انجینئری حساب

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 9

خطی الجبرا: آئگنی قدر مسائل قالب

آئگنی قدر مسائل درج ذیل سمتی مساوات پر مبنی ہیں جہاں A چکور قالب، x نا معلوم سمتیہ اور λ نا معلوم غیر سمتیہ ہے۔

$$Ax = \lambda x \tag{9.1}$$

آئگنی قدر مسائل میں ہمیں وہ λ اور x درکار ہیں جو درج بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔ λ کی ہر قیمت کے لئے $x = 0$ مساوات 9.1 کا غیر اہم صفر حل ہے۔ ہم اس غیر اہم صفر حل میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہذا ہم غیر صفر حل $x \neq 0$ جاننا چاہیں گے۔

λ کی وہ قیمتیں جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں A کے **آئگنی اقدار**[1] کہلاتے ہیں اور وہ x جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں A کے **آئگنی سمتیات**[2] کہلاتے ہیں۔

اس معصوم نظر آنے والا سمتی مساوات کے اندر حیران کن تفصیل چھپی ہے۔آئگنی قدر مسائل انجینئری، طبیعیات، ریاضی، حیاتیات، ماحولیاتی سائنس، شہری منصوبہ بندی، معاشیات، نفسیات اور دیگر شعبوں میں عموماً درپیش آتے ہیں۔آپ کو یقیناً ان سے زندگی میں واسطہ پڑے گا۔

[1] eigenvalues
[2] eigenfunctions

9.1 آئگنی قدر مسائل قالب۔آئگنی اقدار اور آئگنی سمتیات کا حصول

درج ذیل پر غور کریں جہاں غیر صفر سمتیہ اور چکور قالب کے ضرب دکھائے گئے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

بائیں ہاتھ کی ضرب میں ہمیں مکمل طور پر نیا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جس کی لمبائی اور سمت ابتدائی سمتیہ کی لمبائی اور سمت سے مختلف ہیں۔عموماً سمتیہ کو چکور قالب سے ضرب دینے سے مکمل طور پر مختلف سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ کی ضرب میں حاصل سمتیہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

یعنی حاصل سمتیہ اور ابتدائی سمتیہ کی سمتیں ایک جیسی ہیں جبکہ حاصل سمتیہ کی لمبائی ابتدائی سمتیہ کی لمبائی کے دس گنا ہے جس کو $\lambda = 10$ لکھا جائے گا۔چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کے لحاظ سے ایسے λ اور غیر صفر سمتیات کا حصول اس باب کا مرکزی مضمون ہے۔

آئیں درج بالا مشاہدے کو دستوری شکل دیں۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ غیر صفر $n \times n$ جسامت کا چکور قالب ہے۔اب درج ذیل سمتی مساوات پر غور کریں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{9.3}$$

ان λ اور غیر صفر $\boldsymbol{x}$ کے حصول کے مسئلے کو، جو مساوات 9.3 پر پورا اترے ہوں، **آئگنی قدر مسئلہ** کہتے ہیں۔

یہاں توجہ دیں کہ $\boldsymbol{A}$ دیا گیا چکور قالب ہے جبکہ λ نا معلوم غیر سمتیہ اور $\boldsymbol{x}$ نا معلوم سمتیہ ہے۔ہم وہ λ اور $\boldsymbol{x}$ حاصل کرنا چاہتے ہیں جو مساوات 9.3 پر پورا اترتے ہوں۔ جیومیٹریائی طور پر ہم وہ سمتیات $\boldsymbol{x}$ حاصل کرنا چاہتے ہیں جنہیں $\boldsymbol{A}$ سے ضرب دینا ایسا ہی ہے جیسے ان سمتیوں کو غیر سمتی λ سے ضرب دیا جائے یعنی کہ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{x}$ راست تناسب ہوں۔یوں مثبت λ کی صورت میں ابتدائی اور حاصل سمتیات کی سمتیں ایک جیسی ہوں گی جبکہ منفی λ کی صورت میں ان کی سمتیں آپس میں الٹ ہوں گی۔ (باب کی شروع میں سادہ مثال سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔)

λ کی وہ مخصوص قیمت جس کے لئے مساوات 9.3 کے غیر صفر $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ حل موجود ہوں $\boldsymbol{A}$ کی **آئگنی قدر**[3] کہلاتی ہے اور مطابقتی سمتیات $\boldsymbol{x}$ ،اس λ کے لحاظ سے قالب $\boldsymbol{A}$ کے **آئگنی سمتیات**[4] یا **امتیازی سمتیات**[5] کہلاتے ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ کے تمام آئگنی اقدار کو $\boldsymbol{A}$ کا **طیف**[6] کہتے ہیں۔طیف میں کم سے کم ایک عدد آئگنی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف آئگنی اقدار ہو سکتے ہیں۔ آئگنی اقدار کی سب سے زیادہ حتمی قیمت کو $\boldsymbol{A}$ کا **رداس طیف**[7] کہتے ہیں۔

آئگنی قدر مسئلے کا حل چند مثالوں کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

مثال 9.1: آئگنی اقدار اور آئگنی سمتیات کا حصول
درج ذیل قالب کے آئگنی اقدار اور آئگنی سمتیات قدم بہ قدم دریافت کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

پہلے آئگنی اقدار دریافت کیے جاتے ہیں۔مساوات 9.3 درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \implies \quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

تمام اجزاء کو ایک طرف منتقل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + (-2-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{9.4}$$

قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

---

eigenvalue[3]
eigenvectors[4]
characteristic vectors[5]
spectrum[6]
spectral radius[7]

مسئلہ 8.15 کے تحت اس متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (قالب $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی سمتیہ جس کی ہمیں تلاش ہے) اس صورت ممکن ہو گا جب عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو گا۔

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

ہم $D(\lambda)$ کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مقطع** جبکہ اس کی پھیلی ہوئی صورت کو **امتیازی کثیر رکنی** اور $D(\lambda) = 0$ کو **امتیازی مساوات** کہتے ہیں۔اس دو درجی الجبرائی مساوات کے حل $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -6$ ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی اقدار ہیں۔

$\lambda_1 = -1$ کا مطابقتی آئگنی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5-(-1)]x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + [-2-(-1)]x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \implies \qquad \begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = 2x_1$ ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے متعدد متوازی آئگنی سمتیات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں x_1 (یا x_2) کی کوئی بھی قیمت چن کر x_2 (x_1) حاصل کرتے ہوئے آئگنی سمتیہ حاصل ہو گا۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہیں اور یوں $\boldsymbol{x}_1 = [1 \quad 2]^T$ ہو گا۔اس جواب کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$$

$\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی آئگنی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -6$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5-(-6)]x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + [-2-(-6)]x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \implies \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$ ملتا ہے۔یوں $x_1 = 2$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے لہٰذا $\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}_2 = [2 \quad -1]^T$ ہو گا۔اس کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = (-6)\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

