا جائے گا۔

لاپلاس بدل کی تفرق

اگر تفاعل $f(t)$ مسئلہ 6.2 کے شرائط پر پورا اترتا ہو تب یہ ثابت (ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا) کیا جا سکتا ہے کہ تفاعل $\mathcal{L}(f) = F(s)$ کا تفرق $F'(s) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$، تکمل کے اندر s کے ساتھ تفرق لینے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں اگر

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ہو تب

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

ہو گا۔اس طرح اگر $\mathcal{L}(f) = F(s)$ ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\mathcal{L}[(tf(t))] = -F'(s) \quad \text{اور} \quad \mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -tf(t) \tag{6.48}$$

یوں تفاعل کی بدل کا تفرق لینا، تفاعل کو $-t$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔

مثال 6.39: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}\left(\frac{t\sin\omega t}{2\omega}\right) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

حل: $\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

دونوں اطراف کو 2ω سے تقسیم کرتے ہوئے ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

مثال 6.40: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$$

حل: $\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(t\cos\omega t) = -\frac{1(s^2+\omega^2)-s(2s)}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{s^2+\omega^2} - \frac{2\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے

$$t\cos\omega t = \frac{1}{\omega}\sin\omega t - 2\omega^2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$$

ملتا ہے جس کو ترتیب دیتے ہوئے ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

مثال 6.41: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$$

حل: شمار کنندہ میں ω^2 جمع اور منفی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

گزشتہ دو مثالوں میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ درج بالا کے دائیں ہاتھ کے اجزاء کے الٹ لاپلاس بدل $t\cos\omega t$ اور $\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$ ہیں۔ یوں ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

لاپلاس بدل کی تکمل

اگر $f(t)$ مسئلہ 6.2 کے شرائط پر پورا اترتا ہو اور $\frac{f(t)}{t}$ کی حد موجود ہو، جہاں t صفر تک دائیں جانب سے آئے تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $s>\gamma$ ہے۔

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}\quad \text{یعنی}\quad \mathcal{L}\left[\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}\right]=\frac{f(t)}{t}\tag{6.49}$$

یوں تفاعل $f(t)$ کے لاپلاس بدل کا تکمل لینا $f(t)$ کو t سے تقسیم کرنے کے مترادف ہے۔

لاپلاس بدل کی تعریف استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}=\int_s^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\tilde{s}t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tilde{s}$$

اور یہ ثابت (یہ ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔) کیا جا سکتا ہے کہ درج بالا شرائط کے بعد درج بالا تکمل میں تکمل کی ترتیب الٹ کی جا سکتی ہے۔ یوں

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}=\int_0^\infty\left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t}f(t)\,\mathrm{d}\tilde{s}\right]\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t}\,\mathrm{d}\tilde{s}\right]\mathrm{d}t$$

ملتا ہے جس میں $s>\gamma$ کی صورت میں $\tilde{s}$ پر تکمل $\frac{e^{-st}}{t}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]\qquad(s>\gamma)$$

ہو گا جو مساوات 6.49 ہے۔

مثال 6.42: تفاعل $\ln\left(\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right)$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: دیے گئے تفاعل کا تفرق لیتے ہوئے

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\left(\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right)=-\frac{2\omega^2}{s(s^2-\omega^2)}=\frac{2}{s}-\frac{1}{s-\omega}-\frac{1}{s+\omega}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو ہم $F(s)$ تصور کرتے ہیں۔ جدول 6.1 کی مدد سے اس کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s-\omega}-\frac{1}{s+\omega}\right)=2-e^{\omega t}-e^{-\omega t}$$

جو مساوات 6.49 کے لئے درکار شرائط پر پورا اترتا تفاعل ہے۔ یوں

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right]=\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}=\frac{f(t)}{t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے درج ذیل جواب ملتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right]=\frac{1}{t}\left(2-e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)$$

□

متغیر عددی سر والے مخصوص سادہ تفرقی مساوات

تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $Y(s)$ لیتے ہوئے مساوات 6.5 اور مساوات 6.6 کے تحت

$$\mathcal{L}(f')=sY-sy(0),\qquad \mathcal{L}(f'')=s^2Y-sy(0)-y'(0)$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(tf')&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[sY-sy(0)]=-Y-s\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}\\ \mathcal{L}(tf'')&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2Y-sy(0)-y'(0)]=-2sY-s^2\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}+y(0)\end{aligned}\tag{6.50}$$

اگر سادہ تفرقی مساوات کے عددی سر $at+b$ طرز کے ہوں تب اس کا ضمنی مساوات Y کا ایک درجی مساوات ہو گا جو بعض اوقات دیے گئے دو درجی مساوات سے زیادہ آسان ہوتا ہے۔البتہ at^2+bt+c طرز کے عددی سر کی صورت میں ضمنی مساوات Y کا دو درجی مساوات ہو گا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ترکیب صرف $at+b$ طرز کی عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات کے لئے سود مند ہو گا۔درج ذیل مثال میں ایک اہم سادہ تفرقی مساوات کو اس ترکیب سے حل کیا گیا ہے۔

مثال 6.43: لاگیغ مساوات، لاگیغ کثیر رکنی
درج ذیل **لاگیغ سادہ تفرقی**[27] مساوات[28] کہلاتی ہے۔

$$ty''+(1-t)y'+ny=0 \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{6.51}$$

حل: مساوات 6.50 کی مدد سے لاگیغ مساوات کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$[-2sY-s^2\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}+y(0)]+(1-t)[-Y-s\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}]+nY=0$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}Y}{Y}=-\frac{n+1-s}{s-s^2}\,\mathrm{d}s=(\frac{n}{s-1}-\frac{n+1}{s})\,\mathrm{d}s$$

ملتا ہے۔اس کا حل درج ذیل ہے۔

$$Y=\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \tag{6.52}$$

ہم $l_n=\mathcal{L}^{-1}(Y)$ لکھ کر **کلیہ روڈریکیس**[29]

$$l_0=1, \quad l_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^ne^{-t}) \qquad n=1,2,\cdots \tag{6.53}$$

ثابت کرتے ہیں۔اس کلیے میں تفرق لینے کے بعد قوت نمائی تفاعل آپس میں کٹ جاتے ہیں لہٰذا کلیے سے روڈریکیس کثیر رکنی[30] ملتے ہیں۔

---

[27] Laguerre's equation
[28] فرانسیسی ریاضی دان ایڈمنڈ نیکولس لاگیغ [1834-1886]
[29] Rodrigues's formula
[30] Rodrigues's polynomials

مساوات 6.53 کو ثابت کرتے ہیں۔ جدول 6.1 اور منتقلی کے پہلے مسئلہ (s منتقلی) سے

$$\mathcal{L}(t^n e^{-t}) = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}} \tag{6.54}$$

لکھ کر مساوات 6.8 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n e^{-t})\right] = \frac{n!s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

ملتا ہے۔درج بالا لکھتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کیا گیا ہے کہ درجہ $n-1$ تک تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔درج بالا کو $n!$ سے تقسیم کرتے ہوئے اور منتقلی کا مسئلہ مزید ایک مرتبہ استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(l_n) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} = Y$$

لکھا جا سکتا ہے (مساوات 6.53 دیکھیں)۔یوں l_n دیے گئے سادہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

مساوات 6.51 کا ایک حل $l_n(t)$ ہے۔اس دو درجی تفرقی مساوات کے عمومی حل کے لئے کل دو عدد حل درکار ہیں۔ دوسرے حل کا لاپلاس بدل موجود نہیں ہے۔یوں $l_n(t)$ مساوات 6.51 کا مخصوص حل ہے نا کہ اس کا عمومی حل۔ □

سوالات

سوال 6.152 تا سوال 6.158 کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.48 دریافت کریں۔

سوال 6.152: $4te^{-2t}$
جواب: $\frac{4}{(s+2)^2}$

سوال 6.153: $t\cos\omega t$
جواب: $\frac{2s^2}{(s^2+\omega^2)^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2}$

سوال 6.154: $t\sin 5t$
جواب: $\frac{10s}{(s^2+25)^2}$

سوال 6.155: $t^2 \sin 5t$
جواب: گزشتہ سوال میں $f(t) = t \sin 5t$ کا بدل حاصل کیا گیا ہے۔ موجودہ سوال میں $\mathcal{L}[tf(t)]$ درکار ہے یعنی $\frac{40s^2}{(s^2+25)^3} - \frac{10}{(s^2+25)^2}$

سوال 6.156: $te^{-t} \sin t$
جواب: $\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}$

سوال 6.157: $t^n e^{at}$
جواب: $f = e^{at}$ کا بدل $F = \frac{1}{s-a}$ ہے۔ بالترتیب $\mathcal{L}[tf]$ ، $\mathcal{L}[t^2 F]$ ، $\cdots$ ، $\mathcal{L}[t^n f]$ لیتے ہوئے $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ ملتا ہے۔

سوال 6.158: $t^2 \cos t$
جواب: $\frac{8s^3}{(s^2+1)^3} - \frac{}{(s^2+1)^2}$

سوال 6.159 تا سوال 6.162 کلیہ روڈریکیس پر مبنی ہیں۔ سوال 6.159: n کی قیمت 1 تا 3 لیتے ہوئے مساوات 6.53 میں تفرق لے کر لاگیغ کثیر رکنی لکھیں۔

جواب: $n = 1$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$l_1(t) = \frac{e^t}{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(te^{-t}) = e^t[e^{-t} - te^{-t}] = 1 - t$$

اسی طرح $l_2(t) = 1 - 2t + \frac{t^2}{2}$ اور $l_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$ ملتے ہیں۔

سوال 6.160: گزشتہ سوال میں $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ دریافت کیے گئے۔ ثابت کریں کہ یہ تفاعل مساوات 6.51 پر پورا اترتے ہیں۔

جواب: $l_1(t) = 1 - t$ اور اس کے کے تفرقات $l_1'(t) = 1$ اور $l_1''(t) = 0$ کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$t(0) + (1-t)(1) + 1(1-t) = 0 \implies 0 = 0$$

ملتا ہے جو درکار ثبوت ہے۔ بقایا ثبوت بھی اسی طرح حاصل کیے جائیں گے۔

سوال 6.161: درج ذیل ثابت کریں اور اس کلیے سے $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ حاصل کریں۔

$$l_n(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{n!}{m!(n-m)!}t^m \tag{6.55}$$

سوال 6.162: درج ذیل لاگیغ کثیر رکنی کی **پیداکار تفاعل**[31] ہے۔اس کو پھیلا کر لکھتے ہوئے دونوں اطراف x کے یکساں طاقت کے عددی سر کو برابر پر کرتے ہوئے لاگیغ کثیر رکنی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ایسا ہی کرتے ہوئے $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ حاصل کریں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(t)x^n=(1-x)^{-1}e^{\frac{tx}{x-1}} \tag{6.56}$$

مسئلہ الجھاو، بدل کی تفرق یا بدل کی تکمل کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے سوال 6.163 تا سوال 6.168 کے الٹ لاپلاس بدل دریافت کریں۔

سوال 6.163: $\frac{6s}{(s^2+9)^2}$
جواب: $t\sin 3t$

سوال 6.164: $\frac{2s}{(s^2-1)^2}$
جواب: $t\sinh t$

سوال 6.165: $\frac{2s+4}{(s^2+4s+5)^2}$
جواب: $te^{-2t}\sin t$

سوال 6.166: $\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)$
جواب: تفاعل کو $\ln s-\ln(s-1)$ لکھ کر اس کا تفرق لیں۔ تفرق کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے مساوات 6.49 سے $\frac{-1+e^t}{t}$ حاصل ہو گا۔

سوال 6.167: $\ln\left(\frac{s^2+1}{(s-1)^2}\right)$
تفاعل کو $\ln(s^2+1)-2\ln(s-1)$ لکھ کر تفرق لیں۔ تفرق کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے مساوات 6.49 سے $\frac{2}{t}(-\cos te^t)$ حاصل ہو گا۔

سوال 6.168: $\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$
جواب: $\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$

---

[31] generating function

6.7 تفرقی مساوات کے نظام

لاپلاس بدل سے سادہ تفرقی مساوات کا نظام بھی حل کیا جا سکتا ہے۔ اس ترکیب کو چند مثالوں کی مدد سے سیکھتے ہیں۔آئیں سب سے پہلے مستقل عددی سر والے خطی، ایک درجی سادہ تفرقی مساوات [حصہ 4.1 دیکھیں۔] کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(t) \end{aligned} \tag{6.57}$$

پر غور کریں۔ $\mathcal{L}(y_1) = Y_1$ ، $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$ ، $\mathcal{L}(g_1) = G_1$ اور $\mathcal{L}(g_2) = G_2$ لکھتے ہوئے ضمنی نظام

$$\begin{aligned} sY_1 - y_1(0) &= a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + G_1(s) \\ sY_2 - y_2(0) &= a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + G_2(s) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)Y_1 + a_{12}Y_2 &= -y_1(0) - G_1(s) \\ a_{21}Y_1 + (a_{22} - s)Y_2 &= -y_2(0) - G_2(s) \end{aligned} \tag{6.58}$$

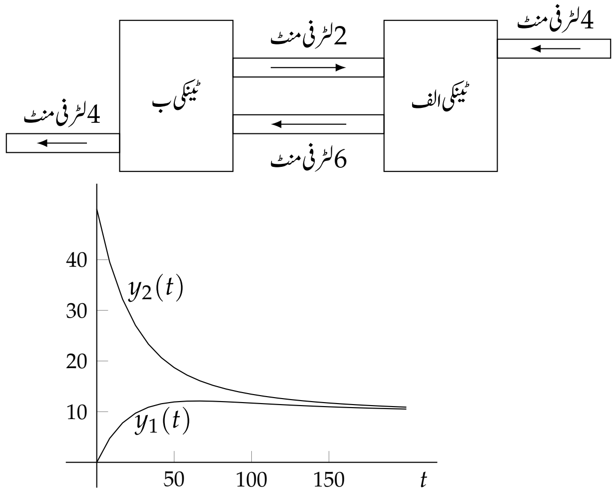
اس نظام کو الجبرائی طور پر حل کر کے Y_1 اور Y_2 حاصل ہوں گے جن سے $y_1 = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)]$ اور $y_2 = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$ ملتا ہے جو نظام کا حل ہے۔

نظام 6.58 اور نظام 6.58 کو سمتیہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{y} = [y_1 \;\; y_2]^T$ ، $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، $\boldsymbol{G} = [g_1 \;\; g_2]^T$ ، $\boldsymbol{Y} = [Y_1 \;\; Y_2]^T$ اور $\boldsymbol{G} = [G_1 \;\; G_2]^T$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \quad \text{اور} \quad (\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I})\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{G}$$

مثال 6.44: مرکب تیار کرنے والا دو ٹینکیوں کا نظام

شکل 6.27 میں دو ٹینکیوں کا نظام دکھایا گیا ہے۔ابتدائی طور پر ٹینکی-الف میں دو سو لٹر (2001) خالص پانی جبکہ ٹینکی-ب میں پچاس کلو گرام (50 kg) نمک ملا دو سو لٹر پانی پایا جاتا ہے۔نظام کے باہر سے ٹینکی-الف میں پانی کا داخلی بہاو چار لٹر فی منٹ ہے جس میں نمک کی شرح $\frac{1}{20}$ کلو گرام فی لٹر $(0.05\,\mathrm{kg\,l^{-1}})$ ہے۔ٹینکیوں میں نمک کی مقدار بالمقابل وقت $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ دریافت کریں۔



شکل 6.27: مثال 6.44 میں ٹینکیوں کا نظام۔

حل: نظام کا نمونہ درج ذیل مساوات سے لکھا جائے گا (حصہ 4.1 دیکھیں)۔

$$\text{تبدیلی کی شرح} = \text{داخلی بہاو فی منٹ} - \text{خارجی بہاو فی منٹ}$$

یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ اور $y_2(0) = 50$ ہیں۔

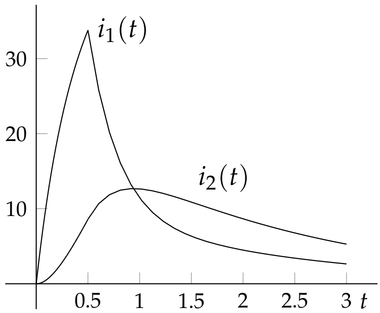
$$y_1' = -\frac{6}{200}y_1 + \frac{2}{200}y_2 + 4(0.05) \qquad y_2' = \frac{6}{200}y_1 - \frac{2}{200}y_2 - \frac{4}{200}y_2$$

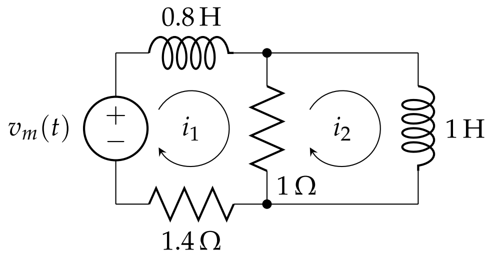
اس طرح ضمنی نظام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} -(0.03+s)Y_1 + 0.01Y_2 &= -\frac{0.2}{s} \\ 0.03Y_1 - (0.03+s)Y_2 &= -50 \end{aligned}$$

ضمنی نظام کے دو عدد ہمزاد مساوات کو الجبرائی طور پر حل کرتے ہوئے Y_1 اور Y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{3500s+30}{5000s^2+300s+3} = \frac{10}{s} + \frac{6.56}{s+0.0127} - \frac{16.56}{s+0.0473} \\ Y_2 &= \frac{250000s^2+7500s+30}{5000s^2+300s+3} = \frac{10}{s} + \frac{11.33}{s+0.0127} + \frac{28.67}{s+0.0473} \end{aligned}$$





شکل 6.28: مثال 6.45 کا دور اور اس کی برقی رو۔

ان کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں جو نظام کا حل ہے۔

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= 10 + 6.56e^{-0.0127t} - 16.56e^{-0.0473t}\\
y_2(t) &= 10 + 11.33e^{-0.0127t} + 28.67e^{-0.0473}
\end{aligned}
$$

□

مثال 6.45: برقی دور

برقی دور کو شکل 6.28 میں دکھایا گیا ہے۔ منبع کا دباو $v_m(t)$ وقت $t=0$ تا $t=0.5$ سیکنڈ کے لئے 100 وولٹ ہے جبکہ بقایا اوقات اس کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ رو $i_1(t)$ اور $i_2(t)$ دریافت کریں۔

حل: کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
0.8i_1' + 1(i_1 - i_2) + 1.4i_1 &= 100[1 - u(t-1)]\\
1(i_2 - i_1) + 1i_2' &= 0
\end{aligned}
$$

ابتدائی معلومات $i_1(0) = 0$ اور $i_2(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.5 اور منتقلی کے دوسرے مسئلے کی مدد سے ضمنی نظام حاصل کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
(s+3)I_1 - 1.25I_2 &= \frac{125}{s}(1 - e^{-\frac{s}{2}})\\
-I_1 + (s+1)I_2 &= 0
\end{aligned}
$$

جس کا الجبرائی حل درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{125(s+1)}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1-e^{-\frac{s}{2}}) \\
I_2 &= \frac{125}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1-e^{-\frac{s}{2}})
\end{aligned}
$$

دائیں اطراف جزو $1-e^{-\frac{1}{2}}$ کے علاوہ حصے کے جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہیں

$$
\begin{aligned}
&\frac{500}{7s} - \frac{125}{3(s+\frac{1}{2})} - \frac{625}{21(s+\frac{7}{2})} \\
&\frac{500}{7s} - \frac{250}{3(s+\frac{1}{2})} + \frac{250}{21(s+\frac{7}{2})}
\end{aligned}
$$

جن کا الٹ لاپلاس بدل $t=0$ تا $t=\frac{1}{2}$ کا حل دیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{500}{7} - \frac{125}{3}e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{625}{21}e^{-\frac{7}{2}t} \\
i_2(t) &= \frac{500}{7} - \frac{250}{3}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{250}{21}e^{-\frac{7}{2}t} \qquad (0 \le t \le \frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

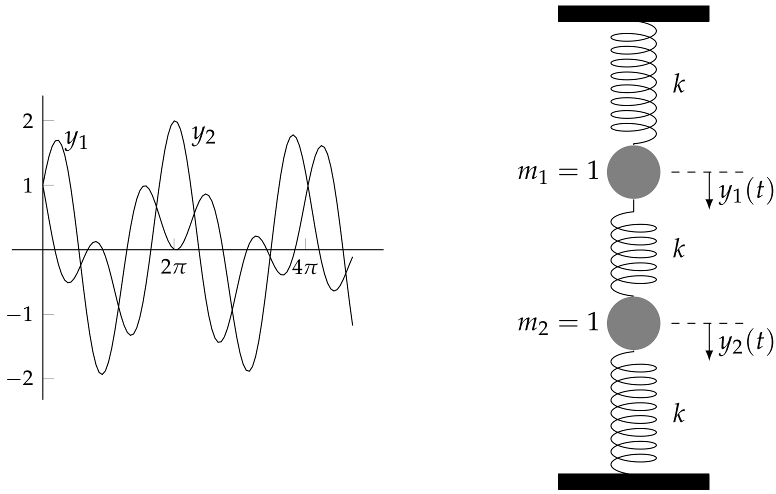
منتقلی کے دوسرے مسئلے کے تحت $t<\frac{1}{2}$ کے لئے حل درج ذیل ہو گا۔رو کو شکل 6.28 میں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= -\frac{125}{3}(1-e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}} - \frac{625}{21}(1-e^{\frac{7}{4}})e^{-\frac{7}{2}t} \\
i_2(t) &= -\frac{250}{3}(1-e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}} + \frac{250}{21}(1-e^{\frac{7}{4}})e^{-\frac{7}{2}t} \qquad (t > \frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

کیا آپ بتلا سکتے ہیں کہ آخر کار دونوں رو صفر کیوں ہو گی؟ □

بلند درجی تفرقی مساوات کے نظام کو بھی اسی طرح لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔ آئیں اسپرنگ اور کمیت کا ایک ایسا نظام حل کریں۔

مثال 6.46: دو عدد کمیت اور تین عدد اسپرنگ کا نظام شکل 6.29 میں دکھایا گیا ہے۔قصری قوت صفر کے برابر ہے۔ ساکن حال سے نیچے کی جانب فاصلہ $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ مثبت تصور کیا گیا ہے۔ابتدائی معلومات $y_1(0)=1$ ، $y_2(0)=1$ ، $y_1'(0)=\sqrt{3k}$ اور $y_2'(0)=-\sqrt{3k}$ ہیں۔مسئلہ حل کریں۔



شکل 6.29: اسپرنگ اور کمیت کا نظام (مثال 6.46)۔

حل: نیوٹن کا کلیہ کہتا ہے کہ کمیت ضرب اسراع برابر ہے قوت کے۔یوں بالائی اور نچلے کمیت کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y_1'' &= -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\ y_2'' &= -k(y_2 - y_1) - ky_2 \end{aligned}$$

کمیت m_1 پر بالائی اسپرنگ کی بنا $-ky_1$ قوت عمل کرتا ہے جبکہ درمیانی اسپرنگ کی بنا اس پر $k(y_2 - y_1)$ قوت عمل کرتا ہے۔درمیانی اسپرنگ کی لمبائی میں کل اضافہ $y_2 - y_1$ کے برابر ہے۔کمیت m_2 پر درمیانی اسپرنگ کی بنا $-k(y_2 - y_1)$ قوت عمل کرتا ہے جبکہ نچلی اسپرنگ کی بنا اس پر $-ky_2$ قوت عمل کرتا ہے۔

$\mathcal{L}(y_1) = Y_1$ اور $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$ لکھتے ہوئے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.6 کی مدد سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} s^2Y_1 - s - \sqrt{3k} &= -kY_1 + k(Y_2 - Y_1) \\ s^2Y_2 - s + \sqrt{3k} &= -k(Y_2 - Y_1) - kY_2 \end{aligned}$$

جن کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (s^2 + 2k)Y_1 - kY_2 &= s + \sqrt{3k} \\ -kY_1 + (s^2 + 2k)Y_2 &= s - \sqrt{3k} \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کا الجبرائی حل لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{(s+\sqrt{3k})(s^2+2k)+k(s-\sqrt{3k})}{(s^2+2k)^2-k^2} = \frac{s}{s^2+k}+\frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\\
Y_2 &= \frac{(s-\sqrt{3k})(s^2+2k)+k(s+\sqrt{3k})}{(s^2+2k)^2-k^2} = \frac{s}{s^2+k}-\frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}
\end{aligned}
$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \cos\sqrt{k}t+\sin\sqrt{3k}t\\
y_2(t) &= \cos\sqrt{k}t-\sin\sqrt{3k}t
\end{aligned}
$$

جس کو شکل 6.29 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حرکت دو ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

□

سوالات

سوال 6.169 تا سوال 6.178 میں سادہ تفرقی مساوات کا نظام دیا گیا ہے۔ اس کو لاپلاس سے حل کریں۔

سوال 6.169: $y_1'+y_2=0,\quad y_1+y_2'=1,\quad y_1(0)=0,\ y_2(0)=1$

جوابات: $y_1(t)=1-e^t$ اور $y_2(t)=e^t$

سوال 6.170: $y_1'+y_2=0,\quad y_1+y_2'=\sin t,\quad y_1(0)=0,\ y_2(0)=1$

جوابات: $y_1=\frac{1}{2}(\sin t-3\sinh t)$ اور $y_2=\frac{1}{2}(-\cos t+3\cosh t)$

سوال 6.171: $y_1'+y_1-2y_2=0,\quad y_2'-y_1+2y_2=0,\quad y_1(0)=1,\ y_2(0)=1$

جوابات: $y_1=\frac{1}{3}(4-e^{-3t})$ اور $y_2=\frac{1}{3}(2+e^{-3t})$

سوال 6.172: $y_1'=y_2-4\cos 4t,\quad y_2'=-3y_1-9\sin 4t,\quad y_1(0)=0,\ y_2(0)=0$

جوابات: $y_1=-\frac{1}{13}(8\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t+7\sin 4t)$ اور $y_2=\frac{24}{13}(\cos 4t-\cos\sqrt{3}t)$

سوال 6.173:

$$y_1' = y_2 + 1 - u(t-1), \quad y_2' = -y_1 + 1 - u(t-1), \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$$

جوابات:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\cos t + \sin t + 1 + u(t-1)[-1 + \cos(t-1) - \sin(t-1)] \\ y_2 &= \cos t + \sin t - 1 + u(t-1)[1 - \cos(t-1) - \sin(t-1)] \end{aligned}$$

سوال 6.174:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2 + u(t-1)e^t \\ y_2 &= y_1 - 3y_2 + u(t-1)e^t, \quad y_1(0) = 3, y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

جوابات:

$$\begin{aligned} y_1 &= -e^{-2t} + 4e^t + \frac{1}{3}u(t-1)(e^t - e^{3-2t}) \\ y_2 &= -e^{-2t} + e^t + \frac{1}{3}u(t-1)(e^t - e^{3-2t}) \end{aligned}$$

سوال 6.175:

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 \\ y_2 &= -y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 3, y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = (3+4t)e^{3t}$ اور $y_2(1-4t)e^{3t}$

سوال 6.176:

$$\begin{gathered} y_1'' = y_1 + 3y_2, \quad y_2'' = 4y_1 - 4e^t \\ y_1(0) = 2, y_1'(0) = 3, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 2 \end{gathered}$$

جوابات: $y_1 = e^t + e^{2t}$ اور $y_2 = e^{2t}$

سوال 6.177:

$$\begin{gathered} y_1'' = -y_2 - 101\sin 10t, \quad y_2'' = -y_1 + 101\sin 10t \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = 6, y_2(0) = 8, y_2'(0) = -6 \end{gathered}$$

جوابات:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -4e^t + \sin 10t + 4\cos 10t \\
y_2 &= 4e^t - \sin 10t + 4\cos 4t
\end{aligned}
$$

سوال 6.178:

$$
\begin{aligned}
&y_1' + y_2' = 2\sinh t \\
&y_2' + y_3' = e^t \\
&y_3' + y_1' = 2e^t - e^{-t}, \quad y_1(0) = 1,\, y_2(0) = 1,\, y_3(0) = 0
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = e^t$ ، $y_2 = e^{-t}$ اور $y_3 = e^t - e^{-t}$

6.8 لاپلاس بدل کے عمومی کلیے

تعریف	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$
الٹ لاپلاس بدل	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
خطیت	$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[g(t)]$
تفاعل کا تفرق	$\mathcal{L}(f')=s\mathcal{L}(f)-f(0)$
	$\mathcal{L}(f'')=s^2\mathcal{L}(f)-sf(0)-f'(0)$
	$\mathcal{L}(f(n))=s^n\mathcal{L}(f)-s^{(n-1)}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
تفاعل کا تکمل	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$
بدل کا تفرق	$\mathcal{L}[tf(t)]=-F'(s)$
بدل کا تکمل	$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_0^t F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}$
الجھاو	$\mathcal{L}(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$
	$=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$
	$\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$
منتقلی کا پہلا مسئلہ، s منتقلی	$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a),\quad \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)$
منتقلی کا دوسرا مسئلہ، t منتقلی	$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=e^{-as}F(s)$
	$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)u(t-a)$
دہراتا تفاعل	$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$

جدول 6.2: لاپلاس بدل کا وسیع جدول

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$	شمار
1	$\frac{1}{s}$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	2
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n} \quad (n=1,2,\cdots)$	3
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	4
$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$	5
$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\frac{1}{s^a} \quad (a>0)$	6
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	7
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	8
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n=1,2,\cdots)$	9
$\frac{t^{k-1}e^{at}}{\Gamma(k)}$	$\frac{1}{(s-a)^k} \quad (k>0)$	10
$\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a\neq b)$	11
$\frac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a\neq b)$	12
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	13
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	14
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	15
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	16
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	17
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	18
$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	19
$\frac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$	$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	20
$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	21
$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	22
$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	23
$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2\neq b^2)$	24

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	شمار
$\frac{1}{4k^3}(\sin kt \cosh kt - \cos kt \sinh kt)$	$\frac{1}{s^4+4k^4}$	25
$\frac{1}{2k^2} \sin kt \sinh kt$	$\frac{s}{s^4+4k^4}$	26
$\frac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$	$\frac{1}{s^4-k^4}$	27
$\frac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$	$\frac{s}{s^4-k^4}$	28
$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	29
$e^{-\frac{(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$	$\frac{1}{\sqrt{(s+a)}\sqrt{s+b}}$	30
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	31
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	32
$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k} \quad (k > 0)$	33
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	34
$\delta(t-a)$	e^{-as}	35
$J_0(2\sqrt{kt})$	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}$	36
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	37
$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sinh 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	38
$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$	$e^{-k\sqrt{s}} \quad (k > 0)$	39
$-\ln t - \gamma \quad (\gamma \approx 0.5772)$	$\frac{1}{s}\ln s$	40
$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	41
$\frac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$	$\ln \frac{s^2+\omega^2}{s^2}$	42
$\frac{2}{t}(1 - \cosh at)$	$\ln \frac{s^2-a^2}{s^2}$	43
$\frac{1}{t} \sin \omega t$	$\tan^{-1} \frac{\omega}{s}$	44
$\mathrm{Si}(t)$	$\frac{1}{s} \cot^{-1} s$	45

باب 7

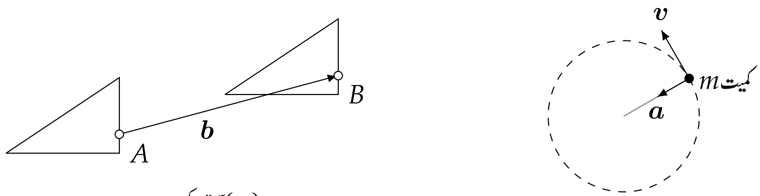
خطی الجبرا: سمتیات

7.1 غیر سمتیات اور سمتیات

طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جنہیں ان کی مقدار سے مکمل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔مثلاً کمیت، درجہ حرارت، برقی بار، وقت، رقبہ، حجم، فاصلہ، برقی دباو وغیرہ۔ان میں سے ہر ایک کو (مقدار کی موزوں اکائی چن کر) ایک عدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ایسی تمام مقداروں کو غیر سمتیات[1] کہتے ہیں۔غیر سمتی مقدار کی قیمت پر چنی گئی محدد کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اس کے برعکس طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں بھی پائی جاتی ہیں جن کی مکمل اظہار کے لئے ان کی قیمت کے علاوہ ان کی سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ان کی ایک مثال میکانی قوت ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ قوت کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں تیر کی سمت، قوت کی سمت اور تیر کی لمبائی (کسی پیمائش کے تحت) قوت کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ شکل 7.1-الف میں ہلکے دھاگے سے بندھی ہوئی کمیت m کی دائری حرکت دکھائی گئی ہے۔کمیت کی لحاتی سمتی رفتار v کو تیر سے دکھایا گیا ہے۔اس تیر کی سمت، کمیت کی لحاتی سمتی رفتار دیتی ہے جبکہ تیر کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لحاتی سمتی رفتار کی قیمت دیتی ہے۔شکل میں کمیت کی اسراع a بھی دکھائی گئی ہے جہاں a کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لحاتی اسراع کی قیمت دیتی ہے۔

[1] scalars



(الف) سمتی رفتار اور اسراع۔

(ب) سمتیہ کی دم اور سر۔

شکل 7.1: سمتیہ کی تفصیل۔

سطح مستوی میں تکون کی (بلا گھومے) منتقلی شکل 7.1-ب میں دکھائی گئی ہے۔اس حرکت کو (تکون کے ہر نقطے کی) طے فاصلے کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔تکون پر کسی نقطے کی ابتدائی مقام A سے اختتامی مقام B تک سمتی خط سے اس حرکت کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں سمتی خط $\boldsymbol{b}$ ، تکون کے ایک نقطہ کی A سے B منتقلی دکھاتی ہے۔تکون کے ہر نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک سمتی خطوط کھینچ کر ہمیں سمتی خطوط کی نسل ملتی ہے جس میں تمام سمتی خطوط کی لمبائی ایک جیسی اور سمت ایک جیسی ہو گی (یعنی یہ آپس میں متوازی ہوں گے)۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک سمتی خط، تکون کے ایک نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک منتقلی کو ظاہر کرتی ہے۔

اس سے سمتیہ کی درج ذیل تعریف بیان کی جا سکتی ہے۔

تعریف: سمتیہ
سمتی خط کو **سمتیہ**[2] کہتے ہیں۔اس کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی اور سمت کو سمتیہ کی سمت کہتے ہیں۔دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب ان کی لمبائی ایک جیسی ہو اور ان کی سمت ایک جیسی ہو۔

سمتیہ کی لمبائی کو سمتیہ کی **اقلیدسی معیار**[3] (یا معیار) اور سمتیہ کی **مقدار**[4] بھی کہتے ہیں۔

سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو سمتیہ کی **دم**[5] اور اختتامی نقطے کو سمتیہ کا **سر**[6] کہتے ہیں۔ یوں شکل 7.1-ب میں نقطہ B سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کی دم ہے جبکہ نقطہ A اس کا سر ہے۔

---

vector[2]
Euclidean norm[3]
magnitude[4]
tail[5]
head[6]

ہم سمتیات کو موٹی لکھائی میں چھوٹی حروف تہجی مثلاً $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{v}$ ، وغیرہ، سے ظاہر کرتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں اسراع کو $\vec{a}$ یا $\overrightarrow{a}$ لکھا جاتا ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی مقدار کو $|\boldsymbol{a}|$ لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ہم سمتیہ کو بغیر گھمائے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کر سکتے ہیں[7] یعنی ہم سمتیہ کی دم کہیں پر بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ظاہر ہے کہ سمتیہ کی دم کا مقام مقرر کرنے سے اس کے سر کا مقام بھی مقرر ہو گا۔

اگر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ایک دوسرے کے برابر ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{7.1}$$

اور اگر یہ آپس میں برابر نہ ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \tag{7.2}$$

کسی بھی سمتیہ کو ترسیمی طور پر موزوں لمبائی اور سمت کی سمتی خط سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

ایسا سمتیہ جس کی لمبائی اکائی (1) ہو **اکائی سمتیہ**[8] کہلاتا ہے۔

7.2 سمتیہ کے اجزاء

تین بُعدی فضا میں نقطہ ایک جیومیٹریائی چیز ہے جس کو محددی نظام میں تین مرتب اعداد (تصور کیا جا سکتا ہے یا) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی انداز میں پیش کی، جسے محددی نظام کی استعمال سے الجبرائی انداز میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

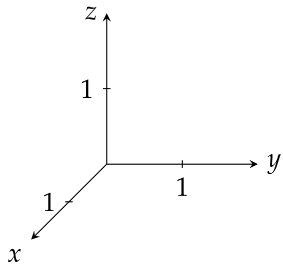
نظام محدد کے **محور**[9] ، آپس میں عمودی تین متقاطع سیدھے خطوط ہوں گے۔ان کے مقام انقطاع کو محددی نظام کا **مبدا**[10] کہتے ہیں۔ہم تینوں محور پر پیمائشی ناپ ایک جیسی چنتے ہیں لہٰذا محور پر مبدا سے اکائی فاصلے پر $(1, 0, 0)$ ،

[7] یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی صورتیں پائی جاتی ہیں جہاں سمتیہ کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔آپ میکانیات سے جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر لچکدار مادے پر قوت کا اطلاق، قوت کی سمت میں لکیر پر رہتے ہوئے، کسی بھی نقطے پر کیا جا سکتا ہے۔اس سے **قابل منتقلی سمتیہ** کا تصور پیدا ہوتا ہے۔اس کے برعکس، لچکدار مادے پر قوت کے اطلاق کا نقطہ تبدیل کرنے سے نتائج تبدیل ہوں گے جو نا قابل قبول بات ہے۔یہ حقیقت **مقید سمتیہ** کی تصور کو جنم دیتی ہے۔اس کتاب میں صرف قابل منتقلی سمتیات پر بات کی جائے گی۔

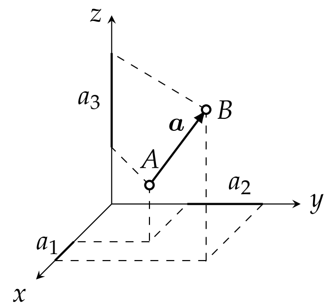
[8] unit vector

[9] coordinates

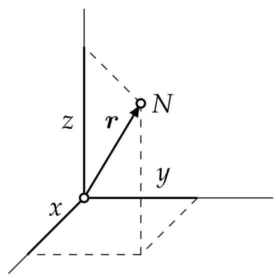
[10] origin



شکل 7.2: کارتیسی نظام محدد ی



(الف) اجزائے سمتیہ



(ب) تعین گر سمتیہ کے سر کے محور اس سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔

شکل 7.3: سمتیہ کے اجزاء اور تعین گر سمتیہ۔

$(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ نقطے پائے جائیں گے۔اس محددی نظام کو فضا میں **کارتیسی نظام محدد**[11] (شکل 7.2 سے رجوع کریں) کہتے ہیں۔

ہم اب ابتدائی نقطہ A سے اختتامی نقطہ B تک سمتیہ $\boldsymbol{a}$ پر غور کرتے ہیں (شکل 7.3-الف)۔اگر نقطہ A کے محور (x_1, y_1, z_1) اور نقطہ B کے محور (x_2, y_2, z_2) ہوں تب درج ذیل اعداد، اس کارتیسی محددی نظام کے لحاظ سے، سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے **اجزاء**[12] کہلاتے ہیں۔

$$a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1 \tag{7.3}$$

سمتیہ کی تعریف کے تحت $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی سے مراد A سے B تک کی لمبائی $\overline{AB}$ ہے جو مساوات 7.3 میں

---

[11] Cartesian coordinate system
[12] components

دیے گئے اجزاء کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{7.4}$$

مثال 7.1: سمتیہ کے اجزاء اور اس کی لمبائی
سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم $(-2,3,1)$ اور سر $(5,-2,7)$ ہیں۔اس سمتیہ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی دریافت کریں۔

حل: اجزاء $a_1 = 5-(-2) = 7, \quad a_2 = -2-3 = -5, \quad a_3 = 7-1 = 6$ اور لمبائی

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{110}$$

ہے۔اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم کو نقطہ $(4,1,3)$ پر منتقل کریں تب اس کا سر $(11,-4,9)$ پر ہو گا۔

مساوات 7.3 میں دیے گئے اجزاء کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\boldsymbol{a}$ کی دم کو کارتیسی محدد کی مبدا پر منتقل کیا جائے تب $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء اس کی سر کے محور ہوں گے۔ایسا سمتیہ جس کو شکل 7.3-ب میں دکھایا گیا ہے **تعین گر سمتیہ**[13] کہلاتا ہے اور اس کو $\boldsymbol{r}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ □

$\boldsymbol{a}$ کی دم کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے سمتیہ کا سر بھی اتنا ہی اپنی جگہ سے ہلتا ہے لہٰذا مساوات 7.3 سے ظاہر ہے کہ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 کی قیمت پر $\boldsymbol{a}$ کی ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔یوں کسی بھی معین کارتیسی محددی نظام کے حوالے سے سمتیہ کو مکمل طور پر تین (محوری) اعداد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

وہ سمتیہ جس کے اجزاء 0 ، 0 ، 0 ہوں **معدوم سمتیہ**[14] یا **صفر سمتیہ**[15] $\boldsymbol{0}$ کہلاتا ہے۔ یوں کوئی بھی تین اعداد بہ شمول 0 ، 0 ، 0 سمتیہ کے اجزاء ہو سکتے ہیں۔

معین نظام محدد کی صورت میں ہر مرتب تین اعداد ایک منفرد سمتیہ کو ظاہر کریں گے۔یہ تین اعداد سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔اسی طرح معین نظام محدد میں ہر سمتیہ کے اجزاء سے سمتیہ کو تین مرتب اعداد کی صورت میں لکھا جا

position vector[13]
null vector[14]
zero vector[15]

سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی نقطہ نظر سے کی گئی۔ ہم اب تین مرتب حقیقی اعداد (جو سمتیہ کے اجزاء کہلاتے ہیں) کو سمتیہ کی **تعریف** کہہ سکتے ہیں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتیہ کی جیومیٹریائی صورت حاصل کر سکتے ہیں۔

یوں دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ صرف اور صرف اس صورت ایک جیسے ہوں گے جب ان کے تین مطابقتی اجزاء ایک جیسے ہوں۔ لہٰذا درج ذیل سمتی مساوات

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

سے مراد درج ذیل تین مساوات ہیں جہاں a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 ایک ہی کارتیسی نظام محدد میں بالترتیب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مطابقتی اجزاء ہیں۔

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

ظاہر ہے کہ اگر ایک سمتیہ کوئی حقیقی یا جیومیٹریائی چیز ہو تب اس کی لمبائی اور سمت پر چننی گئی نظام محدد کا کوئی اثر نہیں ہونا چاہیے۔

اگلے باب میں سمتیہ کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہر مرتب n اعداد کو سمتیہ تصور کیا جائے گا، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے۔

سوالات

سوال 7.1 تا سوال 7.10 میں سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{u}|$ حاصل کریں۔ $\boldsymbol{u}$ کا خط کھینچیں۔

سوال 7.1: $A : (2, 3, 0), \quad B : (-4, 6, 0)$

جوابات: $u_3 = 0$ ، $u_2 = 3$ ، $u_1 = -6$ ، $|\boldsymbol{u}| = 3\sqrt{5}$

سوال 7.2: $A : (5, 3, 1), \quad B : (1, 7, 2)$

جوابات: $u_3 = 1$ ، $u_2 = 4$ ، $u_1 = -4$ ، $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{33}$

سوال 7.3: $A:(1.2,-1,2.5),\quad B:(2.4,1.6,-3.2)$

جوابات: $u_3=-5.7$ ، $u_2=2.6$ ، $u_1=1.2$ ، $|\boldsymbol{u}|=6.38$

سوال 7.4: $A:(0,0,3),\quad B:(4,0,0)$

جوابات: $u_3=-3$ ، $u_2=0$ ، $u_1=4$ ، $|\boldsymbol{u}|=5$

سوال 7.5: $A:(3,3,3),\quad B:(1,1,1)$

جوابات: $u_3=-2$ ، $u_2=-2$ ، $u_1=-2$ ، $|\boldsymbol{u}|=2\sqrt{3}$

سوال 7.6: $A:(1,1,1),\quad B:(3,3,3)$

جوابات: $u_3=2$ ، $u_2=2$ ، $u_1=2$ ، $|\boldsymbol{u}|=2\sqrt{3}$

سوال 7.7: $A:(2,2,2),\quad B:(2,2,0)$

جوابات: $u_3=0$ ، $u_2=0$ ، $u_1=0$ ، $|\boldsymbol{u}|=0$ ؛ یہ صفر سمتیہ ہے۔

سوال 7.8: $A:(0,7,8),\quad B:(-3,1,8)$

جوابات: $u_3=0$ ، $u_2=6$ ، $u_1=-3$ ، $|\boldsymbol{u}|=3\sqrt{5}$

سوال 7.9: $A:(100,200,300),\quad B:(100,204,303)$

جوابات: $u_3=3$ ، $u_2=4$ ، $u_1=0$ ، $|\boldsymbol{u}|=5$

سوال 7.10: $A:(-5,-6,-2),\quad B:(-8,-6,-4)$

جوابات: $u_3=-2$ ، $u_2=0$ ، $u_1=-3$ ، $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{13}$

سوال 7.11 تا سوال 7.20 میں ابتدائی نقطہ A اور سمتیہ کے اجزاء دیے گئے ہیں۔ سمتیہ کا اختتامی نقطہ دریافت کریں۔

سوال 7.11: $A:(-2,3,1);\quad 3,1,4$
جواب: $1,4,5$

سوال 7.12: $5, 1, 7 \quad A : (0, 0, 0);$
جواب: $5, 1, 7$

سوال 7.13: $0, 0, 0 \quad A : (5, 2, -6);$
جواب: $5, 2, -6$

سوال 7.14: $-5, -7, 2 \quad A : (3, 6, 1);$
جواب: $-2, -1, 3$

سوال 7.15: $4, 4, 4 \quad A : (4, 4, 4);$
جواب: $8, 8, 8$

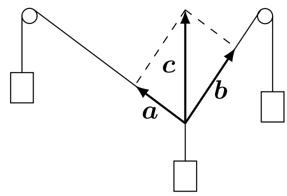
سوال 7.16: $-7, -7, -7 \quad A : (7, 7, 7);$
جواب: $0, 0, 0$

سوال 7.17: $3, 4, 5 \quad A : (-3, -4, -5);$
جواب: $0, 0, 0$

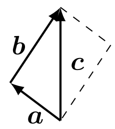
سوال 7.18: $-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 1 \quad A : (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3});$
جواب: $-1, 1, \frac{4}{3}$

سوال 7.19: $1.1, -0.4, -0.3 \quad A : (0.2, -0.1, 0.5);$
جواب: $1.3, -0.5, 0.2$

سوال 7.20: $12.6, 9, -14 \quad A : (11.3, -10, -15.8);$
جواب: $23.9, -1, -29.8$



(الف) قوتوں کا مجموعہ بذریعہ تجربہ



(ب) سمتیوں کا مجموعہ بذریعہ متوازی الاضلاع

شکل 7.4: تجربہ سے قوتوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کے مجموعے کا حصول حاصل ہوتا ہے۔

7.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب

چونکہ ہم سمتیات کو حساب کتاب کے لئے استعمال کرنا چاہتے ہیں لہٰذا سمتیات کے دو عدد الجبرائی اعمال پیش کرتے ہیں جنہیں سمتیات کا مجموعہ اور سمتیات کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کہتے ہیں۔

تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ دو قوتوں کا حاصل، متوازی الاضلاع (شکل 7.4) سے ملتا ہے۔اس سے سمتیات کے مجموعے کی درج ذیل تعریف حاصل ہوتی ہے۔

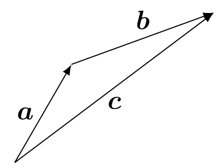
تعریف : سمتیات کا مجموعہ
دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کو لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}$ کے سر کے ساتھ $\boldsymbol{b}$ کی دم ملائیں۔اب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی مجموعے کی تعریف وہ سمتیہ $\boldsymbol{c}$ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کی دم سے $\boldsymbol{b}$ کے سر تک کھینچی جائے گی (شکل 7.5-الف)۔اس عمل کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{7.5}$$

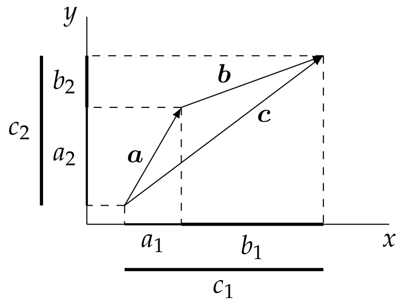
سمتیات کی مجموعے کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر کسی معین کارتیسی نظام محدد میں $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء b_1 ، b_2 اور b_3 ہوں تب حاصل جمع سمتیہ $\boldsymbol{c}$ کے اجزاء c_1 ، c_2 اور c_3 درج ذیل ہوں گے۔

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3 \tag{7.6}$$

شکل 7.5-ب میں اس عمل کو سطح پر دکھایا گیا ہے، اور فضا میں بھی بالکل ایسا ہی ہو گا۔



(الف) سر کے ساتھ دم ملا کر سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔



(ب) سمتیات کے مطابقتی اجزاء کو جمع کرتے ہوئے حاصل جمع سمتیہ کے اجزاء حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 7.5: مجموعہ سمتیات۔

مجموعے کی تعریف یا مساوات 7.6 سے مجموعہ سمتیات کی درج ذیل خصوصیات ملتی ہیں جہاں $-\boldsymbol{a}$ سے مراد ایسا سمتیہ ہے جس کی لمبائی $|\boldsymbol{a}|$ اور سمت $\boldsymbol{a}$ کے الٹ ہو۔

قانون تبادل $\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \quad$ (الف)

قانون تلازم $\quad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \quad$ (ب)

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a} \quad$ (پ)

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \quad$ (ت) $\qquad (7.7)$

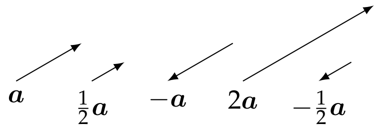
مساوات 7.7-ب میں ہم $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ لکھ سکتے ہیں اور یہی طریقہ زیادہ اعداد کے سمتیات کا مجموعہ لکھنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مجموعہ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ کی جگہ $2\boldsymbol{a}$ لکھا جاتا ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ ان سے (اور $-\boldsymbol{a}$ کے استعمال سے) ہم سمتیات کا دوسرا الجبرائی عمل بیان کرتے ہیں۔

سمتیات کا غیر سمتیات (اعداد) کے ساتھ ضرب

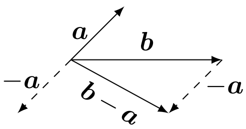
اگر $\boldsymbol{a}$ ایک سمتیہ اور q کوئی حقیقی عدد ہو تب سمتیہ $q\boldsymbol{a}$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$q\boldsymbol{a}$ کی لمبائی $|q||\boldsymbol{a}|$ ہے۔

اگر $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ہو اور $q>0$ ہو تب $q\boldsymbol{a}$ کی سمت وہی ہو گی جو $\boldsymbol{a}$ کی تھی۔



(الف) سمتیات کا غیر سمتیات کے ساتھ ضرب۔



(ب) سمتیات کا فرق

شکل 7.6: سمتیات کا غیر سمتیہ کے ساتھ ضرب اور سمتیات کا فرق۔

اگر $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو اور $q < 0$ ہو تب $q\boldsymbol{a}$ کی سمت $\boldsymbol{a}$ کی سمت کے الٹ ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ یا $q = 0$ ہو (اور یا دونوں صفر ہوں) تب $q\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

ان قواعد کی سادہ مثالیں شکل 7.6-الف میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں تب اسی نظام محدد میں $q\boldsymbol{a}$ کے اجزاء qa_1 ، qa_2 اور qa_3 ہوں گے۔اسی طرح سمتیہ کی تعریف سے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
q(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= q\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b} \\
(c+k)\boldsymbol{a} &= c\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a} \\
c(k\boldsymbol{a}) &= (ck)\boldsymbol{a} \qquad \text{جس کو } ck\boldsymbol{a} \text{ لکھا جاتا ہے} \\
1\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

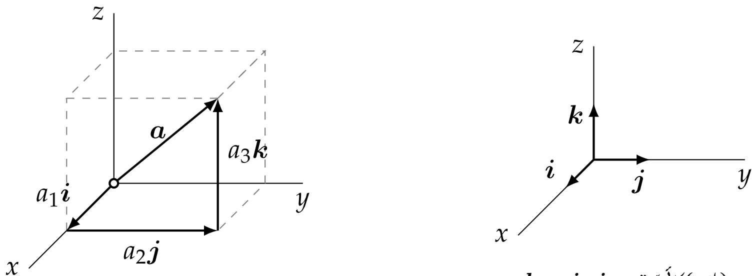
مساوات 7.7 اور مساوات 7.8 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
0\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{0} \\
(-1)\boldsymbol{a} &= -\boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

ہم $\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a})$ کی جگہ $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ لکھ سکتے ہیں (شکل 7.6-ب)۔

کسی بھی ایک کارتیسی نظام محدد کو استعمال کرتے ہوئے، ہم سمتیہ $\boldsymbol{a}$ جس کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں کو تین ایسی سمتیات کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں جو اس کارتیسی نظام کے تین محور کے متوازی ہوں۔ہم اس کارتیسی نظام کے ساتھ تین ایسے اکائی سمتیات، جنہیں ہم $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کہیں گے، وابستہ کرتے ہیں جن کی مثبت سمت اس کارتیسی نظام کے محور کی مثبت سمت ہو۔ یوں $\boldsymbol{a}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل 7.7)۔

$$
\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k} \tag{7.10}
$$



(الف) اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$

(ب) سمتیہ کا تین اکائی سمتیات کی مدد سے اظہار

شکل 7.7: اکائی سمتیات اور ان کا استعمال۔

شکل 7.7-الف میں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کی دم کو کارتیسی نظام کے مبدا پر رکھا گیا ہے۔یہ اکائی سمتیات آپس میں **عمودی یا قائمہ**[16] ہیں۔ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ اس نظام محدد کی **ثلاثہ اکائی قائمہ سمتیات** ہیں۔

کسی بھی سمتیہ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کرتے ہوئے اسی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔یوں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اکائی سمتیہ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{7.11}$$

مثال 7.2: کسی کارتیسی نظام میں اگر $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ ہوں، تب درج ذیل ہوں گے۔

$$3\boldsymbol{a} = 9\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k}, \quad -\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad 1.2\boldsymbol{a} - 0.5\boldsymbol{b} = 6.1\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3.4\boldsymbol{k}$$

□

مثال 7.3: کسی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم A پر ہے جبکہ اس کا سر B پر ہے۔اسی سمت میں کسی بھی سمتیہ کو $l\boldsymbol{a}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں l غیر سمتی مستقل ہے۔اب اگر $l\boldsymbol{a}$ سمتیہ کی دم A پر ہو تب $l = 0$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر نقطہ A پر ہو گا جبکہ $l = 1$ کی صورت میں اس کا سر نقطہ B پر ہو گا۔اسی طرح $l = \frac{1}{2}$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر $\boldsymbol{a}$ کے عین وسط پر ہو گا۔

orthogonal[16]

□

مثال 7.4: اکائی سمتیہ
سمتیہ $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔اسی سمت میں ایسا سمتیہ حاصل کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔

حل: $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38}$ ہے۔یوں مساوات 7.11 کے تحت $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{38}}$$

ہو گا۔کسی بھی اکائی سمتیہ کو غیر سمتی l سے ضرب دینے سے اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درکار سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$7\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{14\boldsymbol{i} - 35\boldsymbol{j} + 21\boldsymbol{k}}{\sqrt{38}} = 2.27\boldsymbol{i} - 6.68\boldsymbol{j} + 3.41\boldsymbol{k}$$

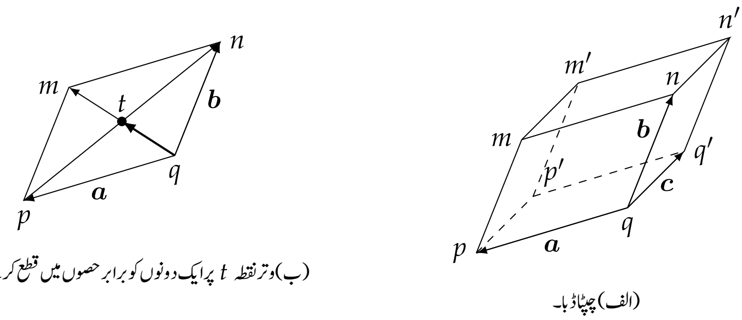
□

مثال 7.5: $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ شکل 7.8-الف میں دکھائے گئے چپٹا ڈبے کے تین قریبی کنارے ہیں۔ڈبے کی سامنے سطح $mnqp$ کا وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ اور $\boldsymbol{v}_{np}$ دریافت کریں جہاں وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ کی دم q اور سر m ہیں۔جیسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے، وتری سمتیات $\boldsymbol{v}_{mq}$ اور $\boldsymbol{v}_{np}$ ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔نقطہ t دریافت کرتے ہوئے ثابت کریں کہ دونوں وتر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

حل: شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}_{mq} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{r}_{np} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$$

شکل 7.8-ب سے ظاہر ہے کہ q کو ابتدائی نقطہ تصور کرتے ہوئے t تک کئی راستوں سے پہنچا جا سکتا ہے۔ چونکہ t وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا q سے t تک سمتیہ کو $\boldsymbol{v}_{tq} = l_1\boldsymbol{v}_{mq}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_1 < 1$ ممکن ہے۔اسی طرح q سے پہلے p اور یہاں سے $\boldsymbol{v}_{np}$ می سمت میں چلتے ہوئے بھی نقطہ



شکل 7.8: سمتیات کا استعمال۔ مثال 7.5

t تک پہنچنا ممکن ہے۔ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{tq} = \boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{v}_{np}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_2 < 1$ ممکن ہے۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{v}_{tq} = l_1\boldsymbol{v}_{mq} = \boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{v}_{np} \quad \implies l_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + l_2(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}) \tag{7.12}$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}(l_1 - 1 + l_2) + \boldsymbol{c}(l_1 - l_2) = 0$$

ملتا ہے۔اب چونکہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ غیر صفر ہیں اور ان کی سمتیں بھی مختلف ہیں لہٰذا درج بالا مساوات صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب دونوں قوسین صفر ہوں یعنی:

$$\begin{aligned} l_1 - 1 + l_2 &= 0 \\ l_1 - l_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔اب $l_1 = \frac{1}{2}$ کی صورت میں مساوات 7.12 سے $\boldsymbol{v}_{tq} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_{mq}$ ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ نقطہ t عین mq کے وسط میں پایا جاتا ہے۔ مساوات 7.12 کے اگلے حصے سے اسی طرح ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ t عین np کے وسط میں پایا جاتا ہے۔

□

سوالات

سوال 7.21 تا سوال 7.30 میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{k}$ لیں۔

سوال 7.21: $-4\boldsymbol{a}, \frac{1}{4}\boldsymbol{a}, 4\boldsymbol{a}$
جوابات: $-4\boldsymbol{a} = -8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\frac{1}{4}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{j} + \frac{1}{4}\boldsymbol{k}, 4\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

سوال 7.22: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
جوابات: $-\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$

سوال 7.23: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$
جوابات: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = -5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 7.24: $\lvert\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\rvert, \lvert\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\rvert, \lvert\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\rvert$
جوابات: $\sqrt{35}, \sqrt{35}, 3^{\frac{3}{2}}$

سوال 7.25: $\lvert\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\rvert, \lvert\boldsymbol{a}\rvert + \lvert\boldsymbol{b}\rvert$
جوابات: $5.916, 7.835$

سوال 7.26: $\lvert\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\rvert, \lvert\boldsymbol{a}\rvert - \lvert\boldsymbol{b}\rvert$
جوابات: $5.916, -2.936$

سوال 7.27: $\frac{\boldsymbol{a}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}, \frac{\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{b}\rvert}, \frac{\boldsymbol{c}}{\lvert\boldsymbol{c}\rvert}$
جوابات: $0.82\boldsymbol{i} - 0.41\boldsymbol{j} + 0.41\boldsymbol{k}$, $-0.56\boldsymbol{i} - 0.31\boldsymbol{j} + 0.74\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{k}$

سوال 7.28: $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\rvert}, \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{\lvert\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rvert}, \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\rvert}$
جوابات: $-0.17\boldsymbol{i} - 0.51\boldsymbol{j} + 0.85\boldsymbol{k}$, $-0.43\boldsymbol{i} - 0.29\boldsymbol{j} + 0.86\boldsymbol{k}$, $-0.23\boldsymbol{i} - 0.69\boldsymbol{j} + 0.69\boldsymbol{k}$

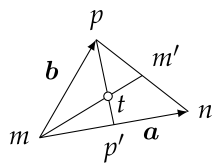
سوال 7.29: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
جوابات: $-\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

سوال 7.30: $4(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}), 4\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$
جوابات: $20\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$

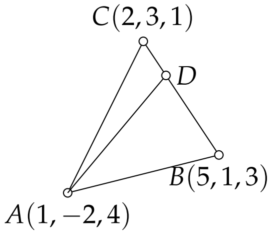
سوال 7.31: **قوت** $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{p} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ ہیں۔ایسی **قوت** $\boldsymbol{m}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{m}$ ، $\boldsymbol{n}$ اور $\boldsymbol{p}$ توازن میں ہوں۔

جواب: $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$

سوال 7.32: ثابت کریں کہ شکل 7.8 میں وتر $m'q$ اور $n'p$ ایک دونوں کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔



(الف)سوال 7.33 کی شکل۔



(ب)سوال 7.34 کی شکل۔

شکل 7.9: سمتیات کا استعمال۔

جواب: $\boldsymbol{v}_{m'q}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ اور $\boldsymbol{v}_{n'p}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ ہیں۔اب $\boldsymbol{v}_{tq}=l_1\boldsymbol{v}_{m'q}$ اور اسی طرح $\boldsymbol{v}_{tq}=\boldsymbol{a}+l_2\boldsymbol{v}_{n'p}$ لکھا جا سکتا ہے۔انہیں برابر پر کرتے ہوئے

$$l_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+l_2(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

یعنی $\boldsymbol{a}(l_1-1+l_2)+\boldsymbol{b}(l_1-l_2)+\boldsymbol{c}(l_1-l_2)=0$ ملتا ہے۔چونکہ سمتیات صفر نہیں ہیں لہٰذا قوسین صفر ہوں گے۔یوں حاصل ہمزاد مساوات $l_1-1+l_2=0$ اور $l_1-l_2=0$ حل کرتے ہوئے $l_1=l_2=\frac{1}{2}$ ملتا ہے۔

سوال 7.33: تکون کی تین کونوں سے سامنے اطراف کی وسط کو ملانے والے خط ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔ t کے دونوں اطراف، خط کی لمبائی کا نسبت دریافت کریں۔

جواب: تکون کو شکل 7.9-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں mn کی وسط پر نقطہ p' اور pn کی وسط پر نقطہ m' دکھائے گئے ہیں۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{v}_{m'n}$ جس کی دم نقطہ n پر ہے کو $\boldsymbol{v}_{m'n}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ لکھا جا سکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{m'm}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}_{m'n}$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{v}_{p'p}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ لکھا جا سکتا ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{tm}=\boldsymbol{b}+l_1\boldsymbol{v}_{p'p}$ اور $\boldsymbol{v}_{tm}=l_2\boldsymbol{v}_{m'm}$ لکھے جا سکتے ہیں۔انہیں حل کرتے ہوئے $l_1=l_2=\frac{2}{3}$ ملتا ہے۔یوں $m'm$ خط کے دو حصوں کا تناسب $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ یعنی $2:1$ ہو گا۔

سوال 7.34: تکون کے کونے $A(1,-2,4)$ ، $B(5,1,3)$ اور $C(2,3,1)$ ہیں۔ BC پر D پایا جاتا ہے جہاں $\overline{BD}=2\overline{CD}$ ہے۔اس کو شکل 7.34-ب میں دکھایا گیا ہے۔خط AD کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{v}_{BA}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{v}_{CB}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ہیں۔اب دی گئی معلومات کے تحت $\boldsymbol{v}_{DB}=\frac{2}{3}\boldsymbol{v}_{CB}$ ہے۔یوں $\boldsymbol{v}_{DA}=\boldsymbol{v}_{BA}+\boldsymbol{v}_{DB}$ یعنی $\boldsymbol{v}_{AD}=2\boldsymbol{i}+\frac{13}{3}\boldsymbol{j}-\frac{7}{3}\boldsymbol{k}$ ہو گا جس کی لمبائی $\frac{\sqrt{254}}{3}$ ہے۔

سوال 7.35: ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے ایک کونے سے سامنے والی طرف کی وسط تک لکیر، وتر کو $1:2$ تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

سوال 7.36 تا سوال 7.38 میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل کریں۔ظاہر ہے کہ اکائی سمتیہ کو -1 سے ضرب دے کر الٹ سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔

سوال 7.36: $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{j},\ l=5$
جوابات: $\boldsymbol{j}$ ، $5\boldsymbol{j}$

سوال 7.37: $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ l=2$
جوابات: $-0.535\boldsymbol{i}+0.267\boldsymbol{j}+0.802\boldsymbol{k},\ -3.74\boldsymbol{i}+1.87\boldsymbol{j}+5.61\boldsymbol{k}$

سوال 7.38: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ l=10$
جوابات: $0.96\boldsymbol{i}-0.27\boldsymbol{j},\ 9.61\boldsymbol{i}-2.74\boldsymbol{j}$

7.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے تمام سمتیات کا سلسلہ V جو سمتی مجموعہ (مساوات 7.7) اور سمتی ضرب (مساوات 7.8) کے الجبرائی قواعد پر پورا اترتا ہو کو **سمتی فضا**[17] یا **خطی فضا**[18] کہتے ہیں۔سمتی فضا کا تصور اس لئے اہم ہے کہ عملی دلچسپی کے دیگر سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادل وغیرہ پر مبنی ہوں پائے جاتے ہیں جن کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب کی بالکل ایسی ہی فطری تعریف کی جا سکتی ہے۔

مسئلہ 7.1: حقیقی سمتی فضا
اگر سلسلہ V کے ارکان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\cdots$ درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے ہیں) پر پورا اترتے ہوں تب V **حقیقی سمتی فضا**[19] یا **حقیقی خطی فضا** کہلاتا ہے اور یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) **سمتیات** کہلاتے ہیں۔

[17] vector space
[18] linear space
[19] real vector space

(الف) **سمتی جمع** V کے ہر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا **مجموعہ** کہلاتا اور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) **قانون تبادل۔** V کے ہر دو ارکان $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{7.13}$$

(الف-2) **قانون تلازم۔** V کے ہر تین ارکان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{7.14}$$

(جو $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ لکھا جاتا ہے)

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو **صفر سمتیہ** کہلاتا اور $\boldsymbol{0}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \tag{7.15}$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-\boldsymbol{a}$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \tag{7.16}$$

(ب) **غیر سمتی ضرب۔** حقیقی اعداد غیر سمتی کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور c کا **حاصل ضرب** کہلاتا اور $c\boldsymbol{a}$ (یا $\boldsymbol{a}c$) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(ب-1) **قانون جزئیتی تقسیم۔** ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b} \tag{7.17}$$

(ب-2) **قانون جزئیتی تقسیم۔** ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(c+k)\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a} \tag{7.18}$$

(ب-3) **قانون وابستگی۔** ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(k\boldsymbol{a})=(ck)\boldsymbol{a} \tag{7.19}$$

(جو $ck\boldsymbol{a}$ لکھا جاتا ہے)

(ب-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{7.20}$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے **مخلوط سمتی فضا** کی مسلمی تعریف حاصل ہو گی۔

سمتی فضا پر مزید بحث حصہ 8.9 میں کی جائے گی۔آئیں اب سمتی فضا کی چند اہم خصوصیات پر غور کریں۔

فرض کریں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سلسلہ V کے ارکان ہیں۔ان کے **خطی مجموعے**[20] سے مراد درج ذیل ہے جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

سمتی فضا کی تعریف کے تحت درج بالا ازخود V کا رکن سمتیہ ہو گا۔اس طرز کی تمام مجموعوں کا سلسلہ S ، ان سمتیات کا **احاطہ**[21] کہلاتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ یہ سمتیات S کے **پیدا کار**[22] ہیں۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔

خطی مجموعے کو استعمال کرتے ہوئے ہم خطی تابعیت اور خطی غیر تابعیت متعارف کرتے ہیں۔

سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ** پیدا کرتے ہیں جب درج ذیل

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \mathbf{0} \tag{7.21}$$

سے مراد $c_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $c_m = 0$ ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سمتیات **خطی طور غیر تابع** ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.84 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ **خطی طور تابع**[23] کہلاتے ہیں۔

---

[20]linear combination
[21]span
[22]generator
[23]linearly dependent

$m = 1$ کی صورت میں مساوات 8.84 سے $c\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ $\boldsymbol{a}$ اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو۔

مثال 7.6: خطی طور تابع اور خطی طور غیر تابع سمتیات کے سلسلے

سمتیات $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ خطی طور تابع ہیں چونکہ $6\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ لکھ کر $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔ □

اگر V میں غیر تابع سمتیات کی تعداد n ہو جبکہ V میں موجود n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا بُعد n ہو گا اور V کو n **بُعدی** کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو V کی **اساس**[24] کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ **منفرد** ہو گا۔

اس کی مثال فضا کے تمام سمتیات (حصہ 7.1) کی سمتی فضا ہے۔ اس سمتی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عدد سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ (حصہ 7.3) کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ فضا سہ بُعدی ہے۔

اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{7.22}$$

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 7.22 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 7.22 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ **سمتیات خطی طور غیر تابع**[25] کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات کا **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[26] ہے۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 7.22 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ **سمتیات خطی طور تابع**[27] کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 7.22 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{a}_{(1)} = k_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots - k_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

---

[24] basis
[25] linear independent
[26] linearly independent set
[27] linearly dependent

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔اگر $m = 1$ ہو تب مساوات 7.22 کو ہم $c_1\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ لکھیں گے جس میں $k_1 \neq 0$ اس صورت ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ ہو جو خطی تابعیت کی تعریف کے تحت خطی طور تابع ہے۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 7.2: خطی طور تابعیت
اگر مساوات 7.22 صرف اور صرف اس صورت درست ہو جب تمام c_1 تا c_m صفر ہوں تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ خطی طور تابع ہوں گے۔

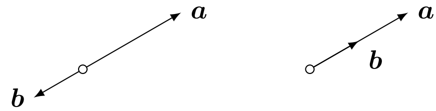
درج بالا لازم اور معقول (کافی) شرط کو ہی عموماً تابعیت کی تعریف تصور کی جاتی ہے۔

اگر ان میں کوئی ایک سمتیہ بھی صفر سمتیہ ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ خطی طور غیر تابع ہوں گے، مثلاً $\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ کی صورت میں مساوات 7.22 میں $k_1 \neq 0$ اور $k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0$ ہو سکتا ہے۔

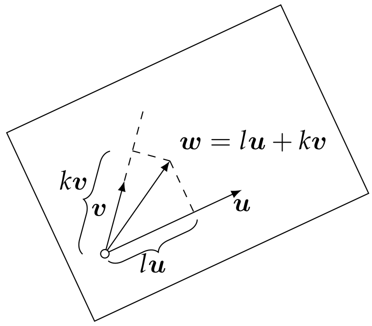
سہ بُعدی فضا میں دو عدد خطی طور تابع سمتیات **ہم خطی**[28] ہوں گے (شکل 7.10) یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ ایک ہی سیدھی خط پر واقع ہوں گے۔ایسے تین سمتیات $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ جو خطی طور تابع سلسلہ پیدا کرتے ہوں **ہم سطحی**[29] کہلاتے ہیں، یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ سمتیات ایک ہی سطح مستوی پر واقع ہوں گے (شکل 7.11)۔ درحقیقت خطی تابعیت کا مطلب یہ ہے کہ ایک سمتیہ کو بقایا سمتیات کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ سہ بُعدی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عددی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سہ بُعدی فضا میں چار یا چار سے زیادہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

---

collinear[28]
coplanar[29]



شکل 7.10: ہم خطی سمتیات۔



شکل 7.11: ہم سطحی سمتیات۔

سوالات

ثابت کریں کہ سوال 7.39 تا سوال 7.42 میں دیے گئے سمتیات کا سلسلہ سمتی فضا پیدا کرتا ہے۔اس فضا کی بُعد اور اساس دریافت کریں۔

سوال 7.39: سہ بُعدی فضا وہ تمام سمتیات جن کا پہلا جزو صفر ہے۔

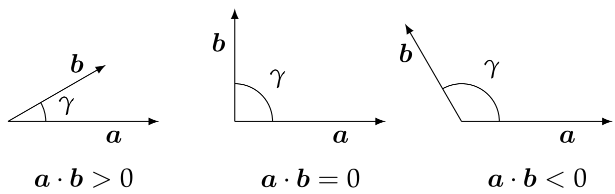
جوابات: 2 ؛ $\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{k}$

سوال 7.40: ایسے تمام سمتیات جنہیں $b\boldsymbol{i} + k(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ لکھا جا سکتا ہے جہاں b اور k کوئی بھی غیر سمتی ہو سکتے ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 7.41: ایسے تمام n مرتب اعداد $(a_1, \cdots, a_n)$ کا سلسلہ جن کے مجموعے کی تعریف اور غیر سمتی کے ساتھ ضرب کی تعریف درج ذیل ہو۔

$$(a_n, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$$
$$c(a_n, \cdots, a_n) = (ca_n, \cdots, ca_n)$$



شکل 7.12: سمتیات کے مابین زاویہ۔

جوابات: n ؛ $(1,0,\cdots,0)$ ، $(0,1,\cdots,0)$ ،⋯، $(0,0,\cdots,1)$

سوال 7.42: ایسے تمام تفاعل جنہیں $y(x) = a\cos x + b\sin x$ لکھا جا سکتا ہے جہاں a اور b اختیاری مستقل ہیں۔ان تفاعل کے مجموعے اور غیر سمتیات کے ساتھ ضرب عمومی قواعد کے تحت ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\cos x$ ، $\sin x$

7.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)

سہ بُعدی فضا میں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی اندرونی ضرب[30] جس کو $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ لکھا جاتا ہے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\gamma(0 \le \gamma \le \pi)$ سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مابین زاویہ ہے (جو دونوں سمتیات کی دم ایک ہی نقطے پر رکھ کر ناپا جاتا ہے)۔ (شکل 7.12)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\gamma \qquad &&(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= 0 &&(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ \text{یا}\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\ \text{یا}\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}) \end{aligned} \tag{7.23}$$

اندرونی ضرب کو ضرب نقطہ[31] بھی کہتے ہیں۔اندرونی ضرب کا حاصل غیر سمتی (حقیقی عدد) ہوتا ہے اور یوں اندرونی ضرب کو غیر سمتی ضرب[32] بھی کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 7.23 میں $\cos\gamma$ کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی

[30] inner product
[31] dot product
[32] scalar product

ہے (شکل 7.12) لہٰذا اندرونی ضرب کی قیمت بھی مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے۔ زاویہ 0 تا π کے درمیان صرف $\gamma = \frac{\pi}{2}$ پر $\cos\gamma = 0$ ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 7.3: **قائمیت**[33]
دو عدد غیر صفر سمتیات آپس میں صرف اور صرف اس صورت قائم الزاویہ (عمودی) ہوں گے جب ان کا اندرونی ضرب صرف کے برابر ہو۔

مساوات 7.23 میں $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ پر کرنے سے $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$ حاصل ہوتا ہے اور یوں سمتیہ کی لمبائی (اقلیدسی معیار) کو اندرونی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\lvert\boldsymbol{a}\rvert = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} \qquad (\geq 0) \tag{7.24}$$

درج بالا اور مساوات 7.23 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}} \tag{7.25}$$

اندرونی ضرب کی تعریف سے درج ذیل خصوصیات اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad [q_1\boldsymbol{a} + q_2\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c} = q_1\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + q_2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{(خطیت)}\\
&\text{(ب)} \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \quad \text{(تشاکل)}\\
&\text{(پ)} \quad \left.\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geq 0\\ &\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 0 \text{ اگر } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \text{یقینی مثبت}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

یوں ضرب نقطہ استبدالی اور سمتیات کی جمع کے لئے جزئیتی تقسیمی ہے۔ مساوات 7.26 میں $q_1 = 1$ اور $q_2 = 1$ لینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{(جزئیتی تقسیم)} \tag{7.27}$$

مساوات 7.23 اور $\cos\gamma \leq 1$ سے درج ذیل **شوارز عدم مساوات**[34] [35] ملتی ہے۔

$$\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert \leq \lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert \qquad \text{(شوارز عدم مساوات)} \tag{7.28}$$

---

[33] orthogonality
[34] Schwarz inequality
[35] جرمن ریاضی دان ہرمن امندس شوارز [1843-1921]

درج بالا اور مساوات 7.24 استعمال کرتے ہوئے آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \qquad \text{(تکونی عدم مساوات)} \tag{7.29}$$

مساوات 7.24 کی مدد سے

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\
|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

لکھ کر دونوں مساوات جمع کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2) \qquad \text{(متوازی الاضلاع مساوات)} \tag{7.30}$$

سمتیات کو اجزاء کی صورت میں لکھ کر

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

ان کا غیر سمتی ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\
&= a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\
&\qquad + a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں لہٰذا مساوات 7.23 میں $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ہو گا اور یوں $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$ ہو گا۔اسی طرح چونکہ $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{i}$ ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا مساوات 7.23 میں $\gamma = 0$ ہو گا اور یوں $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1$ ہو گا۔اسی عمل سے آپ درج ذیل غیر سمتی ضرب کے تعلقات لکھ سکتے ہیں جنہیں درج بالا میں

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \tag{7.31}$$

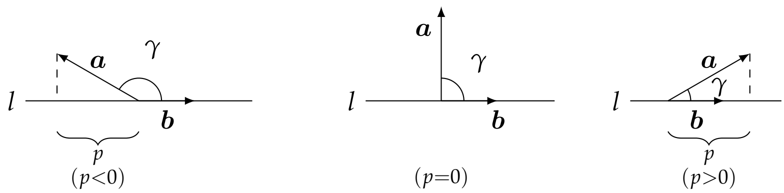
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0 \tag{7.32}$$

پر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{7.33}$$

اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}\,(\neq \boldsymbol{0})$ سمتیات کے مابین زاویہ γ ہو تب درج ذیل حقیقی عدد

$$p = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$



شکل 7.13: $\boldsymbol{b}$ کی سمتی میں $\boldsymbol{a}$ کا جزو۔

$\boldsymbol{b}$ کی سمت میں $\boldsymbol{a}$ **کا جزو یا عمودی سایہ**[36] ہو گا۔اگر $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ہو تب γ غیر معین (بے معنی) ہو گا اور ہم $p = 0$ لیں گے۔

یوں $\boldsymbol{b}$ کی سمت میں خط l پر $\boldsymbol{a}$ کے عمودی سائے کی لمبائی $|p|$ ہو گی۔ p کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 7.13)۔

یوں کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کی سمت میں سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں گے۔

مساوات 7.25 کی مدد سے درج ذیل ہو گا

$$p = \boldsymbol{a}\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} \qquad (\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}) \tag{7.34}$$

اور اگر $\boldsymbol{b}$ اکائی سمتیہ ہو تب اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$p = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{7.35}$$

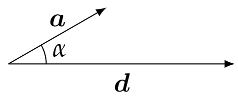
مثال 7.7: قوت اور کام

فرض کریں کہ قوت $\boldsymbol{a}$ کسی چیز کو اپنی جگہ سے ہٹا کر سمتی فاصلہ $\boldsymbol{d}$ منتقل کرتا ہے۔ $\boldsymbol{d}$ کی سمت میں قوت کا جزو ضرب $|\boldsymbol{d}|$ کام W کی تعریف ہے یعنی

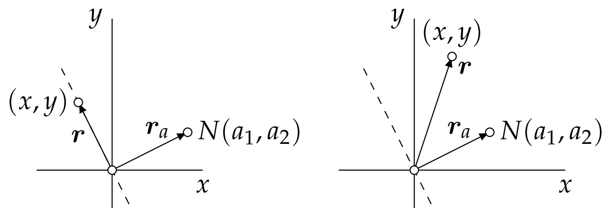
$$W = |a||d|\cos\alpha = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{7.36}$$

جہاں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{d}$ کے درمیان زاویہ α ہے۔ (شکل 7.14)

---
[36] projection



شکل 7.14: قوت اور کام (مثال 7.7)



(ب) (الف)

شکل 7.15: سیدھے خط کی مساوات۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{d}$ کا جزو ضرب $|\boldsymbol{a}|$ بھی کام کی تعریف ہے۔ □

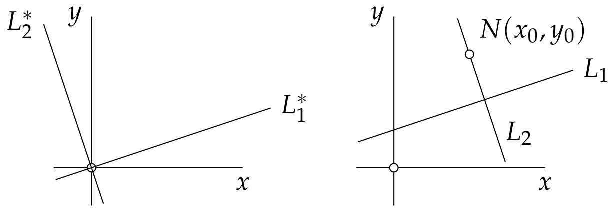
کارتیسی نظام کی xy سطح پر کسی بھی نقطے کا ہٹاو سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ لکھا جاتا ہے۔ $x = a_1$ اور $y = a_2$ کی صورت میں یہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_a = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ صورت اختیار کرتا ہے جو کارتیسی نظام کی مبدا سے نقطہ $N(a_1, a_2)$ کی ہٹاو ظاہر کرے گا (شکل 7.15-الف)۔

شکل 7.15-الف میں نقطہ دار لکیر دکھائی گئی ہے جو $\boldsymbol{r}_a$ کے عمودی ہے۔اگر x اور y کو اس نقطہ دار لکیر پر رہنے پر پابند کیا جائے تب $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{r}_a$ آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گے۔شکل 7.15-ب میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔یوں شکل-ب میں مسئلہ 7.3 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = 0 \quad \implies \quad (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \cdot (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) = a_1 x + a_2 y = 0 \tag{7.37}$$

درج بالا مساوات ($a_1 x + a_2 y = 0$) میں x اور y نقطہ دار خط پر رہتے ہیں لہٰذا یہ نقطہ دار خط کی مساوات ہے۔

آپ نے دیکھا کہ سیدھے خط کی مساوات دو سمتیات کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = 0$ کی صورت میں لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{r}_a$ ایسا ہٹاو سمتیہ ہے جو اس سیدھے خط کے ساتھ قائمہ الزاویہ ہو۔



(ب) (الف)

شکل 7.16: قائمہ الزاویہ خطوط۔

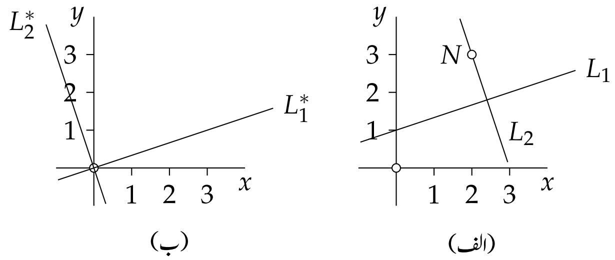
ہم شکل 7.16-الف میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے ایسے خط L_2 کی مساوات جاننا چاہتے ہیں جو L_1 کے قائمہ الزاویہ ہو۔ L_1 کی مساوات ہمیں معلوم ہے۔

کارتیسی نظام میں xy سطح پر کسی بھی سیدھے خط کو $y = mx + c$ لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں ڈھلوان m کو $\frac{a_2}{a_1}$ لکھتے ہوئے $a_1x + a_2y = ca_1 = c'$ حاصل ہوتا ہے۔ ایسا ایک خط L_1 ، شکل 7.16-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس مساوات میں $c = 0$ پر کرنے سے خط L_1^* حاصل ہو گا جو کارتیسی نظام کے مبدا $(0, 0)$ سے گزرتا ہے جس کو شکل 7.16-ب میں دکھایا گیا ہے۔خط L_1 اور L_1^* کی ایک جیسی ڈھلوان ہے یعنی یہ آپس میں متوازی ہیں۔ہم L_2 کو بھی اسی طرح مبدا پر منتقل کرتے ہوئے L_2^* حاصل کرتے ہیں۔اب اگر L_1 اور L_2 قائمہ الزاویہ ہوں تب L_1^* اور L_2^* بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔آئیں پہلے L_1^* کی مساوات سے L_2^* کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔بعد میں حاصل L_2^* کی مساوات سے L_2 کی مساوات حاصل کریں گے۔

L_1^* کی مساوات $a_1x + a_2y = 0$ کو مساوات 7.37 کی طرح سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{r}_a = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = a_1x + a_2y = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔ L_2^* کی مساوات کو بھی اسی طرح $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{r}_b = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_b = b_1x + b_2y = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔

اب $\boldsymbol{r}_a$ خط L_1 کے عمودی ہے جبکہ $\boldsymbol{r}_b$ خط L_2 کے عمودی ہے۔یوں اگر L_1^* اور L_2^* قائمہ الزاویہ ہوں تب $\boldsymbol{r}_a$ اور $\boldsymbol{r}_b$ بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے اور یوں مسئلہ 7.3 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{r}_b = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) = a_1b_1 + a_2b_2 = 0, \qquad \implies \qquad b_2 = -\frac{a_1}{a_2}b_1$$



شکل 7.17: قائمہ الزاویہ خطوط (مثال 7.8)۔

یوں L_2^* کی مساوات $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_b = b_1(x - \frac{a_1}{a_2}y) = 0$ ہو گی جس کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_2x - a_1y = 0 \qquad (L_2^*) \tag{7.38}$$

L_2^* کی مساوات کا L_1^* کی مساوات $(a_1x + a_2y = 0)$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

L_2^* کی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے L_2 کی مساوات $a_2x - a_1y = c'$ لکھی جا سکتی ہے۔چونکہ L_2 نقطہ N سے گزرتی ہے لہٰذا (x_0, y_0) کو L_2 کی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c' = a_2x_0 - a_1y_0$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں L_2 کی مساوات مکمل ہوتی ہے۔

مثال 7.8: سطح مستوی میں واقع قائمہ الزاویہ سیدھے خطوط

کارتیسی نظام کی xy سطح پر ایک خط L_1 کی مساوات $x - 3y - 3 = 0$ ہے۔نقطہ $N(2, 3)$ سے گزرتا ایسے خط (L_2) کی مساوات دریافت کریں جو L_1 کے عمودی ہو۔

حل: شکل 7.17-الف میں ان خطوط کو دکھایا گیا ہے۔ L_1 کو مبدا پر منتقل کرتے ہوئے L_1^* حاصل ہو گا جس کی مساوات $x - 3y = 0$ ہو گی جس کو سمتیات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ کا اندرونی ضرب $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_a = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}) = x - 3y$ لکھا جا سکتا ہے۔مبدا سے گزرتی کسی بھی سیدھے خط کی مساوات کی طرح L_2^* کے خط کی مساوات $b_1x + b_2y = 0$ لکھی جا سکتی ہے جس کو سمتیات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{r}_b = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ کا اندرونی ضرب $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_b = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})\cdot(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) = b_1x + b_2y$ لکھا جا سکتا ہے۔

چونکہ L_1 اور L_2 آپس میں عمودی ہیں لہٰذا $\boldsymbol{r}_a$ اور $\boldsymbol{r}_b$ بھی آپس میں عمودی ہوں گے۔ یوں مسئلہ 7.3 کے تحت $(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})\cdot(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) = b_1 - 3b_2 = 0$ ہو گا جس سے $b_1 = 3b_2$ ملتا ہے۔اس

طرح L_2^* کی مساوات $3b_2x + b_2y = 0$ یا $3x + y = 0$ ہو گی جس سے L_2 کی مساوات $3x + y = c'$ لکھی جا سکتی ہے۔ L_2 نقطہ $N(2,3)$ سے گزرتا ہے لہٰذا حاصل مساوات میں یہ نقطہ پر کرتے ہوئے $c' = 3(2) + 3 = 9$ ملتا ہے جس سے L_2 کی مساوات $3x + y = 9$ ملتی ہے۔ □

مثال 7.9: سطح کے ساتھ قائمہ الزاویہ سمتیہ

ایک سطح کی مساوات $2x - 4y + 6z = 3$ ہے۔ایسا اکائی سمتیہ دریافت کریں جو اس سطح کے ساتھ قائمہ الزاویہ ہو۔

حل: شکل 7.18 سے رجوع کریں۔ سطح مستوی کی عمومی مساوات درج ذیل ہے۔

$$a_1x + a_2y + a_3z = c \tag{7.39}$$

اس سطح پر کسی بھی نقطے کا ہٹاو سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو گا۔یہاں ہم سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ متعارف کرتے ہوئے مساوات 7.39 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = c \tag{7.40}$$

$\boldsymbol{a}$ غیر صفر ($\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$) ہے اور اس کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

مساوات 7.40 کو $|\boldsymbol{a}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

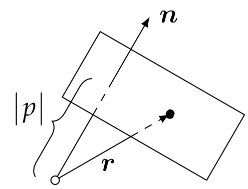
$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = p, \qquad p = \frac{c}{|\boldsymbol{a}|} \tag{7.41}$$

مساوات 7.35 کی مدد سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}$ کا سایہ p ہے۔

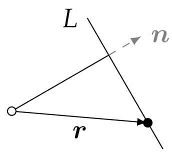
اب $|p|$ غیر متغیر مقدار ہے جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ سطح پر کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔شکل کو دیکھ کر ظاہر ہے کہ p صرف اور صرف اس صورت غیر متغیر ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{n}$ سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو۔یوں $\boldsymbol{a}$ بھی سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔شکل یہ یہ بھی ظاہر ہے کہ مبدا سے سطح کے قریب ترین نقطے کا فاصلہ $|p|$ ہو گا۔

یوں سطح $2x - 4y + 6z = 3$ کا قائمہ الزاویہ سمتیہ $2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ ہو گا اور سطح کا مبدا سے فاصلہ $\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ ہو گا۔ سطح کا اکائی قائمہ الزاویہ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{\sqrt{56}}$$



شکل 7.18: سطح مستوی کا عمودی سمتیہ۔



شکل 7.19: سیدھے خط کا مبدا سے فاصلہ مثال 7.10۔

چونکہ کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں لہٰذا $-\boldsymbol{n}$ بھی اس سطح کا اکائی قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔ □

مثال 7.10: کارتیسی نظام کے xy سطح پر کسی بھی سیدھے خط L کو $a_1x + a_2y = c$ لکھا جا سکتا ہے۔ مبدا سے اس خط کا فاصلہ دریافت کریں۔ خط کا قائمہ الزاویہ اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

حل: شکل 7.19 سے رجوع کریں۔ کارتیسی نظام کی xy سطح پر کسی بھی نقطے کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ متعارف کرتے ہوئے دیے گئے سیدھے خط کی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = c$$

اس مساوات کو $|\boldsymbol{a}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = p, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\ p = \frac{c}{|\boldsymbol{a}|}$$

اب $|p|$ غیر متغیر مقدار ہے جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ خط پر کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔ شکل کو دیکھ کر ظاہر ہے کہ p صرف اور صرف اس صورت غیر متغیر ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{n}$ سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو۔ یوں $\boldsymbol{a}$ بھی سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔ شکل یہ یہ بھی ظاہر ہے کہ مبدا سے سطح کے قریب ترین نقطے کا فاصلہ $|p|$ ہو گا۔

یوں مبدا سے خط تک قائمہ الزاویہ خط $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ اور مبدا سے خط تک کم سے کم فاصلہ $|p| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ہو گا۔یوں خط کے اکائی قائمہ الزاویہ سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{n} = \mp\left(\frac{a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right)$$

□

سوالات

سوال 7.43 تا سوال 7.49 میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ ہیں۔

سوال 7.43: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

جوابات: 5 ، 5

سوال 7.44: $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{c}|$

جوابات: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{21}$ ، $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{10}$ ، $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{21}$

سوال 7.45: $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}$

جوابات: -1

سوال 7.46: $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}, (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$

جوابات: $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = -1$ ، $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 1$

سوال 7.47: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$

جوابات: $\sqrt{41}$ = $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ ، $\sqrt{21}$

سوال 7.48: $2\boldsymbol{a}\cdot 4\boldsymbol{c},\ 5\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

جوابات: $2\boldsymbol{a}\cdot 4\boldsymbol{c}=40$ ، 25

سوال 7.49: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|\,,|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{c}|$

جوابات: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|=3\sqrt{6}$ ، $2\sqrt{21}$

سوال 7.50 تا سوال 7.54 میں ایک چیز کو قوت $\boldsymbol{f}$ نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتی ہے۔ قوت کتنا کام کرتا ہے؟ کام کی تعریف $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}_{BA}$ ہے۔

سوال 7.50: $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ A(0,0,0),\ B(5,0,0)$
جواب: $5\,\mathrm{J}$

سوال 7.51: $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ A(2,5,0),\ B(0,0,0)$
جواب: $11\,\mathrm{J}$

سوال 7.52: $\boldsymbol{f}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\ A(-5,2,1),\ B(2,-3,-6)$
جواب: $30\,\mathrm{J}$

سوال 7.53: $\boldsymbol{f}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ A(5,5,6),\ B(7,6,2)$
جواب: $0\,\mathrm{J}$

سوال 7.54: $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ A(3,4,2),\ B(4,2,1)$
جواب: $-3\,\mathrm{J}$

سوال 7.55: سوال 7.53 میں کام صفر کیوں ہے؟

جواب: چونکہ قوت اور ہٹاو سمتیہ قائمہ الزاویہ ہیں۔

سوال 7.56: سوال 7.53 میں کام منفی کیوں ہے؟

جواب: چونکہ قوت اور ہٹاو سمتیہ آپس میں الٹ رخ ہیں۔

سوال 7.57: سمتیہ $4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ میں c کی قیمت کیا ہونے سے یہ سمتیہ $2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ کے عمودی ہو گا۔

جواب: 2

سوال 7.58: xy سطح میں $4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ کا عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\frac{\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}}{\sqrt{5}}$ اور $\frac{-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}}{\sqrt{5}}$

سوال 7.59: ایک چیز کو قوت $\boldsymbol{f}_1$ اور قوت $\boldsymbol{f}_2$ مل کر نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتی ہے۔ثابت کریں کہ کل کام دونوں قوتوں کے کاموں کا مجموعہ ہو گا۔

سوال 7.60: سمتیات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ اگر مستطیل کے وتر آپس میں عمودی ہوں تب یہ مستطیل دراصل میں چکور ہو گا۔

سوال 7.61: سمتیات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مکعب کے بالکل الٹ کونوں کو ملاتے ہوئے وتر آپس میں عمودی ہوں گے۔

سوال 7.62: ثابت کریں کہ سطح $7x + y + 3z = 22$ اور سطح $x - y - 2z = -5$ قائمہ الزاویہ ہیں۔

جواب: ان کے عمودی سمتیات $7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ کا اندرونی ضرب صفر ہے لٰہذا یہ آپس میں عمودی ہیں اور یوں سطحیں بھی عمودی ہوں گی۔

سوال 7.63: سطح $3x - 2y + z = -2$ اور $x - 4y - 2z = 3$ کے مابین زاویہ دریافت کریں۔

جواب: 1.0182 ریڈیئن یعنی 58.33°

سوال 7.64: تکون کے تین کونے $A(2, -4, 6)$ ، $B(5, 2, 4)$ اور $C(-2, -1, -4)$ ہیں۔اس تکون کے زاویے دریافت کریں۔

جوابات: 74.61° ، 42.98° ، 62.4°

سوال 7.65 تا سوال 7.67 میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ ہیں۔دی گئی جوڑی سمتیات کے مابین زاویہ دریافت کریں۔

سوال 7.65: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$
جواب: 107.98°

سوال 7.66: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$
جواب: 116.68°

سوال 7.67: $\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$
جواب: 44.54°

درج ذیل چار سوالات میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کا جزو دریافت کریں۔

سوال 7.68: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کی لمبائی $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$ ہے۔اب چونکہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کا جزو $\frac{-4}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ ہو گا۔

سوال 7.69: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$
جواب: $-1.22\boldsymbol{i}+1.22\boldsymbol{j}-2.45\boldsymbol{k}$

سوال 7.70: $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$
جواب: $7.2\boldsymbol{j}+9.6\boldsymbol{k}$

سوال 7.71: $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$
جواب: $-2.23\boldsymbol{i}+3.34\boldsymbol{j}-4.46\boldsymbol{k}$

سوال 7.72: ثابت کریں کہ $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ تینوں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ یکساں زاویہ بناتا ہے۔

جواب: 54.73°

7.6 اندرونی ضرب فضا

تین بعدی فضا میں، مجموعہ سمتیات اور سمتیہ کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کے بنیادی قواعد استعمال کرتے ہوئے حصہ 7.4 میں سمتی فضا کا تصور متعارف کرایا گیا۔ ہم اسی طرح اندرونی ضرب (حصہ 7.5) کو استعمال کرتے ہوئے **حقیقی اندرونی ضرب فضا**[37] کا تصور حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا حقیقی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب مساوات 7.26 کے شرائط پر پورا اترتا ہو **حقیقی اندرونی ضرب فضا** کہلاتا ہے۔

تعریف : اندرونی ضرب فضا
ایسی حقیقی سمتی فضا V جو درج ذیل خصوصیت رکھتی ہو **حقیقی اندرونی ضرب فضا** کہلاتی ہے۔

V میں ہر دو عدد سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے ساتھ ایک ایسا حقیقی عدد وابستہ ہے، جس کو $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا اندرونی ضرب کہلاتا ہے، کہ درج ذیل مسلمات پورا ہوتے ہوں۔

- (الف) کسی بھی غیر سمتیات q_1 اور q_2 اور V میں تمام سمتیات $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(q_1\boldsymbol{a}+q_2\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=q_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+q_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \qquad \text{(خطیت)} \qquad \text{(الف)}$$

- (ب) V میں تمام سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \qquad \text{(تشاکل)}$$

- (پ) V میں ہر $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0\\&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0 \quad \text{اگر} \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}\text{یقینی مثبت}$$

---

[37] real inner product space

تعریف : قائمیت
اگر اندرونی ضرب فضا V میں دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو تب یہ سمتیات آپس میں قائم الزاویہ ہوں گے۔

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \qquad (\text{قائم الزاویہ})$$

اندرونی ضرب کو استعمال کرتے ہوئے ہم اندرونی ضرب فضا V میں ہر $\boldsymbol{a}$ کے ساتھ عدد $\|\boldsymbol{a}\|$ وابستہ کرتے ہیں جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \quad (\geq 0)$$

اور جو $\boldsymbol{a}$ کی **معیار**[38] کہلاتا ہے۔مساوات 7.24 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ **معیار** در حقیقت لمبائی کی عمومی تعریف ہے۔حقیقت میں ضرب نقطہ اور موجودہ اندرونی ضرب یکساں ہیں یعنی

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

اور ہماری موجودہ تعریف کے تحت مساوات 7.24 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

مسلمات اندرونی ضرب اور معیار کی تعریف سے مساوات 7.28 تا مساوات 7.30 اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \qquad ((\text{شوارز عدم مساوات}))$$

درج بالا سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{تکونی عدم مساوات}$$

اور سادہ الجبرائی حساب سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2) \qquad (\text{متوازی الاضلاع مساوات})$$

---

[38] norm

اندرونی ضرب فضا کا تصور عمومی ہے جس کی دو مثالیں (بغیر ثبوت) پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال n اجزاء پر مشتمل سمتیات $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ اور $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, n)$ کا اندرونی ضرب ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{7.42}$$

اندرونی ضرب فضا کی دوسری مثال، وقفہ $\alpha \le x \le \beta$ پر استمراری تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی اندرونی ضرب ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f, g) = \int_\alpha^\beta f(x) g(x) \,\mathrm{d}x \tag{7.43}$$

7.7 سمتی ضرب

کئی عملی مسائل سے سمتیات کی ایسی ضرب کی ضرورت پیش ہوتی ہے جس کا حاصل ضرب $\boldsymbol{v}$ بھی سمتیہ ہو۔ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیات کا ایسا ضرب جو سمتی ضرب[39] یا صلیبی ضرب[40] کہلاتا اور $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ لکھا جاتا ہے

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

کی تعریف درج ذیل ہے۔

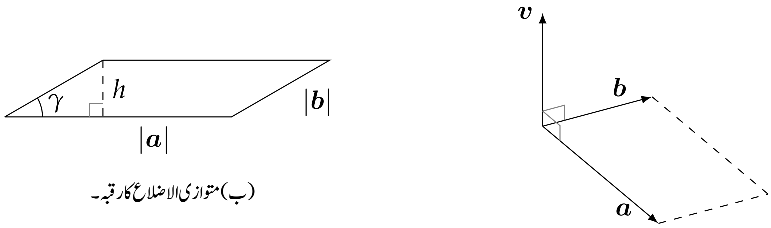
تعریف: سمتی ضرب
اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے رخ ایک جیسے یا آپس میں الٹ ہوں اور یا ان سمتیات میں سے ایک (یا دونوں) صفر سمتیہ ہوں تب $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

اس کے علاوہ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ایسا سمتیہ ہو گا جس کی لمبائی اس متوازی الاضلاع کے رقبے کے برابر ہو گی جس کے قریبی اطراف $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ہوں اور جس کی سمت $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ دونوں کے عمودی ہو گی۔ مزید $\boldsymbol{v}$ کی سمت یوں ہو گی کہ $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{v}$ (اسی ترتیب سے) دائیں ہاتھ کی ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں (شکل 7.20-الف)۔

سمتی ضرب کی تعریف میں ثلاثہ قائمہ سمتیات کی بات کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کا ذکر کیا گیا جس کا مطلب ہے کہ اگر دائیں ہاتھ کا انگوٹھا سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اور انگلی شہادت سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کی سمت میں رکھتے ہوئے درمیانی انگلی کو ان انگلیوں کے عمودی رکھا جائے تب درمیانی انگلی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی مقام کو ظاہر کرے گی۔

---

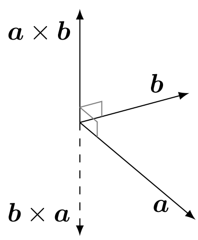
[39] vector product
[40] cross product



(ب)متوازی الاضلاع کا رقبہ۔

(الف) سمتی ضرب

شکل 7.20: سمتی ضرب کی تعریف



شکل 7.21: سمتی ضرب مخالف تبادل ہے

ایسا متوازی الاضلاع (شکل 7.20-ب) جس کے قریبی اطراف $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ہوں کا رقبہ $h|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\gamma$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مابین زاویہ γ ہے۔

$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\gamma \tag{7.44}$$

اگر $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ ہوں تب سمتی ضرب کی تعریف کے تحت $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}|$ ہو گا۔اب $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{w}$ اس صورت دائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں گے جب $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$ (شکل 7.21) ہو لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{7.45}$$

جس کے تحت سمتی ضرب مخالف تبادل ہے۔یوں سمتی ضرب میں اجزاء کی ترتیب نہایت اہم ہے جس کو تبدیل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

کسی بھی غیر سمتیہ k کے لئے سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b}) \tag{7.46}$$

سمتی جمع کی نقطہ نظر سے سمتی ضرب جزئیتی تقسیمی ہے یعنی:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \end{aligned} \tag{7.47}$$

درج بالا کا ثبوت اگلے حصے میں پیش کیا جائے گا۔ہم یہاں بتلانا چاہتے ہیں کہ سمتی ضرب قانون تلازم پر عموماً پورا نہیں اترتا یعنی:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$$

مساوات 7.23 اور مساوات 7.44 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\gamma = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 (1 - \cos^2\gamma) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے حاصل سمتی ضرب کی لمبائی کا درج ذیل قلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2} \tag{7.48}$$

7.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب

اس حصے میں ہم سمتی ضرب کے اجزاء کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ دو قسم کے کارتیسی نظام ممکن ہیں۔پہلا قسم **دائیں ہاتھ**[41] کا نظام کہلاتا ہے۔ دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں محور کی مثبت سمت میں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ دائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں گے (شکل 7.22-الف)۔ اگر نظام کے اکائی سمتیات بائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں تب اس کو بایاں ہاتھ کارتیسی نظام کہا جائے گا۔اس کتاب میں دایاں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا گیا ہے۔عام استعمال میں بھی دایاں نظام استعمال کیا جاتا ہے۔

اب دائیں یا بائیں ہاتھ کے نظام میں اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 ہوں تب سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

[41] right handed

(ب) بایاں ہاتھ کارتیسی نظام

(الف) دایاں ہاتھ کارتیسی نظام

شکل 7.22: کارتیسی نظام کے دو اقسام

کے اجزاء کو انہیں کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ہمیں صرف اس صورت پر غور کرنا ہے جب $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ہو۔ چونکہ $\boldsymbol{v}$ دونوں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے عمودی ہے لہٰذا مسئلہ 7.3 کے تحت $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ اور $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ہوں گے لہٰذا مساوات 7.33 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0 \\
b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{7.49}
$$

پہلی مساوات کو b_3 اور دوسری کو a_3 سے ضرب دے کر ان کا فرق حاصل کرتے ہیں۔

$$(a_3b_1 - a_1b_3)v_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)v_2$$

اسی طرح مساوات 7.49 کی پہلی مساوات کو b_1 اور دوسری کو a_1 سے ضرب دے کر ان کا فرق لکھتے ہیں۔

$$(a_1b_2 - a_2b_1)v_2 = (a_3b_1 - a_1b_3)v_3$$

آپ با آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا دو مساوات پر درج ذیل پورا اترتے ہیں جہاں c مستقل ہے۔

$$v_1 = c(a_2b_3 - a_3b_2), \quad v_2 = c(a_3b_1 - a_1b_3), \quad v_3 = c(a_1b_2 - a_2b_1) \tag{7.50}$$

مساوات 7.50 کو مساوات 7.49 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا مساوات 7.49 پر بھی پورا اترتا ہے۔ اب مساوات 7.49 میں بالائی مساوات $v_1v_2v_3$ فضا کی مبدا سے گزرتی ایک سطح مستوی کو ظاہر کرتی ہے جبکہ نچلی مساوات مبدا سے گزرتی دوسری سطح مستوی کو ظاہر کرتی ہے۔ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ان سطحوں کے عمودی سمتیات ہیں (مثال 7.9)۔ اب چونکہ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا یہ سمتیات متوازی نہیں ہیں اور یہ سطحیں، ہم سطحی نہیں ہیں۔ یوں یہ سطحیں ایک دونوں کو مبدا سے گزرتی سیدھے خط L پر قطع کرتی ہیں۔ چونکہ مساوات 7.50 میں c کی قیمت تبدیل کرنے سے سیدھا خط حاصل ہوتا ہے لہٰذا یہ خط مساوات 7.49 پر بھی پورا اترتا ہے اور یوں مساوات

7.50، L کی مساوات دیتا ہے اور مساوات 7.49 کا ہر حل مساوات 7.50 کی صورت کا ہو گا۔ بالخصوص $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء بھی اسی صورت کے ہوں گے جن میں c کی قیمت دریافت کرنا باقی ہے۔مساوات 7.50 سے درج ذیل ملتا ہے

$$|\boldsymbol{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = c^2[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2]$$

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{v}|^2 = c^2[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2]$$

مساوات 7.33 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل ملتا ہے

$$|\boldsymbol{v}|^2 = c^2[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]$$

جس کا مساوات 7.48 سے موازنہ کرنے سے $c = \mp 1$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں سے آگے یہ جاننا ضروری ہو گا کہ دایاں یا بایاں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا جا رہا ہے۔آئیں دائیں ہاتھ کا نظام استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ اس نظام میں $c = +1$ ہو گا۔

اگر ہم اور کی لمبائیاں یوں مسلسل تبدیل کریں کہ آخر کار $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$ ہو (شکل 7.22) تب $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی یوں تبدیل ہو گی کہ آخر کار $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ ہو گا۔ظاہر ہے کہ ہم یہ تبدیلی یوں پیدا کر سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کبھی بھی صفر نہ ہوں اور نا ہی یہ کبھی متوازی ہوں۔یوں $\boldsymbol{v}$ کبھی بھی صفر نہیں ہو گا اور چونکہ یہ تبدیلی مسلسل ہے اور c کی قیمت صرف $+1$ یا -1 ہو سکتی ہے لہٰذا اختتامی c کی قیمت وہی ہو گی جو ابتدائی c کی تھی۔اب چونکہ آخر پر $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}$ ہیں لہٰذا $a_1 = 1$ ، $b_2 = 1$ اور $v_3 = 1$ ہیں جبکہ باقی اجزاء صفر ہیں۔یوں مساوات 7.50 سے $v_3 = c = +1$ ملتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 7.50 میں قوسین میں دیے گئے مقدار کو دو درجی مقطع لکھا جا سکتا ہے لہٰذا اس نتیجے کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو مقطع کی صورت میں

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{7.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 بالترتیب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء ہیں۔یاد رکھنے کی خاطر درج بالا کو درج ذیل مقطع تصور کیا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \quad (\text{دائیں ہاتھ کا نظام}) \tag{7.52}$$

جہاں مقطع کو پہلی صف سے پھیلا کر حاصل کیا جائے گا۔یہ مقطع خصوصی مقطع ہے جس کی پہلی صف کا ارکان سمتیات ہیں۔

بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں بالکل درج بالا بحث کے تحت $c=-1$ حاصل ہو گا اور یوں اس نظام میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \quad (\text{بائیں ہاتھ کا نظام}) \tag{7.53}$$

مثال 7.11: دائیں ہاتھ کے کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ہیں۔ان کا سمتی ضرب $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ دریافت کریں۔

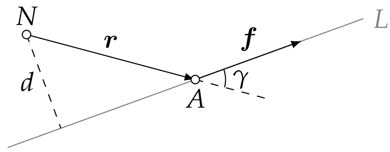
حل:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 6\\ -5 & 3 & -2\end{vmatrix}=-16\boldsymbol{i}-26\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

□

آئیں اب مساوات 7.47 کو ثابت کریں۔مساوات 7.51 کے تحت $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ کا پہلا

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix}&=a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)\\ &=(a_2b_3-a_3b_2)+(a_2c_3-a_3c_2)\\ &=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$



شکل 7.23: قوت کا معیار اثر (مثال 7.12)۔

ہو گا۔درج بالا کا دایاں ہاتھ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ کا پہلا جزو ہے۔باقی دو اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 7.47 میں بالائی تعلق ثابت ہوتا ہے۔بالکل اسی طرح اس میں دیا گیا نچلا تعلق بھی ثابت ہو گا۔

آپ درج ذیل مسئلہ خود ثابت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 7.4: دو سمتیات اس صورت خطی طور تابع سلسلہ بنائیں گے جب ان کا سمتی ضرب صفر سمتیہ کے برابر ہو۔

سمتی ضرب کئی عملی مسائل میں پیش آتا ہے۔درج ذیل دو مثال ایسے عملی مسئلے ہیں۔

مثال 7.12: قوت کا معیار اثر
میکانیات میں قوت $\boldsymbol{f}$ کا نقطہ N پر معیار اثر m سے مراد $m=|\boldsymbol{f}|\,d$ ہے جہاں N سے قوت کی ہم خطی لکیر L تک عمودی فاصلہ d ہے (شکل 7.23)۔

اگر N سے L پر کسی بھی نقطہ A تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب $d=|\boldsymbol{r}|\sin\gamma$ ہو گا (شکل 7.23) لہٰذا

$$m=|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{f}|\sin\gamma$$

ہو گا۔ چونکہ $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{f}$ کے مابین زاویہ γ ہے لہٰذا اس کو مساوات 7.44 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

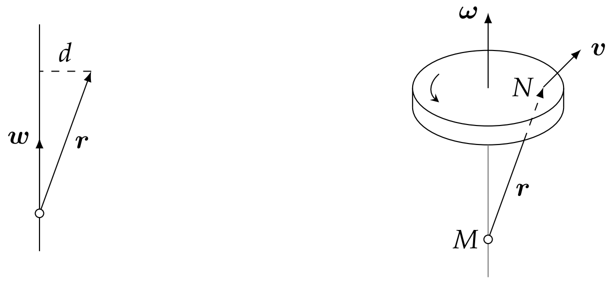
$$m=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}|$$

اور سمتیہ $\boldsymbol{m}$ یعنی

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f} \tag{7.54}$$

قوت $\boldsymbol{f}$ کا **معیار اثر سمتیہ**[42] کہلاتا ہے جس کی مقدار m اور سمت N سے گزرتی اس محور کی سمت ہے جس کے گرد $\boldsymbol{f}$ گھمانے کی کوشش کرتا ہے۔

[42] moment vector



شکل 7.24: گھومتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار (مثال 7.13)۔

اگر دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو $\boldsymbol{r}$ کی سمت سے $\boldsymbol{f}$ کی سمت میں گھماتے ہوئے ایک تصوراتی سلاخ کے گرد گھمایا جائے اور انگوٹھے کو اس تصوراتی سلاخ کی سمت میں رکھا جائے تب انگوٹھے کی سمت $\boldsymbol{m}$ کی سمت ہو گی۔ □

مثال 7.13: گھومتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار

خلا میں کسی بھی ٹھوس جسم B کے گھومنے کو سمتیہ $\boldsymbol{\omega}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کو **زاویائی سمتی رفتار**[43] کہتے ہیں۔ اگر گھومنے کی محور پر دائیں ہاتھ کا انگوٹھا رکھتے ہوئے باقی چار انگلیوں کو گھومنے کی سمت میں محور کے گرد لپیٹا جائے تو انگوٹھا $\boldsymbol{\omega}$ کی سمت دے گا (شکل 7.24)۔ $\boldsymbol{\omega}$ کی لمبائی **زاویائی رفتار**[44] $\omega(>0)$ کے برابر ہو گی۔

فرض کریں کہ ٹھوس جسم B پر N کوئی نقطہ ہے جس کا محور سے فاصلہ d ہے۔ اس نقطے کی رفتار ωd ہو گی۔ فرض کریں کہ اس نقطے کی ہٹاو سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے جہاں کارتیسی نظام کا مبدا M جسم کے محور پر رکھا گیا ہے۔ یوں $d=|\boldsymbol{r}|\sin\gamma$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{\omega}$ اور $\boldsymbol{r}$ کے مابین زاویہ γ ہے۔ اس طرح

$$\omega d=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\gamma=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سمتی ضرب کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{7.55}$$

اس کلیے سے جسم B پر کسی بھی نقطہ N کی سمتی رفتار حاصل کی جا سکتی ہے۔ □

[43] angular velocity
[44] angular speed

سوالات

دایاں ہاتھ کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ لیتے ہوئے سوال 7.73 تا سوال 7.81 میں دیے گئے تفاعل دریافت کریں۔

سوال 7.73: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$
جوابات: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$

سوال 7.74: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}$
جوابات: $\boldsymbol{0}$

سوال 7.75: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c},\ |\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|,\ |\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}|$
جوابات: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{k}$ ، $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = 3$ ، $|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}| = 3$

سوال 7.76: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$
جوابات: $-4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

سوال 7.77: $(4\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c},\ (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times 2\boldsymbol{c}$
جوابات: $-16\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}$

سوال 7.78: $(3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{c},\ 3\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$
جوابات: $9\boldsymbol{k}$

سوال 7.79: $(3\boldsymbol{c} - 5\boldsymbol{b}) \times 2\boldsymbol{a},\ 6\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$
جوابات: $-56\boldsymbol{i} + 64\boldsymbol{j} + 44\boldsymbol{k}$

سوال 7.80: $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$
جوابات: $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) = -5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$

سوال 7.81: $(2\boldsymbol{b} \times 4\boldsymbol{a}) \times 5\boldsymbol{c},\ 2\boldsymbol{b} \times (4\boldsymbol{a} \times 5\boldsymbol{c})$
جوابات: $2\boldsymbol{b} \times 4\boldsymbol{a}) \times 5\boldsymbol{c} = 200\boldsymbol{i} + 200\boldsymbol{j} + 160\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{b} \times (4\boldsymbol{a} \times 5\boldsymbol{c}) = 80\boldsymbol{i} - 40\boldsymbol{j} + 160\boldsymbol{k}$

سوال 7.82: $\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{0}$

سوال 7.83 تا سوال 7.86 میں متوازی الاضلاع کے دو قریبی اطراف دیے گئے ہیں۔ متوازی الاضلاع کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 7.83: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$
جواب: 2

سوال 7.84: $\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ -2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{35}$

سوال 7.85: $4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$
جواب: $\sqrt{86}$

سوال 7.86: $\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{83}$

سوال 7.87 تا سوال 7.90 میں دایاں ہاتھ کارتیسی نظام کے xy سطح پر متوازی الاضلاع کے کونے دیے گئے ہیں۔ سمتیات استعمال کرتے ہوئے اس کا رقبہ دریافت کریں۔ قریبی اطراف جاننے کے لئے قلم و کاغذ سے جلد متوازی الاضلاع کی شکل بنائیں۔

سوال 7.87: $(0,0),\ (2,2),\ (-1,1),\ (1,3)$
جواب: 4

سوال 7.88: $(0,0),\ (2,0),\ (4,3),\ (2,3)$
جواب: 6

سوال 7.89: $(-1,1),\ (-3,1),\ (2,0),\ (-6,0)$
جواب: 8

سوال 7.90: $(-5,1),\ (-1,2),\ (-2,4),\ (-4,-1)$
جواب: 9

سوال 7.91 تا سوال 7.94 میں متوازی الاضلاع کے کونے دیے گئے ہیں۔ سمتیات استعمال کرتے ہوئے اس کا رقبہ دریافت کریں۔ قریبی اطراف جاننے کے لئے قلم و کاغذ سے جلد متوازی الاضلاع کی شکل بنائیں۔

سوال 7.91: $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (-1,2,4),\ (0,1,4)$
جواب: $4\sqrt{2}$

سوال 7.92: $(1,3,8),\ (1,2,1),\ (3,1,2),\ (-1,4,7)$
جواب: $2\sqrt{66}$

سوال 7.93: $(-1,-2,-1),\ (1,-1,1),\ (-2,0,4),\ (-4,-1,2)$
جواب: $\sqrt{170}$

سوال 7.94: $(1,0,0),\ (-1,1,1),\ (-3,4,5),\ (-1,3,4)$
جواب: $\sqrt{53}$

سوال 7.95 تا سوال 7.98 میں تکون کے کونے دیے گئے ہیں۔ تکون کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 7.95: $(1,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,0)$
جواب: 1

سوال 7.96: $(1,3,2),\ (2,-1,3),\ (5,7,-1)$
جواب: $\frac{3\sqrt{57}}{2}$

سوال 7.97: $(-1,-2,-3),\ (1,2,4),\ (0,3,2)$
جواب: $\frac{3\sqrt{30}}{2}$

سوال 7.98: $(1,1,1),\ (2,2,2),\ (3,4,7)$
جواب: $\frac{\sqrt{26}}{2}$

سوال 7.99 تا سوال 7.102 میں $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ کو مساوات 7.48 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 7.99: $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{46}$

سوال 7.100: $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{38}$

سوال 7.101: $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{293}$

سوال 7.102: $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{21}$

سوال 7.103 تا سوال 7.106 میں کیا دیے گئے سمتیات عمودی یا متوازی ہیں؟

سوال 7.103: $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j},\, 5\boldsymbol{k}$
جواب: عمودی

سوال 7.104: $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\, 6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$
جواب: متوازی

سوال 7.105: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$
جواب: عمودی

سوال 7.106: $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\, 3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$
جواب: نہ عمودی اور نا ہی متوازی۔

سوال 7.107 تا سوال 7.110 میں دو سمتیات دیے گئے ہیں۔ان کے عمودی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔

سوال 7.107: $\boldsymbol{i},\, \boldsymbol{j}$
جوابات: $\mp\boldsymbol{k}$

سوال 7.108: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\, 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$
جوابات: $\mp\frac{1}{\sqrt{14}}(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$

سوال 7.109: $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\, \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$
جوابات: $\mp\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

سوال 7.110: $-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\, 2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جوابات: $\mp\frac{1}{\sqrt{13}}(3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$

سوال 7.111 تا سوال 7.114 میں تین نقطے دیے گئے ہیں جن سے سطح مستوی گزرتی ہے۔اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

سوال 7.111: $(0,0,0),\, (1,0,0),\, (0,1,0)$
جواب: $\mp\boldsymbol{k}$

سوال 7.112: $(2,0,3),\, (1,3,2),\, (1,1,2)$
جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$

سوال 7.113: $(2,-1,-3),\ (1,-3,2),\ (-1,1,-2)$
جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{101}}(6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})$

