

انجینئری حساب

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

xi

دیاچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیاچہ

1	1	درجہ اول سادہ تفرقی مساوات
2	1.1	نمونہ کشی
14	1.2	$y' = f(x, y)$ کا جیو میٹریائی مطلب۔ میدان کی سمت اور ترکیب پولر۔
23	1.3	قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات
39	1.4	قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو مکمل
51	1.5	خطی سادہ تفرقی مساوات۔ مساوات برنولی
68	1.6	عمودی خطوط کی نسلیں
72	1.7	ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکنائیت
79	2	درجہ دوم سادہ تفرقی مساوات
79	2.1	متجانس خطی دو درجی تفرقی مساوات
95	2.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
110	2.3	تفرقی عامل
114	2.4	اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش
130	2.5	پولر کوئی مساوات
138	2.6	حل کی وجودیت اور یکنائی؛ وروئسی
147	2.7	غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات
159	2.8	جبری ارتعاش۔ گمک
165	2.8.1	برقرار حال حل کا حیظ۔ عملی گمک
169	2.9	برقی ادوار کی نمونہ کشی
180	2.10	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

187	3	بلند درجی خطی سادہ تفرقی مساوات
187	3.1	متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
198	3.2	مستقل عددی سروالے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
207	3.3	غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات
210	3.4	مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل
219	4	نظام تفرقی مساوات
220	4.1	قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق
229	4.2	سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے
243	4.3	نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورسکی
244	4.3.1	خطی نظام
248	4.4	مستقل عددی سروالے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب
265	4.5	نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسئلہ معیار۔ استحکام
273	4.6	کفیی تراکیب برائے غیر خطی نظام
282	4.6.1	سطح حرکت پر ایک درجی مساوات میں متبادلہ
290	4.7	سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام
291	4.7.1	نامعلوم عددی سر کی ترکیب
299	5	طافقی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔ اعلیٰ تفاعل
300	5.1	ترکیب طافقی تسلسل
315	5.2	لیونڈر مساوات۔ لیونڈر کثیر رکنی
332	5.3	مبسوط طافقی تسلسل۔ ترکیب فرونیوس
337	5.3.1	عملی استعمال
351	5.4	مساوات۔ بیسل اور بیسل تفاعل
366	5.5	بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔ عمومی حل
372	5.6	قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ
378	5.7	مسئلہ شیورم لیوویل
385	5.8	قائمیت لیونڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل
395	6	لاپلاس متبادلہ
396	6.1	لاپلاس بدل۔ الٹ لاپلاس بدل۔ خطیت
405	6.2	تفرقات اور کلمات کے لاپلاس بدل۔ سادہ تفرقی مساوات
417	6.3	s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل
437	6.4	ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔ اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاؤ
454	6.5	الچھاؤ
463	6.6	لاپلاس بدل کی مکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سروالے سادہ تفرقی مساوات
471	6.7	تفرقی مساوات کے نظام

479	6.8	لاپلاس بدل کے عمومی کیلے
483	7	خطی الجبرا: سمتیات
483	7.1	غیر سمتیات اور سمتیات
485	7.2	سمتیہ کے اجزاء
491	7.3	سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب
499	7.4	سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت
505	7.5	اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)
518	7.6	اندرونی ضرب فضا
520	7.7	سمتی ضرب
522	7.8	اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب
533	7.9	غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب
541	8	خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام
542	8.1	قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب
552	8.2	قابلی ضرب
558	8.2.1	تبدیلی محل
570	8.3	خطی مساوات کے نظام۔ گاوسی اسقاط
582	8.3.1	صف زینہ دار صورت
590	8.4	خطی غیر تابعیت۔ درجہ قالب۔ سمتی فضا
604	8.5	خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتا
610	8.6	دو درجہ اور تین درجہ مقطع قالب
613	8.7	مقطع۔ قاعدہ کریبر
629	8.8	معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط
644	8.9	سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ
661	9	خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب
662	9.1	امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
672	9.2	امتیازی مسائل کے چند استعمال
680	9.3	تشاکلی، مخرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
687	9.4	امتیازی اساس، وتری بنانا، دو درجہ صورت
700	9.5	مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں
711	10	سمتی تفرقی علم الاحصاء۔ سمتی تفاعل
711	10.1	غیر سمتی میدان اور سمتی میدان
713	10.2	سمتی علم الاحصاء
720	10.3	منحنی
726	10.4	لمبائی قوس
733	10.5	مماس، انحناء اور مروڑ
738	10.6	سمتی رفتار اور اسراع