آپ حصہ 9.1 کے آغاز میں مساوات 9.2 میں دیے گئے مثال کو حل کرتے ہوئے آئگنی اقدار 10 ، 3 اور مطابقتی آئگنی سمتیات $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}^T$ ، $\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}^T$ حاصل کریں۔

درج بالا مثال میں استعمال کی گئی ترکیب کی عمومی صورت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 9.3 کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n
\end{aligned}
\tag{9.5}
$$

تمام اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

اس کو قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$
(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0 \tag{9.7}
$$

مسئلہ کریمر (مسئلہ 8.15) کے تحت درج بالا متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو:

$$
D(\lambda) = \begin{vmatrix}
a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda
\end{vmatrix} = 0 \tag{9.8}
$$

$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$ کو $\boldsymbol{A}$ کا **امتیازی قالب** جبکہ $D(\lambda)$ کو $\boldsymbol{A}$ کا **امتیازی مقطع** کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مساوات** کہتے ہیں۔مساوات 9.8 کو پھیلا کر $\boldsymbol{A}$ کی امتیازی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔

مساوات 9.8 کو پھیلا کر حاصل کثیر رکنی میں λ^n بلند تر طاقت ہے لہٰذا اس سے زیادہ سے زیادہ n مختلف آئگنی اقدار حاصل ہو سکتے ہیں۔

مسئلہ 9.1: آئگنی اقدار
چکور قالب A کے آئگنی اقدار A کے امتیازی مساوات 9.8 سے حاصل ہوں گے۔
یوں $n \times n$ قالب کی کم سے کم ایک عدد آئگنی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف آئگنی اقدار ہو سکتے ہیں۔

n کی بڑی قیمت کی صورت میں آئگنی اقدار عموماً ترکیب نیوٹن یا کسی اور اعدادی ترکیب سے حاصل کئے جائیں گے۔

آئگنی اقدار پہلے حاصل کیے جاتے ہیں۔ باری باری ان آئگنی قدر کو مساوات 9.6 کے نظام میں پر کرتے ہوئے مطابقتی آئگنی سمتیہ (گاوسی اسقاط کی مدد سے) حاصل کیا جاتا ہے۔

آئگنی سمتیات درج ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

مسئلہ 9.2: آئگنی سمتیات اور آئگنی فضا
اگر قالب A کے کسی ایک آئگنی قدر λ کے مطابقتی آئگنی سمتیات w اور x ہوں تب $w + x$ (بشرطیکہ $w \neq -x$ ہو) اور kx جہاں $k \neq 0$ ہے بھی اس λ کے مطابقتی بھی آئگنی سمتیات ہوں گے۔

یوں کسی ایک آئگنی قدر کے مطابقتی آئگنی سمتیات اور 0 سمتیہ مل کر فضا بناتے ہیں جس کو اس λ کے لئے A کی مطابقتی آئگنی فضا کہتے ہیں۔

ثبوت: $Aw = \lambda w$ اور $Ax = \lambda x$ سے مراد درج ذیل ہے

$$A(w + x) = Aw + Ax = \lambda w + \lambda x = \lambda(w + x)$$

اور $A(kw) = k(Aw) = k(\lambda w) = \lambda(kw)$ ہے لہٰذا $A(kw + lx) = \lambda(kw + lx)$ ہو گا۔

آئگنی سمتیہ کو معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری آئگنی سمتیہ یعنی اکائی آئگنی سمتیہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً مثال 9.1 میں $x_1 = [1 \quad 2]^T$ کی لمبائی $\|x_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ہے جس سے معیاری آئگنی سمتیہ (اکائی آئگنی سمتیہ) $[\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}}]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: متعدد آئگنی سمتیات

درج ذیل قالب کے آئگنی اقدار اور آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: اس قالب کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

جس سے $\boldsymbol{A}$ کے جذر $\lambda_1 = 5$ اور $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ ملتے ہیں۔ (بلند درجی مساوات کا خط کھینچ کر اس کے جذر با آسانی حاصل کیے جاتے ہیں)۔ نظام $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ میں $\lambda = \lambda_1 = 5$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مطابقتی امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad \xRightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \quad \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جس کا درجہ دو (2) ہے۔ یوں $-\frac{24}{7}x_2 - \frac{48}{7}x_3 = 0$ میں $x_3 = -1$ چنتے ہوئے $x_2 = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو $-7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 1$ ملتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{x}_1 = [1 \;\; 2 \;\; -1]^T$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا آئگنی قدر $\lambda = 5$ کا مطابقتی آئگنی سمتیہ ہے۔

$\lambda = -3$ سے درج ذیل امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے۔

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ سے $x_1 = -2x_2 + 3x_3$ لکھا جا سکتا ہے۔ $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_3 = 0$ ملتا ہے جبکہ $x_2 = 0$ چنتے ہوئے $x_3 = 1$ ملتا ہے۔اس طرح $\lambda = -3$ کے مطابقتی درج ذیل دو مختلف آئگنی سمتیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

امتیازی کثیر رکنی کے جذر λ کے درجے کو λ کی **الجبرائی کثرت**[8] کہا اور M_λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کسی λ کے مطابقتی خطی طور غیر تابع آئگنی سمتیات کی تعداد کو **جیومیٹریائی کثرت**[9] کہا اور m_λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں λ کے مطابقتی آئگنی فضا کی بُعد m_λ ہو گی۔

چونکہ آئگنی کثیر رکنی کا درجہ n ہے لہٰذا تمام الجبرائی کثرت کا مجموعہ n ہو گا۔مثال 9.2 میں $\lambda = -3$ کے لئے $m_\lambda = M_\lambda = 2$ ہے۔عموماً $m_\lambda \le M_\lambda$ ہو گا۔ M_λ اور m_λ کے فرق $\Delta_\lambda = M_\lambda - m_\lambda$ کو λ کی **خامی**[10] کہتے ہیں۔یوں مثال 9.2 میں $\Delta_{-3} = 0$ ہے۔مثبت خامی کا پایا جانا عمومی بات ہے۔

مثال 9.3: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی

قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت

algebraic multiplicity[8]
geometric multiplicity[9]
defect[10]

کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2=0$$

یوں $\lambda=0$ آئگنی قدر ہے جس کی الجبرائی کثرت $M_0=2$ ہے۔ $0x_1+2x_2=0$ سے $x_2=0$ حاصل کرتے ہوئے $\lambda=0$ کے مطابقتی آئگنی سمتیہ کی صورت $[x_1 \quad 0]^T$ ملتی ہے لٰہذا λ کی جیومیٹریائی کثرت $m_0=1$ ہے۔یوں $\lambda=0$ کی خامی $\Delta_0=2-1=1$ ہے۔

مثال 9.4: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی

قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی قدر اور آئگنی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2=0$$