سوال 7.114: $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$
جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

سوال 7.115: سطح $2x+3y-2z=9$ اور سطح $x-2y+3z=-22$ ایک دونوں کو سیدھی لکیر پر قطع کرتے ہیں۔اس لکیر کے متوازی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{138}}(5\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})$

سوال 7.116: سطح $x+y+z=5$ کے متوازی اور خط $z=y$ ، $x=0$ کے عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$

سوال 7.117 تا سوال 7.120 میں قوت $\boldsymbol{f}$ ، نقطہ A سے گزرتی ہوئی لکیر کی سمت میں عمل کرتا ہے۔اس قوت کا معیار اثر $\boldsymbol{m}$ نقطہ N پر کیا ہو گا۔

سوال 7.117: $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j},\ A(4,5,6),\ N(-2,4,-5)$
جواب: $33\boldsymbol{i}+22\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{k}$

سوال 7.118: $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ A(4,-5,3),\ N(2,5,-4)$
جواب: $-41\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+26\boldsymbol{k}$

سوال 7.119: $\boldsymbol{f}=-5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\ A(0,0,0),\ N(4,4,4)$
جواب: $-4\boldsymbol{i}+36\boldsymbol{j}-32\boldsymbol{k}$

سوال 7.120: $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ A(1,0,0),\ N(0,0,1)$
جواب: $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

7.9 غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب

تین یا تین سے زائد سمتیات کا ضرب عملی استعمال میں عموماً پیش آتے ہیں۔ان میں سب سے زیادہ اہم غیر سمتی سہ ضرب[45] $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ ہے۔ دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$$

مساوات 7.52 استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو مساوات 7.33 کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\tag{7.56}$$

غیر سمتی سہ ضرب $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ کو $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چونکہ مقطع قالب کے دو صف کی جگہ آپس میں بدلنے سے مقطع کی قیمت منفی اکائی (-1) سے ضرب ہوتی ہے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{bac}),\quad \text{وغیرہ}\tag{7.57}$$

دو مرتبہ صف بدلنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})\tag{7.58}$$

اب غیر سمتی سہ ضرب کی تعریف کے تحت

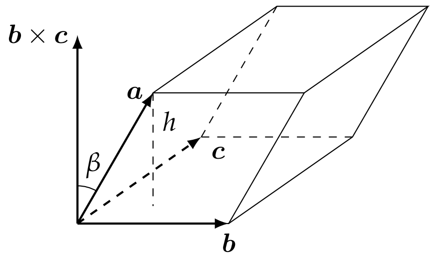
$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),\quad (\boldsymbol{cab})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

ہیں اور چونکہ غیر سمتی ضرب قابل تبادل ہے لہٰذا $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\tag{7.59}$$

---

[45] scalar triple product, mixed triple product



شکل 7.25: غیر سمتی سہ ضرب کی جیومیٹریائی معنی۔

مزید مستقل k کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$(k\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) = k(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) \tag{7.60}$$

غیر سمتی سہ ضرب کی حتمی قیمت سادہ معنی رکھتی ہے۔یہ ایسی **مسدسی متوازی السطوح**[46] P کی حجم ہے جس کے قریبی اطراف $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ ہوں (شکل 7.25)۔

یقیناً مساوات 7.23 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

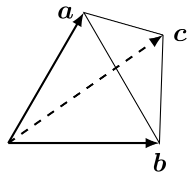
$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| \cos\beta \quad \text{(مسدسی متوازی السطوح کا حجم)} \tag{7.61}$$

جہاں $\boldsymbol{a}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ کے مابین زاویہ β ہے۔اب P کی نچلی سطح کا رقبہ $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|$ ہے اور P کی اونچائی $h = |\boldsymbol{a}| \cos\beta$ ہے لہٰذا P کا حجم درج بالا ہو گا۔

ہم نے دیکھا کہ غیر سمتی سہ ضرب در حقیقت مسدسی متوازی السطوح کا حجم دیتا ہے۔اب کسی چیز کا حجم ایک مستقل ہے جو چنے گئے دائیں ہاتھ کارتیسی نظام پر منحصر نہیں ہو گا لہٰذا غیر سمتی سہ ضرب کا دارومدار بھی زیر استعمال دائیں ہاتھ کارتیسی نظام پر نہیں ہو گا۔البتہ یاد رہے کہ بائیں ہاتھ کارتیسی نظام کی صورت میں مساوات 7.52 کی جگہ مساوات 7.53 استعمال ہو گا جس سے مساوات 7.56 میں مقطع کے سامنے -1 نمودار ہو گا۔ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ مقطع کی قیمت ایک دائیں ہاتھ نظام کی جگہ دوسرا دائیں ہاتھ کا نظام استعمال کرنے سے تبدیل نہیں ہو گا اور نا ہی یہ ایک بائیں ہاتھ نظام کی جگہ دوسرا بائیں ہاتھ نظام استعمال کرنے سے تبدیل ہو گا البتہ دائیں ہاتھ نظام کی جگہ بائیں ہاتھ نظام یا بائیں ہاتھ نظام کی جگہ دائیں ہاتھ نظام استعمال کرنے سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔

---

[46] hexagonal parallelepiped



شکل 7.26: غیر سمتی سہ ضرب سے چو سطحہ کے حجم کا حصول (مثال 7.14)۔

مثال 7.14: چو سطحہ
دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں چو سطحہ کے قریبی اطراف درج ذیل ہیں۔اس چو سطحہ کا حجم دریافت کریں (شکل 7.26)۔

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

حل: مسدسی متوازی السطوح کا حجم درج ذیل مقطع سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

یوں مسدسی متوازی السطوح کا حجم $V = 6$ ہے۔مقطع کی قیمت منفی ہے جس کا مطلب ہے کہ $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ سمتیات اسی ترتیب میں بائیں ہاتھ ثلاثہ سمتیات ہیں۔چو سطحہ کا حجم مسدسی متوازی السطوح کے حجم کا $\frac{1}{8}$ ہے لٰہذا اس کا حجم $\frac{3}{4}$ ہو گا۔

□

غیر سمتی سہ ضرب کی جیومیٹریائی معنی سے ہمیں تین سمتیات کی خطی طور تابعیت اور غیر تابعیت کا اصول بھی ملتا ہے۔یہ سمتیات صرف اور صرف ہم سطحی ہونے کی صورت میں خطی طور تابع ہوں گے [جس میں (حصہ 7.4 میں دیا گیا) خطی طور تابع تین سمتیات کے ہم خطی ہونے کا شرط بھی شامل ہے]۔

مسئلہ 7.5: خطی تابعیت
تین سمتیات صرف اور صرف اس صورت خطی طور تابع ہوں گے جب ان کا غیر سمتی سہ ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

عملی استعمال میں درپیش دیگر متعدد ضرب کو نقطہ ضرب، صلیبی ضرب اور غیر سمتی سہ ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے میں درج ذیل کلیہ (جس کا ثبوت جلد پیش کیا جائے گا) اہم کردار ادا کرتا ہے

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \tag{7.62}$$

جس سے مراد درج ذیل **لیگرینج مماثل**[47]

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \tag{7.63}$$

اور

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \tag{7.64}$$

ہے، جن کے ثبوت آپ سے بالترتیب سوال 7.159 اور سوال 7.160 میں مانگے گئے ہیں۔مساوات 7.62 کے ثبوت سے پہلے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 7.62 سے مراد درج ذیل بھی ہے۔

$$(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{d} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$$

اس سے ظاہر ہے کہ عموماً $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$ اور $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{d}$ مختلف ہوں گے یعنی سمتی ضرب، قانون تلازم پر پورا نہیں اترتا لہٰذا مساوات 7.62 میں قوسین لکھنا لازمی ہے اور انہیں ہٹایا نہیں جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر دائیں ہاتھ کے نظام میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{لیکن} \qquad (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$$

ثبوت: برائے مساوات 7.62
ہم دائیں ہاتھ کارتیسی محدد یوں چنتے ہیں کہ x محور کی سمت $\boldsymbol{d}$ ہو اور xy سطح میں $\boldsymbol{c}$ پایا جاتا ہو۔یوں مساوات 7.62 کے سمتیات درج ذیل لکھے جائیں گے

$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{d} = d_1\boldsymbol{i}$$

لہٰذا $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} = -c_2 d_1 \boldsymbol{k}$ ہو گا جس کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -c_2 d_1 \end{vmatrix} = -b_2 c_2 d_1 \boldsymbol{i} + b_1 c_2 d_1 \boldsymbol{j}$$

[47] Lagrange's identity

ساتھ ہی ساتھ ہم درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=b_1d_1(c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j})-(b_1c_1+b_2c_2)d_1\boldsymbol{i}=b_1c_2d_1\boldsymbol{j}-b_2c_2d_1\boldsymbol{i}$$

یوں ہماری مخصوص کارتیسی نظام میں مساوات 7.62 ثابت ہوتا ہے۔اب سمتیہ کی لمبائی، سمتیہ کا رخ، سمتی ضرب اور غیر سمتی ضرب کی قیمت کا دارومدار چنے گئے نظام پر ہر گز نہیں ہوتا۔ مزید دہرا سمتی ضرب کی بنا $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$ کو دائیں ہاتھ یا بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھنے سے یکساں جواب ملتا ہے۔یوں مساوات 7.62 کسی بھی کارتیسی نظام کے لئے درست ہے۔

$\square$

سوالات

سوال 7.121 تا سوال 7.130 میں دائیں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا گیا ہے۔ان سوالات میں دیے گئے تین سمتیات کا غیر سمتی سہ ضرب $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ دریافت کریں۔

سوال 7.121: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}$
جواب: 1

سوال 7.122: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}$
جواب: 1

سوال 7.123: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$
جواب: -1

سوال 7.124: $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جواب: 28

سوال 7.125: $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$
جواب: 10

سوال 7.126: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جواب: -3

سوال 7.127: $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$
جواب: 1

سوال 7.128: $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$
جواب: 12

سوال 7.129: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$
جواب: 19

سوال 7.130: $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c} = 7\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$
جواب: -35

کیا سوال 7.131 تا سوال 7.138 کے سمتیات خطی طور تابع یا خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 7.131: $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.132: $\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k},\ -2\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$
جواب: تابع

سوال 7.133: $2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.134: $-3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j},\ 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.135: $4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j},\ -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$
جواب: تابع

سوال 7.136: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},\ 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k},\ 8\boldsymbol{k}$
جواب: تابع

سوال 7.137: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.138: $\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.139: λ کی وہ قیمت دریافت کریں جس سے درج ذیل تینوں سمتیات ہم خطی ہوں گے۔
$\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \lambda\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: $\lambda=-2$

سوال 7.140: کیا درج ذیل چار نقطے ہم سطحی ہیں؟

$$(4,-2,1),\ (5,1,6),\ (2,2,-5),\ (3,5,0)$$

جواب: غیر ہم سطحی

سوال 7.141: درج ذیل میں α اور β کی وہ قیمتیں دریافت کریں جو تینوں نقطوں کو ہم خطی بناتے ہیں۔

$$(-1,3,2),\ (-4,2,-2),\ (5,\alpha,\beta)$$

جوابات: $\alpha=5$ ، $\beta=10$

سوال 7.142: تین متغیرات پر مبنی تین مساوات کی متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب نظام کی عددی سر قالب کا مقطع صفر ہو۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 7.5 ثابت کریں۔

سوال 7.143 تا سوال 7.148 میں متوازی شہ پہلو کے قریبی اطراف دیے گئے ہیں۔ متوازی شہ پہلو کا حجم دریافت کریں۔

سوال 7.143: $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ -\boldsymbol{k}$
جواب: 1

سوال 7.144: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$
جواب: 2

سوال 7.145: $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: 13

سوال 7.146: $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: 40

سوال 7.147: $3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: 20

سوال 7.148: $3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$
جواب: 12

سوال 7.149 تا سوال 7.152 میں چو سطحہ کے کونے دیے گئے ہیں۔اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 7.149: $(0,0,0),\ (2,4,0),\ (0,2,4),\ (3,5,6)$
جواب: 4

سوال 7.150: $(3,4,2),\ (1,-2,3),\ (2,2,2),\ (6,3,5)$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 7.151: $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 7.152: $(-3,2,-1),\ (1,2,5),\ (-2,1,3),\ (4,-1,1)$
جواب: 8

سوال 7.153 تا سوال 7.158 میں $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{d}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ لیں۔

سوال 7.153: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$
جوابات: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=15\boldsymbol{i}+25\boldsymbol{j}+29\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=31\boldsymbol{i}+50\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$

سوال 7.154: $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$
جوابات: $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d}=9\boldsymbol{i}+26\boldsymbol{j}+62\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-9\boldsymbol{i}-26\boldsymbol{j}-64\boldsymbol{k}$

سوال 7.155: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})$
جوابات: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d}=30\boldsymbol{i}-37\boldsymbol{j}+83\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})=64\boldsymbol{i}+29\boldsymbol{j}-33\boldsymbol{k}$

سوال 7.156: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$
جوابات: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})=-48\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j}+26\boldsymbol{k}$

سوال 7.157: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$
جوابات: $-98\boldsymbol{i}+99\boldsymbol{j}-137\boldsymbol{k}$

سوال 7.158: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b})$
جوابات: -6832

سوال 7.159: مساوات 7.63 ثابت کریں۔

سوال 7.160: مساوات 7.64 ثابت کریں۔

باب 8

خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

خطی الجبرا وسیع مضمون ہے جس میں قالب اور سمتیات، مقطع قالب، خطی مساوات کے نظام، سمتی فضا اور خطی تبادلہ، قدر مسائل، اور دیگر موضوعات شامل ہیں۔اس کا استعمال انجینئری، طبیعیات، جیومیٹری، کمپیوٹر سائنس، معاشیات اور دیگر میدانوں میں پایا جاتا ہے۔

متعدد اعداد و شمار یا متعدد تفاعل کو مربوط طریقے سے قالب[1] اور سمتیات[2] کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب اور سمتیات ہی خطی الجبرا کی زبان ہیں۔

---

[1] matrices
[2] vectors

8.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

مستطیلی ترتیب وار فہرست کو قالب کہتے ہیں۔درج ذیل قالب کی مثال ہیں۔ قالب میں درج اعداد یا تفاعل کو قالب کے اندراجات یا قالب کے ارکان[3] کہتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -2 & 1.2 \\ -6 & 0 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ln x & -e^{x} \\ e^{3x} & 3.2x^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3.22 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

بالائی بائیں ہاتھ قالب کے ارکان 0.1 ، -2 ، 1.2 ، -6 ، 0 اور 23 ہیں۔اس قالب کے دو صف[4] اور تین قطار[5] ہیں۔افقی اندراجات کی لکیر کو صف اور عمودی اندراجات کی لکیر کو قطار کہتے ہیں۔ بالائی درمیانی قالب میں 3 صف اور 3 قطار پائے جاتے ہیں۔ایسا قالب جس میں صفوں کی تعداد، قطاروں کی تعداد کے برابر ہو مربع قالب[6] کہلاتا ہے۔یوں بالائی دائیں ہاتھ قالب بھی مربع قالب ہے۔ بالائی درمیانی قالب میں ارکان کو a_{mn} سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں دو عدد اشاریہ m اور n بالترتیب اس صف اور قطار کو ظاہر کرتے ہیں جہاں یہ رکن پایا جاتا ہو۔ قالب میں اندراجات کے مقام کی وضاحت اسی معیاری ترکیب سے کی جاتی ہے۔ یوں a_{23} رکن دوسرے صف اور تیسرے قطار میں پایا جاتا ہے۔

ایسا قالب جو صرف ایک عدد صف یا صرف ایک عدد قطار پر مشتمل ہو، سمتیہ[7] کہلاتا ہے۔یوں نچلے دائیں ہاتھ دو ارکان پر مشتمل سمتیہ قطار[8] پایا جاتا ہے جبکہ نچلے بائیں ہاتھ سمتیہ صف[9] پایا جاتا ہے۔چونکہ سمتیہ قطار میں کوئی صف نہیں پایا جاتا لہٰذا اس میں ارکان کے مقام کو صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی طرح سمتیہ صف میں بھی ارکان کا مقام صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں سمتیہ قطار میں $a_1 = 3.22$ اور $a_2 = -\frac{4}{5}$ ہیں۔

عملی استعمال میں مواد کے ذخیرہ اور اس پر عمل کرنے میں قالب کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔درج ذیل مثال دیکھیں

---

elements[3]
rows[4]
columns[5]
square matrix[6]
vector[7]
column vector[8]
row vector[9]

مثال 8.1: خطی نظام
درج ذیل **خطی نظام** میں x_1 ، x_2 اور x_3 نا معلوم متغیرات ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 15 \\ 5x_1 \qquad + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

آئیں درج بالا نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 کے عددی سروں سے **عددی سر قالب**[10] $\boldsymbol{A}$ لکھیں۔ $\boldsymbol{A}$ قالب میں ہر رکن کا مقام عین خطی مساوات کے مطابق ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

چونکہ تیسری مساوات میں x_2 نہیں پایا جاتا لہٰذا اس کا عددی سر صفر کے برابر ہو گا اور یوں $\boldsymbol{A}$ میں $a_{32} = 0$ درج کیا گیا ہے۔عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ میں مساوات کے دائیں ہاتھ کی معلومات کا اضافہ کرنے سے **افزودہ قالب**[11] $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ملتا ہے۔

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 15 \\ 5 & 0 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

چونکہ افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ سے تینوں مساوات لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا دیے گئے خطی نظام کو $\tilde{\boldsymbol{A}}$ مکمل طور ظاہر کرتا ہے۔یوں ہم $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کو حل کرتے ہوئے نا معلوم متغیرات x_1 ، x_2 اور x_3 حاصل کر سکتے ہیں۔ایسا کرنا جلد سمجھایا جائے گا۔فی الحال تسلی کر لیں کہ اس نظام کا حل $x_1 = 1$ ، $x_2 = -2$ اور $x_3 = 2$ ہے۔

نا معلوم متغیرات کو x_1 ، x_2 اور x_3 سے ظاہر کرنے کی بجائے دیگر علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے مثلاً x ، y اور z ۔ □

مثال 8.2: فروخت کھاتا

[10] coefficient matrix
[11] augmented matrix

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \text{جمع} & \text{جمعرات} & \text{بدھ} & \text{منگل} & \text{پیر} & \text{اتوار} & \text{ہفتہ} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 32 & 23 & 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 10 & 12 & 14 & 5 & 0 & 17 & 25 \\ 29 & 16 & 32 & 18 & 9 & 14 & 17 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{array} \end{array}$$

ایک دکان کی تین اشیاء کی ہفتہ وار فروخت درج بالا قالب میں دی گئی ہے۔ہر ہفتے کی فروخت کو اسی طرح قالبوں میں لکھا جا سکتا ہے۔مہینے کے آخر میں تمام قالبوں کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لینے سے ہر دن، تینوں اشیاء کی کل فروخت کی فہرست حاصل ہو گی۔ □

عمومی تصورات اور علامت نویسی

آئیں اب تک پیش کیے گئے تصورات کو با ضابطہ دستوری صورت دیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے بڑے حروف سے قالب کو ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{C}$ ، $\cdots$، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ وغیرہ۔ایسا قالب جس میں m صف اور n قطار ہوں، $m\times n$ (اس کو m ضرب n پڑھیں) قالب کہلاتا ہے (پہلے صف اور بعد میں قطار آئے گا) اور $m\times n$ قالب کی **جسامت**[12] کہلاتی ہے۔یوں $m\times n$ قالب درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}=[a_{jk}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

مساوات 8.1 میں بالائی بائیں قالب 3×2 جسامت کا ہے جبکہ نچلا بایاں قالب 3×1 جسامت کا ہے۔

مساوات 8.2 میں ہر رکن کو دو عدد اشاریہ سے پہچانا جاتا ہے جہاں پہلا اشاریہ صف اور دوسرا اشاریہ قطار ہے۔یوں a_{23} دوسرے صف اور تیسرے قطار پر موجود اندراج ہے۔

ایسا قالب جس میں $m=n$ ہو $n\times n$ **چکور قالب** کہلاتا ہے۔ چکور قالب کا وہ وتر جس پر a_{11} ، a_{22} ، $\cdots$، a_{nn} پائے جاتے ہیں، قالب کا **مرکزی وتر**[13] کہلاتا ہے۔ مساوات 8.1 میں ایک چکور قالب کے مرکزی

---
[12] size
[13] main diagonal

وتر کے ارکان a_{11} ، a_{22} اور a_{33} ہیں جبکہ دوسرے چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان $\ln x$ اور $3.2x^2$ ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے، چکور قالب نہایت اہم ہیں۔

ایسا قالب جس میں $m \neq n$ ہو $m \times n$ **مستطیل**[14] قالب کہلاتا ہے۔ مستطیل قالب کی ایک مخصوص قسم چکور قالب ہے۔

سمتیات

صرف ایک صف یا ایک قطار پر مبنی قالب کو سمتیہ کہتے ہیں۔ سمتیہ کے اندراج کو سمتیہ کے اجزاء[15] کہتے ہیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے چھوٹے حروف سے سمتیہ کو ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ ، $\cdots$، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{a} = [a_j]$ وغیرہ۔ سمتیہ صف کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4.2 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

اسی طرح سمتیہ قطار کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

$m \times n$ جسامت کے قالب 8.2 کو n جسامت کا سمتیہ صف

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

تصور کیا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{b}_1$ تا $\boldsymbol{b}_n$ از خود m جسامت کے سمتیہ قطار

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

---

[14] rectangular matrix
[15] components

ہیں۔اسی طرح $\boldsymbol{A}$ کو m جسامت کا سمتیہ قطار

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \boldsymbol{c}_m \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

تصور کیا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{c}_1$ تا $\boldsymbol{c}_m$ از خود n جسامت کے سمتیہ صف ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{c}_2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{c}_m &= \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.6}$$

مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

آئیں قالب مساوی ہونے کی تصور جانتے ہیں۔

تعریف : دو قالب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ اس صورت مساوی ہوں گے جب دونوں قالب کی جسامت برابر ہو اور ان کے نظیری ارکان آپس میں برابر ہوں یعنی $a_{11} = b_{11}$ ، $a_{12} = b_{12}$ ، $\cdots$ ہوں۔غیر مساوی قالب **مختلف**[16] کہلاتے ہیں۔یوں مختلف جسامت کے قالب ہر صورت مختلف ہوں گے۔مساوات کا تعلق $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 8.3: قالبوں کی مساوات
اگر درج ذیل قالب مساوی ہوں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

[16] different

تب $a_{11} = 2$ ، $a_{12} = -3$ ، $a_{21} = 0$ اور $a_{22} = 3.2$ ہوں گے اور ہم $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ لکھ سکتے ہیں۔درج ذیل تمام قالب آپس میں مختلف ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

تعریف : قالبوں کا مجموعہ
دو یکساں جسامت کے قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ کا مجموعہ $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ لکھا جائے گا جس کے اندراجات $a_{jk} + b_{jk}$ کو $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے نظیری ارکان کے مجموعے سے حاصل کیا جائے گا۔دو مختلف جسامت کے قالبوں کا مجموعہ حاصل کرنا ناممکن ہے۔

مثال 8.4: اگر

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہوں تب $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ اور $0\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}$ حاصل کریں۔

حل:چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی یکساں جسامت ہے لہٰذا انہیں جمع کیا جا سکتا ہے۔مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2+7 & -1+3 & 3+0 \\ 1+1 & 0+2 & -2+1 \\ 3+2 & 2-1 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

اسی طرح چونکہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی جسامت یکساں ہے لہٰذا انہیں جمع کیا جا سکتا ہے۔ان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 3+2 \\ -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی جسامت یکساں نہیں ہے لہٰذا $0\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}$ حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ □

تعریف: غیر سمتی ضرب
کسی بھی $m \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور کسی بھی غیر سمتی مقدار (عدد) c کا حاصل ضرب $c\boldsymbol{A}$ لکھا جاتا ہے جو ایسا $m \times n$ قالب $c\boldsymbol{A} = [ca_{jk}]$ ہے جس کا ہر رکن $\boldsymbol{A}$ کے نظیری رکن کو c سے ضرب دیتے حاصل کیا جاتا ہے۔

ہم $(-1)\boldsymbol{A}$ کو $-\boldsymbol{A}$ لکھتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{A}$ کا نفی کہتے ہیں۔اسی طرح $(-k)\boldsymbol{A}$ کو $-k\boldsymbol{A}$ لکھا جاتا ہے۔ $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$ کو $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ لکھا جاتا ہے جو $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کا فرق[17] کہلاتا ہے (فرق صرف یکساں جسامت کے قالب کا حاصل کیا جا سکتا ہے)۔

مثال 8.5: غیر سمتی ضرب
اگر

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.3 \\ 0.6 & -1.5 \\ 0 & 6.0 \end{bmatrix}$$

ہو تب درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$-\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} -1.2 & -3.3 \\ -0.6 & 1.5 \\ 0 & -6.0 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{3}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -5 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad 0\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر قالب $\boldsymbol{B}$ میں مختلف اشیاء کی کلوگرام کمیت درج ہو تب $1000\boldsymbol{B}$ قالب انہیں اشیاء کی کمیت گرام میں دے گا۔ □

[17] difference

مجموعہ قالب اور غیر سمتی ضرب کے قواعد

مجموعہ اعداد کے قواعد سے یکساں جسامت $m \times n$ کے قالبوں کے مجموعے کے درج ذیل قاعدے حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \\
&\text{(ب)} \quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \quad (\text{یعنی } \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \\
&\text{(پ)} \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A} \\
&\text{(ت)} \quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

درج بالا موٹی لکھائی میں صفر $\boldsymbol{0}$ ایسے $m \times n$ **صفر قالب**[18] کو ظاہر کرتی ہے جس کے تمام ارکان صفر 0 کے برابر ہوں۔ اگر $m=1$ یا $n=1$ ہو تب اس کو **صفر سمتیہ**[19] کہیں گے۔

یوں مجموعہ قالب **قانون تبادل** اور **قانون تلازم** پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح غیر سمتی ضرب درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B} \\
&\text{(ب)} \quad (c+k)\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B} \\
&\text{(پ)} \quad c(k\boldsymbol{A})=(ck)\boldsymbol{A} \qquad (\text{یعنی } ck\boldsymbol{A}) \\
&\text{(ت)} \quad 1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

سوالات

سوال 8.1 تا سوال 8.3 عمومی سوالات ہیں۔ سوال 8.1: $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ لکھتے ہوئے مثال 8.2 میں $[a_{12}]$ اور $[a_{25}]$ کیا ہیں۔

جوابات: $[a_{12}]=23$ اور $[a_{25}]=0$

سوال 8.2: مثال 8.2 میں دیے گئے قالب کی جسامت لکھیں۔

---

[18] zero matrix
[19] zero vector

جواب: 3×7

سوال 8.3: مثال 8.4 میں قالب A کی مرکزی وتر لکھیں۔

جواب: 2 ، 0 اور 1

سوال 8.4 تا سوال 8.10 میں قالبوں کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب حاصل کرنے ہوں گے۔ان سوالات میں درکار قالب درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.0 \\ 0.0, \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.4: $0.5\boldsymbol{A}$ ، $0.2\boldsymbol{B}$ ، $-2\boldsymbol{u}$

جوابات:

$$0.5\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1.0 \\ 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.2\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad -2\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.5: $3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}, \quad 2\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}, \quad -3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 7 & 1 & 9 \\ 6 & 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9.5 \\ -5.7 \\ -6.4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.6: $(3 \cdot 6)\boldsymbol{B}, \quad 6(3)\boldsymbol{B}, \quad 5\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{A}$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.7: $3(2\boldsymbol{C}+5\boldsymbol{D}), \quad 0.2(0.1\boldsymbol{E}-0.3\boldsymbol{D})$
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 66 & 18 \\ 9 & 57 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0.08 & -0.24 \\ 0.12 & -0.2 \\ 0.22 & -0.1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.8: $\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}), \quad (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{E})+\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}, \quad 0\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$
جوابات: چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$ کی جسامت یکساں نہیں ہے لہٰذا انہیں جمع نہیں کیا جا سکتا ہے۔ غیر یکساں جسامت کی بنا $0\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$ بھی حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{E})+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 20 & -4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

سوال 8.9: $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ کو خلاء میں قوت کے اجزاء تصور کرتے ہوئے ان کے مجموعے سے کل قوت دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{bmatrix} 5.3 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.10: متوازن صورت
تمام قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہونے کی صورت کو متوازن[20] حال کہتے ہیں۔

ایسا قوت $\boldsymbol{x}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ ، $\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{x}$ متوازن حال میں ہوں۔

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} -5.3 \\ -3.1 \\ -3.2 \end{bmatrix}$$

[20] equilibrium

8.2 قالبی ضرب

قالبی ضرب سے مراد دو عدد قالبوں کا آپس میں ضرب ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ چند مثالیں حل کرتے ہوئے قالبی ضرب کو اچھی طرح سمجھیں۔ قالبی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف : قالبی ضرب
$m \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ اور $r \times p$ قالب $B = [b_{jk}]$ کا (اسی ترتیب سے) حاصل ضرب $C = AB$ صرف $r = n$ کی صورت میں ممکن ہو گا اور یہ $m \times p$ قالب $C = [c_{jk}]$ ہو گا جس کے اندراجات درج ذیل ہوں گے۔

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}, \quad j = 1, \cdots, m \quad k = 1, \cdots, p \tag{8.9}$$

یوں پہلے جزو A میں قطاروں کی تعداد n دوسرے جزو B کی صفوں کی تعداد r کے برابر ہونا لازمی ہے۔مساوات 8.9 میں c_{jk} کو A کے j صف کے ہر رکن کو B کے k قطار کے نظیری رکن سے ضرب دیتے ہوئے تمام n حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں **صف ضرب قطار** سے قالبی ضرب حاصل کیا جاتا ہے۔ قالبی ضرب $n = 3$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

جہاں A کی پہلی صف کے ارکان کو B کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{11} حاصل ہو گا۔اسی طرح A کی پہلی صف کے ارکان کو B کی دوسری قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{12} حاصل ہو گا اور A کی دوسری صف کے ارکان کو B کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{21} حاصل ہو گا۔اس عمل کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{aligned}$$

چونکہ سمتیہ درحقیقت قالب کی مخصوص صورت ہے لہٰذا قالب اور سمتیہ کا ضرب بھی بالکل اسی طرح حاصل کیا جائے گا۔ قالبی ضرب کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال 8.6: قالبی ضرب

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 7\\ 8 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 9+3\cdot 8 & 1\cdot 7+3\cdot 10\\ 4\cdot 9+6\cdot 8 & 4\cdot 7+6\cdot 10\\ 5\cdot 9+2\cdot 8 & 5\cdot 7+2\cdot 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}33 & 37\\ 84 & 88\\ 61 & 55\end{bmatrix}$$

□

مثال 8.7: قالب اور سمتیہ کا ضرب

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 4+1\cdot 5\\ 3\cdot 4+0\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ 12\end{bmatrix}\quad \text{جبکہ} \quad \begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}= \text{نا ممکن}$$

درج بالا میں قالب اور سمتیہ کی جگہ تبدیل کرنے سے پہلے جزو کی قطاروں اور دوسرے جزو کی صفوں کی تعداد یکساں نہیں رہتی لہٰذا ایسا ضرب نا ممکن ہے۔یوں ضروری نہیں ہے کہ $\boldsymbol{AB}$ اور $\boldsymbol{BA}$ برابر ہوں اور یہ کہ دونوں ضرب کا حصول ممکن ہو۔ □

سوال 8.11:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ سمتیات کی جگہ تبدیل کرنے سے حاصل ضرب تبدیل ہوتا ہے یعنی **قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا۔**

مثال 8.8: قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا لہٰذا عموماً $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ ہو گا

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 & 199 \\ -199 & -199 \end{bmatrix}$$

□

آپ نے دیکھا کہ قالبی ضرب میں اجزاء کی جگہ تبدیل نہیں کی جا سکتی ہے۔اس کے علاوہ قالبی ضرب، عام اعدادی ضرب کے درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned} &(\text{الف}) \quad (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}) \quad (k\boldsymbol{AB} \text{ یا } \boldsymbol{A}k\boldsymbol{B}) \\ &(\text{ب}) \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} \quad (\text{یعنی } \boldsymbol{ABC}) \\ &(\text{پ}) \quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC} \\ &(\text{ت}) \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{CB} \end{aligned} \tag{8.10}$$

درج بالا میں k کوئی عدد ہے اور یہ قواعد اس صورت درست ہوں گے کہ بائیں ہاتھ کے قالب، قالبی ضرب کی تعریف پر پورا اترتے ہوں۔درج بالا میں مساوات-ب **قانون تلازم**[21] کہلاتا ہے جبکہ مساوات-پ اور مساوات-ت **قانون جزئیتی تقسیم**[22] کہلاتا ہے۔

چونکہ قالبی ضرب صف ضرب قطار کو کہتے ہیں لہٰذا مساوات 8.9 کو زیادہ خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$c_{jk} = \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{b}_k, \quad j = 1, \cdots, m \quad k = 1, \cdots, p \tag{8.11}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_j$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا صف j اور $\boldsymbol{b}_k$ قالب $\boldsymbol{B}$ کا قطار k ہے۔

$$\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{b}_k = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} \end{bmatrix}$$

---

[21] associative law
[22] distributive law

مثال 8.9: صف اور قطار سمتیہ کی صورت میں ضرب ارکان

3×3 قالب $A = [a_{jk}]$ اور 3×4 قالب $B = [b_{jk}]$ کو ضرب دینے سے درج لکھا جا سکتا ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

□

مثال 8.10: 3×3 قالب $A = [a_{jk}]$ اور 3×4 قالب $B = [b_{jk}]$ درج ذیل ہیں۔ مساوات 8.12 سے AB حاصل کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: یہاں $a_1 = [1 \quad 0 \quad 2]$ ، $a_2 = [2 \quad 1 \quad 1]$ اور $a_3 = [3 \quad 2 \quad 1]$ ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 4 = 6$$

اسی طرح بقایا ارکان حاصل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 10 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

□

قالبی ضرب بذریعہ کمپیوٹر

مساوات 8.12 کو ذرہ مختلف طریقے سے لکھتے ہیں۔ A کو جوں کا توں جبکہ B کو سمتیہ قطار کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

متعدد متوازی جڑے کمپیوٹر کو علیحدہ علیحدہ b_1 ، b_2 ، $\cdots$ ، b_p یا انہیں کئی کئی علیحدہ سمتیہ قطار فراہم کیے جاتے ہیں اور ساتھ ہی تمام کو A بھی فراہم کیا جاتا ہے۔ یوں قالبی ضرب کے اجزاء Ab_1 ، Ab_2 ، $\cdots$ ، Ab_p بہ یک وقت (نسبتاً بہت کم وقت میں) حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 8.11: درج ذیل کو مساوات 8.13 کی مدد سے حل کریں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 8.13 سے قالبی ضرب کے قطار حاصل کرتے ہیں جنہیں ایک ہی قالب میں یکجا کرتے ہوئے درج بالا جواب ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

□

خطی تبادل اور قالبی ضرب

دو متغیرات پر مبنی خطی تبادل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{8.14}$$

جس کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

اب اگر x_1x_2 نظام ازخود w_1w_2 پر مبنی ہو یعنی

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned} \tag{8.16}$$

یا

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

تب y_1y_2 نظام بالواسطہ w_1w_2 پر مبنی ہو گا۔آئیں اس تعلق کو جانیں۔

مساوات 8.14 میں مساوات 8.16 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2 \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned} \tag{8.18}$$

ملتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, \quad & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, \quad & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned} \tag{8.19}$$

لیا گیا ہے۔اس تعلق کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

آئیں قالبی ضرب $\boldsymbol{AB}$ حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ہے۔

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C} \tag{8.21}$$

بڑے جسامت کے قالبوں کے لئے بھی $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ بالکل اسی طرح ثابت کیا جاتا ہے۔یوں y ، x اور w متغیرات کی تعداد بالترتیب m ، n اور p کی صورت میں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ قالبوں کی جسامت بالترتیب $m \times n$ ، $n \times p$ اور $m \times p$ ہو گی جہاں $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ہے۔ قالبی ضرب (مساوات 8.9) کی تعریف مساوات 8.21 کی بدولت ہے۔

8.2.1 تبدیلی محل

قالب کے صفوں کو بطور قطار (یعنی قطاروں کو بطور صف) لکھ کر **تبدیل محل قالب**[23] حاصل ہوتا ہے اور اس عمل کو [24] کہتے ہیں۔سمتیہ کی تبدیلی محل بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔اس طرح قالب کا صف، تبدیل محل قالب کا قطار ہو گا اور یونہی قالب کا قطار، تبدیل محل قالب کا صف ہو گا۔ چکور قالب کے ارکان کا مرکزی وتر میں "عکس" لینے سے بھی تبدیل محل قالب حاصل ہو گا۔مرکزی وتر کے دونوں اطراف یکساں مقامات پر ارکان کی آپس میں جگہ تبدیل کرنے سے ان کا "عکس" حاصل ہو گا۔یوں a_{12} اور a_{21} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، a_{13} اور a_{31} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ قالب $\boldsymbol{A}$ سے حاصل تبدیل محل قالب کو $\boldsymbol{A}^T$ سے ظاہر کیا جائے گا۔درج ذیل مثال دیکھیں۔

مثال 8.12: تبدیل محل قالب
قالب $\boldsymbol{A}$ کا تبدیل محل $\boldsymbol{A}^T$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 3 & 6 & 4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & 6\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

درج بالا کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 3 & 6 & 4\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & 6\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

چکور قالب اور اس کا تبدیل محل درج ذیل ہیں۔چکور قالب اور اس کے تبدیل محل قالب میں مرکزی وتر کے ارکان جگہ تبدیل نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}5 & -2 & 6\\ 7 & 1 & 0\\ 4 & 8 & 3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}5 & 7 & 4\\ -2 & 1 & 8\\ 6 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل، سمتیہ قطار ہو گا اور یونہی سمتیہ قطار کا تبدیل محل، سمتیہ صف ہو گا۔

$$\begin{bmatrix}3 & 7 & -1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3\\ 7\\ -1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}4\\ 5\\ 2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

---

[23] transpose matrix
[24] transposition

تبدیل محل کا تبدیل محل اصل قالب ہو گا۔

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

□

تعریف : قالب اور سمتیہ کا تبدیل محل
$m \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کا تبدیل محل $n \times m$ قالب $\boldsymbol{A}^T$ ہے جس کا پہلا صف، $\boldsymbol{A}$ کا پہلا قطار، اس کا دوسرا صف $\boldsymbol{A}$ کا دوسرا قطار، وغیرہ وغیرہ ہوں گے۔ یوں مساوات 8.2 میں دیے گئے $\boldsymbol{A}$ کا تبدیل محل $\boldsymbol{A}^T$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8.22}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل سمتیہ قطار ہو گا جبکہ سمتیہ قطار کا تبدیل محل سمتیہ صف ہو گا۔

بعض اوقات قالب اور بعض اوقات تبدیل محل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ **تبدیلی محل** کے قواعد درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} && \left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A} \\ &\text{(ب)} && (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T \\ &\text{(پ)} && (c\boldsymbol{A})^T = c\boldsymbol{A}^T \\ &\text{(ت)} && (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \end{aligned} \tag{8.23}$$

دھیان رہے کہ مساوات 8.23-ت میں دائیں ہاتھ قالبوں کی ترتیب بائیں ہاتھ کی ترتیب کے الٹ ہے۔ سوال 8.25 میں آپ کو درج بالا تعلقات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 8.13: درج ذیل قالب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.23-ت ثابت کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$$

حل: پہلے مساوات 8.23-ت کا بایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ قالبی ضرب $\boldsymbol{AB}$ لینے کے بعد

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$$

اس کا تبدیل محل حاصل کرتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{AB})^T=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\\a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}\tag{8.24}$$

آئیں اب مساوات 8.23-ت کا دایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{B}^T$ اور $\boldsymbol{A}^T$ حاصل کرنے کے بعد

$$\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{21}\\b_{12}&b_{22}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}$$

ان کا قالبی ضرب لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{21}\\b_{12}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}a_{11}+b_{21}a_{12}&b_{11}a_{21}+b_{21}a_{22}\\b_{12}a_{11}+b_{22}a_{12}&b_{12}a_{21}+b_{22}a_{22}\end{bmatrix}\tag{8.25}$$

چونکہ $a_{11}b_{11}=b_{11}a_{11}$ ، $a_{12}b_{21}=b_{21}a_{12}$ ، $\cdots$ ہیں لہٰذا مساوات 8.24 اور مساوات 8.25 کے دائیں ہاتھ آپس میں برابر ہیں لہٰذا ان کے بائیں ہاتھ بھی آپس میں برابر ہوں گے۔ اس طرح مساوات 8.23-ت ثابت ہوا۔ $\square$

مخصوص قالب

چند اقسام کے قالب عملی استعمال کے لحاظ سے زیادہ اہم ہیں۔ ان پر غور کرتے ہیں۔

تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب

ایسا چکور قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے برابر $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ ہو **تشاکلی**[25] قالب کہلاتا ہے۔ایسا قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے نفی کے برابر $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$ ہو **منحرف تشاکلی**[26] قالب کہلاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&\text{تشاکلی} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T, \quad (a_{jk} = a_{kj}) \\
&\text{منحرف تشاکلی} \quad \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T, \quad (a_{jk} = -a_{kj} \text{ اور } a_{jj} = 0)
\end{aligned}
\tag{8.26}
$$

مثال 8.14: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب

$\boldsymbol{A}$ تشاکلی قالب ہے، $\boldsymbol{B}$ منحرف تشاکلی قالب ہے جبکہ $\boldsymbol{C}$ نہ تشاکلی اور نہ منحرف تشاکلی ہے۔

$$
\begin{aligned}
&\text{تشاکلی} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\
&\text{منحرف تشاکلی} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\
&\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

□

تکونی قالب

بالائی تکونی قالب[27] اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور اس سے بالائی جانب پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر سے نیچے کی طرف تمام ارکان صفر ہوں۔اسی طرح **نچلا تکونی قالب**[28] اس چکور

[25] symmetric
[26] skew-symmetric
[27] upper triangular matrix
[28] lower triangular matrix

قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے نیچے پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر کے بالائی جانب تمام ارکان صفر کے برابر ہوں۔

مثال 8.15: بالائی تکونی اور نچلا تکونی قالب

$$\text{بالائی تکونی قالب}\quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{نچلا تکونی قالب}\quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

وتری قالب

ایسا چکور قالب جس میں غیر صفر ارکان صرف مرکزی وتر پر پائے جاتے ہوں **وتری قالب**[29] کہلاتا ہے۔ مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر ہوں گے۔

اگر وتری قالب $\boldsymbol{S}$ کے تمام ارکان یکساں، مثلاً c کے برابر ہوں، تب $\boldsymbol{S}$ **غیر سمتی قالب**[30] کہلائے گا۔ کسی بھی چکور قالب $\boldsymbol{A}$ جس کی جسامت $\boldsymbol{S}$ کی جسامت کے برابر ہو، کا $\boldsymbol{S}$ کے ساتھ قالبی ضرب کا حاصل، غیر سمتی مقدار c اور $\boldsymbol{A}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔

$$\boldsymbol{AS} = \boldsymbol{SA} = c\boldsymbol{A} \tag{8.27}$$

ایسا غیر سمتی قالب جس کے ارکان اکائی (1) کے برابر ہوں **اکائی قالب**[31] کہلاتا ہے جسے $\boldsymbol{I}_n$ یا $\boldsymbol{I}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اکائی قالب کی صورت میں درج بالا مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A} \tag{8.28}$$

---

[29] diagonal matrix
[30] scalar matrix
[31] unit matrix

مثال 8.16: وتری قالب $\boldsymbol{D}$، غیر سمتی قالب $\boldsymbol{S}$ اور اکائی قالب $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.17: کارخانے کے اخراجات
ایک کارخانے میں تین اقسام کے کھلونے (الف، ب اور پ) تیار ہوتے ہیں۔ایک کھلونا تیار کرنے کے اخراجات قالب $\boldsymbol{A}$ میں دیے گئے ہیں۔ قالب $\boldsymbol{B}$ ایک ہفتے کی پیداوار دیتا ہے۔ جمع اور جمع رات کے دن تعطیل ہوتی ہے۔ایسا قالب $\boldsymbol{C}$ حاصل کریں جو اس ایک ہفتے میں پیدا کیے گئے کھلونوں پر خرچ اخراجات پیش کرے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{پ} & \text{ب} & \text{الف} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 100 & 50 \\ 15 & 12 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{array}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{بدھ} & \text{منگل} & \text{پیر} & \text{اتوار} & \text{ہفتہ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 2.0 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{array}$$

حل:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{بدھ} & \text{منگل} & \text{پیر} & \text{اتوار} & \text{ہفتہ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2840.0 & 3865.0 & 2480.0 & 4065.0 & 4265.0 \\ 227.0 & 305.4 & 202.6 & 321.2 & 335.4 \\ 74.6 & 100.6 & 66.2 & 105.6 & 110.6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{array}$$

□

مثال 8.18: امکانی شماریاتی قالب۔طاقت قالب
ایک شہر کے رقبے کا استعمال 2018 میں درج ذیل ہے۔

$$\text{رہائشی } R = 60\,\%, \quad \text{تجارتی } T = 25\,\%, \quad \text{صنعتی } S = 15\,\%$$

پانچ سالوں میں رقبے کا استعمال تبدیل ہو گا۔اس تبدیلی کو درج ذیل امکانی شماریاتی قالب[32] $\boldsymbol{A}$ دیتا ہے جو سالہا سال اس شہر کے لئے قابل استعمال ہے۔

[32]stochastic matrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{رہائشی سے} & \text{تجارتی سے} & \text{صنعتی سے} \end{array} \\ \boldsymbol{A} = & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{رہائشی کو منتقل} \\ \text{تجارتی کو منتقل} \\ \text{صنعتی کو منتقل} \end{array} \end{array}$$

درج بالا امکانی شماریاتی قالب $\boldsymbol{A}$ کے تمام ارکان مثبت ہیں جبکہ ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی کے برابر ہے (چونکہ تمام ممکنہ امکانات کا مجموعہ اکائی کے برابر ہوتا ہے)۔ پانچ سال بعد 2023ء میں رقبے کی تقسیم درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 \\ 0.2 \cdot 60 + 0.7 \cdot 25 + 0.1 \cdot 15 \\ 0.6 \cdot 60 + 0.2 \cdot 25 + 0.9 \cdot 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.5 \\ 31.0 \\ 18.5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{رہائشی} \\ \text{تجارتی} \\ \text{صنعتی} \end{array}$$

اس عمل کو $\boldsymbol{A}$ کی مدد سے سمجھتے ہیں۔ پانچ سالوں میں 0.8 امکان ہے کہ رہائشی رقبہ، رہائشی ہی رہے گا جبکہ 0.1 امکان ہے کہ تجارتی رقبے پر رہائش ہو گی اور 0 امکان ہے کہ صنعتی رقبے پر رہائش ہو گی۔ یوں 2023ء میں رہائشی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$0.8 \cdot 60 + 0.1 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 50.5\,\%$$

اس پورے عمل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} 60 & 25 & 15 \end{bmatrix}^T$$

جہاں $\boldsymbol{x}$ سمتیہ حال[33] ہے جو 2018ء میں رقبے کی تقسیم بیان کرتا ہے۔ اسی طرح 2028ء اور 2033ء میں صورت حال بالترتیب درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 43.50 \\ 33.65 \\ 22.85 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 38.165 \\ 34.540 \\ 27.295 \end{bmatrix}$$

---

[33] state vector

یوں 2033 میں 38.165 % علاقہ رہائشی، 34.54 % تجارتی اور 27.295 % صنعتی ہو گا۔ یاد رہے کہ رقبہ مستقل قیمت ہے۔ □

سوالات

سوال 8.12: چکور قالب
ایسا چکور قالب جو تشاکلی اور منحرف تشاکلی ہو، کی صورت کیا ہو گی۔

حل: صفر قالب

سوال 8.13 تا سوال 8.25 میں درج ذیل قالب استعمال کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.13: $\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{B}^T, \boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{b}^T$

جوابات: $\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

سوال 8.14: $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}$

جوابات: $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -17 & -14 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 20 \\ 12 & -9 & -18 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

سوال 8.15: $(\boldsymbol{AB})^T, \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$

جوابات: $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -6 \\ -14 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 20 & -18 & 10 \end{bmatrix}$

سوال 8.16: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{A}^2$

جوابات: $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 29 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 13 \\ 20 & 13 & 38 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 17 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 22 & 39 \end{bmatrix}$$

سوال 8.17: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T, \boldsymbol{B}^2$

جوابات: $$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 25 & -16 & 0 \\ -16 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ -8 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.18: $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T, \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$

جوابات: $$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -13 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.19: $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}, (2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B})^T, 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{B}^T$

جوابات: $$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -15 & -8 & 8 \\ 12 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}, (2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B})^T = 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.20: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{B}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{b}^T$

جوابات: $$\boldsymbol{B}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{b}^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.21: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}^T$

جوابات: $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.22: $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})^T, \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^T$

جوابات: $$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.23: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}$

جوابات: $$\begin{bmatrix} -49 & -36 \\ -5 & -6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -75 \\ -15 \\ -11 \end{bmatrix}$$

سوال 8.24: $\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{ba}, \boldsymbol{aB}, \boldsymbol{Bb}$

جوابات: $\begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

سوال 8.25: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}^T+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^T$

جوابات: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ممکن نہیں ہے اور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}^T+\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

سوال 8.26: $\boldsymbol{AB}$ کو سوال 8.13 میں حاصل کیا گیا ہے۔اسی کو دوبارہ $\boldsymbol{A}$ کے قطار اور $\boldsymbol{B}$ کے صف استعمال کرتے ہوئے دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 8.27: مساوات 8.23 کو عمومی 2×2 قالب کے لئے ثابت کریں۔

سوال 8.28: قانون تبادل

ایسا 2×2 قالب $\boldsymbol{B}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ ہو جہاں $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہے۔

جواب: $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

سوال 8.29: ثابت کریں کہ کسی بھی چکور قالب $\boldsymbol{C}$ کے لئے $\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^T)$ تشاکلی ہے جبکہ $\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^T)$ منحرف تشاکلی ہیں۔

سوال 8.30: درج بالا سوال کے تحت $\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^T)$ اور $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^T)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{T}$ تشاکلی اور $\boldsymbol{M}$ منحرف تشاکلی قالب ہیں۔کسی بھی قالب کو تشاکل قالب اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں سوال 8.13 تا سوال 8.25 میں استعمال کیے گئے $\boldsymbol{A}$ کو تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ان قالبوں کو دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2.5 \\ 3 & 2.5 & 5 \end{bmatrix}$

سوال 8.31: قابل تبادل
ثابت کریں کہ تشاکلی $\boldsymbol{A}$ اور تشاکلی $\boldsymbol{B}$ کا قالبی ضرب $\boldsymbol{AB}$ اس صورت تشاکلی ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ آپس میں (ضرب میں) **قابل تبادل**[34] ہوں یعنی جب $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ ہو۔

جواب: $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{BA}$

سوال 8.32: کن صورتوں میں منحرف تشاکلی قالبوں کا قالبی ضرب منحرف تشاکلی قالب دے گا؟

جواب: $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$

سوال 8.33: امکانی شماریاتی عمل
ایک مشین اگر آج ٹھیک ہو تب 0.9 امکان ہے کہ وہ ایک دن بعد (کل) بھی ٹھیک ہو گا۔یوں 0.1 امکان ہے کہ وہ کل خراب ہو گا۔اسی طرح اگر مشین آج خراب ہو تب 0.4 امکان ہے کہ وہ کل بھی خراب ہو گا۔یوں 0.6 امکان ہے کہ وہ کل ٹھیک ہو گا۔آج ٹھیک اور خراب کو بالترتیب t اور k سے ظاہر کریں جبکہ ایک دن بعد انہیں T اور K سے ظاہر کریں۔ اس پیش گوئی سے امکانی شماریاتی قالب $\boldsymbol{A}$ لکھیں۔ اگر آج مشین ٹھیک ہو تب دو دن بعد (پرسوں) مشین ٹھیک ہونے کا کتنا فی صد امکان ہے۔

جوابات: دو دن بعد $87\,\%$ امکان ہے کہ مشین ٹھیک ہو گی۔ $\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathrm{t} & \mathrm{k} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathrm{T} \\ \mathrm{K} \end{array} \end{array}$

سوال 8.34: امکانی شماریاتی عمل
ایک شہر کی آبادی 20 000 ہے۔ایک بینک میں آج کھاتے دار کا $90\,\%$ امکان ہے کہ وہ اگلے سال بھی اسی بینک کا کھاتے دار ہو گا جبکہ یہاں کھاتا نہ رکھنے والے کا $1\,\%$ امکان ہے کہ وہ اگلے سال یہاں کا کھاتا دار ہو گا۔اگر آج 1000 افراد اس بینک کے کھاتے دار ہوں تب ایک سال، دو سال اور تین سال بعد کتنے افراد یہاں کے کھاتے دار ہوں گے؟

جوابات: 1090 ، 1170 ، 1241

سوال 8.35: ایک کارخانہ لاہور، پشاور اور کراچی میں تین اشیاء الف، ب اور پ فروخت کرتا ہے۔فی کلو گرام منافع بالترتیب 8 ، 10 اور 6 روپیہ ہے۔ ایک دن کی فروخت درج ذیل ہے۔

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{الف} & \text{ب} & \text{پ} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 1800 \\ 2200 & 2800 & 1500 \\ 3200 & 4200 & 2700 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{لاہور} \\ \text{پشاور} \\ \text{کراچی} \end{array} \end{array}$$

[34] commutative

ایسا "سمتیہ منافع" $\boldsymbol{m}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}$ ہر شہر میں روزانہ کمائی دے۔

جواب: $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}^T$

سوال 8.36: خطی تبادلہ۔ گھومنا
کارتیسی محدد کی xy سطح پر گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ گھومنے کو $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ظاہر کرتی ہے جہاں $\boldsymbol{y}$ ، $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{x}$ درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ثابت کریں کہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کسی بھی سطح پر x_1x_2 کارتیسی محدد کے نظام کو، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کی گھومنے کی الٹ رخ، θ زاویہ گھما کر نیا کارتیسی محدد y_1y_2 دیتا ہے۔

سوال 8.37: خطی تبادلہ۔ گھومنا
درج بالا سوال میں θ زاویہ گھومنا دیکھا گیا۔ثابت کریں کہ درج ذیل قالب، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، $n\theta$ زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

سوال 8.38: خطی تبادلہ۔ گھومنا
درج بالا دو سوالات کو دیکھیں۔درج ذیل قالب، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، α اور β زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

یوں باری باری α اور β گھومنے کو $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ ظاہر کرے گا۔یوں درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

سوال 8.39: خطی تبادلہ۔ گھومنا
خلا میں گھومنا $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ دیتا ہے جہاں $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ ، $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$ ہیں جبکہ $\boldsymbol{A}$ درج ذیل ہو سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

کیا آپ ذہن میں اس عمل کو دیکھ پاتے ہیں؟

8.3 خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط

قالب کا ایک اہم استعمال، خطی تفرقی مساوات کے نظام کا حل ہے۔ ہم یہاں **گاوسی اسقاط**[35] کی ترکیب سیکھتے ہیں جو خطی الجبرا میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ اس ترکیب کو اچھی طرح سمجھیں۔

خطی تفرقی مساوات کے نظام کا نام چھوٹا کرتے ہوئے اس کو **خطی نظام**[36] بھی کہتے ہیں۔انجینئری، معاشیات، شماریات، اور دیگر شعبوں کے کئی مسائل کی نمونہ کشی خطی نظام کی مدد سے کی جاتی ہے مثلاً برقی ادوار اور گاڑیوں کی آمد و رفت کا نظام۔

خطی نظام، عددی سر قالب اور افزودہ قالب

n متغیرات پر مبنی n مساوات کا نظام درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{mn}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{8.29}$$

[35] Gauss elimination
[36] linear system

چونکہ اس نظام میں تمام متغیرات کی طاقت اکائی (1) ہے لہٰذا یہ نظام **خطی** کہلاتا ہے (سیدھے خط کی طرح جس کی مساوات $y = mx + c$ میں x اور y کی طاقت 1 ہے)۔ان مساوات میں a_{11} تا a_{mn} مستقل قیمتیں ہیں جنہیں نظام کے **عددی سر**[37] کہتے ہیں۔ b_1 تا b_m بھی مستقل قیمتیں ہیں۔تمام b_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں 8.29 کا نظام **ہم جنسی**[38] نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ **غیر ہم جنسی**[39] نظام کہلاتا ہے۔

نظام 8.29 کے حل سے مراد x_1 تا x_n کی وہ قیمتیں ہیں جو اس نظام کے تمام مساواتوں پر پورا اترتے ہوں۔ نظام کے **حل سمتیہ**[40] کے ارکان نظام 8.29 کے حل x_1 تا x_m ہیں۔ ہم جنسی نظام کا ہر صورت میں ایک حل $x_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا جو **غیر اہم صفر حل**[41] کہلاتا ہے۔

نظام 8.29 کی قالبی صورت

قالبی ضرب کے استعمال سے نظام 8.29 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{8.30}$$

جہاں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{b}$ درج ذیل ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ **عددی سر قالب**[42] کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{8.31}$$

$\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیہ قطار ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ a_{jk} تمام صفر نہیں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}$ صفر قالب نہیں ہو گا۔ دھیان رہے کہ $\boldsymbol{x}$ کے n ارکان جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے m ارکان ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{b}$ کو ایک ہی قالب میں لکھ کر

---

[37] coefficients
[38] homogeneous
[39] nonhomogeneous
[40] solution vector
[41] trivial solution
[42] coefficient matrix

افزودہ قالب[43] $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ملتا ہے۔

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{8.32}$$

افزودہ قالب میں عمودی لکیر کو ہٹایا جا سکتا ہے۔ہم بھی ایسا ہی کریں گے، بس یاد رہے کہ $\boldsymbol{A}$ کے ساتھ آخری قطار $\boldsymbol{b}$ کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ افزودہ قالب میں نظام 8.29 کے تمام معلومات شامل ہیں لہٰذا افزودہ قالب اس نظام کو مکمل طور پر ظاہر کرتا ہے۔

مثال 8.19: حل کی وجودیت اور یکتائی۔ جیومیٹریائی نقطہ نظر
$m = n = 2$ کی صورت میں نظام دو عدد متغیرات x_1 ، x_2 اور دو عدد مساوات پر مبنی ہو گا۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

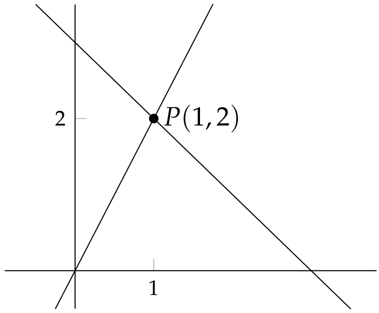
اگر ہم x_1 اور x_2 کو سطح x_1x_2 پر محور فرض کریں تب درج بالا مساوات اس سطح پر سیدھے خطوط کے مساوات ہوں گے۔ان مساوات کا صرف اس صورت حل (x_1, x_2) ہو گا جب نقطہ P جس کے محور x_1 اور x_2 ہوں، ان دونوں خطوط پر پایا جاتا ہو۔ یوں تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 8.1 دیکھیں۔

- اگر خطوط ایک دونوں کو قطع کرتے ہوں تب یکتا حل پایا جائے گا۔
- ہم مکان خطوط کی صورت میں لامتناہی تعداد کے حل ہوں گے۔
- متوازی اور ایک دونوں سے ہٹ کر خطوط کی صورت میں کوئی حل ممکن نہیں ہو گا۔

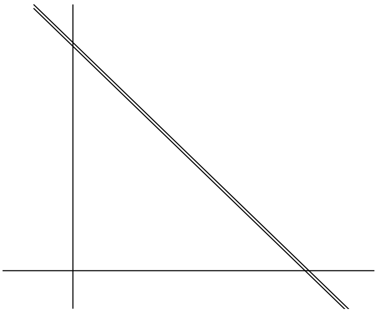
دو متغیرات اور دو مساوات کے نظام کو ہم نے دیکھا۔ تین متغیرات اور تین مساوات کے نظام کو بھی جیومیٹریائی نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔اب خطوط کی بجائے نظام کے تین مساوات تین سطحوں کو ظاہر کریں گی۔ شکل 8.2 میں اس نظام کے حل دکھائے گئے ہیں۔ □

مثال 8.19 میں ہم نے دیکھا کہ عین ممکن ہے کہ نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو۔یوں کسی بھی نظام کے بارے میں ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا حل موجود ہے اور آیا ایسا حل یکتا ہے۔آئیں اب خطی نظام کو حل کرنے کا منظم طریقہ سیکھیں۔

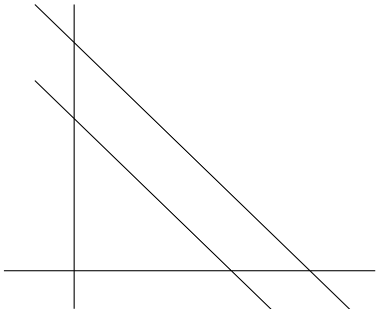
[43] augmented matrix



(الف) نقطہ P جہاں دونوں خط ملتے ہیں، ان مساوات کا حل ہے۔

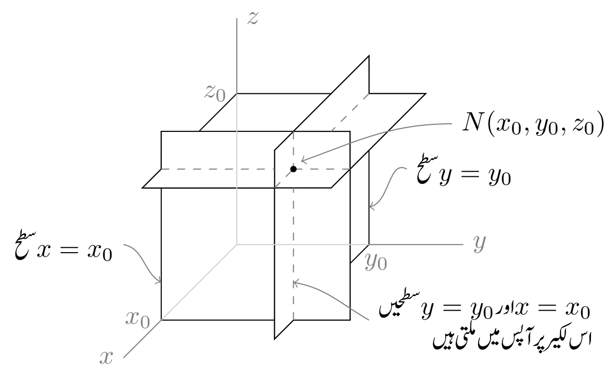


(ب) دونوں خطوط (جنہیں ایک دونوں سے ذرہ ہٹ کر دکھایا گیا ہے در حقیقت) ہم مکانی ہیں لہٰذا ان کے لا متناہی تعداد کے حل ممکن ہیں۔



(پ) متوازی خطوط ایک دونوں کو کہیں نہیں چھوتے ہیں لہٰذا ان کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 8.1: حل کی وجودیت اور یکتائی۔ مثال 8.19 کے اشکال۔



شکل 8.2: آپس میں غیر متوازی سطحیں ایک نقطے پر ملتی ہیں

گاوسی اسقاط

ہم درج ذیل خطی نظام پر غور کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ 4x_2 &= 12 \end{aligned}$$

اس نظام کے عددی سر قالب میں غیر صفر قیمتیں، مرکزی وتر اور اس سے اوپر ہیں لہٰذا یہ **بالائی تکونی نظام** ہے۔اس نظام کی نچلی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = \frac{12}{4} = 3$ ملتا ہے جس کو پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_1 = \frac{7-x_2}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$ حاصل ہوتا ہے۔اس عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ تکونی نظام کو با آسانی حل کیا جا سکتا ہے۔یوں ہم کسی بھی نظام کو تکونی صورت میں لکھنا چاہیں گے۔

کسی بھی نظام کو تکونی صورت میں لانے کے عمل کو درج ذیل نظام کی مدد سے سیکھتے ہیں جس کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔افزودہ قالب کی پہلی صف کو S_1 اور دوسری صف کو S_2 کہا گیا ہے۔

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

اس کو تکونی صورت میں لکھنے کی خاطر نچلی مساوات سے x_1 حذف کرنا ہو گا۔ایسا کرنے کے لئے بالائی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر $4x_1 + 6x_2 = 24$ حاصل کرتے ہوئے اس کو نچلی مساوات سے منفی کرتے ہیں جس سے $-8x_2 = -16$ ملتا ہے۔یوں درج بالا نظام درج ذیل لکھا جائے گا جو بالائی تکونی صورت ہے۔افزودہ قالب پر بھی یہی عمل کیا گیا ہے جہاں نچلی صف کے ساتھ الجبرائی عمل $(S_2 - 2S_1)$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 0 & -8 & -16 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ S_2 - 2S_1 \end{array} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ -8x_2 &= -16 \end{aligned}$$

تکونی صورت حاصل کرنے کی اس عمل کو **گاوسی اسقاط**[44] کہتے ہیں۔گاوسی اسقاط کی ترکیب وسیع تر نظام پر قابل استعمال ہے۔یوں نچلی مساوات سے $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہوئے پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_1 = 3$ ملتا ہے۔

---

[44] Gaussian elimination

مثال 8.20: گاوسی اسقاط
درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے بالائی تکونی صورت میں لائیں۔نظام کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

حل: بالائی تکونی صورت کے لئے درمیانی مساوات سے x_1 حذف کرنا ہو گا جبکہ نچلی مساوات سے x_1 اور x_2 حذف کرنے ہوں گے۔

پہلی قدم میں ہم بالائی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے نچلی دونوں مساواتوں سے x_1 حذف کرتے ہیں۔پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کرنے سے دوسری مساوات سے x_1 حذف ہو گا۔اسی طرح پہلی مساوات کو تیسری مساوات کے ساتھ جمع کرتے ہوئے تیسری مساوات سے x_1 حذف ہوتا ہے۔اس عمل کو افزودہ قالب کے لئے بیان کرتے ہیں۔ہم ہر قدم پر گزشتہ قالب کی پہلی صف کو S_1 ، دوسری کو S_2 اور تیسری کو S_3 کہیں گے۔ یوں درج ذیل میں S_1 سے مراد درج بالا قالب کی پہلی صف $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ہے۔

پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے دوسری صف سے منفی کریں یعنی $S_2 - 2S_1$
پہلی صف کو تیسری صف کے ساتھ جمع کریں یعنی $S_3 + S_1$

ان عمل صف (یعنی $S_2 - 2S_1$ اور $S_3 + S_1$) کو درج ذیل قالب کے دائیں جانب مطابقتی صف کے سامنے لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -10 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 + S_1 \end{array}$$

صف پر عمل کو الجبرائی صورت میں قالب کے دائیں جانب لکھا گیا ہے جہاں S_1 ، S_2 ، ... گزشتہ قالب کے صف ہیں۔درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب ہے۔

دوسری قدم میں (درج بالا حاصل کردہ کی) نچلی مساوات سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

تبدیل شدہ افزودہ قالب کی دوسری صف کو $\frac{4}{7}$ سے ضرب دیتے ہوئے اسی قالب کی تیسری صف کے ساتھ جمع کریں۔ یہاں $(S_3 + \frac{4}{7}S_2)$ سے مراد درج بالا قالب کی دوسری اور تیسری صف ہے۔ یوں S_2 اور S_3 سے مراد $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 & -10 \end{bmatrix}$ ہے۔

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\
-7x_2 + 3x_3 &= -10 \\
\frac{26}{7}x_3 &= -\frac{26}{7}
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -1 & 5 \\
0 & -7 & 3 & -10 \\
0 & 0 & \frac{26}{7} & -\frac{26}{7}
\end{bmatrix}
S_3 + \tfrac{4}{7}S_2
\tag{8.33}
$$

تکونی قالب کے حصول کے بعد حل حاصل کرتے ہیں۔ نظام 8.33 کی نچلی مساوات سے $x_3 = -1$ ملتا ہے جس کو نظام 8.33 کی درمیانی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_2 = 1$ ملتا ہے۔ ان دونوں جوابات کو پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 2$ ملتا ہے۔

اگر دوسری قدم پر آپ پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر تیسری مساوات سے منفی کریں تو حاصل مساوات میں x_1 دوبارہ حاضر ہو جائے گا جو پہلی قدم کی محنت کو ضائع کر دے گا۔ ہم ایسا نہیں چاہتے ہیں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی جسامت کی نظام کو حل کرتے ہوئے پہلی قدم پر، نظام کی پہلی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساوات سے x_1 حذف کیا جاتا ہے۔ دوسری قدم پر، پہلی قدم کی حاصل نظام کی دوسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے x_2 حذف کیا جاتا ہے۔ اسی طرح تیسری قدم پر، تیسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے x_3 حذف کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ آخر تک دہرایا جائے گا۔

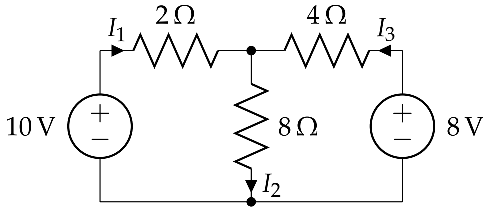
اس نظام کو افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے حل کیا جا سکتا تھا۔ بار بار مکمل مساوات لکھنے کی کوئی ضرورت نہیں تھی۔ ہم عموماً ایسا ہی کرتے ہوئے ،نظام کو افزودہ قالب کی صورت میں لکھ کر، اس کی تکونی صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کریں گے۔ □

مثال 8.21: برقی دور کو شکل 8.3 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔ حل: کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
2I_1 + 8I_3 &= 10 \\
4I_3 + 8I_2 &= 8
\end{aligned}
$$

جبکہ کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I_1 + I_3 = I_2$$



شکل 8.3: برقی دور۔مثال 8.21

ان تینوں مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے ایک ساتھ لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی بائیں جانب اس نظام کا افزودہ قالب بھی لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2I_1 + 8I_3 &= 10 \\ 8I_2 + 4I_3 &= 8 \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned}$$

پہلا قدم: چونکہ دوسری صف کا پہلا رکن صفر ہے لٰہذا اس کو کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے البتہ تیسرے صف کے پہلے رکن I_1 کو حذف کرنا ہو گا۔

پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔درج ذیل میں S_3 سے مراد درج بالا قالب کی تیسری صف $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - \frac{1}{2}S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2I_1 + 8I_3 &= 10 \\ 8I_2 + 4I_3 &= 8 \\ -I_2 - 3I_3 &= -5 \end{aligned}$$

دوسرا قدم: درج بالا کے تیسرے صف سے I_2 حذف کرتے ہیں۔

دوسرے صف کو $\frac{1}{8}$ سے ضرب دے کر تیسرے صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

درج ذیل لکھتے ہوئے S_3 سے مراد گزشتہ (درج بالا) قالب کی تیسری صف $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{8}S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2I_1 + 8I_3 &= 10 \\ 8I_2 + 4I_3 &= 8 \\ -\frac{5}{2}I_3 &= -4 \end{aligned}$$

تیسرا قدم: آخری صف یا آخری مساوات سے $I_3 = \frac{8}{5}$ ملتا ہے۔اس قیمت کو درج بالا پہلی اور اور درمیانی مساوات میں پر کرتے ہوئے بقایا برقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
2I_1 + 8\left(\frac{8}{5}\right) &= 10 \quad \implies \quad I_1 = -\frac{7}{5}\\
8I_2 + 4\left(\frac{8}{5}\right) &= 8 \quad \implies \quad I_2 = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

□

مثال 8.22: درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &= 5\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3\\
x_1 - x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 1 & 5\\
1 & 1 & 1 & 2\\
1 & 2 & -1 & -3\\
1 & -1 & -1 & 0
\end{bmatrix}
$$

حل: پہلی قدم میں دوسری، تیسری اور چوتھی صف سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &= 5\\
\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2}\\
\frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{11}{2}\\
-\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{5}{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 1 & 5\\
0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\
0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2}\\
0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}
\end{bmatrix}
\begin{matrix}
\\
S_2 - \frac{1}{2}S_1\\
S_3 - \frac{1}{2}S_1\\
S_4 - \frac{1}{2}S_1
\end{matrix}
$$

دوسری قدم میں تیسری اور چوتھی مساوات سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &= 5\\
\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2}\\
-\frac{7}{3}x_3 &= -\frac{14}{3}\\
-\frac{4}{3}x_3 &= -\frac{8}{3}
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 1 & 5\\
0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\
0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3}\\
0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3}
\end{bmatrix}
\begin{matrix}
\\
\\
S_3 - \frac{5}{3}S_2\\
S_4 + \frac{1}{3}S_2
\end{matrix}
$$

ہم تیسرے قدم پر تیسری یا چوتھی مساوات سے $x_3 = 2$ حاصل کرتے ہیں جس کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے۔انہیں پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 1$ ملتا ہے۔ □

بنیادی اعمال صف

قالب کی صفوں پر درج ذیل تین عمل سے نظام تبدیل نہیں ہوتا ہے۔گاوسی اسقاط پہلی دو اعمال سے حاصل ہوتا ہے۔

- دو صفوں کا آپس میں تبادلہ
- صف کو کسی مستقل قیمت سے ضرب دے کر کسی دوسرے (یا اسی) صف کے ساتھ جمع کرنا
- کسی صف کو غیر صفر مستقل قیمت c کے ساتھ ضرب دینا

دھیان رہے کہ یہ اعمال افزودہ قالب کے صفوں پر قابل اطلاق ہیں نہ کہ قطاروں پر۔یہ اعمال، نظام کی مساوات پر درج ذیل کے مترادف ہیں۔

- دو مساواتوں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنا۔
- ایک مساوات کو کسی مستقل سے ضرب دے کر دوسری (یا اسی) مساوات کے ساتھ جمع کرنا۔
- نظام کی مساوات کو غیر صفر مستقل c سے ضرب دینا۔

اب ظاہر ہے کہ ہمزاد مساواتوں کو آگے پیچھے لکھنے سے ان کا حاصل حل تبدیل نہیں ہوتا۔اسی طرح کسی مساوات کو مستقل قیمت سے ضرب دے کر دوسری مساوات کے ساتھ جمع کرنے سے بھی حل تبدیل نہیں ہوتا اور نہ ہی کسی مساوات کو غیر صفر مستقل سے ضرب دینے سے حل تبدیل ہوتا ہے۔(کسی مساوات کو صفر سے ضرب دینے سے مساواتوں کی تعداد کم ہو گی جس سے عین ممکن ہے کہ ان کا حل ممکن نہ رہے۔)

دو عدد خطی نظام N_1 اور N_2 اس صورت **صف برابر**[45] کہلاتے ہیں جب N_1 پر محدود عمل صف کے ذریعہ N_2 حاصل کرنا ممکن ہو۔ یہ حقیقت جسے درج ذیل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے، گاوسی اسقاط کی جواز ہے۔

مسئلہ 8.1: صف برابر نظام
صف برابر خطی نظام کے **سلسلہ حل**[46] یکساں ہوں گے۔

[45] row equivalent
[46] solution set

اس مسئلے کی بنا اگر ایک نظام کا سلسلہ حل دوسرے نظام کے سلسلہ حل کے عین مطابق ہو، تب انہیں **صف برابر نظام** کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ یہاں **عمل صف** کی بات کی جا رہی ہے۔ افزودہ قالب کے قطار تبدیل کرنے سے نظام تبدیل ہو گا اور اس کا حل بھی تبدیل ہو گا لہٰذا افزودہ قالب پر کسی بھی عمل قطار کی اجازت نہیں ہے۔

ایسا نظام جس کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد زیادہ ہو **زائد معلوم**[47] کہلاتا ہے۔ نظام کی نا معلوم متغیرات اور مساواتوں کی تعداد برابر ہونے کی صورت میں اس کو **معلوم**[48] کہتے ہیں جبکہ نظام کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد کم ہونے کی صورت میں اس کو **کم معلوم**[49] کہتے ہیں۔

ایسا نظام جس کا کوئی حل نہ ہو **متضاد**[50] نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نظام جس کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہوں **بلا تضاد**[51] نظام کہلاتا ہے۔

گاوسی اسقاط۔ نظام کی تین ممکنہ صورتیں

یکتا حل کا نظام مثال 8.20 میں دیکھا گیا۔ آئیں اب لا متناہی تعداد کے حل والے نظام (مثال 8.23) کو اور بغیر کسی حل والے نظام (مثال 8.24) کو گاوسی اسقاط سے حل کرنے کی کوشش کریں۔

مثال 8.23: لا متناہی تعداد کے حل والا نظام

درج ذیل نظام جو تین مساوات پر مبنی ہے میں چار متغیرات پائے جاتے ہیں۔ اس کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

حل: پہلی قدم میں نچلی دو مساواتوں سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

---

[47] overdetermined
[48] determined
[49] underdetermined
[50] inconsistent
[51] consistent

پہلی صف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے دوسری صف سے منفی $(S_2 - 2S_1)$ کریں۔
پہلی صف کو 4 سے ضرب کرتے ہوئے تیسری صف سے منفی $(S_3 - 4S_1)$ کریں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & -8 & -6 & 8 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 4S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ -4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -10 \\ -8x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= -20 \end{aligned}$$

دوسری قدم میں درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے، دوسرے صف کی مدد سے تیسری صف سے x_2 حذف کرتے ہیں۔دوسری صف کو دو سے ضرب دیتے ہوئے تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - 2S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ -4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -10 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

دوسری مساوات سے $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_3 + x_4$ اور یوں پہلی مساوات سے $x_1 = \frac{7}{4} - \frac{5}{8}x_3$ ملتا ہے۔اب x_3 اور x_4 کی لامحدود مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے x_1 اور x_2 حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

عموماً اختیاری مستقل کو t_1 ، t_2 ، . . . لکھا جاتا ہے۔یوں x_3 اور x_4 کو بالترتیب t_1 اور t_2 لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7}{4} - \tfrac{5}{8}t_1 \\ x_2 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{4}t_1 + t_2 \end{aligned}$$

□

مثال 8.24: گاوسی اسقاط۔بلا حل نظام
ایسا نظام جس کا حل ممکن نہ ہو کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے تضاد کی صورت حاصل ہو گی۔آئیں درج ذیل نظام حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -2 & 16 & -10 & 14 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 16x_2 - 10x_3 &= 14 \end{aligned}$$

دوسری اور تیسری مساوات سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر دوسری صف سے منفی کرتے ہیں۔
پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 15 & -9 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_3 + \frac{1}{2}S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 15x_2 - 9x_3 &= 17 \end{aligned}$$

آخری صف سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - 3S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 0 &= 8 \end{aligned}$$

آخری مساوات کے تحت $0 = 8$ ہے جو **تضاد** کی صورت ہے۔بلا حل نظام کی گاوسی اسقاط تضاد کی صورت دے گی۔ $\square$

8.3.1 صف زینہ دار صورت

گاوسی اسقاط کے بعد حاصل عددی سر قالب، افزودہ قالب اور نظام **صف زینہ دار**[52] کہلاتے ہیں جن میں صفر کے صف، اگر موجود ہوں تو یہ، آخر پر پائے جاتے ہیں اور صف میں بائیں جانب پہلی غیر صفر اندراج، ہر اگلے صف میں، مزید دور ہو گی۔ مثال 8.24 میں عددی سر قالب اور افزودہ قالب کی زینہ دار صورت درج ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ ہم بائیں ترین اندراج کو اکائی (1) کی صورت میں لانے کی کوشش نہیں کرتے ہیں چونکہ اس سے کوئی فائدہ حاصل نہیں ہو گا۔ (**سادہ زینہ دار صورت**[53] جس میں بائیں ترین اندراج اکائی ہو گی پر بعد میں بحث کی جائے گی۔)

echelon form[52]
reduced echelon form[53]

m مساوات اور n متغیرات کے نظام کا افزودہ قالب $\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right]$ ہے جس سے زینہ دار صورت $\left[\boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{f}\right]$ حاصل کی جاتی ہے۔ نظام $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ ایک ہی نظام کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔اگر ان میں کسی ایک نظام کا حل موجود ہو، تب یہی حل دوسرے نظام کا بھی حل ہو گا۔

گاوسی اسقاط سے زینہ دار افزودہ قالب کی درج ذیل عمومی صورت حاصل ہو گی۔

$$\begin{bmatrix}
r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & \cdots & r_{1n} & f_1\\
0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & \cdots & r_{2n} & f_2\\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & r_{rr} & \cdots & r_{rn} & f_r\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_{r+1}\\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_m
\end{bmatrix}$$

درج بالا زینہ دار افزودہ قالب میں $r \le m$ ، $r_{rr} \neq 0$ جبکہ f_{r+1} تا f_m اندراج والے صف میں تمام $r_{ij} = 0$ ہوں گے۔

زینہ دار عددی سر قالب $\boldsymbol{R}$ میں غیر صفر صفوں کی تعداد r کو $\boldsymbol{A}$ کا درجہ[54] کہتے ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کا بھی درجہ ہو گا۔یہ جاننا کہ نظام $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ کا حل موجود ہے یا نہیں اور اس حل کو حاصل کرنا درج ذیل طریقے سے ممکن ہے۔

- (الف) بلا حل: اگر $r < m$ ہو (جس کا مطلب ہے کہ $\boldsymbol{R}$ میں کم از کم ایک صف ایسا ہے جس کے تمام اندراجات صفر (0) ہیں) اور f_{r+1} تا f_m میں سے کم از کم ایک مقدار غیر صفر ہو تب $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ **متضاد** نظام ہو گا جس کا کوئی حل ممکن نہیں ہے۔یوں $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ بھی **متضاد** نظام ہو گا جس کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

بلا تضاد نظام (جس میں یا $r = m$ ہو اور یا $r < m$ کے ساتھ ساتھ f_{r+1} تا f_m صفر کے برابر ہوں) تب نظام کا حل درج ذیل ہو گا۔

- (ب) یکتا حل: اگر $r = n$ ہو تب نظام کا حل یکتا ہو گا جس کو گاوسی اسقاط سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔(مثال 8.20 کی طرح۔)
- (پ) بے انتہا تعداد کے حل: ایسی صورت میں x_{r+1} تا x_n کی قیمتیں چن کر x_1 تا x_{r-1} حاصل کریں۔(مثال 8.23 کی طرح۔)

---

[54] rank of matrix

سوالات

سوال 8.40 تا سوال 8.53 کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

سوال 8.40:

$$\begin{aligned}2x-3y&=-4\\x+y&=3\end{aligned}$$

جوابات: $x=1,\, y=2$

سوال 8.41:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1=-1,\, x_2=1$

سوال 8.42:

$$\begin{aligned}x-2y+z&=-1\\y-z&=-1\\2x+y+z&=1\end{aligned}$$

جوابات: $x=-1,\, y=1,\, z=2$

سوال 8.43:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\0 & 2 & 1 & -1\\2 & -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1=1,\, x_2=-1,\, x_3=1$

سوال 8.44:

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\2 & -1 & 3\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = 2,\ x_2 = 1$

سوال 8.45:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & -5 & -21 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_3 = 4,\ x_2 = t,\ x_1 = 2t + 1$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.46:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_3 = t,\ x_2 = \frac{t}{2},\ x_1 = -\frac{3}{2}t$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.47:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y + z &= -1 \\ 2x - y &= 6 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 2,\ y = -2,\ z = 1$

سوال 8.48:

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= -1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

جوابات: $z = t, y = 3 - 5t, x = 4t - 2$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.49:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x = \frac{1}{3}(7 - t),\ y = -\frac{1}{3}(4t + 2),\ z = t$ جہاں t اختیاری ہے۔

سوال 8.50:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_4 = t,\ x_3 = -\frac{4}{7}t,\ x_2 = \frac{5}{7}t,\ x_1 = -\frac{8}{7}t$ جہاں t اختیاری **مستقل** ہے۔

سوال 8.51:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = -\frac{10}{7}(t+1),\ x_2 = \frac{1}{7}(5t+12),\ x_3 = -\frac{1}{7}(8t+15)$ جہاں t اختیاری **مستقل** ہے۔بالائی صف کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے حل کریں اور یا نچلی تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 8.52:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 2,\ x_4 = -2$

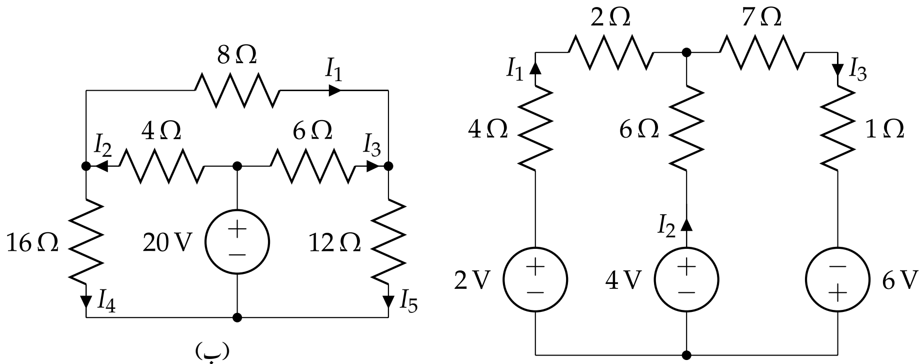
سوال 8.53:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & -4 & 6 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$

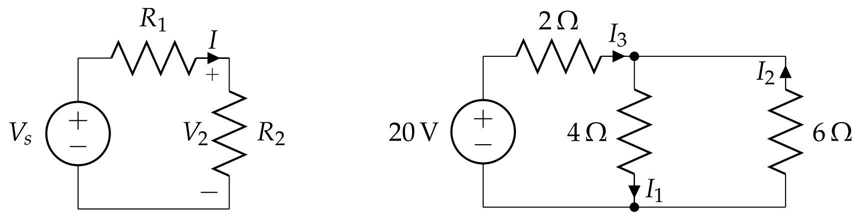
سوال 8.54 تا سوال 8.58 برقی ادوار کے نظام ہیں۔

سوال 8.54: شکل 8.4-الف میں برقی دور دکھایا گیا ہے۔اس کو حل کریں۔



(ب) (الف)

شکل 8.4: برقی دور۔ سوال 8.54 اور سوال 8.55



(ب) تقسیم دباو کا دور۔ (الف)

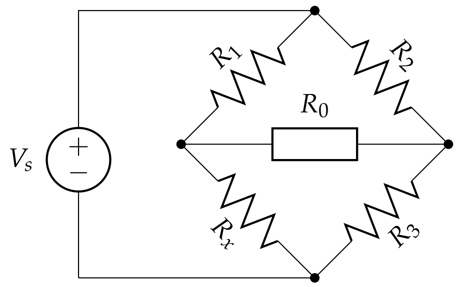
شکل 8.5: ادوار برائے سوال 8.56 اور سوال 8.57

جوابات: $I_1 = \frac{8}{33}\,\text{A}$ ، $I_2 = \frac{19}{33}\,\text{A}$ ، $I_3 = \frac{9}{11}\,\text{A}$

سوال 8.55: شکل 8.4-ب میں دکھائے گئے دور کو حل کریں۔

جوابات: $I_1 = \frac{10}{57}\,\text{A}$ ، $I_2 = \frac{65}{57}\,\text{A}$ ، $I_3 = \frac{170}{171}\,\text{A}$ ، $I_4 = \frac{55}{57}\,\text{A}$ ، $I_5 = \frac{200}{171}\,\text{A}$

سوال 8.56: شکل 8.5-الف میں تینوں برقی رو دریافت کریں۔ برقی رو I_2 کی قیمت منفی ہے۔ اس کا کیا مطلب ہے؟ جوابات: $I_1 = \frac{30}{11}\,\text{A}$ ، $I_2 = -\frac{20}{11}\,\text{A}$ ، $I_3 = \frac{50}{11}\,\text{A}$ منفی برقی رو کا مطلب ہے کہ رو کی سمت دکھائی گئی سمت کے الٹ ہے۔



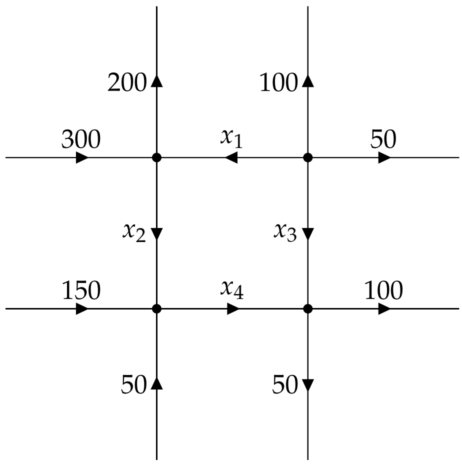
شکل 8.6: ویٹ سٹون پل۔ سوال 8.58

سوال 8.57: تقسیم دباو کا دور شکل 8.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ کرخوف قانون دباو سے V_s ، I ، R_1 اور R_2 کا تعلق لکھیں۔اسی طرح V_2 اور I کا تعلق لکھیں۔اس نظام کو حل کرتے ہوئے V_2 حاصل کریں۔حاصل کلیہ **تقسیم دباو**[55] کا کلیہ کہلاتا ہے۔ جواب: $V_2 = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) V_s$

سوال 8.58: ویٹ سٹون پل
مزاحمتوں کی پیمائش کے لئے استعمال ہونے والا[56] **ویٹ سٹون پل**[57] شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ایک ہاتھ R_1 اور R_x نسب ہیں اور دوسرے ہاتھ R_2 اور R_3 نسب ہیں۔ دونوں ہاتھ آپس میں متوازی جڑے ہیں۔ایک ہاتھ کے درمیانے نقطے سے دوسرے ہاتھ کے درمیانے نقطے تک **ایمپیئر پیما**[58] بطور **پُل**[59] نسب کیا گیا ہے جس کی مزاحمت R_0 ہے۔ویٹ سٹون پل سے نا معلوم مزاحمت R_x ناپی جاتی ہے۔ متغیر مزاحمت R_3 کو تبدیل کیا جاتا ہے حتٰی کہ ایمپیئر پیما $I_0 = 0$ ناپے۔اس حالت میں ثابت کریں کہ $R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$ ہو گا۔ جواب:ایمپیئر پیما اس صورت صفر برقی رو ناپے گی جب R_0 کے دونوں اطراف برقی دباو کی قیمت عین برابر ہو۔اگر R_0 میں برقی رو صفر کے برابر ہو تب R_0 کو دور سے ہٹانے سے دور پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ہم ایسا ہی کرتے ہوئے R_0 کو ہٹاتے ہوئے حل کرتے ہیں۔سوال 8.57 کے تحت R_x پر دباو $V_x = \left(\frac{R_x}{R_1+R_x}\right) V_s$ اور R_3 پر دباو $V_3 = \left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right) V_s$ ہو گا۔چونکہ یہ دونوں دباو برابر ہیں لہٰذا $\left(\frac{R_x}{R_1+R_x}\right) V_s = \left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right) V_s$ ہو گا جس سے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 8.59: آمد و رفت
برقی ادوار حل کرنے کے طریقے دیگر شعبوں میں بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں۔شکل 8.7 میں شہر کی سڑکوں پر فی

[55] voltage division formula
[56] برطانوی سائنسدان چارلس ویٹ سٹون [1802-1875] سے اس دور کا نام منسوب ہے۔
[57] wheatstone bridge
[58] ammeter
[59] bridge



شکل 8.7: آمد و رفت۔ سوال 8.59

گھنٹہ گاڑیوں کی آمد و رفت دکھائی گئی ہے۔ کرخوف قانون رو کی مماثل استعمال کرتے ہوئے فی گھنٹہ نا معلوم آمد و رفت x_1 تا x_4 حاصل کریں۔ کیا حل یکتا حل ہے؟ جوابات: $x_2 = x_1 + 100$ ، $x_3 = -x_1 - 150$ اور $x_4 = x_1 + 300$ ؛ حل یکتا نہیں ہے۔

سوال 8.60: منڈی کی رسد و طلب

اشیاء کی مانگ، قیمت اور دستیابی کو بالترتیب M ، Q اور D سے ظاہر کرتے ہیں۔دو شہروں میں رسد و طلبی کی متوازن مساوات $(M_1 = D_1, M_2 = D_2)$ کا حل درج ذیل خطی تعلقات سے حاصل کریں، جہاں زیر نوشت میں 1 پہلے شہر اور 2 دوسرے شہر کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 30 - 3Q_1 - 2Q_2, \quad & D_1 &= 5Q_1 - 2Q_2 + 6 \\
M_2 &= 4Q_1 - Q_2 + 10, \quad & D_2 &= 3Q_2 - 6
\end{aligned}
$$

جوابات: $M_1 = D_1 = 7$ ، $M_2 = D_2 = 15$ ، $Q_1 = 3$ ، $Q_2 = 7$

سوال 8.61: ضیائی تالیف

روشنی کی توانائی استعمال کرتے ہوئے پودے، پانی H_2O اور کاربن ڈائی آکسائڈ CO_2 سے آکسیجن O_2 اور گلوکوز $C_6H_{12}O_6$ حاصل کرتے ہیں۔ یہ عمل، جسے درج ذیل کیمیائی مساوات میں پیش کیا گیا ہے، ضیائی

تالیف[60] کہلاتی ہے۔

$$x_1\mathrm{CO_2} + x_2\mathrm{H_2O} \xrightarrow{\text{شعاع}} x_3\mathrm{C_6H_{12}O_6} + x_4\mathrm{O_2}$$

کیمیائی مساوات متوازن کرنے سے مراد x_1 ، x_2 ، . . . کی ایسی کمتر قیمتیں دریافت کرنا ہے کہ مساوات کے بائیں ہاتھ ہر قسم کی ایٹم کی تعداد دائیں ہاتھ اسی ایٹم کی تعداد کے برابر ہو۔ضیائی تالیف کی مساوات کو متوازن کریں۔

جوابات: $x_1 = 6$ ، $x_2 = 6$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 6$

8.4 خطی غیر تابعیت۔درجہ قالب۔سمتی فضا

ہم خطی نظام کے خصوصیات کو مکمل طور پر حل کی موجودگی اور یکتائی کی نقطہ نظر سے دیکھنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم خطی الجبرا کے نئے اور بنیادی تصورات متعارف کرتے ہیں۔ ان میں **خطی غیر تابعیت** اور **درجہ قالب** زیادہ اہم ہیں۔ یاد رہے کہ گاوسی اسقاط انہیں پر منحصر ہے۔

سمتیات کی خطی تابعیت اور غیر تابعیت

m عدد سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، . . . ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ (جن میں ارکان کی تعداد یکساں ہے) کی **خطی مجموعہ**[61] درج ذیل مساوات دیتی ہے،

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{8.34}$$

---

[60] photosynthesis
[61] linear combination

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 8.34 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 8.34 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور غیر تابع**[62] کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات کا **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[63] ہے۔اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.34 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور تابع**[64] کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 8.34 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{a}_{(1)} = k_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots - k_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ خطی طور غیر تابع سمتیات کا سلسلہ وہ کمتر تعداد کے سمتیات ہیں جن کے ساتھ ہم کام کر سکتے ہیں۔

مثال 8.25: خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع سمتیات
درج ذیل سمتیات

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{a}_{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

خطی طور تابع ہیں چونکہ انہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.34 کی طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$2\boldsymbol{a}_{(1)} - \boldsymbol{a}_{(2)} + 2\boldsymbol{a}_{(3)} = \mathbf{0}$$

درج بالا کو با آسانی الجبرا سے ثابت کیا جا سکتا ہے البتہ اس تعلق کو حاصل کرنے اتنا آسان نہیں ہے۔ تابعیت ثابت کرنے کا منظم طریقہ نیچے دیا گیا ہے۔

اس مثال کے پہلے دو عدد سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔ □

[62] linear independent
[63] linearly independent set
[64] linearly dependent

قالب کا درجہ

تعریف : قالب A میں خطی طور غیر تابع صفوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کو A کا **درجہ**[65] کہتے ہیں۔

قالبوں اور خطی مساوات کے نظاموں کی عمومی خصوصیات سمجھنے میں درجہ قالب کا تصور کار آمد ثابت ہو گا۔

مثال 8.26: درجہ قالب
جیسا گزشتہ مثال میں دیکھا گیا، درج ذیل قالب میں دو عدد صف خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا اس قالب کا درجہ 2 ہے۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 4 & -2 & 2 & 6\\ 1 & -3 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ درج A اس صورت 0 ہو گا جب $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ ہو۔یہ حقیقت درجہ قالب کی تعریف سے اخذ ہوتی ہے۔ □

دو عدد قالب A_1 اور A_2 اس صورت **صف برابر**[66] کہلاتے ہیں جب A_1 پر محدود عمل صف کے ذریعہ A_2 حاصل کرنا ممکن ہو۔

اب قالب میں خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد، صفوں کی جگہ تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتی اور نا ہی کسی صف کو غیر صفر قیمت c سے ضرب دینے اور نہ ہی صفوں کے خطی ملاپ سے ہوتی ہے۔یوں اعمال صف کی صورت میں کسی بھی قالب کا درجہ مستقل قیمت ہو گا۔

مسئلہ 8.2: صف برابر قالب
صف برابر قالبوں کا درجہ ایک جیسا ہو گا۔

[65] rank
[66] row equivalent

یوں گاوسی اسقاط (حصہ 8.3) سے تکونی قالب حاصل کرتے ہوئے درجہ قالب حاصل کیا جا سکتا ہے۔تکونی قالب میں غیر صفر صفوں کی تعداد درجہ قالب ہو گی۔

مثال 8.27: مثال 8.26 میں دیے گئے قالب کا درجہ، اس کی تکونی قالب کی مدد سے دریافت کرتے ہیں۔قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 ، . . . گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری، . . .صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 - S_1 \end{matrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - \frac{1}{2}S_2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

آخری قالب تکونی ہے جس کے آخری صف کے تمام اندراجات صفر کے برابر ہیں لہٰذا یہ صفر صف ہے۔غیر صفر صفوں کی تعداد 2 ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کا درجہ بھی 2 ہے۔ □

مثال 8.25 تا مثال 8.27 میں $p = 3$ ، $n = 3$ اور درجی قالب 2 لیتے ہوئے درج ذیل مسئلے کو پڑھیں۔

مسئلہ 8.3: سمتیات کی تابعیت اور غیر تابعیت
ایسے p عدد سمتیات جن میں ہر سمتیہ کے n عدد ارکان ہوں کو بطور قالب کے صف لکھیں۔اگر حاصل قالب کا درجہ p ہو تب یہ سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں گے۔اس کے برعکس اگر اس قالب کا درجہ p سے کم ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

دیگر اہم خصوصیات درج ذیل مسئلے سے حاصل ہوں گے۔

مسئلہ 8.4: سمتیات قطار کی صورت میں درجہ قالب
قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ r ، اس قالب میں غیر تابع سمتیہ قطار کی تعداد کے برابر ہو گا۔

یوں قالب $\boldsymbol{A}$ اور تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کا درجہ ایک دونوں کے برابر ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ $m \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ r ہے۔درجہ قالب کی تعریف سے یوں $\boldsymbol{A}$ کے r عدد خطی طور غیر تابع صف ہوں گے جنہیں ہم $\boldsymbol{v}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{v}_{(r)}$ کہتے ہیں اور $\boldsymbol{A}$ کے تمام صف $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ کو ان خطی طور غیر تابع کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= c_{11}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{12}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{1r}\boldsymbol{v}_{(r)} \\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= c_{21}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{22}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{2r}\boldsymbol{v}_{(r)} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a}_{(m)} &= c_{m1}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{m2}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{mr}\boldsymbol{v}_{(r)}
\end{aligned}
$$

یہ مساوات سمتیات ہیں جن میں سے ہر n عدد مساوات پر مشتمل ہے۔ $\boldsymbol{v}_{(1)}$ کے ارکان کو v_{11} ، $\cdots$ ، v_{1n} لکھتے ہوئے اور اسی طرح بائیں ہاتھ کے سمتیات کے ارکان کو بھی لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں $k = 1, \cdots, n$ ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_{1k} &= c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \cdots + c_{1r}v_{rk} \\
a_{2k} &= c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \cdots + c_{2r}v_{rk} \\
&\vdots \\
a_{mk} &= c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \cdots + c_{mr}v_{rk}
\end{aligned}
$$

اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = v_{1k}\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + v_{2k}\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + v_{rk}\begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix}
$$

بائیں ہاتھ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ قالب کا k شمار پر قطار ہے۔یوں درج بالا مساوات کے تحت $\boldsymbol{A}$ کا ہر قطار، دائیں ہاتھ کے r عدد سمتیات کا خطی مجموعہ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد r سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے جو خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد ہے۔

اب یہی کچھ تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{A}^T$ کے سمتیات صف $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار، اور $\boldsymbol{A}^T$ کے سمتیات قطار $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف ہیں، لہٰذا (درج بالا نتیجے کے تحت) $\boldsymbol{A}$

کی خطی طور غیر تابع صف سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد (جو r کے برابر ہے)، $\boldsymbol{A}$ کی خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے۔اس طرح یہ تعداد r ہی ممکن ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 8.27 میں قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ 2 ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے دو قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔بائیں جانب سے پہلی اور دوسری قطار کو خطی طور غیر تابع لیتے ہوئے تیسرے اور چوتھے قطار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-3\\6\\6\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}-\frac{9}{5}\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

مسئلہ 8.3 اور مسئلہ 8.4 کی مدد سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.5: سمتیات کی خطی طور تابعیت
فرض کریں کہ p سمتیات کا ہر رکن n ارکان پر مشتمل ہے۔اگر $n<p$ ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

ثبوت: ایسا قالب $\boldsymbol{A}$ جس کے صف یہی p سمتیات ہوں اور جس کی قطاروں کی تعداد n (جہاں $n<p$ ہے۔) ہو کا مسئلہ 8.4 کے تحت

$$\text{درجہ}\,\boldsymbol{A}\le n<p$$

ہو گا جو مسئلہ 8.3 کے تحت خطی تابعیت کو ظاہر کرتی ہے۔

□

سمتی فضا

فرض کریں کہ V سمتیات کا ایسا **غیر خالی سلسلہ**[67] ہے جس کے تمام سمتیات میں ارکان کی تعداد یکساں ہے۔اگر V میں موجود کسی بھی دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے تمام ممکنہ مجموعے $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ (جہاں α اور β حقیقی اعداد ہیں۔) بھی V کے ارکان ہوں، اور مزید یہ کہ، $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ مساوات 8.7-الف، پ، ت اور مساوات 8.8 پر پورا اترتے ہوں، اور V میں کوئی بھی سمتیات $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ مساوات 8.7-ب پر پورا اترتے ہوں، تب V **سمتی فضا**[68] کہلائے گا۔

V میں خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد کو V کی **بُعد**[69] کہتے ہیں۔یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ V کی بُعد محدود ہے۔ لا متناہی بُعد کے سلسلے پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

V میں موجود خطی طور غیر تابع سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد پر مبنی سلسلے کو V کا **اساس**[70] کہتے ہیں۔ اس (اساسی) سلسلے میں کسی بھی ایک یا ایک سے زیادہ سمتیات کو شامل کرنے سے یہ سلسلہ خطی طور تابع ہو جائے گا۔یوں V کی اساس میں سمتیات کی تعداد، V کی بُعد کے برابر ہو گی۔

کسی بھی دیے گئے، یکساں تعداد کے ارکان والے سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(p)}$ کے تمام ممکنہ مجموعوں کا سلسلہ، ان سمتیات کا **احاطہ**[71] کہلاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔اگر $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(p)}$ خطی طور غیر تابع ہوں تب اس سمتی فضا کی اساس یہی سمتیات ہوں گے۔

اس سے اساس کی نئی تعریف ملتی ہے۔سمتیات کا سلسلہ اس صورت سمتی فضا V کا اساس ہو گا (الف) اگر اس سلسلے میں سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں اور (ب) اگر V میں کسی بھی سمتیہ کو سلسلے کے سمتیات کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن ہو۔

سمتی فضا کی **ذیلی فضا**[72] سے مراد V کا وہ **غیر خالی ذیلی سلسلہ**[73] ہے (جو پورے V پر بھی مشتمل ہو سکتا ہے۔) جو V کی سمتیات پر لاگو جمع اور غیر سمتی ضرب کے قواعد پر پورا اترتا ہوا سمتی فضا ہو۔

---

[67] nonempty set
[68] vector space
[69] dimension
[70] basis
[71] span
[72] subspace
[73] subset

مثال 8.28: سمتی فضا، بُعد، اساس
مثال 8.25 کے تین سمتیات کے احاطے کی بُعد 2 ہے۔ اس سمتی فضا کی اساس ان میں سے کسی بھی دو سمتیات پر مشتمل ہو گا مثلاً $\boldsymbol{a}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(2)}$ یا $\boldsymbol{a}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(3)}$ اور یا $\boldsymbol{a}_{(2)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(3)}$ ۔ □

مسئلہ 8.6: سمتی فضا R^n
n سمتیات (حقیقی اعداد) پر مشتمل سمتی فضا R^n کی بُعد n ہو گی۔

ثبوت : n سمتیات کی اساس درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}\\
&\vdots\\
\boldsymbol{a}_{(n)} &= \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

قالب $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف کے احاطے کو $\boldsymbol{A}$ کا **صف فضا**[74] کہتے ہیں۔ اسی طرح قالب $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار کے احاطے کو $\boldsymbol{A}$ کا **قطار فضا**[75] کہتے ہیں۔

اب مسئلہ 8.4 کے تحت قالب کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد اس کے خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد کے برابر ہوتی ہے۔بُعد کی تعریف کے تحت، یہ عدد صف فضا یا قطار فضا کی بُعد ہو گا۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.7: صف فضا اور قطار فضا
قالب $\boldsymbol{A}$ کی قطار فضا کی بُعد، اس کی صف فضا کی بُعد اور درجہ $\boldsymbol{A}$ عین برابر ہوں گے۔

---

[74] row space
[75] column space

آخر میں کسی بھی قالب A کی غیر متجانس مساوات $Ax = \mathbf{0}$ کا سلسلہ حل، سمتی فضا ہو گا جس کو A کی **معدوم فضا**[76] کہتے ہیں، اور جس کی بُعد کو A کی **معدومیت**[77] کہتے ہیں۔ اگلے حصے میں درج ذیل بنیادی تعلق کو ثابت کیا جائے گا۔

$$A \text{ کی تعداد قطار} = A \text{ معدومیت} + A \text{ درجہ} \tag{8.35}$$

سوالات

سوال 8.62 تا سوال 8.71 کی تکونی صورت گاوسی اسقاط سے حاصل کرتے ہوئے درجہ قالب حاصل کریں۔ صف فضا اور قطار فضا کی اساس بھی حاصل کریں۔

سوال 8.62:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

جوابات: درجہ $= 1$ ؛ $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ ؛ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ ۔ آخری سمتیہ کو $\begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix}^T$ کی جگہ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ لکھا گیا ہے۔بقایا سوالات کے جوابات میں بھی بعض اوقات سمتیہ کی سادہ ترین صورت دی گئی ہے۔

سوال 8.63:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

سوال 8.64:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

---

[76] null set
[77] nullity

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}8 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}8 & 0 & 4\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

سوال 8.65:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix}2 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 3\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$

سوال 8.66:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 9 & -1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 9 & 2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

سوال 8.67:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$$

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & a^2-b^2\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & a^2-b^2\end{bmatrix}^T$

سوال 8.68:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ 2 & 1 & 8 & 4\\ 4 & -1 & 16 & -4\\ 8 & 1 & 32 & 4\end{bmatrix}$$

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 8\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 8\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix}^T$

سوال 8.69:

$$\begin{bmatrix}8 & 4 & 8 & 2\\ 16 & 8 & 4 & 4\\ 8 & 4 & -4 & 2\\ 2 & 8 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix}8 & 4 & 8 & 2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 56 & 48 & 28\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}8 & 16 & 8 & 2\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & -1\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

سوال 8.70:

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\3 & 4 & 5 & 6\\4 & 5 & 6 & 7\\5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix} \qquad (a_{jk} = j + k)$$

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$

سوال 8.71:

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\3 & 4 & 5 & 6\\4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix} \qquad (a_{jk} = j + k - 1)$$

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$

سوال 8.72: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = j + k - 1$ کے برابر ہے، کا درجہ n کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 5$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔سوال 8.71 میں $n = 4$ کے لئے اس حقیقت کو ثابت کیا گیا ہے۔

سوال 8.73: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = j + k + c$ کے برابر ہے (c مثبت عدد ہے)، کا درجہ n کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 4$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔

سوال 8.74: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = 2^{j+k-2}$ کے برابر ہے، کا درجہ 1 کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 3$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔

سوال 8.75 تا سوال 8.79 میں قالبوں کی عمومی خصوصیات پر غور کیا گیا ہے۔دیے گئے تعلق ثابت کریں۔

سوال 8.75:

$$\text{درجہ}\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \text{درجہ}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

سوال 8.76: اگر درجہ $\boldsymbol{A} =$ درجہ $\boldsymbol{B}$ ہو تب ضروری نہیں ہے کہ درجہ $\boldsymbol{A}^2 =$ درجہ $\boldsymbol{B}^2$ ہو گا۔

سوال 8.77: غیر چکور قالب A کے یا تو صف خطی طور غیر تابع ہوں گے اور یا اس کے قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

سوال 8.78: اگر چکور قالب کے صف خطی طور غیر تابع ہوں، تب اس کے قطار بھی خطی طور غیر تابع ہوں گے۔اسی طرح اگر اس قالب کے قطر خطی طور غیر تابع ہوں، تب اس کے صف بھی خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

سوال 8.79: مثال دے کر ثابت کریں درجہ AB کسی صورت درجہ A یا درجہ B سے زیادہ نہیں ہو گا۔

سوال 8.80 تا سوال 8.88 میں ثابت کریں کہ آیا دیے گئے سمتیات خطی طور تابع ہیں یا خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 8.80:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2 & 0 & -3 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 4 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.81:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع۔ سمتیات کو بطور قالب کے صف سمتیہ لکھتے ہوئے گاوسی اسقاط سے قالب کا درجہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کی تابعیت یا غیر تابعیت دریافت کی جا سکتی ہے۔

سوال 8.82:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.83:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.84:

$$\begin{bmatrix}0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.85:

$$\begin{bmatrix}0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.86:

$$\begin{bmatrix}0.2 & -0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.4 & 0.0 & 0.1 & -0.2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.87:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{9}{5} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{17}{6}\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.88:

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.89: خطی طور غیر تابع ذیلی سلسلہ
درج ذیل سمتیات کے دائیں ترین سمتیہ $\begin{bmatrix}10 & -1 & 4 & 10\end{bmatrix}$ سے شروع کرتے ہوئے باری باری ایک ایک سمتیہ کم کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع ذیلی سلسلہ دریافت کریں۔

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5 & -4 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}10 & -1 & 4 & 10\end{bmatrix}$$

جوابات: $\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 6\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$

سوال 8.90 تا سوال 8.90: کیا دیے گئے سمتیات، سمتی فضا ہیں۔ سمتی فضا ہونے کی صورت میں اس کی بُعد اور اساس (v_1 ، v_2 ، $\ldots$) دریافت کریں۔

سوال 8.90:
R^3 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$ ہے۔

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\end{bmatrix}$

سوال 8.91: R^2 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 \geq v_2$ ہے۔

جواب: سمتی فضا نہیں ہے۔

سوال 8.92: R^5 کے تمام مثبت ارکان۔

جواب: سمتی فضا نہیں ہے۔

سوال 8.93: R^3 کے تمام ارکان جہاں $3v_1 - v_3 = 0$ اور $2v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0$ ہے۔

جوابات: 1 ؛ حل $c\begin{bmatrix}1 & \frac{10}{3} & 3\end{bmatrix}$ اور اساس $\begin{bmatrix}1 & \frac{10}{3} & 3\end{bmatrix}$

سوال 8.94: R^4 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 = 2v_2 = 3v_3 = 4v_4$ ہے۔

جوابات: 1 ؛ $\begin{bmatrix}4 & 2 & \frac{4}{3} & 1\end{bmatrix}$

8.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی

خطی نظام کے حل کی وجودیت، یکتائی اور عمومی ساخت کی مکمل معلومات اس کی درجہ سے حاصل ہوتی ہے۔ اس پر غور کرتے ہیں۔

اگر n متغیرات پر مبنی مساوات کے خطی نظام کی عددی سر قالب اور افزودہ قالب کا درجہ یکساں n کے برابر ہو تب اس نظام کا حل یکتا ہو گا۔البتہ اگر ان کا یکساں درجہ n سے کم ہو تب نظام کے لا متناہی تعداد میں حل ممکن ہوں گے۔ اگر ان قالبوں کے درجہ آپس میں مختلف ہوں تب نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو گا۔

اس حقیقت کو ثابت کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم $\boldsymbol{A}$ کا **ذیلی قالب**[78] بروئے کار لائیں گے۔ $\boldsymbol{A}$ سے چند صف یا چند قطار (یا دونوں) خارج کرتے ہوئے اس کا ذیلی قالب حاصل ہوتا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ سے صفر صف اور صفر قطار خارج کرتے ہوئے بھی اس کا ذیلی قالب حاصل کیا جا سکتا ہے جو ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{A}$ ہی ہو گا۔

مسئلہ 8.8: خطی نظام کا بنیادی مسئلہ

(الف) **وجودیت**[79]۔ ایسا خطی نظام جو n متغیرات x_1 ، $\cdots$ ، x_n کے درج ذیل m مساوات پر مبنی ہو،

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{8.36}$$

صرف اور صرف اس صورت **بلا تضاد** ہو گا، یعنی اس کے حل ممکن ہوں گے، جب نظام کے عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ اس نظام کے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے درجے کے برابر ہو۔ عددی سر قالب اور افزودہ قالب درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

---

[78] submatrix
[79] existence

(ب) **یکتائی**[80] ۔ نظام 8.36 کا حل اس صورت یکتا ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ اور $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کا درجہ، n کے برابر ہو۔

(پ) **لا متناہی تعداد کے حل**۔اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کا یکساں درجہ r ، نا معلوم متغیرات کی تعداد n سے کم ہو تب نظام 8.36 کے لا متناہی تعداد میں حل ممکن ہوں گے۔ایسے تمام حل، r موزوں متغیرات (جس کے ذیلی عددی سر قالب کا درجہ لازمی طور پر r ہو۔) کو بقایا $n-r$ اختیاری متغیرات کی صورت میں معلوم کرتے ہوئے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔اختیاری متغیرات کی قیمتیں چنتے ہوئے مختلف حل حاصل ہوں گے۔(مثال 8.23 دیکھیں۔)

(ت) **گاوسی اسقاط** (حصہ 8.3)۔ گاوسی اسقاط سے تمام حل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔(جیسا حصہ 8.3 میں بتلایا گیا ہے، گاوسی اسقاط سے خود بخود حل کی موجودگی کا پتہ لگے گا۔)

ثبوت :

(الف) نظام 8.36 کو سمتی مساوات $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ یا $\boldsymbol{A}$ کی سمتیات قطار $\boldsymbol{c}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{c}_{(n)}$ کی مدد سے

$$\boldsymbol{c}_{(1)}x_1+\boldsymbol{c}_{(2)}x_2+\cdots+\boldsymbol{c}_{(n)}x_n=\boldsymbol{b} \tag{8.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ کے ساتھ $\boldsymbol{b}$ کی قطار شامل کرتے ہوئے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ 8.4 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\text{درجہ}\,\boldsymbol{A}+1=\text{درجہ}\,\tilde{\boldsymbol{A}} \qquad \text{یا} \qquad \text{درجہ}\,\boldsymbol{A}=\text{درجہ}\,\tilde{\boldsymbol{A}}$$

اب اگر نظام 8.36 کا حل $\boldsymbol{x}$ ہو تب مساوات 8.37 کے تحت $\boldsymbol{b}$ کو قطار $\boldsymbol{c}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{c}_{(n)}$ کی صورت میں بطور خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے (یعنی $\boldsymbol{b}$ خطی طور غیر تابع نہیں ہو گا) لہٰذا $\tilde{\boldsymbol{A}}$ اور $\boldsymbol{A}$ میں خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد ایک جیسی ہو گی اور یوں ان قالبوں کا درجہ بھی ایک جیسا ہو گا۔

ساتھ ہی ساتھ اگر درجہ $\boldsymbol{A}$ = درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ہو تب $\boldsymbol{b}$ لازماً $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار کا خطی مجموعہ ہو گا یعنی

$$\boldsymbol{b}=\alpha_1\boldsymbol{c}_{(1)}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{c}_{(n)} \tag{8.38}$$

ورنہ

$$\text{درجہ}\,\boldsymbol{A}+1=\text{درجہ}\,\tilde{\boldsymbol{A}}$$

ہو گا۔اب مساوات 8.38 کا مطلب ہے کہ نظام 8.36 کا حل موجود ہے یعنی $x_1=\alpha_1$ ، $\cdots$ ، $x_n=\alpha_n$ جو مساوات 8.37 اور مساوات 8.38 کو دیکھ کر لکھا جا سکتا ہے۔

uniqueness[80]

(ب) اگر درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب مسئلہ 8.4 کے تحت مساوات 8.37 کے n عدد سمتیات قطار، خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ مساوات 8.37 میں $\boldsymbol{b}$ کا دیا گیا تعلق یکتا ہے ورنہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا

$$\boldsymbol{c}_{(1)}x_1 + \boldsymbol{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}x_n = \boldsymbol{c}_{(1)}\tilde{x}_1 + \boldsymbol{c}_{(2)}\tilde{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}\tilde{x}_n$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$(x_1 - \tilde{x}_1)\boldsymbol{c}_{(1)} + (x_2 - \tilde{x}_2)\boldsymbol{c}_{(2)} + \cdots + (x_n - \tilde{x}_n)\boldsymbol{c}_{(n)} = \boldsymbol{0}$$

لکھا جا سکتا ہے اور خطی طور غیر تابعیت کی بنا اس سے مراد $x_1 - \tilde{x}_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n - \tilde{x}_n = 0$ ہے۔ لیکن اس کا مطلب ہے کہ مساوات 8.37 میں x_1 تا x_n غیر سمتی مقدار یکتا ہیں اور یوں نظام 8.36 کا حل یکتا ہو گا۔

(پ) اگر درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}} =$ درجہ $\boldsymbol{A} = r < n$ ہو تب مسئلہ 8.4 کے تحت $\boldsymbol{A}$ کے ایسے r عدد قطاروں پر مشتمل سلسلہ K پایا جاتا ہے جن کی خطی مجموعے کی صورت میں $\boldsymbol{A}$ کے بقایا $n - r$ قطاروں کو لکھا جا سکتا ہے۔ ہم قطاروں اور متغیرات کو نئی علامتوں سے ظاہر کرتے ہیں جہاں نئی علامتوں پر $\hat{}$ کا نشان ہو گا۔ یوں سلسلہ K کی خطی طور غیر تابع قطاروں کو اب $\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}$ لکھا جائے گا۔ مساوات 8.37 اب درج ذیل لکھی جائے گی

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}\hat{x}_1 + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}x_r + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1} + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n = \boldsymbol{b}$$

جہاں $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}$ کو K کے قطاروں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے اور اسی طرح $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n$ کو بھی K کے قطاروں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے انہیں K کی قطاروں کے مجموعے لکھتے ہوئے اجزاء اکٹھے کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}\hat{y}_1 + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}y_r = \boldsymbol{b} \tag{8.39}$$

جہاں $y_j = x_j + \beta_j$ ہو گا اور β_j از خود $n - r$ اجزاء $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n$ سے حاصل ہوں گے۔ یہاں $j = 1, \cdots, r$ ہے۔ چونکہ اس نظام کا حل موجود ہے لہٰذا ایسے y_1 تا y_r موجود ہیں جو مساوات 8.39 پر پورا اترتے ہیں۔ چونکہ K خطی طور غیر تابع ہے لہٰذا غیر سمتی مقدار y_1 تا y_r یکتا ہیں۔ $\hat{x}_{r+1}$ تا $\hat{x}_n$ کی قیمتیں چننے سے β_j اور مطابقتی $\hat{x}_j = y_j - \beta_j$ کی قیمتیں قطعی طور تعین ہوتی ہیں، جہاں $j = 1, \cdots, r$ ہے۔

(ت) حصہ 8.3 میں اس پر بحث کی گئی ہے لہٰذا اس پر دوبارہ بات نہیں کی جائے گی۔

□

درج بالا مسئلے کا استعمال حصہ 8.3 میں کیا گیا ہے جہاں مثال 8.22 کے آخر میں $S_4'' - \frac{4}{7}S_3''$ کے عمل سے آخری صف، صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں درجہ قالب 3 حاصل ہوتا ہے جو نظام میں متغیرات کی تعداد کے برابر ہے $(3 = n =$ درجہ $\boldsymbol{A} =$ درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}})$ لہٰذا نظام کا یکتا حل پایا گیا۔