745	10.7	زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ
751	10.8	سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان
764	10.9	تبادل محدودی نظام اور تبادل ارکان سمتیات
769	10.10	سمتی میدان کی پھیلاؤ
777	10.11	سمتی تفاعل کی گردش
781	11	سمتی تکمیلی علم الاحصاء تکمیل کے مسئلے
782	11.1	خطی تکمیل
787	11.2	خطی تکمیل کا حل
796	11.3	دوہرہ تکمیل
810	11.4	دوہرہ تکمیل کا خطی تکمیل میں تبادلہ
820	11.5	سطحیں
825	11.6	مماسی سطح۔ بنیادی صورت اول۔ رقبہ
837	11.7	سطحی تکمیل
845	11.8	تہرہ تکمیل۔ گاؤس کا مسئلہ پھیلاؤ
850	11.9	مسئلہ پھیلاؤ کے نتائج اور استعمال
861	11.10	مسئلہ سٹوکس
866	11.11	مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال
869	11.12	راہ سے آزاد خطی تکمیل
883	12	فوریئر تسلسل
884	12.1	دوری تفاعل، تکوینی تسلسل
889	12.2	فوریئر تسلسل۔ یولر کلیات
902	12.3	اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل
907	12.4	جفت اور طاق تفاعل
916	12.5	نصف حلقہ الساع
923	12.6	فوریئر عددی سرکا بغیر تکمیل حصول
931	12.7	جبری ارتعاش
936	12.8	تقریب بذریعہ تکوینی کثیر رکنی۔ مکعب خلل
940	12.9	فوریئر تکمیل
953	13	جزوی تفرقی مساوات
953	13.1	بنیادی تصورات
958	13.2	نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج
960	13.3	علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)
973	13.4	مساوات موج کا دالو بیچ حل
979	13.5	یک بعدی بہاؤ حرارت
987	13.6	لاقتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاؤ حرارت

993	13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دوابعادی مساوات موج
996	13.8 مستطیل جھلی
1006	13.9 قطبی محدود میں لاپلاس
1010	13.10 دائری جھلی۔ مساوات بیسل
1018	13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ محلی قوہ
1024	13.12 کروی محدود میں مساوات لاپلاس۔ مساوات لیہ منڈر
1030	13.13 لاپلاس تبادلہ برائے جزوی تفرقی مساوات
1037	14 مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیل تفاعل
1038	14.1 مخلوط اعداد
1047	14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکنیکی عدم مساوات
1054	14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے
1059	14.4 مخلوط تفاعل۔ حد۔ تفرق۔ تحلیل تفاعل
1067	14.5 کوشی ریمان مساوات۔ لاپلاس مساوات
1078	14.6 ناطق تفاعل۔ جذر
1084	14.7 قوت نمائی تفاعل
1089	14.8 تکنیکی اور بذلولی تفاعل
1095	14.9 لوگار تھم۔ عمومی طاقت
1103	15 محافظ زاویہ نقشہ کشی
1104	15.1 نقشہ کشی
1116	15.2 محافظ زاویہ نقشہ
1125	15.3 خطی کسری تبادلہ
1129	15.4 مخصوص خطی کسری تبادلہ
1138	15.5 نقشہ زیر دیگر تفاعل
1149	15.6 ریمان سطحیں
1157	16 مخلوط مکملات
1157	16.1 مخلوط مستوی میں خطی مکمل
1168	16.2 مخلوط خطی مکمل کی خواص
1172	16.3 کوشی کا مسئلہ مکمل
1184	16.4 خطی مکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی مکمل
1189	16.5 کوشی کا کلیہ مکمل
1194	16.6 تحلیل تفاعل کے تفرق
1201	17 ترتیب اور تسلسل
1201	17.1 ترتیب
1208	17.2 تسلسل
1213	17.3 کوشی اصول مرکزیت برائے ترتیب اور تسلسل

1220	یک سر حقیقی ترتیب۔ لمبنیز آزمائش برائے حقیقی تسلسل	17.4
1225	تسلسل کی مرکزیت اور انفرج کی آزمائشیں	17.5
1236	تسلسل پر اعمال	17.6
1243	18 حلقہ تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوگوں تسلسل	
1243	18.1 حلقہ تسلسل	
1256	18.2 حلقہ تسلسل کی روپ میں تفاعل	
1263	18.3 ٹیلر تسلسل	
1269	18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل	
1274	18.5 حلقہ تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب	
1281	18.6 یکساں استرار	
1293	18.7 لوگوں تسلسل	
1303	18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت	
1315	19 مکمل بذریعہ ترکیب بقیہ	
1315	19.1 بقیہ	
1322	19.2 مسئلہ بقیہ	
1327	19.3 حقیقی مکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ	
1335	19.4 حقیقی مکمل کے دیگر اقسام	
1343	20 مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی تودہ	
1344	20.1 ساکن برقی سکون	
1350	20.2 دوبعدی بہاویاں	
1359	20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص	
1364	20.4 پوسوں کلیہ مکمل	
1371	21 اعدادی تجزیہ	
1372	21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر	
1374	21.2 دہرانے سے مساوات کا حل	
1386	21.3 متناہی فرق	
1392	21.4 باہمی تحریف	
1401	21.5 پیکدار منحنیات	
1408	21.6 اعدادی مکمل اور تفرق	
1420	21.7 متقارب اتساع	
1433	22 خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب	
1433	22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی استقاط، معکوس قالب	
1443	22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ	