یوں $\lambda=3$ کی الجبرائی کثرت $M_3=2$ ہے۔ $0x_1+2x_2=0$ سے $x_2=0$ حاصل کرتے ہوئے مطابقتی آئگنی سمتیے کی صورت $[x_1 \quad 0]^T$ ملتی ہے لٰہذا λ_3 کی جیومیٹریائی کثرت $1=3$ ہے خامی $\Delta_3=2-1=1$ ہے۔

مثال 9.5: حقیقی قالب کے مخلوط آئگنی اقدار اور مخلوط آئگنی سمتیات

چونکہ حقیقی کثیر رکنی کے مخلوط جذر ممکن ہیں (جو جوڑیوں کی صورت میں پائے جاتے ہیں) لٰہذا حقیقی قالب کے

مخلوط آئگنی اقدار اور آئگنی سمتیات ممکن ہیں۔درج ذیل منحرف تشاکلی قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی اقدار اور آئگنی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

یوں $(\sqrt{-1})$ $\lambda_1 = i =$ اور $\lambda_2 = -i$ ملتے ہیں جن کے مطابقتی آئگنی سمتیات بالترتیب $-ix_1 + x_2 = 0$ اور $ix_1 + x_2 = 0$ سے حاصل ہوں گے۔ہم $x_1 = 1$ چنتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

اگلے حصے میں درج ذیل مسئلے کی ضرورت پیش آئے گی۔

مسئلہ 9.3: تبدیل محل قالب کے آئگنی سمتیات
چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کے تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کے آئگنی سمتیات وہی ہوں گے جو $\boldsymbol{A}$ کے ہیں۔

ثبوت: صفحہ 639 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت تبدیلی محل سے امتیازی قالب کا مقطع تبدیل نہیں ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 9.1 تا سوال 9.15 میں دیے قالب کے آئگنی اقدار اور ان کے مطابقتی آئگنی سمتیات دریافت کریں۔

سوال 9.1: $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
جوابات: $2,\ [0 \quad 1]^T; \quad 4,\ [1 \quad 0]^T$

سوال 9.2: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
جوابات: $0,\ 0,\ [1 \quad 0]^T,\ [0 \quad 1]^T$

سوال 9.3: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
جوابات: $3,\ [1 \quad 1]^T; \quad 1,\ [1 \quad -1]^T$

سوال 9.4: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
جوابات: $2-\sqrt{3},\ [1 \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2+\sqrt{3},\ [1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}]^T$

سوال 9.5: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
جوابات: $2-i\sqrt{3},\ [1 \quad -\frac{i}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2+i\sqrt{3},\ [1 \quad \frac{i}{\sqrt{3}}]^T$

سوال 9.6: $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
جوابات: $-4,\ [1 \quad -1]^T; \quad 4,\ [1 \quad 1]^T$

سوال 9.7: $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
جوابات: $-4i,\ [1 \quad i]^T; \quad 4i,\ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.8: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$
جوابات: $a-ib,\ [1 \quad -i]^T; \quad a+ib,\ [1 \quad i]^T$

سوال 9.9: $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$
جوابات: $-\frac{i}{\sqrt{5}},\ [1 \quad -\frac{i\sqrt{5}+2}{3}]^T; \quad \frac{i}{\sqrt{5}},\ [1 \quad \frac{i\sqrt{5}-2}{3}]^T$

سوال 9.10: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
جوابات: $\cos\theta - i\sin\theta,\ [1 \quad i]^T; \quad \cos\theta + i\sin\theta,\ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.11: $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

جوابات: $-1,\ [1 \quad -3 \quad 2]^T; \quad 0,\ [0 \quad 1 \quad 0]^T; \quad 1,\ [1 \quad 1 \quad 0]^T$

سوال 9.12: $\begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

جوابات: $1,\ [1 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}]^T; \quad 2,\ [1 \quad 0 \quad 0]^T; \quad 4,\ [1 \quad \frac{2}{5} \quad 0]^T$

سوال 9.13: $\begin{bmatrix}13 & 5 & 2\\ 2 & 7 & -8\\ 5 & 4 & 7\end{bmatrix}$

جوابات: $9,\ [1 \quad -1 \quad \frac{1}{2}]^T$

سوال 9.14: $\lambda = -1$ کا مطابقتی آئگنی سمتیہ دریافت کریں۔ $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$

جوابات: $[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.15: $\lambda = 3$ کا مطابقتی آئگنی سمتیہ دریافت کریں۔ $\begin{bmatrix}3 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & -3\end{bmatrix}$

جوابات: $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ کارتیسی محور ہیں۔ سوال 9.16 تا سوال 9.17 میں درکار تبادل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کے لئے $\boldsymbol{A}$ حاصل کریں جہاں $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ ہے۔ آئگنی اقدار اور آئگنی سمتیات دریافت کریں اور ان کی جیومیٹریائی اہمیت بیان کریں۔

سوال 9.16: R^2 میں گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ، کارتیسی محدد کی مبدا کے گرد $\frac{\pi}{2}$ زاویہ گھومنا۔

جوابات: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ آئگنی اقدار i اور $-i$ ہیں۔ ان کے مطابقتی آئگنی سمتیات مخلوط ہیں لہٰذا گردشی تبادلے میں کوئی سمت برقرار نہیں رہتی ہے۔

سوال 9.17: R^2 کا x_2 محور پر تظلیل قائمہ۔

جوابات: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $0, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ محور x_2 اپنے آپ پر ہی گرتی ہے جبکہ x_1 مبدا پر گرتی ہے۔

9.2 آئگنی مسائل کے چند استعمال

مثال 9.6: لچکدار جھلی کا تانا

x_1x_2 سطح میں دائری سرحد $x_1^2 + x_2^2 = 1$ کی لچکدار جھلی (شکل 9.6) کو یوں کھینچ کر پھیلایا جاتا ہے کہ نقطہ $N(x_1, x_2)$ اپنی جگہ سے نقطہ $Q(y_1, y_2)$ کو منتقل ہوتا ہے جہاں اس نقطے کی ابتدائی اور اختتامی مقام کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

وہ **صدر محور**[11] دریافت کریں جن پر N کی تعین کر سمتیہ اور Q کی تعین کر سمتیہ ایک ہی رخ یا الٹ رخ ہوں۔ تبدیلی کے بعد جھلی کا سرحد کس صورت کا ہو گا؟

حل: ہمیں سمتیہ $\boldsymbol{x}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$ درکار ہیں۔ اب چونکہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ہو گا جو آئگنی مسئلہ بیان کرتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \implies \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} (4-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

---

[11] principal axis

اس کی امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix}4-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{bmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = 0$$

جس کے جذر $\lambda_1 = 6$ اور $\lambda_2 = 2$ ہمارے مسئلے کے آئگنی اقدار ہیں۔آئگنی قدر $\lambda_1 = 6$ کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}-2x_1 + 2x_2 &= 0\\ 2x_1 - 2x_2 &= 0\end{aligned}$$