مثال 8.23 میں $(4 = n > 2 =$ درجہ $\boldsymbol{A} =$ درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}})$ ہے لہٰذا اس مثال کی نظام کے یوں لامتناہی تعداد میں حل ممکن ہیں۔ x_3 اور x_4 اختیاری متغیرات کی قیمتیں چنتے ہوئے x_1 اور x_2 حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 8.24 میں $(3 =$ درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}} > 2 =$ درجہ $\boldsymbol{A})$ ہے لہٰذا اس نظام کا کوئی بھی حل ممکن نہیں ہے۔

متجانس خطی نظام

جیسا حصہ 8.3 میں بتلایا گیا ہے، نظام 8.36 میں تمام b_j صفر ہونے کی صورت میں یہ **متجانس** کہلائے گا۔ اگر ایک یا ایک سے زیادہ b_j غیر صفر ہوں تب یہ **غیر متجانس** نظام کہلائے گا۔ مسئلہ 8.8 سے متجانس نظام کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.9: متجانس خطی نظام
متجانس نظام

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{8.40}$$

کا ہر صورت ایک عدد **غیر اہم صفر حل** $x_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا۔ **غیر صفر اہم حل** صرف اور صرف اس صورت موجود ہوں گے جب درجہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو۔ اگر درجہ $\boldsymbol{A} = r < n$ ہو تب، یہ حل اور غیر اہم حل مل کر $n - r$ بُعد کی سمتی فضا (حصہ 8.4 دیکھیں۔) بناتے ہیں جو نظام 8.40 کی **حل فضا**[81] کہلاتا ہے۔

[81] solution space

خاص کر اگر $\boldsymbol{x}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{x}_{(2)}$ نظام 8.40 کے حل سمتیات ہوں تب $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_{(1)} + c_2\boldsymbol{x}_{(2)}$، جہاں c_1 اور c_2 کوئی بھی غیر سمتی مقدار ہیں، بھی نظام 8.40 کا حل سمتیہ ہو گا۔ (دھیان رہے کہ یہ غیر متجانس نظام کے لئے درست نہیں ہے۔مزید یہ کہ حل فضا کی اصطلاح صرف متجانس نظام کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔)

ثبوت: پہلا دعویٰ نظام کو دیکھ کر سمجھا جا سکتا ہے۔یہ اس حقیقت کے عین مطابق ہے کہ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ سے مراد درجہ $\boldsymbol{A} =$ درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ہے لہٰذا متجانس نظام ہر صورت **بلا تضاد** ہو گا۔اگر درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب مسئلہ 8.8-ب کے تحت **غیر اہم صفر حل** اس نظام کا یکتا حل ہو گا۔ اگر درجہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو تب مسئلہ 8.8-پ کے تحت **غیر صفر اہم حل** موجود ہوں گے۔یہ حل مل کر **حل فضا** بناتے ہیں چونکہ اگر $\boldsymbol{x}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{x}_{(2)}$ ان میں سے کوئی دو عدد حل ہوں تب $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ اور $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{0}$ ہو گا جس سے مراد

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{x}_{(2)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{0} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x}_{(1)}) = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{0}$$

ہے جہاں c اختیاری مستقل ہے۔اگر درجہ $\boldsymbol{A} = r < n$ ہو تب مسئلہ 8.8-پ کے تحت ہم کسی بھی ترتیب سے $n - r$ موزوں متغیرات، جنہیں ہم x_{r+1}، $\cdots$، x_n کہتے ہیں، چن کر ان کی قیمتیں مقرر کرتے ہوئے ہر حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں نظام 8.40 کے حل فضا کی اساس، جس کو ہم مختصراً **اساس حل** کہیں گے، $\boldsymbol{y}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{y}_{(n-r)}$ ہوں گے جہاں $x_{r+j} = 1$ اور x_{r+1} تا x_n میں بقایا کو صفر چنتے ہوئے اساسی سمتیہ $\boldsymbol{y}_{(j)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں اس حل سمتیہ کے پہلے r مطابقتی ارکان حاصل ہوتے ہیں۔ یوں نظام 8.40 کے اساس حل کی بُعد $n - r$ ہو گی جس سے مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

چونکہ نظام 8.40 کی حل فضا میں ہر $\boldsymbol{x}$ کے لئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا نظام 8.40 کے حل فضا کو **معدوم فضا**[82] بھی کہتے ہیں اور اس کی بُعد کو $\boldsymbol{A}$ کی **معدومیت**[83] کہتے ہیں۔ یوں مسئلہ 8.9 درج ذیل کہتا ہے

$$\text{درجہ } \boldsymbol{A} + \text{معدومیت } \boldsymbol{A} = n \tag{8.41}$$

جہاں نا معلوم متغیرات کی تعداد ($\boldsymbol{A}$ میں قطاروں کی تعداد) n ہے۔

مزید تعریف درجہ کے تحت نظام 8.40 کا درجہ $\boldsymbol{A} \leq m$ ہو گا۔یوں $m < n$ کی صورت میں درجہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو گا۔اس طرح مسئلہ 8.9 سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

---

[82] null space
[83] nullity

مسئلہ 8.10: متغیرات کی تعداد سے کم مساوات کا متجانس نظام
ایسا متجانس نظام جس میں مساوات کی تعداد، متغیرات کی تعداد سے کم ہو کے ہر صورت غیر صفر اہم حل موجود ہوں گے۔

غیر متجانس خطی نظام

نظام 8.36 کے تمام حل درج ذیل ہوں گے۔

مسئلہ 8.11: غیر متجانس خطی نظام
اگر غیر متجانس نظام 8.36 **بلا تضاد** ہو تب اس کے تمام حل درج ذیل ہوں گے

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_h \tag{8.42}$$

جہاں $\boldsymbol{x}_0$ نظام 8.36 کا کوئی بھی (معین) حل ہے جبکہ $\boldsymbol{x}_h$ ، مطابقتی متجانس نظام 8.40 کا، باری باری ہر حل ہو گا۔

ثبوت : چونکہ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا نظام 8.36 کے کسی بھی دو عدد حل کا فرق $\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ مطابقتی نظام 8.40 کا بھی حل ہو گا۔چونکہ $\boldsymbol{x}$ نظام 8.36 کا کوئی بھی حل ہو سکتا ہے لہٰذا ہم مساوات 8.5 میں نظام 8.36 کا کوئی بھی حل $\boldsymbol{x}_0$ اور نظام 8.40 کے تمام حل باری باری لیتے ہوئے نظام 8.36 کے تمام حل حاصل کر سکتے ہیں۔

□

8.6 دو درجی اور تین درجی مقطع قالب

دو درجی **مقطع قالب**[84] درج ذیل ہے۔

$$D = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{8.43}$$

دھیان رہے کہ قالب چکور قوسین میں لکھا جاتا ہے جبکہ مقطع کو سیدھی عمودی لکیروں میں لپیٹ کر لکھا جاتا ہے۔ مقطع $\boldsymbol{A}$ کو $|\boldsymbol{A}|$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

قاعدہ کریمر برائے دو مساوات کا خطی نظام

دو عدد متجانس مساوات

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \text{(ب)} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned} \tag{8.44}$$

کا حل

$$D \neq 0$$

کی صورت میں بذریعہ **قاعدہ کریمر**[85] درج ذیل ہے

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D} \end{aligned} \tag{8.45}$$

جہاں مساوات 8.43 مقطع D دیتی ہے۔ غیر صفر اہم حل والے متجانس نظام کی صورت میں $D = 0$ پایا جاتا ہے۔

---

[84] determinant
[85] Cramer's rule

ثبوت : ہم مساوات 8.45 کو ثابت کرتے ہیں۔ x_2 حذف کرنے کی خاطر مساوات 8.44-الف کو a_{22} اور مساوات 8.44-ب کو $-a_{12}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

اسی طرح x_1 حذف کرنے کی خاطر مساوات 8.44-الف کو $-a_{21}$ اور مساوات 8.44-ب کو a_{11} سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

اب $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D \neq 0$ کی صورت میں درج بالا دونوں مساوات کو $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ سے تقسیم کرتے ہوئے، دائیں اطراف کو قالبوں کی صورت میں لکھ کر، مساوات 8.45 حاصل ہوتے ہیں۔

□

مثال 8.29: درج ذیل کو قاعدہ کریمر کی مدد سے حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 5 \end{aligned}$$

حل: قاعدہ کریمر سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-5}{-2-1} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{10-1}{-2-1} = -3$$

□

تین درجی مقطع

تین درجی **مقطع قالب** کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{8.46}$$

درج بالا میں دائیں ہاتھ علامتوں کی ترتیب $+ - +$ ہے۔دائیں ہاتھ مقطع کے عددی سر بالترتیب بائیں ہاتھ مقطع کی پہلی قطار کے ارکان (ضرب $+ - +$) ہیں۔ بائیں ہاتھ مقطع سے پہلی صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے دائیں ہاتھ کا پہلا مقطع ملتا ہے۔اسی طرح دوسری صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے دوسرا مقطع ملتا ہے اور تیسری صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے تیسرا مقطع ملتا ہے۔دائیں ہاتھ کے تین مقطع بالترتیب D میں a_{11} ، a_{21} اور a_{31} کے **اصغر**[86] کہلاتے ہیں۔اصغر کو M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مساوات 8.46 میں دائیں ہاتھ **اصغر** کو پھیلا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} \tag{8.47}$$

قاعدہ کریمر برائے تین مساوات کا خطی نظام

تین مساوات کے خطی نظام

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{8.48}$$

کا حل بذریعہ قاعدہ کریمر درج ذیل ہے

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \qquad (D \neq 0) \tag{8.49}$$

جہاں مساوات 8.46 اور مساوات 8.47 نظام کا مقطع D دیتے ہیں جبکہ

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

ہیں۔دھیان رہے کہ D کی پہلی، دوسری اور تیسری قطار کی جگہ مساوات 8.48 کا دایاں ہاتھ پر کرنے سے بالترتیب D_1 ، D_2 اور D_3 ملتے ہیں۔

درج بالا قاعدہ کریمر کو بھی اسقاط کی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مسئلہ 8.15 سے بھی اس کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔

---

[86] minor

8.7 مقطع۔ قاعدہ کریمر

ابتدائی طور پر مقطع قالب، خطی نظام کے حل کے لئے استعمال کیا جاتا رہا۔ اب یہ انجینئری کے دیگر مسائل، مثلاً امتیازی مسائل (آنگنی مسائل)، تفرقی مساوات اور سمتی الجبرا، میں بھی اہم کردار ادا کرتا ہے۔اس کو کئی طریقوں سے متعارف کرایا جا سکتا ہے۔ہم اس کو خطی نظام کے نقطہ نظر سے متعارف کرتے ہیں۔

درجہ n **مقطع قالب** سے مراد ایسی غیر سمتی مقدار ہے جو $n \times n$ (چکور) قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ سے منسوب ہے اور جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$D = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8.50}$$

$n = 1$ کے لئے مقطع قالب کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$D = a_{11} \tag{8.51}$$

$n \geq 2$ کے لئے مقطع کی تعریف

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \qquad (j = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n) \\ &\text{یا} \\ &\text{(ب)} \quad D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \qquad (k = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n) \end{aligned} \tag{8.52}$$

ہے جہاں

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk} \tag{8.53}$$

ہے اور M_{jk} از خود درجہ $n-1$ مقطع قالب ہے، جو $\boldsymbol{A}$ سے a_{jk} رکن کا صف اور قطار، یعنی j صف اور k قطار، حذف کرتے ہوئے حاصل ذیلی قالب کا مقطع ہے۔

یوں D کی تعریف n عدد، درجہ $n-1$ مقطع کے ذریعہ کی جاتی ہے، جہاں ہر درجہ $n-1$ مقطع کی تعریف از خود $n-1$ عدد درجہ $n-2$ مقطع کے ذریعہ کی جاتی ہے، اور یہی سلسلہ چلتا رہتا ہے حتیٰ کہ آخر کار درجہ 1 ذیلی قالب آن پہنچے جس کا مقطع، قالب کا واحد رکن ہو گا۔

مقطع کی تعریف کے تحت ہم D کو کسی بھی صف یا قطار سے پھیلا سکتے ہیں۔یوں D کو پہلی قطار سے پھیلانے کی خاطر مساوات 8.52-الف میں $j = 1$ لیا جائے گا۔اسی طرح تیسری قطار سے D کو پھیلانے کی خاطر مساوات 8.52-ب میں $k = 3$ لیا جائے گا۔ہر C_{jk} کو بھی بالکل اسی طرح کسی صف یا قطار سے پھیلایا جا سکتا ہے۔

مقطع کی یہ تعریف غیر مبہم ہے (ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ ا میں پیش کیا گیا ہے)۔ کسی بھی صف یا قطار سے D کو پھیلا کر ایک جیسا جواب حاصل ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ بڑے جسامت کے مقطع کو صف یا قطار سے پھیلا کر حاصل کرنا عملاً نا قابل استعمال ہے۔یہ سمجھنے کی خاطر سوال 8.101 دیکھیں۔

مقطع کی بات کرتے ہوئے، قالب کی اصطلاحات ہی استعمال کی جاتی ہیں۔یوں ہم کہیں گے کہ D میں n^2 **ارکان** a_{jk} پائے جاتے ہیں، اس کے j **صف** اور k **قطار** ہیں اور اس کی **مرکزی وتر** پر a_{11} ، $\cdots$ ، a_{nn} ارکان ہیں۔دو نئے اصطلاحات درج ذیل ہیں۔

M_{jk} کو D میں a_{jk} کا **اصغر**[87] کہتے ہیں اور C_{jk} کو D میں a_{jk} کا **ہم ضربی**[88] کہتے ہیں۔

مساوات 8.52 کو اصغر کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{(الف)} \quad D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (j = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n) \tag{8.54}$$
$$\text{(ب)} \quad D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (k = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n)$$

مثال 8.30: تین درجی مقطع کے اصغر اور ہم ضربی
مساوات 8.46 میں مقطع کو پہلی قطار سے پھیلایا گیا ہے۔ہم یہاں دوسری صف کے ارکان کے اصغر اور ہم ضربی لکھتے ہیں۔ اصغر درج ذیل ہیں

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

[87] minor
[88] cofactor

جبکہ ہم ضربی $C_{21} = -M_{21}$ ، $C_{22} = M_{22}$ اور $C_{23} = -M_{23}$ ہیں۔بقایا تمام ارکان کے اصغر اور ہم ضربی حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ درج ذیل خانہ دار نقش پیدا ہوتا ہے۔

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

□

مثال 8.31: تین درجی مقطع
ایک ہی تین درجی مقطع کو پہلی صف اور دوسری صف سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(2-20) - 0(1-15) - 3(4-6) = -30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= -1\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1(0+12) + 2(2+9) - 5(8-0) = -30 \end{aligned}$$

□

مثال 8.32: تکونی قالب کا مقطع

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \tag{8.55}$$

□

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ تکونی قالب کا مقطع، مرکزی وتر کے تمام اجزاء کا حاصل ضرب ہے۔

مقطع کی عمومی خصوصیات

مقطع کی تعریف (مساوات 8.52) استعمال کرتے ہوئے مقطع حاصل کرنا نہایت لمبا کام ہے۔اعمال صف سے نہایت عمدگی کے ساتھ مقطع حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اعمال صف سے بالائی تکونی مقطع کی صورت حاصل کی جاتی ہے، جس کے مرکزی وتر کے اندراجات کا حاصل ضرب درکار مقطع ہو گا۔یہ ترکیب قالب پر لاگو اعمال صف کی طرح ضرور ہے لیکن بالکل اس کی طرح ہر گز نہیں ہے۔بالخصوص، مقطع کے دو صف کی جگہ آپس میں تبدیل کرنے سے مقطع کی قیمت منفی اکائی (-1) سے ضرب ہو گی۔ تفصیل درج ذیل ہے۔

مسئلہ 8.12: بنیادی اعمال صف اور مقطع کی خصوصیات

- (الف) دو صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔
- (ب) ایک صف کے مضرب کو دوسرے صف کے ساتھ جمع کرنے سے مقطع کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔
- (پ) کسی صف کو غیر صفر مستقل c سے ضرب دینے سے مقطع کی قیمت c سے ضرب ہو گی۔(یہ $c=0$ کے لئے بھی درست ہے لیکن ایسا کرنا بنیادی عمل صف نہ ہو گا۔)

ثبوت:
(الف) ہم اس حقیقت کو **الکراجی ماخوذ** سے ثابت کرتے ہیں۔دو درجی $(n=2)$ مقطع کے لئے (الف) درست ہے یعنی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

ہم اب الکراجی ماخوذ کا قیاس کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ درجہ $n-1 \geq 2$ مقطع کے لئے بھی (الف) درست ہے اور اس کو درجہ n مقطع کے لئے ثابت کرتے ہیں۔فرض کریں کہ D درجہ n مقطع ہے اور اس کے دو صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے E مقطع حاصل ہوتا ہے۔ D اور E کو کسی ایسی صف سے پھیلائیں جس کی جگہ تبدیل نہ کی گئی ہو۔اس کو ہم j صف کہتے ہیں۔ مساوات 8.54-الف سے درج ذیل لکھا جائے گا

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk}, \qquad E = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} N_{jk} \tag{8.56}$$

جہاں E میں a_{jk} کے اصغر کو N_{jk} لکھا گیا ہے۔اب چونکہ M_{jk} اور N_{jk} درجہ $n-1$ کے اصغر ہیں لہٰذا ہمارے قیاس کے تحت درجہ $n-1$ کے مقطع کے لئے (الف) درست ہے لہٰذا $N_{jk}=-M_{jk}$ ہو گا اور یوں مساوات 8.56 کے تحت $E=-D$ ہو گا۔

(ب) صف i کو c سے ضرب کرتے ہوئے صف j کے ساتھ جمع کرنے سے نیا مقطع حاصل کرتے ہیں جس کو ہم $\tilde{D}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\tilde{D}$ کے صف j کے اندراجات $a_{jk}+ca_{ik}$ ہوں گے۔ $\tilde{D}$ کو j صف سے پھیلا کر $\tilde{D}=D_1+cD_2$ ملتا ہے جہاں $D_1=D$ کے صف j میں a_{jk} اندراجات ہیں جبکہ D_2 کے صف j میں D کے صف i والے اندراجات a_{ik} ہیں جبکہ اس کے صف i میں بھی یہی a_{ik} اندراجات ہیں۔یوں D_2 کے i اور j صفوں میں ایک جیسے اندراجات ہیں۔ D_2 کے i اور j صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے دوبارہ D_2 ہی ملتا ہے جبکہ (الف) کے تحت ایسا کرنے سے مقطع -1 سے ضرب ہو گا۔ یوں $D_2=-D_2$ ہو گا جس سے $D_2=0$ ملتا ہے۔اس طرح $\tilde{D}=D_1=D$ ہو گا۔

(پ) مقطع اس صف سے پھیلا کر حاصل کریں جس کو c سے ضرب دیا گیا ہے۔

خبردار! $n\times n$ قالب کو c سے ضرب دینے سے مقطع c^n سے ضرب ہو گا۔

$\square$

مثال 8.33: تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے مقطع کا حصول

تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 ، S_3 اور

S_4 گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری، تیسری اور چوتھی صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 2S_1 \\ \\ S_4 - S_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{10}S_2 \\ S_4 - \frac{1}{5}S_2 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{57}{16} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ S_4 + \frac{1}{8}S_3 \end{matrix}
\end{aligned}
$$

اب مثال 8.32 کی طرح، مرکزی وتر کے اندراجات کا حاصل ضرب، مقطع ہو گا۔

$$
D = (2)(-10)\left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{57}{16}\right) = -114
$$

□

مسئلہ 8.13: n درجی مقطع کے دیگر خصوصیات

- (الف، ب،پ) مسئلہ 8.12 کے شق-الف، ب اور پ قطاروں کے لئے بھی درست ہے۔
- (ت) تبدیلی محل سے مقطع تبدیل نہیں ہو گا۔
- (ٹ) صفر صف یا قطار کی صورت میں مقطع صفر ہو گا۔

- (ث) راست تناسب صف یا قطار کی صورت میں مقطع صفر کے برابر ہو گا۔ بالخصوص دو ایک جیسے صف یا قطار کی صورت میں مقطع کی قیمت صفر ہو گی۔

ثبوت: (الف تا ث) یہ تمام شق اس حقیقت سے اخذ کیے جا سکتے ہیں کہ مقطع کو کسی بھی صف یا کسی بھی قطار سے پھیلا کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مقطع کی تبدیلی محل بالکل قالب کی تبدیلی محل کی طرح ہو گی۔ یوں مقطع کا j صف تبدیل محل کا j قطار ہو گا۔

(ث) اگر صف i ضرب c برابر ہو صف j کے تب $D = cD_1$ ہو گا جہاں D_1 کے صف i اور j ایک جیسے ہوں گے۔ یوں D_1 کے صف i اور j کا آپس میں تبادلہ کرنے سے دوبارہ D_1 حاصل ہوتا ہے جبکہ مسئلہ 8.12-الف کے تحت اس کی قیمت $-D_1$ ہو گی۔ یوں $D_1 = -D_1$ یا $D = cD_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرز کا ثبوت راست تناسب قطاروں کے لئے بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

□

یہ قابل توجہ ہے کہ درجہ قالب، جو قالب میں زیادہ سے زیادہ خطی طور غیر تابع صفوں یا قطاروں کی تعداد ہے (حصہ 8.4 دیکھیں)، اور مقطع کے مابین تعلق پایا جاتا ہے۔ چونکہ صرف صفر قالب کا درجہ صفر کے برابر ہوتا ہے (حصہ 8.4 دیکھیں) لہٰذا ہم یہاں فرض کر سکتے ہیں کہ درجہ $\boldsymbol{A} > 0$ ہے۔

مسئلہ 8.14: درجہ قالب بذریعہ مقطع
$m \times n$ جسامت کے قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کا صرف اور صرف اس صورت (غیر صفر) درجہ، r کے برابر ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا ایسا ذیلی $r \times r$ قالب پایا جاتا ہو جس کا مقطع غیر صفر ہو، جبکہ ایسے ہر ذیلی قالب جس میں $r + 1$ یا اس سے زیادہ صف ہوں کا مقطع صفر ہو۔

بالخصوص $n \times n$ چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کا درجہ صرف اور صرف اس صورت n ہو گا جب مقطع $\boldsymbol{A} \neq 0$ ہو۔

ثبوت: بنیادی اعمال صف (حصہ 8.3) درجہ قالب پر اثر انداز نہیں ہوتے (مسئلہ 8.2) اور نا ہی مقطع قالب کے غیر صفر ہونے پر اثر انداز ہوتے ہیں (مسئلہ 8.13)۔ $\boldsymbol{A}$ کی زینہ دار صورت (حصہ 8.3) کو $\tilde{\boldsymbol{A}}$ سے ظاہر کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے (پہلے) r صف، صرف اور صرف اس صورت غیر صفر ہوں گے جب درجہ $\boldsymbol{A} = r$ ہو۔ فرض کریں کہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے بالائی بائیں کونے کا $r \times r$ ذیلی قالب $\tilde{R}$ ہے (یوں $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے پہلے r صفر اور

پہلے r قطار پر $\tilde{R}$ مشتمل ہو گا)۔ چونکہ $\tilde{R}$ تکونی ہے اور اس کے مرکزی وتر پر تمام اندراجات غیر صفر ہیں لہٰذا مقطع $\tilde{R} \neq 0$ ہو گا۔ چونکہ A سے حاصل کردہ، مطابقتی $r \times r$ ذیلی قالب R سے بنیادی اعمال صف کے ذریعہ $\tilde{R}$ حاصل کیا گیا ہے لہٰذا مقطع $R \neq 0$ ہو گا۔اسی طرح چونکہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے بالائی بائیں $r+1$ (یا اس سے زیادہ ممکنہ) صف اور قالب کے چکور ذیلی قالب $\tilde{S}$ میں کم از کم ایک عدد صفر صف ہو گا (ورنہ درجہ $\boldsymbol{A} \leq r+1$ ہوتا) لہٰذا مقطع $\tilde{S} = 0$ ہو گا (مسئلہ 8.13) اور چونکہ A سے حاصل کردہ مطابقتی S ذیلی قالب سے بذریعہ بنیادی اعمال صف، $\tilde{S}$ کو حاصل کیا گیا ہے لہٰذا مقطع $S = 0$ ہو گا۔ یوں مسئلے میں $m \times n$ قالب کی شق کا ثابت مکمل ہوا۔

اگر $\boldsymbol{A}$ چکور $n \times n$ قالب ہو تب درج بالا ثبوت کے تحت درجہ $\boldsymbol{A} = n$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا ایسا $n \times n$ ذیلی قالب پایا جاتا ہو جس کا درجہ غیر صفر ہو یعنی جب مقطع $\boldsymbol{A} \neq 0$ ہو (چونکہ $\boldsymbol{A}$ کا $n \times n$ ذیلی قالب $\boldsymbol{A}$ ہی ہو گا)۔

□

قاعدہ کریمر

اس مسئلے کو استعمال کرتے ہوئے ہم **قاعدہ کریمر**[89] حاصل کرتے ہیں جو خطی نظام کے حل کو مقطع کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ اگرچہ عملاً قاعدہ کریمر[90] زیادہ مقبول نہیں ہے، اس کی اہمیت تفرقی مساوات کی نظام اور انجینئری کے دیگر مسائل میں پائی جاتی ہے۔

مسئلہ 8.15: مسئلہ کریمر (خطی نظام کا حل بذریعہ مقطع)
(الف) اگر n عدد مساوات اور n متغیرات x_1 ، $\cdots$ ، x_n کے نظام

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{8.57}$$

[89] Cramer's rule
[90] سوئزرلینڈ کا ریاضی دان، جبرائیل کریمر [1704-1752]

کے عددی سر قالب کا غیر صفر مقطع $D = \boldsymbol{A}$ ہو تب اس نظام کا واحد ایک حل ہو گا۔ یہ حل درج ذیل مساوات دیتے ہیں

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D} \qquad \text{قاعدہ کریمر} \tag{8.58}$$

جہاں D_k وہ مقطع ہے جو D میں قطار k کی جگہ b_1 ، $\cdots$ ، b_n پر کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔

(ب) یوں اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D \neq 0$ ہو تب اس نظام کا صرف غیر اہم صفر حل $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا۔ البتہ $D = 0$ کی صورت میں نظام کے غیر صفر اہم حل بھی پائے جائیں گے۔

ثبوت: افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کی جسامت $n \times (n+1)$ ہے لہٰذا اس کا درجہ زیادہ سے زیادہ n ممکن ہے۔ اب اگر

$$D = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{8.59}$$

ہو تب مسئلہ 8.14 کے تحت درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو گا۔ یوں درجہ $\tilde{\boldsymbol{A}} =$ درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو گا۔ اس طرح مسئلہ 8.8 کے تحت نظام 8.57 کا حل یکتا ہو گا۔

آئیں اب مساوات 8.58 کو ثابت کریں۔ D کو قطار k سے پھیلاتے ہیں

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \tag{8.60}$$

جہاں D میں a_{ik} کا ہم ضربی C_{ik} ہے۔ اگر D میں قطار k کی جگہ کوئی اور اعداد بھر دیے جائیں تو ہمیں نیا مقطع ملے گا جس کو ہم $\hat{D}$ کہہ سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ $\hat{D}$ کو اس k قطار سے پھیلانے سے مساوات 8.60 کی طرز کی مساوات ملے گی جس میں a_{1k} ، $\cdots$ ، a_{nk} کی جگہ یہی نئے اعداد ہوں گے جبکہ C_{ik} پہلے والے ہی ہوں گے۔ بالخصوص اگر ہم D کے قطار l (جہاں $l \neq k$ ہے) کے اندراجات a_{1l} ، $\cdots$ ، a_{nl} کو ہی بطور نئے اعداد منتخب کریں تب نئے مقطع $\hat{D}$ میں قطار $[a_{1l} \quad \cdots \quad a_{nl}]^T$ دو مرتبہ پایا جائے گا، پہلی بار بطور قطار l اور دوسری مرتبہ بطور قطار k جس کی جگہ یہ اعداد پر کیے گئے۔ یوں مسئلہ 8.13-ث کے تحت

$\hat{D} = 0$ ہو گا۔ یوں $\hat{D}$ کو قطار k (جس میں a_{1l} ، $\cdots$ ، a_{nl} پر کیے گئے ہیں) سے پھیلا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \cdots + a_{nl}C_{nk} = 0 \qquad (l \neq k) \tag{8.61}$$

اب ہم نظام 8.57 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف کو C_{1k} ، دوسری مساوات کے دونوں اطراف کو C_{2k} ، اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری مساوات کے دونوں اطراف کو C_{nk} سے ضرب دیتے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} C_{1k}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + C_{nk}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n) \\ = b_1C_{1k} + \cdots + b_nC_{nk} \end{aligned} \tag{8.62}$$

ایک جیسے x_j کے عددی سر اکٹھے کرتے ہوئے اس کے بائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$x_1(a_{11}C_{1k} + a_{21}C_{2k} + \cdots + a_{n1}C_{nk}) + \cdots + x_n(a_{1n}C_{1k} + a_{2n}C_{2k} + \cdots + a_{nn}C_{nk})$$

مساوات 8.60 کے تحت درج بالا میں a_k کا جزو ضربی D کے برابر ہے جبکہ x_l (جہاں $l \neq k$ ہے) کا جزو ضربی صفر کے برابر ہے لہٰذا مساوت 8.62 کا بایاں ہاتھ x_kD کے برابر ہے اور یوں اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x_lD = b_1C_{1k} + \cdots + b_nC_{nk}$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ، قطار k سے پھیلایا گیا D_k ہے (D_k کی تعریف اس مسئلے میں دی گئی ہے)۔یوں درج بالا کے دونوں اطراف کو D سے تقسیم کرتے ہوئے قاعدہ کریمر حاصل ہوتا ہے۔

اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D \neq 0$ ہو تب ہر D_k میں (b_1 ، $\cdots$ ، b_n پر مبنی) قطار صفر کے برابر ہو گا لہٰذا (مسئلہ 8.13-ٹ کے تحت) تمام D_k صفر ہوں گے اور مساوات 8.58 غیر اہم صفر حل دے گا۔

آخر میں اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D = 0$ ہو تب مسئلہ 8.14 کے تحت درجہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو گا لہٰذا مسئلہ 8.9 کے تحت اس کا غیر صفر اہم حل پایا جائے گا۔

□

مثال 8.34: قاعدہ کریمر (مسئلہ 8.15) درج ذیل خطی نظام کو قاعدہ کریمر سے حل کریں۔

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

حل:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}4&-1&1\\2&1&1\\3&-2&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&-2&-1\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-4}=2,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&4&1\\1&2&1\\1&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&-2&-1\end{vmatrix}}=\frac{4}{-4}=-1$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&4\\1&1&2\\1&-2&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&-2&-1\end{vmatrix}}=\frac{-4}{-4}=1$$

□

سوالات

سوال 8.95 تا سوال 8.102 عمومی نوعیت کے ہیں۔

سوال 8.95: مسئلہ 8.12

$\boldsymbol{A}$ کے دو قطاروں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنے سے قالب $\boldsymbol{B}$ حاصل کیا گیا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{B}$ میں دو قالب کا آپس میں تبادلہ کرتے ہوئے $\boldsymbol{C}$ حاصل کیا گیا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ میں دو مرتبہ تبادلہ سے بھی $\boldsymbol{C}$ حاصل ہو گا۔مسئلہ 8.12 استعمال کیے بغیر ان کا مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&3&2\\1&2&3\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}3&1&2\\2&3&1\\3&2&1\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}1&3&2\\3&2&1\\2&3&1\end{vmatrix}$$

جوابات: $|\boldsymbol{A}|=6$ ، $\boldsymbol{B}=-6$ ، $\boldsymbol{C}=(-1)(-1)6=6$

سوال 8.96: مسئلہ 8.12
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔ پہلی صف کے ساتھ دوسری صف جمع کرتے ہوئے نیا قالب حاصل کریں۔ مسئلہ 8.12 استعمال کیے بغیر، اس نئے قالب کا مقطع حاصل کریں۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

جوابات: -7 ، -7

سوال 8.97: مسئلہ 8.12
$\boldsymbol{A}$ کی پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{B}$ حاصل ہوتا ہے جس کے تیسری قطار کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{C}$ حاصل ہوتا ہے۔ان کے مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

جوابات: -23 ، -46 ، -138

سوال 8.98: مسئلہ 8.13
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

جوابات: -50 ، -50

سوال 8.99: مسئلہ 8.13
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

جوابات: 0 ، 0 ، 0

سوال 8.100: درج ذیل قالب کا مقطع، باری باری، پہلی صف، دوسری صف، پہلی قطار اور دوسری قطار سے پھیلا کر حاصل کریں۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب: -10

سوال 8.101: پھیلا کر مقطع حاصل کرنا عملًا نا قابل استعمال ہے
ثابت کریں کہ درجہ n مقطع کے لئے $n!$ ضرب درکار ہوں گے۔یوں اگر ایک ضرب حاصل کرنے کے لئے 10^{-9} سیکنڈ درکار ہوں تب درج ذیل وقت درکار ہوں گے۔

n	10	15	20	25
وقت	0.004 سیکنڈ	22 منٹ	77 سال	0.5×10^9 سال

سوال 8.102: قالب ضرب غیر سمتی مقدار
ثابت کریں کہ درجہ $(kA) =$ درجہ $k^n \times A$ ہو گا (نہ کہ درجہ $k \times A$)۔یہاں k غیر سمتی مقدار ہے۔

سوال 8.103 تا سوال 8.110 میں مقطع دریافت کریں۔

سوال 8.103:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$$

جواب: $\cos(\alpha+\beta)$

سوال 8.104:

$$\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$$

جواب: 1

سوال 8.105:

$$\begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix}$$

جواب: 1

سوال 8.106:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

جوابات: -1 ، 2 ، -3

سوال 8.107:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

جوابات: 1 ، 1 ، 1

سوال 8.108:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

جواب: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

سوال 8.109:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب: -1

سوال 8.110:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب: 15

سوال 8.111 تا سوال 8.114 متجانس مساوات کی غیر صفر اہم حل کے سوالات ہیں۔

سوال 8.111: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔سیدھا خط
متجانس نظام کا $D = 0$ کی صورت میں غیر صفر اہم حل پایا جائے گا۔سیدھے خط کی عمومی مساوات $ax + by = c$ ہے۔آئیں نقطہ $(1, -2)$ اور $(4, 3)$ سے گزرتے خط کی مساوات دریافت کریں۔اس مسئلے کو بطور درج ذیل نظام لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} xa + yb - c \cdot 1 &= 0 \\ a - 2b - c \cdot 1 &= 0 \\ 4a + 3b - c \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

a ، b اور c کا عددی سر مقطع صفر کے برابر ٹھہرا کر اس سیدھے خط کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $5x - 3y = 11$

سوال 8.112: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔سطح مستوی
سطح مستوی کی عمومی مساوات $ax + by + cz = p$ ہے۔نقطہ $(1, 1, 1)$ ، $(3, 0, 2)$ اور $(0, 5, 4)$ سے گزرتی سطح کا نظام لکھیں۔ a ، b ، c اور p کا عددی سر مقطع D لکھیں۔یوں $D = 0$ سے سطح کی مساوات دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{aligned} xa + yb + zc - p &= 0 \\ a + b + c - p &= 0 \\ 3a \qquad + 2c - p &= 0' \\ 5b + 4c - p &= 0 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} x & y & z & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \qquad x + y - z = -1$$

سوال 8.113: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔دائرہ
ثابت کریں کہ xy سطح پر دائرے کی عمومی مساوات $x^2 + y^2 + ax + by = c$ ہے۔نقطہ $(1, 2)$ ،

$(3,2)$ اور $(1,-1)$ اور $(5,-1)$ سے گزرتے ہوئے دائرے کا نظام لکھیں۔ اس نظام کے عددی سر مقطع سے دائرے کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: دائرے کی عمومی مساوات $(y-y_0)^2+(x-x_0)^2=r^2$ کو پھیلا کر $x^2+y^2+2x+by=c$ ملتا ہے۔ نظام، عددی سر قالب اور دائرے کی مساوات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} x^2+y^2+xa+yb-c&=0\\ 5+a+2b-c&=0\\ 13+3a+2b-c&=0\\ 26+5a-b-c&=0 \end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & -1\\ 5 & 1 & 2 & -1\\ 13 & 3 & 2 & -1\\ 26 & 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad 6x^2+6y^2-24x+10y=26$$

سوال 8.114: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔ کروی سطح

کروی سطح کی عمومی مساوات $(z-z_0)^2+(y-y_0)^2+(x-x_0)^2=r^2$ ہے۔ نقطہ $(0,0,-2)$ ، $(0,0,7)$ ، $(2,0,5)$ اور $(0,2,5)$ سے گزرتی کروی سطح کی مساوات دریافت کریں۔

جواب: $x^2+y^2+z^2-10z=-21$

سوال 8.115 تا سوال 8.119 کو قاعدہ کریمر سے حل کریں۔

سوال 8.115:

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2&=8\\ 2x_1+x_2&=3 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1=2$ ، $x_2=-1$

سوال 8.116:

$$\begin{aligned} 0.8x_1-1.2x_2&=1.76\\ 0.6x_1+0.2x_2&=0.88 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = 1.6$ ، $x_2 = -0.4$

سوال 8.117:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = -2$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = -1$

سوال 8.118:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_2 + x_3 &= -7 \\ x_1 \qquad + 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = 1$ ، $x_2 = -2$ ، $x_3 = -3$

سوال 8.119:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad &= 5 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 \qquad + 3x_3 \qquad &= -6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = -2$ ، $x_4 = 2$

8.8 معکوس قالب۔گاوس جارڈن اسقاط

اس حصے میں صرف چکور قالبوں پر غور کیا جائے گا۔

$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کے **معکوس**[91] جس کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے سے مراد ایسا $n \times n$ قالب ہے جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{8.63}$$

[91] inverse

جہاں I اکائی $n \times n$ قالب ہے (حصہ 8.2 دیکھیں)۔

ایسا A جس کا معکوس پایا جاتا ہو **غیر نادر قالب**[92] کہلاتا ہے جبکہ ایسا A جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو **نادر قالب**[93] کہلاتا ہے۔

اگر A کا معکوس اگر پایا جاتا ہو، یہ معکوس یکتا ہو گا۔

یقیناً اگر B اور C دونوں A کے معکوس ہوں تب $AB = I$ اور $CA = I$ ہوں گے جن سے یکتائی کا درج ذیل ثبوت ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = (\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{CI} = \boldsymbol{C}$$

اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ A کا معکوس< صرف اور صرف< اس صورت میں پایا جائے گا جب A کا درجہ n ہو، جو زیادہ سے زیادہ ممکنہ درجہ ہے۔ اسی ثبوت سے ظاہر ہو گا کہ اگر A^{-1} موجود ہو تب $Ax = b$ سے مراد $x = A^{-1}b$ ہے۔ یہ ہمیں معکوس کی افادیت اور اس کا خطی نظام سے تعلق دکھلائے گا۔ (البتہ جیسا سوال 8.101 سے صاف ظاہر ہوتا ہے، اس سے ہمیں خطی نظام حل کرنے کا بہتر طریقہ میسر نہیں ہو گا۔)

مسئلہ 8.16: معکوس کی موجودگی
$n \times n$ قالب A کا معکوس A^{-1} صرف اور صرف اس صورت میں موجود ہو گا جب درجہ $A = n$ ہو، یعنی (مسئلہ 8.14 کے تحت) صرف اور صرف اس صورت جب مقطع $A \neq 0$ ہو۔ یوں درجہ $A = n$ کی صورت میں A غیر نادر ہو گا جبکہ درجہ $A < n$ کی صورت میں A نادر ہو گا۔

ثبوت: $n \times n$ قالب A اور درج ذیل نظام

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{8.64}$$

پر غور کریں۔اگر معکوس A^{-1} موجود ہو تب درج بالا کے بائیں جانب کو A^{-1} سے ضرب دیتے ہوئے، مساوات 8.63 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{8.65}$$

[92] nonsingular matrix
[93] singular matrix

جو نظام 8.64 کا حل $\boldsymbol{x}$ دیتا ہے۔اگر دوسرا حل $\boldsymbol{u}$ ہو تب $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$ ہو گا جس سے $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{x}$ یکتا حل ہے۔یوں مسئلہ 8.8 کے تحت درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو گا۔

الٹ چلتے ہوئے، اگر درجہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب مسئلہ 8.8 کے تحت کسی بھی $\boldsymbol{b}$ کے لئے نظام 8.64 کا حل یکتا ہو گا۔گاوسی اسقاط کے بعد قیمتیں واپس پر کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{x}$ کے ارکان x_j از خود $\boldsymbol{b}$ کے ارکان کے خطی مجموعے ہیں۔یوں ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Bb} \tag{8.66}$$

جہاں $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنا باقی ہے۔مساوات 8.64 میں پر کرنے سے، کسی بھی $\boldsymbol{b}$ کے لئے، درج ذیل ملتا ہے

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bb}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cb} \qquad (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB})$$

لہٰذا $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ یعنی اکائی قالب ہو گا۔اسی طرح مساوات 8.64 کو مساوات 8.66 میں پر کرنے سے، کسی بھی $\boldsymbol{x}$ کے لئے،

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Bb} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x}$$

ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{BAI}$ ہو گا۔ان نتائج کو ملا کر ثابت ہوتا ہے کہ معکوس $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ موجود ہے۔

□

گاوس جارڈن اسقاط سے معکوس کا حصول

غیر نادر $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ حاصل کرنے کی خاطر تبدیل شدہ گاوسی اسقاط کی ترکیب استعمال کی جا سکتی ہے جس کو **گاوس جارڈن اسقاط**[94] کہتے[95] ہیں۔اس ترکیب کی تفصیل درج ذیل ہے۔

$\boldsymbol{A}$ استعمال کرتے ہوئے ہم n عدد خطی مساوات

$$\boldsymbol{Ax}_{(1)} = \boldsymbol{e}_{(1)}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{Ax}_{(n)} = \boldsymbol{e}_{(n)}$$

---

[94] Gauss-Jordan elimination

[95] ولیم جارڈن [1842-1899] جرمنی کے ریاضی دان۔

لکھتے ہیں جہاں $\boldsymbol{e}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{e}_{(n)}$ اکائی $n \times n$ قالب $\boldsymbol{I}$ کے قطار ہیں یعنی:

$$\boldsymbol{e}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{e}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \cdots, \boldsymbol{e}_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$$

ان n عدد سمتی مساوات کے نا معلوم سمتیات $\boldsymbol{x}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{x}_{(n)}$ ہیں۔ان تمام مساوات کو ایک ہی قالبی مساوات $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ میں لکھا جاتا ہے جہاں نا معلوم قالب $\boldsymbol{X}$ کے قطار $\boldsymbol{x}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{x}_{(n)}$ ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ n عدد افزودہ قالب $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{e}_{(1)} \end{bmatrix}$ ، $\cdots$ ، $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{e}_{(n)} \end{bmatrix}$ کو ملا کر ایک ہی $n \times 2n$ بڑے "افزودہ قالب" $\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ میں لکھا جاتا ہے۔ اب $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ کے بائیں جانب کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ضرب دے کر $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ کو $\boldsymbol{X}$ کے لئے حل کرنے کی خاطر ہم $\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ پر گاوسی اسقاط لاگو کر سکتے ہیں۔اس سے $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$ حاصل ہو گا جہاں گاوسی اسقاط کی بنا $\boldsymbol{U}$ بالائی تکونی ہو گا۔ مزید اعمال کے ذریعہ گاوس جارڈن ترکیب $\boldsymbol{U}$ کو ایسی وتری صورت میں لے آتی ہے جس کے تمام وتری ارکان اکائی (1) ہوں۔ $\boldsymbol{U}$ کے وتر کے بالائی جانب ارکان کو حذف کر کے وتری صورت حاصل ہو گی جبکہ وتری ارکان کو موزوں قیمتوں سے ضرب (یا تقسیم) کرتے ہوئے وتر پر اکائی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں (مثال 8.35 سے رجوع کریں)۔ چونکہ یہ ترکیب پورے $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$ پر لاگو ہو گی لہٰذا $\boldsymbol{H}$ سے $\boldsymbol{K}$ حاصل ہو گا اور یوں $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$ سے $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix}$ حاصل ہو گا جو $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{K}$ کا "افزودہ قالب" ہو گا۔اب جیسا پہلے بتلایا گیا، $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ ہے لہٰذا موازنہ کرتے ہوئے $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}^{-1}$ کو $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix}$ سے پڑھا جا سکتا ہے۔

درج ذیل مثال میں گاوس جارڈن کی ترکیب استعمال کی گئی ہے۔

مثال 8.35: گاوس جارڈن کی ترکیب سے قالب کے معکوس کا حصول
درج ذیل قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: درج ذیل "افزودہ قالب" پر گاوسی اسقاط کی ترکیب لاگو کرتے ہوئے $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$ حاصل کرتے ہیں۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 اور S_3 گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری اور

تیسری صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 + S_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{7}S_2 \end{matrix}$$

حاصل $\begin{bmatrix} U & H \end{bmatrix}$ پر گاوس جارڈن اسقاط لاگو کرتے ہیں۔ پہلے U کے وتر پر اکائی حاصل کی گئی ہے اور بعد میں اس وتر کے بالائی جانب U کے ارکان کو صفر کیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{14}S_2 \\ \frac{7}{37}S_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -\frac{43}{37} & \frac{2}{37} & \frac{14}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 + 2S_3 \\ S_2 + \frac{9}{14}S_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 - 4S_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

آخری تین قطار معکوس A^{-1} ہو گا یعنی:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix}$$

آپ اس کو درج ذیل سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یوں $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہے اور اسی طرح $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔ □

معکوس کے کلیات

چونکہ معکوس کا حصول در حقیقت میں خطی مساوات کے نظام کا حل معلوم کرنا ہے لہٰذا قاعدہ کریمر (مسئلہ 8.15) یہاں قابل استعمال ہو گا۔ یہاں بھی قاعدہ کریمر نظریاتی مطالعہ کے لئے مفید ثابت ہوتا ہے مگر اس سے (مسئلہ 8.17 کی مدد سے) 2×2 سے زیادہ جسامت کے قالب کی معکوس حاصل کرنا زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتا۔

مسئلہ 8.17: معکوس بذریعہ مقطع
$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کا معکوس درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}}[C_{jk}]^T = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.67}$$

جہاں مقطع $\boldsymbol{A}$ میں a_{jk} کا ہم ضربی C_{jk} ہے (حصہ 8.7 سے رجوع کریں)۔ (یہاں دھیان رہے کہ $\boldsymbol{A}^{-1}$ میں، C_{jk} کی جگہ وہ ہے جو $\boldsymbol{A}$ میں a_{kj} (نہ کہ a_{jk}) کی جگہ ہے۔) بالخصوص 2×2 قالب اور اس کے معکوس درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{8.68}$$

ثبوت : ہم مساوات 8.67 کے دائیں ہاتھ کو $\boldsymbol{B}$ لکھ کر ثابت کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ ہے۔ہم درج ذیل لکھ کر

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{G} = [g_{kl}] \tag{8.69}$$

ثابت کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$ ہے۔ قالبی ضرب کی تعریف اور مساوات 8.67 میں $\boldsymbol{B}$ کی صورت سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$g_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{sk}}{\boldsymbol{A}\,\text{مقطع}} a_{sl} = \frac{1}{\boldsymbol{A}\,\text{مقطع}} (a_{1l}C_{1k} + \cdots + a_{nl}C_{nk}) \tag{8.70}$$

اب مساوات 8.60 اور مساوات 8.61 کے تحت $l = k$ کی صورت میں درج بالا کے دائیں ہاتھ میں قوسین $D = \boldsymbol{A}\,\text{مقطع}$ ہو گا جبکہ $l \neq k$ کی صورت میں یہ صفر ہو گا لہٰذا:

$$g_{kk} = \frac{1}{\boldsymbol{A}\,\text{مقطع}} (\boldsymbol{A}\,\text{مقطع}) = 1$$

$$g_{kl} = 0 \qquad (l \neq k)$$

بالخصوص $n = 2$ کی صورت میں مساوات 8.68 حاصل ہوتی ہے۔

□

جیومیٹری میں $n = 2$ کی صورت عموماً پائی جاتی ہے لہٰذا مساوات 8.68 کو یاد رکھنا مفید ثابت ہو گا۔

مثال 8.36: 2×2 قالب کا معکوس
درج ذیل قالب کا معکوس دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 8.68 سے معکوس لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.37: 3×3 قالب کا معکوس
درج ذیل قالب کا معکوس مساوات 8.67 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: پہلی قطار سے پھیلا کر $36 = 2(0+3) - 1(-6-12) + 4(3-0) =$ مقطع $\boldsymbol{A}$ ملتا ہے جبکہ C_{jk} درج ذیل ہیں

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 3, \quad C_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -6, \quad C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3$$
$$C_{21} = -\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 18, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -12, \quad C_{23} = -\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -18$$
$$C_{31} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 3, \quad C_{32} = -\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 6, \quad C_{33} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

لہٰذا معکوس درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 3 & 18 & 3 \\ -6 & -12 & 6 \\ 3 & -18 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

آپ قالبی ضرب سے $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ثابت کر سکتے ہیں۔ □

وتری قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ جہاں $l \neq k$ کی صورت میں $a_{jk} = 0$ ہے کا معکوس صرف اس صورت میں موجود ہو گا جب تمام $a_{jj} \neq 0$ ہوں۔ایسی صورت میں معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ بھی وتری ہو گا جس کے وتری اندراجات $\frac{1}{a_{11}}$ ، $\ldots$، $\frac{1}{a_{nn}}$ ہوں گے۔

ثبوت: وتری قالب کے لئے مساوات 8.67 میں درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{C_{11}}{D} = \frac{a_{22}\cdots a_{nn}}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}} = \frac{1}{a_{11}}, \quad \cdots$$

□

مثال 8.38: وتری قالب کا معکوس
درج ذیل وتری قالب کا معکوس دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & 1.6\end{bmatrix}$$

حل:ہر وتری اندراج کا معکوس لکھتے ہوئے قالب کا معکوس حاصل ہو گا لہٰذا پہلی اندارج 2 کی جگہ $0.5=\frac{1}{2}$ لکھا جائے گا۔یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0.625\end{bmatrix}$$

□

دو قالبوں کے حاصل ضرب کا معکوس لیتے ہوئے ہر قالب کا انفرادی معکوس لیتے ہوئے ان کے حاصل ضرب الٹ ترتیب سے حاصل کریں یعنی:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{8.71}$$

اسی طرح دو سے زیادہ قالبوں کے حاصل ضرب کا معکوس درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{AB}\cdots\boldsymbol{MN})^{-1}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}\cdots\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{8.72}$$

ثبوت: ہم مساوات 8.63 کو $\boldsymbol{A}$ کی بجائے $\boldsymbol{AB}$ کے لئے لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{I}$$

دونوں اطراف کے بائیں جانب کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ضرب دیتے ہیں

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{IB}(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

جہاں $A^{-1}A = I$ اور $IB = B$ کا استعمال کیا گیا ہے۔اب حاصل $B(AB)^{-1} = A^{-1}$ کے دونوں اطراف کے بائیں جانب کو B^{-1} سے ضرب دے کر مساوات 8.71 حاصل کرتے ہیں۔

$$B^{-1}B(AB)^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

اس سے مساوات 8.72 بذریعہ الکراجی ماخوذ حاصل ہوتا ہے۔

□

قالب A کے معکوس کا معکوس وہی قالب A ہو گا۔

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{8.73}$$

قالبی ضرب کے غیر معمولی خصوصیات۔ قواعد تنسیخ

قالبی ضرب اور اعداد کے ضرب کے قواعد میں درج ذیل نمایاں فرق پائے جاتے ہیں۔انہیں سمجھنا ضروری ہے۔شق ب اور پ قالبی ضرب کے قواعد تنسیخ ہیں۔

- (الف) قالبی ضرب قابل تبادل نہیں ہے یعنی عموماً درج ذیل ہو گا۔

$$AB \neq BA \tag{8.74}$$

- (ب) $AB = 0$ سے مراد $A = 0$ یا $B = 0$ اور یا $BA = 0$ نہیں لیا جا سکتا ہے، مثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

میں $A \neq 0$ ہے۔

- (پ) $AB = AC$ سے مراد $B = C$ (اگر $A \neq 0$ ہو تب بھی) نہیں لیا جا سکتا ہے۔

شق ب اور پ کی تفصیل درج ذیل مسئلے میں پیش کی گئی ہے۔

مسئلہ 8.18: قواعد تنسیخ
فرض کریں کہ A ، B اور C قالبوں کی جسامت $n \times n$ ہے۔

- (الف) اگر درجہ $A = n$ اور $AB = AC$ ہوں تب $B = C$ ہو گا۔
- (ب) اگر درجہ $A = n$ ہو تب $AB = 0$ سے مراد $B = 0$ ہے۔یوں اگر $AB = 0$ لیکن $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہوں تب درجہ $A < n$ اور درجہ $B < n$ ہوں گے۔
- (پ) اگر A نادر ہو تب AB اور BA بھی نادر ہوں گے۔

ثبوت: (الف) مسئلہ 8.16 کے تحت A کا معکوس موجود ہے۔یوں بائیں طرف کو A^{-1} سے ضرب دے کر $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ سے $B = C$ حاصل ہوتا ہے۔

(ب) فرض کریں کہ درجہ $A = n$ ہے لہٰذا A^{-1} موجود ہے۔یوں $AB = 0$ سے مراد $A^{-1}AB = B = 0$ ہے۔ اسی طرح درجہ $B = n$ کی صورت میں B^{-1} موجود ہو گا اور $AB = 0$ سے مراد $ABB^{-1} = A = 0$ ہے جہاں دونوں اطراف کے دائیں جانب کو B^{-1} سے ضرب دیا گیا ہے۔

(پ-1) مسئلہ 8.16 کے تحت درجہ $A < n$ ہو گا۔یوں مسئلہ 8.9 کے تحت $Ax = 0$ کے غیر صفر اہم حل موجود ہوں گے۔اس متجانس مساوات کو B سے ضرب دے کر ثابت ہوتا ہے کہ یہی حل $BAx = 0$ کے بھی حل ہوں گے لہٰذا مسئلہ 8.9 کے تحت درجہ $BA < n$ ہو گا اور مسئلہ 8.16 کے تحت BA نادر ہو گا۔

(پ-2) مسئلہ 8.13-ت کے تحت A^T نادر ہو گا۔یوں ثبوت پ-1 کے تحت B^TA^T نادر اور مساوات 8.23-ت کے تحت $(AB)^T$ کے برابر ہو گا۔یوں مسئلہ 8.13-ت کے تحت AB نادر ہو گا۔

□

حاصل قالبی ضرب کا مقطع

اگرچہ عموماً $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ ہو گا البتہ یہ دلچسپ بات ہے کہ مقطع $(\boldsymbol{BA}) =$ مقطع $(\boldsymbol{AB})$ ہو گا۔ قالبی حاصل ضرب کا مقطع درج ذیل مسئلہ دیتا ہے۔

مسئلہ 8.19: حاصل قالبی ضرب کا مقطع
$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\text{مقطع}(\boldsymbol{AB}) = \text{مقطع}(\boldsymbol{BA}) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\boldsymbol{B}) \tag{8.75}$$

ثبوت: اگر $\boldsymbol{A}$ یا $\boldsymbol{B}$ نادر ہوں تب مسئلہ 8.18 کے تحت $\boldsymbol{AB}$ اور $\boldsymbol{BA}$ بھی نادر ہوں گے اور مساوات 8.75 کی صورت مسئلہ 8.14 کے تحت $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ہو گی۔

اب فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ غیر نادر ہیں۔ یوں ہم $\boldsymbol{A}$ کو گاوس جارڈن ترکیب سے وتری صورت $\hat{\boldsymbol{A}} = [a_{jk}]$ میں لا سکتے ہیں۔ مسئلہ 8.12-الف اور ب اعمال صف سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہونے کے علاوہ تبدیل نہیں ہوتی جبکہ مسئلہ 8.12-پ گاوس جارڈن ترکیب استعمال کرتے ہوئے وتری صورت حاصل کرنے میں استعمال نہیں ہوتا ہے۔ اب یہی اعمال صف $\boldsymbol{AB}$ کو $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ میں تبدیل کرتے ہوئے مقطع $\boldsymbol{AB}$ پر ویسا ہی اثر کریں گے۔ یوں اگر $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ کے لئے مساوات 8.75 درست ہو تب یہ $\boldsymbol{AB}$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ کو پھیلا کر لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

اب ہم مقطع $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ لیتے ہیں۔

$$\text{مقطع}\,(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} \hat{a}_{11}b_{11} & \hat{a}_{11}b_{12} & \cdots & \hat{a}_{11}b_{1n} \\ \hat{a}_{22}b_{21} & \hat{a}_{22}b_{22} & \cdots & \hat{a}_{22}b_{2n} \\ \vdots & & & \\ \hat{a}_{nn}b_{n1} & \hat{a}_{nn}b_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}$$

دائیں ہاتھ ہم پہلی صف سے $\hat{a}_{11}$ ، دوسری صف سے $\hat{a}_{22}$ اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری صف سے $\hat{a}_{nn}$ باہر لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{مقطع}\,(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}) = \hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\cdots\hat{a}_{nn} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

اب $\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\cdots\hat{a}_{nn}$ وتری قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ کا مقطع ہے جبکہ بقایا مقطع $\boldsymbol{B}$ ہے۔یوں مقطع $\boldsymbol{AB}$ کے لئے مساوات 8.75 ثابت ہوا۔اسی طرح مقطع $\boldsymbol{BA}$ کے لئے بھی مساوات 8.75 ثابت کیا جا سکتا ہے۔

□

سوالات

سوال 8.120 تا سوال 8.124 میں $\boldsymbol{A}$ اور اس کا معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ دیے گئے ہیں۔ گاوس جارڈن اسقاط کی مدد سے $\boldsymbol{A}$ سے $\boldsymbol{A}^{-1}$ یا $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے $\boldsymbol{A}$ دریافت کریں۔

سوال 8.120:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

سوال 8.121:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&0\\0&2&4\\2&0&4\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{12}&\frac{1}{6}&\frac{1}{12}\end{bmatrix}$$

سوال 8.122:

$$A=\begin{bmatrix}-0.2&0&0.4\\0&0.2&1\\1&0.4&-0.1\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}-105&40&-20\\250&-95&50\\-50&20&-10\end{bmatrix}$$

سوال 8.123:

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}-5&-\frac{4}{3}&-1\\-3&-2&0\\-7&-\frac{8}{3}&-2\end{bmatrix}$$

سوال 8.124:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\\frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{bmatrix}$$

سوال 8.125 تا سوال 8.129 میں A اور اس کا معکوس A^{-1} دیے گئے ہیں۔ مساوات 8.67 یا مساوات 8.68 کی مدد سے A سے A^{-1} یا A^{-1} سے A دریافت کریں۔

سوال 8.125:

$$A=\begin{bmatrix}\cos 2\theta&\sin 2\theta\\-\sin 2\theta&\cos 2\theta\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta&-\sin 2\theta\\\sin 2\theta&\cos 2\theta\end{bmatrix}$$

سوال 8.126:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

سوال 8.127:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.128:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.129:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.130: سوال 8.120 میں AA^{-1} حاصل کریں۔

جواب: I

سوال 8.131: سوال 8.125 میں AA^{-1} حاصل کریں۔

جواب: I

سوال 8.132 تا سوال 8.137 عمومی نوعیت کے سوالات ہیں۔

سوال 8.132: سوال 8.125 میں دیے گئے A کے لئے ثابت کریں کہ $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ ہے۔

سوال 8.133: سوال 8.132 میں دیے گئے کلیے کا عمومی ثبوت پیش کریں۔

سوال 8.134: سوال 8.125 میں دیے گئے $\boldsymbol{A}$ کے لئے ثابت کریں کہ $(\boldsymbol{A}^{-1})^T = (\boldsymbol{A}^T)^{-1}$ ہے۔

سوال 8.135: سوال 8.134 میں دیے گئے کلیے کا عمومی ثبوت پیش کریں۔

سوال 8.136: ثابت کریں: $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$

سوال 8.137: زاویائی تبادلہ
سوال 8.125 میں $\boldsymbol{A}$ گھڑی کی ایک رخ اور $\boldsymbol{A}^{-1}$ گھڑی کی دوسری رخ گھومنے کو ظاہر کرتی ہے۔اس کو سمجھ کر آپ معکوس کا مطلب بہتر سمجھ سکیں گے۔

8.9 سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ

ہم حصہ 8.4 میں سمتی فضا کی لب لباب سمجھ چکے ہیں۔وہاں ہم نے قالب اور خطی نظام میں قدرتی طور پر پائے جانے والے مخصوص سمتی فضا کی بات کی۔ ان سمتی فضا کے ارکان، جنہیں **سمتیات** کہتے ہیں، مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 میں دیے گئے قواعد (جو اعداد کے قواعد کی طرح ہیں) پر پورا اترتے ہیں۔ ان خصوصی سمتی فضا کو **احاطے** جنم دیتے ہیں، یعنی محدود تعداد کے سمتیات کے خطی مجموعے۔مزید، ہر سمتیہ کے **ارکان** n اعداد ہیں۔

ہم اس تصور کو عمومی جامہ پہناتے ہوئے، n عدد ارکان پر مشتمل تمام سمتیات کو لے کر **حقیقی** n **بُعدی سمتی فضا** R^n حاصل کرتے ہیں۔سمتیات کو "حقیقی سمتیات" کہیں گے۔یوں R^n میں ہر سمتیہ n عدد منظم اعداد پر مشتمل ہو گا۔

اب ہم n کی مخصوص قیمتیں لیتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں $n = 2$ کے لئے R^2 ملتا ہے جو تمام منظم اعدادی جوڑیوں پر مشتمل ہے۔یہ اعدادی جوڑیاں **سطح پر سمتیات** کو ظاہر کرتی ہیں۔ اسی طرح $n = 3$ سے R^3 ملتا ہے جو تمام منظم سہ اعدادی جوڑیوں پر مشتمل ہے۔یہ سہ اعدادی جوڑیاں **تین بُعدی خلا میں سمتیات** کو ظاہر کرتی ہیں۔یہ سمتیات میکانیات، طبیعیات، جیومیٹری اور علم الاحصاء میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

اسی طرح اگر ہم n عدد مخلوط اعداد کے تمام جوڑیاں لیں، اور ان مخلوط اعداد کو حقیقی تصور کریں، تو ہمیں **مخلوط سمتی فضا** C^n ملے گا۔

ان کے علاوہ عملی دلچسپی کے دیگر سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادل وغیرہ پر مبنی ہوں، پائے جاتے ہیں۔ان کے جمع اور غیر سمتی ضرب کی بالکل قدرتی تعریف کی جا سکتی ہے لہٰذا یہ بھی سمتی فضا بناتے ہیں۔

آئیں اب مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 میں دیے گئے بنیادی خصوصیات کو لے کر **حقیقی سمتی فضا** V کی تعریف بیان کریں۔

مسئلہ 8.20: حقیقی سمتی فضا

$\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، . . . ارکان پر مشتمل غیر خالی سلسلہ V **حقیقی سمتی فضا**[96] یا **حقیقی خطی فضا** کہلاتا ہے اور اگر V میں درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے ہیں) موجود ہوں تب یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) **سمتیات** کہلاتے ہیں۔

(الف) **سمتی جمع** V کے ہر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا مجموعہ کہلاتا اور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) **قانون تبادل۔** V کے ہر دو ارکان $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{8.76}$$

(الف-2) **قانون تلازم۔** V کے ہر تین ارکان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \qquad (\text{جو } \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \text{ لکھا جاتا ہے}) \tag{8.77}$$

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو **صفر سمتیہ** کہلاتا اور $\boldsymbol{0}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \tag{8.78}$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-\boldsymbol{a}$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \tag{8.79}$$

[96] real vector space

(ب) **غیر سمتی ضرب۔** حقیقی اعداد غیر سمتی کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور c کا **حاصل ضرب** کہلاتا اور $c\boldsymbol{a}$ (یا $\boldsymbol{a}c$) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(ب-1) **قانون جزئیتی تقسیم۔** ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b} \tag{8.80}$$

(ب-2) **قانون جزئیتی تقسیم۔** ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(c+k)\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{a} \tag{8.81}$$

(ب-3) **قانون وابستگی۔** ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(k\boldsymbol{a}) = (ck)\boldsymbol{a} \qquad (\text{جو } ck\boldsymbol{a} \text{ لکھا جاتا ہے}) \tag{8.82}$$

(ب-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{8.83}$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے **مخلوط سمتی فضا** کی مسلمی تعریف حاصل ہو گی۔

درج بالا میں ہر مسلمہ V کی ایک خصوصیت بیان کرتا ہے۔ یہ تمام مسلمات مل کر V کے تمام خصوصیات بیان کرتے ہیں۔

درج ذیل تصورات جو سمتی فضا سے تعلق رکھتے ہیں بالکل حصہ 8.4 میں بیان کیے گئے تصورات کی طرح ہیں۔ یوں V میں موجود سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ کے **خطی مجموعہ** سے مراد درج ذیل ہے۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (c_1 \text{ ، } \cdots \text{ ، } c_m \text{ کوئی بھی غیر سمتی ہیں})$$

یہ سمتیات اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ** بناتے ہیں جب درج ذیل

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{8.84}$$

سے مراد $c_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $c_m = 0$ ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ **سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔** اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.84 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ **سمتیات خطی طور تابع**[97] کہلاتے ہیں۔

$m = 1$ کی صورت میں مساوات 8.84 سے $c\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ $\boldsymbol{a}$ اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو۔

اگر V میں n عدد غیر تابع سمتیات ہوں اور V میں n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا بُعد n ہو گا اور V کو n **بُعدی** کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو V کی **اساس**[98] کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ **منفرد** ہو گا (مثال 8.39 سے رجوع کریں)۔

مثال 8.39: یکتائی
سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اساس $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(n)}$ کا خطی مجموعہ $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_{(n)}$ لکھا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{v}$ کو $\boldsymbol{v} = c_1'\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_n'\boldsymbol{a}_{(n)}$ بھی لکھنا ممکن ہے۔ ان کے فرق $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = (c_1 - c_1')\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + (c_n - c_n')\boldsymbol{a}_{(n)} = \boldsymbol{0}$$

مساوات 8.84 کے تحت اساس (یعنی خطی طور غیر تابع سمتیات) کے لئے درج بالا صرف اس صورت لکھا جا سکتا ہے جب $c_1 - c_1' - 0$ ، $\cdots$ ، $c_n - c_n' - 0$ ہوں یعنی جب $c_1' = c_1$ ، $\cdots$ ، $c_n' = c_n$ ہوں، لیکن ایسا ہونے سے دونوں مجموعے بالکل یکساں حاصل ہوں گے۔ یوں کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کرنے والا خطی مجموعہ منفرد ہو گا۔ □

مثال 8.40: قالب کا سمتی فضا
حقیقی 2×2 قالبوں کی چار بُعدی حقیقی سمتی فضا ہو گی۔ اس کی اساس درج ذیل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.85}$$

[97] linearly dependent
[98] basis

کسی بھی 2×2 قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کو $\boldsymbol{A} = c_{11}\boldsymbol{B}_{11} + c_{12}\boldsymbol{B}_{12} + c_{21}\boldsymbol{B}_{21} + c_{22}\boldsymbol{B}_{22}$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح حقیقی $m \times n$ حقیقی قالبوں (جہاں m اور n معین قیمتیں ہیں) کی mn بُعدی سمتی فضا ہو گی۔ $\square$

مثال 8.41: کثیر رکنی کی سمتی فضا
درجہ دو تک کے تمام کثیر رکنی یعنی a ، $bx + c$ اور $dx^2 + ex + f$ کے سمتی فضا کا بُعد 3 ہے جس کی اساس $\{1, x, x^2\}$ ہے۔ $\square$

اگر سمتی فضا V میں n خطی طور غیر تابع سمتیات ہوں جہاں n کتنا بھی بڑا عدد ہو، تب V **لامتناہی بُعدی**[99] کہلائے گا۔ لامتناہی بعد کی سمتی فضا کی مثال x محور کے کسی وقفے $[a, b]$ پر تمام استمراری تفاعل کی فضا ہے۔

اندرونی ضرب فضا

R^n میں موجود قطاری سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا ضرب $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ ، جسامت 1×1 کا قالب ہو گا جس کا واحد اعدادی رکن $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا **اندرونی ضرب**[100] کہلاتا ہے۔ اندرونی ضرب کو $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ اور $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے اور یوں اس کو **ضربِ نقطہ**[101] بھی کہتے ہیں۔اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \tag{8.86}$$

آئیں اب اندرونی ضرب کے اس تصور کو وسعت دے کر، $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ کی بنیادی خصوصیات کو لیتے ہوئے، عمومی سمتی فضا کی "تصوراتی اندرونی ضرب" $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ حاصل کرتے ہیں، یعنی:

---

[99] infinite dimensional
[100] inner product
[101] dot product

مسئلہ 8.21: حقیقی اندرونی ضرب فضا
حقیقی سمتی فضا V اس صورت حقیقی اندرونی ضرب فضا (یا حقیقی قبل از ہلبرٹ[102] فضا) کہلاتا ہے جب وہ درج ذیل خصوصیت رکھتا ہو۔

V میں ہر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیات کے ساتھ ایسا حقیقی عدد وابستہ ہے، جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا **اندرونی ضرب** کہلاتا اور $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہے۔

- (الف) ہر غیر سمتیات q_1 ، q_2 اور V میں موجود ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(q_1\boldsymbol{a} + q_2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = q_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + q_2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad \text{(خطیت)}$$

- (ب) V میں ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \qquad \text{(تشاکل)}$$

- (پ) V میں ہر $\boldsymbol{a}$ کے لئے

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0 \qquad \text{(قطعی مثبت)}$$

ہو گا جبکہ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ہو۔

ایسے سمتیات جن کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو **عمودی**[103] کہلاتے ہیں۔

V میں موجود سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی **لمبائی یا معیار**[104] $\|\boldsymbol{a}\|$ سے مراد درج ذیل ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \quad (\geq 0) \qquad \text{معیار} \tag{8.87}$$

ایسا سمتیہ جس کا معیار اکائی (1) ہو **اکائی سمتیہ**[105] کہلاتا ہے۔

[102] جرمن ریاضی دان داؤد ہلبرٹ [1862-1943]۔ متناہی بُعدی V کو ہلبرٹ فضا کہتے ہیں۔
[103] orthogonal
[104] norm
[105] unit vector

ان مسلمات اور مساوات 8.87 سے درج ذیل بنیادی کوشی شوارز[106] عدم مساوات[107] حاصل ہوتی ہے۔

$$\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{(کوشی شوارز عدم مساوات)} \tag{8.88}$$

اس سے تکونی عدم مساوات[108]

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \le \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{(تکونی عدم مساوات)} \tag{8.89}$$

درج ذیل متوازی الاضلاع مساوات[109] بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2) \qquad \text{(متوازی الاضلاع مساوات)} \tag{8.90}$$

مثال 8.42: n بُعدی اقلیدسی فضا[110]

n بُعدی اقلیدسی فضا R^n میں سمتیات قطار $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا اندرونی ضرب درج ذیل ہو گا

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \tag{8.91}$$

جو مسئلہ 8.21 کے شق الف، ب اور پ پر پورا اترتا ہے۔ مساوات 8.87 استعمال کرتے ہوئے اقلیدسی معیار درج ذیل ہو گا۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} = \sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}} = \sqrt{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n} \tag{8.92}$$

اقلیدسی فضا کو عموماً E^n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ □

مثال 8.43: تفاعل کی اندرونی ضرب

وقفہ $\alpha \le x \le \beta$ پر حقیقی قیمت والے تمام استمراری تفاعل $f(x)$ ، $g(x)$ ، ... کا سلسلہ، مجموعہ تفاعل اور غیر سمتی سے ضرب کے اصولوں کے تحت، حقیقی سمتی فضا ہو گا۔ اس "تفاعل فضا" پر اندرونی ضرب سے مراد درج ذیل تکمل ہے

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.93}$$

---

[106] جرمن ریاضی دان ہرمن امندس شوارز [1843-1921]
[107] Cauchy-Schwarz inequality
[108] triangle inequality
[109] parallelogram equality
[110] Euclidean space

جو مسئلہ 8.21 کے شق الف، ب اور پ پر پورا اترتا ہے۔ مساوات 8.87 معیار دیتا ہے۔

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x} \tag{8.94}$$

□

خطی تبادلہ

فرض کریں کہ X اور Y سمتی فضا ہیں۔ X میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کے ساتھ ہم Y کا منفرد سمتیہ $\boldsymbol{y}$ وابستہ کرتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ X کا Y پر **تبادلہ** کیا گیا ہے، یا کہ X کی Y پر **نقشہ کشی** کی گئی ہے اور یا کہ X سے Y کا **عامل**[111] دیا گیا ہے۔ ایسی نقشہ کشی کو بڑے حرف مثلاً F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ Y کے سمتیہ $\boldsymbol{y}$، جسے X کے سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کے ساتھ وابستہ کیا گیا ہے، F میں $\boldsymbol{x}$ کا **عکس**[112] کہلاتا اور $F(x)$ [یا بغیر قوسین $F\boldsymbol{x}$] سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

F کو اس صورت **خطی نقشہ کشی**[113] یا **خطی تبادلہ**[114] کہتے ہیں جب تمام غیر سمتی c اور X میں موجود تمام سمتیات $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{x}$ درج ذیل پر پورا اترتے ہوں۔

$$\begin{gathered} F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{x}) \\ F(c\boldsymbol{x}) = cF(\boldsymbol{x}) \end{gathered} \tag{8.95}$$

فضا R^n کا فضا R^m پر خطی تبادلہ

ہم $X = R^n$ اور $Y = R^m$ لیتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں کوئی بھی $m \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ فضا R^n کا فضا R^m پر تبادلہ کر سکتا ہے، یعنی:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{8.96}$$

operator[111]
image[112]
linear mapping[113]
linear transformation[114]

اب چونکہ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ہیں لہٰذا درج بالا خطی تبادلہ ہے۔

اب الٹ چلتے ہوئے، ہم ثابت کرتے ہیں کہ R^n کے R^m پر ہر تبادلہ F کو، R^n کی اساس اور R^m کی اساس چننے کے بعد، $m \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

فرض کریں کہ R^n کی کوئی اساس $\boldsymbol{e}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{e}_{(n)}$ ہے۔یوں R^n میں موجود ہر $\boldsymbol{x}$ کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_{(1)} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_{(n)}$$

چونکہ F خطی ہے لہٰذا $\boldsymbol{x}$ کا **عکس** $F(\boldsymbol{x})$ درج ذیل ہو گا۔

$$F(\boldsymbol{x}) = F(x_1\boldsymbol{e}_{(1)} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_{(n)}) = x_1F(\boldsymbol{e}_{(1)}) + \cdots + x_nF(\boldsymbol{e}_{(n)})$$

یوں R^n کی اساس $\boldsymbol{e}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{e}_{(n)}$ کا عکس F کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔ہم اب R^n کی درج ذیل **"معیاری اساس"** چنتے ہیں جہاں $\boldsymbol{e}_{(j)}$ کا j عدد رکن 1 کے برابر جبکہ بقایا تمام ارکان 0 کے برابر ہیں۔

$$\boldsymbol{e}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.97}$$

ہم ثابت کرتے ہیں کہ ہم ایسا $m \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ تعین کر سکتے ہیں کہ R^n میں ہر $\boldsymbol{x}$ اور Y میں اس کے عکس $\boldsymbol{y}$ کا درج ذیل تعلق ہو گا۔

$$\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{8.98}$$

یقیناً $\boldsymbol{e}_{(1)}$ کے عکس $\boldsymbol{y}^{(1)} = F(\boldsymbol{e}_{(1)})$ سے درج ذیل ملتا ہے

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

جس سے A کی پہلی قطار $a_{11} = y_1^{(1)}$ ، $a_{21} = y_2^{(1)}$ ، $\cdots$ ، $a_{m1} = y_m^{(1)}$ حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح $e_{(2)}$ کے عکس سے A کی دوسری قطار حاصل ہو گی اور آخر کار $e_{(m)}$ کے عکس سے A کی آخری قطار حاصل ہو گی۔ یوں ثبوت پورا ہوتا ہے۔

ہم کہتے ہیں کہ R^n اور R^m کے چننے گئے اساس کے لحاظ سے A کو F ظاہر کرتا ہے یا کہ F ، A کا اظہار ہے۔ ہم ایسی شہ، جس کے خصوصیات غیر واضح ہوں، کو ایسی شہ سے ظاہر کرتے ہیں جس کے خصوصیات نسبتاً زیادہ واضح ہوں۔

تین بُعدی اقلیدسی فضا E^3 کی معیاری اساس کو عموماً $e_{(1)} = i$ ، $e_{(2)} = j$ اور $e_{(3)} = k$ لکھا جاتا ہے یعنی

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.99}$$

جو فضا میں **کارتیسی نظام محدد**[115] کے، محور کی مثبت سمت میں، تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات ہیں۔

مثال 8.44: تبادلہ
فضا میں کارتیسی نظام کے محور کا تبادلہ درج ذیل قالب دیتے ہیں۔یہ تبادلے کیا کام سر انجام دیتے ہیں؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جوابات: A : خط $x_2 = x_1$ میں انعکاس ہے۔ B : خط x_1 میں انعکاس ہے۔ C : مبدا میں انعکاس ہے جبکہ D محور x_1 کی سمت میں لمبائی میں اضافہ ($a > 1$) یا کمی ($a < 1$) پیدا کرتی ہے۔ □

مثال 8.45: خطی تبادلہ
ایسی خطی تبادلہ دریافت کریں جو (x_1, x_2) کا نقش $(5x_1 - 3x_2, -3x_1 + 7x_2)$ دے۔

حل: ظاہر ہے کہ ہمیں درج ذیل تعلق چاہیے ہے

$$\begin{aligned} y_1 &= 5x_1 - 3x_2 \\ y_2 &= -3x_1 + 7x_2 \end{aligned}$$

[115] Cartesian coordinate system

جس سے ہمیں درج ذیل قالب A ملتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

□

اگر مساوات 8.96 میں A چکور $n \times n$ قالب ہو تب یہ R^n کا نقش R^n دے گا۔اگر یہ A غیر نادر قالب (حصہ 8.8 سے رجوع کریں) ہو تب مساوات 8.96 کے دونوں اطراف کے بائیں جانب کو A^{-1} سے ضرب دے کر $A^{-1}A = I$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل **الٹ بدل**[116] ملتا ہے۔

$$x = A^{-1}y \tag{8.100}$$

یوں مساوات 8.96 جس x_0 کا نقش y_0 دیتا ہے، مساوات 8.100 اس y_0 کا نقش وہی x_0 دیتا ہے۔خطی مبدل کا الٹ، مساوات 8.100 دے گا لہٰذا یہ بھی خطی ہو گا۔

نظم خطی تبادلہ

فرض کریں کہ X ، Y اور W عمومی سمتی فضا ہیں۔پہلے کی طرح X کو Y پر F نقش کرتا ہے جبکہ W کو X پر نقش G کرتا ہے۔اب پہلے G اور بعد میں F ، بالکل اسی ترتیب سے، لاگو کرتے ہوئے تبادلہ H کی **نظم**[117] حاصل ہوتا ہے۔

$$H = F \circ G = FG = F(G)$$

یوں اگر فضا W میں سمتیہ w ہو تب سمتیہ $G(w)$ ، فضا X میں ہو گا جبکہ سمتیہ $F(G(w))$ ، فضا Y میں ہو گا۔یوں W کا Y پر نقش، تبادلہ H دے گا جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$H(w) = (F \circ G)(w) = (FG)(w) = F(G(w)) \tag{8.101}$$

عمومی فضا میں درج بالا خطی تبادلہ کے نظم کی تعریف ہے۔نظم کی خطیت کو مثال 8.46 میں ثابت کیا گیا ہے۔

---

[116] inverse transform
[117] composition

مثال 8.46: خطی نظام کا نظم خطی ہو گا

H کی خطیت ثابت کرنے کی خاطر ہمیں ثابت کرنا ہو گا کہ H مساوات 8.95 پر پورا اترتا ہے۔فضا W میں دو عدد سمتیات $\boldsymbol{w}_1$ اور $\boldsymbol{w}_2$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
H(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) &= (F \circ H)(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \\
&= (FG)(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \\
&= F(G(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2)) \\
&= F(G(\boldsymbol{w}_1) + G(\boldsymbol{w}_2)) && G \text{ کی خطیت} \\
&= F(G(\boldsymbol{w}_1)) + F(G(\boldsymbol{w}_2)) && H \text{ کی خطیت} \\
&= (F \circ G)(\boldsymbol{w}_1) + (F \circ G)(\boldsymbol{w}_2) && \text{مساوات 8.101 کے تحت} \\
&= H(\boldsymbol{w}_1) + H(\boldsymbol{w}_2) && H \text{ کی تعریف}
\end{aligned}
$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
H(c\boldsymbol{w}_2) = (F \circ G)(c\boldsymbol{w}_2) = F(G(c\boldsymbol{w}_2)) = F(cG(\boldsymbol{w}_2)) \\
= cF(G(\boldsymbol{w}_2)) = c(F \circ G)(\boldsymbol{w}_2) = cH(\boldsymbol{w}_2)
\end{aligned}
$$

یوں ثابت ہوا کہ H خطی ہے۔ □

ہم نے عمومی سمتی فضا میں خطی تبادلہ کے کی تعریف بیان کی اور ثابت کیا کہ خطی تبادلہ کا نظم خطی ہے۔

اب ہم خطی تبادلہ کے نظم کا قالبی ضرب کے ساتھ تعلق جاننا چاہیں گے۔

ایسا کرنے کی خاطر ہم $X = R^n$ ، $Y = R^m$ اور $W = R^p$ لکھتے ہیں۔فضا کی یہ مخصوص صورتیں چنتے ہوئے ہم خطی تبادلہ کو قالبی صورت میں لکھ کر مساوات 8.96 کے طرز کی قالبی مساوات لکھ پاتے ہیں۔اس طرح F کو $m \times n$ عمومی قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور G کو عمومی $n \times p$ عمومی قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں ہم F کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ کے n رکن اور سمتیہ $\boldsymbol{y}$ کے m رکن ہوں گے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{8.102}$$

اسی طرح G کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں سمتیہ قطار $\boldsymbol{w}$ کے p رکن ہوں گے۔

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} \tag{8.103}$$

مساوات 8.103 کو مساوات 8.102 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w} \qquad (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \tag{8.104}$$

درج بالا 8.101 کی قالبی صورت ہے۔یوں تبادلہ کی نظم کو قالبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔درج بالا مساوات میں حقیقی $m \times p$ قالب $\boldsymbol{C}$ خطی تبادلہ H کو ظاہر کرتی ہے جو R^p کا نقش R^n دیتی ہے اور سمتیہ $\boldsymbol{w}$ کے p رکن ہیں۔

مثال 8.47: خطی تبادلہ۔ نظم

ہم یہاں مثال 8.44 کے $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{D}$ قالب دوبارہ استعمال کرتے ہیں جہاں $a = 2$ لیا جائے گا۔سمتیہ $[w_1, w_2]^T$ پر $\boldsymbol{D}$ لاگو کرنے سے سمتیہ کا پہلا رکن x_1 سمت میں بڑھ کر $2w_1$ ہو جائے گا۔حاصل سمتیہ $[2w_1, w_2]^T$ ہو گا جس پر $\boldsymbol{A}$ لاگو کرنے سے خط $x_2 = x_1$ میں عکس $[w_2, 2w_1]^T$ حاصل ہو گا۔ اب یہی عمل تبادلہ H ، جسے قالب $\boldsymbol{A}$ ظاہر کرتا ہے، اور تبادلہ G ، جسے قالب $\boldsymbol{D}$ ظاہر کرتا ہے، کا نظم $H = F \circ G$ دے گا۔آئیں اس عمل کو قالبی ضرب سے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

اب مساوات 8.104 کی طرح درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ 2w_1 \end{bmatrix}$$

جو وہی پہلا جواب ہے۔آپ نے دیکھا کہ یقیناً $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}$ لکھ کر خطی تبادلہ کے نظم کو خطی تبادلہ $\boldsymbol{C}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس میں انفرادی تبادلہ کی ترتیب برقرار رکھنا ضروری ہے۔ آپ ایسا نہ کرتے ہوئے $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}$ لے کر تسلی کر لیں کہ حاصل جواب درست نہ ہو گا۔ □

سوالات

سوال 8.138: R^2 کے ممکنہ تین مختلف اساس لکھیں۔

جواب: $[1\ 0]^T$, $[0\ 1]^T$; $[1\ 0]^T$, $[0\ -1]^T$; $[1\ 1]^T$, $[-1\ 1]^T$;

سوال 8.139 تا سوال 8.142 میں خطی تبادلہ دیا گیا ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ الٹ خطی تبادلہ دریافت کریں۔

سوال 8.139:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 0.5x_1 - 1.5x_2 \\
y_2 &= -x_1 + 2x_2
\end{aligned}
$$

جواب: $x_1 = -4y_1 - 3y_2$ ، $x_2 = -2y_1 - y_2$

سوال 8.140:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -2x_1 + 3x_2 \\
y_2 &= 3x_1 - 2x_2
\end{aligned}
$$

جواب: $x_1 = 0.4y_1 + 0.6y_2$ ، $x_2 = 0.6y_1 + 0.4y_2$

سوال 8.141:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\
y_2 &= 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\
y_3 &= x_1 - x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

جواب: $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3,\ x_2 = \frac{5}{8}y_1 + \frac{3}{8}y_2 + \frac{1}{8}y_3,\ x_3 = \frac{1}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2 + \frac{5}{8}y_3$

سوال 8.142:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_3 \\
y_2 &= -2x_3 \\
y_3 &= x_1 - x_2
\end{aligned}
$$

جواب: $x_1 = y_1 + 0.5y_2,\ x_2 = y_1 + 0.5y_2 - y_3,\ x_3 = -0.5y_2$

سوال 8.143 تا سوال 8.147 کی اقلیدسی معیار حاصل کریں۔

سوال 8.143:

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T
$$

جواب: $\sqrt{14}$

سوال 8.144:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}^T$$

جواب: $\sqrt{14}$

سوال 8.145:

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$$

جواب: $2\sqrt{5}$

سوال 8.146:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$$

جواب: $\frac{\sqrt{61}}{6}$

سوال 8.147:

$$\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & -0.5\end{bmatrix}^T$$

جواب: $\sqrt{0.3}$

سوال 8.148 تا سوال 8.151 اندرونی ضرب اور عمودیت کے سوالات ہیں۔

سوال 8.148: a کی کس قیمت کے لئے $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2\end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix}-1 & 1 & a & 2\end{bmatrix}^T$ آپس میں عمودی ہیں۔

جواب: $a = -3$

سوال 8.149: کوشی شوارز عدم مساوات

$a = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}^T$ اور $b = \begin{bmatrix}3 & 2 & 5\end{bmatrix}^T$ کے لئے مساوات 8.88 کی تصدیق کریں۔

جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$ ، $\|b\| = \sqrt{38}$ ہیں جن سے $\|a\|\|b\| = 23.065$ ملتا ہے جبکہ $|a \cdot b| = 23$ ہیں لہٰذا مساوات 8.88 کی تصدیق ہوتی ہے۔

سوال 8.150: **تکونی عدم مساوات**
$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ اور $b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ کے لئے مساوات 8.89 کی تصدیق کریں۔

جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$ ، $\|b\| = \sqrt{38}$ اور $\|a + b\| = 7\sqrt{2}$ ہیں لہٰذا مساوات 8.89 کی تصدیق ہوتی ہے۔

سوال 8.151: **متوازی الاضلاع مساوات**
$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ اور $b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ کے لئے مساوات 8.90 کی تصدیق کریں۔

جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$ ، $\|b\| = \sqrt{38}$ ، $\|a + b\|^2 = 98$ اور $\|a - b\|^2 = 6$ ہیں لہٰذا $104 = 104$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 8.90 کی تصدیق کرتی ہے۔

باب 9

خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب

امتیازی قدر مسائل درج ذیل سمتی مساوات پر مبنی ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ چکور قالب، $\boldsymbol{x}$ نا معلوم سمتیہ اور λ نا معلوم غیر سمتیہ ہے۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{9.1}$$

امتیازی قدر مسائل میں ہمیں وہ λ اور $\boldsymbol{x}$ درکار ہیں جو درج بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔ λ کی ہر قیمت کے لئے $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ مساوات 9.1 کا غیر اہم صفر حل ہے۔ ہم اس غیر اہم صفر حل میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہٰذا ہم غیر صفر حل $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ جاننا چاہیں گے۔

λ کی وہ قیمتیں جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں $\boldsymbol{A}$ کے **امتیازی اقدار** یا **امتیازی اقدار**[1] کہلاتے ہیں اور وہ $\boldsymbol{x}$ جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں $\boldsymbol{A}$ کے **امتیازی سمتیات** یا **امتیازی تفاعل**[2] کہلاتے ہیں۔

اس معصوم نظر آنے والا سمتی مساوات کے اندر حیران کن تفصیل چھپی ہے۔امتیازی قدر مسائل انجینئری، طبیعیات، ریاضی، حیاتیات، ماحولیاتی سائنس، شہری منصوبہ بندی، معاشیات، نفسیات اور دیگر شعبوں میں عموماً درپیش آتے ہیں۔آپ کو یقیناً ان سے زندگی میں واسطہ پڑے گا۔

---

[1] eigenvalues
[2] eigenfunctions

9.1 امتیازی قدر مسائل قالب۔امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول

درج ذیل پر غور کریں جہاں غیر صفر سمتیہ اور چکور قالب کے ضرب دکھائے گئے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

بائیں ہاتھ کی ضرب میں ہمیں مکمل طور پر نیا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جس کی لمبائی اور سمت ابتدائی سمتیہ کی لمبائی اور سمت سے مختلف ہیں۔عموماً سمتیہ کو چکور قالب سے ضرب دینے سے مکمل طور پر مختلف سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ کی ضرب میں حاصل سمتیہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

یعنی حاصل سمتیہ اور ابتدائی سمتیہ کی سمتیں ایک جیسی ہیں جبکہ حاصل سمتیہ کی لمبائی ابتدائی سمتیہ کی لمبائی کے دس گنّا ہے جس کو $\lambda = 10$ لکھا جائے گا۔چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کے لحاظ سے ایسے λ اور غیر صفر سمتیات کا حصول اس باب کا مرکزی مضمون ہے۔

آئیں درج بالا مشاہدے کو دستوری شکل دیں۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ غیر صفر $n \times n$ جسامت کا چکور قالب ہے۔اب درج ذیل سمتی مساوات پر غور کریں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{9.3}$$

ان λ اور غیر صفر $\boldsymbol{x}$ کے حصول کے مسئلے کو، جو مساوات 9.3 پر پورا اترے ہوں، **امتیازی قدر مسئلہ** کہتے ہیں۔

یہاں توجہ دیں کہ $\boldsymbol{A}$ دیا گیا چکور قالب ہے جبکہ λ نا معلوم غیر سمتیہ اور $\boldsymbol{x}$ نا معلوم سمتیہ ہے۔ہم وہ λ اور $\boldsymbol{x}$ حاصل کرنا چاہتے ہیں جو مساوات 9.3 پر پورا اترتے ہوں۔ جیومیٹریائی طور پر ہم وہ سمتیات $\boldsymbol{x}$ حاصل کرنا چاہتے ہیں جنہیں $\boldsymbol{A}$ سے ضرب دینا ایسا ہی ہے جیسے ان سمتیوں کو غیر سمتی λ سے ضرب دیا جائے یعنی کہ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{x}$ راست تناسب ہوں۔یوں مثبت λ کی صورت میں ابتدائی اور حاصل سمتیات کی سمتیں ایک جیسی ہوں گی جبکہ منفی λ کی صورت میں ان کی سمتیں آپس میں الٹ ہوں گی۔ (باب کی شروع میں سادہ مثال سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔)

λ کی وہ مخصوص قیمت جس کے لئے مساوات 9.3 کے غیر صفر $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ حل موجود ہوں $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی قدر**[3] کہلاتی ہے اور مطابقتی سمتیات $\boldsymbol{x}$، اس λ کے لحاظ سے قالب $\boldsymbol{A}$ کے **امتیازی سمتیات**[4] یا **امتیازی سمتیات**[5] کہلاتے ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ کے تمام امتیازی اقدار کو $\boldsymbol{A}$ کا **طیف**[6] کہتے ہیں۔ طیف میں کم سے کم ایک عدد امتیازی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔ امتیازی اقدار کی سب سے زیادہ حتمی قیمت کو $\boldsymbol{A}$ کا **رداس طیف**[7] کہتے ہیں۔

امتیازی قدر مسئلے کا حل چند مثالوں کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

مثال 9.1: امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات قدم بہ قدم دریافت کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

پہلے امتیازی اقدار دریافت کیے جاتے ہیں۔ مساوات 9.3 درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \implies \quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

تمام اجزاء کو ایک طرف منتقل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + (-2-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{9.4}$$

قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

مسئلہ 8.15 کے تحت اس متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (قالب $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی سمتیہ جس کی ہمیں تلاش ہے) اس صورت ممکن ہو گا جب عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو گا۔

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

---

[3] eigenvalue
[4] eigenvectors
[5] characteristic vectors
[6] spectrum
[7] spectral radius

ہم $D(\lambda)$ کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مقطع** جبکہ اس کی پھیلی ہوئی صورت کو **امتیازی کثیر رکنی** اور $D(\lambda) = 0$ کو **امتیازی مساوات** کہتے ہیں۔اس دو درجی الجبرائی مساوات کے حل $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -6$ ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہیں۔

$\lambda_1 = -1$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}[-5-(-1)]x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + [-2-(-1)]x_2 &= 0\end{aligned} \quad \implies \quad \begin{aligned}-4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 - x_2 &= 0\end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = 2x_1$ ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے متعدد متوازی امتیازی سمتیات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں x_1 (یا x_2) کی کوئی بھی قیمت چن کر x_2 (x_1) حاصل کرتے ہوئے امتیازی سمتیہ حاصل ہو گا۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہیں اور یوں $\boldsymbol{x}_1 = [1 \quad 2]^T$ ہو گا۔اس جواب کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}-5 & 2 \\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{vmatrix}1 \\ 2\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}-1 \\ -2\end{bmatrix} = (-1)\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$$

$\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -6$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}[-5-(-6)]x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + [-2-(-6)]x_2 &= 0\end{aligned} \quad \implies \quad \begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_2 &= 0\end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$ ملتا ہے۔یوں $x_1 = 2$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے لہٰذا $\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}_2 = [2 \quad -1]^T$ ہو گا۔اس کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}-5 & 2 \\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{vmatrix}2 \\ -1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}-12 \\ 6\end{bmatrix} = (-6)\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$$

آپ حصہ 9.1 کے آغاز میں مساوات 9.2 میں دیے گئے مثال کو حل کرتے ہوئے امتیازی اقدار 10 ، 3 اور مطابقتی امتیازی سمتیات $[3 \quad 4]^T$ ، $[-1 \quad 1]^T$ حاصل کریں۔ □

درج بالا مثال میں استعمال کی گئی ترکیب کی عمومی صورت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 9.3 کو اجزاء کی صورت میں

درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n
\end{aligned} \tag{9.5}
$$

تمام اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0
\end{aligned} \tag{9.6}
$$

اس کو قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0 \tag{9.7}$$

مسئلہ کریمر (مسئلہ 8.15) کے تحت درج بالا متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو:

$$
D(\lambda) = \begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda
\end{vmatrix} = 0 \tag{9.8}
$$

$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$ کو $\boldsymbol{A}$ کا **امتیازی قالب** جبکہ $D(\lambda)$ کو $\boldsymbol{A}$ کا **امتیازی مقطع** کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مساوات** کہتے ہیں۔مساوات 9.8 کو پھیلا کر $\boldsymbol{A}$ کی امتیازی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔

مساوات 9.8 کو پھیلا کر حاصل کثیر رکنی میں λ^n بلند تر طاقت ہے لہٰذا اس سے زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار حاصل ہو سکتے ہیں۔

مسئلہ 9.1: امتیازی اقدار
چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی مساوات 9.8 سے حاصل ہوں گے۔
یوں $n \times n$ قالب کی کم سے کم ایک عدد امتیازی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔

n کی بڑی قیمت کی صورت میں امتیازی اقدار عموماً ترکیب نیوٹن یا کسی اور اعدادی ترکیب سے حاصل کئے جائیں گے۔

امتیازی اقدار پہلے حاصل کیے جاتے ہیں۔ باری باری ان امتیازی قدر کو مساوات 9.6 کے نظام میں پر کرتے ہوئے مطابقتی امتیازی سمتیہ (گاوسی اسقاط کی مدد سے) حاصل کیا جاتا ہے۔

امتیازی سمتیات درج ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

مسئلہ 9.2: امتیازی سمتیات اور امتیازی فضا
اگر قالب $\boldsymbol{A}$ کے کسی ایک امتیازی قدر λ کے مطابقتی امتیازی سمتیات $\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{x}$ ہوں تب $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x}$ (بشرطیکہ $\boldsymbol{w} \neq -\boldsymbol{x}$ ہو) اور $k\boldsymbol{x}$ جہاں $k \neq 0$ ہے بھی اس λ کے مطابقتی بھی امتیازی سمتیات ہوں گے۔

یوں کسی ایک امتیازی قدر کے مطابقتی امتیازی سمتیات اور $\boldsymbol{0}$ سمتیہ مل کر فضا بناتے ہیں جس کو اس λ کے لئے $\boldsymbol{A}$ کی مطابقتی **امتیازی فضا** کہتے ہیں۔

ثبوت: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ سے مراد درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{w} + \lambda\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x})$$

اور $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{w}) = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}) = k(\lambda\boldsymbol{w}) = \lambda(k\boldsymbol{w})$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{w}+l\boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{w}+l\boldsymbol{x})$ ہو گا۔

□

امتیازی سمتیہ کو معیار سے تقسیم کرتے ہوئے **معیاری امتیازی سمتیہ** یعنی **اکائی امتیازی سمتیہ** حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً مثال 9.1 میں $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T$ کی لمبائی $\|\boldsymbol{x}_1\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ ہے جس سے معیاری امتیازی سمتیہ (اکائی امتیازی سمتیہ) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}^T$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: متعدد امتیازی سمتیات
درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

حل: اس قالب کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$-\lambda^3-\lambda^2+21\lambda+45=0$$

جس سے $\boldsymbol{A}$ کے جذر $\lambda_1=5$ اور $\lambda_2=\lambda_3=-3$ ملتے ہیں۔(بلند درجی مساوات کا خط کھینچ کر اس کے جذر با آسانی حاصل کیے جاتے ہیں)۔نظام $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ میں $\lambda=\lambda_1=5$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مطابقتی امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-7 & 2 & -3\\ 2 & -4 & -6\\ -1 & -2 & -5\end{bmatrix}\quad\xRightarrow{\text{گاوسی اسقاط}}\quad\begin{bmatrix}-7 & 2 & -3\\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

جس کا درجہ دو (2) ہے۔یوں $-\frac{24}{7}x_2-\frac{48}{7}x_3=0$ میں $x_3=-1$ چنتے ہوئے $x_2=2$ حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو $-7x_1+2x_2-3x_3=0$ میں پر کرتے ہوئے $x_1=1$ ملتا ہے۔یوں $\boldsymbol{x}_1=[1\;\;2\;\;-1]^T$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر $\lambda=5$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ ہے۔

$\lambda=-3$ سے درج ذیل امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے۔

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}\quad\xRightarrow{\text{گاوسی اسقاط}}\quad\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$x_1+2x_2-3x_3=0$ سے $x_1=-2x_2+3x_3$ لکھا جا سکتا ہے۔ $x_2=1$ چنتے ہوئے $x_3=0$ ملتا ہے جبکہ $x_2=0$ چنتے ہوئے $x_3=1$ ملتا ہے۔اس طرح (مساوات 8.41 میں $n=3$ اور درجہ $\boldsymbol{A}=2$ ہے لہٰذا) $\lambda=-3$ کے مطابقتی خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

□

امتیازی کثیر رکنی کے جذر λ کے درجے کو λ کی الجبرائی کثرت[8] کہا اور M_λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کسی λ کے مطابقتی خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کی تعداد کو جیومیٹریائی کثرت[9] کہا اور m_λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں λ کے مطابقتی امتیازی فضا کی بُعد m_λ ہو گی۔

چونکہ امتیازی کثیر رکنی کا درجہ n ہے لہٰذا تمام الجبرائی کثرت کا مجموعہ n ہو گا۔ مثال 9.2 میں $\lambda = -3$ کے لئے $m_\lambda = M_\lambda = 2$ ہے۔ عموماً $m_\lambda \leq M_\lambda$ ہو گا۔ M_λ اور m_λ کے فرق $\Delta_\lambda = M_\lambda - m_\lambda$ کو λ کی خامی[10] کہتے ہیں۔ یوں مثال 9.2 میں $\Delta_{-3} = 0$ ہے۔ مثبت خامی کا پایا جانا عمومی بات ہے۔

مثال 9.3: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی

قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

یوں $\lambda = 0$ امتیازی قدر ہے جس کی الجبرائی کثرت $M_0 = 2$ ہے۔ $0x_1 + 2x_2 = 0$ سے $x_2 = 0$ حاصل کرتے ہوئے $\lambda = 0$ کے مطابقتی امتیازی سمتیہ کی صورت $[x_1 \quad 0]^T$ ملتی ہے لہٰذا λ کی جیومیٹریائی کثرت $m_0 = 1$ ہے۔ یوں $\lambda = 0$ کی خامی $\Delta_0 = 2 - 1 = 1$ ہے۔ □

مثال 9.4: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی

قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$$

---

[8] algebraic multiplicity
[9] geometric multiplicity
[10] defect

یوں $\lambda = 3$ کی الجبرائی کثرت $M_3 = 2$ ہے۔ $0x_1 + 2x_2 = 0$ سے $x_2 = 0$ حاصل کرتے ہوئے مطابقتی امتیازی سمتیے کی صورت $[x_1 \quad 0]^T$ ملتی ہے لہٰذا λ_3 کی جیومیٹریائی کثرت $1 = 3$ ہے خامی $\Delta_3 = 2 - 1 = 1$ ہے۔ □

مثال 9.5: حقیقی قالب کے مخلوط امتیازی اقدار اور مخلوط امتیازی سمتیات
چونکہ حقیقی کثیر رکنی کے مخلوط جذر ممکن ہیں (جو جوڑیوں کی صورت میں پائے جاتے ہیں) لہٰذا حقیقی قالب کے مخلوط امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات ممکن ہیں۔درج ذیل منحرف تشاکلی قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \implies \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

یوں $\lambda_1 = i = (\sqrt{-1})$ اور $\lambda_2 = -i$ ملتے ہیں جن کے مطابقتی امتیازی سمتیات بالترتیب $-ix_1 + x_2 = 0$ اور $ix_1 + x_2 = 0$ سے حاصل ہوں گے۔ہم $x_1 = 1$ چنتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

□

اگلے حصے میں درج ذیل مسئلے کی ضرورت پیش آئے گی۔

مسئلہ 9.3: تبدیل محل قالب کے امتیازی سمتیات
چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کے تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کے امتیازی سمتیات وہی ہوں گے جو $\boldsymbol{A}$ کے ہیں۔

ثبوت: صفحہ 618 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت تبدیلی محل سے امتیازی قالب کا مقطع تبدیل نہیں ہوتا ہے۔

□

سوالات

سوال 9.1 تا سوال 9.15 میں دیے قالب کے امتیازی اقدار اور ان کے مطابقتی امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

سوال 9.1: $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $2,\ [0 \quad 1]^T; \quad 4,\ [1 \quad 0]^T$

سوال 9.2: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $0,\ 0,\ [1 \quad 0]^T,\ [0 \quad 1]^T$

سوال 9.3: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $3,\ [1 \quad 1]^T; \quad 1,\ [1 \quad -1]^T$

سوال 9.4: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $2-\sqrt{3},\ [1 \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2+\sqrt{3},\ [1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}]^T$

سوال 9.5: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $2-i\sqrt{3},\ [1 \quad -\frac{i}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2+i\sqrt{3},\ [1 \quad \frac{i}{\sqrt{3}}]^T$

سوال 9.6: $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $-4,\ [1 \quad -1]^T; \quad 4,\ [1 \quad 1]^T$

سوال 9.7: $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $-4i,\ [1 \quad i]^T; \quad 4i,\ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.8: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

جوابات: $a-ib,\ [1 \quad -i]^T; \quad a+ib,\ [1 \quad i]^T$

سوال 9.9: $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

جوابات: $-\frac{i}{\sqrt{5}},\ \begin{bmatrix}1 & -\frac{i\sqrt{5}+2}{3}\end{bmatrix}^T; \quad \frac{i}{\sqrt{5}},\ \begin{bmatrix}1 & \frac{i\sqrt{5}-2}{3}\end{bmatrix}^T$

سوال 9.10: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

جوابات: $\cos\theta - i\sin\theta,\ \begin{bmatrix}1 & i\end{bmatrix}^T; \quad \cos\theta + i\sin\theta,\ \begin{bmatrix}1 & -i\end{bmatrix}^T$

سوال 9.11: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $-1,\ \begin{bmatrix}1 & -3 & 2\end{bmatrix}^T; \quad 0,\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T; \quad 1,\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

سوال 9.12: $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $1,\ \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}^T; \quad 2,\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T; \quad 4,\ \begin{bmatrix}1 & \frac{2}{5} & 0\end{bmatrix}^T$

سوال 9.13: $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

جوابات: $9,\ \begin{bmatrix}1 & -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$

سوال 9.14: $\lambda = -1$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ دریافت کریں۔ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

جوابات: $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$

سوال 9.15: $\lambda = 3$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ دریافت کریں۔ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

جوابات: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ کار تیسی محور ہیں۔ سوال 9.16 تا سوال 9.17 میں درکار تبادل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کے لئے $\boldsymbol{A}$ حاصل کریں جہاں $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ ہے۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں اور ان کی جیو میٹریائی اہمیت بیان کریں۔

سوال 9.16: R^2 میں گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ، کار تیسی محدد کی مبدا کے گرد $\frac{\pi}{2}$ زاویہ گھومنا۔

جوابات: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ امتیازی اقدار i اور $-i$ ہیں۔ ان کے مطابقتی امتیازی سمتیات مخلوط ہیں لہٰذا گھمانے والے تبادلے میں کوئی سمت برقرار نہیں رہتی ہے۔

سوال 9.17: R^2 کا x_2 محور پر تظلیل قائمہ۔

جوابات: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $0, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ محور x_2 اپنے آپ پر ہی گرتی ہے جبکہ x_1 مبدا پر گرتی ہے۔

9.2 امتیازی مسائل کے چند استعمال

مثال 9.6: لچکدار جھلی کا تاننا

x_1x_2 سطح میں دائری سرحد $x_1^2 + x_2^2 = 1$ کی لچکدار جھلی (شکل 9.6) کو یوں کھینچ کر پھیلایا جاتا ہے کہ نقطہ $N(x_1, x_2)$ اپنی جگہ سے نقطہ $Q(y_1, y_2)$ کو منتقل ہوتا ہے جہاں اس نقطے کی ابتدائی اور اختتامی مقام کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

وہ صدر محور[11] دریافت کریں جن پر N کی تعین کر سمتیہ اور Q کی تعین کر سمتیہ ایک ہی رخ یا الٹ رخ ہوں۔ تبدیلی کے بعد جھلی کا سرحد کس صورت کا ہو گا؟

[11] principal axis

حل: ہمیں سمتیہ $\boldsymbol{x}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}$ درکار ہیں۔اب چونکہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ ہو گا جو امتیازی مسئلہ بیان کرتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \implies \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} (4-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

اس کی امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = 0$$

جس کے جذر $\lambda_1 = 6$ اور $\lambda_2 = 2$ ہمارے مسئلے کے امتیازی اقدار ہیں۔امتیازی قدر $\lambda_1 = 6$ کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

جس سے $x_2 = x_1$ ملتا ہے جہاں x_1 اختیاری مستقل ہے۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 1$ حاصل کرتے ہیں جس سے $\lambda_1 = 6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $[1 \quad 1]^T$ ملتا ہے۔امتیازی قدر $\lambda_2 = 2$ کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

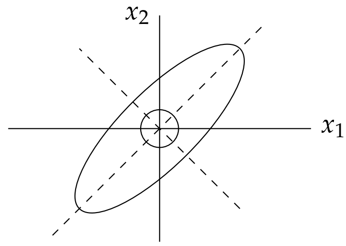
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

جس سے $x_2 = -x_1$ ملتا ہے جہاں x_1 اختیاری مستقل ہے۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = -1$ حاصل کرتے ہیں جس سے $\lambda_2 = 2$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $[1 \quad -1]^T$ ملتا ہے۔

یہ امتیازی سمتیات مثبت x_1 محور کے ساتھ $45°$ اور $-45°$ زاویہ بناتے ہیں۔ صدر محور کے رخ اور ان امتیازی سمتیات کے رخ ایک جیسے ہیں۔امتیازی اقدار کے تحت ان صدر محور کی سمت میں جھلی بالترتیب 6 اور 2 گنّا پھیل گئی ہے۔ شکل 9.6 میں صدر محور کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اب اگر ہم صدر محور کو نئی کارتیسی نظام u_1u_2 کے محوریوں چنیں کہ x_1x_2 نظام کی پہلی ربع میں مثبت u_1 اور اس کی دوسری ربع میں مثبت u_2 پایا جاتا ہو تب جھلی پر کسی بھی نقطے کو $u_1 = r\cos\phi$ ، $u_2 = r\sin\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح جھلی کی سرحد ابتدائی طور پر $(\cos\phi, \sin\phi)$ ہو گا۔ کھینچنے کے بعد درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 = 6\cos\phi, \quad z_2 = 2\sin\phi$$



شکل 9.1: صدر محور کو نقطہ دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ (مثال 9.6)

اب چونکہ $\cos\phi + \sin\phi = 1$ کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔ یوں کھینچی گئی جھلی کا سرحد ترخیمی ہو گا۔

$$\frac{z_1^2}{6^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$

□

مثال 9.7: امکانی شماریاتی عمل

صفحہ 563 پر مثال 8.18 میں شہری رقبے کی استعمال کی تقسیم پر غور کیا گیا۔ یہ عمل آخر کار **تحدیدی حال**[12] تک پہنچ جائے گا جس کے بعد اس میں مزید تبدیلی رو نما نہیں ہو گی۔ یوں امکانی شماریاتی قالب $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ پر پورا اترے گا۔ اس مساوات کی امتیازی قدر اکائی ہے جبکہ امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ درکار رقبے کی حتمی تقسیم ہے۔ یوں ہم $\boldsymbol{A}$ سے رو نما ہونے والے عمل کی طویل مدتی اثرات جان سکتے ہیں۔

اس مثال میں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

ہے جس کے امتیازی اقدار $\frac{7-\sqrt{2}}{10}$ ، $\frac{7+\sqrt{2}}{10}$ اور 1 ہیں۔ ہمیں اکائی امتیازی قدر $\lambda = 1$ سے غرض ہے جو $[1\ 2\ 4]^T$ ہے۔ یوں شہر میں آخر کار رہائشی، تجارتی اور صنعتی تقسیم رقبہ بالترتیب 1 ، 2 اور 4 تناسب سے ہو گی۔ □

[12] limit state

مثال 9.8: نمو آبادی کا لزلی نمونہ
لزلی نمونہ[13] جو عمر کے لحاظ سے آبادی میں اضافہ بتاتا ہے پر غور کرتے ہیں۔لزلی نمونے میں عمر کے لحاظ سے آبادی کی گروہ بندی کی جاتی ہے اور نظر عموماً صرف مادہ جانور پر رکھی جاتی ہے۔فرض کریں کہ کسی جانور کی آبادی میں مادہ جانور کی زیادہ سے زیادہ عمر 12 سال ہے۔ہم مادہ آبادی کو چار سال کے برابر وقفے سے تین گروہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔فرض کریں کہ لزلی قالب درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{L} = [l_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

لزلی قالب میں l_{1k} سے مراد k گروہ میں رہتے ہوئے ایک مادہ سے پیدا ہونے والی بیٹیوں کی اوسط تعداد ہے جبکہ گروہ $j-1$ سے گروہ j تک زندہ پہنچنے والی مادہ کی تناسب کو $l_{j,j-1} (j=2,3)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔پہلی چار سال کی عمر میں کم عمری کی بنا مادہ بچہ نہیں دیتی لہٰذا $l_{11}=0$ ہے۔اسی طرح پانچ تا آٹھ سال کی عمر میں جوان مادہ زیادہ سے زیادہ (اوسطاً 2.3) بچے دیتی ہے جبکہ ضعیفی میں مادہ اوسطاً 0.4 بچے دیتی ہے۔اسی طرح بچوں کا 0.6 حصہ یعنی 60 % جوانی تک پہنچ پاتا ہے جبکہ جوان جانوروں کا 0.3 حصہ یعنی 30 % بڑھاپے تک پہنچتا ہے۔

(الف) اگر ہر گروہ کی ابتدائی مادہ آبادی 2600 ہو تب 4 ، 8 اور 12 سال بعد ان گروہوں کی مادہ آبادی کیا ہو گی؟ (ب) ان گروہوں کی ابتدائی آبادی کیا ہونے سے تمام گروہوں میں تبدیلی کی تناسب برابر ہو گی؟ یہ تناسب کیا ہو گی؟

حل: (الف) ابتدائی طور پر $\boldsymbol{x}_0 = [2600 \quad 2600 \quad 2600]^T$ ہے۔چار سال بعد گروہ بندی درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2600 \\ 2600 \\ 2600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7020 \\ 1560 \\ 780 \end{bmatrix}$$

اسی طرح آٹھ سال بعد آبادی $\boldsymbol{x}_8 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{L}^2\boldsymbol{x}_0 = [3900 \quad 4212 \quad 468]^T$ اور بارہ سال بعد آبادی $\boldsymbol{x}_{12} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_8 = \boldsymbol{L}^3\boldsymbol{x}_0 = [9875 \quad 2340 \quad 1264]^T$ ہو گی۔

(ب) متناسب تبدیلی آبادی دریافت کرنے کی خاطر ہمیں ایسا امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ درکار ہے جو $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ پر پورا اترتا ہو جہاں $\lambda > 1$ آبادی میں اضافے کے تناسب اور $\lambda < 1$ آبادی میں کمی کے تناسب کو ظاہر کرے

[13] Leslie model

گا۔امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.38\lambda + 0.072 = 0$$

جس کے امتیازی اقدار $\frac{6}{5}$ ، $-\frac{\sqrt{30}+6}{10}$ اور $\frac{\sqrt{30}-6}{10}$ ہیں جنہیں کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔امتیازی قدر $\lambda = \frac{6}{5} = 1.2$ آبادی میں اضافے کو ظاہر کرتی ہے جس کا مطابقتی امتیازی سمتیہ درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{Lx} - \lambda \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1.2 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \implies \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جہاں $x_3 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 4$ اور $x_1 = 8$ حاصل کیا گیا ہے۔ابتدائی کل آبادی $3 \times 2600 = 7800$ حاصل کرنے کی خاطر ہم اس امتیازی سمتیہ کو $\frac{7800}{8+4+1} = 600$ سے ضرب دیتے ہوئے ابتدائی آبادی درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$600[8 \quad 4 \quad 1]^T = [4800 \quad 2400 \quad 600]^T$$

آبادی میں تبدیلی کا تناسب 1.2 فی چار سال ہو گا۔ □

سوالات

سوال 9.18 تا سوال 9.23 میں تبدیلی شکل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ کا قالب $\boldsymbol{A}$ دیا گیا ہے۔صدر سمتیں اور ان کی مطابقتی سکڑاو یا پھیلاو کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.18: $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

جوابات: $3,\ [1 \ -1]^T,\ -45^\circ; \quad 7,\ [1 \ 1]^T,\ 45^\circ$

سوال 9.19: $\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $-3.23,\ [1 \ -1.529]^T,\ -56.8^\circ; \quad 14.23,\ [1 \ 0.654]^T,\ 33.2^\circ$

سوال 9.20: $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

جوابات: $1+2\sqrt{2},\ [1\ \sqrt{2}]^T,\ 54.7^\circ; \quad 1-2\sqrt{2},\ [1\ \ -\sqrt{2}]^T,\ -54.7^\circ$

سوال 9.21: $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 43 & 12\end{bmatrix}$

جوابات: $7+\sqrt{34},\ [1\ \ \frac{5+\sqrt{34}}{3}]^T,\ 74.5^\circ; \quad 7-\sqrt{34},\ [1\ \ \frac{5-\sqrt{34}}{3}]^T,\ -15.5^\circ$

سوال 9.22: $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 7\end{bmatrix}$

جوابات: $8,\ [1\ \ 5]^T,\ 78.7^\circ; \quad 2,\ [1\ \ -1]^T,\ -45^\circ$

سوال 9.23: $\begin{bmatrix}1.25 & 0.45\\ 0.75 & 2.5\end{bmatrix}$

جوابات: $2.73,\ [1\ \ 3.285]^T,\ 73.1^\circ; \quad 1.02,\ [1\ \ -0.507]^T,\ -26.9^\circ$

سوال 9.24 تا سوال 9.26 میں دیے گئے امکانی شماریاتی عمل کا تحدیدی حال دریافت کریں۔

سوال 9.24: $\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.8 & 0.5\end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix}5 & 8\end{bmatrix}^T$

سوال 9.25: $\begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.5 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

سوال 9.26: $\begin{bmatrix}0.4 & 0.1 & 0.3\\ 0.5 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.5\end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix}29 & 27 & 49\end{bmatrix}^T$

سوال 9.27 اور سوال 9.28 میں لزلی نمونے کا قالب L دیا گیا ہے (مثال 9.8)۔ نمو آبادی کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.27:
$$\begin{bmatrix} 0 & 3.45 & 0.6 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 \end{bmatrix}$$
جواب: $\frac{9}{5}$

سوال 9.28:
$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$
جواب: 2

سوال 9.29 تا سوال 9.31 **لیونٹف نمونہ**[14] برائے مدخل و مخرج پر مبنی ہیں۔

سوال 9.29: **لیونٹف مدخل و مخرج نمونہ**[15] صنعت کی پیداوار اور اس کے اخراجات کا تعلق بیان کرتا ہے۔فرض کریں کہ تین صنعتوں کی پیداوار یہی صنعت استعمال کرتے ہیں اور اس تعلق کو درج ذیل 3×3 **قالب صرف**[16] پیش کرتا ہے

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

جہاں a_{jk} صنعت k کی پیداوار کی وہ تناسب ہے جو صنعت j خرید کر استعمال کرتی ہے۔ فرض کریں کہ صنعت j کی کل پیداوار کی آمدن p_j ہے۔ہم چاہتے ہیں کہ ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ ہر صنعت کی اخراجات اس صنعت کی آمدی کے برابر ہو۔ اس کو بطور مسئلہ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{p} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T$ ہے۔ایسا $\boldsymbol{p}$ دریافت کریں کہ p_1 ، p_2 اور p_3 غیر منفی ہوں۔

جواب: $c[10 \quad 18 \quad 25]^T$ جہاں c مستقل ہے۔

سوال 9.30: ثابت کریں کہ سوال 9.29 کے قالب صرف کے ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی (1) ہو گا اور اس قالب صرف کا امتیازی قدر بھی اکائی ہو گا۔

---

[14] Leontief model

[15] روس کے ویسلی ویسلی وچ لیونٹف[1906-1999] نے یہ نمونہ پیش کر کے نوبل انعام حاصل کیا۔

[16] consumption matrix

سوال 9.31: آزاد لیونٹف نمونے میں پیداوار کا کچھ حصہ یہی صنعت استعمال کرتے ہیں جبکہ باقی حصہ فروخت کیا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ (سوال 9.29) کی بجائے، $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{x}$ پیداوار ہے جبکہ $\boldsymbol{Ax}$ وہ حصہ ہے جو یہی صنعتیں خود استعمال کرتی ہیں لہٰذا $\boldsymbol{y}$ وہ حصہ ہے جس کو فروخت کیا جا سکتا ہے۔

قالب مانگ[17] $\boldsymbol{y} = [0.1 \quad 0.3 \quad 0.1]^T$ کو پورا کرنے کے لئے قالب پیداوار $\boldsymbol{x}$ دریافت کریں جہاں قالب صرف درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

جواب: $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y} = [0.6747 \quad 0.7128 \quad 0.7543]^T$