1451	22.3	خطی مساوات کا نظام: بدخونی
1455	22.4	ترکیب کمتر مربع
1461	22.5	قالب کے امتیازی اقدار کی شمول
1470	22.6	امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ
1475	23	اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات
1475	23.1	یک درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1486	23.2	دو درجہ تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب
1493	23.3	اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات
1496	23.3.1	مسئلہ ڈرشلے
1499	23.3.2	بدلتی رخ خفی ترکیب
1506	23.4	مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ - غیر منظم سرحد
1513	23.5	اعدادی تراکیب برائے قطع مکانی مساوات
1522	23.6	اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات
1527	24	احتمال اور شماریات
1527	24.1	حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد
1529	24.2	نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم
1539	24.3	عمومی اوسط اور عمومی تغیریت
1544	24.4	بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات
1551	24.5	احتمال
1560	24.6	مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات
1566	24.7	بلا منصوبہ متغیرات - غیر مسلسل اور استمراری تقسیم
1574	24.8	تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت
1582	24.9	ثنائی، پوکس، اور بیش ہندی تقسیم
1590	24.10	عمومی تقسیم
1599	24.11	ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں
1612	24.12	بلا منصوبہ نمونہ بندی - بلا منصوبہ اعداد
1615	24.13	مقدار معلوم کا اندازہ لگانا
1619	24.14	وقد اعتماد
1633	24.15	قیاس کی پرکھ - فیصلے
1649	24.16	ضبط معیار
1657	24.17	قبولیت نمونہ
1664	24.18	عدم کی موافقت
1669	24.19	غیر مقدار معلوم پرکھ
1674	24.20	پیکشوں کی جوڑیاں - سیدھے خطوط کو موافق بنانا
1683	ا	اضافی ثبوت
1687	ب	مفید معلومات

1687 1. ب اعلیٰ تفاعل کے مساوات

1697 ج جدول

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

ضمیمہ ۱

اضافی ثبوت

صفحہ 139 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$(0.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات 1.1 خطی اور متجانس ہے لہذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$(0.2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

ہم تفاعل

$$(0.3) \quad z = y^2 + y'^2$$

اور اس کے تفرق

$$(1.4) \quad z' = 2yy' + 2y'y''$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ۱.۱ کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$(1.5) \quad z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہذا ہم

$$(1.6) \quad (y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0$$

یعنی

$$(1.7) \quad \text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z,$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ۱.۳ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ۱.۷-ب کو $-z \leq 2yy'$ لکھتے ہوئے مساوات ۱.۷ کے دونوں حصوں کو $z \leq |2yy'|$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۵ کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq |-2qyy'| = |q| |2yy'| \leq |q| z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ۱.۷-الف کو مساوات ۱.۵ کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|y'^2 + |q|z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $h = 1 + |p| + |q|$ لکھتے ہوئے

$$(1.8) \quad z' \leq hz \quad I \text{ پر تمام } x$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ۱.۵ اور مساوات ۱.۷ سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|z + |q|z = hz \end{aligned}$$

مساوات ۱.8 اور مساوات ۱.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$(0.10) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x) dx}, \quad F_2 = e^{\int h(x) dx}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔ چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہذا انہیں مساوات ۱.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔ مساوات ۱.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$(0.11) \quad zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \quad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$(0.12) \quad zF_1 \leq 0, \quad zF_2 \geq 0$$

ہو گا۔ اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(0.13) \quad z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ پر تمام } x \text{ کے لئے}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔ یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

1. ب. اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل 1. ب-الف)

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 353$$

$$(1. ب.) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

قدرتی لوگارٹھم (شکل 1. ب-ب)

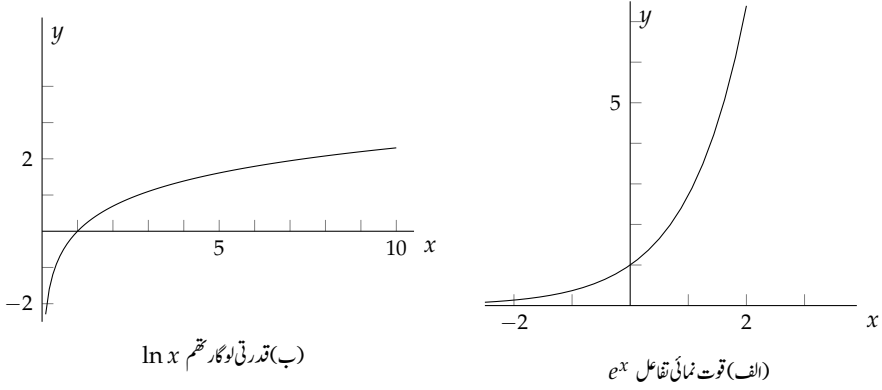
$$(2. ب.) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔ اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