جس سے $x_2 = x_1$ ملتا ہے جہاں x_1 اختیاری مستقل ہے۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 1$ حاصل کرتے ہیں جس سے $\lambda_1 = 6$ کا مطابقتی آئگنی سمتیہ $[1 \quad 1]^T$ ملتا ہے۔آئگنی قدر $\lambda_2 = 2$ کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 &= 0\\ 2x_1 + 2x_2 &= 0\end{aligned}$$

جس سے $x_2 = -x_1$ ملتا ہے جہاں x_1 اختیاری مستقل ہے۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = -1$ حاصل کرتے ہیں جس سے $\lambda_2 = 2$ کا مطابقتی آئگنی سمتیہ $[1 \quad -1]^T$ ملتا ہے۔

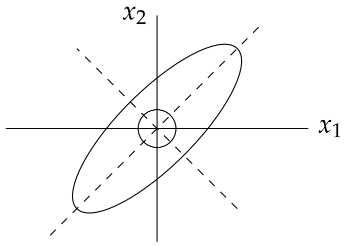
یہ آئگنی سمتیات مثبت x_1 محور کے ساتھ $45°$ اور $-45°$ زاویہ بناتے ہیں۔ صدر محور کے رخ اور ان آئگنی سمتیات کے رخ ایک جیسے ہیں۔آئگنی اقدار کے تحت ان صدر محور کی سمت میں جھلی بالترتیب 6 اور 2 گنّا پھیل گئی ہے۔ شکل 9.6 میں صدر محور کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اب اگر ہم صدر محور کو نئی کارتیسی نظام u_1u_2 کے محور یوں چنیں کہ x_1x_2 نظام کی پہلی ربع میں مثبت u_1 اور اس کی دوسری ربع میں مثبت u_2 پایا جاتا ہو تب جھلی پر کسی بھی نقطے کو $u_1 = r\cos\phi$ ، $u_2 = r\sin\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح جھلی کی سرحد ابتدائی طور پر $(\cos\phi, \sin\phi)$ ہو گا۔ کھینچنے کے بعد درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 = 6\cos\phi, \quad z_2 = 2\sin\phi$$

اب چونکہ $\cos\phi + \sin\phi = 1$ کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔یوں کھینچی گئی جھلی کا سرحد ترخیمی ہو گا۔

$$\frac{z_1^2}{6^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$



شکل 9.1: صدر محور کو نقطہ دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ (مثال 9.6)

مثال 9.7: امکانی شماریاتی عمل

صفحہ 583 پر مثال 8.18 میں شہری رقبے کی استعمال کی تقسیم پر غور کیا گیا۔ یہ عمل آخر کار **تحدیدی حال**[12] تک پہنچ جائے گا جس کے بعد اس میں مزید تبدیلی رو نما نہیں ہو گی۔ یوں امکانی شماریاتی قالب $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ پر پورا اترے گا۔ اس مساوات کی آئگنی قدر اکائی ہے جبکہ آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ درکار رقبے کی حتمی تقسیم ہے۔ یوں ہم $\boldsymbol{A}$ سے رو نما ہونے والے عمل کی طویل مدتی اثرات جان سکتے ہیں۔

اس مثال میں

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.7 & 0.1\\ 0 & 0.2 & 0.9\end{bmatrix}$$

ہے جس کے آئگنی اقدار $\frac{7-\sqrt{2}}{10}$ ، $\frac{7+\sqrt{2}}{10}$ اور 1 ہیں۔ ہمیں اکائی آئگنی قدر $\lambda=1$ سے غرض ہے جو $[1\ 2\ 4]^T$ ہے۔ یوں شہر میں آخر کار رہائشی، تجارتی اور صنعتی تقسیم رقبہ بالترتیب 1 ، 2 اور 4 تناسب سے ہو گی۔

---

[12] limit state

مثال 9.8: نمو آبادی کا لزلی نمونہ

لزلی نمونہ[13] جو عمر کے لحاظ سے آبادی میں اضافہ بتاتا ہے پر غور کرتے ہیں۔لزلی نمونے میں عمر کے لحاظ سے آبادی کی گروہ بندی کی جاتی ہے اور نظر عموماً صرف مادہ جانور پر رکھی جاتی ہے۔فرض کریں کہ کسی جانور کی آبادی میں مادہ جانور کی زیادہ سے زیادہ عمر 12 سال ہے۔ہم مادہ آبادی کو چار سال کے برابر وقفے سے تین گروہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔فرض کریں کہ لزلی قالب درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{L} = [l_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

لزلی قالب میں l_{1k} سے مراد k گروہ میں رہتے ہوئے ایک مادہ سے پیدا ہونے والی بیٹیوں کی اوسط تعداد ہے جبکہ گروہ $j-1$ سے گروہ j تک زندہ پہنچنے والی مادہ کی تناسب کو $l_{j,j-1} (j = 2,3)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔پہلی چار سال کی عمر میں کم عمری کی بنا مادہ بچہ نہیں دیتی لہٰذا $l_{11} = 0$ ہے۔اسی طرح پانچ تا آٹھ سال کی عمر میں جوان مادہ زیادہ سے زیادہ (اوسطاً 2.3) بچے دیتی ہے جبکہ ضعیفی میں مادہ اوسطاً 0.4 بچے دیتی ہے۔اسی طرح بچوں کا 0.6 حصہ یعنی $60\,\%$ جوانی تک پہنچ پاتا ہے جبکہ جوان جانوروں کا 0.3 حصہ یعنی $30\,\%$ بڑھاپے تک پہنچتا ہے۔

(الف) اگر ہر گروہ کی ابتدائی مادہ آبادی 2600 ہو تب 4 ، 8 اور 12 سال بعد ان گروہوں کی مادہ آبادی کیا ہو گی؟ (ب) ان گروہوں کی ابتدائی آبادی کیا ہونے سے تمام گروہوں میں تبدیلی کی تناسب برابر ہو گی؟ یہ تناسب کیا ہو گی؟

حل: (الف) ابتدائی طور پر $\boldsymbol{x}_0 = [2600 \quad 2600 \quad 2600]^T$ ہے۔چار سال بعد گروہ بندی درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2600 \\ 2600 \\ 2600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7020 \\ 1560 \\ 780 \end{bmatrix}$$

اسی طرح آٹھ سال بعد آبادی $\boldsymbol{x}_8 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{L}^2\boldsymbol{x}_0 = [3900 \quad 4212 \quad 468]^T$ اور بارہ سال بعد آبادی $\boldsymbol{x}_{12} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_8 = \boldsymbol{L}^3\boldsymbol{x}_0 = [9875 \quad 2340 \quad 1264]^T$ ہو گی۔

[13] Leslie model

(ب) متناسب تبدیلی آبادی دریافت کرنے کی خاطر ہمیں ایسا آئگنی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ درکار ہے جو $\boldsymbol{Lx} = \lambda \boldsymbol{x}$ پر پورا اترتا ہو جہاں $\lambda > 0$ آبادی میں اضافے کے تناسب اور $\lambda < 0$ آبادی میں کمی کے تناسب کو ظاہر کرے گا۔امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.38\lambda + 0.072 = 0$$