سوال 9.32 تا سوال 9.35 امتیازی قدر مسائل کے عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں جنہیں آپ نے ثابت کرنا ہے۔ان مسائل میں فرض کریں کہ $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار λ_1 تا λ_n ہیں جو غیر منفرد ہو سکتے ہیں۔

سوال 9.32: مرکزی وتر کے ارکان کا مجموعہ اور امتیازی اقدار کا مجموعہ برابر ہیں۔

سوال 9.33: طیفی منتقلی
$\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{I}$ کے امتیازی اقدار $\lambda_1 - k$ تا $\lambda_n - k$ ہیں جبکہ اس کے امتیازی سمتیات وہی ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

سوال 9.34: غیر سمتی مضرب، طاقت
غیر سمتی مضرب $k\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار $k\lambda_1$ تا $k\lambda_n$ ہیں جبکہ $\boldsymbol{A}^m$ جہاں $m = 1, 2, \cdots$ ہے کے امتیازی اقدار λ_1^m تا λ_n^m ہیں۔دونوں صورتوں میں امتیازی سمتیات وہی ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

سوال 9.35: کثیر رکنی $p(\boldsymbol{A}) = k_m\boldsymbol{A}^m + k_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + k_1\boldsymbol{A} + k_0\boldsymbol{I}$ کے امتیازی اقدار درج ذیل ہیں

$$p(\lambda_j) = k_j\lambda_j^m + k_{m-1}\lambda_j^{m-1} + \cdots + k_1\lambda_j + k_0$$

جہاں $j = 1, 2, \cdots$ ہے جبکہ اس کثیر رکنی کے امتیازی سمتیات وہی ہیں کو $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔(سوال 9.34 کے نتائج استعمال کریں۔)

[17] demand matrix

9.3 تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب

حقیقی چکور قالب کی تین اقسام پر یہاں غور کیا جائے گا جن کی غیر معمولی خصوصیات پائی جاتی ہیں۔تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا حصہ 8.2 میں ذکر ہو چکا ہے۔

تعریف: تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
ایسا حقیقی چکور قالب $A = [a_{jk}]$ جو تبدیلی محل سے تبدیل نہیں ہوتا **تشاکلی**[18] قالب کہلاتا ہے۔

$$A^T = A \quad \implies \quad [a_{kj}] = [a_{jk}] \tag{9.9}$$

ایسا حقیقی چکور قالب $A = [a_{jk}]$ جس کا تبدیل محل اس قالب کا منفی ہو **منحرف تشاکلی**[19] قالب کہلاتا ہے۔

$$A^T = -A \quad \implies \quad [a_{kj}] = -[a_{jk}] \tag{9.10}$$

ایسا حقیقی چکور قالب $A = [a_{jk}]$ جس کا تبدیل محل اس قالب کا معکوس ہو **قائمہ الزاویہ**[20] قالب کہلاتا ہے۔

$$A^T = A^{-1} \tag{9.11}$$

مثال 9.9: تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل میں تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب کی پہچان کریں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

کیا آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر منحرف تشاکلی قالب کے مرکزی وتر کے تمام اجزاء صفر ہوں گے؟ □

---

[18] symmetric
[19] skew-symmetric
[20] orthogonal

کسی بھی حقیقی چکور قالب کو تشاکلی قالب $\boldsymbol{R}$ اور منحرف تشاکلی قالب $\boldsymbol{S}$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جہاں تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T), \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T) \tag{9.12}$$

مثال 9.10: قالب بطور تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

مسئلہ 9.4: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کے امتیازی اقدار
(الف) تشاکلی قالب کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔
(ب) منحرف تشاکلی قالب کے امتیازی اقدار خیالی یا صفر ہوں گے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت مسئلہ 9.14 میں پیش کیا جائے گا۔

مثال 9.11: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کے امتیازی اقدار
درج ذیل تشاکلی قالب R کے امتیازی اقدار -2 اور 4 ہیں جبکہ منحرف تشاکلی قالب S کے امتیازی اقدار $3i$ اور $-3i$ ہیں۔ قالب $\boldsymbol{C}$ نا تشاکلی اور نا منحرف تشاکلی ہے جبکہ اس کے امتیازی اقدار 0 اور 4 ہیں۔ مسئلہ 9.4 ایسے قالب کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے۔

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

□

قائمہ الزاویہ تبادلے اور قائمہ الزاویہ قالب

قائمہ الزاویہ تبادلے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ قالب ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{9.13}$$

قائمہ الزاویہ تبادلہ R^n میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی جگہ R^n میں سمتیہ $\boldsymbol{y}$ مقرر کرتا ہے۔مثال کے طور پر سطح میں گھومنا، قائمہ الزاویہ تبادل ہے یعنی:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے سطح یا تین بعدی فضا میں قائمہ الزاویہ تبادل گھومنے کو ظاہر کرتا ہے (اور ساتھ ہی بالترتیب کسی خط یا سطح میں انعکاس بھی ممکن ہے)۔

قائمہ الزاویہ قالب کی اہمیت درج ذیل کی بنا ہے۔

مسئلہ 9.5: اندرونی ضرب کی عدم تغیر
R^n میں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اندرونی ضرب کی قیمت کو قائمہ الزاویہ تبادل برقرار رکھتا ہے جہاں اندرونی ضرب درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = [a_1 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

یوں $n \times n$ قائمہ الزاویہ قالب $\boldsymbol{A}$ اور R^n میں کسی بھی $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$ کی صورت میں $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ہو گا۔

اس طرح R^n میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی یا معیار کو قائمہ الزاویہ تبادل برقرار رکھتا ہے جہاں سمتیہ کی لمبائی یا معیار درج ذیل ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a}} \tag{9.16}$$

ثبوت: فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ ہے اور $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Aa}$ ، $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ab}$ ہیں۔اب صفحہ 559 پر مساوات 8.23-ت کے تحت $(\boldsymbol{Aa})^T = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T$ ہو گا جبکہ مساوات 9.11 کے تحت $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{Aa})^T\boldsymbol{Ab} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ab} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Ib} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{9.17}$$

اس میں $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ پر کرنے سے $\|\boldsymbol{a}\|$ عدم تغیر ثابت ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 9.6: صف اور قطار کی معیاری قائمیت
حقیقی چکور قالب صرف اور صرف اس صورت قائمہ الزاویہ ہو گا جب اس کے سمتیات قطار $\boldsymbol{a}_1$ تا $\boldsymbol{a}_n$ (اور سمتیات صف) معیاری قائمہ الزاویہ ہوں یعنی:

$$\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}_k = \begin{cases} 0 & j\neq k \\ 1 & j = k\end{cases} \tag{9.18}$$

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ ہے۔یوں $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہو گا جس کو سمتیات قطار $\boldsymbol{a}_1$ تا $\boldsymbol{a}_n$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & & & \\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n\end{bmatrix} \tag{9.19}$$

چونکہ $n\times n$ اکائی قالب $\boldsymbol{I}$ کا مرکزی وتر اکائی جبکہ باقی تمام اجزاء صفر ہوتے ہیں لہٰذا مساوات 9.19 کا دائیں ہاتھ مساوات 9.18 دیتا ہے۔مساوات 9.11 کے تحت قائمہ الزاویہ قالب کا معکوس بھی قائمہ الزاویہ ہو گا۔ اب $\boldsymbol{A}^{-1}(=\boldsymbol{A}^T)$ کے سمتیات قطار $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

(ب) اس کے برعکس اگر $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار مساوات 9.18 پر پورا اترتے ہوں تب مساوات 9.19 دائیں ہاتھ قالب کے مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر (0) ہوں گے جبکہ وتری ارکان اکائی (1) ہوں گے لہٰذا $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔اسی طرح $\boldsymbol{AA}^T = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔ اس سے مراد $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ ہے چونکہ

$A^{-1}A = AA^{-1} = I$ ہے جبکہ A^{-1} یکتا ہے۔یوں A قائمہ الزاویہ ہو گا۔ثبوت کے حصہ-الف کے آخر کی طرح A کے سمتیات قطار بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

□

مسئلہ 9.7: قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع
قائمہ الزاویہ قالب کی مقطع کی قیمت $+1$ یا -1 ہو گی۔

ثبوت: صفحہ 640 پر مسئلہ 8.19 کے تحت درج ذیل ہے

$$\text{مقطع}\,(\boldsymbol{AB}) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\boldsymbol{B})$$

جبکہ صفحہ 618 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت $\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}^T = \text{مقطع}\,\boldsymbol{A}$ ہے لہٰذا قائمہ الزاویہ قالب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1 = \text{مقطع}\,\boldsymbol{I} = \text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}^{T}) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})^2 \tag{9.20}$$

□

مثال 9.12: مسئلہ 9.7
مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع -1 ہے جبکہ مساوات 9.14 کے قالب کا مقطع $+1$ ہے۔
□

مسئلہ 9.8: قائمہ الزاویہ قالب کے امتیازی اقدار
قائمہ الزاویہ قالب کے امتیازی اقدار حقیقی یا جوڑی دار مخلوط ہوں گے جن کی حتمی قیمت اکائی ہو گی۔

ثبوت: چونکہ حقیقی قالب کی امتیازی کثیر رکنی کے عددی سر حقیقی ہوتے ہیں لہٰذا اس کے امتیازی اقدار (یعنی صفر) مسئلے کے تحت ہوں گے۔یوں مسئلے کا پہلا حصہ کسی بھی حقیقی قالب کے لئے درست ہے۔امتیازی قدر کی حتمی قیمت اکائی کے برابر $|\lambda| = 1$ ہونے کا ثبوت مسئلہ 9.14 میں پیش کیا جائے گا۔

$\square$

مثال 9.13: مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کی امتیازی کثیر رکنی درج ذیل ہے۔

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

چونکہ مخلوط جذر صرف جوڑی دار ممکن ہیں لہٰذا اس کثیر رکنی کا ایک جذر حقیقی ہو گا جو مسئلہ 9.7 کے تحت $+1$ یا -1 ہو گا۔ان قیمتوں کو کثیر رکنی میں پر کرتے ہوئے پہلا جذر یعنی امتیازی اقدار $\lambda = -1$ ملتا ہے۔کثیر رکنی کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $-(\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + 1) = 0$ ملتا ہے جس کے جذر $\frac{5+i\sqrt{11}}{6}$ اور $\frac{5-i\sqrt{11}}{6}$ ہیں جن کی حتمی قیمت 1 ہے۔ $\square$

سوالات

سوال 9.36 تا سوال 9.44 میں قالب تشاکلی، منحرف تشاکلی یا قائمہ الزاویہ ہیں؟ ان کا طیف دریافت کریں جو مسئلہ 9.4 اور مسئلہ 9.8 پر پورا اتریں گے۔ امتیازی سمتیات بھی معلوم کریں۔

سوال 9.36: $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $\frac{4+i3}{5}, \ [1 \quad i]^T; \quad \frac{4-i3}{5}, \ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.37: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے، $2+i3, \ [1 \quad i]^T; \quad 2-i3, \ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.38: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے، $a+ib, \ [1 \quad i]^T; \quad a-ib, \ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.39: $\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&-2\\0&-2&5\end{bmatrix}$

جوابات: تشاکلی، $6,\ [0 \quad 1 \quad -2]^T;\quad 1,\ [0 \quad 1 \quad \frac{1}{2}]^T;\quad 4,\ [1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.40: $\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$

جوابات: تشاکلی، $a+2b,\ [1 \quad 1 \quad 1]^T;\quad a-b,\ [1 \quad 0 \quad -1]^T,\ [0 \quad 1 \quad -1]^T$

سوال 9.41: $\begin{bmatrix}0&9&-12\\-9&0&20\\12&-20&0\end{bmatrix}$

جوابات: منحرف تشاکلی، $\pm 25i,\ [1 \ \pm\frac{16+i15}{15} \ \pm\frac{12-i20}{15}]^T;\ 0,\ [0 \ \frac{3}{5} \ \frac{9}{20}]^T$

سوال 9.42: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\sin\theta&\cos\theta\\0&-\cos\theta&\sin\theta\end{bmatrix}$

جوابات: تینوں نہیں، $\sin\theta \pm i\cos\theta,\ [0 \quad 1 \quad \pm i]^T;\quad 1,\ [1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.43: $\begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{8}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{7}{9}&\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&\frac{1}{9}&\frac{8}{9}\end{bmatrix}$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $\frac{7\pm i5\sqrt{11}}{18},\ [1 \quad \frac{-1\pm i3\sqrt{11}}{10} \quad \frac{3\pm i\sqrt{11}}{10}]^T;\quad 1,\ [1 \quad 1 \quad -3]^T$

سوال 9.44: $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $\pm i,\ [1 \quad 0 \quad \pm i]^T;\quad 1,\ [0 \quad 1 \quad 0]^T$

سوال 9.45 تا سوال 9.48 عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں۔

سوال 9.45: مجموعہ
کیا $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ کے امتیازی اقدار $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے امتیازی اقدار کا مجموعہ ہوں گے۔

جواب: نہیں

سوال 9.46: ثبوت
ثابت کریں کہ تشاکلی قالب کے منفرد امتیازی اقدار کے مطابقتی امتیازی سمتیات قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ مثال دیں۔

سوال 9.47: منحرف تشاکلی قالب
ثابت کریں کہ منحرف تشاکلی قالب کا معکوس بھی منحرف تشاکلی قالب ہو گا۔

جواب: $\boldsymbol{A}^{-1} = (-\boldsymbol{A}^T)^{-1} = -(\boldsymbol{A}^{-1})^T$

سوال 9.48: قائمہ الزاویہ قالب
کیا 3×3 منحرف تشاکلی قائمہ الزاویہ قالب موجود ہیں؟

9.4 امتیازی اساس، وتری بنانا، دودرجی صورت

اب تک امتیازی اقدار کی خصوصیات پر غور کیا گیا۔ آئیں اب امتیازی سمتیات کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔ $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات کبھی کبھار فضا R^n کی اساس ہوتے ہیں لہٰذا R^n میں کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کو ان امتیازی سمتیات $\boldsymbol{x}_1$، $\cdots$، $\boldsymbol{x}_n$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے مثلاً:

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n \tag{9.21}$$

ان امتیازی سمتیات کے مطابقتی امتیازی اقدار (جو ضروری نہیں کہ منفرد ہوں) کو λ_1 تا λ_n سے ظاہر کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا تبادلہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n) \\
&= c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n \\
&= c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\boldsymbol{x}_n
\end{aligned} \tag{9.22}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{A}$ کا کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ پر پیچیدہ عمل اساس کی مدد سے غیر سمتی ضرب کی سادہ عمل میں تبدیل ہو گیا ہے۔ یہی امتیازی اساس کی افادیت ہے۔

اگر تمام امتیازی اقدار منفرد ہوں تب امتیازی سمتیات ضرور امتیازی اساس ہوں گے۔

مسئلہ 9.9: امتیازی سمتیات کی اساس
اگر $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے n منفرد امتیازی اقدار ہوں تب R^n کی اساس $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات $\boldsymbol{x}_1$ تا $\boldsymbol{x}_n$ ہوں گے۔

ثبوت: ہمیں صرف اتنا ثابت کرنا ہے کہ $\boldsymbol{x}_1$ تا $\boldsymbol{x}_n$ خطی طور غیر تابع ہیں۔فرض کریں کہ ایسا نہیں ہے اور صرف r عدد امتیازی سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔یوں $r < n$ ہو گا اور سمتیات $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}\}$ کا سلسلہ خطی طور تابع ہو گا۔یوں ایسے غیر سمتی مستقل $\boldsymbol{c}_1$ تا $\boldsymbol{c}_{r+1}$ (جن میں سے کم از کم ایک مستقل غیر صفر ہو) موجود ہوں گے جو درج ذیل مساوات پر پورا اتریں گے (حصہ 8.4)۔

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} = \boldsymbol{0} \tag{9.23}$$

دونوں اطراف کو $\boldsymbol{A}$ سے ضرب دے کر $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j$ استعمال کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1}) = c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \tag{9.24}$$

درج بالا میں آخری رکن کو ہٹانے کی خاطر مساوات 9.23 کو λ_{r+1} سے ضرب دیتے ہوئے مساوات 9.24 سے منفی کرتے ہیں۔

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0} \tag{9.25}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{x}_1$ تا $\boldsymbol{x}_r$ خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا مساوات 9.25 صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر صفر ہوں یعنی $c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = 0$ تا $c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$ ہوں۔اب چونکہ تمام امتیازی اقدار منفرد ہیں لہٰذا اس سے $c_1 = 0$ تا $c_r = 0$ ملتے ہیں۔اس حقیقت کے تحت مساوات 9.23 سے $c_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} = \boldsymbol{0}$ ملتا ہے اور چونکہ امتیازی سمتیہ صفر نہیں ہو سکتا لہٰذا $c_{r+1} = 0$ ہو گا۔اب مساوات 9.23 لکھتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ اس میں کم از کم ایک مستقل غیر صفر ہے جبکہ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ تمام مستقل صفر ہیں۔یہ تضاد صرف اس صورت دور کیا جا سکتا ہے جب تمام امتیازی سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں۔

□

مثال 9.14: امتیازی اساس۔ غیر منفرد امتیازی اقدار۔ عدم موجودگی
قالب $\left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ کے امتیازی اقدار 6 اور 2 اور مطابقتی امتیازی سمتیات کی اساس $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ ہیں۔

بعض اوقات غیر منفرد امتیازی اقدار بھی امتیازی سمتیات کی اساس دیتے ہیں مثلاً مثال 9.2۔

اس کے برعکس عین ممکن ہے کہ قالب کی خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد اتنی نہ ہو کہ یہ اساس دیں۔ مثلاً $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ کا صرف ایک عدد امتیازی سمتیہ $[k \quad 0]^T$ پایا جاتا ہے جہاں k غیر صفر اختیاری ہے اور ایک عدد سمتیہ ناکافی ہے۔ □

حقیقت میں امتیازی اساس مسئلہ 9.9 سے نرم شرائط کی صورتوں میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔ درج ذیل ایسی ایک صورت ہے۔

مسئلہ 9.10: تشاکلی قالب
تشاکلی قالب کے امتیازی سمتیات R^n کی معیاری قائمہ الزاویہ اساس ہے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 9.15: مثال 9.14 میں پہلے قالب کی معیاری امتیازی سمتیات کی اساس $[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ اور $[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ ہے۔ □

قالبوں کی تشابہت۔ وتری بنانا

امتیازی اساس کی مدد سے قالب $\boldsymbol{A}$ کی تخفیف سے ایسا وتری قالب حاصل کیا جا سکتا ہے جس کے وتری اجزاء قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہوں۔ ایسا درج ذیل **متشابہت تبادلہ** کے ذریعہ سے کیا جاتا ہے۔

تعریف: **متشابہ قالب۔ متشابہت تبادلہ**
ایسا $n \times n$ قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو، $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا **متشابہ قالب**[21] کہلاتا ہے۔

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \tag{9.26}$$

یہاں $n \times n$ قالب $\boldsymbol{P}$ کوئی غیر نادر قالب ہے۔ $\boldsymbol{A}$ سے $\hat{\boldsymbol{A}}$ حاصل کرنے کے اس عمل کو **متشابہت تبادلہ**[22] کہتے ہیں۔

[21] similar matrix
[22] similarity transformation

تشابہت تبادلہ کی خاصیت ہے کہ یہ قالب A کے امتیازی اقدار بر قرار رکھتا ہے۔

مسئلہ 9.11: تشابہ قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات
A کے امتیازی اقدار ہی اس کے تشابہ قالب $\hat{A}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے۔
مزید اگر A کا امتیازی سمتیہ x ہو تب $\hat{A}$ کا اسی امتیازی قدر کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $y = P^{-1}x$ ہو گا۔

ثبوت: $Ax = \lambda x$ ($x \neq 0$ اور λ امتیازی قدر ہے) سے $P^{-1}Ax = \lambda P^{-1}x$ ملتا ہے جس میں $I = PP^{-1}$ پر کرتے ہوئے درج حاصل ہوتا ہے۔

$$P^{-1}Ax = P^{-1}AIx = P^{-1}APP^{-1}x = (P^{-1}AP)P^{-1}x = \hat{A}(P^{-1}x) = \lambda P^{-1}x$$

یوں $\hat{A}$ کا امتیازی قدر λ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ $P^{-1}x$ ہے۔در حقیقت $P^{-1}x \neq 0$ ہے کیوں کہ $P^{-1}x = 0$ سے $x = Ix = PP^{-1}x = P0 = 0$ لکھا جا سکتا ہے جو تضاد ہے چونکہ $x \neq 0$ ہے۔

$\square$

مثال 9.16: تشابہ قالبوں کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات
فرض کریں کہ A اور P درج ذیل ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

یوں $\hat{A}$ درج ذیل ہو گا جہاں $-7 =$ مقطع P لیتے ہوئے P^{-1} کو مساوات 8.68 کی مدد سے حاصل کیا گیا ہے۔

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\hat{A}$ کی امتیازی مساوات $(8-\lambda)(1-\lambda) = 0$ سے اس کے امتیازی اقدار $\lambda_1 = 8$ اور $\lambda_2 = 1$ ملتے ہیں۔ A کی امتیازی مساوات $(3-\lambda)(6-\lambda) - 10 = \lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0$ سے بھی امتیازی اقدار $\lambda_1 = 8$ اور $\lambda_2 = 1$ ملتے ہیں جو مسئلہ 9.11 کے پہلے حصے کے عین مطابق ہے۔

$(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$ کے پہلے حصے $(3-\lambda)x_1+5x_2=0$ میں $\lambda=\lambda_1=8$ پر کرنے سے $-5x_1+5x_2=0$ یعنی $x_2=x_1$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $x_1=1$ چنتے ہوئے $x_2=1$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{x}_1=[1 \quad 1]^T$ ہو گا۔اسی طرح $\lambda_2=1$ پر کرنے سے $2x_1+5x_2=0$ حاصل ہو گا جس میں $x_1=5$ چنتے ہوئے $x_2=-2$ یعنی $\boldsymbol{x}_2=[5 \quad -2]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ان سے $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

آپ تسلی کر لیں کہ یہی $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔ □

درج بالا مثال میں $\boldsymbol{P}$ کے قطار، $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں جس سے حاصل وتری قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے ارکان، $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہیں۔یوں ہم کسی بھی قالب $\boldsymbol{A}$ کو موزوں تشابہت تبادلے سے ایسے وتری قالب میں تبدیل کر سکتے ہیں جس کے وتری ارکان، $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہوں۔

مسئلہ 9.12: قالب کو وتری بنانا
اگر $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات کی اساس ہو تب

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \tag{9.27}$$

وتری ہو گا جس کے مرکزی وتر کے ارکان $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے۔یہاں $\boldsymbol{X}$ ایسا قالب ہے جس کے قطار $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔مزید درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\boldsymbol{D}^m=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{X} \qquad (m=2,3,\cdots) \tag{9.28}$$

ثبوت: فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات $\boldsymbol{x}_1$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{x}_n$ فضا R^n کی اساس ہیں اور ان کے مطابقتی امتیازی اقدار بالترتیب λ_1 ، $\cdots$ ، λ_n ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n=\lambda_n\boldsymbol{x}_n$ ہو گا۔یوں

$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n]$ کا درجہ مسئلہ 8.4 کے تحت n ہو گا لہٰذا مسئلہ 8.16 کے تحت $\boldsymbol{X}^{-1}$ موجود ہو گا۔ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ درج ذیل درست ہے

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{Ax}_1, \cdots, \boldsymbol{Ax}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{x}_n] = \boldsymbol{XD} \tag{9.29}$$

جہاں $\boldsymbol{D}$ کو مساوات 9.27 پیش کرتی ہے۔ہم بائیں ہاتھ دوسری مساوات کو $n = 2$ کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}\\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Ax}_1 & \boldsymbol{Ax}_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

تیسری مساوات $\boldsymbol{Ax}_k = \lambda_k\boldsymbol{x}_k$ سے حاصل ہوتی ہے۔آپ اسی طرح پہلے $n = 2$ اور بعد میں عمومی n کے لئے چوتھی مساوات کو ثابت کر سکتے ہیں۔

مساوات 9.29 کو دائیں $\boldsymbol{X}^{-1}$ سے ضرب کرتے ہوئے مساوات 9.27 حاصل ہوتی ہے۔چونکہ مساوات 9.27 تشابہت تبادلہ ہے لہٰذا مسئلہ 9.11 کے تحت $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہی $\boldsymbol{D}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے۔مساوات 9.28 کو $m = 2$ کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}^2 = \boldsymbol{DD} = (\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX})(\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX}) &= \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{XX}^{-1})\boldsymbol{AX}\\ &= \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AAX} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

□

مثال 9.17: قالب کو وتری بنانا
درج ذیل قالب کو وتری بنائیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ کی امتیازی مقطع سے اس کی امتیازی کثیر رکنی $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 27\lambda - 90 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $\lambda_1 = 6$ ، $\lambda_2 = 3$ اور $\lambda_3 = -5$ ہیں۔ مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ میں باری باری

λ_1 ، λ_2 اور λ_3 پر کرتے ہوئے گاوسی اسقاط سے حل کر کے درج ذیل امتیازی سمتیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ان امتیازی سمتیات سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 16 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{33} & 0 & \frac{2}{33} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{AX}$ حاصل کر کے بائیں $\boldsymbol{X}^{-1}$ سے ضرب دے کر $\boldsymbol{D}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX} = \begin{bmatrix} \frac{1}{33} & 0 & \frac{2}{33} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 36 & -\frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ 96 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

□

آثار قالب

چکور $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کے مرکزی وتر کے اجزاء کے مجموعے کو آثار $\boldsymbol{A}$ کہتے[23] ہیں۔

$$\text{آثار}\ \boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

دو قالبوں کے حاصل ضرب کے آثار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\text{آثار}\ (\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} B_{ji}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{AB})_{jj} = \text{آثار}\ (\boldsymbol{BA}) \tag{9.30}$$

[23] trace

لہٰذا ضرب میں قالبوں کی ترتیب کا آثار پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

$\boldsymbol{A}$ اور اس کے متشابہ قالب $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ کا آثار ایک جیسا ہو گا یعنی:

$$(9.31)\quad \text{آثار}\,(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \text{آثار}\,(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})) = \text{آثار}\,((\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^{-1}) = \text{آثار}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}) = \text{آثار}\,(\boldsymbol{A})$$

چونکہ متشابہ قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے مرکزی ارکان، $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہوتے ہیں لہٰذا درج بالا کے تحت آثار $\boldsymbol{A}$ امتیازی اقدار کا مجموعہ ہو گا۔

دو درجی صورتیں۔ صدر محوروں پر تبادلہ

سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی **دو درجی صورت**[24] Q سے مراد x_1، $\cdots$، x_n اجزاء کی n^2 ارکان پر مشتمل درج ذیل مجموعہ ہے۔

$$(9.32)\quad \begin{aligned} Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k \\ &= \quad a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کو اس صورت کا **عددی سر قالب** کہتے ہیں۔ چونکہ ہم وتر سے ہٹ کر ارکان کے جوڑیوں کے مجموعے کو دو برابر اجزاء کی صورت میں لکھ سکتے ہیں لہٰذا ہم $\boldsymbol{A}$ کو تشاکلی فرض کر سکتے ہیں (درج ذیل مثال میں اس بات کی وضاحت کی گئی ہے)۔

مثال 9.18: فرض کریں کہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_1 + 7x_2^2 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

---

[24] quadratic form

درج بالا میں درمیانے دو ارکان کے عددی سر کا مجموعہ $8 = 2 + 6$ ہے جس کو $4 + 4$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ کی جگہ مطابقتی تشاکلی قالب C استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 7x_2^2 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

$\square$

مسئلہ 9.10 کے تحت مساوات 9.32 میں تشاکلی عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات، معیاری قائمہ الزاویہ اساس ہیں۔انہیں سمتیہ قطار لیتے ہوئے ہمیں ایسا قالب $\boldsymbol{X}$ ملتا ہے جو قائمہ الزاویہ ہو گا لہٰذا $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$ ہو گا۔یوں مساوات 9.27 کو بائیں سے $\boldsymbol{X}$ اور دائیں سے $\boldsymbol{X}^{-1}$ کے ساتھ ضرب دینے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^T$$

اس کو مساوات 9.32 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x} \tag{9.33}$$

اگر ہم $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ لیں تب $\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{X}^{-1}$ کی بنا $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{y} \tag{9.34}$$

مساوات 9.33 میں $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{y}^T$ اور $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ہو گا لہٰذا Q کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Q = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{9.35}$$

اس سے **مسئلہ صدر محور**[25] ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.13: **مسئلہ صدر محور**
دو درجی صورت

$$Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k \qquad (a_{kj} = a_{jk}) \tag{9.36}$$

---

[25] Principal Axes Theorem

میں مساوات 9.34 پر کرنے سے مساوات 9.35 میں دی گئی **صدر محوری صورت** یا **با ضابطہ صورت**[26] حاصل ہوتی ہے جہاں λ_1 ، $\dots$ ، λ_n تشاکلی قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہیں (جو غیر منفرد بھی ہو سکتے ہیں) اور $\boldsymbol{X}$ ایسا قائمہ الزاویہ قالب ہے جس کے سمتیہ قطار مطابقتی (بالترتیب) امتیازی سمتیات $\boldsymbol{x}_1$ ، $\dots$ ، $\boldsymbol{x}_n$ ہیں۔

مثال 9.19: صدر محور پر تبادلہ۔ مخروطی حصے

درج ذیل دو درجی صورت کس مخروطی حصے کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کا صدر محور پر تبادلہ کریں۔

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

حل: ہم $Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ لکھ سکتے ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{x}$ درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

اس سے امتیازی مساوات $(17-\lambda)^2 - 15^2$ ملتا ہے جس کے جذر $\lambda_1 2$ اور $\lambda_2 = 32$ ہیں لہٰذا مساوات 9.36 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Q = 2y_1^2 + 32y_2^2$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $Q = 128$ ترخیم $2y_1^2 + 32y - 2^2 = 128$ کو ظاہر کرتا ہے یعنی:

$$\frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2}{2^2} = 1$$

x_1x_2 محدد میں صدر محور جاننے کی خاطر ہمیں $\lambda = \lambda_1 = 2$ اور $\lambda = \lambda_2 = 8$ لیتے ہوئے $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ سے معیاری امتیازی سمتیات حاصل کر کے مساوات 9.34 کا استعمال کرنا ہو گا۔ یوں

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

سے

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ یہ 45° گھومنے کو ظاہر کرتی ہے۔ □

---

[26] canonical form

سوالات

سوال 9.49 تا سوال 9.54 میں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{P}$ دیے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ قالب $\boldsymbol{A}$ اور متشابہ قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے ایک جیسے امتیازی اقدار ہیں۔ مزید اگر $\hat{\boldsymbol{A}}$ کا امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{y}$ ہو تب ثابت کریں کہ $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ ہو گا۔

سوال 9.49: $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda=-1,\ 1;\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & \frac{4}{15}\end{bmatrix}^T;\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}^T$

سوال 9.50: $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6 & 4\\ -3 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda=3,\ 2;\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{11}{32}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}^T;\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$

سوال 9.51: $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6 & -10\\ 2 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda=-2,\ -1;\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & \frac{33}{16}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T;\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$

سوال 9.52: $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda=2,\ -1,\ 1;\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^T$

$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

سوال 9.53: $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda=-1,\ 1,\ 0;\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}^T$

$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$

سوال 9.54: مساوات 9.31 کے تحت کسی بھی قالب کا آثار اس قالب کے امتیازی اقدار کا مجموعہ ہو گا۔ سوال 9.49 تا سوال 9.54 میں دیے گئے $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار اور آثار کا موازنہ کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ ایسا ہی ہے۔

سوال 9.55 تا سوال 9.62 میں امتیازی اساس (امتیازی سمتیات کی اساس) دریافت کرتے ہوئے قالب کو وتری بنائیں۔

سوال 9.55: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

سوال 9.56: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.57: $\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

سوال 9.58: $\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 30 & 13 \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

سوال 9.59: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

سوال 9.60: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{9}{7} \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 2$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.61: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -9 & -7 & -15 \\ 6 & 6 & 11 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 5$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.62: $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 3$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

سوال 9.63 تا سوال 9.63 میں صدر محور پر منتقل کریں۔ مثال 9.19 کی طرح $\boldsymbol{x}$ کو نئے محور $\boldsymbol{y}$ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 9.63: $5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 10$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{3}{5}y_1^2 + \frac{2}{5}y_2^2 = 1, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ترخیم

سوال 9.64: $-9x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2 = 30$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad -\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} = 1, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$ قطع زائد

سوال 9.65: $7x_1^2 - 2x_1x_2 + 7x_2^2 = 0$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad 6y_1^2 + 8y_2^2 = 0, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ سیدھے خط

سوال 9.66: $5x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2=16$

جوابات: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$, $\frac{y_1^2}{8}+\frac{y_2^2}{2}=1$, $C=\begin{bmatrix}5&3\\3&5\end{bmatrix}$ ترخیم

سوال 9.67: $31x_1^2-24x_1x_2+21x_2^2=13$

جوابات: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}3&2\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$, $3y_1^2+y_2^2=1$, $C=\begin{bmatrix}31&-12\\-12&21\end{bmatrix}$ ترخیم

سوال 9.68: $4x_1^2+12x_1x_2+13x_2^2=32$

جوابات: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$, $\frac{y_1^2}{32}+\frac{y_2^2}{2}=1$, $C=\begin{bmatrix}4&6\\6&13\end{bmatrix}$ ترخیم

9.5 مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں

تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالبوں پر حصہ 9.3 میں غور کیا گیا۔ان قالبوں کی مخلوط صورتیں بھی پائی جاتی ہیں جو کوانٹم میکانیات[27] میں استعمال ہوتی ہیں۔

مخلوط قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ کے ہر رکن $a_{jk}=\alpha+i\beta$ (جہاں α اور β حقیقی ہیں) کی جگہ اس کا جوڑی دار مخلوط $\bar{a}_{jk}=\alpha-i\beta$ لیتے ہوئے جوڑی دار مخلوط قالب $\bar{\boldsymbol{A}}=[\bar{a}_{jk}]$ ملتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{A}^T$ کا مخلوط جوڑی دار اور $\boldsymbol{A}$ کا مخلوط تبدیل محل $\bar{\boldsymbol{A}}^T=[\bar{a}_{kj}]$ ہو گا۔

مثال 9.20: قالب $\boldsymbol{A}$ کا مخلوط جوڑی دار $\bar{\boldsymbol{A}}$ اور مخلوط تبدیل محل $\bar{\boldsymbol{A}}^T$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2+i3&1-i2\\4&3+i\end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}-2-i3&1+i2\\4&3-i\end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{A}}^T=\begin{bmatrix}-2-i3&4\\1+i2&3-i\end{bmatrix}$$

□

[27] quantum mechanics

تعریف: **ہرمشی قالب**[28]، **منحرف ہرمشی قالب اور اکھرا قالب**
چکور قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$
ہرمشی[29] کہلائے گا اگر $\bar{\boldsymbol{A}}^T=\boldsymbol{A}$ یعنی $\bar{a}_{kj}=a_{jk}$ ہو،
منحرف ہرمشی[30] کہلائے گا اگر $\bar{\boldsymbol{A}}^T=-\boldsymbol{A}$ یعنی $\bar{a}_{kj}=-a_{jk}$ ہو اور
اکھرا[31] کہلائے گا اگر $\bar{\boldsymbol{A}}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$ ہو۔

درج بالا تعریف سے ظاہر ہے کہ ہرمشی قالب کے مرکزی وتری ارکان $\bar{a}_{jj}=a_{jj}$ پر پورا اتریں گے لہٰذا یہ ارکان حقیقی ہوں گے۔ منحرف ہرمشی قالب کے مرکزی وتری ارکان $\bar{a}_{jj}=-a_{jj}$ پر پورا اتریں گے۔ یوں اگر $a_{jj}=\alpha+i\beta$ ہو تب $\alpha-i\beta=-(\alpha+i\beta)$ ہو گا جس سے $\alpha=0$ ملتا ہے۔ یوں منحرف ہرمشی قالب کے مرکزی وتر کے ارکان خالص خیالی یا صفر (0) ہوں گے۔

مثال 9.21: ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکھرا قالب
درج ذیل میں $\boldsymbol{A}$ ہرمشی، $\boldsymbol{B}$ منحرف ہرمشی اور $\boldsymbol{C}$ اکھرا قالب ہے۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -4+i5\\ -4-i5 & -7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}i3 & 2+i\\ -2+i & -i7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}i\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & i\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

□

حقیقی ہرمشی قالب $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ پر پورا اترے گا لہٰذا حقیقی ہرمشی قالب **تشاکلی** ہو گا۔ اسی طرح حقیقی منحرف ہرمشی قالب $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$ پر پورا اترے گا لہٰذا حقیقی منحرف ہرمشی قالب **منحرف تشاکلی** ہو گا۔ آخر میں حقیقی اکھرا قالب $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$ پر پورا اترے گا لہٰذا حقیقی اکھرا قالب **قائمہ الزاویہ** ہو گا۔

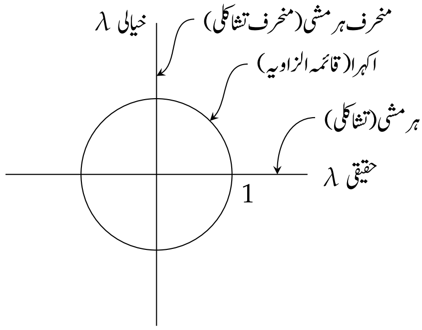
اس سے ظاہر ہے کہ ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکھرا قالب درحقیقت میں تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب کی بالترتیب عمومی صورتیں ہیں۔

امتیازی اقدار

ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکھرا قالبوں کے طیف (امتیازی اقدار) کا مخلوط λ سطح پر مقام شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔

---

[28] یہ قالب چارلس ہرمائٹ کے نام ہے۔
[29] Hermitian
[30] skew Hermitian
[31] Unitary



شکل 9.2: مخلوط λ سطح پر ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالبوں کے امتیازی اقدار کا مقام۔

مسئلہ 9.14: امتیازی اقدار
(الف) ہرمشی قالب (اور تشاکلی قالب) کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔
(ب) منحرف ہرمشی قالب (اور منحرف تشاکلی قالب) کے امتیازی اقدار خالص خیالی یا صفر (0) ہوں گے۔
(پ) اکہرا قالب (اور قائمہ الزاویہ قالب) کے امتیازی اقدار کی حتمی قیمت اکائی (1) ہو گی۔

ثبوت: فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر λ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ ہیں۔یوں $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ کو بائیں $\bar{\boldsymbol{x}}^T$ سے ضرب دیتے ہوئے $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}=\lambda\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ حاصل ہو گا۔اس کو $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lambda=\frac{\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}}{\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}} \tag{9.37}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ سے تقسیم کرنا اس لئے ممکن ہے کہ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا درج ذیل حقیقی اور غیر صفر ہو گا۔

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}=\bar{x}_1x_1+\cdots+\bar{x}_nx_n=x_1^2+\cdots+x_n^2$$

(الف) اگر $\boldsymbol{A}$ ہرمشی ہو تب $\bar{\boldsymbol{A}}^T=\boldsymbol{A}$ یعنی $\boldsymbol{A}^T=\bar{\boldsymbol{A}}$ ہو گا۔چونکہ $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}$ حقیقی ہے لہٰذا اس کا تبدیل محل لینے سے اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}=(\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax})^T=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^T\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}=(\overline{\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}}) \tag{9.38}$$

یوں $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}$ اپنے جوڑی دار مخلوط کے برابر ہے لہٰذا $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}$ حقیقی ہو گا ($\alpha+i\beta=\alpha-i\beta$ سے مراد $\beta=0$ ہے)۔یوں مساوات 9.37 سے λ حقیقی حاصل ہوتا ہے۔

(ب) اگر $\boldsymbol{A}$ منحرف ہرمشی ہو تب $\boldsymbol{A}^T = -\bar{\boldsymbol{A}}$ ہو گا اور مساوات 9.38 کی جگہ

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -(\overline{\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}) \tag{9.39}$$

حاصل ہو گا لہٰذا $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ خالص خیالی یا صفر (0) ہو گا [$\alpha + i\beta = -(\alpha - i\beta)$ سے مراد $\alpha = 0$ ہے]۔ یوں مساوات 9.37 سے λ خالص خیالی یا صفر (0) حاصل ہوتا ہے۔

(پ) فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ اکہرا قالب ہے۔اب $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ اور اس کے جوڑی دار مخلوط تبدیل محل $(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}})^T = (\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}})^T = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}^T$ کے بائیں اطراف آپس میں ضرب کرتے ہوئے اور ان کے دائیں اطراف آپس میں ضرب کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\lambda\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \lvert\lambda\rvert^2\,\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

اب $\boldsymbol{A}$ اکہرا ہے لہٰذا $\bar{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ ہو گا اور یوں بائیں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا۔

$$(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}^T\bar{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

اس طرح $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \lvert\lambda\rvert^2\,\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ ہو گا جس کو $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}(\neq 0)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\lvert\lambda\rvert^2 = 1$ ملتا ہے۔

یوں موجودہ مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مسئلہ 9.4 اور مسئلہ 9.8 کا ثبوت بھی مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 9.22: ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب مثال 9.21 میں دیے گئے ہیں۔ ان کے امتیازی اقدار درج ذیل ہیں۔

اندراج	قالب	امتیازی مساوات	امتیازی اقدار
(الف)	ہرمشی	$\lambda^2 + 4\lambda - 62 = 0$	$-2 + \sqrt{66},\ -2 - \sqrt{66}$
(ب)	منحرف ہرمشی	$\lambda^2 + i4\lambda + 26 = 0$	$i(-2 - \sqrt{30}),\ i(-2 + \sqrt{30})$
(پ)	اکہرا	$\lambda^2 - i\lambda - 1 = 0$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

اور $1 = \frac{1}{4}(1+3) = \left|\frac{1}{2}(i \mp \sqrt{3})\right|$ ہے۔ □

قائمہ الزاویہ قالب کے بنیادی خصوصیات (مثلاً اندرونی ضرب کی عدم تغیر، صفوں اور قطاروں کی معیاری قائمیت) اکہرا قالب میں بھی پائے جاتے ہیں۔

یہ دیکھنے کی خاطر R^n کی جگہ مخلوط سمتی فضا C^n لیتے ہیں۔ایسے مخلوط سمتیات کی اندرونی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے (مخلوط جوڑی دار پر لکیر ہے)۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{b} \tag{9.40}$$

ایسے مخلوط سمتیہ کی لمبائی یا **معیار** (جس کی تعریف درج ذیل ہے) حقیقی عدد ہو گا۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{a}} = \sqrt{\bar{a}_1 a_1 + \cdots + \bar{a}_n a_n} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \tag{9.41}$$

مسئلہ 9.15: اندرونی ضرب کی عدم تغیر
اکہرا تبادلہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ جہاں $\boldsymbol{A}$ اکہرا قالب ہے، اندرونی ضرب (مساوات 9.40) کی قیمت برقرار رکھتا ہے لہٰذا یہ معیار (مساوات 9.41) کی قیمت بھی برقرار رکھتا ہے۔

ثبوت: یہ مسئلہ حصہ 9.3 میں دیے گئے مسئلہ 9.5 کی عمومی صورت ہے۔یوں اس مسئلے کا ثبوت بالکل مسئلہ 9.5 کی ثبوت کی طرح ہے یعنی:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{v} = (\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{a}}^T \bar{\boldsymbol{A}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

□

حقیقی سمتیات کے معیاری قائمہ الزاویہ نظام کی مماثل معیاری مخلوط نظام کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اکہرا نظام
اکہرا نظام سے مراد ایسے مخلوط سمتیات کا نظام ہے جو درج ذیل پر پورا اترتے ہوں۔

$$\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_k = \bar{\boldsymbol{a}}_j^T \boldsymbol{a}_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \tag{9.42}$$

مسئلہ 9.6 کی مخلوط صورت درج ذیل ہے۔

مسئلہ 9.16: سمتیات صف اور سمتیات قطار کا اکہرا نظام
مخلوط چکور قالب صرف اور صرف اس صورت اکہرا ہو گا جب اس کے سمتیات صف (اور سمتیات قطار) اکہرا نظام بناتے ہوں۔

ثبوت : اس کا ثبوت مسئلہ 9.6 کی ثبوت کی طرح ہے بس یہاں جوڑی دار مخلوط سمتیات پر لکیر لگائی جائے گی۔یوں $\bar{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جائے گا جیسے مساوات 9.40 اور مساوات 9.42 میں لگائے گئے ہیں۔

□

مسئلہ 9.17: مقطع اکہرا قالب
اکہرا قالب $\boldsymbol{A}$ کے مقطع کی حتمی قیمت اکائی (1) ہو گی یعنی $1 = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A}$ ہو گا۔

ثبوت : اس کا ثبوت مسئلہ 9.7 کی ثبوت کی طرح ہے۔

$$
\begin{aligned}
1 &= \text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}^T) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\bar{\boldsymbol{A}}^T) \\
&= (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\bar{\boldsymbol{A}}) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\overline{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}}) = \left|\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}\right|^2
\end{aligned} \tag{9.43}
$$

یوں $1 = \left|\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}\right|$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{A}$ اب مخلوط ہو سکتا ہے۔

□

تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کی امتیازی اساس کو موجودگی مسئلہ 9.10 بیان کرتی ہے جس کا مماثل مسئلہ درج ذیل ہے۔

مسئلہ 9.18: امتیازی سمتیات کی اساس
ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب کے امتیازی سمتیات C^n کی اساس ہے۔ یہ امتیازی سمتیات اکہرا نظام بناتے ہیں۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہر مشی اور منخرف ہر مشی صورتیں

دو درجی صورت (حصہ 9.4) کے تصور کو وسعت دے کر اس کو مخلوط کے لئے بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم مساوات 9.37 میں شمار کنندہ $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کو $\boldsymbol{x}$ کے ارکان x_1 ، $\cdots$ ، x_n ، جو اب مخلوط بھی ہو سکتے ہیں، کی صورت کہتے ہیں۔ یہ صورت (درج ذیل) n^2 ارکان پر مشتمل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\bar{x}_j x_k \\
&= \quad a_{11}\bar{x}_1x_1 + a_{12}\bar{x}_1x_2 + \cdots + a_{1n}\bar{x}_1x_n \\
&\quad + a_{21}\bar{x}_2x_1 + a_{22}\bar{x}_2x_2 + \cdots + a_{2n}\bar{x}_2x_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n1}\bar{x}_nx_1 + a_{n2}\bar{x}_nx_2 + \cdots + a_{nn}\bar{x}_nx_n
\end{aligned} \tag{9.44}
$$

$\boldsymbol{A}$ کو **عددی سر قالب** کہتے ہیں۔ اگر $\boldsymbol{A}$ ہر مشی ہو تب اس صورت کو **ہرمشی صورت** کہیں گے اور اگر $\boldsymbol{A}$ منخرف ہر مشی ہو تب اس کو **منحرف ہرمشی صورت**
فرہنگمنحرف ہر مشی! صورت کہیں گے۔ ہر مشی صورت کا قدر حقیقی ہو گا جبکہ منخرف ہر مشی کا قدر خالص خیالی یا صفر (0) ہو گا۔ یہ حقائق مساوات 9.38 اور مساوات 9.39 سے ظاہر ہیں جو طبیعیات کے میدان میں ان صورتوں کی اہمیت کا باعث بنتے ہیں۔ دھیان رہے کہ مساوات 9.38 اور مساوات 9.39 کسی بھی سمتیات کے لئے درست ہیں چونکہ ان کے ثبوت میں ہم نے $\boldsymbol{x}$ کو امتیازی سمتیہ تصور نہیں کیا تھا بلکہ صرف اتنا فرض کیا تھا کہ $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{c}$ حقیقی اور غیر صفر ہے۔

مثال 9.23: **ہرمشی صورت**
فرض کریں کہ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1-i & i4\end{bmatrix}^T$ ہے اور مثال 9.21 کا $\boldsymbol{A}$ استعمال کرتے ہیں تب درج ذیل ہو گا۔

$$
\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1+i & -i4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4+i5\\ -4-i5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-i\\ i4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+i & -i4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-17-i19\\ -9-i29\end{bmatrix} = -114
$$

□

ظاہر ہے کہ اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{x}$ حقیقی ہوں تب مساوات 9.44 **دو درجی صورت** دے گا۔

سوالات

سوال 9.69 تا سوال 9.73 میں دریافت کریں کہ آیا دیا گیا قالب ہرمشی، منحرف ہرمشی یا اکہرا ہے۔ان کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات بھی دریافت کریں۔

سوال 9.69: $\begin{bmatrix} 3 & i2 \\ -i2 & 6 \end{bmatrix}$

جوابات: ہرمشی، $7, [1 \quad -i2]^T; \quad 2, [1 \quad \frac{i}{2}]^T$

سوال 9.70: $\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: منحرف ہرمشی، $-i, [1 \quad 1-i]^T; \quad i2, [1 \quad -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}]^T$

سوال 9.71: $\begin{bmatrix} i\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & i\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

جوابات: اکہرا، $-\frac{3}{3}+i\frac{4}{5}, [1 \quad -1]^T; \quad \frac{3}{3}+i\frac{4}{5}, [1 \quad 1]^T$

سوال 9.72: $\begin{bmatrix} 0 & i3 \\ i3 & i0 \end{bmatrix}$

جوابات: منحرف ہرمشی، $-i3, [1 \quad -1]^T; \quad i3, [1 \quad 1]^T$

سوال 9.73: $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & -i2 \end{bmatrix}$

جوابات: منحرف ہرمشی، $i(-\sqrt{2}-1), [0 \quad 1 \quad -\sqrt{2}-1]^T;$
$i(\sqrt{2}-1), [0 \quad 1 \quad \sqrt{2}-1]^T; \quad i, [1\ 0\ 0]^T$

سوال 9.74: **پالی قالب چکر**

درج ذیل **پالی قالب چکر**[32] کہلاتے ہیں۔

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9.45}$$

[32] Pauli spin matrices

پالی قالب چکر[33] کے درج ذیل تعلقات ثابت کریں۔

$$S_x S_y = iS_z, \quad S_y S_x = -iS_z, \quad S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = I^2 \tag{9.46}$$

جواب: $S_x S_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = iS_z$

$$S_x^2 = S_x S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

سوال 9.75: امتیازی سمتیات
مثال 9.21 میں دیے گئے قالب A ، B اور C کے امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

جوابات: $A: \; \begin{bmatrix} 1 & 1.28+i1.6 \end{bmatrix}^T, \; \begin{bmatrix} 1 & -0.305-i0.381 \end{bmatrix}^T$
$B: \; \begin{bmatrix} 1 & -2.09-i4.19 \end{bmatrix}^T, \; \begin{bmatrix} 1 & -0.09+i0.19 \end{bmatrix}^T \quad C: \; \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \; \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

سوال 9.76 تا سوال 9.79 مخلوط صورتوں کے سوالات ہیں۔کیا ان میں A ہر مشی ہے یا منحرف ہر مشی ہے؟ ان سوالات میں $\bar{x}^T A x$ حاصل کریں۔

سوال 9.76: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i2 \\ 2+i2 & -4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i2 \\ -4+i2 \end{bmatrix}^T$

جوابات: ہر مشی، -20

سوال 9.77: $A = \begin{bmatrix} 0 & -3+i2 \\ 3+i2 & i \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ i3 \end{bmatrix}^T$

جوابات: منحرف ہر مشی، $-i27$

سوال 9.78: $A = \begin{bmatrix} i2 & 1 & 4+i3 \\ -1 & 0 & i5 \\ -4+i3 & i5 & -i \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}^T$

جوابات: منحرف ہر مشی، $-i7$

[33] آسٹریا کے ماہر طبیعیات اور نوبل انعام یافتہ ولفگنگ ارنسٹ پالی [1900-1958]

سوال 9.79:
$$A=\begin{bmatrix}1 & i & 5\\ -i & -2 & 0\\ 5 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}1\\ -i\\ i\end{bmatrix}^T$$

جوابات: ہر مشی، 4

سوال 9.80 تا سوال 9.85 عمومی سوالات ہیں۔

سوال 9.80: ضرب
کسی بھی $n\times n$ ہر مشی A ، منحرف ہر مشی B اور اکہرا C کے لئے درج ذیل ثابت کریں۔
$$(\overline{ABC})^T=-C^{-1}BA$$

جواب: $(\overline{ABC})^T=\bar{C}^T\bar{B}^T\bar{A}=C^{-1}(-B)A$

سوال 9.81: ضرب
کسی بھی $n\times n$ ہر مشی A اور منحرف ہر مشی B کے لئے درج ذیل ثابت کریں۔
$$(\overline{AB})^T=-BA$$

جواب: $(\overline{AB})^T=\bar{B}^T\bar{A}=-BA$

سوال 9.82: ثابت کریں کہ کسی بھی قالب A کو ہر مشی قالب H اور منحرف ہر مشی قالب S کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

جواب: $A=H+S$, $\quad H=\frac{1}{2}(A+\bar{A}^T),\quad S=\frac{1}{2}(A-\bar{A}^T)$

سوال 9.83: اکہرا قالب
ثابت کریں کہ $n\times n$ جسامت کے دو اکہرا قالبوں کا حاصل ضرب بھی اکہرا قالب ہو گا۔

جواب: $(AB)(\overline{AB})^T=AB\bar{B}^T\bar{A}^T=ABB^{-1}A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$

سوال 9.84: اکہرا قالب
اکہرا قالب کا طاقت استعمال میں بہت آسان ثابت ہوتا ہے۔ثابت کریں کہ $C^5=I$ ہو گا۔

جواب: سوال 9.83 کے نتیجے کے بار بار استعمال اور $A=B=C$ لیتے ہوئے ثابت ہو گا۔

سوال 9.85: ثابت کریں کہ ہر مشی، منحرف ہر مشی اور اکہرا قالب $A\bar{A}^T=\bar{A}^TA$ پر پورا اترتے ہیں۔

جواب: ہر مشی کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ $(\bar{A}^T)A=AA=A(\bar{A}^T)$

باب 10

سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل

10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان

غیر سمتی تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو فضا میں کسی سلسلہ نقاط کے ہر نقطے پر معین ہو اور جہاں تفاعل کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں جن کا دارومدار صرف فضا میں نقطوں پر ہو نا کہ چنی گئی محوری نظام پر۔ان نقطوں کے سلسلے کو تفاعل کا **دائرہ کار**[1] کہتے ہیں۔ عملی استعمال میں تفاعل f کا دائرہ کار D عموماً منحنی یا سطح یا فضا میں تین بُعدی خطہ ہو گا۔تفاعل f دائرہ کار D کے ہر نقطے کے ساتھ ایک غیر سمتی حقیقی عدد وابستہ کرتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ D میں **غیر سمتی میدان**[2] دیا گیا ہے۔

x ، y ، x متعارف کرنے سے تفاعل f کو ان محدد کی مدد سے $f(x,y,z)$ لکھا جا سکتا ہے، پس اتنا یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ P پر تفاعل f کی قیمت، چنی گئی محددی نظام پر ہر گز منحصر نہیں ہو گی۔اس حقیقت کو ظاہر کرنے کی خاطر $f(x,y,z)$ کی جگہ عموماً $f(P)$ لکھا جاتا ہے۔تفاعل f وقت پر بھی منحصر ہو سکتا ہے۔

مثال 10.1: غیر سمتی تفاعل

غیر تغیر پذیر نقطہ P_0 سے کسی نقطہ P کا فضا میں فاصلہ غیر سمتی تفاعل ہے جس کا دائرہ کار D پوری فضا

domain[1]
scalar field[2]

ہے۔ $f(P)$ فضا میں غیر سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر کارتیسی نظام محدد میں P_0 کے محدد x_0 ، y_0 ، z_0 اور P کے محدد x ، y ، z ہوں تب f درج ذیل ہو گا۔

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

نظام محدد تبدیل کرنے سے عموماً P_0 اور P کے محدد تبدیل ہوں گے لیکن $f(P)$ کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی لہٰذا $f(P)$ غیر سمتی تفاعل ہے۔ □

مثال 10.2: غیر سمتی میدان
کسی جسم کے اندر درجہ حرارت T غیر سمتی تفاعل ہے جو غیر سمتی میدان (یعنی جسم میں درجہ حرارت) تعین کرتا ہے۔ □

اگر فضا میں سلسلہ نقاط کے ہر نقطے P کے ساتھ سمتیہ $\boldsymbol{v}(P)$ وابستہ کیا جائے تب ہم کہتے ہیں کہ ان نقاط پر **سمتی میدان**[3] دیا گیا ہے اور $\boldsymbol{v}(P)$ **سمتی تفاعل**[4] کہلاتا ہے۔ یہ سلسلہ نقاط کسی منحنی یا سطح یا حجم میں پایا جا سکتا ہے۔

کارتیسی نظام محدد میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\boldsymbol{i} + v_2(x, y, z)\boldsymbol{j} + v_3(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{v}$ کی قیمت اس نقطے پر منحصر ہے نا کہ نظام محدد پر۔

مثال 10.3: **سمتی میدان (سمتی میدان رفتار)**
گھومتے ہوئے جسم B کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v}(P)$ کو **سمتی میدان رفتار** کہتے ہیں۔ گھومتے جسم کی محور پر کارتیسی محدد کا مبدا رکھتے ہوئے جسم پر کسی نقطہ N کی سمتی رفتار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (صفحہ 527 پر مثال 7.13 دیکھیں)

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \tag{10.1}$$

جہاں لمحہ غور پر نقطہ N کے محدد x ، y ، z ہیں۔اگر کارتیسی z محور عین جسم کی محور پر واقع ہو اور $\boldsymbol{\omega}$ مثبت z محور کے رخ ہو تب $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ لکھا جائے گا۔یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{bmatrix} = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}) \tag{10.2}$$

---

[3] vector field
[4] vector function

□

مثال 10.4: سمتی میدان (میدان قوت)
فرض کریں کہ کمیت M مستقل طور پر فضا میں نقطہ N_0 پر موجود ہے جبکہ کمیت m فضا میں کسی بھی نقطہ N پر موجود ہو سکتا ہے۔ اب نیوٹن قانون تجاذب کے تحت m پر قوت کشش

$$|\boldsymbol{f}| = \frac{GMm}{r^2} \tag{10.3}$$

عمل کرے گی جہاں $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kgs^2}$ تجاذبی مستقل ہے اور r ان جسموں کے مابین فاصلہ ہے۔یہاں $\boldsymbol{v}$ فضا میں سمتی میدان دیتا ہے۔اگر ہم کارتیسی محدد کو یوں چنیں کہ N_0 کے محدد x_0 ، y_0 ، z_0 ہوں اور N کے محدد x ، y ، z ہوں تب مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \qquad (r \geq 0)$$

ہو گا۔ اب $r > 0$ فرض کرتے ہوئے سمتیہ

$$\boldsymbol{r} = (x-x_0)\boldsymbol{i} + (y-y_0)\boldsymbol{j} + (z-z_0)\boldsymbol{k} \tag{10.4}$$

متعارف کرتے ہوئے $r = |\boldsymbol{r}|$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{f}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ ہو گا جہاں منفی کی علامت اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ قوت کشش N_0 سے N کی رخ کو ہے۔یوں درج ذیل لکھ جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{f}|\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -GMm\left[\frac{x-x_0}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\boldsymbol{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\boldsymbol{k}\right] \tag{10.5}$$

یہ سمتی تفاعل m پر قوت کشش دیتا ہے۔ □

10.2 سمتی علم الاحصاء

علم الاحصاء کے بنیادی تصورات مثلاً ارتکاز، استمراریت اور تفرق پذیری کو بالکل فطری طور پر سمتی علم الاحصاء کے لئے بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

سمتیات $\boldsymbol{a}_{(n)}$ ، جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے، کا لامتناہی تسلسل اس صورت مرکوز تصور کیا جاتا ہے جب ایسا سمتیہ $\boldsymbol{a}$ موجود ہو کہ درج ذیل درست ہو۔

$$\lim_{n\to\infty}\left|\boldsymbol{a}_{(n)} - \boldsymbol{a}\right| = 0 \tag{10.6}$$

$\boldsymbol{a}$ کو اس تسلسل کا **تحدیدی سمتیہ**[5] کہتے ہیں جسے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_{(n)} = \boldsymbol{a} \tag{10.7}$$

کارتیسی نظام محدد استعمال کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ سمتیات کا تسلسل اس صورت سمتیہ $\boldsymbol{a}$ پر مرتکز ہو گا جب تسلسل کے تین کارتیسی ارکان کا تسلسل بالترتیب $\boldsymbol{a}$ کے تین کارتیسی ارکان پر مرتکز ہوں۔

اسی طرح اگر حقیقی متغیر t پر مبنی سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ نقطہ t_0 کی پڑوس[6] میں معین ہو (جبکہ t_0 پر یہ غیر معین ہو سکتا ہے) تب t کا t_0 کے قریب تر ہونے سے تفاعل کی حد[7] $\boldsymbol{l}$ سے مراد درج ذیل ہے

$$\lim_{t\to t_0}\left|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{l}\right| = 0 \tag{10.8}$$

جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{l} \tag{10.9}$$

سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت $t = t_0$ پر **استمراری** تصور کیا جاتا ہے جب یہ t_0 کی پڑوس میں معین ہو اور درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t_0) \tag{10.10}$$

کارتیسی نظام محدد میں تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ درج لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{u}(t) = u_1(t)\boldsymbol{i} + u_2(t)\boldsymbol{j} + u_3(t)\boldsymbol{k} \tag{10.11}$$

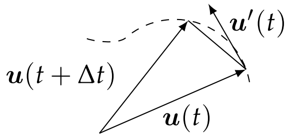
اور t_0 پر $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت استمراری ہو گا جب اس کے تینوں کارتیسی اجزاء t_0 پر استمراری ہوں۔

---

[5] limit vector

[6] پڑوس سے مراد t محور پر ایسا وقفہ ہے جس کے اندر t_0 پایا جاتا ہو۔

[7] limit



شکل 10.1: سمتی تفاعل کا تفرق

تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ نقطہ t پر اس صورت **قابل تفرق** ہو گا جب درج ذیل حد موجود ہو۔

$$\boldsymbol{u}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t)}{\Delta t} \tag{10.12}$$

$\boldsymbol{u}'(t)$ کو $\boldsymbol{u}(t)$ کا **تفرق**[8] کہتے ہیں (شکل 10.1)۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر سمتیہ $\boldsymbol{u}(t)$ کی نوک کو آزاد متغیرہ t کے لئے وقفہ t تا $t+\Delta t$ ظاہر کرتی ہے۔

کارتیسی نظام محدد استعمال کرتے ہوئے نقطہ t پر $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس نقطے پر درج ذیل تینوں تفرق موجود ہوں۔

$$u'_m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u_m(t+\Delta t) - u_m(t)}{\Delta t} \qquad (m = 1, 2, 3)$$

یوں سمتیہ تفاعل کا تفرق لینا اس کے تینوں ارکان کا علیحدہ علیحدہ تفرق لینے کے مترادف ہے یعنی:

$$\boldsymbol{u}'(t) = u'_1(t)\boldsymbol{i} + u'_2(t)\boldsymbol{j} + u'_3(t)\boldsymbol{k} \tag{10.13}$$

تفرق کے جانی پہچانی اصولوں کے مطابقتی اصول سمتیہ تفاعل کے تفرق کے لئے بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں مثلاً

$$(c\boldsymbol{u})' = c\boldsymbol{u}' \text{ (} c \text{ مستقل ہے)}, \qquad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}' \tag{10.14}$$

اور

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}' \tag{10.15}$$

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}' \tag{10.16}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2} \tag{10.17}$$

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w})' = (\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}') \tag{10.18}$$

---

[8] derivative

چونکہ سمتی ضرب غیر قابل تبادل ہے لہٰذا مساوات 10.16 میں سمتیات کی ترتیب برقرار رکھنا لازم ہے۔

مثال 10.5: مستقل لمبائی کے تفاعل کا تفرق
اگر تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ کی لمبائی مستقل ہو یعنی $\left|\boldsymbol{u}(t)\right| = c$ تب $|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = c^2$ ہو گا اور مساوات 10.15 کی مدد سے $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})' = 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' = 0$ حاصل ہو گا جس کے تحت مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل کا تفرق یا صفر سمتیہ ہو گا اور یا یہ $\boldsymbol{u}(t)$ کے قائمہ الزاویہ ہو گا۔ □

درج بالا گفتگو سے سمتی تفاعل کی جزوی تفرق کے اصول حاصل کرتے ہیں۔اگر کسی سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

کے اجزاء n عدد متغیرات t_1، $\cdots$، t_n کے ساتھ قابل تفرق ہوں تب t_1 کے ساتھ $\boldsymbol{u}$ کے جزوی تفرق کو $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t_1}$ سے ظاہر کیا جائے گا جو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u_2}{\partial t_1}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u_3}{\partial t_1}\boldsymbol{k}$$

اسی طرح دیگر جزوی تفرقات لکھے جا سکتے ہیں مثلاً:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t_m \partial t_n} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t_m \partial t_n}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t_m \partial t_n}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_3}{\partial t_m \partial t_n}\boldsymbol{k}$$

مثال 10.6: جزوی تفرق
سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t_1, t_2) = a\cos\omega t_1\boldsymbol{i} + a\sin\omega t_1\boldsymbol{j} + t_2\boldsymbol{k}$ کے جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_1} = a\omega(-\sin\omega t_1\boldsymbol{i} + \cos\omega t_1\boldsymbol{j}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_2} = \boldsymbol{k}$$

تفاعل $\boldsymbol{r}$ ایسی نلکی سطح کو ظاہر کرتا ہے جس کا رداس a ہے اور محور z محور ہے۔ □

سوالات

سوال 10.1 تا سوال 10.5 میں برابر سطح $f = c$ کیا ہو گا جہاں c مستقل ہے۔

سوال 10.1: $f = x + y + z$
جواب: متوازی سطحیں

سوال 10.2: $f = x^2 + y^2 + z^2$
جواب: ہم مرکز کرہ

سوال 10.3: $f = x^2 + y^2$
جواب: کارتیسی z کے ہم محوری نلکی سطحیں

سوال 10.4: $f = 4x^2 + 5y^2$
جواب: کارتیسی z کے ہم محوری نلکی ترخیم سطحیں

سوال 10.5: $f = x^2 + y^2 - z$
جواب: قطع مکافی نما سطحیں

xy سطح پر سمتیہ $\boldsymbol{v}$ سوال 10.6 تا سوال 10.9 میں دیا گیا ہے۔وہ سطح دریافت کریں جس پر $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی مستقل ہو۔وہ سطح دریافت کریں جس پر $\boldsymbol{v}$ کی یکساں سمت ہو۔

سوال 10.6: $\boldsymbol{v} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j}$
جوابات: $4x^2 + 9y^2 =$ مستقل، $\frac{y}{x} =$ مستقل

سوال 10.7: $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + \sqrt{y}\boldsymbol{j}$
جوابات: $x^4 + y =$ مستقل، $\frac{\sqrt{y}}{x^2} =$ مستقل

سوال 10.8: $\boldsymbol{v} = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$
جوابات: $x^2 + y^2 =$ مستقل، $\frac{2xy}{x^2 - y^2} =$ مستقل

سوال 10.9: $\boldsymbol{v} = (x + y)\boldsymbol{i} + (x - y)\boldsymbol{j}$
جوابات: $x^2 + y^2 =$ مستقل، $\frac{x-y}{x+y} =$ مستقل

سوال 10.10 تا سوال 10.18 میں $\boldsymbol{u}$ دیا گیا ہے۔آپ سے التماس ہے کہ $\boldsymbol{u}'$ اور $\boldsymbol{u}''$ دریافت کریں۔

سوال 10.10: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t^2$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2\boldsymbol{b}t,\ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{b}$

سوال 10.11: $t\boldsymbol{i} + (t^2+2)\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{j}$

سوال 10.12: $4\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = -4\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}'' = -4\cos t\,\boldsymbol{i} - 2\sin t\,\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}$

سوال 10.13: $4\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} - 3t\,\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = -4\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j} - 3\,\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{u}'' = -4\cos t\,\boldsymbol{i} - 2\sin t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.14: $t^2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2t\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{i}$

سوال 10.15: $\cos 2t\,\boldsymbol{i} - 3\sin 2t\,\boldsymbol{j} + t^2\,\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = -2\sin 2t\,\boldsymbol{i} - 6\cos 2t\,\boldsymbol{j} + 2t\,\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{u}'' = -4\cos 2t\,\boldsymbol{i} + 12\sin 2t\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}$

سوال 10.16: $e^t\,\boldsymbol{i} - 2e^{-3t}\,\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = e^t\,\boldsymbol{i} + 6e^{-3t}\,\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}'' = e^t\,\boldsymbol{i} - 18e^{-3t}\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.17: $e^{-t}(\cos t\,\boldsymbol{i} - \sin t\,\boldsymbol{j})$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = e^{-t}[-(\cos t + \sin t)\,\boldsymbol{i} - (\cos t - \sin t)\,\boldsymbol{j}],\ \boldsymbol{u}'' = e^{-t}(2\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j})$

سوال 10.18: $t^2(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2t(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}),\ \boldsymbol{u}'' = 2(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})$

سوال 10.19 تا سوال 10.23 میں $\boldsymbol{u} = t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{v} = t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 10.19: $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})'$
جواب: $4t^3$

سوال 10.20: $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})'$
جواب: $-t^4\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.21: $[\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})]'$
جواب: $-8t^3\boldsymbol{i} - (7t^6 + 5t^4 - 6t^2)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

سوال 10.22: $[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}]'$
جواب: $(6t^2 - 7t^6)\boldsymbol{j} + (4t - 6t^5)\boldsymbol{k}$

سوال 10.23: $[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]'$
جواب: $-15t^4-3t^2$

سوال 10.24 تا سوال 10.29 میں دیے گئے سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ کا x ، y اور z کے ساتھ جزوی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.24: $x\boldsymbol{i}+3y\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{i},\ 3\boldsymbol{k},\ 0$

سوال 10.25: $(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}$
جوابات: $2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j},\ -2y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j},\ 0$

سوال 10.26: $x^2\boldsymbol{i}-3y^2\boldsymbol{j}+2z^2\boldsymbol{k}$
جوابات: $2x\boldsymbol{i},\ -6y\boldsymbol{j},\ 4z\boldsymbol{k}$

سوال 10.27: $xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$
جوابات: $y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k},\ x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j},\ y\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$

سوال 10.28: $(x+y)\boldsymbol{i}+(y+z)\boldsymbol{j}+(z+x)\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 10.29: $x^2y\boldsymbol{i}+y^2z\boldsymbol{j}+z^2x\boldsymbol{k}$
جوابات: $2xy\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{k},\ x^2\boldsymbol{i}+2yz\boldsymbol{j},\ y^2\boldsymbol{j}+2xz\boldsymbol{k}$

سوال 10.30: $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})''$ اور $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})''$ کے لئے مساوات 10.15 اور مساوات 10.16 کی طرز کے کلیات دریافت کریں۔

جوابات: $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})''=\boldsymbol{u}''\cdot\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}''$,
$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})''=\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}''$

سوال 10.31: ثابت کریں کہ $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)'=\frac{\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}')}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{\frac{3}{2}}}$
جواب: $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)'=\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}}\right)'$ لکھتے ہوئے مساوات 10.17 کا استعمال کریں۔

(ب) سیدھی لکیر کا مقدار معلوم خط

(الف) منحنی مقدار معلوم

شکل 10.2: سیدھی لکیر اور منحنی کے مقدار معلوم خطوط۔

10.3 منحنی

کارتیسی نظام میں منحنی C کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (شکل 10.2-الف)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{10.19}$$

آزاد حقیقی متغیرہ t کی ہر قیمت t_0 کا C پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کے محدد $x(t_0)$ ، $y(t_0)$ اور $z(t_0)$ تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ دیتا ہے۔ مساوات 10.19 کو C کی **منحنی مقدار معلوم**[9] کہتے ہیں جبکہ t کو **مقدار معلوم** کہتے ہیں۔ منحنی مقدار معلوم کی طرز پر منحنی کا اظہار نہایت عمدہ ثابت ہوتا ہے۔

فضا میں منحنی ظاہر کرنے کے دیگر طریقے

$$y = f(x), \quad z = g(x) \tag{10.20}$$

اور

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \tag{10.21}$$

ہیں۔ مساوات 10.20 میں $x = t$ پر کرتے ہوئے اس کو مساوات 10.19 کی طرح لکھ سکتے ہیں یعنی:

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j} + g(t)\boldsymbol{k}$$

مساوات 10.21 میں دو سطحوں کے مساوات دیے گئے ہیں جن کا ملاپ منحنی دیتا ہے۔

[9]parametric representation

مستوی منحنی[10] سے مراد ایسی منحنی ہے جو فضا میں کسی سطح مستوی پر پائی جاتی ہو۔غیر مستوی منحنی کو **خم دار منحنی**[11] کہتے ہیں۔

مثال 10.7: سیدھا خط
کسی بھی سیدھی لکیر L کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ مستقل سمتیات ہیں (شکل 10.2-ب)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = (a_1 + tb_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + tb_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + tb_3)\boldsymbol{k} \tag{10.22}$$

L نقطہ A سے گزرتی ہے جس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ ہے جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے رخ L ہو گا۔اگر $\boldsymbol{b}$ اکائی سمتیہ ہو تب اس کے ارکان **کوسائن رخ**[12] ہوں گے اور L پر کسی بھی نقطے کا A سے فاصلہ $|t|$ ہو گا۔ □

مثال 10.8: ترخیم، دائرہ
درج ذیل سمتی تفاعل xy سطح میں ترخیم کو ظاہر کرتا ہے جس کا مرکز کارتیسی نظام کے مبدا اور صدر محور x اور y محور پر ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + b\sin t\boldsymbol{j} \tag{10.23}$$

$x = a\cos t$ اور $y = b\sin t$ لیتے ہوئے $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ کے استعمال سے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0 \tag{10.24}$$

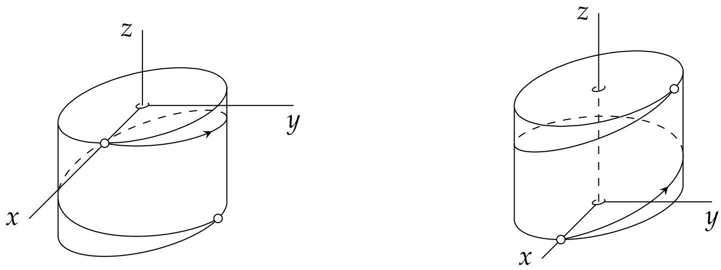
ملتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔اگر $a = b$ ہو تب مساوات 10.23 رداس a کی دائرے کی مساوات ہو گی۔
□

سوال 10.32: مبدا سے ہٹ کر دائرہ
xy سطح میں رداس r کا ایسا دائرہ جس کا مرکز نقطہ (x_0, y_0) پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1$$

---

[10] plane curve
[11] twisted curve
[12] direction cosines



(الف) دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا

(ب) بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا

شکل 10.3: پیچ دار لچھے (مثال 10.33)۔

$\frac{x-x_0}{r} = \cos t$ اور $\frac{y-y_0}{r} = \sin t$ لیتے ہوئے $x = x_0 + r\cos t$ اور $y = y_0 + r\sin t$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا اس دائرے کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + r\cos t)\boldsymbol{i} + (y_0 + r\sin t)\boldsymbol{j} \tag{10.25}$$

سوال 10.33: پیچ دار لچھا

پیچ دار لچھے[13] کو

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k} \qquad (c \neq 0) \tag{10.26}$$

ظاہر کرتا ہے۔اس **خم دار منحنی** کو $c > 0$ (دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) اور $c < 0$ (بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کے لئے شکل 10.3 میں دکھایا گیا ہے۔

منحنی کے کچھ حصے کو عموماً **قوس**[14] کہتے ہیں۔اس کتاب میں ہم عموماً قوس کو بھی منحنی کہیں گے۔

ہم قطع منحنی اپنی آپ کو قطع کرتی ہے۔ نقطہ قطع کو منحنی کا **متعدد نقطہ**[15] کہتے ہیں (شکل 10.4)۔ ایسی منحنی جس کے متعدد نقطے نہ پائے جاتے ہوں **سادہ منحنی**[16] کہلاتی ہے۔

---

[13] circular helix
[14] arc
[15] multiple point
[16] simple curve

شکل 10.4: دوہرا نقطوں والے منحنی

مثال 10.9: سادہ اور غیر سادہ منحنی

ترخیم اور پیچ دار لچھے سادہ ترخیم کی مثالیں ہیں۔درج ذیل $t=1$ اور $t=-1$ پر مبدا سے دو مرتبہ گزرتی ہے لہٰذا یہ غیر سادہ منحنی کی مثال ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t)=(t^2-1)\boldsymbol{i}+(t^3-1)\boldsymbol{j}$$

□

آخر میں بتاتا چلوں کہ کسی بھی منحنی C کو کئی سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے مثلاً اگر C کو مساوات 10.19 ظاہر کرے تب ہم $t=h(t^*)$ لیتے ہوئے، جہاں مساوات 10.19 میں استعمال t کی تمام قیمتوں کے لئے $h(t^*)$ بھی پائے جاتے ہوں، C کو نئی سمتی تفاعل $\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*)=\boldsymbol{r}[h(t^*)]$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثال 10.10: مقدار معلوم کی تبدیلی

xy سطح میں قطع مکافی $y=x^2$ کو درج ذیل سمتیہ تفاعل ظاہر کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}\qquad(-\infty<t<\infty)\tag{10.27}$$

ہم $t=-2t^*$ لیتے ہوئے اس قطع مکافی کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*)=\boldsymbol{r}(-2t^*)=-2t^*\boldsymbol{i}+4t^{*2}\boldsymbol{j}$$

اگر ہم $t=t^{*2}$ لیں تب ہمیں درج ذیل نیا سمتی تفاعل ملتا ہے

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*)=t^{*2}\boldsymbol{i}+t^{*4}\boldsymbol{j}$$

لیکن $t^{*2}>0$ کی بنا یہ تفاعل قطع مکافی کو صرف ربع اول میں ظاہر کرتا ہے۔ □

سوالات

سوال 10.34 تا سوال 10.37 میں نقطہ A سے گزرتی ہوئی سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کے رخ سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.34: $A:(0,0,0),\quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}$

سوال 10.35: $A:(2,-3,1),\quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$
جواب: $\boldsymbol{r}=(t+2)\boldsymbol{i}+(2t-3)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 10.36: $A:(2,0,-3),\quad \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}+3(t-1)\boldsymbol{k}$

سوال 10.37: $A:(-3,2,6),\quad \boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{r}=(5t-3)\boldsymbol{i}+(3t+2)\boldsymbol{j}+(6-7t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.38 تا سوال 10.41 میں نقطہ A اور نقطہ B سے گزرتی ہوئی سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.38: $A:(0,0,0),\quad B:(1,1,1)$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$

سوال 10.39: $A:(-3,7,-5),\quad B:(2,0,3)$
جواب: $\boldsymbol{r}=(5t-3)\boldsymbol{i}+7(1-t)\boldsymbol{j}+(8t-5)\boldsymbol{k}$

سوال 10.40: $A:(1,2,-3),\quad B:(7,2,-3)$
جواب: $\boldsymbol{r}=(6t+1)\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

سوال 10.41: $A:(3,2,0),\quad B:(0,0,0)$
جواب: $\boldsymbol{r}=3(1-t)\boldsymbol{i}+2(1-t)\boldsymbol{j}$ جس میں $t^*=1-t$ چنتے ہوئے $\tilde{\boldsymbol{r}}=3t^*\boldsymbol{i}+2t^*\boldsymbol{j}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 10.42 تا سوال 10.46 میں دیے سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.42: $y = x, \quad z = 0$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}$

سوال 10.43: $y = -3x, \quad z = 2x$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$

سوال 10.44: $2y = 5x, \quad z = x - 3y$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + \frac{5}{2}\boldsymbol{j} - \frac{13}{2}\boldsymbol{k}$ یا $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + 5t\boldsymbol{j} - 13t\boldsymbol{k}$ جہاں t^* کی جگہ t ہی لکھا گیا ہے۔

سوال 10.45: $4x - y + z = 3, \quad -3x + 2y + 3z = 19$
جواب: y اور z حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + (3t+2)\boldsymbol{j} + (5-t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.46: $x - y = 2, \quad 2x + z = 3$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + (t-2)\boldsymbol{j} + (3-2t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.47 تا سوال 10.55 میں دیے خطوط کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.47: $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$
جواب: $\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}$

سوال 10.48: $y = x^3, \quad z = 0$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}$

سوال 10.49: $y = 2x^3, \quad z = -3x^2$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j} - 3t^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.50: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -9, \quad z = 0$
جواب: نقطہ $(2, -3)$ پر رداس 2 کا دائرہ $\boldsymbol{r} = (2 + 2\cos t)\boldsymbol{i} + (-3 + 2\sin t)\boldsymbol{j}$

سوال 10.51: $4(x+1)^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$
جواب: $\boldsymbol{r} = (-1 + 2\cos t)\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{j}$

سوال 10.52: $x = -5y^2, \quad z = 2y^3$
جواب: $\boldsymbol{r} = -5t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + 2t^3\boldsymbol{k}$

سوال 10.53: $y = \sqrt{x}, \quad z = y - 2,$
جواب: $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (t-2)\boldsymbol{k}$

سوال 10.54: xy سطح میں درج ذیل ترخیم کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

جواب: $\boldsymbol{r} = (x_0 + a\cos t)\boldsymbol{i} + (y_0 + b\sin t)\boldsymbol{j}$

سوال 10.55: $x^2 + y^2 = 4, \quad z = e^{-x}$
جواب: $\boldsymbol{r} = 2\cos t\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}$

سوال 10.56: پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کا xy ، xz اور yz سطحوں پر عمودی سایہ کیا ہو گا؟

جوابات: xy میں دائرہ، xz میں کوسائن موج اور yz میں سائن موج

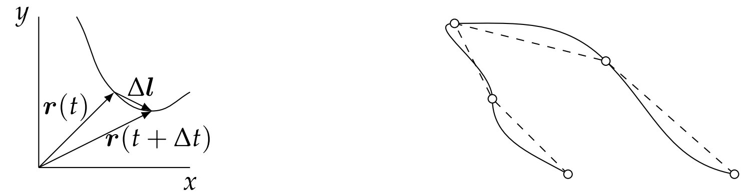
10.4 لمبائی قوس

سادہ منحنی C کی لمبائی کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ہم C (شکل 10.5-الف) کے دونوں سروں کے مابین متواتر (اختیاری) نقطوں کو n عدد (نقطہ دار) خط مستقیم سے یوں جوڑتے ہیں کہ $n \to \infty$ کی صورت میں لمبی ترین خط مستقیم کی لمبائی صفر کے قریب تر ہو گی۔تمام خط مستقیم کی لمبائیوں (جنہیں مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کیا جا سکتا ہے) کا مجموعہ لیتے ہیں۔اگر n کی بتدریج بڑھتی تعداد n_1 ، n_2 ، . . . لیتے ہوئے مطابقتی خط مستقیم کی لمبائیوں کے مجموعے کی ترتیب l_1 ، l_2 ، . . . مرکوز ہو جس کی حد l ہو تب ہم کہتے ہیں کہ C **قابل تصحیح**[17] ہے اور l کو C کی لمبائی[18] کہتے ہیں۔

اگر C از خود سادہ منحنی نہ ہو لیکن یہ محدود تعداد کے قابل تصحیح سادہ منحنیات پر مشتمل ہو تب C کی لمبائی سے مراد ان تمام منحنیات کی لمبائیوں کا مجموعہ ہو گا۔

---

[17] rectifiable
[18] length



(الف) لمبائی کی تعریف۔

(ب) استمراری قابل تفرق تفاعل کی لمبائی۔

شکل 10.5: لمبائی قوس

اگر C کو استمراری[19] قابل تفرق سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{10.28}$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب $\Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t+\Delta t) = \Delta \boldsymbol{r}$ ہو گا (شکل 10.5-ب) جس کو Δt سے تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $\Delta t \to 0$ کی صورت میں درج ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

کسی بھی سمتیہ کی طرح $\dot{\boldsymbol{r}}$ کی لمبائی $\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}$ ہو گی جس کو $\mathrm{d}t$ سے ضرب دیتے ہوئے تکمل لینے سے منحنی کی کل لمبائی حاصل ہو گی۔

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}\, \mathrm{d}t \qquad (\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}) \tag{10.29}$$

مساوات 10.29 سے حاصل لمبائی منحنی پر محددی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اگر ہم تکمل کی بالائی حد کو مستقل b کی جگہ متغیر t رکھیں تب حاصل تکمل از خود t کا تابع تفاعل ہو گا مثلاً $s(t)$۔ یوں تکمل کے متغیرہ کو t^* لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}\, \mathrm{d}t^* \qquad (\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^*}) \tag{10.30}$$

تفاعل $s(t)$ کو C **کا لمبائی قوس تفاعل یا** C **کی لمبائی قوس**[20] کہتے ہیں۔

[19] استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا تفرق موجود ہے اور یہ تفرق استمراری ہے۔ اسی طرح دوہرا استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا دوہرا تفرق موجود ہے اور یہ دوہرا تفرق استمراری ہے، وغیرہ وغیرہ

[20] arc length

اب تک کے بحث سے ظاہر ہے کہ جیومیٹریائی طور پر کسی مستقل $t = t_0 \geq a$ کے لئے $s(t_0)$ نقطہ $t = a$ اور نقطہ $t = t_0$ کے درمیان حصے کی لمبائی دیتا ہے۔یوں $t = t_0 < a$ کی صورت میں $s(t_0) < 0$ ہو گا لہٰذا لمبائی $-s(t_0)$ ہو گی۔

منحنی کی مقدار معلوم مساوات میں s بطور مقدار معلوم کردار ادا کر سکتا ہے اور جیسا ہم دیکھیں گے اس سے کئی کلیات سادہ صورت اختیار کرتے ہیں۔

مساوات 10.30 میں ابتدائی نقطہ a کی جگہ کوئی دوسرا مستقل لیا جا سکتا ہے یعنی نقطہ $s = 0$ کو ہم خود مختاری کے ساتھ چن سکتے ہیں۔ C پر جس طرف چلنے سے s بڑھتا ہے اس طرف کو C کی **مثبت دائری سمت**[21] کہتے ہیں۔یوں منحنی کی سمت بندی[22] کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ کسی بھی C کی سمت بندی دو طریقوں سے کی جا سکتی ہے۔مقدار معلوم کا اس طرح تبادلہ کہ اس کا تفرق منفی حاصل ہو سے دوسری سمت بندی حاصل ہو گی۔

مساوات 10.30 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{10.31}$$

روایتی طور پر عموماً

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

اور

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{10.32}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $\mathrm{d}s$ کو C کا **خطی جزو**[23] کہتے ہیں۔

مثال 10.11: لمبائی قوس بطور مقدار معلوم
دائرے کی صورت میں

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = -a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = a^2$$

---

[21] positive sense
[22] orientation
[23] linear element

ہو گا لہٰذا لمبائی قوس درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$s(t) = \int_0^t a \,\mathrm{d}t^* = at$$

یوں t کو s کا تفاعل $t(s) = \frac{s}{a}$ لکھتے ہوئے دائرے کی ایسی مساوات لکھتے ہیں جس میں s بطور مقدار معلوم ہو۔

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j} \qquad \text{گھڑی کی الٹ رخ}$$

اس مساوات میں $s = 0$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$ ملتا ہے جو نقطہ $(a, 0)$ کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح s کی قیمت بڑھا کر $s = \frac{\pi a}{2}$ کرنے سے $\boldsymbol{r} = 0\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}$ حاصل ہوتا ہے جو نقطہ $(0, a)$ کو ظاہر کرتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ s کی قیمت بڑھانے سے نقطہ دائرے پر رہتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔یوں اس دائرے کی سمت بندی گھڑی کی الٹ رخ ہے۔ہم $s = -\tilde{s}$ پر کرتے ہوئے دائرے کی سمت بندی گھڑی کے رخ رکھ سکتے ہیں۔یوں

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad \text{اور} \quad \sin(\alpha) = -\sin\alpha$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\boldsymbol{r}\left(-\frac{\tilde{s}}{a}\right) = a\cos\frac{\tilde{s}}{a}\boldsymbol{i} - a\sin\frac{\tilde{s}}{a}\boldsymbol{j} \qquad \text{گھڑی کی رخ}$$

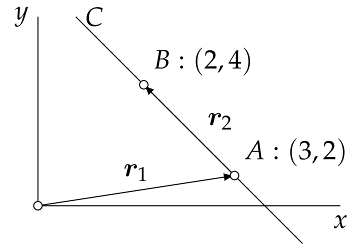
چونکہ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}} = -1 < 0$ ہے لہٰذا درج بالا میں گھڑی کے رخ چلتے ہوئے بڑھتا $\tilde{s}$ حاصل ہو گا۔ □

مثال 10.12: اکائی رداس کے دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + \sqrt{1 - t^2}\boldsymbol{j}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں جذر کی مثبت قیمت لی گئی ہے۔اس میں $t = 0$ پر کرنے سے $\boldsymbol{r} = 0\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ یعنی نقطہ $(0, 1)$ ملتا ہے جبکہ $t = 1$ پر کرنے سے $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$ یعنی نقطہ $(1, 0)$ ملتا ہے۔یوں t کی قیمت بڑھانے سے نقطہ دائرے پر گھڑی کی رخ گھومتا ہے لہٰذا یہ مساوات ایسے دائرے کی مساوات ہے جس کی سمت گھڑی کی رخ ہے۔یہ دائرے کی بالائی حصے (جہاں y مثبت ہے) کی مساوات ہے۔اسی دائرے کی نچھلی حصے کی مساوات

$$\boldsymbol{r} = t^*\boldsymbol{i} - \sqrt{1 - t^{*2}\boldsymbol{j}}$$



شکل 10.6: خط مستوی کی سمتی مساوات (مثال 10.14)۔

ہو گی جو $t^*=0$ پر $(1,0)$ اور $t^*=1$ پر $(0,-1)$ دیتی ہے۔ □

مثال 10.13: قوس مکافی $y=x^2$ کو

$$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}$$

لکھا جا سکتا ہے جو $t=0$ پر $\boldsymbol{r}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$ یعنی نقطہ $(0,0)$ اور $t=1$ پر $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ یعنی نقطہ $(1,1)$ دیتی ہے۔یوں درج بالا ایسی قوس مکافی کی مساوات ہے جس کی سمت گھڑی کی الٹ رخ ہے۔اس میں $t=-t^*$ پر کرنے سے گھڑی کی رخ قوس مکافی کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t)=-t^*\boldsymbol{i}+t^{*2}\boldsymbol{j}$$

ملتی ہے جو $t^*=0$ پر $(0,0)$ اور $t^*=1$ پر $(-1,1)$ دیتی ہے لہٰذا یہ گھڑی کی رخ قوس مکافی کی مساوات ہے۔ □

مثال 10.14: خط مستوی C کو شکل 10.14 میں دکھایا گیا ہے۔اس کی دو ممکنہ سمتیں ہیں۔آئیں بڑھتی y رخ میں اس خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ C پر کوئی ابتدائی نقطہ A چنتے ہیں جس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ ہے۔ابتدائی نقطے سے بڑھتی y رخ میں C پر کوئی دوسرا نقطہ B چنتے ہیں۔ A سے B تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2=(2-3)\boldsymbol{i}+(4-2)\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ ہے۔یوں بڑھتی y رخ C کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{r}_2=(3-t)\boldsymbol{i}+2(1+t)\boldsymbol{j}$$

ہو گی جو $t=0$ پر ابتدائی نقطہ $(3,2)$ دیتی ہے۔

اس مساوات میں $t = -t^*$ پر کرتے ہوئے گھٹتی y رخ C کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t^*) = (3+t^*)\boldsymbol{i} + 2(1-t^*)\boldsymbol{j}$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $t^* = -1$ پر کرنے سے نقطہ B حاصل ہو گا۔ □

سوالات

تمام سوالات میں لمبائی قوس دریافت کریں۔دیے تفاعل کا خط کھینچیں۔

سوال 10.57: لیزم: $x = 0$ سے $x = 1$ تک $\quad y = \cosh x, \quad z = 0,$

جواب: $\sinh 1$

سوال 10.58: پیچ دار لچھا: $(a,0,0)$ سے $(a,0,2\pi c)$ تک $\quad y = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k},$

جواب: $2\pi\sqrt{a^2+c^2}$

سوال 10.59: قطع مکافی: $(0,0,0)$ سے $(2,4,0)$ تک $\quad y = x^2, \quad z = 0,$

جواب: $\frac{\operatorname{arcsinh}(8)}{4} + 2\sqrt{65}$

سوال 10.60: چار دندان مستدیر: پوری لمبائی $\quad \boldsymbol{r} = a\cos^3 t\boldsymbol{i} + a\sin^3 t\boldsymbol{j},$

جواب:اس کو چار سادہ قابل تصحیح ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے $6a$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.61: : $(1,0,0)$ سے $(-1,\pi,0)$ تک $\quad \boldsymbol{r} = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j},$

جواب: $\frac{\pi^2}{2}$

سوال 10.62: $\boldsymbol{r} = e^t\cos t\,\boldsymbol{i} + e^t\sin t\,\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

جواب: $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

سوال 10.63: ثابت کریں کہ $x = a$ تا $x = b$ منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔(مساوات 10.29 کی مدد لیں۔)

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad (y' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}) \tag{10.33}$$

جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j}$ سے $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i} + \dot{f}\boldsymbol{j}$ اور $\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{1+\dot{y}^2}$ لکھ کر جواب حاصل کریں۔

سوال 10.64: درج بالا مساوات (سوال 10.63) کی مساوات استعمال کرتے ہوئے رداس r کے دائرے کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب: x محور کے بالائی جانب قوس کی مثبت دائری سمت بائیں سے دائیں ہے جبکہ محور کے نچلی جانب مثبت دائری سمت دائیں سے بائیں ہے۔یوں ایک بار $x = -1$ تا $x = 1$ اور دوسری بار $x = 1$ تا $x = -1$ تکمل لیں۔ کل لمبائی $2\pi r$ حاصل ہو گی۔

سوال 10.65: اگر منحنی کو کروی محدد میں $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ اور $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ سے ظاہر کیا جائے تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\phi^2$$

جواب: $x = \rho\cos\phi$ اور $y = \rho\sin\phi$ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \implies \mathrm{d}x = \cos\phi\,\mathrm{d}\rho - \rho\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\\
\mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \implies \mathrm{d}y = \sin\phi\,\mathrm{d}\rho + \rho\cos\phi\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

جنہیں مساوات 10.32 میں پر کرنے سے درکار نتیجہ ملتا ہے۔

سوال 10.65 میں دیا گیا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 10.66 تا سوال 10.70 میں لمبائی قوس دریافت کریں۔

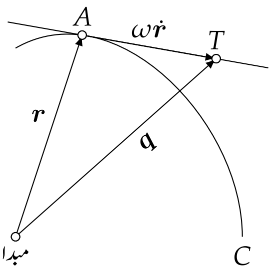
سوال 10.66: رداس r کے دائرے کی کل لمبائی۔
جواب: $2\pi r$

سوال 10.67: $\rho = e^{\phi}, \quad 0 \le \phi \le \pi$
جواب: $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

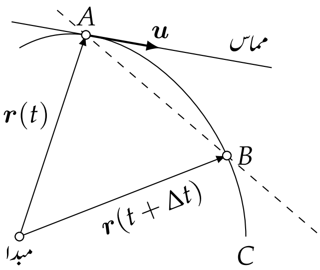
سوال 10.68: $\rho = \phi^2, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{(\pi^2+16)^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{8}{3}$

سوال 10.69: قلب نما $\rho = a(1-\cos\theta)$ (اس کا خط جو قلب نما ہے کو کھینچیں۔)
جواب: $8a$

سوال 10.70: $\rho = a(1+\cos\theta)$
جواب: $8a$



(ب) مماس الجبرائی اظہار



(الف) منحنی کا مماس

شکل 10.7: مماس اور اس کا اظہار

10.5 مماس، انحنا اور مروڑ

نقطہ A پر منحنی C کے مماس سے مراد A اور منحنی پر دوسرا نقطہ B سے گزرتے ہوا وہ سیدھا خط ہے جو B کو A کے قریب تر کرنے سے حاصل ہو گا (شکل 10.7-الف)۔

فرض کریں کہ C کو استمراری قابل تفرق تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں t کوئی بھی مقدار معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کریں کہ t اور $t+\Delta t$ بالترتیب A اور B دیتے ہیں۔ ان نقطوں سے گزرتا ہوا سیدھا خط L درج ذیل سمتیہ کے رخ ہو گا۔

$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

یوں اگر سمتیہ

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{10.34}$$

صفر سمتیہ نہ ہو تب اس کی سمت ہی نقطہ A پر مماس کی سمت ہو گی۔ یہ سمتیہ بڑھتے t کے رخ ہے۔ $\dot{\boldsymbol{r}}$ کو نقطہ A پر C کا **مماس**[24] کہتے ہیں جس کا مطابقتی اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا جس کو A پر C کا **اکائی سمتیہ مماس**[25] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} \tag{10.35}$$

---

tangent[24]
unit tangent vector[25]

اب اگر C کو $\boldsymbol{r}(s)$ سے ظاہر کیا جائے، جہاں s لمبائی قوس ہے، تب مساوات 10.31 کے تحت $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ اکائی سمتیہ ہو گا لہٰذا مساوات 10.35 درج ذیل دے گی۔

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{10.36}$$

شکل 10.7-ب سے ظاہر ہے کہ مماس پر کسی بھی نقطہ T کا تعین گر سمتیہ، A کے تعین گر سمتیہ اور A سے مماس کی سمت میں سمتیہ کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$\boldsymbol{q}(\omega) = \boldsymbol{r} + \omega\dot{\boldsymbol{r}} \tag{10.37}$$

جہاں ω حقیقی متغیرہ ہے۔

فرض کریں کہ منحنی C کو تین گنا استمراری قابل تفرق تفاعل[26] $\boldsymbol{r}(s)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں s لمبائی قوس ہے۔تب درج ذیل کو C کی **انحنا**[27] کہتے ہیں۔

$$\kappa(s) = \left|\boldsymbol{u}'(s)\right| = \left|\boldsymbol{r}''(s)\right| \qquad (\kappa \geq 0) \tag{10.38}$$

اگر $\kappa \neq 0$ ہو تب $\boldsymbol{u}'(s)$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p}$ درج ذیل ہو گا جس کو C کا **اکائی صدر عمودی سمتیہ**[28] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{u}'}{\kappa} \qquad (\kappa > 0) \tag{10.39}$$

صفحہ 716 پر مثال 10.5 کے نتیجے کے تحت $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{u}$ قائمہ الزاویہ ہوں گے۔درج ذیل کو C کا **دوہرا عمودی اکائی سمتیہ**[29] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{p} \qquad (\kappa > 0) \tag{10.40}$$

سمتی ضرب کی تعریف کے تحت $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ دائیں ہاتھ تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات ہوں گے (حصہ 7.3 اور حصہ 7.7)۔ ان تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات کو نقطہ غور پر C کا **سہ سطحی مجسم**[30] کہتے ہیں۔اس نقطے سے گزرتے ہوئے تین سیدھے خطوط جو $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے رخ ہوں کو بالترتیب C کا **مماس، صدر عمود اور دوہرا عمود** کہتے ہیں۔

---

[26] صفحہ 727 کے آخر پر حاشیہ دیکھیں
[27] curvature
[28] unit principal normal vector
[29] unit binormal vector
[30] trihedron

اگر تفرق b' صفر نہ ہو تب مثال 10.5 کے تحت یہ b کے عمودی ہو گا۔ساتھ ہی ساتھ یہ u کے بھی عمودی ہے۔درحقیقت اگر ہم $b \cdot u = 0$ کا تفرق لیں تو ہمیں $b' \cdot u + b \cdot u' = 0$ ملتا ہے۔اب چونکہ $b \cdot u' = 0$ ہے لہٰذا $b' \cdot u = 0$ ہو گا۔یوں b' کی صورت $b' = \alpha p$ ہو گی جہاں α غیر سمتی ہے۔روایتی طور پر $\alpha = -\tau$ لیا جاتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$b' = -\tau p \qquad (\kappa > 0) \tag{10.41}$$

غیر سمتی تفاعل τ کو C کی مروڑ[31] کہتے ہیں۔مساوات 10.41 کے دونوں اطراف کو p سے ضرب دینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\tau(s) = -p(s) \cdot b'(s) \tag{10.42}$$

درج بالا تصورات منحنیات کے استعمال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

مثال 10.15: پیچ دار لچھا

پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کی لمبائی $s = t\sqrt{a^2+c^2}$ حاصل ہوتی ہے لہٰذا پیچ دار لچھے کو

$$r(s) = a\cos\frac{s}{K}i + a\sin\frac{s}{K}j + c\frac{s}{K}k, \qquad K = \sqrt{a^2+c^2}$$

لکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
u(s) = r'(s) &= -\frac{a}{K}\sin\frac{s}{K}i + \frac{a}{K}\cos\frac{s}{K}j + \frac{c}{K}k \\
r''(s) &= -\frac{a}{K^2}\cos\frac{s}{K}i - \frac{a}{K^2}\sin\frac{s}{K}j \\
\kappa = \left|r''\right| &= \sqrt{r'' \cdot r''} = \frac{a}{K^2} = \frac{a}{a^2+c^2} \\
p(s) &= \frac{r''(s)}{\kappa(s)} = -\cos\frac{s}{K}i - \sin\frac{s}{K}j \\
b(s) = u(s) \times p(s) &= \frac{c}{K}\sin\frac{s}{K}i - \frac{c}{K}\cos\frac{c}{K}j + \frac{a}{K}k \\
b'(s) &= \frac{c}{K^2}\cos\frac{c}{K}i + \frac{c}{K^2}\sin\frac{s}{K}j \\
\tau(s) = -p(s) \cdot b'(s) &= \frac{c}{K^2} = \frac{c}{a^2+c^2}
\end{aligned}$$

---

[31] torsion

اس طرح پیچ دار لچھے میں مستقل انحنا اور مستقل مروڑ پایا جائے گا۔ اگر $c > 0$ (شکل 10.3-الف دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) ہو تب $\tau > 0$ ہو گا جبکہ $c < 0$ (شکل 10.3-ب بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کی صورت میں $\tau < 0$ ہو گا۔ یوں $\square$

چونکہ $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ غیر تابع سمتیات ہیں لہٰذا فضا میں کسی بھی سمتیہ کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{u}'$ ، $\boldsymbol{p}'$ اور $\boldsymbol{b}'$ موجود ہوں تب انہیں بھی ان غیر تابع سمتیات کی مدد سے (درج ذیل) لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad \boldsymbol{u} = \kappa \boldsymbol{p} \\
&\text{(ب)} \quad \boldsymbol{p}' = -\kappa \boldsymbol{u} + \tau \boldsymbol{b} \\
&\text{(پ)} \quad \boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{p}
\end{aligned}
\tag{10.43}
$$

مساوات 10.43-الف کو مساوات 10.39 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جبکہ مساوات 10.43-پ درحقیقت مساوات 10.41 ہے ۔ سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{u}$$

ان میں دایاں کلیہ کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 10.43-الف اور مساوات 10.43-پ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو مساوات 10.43-ب ہے۔

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{u}' = -\tau \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \times \kappa \boldsymbol{p} = -\tau(-\boldsymbol{b}) + \kappa(-\boldsymbol{u})$$

سوالات

سوال 10.71 تا سوال 10.74 میں نقطہ N پر دیے گئے تفاعل کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.71: $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}, \quad N : (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\omega)\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\omega)\boldsymbol{j}$

سوال 10.72: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} - t^3\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad N : (1, -1, 1)$

جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = (1+\omega)\boldsymbol{i} - (1+3\omega)\boldsymbol{j} + (1+2\omega)\boldsymbol{k}$

سوال 10.73: $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}, \quad N : (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\pi)$

جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\omega)\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\omega)\boldsymbol{j} + (\frac{3}{4}\pi + 3\omega)\boldsymbol{k}$

سوال 10.74: $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i} - 2\sin t\boldsymbol{j}, \quad N : (\sqrt{3}, -1)$
جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = (\sqrt{3} - \omega)\boldsymbol{i} - (1 + \sqrt{3}\omega)\boldsymbol{j}$

سوال 10.75: ثابت کریں کہ مثال 10.15 میں دیے گئے پیچ دار لچھے کی $\boldsymbol{u}$ اور z محور کے مابین زاویہ مستقل مقدار ہے۔

جواب: $\cos\alpha = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{k} = \frac{c}{a^2+c^2} =$ مستقل

سوال 10.76: ثابت کریں کہ صرف سیدھے خطوط واحد منحنی ہیں جن کے اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہیں۔

جواب: اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہونے کی صورت میں $r' = a\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + e\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں a ، c اور e مستقل قیمتیں ہیں۔ تکمل لینے سے منحنی کی عمومی مساوات $r = (at + b)\boldsymbol{i} + (ct + d)\boldsymbol{j} + (et + f)\boldsymbol{k}$ حاصل ہوتی ہے جو سیدھے خط کی عمومی مساوات ہے اور جہاں b ، d اور f تکمل کے مستقل ہیں۔

سوال 10.77: ثابت کریں کہ سیدھے خطوط کی انحنا مکمل صفر ہو گی۔

جواب: سیدھے خطوط کی عمومی مساوات کو سوال 10.76 کی جواب میں پیش کیا گیا ہے جس کا دو درجی تفرق صفر کے برابر ہے۔

سوال 10.78: ثابت کریں کہ منحنی $\boldsymbol{r}(t)$ کی انحنا درج ذیل ہے، جہاں t مقدار معلوم ہے۔

$$\kappa = \frac{\sqrt{(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})(\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}) - (\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}})^2}}{(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})^{\frac{3}{2}}} \tag{10.44}$$

سوال 10.79: ثابت کریں کہ رداس a کے دائرے کی انحنا $\frac{1}{a}$ کے برابر ہے۔

جواب: ایسے دائرے کی مساوات $\boldsymbol{r}(s) = a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}$ ہے جہاں لمبائی قوس کو بطور مقدار معلوم استعمال کیا گیا ہے۔ اس سے $\left|\boldsymbol{r}''\right| = \frac{1}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.80: ثابت کریں کہ xy سطح میں منحنی $y = y(x)$ کی انحنا $\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ہو گی۔ مساوات 10.44 استعمال کریں۔

سوال 10.81: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل (غیر سمتی سہ ضرب) ثابت کریں۔

$$\tau = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}') \tag{10.45}$$

جواب: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\tau = -\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p})' = -\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p}') = -(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}')$$

صفحہ 533 پر مساوات 7.58 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|\sin 0^\circ = 0$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}) = 0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = -(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}') = -(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}'\,\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}')$$

سوال 10.82: ثابت کریں کہ مساوات 10.39 کی مدد سے مساوات 10.45 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{r}''\,\boldsymbol{r}''')}{\kappa^2} \tag{10.46}$$

10.6 سمتی رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ فضا میں متحرک جسم J کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{r}(t)$ جسم J کا راستہ C دے گا۔ گزشتہ حصے سے ظاہر ہے کہ سمتیہ

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{10.47}$$

راستہ C کا مماس ہو گا لہٰذا یہ J کی لمحاتی حرکت کے رخ ہو گا۔ مساوات 10.31 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں s لمبائی قوس ہے۔ C پر کسی مقررہ نقطے ($s = 0$) سے لمبائی قوس s کو ناپا جاتا ہے۔

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{10.48}$$

یوں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ جسم J کی **رفتار**[32] ہو گی اور سمتیہ $\boldsymbol{v}$ جسم J کی **سمتی رفتار سمتیہ**[33] ہو گا جس کو عموماً **سمتی رفتار**[34] کہتے ہیں۔

سمتی رفتار کی تفرق کو **سمتیہ اسراع**[35] یا **اسراع**[36] کہتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{10.49}$$

مثال 10.16: مرکز مائل اسراع اور مرکز مائل قوت

xy سطح میں مبدا پر واقع، رداس R کے دائرے C پر گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ کمیت m کی حرکت (شکل 10.8-الف) کو درج ذیل سمتیہ ظاہر کرتا ہے

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\,\boldsymbol{j} \qquad (\omega > 0)$$

جس کا تفرق سمتی رفتار دے گا جو C کا مماس ہو گا۔

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = -\omega R\sin\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega R\cos\omega t\,\boldsymbol{j}$$

اس سے رفتار حاصل کرتے ہیں

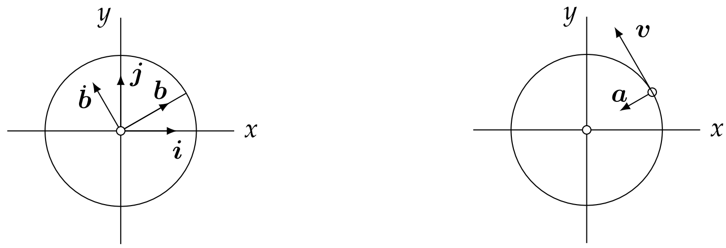
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \omega R$$

جو مستقل مقدار ہے۔ رفتار کو (دائرے کے مرکز سے فاصلہ) R سے تقسیم کرنے سے **زاویائی رفتار**[37] ω حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ اسراع درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = -\omega^2 R\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \omega^2 R\sin\omega t\,\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{r} \tag{10.50}$$

---

speed[32]
velocity vector[33]
velocity[34]
acceleration vector[35]
accleration[36]
angular speed[37]



(الف) مرکز مائل اسراع (مثال 10.16)

(ب) قرص پر حرکت (مثال 10.17)۔

شکل 10.8: مرکز مائل اسراع

جو دائرے کی مرکز کے رخ ہے لٰہذا اس کو **مرکز مائل اسراع**[38] کہتے ہیں۔اسراع کی قیمت $|\boldsymbol{a}| = \omega^2 R$ ہے۔کمیت m پر **مرکز مائل قوت**[39] $m\boldsymbol{a}$ عمل کرے گا۔اس کا مخالف قوت $-m\boldsymbol{a}$ ہو گا جس کو **مرکز گریز قوت**[40] کہتے ہیں۔

□

ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{v}$ کے وقتی تفرق کو $\boldsymbol{a}$ کہتے ہیں۔مثال 10.16 میں $|\boldsymbol{v}|$ مستقل مقدار ہے لیکن $\boldsymbol{a} \neq 0$ ہے۔اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $\boldsymbol{a}$ کی مقدار عموماً $|\boldsymbol{v}|$ کے تفرق کے برابر نہیں ہوتی ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ $\boldsymbol{a}$ عموماً راہ C کا مماس نہیں ہوتا ہے۔آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔زنجیری تفرق سے

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \boldsymbol{r}''\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \tag{10.51}$$

چونکہ $\boldsymbol{r}'$ راہ C کا اکائی مماس سمتیہ $\boldsymbol{u}$ ہے (مساوات 10.36) جس کا تفرق $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{r}''$ سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے عمودی ہے (حصہ 10.5) لٰہذا مساوات 10.51 اسراع کو مماسی اسراع $\boldsymbol{r}'\ddot{s}$ اور عمودی اسراع $\boldsymbol{r}''\dot{s}^2$ کے مجموعے کے طور پر پیش کرتی ہے۔اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ رفتار کا تفرق صفر ہونے کی صورت $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ میں بھی اسراع ہو گی۔

---

[38] centripetal acceleration
[39] centripetal force
[40] centrifugal force

مثال 10.17: کوریولس اسراع
ایک قرص (شکل 10.8-ب) جو اپنی مرکز کے گرد مستقل زاویائی رفتار ω سے، گھڑی کی سوئیوں کے مخالف رخ، گھوم رہا ہے پر جسم J رداس کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔اس حرکت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{b}$ ایسا اکائی سمتیہ ہے جو قرص کے ساتھ ساتھ گھومتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{b} \tag{10.52}$$

J کی اسراع دریافت کریں۔

حل: $\boldsymbol{b}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{b}(t) = \cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{10.53}$$

مساوات 10.52 کا تفرق سمتی رفتار

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{b} + t\dot{\boldsymbol{b}} \tag{10.54}$$

دیتا ہے۔ظاہر ہے کہ قرص کے لحاظ سے J کی رفتار $\boldsymbol{b}$ ہے جبکہ کے گھومنے کی وجہ سے اضافی رفتار $t\dot{\boldsymbol{b}}$ پایا جاتا ہے۔دوبارہ تفرق سے اسراع

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = 2\dot{\boldsymbol{b}} + t\ddot{\boldsymbol{b}} \tag{10.55}$$

حاصل ہو گی۔ مساوات 10.55 کے آخری جزو میں (مساوات 10.53 کے دو درجی تفرق سے) $\ddot{\boldsymbol{b}} = -\omega^2\boldsymbol{b}$ ہو گا لہٰذا $t\ddot{\boldsymbol{b}}$ مرکز مائل اسراع ہو گی۔

مساوات 10.55 میں زیادہ دلچسپ جزو $2\dot{\boldsymbol{b}}$ ہے جس کو **کوریولس اسراع**[41] کہتے ہیں جو قرص کے گھومنے اور قرص پر J کی حرکت کے باہمی عمل سے پیدا ہوتا ہے۔اس کا رخ $\dot{\boldsymbol{b}}$ دیتا ہے جو قرص کے کنارے کا مماس ہے اور جو مقررہ xy کارتیسی نظام میں گھومنے کی رخ ہو گا۔یوں اگر کمیت m کا شخص قرص پر رداسی سمت میں چل رہا ہو تب اس پر قوت $-2m\dot{\boldsymbol{b}}$ عمل کرے گا جو گھومنے کی مخالف رخ ہو گا۔ □

مثال 10.18: دو گھومتے حرکت کا خطی میل
کرہ کے **نصف النہار**[42] N پر جسم J (کرہ کے لحاظ سے) مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہے جبکہ کرہ از خود مستقل زاویائی رفتار $\omega (> 0)$ سے گھوم رہا ہے (شکل 10.9)۔ J کی اسراع دریافت کریں۔

---

[41] Coriolis acceleration
[42] meridian

حل: N پر J کی حرکت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں کرہ کی رداس R ہے، N پر J کی زاویائی رفتار $\gamma(>0)$ ہے، N کی سطح میں $\boldsymbol{b}$ افقی اکائی سمتیہ ہے اور $\boldsymbol{k}$ فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیہ ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b} + R\sin\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.56}$$

چونکہ $\boldsymbol{b}$ کرہ کے ساتھ گھومتا ہے لہٰذا اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیات ہیں۔

$$\boldsymbol{b} = \cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{10.57}$$

مساوات 10.56 کا تفرق لے کر سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = R\cos\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}} - \gamma R\sin\gamma t\,\boldsymbol{b} + \gamma R\cos\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.58}$$

سمتی رفتار کا تفرق لے کر اسراع حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = R\cos\gamma t\,\ddot{\boldsymbol{b}} - 2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}} - \gamma^2 R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b} - \gamma^2 R\sin\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.59}$$

اب مساوات 10.57 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{b}} &= -\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega\cos\omega t\,\boldsymbol{j}\\ \ddot{\boldsymbol{b}} &= -\omega^2\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \omega^2\sin\omega t\,\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

مساوات 10.56 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 10.59 کے آخری دو ارکان کا مجموعہ $-\gamma^2\boldsymbol{r}$ کے برابر ہے لہٰذا مساوات 10.59 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

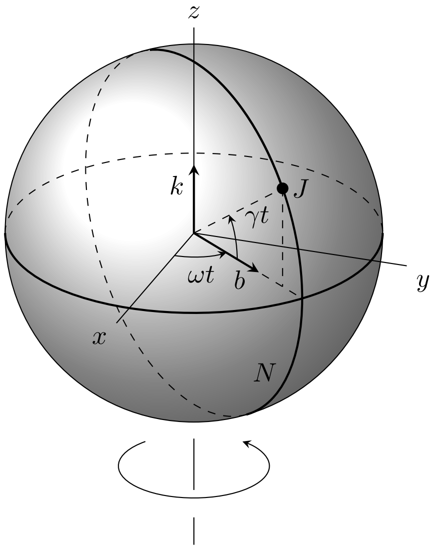
$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b} - 2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}} - \gamma^2\boldsymbol{r} \tag{10.60}$$

مساوات 10.60 کے دائیں ہاتھ پہلا جزو کرہ کے گھومنے سے پیدا مرکز مائل اسراع ہے جبکہ مساوات کا آخری جزو N پر J کے گھومنے سے پیدا مرکز مائل اسراع ہے۔مساوات کا درمیانہ جزو **کوریولس اسراع**[43] $\boldsymbol{a}_c$ ہے۔

$$\boldsymbol{a}_c = -2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}} \tag{10.61}$$

شمالی نیم کرہ پر $\sin\gamma t > 0$ ہے لہٰذا مساوات 10.61 میں منفی کی علامت کی بنا کوریولس اسراع $\dot{\boldsymbol{b}}$ کی مخالف رخ ہو گا یعنی کرہ کی سطح کی مماسی، N کے عمودی اور کرہ کی گردش کی مخالف رخ۔اس کی حتمی مقدار

[43] Coriolis acceleration



شکل 10.9: دو گھومتے حرکت کا خطی میل (مثال 10.18)

$2\gamma R|\sin\gamma t|\,\omega$ کی قیمت شمالی قطب پر زیادہ سے زیادہ ہو گی اور ارضی خط استوا[44] پر اس کی قیمت صفر ہو گی۔یوں شمال کی رخ اڑنے والا ایسا پرندہ جس کی کمیت m ہو پر قوت $m\boldsymbol{a}-c$ کے مخالف رخ قوت $m\boldsymbol{a}_c$ عمل کرے گا جو مثال 10.17 میں محسوس کی گئی قوت کی طرح ہے۔اس قوت کی وجہ سے پرندہ N کے دائیں جانب بھٹک جائے گا۔اس کے برعکس ارضی خط استوا سے جنوب کی رخ اڑنے والا پرندہ، N کے بائیں جانب بھٹک جائے گا۔یہی اثرات جہاز اور مزائل[45] کے اڑنے پر بھی اثر انداز ہوتے ہیں۔کرہ ارض پر ہوا کی حرکت پر بھی ان قوتوں کا اثر پایا جاتا ہے۔ □

سوالات

سوال 10.83 تا سوال 10.90 میں حرکت کرتی جسم کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے جہاں $t(>0)$ وقت کو ظاہر کرتی ہے۔اس راہ کی شکل بیان کریں۔سمتیہ رفتار، رفتار اور اسراع دریافت کریں۔

---

[44] equator
[45] missile

سوال 10.83: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=1,\quad \boldsymbol{a}=0$

سوال 10.84: $\boldsymbol{r}=t^3\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v}=3t^2\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=3t^2,\quad \boldsymbol{a}=6t\boldsymbol{j}$

سوال 10.85: $\boldsymbol{r}=(t^2-3t)\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v}=(2t-3)\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=|2t-3|,\quad \boldsymbol{a}=2\boldsymbol{j}$

سوال 10.86: $\boldsymbol{r}=t^2\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v}=2t\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=\left|\sqrt{4t^2+1}\right|,\quad \boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}$

سوال 10.87: $\boldsymbol{r}=\cos t\,\boldsymbol{i}$

جوابات: $\boldsymbol{v}=-\sin t\,\boldsymbol{j},\quad |\boldsymbol{v}|=|\sin t|,\quad \boldsymbol{a}=-\cos t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.88: $\boldsymbol{r}=2\cos 5t\,\boldsymbol{i}-4\sin 3t\,\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v}=-10\sin 5t\,\boldsymbol{i}-12\cos 3t\,\boldsymbol{j},\ |\boldsymbol{v}|=\left|\sqrt{100\sin^2 5t+144\cos^2 3t}\right|$

$\boldsymbol{a}=-50\cos 5t\,\boldsymbol{i}+36\sin 3t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.89: $\boldsymbol{r}=3\cos t^2\,\boldsymbol{i}+2\sin t^2\,\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v}=-6t\sin t^2\,\boldsymbol{i}+4t\cos t^2\,\boldsymbol{j},\ |\boldsymbol{v}|=\left|\sqrt{36t^2\sin^2 t^2+16t^2\cos^2 t^2}\right|$

$\boldsymbol{a}=(-6\sin t^2-12t^2\cos t^2)\,\boldsymbol{i}+(4\cos t^2-8t^2\sin t^2)\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.90: $\boldsymbol{r}=5t^2\,\boldsymbol{i}+3t\,\boldsymbol{j}+t^3\,\boldsymbol{k}$