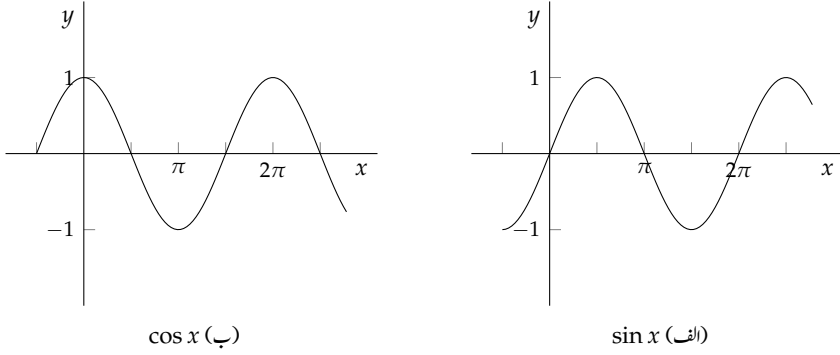
اساس دس کا لوگارٹھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$(3. ب.) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 917$$

$$(4. ب.) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684$$



شکل 1. ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل



شکل 2. ب: سائن نمائندگی

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔ اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2. ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017453292519943 \text{ rad}$$

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (5. ب)$$

(ب.6)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

(ب.9)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

(ب.13)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{B}{A}$$

(ب.14)

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \mp \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{A}{B}$$

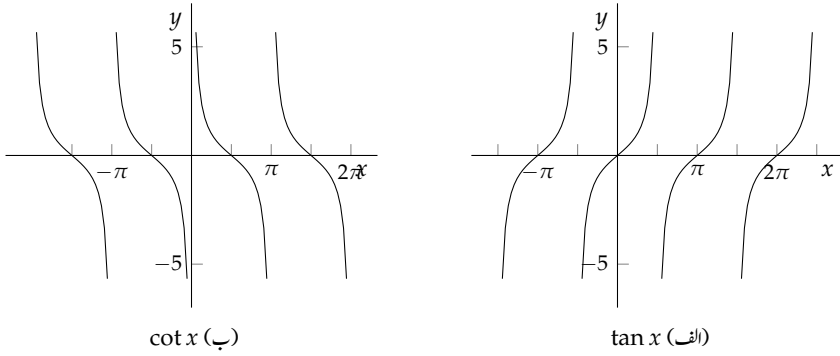
(ٹینجٹ، کوٹینجٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3. ب-الف، ب))

(ب.15)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$



شکل 3. ب: ٹینجٹ اور کو ٹینجٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sinh x$ وغیرہ۔ شکل 4. ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

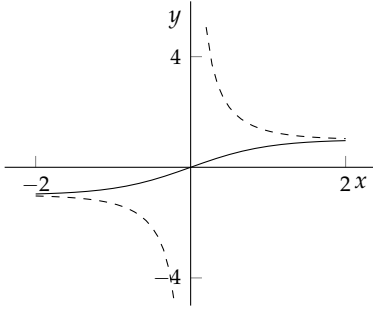
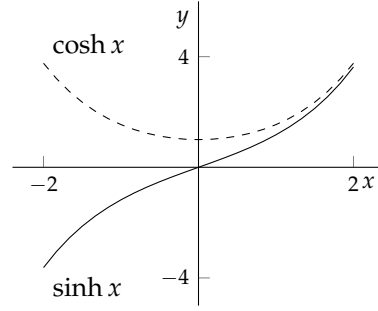
$$\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$$

گیما تفاعل (شکل 5. ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

شکل 4. ب: ہڈلولی سائن، ہڈلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ مکمل بالخصوص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (23. ب)$$

مساوات 22. ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 23. ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔ اسی طرح بار بار مساوات 23. ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24. ب)$$

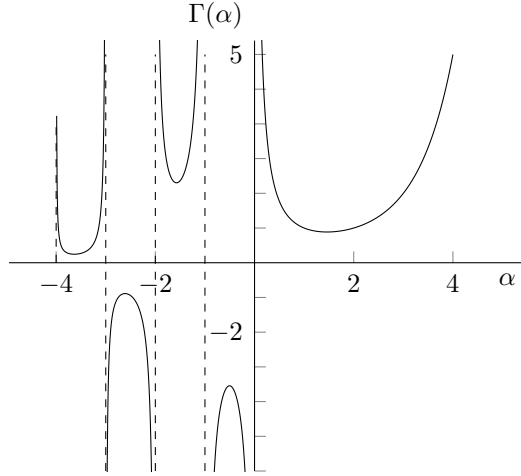
مساوات 23. ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (25. ب)$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات 22. ب اور مساوات 25. ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیمما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5. ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(ب.26) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

مساوات 25. ب اور مساوات 26. ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں e قدرتی لوگار تھم کی اساس ہے۔

$$(ب.27) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$(ب.28) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$(ب.29) \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$(ب.30) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

بیٹا تفاعل

$$(ب.31) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$(ب.32) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تفاعل خلل (شکل 6. ب)

$$(ب.33) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

مساوات 33. ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ کی مکارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