جس کے آئگنی اقدار $\frac{6}{5}$ ، $-\frac{\sqrt{30}+6}{10}$ اور $\frac{\sqrt{30}-6}{10}$ ہیں جنہیں کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مثبت آئگنی قدر $\lambda = \frac{6}{5} = 1.2$ آبادی میں اضافے کو ظاہر کرتی ہے اور اس کا مطابقتی آئگنی سمتیہ درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{Lx} - \lambda \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1.2 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \implies \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جہاں $x_3 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 4$ اور $x_1 = 8$ حاصل کیا گیا ہے۔ابتدائی کل آبادی $3 \times 2600 = 7800$ حاصل کرنے کی خاطر ہم اس آئگنی سمتیہ کو $\frac{7800}{8+4+1} = 600$ سے ضرب دیتے ہوئے ابتدائی آبادی درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$600[8 \quad 4 \quad 1]^T = [4800 \quad 2400 \quad 600]^T$$

آبادی میں تبدیلی کا تناسب 1.2 فی چار سال ہو گا۔

سوالات

سوال 9.18 تا سوال 9.23 میں تبدیلی شکل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ کا قالب $\boldsymbol{A}$ دیا گیا ہے۔صدر سمتیں اور ان کی مطابقتی سکڑاو یا پھیلاو کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.18: $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

جوابات: $3,\ [1 \ -1]^T,\ -45^\circ; \quad 7,\ [1 \ 1]^T,\ 45^\circ$

سوال 9.19: $\begin{bmatrix}9 & 8\\8 & 2\end{bmatrix}$

جوابات: 33.2°, $[1\ 0.654]^T$, 14.23; -56.8°, $[1\ \ -1.529]^T$, -3.23

سوال 9.20: $\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}$

جوابات: 54.7°, $[1\ \sqrt{2}]^T$, $1+2\sqrt{2}$; -54.7°, $[1\ \ -\sqrt{2}]^T$, $1-2\sqrt{2}$

سوال 9.21: $\begin{bmatrix}2 & 3\\43 & 12\end{bmatrix}$

جوابات: 74.5°, $[1\ \ \frac{5+\sqrt{34}}{3}]^T$, $7+\sqrt{34}$; -15.5°, $[1\ \ \frac{5-\sqrt{34}}{3}]^T$, $7-\sqrt{34}$

سوال 9.22: $\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 7\end{bmatrix}$

جوابات: 78.7°, $[1\ \ 5]^T$, 8; -45°, $[1\ \ -1]^T$, 2

سوال 9.23: $\begin{bmatrix}1.25 & 0.45\\0.75 & 2.5\end{bmatrix}$

جوابات: 73.1°, $[1\ \ 3.285]^T$, 2.73; -26.9°, $[1\ \ -0.507]^T$, 1.02

سوال 9.24 تا سوال 9.26 میں دیے گئے امکانی شماریاتی عمل کا تحدیدی حال دریافت کریں۔

سوال 9.24: $\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\0.8 & 0.5\end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix}5 & 8\end{bmatrix}^T$

سوال 9.25: $\begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.3\\0.3 & 0.5 & 0.2\\0.5 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

سوال 9.26: $\begin{bmatrix}0.4 & 0.1 & 0.3\\0.5 & 0.1 & 0.2\\0.1 & 0.8 & 0.5\end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix}29 & 27 & 49\end{bmatrix}^T$

سوال 9.27 اور سوال 9.28 میں لزلی نمونے کا قالب $\boldsymbol{L}$ دیا گیا ہے (مثال 9.8)۔ نمو آبادی کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.27:
$$\begin{bmatrix} 0 & 3.45 & 0.6 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 \end{bmatrix}$$
جواب: $\frac{9}{5}$

سوال 9.28:
$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$
جواب: 2

سوال 9.29 تا سوال 9.31 لیونٹف نمونہ[14] برائے مدخل و مخرج پر مبنی ہیں۔

سوال 9.29: **لیونٹف مدخل و مخرج نمونہ**[15] صنعت کی پیداوار اور اس کے اخراجات کا تعلق بیان کرتا ہے۔ فرض کریں کہ تین صنعتوں کی پیداوار یہی صنعت استعمال کرتے ہیں اور اس تعلق کو درج ذیل 3×3 **قالب صرف**[16] پیش کرتا ہے

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

جہاں a_{jk} صنعت k کی پیداوار کی وہ تناسب ہے جو صنعت j خرید کر استعمال کرتی ہے۔ فرض کریں کہ صنعت j کی کل پیداوار کی آمدن p_j ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ ہر صنعت کی اخراجات اس صنعت کی آمدی کے برابر ہو۔ اس کو بطور مسئلہ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{p} = [p_1 \;\; p_2 \;\; p_3]^T$ ہے۔ ایسا $\boldsymbol{p}$ دریافت کریں کہ p_1 ، p_2 اور p_3 غیر منفی ہوں۔

جواب: $c[10 \quad 18 \quad 25]^T$ جہاں c مستقل ہے۔

سوال 9.30: ثابت کریں کہ سوال 9.29 کے قالب صرف کے ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی (1) ہو گا اور اس قالب صرف کا آئگنی قدر بھی اکائی ہو گا۔

---

[14] Leontief model

[15] روس کے وسیلی وسیلی وچ لیونٹف [1906-1999] نے یہ نمونہ پیش کر کے نوبل انعام حاصل کیا۔

[16] consumption matrix

سوال 9.31: آزاد لیونٹف نمونے میں پیداوار کا کچھ حصہ یہی صنعت استعمال کرتے ہیں جبکہ باقی حصہ فروخت کیا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}$ (سوال 9.29) کی بجائے، $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{x}$ پیداوار ہے جبکہ $\boldsymbol{Ax}$ وہ حصہ ہے جو یہی صنعتیں خود استعمال کرتی ہیں لہٰذا $\boldsymbol{y}$ وہ حصہ ہے جس کو فروخت کیا جا سکتا ہے۔

قالب مانگ[17] $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix}^T$ کو پورا کرنے کے لئے قالب پیداوار $\boldsymbol{x}$ دریافت کریں جہاں قالب صرف درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0.2\\ 0.5 & 0 & 0.1\\ 0.1 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0.6747 & 0.7128 & 0.7543\end{bmatrix}^T$

سوال 9.32 تا سوال 9.35 آئگنی قدر مسائل کے عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں جنہیں آپ نے ثابت کرنا ہے۔ان مسائل میں فرض کریں کہ $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی اقدار λ_1 تا λ_n ہیں جو غیر منفرد ہو سکتے ہیں۔

سوال 9.32: مرکزی وتر کے ارکان کا مجموعہ اور آئگنی اقدار کا مجموعہ برابر ہیں۔

سوال 9.33: طیفی منتقلی
$\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{I}$ کے آئگنی اقدار λ_1-k تا λ_n-k ہیں جبکہ اس کے آئگنی سمتیات وہی ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی سمتیات ہیں۔