جوابات: $\boldsymbol{v}=10t\,\boldsymbol{i}+3\,\boldsymbol{j}+3t^2\,\boldsymbol{k},\ |\boldsymbol{v}|=\left|\sqrt{9t^4+100t^2+9}\right|$

$\boldsymbol{a}=10\,\boldsymbol{i}+6t\,\boldsymbol{k}$

سوال 10.91: زمین سے چاند تک کا فاصلہ $3.85\times10^8\,\mathrm{m}$ ہے اور زمین کے گرد چاند 27.322 دن یعنی $2.36\times10^6\,\mathrm{s}$ میں ایک چکر پورا کرتا ہے۔ زمین کے رخ چاند کی مرکز مائل اسراع دریافت کریں۔

جواب: $|\boldsymbol{a}|=0.0027\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ جو سطح زمین پر اسراع $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سے 3593 گنا کم ہے۔

سوال 10.92: وہ حرکت دریافت کریں جس کی اسراع مستقل قیمت ہو۔

جواب: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}_0\frac{t^2}{2}+\boldsymbol{v}_0t+\boldsymbol{x}_0$ جہاں $\boldsymbol{a}_0$ ، $\boldsymbol{v}_0$ اور $\boldsymbol{x}_0$ مستقل قیمتیں ہیں۔

سوال 10.93: $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{r} = R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}$ لیتے ہوئے مساوات 7.55 کے تفرق سے مساوات 10.50 حاصل کریں۔

سوال 10.94: اگر ایک جسم کی حرکت $\boldsymbol{r}(t)$ سے ظاہر کی جائے جہاں t وقت ہے تب $t = \phi\bar{t}$ تبادلے سے کیا مراد ہو گا؟

جواب: راہ تبدیل نہیں ہو گی البتہ راہ پر حرکت کی نوعیت تبدیل ہو گی۔

10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ

ہم متعدد متغیرات پر مبنی تفاعل کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔ ہم دو متغیرات کے تفاعل کو استعمال کرتے ہوئے نتائج حاصل کریں گے جو زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی درست ہوں گے۔

نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل $f(x,y)$ اس صورت استمراری[46] ہو گا جب اس نقطے کی پڑوس[47] میں f معین ہو اور کسی بھی مثبت عدد ϵ (جو غیر صفر اور کتنا ہی چھوٹا کیوں نا ہو) کے لئے ہم ایسا مثبت عدد σ تلاش کر سکتے ہیں کہ اس کے نقطے کی پڑوس قرص

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \sigma^2 \tag{10.62}$$

میں تمام (x,y) پر درج ذیل ہو۔

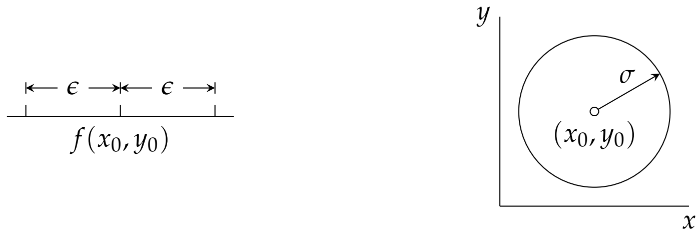
$$\left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| < \epsilon \tag{10.63}$$

جیومیٹریائی طور پر (x_0, y_0) پر $f(x,y)$ کے استمراری ہونے سے مراد یہ ہے کہ $f(x_0,y_0)$ کو قطع 2ϵ کا وسط لیتے ہوئے ہم غیر صفر رداس σ کا ایسا قرص تلاش کر سکتے ہیں جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو اور اس قرص پر تمام (x,y) کا مطابقتی $f(x,y)$ اس قطع پر پایا جاتا ہو (شکل 10.10)۔

---

[46] continuous

[47] پڑوس سے مراد xy سطح میں قرص $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2$ ہے جہاں $r > 0$ ہے۔



شکل 10.10: دو متغیرات کے تفاعل کی استمرار

ہم ابتدائی علم الاحصاء سے جانتے ہیں کہ اگر w متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور x از خود t کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس کو تفرق کا زنجیری قاعدہ کہتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{10.64}$$

درج ذیل مسئلہ تفرق کی زنجیری قاعدے کو عمومی بناتا ہے۔

مسئلہ 10.1: (زنجیری قاعدہ)
فرض کریں کہ xy سطح میں **دائرہ کار**[48] D [49] میں تفاعل $w = f(x, y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ کسی وقفہ T میں $x = x(t)$ اور $y = y(t)$ قابل تفرق تفاعل ہیں جہاں T میں ہر t کا مطابقتی نقطہ $[x(t), y(t)]$، دائرہ کار D میں پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں T میں تمام t کے لئے $w = f[x(t), y(t)]$ قابل تفرق ہو گا یعنی:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{10.65}$$

ثبوت: ہم T میں t پر Δt اتنا چھوٹا چنتے ہیں کہ $t + \Delta t$ بھی T کا حصہ ہو۔ مزید ہم

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) \tag{10.66}$$

اور

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{10.67}$$

---

[48] domain

[49] دائرہ کار D **جڑی** ہوئے نقطوں کا **کھلا** سلسلہ ہے، جہاں **جڑا** ہونے سے مراد یہ ہے کہ D کے کسی بھی دو نقطوں کو متناہی تعداد کے ایسے سیدھے قطعات سے ملایا جا سکتا ہے جن کے تمام نقطے D کا حصہ ہوں، اور **کھلا** سے مراد یہ ہے کہ D میں ہر نقطے کی پڑوس کے تمام نقطے بھی D کا حصہ ہیں۔ مثلاً کسی مستطیل یا دائرے کا اندرونی حصہ دائرہ کار ہو گا۔

لیتے ہیں۔مساوات 10.67 میں $f(x,y+\Delta y)$ جمع اور منفی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Delta w = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

درج بالا مساوات کے قوسین پر باری باری ایک متغیر کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta w = \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_1, y+\Delta y} + \Delta y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x, y_1} \tag{10.68}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں x اور $x+\Delta x$ کے درمیان کہیں x_1 پایا جاتا ہے، y اور $y+\Delta y$ کے درمیان کہیں y_1 پایا جاتا ہے۔مساوات 10.68 کے دونوں اطراف کو Δt سے تقسیم کرتے اور $\Delta t \to 0$ لیتے ہوئے، اور چونکہ $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ کو استمراری تصور کیا گیا ہے، مساوات 10.66 حاصل ہوتا ہے۔

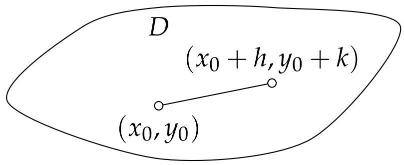
□

درج بالا مسئلے کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 10.2: فرض کریں کہ xy سطح میں **دائرہ کار** D پر تفاعل $w = f(x,y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔مزید فرض کریں کہ uv سطح میں کسی وقفہ B میں $x = x(u,v)$ اور $y = y(u,v)$ قابل جزوی تفرق تفاعل ہیں جہاں B میں ہر (u,v) کا مطابقتی نقطہ $[x(u,v), y(u,v)]$ ، دائرہ کار D میں پایا جاتا ہے۔ایسی صورت میں B میں تفاعل $w = f[x(u,v), y(u,v)]$ معین ہو گا اور B میں تمام u اور v کے لئے اس تفاعل کے جزوی تفرقات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned} \tag{10.69}$$

u یا v کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ 10.1 کے اطلاق سے درج بالا مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔



شکل 10.11: مسئلہ اوسط قیمت

ابتدائی علم الاحصاء سے ہم جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں x_0 اور x_0+h کے درمیان موزوں نقطے پر تفرق لیا جاتا ہے۔

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

اس کو احصاء تفرقیات کا مسئلہ اوسط قیمت کہتے ہیں جس کو وسعت دے کر دو متغیرات کے تفاعل پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 10.3: (مسئلہ اوسط قیمت)
فرض کریں کہ دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے درجہ ایک جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ (x_0,y_0) اور (x_0+h,y_0+k) دائرہ کار D میں پائے جانے والے ایسے نقطے ہیں کہ انہیں جوڑنے والا سیدھا قطع بھی D میں پائی جاتی ہو (شکل 10.11)۔ایسی صورت میں

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y} \tag{10.70}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں جزوی تفرقات کو اس قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت : درج ذیل

$$\begin{aligned} x&=x_0+th, \quad y=y_0+tk \quad (0\le t\le 1)\\ F(t)&=f(x_0+th,y_0+tk)\end{aligned}$$

سے

$$f(x_0+h,y_0+k)=F(1), \quad f(x_0,y_0)=F(0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ایک متغیر تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت 0 اور 1 کے درمیان ایسی قیمت t_1 پائی جاتی ہے جس کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=F(1)-F(0)=F'(t_1) \tag{10.71}$$

اب چونکہ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = h$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k$ ہیں لہٰذا مسئلہ 10.1 کے تحت

$$F' = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k \tag{10.72}$$

ہو گا جہاں دائیں ہاتھ تفرقات کو نقطہ $(x_0 + t_1h, y_0 + t_1k)$ پر حاصل کیا جائے گا جو اس قطع پر واقع ہے جس کے سر (x_0, y_0) اور $(x_0 + h, y_0 + k)$ ہیں۔مساوات 10.72 کو مساوات 10.71 میں پر کرنے سے مساوات 10.70 حاصل ہوتا ہے۔

□

تین متغیرات کے تفاعل $f(x, y, z)$ جو مسئلہ 10.3 میں دیے گئے شرائط کے مماثل شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے بالکل اسی مسئلے کی طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z} \tag{10.73}$$

جہاں جزوی تفرقات کو (x_0, y_0, z_0) تا $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 10.95 تا سوال 10.98 میں مساوات 10.65 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ دریافت کریں۔

سوال 10.95: $w = x - y, \quad x = t, \quad y = \ln t$

جواب: $1 - \frac{1}{t}$

سوال 10.96: $w = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{-t}, \quad y = e^t$

جواب: $\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$

سوال 10.97: $w = \frac{x}{y}, \quad x = g(t), \quad y = ht$

جواب: $\frac{g'h - gh'}{h^2}$

سوال 10.98: $w=\frac{x}{y}, \quad x=\cos t, \quad y=\sin t$
جواب: $-\operatorname{cosec}^2 t$

سوال 10.99: فرض کریں کہ $w=f(x,y,z)$ ہے جہاں x ، y اور z از خود t کے تفاعل ہیں۔ثابت کریں کہ مسئلہ 10.1 کی طرز کے شرائط کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{10.74}$$

سوال 10.100 اور سوال 10.101 میں مساوات 10.74 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ دریافت کریں۔

سوال 10.100: $w=x^2+y^2+z^2, \quad x=t^2, \quad y=\ln t, \quad z=e^t$
جواب: $\frac{2}{t}\ln t+2e^{2t}+4t^3$

سوال 10.101: $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=t$
جواب: $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

سوال 10.102: مسئلہ 10.2 کو ثابت کریں۔

سوال 10.103 تا سوال 10.105 میں $\frac{\partial w}{\partial u}$ اور $\frac{\partial w}{\partial v}$ دریافت کریں۔

سوال 10.103: $w=\ln(x^2+y^2), \quad x=e^u\cos v, \quad y=e^u\sin v$
جواب: $2, \ 0$

سوال 10.104: $w=xy, \quad x=e^u\cos v, \quad y=e^u\sin v$
جواب: $e^{2u}\sin 2v, \ e^{2u}\cos 2v$

سوال 10.105: $w=x^2-y^2, \quad x=u^2-v^2, \quad y=2uv$
جواب: $4u(u^2-3v^2), \ 4v(v^2-3u^2)$

سوال 10.106: مساوات 10.73 حاصل کریں۔

سوال 10.107: فرض کریں کہ $w=f(x,y)$ ہے جہاں $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ ہیں۔درج ذیل ثابت کریں۔

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

جواب: درج ذیل استعمال کرتے ہوئے با آسانی ثابت ہو گا۔

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta$$
$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta$$

سوال 10.108: فرض کریں کہ $w = f(v, z)$ ہے جہاں $v = x + ct$ اور $z = x - ct$ ہیں جبکہ c مستقل قیمت ہے۔ درج ذیل ثابت کریں جہاں تمام تفرقات کو ممکن تصور کریں۔ w_{xx} سے مراد $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ہے۔

$$c^2 w_{xx} - w_{tt} = 4c^2 w_{vz}$$

سوال 10.109: فرض کریں کہ $w = f(x, y)$ ہے جہاں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ ہیں۔ درج ذیل ثابت کریں۔

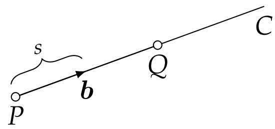
$$w_{xx} + w_{yy} = w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta}$$

جواب: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ سے درج ذیل حاصل کرتے ہوئے ثابت ہو گا۔

$$r_x = \frac{x}{r},\ \theta_x = -\frac{y}{r^2},\ r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \text{وغیرہ}$$
$$w_{xx} = x^2 r^{-2} w_{rr} - 2xyr^{-3} w_{r\theta} + y^2 r^{-4} w_{\theta\theta} + y^2 r^{-3} w_r + 2xyr^{-4} w_\theta, \quad \text{وغیرہ}$$

10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان

ہم فضا میں غیر سمتی میدان $f(P) = f(x, y, z)$ پر غور کرتے ہیں (حصہ 10.1)۔ ہم جانتے ہیں کہ x ، y اور z رخ میں تفاعل کی تبدیلی کی شرح بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہے۔ آئیں کسی بھی رخ اس تفاعل کی تبدیلی کی شرح یعنی سمتی تفرق حاصل کریں۔



شکل 10.12: سمتی تفرق

ہم فضا میں کوئی نقطہ P اور اس نقطے پر کوئی رخ چنتے ہیں۔اس رخ کو اکائی سمتیہ $\boldsymbol{b}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔نقطہ P سے s فاصلے پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ سیدھے خط C پر نقطہ Q پایا جاتا ہے (شکل 10.12)۔اگر درج ذیل حد

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\lim_{s\to 0}\frac{f(Q)-f(P)}{s} \tag{10.75}$$

موجود ہو تب اس کو P پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ f کی **سمتی تفرق**[50] کہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ $\frac{\partial f}{\partial s}$ در حقیقت P پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

یوں P پر f کے لامتناہی تعداد میں سمتی تفرقات پائے جاتے ہیں۔اگر P کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ ہو تب C کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{r}(s)=x(x)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b} \qquad (s\geq 0) \tag{10.76}$$

اور $\frac{\partial f}{\partial s}$ سے مراد C پر $f[x(s),y(s),z(s)]$ کا لمبائی s کے ساتھ تفرق ہے۔اب اگر f کے استمراری جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں تب زنجیری قاعدے (مسئلہ 10.1) کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z' \tag{10.77}$$

جہاں $x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ کو $s=0$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔اب مساوات 10.76 سے

$$\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}=\boldsymbol{b}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو دیکھ کر خیال آتا ہے کہ سمتیہ

$$f_{\text{ڈھلوان}}=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{10.78}$$

[50] directional derivative

متعارف کرنے سے مساوات 10.77 کو اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot f_{\text{ڈھلوان}} \qquad (|\boldsymbol{b}| = 1) \tag{10.79}$$

سمتیہ $f_{\text{ڈھلوان}}$ کو غیر سمتی تفاعل f کی **ڈھلوان**[51] کہتے ہیں۔

تفرقی عامل ∇ [52]

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

متعارف کرتے ہوئے مساوات 10.78 کو

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{10.80}$$

اور مساوات 10.79 کو

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla f \qquad (|\boldsymbol{b}| = 1) \tag{10.81}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اگر $\boldsymbol{b}$ کارتیسی x محور کی رخ ہو تب $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}$ ہو گا اور f کا سمتی تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

اسی طرح مثبت y اور مثبت z محور کی رخ سمتی تفرق بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہوں گے۔

مثال 10.19: سمتی تفرق

غیر سمتی تفاعل $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^3$ کا نقطہ $P:(-2,1,3)$ پر $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کی رخ سمتی تفرق دریافت کریں۔

حل: چونکہ $|\boldsymbol{a}| = 5$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}$ کی رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$ ہو گا۔ f کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\nabla f = 2x\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3z^2\boldsymbol{k} \implies \nabla f(P) = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 27\boldsymbol{k}$$

---

[51] gradient

[52] ∇ یونانی حرف تہجی ہے جو نیبلا کہلاتا ہے۔

یوں نقطہ P پر $\boldsymbol{a}$ کی رخ سمتی تفرق درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla f = \frac{1}{5}(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) \cdot (-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 27\boldsymbol{k}) = -4$$

حاصل جواب منفی ہے جس کا مطلب ہے کہ $\boldsymbol{a}$ کی رخ f گھٹتا ہے۔ □

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ ∇f کی قیمت اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 10.78 سمتی تفرق دیتا ہے جو کسی دوسرے کارتیسی نظام میں درج ذیل لکھا جائے گا

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \frac{\partial f}{\partial x^*}\boldsymbol{i}^* + \frac{\partial f}{\partial y^*}\boldsymbol{j}^* + \frac{\partial f}{\partial z^*}\boldsymbol{k}^*$$

جہاں x^* ، y^* اور z^* دوسرے نظام کے محور جبکہ $\boldsymbol{i}^*$ ، $\boldsymbol{j}^*$ اور $\boldsymbol{k}^*$ اس کے مطابقتی اکائی سمتیات ہیں۔ان مساوات میں جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں اور یہ کہنا مشکل ہو گا کہ دونوں مساوات سے یکساں ڈھلوان حاصل ہو گا۔

اب غیر سمتی تفاعل کی تعریف کے تحت نقطہ P پر f کی قیمت کا دارومدار P پر ہے نا کہ چنے گئے کارتیسی نظام پر۔اسی طرح C پر لمبائی s پر بھی چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔یوں $\frac{\partial f}{\partial s}$ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ اب مساوات 10.81 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial s} = |\boldsymbol{b}||\nabla f|\cos\gamma = |\nabla f|\cos\gamma$$

جہاں $\boldsymbol{b}$ اور ∇f کے مابین زاویہ γ ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\cos\gamma = 1$ یعنی $\gamma = 0$ پر $\frac{\partial f}{\partial s}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $|\nabla f| = \frac{\partial f}{\partial s}$ پائی جاتی ہے۔اب چونکہ $\frac{\partial f}{\partial s}$ غیر متغیر ہے لہٰذا ∇f کی قیمت اور سمت پر کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔اس سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.4: ڈھلوان
ایسا غیر سمتی تفاعل $f(P) = f(x, y, z)$ جس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں کی ڈھلوان موجود ہے جس کی لمبائی اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام محدد کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔اگر نقطہ P پر f کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب P پر f کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی ڈھلوان کی رخ ہو گی۔

ڈھلوان کی دوسری جیومیٹریائی خصلت جانتے ہیں۔فضا میں قابل تفرق غیر سمتی تفاعل $f(x,y,z)$ پر غور کرتے ہیں۔ہر مستقل c کے لئے مساوات

$$f(x,y,z)=c=\text{مستقل} \tag{10.82}$$

سطح S کو ظاہر کرتا ہے۔ c کے تمام قیمتیں لیتے ہوئے ہمیں نسل سطح ملتا ہے جنہیں f کی **ہموار سطحیں**[53] کہتے ہیں۔ تفاعل کی تعریف کے تحت، فضا میں کسی بھی نقطے پر f کی قیمت منفرد ہو گی لہٰذا فضا میں ہر نقطے سے f کی صرف اور صرف ایک ہموار سطح گزرے گی۔ہم جانتے ہیں کہ فضا میں کسی بھی منحنی C کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (حصہ 10.4)۔

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{10.83}$$

اب اگر C کو S پر رہنے کا پابند بنایا جائے تب مساوات 10.83 میں تفاعل $x(t)$ ، $y(t)$ اور $z(t)$ کو مساوات 10.82 پر پورا اترنا ہو گا یعنی:

$$f[x(t),y(t),z(t)]=c \tag{10.84}$$

زنجیری تفرق (مسئلہ 10.1) استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.84 کا t کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}=(\nabla f)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0 \tag{10.85}$$

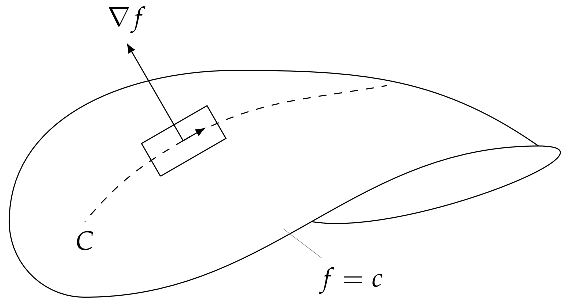
جہاں سمتیہ

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$$

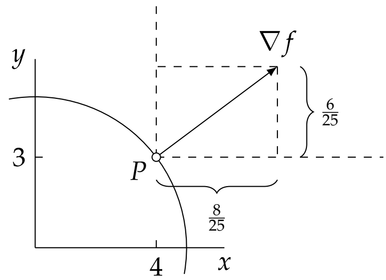
منحنی C کا مماس ہے (حصہ 10.5)۔ S پر مختلف سمتوں میں نقطہ P سے گزرتی منحنی کے مماس، P پر S کو چھوتی سطح مستوی سے گزریں گے۔اس سطح مستوی کو P پر S کی **مماسی سطح**[54] کہتے ہیں۔ مماسی سطح کے عمودی، نقطہ P سے گزرتا خط، P پر S کا **عمود**[55] کہلاتا ہے (شکل 10.13)۔ صفحہ 506 پر مسئلہ 7.3 کی مدد سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.5: ڈھلوان اور سطح کی عمود
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D پر غیر سمتی تفاعل f معین اور قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ دائرہ

[53] level surfaces
[54] tangent plane
[55] normal



شکل 10.13: ہموار سطح اور ڈھلوان



شکل 10.14: دائرے کا عمود

کار D میں P کوئی نقطہ ہے جو f کی ہموار سطح S پر پایا جاتا ہے۔اب اگر P پر f کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب یہ ڈھلوان نقطہ P پر S کے عمودی ہو گا۔

مثال 10.20: ہموار منحنی کا عمود

تفاعل $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ کے ہموار سطحیں $f = c$ مبدا پر ہم مرکز دائرے ہیں۔ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = \frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$$

کی سمت ان دائروں کے عمودی ہے جو f کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کی سمت ہے۔مثلاً نقطہ $P:(4,3)$ پر $\nabla f = \frac{8}{25}\boldsymbol{i} + \frac{6}{25}\boldsymbol{j}$ ہے (شکل 10.14)۔ $\square$

مثال 10.21: سطح کا عمود
مخروط $z^2 = 2(x^2+y^2)$ کا نقطہ $P:(1,0,3)$ پر اکائی عمودی سمتیہ دریافت کریں۔ہم مخروط کو ہموار سطح $f=0$ تصور کر سکتے ہیں جہاں $f(x,y,z) = 2(x^2+y^2) - z^2$ ہو گا۔یوں

$$\nabla f = 4x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k} \implies \nabla f(P) = 4\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k}$$

ہو گا۔ مسئلہ 10.5 سے اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ملتا ہے۔دوسرا اکائی عمودی سمتیہ $-\boldsymbol{n}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{4}{\sqrt{52}}\boldsymbol{i} - \frac{6}{\sqrt{52}}\boldsymbol{k}$$

□

طبیعیات کے میدان میں کئی ایسے سمتی تفاعل پائے جاتے ہیں جو کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سے حاصل ہوتے ہیں۔ایسے غیر سمتی تفاعل کو **مخفی تفاعل**[56] کہتے ہیں۔ مخفی تفاعل کے استعمال سے سمتی تفاعل کا تجزیہ نہایت آسان ہو جاتا ہے۔آئیں مخفی تفاعل کے استعمال کی مثال دیکھیں۔

مثال 10.22: ثقلی میدان۔ لاپلاس مساوات
ثقلی میدان پر مثال 10.4 میں غور کیا گیا جہاں درج ذیل مساوات حاصل کی گئی

$$\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{f}|\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -GMm\left[\frac{x-x_0}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\boldsymbol{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\boldsymbol{k}\right] \tag{10.86}$$

جہاں

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

کمیت M اور m کے درمیان فاصلہ ہے۔یہاں غور کرنے سے

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2(x-x_0)}{2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x-x_0}{r^3} \tag{10.87}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2(y-y_0)}{2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y-y_0}{r^3} \tag{10.88}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2(z-z_0)}{2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{z-z_0}{r^3} \tag{10.89}$$

---
[56] potential function

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں f کو درج ذیل غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان لکھا جا سکتا ہے

$$h(x,y,z) = \frac{GMm}{r} \qquad (r > 0) \tag{10.90}$$

لہٰذا سمتی تفاعل f کا مخفی تفاعل h ہے۔

تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}$$

حاصل ہوتا ہے جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہے لہٰذا تفاعل $h = \frac{GMm}{r}$ درج ذیل پر پورا اترتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \tag{10.91}$$

مساوات 10.91 انتہائی اہم جزوی تفرقی مساوات ہے جس کو **لاپلاس مساوات**[57] کہتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ کو f کا **لاپلاسی**[58] کہتے ہیں اور اس کو $\nabla^2 h$ یا Δh سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تفرقی عامل

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(جو **مربع نیبلا** پڑھا جاتا ہے) کو **لاپلاسی عامل**[59] کہتے ہیں۔ لاپلاسی عامل استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.91 کو نہایت عمدگی سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla^2 h = 0 \tag{10.92}$$

یہ ثابت کرنا ممکن ہے کہ کمیت کی کسی بھی طرز کی تقسیم سے حاصل قوت کو ایسے سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو کسی غیر سمتی تفاعل h کا ڈھلوان ہو گا جہاں h مساوات 10.91 پر ہر اس مقام پر پورا اترتا ہے جہاں کمیت موجود نہ ہو۔

---

[57] Laplace equation
[58] Laplacian
[59] Laplacian operator

طبیعیات میں کئی قاعدے نیوٹن کے کشش ثقل کے قانون کی طرز رکھتے ہیں مثلاً فضا میں Q_1 اور Q_2 بار کی باہمی قوت درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{f} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{کولمب کا قانون}$$

جہاں ϵ برقی مستقل ہے۔یوں $\boldsymbol{f}$ کو مخفی تفاعل $h = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r}$ کا ڈھلوان لکھا جا سکتا ہے جہاں $r > 0$ کی صورت میں h مساوات 10.91 پر پورا اترتا ہے۔ $\square$

اگر غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سمتی تفاعل دیتا ہو تب ایسی میدان کو **بقائی میدان**[60] کہتے ہیں۔جیسا کہ ہم حصہ 11.12 میں دیکھیں گے، بقائی میدان میں کسی بھی ذرہ کو نقطہ N_1 سے نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی صرف اور صرف N_1 اور N_2 پر منحصر ہے نا کہ اس راستے پر جو ذرہ منتقل کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہو۔ہم دیکھیں گے کہ ہر میدان بقائی نہیں ہوتا۔

سوالات

سوال 10.110 تا سوال 10.121 میں ڈھلوان ∇f دریافت کریں۔

سوال 10.110: $f = 3x + 2y + 4$
جواب: $\nabla f = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

سوال 10.111: $f = e^y \sin x$
جواب: $\nabla f = e^y(\cos x\,\boldsymbol{i} + \sin x\,\boldsymbol{j})$

سوال 10.112: $f = \ln(x^2 + y^2)$
جواب: $\nabla f = \frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$

سوال 10.113: $f = x^2 + y^2$
جواب: $\nabla f = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$

[60] conservative field

سوال 10.114: $f=\sin^{-1}\frac{y}{x}$
جواب: $\nabla f=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}(-\frac{y}{x}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

سوال 10.115: $f=\tan^{-1}\frac{y}{x}$
جواب: $\nabla f=\frac{1}{x^2+y^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$

سوال 10.116: $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
جواب: $\nabla f=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

سوال 10.117: $f=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$
جواب: $\nabla f=3\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

سوال 10.118: $f=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
جواب: $\nabla f=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

سوال 10.119: $f=x^2yz^3$
جواب: $\nabla f=2xyz^3\boldsymbol{i}+x^2z^3\boldsymbol{j}+3x^2yz^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.120: $f=\sin(x^2+y^2+z^2)$
جواب: $\nabla f=2\cos(x^2+y^2+z^2)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

سوال 10.121: $f=e^{xyz}$
جواب: $\nabla f=e^{xyz}(yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k})$

سوال 10.122 تا سوال 10.127 میں ∇f دریافت کریں۔ کئی مقامات پر ہموار سطح $f=c$ کی ڈھلوان ∇f کو تیر سے ظاہر کریں۔

سوال 10.122: $f=x-2y$
جواب: $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$

سوال 10.123: $f=\frac{y}{x}$
جواب: $\frac{1}{x^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$

سوال 10.124: $f=\frac{x}{y}$
جواب: $\frac{1}{y^2}(y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j})$

سوال 10.125: $f = xy$
جواب: $y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال 10.126: $f = x^3y^2$
جواب: $3x^2y^2\boldsymbol{i} + 2x^3y\boldsymbol{j}$

سوال 10.127: $f = 4x^2 + 3y^2$
جواب: $8x\boldsymbol{i} + 6y\boldsymbol{j}$

سوال 10.128 تا سوال 10.134 میں نقطہ $N : (x, y)$ پر مستوی منحنی کا عمودی سمتیہ کھینچیں۔

سوال 10.128: $y = x, \quad N : (2, 2)$
جواب: $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.129: $y = x^2, \quad N : (3, 9)$
جواب: $6\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.130: $y = 2x + 7, \quad N : (-1, 5)$
جواب: $2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.131: $y^2 = 3x + 3, \quad N : (2, 3)$
جواب: $3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$

سوال 10.132: $x^2 + y^2 = 36, \quad N : (4, 3)$
جواب: $8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$

سوال 10.133: $y^3 = x^2, \quad N : (4, 8)$
جواب: $16\boldsymbol{i} - 48\boldsymbol{j}$

سوال 10.134: $x^2 - y^2 = 1, \quad N : (1, 0)$
جواب: $2\boldsymbol{i}$

سوال 10.135 تا سوال 10.140 میں نقطہ $N : (x, y, z)$ پر سطح کا عمودی سمتیہ دریافت کریں۔

سوال 10.135: $x + y + z = 0, \quad N : (1, 1, -2)$
جواب: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 10.136: $3x-y+2z=1, \quad N:(1,-4,1)$
جواب: $3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال 10.137: $z=x^2+y^2, \quad N:(2,3,13)$
جواب: $4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

سوال 10.138: $x^2+y^2+z^2=9, \quad N:(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$
جواب: $2\sqrt{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

سوال 10.139: $2x^2+3y^2+z^2=6, \quad N:(1,-1,1)$
جواب: $4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال 10.140: $z=xy^2, \quad N:(2,1,2)$
جواب: $\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

سوال 10.141 تا سوال 10.146 ایسا f دریافت کریں کہ $\boldsymbol{v}=\nabla f$ ہو۔

سوال 10.141: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{v}$ کو دیکھ کر $\frac{\partial f}{\partial x}=1$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}=-1$ لکھا جا سکتا ہے۔ $\frac{\partial f}{\partial x}=1$ کا تکمل $f=x+c$ ہو گا جہاں c از خود y اور z پر منحصر ہو سکتا ہے۔اسی طرح $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ سے $f=y+c'$ جبکہ $\frac{\partial f}{\partial z}=-1$ سے $f=-z+c''$ ملتا ہے۔تینوں جوابات کو اکٹھے کرتے ہوئے $f=x+y-z$ لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 10.142: $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{2}+y+\frac{z^2}{2}$

سوال 10.143: $\boldsymbol{v}=2x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: x^2+y^3+z

سوال 10.144: $\boldsymbol{v}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$
جواب: xyz

سوال 10.145: $\boldsymbol{v}=\frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$
جواب: $\ln(x^2+y^2)$

سوال 10.146: $\boldsymbol{v} = e^x \cos y \, \boldsymbol{i} - e^x \sin y \, \boldsymbol{j}$
جواب: $e^x \cos y$

سوال 10.147: تفاعل $f = x^2 + y^2$ کا نقطہ $N : (3, 3)$ پر $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کی سمت میں سمتی تفرق دریافت کریں۔

جوابات: $6, 6\sqrt{2}, 6, 0$

سوال 10.148 تا سوال 10.153 میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں N پر f کی سمتی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.148: $f = 3x - 2y, \quad N : (1, 1), \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

سوال 10.149: $f = 2x^2 - 3y^2, \quad N : (2, 3), \quad \boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$
جواب: $-\frac{12}{\sqrt{13}}$

سوال 10.150: $f = x^2 - y^2, \quad N : (-1, 1), \quad \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
جواب: 0

سوال 10.151: $f = \frac{y}{x}, \quad N : (3, 2), \quad \boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
جواب: $\frac{1}{9\sqrt{5}}$

سوال 10.152: $f = 3x - 2y + 4z, \quad N : (3, 2, 1), \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

سوال 10.153: $f = x^2 + y^2 + z^2, \quad N : (4, 0, 5), \quad \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: $-6\sqrt{3}$

سوال 10.154: مستقل نقطہ $N : (x_0, y_0, z_0)$ سے متغیر نقطہ $Q : (x, y, z)$ تک فاصلہ r ہے۔ثابت کریں کہ N سے Q کے رخ اکائی سمتیہ ∇r ہے۔

سوال 10.155: ثابت کریں کہ سوال 10.110 تا سوال 10.112 کے تفاعل لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

سوال 10.156 تا سوال 10.159 میں دیے گئے تمام تفرقات ممکن تصور کرتے ہوئے دیے گیا تعلق ثابت کریں۔

سوال 10.156: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

سوال 10.157: $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$

سوال 10.158: $\nabla(\frac{f}{g}) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

سوال 10.159: $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$

10.9 تبادل محددی نظام اور تبادل ارکان سمتیات

اس حصے میں ایسے تبادلے پر غور کیا جائے گا جو ایک کارتیسی محددی نظام کو دوسرے کارتیسی محددی نظام پر منتقل کرتا ہے۔ہم سمتیات کے ارکان پر ایسے تبادلے کے اثرات پر بھی غور کریں گے۔یہ مسئلہ نظریاتی اور عملی استعمال کے اعتبار سے بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

فرض کریں کہ x ، y ، z اور x^* ، y^* ، z^* کوئی دو کارتیسی محددی نظام ہیں۔مزید فرض کریں کہ کسی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو ان محددی نظام میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} \tag{10.93}$$

$$\boldsymbol{v} = v_1^*\boldsymbol{i}^* + v_2^*\boldsymbol{j}^* + v_3^*\boldsymbol{k}^* \tag{10.94}$$

جہاں $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{i}^*$ ، $\boldsymbol{j}^*$ ، $\boldsymbol{k}^*$ بالترتیب مثبت x ، y ، z اور x^* ، y^* ، z^* رخ اکائی سمتیات ہیں۔ہم v_1^* ، v_2^* اور v_3^* ارکان کو v_1 ، v_2 اور v_3 کی صورت میں لکھنا چاہتے ہیں۔ اسی طرح ہم v_1 ، v_2 اور v_3 ارکان کو v_1^* ، v_2^* اور v_3^* کی صورت میں لکھنا چاہتے ہیں۔

مساوات 10.93 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k} \tag{10.95}$$

اسی طرح مساوات 10.94 کا $\boldsymbol{i}^*$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{v} = v_1^*\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i}^* + v_2^*\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j}^* + v_3^*\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k}^* \tag{10.96}$$

اب چونکہ دائیں ہاتھ پہلا غیر سمتی ضرب اکائی کے برابر ہے جبکہ باقی دو غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہیں لہٰذا درج بالا کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{v} = v_1^* \tag{10.97}$$

مساوات 10.97 اور مساوات 10.95 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_1^* = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i}v_1 + \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j}v_2 + \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k}v_3$$

بالکل اسی طرح

$$v_2^* = \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{i}v_1 + \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{j}v_2 + \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{k}v_3$$
$$v_3^* = \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{i}v_1 + \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{j}v_2 + \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{k}v_3$$

یوں سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے کسی ایک کارتیسی نظام میں لکھے گئے ارکان کو کسی دوسرے کارتیسی نظام میں لکھے گئے ارکان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

اس تبادل کو سادہ صورت میں لکھنے کی خاطر ہم

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i} &= c_{11} \quad & \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j} &= c_{12} \quad & \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k} &= c_{13} \\ \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{i} &= c_{21} \quad & \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{j} &= c_{22} \quad & \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{k} &= c_{23} \\ \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{i} &= c_{31} \quad & \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{j} &= c_{32} \quad & \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{k} &= c_{33} \end{aligned} \tag{10.98}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_1^* &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 \\ v_2^* &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\ v_3^* &= c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3 \end{aligned} \tag{10.99}$$

علامت جمع استعمال کرتے ہوئے اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_k^* = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} v_l \qquad k = 1, 2, 3 \tag{10.100}$$

اسی طرح الٹ تبادل کا کلیہ

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}v_1^* + c_{21}v_2^* + c_{31}v_3^* \\ v_2 &= c_{12}v_1^* + c_{22}v_2^* + c_{32}v_3^* \\ v_3 &= c_{13}v_1^* + c_{23}v_2^* + c_{33}v_3^* \end{aligned} \tag{10.101}$$

بھی حاصل کیا جا سکتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_l = \sum_{m=1}^{3} c_{ml} v_m^* \qquad l = 1, 2, 3 \tag{10.102}$$

یہاں غور کریں کہ مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 میں یکساں عددی سر c_{kl} استعمال ہوتے ہیں البتہ c_{11} ، c_{22} اور c_{33} کے علاوہ تمام عددی سر کے مقامات دونوں تبادل میں مختلف ہیں۔

عددی سروں c_{kl} سادہ جیومیٹریائی مطلب رکھتے ہیں۔چونکہ $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{i}^*$ اکائی سمتیات ہیں لہٰذا صفحہ 505 پر مساوات 7.23 کے تحت $c_{11} = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i}$ درحقیقت مثبت x اور مثبت x^* محور کے مابین زاویے کا کوسائن

$\cos$ ہے۔اسی طرح $c_{12} = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j}$ مثبت x^* اور مثبت y محور کے مابین زاویے کا کوسائن ہے۔یہی کچھ باقی عددی سروں کے لئے بھی درست ہے۔

عددی سر c_{kl} چند اہم تعلقات پر پورا اترے ہیں جنہیں اب حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 10.102 کو مساوات 10.100 میں پر کرنے سے

$$v_k^* = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} v_l = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} \sum_{m=1}^{3} c_{ml} v_m^* = \sum_{m=1}^{3} v_m^* \left(\sum_{l=1}^{3} c_{kl} c_{ml} \right) \tag{10.103}$$

ملتا ہے جہاں $k = 1, 2, 3$ ہے۔مثلاً $k = 1$ کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$v_1^* = v_1^* \left(\sum_{l=1}^{3} c_{1l} c_{1l} \right) + v_2^* \left(\sum_{l=1}^{3} c_{1l} c_{2l} \right) + v_3^* \left(\sum_{l=1}^{3} c_{1l} c_{3l} \right)$$

ہر سمتیہ $\boldsymbol{v} = v_1^* \boldsymbol{i}^* + v_2^* \boldsymbol{j}^* + v_3^* \boldsymbol{k}^*$ پر پورا اترنے کی خاطر درج بالا میں پہلا مجموعہ اکائی کے برابر ہونا ہو گا جبکہ باقی دو مجموعوں کو صفر کے برابر ہونا ہو گا۔اسی طرح $k = 2$ اور $k = 3$ کے لئے بھی شرائط حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 10.103 صرف اور صرف اس صورت ہر سمتیہ کے لئے درست ہو گا جب یہ درج ذیل شرط پر پورا اترتا ہو۔

$$\sum_{l=1}^{3} c_{kl} c_{ml} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases} \tag{10.104}$$

اس شرط کو **کرونیکر ضرب**[61] (کرونیکر ڈیلٹا)[62]

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sum_{l=1}^{3} c_{kl} c_{ml} = \delta_{km} \qquad (k, m = 1, 2, 3) \tag{10.105}$$

ایسے تین عدد سمتیات جن کے اجزاء درج ذیل ہوں

$$c_{11}, c_{12}, c_{13} \qquad c_{21}, c_{22}, c_{23} \qquad c_{31}, c_{32}, c_{33}$$

---

[61] Kronecker delta

[62] جرمنی کے ریاضی دان لیوپولڈ کرونیکر [1823-1891]

میں دو عدد سمتیات کا غیر سمتی ضرب مساوات 10.105 کا بایاں ہاتھ دیتا ہے۔مزید مساوات 10.105 سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ یہ سمتیات اکائی قائمہ الزاویہ سمتیات ہیں۔یوں ان کے غیر سمتی سہ ضرب کی قیمت $+1$ یا -1 ہو گی یعنی:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \mp 1 \tag{10.106}$$

یہاں ثبوت دیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اگر دونوں محددی نظام دائیں ہاتھ کے نظام ہوں (یا دونوں محددی نظام بائیں ہاتھ کے نظام ہوں) تب درج بالا مقطع کی قیمت $+1$ ہو گی۔اس کے برعکس اگر ایک محددی نظام دائیں ہاتھ کا نظام ہو اور دوسرا بائیں ہاتھ کا نظام ہو تب درج بالا مقطع کی قیمت -1 ہو گی۔ہم اپنے نتیجے کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 10.6: (سمتیات کے ارکان کے تبادلے کا قاعدہ)
دو عدد کارتیسی محددی نظام میں کسی بھی سمتیہ v کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 اور v_1^* ، v_2^* ، v_3^* کو ایک دوسرے سے مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں مساوات 10.98 عددی سر c_{kl} دیتا ہے جو مساوات 10.104 اور مساوات 10.106 پر پورا اترتے ہیں۔

ہم اب کسی ایک کارتیسی محددی نظام کا کسی دوسرے کارتیسی نظام میں تبادلہ کے لئے درکار کلیات حاصل کرتے ہیں۔اگر xyz اور $x^*y^*z^*$ کارتیسی محددی نظام کے مبدا ایک ہی نقطے پر پائے جاتے ہوں تب v کی دم کو مبدا پر رکھتے ہوئے v کو نقطہ Q کا تعین گر سمتیہ تصور کیا جا سکتا ہے جہاں v کا اختتامی نقطہ Q ہے۔اگر ان کارتیسی محددی نظام میں Q کے محدد (x, y, z) اور (x^*, y^*, z^*) ہوں تب مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 میں درج ذیل ہو گا۔

$$v_1 = x, v_2 = y, v_3 = z \quad v_1^* = x^*, v_2^* = y^*, v_3^* = z^*$$

یوں مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 کو v_1 ، v_2 ، v_3 اور v_1^* ، v_2^* ، v_3^* کی بجائے x ، y ، z اور x^* ، y^* ، z^* استعمال کرتے ہوئے ہم مبدا محددی نظام کے تبادلے کے باہمی تعلقات حاصل ہوتے ہیں۔

اگر محددی نظام ہم مبدا نہ ہوں تب ان کے مابین تبادلے کو دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلے حصے میں درج بالا تبادلہ کیا جائے گا جبکہ دوسرے حصے میں مستقیم حرکت کی جائے گی۔ مستقیم حرکت میں دونوں کارتیسی نظام کے ارکان میں صرف مستقل قیمت کا فرق ہوتا ہے۔یوں عمومی تبادلے کا درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 10.7: (کارتیسی محددی نظاموں کے تبادلے کا قاعدہ) کسی ایک کارتیسی محددی نظام xyz سے کوئی دوسرا کارتیسی محددی نظام $x^*y^*z^*$ درج ذیل کلیے کی مدد سے حاصل ہو گا

$$
\begin{aligned}
x^* &= c_{11}x + x_{12}y + c_{13}z + b_1 \\
y^* &= c_{21}x + x_{22}y + c_{23}z + b_2 \\
z^* &= c_{31}x + x_{32}y + c_{33}z + b_3
\end{aligned}
\tag{10.107}
$$

جبکہ $x^*y^*z^*$ سے xyz درج ذیل کلیات کی مدد سے حاصل ہو گا

$$
\begin{aligned}
x &= c_{11}x^* + c_{21}y^* + c_{31}z^* + \tilde{b}_1 \\
y &= c_{12}x^* + c_{22}y^* + c_{32}z^* + \tilde{b}_2 \\
z &= c_{13}x^* + c_{23}y^* + c_{33}z^* + \tilde{b}_3
\end{aligned}
\tag{10.108}
$$

جہاں عددی سر c_{kl} ، مساوات 10.98 سے حاصل ہوں گے جو مساوات 10.104 اور مساوات 10.106 پر پورا اترتے ہیں جبکہ b_1 ، b_2 ، b_3 ، $\tilde{b}_1$ ، $\tilde{b}_2$ ، $\tilde{b}_3$ مستقل قیمتیں ہیں۔

سوالات

سوال 10.160: مساوات 10.102 میں دیے گئے تمام عددی سر کی جیومیٹریائی معنی پر غور کریں۔

سوال 10.161 تا سوال 10.166 میں c_{kl} اور b_k دریافت کریں۔

سوال 10.161: ایسا مستقیم حرکت جو مبدا کو $(5, 1, -4)$ پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1,\ b_1 = 5, b_2 = 1, b_3 = -4$ جبکہ بقایا تمام عددی سر صفر ہیں۔

سوال 10.162: ایسا مستقیم حرکت جو $(1, 0, 3)$ کو $(3, 2, 1)$ پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1,\ b_1 = 2, b_2 = 2, b_3 = -2$ جبکہ بقایا تمام عددی سر صفر ہیں۔

سوال 10.163: سطح xz میں عکس۔

جواب: $c_{11} = 1,\ c_{22} = -1,\ c_{33} = 1$ جبکہ بقایا تمام مستقل سر صفر ہیں۔

سوال 10.164: سطح $y = x$ میں عکس۔

جواب: $c_{12} = 1,\ c_{21} = 1,\ c_{33} = 1$ جبکہ بقایا تمام مستقل سر صفر ہیں۔

سوال 10.165: z محور کے گرد θ زاویہ گھومنا۔

جواب:

سوال 10.166: ایسا مستوی حرکت جو مثبت x ، y ، z کو بالترتیب مثبت y^* ، z^* ، x^* پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{13} = c_{21} = c_{32} = 1$ جبکہ باقی تمام مستقل صفر ہیں۔

سوال 10.167: مساوات 10.106 کا مقطع سوال 10.161 تا سوال 10.164 میں کیا ہو گا۔

جواب: سوال 10.161 کا مقطع $+1$ ہے۔ باقی مقطع بالترتیب -1 ، 0 اور 0 ہیں۔

سوال 10.168: مساوات 10.101 حاصل کریں۔

10.10 سمتی میدان کی پھیلاو

فرض کریں کہ $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ قابل تفرق سمتی تفاعل ہے جس کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 ہیں جہاں x ، y ، z فضا میں کارتیسی محدد ہیں۔ ایسی صورت میں درج ذیل تفاعل $\boldsymbol{v}$ کی پھیلاو[63] کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_{\text{پھیلاو}} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{10.109}$$

[63] divergence

$\boldsymbol{v}$ کی پھیلاو کو عموماً $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}$$

جہاں غیر سمتی ضرب $(\frac{\partial}{\partial x})v_1$ سے مراد جزوی تفرق $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ لیا جاتا ہے (جو محض بہتر علامت نویسی کے علاوہ کوئی معنی نہیں رکھتی)۔یاد رہے کہ $\nabla \boldsymbol{v}$ سے مراد غیر سمتی $\boldsymbol{v}_{\text{پھیلاو}}$ ہے جبکہ ∇f سے مراد حصہ 10.8 میں بیان کی گئی سمتی $f_{\text{ڈھلوان}}$ ہے۔

مثال کے طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{v} = 2xy\boldsymbol{i} - 5yz\boldsymbol{j} + 2x^2y\boldsymbol{k} \implies \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2y - 5z$$

ہم جلد دیکھیں گے کہ پھیلاو اہم طبعی معنی رکھتا ہے۔اب ظاہر ہے کہ ایسے تفاعل کی قیمت جو طبعی یا جیومیٹریائی معنی رکھتی ہو پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے، یعنی ایسی قیمت محددی نظام بدلنے سے تبدیل نہیں ہوتی۔

مسئلہ 10.8: (محددی نظام کے لحاظ سے پھیلاو کی عدم تغیر)
پھیلاو $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ کی قیمت صرف فضا میں نقطے (اور $\boldsymbol{v}$) پر منحصر ہے جبکہ چنے گئے محددی نظام کا مساوات 10.109 میں دی گئی پھیلاو کی قیمت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔یوں کسی دوسرے کارتیسی محدد x^* ، y^* ، z^* اور $\boldsymbol{v}$ کے مطابقتی ارکان v_1^* ، v_2^* ، v_3^* کی صورت میں $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial z^*} \tag{10.110}$$

ثبوت: ہم مساوات 10.110 کو مساوات 10.109 سے حاصل کرتے ہیں۔ہم درج ذیل استعمال کرتے ہوئے

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z \quad \text{اور} \quad x_1^* = x^*,\ x_2^* = y^*,\ x_3^* = z^*$$

مساوات 10.107 کو مجموعے کی علامت کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$x_k^* = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} x_l + b_k \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{10.111}$$

حصہ 10.7 میں دی گئی متعدد متغیرات پر مبنی، تفاعل کے زنجیری قاعدے کے تحت

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} \frac{\partial x_k^*}{\partial x_l} \tag{10.112}$$

ہو گا۔ اس مجموعے میں مساوات 10.111 کے تحت $\frac{\partial x_k^*}{\partial x_l} = c_{kl}$ ہو گا۔مساوات 10.102 کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$v_l = \sum_{m=1}^{3} c_{ml} v_m^*$$

جس کے تفرق

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = \sum_{m=1}^{3} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}$$

کو مساوات 10.112 میں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} c_{kl} \qquad (l = 1, 2, 3)$$

درج بالا میں باری باری $l = 1, 2, 3$ پر کرتے ہوئے حاصل تین تفاعل کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} c_{kl} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}$$

جو مساوات 10.105 کی بنا گھٹ کر درج ذیل دیگا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{km} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} \tag{10.113}$$

□

اگر $f(x, y, z)$ دو مرتبہ قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 10.109 کے تحت

$$(f_{\text{ڈھلوان}})_{\text{پھیلاو}} = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ہو گا جس کا دایاں ہاتھ، حصہ 10.8 میں دیا گیا، f کا لاپلاسی ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(f_{\text{ڈھلوان}})_{\text{پھیلاو}} = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \tag{10.114}$$

مثال 10.23: کشش ثقل
ثقلی میدان پر مثال 10.22 میں غور کیا گیا۔ثقلی قوت $\boldsymbol{f}$ غیر سمتی تفاعل $h(x, y, z) = \frac{GMm}{r}$ کی ڈھلوان ہے جو لاپلاس کی مساوات $\nabla^2 h = 0$ پر پورا اترتا ہے۔یوں مساوات 10.114 کے تحت $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$ ہو گا (جہاں $r > 0$ ہے)۔ □

درج ذیل مثال ماقوا حرکیات[64] سے لی گئی ہے۔ یہ مثال پھیلاو کی طبعی اہمیت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 10.24: داب پذیر سیال کی حرکت
ہم ایسے خطہ R میں سیال[65] کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس میں نا سیال داخل ہوتا اور اور نا ہی خطے سے سیال کی نکاسی ہوتی ہو۔مائع اور گیس دونوں کو سیال تصور کیا جاتا ہے۔مائع کی داب پذیری انتہائی کم ہوتی ہے جس کو عموماً نظر انداز کیا جا سکتا ہے البتہ گیس کی داب پذیری کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا ہے۔یوں گیس کی کثافت ρ (یعنی کمیت فی اکائی حجم) کا دارومدار فضا میں x ، y ، z (اور ممکن ہے کہ وقت) پر ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمارا سیال داب پذیر ہے۔

ہم ایسے مستطیلی متوازی السطوح[66] W میں سیال کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس کے اطراف کی لمبائیاں Δx ، Δy ، Δz ہیں۔ W کے کنارے محددی محور کے متوازی ہیں (شکل 10.15)۔یوں W کا حجم $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ہو گا۔ اب فرض کریں کہ سمتی رفتار سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} \tag{10.115}$$

---

[64] hydrodynamics
[65] fluid
[66] rectangular parallelepiped

ہم درج ذیل لکھ کر آگے بڑھتے ہیں

$$\boldsymbol{u} = \rho \boldsymbol{v} = u_1 \boldsymbol{i} + u_2 \boldsymbol{j} + u_3 \boldsymbol{k} \tag{10.116}$$

اور فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ سمتیات x ، y اور z کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ آئیں W کی سطحوں پر سیال کی حرکت سے W میں سیال کی کمیت کی تبدیلی کی شرح پر غور کرتے ہیں۔ کسی بھی سطح پر اندر جانب حرکت سے کمیت بڑھے گی جبکہ باہر جانب حرکت سے کمیت گھٹے گی۔ ہم W سے اکائی وقت میں کمیت کی اخراج حاصل کرتے ہیں۔ W کی بائیں ہاتھ سطح جس کا رقبہ $\Delta x \Delta z$ ہے پر نظر رکھیں۔ $\boldsymbol{v}$ کے ارکان v_1 اور v_3 اس سطح کے متوازی ہیں لہٰذا ان کا اخراج پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں بائیں ہاتھ سطح سے چھوٹے وقفہ Δt میں کمیت کا دخول

$$(\rho v_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t = (u_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں y بائیں ہاتھ سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اسی دورانیے میں دائیں ہاتھ سطح سے کمیت کا اخراج تقریباً

$$(u_2)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں $y + \Delta y$ دائیں ہاتھ سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ ان کا فرق

$$\Delta u_2 \Delta x \Delta z \Delta t = \frac{\Delta u_2}{\Delta y} \Delta V \Delta t \qquad [\Delta u_2 = (u_2)_{y+\Delta y} - (u_2)_y]$$

تقریباً کل اخراج ہو گا۔ W کے باقی جڑواں سطحوں سے بالکل اسی طرح اخراج حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں تمام سطحوں سے کل اخراج تقریباً

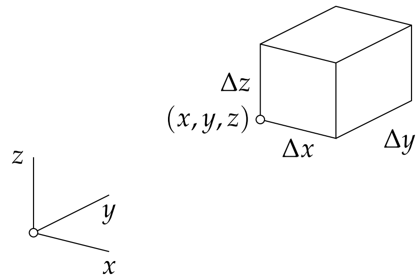
$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z} \right) \Delta V \Delta t \tag{10.117}$$

ہو گا جہاں

$$\Delta u_1 = (u_1)_{x+\Delta x} - (u_1)_x \quad \text{اور} \quad \Delta u_3 = (u_3)_{z+\Delta z} - (u_3)_z$$

ہیں۔ وقت کے ساتھ W میں کثافت کی تبدیلی کی شرح کی بنا درج بالا اخراج ممکن ہو گا لہٰذا کل اخراج تقریباً

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V \Delta t \tag{10.118}$$



شکل 10.15: مستطیلی متوازی السطوح (مثال 10.24)

ہو گا جہاں منفی کی علامت کثافت کے گھٹنے کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 10.117 اور مساوات 10.118 کو آپس میں برابر پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $\Delta V \Delta t$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

یا

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{10.119}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو داب پذیر سیال کے حرکت کی **استمراری مساوات**[67] کہتے ہیں۔

وقت کے ساتھ نا تبدیل ہونے والے حرکت، جسے برقرار حرکت کہتے ہیں، کی صورت میں $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں استمراری مساوات درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{10.120}$$

غیر داب پذیر سیال کی صورت میں کثافت ρ مستقل قیمت ہو گی اور برقرار حرکت کی استمراری مساوات

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{v}) = 0 \tag{10.121}$$

ہو گی جو **غیر داب پذیری کا شرط** کہلاتا ہے جس کے تحت کمیت کا دخول ہر لمحہ کمیت کے اخراج کے برابر ہو گا۔
□

---

[67] continuity equation

سوالات

سوال 10.169 تا سوال 10.176 میں پھیلاو دریافت کریں۔

سوال 10.169: $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$
جواب: 3

سوال 10.170: $x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$
جواب: $2x + 2y + 2z$

سوال 10.171: $3x^2\boldsymbol{i} - 5y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$
جواب: $6x - 10y + 2z$

سوال 10.172: $x^2yz^3(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$
جواب: $2xyz^3 + x^2z^3 + 3x^2yz^2$

سوال 10.173: $2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$
جواب: 0

سوال 10.174: $yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$
جواب: 0

سوال 10.175: $\tan\frac{y}{z}\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$
جواب: $1 + 2z$

سوال 10.176: $\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
جواب: 0

سوال 10.177 تا سوال 10.180 میں دیے گئے تعلق ثابت کریں۔

سوال 10.177: $\nabla\cdot(k\boldsymbol{v}) = k\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ جہاں k مستقل ہے۔

سوال 10.178: $\nabla\cdot(f\boldsymbol{v}) = f\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f$ جہاں f تفاعل ہے۔

سوال 10.179: $\nabla\cdot(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g$ جہاں f اور g تفاعل ہیں۔

سوال 10.180: $\nabla \cdot (f\nabla g) - \nabla \cdot (g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$ جہاں f اور g تفاعل ہیں۔

سوال 10.181: ثابت کریں کہ استمراری مساوات 10.119 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\rho = 0$$

سوال 10.182 اور سوال 10.183 میں پھیلاو دریافت کریں۔سوال 10.178 میں دیا گیا کلیہ استعمال کریں۔

سوال 10.182: $e^x(\sin y\boldsymbol{i} + \cos y\boldsymbol{j})$
جواب: 0

سوال 10.183: $\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
جواب: 0

سوال 10.184: سیال کے ایسے حرکت پر غور کریں جس کا $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}$ ہے۔اس کے درج ذیل خواص ثابت کریں۔ سیال کا بہاو غیر داب پذیر ہے۔لمحہ $t = 0$ پر وہ ذرات جو ایسے مکعب میں موجود ہوں جس کے اطراف $x = 0$، $x = 1$، $y = 0$، $y = 1$، $z = 0$، $z = 1$ ہوں، کا حجم لمحہ $t = 1$ پر اکائی ہو گا۔

سوال 10.185: سیال کے ایسے حرکت پر غور کرتے ہیں جس کی حرکت $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$ ہو۔ثابت کریں کہ انفرادی ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t) = c_1e^t\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں c_1، c_2، c_3 مستقل ہیں۔ثابت کریں کہ سیال کی بہاو داب پذیر ہے۔ثابت کریں کہ لمحہ $t = 0$ پر وہ ذرات جو ایسے مکعب میں موجود ہوں جس کے اطراف $x = 0$، $x = 1$، $y = 0$، $y = 1$، $z = 0$، $z = 1$ ہوں، کا حجم لمحہ $t = 1$ پر e ہو گا۔

سوال 10.186: نقطہ $N : (4, 2, 4)$ پر کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ کے باہر رخ عمود کی سمت میں تفاعل $\boldsymbol{u} = x^4\boldsymbol{i} + y^4\boldsymbol{j} + z^4\boldsymbol{k}$ کے پھیلاو کا سمتی تفرق دریافت کریں۔

جواب: 272

سوال 10.187: نقطہ $N : (4, 2, 4)$ پر کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ کے باہر رخ عمود کی سمت میں تفاعل $\boldsymbol{u} = xz\boldsymbol{i} + yx\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ کے پھیلاو کا سمتی تفرق دریافت کریں۔

جواب: $\frac{5}{3}$

10.11 سمتی تفاعل کی گردش

فرض کریں کہ فضا میں x ، y ، z دائیں ہاتھ کارتیسی نظام محدد ہے اور

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$$

قابل تفرق سمتیہ ہے۔ایسی صورت میں درج ذیل تفاعل کو سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی **گردش**[68] کہتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{\text{گردش}} = \nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{10.122}$$

بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں درج بالا مساوات کے ساتھ منفی کی علامت ہو گی۔

مسئلہ 10.9: گردش کی عدم تغیر
گردش کی لمبائی اور سمت پر چنے گئے محددی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

گردش کے تصور کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے کرتے ہیں۔

مثال 10.25: ٹھوس جسم کا گھومنا
ہم صفحہ 527 پر مثال 7.13 میں دیکھ چکے ہیں کہ مستحکم محور کے گرد ٹھوس جسم کے گھومنے کو محور کی رخ سمتیہ $\boldsymbol{\omega}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کی مقدار ω ہے۔ہم $\omega(>0)$ کو زاویائی رفتار کہتے ہیں۔ $\boldsymbol{\omega}$ محور کی اس رخ ہو گا جس کی سمت میں دیکھتے ہوئے جسم کی حرکت گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی سمت میں نظر آتی ہے۔مساوات 7.55 کے تحت ٹھوس جسم پر نقطہ N کی سمتی رفتار

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

---

[68] curl

ہو گی جہاں ٹھوس جسم پر نقطہ N کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے اور محدد کا مبدا گھومنے کے محور پر پایا جاتا ہے۔ہم دائیں ہاتھ کار تیسی نظام یوں چنتے ہیں کہ $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ لکھا جا سکتا ہو یعنی گھومنے کا محور مثبت z کی رخ ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (مثال 10.3 دیکھیں)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j}$$

لہٰذا

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \boldsymbol{k}$$

یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega} \tag{10.123}$$

ہو گا۔یوں ٹھوس جسم کے گھومنے کی صورت میں سمتی رفتار کی گردش، گھومنے کی محور کے رخ ہو گا جبکہ اس کی مقدار زاویائی رفتار کی دگنا ہو گی۔

یہاں غور کریں کہ یہ نتیجہ چنے گئے کار تیسی نظام پر منحصر نہیں ہے۔ □

کسی بھی دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل f کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\nabla \times (\nabla f) = \boldsymbol{0} \tag{10.124}$$

جس کو با آسانی ثابت کیا جا سکتا ہے۔یوں اگر کوئی سمتیہ کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان ہو تب اس کی گردش صفر کے برابر ہو گی۔چونکہ گردش گھومنے کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ڈھلوان میدان **غیر گردشی**[69] حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔(ایسا کوئی بھی میدان، جو سمتی رفتار کا میدان نہ ہو، کو **بقائی میدان**[70] (حصہ 10.8 کا آخر دیکھیں) کہتے ہیں۔)

مثال 10.26: ثقلی میدان جس پر مثال 10.22 میں غور کیا گیا کا $\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ ہے جو غیر گردشی میدان ہے۔ مثال 10.25 کا میدان غیر گردشی نہیں ہے۔ □

---

[69] irrotational
[70] conservative field

سوالات

سوال 10.188 تا سوال 10.193 میں دائیں ہاتھ کارتیسی نظام کے لحاظ سے $\boldsymbol{v}$ کی گردش دریافت کریں۔

سوال 10.188: $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$
جواب: $-2\boldsymbol{k}$

سوال 10.189: $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$
جواب: $-\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 10.190: $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{0}$

سوال 10.191: $\boldsymbol{v} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$
جواب: $-2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k}$

سوال 10.192: $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{0}$

سوال 10.193: $\boldsymbol{v} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
جواب: $\boldsymbol{0}$

سوال 10.194 تا سوال 10.195 میں سمتیہ حرکت $\boldsymbol{v}$ دیا گیا ہے۔کیا سیال داب پذیر ہے؟ ذرات کی راہ دریافت کریں۔

سوال 10.194: $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$
جواب: $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ ہے۔چونکہ $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2$ ہے لہٰذا سیال داب پذیر ہے۔ $\boldsymbol{r} = c_1 e^t \boldsymbol{i} + c_2 e^t \boldsymbol{j} + c_3 \boldsymbol{k}$

سوال 10.195: $\boldsymbol{v} = y^3\boldsymbol{i}$
جواب: $\nabla \times \boldsymbol{v} = -3y^2\boldsymbol{k}$ ہے۔چونکہ $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ہے لہٰذا سیال غیر داب پذیر ہے۔

سوال 10.196 تا سوال 10.201 میں دیے گئے تعلق ثابت کریں۔ فرض کریں کہ تفاعل درکار حد تک قابل تفرق ہے۔

سوال 10.196: $\nabla \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \nabla \times \boldsymbol{u} + \nabla \times \boldsymbol{v}$

سوال 10.197: $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0$

سوال 10.198: $\nabla \times (f\boldsymbol{v}) = \nabla f \times \boldsymbol{v} + f\nabla \times \boldsymbol{v}$

سوال 10.199: $\nabla \times (\nabla \boldsymbol{v}) = 0$

سوال 10.200: $\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}$

سوال 10.201: $\nabla \cdot (g\nabla f \times f\nabla g) = 0$

سوال 10.202 اور سوال 10.203 میں $\boldsymbol{u} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے دائیں ہاتھ کارتیسی نظام کے لحاظ سے حل کریں۔

سوال 10.202: $\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \quad \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$
جوابات: $\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (-2yz - xz + xy)\boldsymbol{i} + (yz + 2xz - xy)\boldsymbol{j} + (-yz + xz + 2xy)\boldsymbol{k}$
$\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy$

سوال 10.203: $\boldsymbol{u} \times \nabla \times \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \times \nabla \times \boldsymbol{u}$
جوابات: $\boldsymbol{u} \times \nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{v} \times \nabla \times \boldsymbol{u} = (xz - yz)\boldsymbol{i} + (xy - xz)\boldsymbol{j} + (yz - xy)\boldsymbol{k}$

باب 11

سمتی تکملی علم الاحصاء۔ تکمل کے مسئلے

تکمل سے آپ بخوبی واقف ہیں جس کو سمتی تکملی علم الاحصاء[1] وسعت دیتا ہے۔یوں منحنی پر تکمل، جسے **خطی تکمل**[2] کہتے ہیں، سطح پر تکمل جسے **سطحی تکمل**[3] کہتے ہیں اور حجم پر تکمل جسے **حجمی تکمل**[4] کہتے ہیں، حاصل کیا جا سکتا ہے۔مزید ایک قسم کی تکمل کا دوسری قسم کی تکمل میں تبادلہ کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے بعض اوقات نسبتاً آسان تکمل حاصل ہوتا ہے۔یوں سطح میں **مسئلہ گرین**[5] کی مدد سے خطی تکمل کو دو درجی تکمل میں یا دو درجی تکمل کو خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔**گاوسی مسئلہ ارتکاز**[6] کی مدد سے حجمی تکمل کو سطحی تکمل یا سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔**مسئلہ سٹوکس**[7] کی مدد سے تین درجی تکمل کو خطی تکمل یا خطی تکمل کو تین درجی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

سمتی تکملی الاحصاء کا انجینئری، طبیعیات، ٹھوس میکانیات، سیالی میکانیات اور دیگر میدان میں اہم کردار پایا جاتا ہے۔

[1] vector calculus
[2] line integral
[3] surface integral
[4] volume integral
[5] Green's theorem
[6] Gauss's convergence theorem
[7] Stoke's theorem

11.1 خطی تکمل

درج ذیل تفاعل f کی x محور پر $x = a$ تا $x = b$ قطعی تکمل ہے

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1}$$

جہاں وقفہ a اور b کے درمیان ہر نقطے پر f معین ہے۔ خطی تکمل میں f کا تکمل سطح میں (یا فضا میں) منحنی C پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں C کے ہر نقطے پر f معین ہے۔

خطی تکمل کی تعریف عین قطعی تکمل کی تعریف کی مانند ہے۔ خطی تکمل کچھ یوں ہے۔

ہم فضا میں منحنی C لیتے ہیں اور اس پر ایک رخ کو مثبت سمت کہتے ہیں۔یوں منحنی پر الٹ چلتے ہوئے منفی سمت حاصل ہو گی۔ مثبت سمت میں چلتے ہوئے منحنی پر ابتدائی نقطے کو A اور اختتامی نقطے کو B کہتے ہیں۔ جیسا شکل 11.1-ب میں دکھایا گیا ہے ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ ہم مقام ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں C بند راہ کہلاتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ C سادہ منحنی (حصہ 10.3) ہے جس کو

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} \qquad (a \le s \le b) \tag{11.2}$$

ظاہر کرتی ہے [جہاں s منحنی کی لمبائی قوس ہے (حصہ 10.4)] اور پورے C پر $\boldsymbol{r}(s)$ استمراری ہے جس کا (پورے C پر) تفرق $\boldsymbol{r}'$ موجود ہے اور یہ تفرق غیر صفر سمتیہ ہے۔اس طرح C **ہموار منحنی**[8] کہلائے گی یعنی C کے ہر نقطے پر C کا منفرد مماس پایا جاتا ہے اور منحنی پر چلنے سے مماس کی سمت میں تبدیلی استمراری ہوتی ہے۔

فرض کریں کہ $f(x,y,z)$ متغیر s کا ایسا استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کے ہر نقطے پر معین ہے۔ہم C کو بے قاعدہ طریقے سے n عدد ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.2)۔یوں ہر ٹکڑے کی لمبائی مختلف ہو سکتی ہے۔ہم ابتدائی سر سے شروع کرتے ہوئے ان ٹکڑوں کے سروں کو $P_0\,(=A)$ ، P_1 ، P_2 ، $\cdots$ ، $P_n\,(=B)$ سے اور s کی مطابقتی قیمتوں کو

$$s_0\,(=a) < s_1 < s_2 < \cdots < s_n\,(=b)$$

[8] smooth curve

شکل 11.1: سمت بند منحنی

سے ظاہر کرتے ہیں۔ہم ہر ٹکڑے پر بے قاعدگی سے کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً P_0 اور P_1 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_1 چنتے ہیں، P_1 اور P_2 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_2 چنتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔یوں ہر ٹکڑے پر نقطہ باقی ٹکڑوں پر نقطوں سے ضروری نہیں کہ کوئی مشابہت رکھتا ہو۔ ان نقطوں پر f کی قیمتوں کو لیتے ہوئے ہم مجموعہ

$$J_n = \sum_{m=1}^{n} f(x_m, y_m, z_m)\Delta s_m \tag{11.3}$$

لیتے ہیں جہاں x_m ، y_m ، z_m نقطہ Q_m کے محدد ہیں اور Δs_m اس ٹکڑے کی لمبائی ہے جس پر Q_m واقع ہے۔

$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}$$

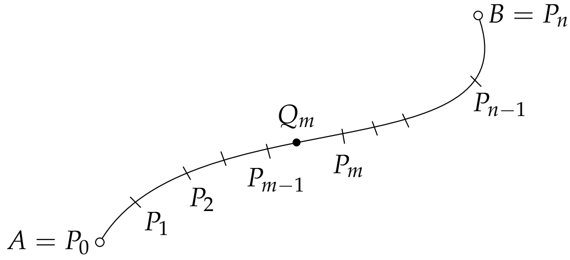
ہم اس طرح کے مجموعے مکمل بے قاعدگی سے $n = 2, 3, \cdots$ کے لئے یوں حاصل کرتے ہیں کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی تک پہنچے، Δs کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر تک پہنچتی ہو۔یوں ہمیں مجموعوں کا تسلسل $J_2, J_3, \cdots$ ملتا ہے۔ اس تسلسل کی حد کو C پر A تا B تفاعل f کی **خطی تکمل**[9] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z) \, \mathrm{d}s$$

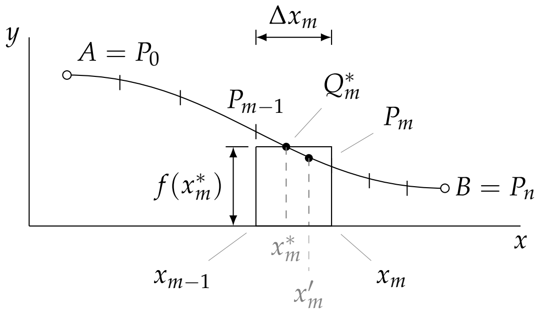
منحنی C کو **تکمل کی راہ** کہتے ہیں جبکہ $f(x, y, z)$ کو **متکمل**[10] کہتے ہیں۔

چونکہ f کو استمراری فرض کیا گیا اور C ہموار ہے لہٰذا یہ حد موجود ہو گا جس کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کی چناؤ کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ C پر کسی بھی نقطہ P کا تعین لمبائی قوس s سے کیا جاتا ہے۔یوں

[9] line integral
[10] integrand



شکل 11.2: C کی ٹکڑوں میں تقسیم



شکل 11.3: رقبہ اور تکمل (مثال 11.1)

A اور B کا تعین مطابقتی $s = a$ اور $s = b$ سے کیا جائے گا لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)]\,\mathrm{d}s \tag{11.4}$$

جو قطعی تکمل ہے۔ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمل بھی تسلسل $J_2, J_3, \cdots$ کی حد کو کہتے ہیں جس کی قیمت پر نا تو ٹکڑوں کی تقسیم اور نا ہی ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر پایا جاتا ہے۔مثال 11.1 میں مزید تفصیل دی گئی ہے۔

مثال 11.1: تکمل کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کے چناؤ کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے
آئیں دیکھتے ہیں کہ تکمل کی قیمت پر راہ کی ٹکڑوں میں تقسیم اور ان ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر کیوں نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 11.3 میں تفاعل $y = f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ ان نقطوں کے درمیان تفاعل کو بے قاعدہ ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ وقفہ P_m تا P_{m-1} کے مابین تفاعل

کے نیچے چھوٹا رقبہ ΔS_m ہے۔شکل 11.3 میں ایک مستطیل دکھایا گیا ہے جو نقطہ Q_m^* سے گزرتا ہے۔ Q_m^* یوں چنا گیا ہے کہ مستطیل کا رقبہ عین ΔS_m کے برابر ہو۔

$$\Delta S_m = f(x_m^*)\Delta x_m \qquad (\Delta x_m = x_m - x_{m-1})$$

اس وقفے پر بغیر کسی قاعدہ دوسرا نقطہ Q_m بھی چنا گیا ہے۔اس نقطے سے گزرتی مستطیل کا رقبہ $f(x_m')\Delta x_m$ ہو گا جہاں Q_m کا x محدد x_m' ہے۔

اب استمراری تفاعل سے مراد یہ ہے کہ ہم کسی بھی نقطہ پر Δx اتنی کم لے سکتے ہیں کہ Δx وقفے پر تفاعل میں کل تبدیلی زیادہ سے زیادہ ϵ ہو جہاں ϵ جتنی بھی چھوٹی قیمت کیوں نا ہو۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\left| f(x_m') - f(x_m^*) \right| \leq \epsilon$$

جس کو

$$f(x_m') = f_m^* + t\epsilon \qquad (-1 \leq t \leq 1)$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں t ایسا متغیر ہے جس کی قیمت منفی اکائی سے مثبت اکائی تک ممکن ہے۔یوں Q_m' سے گزرتی مستطیل کا رقبہ

$$f(x_m')\Delta x_m = (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m$$

ہو گا۔یہ رقبہ اس صورت کم سے کم ہو گا جب $t = -1$ ہو اور اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $t = 1$ ہو۔ان دونوں صورتوں میں مستطیل کا رقبہ اصل تفاعل کے نیچے رقبے سے مختلف ہو گا۔تمام ٹکڑوں پر بے قاعدگی سے نقطے چنتے ہوئے تمام مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^{n} (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{m=1}^{n} f_m^*\Delta x_m + \epsilon \sum_{m=1}^{n} t\Delta x_m$$

اب چونکہ $|t| \leq 1$ ہے لٰہذا دائیں جانب مجموعے کے اندر قیمت کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت $t = 1$ پر حاصل ہو گی۔(حقیقت میں چونکہ ضروری نہیں ہے کہ t کی قیمت ہر مرتبہ اکائی ہی ہو لٰہذا اس مجموعے کی قیمت $b - a$ سے کم ہو گی۔) $\sum_{m=1}^{n} \Delta x_m = b - a$ اب چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں لٰہذا ہم اسے اتنا کم رکھتے ہیں کہ $\epsilon(b-a)$ قابل نظر انداز ہو۔درج بالا میں پہلا مجموعہ اُن مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ ہے جن کا رقبہ عین تفاعل کے نیچے رقبے کے برابر رکھا گیا تھا لٰہذا Δx_m کی ہر قیمت پر یہ مجموعہ اصل رقبے کے برابر ہی ہو گا۔یوں درج بالا سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{m=1}^{n} (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{i=m}^{n} f_m^*\Delta x_m$$

جو $x=a$ تا $x=b$ تفاعل کے نیچے کل رقبہ ہے۔

یوں آپ نے دیکھا کہ ہر ٹکڑے پر Q_m بالکل بے قاعدگی سے چنتے ہوئے تفاعل کے نیچے اصل رقبہ حاصل ہوتا ہے۔ □

عمومی مفروضہ

اس کتاب میں فرض کیا جائے گا کہ خطی تکمل کی ہر راہ **ٹکڑوں میں ہموار**[11] ہے، یعنی کہ راہ کو محدود تعداد کی ہموار ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

بدن راہ پر خطی تکمل کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\oint_C \qquad \left(\int_C \text{ کی جگہ}\right)$$

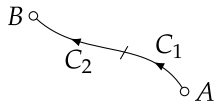
خطی تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے کہ قطعی تکمل کی درج ذیل جانی پہچانی خصوصیات خطی تکمل کے لئے بھی درست ہیں

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)} \qquad \int_C kf\,\mathrm{d}s = k\int_C f\,\mathrm{d}s \qquad (k \text{ مستقل})\\
&\text{(ب)} \qquad \int_C (f+g)\,\mathrm{d}s = \int_C f\,\mathrm{d}s + \int_C g\,\mathrm{d}s\\
&\text{(پ)} \qquad \int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{11.5}$$

جہاں مساوات 11.5-پ میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ان ٹکڑوں کی سمت بندی عین C کی طرح ہے (شکل 11.4)۔ راہ پر تکمل لیتے ہوئے دائری سمت تبدیل کرنے سے حاصل قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔

---

[11] piecewise smooth



شکل 11.4: تکمل کی راہ کو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

11.2 خطی تکمل کا حل

خطی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے اس کو حل کیا جاتا ہے۔ایسا تکمل کی راہ C کی روپ کی مدد سے کیا جاتا ہے۔آئیں اس عمل کو دیکھتے ہیں۔

اگر C کی روپ

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} \qquad a \le s \le b$$

ہو (جہاں s راہ C کی لمبائی قوس ہے) تب ہم مساوات 11.4 کی مدد سے درج ذیل استعمال کرتے ہیں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)]\,\mathrm{d}s \tag{11.6}$$

اگر C کی روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

ہو (جہاں t کوئی مقدار معلوم ہے) تب ہم

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{11.7}$$

استعمال کرتے ہیں جہاں مساوات 10.31 سے

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

ہے اور گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی فرض کیا گیا ہے کہ $\boldsymbol{r}(t)$ اور $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ دونوں استمراری ہیں اور $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ ہے۔

آئیں مساوات 11.7 حاصل کرتے ہیں۔ہم $\boldsymbol{r}$ کی جگہ

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\tilde{x}(t)\boldsymbol{i}+\tilde{y}(t)\boldsymbol{j}+\tilde{z}(t)\boldsymbol{k}$$

لکھ کر قوس لمبائی $s(t)$ حاصل کرتے ہیں۔اس کے بعد $\boldsymbol{r}(s(t))=\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ یعنی $x(s(t))=\tilde{x}(t)$ ، وغیرہ لکھ کر مساوات 11.6 کے دائیں ہاتھ میں قطعی تکمل کے قاعدے کے تحت

$$\int_a^b f[x(s),y(s),z(s)]\,\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t_1} f[\tilde{x}(t),\tilde{y}(t),\tilde{z}(t)]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

حاصل کرتے ہیں جو (استعمال کی گئی علامتوں میں تبدیل کے علاوہ) عین مساوات 11.7 ہے۔

چونکہ عموماً $\boldsymbol{r}(t)$ معلوم یا قابل معلوم ہو گا لہٰذا مساوات 11.7 عملی مسائل کی تقریباً تمام صورتوں کو حل کر پاتا ہے۔

مثال 11.2: برائے مساوات 11.6
تفاعل $f(x,y)=x^3y$ کا شکل 11.5 میں دکھائی گئی گول قوس

$$\boldsymbol{r}(s)=\cos s\boldsymbol{i}+\sin s\boldsymbol{j}\qquad 0\le s\le\frac{\pi}{2}$$

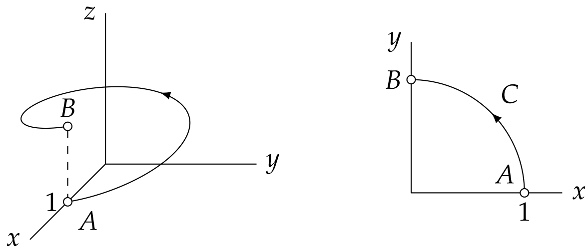
پر تکمل حاصل کریں۔

حل: چونکہ $x(s)=\cos s$ اور $y(s)=\sin s$ ہیں لہٰذا مساوات 11.5 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s&=\int_C x^3y\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 s\sin s\,\mathrm{d}s\\&=\int_1^0 -u^3\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\qquad (u=\sin s)\end{aligned}$$

□

مثال 11.3: برائے مساوات 11.7
xy مستوی میں نقطہ $A:(-1,1,0)$ سے نقطہ $B:(1,5,0)$ تک راہ $y=2x+3$ پر $\int_C x^2y\,\mathrm{d}s$ کی قیمت دریافت کریں۔



(الف) سطح میں تکمل کی راہ (مثال 11.2)

(ب) فضا میں خطی تکمل کی راہ (مثال 11.4)

شکل 11.5: سطح میں راہ اور فضا میں راہ۔

حل: ہم C کو درج ذیل مقدار معلوم روپ[12] میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (2t+3)\boldsymbol{j} \qquad -1 \le t \le 1$$

یوں

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{5}$$

ہو گا۔ راہ پر رہتے ہوئے $x^2y = t^2(2t+3) = 2t^3 + 3t^2$ ہو گا لہٰذا مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C x^2 y \,\mathrm{d}s = \sqrt{5}\int_{-1}^{1} (2t^3 + 3t^2)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{5}$$

□

مثال 11.4: فضا میں راہ پر خطی تکمل
پیچ دار راہ کو شکل 11.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس پر $\int_C (x^2+y^2+z^2)^2 \,\mathrm{d}s$ دریافت کریں۔

حل: پیچ دار راہ کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

[12] ظاہر ہے کہ ہم $t = x$ لیتے ہوئے راہ کو $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i} + (2x+3)\boldsymbol{j}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ہے لہٰذا

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\sin t\boldsymbol{i} + \cos \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{2}$$

ہو گا۔ اس راہ پر چلتے ہوئے

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^2 = (1 + t^2)^2$$

ہو گا اور یوں مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \,\mathrm{d}s &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}[\frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{2(2\pi)^3}{3} + 2\pi] \approx 3013\end{aligned}$$

□

ایسا خطی تکمل جس کا متکمل تجربی تفاعل ہو یا جو پیچیدہ قطعی تکمل دیتا ہو کو تکمل کے اعدادی طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔

کئی معاملوں میں خطی تکمل کے متکمل درج ذیل روپ رکھتے ہیں

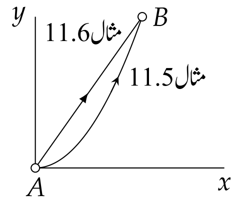
$$g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \quad g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{11.8}$$

جہاں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ تکمل کی راہ کی مقدار معلوم روپ میں موجود تفاعل کے تفرق ہیں۔ایسی صورت میں ہم

$$\int_C g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_C g(x,y,z)\,\mathrm{d}x \tag{11.9}$$

لکھتے ہیں۔ باقی دو صورتوں کے لئے بھی ایسا کیا جاتا ہے۔ایک ہی راہ C پر ان طرز کے تکمل کے مجموعے کو درج ذیل سادہ صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f\,\mathrm{d}x + \int_C g\,\mathrm{d}y + \int_C h\,\mathrm{d}z = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.10}$$



شکل 11.6: تکمل کے دو مختلف راہ (مثال 11.5 اور مثال 11.6)

راہ C کی روپ استعمال کرتے ہوئے تین میں سے دو آزاد متغیرات کو حذف کرتے ہوئے حاصل قطعی تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ تیسرا آزاد متغیر اس قطعی تکمل کا متغیر ہو گا۔

مثال 11.5: برائے مساوات 11.9 اور مساوات 11.10
خطی تکمل $\int_C [x^2y^2 \, \mathrm{d}x + (x - y + z) \, \mathrm{d}y + xz \, \mathrm{d}z]$ کی قیمت دریافت کریں۔ تکمل کی راہ سطح $z = 5$ میں قوس مکافی $y = x^2$ میں نقطہ $A : (0, 0, 5)$ تا نقطہ $B : (1, 1, 5)$ ہے (شکل 11.6-الف)۔

حل: چونکہ $y = x^2$ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ یا $\mathrm{d}y = 2x \, \mathrm{d}x$ ہو گا۔ چونکہ $z = 5$ غیر متغیر ہے لہٰذا متکمل کے آخری جزو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^1 [x^2x^4 \, \mathrm{d}x + (x - x^2 + 5)2x \, \mathrm{d}x] = \int_0^1 (x^6 - 2x^3 + 2x^2 + 10x) \, \mathrm{d}x = \frac{223}{42} \approx 5.31$$

□

مثال 11.6: درج بالا مثال کے تکمل کو انہیں دو نقطوں کے درمیان سطح $z = 5$ میں راہ $y = x$ پر حاصل کریں (شکل 11.6-ب)۔

حل: اب $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 [x^2x^2 \, \mathrm{d}x + (x - x + 5)x \, \mathrm{d}x] = \int_0^1 (x^4 + 5) \, \mathrm{d}x = \frac{26}{5} = 5.2$$

□

مثال 11.5 اور مثال 11.6 میں ایک جیسے متکمل، ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ پائے گئے البتہ ان مثالوں میں راہ مختلف تھی۔ تکمل کے جوابات بھی مختلف تھے۔اس نتیجے کے مطابق تکمل کی قیمت ابتدائی نقطہ، اختتامی نقطہ اور متکمل کے علاوہ راہ پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ اس بنیادی حقیقت پر مزید غور اسی باب میں کیا جائے گا۔

بعض اوقات مساوات 11.10 کے f ، g ، h سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 ہوں گے

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

لہٰذا

$$v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z = \left(v_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + v_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

ہو گا جہاں قوسین میں بند حصہ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ اور اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k} \qquad \text{(حصہ 10.5 دیکھیں)}$$

کا اندرونی ضرب ہے۔ $\boldsymbol{r}$ تکمل کی راہ C ہے۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\int_C (v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z) = \int -C\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \tag{11.11}$$

جس کو عموماً

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

لکھا جاتا ہے جہاں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{11.12}$$

ہے۔

مثال 11.7: قوت اور کام
ایک ذرہ پر متغیر قوت $\boldsymbol{f}$ عمل کرتی ہے جو ذرے کو راہ C پر ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک منتقل کرتی ہے۔اس قوت سے سر زد **کام**[13] درج ذیل خطی تکمل دیتی ہے

$$W = \int_C \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.13}$$

work[13]

جہاں تکمل کو راہ پر منتقلی کی سمت میں حاصل کیا جاتا ہے۔ مثال 7.7 میں کام کی تعریف اور تکمل کی تعریف بطور مجموعہ استعمال کرتے ہوئے درج بالا خطی تکمل لکھا گیا ہے۔

ہم وقت t کو تکمل کا متغیر چنتے ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$$

ہو گا جہاں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار سمتیہ ہے۔ یوں مساوات 11.13 درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \tag{11.14}$$

جہاں ابتدائی لمحہ t_0 اور اختتامی لمحہ t_1 ہے۔نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت

$$\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\dot{\boldsymbol{v}} \tag{11.15}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 11.14 سے درج ذیل ملتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2\right)\mathrm{d}t = \left.\frac{m}{2}\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2\right|_{t_0}^{t_1}$$

جس کے تحت ذرے کی میکانی توانائی میں اضافہ عین کام کے برابر ہے۔ یہ میکانیات کا بنیادی قاعدہ ہے۔ □

سوالات

راہ کی مثبت سمت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے کی رخ رکھتے ہوئے $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت سوال 11.1 تا سوال 11.8 میں دریافت کریں۔

سوال 11.1: سیدھے خط $y=-4x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1,-4)$ ۔

جواب: $\frac{17\sqrt{17}}{3}$

سوال 11.2: سیدھے خط $y=3x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(2,6)$ ۔

جواب: $\frac{80\sqrt{10}}{3}$

سوال 11.3: سیدھے خط پر نقطہ $(1,2)$ تا نقطہ $(3,0)$ ۔

جواب: $\frac{34\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.4: سیدھے خط پر نقطہ $(3,0)$ تا نقطہ $(1,2)$ ۔

جواب: $-\frac{34\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.5: گھڑی کی الٹ رخ دائرہ $x^2+y^2=9$ پر نقطہ $(3,0)$ تا نقطہ $(0,3)$ ۔

جواب: $\frac{27\pi}{2}$

سوال 11.6: x محور پر $(0,0)$ تا $(2,0)$ اور یہاں سے y محور کے متوازی $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{40}{3}$

سوال 11.7: y محور پر $(0,0)$ تا $(0,2)$ اور یہاں سے x محور کے متوازی $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{40}{3}$

سوال 11.8: نقطہ $(0,0)$ سے سیدھے خط پر نقطہ $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.9: تکمل $\int_C (x+z)y\,\mathrm{d}s$ کی قیمت کو دائرہ $x^2+y^2=1$ ، $z=2$ پر نقطہ $(0,0,2)$ تا نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2)$ دریافت کریں (گھڑی کی الٹ رخ)۔

جواب: $\frac{9}{4}-\sqrt{2}$

تکمل $\int_C (3y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y)$ کی قیمت کو سوال 11.10 تا سوال 11.12 میں دیے راہ پر دریافت کریں۔

سوال 11.10: سیدھے خط پر نقطہ $(0,1)$ تا نقطہ $(1,0)$ ۔

جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 11.11: قوس مکافی $y=x^2$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1,1)$ ۔

جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 11.12: دائرہ $x^2+y^2=1$ پر گھڑی کی الٹ رخ نقطہ $(1,0)$ تا نقطہ $(1,1)$ ۔

جواب: $-\frac{8}{3}$

سوال 11.13 تا سوال 11.18 میں دی گئی راہ پر قوت $\boldsymbol{f}=2x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{k}$ کا کام دریافت کریں۔

سوال 11.13: x محور پر $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$ ۔

جواب: 1

سوال 11.14: $z=2$ سطح میں y محور پر $(0,0,2)$ تا $(0,1,2)$ ۔

جواب: 2

سوال 11.15: سطح مکافی $y=x^2$ ، $z=1$ پر $(0,0,1)$ تا $(1,1,1)$ ۔

جواب: 2

سوال 11.16: سطح مکافی $y=z^4$ ، $x=2$ پر $(0,2,0)$ تا $(1,2,1)$ ۔

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.17: سیدھے خط $y=x$ ، $z=2x$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ ۔

جواب: 1

سوال 11.18: سیدھے خط $y=x^2$ ، $z=2x^3$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ ۔

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.19: مان لیں کہ قوس C کے تمام نقطوں پر $\boldsymbol{p}$ معین ہے اور کہ $|\boldsymbol{p}|$ محدود ہے یعنی C پر $|\boldsymbol{p}| < M$ ہے جہاں M کوئی مثبت عدد ہے۔ ثابت کریں کہ

$$\left|\int_C \boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| < Ml \tag{11.16}$$

ہو گا جہاں C کی لمبائی l ہے۔

جواب: اندرونی ضرب کے تحت $\boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{p}||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta$ ہو گا۔ چونکہ $|\boldsymbol{p}| < M$ ہے اور $\cos\theta \le 1$ ہے لہٰذا $|\boldsymbol{p}|\cos\theta < M$ ہو گا۔ خطی تکمل کی تعریف مساوات 11.3 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \Delta s$ لکھی گئی ہے۔

$$J_n = \sum_{m=1}^{n} |\boldsymbol{p}|\cos\theta \Delta s_m < \sum_{m=1}^{n} M\Delta s_m = M\sum_{m=1}^{n} \Delta s_m = Ml$$

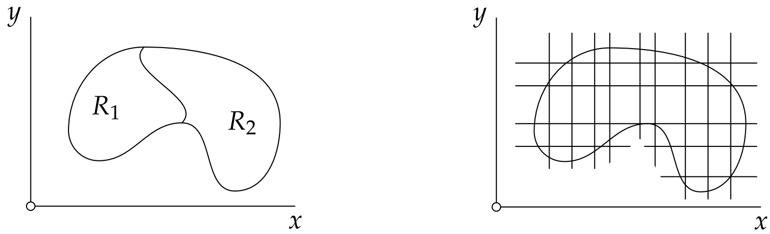
11.3 دوہرا تکمل

وقفہ $a \le x \le b$ کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x)$ کا x محور پر a تا b قطعی تکمل

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھا جاتا ہے۔ دوہرا تکمل کی صورت میں xy سطح میں بند محدود[14] خطہ R کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x,y)$ متکمل ہو گا۔

[14] "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو معقول وسعت کے دائرے میں گھیرا جا سکتا ہے۔



(ب) خطے کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

(الف) R کے متعدد ٹکڑے

شکل 11.7: دوہرا تکمل کی تعریف اور خواص

دوہرا تکمل کی تعریف قطعی تکمل کی تعریف سے مشابہت رکھتی ہے۔ہم x اور y محور کے متوازی خطوط کھینچ کر خطہ R کو ٹکڑے کرتے ہیں (شکل 11.7-الف)۔ ہم R کے ٹکڑوں کو 1 تا n سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہر ٹکڑے میں کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً k مستطیلی ٹکڑے میں نقطہ (x_k, y_k) ہو گا۔ تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k \tag{11.17}$$

لیتے ہیں جہاں k مستطیلی ٹکڑے کا رقبہ A_k ہے۔ہم مثبت عدد صحیح n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . . کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ R میں $f(x, y)$ استمراری ہے اور R کو لامتناہی تعداد کی ہموار منحنیات گھیرتی ہیں۔ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . . کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x, y_k) کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو خطہ R پر $f(x, y)$ کا **دوہرا تکمل**[15] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_R f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

دوہرا تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے یہ قطعی تکمل کی طرح کئی خواص رکھتا ہے۔فرض کریں کہ خطہ R میں متعین

[15] double integral

اور استمراری f اور g تفاعل کے متغیرات x اور y ہیں۔ تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\iint\limits_R kf\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (k \text{ مستقل ہے})$$

$$\iint\limits_R (f+g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_R g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.18}$$

$$\iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{R_1} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{R_2} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (\text{شکل 11.7-ب})$$

مزید R میں کم از کم ایک ایسا نقطہ (x_0, y_0) ضرور پایا جاتا ہے کہ درج ذیل تعلق درست ثابت ہو

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(x_0, y_0)A \tag{11.19}$$

جہاں خطہ R کا رقبہ A ہے۔یہ تعلق دوہرا تکملات کا **اوسط قیمت مسئلہ**[16] کہلاتا ہے۔

خطہ R پر دوہرا تکملات کو یکے بعد دیگرے دو عدد تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔آئیں اس ترکیب کو سمجھیں۔

فرض کریں کہ R کو درج ذیل غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے (شکل 11.8-الف)

$$a \le x \le b, \quad g(x) \le y \le h(x)$$

تب $y = g(x)$ اور $y = h(x)$ خطہ R کی سرحد کو ظاہر کریں گے اور

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{11.20}$$

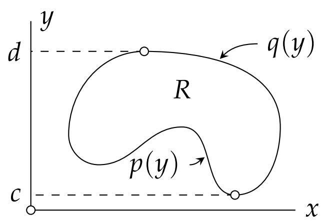
ہو گا۔ہم پہلے (چکور قوسین میں بند) اندرونی تکمل

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

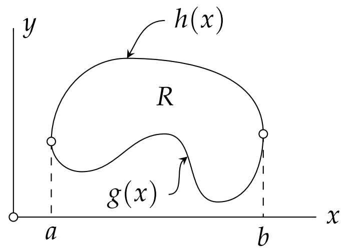
کی قیمت حاصل کرتے ہیں جہاں x بطور مقدار معلوم کردار ادا کرتا ہے لہٰذا اس تکمل کا حاصل x کا تفاعل $F(x)$ ہو گا۔اس کے بعد x محور پر $F(x)$ کا تکمل a تا b حاصل کرتے ہوئے دوہرا تکمل (مساوات 11.20) کی قیمت حاصل ہو گی۔

---

[16] mean value theorem



(ب)



(الف)

شکل 11.8: تخمینہ دوہرا تکمل

اسی طرح اگر R کو درج ذیل غیر مساوات (شکل 11.8-ب)

$$c \le y \le d, \quad p(y) \le x \le q(y)$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب درج ذیل ہو گا

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{11.21}$$

جہاں اندرونی تکمل کا حاصل y کا تفاعل ہو گا جس کو y محور پر c تا d تکمل کرتے ہوئے دوہرا تکمل کی قیمت حاصل ہو گی۔

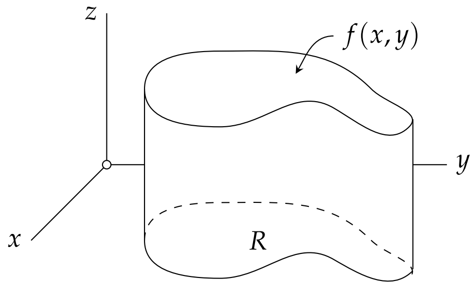
اگر R کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن نہ ہو لیکن R کو ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب علیحدہ علیحدہ ہر ٹکڑے پر $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل حاصل کرتے ہوئے تمام کا مجموعہ لیتے ہوئے R پر $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت حاصل ہو گی۔

دوہرا تکمل کے عملی استعمال

دوہرا تکمل کے کئی عملی جیومیٹریائی اور طبعی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مثلاً R کا رقبہ[17] A درج ذیل ہے۔

$$A = \iint\limits_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

[17] area



شکل 11.9: دوہرا تکمل بطور حجم

چونکہ مساوات 11.17 میں جزو $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ سے مراد اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم ہے جس کے بنیاد کا رقبہ A_k اور قد $f(x_k, y_k)$ ہے (شکل 11.9) لہٰذا خطہ R کے اوپر سطح $z = f(x, y)\ (> 0)$ کے نیچے حجم H درج ذیل ہے۔

$$H = \iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

فرض کریں کہ مستوی xy میں پھیلے کمیت کی کثافت (کمیت فی اکائی رقبہ) کو $f(x, y)$ ظاہر کرتی ہے۔تب R میں کل کمیت M درج ذیل ہو گی۔

$$M = \iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

R میں موجود کمیت کی **مرکز ثقل**[18] کے محدد

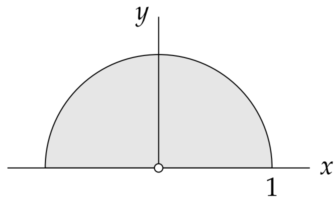
$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_R xf(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_R yf(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ہوں گے۔خطہ R میں موجود کمیت کے x اور y محور کے گرد **جمودی معیار اثر**[19] بالترتیب I_x اور I_y ہوں گے

$$I_x = \iint\limits_R y^2 f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad I_y = \iint\limits_R x^2 f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

---

[18] center of gravity
[19] moment of inertia



شکل 11.10: کثافت کمیت (مثال 11.8)

جبکہ مبدا کے گرد اس کی **قطبی جمودی معیار اثر**[20] I_0 ہو گی۔

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_R (x^2+y^2) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

مثال 11.8: عملی دوہرا تکمل

خطہ $R: 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1$ میں **کثافت کمیت** $f(x,y) = 1$ ہے (شکل 11.10)۔ مرکز ثقل اور جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_0 دریافت کریں۔

حل: R میں کل کمیت M درج ذیل ہے (جہاں آخری قدم پر تکمل میں $x = \sin\theta$ پر کیا گیا ہے)۔

$$M = \iint\limits_R 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

چونکہ $f(x,y) = 1$ ہے لہٰذا کل کمیت عین نصف دائرے کے رقبے کے برابر ہے۔ مرکز ثقل کے محدد

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2}{\pi}\iint\limits_R x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^0 z^2\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (\sqrt{1-x^2} = z)\end{aligned}$$

اور

$$\bar{y} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_R y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3}$$

[20] polar moment of inertia

ہیں۔مزید

$$I_x = \iint_R y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$$

اور

$$I_y = \iint_R x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

سے قطبی جمودی معیار اثر I_0 درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{4}$$

مثال 11.9 میں I_x کو نسبتاً آسان ترکیب سے حاصل کیا گیا ہے۔ □

ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمل

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

میں

$$x = x(u)$$

پر کرتے ہوئے نیا متغیر u متعارف کیا جاتا ہے، جہاں کسی وقفہ $\alpha \le u \le \beta$ پر تفاعل $x(u)$ اور اس کا تفرق استمراری اور $x(\alpha) = a$ ، $x(\beta) = b$ [یا $x(\alpha) = b$ ، $x(\beta) = a$] ہیں اور جیسے جیسے $x(u)$ وقفہ a تا b پر تبدیل ہوتا ہو ویسے ویسے وقفہ α تا β پر u تبدیل ہوتا ہو۔یوں

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[x(u)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u \tag{11.22}$$

لکھا جاتا ہے۔مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{1-x^2},\, a = 0, b = 1$ کی صورت میں $x = \sin u$ پر کرتے ہوئے

$$f[x(u)] = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

ہوں گے جن سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

دوہرا تکمل

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

کی صورت میں ہم نئے **متغیرات** u ، v **متعارف** کرنے کی خاطر

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

لکھتے ہیں، جہاں uv سطح میں کسی خطہ R^* پر **تفاعل** $x(u,v)$ ، $y(u,v)$ اور ان کے ایک درجی جزوی تفرق استمراری ہوں تا کہ R^* میں ہر نقطہ (u_0,v_0) کا خطہ R میں مطابقتی نقطہ $[x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)]$ پایا جائے اور مزید پورے R^* پر **یعقوبی**[21] J

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثبت اور یا پورے R^* پر یعقوبی[22] J منفی ہو۔تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{R^*} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{11.23}$$

یوں متکمل کو u ، v کی صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ضرب یعقوبی J کی حتمی قیمت لکھی جاتی ہے۔

مثال کے طور پر **قطبی محدد**[23] r اور θ متعارف کرنے کی خاطر ہم

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

---

[21] Jacobian

[22] جرمن ریاضی دان [1804-1851] کارل گستاف یعقوب یعقوبی

[23] polar coordinates

لکھتے ہیں لہٰذا

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

ہو گا اور یوں

$$\iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{R^*} f[r\cos\theta, r\sin\theta] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

لکھا جائے گا جہاں xy سطح میں خطہ R کا سطح $r\theta$ میں مطابقتی خطہ R^* ہے۔

مثال 11.9: مساوات 11.23 استعمال کرتے ہوئے مثال 11.8 کی I_x دوبارہ دریافت کریں۔

حل:

$$I_x = \iint\limits_R y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \sin^2\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

□

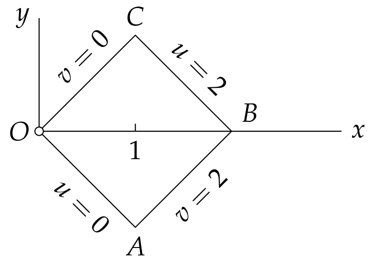
مثال 11.10: درج ذیل دوہرا تکمل حل کریں

$$\iint\limits_R (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

جہاں R کو شکل 11.11 میں دکھایا گیا ہے۔

حل: چکور R کے اطراف کو محور (u, v) لینے سے مسئلے کا حل نسبتاً آسان ہو جاتا ہے۔آئیں اس تبادل پر غور کرتے ہیں جو (x, y) کو (u, v) میں بدلے۔چکور کے کونوں کو دونوں محدد میں جدول 11.1 میں لکھا گیا ہے۔ (x, y) محدد سے (u, v) کے تبادل کو درج ذیل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



شکل 11.11: مثال 11.10 میں تکمل کا خطہ

جدول 11.1: تبادل محور (مثال 11.10)

(u,v)	(x,y)	
$(0,2)$	$(1,-1)$	A
$(2,2)$	$(2,0)$	B
$(2,0)$	$(1,1)$	C

جس میں کونا A پر کرنے سے

$$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\implies \begin{aligned}a-b&=0\\c-d&=2\end{aligned}$$

ملتا ہے اور کونا B پر کرنے سے

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\implies \begin{aligned}a&=1\\c&=1\end{aligned}$$

ملتا ہے۔یوں $b=1$ اور $d=-1$ ہوں گے۔یوں درکار تبادل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

یوں $x+y=u$ اور $x-y=v$ تبادل یعنی $x=\frac{1}{2}(u+v)$ اور $y=\frac{1}{2}(u-v)$ ہو گا اور یعقوبی درج ذیل ہو گا۔

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

R کا مطابقتی چکور $0 \le u \le 2$ ، $0 \le v \le 2$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\int_0^2 \frac{1}{2}(u^2+v^2)\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{8}{3}$$

□

سوالات

سوال 11.20 تا سوال 11.26 حل کریں۔ تکمل کا خطہ بیان کریں۔

سوال 11.20: $\int_0^1\int_0^2 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
جواب: $\frac{10}{3}$

سوال 11.21: $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
جواب: $\frac{\pi}{8}$

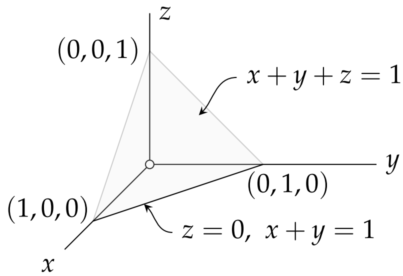
سوال 11.22: $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.23: $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{24}$

سوال 11.24: $\int_0^2\int_0^{4-2x} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: 8

سوال 11.25: $\int_0^2\int_{1+x}^{5-x} (1+xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: 12

سوال 11.26: $\int_0^1\int_{1+x}^{5-x} (1-xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: -1



شکل 11.12: سطح $x+y+z=1$ کے نیچے ربع اول میں چو سطحہ

سوال 11.27 تا سوال 11.30 میں فضا میں خطہ دیا گیا ہے۔اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 11.27: کار تیسی نظام کے ربع اول میں سطح $x+y+z=1$ کے نیچے چو سطحہ۔

جواب: شکل 11.12 میں سطح $x+y+z=1$ کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے جو x ، y اور z محور کو بالترتیب $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ پر چھوتی ہے۔ربع اول میں چو سطحی کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ ہیں۔مستوی xy پر $z=0$ ہو گا لہٰذا دی گئی سطح xy مستوی کو خط $x+y=1$ یعنی $x=1-y$ پر قطع کرتی ہے۔یوں ربع اول میں $x=0$ اور $x=1-y$ کے مابین خطہ R ہو گا۔ R کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ اور $(0,1,0)$ ہیں۔اس طرح ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_0^1 \int_0^{1-y} z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2} - xy\right)\Big|_0^{1-y} \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}(y^2-2y+1) \,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

سوال 11.28: وہ چو سطح جس کو سطح $2x+6y+z=12$ ربع اول سے کاٹتی ہے۔
جواب: 216

سوال 11.29: وہ حجم جس کو نلکی $x^2+y^2=1$ اور نلکی $y^2+z^2=1$ گھیرتی ہیں۔
جواب: نلکی $y^2+z^2=1$ سے حجم کی بالائی سطح $z=\sqrt{1-y^2}$ اور نچلی سطح $z=-\sqrt{1-y^2}$ ملتے

ہیں۔مشابہت سے ہم تکمل کو بالائی سطح اور xy مستوی کے درمیان حاصل کرتے ہوئے حاصل جواب کو 2 سے ضرب دے سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا جہاں $x^2+y^2=1$ سے x کے حدود $-\sqrt{1-y^2}$ اور $\sqrt{1-y^2}$ لکھے گئے ہیں۔

$$H=2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{16}{3}$$

سوال 11.30: سطح $z=x^2$ اور سطح $x=z^2$ کے درمیان $y=0$ تا $y=2$

جواب: یہ سطحیں $x=0$ اور $x=1$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔بالائی سطح $z=\sqrt{x}$ ہے (تسلی کر لیں)۔یوں xy مستوی اور بالائی سطح کے مابین حجم معلوم کرتے ہوئے اس سے xy مستوی اور نچلی سطح کے مابین حجم منفی کرتے ہیں۔

$$H=\int_{2}^{0}\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\tfrac{2}{3}$$

سوال 11.31 تا سوال 11.34 میں کمیت کے مرکز ثقل کے محدد $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ معلوم کریں۔خطہ R اور اس میں کمیت کی کثافت $f(x,y)$ دی گئی ہے۔

سوال 11.31: $f(x,y)=1,\quad R:0\le x\le 2,\ 0\le y\le 3$

جوابات: $\bar{x}=1,\ \bar{y}=\frac{3}{2}$

سوال 11.32: $f(x,y)=1,\quad R:x^2+y^2\le 1,$ ربع اول

جوابات: $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4\pi}{3}$

سوال 11.33: $f(x,y)=x+y,\quad R:0\le x\le 3,\ 0\le y\le 4$

جوابات: $\bar{x}=\frac{12}{7},\ \bar{y}=\frac{50}{21}$

سوال 11.34: $f(x,y)=xy,\quad R:y\le 4-3x$ ربع اول

جوابات: $\bar{x}=\frac{8}{15},\ \bar{y}=\frac{8}{5}$

سوال 11.35: شکل 11.13 میں دکھائے گئے خطہ R میں کمیتی کثافت $f(x,y)=1$ پایا جاتا ہے۔ جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_z دریافت کریں۔

(ب) (الف)

شکل 11.13: خطہ کثافت (سوال 11.35)

جوابات:

(الف) $I_x = \frac{ab^3}{12},\ I_y = \frac{a^3b}{4},\ I_0 = I_x + I_y$

(ب) $I_x = I_y = \frac{1}{6},\ I_0 = \frac{1}{3}$

قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے سوال 11.36 تا سوال 11.39 میں $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.36: $f = x + y,\ R: x^2 + y^2 < 4,\quad y \geq 0$
جواب: $\frac{11}{3}$

سوال 11.37: $f = \sqrt{x^2 + y^2},\ R: x^2 + y^2 \leq a,\quad y \geq 0,\quad x \geq 0$
جواب: $\frac{a^3\pi}{6}$

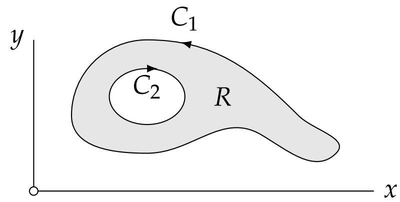
سوال 11.38: $f = x^2 + y^2,\ R: x^2 + y^2 \leq a$
جواب: $\frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.39: $f = e^{-x^2-y^2}$, R: $x^2 + y^2 = 16$ اور $x^2 + y^2 = 9$ کے درمیان چھلا
جواب: $\pi(e^{-9} - e^{-16})$

سوال 11.40 تا سوال 11.41 میں یعقوبی دریافت کریں۔حاصل جواب کی جیومیٹریائی وجہ بیان کریں۔ (اشارہ: (x,y) سے (u,v) تبادل کے لئے مثال 11.10 دیکھیں۔)

سوال 11.40: مستقیم حرکت $x = u + a,\quad y = v + b$
جواب: 1

سوال 11.41: مرکز کے گرد گھومنا $x = u\cos\phi - v\sin\phi,\quad y = u\sin\phi + v\cos\phi$
جواب: 1



شکل 11.14: خطہ R کی سرحد کے دو حصے C_1 اور C_2 ہیں۔ C_1 پر گھڑی کی الٹ رخ جبکہ C_2 پر گھڑی کی رخ چلتے ہوئے خطی تکمل حاصل کیا جائے گا۔

11.4 دوہرا تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ

سطح میں کسی خطے پر دوہرا تکمل کو اس خطے کے سرحد پر خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ بعض اوقات ایسا کرنے سے آسانی سے حل ہونے والا تکمل حاصل ہوتا ہے۔ تکمل پر نظریاتی غور و فکر کے دوران یہ تبادل سود مند ثابت ہوتا ہے۔ یہ تبادل درج ذیل مسئلے کے تحت ممکن ہے۔

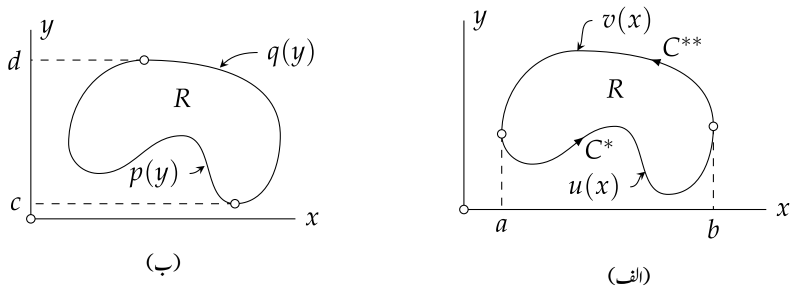
مسئلہ 11.1: سطح میں مسئلہ گرین[24] (دوہرا تکمل سے خطی تکمل اور خطی تکمل سے دوہرا تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ مستوی xy میں R ایک ایسا بند اور محدود خطہ ہے کہ جس کی سرحد C، محدود تعداد کی ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہے۔ مزید فرض کریں کہ کسی ایسے پورے خطے میں، جس کا R حصہ ہو، تفاعل $f(x,y)$ اور $g(x,y)$ اور ان کے جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ استمراری ہوں۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\iint\limits_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) \tag{11.24}$$

جہاں خطی تکمل R کی پوری سرحد C پر یوں حاصل کیا جاتا ہے کہ تکمل لینے کی رخ C پر چلتے ہوئے R بائیں ہاتھ کو ہو (شکل 11.14)۔

ثبوت: ہم مسئلہ گرین[25] کو پہلے ایسے خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل دونوں صورتوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو (شکل 11.15)۔

(الف) $a \le x \le b, \quad u(x) \le y \le v(x),$
(ب) $c \le y \le d, \quad p(y) \le x \le q(y)$



شکل 11.15: مخصوص قسم کا خطہ (مسئلہ گرین)

مساوات 11.20 استعمال کرتے ہوئے

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{11.25}$$

لکھ کر (جہاں متکمل $\frac{\partial f}{\partial y}$ ہے) اندرونی تکمل

$$\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = f(x,y)\Big|_{u(x)}^{v(x)} = f[x,v(x)] - f[x,u(x)]$$

حاصل کر کے مساوات 11.25 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b f[x,v(x)]\,\mathrm{d}x - \int_a^b f[x,u(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^b f[x,u(x)]\,\mathrm{d}x - \int_b^a f[x,v(x)]\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

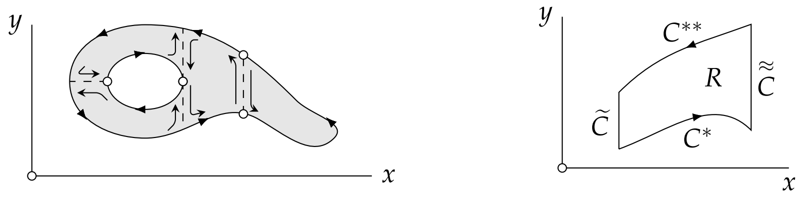
چونکہ $y=u(x)$ شکل 11.15-الف میں سمت بند منحنی C^* کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $y=v(x)$ منحنی C^{**} کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا بائیں ہاتھ کے تکملات کو C^* اور C^{**} پر خطی تکملات

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\int_{C^*} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{C^{**}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = -\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{11.26}$$

---

[24] Green's theorem

[25] برطانوی ریاضی دان جارج گرین [1793-1841]



(ب) (الف)

شکل 11.16: مسئلہ گرین کا ثبوت

لکھا جا سکتا ہے۔ آخری قدم پر سرحد C^* اور سرحد C^{**} پر حاصل تکملات کو پوری سرحد C پر حاصل تکمل لکھا گیا ہے۔

اگر C کے کچھ حصے y محور کے متوازی ہوں (جیسے شکل 11.16-الف میں $\widetilde{C}$ اور $\widetilde{\widetilde{C}}$ ہیں) تب بھی مساوات 11.26 درست ہو گا۔ایسا اس لئے ہو گا کہ y محور کے متوازی حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہٰذا سرحد کی ان حصوں (یعنی $\widetilde{C}$ اور $\widetilde{\widetilde{C}}$) پر تکمل کو بھی مساوات 11.26 میں شامل کرتے ہوئے R کی پوری سرحد پر تکمل لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح مساوات 11.21 استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d g[q(y),y]\,\mathrm{d}y + \int_d^c g[p(y),y]\,\mathrm{d}y \\
&= \int_C g(x,y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{11.27}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 11.26 اور مساوات 11.27 ملا کر مخصوص خطے کے لئے مساوات 11.24 ثابت ہوتی ہے۔

اب ہم مسئلے کو ایسی خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جو از خود مخصوص خطہ نہیں ہے لیکن اس کو محدود تعداد کی مخصوص خطوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے (شکل 11.16-ب)۔ایسی صورت میں ہم تمام ضمنی مخصوص خطوں پر مسئلہ لاگو کرتے ہوئے جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں۔بائیں ہاتھ کے ارکان کا مجموعہ R پر تکمل دیگا جبکہ دائیں ہاتھ کے ارکان سرحد C پر خطی تکمل جمع اضافی پیدا کردہ سرحدوں پر تکمل دیگا۔ہر اضافی سرحد پر خطی تکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ سمتوں

میں حاصل کیا جائے گا۔آپس میں الٹ سمتوں میں خطی تکمل کا مجموعہ صفر ہوتا ہے لہٰذا تمام اضافی سرحدوں پر حاصل خطی تکملوں کا مجموعہ صفر ہو گا۔اس طرح دائیں ہاتھ ارکان کا مجموعہ R کی سرحد C پر خطی تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ کو ایسی عمومی خطہ R جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم R کو تخمیناً ایسی خطوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔

□

مسئلہ گرین انتہائی اہم مسئلہ ہے جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔آئیں اس کی استعمال کی چند مثالیں دیکھیں۔

مثال 11.11: مستوی کا رقبہ بطور سرحد پر خطی تکمل
مسئلہ گرین یعنی مساوات 11.24 میں $f=0$ اور $g=x$ پر کرنے سے

$$A=\iint\limits_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_C x\,\mathrm{d}y$$

ملتا ہے جس کا بایاں ہاتھ R کا رقبہ A دیتا ہے۔اسی طرح اگر ہم مساوات 11.24 میں $f=-y$ اور $g=0$ پر کریں تب

$$A=\iint\limits_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int\limits_C y\,\mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔ان دونوں جوابات سے

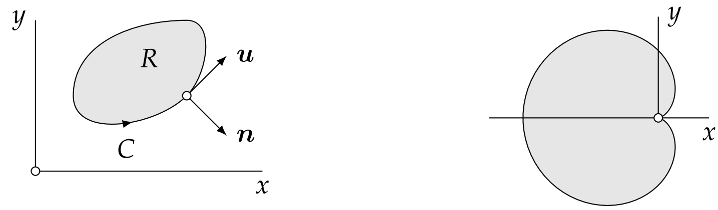
$$A=\frac{1}{2}\int_C (x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x) \tag{11.28}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خطی تکمل کو مسئلہ گرین میں دیے گئے رخ حاصل کیا جائے گا۔یہ تکمل مستوی xy پر رقبے کو بطور اسی رقبے کی سرحد پر خطی تکمل پیش کرتا ہے۔کئی **سطح پیما**[26] اسی کلیے پر مبنی ہیں۔ □

مثال 11.12: قطبی محدد میں مستوی سطح کا رقبہ
قطبی محدد r اور θ ہیں جہاں $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}y=\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

[26] planimeter



(الف) منحنی قلب نما

(ب) منحنی برائے مثال 11.14

شکل 11.17: اشکال منحنیات برائے مثال 11.13 اور مثال 11.14

ہو گا جنہیں مساوات 11.28 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$A = \frac{1}{2}\int_C r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = \frac{1}{2}\int_C r^2\,\mathrm{d}\theta \tag{11.29}$$

□

مثال 11.13: مساوات 11.29 کی مدد سے قلب نما منحنی $r = a(1-\cos\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$ کا رقبہ دریافت کرتے ہیں (شکل 11.17-الف)۔

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$

□

مثال 11.14: لاپلاسی تفاعل کے دوہرا تکمل سے تفاعل کی عمودی مماس کے خطی تکمل کا تبادل

فرض کریں کہ xy مستوی میں مسئلہ گرین میں بیان کردہ خطے میں تفاعل $w(x,y)$ اور اس کا ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ ہم $f = -\frac{\partial w}{\partial y}$ اور $g = \frac{\partial w}{\partial x}$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ خطہ میں استمراری ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا جو w کا لاپلاسی ہے (حصہ 10.8)۔