کا تکمیل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

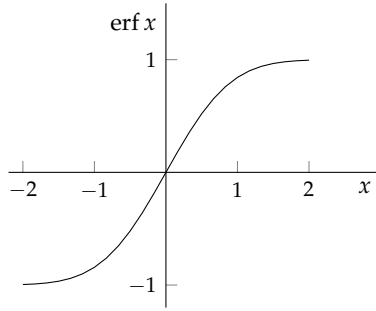
$$(ب.34) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right)$$

$\operatorname{erf} \infty = 1$ ہے۔ مکملہ تفاعل خلل

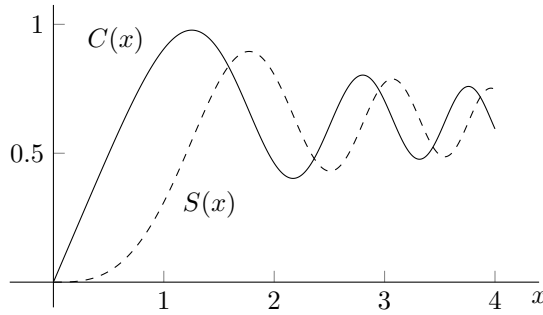
$$(ب.35) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

فرسنل تکملات (شکل 7. ب)

$$(ب.36) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسل عملیات

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ اور } C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}^1 \text{ ہیں۔ مکملہ تفاعل}$$

$$(ب.37) \quad c(x) = \frac{\pi}{8} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$(ب.38) \quad s(x) = \frac{\pi}{8} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

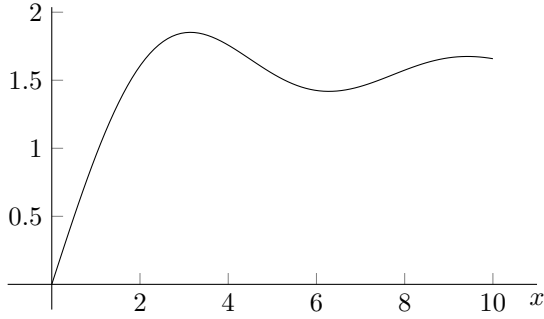
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$(ب.39) \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$\text{Si } \infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ مکملہ تفاعل

$$(ب.40) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

complementary functions¹



شکل 8. ب: عمل سائن

تکمل کو سائن

$$(ب.41) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل قوت نمائی

$$(ب.42) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

تکمل لوگارتمی

$$(ب.43) \quad \text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

ضمیمہ ج

جدول

$J_0(x)$ کے صفر $x = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, \dots$ پر پائے جاتے ہیں۔
 $J_1(x)$ کے صفر $x = 0, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \dots$ پر پائے جاتے ہیں۔

جدول 1. ج: بیسل تفاعل (قسم اول)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0	1.0000	0.0000	3.4	-0.3643	0.1792	6.8	0.2931	-0.0652
0.1	0.9975	0.0499	3.5	-0.3801	0.1374	6.9	0.2981	-0.0349
0.2	0.9900	0.0995	3.6	-0.3918	0.0955	7	0.3001	-0.0047
0.3	0.9776	0.1483	3.7	-0.3992	0.0538	7.1	0.2991	0.0252
0.4	0.9604	0.1960	3.8	-0.4026	0.0128	7.2	0.2951	0.0543
0.5	0.9385	0.2423	3.9	-0.4018	-0.0272	7.3	0.2882	0.0826
0.6	0.9120	0.2867	4	-0.3971	-0.0660	7.4	0.2786	0.1096
0.7	0.8812	0.3290	4.1	-0.3887	-0.1033	7.5	0.2663	0.1352
0.8	0.8463	0.3688	4.2	-0.3766	-0.1386	7.6	0.2516	0.1592
0.9	0.8075	0.4059	4.3	-0.3610	-0.1719	7.7	0.2346	0.1813
1.0	0.7652	0.4401	4.4	-0.3423	-0.2028	7.8	0.2154	0.2014
1.1	0.7196	0.4709	4.5	-0.3205	-0.2311	7.9	0.1944	0.2192
1.2	0.6711	0.4983	4.6	-0.2961	-0.2566	8	0.1717	0.2346
1.3	0.6201	0.5220	4.7	-0.2693	-0.2791	8.1	0.1475	0.2476
1.4	0.5669	0.5419	4.8	-0.2404	-0.2985	8.2	0.1222	0.2580
1.5	0.5118	0.5579	4.9	-0.2097	-0.3147	8.3	0.0960	0.2657
1.6	0.4554	0.5699	5	-0.1776	-0.3276	8.4	0.0692	0.2708
1.7	0.3980	0.5778	5.1	-0.1443	-0.3371	8.5	0.0419	0.2731
1.8	0.3400	0.5815	5.2	-0.1103	-0.3432	8.6	0.0146	0.2728
1.9	0.2818	0.5812	5.3	-0.0758	-0.3460	8.7	-0.0125	0.2697
2	0.2239	0.5767	5.4	-0.0412	-0.3453	8.8	-0.0392	0.2641
2.1	0.1666	0.5683	5.5	-0.0068	-0.3414	8.9	-0.0653	0.2559
2.2	0.1104	0.5560	5.6	0.0270	-0.3343	9	-0.0903	0.2453
2.3	0.0555	0.5399	5.7	0.0599	-0.3241	9.1	-0.1142	0.2324
2.4	0.0025	0.5202	5.8	0.0917	-0.3110	9.2	-0.1367	0.2174
2.5	-0.0484	0.4971	5.9	0.1220	-0.2951	9.3	-0.1577	0.2004
2.6	-0.0968	0.4708	6	0.1506	-0.2767	9.4	-0.1768	0.1816
2.7	-0.1424	0.4416	6.1	0.1773	-0.2559	9.5	-0.1939	0.1613
2.8	-0.1850	0.4097	6.2	0.2017	-0.2329	9.6	-0.2090	0.1395
2.9	-0.2243	0.3754	6.3	0.2238	-0.2081	9.7	-0.2218	0.1166
3	-0.2601	0.3391	6.4	0.2433	-0.1816	9.8	-0.2323	0.0928
3.1	-0.2921	0.3009	6.5	0.2601	-0.1538	10.8	-0.2032	-0.1422
3.2	-0.3202	0.2613	6.6	0.2740	-0.1250	11.8	0.0020	-0.2323
3.3	-0.3443	0.2207	6.7	0.2851	-0.0953	12.8	0.1887	-0.1114