سوال 9.34: غیر سمتی مضرب، طاقت
غیر سمتی مضرب $k\boldsymbol{A}$ کے آئگنی اقدار $k\lambda_1$ تا $k\lambda_n$ ہیں جبکہ $\boldsymbol{A}^m$ جہاں $m=1,2,\cdots$ ہے کے آئگنی اقدار λ_1^m تا λ_n^m ہیں۔دونوں صورتوں میں آئگنی سمتیات وہی ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی سمتیات ہیں۔

سوال 9.35: کثیر رکنی $p(\boldsymbol{A})=k_m\boldsymbol{A}^m+k_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+k_1\boldsymbol{A}+k_0\boldsymbol{I}$ کے آئگنی اقدار درج ذیل ہیں

$$p(\lambda_j)=k_j\lambda_j^m+k_{m-1}\lambda_j^{m-1}+\cdots+k_1\lambda_j+k_0$$

جہاں $j=1,2,\cdots$ ہے جبکہ اس کثیر رکنی کے آئگنی سمتیات وہی ہیں کو $\boldsymbol{A}$ کے آئگنی سمتیات ہیں۔(سوال 9.34 کے نتائج استعمال کریں۔)

[17] demand matrix

9.3 تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب

حقیقی چکور قالب کی تین اقسام پر یہاں غور کیا جائے گا جن کی غیر معمولی خصوصیات پائی جاتی ہیں۔تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا حصہ 8.2 میں ذکر ہو چکا ہے۔

تعریف : تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
ایسا حقیقی چکور قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ جو تبدیلی محل سے تبدیل نہیں ہوتا **تشاکلی**[18] قالب کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A} \quad \implies \quad [a_{kj}] = [a_{jk}] \tag{9.9}$$

ایسا حقیقی چکور قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ جس کا تبدیل محل اس قالب کا منفی ہو **منحرف تشاکلی**[19] قالب کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A} \quad \implies \quad [a_{kj}] = -[a_{jk}] \tag{9.10}$$

ایسا حقیقی چکور قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ جس کا تبدیل محل اس قالب کا معکوس ہو **قائمہ الزاویہ**[20] قالب کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1} \tag{9.11}$$

مثال 9.9: تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل میں تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب کی پہچان کریں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

کیا آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر منحرف تشاکلی قالب کے مرکزی وتر کے تمام اجزاء صفر ہوں گے؟

---

symmetric[18]
skew-symmetric[19]
orthogonal[20]

کسی بھی حقیقی چکور قالب کو تشاکلی قالب $\boldsymbol{R}$ اور منحرف تشاکلی قالب $\boldsymbol{S}$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جہاں تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T), \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T) \tag{9.12}$$

مثال 9.10: قالب بطور تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مسئلہ 9.4: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کے آئگنی اقدار

(الف) تشاکلی قالب کے آئگنی اقدار حقیقی ہوں گے۔

(ب) منحرف تشاکلی قالب کے آئگنی اقدار خیالی یا صفر ہوں گے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت اسی باب میں آگے پیش کیا جائے گا۔

مثال 9.11: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کے آئگنی اقدار

درج ذیل تشاکلی قالب R کے آئگنی اقدار -2 اور 4 ہیں جبکہ منحرف تشاکلی قالب S کے آئگنی اقدار $-3i$ اور $3i$ ہیں۔ قالب $\boldsymbol{C}$ نا تشاکلی اور نا منحرف تشاکلی ہے جبکہ اس کے آئگنی اقدار 0 اور 4 ہیں۔ مسئلہ 9.4 ایسے قالب کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے۔

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

قائمہ الزاویہ تبادلے اور قائمہ الزاویہ قالب

قائمہ الزاویہ تبادلے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ قالب ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{9.13}$$

ایسا تبادل فضا R^n میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی جگہ R^n میں سمتیہ $\boldsymbol{y}$ مقرر کرتا ہے۔مثال کے طور پر (درج ذیل تبادل) سطح میں گردش، قائمہ الزاویہ تبادل ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے سطح یا تین بعدی فضا میں قائمہ الزاویہ تبادل گردش کو ظاہر کرتا ہے (اور ساتھ ہی بالترتیب کسی خط یا سطح میں انعکاس بھی ممکن ہے)۔

قائمہ الزاویہ قالب کی اہمیت درج ذیل کی بنا ہے۔ مسئلہ 9.5: اندرونی ضرب کی عدم تغیر
R^n میں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اندرونی ضرب کی قیمت کو قائمہ الزاویہ تبادل برقرار رکھتا ہے جہاں اندرونی ضرب درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = [a_1 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

یوں $n \times n$ قائمہ الزاویہ قالب $\boldsymbol{A}$ اور R^n میں کسی بھی $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$ کی صورت میں $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ہو گا۔

اس طرح R^n میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی یا معیار کو قائمہ الزاویہ تبادل برقرار رکھتا ہے جہاں سمتیہ کی لمبائی یا معیار درج ذیل ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a}} \tag{9.16}$$

ثبوت : فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ ہے اور $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$ ہیں۔اب صفحہ 578 پر مساوات 8.23-ت کے تحت $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})^T = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T$ ہو گا جبکہ مساوات 9.11 کے تحت $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{9.17}$$

اس میں $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ پر کرنے سے $\|\boldsymbol{a}\|$ عدم تغیر ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.6: صف اور قطار کی معیاری قائمیت
حقیقی چکور قالب صرف اور صرف اس صورت قائمہ الزاویہ ہو گا جب اس کے سمتیات قطار $\boldsymbol{a}_1$ تا $\boldsymbol{a}_n$ (اور سمتیات صف) معیاری قائمہ الزاویہ ہوں یعنی:

$$\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \tag{9.18}$$

ثبوت : (الف) فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ ہے۔یوں $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہو گا جس کو سمتیات قطار $\boldsymbol{a}_1$ تا $\boldsymbol{a}_n$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & & & \\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \tag{9.19}$$

چونکہ $n \times n$ اکائی قالب $\boldsymbol{I}$ کا مرکزی وتر اکائی جبکہ باقی تمام اجزاء صفر ہوتے ہیں لہٰذا مساوات 9.19 کا دائیں ہاتھ مساوات 9.18 دیتا ہے۔مساوات 9.11 کے تحت قائمہ الزاویہ قالب کا معکوس بھی قائمہ الزاویہ ہو گا۔ اب $\boldsymbol{A}^{-1}(=\boldsymbol{A}^T)$ کے سمتیات قطار $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

(ب) اس کے برعکس اگر $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار مساوات 9.18 پر پورا اترتے ہوں تب مساوات 9.19 کے مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر (0) ہوں گے جبکہ وتری ارکان اکائی (1) ہوں گے لہٰذا $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔اسی طرح $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔ اس سے مراد $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ ہے چونکہ $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$