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w \tag{11.30}$$

دی گئی f اور g استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \int_C \left(f\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s = \int_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \tag{11.31}$$

جہاں s سرحد C کی لمبائی ہے جس کی سمت بندی شکل 11.13-ب میں دکھائی گئی ہے۔دائیں ہاتھ آخری متکمل کو درج ذیل دو سمتیات

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

کا اندرونی ضرب

$$-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = (\nabla w)\cdot\boldsymbol{n} \tag{11.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔درج ذیل سمتیہ $\boldsymbol{u}$ سرحد C کا مماس ہے (حصہ 10.5)

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

اور چونکہ $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{n}$ سرحد C کا قائمہ سمتیہ ہے۔مزید $\boldsymbol{n}$ کا رخ خطہ R کی باہر کو ہے۔اس نتیجے اور مساوات 10.79 سے ظاہر ہے کہ مساوات 11.32 کا دایاں ہاتھ C کی بیرونی رخ قائمہ سمتیہ کی سمت میں w کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}n}$ لکھتے ہوئے اور مساوات 11.30، مساوات 11.31 اور مساوات 11.32 کو مد نظر رکھتے ہوئے مسئلہ گرین سے درج ذیل کلیہ ثابت ہوتا ہے۔

$$\iint\limits_R \nabla^2 w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_C \frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s \tag{11.33}$$

□

اسی باب میں مسئلہ گرین کی استعمال اور اس سے حاصل مزید نتائج پر غور کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 11.42 تا سوال 11.48 کو پہلے جوں کا توں حل کریں۔ بعد میں اس کو مسئلہ گرین کی مدد سے حل کریں۔

سوال 11.42: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y), \quad C: -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$$

جواب: 0

سوال 11.43: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y), \quad C: -1 \le x \le 1,\; -1 \le y \le 1$$

جواب: 0

سوال 11.44: راہ C ، گھڑی کی رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y \,\mathrm{d}x - x \,\mathrm{d}y), \quad C: -1 \le x \le 1,\; -1 \le y \le 1$$

جواب: 8

سوال 11.45: راہ C ، گھڑی کی رخ تکون کی سرحد ہے۔ تکون کے کونے دیے گئے ہیں۔

$$\int_C [(x^2 - y) \,\mathrm{d}x + y^2 \,\mathrm{d}y], \quad (0,0), (3,0), (0,1)$$

جواب: $-\frac{3}{2}$

سوال 11.46: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ دو قوسین میں بند خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [y^2 \,\mathrm{d}x + (x^3 + 2xy) \,\mathrm{d}y], \quad y = x^2,\; y = x$$

جواب: $-\frac{3}{20}$

سوال 11.47: راہ C ، گھڑی کی رخ دو قوسین میں بند $0 \le x \le 2$ خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [y^3 \,\mathrm{d}x + (x^3 + 3y^2 x) \,\mathrm{d}y], \quad y = x^3,\; y = 4x$$

جواب: 16

سوال 11.48: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ ربع اول میں قوس $y=1-x^2$ اور محدد کے محوروں کے درمیان بند خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [-xy^2 \,\mathrm{d}x + x^2 y \,\mathrm{d}y]$$

جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 11.49 تا سوال 11.55 میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ دیا گیا ہے۔ خطے کے گرد گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے، مسئلہ گرین کی مدد سے $\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y)$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.49: مستطیل خطہ۔ $(x+2y)\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y, \quad 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$
جواب: -8

سوال 11.50: تکونی خطے کے کونے دیے گئے ہیں۔ $(x^2-2y)\,\mathrm{d}x + 2x^2\,\mathrm{d}y, \quad (0,0),\ (1,0),\ (0,1)$
جواب: $\frac{5}{3}$

سوال 11.51: مستطیل خطہ۔ $(x^2+y)\,\mathrm{d}x + (2x+\sin y)\,\mathrm{d}y, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.52: گول دائرے میں بند خطہ۔ $(e^{2x}+3y)\,\mathrm{d}x + (2e^y+4x)\,\mathrm{d}y, \quad C:\ x^2+y^2=1$
جواب: π

سوال 11.53: گول دائرے میں بند خطہ۔ $-\frac{y^3}{3}\,\mathrm{d}x + \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}y, \quad C:\ x^2+y^2=1$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.54: مستطیل خطہ۔ $(x+\sinh y)\,\mathrm{d}x + (y^2+\sin x)\,\mathrm{d}y,\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1$
جواب: $-\pi \sinh 1$

سوال 11.55: قوسین میں بند خطہ۔ $\frac{e^y}{x}\,\mathrm{d}x + (e^y \ln x + x)\,\mathrm{d}y,\ y=5,\ y=1+x^2$
جواب: $\frac{64}{3}$

سوال 11.56 تا سوال 11.58 میں دیے مستوی خطہ کا رقبہ مثال 11.11 کی کلیات استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

سوال 11.56: اندرون ترخیم $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
جواب: $ab\pi$

سوال 11.57: ربع اول میں تین قوسین میں بند خطہ۔ $y=x,\ y=\frac{x}{4},\ y=\frac{1}{x}$
جواب: $\ln 2$

سوال 11.58: قوسین میں بند خطہ۔ $y=2x+3,\ y=x^2$
جواب: $\frac{32}{3}$

سوال 11.59 تا سوال 11.61 میں $\int_C \frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت کو مساوات 11.33 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.59: $w=3y^2-x^2,\quad C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$
جواب: 72π

سوال 11.60: مستطیل خطہ۔ $w=3x^2y-y^3,\quad C:0\le x\le 2,\ 0\le y\le 3$
جواب: 0

سوال 11.61: مستطیل خطہ۔ $w=e^x+2xy,\quad C:0\le x\le 2,\ 0\le y\le 3$
جواب: $3(e^2-1)$

سوال 11.62: اگر تفاعل $w(x,y)$ کسی خطہ R میں لاپلاس مساوات $\nabla^2 w=0$ پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ثابت کریں۔(اشارہ: مثال 11.14 کی طرز پر ثابت کریں۔)

$$\iint\limits_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_C w\frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s \tag{11.34}$$

جواب:مسئلہ گرین میں $f=-ww_y$ اور $g=ww_x$ لیں جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں۔یوں $g_x-f_y=w_x^2+w_y^2$ ہو گا جہاں $w_{xx}+w_{yy}=0$ استعمال کیا گیا ہے۔مزید درج ذیل ہو گا جہاں $'$ سے مراد s کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\begin{aligned}f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y&=(-ww_yx'+ww_xy')\,\mathrm{d}s=w(\nabla w)\cdot(y'\boldsymbol{i}-x'\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}s\\&=w(\nabla w)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=w\frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

سوال 11.63 تا سوال 11.64 میں $\int_C w\frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت کو مساوات 11.34 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.63: مستطیل خطہ۔ $w = x + y, \quad 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 5$
جواب: 40

سوال 11.64: مستطیل خطہ۔ $w = e^x \cos y, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$
جواب: $e^2 - 1$

سوال 11.65: سمتیہ $\boldsymbol{v} = g\boldsymbol{i} - f\boldsymbol{j}$ متعارف کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مسئلہ گرین کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\iint\limits_R \nabla \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int\limits_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}s \tag{11.35}$$

جہاں $\boldsymbol{n}$ سرحد کی باہر رخ قائمہ اکائی سمتیہ ہے (شکل 11.17-ب) اور s راہ C کی لمبائی قوس ہے۔

سوال 11.66: مسئلہ گرین کی دوسری صورت یعنی مساوات 11.35 کو $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور دائرہ $C : x^2 + y^2 = 1$ کے لئے درست ثابت کریں۔

جواب: 2π

سوال 11.67: ثابت کریں کہ مسئلہ گرین کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\iint\limits_R (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{k} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int\limits_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}s \tag{11.36}$$

جہاں $\boldsymbol{k}$ مستوی xy کا قائمہ اکائی سمتیہ ہے، $\boldsymbol{u}$ راہ C کی اکائی مماس سمتیہ ہے اور s راہ C کی لمبائی قوس ہے۔

سوال 11.68: مسئلہ گرین کی تیسری صورت یعنی مساوات 11.36 کو $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کے لئے ایسی تکون پر ثابت کریں جس کے کونے $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(1,1)$ ہیں۔

جواب: 1

11.5 سطحیں

ہم سطحی تکمل پر آگے غور کریں گے۔اس لئے ضروری ہے کہ ہمیں سطحوں سے واقفیت ہو۔آئیں انہیں پر غور کرتے ہیں۔

سطح S کو

$$f(x, y, z) = 0 \tag{11.37}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں x ، y ، z فضا میں کارتیسی محدد ہیں اور یوں f کی ڈھلوان سطح S کو عمودی ہو گا (مسئلہ 10.5)، بشرطیکہ $\nabla f \neq \mathbf{0}$ ہو۔نتیجتاً S کے ہر نقطہ پر یکتا عمود، جس کی سمت سطح پر حرکت کرنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہو، کے لئے لازم ہے کہ f کی استمراری ایک درجی جزوی تفرق موجود ہوں اور ہر نقطے پر ان تین میں سے کم از کم ایک جزوی تفرق غیر صفر ہو۔تب درج ذیل سمتیہ

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \tag{11.38}$$

سطح S کا اکائی عمودی سمتیہ ہو گا (اور $-\boldsymbol{n}$ اس کا دوسرا اکائی عمودی سمتیہ ہو گا)۔

مثال 11.15: اکائی عمودی سمتیہ
کرہ $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ کا اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ہے۔

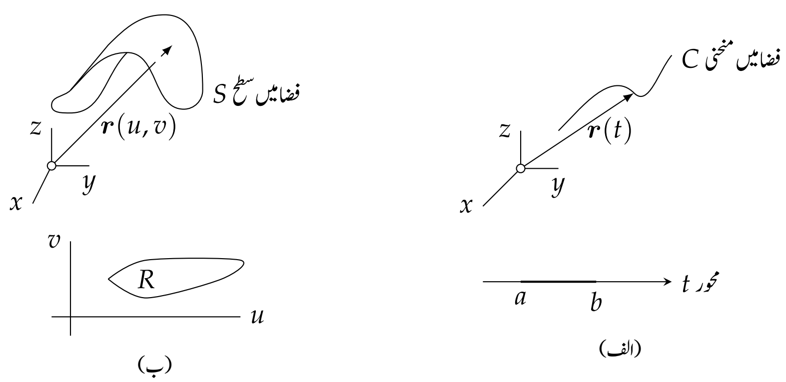
$$\boldsymbol{n}(x, y, z) = \frac{x}{a}\boldsymbol{i} + \frac{y}{a}\boldsymbol{j} + \frac{z}{a}\boldsymbol{k}$$

□

بعض اوقات سطح کی صریح روپ

$$z = g(x, y) \tag{11.39}$$

استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ظاہر ہے کہ اس کو $z - g(x, y) = 0$ لکھ کر مساوات 11.37 طرز کی خفی روپ حاصل ہوتی ہے۔



شکل 11.18: منحنی اور سطح کی مقدار معلوم روپ

سطح S کو **مقدار معلوم روپ**

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k} \tag{11.40}$$

سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں u اور v غیر تابع حقیقی متغیرات ہیں جنہیں اس روپ کی مقدار معلوم کہتے ہیں۔ $\boldsymbol{r}(u,v)$ آزاد متغیرات u اور v کا تابع تفاعل ہے۔ سطح S پر نقاط کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(u,v)$ ہے۔ مستوی uv میں کسی خطہ R پر (u,v) تبدیل کرنے سے اس سمتیہ کی نوک سطح S پر حرکت کرے گی۔ R میں ہر نقطہ (u_0,v_0) کا سطح S پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ ہے۔یوں مستوی uv میں خطہ R کا عکس سطح S ہے (شکل 11.18)۔یہ منحنی C کی مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(t)$ کی طرح ہے جس پر حصہ 10.3 میں غور کیا گیا جہاں t محور پر کسی وقفہ کا عکس منحنی C ہے (شکل 11.18)۔ پس فرق اتنا ہے کہ سطح کی صورت میں دو عدد مقدار معلوم ہوں گے جبکہ منحنی کی صورت میں ایک عدد مقدار معلوم ہو گا۔

سطحوں کی جیومیٹریائی خواص بھی ہو سکتے ہیں جن کو یقینی بنانے کی خاطر ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

مفروضہ
مستوی uv میں کسی خطہ میں، جس کا R حصہ ہے، (مساوات 11.40 میں دیا گیا) سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(u,v)$ استمراری ہے اور اس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ پائے جاتے ہیں، اور R **سادہ**

تعلق[27] کا **محدود**[28] خطہ ہے۔مزید پورے R پر درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0} \tag{11.41}$$

ہموار سطح S کی تعریف کے تحت، سطح کا منفرد عمود پایا جاتا ہے جس کی سمت S پر نقطہ بدلنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہے۔

ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے کہ درج بالا مفروضہ پر پوری اترتی سطح $\boldsymbol{r}(u, v)$ ہموار سطح ہو گی۔

ٹکڑوں میں ہموار سطح[29] سے مراد ایسی سطح ہے جس کو محدود تعداد کی ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے کہ ہر ٹکڑا ہموار سطح ہو۔مثلاً کرہ ہموار سطح ہے جبکہ مکعب کی سرحدی سطح ٹکڑوں میں ہموار ہے۔

مثال 11.16: کرہ کی مقدار معلوم روپ
رداس a کی کرہ کی مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(u, v) = a\cos v\cos u\,\boldsymbol{i} + a\cos v\sin u\,\boldsymbol{j} + a\sin v\,\boldsymbol{k} \tag{11.42}$$

ہے جہاں $0 \le u \le 2\pi$ اور $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$ ہیں (شکل 11.19)۔یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$x = a\cos v\cos u, \quad y = a\cos v\sin u, \quad z = a\sin v$$

$u = c_1$ اور $v = c_2$ ، جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں، بالترتیب **خطوط طول بلد**[30] اور **خطوط عرض بلد**[31] کو ظاہر کرتے ہیں۔مساوات 11.41 کی شرط قطبین $v = -\frac{\pi}{2}$ اور $v = \frac{\pi}{2}$ کے علاوہ کرہ کی ہر نقطہ پر پورا ہوتا ہے۔ مساوات 11.42 کو استعمال کرتے ہوئے زمین کی سطح پر نقطہ کے خط طول بلد اور خط عرض بلد دریافت کیے جاتے ہیں (شکل 11.19)۔ □

---

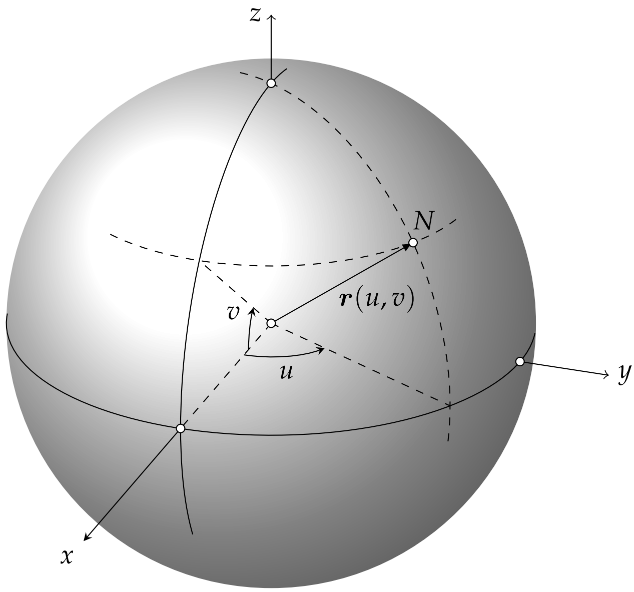
[27] simply connected

[28] سادہ تعلق کے خطے سے مراد ہے کہ اس خطے میں کسی بھی بند منحنی کو، اس خطے میں رہتے ہوئے، گھٹا کر نقطہ مانند بنایا جا سکتا ہے۔ محدود سے مراد ہے کہ اس خطے کو معقول رداس کے دائرے میں بند کیا جا سکتا ہے۔

[29] piecewise smooth surface

[30] longitude

[31] latitude



شکل 11.19: کرہ کی مقدار معلوم روپ

سوالات

سوال 11.69 تا سوال 11.76 میں کس سطح کی مقدار معلوم روپ دی گئی ہے؟ ان میں **محددی منحنی**[32] ($u =$ مستقل اور $v =$ مستقل) کیا ہوں گی۔

سوال 11.69: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$
جوابات: xy مستوی؛ x کے متوازی خطوط اور y کے متوازی خطوط۔

سوال 11.70: $\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j}$
جوابات: رداس u کی دائری سطحیں جن کا مرکز مبدا پر ہے۔ یہ در حقیقت xy مستوی ہے؛ رداس u کے دائرے اور زاویہ v پر مبدا سے گزرتی سیدھے خطوط۔

سوال 11.71: $\boldsymbol{r} = \cos u\boldsymbol{i} + \sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$
جوابات: z محور پر $x^2 + y^2 = 1$ بیلن؛ گول دائرہ؛ سیدھا خط۔

[32] coordinate curves

سوال 11.72: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + uv\boldsymbol{k}$
جوابات: $z = xy$ ؛ $z = x$ اور $z = y$ خط۔

سوال 11.73: $\boldsymbol{r} = 3\cos u\boldsymbol{i} + \sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$
جوابات: z محور پر $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ بیلن؛ $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ترخیم اور z محور کے متوازی خط۔

سوال 11.74: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (u+v)\boldsymbol{k}$
جوابات: $z = x + y$ سطح؛ سیدھے خط۔

سوال 11.75: $\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$
جوابات: $z^2 = x^2 + y^2$ ؛ سیدھے خط۔

سوال 11.76: $\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k}$
جوابات: $z = x^2 + y^2$ ؛ دائرے؛ $z = x^2 = y^2$

سوال 11.77 تا سوال 11.82 میں مقدار معلوم روپ کیا ہے؟

سوال 11.77: yz مستوی۔
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$

سوال 11.78: $z = y$ سطح۔
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$

سوال 11.79: سطح $x + y + z = 2$
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (2 - u - v)\boldsymbol{k}$

سوال 11.80: دائری بیلن $x^2 + z^2 = a^2$
جواب: $\boldsymbol{r} = a\cos u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + a\sin u\boldsymbol{k}$

سوال 11.81: $z = y^2$ قطع مکافی بیلن۔
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + v^2\boldsymbol{k}$

سوال 11.82: $4y^2 + z^2 = 4$ ترخیمی بیلن۔
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + \cos v\boldsymbol{j} + 2\sin v\boldsymbol{k}$

سوال 11.83 تا سوال 11.86 میں دیے گئی سطحوں کو مساوات 11.37 کی طرز میں لکھیں۔

سوال 11.83: $\boldsymbol{r} = a\cos v \sin u\boldsymbol{i} + b\cos v \sin u\boldsymbol{j} + c\sin v\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

سوال 11.84: $\boldsymbol{r} = au\cos v\boldsymbol{i} + bu\sin v\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

سوال 11.85: $\boldsymbol{r} = au\cosh v\boldsymbol{i} + bu\sinh v\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

سوال 11.86: $\boldsymbol{r} = a\sinh u\cos v\boldsymbol{i} + b\sinh u\sin v\boldsymbol{j} + c\cosh u\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$

سوال 11.87: درج ذیل کی اکائی قائمہ سمتیہ دریافت کریں۔ $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + uv\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{v\boldsymbol{i}+u\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$

سوال 11.88: کرہ پر مثال 11.16 میں غور کیا گیا۔دریافت کریں کہ کرہ کی مقدار معلوم روپ کہاں مساوات 11.41 کی مفروضہ پر پورا نہیں اترتی۔
جوابات: $v = \mp\frac{\pi}{2}$

11.6 مماسی سطح۔بنیادی صورت اول۔رقبہ

اگر سطح S کو $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ سے ظاہر کیا جائے تب S پر منحنی کو حقیقی مقدار معلوم t کے درج ذیل دو عدد استمراری تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$u = g(t), \quad v = h(t) \tag{11.43}$$

مثال 11.17: سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(u, v) = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$ رداس a کی بیلن S کو ظاہر کرتا ہے۔مساوات $u = t$ اور $v = ct$ سطح S پر پیچ دار لچھے کو ظاہر کرتے ہیں۔ان مساوات کو S کی مساوات میں پر کرنے سے

$$\boldsymbol{r}[u(t), v(t)] = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$$

ملتا ہے (مثال 10.15)۔ □

فرض کریں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(u,v)$ ہموار سطح S کو ظاہر کرتی ہے اور S میں منحنی C کو مساوات 11.43 کی طرز سے ظاہر کیا جاتا ہے۔تب فضا میں منحنی C کو درج ذیل سمتی تفاعل ظاہر کرے گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[u(t), v(t)] \tag{11.44}$$

فرض کریں کہ مساوات 11.43 میں دیے دونوں تفاعل کے ایک درجی تفرق پائے جاتے ہوں اور ہر t پر ان میں سے کم از کم ایک تفرق غیر صفر ہو۔تب C کے ہر نقطے پر C کا ایسا مماس پایا جائے گا جس کی سمت نقطہ تبدیل کرنے سے استمراری تبدیل ہو گی اور C کا مماسی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_u\dot{u} + \boldsymbol{r}_v\dot{v}$$

یوں مساوات 11.41 کے تحت سمتیات $\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ اور $\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ خطی طور غیر تابع ہوں گے اور ایک سطح تعین کریں گے۔اس سطح کو نقطہ N پر S کی **مماسی سطح**[33] کہتے ہیں۔مماسی سطح کو $T(N)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ سطح $T(N)$ سطح S کو نقطہ N پر چھوتی ہے۔ مساوات 11.44 سے ظاہر ہے کہ نقطہ N پر سطح S کا ہر مماس نقطہ N پر سطح کی مماسی سطح $T(N)$ میں پایا جائے گا (حصہ 10.8)۔

نقطہ N سے گزرتا وہ سیدھا خط جو $T(N)$ کو عمودی ہو نقطہ N پر S کا **عمود**[34] کہلاتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ سطح $T(N)$ میں پائے جاتے ہیں لہٰذا اکائی سمتیہ

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\lvert \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \rvert} \tag{11.45}$$

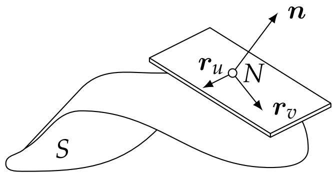
$T(N)$ کو عمودی ہو گا (شکل 11.20)۔اس سمتیہ کو N پر S کا **اکائی عمودی سمتیہ**[35] کہتے ہیں۔ $\boldsymbol{n}$ کی سمت u اور v کی انتخاب پر منحصر ہے۔تبادل $u = -\bar{u}$ ، $v = \bar{v}$ یا کوئی اور ایسی تبادل جس کی یعقوبی (حصہ 11.3) کی قیمت منفی ہو سے $\boldsymbol{n}$ کی سمت الٹ ہو گی۔

ہم اب سطح S جس کو $\boldsymbol{r}(u,v)$ لکھا گیا ہے، پر منحنی C جس کو مساوات 11.43 کی طرز پر لکھا گیا ہے، کا خطی جزو دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 10.32 اور

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \,\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \,\mathrm{d}v$$

---

[33] tangent plane
[34] normal
[35] unit normal vector



شکل 11.20: مماسی سطح اور عمودی سمتیہ

استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v)\cdot(\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v)\\
&= \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v^2
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔معیاری علامتیں

$$E = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u, \quad F = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \tag{11.46}$$

ہوئے اس کو

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2 \tag{11.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس دو درجی تفرقی مساوات کو S کی **بنیادی صورت اول**[36] کہتے ہیں۔

مثال 11.18: **قطبی محدد میں بنیادی صورت اول**
درج ذیل سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\,\boldsymbol{i} + u\sin v\,\boldsymbol{j}$$

xy مستوی کو ظاہر کرتی ہے جہاں u اور v قطبی محدد ہیں۔ان کا تفرق لینے سے

$$\boldsymbol{r}_u = \cos v\,\boldsymbol{i} + \sin v\,\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_v = -u\sin v\,\boldsymbol{i} + u\cos v\,\boldsymbol{j}$$

ملتا ہے لہٰذا $E = 1$ ، $F = 0$ اور $G = v^2$ ہوں گے۔یوں قطبی محدد $u = \rho$ اور $v = \theta$ استعمال کرتے ہوئے بنیادی صورت اول درج ذیل ہو گی۔

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2 \tag{11.48}$$

□

ہم اب دیکھیں گے کہ اول بنیادی صورت اس لئے اہم ہے کہ اس کی مدد سے لمبائیاں، قوسین کے مابین زاویے اور مطابقتی سطح S پر رقبے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

---

[36] first fundamental form

لمبائی

مساوات 10.29، مساوات 10.32 اور مساوات 11.47 کو استعمال کرتے ہوئے سطح $S: \boldsymbol{r}(u,v)$ پر منحنی

$$C: u(t),\ v(t), \quad a \le t \le b$$

کی لمبائی درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t \tag{11.49}$$

زاویہ

سطح $S: \boldsymbol{r}(u,v)$ میں درج ذیل دو عدد منحنیات پر غور کریں

$$C_1: u = g(t),\ v = h(t) \quad \text{اور} \quad C_2: u = p(t),\ v = q(t)$$

جو S پر نقطہ N پر ایک دوسرے کر قطع کرتی ہیں۔نقطہ N پر درج ذیل سمتیات

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}[g(t),h(t)] = \boldsymbol{r}_u\dot{g} + \boldsymbol{r}_v\dot{h}\\
\boldsymbol{b} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}[p(t),q(t)] = \boldsymbol{r}_u\dot{p} + \boldsymbol{r}_v\dot{q}
\end{aligned}$$

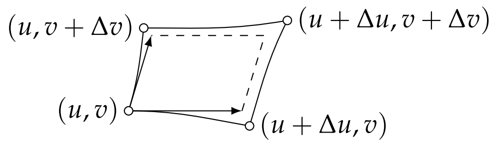
بالترتیب C_1 اور C_2 کو مماسی ہیں۔ N پر C_1 اور C_2 کا متقاطع زاویے سے مراد $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مابین زاویہ γ ہے۔صفحہ 506 پر مساوات 7.25 کے تحت

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{11.50}$$

ہو گا جہاں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{r}_u\dot{g} + \boldsymbol{r}_v\dot{h})\cdot(\boldsymbol{r}_u\dot{p} + \boldsymbol{r}_v\dot{q}) = E\dot{g}\dot{p} + F(\dot{g}\dot{q} + \dot{h}\dot{p}) + G\dot{h}\dot{q}\\
|\boldsymbol{a}| &= \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{E\dot{g}^2 + 2F\dot{g}\dot{h} + G\dot{h}^2}\\
|\boldsymbol{b}| &= \sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}} = \sqrt{E\dot{p}^2 + 2F\dot{p}\dot{q} + G\dot{q}^2}
\end{aligned}$$

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی سطح پر متقاطع منحنیات کے درمیان زاویے کو E ، F ، G اور منحنیات کو ظاہر کرنے والی تفاعل کی نقطہ قطع پر تفرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 11.21: چھوٹا رقبہ

رقبہ

سطح $S: \boldsymbol{r}(u,v)$ کے رقبہ A سے مراد uv سطح پر S کے مطابقتی خطہ R پر درج ذیل دوہرا تکمل ہے

$$A = \iint_R |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \tag{11.51}$$

جہاں

$$\mathrm{d}A = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \tag{11.52}$$

رکن رقبہ[37] کہلاتا ہے۔

مساوات 11.51 کو شکل 11.21 سے یوں اخذ کیا جا سکتا ہے کہ سمتی ضرب کی تعریف کے تحت اس چھوٹے متوازی الاضلاع کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta A = |\boldsymbol{r}_u \Delta u \times \boldsymbol{r}_v \Delta v| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \,\Delta u \Delta v$$

مساوات 11.51 کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر S کو S_1 ، $\cdots$ ، S_n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر S_k کے رقبے کو S_k میں کسی نقطے پر مماسی سطح کے کچھ رقبے کے لگ بھگ فرض کرتے ہوئے تمام چھوٹے رقبوں کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ایسا مجموعہ ہر $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے یوں حاصل کیا جاتا ہے کہ n کی قیمت لامتناہی تک پہنچنے سے سب سے بڑے S_k کے اطراف کی لمبائی صفر تک پہنچے۔ان مجموعوں کی حد مساوات 11.51 کا تکمل ہو گا۔

ہم مساوات 11.51 کو E ، F ، G کی صورت میں لکھ کر اول بنیادی صورت سے رقبہ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 7.48 اور مساوات 11.46 سے

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2 \tag{11.53}$$

---

element of area[37]

لکھ کر مساوات 11.51 کو

$$A = \iint_R \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{11.54}$$

اور مساوات 11.52 کو

$$\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{11.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 11.19: اندرسہ

کسی محور کے گرد بند قوس (عموماً دائرے) کو (محور قطع کیے بغیر) گھمانے سے **اندرسہ**[38] حاصل ہوتا ہے (آپ نے بچپن میں اندرسے ضرور کھائے ہوں گے)۔ شکل 11.22-الف میں دائرہ C کو z محور کے گرد گمانے سے اندرسہ حاصل کیا گیا ہے جس کی سطح کی سمتی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a + b\cos v)\cos u\,\boldsymbol{i} + (a + b\cos v)\sin u\,\boldsymbol{j} + b\sin v\,\boldsymbol{k} \qquad (a > b > 0)$$

مساوات 11.46 سے

$$E = (a + b\cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = b^2$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = EG - F^2 = b^2(a + b\cos v)^2$$

ہو گا جس سے اندرسہ کی سطح کا رقبہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

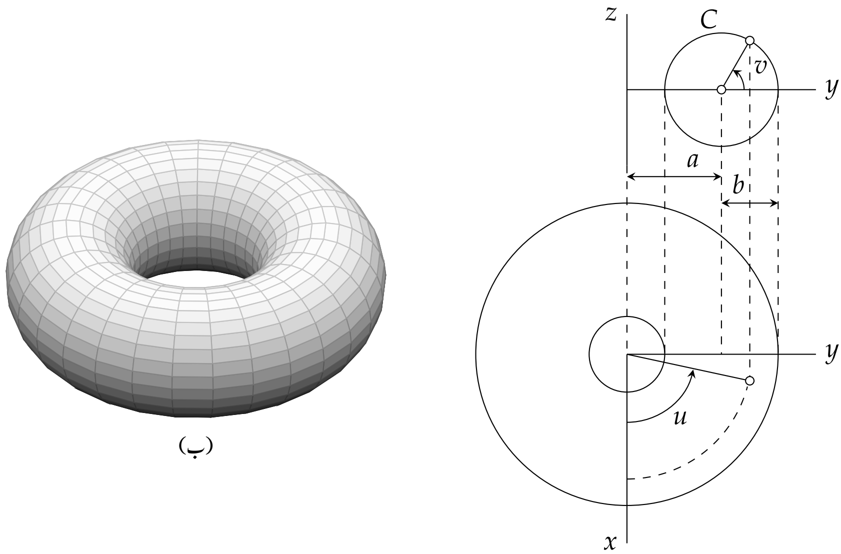
$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\cos v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 4ab\pi^2$$

□

فرض کریں کہ کسی سطح کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$z = g(x,y) \tag{11.56}$$

[38] torus



(ب) (الف)

شکل 11.22: اندرسہ

اس میں $x = u$ اور $y = v$ پر کرتے ہوئے مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + g(u,v)\boldsymbol{k} \tag{11.57}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جس کے u اور v کے ساتھ جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{i} + g_u\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{j} + g_v\boldsymbol{k} \tag{11.58}$$

اس طرح اول بنیادی صورت کے عددی سر

$$E = 1 + g_u^2, \quad F = g_u g_v, \quad G = 1 + g_v^2$$

ہوں گے لہٰذا

$$\lvert \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \rvert^2 = EG - F^2 = 1 + g_u^2 + g_v^2$$

ہو گا۔اب چونکہ $u = x$ اور $v = y$ ہیں لہٰذا رقبہ درج ذیل ہو گا

$$A = \iint\limits_{\overline{S}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.59}$$

جہاں سطح S کا xy مستوی پر عمودی سایہ $\overline{S}$ ہے۔اس سے ظاہر ہے کہ

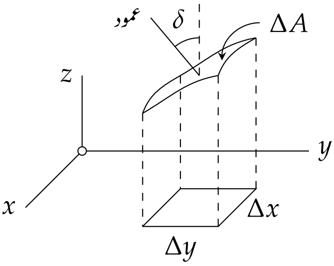
$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.60}$$

ہو گا۔بعد میں استعمال کی خاطر ہم ثابت کرتے ہیں کہ اس کو

$$\mathrm{d}A = \sec\delta\; \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.61}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں S کی (غیر سمتی) عمود اور z محور کے درمیان زاویہ حادہ δ ہے۔ شکل 11.23 سے اس کی جیومیٹریائی وجہ ظاہر ہے جہاں چھوٹا رقبہ ΔA کا xy مستوی پر عمودی عکس $\Delta A\cos\delta$ ہو گا جو $\Delta x\Delta y$ کے برابر ہو گا جس کو $\overline{\Delta A}$ لکھا جاتا ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta A = \overline{\Delta A}\sec\delta = \sec\delta\,\Delta x\Delta y$$



شکل 11.23: مساوات 11.61 کا ثبوت

مساوات 11.61 کی اب تحلیلی ثبوت پیش کرتے ہیں۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ ہے۔یہ جانتے ہوئے کہ $u = x$ اور $v = y$ ہیں اور مساوات 11.58 کو استعمال کرتے ہوئے سمتی ضرب کی تعریف سے

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k} = 1$ ہو گا۔اب اندرونی ضرب کی تعریف سے $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{a}| \cos \delta^*$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{a}$ اور مثبت z محور کے درمیان زاویہ δ^* ہے۔ان کو ملا کر $|\boldsymbol{a}| \cos \delta^* = 1$ ملتا ہے جس سے $\cos \delta^* > 0$ اخذ ہوتا ہے لہٰذا $\delta^* < \frac{\pi}{2}$ ہو گا یعنی δ^* زاویہ حادہ ہے اور یوں $\delta^* = \delta$ ہے۔اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس سے مساوات 11.61 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}| \cos \delta = 1, \quad \implies \quad \sec \delta = |\boldsymbol{a}| \qquad \left(\delta < \frac{\pi}{2}\right)$$

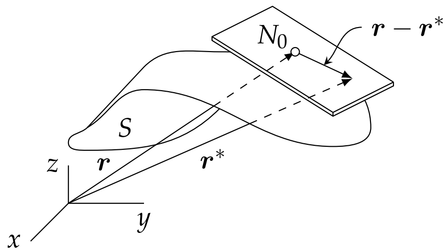
سوالات

سوال 11.89: ثابت کریں کہ نقطہ N پر سطح $S : \boldsymbol{r}(u, v)$ کی مماسی سطح کو

$$\boldsymbol{r}^*(p, q) = \boldsymbol{r} + p\boldsymbol{r}_u + q\boldsymbol{r}_v \tag{11.62}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ کی قیمتیں نقطہ N کے لحاظ سے ہیں۔مزید ثابت کریں کہ اس کو درج ذیل غیر سمتی سہ ضرب لکھا جا سکتا ہے۔

$$(\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{r}_u \quad \boldsymbol{r}_v) = 0$$



شکل 11.24: مماسی سطح کی مساوات (سوال 11.89 اور سوال 11.90)

جواب: شکل 11.20 میں مماسی سطح پر نقطہ N سے کسی بھی نقطے تک سمتیہ کو خطی طور غیر تابع سمتیات $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں شکل 11.24 میں تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}^*$ کو مساوات 11.62 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 11.90: سطح $f(x,y,z)=0$ کا نقطہ N_0 پر مماسی سطح کی مساوات دریافت کریں۔اس نقطے پر اس کا اکائی عمودی سمتیہ بھی دریافت کریں۔
جوابات: اگر نقطہ N_0 کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ جبکہ مماسی سطح پر عمومی نقطے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}^*$ ہو (شکل 11.24) تب سمتیہ $\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r}$ نقطہ N_0 پر سطح کا مماس ہو گا۔چونکہ ∇f سطح کا عمود ہے لہٰذا مماسی سطح کی مساوات $(\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r})\cdot\nabla f=0$ ہو گی۔اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f}{\lvert\nabla f\rvert}$ ہو گا۔

سوال 11.91: سطح $z=g(x,y)$ کا نقطہ N_0 پر مماسی سطح کی مساوات دریافت کریں۔مزید اس نقطے پر اکائی عمودی سمتیہ بھی دریافت کریں۔
جوابات: $xg_x+yg_y-z=x_0g_x+y_0g_y-g(x_0,y_0),\quad \boldsymbol{n}=\frac{g_x\boldsymbol{i}+g_y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}}$

سوال 11.92: اگر سطح $S:\boldsymbol{r}(u,v)$ کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہو (مساوات 11.45) تب $u=-\tilde{u}$ ، $v=\tilde{v}$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\boldsymbol{r}^*(\tilde{u},\tilde{v})$ کا اکائی عمودی سمتیہ $-\boldsymbol{n}$ ہو گا۔
جواب: مساوات 11.45 کے تحت $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$ ہے۔ $\boldsymbol{r}^*(\tilde{u},\tilde{v})$ استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{r}_u^*(\tilde{u},\tilde{v})=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{u}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{v}}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}=-\boldsymbol{r}_u,\quad \boldsymbol{r}_v^*(\tilde{u},\tilde{v})=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{u}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{v}}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}=\boldsymbol{r}_v$$

سے اکائی عمودی سمتیہ $-\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$ حاصل ہوتا ہے جو $-\boldsymbol{n}$ کے برابر ہے۔

سوال 11.93 تا سوال 11.98 میں نقطہ $N_0:(x_0,y_0,z_0)$ پر سطح کی مماسی سطح کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 11.93: $z=xy,\quad N_0:(3,2,6)$

جواب: $f=xy-z=0$ لکھتے ہوئے $\nabla f=y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ملتا ہے جس کی N_0 پر قیمت $\nabla f_N=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ہے۔ہم N_0 کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ اور مماسی سطح پر عمومی نقطے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}^*=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ لکھتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*=(x-3)\boldsymbol{i}+(y-2)\boldsymbol{j}+(z-6)\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اس طرح $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)\cdot\nabla f_N=0$ سے مماسی سطح کی مساوات $2x+3y-z=6$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 11.94: $x^2+y^2+z^2=25,\quad N_0:(\sqrt{2},\sqrt{2},3)$

جواب: $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+3z=13$

سوال 11.95: $y=x^2,\quad N_0:(2,4,3)$

جواب: $4x-y=4$

سوال 11.96: $x^2+y^2=8,\quad N_0:(2,2,3)$

جواب: $x+y=4$

سوال 11.97: $z=x^2+y^2,\quad N_0:(2,3,13)$

جواب: $4x+6y-z=13$

سوال 11.98: $2x^2+y^2+3z^2=9,\quad N_0:(1,2,1)$

جواب: $2x+2y-3z=3$

سوال 11.99 تا سوال 11.104 میں اول بنیادی صورت دریافت کریں۔

سوال 11.99: $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$

جواب: $\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$

سوال 11.100: $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+uv\boldsymbol{k}$

جواب: $(v^2+1)\,\mathrm{d}u^2+2uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+(u^2+1)\,\mathrm{d}v^2$

سوال 11.101: کرہ $\boldsymbol{r}=a\cos v\cos u\boldsymbol{i}+a\cos v\sin u\boldsymbol{j}+a\sin v\boldsymbol{k}$

جواب: $a^2\cos^2 v\,\mathrm{d}u^2+a^2\,\mathrm{d}v^2$

سوال 11.102: اندرسہ $\boldsymbol{r} = (a + b\cos v)\cos u\boldsymbol{i} + (a + b\cos v)\sin u\boldsymbol{j} + b\sin v\boldsymbol{k}, \quad (a > b > 0)$

جواب: $(a^2 + 2ab\cos v + b^2\cos^2 v)\,\mathrm{d}u^2 + b^2\,\mathrm{d}v^2$

سوال 11.103: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + v^2\boldsymbol{k}$

جواب: $\mathrm{d}u^2 + (1 + 4v^2)\,\mathrm{d}v^2$

سوال 11.104: بیلن $\boldsymbol{r} = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$

جواب: $a^2\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$

سوال 11.105: ثابت کریں کہ سطح $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ پر محددی منحنیات $u = c_1$ اور $v = c_2$ صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتی ہیں جب $F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = 0$ ہو۔ یہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔

جواب: $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ ان منحنیات کو مماسی ہیں۔یوں اندرونی ضرب کی تعریف سے ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوال 11.106 تا سوال 11.109 میں دیے گئے سطحوں کا رقبہ مساوات 11.51 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.106: $x^2 + y^2 = a^2, \quad 0 \le z \le b$

جواب: $2\pi ab$

سوال 11.107: کرہ $\boldsymbol{r} = a\cos v\cos u\boldsymbol{i} + a\cos v\sin u\boldsymbol{j} + a\sin v\boldsymbol{k}$

جواب: $4\pi a^2$

سوال 11.108: $z = x^2 + y^2, \quad 0 \le z \le 1$

جواب: $\frac{\pi}{6}(\sqrt{125} - 1)$

سوال 11.109: $z^2 = x^2 + y^2, \quad -1 \le z \le 1$

جواب: $2\sqrt{2}\,\pi$

11.7 سطحی تکمل

دوہرا تکمل (حصہ 11.3) کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے سطحی تکمل کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ سطحی تکمل کی تعریف عین دوہرا تکمل کی طرز پر ہے۔

فرض کریں کہ S کسی سطح کا محدود حصہ ہے اور تفاعل $f(x,y,z)$ سطح S پر معین اور استمراری ہے۔ ہم مکمل بے قاعدگی سے S کو S_1 ، $\cdots$ ، S_n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کے رقبے بالترتیب ΔA_1 ، $\cdots$ ، ΔA_n ہیں۔ ہم مکمل بے قاعدگی سے ہر S_k میں کوئی نقطہ N_k منتخب کرتے ہیں جس کے محدد x_k ، y_k ، z_k ہوں گے۔ اب ہم درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta A_k \tag{11.63}$$

ہم ایسے مجموعے $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے مکمل بے قاعدگی کے ساتھ یوں حاصل کرتے ہیں کہ n کی قیمت لامتناہی کے قریب کرنے سے سب سے بڑا حصہ S_k نقطہ مانند ہوتا ہو۔ یوں حاصل اعداد J_1 ، J_2 ، $\cdots$ کا ایک حد پایا جاتا ہے جس کی قیمت پر نا تو حصوں کی انتخاب اور نا ہی ہر حصے میں نقطہ کی انتخاب کا کوئی اثر پایا جاتا ہے (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو S پر تفاعل $f(x,y,z)$ کی **سطحی تکمل**[39] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}A \tag{11.64}$$

سطحی تکمل (مساوات 11.64) کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر آئیں اس کو دوہرا تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

اگر S کی مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(u,v)$ ہو تب $\mathrm{d}A = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ہو گا (مساوات 11.52 اور مساوات 11.55) لہٰذا

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}A &= \iint_R f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \iint_R f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{11.65}$$

---

[39] surface integral

لکھا جا سکتا ہے جہاں uv سطح میں R سطح S کا مطابقتی خطہ ہے۔

اسی طرح اگر S کو $z=g(x,y)$ سے ظاہر کیا گیا ہو تب مساوات 11.60 کی مدد سے درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}A=\iint_{\bar{S}} f[x,y,g(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.66}$$

مثال 11.20: جمودی معیار اثر

کروی یکساں خاصیت کی جھلی $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$ جس کی کمیت M ہے کا z محور کے لحاظ سے جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

اگر کمیت سطح S پر یوں پھیلا ہو کہ کمیت کی سطحی کثافت $\mu(x,y,z)$ ہو تب کسی محور L کے لحاظ سے جمودی معیار اثر

$$I=\iint_S \mu D^2\,\mathrm{d}A \tag{11.67}$$

ہو گا جہاں L سے نقطہ (x,y,z) تک فاصلہ $D(x,y,z)$ ہے۔

چونکہ موجودہ مثال میں جھلی یکساں خاصیت رکھتی ہے لہٰذا μ ایک مستقل ہو گا۔ کروی جھلی کا رقبہ $A=4\pi a^2$ ہے لہٰذا

$$\mu=\frac{M}{A}=\frac{M}{4\pi a^2}$$

ہو گا۔ کرہ کو مساوات 11.42 سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 11.46 سے

$$E=a^2\cos^2 v,\quad F=0,\quad G=a^2$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\mathrm{d}A=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=a^2\cos v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

ہو گا۔ مزید z محور سے کسی نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ $D=\sqrt{x^2+y^2}=a\cos v$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$I=\iint_S \mu D^2\,\mathrm{d}A=\frac{M}{4\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} a^4\cos^3 v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{2Ma^2}{3}$$

(ا) موبیوس پٹی

□

کئی عملی سطحی تکمل میں سطح کی سمت بندی اہمیت رکھتی ہے لہٰذا ہموار سطح (حصہ 11.5) سے شروع کرتے ہوئے سطح کی سمت بندی پر غور کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ S ایک ہموار سطح ہے جس پر N کوئی نقطہ ہے۔ہم N پر S کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ منتخب کر سکتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{n}$ کی سمت N پر S کی مثبت عمودی سمت ہو گی۔ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{n}$ کو دو ہی طریقوں سے (آپس میں الٹ رخ) چنا جا سکتا ہے۔

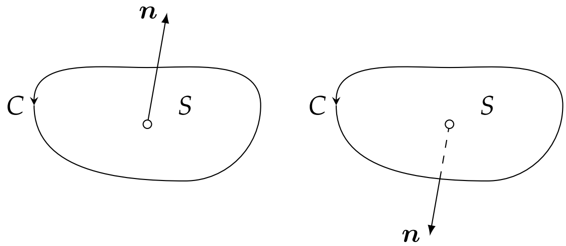
ایک ہموار سطح اس صورت قابل سمت بند[40] کہلاتی ہے جب اس سطح پر کسی نقطہ N_0 پر دی گئی مثبت سمت کو پوری سطح پر یکتا اور استمراری طور پر جاری رکھنا ممکن ہو۔

یوں سطح S اس صورت قابل سمت بند ہو گی جب اس پر نقطہ N_0 سے گزرتی کوئی ایسی سطح C نہ پائی جاتی ہو جس پر منتخب کردہ مثبت سمت کو C پر مسلسل ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے کے بعد واپس N_0 لانے سے سمت الٹ ہوتی ہو۔

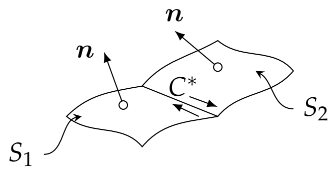
ہموار سطح کا (حسب ضرورت) چھوٹا حصہ ہر صورت قابل سمت بند ہوتا ہے۔البتہ وسیع سطح کے لئے ایسا نہیں کہا جا سکتا ہے۔غیر قابل سمت بند سطحیں پائی جاتی ہیں جن کی مشہور مثال موبیوس پٹی[41] کو شکل 11.25ا میں دکھایا گیا ہے۔اس شکل میں نقطہ N_0 پر عمودی سمتیہ کو نقطہ دار لکیر پر حرکت دے کر واپس N_0 پہنچانے سے عمودی سمتیہ کا رخ الٹ ہو جائے گا۔کاغذ کی لمبی مستطیل پٹی کو بل دے کر چھوٹے اطراف کو آپس میں یوں جوڑنے سے کہ A اور A آپس میں ملیں اور B اور B آپس میں ملیں، موبیوس پٹی[42] بنائی جا سکتی ہے۔اگر S قابل سمت بند ہو تب ہم $\boldsymbol{n}$ کی دو میں سے ایک ممکنہ رخ کو مثبت سمت کہتے ہوئے S کو سمت بند بنا سکتے ہیں۔

---

[40] orientable
[41] Mobius strip
[42] جرمن ریاضی دان اگست فرڈینانڈ موبیوس [1790-1868]



(الف) ہموار سطح



(ب) ٹکڑوں میں ہموار سطح

شکل 11.26: سطح کی سمت بندی

اگر S کی سرحد C سادہ بند منحنی ہو تب ہم $\boldsymbol{n}$ کے لحاظ سے C کو سمت بند بنا سکتے ہیں۔ یہ عمل شکل 11.26-الف میں دونوں ممکنہ عمودی سمتیات کے لحاظ سے دکھایا گیا ہے۔ ہم اب سمت بندی کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے اس کو ٹکڑوں میں ہموار سطحوں کے لئے بیان کرتے ہیں۔ ٹکڑوں میں ہموار سطح S اس صورت قابل سمت بند ہو گی جب ایسا ممکن ہو کہ ہر دو ٹکڑوں S_1 اور S_2 کے مابین مشترکہ سرحدی منحنی C^* کی مثبت سمت S_1 اور S_2 کے لحاظ سے آپس میں الٹ ہوں۔ شکل 11.26-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

فرض کریں کہ S ٹکڑوں میں قابل سمت بند سطح ہے۔ ہم اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ چنتے ہوئے S کو سمت بند کرتے ہیں۔ $\boldsymbol{n}$ اور مثبت x ، y ، z محور کے درمیان زاویوں کو α ، β ، γ سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k} \tag{11.68}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ تفاعل $u_1(x,y,z)$ ، $u_2(x,y,z)$ ، $u_3(x,y,z)$ سطح S کے ہر نقطہ پر معین اور استمراری ہیں۔ ہمیں عموماً درج ذیل تکملات حل کرنے ہوں گے۔

$$\iint_S u_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad \iint_S u_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z, \qquad \iint_S u_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

تکمل کی تعریف کے تحت ان سے مراد درج ذیل ہے (شکل 11.23 سے رجوع کریں)۔

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S u_1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \iint\limits_S u_1 \cos\alpha \,\mathrm{d}A \\
\iint\limits_S u_2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z &= \iint\limits_S u_2 \cos\beta \,\mathrm{d}A \\
\iint\limits_S u_3 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \iint\limits_S u_3 \cos\gamma \,\mathrm{d}A
\end{aligned} \tag{11.69}$$

صاف ظاہر کہ ان تکملات کی قیمت کا دارومدار $\boldsymbol{n}$ کی انتخاب یعنی S کی سمت بندی پر ہو گا۔ S کی سمت بندی الٹ کرنے سے $\boldsymbol{n}$ کے اجزاء $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$ منفی اکائی سے ضرب ہوں گے لہٰذا تکمل کی قیمت بھی منفی ایک (-1) سے ضرب ہو گی۔

اس طرح کے تین عدد تکملات کو سمتیہ کی استعمال سے نہایت سادہ طرز میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں سمتیہ

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

متعارف کرتے ہوئے مساوات 11.69 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S (u_1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + u_2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z + u_3 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y) \\
&\qquad = \iint\limits_S (u_1\cos\alpha + u_2\cos\beta + u_3\cos\gamma) \,\mathrm{d}A = \iint\limits_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \,\mathrm{d}A
\end{aligned} \tag{11.70}$$

مساوات 11.69 کے تکملات حل کرنے کی خاطر انہیں مستوی سطح پر دوہرا تکملات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔اس عمل پر غور کرتے ہیں۔

اگر S کو $z = h(x,y)$ سے ظاہر کیا گیا ہو اور اس کی سمت بندی یوں ہو کہ $\boldsymbol{n}$ اوپر کی رخ ہو تب γ زاویہ حادہ ہو گا لہٰذا مساوات 11.61 میں $\delta = \gamma$ ہو گا۔اس طرح مساوات 11.69 سے

$$\iint\limits_S u_3(x,y,z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = +\iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{11.71}$$

حاصل ہو گا جہاں S کا قائمہ الزاویہ سایہ xy مستوی پر $\overline{R}$ ہے۔اگر $\boldsymbol{n}$ کا رخ نیچے کو ہو تب γ زاویہ منفرجہ ہو گا اور ہمیں درج ذیل ملے گا۔

$$\iint\limits_{S} u_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.72}$$

مساوات 11.69 کے باقی دو عدد تکمل کو بھی اسی طرح دوہرا تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

اگر S کو مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$$

سے ظاہر کیا گیا ہو تب S کی دو ممکنہ عمودی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$(\text{الف})\quad \boldsymbol{n} = +\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \qquad (\text{ب})\quad \boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \tag{11.73}$$

اب مساوات 11.68 کے دونوں اطراف کا $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ اندرونی ضرب لینے سے $\cos\gamma = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}$ ملتا ہے جبکہ مساوات 11.52 کے تحت $\mathrm{d}A = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\cos\gamma\,\mathrm{d}A = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A = \mp\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \mp\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \mp\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر یعقوبی پایا جاتا ہے (حصہ 11.3)۔ اس طرح مساوات 11.69 میں

$$\iint\limits_{S} u_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mp\iint\limits_{R} u_3[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{11.74}$$

ہو گا جہاں مثبت علامت مساوات 11.73-الف اور منفی علامت مساوات 11.73-ب کی صورت میں استعمال ہو گا۔یہاں S کا مطابقتی خطہ uv مستوی میں R ہے۔

سوالات

سوال 11.110 تا سوال 11.117 میں S کو مقدار معلوم روپ میں لکھ کر مساوات 11.65 استعمال کرتے ہوئے $\iint\limits_{S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.110: $f=2x-1,\quad S:\ x^2+y^2=1,\quad 0\le z\le 4$
جواب: -8π

سوال 11.111: $f=2x,\quad S:\ z=x^2,\quad 0\le x\le 2,\quad -2\le y\le 2$
جواب: $\frac{2}{3}(17\sqrt{17}-1)$

سوال 11.112: $f=xy,\quad S:\ z=xy,\quad -1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1$
جواب: 0

سوال 11.113: $f=3x^3\cos y,\quad S:\ z=x^3,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{10\sqrt{10}-1}{18}$

سوال 11.114: $f=xy,\quad S:\ x^2+y^2=9,\quad -1\le z\le 2$
جواب: 0

سوال 11.115: $f=2x-y+z,\quad S:\ x^2+y^2=1,\quad 0\le z\le 1$
جواب: π

سوال 11.116: $f=x-2y,\quad S:\ x+y+z=1$ ربع اول میں
جواب: $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

سوال 11.117: $f=2x+3y,\quad S:\ z=y^2,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1$
جواب: $\frac{7\sqrt{5}-1\sinh^{-1}2}{4}$

سوال 11.118: فضا میں سطح S کی کثافت کمیت (کمیت فی اکائی رقبہ) $\sigma(x,y,z)$ ہے۔کل کمیت M اور مرکز ثقل $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ کی درج ذیل کلیات درست ہونے کا جواز پیش کریں۔

$$M=\iint\limits_S \sigma\,\mathrm{d}A,\quad \bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_S x\sigma\,\mathrm{d}A,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_S y\sigma\,\mathrm{d}A,\quad \bar{z}=\frac{1}{M}\iint\limits_S z\sigma\,\mathrm{d}A$$

سوال 11.119: فضا میں سطح S کی کثافت کمیت (کمیت فی اکائی رقبہ) $\sigma(x,y,z)$ ہے۔درج ذیل کلیات x ، y ، z محور کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_z دیتے ہیں۔ان کی درست ہونے کا جواز پیش کریں۔

$$I_x=\iint\limits_S (y^2+z^2)\sigma\,\mathrm{d}A,\quad I_y=\iint\limits_S (x^2+z^2)\sigma\,\mathrm{d}A,\quad I_z=\iint\limits_S (x^2+y^2)\sigma\,\mathrm{d}A$$

سوال 11.120 تا سوال 11.124 میں دیے محور کے لحاظ سے جھلی S کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔ کثافت $\sigma = 1$ ہے۔

سوال 11.120: z محور $S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le h,$
جواب: $2\pi h$

سوال 11.121: z محور $S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le h,$
جواب: $\frac{\sqrt{2}h\sqrt{1-h^2}}{3}(2h^2+1) + \sqrt{2}\sinh^{-1} h$

سوال 11.122: اندرسہ $\boldsymbol{r} = (a + b\cos v)\cos u\boldsymbol{i} + (a + b\cos v)\sin u\boldsymbol{j} + b\sin v\boldsymbol{k},$
$(a > b > 0)$ z محور
جواب: $2\pi^2 ab(2a^2 + 3b^2)$

سوال 11.123: اندرسہ (سوال 11.122) جبکہ محور xz مستوی میں خط $x = a$ ہے۔
جواب: $2\pi^2 ab(4a^2 + 3b^2)$

سوال 11.124: اندرسہ (سوال 11.122) جبکہ محور xz مستوی میں خط $x = a - b$ ہے۔
جواب: $2\pi^2 ab(4a^2 - 4ab + 5b^2)$

سوال 11.125: (مسئلہ سٹائنر[43]) اگر کل کمیت M کے مرکز ثقل سے گزرتی محور A کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر I_A ہو تب ثابت کریں کہ A کے متوازی اور اس سے k فاصلہ پر محور B کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر I_B درج ذیل ہو گی۔

$$I_B = I_A + k^2 M$$

سوال 11.126: مسئلہ سٹائنر[44] استعمال کرتے ہوئے سوال 11.122 کی جواب سے سوال 11.123 اور سوال 11.124 کے جوابات حاصل کریں۔

سوال 11.127: موبیوس پٹی کو نقطہ دار لکیر پر کھینچی سے کاٹ کر دیکھیں کیا ملتا ہے؟

---

[43] Steiner's theorem

[44] سوئزرلینڈ کے یعقوب سٹائنر [1796-1863]

11.8 تہرا تکمل۔گاوس کا مسئلہ پھیلاو

دہرا تکمل (حصہ 11.3) کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے تہرا تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کہ فضا کے کسی بند محدود[45] خطہ T میں تفاعل $f(x, y, z)$ معین ہے۔ہم تینوں محور کے متوازی سطحوں سے T کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ہم T کے متوازی السطوح ٹکڑوں کو ہم 1 تا n سے ظاہر کرتے ہیں۔ایسے ہر ٹکڑے کے اندر ہم بے قاعدگی سے کوئی نقطہ منتخب کرتے ہیں، مثلاً ٹکڑا k میں نقطہ (x_k, y_k, z_k) چنا جاتا ہے، اور درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta H$$

جہاں ٹکڑا k کی حجم ΔH_k ہے۔ہم مثبت عدد صحیح n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، ...کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے خطہ میں، جس کا T حصہ ہو، $f(x, y, z)$ استمراری ہے اور T کو لامتناہی تعداد کی ہموار سطحیں گھیرتی ہیں۔ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، ...کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x, y_k, z_k) کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو خطہ T پر $f(x, y, z)$ کا **تہرا تکمل**[46] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{یا} \quad \iiint_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}H$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ ایسا استمراری سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ جس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کی پھیلاو کا فضا میں خطہ T پر تہرا تکمل کا تبادلہ T کی سطح پر $\boldsymbol{u}$ کے عمودی جزو کی سطحی تکمل میں کیا جا سکتا ہے۔ایسا مسئلہ پھیلاو کی مدد سے کیا جاتا ہے جو دو بعدی مسئلہ گرین کا تین بعدی مماثل ہے۔ مسئلہ پھیلاو کئی نظریاتی اور عملی مسائل میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔

---

[45] "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو معقول وسعت کی کرہ میں گھیرا جا سکتا ہے۔

[46] triple integral

مسئلہ 11.2: گاوس کا مسئلہ پھیلاو (حجمی تکمل سے سطحی تکمل اور سطحی تکمل سے حجمی تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ فضا میں بند محدود خطہ T کی سرحد S ٹکڑوں میں ہموار (حصہ 11.5) اور قابل سمت بند ہے۔مزید فرض کریں کہ خطہ T میں $\boldsymbol{u}(x,y,z)$ ایک استمراری سمتی تفاعل ہے جس کے T میں استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\iiint\limits_T \nabla \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}H = \iint\limits_S u_n \,\mathrm{d}A \tag{11.75}$$

جہاں T کی لحاظ سے سطح S پر $\boldsymbol{u}$ کا باہر رخ عمودی جزو

$$u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \tag{11.76}$$

ہے اور $\boldsymbol{n}$ سطح S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ ہے۔

ثبوت: ہم $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{n}$ کو ارکان کی صورت میں لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$$

جہاں $\boldsymbol{n}$ اور مثبت x ، y ، z محور کے مابین زاویے بالترتیب α ، β ، γ ہیں۔یوں مساوات 11.75 درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S (u_1\cos\alpha + u_2\cos\beta + u_3\cos\gamma)\,\mathrm{d}A \tag{11.77}$$

جسے مساوات 11.70 کی مدد سے درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

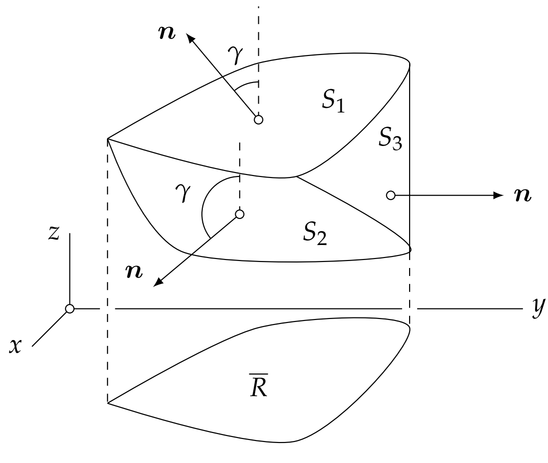
$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S (u_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + u_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + u_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \tag{11.78}$$

اب ظاہر ہے کہ اگر درج ذیل تین تعلقات یک وقت درست ہوں تب مساوات 11.77 درست ہو گا۔

$$\iiint\limits_T \frac{\partial u_1}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S u_1\cos\alpha\,\mathrm{d}A \tag{11.79}$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial u_2}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S u_2\cos\beta\,\mathrm{d} \tag{11.80}$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A \tag{11.81}$$



شکل 11.27: مخصوص خطہ

ہم مساوات 11.81 کو ایک خصوصی خطہ T کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کی سرحد ٹکڑوں میں ہموار قابل سمت بند سطح S ہے۔اس مخصوص T کی خاصیت ہے کہ x ، y یا z محور کے متوازی کوئی بھی خط جو T کو قطع کرتی ہو، کا زیادہ سے زیادہ صرف ایک حصہ (یا صرف ایک نقطہ) T کے ساتھ مشترک ہو گا۔ اس خاصیت کا مطلب ہے کہ T کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$g(x,y) \le z \le h(x,y) \tag{11.82}$$

جہاں xy مستوی پر T کے قائمہ الزاویہ سائے $\overline{R}$ میں نقطہ (x,y) ہو گا۔ظاہر ہے کہ $g(x,y)$ سطح S کی نچلی سطح S_2 کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $h(x,y)$ سطح S کی بالائی سطح S_1 کو ظاہر کرتی ہے (شکل 11.27)۔عین ممکن ہے کہ S کا کوئی کھڑا حصہ S_3 بھی پایا جاتا ہو۔(حصہ S_3 کی انحطاطی شکل ایک منحنی ہو سکتی ہے مثلاً کروی T کی صورت میں S_3 ایک گول دائرہ ہو گا۔)

مساوات 11.81 کو مساوات 11.82 کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔چونکہ کسی خطہ جس کا T حصہ ہے میں $\boldsymbol{u}$ استمراری قابل تفرق ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_T \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\overline{R}} \Big[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.83}$$

اس میں اندرونی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_g^h \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z = u_3(x,y,h) - u_3(x,y,g)$$

یوں مساوات 11.83 کا بایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا۔

$$\iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.84}$$

آئیں اب ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.81 کا دایاں ہاتھ بھی اسی کے برابر ہے۔ چونکہ S_3 پر $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ہے لہٰذا $\cos\gamma = 0$ ہو گا اور یوں مساوات 11.83 کے دائیں ہاتھ S_3 پر سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$\iint\limits_{S} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{S_1} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A + \iint\limits_{S_2} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A$$

S_1 پر γ زاویہ حادہ ہے لہٰذا $\sigma = \gamma$ لیتے ہوئے مساوات 11.61 سے $\mathrm{d}A = \sec\gamma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ملتا ہے۔چونکہ $\cos\gamma\sec\gamma = 1$ کے برابر ہے لہٰذا یوں

$$\iint\limits_{S_1} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

حاصل ہو گا جو مساوات 11.84 میں پہلی دوہرا تکمل کے برابر ہے۔اسی طرح S_2 پر γ زاویہ منفرجہ ہے لہٰذا $\pi-\gamma$ مساوات 11.61 میں زاویہ حادہ σ کے مترادف ہو گا۔یوں

$$\mathrm{d}A = \sec(\pi-\gamma)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\sec\gamma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھتے ہوئے

$$\iint\limits_{S_2} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = -\iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.85}$$

ہو گا جو عین 11.61 میں دوسرے دوہرا تکمل کے برابر ہے۔یوں مساوات 11.81 ثابت ہوا۔

مساوات 11.79 اور مساوات 11.80 کو بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے جہاں مساوات 11.82 کی طرح T کو درج ذیل سے ظاہر کیا جائے گا۔

$$\tilde{g}(y,z) \le x \le \tilde{h}(y,z) \quad \text{اور} \quad g^*(x,z) \le y \le h^*(x,z)$$

اس طرح مسئلہ پھیلاو کا مخصوص خطے میں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ایسا خطہ T جس کو اضافی سطحوں کی مدد سے محدود تعداد کی مخصوص ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کے ہر ٹکڑے پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے تمام جوابات کو مجموعہ لینے سے پوری خطے پر مسئلہ ثابت ہو گا۔اس ترکیب بالکل مسئلہ گرین میں استعمال کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔ہر اضافی سطح پر دو مرتبہ حاصل سطحی تکمل کے جوابات کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا جبکہ باقی سطحوں پر سطحی تکمل T کی پوری سطح S پر سطحی تکمل ہی ہو گا۔ T کے تمام ٹکڑوں کے حجمی تکملات کا مجموعہ T کے حجمی تکمل کے برابر ہو گا۔

یوں کسی بھی عملی استعمال کے محدود خطہ T کے لئے مسئلہ پھیلاو کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مسئلہ کو ایسی عمومی خطہ T جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم T کو تخمیناً ایسی خطوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ یہ ترکیب مسئلہ گرین کی ثبوت میں اختیار کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔

□

مسئلہ گرین خطی تکمل کے حل میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح مسئلہ پھیلاو سطحی تکمل کے حل میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

مثال 11.21: سطحی تکمل کا حصول بذریعہ مسئلہ پھیلاو
درج ذیل کو تہرا تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے حل کریں جہاں S بیلن $x^2+y^2=a^2\,(0\le z\le b)$ اور اس کے دونوں اطراف کی ڈھکنوں کی سطح ہے۔

$$I=\iint\limits_S (x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+x^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$$

حل: یہاں مساوات 11.77 اور مساوات 11.78 میں $u_1=x^3$ ، $u_2=x^2y$ ، $u_3=x^2z$ ہیں۔یوں خطہ T کی تشاکل کو دیکھ کر ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\iiint\limits_T (3x^2+x^2+x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\cdot 5\int_0^b\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

اندرونی تکمل $\frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$ کے برابر ہے۔یوں $y=a\cos t$ چنتے ہوئے

$$\mathrm{d}y=-a\sin t\,\mathrm{d}t,\quad (a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sin^3 t$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب y پر تکمل

$$\frac{1}{3}\int_0^a (a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}a^4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi a^4}{16}$$

ہو گا اور آخر میں z پر تکمل جزو b دیتا ہے لہٰذا جواب درج ذیل ہو گا۔

$$I=4\cdot 5\frac{\pi a^4}{16}b=\frac{5}{4}\pi a^4 b$$

□

11.9 مسئلہ پھیلاو کے نتائج اور استعمال

مسئلہ پھیلاو کی عملی استعمال اور اس کے چند اہم نتائج کی مثالیں اس حصے میں پیش کی جائیں گی۔ان مثالوں میں فرض کیا جاتا ہے کی تفاعل اور خطہ مسئلہ پھیلاو کے شرائط پر پورا اترتے ہیں۔مزید کہ سطح S پر خطہ T کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔

مثال 11.22: محدد سے آزاد پھیلاو
مسئلہ پھیلاو کی (مساوات 11.75) کے دونوں اطراف کو خطہ T کی حجم $H(T)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{H(T)}\iiint\limits_T \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}H=\frac{1}{H(T)}\iint\limits_{S(T)} u_n\,\mathrm{d}A \tag{11.86}$$

ملتا ہے جہاں T کی سرحدی سطح $S(T)$ ہے۔دوہرا تکمل کی خصوصیات کو حصہ 11.3 میں بیان کیا گیا۔تہرا تکمل بھی یہی خصوصیات رکھتا ہے۔بالخصوص تہرا تکمل کا **مسئلہ اوسط قیمت** کہتا ہے کہ خطہ T میں کسی بھی استمراری تفاعل $f(x,y,z)$ کے لئے T میں ایسا نقطہ $Q:(x_0,y_0,z_0)$ پایا جائے گا کہ درج ذیل درست ہو گا۔

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}H=f(x_0,y_0,z_0)H(T)$$

یوں $f = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$ پر کرتے ہوئے مساوات 11.86 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{1}{H(T)} \iiint_T \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}H = \nabla \cdot \boldsymbol{u}(x_0, y_0, z_0) \tag{11.87}$$

فرض کریں کہ T میں $N : (x_1, y_1, z_1)$ کوئی مقررہ نقطہ ہے اور T نقطہ N کے گرد یوں سکڑتا ہے کہ N سے T کے دور ترین نقطے کا فاصل $d(T)$ صفر کے قریب پہنچے۔اس طرح نقطہ Q نقطہ N کے قریب پہنچے گا اور مساوات 11.86 اور مساوات 11.87 سے ظاہر کہ کہ نقطہ N پر $\boldsymbol{u}$ کی پھیلاو درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T) \to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} u_n \, \mathrm{d}A \tag{11.88}$$

اس کلیہ کو بعض اوقات پھیلاو کی تعریف تصور کیا جاتا ہے۔جہاں حصہ 10.10 میں پھیلاو کی تعریف میں x ، y ، z محدد پائے جاتے ہیں مساوات 11.88 میں دی گئی پھیلاو کی تعریف محدد سے پاک ہے۔اس سے یک دم اخذ کیا جا سکتا ہے کہ پھیلاو کی قیمت پر محددی نظام کی انتخاب کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ □

مثال 11.23: پھیلاو کا طبعی مفہوم

مسئلہ پھیلاو سے سمتیہ کی پھیلاو کا مفہوم سمجھا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرنے کی خاطر ہم اکائی کمیتی کثافت $\rho = 1$ کی داب نا پذیر سیال کی برقرار حال (وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا) بہاو پر غور کرتے ہیں (مثال 10.24 بھی دیکھیں)۔ کسی بھی نقطہ N پر ایسی بہاو کا تعین اس نقطہ پر سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}(N)$ سے کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ فضا میں خطہ T کی سرحدی سطح S ہے اور $\boldsymbol{n}$ باہر رخ S کا اکائی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کے چھوٹے حصہ ΔS جس کا رقبہ ΔA ہے سے، اندرون S سے بیرون S رخ، اکائی وقت میں کمیت کی اخراج $v_n \Delta A$ [47] ہو گی جہاں $v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا $\boldsymbol{n}$ رخ جزو ہے (یعنی S کا عمودی جزو ہے) اور $\boldsymbol{n}$ کو ΔS کے کسی موزوں نقطے پر لیا گیا ہے۔یوں T سے کل اخراج جو S سے گزرتا ہے سطحی تکمل

$$\iint_S v_n \, \mathrm{d}A$$

[47] کسی نقطہ پر v_n منفی ہو سکتا ہے لہٰذا ایسے نقطے پر سیال S میں داخل ہو گا۔

سے حاصل ہو گا۔یہ تکمل T کا کل اخراج دیتا ہے۔یوں T کی اوسط اخراج

$$\frac{1}{H}\iint_S v_n \,\mathrm{d}A \tag{11.89}$$

ہو گی جہاں T کا حجم H ہے۔چونکہ بہاو برقرار حال ہے اور سیال داب ناپذیر ہے لہٰذا T سے اخراج برابر کمیت T کو مہیا کی جاتی ہو گی۔یوں اگر مساوات 11.89 کے تکمل کی قیمت غیر صفر ہو تب T میں **منبع**[48] (**مثبت منبع** یا **منفی منبع**) پایا جاتا ہو گا جہاں سیال پیدا یا غائب ہوتا ہے۔

اگر ہم T کو ایک نقطہ N مانند کر دیں تب مساوات 11.89 ہمیں N پر **شدت منبع**[49] دیگا (مساوات 11.88 کا دائیں ہاتھ جہاں v_n کی جگہ u_n لکھا گیا ہے)۔ اس سے ظاہر ہے کہ داب ناپذیر سیال کی برقرار حال سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا نقطہ N پر پھیلاو سے مراد N پر شدت منبع ہے۔صرف اور صرف اس صورت T میں کوئی منبع نہ ہو گا جب $\nabla\cdot\boldsymbol{v}\equiv 0$ ہو اور ایسی صورت میں میں کسی بھی بند سطح S^* کے لئے درج ذیل درست ہو گا۔

$$\iint_{S^*} v_n \,\mathrm{d}A = 0$$

آپ نے دیکھا کہ کسی نقطہ سے سیال کی اخراج کو اس نقطہ پر $\boldsymbol{v}$ کی پھیلاو ظاہر کرتی ہے۔ہم کہتے ہیں سیال اس نقطہ سے نکل کر پھیلتا ہے۔اسی سے اس عمل کو پھیلاو کہتے ہیں۔ □

مثال 11.24: مساوات حرارت۔ حراری بہاو
ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم میں حراری توانائی کا بہاو گرم سے سرد مقام کے رخ ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ حراری بہاو کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ درج طرز کی ہو گی

$$\boldsymbol{v} = -K\nabla U \tag{11.90}$$

جہاں $U(x,y,z,t)$ لمحہ t پر نقطہ (x,y,z) کا درجہ حرارت ہے اور K جسم کی **حراری موصلیت**[50] ہے۔عمومی طبعی حالات میں K ایک مستقل ہو گا۔

---

[48] source
[49] source intensity
[50] thermal conductivity

فرض کریں کہ جسم میں R کوئی خطہ ہے جس کی سرحدی سطح S ہے۔یوں اکائی وقت میں R سے کل حراری توانائی کا اخراج

$$\iint_S v_n \, \mathrm{d}A$$

ہو گا جہاں $v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ سرحد S پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی رخ $\boldsymbol{v}$ کا جزو ہے۔یہ تعلق گزشتہ مثال کی حاصل کیا گیا ہے۔ مساوات 11.90 اور مسئلہ پھیلاو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (مساوات 10.114)۔

$$\iint_S v_n \, \mathrm{d}A = -K \iiint_R \nabla \cdot (\nabla U) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = -K \iiint_R \nabla^2 U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{11.91}$$

R میں کل حراری توانائی W درج ذیل ہے

$$W = \iiint_R \sigma \rho U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

جہاں σ جسم کے مواد کی **خصوصی حراری استعداد**[51] ہے جبکہ ρ جسم کی کمیتی کثافت (کمیت فی اکائی حجم) ہے۔یوں جسم میں حراری توانائی کی وقت کے ساتھ گھٹاو

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = -\iiint_R \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

ہو گی جو عین R سے توانائی کی اخراج کے برابر ہو گا یعنی

$$-\iiint_R \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = -K \iiint_R \nabla^2 U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

یا:

$$\iiint_R \left(\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0$$

چونکہ یہ مساوات کسی بھی خطہ R کے لئے درست ہے للٰذا متکمل (اگر استمراری ہو تب) تمام R میں صفر کے برابر ہو گا یعنی:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U \qquad (c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}) \tag{11.92}$$

یہ **حراری مساوات**[52] کہلاتی ہے جو حراری بہاو کی بنیادی مساوات ہے۔ □

[51] specific heat capacity
[52] heat equation

مثال 11.25: لاپلاسی مساوات کے حل کی بنیادی خصوصیت
مسئلہ پھیلاو کی مساوات

$$\iiint\limits_T \nabla \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}H = \iint\limits_S u_n \, \mathrm{d}A \tag{11.93}$$

پر غور کریں۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{u}$ کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان $\boldsymbol{u} = \nabla f$ ہے۔یوں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

ہو گا (مساوات 10.114)۔مزید

$$u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla f$$

لکھا جائے گا جو مساوات 10.81 کے تحت S کے باہر رخ f کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{\partial f}{\partial n}$ سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 11.93 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\iiint\limits_T \nabla^2 f \, \mathrm{d}H = \iint\limits_S \frac{\partial f}{\partial n} \, \mathrm{d}A \tag{11.94}$$

ظاہر ہے کہ یہ مساوات 11.33 کی تین بعدی مماثل ہے۔ □

مسئلہ پھیلاو کے لئے درکار شرائط کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 11.94 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 11.3: (لاپلاسی مساوات کے حل کی خصوصیت)
فرض کریں کہ کسی دائرہ کار D میں تفاعل $f(x, y, z)$ لاپلاسی مساوات

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

کا حل ہے اور D میں f کے دو درجی جزوی تفرق استمراری ہیں۔تب D میں کسی بھی ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر f کے عمودی (سمتی) تفرق کا تکمل صفر ہو گا۔

مثال 11.26: مسئلہ گرین

فرض کریں کہ f اور g ایسے غیر سمتی تفاعل ہیں کہ کسی خطہ T میں $\boldsymbol{u} = f\nabla g$ مسئلہ پھیلاو کی شرائط پر پورا اترتا ہو۔ تب درج ذیل ہو گا (سوال 10.179)۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

مزید

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot (f\nabla g) = f(\boldsymbol{n} \cdot \nabla g)$$

ہو گا جہاں $\boldsymbol{n} \cdot \nabla g$ سے مراد مسئلہ پھیلاو کی سطح S پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں g کا سمتی تفرق ہے۔ اس سمتی تفرق کو $\frac{\partial g}{\partial n}$ لکھنے سے مسئلہ پھیلاو کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\iiint\limits_T (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,\mathrm{d}H = \iint\limits_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A \tag{11.95}$$

جس کو گرین کلیہ اول[53] یا (لاگو شرائط کو شامل کرتے ہوئے) مسئلہ گرین کی پہلی صورت کہتے ہیں۔

f اور g کو آپس میں بدلنے سے اسی طرح کی دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو مساوات 11.95 سے منفی کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\iiint\limits_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,\mathrm{d}H = \iint\limits_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}A \tag{11.96}$$

جس کو گرین کلیہ دوم[54] یا (لاگو شرائط کو شامل کرتے ہوئے) مسئلہ گرین کی دوسری صورت کہتے ہیں۔ □

مثال 11.27: لاپلاس مساوات کی حل کی یکتائی

فرض کریں کہ f مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتا ہے اور D میں ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر ہر جگہ صفر کے برابر ہے۔ تب مساوات 11.95 میں $f = g$ پر کرتے ہوئے اور S کے اندرونی حصہ کو T سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\iiint\limits_T \nabla f \cdot \nabla f\;\mathrm{d}H = \iiint\limits_T \left|\nabla f\right|^2 \mathrm{d}H = 0$$

---

[53] Green's first formula
[54] Green's second formula

ملتا ہے جہاں مسئلہ 11.3 میں دیے شرط کے مطابق $\nabla^2 f = 0$ لیا گیا ہے اور مساوات 11.95 کے دائیں ہاتھ چونکہ سطح S پر $f = 0$ ہے لہٰذا اس سطحی تکمل کو صفر لیا گیا ہے۔اب چونکہ ہمارے مفروضہ کے تحت T کے اندر اور S پر $|\nabla f|$ استمراری اور غیر منفی ہے لہٰذا یہ ضرور پورے T میں ہر جگہ صفر کے برابر ہو گا۔یوں $f_x = f_y = f_z = 0$ ہو گا لہٰذا T میں f ایک مستقل ہو گا اور چونکہ f استمراری ہے لہٰذا T کے اندر اس کی قیمت وہی ہو گی جو S پر ہے یعنی $f = 0$ ہو گا۔ □

اس سے درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 11.4:
اگر تفاعل $f(x, y, z)$ مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتا ہے اور D میں ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر ہر جگہ صفر کے برابر ہے۔تب S کے احاطہ خطہ T میں $f = 0$ ہو گا۔

اس مسئلہ کے اہم نتائج پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ تفاعل f_1 اور f_2 مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتے ہیں اور S پر دونوں یکساں ہوں۔تب ان کا فرق $f_1 - f_2$ بھی ان شرائط پر پورا اترتا ہے اور پوری S پر اس کی قیمت صفر کے برابر ہے۔یوں مسئلہ 11.4 کے تحت پوری T میں $f_1 - f_2 = 0$ ہو گا جس سے درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 11.5: (لاپلاس مساوات کی حل کی یکتائی)
فرض کریں کہ f لاپلاس مساوات کا حل ہے اور دائرہ کار D میں اس کے ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔مزید فرض کریں کہ D میں خطہ T مسئلہ پھیلاو کی شرائط پر پورا اترتا ہے۔تب T میں f کی قیمت یکتا ہو گی اور یہ T کی سرحدی سطح S پر قیمت کے برابر ہو گی۔

سوالات

سوال 11.128 تا سوال 11.131 میں حجم بذریعہ تہرا تکمل دریافت کریں۔

سوال 11.128: چو سطحہ جس کے کونے $A : (0, 0, 0)$ ، $B : (3, 0, 0)$ ، $C : (0, 2, 0)$ ، $D : (0, 0, 1)$ ہیں۔

جواب: یہ چو سطح ربع اول میں جس سطح کے نیچے پایا جاتا ہے پہلے اس (بالائی) سطح کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ B تا C سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ اور B تا D سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ دونوں جو سطح کی اس بالائی سطح پر پائے جاتے ہیں لہٰذا دونوں سطح کے مماسی سمتیات ہیں۔ان سے بالائی سطح کی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|} = \frac{2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{7}$$

یوں بالائی سطح کی مساوات $[(x-3)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}] \cdot \boldsymbol{n} = 0$ سے

$$2x + 3y + 6z = 6$$

حاصل ہوتی ہے۔اس طرح چو سطح کا حجم درج ذیل ہو گا (سوال 11.27 دیکھیں)۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) \mathrm{d}x = 1 \end{aligned}$$

سوال 11.129: ربع اول میں وہ خطہ جس کی سرحدیں $y = x$ ، $y = x^2$ اور $z = 3 - 2x$ ہیں۔
جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 11.130: سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ اور xy مستوی کے مابین خطہ۔
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.131: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترکہ حصہ۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 11.132 تا سوال 11.135 میں کمیتی کثافت σ دیا گیا ہے۔خطہ T میں کل کمیت دریافت کریں۔

سوال 11.132: مکعب $\sigma = xy, \quad T:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$
جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 11.133: چو سطح جس کے کونے $(0,0,0)$ ، $(3,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ ہیں اور $\sigma = x + y + z$ ہے۔
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 11.134: چو سطح جس کے کونے $(0,0,0)$ ، $(3,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ ہیں اور $\sigma = xy$ ہے۔
جواب: $\frac{3}{10}$

سوال 11.135: ربع اول میں $y = 1 - x^2$ اور $z = x$ کے درمیان T جہاں $\sigma = xy$ ہے۔
جواب: $\frac{4}{105}$

سوال 11.136 تا سوال 11.140 میں خطہ T میں کمیتی کثافت $\sigma = 1$ لیتے ہوئے z محور کے لحاظ سے جمودی معیار اثر $I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\sigma \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ دریافت کریں۔

سوال 11.136: مکعب $0 \le x \le c,\ 0 \le y \le c,\ 0 \le z \le c$
جواب: $\frac{2}{3}c^5$

سوال 11.137: بیلن $x^2 + y^2 \le c^2, 0 \le z \le h$
جواب: $\frac{1}{2}\pi c^4 h$

سوال 11.138: بیلن $x^2 + z^2 \le c^2, 0 \le y \le h$
جواب: $\frac{\pi c^2 h}{12}(4h^2 + 3c^2)$

سوال 11.139: مخروط $x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le h$
جواب: $\frac{\pi h^5}{10}$

سوال 11.140: اندرون کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$
جواب: $\frac{4}{15}\pi c^5$

سوال 11.141: مسئلہ پھیلاو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ خطہ T جس کی سرحد سطح S ہو کا حجم H درج ذیل ہے۔

$$H = \iint\limits_S x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iint\limits_S y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z = \iint\limits_S z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y)$$

سوال 11.142: مکعب کا حجم سوال 11.141 کے کلیات کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.143: بیلن $x^2+y^2 \le 1,\; 0 \le z \le h$ کا حجم سوال 11.141 کے کلیات کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.144: $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے مساوات 11.75 کی مدد سے ثابت کریں کہ خطہ T جس کی سرحدی سطح S ہو کا حجم درج ذیل ہے

$$H = \frac{1}{3}\iint\limits_S r\cos\theta \,\mathrm{d}A$$

جہاں S پر نقطہ $N:(x,y,z)$ کا مبدا O سے فاصلہ r ہے اور O سے N تک سمتی خط اور N پر باہر رخ عمودی سمتیہ کے مابین زاویہ θ ہے۔

سوال 11.145: رداس a کی کرہ کا حجم سوال 11.144 کے کلیے کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.146 تا سوال 11.152 میں S مسئلہ پھیلاو کی شرط کے مطابق سمت بند ہے۔ سطحی تکمل کو مسئلہ پھیلاو کی مدد سے حل کریں۔

سوال 11.146:

$$\iint\limits_S [(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y], \quad S:\; x^2+y^2+z^2=a^2$$

جواب: $\frac{8\pi a^3}{3}$

سوال 11.147: سطح مکعب سوال 11.132 $\iint\limits_S (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: 3

سوال 11.148: سطح بیلن سوال 11.137 $\iint\limits_S (x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: $\pi c^2 h^2$

سوال 11.149: سطح سوال 11.146 $\iint\limits_S (yz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: 0

سوال 11.150: متوازی السطوح $4 \geq z \geq 0, 2 \geq y \geq 0, 3 \geq x \geq 0 : S$ ، $\iint\limits_S x(y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
جواب: 72

سوال 11.151: سطح سوال 11.150 $\iint\limits_S [x\cos y \;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z]$
جواب: 24

سوال 11.152: سطح سوال 11.146 $\iint\limits_S [(y\cos^2 x + y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z(\sin^2 x - 3y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]$
جواب: $\frac{4}{3}\pi a^3$

سوال 11.153 تا سوال 11.157 میں T بند محدود خطہ ہے جس کی سرحدی سطح S ہے۔ مسئلہ پھیلاو استعمال کرتے ہوئے دیے گئے فقرے ثابت کریں جہاں ہارمونی[55] سے مراد لاپلاس مساوات کا حل ہے جس کے T میں استمراری دو درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں۔

سوال 11.153: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S \frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A = 0$$

جواب: مساوات 11.95 میں $f=1$ پر کریں۔

سوال 11.154: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S g\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A = \iiint\limits_T \left|\nabla g\right|^2\mathrm{d}H$$

جواب: مساوات 11.95 میں $f=g$ پر کریں۔

سوال 11.155: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو اور S پر $\frac{\partial g}{\partial n}=0$ ہو تب T میں g ایک مستقل ہو گا۔
جواب: سوال 11.154 کو استعمال کریں۔

[55] harmonic

سوال 11.156: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g اور f ہارمونی ہوں اور S پر $\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial g}{\partial n}$ ہو تب T میں $f=g+c$ ہو گا جہاں c مستقل قیمت ہے۔

سوال 11.157: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g اور f ہارمونی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}A=0$$

سوال 11.158: ثابت کریں کہ لاپلاسی کو محدد سے پاک صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\nabla^2 f=\lim_{d(T)\to 0}\frac{1}{H(T)}\iint\limits_{S(T)}\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}A$$

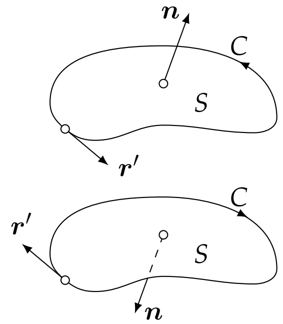
جہاں جس نقطے پر لاپلاسی درکار ہو، اس نقطے سے T میں دور ترین نقطے کا فاصلہ $d(T)$ ہے اور $H(T)$ خطہ T کا حجم ہے جس کی سرحدی سطح $S(T)$ ہے۔ (اشارہ: مساوات 11.88 میں $\boldsymbol{u}=\nabla f$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}$ لیتے ہوئے مساوات 10.81 استعمال کریں جہاں $\boldsymbol{n}$ سطح S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ ہے۔)

11.10 مسئلہ سٹوکس

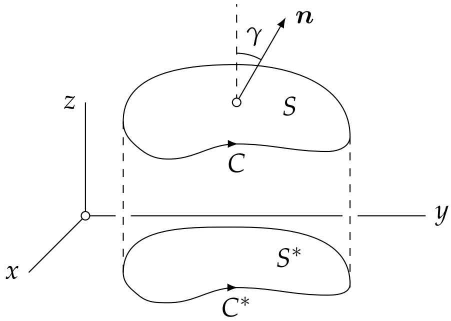
ہم نے حصہ 11.4 میں دیکھا کہ مستوی پر دوہرا تکمل کو سطح کی سرحد پر خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔آئیں اس نتیجے کو عمومی بناتے ہوئے سطحی تکمل کے تبادل پر غور کریں۔

مسئلہ 11.6: مسئلہ سٹوکس[56] (سطحی تکمل سے خطی تکمل اور خطی تکمل سے سطحی تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ فضا میں ٹکڑوں میں ہموار سمت بند سطح S کی سرحد C ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی ہے۔ مزید

[56] آئرستانی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات جارج جبرائیل سٹوکس [1819-1903]



(الف) سمت بندی (مسئلہ سٹوکس)



(ب) ثبوت مسئلہ سٹوکس

شکل 11.28: مسئلہ سٹوکس

فرض کریں کہ کسی ایسے خطہ میں جس کا S حصہ ہو، $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ استمراری سمتی تفاعل ہے اور اس خطے میں اس کے استمراری ایک درجی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔تب **مسئلہ سٹوکس**[57] کہتا ہے کہ

$$\iint\limits_S (\nabla \times \boldsymbol{v})_n \,\mathrm{d}A = \int\limits_C v_t \,\mathrm{d}s \tag{11.97}$$

ہو گا جہاں S کے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں $\nabla \times \boldsymbol{v}$ کا جزو $(\nabla \times \boldsymbol{v})_n = (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}$ ہے؛ C پر تکمل کا رخ شکل 11.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں C کی مماس $\boldsymbol{r}'$ (شکل 11.28-الف) کی سمت میں $\boldsymbol{v}$ کا جزو v_t ہے۔

ثبوت: ہم مسئلہ سٹوکس کو ایسی سطح S کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل تینوں طریقوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو

$$(\text{الف})\; z = f(x,y), \quad (\text{ب})\; y = g(x,z), \quad (\text{پ})\; x = h(y,z) \tag{11.98}$$

جہاں f ، g اور h اپنے آزاد متغیرات کے استمراری تفاعل ہیں اور ان کے استمراری ایک درجی جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ S کا بالائی رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ درج ذیل

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k} \tag{11.99}$$

[57] Stokes' theorem

ہے (شکل 11.28-ب) اور $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ ایک سمتی تفاعل ہے۔ اگر C کو $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ لکھا جائے جہاں قوس لمبائی s تکمل کے رخ بڑھتی ہو تب اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}$$

ہو گا لہٰذا

$$v_t = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = v_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + v_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$v_t\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z$$

یوں گردش کو دائیں ہاتھ کارتیسی نظام (حصہ 10.1) میں لکھتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\iint\limits_S \Big[\Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big]\,\mathrm{d}A = \int\limits_C (v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z) \tag{11.100}$$

جہاں α، β، γ مساوات 11.99 میں بیان کیے گئے ہیں۔

ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.100 میں دونوں اطراف وہ تکمل جن میں v_1 پایا جاتا ہے عین برابر ہیں یعنی:

$$\iint\limits_S \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma\Big)\,\mathrm{d}A = \int\limits_C v_1\,\mathrm{d}x \tag{11.101}$$

فرض کریں کہ xy مستوی پر S کا قائمہ سایہ S^* ہے جس کی سرحد C^* کی سمت بندی شکل 11.28-ب میں دکھائی گئی ہے۔ S کو مساوات 11.98-الف سے ظاہر کرتے ہوئے C پر خطی تکمل کو C^* پر خطی تکمل لکھتے ہیں۔

$$\int\limits_C v_1(x,y,a)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{C^*} v_1[x,y,f(x,y)]\,\mathrm{d}x$$

اب مسئلہ گرین (حصہ 11.4) کو [f اور g کی بجائے] $v_1[x, y, f(x, y)]$ اور 0 پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{C^*} v_1[x, y, f(x, y)]\,\mathrm{d}x = -\iint_{S^*} \frac{\partial v_1}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

دائیں ہاتھ تکمل میں

$$\frac{\partial v_1[x, y, f(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad [z = f(x, y)]$$

لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{C} v_1(x, y, z)\,\mathrm{d}x = -\iint_{S^*} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.102}$$

ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.101 کے بائیں ہاتھ کا تکمل مساوات 11.102 کے دائیں ہاتھ کے تکمل کے برابر ہے۔ہم پہلے تکمل میں x اور y کو بطور متغیرات تکمل متعارف کرتے ہیں۔مساوات 11.98-الف کو

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$$

لکھتے ہوئے

$$\nabla F = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

ملتا ہے جس سے ڈھلوان F کی لمبائی a لکھتے ہیں۔

$$a = |\nabla F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

چونکہ ∇F سطح S کو عمودی ہے لہٰذا S کی اکائی عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}$ درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \mp\frac{\nabla F}{a}$$

اب مثبت z رخ میں $\boldsymbol{n}$ اور ∇F دونوں کے اجزاء مثبت ہیں لہٰذا

$$\boldsymbol{n} = +\frac{\nabla F}{a}$$

ہو گا۔ xyz کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{n}$ اور ∇F کی روپ سے یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos\alpha=-\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial x},\quad \cos\beta=-\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial y},\quad \cos\gamma=\frac{1}{a}$$

مزید مساوات 11.60 کے تحت مساوات 11.101 میں $\mathrm{d}A=a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا لہٰذا

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma\right)\mathrm{d}A=\iint\limits_{S^*}\left[\frac{\partial v_1}{\partial z}\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{1}{a}\right]a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 11.102 کے دائیں ہاتھ تکمل برابر ہے۔یوں مساوات 11.101 ثابت ہوتی ہے۔

اگر $-\boldsymbol{n}$ کو مثبت اکائی عمودی سمتیہ چنا جاتا تب C کی مثبت سمت الٹ رخ ہوتی لہٰذا حاصل جواب پر کوئی اثر نہ ہوتا۔یوں مساوات 11.101 S کے دونوں مثبت اکائی عمودی سمتیات کے لئے درست ہے۔

مساوات 11.98-ب اور مساوات 11.98-پ میں دیے روپ استعمال کر کر بالکل اسی طرح درج ذیل ثابت ہوں گے۔

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial v_2}{\partial z}\cos\alpha\right)\mathrm{d}A=\int\limits_C v_2\,\mathrm{d}y \tag{11.103}$$

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial v_3}{\partial x}\cos\beta\right)\mathrm{d}A=\int\limits_C v_3\,\mathrm{d}z \tag{11.104}$$

مساوات 11.101، مساوات 11.103 اور مساوات 11.104 جمع کرتے ہوئے مساوات 11.97 ملتا ہے۔اس طرح مسئلہ سٹوکس ایسی سطح S کے لئے ثابت ہوتا ہے جس کو بیک وقت مساوات 11.98-الف، مساوات 11.98-ب اور مساوات 11.98-پ کی روپ میں لکھنا ممکن ہو۔

مسئلہ پھیلاو کی طرح موجودہ ثبوت کو وسعت دیتے ہوئے اسے ایسی سطح پر لاگو کیا جا سکتا ہے جس کو محدود تعداد کے ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو مساوات 11.98 کی روپ میں لکھا جا سکے۔عموماً عملاً استعمال کی سطحیں ایسی ہی ہوتی ہیں۔

مسئلہ کو ایسی عمومی سطح S جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم S کو تخمیناً ایسی سطحوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ یہ ترکیب مسئلہ گرین کی ثبوت میں اختیار کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔

□

11.11 مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال

مثال 11.28: سطح میں مسئلہ گرین درحقیقت مسئلہ سٹوکس کی خصوصی شکل ہے
فرض کریں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ مستوی xy میں کسی ایسا خطہ میں استمراری قابل تفرق ہے جس میں سادہ تعلق بند محدود خطہ S پایا جاتا ہے جس کی سرحد C ٹکڑوں میں ہموار بند سادہ منحنی ہے۔تب مساوات 10.122 کے تحت

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

ہو گا۔مزید $v_t \, \mathrm{d}s = v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y$ لیتے ہوئے مساوات 11.97 درج ذیل لکھا جائے گا

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \int\limits_C (v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y)$$

جو سطح میں مسئلہ گرین (حصہ 11.4) ہے۔ □

مثال 11.29: گردش کا طبعی مفہوم
فرض کریں کہ رداس r کے دائری قرص S_r کا مرکز N اور سرحد دائرہ C_r ہے (شکل 11.29)۔مزید فرض کریں کہ کسی خطہ جس کا S_r حصہ ہو میں $\boldsymbol{v}(Q) = \boldsymbol{v}(x, y, z)$ استمراری قابل تفرق سمتی تفاعل ہے۔تب مسئلہ سٹوکس اور سطحی تکمل کے اوسط قیمت مسئلہ کے تحت درج ذیل ہو گا

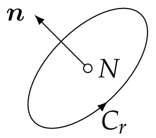
$$\int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s = \iint\limits_{S_r} (\nabla \times \boldsymbol{v})_n \, \mathrm{d}A = [\nabla \times \boldsymbol{v}(N^*)]_n A_r$$

جہاں S_r کا رقبہ A_r اور S_r میں N^* کوئی موزوں نقطہ ہے۔اس کو یوں

$$[\nabla \times \boldsymbol{v}(N^*)]_n = \frac{1}{A_r} \int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔سیال کی حرکت کی صورت میں تکمل

$$\int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s$$



شکل 11.29: قرص (مثال 11.29)

C_r پر سیال کی دائری بہاو[58] کی ناپ ہے۔اب r کو صفر مانند کرنے سے

$$[\nabla \times \boldsymbol{v}(N)]_n = \lim_{r\to 0} \frac{1}{A_r} \int\limits_{C_r} v_t \,\mathrm{d}s \tag{11.105}$$

ملتا ہے جس کو N پر فی اکائی رقبہ دائری بہاو کہا جا سکتا ہے۔ □

مثال 11.30: خطی تکمل کا حصول بذریعہ مسئلہ سٹوکس

تکمل $\int_C v_t \,\mathrm{d}s$ حل کریں جہاں مبدا سے دیکھتے ہوئے دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں دائرہ $C:\ x^2+y^2 = 4,\ z=-3$ گھڑی کی الٹ رخ سمت بند ہے جبکہ $\boldsymbol{v}$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + xz^3\boldsymbol{j} - zy^3\boldsymbol{k}$$

ہم C کے احاطہ S کو مستوی دائری قرص $x^2+y^2 \le 4,\ z=-3$ لیتے ہیں۔یوں مسئلہ سٹوکس میں $\boldsymbol{n}$ کی سمت مثبت z رخ ہو گی لہٰذا $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ ہو گا۔یوں $(\nabla \times \boldsymbol{v})_n$ سے مراد مثبت z رخ میں $\nabla \times \boldsymbol{v}$ کا جزو۔چونکہ $z=-3$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء $v_1 = y$ ، $v_2 = -27x$ اور $v_3 = 3y^3$ ملتے ہیں لہٰذا

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28$$

ہو گا۔یوں مسئلہ سٹوکس میں تکمل کی قیمت قرص کا رقبہ ضرب -28 یعنی -112π ہو گی۔

یہاں مسئلہ سٹوکس کی افادیت جاننے کی خاطر آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ مسئلہ سٹوکس استعمال کیے بغیر اس تکمل کو حل کریں۔ □

---

[58] circulation

سوالات

سوال 11.159 تا سوال 11.161 میں $\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v})_n \, \mathrm{d}A$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.159: $\boldsymbol{v} = xz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j},\ S :$ مکعب $0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, z = 1$
جواب: ∓ 1

سوال 11.160: $\boldsymbol{v} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k},\ S :$ مکعب $0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, z = -1$
جواب: ∓ 1

سوال 11.161: $\boldsymbol{v} = -\frac{1}{3}y^3\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}x^3\boldsymbol{j},\ S :$ دائری قرص $x^2 + y^2 \le a^2,\, z = 0$
جواب: $\mp \frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.162: مسئلہ سٹوکس کا دوسرا ہاتھ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.159 حل کریں۔

سوال 11.163: مسئلہ سٹوکس کا دوسرا ہاتھ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.161 حل کریں۔

سوال 11.164: ثابت کریں کہ اگر $\boldsymbol{v}$ اور S مسئلہ سٹوکس کے شرائط پر پورا اترتے ہوں اور $\boldsymbol{v} = \nabla f$ ہو تب $\int_C v_t \, \mathrm{d}s = 0$ ہو گا جہاں S کی سرحد C ہے۔

سوال 11.165 تا سوال 11.169 میں $\int_C v_t \, \mathrm{d}s$ کو مسئلہ سٹوکس سے حل کریں جہاں معلومات دائیں ہاتھ کارتیسی نظام کے لحاظ سے فراہم کی گئی ہیں۔

سوال 11.165: $\boldsymbol{v} = 3y\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ جبکہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ اور $z = x + 2$ کا قطع C ہے جو مبدا سے دیکھتے ہوئے گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ سمت بند نظر آتا ہے۔
جواب: $\frac{27\pi}{\sqrt{2}}$

سوال 11.166: $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$ جبکہ دائرہ $x = cos\alpha$ ، $y = \sin\alpha$ ، $z = 1$ ، $0 \le \alpha \le 2\pi$ سرحد C ہے۔
جواب: 3π

سوال 11.167: $\boldsymbol{v} = y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} - (y + z)\boldsymbol{k}$ جبکہ گھڑی کی الٹ رخ تکون کی سرحد C ہے۔ تکون کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(1,3,0)$ ہیں۔
جواب: -1

سوال 11.168: $\boldsymbol{v} = 2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ جبکہ گھڑی کی الٹ رخ بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور سطح $z = y + 3$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: -3π

سوال 11.169: $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ جبکہ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ اور مکافی $z = x^2 + y^2$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: 0

سوال 11.170 تا سوال 11.173 کو مساوات 11.100 کی مدد سے حل کریں۔ مبدا سے دیکھتے ہوئے C گھڑی کی رخ ہے۔

سوال 11.170: $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ جبکہ $x^2 + y^2 = 1$ اور مکافی $z = y^2$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: 0

سوال 11.171: $\boldsymbol{v} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ تکون $(1,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ کا محیط C ہے۔
جواب: 5

سوال 11.172: $\boldsymbol{v} = \sin z\boldsymbol{i} - \cos x\boldsymbol{j} + \sin y\boldsymbol{k}$ مستطیل $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ ، $0 \le y \le 2$ ، $z = 2$ کا محیط C ہے۔
جواب: 2

سوال 11.173: $\boldsymbol{v} = 2e^x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ ، $z = 2$ کا محیط C ہے۔
جواب: 0

11.12 راہ سے آزاد خطی تکمل

ہم نے حصہ 11.2 میں دیکھا کہ خطی تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.106}$$

کی قیمت عموماً راہ C اور اس کے سروں P اور Q پر منحصر ہوتی ہے؛ یعنی P تا Q تکمل کو مختلف راہوں پر حاصل کرنے سے عموماً مختلف جوابات حاصل ہوں گے۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کن صورتوں میں تکمل کی قیمت راہ کی سروں پر نا کہ راہ پر منحصر ہو گی۔یہ ایک اہم مسئلہ ہے۔ہم پہلے درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ فضا کے دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y,z)$ ، $g(x,y,z)$ اور $h(x,y,z)$ استمراری اور معین ہیں۔تب مساوات 11.106 اس صورت D میں **راہ سے آزاد**[59] کہلاتی ہے جب D میں P اور Q سروں کی ہر جوڑی کے لئے مساوات 11.106 کی قیمت D میں P تا Q ہر C کے لئے یکساں ہو۔ تکمل کی یہ قیمت عموماً راہ کی سروں P اور Q پر منحصر ہو گی جبکہ ان نقطوں کو ملانے والی راہ کا تکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

یہاں یاد دہانی کرتا چلوں کہ **واحد قیمت**[60] تعلق کو تفاعل کہتے ہیں یعنی دائرہ کار D ، جہاں تفاعل معین ہو، کے ہر نقطہ کے لئے تفاعل واحد ایک قیمت مختص کرتا ہے۔ یہ ہماری موجودہ بحث کے لئے ضروری ہے معلومات ہے۔

فضا کے دائرہ کار D میں معین تفاعل f ، g ، h کا تعلق

$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z \tag{11.107}$$

تین متغیرات کی ایک **درجی تفرق روپ**[61] کہلاتی ہے۔اگر پورے D میں ہر جگہ یہ روپ قابل تفرق تفاعل $u(x,y,z)$ کا تفرق

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{11.108}$$

ہو تب یہ D میں **قطعی تفرق روپ یا قطعی**[62] کہلاتی ہے.یوں پورے D میں ہر جگہ درج ذیل ہو گا۔

$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}u \tag{11.109}$$

مساوات 11.108 اور مساوات 11.109 کا موازنہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ D میں مساوات 11.107 صرف اور صرف اس صورت قطعی تفرقی ہو گا کہ ایسا تفاعل $u(x,y,z)$ پایا جاتا ہو کہ پورے D میں

$$f = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad h = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{11.110}$$

---

[59] independent of path
[60] single valued
[61] first order differential form
[62] exact

ہو۔ سمتی ریاضی کی زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ مساوات 11.107 صرف اور صرف اس صورت D میں قطعی تفرقی ہو گا کہ سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

تفاعل $u(x, y, z)$ کا D میں ڈھلوان ہو یعنی:

$$\boldsymbol{v} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{11.111}$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ آزادی راہ کے لئے قطعیت کی شرط لازم اور کافی ہے۔

مسئلہ 11.7: (آزادی راہ اور قطعیت)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ اور $h(x, y, z)$ استمراری ہیں۔ تب تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.112}$$

D میں صرف اور صرف اس صورت راہ سے آزاد ہو گا کہ تکمل کے اندر تفرقی صورت D میں قطعی تفرقی ہو۔

مساوات 11.112 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

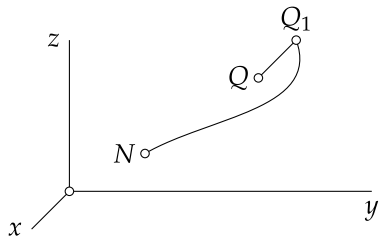
$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.113}$$

جہاں $\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}$ ہیں۔

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ دیا گیا تکمل D میں راہ سے آزاد ہے۔ہم D میں کوئی مقررہ نقطہ N اور نقطہ Q منتخب کرتے ہیں۔مزید ہم تفاعل $u(x, y, z)$ جس کی تعریف درج ذیل ہے لیتے ہیں

$$u(x, y, z) = u_0 + \int_N^Q (f\,\mathrm{d}x^* + g\,\mathrm{d}y^* + h\,\mathrm{d}z^*) \tag{11.114}$$

جہاں u_0 مستقل ہے اور D میں N تا Q کسی بھی راہ پر تکمل لیا گیا ہے۔اب چونکہ N غیر تغیر پذیر ہے اور تکمل راہ سے آزاد ہے لہٰذا تکمل کی قیمت Q کے محدد x ، y ، z پر منحصر ہو گی جو یقیناً



شکل 11.30: ثبوت مسئلہ 11.7

D میں تفاعل $u(x,y,z)$ کی تعریف ہے۔اب مساوات 11.110 میں دیے گئے تعلقات، جو D میں $f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y+h\,\mathrm{d}z$ کی قطعی تفرق ہونے کا ثبوت ہے، کو مساوات 11.114 سے حاصل کرتے ہیں ۔ ہم ان تین تعلقات میں سے ایک کو ثابت کرتے ہیں۔چونکہ تکمل راہ سے آزاد ہے لہٰذا ہم N سے نقطہ $Q_1:(x_1,y,z)$ تک تکمل لینے کے بعد x محور کے متوازی Q_1 سے Q تک تکمل لے سکتے ہیں۔یہاں Q_1 کو اس طرح چنا جاتا ہے کہ پورا QQ_1 قطع D کے اندر ہو (شکل 11.30)۔یوں

$$u(x,y,z)=u_0+\int_N^{Q_1}(f\,\mathrm{d}x^*+g\,\mathrm{d}y^*+h\,\mathrm{d}z^*)+\int_{Q_1}^{Q}(f\,\mathrm{d}x^*+g\,\mathrm{d}y^*+h\,\mathrm{d}z^*) \tag{11.115}$$

ہو گا۔ ہم مساوات 11.115 کا x کے ساتھ جزوی تفرق لیتے ہیں۔چونکہ N اور Q_1 دونوں x سے آزاد ہیں لہٰذا پہلی تکمل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔چونکہ قطع QQ_1 پر y اور z دونوں غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا آخری تکمل کو قطعی تکمل

$$\int_{x_1}^{x} f(x^*,y,z)\,\mathrm{d}x^*$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا x کے ساتھ تفرق $f(x,y,z)$ ہے۔یوں مساوات 11.115 کی تفرق سے

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 11.110 میں دیا گیا ایک تعلق ثابت ہوتا ہے۔

مساوات 11.110 میں دیے گئے باقی تعلقات کو بھی اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مذکورہ بالا کے برعکس فرض کریں کہ D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرق ہے۔تب D میں مساوات 11.110 تفاعل $u(x, y, z)$ کے لئے درست ہو گی۔فرض کریں کہ D میں N تا Q کوئی راہ C ہے جس کی مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad (t_0 \le t \le t_1)$$

ہے جہاں $t = t_0$ نقطہ N اور $t = t_1$ نقطہ Q دیتا ہے۔تب درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}
\int_N^Q (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= \int_N^Q \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = u[x(t), y(t), z(t)]\Big|_{t_0}^{t_1} = u(Q) - u(N)
\end{aligned}$$

جس کے تحت تکمل کی قیمت C کے سروں پر u کی قیمت کے فرق کے برابر ہے۔یوں تکمل راہ سے آزاد ہے۔

□

مذکورہ بالا ثبوت میں آخری مساوات

$$\int_N^Q (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = u(Q) - u(N) \tag{11.116}$$

درج ذیل قطعی تکمل کی مماثل ہے جو ہم بنیادی علم الاحصاء سے جانتے ہیں۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)]$$

راہ سے آزاد تکمل کو حل کرنے کی خاطر مساوات 11.116 استعمال کی جاتی ہے۔مثال 11.33 میں ایسا کیا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ تغیر پذیر قوت $\boldsymbol{p} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$ کسی ذرہ کو راہ C پر منتقل کرتے ہوئے درج ذیل کام W سرانجام دیتی ہے

$$W = \int_C \boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)$$

جہاں راہ پر چلنے کی سمت میں تکمل لیا جاتا ہے۔مسئلہ 11.7 کے تحت کام اس صورت راہ سے آزاد ہو گا جب تکمل کے اندر قطعی تفرقی روپ پایا جاتا ہو اور ایسا تب ہو گا جب قوت $\boldsymbol{p}$ کسی غیر سمتی تفاعل u کی ڈھلوان ہو۔ایسی قوت کا میدان بقائی[63] کہلاتا ہے (حصہ 10.8 کا آخر دیکھیں)۔

مثال 11.31: متغیر قوت کا سرانجام کام
قوت $\boldsymbol{p} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ ایک ذرہ کو $N : (3, 2, 4)$ سے سیدھی راہ پر $Q : (5, 4, 6)$ منتقل کرتی ہے۔اس کام کو

$$W = \int_C (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$$

لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 11.106 کی طرز کا تکمل ہے جہاں

$$f = yz, \quad xz, \quad h = xy$$

ہیں جو $u = xyz$ لیتے ہوئے مساوات 11.110 پر پورا اترتے ہیں۔یوں W تکمل کی راہ سے آزاد ہے لہٰذا ہم مساوات 11.116 استعمال کر سکتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$W = u(Q) - u(N) = u(5, 4, 6) - u(3, 2, 4) = 120 - 24 = 96$$

□

مسئلہ 11.7 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

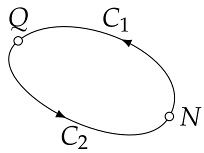
مسئلہ 11.8: (راہ سے آزادی)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں f ، g ، h استمراری ہوں تب تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)$$

صرف اور صرف اس صورت D میں راہ سے آزاد ہو گا جب D میں ہر سادہ بند راہ پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو۔

---

[63] conservative



شکل 11.31: ثبوت مسئلہ 11.8

ثبوت : (الف) فرض کریں کہ D میں C ایک سادہ بند راہ ہے اور تکمل راہ سے آزاد ہے۔ہم C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.31)۔یوں

$$\oint_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = \int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) + \int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.117}$$

ہو گا۔راہ سے آزادی کی بنا

$$\begin{aligned}\int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= \int_{C_1^*} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\\ &= -\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\end{aligned}$$

ہو گا جہاں C_1 پر الٹ رخ چلنے کو C_1^* سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس سے مساوات 11.117 کا بایاں ہاتھ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ (ب) مذکورہ بالا کے برعکس فرض کریں کہ D میں ہر سادہ بند راہ پر دیا گیا تکمل صفر کے برابر ہے۔مزید فرض کریں کہ N اور Q دائرہ کار D میں کوئی دو نقطے ہیں اور ان نقطوں کے مابین D میں C_1 اور C_2 دو ایسے راہ ہیں جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں (شکل 11.31)۔ C_1 اور C_2 مل کر سادہ بند راہ دیتے ہیں۔یوں

$$\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) + \int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = \oint_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = 0$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}\int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= -\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\\ &= \int_{C_1^*} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلہ کو فوری وسعت دیتے ہوئے، اپنی آپ کو محدود مرتبہ قطع کرتی ہوئی راہ پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔

اس سادہ مسئلہ کو قابل استعمال بنانے کی خاطر ایسا اصول درکار ہو گا جس سے جاننا ممکن ہو کہ آیا تکمل کے اندر قطعی تفرقی روپ پایا جاتا ہے یا نہیں۔ ایسا اصول مسئلہ 11.9 میں پیش کیا گیا ہے۔اس مسئلے کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصور ضروری ہے۔

دائرہ کار D اس صورت **سادہ تعلق**[64] رکھتا ہے جب D میں رہتے ہوئے D میں ہر بند راہ کو مسلسل گھٹاتے ہوئے نقطہ مانند بنانا ممکن ہو۔

مثلاً کرہ یا مکعب کی اندرون، ایسی کرہ کا اندرون جس میں محدود تعداد کے نقطے شامل نہ ہوں، یا دو ہم مرکز کرہ کے مابین دائرہ کار سادہ تعلق رکھتے ہیں۔اس کے برعکس اندرسہ کی اندرون کا دائرہ کار سادہ تعلق نہیں رکھتا ہے۔

مسئلہ 11.9: (اصول قطعیت اور راہ سے آزادی)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y,z)$ ، $g(x,y,z)$ ، $h(x,y,z)$ اور ان کے ایک درجی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔اگر خطی تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.118}$$

D میں راہ سے آزاد ہو (اور یوں D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرق ہو) تب پورے D میں ہر جگہ

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{11.119}$$

ہو گا جس کو سمتی ریاضی میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad (\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}) \tag{11.120}$$

اس کے برعکس اگر D سادہ تعلق رکھتا ہو اور D میں ہر جگہ مساوات 11.119 درست ہو تب مساوات 11.118 میں دیا گیا تکمل D میں راہ سے آزاد ہو گا (اور نتیجتاً D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرق ہو گا)۔

[64] simply connected

ثبوت:
(الف) فرض کریں کہ مساوات 11.118 D میں راہ سے آزاد ہے۔ تب مسئلہ 11.7 کے تحت $f\boldsymbol{i}+g\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}$ دائرہ کار D میں قطعی تفرق ہو گا اور مساوات 11.111 کے تحت درج ذیل ایسا تفاعل $u(x,y,z)$ پایا جائے گا کہ D میں درج ذیل ہو

$$\boldsymbol{v}=f\boldsymbol{i}+g\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}=\nabla u$$

لہٰذا مساوات 10.124 کی مدد سے درج ذیل ہو گا۔

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\nabla u)=\boldsymbol{0}$$

(ب) اس کے برعکس فرض کریں کہ D سادہ تعلق رکھتا ہے اور پورے D میں ہر جگہ مساوات 11.120 درست ثابت ہوتی ہے۔ مزید فرض کریں کہ D میں C سادہ بند راہ ہے۔ چونکہ D سادہ تعلق رکھتا ہے لہٰذا ہم D میں ایسی سطح S دریافت کر سکتے ہیں جس کی تحدیدی سرحد C ہو۔ یہاں مسئلہ سٹوکس (مسئلہ 11.6) قابل استعمال ہے جس سے

$$\int\limits_C (f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y+h\,\mathrm{d}z)=\int\limits_C v_t\,\mathrm{d}s=\iint\limits_S(\nabla\times\boldsymbol{v})_n\,\mathrm{d}A=0$$

ملتا ہے جہاں C کی درست سمت کے لحاظ سے S کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ استعمال کیا جائے گا۔ اس نتیجے کے ساتھ مسئلہ 11.8 ملاتے ہوئے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 11.118 کا تکمل D میں راہ سے آزاد ہے۔

□

ہم دیکھتے ہیں کہ xy مستوی میں خطی تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y)$$

کی صورت میں مساوات 11.119 سے درج ذیل ایک شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y} \tag{11.121}$$

D کی سادہ تعلق رکھنے کا شرط لازم ہے جس کی وضاحت درج ذیل مثال میں ہوتی ہے۔

مثال 11.32: فرض کریں کہ درج ذیل ہو۔

$$f = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad g = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad h = 0$$

ان کا تفرق لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ xy مستوی میں مبدا کو نہ شامل کرتے ہوئے کسی بھی دائرہ کار پر یہ تفاعل مساوات 11.121 پر پورا اترتے ہیں مثلاً دائرہ کار $D : \frac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{3}{2}$ میں (شکل 11.32)۔ ظاہر ہے کہ D سادہ تعلق نہیں رکھتا ہے۔ اگر تکمل

$$I = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \int_C \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

D میں راہ سے آزاد ہوتا تب D میں کسی بھی بند راہ مثلاً دائرہ $x^2+y^2=1$ پر $I=0$ ہوتا۔ ہم $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ پر کرتے ہوئے اور راہ کو $r=1$ لکھتے ہوئے

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ ایک مرتبہ گھومتے ہوئے تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ چونکہ D سادہ تعلق نہیں رکھتا لہٰذا مسئلہ 11.9 لاگو نہیں ہو گا اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ I راہ سے آزاد ہے۔ مزید درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

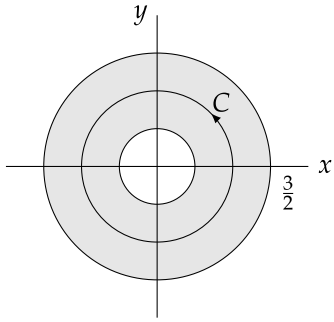
$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}u, \quad u = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \theta$$

لیکن D میں u واحد قیمت نہیں ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم u کی "صدر قیمت" لیں جس کو $-\pi < u \leq \pi$ لیں تب منفی x محور پر u نا تو قابل تفرق ہے (اور نا ہی استمراری ہے) جو قطعیت کی بنیادی شرط ہے۔ $\square$

اگر خطی تکمل راہ سے آزاد ہو تب اس کو مساوات 11.116 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 11.33: راہ سے آزاد خطی تکمل کا حل
درج ذیل خطی تکمل کی قیمت $N : (0,0,1)$ تا $Q : (1, \frac{\pi}{4}, 2)$ کسی بھی راہ پر دریافت کرتے ہیں۔

$$I = \int_C [2xyz^2\,\mathrm{d}x + (x^2z^2 + z\cos yz)\,\mathrm{d}y + (2x^2yz + y\cos yz)\,\mathrm{d}z]$$



شکل 11.32: شکل برائے مثال 11.32

مسئلہ 11.9 کے تحت تکمل راہ سے آزاد ہے۔ چونکہ $f = 2xyz^2$ ہے لہٰذا مساوات 11.110 میں دیے پہلا تعلق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u = \int f \, \mathrm{d}x = x^2yz^2 + a(y, z) \tag{11.122}$$