جدول 2. ج: بیسل تفاعل (قسم دوم)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5	-0.309	0.148
0.5	-0.445	-1.471	3	0.377	0.325	5.5	-0.339	-0.024
1	0.088	-0.781	3.5	0.189	0.410	6	-0.288	-0.175
1.5	0.382	-0.412	4	-0.017	0.398	6.5	-0.173	-0.274
2	0.510	-0.107	4.5	-0.195	0.301	7	-0.026	-0.303

جدول 3. ج: گیماتفاعل

α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$
1	1.000 000	1.22	0.913 106	1.44	0.885 805	1.66	0.901 668	1.88	0.955 071
1.02	0.988 844	1.24	0.908 521	1.46	0.885 604	1.68	0.905 001	1.9	0.961 766
1.04	0.978 438	1.26	0.904 397	1.48	0.885 747	1.7	0.908 639	1.92	0.968 774
1.06	0.968 744	1.28	0.900 718	1.5	0.886 227	1.72	0.912 581	1.94	0.976 099
1.08	0.959 725	1.3	0.897 471	1.52	0.887 039	1.74	0.916 826	1.96	0.983 743
1.10	0.951 351	1.32	0.894 640	1.54	0.888 178	1.76	0.921 375	1.98	0.991 708
1.12	0.943 590	1.34	0.892 216	1.56	0.889 639	1.78	0.926 227	2	1.000 000
1.14	0.936 416	1.36	0.890 185	1.58	0.891 420	1.8	0.931 384	2.02	1.008 621
1.16	0.929 803	1.38	0.888 537	1.6	0.893 515	1.82	0.936 845	2.04	1.017 576
1.18	0.923 728	1.4	0.887 264	1.62	0.895 924	1.84	0.942 612	2.06	1.026 868
1.2	0.918 169	1.42	0.886 356	1.64	0.898 642	1.86	0.948 687	2.08	1.036 503

جدول 4. ج: فیکتوریل تفاعل

n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$
1	1	0.000000	6	720	2.857332	11	39916800	7.601156
2	2	0.301030	7	5040	3.702431	12	479001600	8.680337
3	6	0.778151	8	40320	4.605521	13	6227020800	9.794280
4	24	1.380211	9	362880	5.559763	14	87178291200	10.940408
5	120	2.079181	10	3628800	6.559763	15	1307674368000	12.116500