ہے جبکہ معکوس ہے۔یوں A قائمہ الزاویہ ہو گا۔اسی طرح ثبوت کے حصہ-الف کے آخر کی طرح A کے سمتیات قطار بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

مسئلہ 9.7: قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع
قائمہ الزاویہ قالب کی مقطع کی قیمت $+1$ یا -1 ہو گی۔

ثبوت : صفحہ 661 پر مسئلہ 8.19 کے تحت درج ذیل ہے

$$\text{مقطع}\, \boldsymbol{AB} = (\text{مقطع}\, \boldsymbol{A})(\text{مقطع}\, \boldsymbol{B})$$

جبکہ صفحہ 639 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت مقطع $\boldsymbol{A}^T$ = مقطع $\boldsymbol{A}$ ہے لہٰذا قائمہ الزاویہ قالب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1 = \text{مقطع}\, \boldsymbol{I} = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A}\, \text{مقطع}\, \boldsymbol{A}^T = (\text{مقطع}\, \boldsymbol{A})^2 \tag{9.20}$$

مثال 9.12: مسئلہ 9.7
مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع -1 ہے جبکہ مساوات 9.14 کے قالب کا مقطع $+1$ ہے۔

مسئلہ 9.8: قائمہ الزاویہ قالب کے آئگنی اقدار
قائمہ الزاویہ قالب کے آئگنی اقدار حقیقی یا جوڑی دار مخلوط ہوں گے جن کی حتمی قیمت اکائی ہو گی۔

ثبوت : چونکہ حقیقی قالب کی امتیازی کثیر رکنی کے عددی سر حقیقی ہوتے ہیں لہٰذا اس کے آئگنی اقدار (یعنی صفر) مسئلے کے تحت ہوں گے۔یوں مسئلے کا پہلا حصہ کسی بھی حقیقی قالب کے لئے درست ہے۔آئگنی قدر کی حتمی قیمت اکائی کے برابر $|\lambda| = 1$ ہونے کو اسی باب میں آگے پیش کیا جائے گا۔

مثال 9.13: مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کی امتیازی کثیر رکنی درج ذیل ہے۔

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

چونکہ مخلوط جذر صرف جوڑی دار ممکن ہیں لہٰذا اس کثیر رکنی کا ایک جذر حقیقی ہو گا جو مسئلہ 9.7 کے تحت $+1$ یا -1 ہو گا۔ان قیمتوں کو کثیر رکنی میں پر کرتے ہوئے پہلا جذر یعنی آئگنی اقدار $\lambda = -1$ ملتا ہے۔کثیر رکنی کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $-(\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + 1) = 0$ ملتا ہے جس کے جذر $\frac{5+i\sqrt{11}}{6}$ اور $\frac{5-i\sqrt{11}}{6}$ ہیں جن کی حتمی قیمت 1 ہے۔

سوالات

سوال 9.36 تا سوال 9.43 میں قالب تشاکلی، منحرف تشاکلی یا قائمہ الزاویہ ہیں؟ ان کا طیف دریافت کریں جو مسئلہ 9.4 اور مسئلہ 9.8 پر پورا اتریں گے۔ آئگنی سمتیات بھی معلوم کریں۔

سوال 9.36: $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $\frac{4+i3}{5},\ [1 \quad i]^T; \quad \frac{4-i3}{5},\ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.37: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے، $2-i3,\ [1 \quad -i]^T; \quad 2+i3,\ [1 \quad i]^T$

سوال 9.38: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے، $a-ib,\ [1 \quad -i]^T; \quad a+ib,\ [1 \quad i]^T$

سوال 9.39: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

جوابات: تشاکلی، $6,\ [0 \quad 1 \quad -2]^T; \quad 1,\ [0 \quad 1 \quad \frac{1}{2}]^T; \quad 4,\ [1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.40: $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$

جوابات: تشاکلی، $a+2b,\ [1 \quad 1 \quad 1]^T; \quad a-b,\ [1 \quad 0 \quad -1]^T,\ [0 \quad 1 \quad -1]^T$

سوال 9.41: $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: منحرف تشاکلی، $\pm 25i,\ [1 \ \pm \frac{16+i15}{15} \ \pm \frac{12-i20}{15}]^T; \ 0,\ [0 \ \frac{3}{5} \ \frac{9}{20}]^T$

سوال 9.42: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں نہیں، $\sin\theta \pm i\cos\theta,\ [0 \quad 1 \quad \pm i]^T; \quad 1,\ [1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.43: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $\pm i,\ [1 \quad 0 \quad \pm i]^T; \quad 1,\ [0 \quad 1 \quad 0]^T$

حوالہ

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. Malabar, FL: Krieger, 1984.

[2] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.

[3] Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 143 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت : یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{ا.1}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{ا.2}$$

ہم تفاعل

$$z = y^2 + y'^2 \tag{ا.3}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \qquad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات 1.8ا اور مساوات 1.9ا کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات 10.ا کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات 2.ا کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل ب.1-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

قدرتی لوگارتھم (شکل ب.1-ب)

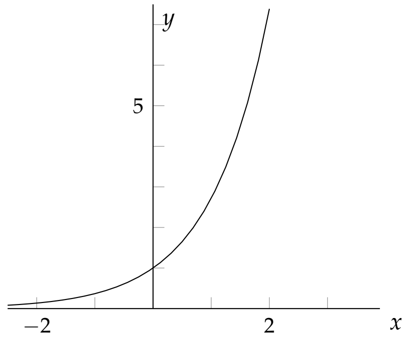
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

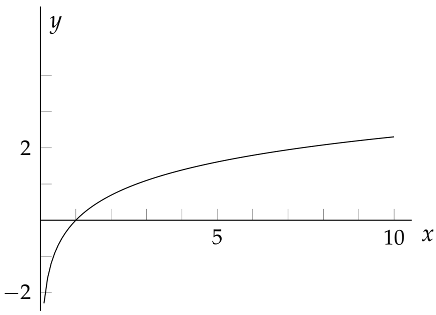
اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

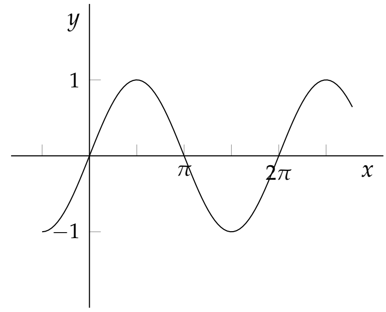


(الف) قوت نمائی تفاعل e^x

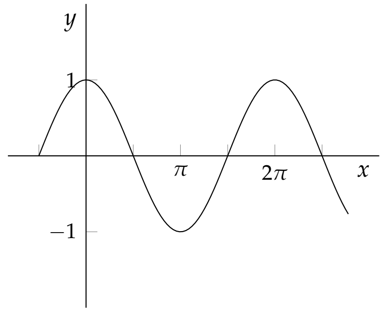


(ب) قدرتی لوگارتھم $\ln x$

شکل 1.ب: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگارتھم تفاعل



(الف) $\sin x$



(ب) $\cos x$

شکل 2.ب: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل 2.ب-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (\text{ب}.5)$$