جس کو مساوات 11.110 کے دوسرے تعلق میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2z^2 + \frac{\partial a}{\partial y} = g = x^2z^2 + z\cos yz$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial a}{\partial y} = z\cos yz, \qquad \implies \qquad a = \sin yz + c(z)$$

اس کو مساوات 11.110 کے تیسرے تعلق اور مساوات 11.122 کے ساتھ ملاتے ہوئے

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2yz + y\cos yz + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z} = h = 2x^2yz + y\cos yz$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z} = 0$$

ملتا ہے جس سے مستقل $c =$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$u(x, y, z) = x^2yz + a = x^2yz^2 + \sin yz + c$$

ہو گا۔آپ سے التماس ہے کہ تکمل کو دیکھ کر u لکھنے کی کوشش کریں۔مساوات 11.116 استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$I = \left[x^2yz^2 + \sin yz + c\right]\Big|_N^Q = \pi + \sin\frac{\pi}{2} = \pi + 1$$

□

سوالات

سوال 11.174 تا سوال 11.181 میں کیا قطعی تفرق دیا گیا ہے؟

سوال 11.174: $yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$
جواب: قطعی تفرق

سوال 11.175: $(y+z)\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z$
جواب: قطعی تفرق

سوال 11.176: $(xy+z)\,\mathrm{d}x + (x+yz)\,\mathrm{d}y + (xz+y)\,\mathrm{d}z$
جواب: غیر قطعی تفرق

سوال 11.177: $e^x\,\mathrm{d}x + e^y\,\mathrm{d}y + e^z\,\mathrm{d}z$
جواب: قطعی تفرق

سوال 11.178: $e^y\,\mathrm{d}x + e^z\,\mathrm{d}y + e^x\,\mathrm{d}z$
جواب: غیر قطعی تفرق

سوال 11.179: $\cos x\,\mathrm{d}x - \sin y\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$
جواب: قطعی تفرق

سوال 11.180: $x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z$
جواب: قطعی تفرق

سوال 11.181: $y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$
جواب: غیر قطعی تفرق

سوال 11.182 تا سوال 11.187 میں ثابت کریں کہ قطعی تفرق روپ دی گئی ہے۔ایسا تفاعل u دریافت کریں کہ دیا گیا تفرق $\mathrm{d}u$ لکھا جا سکے۔

سوال 11.182: $x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y - z\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{2}(x^2 - y^2 - z^2)$

سوال 11.183: $\mathrm{d}x - \mathrm{d}y - \mathrm{d}z$
جواب: $x - y - z$

سوال 11.184: $2xy^3z\,\mathrm{d}x + 3x^2y^2z\,\mathrm{d}y + x^2y^3\,\mathrm{d}z$
جواب: x^2y^3z

سوال 11.185: $-(yz + \sin x)\,\mathrm{d}x + (\cos x - xz)\,\mathrm{d}y + (\cos z - xy)\,\mathrm{d}z$
جواب: $y\cos x - xyz + \sin z$

سوال 11.186: $(\cos z + e^{x+y})\,\mathrm{d}x + e^{x+y}\,\mathrm{d}y - x\sin z\,\mathrm{d}z$
جواب: $e^{x+y} + x\cos z$

سوال 11.187: $(2x\cos x\sin y - x^2\sin x\sin y)\,\mathrm{d}x + (z + x^2\cos x\cos y)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$
جواب: $x^2\sin y\cos x + yz$

سوال 11.188 تا سوال 11.192 میں ثابت کریں کہ تکمل کے اندر قطعی تفرق دیا گیا ہے۔تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.188: $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$
جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 11.189: $\int\limits_{(1,0,1)}^{(3,1,2)} [(y + z^2)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 2xz\,\mathrm{d}z]$
جواب: 14

سوال 11.190: $\displaystyle\int_{(0,0,1)}^{(2,\frac{\pi}{2},2)} (\sin y \, \mathrm{d}x + x \cos y \, \mathrm{d}y + e^z \, \mathrm{d}z)$

جواب: $e^2 - e + 2$

سوال 11.191: $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(3,2,4)} \left[(y + \tfrac{1}{x}) \, \mathrm{d}x + (x + \tfrac{1}{y}) \, \mathrm{d}y + \tfrac{1}{z} \, \mathrm{d}z)\right]$

جواب: $5 + \ln 24$

سوال 11.192: $\displaystyle\int_{(3,2,1)}^{(5,2,-1)} (\sqrt{y} \, \mathrm{d}x + \tfrac{x}{2\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y)$

جواب: $2\sqrt{2}$

باب 12

فوریئر تسلسل

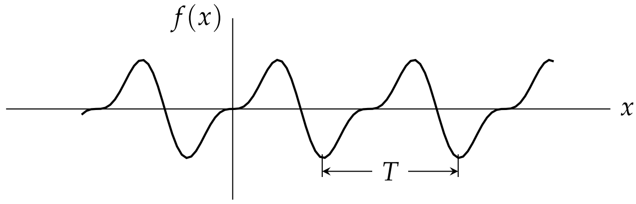
انجینئری مسائل میں دوری تفاعل عموماً پائے جاتے ہیں جن کو سادہ دوری تفاعل مثلاً $\sin$ اور $\cos$ کی روپ میں لکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔اسی عمل سے فوریئر تسلسل[1] ابھر کر سامنے آتی ہے جو سادہ تفرقی مساوات اور جزوی تفرقی مساوات کے حل میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

فوریئر تسلسل کا نظریہ پیچیدہ ہے جبکہ اس کا استعمال نہایت آسان ہے۔چونکہ بہت سارے غیر استمراری تفاعل کا فوریئر تسلسل حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ ان کا ٹیلر تسلسل نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا فوریئر تسلسل کو ٹیلر تسلسل کی عالمگیر صورت تصور کیا جا سکتا ہے۔

اس باب میں فوریئر تسلسل سے وابستہ تصورات، حقائق اور تکنیکی تراکیب پر غور کیا جائے گا۔اس کے علاوہ ان کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں ان کا استعمال دکھایا جائے گا۔

اس باب کی آخری حصے میں فوریئر تکمل پر غور کیا جائے گا جنہیں اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں استعمال کیا جائے گا۔

[1] فرانسیسی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات ژاں باپٹیسٹ یوسف فوریئر [1768-1830]



شکل 12.1: دوری تفاعل

12.1 دوری تفاعل، تکونیاتی تسلسل

تفاعل $f(x)$ اس صورت **دوری**[2] کہلاتا ہے کہ جب پورے حقیقی x پر $f(x)$ معین ہو اور ایسا مثبت عدد T پایا جاتا ہو کہ تمام x پر درج ذیل درست ہو۔

$$f(x+T)=f(x) \qquad \text{تمام } x \text{ کے لئے} \tag{12.1}$$

عددی T کو $f(x)$ کا **دوری عرصہ**[3] کہتے[4] ہیں۔ T کے برابر $f(x)$ کے کسی بھی وقفے کا ترسیم دہراتے ہوئے ایسے تفاعل کا ترسیم حاصل کیا جاتا ہے (شکل 12.1)۔ عملی استعمال میں عموماً دوری اعمال اور تفاعل پائے جاتے ہیں۔

دوری تفاعل کی مثالیں $\sin x$ اور $\cos x$ ہیں۔اس کے علاوہ $f=c=$ مستقل بھی دوری تفاعل کی تعریف (مساوات 12.1 پر ہر مثبت T کے لئے) پورا اترنے کی بنا دوری تفاعل ہے۔

مساوات 12.1 سے ظاہر ہے کہ عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$f(x+nT)=f(x) \qquad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

یوں $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، $\cdots$ بھی تفاعل $f(x)$ کے دوری عرصے ہیں۔مزید اگر تفاعل $f(x)$ کا اور $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب درج ذیل تفاعل

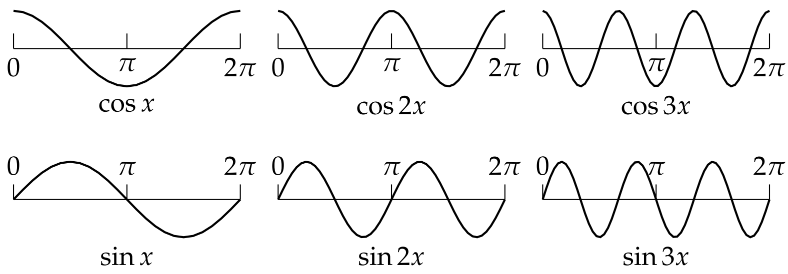
$$h(x)=af(x)+bg(x) \qquad \text{مستقل } a\text{،} b$$

---

[2] periodic

[3] period

[4] تفاعل $f(x)$ کا کم تر دوری عرصہ $T(>0)$، اگر موجود ہو، $f(x)$ کا اوّلی دوری عرصہ کہلاتا ہے۔ مثلاً $\sin x$ اور $\sin 2x$ کا بالترتیب اوّلی دوری عرصہ 2π اور π ہے جبکہ مستقل $=f$ کا کوئی دوری عرصہ نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 12.2: سائن اور کوسائن تفاعل جن کا دوری عرصہ 2π ہے

کا دوری عرصہ بھی T ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

اس باب کی شروع میں ہم ایسے مختلف تفاعل جن کا دوری عرصہ 2π ہو کو درج ذیل سادہ تفاعل کی روپ میں ظاہر کرنا سیکھیں گے

$$1, \quad \cos x, \sin x, \quad \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \quad \cos nx, \sin nx, \cdots$$

جن کا دوری عرصہ 2π ہے (شکل 12.2)۔ہم دیکھیں گے کہ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل طرز کی تسلسل حاصل ہو گی

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots \tag{12.2}$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\cdots$ ، b_1 ، b_2 ، $\cdots$ حقیقی مستقل ہوں گے۔اس تسلسل کو **تکونیاتی تسلسل**[5] کہتے ہیں جبکہ a_n اور b_n تسلسل کی **عددی سر**[6] کہلاتے ہیں۔چونکہ اس تسلسل کے ہر رکن کا دوری عرصہ 2π ہے لہٰذا اگر یہ تسلسل مرکوز ہو تب یہ ایسا تفاعل ہو گا جس کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔

انجینئری میں واقع تفاعل پیچیدہ ہوتے ہیں جنہیں سادہ دوری تفاعل کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ عملی استعمال، مثلاً ارتعاش، میں پائے جانے والا تقریباً ہر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو فوریئر تسلسل کی روپ میں لکھنا ممکن ہو گا۔ہم مساوات 12.2 کے عددی سر حاصل کرنے کے ایسے کلیات دریافت کریں گے جو $f(x)$ پر منحصر ہوں گے اور جنہیں استعمال کرتے ہوئے حاصل تسلسل مرکوز ہو گا جس کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا۔اس کے بعد ہم حاصل کلیات کو عمومی شکل دیتے ہوئے ان کو کسی بھی دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے قابل استعمال بنائیں گے۔ایسا کرنا نہایت آسان ثابت ہو گا۔

[5]trigonometric series
[6]coefficients

سوالات

سوال 12.1: دیے گئے تفاعل کا کم تر دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos \pi x,\ \sin \pi x,\ \cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x$$

جوابات: $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$

سوال 12.2: اگر تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب ثابت کریں کہ nT جہاں $n = 2, 3, \cdots$ ہے بھی اس تفاعل کا دوری عرصہ ہو گا۔

سوال 12.3: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کا اور تفاعل $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب تفاعل $h(x) = af(x) + bg(x)$ کا دوری عرصہ بھی T ہو گا، جہاں a اور b مستقل ہیں۔یوں دوری عرصہ T رکھنے والے تمام تفاعل سمتی فضا پیدا کرتے ہیں۔

سوال 12.4: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x) =$ مستقل ایسا دوری تفاعل ہے جس کا دوری عرصہ T کوئی بھی مثبت عدد ہو سکتا ہے۔

سوال 12.5: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہونے کی صورت میں x کے دوری تفاعل $f(ax), a \neq 0$ کا دوری عرصہ $\frac{T}{a}$ ہو گا جبکہ x کے دوری تفاعل $f(\frac{x}{b}), b \neq 0$ کا دوری عرصہ bT ہو گا۔ان نتائج کی تصدیق $f(x) = \cos x,\ a = b = 2$ کے لئے کریں۔

سوال 12.6 تا سوال 12.12 میں دیے گئے تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.6: $\sin x, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$

سوال 12.7: $f(x + 2\pi) = f(x)$ اور

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ہے۔سوال 12.6 کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.8:

$$\sin 2\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x + \frac{1}{5}\sin 10\pi x$$

سوال 12.9:

$$\sin x, \quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x,$$
$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.10:

$$-\cos x, \quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x, \quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x,$$
$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.11: $f(x) = x^2, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

سوال 12.12: $f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

سوال 12.13 تا سوال 12.16 میں دوری تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔اس کی ترسیم کھینچیں۔وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ کے لئے $f(x)$ دیا گیا ہے۔

سوال 12.13:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi \le x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.14:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ \cos x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.15:

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x & -\pi\le x\le 0\\ \pi-x & 0\le x\le \pi\end{cases}$$

سوال 12.16:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x\le 0\\ \sin\frac{x}{2} & 0\le x\le \pi\end{cases}$$

سوال 12.17 تا سوال 12.25 میں دیے گئے تکمل ہمیں آگے درکار ہوں گے۔ان تکمل میں $n=0,1,2,\cdots$ ہے۔تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 12.17: $\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x$

جواب: طاق n کے لئے $\frac{2}{n}$ اور جفت n کے لئے صفر۔

سوال 12.18: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos nx\,\mathrm{d}x$

جواب: جفت n کے لئے صفر اور طاق n کے لئے $\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

سوال 12.19: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$

جواب: $(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$

سوال 12.20: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,\mathrm{d}x$

جواب: طاق n ، $\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$ یعنی $\frac{2}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$ جبکہ جفت n ، $-\frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ یعنی $\frac{\pi}{n}(-1)^{\frac{n+2}{2}}$

سوال 12.21: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\,\mathrm{d}x$

جواب: 0

سوال 12.22: $\int_0^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$

سوال 12.23: $\int_{-\pi}^{0} e^{x} \sin nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{n}{n^2+1}[(-1)^n e^{-\pi} - 1]$

سوال 12.24: $\int_0^{\pi} e^{x} \cos nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{1}{n^2+1}[e^{\pi}(-1)^n - 1]$

سوال 12.25: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$

12.2 فوریئر تسلسل۔یولر کلیات

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کو درج ذیل تکونیاتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12.3}$$

ہم دیے گئے تفاعل $f(x)$ کی تکونیاتی تسلسل (مساوات 12.3) کے عددی سر a_n ، اور b_n جاننا چاہتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے a_0 دریافت کرتے ہیں۔مساوات 12.3 کے دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \mathrm{d}x$$

اگر تسلسل کے ارکان کا جزو با جزو تکمل لینا جائز ہو[7]، تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

دائیں ہاتھ پہلا رکن $2\pi a_0$ کے برابر ہے۔بائیں ہاتھ باقی تمام ارکان صفر کے برابر ہیں، جیسا کہ تکمل لے کر ثابت کیا جا سکتا ہے۔یوں پہلا کلیہ درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.4}$$

ہم اب a_1 ، a_2 ، $\cdots$ اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔ہم مساوات 12.3 کو $\cos mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مقررہ مثبت عدد صحیح ہے، دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \cos mx\,\mathrm{d}x \tag{12.5}$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x\right]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔ضمیمہ-ب میں دیا گیا مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,\mathrm{d}x \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

تکمل لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ بالائی دائیں جزو کے علاوہ تمام تکمل صفر کے برابر ہیں۔بالائی دایاں جزو $n=m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔چونکہ مساوات 12.5 میں اس جزو کو a_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n=m$ کی بنا a_m لکھا جا سکتا ہے) لہٰذا مساوات 12.5 کا دایاں ہاتھ $a_m\pi$ کے برابر ہو گا۔یوں دوسرا کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{12.6}$$

[7] ایسا جائز ہے، مثلاً، استمراری مرتکز صورت میں۔

ہم آخر میں b_1 ، b_2 ، $\cdots$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 12.3 کو $\sin mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مثبت مقررہ عدد صحیح ہے، $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\Big]\sin mx\,\mathrm{d}x \tag{12.7}$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دایاں ہاتھ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\sin mx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\sin mx\,\mathrm{d}x\Big]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔دوسرے تکمل کی طرز کی تکمل پر ہم غور کر چکے ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ تمام $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے اس کی قیمت صفر ہے۔آخری تکمل کو ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)\,\mathrm{d}x$$

آخری جزو صفر کے برابر ہے۔دائیں ہاتھ پہلا جزو $n \neq m$ کی صورت میں صفر جبکہ $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 12.7 میں اس جزو کو b_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا b_m لکھا جا سکتا ہے) لہٰذا مساوات 12.7 کا دایاں ہاتھ $b_m\pi$ کے برابر ہو گا۔یوں آخری کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{12.8}$$

اب m کی جگہ n لکھتے ہوئے ان کلیات کو، جنہیں **یولر کلیات**[8] کہتے، ایک جگہ اکٹھا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) && a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&(\text{ب}) && a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots \\
&(\text{پ}) && b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{12.9}$$

چونکہ متکمل دوری ہیں لہٰذا مساوات 12.9 میں وقفہ تکمل کو 2π کے برابر کسی بھی وقفہ، مثلاً $0 \leq x \leq 2\pi$ ، سے بدلا جا سکتا ہے۔

[8] Euler formulas

دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.9 کی مدد سے عددی سر a_n اور b_n حاصل کر کے ہم درج ذیل تکونیاتی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \tag{12.10}$$

اس تسلسل کو $f(x)$ کی **فوریئر تسلسل**[9] کہتے ہیں جبکہ مساوات 12.9 سے حاصل عددی سر a_n ، b_n کو $f(x)$ کے **فوریئر عددی سر**[10] کہتے ہیں۔

قطعی تکمل کی تعریف سے واضح ہے کہ اگر $f(x)$ استمراری یا ٹکڑوں میں استمراری (جہاں وقفہ تکمل پر $f(x)$ میں محدود تعداد کے چھلانگ پائے جاتے ہوں) ہو تب مساوات 12.9 میں دیے گئے تکملات موجود ہوں گے لہٰذا ہم $f(x)$ کے فوریئر عددی سروں کو مساوات 12.9 کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا اس طرح حاصل کیا گیا فوریئر تسلسل مرکوز ہو گا اور آیا تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا؟ ان سوالات پر اسی حصے میں آگے جا کر غور کیا جائے گا۔

آئیں مساوات 12.9 کی استعمال کو ایک سادہ مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 12.1: چکور موج
چکور موج کے فوریئر عددی سر کو مساوات 12.9 سے حاصل کریں۔چکور موج کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔چکور موج کی تحلیلی روپ درج ذیل ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{جہاں} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

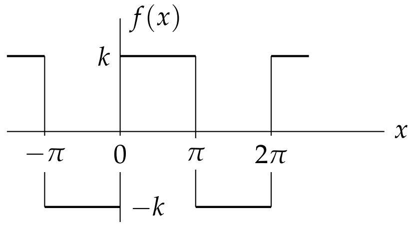
اس طرز کے تفاعل میکانی نظام میں بطور بیرونی قوت یا برقی ادوار میں بطور داخلی دباو پائے جا سکتے ہیں، وغیرہ۔

حل:مساوات 12.9-الف سے $a_0 = 0$ ملتا ہے۔یہ نتیجہ بغیر تکمل کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے کہ چکور موج کا رقبہ $-\pi$ تا π صفر ہے۔مساوات 12.9-ب سے

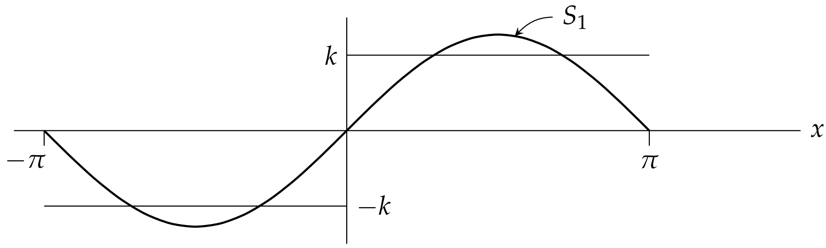
$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\cos nx \,\mathrm{d}x\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right] = 0 \end{aligned}$$

---

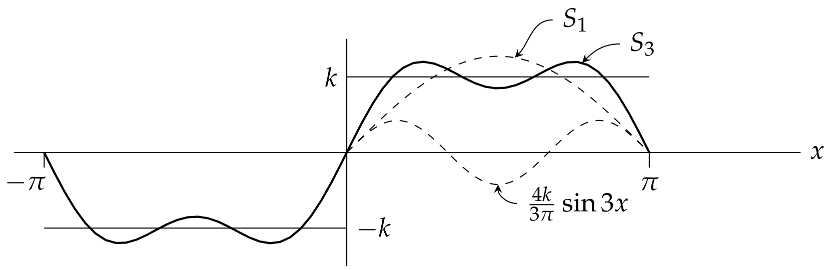
[9] Fourier series
[10] Fourier coefficients



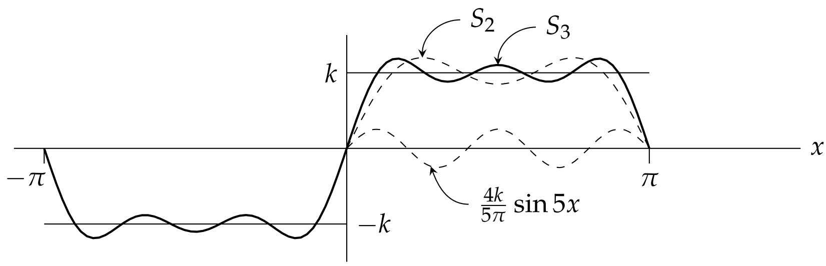
(الف) دیا گیا دوری چکور تفاعل $f(x)$



(ب)



(پ)



(ت)

شکل 12.3: فوریئر تسلسل کی زیادہ ارکان لینے سے اصل تفاعل پر بہتر بیٹھتی شکل حاصل ہوتی ہے (مثال 12.1)

ملتا ہے جہاں تمام $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے $-\pi$ ، 0 اور π پر $\sin nx = 0$ پر کیا گیا ہے۔اسی طرح مساوات 12.9-پ سے

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\sin nx \, \mathrm{d}x\Big]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} - k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right]$$

ملتا ہے۔چونکہ $\cos 0 = 1$ اور $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ہوتا ہے لہٰذا اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_n = \frac{k}{n\pi}[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

اب $\cos\pi = -1$ ، $\cos 2\pi = 1$ ، $\cos 3\pi = -1$ ، وغیرہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & n \text{ طاق} \\ 1 & n \text{ جفت} \end{cases} \quad \implies \quad 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases}$$

یوں b_n درج ذیل ہوں گے۔

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \cdots$$

چونکہ $a_n = 0$ ہیں لہٰذا دی گئی چکور تفاعل کی فوریئر تسلسل

$$\frac{4k}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\Big) \tag{12.11}$$

ہو گی جس کے جزوی مجموعے درج ذیل ہیں۔

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\sin x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\Big), \cdots$$

شکل 12.3 میں جزوی مجموعہ میں ارکان کی تعداد بتدریج بڑھاتے ہوئے تسلسل کا ترسیم کھینچا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ تسلسل کے زیادہ ارکان استعمال کرنے سے ترسیم کی شکل اصل تفاعل (چکور موج) کی زیادہ قریب ہوتی ہے۔ چکور موج $-\pi$ ، 0 ، π ، وغیرہ پر غیر استمراری ہے یعنی یہاں تفاعل میں چھلانگ پائی جاتی ہے۔یوں ہم نہیں کہہ سکتے کہ آیا $x = 0$ پر چکور تفاعل کی قیمت $-k$ ہے یا k ہے یا کہ ان دونوں قیمتوں کے مابین ہے۔اس کے برعکس فوریئر تسلسل کے تمام جزوی مجموعے ان نقطوں پر صفر کے برابر ہیں جو $-k$ اور k کی اوسط قیمت ہے۔

مزید فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہے۔شکل 12.3-الف سے ظاہر ہے کہ $x=\frac{\pi}{2}$ پر چکور تفاعل کی قیمت k کے برابر ہے۔یوں $x=\frac{\pi}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$f(\frac{\pi}{2})=k\frac{4k}{\pi}\Big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\Big)$$

یعنی

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4} \tag{12.12}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مشہور نتیجہ لیبنٹز نے 1673 کے لگ بھگ جیومیٹریائی اصولوں سے حاصل کیا۔اس سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل ارکان کی کئی تسلسل کی قیمت کو مختلف نقطوں پر فوریئر تسلسل کی قیمت سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ $\square$

ایسے تفاعل جنہیں فوریئر تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کی تعداد غیر یقینی طور پر زیادہ ہے۔انجینئری میں استعمال ہونے والی تقریباً ہر ممکن تفاعل کو فوریئر تسلسل کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے درکار (کافی) شرائط درج ذیل مسئلہ 12.1 میں بیان کیے گئے ہیں۔اس مسئلہ میں چند تصورات کی ضرورت ہے جن پر پہلے بات کرتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ کی **بائیں ہاتھ حد**[11] سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو x_0 تک بائیں ہاتھ سے پہنچتے ہوئے حاصل ہو گی۔یوں بائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0-1)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے درج ذیل ہو گی

$$f(x_0-0)=\lim_{h\to 0}f(x_0-h)$$

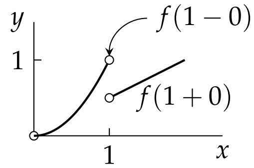
جہاں h مثبت قیمت ہے۔اسی طرح x_0 پر $f(x)$ کی **دائیں ہاتھ حد**[12] سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو دائیں ہاتھ سے آ کر x_0 تک پہنچتے ہوئے حاصل ہو گی۔یوں دائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0+0)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$f(x_0+0)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)$$

ہو گی جہاں h مثبت قیمت ہے۔شکل 12.4 میں غیر استمراری تفاعل

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ \frac{x}{2} & x>1\end{cases}$$

[11] left hand limit
[12] right hand limit



شکل 12.4: بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد، بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق

دکھایا گیا ہے۔نقطہ $x_0 = 1$ پر اس تفاعل کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد درج ذیل ہیں

$$f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = \frac{1}{2}$$

جن میں فرق $(1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2})$ کو **چھلانگ**[13] کہتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر **بائیں ہاتھ تفرق**[14] سے مراد

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}$$

اور **دائیں ہاتھ تفرق**[15] سے مراد

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

ہے جہاں h مثبت قیمت ہے۔ظاہر ہے کہ اگر نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ استمراری ہو تب $f(x_0 - 0)$ اور $f(x_0 + 0)$ دونوں $f(x_0)$ ہی کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 12.1: (تفاعل کا فوریئر تسلسل کی روپ میں اظہار)
اگر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو، وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ میں ٹکڑوں میں استمراری[16] ہو اور اس وقفے کے ہر نقطے پر تفاعل کا دایاں ہاتھ تفرق اور بایاں ہاتھ تفرق موجود ہو تب تفاعل کی فوریئر تسلسل، مساوات 12.10، جس کی عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل کیے گئے ہوں، مرتکز ہو گی۔تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا ماسوائے نقطہ x_0 پر جہاں تفاعل غیر استمراری ہو۔نقطہ x_0 پر تسلسل کی قیمت، نقطہ x_0 پر $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کی اوسط ہو گی۔

---

[13] jump
[14] left hand differential
[15] right hand differential
[16] ٹکڑوں میں استمراری کی تعریف حصہ 6.1 میں دی گئی ہے۔

رائمے زنی: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل مرتکز ہو اور اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو (جیسا مسئلہ 12.1 میں بیان کیا گیا ہے) تب اس تسلسل کو $f(x)$ کی فوریئر تسلسل کہتے ہیں جس کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

اور ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کو یہ فوریئر تسلسل ظاہر کرتی ہے۔اب چونکہ کسی بھی مرتکز تسلسل میں قوسین لگانے سے ایک نئی مرتکز تسلسل ملتی ہے جس کا مجموعہ اصل تسلسل کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ہم درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ثبوت : استمراری تفاعل $f(x)$ جس کا استمراری ایک درجی اور دو درجی تفرق پایا جاتا ہو کی مرکوزیت (مسئلہ 12.1) کا ثبوت ۔
مساوات 12.9-ب کا تکمل بالحصص لیتے ہوئے

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \left. \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, \mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے برابر ہے۔دوبارہ تکمل بالحصص لینے سے

$$a_n = \left. \frac{f'(x) \cos nx}{n^2\pi} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, \mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔چونکہ $f'(x)$ دوری اور استمراری ہے لہٰذا دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر ہو گا۔ وقفہ تکمل میں $f''(x)$ استمراری ہے لہٰذا

$$\left| f''(x) \right| < M$$

ہو گا جہاں M ایک موزوں مستقل ہے۔مزید $|\cos nx| < 1$ ہے۔ یوں

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \right| < \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, \mathrm{d}x = \frac{2M}{n^2}$$

ہو گا۔اسی طرح تمام n کے لئے $|b_n| < \frac{2M}{n^2}$ ہو گا۔اس طرح فوریئر تسلسل کی ہر رکن کی زیادہ سے زیادہ قیمت درج ذیل تسلسل کی مطابقتی رکن کی قیمت کے برابر ہو سکتی ہے جو مرتکز تسلسل ہے۔

$$|a_0| + 2M\Big(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\Big)$$

یوں فوریئر تسلسل بھی مرتکز ہو گی۔

ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(x)$ کی صورت میں فوریئر تسلسل کی مرکوزیت اور مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

□

سوالات

سوال 12.26 تا سوال 12.42 میں دیے گئے دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کا فوریئر تسلسل دریافت کریں۔پہلے تین جزوی مجموعوں[17] کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.26: تفاعل کو شکل 12.5-الف میں دیا گیا ہے۔

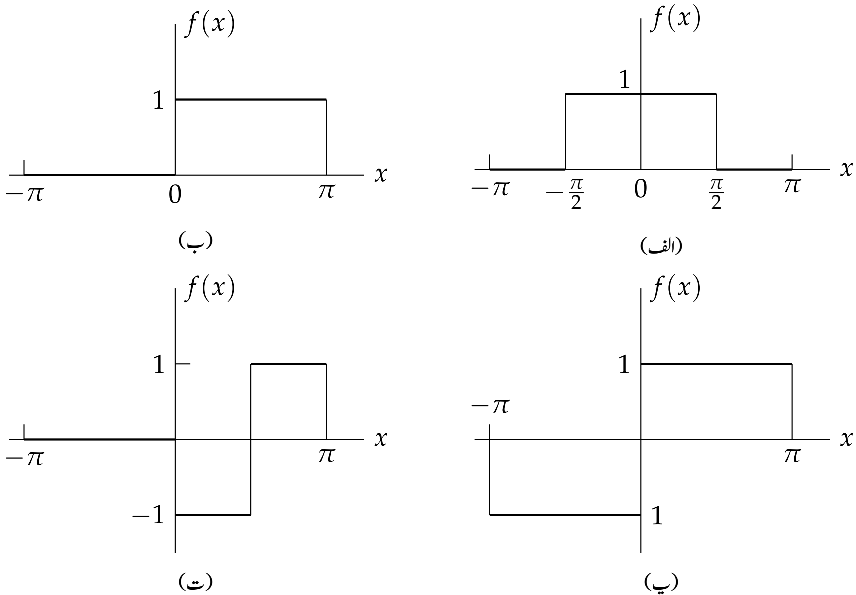
جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots)$

سوال 12.27: تفاعل کو شکل 12.5-ب میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x \cdots)$

سوال 12.28: تفاعل کو شکل 12.5-پ میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$

---

[17] یعنی $a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ جہاں $N = 1, 2, 3$ ہے۔



شکل 12.5: تفاعل برائے سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.29: تفاعل کو شکل 12.5-ت میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{2}{\pi}(-\cos x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x \cdots)$

سوال 12.30:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots)$

سوال 12.31:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos x - \sin x - \sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x \cdots)$

سوال 12.32:

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \frac{2}{1}\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x \cdots$

سوال 12.33:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(-\cos x + \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x \cdots)$

سوال 12.34:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x \cdots$

سوال 12.35:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

جواب: $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x\cdots)$

سوال 12.36:

$$f(x)=\begin{cases}\pi & -\pi<x<0\\ \pi-x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{3\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x-\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{2}{9\pi}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x\cdots$

سوال 12.37:

$$f(x)=\begin{cases}-\pi-x & -\pi<x<0\\ \pi-x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $2\sin x+\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{2}{5}\sin 5x\cdots$

سوال 12.38:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 2 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}(-\cos x+3\sin x-\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\sin 3x\cdots)$

سوال 12.39: $f(x)=x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{\pi}{16}+\frac{1}{\pi}[(\frac{\pi}{2}-1)\cos x+\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\cdots]$

سوال 12.40: $f(x)=\sin x,\quad -\pi<x<\pi$
جواب: $\sin x$

سوال 12.41: **نصف لہر سمت کار**

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \sin x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x+\cdots)$

سوال 12.42: **مکمل لہر سمت کار** $f(x)=\lvert\sin x\rvert,\quad -\pi<x<\pi$
جواب: $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x\cdots)$

سوال 12.43: مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کی سوال 12.26 کے لئے تصدیق کریں۔

سوال 12.44: سوال 12.26 کی حاصل تسلسل سے سوال 12.27 کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.45: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریئر عددی سر a_n اور b_n ہوں تب ثابت کریں کہ تفاعل $kf(x)$ جہاں k مستقل ہے کے عددی سر ka_n اور kb_n ہوں گے۔

سوال 12.46: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کے عددی سر a_n، b_n اور تفاعل $g(x)$ کے عددی سر a_n^*، b_n^* ہوں تب تفاعل $f(x)+g(x)$ کے عددی سر $a_n+a_n^*$، $b_n+b_n^*$ ہوں گے۔

سوال 12.47: سوال 12.33 میں دیے گئے تفاعل کی فوریئر تسلسل سوال 12.46 کو استعمال کرتے ہوئے شکل 12.5 کی نتائج سے حاصل کریں۔

12.3 اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل

عملی استعمال میں پائے جانے والے دوری تفاعل کا دوری عرصہ شاذ و نادر 2π ہوتا ہے۔ 2π دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے حاصل کی گئی کلیات کی x ناپ تبدیل کرتے ہوئے کسی بھی دوری عرصہ T کے تفاعل کی کلیات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔ ہم نیا متغیر x متعارف کرتے ہیں جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\text{(الف)}\quad t=\frac{T}{2\pi}x \quad \text{(ب)}\quad x=\frac{2\pi}{T}t \tag{12.13}$$

لہٰذا $x=\mp\pi$ کے مطابقتی قیمتیں $t=\mp\frac{T}{2}$ ہوں گی۔ اس طرح x کے تفاعل f کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ یوں اگر f کی فوریئر تسلسل موجود ہو، اس کی صورت درج ذیل ہو گی

$$f(t)=f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)=a_0\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{12.14}$$

جہاں یولر عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل ہوں گے یعنی:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\mathrm{d}x,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos nx\;\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\sin nx\;\mathrm{d}x$$

ہم ان کلیات کو استعمال کر سکتے ہیں لیکن متغیر کو t میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوتی ہے۔یوں

$$x = \frac{2\pi}{T}t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{T}\,\mathrm{d}t$$

استعمال کرتے ہوئے اور x محور پر $-\pi$ تا π تکمل کو t محور پر $-\frac{T}{2}$ تا $\frac{T}{2}$ تکمل لکھتے ہوئے یولر مساوات درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\text{(الف)} \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{(ب)} \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \tag{12.15}$$
$$\text{(پ)} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t$$

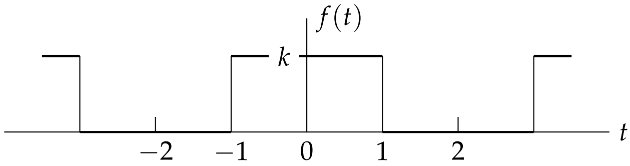
مزید مساوات 12.14 میں دی گئی فوریئر تسلسل میں x متغیر کی جگہ t متغیر پر کرنے سے

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right) \tag{12.16}$$

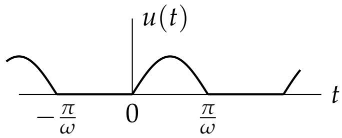
فوریئر تسلسل حاصل ہوتی ہے۔چونکہ تفاعل $f(t)$ دوری ہے لہٰذا مساوات 12.15 میں تکمل کو $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ کی بجائے T کے برابر کسی بھی وقفہ مثلاً $0 \le t \le T$ پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 12.2: درج ذیل چکور تفاعل (شکل 12.6)، جس کا دوری عرصہ $T = 4$ ہے، کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ k & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$



شکل 12.6: مثال 12.2



شکل 12.7: نصف لہر سمت کار (مثال 12.3)

حل: مساوات 12.15 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\\
a_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{4}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi}{2}t\,\mathrm{d}t = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\\
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{4}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\sin\frac{n\pi}{2}t\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

یوں جفت n کے لئے $a_n = 0$ جبکہ $n = 1, 5, 9, \cdots$ کے لئے $a_n = \frac{2k}{n\pi}$ اور $n = 3, 7, 11, \cdots$ کے لئے $a_n = -\frac{2k}{n\pi}$ ہو گا جن سے درج ذیل فوریئر تسلسل ملتی ہے۔

$$
f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\Big(\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}t - + \cdots\Big)
$$

□

مثال 12.3: سائن نما برقی دباو $v = E\sin\omega t$ کو نصف لہر سمت کار سے گزارا جاتا ہے۔ نصف لہر سمت کار کی خارجی برقی دباو $u(t)$ (شکل 12.7) درج ذیل ہے۔

$$
u(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0\\ E\sin\omega t & 0 < t < \frac{T}{2}\end{cases}
$$

حل: یہاں $T=\frac{2\pi}{\omega}$ کے برابر ہے۔یوں مساوات 12.15-الف سے

$$a_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{E}{\pi}$$

ملتا ہے جبکہ مساوات 12.15-ب میں ضمیمہ ب کی مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\,\cos n\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t]\,\mathrm{d}t$$

سے $n=1$ کے لئے صفر جبکہ $n=2,3,\cdots$ کے لئے

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\omega E}{2\pi}\Big[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega}-\frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\Big]_0^{\frac{\pi}{\omega}}\\&=\frac{E}{2\pi}\Big(\frac{-\cos(1+n)\pi+1}{1+n}+\frac{-\cos(1-n)\pi+1}{1-n}\Big)\end{aligned}$$

ملتی ہے جو طاق n کے لئے صفر اور جفت n کے لئے

$$a_n=\frac{E}{2\pi}\Big(\frac{2}{1+n}+\frac{2}{1-n}\Big)=-\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi}\qquad(n=2,4,\cdots)$$

دیتی ہے۔اسی طرح مساوات 12.15-پ سے $b_1=\frac{E}{2}$ جبکہ $n=2,3,\cdots$ کے لئے $b_n=0$ ملتے ہیں۔اس طرح فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$u(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t-\frac{2E}{\pi}\Big(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t+\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t+\cdots\Big)$$

□

سوالات

سوال 12.48: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.16 میں تمام ارکان کا دوری عرصہ T ہے۔

سوال 12.49: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.15 میں T کے برابر کسی بھی وقفے پر تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 12.50: مثال 12.3 کی چکور تفاعل کی تسلسل کو سوال 12.26 کی تسلسل سے سیدھ و سیدھ بذریعہ تبدیلی متغیر حاصل کریں۔

سوال 12.51: نصف لہر سمت کار کو $v = E\cos t$ داخلی دباو مہیا کی جاتی ہے۔خارجی دباو کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔
جواب: $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t + \frac{1}{35}\cos 6t - + \cdots)$

سوال 12.52 تا سوال 12.62 میں تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔اس کی فوریئر تسلسل دریافت کریں۔تفاعل $f(t)$ اور اس کی تسلسل کے اولین تین جزوی مجموعوں کے خط کھینچیں۔آپ دیکھیں گے کہ تسلسل کی زیادہ ارکان استعمال کرنے سے اصل تفاعل سے زیادہ قریبی مشابہت رکھنے والا خط حاصل ہوتا ہے۔

سوال 12.52: $f(t) = -1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = 1 \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$
جواب: $\frac{4}{\pi}(\sin \pi t + \frac{1}{3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5}\sin 5\pi t + \cdots)$

سوال 12.53: $f(t) = 1 \quad (-1 < t < 2), \quad f(t) = 0 \quad (2 < t < 3), \quad T = 4$
جواب: $\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos\frac{\pi t}{2} + \sin\frac{\pi t}{2} - \sin \pi t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{2}\cdots)$

سوال 12.54: $f(t) = 1 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 4$
جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2}\cdots)$

سوال 12.55: $f(t) = t \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
جواب: $\frac{1}{\pi}(2\sin \pi t - \sin 2\pi t + \frac{2}{3}\sin 3\pi t - \frac{1}{2}\sin 4\pi t\cdots)$

سوال 12.56: $f(t) = t^2 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
جواب: $\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}(-4\cos \pi t + \cos 2\pi t - \frac{1}{9}\cos 3\pi t + \frac{1}{4}\cos 4\pi t\cdots)$

سوال 12.57: $f(t) = -t \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = t \quad (0 < t < 1) \quad T = 2$
جواب: $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos \pi t + \frac{1}{9}\cos 3\pi t + \frac{1}{25}\cos 5\pi t\cdots)$

سوال 12.58: مکمل لہر سمت کار $f(t) = \sin \pi t \quad (0 < t < 1), \quad T = 1$
جواب: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2\pi t + \frac{1}{15}\cos 4\pi t + \frac{1}{35}\cos 6\pi t\cdots)$

سوال 12.59: $f(t) = -1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = t \quad (0 < t < 1) \quad T = 2$
جواب: $-\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos \pi t + \frac{3}{\pi}\sin \pi t = \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t - \frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi t\cdots$

سوال 12.60: $f(t) = 1 \quad (0 < t < 1), \quad f(t) = 2 \quad (1 < t < 2) \quad T = 3$
جواب: $1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{3} + \frac{3}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{3} \cdots$

سوال 12.61: $f(t) = -t \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = 2t \quad (0 < t < 1) \quad T = 2$
جواب: $\frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{1}{\pi} \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t - \frac{2}{3\pi^2} \cos 3\pi t \cdots$

سوال 12.62: $f(t) = \cos(\pi t) \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
جواب: $\cos \pi t$

سوال 12.63: مکمل لہر سمت کار کی فوریئر تسلسل سوال 12.58 میں حاصل کی گئی۔ سوال 12.42 میں حاصل کی گئی تسلسل میں متغیر تبدیل کرتے ہوئے یہی جواب دوبارہ حاصل کریں۔

12.4 جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل کی صورت میں $b_n = 0$ جبکہ طاق تفاعل کی صورت میں $a_n = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں یہ جاننے سے کہ آیا تفاعل جفت یا طاق ہے، عددی سر دریافت کرنے کا کام نسبتاً کم ہو گا۔

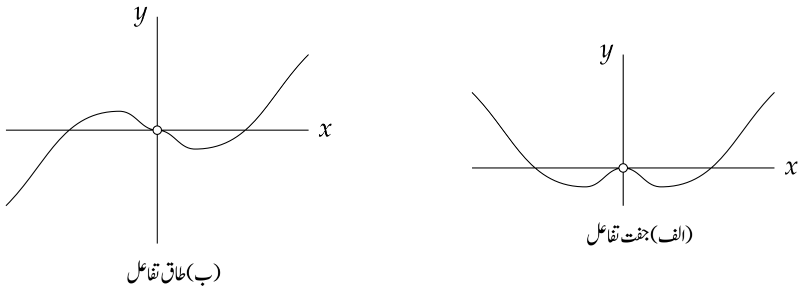
تمام x کے لئے درج ذیل خاصیت والے تفاعل $y = g(x)$ کو جفت[18] تفاعل کہتے ہیں۔

$$g(-x) = g(x) \tag{12.17}$$

ایسا تفاعل y محور کی دونوں اطراف تشاکلی (شکل 12.8-الف) ہو گا۔ اس کے برعکس تفاعل $y = h(x)$ جس کی خاصیت درج ذیل ہو طاق[19] تفاعل کہلاتا ہے (شکل 12.8-ب)۔

$$h(-x) = -h(x) \tag{12.18}$$

[18] even
[19] odd



شکل 12.8: جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل $g(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہے (شکل 12.8-الف) لہٰذا $g(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{T}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} g(x), \mathrm{d}x \qquad (g \text{ جفت}) \tag{12.19}$$

طاق تفاعل $h(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ ضرب منفی اکائی کے برابر ہے (شکل 12.8-ب) لہٰذا $h(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x == \int_{-\frac{T}{2}}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{T}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (h \text{ طاق}) \tag{12.20}$$

جفت تفاعل $g(x)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کی حاصل ضرب $q = gh$ کے لئے

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -g(x)h(x) = -q(x)$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $q = gh$ طاق تفاعل ہو گا۔یوں اگر $f(t)$ جفت تفاعل ہو تب مساوات 12.15-پ میں متکمل $f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہٰذا $b_n = 0$ ہو گا۔اسی طرح اگر $f(t)$ طاق ہو تب مساوات 12.15-ب میں $f\cos\frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہٰذا $a_n = 0$ ہو گا۔ان نتائج سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.2: جفت اور طاق تفاعل کی فوریئر تسلسل

دوری عرصہ T کی جفت تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل، **فوریئر کوسائن تسلسل**[20]

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t \qquad (f \text{ جفت}) \tag{12.21}$$

Fourier cosine series[20]

ہو گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.22}$$

دوری عرصہ T کی طاق تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل، **فوریئر سائن تسلسل**[21]

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t \qquad (f \text{ طاق}) \tag{12.23}$$

ہو گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.24}$$

اس مسئلہ کے تحت دوری عرصہ 2π کی جفت تفاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل درج ذیل فوریئر کوسائن تسلسل

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots \qquad (f \text{ جفت}) \tag{12.25}$$

ہو گی جس کے فوریئر عددی سر

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.26}$$

ہوں گے۔اسی طرح دوری عرصہ 2π والی تفاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل

$$f(x) = b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots \qquad (f \text{ طاق}) \tag{12.27}$$

پائی جائے گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.28}$$

مثال 12.2 میں دی گئی چکور تفاعل جفت ہے لہٰذا اس کی فوریئر کوسائن تسلسل پائی گئی۔

---

[21] Fourier sine series

مزید آسانی درج ذیل مسئلہ سے حاصل ہوتی ہے۔

مسئلہ 12.3: (تفاعل کا مجموعہ) مجموعہ تفاعل $f_1 + f_2$ کی فوریئر عددی سر، تفاعل f_1 اور تفاعل f_2 کی مطابقتی فوریئر عددی سر کا مجموعہ ہو گا۔

کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = g(x) + h(x) \tag{12.29}$$

جہاں

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) &= \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{aligned} \tag{12.30}$$

ہیں۔ درج ذیل سے ثابت ہوتا ہے کہ $g(x)$ جفت اور $h(x)$ طاق ہیں (مساوات 12.17 اور مساوات 12.18)۔

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = g(x) \\ h(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -h(x) \end{aligned}$$

یوں کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو جفت تفاعل $g(h)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جنہیں مساوات 12.30 سے حاصل کیا جاتا ہے۔

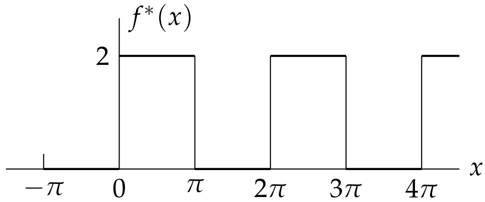
مثال 12.4: مستطیل دھڑکن

مستطیل دھڑکن[22] $f^*(x)$ کو شکل 12.9 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوال 12.28 میں دکھائی گئی تفاعل $f(x)$ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے موجودہ تفاعل $f^*(x)$ حاصل ہو گی۔ یوں سوال 12.28 میں حاصل کیے گئے فوریئر تسلسل سے $f^*(x)$ کی فوریئر تسلسل سیدھ و سیدھ لکھتے ہیں۔

$$1 + \tfrac{4}{\pi}(\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$$

□

[22] pulse



شکل 12.9: مستطیل دھڑکن (مثال 12.4)

مثال 12.5: دندان موج
دندان موج[23]

$$f(x) = x + \pi, \quad (-\pi < x < \pi); \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

کو شکل 12.10-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس کی فوریئر تسلسل دریافت کریں۔ حل: دندان موج کی تفاعل کو

$$f = f_1 + f_2; \quad f_1 = x, \quad f_2 = \pi$$

لکھا جا سکتا ہے۔ f_2 کی فوریئر عددی سر صفر کے برابر ہیں ماسوائے a_0 کے جو π کے برابر ہے۔یوں مسئلہ 12.3 کے تحت دندان موج کے عددی سر a_n ، b_n تفاعل f_1 کے عددی سر ہوں گے جبکہ اس کا $a_0 = \pi$ ہو گا (f_1 طاق ہے لہٰذا اس کا اپنا $a_0 = 0$ ہے)۔یوں

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x$$

کا تکمل بالحصص لینے سے

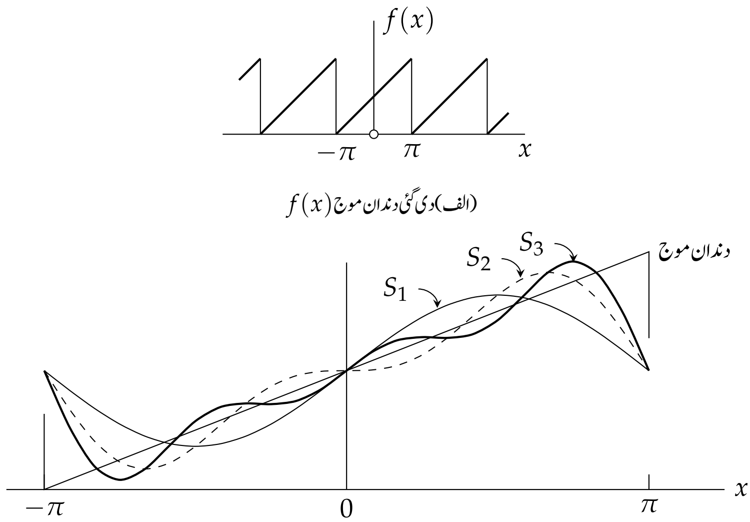
$$b_n = \frac{2}{\pi} \Big[\left. \frac{-x \cos nx}{n} \right|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x \Big] = -\frac{2}{n} \cos n\pi$$

ملتا ہے جس سے $b_1 = 2$ ، $b_2 = -1$ ، $b_3 = \frac{2}{3}$ ، $b_4 = -\frac{1}{2}$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا دندان موج کی فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی (شکل 12.10-ب)۔

$$f(x) = \pi + 2\Big(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - + \cdots \Big)$$

□

[23] saw tooth wave



(الف) دی گئی دندان موج $f(x)$

(ب) جزوی مجموعے

شکل 12.10: دندان موج اور اس کا فوریئر تسلسل (مثال 12.5)

سوالات

سوال 12.64: کیا درج ذیل تفاعل جفت، طاق یا ان میں سے دونوں نہیں (نہ طاق اور نہ ہی جفت) ہیں؟

$$e^x,\ e^{x^2},\ \sin nx,\ x\sin nx,\ \frac{\cos x}{x},\ \ln x,\ \sin x^2,\ \sin^2 x$$

جوابات: بائیں سے 4 ، 6 طاق، 3 ، 9 دونوں نہیں اور باقی تمام جفت ہیں۔

سوال 12.65 تا سوال 12.72 میں دوری تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ 2π ہے۔ کیا تفاعل جفت، طاق یا دونوں نہیں ہیں۔

سوال 12.65: $f(x)=|x|, \quad (-\pi<x<\pi)$
جواب: جفت

سوال 12.66: $f(x)=x, \quad (-\pi<x<\pi)$
جواب: طاق

سوال 12.67: $f(x)=x^2, \quad (-\pi<x<\pi)$
جواب: جفت

سوال 12.68: $f(x)=x^3, \quad (-\pi<x<\pi)$
جواب: طاق

سوال 12.69: $f(x)=e^x, \quad (-\pi<x<\pi)$
جواب: نہ طاق اور نہ ہی جفت

سوال 12.70: $f(x)=e^{|x|}, \quad (-\pi<x<\pi)$
جواب: جفت

سوال 12.71:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: طاق

سوال 12.72: $f(x)=1, \quad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ جواب: جفت

سوال 12.73: ایسا تفاعل دریافت کریں جو جفت بھی ہو اور طاق بھی۔
جواب: $f(x)=0$

سوال 12.74: مساوات 12.19 اور مساوات 12.20 ثابت کریں۔

سوال 12.75: مسئلہ 12.3 کو ثابت کریں۔

سوال 12.76 تا سوال 12.79 میں دیے گئے تفاعل کو ایک عدد جفت تفاعل اور ایک عدد طاق تفاعل کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 12.76: $\frac{1}{1-x}$
جواب: $\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}$

سوال 12.77: $\frac{1}{1-x^2}$
جواب: $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{2x}{(1-x^2)^2}$

سوال 12.78: e^x
جواب: $\cosh x + \sinh x$

سوال 12.79: $\cos x$
جواب: جفت تفاعل یا طاق تفاعل جوں کا توں لکھا جائے گا۔ $\cos x$

سوال 12.80: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا مجموعہ جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.81: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.82: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا مجموعہ طاق تفاعل ہو گا۔

سوال 12.83: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.84: ثابت کریں کہ جفت $f(x)$ کی صورت میں $\left|f(x)\right| + f^2(x)$ جفت ہو گا۔

سوال 12.85: ثابت کریں کہ طاق $f(x)$ کی صورت میں $\left|f(x)\right| + f^2(x)$ اور $f^3(x)$ جفت ہوں گے۔

سوال 12.86 تا سوال 12.91 میں دیے گئے تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔ان تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.86:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \cdots)$

سوال 12.87:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ \pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

جواب: $-\frac{4}{\pi}\cos x + 2\sin x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{4}{25}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x \cdots$

سوال 12.88:

$$f(x)=\begin{cases}x & -\pi<x<0\\ -x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x\cdots)$

سوال 12.89:

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x & -\pi<x<0\\ \pi-x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x\cdots)$

سوال 12.90: $f(x)=\frac{x^2}{4}, \quad (-\pi<x<\pi)$

جواب: $\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 4x-+\cdots$

سوال 12.91:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(\pi+1)\cos x+\frac{1}{\pi}(-\pi^2+\pi+4)\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\cdots$

سوال 12.92 تا سوال 12.95 میں دی گئی تعلق کو ثابت کریں (مساوات 12.12 دیکھیں)۔

سوال 12.92: (سوال 12.86 یا سوال 12.90 استعمال کریں) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4}$

سوال 12.93: (سوال 12.90 استعمال کریں) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

سوال 12.94: (سوال 12.90 استعمال کریں) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\cdots=\frac{\pi^2}{12}$

سوال 12.95: (سوال 12.93 اور سوال 12.94 استعمال کریں) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

12.5 نصف حلقہ اتساع

کئی انجینئری اور طبیعیاتی مسائل میں ایسے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل درکار ہو گی جو کسی محدود وقفہ $0 \le t \le l$ پر معین ہو۔ ہم وقفہ $0 \le t \le l$ کو تکمل کا وقفہ $0 \le t \le \frac{T}{2}$ لیتے ہوئے مسئلہ 12.2 استعمال کرتے ہیں۔ یوں $l = \frac{T}{2}$ یعنی $T = 2l$ چنا گیا ہے۔ مساوات 12.22 استعمال کرتے ہوئے فوریئر کوسائن تسلسل حاصل ہوتی ہے جو $T = 2l$ عددی عرصہ کی جفت تفاعل $f_1(t)$ کو ظاہر کرتی ہے۔ وقفہ $0 \le t \le l$ پر $f_1(t) = f(t)$ ہو گا۔ اسی لئے $f_1(t)$ کو $f(t)$ کی **جفت دوری توسیع**[24] کہتے ہیں۔ شکل 12.11-ب میں جفت دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔ مساوات 12.21 اور مساوات 12.22 میں $T = 2l$ لیتے ہوئے

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t \qquad (0 \le t \le l) \tag{12.31}$$

جفت فوریئر تسلسل حاصل ہو گی جس کی عددی سر

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(t) \,\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t \,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.32}$$

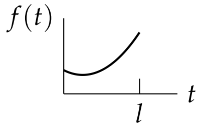
ہوں گے۔

ہم مسئلہ 12.2 کی مساوات 12.22 کی جگہ، پہلی کی طرح $T = 2l$ لیتے ہوئے، مساوات 12.24 استعمال کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے فوریئر سائن تسلسل حاصل ہو گی جو دوری عرصہ $T = 2l$ کی دوری تفاعل $f_2(t)$ کو ظاہر کرے گی۔ وقفہ $0 \le t \le l$ پر $f_2(t) = f(t)$ ہو گا۔ $f_2(t)$ کو $f(t)$ کی **طاق دوری توسیع**[25] کہتے ہیں۔ شکل 12.11-پ میں طاق دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔ مساوات 12.23 اور مساوات 12.24 میں $T = 2l$ لیتے ہوئے

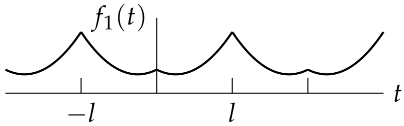
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \qquad (0 \le t \le l) \tag{12.33}$$

طاق فوریئر تسلسل حاصل ہو گی جس کی عددی سر

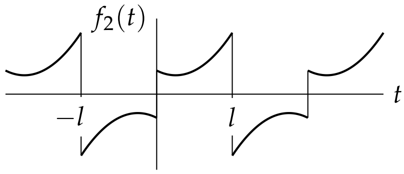
$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t \,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.34}$$



(الف) دیا گیا تفاعل $f(t)$



(ب) تفاعل $f(t)$ کی جفت دوری توسیع



(پ) تفاعل $f(t)$ کی طاق دوری توسیع

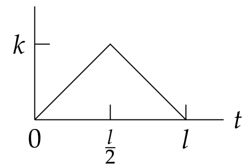
شکل 12.11: دوری توسیع

ہوں گے۔ مساوات 12.32 اور مساوات 12.34 میں دی گئی عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.31 اور مساوات 12.33 کو دی گئی تفاعل $f(t)$ کی **نصف حلقہ اتساع**[26] کہتے ہیں۔

مثال 12.6: تکونی دھڑکن
درج ذیل تکونی دھڑکن کی نصف حلقہ اتساع کریں (شکل 12.12)۔

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2k}{l}t & 0<t<\frac{l}{2}\\ \frac{2k}{l}(l-t) & \frac{l}{2}<t<l\end{cases}$$

even periodic extension[24]
odd periodic extension[25]
half range expansion[26]



شکل 12.12: تکونی دھڑکن (مثال 12.6)

حل: مساوات 12.32 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\Big[\frac{2k}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} t \, \mathrm{d}t + \frac{2k}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-t) \, \mathrm{d}t\Big] = \frac{k}{2} \\
a_n &= \frac{2}{l}\Big[\frac{2k}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi}{l}t \, \mathrm{d}t + \frac{2k}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t \, \mathrm{d}t\Big]
\end{aligned}
$$

تکمل بالحصص لیتے سے

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi}{l}t \, \mathrm{d}t &= \frac{lt}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}t\Big|_0^{\frac{l}{2}} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1)
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔اسی طرح تکمل بالحصص سے

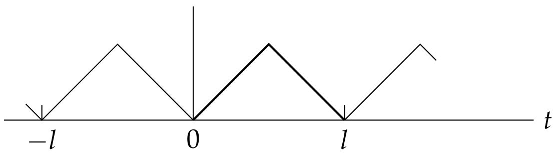
$$
\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t \, \mathrm{d}t = -\frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2})
$$

ملتا ہے۔ان نتائج سے

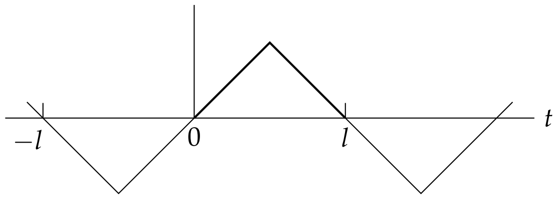
$$
a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1)
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
&a_2 = -\frac{16k}{2^2\pi^2}, \quad a_6 = -\frac{16k}{6^2\pi^2}, \quad a_{10} = -\frac{16k}{10^2\pi^2}, \cdots \\
&a_n = 0, \quad n \neq 2, 6, 10, 14, \cdots
\end{aligned}
$$



(الف) جفت اتساع



(ب) طاق اتساع

شکل 12.13: تفاعل $f(t)$ کی دوری اتساع (مثال 12.6)

حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکونی دھڑکن $f(t)$ کی پہلی نصف حلقہ اتساع درج ذیل ہو گی جو $f(t)$ کی دوری جفت توسیع ہے (شکل 12.13-الف)۔

$$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\Big(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{l}t + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{l}t + \cdots\Big)$$

اسی طرح مساوات 12.34 سے

$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{12.35}$$

حاصل ہو گا جس سے $f(t)$ کی دوسری نصف حلقہ اتساع درج ذیل حاصل ہو گی جو $f(t)$ کی دوری طاق توسیع ہے (شکل 12.13-ب)۔

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2}\Big(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}t + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{l}t - + \cdots\Big)$$

□

سوالات

سوال 12.96 تا سوال 12.103 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر سائن تسلسل حاصل کریں اور مطابقتی دوری طاق تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.96: $f(t) = t, \quad (0 < t < \pi)$
جواب: $2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin 4t \cdots$

سوال 12.97: $f(t) = k, \quad (0 < t < l)$
جواب: $\frac{4k}{\pi}(\sin\frac{\pi t}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{l}\cdots)$

سوال 12.98: $f(t) = 1 - t, \quad (0 < t < 1)$
جواب: $\frac{1}{\pi}(2\sin\pi t + \sin 2\pi t + \frac{2}{3}\sin 3\pi t\cdots)$

سوال 12.99: $f(t) = \cos t, \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{8}{\pi}(\frac{1}{3}\sin 2t + \frac{2}{15}\sin 4t + \frac{3}{35}\sin 6t\cdots)$

سوال 12.100:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

جواب: $(1 + \frac{2}{\pi})\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + (\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi})\sin 3t\cdots$

سوال 12.101:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}[(1 + \frac{2}{\pi})\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi t + (\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi})\sin\frac{3\pi}{2}t\cdots]$

سوال 12.102:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}[3\sin\frac{\pi t}{2}-\sin\pi t+\sin\frac{3\pi t}{2}\cdots]$

سوال 12.103:

$$f(t)=\begin{cases}1-t & 0<t<1\\ 1 & 1<t<2\end{cases}$$

جواب: $(\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi^2})\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{1}{\pi}\sin\pi t+(\frac{4}{3\pi}+\frac{4}{9\pi^2})\sin\frac{3\pi t}{2}\cdots$

سوال 12.104 تا سوال 12.109 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر کوسائن تسلسل دریافت کریں اور مطابقتی دوری جفت تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.104: $f(t)=k,\quad (0<t<l)$
جواب: $f(t)=k$

سوال 12.105: $f(t)=t,\quad (0<t<l)$
جواب: $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}(\cos\frac{\pi t}{l}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi t}{l}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi t}{l}\cdots)$

سوال 12.106: $f(t)=t^2,\quad (0<t<l)$
جواب: $\frac{l^2}{3}-\frac{l^2}{\pi^2}(4\cos\frac{\pi t}{l}-\cos\frac{2\pi t}{l}+\frac{4}{9}\cos\frac{3\pi t}{l}\cdots)$

سوال 12.107: $f(t)=\sin t,\quad (0<t<\frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t+\frac{1}{15}\cos 4t+\frac{1}{35}\cos 6t\cdots)$

سوال 12.108: $f(t)=\cos t,\quad (0<t<\frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{15}\cos 4t+\frac{1}{35}\cos 6t-+\cdots)$

سوال 12.109: $f(t)=e^t,\quad (0<t<1)$
جواب: $e-1-\frac{2}{\pi^2+1}(e+1)\cos\pi t+\frac{2}{4\pi^2+1}(e-1)\cos 2\pi t\cdots$

سوال 12.110: (فوریئر تسلسل کی مخلوط صورت، مخلوط فوریئر عددی سر)
کلیہ یولر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}),\quad \sin nx=\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے فوریئر تسلسل

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_b \sin nx)$$

کو

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}) \tag{12.36}$$

لکھیں جہاں $c_0 = a_0$ ، $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ، $k_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ ، $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔ مساوات 12.9 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x, \quad k_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

علامت k_n کی جگہ علامت c_{-n} لکھتے ہوئے مساوات 12.36 کو درج ذیل صورت میں لکھیں۔

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots \tag{12.37}$$

اس کو **مخلوط فوریئر تسلسل**[27] کہتے ہیں جہاں c_n کو $f(x)$ کی **مخلوط فوریئر عددی سر**[28] کہتے ہیں۔

سوال 12.111: ثابت کریں کہ جفت تفاعل کی مخلوط فوریئر عددی سر حقیقی ہوں گے جبکہ طاق تفاعل کی فوریئر عددی سر خالص خیالی ہوں گے۔

سوال 12.112 تا سوال 12.115 میں دوری عرصہ 2π کی دی گئی تفاعل $f(x)$ کی مخلوط فوریئر تسلسل دریافت کریں۔ مخلوط فوریئر تسلسل سے حقیقی فوریئر تسلسل حاصل کرتے ہوئے گزشتہ حاصل کردہ تسلسل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.112: (سوال 12.65) $(-\pi < x < \pi)$ $f(x) = |x|$

جواب: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{-2e^{inx}}{\pi n^2}$

[27] complex Fourier series

[28] complex Fourier coefficients

سوال 12.113: (سوال 12.66) $(-\pi < x < \pi)$ $f(x) = x$

جواب: $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n e^{inx}}{n}$

سوال 12.114: (سوال 12.67) $(-\pi < x < \pi)$ $f(x) = x^2$

جواب: $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n e^{inx}}{n^2}$

سوال 12.115: (سوال 12.69) $(-\pi < x < \pi)$ $f(x) = e^x$

جواب: $\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$

12.6 فوریئر عددی سر کا بغیر تکمل حصول

آپ نے دیکھا کہ بعض اوقات پیچیدہ تکملات حل کرنے کے بعد نسبتاً سادہ فوریئر عددی سر a_n اور b_n حاصل ہوتے ہیں۔اس سے سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا عددی سر حاصل کرنے کا کوئی آسان طریقہ بھی ہے؟ جس کا جواب ہے، "جی ہاں"۔ ہم یہاں ثابت کرتے ہیں کہ دوری کثیر رکنی تفاعل کی فوریئر عددی سر تفاعل کی اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگ سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یوں بغیر کوئی تکمل حل کرتے ہوئے a_n اور b_n حاصل کیے جائیں گے (ماسوائے a_0 ، جس کو اب بھی تکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $g(x)$ کی **چھلانگ**[29] j سے مراد x_0 پر $g(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد میں فرق ہے (حصہ 12.2) یعنی:

$$j = g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0) \tag{12.38}$$

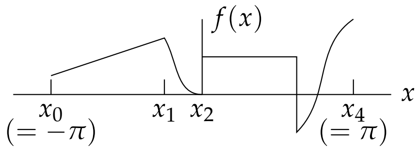
یوں اوپر کو چھلانگ مثبت چھلانگ ہو گی جبکہ نیچے کو چھلانگ منفی چھلانگ ہو گی (شکل 12.14)۔

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا عددی عرصہ 2π ہے کو وقفہ $-\pi < x < \pi$ میں کثیر رکنی p_1 ، $\cdots$ ، p_m سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (مثلاً شکل 12.15)۔

jump[29]

(الف) مثبت چھلانگ (ب) منفی چھلانگ

شکل 12.14: تفاعل کی چھلانگ



شکل 12.15: کثیر رکنی روپ کی مثال (مساوات 12.39) جہاں $m=4$ ہے

$$f(x)=\begin{cases} p_1(x) & x_0<x<x_1, \quad (x_0=-\pi) \\ p_2(x) & x_1<x<x_2 \\ \vdots \\ p_3(x) & x_{m-1}<x<x_m \quad (x_m=\pi) \end{cases} \tag{12.39}$$

یوں x_0 ، $\cdots$ ، x_m پر تفاعل f کی چھلانگ اور اس کی تفرق f' ، f'' ، $\cdots$ کی چھلانگ ہو سکتی ہیں جنہیں ہم درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

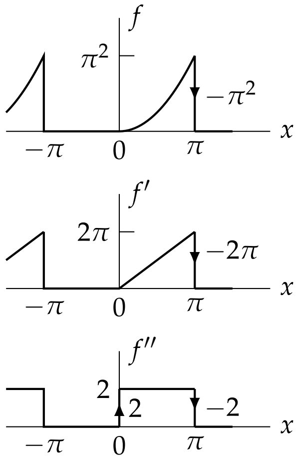
$$\begin{aligned} j_s &= x_s \text{ پر } f \text{ کی چھلانگ} \\ j'_s &= x_s \text{ پر } f' \text{ کی چھلانگ} \\ j''_s &= x_s \text{ پر } f'' \text{ کی چھلانگ} \qquad (s=1,2,\cdots,m) \\ &\vdots \\ j^n_s &= x_s \text{ پر } f^{(n)} \text{ کی چھلانگ} \end{aligned} \tag{12.40}$$

ظاہر ہے کہ اگر x_s پر f استمراری ہو تب x_s پر $j_s=0$ ہو گا۔ایسا ہی f' ، f'' ، $\cdots$ کے لئے بھی کہا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 12.40 میں کئی j_s ، j'_s ، $\cdots$ صفر قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

مثال 12.7: تفاعل کی چھلانگ اور اس کی تفرق کی چھلانگیں

جدول 12.1: مثال 12.7 کی چھلانگیں

	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	$x_2 = \pi$ پر چھلانگ
f	$j_1 = 0$	$j_2 = -\pi^2$
f'	$j_1' = 0$	$j_2' = -2\pi$
f''	$j_1'' = 2$	$j_2'' = -2$



شکل 12.16: تفاعل اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگیں (مثال 12.7)

تفاعل $f(x)$

$$f = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

اور اس کی تفرقات f' ، f'' ، $\cdots$

$$f' = \begin{cases} 0 \\ 2x \end{cases} \qquad f'' = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \qquad f''' = 0$$

کی ترسیم شکل 12.16 میں کھینچی گئی ہیں اور ان کی چھلانگیں جدول 12.1 میں دی گئی ہیں۔

یاد رہے کہ وقفہ کی ابتدا $x = -\pi$ پر چھلانگیں شمار نہیں کیے جاتے ہیں۔انہیں دوری وقفہ کی اختتام $x = \pi$ پر شمار کیا جاتا ہے۔ایک ہی وقفہ پر انہیں دو مرتبہ نہیں گیا جائے گا۔ □

مساوات 12.39 میں دی گئی تفاعل f کی فوریئر عددی سر a_1 ، a_2 ، . . . حاصل کرنے کی خاطر ہم یولر مساوات 12.9-ب استعمال کرتے ہیں۔

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx \, \mathrm{d}x \tag{12.41}$$

چونکہ f کو مساوات 12.39 ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہمیں m عدد تکمل کا مجموعہ

$$\pi a_n = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} = \sum_{s=1}^{m} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, \mathrm{d}x \tag{12.42}$$

لکھنا ہو گا جہاں $x_0 = -\pi$ اور $x_m = \pi$ ہیں۔ تکمل بالحصص لیتے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{f}{n} \sin nx \bigg|_{x_{s-1}}^{x_s} - \frac{1}{n} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, \mathrm{d}x \tag{12.43}$$

اب بائیں ہاتھ پہلی جزو میں نقطہ x_s پر تفاعل $f(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ایسا ہونے کی صورت میں x_s پر تفاعل کی بائیں ہاتھ حد $f(x_s - 0)$ لینی ہو گی۔اسی طرح x_{s-1} پر غیر استمراری $f(x)$ کی صورت میں تفاعل کی دائیں ہاتھ حد $f(x_{s-1} + 0)$ لینی ہو گی۔یوں مساوات 12.43 کا دائیں ہاتھ پہلی جزو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{n}[f(x_s - 0) \sin nx_s - f(x_{s-1} + 0) \sin nx_{s-1}]$$

اب مساوات 12.43 کو مساوات 12.42 میں پر کرتے ہوئے اور چھوٹی علامتیں $S_0 = \sin nx_0$ ، $S_1 = \sin nx_1$ ، . . . استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \pi a_n = \frac{1}{n}[&f(x_1 - 0)S_1 - f(x_0 + 0)S_0 + f(x_2 - 0)S_2 - f(x_1 + 0)S_1 \\ &+ \cdots + f(x_m - 0)S_m - f(x_{m-1} + 0)S_{m-1}] \\ &- \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{m} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{12.44}$$

ملتا ہے۔قوسین میں بند یکساں S کے ارکان اکٹھا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} &- f(x_0 + 0)S_0 + [f(x_1 - 0) - f(x_1 + 0)]S_1 \\ &+ [f(x_2 - 0) - f(x_2 + 0)]S_2 + \cdots + f(x_m - 0)S_m \end{aligned} \tag{12.45}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 12.45 میں ہر چکور قوسین میں بند قیمت f کی چھلانگ ضرب -1 کے برابر ہے۔ مزید چونکہ f دوری ہے لہذا $S_0 = S_m$ اور $f(x_0) = f(x_m)$ ہوں گے لہٰذا مساوات 12.45 کے پہلے اور آخری رکن کو ملا کر $[f(x_m - 0) - f(x_m + 0)]S_m$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 12.45 درج ذیل ہو گا

$$-j_1S_1 - j_2S_2 - \cdots - j_mS_m$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.44 کو

$$\pi a_n = -\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s \sin nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, \mathrm{d}x \tag{12.46}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہی ترکیب دائیں ہاتھ کی تکمل پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \cos nx_s + \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f'' \cos nx \, \mathrm{d}x \tag{12.47}$$

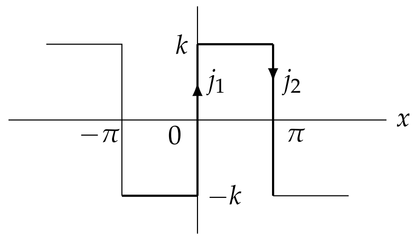
ایسا بار بار کرتے ہوئے ہمیں تکمل کے اندر f کا بتدریج زیادہ درجے کا تفرق حاصل ہو گا۔ اب چونکہ f کو کثیر رکنی ظاہر کرتی ہیں اور درجہ r کثیر رکنی کا درجہ $r+1$ تفرق صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا آخر کار کوئی تکمل باقی نہ رہے گا۔ تکمل پر محدود مرتبہ یہ عمل کرنے سے ایسا ہو گا۔ مساوات 12.47 اور اس عمل کے دہرانے سے حاصل نتائج کو مساوات 12.46 میں پر کرتے ہوئے درکار کلیہ

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n\pi}\Big[&-\sum_{s=1}^{m} j_s \sin nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \cos nx_s] \\ &+ \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \sin nx_s + \frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \cos nx_s - - + + \cdots \Big] \end{aligned} \tag{12.48}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے (اور a_0 کو پہلی کی طرح تکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔ بالکل اسی طرح یولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے b_n کا کلیہ

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{n\pi}\Big[&\sum_{s=1}^{m} j_s \cos nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \sin nx_s] \\ &- \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \cos nx_s + \frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \sin nx_s + - - + + \cdots \Big] \end{aligned} \tag{12.49}$$

حاصل ہو گا۔



شکل 12.17: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

غلطیوں سے بچنے کی خاطر $f(x)$ اور اس کی تفرقات کی ترسیم کھینچ کر چھلانگوں کو (مثال 12.7 کی طرح) جدول میں لکھنا سود مند ثابت ہوتا ہے۔

مثال 12.8: دوری چکور موج
دوری چکور موج $f(x)$ کی فوریئر عددی سر دریافت کریں (شکل 12.17)۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل: چونکہ $f' = 0$ ہے لہٰذا صرف f کی چھلانگیں پائی جاتی ہیں۔ یہ چھلانگیں جدول 12.2 میں دی گئی ہیں۔

جدول 12.2: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

$x_2 = \pi$ پر چھلانگ	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	
$j_2 = -2k$	$j_1 = 2k$	f

f طاق ہے لہٰذا مساوات 12.49 سے فوریئر عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi}[j_1 \cos nx_1 + j_2 \cos nx_2] = \frac{1}{n\pi}[2k\cos 0 - 2k\cos n\pi] \\ &= \frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases} \qquad \text{(مثال 12.1 دیکھیں)} \end{aligned}$$

□

مثال 12.9: مثال 12.7 میں دی گئی تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔
حل: تکمل سے a_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{\pi^2}{6}$$

مساوات 12.48 سے

$$a_n = \frac{1}{n\pi}[\pi^2 \sin n\pi + \frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(2\sin 0 - 2\sin n\pi)] = \frac{2}{n^2}\cos n\pi$$

یعنی $a_1 = -\frac{2}{1^2}$ ، $a_2 = \frac{2}{2^2}$ ، $a_3 = -\frac{2}{3^2}$ ، $\cdots$ ملتے ہیں۔ مساوات 12.49 سے

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi}[-\pi^2 \cos n\pi + \frac{2\pi}{n}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}(2\cos 0 - 2\cos n\pi)] \\ &= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

یعنی

$$b_1 = \pi - \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad b_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3^2\pi}, \quad b_4 = -\frac{\pi}{4}, \cdots$$

ملتے ہیں۔ یوں فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\cos x + (\pi - \frac{4}{\pi})\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \cdots$$

□

سوالات

سوال 12.116: مثال 12.9 کو عمومی طریقہ سے حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ عمومی طریقہ بہت لمبا ہو گا۔

سوال 12.117: یولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.49 حاصل کریں۔

سوال 12.118: ثابت کریں کہ T دوری عرصہ کی تفاعل کے لئے مساوات 12.48 اور مساوات 12.49 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\Big[-\sum_{s=1}^{m} j_s \sin K_n t_s - \frac{1}{K_n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \cos K_n t_s \qquad (K_n = \frac{2n\pi}{T}) \\ + \frac{1}{K_n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \sin K_n t_s + \frac{1}{K_n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \cos K_n t_s - - + + \cdots\Big] \tag{12.50}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\Big[\sum_{s=1}^{m} j_s \cos K_n t_s - \frac{1}{K_n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \sin K_n t_s \\ - \frac{1}{K_n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \cos K_n t_s + \frac{1}{K_n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \sin K_n t_s + - - + + \cdots\Big] \tag{12.51}$$

سوال 12.119 تا سوال 12.122 میں فوریئر تسلسل کو مساوات 12.48 تا مساوات 12.51 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.119: سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.120: سوال 12.32 تا سوال 12.35

سوال 12.121: سوال 12.54 تا سوال 12.57

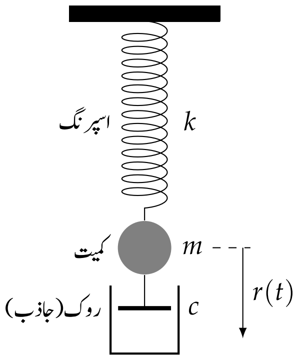
سوال 12.122: سوال 12.59 تا سوال 12.61

سوال 12.123 تا سوال 12.126 کی فوریئر سائن تسلسل کو مساوات 12.48 تا مساوات 12.51 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.123: $f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad (0 < x < \pi)$
جواب: $(2\pi - \frac{4}{\pi} + 4)\sin x - (2+\pi)\sin 2x + (\frac{2}{3} + \frac{28}{27\pi} + \frac{4}{3})\sin 3x \cdots$

سوال 12.124: $f(x) = x^3 \quad (0 < x < 1)$
جواب: $\frac{2}{\pi^3}(\pi^2 - 6)\sin \pi x - \frac{(4\pi^2-6)}{4\pi^3}\sin 2\pi x + \frac{2(9\pi^2-6)}{27\pi^3}\sin 3\pi x \cdots$

سوال 12.125: $f(x) = x(1-x) \quad (0 < x < 1)$
جواب: $\frac{8}{\pi^3}(\sin \pi t + \frac{1}{3^3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5^3}\sin 5\pi t + \cdots)$



شکل 12.18: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

سوال 12.126: $f(x) = x(x^2-1) \quad (0 < x < 1)$

جواب: $\frac{1}{\pi^3}(-12\sin\pi t + \frac{3}{2}\sin 2\pi t - \frac{4}{9}\sin 3\pi t + \frac{3}{16}\sin 4\pi t \cdots)$

سوال 12.127: تفاعل $f(x) = x^3, \quad (0 < x < l)$ کی فوریئر کوسائن تسلسل کو مساوات 12.50 کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب: $\frac{l^3}{4} + l^3(\frac{24}{\pi^4} - \frac{6}{\pi^2})\cos\frac{\pi t}{l} + \frac{3l^3}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{l} \cdots$

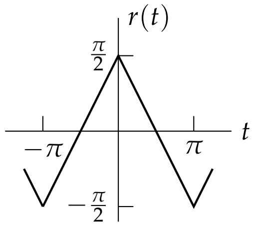
12.7 جبری ارتعاش

تفرقی مساوات میں فوریئر تسلسل اہم ثابت ہوتے ہیں۔آئیں ایک اہم عملی مسئلہ پر غور کریں جس کی سادہ تفرقی مساوات پائی جاتی ہے۔ (جزوی تفرقی مساوات والے مسائل پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔)

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ اسپرنگ کے ساتھ جڑی ہوئی کمیت m (شکل 12.18) کی جبری ارتعاش کی سادہ تفرقی مساوات

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t) \tag{12.52}$$

ہے جہاں c تقصیری مستقل اور k مقیاس لچک ہے۔بیرونی قوت سائن یا کوسائن تفاعل ہونے اور غیر صفر تقصیری مستقل کی صورت میں برقرار حالت ہارمونی ارتعاش پیدا ہو گی جس کی تعدد بیرونی قوت کی تعدد ہو گی۔



شکل 12.19: تکونی قوت (مثال 12.10)

ایسی قوت $r(t)$ جو نہ خالص سائن تفاعل ہو اور نہ ہی خالص کوسائن تفاعل ہو بلکہ کسی اور شکل کی دوری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم دیکھیں گے کہ برقرار حالت حل کئی ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہو گا جس میں $r(t)$ کی تعدد اور اس کی مضرب تعدد پائی جائیں گی۔ اگر ان تمام تعدد میں سے کوئی تعدد، نظام کی قدرتی تعدد کے قریب ہو تب عین ممکن ہے کہ، بیرونی قوت کی رد عمل میں، نظام کی حرکت میں اسی تعدد کا حصہ غالب ہو گا۔ ہارمونی ارتعاش اور گمک کے بارے میں نہ جانتے ہوئے یہ عمل حیرت انگیز ثابت ہو گا۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

مثال 12.10: غیر سائن نما جبری قوت سے پیدا ارتعاش
مساوات 12.52 میں $m = 1\,\mathrm{kg}$ ، $k = 25\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$ ، $c = 0.02\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لینے سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $r(t)$ کی اکائی $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ ہو گی۔

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = r(t) \tag{12.53}$$

اب فرض کریں کہ جبری قوت $r(t)$ درج ذیل ہے جس کو شکل 12.19 میں دکھایا گیا ہے۔ برقرار حالت حل دریافت کریں۔

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t)$$

حل: ہم $r(t)$ کو فوریئر کوسائن تسلسل

$$r(t) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt = \frac{4}{\pi}\Big(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\Big) \tag{12.54}$$

سے ظاہر کرتے ہیں۔ اب ہم درج ذیل تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جس کا دایاں ہاتھ فوریئر تسلسل (مساوات 12.54) کا ایک رکن ہے۔

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \qquad (n = 1, 23, \cdots) \tag{12.55}$$

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ درج بالا تفرقی مساوات کا برقرار حالت حل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt \tag{12.56}$$

مساوات 12.56 کو مساوات 12.55 میں پر کرتے ہوئے

$$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2 \pi D}, \quad B_n = \frac{0.08}{n \pi D}, \qquad D = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2 \tag{12.57}$$

ملتا ہے۔چونکہ تفرقی مساوات 12.53 خطی ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس کا برقرار حالت حل

$$y = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots \tag{12.58}$$

ہو گا جہاں مساوات 12.56 y_n دیتی ہے۔درحقیقت آپ حاصل مساوات 12.58 کو مساوات 12.55 میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ تفرقی مساوات کا درست حل ہے۔

مساوات 12.57 سے مساوات 12.56 کا حیطہ

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{A}{n^2 \pi \sqrt{D}}$$

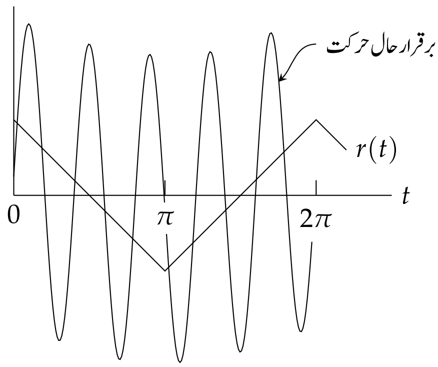
حاصل ہوتا ہے جس کی چند اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.0530 \\ C_3 &= 0.0088 \\ C_5 &= 0.5100 \\ C_7 &= 0.0011 \\ C_9 &= 0.0003 \end{aligned}$$

$n = 5$ پر D کی قیمت نہایت کم ملتی ہے جس سے C_5 کی قیمت اتنی زیادہ حاصل ہوتی ہے کہ مساوات 12.58 میں y_5 غالب جزو ہے۔ یوں برقرار حالت حرکت تقریباً ہارمونی ہو گا جس کی تعدد جبری قوت کی تعدد کی پانچ گنا ہے (شکل 12.20)۔ □

سوالات

سوال 12.128 تا سوال 12.135 میں تفرقی مساوات $\ddot{y} + \omega^2 2.0 = r(t)$ کی عمومی حل دریافت کریں۔



شکل 12.20: داخلی قوت اور برقرار حالت ردعمل (مثال 12.10)

سوال 12.128: $r(t) = \sin t, \quad \omega = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10$

جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A(\omega) \sin t, \quad A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 1}$

$A(0.5) = -1.33, A(0.7) = -0.2, A(0.9) = -5.3, A(1.1) = 4.8, A(1.5) = 0.8,$
$A(2) = 0.33, A(10) = 0.01$

سوال 12.129: $r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t, \quad (\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2)$

جواب: $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{(\omega^2 - \alpha^2) \cos \beta t + (\omega^2 - \beta^2) \cos \alpha t}{\omega^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\omega^2 + \alpha^2 \beta^2}$

سوال 12.130: $r(t) = \sin t + \sin 3t, \quad w = 0.9, 2.9$

جواب:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\sin t}{\omega^2 - 1^2} + \frac{\sin 3t}{\omega^2 - 3^2}$$
$$y_{(\omega=0.9)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - 5.26 \sin t - 0.122 \sin 3t$$
$$y_{(\omega=2.9)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + 0.135 \sin t - 0.164 \sin 3t$$

سوال 12.131: $r(t) = \sum\limits_{s=1}^{N} a_n \cos nt, \quad |\omega| \neq 1, 2, \cdots, N$

جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt$

سوال 12.132: $r(t) = \sum\limits_{s=1}^{N} b_n \sin nt, \quad |\omega| \neq 1, 2, \cdots, N$

جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\omega^2 - n^2} \sin nt$

سوال 12.133:

$$r(t)=\begin{cases}-1 & -\pi<t<0\\ 1 & 0<t<\pi\end{cases}\qquad r(t+2\pi)=r(t),\quad |\omega|\neq 1,3,5,\cdots$$

جواب: $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{4\sin t}{1\pi(\omega^2-1^2)}+\frac{4\sin 3t}{3\pi(\omega^2-3^2)}+\frac{4\sin 5t}{5\pi(\omega^2-5^2)}\cdots$

سوال 12.134: $r(t)=t,\quad (-\pi<t<\pi), r(t+2\pi)=r(t), |\omega|\neq 1,2,3,\cdots$

جواب: $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n(\omega^2-n^2)}\sin nt$

سوال 12.135: $r(t)=t^2,\quad (-\pi<t<\pi), r(t+2\pi)=r(t), |\omega|\neq 0,1,2,\cdots$

جواب: $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+C_3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2(\omega^2-n^2)}\cos nx$

سوال 12.136 تا سوال 12.140 میں $\ddot{y}+c\dot{y}+y=r(t)$ جہاں $c>0$ ہے کی برقرار حالت حل دریافت کریں۔

سوال 12.136: $r(t)=\cos t$

جواب: $y=\frac{\sin t}{c}$

سوال 12.137: $r(t)=\sin 3t$

جواب: $y=-\frac{8}{9c^2+8^2}\sin 3t-\frac{3}{9c^2+8^2}\cos 3t$

سوال 12.138: $r(t)=\cos nt$

جواب: $y=\frac{nc\sin nt-(n^2-1)\cos nt}{(n^2-1)^2+n^2c^2}$

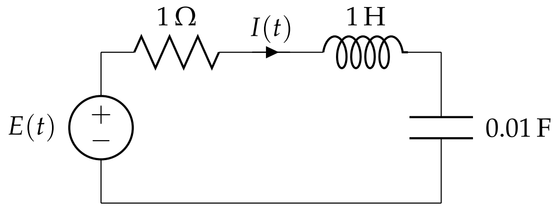
سوال 12.139: $r(t)=\sin nt$

جواب: $y=\frac{-nc\cos nt-(n^2-1)\sin nt}{(n^2-1)^2+n^2c^2}$

سوال 12.140:

$$r(t)=\begin{cases}\pi+t & -\pi<t<0\\ \pi-t & 0<t<\pi\end{cases}\qquad r(t+2\pi)=r(t)$$

جواب: $y=\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi[(n^2-1)^2+n^2c^2]}[nc\sin nt-(n^2-1)\cos nt]$



سوال 12.141: سلسلہ وار RLC دور کو $E(t)$ داخلی دباو مہیا کی جاتی ہے۔اس دور میں برقی رو $I(t)$ دریافت کریں۔

$$E(t) = \begin{cases} -10 & -\pi < t < 0 \\ 10 & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad E(t+2\pi) = E(t)$$

جواب: $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{\pi[n^4 - 199n^2 + 10^4]} [n \sin nt - (n^2 - 10^2) \cos nt]$

12.8 تقریب بذریعہ تکونی کثیر رکنی۔مکعب خلل

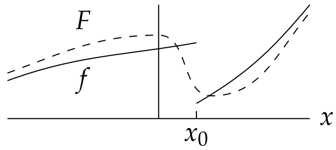
فرض کریں کہ 2π دوری عرصہ کی تفاعل $f(x)$ کو فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہے۔اس تسلسل کی پہلی N ارکان کا جزوی مجموعہ، $f(x)$ کی تقریب ہو گی۔

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12.59}$$

تکونی کثیر رکنی کی عددی سریوں منتخب کی جا سکتے ہیں کہ یہ تفاعل پر ٹھیک بیٹھے۔یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا $f(x)$ کو تکونی کثیر رکنی

$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \tag{12.60}$$

سے ظاہر کرنے کی "بہترین" تقریب مساوات 12.59 دیتی ہے جہاں دونوں تقریب میں N یکساں ہے۔بہترین تقریب میں کم سے کم "خلل" پایا جاتا ہے۔



شکل 12.21: تقریب کی خلل

ظاہر ہے کہ ہمیں پہلے فیصلہ کرنا ہو گا کہ، تقریب میں خلل، سے ہمارا کیا مراد ہے۔ ہم خلل کی ایسی تعریف منتخب کرتے ہیں جو پورے وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر f اور F کی ایک سا ہونے کی ناپ ہو۔شکل 12.21 میں f کو F سے ظاہر کیا گیا ہے جو بہتر تقریب ہے لیکن نقطہ x_0 پر $|f-F|$ کی قیمت بہت زیادہ ہے۔یوں ظاہر ہے کہ $|f-F|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کو خلل کہنا موزوں نہ ہو گا۔ہم خلل کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f-F)^2 \, \mathrm{d}x \tag{12.61}$$

جس وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر تفاعل F کی، تفاعل f کے لحاظ سے، **کل مکعب خلل**[30] کہلاتا ہے۔چونکہ مکعب کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا $E \ge 0$ ہو گا۔

ہم مقررہ N کے لئے مساوات 12.60 کے ایسے عددی سر دریافت کرنا چاہتے ہیں کہ حاصل E کمترین ہو۔ہم مساوات 12.61 کو درج ذیل صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \, \mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} fF \, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 \, \mathrm{d}x \tag{12.62}$$

درج بالا کی آخری تکمل میں مساوات 12.60 پر کرتے ہوئے حاصل تکملات کو حصہ 12.2 کی طرح حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 \, \mathrm{d}x = \pi(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_N^2)$$

مساوات 12.60 کو مساوات 12.62 کی دائیں ہاتھ دوسری تکمل میں پر کرنے سے یولر کلیات (مساوات 12.9) کے تکمل حاصل ہوتے ہیں جن سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF \, \mathrm{d}x = \pi(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_N b_N)$$

---

total square error[30]

یوں مساوات 12.62 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \, \mathrm{d}x - 2\pi \Big[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \Big] + \pi \Big[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \Big] \tag{12.63}$$

مساوات 12.60 میں $\alpha_n = a_n$ اور $\beta_n = b_n$ لینے سے مساوات 12.63 سے حاصل کل مکعب خلل درج ذیل ملتا ہے۔

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \, \mathrm{d}x - \pi \Big[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \Big] \tag{12.64}$$

مساوات 12.64 کو مساوات 12.63 سے منفی کرتے ہوئے

$$E - E^* = \pi \Big\{ 2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^{N} [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] \Big\}$$

ملتا ہے۔چونکہ بائیں ہاتھ تمام قیمتیں مکعب ہیں جو کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا

$$E - E^* \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \geq E^*$$

ہو گا اور $E = E^*$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\alpha_0 = a_0$ ، $\cdots$ ، $\beta_N = b_N$ ہوں۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.4: (کمترین مکعب خلل)
وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر تفاعل f کے لحاظ سے F [مساوات 12.60، مقررہ N] کی کل مکعب خلل صرف اور صرف اس صورت کم سے کم ہو گی جب مساوات 12.60 میں F کے عددی سر، f کی مطابقتی فوریئر عددی سر ہوں۔ کل مکعب خلل کی کم سے کم قیمت مساوات 12.64 دے گی۔

ہم مساوات 12.64 سے دیکھتے ہیں کہ N بڑھانے سے E^* بڑھتا نہیں بلکہ گھٹ سکتا ہے۔یوں زیادہ N لینے سے f کی فوریئر تسلسل سے حاصل جزوی مجموعہ کا کل مکعب خلل کم ہو گا اور بہتر تقریب حاصل ہو گی۔

چونکہ $E^* \geq 0$ ہے اور مساوات 12.64 ہر N کے لئے درست ہے لہٰذا مساوات 12.64 سے

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جو **بیسل غیر مساوات**[31] کہلاتی[32] ہے۔مساوات 12.65 کسی بھی تفاعل f ، جس کے لئے درج بالا تکمل معین ہو، کی فوریئر عددی سر کے لئے درست ہو گا۔

سوالات

سوال 12.142: تفاعل $f(x+\pi) = f(x)$ ، $(-\pi < x < \pi)$ ، $f(x) = x,$ کے لئے ایسا $F(x)$ (مساوات 12.60) دریافت کریں کہ کل مکعب خلل (مساوات 12.61) کمترین ہو۔
جواب: $F(x) = \frac{2}{1}\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - + \cdots + \frac{2(-1)^{N+1}}{N}\sin Nx$

سوال 12.143: $N = 1, 2, 3, 4$ کے لئے سوال 12.142 میں کمتر مکعب خلل دریافت کریں۔ایسا N دریافت کریں کہ $E^* \leq 0.42$ ہو۔
جواب: $E(1) = 8.104,\ E(2) = 4.96,\ E(3) = 3.57,\ E(4) = 2.78, \quad N = 30$

سوال 12.144: ثابت کریں کہ N کو بتدریج بڑھانے سے کل کمتر مکعب خلل (مساوات 12.64) بتدریج گھٹتی ہے۔

سوال 12.145: تفاعل $f(x+\pi) = f(x)$ ، $(-\pi < x < \pi)$ ، $f(x) = x^2,$ کے لئے ایسا $F(x)$ (مساوات 12.60) دریافت کریں کہ کل مکعب خلل کمترین ہو۔کمتر مکعب خلل کو $N = 1, 2, 3, 4$ کے لئے حاصل کریں۔
جواب:

$$F = \frac{\pi^2}{3} - 4[\tfrac{1}{1^2}\cos x - \tfrac{1}{2^2}\cos 2x + \tfrac{1}{3^2}\cos 3x - + \cdots + \tfrac{(-1)^{N+1}}{N^2}\cos Nx]$$
$$E^* = \frac{2\pi^5}{5} - \pi(\tfrac{2\pi^4}{9} + 16 + 1 + \tfrac{16}{81} + \tfrac{1}{16} + \cdots)$$

---

[31] Bessel inequality

[32] یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ایسا تفاعل f کے لئے مساوات 12.65 میں برابری کی علامت لکھنا بھی درست ہو گا۔مساوات 12.65 میں برابری کی علامت استعمال کرنے سے **پارسیوال مماثل** حاصل ہو گی۔

12.9 فوریئر تکمل

دوری تفاعل پر مبنی مسئلوں کو نمٹنے کے لئے فوریئر تسلسل بہترین اوزار ہے۔ہم چاہیں گے کہ اس کو عمومی شکل دیں تا کہ یہ **غیر دوری تفاعل** کے لئے بھی کارآمد ہو۔

ہم ابتدا دو سادہ دوری تفاعل f_T سے کرتے ہیں۔ہم $T \to \infty$ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے۔اس کے بعد ہم دوری عرصہ T کی کسی بھی دوری تفاعل f_T پر غور کرتے ہوئے $T \to \infty$ کریں گے۔ان کو جواز بناتے ہوئے ہم مسئلہ فوریئر تکمل پیش کریں گے۔

مثال 12.11: درج ذیل تفاعل پر غور کریں جس کا دوری عرصہ $T > 2$ ہے (شکل 12.22)۔

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \;\;\, 1 < x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

دوری عرصہ $T \to \infty$ کرنے سے درج ذیل تفاعل $f(x)$

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} f_T(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جو غیر دوری ہے۔ □

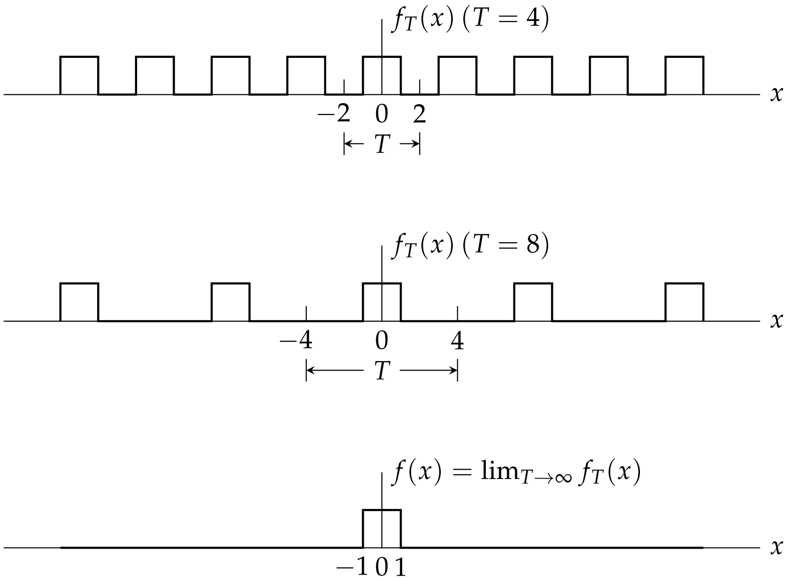
مثال 12.12: درج ذیل تفاعل کا دوری عرصہ T ہے (شکل 12.23)۔

$$f_T(x) = e^{-|x|} \quad \left(-\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2}\right), \quad f_T(x+T) = f_T(x)$$

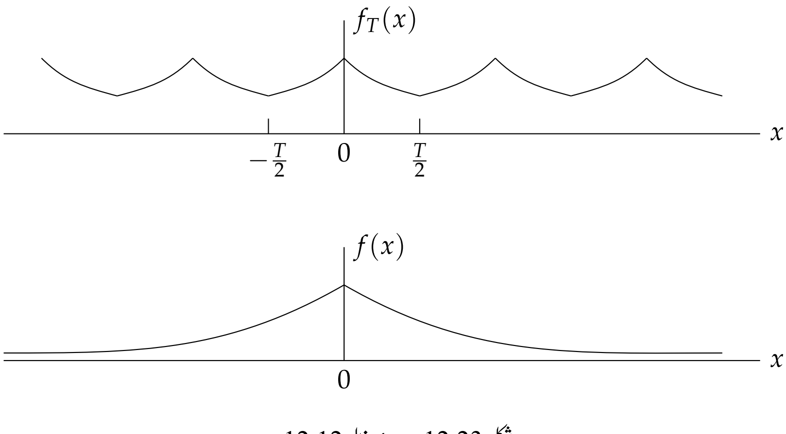
$T \to \infty$ کرنے سے تفاعل $f(x)$ حاصل ہوتا ہے جو غیر دوری ہے۔

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} f_T(x) = e^{-|x|}$$

□



شکل 12.22: برائے مثال 12.11



شکل 12.23: برائے مثال 12.12

ہم اب فوریئر تسلسل سے قابل ظاہر کسی بھی تفاعل $f_T(x)$ جس کا دوری عرصہ T ہو لیتے ہیں۔ مختصر علامت

$$w_n = \frac{2n\pi}{T}$$

استعمال کرتے ہوئے $f_T(x)$ کی فوریئر تسلسل کو

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x)$$

لکھتے ہیں۔ ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ $T \to \infty$ کرنے سے کیا ہو گا۔

ہم یولر مساوات 12.9 میں دیے گئے a_n اور b_n استعمال کرتے ہیں اور تکمل کی متغیر کو v لکھتے ہیں۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v)\, \mathrm{d}v + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos w_n x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \cos w_n v\, \mathrm{d}v \\ + \sin w_n x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \sin w_n v\, \mathrm{d}v\Big]\end{aligned}$$

اب

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

ہے جس کو ہم

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

لکھتے ہیں۔ یوں $\frac{2}{T} = \frac{\Delta w}{\pi}$ ہو گا لہٰذا یہ فوریئر تسلسل درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\begin{aligned}f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v)\, \mathrm{d}v + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos(w_n x)\, \Delta x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \cos w_n v\, \mathrm{d}v \\ + \sin(w_n x)\, \Delta w \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v) \sin w_n v\, \mathrm{d}v\Big]\end{aligned} \tag{12.66}$$

یہ صورت کسی بھی مقررہ T کے لئے درست ہے جہاں T اختیاری وسیع لیکن محدود ہے۔

ہم اب $T \to \infty$ کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ حاصل غیر دوری تفاعل

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} f_T(x)$$

x محور پر **قابل حتمی تکمل**[33] ہے یعنی درج ذیل تکمل معین ہے۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| \, \mathrm{d}x \tag{12.67}$$

اس طرح $\frac{1}{T} \to 0$ ہو گا لٰہذا مساوات 12.66 کی دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے قریب تر ہو گا۔اس کے علاوہ $\Delta w = \frac{2\pi}{T} \to 0$ ہو گا لٰہذا بظاہر یوں معلوم ہوتا ہے کہ لامتناہی تسلسل مساوات 12.66 وقفہ 0 تا ∞ پر تکمل کی صورت اختیار کرے گی جو $f(x)$ کو ظاہر کرتی ہے، یعنی:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, \mathrm{d}v + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}w \tag{12.68}$$

درج ذیل مختصر علامت متعارف کرتے ہوئے

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, \mathrm{d}v, \quad B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, \mathrm{d}v \tag{12.69}$$

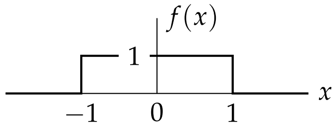
مساوات 12.68 کو

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] \, \mathrm{d}w \tag{12.70}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو $f(x)$ کا **فوریئر تکمل**[34] کہتے ہیں۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 12.66 سے مساوات 12.68 لکھنے کے لئے جو جواز پیش کیا گیا وہ نا کافی ہے۔درحقیقت فوریئر تسلسل میں $\Delta w \to 0$ لینا تکمل کی تعریف نہیں ہے لٰہذا ایسا کرنے سے مساوات 12.66 ہر گز حاصل نہیں ہو گا۔البتہ اس پورے عمل سے گزرنے کے بعد فوریئر تکمل بظاہر معقول معلوم ہوتا ہے۔فوریئر تکمل کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔ مساوات 12.70 درست ہونے کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتی ہے۔

---
[33] absolutely integrable
[34] Fourier integral



شکل 12.24: واحد دھڑکن (مثال 12.13)

مسئلہ 12.5: (فوریئر تکمل)
اگر $f(x)$ تمام محدود قطعات پر ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہو اور اس کا ہر نقطے پر دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق (حصہ 12.2) پائے جاتے ہوں اور مساوات 12.67 میں دیا گیا تکمل معین ہو تب $f(x)$ کو فوریئر تکمل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جس نقطے پر $f(x)$ غیر استمراری ہو وہاں فوریئر تکمل کی قیمت اس نقطے پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد (حصہ 6.1) کی اوسط کے برابر ہو گی۔

مثال 12.13: واحد دھڑکن، سائن تکمل
درج ذیل تفاعل کی فوریئر تکمل حاصل کریں (شکل 12.24)۔

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|<1\end{cases}$$

حل: مساوات 12.69 سے

$$A(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv \,\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}\cos wv\,\mathrm{d}v=\left.\frac{\sin wv}{w}\right|_{-1}^{1}=\frac{2\sin w}{w}$$
$$B(w)=\int_{-1}^{1}\sin wv\,\mathrm{d}v=0$$

ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.70 سے درکار فوریئر تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx\,\sin w}{w}\,\mathrm{d}w \tag{12.71}$$

نقطہ $x=1$ پر $f(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد کا اوسط $\frac{(1+0)}{2}=\frac{1}{2}$ ہے۔ یوں مساوات 12.71

اور مسئلہ 12.5 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx \ \sin w}{w} \, \mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \le |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \tag{12.72}$$

اس تکمل کو **ڈرشلے غیر استمراری جزو**[35] کہتے[36] ہیں۔آئیں $x = 0$ کی صورت پر غور کرتے ہیں جو خاص طور پر زیادہ اہم ہے۔مساوات 12.72 میں $x = 0$ پر کرنے سے

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w} \, \mathrm{d}w = \frac{\pi}{2} \tag{12.73}$$

ملتا ہے جو درج ذیل تکمل جس کو **سائن تکمل**[37] کہتے ہیں

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w} \, \mathrm{d}w \tag{12.74}$$

کی $z \to \infty$ پر حد ہے جہاں z حقیقی ہے۔تفاعل $\operatorname{Si}(z)$ کو شکل 12.25 میں دکھایا گیا ہے۔

فوریئر تسلسل کی صورت میں جزوی مجموعوں کی ترسیم اس دوری تفاعل کی تقریب ہوتی ہے جس کو یہ تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ فوریئر تکمل (مساوات 12.71) کی صورت میں تکمل کی بالائی حد ∞ کی جگہ عدد a لیتے ہوئے تفاعل کی تقریب حاصل کی جاتی ہیں۔یوں درج ذیل تکمل

$$\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} \, \mathrm{d}w \tag{12.75}$$

مساوات 12.71 اور تفاعل $f(x)$ کی تقریب ہے۔مساوات 12.75 کی تکمل میں غیر استمراری نقطہ کے قریب ارتعاش پایا جاتا ہے جس کو شکل 12.26 میں دکھایا گیا ہے۔

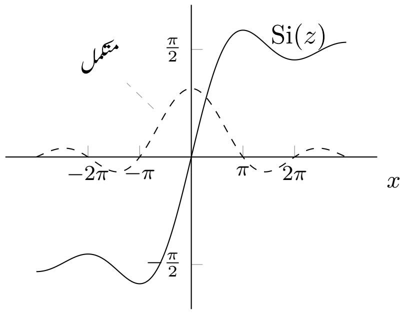
آپ نے شکل 12.3 میں دکھا کہ فوریئر تسلسل کی زیادہ ارکان لینے سے اصل تفاعل $f(x)$ پر زیادہ بہتر بیٹھتی منحنی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح جیسا شکل 12.26 میں دکھایا گیا ہے، مساوات 12.75 کی تکمل کی بالائی حد a کی قیمت زیادہ لینے سے اصل تفاعل $f(x)$ کی زیادہ یکساں شکل حاصل ہوتی ہے۔یہاں تکمل (مساوات 12.75) کو اعدادی طریقہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

---

[35] Dirichlet's discontinuous factor

[36] جرمن ریاضی دان یوہان پیٹر گستاف لیژون ڈرشلے [1805-1859]

[37] sine integral



شکل 12.25: سائن تکمل

اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ a کی قیمت لامتناہی کرنے سے یہ ارتعاش ختم ہو گی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے بلکہ a کی قیمت بڑھانے سے ارتعاش نقطہ $x = \mp 1$ کے مزید قریب ہوتی ہیں۔ اس غیر متوقع کردار جو فوریئر تسلسل میں بھی پایا جاتا ہے کو **مظہر گبس**[38] کہتے ہیں۔ مظہر گبس[39] کو سمجھنے کی خاطر ضمیمہ ب میں مساوات 11.ب استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.75 کو

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(w+wx)}{w}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(w-wx)}{w}\,\mathrm{d}w$$

لکھتے ہیں۔ دائیں ہاتھ پہلی تکمل میں $w + wx = t$ لیتے ہیں۔یوں $\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ اور $0 \le w \le a$ کا مطابقتی وقفہ $0 \le t \le (x+1)a$ ہو گا۔آخری تکمل میں $w - wx = t$ لیتے ہیں۔یوں $\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ اور $0 \le w \le a$ کا مطابقتی وقفہ $0 \le t \le (x-1)a$ ہو گا۔چونکہ $\sin(-t) = -\sin t$ ہوتا ہے لہٰذا

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{\pi}\int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

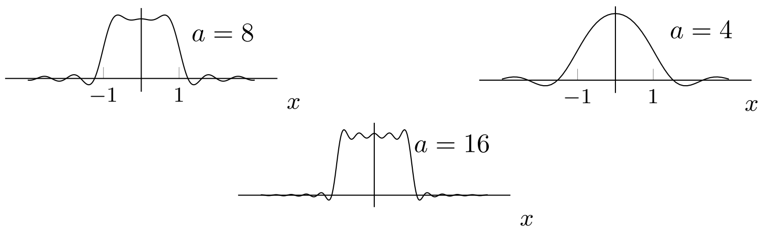
لکھا جائے گا۔یوں مساوات 12.74 کی مدد سے

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Si} a[x+1] - \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(a[x-1])$$

حاصل ہو گا لہٰذا شکل 12.26 میں ارتعاش شکل 12.25 کی وجہ سے پائی جاتی ہیں۔حد a بڑھانا، محور کی ناپ تبدیل کرنے کی مترادف ہے جس سے ارتعاش محور غیر استمراری نقطہ کے زیادہ قریب منتقل ہوتی ہیں۔ □

[38] Gibbs phenomenon

[39] جرمن ریاضی دان جوشیا ولرڈ گبس [1839-1903]



شکل 12.26: مساوات 12.75 کی تکمل میں $a = 4$، 8 اور 16 لیا گیا ہے

جفت اور طاق تفاعل کی فوریئر تکمل

یہ جاننا سود مند ثابت ہوتا ہے کہ ایسا جفت یا طاق تفاعل جس کو فوریئر تکمل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کا فوریئر تکمل عمومی تفاعل کی فوریئر تکمل سے نسبتاً آسان ہو گا۔ یہ حقیقت گزشتہ کلیات سے اخذ ہوتا ہے۔

جفت تفاعل $f(x)$ کی صورت میں مساوات 12.69 کے تحت $B(w) = 0$ اور

$$A(w) = 2\int_0^\infty f(v)\cos wv \,\mathrm{d}v \tag{12.76}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 12.70 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)\cos wx \,\mathrm{d}w \qquad (\text{جفت } f) \tag{12.77}$$

اسی طرح طاق تفاعل $f(x)$ کی صورت میں مساوات 12.69 کے تحت $A(w) = 0$ اور

$$B(w) = 2\int_0^\infty f(v)\sin wv \,\mathrm{d}v \tag{12.78}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 12.70 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(w)\sin wx \,\mathrm{d}w \qquad (\text{طاق } f) \tag{12.79}$$

یہ تسہیل جفت اور طاق تفاعل کی فوریئر تسلسل کی تسہیل کی طرح ہے۔

تخمینہ تکمل

فوریئر تکمل کی مدد سے کئی تکمل کی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔ہم اس ترکیب کو درج ذیل مثال سے سمجھاتے ہیں۔

مثال 12.14: لاپلاس تکمل

درج ذیل تفاعل کی فوریئر تکمل وقفہ $x > 0$ پر حاصل کریں۔(شکل 12.23 دیکھیں جہاں $k = 1$ ہے۔)

$$f(x) = e^{-kx}, \quad f(-x) = f(x)$$

حل: چونکہ f جفت ہے لہٰذا مساوات 12.76 سے

$$A(w) = 2\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv \, \mathrm{d}v$$

حاصل ہو گا۔تکمل بالحصص لیتے ہیں۔

$$\int e^{-kv}\cos wv \, \mathrm{d}v = -\frac{k}{k^2+w^2}e^{-kv}\Big(-\frac{w}{k}\sin wv + \cos wv\Big)$$

جب $v = 0$ ہو تب دایاں ہاتھ $-\frac{k}{k^2+w^2}$ کے برابر ہو گا جبکہ $v \to \infty$ پر e^{-kv} جزو کی بنا یہ صفر کے قریب تر ہو گا۔یوں

$$A(w) = \frac{2k}{k^2+w^2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 12.77 میں پر کرتے ہوئے دیے تفاعل کی فوریئر تکمل لکھتے ہیں۔

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,\mathrm{d}w \qquad (x > 0,\, k > 0)$$

اس سے

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \qquad (x > 0,\, k > 0) \tag{12.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 12.79 استعمال کرتے ہوئے وقفہ $x > 0$ پر طاق تفاعل

$$f(x) = e^{-kx}, \quad f(-x) = -f(x), \qquad (k > 0)$$

کی فوریئر تکمل سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{\pi}{2}e^{-kx} \qquad (x > 0, k > 0) \tag{12.81}$$

مساوات 12.80 اور مساوات 12.81 **لاپلاس تکملات**[40] کہلاتے ہیں۔ □

---

[40] Laplace integrals

سوالات

سوال 12.146 تا سوال 12.152 میں دیے تعلق کو فوریئر تکمل کی مدد سے ثابت کریں۔

سوال 12.146:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx + w \sin wx}{1+w^2} \, \mathrm{d}w = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

سوال 12.147:

$$\int_0^\infty \frac{w^3 \sin wx}{w^4+4} \, \mathrm{d}w = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \qquad (x > 0)$$

سوال 12.148:

$$\int_0^\infty \frac{\sin w\pi \sin wx}{1-w^2} \, \mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

سوال 12.149:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos w\pi}{w} \sin wx \, \mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

سوال 12.150:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2} \, \mathrm{d}w = \frac{\pi}{2} e^{-x} \qquad (x > 0)$$

سوال 12.151:

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w} \, \mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

سوال 12.152:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{w\pi}{2}\cos wx}{1-w^2}\,\mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \lvert x\rvert > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

سوال 12.153 تا سوال 12.158 میں $f(x)$ کو مساوات 12.77 کی روپ میں لکھیں۔

سوال 12.153:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx\;\mathrm{d}w$

سوال 12.154:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\frac{\sin w}{w} - \frac{2\sin w}{w^3} + \frac{2\cos w}{w^2}]\cos wx\,\mathrm{d}w$

سوال 12.155:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\frac{\sin w}{w} - \frac{2\sin 2w}{w} + \frac{2\sin 3w}{w}]\cos wx\;\mathrm{d}w$

سوال 12.156:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2}\cos wx\;\mathrm{d}w$

سوال 12.157:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & 0<x<2\\ 0 & x>1\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2w-w\sin 2w}{w^2}\cos wx\,\mathrm{d}w$

سوال 12.158:

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x) & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos w\pi}{1-w^2}\cos wx\,\mathrm{d}w$

سوال 12.159 تا سوال 12.160 میں دیے گئے تعلق کو ثابت کریں جہاں $f(x)$ کی روپ مساوات 12.77 ہے۔

سوال 12.159: $f(ax)=\frac{1}{\pi a}\int_0^{\infty}A(\frac{w}{a})\cos wx\,\mathrm{d}w,\quad (a>0)$
جواب: مساوات 12.76 سے $A(\frac{w}{a})=2\int_0^{\infty}f(v)\cos\frac{wv}{a}\,\mathrm{d}v$ لکھا جاتا ہے جبکہ $f(ax)$ کے لئے $A^*=2\int_0^{\infty}f(at)\cos wt\,\mathrm{d}t$ ہو گا جس میں $\tau=at$ لیتے ہوئے $A^*=2\int_0^{\infty}f(\tau)\cos\frac{w\tau}{a}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\tau$ ملتا ہے جن سے $A^*=\frac{1}{a}A(\frac{w}{a})$ حاصل ہوتا ہے۔یوں ثابت ہوا کہ $f(ax)=\frac{1}{\pi a}\int_0^{\infty}A(\frac{w}{a})\cos wx\,\mathrm{d}w$

سوال 12.160: $x^2f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A^*(w)\cos wx\,\mathrm{d}w,\quad A^*=-\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}w^2}$
جواب: مساوات 12.76 کا دو درجی تفرق لے کر $\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}w^2}=-2\int_0^{\infty}f^*(v)\cos wv\,\mathrm{d}v,\quad f^*(v)=$ $v^2f(v)$ سے ثبوت حاصل ہو گا۔

سوال 12.161: درج بالا کلیہ (سوال 12.160) استعمال کرتے ہوئے سوال 12.153 کے نتیجہ سے سوال 12.154 حل کریں۔

سوال 12.162: ثابت کریں $xf(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}B^*(w)\sin wx\,\mathrm{d}w$ جہاں $B^*=-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}w}$ ہے اور A کو مساوات 12.76 ظاہر کرتی ہے۔

سوال 12.163: تفاعل $f(x)=1\quad(0<x<a)$ کے لئے سوال 12.162 کے کلیہ کی تصدیق کریں۔

سوال 12.164: تصدیق کریں کہ $f(x)=1\quad(0<x<\infty)$ کو فوریئر تکمل سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوال 12.165: (فوریئر تکمل کی مخلوط صورت، فوریئر بدل)
ضمیمہ ب کی مساوات 6.ب استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.70 کو

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx - wv)\,\mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}w \tag{12.82}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ثابت کریں کہ مساوات 12.82 میں $-\infty$ تا ∞ تکمل متغیرہ w کا جفت تفاعل ہے لہٰذا مساوات 12.82 کو

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx - wv)\,\mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}w \tag{12.83}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $\sin(wx - wv)$ متغیرہ w کا طاق تفاعل ہے لہٰذا درج ذیل ثابت کرتے ہوئے

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin(wx - wv)\,\mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}w = 0 \tag{12.84}$$

مساوات 12.83 اور مساوات 12.84 کا مجموعہ لے کر فوریئر تکمل کی مخلوط صورت

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{iw(x-v)}\,\mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}w \tag{12.85}$$

حاصل کریں۔مساوات 12.85 سے

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty C(w)e^{iwx}\,\mathrm{d}w \tag{12.86}$$

حاصل کریں جہاں

$$C(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{-iwv}\,\mathrm{d}v \tag{12.87}$$

ہے۔مساوات 12.86 تفاعل $C(w)$ کا **الٹ فوریئر بدل**[41] دیتی ہے جبکہ مساوات 12.87 تفاعل $f(x)$ کا **فوریئر بدل**[42] دیتی ہے۔

[41] inverse Fourier transform
[42] Fourier transform

باب 13

جزوی تفرقی مساوات

مختلف طبعی اور جیومیٹریائی مسائل جہاں دو یا دو سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل پایا جاتے ہوں، جزوی تفرقی مساوات کو جنم دیتے ہیں۔یہ متغیرات وقت اور خلا کے محدد ہو سکتے ہیں۔اس باب میں انجینئری نقطہ نظر سے اہم مسائل پر غور کیا جائے گا۔ان مساوات کو طبعی نظام کی نمونہ کے طور پر حاصل کرنے کے بعد ابتدائی قیمت اور سرحدی قیمت مسائل حل کرنے کی تراکیب پر غور کیا جائے گا، یعنی ان مساوات کو دی گئی طبعی شرائط کے مطابق حل کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کو لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