جدول 5.5: ثنائی تقسیم۔ تقاضا احتمال $f(x)$ اور تقاضا تقسیم $F(x)$

n	x	$p = 0.1$		$p = 0.2$		$p = 0.3$		$p = 0.4$		$p = 0.5$	
		$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
1	0	0.9000	0.9000	0.8000	0.8000	0.7000	0.7000	0.6000	0.6000	0.5000	0.5000
	1	0.1000	1.0000	0.2000	1.0000	0.3000	1.0000	0.4000	1.0000	0.5000	1.0000
2	0	0.8100	0.8100	0.6400	0.6400	0.4900	0.4900	0.3600	0.3600	0.2500	0.2500
	1	0.1800	0.9900	0.3200	0.9600	0.4200	0.9100	0.4800	0.8400	0.5000	0.7500
	2	0.0100	1.0000	0.0400	1.0000	0.0900	1.0000	0.1600	1.0000	0.2500	1.0000
3	0	0.7290	0.7290	0.5120	0.5120	0.3430	0.3430	0.2160	0.2160	0.1250	0.1250
	1	0.2430	0.9720	0.3840	0.8960	0.4410	0.7840	0.4320	0.6480	0.3750	0.5000
	2	0.0270	0.9990	0.0960	0.9920	0.1890	0.9730	0.2880	0.9360	0.3750	0.8750
	3	0.0010	1.0000	0.0080	1.0000	0.0270	1.0000	0.0640	1.0000	0.1250	1.0000
4	0	0.6561	0.6561	0.4096	0.4096	0.2401	0.2401	0.1296	0.1296	0.0625	0.0625
	1	0.2916	0.9477	0.4096	0.8192	0.4116	0.6517	0.3456	0.4752	0.2500	0.3125
	2	0.0486	0.9963	0.1536	0.9728	0.2646	0.9163	0.3456	0.8208	0.3750	0.6875
	3	0.0036	0.9999	0.0256	0.9984	0.0756	0.9919	0.1536	0.9744	0.2500	0.9375
	4	0.0001	1.0000	0.0016	1.0000	0.0081	1.0000	0.0256	1.0000	0.0625	1.0000
5	0	0.5905	0.5905	0.3277	0.3277	0.1681	0.1681	0.0778	0.0778	0.0313	0.0313
	1	0.3281	0.9185	0.4096	0.7373	0.3602	0.5282	0.2592	0.3370	0.1563	0.1875
	2	0.0729	0.9914	0.2048	0.9421	0.3087	0.8369	0.3456	0.6826	0.3125	0.5000
	3	0.0081	0.9995	0.0512	0.9933	0.1323	0.9692	0.2304	0.9130	0.3125	0.8125
	4	0.0005	1.0000	0.0064	0.9997	0.0284	0.9976	0.0768	0.9898	0.1563	0.9688
	5	0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0024	1.0000	0.0102	1.0000	0.0313	1.0000
6	0	0.5314	0.5314	0.2621	0.2621	0.1176	0.1176	0.0467	0.0467	0.0156	0.0156
	1	0.3543	0.8857	0.3932	0.6554	0.3025	0.4202	0.1866	0.2333	0.0938	0.1094
	2	0.0984	0.9842	0.2458	0.9011	0.3241	0.7443	0.3110	0.5443	0.2344	0.3438
	3	0.0146	0.9987	0.0819	0.9830	0.1852	0.9295	0.2765	0.8208	0.3125	0.6563
	4	0.0012	0.9999	0.0154	0.9984	0.0595	0.9891	0.1382	0.9590	0.2344	0.8906
	5	0.0001	1.0000	0.0015	0.9999	0.0102	0.9993	0.0369	0.9959	0.0938	0.9844
	6	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0041	1.0000	0.0156	1.0000
7	0	0.4783	0.4783	0.2097	0.2097	0.0824	0.0824	0.0280	0.0280	0.0078	0.0078
	1	0.3720	0.8503	0.3670	0.5767	0.2471	0.3294	0.1306	0.1586	0.0547	0.0625
	2	0.1240	0.9743	0.2753	0.8520	0.3177	0.6471	0.2613	0.4199	0.1641	0.2266
	3	0.0230	0.9973	0.1147	0.9667	0.2269	0.8740	0.2903	0.7102	0.2734	0.5000
	4	0.0026	0.9998	0.0287	0.9953	0.0972	0.9712	0.1935	0.9037	0.2734	0.7734
	5	0.0002	1.0000	0.0043	0.9996	0.0250	0.9962	0.0774	0.9812	0.1641	0.9375
	6	0.0000	1.0000	0.0004	1.0000	0.0036	0.9998	0.0172	0.9984	0.0547	0.9922
	7	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0002	1.0000	0.0016	1.0000	0.0078	1.0000
8	0	0.4305	0.4305	0.1678	0.1678	0.0576	0.0576	0.0168	0.0168	0.0039	0.0039
	1	0.3826	0.8131	0.3355	0.5033	0.1977	0.2553	0.0896	0.1064	0.0313	0.0352
	2	0.1488	0.9619	0.2936	0.7969	0.2965	0.5518	0.2090	0.3154	0.1094	0.1445
	3	0.0331	0.9950	0.1468	0.9437	0.2541	0.8059	0.2787	0.5941	0.2188	0.3633
	4	0.0046	0.9996	0.0459	0.9896	0.1361	0.9420	0.2322	0.8263	0.2734	0.6367
	5	0.0004	1.0000	0.0092	0.9988	0.0467	0.9887	0.1239	0.9502	0.2188	0.8555
	6	0.0000	1.0000	0.0011	0.9999	0.0100	0.9987	0.0413	0.9915	0.1094	0.9648
	7	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0012	0.9999	0.0079	0.9993	0.0313	0.9961
	8	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0039	1.0000