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x\sin y\\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x\sin y\end{aligned} \tag{ب.6}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{ب.7}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ \cos x &= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\end{aligned} \tag{ب.8}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \tag{ب.9}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \tag{ب.10}$$

$$\begin{aligned}\sin x\sin y &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y)+\cos(x-y)]\\ \cos x\cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\\ \sin x\cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\end{aligned} \tag{ب.11}$$

$$\begin{aligned}\sin u + \sin v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\\ \cos u + \cos v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\\ \cos v - \cos u &= 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\end{aligned} \tag{ب.12}$$

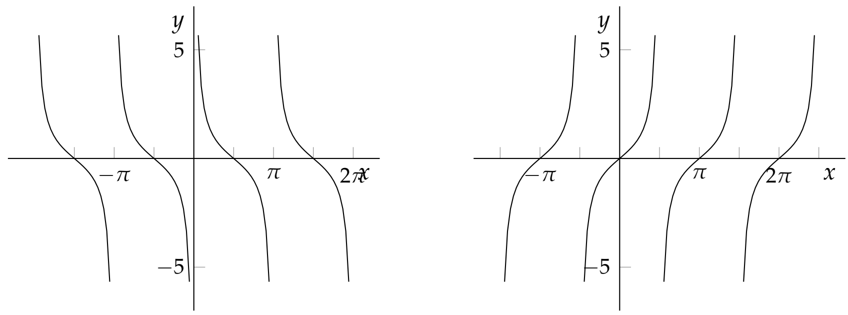
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x\mp\delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A} \tag{ب.13}$$

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x\mp\delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B} \tag{ب.14}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل 3.ب-الف، ب)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x} \tag{ب.15}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y} \tag{ب.16}$$



(ب) $\cot x$ (الف) $\tan x$

شکل 3.ب: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل 4.ب-الف، ب)

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{ب.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{ب.18}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \tag{ب.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.20}$$

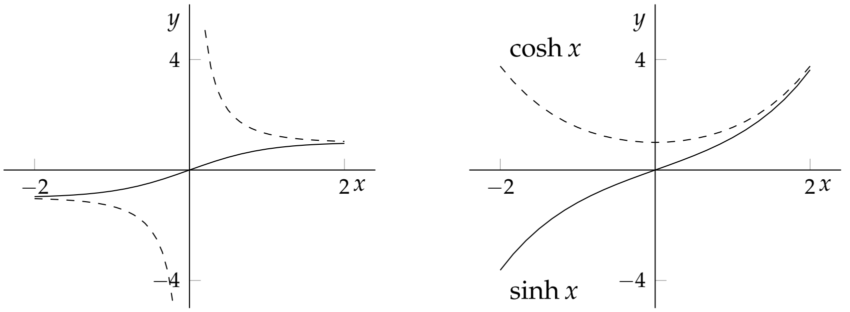
$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.21}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.22}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.23}$$

گیما تفاعل (شکل 5.ب) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.24}$$



(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل 4.ب: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.25}$$

مساوات 24.ب سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات 25.ب میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات 25.ب استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.26}$$

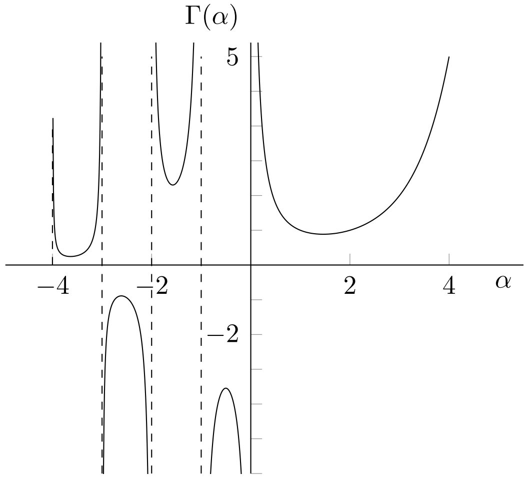
مساوات 25.ب کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.27}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔مساوات 24.ب اور مساوات 27.ب مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔



شکل 5.ب: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.28}$$

مساوات 27.ب اور مساوات 28.ب سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.29}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.30}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.31}$$

$$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) \tag{ب.32}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\ y > 0) \tag{ب.33}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.34}$$

تفاعل خلل (شکل 6.ب)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

مساوات 35.ب کے تفرق $\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right)$$

کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

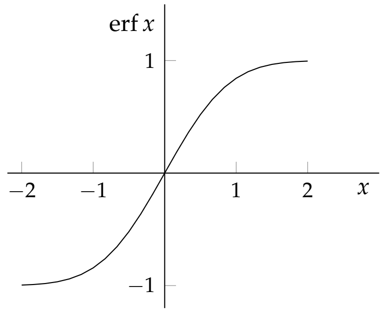
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots \right) \tag{ب.36}$$

$erf \infty = 1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

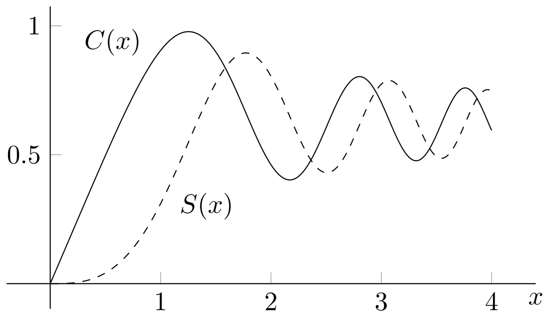
$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.37}$$

فرسنل تکملات (شکل 7.ب)

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.38}$$



شکل 6.ب: تفاعل خلل۔



شکل 7.ب: فرسنل تکملات

$\mathrm{C}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $\mathrm{S}(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

$$\mathrm{c}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{C}(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.39}$$

$$\mathrm{s}(x) = \frac{\pi}{8} - \mathrm{S}(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

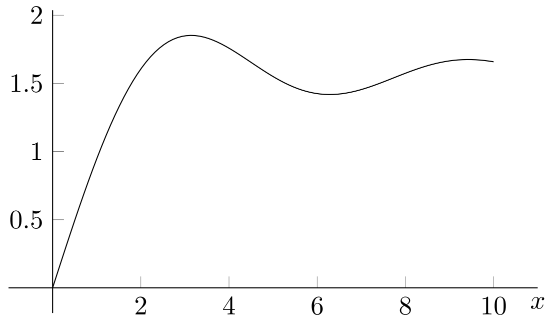
تکمل سائن (شکل 8.ب)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.41}$$

$\mathrm{Si}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ **تکملہ تفاعل**

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{ب.42}$$

[1] complementary functions



شکل 8.ب: تکمل سائن

تکمل کوسائن

$$\operatorname{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.43}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.44}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.45}$$