13.1 بنیادی تصورات

دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کی نا معلوم تفاعل اور اس کی ایک یا ایک سے زیادہ تفرقات پر مبنی مساوات کو **جزوی تفرقی مساوات**[1] کہتے ہیں۔ بلند تر تفرق کا درجہ مساوات کا **درجہ**[2] کہلاتا ہے۔

سادہ تفرقی مساوات کی طرح اگر جزوی تفرقی مساوات میں تابع متغیر (نا معلوم تفاعل) اور اس کے تفرق کی طاقت اکائی ہو تب یہ تفرقی مساوات **خطی**[3] کہلائے گی۔اگر مساوات کا ہر رکن، تابع متغیرہ یا تابع متغیرہ کی تفرقات میں سے کوئی ایک تفرق ہو تب اس کو **ہم جنسی**[4] کہیں گے ورنہ یہ **غیر ہم جنسی**[5] کہلائے گی۔

[1] partial differential equation
[2] order
[3] linear
[4] homogeneous
[5] non homogeneous

مثال 13.1: اہم خطی دو درجی جزوی تفرقی مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{یک بعدی مساوات موج} \tag{13.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{یک بعدی مساوات حرارت} \tag{13.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{دو بعدی لاپلاس مساوات} \tag{13.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad \text{دو بعدی پوئسن مساوات} \tag{13.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{تین بعدی لاپلاس مساوات} \tag{13.5}$$

یہاں c مستقل ہے، t وقت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ x ، y ، z کارتیسی محدد ہیں۔مساوات 13.4 میں اگر $f(x, y) \neq 0$ ہو تب یہ غیر ہم جنسی ہو گی۔باقی تمام مساوات ہم جنسی ہیں۔ □

فضا میں غیر تابع متغیرہ کی کسی خطہ R میں جزوی تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو خود اور جس کے وہ تمام تفرقات جو اس مساوات میں پائے جاتے ہوں کسی ایسے خطے میں موجود ہوں جس کا R حصہ ہو اور یہ تمام مل کر پورے خطہ R میں اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔(عموماً R کی سرحد پر اس تفاعل کا استمراری ہونا اور درکار تفرقات کا خطہ کے اندرون معین ہونے کے ساتھ ساتھ خطہ کے اندرون مساوات کو مطمئن کرنا درکار ہو گا۔)

عموماً جزوی تفرقی مساوات کے تمام حل کی تعداد بہت زیادہ ہو گی۔ مثلاً جیسا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل

$$u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2) \tag{13.6}$$

جو ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں مساوات 13.3 کے حل ہیں۔ہم بعد میں دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کا یکتا حل حاصل کرنے کی خاطر مزید معلومات درکار ہو گی جو طبعی حالت سے حاصل ہو گی۔مثال کے طور پر کبھی کبھار سرحد کے کسی حصے پر درکار حل کی قیمت معلوم ہو گی (**سرحدی شرائط**[6]) جب کہ بعض اوقات ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر حل کی قیمت معلوم ہو گی (**ابتدائی شرائط**[7])۔

---

[6] boundary conditions
[7] initial conditions

ہم جانتے ہیں کہ اگر سادہ تفرقی مساوات خطی اور ہم جنسی ہو تب اس کی معلوم حل سے مزید حل بذریعہ خطی میل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ جزوی تفرقی مساوات کے لئے بھی ایسا کرنا ممکن ہے جیسا درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 13.1: بنیادی مسئلہ
اگر کسی خطہ R میں خطی ہم جنسی جزوی تفرقی مساوات کے دو حل u_1 اور u_2 ہوں تب

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

جہاں c_1 اور c_2 کوئی مستقل ہیں، بھی اس خطے میں اس مساوات کا حل ہو گا۔

اس مسئلے کا ثبوت نہایت آسان اور مسئلہ 2.1 کی ثبوت سے ملتا جلتا ہے لہٰذا یہ آپ پر چھوڑا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 13.1: مسئلہ 13.1 کو دو اور تین متغیرات کی دو درجی جزوی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔

سوال 13.2: تصدیق کریں کہ مساوات 13.6 میں دیے گئے تمام تفاعل مساوات 13.3 کے حل ہیں۔
جواب: $u = x^2 + y^2$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$ ہو گا۔انہیں مساوت 13.3 میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ ملتا ہے۔یوں u تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3 تا سوال 13.8 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل لاپلاس مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3: $u = 2xy$

سوال 13.4: $u = e^x \sin y$

سوال 13.5: $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

سوال 13.6: $u = x^3 - 3xy^2$

سوال 13.7: $u = \sin x \sinh y$

سوال 13.8: $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

سوال 13.9 تا سوال 13.11 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل حراری مساوات 13.2 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.9: $u = e^{-2t} \cos x$

سوال 13.10: $u = e^{-t} \sin 3x$

سوال 13.11: $u = e^{-4t} \cos \omega x$

سوال 13.12 تا سوال 13.14 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.12: $u = x^2 + 4t^2$

سوال 13.13: $u = x^3 + 3xt^2$

سوال 13.14: $u = \sin \omega ct \sin \omega x$

سوال 13.15: تصدیق کریں کہ $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ تین بعدی لاپلاس مساوات 13.5 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.16: تصدیق کریں کہ $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ دو بعدی لاپلاس مساوات 13.3 کا حل ہے۔دی گئی سرحدی شرائط کے تحت دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر $u = 0$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ پر $u = 5$ ہے۔مستقل a اور b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ u ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرے۔حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.17: تصدیق کریں کہ $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$ موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔یہاں u اور v دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل ہیں۔

اگر جزوی تفرقی مساوات میں صرف ایک متغیر کے ساتھ تفرقات پائے جاتے ہوں تب اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کر کے حل کیا جا سکتا ہے جہاں باقی متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔سوال 13.18 تا سوال 13.21 کو حل کریں جہاں u کے متغیرات x اور y ہیں۔

سوال 13.18: $u_{xx} - u = 0$
جواب: $u = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}$

سوال 13.19: $u_y + yu = 0$
جواب: $u = c(x)e^{-\frac{y^2}{2}}$

سوال 13.20: $u_{yy} + 9u = 0$
جواب: $u = c_1(y)\cos 3x + c_2(y)\sin 3x$

سوال 13.21: $u_x + 2xyu = 0$
جواب: $u = c(y)e^{-x^2 y}$

سوال 13.22 تا سوال 13.25 میں $u_x = p$ لیتے ہوئے حل تلاش کریں۔

سوال 13.22: $u_{xy} = 0$
جواب: $u = v(x) + w(y)$

سوال 13.23: $u_{xy} = u_x$

سوال 13.24: $u_{xy} + u_x = 0$
جواب: $u = v(x)e^{-y} + w(y)$

سوال 13.25: $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$

سوال 13.26 تا سوال 13.29 میں دیے گئے تفرقی مساوات کی نظام کے حل تلاش کریں۔

سوال 13.26: $u_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0$
جواب: $u = axy + bx + cy + k$

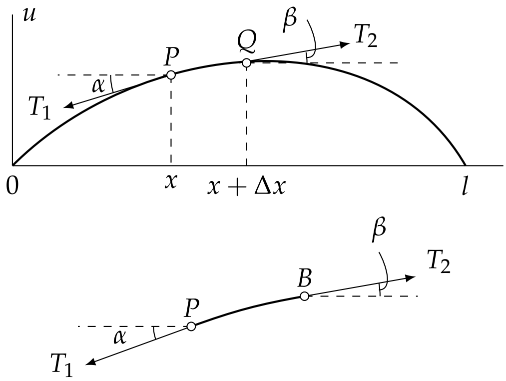
سوال 13.27: $u_x = 0, \quad u_y = 0$

سوال 13.28: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0$
جواب: $u = cx + g(y)$

سوال 13.29: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = 0$

سوال 13.30: تصدیق کریں کہ اگر سطح $z = z(x,y)$ پر منحنی $z = c$ محور x کے متوازی سیدھے خطوط ہوں، جہاں c مستقل ہے، تب z تفرقی مساوات $z_x = 0$ کا حل ہو گا۔ایسی ایک مثال بھی پیش کریں۔

سوال 13.31: تصدیق کریں کہ $yz_x - xz_y = 0$ کا حل $z = z(x,y)$ سطح گردش ہے۔اس کی مثال پیش کریں۔ (اشارہ: $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ لے کر تفرقی مساوات کو $z_\theta = 0$ میں تبدیل کریں۔)



شکل 13.1: ارتعاش پذیر تار

13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج

ایک لچک دار تار کو لمبائی l تک کھینچ کر سروں سے باندھا جاتا ہے۔ساکن تار کو x محور پر تصور کریں۔اس تار کو کسی نقطہ یا نقاط سے کھینچ کر لمحہ $t = 0$ پر چھوڑا دیا جاتا ہے تاکہ یہ ارتعاش کر سکے۔ہم تار کی ارتعاش معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی لمحہ $t > 0$ پر ساکن حالت سے تار کی نقطہ x کا انحراف $u(x,t)$ جاننا چاہتے ہیں (شکل 13.1)۔ کسی بھی نظام کا ریاضی نمونہ اخذ کرتے وقت کئی تریسلی مفروضے فرض کیے جاتے ہیں تاکہ حاصل مساوات ضرورت سے زیادہ پیچیدہ نہ ہوں۔ہم سادہ تفرقی مساوات کی طرح جزوی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہوئے بھی ایسا کریں گے۔

موجودہ مسئلے میں ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

(الف) تار کی کمیت فی اکائی لمبائی یکساں ہے (ہم جنسی تار)۔ تار مکمل طور پر لچکدار ہے اور مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے۔

(ب) تار کو اتنا تان کر باندھا گیا ہے کہ اس میں تناو، ثقلی قوت سے بہت زیادہ ہو۔یوں ثقلی قوت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

(پ) تار سیدھی کھڑی سطح میں حرکت کرتا ہے۔تار پر کوئی بھی نقطہ اپنے ساکن مقام سے بہت کم انحراف کرتا ہے لہٰذا ہر نقطے پر تار کی انحراف اور ڈھلوان کی حتمی قیمتیں قلیل ہوں گی۔

ہم توقع کر سکتے ہیں کہ یوں حاصل جزوی تفرقی مساوات کا حل $u(x,t)$ ، "غیر کامل" ہم جنسی تار جس میں ثقلی میدان سے بہت زیادہ تناو ہو کا صحیح نقش پیش کرے گا۔

مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر غور کرتے ہیں جس میں تناو T پایا جاتا ہے (شکل 13.1)۔ چونکہ مڑنے کے خلاف تار مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے لہٰذا ہر نقطے پر تار میں تناو اس نقطے پر تار کا مماسی ہو گا۔ فرض کریں کہ تار کے ٹکڑے کی سروں P اور Q پر تناو T_1 اور T_2 ہے۔ چونکہ تار افقی حرکت نہیں کرتا ہے لہٰذا اس ٹکڑے پر تناو کا کل افقی جزو صفر کے برابر ہو گا۔ یوں شکل 13.1 کو دیکھ کر

$$T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0$$

یا

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{مستقل} \tag{13.7}$$

لکھا جا سکتا ہے یعنی ہر ایسے ٹکڑے پر بائیں اور دائیں رخ یکساں (مستقل T) تناو ہو گا۔ انتصابی رخ میں T_1 اور T_2 کے اجزاء $-T_1 \sin\alpha$ اور $T_2 \sin\beta$ ہیں جہاں اوپر رخ تناو کو مثبت تصور کیا گیا ہے۔ نیوٹن کی دوسری قانون کے تحت ان دو قوتوں کا مجموعہ تار کے ٹکڑے کی کمیت $\rho\Delta x$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا جہاں اسراع، x اور $x+\Delta x$ کے مابین کسی نقطے کی اسراع ہو گی۔ تار کی کمیت فی اکائی لمبائی ρ ہے جبکہ تار کے ٹکڑے کی لمبائی Δx ہے۔ یوں

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13.8}$$

ہو گا۔ اس کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_2 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13.9}$$

آپ تسلی کر لیں کہ چونکہ مساوات 13.7 میں $T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$ ہے لہٰذا مساوات 13.8 کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہوئے کہیں $T_2 \cos\beta$ ، کہیں $T_1 \cos\alpha$ اور کہیں T سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

اب $\tan\beta$ اور $\tan\alpha$ تار کی x اور $x+\Delta x$ پر مماس ہے یعنی

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \quad \text{اور} \quad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

جہاں جزوی تفرق اس لئے استعمال کیے گئے ہیں کہ u متغیرہ t کا بھی تابع ہے۔یوں مساوات 13.9 کو Δx سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{\Delta x}\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}\Big]=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں Δx کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{13.10}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو یک بعدی **مساوات موج**[8] کہتے ہیں۔ مساوات 13.10 ہمارے مسئلے کی درکار جزوی تفرقی مساوات ہے جو ہم جنسی اور دو درجی ہے۔مساوات میں مستقل $\frac{T}{\rho}$ کو c کی بجائے c^2 سے ظاہر کیا گیا ہے تا کہ واضح رہے کہ یہ مثبت مستقل ہے۔اس مساوات کا حل اگلے حصے میں حاصل کیا جائے گا۔

13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ لچک دار تار کی ارتعاش کو جزوی تفرقی مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad \text{مساوات موج} \tag{13.11}$$

بیان کرتی ہے جہاں $u(x,t)$ تار کی انحراف ہے۔تار کی حرکت جاننے کی خاطر اس مساوات کا حل درکار ہو گا بلکہ ہمیں مساوات 13.11 کا ایسا حل $u(x,t)$ درکار ہے جو نظام پر لاگو شرائط کو بھی مطمئن کرے۔چونکہ تار کے دونوں سر غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا تمام t کے لئے $x=0$ اور $x=l$ پر سرحدی شرائط

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0 \tag{13.12}$$

لاگو ہیں۔تار کی حرکت ابتدائی انحراف (لمحہ $t=0$ پر انحراف) اور ابتدائی رفتار (لمحہ $t=0$ پر رفتار) پر منحصر ہو گی۔ابتدائی انحراف کو $f(x)$ اور ابتدائی رفتار کو $g(x)$ سے ظاہر کرتے ہوئے **ابتدائی شرائط**[9]

$$u(x,0)=f(x) \tag{13.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) \tag{13.14}$$

---

[8] one dimensional wave equation
[9] initial conditions

لکھی جائیں گی۔ ہمیں اب مساوات 13.12 کا ایسا حل چاہیے جو سرحدی شرائط مساوات اور ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرے۔ ہم درج ذیل اقدام کے ذریعہ ایسا حل تلاش کریں گے۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے ہم جزوی تفرقی مساوات سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔
دوسرا قدم۔ ہم ان سادہ تفرقی مساوات کے ایسے حل تلاش کریں گے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔
تیسرا قدم۔ حاصل حل سے ایسے حل حاصل کیے جائیں گے جو ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتے ہوں۔

ان اقدام کی تفصیل درج ذیل ہے۔

پہلا قدم۔ ترکیب ضرب مساوات 13.11 کے حل دو عدد تفاعل کا حاصل ضرب

$$u(x,t)=F(x)G(t) \tag{13.15}$$

کی روپ میں دیتا ہے جہاں ہر ایک تفاعل صرف ایک متغیرہ x یا t کا تابع ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں اس ترکیب کے کئی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مساوات 13.15 کے تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F\ddot{G} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''G$$

ملتا ہے جہاں ($'$) سے مراد x کے ساتھ تفرق اور $(\cdot)$ سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔انہیں مساوات 13.11 میں پر کر کے

$$F\ddot{G}=c^2F''G$$

دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا دایاں ہاتھ صرف متغیرہ x پر منحصر ہے جبکہ اس کا بایاں ہاتھ صرف متغیرہ t پر منحصر ہے۔اب t تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن اس مساوات کے تحت دونوں اطراف برابر ہیں اور دایاں ہاتھ t تبدیل کرنے سے ہر گز تبدیل نہیں ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ t تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔اسی طرح x تبدیل کرنے سے صرف دایاں ہاتھ کا تبدیل ہونا ممکن ہے لیکن

دونوں اطراف برابر ہیں اور x کی تبدیلی ہے بایاں ہاتھ ہر گز تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔یوں اس مساوات کے دونوں اطراف غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا انہیں مستقل k کے برابر لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k$$

جس سے درج ذیل دو عدد مساوات علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہے جہاں k نا معلوم مستقل ہے۔

$$F''-kF=0 \tag{13.16}$$

$$\ddot{G}-c^2kG=0 \tag{13.17}$$

دوسرا قدم۔ ہم مساوات 13.16 اور مساوات 13.17 کے حل F اور G حاصل کرتے ہوئے ایسا $u=FG$ دریافت کرتے ہیں جو تمام t کے لئے سرحدی شرائط مساوات 13.12 کو مطمئن کرتا ہو یعنی:

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0,\quad u(l,t)=F(l)G(t)=0$$

اب اگر درج بالا میں $G\equiv 0$ ہو تب $u\equiv 0$ ہو گا جس میں ہم کوئی دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہٰذا $G\neq 0$ ہو گا۔یوں درج بالا سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\text{(الف)}\quad F(0)=0,\qquad \text{(ب)}\quad F(l)=0 \tag{13.18}$$

اگر مساوات 13.16 میں $k=0$ ہو تب اس مساوات کا عمومی حل $F=ax+b$ ہو گا جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $a=0$ ، $b-0$ یعنی $F\equiv 0$ یا $u\equiv$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔مثبت $k=\mu^2$ کے لئے مساوات 13.16 کا عمومی حل

$$F=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x}$$

ہے جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $A=0$ ، $B=0$ یعنی $F\equiv 0$ یا $u\equiv=0$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔یوں ہمارے پاس منفی $k=-p^2$ لینا رہ جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.16 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$F''+p^2F=0$$

اس کا عمومی حل

$$F(x)=A\cos px+B\sin px$$

ہے جو مساوات 13.18-الف کی مدد سے

$$F(0) = A = 0$$

لہٰذا $F = B \sin px$ ہو گا جو مساوات 13.18-ب کے ساتھ مل کر

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

دیتی ہے۔اب اگر $B = 0$ ہو تب $F \equiv 0$ یعنی $u \equiv 0$ ہو گا جو غیر دلچسپ حل ہے لہٰذا $B \neq 0$ ہے۔اس طرح $\sin pl = 0$ ہو گا۔ہم جانتے ہیں کہ $\sin n\pi = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یوں درج ذیل ملتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

$$pl = n\pi \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l} \tag{13.19}$$

ہم $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے لامحدود تعداد کے حل $F(x) = F_n(x)$ یعنی

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.20}$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.18 میں دیے گئے سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔چونکہ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ہوتا ہے لہٰذا منفی عدد صحیح $n = -1, -2, \ldots$ لینے سے یہی حل منفی علامت کے ساتھ دوبارہ ملتے ہیں۔

اب مساوات 13.19 کے تحت k کی قیمت صرف $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{l})^2$ ممکن ہے۔ k کی ان قیمتوں کے ساتھ مساوات 13.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

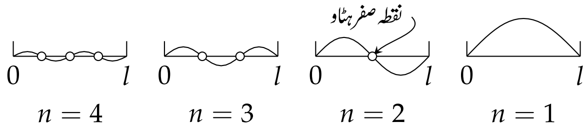
$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t$$

ہے۔یوں تفاعل $u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t)$

$$u_n(x,t) = (B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{13.21}$$



شکل 13.2: تار کے قائمہ انداز اور نقطہ صفر ہٹاو۔

مساوات 13.17 کے ایسے حل ہیں جو مساوات 13.18 میں دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ان تفاعل کو ارتعاش پذیر تار کے **آئگنی تفاعل**[10] یا **امتیازی تفاعل**[11] کہتے ہیں جبکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ کی قیمتوں کو ارتعاش پذیر تار کے **آئگنی اقدار**[12] یا **امتیازی اقدار**[13] کہتے ہیں۔ مزید $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ کا **سلسلہ طیف**[14] کہلاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک u_n ایک مخصوص ہارمونی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے جس کی تعدد $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2l}$ چکر فی اکائی وقت ہے۔ اس حرکت کو تار کی n ویں **قائمہ انداز**[15] کہتے ہیں۔ پہلا قائمہ انداز جس کا $n = 1$ ہو گا **بنیادی انداز**[16] کہلاتا ہے جبکہ باقی کو n ویں **ہارمونی انداز**[17] کہتے ہیں۔چونکہ مساوات 13.21 میں

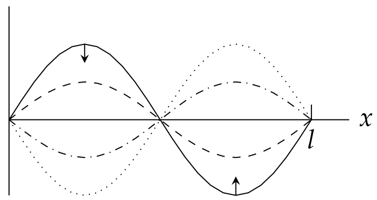
$$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad \implies \quad x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}l$$

ہے لہٰذا n ویں قائمہ انداز کے $n-1$ **نقطہ صفر ہٹاو**[18] پائے جائیں گے۔ ان نقطوں پر تار ساکن رہتی ہے (شکل 13.2)۔

شکل 13.3 میں دوسرا قائمہ انداز مختلف لمحات t پر دکھایا گیا ہے۔کسی بھی لمحہ پر تار کی شکل سائن تفاعل کی ہو گی۔جب تار کا بایاں آدھا حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت تار کا دایاں آدھا حصہ اوپر کو حرکت کرے گا۔اسی طرح جب بایاں حصہ اوپر کو حرکت کرتا ہے اس وقت دایاں حصہ نیچے کو حرکت کرتا ہے۔تار کا درمیانہ نقطہ حرکت نہیں کرتا ہے لہٰذا یہ نقطہ صفر ہٹاو ہے۔باقی انداز بھی اسی طرح کی خاصیت رکھتے ہیں۔

تیسرا قدم۔ ظاہر ہے کہ ایک عدد حل $u_n(x,t)$ عموماً ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے۔اب چونکہ مساوات 13.11 خطی اور ہم جنسی ہے لہٰذا بنیادی مسئلہ 13.1 کے تحت مساوات

eigenfunctions[10]
characteristic functions[11]
eigenvalues[12]
characteristic values[13]
spectrum[14]
normal mode[15]
fundamental mode[16]
harmonics[17]
node[18]



شکل 13.3: مختلف t پر دوسرا قائمہ انداز

13.11 کی محدود تعداد کے حلوں u_n کا مجموعہ بھی مساوات 13.11 کا حل ہو گا۔ اس طرح ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم لامتناہی تسلسل

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{13.22}$$

پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 13.22 اور ابتدائی شرط مساوات 13.13 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x) \tag{13.23}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.13 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x,0)$ تفاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n=1,2,\cdots \tag{13.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.22 کا t کے ساتھ تفرق لے کر اور ابتدائی شرط مساوات 13.14 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}&=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_{t=0}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{l}=g(x)\end{aligned}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.14 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n^* اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $t=0$ پر $\frac{\partial u}{\partial t}$ تفاعل $g(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n^*\lambda_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

اور چونکہ $\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$ ہے لہٰذا

$$B_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n=1,2,\cdots \tag{13.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.24 اور مساوات 13.25 میں حاصل کیے گئے عددی سر کو مساوات 13.22 میں پر کرنے سے حاصل تسلسل $u(x,t)$ ، مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرے گا بشرطیکہ حاصل $u(x,t)$ مرتکز ہو اور اس کی x اور t کے ساتھ جزو در جزو دو درجی تفرق لینے سے حاصل تسلسل مرتکز ہو اور ان کے مجموعے بالترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہوں جو استمراری ہیں۔

اب تک مساوات 13.22 محض ریاضی حل کے طور پر سامنے آیا ہے۔آئیں اس کی اصل حقیقت کو قائم کریں۔ہم اپنی آسانی کی خاطر ابتدائی رفتار $g(x)$ صفر لیتے ہیں۔یوں $B_n^*=0$ ہوں گے لہٰذا مساوات 13.22 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l} \tag{13.26}$$

ہم ضمیمہ ب کا کلیہ 11.ب استعمال کرتے ہوئے

$$\cos\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{1}{2}\Big[\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\Big\}+\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\Big\}\Big]$$

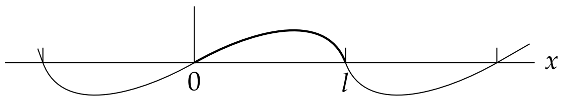
لکھ سکتے ہیں جس کو مساوات 13.26 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\Big\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\Big\}$$

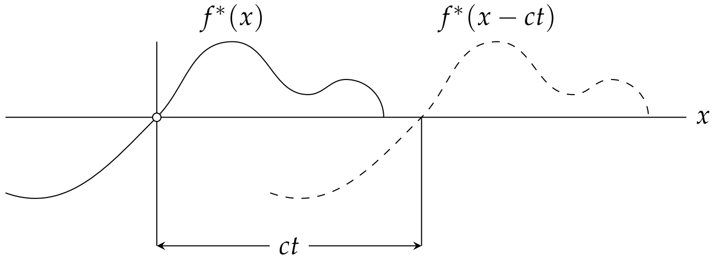
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 13.23 میں x کی جگہ $x-ct$ اور $x+ct$ پر کرنے سے یہی دو تسلسل حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)] \tag{13.27}$$

جہاں f کی طاق دوری توسیع جس کا دوری عرصہ $2l$ ہو تفاعل f^* ہے (شکل 13.4)۔چونکہ وقفہ $0\le x\le l$ پر ابتدائی انحراف $f(x)$ استمراری ہے جبکہ $x=0$ اور $x=l$ پر انحراف صفر ہے لہٰذا مساوات



شکل 13.4: $f(x)$ کی طاق توسیع

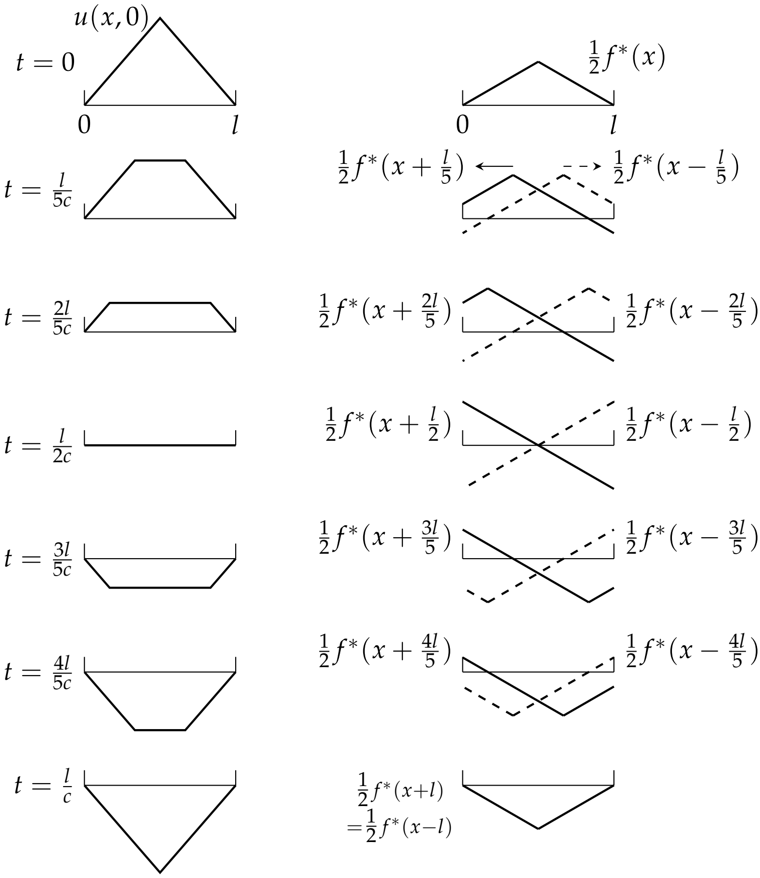


شکل 13.5: مساوات 13.27 کی معنی

13.27 سے ظاہر ہے کہ $u(x,t)$ دونوں متغیرات x اور t کی تمام قیمتوں پر استمراری ہو گا۔ مساوات 13.27 کا تفرق لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 13.11 کا حل ہے بشرطیکہ وقفہ $0 < x < l$ پر $f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہو اور $x = 0$ اور $x = l$ پر اس کے یک طرفہ دو درجی تفرق پائے جاتے ہوں جن کی قیمت صفر کے برابر ہو۔ اس طرح یہ حقیقت قائم ہوتی ہے کہ ان شرائط پر پورا اترتا ہوا تسلسل $u(x,t)$ مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

اگر $f'(x)$ اور $f''(x)$ محض ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہوں، یا اگر وقفہ کے سروں پر یک طرفہ تفرقات غیر صفر ہوں تب ہر ایک t کے لئے محدود تعداد کی x قیمتوں پر مساوات 13.11 کے u کی دو درجی تفرقات غیر معین ہوں گے۔ ان نقطوں کے علاوہ باقی تمام نقطوں پر u مساوات موج کو مطمئن کرے گی لہٰذا ہم $u(x,t)$ کو وسیع معنوں میں مسئلے کا حل تصور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں حاصل حل اس نوعیت کا ہو گا۔

آئیں مساوات 13.27 کی طبعی معنی سمجھتے ہیں۔ جیسا شکل 13.5 میں دکھایا گیا ہے، $f^*(x)$ کی ترسیم کو ct اکائیاں دائیں منتقل کرنے سے $f^*(x-ct)$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $f^*(x-ct),\ (c>0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ دائیں جانب کو حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح $f^*(x+ct),\ (c>0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ بائیں جانب کو حرکت کرتی ہے اور $u(x,t)$ ان دونوں کا مجموعہ ہے۔



شکل 13.6: مثال 13.2 کا مختلف لمحات پر دائیں کو اور بائیں کو حرکت کرتے اجزاء اور ان کا مجموعہ حل $u(x,t)$

مثال 13.2: تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں تار کی ارتعاش
مساوات موج 13.11 کا حل تکونی ابتدائی انحراف

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{l}x & 0<x<\frac{l}{2}\\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2}<x<l\end{cases}$$

اور ابتدائی رفتار صفر $g(x)=0$ کی صورت میں حاصل کریں۔
حل: چونکہ $g(x)\equiv 0$ ہے لہٰذا مساوات 13.26 میں $B_n^*=0$ ہو گا جبکہ B_n کو صفحہ 919 پر مساوات 12.35 دے گی۔یوں مساوات 13.26 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u(x,t)=\frac{8k}{\pi^2}\Big[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi c}{l}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3\pi c}{l}t+-\cdots\Big]$$

اس حل کی ترسیم کھینچنے کی خاطر ہم $u(x,0)=f(x)$ سے شروع کرتے ہوئے مساوات 13.27 کی مدد لیتے ہیں۔یوں شکل 13.6 حاصل ہوتی ہے۔ □

سوالات

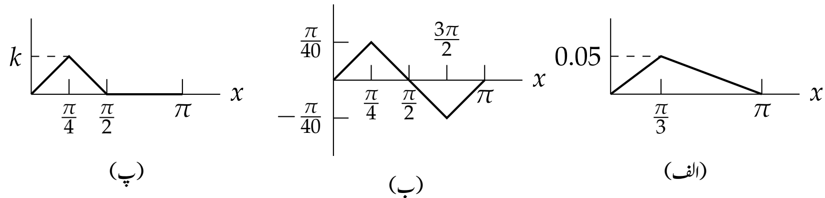
سوال 13.32 تا سوال 13.40 میں تار کی لمبائی $l=\pi$ اور $c^2=\frac{T}{\rho}=1$ ہے۔تار کے سرے ٹھوس نقطوں کے ساتھ باندھے گئے ہیں۔ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ سوال میں دی گئی ہے۔ارتعاش پذیر تار کا انحراف $u(x,t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.32: $0.02\sin x$
جواب: $u=0.02\cos t\sin x$

سوال 13.33: $k\sin 2x$
جواب: $u=k\cos 2t\sin 2x$

سوال 13.34: $k(\sin x-\sin 2x)$
جواب: $u=k(\cos t\sin x-\cos 2t\sin 2x)$

سوال 13.35: شکل 13.7-الف
جواب: $\frac{9\sqrt{3}k}{2\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos t\sin x+\frac{1}{2^2}\cos 2t\sin 2x-\frac{1}{4^2}\cos 4t\sin 4x\cdots\right)$



شکل 13.7: اشکال برائے سوالات 13.35، 13.36 اور 13.37

سوال 13.36: شکل 13.7-ب

جواب: $\frac{4}{5\pi}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2t\sin 2x - \frac{1}{6^2}\cos 6t\sin 6x + \frac{1}{10^2}\cos 10t\sin 10x\cdots\right)$

سوال 13.37: شکل 13.7-پ

جواب: $\frac{4k}{\pi^2}\left[2(\sqrt{2}-1)\cos t\sin x + \cos 2t\sin 2x - 2(\sqrt{2}-\frac{1}{9})\cos 3t\sin 3x\cdots\right]$

سوال 13.38: $kx(x-\pi)$

جواب: $\frac{8k}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos t\sin x - \frac{1}{3^2}\cos 3t\sin 3x - \frac{1}{5^2}\cos 5t\sin 5x\cdots\right)$

سوال 13.39:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ k(x-\pi)^2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $4k\left[(1-\frac{2}{\pi})\cos t\sin x - \frac{1}{9}(1+\frac{2}{3\pi})\cos 3t\sin 3x\cdots\right]$

سوال 13.40:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -k(x-\pi)^2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $k(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi})\cos 2t\sin 2x + \frac{k\pi}{4}\cos 4t\sin 4x + k(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{27\pi})\cos 6t\sin 6x\cdots$

سوال 13.41 تا سوال 13.43 میں $c^2 = 1$ ہے، تار کی لمبائی $l = \pi$ ہے اور تار کے سرے ٹھوس نقطوں سے بندھے ہیں۔ ابتدائی رفتار $g(x)$ اور ابتدائی انحراف $f(x)$ ہیں۔ ارتعاش پذیر تار کی انحراف $u(x,t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.41: $f=0, \quad g=kx \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{2}); \quad g(x)=k(\pi-x) \quad (\frac{\pi}{2} \le x \le \pi)$
جواب: $\frac{4k}{\pi}\big(\frac{1}{1^3}\sin t \sin x - \frac{1}{3^3}\sin 3t \sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5t \sin 5x \cdots\big)$

سوال 13.42: $f=0, \quad g=k\sin 3x$
جواب: $\frac{k}{3}\sin 3t \sin 3x$

سوال 13.43: $f=k\sin 2x, \quad g=-k\sin 2x$
جواب: $-\frac{k}{2}\sin 2t \sin 2x$

سوال 13.44: تناو T چار گنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ $c^2=\frac{T}{\rho}$ ہے لہٰذا T چار گنا کرنے سے c دگنا ہو گا جس سے بنیادی انداز کی تعدد دگنی ہو گی۔

سوال 13.45: تار کی لمبائی چار گنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: بنیادی انداز کی تعدد چار گنا کم ہو گی۔

سوال 13.46 تا سوال 13.53 میں دیے گئے جزوی تفرقی مساوات کو علیحدگی متغیرات کے طریقہ سے حل کریں۔

سوال 13.46: $u_x+u_y=0$
جواب: $u=ce^{k(x+y)}$

سوال 13.47: $u_x-u_y=0$
جواب: $u=ce^{k(x-y)}$

سوال 13.48: $xu_x-yu_y=0$
جواب: $u=kxy$

سوال 13.49: $u_x-yu_y=0$
جواب: $u=cy^ke^{kx}$

سوال 13.50: $yu_x-xu_y=0$
جواب: $u=ce^{k(x^2+y^2)}$

سوال 13.51: $u_x + u_y = 2(x+y)u$
جواب: $u = ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$

سوال 13.52: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
جواب: $u = (A\cos kx + B\sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$

سوال 13.53: $u_{xy} - u = 0$
جواب: $u = ce^{x+y}$

سوال 13.54 تا سوال 13.58 لچکدار تار کی جبری ارتعاش پر مبنی ہیں۔

سوال 13.54: لچک دار تار کی جبری ارتعاش کا الجبرائی نمونہ درج ذیل جزوی تفرقی مساوات ہے جہاں اکائی لمبائی پر بیرونی قوت $P(x,t)$ تار کے عمودی عمل کرتا ہے۔

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho} \tag{13.28}$$

دیے گئے مسئلے سے اس جزوی تفرقی مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 13.55: سائن نما بیرونی قوت $P = A\rho\sin\omega t$ کی صورت میں درج ذیل ثابت کریں

$$\frac{P}{\rho} = A\sin\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

جہاں $k_n(t) = \frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin\omega t$ ہے۔یوں جفت n کی صورت میں $k_n = 0$ اور طاق n کی صورت میں $k_n = \frac{4A}{n\pi}\sin\omega t$ ہو گا۔مزید ثابت کریں کہ مساوات 13.11 میں

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

سوال 13.56: ثابت کریں کہ سوال 13.55 کے $\frac{P}{\rho}$ اور u کو مساوات 13.28 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin\omega t, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ثابت کریں کہ $\lambda_n^2 \neq \omega^2$ کی صورت میں اس کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t + \frac{2A(1-\cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

سوال 13.57: ایسے B_n اور B_n^* دریافت کریں کہ u ابتدائی شرائط $u(x,0) = f(x)$ اور $u_t(x,0) = 0$ کو مطمئن کرے (سوال 13.56)۔

سوال 13.58: ثابت کریں کہ گمگ $\lambda_n = \omega$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \sin \omega t - \frac{A}{n\pi\omega}(1-\cos n\pi) t \cos \omega t$$

13.4 مساوات موج کا دالمبیغ حل

گزشتہ حصہ میں مساوات موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.29}$$

کا حل مساوات 13.27 حاصل کیا گیا۔یہی حل نہایت آسانی سے مساوات 13.29 کا موزوں بدل لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نئے غیر تابع متغیرات[19]

$$v = x + ct, \quad z = x - ct \tag{13.30}$$

متعارف کرتے ہوئے u کو متغیرات v اور z کا تفاعل لکھتے ہیں۔اس طرح مساوات 13.29 میں تفرقات اب v اور z کے لحاظ سے زنجیری ترکیب (حصہ 10.7) کی مدد سے لکھے جائیں گے۔جزوی تفرق کو زیر نوشت سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 13.30 سے $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ لکھے جائیں گے۔ہم اپنی آسانی کے لئے ہم v اور z متغیرات کے تفاعل کو بھی u سے ظاہر کرتے ہیں۔اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

[19] یہاں بتلاتا چلوں کہ جزوی تفرقی مساوات کا عمومی نظریہ اس طرح کے تبادل حاصل کرنے کی قدم باقدم ترکیب پیش کرتی ہے۔

دائیں ہاتھ پر زنجیری ترکیب لاگو کرتے ہوئے اور $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ پر کرتے ہوئے

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

ملتا ہے۔مساوات 13.29 کی دوسری تفرق کو بھی اسی طرح لکھتے ہیں۔

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

ان نتائج کو مساوات 13.29 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0 \tag{13.31}$$

آپ نے دیکھا کہ نئے متغیرات متعارف کرنے سے حاصل مساوات 13.31 نہایت آسانی سے دو مرتبہ تکمل لینے سے حل ہو سکتی ہے۔ایک مرتبہ z کے ساتھ تکمل لینے سے

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

حاصل ہو گا جہاں نا معلوم تفاعل $h(v)$ متغیرہ v کے تابع ہو سکتا ہے۔اس کا تکمل v کے ساتھ لیتے ہیں

$$u = \int h(v)\ \mathrm{d}v + \psi(z)$$

جہاں $\psi(z)$ متغیرہ z کا نا معلوم تفاعل ہے۔درج بالا میں تکمل کا حاصل از خود v کا تفاعل ہو گا جس کو نا معلوم تفاعل $\phi(v)$ لکھتے ہوئے مساوات 13.31 کی مدد سے

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \tag{13.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو موج کی مساوات 13.29 کا **دالومبیغ حل**[20] کہتے[21] ہیں۔

تفاعل ϕ اور ψ کو ابتدائی معلومات سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔آئیں صفر ابتدائی رفتار اور ابتدائی انحراف $u(x,0) = f(x)$ کے لئے ان تفاعل کو حاصل کریں۔

مساوات 13.32 کا تفرق لیتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct) \tag{13.33}$$

---

[20] d'Alembert solution

[21] فرانسیسی ریاضی دان ژاں باٹیسٹ لی غوں دالومبیغ [1717-1783]

جہاں $(')$ سے مراد قوسین میں بند پوری دلیل $x+ct$ اور $x-ct$ کے لحاظ سے بالترتیب تفرق ہے۔مساوات 13.32، مساوات 13.33 اور ابتدائی معلومات سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0$$

آخری مساوات یعنی $\phi' = \psi'$ سے $\psi = \phi + k$ حاصل ہوتا ہے جس کو پہلی مساوات کے ساتھ ملا کر $2\phi + k = f$ یا $\phi = \frac{f-k}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ان حاصل کردہ ϕ اور ψ کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.32 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] \tag{13.34}$$

جو عین مساوات 13.27 ہے۔آپ یہاں تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات 13.27 پر لاگو ابتدائی سرحدی شرائط مساوات 13.12 کی بنا f طاق ہو گا اور اس کا دوری عرصہ $2l$ ہو گا۔

ہمارے اس نتیجہ کے تحت دو عدد ابتدائی شرائط اور سرحدی شرائط مل کر مساوات موج کا حل یکتا طور پر تعین کرتی ہیں۔

سوالات

سوال 13.59: مساوات 13.30 دیکھ کر x اور t کو v اور z کی صورت میں لکھتے ہوئے مساوات 13.31 سے مساوات 13.29 حاصل کریں۔

سوال 13.60 تا سوال 13.65 میں مساوات 13.34 استعمال کرتے ہوئے شکل 13.6 کی طرح مختلف لمحات پر تار کی انحراف $u(x,t)$ کی ترسیم کھینچیں۔تار کی لمبائی اکائی (1) ہے اور اس کے دونوں سرے ہل نہیں سکتے ہیں۔ابتدائی رفتار صفر ہے جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ ہے۔ k کی کوئی بھی چھوٹی قیمت مثلاً $k = 0.01$ لیں۔

سوال 13.60: $f(x) = k \sin 2\pi x$

سوال 13.61: $f(x) = kx(1-x)$

سوال 13.62: $f(x) = k(x - x^3)$

سوال 13.63: $f(x) = k(x^2 - x^4)$

سوال 13.64: $f(x) = k(x^3 - x^5)$

سوال 13.65: $f(x) = k\sin^2 \pi x$

سوال 13.66 تا سوال 13.70 میں دیے گئے تبادل استعمال کرتے ہوئے جزوی تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 13.66: $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x,\, z = xy)$

سوال 13.67: $u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x + y)$
جواب: $u = f_1(x) + f_2(x + y)$

سوال 13.68: $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x - y)$

سوال 13.69: $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x + y)$
جواب: $u = xf_1(x + y) + f_2(x + y)$

سوال 13.70: $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y,\, z = 2x - y)$

سوال 13.71: **خطی جزوی تفرقی مساوات کی اقسام**
درج ذیل طرز کی مساوات

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{13.35}$$

کو $AC - B^2 > 0$ کی صورت میں **بیضوی**[22]، $AC - B^2 = 0$ کی صورت میں **قطع مکافی**[23] اور $AC - B^2 < 0$ کی صورت میں **قطع زائد**[24] کہتے ہیں۔ یہاں A ، B اور C از خود x اور y کے تفاعل ہو سکتے ہیں۔ مساوات 13.35 سطح xy کی مختلف حصوں میں مختلف قسم کا ہو سکتا ہے۔ تصدیق کریں کہ

لاپلاسی مساوات $u_{xx} + u_{yy} = 0$ بیضوی ہے
حراری مساوات $u_t = c^2 u_{xx}$ قطع مکافی ہے
جبکہ مساوات موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ قطع زائد ہے۔

---

[22] elliptic
[23] parabolic
[24] hyperbolic

اس کے برعکس $yu_{xx}+u_{yy}=0$ بالائی نصف سطح پر بیضوی، x محور پر قطع مکافی اور نچلی نصف سطح پر قطع زائد ہے۔

سوال 13.72: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع زائد ہو تب $v=\phi(x,y)$ اور $z=\psi(x,y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $u_{vz}=R^*(v,z,u,u_v,u_z)$ صورت میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں $\phi=c_1$ اور $\psi=c_2$ (c_1 اور c_2 مستقل ہیں) مساوات $Ay'^2-2By'+C=0$ کے حل $y=y(x)$ ہیں۔ تصدیق کریں کہ مساوات 13.29 کی صورت میں درج ذیل تبادل حاصل ہوں گے۔

$$\phi=x+ct,\quad \psi=x-ct$$

جواب: مساوات موج کو $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ لکھ کر $A=1$ ، $B=0$ اور $C=-c^2$ ملتے ہیں۔ چونکہ ہمارے متغیرات t اور x ہیں لہٰذا مساوات 13.35 کو $1u_{tt}+0-c^2u_{xx}=0$ لکھ سکتے ہیں۔ یوں ہمیں $A(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2-2B(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2-c^2=0$ یعنی $(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2-c^2=0$ یا $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mp c$ کے حل درکار ہیں جو $x=\mp ct+k$ یعنی $x\mp ct=k$ ہیں۔ یوں $\phi=x+ct$ اور $\psi=x-ct$ ملتے ہیں۔

سوال 13.73: اگر مساوات 13.35 کی قسم قطع مکافی ہو تب $v=x$ اور $z=\psi(x,y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $u_{vv}=R^*(v,z,u,u_v,u_z)$ صورت میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں ψ حاصل کرنے کی ترکیب سوال 13.72 میں دی گئی ہے۔ اس حقیقت کو سوال 13.68 کی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔
جواب: $y'^2-2y'+1=(y'-1)^2=0$ سے $y=x+c$ یا $\psi(x,y)=x-y$ ملتا ہے۔ $v=x$ اور $z=x-y$ ہیں۔

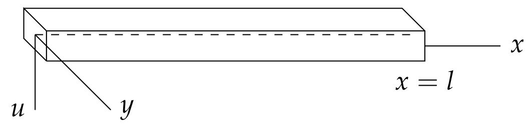
سوال 13.74 تا سوال 13.78 شہتیر کی لرزش میں مبنی ہیں۔

سوال 13.74: افقی شہتیر (شکل 13.8-الف) کی انتصابی لرزش درج ذیل جزوی تفرقی مساوات دیتی ہے

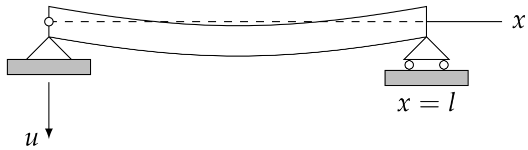
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad c^2=\frac{EI}{\rho A} \tag{13.36}$$

جہاں E ینگ مقیاس لچک، محور y کے لحاظ سے I جمودی معیار اثر، ρ کثافت اور A رقبہ عمودی تراش ہیں۔ مساوات 13.36 میں $u=F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے علیحدگی متغیرات سے درج ذیل حاصل کریں۔

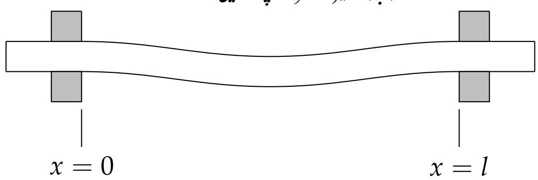
$$\begin{aligned}
&\frac{F^{(4)}}{F}=-\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\beta^4=\text{مستقل},\\
&F(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x+C\cosh\beta x+D\sinh\beta x,\\
&G(t)=a\cos c\beta^2 t+b\sin c\beta^2 t
\end{aligned}$$



(الف)شہتیر کی ساخت



(ب)شہتیر کے سر آزاد پڑے ہیں



(پ)شہتیر کے سر جکڑے ہیں

شکل 13.8: شہتیر کی لرزش

سوال 13.75: ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے مساوات 13.36 کے وہ حل $u_n = F_n(x)G_n(t)$ دریافت کریں جو درج ذیل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں (شکل 13.8-ب)۔

$$\text{شہتیر کے دونوں سر دیوار پر آزاد رکھے گئے ہیں} \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

$$\text{یوں سروں پر صفر معیار اثر لہٰذا صفر گولائی ہو گی} \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0$$

جواب:

$$F_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad G_n = a_n \cos \frac{cn^2\pi^2 t}{l^2}$$

سوال 13.76: مساوات 13.36 کا وہ حل جو سوال 13.75 کے شرائط کے ساتھ ساتھ ابتدائی انحراف $u(x,0) = f(x) = x(l-x)$ کو مطمئن کرتا ہو حاصل کریں۔

سوال 13.77: شہتیر کے دونوں سروں سے جکڑنے سے کیا ابتدائی شرائط پیدا ہوں گے (شکل 13.8-پ)؟
جواب: $u(0,t) = 0, \quad u(l,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0$

سوال 13.78: تصدیق کریں کہ سوال 13.74 میں حاصل $F(x)$ سوال 13.77 میں دی گئی شرائط کو اس صورت مطمئن کرتا ہے جب βl درج ذیل مساوات کے جذر ہوں۔

$$\cosh \beta l \cos \beta l = 1 \tag{13.37}$$

مساوات 13.37 کے چند حل کا تخمینہ لگائیں۔

13.5 یک بعدی بہاو حرارت

ہم جنسی مادّہ میں حرارت کی بہاو حراری مساوات (حصہ 11.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

دیتی ہے جہاں $u(x, y, z, t)$ جسم کا درجہ حرارت، K جسم کی حراری موصلیت، σ جسم کی مخصوص حراری استعداد اور ρ جسم کے مادّہ کی کثافت ہے۔ $\nabla^2 u$ درجہ حرارت u کا لاپلاسی ہے جو کارتیسی نظام کی محدد x ، y ، z کے لحاظ سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

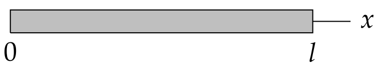
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

آئیں ایک لمبی سلاخ یا تار جو x محور پر رکھی گئی ہو میں درجہ حرارت پر غور کرتے ہیں (شکل 13.9)۔ یہ سلاخ ہم جنسی مادّہ سے بنی ہے اور اس کا رقبہ عمودی تراش یکساں ہے۔ اس سلاخ کے اطراف کو مکمل طور پر غیر موصل سے گھیر کر حاجز شدہ کیا گیا ہے لہٰذا سلاخ میں حرارت کی بہاو صرف لمبائی کے رخ ممکن ہے۔ اس طرح u صرف x اور t پر منحصر ہو گا لہٰذا حراری مساوات درج ذیل **یک بعدی حراری مساوات**[25] کی صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.38}$$

ہم مساوات 13.38 کو کئی اہم سرحدی شرائط اور ابتدائی شرائط کے لئے حل کرتے ہیں۔ ہم یک بعدی حراری مساوات کو مساوات موج کی طرح حل کرتے ہوئے دیکھیں گے کہ اس کا حل مکمل طور پر مساوات موج کے حل سے مختلف

[25] one dimensional heat equation



شکل 13.9: لمبی سلاخ

ہو گا۔اس کی وجہ یہ ہے کہ حراری مساوات میں $\frac{\partial u}{\partial t}$ جبکہ مساوات موج میں $\frac{\partial u}{\partial t^2}$ پایا جاتا ہے۔ (یوں سوال 13.71 میں جزوی تفرقی مساوات کی درجہ بندی یقیناً نہایت اہمیت کے حامل ہے۔)

آئیں پہلے اس صورت کو دیکھیں جہاں سلاخ کے سر $x = 0$ اور $x = l$ صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہوں۔اس طرح **سرحدی شرائط** تمام t کے لئے

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{13.39}$$

ہوں گے جو ہو بہو مساوات 13.12 کی طرح ہیں۔فرض کریں کہ سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔یوں **ابتدائی شرط**

$$u(x,0) = f(x) \tag{13.40}$$

ہو گی۔ہم مساوات 13.38 کا ایسا حل $u(x,t)$ دریافت کرتے ہیں جو مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

پہلا قدم۔ ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.38 کا ایسا حل حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.39 کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔یوں درج ذیل سے شروع کرتے ہیں۔

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{13.41}$$

مساوات 13.41 اور اس کے تفرق کو مساوات 13.38 میں پر کرتے ہوئے

$$F\dot{G} = c^2F''G$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $(')$ سے مراد x کے ساتھ تفرق اور $(\dot{})$ سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \tag{13.42}$$

ملتا ہے جس کا بایاں ہاتھ صرف t اور دایاں ہاتھ صرف x پر منحصر ہے لہٰذا حصہ 13.3 کی طرح ہم اخذ کرتے ہیں کہ مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کسی مستقل مثلاً k کے برابر ہوں گے۔آپ خود تسلی کر سکتے ہیں کہ

$k \geq 0$ سے حاصل حل $u = FG$ جو مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا ہو $u \equiv 0$ ہے (جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے ہیں)۔اس طرح مساوات 13.42 کے دونوں اطراف کو منفی $k = -p^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{13.43}$$

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \tag{13.44}$$

دوسرا قدم۔ مساوات 13.43 کا عمومی حل

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \tag{13.45}$$

ہے لہٰذا مساوات 13.39 کے تحت

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l,t) = F(l)G(t) = 0$$

ہو گا۔اب $G(t) \equiv 0$ کی صورت میں $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہٰذا ہم $F(0) = 0$ اور $F(l) = 0$ چنتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں مساوات 13.45 سے $F(0) = A = 0$ اور

$$F(l) = B\sin pl = 0$$

ملتے ہیں جہاں $B = 0$ لینے سے $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہٰذا $B \neq 0$ اور

$$\sin px = 0 \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

ہوں گے۔اس طرح $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات 13.42 کو مطمئن کرنے والا مساوات 13.43 کا درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

یہاں بھی حصہ 13.3 کی طرح $n = -1, -2, \cdots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے۔

ہم اب مساوات 13.44 پر غور کرتے ہیں جو $p = \frac{n\pi}{l}$ کی صورت میں درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

اس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

ہے جہاں B_n مستقل ہے۔اس طرح مساوات 13.39 کو مطمئن کرتا مساوات 13.38 کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.46}$$

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو مساوات 13.40 کو بھی مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}\right) \tag{13.47}$$

جو مساوات 13.40 کے ساتھ مل کر

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

دیتی ہے۔یوں اگر مساوات 13.47 نے مساوات 13.40 کو مطمئن کرنا ہو تب B_n یوں منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x,0)$ تفاعل $f(x)$ کی طاق دوری توسیع کی تسلسل یعنی فوریئر سائن تسلسل ہو جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے (مساوات 12.34)۔

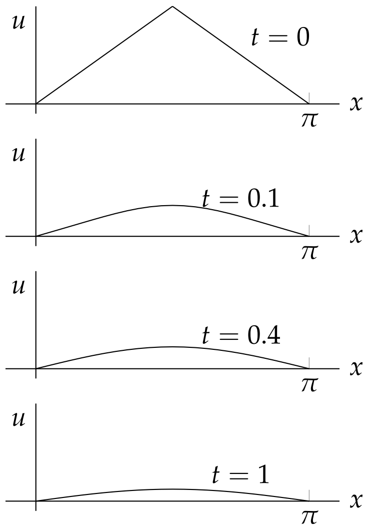
$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.48}$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ وقفہ $0 \le x \le l$ پر تفاعل $f(x)$ ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہے اور اس وقفہ کے تمام اندرونی نقطوں پر اس کے یک طرفہ تفرق (شکل 12.4) پائے جاتے ہیں۔ان شرائط کے ساتھ مساوات 13.47 میں دی گیا تسلسل، جس کے عددی سر مساوات 13.48 دیتی ہے، ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔

حاصل حل میں قوت نمائی جزو کی بنا جیسے جیسے t لامتناہی کے قریب تر پہنچے مساوات 13.47 کے تمام ارکان ویسے ویسے صفر کے قریب تر پہنچتے ہیں۔تنزل کی شرح n پر منحصر ہو گی۔

مثال 13.3: ابتدائی درجہ حرارت

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ l - x & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$



شکل 13.10: مختلف لمحات پر مثال 13.3 کا حل

اور $l = \pi$ کی صورت میں مساوات 13.48 سے

$$B_n = \frac{2}{l}\Big(\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\Big) \tag{13.49}$$

ملتا ہے جو طاق n کی صورت میں $B_n = 0$ اور جفت n کی صورت میں

$$B_n = \frac{4}{n^2\pi} \qquad (n = 1, 5, 9, \cdots)$$
$$B_n = -\frac{4}{n^2\pi} \qquad (n = 3, 7, 11, \cdots)$$

دیتا ہے۔یوں حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 13.10 میں دکھایا گیا ہے۔اس کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\Big[\sin x e^{-c^2 t} - \frac{1}{9}\sin 3x e^{-9c^2 t} + \cdots\Big]$$

□

سوالات

سوال 13.79: شکل 13.10 کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔دونوں میں کیا اہم فرق پایا جاتا ہے۔
جواب: شکل 13.10 غیر ارتعاشی ہے جبکہ مساوات موج کا حل ارتعاشی ہے

سوال 13.80: مساوات 13.46 میں کسی مخصوص n کے لئے K ، σ اور ρ کا تنزل پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟
جواب: K بڑھنے سے تنزل بڑھتی ہے جبکہ σ اور ρ کے بڑھنے سے تنزل گھٹتی ہے۔

سوال 13.81: u_1 ، u_2 اور u_3 کا ترسیم $B_n = 1$ ، $c = 1$ اور $l = \pi$ لیتے ہوئے $t = 0$ ، $t = 1$ اور $t = 2$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.82: ایک سلاخ جس کے اطراف مکمل طور حاجز شدہ ہیں کے سر برقرار $u(0, t) = U_1$ اور $u(0, l) = U_2$ پر رکھے گئے ہیں۔سلاخ کی لمبائی l ہے۔بہت دیر بعد (یعنی $t \to \infty$ پر) سلاخ میں درجہ حرارت $u_I(x)$ دریافت کریں۔
جواب: $u_I = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l}$ جہاں $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.83 تا سوال 13.88 میں لوہے کی سلاخ کا درجہ حرارت $u(x, t)$ دریافت کریں۔ سلاخ کی لمبائی $L = 1\,\text{m}$ ہے جبکہ لوہے کے مستقل $K = 73\,\text{W}\,\text{m}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$ ، $\sigma = 444\,\text{J}\,\text{kg}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$ اور $\rho = 7860\,\text{kg}/\text{m}^3$ ہیں۔ سلاخ کا رقبہ عمودی تراش $1\,\text{cm}^2$ ہے جبکہ اس کے سر $0\,{}^\circ\text{C}$ پر برقرار رکھے گئے ہیں۔ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔سلاخ کے اطراف حاجز شدہ ہیں۔

سوال 13.83:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u = \frac{4}{\pi^2}(e^{-\lambda_1^2 t}\sin \pi x - \frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t}\sin 3\pi x + - \cdots)$

سوال 13.84: $f(x) = \sin \pi x$
جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u = e^{-\lambda_1^2 t}\sin \pi x$

سوال 13.85:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u = (\frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^3})e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + (\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{\pi^3})e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \cdots$

سوال 13.86: $f(x) = x(L-x)$

جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u = \frac{8}{\pi^3}(e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x + \cdots)$

سوال 13.87: $f(x) = x(L-x^2)$

جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u = \frac{12}{\pi^3}e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{3}{2\pi^3}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \cdots$

سوال 13.88: $f(x) = x \sin \pi x$

جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $\quad u = \frac{1}{2}e^{-\lambda_1^2 t \sin \pi x - \frac{16}{9\pi^2}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x} \cdots$

سوال 13.89: ایک سلاخ جس کی لمبائی L ہے ہر طرف سے (بشمول دونوں سر) حاجز شدہ ہے۔ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔طبعی معلومات: سلاخ کے سر سے حراری توانائی کا اخراج سر پر $\frac{\partial u}{\partial x}$ کے راست تناسب ہو گا۔ تصدیق کریں کہ دی گئی معلومات درج ذیل کے مترادف ہے۔

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x)$$

علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جہاں A_0 اور A_n مساوات 12.32 سے درج ذیل ہیں۔

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

سوال 13.90: سوال 13.89 میں $t \to \infty$ پر $u \to A_0$ ملتا ہے۔کیا یہ آپ کے توقع کے مطابق ہے؟

سوال 13.91 تا سوال 13.95 کو سوال 13.89 میں دی گئی صورت حال کے لئے حل کریں جہاں $l = \pi$ اور $c = 1$ ہیں۔

سوال 13.91: $f(x)=1$
جواب: $u(x,t)=1$

سوال 13.92: $f(x)=x$
جواب: $u=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(e^{-t}\cos x+\frac{1}{9}e^{-9t}\cos 3x+\frac{1}{25}e^{-25t}\cos 5x\cdots)$

سوال 13.93: $f(x)=x^2$
جواب: $u=\frac{\pi^2}{3}-4(e^{-t}\cos x-\frac{1}{4}e^{-4t}\cos 2x+\frac{1}{9}e^{-9t}\cos 3x\cdots)$

سوال 13.94:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{L}{2} \\ L-x & \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

جواب: $u=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(e^{-4t}\cos 2x+\frac{1}{9}e^{-36t}\cos 6x+\frac{1}{25}e^{-100t}\cos 10x\cdots)$

سوال 13.95:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\frac{L}{2} \\ -1 & \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

جواب: $u=\frac{4}{\pi}(e^{-t}\cos x-\frac{1}{3}e^{-9t}\cos 3x+\frac{1}{5}e^{-25t}\cos 5x\cdots)$

سوال 13.96: فرض کریں کہ سوال 13.82 میں ابتدائی درجہ حرارت $u(x,0)=f(x)$ ہے۔ثابت کریں کہ کسی بھی لمحے پر سلاخ میں درجہ حرارت $u(x,y)=u_I(x)+u_{II}(x,t)$ ہو گی جہاں u_I پہلی کی طرح ہے جبکہ u_{II} درج ذیل ہے

$$u_{II}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}t}$$

جہاں B_n درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} B_n&=\frac{2}{l}\int_0^l[f(x)-u_I(x)]\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \\ &=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{n\pi}[(-1)^nU_2-U_1] \end{aligned}$$

13.6 لا متناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاو حرارت

ہم اطراف سے حاجز شدہ ایسی سلاخ جو دونوں جانب لا متناہی تک لمبی ہو کی صورت میں حراری مساوات

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.50}$$

پر غور کریں گے۔ایسی صورت میں ہمارے پاس کوئی سرحدی شرط نہیں ہے جبکہ ابتدائی معلومات درج ذیل ہے۔

$$u(x,0)=f(x) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{13.51}$$

اس مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.50 میں $u(x,t)=F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$F''+p^2F=0 \tag{13.52}$$

$$\dot{G}+c^2p^2G=0 \tag{13.53}$$

جن کا موازنہ مساوات 13.43 اور مساوات 13.44 کے ساتھ کرتے ہوئے درج ذیل حل لکھے جا سکتے ہیں

$$F(x)=A\cos px+B\sin px \quad \text{اور} \quad G(t)=e^{-c^2p^2t}$$

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔اس طرح مساوات 13.50 کا حل

$$u(x,t;p)=FG=(A\cos px+B\sin px)e^{-c^2p^2t} \tag{13.54}$$

ہو گا۔[گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی علیحدگی کا مستقل k منفی لینا ہو گا یعنی $k=-p^2$ چونکہ مثبت k کی صورت میں مساوات 13.54 میں مسلسل بڑھتی قوت نمائی تفاعل پیدا ہوتا ہے جس کا کوئی طبعی مطلب ممکن نہیں ہے۔]

مساوات 13.54 کی تفاعل میں p کی قیمتوں کو کسی مستقل عدد کا ضربی لے کر ان تفاعل کی تسلسل لکھی جا سکتی ہے لیکن ایسی تسلسل لمحہ $t=0$ پر x کے لحاظ سے دوری ہو گی لیکن $f(x)$ غیر دوری ہے۔یوں فطری بات ہے کہ ہم فوریئر تسلسل کی بجائے فوریئر تکمل کی طرف رجحان کریں۔

چونکہ مساوات 13.54 میں A اور B اختیاری مستقل ہیں لٰہذا ہم انہیں p کے تفاعل $A = A(p)$ اور $B = B(p)$ تصور کر سکتے ہیں۔چونکہ حراری مساوات خطی اور ہم جنسی ہے لٰہذا

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;p)\,\mathrm{d}p = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]e^{-c^2p^2t}\,\mathrm{d}p \tag{13.55}$$

مساوات 13.50 کا حل ہو گا بشرطیکہ یہ تکمل موجود ہو اور یہ دو مرتبہ x کے ساتھ اور ایک مرتبہ t کے ساتھ قابل تفرق ہو۔

مساوات 13.55 اور ابتدائی معلومات مساوات 13.51 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0) = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]\,\mathrm{d}p = f(x) \tag{13.56}$$

مساوات 12.69 اور مساوات 12.70 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos pv\;\mathrm{d}v, \quad B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin pv\;\mathrm{d}v \tag{13.57}$$

صفحہ 952 پر مساوات 12.82 کے تحت اس تکمل کو

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(px - pv)\;\mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}p$$

لکھا جا سکتا ہے لٰہذا مساوات 13.55 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(px - pv)e^{-c^2p^2t}\;\mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}p$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس دوہرا تکمل کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے ہم اس کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\Big[\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px - pv)\;\mathrm{d}p\Big]\,\mathrm{d}v \tag{13.58}$$

اندرونی تکمل کو درج ذیل کلیہ کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-s^2}\cos 2bs\;\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2} \tag{13.59}$$

مساوات 13.59 میں نیا متغیرہ p متعارف کرتے ہوئے $s = cp\sqrt{t}$ لکھ کر اور

$$b = \frac{x-v}{2c\sqrt{t}}$$

لیتے ہوئے مساوات 13.59 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)\,\mathrm{d}p = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}$$

جس کو مساوات 13.58 میں پر کرتے ہوئے

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}\,\mathrm{d}v \tag{13.60}$$

ملتا ہے۔آخر میں ہم تکمل کا متغیرہ $z = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ متعارف کرتے ہوئے

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2cz\sqrt{t})e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{13.61}$$

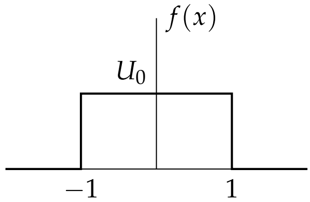
حاصل کرتے ہیں۔ تمام x کے لئے محدود $f(x)$ اور ہر محدود وقفہ پر قابل تکمل $f(x)$ کی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مساوات 13.60 اور مساوات 13.61 دونوں مساوات 13.50 اور مساوات 13.51 کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ موجودہ مسئلے کا حل ہیں۔

مثال 13.4: لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں درجہ حرارت
لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت درج ذیل ہے (شکل 13.4)۔

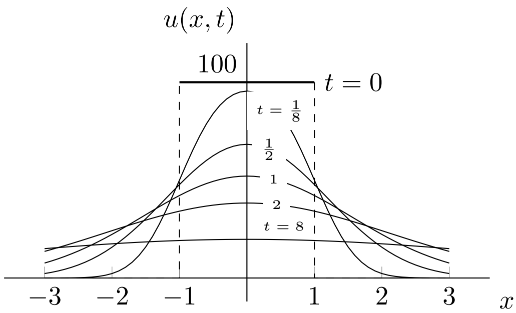
$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{مستقل} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

مساوات 13.60 سے

$$u(x,t) = \frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}\,\mathrm{d}v$$



شکل 13.11: ابتدائی درجہ حرارت (مثال 13.4)



شکل 13.12: حل $u(x,t)$ برائے مثال 13.4

لکھتے ہیں۔ تکمل کا نیا متغیرہ $z=\frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ استعمال کرتے ہوئے -1 تا 1 پر v کا تکمل $\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}$ تا $\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}$ پر z کے تکمل میں تبدیل ہو گا یعنی؛

$$u(x,t)=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \qquad (z>0) \tag{13.62}$$

اس تکمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے البتہ اس کو تفاعل خلل[26] کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 13.12 میں $u(x,t)$ کو $U_0=100\,°\mathrm{C}$ ، $c^2=1\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{s}^{-1}$ کے لئے لمحات $t=\frac{1}{8},\frac{1}{2},1,2,8$ پر دکھایا گیا ہے۔ □

[26] error function

سوالات

سوال 13.97: نقطہ $x = 0.5, 1, 1.5$ پر مثال 13.4 میں $U_0 = 100\,°\mathrm{C}$ اور $c^2 = 1\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$ لے کر حاصل کردہ درجہ حرارت $u(x,t)$ کی ترسیم مختلف لمحات پر کھینچیں۔کیا جوابات آپ کی سوچ کے مطابق ہیں؟

تفاعل خلل درج ذیل تکمل کو کہتے ہیں

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} \, \mathrm{d}w$$

جو انجینئری میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔اس سے واقفیت پیدا کرنے کی خاطر سوال 13.98 تا سوال 13.105 حل کریں۔

سوال 13.98: تصدیق کریں کہ تفاعل خلل طاق ہے۔

سوال 13.99: درج ذیل ثابت کریں۔
$\int_a^b e^{-w^2}\, \mathrm{d}w = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a), \quad \int_{-b}^b e^{-w^2}\, \mathrm{d}w = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} b$

سوال 13.100: قلم و کاغذ سے متکمل e^{-w^2} کی قیمتوں کا جدول بناتے ہوئے اس کی ترسیم کھینچیں جو قوس جرس[27] کہلاتی ہے۔

سوال 13.101: قوس جرس (جس کو آپ نے سوال 13.100 میں حاصل کیا) کے نیچے رقبہ معلوم کرتے ہوئے $\operatorname{erf} x$ کا جدول $x = 0, 0.2, 0.4, \cdots, 1, 1.5, 2$ کے لئے حاصل کریں۔قوس جرس پر افقی اور انتصابی لکیریں کھینچ کر قوس کے نیچے مکعب گن کر رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔
جوابات: نقطہ اعشاریہ کے بعد صرف دو اعداد لیتے ہوئے۔
$0.00, 0.22, 0.43, 0.60, 0.74, 0.84, 0.97, 1.00$

سوال 13.102: تفاعل خلل کی متکمل e^{-w^2} کی مکلارن تسلسل حاصل کریں۔اس تسلسل کا تکمل لے کر تفاعل خلل $\operatorname{erf} x$ کی مکلارن تسلسل دریافت کریں۔
جواب: $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} \cdots)$

---

[27] bell curve

سوال 13.103: مساوات 13.62 سے درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$u(x,t)=\frac{U_0}{2}\Big[\operatorname{erf}\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}+\operatorname{erf}\frac{1+x}{2c\sqrt{t}}\Big]\qquad (t>0)$$

سوال 13.104: اگر $x>0$ کی صورت میں $f(x)=1$ اور $x<0$ کی صورت میں $f(x)=0$ ہو تب تصدیق کریں کہ مساوات 13.61 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\qquad (t>0)$$

سوال 13.105: چونکہ $\operatorname{erf}\infty=1$ ہے لہٰذا سوال 13.104 سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x}{2c\sqrt{t}}$$

سوال 13.106: نصف لامتناہی لمبی سلاخ (0 تا ∞) کے $x=0$ پر سر کو صفر درجہ پر رکھا گیا ہے جبکہ اس کی ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ثابت کریں کہ اس مسئلہ کا حل درج ذیل ہے جہاں $\tau=2c\sqrt{t}$ ہے۔

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\int_{-\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(x+\tau w)e^{-w^2}\,\mathrm{d}w-\int_{\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(-x+\tau w)e^{-w^2}\,\mathrm{d}w\Big]\tag{13.63}$$

سوال 13.107: $f(v)$ کو طاق تصور کرتے ہوئے مساوات 13.60 سے مساوات 13.63 حاصل کریں۔

سوال 13.108: $f(x)=1$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ سوال 13.106 میں درج ذیل حل حاصل ہو گا۔

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w=\operatorname{erf}\frac{x}{2c\sqrt{t}}\qquad (t>0)$$

سوال 13.109: درج ذیل ابتدائی معلومات کی صورت میں مساوات 13.63 کیا صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x)=\begin{cases}1 & a<x<b \qquad (a>0)\\ 0 & \text{باقی جگہوں پر}\end{cases}$$

جواب:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{a-x}{\tau}}^{\frac{b-x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{a+x}{\tau}}^{\frac{b+x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w$$

سوال 13.110: $x>0$ پر $f(x)=1$ اور $x<0$ پر $f(x)=-1$ لیتے ہوئے مساوات 13.60 یا مساوات 13.61 کی استعمال سے سوال 13.108 کا نتیجہ حاصل کریں۔

سوال 13.111: ثابت کریں کہ سوال 13.60 میں کوئی دو نقطے کا ایک ہی درجہ حرارت تک پہنچنے کے لئے درکار وقت ان نقطوں کا سرحد $x=0$ سے فاصلہ کے مربع کے راست تناسب ہو گا۔

13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دو ابعادی مساوات موج

ارتعاش کی میدان میں ایک اور اہم مسئلے کے طور پر تنی ہوئی جھلی، مثلاً طبل پر چڑھا ہوا چمڑے کا پردہ، کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ موجودہ تجزیہ حصہ 13.2 میں ارتعاش تار کی مانند ہو گا۔

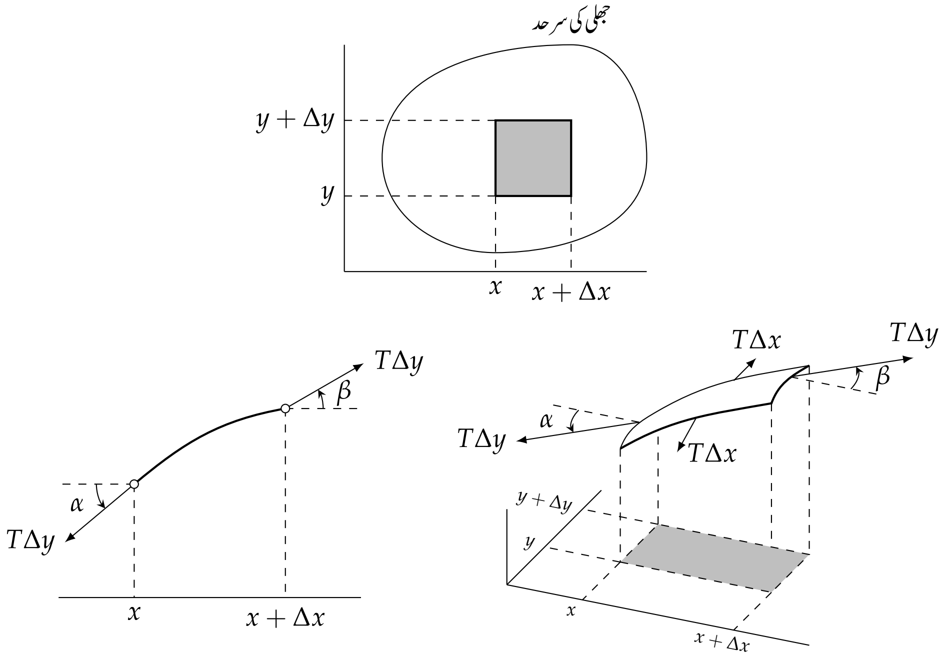
ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

(الف) اکائی رقبہ پر جھلی کی کمیت یکساں ہے (ہم جنسی جھلی)۔ جھلی مکمل لچکدار اور اتنی باریک ہے کہ مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتی ہے۔

(ب) جھلی کو تان کر، اس کی پوری سرحد سے xy مستوی میں باندھا گیا ہے۔ جھلی میں ہر نقطہ پر اور ہر رخ فی اکائی لمبائی تناو T یکساں ہے جو ارتعاش کے دوران تبدیل نہیں ہوتی۔

(پ) حرکت کے دوران جھلی کی انحراف $u(x,y,t)$، جھلی کی جسامت کے لحاظ سے کم ہے اور تمام زاویہ میلان چھوٹے ہیں۔

اگرچہ حقیقت میں ان مفروضوں پر مکمل طور پورا اترنا ممکن نہیں ہے، پتلی جھلی کی قلیل عرضی لرزش ان مفروضوں پر تقریباً پورا اترتی ہیں۔



شکل 13.13: ارتعاش پذیر جھلی

جھلی کی حرکت کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم جھلی کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرتے ہیں (شکل 13.13)۔چونکہ جھلی کی انحراف اور زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہٰذا اس ٹکڑے کے اطراف کی لمبائی تقریباً Δx اور Δy ہو گی۔اکائی لمبائی پر قوت کو تناو T کہتے ہیں لہٰذا اس ٹکڑے کے اطراف پر قوت $T\Delta x$ اور $T\Delta y$ عمل کرے گی۔ چونکہ جھلی مکمل لچکدار ہے لہٰذا یہ قوتیں جھلی کی مماسی ہوں گی۔

ہم پہلے قوتوں کی افقی اجزاء پر غور کرتے ہیں۔اطراف پر قوت کو زاویہ میلان کی کوسائن سے ضرب دینے سے ان کی افقی جزو حاصل ہو گی۔چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہٰذا ان کی کوسائن تقریباً اکائی (1) کے برابر ہوں گے۔یوں مخالف کناروں پر تقریباً برابر قوتیں پائی جائیں گی۔یوں افقی رخ جھلی کی حرکت قابل نظر انداز ہو گی لہٰذا ہم جھلی کی حرکت کو عرضی حرکت تصور کرتے ہیں یعنی جھلی صرف اوپر نیچے حرکت کرتی ہے۔

اس ٹکڑے کی کناروں پر کھڑی رخ (yu سطح کی متوازی) قوتوں کے اجزاء[28]

$$T\Delta y \sin\beta \quad \text{اور} \quad -T\Delta y \sin\alpha$$

ہوں گے جہاں منفی علامت نیچے رخ کو ظاہر کرتی ہے۔چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں ہم ان کے $\sin$ کی جگہ ان کے $\tan$ استعمال[29] کر سکتے ہیں۔یوں ان دو عدد قوتوں کا مجموعہ

$$\begin{aligned} T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) &\approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \end{aligned} \tag{13.64}$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں جبکہ y اور $y+\Delta y$ کے درمیان y_1 اور y_2 کوئی نقطے ہیں۔اسی طرح ٹکڑے کے باقی دو کناروں پر قوتوں کے انتصابی اجزاء کا مجموعہ

$$T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)] \tag{13.65}$$

ہو گا جہاں x اور $x+\Delta x$ کے درمیان x_1 اور x_2 کوئی نقطے ہیں۔

نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت مساوات 13.64 اور مساوات 13.65 میں دی گئی قوتوں کا مجموعہ جھلی کے ٹکڑے کی کمیت $\rho\Delta A$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا۔ یہاں بلا انحراف فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے جبکہ بلا انحراف ٹکڑے کا رقبہ $\Delta A = \Delta x\Delta y$ ہے۔یوں

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

ہو گا جہاں بائیں ہاتھ تفرق ٹکڑے کے کسی موزوں نقطہ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ پر حاصل کیا جائے گا۔ $\rho\Delta x\Delta y$ سے دونوں اطراف کو تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\Big[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\Big]$$

Δx اور Δy کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے درج ذیل جزوی تفرقی مساوات حاصل ہو گی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{13.66}$$

---

[28] دھیان رہے کہ کنارے پر چلتے ہوئے زاویہ میلان تبدیل ہو گا۔ α اور β زیر غور کنارے کے کسی موزوں نقطہ پر زاویہ میلان ہوں گے۔
[29] چھوٹے زاویہ θ کا $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$ ہوتا ہے۔

جس کو **دو ابعادی مساوات موج**[30] کہتے ہیں۔ قوسین میں بند u کا لاپلاسی $\nabla^2 u$ ہے (حصہ 10.8) لہٰذا مساوات 13.66 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \tag{13.67}$$

13.8 مستطیل جھلی

ارتعاش پذیر جھلی کے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل دو ابعادی مساوات موج کا حل $u(x, y, t)$ تلاش کرنا ہو گا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{13.68}$$

جو تمام $t \geq 0$ کے لئے پوری سرحد پر سرحدی شرط

$$u = 0 \tag{13.69}$$

اور دو عدد ابتدائی شرائط

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \qquad \text{ابتدائی انحراف} \tag{13.70}$$

اور

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y) \qquad \text{ابتدائی رفتار} \tag{13.71}$$

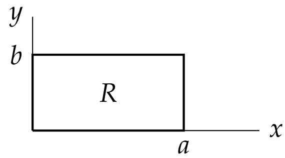
کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط ارتعاش پذیر تار کے شرائط کی مانند ہیں۔ آئیں شکل 13.14 میں دکھائی گئی مستطیل جھلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.68 کا ایسا حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.69 کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t) \tag{13.72}$$

---

[30] two dimensional wave equation



شکل 13.14: مستطیل جھلی

کو مساوات 13.68 میں پر کرتے ہیں

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

جہاں $(')$ جزوی تفرق اور $(\cdot)$ وقت t کے ساتھ تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy})$$

ملتا ہے۔اب بایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر نہیں ہے لہٰذا دونوں اطراف کسی مستقل A کے برابر ہیں۔آپ حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہوئے تسلی کر سکتے ہیں کہ A کے صرف منفی قیمتیں استعمال کرنے سے ایسا غیر صفر حل حاصل ہو گا جو مساوات 13.69 کی شرط کو مطمئن کرتا ہو۔اس منفی مستقل کو $-\nu^2$ سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -\nu^2$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دو علیحدہ علیحدہ سادہ تفرقی مساوات

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad (\lambda = c\nu) \tag{13.73}$$

$$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0 \tag{13.74}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

ہم مساوات 13.74 کا حل تلاش کرتے ہیں جو جھلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہو گا۔ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب دوبارہ لاگو کرتے ہوئے

$$F(x,y) = H(x)Q(y) \tag{13.75}$$

لیتے ہیں جو کو مساوات 13.74 میں پر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2}Q = -\left(H\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 HQ\right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کے دونوں اطراف کو HQ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 Q\right)$$

ملتا ہے جہاں بائیں ہاتھ تفاعل صرف x پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف y پر منحصر ہے۔یوں دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔یہاں بھی صرف منفی قیمت کا مستقل مثلاً $-k^2$ غیر صفر حل دیتے ہیں۔یوں

$$\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 Q\right) = -k^2$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} + k^2 H = 0 \tag{13.76}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + p^2 Q = 0 \qquad (p^2 = \nu^2 - k^2) \tag{13.77}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ مساوات 13.76 اور مساوات 13.77 کے حل عمومی

$$H(x) = A\cos kx + B\sin kx \quad \text{اور} \quad Q(y) = C\cos py + D\sin py$$

ہیں جہاں A ، B ، C اور D مستقل ہیں۔یوں مساوات 13.72 اور مساوات 13.69 سے ظاہر ہے کہ جھلی کی سرحد پر $F = HQ$ صفر ہو گا۔جیسا آپ شکل 13.14 سے دیکھ سکتے ہیں، جھلی کی سرحد $x = 0$ ، $x = a$ ، $y = 0$ اور $y = b$ ہے۔یوں درج ذیل شرائط لکھے جا سکتے ہیں۔

$$H(0) = 0, \quad H(a) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0$$

اس طرح $H(0) = A = 0$ ہو گا جبکہ

$$H(a) = B\sin ka = 0$$

میں $B=0$ لینے سے (غیر دلچسپ حل) $H\equiv 0$ یعنی $F\equiv 0$ ملتا ہے لہٰذا ہم $B\neq 0$ فرض کرتے ہیں۔یوں $\sin ka=0$ ہو گا جس سے $ka=m\pi$ یعنی

$$k=\frac{m\pi}{a} \qquad (m \text{ عدد صحیح}) \tag{13.78}$$

حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح $C=0$ جبکہ $D\neq 0$ سے $p=\frac{n\pi}{b}$ حاصل ہوتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔یوں درج ذیل حل ملتے ہیں۔

$$H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a} \quad \text{اور} \quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad {\scriptstyle m=1,2,\cdots \atop n=1,2,\cdots}$$

(ارتعاش پذیر تار کی طرح یہاں بھی $m,n=-1,-2,\cdots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے چونکہ ایسا کرنے سے یہی حل ضرب -1 دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔) یوں $B=1$ اور $D=1$ چنتے ہوئے مساوات 13.74 کے حل درج ذیل ہوں گے

$$F_{mn}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad {\scriptstyle m=1,2,\cdots \atop n=1,2,\cdots} \tag{13.79}$$

جو جھلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہیں۔

چونکہ مساوات 13.77 میں $p^2=\nu^2-k^2$ ہے اور مساوات 13.73 میں $\lambda=c\nu$ ہے لہٰذا

$$\lambda=c\sqrt{k^2+p^2}$$

ہو گا۔یوں $k=\frac{m\pi}{a}$ اور $p=\frac{n\pi}{b}$ کا مطابقتی λ مساوات 13.73 میں

$$\lambda=\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} \qquad {\scriptstyle m=1,2,\cdots \atop n=1,2,\cdots} \tag{13.80}$$

ہو گا اور مساوات 13.73 کا مطابقتی عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_{mn}(t)=B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

یوں مساوات 13.73 کے غیر صفر حل $u_{mn}(x,y,t)=F_{mn}(x,y)G_{mn}(t)$ درج ذیل ہوں گے

$$u_{mn}(x,y,t)=(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13.81}$$

جن میں λ_{mn} مساوات 13.80 دے گی۔ تفاعل u_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے آئگنی تفاعل[31] یا امتیازی تفاعل[32] کہتے ہیں جبکہ λ_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے آئگنی اقدار[33] یا امتیازی اقدار[34] کہتے ہیں۔ تفاعل u_{mn} کی تعدد $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ ہو گی۔

a اور b کی مختلف قیمتیں ایک ہی امتیازی قدر دیتے ہوئے کئی مختلف تفاعل F_{mn} دے سکتی ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ جھلی میں ایک ہی تعدد کے کئی مختلف انداز کے ارتعاش ممکن ہیں جن کی صفر ہٹاو لکیریں[35] مختلف ہوں گی۔ ارتعاش پذیر جھلی پر وہ لکیریں جو حرکت نہیں کرتی ہیں صفر ہٹاو لکیریں کہلاتی ہیں۔ آئیں اس کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 13.5: مکعب جھلی
ایک مکعب جھلی کا $a = 1$ ، $b = 1$ ہے۔ مساوات 13.80 سے

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2} \tag{13.82}$$

لہٰذا

$$\lambda_{mn} = \lambda nm$$

ہو گا لیکن $m \neq n$ کے لئے مطابقتی تفاعل

$$F_{mn} = \sin m\pi x \, \sin n\pi y \quad \text{اور} \quad F_{nm} = \sin n\pi x \, \sin m\pi y$$

ہیں جو ایک جیسے نہیں ہیں۔ مثلاً $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ کے مطابقتی تفاعل

$$F_{12} = \sin \pi x \, \sin 2\pi y \quad \text{اور} \quad F_{21} = \sin 2\pi x \, \sin \pi y$$

ہوں گے۔ یوں مطابقتی حل

$$\begin{aligned} u_{12} &= (B_{12}\cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^{*}\sin c\pi\sqrt{5}t)F_{12} \\ u_{21} &= (B_{21}\cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^{*}\sin c\pi\sqrt{5}t)F_{21} \end{aligned}$$

---

[31] eigenfunctions
[32] characteristic functions
[33] eigenvalues
[34] characteristic values
[35] nodal lines

کی صفر ہٹاو لکیریں بالترتیب $y = \frac{1}{2}$ اور $x = \frac{1}{2}$ ہوں گی (شکل 13.15)۔اگر $B_{12} = 1$ اور $B_{12}^* = B_{21}^* = 0$ ہوں تب

$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t\,(F_{12} + B_{21}F_{21})$$

ہو گا جو ایک اور انداز ارتعاش ہے جس کی امتیازی قدر $c\pi\sqrt{5}$ ہے۔اس تفاعل کی صفر ہٹاو لکیریں درج ذیل مساوات کے حل ہوں گی۔

$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \sin\pi x\,\sin 2\pi y + B_{21}\sin 2\pi x\,\sin\pi y = 0$$

اب $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ استعمال کرتے ہوئے درج بالا کو

$$\sin\pi x\sin\pi y(\cos\pi y + B_{21}\cos\pi x) = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا حل B_{21} پر منحصر ہو گا۔

مساوات 13.82 سے ہم دیکھتے ہیں کہ λ_{mn} کے دو مزید مطابقتی تفاعل ممکن ہیں۔مثلاً چار تفاعل F_{18} ، F_{81} ، F_{47} اور F_{74} کی $\lambda_{18} = \lambda_{81} = \lambda_{47} = \lambda_{74} = c\pi\sqrt{65}$ ہے چونکہ؛

$$1^1 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$$

ایسا اس لئے ممکن ہے کہ 65 کو دو اعداد صحیح کے مربع کا مجموعہ مختلف طریقوں سے لکھنا ممکن ہے۔گاوس کے ایک مسئلہ کے تحت ایسا ہر اس صورت ہو گا جہاں دو اعداد کے مربع کا مجموعہ کے اجزاء مفرد میں کم از کم دو مختلف $4n+1$ صورت کے ہوں، جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔یہاں دو اعداد کے مربع کے مجموعہ 65 کو

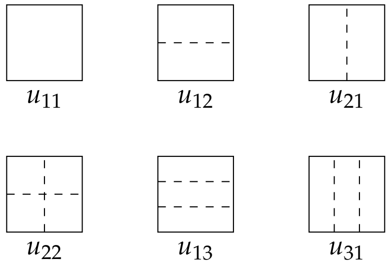
$$65 = 5\cdot 13 = (4+1)(12+1)$$

لکھنا ممکن ہے۔ □

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.70 اور مساوات 13.71 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہیں۔ہم دوہرا تسلسل[36]

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}^*\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \tag{13.83}$$

[36] ہم حل کی یکتائی اور ارتکاز پر غور نہیں کریں گے۔



شکل 13.15: مکعب جھلی کے حل $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{13}, u_{31}$ کی صفر ہٹاو لکیریں۔

کو لیتے ہیں جو مساوات 13.70 کے ساتھ درج ذیل **دوہرا فوریئر تسلسل**[37] دیتی ہے۔

$$u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = f(x,y) \tag{13.84}$$

مستطیل R (شکل 13.14) میں f ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ استمراری ہونے کی صورت میں $f(x,y)$ کو اس دوہرا فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا۔اس دوہرا فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔ہم درج ذیل لے کر

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13.85}$$

مساوات 13.84 کو

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{13.86}$$

لکھ سکتے ہیں جو مقررہ y کی صورت میں $f(x,y)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہے جس کا متغیرہ x ہو گا جس کے عددی سر صفحہ 916 پر مساوات 12.34 کے تحت

$$K_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x \tag{13.87}$$

ہوں گے۔مزید مساوات 13.85 تفاعل $K_m(y)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہے لہٰذا اس کے عددی سر صفحہ 916 پر مساوات 12.34 کے تحت

$$B_{mn} = \frac{2}{b}\int_0^b K_m(y) \sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y \tag{13.88}$$

[37] double Fourier series

ہوں گے۔مساوات 13.88 اور مساوات 13.87 کو ملا کر درج ذیل **عمومی یولر کلیہ**[38] حاصل ہوتا ہے

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \substack{m=1,2,\cdots\\ n=1,2,\cdots} \tag{13.89}$$

جو دوہرا تسلسل (مساوات 13.84) میں تفاعل $f(x,y)$ کے عددی سر B_{mn} دیتی ہے۔

یوں مساوات 13.83 میں B_{mn} تفاعل $f(x,y)$ سے حاصل ہوتے ہیں۔ B^*_{mn} حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.83 کا t کے ساتھ جزوی تفرق لے کر ابتدائی شرط مساوات 13.71 استعمال کرتے ہوئے

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B^*_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y)$$

حاصل کرتے ہیں۔ مستطیل R (شکل 13.14) میں g ، $\frac{\partial g}{\partial x}$ ، $\frac{\partial g}{\partial y}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ استمراری ہونے کی صورت میں $g(x,y)$ کو اس دوہرا فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں پہلی کی طرح بڑھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$B^*_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \substack{m=1,2,\cdots\\ n=1,2,\cdots} \tag{13.90}$$

یوں مساوات 13.89 اور مساوات 13.90 سے حاصل B_{mn} اور B^*_{mn} مساوات 13.83 میں پر کرتے ہوئے حاصل حل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرے گا۔

سوالات

سوال 13.112: جھلی میں تناو بڑھانے سے مساوات 13.81 میں دی گئی حل کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ c بڑھتا ہے لہٰذا تعدد بھی بڑھے گی۔

سوال 13.113: مساوات 13.81 کی صفر ہٹاو لکیریں $a=b=1$ لے کر $m=1,2,3,4$ اور $n=1,2,3,4$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.114: مساوات 13.81 کی صفر ہٹاو لکیریں $a=2$ اور $b=1$ لے کر $m=1,2,3,4$ اور $n=1,2,3,4$ کے لئے کھینچیں۔

[38] generalized Euler formula

سوال 13.115: اکائی لمبائی کے اطراف والی مکعب جھلی کے مزید ایسے امتیازی اقدار حاصل کریں جن کے مطابقتی امتیازی تفاعل کی تعدد چار عدد ہو۔

سوال 13.116: مستطیل جھلی جس کے اطراف $a = 2$ اور $b = 1$ ہیں کے ایسے امتیازی اقدار حاصل کریں جن کے مطابقتی امتیازی تفاعل کی تعدد دو یا دو سے زیادہ ہو۔
جواب: $c\pi\sqrt{260}, \quad (F_{4,16}, F_{16,14}), \cdots$

سوال 13.117: تصدیق کریں کہ یکساں c والی تمام ممکنہ مستطیل جھلی جن کا رقبہ A ہو میں مکعب جھلی کی u_{11} (مساوات 13.81) کی تعدد کم تر ہو گی۔

سوال 13.118: مقررہ m ، n اور A کے لئے سوال 13.117 کی طرح کم تر تعدد کی شرط اخذ کریں۔
جواب: مساوات 13.80 میں $a = \frac{A}{b}$ پر کرتے ہوئے حاصل λ کا a کے ساتھ تفرق، صفر کے برابر کرتے ہوئے

$$\lambda^2 = c^2\pi^2\Big(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2a^2}{A^2}\Big), \implies 2\lambda\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} = c^2\pi^2\Big(-\frac{2m^2}{a^3} + \frac{2n^2a}{A^2}\Big) = 0$$

کمتر λ کی شرط $\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$ حاصل کرتے ہیں۔

سوال 13.119 تا سوال 13.123 میں تفاعل $(0 < x < a, 0 < y < b) \quad f(x,y)$ کا مساوات 13.84 کی طرز کا دوہرا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 13.119: $f = 1$
جواب: $B_{mn} = \frac{16}{mn\pi^2}, \quad m, n = 1, 3, 5, \cdots$

سوال 13.120: $f = x + y$
جواب: $B_{mn} = \frac{4}{mn\pi^2}[a(-1)^{m+n} - a(-1)^m + b(-1)^{m+n} - b(-1)^n]$

سوال 13.121: $f = xy$
جواب: $B_{mn} = \frac{4ab(-1)^{m+n}}{mn\pi^2}$

سوال 13.122: $f = xy(a - x)(b - y)$
جواب: $B_{mn} = \frac{64a^2b^2}{m^3n^3\pi^6}, \quad m, n = 1, 3, 5, \cdots$

سوال 13.123: $f = xy(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$
جواب: $B_{mn} = \frac{144a^3b^3(-1)^{m+n}}{m^3n^3\pi^6}$

سوال 13.124: ثابت کریں کہ فی اکائی رقبہ بیرونی قوت $P(x, y, t)$ کی صورت میں xy مستوی میں جھلی کی ارتعاش درج ذیل مساوات دیتی ہے جہاں فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے۔بیرونی قوت جھلی کی عمودی عمل کرتی ہے۔

$$u_{tt} = c^2\nabla^2 u + \frac{P}{\rho}$$

سوال 13.125 تا سوال 13.128 میں ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x, y)$ ہے۔جھلی کی انحراف $u(x, y, t)$ دریافت کریں جہاں $c = 1$ اور $a = b = 1$ ہیں۔

سوال 13.125: $f = 0.1xy(1 - x)(1 - y)$
جواب:

$$u(x, y, t) = \frac{6.4}{\pi^6} \sum_{\substack{m=1 \\ \text{طاق } m}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{طاق } n}}^{\infty} \frac{1}{m^3n^3} \cos(\pi t\sqrt{m^2 + n^2}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

سوال 13.126: $f = kx(1 - x^2)(1 - y^2)$
جواب:

$$\frac{24k}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^3n^3} [2(-1)^n - (n^2\pi^2 + 1)] \cos(\pi t\sqrt{m^2 + n^2}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

سوال 13.127: $f = k \sin \pi x \sin 2\pi y$
جواب: $u(x, y, t) = k \cos \pi\sqrt{5}t \sin \pi x \sin 2\pi y$

سوال 13.128: $f = k \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y$
جواب: $B_{2n} = B_{m2} = 0, B_{11} = \frac{64k}{9\pi^2}, B_{13} = -\frac{64k}{45\pi^2}, B_{31} = -\frac{64k}{45\pi^2}, B_{33} = \frac{64k}{225\pi^2} \cdots$

سوال 13.129: باریک مکعب چادر کے اطراف صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہیں جبکہ اس کی دونوں سطحیں حاجز شدہ ہیں۔چادر کی ایک طرف کی لمبائی π ہے۔ابتدائی درجہ حرارت $u(x, y, 0) = f(x, y)$ ہے۔دو

ابعادی حراری مساوات $u_t = c^2\nabla^2 u$ پر علیحدگی متغیرات کی ترکیب لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx \, \sin ny \, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

جہاں B_{mn} درج ذیل ہے۔

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(x,y) \, \sin mx \, \sin ny \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

سوال 13.130: $f(x,y) = xy(\pi-x)(\pi-y)$ کی صورت میں سوال 13.129 میں دیے گئے چادر کا حل تلاش کریں۔
جواب:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{m^3n^3\pi^2} \sin mx \, \sin ny \, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

13.9 قطبی محدد میں لاپلاسی

سرحدی شرائط کی جزوی تفرقی مساوات کا حل تلاش کرتے ہوئے عموماً ایسا محدد استعمال کیا جاتا ہے جس کے لحاظ سے سرحد کی روپ سادہ ہو۔اگلے حصے میں دائری جھلی پر غور کیا جائے گا جس کو حل کرنے کے لئے **قطبی محدد**[39] سود مند ثابت ہو گا جس کے متغیرات r اور θ کی تعریف درج ذیل ہیں۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

قطبی محدد میں جھلی کی دائری سرحد کی مساوات $r =$ مستقل ہو گی۔

r اور θ استعمال کرتے ہوئے مساوات موج کی لاپلاسی

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

[39] polar coordinates

کا اظہار ان محدد میں کرنا ہو گا لہٰذا آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل کو غور سے پڑھیں۔

ہم حصہ 13.4 کی طرح زنجیری ترکیب استعمال کریں گے۔اپنی آسانی کی خاطر ہم جزوی تفرق کو زیر نوشت میں x ، y یا t لکھ کر ظاہر کریں گے جبکہ متغیرات r, θ, t کے تفاعل $u(x, y, t)$ کو اسی حرف u سے ظاہر کریں گے۔

صفحہ 747 پر مساوات 10.69 کا زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

ملتا ہے۔ایک بار دوبارہ x کے ساتھ تفرق لے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\ &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \end{aligned} \tag{13.91}$$

زنجیری قاعدہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x \quad \text{اور} \quad (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x$$

لکھا جا سکتا ہے۔جزوی تفرق r_x اور θ_x حاصل کرنے کی خاطر ہمیں

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{اور} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

کا تفرق لینا ہو گا جس سے

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{r^2}$$

حاصل ہو گا۔ ان کا x تفرق لینے سے

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = -y \left(-\frac{2}{r^3} \right) r_x = \frac{2xy}{r^4}$$

ملتا ہے۔ان تمام کو مساوات 13.91 میں پر کرتے ہیں۔ایک درجی اور دو درجی جزوی تفرق کو استمراری تصور کرتے ہوئے $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ لکھ کر یوں درج ذیل سادہ صورت حاصل ہو گی۔

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2\frac{xy}{r^4} u_\theta \tag{13.92}$$

بالکل اسی طرح درج ذیل بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3}u_r - 2\frac{xy}{r^4}u_\theta \tag{13.93}$$

مساوات 13.92 اور مساوات 13.93 کا مجموعہ لے کر قطبی محدد میں لاپلاسی حاصل کرتے ہیں۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{13.94}$$

سوالات

سوال 13.131: مساوات 13.94 کو درج ذیل صورت میں لکھ کر دکھائیں۔

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

سوال 13.132: اگر مساوات 13.94 میں لاپلاسی θ سے آزاد ہو تب $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{u_r}{r}$ لکھی جائے گی۔ u کو θ سے آزاد فرض کرتے ہوئے کارتیسی محدد میں لاپلاسی سے سیدھا یہ نتیجہ حاصل کریں۔

سوال 13.133: مساوات 13.94 کو واپس کارتیسی محدد میں لے جائیں۔

سوال 13.134: اگر x ، y کارتیسی محدد ہوں تب دکھائیں کہ $x^* = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ اور $y^* = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ بھی کارتیسی محدد ہیں۔ لاپلاسی کو کارتیسی محدد x^* ، y^* میں حاصل کریں۔
جواب: $\nabla^2 u = u_{x^*x^*} + u_{y^*y^*}$

سوال 13.135: لاپلاسی $\nabla^2 u$ کو نئی محدد $x^* = ax + b$ ، $y^* = cy + d$ میں لکھیں جہاں x ، y کارتیسی محدد ہیں جبکہ a ، b ، c اور d مستقل ہیں۔
جواب: $\nabla^2 u = a^2 u_{x^*x^*} + c^2 u_{y^*y^*}$

سوال 13.136: **نلکی محدد[40] میں لاپلاسی**
نلکی محدد ρ ، ϕ ، z کی تعریف درج ذیل ہے

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

---

[40] cylindrical coordinates

جہاں x ، y ، z کارتیسی محدد ہیں۔ لاپلاسی کو نلکی محدد میں لکھیں۔
جواب: $\nabla^2 u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} + u_{zz}$

سوال 13.137: کروی محدد r ، θ ، ϕ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta$$

اگر تفاعل $u(x,y,z)$ صرف محدد $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کا تابع ہو تب درج ذیل حاصل کریں۔

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$$

جواب: $r^2 = x^2+y^2+z^2$ سے آگے بڑھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r}\\
&u_x = u_r r_x = \frac{x}{r}r_x, \quad u_y = \frac{y}{r}u_r, \quad u_z = \frac{z}{r}u_r\\
&u_{xx} = \frac{1}{r}u_r - \frac{x}{r^2}r_x u_r + \frac{x}{r}u_{rr}r_x = \left(\frac{x}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\\
&u_{yy} = \left(\frac{y}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right), \quad u_{zz} = \left(\frac{z}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)\\
&u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r
\end{aligned}$$

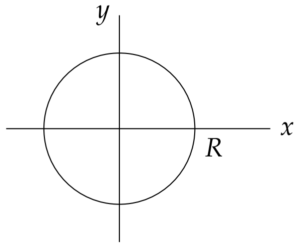
سوال 13.138: **کروی محدد[41] میں لاپلاسی**
کروی محدد r ، θ ، ϕ کی تعریف سوال 13.137 میں دی گئی ہے۔لاپلاسی کو کروی محدد میں لکھیں۔
جواب:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi}$$

سوال 13.139: ٹھوس کرہ $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ کی سطح کو صفر درجہ حرارت پر رکھا گیا ہے جبکہ کرہ میں درجہ حرارت $f(r)$ ہے جہاں $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہے۔ثابت کریں کہ کرہ میں درجہ حرارت درج ذیل مساوات کا وہ حل ہو گا

$$u_t = c^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right)$$

[41] spherical coordinates



شکل 13.16: دائری جھلی

جو $u(R,t)=0,\ u(r,0)=f(r)$ شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

سوال 13.140: ثابت کریں کہ $v=ru$ لینے سے سوال 13.139 کا مسئلہ $v_t=c^2v_{rr},\quad v(R,t)=0,\quad v(r,0)=rf(r)$ اختیار کرتا ہے۔اس کے ساتھ $v(0,t)=0$ شامل کریں چونکہ $r=0$ پر u کا محدود ہونا لازم ہے۔اس مسئلے کو علیحدگی متغیرات سے حل کریں۔

13.10 دائری جھلی۔مساوات بیسل

ہم اب رداس R کی دائری جھلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں (شکل 13.16)۔ قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ لکھے جائیں گے جبکہ مساوات 13.66 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے (مساوات 13.94)۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\Big)$$

اس حصہ میں ہم رداسی تشاکلی حل $u(r,t)$ حاصل کرتے ہیں جو θ پر منحصر نہیں ہوں گے۔ایسی صورت میں مساوات موج درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\Big) \tag{13.95}$$

چونکہ جھلی کو سرحد $r=R$ سے باندھا گیا ہے لہٰذا سرحدی شرط درج ذیل ہو گا۔

$$u(R,t)=0 \tag{13.96}$$

θ سے آزاد حل اس صورت پائے جائیں گے جب ابتدائی حالت بھی θ سے آزاد ہو۔یوں ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گے۔

$$u(r,0)=f(r) \quad \text{ابتدائی انحراف} \tag{13.97}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r) \quad \text{ابتدائی رفتار} \tag{13.98}$$

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.95 کے وہ حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.96 کو مطمئن کرتے ہوں۔یوں

$$u(r,t)=W(r)G(t) \tag{13.99}$$

کے تفرقات کو مساوات 13.95 میں پر کرتے ہوئے حاصل مساوات کے دونوں اطراف کو c^2WG سے تقسیم کر کے

$$\frac{\ddot{G}}{c^G}=\frac{1}{W}\Big(W''+\frac{1}{r}W\Big)$$

حاصل کرتے ہیں جہاں $(\cdot)$ وقت t کے ساتھ تفرق جبکہ $(')$ جزوی تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔درج بالا کے دونوں اطراف کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔سرحدی شرط مطمئن کرتے ہوئے غیر صفر حل کے لئے ضروری ہے کہ یہ مستقل منفی ہو مثلاً $-k^2$ لہٰذا درج بالا کو

$$\frac{\ddot{G}}{c^G}=\frac{1}{W}\Big(W''+\frac{1}{r}W\Big)=-k^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$\ddot{G}+\lambda^2G=0, \qquad \lambda=ck \tag{13.100}$$

$$W''+\frac{1}{r}W'+k^2W=0 \tag{13.101}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ ہم پہلے مساوات 13.101 پر غور کرتے ہیں جس میں نیا متغیرہ $s = kr$ متعارف کرتے ہوئے $\frac{1}{r} = \frac{k}{s}$ لکھ کر

$$W' = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}k \qquad W'' = \frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}s^2}k^2$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں مساوات 13.101 میں پر کر کے مشترکہ مستقل k^2 کر رد کرتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s} + W = 0 \tag{13.102}$$

حاصل ہوتا ہے جو حصہ 5.4 کا مساوات 5.76 ہے جس میں $\nu = 0$ ہے۔ اس کو **مساوات بیسل**[42] کہتے ہیں جس کا عمومی حل (حصہ 5.5) درج ذیل ہے۔

$$W = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s)$$

J_0 اور Y_0 بالترتیب صفر درجہ کے بیسل تفاعل کی پہلی قسم اور دوسری قسم کہلاتے ہیں۔ چونکہ جھلی کی انحراف ہر صورت محدود ہو گی جبکہ $s \to 0$ کرنے سے $Y_0 \to \infty$ ہوتا ہے لہٰذا ہمیں $C_2 = 0$ منتخب کرنا ہو گا۔ ظاہر ہے کہ غیر صفر حل حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ $C_1 \neq 0$ ہو۔ ہم $C_1 = 1$ چنتے ہیں جس سے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$W(r) = J_0(s) = J_0(kr) \tag{13.103}$$

جھلی کی سرحد $r = R$ پر $u(R,t) = W(R)G(t) = 0$ ہو گا جس میں $G(t) \equiv 0$ منتخب کرنے سے $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہٰذا

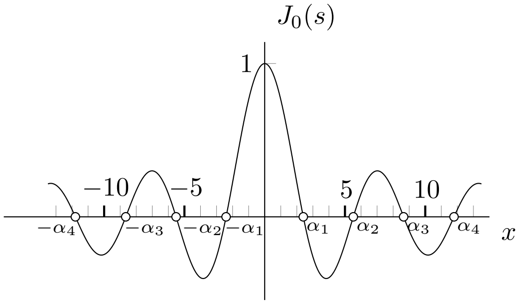
$$W(R) = J_0(kR) = 0$$

ہو گا۔ بیسل تفاعل J_0 کے لا محدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ ہم $J_0(s)$ کے مثبت صفروں کو $s = \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 13.17)۔ ہم یہاں بتلاتے چلیں کہ J_0 کی چند صفروں کی (چار ہندسوں تک درست) اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\alpha_1 = 2.4048, \quad \alpha_2 = 5.5201, \quad \alpha_3 = 8.6537, \quad \alpha_4 = 11.7915, \quad \alpha_5 = 14.9309$$

ہم دیکھتے ہیں کہ بیسل تفاعل کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ مساوات 13.103 سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

$$kR = \alpha_m \implies k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}, \quad m = 1, 2, \cdots \tag{13.104}$$



شکل 13.17: بیسل تفاعل $J_0(s)$

یوں تفاعل

$$W_m(r)=J_0(k_m r)=J_0\Big(\frac{\alpha_m}{R}r\Big)\qquad m=1,2,\cdots \tag{13.105}$$

مساوات 13.101 کا وہ حل ہو گا جو جھلی کی سرحد پر صفر ہے۔

یوں $\lambda=\lambda_m=ck_m$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.100 کا مطابقتی حل

$$G_m(t)=a_m\cos\lambda_m t+c_2\sin\lambda_m t$$

ہو گا۔اس طرح مساوات 13.95 کے ایسے حل جو سرحدی شرط مساوات 13.96 کو مطمئن کرتے ہوں درج ذیل ہوں گے جہاں $m=1,2,\cdots$ ہے۔

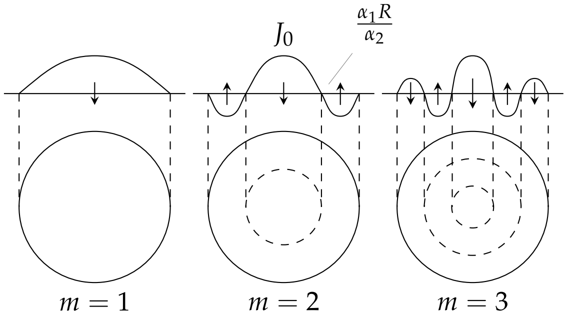
$$u_m(r,t)=W_m(r)G_m(t)=(a_m\cos\lambda_m t+c_2\sin\lambda_m t)J_0(k_m r) \tag{13.106}$$

$u_m(r,t)$ اس مسئلے کے امتیازی تفاعل ہیں جبکہ λ_m مسئلے کے امتیازی اقدار ہیں۔

ارتعاش کی u_m حصہ کو m ویں **عمودی انداز**[43] کہتے ہیں جس کی تعدد $\frac{\lambda_m}{2\pi}$ چکر فی اکائی وقت ہو گی۔ x محور پر سائن تفاعل کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ پایا جاتا ہے جبکہ J_0 کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ نہیں پایا جاتا ہے۔یہی وجہ ہے کہ ستار کی ترنگ اور طبلہ کی تھاپ مختلف ہیں۔شکل میں دکھائے گئے جھلی کی عمودی

---

[42] Bessel's equation
[43] m^{th} normal mode



شکل 13.18: زاویہ سے آزاد دائری جھلی کی عمودی انداز

انداز شکل 13.17 سے با آسانی حاصل کیے جا سکتے ہیں (شکل 13.18)۔ عمودی انداز $m = 1$ میں پوری جھلی بیک وقت اوپر (یا نیچے) حرکت کرتی ہے۔ $m = 2$ کے لئے تفاعل

$$W_2(r) = J_0\left(\frac{\alpha_2}{R}r\right)$$

ان نقطوں پر صفر ہو گا جہاں $\frac{\alpha_2 r}{R} = \alpha_1$ یعنی $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ ہو۔ یوں $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ صفر ہٹاو لکیر ہو گی جس کو شکل 13.18 میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اب جن لمحات پر جھلی کا وسطی خطہ اوپر حرکت کرتا ہے ان لمحات پر جھلی کا بیرونی خطہ $r > \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ نیچے کو حرکت کرے گا اور اسی طرح جب وسطی خطہ نیچے کو حرکت کرتا ہے تب بیرونی خطہ اوپر کو حرکت کرتا ہے۔ حل $u_m(r,t)$ کے $m-1$ عدد صفر ہٹاو لکیریں ہوں گی (شکل 13.18) جو ہم مرکز دائرے ہوں گے۔

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.97 اور مساوات 13.98 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم ارتعاش پذیر تار کے حل کی طرح آگے بڑھتے ہیں یعنی ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں۔

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W(r)G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_o\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) \tag{13.107}$$

اس میں $t = 0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 13.97 استعمال کرتے ہوئے

$$u(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) = f(r) \tag{13.108}$$

ملتا ہے۔یوں اگر مساوات 13.107 نے 13.97 کو مطمئن کرنا ہو تب a_m ، تفاعل $f(r)$ کی بیسل تسلسل کے عددی سر ہوں گے۔یوں صفحہ 387 پر مساوات 5.154 کے تحت

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_1^2 \alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0(\frac{\alpha_m}{R} r) \, \mathrm{d}r \qquad m = 1, 2, \tag{13.109}$$

ہوں گے۔

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$(\text{الف}) \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad (\text{ب}) \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \le 0, \quad z' + hz \ge 0 \tag{1.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لٰہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لٰہذا انہیں مساوات 1.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \le 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \ge 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 1.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لٰہذا $x \le x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \ge (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \le (zF_2)_{x_0} \tag{1.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \ge x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \le 0, \qquad zF_2 \ge 0 \tag{1.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \le 0, \qquad z \ge 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{1.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1.ب-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل 1.ب-ب)

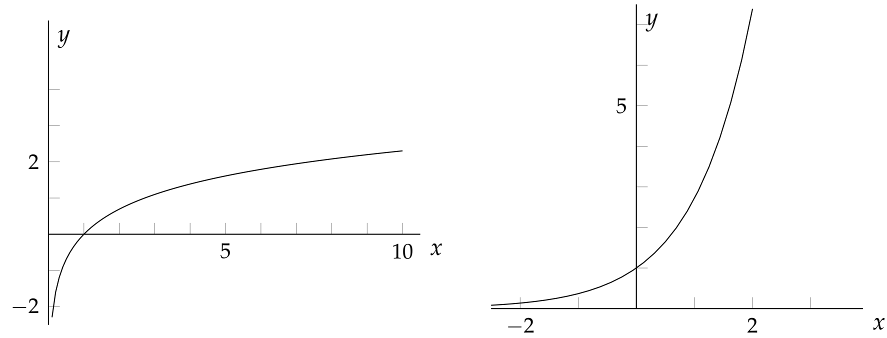
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $\frac{1}{x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = e^{-\ln x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

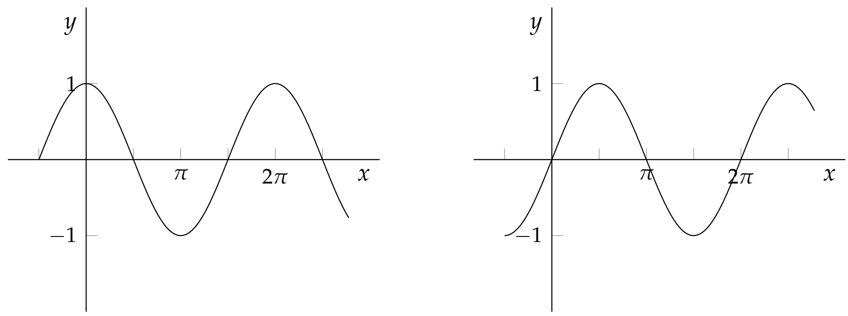
$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$



(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943 \,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\, 17'\, 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \quad \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

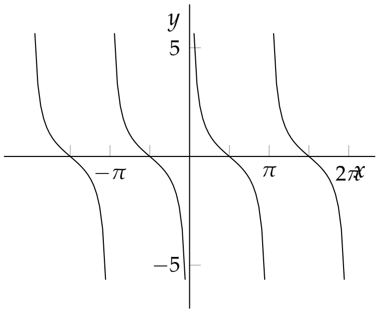
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

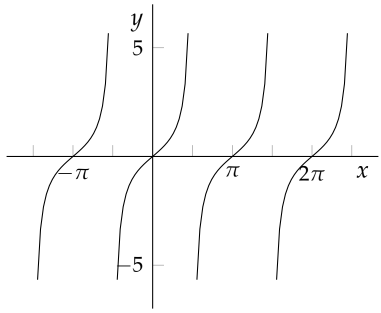
ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$



$\cot x$ (ب)



$\tan x$ (الف)

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

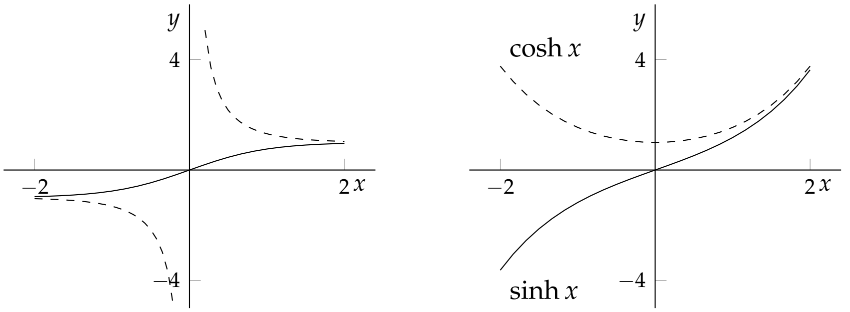
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

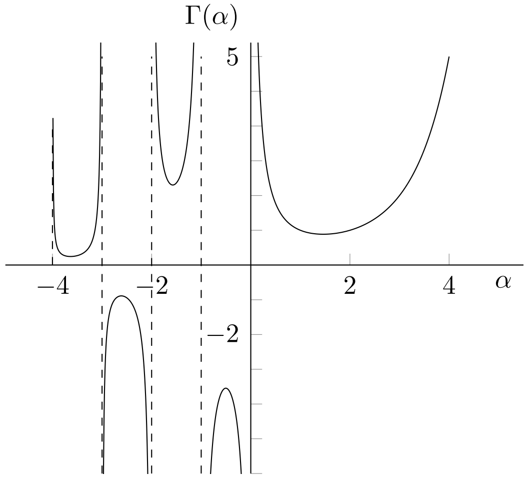
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل(شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

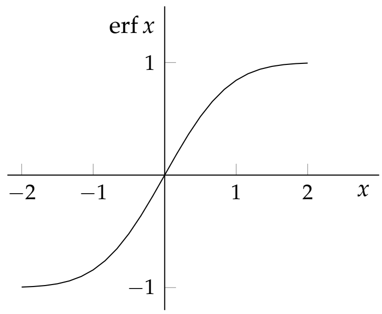
$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.36}$$

$erf\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

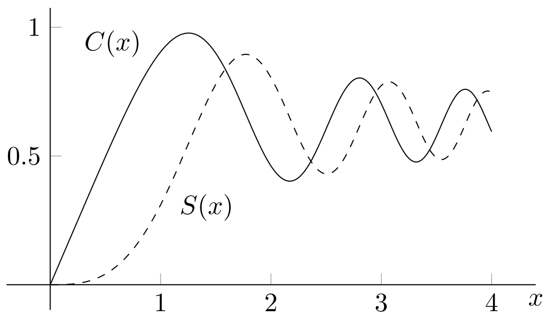
$$\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

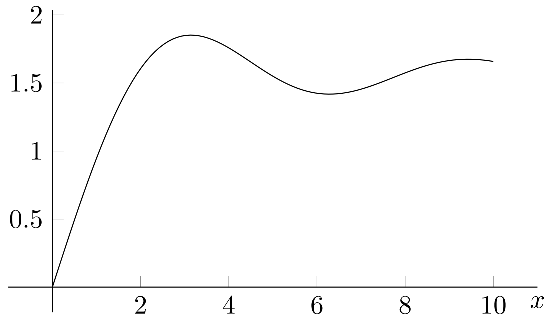
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.41}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\mathrm{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$