جدول 6. ج: پوسن تقسیم۔ تفاعل احتمال $f(x)$ اور تفاعل تقسیم $F(x)$

x	$\mu = 0.1$		$\mu = 0.2$		$\mu = 0.3$		$\mu = 0.4$		$\mu = 0.5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.9048	0.9048	0.8187	0.8187	0.7408	0.7408	0.6703	0.6703	0.6065	0.6065
1	0.0905	0.9953	0.1637	0.9825	0.2222	0.9631	0.2681	0.9384	0.3033	0.9098
2	0.0045	0.9998	0.0164	0.9989	0.0333	0.9964	0.0536	0.9921	0.0758	0.9856
3	0.0002	1.0000	0.0011	0.9999	0.0033	0.9997	0.0072	0.9992	0.0126	0.9982
4	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0007	0.9999	0.0016	0.9998
5							0.0001	1.0000	0.0002	1.0000

x	$\mu = 0.6$		$\mu = 0.7$		$\mu = 0.8$		$\mu = 0.9$		$\mu = 1$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.5488	0.5488	0.4966	0.4966	0.4493	0.4493	0.4066	0.4066	0.3679	0.3679
1	0.3293	0.8781	0.3476	0.8442	0.3595	0.8088	0.3659	0.7725	0.3679	0.7358
2	0.0988	0.9769	0.1217	0.9659	0.1438	0.9526	0.1647	0.9371	0.1839	0.9197
3	0.0198	0.9966	0.0284	0.9942	0.0383	0.9909	0.0494	0.9865	0.0613	0.9810
4	0.0030	0.9996	0.0050	0.9992	0.0077	0.9986	0.0111	0.9977	0.0153	0.9963
5	0.0004	1.0000	0.0007	0.9999	0.0012	0.9998	0.0020	0.9997	0.0031	0.9994
6			0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0003	1.0000	0.0005	0.9999
7									0.0001	1.0000

[illegible]

جدول 7. ج: عمومی تقسیم-تفاعل تقسیم $\Phi(z)$; $\Phi(0) = 0.5000$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.01	0.9778	2.51	0.9940
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.02	0.9783	2.52	0.9941
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.03	0.9788	2.53	0.9943
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.04	0.9793	2.54	0.9945
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.05	0.9798	2.55	0.9946
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.06	0.9803	2.56	0.9948
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.07	0.9808	2.57	0.9949
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.08	0.9812	2.58	0.9951
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.09	0.9817	2.59	0.9952
0.10	0.5398	0.6	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	2.1	0.9821	2.60	0.9953
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	2.11	0.9826	2.61	0.9955
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	2.12	0.9830	2.62	0.9956
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	2.13	0.9834	2.63	0.9957
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	2.14	0.9838	2.64	0.9959
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	2.15	0.9842	2.65	0.9960
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	2.16	0.9846	2.66	0.9961
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	2.17	0.9850	2.67	0.9962
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	2.18	0.9854	2.68	0.9963
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	2.19	0.9857	2.69	0.9964
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.7	0.9554	2.20	0.9861	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	2.21	0.9864	2.71	0.9966
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	2.22	0.9868	2.72	0.9967
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	2.23	0.9871	2.73	0.9968
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	2.24	0.9875	2.74	0.9969
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	2.25	0.9878	2.75	0.9970
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	2.26	0.9881	2.76	0.9971
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	2.27	0.9884	2.77	0.9972
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	2.28	0.9887	2.78	0.9973
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	2.29	0.9890	2.79	0.9974
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	2.30	0.9893	2.80	0.9974
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649	2.31	0.9896	2.81	0.9975
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656	2.32	0.9898	2.82	0.9976
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664	2.33	0.9901	2.83	0.9977
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671	2.34	0.9904	2.84	0.9977
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678	2.35	0.9906	2.85	0.9978
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686	2.36	0.9909	2.86	0.9979
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693	2.37	0.9911	2.87	0.9979
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699	2.38	0.9913	2.88	0.9980
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706	2.39	0.9916	2.89	0.9981
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713	2.4	0.9918	2.90	0.9981
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719	2.41	0.9920	2.91	0.9982
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726	2.42	0.9922	2.92	0.9982
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732	2.43	0.9925	2.93	0.9983
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738	2.44	0.9927	2.94	0.9984
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744	2.45	0.9929	2.95	0.9984
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750	2.46	0.9931	2.96	0.9985
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756	2.47	0.9932	2.97	0.9985
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761	2.48	0.9934	2.98	0.9986
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767	2.49	0.9936	2.99	0.9986
0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772	2.50	0.9938	3.00	0.9987

جدول 8. ج: عمومی تقسیم

%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
1	-2.326	0.013	41	-0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	-2.054	0.025	42	-0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	-1.881	0.038	43	-0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	-1.751	0.050	44	-0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	-1.645	0.063	45	-0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	-1.555	0.075	46	-0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	-1.476	0.088	47	-0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	-1.405	0.100	48	-0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	-1.341	0.113	49	-0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	-1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	-1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	-1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	-1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	-1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	-1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	-0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	-0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	-0.915	0.228	58	0.202	0.806	97.5	1.960	2.241
19	-0.878	0.240	59	0.228	0.824	98	2.054	2.326
20	-0.842	0.253	60	0.253	0.842	99	2.326	2.576
21	-0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	-0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	-0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	-0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	-0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	-0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	-0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	-0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	-0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	-0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	-0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	-0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	-0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	-0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	-0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	-0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	-0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	-0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	-0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	-0.253	0.524	80	0.842	1.282			

جدول 9. ج: بیش از منصوبه اعداد

جدول 10. ج: t تقسیم

جدول 11. ج: مربع خا تقسیم

جدول 12. ج: مربع ایف تقسیم

جدول 13. ج: ؟؟